

THÈSE

En vue de l'obtention du : **DOCTORAT**

Structure de Recherche : Laboratoire de Recherche en Thermodynamique et Energie.

Discipline : Physique

Spécialité : Mécanique et Energétique.

Présentée et soutenue le 09/12/2022

Par : **Mohamed EL IBRAHIMI**

**Etude du flambement et post flambement des plaques à
fonctionnalités graduées sous chargement thermique:
Imperfections géométriques & Conditions thermiques aux
bords.**

JURY

Mohammed Ouadi BENSALAH	PES, Université Mohammed V, Faculté des Sciences - Rabat.	Président
Miloud RAHMOUNE	PES, Université Moulay Ismail, EST- Meknès.	Rapporteur/Examineur
Zine El Abidine ABDELALI	PES, Université Mohammed V, Faculté des Sciences - Rabat.	Rapporteur/Examineur
Farah ABDOUN	PH, Université Mohammed V, ENSAM – Rabat.	Rapporteur/Examineur
Hanae LOUTFI	PES, Université Mohammed V, Faculté des Sciences - Rabat.	Examineur
Abderrahim DINANE	PES, Ecole Royale Navale - Casablanca.	Examineur
Asmae ARBAOUI	PES, Université Mohammed V, Faculté des Sciences - Rabat.	Examineur
Lahcen AZRAR	PES, Université Mohammed V, ENSAM – Rabat.	Co-Encadrant de Thèse
Abderrahim SAMAOUALI	PES, Université Mohammed V, Faculté des Sciences - Rabat.	Directeur de Thèse

Année Universitaire: 2022/2023

DEDICACES

Je dédie ce travail :

A mes parents.

- ❖ *Aucun mot ne serait adéquat pour exprimer l'étendue des sentiments que j'éprouve à leur égard.*
- ❖ *Je souhaite que Dieu leur accorde le Paradis.*
- ❖ *Puisse Dieu tout puissant, vous prêter longue vie afin que je puisse vous combler à mon tour.*

A ma sœur et mes frères

A ma fiancée Hind

A toute ma famille

A tous mes Professeurs qui m'ont inculqué les prérequis du savoir et de la recherche scientifique

A tous mes amis et mes collègues

Remerciements

Les travaux de cette thèse ont été réalisés au sein du Centre de Recherche en Energie (CRE), Laboratoire de Recherche en Thermodynamique et Energie (LRTE) du département de physique de l'université Mohammed V-Rabat, Faculté des Sciences, sous la direction de Monsieur **Abderrahim SAMAOUALI**, Professeur de l'Enseignement Supérieur à la faculté des Sciences de Rabat et Monsieur **Lahcen AZRAR**, Professeur de l'Enseignement Supérieur à l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers de Rabat.

Tout d'abord, je voudrais adresser mes remerciements les plus sincères et ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse Monsieur **Abderrahim SAMAOUALI**, Professeur de l'Enseignement Supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, non seulement pour avoir dirigé cette thèse, mais surtout pour ses précieux conseils, sa rigueur scientifique et sa disponibilité tout au long de la réalisation du travail.

Je suis particulièrement reconnaissant à mon Co-encadrant de thèse Monsieur **Lahcen AZRAR**, Professeur de l'Enseignement Supérieur à l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers de Rabat, qui m'a aidé à montrer le meilleur de moi-même.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur **Mohammed Ouadi BENSALAH**, Professeur de l'Enseignement Supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse.

Je remercie également, Monsieur **Miloud RAHMOUNE**, Professeur de l'Enseignement Supérieur à l'Ecole supérieure de Technologie de Meknès, d'avoir accepté de rapporter et examiner ce mémoire de thèse.

Je remercie vivement Monsieur **Zine El Abidine ABDELALI**, Professeur de l'Enseignement Supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, pour l'intérêt qu'il a porté pour ce travail en acceptant de participer au jury en tant que rapporteur et examinateur.

Je remercie aussi, Madame **Farah ABDOUN**, Professeur Habilitée à l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers de Rabat, d'avoir accepté de rapporter et examiner ce mémoire de thèse.

Je remercie vivement Madame **Hanae LOUTFI**, Professeur de l'Enseignement Supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, de m'avoir fait l'honneur d'examiner cette thèse.

J'adresse aussi mes plus vifs remerciements à Monsieur **Abderrahim DINANE**, Professeur de l'Enseignement Supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, pour ses précieux et judicieux conseils qu'il n'a cessé de me prodiguer tout au long de ma thèse et pour avoir accepté d'être examinateur de cette thèse.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Madame **Asmae ARBAOUI**, Professeur de l'Enseignement Supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, pour l'intérêt qu'elle a porté pour ce travail en acceptant de participer au jury en tant qu'examinatrice.

Mes remerciements vont également à Monsieur **Saïd OUSSAMA** et à tous les professeurs et cadres qui ont contribué de près ou de loin à ma formation.

Je voudrais exprimer ma gratitude envers tous les membres des laboratoires LRTE-FSR et M2CS-ENSAM (Professeurs, Docteurs, Doctorants et Stagiaires) et tous mes collègues du département de physique, pour tout le soutien qu'ils m'ont apporté aux moments difficiles.

Merci Docteur **Hind EL MASAUDI** qui n'a cessé de me soutenir quand je perdais la motivation ou la bonne humeur.

Enfin, je ne saurais terminer cette liste sans adresser un remerciement particulier à ma famille qui m'a soutenue dans l'ombre tant matériellement que moralement, et sans laquelle ce travail n'aurait jamais pu voir le jour.

Que tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin dans l'élaboration de ce travail trouvent ici l'expression de ma sincère gratitude.

Résumé

Ce travail de thèse porte sur le transfert de la chaleur, le flambement et le post-flambement thermiques non linéaires dans les plaques à fonctionnalités graduées sous appuis simples. L'approche analytique de Galerkin a été utilisée pour résoudre les équations d'équilibre thermoélastiques de stabilité et de compatibilité et la méthode de transformation différentielle a été utilisée pour résoudre le problème de transfert de chaleur. L'accent a été mis sur l'étude de l'impact du type conditions thermiques choisi aux bords à savoir de Dirichlet et de rayonnement-convection, sur le comportement thermique et la réponse en flambement et post-flambement. Une attention particulière a été attribuée à l'influence des différents paramètres thermiques et géométriques tel que la taille des imperfections, l'épaisseur du revêtement, les gradients de la conductivité thermique et les échanges radiatives et convectives. Les résultats montrent que selon le type de conditions thermiques aux bords adoptées, la variation de certains paramètres comme le rapport et le gradient de la conductivité thermique produit des résultats opposés en termes de flambement.

Mots-clés : Méthode de transformation différentielle, matériaux à fonctionnalités graduées, transfert thermique, post-flambement, convective-radiative.

Abstract

This thesis work deals with heat transfer, nonlinear thermal buckling and post-buckling within simply supported functionally graded plates. The analytical approach of Galerkin was used to solve the governing thermo-elastic equilibrium equations of stability and compatibility and the differential transformation method was used to solve the heat transfer problem. The focus is on the study of the impact of the various types of thermal conditions chosen at the edges, namely Dirichlet and radiation-convection, on the thermal behaviour and the response in buckling and post-buckling behaviours. Particular attention was given to the influence of different thermal and geometric parameters such as the size of the imperfections, the thickness of the coating, the gradients of the thermal conductivity and the radiative and convective exchanges. The obtained results show that according to the type of thermal conditions at the edge adopted, the variation of certain parameters such as the ratio and the gradients of thermal conductivity produces opposite results in terms of buckling.

Keywords: Differential transformation method, functionally graded materials, heat transfer, post-buckling, convective-radiative.

نبذة مختصرة

تتعامل هذه الأطروحة مع الالتواء الحراري غير الخطي والالتواء اللاحق للألواح ذات الوظائف المتدرجة مع الدعامات البسيطة. تم استخدام نهج Galerkin التحليلي لحل معادلات الثبات التوجيهي الحراري والتوافق ، كما تم استخدام طريقة التحويل التفاضلي لحل مشكلة نقل الحرارة. يتضمن ذلك دراسة تأثير نوع الظروف الحرارية المختارة عند الحواف ، وهي Dirichlet والحمل الحراري الإشعاعي ، على السلوك الحراري والاستجابة في الالتواء والالتواء اللاحق. تم إيلاء اهتمام خاص لتأثير المعلمات الحرارية والهندسية المختلفة مثل حجم العيوب وسمك الطلاء وتدرجات التوصيل الحراري والتبادلات الإشعاعية والحمل الحراري. أوضحت النتائج أنه وفقاً لنوع الحالة الحرارية عند الحافة المعتمدة ، ينتج عن اختلاف بعض المعلمات مثل النسبة والتدرج في الموصلية الحرارية نتائج معاكسة من حيث الالتواء.

الكلمات الرئيسية : طريقة التحويل التفاضلي ، المواد ذات الوظائف المتدرجة ، نقل الحرارة ، الالتواء اللاحق ، الحمل الحراري الإشعاعي.

Liste des figures

- Figure. 1.1 Vue transversale d'une plaque FGM composée de métal et de céramique.
- Figure. 1.2 Variation de la fraction volumique suivant la loi de puissance.
- Figure. 1.3 Variation de la fraction volumique suivant la loi sigmoïde.
- Figure. 1.4 Variation module de Young suivant la loi de mélange exponentielle.
- Figure. 1.5 Transfert de la chaleur multidirectionnel à travers un volume élémentaire.
- Figure. 1.6 Poutre sous charge axiale. Chemin de post-flambement stable et chemin linéaire instable.
- Figure. 1.7 a) Poutre avec déflexion initiale latérale. b) Poutre avec déflexion initiale latérale sous compression axiale.
- Figure. 1.8 Chemin de post-flambement stable.
- Figure. 1.9 Illustration de l'estimation de la charge critique de flambement en utilisant: (a) la méthode de double tangente et (b) la méthode du critère de Budiansky modifiée.
- Figure. 1.10 Chemin de post-flambement instable.
- Figure. 1.11 Coque cylindrique soumise à une charge de compression axiale uniformément distribuée et une coque sphérique complète soumise à une pression externe.
- Figure. 1.12 Le flambement par encliquetage d'une arche peu profonde épinglée.
- Figure. 1.13 Schémas illustrant les notions plaque mince et paroi mince fléchie.
- Figure. 1.14 Résultantes positives et charge sur un élément infinitésimal de la plaque.
- Figure. 1.15 Exemples de structures en déformation plane : (a) puit de mine (b) tôle en laminage.
- Figure. 1.16 Contraintes appliquées sur un élément infinitésimal de la paroi.
- Figure. 1.17 Résultantes positives et charge sur un élément infinitésimal de la plaque-paroi.
- Figure. 1.18 Domaine d'étude.
- Figure. 1.19. Plaque FGM avec variation unidirectionnelle des propriétés matérielles.
- Figure. 2.1 Configuration d'une plaque FGM avec des conditions Dirichlet.
- Figure. 2.2 Profil de la Température (solution analytique) dans e plaque FGM en (Al-Al₂O₃) variant les valeurs de l'index p de 0 à 3.
- Figure. 2.3 Profil de la température en utilisant des méthodes numériques MEF, MDF et MT dans le cas d'une composition FGM avec $p=1$ et $p=5$.
- Figure. 2.4 Erreurs relatives des solutions numériques par MEF, MDF et MT dans le cas d'une plaque FGM avec ($p=1$).

Figure. 2.5 Erreurs relatives des solutions numériques par MEF, MDF et MT dans le cas d'une plaque FGM avec ($p=5$).

Figure. 2.6 Configuration d'une plaque FGM avec des conditions de type Dirichlet.

Figure. 2.7 L'effet du paramètre d'inhomogénéité λ_0 .

Figure. 2.8 L'effet de la température de la surface métallique θ_m .

Figure. 2.9 L'effet du gradient de conductivité thermique de la céramique ε_1 .

Figure. 2.10 L'effet du gradient de conductivité thermique du métal ε_2 .

Figure. 3.1 Configuration d'une plaque FGM avec des conditions convectives radiatives.

Figure. 3.2 Effet des gradients de la conductivité thermique (a) ε_1 et (b) ε_2 sur la distribution de la température.

Figure. 3.3 L'effet des gradients de la conductivité thermique (a) ε_1 et (b) ε_2 sur les la température des surfaces inférieure et supérieure de la plaque pour différentes valeurs du paramètre de la radiation-conduction N_r .

Figure. 3.4 L'effet des gradients de la conductivité thermique (a) ε_1 et (b) ε_2 sur les la température des surfaces inférieure et supérieure de la plaque pour différentes valeurs du paramètre de convection-conduction Bi_1 .

Figure. 3.5 L'effet des gradients de la conductivité thermique (a) ε_1 et (b) ε_2 sur les la température des surfaces inférieure et supérieure de la plaque pour différentes valeurs du paramètre de convection-conduction Bi_2 .

Figure. 3.6 L'effet des gradients de la conductivité thermique (a) ε_1 et (b) ε_2 sur les la température des surfaces inférieure et supérieure de la plaque pour différentes valeurs de la température de l'environnement froid θ_d .

Figure. 3.7 L'effet des gradients de la conductivité thermique (a) ε_1 et (b) ε_2 sur les la température des surfaces inférieure et supérieure de la plaque pour différentes valeurs du paramètre d'inhomogénéité λ_0 .

Figure. 4.1 Profils de température Sinusoïdal et de loi de puissance ($p=2$) pour une plaque FGM.

Figure. 4.2 Comparaison des courbes température-déflexion centrale pour des plaques FGM parfaites et imparfaites sans revêtement.

Figure. 4.3 Effet de l'épaisseur du revêtement sur les courbes d'équilibre de la plaque: (a) loi de puissance, (b) loi sinusoïdale.

Figure. 4.4 Effet de la taille des imperfections sur les courbes d'équilibre de la plaque: (a) loi de puissance, (b) loi sinusoïdale.

Figure. 4.5 Effet de l'indice de puissance sur les courbes d'équilibre de la plaque FGM revêtue soumise à une augmentation de température obéissant à la loi de puissance.

Figure. 4.6 ΔT_{cp} à $W_h=3$ pour différentes valeurs de l'indice de puissance p . Cas d'une plaque FGM soumise à une élévation de la température suivant la loi de puissance.

Figure. 4.7 Effet de l'indice de puissance sur les courbes d'équilibre de la plaque FGM revêtue soumise à une augmentation de température obéissant à la loi sinusoïdale.

Figure. 4.8 La charge ΔT_{cs} à $W_h=3$ pour différentes valeurs de l'indice de puissance p . Cas d'une plaque FGM soumise à une élévation de la température suivant la loi de puissance.

Figure. 4.9 Effet de du rapport d'épaisseur (b/h) sur les courbes d'équilibre de la plaque: (a) loi de puissance, (b) loi sinusoïdale.

Figure. 4.10 Effet du rapport d'aspect (b/a) sur les courbes d'équilibre de la plaque: (a) loi de puissance, (b) loi sinusoïdale.

Figure. 4.11 L'effet du rapport longueur-largeur b/a sur les chemins d'équilibre de la plaque FGM.

Figure. 4.12 L'effet du rapport longueur-hauteur b/h sur les chemins d'équilibre de la plaque FGM.

Figure. 4.13 L'effet de la taille des imperfections initiales sur les chemins d'équilibre de la plaque FGM.

Figure. 4.14 L'effet des gradients de conductivité thermique : a) ε_1 b) ε_2 .

Figure. 4.15 L'effet de la température de la surface métallique θ_m sur la réponse de la plaque FGM.

Figure. 4.16 L'effet du rapport de la conductivité thermique sur la réponse de la plaque FGM.

Figure. 4.17 L'effet du rapport b/a sur la réponse de la plaque FGM.

Figure. 4.18 L'effet du rapport b/h sur la réponse de la plaque FGM.

Figure. 4.19 L'effet de la taille de l'imperfection initiale μ sur la réponse de la plaque FGM.

Figure. 4.20 L'effet du mode de flambement m sur la réponse de la plaque FGM.

Figure. 4.21 L'effet du paramètre de radiation N_r sur la réponse de la plaque FGM.

Figure. 4.22 L'effet du nombre de Biot : a) Bi_1 b) Bi_2 sur la réponse de la plaque FGM.

Figure. 4.23 L'effet du rapport de la conductivité thermique λ_0 sur la réponse de la plaque FGM.

Figure. 4.24 L'effet du rapport entre les températures des milieux chaud et froid : θ_d sur la réponse de la plaque FGM.

Figure. 4.25 L'effet des gradients de conductivité thermique : a) ε_1 b) ε_2 sur la réponse de la plaque FGM.

Liste des tableaux

Tableau. 1.1 Les opérations fondamentales de la méthode de la transformation différentielle (DTM).

Tableau. 2.1 Comparaison des résultats obtenus par MDF et DTM.

Tableau 3.1 Comparaison des résultats obtenus par la DTM et par la méthode de Ferrari (FM) dans le cas de la conductivité thermique non influencée par la température.

Tableau. 3.2 La distribution de la température dans une plaque FGM pour différentes combinaisons des gradients de la conductivité thermique ε_1 et ε_2 .

Tableau. 3.3 Comparaison des résultats obtenus par MEF et DTM.

Tableau. 3.4 $\Delta\theta$ et la différence relative en fonction de ε_1 et les différents paramètres.

Tableau. 3.5 $\Delta\theta$ et la différence relative en fonction de ε_2 et les différents paramètres.

Liste des communications

Articles publiés:

El Ibrahimi, M., Samaouali, A., Closed-form approximate solution for heat transfer analysis within functionally graded plate with temperature-dependent thermal conductivity, *Composite Structures* (2021), doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114140>

El Ibrahimi Mohamed, Abderrahim Samaouali, Lahcen Azrar, Abderrahim Dinane, Abdellatif Rahmouni, "Thermal Buckling of Coated Functionally Graded Plates Under Non uniform Temperature Rises," WSEAS Transactions on Environment and Development, vol. 15, pp. 246-256, 2019

Participation aux congrès

Communication orale: “2nd International Materials Science and Engineering for Green Energy Conference (2nd IMSEGEC2018)”, Faculté des sciences rabat, Rabat. 25-27 Avril 2018

Nomenclature

x, y, z	Coordonnées cartésiennes, (m)
a, b, h	Largeur, longueur et épaisseur de la plaque, (m)
k	Conductivité thermique, ($W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$)
k_{ia}	Conductivité thermique à température ambiante, ($W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$)
k_{ref}	Conductivité thermique de référence, ($W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$)
k_i	Conductivité thermique, ($W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$)
H	Constante
D	Domaine
T	Température, (K)
T_a	Température ambiante, (K)
n_p	Index exponentiel
T_u	Température de l'environnement chaud, (K)
T_d	Température de l'environnement froid, (K)
h_i	Coefficient d'échange thermique par convection, ($W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$)
Bi_i	Nombre de Biot.
N_r	Paramètre de radiation-conduction.
β_i	Gradient de conductivité thermique, (K^{-1})
ϵ	Emissivité de la surface.
σ	Constante de Stefan-Boltzmann ($W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$)
θ	Température adimensionnelle.
θ_d	Rapport entre les températures des environnements chaud et froid.
λ_i	Conductivité thermique adimensionnelle.
λ_0	Rapport de conductivité thermique (indice d'inhomogénéité).
ε_i	Gradient de conductivité thermique adimensionnel.
$\Phi(i)$	Transformé de la température.
h_c	Epaisseur du revêtement céramique.
$P(z)$	Propriétés matérielles.
V	Fraction volumique de la phase céramique.
p	Indice de puissance.
k_c, k_m	Conductivité thermique de la céramique et du métal.

(x, y, z)	Coordonnées cartésiennes.
(U, V, W)	Composantes de déplacement selon les directions x, y, z respectivement.
(u, v, w)	Composantes de déplacement des points situés en $(z=0)$ selon les directions x, y, z respectivement.
w^*	Imperfection géométrique initiale.
$(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$	Déformations normales et de cisaillement.
$(\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}, \gamma_{xy0})$	Déformations normales et de cisaillement des points situés en $(z=0)$.
$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$	Contraintes normales et de cisaillement.
$(\sigma_{x0}, \sigma_{y0}, \tau_{xy0})$	Contraintes normales et de cisaillement des points situés en $(z=0)$.
$E(z), E_c, E_m$	Module de Young, celui de la céramique et du métal.
G	Module de cisaillement.
$\alpha(z), \alpha_c, \alpha_m$	Coefficient de dilatation thermique, celui de la céramique et du métal.
$\nu(z), \nu_c, \nu_m$	Coefficient de Poisson, celui de la céramique et du métal.
N_{ij}	Efforts normaux et de cisaillement.
M_{ij}	Moments de flexion et de torsion.
Φ_1	Effort normal dû à l'effet thermique.
Φ_2	Moment de flexion dû à l'effet thermique.
f	Fonction de contraintes d'Airy.
μ	Taille de l'imperfection.
m, n	Nombre de modes dans les directions x et y .
T_c, T_m	Température des surfaces en 100% céramique et en 100% métal.
$\Delta T_{cs}, \Delta T_{cp}$	Augmentation sinusoïdale et de loi de puissance de la température de la face 100% céramique.
W_h	Amplitude de la déflexion transverse.

Table des matières

Dédicaces.....	I
Remerciements.....	II
Résumé.....	IV
Abstract.....	V
نُبذة مختصرة.....	VI
Liste des figures.....	VII
Liste des tableaux.....	X
Liste des communications.....	XI
Nomenclature.....	XII
Introduction générale.....	1
Chapitre 1 : Revue bibliographique et fondements théoriques	4
1.1 Introduction:	5
1.2 Le concept des matériaux à fonctionnalités graduées :	6
1.3 Les propriétés matérielles des plaques FGM :.....	7
1.3.1 Lois basées sur le modèle de Voigt :.....	7
1.3.2 Loi de mélange exponentielle :	9
1.4 Transfert thermique dans les plaques FGM:.....	9
1.4.1 Les modes de transfert de la chaleur:	9
1.4.2 L'équation de la chaleur :.....	11
1.4.3 Résolution des problèmes de transfert thermique dans les plaques FGM :	15
1.5 Thermoélasticité :	16
1.6 Types d'instabilité :	18
1.6.1 Le flambement par bifurcation:.....	18
1.6.2 L'imperfection géométrique et le flambement sans bifurcation:	18
1.6.3 La notion de point limite :	20
1.6.4 Le flambement à perturbation finie :.....	21
1.6.5 Le flambement par encliquetage (snap-through):	22
1.7 Théories des plaques minces et des parois minces :.....	23
1.7.1 Définition:	23
1.7.2 Théorie de la flexion des plaques minces :	24
1.7.3 Théorie des parois minces :.....	29

1.8	Problèmes de flambement mixte plaque-paroi :	32
1.8.1	Analogie entre les problèmes de plaque mince et de paroi mince :	32
1.8.2	Pré-flambement, flambement et post-flambement :	33
1.8.3	Conditions d'équilibre:	35
1.8.4	Influence des contraintes du plan moyen sur la flexion de la plaque :	36
1.8.5	Influence des déformations du plan moyen sur les tensions de la paroi	36
1.8.6	Condition de compatibilité:	37
1.9	Méthodes de résolution :	38
1.9.1	Méthodes analytiques:	38
1.9.2	Méthodes numériques :	47
1.10	Stratégie de résolution d'un problème de Flambement thermique non linéaire des plaques FGM en appuis simples:	53
1.10.1	Configuration de la plaque FGM:	53
1.10.2	Cinématique et théorie de Kirchhoff Love :	53
1.10.3	Loi du comportement et équations d'équilibre:	55
1.10.4	L'équation de compatibilité :	57
1.10.5	Conditions aux bords et résolution du problème :	58
1.10.6	Charge thermique:	60
1.11	Motivations :	64
1.12	Conclusion	65

Chapitre 2. Transfert thermique au sein des plaques FGM avec conditions aux bords Dirichlet 68

2.1	Introduction:	69
2.2	Plaque avec des propriétés physiques suivant une loi de puissance :	69
2.2.1	Formulation et hypothèses:	69
2.2.2	Résolution analytique :	71
2.2.3	Résolution numérique:	73
2.2.4	Résultats et discussion:	78
2.3	Plaque avec des propriétés physiques suivant une loi exponentielle :	82
2.3.1	Formulation et hypothèses:	82
2.3.2	Résolution analytique par la méthode de transformation différentielle	84
2.3.3	Résolution numérique par la méthode des différences finies	86
2.3.4	Résultats et discussion:	87
2.4	Conclusion :	91

Chapitre 3. Problème de transfert thermique avec conditions aux bords convection- radiation	92
3.1 Introduction	93
3.2 Formulation du problème:	94
3.3 Résolution du problème avec la méthode de la transformation différentielle	96
3.4 Résolution du problème avec la méthode des éléments finis	98
3.5 Résultats et discussion:	103
3.5.1 Validation:	103
3.5.2 L'effet de N_r , Bi_1 , Bi_2 , θ_d et λ_0 sur la distribution de la température.....	107
3.5.3 L'effet de ε_1 et ε_2 sur la distribution de la température:	113
3.6 Conclusion :	116
Chapitre 4. Flambement et post-flambement thermique des plaques FGM.....	117
4.1 Introduction :	118
4.2 Formulation mathématique :	119
4.3 Plaque FGM revêtue ayant des propriétés physiques suivant une loi de puissance :	122
4.3.1 Elévation de température suivant la loi de puissance :	122
4.3.2 Elévation de température suivant une loi sinusoïdale :	124
4.3.3 Résultats et discussion:	125
4.4 Plaque FGM avec propriétés physiques suivant une loi exponentielle :	135
4.4.1 Elévation de température : problème avec conditions aux bords de type Dirichlet:	135
4.4.2 Elévation de température : problème avec condition aux bords radiative-convective:	137
4.4.3 Modélisation avec conditions thermiques aux bords de type Dirichlet :	140
4.4.4 Modélisation avec conditions thermiques radiative convective aux bords:	145
4.5 Conclusion:	154
Conclusion générale	156
Références	162

Introduction générale

La science des matériaux a fait un grand progrès au siècle dernier. Des matériaux révolutionnaires ont été conçus pour résister même aux environnements inhospitaliers de l'espace extra atmosphérique. De nouveaux défis attendent ce secteur en rapide expansion, à la fois l'aérospatiale et d'autres secteurs d'application.

Lorsque les matériaux métalliques conventionnels ont commencé à montrer leurs limites face à une conception de pièces et de machines de plus en plus sophistiquée et soumise à des contraintes de plus en plus complexes, les matériaux composites sont venus apporter quelques solutions à ces limites. Un matériau composite est un matériau généralement constitué de deux ou plusieurs matériaux de natures différentes dont l'association confère à l'ensemble des performances supérieures à celles des composants pris séparément. Il est constitué d'une matrice dans laquelle sont enrobées des particules ou des fibres qu'on appelle « renfort ». Ainsi, des propriétés telles que la rigidité, la réduction du poids, la résistance à la fatigue, à la corrosion, à l'usure ou bien d'autres sont améliorées.

Cependant, les matériaux composites conventionnels généralement constitués de couches ont un problème majeur : la discontinuité des propriétés et des contraintes au niveau des interfaces. Cette discontinuité provoque de fortes concentrations de contraintes, des fissurations de matrice ainsi que des problèmes de délaminage dus à la transition brutale de composition, en particulier dans un environnement à haute température.

Pour remédier à ces problèmes, les matériaux à fonctionnalités graduées (FGM) s'imposent dans une tendance relativement nouvelle de la science des matériaux. Ce sont des matériaux composites sophistiqués dans lesquels la composition et la structure se modifient graduellement en fonction de l'espace, générant ainsi des changements au niveau des propriétés des matériaux. Les FGM les plus courants allient la dureté et l'usinabilité du métal, à la résistance à la chaleur, à l'usure et à l'oxydation des céramiques, éliminant ainsi les discontinuités au niveau des interfaces, tout en préservant les caractéristiques des matériaux constituants.

Leur utilisation est en progression croissante dans les domaines de l'aéronautique et aérospatial, où ils peuvent servir de barrières thermiques en utilisant une composition riche en céramique. Cependant, les FGM touchent un large éventail d'applications dans de multiples autres domaines comme ceux de la médecine, de l'électricité et du nucléaire.

Dans le domaine de l'aéronautique et de la marine, les FGM ont été développés pour pouvoir résister à une température de surface de 2100 K et à un gradient de température de 1600 K sur une épaisseur inférieure à 10 mm [1]. Ce concept a été appliqué dans les barrières thermiques dans les réacteurs à fusion et les applications structurelles aérospatiales, et plus tard dans les pièces structurelles à des températures de fonctionnement très élevées telle que la chambre de combustion ou les ailettes de turbine. Les plaques FGM revêtues ont montré leur fiabilité, en termes d'isolation thermique et de résistance à la corrosion plus que les matériaux métalliques en environnement haute température. Malgré tous les avantages qu'ils présentent, l'exposition des FGM à des champs à haute température peut nuire à leur intégrité structurelle et donc peuvent devenir géométriquement instable. Par conséquent, il est essentiel de considérer les problèmes d'instabilité lors du processus de conception de ces structures.

Plusieurs chercheurs montrent l'importance de la modélisation mathématique pour prédire le comportement précis de la plaque et de la coque FGM revêtues ou en sandwich, en particulier en termes de flambement thermique. Dans le cas d'une plaque, le flambement apparaît sous un chargement de compression dans le plan. Lorsque ce chargement atteint une valeur critique, la plaque flambe et son comportement peut devenir instable. Plusieurs exemples de comportements de types flambement existent. L'étude de ces phénomènes instables ont fait l'objet de nombreuses investigations tant analytiques que numériques ou expérimentales. Les études analytiques s'appuient sur des outils mathématiques très pointus permettant par exemple de prévoir le comportement post-bifurqué des structures simples ; c'est-à-dire l'instabilité/ la stabilité qui caractérise le comportement après flambement par bifurcation.

Les études existantes sur le flambement dû à l'effet thermique modélisent le chargement thermique des FGM soit comme étant une augmentation uniforme, linéaire, ou non linéaire en utilisant une solution de l'équation de la chaleur avec des conditions aux bords simplifiées. Afin de mener une étude plus réaliste, ce présent travail s'intéresse à la mise en place d'un modèle plus réaliste, particulièrement au niveau des chargements thermiques.

Dans le premier chapitre, nous nous focaliserons sur le rappel des notions de base sur le transfert de la chaleur, la thermoélasticité et la stabilité/instabilité. Ensuite, un aperçu sur les fondements des deux théories a été rappelé: plaques minces en flexion et parois minces, afin d'avoir les connaissances de base permettant la mise en place des équations d'équilibre d'une plaque en flambement. Nous avons ensuite exposé les détails de la méthodologie analytique pour résoudre le problème de flambement, pré et post-flambement des plaques FGM simplement appuyées soumises à des échanges thermiques par convection et par rayonnement.

Dans le deuxième chapitre, il s'agit de résoudre le problème du transfert thermique au sein des plaques FGM, en considérant des conditions aux bords de type Dirichlet.

Le troisième chapitre se focalise sur la résolution du problème de transfert thermique au sein des plaques FGM. Cette fois-ci, les échanges thermiques par convection et par radiation ont été considérés au niveau des bords.

Le quatrième chapitre portera sur une comparaison critique entre la modélisation du phénomène du flambement /pré et post-flambement avec des conditions thermiques aux bords de type Dirichlet et la modélisation avec des échanges thermiques radiative-convective aux bords.

Enfin, nous terminerons ce manuscrit par une conclusion générale résumant les principaux résultats obtenus, ainsi que les perspectives qui peuvent enrichir et valoriser ce travail de thèse.

Chapitre 1 : Revue bibliographique et fondements théoriques

1.1 Introduction:

Dans le domaine de la résistance des matériaux, on suppose que les déformations et les déplacements sont petits. Ceci conduit au découplage entre diverses sollicitations : flexion, compression,...etc. Une telle schématisation ne permet pas de calculer les réponses en pré et post-flambement. A titre d'exemple, les approches de Mandel (Annales des ponts et chaussées 1936) et Hetenyi (1946) qui sont des versions simplifiées de l'approche de Navier-Bresse présentée par Courbon en (1964), permettent d'étudier la stabilité vis-à-vis du flambement, mais ne permettent pas la détermination des réponses pré et post-flambement [2]. La résolution de ces problèmes consiste à écrire les équations d'équilibre et du comportement en tenant compte des non linéarités géométriques (grands déplacements et grandes rotations). Le dimensionnement des plaques FGM contre les comportements non linéaires d'un point de vue géométrique, passe par la résolution des équations d'équilibre. Un sur-chargement peut générer des distorsions géométriques susceptibles d'altérer la durée de vie prévue de la structure. Le flambement est un phénomène qui apparaît sous un chargement de compression dans le plan. Lorsque ce chargement augmente et atteint une valeur dite critique, le comportement peut devenir instable. Le phénomène de flambage commence par un état où la compression est prépondérante (action de membrane) et passe à un état où la flexion domine (action courbure) [3]. Dans le cas d'un chargement thermique, l'augmentation des températures est généralement accompagnée d'une augmentation de contraintes thermiques compressives au sein des composants aéronautiques. Les phénomènes d'instabilité tels que le flambement sont susceptibles de se produire.

Dans la première partie de ce chapitre, on introduit le formalisme général des problèmes de transfert de la chaleur, les notions thermoélasticité et stabilité puis les différents types d'instabilité. La seconde partie de ce chapitre sera consacrée au fondement de la théorie et la stratégie permettant d'établir les équations aux dérivées partielles d'équilibre qui régissent le problème du flambement. En parallèle, nous ne manquerons pas d'évoquer quelques études tant analytiques que numériques ou expérimentales orientées vers l'étude de ce phénomène, ainsi que les motivations qui nous ont poussées à mener cette étude.

