

L'infographie pour l'art géométrique islamique

Aziz Khamjane

11 septembre 2018

Table des matières

Résumé	5
Abstract	7
Remerciements	8
1 Introduction	9
1.1 Approche et motivation	10
1.2 Problématique	11
1.3 Contributions	12
1.4 Organisation de la thèse	13
2 Groupes de symétries et Pavages	15
2.1 Introduction	15
2.2 Symétrie et groupes de symétries	16
2.2.1 Les concepts de base	16
2.2.1.1 Transformation	16
2.2.1.2 Transformation linéaire	16
2.2.1.3 Isométrie	17
2.2.1.4 Rotation par rapport à l'origine	17
2.2.1.5 Translation	18
2.2.1.6 Coordonnées homogène	18
2.2.1.7 Rotation par rapport à un point quelconque	19
2.2.1.8 Réflexion (miroir) par rapport à une ligne	20
2.2.2 Groupes de symétries	21
2.2.2.1 Symétrie	21
2.2.2.2 Groupe de symétries	21
2.2.2.3 Orbite	21
2.2.3 Les groupes de symétries discrets les plus importants	22
2.2.4 Les groupes cristallographiques	23
2.3 Le pavage	27

2.3.1	Définitions	27
2.3.1.1	Pavage	27
2.3.1.2	Sommet et bord d'un pavage	28
2.3.1.3	Patch	29
2.3.2	Pavage par des polygones	29
2.3.2.1	Pavage bord à bord	29
2.3.2.2	Pavage régulier	31
2.3.2.3	Pavages semi-réguliers (uniformes)	31
2.3.3	Les symétries des pavages	33
2.3.4	Les pavages apériodiques	33
2.3.4.1	Pavage de Penrose	35
2.4	conclusion	40

3 Méthodes de construction des motifs de l'art géométrique islamique : état de l'art 41

3.1	Introduction	41
3.2	Aperçu sur les travaux réalisés sur l'art géométrique islamique	42
3.3	Les méthodes historiques de construction des motifs de l'art géométrique islamique	44
3.3.1	La méthode de jonctions de points	44
3.3.2	La méthode des tracés régulateurs	45
3.3.3	La méthode l'Hasba	48
3.4	La méthode polygonale	52
3.4.1	La méthode systématique	52
3.4.1.1	Le système 3-4-6-12	52
3.4.1.2	Le système 4-8 A	52
3.4.1.3	Le système 4-8 B	53
3.4.1.4	Le système 5-10	53
3.4.1.5	Le système 7-14	53
3.4.2	La méthode non systématique	57
3.4.3	Algorithme de Kaplan	62
3.5	Conclusion	68

4 Méthode de construction des motifs périodiques basée sur la théorie des groupes de symétries 73

4.1	Introduction	74
4.2	Analyse de l'information géométrique de la région fondamentale	74
4.2.1	Analyse de motifs avec une seule étoile/rosace	75
4.2.2	Analyse de motifs périodiques avec plusieurs types d'étoiles/rosaces	75
4.2.3	Remarques importantes	75
4.3	L'étoile et la rosace	81

4.3.1	L'étoile	81
4.3.2	La rosace géométrique	82
4.4	Méthode proposée pour la construction des motifs périodiques	83
4.4.1	Construction du motif modèle	85
4.4.1.1	Grille radiale	85
4.4.1.2	Construction d'un demi-pétale d'une rosace/étoile	87
4.4.2	Construction de la partie de l'étoile/rosace contenue dans la région fondamentale	91
4.4.3	Génération du motif interstitiel	91
4.4.4	Génération du motif entier	94
4.5	Etude des cas	94
4.5.1	Motifs avec une seule étoile/rosace	94
4.5.2	Motifs avec deux étoiles/rosaces	96
4.5.3	Motifs avec trois rosaces	99
4.5.4	Cas spéciaux	99
4.5.4.1	Motif avec une rosace centrée sur un côté de la région fondamentale	99
4.5.4.2	Motif avec des rosaces qui se chevauchent . .	104
4.6	Décoration	107
4.6.1	Coloration	110
4.6.2	Découpage	110
4.6.3	Entrelacement	110
4.7	Résultats et discussion	110
4.8	Conclusion	116

5 Motifs géométriques quasi périodiques : de l'analyse à la génération 117

5.1	Introduction	117
5.2	La quasi-périodicité des motifs géométriques islamiques	118
5.2.1	Analyse du motif géométrique de la Toure Bleue de Maragha	119
5.2.2	Analyse du motif géométrique de Darb-e-Imam à Isfahan	124
5.3	Méthodes de construction des motifs islamiques quasi-périodiques	130
5.3.1	Etat de l'art	130
5.3.2	Méthode proposée	134
5.3.2.1	Analyse du motif du Madrassa AL Attarine à Fès	134
5.3.2.2	Méthode de construction des motifs géométriques islamiques	137
5.3.2.3	Résultats	139
5.3.2.4	Cas spéciaux	145

5.4 Conclusion	146
Conclusion	149
Liste des tableaux	151
Table des figures	152
Bibliographie	163

Résumé

Dans la culture islamique, l'art géométrique est partout. On trouve des motifs géométriques dans les mosquées, les madrasas, les palais et même dans les maisons privées. En plus de son esthétique reconnue, l'ornement géométrique islamique est réputé pour sa sophistication mathématique.

En parallèle avec le développement des mathématiques, la technologie informatique ne cesse d'évoluer. En effet, l'infographie est un outil puissant qui permet une meilleure exploration du domaine artistique. Ces outils nous permettent d'analyser les motifs ornementaux historiques avec une clarté pénétrante. Cette analyse conduit à une compréhension complète des structures de ces motifs. En se basant sur notre compréhension, on peut alors inverser ce processus d'analyse pour produire de nouveaux motifs et développer d'avantage cette tradition artistique.

Dans ce contexte, le but de cette thèse est d'exploiter les opportunités offertes par les outils mathématiques et technologiques modernes pour contribuer à l'évolution de l'art géométrique islamique. En effet, ce travail vise à analyser des motifs géométriques en vue d'élaborer par la suite des algorithmes de génération d'anciens comme de nouveaux motifs en utilisant les concepts mathématiques. Ensuite, ces algorithmes seront transcrits dans des programmes informatiques qui permettent de produire des conceptions automatisées et paramétrées des ornements géométriques de l'art décoratif islamique.

Les motifs géométriques islamiques peuvent être classés en deux catégories : les motifs géométriques périodiques et les motifs géométriques quasi-périodiques. Pour les motifs géométriques périodiques nous avons élaboré une méthode de génération de motifs islamiques étoilés en se basant sur la théorie des groupes de symétries. Pour ce faire, nous avons premièrement donné une représentation mathématique et paramétrique des étoiles et des rosaces qui sont les deux motifs de base utilisés dans ce genre de motifs. Puis, nous avons élaboré un algorithme qui permet de construire un motif géométrique périodique. Etant donné un groupe de symétrie, nous avons élaboré un ensemble de règles à respecter et un ensemble d'étapes de ce groupe sur le

contenu de la région fondamentale permet d'obtenir le contenu de la cellule de base. Ce dernier permet d'obtenir le motif complet sur le plan en appliquant deux translations suivant les deux vecteurs générateurs.

Pour les motifs géométriques quasi-périodiques, nous avons généralisé la méthode précédente pour pouvoir construire ce type de motifs. Le processus de construction des motifs quasi-périodiques est basé sur les pavages quasi-périodiques connus des mathématiques modernes. La première étape de ce processus concerne l'extraction des pavés ou tuiles (losanges) du pavage quasi-périodique sous-jacent. La deuxième étape consiste à diviser chaque tuile en plusieurs triangles rectangles symétriques. Les losanges sont divisés en quatre triangles rectangles identiques et les carrés sont divisés en huit triangles rectangles identiques. L'ordre de la rosace dépend de l'ordre de symétrie du pavage sous-jacent et est déterminée en fonction de l'angle du pavé ayant le plus petit angle. La troisième étape consiste à construire le contenu de chaque triangle extrait du pavage sous-jacent en utilisant le même processus utilisé pour la construction du motif de la région fondamentale des ornements périodiques. La dernière étape consiste à insérer, le contenu des tuiles dans le pavage sous-jacent pour obtenir l'ornement quasi-périodique.

Les algorithmes élaborés ont été implémentés en utilisant le langage java. Le programme obtenu « *Lmaalem* » est doté d'une interface graphique qui permet à l'utilisateur de choisir de manière paramétrique le groupe de symétrie, l'ordre de la rosace/étoile placée sur chaque sommet pour obtenir le motif de manière automatique sans faire un seul tracé de ligne manuellement. L'interactivité et la simplicité de *Lmaalem* le rend un outil agréable pour construire une grande variété de motifs géométriques islamiques.

Mots-clés : Infographie, Art géométrique Islamique, Groupes de symétries, Pavages périodiques, Pavages quasi-périodiques, Etoile, Rosace.

Abstract

All the recent scientific investigations of the Islamic geometrical art show the systematic use of geometry by Islamic craftsmen. The recent evolution of this ancestral art benefits from the new discovered mathematical concepts such as quasi-periodic tiling and fractals. Furthermore, the development of computer science in the last decades has allowed an ideal exploration and analysis of this art revealing disclosed knowledge about ancient methods of designing Islamic geometrical patterns. The goal of this thesis is to develop computerized methods for generating Islamic geometric periodic and quasi-periodic patterns.

For periodic patterns, we have developed a new method for generating Islamic star patterns based on the symmetry group theory. It consists first of constructing the template motif of a periodic pattern. The unit motif is then constructed from the template motif by applying the isometric transformations characterizing the symmetry group of the pattern. Finally, the periodic pattern is constructed from the unit motif by applying two translations through the generator vectors. The second contribution of this work is the generalization of the previous method to construct quasi-periodic geometric patterns by using an underlying quasi-periodic tiling. The first step is to extract the tiles of the quasi-periodic tiling. The second step consists of dividing each tile into several symmetrical right triangles : The rhombs are divided into four identical triangles and the squares are divided into eight identical rectangles. The extracted right triangles are then ornamented by star motifs using the same method used to design the template motif of a periodic pattern. Finally, the quasi-periodic pattern is obtained by replacing each tile of the underlying tiling by its ornamented version.

The developed algorithms have been implemented in a computer Java program that we called *Lmaalem*. The interactivity, simplicity and variety of patterns that can be generated automatically make *Lmaalem* a powerful and innovative tool to evolve Islamic geometrical art.

Key words : Computer graphic, Islamic geometric Art, Symmetry groups, Periodic tilings, Quasi-periodic tilings, Star, Rosette.

Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué au succès de ma thèse et qui m'ont aidé lors de la rédaction de ce rapport.

Tout d'abord, j'adresse mes remerciements à mon directeur de thèse, M. Rachid Benslimane, Professeur des Universités pour m'avoir accueilli au sein de son équipe. J'aimerais également lui dire à quel point j'ai apprécié sa grande disponibilité et son respect. Enfin, j'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail doctoral. Je lui suis également reconnaissant pour le temps important qu'il m'a accordé, ses qualités pédagogiques et scientifiques, sa franchise ainsi que sa sympathie. J'ai beaucoup appris à ses côtés et je lui adresse ma gratitude pour tout cela.

Je voudrais remercier les rapporteurs de cette thèse M. Hassan REDOINE Directeur de School of Architecture, Planning and Design à Université polytechnique Mohammed VI de Ben Guérir, M. Arsalane Zarghili, Professeur des Universités, directeur du laboratoire Systèmes Intelligents et Application de l'université Sidi Mohamed Ben Abdellah, et M. Mounir RIFI directeur de l'Ecole Supérieure de Technologie de Casablanca pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

J'associe à ces remerciements à M. Hasan QJIDAA Professeur des Universités du laboratoire Systèmes Intelligents et Application de l'université Sidi Mohamed Ben Abdellah et M. Khalid ZENKOUAR laboratoire Systèmes Intelligents et Application pour avoir accepté d'examiner mon travail.

Un grand merci à Mr Ali Benslimane pour son implication dans la rédaction des articles, notamment le coté de la langue anglaise. j'ai apprécié son enthousiasme et sa sympathie.

J'associe à ces remerciements M. Jamal eddine HACHLAF et M. Mouhcine SAIDI pour avoir accepté de reviser mon travail.

Enfin, je remercie mes parents, ma femme, ma fille, mes frères et sœurs ainsi que mes amis pour leur soutien au cours de ces six années et sans lesquels je n'en serais pas là aujourd'hui.

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1	Approche et motivation	10
1.2	Problématique	11
1.3	Contributions	12
1.4	Organisation de la thèse	13

L'ornementation est une activité qui a commencé avec la naissance de l'être humain. L'homme a décoré les grottes, les cottages, les maisons et tous ses objets par différentes décorations et couleurs depuis la préhistoire. L'évolution de l'ornementation reflète l'évolution scientifique et culturelle de l'humanité. Dans la culture islamique, l'art géométrique est partout. On trouve des motifs géométriques dans les mosquées, les madrasas, les palais et même dans les maisons privées. Cette tradition a commencé au *VIII^{ème}* siècle dans les débuts de l'Islam quand les artisans ont emprunté des motifs préexistants aux cultures romaines et perses et les ont développés pour en faire de nouvelles formes d'expression visuelle. Elle s'est perpétuée à travers les différentes périodes et dynasties pour atteindre son âge d'or au *XIV^{ème}* siècle.

Les artistes du monde islamique ont adapté leur créativité pour évoquer leurs croyances intérieures dans une série de formes abstraites, produisant des œuvres d'art étonnantes. Ces artistes ont progressivement instauré un nouveau style, s'écartant sensiblement de l'art romain et byzantin de leur époque. Par conséquent, L'ornementation islamique a ses propres caractéristiques et ses propres formes qui se distinguent des autres types et peut être classifiée en trois types : l'art floral, la calligraphie et l'art géométrique. Dans l'art floral, les artistes ont excellé dans l'utilisation de formes végétales, comme les arbres, les feuilles, les fruits et les fleurs, dans la décoration de produits

artistiques tels que les antiquités. La calligraphie est un type qui consiste à utiliser l'écriture comme dispositif de décoration. Dans le troisième type, l'art géométrique, les artisans ont utilisé des formes géométriques telles que les carrés, les rectangles, les triangles et les cercles pour concevoir des motifs géométriques conciliant entre la rigueur des mathématiques et la beauté de l'art.

En plus de son esthétique reconnue, l'art géométrique islamique est réputé pour sa sophistication mathématique. En effet, les groupes de symétries dièdres, les sept groupes de frises et les dix-sept groupes cristallographiques ont été retrouvés dans l'art géométrique islamique. Cependant, il s'avère que cet art n'a pas su profiter de l'évolution des mathématiques au cours du dernier siècle. En parallèle avec le développement des mathématiques, la technologie informatique ne cesse d'évoluer. En effet, l'infographie est un outil puissant qui permet une exploration du domaine artistique. Ces outils nous permettent d'analyser les motifs ornementaux historiques avec une clarté inégale.

1.1 Approche et motivation

Les motifs géométriques islamiques peuvent être classés en deux catégories : les motifs géométriques périodiques et quasi-périodiques. Ils sont partout dans le monde islamique. Leurs rendus sont souvent décorés en utilisant l'entrelacement et la coloration. Pour les comprendre mathématiquement, il faut trouver une abstraction de ces rendus, auxquels on pourra appliquer, par la suite, les différentes techniques de décoration. Nous éliminons donc toutes les informations de couleur et d'entrelacement pour arriver à ce que Grünbaum et Shephard appellent *Design pattern* : un dessin constitué de segments de droites [1].

Les motifs de l'art géométrique islamique incarnent également un mystère mathématique durable. La plupart des techniques de conception originales sont perdues dans l'histoire et nous sommes obligés de sonder l'esprit des anciens artisans et des mathématiciens à travers les modèles qu'ils ont laissés derrière eux.

Les motifs périodiques ont été analysés en utilisant la théorie des groupes de symétries. Une telle analyse peut donner des indications utiles sur leur structure, comme le soulignent Grünbaum [1], Lee [2], Abas et Salman [3, 4] et Wichmann [5]. Selon Kaplan, de telles analyses ne parviennent pas à saisir les détails importants qui confèrent aux motifs leur élégance. Les groupes de symétrie ne peuvent capturer que la structure mathématique du dessin dans le plan : '*Symmetry groups can only capture the mathematical structure of*

the design as elaborated over the whole plane, yet in many Islamic designs localized regions will contain motifs with high-degree rotational symmetry. These richer local symmetries slip below the radar of the broader symmetries of the overall design' [6]. Pour remédier à ce problème, Kaplan a recherché une autre façon de décrire les symétries locales d'un motif en utilisant des pavages par opposition aux groupes de symétries. Étant donné une conception, les régions de symétries locales dn d'ordre élevé sont liées aux polygones réguliers d'ordre n .

Cette divergence nous incite à montrer que la théorie des groupes de symétries constitue un outil très puissant qui peut être utilisé pour analyser les motifs périodiques avec une clarté qui ne laisse aucun détail derrière. Cette analyse ne se limite pas à la description de la structure du motif dans le plan, mais elle peut identifier les relations entre le contenu de la région fondamentale, le groupe de symétries et le motif géométrique. Cette analyse détaillée nous mène à construire notre propre compréhension sur l'art géométrique islamique. En se basant sur cette compréhension, on peut automatiser le processus de conception des ornements géométriques en concevant des modèles mathématiques et des algorithmes capables de produire d'anciens comme de nouveaux motifs périodiques. Pour les motifs quasi-périodiques, jusqu'au moment d'écrire ces lignes, aucune méthode de construction automatique n'est développée. D'où la nécessité d'élaborer une méthode de conception automatique pour ce type de motifs.

1.2 Problématique

L'art de l'Islam a attiré l'attention d'un certain nombre de chercheurs occidentaux qui ont acquis une bonne réputation en raison de leur contribution à l'étude et à la publicité du domaine. Bien que les motifs géométriques islamiques aient été étudiés par ces chercheurs depuis des siècles, ce n'est que récemment, à l'aide de l'algèbre et de la géométrie moderne, que l'on peut en donner un traitement mathématique rigoureux. En conséquence, de nombreux spécialistes ont discuté de diverses méthodes d'analyse et de synthèse des motifs géométriques.

Bien que la technologie informatique ait été utilisée dans la création de l'ornement géométrique, les chercheurs et les designers se contentent de reproduire, d'une manière ou d'une autre, les motifs déjà existants. Cette reproduction est parfois décevante parce qu'elle conduit à une déformation inacceptable de certains motifs.

Les dispositifs de fabrication contrôlés par ordinateur deviennent de plus en plus flexibles et précis. La gamme de matériaux pouvant être mani-

pulés par eux continue de croître. De nombreux informaticiens et ingénieurs étudient comment ces outils peuvent être utilisés pour la visualisation scientifique, l’usinage et le prototypage. Mais ils peuvent aussi être utilisés pour produire rapidement et facilement des ornements géométriques. Pour mieux profiter de ces outils il faut automatiser la conception des motifs géométriques. Cependant, les méthodes de conception automatique des motifs géométriques sont très rares. D’où la nécessité d’élaborer des modèles mathématiques et paramétriques pour la conception automatique de l’art géométrique. Cette automatisation nous permet d’élargir le spectre de cet art ancestral et de le pousser vers l’infini en produisant de nouveaux motifs, de nouvelles formes et de nouvelles structures telles que les structures quasi-périodiques.

Dans ce contexte, le but de ce travail est d’exploiter les opportunités offertes par les outils mathématiques et technologiques modernes pour contribuer à l’évolution de l’art géométrique islamique.

1.3 Contributions

Cette thèse vise une exploration des opportunités offertes par les outils mathématiques et technologiques modernes dans la création d’ornements géométriques. Ces outils peuvent être appliqués à l’analyse et la génération de motifs ornementaux. En effet, ce travail vise à analyser des motifs géométriques en vue d’élaborer, par la suite, des algorithmes de génération d’anciens comme de nouveaux motifs en utilisant les concepts mathématiques. Ensuite, ces algorithmes seront transcrits dans des programmes informatiques qui permettent de produire des conceptions automatisées et paramétrées des ornements géométriques de l’art décoratif islamique. Les principales contributions de ce travail sont les suivantes :

- Elaboration d’une méthode automatique de construction de motifs géométriques périodiques en se basant sur la théorie des groupes de symétries. Cette méthode permet de générer d’anciens comme de nouveaux motifs. Elle a été l’objet d’une publication intitulée : « **A computerized method for generating Islamic star patterns** » dans le journal **Computer aided design (Elsevier, IF :2,94)** .
- Extension de la méthode précédente pour produire des motifs géométriques quasi-périodiques. Cette extension a été l’objet d’une publication intitulée : « **Generating islamic quasi-periodic patterns : a new method** » dans le journal : **J. On Computing And Cultural Heritage (ACM, SNIP : 1,6)** .
- Elaboration d’une technique de conception des motifs géométriques en utilisant le nombre d’or et la notion de fractale : « **Golden Mean,**

1.4 Organisation de la thèse

La première partie de cette thèse sera consacrée à la présentation des concepts mathématiques de base sur lesquels reposent les méthodes proposées. Il s'agit du concept de symétrie et celui du pavage du plan.

La deuxième partie sera consacrée à une étude méthodologique qui permet de présenter les différentes méthodes historiques de construction des motifs de l'art géométrique islamique. Cette étude permet de comprendre la riche diversité des motifs géométriques islamiques et de se familiariser avec les compétences techniques requises pour créer des motifs nouveaux et originaux.

Dans la troisième partie de ce travail, nous proposons une méthode de génération de motifs islamiques étoilés en se basant sur la théorie des groupes de symétries. Pour ce faire, nous avons premièrement donné une représentation mathématique et paramétrique des étoiles et des rosaces géométriques qui sont les deux motifs de base utilisés. Puis, nous avons élaboré un algorithme qui permet de construire un motif géométrique périodique. Etant donné un groupe de symétrie, nous avons élaboré un ensemble de règles à respecter et un ensemble d'étapes à suivre pour construire le contenu de la région fondamentale correspondante à un motif répétitif. Le contenu de la région fondamentale fait l'objet d'une suite de symétries dépendantes du groupe choisi. L'application de ces symétries sur le contenu de la région fondamentale permet d'obtenir le contenu de la cellule de base. Ce dernier permet d'obtenir le motif complet sur le plan en appliquant deux translations suivant les deux vecteurs générateurs. L'algorithme élaboré a été implémenté en utilisant le langage java. Le programme obtenu « Lmaalem » est doté d'une interface graphique qui permet à l'utilisateur de choisir de manière paramétrique le groupe de symétrie, l'ordre de la rosace/étoile placée sur chaque sommet pour obtenir le motif de manière automatique sans faire un seul tracé de ligne manuellement. L'interactivité et la simplicité de Lmaalem le rend un outil agréable pour construire une grande variété de motifs géométriques islamiques.

Dans la quatrième partie de ce travail, nous proposons de généraliser la méthode précédente à la construction des motifs quasi-périodiques. Le processus de construction des motifs quasi-périodiques est basé sur les pavages quasi-périodiques connus des mathématiques modernes. La première étape de ce processus concerne l'extraction des pavés ou tuiles (losanges) du pavage quasi-périodique sous-jacent. La deuxième étape consiste à diviser chaque tuile en plusieurs triangles rectangles symétriques. Les losanges sont

divisés en quatre triangles rectangles identiques et les carrés sont divisés en huit triangles rectangles identiques. L'ordre de la rosace dépend de l'ordre de symétrie du pavage sous-jacent et est déterminée en fonction de l'angle du pavé ayant le plus petit angle. La troisième étape consiste à construire le contenu de chaque triangle extrait du pavage sous-jacent en utilisant le même processus utilisé pour la construction du motif de la région fondamentale des ornements périodiques. La dernière étape consiste à insérer, le contenu des tuiles dans le pavage sous-jacent pour obtenir l'ornement quasi-périodique.

Nous terminons ce manuscrit par une conclusion et la proposition de perspectives de ce travail pour couvrir l'art géométrique maroco-andalous et le mukarnas.

Chapitre 2

Groupes de symétries et Pavages

Sommaire

2.1	Introduction	15
2.2	Symétrie et groupes de symétries	16
2.2.1	Les concepts de base	16
2.2.2	Groupes de symétries	21
2.2.3	Les groupes de symétries discrets les plus importants	22
2.2.4	Les groupes cristallographiques	23
2.3	Le pavage	27
2.3.1	Définitions	27
2.3.2	Pavage par des polygones	29
2.3.3	Les symétries des pavages	33
2.3.4	Les pavages apériodiques	33
2.4	conclusion	40

2.1 Introduction

L'utilisation des pavages et de symétrie à des fins décoratives est une tradition aussi ancienne que la géométrie elle-même. Notre environnement culturel est plein de notions de pavage et de symétrie. Au fil du développement des différentes civilisations, les sociétés ont utilisé le pavage comme un moyen de décoration et d'ornementation de leurs œuvres d'art. Quelques sociétés ont utilisé des formes géométriques habillées par des dessins des êtres humains ou des scènes de la nature comme les romains. D'autres ont utilisé des formes

géométriques pour orner leurs constructions comme les musulmans. En effet, l'homme a utilisé les notions de pavage et de symétrie dans la décoration pour organiser les formes selon une certaine régularité.

La symétrie est un concept omniprésent dans les mathématiques modernes, un outil élégant et puissant qui peut être appliqué dans un large éventail de situations. Il ne devrait pas être surprenant qu'il y ait une forte connexion entre la symétrie et les pavages. Les pavages du plan présentent typiquement des répétitions et la symétrie est un moyen de déterminer les types de ces répétitions. Les groupes de symétries planaires ont servi d'outil puissant pour comprendre et classer les motifs appartenant à différentes traditions ornementales.

Le but de ce chapitre est d'introduire les fondements mathématiques et algorithmiques des théories du pavage et de la symétrie. Ces fondements seront par la suite utilisés pour l'analyse et la conception des motifs de l'art géométrique islamique.

2.2 Symétrie et groupes de symétries

L'univers est riche en formes symétriques attrayantes qui se produisent à petites échelles au niveau des particules et à grandes échelles au niveau des galaxies. Elles se produisent dans des objets naturels tels que, les fleurs, les cristaux, et dans des objets produits par l'être humain. Dans les sections suivantes seront présentés les fondements mathématiques de la théorie des groupes de symétries.

2.2.1 Les concepts de base

Dans cette section nous allons fournir des définitions formelles de la symétrie et des groupes de symétries en tant que sous-groupes des groupes euclidiens tels que : les groupes cycliques, les groupes dièdres, les frises et les groupes papier peint.

2.2.1.1 Transformation

Une transformation est une action qui change l'état initial d'un objet.

2.2.1.2 Transformation linéaire

On dit qu'une transformation (fonction) $T : R^n \rightarrow R^m$ est linéaire si pour tout vecteur $u, v \in R^n$ et $k \in R$:

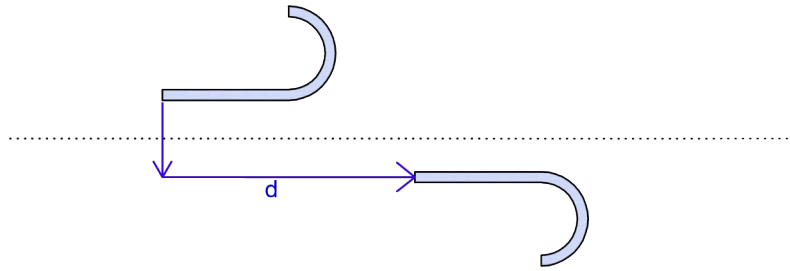


FIGURE 2.1 – Réflexion avec glissement

$$T(ku) = kT(u).$$

$$T(u + v) = t(u) + t(v).$$

Cette transformation peut être écrite sous forme d'une transformation matricielle : $T(u) = Au$ où A est une matrice de transformation.

2.2.1.3 Isométrie

Une isométrie est une transformation qui permet de transformer le plan euclidien en lui-même tout en préservant les distances. Si on note $\sigma : E^2 \rightarrow E^2$ cette transformation et A et B deux points quelconques, alors la distance entre A et B est égale à celle entre leurs images $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$.

On trouve quatre types d'isométrie pour le plan euclidien R^2 [7, 8] :

- Rotation autour d'un point O par un angle θ . Le point O est dit centre de rotation.
- Translation suivant un vecteur.
- Réflexion (Miroir) par rapport à un axe donné.
- Réflexion avec glissement : la composition d'une réflexion par rapport à une droite et d'une translation parallèle à cette droite par une distance $d \neq 0$ (Fig. 2.1).

2.2.1.4 Rotation par rapport à l'origine

Pour appliquer une rotation (faire pivoter) à un point P du plan (x, y) par rapport au point $O(0, 0)$ d'un angle β , on détermine la matrice de transformation et on calcule le produit de celle-ci et du vecteur des coordonnées de P . Cette matrice peut être déduite par application de la rotation aux points $(1, 0)$ et $(0, 1)$ (Fig. 2.2) :

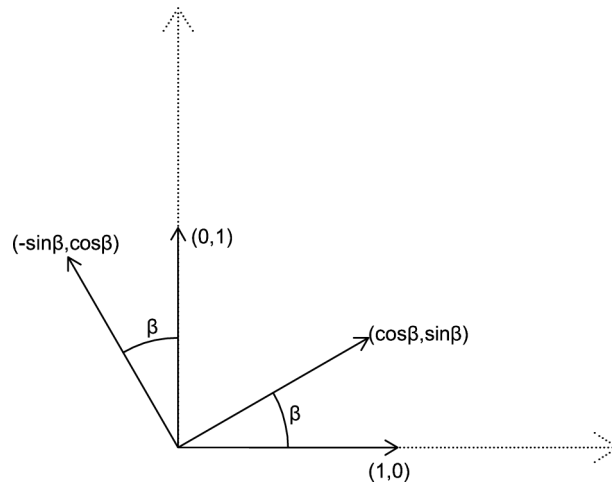


FIGURE 2.2 – Application d’une rotation d’angle β sur les deux points $(1, 0)$ et $(0, 1)$ du plan euclidien.

2.2.1.5 Translation

La translation est une transformation simple qu’on peut exprimer par :

$$x' = x + a$$

$$y' = y + b$$

Où (a, b) est le vecteur de translation. Le problème est que cette transformation n’est pas linéaire. Par conséquent, on ne peut pas trouver une matrice de transformation équivalente. C’est un vrai problème qui nous empêche de combiner sa matrice avec d’autres transformations matricielles (par exemple la réflexion avec glissement ne peut pas être obtenue puisqu’elle est une combinaison d’une réflexion et d’une translation). Cependant, il existe une solution à ce problème en ayant recours aux coordonnées homogènes.

2.2.1.6 Coordonnées homogène

Pour remédier au problème cité précédemment, on a recours aux coordonnées homogènes. Ces coordonnées nous permettent d’exprimer toutes les transformations sous forme de multiplications matricielles. Pour ce faire nous ajoutons une dimension supplémentaire. En général, pour exprimer un point en coordonnées homogènes, il faut ajouter une nouvelle dimension à droite dont la valeur est 1. Ainsi, les coordonnées homogènes d’un point $P(x, y)$ sont $(x, y, 1)$. Ainsi, on peut exprimer la translation par la transformation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

et la rotation par rapport au point $(0, 0)$ d'un angle β peut être exprimée par la transformation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.2.1.7 Rotation par rapport à un point quelconque

La rotation par rapport à l'origine $O(0, 0)$ est une transformation linéaire. Cependant, la rotation par rapport à un point A quelconque ($A \neq O$) n'est pas une transformation linéaire. Pour appliquer une rotation par rapport à un point $A(x_A, y_A)$ d'un angle β on procède suivant trois étapes :

- On effectue une translation du point A pour qu'elle serait identique à l'origine :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_A & -y_A & 1 \end{pmatrix}$$

- On applique une rotation par rapport à l'origine $O(0, 0)$ de l'angle β

$$\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- On effectue une translation inverse pour faire revenir le point A à sa position initiale :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_A & y_A & 1 \end{pmatrix}$$

Les trois transformations peuvent être combinées en calculant le produit matriciel des trois matrices :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_A & -y_A & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_A & y_A & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ -x_A \times \cos\beta + y_A \times \sin\beta + x_A & -x_A \times \sin\beta - y_A \times \cos\beta + y_A & 1 \end{pmatrix}$$

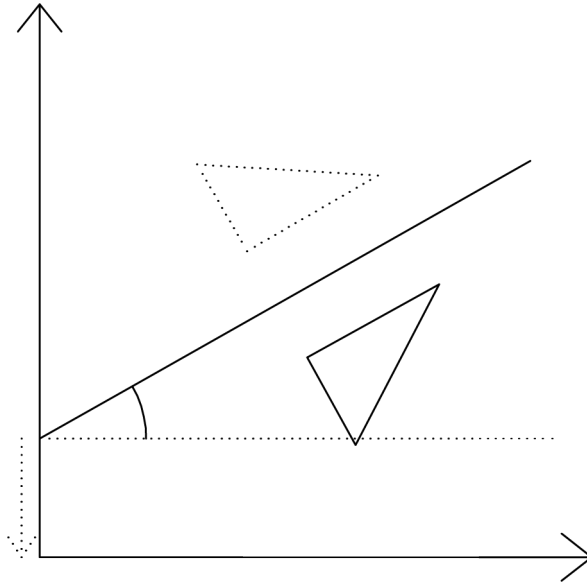


FIGURE 2.3 – Symétrie axiale

2.2.1.8 Réflexion (miroir) par rapport à une ligne

L'opération de symétrie axiale d'un point P par rapport à l'axe principale Ox peut être exprimée par la matrice de transformation suivante :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La symétrie par rapport à une ligne L est composée de plusieurs transformations : une transformation M associée à la translation de la ligne L pour qu'elle passe par l'origine $O(0,0)$, une transformation R associée à la rotation de la ligne L pour qu'elle coïncide avec l'axe Ox (axe des abscisses), une transformation de symétrie axiale S par rapport à Ox , une transformation inverse R^{-1} de l'alignement de L avec Ox , et d'une transformation inverse de la translation M^{-1} . Ainsi, la matrice de transformation et le produit : $T = M \times R \times S \times R^{-1} \times M^{-1}$ (Fig. 2.3). En général, la matrice de transformation d'une symétrie axiale par rapport à une ligne L d'équation $y = ax + b$ est :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix} \text{ où}$$

β est l'angle dont $\tan\beta = -a$.

2.2.2 Groupes de symétries

2.2.2.1 Symétrie

On note $\sigma(S)$ l'image d'un sous ensemble du plan S par rapport à l'isométrie σ . La symétrie de S est une isométrie σ qui transforme S en lui-même $\sigma(S) = S$. Par exemple, n'importe quelle rotation par rapport au centre d'un disque est une symétrie de ce disque. De même, la symétrie miroir par rapport à un rayon du disque est une symétrie de celui-ci.

2.2.2.2 Groupe de symétries

Soit S une forme quelconque. On note $G(S)$ les isométries du plan qui transforment S en elle-même. L'ensemble $G(S)$ forme un groupe nommé *groupe de symétries* de S . On dit que S est symétrique, si $G(S)$ est non trivial. Si $G(S)$ est non trivial, le nombre de symétries de $G(S)$ correspond à son ordre. Les isométries d'un groupe de symétries peuvent être combinées pour produire une autre symétrie. Par exemple, la rotation avec un angle de 30° et une rotation de 60° peuvent être combinées pour produire une rotation de 90° . En général, un groupe de symétries possède les quatre propriétés algébriques suivantes :

- Un groupe de symétries contient l'identité : $id \in G$.
- Le groupe de symétries est fermé : la combinaison de plusieurs symétries est une symétrie : $T_1, T_2 \in G \Rightarrow T_1 T_2 \in G$
- L'associativité : l'ordre d'application des transformations n'a pas d'effet : $T_1, T_2, T_3 \in G \Rightarrow (T_1 T_2) T_3 = T_1 (T_2 T_3)$
- A chaque transformation est associée une transformation inverse qui remet l'objet à sa position initiale : $T \in G \Rightarrow T^{-1} \in G$.

Les groupes de symétries peuvent être classés en différentes catégories. Par exemple, G est un groupe fini s'il existe un nombre fini d'éléments dans G , sinon il est infini. Une façon de décrire un groupe de symétries consiste à utiliser le concept *d'orbite*.

2.2.2.3 Orbite

L'orbite d'un point $x \in R^n$ sous le groupe G , noté aussi *G-orbite* de x , est l'ensemble de toutes les positions dont x est transporté par les transformations de G : $G(x) = \{\sigma(x) | \sigma \in G\}$. Dans le but d'étudier les motifs géométriques islamiques et les pavages dans le plan euclidien, on va s'intéresser à un type particulier de groupes de symétries dont *l'orbite* d'un point x quelconque ne contient qu'un nombre fini de points (Un groupe de symétries discret est alors celui pour lequel l'orbite de chaque point est un

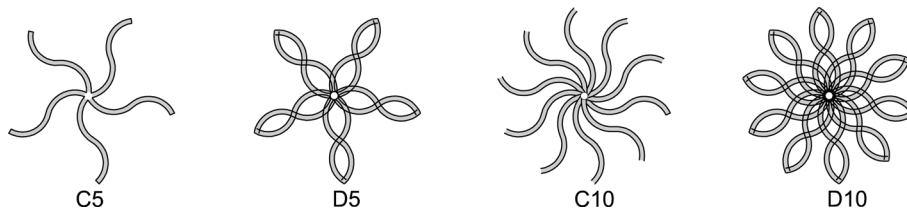


FIGURE 2.4 – Exemples de groupes avec des symétries cycliques et dièdres.

ensemble discret). Un ensemble S de points dans le plan est discret s'il existe un nombre réel $r > 0$ tel que la distance entre n'importe quel deux points est supérieur ou égal à r . Un groupe de symétries discret se caractérise par un angle minimum pour toutes les rotations et une distance minimale par laquelle les points sont déplacés dans toutes les translations et les réflexions glissées. Selon cette définition, les groupes finis sont toujours des groupes discrets mais les groupes discrets ne sont pas nécessairement finis.

2.2.3 Les groupes de symétries discrets les plus importants

Les groupes de symétries discrets peuvent être classés suivant les translations qu'ils contiennent :

— Les groupes cycliques

Le premier type se présente lorsque le groupe G ne contient aucune translation. Dans ce cas, le groupe G est le *groupe cyclique* C_n d'ordre n ou G est le *groupe dièdre* noté D_n d'ordre $2n$. Le groupe C_n consiste en n rotations autour d'un seul point par des angles multiples de $2\pi/n$. Le groupe D_n est le groupe de symétrie d'un polygone régulier de n côtés. Il contient les rotations du groupe C_n et des lignes de réflexion uniformément espacées qui traversent le centre de rotation. Des exemples de ces groupes de symétrie sont illustrés dans la figure 2.4.

— Les groupes de frises

Les groupes de symétries contenant une famille de translations toutes parallèles sont appelés *groupes de frises* [9]. Un motif de frise est une bande périodique dans une seule dimension. Les groupes de frises sont discrets mais infinis. Il existe exactement sept types de groupes de frises équivoques. Un motif de frise horizontal peut présenter cinq types de symétries (voir le tableau 2.1 et la figure 2.5) :

1. Translation horizontale ;
2. Rotation d'ordre 2 ;

Le groupe de symétrie	Translation	Rotation d'ordre 2	Réflexion horizontale	Réflexion verticale	Réflexion glissée
F1 : 11	Oui	Non	Non	Non	Non
F2 : $1g$	Oui	Non	Non	Non	Oui
F3 : $m1$	Oui	Non	Non	Oui	Non
F4 : 12	Oui	Oui	Non	Non	Non
F5 : mg	Oui	Oui	Non	Oui	Oui
F6 : $1m$	Oui	Non	Oui	Non	Non
F7 : mm	Oui	Oui	Oui	Oui	Non

TABLE 2.1 – Les symétries primitives des sept groupes de frises.

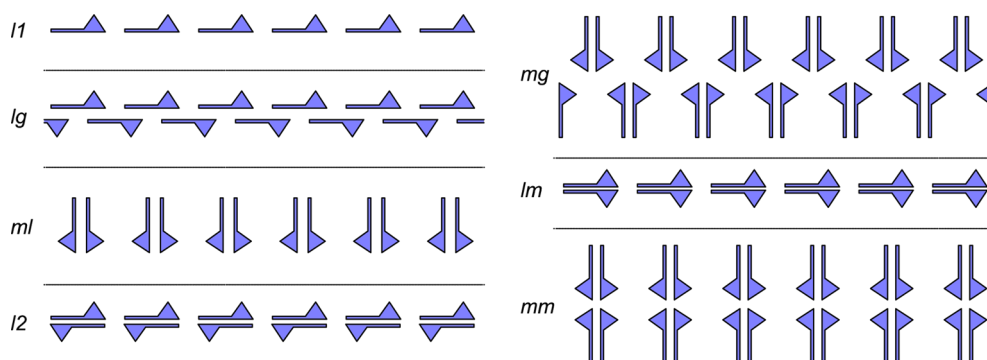


FIGURE 2.5 – Les sept groupes de frises.

3. Réflexion horizontale ;
4. Réflexion verticale ;
5. Réflexion glissée composée d'une translation d'une demi-unité suivie d'une réflexion horizontale.

— Les groupes cristallographiques

Le cas restant correspond au cas où G contient des translations dans deux directions linéairement indépendantes. C'est le cas le plus fréquent dans les ornements géométriques islamiques. Nous allons consacrer toute une partie de cette thèse à la construction de motifs géométriques islamiques appartenant à ce cas. La section suivante est alors consacrée entièrement à l'étude des *groupes cristallographiques*.

2.2.4 Les groupes cristallographiques

Un motif papier peint est un motif périodique 2D s'étendant le long de deux directions linéairement indépendantes [10, 11]. La théorie des groupes

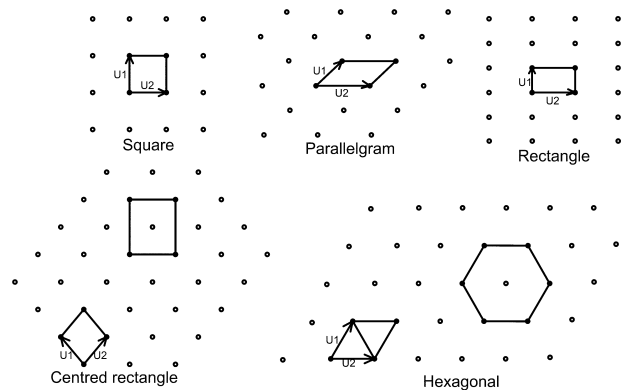


FIGURE 2.6 – Les cinq cellules de base.

cristallographiques indique que tous les motifs papier peint peuvent être générés par deux translations linéairement indépendantes suivant deux vecteurs t_1 et t_2 appliquées à une tuile de taille minimale appelée *cellule de base* (ou maille) [12]. Les orbites de cette paire de vecteurs de translation forment une grille (réseau) quadrilatérale 2D. Autrement dit : les deux vecteurs t_1 et t_2 constituent une base pour le réseau et déterminent un parallélogramme appelé *cellule de base*. On qualifie d'élémentaire toute *cellule de base* (maille) d'aire minimale.

En plus des translations, un motif périodique peut également être mappé en lui-même par l'une des autres isométries planes : les rotations, les réflexions ou les réflexions glissées. Le groupe de symétries du motif est l'ensemble de toutes les isométries qui mappent le motif en lui-même. La classification des motifs périodiques selon leurs groupes de symétrie est l'équivalent bidimensionnel du système utilisé par les cristallographes pour classer les cristaux. Par conséquent, ces groupes sont également appelés *les groupes cristallographiques bidimensionnels*.

Les centres de rotation d'un motif sont mappés par des translations vers de nouveaux centres de rotation (ayant le même ordre). Seules les rotations d'ordre 2, 3, 4 ou 6 peuvent se produire sous forme d'isométries d'un dessin périodique (*restriction cristallographique*). Il existe cinq types distincts de réseaux pour les groupes de symétries. Pour chaque type de réseau, il existe des cellules de base classiquement choisies pour des fins de classification (Fig. 2.6).

Mathématiquement, le nombre de groupes de symétries possibles pour le plan euclidien est de dix-sept groupes [13]. Chaque groupe de symétries est caractérisé par sa cellule de base et ses isométries (symétries internes). La

notation cristallographique permet d'identifier la cellule de base, l'ordre de rotation le plus élevé et d'autres symétries fondamentales. Généralement, les sommets de la cellule de base sont les centres des rotations les plus élevées. Les quatre symboles sont interprétés de la manière suivante :

1. La lettre c désigne le quadrilatère centré et p les autres cas ;
2. Le deuxième symbole (chiffre) indique l'ordre de rotation le plus élevé (1 indique l'absence de rotation) ;
3. Le troisième symbole symbolise un axe de symétrie : m (miroir) indique l'existence d'une symétrie axiale, g indique l'existence d'une réflexion glissée, et le chiffre 1 indique l'absence des deux ;
4. Le quatrième symbole identifie de la même manière que le symbole 3 l'existence d'un autre axe de réflexion ;

Les deux derniers symboles sont ignorés si le groupe ne contient ni réflexion, ni réflexion glissée. Le Tableau 2.2 affiche les dix-sept groupes regroupés par la forme de leurs cellules de base. La cellule de base et les isométries de chaque groupe sont représentées sur la figure 2.7.

La région génératrice d'un motif périodique est la plus petite région du plan dont le motif peut être reconstruit par ses images sous le groupe de symétries. Cette région est souvent appelée : *domaine fondamentale*, ou *région fondamentale*. Mathématiquement, un ensemble R est une région fondamentale pour un groupe de symétries discret si [14] :

1. R est un ensemble connecté est d'intérieur non vide ;
2. Deux points de R ne peuvent pas appartenir à la même *orbite* ;
3. R est plus grand que possible, de façon qu'aucun ensemble plus grand que R ne satisfasse les deux premières conditions ;

La mise en œuvre pratique de ce concept de symétrie permet de générer le motif de la cellule de base à partir de la donnée du motif de la région fondamentale. Il s'agit d'appliquer itérativement les symétries internes au motif de la région fondamentale pour générer le motif de la cellule de base. L'ornement périodique est obtenu par la suite en appliquant une série de translations suivant les deux vecteurs générateurs. Cette mise en œuvre sera discutée dans le chapitre 4.

La figure 2.7 illustre les cellules de base des 17 groupes de symétries avec indications des isométries et de la *région fondamentale* associées à chaque groupe.

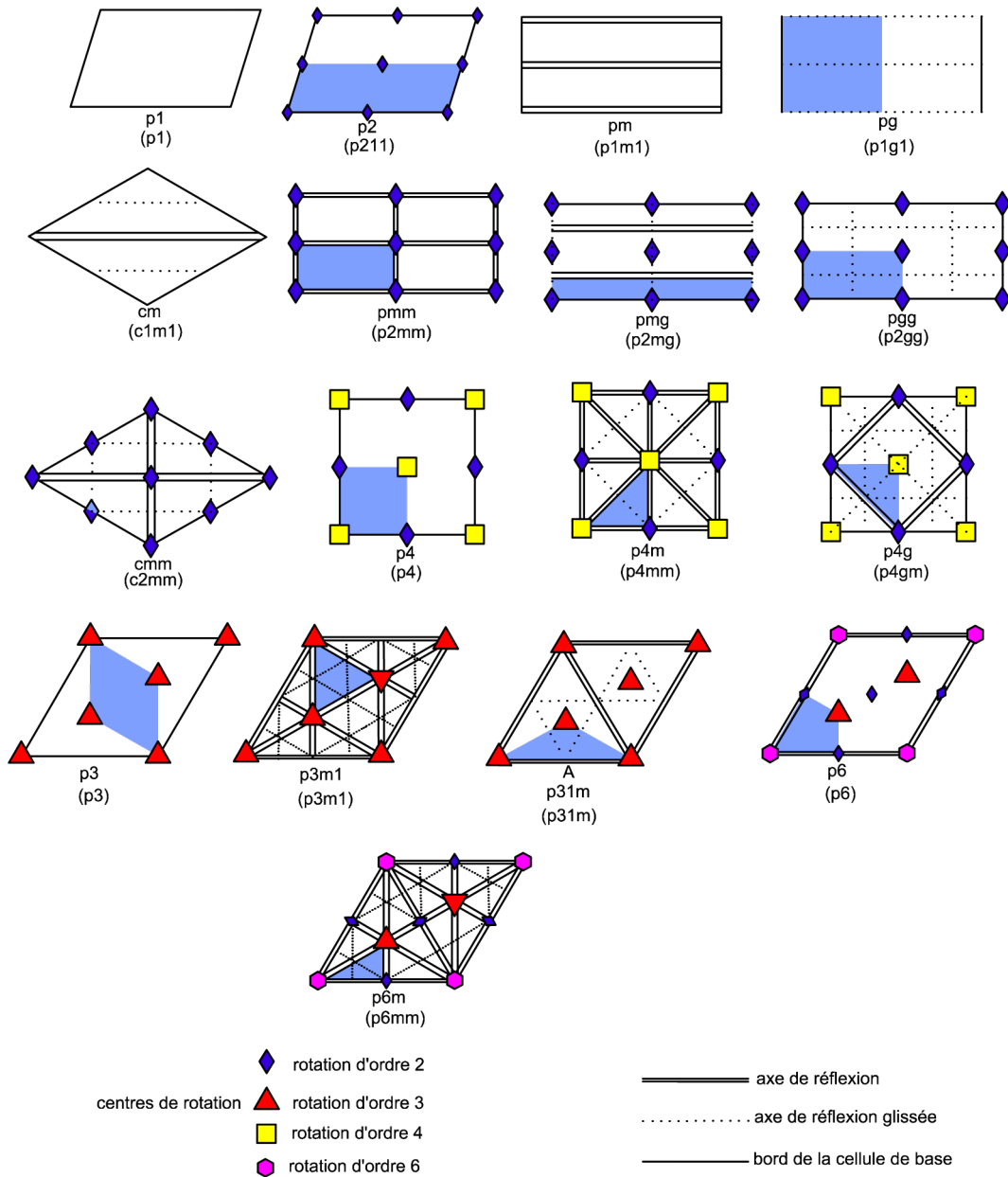


FIGURE 2.7 – La notation internationale des 17 groupes de symétries. Pour chaque cellule de base on représente les différentes isométries : rotation, réflexion et réflexion glissée.

Cellule de base	Les groupes de symétries
Parallélogramme	$P1, p2$
Rectangle	$P(p11m), pg(p1g), pmm(p2mm), pmg(p2mg), pgg(p2gg)$
Losange	$Cm(c1m), cmm(c2mm)$
Carré	$P4, p4m(p4mm), p4g(p4gm)$
Hexagonale	$P3, p3m1, p31m, p6, p6m(p6mm)$

TABLE 2.2 – Tableau montrant la notation symbolique utilisée pour désigner les différents types de groupes de symétries regroupés selon la forme géométriques de leurs cellules de base.

2.3 Le pavage

La théorie du pavage consiste à paver le plan avec un ensemble de formes sans chevauchements et sans lacunes. Récemment, cette théorie est appliquée dans plusieurs domaines de l'informatique. Le domaine de l'infographie a largement profité de l'application de cette théorie dans les contextes du maillage, d'échantillonnage, de la texture et spécialement dans la génération des motifs décoratifs [14]. L'infographie a également profitée de la théorie du pavage en termes de développement d'un ensemble d'algorithmes de génération de nouveaux pavages attrayants. Dans ce qui suit, nous allons définir quelques notions de base utilisées dans la littérature, avec un focus sur le pavage avec les polygones réguliers. Pour une bonne compréhension de la théorie du pavage du plan euclidien, il est vivement conseillé de consulter le fameux livre « *tilings and patterns* » de Grünbaum et Shephard [12].

2.3.1 Définitions

2.3.1.1 Pavage

Le pavage du plan T est une famille dénombrable des ensembles fermés (pavés) $T = \{T_1, T_2, \dots\}$ qui couvrent le plan sans trou ni chevauchement. Autrement dit, l'union des ensembles T_1, T_2, \dots constitue le plan et les ensembles T_i sont disjoints par pair [12]. Cette définition peut être exprimée par les conditions suivantes [14] :

1. Chaque tuile (pavé) est un disque topologique fermé.
2. Chaque point du plan est contenu au moins dans une tuile.
3. L'intersection entre deux tuiles peut être vide, un point, ou une courbe simple et fermée.
4. Les tuiles sont uniformément bornées : pour chaque tuile, il existe deux nombres $r_1, r_2 > 0$, tels que : la tuile contient une boule fermée

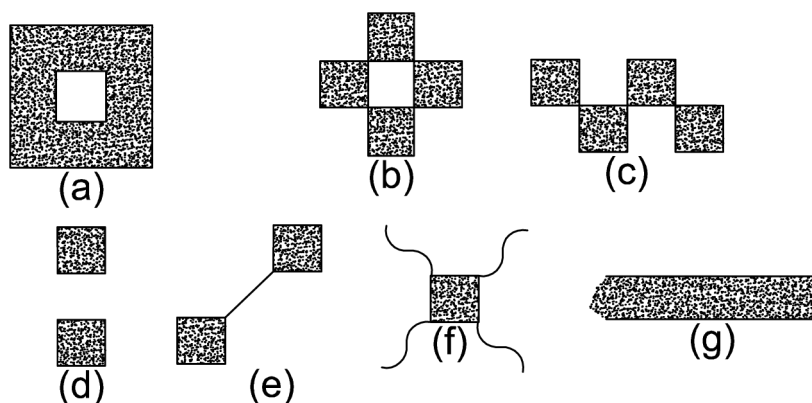


FIGURE 2.8 – Exemples des tuiles qui ne sont pas des disques topologiques fermés. (a) est un pavé qui contient un trou. (b) et (c) sont des tuiles dont chacune devient déconnectée lors de la suppression d'un ensemble approprié de points. (d) est un pavé qui n'est pas connecté : autrement dit, il est composé de plus d'une pièce, (e) et (f) sont des tuiles qui contiennent un segment, un arc ou une courbe dont la surface est nulle, (g) est une tuile qui n'est pas fermée (on ne peut pas trouver un cercle qui l'entoure) (redessiné à partir de [12]).

de rayon r_1 et elle est contenue dans une boule fermée de rayon r_2 .

Les conditions 1 et 4 permettent d'assurer que les tuiles utilisées dans le pavage n'ont pas des formes ou des propriétés bizarres (Fig. 2.8). Tandis que les conditions 2 et 3 assurent que le plan soit bien couvert sans lacune ni chevauchement. La condition 3 permet aussi d'éliminer quelques pavages comme celui de la figure 2.9.