1.2 Le concept des matériaux à fonctionnalités graduées :

Les composites stratifiés sont utilisés comme barrières thermique dans les systèmes à haute température et sont largement utilisés dans les avions, les navires et les engins spatiaux. Même si ces matériaux composites classiques sont connus pour leur performance, ils présentent des inconvénients comme le délaminage et le décollement des fibres, généralement causés par les concentrations de contraintes au niveau des interfaces et incompatibilité des propriétés matérielles matrice/fibre. Afin de remédier à ces problèmes, des chercheurs Japonais au sein du laboratoire national d'aérospatial ont été proposés pour la première fois dans les années 80 du 20^{ème} siècle, les matériaux à fonctionnalités graduées (FGM) pour remplacer les stratifiés classiques.

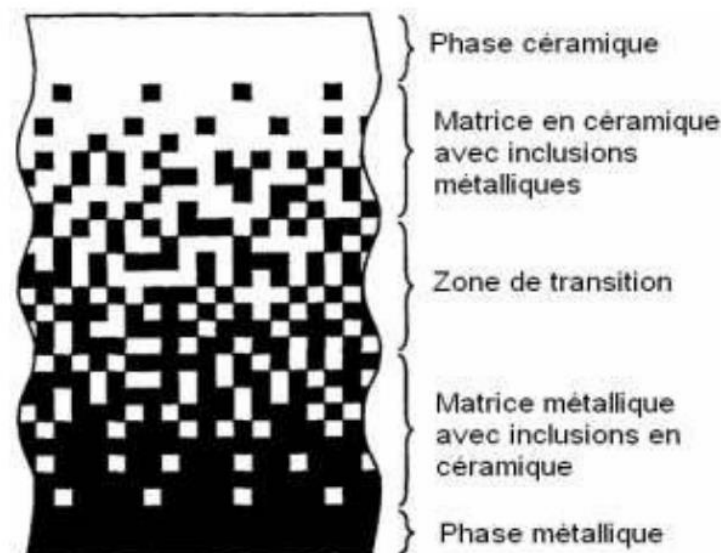


Figure. 1.1 Vue transversale d'une plaque FGM composée de métal et de céramique. [4]

Un matériau à fonctionnalités graduées est un matériau composite composé de différents matériaux dont la variation spatiale de chacun varie graduellement dans une direction spatiale donnée. Les propriétés varient donc d'une manière continue, éliminant ainsi le changement brutal des propriétés au niveau des interfaces. L'application de ce concept ne s'est pas limitée dans l'optimisation des performances thermomécaniques, mais s'est étendue aussi pour l'optimisation des propriétés piézoélectriques et magnétiques [5-8].

1.3 Les propriétés matérielles des plaques FGM :

Dans un matériau FGM, la composition peut varier graduellement dans l'espace suivant plusieurs lois. Dans ce travail, les FGM unidirectionnels composés de deux types de matériaux : m et c sont considérés.

D'après la littérature, les lois les plus utilisées sont la loi de mélange exponentielle et des lois basées sur le modèle de Voigt (1889):

1.3.1 Lois basées sur le modèle de Voigt :

$$P(z) = (P_c - P_m)V_f + P_m \quad (1.1)$$

Où V_f représente la fraction volumique du matériau c. celle-ci peut suivre plusieurs lois :

- La loi de puissance :

$$V_f = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^p \quad ; \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (1.2)$$

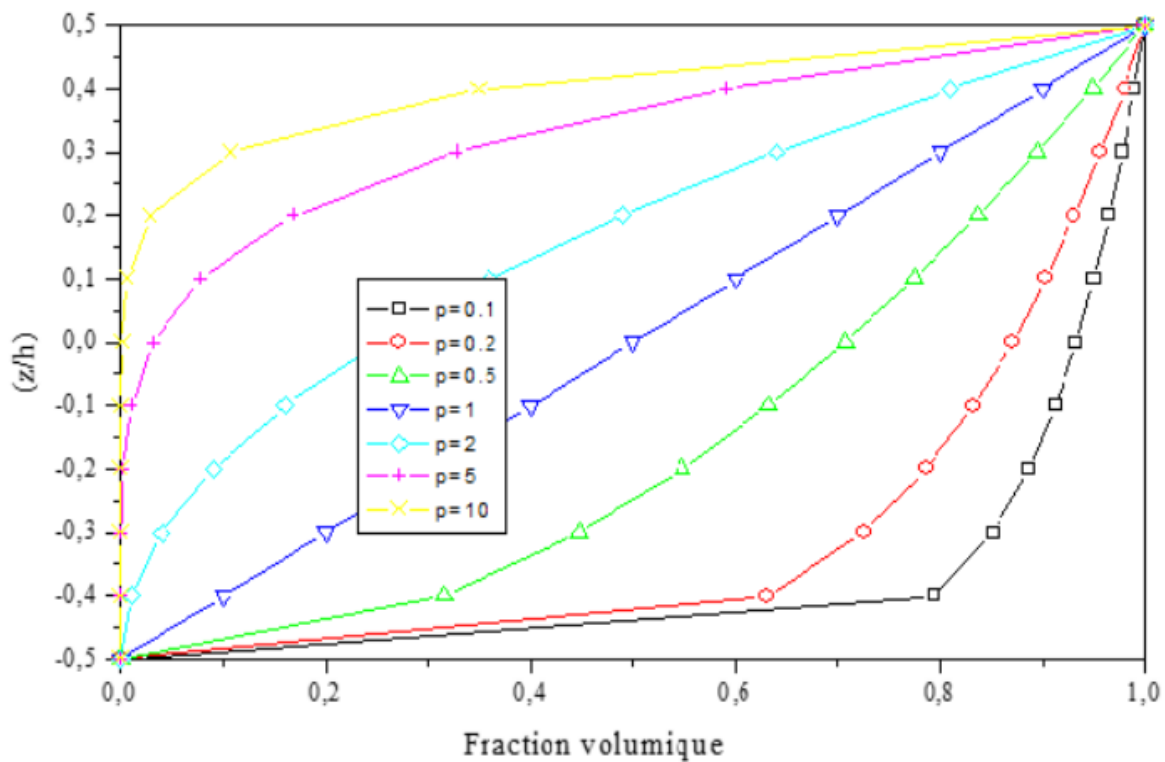


Figure. 1.2 Variation de la fraction volumique suivant la loi de puissance [9]

- **La loi trigonométrique :**

$$V_f = c \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} \sin \left(\frac{n\pi z}{h} + \phi \right) \right) \quad ; \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (1.3)$$

- **La loi sigmoïde :**

Chi et Chung [10] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par:

$$V_1 = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} - z}{\frac{h}{2}} \right)^p \quad \text{pour} \quad 0 \leq z \leq \frac{h}{2}$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} + z}{\frac{h}{2}} \right)^p \quad \text{pour} \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (1.4)$$

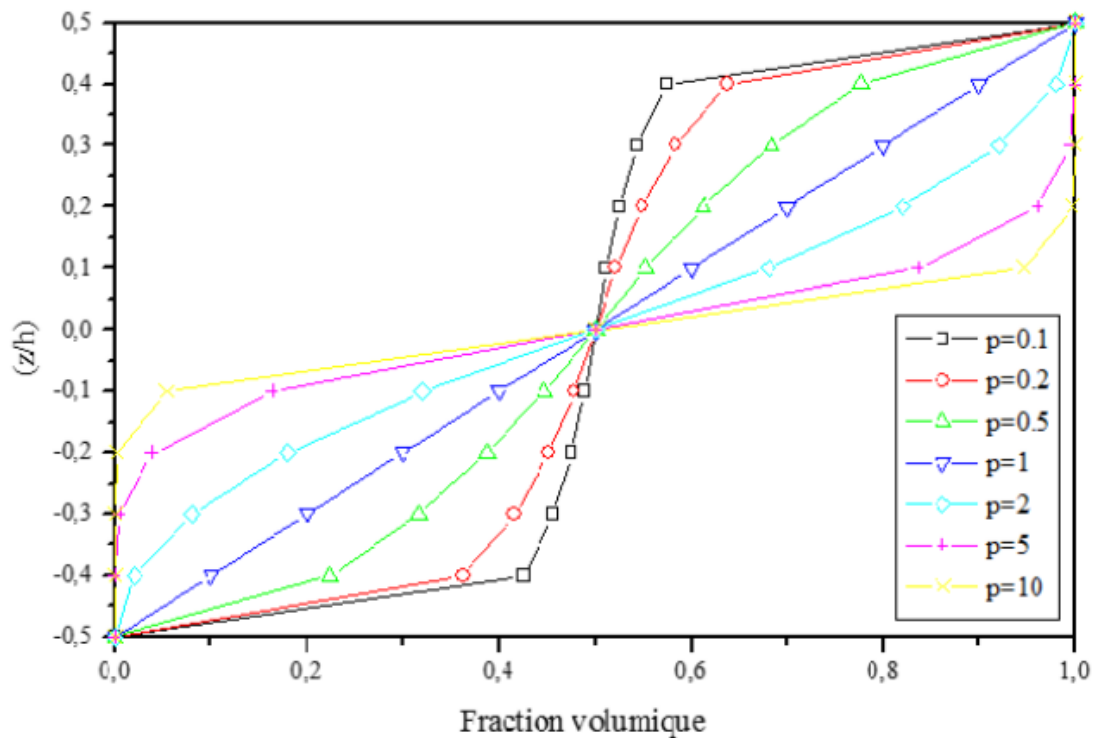


Figure. 1.3 Variation de la fraction volumique suivant la loi sigmoïde

1.3.2 Loi de mélange exponentielle :

La fonction exponentielle est la fonction de matériau FGM la plus utilisée par de nombreux chercheurs en raison de sa simplicité dans l'obtention de solutions analytiques et le seul paramètre est le logarithme naturel du rapport des propriétés des deux matériaux considérés [11] [9] :

$$P(z) = P_t \exp\left(\frac{1}{h} \ln\left(\frac{P_b}{P_t}\right)\left(z + \frac{h}{2}\right)\right) ; \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (1.5)$$

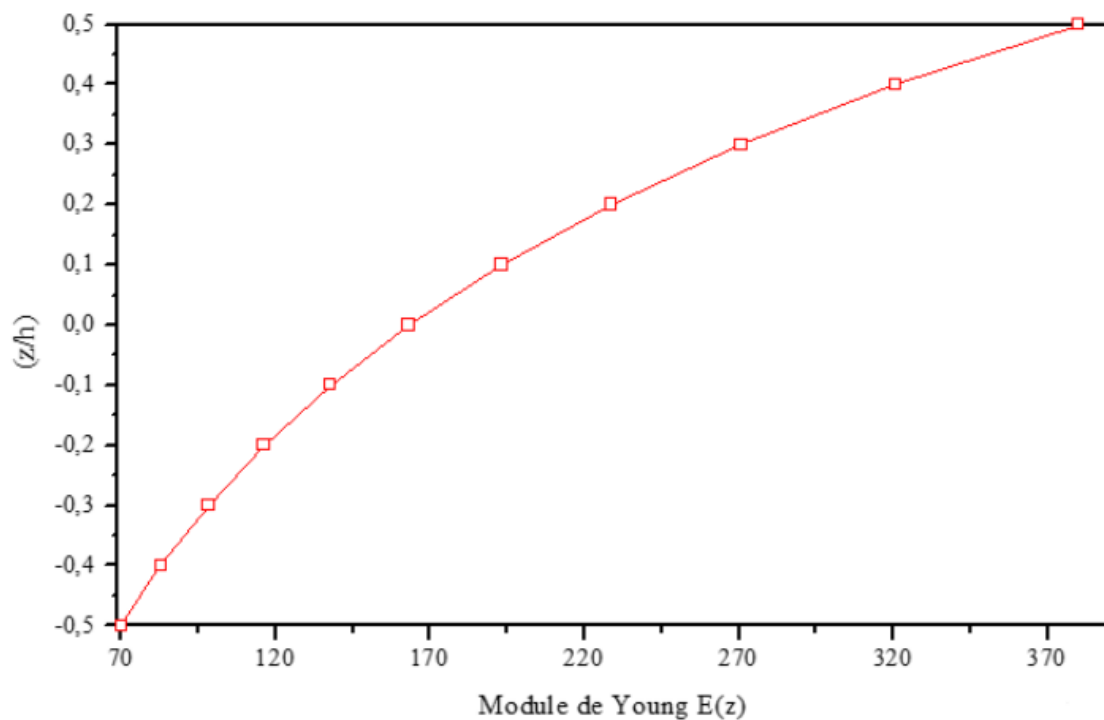


Figure. 1.4 Variation module de Young suivant la loi de mélange exponentielle.

1.4 Transfert thermique dans les plaques FGM:

1.4.1 Les modes de transfert de la chaleur:

On parle d'un transfert thermique pour décrire l'échange de la chaleur lié à une différence de température. Le second principe de la thermodynamique montre que le transfert de chaleur se fait du corps chaud vers le corps froid. On distingue trois modes de transfert de la chaleur : la conduction, la convection et le rayonnement.

1.4.1.1 Le transfert de chaleur par conduction:

Le transfert de chaleur par conduction est un transfert d'énergie dans un milieu matériel solide par agitation moléculaire et sans mouvement de la matière, lorsque le corps est soumis à un gradient de température. Ce mode transfert est décrit par la loi de Fourier établie mathématiquement par Jean Baptiste Biot en 1804 puis expérimentalement par Fourier en 1822 :

$$\vec{Q}_n = -k \overrightarrow{grad} T \quad ; \quad (1.6)$$

Où $\vec{Q}_n$ représente la densité du flux thermique et k la conductivité thermique du matériau.

1.4.1.2 Le transfert de chaleur par convection:

Ce mode de transfert se manifeste par un échange de chaleur entre une surface solide et un fluide mobile à son contact, ou par un déplacement de chaleur au sein d'un fluide par le mouvement d'ensemble de ses molécules d'un point à un autre.

On distingue deux types de convection. Une convection dite naturelle lorsqu'un gradient d'une grandeur intensive telle que la température, la concentration produit le mouvement du fluide. Au contraire, une convection dite forcée lorsque le mouvement du fluide est provoqué par un système de circulation artificielle comme une pompe, une turbine ou un ventilateur.

Au niveau d'un contact surface solide-fluide, le flux de chaleur entre le fluide à la surface du solide et le reste du fluide est régi par la loi de Newton :

$$\vec{Q}_n = h (T_s - T_f) \vec{n} \quad ; \quad (1.7)$$

h est le coefficient d'échange thermique ($\text{W m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$) ;

T_s est la température du fluide à la surface du solide ($^{\circ}\text{C}$ ou K) ;

T_f est la température du fluide ($^{\circ}\text{C}$ ou K).

1.4.1.3 Le transfert de chaleur par rayonnement:

Dans ce mode, l'énergie est transmise par rayonnement électromagnétiques et il s'agit du seul mode de transfert qui ne nécessite pas de support matériel intermédiaire. Ainsi, la chaleur peut être transmise dans le vide.

Le transfert par rayonnement n'exclut aucun état physique, il peut avoir lieu dans les solides et les fluides. Le transfert de chaleur par rayonnement entre deux corps à des températures différentes est régi par la loi de Stefan :

$$\dot{Q}_n = \epsilon \sigma (T_f^4 - T_s^4) \quad ; \quad (1.8)$$

ϵ est l'émissivité de la surface (comprise entre 0 et 1). Elle traduit l'efficacité d'un corps à émettre l'énergie par rapport à un corps noir.

σ est la constante de Stefan-Boltzmann.

T_f température du milieu émetteur.

T_s température du milieu récepteur environnant.

1.4.2 L'équation de la chaleur :

Les problèmes de transfert de chaleur sont classés comme étant unidimensionnels, bidimensionnels ou tridimensionnels, selon les amplitudes relatives des taux de transfert de chaleur dans différentes directions et le niveau de précision souhaité. Dans le cas le plus général, le transfert de chaleur à travers un milieu est tridimensionnel. C'est-à-dire que la température varie dans les trois directions principales à l'intérieur du milieu pendant le processus de transfert de chaleur. La distribution de température dans un milieu anisotrope ainsi que le taux de transfert de chaleur à n'importe quel endroit dans ce cas général peuvent être décrits par un ensemble de trois coordonnées telles que x, y et z dans le système de coordonnées cartésiennes.

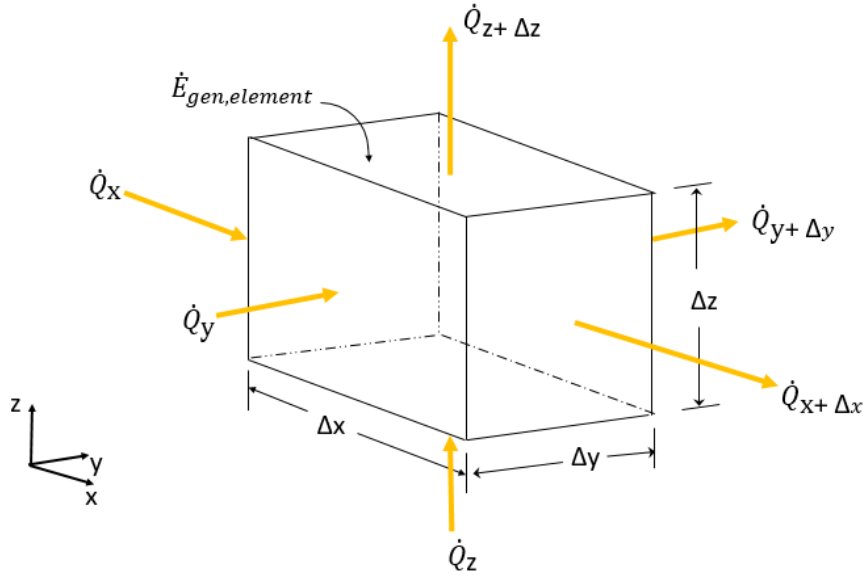


Figure. 1.5 Transfert de la chaleur multidirectionnel à travers un volume élémentaire.

D'après la **Figure 1.5**, l'application du principe de la conservation d'énergie donne :

$$\dot{Q}_x + \dot{Q}_y + \dot{Q}_z - \dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_{z+\Delta z} + \dot{E}_{gen,element} = \frac{\Delta E_{element}}{\Delta t} \quad ; \quad (1.9)$$

$$\Delta E_{element} = E_{t+\Delta t} - E_t = mc(T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho c \Delta x \Delta y \Delta z (T_{t+\Delta t} - T_t) \quad ; \quad (1.10)$$

$$\dot{E}_{gen,element} = \dot{e}_{gen} \Delta x \Delta y \Delta z \quad ; \quad (1.11)$$

$$\dot{Q}_x + \dot{Q}_y + \dot{Q}_z - \dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_{z+\Delta z} + \dot{e}_{gen} \Delta x \Delta y \Delta z = \rho c \Delta x \Delta y \Delta z \frac{(T_{t+\Delta t} - T_t)}{\Delta t} \quad (1.12)$$

Divisons par $\Delta x \Delta y \Delta z$, l'équation (1.12) devient :

$$\frac{1}{\Delta y \Delta z} \frac{\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta x \Delta z} \frac{\dot{Q}_y - \dot{Q}_{y+\Delta y}}{\Delta y} + \frac{1}{\Delta x \Delta y} \frac{\dot{Q}_z - \dot{Q}_{z+\Delta z}}{\Delta z} + \dot{e}_{gen} = \rho c \frac{(T_{t+\Delta t} - T_t)}{\Delta t} \quad (1.13)$$

En prenant $\Delta t, \Delta x, \Delta y$ et Δz tendant vers 0, et en introduisant la loi de Fourier pour un matériau anisotrope:

$$\begin{aligned}\dot{Q}_x &= -k_{xx} \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial x} - k_{xy} \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial y} - k_{xz} \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial z} \\ \dot{Q}_y &= -k_{yx} \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial x} - k_{yy} \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial y} - k_{yz} \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial z} \\ \dot{Q}_z &= -k_{zx} \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial x} - k_{zy} \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial y} - k_{zz} \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial z}\end{aligned}\tag{1.14}$$

On obtient l'équation de la chaleur sous une forme condensée:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \dot{e}_{gen} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}\tag{1.15}$$

Avec : $i = 1, 2, 3$ et $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$

Le tenseur de conductivité thermique peut être plus simple en cas de présence de symétries :

Système monoclinique :

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix}\tag{1.16}$$

Système trigonal

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{11} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix}\tag{1.17}$$

Système orthorhombique

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix}\tag{1.18}$$

Système triclinique

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}\tag{1.19}$$

Système cubique

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{11} & 0 \\ 0 & 0 & k_{11} \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

Dans cette étude, le matériau FGM considéré est unidirectionnel et suit les lois suscitées.

De plus, un transfert thermique unidirectionnel stationnaire et sans génération de la chaleur a été considéré. Par conséquent la matrice conductivité peut être exprimée comme suit [12]:

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left(k_{33}(z, T) \frac{\partial T}{\partial x_3} \right) = 0 \quad (1.21)$$

1.4.3 Résolution des problèmes de transfert thermique dans les plaques FGM :

Les revêtements de barrière thermique sont des matériaux composites formés de deux ou plusieurs phases constitutives selon le concept de fonctionnalités graduées (FGM) et incorporés dans des systèmes à haute température. Dans l'industrie aéronautique, l'application de ce concept à des composants de turbine avancés peut augmenter considérablement les performances du moteur en élevant la température de fonctionnement [13]. Par conséquent, le transfert de chaleur se produit comme un phénomène de base dans ce processus et son évaluation sans faille nécessite la prise en considération de l'effet de la température sur les propriétés thermo-physiques. Dans ce contexte, il convient de mentionner que les micropores et les microfissures, qui sont répartis dans le matériau céramique, jouent un rôle important en affectant la conductivité thermique effective de la plaque FGM conduisant à des caractéristiques non linéaires de problèmes de transfert de chaleur, cité par de nombreux travaux expérimentaux [14][15][16].

Dans de nombreux travaux publiés, des méthodes numériques sont utilisées pour résoudre les problèmes de chaleur stationnaire et transitoire avec des propriétés dépendantes de la température [17–22]. Un intérêt particulier a été adressé aux problèmes de conduction thermique transitoire dans les FGM. [17] ont appliqué pour la première fois la méthode d'interpolation radiale sans maillage (RPIM) aux problèmes de conduction thermique sous l'application de différentes sources de génération de chaleur. En utilisant FDM, Yaghoobi et al. [21] ont résolu une paroi plane de conduction 1D, un cylindre creux et une sphère creuse soumis aux conditions aux limites thermiques de Dirichlet. Ce travail a été mené pour montrer les effets non négligeables des changements linéaires de la composition des matériaux et des paramètres thermiques (comme l'influence de la température sur la conductivité thermique) sur les profils de température et les taux de génération d'entropie. Récemment, Verma et al. [22] ont utilisé la Méthode des éléments finis pour étudier l'analyse thermo-structurale non couplée des coques cylindriques et sphériques FGM exposées à des charges mécaniques et thermiques appliquées rapidement. Les auteurs montrent la sensibilité des matériaux à la température et son influence sur la réponse de la structure.

1.5 Thermoélasticité :

La thermoélasticité traite d'une large classe de phénomènes. Elle contient la théorie généralisée de la conduction thermique, la théorie généralisée des contraintes thermiques, décrit la distribution de température produite par la déformation et contient une description du phénomène de dissipation thermoélastique. Malgré sa complexité mathématique, la thermoélasticité nous permet d'examiner le mécanisme de la déformation et les processus thermiques se produisant dans les corps élastiques. Elle traite les effets de la chaleur sur les contraintes et les déformations dans les corps solides élastiques et vis-versa. L'utilisation de cette théorie révèle son intérêt lorsque les contraintes et les déformations se manifestent non seulement à cause des forces mécaniques mais aussi à cause de la variation de la température. D'autre part, si on part de l'autre sens, la déformation d'un corps peut aussi causer un changement de sa température. Il convient donc à dire que la mécanique et la thermique sont deux aspects couplés et liés.

Cependant dans certains cas, le changement de température dans un corps peut ne pas induire l'apparition des contraintes (cas d'une plaque homogène libre de se dilater au niveau des bords, soumise à un champ de température uniforme). Dans le cas de la soumission d'une plaque FGM -fabriquée avec deux matériaux ayant deux coefficients d'expansion thermiques différents- à un champ de température homogène, des contraintes dites thermiques sont susceptibles d'apparaître.

Dans un corps solide, le transfert thermique se fait par conduction de la chaleur à partir des régions de hautes températures vers les régions à basses températures. Ce processus est irréversible et lié à l'entropie du système. L'expression de l'équation de la chaleur plus générale que celle qui a été présentée auparavant peut être déduite à partir de l'équilibre d'entropie :

$$T\dot{S} = -Q_{i,i} + E_{gen} \quad ; \quad (1.22)$$

En introduisant la loi de Fourier, puis en introduisant la relation de l'entropie :

$$S = \beta_{ij} \varepsilon_{kk} + \frac{\rho c}{T_0} \Delta T \quad ; \quad (1.23)$$

On obtient:

$$T \left(\beta_{ij} \dot{\varepsilon}_{kk} + \frac{\rho c}{T_0} \dot{\Delta T} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + E_{gen} \quad ; \quad (1.24)$$

Dans d'un corps isotrope, l'équation de la chaleur devient :

$$\nabla^2 T - \frac{\beta_{ij} T}{k} \dot{\varepsilon}_{kk} = \frac{\rho c}{k} \frac{T}{T_0} \Delta \dot{T} - \frac{E_{gen}}{k} ; \quad (1.25)$$

Cette forme est une forme plus générale de l'équation de conduction de la chaleur. Elle contient un terme de couplage entre le changement de la température et le taux de dilatation du corps [23-25]. Dans le cas d'une paroi mince par exemple, l'équation du mouvement (1.26 a) vient compléter la théorie, en introduisant les relations de Duhamel-Newmann (1.26 b) et les relations déformation-déplacement (1.26 c):

$$\dot{\sigma}_{ji,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i ; \quad (1.26 a)$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \beta_{ij} \Delta T ; \quad (1.26 b)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right) ; \quad (1.26 c)$$

Avec :

σ_{ij} : tenseur de contraintes.

ε_{ij} : tenseur de déformations.

β_{ij} : modules thermiques.

ΔT : variation du profil de la température par rapport au profil initial ($\Delta T = T - T_0$)

c_{ijkl} : tenseur des rigidités.

Dans le présent travail, il s'agit d'un problème de flambement dans lequel nous supposons que les déformations sont petites et n'ont aucun effet sur le champ de la température de la plaque. Par conséquent, les équations qui régissent le problème sont découplées et la résolution passe par deux étapes :

- Résoudre le problème thermique en évaluant le champ de la température.
- Déterminer les déformations causées par la variation de la température.

1.6 Types d'instabilité :

Lorsqu'une structure élastique est soumise à une charge extérieure quasi-statique, mécanique ou thermique, elle se déforme proportionnellement jusqu'à ce que la charge atteigne une valeur limite où la structure se comporte de manière non proportionnelle. Lorsqu'une telle condition se produit, on dit que la structure s'est déformée. Le type de flambement et d'instabilité d'une structure est différent.

1.6.1 Le flambement par bifurcation:

Le premier type est appelé flambement classique ou flambement par bifurcation et a historiquement reçu le plus d'attention. Dans ce type d'instabilité, une structure élastique linéaire suit le chemin primaire de déformation avant flambage. Cette déformation est linéaire jusqu'au point de bifurcation et à ce point le chemin de chargement se divise en chemin de post-flambement instable et stable. À titre d'exemple, nous pouvons vérifier le comportement d'une structure typique telle qu'une barre droite sous la force de compression axiale P , est illustré à la **Figure 1.6**. La première partie du point O au point de branchement est appelée chemin stable primaire et la seconde partie du point de branchement suit soit le chemin stable secondaire de post-flambage, soit le chemin primaire instable. À ce stade, il est essentiel de distinguer le comportement d'une structure après avoir atteint le point de bifurcation et commence le chemin de post-flambage secondaire. Le chemin de post-flambage secondaire peut être stable ou instable, selon la géométrie de la structure et le type de charge [26].

1.6.2 L'imperfection géométrique et le flambement sans bifurcation:

La **Figure 1.7** montre un chemin secondaire stable. Une poutre droite et géométriquement parfaite sous une charge de compression axiale P appliquée à son extrémité libre est représentée. Une fois que le chargement appliqué P atteint le point de bifurcation, la poutre fléchit et commence à suivre le chemin stable de post-flambement pour des valeurs plus élevées de P . Ce comportement est observé lorsque la poutre est géométriquement parfaite. En revanche, si la poutre est géométriquement imparfaite (**Figure 1.7**), elle n'atteint jamais le point de bifurcation et suit la courbe latérale en pointillés, comme le montre la **Figure 1.8**. Dans ce cas, on peut

approximer le chargement critique de flambement par les deux méthodes: double tangente et critère de Budiansky modifiée, décrites sur la **Figure 1.9**.

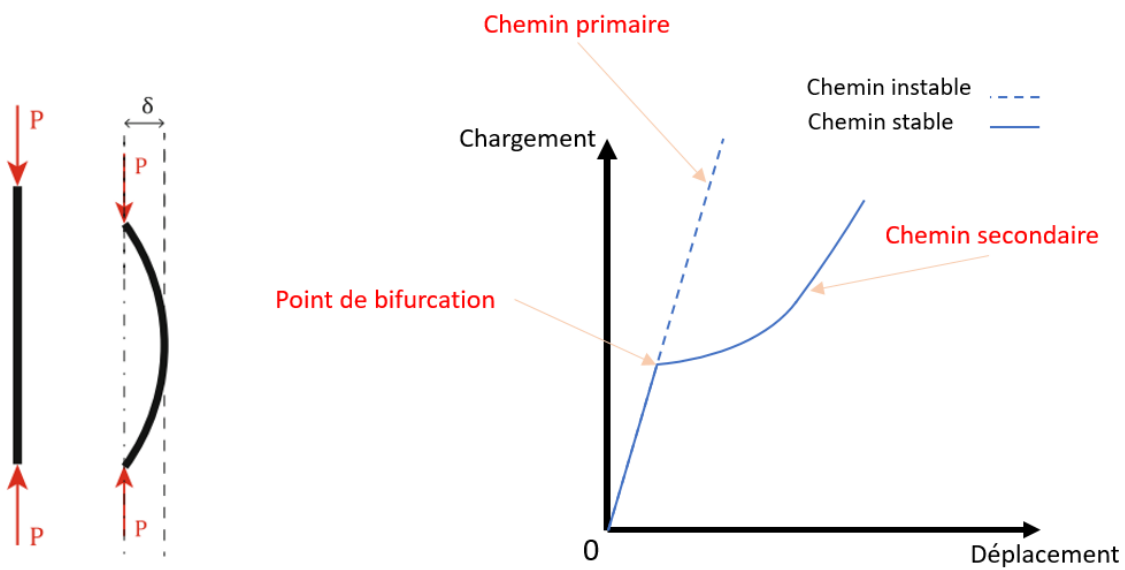


Figure. 1.6 Poutre sous charge axiale. Chemin de post-flambement stable et chemin linéaire instable.

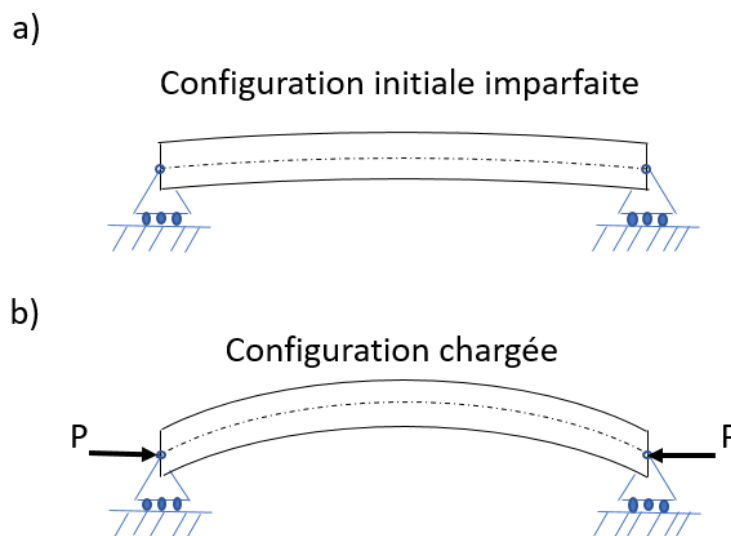


Figure. 1.7 a) Poutre avec déflexion initiale latérale. b) Poutre avec déflexion initiale latérale sous compression axiale.

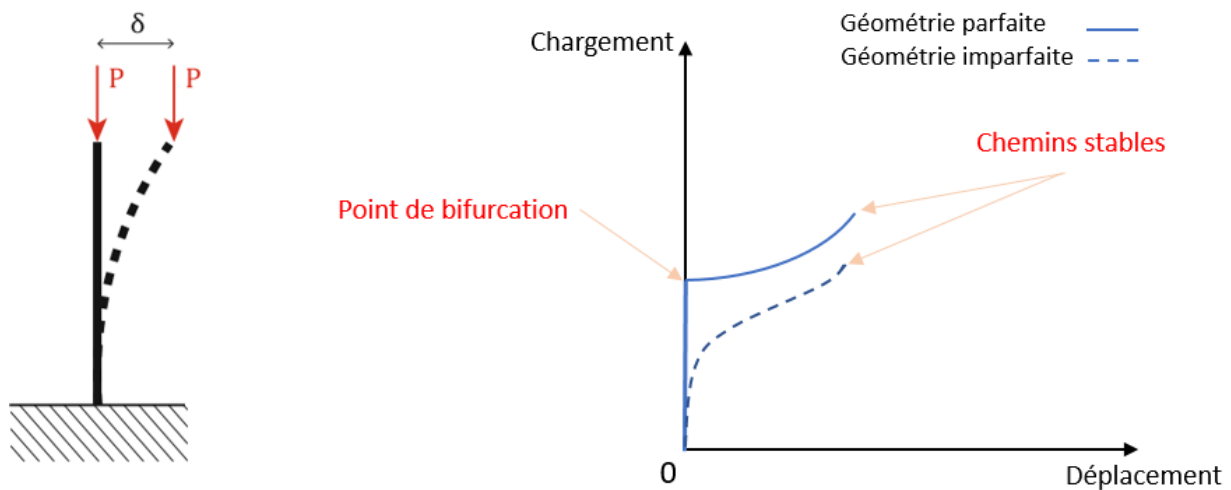


Figure. 1.8 Chemin de post-flambement stable.

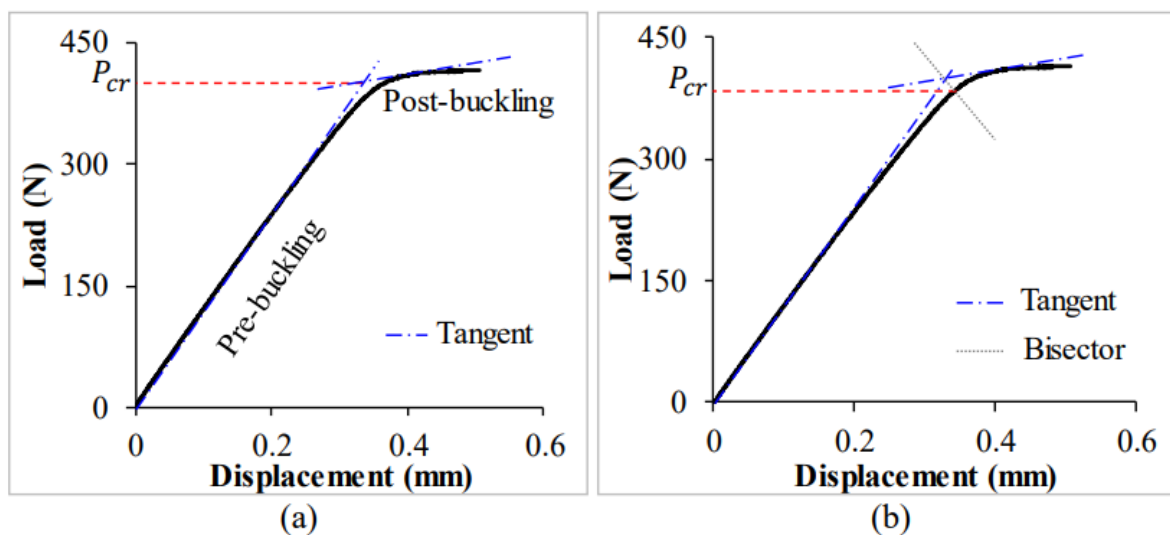


Figure. 1.9 Illustration de l'estimation de la charge critique de flambement en utilisant:
(a) la méthode de double tangente et (b) la méthode du critère de Budiansky modifiée [26].

1.6.3 La notion de point limite :

Le chemin de post-flambement secondaire peut être instable, selon la géométrie de la structure et le type de charge. La **Figure 1.10** montre le chemin secondaire instable. On peut citer comme exemple le comportement d'un treillis sous une force concentrée P appliquée à son sommet. Une fois que la charge appliquée est atteinte à une certaine valeur appelée point limite, le treillis flambe et le chemin de post-flambage est instable, comme le montre la **Figure 1.10**.

Notez qu'une structure sous contraintes de compression avec une imperfection géométrique initiale peut suivre le chemin d'équilibre et ne jamais atteindre le point de bifurcation. L'exemple est le même treillis avec des imperfections géométriques. Dans ce cas, la ferme supporte la charge P et à une certaine valeur de P , avant de se déformer, suit un chemin instable, comme le montre la figure.

Par définition; un point d'une courbe d'équilibre est un point limite s'il satisfait aux conditions suivantes [28].

- La direction tangente associée est horizontale lorsque l'axe vertical indique la variation du paramètre de contrôle (charge extérieure).
- Ce n'est pas un point de bifurcation.

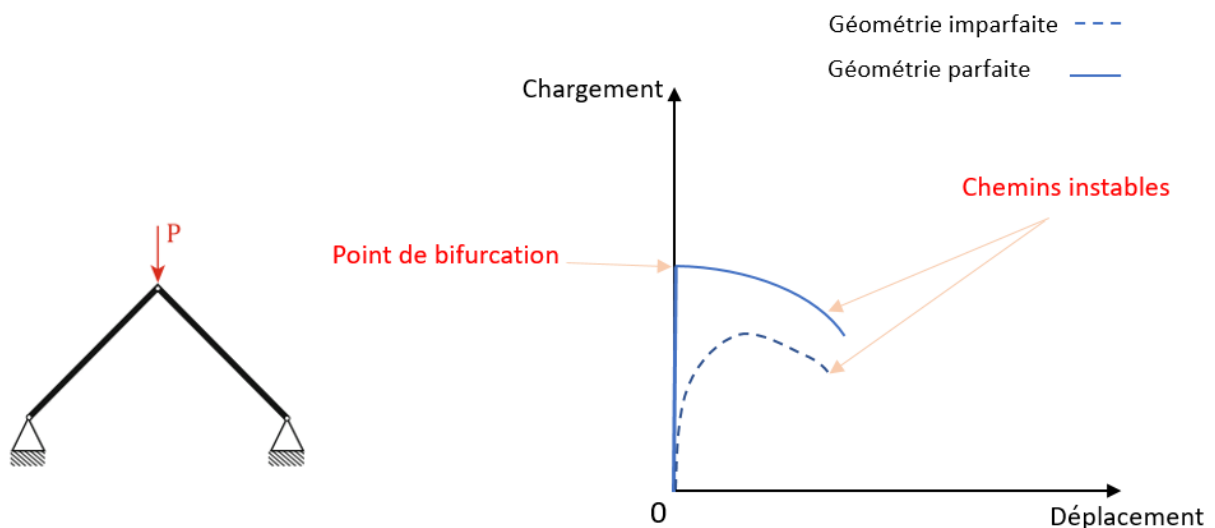


Figure. 1.10 Chemin de post-flambement instable.

1.6.4 Le flambement à perturbation finie :

Le deuxième type de stabilité peut être appelé flambement à perturbation finie et se produit lorsqu'une structure atteint le point de bifurcation, puis une chute brutale de la charge appliquée se produit avant d'atteindre un chemin de post-flambement stable.

Ce type d'instabilité, qui se produit dans les coques, suit une réponse élastique de la structure (après le point de bifurcation) où la perte de stabilité est si importante que pour maintenir la stabilité, il faut revenir à un niveau de chargement antérieur. Un exemple classique d'une telle instabilité est une coque cylindrique soumise à une charge de compression axiale, comme le

montre la **Figure 1.11**. Une coque sphérique complète sous pression externe tombe dans ce type d'instabilité.

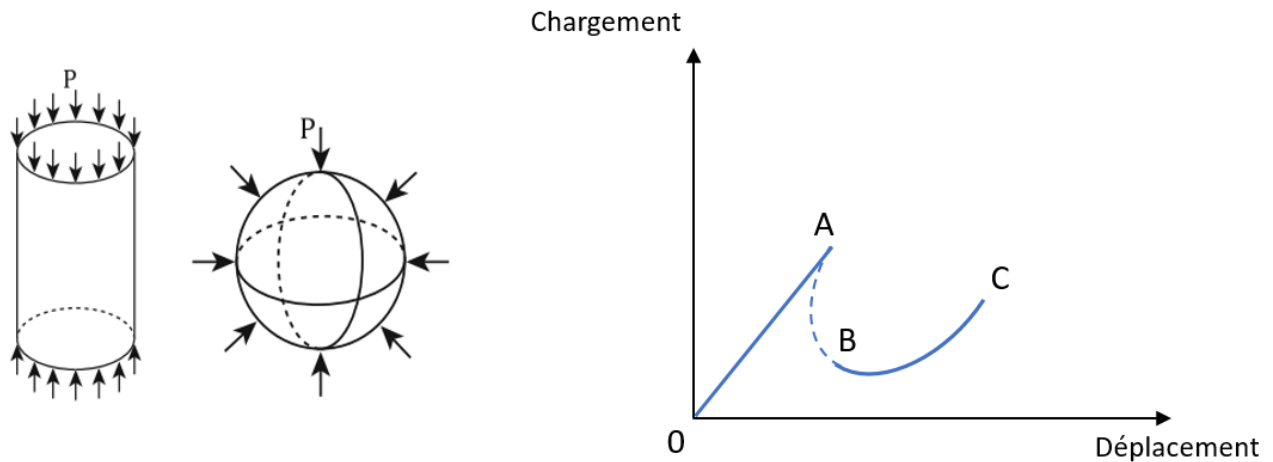


Figure. 1.11 Coque cylindrique soumise à une charge de compression axiale uniformément distribuée et une coque sphérique complète soumise à une pression externe.

1.6.5 Le flambement par encliquetage (snap-through):

Le troisième type d'instabilité est le flambement par encliquetage. Ce type d'instabilité se caractérise par un saut soudain visible d'un chemin d'équilibre vers un autre chemin d'équilibre, où les déplacements sont plus importants que le premier état d'équilibre non adjacent. L'encliquetage est intrinsèquement un phénomène dynamique ; puisque le chemin d'équilibre statique est interrompu par une région instable, à mesure que la charge augmente, et le système doit sauter dynamiquement au-delà de la région instable et sur une région stable capable de supporter des charges supérieures à la charge d'enclenchement. Contrairement au flambement des poteaux, il n'y a pas de branche stable que le système puisse suivre en continu le long du chemin d'équilibre. Les exemples classiques d'une telle instabilité sont une arche peu profonde épinglée ou une coque sphérique peu profonde sous pression externe, comme le montre la **Figure 1.12**. Ce type d'instabilité peut aussi avoir lieu lors d'un échauffement uniforme d'une plaque FGM symétrique [29]. En effet, la structure suit un chemin d'équilibre stable unique pour atteindre une charge maximale sans aucune bifurcation ou point de branchement préalable. Arrivant à ce point, appelé point limite, le chemin d'équilibre initial n'est plus stable et une chute importante de la charge appliquée se produit jusqu'à atteindre un autre chemin stable. Ce point de la **Figure 1.12** est représenté par le point A et est appelé point limite supérieur. La courbe

descend alors pour atteindre le nouveau point limite B, où commence le deuxième chemin stable. Le point B est appelé le point limite inférieur.

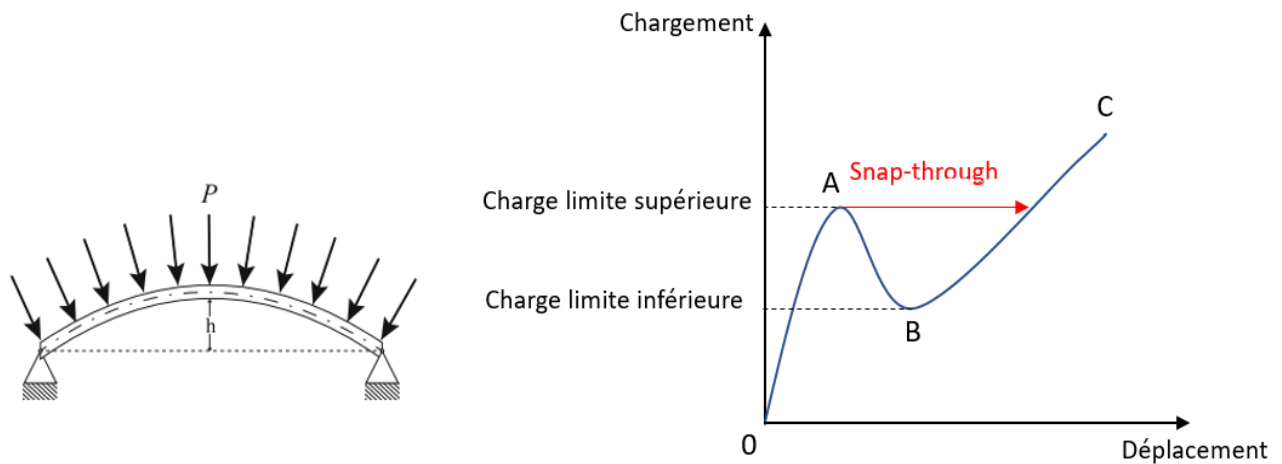


Figure. 1.12 Le flambement par encliquetage d'une arche peu profonde épinglée.

En résumé, l'état de stabilité d'une structure peut être divisé en trois catégories, le flambement par bifurcation, le flambement par perturbation finie et le flambement par encliquetage. Ces conditions se produisent lorsque, en général, une structure mince est soumise à des forces appliquées qui produisent des contraintes de compression. La charge appliquée peut avoir la nature d'une force ou d'un gradient thermique. Dans les deux cas, il est possible qu'une structure suive le chemin de flambement ou supporte la charge jusqu'à ses contraintes limites admissibles, en fonction du type de conditions aux limites, des imperfections géométriques initiales ou des propriétés du matériau. Le problème de stabilité est un sujet majeur à étudier pour les structures modélisées par les théories de la flexion.

1.7 Théories des plaques minces et des parois minces :

1.7.1 Définition:

Il sera très utile en premier lieu de montrer la différence entre une plaque et une paroi. En effet, il n'y a aucune différence entre les deux du point de vue géométrique, mais celle-ci provient seulement du mode de sollicitation.

Le schéma ci-dessous (**Figure 1.13**) montre la différence entre les deux notions :

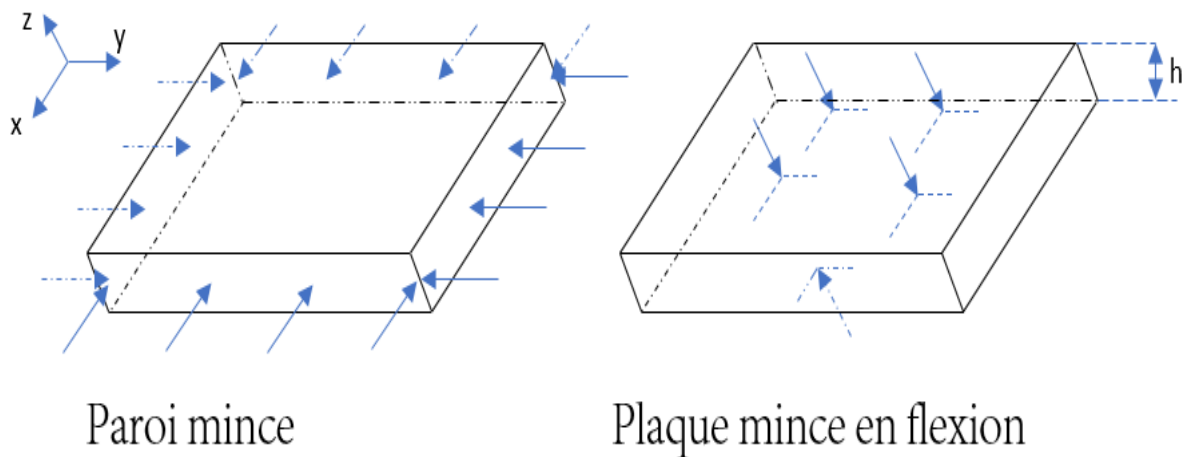


Figure. 1.13 Schémas illustrant les notions plaque mince et paroi mince fléchie.

Le solide est défini comme étant une paroi mince lorsque les forces sont contenues dans le plan équidistant des faces appelé plan moyen. Au contraire, lorsque les forces et donc les réactions sont perpendiculaire aux faces, le solide est considéré une plaque mince.

1.7.2 Théorie de la flexion des plaques minces :

1.7.2.1 Conditions d'équilibre:

En général, les équations d'équilibre peuvent être déduites en utilisant le principe des puissances virtuelles (PPV). Notons que le PPV exprime l'équilibre, il s'agit de l'égalité entre la puissance virtuelle développée par les efforts intérieurs et la puissance virtuelle développée par les efforts extérieurs. Cette égalité satisfait aux conditions aux limites statiques associées à l'équilibre. Dans ce travail, les équations d'équilibre seront identifiées plus rapidement en recourant à la méthode de Navier-Bresse utilisée pour la première fois sur les poutres. En général, le solide est découpé et l'équilibre de chaque tronçon est analysé. Finalement, l'équilibre intérieur d'un tronçon est traduit en transportant en un point donné les actions extérieures. Dans notre cas, les conditions d'équilibre sont représentées comme sur la **Figure 1.14**:

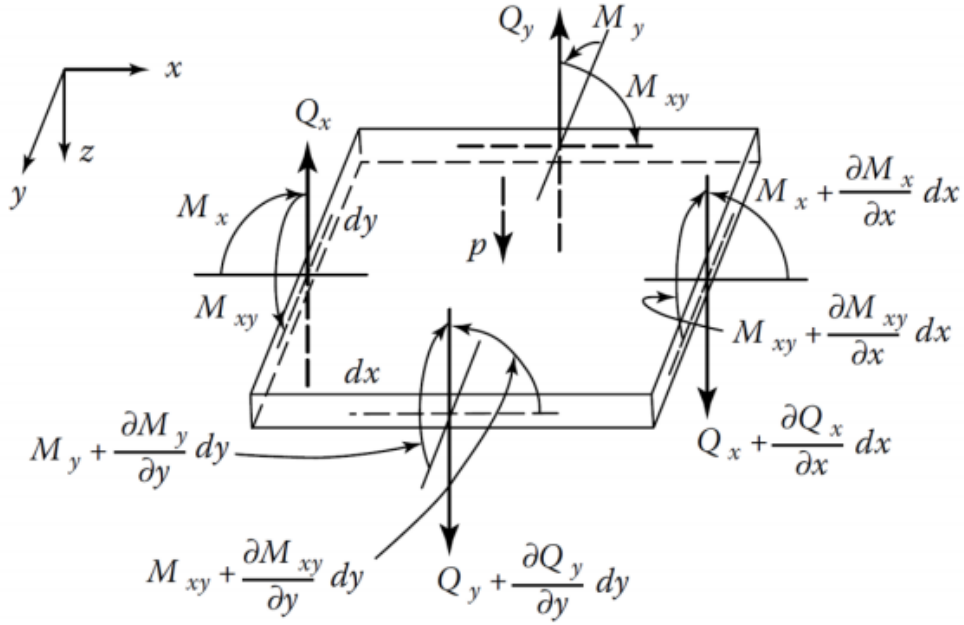


Figure. 1.14 Résultantes positives et charge sur un élément infinitésimale de la plaque [29].

Le plan moyen restant une surface neutre après déformation, la résultante des efforts normaux s'annule. Ce qui reste, c'est des résultantes non nulles des moments de flexion et de torsion et des efforts tranchants.

La somme des forces dans la direction z est nulle :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dx dy + p dx dy = 0 \quad (1.27)$$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0 \quad (1.28)$$

L'équilibre des moments autour de l'axe x est :

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_y}{\partial y} dx dy - Q_y dx dy = 0 \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (1.30)$$

De la même manière on obtient l'équilibre des moments autour de l'axe y :

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \quad (1.31)$$

En rassemblant les équations, on obtient :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + p = 0 \quad (1.32)$$

Cette équation représente l'équilibre des plaques en flexion.

1.7.2.2 Hypothèses de Kirchhoff :

La théorie de Kirchhoff est historiquement l'une des premières approches bidimensionnelles de la flexion des plaques élastiques minces. Notons que pour considérer une plaque mince, le critère souvent utilisé est le rapport entre l'épaisseur et la plus petite dimension transversale. Ce rapport ne doit pas dépasser 1/20 [30]. Les travaux de Ciarlet et Destuynder 1979 ont montré que la solution élastique tridimensionnelle converge vers la solution du modèle de Kirchhoff-Love, quand la plaque devient mince [31-32]. Les hypothèses fondamentales de cette théorie sont:

1. Les déplacements u_0 et v_0 d'un point appartenant au feuillet moyen sont négligeables : $u_0 = u(x; y; 0) = 0$ et $v_0 = v(x; y; 0) = 0$
2. Une normale au feuillet moyen reste droite après la déformation ; l'influence des cisaillements sur les déformations est ainsi négligée (Bernoulli Navier)
 $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$
3. Les contraintes σ_z sont petites et négligeables. Les contraintes restantes sont donc :
 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$
4. La déformation $\varepsilon_z \sim 0$.

1.7.2.3 Champs des déformations et cinématique:

D'après les hypothèses de Kirchhoff et en utilisant le tenseur de Green Lagrange linéarisé (les petites déformations), on a :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0\end{aligned}\quad (1.33)$$

Ce qui permet d'écrire :

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad ; \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1.34)$$

Et

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad ; \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (1.35)$$

1.7.2.4 Champ des contraintes:

A l'aide de la loi de Hooke, on peut exprimer les déformations en fonction des contraintes :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \alpha \Delta T \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \alpha \Delta T \quad ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}\end{aligned}\quad (1.36)$$

Avec :

E : module de l'élasticité.

ν : Coefficient de Poisson.

G : Module de cisaillement ; $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

En considérant $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y - (1+\nu)\alpha \Delta T) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x - (1+\nu)\alpha \Delta T) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}\end{aligned}\quad (1.37)$$

En remplaçant les déformations par leur expressions on trouve :

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{E z}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{E\alpha}{1-\nu} \Delta T \\
\sigma_y &= -\frac{E z}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{E\alpha}{1-\nu} \Delta T \\
\tau_{xy} &= -\frac{E z}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Note : Les déplacements u_0 , v_0 sont nuls, alors les déformations en membranes ε_{x0} , ε_{y0} et γ_{xy0} du plan moyen le sont aussi. Alors, il ne reste que les déformations en flexion-torsion (courbures de la plaque) **Equation (1.35)**.

Par conséquent, dans la théorie des plaques minces, l'interaction des actions membrane-courbure est négligeable ; les moments et les efforts tranchants seront donc purement d'origine courbure car l'action d'origine membranaire est nulle. De plus, comme les contraintes d'origine mécanique sont linéaires suivant l'épaisseur (**Equation (1.38)**), leurs efforts correspondants seront nuls. Il ne reste que les efforts thermiques $N_T = -\frac{E\alpha}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} \Delta T dz$ qui dépendent de la variation de la température. Les Moments de flexion et de torsion M_x , M_y , M_{xy} et les efforts tranchants Q_{zx} , Q_{zy} seront non nuls. Les résultantes moments et efforts tranchants sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}
M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \\
M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \\
M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz
\end{aligned} \tag{1.39}$$

$$\begin{aligned}
Q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \\
Q_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz
\end{aligned} \tag{1.40}$$

En remplaçant les contraintes par leurs expressions trouvées auparavant, les moments de flexion et de torsion s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - M_T \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - M_T \\ M_{xy} &= -D (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (1.41)$$

Avec la rigidité flexionnelle : $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ et le moment thermique : $M_T = \frac{E\alpha}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} \Delta T z \, dz$

1.7.2.5 Equation gouvernante des plaques minces en flexion :

En projetant les expressions des moments : **Equation (1.41)** dans l'équation d'équilibre : **Equations (1.32)**, l'équation différentielle représentant l'équilibre des plaques minces en flexion est obtenue :

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_T}{\partial y^2} \right) - p = 0 \quad (1.42)$$

1.7.3 Théorie des parois minces :

1.7.3.1 Etat d'élasticité bidimensionnelle :

Les problèmes thermoélastiques tridimensionnels nécessitent la détermination de 15 quantités : 6 contraintes, 6 déformations et 3 déplacements. Suivant la géométrie et le chargement, Ces problèmes peuvent devenir beaucoup plus simples si certaines quantités s'annulent ou deviennent négligeables [33].

- **L'état de contrainte plane :**

Lorsqu'une dimension est très petite comparée aux deux autres dimensions. Il s'agit d'un état où les contraintes non nulles sont toutes parallèles à un plan. Si l'axe z est normal au plan ; alors on pose $\sigma_z = \tau_{zy} = \tau_{zx} = 0$. Car ces contraintes n'ont que des valeurs très faibles comparées aux contraintes : σ_x , σ_y et $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

Ceci est applicable dans le cas d'une paroi mince sollicitée par des forces appliquées sur son contour. Par définition, une paroi mince possède une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions, ceci limite la variation des contraintes suivant cette direction.

- **L'état de déformation plane :**

L'état de déformation plane est applicable lorsque la structure possède une dimension largement supérieure aux deux autres. La déformation suivant cette dimension sera négligeable devant les autres. On peut donc poser $\varepsilon_z = 0$.

Ce type de simplification peut être applicable dans le cas d'une tôle en laminage ou bien un puit de mine comme le montre la **Figure 1.15**.

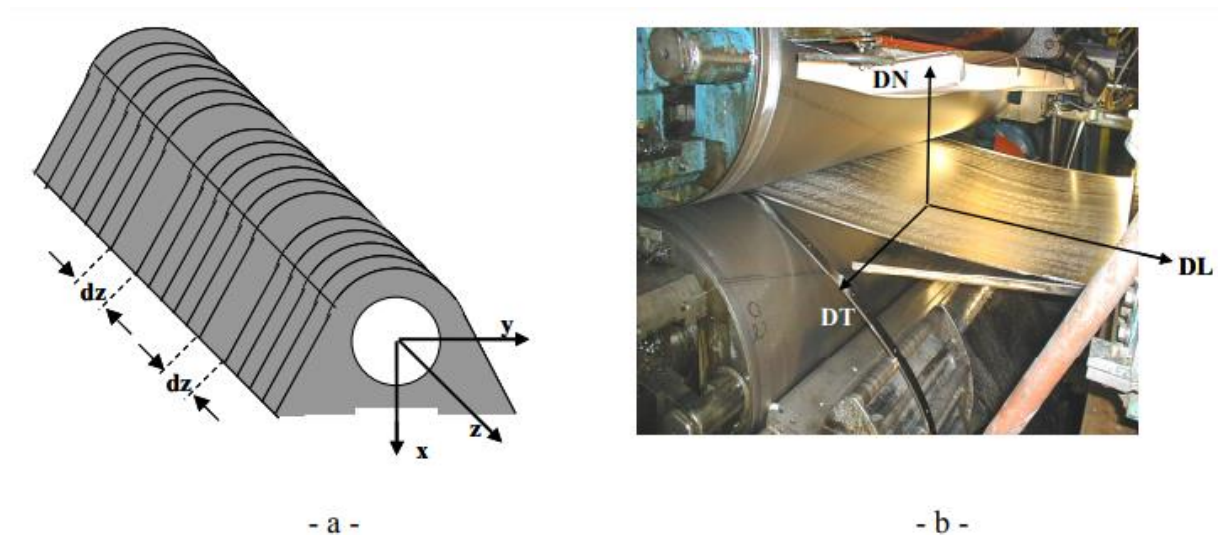


Figure. 1.15 Exemples de structures en déformation plane : (a) puit de mine (b) tôle en laminage [3].

1.7.3.2 Conditions d'équilibre:

Les conditions d'équilibre de la paroi sont déduites à partir de la **Figure 1.15**:

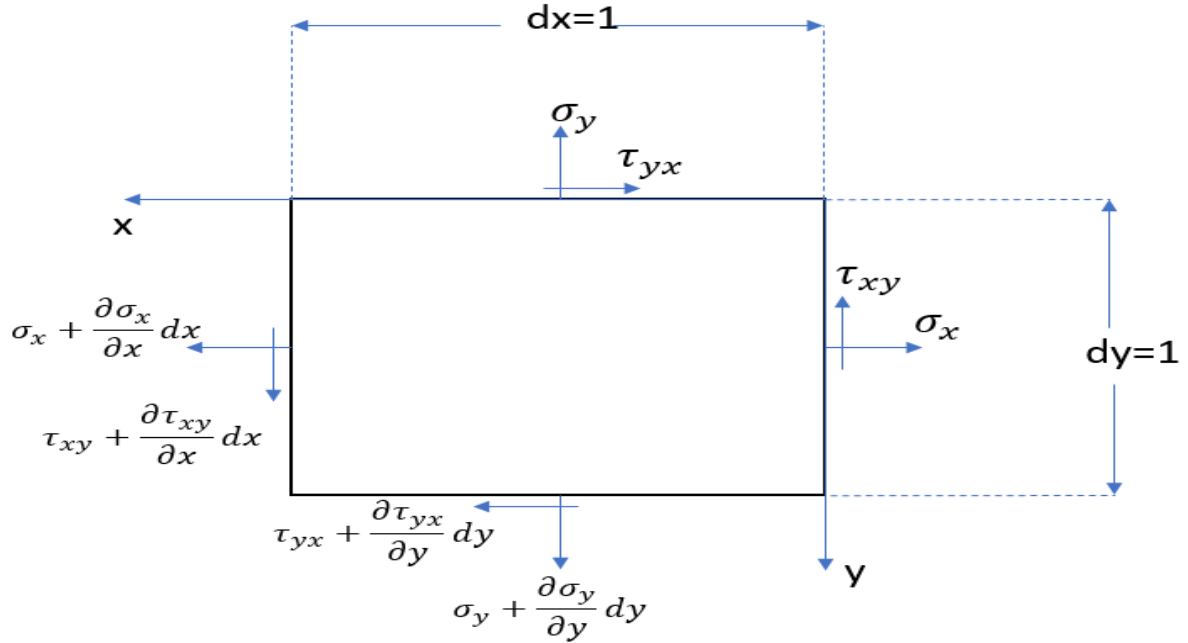


Figure. 1.16 Contraintes appliquées sur un élément infinitésimal de la paroi.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0\end{aligned}\tag{1.43}$$

Les équations d'équilibre seront satisfaites si l'on pose :

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad ; \quad N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad ; \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\tag{1.44}$$

La fonction F est appelée fonction de tension d'Airy.

1.7.3.3 Condition de compatibilité:

Comme dans le cas des plaques en flexion, les deux équations d'équilibre obtenues ne suffisent pas pour déterminer les contraintes : σ_x , σ_y et τ_{xy} .

L'introduction de la condition de déformation s'exprime par l'équation de compatibilité. Celle-ci exprime la dépendance entre les différentes déformations ε_x , ε_y et γ_{xy} :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1.45)$$

Dans le cas tridimensionnel, l'équation de compatibilité peut être exprimée en fonction des contraintes. Cependant, en état de contraintes planes ou de déformations planes, on utilise souvent la fonction d'Airy. Avec les **Equations (1.36) et (1.44)**, l'équation de compatibilité **Equation (1.45)** devient :

$$\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_T}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (1.46)$$

La détermination des solutions F permettent de trouver les contraintes.

1.8 Problèmes de flambement mixte plaque-paroi :

1.8.1 Analogie entre les problèmes de plaque mince et de paroi mince :

Les **Equations (1.42) et (1.46)** montrent une certaine analogie entre les problèmes des plaques et ceux des parois minces. Les deux problèmes sont régis par des équations différentielles du même type. En effet, on peut représenter la fonction d'Airy comme la déflexion w d'une plaque fléchie soumise à une charge nulle avec un pourtour déformé : (F et $\frac{\partial F}{\partial n}$ fixés). Des explications détaillées sont détaillées dans la page 25 de la référence [35].

1.8.2 Pré-flambement, flambement et post-flambement :

Dans le cas du flambement, les efforts sont tous contenus dans le plan moyen. L'application des efforts de compression peuvent induire une instabilité du système contrairement aux efforts de tension. Au cours de ce phénomène, on distingue trois étapes :

- Le pré-flambement :

Afin de trouver une solution pour un problème de flambement, l'équilibre juste avant flambement doit être défini. La résolution d'un problème thermoélastique plan ne permet pas de suivre l'évolution des contraintes au cours de la déformation en pré-flambement, mais elle permet d'évaluer la distribution spatiale des contraintes, utile pour l'étape qui va suivre: le flambement. Pour des cas simples, comme le cas d'une plaque non trouée, initialement géométriquement parfaite, homogène ou composite symétrique, chargée dans son plan moyen (qui est dans ce cas identique au plan neutre), la solution du pré-flambement est considérée comme état de membrane ; c'est-à-dire que la plaque est en état d'écrasement dans le plan sans aucune flexion [36]. Cette étape consiste à résoudre le problème thermoélastique plan pour déterminer les contraintes planes dans l'état d'équilibre de pré-flambement. Au cours du chargement, les déflexions w resteront nulles dans toute la surface de la plaque, contrairement aux déplacements u et v . Aussi, les pentes $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ resteront donc nulles. Dans le travail de Heldenfels and Roberts (1952) [37], un intérêt particulier a été attribué à la distribution des contraintes. Dans cette étude, les auteurs ont réussi à valider expérimentalement leurs études théoriques de l'analyse des contraintes thermiques en utilisant la fonction de contrainte d'Airy. En effet, les contraintes σ_y et τ_{xy} puis σ_x ont été déterminées à partir des conditions d'équilibre en état de contrainte plane. Les résultats concernant la distribution des contraintes σ_x et σ_y ont montré que la zone centrale est en compression bi-axial. De plus il a été montré que, le gradient spatial de la température produisant ces contraintes compressives provoque un phénomène de flambement même si les bords de la plaque sont libres.

Dans le cas d'une plaque avec des imperfections initiales, le comportement de la plaque ne sera pas identique au cas précédent ; les déformations se manifesteront au cours de l'état pré-flambement ; c-à-d dès l'instant où la sollicitation thermique est appliquée. Dans le présent travail, nous prendrons en compte les imperfections géométriques afin de voir leurs effets sur le comportement des plaques FGM en flambement pré et post-flambement.

D'après [36,38], l'existence d'un point de bifurcation est due à l'annulation de l'effet des actions de flexion, du couplage flexion-extension ou de moments thermiques. La symétrie de la composition matérielle, la façon d'élévation de la température, le type de condition mécanique et l'existence ou pas des imperfections géométriques sont des paramètres essentiels qui influent l'état de pré flambement.