2.3.1.2 Sommet et bord d'un pavage

La frontière d'un pavage P est l'union des frontières des pavés qui le composent. Cette frontière est composée d'un ensemble de bords et de sommets du pavage. Un point est dit sommet du pavage s'il est l'intersection entre au moins trois pavés. Le bord d'un pavage est simplement la courbe qui relie deux sommets et qui appartient exactement à deux pavés. Deux tuiles sont dites adjacentes si elles ont un bord en commun et l'une est dite adjacente de l'autre. Si l'intersection entre deux tuiles n'est pas vide, on dit que ces deux tuiles sont voisines. De même, on dit que deux bords sont adjacents s'ils ont un sommet en commun (Fig. 2.9).

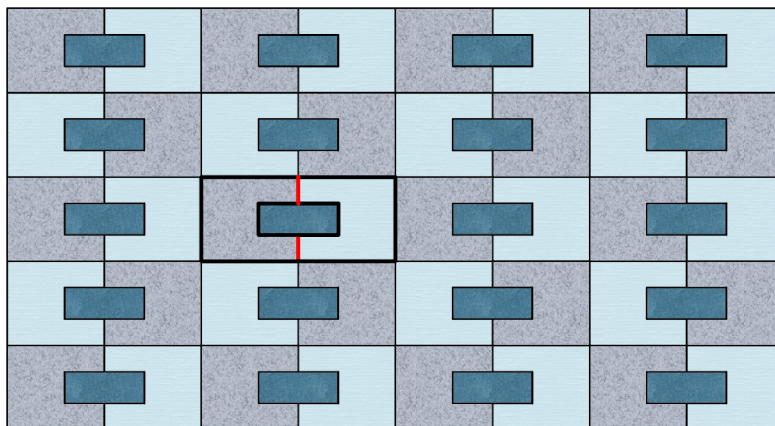


FIGURE 2.9 – Exemple d’un pavage dont l’intersection entre certaines tuiles est une courbe discontinue. L’intersection entre les deux pavés en gras se compose de deux segments de droite disjoints. Ce pavage n’est pas normal selon la condition 3.

2.3.1.3 Patch

On appelle **patch** un ensemble fini de tuiles dont l’union est un disque topologique fermé. La notion de **patch** est très importante car dans l’application de la théorie du pavage, nous opérons nécessairement sur des ensembles finis de tuiles. Cela est bien évident car aucun dessin de pavage ne montre plus qu’un *patch* fini. Mais ce *patch* est accompagné des moyens qui permettent de comprendre comment il peut être étendu pour couvrir l’ensemble du plan.

2.3.2 Pavage par des polygones

Grâce à sa simplicité et de son attraction, le pavage par des polygones réguliers a fait l’objet de plusieurs recherches mathématiques [15, 16]. Ce type de pavage est fréquent dans la construction des motifs géométriques islamique (voir chapitre 3).

2.3.2.1 Pavage bord à bord

Un pavage bord à bord est un pavage dont l’intersection entre deux pavés peut être soit : un côté en commun, un sommet ou un ensemble vide (le pavage de la figure 2.10 n’est pas un pavage bord à bord). On dit qu’un pavage est constitué de tuiles congruentes, si chaque tuile du pavage est congruente à une forme donnée T . En d’autres termes, il existe une transformation rigide

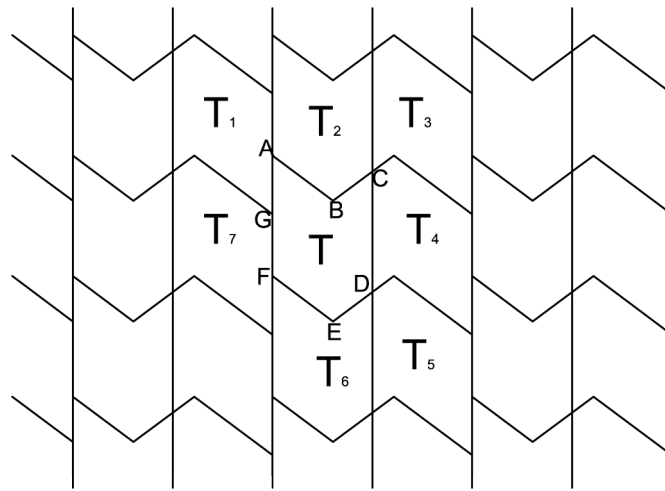


FIGURE 2.10 – Illustration des notions d’adjacence, voisinage : les points A, B, C, D, E et F sont les coins de la tuile T, mais les points A, C, D, F et G sont les sommets du pavage. Les segments de droite AB, BC, CD, DE, EF, et FA sont les côtés de T, mais AC, CD, DF, FG et GA sont des bords du pavage. Les tuiles T1, T2, T4, T6 et T7 sont des tuiles adjacentes (et voisines) à T mais les tuiles T3 et T5 sont des tuiles juste voisines (non adjacentes) à T. (redessiné à partir de [12]).

qui permet de faire coïncider chaque tuile du pavage avec T . Un tel pavage est dit *monohedral*. Si par contre, chaque tuile est congruente à une tuile d'un ensemble de k différentes tuiles, le pavage est dit *k-hedral*.

2.3.2.2 Pavage régulier

Un pavage régulier est un pavage bord à bord et monohedral avec des polygones réguliers. Il est constitué d'un seul polygone régulier qui se répète. Pour un polygone régulier d'ordre n , on sait que son angle intérieur est égal à $\pi(n-2)/n$. Donc pour arranger k copies d'un polygone, la somme de leurs angles intérieurs doit être égale à 2π à chaque sommet du pavage : $k\pi(n-2)/n = 2\pi$ où k est un entier indiquant le nombre de polygones arrivant sur un sommet. Cette condition est vérifiée juste pour les trois pavages réguliers isométriques : le pavage par les triangles, le pavage par les carrés et le pavage par les hexagones (la première ligne de la figure 2.12).

2.3.2.3 Pavages semi-réguliers (uniformes)

Pour avoir le cas des pavages semi-réguliers, il suffit de supprimer la condition **monohedral** de la définition du pavage régulier. Autrement dit, un pavage semi-régulier est un pavage bord à bord constitué de plusieurs types de polygones réguliers. En effet, chaque sommet du pavage est entouré d'un ensemble de polygones réguliers. Cet arrangement local peut être codé par l'énumération des polygones qui arrivent sur un sommet, par exemple dans le pavage par les hexagones, chaque sommet est entouré de trois hexagones, on dit que chaque sommet est de type 6.6.6 (on peut également utiliser l'abréviation 6^3 pour ce type de sommet). La somme des angles ω_i arrivant sur un sommet est toujours égale à 2π . Soient P_1, P_2, \dots, P_k des polygones qui arrivent sur un sommet du pavage, alors :

$$\sum_{i=1}^k \omega_i = 2\pi \quad (2.1)$$

plus formellement :

$$\sum_{i=1}^k \pi(n_i - 2)/n_i = 2\pi; ((n_1 - 2))/n_1 + ((n_2 - 2))/n_2 + \dots + ((n_k - 2))/n_k = 2$$

où k est un entier qui représente le nombre de polygones réguliers arrivant sur un sommet et n_i est l'ordre du polygone P_i . Il n'est pas difficile de déduire que $3 \leq k \leq 6$. Pour déterminer les différents pavages semi-réguliers, il faut premièrement trouver les solutions entières à cette équation (Fig. 2.11). Ces

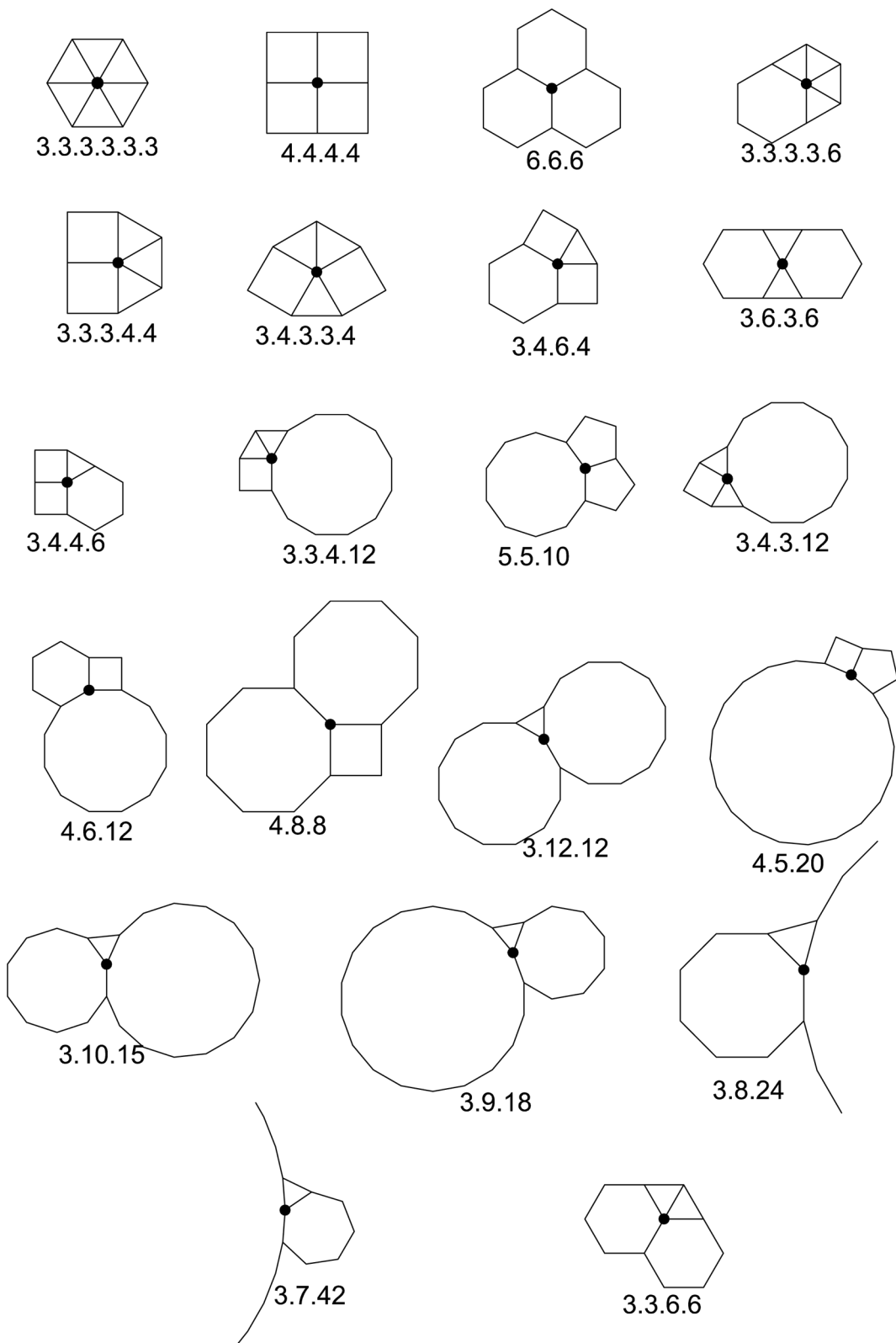


FIGURE 2.11 – Les 21 types de sommets possibles par des polygones réguliers.

solutions représentent les types de sommets candidats. Tous ces types de sommets ne peuvent être réalisés en tant que pavages, dans le sens où toute tentative de disposer un pavage avec des sommets d'un tel type conduit à une incohérence géométrique (par exemple, des polygones superposés). En éliminant les sommets qui ne peuvent pas être utilisés pour construire un pavage, seuls les onze types de pavages bord à bord avec des polygones réguliers sont possibles. Ces pavages sont appelés : **pavages archimédiens** (Fig. 2.12).

2.3.3 Les symétries des pavages

Soit P un pavage de E ; On appelle groupe de symétries de P le groupe S des transformations de E qui conservent P (ie. toute transformation t de E tel que pour tout $p \in P, t(p) \in P$). On dit que le pavage P est périodique lorsqu'il existe une partie finie F de P qui engendre P , (ie. telle que pour tout $p \in P$, il existe $t \in S$ tel que $t(p) \in F$). Les pavages périodiques du plan euclidien peuvent être classés selon les *dix-sept groupes cristallographiques*.

2.3.4 Les pavages apériodiques

La découverte des ensembles de tuiles qui admettent une infinité de pavages apériodiques du plan a été la plus importante dans la théorie du pavage [12]. Ces pavages ont, par la suite, attiré l'attention des mathématiciens depuis plusieurs années. Cette découverte revient à Wang Hao qui a essayé de déterminer s'il existe un algorithme permettant de savoir si un ensemble fini de tuiles peut paver le plan [17]. Il a noté les liens entre les problèmes de géométrie - spécifiquement les problèmes de pavage - et une certaine classe de problèmes de décision. Par ailleurs, il a observé que si le soi-disant problème Domino était indécidable, il faudrait qu'il existe un ensemble apériodique de tuiles. Comme l'existence d'un tel ensemble semblait peu plausible, Wang a supposé qu'aucun ensemble pareil ne pourrait exister, et que le problème de Domino est décidable pour les pavages dans le plan euclidien. Cependant, son élève Robert Berger, a prouvé que le problème Domino est indécidable et il a trouvé un ensemble de tuiles apériodiques [18]. Cet ensemble est constitué de 20426 tuiles carrées colorées (appelées par la suite tuiles de Wang) qui ne peuvent paver qu'apériodiquement le plan. Ce nombre a été encore réduit par Donald Knuth, Hans Läuchli et ensuite Raphael Robinson. Ce dernier a donné un ensemble apériodique de seulement six tuiles dans un élégant article [19]. Mais c'est la découverte par Roger Penrose de trois ensembles apériodiques, dont deux sont constitués de deux tuiles qui a popularisé le problème, en raison de l'aspect esthétique des pavages obtenus.

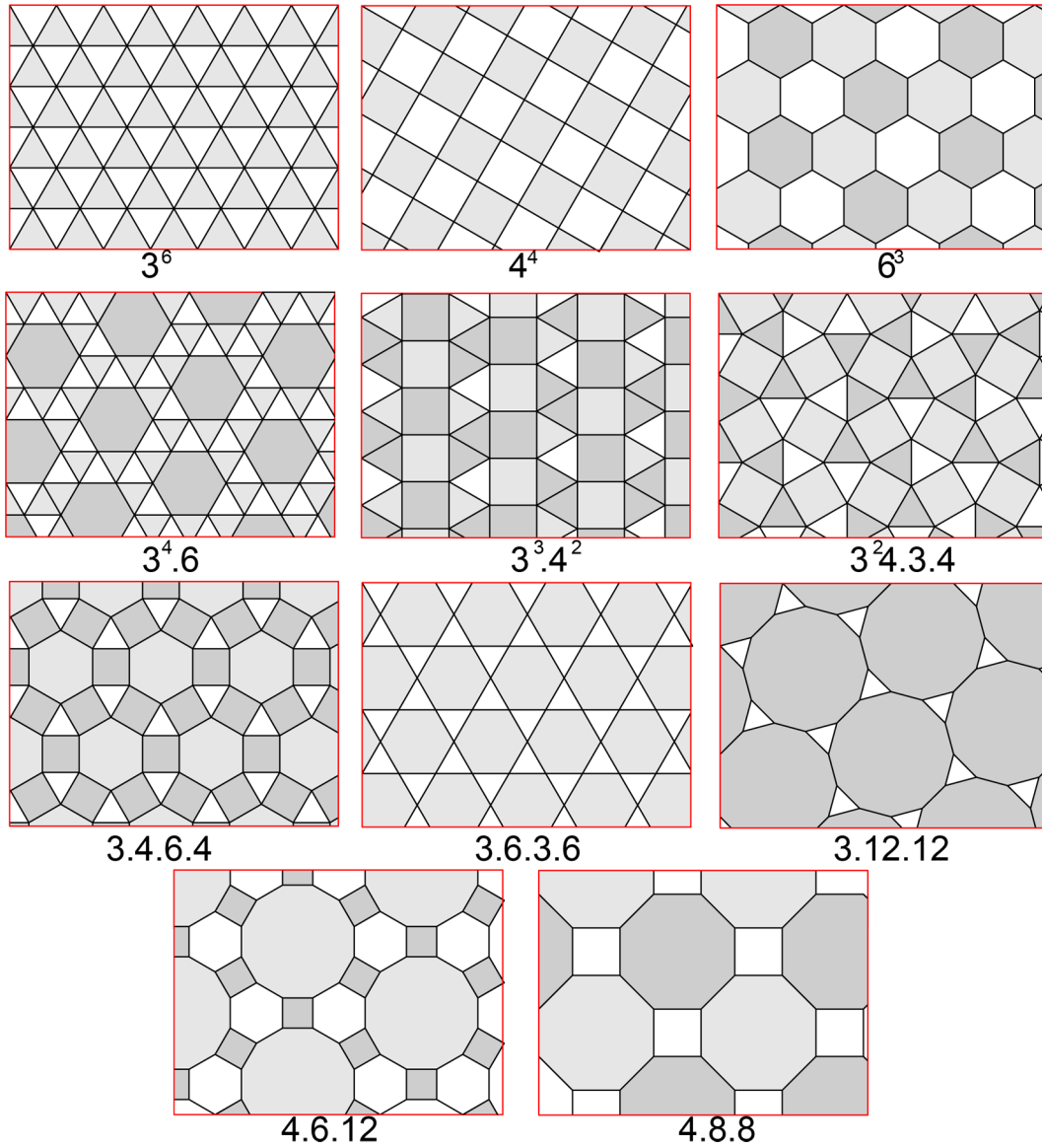


FIGURE 2.12 – Les onze pavages archimédiens.

2.3.4.1 Pavage de Penrose

— L'ensemble P1

Roger Penrose a découvert trois ensembles de tuiles apériodiques [20, 21, 22]. Le premier ensemble noté P1 est constitué de six tuiles et a été proposé en 1974[20]. Penrose a utilisé des formes supplémentaires pour couvrir les trous restants en essayant de paver le plan avec des pentagones réguliers. Il a trouvé un pavage particulier dans lequel ces lacunes peuvent être remplies avec trois autres tuiles illustrées dans la première ligne de la figure 2.13 : un losange, une étoile à 5 et une demi-étoile à 5.

Penrose a édicté des règles d'assemblage (*matching rules*), qui précisent comment les tuiles doivent être attachées l'une à l'autre; ces règles sont nécessaires pour s'assurer que les pavages obtenus soient non périodiques. Comme il existe trois ensembles distincts de règles d'assemblage pour les tuiles pentagonales, l'ensemble P1 est considéré comme s'il était constitué de six tuiles : trois pentagones, un losange, une étoile à 5, et une demi-étoile à 5. La figure 2.14 illustre six patches obtenus en respectant les règles d'appariement.

Il est simple de remarquer que chaque patch peut être transformé à l'une des tuiles de l'ensemble P1 en appliquant les transformations des bords indiquées dans la figure 2.15 . Les tuiles obtenues sont plus grand que les tuiles originales par un rapport de $\Phi^2 = 2.618$ (Φ est le nombre d'or). La décomposition d'une tuile de l'ensemble P1 en un ensemble de tuiles du même ensemble nous permet de prouver que l'ensemble P1 admet un pavage du plan. On commence par un patch, ou même par une seule tuile, on l'agrandit par un rapport de Φ^2 , puis on décompose chaque tuile du patch en plusieurs tuiles de P1. Le nouveau patch est constitué de tuiles avec la taille originale. En répétant ce processus on peut arriver à paver le plan avec les tuiles de l'ensemble P1 (Fig. 2.16). Penrose a ensuite trouvé deux autres ensembles de tuiles apériodiques (P2 et P3) constitués seulement de deux tuiles chacun.

— L'ensemble P2

Le deuxième ensemble apériodique de Penrose noté P2 est plus remarquable que le premier puisqu'il est constitué seulement de deux tuiles nommées cerf-volant et fléchette [21, 23, 24]. Le cerf-volant est un quadrilatère dont les quatre coins ont des angles de 72, 72, 72 et 144 degrés. Le cerf-volant peut être divisé en deux par son axe de symétrie pour former deux triangles aigus de Robinson [25]. La fléchette est un quadrilatère non convexe dont les quatre angles intérieurs sont de 36, 72, 36 et 216 degrés. Elle peut être divisée selon son axe de symétrie pour former une paire de triangles obtus de Robinson. Le rapport entre la longueur du grand et du petit côté de chaque tuile est

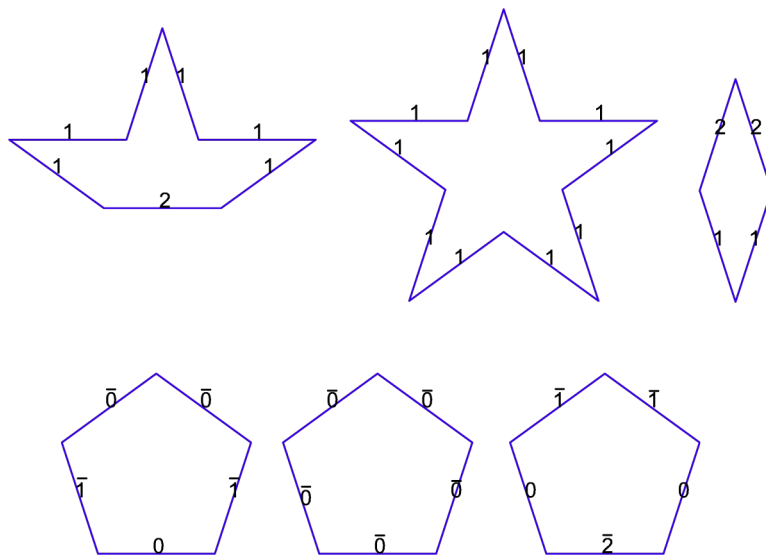


FIGURE 2.13 – 11 L'ensemble aperiodique P1 de Penrose constitué d'une demi-étoile à 5, une étoile à 5, un losange, et trois pentagones réguliers dont les côtés sont marqués par les règles d'assemblage. Dans un pavage aperiodique les côtés 0 sont attachés aux cotés $\bar{0}$, 1 à $\bar{1}$ et 2 à $\bar{2}$

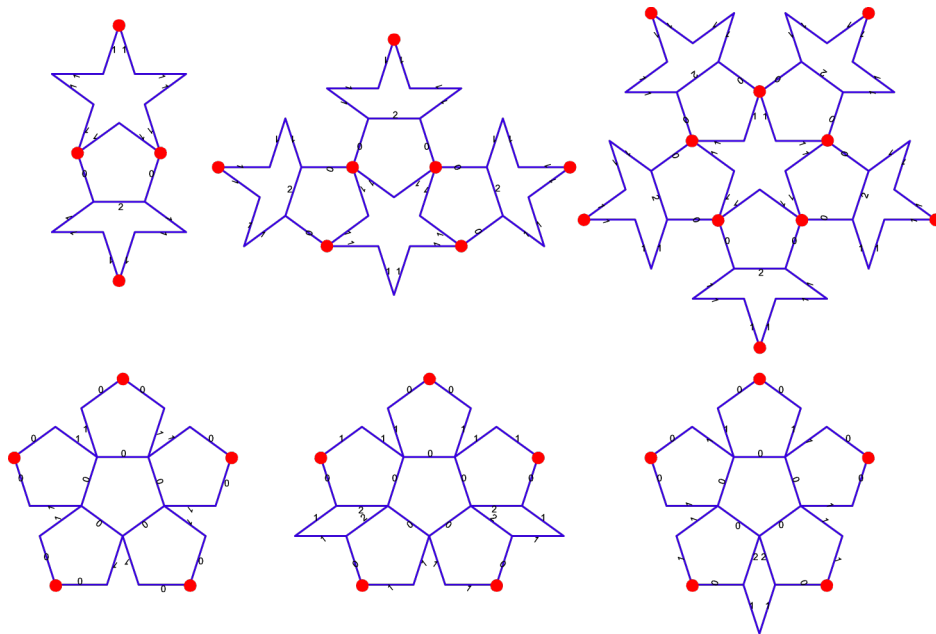


FIGURE 2.14 – Six patches obtenus en respectant les règles d'assemblage.

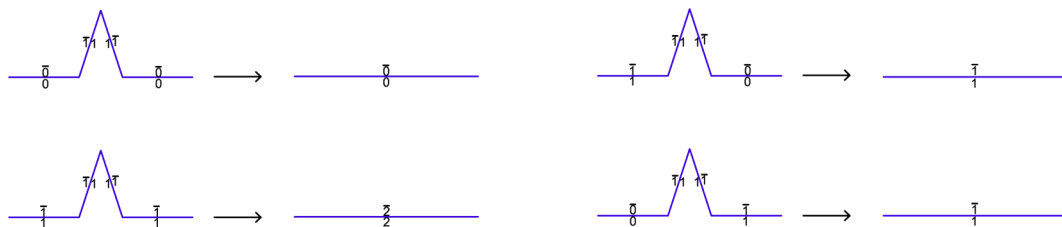


FIGURE 2.15 – Les transformations appliquées aux bords des patches de la figure 2.14 pour retrouver les règles d’assemblage des tuiles originales de P1.

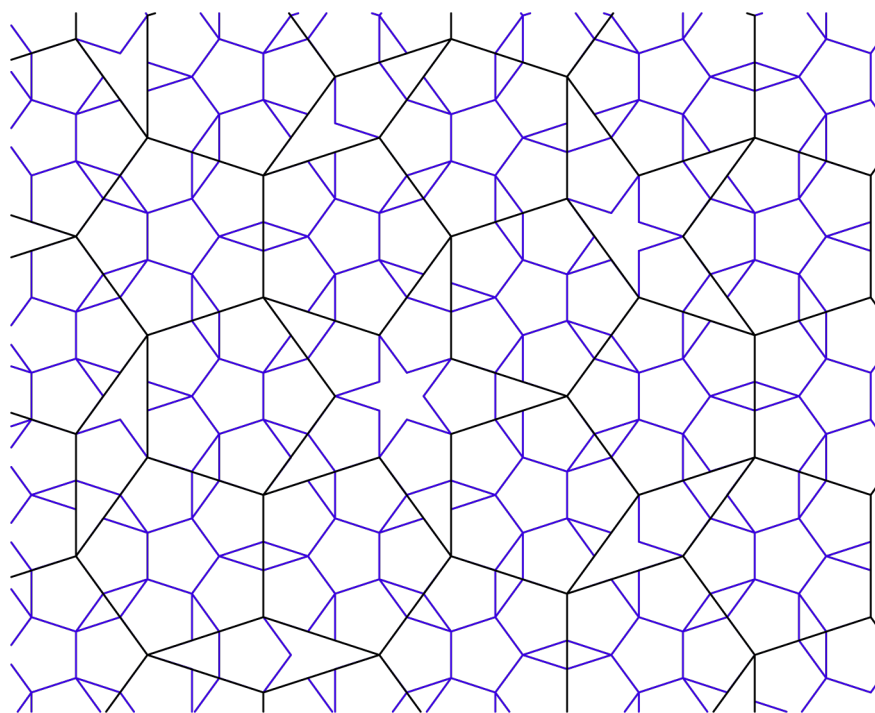


FIGURE 2.16 – Pavage obtenu en utilisant le processus d’inflation. Pour des raisons de clarté les règles d’assemblage sont omises.

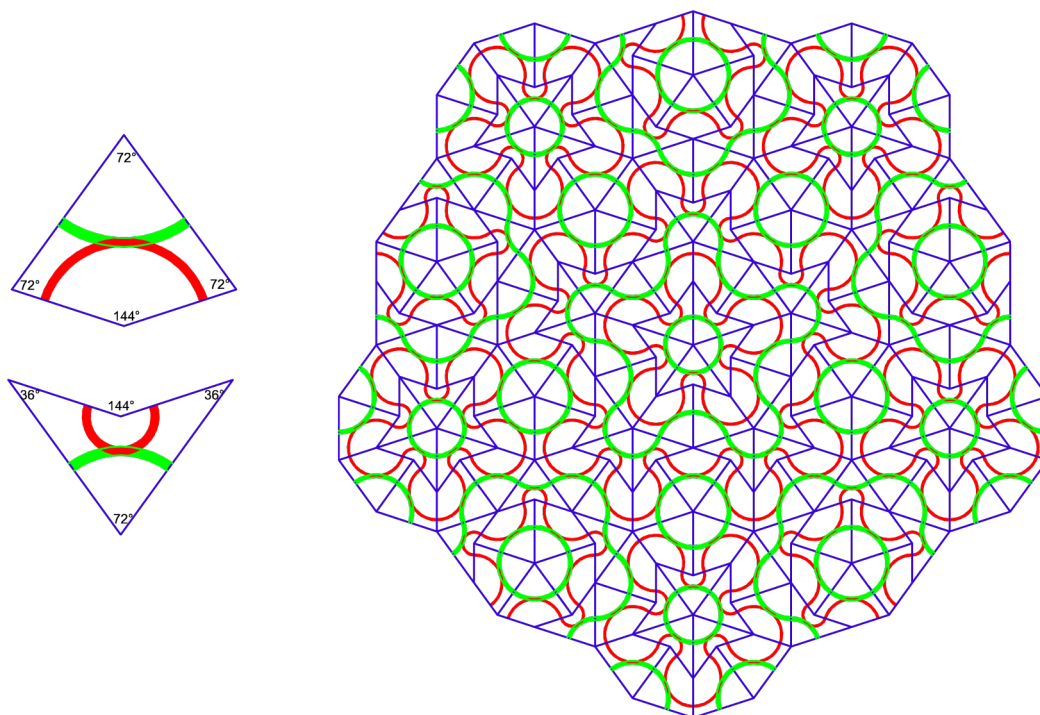


FIGURE 2.17 – L'ensemble P2 de Penrose : (a), (b) Le cerf-volant et la fléchette de l'ensemble P2 avec deux types de règles d'assemblage et (c) un pavage apériodique obtenu par les deux tuiles.

égal au nombre d'or Φ . L'arc vert et l'arc rouge contraignent le placement des tuiles : lorsque deux tuiles partagent un bord dans un pavage, les arcs doivent se correspondre à ce bord (Fig. 2.17b) (les arcs utilisés comme des règles d'appariement peuvent être remplacés par un marquage des sommets des tuiles par deux couleurs différentes (Fig. 2.17a). Par exemple, le sommet concave d'une fléchette ne peut pas être rempli avec un seul cerf-volant, mais doit être rempli avec une paire de cerfs-volants (Fig. 2.17).

Robinson [25] a décrit une autre variante du pavage de Penrose en divisant le cerf-volant et la fléchette par leurs axes de symétries en deux triangles qu'on note ici P pour le petit triangle et G pour le grand triangle. Les règles d'assemblage utilisées pour les deux triangles sont un peu compliquées en comparaison avec celles de l'ensemble P2. En plus du marquage des sommets, chaque bord qui relie deux sommets de même couleur doit être orienté. Lors de la construction des pavages avec ces triangles, non seulement les couleurs des sommets qui doivent se correspondre mais aussi les orientations des bords. Cette dernière condition est nommée : condition de balance par Robinson.

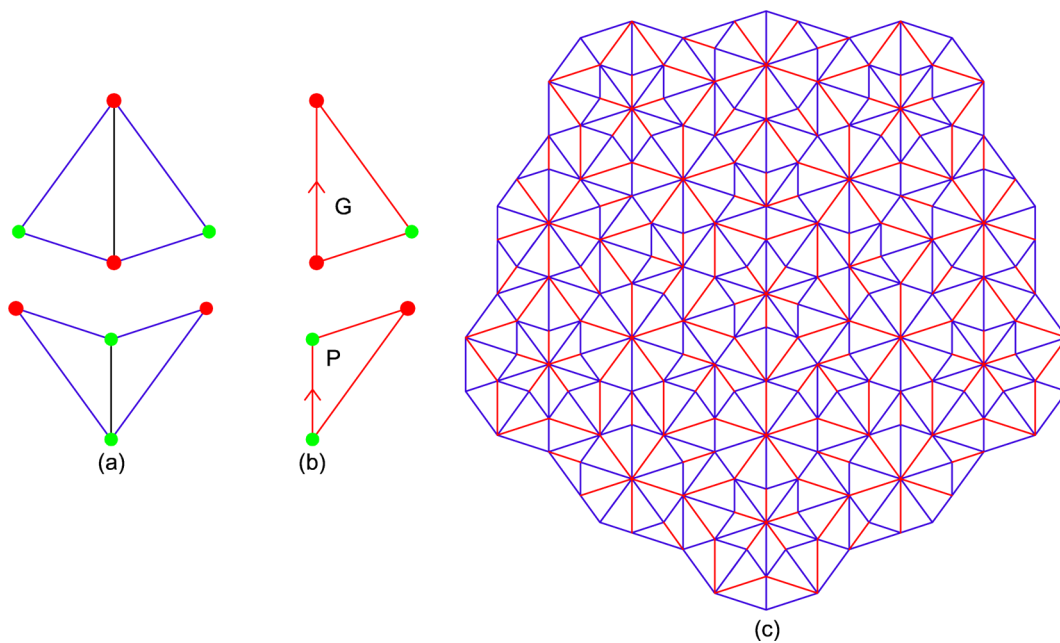


FIGURE 2.18 – Le cerf-volant et la fléchette divisés en deux triangles de Robinson avec les règles d’assemblage appropriées, et (c) un pavage aperiodique avec les deux triangles.

Un pavage avec des cerfs-volants et des fléchettes peut être converti en un pavage par des triangles en divisant chaque tuile en deux triangles. Aussi, chaque pavage avec des triangles peut être converti en un pavage avec des cerfs-volants et des fléchettes figure 2.18.

— L’ensemble P3

Le troisième ensemble noté P3 est constitué seulement de deux losanges. Pour s’assurer que le pavage obtenu par les deux losanges de Penrose n’est pas périodique, il faut toujours respecter les règles d’assemblage. Respecter les règles d’assemblage dans la construction manuelle d’un large pavage est difficile : il s’avère que pratiquement, on ne peut pas s’assurer qu’une configuration finie, aussi grande soit-elle, peut être étendue à l’infini [26]. On peut arriver à un point duquel on ne peut plus avancer. Comme pour les autres types de pavage de Penrose, on peut définir aussi un algorithme de « *construction par inflation* » : il suffit de découper chaque gros losange en : un gros losange, deux demi-losanges fins et deux demi-losanges gros, et chaque losange fin en deux demi-losanges fins et deux demi-losanges gros. La cohérence du procédé est assurée par le fait que les demi-losanges ainsi générés s’associent toujours avec leurs voisins pour reconstituer un losange

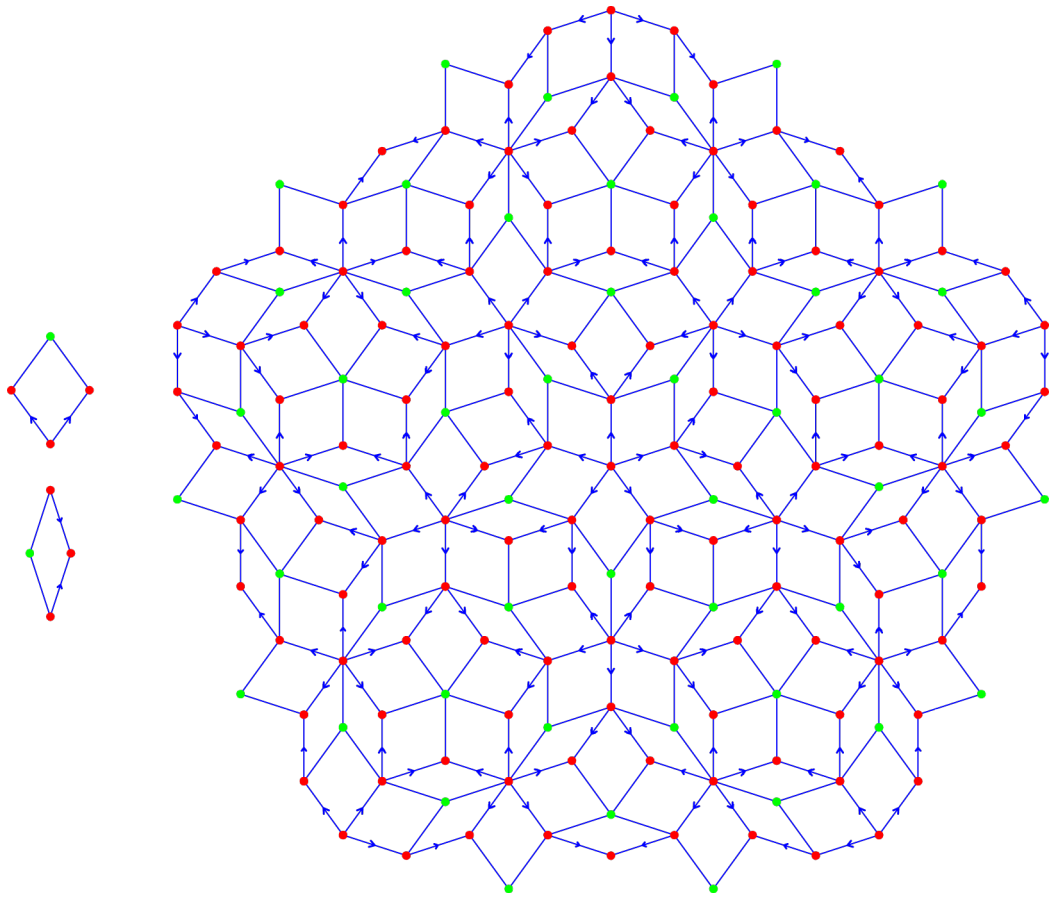


FIGURE 2.19 – Pavage apériodique avec les tuiles de l'ensemble P3.

complet.

2.4 conclusion

Dans les prochains chapitres, nous allons exploiter les opportunités offertes par les outils mathématiques présentés dans ce chapitre dans l'analyse et la synthèse des motifs de l'art géométrique islamique.

Chapitre 3

Méthodes de construction des motifs de l'art géométrique islamique : état de l'art

Sommaire

3.1	Introduction	41
3.2	Aperçu sur les travaux réalisés sur l'art géométrique islamique	42
3.3	Les méthodes historiques de construction des motifs de l'art géométrique islamique	44
3.3.1	La méthode de jonctions de points	44
3.3.2	La méthode des tracés régulateurs	45
3.3.3	La méthode l'Hasba	48
3.4	La méthode polygonale	52
3.4.1	La méthode systématique	52
3.4.2	La méthode non systématique	57
3.4.3	Algorithme de Kaplan	62
3.5	Conclusion	68

3.1 Introduction

L'art islamique englobe des réalisations remarquables en motifs géométriques abstraits. Les artisans musulmans étaient bien versés dans la géométrie; puisque leurs constructions étaient solidement enracinées dans la géométrie. Ceci peut être justifié par le fait que les premiers savants islamiques ont traduit les éléments d'Euclide en arabe.

Toute étude sérieuse de cet art nécessite une compréhension complète et approfondie des méthodes de conception historiques utilisées par les artisans. Cette compréhension fournit des indications précieuses sur le développement initial, le raffinement et la maturation de l'art géométrique islamique [27, 28, 29].

Dans un contexte caractérisé par la perte progressive des connaissances des méthodes traditionnelles et par la rareté sinon le manque de sources historiques qui décrivent les secrets de conception traditionnelle, la compréhension des méthodes de conception historiques constituera une aide précieuse et un outil indispensable pour tous ceux qui sont engagés pour la préservation et le développement de cette extraordinaire tradition artistique. Il est à souligner que la rareté des références et des manuels de conception de cet art ancestral peut être expliquée par une coutume de transmission qui se fait généralement oralement de maître artisan à apprenti sur une longue période.

Par ailleurs, la dimension scientifique de cet art a permis aux chercheurs de proposer des approches, à la fois d'analyse et de conception, basées sur des concepts mathématiques tels que la symétrie, le pavage ou les fractales. Ce chapitre donne un aperçu global sur les travaux les plus reconnus à ce jour.

3.2 Aperçu sur les travaux réalisés sur l'art géométrique islamique

L'art islamique a suscité beaucoup d'intérêt de la part de la communauté scientifique internationale au cours des dernières décennies. Les deux premières publications qui ont rendu disponibles des collections de motifs islamiques proviennent de Prisse d'Avennes [30] et Owen Jones [31]. Ensuite, Bourgoin a été le premier à essayer d'analyser les méthodes de construction d'un grand nombre de motifs géométriques [32]. Plusieurs autres auteurs tels que Critchlow [33], El-Said et al [34], Wade [35], et Paccard [36] ont publié de grandes collections de motifs islamiques dans leurs livres.

Pour dévoiler le secret derrière la construction des motifs géométriques islamiques, de nombreux chercheurs se concentrent sur une approche basée sur le pavage. Dans une série d'articles [37, 38, 39, 40], Hankin a décrit une technique de construction de motifs étoilés basée sur le pavage du plan. Cette technique, connue aussi sous le nom de « *méthode de polygones en contact : polygon in contact method* », a été référencée dans plusieurs travaux. Kaplan [41] a fourni une méthode basée sur la technique polygonale de Hankin. Cette méthode permet de construire les motifs géométriques étoilés à partir

d'un pavage du plan et d'un ensemble de paramètres intuitifs. Dans un autre article, Kaplan et Salesin [6] ont proposé une approche utilisant une famille de pavages générés par un processus dit de *gonflage*. Les polygones réguliers du pavage sont remplis par un ensemble de motifs paramétrés (les étoiles et les rosettes), tandis que le contenu des polygones irréguliers est généré par un algorithme appelé « *algorithme d'inférence* ». Bonner a présenté une méthode dont les motifs sont créés à partir de constructions géométriques systématiques et non systématiques [42, 43, 29]. Castera [44] a décrit une technique de construction de motifs géométriques marocains en partant d'un squelette obtenu en combinant des étoiles à huit pointes et des hexagones appelés *safts*. Cromwell [45] a donné une analyse mathématique de plusieurs motifs en illustrant une variété de méthodes de construction. Bodner a décrit la construction de plusieurs motifs géométriques islamiques [46, 47, 48]. Toutes ces recherches sont basées sur le pavage comme guide pour générer des motifs géométriques étoilés. Les polygones réguliers du pavage ne sont utilisés que pour placer correctement les étoiles et les rosaces du motif.

Alternativement, d'autres travaux ont été basés sur la théorie des groupes de symétrie. Abas et Salaman [3, 4] et Wichmann [5], ont classé un ensemble de motifs selon leurs groupes de symétries pour montrer les fréquences des 17 groupes cristallographiques dans l'art géométrique islamique. Dans [49], Ould Djibril et Oulad Haj Thami ont proposé un modèle computationnel pour l'extraction des caractéristiques de symétrie des motifs islamiques afin de les classer en groupes cycliques, groupes de frises et groupes cristallographiques. Rønning [50] a étudié les groupes de symétrie des motifs géométriques islamiques d'Alhambra en Espagne. Grünbaum et Shephard [1] ont fourni une application profonde de la théorie des groupes de symétries à l'étude des motifs étoilés périodiques en dérivant des outils mathématiques pour analyser et prédire les propriétés des motifs périodiques sur l'ensemble du plan. Ostromoukhov [51] a étendu cette analyse aux 17 groupes cristallographiques. Dans tous ces travaux, les recherches sont largement analytiques. Cependant, il y a d'autres travaux qui sont axés sur le processus de génération des motifs en se basant sur la théorie des groupes de symétries.

Lavani [52] a présenté une méthode pour générer des motifs géométriques complexes en se basant sur des classes infinies de subdivisions de la région fondamentale. Les motifs construits n'incluent pas les motifs étoilés. Jowers et *al.* [53] ont proposé une méthode basée sur les groupes de symétries et sur le formalisme de la grammaire des formes. Un modèle est défini en sélectionnant des formes émergentes sur une grille sous-jacente en utilisant un ensemble de 75 règles déduites de l'analyse d'un corpus de huit motifs. Les règles établies ne peuvent pas être considérées comme universelles puisque l'analyse d'un corpus alternatif conduirait probablement à la définition de règles

alternatives. De plus, aucune information n'est donnée sur le choix de la grille sous-jacente utilisée. Nasri et Benslimane ont proposé une méthode de modélisation pour générer automatiquement des formes originales et nouvelles de motifs géométriques mauresques. La méthode proposée est basée sur la symétrie et le formalisme de la grammaire des formes. Le processus utilisé consiste à identifier le vocabulaire des formes caractérisant le style mauresque. En identifiant ses caractéristiques communes par l'analyse d'un ensemble de données de motifs historiques, des règles sont ensuite déterminées. Ces mécanismes sont imposés par une grille sous-jacente utilisée traditionnellement par les artisans pour concevoir des motifs géométriques sophistiqués [54]. Thalal et *al.* [55] ont décrit la méthode appelée *Hasba (mesure)* qui est largement adoptée par les artisans marocains notamment ceux qui travaillent sur le bois.

La plupart des méthodes basées sur la théorie des groupes de symétrie sont analytiques et aident à comprendre la structure mathématique du motif dans le plan, mais elles ne révèlent pas comment générer le *motif modèle* contenu dans la région fondamentale. Jusqu'à présent, la majorité des techniques de construction sont basées sur le pavage.

3.3 Les méthodes historiques de construction des motifs de l'art géométrique islamique

3.3.1 La méthode de jonctions de points

Plusieurs chercheurs se sont intéressés à la méthode de jonction de points connue comme étant la méthode historique la plus utilisée dans la constructions des motifs géométriques islamiques [35], [33, 56, 57, 58]. Cependant, les multiples publications réalisées sur cette technique ne fournissent aucune preuve de son utilisation historique.

Cette technique consiste à utiliser une règle et un compas : on commence généralement par un cercle, on le divise pour produire une matrice de coordonnées géométriques à l'intérieure d'une unité répétitive régulière carrée ou hexagonale. Les lignes reliant des points d'intersection sélectionnés dans cette matrice produisent une conception dans son unité de base. Cette unité peut être ensuite répétée pour aboutir au motif final (Figure 3.1, 3.2 et 3.3).

Une caractéristique fondamentale, ou limitation, de cette technique est que chaque motif individuel a ses propres étapes de construction. On peut dire que cette méthode est bien adaptée pour reconstruire des motifs existants avec une complexité modérée. Elle n'est pas pratique pour les motifs complexes avec plusieurs centres de symétries locales, et pour créer de nouveaux

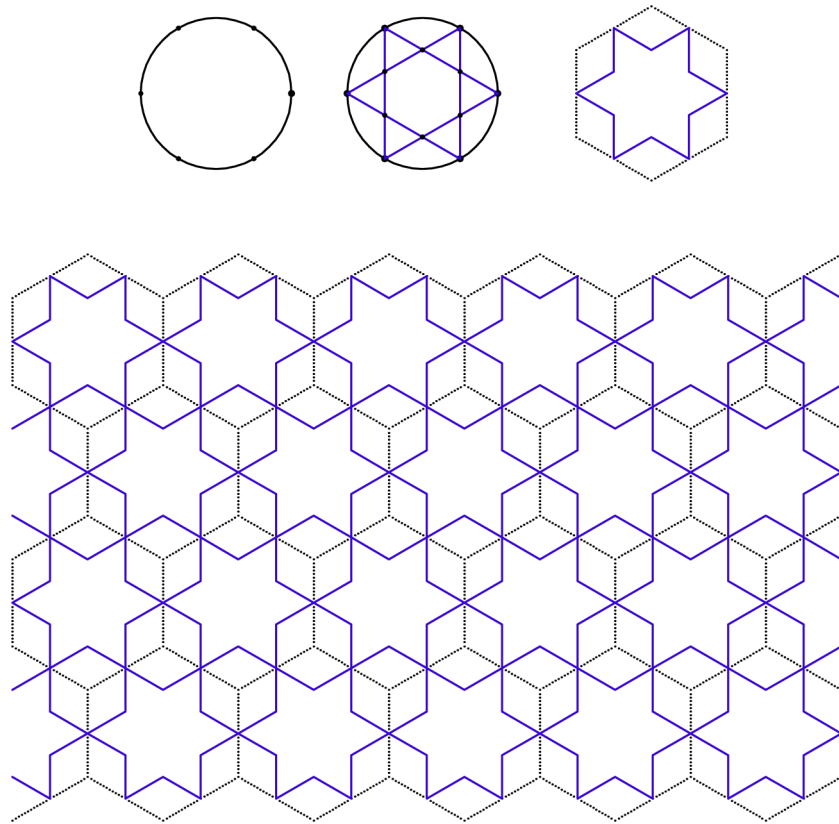


FIGURE 3.1 – Construction d’un motif avec une étoile à 6 en utilisant la méthode de jonctions de points.

motifs originaux [28].

3.3.2 La méthode des tracés régulateurs

La méthode des tracés régulateurs est une méthode de conception des motifs géométriques ornementaux islamiques adoptée au Maroc. Cette méthode repose sur des grilles carrées, des grilles isométriques ou des grilles composites semi-régulières. Il arrive dans ces grilles que l’espace entre deux lignes parallèles corresponde à la largeur du trait [36]. L’étape primordiale dans le processus de construction est l’agencement spatial des étoiles/rosaces du motif sur la grille le long du squelette. Cet agencement dépend fortement de l’ordre de la rosace centrale. Ensuite, la rosace centrale (mère) est construite, puis le reste du motif est dessiné en utilisant des pièces de zallij dont les formes sont préétablies (Fig. 3.4).

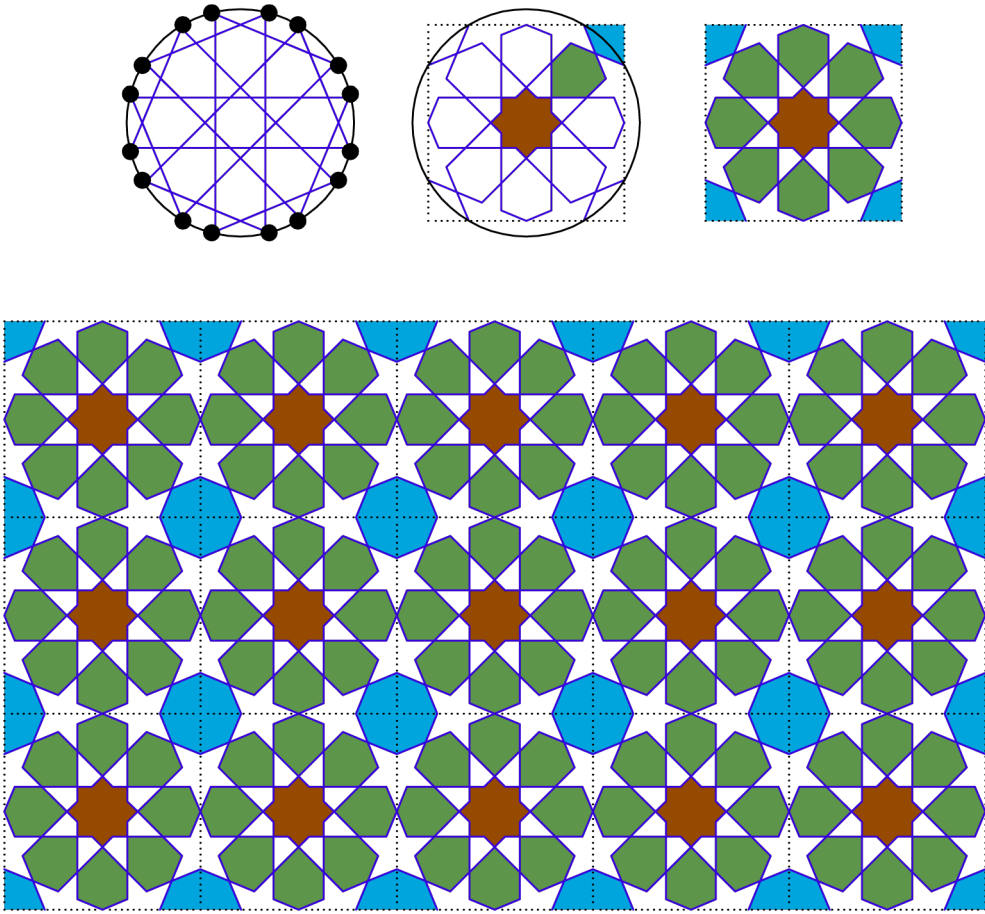


FIGURE 3.2 – Construction d'une rosace à 8 dans une unité carrée.

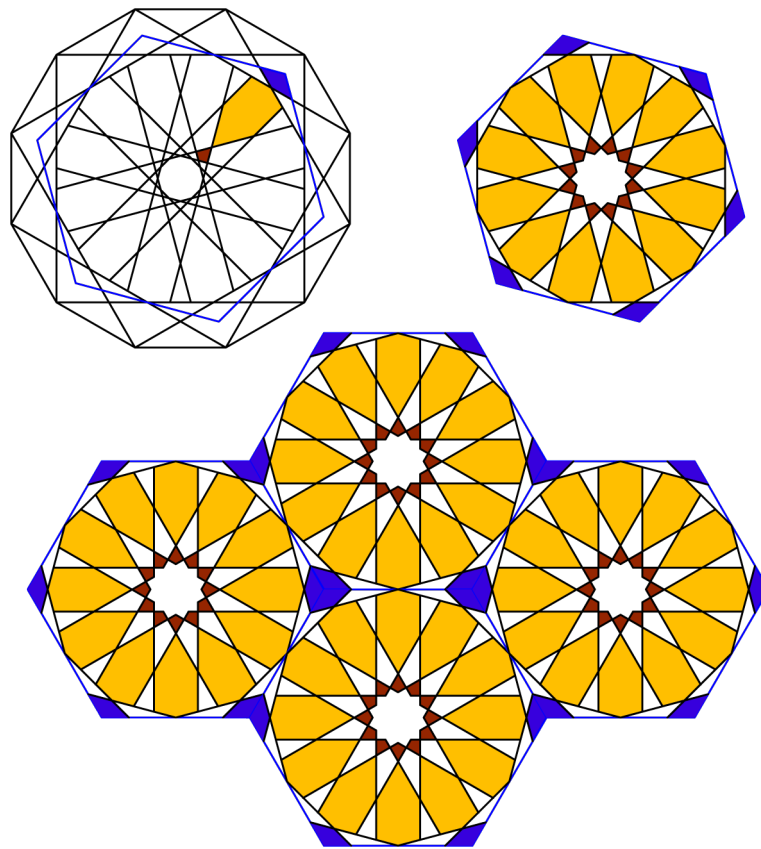


FIGURE 3.3 – Construction d'une rosace à 12 dans une unité hexagonale.