- Le flambement :

Le flambement est une étape intermédiaire de passage entre le pré-flambement et le post-flambement. Il est défini par une charge critique qui peut être soit un point de bifurcation ou un point limite de la branche d'équilibre. Toutefois, il est très fréquent de trouver des travaux qui s'intéressent aux problèmes de flambement sans prendre en compte les déformations en pré-flambement. En général, en suivant une procédure analogue à celle d'Euler des poutres, la solution est obtenue en déterminant les contraintes compressives N_x , N_y et N_{xy} qui représentent les efforts d'équilibre en état flambé. Ces derniers représentent la solution d'un problème aux valeurs propres permettant de déterminer les charges critiques et les modes de déformations associés. Même si cette procédure ne permet pas d'évaluer l'amplitude des déformations, mais elle est largement utilisée pour dimensionner les structures tout en évitant leurs flambements. Les études menées sur la détermination de la charge critique de flambement avec considération des déformations en pré flambement sont rares. Bref, afin de déterminer le chargement critique du flambement en tenant compte de l'état pré flambement et les déformations qui peuvent l'accompagner, il faudra introduire la solution de l'état de pré-flambement dans l'équation du flambement. Dans un cadre général, il s'agit là d'un système couplé. Nous allons revenir sur ce point dans la dernière section de ce chapitre.

- Le post-flambement:

Lorsqu'il s'agit d'un problème où les deux notions plaque fléchie et de paroi sont présentes. Nous pouvons résoudre les deux problèmes et superposer les résultats seulement si les déformations restent petites. Dans le cas contraire, comme dans le cas l'objet de ce travail, les déformations sont importantes et il est nécessaire de considérer la dépendance réciproque des deux problèmes. Le problème global sera donc un problème couplé.

L'étude du post-flambement requiert la fusion entre la théorie des parois minces et celle des plaques minces fléchies. En effet, lorsque les déflexions normales $w(x, y)$ sont considérables comparé à l'épaisseur de la plaque, les non-linéarités dues aux grands déplacements doivent être prises en considération. La plaque étant fléchie, les contraintes normales : N_x , N_y et N_{xy} ne sont plus dans le plan moyen et on verra s'ajouter à l'équation d'équilibre ; c-à-d l'**Equation (1.42)** des forces suivant (oz) et des termes de la résultante N du plan moyen déformé. Ceci aura deux conséquences. D'une part, les déformations dans le plan moyen s'exprimeront en fonction des termes non linéaires de la déflexion w , et d'autre part, On doit utiliser des versions modifiées des **Equations (1.42)** et **(1.46)** conjointement [33].

1.8.3 Conditions d'équilibre:

Considérant un élément infinitésimal de la plaque- paroi (**Figure 1.17**). La résultante verticale des efforts N n'est pas nulle et vaut :

$$P_t = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (1.47)$$

La nouvelle forme de l'**Equation (1.42)** est :

$$\begin{aligned} & D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_T}{\partial y^2} \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (1.48)$$

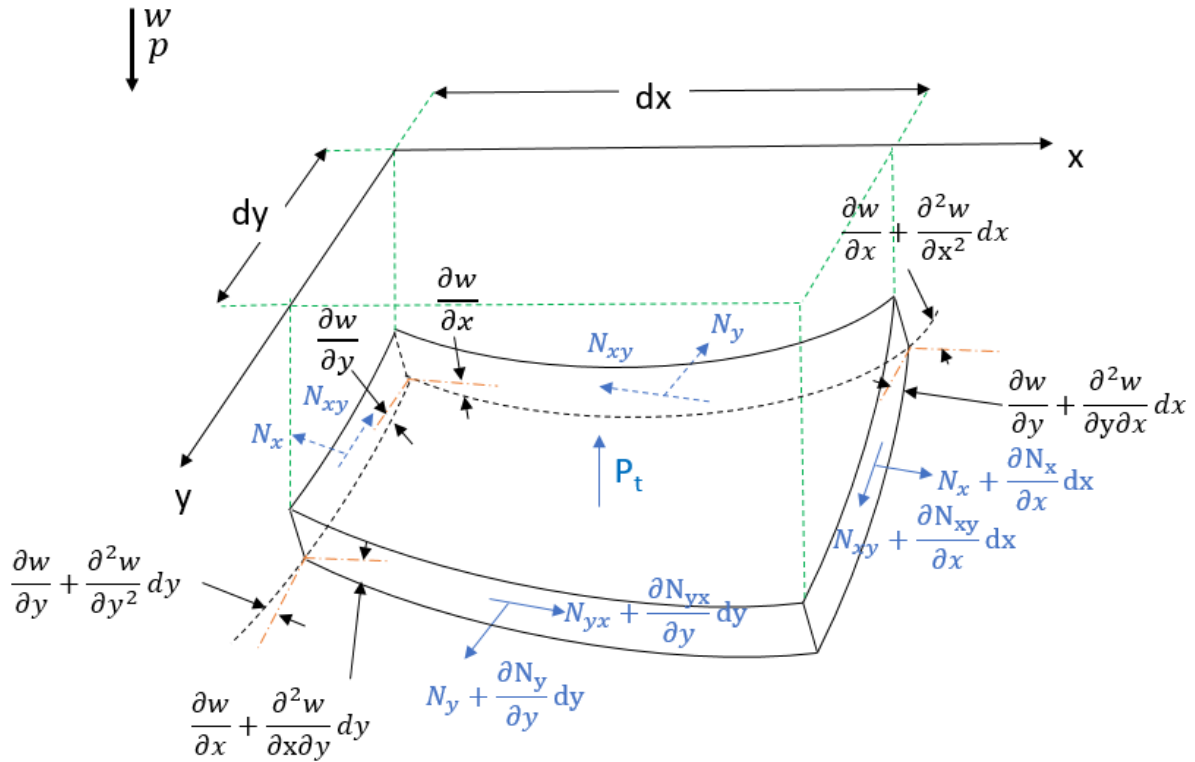


Figure. 1.17 Résultantes positives et charge sur un élément infinitésimal de la plaque-paroi.

1.8.4 Influence des contraintes du plan moyen sur la flexion de la plaque :

Les équations gouvernantes doivent exprimer l'influence des contraintes du plan moyen (qui n'est plus une surface neutre), sur la flexion de la plaque.

Leurs résultantes sur l'épaisseur de la plaque sont les efforts normaux :

$$N_x = h \sigma_x ; N_y = h \sigma_y ; N_{xy} = h \tau_{xy} = N_{yx} = h \tau_{yx} \quad (1.49)$$

1.8.5 Influence des déformations du plan moyen sur les tensions de la paroi

Comme nous l'avons cité, les non-linéarités dues aux grandes déformations doivent être considérées lors de l'étude du post-flambement des plaques minces. Aussi, le plan moyen n'est plus une surface neutre. Par conséquent, l'hypothèse de considérer les déplacements u_0 et v_0 nuls comme dans la théorie des plaques fléchies doit être abandonnée ici, et leurs influences sur

les tensions de la paroi doivent être prises en considération. Au lieu des relations **(1.34)**, on aura :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad ; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1.50)$$

1.8.6 Condition de compatibilité:

De la même manière qu'auparavant, on obtient la version modifiée de l'équation de compatibilité **(1.45)**:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (1.51)$$

En exprimant les déformations en fonction de la fonction d'Airy, on obtient la version modifiée de l'**Equation (1.46)**:

$$\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_T}{\partial y^2} \right) = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (1.52)$$

En état de pré-flambement, les déformations sont très petites et leurs influences sur la répartition des contraintes et leurs résultantes N_x , N_y et N_y sont négligeables. Les termes non linéaires dans l'**Equation (1.52)** disparaîtront ce qui donne l'**Equation (1.46)**. Les **Equations (1.46)** et **(1.48)** qui régissent le problème seront donc découplées. La solution de **(1.46)** sera injectée dans l'**Equation (1.48)** qui, à elle seule permet de résoudre le problème.

Après le flambement de la plaque, ce qu'on appelle aussi le post-flambement, les déformations ne sont plus négligeables et leurs influences sur les contraintes N_x , N_y et N_y doivent être prises en considération. Dans ce cas, on utilise le couplage défini par les **Equations (1.48)** et **(1.52)**.

1.9 Méthodes de résolution :

1.9.1 Méthodes analytiques:

1.9.1.1 La méthode de Galerkin:

Soit un problème physique posé sur un domaine Ω et dont le bord est Γ (**Figure 1.18**).

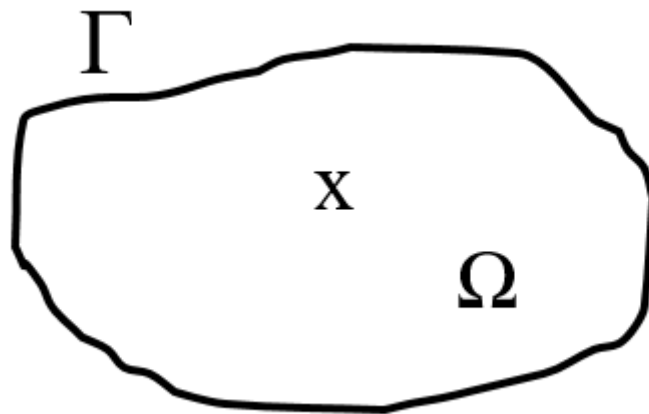


Figure. 1.18 Domaine d'étude.

On suppose que la recherche de la solution de ce problème se ramène à la recherche de la fonction vectorielle $u(x)$ définie sur Ω .

$$L(u) = g \quad ; \quad \forall x \in \Gamma \quad (1.53)$$

Où L est un opérateur différentiel qui est en général scalaire ou vectoriel. Cette équation, qui peut présenter par exemple une équation d'équilibre ou de conservation, est associée à des conditions aux limites sous une forme condensée:

$$B(u) = c \quad ; \quad \forall x \in \Gamma \quad (1.54)$$

Où B est lui aussi un opérateur différentiel qui peut être scalaire ou vectoriel. Il peut correspondre à plusieurs conditions aux limites de natures différentes appliquées sur des morceaux différents de la frontière.

Les méthodes des résidus pondérés consistent à chercher une solution approchée de cette équation aux dérivées partielles. Dans ces méthodes une fonction cherchée $u(x)$ est présentée

par sa projection dans un sous espace de dimensions finies $N+1$ dont la base est définie par $N+1$ fonctions ϕ_i :

$$u(x) = \sum_{i=0}^N q_i \phi_i(x) \quad (1.55)$$

Les fonctions de base ϕ_i (appelées aussi fonctions de test ou fonctions de forme) sont choisies en fonction du problème et les composantes q_i deviennent les inconnues du problème.

Le résidu de l'équation d'équilibre est :

$$R(x) = L(u(x)) - g \quad (1.56)$$

Si on projette l'équation sur les fonctions de projection P (appelées aussi fonctions de pondération), Ceci revient à dire que:

$$\int R(x) P(x) d\Omega = \int (L(u(x)) - g) P(x) d\Omega = 0 \quad (1.57)$$

Si on joint à ceci la projection des conditions aux limites sur les bords $\Gamma : B(u) = c$

On obtient :

$$\int R(x) P(x) d\Omega + \int R_\Gamma(x) P_\Gamma(x) d\Gamma = 0 \quad (1.58)$$

Avec :

$$R_\Gamma(x) = B(u) - c \quad (1.59)$$

Ceci est vrai quelques soient les fonctions de projection P et P_Γ .

Les espaces Ω et Γ ne sont pas disjoint. Donc l'**Equation (1.58)** ne sera valable que si P et P_Γ dépend l'une de l'autre. La solution la plus simple est de poser :

$$P = P_\Gamma \quad (1.60)$$

Lorsqu'on recherche la solution sous forme approchée, la méthode des résidus pondérés consiste à calculer les $N + 1$ composantes q_i de la solution approchée par projection sur $N + 1$ fonctions de projection P .

$$\int R(x) P_i(x) d\Omega + \int R_\Gamma(x) P_i(x) d\Gamma = 0 \quad ; \quad i = 0, \dots, N \quad (1.61)$$

Les choix possibles des fonctions de pondération sont nombreux. Certains choix correspondent à des méthodes connues comme : la méthode des moments, la méthode des moindres carrés, les méthodes de collocation, la méthode de Galerkin et autres. La méthode de Galerkin consiste à utiliser les mêmes fonctions comme fonctions de forme $\phi_i(x)$ et comme fonctions de pondération $P_i(x)$. Elle a été utilisée avec succès par de nombreux chercheurs dans la résolution de problèmes de flambement et post-flambement avec des imperfections géométriques. [39] ont étudié l'état de contrainte dans la plaque flambée. Hoang [40,41] a étudié le comportement après flambement des plaques sandwich FGM et des coques sphériques peu profondes FGM reposant sur des fondations élastiques et soumises à une pression externe uniforme, un chargement thermique et une compression uni-axiale dans un environnement thermique en tenant compte du degré de contrainte tangentielle. Zewu et al. [42] ont également utilisé la méthode de Galerkin pour étudier le comportement au flambement des coques cylindriques imparfaites revêtues. Dans leurs travaux, le problème a été résolu dans le cas de charges thermiques uniformes et linéaires. Sofiyev [43] a proposé d'étudier le flambement des coques coniques FGM, sous des élévations de température uniformes et linéaires, en appliquant la théorie de la déformation par cisaillement (SDT). Sur la base de la même théorie, Sofiyev et al. [44] ont poursuivi les travaux précédents en étudiant le cas d'une charge thermique non linéaire.

1.9.1.2 Méthode de la transformation différentielle :

Bien que les méthodes numériques aient fait de grandes améliorations, elles ne sont pas capables de fournir une forme explicite de la solution du profil de la température, particulièrement appréciée dans les études analytiques impliquant l'analyse de stabilité des problèmes d'aéro et de thermoélasticité avec un champ à haute température [45,46]. En revanche, une solution analytique a toujours fait l'objet d'un référentiel fiable et précis. Elle peut être utilisée pour vérifier la précision des méthodes numériques et fournir un aperçu approfondi des problèmes de conduction thermique. Une nouvelle méthode d'élément gradué hybride a été

développée pour résoudre plusieurs cas de problèmes de conduction thermique 2D dans les FGM [47]. Deloui et al. [48] ont appliqué la transformation de Fourier pour analyser le transfert de conduction 2D dans des cylindres FGM creux finis de forme axisymétrique. En considérant les propriétés des matériaux variant dans deux directions, l'effet des paramètres thermiques sur le champ de température a été étudié dans deux cas de conditions aux limites thermiques linéaires générales non homogènes. Une étude similaire a été étendue par les mêmes auteurs à l'analyse du transfert de chaleur dans des sphères FGM creuses [49]. De plus, la DTM a été utilisée pour obtenir des expressions analytiques pour la distribution de température et donc pour les taux de génération d'entropie dans des dalles FGM refroidies de manière asymétrique [50]. Par rapport à l'étude numérique de [21], la génération de chaleur interne est dépendante de la température et les conditions aux limites thermiques radiatives convectives ont été intégrées. Wang et al. [51] ont utilisé la méthode de Ferrari pour résoudre le problème de conduction thermique 1D dans une dalle composite avec une matrice FGM et des conditions aux limites radiatives convectives. [23] ont utilisé une théorie de la température du premier ordre et une technique de perturbation pour dériver le transfert de chaleur et la déformation thermique dans les cylindres FG avec une épaisseur variable et une coque conique tronquée. Dans cette recherche, il a été démontré que l'hétérogénéité des propriétés a un effet significatif sur le stress thermique, la distribution de la température et l'amplitude du flux de chaleur. L'objectif essentiel de cette partie c'est de parvenir à élaborer une stratégie de résolution du problème de transfert de la chaleur sur une base analytique. Parmi les méthodes analytiques citées, nous avons choisi la méthode DTM.

La méthode de la transformation différentielle (DTM) est une méthode d'approximation semi-analytique basée sur la série de Taylor. Elle a été développée par Zhou [52] en 1986 pour résoudre les problèmes de valeurs initiales linéaires et non linéaires dans les applications de circuits électriques. La DTM peut être appliquée sans linéarisation, discrétisation ou perturbation. Différente de la méthode des séries de Taylor d'ordre élevé, celle-ci ne nécessite pas un gros calcul symbolique bien que la résolution d'une équation différentielle d'ordre élevé et la convergence soient rapides.

Comparée à d'autres méthodes approchées telles que la méthode de décomposition adomienne (ADM) [53-56], la méthode itérative TAGE [59], la méthode d'itération variationnelle (VIM), la méthode de décomposition de Laplace (LDM) et l'ADM [58], la DTM a montré sa précision et efficacité dans la résolution d'équations différentielles ordinaires/partielles linéaires et non linéaires, qu'il s'agisse de problèmes de valeurs initiales ou de valeurs limites. Avec les avantages ci-dessus, la DTM a attiré l'attention de nombreux

chercheurs ces dernières années, cette méthode a été appliquée dans différents domaines tels que le transfert de chaleur et de masse dans les ailettes [59-62] et l'analyse de stabilité des structures [63-65]. De plus, de nouvelles techniques sont déduites et étudiées. En utilisant la DTM avec une décomposition du domaine entier en sous-domaines, Yaghoobi et Torabi [66] ont résolu deux problèmes de transfert de chaleur avec une chaleur spécifique variable. Ummugulsum et Ozan [67] ont présenté la modification du DTM appelé DTM modifiée (MDTM) introduisant la transformée de Laplace et l'approximation de Padé pour résoudre des problèmes de valeurs initiales linéaires et non linéaires. Yu et al. [68] ont combiné la méthode DTM et la méthode de l'élément au bord intégral radial (RIBEM) pour résoudre le problème de conduction thermique transitoire des FGM avec une conductivité thermique indépendante de la température. Des techniques hybrides basées sur la méthode DTM/différences finies (FDM) et la méthode DTM/hydrodynamique des particules lissées (SPH), ont révélé leur efficacité pour traiter les problèmes de transfert de chaleur transitoire avec des propriétés dépendantes de la température [69-72].

a) Brève présentation de la méthode DTM:

La méthode de la transformation différentielle peut être définie comme suit :

Soit $y(x)$ une fonction continuellement différentiable dans un domaine D , le développement de Taylor est de la forme :

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^i}{i!} \left[\frac{d^i y(x)}{dx^i} \right]_{x=x_0} ; \quad \forall x \in D \quad (1.62)$$

Dans un cas particulier de l'Equation (1.62), lorsque $x_0 = 0$ il s'agit du cas de la série de Maclaurin de $y(x)$:

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \left[\frac{d^i y(x)}{dx^i} \right]_{x=0} ; \quad \forall x \in D \quad (1.63)$$

La transformation différentielle de $y(x)$ est définie comme suit :

$$Y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{H^i}{i!} \left[\frac{d^i y(x)}{dx^i} \right]_{x=0} \quad (1.64)$$

Avec $Y(k)$ est la transformé de la fonction $y(x)$, le spectre différentielle de $Y(i)$ est confiné dans l'intervalle $x \in [0, H]$, où H est une constante. La transformation différentielle inverse de $Y(i)$ est définie comme suit:

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{x}{H} \right)^i Y(i) \quad (1.65)$$

Dans des applications réelles, une série finie est utilisée, l'**Equation (1.65)** aura la forme suivante:

$$y(x) = \sum_{i=0}^N \left(\frac{x}{H} \right)^i Y(i) \quad (1.66)$$

Avec N déterminé par la convergence. En utilisant l'**Equation (1.66)** et en considérant $H=1$, quelques opérations de la transformation différentielle unidimensionnelle sont listées dans le **Tableau 1.1**.

Tableau. 1.1 Les opérations fondamentales de la méthode de la transformation différentielle (DTM).

Fonction originale	Fonction transformée
$y(x) = u(x) \pm v(x)$	$Y(i) = U(i) \pm V(i)$
$y(x) = \alpha U(x)$	$Y(i) = \alpha U(i)$
$y(x) = \frac{d^m U(x)}{dx^m}$	$Y(i) = (i+1)(i+2) \dots (i+m) U(i+m)$
$y(x) = u(x) v(x)$	$Y(i) = \sum_{r=0}^i U(r) V(i-r)$

$$y(x) = u(x) v(x) w(x) \quad Y(i) = \sum_i^h \sum_{r=0}^i U(r) V(i-r) W(h-i)$$

$$y(x) = e^{lx} \quad Y(i) = \frac{l^i}{i!}$$

$$y(x) = x^l \quad Y(i) = \delta(i-l) = \begin{cases} 1; & i = l \\ 0; & otherwise \end{cases}$$

Considérant la non-linéarité logarithmique :

$$f(y(x)) = \ln(a + by(x)) \quad (1.67)$$

Supposant que $\Phi(i)$ est la fonction transformé de $y(x)$, le détail de la procédure de la transformation correspondant à $f(y(x))$ est évoquée dans [73] et [74] par

$$F(0) = \ln(a + b\Phi(0)) \quad ; \quad i = 0 \quad (1.68)$$

$$F(h) = \frac{1}{i} \sum_{r=0}^{i-1} (i-r) G(r) \Phi(i-r) \quad ; \quad i \geq 1 \quad (1.69)$$

Avec :

$$G(0) = \frac{b}{a + b\Phi(0)} \quad ; \quad s = 0 \quad (1.70)$$

$$G(s) = \frac{-b}{a + b\Phi(0)} \sum_{r=0}^{s-1} (i-r) G(r) \Phi(i-r) \quad ; \quad s \geq 1 \quad (1.71)$$

b) Exemple :

Considérons l'équation de la chaleur suivante proposée par Hatami [75]:

$$\frac{d}{dX} \left[(1 + \varepsilon_c T) \frac{dT}{dX} \right] - N^2 T + N^2 G(1 + \varepsilon_G T) = 0 \quad (1.72)$$

Où ses conditions aux bords sont données par :

$$\frac{dT}{dX} = 0 \quad ; \quad X = 0 \quad (1.73 a)$$

$$T = 1 \quad ; \quad X = 1 \quad (1.73 b)$$

Appliquons la méthode DTM à cette équation directrice.

$$\begin{aligned} (k+2)(k+1)\Theta(k+2) + \varepsilon_c \sum_{m=0}^k \{ (k+1-m)\Theta(k+1-m)(m+1)\Theta(m+1) \} \\ + \varepsilon_c \sum_{m=0}^k \{ (k-m)\Theta(k-m)(m+2)\Theta(m+2) - N^2\Theta(k) \\ + N^2 G(\delta(k) + \varepsilon_G \Theta(k)) \} = 0 \end{aligned} \quad (1.74)$$

A partir de l'**Equation (1.74)** on obtient la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} \Theta(k+2) = \frac{-1}{(k+2)(k+1)} \left(\varepsilon_c \sum_{m=0}^k \{ (k+1-m)\Theta(k+1-m)(m+1)\Theta(m+1) \} \right. \\ + \varepsilon_c \sum_{m=0}^k \{ (k-m)\Theta(k-m)(m+2)\Theta(m+2) - N^2\Theta(k) \\ \left. + N^2 G(\delta(k) + \varepsilon_G \Theta(k)) \} \right) \end{aligned} \quad (1.75)$$

Avec :

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases} \quad (1.76)$$

De manière similaire, on applique la méthode DTM sur les conditions aux bords et on obtient :

$$\Theta(0) = a \quad (1.77 \text{ a})$$

$$\Theta(1) = 0 \quad (1.77 \text{ a})$$

En résolvant l'**Equation (1.75)** et en utilisant les conditions aux limites décrites par l'**Equation (1.77)**, les termes de la série sont obtenus :

$$\begin{aligned} \Theta(2) &= \frac{N^2\Theta(0) + N^2G\varepsilon_G\Theta(0) - N^2G}{2(1 + \varepsilon_c\Theta(0))} \\ \Theta(3) &= \varepsilon_c\Theta(2)\Theta(1) + \frac{1}{6}N^2\Theta(1) - \frac{1}{6}N^2G\varepsilon_G\Theta(1) \\ \Theta(4) &= -\frac{1}{12}N^2G\varepsilon_G\Theta(2) - \frac{3}{4}\varepsilon_c\Theta(3)\Theta(1) - \frac{2}{3}\varepsilon_c\Theta^2(2) + \frac{1}{12}N^2\Theta(2) \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \end{aligned} \quad (1.78)$$

Enfin, en appliquant l'égalité $T(X) = \sum_i \Theta(i)X^i$ et en utilisant l'**Equation. (1.73 a)**, le paramètre constant "a" sera obtenu et la distribution de température sera calculée :

$$\begin{aligned} T(X) = \sum_i \Theta(i)X^i &= a + \frac{N^2a + N^2G\varepsilon_Ga - N^2G}{2(1 + \varepsilon_ca)} X^2 \\ &+ \left(-\frac{1}{12}N^2G\varepsilon_G \frac{N^2a + N^2G\varepsilon_Ga - N^2G}{2(1 + \varepsilon_ca)} - \frac{2}{3}\varepsilon_c \frac{N^2a + N^2G\varepsilon_Ga - N^2G}{2(1 + \varepsilon_ca)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12}N^2 \frac{N^2a + N^2G\varepsilon_Ga - N^2G}{2(1 + \varepsilon_ca)} \right) X^4 + \dots \end{aligned} \quad (1.79)$$

1.9.2 Méthodes numériques :

1.9.2.1 Méthode des éléments finis:

La description des lois de la physique est généralement exprimée en termes d'équations aux dérivées partielles (EDP). Une approximation des équations peut être construite, généralement basée sur différents types de discrétisations. Ces méthodes de discrétisation approximent les EDP avec des équations de modèles numériques, qui peuvent être résolues à l'aide de méthodes numériques. La solution aux équations du modèle numérique est, à son tour, une approximation de la solution réelle aux EDP. La méthode des éléments finis (FEM) est utilisée pour calculer ces approximations.

Prenons, par exemple, une fonction u qui peut être la variable dépendante dans une EDP (c'est-à-dire la température, le potentiel électrique, la pression, etc.) La fonction u peut être approchée par une fonction u_h en utilisant des combinaisons linéaires de fonctions de base selon les expressions suivantes :

$$u = u_h \quad (1.80)$$

$$u_h = \sum_i u_i \varphi_i \quad (1.81)$$

Ici, φ_i représente les fonctions de base et u_i dénote les coefficients des fonctions qui approchent u avec u_h .

Les lois de la physique sont souvent exprimées dans le langage des mathématiques. Par exemple, les lois de conservation telles que la loi de conservation de l'énergie, la conservation de la masse et la conservation de la quantité de mouvement peuvent toutes être exprimées sous forme d'équations aux dérivées partielles (PDE). Des relations constitutives peuvent également être utilisées pour exprimer ces lois en termes de variables telles que la température, la vitesse et d'autres.

La conservation de l'énergie peut aboutir à une équation de transfert de chaleur qui exprime les changements des variables temporelles et spatiales ($\mathbf{x}$), telles que :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \mathbf{q} = f(T, t, \mathbf{x}) \quad (1.82)$$

Où T , $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$ et $\mathbf{x} = (x, y, z)$ sont la température, le flux et les coordonnées spatiales.

En utilisant la loi de Fourier l'**Equation (1.82)** devient :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (-\mathbf{k} \nabla T) = f(T, t, \mathbf{x}) \quad (1.83)$$

Dans le cas d'un problème stationnaire, la dérivée par rapport au temps s'annule :

$$\nabla \cdot (-\mathbf{k} \nabla T) = f(T, \mathbf{x}) \quad (1.84)$$

En addition, supposons que la température le long d'une frontière ($\partial\Omega_1$) soit connue, en plus de l'expression du flux de chaleur normal à certaines autres frontières ($\partial\Omega_2$) et (Ω_3). Sur les frontières restantes, le flux de chaleur est nul vers l'extérieur ($\partial\Omega_4$) :

$$\begin{aligned} T &= T_0 \quad \text{sur } \partial\Omega_1 \\ -k \nabla T \cdot \mathbf{n} &= h(T - T_{\text{amb}}) \quad \text{sur } \partial\Omega_2 \\ -k \nabla T \cdot \mathbf{n} &= \epsilon \sigma (T^4 - T_{\infty}^4) \quad \text{sur } \partial\Omega_3 \\ -k \nabla T \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_4 \end{aligned} \quad (1.85)$$

L'étape suivante consiste à multiplier les deux côtés de l'**Equation (1.84)** par une fonction test T^* et intégrer sur le domaine Ω :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (-\mathbf{k} \nabla T) T^* dV = \int_{\Omega} f(T, \mathbf{x}) T^* dV \quad (1.86)$$

La fonction de test T^* et la solution T sont supposées appartenir aux espaces de Hilbert. Un espace de Hilbert est un espace de fonctions de dimension infinie avec des fonctions de propriétés spécifiques. Il peut être considéré comme une collection de fonctions avec certaines propriétés intéressantes, de sorte que ces fonctions peuvent être facilement manipulées de la même manière que des vecteurs ordinaires dans un espace vectoriel. Par exemple, vous pouvez former des combinaisons linéaires de fonctions dans cette collection (les fonctions ont une longueur bien définie appelée norme) et vous pouvez mesurer l'angle entre les fonctions, tout comme les vecteurs euclidiens. En effet, après application de la méthode des éléments finis sur ces fonctions, elles sont simplement converties en vecteurs ordinaires. La méthode des éléments

finis est un moyen systématique de convertir les fonctions dans un espace de fonctions de dimension infinie en premières fonctions dans un espace de fonctions de dimension finie, puis enfin en vecteurs ordinaires (dans un espace vectoriel) traitables avec des méthodes numériques.

La formulation faible est obtenue en exigeant que l'**Equation (1.86)** soit valable pour toutes les fonctions de test dans l'espace des fonctions de test au lieu de l'**Equation (1.84)** pour tous les points en Ω . Dans la méthode dite de Galerkin, on suppose que la solution T appartient au même espace de Hilbert que les fonctions de test. Ceci est généralement écrit comme $\varphi \in H$ et $T \in H$, où H désigne l'espace de Hilbert. En utilisant la première identité de Green (essentiellement une intégration par parties), l'équation suivante peut être obtenue :

$$\int_{\Omega} \mathbf{k} \nabla T \cdot \nabla T^* dV + \int_{\partial\Omega = \partial\Omega_1 + \partial\Omega_2 + \partial\Omega_3 + \partial\Omega_4} (-\mathbf{k} \nabla T) \mathbf{n} T^* dS = \int_{\Omega} f(T, t, \mathbf{x}) T^* dV \quad (1.87)$$

La discrétisation implique la recherche d'une solution approchée de cette équation dans un sous-espace de dimension finie à l'espace de Hilbert H tel que $T \approx T_h$. Cela implique que la solution approchée est exprimée comme une combinaison linéaire d'un ensemble de fonctions de base φ_i appartenant au sous-espace :

$$T_h(\mathbf{x}) = \sum_i T_i \varphi_i(\mathbf{x}) \quad (1.88)$$

On obtient donc :

$$\sum_i T_i \int_{\Omega} \mathbf{k} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dV + \sum_i \int_{\partial\Omega} (-\mathbf{k} T_i \nabla \varphi_i) \mathbf{n} \varphi_j dS = \int_{\Omega} f \left(\sum_i T_i \varphi_i(\mathbf{x}) \right) \varphi_j dV \quad (1.89)$$

Les inconnues ici sont les T_i . L'**Equation (1.89)** forme alors un système d'équations de même dimension que l'espace des fonctions φ_j de dimension finie.

1.9.2.2 Méthode des différences finies:

La méthode des différences finies consiste à remplacer les dérivées dans les équations différentielles par des approximations de différences finies. Ceci conduit à un système d'équations algébriques à résoudre à la place de l'équation différentielle, chose facile à résoudre en utilisant un ordinateur.

Se plaçant sur un domaine $[0, L]$, ce dernier est discrétisé en N intervalles tel que :

$$x_i = ih \text{ avec } i \in [0, N] \text{ et } Nh = L.$$

Le domaine est divisé suivant un maillage où chaque maille est définie comme étant un sous domaine limité par deux points successifs x_i et x_{i+1} ($i = 0, 1, \dots, N-1$).

On considère une fonction régulière $u: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ et on note T_i la valeur de T en x_i :

$$T_i = T(x_i)$$

Soit Du une différence finie. On dit que Du approche $u^{(r)}(x_i)$ à l'ordre q s'il existe $C > 0$ et $h_0 > 0$.

$$\forall h \in [0, h_0] \quad \|u^{(r)}(x_i) - Du\| \leq C h^q$$

a) Discrétisation de la dérivée première :

Différences finies décentrée à droite :

Par définition la dérivée d'une fonction $T(x)$ au point $x = x_0$ est donnée par :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(T(x_0 + h) - T(x_0))}{h} \quad (1.90)$$

Afin d'approximer les dérivées, cette méthode se base sur le développement de Taylor :

$$\begin{aligned} T(x_0 + h) = T(x_0) &+ \frac{h}{1!} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_0} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{x_0} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \Big|_{x_0} + \dots + \frac{h^{s-1}}{(s-1)!} \frac{\partial^{s-1} T}{\partial x^{s-1}} \Big|_{x_0} \\ &+ \frac{h^s}{s!} \frac{\partial^s T}{\partial x^s} \Big|_{\gamma} \end{aligned} \quad (1.91)$$

Où $x_0 + h \geq \gamma \geq x_0$

On obtient donc :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x_0} = \frac{T(x_0 + h) - T(x_0)}{h} - \frac{h}{2!} \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{x_0} + O(h^2) \quad (1.92)$$

Equivalent à :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i = \frac{T(i + 1) - T(i)}{h} + O(h) \quad (1.93)$$

Différences finies décentrée à gauche :

$$T(x_0 - h) = T(x_0) - \frac{h}{1!} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x_0} + \frac{h^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{x_0} - \frac{h^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right|_{x_0} \dots + \quad (1.94)$$

On obtient donc :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x_0} = \frac{T(x_0) - T(x_0 - h)}{h} - \frac{h}{2!} \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{x_0} + O(h^2) \quad (1.95)$$

Equivalent à :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i = \frac{T(i) - T(i - 1)}{h} + O(h) \quad (1.96)$$

Différences finies centrée :

La différence entre les **Equations (1.91) et (1.94)** donne :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i = \frac{T(i + 1) - T(i - 1)}{2h} + O(h^2) \quad (1.97)$$

b) Discrétisation de la dérivée seconde :

La somme entre les **Equations (1.91)** et **(1.94)** donne :

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{x_0} = \frac{T(i+1) - 2T(i) + T(i-1)}{h^2} + O(h^2) \quad (1.98)$$

1.9.2.3 Méthode de Tir:

La méthode de Tir (MT) « Shooting Method en anglais » est une méthode numérique qui permet de résoudre les problèmes aux conditions aux bords, en les transformant en problèmes aux conditions initiales. C'est une méthode ayant comme principe de tirer les trajectoires dans différentes directions, jusqu'à ce qu'on trouve la trajectoire qui satisfait la condition au bord désirée. Cette méthode reste très peu utilisée [76-78].

Pour un problème aux conditions aux bords de second ordre, la méthode est appliquée comme suit :

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \quad ; \quad y(x_0) = y_0 \quad ; \quad y(x_1) = y_1 \quad (1.99)$$

$$\tilde{y}''(x) = f(x, \tilde{y}(x), \tilde{y}'(x)) \quad ; \quad \tilde{y}(x_0) = y_0 \quad ; \quad \tilde{y}'(x_0) = s \quad (1.100)$$

On définit une fonction g comme étant la différence entre $\tilde{y}(x_1; s)$ et y_1 :

$$g(s) = \tilde{y}(x_1; s) - y_1 \quad (1.101)$$

Si $g(s)$ possède une solution alors la solution du problème aux valeurs initiales est aussi solution du problème aux valeurs propres correspondant.

1.10 Stratégie de résolution d'un problème de Flambement thermique non linéaire des plaques FGM en appuis simples:

1.10.1 Configuration de la plaque FGM:

Soit une plaque FGM d'épaisseur h dont la configuration est présentée sur la **Figure (1.19)**. Les propriétés physiques ne varient que suivant la direction (oz) et sont identiques pour tous les points matériels appartenant au même plan (xy).

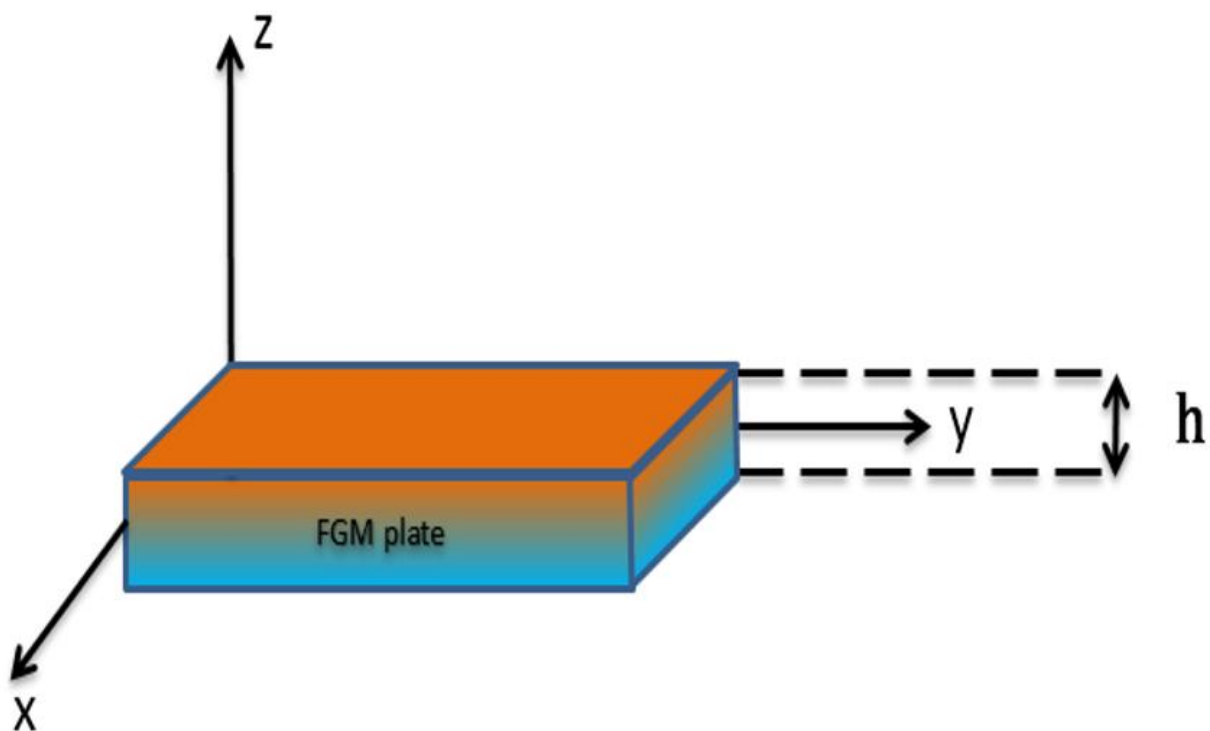


Figure. 1.19. Plaque FGM avec variation unidirectionnelle des propriétés matérielles

Dans la suite du travail, on considère le modèle de Voigt avec une loi de puissance et le modèle de mélange exponentiel (voir **Equations (1.1) (1.2) et (1.5))**).

1.10.2 Cinématique et théorie de Kirchhoff Love :

Pour établir les équations gouvernantes et déterminer les charges de flambement des plaques FGM imparfaites, la théorie classique des plaques (CPT) avec grandes déformations est utilisée. Cette théorie se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff :

- ❖ Faible épaisseur donc des contraintes nulles suivant l'épaisseur.
- ❖ Sections normales au plan moyen de la plaque restent normales lors de la déformation car les effets de la déformation en cisaillement transverse sont négligeables. Par conséquent, les déformations totales sont dues aux déformations de flexion et de membrane.

Les déplacements d'un point matériel générique, situé en (x, y, z) dans la plaque, peuvent s'écrire comme suit:

$$U(x, y, z) = u(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1.102)$$

$$V(x, y, z) = v(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1.103)$$

$$W(x, y, z) = w(x, y) \quad (1.104)$$

Où $u(x, y)$, $v(x, y)$ et $w(x, y)$, désignent les composantes de déplacement du point sur le plan médian ($z = 0$) le long des directions x , y et z respectivement. Les termes $\frac{\partial w}{\partial x}$ et $\frac{\partial w}{\partial y}$ sont les rotations dues à la flexion (sans effet du cisaillement).

Lorsque les déflexions de la plaque ne sont pas faibles par rapport à l'épaisseur de la plaque, il y a une interaction entre les actions membranaires et de flexion de la plaque qui se manifeste à deux égards importants. De plus, on constate que les déformations dans le plan de la plaque dépendent de termes non linéaires de la déflexion w , et l'équation d'équilibre pour les forces dans la direction z contient des termes significatifs dérivés des composantes de la résultante de la force N dans le plan médian déformé [33] (voir l'**Equation (1.123)**). Par conséquent, les déformations sur l'épaisseur de la plaque à une distance z de la surface médiane sont [40] [79] [80] :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x0} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (1.105)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{y0} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (1.106)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy0} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1.107)$$

Où ε_{x0} , ε_{y0} et γ_{xy0} représentent les déformations du point sur le plan médian ($z = 0$) et sont données par:

$$\varepsilon_{x0} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (1.108)$$

$$\varepsilon_{y0} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (1.109)$$

$$\gamma_{xy0} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1.110)$$

1.10.3 Loi du comportement et équations d'équilibre:

Une déformation thermique bloquée engendre dans une plaque des contraintes que nous pouvons appeler : contraintes thermiques, et qui sont en fait des contraintes thermiquement induites. Si nous considérons une plaque en appuis simples sur tous ses bords, le flambage thermique est observé ; ceci est dû au blocage parfait de tous les bords de la plaque. Ainsi, un réchauffement/refroidissement engendrera des contraintes de compression/traction thermiquement induites.

En supposant que le matériau de la plaque obéit à la loi de Hooke, et en considérant les effets thermiques, les relations constitutives sont données par:

$$\sigma_x = \frac{E(z)}{1 - \nu^2} [\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y - (1 + \nu) \alpha(z) \Delta T(z)] \quad (1.111)$$

$$\sigma_y = \frac{E(z)}{1 - \nu^2} [\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x - (1 + \nu) \alpha(z) \Delta T(z)] \quad (1.112)$$

Où σ_x , σ_y sont les contraintes normales. La contrainte de cisaillement τ_{xy} est définie par:

$$\tau_{xy} = G(z) \gamma_{xy} \quad (1.113)$$

et $G(z)$ est le module de cisaillement, lié au module de Young $E(z)$ par:

$$G(z) = \frac{E(z)}{2(1 + \nu)} \quad (1.113 \text{ bis})$$

En utilisant les équations constitutives, les forces et moments résultants s'expriment de la façon suivante [60] :

$$(N_{ij}, M_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij}(z, z^2) dz \quad ; \quad i = (x, y) \quad ; \quad j = (x, y) \quad (1.114)$$

$$N_{xx} = \frac{E_0}{1-\nu^2} (\varepsilon_{x0} + \nu \varepsilon_{y0}) - \frac{E_1}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{\Phi_1}{1-\nu} \quad (1.115)$$

$$N_{yy} = \frac{E_0}{1-\nu^2} (\varepsilon_{y0} + \nu \varepsilon_{x0}) - \frac{E_1}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{\Phi_1}{1-\nu} \quad (1.116)$$

$$N_{xy} = \frac{E_1}{2(1+\nu)} \gamma_{xy0} - \frac{E_2}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1.117)$$

$$M_{xx} = \frac{E_1}{1-\nu^2} (\varepsilon_{x0} + \nu \varepsilon_{y0}) - \frac{E_2}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{\Phi_2}{1-\nu} \quad (1.118)$$

$$M_{yy} = \frac{E_1}{1-\nu^2} (\varepsilon_{y0} + \nu \varepsilon_{x0}) - \frac{E_2}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{\Phi_2}{1-\nu} \quad (1.119)$$

$$M_{xy} = \frac{E_2}{2(1+\nu)} \gamma_{xy0} - \frac{E_3}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1.120)$$

Où E_i , ϕ_1 , and ϕ_2 sont donnés par les équations suivantes:

$$E_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) z^i dz \quad ; \quad i = (0; 1; 2; 3)$$

$$\Phi_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) \alpha(z) \Delta T(z) dz$$

Et

$$\Phi_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) \alpha(z) \Delta T(z) z dz$$

Sur la base de la théorie classique des plaques, les équations d'équilibre non linéaires d'une plaque parfaite sont données par:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (1.121)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (1.122)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1.123)$$

Les dernières **Equations (1.121) - (1.123)** peuvent être réécrites en une seule équation en termes de w en utilisant les **Equations (1.115) - (1.120)**.

$$D \nabla^4 w - \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0 \quad (1.124)$$

Où D est donné par:

$$D = \frac{E_2 E_0 - E_1^2}{(1 - \nu^2) E_0} \quad (1.124 \text{ bis})$$

Notez que pour une variation de température nulle, les dérivées de la force thermique Φ_1 et du moment Φ_2 par rapport à x et y sont nulles, et par conséquent sont omises dans les équations gouvernantes.

1.10.4 L'équation de compatibilité :

Pour satisfaire les deux premières équations du mouvement (**Equations (1.121) et (1.122)**), la fonction de contrainte Airy $f(x, y)$ sera utilisée. Par conséquent, les résultantes de contrainte dans le plan peuvent être exprimées comme suit [40][81][82] :

$$N_{xx} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \quad (1.125)$$

$$N_{yy} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \quad (1.126)$$

$$N_{xy} = - \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (1.127)$$

Pour une plaque FGM imparfaite, l'**Equation (1.124)** peut prendre la forme suivante:

$$D\nabla^4 w - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} \right) \right] = 0 \quad (1.128)$$

Où $w^*(x, y)$ représente une petite imperfection initiale connue.

Notez que le terme $\nabla^4 w$ est inchangé car il est obtenu à partir de l'expression du moment de flexion M_{ij} et ces moments internes ne reposent pas sur la valeur de la courbure mais uniquement sur la quantité de changement de la courbure [78]. Cela donne une équation gouvernante avec deux inconnues, w et f . Pour résoudre le problème, une autre équation est indispensable en termes des mêmes inconnues. Pour cette raison, l'équation de compatibilité sera nécessaire et elle est donnée par:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{y0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{x0}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy0}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1.129)$$

D'après les **Equations (1.125) - (1.127)** et **(1.115) - (1.117)**, l'équation de compatibilité peut être réécrite comme suit:

$$E_0 \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \right] - \left[\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right] = 0 \quad (1.130)$$

Les **Equations (1.128)** et **(1.130)** sont les équations générales régissant le flambage thermique d'une plaque FG imparfaite, qui seront utilisées dans les sections suivantes.

1.10.5 Conditions aux bords et résolution du problème :

Pour obtenir la charge thermique, il faut trouver les contraintes thermiques de pré-flambage. La plaque FG étant simplement supportée avec des bords immobiles, les conditions aux limites sont:

$$w = u = M_x = 0, N_x = N_{x0} \text{ on } x = 0, a \quad (1.131)$$

$$w = v = M_y = 0, N_y = N_{y0} \text{ on } y = 0, b \quad (1.132)$$

Où N_{x0} and N_{y0} sont des résultantes de la force de pré-flambement dans les directions x et y , respectivement. En considérant les conditions aux limites, les solutions approchées sont supposées [40, 82] :

$$w = W \sin(\lambda x) \sin(\beta y) \quad (1.133)$$

$$w^* = \mu h \sin(\lambda x) \sin(\beta y) \quad (1.134)$$

$$\lambda = \frac{n\pi}{a}; \beta = \frac{m\pi}{b} \text{ et } m, n = 1; 2; 3 \dots \quad (1.135)$$

$$f = f_1 \cos(2\lambda x) + f_2 \cos(2\beta y) + f_3 \sin(2\lambda x) \sin(2\beta y) + f_4 \cos(2\lambda x) \cos(2\beta y) + \frac{1}{2} N_{x0} x^2 + \frac{1}{2} N_{y0} y^2 \quad (1.136)$$

Où n et m désignent des nombres de demi-ondes dans les directions x et y , respectivement. De plus, f_1, f_2, f_3 et f_4 sont déterminés en remplaçant les **Equations (1.133) - (1.136)** dans **(1.130)**:

$$f_1 = E_0 \frac{\beta^2}{32\lambda^2} W[W + 2\mu h] \quad (1.137)$$

$$f_2 = E_0 \frac{\lambda^2}{32\beta^2} W[W + 2\mu h] \quad (1.138)$$

$$f_3 = f_4 = 0 \quad (1.139)$$

En remplaçant les **Equations (1.133) - (1.136)** dans l'équation de stabilité **(1.128)** et en appliquant la méthode de Galerkin [40-43,83] pour l'équation résultante, on obtient:

$$D(\lambda^2 + \beta^2)W + [2\lambda^2\beta^2(f_1 + f_2) + \lambda^2 N_{x0} + \beta^2 N_{y0}](W + \mu h) = 0 \quad (1.140)$$

Afin de déterminer les contraintes de compression rendant toutes les arêtes immobiles: $u = 0$ (sur $x = 0, a$) et $v = 0$ (sur $y = 0, b$), la condition suivante doit être vérifiée [79,43] :

$$\iint_{00}^{ba} \frac{\partial u}{\partial x} dx dy = 0 \quad (1.141)$$

$$\iint_{00}^{ab} \frac{\partial v}{\partial y} dy dx = 0 \quad (1.142)$$

Les expressions de $\frac{\partial u}{\partial x}$ and $\frac{\partial v}{\partial y}$ peuvent être obtenues en combinant les **Equations (1.108)-(1.110), (1.114)-(1.117), (1.125)-(1.127) et (1.133)-(1.136)**. Les imperfections sont également prises en compte. Ensuite, les expressions des contraintes de compression sont données par:

$$N_{x0} = \frac{E_1}{8(1-\nu^2)} (\lambda^2 + \nu\beta^2)(W + 2\mu h)W + \frac{4E_2}{ab(1-\nu^2)} \left(\frac{\lambda^2 + \nu\beta^2}{\lambda\beta} \right) W - \frac{\Phi_1}{1-\nu} ; \quad (1.143)$$

$$N_{y0} = \frac{E_1}{8(1-\nu^2)} (\beta^2 + \nu\lambda^2)(W + 2\mu h)W + \frac{4E_2}{ab(1-\nu^2)} \left(\frac{\beta^2 + \nu\lambda^2}{\lambda\beta} \right) W - \frac{\Phi_1}{1-\nu} ; \quad (1.144)$$

1.10.6 Charge thermique:

Introduisant les **Equations (1.143) et (1.144)** dans **(1.140)**, on obtient l'expression de la charge thermique :

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & \frac{h\pi i^2 \bar{D} \left(n^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + m^2 \right) (1-\nu)}{\left(\frac{b}{h} \right)^2} \frac{W_h}{W_h + \mu} \\ & + \bar{E}_1 \frac{h\pi i^2 \left[(3-\nu^2) \left(n^4 \left(\frac{b}{a} \right)^4 + m^4 \right) + 4\nu \left(\frac{b}{a} \right)^2 n^2 m^2 \right]}{16(1+\nu) \left(\frac{b}{h} \right)^2 \left(n^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + m^2 \right)} W_h (W_h + 2\mu) \\ & + 4\bar{E}_2 \frac{h \left(n^4 \left(\frac{b}{a} \right)^4 + m^4 + 2\nu n^2 m^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right)}{mn \left(\frac{b}{h} \right)^2 (1+\nu) \left(n^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + m^2 \right)} W_h \end{aligned} \quad (1.145)$$

Où:

$$W_h = \frac{W}{h} \quad ; \quad \bar{E}_1 = \frac{E_1}{h} \quad ; \quad \bar{E}_2 = \frac{E_2}{h^2} \quad \text{and} \quad \bar{D} = \frac{D}{h^2} \quad (1.146)$$

L'expression finale qui décrit les chemins d'équilibre dépend notamment de la forme de distribution de température finale et de la température initiale de la plaque. En fait, la température est supposée varier dans le sens de l'épaisseur et est non uniformément élevée de la température initiale T_i à une température finale $T_f(z)$ dans laquelle la plaque se déforme. Par conséquent, le changement de température est:

$$\Delta T(z) = T_f(z) - T_i \quad (1.147)$$

La distribution finale de la température $T_f(z)$ représente dans la plupart des cas, le profil résultant de la résolution l'équation de la chaleur. Dans ce travail, on distingue trois types d'élévation de la température de la plaque FGM :

- **Une élévation de température suivant une loi sinusoïdale [84]:**

$$T_f(z) = T_m + (T_c - T_m) \left[1 - \cos \left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (1.148)$$

- **Une élévation de température suivant une loi de puissance :**

$$T_f(z) = T_m + \Delta T \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right) \frac{\sum_{i=0}^{inf} (-1)^i \frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{ip} \left(\frac{k_{cm}}{k_m} \right)^i}{ip + 1}}{\sum_{i=0}^{inf} (-1)^i \frac{\left(\frac{k_{cm}}{k_m} \right)^i}{ip + 1}} \quad (1.149)$$

Où:

$$\Delta T = T_c - T_m = T \left(\frac{h}{2} \right) - T \left(-\frac{h}{2} \right) \quad (1.150)$$

- **Une élévation de la température obéissant à la solution analytique de l'équation de la chaleur obtenue par la méthode de la transformation différentielle :**

$$T_f(z) = \left[T_c + a_1 \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right) + a_2 \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^2 + \dots + a_N \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^N \right] ; \quad a_i \in IR \quad (1.151)$$

Avec : T_c est la température de la face en céramique.

Connaissant ce profil final, la contrainte thermique peut être évaluée :

$$\Phi_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z)\alpha(z)(T_f(z) - T_i)dz \quad ; \quad (1.152)$$

Les chemins d'équilibre température-déflexion peuvent être déduits en combinant les **Equations (1.145), (1.147) et (1.152)**.

Dans les études du flambement présentes dans la littérature, l'élévation de la température de la plaque a été généralement prise en compte en utilisant des conditions thermiques aux bords de type Dirichlet. Afin de mieux approcher les phénomènes de flambement où les FGM sont dédiés à aux systèmes fonctionnant à hautes températures, la prise en compte des phénomènes de la convection et la radiation mises en jeu est nécessaire. Nous rappelons que lorsque les températures sont hautes, le phénomène de transfert par radiation devient prépondérant comparé aux deux autres modes de transfert thermique. Ceci génère des non linéarités non importantes qui complexifient la résolution analytique. En addition, les propriétés thermiques - telle que la conductivité thermique- sont influencées par la température.

La méthode de la transformation différentielle a été utilisée pour résoudre le problème thermique. Une non-linéarité logarithmique due à la loi exponentielle de la composition a été observée pour la première fois dans un problème de transfert de la chaleur. En outre les non-linéarités radiatives ont été gérées en appliquant la méthode de Newton Raphson. La charge thermique se voit donc influencée par la solution obtenue en variant ces nouvelles conditions thermiques.

Dans la suite de ce travail, les propriétés physiques $E(z), \alpha(z)$ et le profil final de la température $T_f(z)$ seront évaluées selon les deux types de problèmes thermiques suivants :

Problème1 :

- Des propriétés thermo-physiques qui suivent une loi de puissance.

- Des conditions thermiques de type Dirichlet.
- Une élévation de température suivant une loi sinusoïdale et de puissance.

Problème2 :

- Des propriétés thermo-physiques qui suivent une loi exponentielle.
- Une des deux conditions thermiques aux bords : Dirichlet ou de radiation-convection.
- Une élévation de la température obéissant à la solution analytique de l'équation de la chaleur obtenue par la méthode de la transformation différentielle.

1.11 Motivations :

Plusieurs études menées sur le phénomène de flambement se sont limitées à la détermination de charge critique de flambement. Sur la base de la théorie classique des plaques, Javaheri et Eslami [85,86] ont dérivé l'expression analytique du chargement critique correspondant au flambement de plaques FGM géométriquement parfaites. Kiani Y. et al. [80] ont étudié le flambement thermique de plaques rectangulaires reposant sur des fondations élastiques et plusieurs types de chargement thermique ont été considérés dans leurs travaux. Shariat et Eslami [87] ont poursuivi avec une étude analytique du flambement thermique de plaques FGM épaisses en utilisant la théorie de déformation par cisaillement d'ordre 3 (TSDT). Zenkour et Sobhy [88] ont étudié différents types de plaques sandwich FGM symétriques avec une théorie des plaques à déformation de cisaillement sinusoïdale en supposant que les charges thermiques soient uniformes, linéaires et non linéaires dans l'épaisseur.

Dans d'autres travaux [81,89]; où les imperfections géométriques initiales ont été prises en considération, les auteurs ont pris le soin d'étudier le flambement thermique avec plus de précision et la résolution a été un peu délicate vu le couplage existant entre les équations gouvernantes. L'analyse du post-flambement a aussi suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs. L. Azrar et al. [90] ont étudié le comportement post-flambement des structures de plaques et de coques en utilisant une méthode asymptotique-numérique. Mohri et al. [91,92] ont étudié le post-flambement des éléments à parois minces sous compression, puis se sont intéressés à l'analyse du post-flambement en flexion-torsion puis latéral des éléments à parois minces avec sections ouvertes. Abdoun et Azrar [93] ont utilisé la méthode asymptotique pour évaluer la charge de flambement critique thermique non linéaire et le chemin d'équilibre post-flambage des FGM et des plaques stratifiées sous chargement thermique. Les mêmes auteurs [94] ont élaboré des procédures analytiques et numériques, basées sur l'homotopie et une méthode numérique asymptotique, pour étudier les analyses de flambement thermique et de vibration de plaques composites avec des propriétés de matériau dépendantes de la chaleur.

Reddy [95] a analysé le comportement des plaques FG rectangulaires sur la base de la théorie des plaques de déformation de cisaillement du troisième ordre. Tung et Duc [79] ont étudié la réponse au flambement des plaques FGM avec des imperfections géométriques sur la base de CPT. Shi-Rong et al. [96] ont utilisé la méthode de tir pour étudier le post-flambage thermomécanique non linéaire pour une plaque circulaire FGM imparfaite, soumise à la fois à une charge mécanique et aux élévations de température transversalement uniformes et en loi de

puissance. Hui-Shen [83] a inclut les propriétés de dépendance à la température pour étudier le comportement thermique après flambement des plaques FGM déformables par cisaillement.

Dans tous les travaux qui se sont intéressés à l'étude de phénomène de flambement et post-flambement des plaques FGM, il est difficile de trouver un travail qui traite leur stabilité lorsqu'elles sont soumises à des conditions thermiques convectives-radiatives aux bords. Ce présent travail s'intéressera à la mise en place d'un modèle plus réaliste, particulièrement au niveau des chargements thermiques. Ceci permettra de comparer l'effet du choix des conditions thermiques aux bords et d'étudier l'effet des différents paramètres thermiques sur le comportement en flambement et post-flambement des plaques FGM. Par ailleurs, comme il a été mentionné précédemment, nous utiliserons la méthode de transformation différentielle pour résoudre le problème de transfert de la chaleur. Ensuite, l'approche de Galerkin continue sera utilisée pour résoudre les équations directives thermoélastiques, de stabilité et de compatibilité. En outre, nous supposerons que les plaques sont simplement appuyées à leurs bords. Ce type de condition aux bords est généralement considéré par les concepteurs comme une limite inférieure de la résistance d'une plaque, en particulier lorsque les conditions aux bords sont inconnues.

1.12 Conclusion

En conclusion de ce chapitre, nous avons passé en revue les notions de base sur le transfert de la chaleur, le flambement et le fondement des équations qui gouvernent le phénomène d'un flambement thermique des plaques isotopes puis le cas FGM unidirectionnel. Les imperfections géométriques et leur effet sur le phénomène du flambement ont aussi constitué l'objet d'une partie de ce chapitre. Nous avons également fait l'état de l'art sur les principaux types d'instabilités et de comportements postcritiques.

La méthodologie de résolution analytique du comportement pré et postcritique en termes du flambement thermique a été exposée. En premier lieu, la théorie classique des plaques avec grandes déformations a été justifiée puis adoptée dans la formulation du problème. Ensuite, nous avons procédé à l'introduction des contraintes thermiques dans le phénomène grâce à la loi de Hooke généralisée. Les contraintes compressives de pré-flambement ont été explicitées à l'aide des conditions imposées sur les bords, puis la charge thermique a été exprimée en tant que fonction de la déflexion transverse, paramétrée par les propriétés matérielles et géométriques.

Les méthodes utilisées dans ce travail ont été introduit dans ce chapitre. La méthode DTM a été également présentée vu sa capacité de résoudre les problèmes de transfert thermique non linéaire. Cette méthode semi analytique permet d'exprimer autrement la charge thermique et de déduire l'expression de l'augmentation de la température comme fonction de la déflexion transverse, paramétrée par les propriétés matérielles et géométriques.

Dans le chapitre suivant, nous appliquerons la méthode de transformation différentielle et d'autres méthodes numériques pour résoudre le problème de transfert thermique au sein des plaques FGM. Les conditions thermiques aux bords de type Dirichlet seront utilisées.

Chapitre 2. Transfert thermique au sein des plaques FGM avec conditions aux bords Dirichlet

2.1 Introduction:

Les conditions thermiques de type Dirichlet offrent une modélisation simplifiée des phénomènes réels. Les auteurs s'en servent généralement dans la prédiction de la réponse des structures FGM en flambement thermique [97-101]. Dans ce chapitre, notre attention sera focalisée sur la résolution de l'équation de la chaleur. L'objectif est d'obtenir une solution explicite de la température à travers l'épaisseur. Deux problèmes de transfert thermique unidirectionnel au sein des plaques FGM en céramique/métal seront considérés. Dans un premier temps, nous supposons que les propriétés physiques suivent une loi spatiale de puissance et qu'elles ne sont pas influencées par la température. On s'attachera ensuite, à la résolution d'un problème de transfert de chaleur dans lequel les propriétés physiques suivent une loi exponentielle et dépendent linéairement de la température. Dans ce deuxième cas, il s'agit donc d'un problème avec deux types de non-linéarité. Finalement, dans les deux problèmes, les résultats analytiques seront comparés aux résultats obtenus numériquement. L'intérêt est de montrer aussi l'efficacité des méthodes numériques comme la méthode des éléments finis, la méthode du tir et la méthode des différences finies dans la résolution de ce type de problèmes.

2.2 Plaque avec des propriétés physiques suivant une loi de puissance :

2.2.1 Formulation et hypothèses:

Considérons une plaque FGM dont la configuration est présentée sur la **Figure 2.1**. Les propriétés matérielles de la plaque suivent une loi de puissance [102]:

$$P(z) = P_{cm} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + P_m ; \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (2.1)$$

Avec: $P_{cm} = P_c - P_m$

P_c : la propriété matérielle de la céramique.

P_m : la propriété matérielle du métal.

p : l'index de puissance nommé aussi l'index d'inhomogénéité.

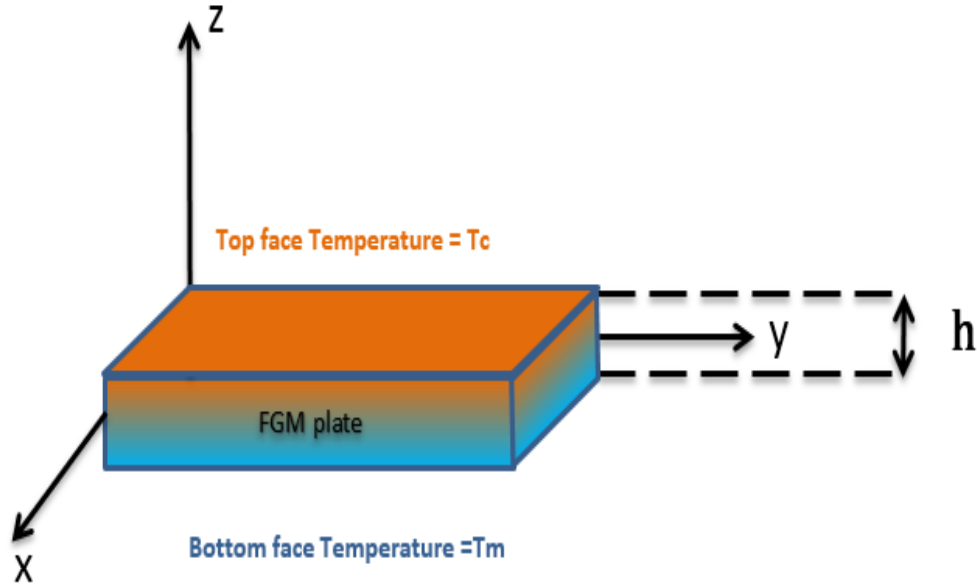


Figure. 2.1 Configuration d'une plaque FGM avec des conditions Dirichlet.

Au cours de cette étude on suppose que:

- ❖ La plaque FGM est rectangulaire avec une épaisseur négligeable devant la largeur et la longueur.
- ❖ Les fractions volumiques des phases constitutives ne dépendent que de z , autrement dit la conductivité thermique k (comme les autres propriétés) est la même en tout point ayant la même ordonnée z .
- ❖ Le régime est permanent.
- ❖ Il y'a absence de génération de chaleur interne.

La face inférieure $\left(z = -\frac{h}{2}\right)$ est en métal et soumise à une température de $5C^\circ$ et la face supérieure $\left(z = +\frac{h}{2}\right)$ est en céramique et soumise à une température de $500C^\circ$. D'après la loi de conservation d'énergie et la loi de Fourier, l'équation de la chaleur peut donc être formulée ainsi :

$$\frac{d}{dz} \left[k(z) \frac{dT(z)}{dz} \right] = 0 \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} T\left(-\frac{h}{2}\right) = T_m \\ T\left(+\frac{h}{2}\right) = T_c \end{cases} \quad (2.3)$$

2.2.2 Résolution analytique :

La conductivité thermique est exprimée par la loi des mélanges :

$$k(z) = k_{cm} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + k_m \quad (2.4)$$

$$k(z) \frac{dT(z)}{dz} = A \quad (2.5)$$

$$dT(z) = A \frac{dz}{k(z)} \quad (2.6)$$

$$T(z) = A \int \frac{dz}{k_{cm} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + k_m} + B \quad (2.7)$$

On effectue un changement de variables :

$$s = \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \quad (2.8)$$

$$z = h \cdot \left(s - \frac{1}{2} \right) \quad (2.9)$$

$$dz = h \cdot ds \quad (2.10)$$

$$T(s) = A h \int \frac{ds}{k_{cm} s^p + k_m} + B = A \frac{h}{k_m} \int \frac{ds}{\frac{k_{cm}}{k_m} s^p + 1} + B \quad (2.11)$$

On pose :

$$\frac{k_{cm}}{k_m} s^p = U^p \quad \rightarrow \quad s = \left(\frac{k_m}{k_{cm}} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot U \quad \rightarrow \quad ds = \left(\frac{k_m}{k_{cm}} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot dU$$

$$T(U) = A \frac{h}{k_m} \left(\frac{k_m}{k_{cm}} \right)^{\frac{1}{p}} \int \frac{dU}{1 + U^p} + B \quad (2.12)$$

On pose :

$$\begin{aligned}
U^p = -V \quad \rightarrow \quad U = (-V)^{\frac{1}{p}} \quad \rightarrow \quad dU = \frac{(-1)^{\frac{1}{p}}}{p} V^{\frac{1-p}{p}} dV \\
T(V) = A \frac{h}{k_m} \left(\frac{k_m}{k_{cm}} \right)^{\frac{1}{p}} \frac{(-1)^{\frac{1}{p}}}{p} \int V^{\frac{1-p}{p}} \frac{dV}{1-V} + B
\end{aligned} \tag{2.13}$$

On sait que : $\frac{1}{1-V} \approx \sum_{n=0}^{\infty} V^n$ donc :

$$\int V^{\frac{1-p}{p}} \frac{dV}{1-V} = \sum_{n=0}^{\infty} \int V^{\frac{1-p}{p}} V^n dV = \sum_{n=0}^{\infty} \int V^{\frac{1-p+np}{p}} dV = p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V^{\frac{1+np}{p}}}{1+np} \tag{2.14}$$

L'Equation (2.13) devient :

$$T(V) = A \frac{h}{k_m} \left(\frac{k_m}{k_{cm}} \right)^{\frac{1}{p}} (-1)^{\frac{1}{p}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V^{\frac{1+np}{p}}}{1+np} + B \tag{2.15}$$

$$V = -U^p = -\frac{k_{cm}}{k_m} s^p \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
T(s) &= A \frac{h}{k_m} \left(\frac{k_m}{k_{cm}} \right)^{\frac{1}{p}} (-1)^{\frac{1}{p}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{1+np}{p}} \left(\frac{k_{cm}}{k_m} \right)^{\frac{1+np}{p}} s^{1+np}}{1+np} + B \\
&= A \frac{h}{k_m} (-1)^{\frac{2}{p}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{k_{cm}}{k_m} \right)^n s^{1+np}}{1+np} + B
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Donc:

$$T(z) = A \frac{h}{k_m} (-1)^{\frac{2}{p}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{k_{cm}}{k_m} \right)^n \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{1+np}}{1+np} + B \tag{2.18}$$

L'utilisation des conditions aux bords permet de déterminer des constantes d'intégration A et B:

$$T(-h/2) = B = T_m \quad (2.19)$$

$$T(h/2) = A \frac{h}{k_m} (-1)^{\frac{2}{p}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{k_{cm}}{k_m}\right)^n}{1 + np} + T_m = T_c \quad (2.20)$$

Donc :

$$A = \frac{k_m (T_c - T_m)}{h \cdot (-1)^{\frac{2}{p}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{k_{cm}}{k_m}\right)^n}{1 + np}} \quad (2.21)$$

$$T(z) = (T_c - T_m) \cdot \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{k_{cm}}{k_m}\right)^n \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{1+np}}{1 + np}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{k_{cm}}{k_m}\right)^n}{1 + np}} + T_m \quad (2.22)$$

En posant: $C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{k_{cm}}{k_m}\right)^n}{1 + np}$ on peut écrire finalement :

$$T(z) = \frac{(T_c - T_m)}{C} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{k_{cm}}{k_m}\right)^n \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{1+np}}{1 + np} + T_m \quad (2.23)$$

2.2.3 Résolution numérique:

2.2.3.1 Méthode des éléments finis:

Pour résoudre le problème par la méthode des éléments finis, nous utilisons la méthode des résidus pondérés avec une formulation Galerkin.