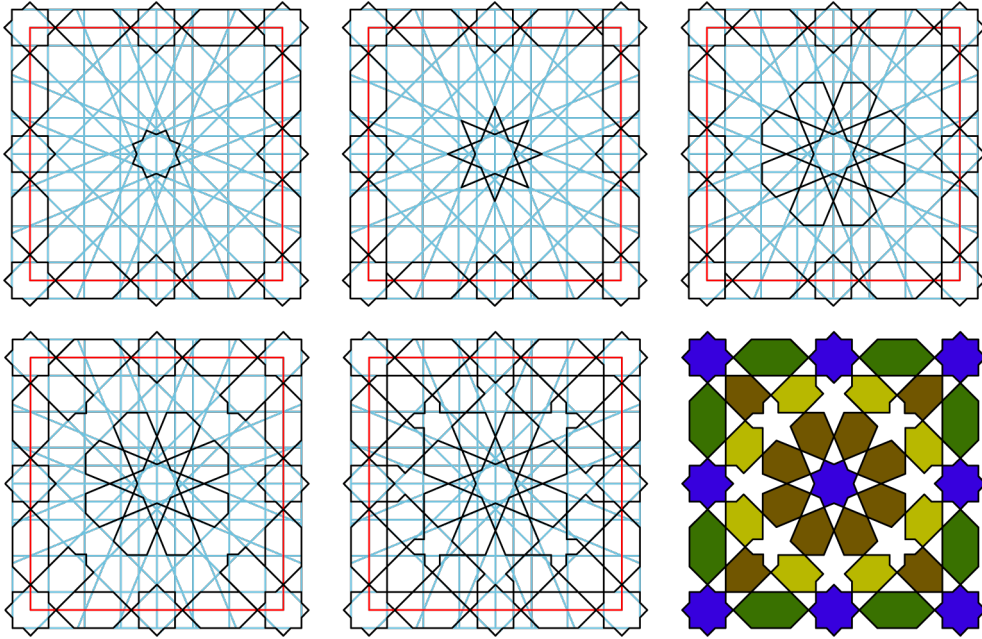


FIGURE 3.4 – Construction d’un motif avec une rosace centrale d’ordre 8.

3.3.3 La méthode l’Hasba

L’Hasba est un terme qui fait partie du jargon des Mâalams pour décrire des motifs tracés suivant des valeurs empiriques [55]. Autrement dit, L’Hasba est une méthode utilisée par les maîtres artisans pour construire des motifs ornementaux sur le bois. Cette méthode consiste à tracer un motif à partir d’une grille sous-jacente élaborée sur un cadre qui est souvent carré (Fig. 3.5). Sur les côtés du cadre est définie une division unitaire empirique q appelée « *qassma* ». La largeur L de chaque côté est un multiple de q : $L = h \times q$ (Fig. 3.5a). Le motif obtenu dépend fortement de sa mesure spécifique h . Pour construire la grille sous-jacente, on trace des paires de cercles concentriques de rayon respectifs q et $2q$ situés aux coins, et au milieu de chaque côté du cadre gradué (Fig. 3.5b). Ensuite, on joigne les centres des cercles et on trace les tangentes à tous les cercles (Fig. 3.5c). Finalement, le motif est tracé sur la grille sous-jacente (Fig. 3.6). A partir d’une même grille on peut obtenir plusieurs motifs (Fig. 3.7). Une description détaillée de cette technique est donnée en [55].

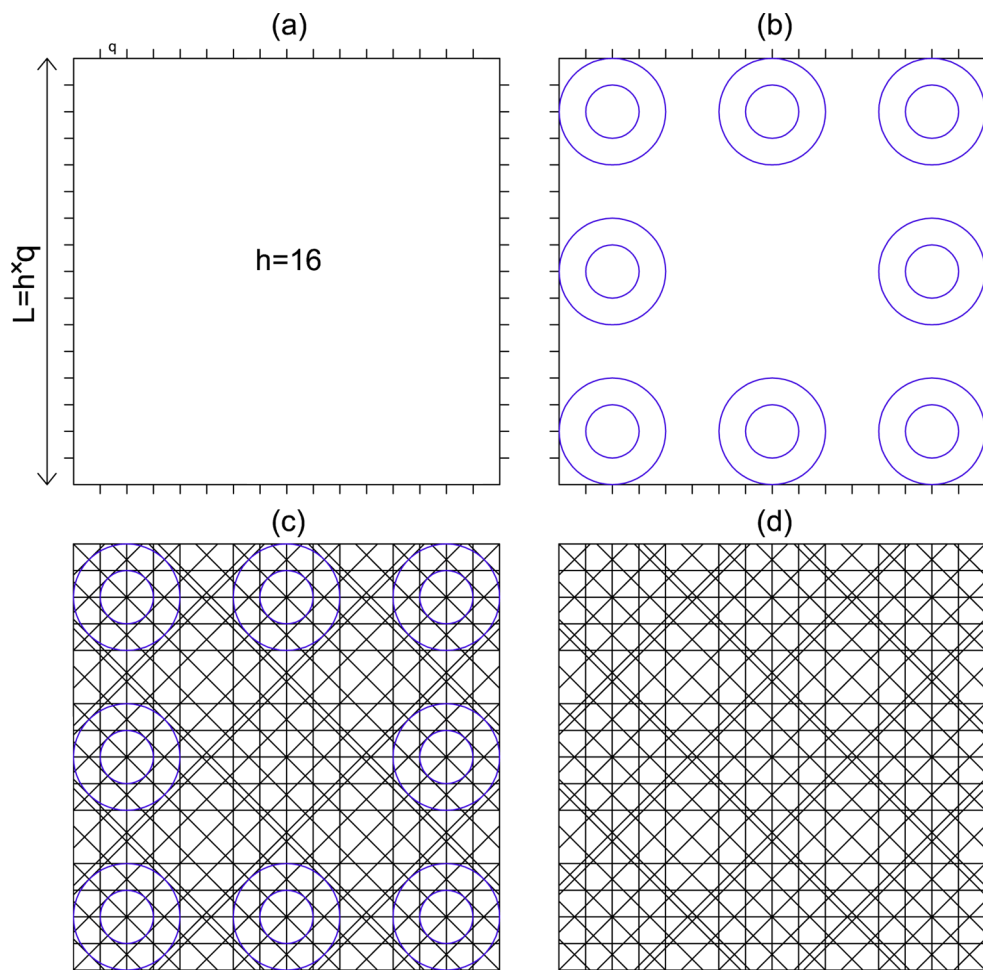


FIGURE 3.5 – Construction de la grille sous-jacente.

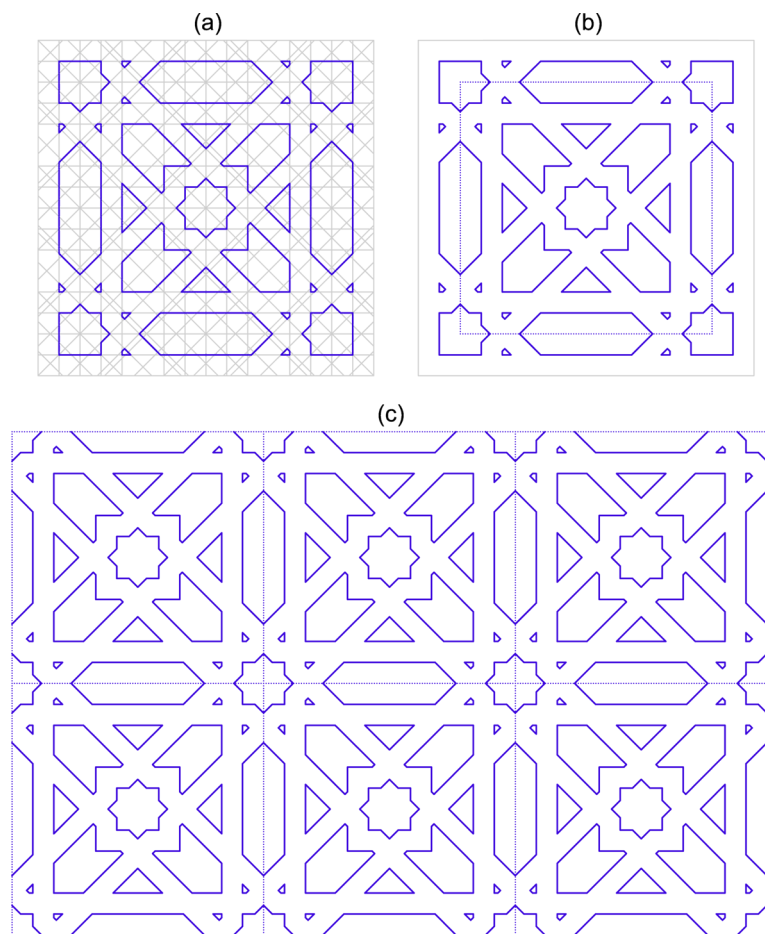


FIGURE 3.6 – (a) Construction du motif sur la grille sous-jacente, (b) la cellule de base, (c) le motif obtenu par la répétition de la cellule de base.

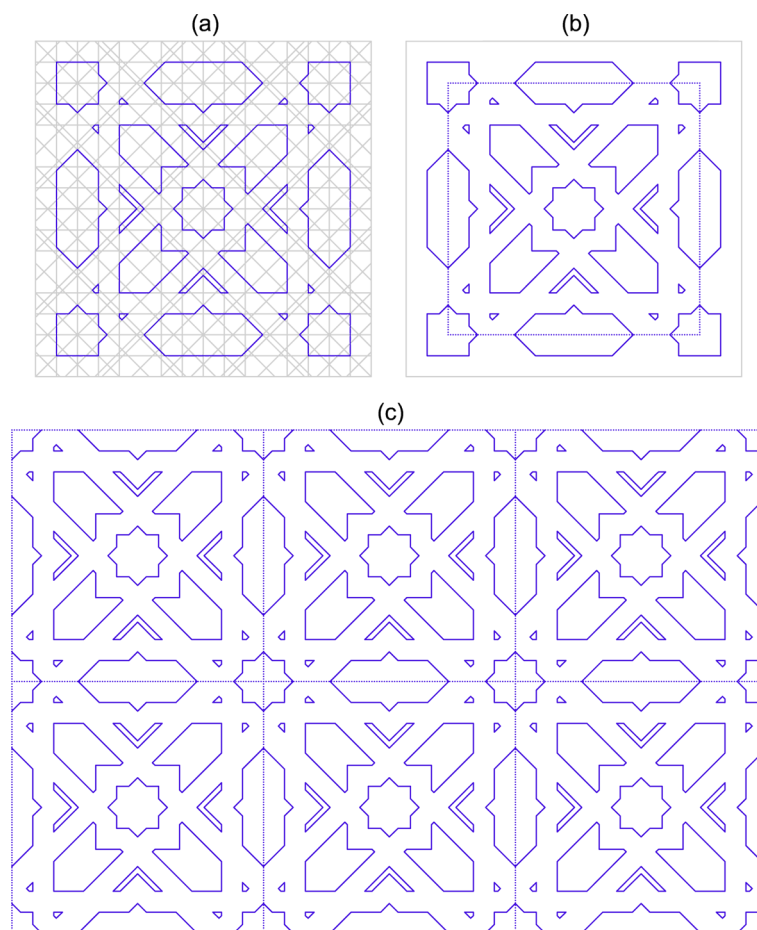


FIGURE 3.7 – Construction d'un autre motif en se basant sur la même grille $h = 16$.

3.4 La méthode polygonale

L'examen de plusieurs exemples de motifs géométriques anciens accompagnés de leurs pavages sous-jacents indique que la méthode polygonale est la méthode de conception la plus ancienne qui est transcrite [29, 28]. Elle est par ailleurs, la méthode de conception la plus utilisée par les artisans musulmans à travers la longue histoire de cette tradition. Cette méthode, appelée aussi «méthode de polygones en contact» et notée *PIC*, a été décrite par Hankin [37, 38, 39, 40] au début du vingtième siècle. Elle permet de créer des motifs étoilés en partant d'un pavage du plan par des polygones. A partir de ce pavage, il faut faire émerger deux lignes du milieu de chacun des côtés des polygones. Chacune de ces lignes sera tronquée à la rencontre d'une autre ligne provenant d'un autre côté. Finalement, les polygones utilisés dans le pavage sous-jacent sont supprimés laissant derrière le motif construit. En fonction des angles des deux lignes qui émergent d'un même point milieu, plusieurs conceptions peuvent être produites.

J. Bonner a présenté la technique *PIC* sous forme de deux méthodes distinctes dites respectivement systématique et non-systématique [29].

Kaplan a développé un algorithme pour automatiser la génération des motifs islamique par la technique *PIC* [41].

3.4.1 La méthode systématique

La méthode systématique de Bonner consiste à utiliser des ensembles finis de polygones qui peuvent être assemblés en une infinité de combinaisons. A chaque polygone sont associés les motifs des quatre familles historiques connues : aigüe, Médiane, obtuse et 2-points. Les artisans musulmans ont développé cinq systèmes : le système 3-4-6-12, le système 4-8 A, le système 4-8 B, le système 5-10, et le système 7-14 [29].

3.4.1.1 Le système 3-4-6-12

Le système 3-4-6-12 est composé des polygones réguliers suivants : le triangle, le carré, l'hexagone et le double hexagone. Tous les polygones réguliers ont la même longueur de côté. Chaque polygone est orné par les motifs des quatre familles historiques connues (Fig. 3.8). Il suffit de combiner plusieurs éléments polygonaux d'une même famille pour aboutir à un motif (Fig. 3.9).

3.4.1.2 Le système 4-8 A

Le système 4-8 A est un système octogonal constitué des polygones représentés dans la figure 3.10. La combinaison de plusieurs éléments d'une même famille

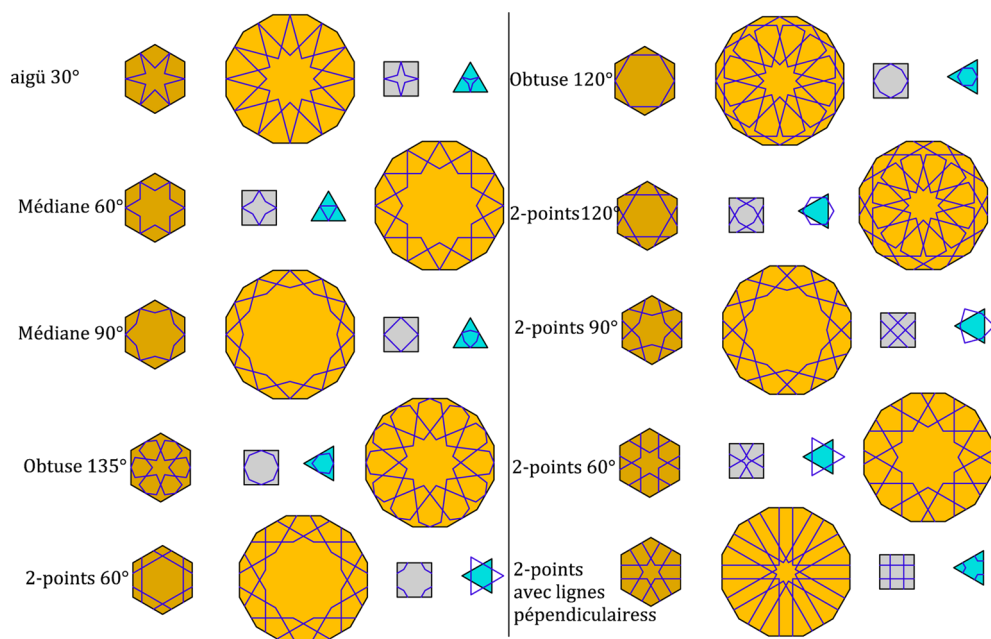


FIGURE 3.8 – Les polygones réguliers du système 3-4-6-12 et leurs motifs associés(reproduit à partir de [29]).

permet d'obtenir un motif de cette famille (Fig. 3.11).

3.4.1.3 Le système 4-8 B

Le système 4-8 B est aussi un système octogonal. La figure 3.12 illustre les éléments polygonaux de ce système et la figure 3.13 illustre quelques exemples de motifs obtenus par la combinaison de plusieurs polygones ornés.

3.4.1.4 Le système 5-10

Les polygones constituant du système 5-10 ainsi que leurs motifs correspondants sont illustrés sur la figure 3.14. La figure 3.15 illustre quelques motifs obtenus.

3.4.1.5 Le système 7-14

Les motifs créés en utilisant le système 7-14 sont caractérisés par la présence des rosaces d'ordre 7 et 14. Les éléments polygonaux de ce système sont illustrés sur les figures 3.16 et 3.17 et la figure 3.18 illustre un motif obtenu.

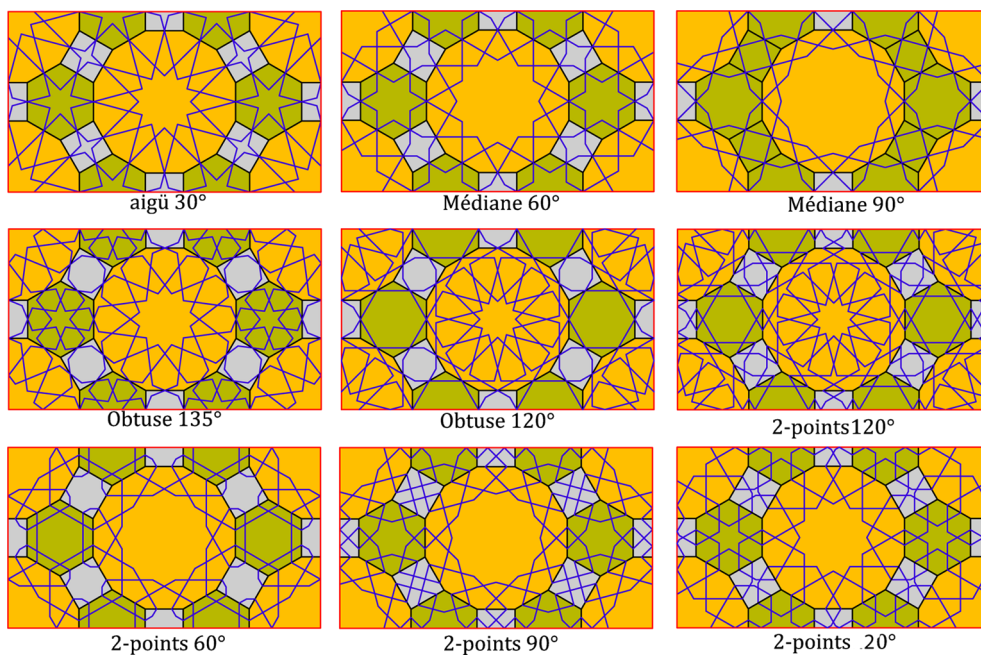


FIGURE 3.9 – Plusieurs motifs obtenus en combinant le carré, l’hexagone et le double hexagone.

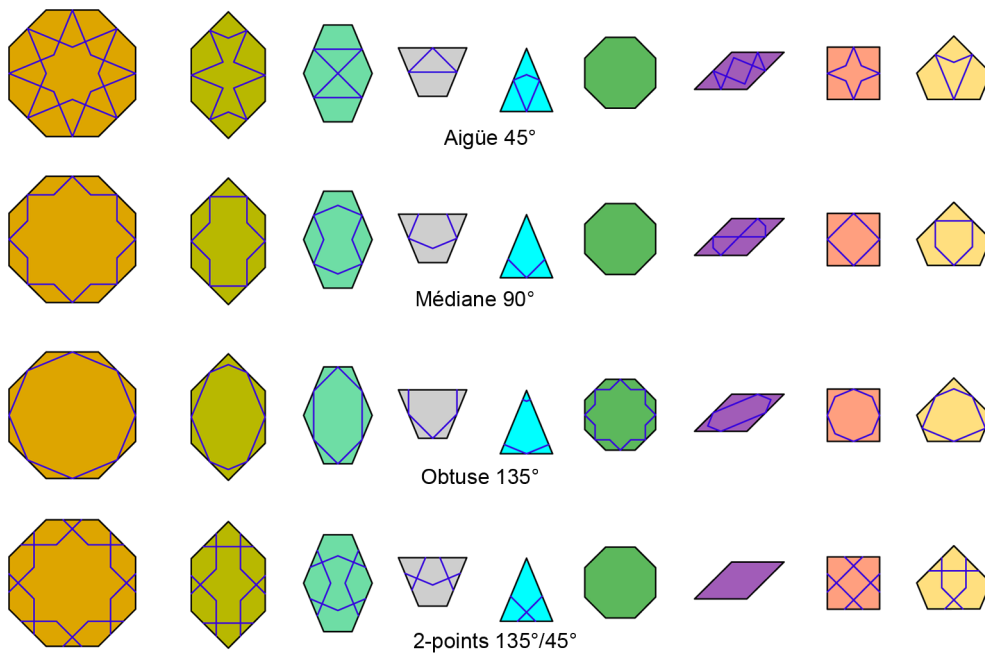


FIGURE 3.10 – Les éléments polygonaux du système 4-8 A et leurs motifs associés (reproduit à partir de [29]).

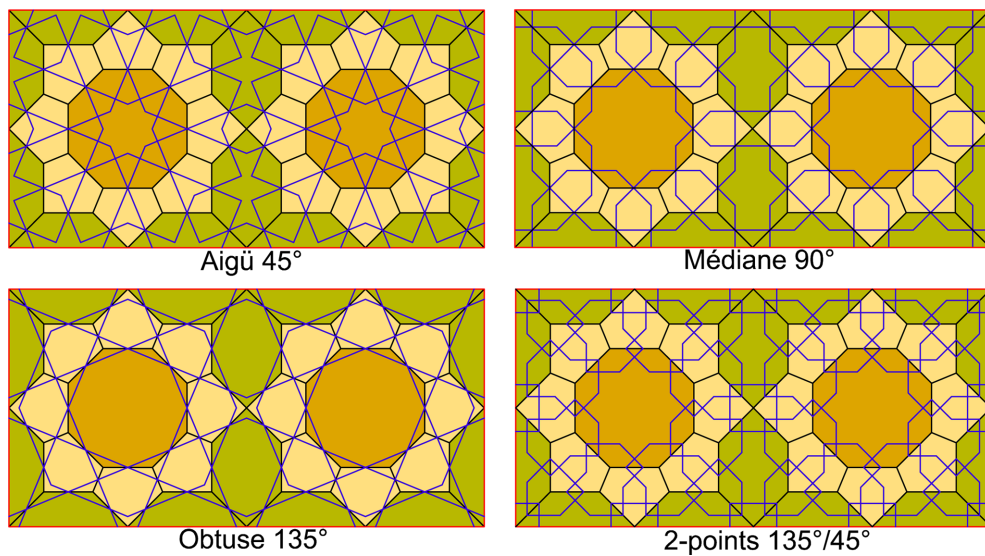


FIGURE 3.11 – Différents motifs obtenus en combinant plusieurs éléments polygonaux du système 4-8 A.

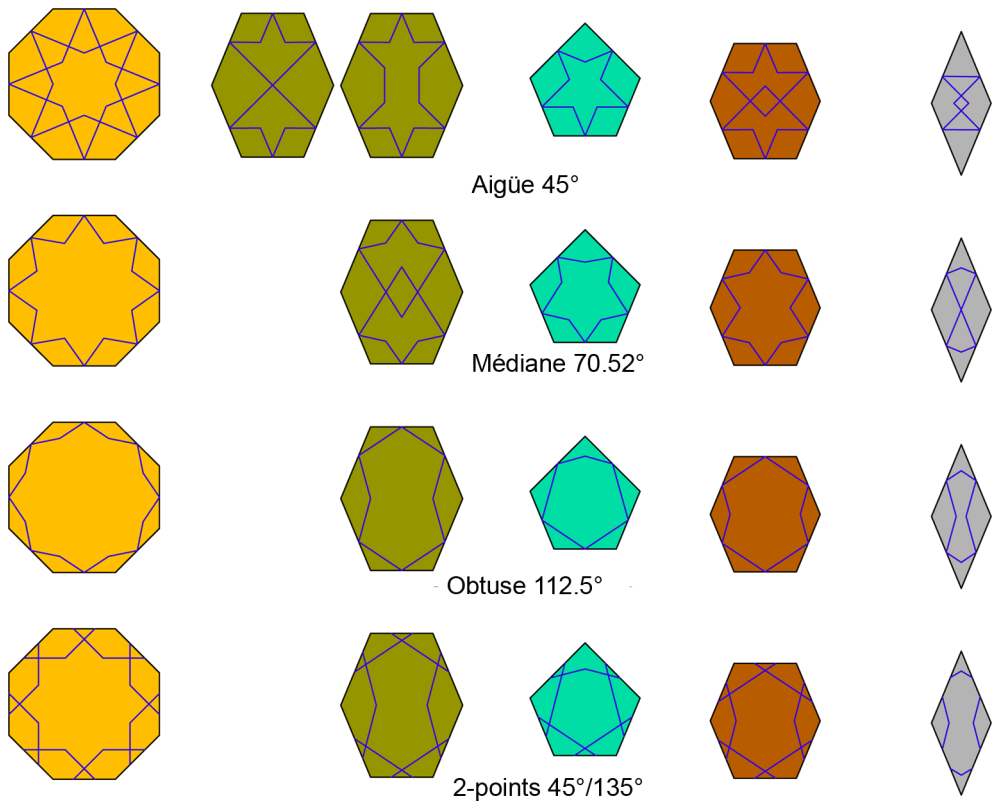


FIGURE 3.12 – Les éléments polygonaux du système 4-8 B et leurs motifs correspondants (reproduit à partir de [29]).

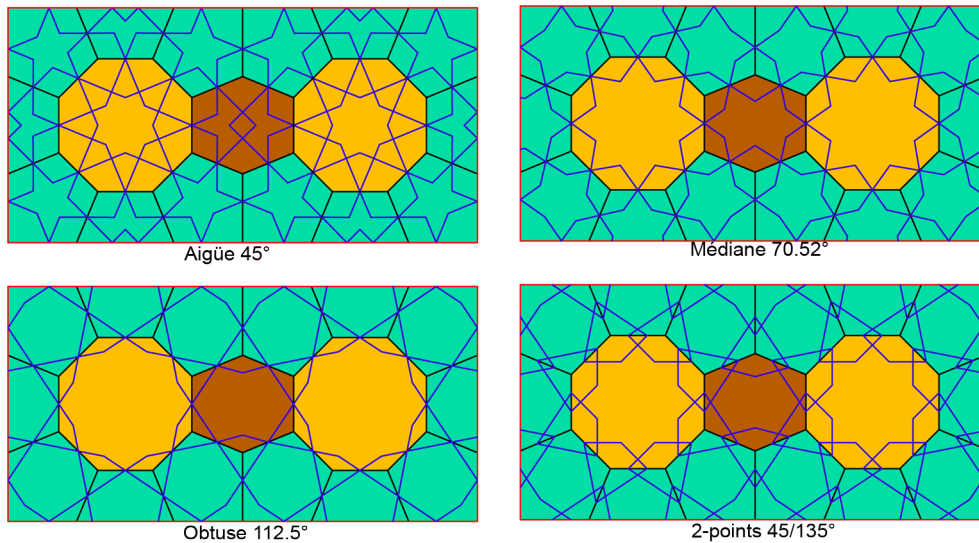


FIGURE 3.13 – Différents motifs obtenus par la combinaison des éléments du système 4-8 B.

3.4.2 La méthode non systématique

La méthode non systématique est utilisée pour élaborer des motifs avec un ou plusieurs centres de symétries locales. Cette méthode de conception est basée aussi sur des pavages polygonaux sous-jacents. Après la création du motif, le pavage sous-jacent est retiré, ne laissant aucune trace discernable de la méthode par laquelle le motif a été construit. Les emplacements des lignes de motif sur les pavages sous-jacents sont généralement disposés de sorte que deux lignes de motif se croisent sur le (ou près du) point médian d'un côté. L'angle de contact spécifique de ces lignes détermine l'aspect final du motif. En faisant varier cet angle, différentes familles historiques de motifs géométriques islamiques sont générées.

La méthode de conception non systématique est constituée de trois phases séquentielles : la construction d'une grille radiale (Fig. 3.19) ; la génération du pavage sous-jacent à partir de cette grille radiale (Fig. 3.20) ; et la conception du motif géométrique (Fig. 3.21) [29]. La grille radiale est utilisée pour générer le pavage sous-jacent. Dans le cas des conceptions systématiques, comme expliqué précédemment, les pavages sous-jacents sont composés d'éléments polygonaux avec des lignes de motifs associées, qui sont assemblés en différentes combinaisons. Cependant, pour le placement d'un dessin sur un mur ou sur du papier, les grilles radiales fournissent un moyen très efficace de précision

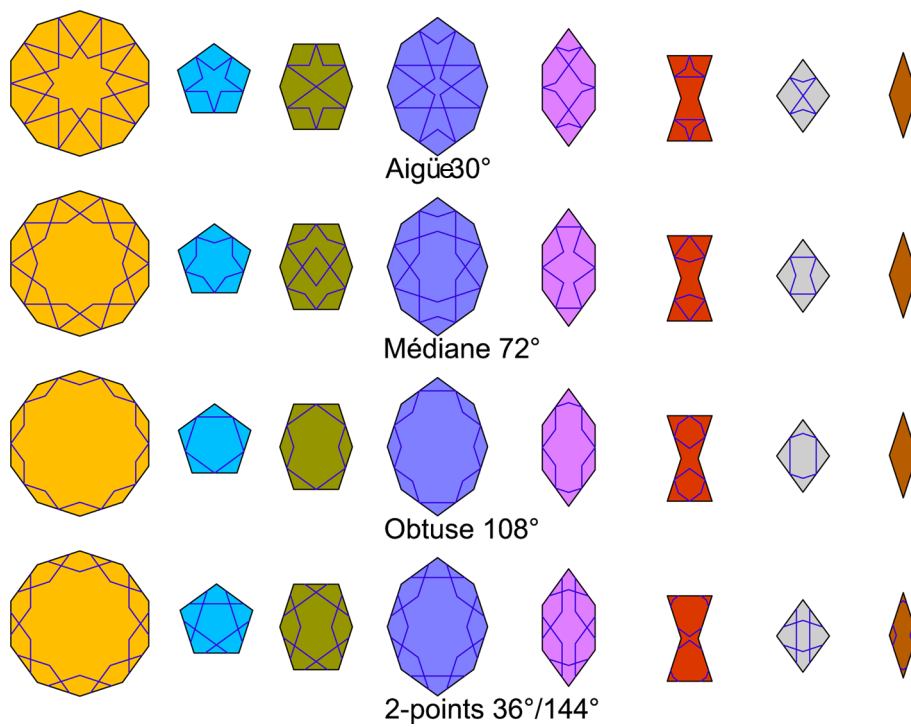


FIGURE 3.14 – Les polygones du système 5-10 ainsi que leurs motifs correspondants (reproduit à partir de [29]).

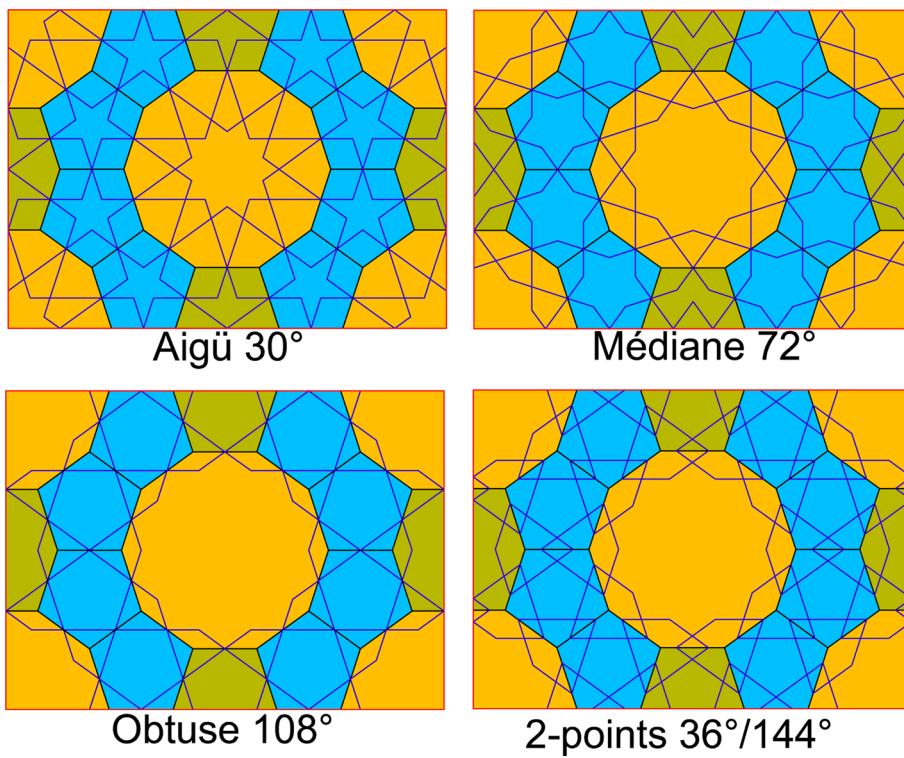


FIGURE 3.15 – Motifs du système 5-10.

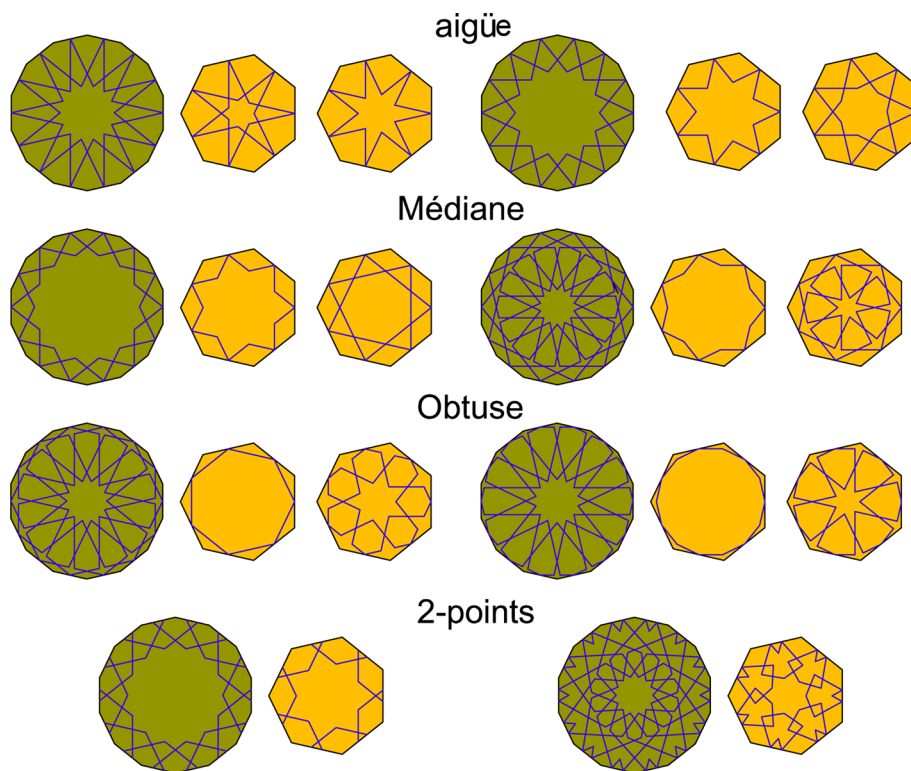


FIGURE 3.16 – Les éléments polygonaux du système 7-14 (reproduit à partir de [29]).

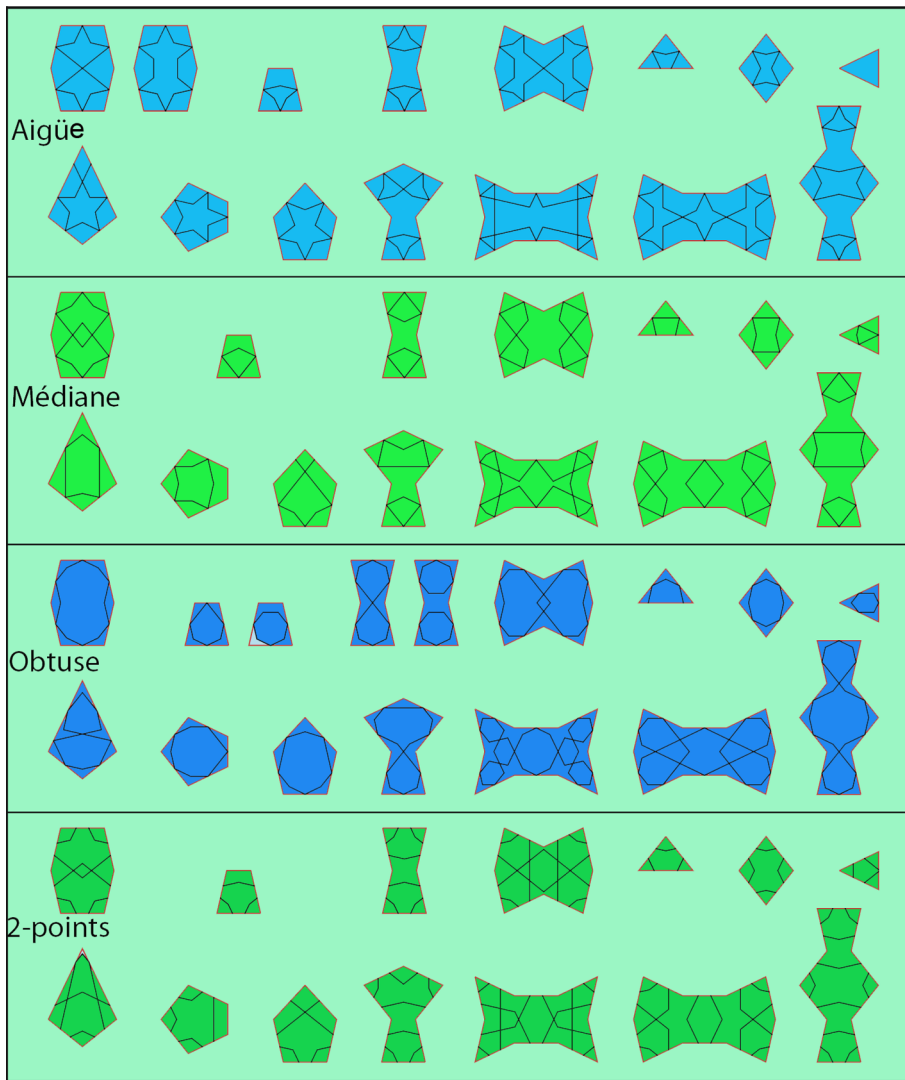


FIGURE 3.17 – Les éléments polygonaux supplémentaires à ceux de la figure précédente (reproduit à partir de [29]).

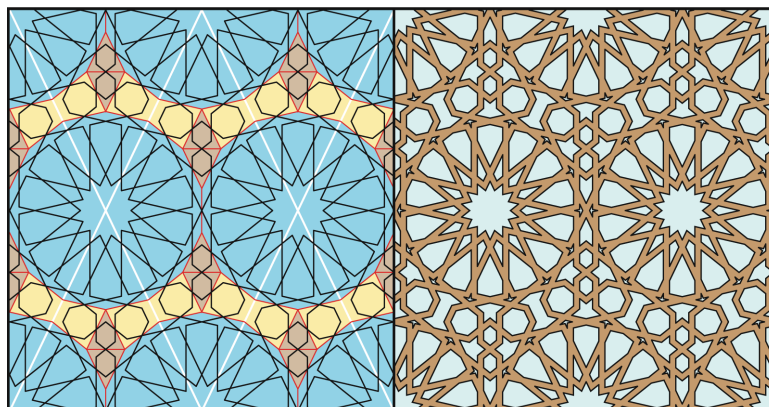


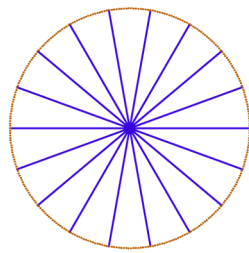
FIGURE 3.18 – Un motif du système 7-14 (prix de [29]).

pour construire le pavage sous-jacent. La construction du pavage à partir d'une grille radiale commence généralement par l'établissement des pentagones, suivi par les polygones primaires avec une symétrie locale d'ordre N , suivis par les polygones interstitiels. Les centres de symétries locales permettent le placement de différentes étoiles d'ordre N .

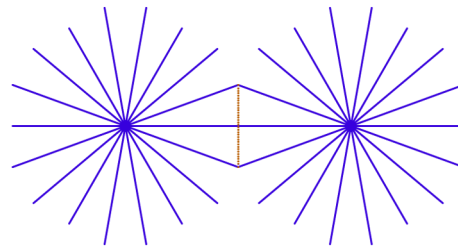
3.4.3 Algorithme de Kaplan

Kaplan [6] a proposé un algorithme de conception des motifs géométriques islamiques basé sur la méthode *PIC*. A partir d'un pavage donné, on identifie l'ensemble des *points de contact* « *contact points* » qui sont les milieux des côtés des polygones (Fig. 3.22a). Dans un pavage dont les polygones sont en contact (pavage bord à bord) les polygones adjacents auront le même point de contact sur chaque côté en commun. A chaque point de contact est associée une paire de lignes formant chacune avec le côté le même angle θ (*angle de contact*) (Fig. 3.22b). Chacune de ces deux lignes sera ensuite prolongée vers l'intérieur du polygone jusqu'à la rencontre d'une autre ligne. Ce point de rencontre est dit point de troncature de la ligne.

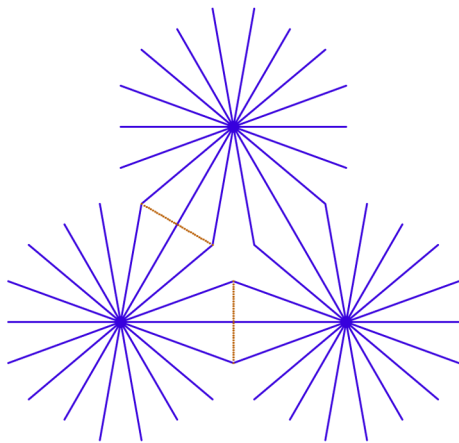
L'implémentation de cette méthode consiste à trouver une manière qui permet d'automatiser la troncature des paires de lignes développée, car chaque ligne peut se croiser avec plusieurs autres lignes. Pour ce faire, il faut trouver un critère permettant de déterminer automatiquement les points de troncature qui permettent d'obtenir le meilleur motif. Comme critère, Kaplan a choisi de minimiser le coût total du motif. Ce coût est mesuré en tant que la somme des longueurs des segments de droite qui le composent. Pour mettre en œuvre cette technique, Kaplan a élaboré un algorithme dit « *glouton* :



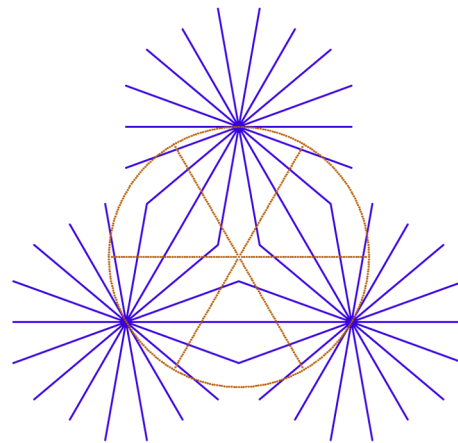
Division d'un cercle en 18 divisions



Application d'une symétrie miroir



Application d'une symétrie miroir



Division du deuxième cercle en 6 divisions

FIGURE 3.19 – Construction de la grille radiale pour un motif avec deux centres de symétrie d'ordre 12 et 9.

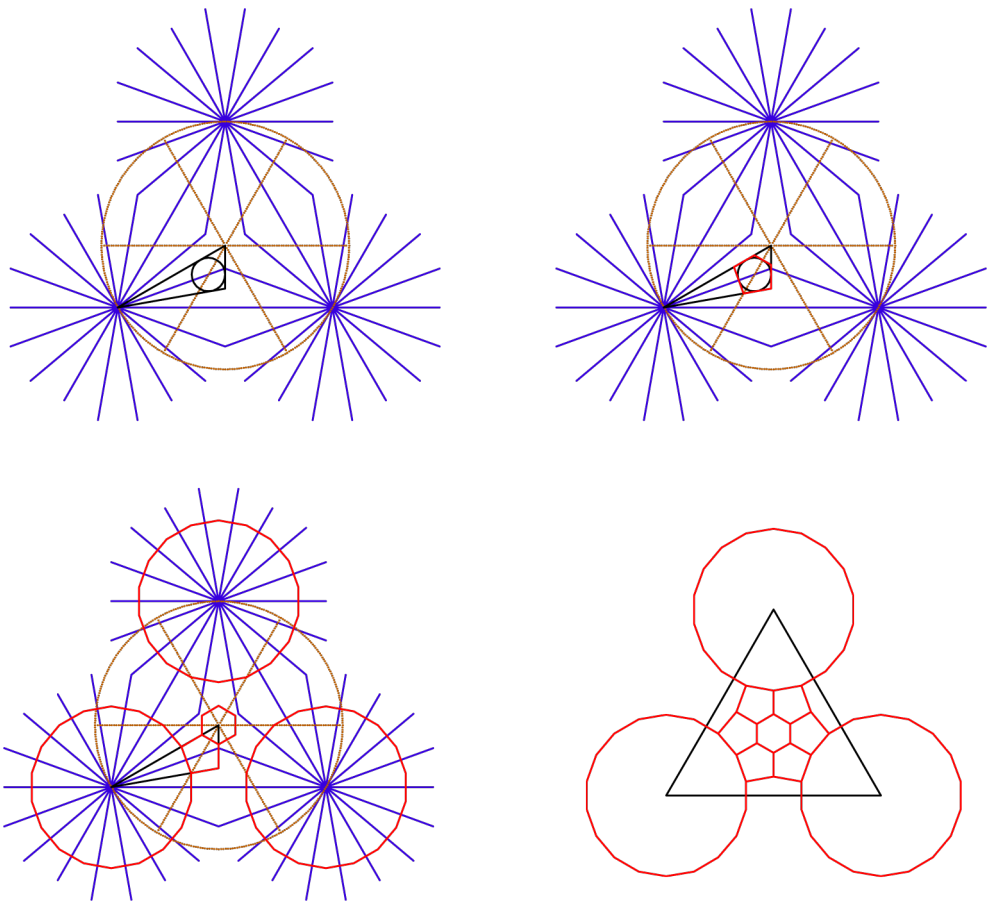


FIGURE 3.20 – Construction du pavage sous-jacent.

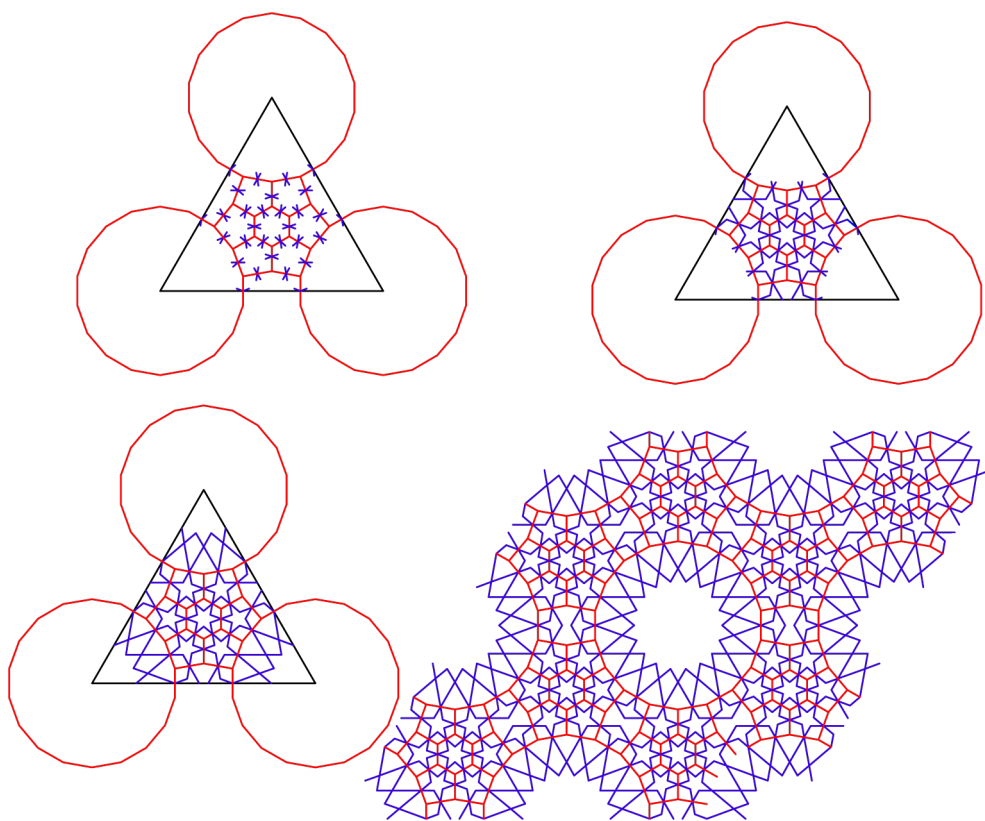


FIGURE 3.21 – Conception du motif à partir du pavage sous-jacent.

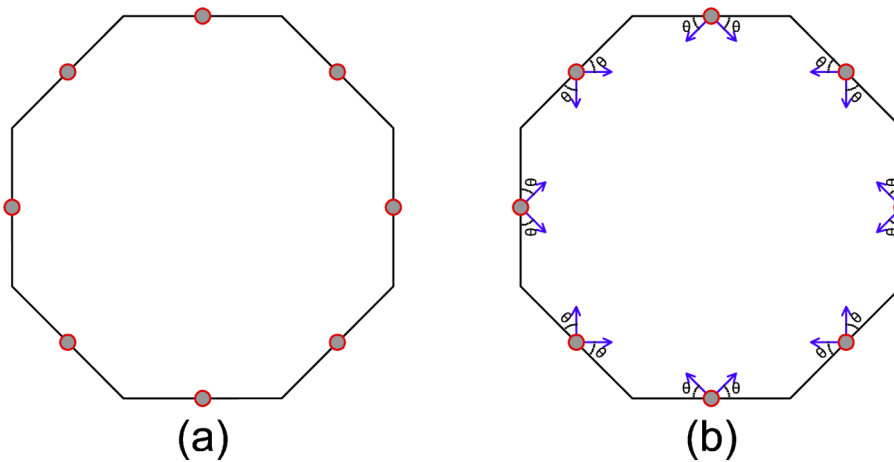


FIGURE 3.22 – (a) La première étape de la méthode de Hankin qui consiste à identifier *les points de contact*, (b) la deuxième étape qui consiste à faire émerger une paire de lignes à partir de chaque point de contact vers l'intérieur du polygone sous-jacent.

greedy algorithm ». Etant donné une ligne émergée, on détermine toutes les intersections possibles de celle-ci avec les autres lignes. Puis, on élabore une liste contenant toutes les paires de lignes intersectées. Si deux lignes AB et CD se croisent au point P (A et C sont les deux points de contact), on ajoute cette paire à la liste avec son coût qui est la somme des deux distances AP et PC ($AP + PC$) (Fig. 3.23a). Si les deux lignes sont colinéaires, on ajoute cette paire avec la distance AC comme coût à la même liste (Fig. 3.23b). Cette liste sera ensuite triée de manière croissante selon les coûts des paires stockées. On parcourt la liste triée et on ajoute chaque paire de lignes au motif si aucune de ses lignes n'est pas encore utilisée, et on marque les deux paires comme « *utilisée* ». Pour chaque polygone, le motif final est obtenu lorsque la liste est épuisée. Une liste est épuisée si chaque paire contient au moins une ligne qui est marquée comme « *utilisée* ». La figure 3.24 illustre les étapes de construction d'un motif géométrique islamique par la méthode *PIC*.

L'algorithme élaboré par Kaplan fonctionne très bien pour les polygones réguliers et pour certains polygones irréguliers. L'algorithme échoue lorsque certaines lignes restent non connectées ou lorsqu'une paire de lignes qui se croisent trop loin du polygone sous-jacent est ajoutée au motif. Ceci peut arriver pour certains polygones irréguliers parce que, selon Kaplan, le polygone en question n'est pas bien adapté à cette technique. Le résultat de l'algorithme peut être amélioré, dans certains cas en déplaçant légèrement le

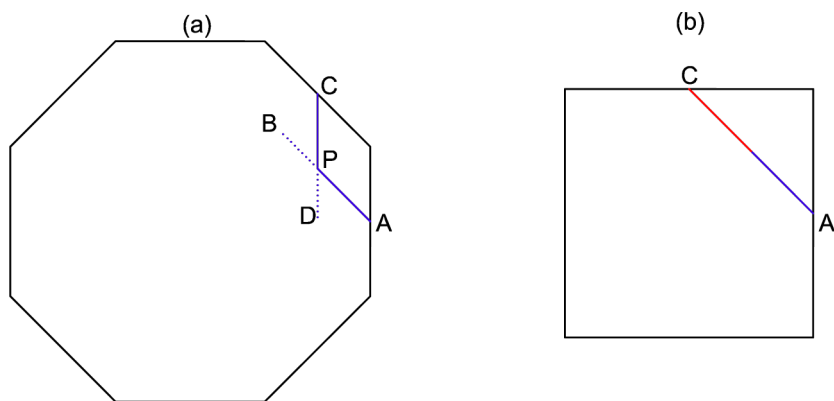


FIGURE 3.23 – Les deux cas d’intersections entre deux lignes.

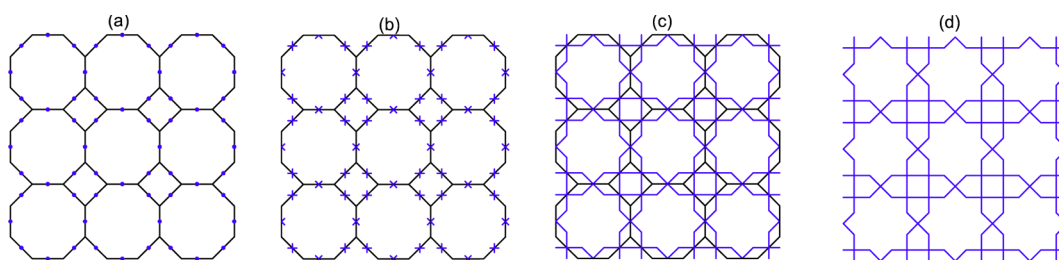


FIGURE 3.24 – Le processus de construction d’un motif géométrique par la méthode *PIC* : (a) identification des points de contact du pavage en question (4.8^2), (b) faire émerger des paires de lignes à chaque point de contact, (c) la troncature des lignes selon le critère de minimisation du coût du motif, (d) le motif obtenu après la suppression du pavage sous-jacent.

point de contact du milieu du côté du polygone.