Le résidu est défini comme suit:

$$r(T) = -div(\vec{\bar{K}} \overrightarrow{grad} T) \quad (2.24)$$

Multiplions donc l'équation ci-dessus par une fonction de pondération T^* et intégrons sur tout le domaine V :

$$\int_V T^* r(T) dV = \int_V T^* [-\text{div}(\bar{K} \overrightarrow{\text{grad}} T)] dV = 0 \quad (2.25)$$

Sachant que : $\text{div}(f \vec{v}) = f \text{div} \vec{v} + \vec{v} \text{grad} f$

$$R(T, T^*) = - \int_V \text{div} (T^* (\bar{K} \overrightarrow{\text{grad}} T)) dV + \int_V \overrightarrow{\text{grad}} T^* \bar{K} \overrightarrow{\text{grad}} T dV = 0 \quad (2.26)$$

On transforme la première intégrale de volume en une intégrale de surface à l'aide du théorème d'Ostrogradski :

$$\begin{aligned} R(T, T^*) &= - \int_{S_{flux}} T^* \vec{n} (\bar{K} \overrightarrow{\text{grad}} T) dS - \int_{S_T} T^* \vec{n} (\bar{K} \overrightarrow{\text{grad}} T) dS + \int_V \overrightarrow{\text{grad}} T^* \bar{K} \overrightarrow{\text{grad}} T dV \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Comme il n'y a pas de transfert de chaleur ni par convection ni par rayonnement, la première intégrale est nulle. L'**Equation (2.27)** devient :

$$R(T, T^*) = - \int_{S_T} T^* \vec{n} (\bar{K} \overrightarrow{\text{grad}} T) dS + \int_V \overrightarrow{\text{grad}} T^* \bar{K} \overrightarrow{\text{grad}} T dV = 0 \quad (2.28)$$

On pose $T^* = 0$ pour $S = S_T$

$$R(T, T^*) = \int_V \overrightarrow{\text{grad}} T^* \bar{K} \overrightarrow{\text{grad}} T dV = 0 \quad (2.29)$$

On essaie maintenant de chercher une solution approchée par une méthode numérique : la méthode des éléments finis.

Le domaine V est décomposé en sous-domaines V_e de forme géométrique simple (les éléments) reliés entre eux en des points appelés nœuds. Cette opération s'appelle maillage.

Le champ de températures $T^e(z)$ dans l'élément (e) a pour expression :

$$T^e = [N^e]\{T^e\} \quad (2.30)$$

$$T^{*e} = [N^e]\{T^{*e}\} \quad (2.31)$$

$$\overrightarrow{grad}T^e = [B^e]\{T^e\} \quad (2.32)$$

$$\overrightarrow{grad}T^{*e} = [B^e]\{T^{*e}\} \quad (2.33)$$

$$\text{Avec : } B_i^e = \frac{\partial N_i^e}{\partial z}$$

En portant les **Equations (2.30-2.33)** dans (2.29), on obtient :

$$R(T, T^*) = \sum_e \{T^{*e}\}^T [K^e] \{T^e\} = 0 \quad (2.34)$$

$$\text{Avec : } [K^e] = \int_{ze} [B^e]^T k_e [B^e] dz$$

k_e : la conductivité thermique de l'élément (e) est considérée comme moyenne arithmétique des conductivités thermiques des deux nœuds successifs qui relient cet élément avec ses voisins.

En considérant des éléments iso-paramétriques de 3 nœuds équidistants lors de la discrétisation du domaine, la matrice globale est obtenue par assemblage des matrices élémentaires :

$$[K] = \sum_e [K^e] \quad (2.35)$$

Au niveau d'un seul élément :

$$[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3] = \left[\frac{\zeta \cdot (\zeta - 1)}{2} \quad (1 - \zeta^2) \quad \frac{\zeta \cdot (\zeta + 1)}{2} \right] \quad (2.36)$$

$$z(\zeta) = [N] \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix} = \frac{\zeta \cdot (\zeta - 1)}{2} z_1 + (1 - \zeta^2) z_2 + \frac{\zeta \cdot (\zeta + 1)}{2} z_3 = z_2 + \zeta \frac{h}{2} \quad (2.37)$$

Le jacobien de la transformation est égale à : $J(\zeta) = \frac{\partial z(\zeta)}{\partial \zeta} = \frac{h}{2}$

$$T(\zeta) = [N] \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \frac{\zeta \cdot (\zeta - 1)}{2} T_1 + (1 - \zeta^2) T_2 + \frac{\zeta \cdot (\zeta + 1)}{2} T_3 \quad (2.38)$$

On en déduit l'expression de la matrice [B] :

$$\begin{aligned} [B] &= [B_1 \ B_2 \ B_3] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_3}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2\zeta - 1 & -4\zeta & 2\zeta + 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.39)$$

De ce fait :

$$[K] = \int_z [B]^T k [B] dz = J \int_{\zeta} [B]^T \cdot k(\zeta) \cdot [B] d\zeta \quad (2.40)$$

Avec : $k(z) = k_{cm} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + K_m$ et $z = [N]\{z\}$ on obtient :

$$k(\zeta) = k_{cm} \left(\frac{[N]\{z\}}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + k_m \quad (2.41)$$

Donc :

$$\begin{aligned} [K] &= J \int_{\zeta} [B]^T \cdot \left[k_{cm} \left(\frac{\sum_{i=1}^3 N_i z_i}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + k_m \right] \cdot [B] d\zeta \\ &= \frac{h}{2} \int_{\zeta} [B]^T \cdot \left[k_{cm} \left(\frac{z_2 + \zeta \frac{h}{2}}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + k_m \right] \cdot [B] d\zeta \end{aligned} \quad (2.42)$$

2.2.3.2 Méthode des différences finies:

Procédons à la discrétisation de l'équation de la chaleur :

$$\frac{d}{dz} \left(k(z) \frac{dT}{dz} \right) = \frac{p k_{cm}}{h} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{p-1} \frac{dT}{dz} + \left(k_{cm} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + k_m \right) \frac{d^2T}{dz^2} = 0 \quad (2.43)$$

Discrétisation :

Avec:

$$\left. \frac{d^2T}{dz^2} \right|_i = \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta z^2} \quad \text{et} \quad \left. \frac{dT}{dz} \right|_i = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2 \Delta z} \quad (2.44)$$

L'Equation (2.43) devient :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{k_m}{\Delta z} + \frac{k_{cm}}{\Delta z} \left(\frac{2z_i + h}{2h} \right)^p - \frac{p k_{cm}}{2h} \left(\frac{2z_i + h}{2h} \right)^{p-1} \right] T_{i-1} + \left[-2 \left[\frac{k_m}{\Delta z} + \frac{k_{cm}}{\Delta z} \left(\frac{2z_i + h}{2h} \right)^p \right] \right] T_i \\ & + \left[\frac{k_m}{\Delta z} + \frac{k_{cm}}{\Delta z} \left(\frac{2z_i + h}{2h} \right)^p + \frac{p k_{cm}}{2h} \left(\frac{2z_i + h}{2h} \right)^{p-1} \right] T_{i+1} = 0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

Il s'agit d'un système tri-diagonal, la matrice a donc une structure bande, l'utilisation de la commande \ de Matlab privilégiera la méthode de Thomas.

2.2.3.3 Méthode de Tir

Dans notre cas :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dz} \left[k(z) \frac{dT(z)}{dz} \right] = k(z) \frac{d^2T(z)}{dz^2} + \frac{dk(z)}{dz} \frac{dT(z)}{dz} \\ & = \left(k_{cm} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + k_m \right) \frac{d^2T(z)}{dz^2} + p \frac{k_{cm}}{h} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{p-1} \frac{dT(z)}{dz} = 0 \end{aligned} \quad (2.46)$$

Remarquons que si $p-1 < 0$, l'équation différentielle admettra un point singulier en $z = -h/2$. Le tir sera donc effectué à partir de $z = +h/2$.

$$k(z) \frac{d^2 T(z)}{dz^2} + k'(z) \frac{dT(z)}{dz} = 0 \quad (2.47)$$

Equivalent à :

$$\frac{d^2 T(z)}{dz^2} = - \frac{k'(z)}{k(z)} \frac{dT(z)}{dz} \quad (2.48)$$

Avec :

$$T\left(-\frac{h}{2}\right) = T_m = 5 + 273 ; \quad T\left(+\frac{h}{2}\right) = T_c = 500 + 273 \quad (2.49)$$

L'application de la méthode de tir consiste à redéfinir le problème comme suit :

$$\frac{d^2 \tilde{T}(z)}{dz^2} = - \frac{k'(z)}{k(z)} \frac{d\tilde{T}(z)}{dz} \quad (2.50)$$

$$\tilde{T}\left(-\frac{h}{2}\right) = T_m = 5 + 273 ; \quad \tilde{T}'\left(-\frac{h}{2}\right) = s \quad (2.51)$$

Equivalent à :

$$\begin{cases} \tilde{T}'(z) = F(z), & \tilde{T}\left(-\frac{h}{2}\right) = 5 + 273 \\ F'(z) = -\frac{k'(z)}{k(z)} \tilde{T}'(z), & F\left(-\frac{h}{2}\right) = \tilde{T}'\left(-\frac{h}{2}\right) = s \end{cases} \quad (2.52)$$

La résolution de ce système est faite par Runge Kutta d'ordre 4.

2.2.4 Résultats et discussion:

Considérons une plaque FGM de 8 mm d'épaisseur, composée d'un mélange d'Alumine et d'Aluminium de conductivités thermiques 10.4 et 204.0 W/m.K respectivement. La **Figure 2.2** montre l'effet de la variation de l'index de puissance p sur le profil de la température dans la plaque. En effet, lorsqu'on augmente p dans l'intervalle $[0,1]$, la convexité de la courbe augmente, le contraire se passe lorsqu'on augmente p dans l'intervalle $[1 ; +\infty [$. p étant très grand, le matériau sera de plus en plus riche en Aluminium. La courbe se ramène à une droite quand la plaque est en Aluminium pur.

Les courbes montrent aussi que pour maintenir la partie riche en aluminium à basse température, l'index de puissance doit avoir une valeur entre 0.5 et 1.0.

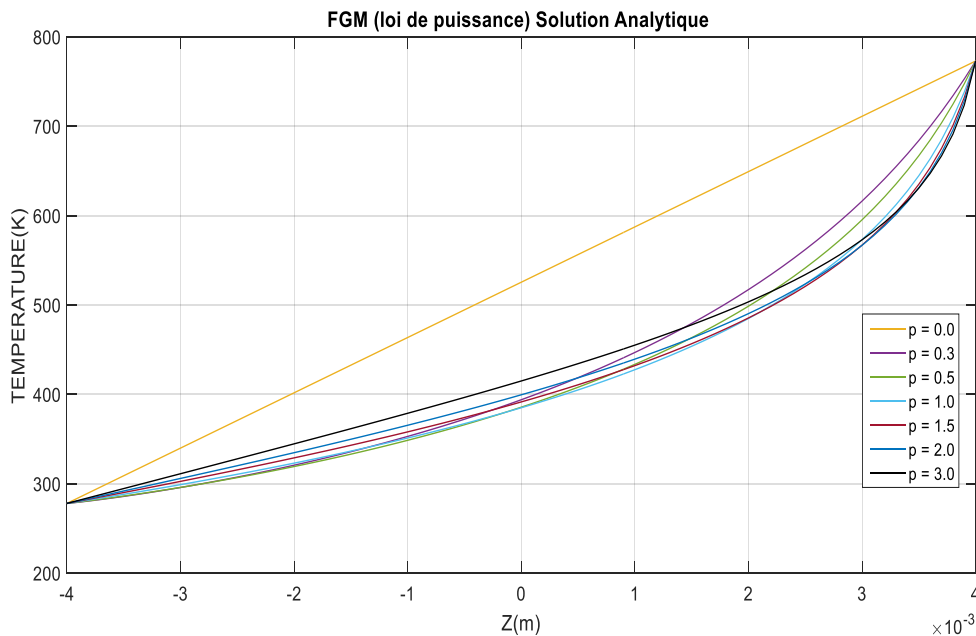


Figure. 2.2 Profil de la Température (solution analytique) dans la plaque FGM en (Al-Al₂O₃) variant les valeurs de l'index p de 0 à 3.

La **Figure 2.3** illustre les différents profils obtenus en utilisant les différentes méthodes numériques dans le cas de $p = 1$ et $p = 5$.

Afin de mener une étude comparative entre les trois méthodes numériques, nous nous sommes arrangés de telle façon de diviser l'épaisseur en 80 éléments. En appliquant la méthode des éléments finis, l'épaisseur a été divisée en 41 éléments avec 3 points d'interpolation.

Aussi, la méthode des différences finies/la méthode de tir ont été implémentées en divisant l'épaisseur en 80 éléments/pas. Ce qui fait 81 nœuds équidistants pour chacune des méthodes.

Les **Figures (2.4) et (2.5)** présentent les erreurs relatives des trois méthodes numériques utilisées. Les résultats montrent que la méthode de tir (MT) est la plus précise avec une erreur maximale de l'ordre de 0.030% (soit environ 0,2 K) pour $p=1$ et 0.006% (soit environ 0,04 K) pour $p=5$. En revanche, la méthode des éléments finis (MEF) donne des résultats moins précis que ceux obtenus par les deux autres méthodes, et l'erreur relative maximale atteinte est 0.435% (soit environ 3.21 K) dans le cas de $p=1$ et 2.046% (soit environ 14.75 K) quand $p=5$.

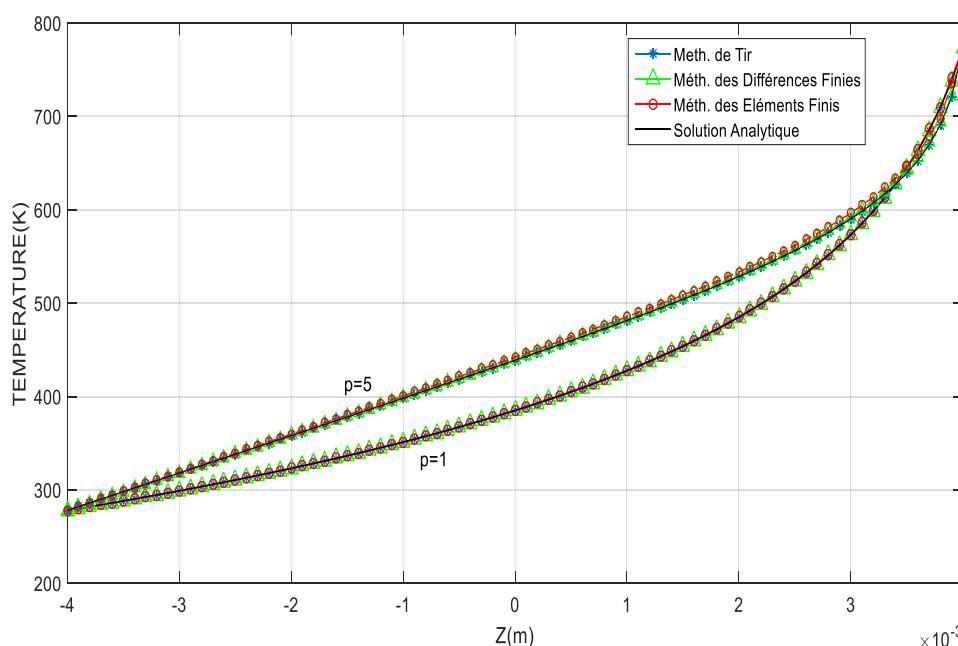


Figure. 2.3 Profil de la température en utilisant des méthodes numériques MEF, MDF et MT dans le cas d'une composition FGM avec $p=1$ et $p=5$.

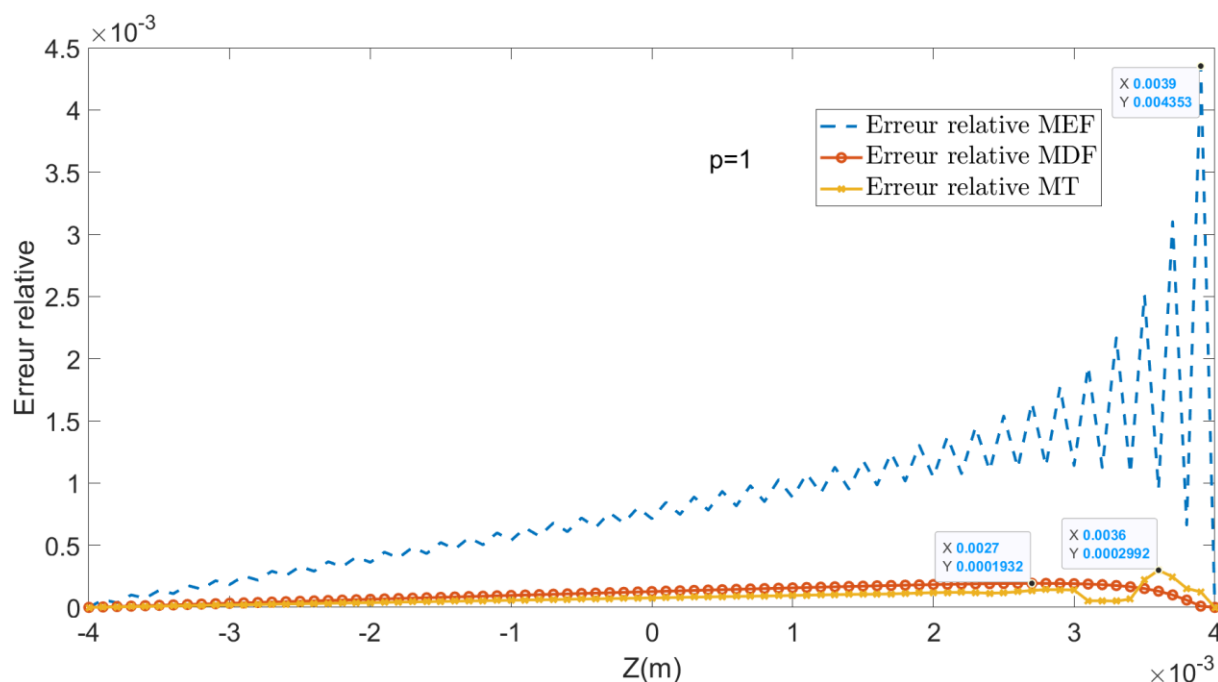


Figure. 2.4 Erreurs relatives des solutions numériques par MEF, MDF et MT dans le cas d'une plaque FGM avec ($p=1$).

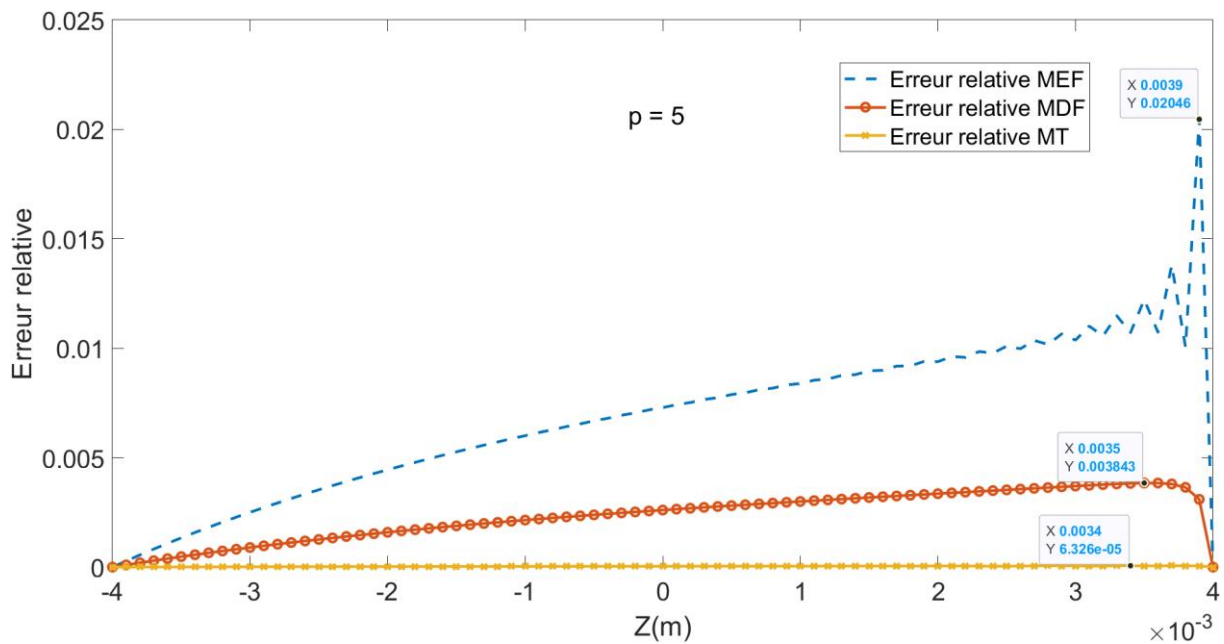


Figure. 2.5 Erreurs relatives des solutions numériques par MEF, MDF et MT dans le cas d'une plaque FGM avec ($p=5$).

2.3 Plaque avec des propriétés physiques suivant une loi exponentielle :

2.3.1 Formulation et hypothèses:

En utilisant des coordonnées cartésiennes (x,y,z), considérons une plaque FGM rectangulaire. b, a, et h représentent respectivement la longueur, la largeur et l'épaisseur de la plaque. Comme indiqué sur la **Figure 2.6**, la composition matérielle change de la surface en métal (z=h) à la surface en céramique (z=0) de manière exponentielle suivant la direction de l'épaisseur [102,51].

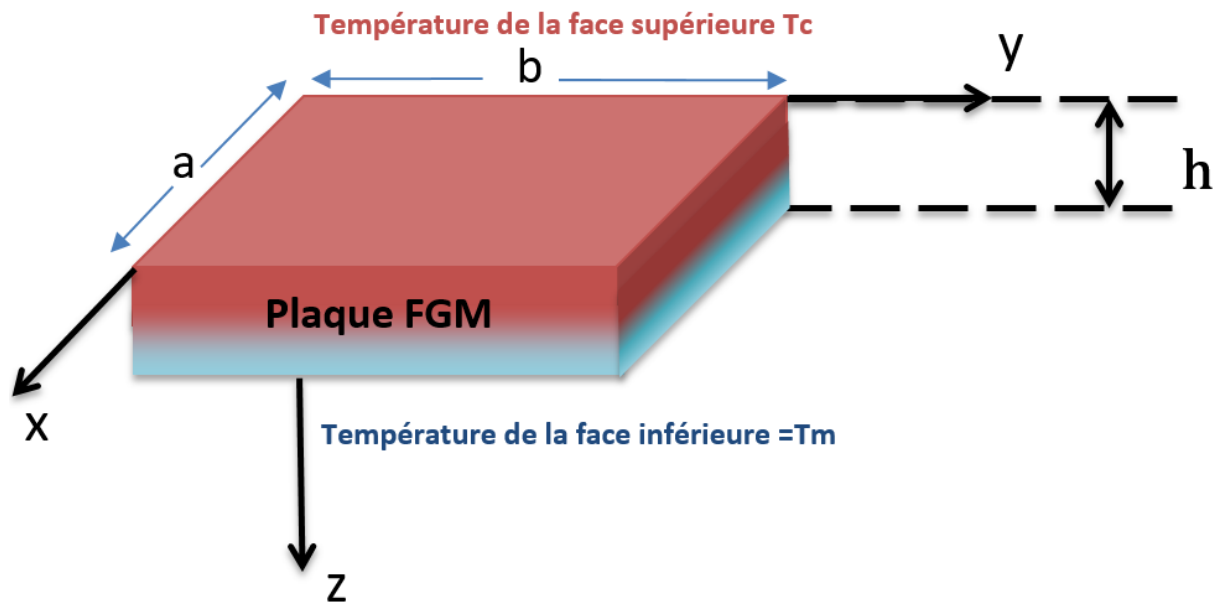


Figure. 2.6 Configuration d'une plaque FGM avec des conditions de type Dirichlet.

$$k(z, T) = k_1(T) e^{n_p(T) \frac{z}{h}} \quad (2.53)$$

$$n_p(T) = \ln \left(\frac{k_2(T)}{k_1(T)} \right) \quad (2.54)$$

Ici, la conductivité thermique est considérée être linéairement dépendante de la température [103]:

$$k_1(T) = k_{1a}(1 + \beta_1(T - T_a)) \quad \text{et} \quad k_2(T) = k_{2a}(1 + \beta_2(T - T_a)) \quad (2.55)$$

k_{ia} représente les conductivité thermiques de corps dense à la température ambiante T_a et $i = 1, 2$.

A cause de l'hypothèse de l'homogénéité de la plaque dans les différents plans (x,y), et comme l'épaisseur de la plaque est considérée infiniment petite comparée avec les autres directions, l'équation stationnaire unidimensionnelle de la conduction a été considérée. Les surfaces supérieure et inférieure sont fixées à des températures T_c et T_m respectivement. Le transfert thermique au sein de la plaque FGM est contrôlé par la conservation d'énergie :

$$\frac{d}{dz} \left[k(z, T) \frac{dT(z)}{dz} \right] = 0 \quad ; \quad 0 \leq z \leq h \quad (2.56)$$

$$T(z = 0) = T_c \quad (2.57)$$

$$T(z = h) = T_m \quad (2.58)$$

Avant de commencer la résolution, il est envisageable d'introduire les paramètres adimensionnels suivants :

$$\theta = \frac{T}{T_c} ; \quad \theta_m = \frac{T_d}{T_u} ; \quad \theta_c = 1 ; \quad \zeta = \frac{z}{h} ; \quad \lambda_1 = \frac{k_{1a}}{k_{ref}} ; \quad \lambda_2 = \frac{k_{2a}}{k_{ref}} ; \quad \varepsilon_1 = \beta_1 T_c ; \quad \varepsilon_2 = \beta_2 T_c \quad (2.59)$$

ε_1 et ε_2 sont les coefficients adimensionnels pour prendre en compte la dépendance linéaire de la température pour les matériaux céramiques et métalliques respectivement. λ est la conductivité thermique adimensionnelle.

Cependant, les expressions de l'équation de transfert de chaleur et des conditions aux bords sont réduites aux formes suivantes :

$$\frac{d}{d\zeta} \left[\lambda(\zeta, \theta) \frac{d\theta(\zeta)}{d\zeta} \right] = 0 \quad ; \quad 0 \leq \zeta \leq 1 \quad (2.60)$$

$$\theta(\zeta = 0) = \theta_c = 1 \quad (2.61)$$

$$\theta(\zeta = 1) = \theta_m \quad (2.62)$$

En choisissant $k_{ref} = k_{1a}$, et pour la simplicité en réglant T_a à Zéro, les expressions adimensionnelles de la conductivité thermique s'écrivent:

$$\lambda_1(\theta) = (1 + \varepsilon_1 \theta) \quad \text{et} \quad \lambda_2(\theta) = \lambda_0(1 + \varepsilon_2 \theta) \quad (2.63)$$

Tel que le paramètre de la conductivité thermique est défini comme:

$$\lambda_0 = \frac{k_{2a}}{k_{1a}} \quad (2.64)$$

λ_0 représente une manière d'exprimer l'écart entre la conductivité thermique de la céramique et celle du métal à température ambiante T_a . Ce paramètre peut également être considéré comme le paramètre de non-homogénéité matérielle. Pour transformer la plaque FGM en plaque homogène, on met: $\lambda_0 = 1$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

2.3.2 Résolution analytique par la méthode de transformation différentielle

L'**Equation (2.60)** peut être exprimée de la manière suivante:

$$\ln\left(\frac{\lambda_0(1 + \varepsilon_2\theta)}{1 + \varepsilon_1\theta}\right) \theta' + \theta'' = 0 \quad (2.65)$$

Ou

$$\ln(\lambda_0) \theta' + \ln(1 + \varepsilon_2\theta) \theta' - \ln(1 + \varepsilon_1\theta) \theta' + \theta'' = 0 \quad (2.66)$$

L'**Equation (2.66)** contient des termes non linéaires logarithmiques provenant de la non-linéarité matérielle. Les relations de récurrence de fonctions non linéaires complexes telles que logarithmiques ou exponentielles n'ont pas été étudiées auparavant dans les problèmes de transfert de chaleur. D'ailleurs, un algorithme efficace proposé par Chang et al. [73] et qui a été utilisé par Jang [74] pour résoudre des équations différentielles fractionnaires non linéaires, est appliqué ici pour établir la relation de récurrence pour une fonction de température logarithmique.

Suivant la transformation basique dans le **Tableau 1.1** et les **Equations (1.68)-(1.71)**, la transformée de l'équation de la chaleur peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned} \ln(\lambda_0)(i+1)\Phi(i+1) + \sum_{r=0}^i (r+1)F_2(i-r)\Phi(r+1) - \sum_{r=0}^i (r+1)F_1(i-r)\Phi(r+1) \\ + (i+1)(i+2)\Phi(i+2) = 0 \end{aligned} \quad (2.67)$$

Où

$$F_j(0) = \ln(1 + \varepsilon_j \Phi(0)) \quad (2.68)$$

$$G_j(0) = \frac{\varepsilon_j}{1 + \varepsilon_j \Phi(0)} \quad (2.69)$$

$$F_j(i) = \frac{1}{i} \sum_{r=0}^{i-1} (i-r) G_j(r) \Phi(i-r) \quad ; \quad i \geq 1 \quad (2.70)$$

$$G_j(s) = \frac{-\varepsilon_j}{1 + \varepsilon_j \Phi(0)} \sum_{r=0}^{s-1} (i-r) G_j(r) \Phi(i-r) \quad ; \quad s \geq 1 \quad (2.71)$$

Avec : $j = 1, 2$.

Supposant $\theta(0) = \eta$ et $\theta'(0) = \tau$. En utilisant la transformation différentielle on obtient

$$\Phi(0) = \eta \quad \text{et} \quad \Phi(1) = \tau \quad (2.72)$$

Suivant les **Equations (2.67)-(2.72)**, les relations de récurrence s'écrivent comme suit:

$$\Phi(2) = -\frac{1}{2} (\tau * \ln(1 + \varepsilon_2 \eta) - \tau * \ln(1 + \varepsilon_1 * \eta) + \tau * \ln(\lambda_0)) \quad ; \quad i = 0 \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} \Phi(i+2) = & -\frac{1}{(i+1)(i+2)} \left[\sum_{r=0}^i (r+1) F_2(i-r) \Phi(r+1) - \sum_{r=0}^i (r+1) F_1(i-r) \Phi(r+1) \right. \\ & \left. + \ln(\lambda_0)(i+1) \Phi(i+1) \right] \quad ; \quad i \geq 1 \end{aligned} \quad (2.74)$$

En incorporant les valeurs de $\Phi(i)$ ($i=0; 1; 2; 3; \dots; 16$) à partir des **Equations (2.73) et (2.74)** dans la définition de la solution $\theta(\zeta) = \sum_{i=0}^N \zeta^i \Phi(i)$, on obtient :

$$\theta(\zeta) = \eta + \tau \zeta - \frac{1}{2} (\tau * \ln(1 + \varepsilon_2 \eta) - \tau * \ln(1 + \varepsilon_1 * \eta) + \tau * \ln(\lambda_0)) \zeta^2 + \dots \quad (2.75)$$

Ainsi, la température est fonction des constantes inconnues η et τ , qui sont évaluées à partir des conditions aux limites imposées données par les **Equations (2.61) et (2.62)**.

En utilisant la DTM, les conditions aux limites peuvent être exprimées comme suit :

$$\eta = 1 \quad (2.76)$$

$$\eta + \tau + \Phi(2) + \dots + \Phi(N) = \theta_m \quad (2.77)$$

Afin d'obtenir l'expression finale de la solution, la valeur obtenue de τ est substituée dans l'**Equation (2.75)**.

2.3.3 Résolution numérique par la méthode des différences finies

Discretisation :

Avec:

$$\left. \frac{d^2 \theta}{d\zeta^2} \right|_i = \frac{\theta_{i-1} - 2\theta_i + \theta_{i+1}}{\Delta\zeta^2} \text{ et } \left. \frac{d\theta}{d\zeta} \right|_i = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\Delta\zeta} \quad (2.78)$$

En remplaçant l'**Equation (2.78)** dans **(2.65)**, nous obtenons la forme discrète suivante:

$$\left(\ln \frac{1 + \varepsilon_2 \theta_i}{1 + \varepsilon_1 \theta_i} + \ln \lambda_0 \right) \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\Delta\zeta} + \frac{\theta_{i-1} - 2\theta_i + \theta_{i+1}}{\Delta\zeta^2} = 0 \quad (2.79)$$

Avec : $i = 1, 2, \dots, 9$

Il s'agit d'un système d'équations non linéaires. La méthode du point fixe a été utilisée pour le résoudre.

2.3.4 Résultats et discussion:

2.3.4.1 Validation:

Afin d'évaluer la validité des résultats de la méthode DTM, une étude de comparaison avec une solution numérique a été réalisée en utilisant la méthode des différences finies. Le **Tableau 2.1** présente l'ensemble des résultats. Compte tenu de l'économie et de la précision du calcul, DTM a été appliquée en utilisant une approximation de 15 termes dans tous les cas étudiés dans cette section. L'erreur relative entre les deux méthodes DTM et MDF est définie comme $err\% = \frac{|\theta_{DTM} - \theta_{MDF}|}{\theta_{MDF}}$ et le maximum obtenu est inférieur à 1,9% et correspond à une erreur adimensionnelle maximale de 0.0042 ; soit 8.4 K lorsque $T_c = 2000$ K. Le tableau montre aussi que la majorité des erreurs sont de l'ordre de 2 K. En outre, la méthode du point fixe a été appliquée avec succès pour résoudre le système d'équations non linéaires obtenu après la discrétisation par la MDF. Avec une tolérance d'erreur absolue spécifiée $\delta = 1 \times 10^{-5}$, nous constatons que la convergence est bien atteinte en moins de 48 itérations pour différents cas.

Tableau. 2.1 Comparaison des résultats obtenus par MDF et DTM.

$\lambda_0 = 10$; $\theta_m = 0.2$; DTM ($N = 14$) ; MDF (8 éléments)												
$(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$		ζ									Erreur	
		0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1	max	Convergence MDF (K)
(0.0, 0.0)	DTM	1	0,7776	0,6110	0,4859	0,3922	0,3219	0,2692	0,2296	0,2	2,2	
	MDF	1	0,7768	0,6097	0,4847	0,3911	0,3210	0,2686	0,2294	0,2		48 itérations
(0.0, 0.2)	DTM	1	0,7709	0,6022	0,4775	0,3850	0,3163	0,2652	0,2273	0,2	1,6	
	MDF	1	0,7703	0,6014	0,4769	0,3848	0,3165	0,2658	0,2281	0,2		47 itérations
(0.0, 0.4)	DTM	1	0,7640	0,5929	0,4678	0,3763	0,3088	0,2590	0,2227	0,2	8,4	
	MDF	1	0,7645	0,5942	0,4701	0,3793	0,3125	0,2633	0,2269	0,2		47 itérations
(0.2, 0.0)	DTM	1	0,7842	0,6194	0,4939	0,3987	0,3266	0,2721	0,2310	0,2	2,2	
	MDF	1	0,7833	0,6182	0,4927	0,3976	0,3258	0,2716	0,2307	0,2		48 itérations
(0.2, 0.2)	DTM	1	0,7777	0,6110	0,4860	0,3922	0,3219	0,2692	0,2296	0,2	2,2	
	MDF	1	0,7768	0,6097	0,4847	0,3911	0,3210	0,2686	0,2294	0,2		48 itérations
(0.2, 0.4)	DTM	1	0,7719	0,6036	0,4789	0,3865	0,3177	0,2666	0,2284	0,2	2,4	
	MDF	1	0,7709	0,6022	0,4776	0,3853	0,3169	0,2660	0,2282	0,2		47 itérations
(0.4, 0.0)	DTM	1	0,7900	0,6270	0,5013	0,4048	0,3311	0,2750	0,2323	0,2	2	
	MDF	1	0,7893	0,6260	0,5002	0,4038	0,3304	0,2745	0,2321	0,2		48 itérations
(0.4, 0.2)	DTM	1	0,7835	0,6185	0,4931	0,3981	0,3262	0,2719	0,2309	0,2	2,2	
	MDF	1	0,7826	0,6173	0,4919	0,3970	0,3254	0,2713	0,2306	0,2		48 itérations
(0.4, 0.4)	DTM	1	0,7777	0,6110	0,4859	0,3922	0,3219	0,2692	0,2296	0,2	2,2	

(0.6, 0.0)	MDF	1	0,7768	0,6097	0,4847	0,3911	0,3210	0,2686	0,2294	0,2	48 itérations
	DTM	1	0,7954	0,6343	0,5084	0,4108	0,3356	0,2779	0,2337	0,2	1,8
(0.6, 0.2)	MDF	1	0,7947	0,6332	0,5073	0,4098	0,3347	0,2773	0,2334	0,2	49 itérations
	DTM	1	0,7888	0,6255	0,5000	0,4038	0,3304	0,2746	0,2322	0,2	2,2
(0.6, 0.4)	MDF	1	0,7880	0,6244	0,4988	0,4027	0,3296	0,2740	0,2319	0,2	48 itérations
	DTM	1	0,7829	0,6178	0,4926	0,3977	0,3259	0,2717	0,2308	0,2	2,2
	MDF	1	0,7821	0,6166	0,4913	0,3966	0,3250	0,2711	0,2305	0,2	48 itérations

2.3.4.2 Effet du paramètre d'inhomogénéité:

La **Figure 2.7** illustre l'effet de du paramètre d'inhomogénéité sur le profil de la température dans l'épaisseur de la plaque FGM. Ce paramètre peut être considéré comme l'écart (à température ambiante) entre la conductivité thermique de la céramique et du métal. Les résultats montrent que plus cet écart est grand plus les températures sont basses.

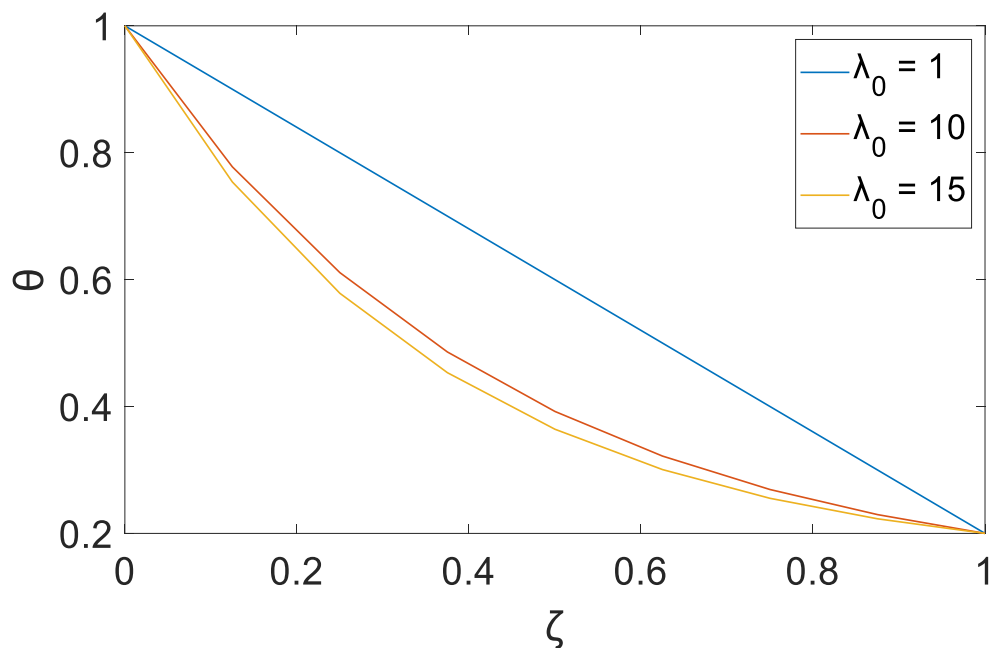


Figure. 2.7 L'effet du paramètre d'inhomogénéité λ_0 .

2.3.4.3 Effet de la température de la surface métallique

La **Figure 2.8** montre l'effet de la température de la surface en métal. L'augmentation de la température de cette surface produit une augmentation générale du profil de la température au sein de la plaque. L'utilité de tracer cet effet est mettre la lumière sur certains points importants abordés dans le dernier chapitre qui traite le phénomène du flambement.

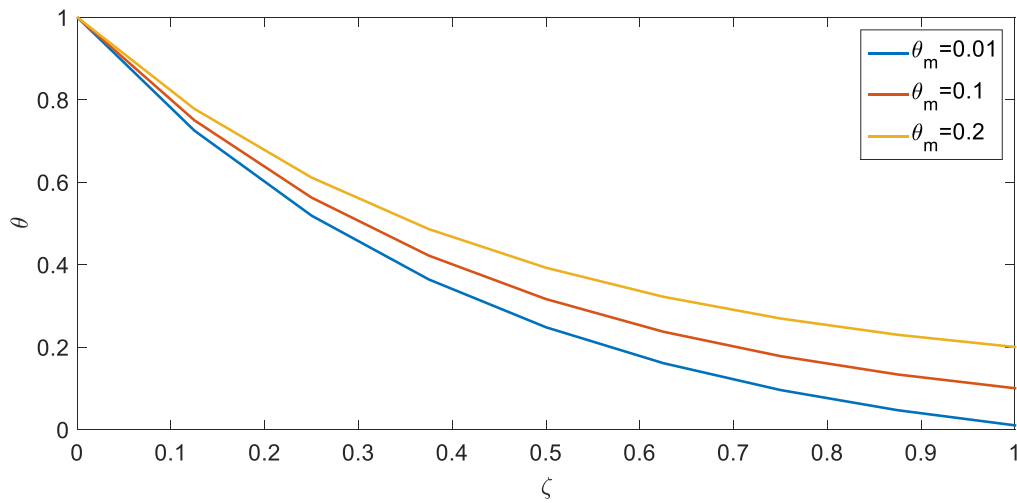


Figure. 2.8 L'effet de la température de la surface métallique θ_m .

2.3.4.4 Effet des gradients de conductivité thermique :

Les **Figures 2.9** et **2.10** présentent l'effet des gradients de conductivités thermiques ε_1 et ε_2 sur le profil de la température. D'après les résultats, il est bien clair que l'augmentation de ces deux paramètres produit des effets opposés. En effet, quand ε_1 augmente, les températures à travers la plaque deviennent plus hautes. Au contraire, quand ε_2 augmente, les températures à travers la plaque deviennent plus basses. Ceci, s'explique par le fait que le facteur essentiel du phénomène de la conduction, qui est de la conductivité thermique, est proportionnel à ces deux paramètres. Alors, puisque la température de la surface céramique/métallique est haute/basse, l'augmentation du gradient de la conductivité thermique de la céramique/ du métal $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ aura comme résultat l'accroissement/l'abaissement des températures au sein de la plaque.

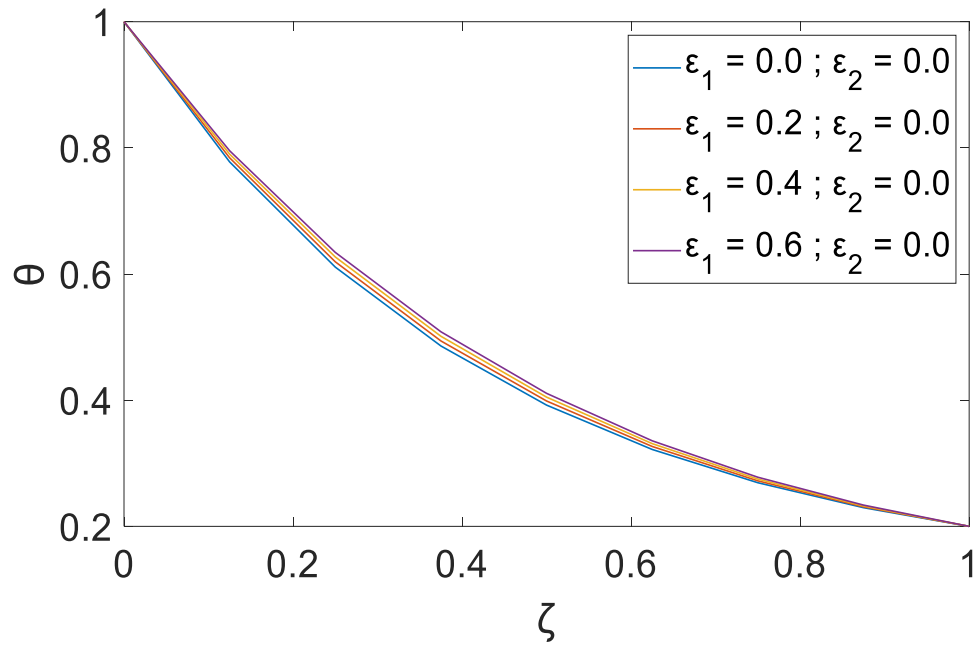


Figure. 2.9 L'effet du gradient de conductivité thermique de la céramique ε_1 .

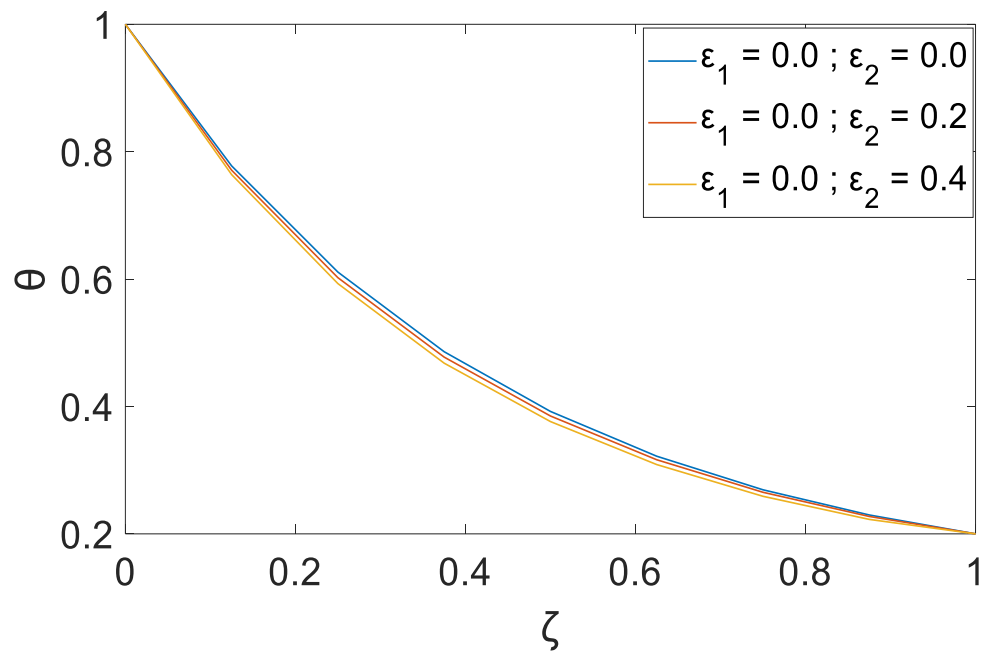


Figure. 2.10 L'effet du gradient de conductivité thermique du métal ε_2 .

D'après le **Tableau 2.1**, si on pose $T_c=2000$ K, la non considération de la dépendance de la température peut produire une différence maximale d'environ 46 K ; observée en $\zeta = 0.25$ quand les gradients de la conductivité thermique passent de $\varepsilon_1 = 0.6$ et $\varepsilon_2 = 0.0$ à $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.0$.

2.4 Conclusion :

Une première étude du transfert thermique avec des conditions aux limites de type Dirichlet a été menée pour des plaques FGM dont la composition suit une loi de puissance. Dans ce cas la conductivité thermique ne dépend pas de la température. Une seconde étude a été consacrée à l'étude du transfert thermique au sein des plaques FGM dont la composition suit une loi exponentielle et avec une conductivité thermique dépendant de la température.

Les résultats obtenus dans la première étude montrent que :

- ❖ Pour maintenir la partie riche en aluminium à basse température, l'index de puissance doit avoir une valeur entre 0.5 et 1.0.
- ❖ Parmi les 3 méthodes numériques utilisées, la méthode de tir est la méthode qui permet d'approcher le mieux la solution exacte, avec des erreurs maximales de l'ordre de 0.2 K pour $p=1.0$ et 0.05 K pour $p=5.0$.

Dans la seconde partie, on peut conclure que :

- ❖ Les températures au sein de la plaque FGM baissent en augmentant le paramètre d'inhomogénéité.
- ❖ L'augmentation des gradients de conductivité thermique ε_1 et ε_2 produit des effets opposés. En effet, les températures à travers la plaque FGM deviennent plus hautes en augmentant ε_1 et deviennent plus basses en augmentant ε_2 .
- ❖ La non considération de la dépendance de la température peut produire des différences qui peuvent atteindre 46 K ; observée à la profondeur $\zeta = 0.25$, quand les gradients de la conductivité thermique passent de $\varepsilon_1 = 0.6$ et $\varepsilon_2 = 0.0$ à $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.0$.

D'après les résultats des deux études, la performance de la plaque FGM en termes d'isolation thermique sera meilleure en optant pour des céramiques de basses conductivités thermiques et des métaux ayant des conductivités thermiques élevées.

Chapitre 3. Problème de transfert thermique avec conditions aux bords convection- radiation

3.1 Introduction

Avec des températures de fonctionnement pouvant atteindre 1200°C dans la chambre de combustion, la surface intérieure de l'enveloppe est susceptible de recevoir des flux de chaleur importants que ce soit par radiation ou par convection. La prise en compte de ces considérations rendra l'étude du flambement thermique plus réaliste.

Du point de vue des méthodes analytiques, à l'exception de quelques travaux comme celui de Torabi et Zhang [50], les études qui ont mené sur l'analyse de transfert de chaleur au sein des FGM sont principalement limitées aux cas avec des propriétés indépendantes de la température. De plus, les études analytiques concernant le transfert de chaleur dans les FGM avec des non-linéarités complexes dues aux conditions aux limites thermiques et à la dépendance à la température des propriétés des matériaux sont assez rares et, par conséquent, doivent être explorées davantage.

Ce travail fait suite à des études antérieures qui se sont concentrées sur la conduction thermique dans les structures fonctionnellement graduées. Une solution analytique approximative de l'équation de transfert de chaleur en régime permanent dans le cas d'une plaque FGM est établie. Pour fournir une analyse plus réaliste, la dépendance linéaire de la conductivité thermique à la température et les conditions aux limites convectives-radiatives sont toutes deux prises en compte. Dans la première étape, l'algorithme proposé par Chang et al. [73] et utilisé par Jang [74] pour résoudre des équations différentielles fractionnaires non linéaires, est appliqué ici pour établir la relation de récurrence pour une fonction de température logarithmique. Par la suite, nous avons procédé à la résolution de la non-linéarité impliquée par les conditions aux limites à l'aide de la méthode de Newton Raphson. La précision de la méthode proposée a été validée en comparant les résultats avec ceux obtenus par la méthode des éléments finis et par la méthode dite de Ferrari [51]. Enfin, les influences séparées et simultanées de la radiation, la convection, la non-homogénéité matérielle et la dépendance de la température sur les performances d'isolation thermique seront étudiés en détails.

3.2 Formulation du problème:

En utilisant des coordonnées cartésiennes (x,y,z), considérons une plaque FGM rectangulaire. b, a, et h représentent respectivement la longueur, la largeur et l'épaisseur de la plaque. Comme indiqué sur la **Figure 3.1**, la composition matérielle change de la surface en métal (z=h) à la surface en céramique (z=0) de manière exponentielle suivant la direction de l'épaisseur. [51,104]

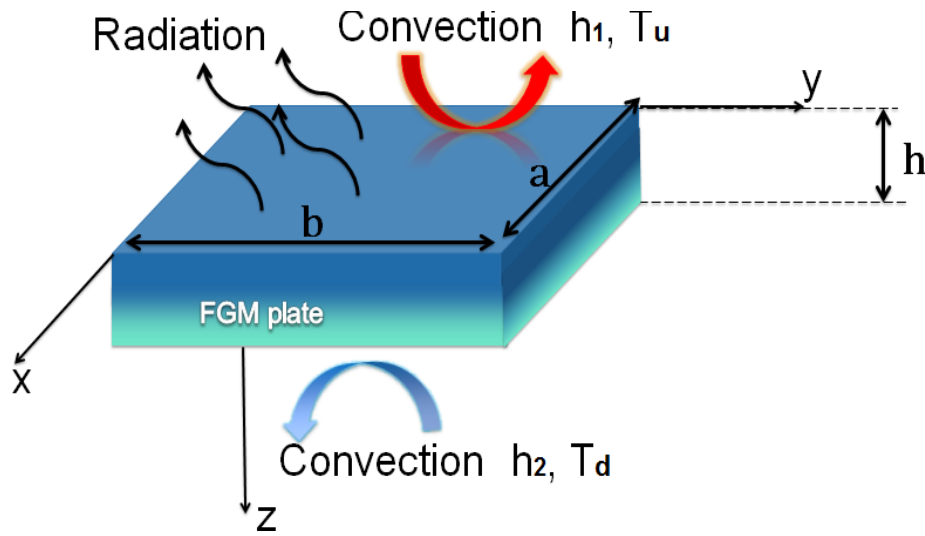


Figure. 3.1 Configuration d'une plaque FGM avec des conditions convectives radiatives.

$$k(z, T) = k_1(T) e^{n_p(T) \frac{z}{h}} \quad (3.1)$$

$$n_p(T) = \ln \left(\frac{k_2(T)}{k_1(T)} \right) \quad (3.2)$$

Ici, la conductivité thermique est considérée être linéairement dépendante de la température

$$k_1(T) = k_{1a}(1 + \beta_1(T - T_a)) \quad \text{et} \quad k_2(T) = k_{2a}(1 + \beta_2(T - T_a)) \quad (3.3)$$

k_{ia} représente les conductivité thermiques de corps dense à la température ambiante T_a et $i = 1, 2$.

A cause de hypothèse de l'homogénéité de la plaque dans les différents plans (x,y), et comme l'épaisseur de la plaque est considérée infiniment petite comparée avec les autres directions, l'équation stationnaire unidirectionnelle de la conduction a été considérée. La surface supérieure exposée à un environnement chaud est considérée comme convective radiative condition au bord. La température de l'environnement chaud est T_u , le coefficient de transfert de chaleur par convection est h_1 , l'émissivité de la surface est ϵ et la constante de Stefan-Boltzmann est σ .

De l'autre côté de la plaque, la surface inférieure exposée à un environnement froid de température T_d est caractérisée par un coefficient de transfert de chaleur par convection h_2 .

Le transfert thermique au sein de la plaque FGM est contrôlé par la conservation d'énergie :

$$\frac{d}{dz} \left[k(z, T) \frac{dT(z)}{dz} \right] = 0 \quad ; \quad 0 \leq z \leq h \quad (3.4)$$

$$\left. -k_1(T) \frac{dT(z)}{dz} \right|_{z=0} = h_1(T_u - T(z=0)) + \epsilon \sigma (T_u^4 - T^4(z=0)) \quad (3.5)$$

$$\left. -k_2(T) \frac{dT(z)}{dz} \right|_{z=h} = h_2(T(z=h) - T_d) \quad (3.6)$$

Avant de commencer la résolution, nous avons introduit les paramètres adimensionnels suivants :

$$\theta = \frac{T}{T_u} ; \theta_d = \frac{T_d}{T_u} ; \zeta = \frac{z}{h} ; \lambda_1 = \frac{k_{1a}}{k_{ref}} ; \lambda_2 = \frac{k_{2a}}{k_{ref}} ; Bi_1 = \frac{h_1 h}{k_{ref}} ; Bi_2 = \frac{h_2 h}{k_{ref}} ;$$

$$N_r = \frac{\epsilon \sigma h T_u^3}{k_{ref}} ; \varepsilon_1 = \beta_1 T_u ; \varepsilon_2 = \beta_2 T_u \quad (3.7)$$

Où Bi est le nombre de Biot et N_r est le paramètre de rayonnement-conduction. Ces paramètres représentent le rapport entre le taux de transfert de chaleur par convection/rayonnement en surface et le taux de transfert de chaleur par conduction avec le corps, respectivement. La valeur numérique de Bi (N_r) est un critère qui donne une indication directe de l'importance relative de la convection (rayonnement) et de la conduction dans la détermination du profil de température d'un corps chauffé ou refroidi par convection (rayonnement) à sa surface. ε_1 et ε_2 sont les coefficients adimensionnels pour prendre en compte la dépendance linéaire de la température

pour les matériaux céramiques et métalliques respectivement. λ est la conductivité thermique adimensionnelle.

Cependant, les expressions de l'équation de transfert de chaleur et des conditions aux bords sont réduites aux formes suivantes :

$$\frac{d}{d\zeta} \left[\lambda(\zeta, \theta) \frac{d\theta(\zeta)}{d\zeta} \right] = 0 \quad ; \quad 0 \leq \zeta \leq 1 \quad (3.8)$$

$$-\lambda_1(\theta) \frac{d\theta(\zeta)}{d\zeta} \Big|_{\zeta=0} = Bi_1(1 - \theta(\zeta=0)) + N_r(1 - \theta^4(\zeta=0)) \quad (3.9)$$

$$-\lambda_2(\theta) \frac{d\theta(\zeta)}{d\zeta} \Big|_{\zeta=1} = Bi_2(\theta(\zeta=1) - \theta_a) \quad (3.10)$$

En choisissant $k_{ref} = k_{1a}$, et pour la simplicité en réglant T_a à Zéro, les expressions adimensionnelles de la conductivité thermique s'écrivent:

$$\lambda_1(\theta) = (1 + \varepsilon_1 \theta) \quad \text{et} \quad \lambda_2(\theta) = \lambda_0(1 + \varepsilon_2 \theta) \quad (3.11)$$

Tel que le paramètre de la conductivité thermique est défini comme:

$$\lambda_0 = \frac{k_{2a}}{k_{1a}} \quad (3.12)$$

λ_0 représente une manière d'exprimer l'écart entre la conductivité thermique de la céramique et celle du métal à température ambiante T_a . Ce paramètre peut également être considéré comme le paramètre de non-homogénéité matérielle. Pour transformer la plaque FGM en plaque homogène, on met: $\lambda_0 = 1$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

3.3 Résolution du problème avec la méthode de la transformation différentielle

L'Equation (2.8) peut être exprimée de la manière suivante:

$$\ln \left(\frac{\lambda_0(1 + \varepsilon_2 \theta)}{1 + \varepsilon_1 \theta} \right) \theta' + \theta'' = 0 \quad (3.13)$$

Où

$$\ln(\lambda_0) \theta' + \ln(1 + \varepsilon_2 \theta) \theta' - \ln(1 + \varepsilon_1 \theta) \theta' + \theta'' = 0 \quad (3.14)$$

Suivant la transformation basique dans le **Tableau 1.1** et les **Equations (1.68)-(1.71)**, la transformée de l'équation de la chaleur peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned} \ln(\lambda_0)(i+1)\Phi(i+1) + \sum_{r=0}^i (r+1)F_2(i-r)\Phi(r+1) - \sum_{r=0}^i (r+1)F_1(i-r)\Phi(r+1) \\ + (i+1)(i+2)\Phi(i+2) = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Où

$$F_j(0) = \ln(1 + \varepsilon_j \Phi(0)) \quad (3.16)$$

$$G_j(0) = \frac{\varepsilon_j}{1 + \varepsilon_j \Phi(0)} \quad (3.17)$$

$$F_j(i) = \frac{1}{i} \sum_{r=0}^{i-1} (i-r)G_j(r)\Phi(i-r) \quad ; \quad i \geq 1 \quad (3.18)$$

$$G_j(s) = \frac{-\varepsilon_j}{1 + \varepsilon_j \Phi(0)} \sum_{r=0}^{s-1} (i-r)G_j(r)\Phi(i-r) \quad ; \quad s \geq 1 \quad (3.19)$$

Avec : $j = 1, 2$.

Supposant $\theta(0) = \eta$ et $\theta'(0) = \tau$. En utilisant la transformation différentielle, on obtient :

$$\Phi(0) = \eta \quad \text{et} \quad \Phi(1) = \tau \quad (3.20)$$

Suivant les **Equations (3.15)-(3.20)**, les relations de récurrence s'écrivent comme suit:

$$\Phi(2) = -\frac{1}{2}(\tau * \ln(1 + \varepsilon_2 \eta) - \tau * \ln(1 + \varepsilon_1 * \eta) + \tau * \ln(\lambda_0)) \quad ; \quad i = 0 \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \Phi(i+2) = -\frac{1}{(i+1)(i+2)} \left[\sum_{r=0}^i (r+1)F_2(i-r)\Phi(r+1) - \sum_{r=0}^i (r+1)F_1(i-r)\Phi(r+1) \right. \\ \left. + \ln(\lambda_0)(i+1)\Phi(i+1) \right] \quad ; \quad i \geq 1 \end{aligned} \quad (3.22)$$

En incorporant les valeurs de $\Phi(i)$ ($i=0; 1; 2; 3; \dots; 16$) à partir des **Equations (3.21) et (3.22)** dans la définition de la solution $\theta(\zeta) = \sum_{i=0}^N \zeta^i \Phi(i)$, on obtient

$$\theta(\zeta) = \eta + \tau\zeta - \frac{1}{2}(\tau * \ln(1 + \varepsilon_2\eta) - \tau * \ln(1 + \varepsilon_1 * \eta) + \tau * \ln(\lambda_0))\zeta^2 + \dots ; 0 \leq \zeta \leq 1 \quad (3.23)$$

Ainsi, la température est fonction des constantes inconnues η et τ , qui sont évaluées à partir des conditions aux limites imposées données par les **Equations (3.9) et (3.10)** en utilisant la méthode de Newton Raphson.

En utilisant la DTM, les conditions aux limites peuvent être exprimées comme suit :

$$-(1 + \varepsilon_1 * \eta) * \tau = Bi_1 * (1 - \eta) + N_r * (1 - \eta^4) \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} -\lambda_0 * (1 + \varepsilon_2(\eta + \tau + \Phi(2) + \dots + \Phi(N))) * (\tau + 2 * \Phi(2) + \dots + N * \Phi(N)) \\ = Bi_2 * (\eta + \tau + \Phi(2) + \dots + \Phi(N) - \theta_d) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Les valeurs obtenues de η et τ sont substituées dans l'**Equation (3.23)**. Ainsi, l'expression finale de la solution est trouvée.