La figure 3.25 montre plusieurs motifs obtenus en changeant le pavage et l'angle de contact. Pour chaque pavage, trois motifs sont dérivés en utilisant différents angles de contact comme indiqué au-dessous de chaque motif. Le changement de l'angle de contact nous permet d'obtenir les trois familles des motifs géométriques : aigüe, médiane, et obtuse. La quatrième famille de motifs à deux points : « *two points patterns* », sera discutée plus loin dans cette section partie.

L'algorithme décrit dans cette section peut être appliqué en plusieurs itérations sur le même polygone en vue d'améliorer le motif obtenu. Cette amélioration consiste à minimiser l'espace non couvert à l'intérieur des polygones réguliers de grand ordre. Cela revient, à prolonger les lignes du motifs à partir des points finaux de la première itération. La figure 3.26c montre l'amélioration du motif de la figure 3.26b en appliquant une deuxième itération pour le double hexagone. La figure 3.27 montre l'application de deux itérations pour deux pavages différents.

Les motifs à deux points peuvent être obtenus par la méthode *PIC*. Ce type de motif est dérivé du pavage en utilisant deux points de contact situés à la même distance du milieu du bord d'un polygone comme illustré dans la figure 3.28. Donc, en plus du pavage et de l'angle de contact, s'ajoute la distance entre les deux points de contact comme paramètre supplémentaire à l'entrée de l'algorithme. La figure 3.29 montre quelques exemples de motifs à deux points et la figure 3.30 montre trois motifs différents en augmentant la distance entre les deux points de contact de la gauche vers la droite.

3.5 Conclusion

L'étude méthodologique faite dans ce chapitre nous permet d'avoir une compréhension des méthodes de conception utilisées par les artisans pour construire les motifs géométriques de l'art islamique et les différents travaux qui ont essayé d'automatiser ces méthodes. Cette compréhension combinée avec la dimension scientifique de l'art géométrique islamique nous a permis d'élaborer une méthode de construction des motifs étoilés périodiques. Cette méthode qui est basée sur la théorie des groupes de symétries sera l'objectif du prochain chapitre.

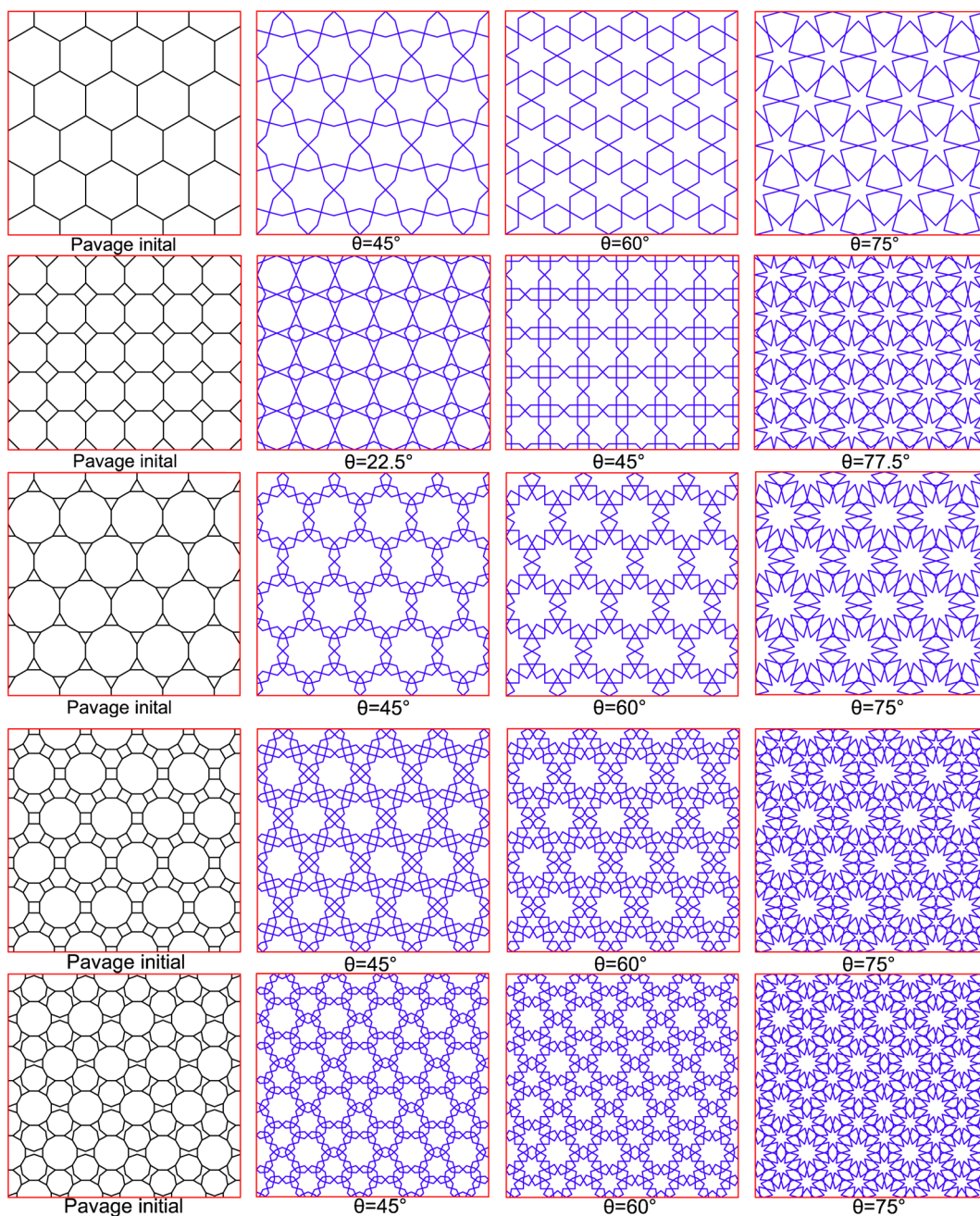


FIGURE 3.25 – Plusieurs motifs obtenus en appliquant la méthode de Hankin sur différents pavages et en utilisant différents angles de contact pour chaque pavage.

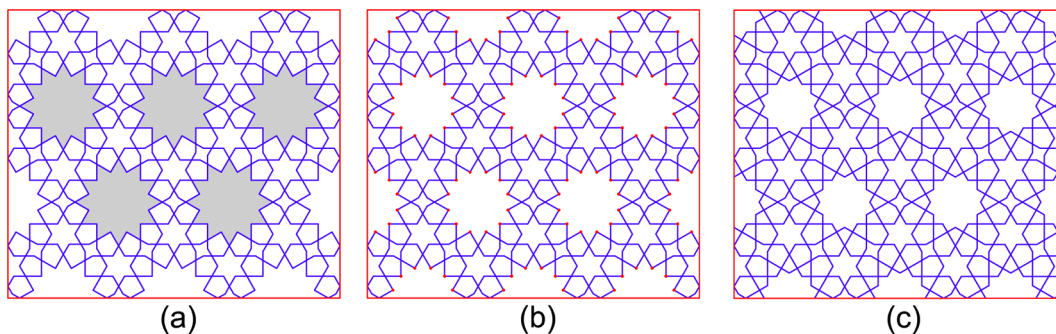


FIGURE 3.26 – Amélioration du motif par application de deux itérations du processus : (a) le résultat obtenu par la première itération dont l'espace non couvert s'avère très grand (en gris), (b) les points de départ de la deuxième itération (en rouge), (c) le motif obtenu après la deuxième itération au double hexagone.

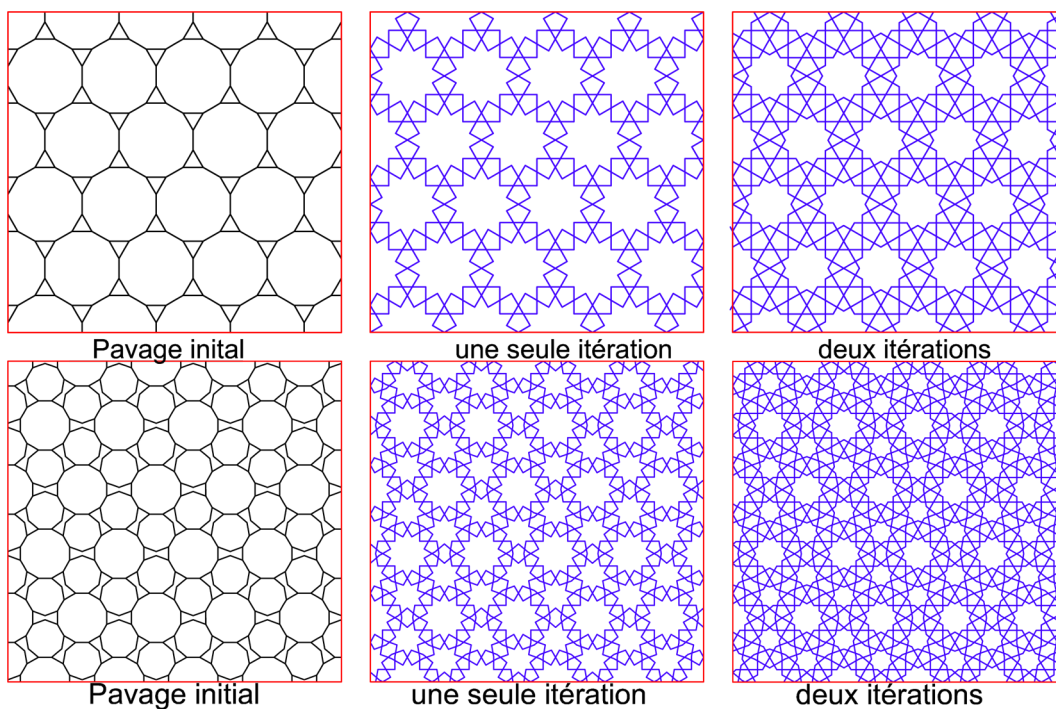


FIGURE 3.27 – Application de deux itérations pour deux motifs différents.

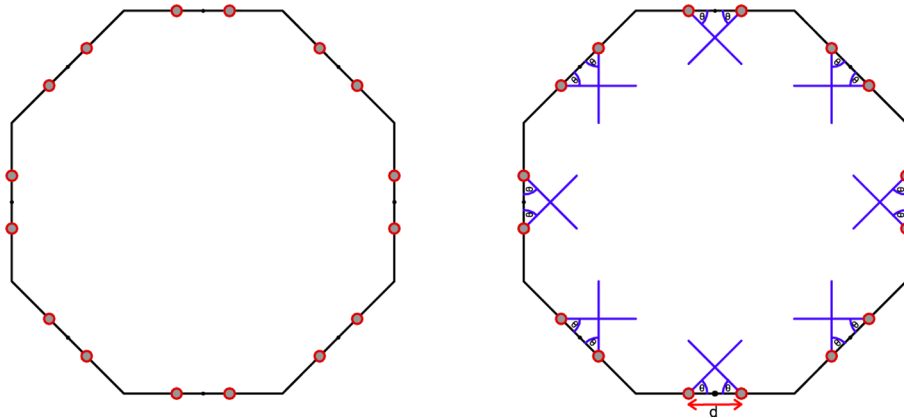


FIGURE 3.28 – Identification des points de contact pour un motif à deux points, les deux lignes sont émergées à partir de deux points différents.

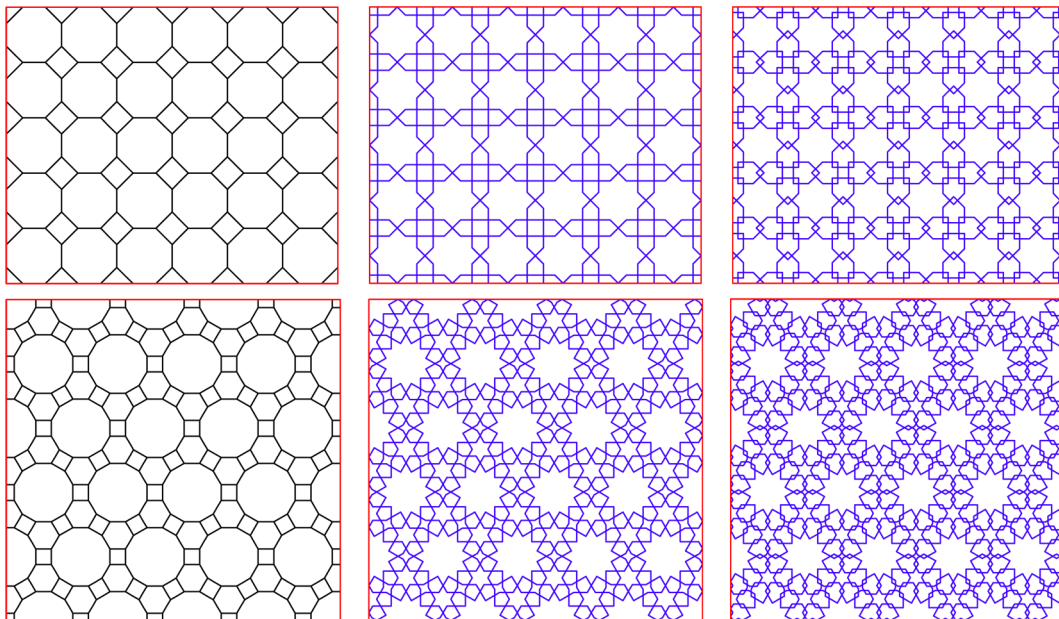


FIGURE 3.29 – Plusieurs motifs à deux points, la troisième colonne de chaque ligne montre le motif à deux points dérivé à partir du même pavage à gauche. La deuxième colonne sert à comparer les motifs avec un et deux points de contact pour un même pavage.

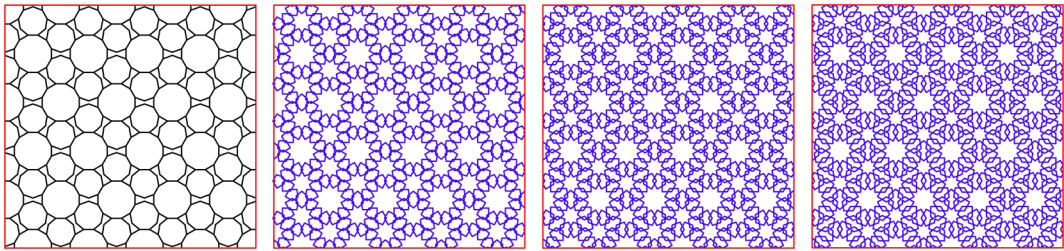


FIGURE 3.30 – Différents motifs à deux points dérivés du pavage à gauche en augmentant la distance entre les points de contact.

Chapitre 4

Méthode de construction des motifs périodiques basée sur la théorie des groupes de symétries

Sommaire

4.1	Introduction	74
4.2	Analyse de l'information géométrique de la région fondamentale	74
4.2.1	Analyse de motifs avec une seule étoile/rosace	75
4.2.2	Analyse de motifs périodiques avec plusieurs types d'étoiles/rosaces	75
4.2.3	Remarques importantes	75
4.3	L'étoile et la rosace	81
4.3.1	L'étoile	81
4.3.2	La rosace géométrique	82
4.4	Méthode proposée pour la construction des motifs périodiques	83
4.4.1	Construction du motif modèle	85
4.4.2	Construction de la partie de l'étoile/rosace contenue dans la région fondamentale	91
4.4.3	Génération du motif interstitiel	91
4.4.4	Génération du motif entier	94
4.5	Etude des cas	94
4.5.1	Motifs avec une seule étoile/rosace	94

4.5.2	Motifs avec deux étoiles/rosaces	96
4.5.3	Motifs avec trois rosaces	99
4.5.4	Cas spéciaux	99
4.6	Décoration	107
4.6.1	Coloration	110
4.6.2	Découpage	110
4.6.3	Entrelacement	110
4.7	Résultats et discussion	110
4.8	Conclusion	116

4.1 Introduction

Les ornements géométriques islamiques sont connus pour être basés dans leurs conceptions sur le concept de symétrie. Avec l'apparition de la théorie des groupes de symétries, les chercheurs se sont intéressés à l'étude des groupes cristallographiques dans l'art géométrique islamique. Par conséquent, la majorité des recherches se sont intéressées à l'analyse et la classification des motifs dans les 17 groupes de symétries.

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode de conception systématique et paramétrique qui permet la construction des motifs géométriques périodiques. Cette méthode est basée sur la théorie des groupes de symétries. Elle permet de générer des motifs géométriques étoilés avec un ou plusieurs types d'étoiles/ rosettes. Étant donné un groupe de symétrie, la méthode commence par construire, dans la région fondamentale, l'information minimale (*motif modèle*) nécessaire pour générer un motif d'un type de symétrie particulier. En opérant un ensemble de transformations dépendant du groupe de symétries sur le *motif modèle*, on obtient le *motif unitaire* (contenu de la cellule de base). Finalement, le motif entier est obtenu en répliquant le *motif unitaire* par des translations.

4.2 Analyse de l'information géométrique de la région fondamentale

Avant de décrire la méthode de conception proposée, nous commençons par une analyse des motifs périodiques, notamment, le contenu de leurs régions fondamentales (*motifs modèles*). L'objectif est de décrire les différentes composantes du *motif modèle* à partir d'un cahier de charges établissant les propriétés du motif périodique à construire.

4.2.1 Analyse de motifs avec une seule étoile/rosace

La figure 4.1 représente un motif périodique de type $p6m$ constitué de plusieurs étoiles à 12 (représentées en bleu). Ces étoiles sont arrangées de manière à ce qu'elles aient un sommet en commun ou qu'elle soient connectées entre elles par un motif interstitiel (Fig. 4.1c). Si on se restreint au contenu de la région fondamentale (Fig. 4.1e), on remarque qu'elle contient une partie de l'étoile à 12 centrée sur un sommet du triangle et une partie du motif interstitiel. Le sommet en commun entre les étoiles est dû à la présence d'un sommet de l'étoile sur un côté de la région fondamentale. Donc, ce sommet est en commun entre l'étoile et son image par la symétrie axiale par rapport au côté du triangle. La partie de l'étoile contenue dans le triangle est constituée simplement de deux demi-pétales symétriques. L'analyse de l'ornement de la figure 4.2 constitué de plusieurs copies d'une même rosace d'ordre 12 permet d'aboutir aux mêmes conclusions.

4.2.2 Analyse de motifs périodiques avec plusieurs types d'étoiles/rosaces

La figure 4.3 représente un motif géométrique historique de type $p6m$. Ce motif est constitué de deux rosaces différentes (une rosace d'ordre 12 et une autre d'ordre 9). La figure 4.4 représente un motif périodique de type $p6m$ constitué de deux étoiles (une étoiles d'ordre 12 et une autre d'ordre 6) et la figure 4.5 représente un motif contenant trois types de rosaces (rosaces d'ordres 24, 12 et 8). Dans les trois motifs, Les rosaces (respectivement les étoiles) sont centrées sur les sommets du triangle. La région fondamentale contient une partie de chaque rosace (respectivement de chaque étoile) ainsi qu'une partie du motif interstitiel. La taille de chaque rosace (étoile) est proportionnelle à son ordre.

4.2.3 Remarques importantes

A partir de l'analyse effectuée précédemment, nous déduisons ce qui suit :

1. Pour construire un motif périodique il faut d'abord construire le *motif modèle* à l'intérieur de la région fondamentale puis appliquer les transformations appropriées selon le groupe de symétries choisi.
2. Les motifs peuvent être constitués d'un seul type de rosace/étoile ou de plusieurs types.
3. Dans la plupart des cas, comme ceux analysés dans les figures précédentes,

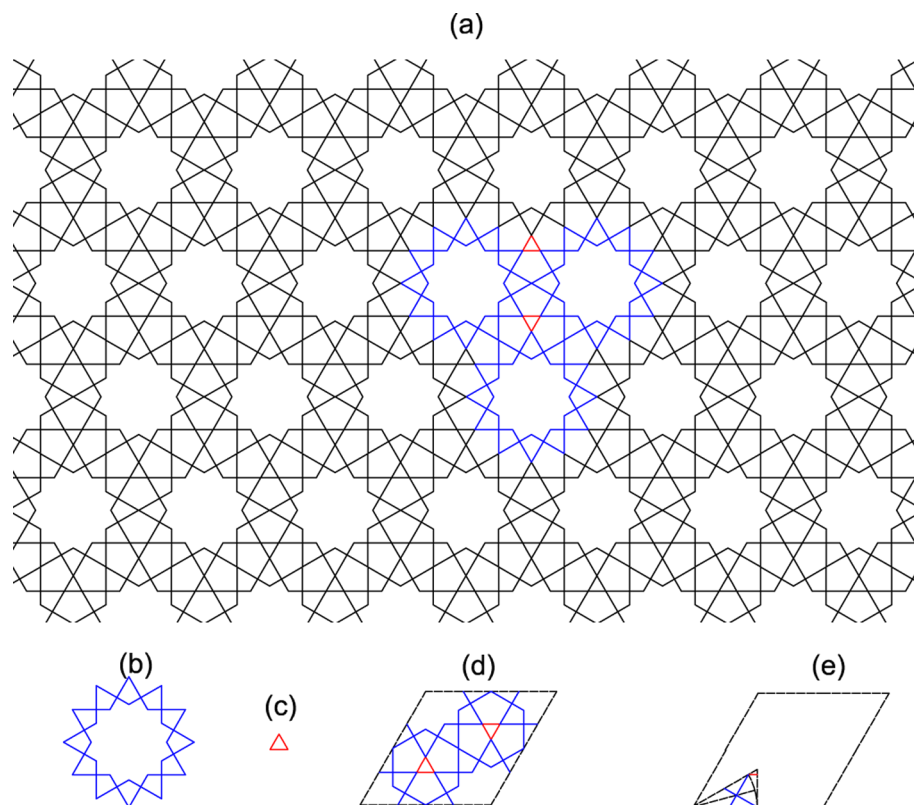


FIGURE 4.1 – Motif périodique de type $p6m$ constitué d'étoiles d'ordre 12. C'est un motif historique qu'on trouve dans ([3] page 173), (a) le motif périodique (b) l'étoile d'ordre 12, (c) le motif interstitiel, (d) la cellule de base contenant le *motif unitaire*, (e) le *motif modèle* contenu dans la région fondamentale.

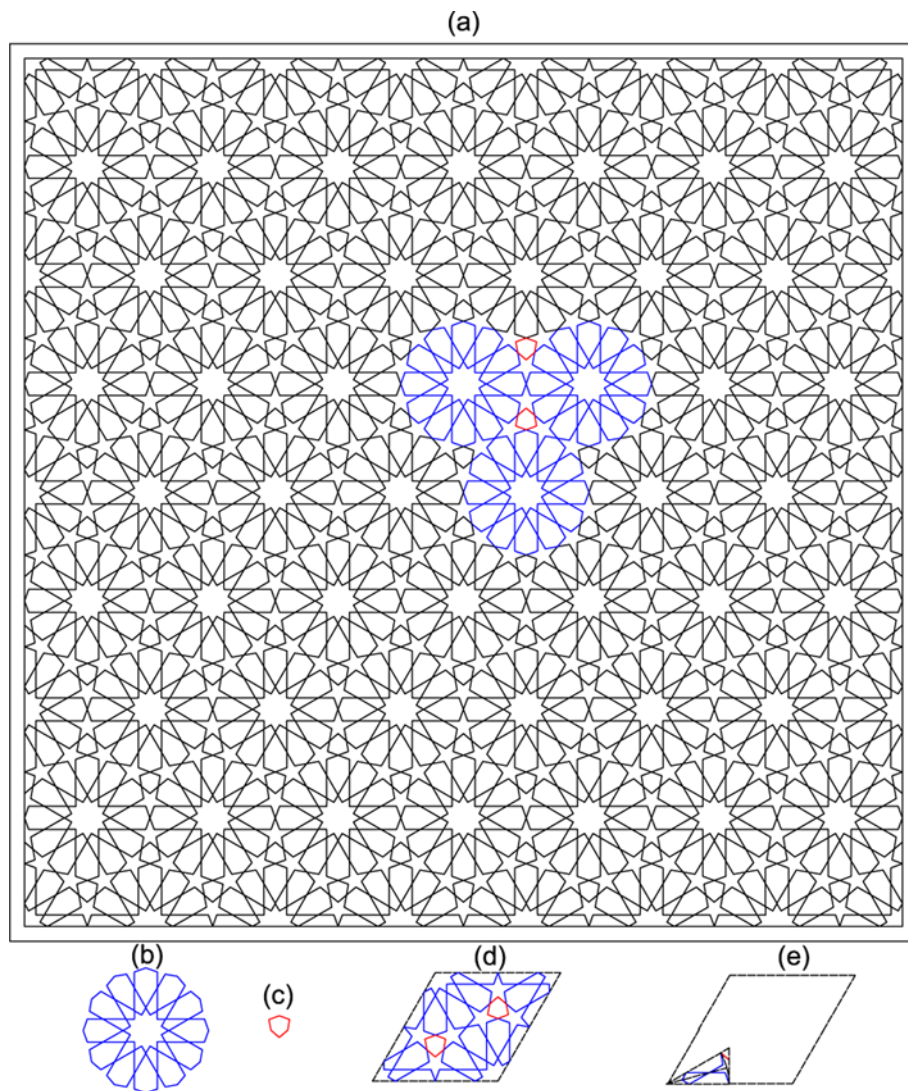


FIGURE 4.2 – Un motif périodique fameux de l’art géométrique islamique de type $p6m$ constitué de plusieurs rosaces à 12, (a) le motif périodique (b) la rosace d’ordre 12, (c) le motif interstitiel, (d) la cellule de base contenant le *motif unitaire*, (e) le *motif modèle* contenu dans la région fondamentale.

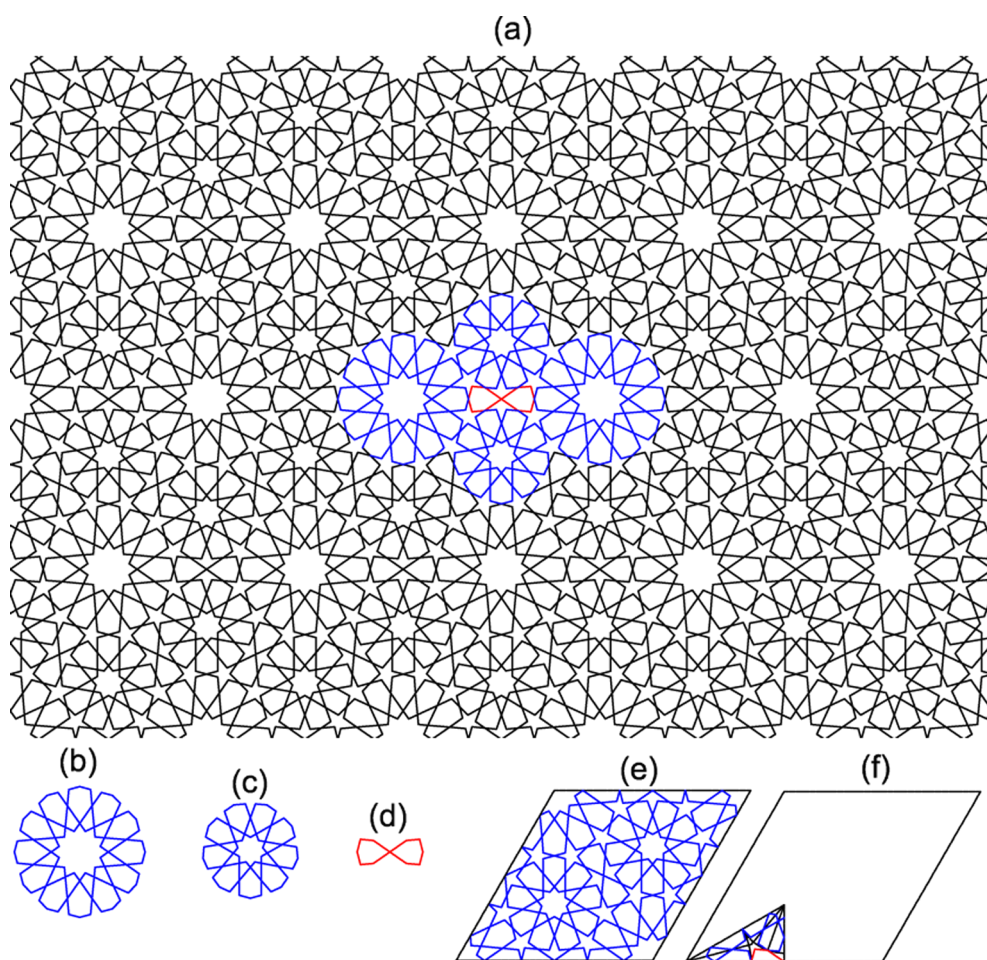


FIGURE 4.3 – Motif historique contenant deux types de rosaces (une rosace à 12 et une rosace à 9) qu'on trouve dans ([3] page 193), (a) le motif périodique (b) la rosace d'ordre 12, (c) rosace d'ordre 9, (d) le motif interstitiel, (e) la cellule de base contenant le *motif unitaire*, (f) le *motif modèle* contenu dans la région fondamentale.

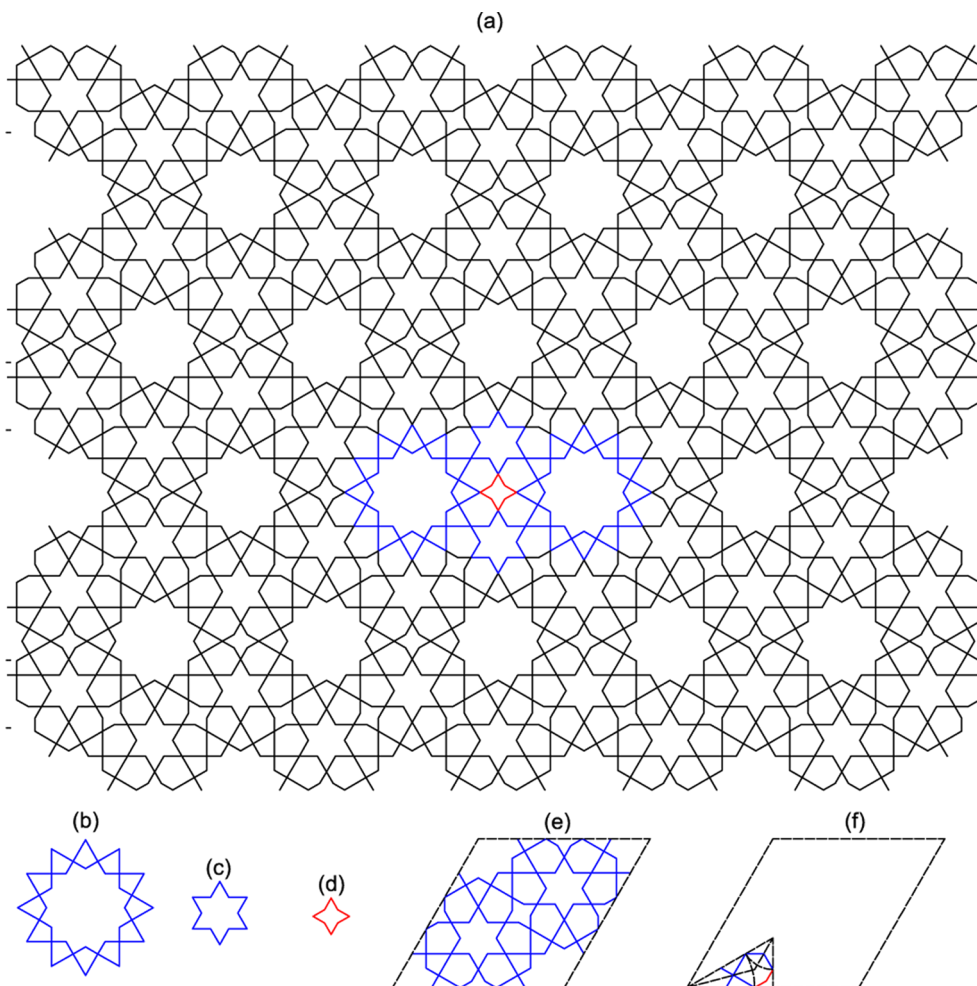


FIGURE 4.4 – Motif historique contenant deux types d'étoiles (une étoile à 12 et une étoile à 9) qu'on trouve dans ([3] page 193), (a) le motif périodique (b) étoile d'ordre 12, (c) étoile d'ordre 9, (d) le motif interstitiel, (e) le *motif unitaire* contenu dans la cellule de base, (f) le *motif modèle* contenu dans la région fondamentale.

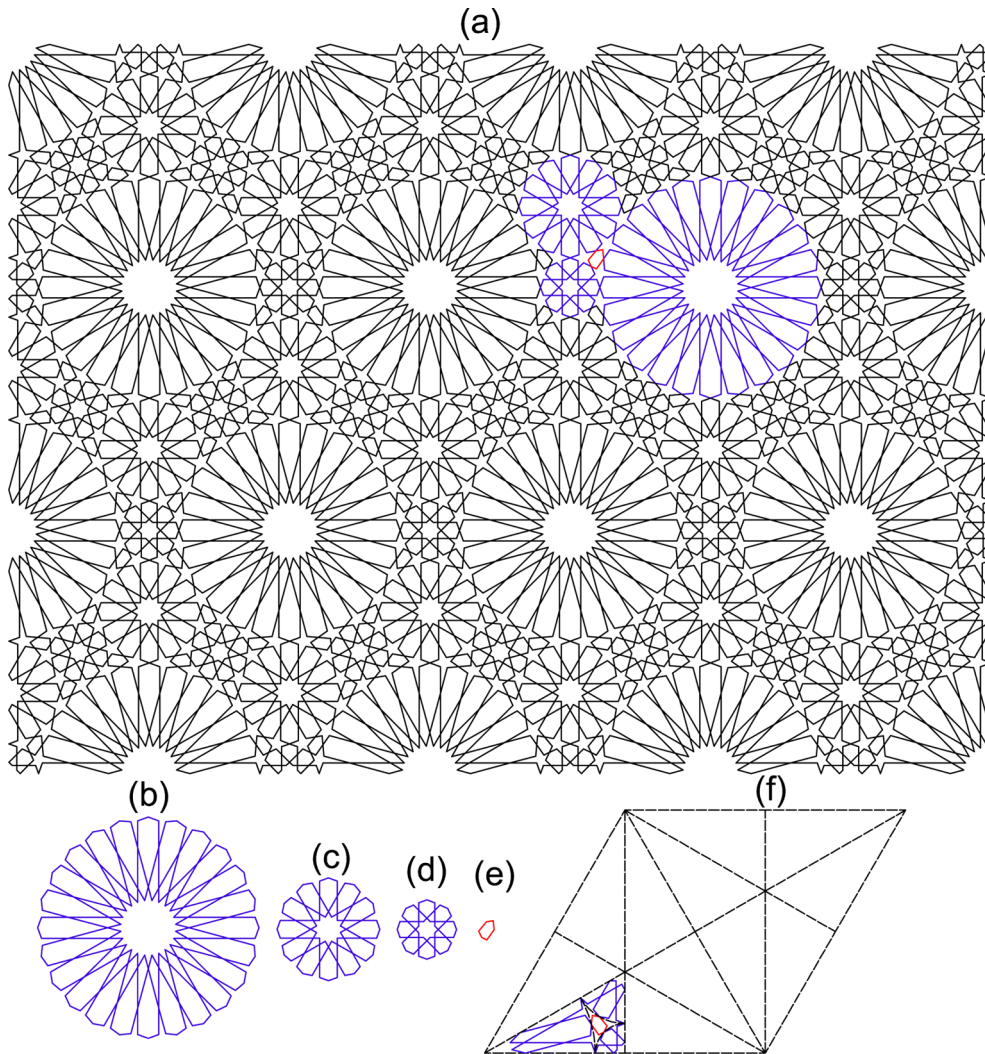


FIGURE 4.5 – Motif contenant trois types de rosaces (une rosace à 24, une rosace à 12 et une rosace à 8), (a) le motif périodique (b) rosace d'ordre 24, (c) rosace d'ordre 12, (d) rosace d'ordre 8, (e) le motif interstitiel, (f) le *motif modèle* contenu dans la région fondamentale.

les étoiles/rosaces sont centrées sur les sommets de la région fondamentale.

4. La région fondamentale contient une information géométrique constituée des parties des rosaces/étoiles et d'une partie du motif interstitiel qui les connectent.
5. La partie de la rosace/étoile contenue dans la région fondamentale est constituée de plusieurs demi-pétales symétriques.
6. Pour construire une partie de la rosace/étoile, il suffit de construire un demi-pétale puis appliquer des symétries axiales consécutives sur celui-ci.

4.3 L'étoile et la rosace

L'analyse précédente nous a permis de déterminer les composantes de l'information minimale (*le motif modèle*) nécessaire pour générer un motif périodique. Cette dernière contient une ou plusieurs parties des rosaces/étoiles du motif.

4.3.1 L'étoile

Une étoile est un ensemble de segments de droite arrangés d'une manière spécifique. Nous avons déjà vu comment une étoile peut apparaître naturellement en exécutant l'algorithme d'inférence, développé par Kaplan, sur un polygone régulier. Il peut également être utile d'exprimer des étoiles en tant qu'éléments de conception de niveau supérieur, afin d'exercer un contrôle direct sur celles-ci.

Grünbaum et Shephard [12], montrent comment les polygones étoilés peuvent être définis en utilisant la notation $\{n/d\}$, où n et d sont des entiers, $n \geq 3$, et $1 \leq d < \lceil n/2 \rceil$. L'étoile est construite en plaçant les points v_1, \dots, v_n aux sommets d'un polygone régulier d'ordre n , et en joignant chaque point v_i à v_{i+d} . Pour des besoins du design ornemental, Lee [2] a ajouté un paramètre s , qui décrit le nombre d'intersection entre un segment de droite et les autres segments de droite, aux paramètres présentés ci-dessus pour arriver à la description finale $\{n/d\} s$ de l'étoile (Fig. 4.6). Au lieu de s'appuyer sur la notation $\{n/d\} s$, il est plus pratique de paramétrer les étoiles en donnant directement l'angle de contact θ [59] (Fig. 4.6).

Nous avons choisi une définition de l'étoile, similaire à celle utilisée par Kaplan, en utilisant les paramètres (N, R, θ, S) avec une petite différence au niveau de l'angle θ (voir Fig. 4.7) :

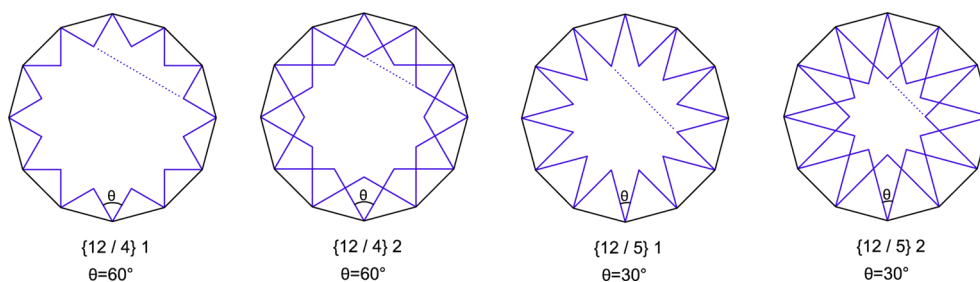


FIGURE 4.6 – Construction d’un polygone étoilé d’ordre 12 selon la démarche décrite dans [2], [12] avec les paramètres $\{n/d\} s$.

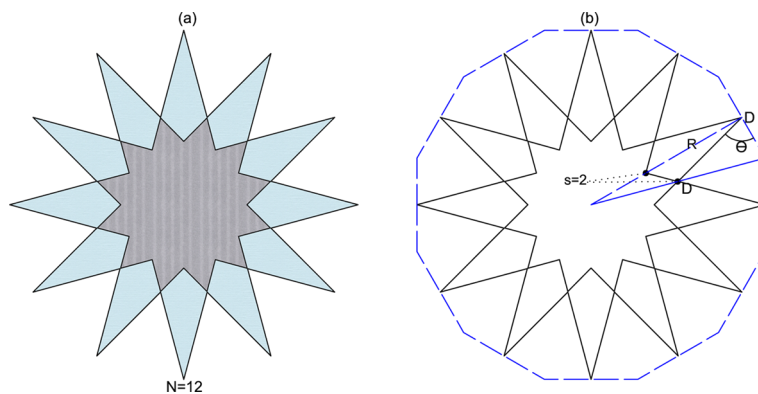


FIGURE 4.7 – (a) Une étoile à 12, (b) les paramètres qui définissent une étoile.

- N est l’ordre de l’étoile.
- R est le rayon de l’étoile.
- θ est l’angle formé par le segment DG et le coté du polygone régulier (Fig. 4.7b).
- S est le nombre d’intersections entre un segment de droite et les autres segments de droite (Fig. 4.7b).

4.3.2 La rosace géométrique

La rosette est l’un des motifs les plus caractéristiques de l’art islamique. Elle peut être considérée comme une étoile entourée par des hexagones (Fig. 4.8a). La construction d’une rosace idéale a été décrite par Lee [2] (Fig. 4.8). Étant donné le polygone circonscrit P , le point B est déterminé sur HC de façon à ce que $HB = HD$. Le point G est l’intersection de ED et la droite

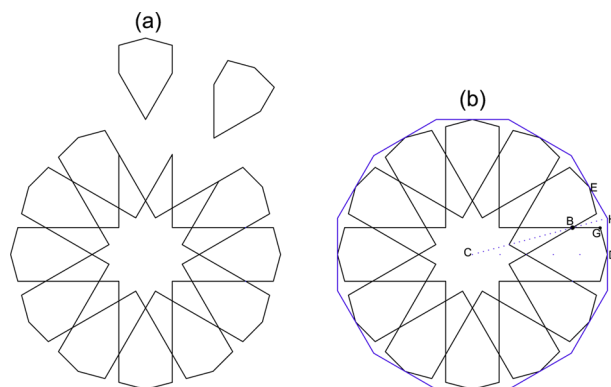


FIGURE 4.8 – (a) Rosace à 12, (b) Construction d’une rosace idéale selon la démarche de Lee [2]

passant par B et parallèle à CD . Le résultat est un motif où $DG = BG$ et $(H\hat{B}G) = (H\hat{D}G)$ (Fig. 4.8b). Kaplan a défini la rosace en utilisant six paramètres [59]. En se basant sur la construction de Lee, nous avons défini une rosace avec cinq paramètres : $(N, R, S, \theta, \varphi)$ (Fig. 4.9). Les angles θ et φ sont respectivement $(H\hat{D}G)$ et $(H\hat{B}G)$ dans la construction de Lee.

4.4 Méthode proposée pour la construction des motifs périodiques

La plupart des méthodes basées sur la théorie des groupes de symétries ne peuvent que contribuer à la compréhension de la structure de composition mathématique du motif dans le plan entier, mais elles ne révèlent pas comment générer le *motif modèle* contenu dans la région fondamentale.

Jusqu’à présent, la majorité des techniques de construction sont basées sur le pavage. Le but de ce travail est de se débarrasser du pavage dans le processus de construction des motifs géométriques islamiques. Notre méthode se focalise sur la génération du contenu géométrique des régions fondamentales en introduisant un processus de construction détaillé dans le contexte de la théorie des groupes de symétries. C’est une contribution significative par rapport aux études qui sont principalement axées sur la relation entre les motifs géométriques islamiques et les 17 groupes de symétrie [3, 5, 50] [60, 61, 62, 63] [1, 51, 4]. D’autre part, ce travail améliore celui de Kaplan et Salesin [6] en fournissant un processus généralisé pour les motifs périodiques. Ce travail élimine l’étape de construction du pavage par la manipulation directe de la région fondamentale et permet de générer des motifs qui sont

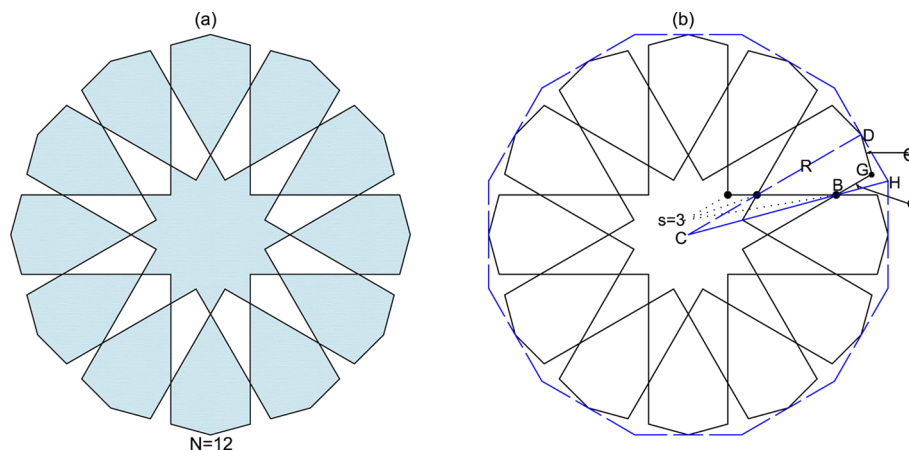


FIGURE 4.9 – (a) Une rosace à 12, (b) les paramètres $(N, R, \theta, \varphi, S)$ qui définissent une rosace.

jusqu'au là irréalisables par la technique polygonale.

Fondamentalement, dans un processus de construction basé sur la théorie des groupes de symétries, la fixation du groupe de symétries détermine un ensemble de transformations. Si nous fournissons un *motif modèle* comme donnée d'entrée, ces transformations agissent pour créer le *motif unitaire*. Le *motif unitaire* est ensuite copié sur un réseau approprié pour produire le motif entier. Ainsi, le processus de construction d'un motif périodique peut être divisé en trois étapes fondamentales :

1. Construire le *motif modèle*.
2. Appliquer les symétries appropriées pour générer le *motif unitaire*.
3. Appliquer des translations pour obtenir le motif entier.

La deuxième étape dépend des symétries du groupe choisi et la troisième étape dépend des vecteurs générateurs de la cellule de base. Abas et Salman ont décrit ces deux étapes pour tous les groupes cristallographiques pour un *motif modèle* donné [4]. Cependant, la première étape qui est la plus importante n'est pas couverte. L'importance de la première étape est due au fait qu'elle permet de déterminer l'aspect final du motif en générant toute l'information géométrique minimale nécessaire pour sa construction. Le nombre des étoiles/rosaces, leurs ordres et leurs rayons sont définies dans cette étape.

Le travail présenté dans ce chapitre permet de combler cette lacune en proposant une méthode systématique de génération de ce *motif fondamental*.

	$p6m$	$p4m$	cmm	pmm
Vertex A	$N_A = 2 \times i_A$	$N_A = 2 \times i_A$	$N_A = 2 \times i_A$	$N_A = 2 \times i_A$
Vertex B	$N_B = 3 \times i_B$	$N_B = 4 \times i_B$	$N_{BC} = 2 \times i_B + 2 \times i_C$	$N_B = 2 \times i_B$
Vertex C	$N_C = 6 \times i_C$	$N_C = 4 \times i_C$	$N_{BC} = 2 \times i_B + 2 \times i_C$	$N_C = 2 \times i_C$
Vertex D				$N_D = 2 \times i_D$

TABLE 4.1 – Ordre de la rosace/étoile compatible avec chaque sommet des régions fondamentales des groupes $p6m$, $p4m$, cmm et pmm .

4.4.1 Construction du motif modèle

La conception du contenu de la région fondamentale consiste simplement à générer l'information géométrique minimale nécessaire pour la construction d'un motif périodique. La phase d'analyse nous a permis de déduire que cette information est constituée des parties des étoiles / rosaces et d'une partie du motif interstitiel qui les connectent. La région fondamentale sera donc divisée en plusieurs zones en fonction du contenu à générer.

En général, le processus de construction du *motif modèle* peut être divisé en quatre étapes : la génération d'une grille radiale, la construction d'un demi-pétale, la construction d'une partie de l'étoile/rosace et la génération du motif interstitiel.

4.4.1.1 Grille radiale

Cette étape consiste d'abord à définir la zone qui va contenir la partie de la rosace/étoile et la zone qui va contenir le motif interstitiel. Elle consiste ensuite à diviser la zone dédiée à chaque rosace/étoile en plusieurs secteurs. Pour une rosace centrée sur un sommet V , l'angle au sommet V sera divisé en plusieurs sous-angles en fonction de l'ordre de la rosace et de l'ordre de symétrie en V .

Le tableau 4.1 permet de déterminer le nombre de divisions pour chaque angle de la région fondamentale pour différents groupes de symétrie en fonction de l'ordre de la rosace/étoile. La notation des sommets utilisée dans ce tableau est la même que celle de la figure 4.10 qui illustre les cellules de base et les régions fondamentales des groupes $p6m$, $p4m$, cmm et pmm . Ces groupes sont les plus fréquents dans l'art géométrique islamique (pour avoir une idée sur les fréquences des 17 groupes cristallographiques dans l'art géométrique islamique vous pouvez consulter [3, 5]). La figure 4.11 montre la construction des grilles radiales pour trois motifs de type $p6m$ avec un, deux et trois types de rosaces. La détermination des rayons des rosaces/étoiles sera discutée en détails dans la section dédiée à l'étude des cas.

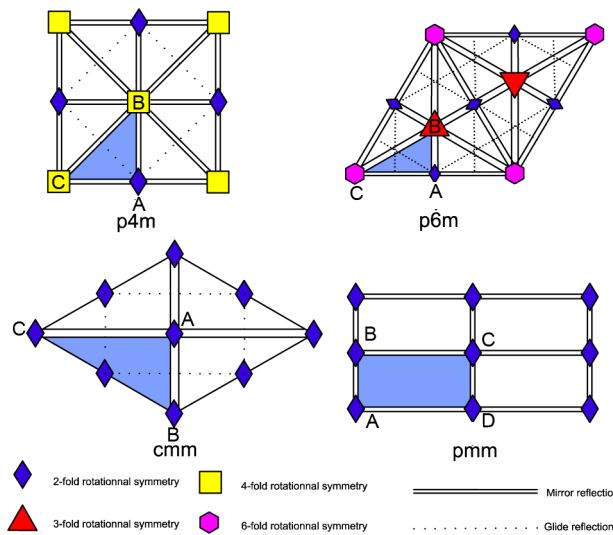


FIGURE 4.10 – Cellules de base et régions fondamentales des groupes (a) $p6m$, (b) $p4m$, (c) cmm et (d) pmm .

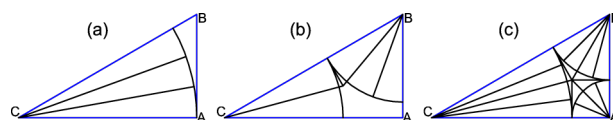


FIGURE 4.11 – Construction de la grille radiale dans la région fondamentale du groupe $p6m$. (a) la grille radiale pour un motif de type $p6m$ qui va contenir une rosace à 18 centrée sur le sommet C , (b) grille radiale pour un motif qui va contenir une rosace à 12 centrée sur C et une rosace d'ordre 9 centrée sur le sommet B , (c) la grille radiale pour un motif qui va contenir une rosace d'ordre 24 centrée sur C , une rosace d'ordre 12 centrée sur B et une rosace d'ordre 8 centrée sur le sommet A .

Comme l'indique le tableau 4.1, les sommets B et C de la région fondamentale du groupe $cm\bar{m}$ sont dépendants. Cela est dû à la superposition de ces sommets lors de l'application des translations sur la cellule de base. De ce fait, les parties des rosaces/étoiles contenues dans l'angle de chaque sommet doivent être complémentaires. C'est-à-dire que l'union de ces parties constitue une même rosace/étoile. Autrement dit, on construit la même rosace/étoile (on utilise les mêmes paramètres $(N, R, S, \theta, \varphi)$) sur les deux sommets comme l'illustre la figure 4.12. Les angles \hat{B} et \hat{C} du triangle minimal du groupe $cm\bar{m}$ ne sont pas déterminés à priori (à l'inverse des groupes $p6m$ et $p4m$), et ils seront déterminés en fonction de la rosace/étoile centrée sur les deux sommets B et C . Comme l'indique le tableau 4.1, les angles \hat{B} et \hat{C} seront divisés respectivement en i_B et i_C divisions de π/N chacune. Nous avons donc :

$$i_C \times \pi/N_{BC} + i_B \times \pi/N_{BC} = \pi/2 \quad (4.1)$$

Ainsi, les angles \hat{B} et \hat{C} sont déterminés par les équations :

$$\hat{C} = i_C \times \pi/N_{BC} \quad (4.2)$$

$$\hat{B} = i_B \times \pi/N_{BC} \quad (4.3)$$

4.4.1.2 Construction d'un demi-pétale d'une rosace/étoile

Plusieurs chercheurs ont donné différentes méthodes de construction de l'étoile et de la rosace géométrique [2, 6]. Dans cette section on va présenter une nouvelle méthode de construction.

La rosace/étoile peut être obtenu par la combinaison d'un demi-pétale avec ses copies symétriques (comme l'indique la figure 4.13). Après la construction de la grille radiale, il faut construire un demi-pétale dans chaque division de la grille. La construction d'un demi-pétale d'une rosace peut être achevée en suivant la démarche suivante. On commence par tracer un segment de droite $S_0 = KG$ à partir du point K , qui définit le rayon R de la rosace, jusqu'à la bissectrice de l'angle $(\hat{C}EK)$. EK est la droite perpendiculaire à BC en K (Fig. 4.14a). Ensuite, on développe un deuxième segment de droite S_1 à partir du point G vers la borne de la division (Fig. 4.14b). S_0 et S_1 définissent respectivement les paramètres θ et φ de la rosette (Fig. 4.14b). Le segment de droite S_1 est considéré comme un rayon lumineux et les bords de la division sont considérés comme des miroirs. En le propageant vers le

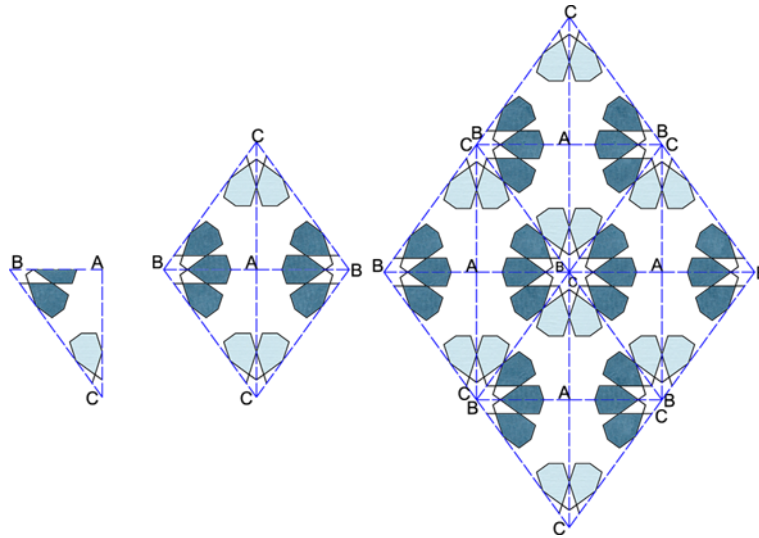


FIGURE 4.12 – Région fondamentale contenant des portions d’une rosace à 10, cellule de base obtenue par application des symétries axiales par rapport à AB et AC et le résultat de la duplication de la cellule de base où les parties des rosettes centrées sur B et C sont jointes pour former une même rosace.

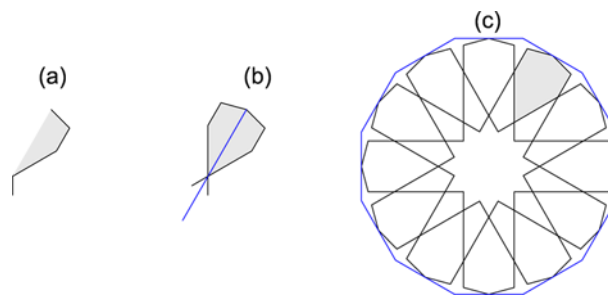


FIGURE 4.13 – (a) Un demi-pétale d’une rosace, (b) un pétale complet obtenu par application d’une symétrie axiale, (c) la rosace obtenue en appliquant une rotation d’ordre 12 sur le pétale. Le demi-pétale doit être inscrit dans un angle de π/N (N est l’ordre de la rosace) pour éviter les chevauchements entre les pétales lors de l’application de la rotation d’ordre N .

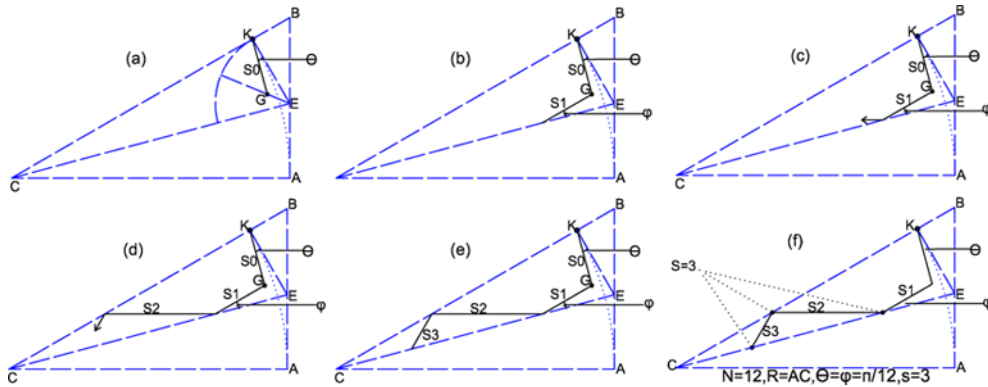


FIGURE 4.14 – Construction d’un demi-pétale à l’intérieure d’une division de la grille radiale, (a) le premier segment de droite $S_0 = KG$ qui définit l’angle θ de la rosace, (b) le deuxième segment de droite S_1 qui définit l’angle φ de la rosace, (c) le segment de droite S_1 est considéré comme un rayon lumineux et il va subir des réflexions sur les bornes de la division, (d) production du segment S_2 par réflexion de S_1 sur EC , (e) production de S_3 par réflexion de S_2 sur KC , (f) le demi-pétale construit dont tous les paramètres de la rosace sont définis.

centre de la rosace, il va subir des réflexions successives sur les frontières de la division (Si l’angle d’incidence est différent de $\pi/2$). Ces réflexions vont conduire à la production des segments de droite S_2, \dots, S_s (où s est le paramètre de la rosette décrit dans la figure 4.9b). Si $\theta = \varphi$, alors S_0 et S_1 sont symétriques par rapport à la bissectrice de l’angle (\widehat{CEK}) , et le demi-pétale est entièrement dérivé du premier segment $S_0 = KG$!

On remarque que tous les paramètres sont définis par le demi-pétale d’une rosace, ce qui signifie que la forme de la rosace est définie à ce point-là (Fig. 4.14f).

Pour construire le demi-pétale d’une étoile, nous suivons les mêmes étapes décrites ci-dessus sauf que le point G est supprimé et le segment S_0 arrive directement sur le bord de la division (Fig. 4.15). Le dernier segment de droite sera donc S_{s-1} (s est le paramètre défini dans la figure 4.7b).

Si le motif va contenir plusieurs étoiles/rosaces on procède de la même façon pour créer le demi-pétale de chaque étoile/rosace (Fig. 4.16).

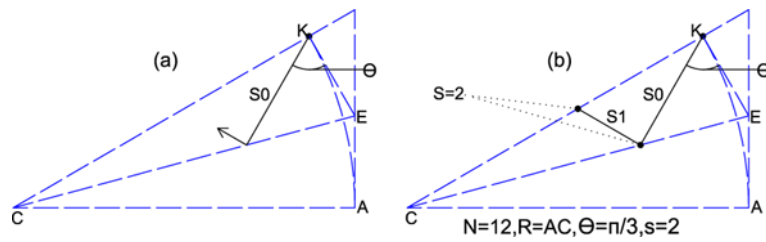


FIGURE 4.15 – Construction d’un demi-pétale d’une étoile à l’intérieur d’une division, (a) le premier segment de droite S_0 qui définit l’angle θ de l’étoile, (b) le demi-pétale construit dont tous les paramètres de l’étoile sont bien définis.

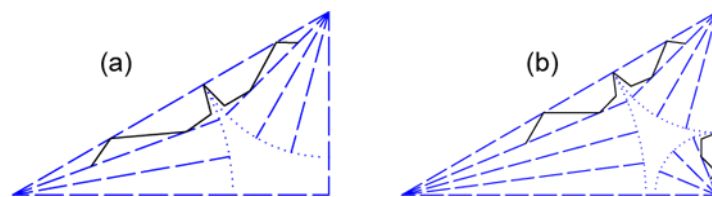


FIGURE 4.16 – Deux régions fondamentales de deux motifs avec plusieurs types de rosaces dont les demi-pétales sont construits. (a) deux demi-pétales de deux rosaces, (b) trois demi-pétales de trois rosaces.

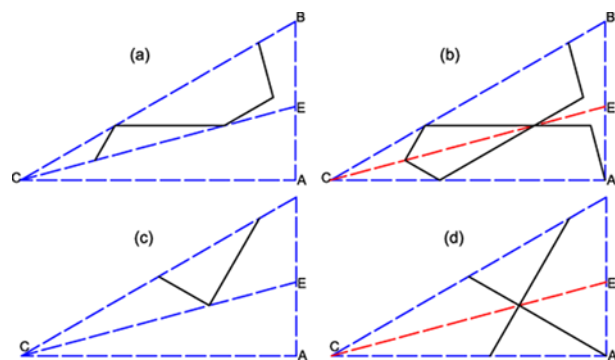


FIGURE 4.17 – Construction de la partie de l'étoile/rosace contenue dans la région fondamentale, (a) le demi-pétale d'une rosace, (b) application d'une symétrie axiale par rapport à la ligne de division (en rouge), (c) demi-pétale d'une étoile, (d) application d'une symétrie axiale par rapport à la ligne de division (en rouge).

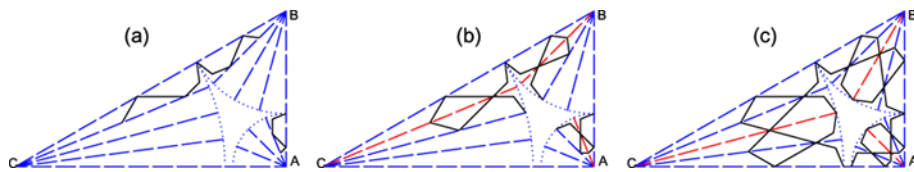


FIGURE 4.18 – Génération de plusieurs parties de différentes rosaces. (a) les demi-pétales générés, (b) application d'une symétrie axiale sur chaque demi-pétale, (c) les trois parties des trois rosaces sont générées.

4.4.2 Construction de la partie de l'étoile/rosace contenue dans la région fondamentale

La rosace peut être obtenue en combinant le demi-pétale construit avec ses copies symétriques. Nous nous limitons à la partie de la rosace contenue dans la région fondamentale. Nous obtenons cette partie en appliquant des symétries axiales successives sur le premier demi-pétal construit par rapport aux lignes de la grille radiale (Fig. 4.17, Fig. 4.18).

4.4.3 Génération du motif interstitiel

Après avoir construit les parties d'étoiles/rosaces, nous devons générer le contenu de la zone interstitielle (la zone vide dans la figure 4.18c. Nous avons besoin d'un algorithme, un moyen générique pour dériver la géométrie de la

zone interstitielle à partir des informations géométriques sur la partie déjà construite dans les étapes précédentes. Cette zone peut être définie comme la partie qui se trouve à l'extérieure des cercles entourant les rosettes/étoiles du motif.

Pour atteindre cet objectif, la méthode la plus simple est de prolonger les segments de droite adjacents à la zone interstitielle vers son intérieure. Les côtés de la région fondamentale sont considérés comme des miroirs [1]. Par conséquent, les segments de droite adjacents à la zone interstitielle et qui sont en contact avec un côté de la région fondamentale seront réfléchis. Prenons l'exemple de la figure 4.19, les segments de droite adjacents à la zone interstitielle sont colorés en rouge. Un de ces segments a un sommet sur le côté AB de la région fondamentale, donc il va subir une réflexion sur ce côté pour ne pas être prolongé vers l'extérieur du triangle. Les autres segments de droite vont être prolongés vers l'intérieur de la zone interstitielle.

Pour bien gérer cette zone nous proposons un algorithme nommé « *algorithme d'extension/réflexion* ». Ce nom est dû au fait que chaque segment de droite adjacent à la zone interstitielle et qui a un sommet libre serait prolongé ou réfléchi (Fig. 4.19b).

Le sommet libre d'un segment de droite e_i est noté p_i . Le sommet p_i qui se trouve sur un côté de la région fondamentale est nommé *point de réflexion* (points rouges de la figure 4.19) et les autres sommets sont nommés *points d'extension* (points verts de la figure 4.19). Chaque segment de droite e_i dont p_i est un *point d'extension* sera prolongé et chaque segment de droite e_j dont p_j est un *point de réflexion* sera réfléchi sur le bord de la région fondamentale. Ensuite, on calcul toutes les intersections de chaque segment e_i avec les autres segments. Les étapes de l'algorithme *d'extension/réflexion* sont les suivantes :

1. Si deux segments de droite e_i et e_j ($j \neq i, p_i \neq p_j$) se croisent au point h_{ij} ; alors on stocke le segment de droite $p_i h_{ij}$ dans l'ensemble H_{e_i} et on stocke $p_j h_{ij}$ dans H_{e_j} .
2. Si les segments de droites e_i et e_j sont colinéaires; et h_{ij} est le milieu de $p_i p_j$; alors on stocke le segment de droite $p_i h_{ij}$ dans l'ensemble H_{e_i} et on stocke $p_j h_{ij}$ dans H_{e_j} .
3. Si e_i et le côté s_k (s_k est un bord de la région fondamentale) se croisent au point m_{ik} ; alors on stocke $p_i m_{ik}$ dans H_{e_i} .
4. Pour chaque segment de droite e_i , on calcul le minimum de son ensemble H_{e_i}
5. Si le minimum de l'ensemble H_{e_i} correspond à un point d'intersection avec un côté s_k ($\min(H_{e_i}) = p_i m_{ik}$); alors, on ajoute le segment de droite $p_i m_{ik}$ au *motif interstitiel*.

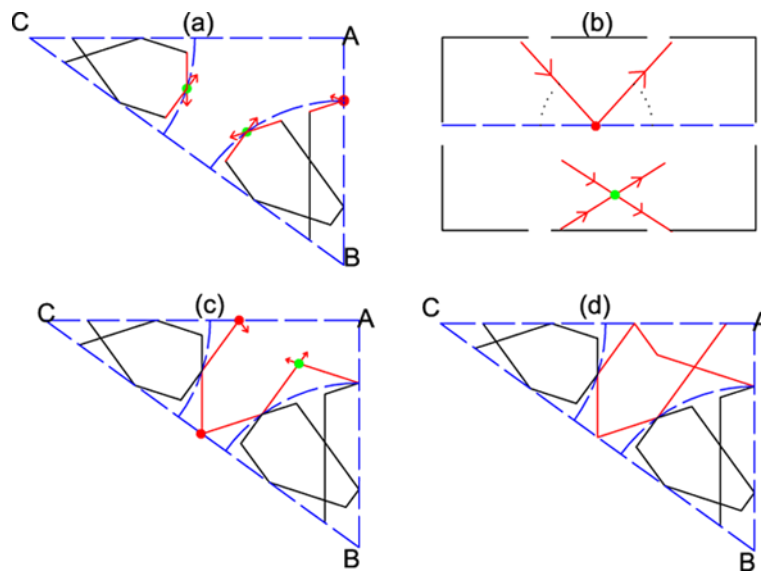


FIGURE 4.19 – Processus d’extension/réflexion. (a) détermination des points d’extension (points verts) et des points de réflexion (point rouge), (b) le segment de droite ayant un point de réflexion sera réfléchi comme un rayon lumineux et les segments ayant un point d’extension seront prolongés, (c) la première itération du processus dont les deux rosaces ne sont pas bien connectées, (d) la deuxième itération dont les rosaces sont bien connectées.

6. Si $\min(H_{e_i}) = p_i h_{ij}$ et $\min(H_{e_j}) = p_j h_{ij}$ (Le point h_{ij} est la première intersection pour les deux segments de droite e_i et e_j) ; alors on ajoute $p_i h_{ij}$ et $p_j h_{ij}$ au *motif interstitiel*.
7. Si aucune des conditions 5 et 6 n’est vérifiée pour un segment de droite e_i ; nous supprimons les segments de droite $p_i h_{ij}$ qui correspondent aux intersections avec les segments e_k provenant d’autres rosettes de l’ensemble H_{e_i} et on ajoute le nouveau $\min(H_{e_i})$ au *motif interstitiel*. Cela ne peut se produire que dans un très petit nombre de cas avec plusieurs rosettes.

Cet algorithme peut être répété plusieurs fois si les étoiles/rosaces du motif ne sont pas encore connectées après la première itération (Fig. 4.19c). Les points de départ de chaque itération sont les sommets libres de la précédente. Si le motif contient une seule étoile/roschette ; Le processus est répété pour la connecter avec le côté opposé de la région fondamentale.

4.4.4 Génération du motif entier

La fixation du groupe de symétries détermine un ensemble de transformations qui agissent pour créer le motif qui couvre le plan à partir de l'information minimale encapsulée dans la région fondamentale. L'application de ces transformations au *motif modèle* généré donne naissance au *motif unitaire*. Ce dernier permet d'obtenir le motif périodique par application de plusieurs translations suivants les deux vecteurs générateurs. La figure 4.20 résume le processus de construction de deux motifs périodiques de type $p6m$. La partie (a) de la figure montre l'étape de construction du *motif modèle*. Cette étape est constituée de quatre sous étapes : (1) Division (génération de la grille radiale), (2) construction d'un demi-pétale, (3) construction de la partie de l'étoile/rosace contenue dans la région fondamentale, et (4) construction du motif interstitiel. La partie (b) de la figure montre les étapes de construction du *motif unitaire* par application des symétries internes du groupe $p6m$ sur le *motif modèle* construit : (5) application d'une symétrie axiale sur le *motif modèle* par rapport à BC , (6) application d'une rotation d'ordre 3 et de centre B , (7) et application d'une symétrie axiale par rapport à AC . La partie (c) illustre le motif périodique obtenu par duplication du *motif unitaire* par des translations.

4.5 Etude des cas

4.5.1 Motifs avec une seule étoile/rosace

Pour construire un motif contenant un seul type d'étoile / rosette, nous pouvons utiliser un seul sommet de la région fondamentale comme centre de celle-ci (Fig. 4.20). Mais nous voulons discuter ici un cas spécial et important. Comme nous l'avons indiqué dans la section 3.4.1.1 deux parties de la même rosace seront construites dans les angles aux sommets B et C de la région fondamentale du groupe cmm . Donc on va décrire la démarche à suivre pour construire un motif de type cmm contenant un seule type de rosace/étoile.

Pour générer la grille radiale, on procède comme suit : Si on prend $i_C = 2$ et $i_B = 3$; alors on obtient à partir du tableau 4.1 : $N_{BC} = 2 \times 2 + 2 \times 3 = 10$. Donc une rosace d'ordre 10 sera centrée simultanément sur les sommets B et C , et les angles \hat{C} et \hat{B} seront divisés respectivement en deux et trois divisions de $\pi/10$. La région fondamentale du groupe cmm est un triangle droit quelconque, il faut donc déterminer les angles \hat{C} et \hat{B} en fonction de l'ordre de la rosace par les équations (3.2) et (3.3) :

$$\hat{C} = 2 \times \pi/10$$

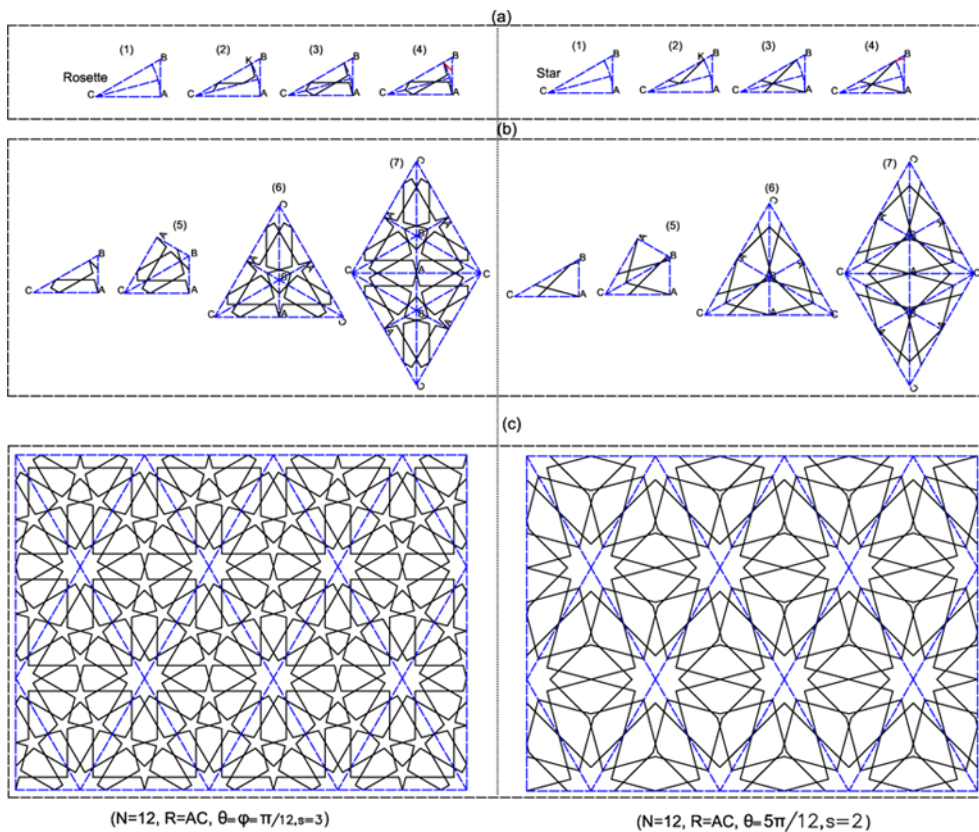


FIGURE 4.20 – Processus de construction d'un motif périodique. (a) construction du *motif modèle*, (b) génération du *motif unitaire*, (c) les deux motifs obtenus.

et

$$\hat{B} = 3 \times \pi/10$$

La figure 4.21 illustre le processus de construction de deux motifs de type *cmm*. La partie (a) de la figure montre la construction du *motif modèle* contenu dans la région fondamentale par les étapes suivantes : (1) la génération de la grille radiale en divisant les angles \hat{C} et \hat{B} respectivement en deux et trois divisions, (2) la construction d'un demi-pétale de la rosace/étoile, (3) construction des deux parties de la même étoile/rosace par des symétries axiales ; les deux premiers demi-pétales des deux parties sont symétriques par rapport à la médiatrice de BC , et (4) la génération du motif interstitiel par le processus d'extension/réflexion. Après la génération du *motif modèle*, il suffit d'appliquer les symétries internes du groupe *cmm* pour obtenir le *motif unitaire* comme illustré dans la figure 4.21b : (5) On applique une symétrie axiale par rapport à AC , (6) suivi d'une symétrie axiale par rapport à AB . Le motif périodique est obtenu en appliquant plusieurs translations sur le *motif unitaire* suivant les deux vecteurs générateurs (Fig. 4.21c).

4.5.2 Motifs avec deux étoiles/rosaces

En utilisant notre méthode décrite ci-dessus, on peut obtenir des motifs périodiques avec deux types d'étoiles/rosaces en utilisant deux sommets de la région fondamentale. Dans un tel motif, les rayons des rosaces sont proportionnels à leurs ordres. La rosace qui a le plus grand ordre sera la plus grande dans le motif. Donc, la chose la plus importante, dans ce cas, est de déterminer les rayons des rosaces/étoiles. La figure 4.22a illustre la détermination des rayons de deux rosaces d'ordre 12 et 9 centrées respectivement sur les sommets C et B de la région fondamentale du groupe $p6m$ à partir de la grille radiale. Le rayon de la rosace d'ordre 12 est $R_1 = CK$ et le rayon de la rosace d'ordre 9 est $R_2 = BK$. Le point E est l'intersection des deux premières lignes de division et le point K est la projection verticale de E sur BC . En appliquant un peu de trigonométrie sur les deux triangles EKB et EKC on trouve que :

$$R_1 = KE/\tan(\gamma = \pi/N_c) \quad (4.4)$$

et

$$R_2 = KE/\tan(\beta = \pi/N_B) \quad (4.5)$$

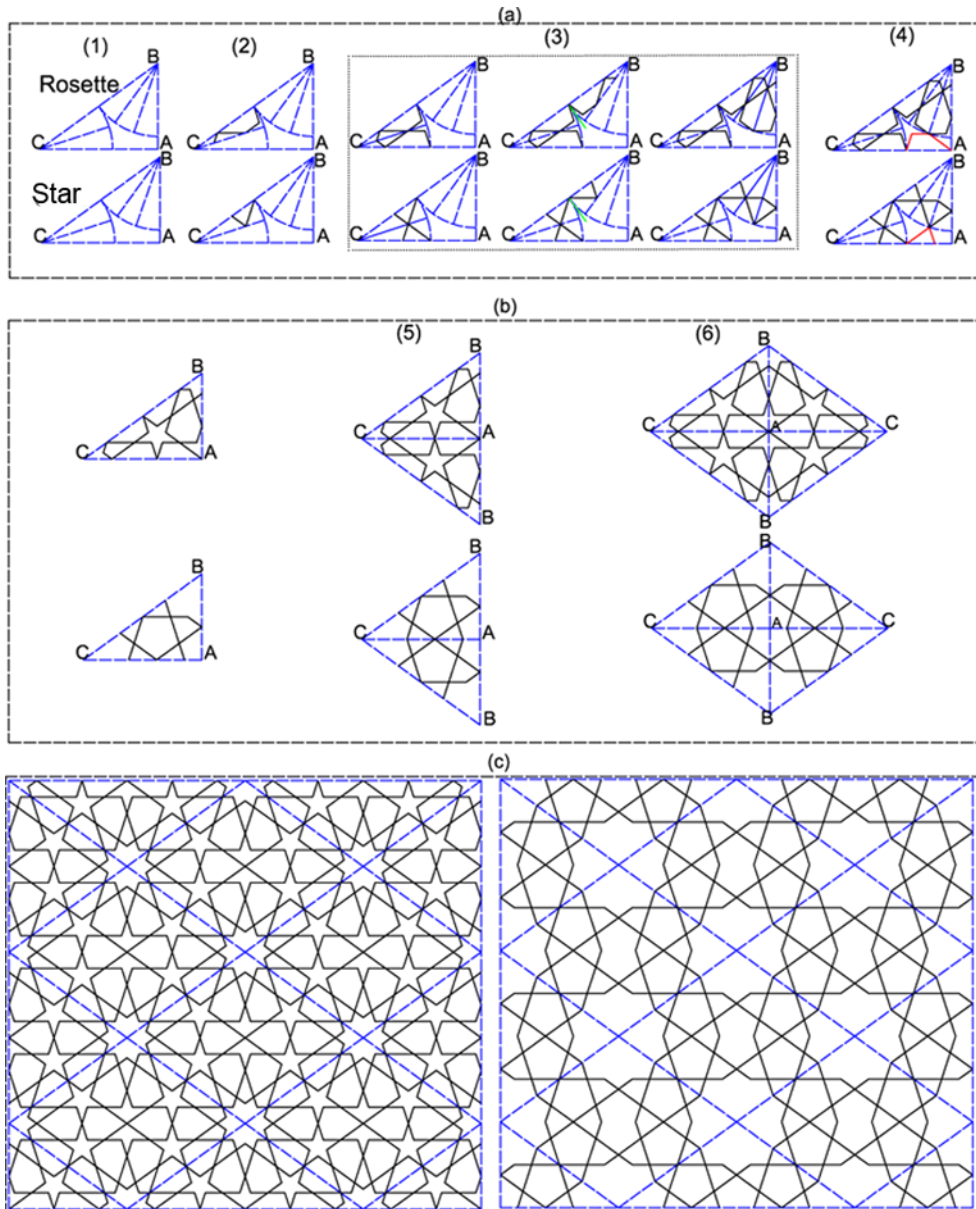


FIGURE 4.21 – Processus de construction de deux motifs de type cmm avec une rosace/étoile d'ordre 10. (a) les étapes de construction du *motif modèle* : (1) la grille radiale, (2) construction d'un demi-pétale, (3) construction des parties de la rosace/étoile, (4) processus d'extension réflexion ; (b) construction du motif unitaire ; (c) les deux motifs périodiques obtenus.

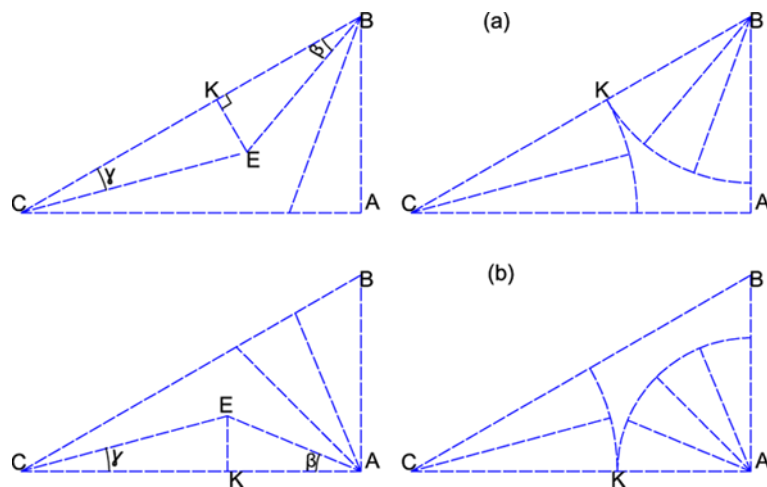


FIGURE 4.22 – Détermination des rayons. (a) détermination des rayons pour une rosace d’ordre 12 centrée sur C et une rosace d’ordre 9 centrée sur B ; (b) détermination des rayons pour une rosace d’ordre 12 centrée sur C et une rosace d’ordre 8 centrée sur A .

ce qui donne :

$$R_1 = R_2 \times \tan(\pi/N_B)/\tan(\pi/N_C) \quad (4.6)$$

Les distances CK et BK de la figure représentent les valeurs maximales des deux rayons. Dans ce cas, les deux rosaces du motif seront jointes (elles auront un sommet en commun : le point K). On procède de la même façon pour déterminer les rayons de deux rosaces centrées respectivement sur C et A (Fig. 4.22b).

Après la génération de la grille et la détermination des rayons des rosaces, on construit un demi-pétale pour chaque rosace du motif. Pour les demi-pétales de rosaces jointes, il faut que leurs angles θ soient égaux. Cela permet d’avoir un croisement parfait au point K après l’application de la symétrie axiale (Fig. 4.23a). Cette condition nous permet de respecter une propriété importante de l’art géométrique islamique. A chaque point du motif où se rencontrent quatre segments ; ils doivent se comporter comme si ce sont deux lignes qui se croisent. Cela permet au motif d’admettre un entrelacement. Le processus de construction d’un motif avec deux rosaces est illustré dans la figure 4.24.

Pour obtenir un motif avec des rosaces disjointes (les rosaces n’ont aucun sommet en commun), on diminue le rayon R_2 par exemple et on détermine R_1 à partir de l’équation (3.8) pour conserver la proportion entre eux. La

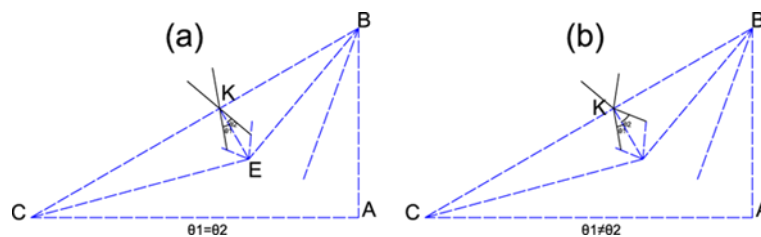


FIGURE 4.23 – Croisement parfait au point K après application de la symétrie axiale par rapport à BC lorsque les angles θ des deux rosaces sont égaux, (b) Croisement imparfait lorsque les angles θ sont différents.

figure 4.25 illustre la construction d'un motif avec deux rosaces disjointes. Les motifs contenant deux étoiles sont obtenus en procédant de la même façon (Fig. 4.26).

4.5.3 Motifs avec trois rosaces

Comme dans le cas des motifs avec deux rosaces, la chose la plus importante pour les motifs contenant trois rosaces est la détermination de leurs rayons. Dans le cas de rosettes adjacentes par paires, dont chaque rosace a un sommet en commun avec chacune des deux autres, on détermine les rayons comme illustré dans la figure 4.27a. On détermine l'intersection des bissectrices des angles de la région fondamentale, puis on fait la projection verticale de celle-ci sur les côtés de la région fondamentale. Les trois rosaces doivent avoir le même angle θ pour la raison citée précédemment.

4.5.4 Cas spéciaux

4.5.4.1 Motif avec une rosace centrée sur un côté de la région fondamentale

Dans des cas particuliers, la rosace peut être placée sur un côté de la région fondamentale. Dans ce cas, La grille radiale de cette rosace est obtenue en divisant l'angle droit en N divisions de π/N chacune, où N est l'ordre de la rosette (N doit être un nombre paire). Pour un motif contenant deux types de rosaces (l'une est centrée sur un sommet de la région fondamentale et l'autre est centrée sur le côté opposé), le centre de la rosace sur le côté est l'intersection entre ce côté et l'une des lignes de division (Fig. 4.28a). Pour construire une étoile / rosette régulière sur le côté, l'angle formé par la ligne reliant les deux centres et le côté en question doit être un multiple de π/N ;

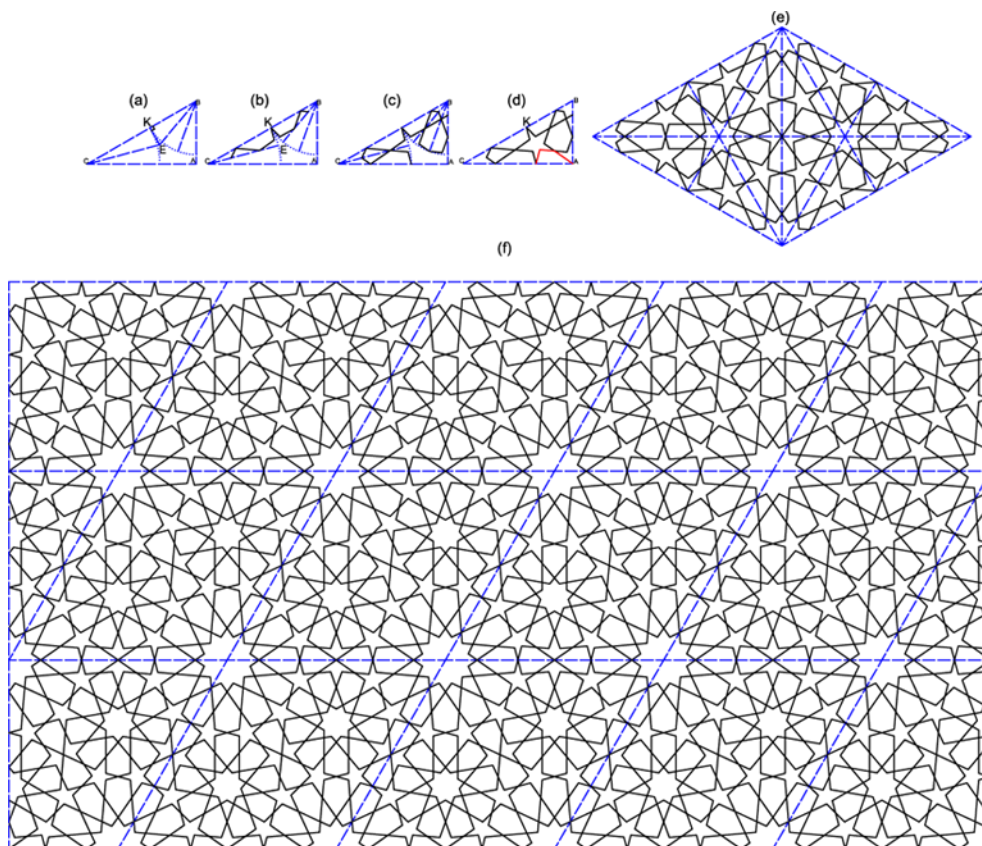


FIGURE 4.24 – Les étapes de construction d'un motif de type $p6m$ avec deux rosaces jointes, (a) la génération de la grille radiale et la détermination des rayons, (b) la construction des demi-pétales, (c) la génération des deux parties des rosaces, (d) la génération du motif interstitiel, (e) la génération du *motif unitaire*, (f) le motif périodique obtenu.

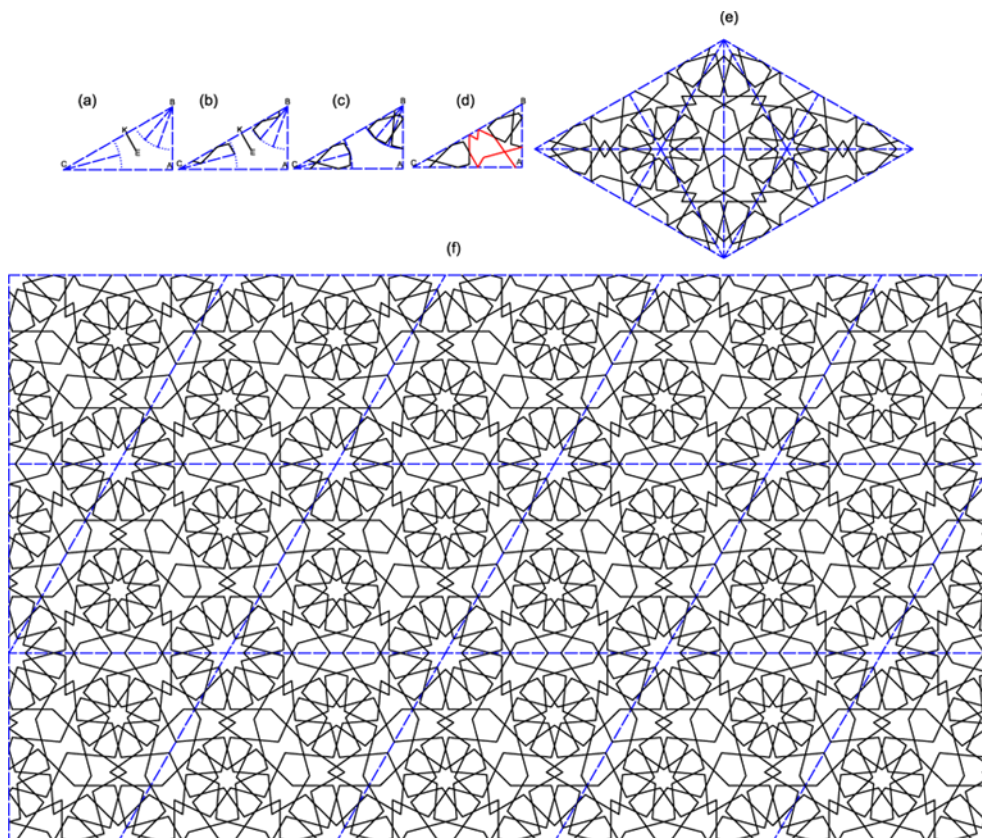


FIGURE 4.25 – Les étapes de construction d’un motif de type $p6m$ avec deux rosaces disjointes, (a) la génération de la grille radiale : les rayons sont diminués suivant l’équation (3.8), (b) la construction des demi-pétales, (c) la génération des deux parties des rosaces, (d) la génération du motif interstitiel, (e) la génération du *motif finitaire*, (f) le motif périodique obtenu.

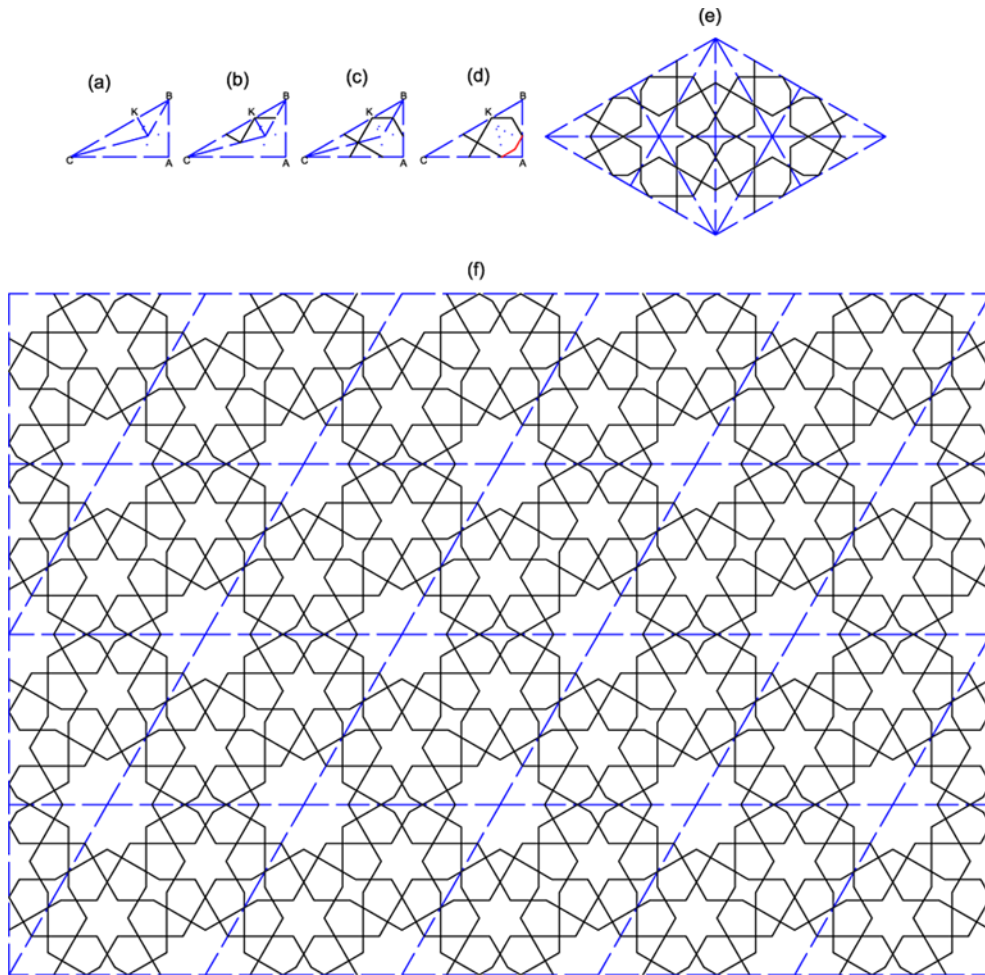


FIGURE 4.26 – Processus de construction d’un motif de type $p6m$ avec deux étoiles jointes ; une étoile à 12 centrée sur C et une étoile à 6 centrée sur B ; (a) la génération de la grille radiale et la détermination des rayons, (b) la construction des demi-pétales, (c) la génération des deux parties des rosaces, (d) la génération du motif interstitiel, (e) la génération du *motif unitaire*, (f) le motif périodique obtenu.

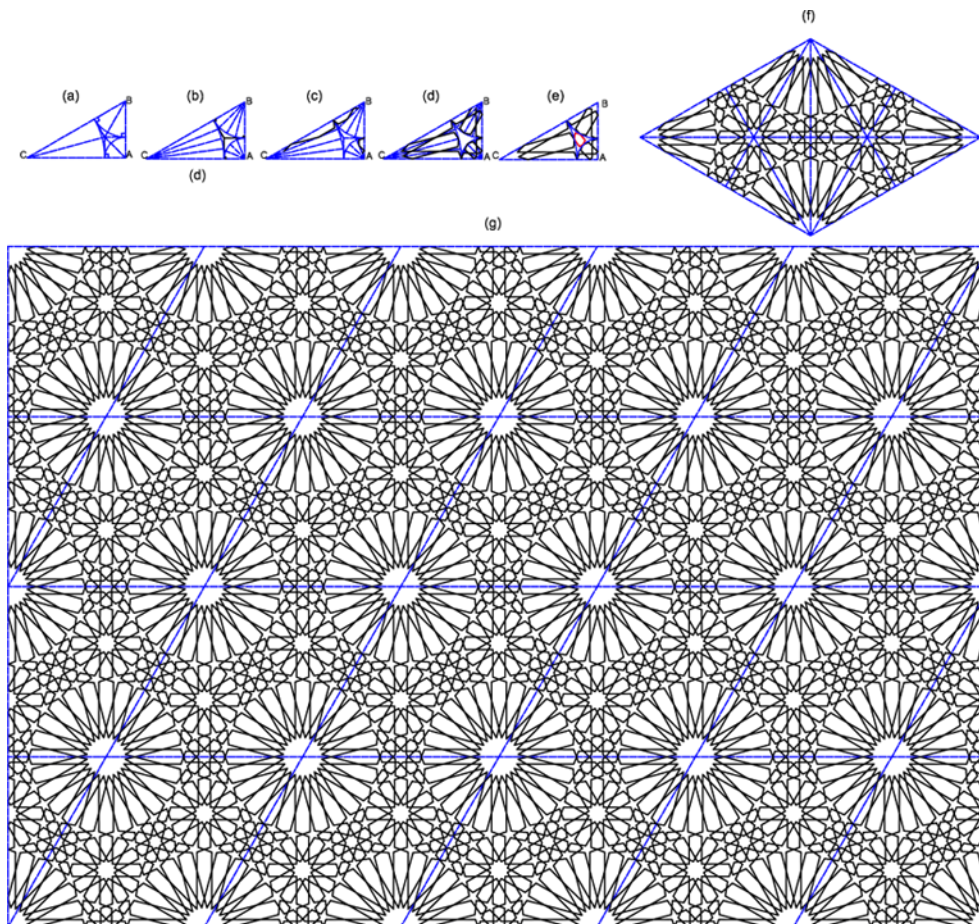


FIGURE 4.27 – Construction d’un motif de type $p6m$ avec trois rosaces : une rosace d’ordre 24 centrée sur C , une rosace d’ordre 12 centrée sur B , et une rosace d’ordre 8 centrée sur le sommet A . (a) détermination des rayons, (b) la grille radiale, (c) la construction des demi-pétales, (d) la générations des parties des rosaces, (e) le génération du motif interstitiel, (f) la génération du *motif unitaire*, (g) le motif périodique obtenu.

cette condition permet de s'assurer que toutes les divisions soient égales à π/N et d'obtenir une rosace régulière. Pour les étoiles/rosaces irrégulières vous pouvez consulter [64]. La figure 4.28 illustre les étapes de construction d'un motif de type $p4m$ dont une rosace d'ordre 16 est centrée sur le sommet C et une rosace d'ordre 8 est centrée sur le côté AB .

4.5.4.2 Motif avec des rosaces qui se chevauchent

Dans certains cas, les motifs géométriques contiennent des rosaces chevauchantes. Plusieurs travaux ont été réalisés pour traiter ce genre de motifs [65, 66, 29]. Pour les méthodes basées sur le pavage, la gestion de la partie en commun entre les polygones n'est pas automatique. Afin de générer des motifs étoilés en se basant sur des pavages avec des polygones réguliers qui se chevauchent, les chercheurs ont utilisé une taxonomie de monstres et de motifs qui peuvent être associés [66]. Pour chaque $n > 6$ et $2 \leq c \leq \lceil n/2 \rceil - 2$, on définit un (n, c) -*monstre* comme l'union d'une paire de polygones réguliers d'ordre n disposés de sorte que exactement c côtés de chaque polygone se trouvent à l'intérieur de l'autre ([66], section 3.10.1). Notez que les cas $c = 0$ et $c = 1$ sont significatifs, ils correspondent respectivement à deux polygones qui partagent un seul sommet et un seul côté. Mais ces cas n'ont pas besoin d'être traités spécialement lors de la conception de motifs, et nous les ignorons pour le reste de cette discussion.

La figure 4.29 montre deux exemples de monstres pour $n = 8$ et $n = 10$. Une grande partie d'un monstre va contenir une partie d'une étoile/rosace. Dans la zone de chevauchement les étoiles s'interagissent et doivent être modifiées pour trouver une configuration convenable. Il faut donc chercher les différentes configurations possibles en fonction de n , c et l'angle de contact θ . Dans son manuscrit, Bonner a fourni des motifs pour le $(10, 2)$ -*monster* pour différents choix d'angle de contact. En se basant sur les travaux de Bonner et Castera, Kaplan a élaboré un ensemble de configurations possibles pour quelques cas fréquents dans l'art islamique [66]. La figure 4.30 illustre une collection de configurations possibles pour différents monstres (n, c) où $n \leq 12$.

En utilisant notre méthode, pour construire des motifs avec des rosaces qui se chevauchent, on choisit un rayon de la rosace relativement grand pour qu'une partie de celle-ci soit à l'extérieur de la région fondamentale (Fig. 4.31c). Cette partie sera par la suite retirée du *motif modèle* en permettant à cette rosace de chevaucher avec sa copie symétrique lors de l'application des transformations du groupe au *motif modèle* (Fig. 4.31e). Cette technique nous permet d'éviter le grand problème de la recherche de différentes configurations liées aux rosettes superposées discuté ci-dessus. La figure 4.32 montre

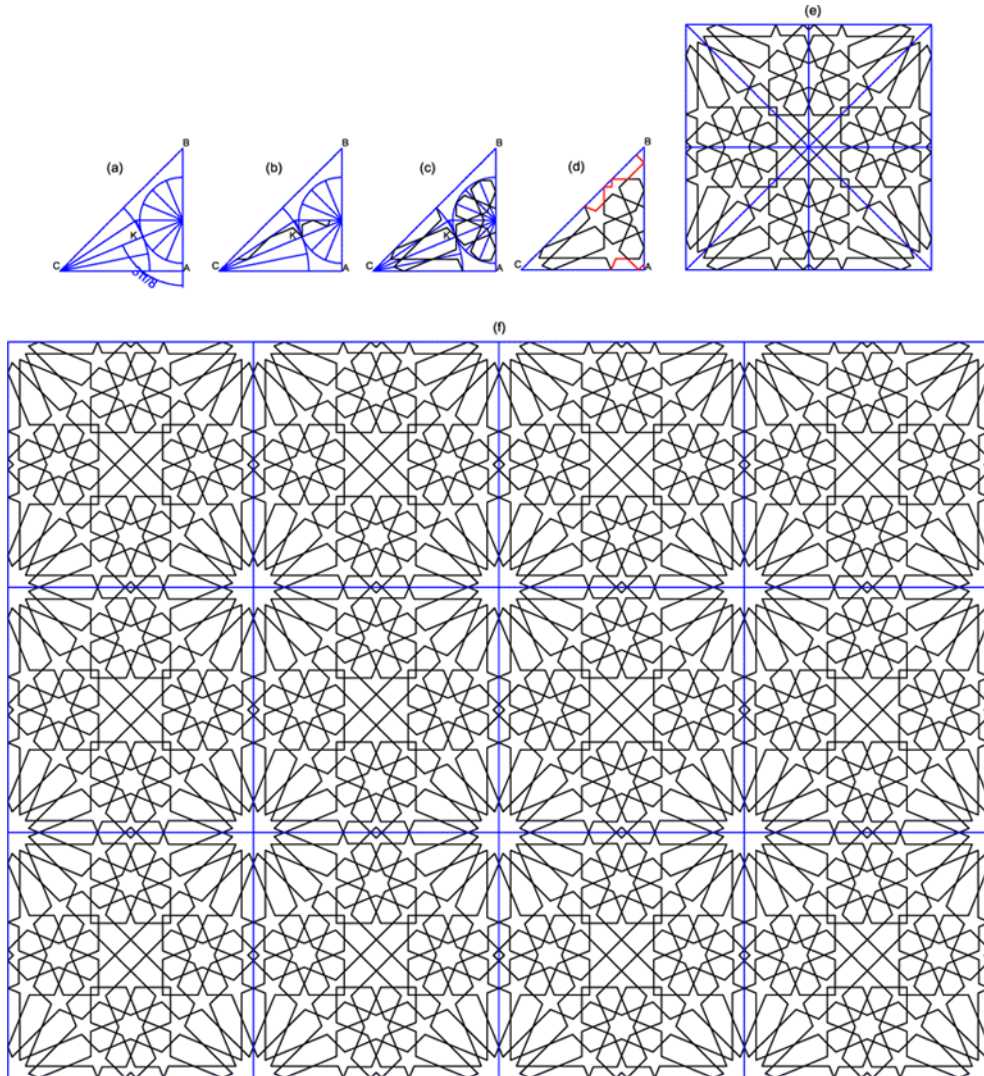


FIGURE 4.28 – Motif périodique de type $p4m$ contenant une rosace d'ordre 16 centrée sur C et une rosace d'ordre 8 centrée sur le côté AB de la région fondamentale. (a) la grille radiale dont le centre de la rosace à 8 est l'intersection d'une ligne de division de \hat{C} et le coté AB , où l'angle formé est égal à $3\pi/8$ qui est un multiple de $\pi/8$, (b) construction des deux demi-pétales, (c) génération des deux parties des deux rosaces, (d) génération du motif interstitiel, (d) génération du *motif unitaire* par duplication du *motif modèle* en utilisant les symétries internes du groupe $p4m$, (f) le motif périodique obtenu.

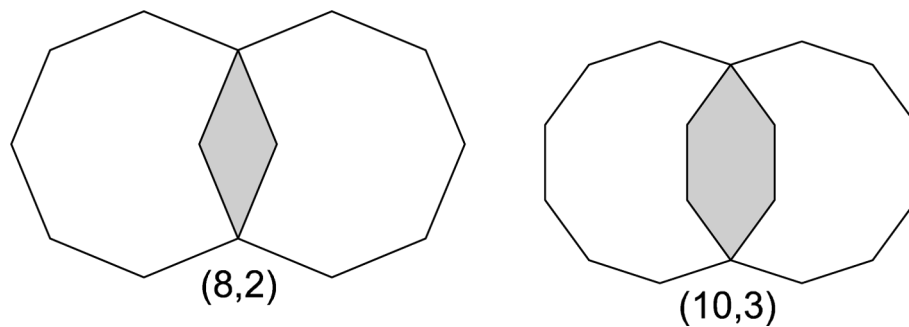


FIGURE 4.29 – Exemples des monstres (n, c) pour $n = 8$ et $n = 10$.

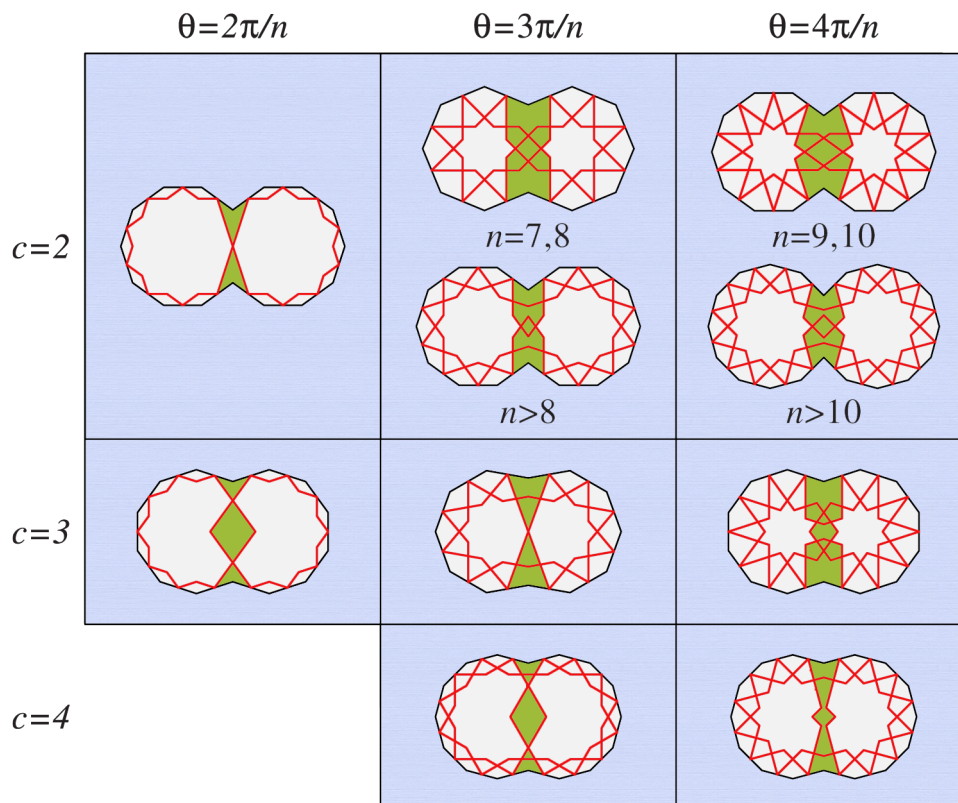


FIGURE 4.30 – Tableau montrant une collection des configurations possibles pour différents monstres (n, c) pour $n \leq 12$. Chaque ligne représente des monstres pour une valeur de c . Les colonnes représentent des angles de contact multiples de π/n . (pris à partir de [66])

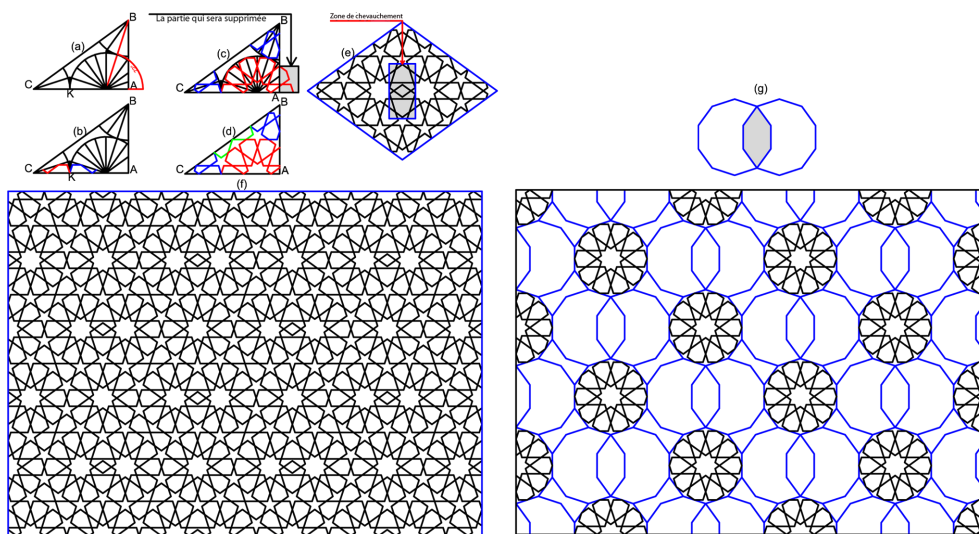


FIGURE 4.31 – Un motif de type cmm avec des rosettes superposées. (a) la division, (b) la construction du premier demi-pétale, (c) la construction des parties des rosettes, (d) la suppression des parties situées à l'extérieur de la région fondamentale et la construction de la zone interstitielle, (e) le *motif unitaire* obtenu, (f) le motif obtenu, (g) le pavage équivalent avec des décagones qui se chevauchent où une recherche de la configuration de la zone de chevauchement est nécessaire.

un motif de type pmm construit avec des rosettes chevauchantes d'ordre 10.

Un autre avantage de la technique utilisée dans notre méthode pour la gestion des motifs avec des rosaces en chevauchement est le fait qu'elle puisse être utilisée pour améliorer le motif interstitiel. Prenant le motif obtenu dans la figure 4.32, le motif interstitiel généré par l'algorithme *d'extension / réflexion* ne couvre pas la zone interstitielle de la meilleure façon. La zone laissée vierge est très grande. Pour surmonter ce problème, on peut placer une rosace supplémentaire sur le côté AB . La figure 4.33c montre un motif alternatif à celui de la figure 4.32 obtenu en utilisant cette technique. Notez que les rosettes à 5 ont deux pétales en commun grâce à la technique de contrôle de la zone de chevauchement.

4.6 Décoration

En général, les motifs géométriques islamiques ne sont pas laissés sans décoration. Dans cette section, on va discuter le rendu géométrique comme

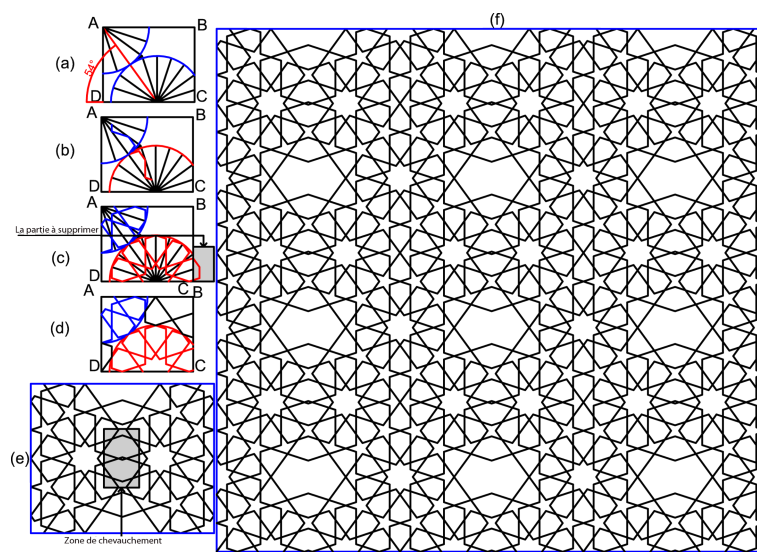


FIGURE 4.32 – Construction d’un motif de type pmm avec deux rosettes à 10. (a) la division et la détermination des rayons, (b) la construction des deux premiers demi-pétales, (c) la construction des parties des rosettes (la partie à l’extérieur de la région fondamentale est ombrée), (d) application du processus d’extension / réflexion, (e) le *motif unitaire* (la zone de chevauchement est ombrée), (f) le motif obtenu.

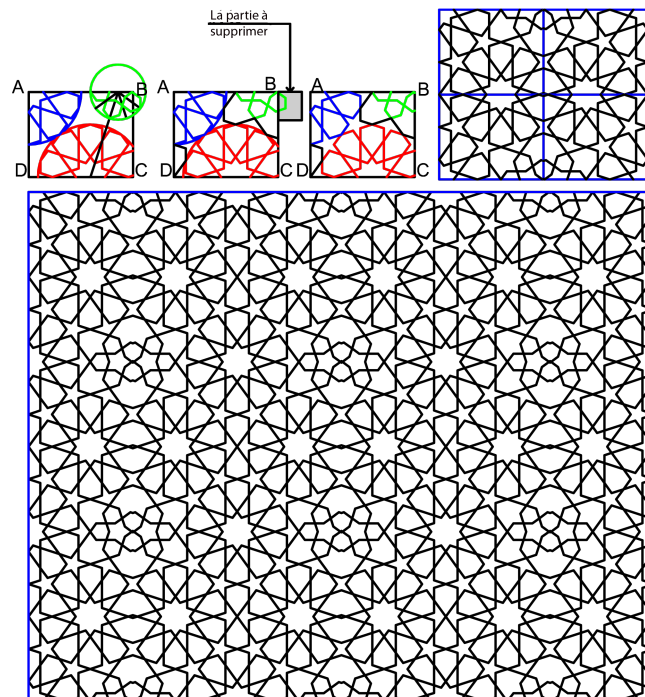


FIGURE 4.33 – Solution alternative pour manipuler la zone interstitielle. La rosette à 5 pointes est placée sur le côté AB de la région fondamentale du groupe de symétrie pmm . La partie de la rosette à 5 située à l'extérieur du rectangle est enlevée.

un mode de décoration de ces motifs. Les trois types de décoration les plus utilisés sont : la coloration, le découpage et l'entrelacement. Pour les deux premiers types, le travail de la décoration sera effectué sur le *motif modèle* à l'intérieur de la région fondamentale, mais pour le troisième cas, nous devons travailler dans la cellule de base.

4.6.1 Coloration

Pour obtenir un motif géométrique coloré, il suffit de colorier les faces du motif à l'intérieure de la région fondamentale, y compris ses bords. Dans la tradition, nous devons laisser des faces sans coloration (la couleur blanche) pour permettre au motif de respirer.

4.6.2 Découpage

Ce type de décoration peut être obtenu en procédant comme suit : pour chaque segment de droite du motif modèle, on construit deux segments de droite parallèles ayant une distance d chacun avec le segment de droite en question. Nous obtiendrons un motif constitué de lignes parallèles séparées par une distance de $2d$.

4.6.3 Entrelacement

Pour réaliser ce type de décoration, nous devons déterminer les *strands* du motif. Un strand peut être infini ou fermé en formant une boucle. Dans la décoration entrelacée, un *strand* (brin) donné passe alternativement sous et sur d'autres *strands* (brins). Nous pouvons déduire l'entrelacement de la cellule de base en utilisant le *motif modèle* découpé comme décrit dans la section précédente. A chaque point d'intersection, le *strand* (brin) qui passe au-dessus est obtenu en dessinant des lignes supplémentaires du strand. Il est important de noter que nous pouvons combiner plusieurs styles de décoration comme le montre la figure 4.34.

4.7 Résultats et discussion

La méthode présentée ici peut générer un nombre illimité de motifs en changeant en continu un ou plusieurs paramètres. La figure 4.35 montre un motif généré avec une rosace d'un grand ordre et la figure 4.36 montre différents motifs de type $p6m$ avec une rosette à 12 pointes obtenus en changeant un ou plusieurs paramètres. Les rosaces des motifs de la première

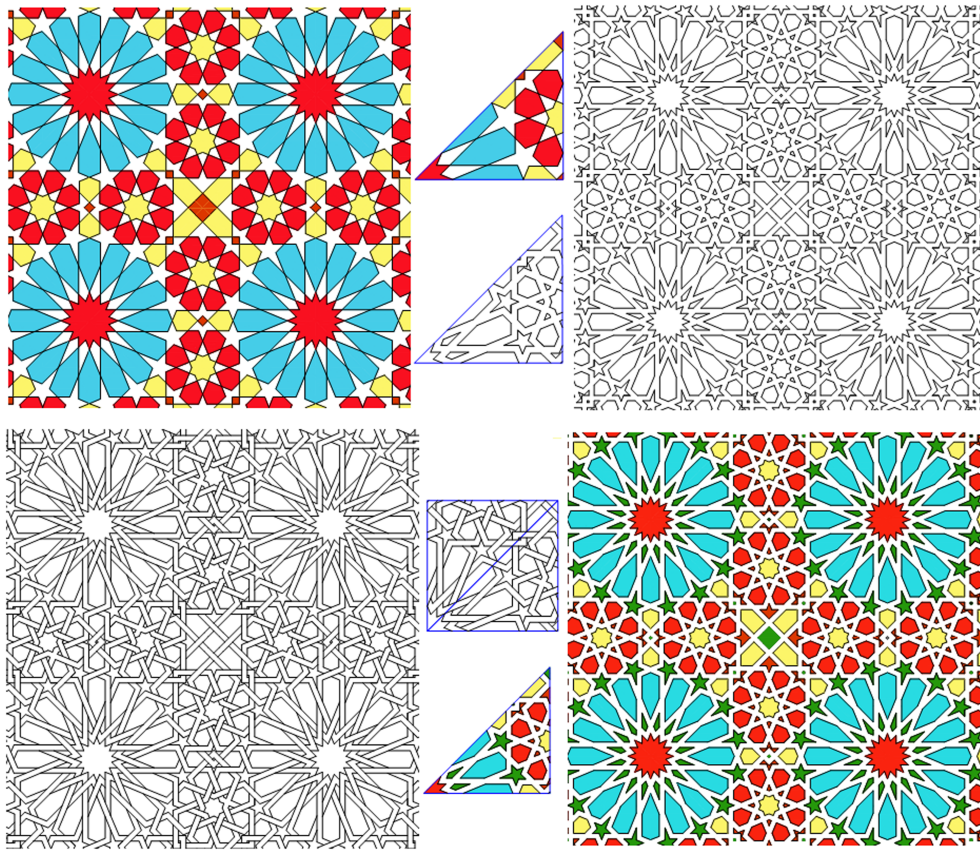


FIGURE 4.34 – Différents styles de décoration. Coloration (Remplissage), Découpage, combinaison de coloration et du découpage, et entrelacement.

Groupe	Système	Famille	Motifs avec des étoiles	Motifs avec des rosaces	
			Angle θ	Angle θ	Angle ϕ
		Aiguë 30			
P6m	Système 3-4-6-12	Médiane 60	$\theta = \pi/2 - \omega/2$		
		Médiane 90			
P6m	Système 3-4-6-12	Obtuse 120		$\theta = \pi/12$	$\Phi = \pi/12$
P6m	Système 3-4-6-12	Obtuse 135		$\theta = \pi/8$	$\Phi = \pi/8$
		Aiguë 45			
P4m	Système 4-8 A	Médiane 90	$\theta = \pi/2 - \omega/2$		
		Obtuse 135			
P4m and Cmm	Système 4-8 B	Aiguë		$\theta = \pi/8$	$\Phi = \pi/8$
P4m and Cmm	Système 4-8 B	Médiane		$\theta = \pi/4$	$\Phi = \pi/4$
P4m and Cmm	Système 4-8 B	Obtuse	$\theta = \phi/2 - \omega/2$		
Cmm	Système 5-10	Aiguë		$\theta = \pi/10$	$\Phi = \pi/10$
Cmm	Système 5-10	Médiane		$\theta = \pi/5$	$\Phi = \pi/5$
Cmm	Système 5-10	Obtuse	$\theta = \pi/2 - \omega/2$		

TABLE 4.2 – Les paramètres θ et φ compatibles avec les angles utilisés dans différents systèmes de Bonner. L'angle ω représente l'angle entre les deux lignes développées à partir d'un milieu de bord d'un polygone pour chaque famille. Les cellules vides au tableau indiquent que ce type de motif n'existe pas dans le système en question.

ligne possèdent les mêmes paramètres θ, φ et s , tandis que les rayons sont différents. Les rosaces des motifs de la deuxième ligne ont les mêmes paramètres R et s , et des différents paramètres θ et φ . Ces exemples montrent la performance de notre méthode pour générer une grande variété de motifs en changeant un ou plusieurs paramètres de l'étoile / rosette. Cependant, la question qui se pose est la suivante : quels sont les paramètres θ, φ et s qui permettent d'obtenir des motifs géométriques historiques ? Pour résoudre cette problématique, on fait recours aux différentes familles de motifs développées par Bonner [29, 43, 42] qui ont été étudiées dans le chapitre précédent.

Le tableau 4.2 montre les paramètres θ et φ compatibles avec les angles utilisés dans les différents systèmes de Bonner. Généralement, le paramètre $s = 3$ pour les familles aiguës et médianes et $s = 2$ pour la famille obtuse. La figure 4.37 illustre plusieurs motifs avec les éléments polygonaux équivalents dans les différents systèmes de Bonner.

En général, notre méthode peut générer des motifs avec plusieurs types de rosaces dans les trois premières familles aiguës, médianes et obtuses. La figure 4.38 montre des motifs avec des rosettes à 9 pointes et à 12 pointes dans différentes familles. Le tableau 4.3 montre les paramètres qui permettent d'obtenir les motifs historiques.

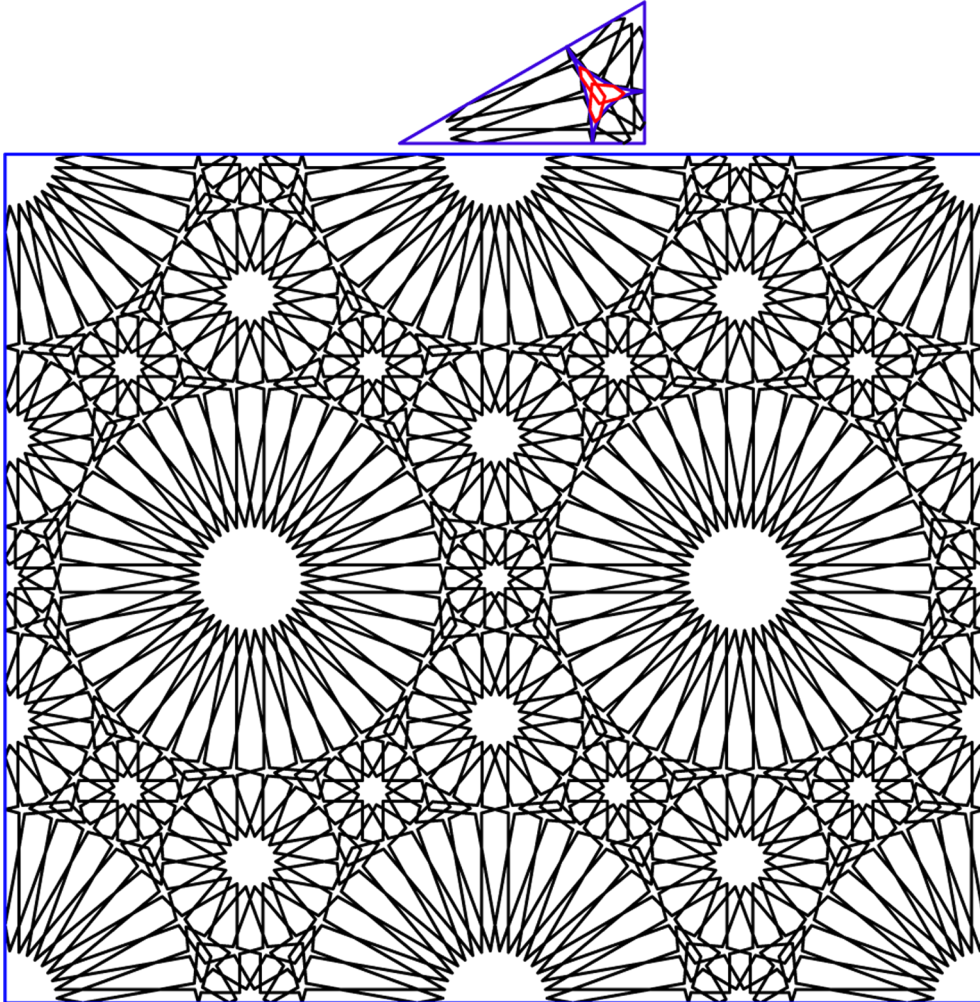


FIGURE 4.35 – Nouveau motif de type $p6m$ obtenu en utilisant les paramètres suivants : $N_1 = 36, N_2 = 18, N_3 = 12, \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \pi/12, \varphi_1 = \pi/36, \varphi_2 = \pi/18, \varphi_3 = \pi/12, s_1 = s_2 = s_3 = 3$.

Aigüe	les paramètres de la rosace	$\theta = \Phi = \pi/N, s = 3$
Médiane	les paramètres de la rosace	$\theta = \Phi = 2\pi/N, s = 2$
Obtuse	les paramètres de l'étoile	$\theta = \pi/2 - \omega/N, s = 2$

TABLE 4.3 – Paramètres d'étoiles/rosaces compatible avec la technique non-systématique de Bonner.

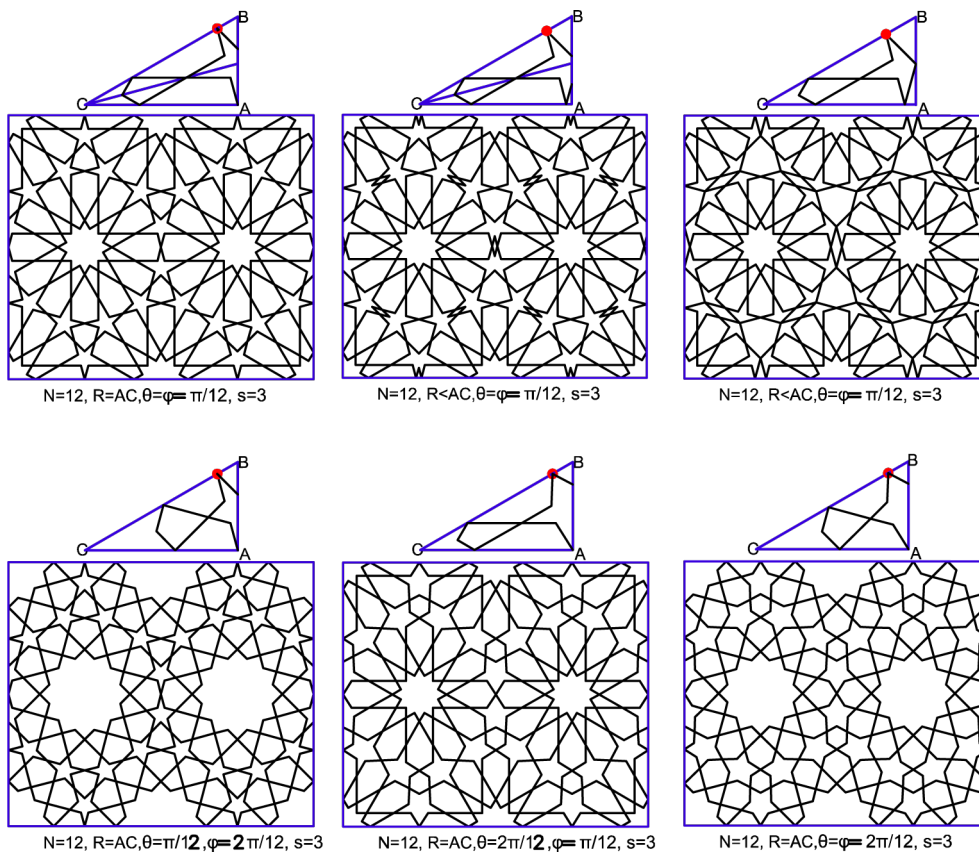


FIGURE 4.36 – Différents motifs de type $p6m$ obtenus en utilisant le même ordre de rosace ($N = 12$) et en changeant le rayon R et les angles θ et φ ; le point de départ K est mis en évidence par la couleur rouge.

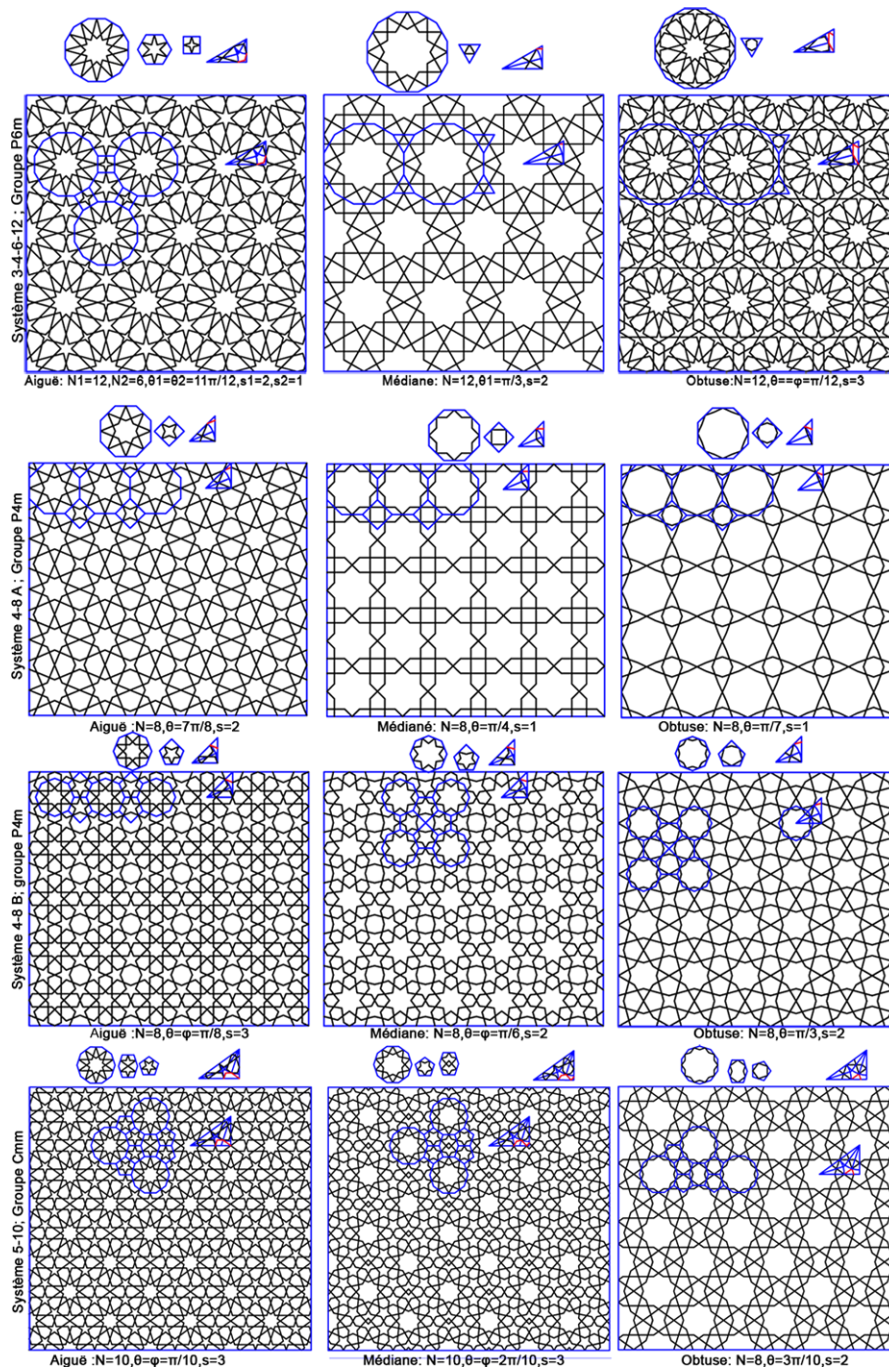


FIGURE 4.37 – Exemples de motifs générés avec les éléments polygonaux équivalents des trois familles pour différents Systèmes.

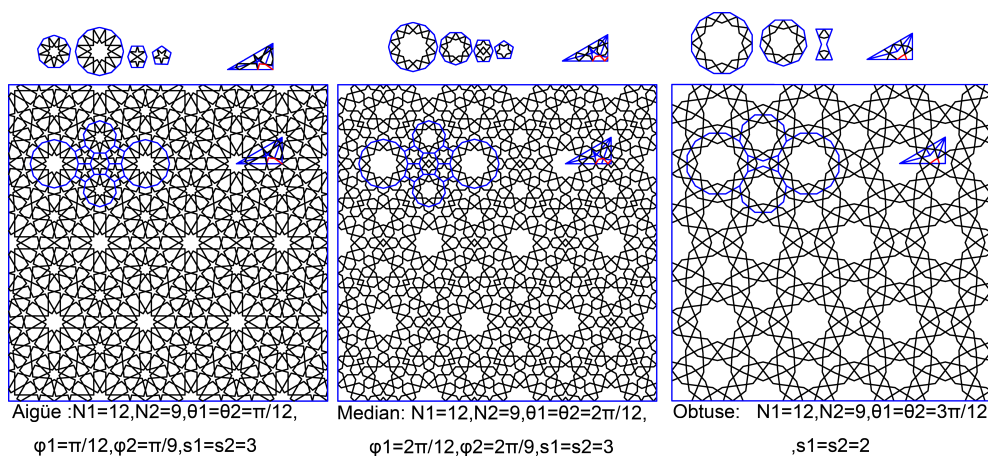


FIGURE 4.38 – Exemple de motifs de type $p6m$ contenant des rosettes à 12 et à 9 pointes dans différentes familles.

4.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une nouvelle méthode de construction des motifs géométriques périodiques contenant des rosaces et des étoiles. Nous avons proposé un processus systématique constitué d'un ensemble d'étapes à suivre pour construire le *motif modèle* en fonction du groupe de symétries choisi et du nombre d'étoiles/rosaces, ainsi que leurs paramètres. La performance de la méthode proposée est évaluée par sa capacité de générer une grande variété de motifs géométriques islamiques existants et à créer de nouveaux motifs authentiques. Cette méthode est facile à mettre en œuvre par rapport aux méthodes de génération existantes. Il a également l'avantage de ne pas nécessiter un pavage initial ni de grille sous-jacente. En outre, il serait utile d'étendre cette méthode pour couvrir les motifs apériodiques. Le prochain chapitre sera consacré à la construction de ce type de motifs en étendant la méthode présentée dans ce chapitre pour le couvrir.

Chapitre 5

Motifs géométriques quasi périodiques : de l'analyse à la génération

Sommaire

5.1	Introduction	117
5.2	La quasi-périodicité des motifs géométriques islamiques	118
5.2.1	Analyse du motif géométrique de la Toure Bleue de Maragha	119
5.2.2	Analyse du motif géométrique de Darb-e-Imam à Isfahan	124
5.3	Méthodes de construction des motifs islamiques quasi-périodiques	130
5.3.1	Etat de l'art	130
5.3.2	Méthode proposée	134
5.4	Conclusion	146

5.1 Introduction

La découverte de la structure quasi-périodique d'un alliage Aluminium Manganèse par Dan Shechtman a été récompensée par un prix Nobel en 2011 [67]. Le diagramme de diffraction observé par Dan Shechtman présentait une symétrie icosaédrique jusque-là interdite par la cristallographie. Cette découverte a conduit à un grand débat scientifique sur les structures quasi-périodiques.

La grande surprise est que les structures quasi-périodiques ont été retrouvées dans plusieurs motifs géométriques islamiques datant de plusieurs siècles. Ces découvertes intrigantes montrent que la compréhension et la pensée mathématique des artisans musulmans étaient beaucoup plus profondes que ce qu'on pensait à l'origine. Les artisans musulmans ont développé des mosaïques géométriques complexes pour décorer leurs mosquées, leurs mausolées et leurs sanctuaires. Ces motifs ont attiré l'attention de plusieurs chercheurs à étudier et à analyser leurs structures. Le but de ces analyses était de comprendre la structure mathématique et de prouver la quasi-périodicité de ces motifs [68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83], [59, 65].

La première partie de ce chapitre sera consacrée aux différents travaux ayant une dimension analytique. Ces travaux ont essayé d'analyser la structure de plusieurs motifs géométriques en utilisant des outils mathématiques modernes tels que les pavages quasi-périodiques. La deuxième partie sera dédiée à l'élaboration d'une méthode de construction de nouveaux motifs géométriques quasi-périodiques inspirés des modèles architecturaux existants.

5.2 La quasi-périodicité des motifs géométriques islamiques

Depuis plus d'un siècle, les chercheurs ont analysé les symétries des motifs ornementaux islamiques. Ces motifs ont été classés dans les 17 groupes cristallographiques. Au cours des trois dernières décennies, les mathématiciens ont accordé une attention croissante aux structures quasi-périodiques. Ces structures occupent une niche importante entre les structures aléatoires et hautement ordonnées et périodiques.

L'histoire de l'étude des motifs islamiques en vue de prouver leur quasi-périodicité a commencé au début des années quatre-vingt-dix par une analyse du motif géométrique de la *Toure Bleue* de *Marāgha* réalisée par Makovicky. Dans son travail, Makovicky a démontré la correspondance entre ce motif et le pavage de Penrose et a développé une nouvelle variété de ce pavage [76]. Par la suite, plusieurs autres travaux d'analyse ont été réalisés. Makovicky et Fenoll Hach-Alí ont analysé plusieurs motifs géométriques islamiques octogonaux en Espagne et ont déduit que ces motifs sont basés sur une grille quasi-périodique d'octogones imbriqués [77]. Dans un autre travail, des motifs décagonaux quasi périodiques en Espagne et au Maroc ont été étudiés en utilisant les systèmes du pavage de Penrose [79]. En 2011, l'analyse du motif denté dans le mausolée *Moulay Idriss II* à *Fès* a montré qu'il est com-

patible avec le quasi-réseau d’Ammann. Makovicky a déclaré que ce motif est le premier motif dodécagonal quasi-périodique trouvé dans le monde islamique [80]. Makovicky a étudié aussi le pavage quasi-périodique réalisé sur le *Gunbad-e-Qabud* à *Marāgha*, au nord de l’*Iran* [84]. Récemment, E. Makovicky et N.Makovicky ont analysé les motifs qui ornent le mausolée de *Muhammad Ghaus* à *Gwalior* en (*Inde*) et ont suggéré qu’ils peuvent être des approximants d’un pavage octogonal quasi-périodique basé sur un nouveau type de pavés [73]. Lu et Steinhart ont démontré que les constellations utilisant les pavés appelés « *tuiles Girih* » ornés par des lignes ont permis de créer des motifs périodiques de plus en plus complexes. Ensuite, ils ont illustré que la combinaison de ces constellations avec des transformations d’autosimilarité permet de construire, sur le tombeau de *Darb-I Imam* (1453) à *Isfahan* en *Iran*, des motifs quasi-périodiques de Penrose presque parfaits [82]. Dans un autre travail analytique, P. Saltzman a démontré que la cellule de base du motif *Gunbad-e Qabud* et une grande partie du motif de *Darb-I Imam* sont quasi-périodiques [85]. Toutes ces recherches analytiques sont importantes pour la compréhension des structures de plusieurs motifs géométriques quasi-périodiques et pour la découverte des principes de leur construction.

5.2.1 Analyse du motif géométrique de la Toure Bleue de Maragha

La tour du tombeau *Gunbad-e-Qabūd* à *Marāgha* est située dans l’ouest de l’*Iran* et construite dans l’année 1196. Elle contient le premier motif islamique géométrique quasi-périodique connu. La figure 5.1 illustre la récente reconstruction de Makovicky. Ce motif a été l’objet de plusieurs études [76, 82, 69, 86]. L’une de ces études est réalisée par Makovicky en vue de prouver sa quasi-périodicité au moyen de la correspondance avec le pavage de Penrose, de la procédure d’inflation/déflation et des barres d’Ammann [76, 72].

Makovicky a classé les tuiles utilisées dans ce motif en deux catégories : les tuiles fondamentales et les tuiles dérivées. Les tuiles fondamentales sont des pentagones réguliers, des décagones à quatre angles concaves et six angles convexes, appelés « *papillons* » et des losanges décorés. Makovicky a nommé les tuiles fondamentales « *les tuiles de Marāgha* ». L’ensemble des tuiles dérivées est constitué d’un pentagone contenant une rosace régulière d’ordre 5, d’un pentagone symétrique contenant trois petits pentagones, deux losanges et un papillon central et d’une étoile d’ordre 10 contenant un pentagone entouré de cinq petits losanges ayant une symétrie locale d’ordre 5 (Fig. 5.2).

En vue de prouver la quasi-périodicité d’un motif, plusieurs approches

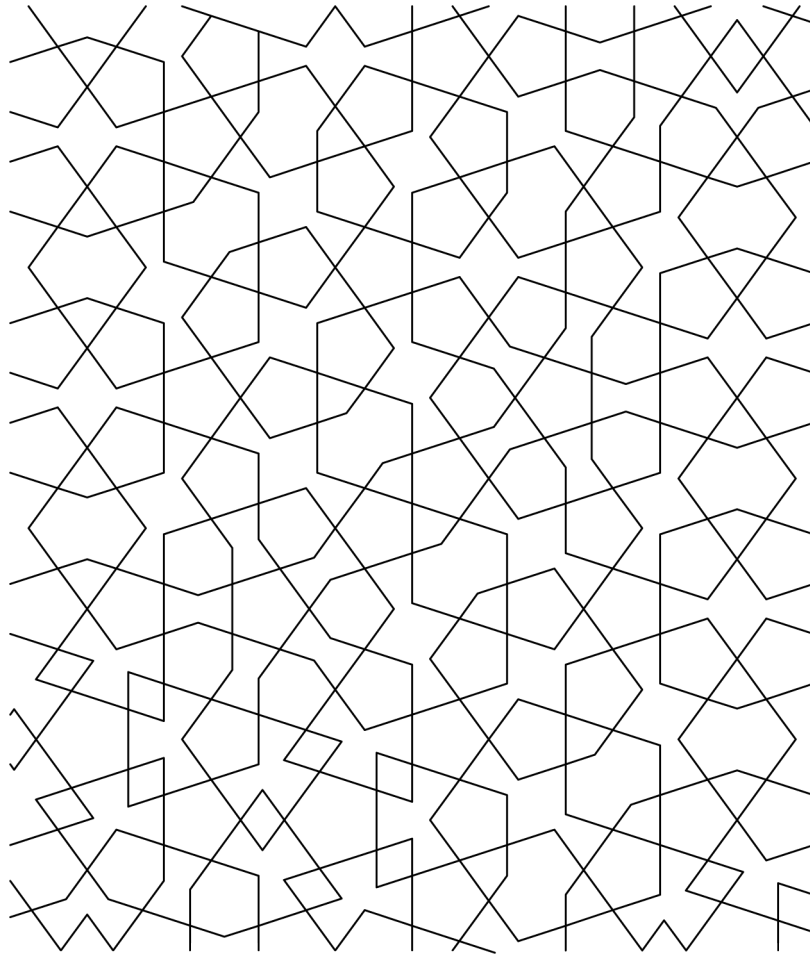


FIGURE 5.1 – Un panneau mural en mosaïque de *Gunbad-e-Qabūd* (reproduit à partir de [72]).

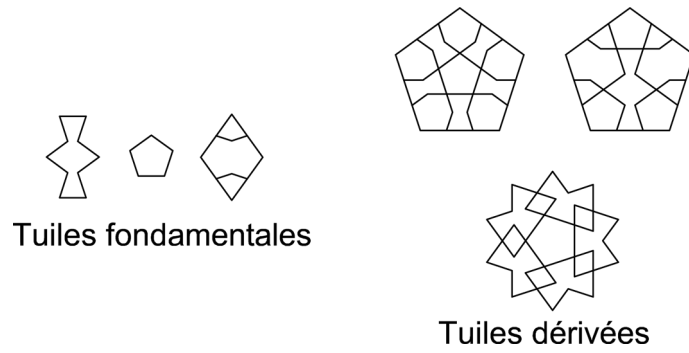


FIGURE 5.2 – Les tuiles fondamentales et les tuiles dérivées du motif de *Gunbad-e-Qabūd* (reproduit à partir de [72]).

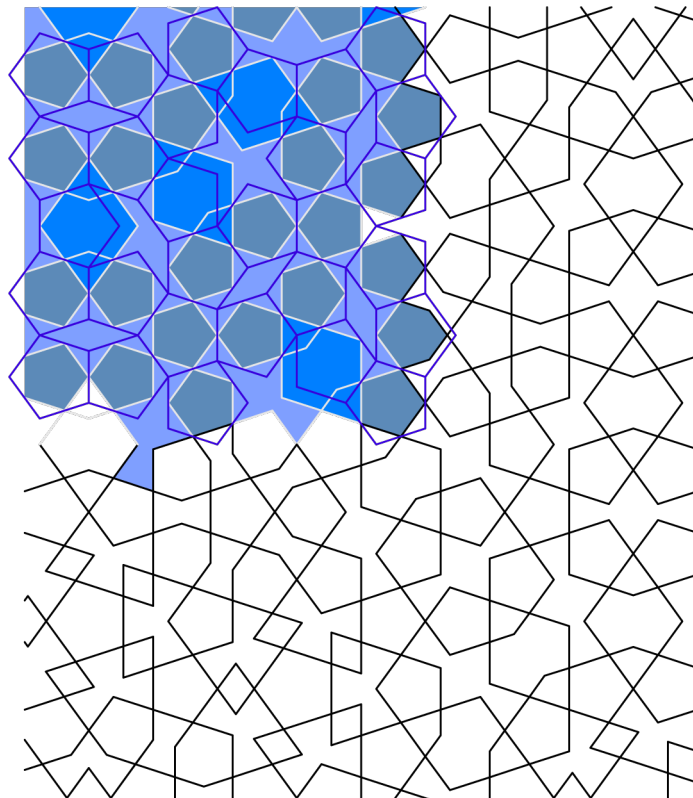


FIGURE 5.3 – Transformation du pavage P1 de Penrose au motif de *Marāgha*

peuvent être utilisées. On peut par exemple, vérifier si le motif peut être transformé à une partie finie du pavage de Penrose. Dans le cas du motif de *Marāgha*, Makovicky [76, 72] a considéré que ses tuiles sont interconvertibles avec les pavés de l'ensemble P1 de Penrose constitués de pentagones, d'un losange, d'une demi-étoile et d'une étoile d'ordre 5 (voir chapitre 2). Selon Makovicky, la règle de transformation du pavage de Penrose au motif géométrique de *Marāgha* est simple : les pentagones du pavage de Penrose sont convertis en d'autres pentagones dont les sommets sont les milieux des côtés des pentagones de Penrose. Les losanges de Penrose deviennent des papillons de *Marāgha*. Les étoiles d'ordre 5 entourées de pentagones deviennent des grands pentagones dérivés qui contiennent le motif présentant une symétrie rotationnelle d'ordre 5. La demi-étoile de Penrose correspond au pentagone dérivé contenant le papillon (Fig. 5.3). Cependant, cette analyse est incomplète, car généralement tout ce qui peut être fait à cet égard est de reconstruire le design autant que possible avec des tuiles de Penrose en respectant les règles d'agencement. Mais on ne peut pas garantir qu'une partie finie d'un pavage avec des tuiles de Penrose, même avec le respect des règles d'agencement, pourrait être étendue à l'infinie.

Pour remédier au problème cité précédemment, Makovicky a suivi une autre voie qui consiste à trouver une grille sous-jacente à partir de laquelle le motif peut être dérivé et montrer que cette grille est un fragment d'un pavage quasi-périodique. La grille sous-jacente utilisée est constituée de décagones, d'hexagones, de papillons et d'étoiles en 5 (Fig. 5.4). On trouve ces éléments appelés tuiles *M2* dans l'ensemble appelé *tuiles girih* de Lu et Steinhardt [82] (Fig. 5.6) qui, à son tour, était un sous-ensemble du système polygonal 5-10 défini par Bonner [69, 29]. Cette grille est obtenue en considérant les centres des pentagones de *Marāgha* comme des sommets des pavés *M2*. Le losange décoré est considéré comme deux pentagones chevauchants et les centres de ces deux pentagones imaginaires sont utilisés comme points de rupture d'une ligne de la grille. Par conséquent, les papillons, sont centrés sur et alignés avec les losanges décorés (Fig. 5.4). Pour montrer que cette grille est un fragment d'un pavage quasi-périodique, il suffit de noter qu'elle apparaît au centre du décagone subdivisé dans la figure 5.10. Les règles d'inflation définies dans cette figure ne contiennent pas les règles de subdivision de l'étoile, mais il est facile d'incorporer une règle d'inflation supplémentaire pour les étoiles à cinq branches. D'après cette discussion la grille de la Figure 5.4 est un fragment d'un pavage quasi-périodique du plan, et ainsi le motif de *Marāgha* est quasi-périodique [72, 85].

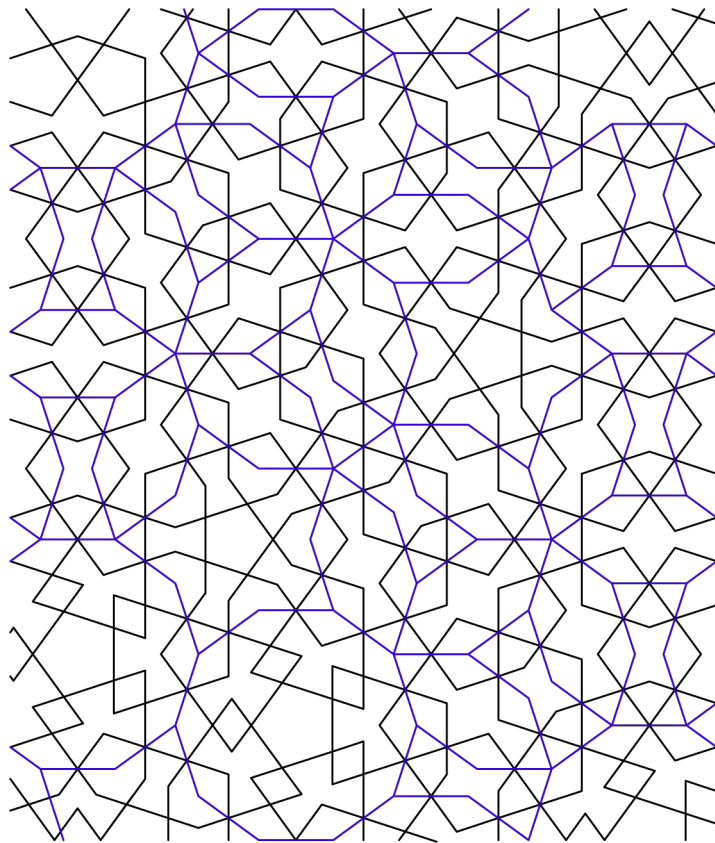


FIGURE 5.4 – Le motif de *Marāgha* superposé avec la grille sous-jacente.

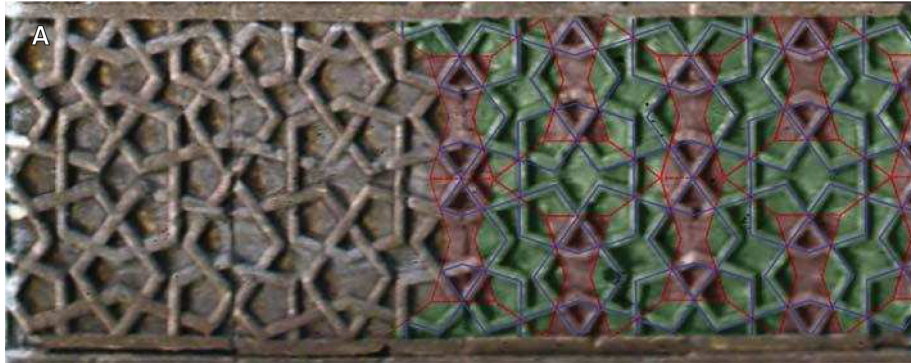


FIGURE 5.5 – Le motif géométrique du mausolée *Mama Hatun* à *Tercan* en *Turkie* dont aucune étoile à 10 n’apparaît. Le motif est construit en utilisant les *tuiles girih* (pris à partir de [82]).

5.2.2 Analyse du motif géométrique de *Darb-e-Imam* à *Isfahan*

Les premières études réalisées sur l’art géométriques islamiques ont proposé que les motifs géométriques soient construits par la méthode de jonctions de points ou « *strapwork method* » (voir la section 2.3.1) en utilisant une règle et un compas. Dans leur article [82], Lu et Steinhardt ont suggéré que cette méthode n’est pas appropriée pour certains motifs géométriques islamiques. Elle nécessite la construction d’une étoile à 10 à l’intérieure d’une cellule de base qui se répète dans le motif. Cependant, certains motifs comme celui du mausolée *Mama Hatun* à *Tercan* en *Turkie* ne contiennent pas cette étoile à 10 (Fig. 5.5). Par conséquent, ces motifs ne sont pas construits en utilisant la méthode *strapwork* et nécessitent de procéder d’une autre façon. Ainsi, Lu et Steinhardt ont suggéré que ces motifs sont construits en utilisant un ensemble de tuiles ornées appelées « *tuiles girih* » (Fig. 5.6).

L’ensemble des *tuiles girih* est constitué de cinq pavés, un décagone, un pentagone, un losange, un papillon et un large hexagone irrégulier. Chaque pavé est orné par des lignes qui commencent par le milieu de chaque côté en formant un angle de 72° (Fig. 5.6).

En analysant plusieurs motifs géométriques islamiques, Lu et Steinhardt ont déclaré que l’innovation la plus étonnante résultant de l’application des tuiles *girih* est l’utilisation de la transformation d’autosimilarité (la subdivision de grandes tuiles *girih* en d’autres petites tuiles *girih*) pour créer des motifs géométriques se chevauchant à deux échelles différentes. Des exemples de l’utilisation de la subdivision peuvent être trouvés à *Darb-i Imam* à *Isfahan*,

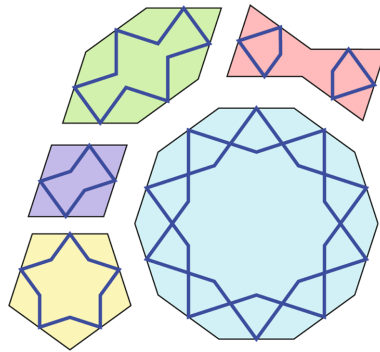


FIGURE 5.6 – Les cinq *tuiles girih* (pris à partir de [82]).

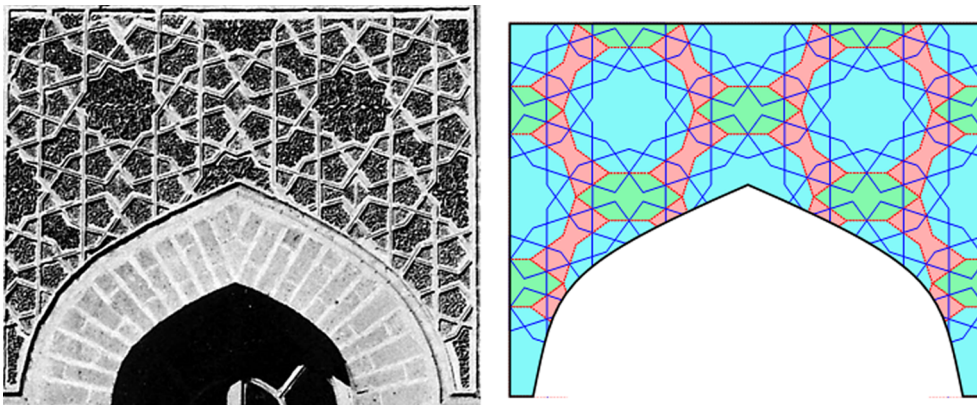


FIGURE 5.7 – Reconstruction du motif géométrique de la *Medersa Al-Mustansiriyya* à *Bagdad, Irak* (1227-1234) [87] en utilisant les *tuiles girih* de la figure 5.6 par Lu et Steinhardt [82]).

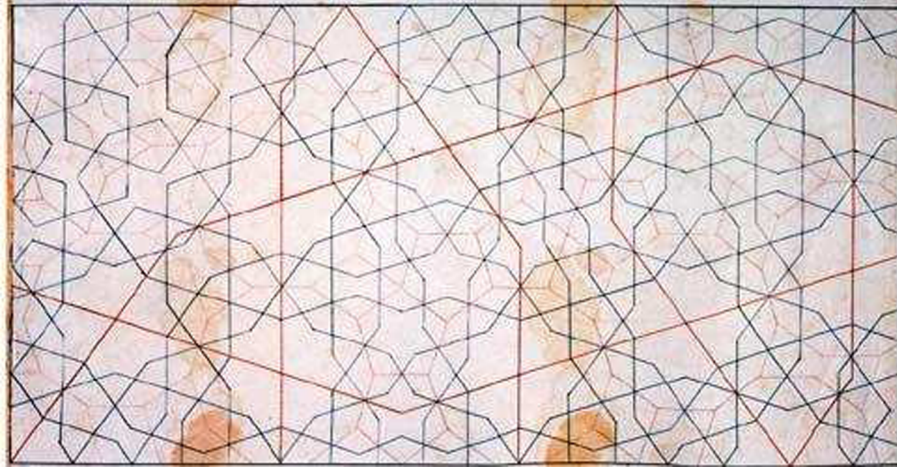


FIGURE 5.8 – Panneau 28 du manuscrit de Topkapi avec deux motifs à deux échelles différentes (prix à paritr de [82]).

Iran [86, 69] et dans le manuscrit de Topkapi (Fig. 5.8). Le motif géométrique à grande échelle représenté dans la figure 5.9a,b est obtenu en utilisant deux tuiles girih, le décagone et le papillon. Le motif à petite échelle (Fig. 5.9d) est obtenu en subdivisant chacune des deux tuiles en d'autres plus petites tuiles girih selon la règle représentée dans la figure 5.9c. Ce motif est obtenu à partir d'un pavage sous-jacent constitué de 231 tuiles girih.

En général la subdivision du décagone, du papillon et de l'hexagone peut être exprimée par les équations suivantes (Fig. 5.10) :

$$1GRANDPAPILLON = [14papillons + 14hexagones + 6décagones] \quad (5.1)$$

$$1GRANDHEXAGONE = [22papillons + 22hexagones + 10décagones] \quad (5.2)$$

$$1GRANDDECAGONE = [80papillons + 80hexagones + 36décagones] \quad (5.3)$$

Les trois équations peuvent être exprimées par la matrice de transformation suivante :

$$\begin{pmatrix} 14 & 22 & 80 \\ 14 & 22 & 80 \\ 6 & 10 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} GRANDSPAPILLONS \\ GRANDSHEXAGONES \\ GRANDSDECAGONES \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} petitspapillons \\ petitshexagones \\ petitsdécagones \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

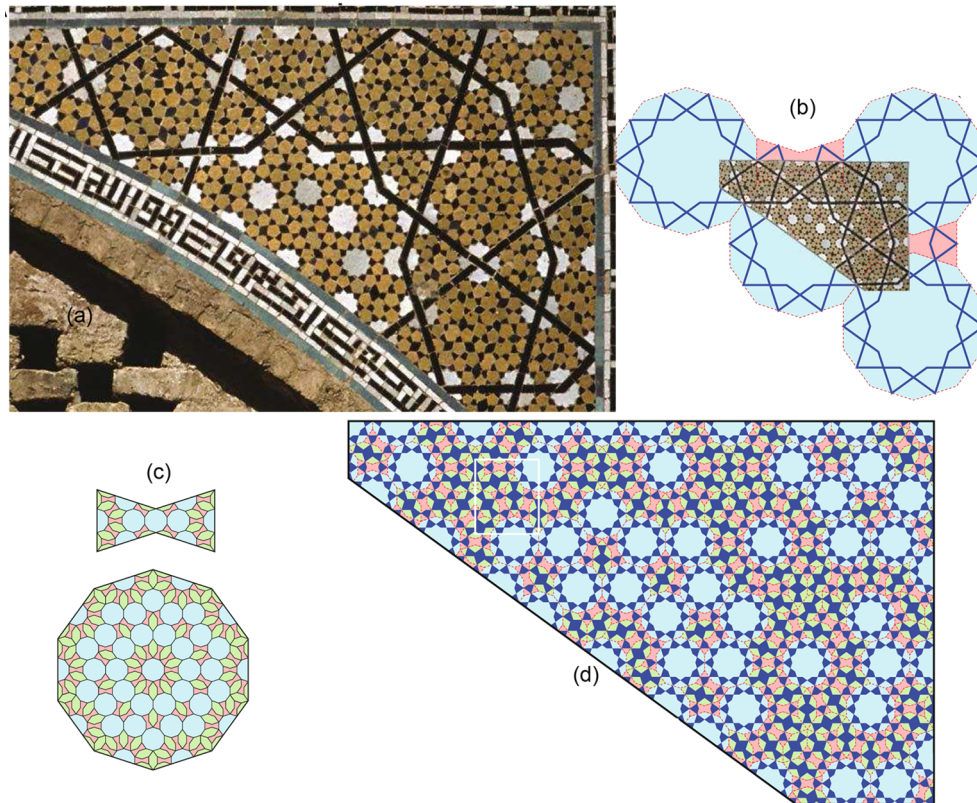


FIGURE 5.9 – Subdivision des *tuiles girih* retrouvée dans le motif décagonal de *Darb-e Imam* à *Isfahan*, Iran. (a) Photo de la moitié droite du motif. (b) Superposition du grand motif reconstruit sur la photo. (c) Règle de subdivision des tuiles girih (le décagone et le papillon) en d'autres *tuiles girih*. (d) Reconstruction du motif à plus petite échelle en utilisant les *tuiles girih* (pris à partir de [82]).

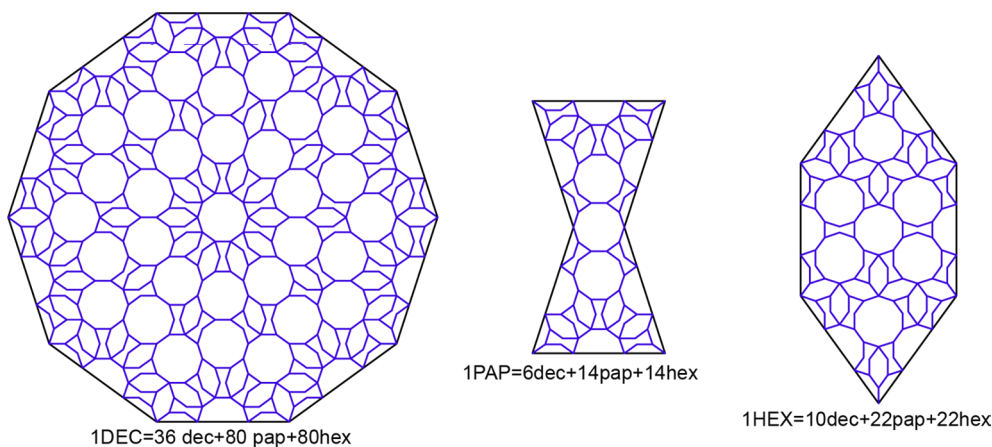


FIGURE 5.10 – Subdivision du décagone, du papillon et de l’hexagone en d’autres petits décagones, petits papillons et petits hexagones.

En vue de s’assurer que la règle de la subdivision ne conduit pas à un pavage périodique, les valeurs propres de la matrice de transformation ont été calculées :

$$\lambda_1 = 4(9 + 4\sqrt{5}) = 4 \times \phi^2 \approx 71,78$$

$$\lambda_2 = 4/(9 + 4\sqrt{5}) \approx 0,22$$

$$\lambda_3 = 0$$

La première valeur propre $\lambda_1 = 4\phi^2$ est irrationnelle, donc cette subdivision ne va pas conduire à un pavage périodique et le pavage étendu à l’infini est un pavage non périodique.

Lu et Steinhardt ont découvert que le motif de *Darb-i Imam* (Fig. 5.9a,d) peut être transformé en un pavage $P2$ de Penrose par des cerfs-volants et des fléchettes en utilisant la règle représentée dans la figure 5.11 [24]. Les cerfs-volants et les fléchettes de Penrose peuvent être combinés de plusieurs façons pour former des tuiles girih. Il existe deux façons pour former le papillon et l’hexagone alors qu’il en existe dix façons pour former le décagone. Ce processus peut être appliqué aussi pour le pentagone et le losange. En utilisant ces règles de transformation, le motif représenté dans la figure 5.9d peut être entièrement transformé en un pavage de Penrose par les cerfs-volants et les fléchettes (Fig. 5.12). Le pavage obtenu contient quelques non-concordances

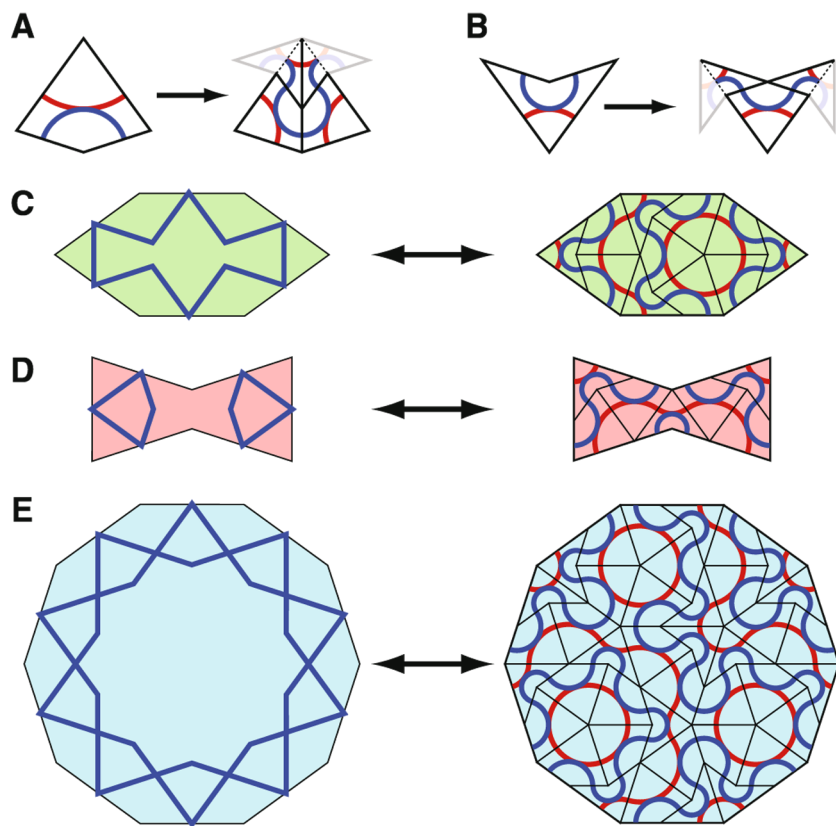


FIGURE 5.11 – Règle de transformation des *tuiles girih* en pavés de Penrose (cerfs-volants et des fléchettes) (pris à partir de [82]). (A et B) le cerf-volant et la fléchette avec leurs règles d'agencement ainsi que leurs règles de subdivisions en d'autres petites cerfs-volants et fléchettes. (C à E) transformation des *tuiles girih* en pavés de Penrose.

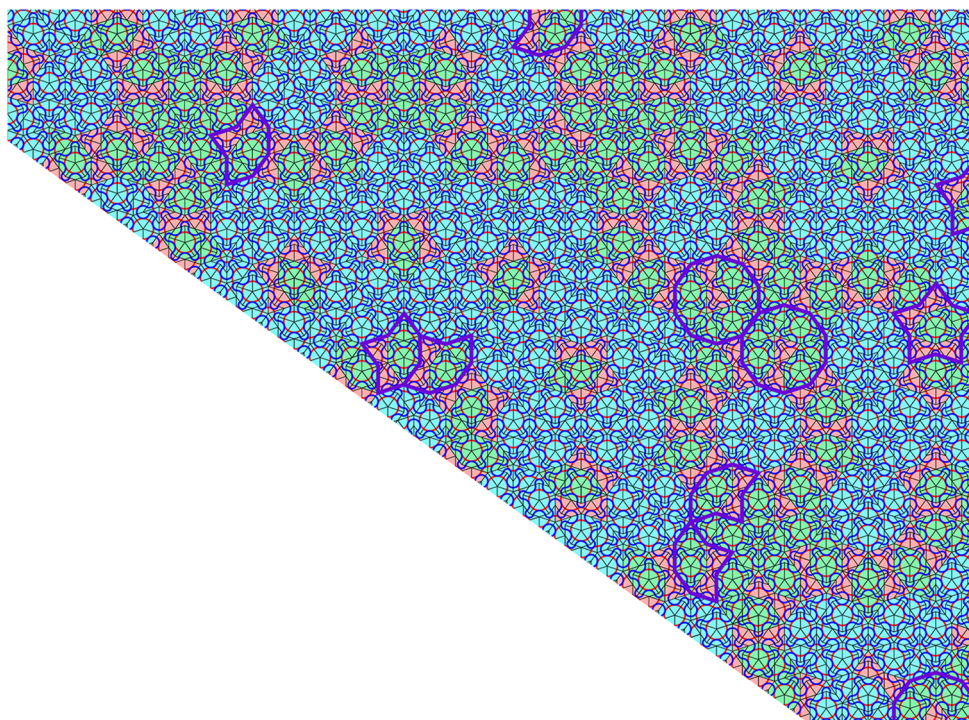


FIGURE 5.12 – Transcription du motif du *Darb-e-Imam* en un pavage quasi-périodique de Penrose par des cerfs-volants et des fléchettes. Le motif contient 11 non-concordances représentées en mauve (pris à partir de [82]).

qui sont au nombre de 11 sur 3700 pavés de Penrose. Chaque non-concordance peut être corrigée par un réarrangement local des tuiles girih (Fig. 5.13).

A partir de cette analyse, Lu et Steinhardt ont déduit que les artisans musulmans ont tous les outils nécessaires pour créer des motifs ornementaux quasi-périodiques : les tuiles girih, la symétrie décagonale et la subdivision. Ainsi, le motif géométrique de *Darb-i Imam* est quasi-périodique.

5.3 Méthodes de construction des motifs islamiques quasi-périodiques

5.3.1 Etat de l'art

En plus des travaux analytiques essayant de comprendre la structure de plusieurs motifs géométriques islamiques et de prouver leur quasi-périodicité, d'autres travaux ont été réalisés pour construire des motifs quasi-périodiques

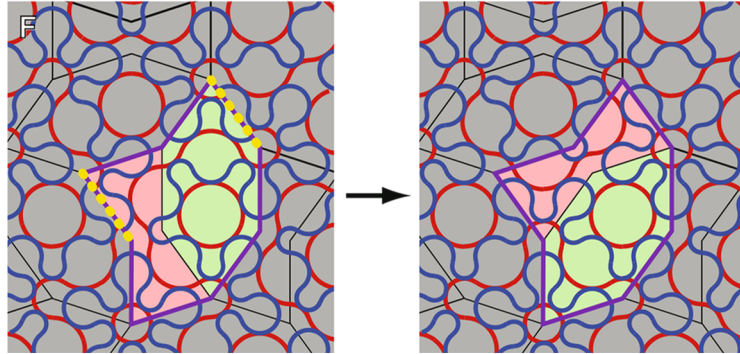


FIGURE 5.13 – Réarrangement des tuiles pour corriger une non-concordance (pris à partir de [82]).

historiques et nouveaux. Aboufakil et *al* ont proposé une méthode de construction des motifs quasi-périodiques marocains en se basant sur la méthode des multi-grilles et la technique de « Hasba » adoptée par les artisans. Cette méthode n'est pas appropriée pour l'application informatique et nécessite des compétences expérimentales [83]. Dans sa thèse [59], Kaplan a présenté une méthode de création des motifs non périodiques basée sur des pavages quasi-périodiques par des losanges servant de guide pour placer des polygones réguliers afin de générer un autre pavage sous-jacent. Les rosaces sont inscrites dans les polygones réguliers et les autres polygones chevauchants sont remplis en cherchant les différentes configurations possibles.

L'un des travaux qui ont essayé de donner un formalisme général à la construction des motifs géométriques quasi-périodiques est celui nommé, modèle de structure hiérarchique (HFM : Hierarchical Framework Model) de Rima Al Ajlouni [70, 78]. Ce modèle est inspiré des principes traditionnels de la géométrie islamique et basé sur une grille sous-jacente de décagones imbriqués.

La première étape dans le processus de construction HFM est de générer une grille sous-jacente par le placement de plusieurs décagones imbriqués de même centre et de rayons successifs respectant la suite de Fibonacci. Le rapport entre les rayons de deux décagones successifs est toujours égal au nombre d'or : $r_{n+1}/r_n = (1 + \sqrt{5})/2$. Cette grille sous-jacente permet de déterminer le type de symétrie et les centres des étoiles (ou les rosaces) du motif. Dans l'exemple illustré dans la figure 5.14, les points rouges permettent de positionner des étoiles d'ordre 10 dont la taille (le rayon) est définie par la grille. Les points en bleu, sont des centres de motifs obtenus en cherchant des configurations des étoiles chevauchantes (Fig. 5.14b). L'espace qui reste

est rempli en utilisant des motifs géométriques dérivés du reste du motif. Il n'y a pas de règle de construction des motifs de liaison qui permettent de connecter les étoiles.

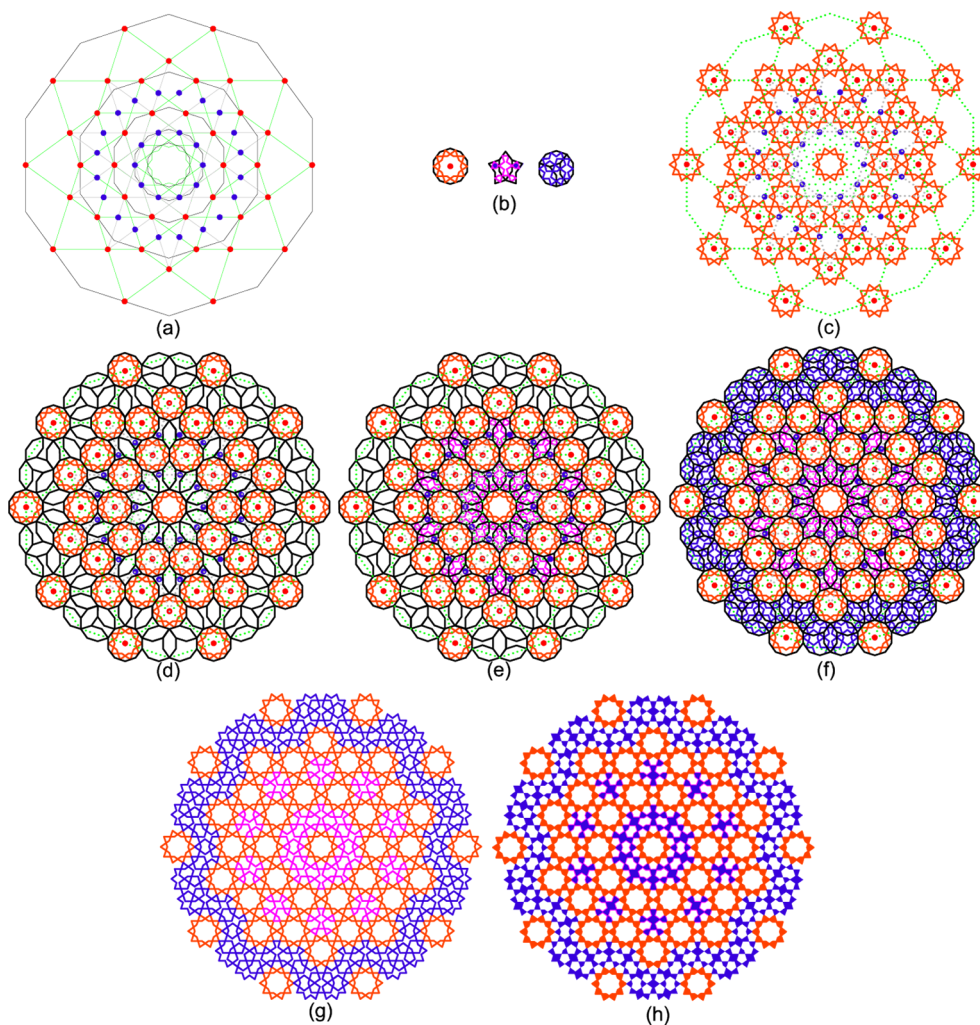


FIGURE 5.14 – Processus de construction du premier niveau d’un motif quasi-périodique. (a) la grille sous-jacente constituée de plusieurs polygones étoilés imbriqués. Le rapport entre les rayons de deux polygones étoilés successifs est égal au nombre d’or. (b) L’unité principale (l’étoile à 10) et les motifs de liaison. (c) les positions des unités principales (étoiles à 10) sont déterminées par la grille sous-jacente (les points rouges). (d) les motifs de liaison sont formés en utilisant des des unités principales chevauchantes. (e,f) l’insertion des motifs de liaison. (g,h) Le motif final.

La construction du motif quasi-périodique consiste à procéder selon une approche en niveaux. A chaque niveau est utilisée une grille sous-jacente. Le processus de construction du motif du deuxième niveau est semblable au processus de construction du motif du premier niveau, expliqué précédemment. La seule différence est que l'unité principale dans le deuxième niveau est en fait le motif obtenu dans le premier niveau (Fig. 5.14g). Ce motif est positionné selon la grille sous-jacente (Fig. 5.15b). La figure 5.15c illustre les motifs de liaison, qui sont utilisés pour remplir les espaces entre les unités principales du deuxième niveau. Le motif du deuxième niveau est illustré dans la figure 5.15d.

Le grand problème rencontré dans ce processus de construction, est de rechercher les motifs de liaison pour chaque niveau. Il n'y a pas de règles qui permettent de les construire.

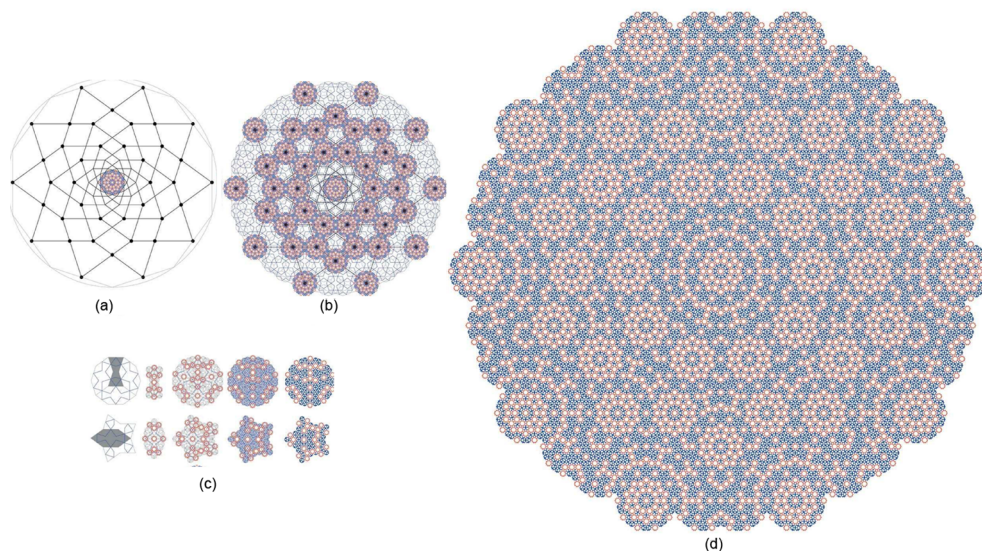


FIGURE 5.15 – La construction du deuxième niveau du HFM. (a) la grille sous-jacente pour le deuxième niveau. L'unité principale est le motif final obtenu dans la figure 5.14g. (b) Le placement des unités principales en se basant sur la grille sous-jacente. (c) Les configurations utilisées pour combler les espaces entre les unités principales. (d) Le motif final du deuxième niveau (pris à partir de [78]).

Dans son travail [78], Al Ajlouni a donné le processus de construction du motif de *Madrassa Al Attarine* (Fig. 5.16) selon le modèle hiérarchique (HFM). Cependant, le processus de construction a conduit à un motif qui contient une erreur inacceptable dans l'art géométrique islamique. Chaque

strand d'un motif géométrique est continu à l'infini ou forme une boucle. Le motif obtenu par Al Ajlouni ne respecte pas cette règle stricte de l'art géométrique islamique comme illustré dans la figure 5.17.

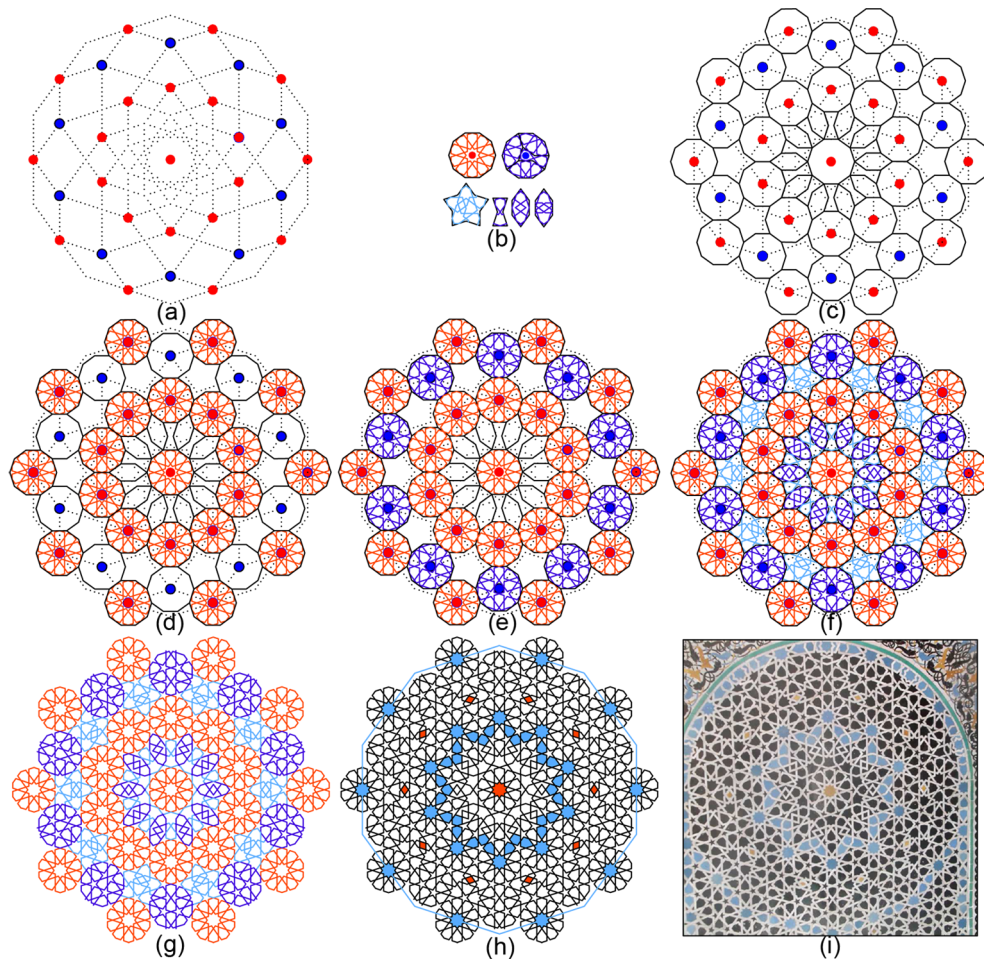


FIGURE 5.16 – Processus de construction du motif de *Madrasa AL Attarine* à Fès en utilisant le modèle HFM.

5.3.2 Méthode proposée

5.3.2.1 Analyse du motif du Madrasa AL Attarine à Fès

Le panneau du *Madrasa AL Attarine* à Fès est l'un des plus beaux et complexes désignes géométriques de l'art décoratif islamique. L'analyse de ce motif montre qu'il fait partie d'un motif obtenu à l'aide de deux tuiles ornées

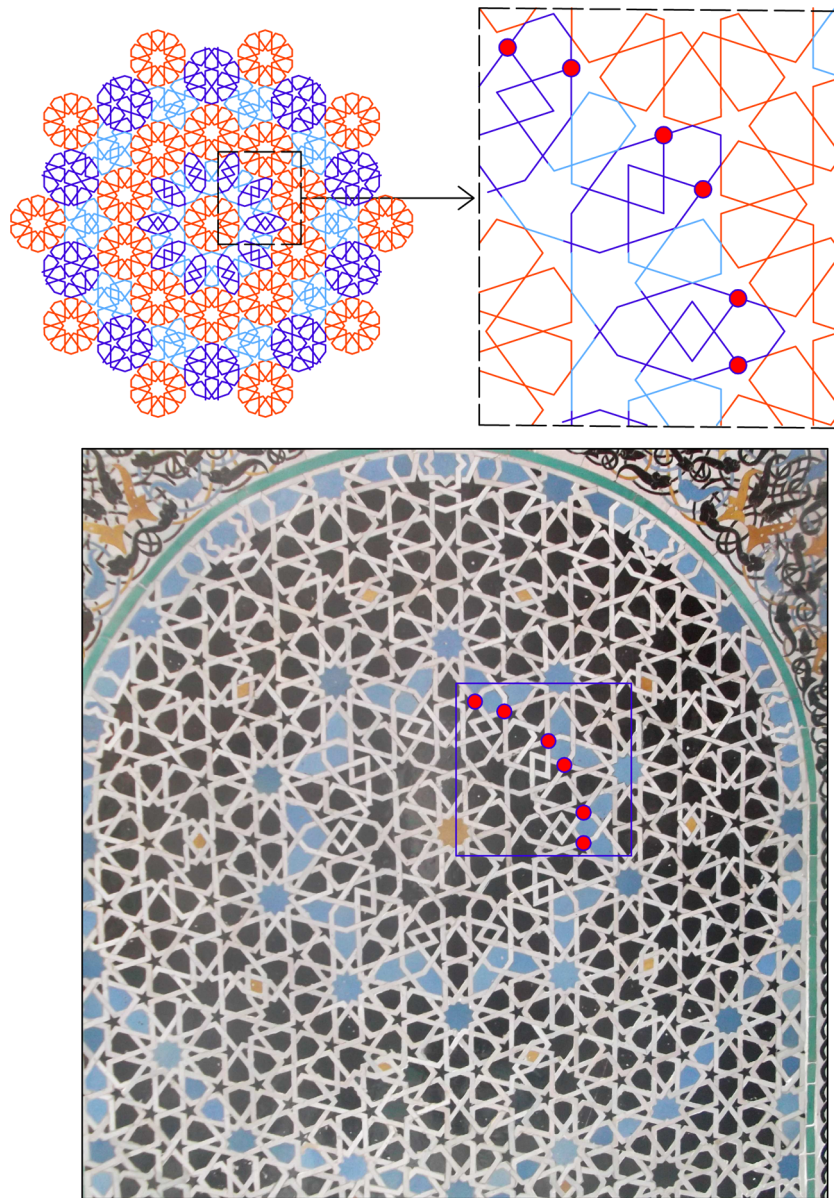


FIGURE 5.17 – Le motif obtenu par la méthode de construction HFM. Ce motif viole une caractéristique importante de l’art géométrique islamique.

comme illustré à la figure 5.18. Les losanges sont décorés à l’aide d’une rosace à 10. Cette rosace est disposée complètement à l’intérieur du grand losange (Fig. 5.18e) et partiellement dans le petit losange (chaque angle contient une partie de la rosette) (Fig. 5.18f). L’analyse de ce panneau nous aboutit aux

conclusions suivantes :

- Les losanges des pavages quasi-périodiques peuvent être ornés par des rosaces géométriques.
- Il existe une relation entre l'ordre des rosaces / étoiles et les angles des losanges.
- La rosace / étoile peut être centrée sur les sommets des losanges.
- Chaque angle de chaque losange contient une partie d'une rosace/étoile. L'union de ces parties constitue une rosace/étoile complète.
- La continuité des lignes du motif sur les bords des losanges adjacents doit être assurée.
- Les motifs quasi-périodiques islamiques peuvent être dérivés des pavages quasi-périodiques existants.

Par conséquent, la construction d'un motif quasi-périodique islamique peut être réduite à la génération du contenu des pavés de de son pavage quasi-périodique sous-jacent. L'objectif principal de cette partie est de formaliser une méthode générale pour construire une nouvelle variété de motifs islamiques quasi-périodiques .

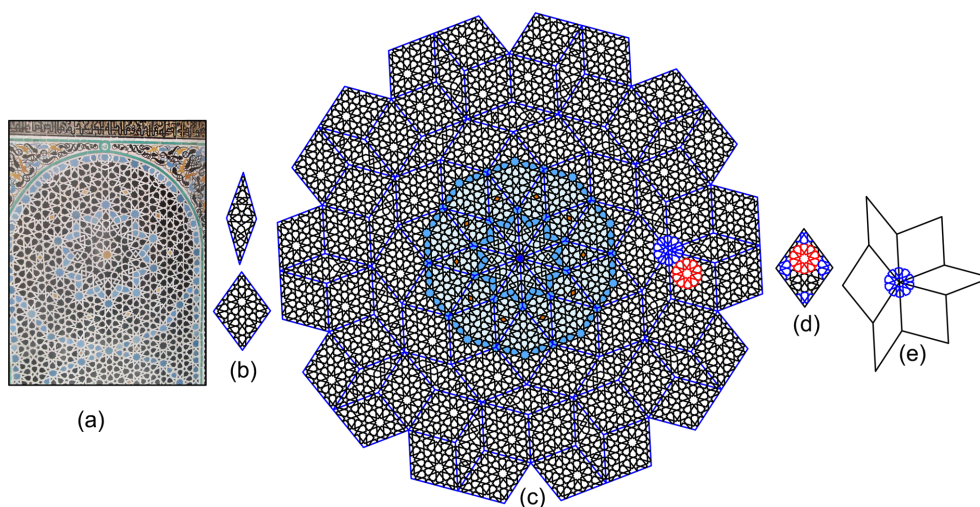


FIGURE 5.18 – (a) Le panneau de la *Madrasa Attarine* (Fès, Maroc), (b) les tuiles décorés correspondants, (c) l'arrangement des tuiles décorés, (d) la partie similaire au panneau, (e) la disposition des rosaces dans le gros losange (f) une rosace à 10 centrée sur un sommet en commun entre 6 losanges.

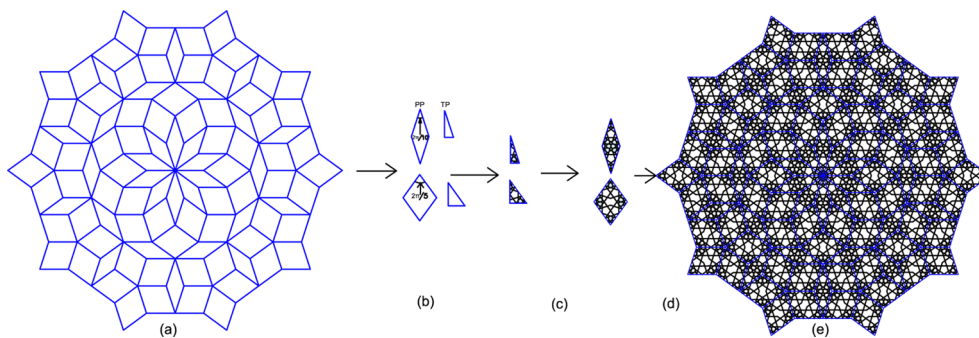


FIGURE 5.19 – Les étapes de la méthode proposée. (a) le pavage quasi-périodique initial, (b) les tuiles du pavage et leurs triangles rectangles correspondants, (c) construction des *motifs modèles* pour les deux triangles, (d) génération des *motifs unitaires* des deux losanges, (e) insertion des motifs unitaires dans le pavage.

5.3.2.2 Méthode de construction des motifs géométriques islamiques

Comme elle a été définie par plusieurs chercheurs [12], la quasi-périodicité peut être interprétée comme un cas de non-périodicité garanti par des marques spéciales des côtés et des sommets des tuiles du pavage. Un motif géométrique historique non marqué peut être considéré comme un pavage quasi-périodique s'il peut être dérivé d'une partie finie d'un pavage quasi-périodique et la partie finie dont il est dérivé peut être étendue à un pavage quasi-périodique du plan [73, 85]. Les motifs générés par la présente méthode sont dérivés des pavages quasi-périodiques. Par conséquent, ils sont quasi-périodiques.

Le processus de construction (Fig. 5.19) commence par l'extraction des losanges du pavage quasi-périodique. Ensuite, chaque tuile sera divisée en plusieurs triangles rectangles symétriques. Les losanges sont divisés en quatre triangles rectangles identiques et les carrés sont divisés en huit triangles rectangles identiques (Fig. 5.20). La tuile ayant le plus petit angle sera appelée «*Pavé Principal*» et sera noté *PP* et son triangle rectangle correspondant sera nommé «*Triangle principal*» et sera noté *TP*. Par conséquent, la construction du contenu d'une tuile du pavage sera réduite à la génération du contenu de son triangle rectangle correspondant.

Les étapes de construction du contenu d'un triangle (*motif modèle*) sont les mêmes que dans le chapitre précédent : la construction de la grille radiale, la construction d'un demi-pétale, la construction d'une partie de l'étoile/rosace et la génération du motif interstitiel. Dans cette partie on va mettre un fo-

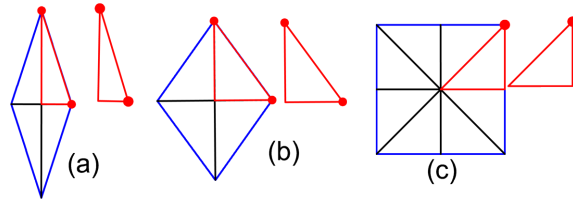


FIGURE 5.20 – (a) (b) Division des losanges en triangles rectangles, (c) division du carré en triangles rectangles. Les rosettes peuvent être centrées sur les sommets en rouge.

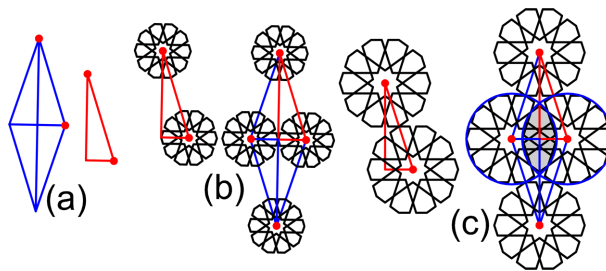


FIGURE 5.21 – (a) Le PP et son TP , (b) la disposition des rosaces de rayon $R = 1$, (c) la disposition des rosaces de rayon $R = L / 2$; la zone de chevauchement est ombrée.

cus sur les petites différences avec le processus de construction des motifs périodiques.

L'ordre N des rosaces compatibles avec un pavage quasi-périodique donné, est déterminé par l'équation suivante :

$$N = k \times 2\pi/\omega \quad (5.5)$$

où ω est le plus petit angle du PP et k est un entier non nul et le rayon R est défini par l'inégalité suivante :

$$l \leq R \leq L/2 \quad (5.6)$$

où l et L sont respectivement les longueurs du petit côté adjacent à l'angle droit et de l'hypoténuse du PT . La figure 5.21 illustre l'arrangement des rosettes sur les sommets du petit losange dans les cas où $R = l$ et $R = L/2$ respectivement.

En plus des paramètres d'une rosette/étoile définies dans la section 3.3, nous considérons un paramètre complémentaire bi-valeur 'O' qui définit l'orientation de l'étoile / rosette. $O = OH$ si l'étoile / rosette a une pointe sur l'hypoténuse du triangle rectangle (Fig. 5.22), et ($O = OL$) sinon (Fig. 5.22b).

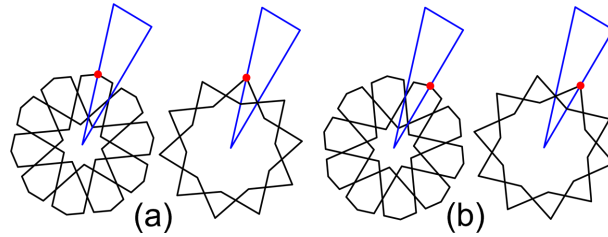


FIGURE 5.22 – (a) Une étoile à 10 branches et une rosace à 10 branches avec l’orientation $O = O_H$ et (b) $O = O_L$.

Ainsi, la rosace sera définie par les paramètres $(N, R, \theta, \varphi, S, O)$ et l’étoile sera définie par les paramètres (N, R, θ, S, O) . Ces paramètres seront définis pendant la construction des *motifs modèles*. Les mêmes paramètres doivent être utilisés pour chaque triangle pour assurer la continuité du motif à travers les côtés des tuiles adjacentes (Fig. 5.23c).

Après la génération du *motif modèle* de chaque triangle extrait du pavage, nous appliquons des symétries axiales par rapport aux bords de l’angle droit du triangle pour obtenir le *motif unitaire* de chaque losange (Fig. 5.23a). Pour construire le *motif unitaire* d’un carré, nous appliquons une symétrie axiale par rapport à l’hypoténuse suivie d’une rotation d’ordre 4 par rapport au sommet libre (Fig. 5.23b). La dernière étape dans notre processus de construction est de placer les *motifs unitaires* construits dans les tuiles du pavage quasi-périodique considéré comme grille sous-jacente (Fig. 5.24).

5.3.2.3 Résultats

La définition mathématique des paramètres de l’élément de conception de base (l’étoile et la rosace), permet de dériver plusieurs motifs, à partir d’un même pavage quasi-périodique, en changeant un ou plusieurs paramètres. Les figures 5.25, 5.26 et 5.27 illustrent plusieurs motifs dérivés des pavages quasi-périodiques décagonaux et pentagonaux en changeant les paramètres de la rosace.

La figure 5.28 montre des motifs quasi-périodiques obtenus en utilisant une étoile à 10 comme élément de conception.

La méthode proposée permet de générer des motifs géométriques islamiques pour différents types de pavages quasi-périodiques. Les figures 5.29, 5.30, 5.31 et 5.32 illustrent des motifs quasi-périodiques pour différents types de pavages.

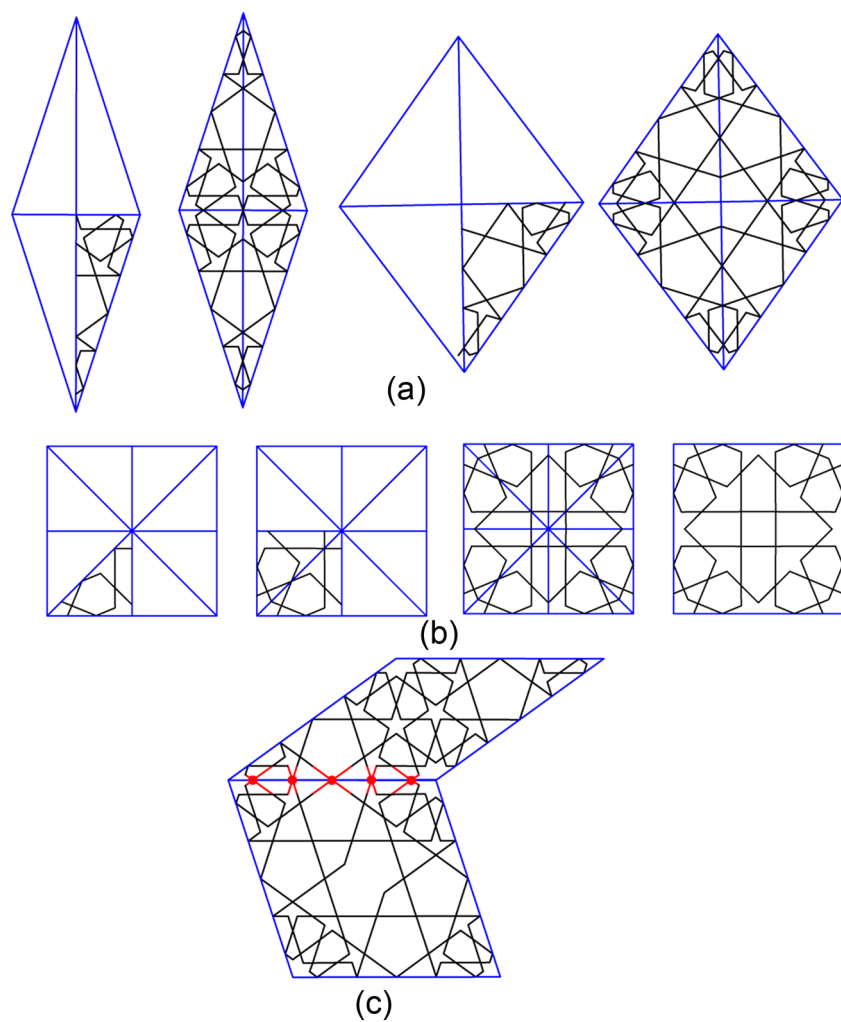


FIGURE 5.23 – (a) Construction des motifs unitaires pour les losanges par application des symétries axiales par rapport aux bords de l'angle droit du TP , (b) Construction du motif unitaire pour un carré en appliquant une symétrie axiale suivie d'une rotation d'ordre 4, (c) Disposition des *motifs unitaires* où la continuité du motif à travers les côtés.

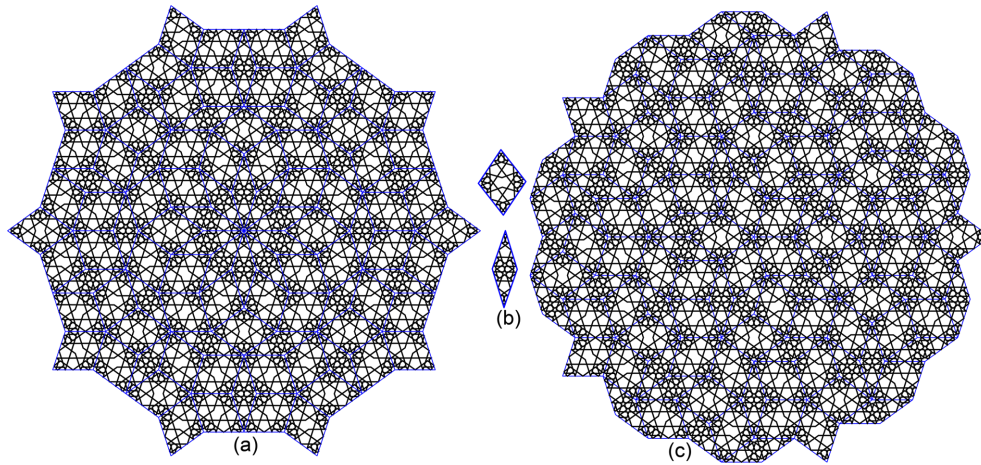


FIGURE 5.24 – (a) Un motif décagonal quasi-périodiques, (c) et un motif pentagonal obtenus à partir des (b) *motifs unitaires* construits.

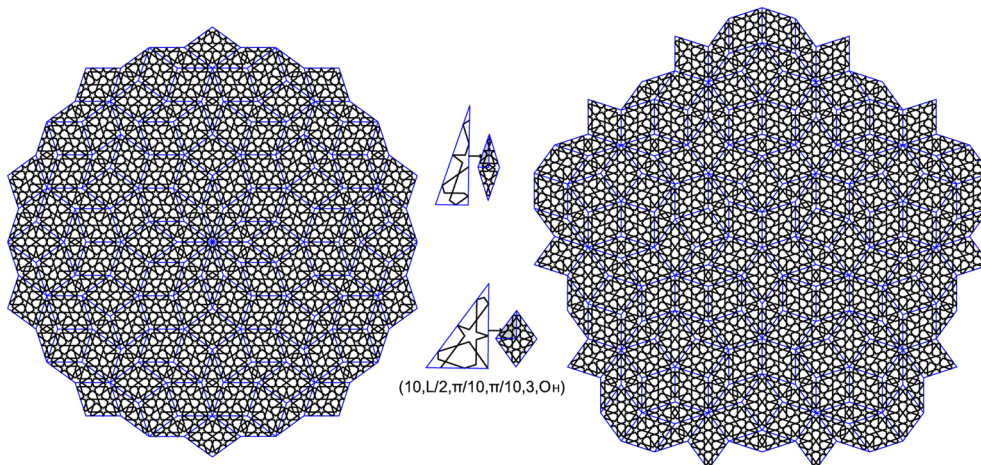


FIGURE 5.25 – Un motif quasi-périodique décagonal (à gauche) et un motif quasi-périodique pentagonal (à droite) et les paramètres de la rosace utilise comme élément de conception.

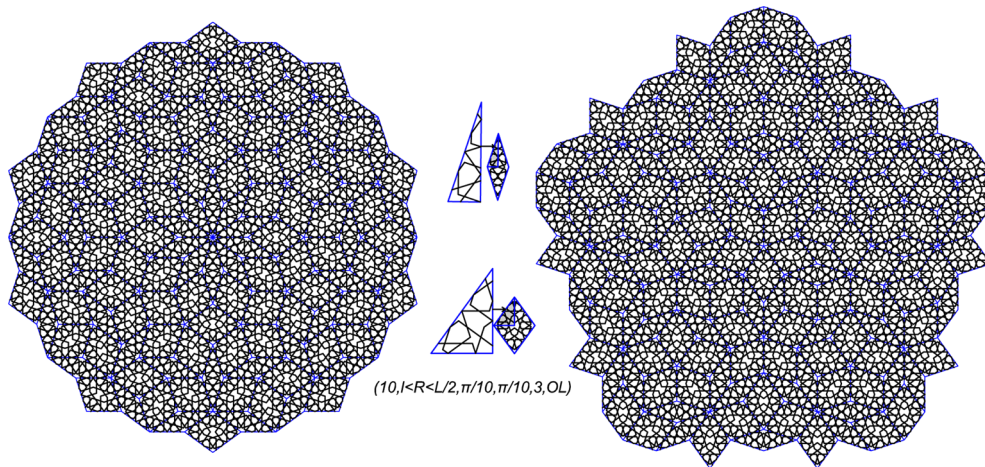


FIGURE 5.26 – Un motif quasi-périodique décagonal (à gauche) et un motif quasi-périodique pentagonal (à droite) et les paramètres de la rosace utilisée. Ces motifs sont obtenus en changeant le rayon et l'orientation des deux motifs de la figure 5.25.

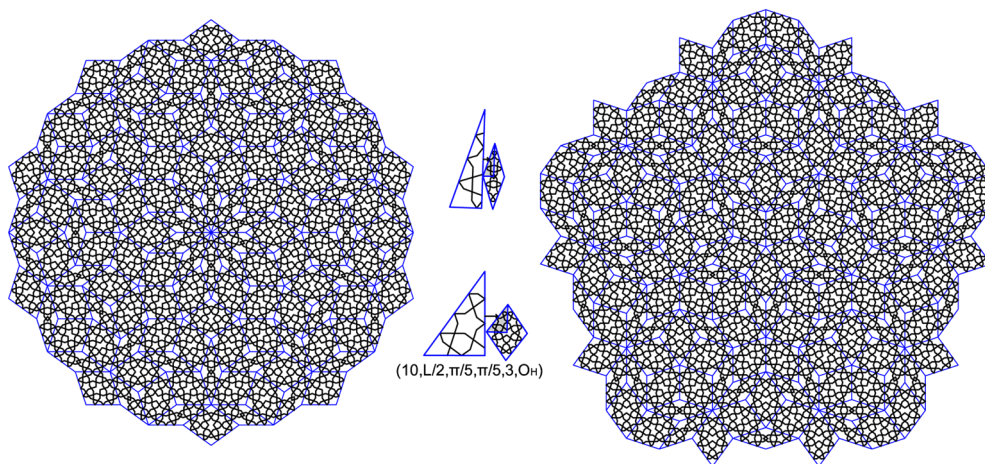


FIGURE 5.27 – Un motif quasi-périodique décagonal (à gauche) et un motif quasi-périodique pentagonal (à droite). Ces deux motifs sont obtenus en changeant les angles θ et φ de la rosace des deux motifs de la figure 5.26.

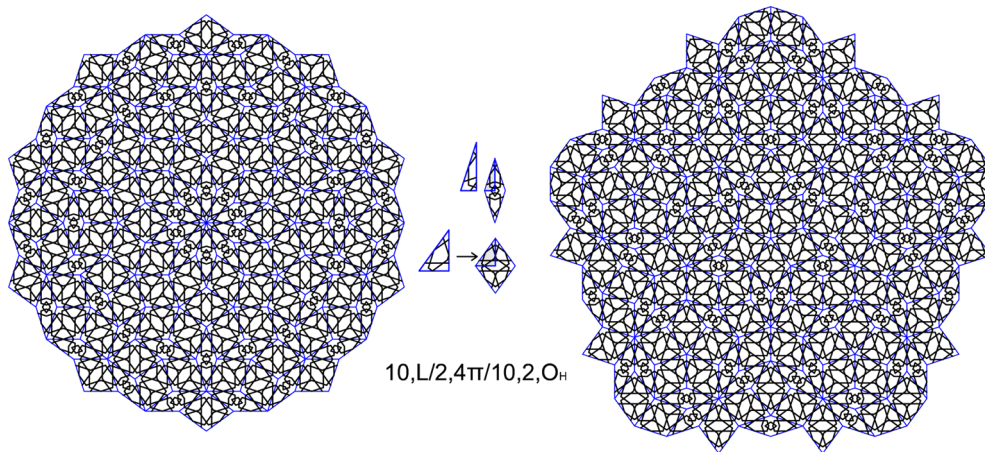


FIGURE 5.28 – Un motif décagonal et un motif pentagonal obtenus en utilisant une étoile à 10 comme élément de conception.

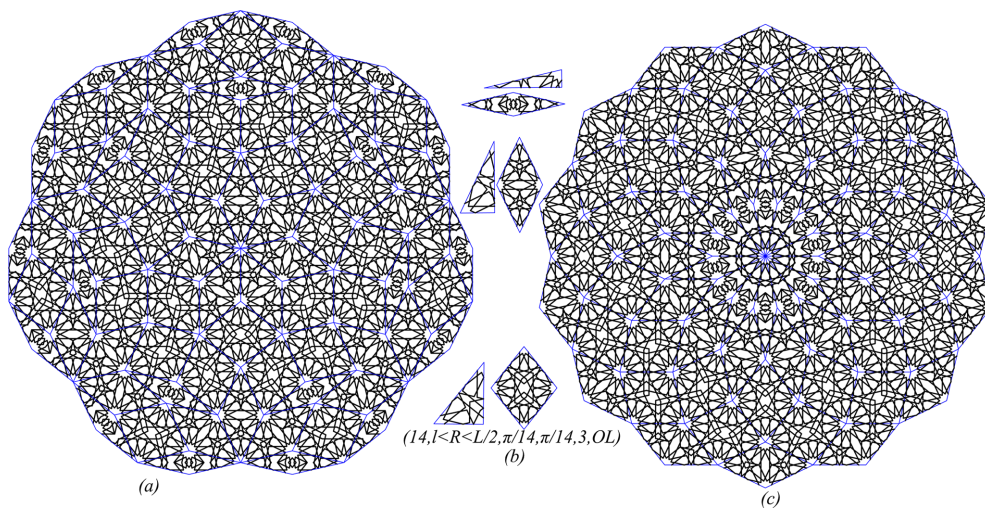


FIGURE 5.29 – (a) Construction d'un motif quasi-périodiques heptagonal et (c) d'un motif tétra décagonal, (b) à partir des motifs unitaires construits en utilisant les paramètres indiqués.

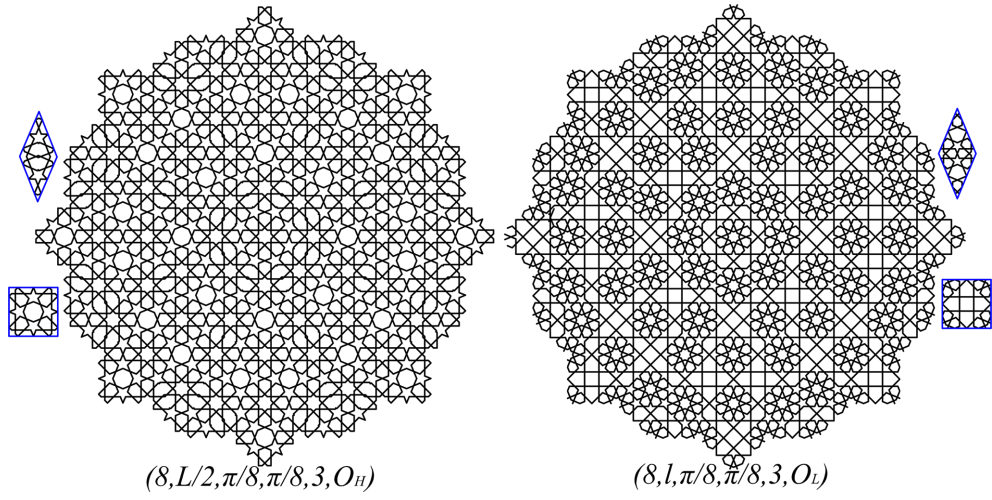


FIGURE 5.30 – Motifs octogonaux construits en utilisant les paramètres indiqués.

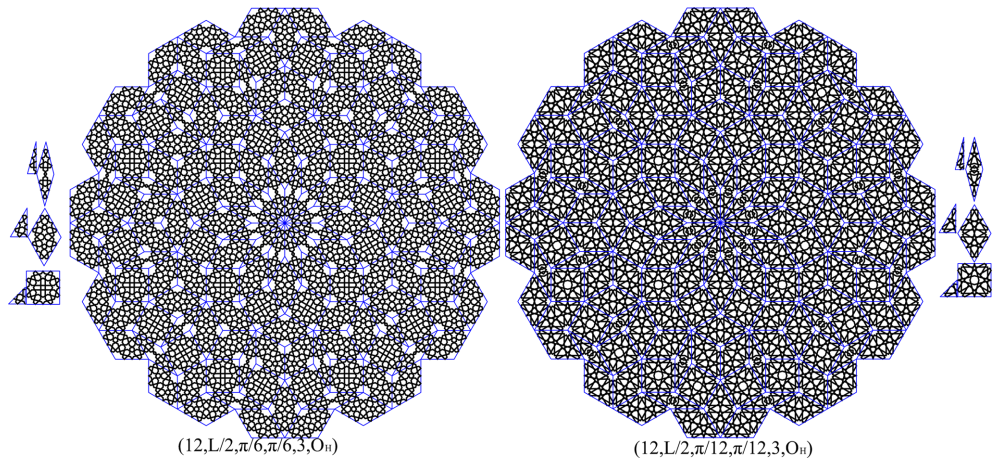


FIGURE 5.31 – Motifs dodécagonaux construits en utilisant les paramètres indiqués.

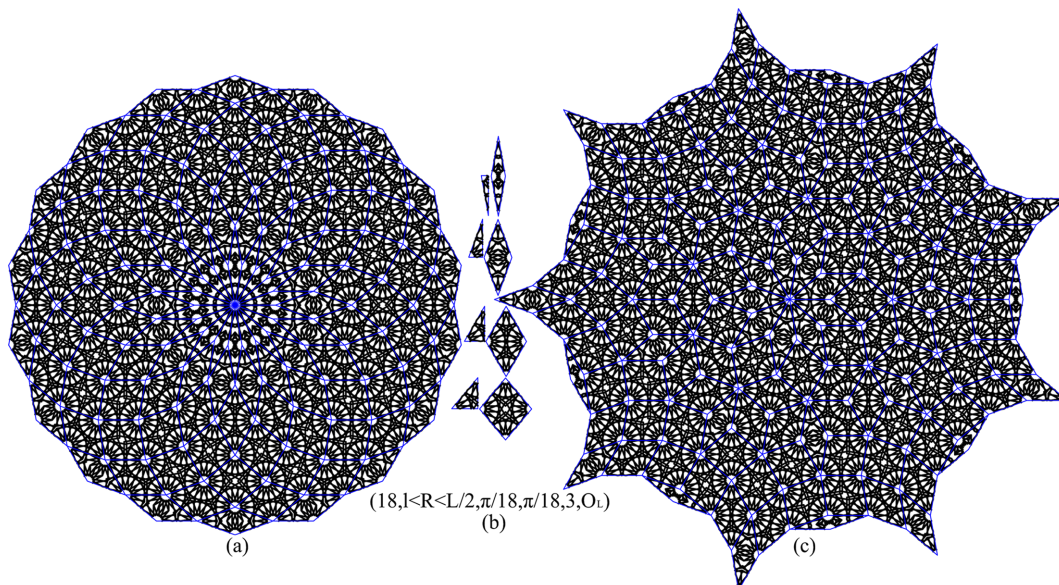


FIGURE 5.32 – (a) Construction d’un motif quasi-périodiques octadécagonal et (c) et d’un motif héptadécagonal, (b) à partir des *motifs unitaires* construits en utilisant les paramètres indiqués.

5.3.2.4 Cas spéciaux

Le premier cas particulier est dû au sommet libre du triangle rectangle extrait du carré (Fig. 5.20). Une étoile ou une rosace supplémentaire d’ordre M peut être placée sur ce sommet. L’ordre M dépend uniquement de la symétrie rotationnelle d’ordre 4 de ce sommet : $M = k \times 4$. Sur la figure 5.33a est représenté un motif octogonal contenant une étoile supplémentaire à huit branches placée sur le sommet libre du triangle extrait du carré. La figure 5.33b illustre un motif dodécagonal avec deux rosettes. La rosette supplémentaire à 8 pointes (couleur rouge) est placée sur le sommet libre du triangle.

Dans le second cas particulier, une rosette supplémentaire peut placée sur un côté du triangle rectangle. La figure 5.34 illustre un motif pentagonal et un motif décagonal avec une rosette à 10 pointes placée sur le côté du grand losange. Dans la figure 5.35, le motif octogonal est constitué d’une rosette à 8 pointes placée sur le côté des deux triangles rectangles, d’une étoile à 8 pointes centrée sur le sommet libre du triangle du carré et d’une rosace principale d’ordre 16.

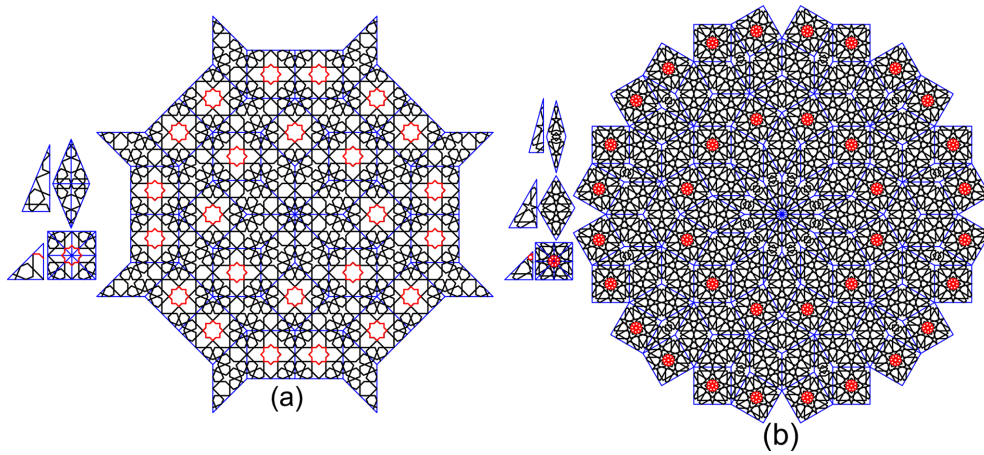


FIGURE 5.33 – (a) Un motif octogonal avec une étoile additionnelle à 8 branches (couleur rouge) placée au sommet libre du triangle du carré, (b) un motif dodécagonal avec une rosette supplémentaire à 8 branches (couleur rouge) placée sur le sommet libre du triangle.

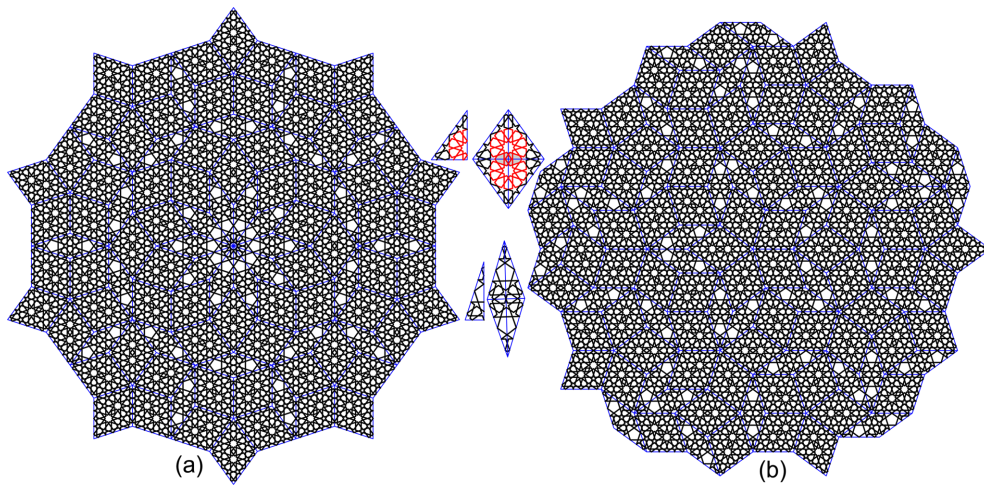


FIGURE 5.34 – (a) Un motif décagonal et (b) un motif pentagonal avec une rosette supplémentaire à dix branches placée sur le côté du triangle rectangle du gros losange (couleur rouge).

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons commencé par présenter les différents travaux d'analyse visant à prouver la quasi-périodicité de plusieurs motifs.

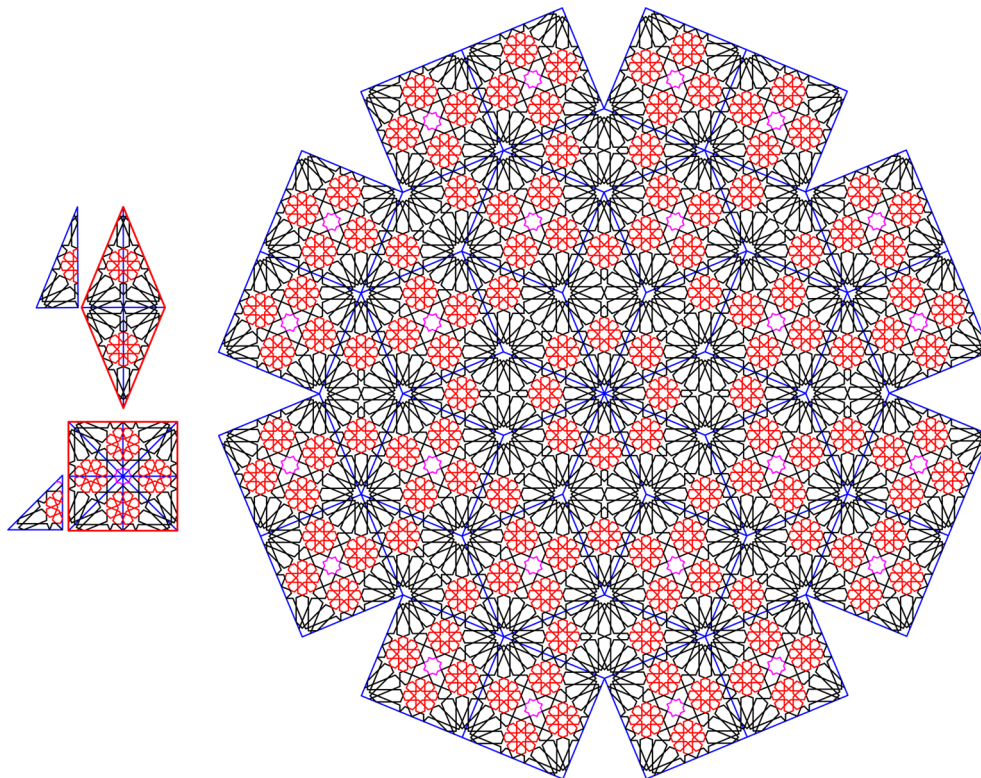


FIGURE 5.35 – Un motif octogonal avec une rosette principale d’ordre 16, une rosette à 8 points placée sur les côtés des deux triangles rectangles et une étoile à 8 pointes placée sur le sommet libre du triangle rectangle du carré. Ce motif est une version quasi périodique du fameux motif périodique d’Alhambra disponible sur <https://patternislami-cart.com/archive/main/7/spain/spa1209>.

Cette analyse a fini par prouver que le motif géométrique de la *tour bleue* de *Marāgha* et le motif de *Darb-e-Imam* à Isfahan, Iran sont des motifs géométriques quasi-périodiques réalisés par les artisans musulmans plusieurs siècles avant la découverte des structures quasi-périodiques dans l’ouest. Cette analyse nous a motivé à élaborer une méthode de construction qui permet d’obtenir de nouveaux motifs quasi-périodiques inspirés par des modèles architecturaux existants. Cette méthode commence avec les pavages quasi-périodiques existants, et dérive de nouveaux motifs géométriques islamiques. Nous avons réduit la zone de construction aux triangles minimaux extraits des tuiles du pavage quasi-périodique considéré comme une grille sous-jacente. Le processus de construction se compose de plusieurs étapes permettant de

généraliser le contenu des triangles rectangles en utilisant des étoiles et des rosettes comme éléments de conception. Ensuite, l'application des transformations isométriques aux motifs modèles permet de généraliser le contenu des tuiles (motifs unitaires). Les motifs unitaires sont ensuite copiés sur le pavage. Cette méthode permet d'obtenir une grande variété de motifs quasi-périodiques en changeant le pavage ou en changeant les paramètres des éléments de conception pour un même pavage.

Conclusion

Ce travail a visé l'automatisation de la génération des motifs géométriques islamiques par l'application des concepts des mathématiques modernes et par utilisation de l'informatique et notamment de l'infographie. A cet effet, nous avons élaboré des algorithmes de génération d'anciens comme de nouveaux motifs. Ces algorithmes ont été par la suite traduits en programmes informatiques avec des interfaces hommes machines permettant de produire des conceptions automatisées et paramétrées des ornements géométriques.

Dans une première contribution, nous avons élaboré une méthode pour générer des motifs étoilés périodiques islamiques. La méthode proposée permet de construire un motif en se basant sur la théorie des groupes de symétrie. Étant donné un groupe de symétrie, nous avons décrit un processus systématique pour construire de manière paramétrique le motif modèle dans la région fondamentale. L'utilisateur pourra de lui même faire le choix du nombre d'étoiles/rosettes et des paramètres caractéristiques de chacune d'elles. La performance de la méthode proposée est évaluée par sa capacité à générer une grande variété de motifs géométriques islamiques existants et à créer de nouveaux autres motifs. En outre, la méthode peut produire des motifs impossibles à réaliser en utilisant l'approche classique de polygones-en-contact. Ces motifs présentent des rosettes qui ne sont pas en contact les unes avec les autres, des rosettes qui ne sont pas placées sur sommets de la région fondamentale ou des rosettes qui se chevauchent. La méthode proposée est facile à mettre en œuvre en comparaison par rapport aux méthodes génératives existantes. Elle a aussi l'avantage de ne nécessiter aucun pavage initial ni grille sous-jacente. Dans la deuxième contribution, nous avons généralisé la méthode proposée à la génération des motifs quasi-périodiques. En partant d'un pavage quasi-périodique existant, nous avons réduit la zone de construction en triangles extraits des tuiles de ce pavage. Le processus de construction proposé se compose de plusieurs étapes pour générer le contenu des triangles en utilisant des étoiles et des rosettes comme éléments de conception. Cette méthode permet d'obtenir une nouvelle variété de motifs quasi-périodiques.

Au-delà du travail présenté ici, il y a encore d'énormes opportunités pour

les travaux futurs centrés sur l'utilisation de l'informatique dans la création de motifs géométriques.

Au niveau des algorithmes élaborés dans ce travail, il est nécessaire de les étendre pour couvrir l'art décoratif maroco-andalous. Même s'il y a des différences entre les motifs géométriques de l'art oriental et ceux de l'art maroco-andalous, nous pensons qu'il y a une forte corrélation entre les deux styles. La beauté des motifs géométriques est liée aux propriétés mathématiques, telles que le nombre d'or. La combinaison de la notion de fractale et de nombre d'or peut conduire à la conception de nouveaux motifs géométriques d'une beauté extraordinaire.

Bien que ce travail soit centré sur les motifs géométriques 2D, il y a une grande opportunité d'utiliser les méthodes de construction élaborées en combinaison avec des règles de transformation pour transformer un motif 2D en un motif muqarnas 3D.

Au niveau de la mise en œuvre des algorithmes de construction, même si l'outil de génération élaboré dans ce travail « Lmaalem » est assez flexible, il est nécessaire de développer des styles de décoration qui permettent un rendu plus attrayant des motifs générés.

Liste des tableaux

2.1	Les symétries primitives des sept groupes de frises.	23
2.2	Tableau montrant la notation symbolique utilisée pour désigner les différents types de groupes de symétries regroupés selon la forme géométriques de leurs cellules de base.	27
4.1	Ordre de la rosace/étoile compatible avec chaque sommet des régions fondamentales des groupes $p6m$, $p4m$, cmm et pmm . .	85
4.2	Les paramètres θ et φ compatibles avec les angles utilisés dans différents systèmes de Bonner. L'angle ω représente l'angle entre les deux lignes développées à partir d'un milieu de bord d'un polygone pour chaque famille. Les cellules vides au tableau indiquent que ce type de motif n'existe pas dans le système en question.	112
4.3	Paramètres d'étoiles/rosaces compatible avec la technique non-systématique de Bonner.	113

Table des figures

2.1	Réflexion avec glissement	17
2.2	Application d'une rotation d'angle β sur les deux points $(1, 0)$ et $(0, 1)$ du plan euclidien.	18
2.3	Symétrie axiale	20
2.4	Exemples de groupes avec des symétries cycliques et dièdres.	22
2.5	Les sept groupes de frises.	23
2.6	Les cinq cellules de base.	24
2.7	La notation internationale des 17 groupes de symétries. Pour chaque cellule de base on représente les différentes isométries : rotation, réflexion et réflexion glissée.	26
2.8	Exemples des tuiles qui ne sont pas des disques topologiques fermés. (a) est un pavé qui contient un trou. (b) et (c) sont des tuiles dont chacune devient déconnectée lors de la suppression d'un ensemble approprié de points. (d) est un pavé qui n'est pas connecté : autrement dit, il est composé de plus d'une pièce, (e) et (f) sont des tuiles qui contiennent un segment, un arc ou une courbe dont la surface est nulle, (g) est une tuile qui n'est pas fermée (on ne peut pas trouver un cercle qui l'entoure) (redessiné à partir de [12]).	28
2.9	Exemple d'un pavage dont l'intersection entre certaines tuiles est une courbe discontinue. L'intersection entre les deux pavés en gras se compose de deux segments de droite disjoints. Ce pavage n'est pas normal selon la condition 3.	29
2.10	Illustration des notions d'adjacence, voisinage : les points A, B, C, D, E et F sont les coins de la tuile T, mais les points A, C, D, F et G sont les sommets du pavage. Les segments de droite AB, BC, CD, DE, EF, et FA sont les côtés de T, mais AC, CD, DF, FG et GA sont des bords du pavage. Les tuiles T1, T2, T4, T6 et T7 sont des tuiles adjacentes (et voisines) à T mais les tuiles T3 et T5 sont des tuiles juste voisines (non adjacentes) à T. (redessiné à partir de [12]).	30

2.11	Les 21 types de sommets possibles par des polygones réguliers.	32
2.12	Les onze pavages archimédiens.	34
2.13	11 L'ensemble apériodique P1 de Penrose constitué d'une demi-étoile à 5, une étoile à 5, un losange, et trois pentagones réguliers dont les côtés sont marqués par les règles d'assemblage. Dans un pavage apériodique les côtés 0 sont attachés aux cotés $\bar{0}$, 1 à $\bar{1}$ et 2 à $\bar{2}$	36
2.14	Six patches obtenus en respectant les règles d'assemblage.	36
2.15	Les transformations appliquées aux bords des patches de la figure 2.14 pour retrouver les règles d'assemblage des tuiles originales de P1.	37
2.16	Pavage obtenu en utilisant le processus d'inflation. Pour des raisons de clarté les règles d'assemblage sont omises.	37
2.17	L'ensemble P2 de Penrose : (a), (b) Le cerf-volant et la fléchette de l'ensemble P2 avec deux types de règles d'assemblage et(c) un pavage apériodique obtenu par les deux tuiles.	38
2.18	Le cerf-volant et la fléchette divisés en deux triangles de Robinson avec les règles d'assemblage appropriées, et (c) un pavage apériodique avec les deux triangles.	39
2.19	Pavage apériodique avec les tuiles de l'ensemble P3.	40
3.1	Construction d'un motif avec une étoile à 6 en utilisant la méthode de jonctions de points.	45
3.2	Construction d'une rosace à 8 dans une unité carrée.	46
3.3	Construction d'une rosace à 12 dans une unité hexagonale.	47
3.4	Construction d'un motif avec une rosace centrale d'ordre 8.	48
3.5	Construction de la grille sous-jacente.	49
3.6	(a) Construction du motif sur la grille sous-jacente, (b) la cellule de base, (c) le motif obtenu par la répétition de la cellule de base.	50
3.7	Construction d'un autre motif en se basant sur la même grille $h = 16$	51
3.8	Les polygones réguliers du système 3-4-6-12 et leurs motifs associés(reproduit à partir de [29]).	53
3.9	Plusieurs motifs obtenus en combinant le carré, l'hexagone et le double hexagone.	54
3.10	Les éléments polygonaux du système 4-8 A et leurs motifs associés (reproduit à partir de [29]).	55
3.11	Différents motifs obtenus en combinant plusieurs éléments polygonaux du système 4-8 A.	55

3.12	Les éléments polygonaux du système 4-8 B et leurs motifs correspondants (reproduit à partir de [29]).	56
3.13	Différents motifs obtenus par la combinaison des éléments du système 4-8 B.	57
3.14	Les polygones du système 5-10 ainsi que leurs motifs correspondants (reproduit à partir de [29]).	58
3.15	Motifs du système 5-10.	59
3.16	Les éléments polygonaux du système 7-14 (reproduit à partir de [29]).	60
3.17	Les éléments polygonaux supplémentaires à ceux de la figure précédente (reproduit à partir de [29]).	61
3.18	Un motif du système 7-14 (prix de [29]).	62
3.19	Construction de la grille radiale pour un motif avec deux centres de symétrie d'ordre 12 et 9.	63
3.20	Construction du pavage sous-jacent.	64
3.21	Conception du motif à partir du pavage sous-jacent.	65
3.22	(a) La première étape de la méthode de Hankin qui consiste à identifier <i>les points de contact</i> , (b) la deuxième étape qui consiste à faire émerger une paire de lignes à partir de chaque point de contact vers l'intérieure du polygone sous-jacent.	66
3.23	Les deux cas d'intersections entre deux lignes.	67
3.24	Le processus de construction d'un motif géométrique par la méthode <i>PIC</i> : (a) identification des points de contact du pavage en question (4.8^2), (b) faire émerger des paires de lignes à chaque point de contact, (c) la troncature des lignes selon le critère de minimisation du coût du motif, (d) le motif obtenu après la suppression du pavage sous-jacent.	67
3.25	Plusieurs motifs obtenus en appliquant la méthode de Hankin sur différent pavages et en utilisant différents angles de contact pour chaque pavage.	69
3.26	Amélioration du motif par application de deux itérations du processus : (a) le résultat obtenu par la première itération dont l'espace non couvert s'avère très grand (en gris), (b) les points de départ de la deuxième itération (en rouge), (c) le motif obtenu après la deuxième itération au double hexagone.	70
3.27	Application de deux itérations pour deux motifs différents.	70
3.28	Identification des points de contact pour un motif à deux points, les deux lignes sont émergées à partir de deux points différents.	71

3.29	Plusieurs motifs à deux points, la troisième colonne de chaque ligne montre le motif à deux points dérivé à partir du même pavage à gauche. La deuxième colonne sert à comparer les motifs avec un et deux points de contact pour un même pavage.	71
3.30	Différents motifs à deux points dérivés du pavage à gauche en augmentant la distance entre les points de contact.	72
4.1	Motif périodique de type $p6m$ constitué d'étoiles d'ordre 12. C'est un motif historique qu'on trouve dans ([3] page 173), (a) le motif périodique (b) l'étoile d'ordre 12, (c) le motif interstitiel, (d) la cellule de base contenant le <i>motif unitaire</i> , (e) le <i>motif modèle</i> contenu dans la région fondamentale.	76
4.2	Un motif périodique fameux de l'art géométrique islamique de type $p6m$ constitué de plusieurs rosaces à 12, (a) le motif périodique (b) la rosace d'ordre 12, (c) le motif interstitiel, (d) la cellule de base contenant le <i>motif unitaire</i> , (e) le <i>motif modèle</i> contenu dans la région fondamentale.	77
4.3	Motif historique contenant deux types de rosaces (une rosace à 12 et une rosace à 9) qu'on trouve dans ([3] page 193), (a) le motif périodique (b) la rosace d'ordre 12, (c) rosace d'ordre 9, (d) le motif interstitiel, (e) la cellule de base contenant le <i>motif unitaire</i> , (f) le <i>motif modèle</i> contenu dans la région fondamentale.	78
4.4	Motif historique contenant deux types d'étoiles (une étoile à 12 et une étoile à 9) qu'on trouve dans ([3] page 193), (a) le motif périodique (b) étoile d'ordre 12, (c) étoile d'ordre 9, (d) le motif interstitiel, (e) le <i>motif unitaire</i> contenu dans la cellule de base, (f) le <i>motif modèle</i> contenu dans la région fondamentale.	79
4.5	Motif contenant trois types de rosaces (une rosace à 24, une rosace à 12 et une rosace à 8), (a) le motif périodique (b) rosace d'ordre 24, (c) rosace d'ordre 12, (d) rosace d'ordre 8, (e) le motif interstitiel, (f) le <i>motif modèle</i> contenu dans la région fondamentale.	80
4.6	Construction d'un polygone étoilé d'ordre 12 selon la démarche décrite dans [2], [12] avec les paramètres $\{n/d\}$ s	82
4.7	(a) Une étoile à 12, (b) les paramètres qui définissent une étoile.	82
4.8	(a) Rosace à 12, (b) Construction d'une rosace idéale selon la démarche de Lee [2]	83
4.9	(a) Une rosace à 12, (b) les paramètres $(N, R, \theta, \varphi, S)$ qui définissent une rosace.	84
4.10	Cellules de base et régions fondamentales des groupes (a) $p6m$, (b) $p4m$, (c) cmm et (d) pmm	86

4.11	Construction de la grille radiale dans la région fondamentale du groupe pbm . (a) la grille radiale pour un motif de type pbm qui va contenir une rosace à 18 centrée sur le sommet C , (b) grille radiale pour un motif qui va contenir une rosace à 12 centrée sur C et une rosace d'ordre 9 centrée sur le sommet B , (c) la grille radiale pour un motif qui va contenir une rosace d'ordre 24 centrée sur C , une rosace d'ordre 12 centrée sur B et une rosace d'ordre 8 centrée sur le sommet A	86
4.12	Région fondamentale contenant des portions d'une rosace à 10, cellule de base obtenue par application des symétries axiales par rapport à AB et AC et le résultat de la duplication de la cellule de base où les parties des rosettes centrées sur B et C sont jointes pour former une même rosace.	88
4.13	(a) Un demi-pétale d'une rosace, (b) un pétale complet obtenu par application d'une symétrie axiale, (c) la rosace obtenue en appliquant une rotation d'ordre 12 sur le pétale. Le demi-pétale doit être inscrit dans un angle de π/N (N est l'ordre de la rosace) pour éviter les chevauchements entre les pétales lors de l'application de la rotation d'ordre N	88
4.14	Construction d'un demi-pétale à l'intérieure d'une division de la grille radiale, (a) le premier segment de droite $S_0 = KG$ qui définit l'angle θ de la rosace, (b) le deuxième segment de droite S_1 qui définit l'angle φ de la rosace, (c) le segment de droite S_1 est considéré comme un rayon lumineux et il va subir des réflexions sur les bornes de la division, (d) production du segment S_2 par réflexion de S_1 sur EC , (e) production de S_3 par réflexion de S_2 sur KC , (f) le demi-pétale construit dont tous les paramètres de la rosace sont définis.	89
4.15	Construction d'un demi-pétale d'une étoile à l'intérieur d'une division, (a) le premier segment de droite S_0 qui définit l'angle θ de l'étoile, (b) le demi-pétale construit dont tous les paramètres de l'étoile sont bien définis.	90
4.16	Deux régions fondamentales de deux motifs avec plusieurs types de rosaces dont les demi-pétales sont construits. (a) deux demi-pétales de deux rosaces, (b) trois demi-pétales de trois rosaces.	90
4.17	Construction de la partie de l'étoile/rosace contenue dans la région fondamentale, (a) le demi-pétale d'une rosace, (b) application d'une symétrie axiale par rapport à la ligne de division (en rouge), (c) demi-pétale d'une étoile, (d) application d'une symétrie axiale par rapport à la ligne de division (en rouge).	91

4.18	Génération de plusieurs parties de différentes rosaces. (a) les demi-pétales générés, (b) application d'une symétrie axiale sur chaque demi-pétale, (c) les trois parties des trois rosaces sont générées.	91
4.19	Processus d'extension/réflexion. (a) détermination des points d'extension (points verts) et des points de réflexion (point rouge), (b) le segment de droite ayant un point de réflexion sera réfléchi comme un rayon lumineux et les segments ayant un point d'extension seront prolongés, (c) la première itération du processus dont les deux rosaces ne sont pas bien connectées, (d) la deuxième itération dont les rosaces sont bien connectées.	93
4.20	Processus de construction d'un motif périodique. (a) construction du <i>motif modèle</i> , (b) génération du <i>motif unitaire</i> , (c) les deux motifs obtenus.	95
4.21	Processus de construction de deux motifs de type <i>cmm</i> avec une rosace/étoile d'ordre 10. (a) les étapes de construction du <i>motif modèle</i> : (1) la grille radiale, (2) construction d'un demi-pétale, (3) construction des parties de la rosace/étoile, (4) processus d'extension réflexion ; (b) construction du motif unitaire ; (c) les deux motifs périodiques obtenus.	97
4.22	Détermination des rayons. (a) détermination des rayons pour une rosace d'ordre 12 centrée sur C et une rosace d'ordre 9 centrée sur B ; (b) détermination des rayons pour une rosace d'ordre 12 centrée sur C et une rosace d'ordre 8 centrée sur A .	98
4.23	Croisement parfait au point K après application de la symétrie axiale par rapport à BC lorsque les angles θ des deux rosaces sont égaux, (b) Croisement imparfait lorsque les angles θ sont différents.	99
4.24	Les étapes de construction d'un motif de type <i>p6m</i> avec deux rosaces jointes, (a) la génération de la grille radiale et la détermination des rayons, (b) la construction des demi-pétales, (c) la génération des deux parties des rosaces, (d) la génération du motif interstitiel, (e) la génération du <i>motif unitaire</i> , (f) le motif périodique obtenu.	100
4.25	Les étapes de construction d'un motif de type <i>p6m</i> avec deux rosaces disjointes, (a) la génération de la grille radiale : les rayons sont diminués suivant l'équation (3.8), (b) la construction des demi-pétales, (c) la génération des deux parties des rosaces, (d) la génération du motif interstitiel, (e) la génération du <i>motif unitaire</i> , (f) le motif périodique obtenu.	101

4.26	Processus de construction d'un motif de type $p6m$ avec deux étoiles jointes ; une étoile à 12 centrée sur C et une étoile à 6 centrée sur B ; (a) la génération de la grille radiale et la détermination des rayons, (b) la construction des demi-pétales, (c) la génération des deux parties des rosaces, (d) la génération du motif interstitiel, (e) la génération du <i>motif unitaire</i> , (f) le motif périodique obtenu.	102
4.27	Construction d'un motif de type $p6m$ avec trois rosaces : une rosace d'ordre 24 centrée sur C , une rosace d'ordre 12 centrée sur B , et une rosace d'ordre 8 centrée sur le sommet A . (a) détermination des rayons, (b) la grille radiale, (c) la construction des demi-pétales, (d) la générations des parties des rosaces, (e) le génération du motif interstitiel, (f) la génération du <i>motif unitaire</i> , (g) le motif périodique obtenu.	103
4.28	Motif périodique de type $p4m$ contenant une rosace d'ordre 16 centrée sur C et une rosace d'ordre 8 centrée sur le côté AB de la région fondamentale. (a) la grille radiale dont le centre de la rosace à 8 est l'intersection d'une ligne de division de \hat{C} et le coté AB , où l'angle formé est égal à $3\pi/8$ qui est un multiple de $\pi/8$, (b) construction des deux demi-pétales, (c) génération des deux parties des deux rosaces, (d) génération du motif interstitiel, (d) génération du <i>motif unitaire</i> par duplication du <i>motif modèle</i> en utilisant les symétries internes du groupe $p4m$, (f) le motif périodique obtenu.	105
4.29	Exemples des monstres (n, c) pour $n = 8$ et $n = 10$	106
4.30	Tableau montrant une collection des configurations possibles pour différents <i>monstres</i> (n, c) pour $n \leq 12$. Chaque ligne représente des monstres pour une valeur de c . Les colonnes représentent des angles de contact multiples de π/n . (pris à partir de [66])	106
4.31	Un motif de type cmm avec des rosettes superposées. (a) la division, (b) la construction du premier demi-pétale, (c) la construction des parties des rosettes, (d) la suppression des parties situées à l'extérieur de la région fondamentale et la construction de la zone interstitielle, (e) le <i>motif unitaire</i> obtenu, (f) le motif obtenu, (g) le pavage équivalent avec des décagones qui se chevauchent où une recherche de la configuration de la zone de chevauchement est nécessaire.	107

4.32	Construction d'un motif de type pmm avec deux rosettes à 10. (a) la division et la détermination des rayons, (b) la construction des deux premiers demi-pétales, (c) la construction des parties des rosettes (la partie à l'extérieur de la région fondamentale est ombrée), (d) application du processus d'extension / réflexion, (e) le <i>motif unitaire</i> (la zone de chevauchement est ombrée), (f) le motif obtenu.	108
4.33	Solution alternative pour manipuler la zone interstitielle. La rosette à 5 pointes est placée sur le côté AB de la région fondamentale du groupe de symétrie pmm . La partie de la rosette à 5 située à l'extérieur du rectangle est enlevée.	109
4.34	Différents styles de décoration. Coloration (Remplissage), Découpage, combinaison de coloration et du découpage, et entrelacement.	111
4.35	Nouveau motif de type $p6m$ obtenu en utilisant les paramètres suivants : $N_1 = 36, N_2 = 18, N_3 = 12, \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \pi/12, \varphi_1 = \pi/36, \varphi_2 = \pi/18, \varphi_3 = \pi/12, s_1 = s_2 = s_3 = 3$	113
4.36	Différents motifs de type $p6m$ obtenus en utilisant le même ordre de rosace ($N = 12$) et en changeant le rayon R et les angles θ et φ ; le point de départ K est mis en évidence par la couleur rouge.	114
4.37	Exemples de motifs générés avec les éléments polygonaux équivalents des trois familles pour différents Systèmes.	115
4.38	Exemple de motifs de type $p6m$ contenant des rosettes à 12 et à 9 pointes dans différentes familles.	116
5.1	Un panneau mural en mosaïque de <i>Gunbad-e-Qabūd</i> (reproduit à partir de [72]).	120
5.2	Les tuiles fondamentales et les tuiles dérivées du motif de <i>Gunbad-e-Qabūd</i> (reproduit à partir de [72]).	121
5.3	Transformation du pavage P1 de Penrose au motif de <i>Marāgha</i>	121
5.4	Le motif de <i>Marāgha</i> superposé avec la grille sous-jacente.	123
5.5	Le motif géométrique du mausolée <i>Mama Hatun</i> à <i>Tercan</i> en <i>Turkie</i> dont aucune étoile à 10 n'apparaît. Le motif est construit en utilisant les <i>tuiles girih</i> (pris à partir de [82]).	124
5.6	Les cinq <i>tuiles girih</i> (pris à partir de [82]).	125
5.7	Reconstruction du motif géométrique de la <i>Medersa Al-Mustansiriyya</i> à <i>Bagdad, Irak</i> (1227-1234) [87] en utilisant les <i>tuiles girih</i> de la figure 5.6 par Lu et Steinhardt [82]).	125
5.8	Panneau 28 du manuscrit de Topkapiavec deux motifs à deux échelles différentes (pris à partir de [82]).	126

5.9	Subdivision des <i>tuiles girih</i> retrouvée dans le motif décagonal de <i>Darb-e Imam</i> à <i>Isfahan</i> , Iran. (a) Photo de la moitié droite du motif. (b) Superposition du grand motif reconstruit sur la photo. (c) Règle de subdivision des tuiles girih (le décagone et le papillon) en d'autres <i>tuiles girih</i> . (d) Reconstruction du motif à plus petite échelle en utilisant les <i>tuiles girih</i> (pris à partir de [82]).	127
5.10	Subdivision du décagone, du papillon et de l'hexagone en d'autres petits décagones, petits papillons et petits hexagones.	128
5.11	Règle de transformation des <i>tuiles girih</i> en pavés de Penrose (cerfs-volants et des fléchettes) (pris à partir de [82]). (A et B) le cerf-volant et la fléchette avec leurs règles d'agencement ainsi que leurs règles de subdivisions en d'autres petites cerfs-volants et fléchettes. (C à E) transformation des <i>tuiles girih</i> en pavés de Penrose.	129
5.12	Transcription du motif du <i>Darb-e-Imam</i> en un pavage quasi-périodique de Penrose par des cerfs-volants et des fléchettes. Le motif contient 11 non-concordances représentées en mauve (pris à partir de [82]).	130
5.13	Réarrangement des tuiles pour corriger une non-concordance (pris à partir de [82]).	131
5.14	Processus de construction du premier niveau d'un motif quasi-périodique. (a) la grille sous-jacente constituée de plusieurs polygones étoilés imbriqués. Le rapport entre les rayons de deux polygones étoilés successifs est égal au nombre d'or. (b) L'unité principale (l'étoile à 10) et les motifs de liaison. (c) les positions des unités principales (étoiles à 10) sont déterminées par la grille sous-jacente (les points rouges). (d) les motifs de liaison sont formés en utilisant des des unités principales chevauchantes. (e,f) l'insertion des motifs de liaison. (g,h) Le motif final.	132
5.15	La construction du deuxième niveau du HFM. (a) la grille sous-jacente pour le deuxième niveau. L'unité principale est le motif final obtenu dans la figure 5.14g. (b) Le placement des unités principales en se basant sur la grille sous-jacente. (c) Les configuration utilisées pour combler les espaces entre les unités principales. (d) Le motif final du deuxième niveau (pris à partir de [78]).	133
5.16	Processus de construction du motif de <i>Madrassa AL Attarine</i> à Fès en utilisant le modèle HFM.	134

5.17	Le motif obtenu par la méthode de construction HFM. Ce motif viole une caractéristique importante de l'art géométrique islamique.	135
5.18	(a) Le panneau de la <i>Madrassa Attarine</i> (Fès, Maroc), (b) les tuiles décorés correspondants, (c) l'arrangement des tuiles décorés, (d) la partie similaire au panneau, (e) la disposition des rosaces dans le gros losange (f) une rosace à 10 centrée sur un sommet en commun entre 6 losanges.	136
5.19	Les étapes de la méthode proposée. (a) le pavage quasi-périodique initial, (b) les tuiles du pavage et leurs triangles rectangles correspondants, (c) construction des <i>motifs modèles</i> pour les deux triangles, (d) génération des <i>motifs unitaires</i> des deux losanges, (e) insertion des motifs unitaires dans le pavage.	137
5.20	(a) (b) Division des losanges en triangles rectangles, (c) division du carré en triangles rectangles. Les rosettes peuvent être centrées sur les sommets en rouge.	138
5.21	(a) Le <i>PP</i> et son <i>TP</i> , (b) la disposition des rosaces de rayon $R = 1$, (c) la disposition des rosaces de rayon $R = L / 2$; la zone de chevauchement est ombrée.	138
5.22	(a) Une étoile à 10 branches et une rosace à 10 branches avec l'orientation $O = O_H$ et (b) $O = O_L$	139
5.23	(a) Construction des motifs unitaires pour les losanges par application des symétries axiales par rapport aux bords de l'angle droit du <i>TP</i> , (b) Construction du motif unitaire pour un carré en appliquant une symétrie axiale suivie d'une rotation d'ordre 4, (c) Disposition des <i>motifs unitaires</i> où la continuité du motif à travers les côtés.	140
5.24	(a) Un motif décagonal quasi-périodiques, (c) et un motif pentagonal obtenus à partir des (b) <i>motifs unitaires</i> construits.	141
5.25	Un motif quasi-périodique décagonal (à gauche) et un motif quasi-périodique pentagonal (à droite) et les paramètres de la rosace utilise comme élément de conception.	141
5.26	Un motif quasi-périodique décagonal (à gauche) et un motif quasi-périodique pentagonal (à droite) et les paramètres de la rosace utilisée. Ces motifs sont obtenus en changeant le rayon et l'orientation des deux motifs de la figure 5.25.	142
5.27	Un motif quasi-périodique décagonal (à gauche) et un motif quasi-périodique pentagonal (à droite). Ces deux motifs sont obtenus en changeant les angles θ et φ de la rosace des deux motifs de la figure 5.26.	142

5.28	Un motif décagonal et un motif pentagonal obtenus en utilisant une étoile à 10 comme élément de conception.	143
5.29	(a) Construction d'un motif quasi-périodiques heptagonal et (c) d'un motif tétra décagonal, (b) à partir des motifs unitaires construits en utilisant les paramètres indiqués.	143
5.30	Motifs octogonaux construits en utilisant les paramètres indiqués.	144
5.31	Motifs dodécagonaux construits en utilisant les paramètres indiqués.	144
5.32	(a) Construction d'un motif quasi-périodiques octadécagonal et (c) et d'un motif héptadécagonal, (b) à partir des <i>motifs unitaires</i> construits en utilisant les paramètres indiqués.	145
5.33	(a) Un motif octogonal avec une étoile additionnelle à 8 branches (couleur rouge) placée au sommet libre du triangle du carré, (b) un motif dodécagonal avec une rosette supplémentaire à 8 branches (couleur rouge) placée sur le sommet libre du triangle.146	
5.34	(a) Un motif décagonal et (b) un motif pentagonal avec une rosette supplémentaire à dix branches placée sur le côté du triangle rectangle du gros losange (couleur rouge).	146
5.35	Un motif octogonal avec une rosette principale d'ordre 16, une rosette à 8 pointes placée sur les côtés des deux triangles rectangles et une étoile à 8 pointes placée sur le sommet libre du triangle rectangle du carré. Ce motif est une version quasi périodique du fameux motif périodique d'Alhambra disponible sur https://patternislamicart.com/archive/main/7/spain/spa1209 .147	

Bibliographie

- [1] Branko Grünbaum and G. C. Shephard. Interlace Patterns in Islamic and Moorish Art. *Leonardo*, 25(3) :331–339, 1992.
- [2] E Lee, J. islamique star paterns. *Muqarnas*, 4 :182–197, 1987.
- [3] Syed Jan Abas and Amer Shaker Salman. *Symmetries of Islamic geometrical patterns*. World Scientific, 1994.
- [4] Syed Jan Abas and Amer Shaker Salman. Geometric and Group-Theoretic Methods for Computer Graphic Studies of Islamic Symmetric Patterns. *Computer Graphics Forum*, 11(1) :43–53, 1992.
- [5] Brian Wichmann. Symmetry in Islamic geometric art. *Symmetry : Culture and Science*, 19(2-3) :95–112, 2008.
- [6] Craig S. Kaplan and David H. Salesin. Islamic star patterns in absolute geometry. *ACM Transactions on Graphics*, 23(2) :97–119, 2004.
- [7] John H Conway, Heidi Burgiel, and Chaim Goodman-Strauss. *The symmetries of things*. CRC Press, 2016.
- [8] Harold S M Coxeter and William O J Moser. *Generators and relations for discrete groups*, volume 14. Springer Science & Business Media, 2013.
- [9] P Möbius. FJ Budden, The Fascination of Groups. Cambridge 1972. University Press. Preis geb.\$ 6. net. *ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 53(7) :500, 1973.
- [10] H.S.M. Coxeter. *Introduction to Geometry*. Wiley, 1961.
- [11] Doris Schattschneider. The plane symmetry groups : their recognition and notation. *American mathematical monthly*, 85(6) :439–450, 1978.

- [12] Branko Grünbaum and G C Shephard. *Tilings and Patterns*. W. H. Freeman & Co., New York, NY, USA, 1986.
- [13] George E Martin. *Transformation geometry : An introduction to symmetry*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [14] Craig S.Kaplan. Introductory tiling theory for computer graphics. *Synthesis Lectures on Computer Graphics and Animation*, 4(1) :1–113, 2009.
- [15] Johannes Kepler. Harmonice mundi (linz, 1619). *English edition : Harmonies of the world, Book*, 5, 1938.
- [16] J. Kepler and J. Peyroux. *L'Harmonie du monde*. A. Blanchard, 1979.
- [17] Hao Wang. Proving theorems by pattern recognitionII. *Bell Labs Technical Journal*, 40(1) :1–41, 1961.
- [18] R. Berger. *The Undecidability of the Domino Problem*. Memoirs ; No 1/66. American Mathematical Society, 1966.
- [19] Raphael M Robinson. Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane. *Inventiones mathematicae*, 12(3) :177–209, 1971.
- [20] Roger Penrose. The role of aesthetics in pure and applied mathematical research. *The Institute of Mathematics and its Applications Bulletin*, 10(7/8) :266–271, 1974.
- [21] R. Penrose. Pentaplexity. *Eureka*, 39(39) :16–22, 1978.
- [22] R. Penrose. Pentaplexity A Class of Non-Periodic Tilings of the Plane. *The Mathematical Intelligencer*, 2(1) :32–37, 1979.
- [23] Richard K Guy. The Penrose pieces. *Bull. London Math. Soc*, 8 :9–10, 1976.
- [24] Martin Gardner. Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles. *Scientific American*, 236(1) :110–121, 1977.
- [25] Raphael M Robinson. Comments on the Penrose tiles. *Mimeographed notes*, Sept, 1975.
- [26] Roger Penrose. Tilings and quasi-crystals ; a non-local growth problem. *Introduction to the Mathematics of Quasicrystals*. Academic Press, London, 1989.

- [27] Jay Bonner. *The Historical Antecedents, Initial Development, Maturity, and Dissemination of Islamic Geometric Patterns*, pages 1–152. Springer New York, New York, NY, 2017.
- [28] Jay Bonner. *Differentiation : Geometric Diversity and Design Classification*, pages 153–220. Springer New York, New York, NY, 2017.
- [29] Jay Bonner. *Polygonal Design Methodology*, pages 221–548. Springer New York, New York, NY, 2017.
- [30] Prisse D’Avennes. *L’art arabe d’après les monuments du Kaire depuis le VIIe Siècle jusqu’à la fin du XVIIIe*. Ve A. Morel et cie, 1877.
- [31] Owen Jones. *The grammar of ornament*. B. Quaritch, 1868.
- [32] J Bourgoïn. *Arabic geometrical pattern and design*. Dover Publications, New York, 1973.
- [33] Keith. Critchlow. *Islamic patterns : an analytical and cosmological approach*. Thames and Hudson, London, 1976.
- [34] Issam El-Said, Tarek El-Bouri, and Keith Critchlow. *Islamic art and architecture : the system of geometric design*. Garnet Pub Ltd, 1993.
- [35] David Wade. *Pattern in Islamic art*. Studio Vista, 1976.
- [36] ANDRE. Paccard. *Traditional Islamic craft in Moroccan architecture*. Atelier 74, [Saint-Jorioz, France], 1980.
- [37] E. H. Hankin. Examples of methods of drawing geometrical arabesque patterns. *The Mathematical Gazette*, 12 :371–373, 1925.
- [38] E.H. Hankin. *The Drawing of Geometric Patterns in Saracenic Art*. Memoirs of the Archaeological Survey of India. Archaeological Survey of India, 1925.
- [39] E Hanbury Hankin. Some difficult saracenic designs. ii. a pattern containing seven-rayed stars. *The Mathematical Gazette*, 18(229) :165–168, 1934.
- [40] E Hanbury Hankin. Some difficult saracenic designs. iii : A pattern containing fifteen-rayed stars. *The Mathematical Gazette*, 20(241) :318–319, 1936.

- [41] Craig S. Kaplan. Islamic star patterns from polygons in contact. In *Proceedings of Graphics Interface 2005*, GI '05, pages 177–185, School of Computer Science, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada, 2005. Canadian Human-Computer Communications Society.
- [42] Jay Bonner. The historical use of polygonal systems to create islamic geometric patterns. In Fondation de la mosquée Hassan II de casablanca, editor, *les tracés de l'arabesque géométrique*, pages 85–94. Casablanca, 2014.
- [43] J. Bonner. The design of particularly complex non-systematic geometric patterns with multiple centers of localized symmetry. In Fondation de la mosquée Hassan II de casablanca, editor, *les tracés de l'arabesque géométrique*, pages 85–94. Casablanca, 2014.
- [44] Jean-Marc Castéra and Françoise Peuriot. *Arabesques : art décoratif au Maroc*. Art, Création et Réalisation, ACR, 1996.
- [45] Peter R. Cromwell. Islamic geometric designs from the topkapıscroll i : unusual arrangements of stars. *Journal of Mathematics and the Arts*, 4(2) :73–85, 2010.
- [46] B Lynn Bodner et al. A nine-and twelve-pointed star polygon design of the tashkent scrolls. *Proceedings of Bridges 2011 : Mathematics, Art, Architecture, Music, Culture*, pages 147–154, 2011.
- [47] B. Lynn Bodner. Hankin's 'polygons in contact' grid method for recreating a decagonal star polygon design. In Reza Sarhangi and Carlo H. Séquin, editors, *Bridges Leeuwarden : Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture*, pages 21–28, London, 2008. Tarquin Publications. Available online at <http://archive.bridgesmathart.org/2008/bridges2008-21.html>.
- [48] B. Lynn Bodner. *Bridges 2006 : Mathematical Connections in Art, Music, and Science*, pages 145–149. Birkhäuser Basel, Basel, 2007.
- [49] Mohamed Ould Djibril and Rachid Oulad Haj Thami. Islamic geometrical patterns indexing and classification using discrete symmetry groups. *Journal on Computing and Cultural Heritage*, 1(2) :1–14, 2008.
- [50] Frode Rønning. Islamic patterns and symmetry groups. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, (24) :14 p., 2009.

- [51] V. Ostromoukhov. Mathematical Tools for Computer-generated Ornamental Patterns. In Springer-Verlag, editor, *7th International Conference on Electronic Publishing*, pages 193 – 223, London, 1998.
- [52] H Lavani and Haresh Lalvani. Coding and Generating Complex Periodic Patterns. *The Visual Computer*, 5(4) :180–202, 1989.
- [53] Iestyn Jowers, Miquel Prats, Hesham Eissa, and Ji-Hyun Lee. A study of emergence in the generation of islamic geometric patterns? In B. Dave, A. I. Li, N. Gu, and H.-J. Park, editors, *New Frontiers : Proceedings of the 15th International Conference on Computer-Aided Architectural Design Research in Asia CAADRRIA 2010*, pages 39–48. CAADRRIA, Hong Kong, 2010.
- [54] Abdelbar Nasri and Rachid Benslimane. Parametric shape grammar formalism for moorish geometric design analysis and generation. *J. Comput. Cult. Herit.*, 10(4) :19 :1–19 :20, July 2017.
- [55] A Thalal, M J Benatia, A Jali, Y Aboufadil, and M A R Elidrissi. ISLAMIC GEOMETRIC PATTERNS CONSTRUCTED BY CRAFTSMEN WORKING ON WOOD. *Symmetry : Culture and Science*, 22 :103–130, 2011.
- [56] Issam. El-Said, Ayse. Parman, Tarek El-Bouri, Keith Critchlow, Salma Samar Damluji, and Issam. El-Said. *Islamic art and architecture : the system of geometric design*. 1993.
- [57] Eric Broug. *Islamic geometric patterns*. Thames & Hudson London, 2008.
- [58] Ömür Bak ?rer. *Selçuklu öncesi ve selçuklu dönemi anadolu mimarisinde tu ?la kullan ?m ? : Metin*, volume 1. Orta Do ?u Teknik Üniversitesi, 1981.
- [59] Craig Steven Kaplan. *Computer graphics and geometric ornamental design*. University of Washington, 2002.
- [60] Branko Grünbaum. What symmetry groups are present in the alhambra. *Notices of the AMS*, 53(6) :670–673, 2006.
- [61] Youssef Aboufadil, Abdelmalek Thalal, and My Ahmed El Idrissi Raghni. Symmetry groups of Moroccan geometric woodwork patterns. *Journal of Applied Crystallography*, 46(6) :1834–1841, 2013.

- [62] B. Lynn Bodner. The planar space groups of mamluk patterns. In George Hart Gary Greenfield and Reza Sarhangi, editors, *Proceedings of Bridges 2014 : Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture*, pages 35–42, Phoenix, Arizona, 2014. Tessellations Publishing. Available online at <http://archive.bridgesmathart.org/2014/bridges2014-35.html>.
- [63] Branko Grünbaum, Zdenka Grünbaum, and G.C. Shepard. Symmetry in moorish and other ornaments. *Computers Mathematics with Applications*, 12(3, Part 2) :641 – 653, 1986.
- [64] Peter R. Cromwell. On irregular stars in Islamic geometric patterns. *Preprint*, 2013.
- [65] Jean-Marc Castera. Zellijs, muqarnas and quasicrystals. *ISAMA*, 99 :99–104, 1999.
- [66] Craig S Kaplan. *Computer Graphics and Geometric Ornamental Design*. PhD thesis, University of Washington, 2002.
- [67] Dan Shechtman. Crystals of golden proportions. *Nobel Prize*, (Public Information) :1–7, 2011.
- [68] Peter R. Cromwell. The search for quasi-periodicity in islamic 5-fold ornament. *Mathematical Intelligencer*, 31(1) :36–56, 2009.
- [69] Jay Bonner. Three Traditions of Self-Similarity in Fourteenth and Fifteenth Century Islamic Geometric Ornament. In Juan Antonio Maldonado José Martínez-Aroza Reza Sarhangi Javier Barrallo Nathaniel Friedman and Carlo Séquin, editors, *Meeting Alhambra, ISAMA-BRIDGES Conference Proceedings*, pages 1–12, Granada, Spain, 2003. University of Granada.
- [70] Rima Al Ajlouni. *Octagon-Based Quasicrystalline Formations in Islamic Architecture*, pages 49–57. Springer Netherlands, Dordrecht, 2013.
- [71] Emil Makovicky. On the Kond style of Islamic tiling : a study in practical Islamic geometry. *Rendiconti Lincei*, 28(1) :35–51, 2017.
- [72] Emil Makovicky. Another look at the Blue Tomb of Maragha, a site of the first quasicrystalline Islamic pattern. *Symmetry : Culture and Science*, 19 :127–151, 2009.

- [73] Emil Makovicky and Nicolette M Makovicky. Nonperiodic Octagonal Patterns from a Jali Screen in the Mausoleum of Muhammad Ghaus in Gwalior and Their Periodic Relatives. *Nexus Network Journal*, 19(1) :101–120, 2017.
- [74] Emil Makovicky. Comment on "Decagonal and quasi-crystalline tilings in medieval Islamic architecture". *Science (New York, N.Y.)*, 318(5855) :1383; author reply 1383, nov 2007.
- [75] Jean-Marc Castéra. From the Angle of Quasicrystals. *Proceedings of Bridges 2010 : Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture (2010)*, pages 215–222, 2010.
- [76] Emil Makovicky. 800-year-old pentagonal tiling from Maragha, Iran, and the new varieties of aperiodic tiling it inspired. In *Fivefold symmetry*, pages 67–86. World Scientific Publishing Co Pte Ltd, Singapore-New Jersey etc., 1992.
- [77] Emil Makovicky & Fenoll Hach-Alí. Mirador de Lindaraja : Islamic ornamental patterns based on quasi-periodic octagonal lattices in Alhambra, Granada and Alcazar, Sevilla, Spain. *Boletín de la Sociedad Española de Mineralogía*, 19 :1–26, 1996.
- [78] Rima a. Al Ajlouni. The global long-range order of quasi-periodic patterns in Islamic architecture. *Acta Crystallographica Section A*, 68(2) :235–243, 2012.
- [79] Emil Makovicky, Fernando Rull Pérez, and P Fenoll Hach-Alí. Decagonal patterns in the Islamic ornamental art of Spain and Morocco. *Boletín de la Sociedad Española de Mineralogía*, 21 :107–127, 1998.
- [80] Emil Makovicky and Nicolette M. Makovicky. The first find of dodecagonal quasiperiodic tiling in historical Islamic architecture. *Journal of Applied Crystallography*, 44(3) :569–573, 2011.
- [81] Andoni Garritz. Cuasicristales y arte islámico / Quasicrystals and Islamic art. 23(1) :2–5, 2012.
- [82] Peter J Lu and Paul J Steinhardt. Decagonal and Quasi-Crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture. *Science*, 315(5815) :1106–1110, 2007.
- [83] Youssef Aboufadi, Abdelmalek Thalal, and My Ahmed El Idrissi Raghni. Moroccan ornamental quasiperiodic patterns constructed by

- the multigrid method. *Journal of Applied Crystallography*, 47(2) :630–641, 2014.
- [84] Emil Makovicky. In the footsteps of Maragha : Ornamental panels in the madrasas and mosques of Esfahan, Konya, Agra, Sivas and Yazd. *Symmetry : Culture and Science*, 26 :421–441, 2015.
- [85] Peter Saltzman. Quasi-Periodicity in Islamic Geometric Design. In Kim Williams and Michael J. Ostwald, editors, *Architecture and Mathematics from Antiquity to the Future*, pages 585–602. Springer International Publishing, 2015.
- [86] Gülru Necipölu, Mohammad Al-Asad, and Gulru Necipoglu. *The Topkapı Scroll : Geometry and Ornament in Islamic Architecture : Topkapı Palace Museum Library MS*. Getty Center for the History of Art and the Humanities, 1995.
- [87] Hansjörg Schmid. *Die Madrasa des Kalifen Al-Mustansir in Baghdad : eine baugeschichtliche Untersuchung der ersten universalen Rechtshochschule des Islam*, volume 3. Zabern, 1980.