3.4 Résolution du problème avec la méthode des éléments finis

De la même manière que celle présentée l'**Equation (2.27)**, le résidu est défini comme suit :

$$\begin{aligned} R(T, T^*) = - \int_{S_{flux}} T^* \vec{n} (\vec{K} \overrightarrow{grad} T) dS - \int_{S_T} T^* \vec{n} (\vec{K} \overrightarrow{grad} T) dS + \int_V \overrightarrow{grad} T^* \vec{K} \overrightarrow{grad} T dV \\ = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Dans ce cas, il y a un transfert de chaleur par convection et par rayonnement, la première intégrale est donc non nulle, tandis que la deuxième est nulle puisqu'on n'a pas de condition Dirichlet.

$$R(T, T^*) = - \int_{S_{flux}} T^* \vec{n} (\bar{K} \overrightarrow{grad} T) dS + \int_V \overrightarrow{grad} T^* \bar{K} \overrightarrow{grad} T dV = 0 \quad (3.27)$$

$$R(T, T^*) = - \int_{S_{flux}} T^* (h(T_e - T) + \epsilon \sigma (T_\infty^4 - T^4)) dS + \int_V \overrightarrow{grad} T^* \bar{K} \overrightarrow{grad} T dV = 0 \quad (3.28)$$

Dans notre problème les variables sont adimensionnelles, on a :

$$\begin{aligned} R(\theta, \theta^*) = & - \int_{S_{flux}} \theta^* (Bi_1(1 - \theta) + Bi_2(\theta_d - \theta) + N_r(1 - \theta^4)) dS \\ & + \int_V \overrightarrow{grad} \theta^* \bar{\lambda} \overrightarrow{grad} \theta dV = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Le champ de températures $\theta^e(\check{\zeta})$ dans l'élément (e) a pour expression :

$$\theta^e = [N^e] \{\theta^e\} \quad (3.30)$$

$$\theta^{*e} = [N^e] \{\theta^{*e}\} \quad (3.31)$$

$$\overrightarrow{grad} \theta^e = [B^e] \{\theta^e\} \quad (3.32)$$

$$\overrightarrow{grad} \theta^{*e} = [B^e] \{\theta^{*e}\} \quad (3.33)$$

Avec $B_i^e = \frac{\partial N_i^e}{\partial \check{\zeta}}$

En portant les **Equations (3.30-3.33)** dans (3.29), on peut écrire :

$$R(\theta, \theta^*) = \sum_e \{\theta^{*e}\}^T (-\{F^e\} + [K^e] \{\theta^e\}) \quad (3.34)$$

Avec :

$$[K^e] = \int_{\check{\zeta}_e} [B^e]^T \lambda_e [B^e] d\check{\zeta} \quad (3.35)$$

Et

$$\{F^e\} = \int_{S_{flux}} [N^e]^T (Bi_1 + Bi_2 \theta_d + N_r(1 - \theta^4)) dS \quad (3.36)$$

En considérant des éléments iso-paramétriques de 3 nœuds équidistants, lors de la discrétisation du Domaine. La matrice globale est obtenue par assemblage des matrices élémentaires :

$$[K] = \sum_e [K^e] \quad (3.37)$$

Au niveau d'un seul élément :

$$[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3] = \left[\frac{\zeta \cdot (\zeta - 1)}{2} \quad (1 - \zeta^2) \quad \frac{\zeta \cdot (\zeta + 1)}{2} \right] \quad (3.38)$$

$$\check{\zeta}(\zeta) = [N] \begin{Bmatrix} \check{\zeta}_1 \\ \check{\zeta}_2 \\ \check{\zeta}_3 \end{Bmatrix} = \frac{\zeta \cdot (\zeta - 1)}{2} \check{\zeta}_1 + (1 - \zeta^2) \check{\zeta}_2 + \frac{\zeta \cdot (\zeta + 1)}{2} \check{\zeta}_3 = \check{\zeta}_2 + \zeta \frac{h}{2} \quad (3.39)$$

Le jacobien de la transformation est égale à : $J(\zeta) = \frac{\partial \check{\zeta}(\zeta)}{\partial \zeta} = \frac{h}{2}$

$$\theta(\zeta) = [N] \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \frac{\zeta \cdot (\zeta - 1)}{2} \theta_1 + (1 - \zeta^2) \theta_2 + \frac{\zeta \cdot (\zeta + 1)}{2} \theta_3 \quad (3.40)$$

On en déduit l'expression de la matrice [B] :

$$\begin{aligned} [B] &= [B_1 \ B_2 \ B_3] = \left[\frac{\partial N_1}{\partial \check{\zeta}} \quad \frac{\partial N_2}{\partial \check{\zeta}} \quad \frac{\partial N_3}{\partial \check{\zeta}} \right] = \frac{1}{J} \left[\frac{\partial N_1}{\partial \zeta} \quad \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} \quad \frac{\partial N_3}{\partial \zeta} \right] \\ &= \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2\zeta - 1 & -4\zeta & 2\zeta + 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.41)$$

De ce fait :

$$[K] = \int_{\check{\zeta}} [B]^T \lambda(\check{\zeta}) [B] d\check{\zeta} = J \int_{\zeta} [B]^T \cdot \lambda(\check{\zeta}) \cdot [B] d\zeta \quad (3.42)$$

Avec :

$$\lambda(\zeta) = \lambda_1 \exp \left(\ln \left(\lambda_0 \cdot \frac{(1 + \varepsilon_2 \theta)}{(1 + \varepsilon_1 \theta)} \right) \zeta \right) \quad (3.43)$$

$$\theta = [N]\{\theta\} \quad (3.44)$$

$$\zeta = [N]\{\zeta\} \quad (3.45)$$

L'Equation (3.43) devient :

$$\lambda(\zeta) = \lambda_1 \exp \left(\ln \left(\lambda_0 \cdot \frac{(1 + \varepsilon_2 [N]\{\theta\})}{(1 + \varepsilon_1 [N]\{\theta\})} \right) [N]\{\zeta\} \right) \quad (3.46)$$

Et la matrice de conductivité [K] exprimée par l'Equation (3.42) deviendra:

$$[K] = J \int_{\zeta} [B]^T \cdot \left[\lambda_1 \exp \left(\ln \left(\lambda_0 \cdot \frac{(1 + \varepsilon_2 [N]\{\theta\})}{(1 + \varepsilon_1 [N]\{\theta\})} \right) [N]\{\zeta\} \right) \right] \cdot [B] d\zeta \quad (3.47)$$

Après assemblage, on obtient un système d'équations non linéaires. La résolution sera faite d'une manière itérative par la méthode mixte; il s'agit d'une méthode qui combine la méthode de substitution pour la non-linéarité matérielle et la méthode de Newton Raphson pour la non-linéarité provenant de la radiation.

A chaque itération i, on résout :

$$[K_t(\theta^{i-1})] \{\Delta \theta^i\} = \{R(\theta^{i-1})\} \quad (3.48)$$

Avec :

$$\{R(\theta^{i-1})\} = \{F(\theta^{i-1})\} - [K(\theta^{i-1})]\{\theta^{i-1}\} \quad (3.49)$$

$$[K_t(\theta^{i-1})] = [K(\theta^{i-1})] + \begin{bmatrix} Bi_1 + 4N_r \theta^{i-1^3}(0) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 0 & \dots & 0 & Bi_2 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

$$F(\theta^{i-1}) = \left\{ \begin{array}{c} Bi_1(1 - \theta^{i-1}(0)) + N_r(1 - \theta^{i-1}(0)) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ Bi_2(\theta_d - \theta^{i-1}(1)) \end{array} \right\} \quad (3.51)$$

3.5 Résultats et discussion:

3.5.1 Validation:

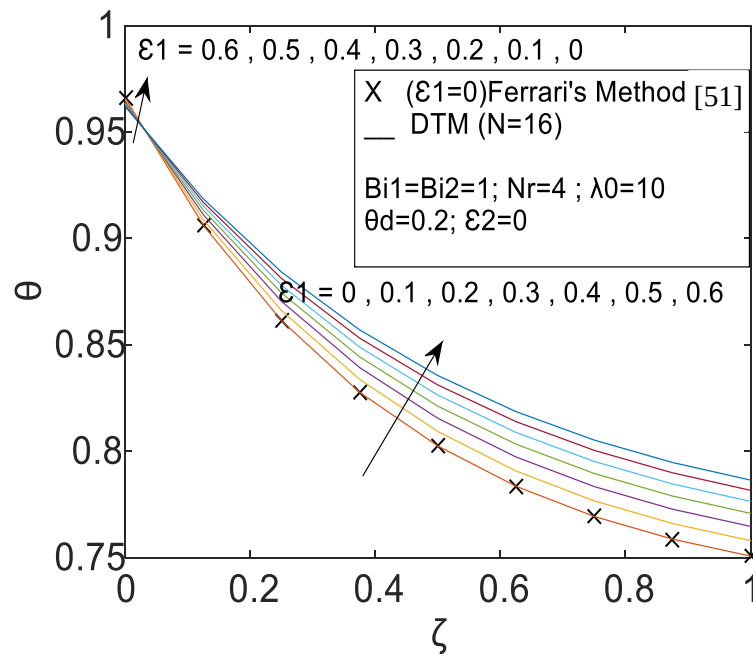
Pour illustrer davantage la précision de la méthode DTM actuelle, une étude de comparaison avec la solution exacte a été réalisée en utilisant la méthode de Ferrari [51]. Le **Tableau 3.1** donne les températures calculées en utilisant 13, 15 et 17 termes. L'erreur absolue de la méthode DTM est définie comme $err = |\theta_{DTM} - \theta_{FM}|$ et le maximum indiqué est inférieur à $4,46879 \times 10^{-8}$, pour un nombre de termes égal à 17 ($N = 16$). Par conséquent, compte tenu de l'économie et de la précision du calcul, DTM est appliquée en utilisant une approximation de 17 termes dans tous les cas étudiés dans cette section. Selon les résultats obtenus, DTM peut fournir une solution précise pour le transfert de chaleur non linéaire dans la plaque FGM. En outre, la méthode Newton Raphson, connue par sa convergence rapide, a été appliquée avec succès. On constate que la convergence est bien réalisée en moins de 12 itérations, pour divers cas testés avec une tolérance d'erreur absolue spécifiée $\delta = 1 \times 10^{-4}$.

Une solution numérique obtenue par éléments finis (MEF) a été par la suite utilisée pour valider les résultats dans les cas où la température influence la conductivité thermique (**Tableau 3.3**). Dans le cas où la température du milieu chaud est de 2000 K et d'après les résultats du tableau ci-dessous, l'erreur relative maximale obtenue est de 0.68% et correspond à une erreur absolue de l'ordre de 11 K.

Tableau 3.1 Comparaison des résultats obtenus par la DTM et par la méthode de Ferrari (FM) dans le cas de la conductivité thermique non influencée par la température.

$Bi_1=Bi_2=1$; $N_r=4$; $\lambda_0 = 10$; $\theta_d=0.2$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$							
Z	Exact Solution(FM)	DTM (N=12)	DTM (N=14)	DTM (N=16)	err(N=12)	err(N=14)	err(N=16)
0	0,96600887	0,96599914	0,96600858	0,96600886	9,725E-06	2,889E-07	6,480E-09
0,125	0,90618743	0,90616141	0,90618665	0,90618741	2,602E-05	7,728E-07	1,733E-08
0,25	0,86132767	0,86128944	0,86132654	0,86132765	3,823E-05	1,136E-06	2,548E-08
0,375	0,82768761	0,82764021	0,82768620	0,82768757	4,739E-05	1,408E-06	3,158E-08
0,5	0,80246111	0,80240685	0,80245950	0,80246108	5,426E-05	1,612E-06	3,616E-08
0,625	0,78354391	0,78348450	0,78354215	0,78354387	5,941E-05	1,764E-06	3,959E-08
0,75	0,76935801	0,76929478	0,76935614	0,76935797	6,324E-05	1,879E-06	4,216E-08
0,875	0,75872009	0,75865422	0,75871813	0,75872005	6,587E-05	1,960E-06	4,401E-08
1	0,75074277	0,75067611	0,75074079	0,75074273	6,666E-05	1,987E-06	4,469E-08

(a)



b)

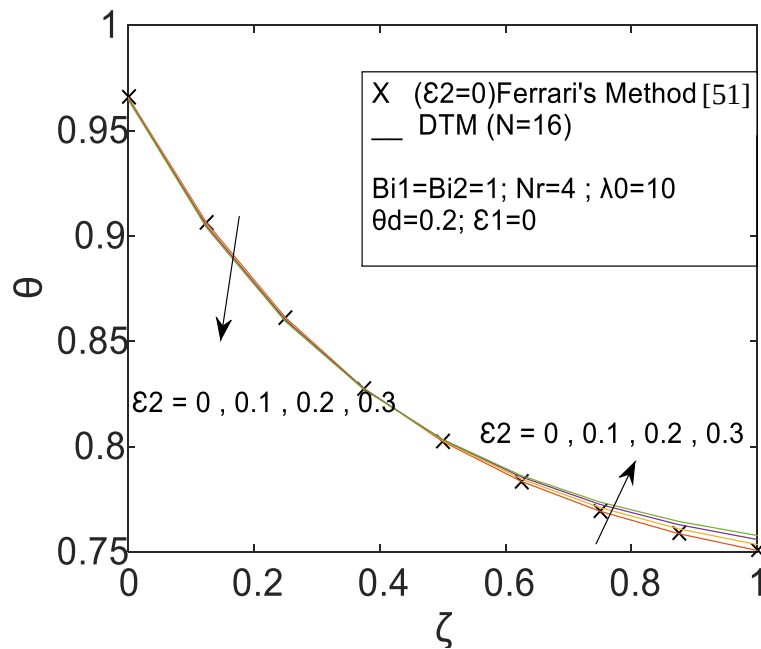


Figure. 3.2 Effet des gradients de la conductivité thermique (a) ϵ_1 et (b) ϵ_2 sur la distribution de la température.

Comme expliqué dans l'introduction, le transfert de chaleur à l'intérieur des FGMs est l'un des problèmes les plus critiques pour les moteurs à turbine à gaz. Dans ce contexte, la performance des FGMs se mesure par leur capacité à fournir une bonne isolation thermique. Ainsi, dans cette section, nous proposons de tracer le profil de température au sein de la plaque FGM et d'étudier son comportement vis-à-vis de la variation des différents paramètres.

Sur la **Figure 3.2**, il est intéressant de noter que pour de petites valeurs de ζ , la température diminue légèrement en augmentant les gradients de conductivité thermique ε_1 et ε_2 . Cependant, la température augmente remarquablement lorsque ζ devient suffisamment grand. En fait, le refroidissement et l'échauffement des températures des surfaces supérieure et inférieure respectivement, reflètent l'amélioration du transfert de chaleur à l'intérieur de la plaque. On notera également que le gradient de conductivité thermique ε_1 correspondant au matériau céramique, a un effet significatif sur le changement global de température à travers la plaque par rapport à ε_2 . D'autre part, le **Tableau 3.2** résume les valeurs quantitatives de température dans la plaque FG en utilisant différentes combinaisons de gradients de conductivité thermique ε_1 et ε_2 . On observe que la différence de température maximale entre les surfaces supérieure et inférieure est obtenue avec une conductivité thermique indépendante de la température.

Tableau. 3.2 La distribution de la température dans une plaque FGM pour différentes combinaisons des gradients de la conductivité thermique ε_1 et ε_2 .

Bi ₁ =Bi ₂ =1 ; N _r =4 ; $\lambda_0 = 10$; $\theta_d=0.2$; N = 16												
$(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$												
ζ	(0.0, 0.0)	(0.0, 0.2)	(0.0, 0.4)	(0.2, 0.0)	(0.2, 0.2)	(0.2, 0.4)	(0.4, 0.0)	(0.4, 0.2)	(0.4, 0.4)	(0.6, 0.0)	(0.6, 0.2)	(0.6, 0.4)
0,000	0,9660	0,9652	0,9643	0,9643	0,9635	0,9629	0,9630	0,9622	0,9616	0,9619	0,9612	0,9606
0,125	0,9062	0,9046	0,9028	0,9111	0,9098	0,9089	0,9152	0,9140	0,9131	0,9186	0,9175	0,9167
0,250	0,8613	0,8601	0,8585	0,8704	0,8696	0,8692	0,8779	0,8772	0,8767	0,8842	0,8835	0,8832
0,375	0,8277	0,8274	0,8264	0,8393	0,8394	0,8398	0,8489	0,8491	0,8495	0,8570	0,8572	0,8577
0,500	0,8025	0,8033	0,8032	0,8155	0,8167	0,8182	0,8264	0,8277	0,8290	0,8355	0,8369	0,8382
0,625	0,7835	0,7856	0,7864	0,7973	0,7998	0,8023	0,8088	0,8113	0,8137	0,8186	0,8211	0,8235
0,750	0,7694	0,7726	0,7743	0,7834	0,7870	0,7905	0,7952	0,7989	0,8022	0,8053	0,8089	0,8122
0,875	0,7587	0,7630	0,7654	0,7728	0,7775	0,7818	0,7846	0,7894	0,7935	0,7947	0,7995	0,8037
1,000	0,7507	0,7559	0,7591	0,7647	0,7703	0,7754	0,7764	0,7822	0,7871	0,7865	0,7922	0,7972

Tableau. 3.3 Comparaison des résultats obtenus par MEF et DTM.

Bi₁=Bi₂=1 ; N_r=4 ; λ₀ = 10 ; θ_d=0.2 ; N = 16 ; MEF (32 éléments)											
(ε₁, ε₂)		ζ									Convergence MEF
		0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1	
(0.0, 0.0)	DTM	0,9660	0,9062	0,8613	0,8277	0,8025	0,7835	0,7694	0,7587	0,7507	
	MEF	0,9660	0,9062	0,8613	0,8277	0,8025	0,7836	0,7694	0,7588	0,7508	118 itér
(0.0, 0.2)	DTM	0,9652	0,9046	0,8601	0,8274	0,8033	0,7856	0,7726	0,7630	0,7559	
	MEF	0,9655	0,9056	0,8615	0,8290	0,8051	0,7875	0,7745	0,7649	0,7578	80 itér
(0.0, 0.4)	DTM	0,9643	0,9028	0,8585	0,8264	0,8032	0,7864	0,7743	0,7654	0,7591	
	MEF	0,9652	0,9051	0,8617	0,8302	0,8074	0,7908	0,7788	0,7700	0,7637	63 itér
(0.2, 0.0)	DTM	0,9643	0,9111	0,8704	0,8393	0,8155	0,7973	0,7834	0,7728	0,7647	
	MEF	0,9650	0,9126	0,8723	0,8413	0,8175	0,7993	0,7853	0,7747	0,7666	56 itér
(0.2, 0.2)	DTM	0,9635	0,9098	0,8696	0,8394	0,8167	0,7998	0,7870	0,7775	0,7703	
	MEF	0,9645	0,9121	0,8724	0,8425	0,8200	0,8031	0,7903	0,7808	0,7736	46 itér
(0.2, 0.4)	DTM	0,9629	0,9089	0,8692	0,8398	0,8182	0,8023	0,7905	0,7818	0,7754	
	MEF	0,9641	0,9116	0,8726	0,8437	0,8222	0,8063	0,7945	0,7858	0,7794	39 itér
(0.4, 0.0)	DTM	0,963	0,9152	0,8779	0,8489	0,8264	0,8088	0,7952	0,7846	0,7764	
	MEF	0,9641	0,9176	0,8808	0,8520	0,8295	0,8119	0,7983	0,7876	0,7794	39 itér
(0.4, 0.2)	DTM	0,9622	0,9140	0,8772	0,8491	0,8277	0,8113	0,7989	0,7894	0,7822	
	MEF	0,9637	0,9170	0,8810	0,8532	0,8319	0,8156	0,8031	0,7936	0,7863	33 itér
(0.4, 0.4)	DTM	0,9616	0,9131	0,8767	0,8495	0,8290	0,8137	0,8022	0,7935	0,7871	
	MEF	0,9633	0,9166	0,8811	0,8543	0,8340	0,8187	0,8072	0,7986	0,7921	30 itér
(0.6, 0.0)	DTM	0,9619	0,9186	0,8842	0,8570	0,8355	0,8186	0,8053	0,7947	0,7865	
	MEF	0,9635	0,9214	0,8877	0,8607	0,8393	0,8224	0,8090	0,7984	0,7901	31 itér
(0.6, 0.2)	DTM	0,9612	0,9175	0,8835	0,8572	0,8369	0,8211	0,8089	0,7995	0,7922	
	MEF	0,9630	0,9209	0,8878	0,8619	0,8417	0,8259	0,8137	0,8043	0,7969	27 itér
(0.6, 0.4)	DTM	0,9606	0,9167	0,8832	0,8577	0,8382	0,8235	0,8122	0,8037	0,7972	
	MEF	0,9626	0,9205	0,8879	0,8629	0,8437	0,8289	0,8177	0,8091	0,8026	25 itér

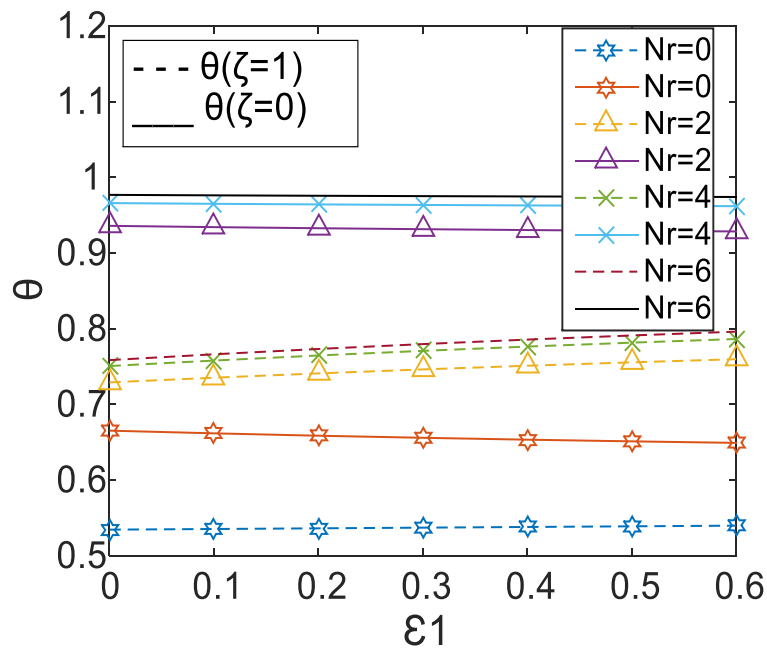
Comme prévu, la variation des températures adimensionnelles aux bords peut donner des informations suffisantes sur le transfert de chaleur à l'intérieur de la plaque. Ainsi, afin d'examiner de manière exhaustive l'effet simultané des gradients de conductivité thermique combinés aux autres paramètres intervenants (N_r, Bi₁, Bi₂, θ_d et λ₀), les températures des surfaces supérieure et inférieure sont évaluées dans les figures suivantes : **(Figures 3.3-3.7)**.

Dans la sous-section suivante, nous commençons par l'effet des différentes entités adimensionnelles N_r, Bi₁, Bi₂, θ_d et λ₀ sur l'amplitude de la température et l'effet des gradients de conductivité thermique (ε₁, ε₂) sera évoqué plus tard.

3.5.2 L'effet de N_r , Bi_1 , Bi_2 , θ_d et λ_0 sur la distribution de la température

Les effets des gradients de conductivité thermique ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$) et du paramètre de conduction-rayonnement N_r sur la température adimensionnelle des surfaces supérieure et inférieure ont été étudiés simultanément sur la **Figure 3.3**. Les résultats indiquent que l'augmentation du paramètre de conduction de rayonnement conduit à une augmentation significative de la distribution de température à l'intérieur de la plaque, et la variation devient plus progressive que lorsque le paramètre de conduction-rayonnement prend une valeur inférieure. En effet, le transfert par rayonnement à la surface supérieure devient plus important en augmentant N_r , permettant ainsi à la plaque de s'échauffer. Une observation similaire a été trouvée dans les résultats de certains travaux impliquant des problèmes de transfert de chaleur radiative [51,105].

(a)



b)

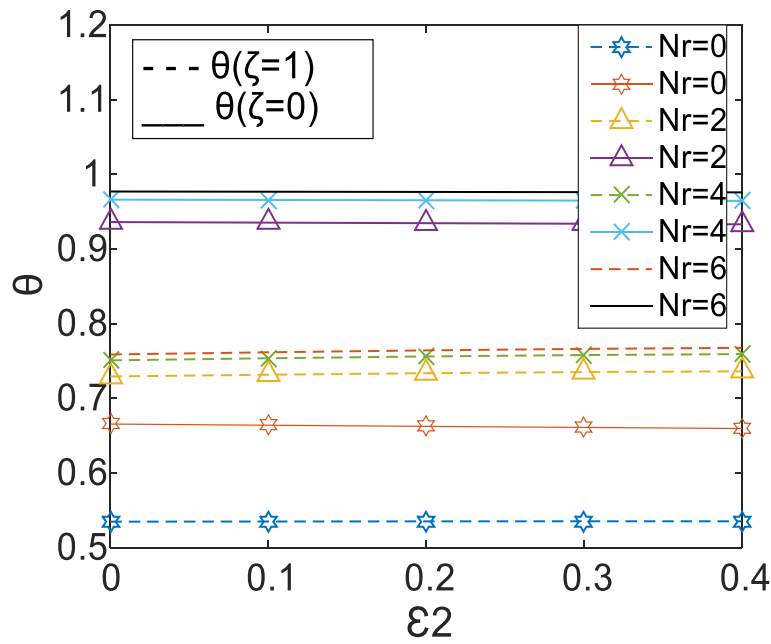
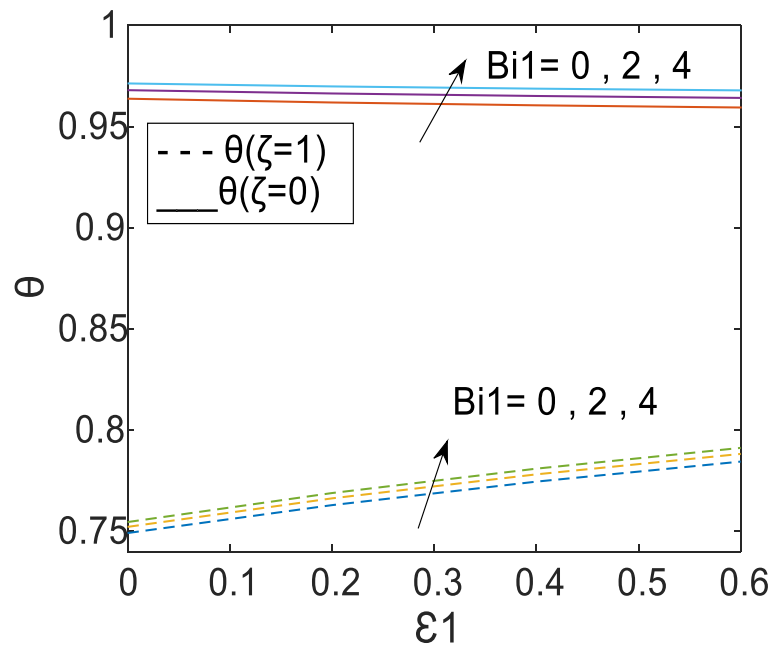


Figure. 3.3 L'effet des gradients de la conductivité thermique (a) ϵ_1 et (b) ϵ_2 sur les la température des surfaces inférieure et supérieure de la plaque pour différentes valeurs du paramètre de la radiation-conduction N_r .

Les effets des gradients de conductivité thermique (ϵ_1, ϵ_2) et des paramètres Bi_1 et Bi_2 sur la température adimensionnelle des surfaces supérieure et inférieure ont été étudiés simultanément sur les **Figures 3.4** et **3.5**. A partir de la **Figure 3.4**, on peut observer une augmentation de la distribution de température en augmentant Bi_1 . En revanche, une tendance inverse se produit en augmentant Bi_2 . La **Figure 3.5** montre une diminution de la température adimensionnelle, de manière similaire à l'effet précédent, la variation devient plus progressive que lorsque le paramètre de conduction de convection Bi_2 prend une valeur inférieure. Comme prévu sur ces figures, lorsque Bi_1 devient important, la plaque est davantage chauffée par convection par l'environnement chaud ce qui conduit à une augmentation de la température globale. Au contraire, la température globale diminue avec l'incrément de Bi_2 . Cela indique que la plaque perd de la chaleur via le processus de convection. Ainsi, là où un refroidissement est nécessaire, le Bi_1 petit et le Bi_2 élevé sont souhaités.

(a)



b)

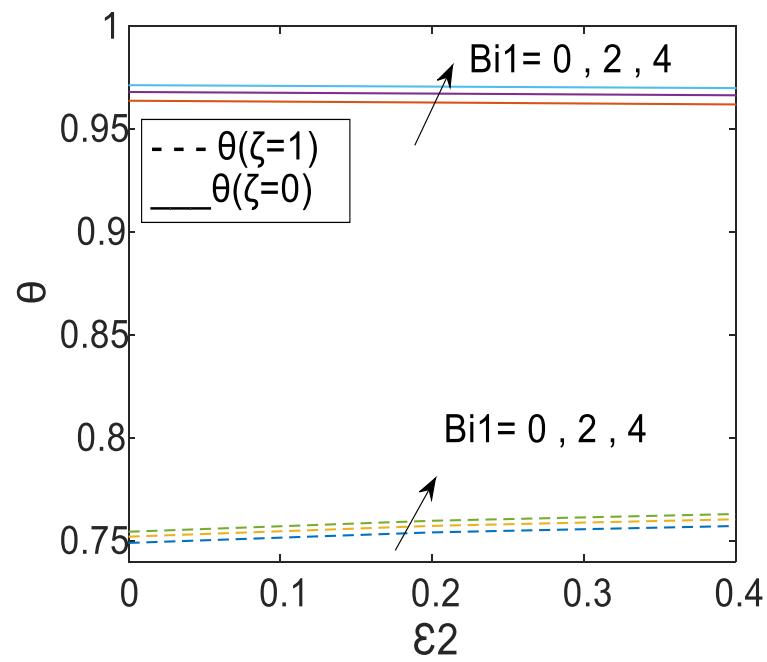
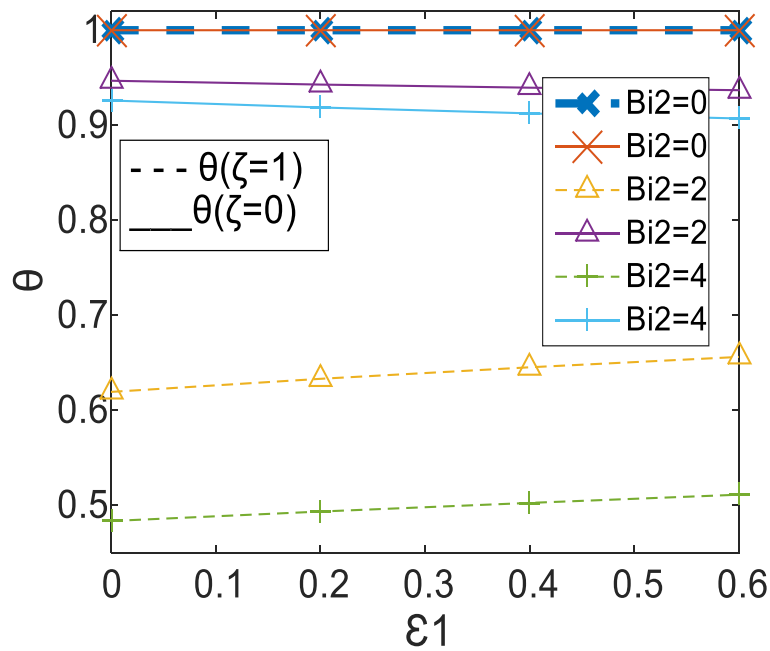


Figure. 3.4 L'effet des gradients de la conductivité thermique (a) ϵ_1 et (b) ϵ_2 sur les la température des surfaces inférieure et supérieure de la plaque pour différentes valeurs du paramètre de convection-conduction Bi_1 .

(a)



b)

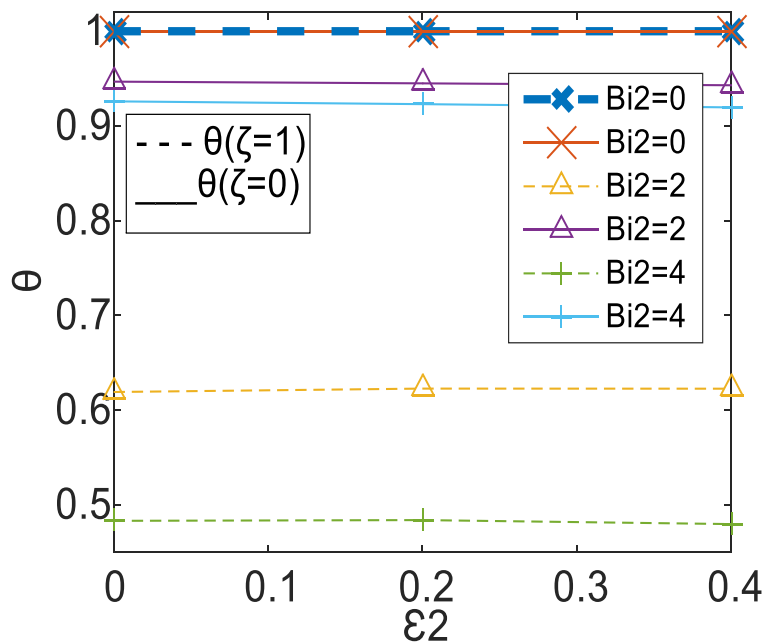


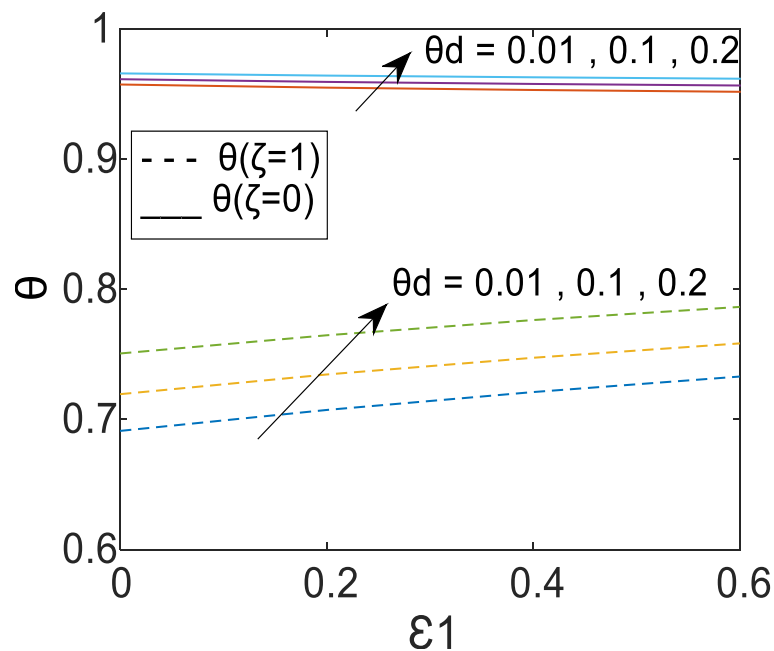
Figure. 3.5 L'effet des gradients de la conductivité thermique (a) ε_1 et (b) ε_2 sur les la température des surfaces inférieure et supérieure de la plaque pour différentes valeurs du paramètre de convection-conduction Bi_2 .

La **figure 3.6** représente les effets simultanés des gradients de conductivité thermique ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$) et de la température adimensionnelle de l'environnement froid θ_d sur la température adimensionnelle des surfaces supérieure et inférieure. Les résultats indiquent que la distribution

de température devient plus élevée avec l'augmentation de θ_d et s'accorde raisonnablement bien avec la condition aux limites mentionnée ci-dessus (**voir l'Equation (3.10)**). De cette équation, on peut déduire que l'augmentation de θ_d qui est définie comme le rapport entre la température ambiante inférieure et la température supérieure de l'environnement, conduit à minimiser la perte de chaleur à travers la surface inférieure, diminuant par conséquent le processus de refroidissement par convection.

La **Figure 3.7** montre les effets simultanés des gradients de conductivité thermique ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$) et du paramètre de conductivité thermique (ou paramètre d'inhomogénéité) λ_0 sur la température adimensionnelle des surfaces supérieure et inférieure. Les résultats montrent que lorsque λ_0 augmente, la valeur de la température de surface supérieure et inférieure diminue et augmente respectivement. À partir de l'**Equation (3.1)** définissant la conductivité thermique, la résistance thermique moyenne de la plaque FGM diminue considérablement avec une augmentation du paramètre de conductivité thermique, ce qui entraîne une amélioration du transfert de chaleur à travers la plaque FG.

(a)



b)

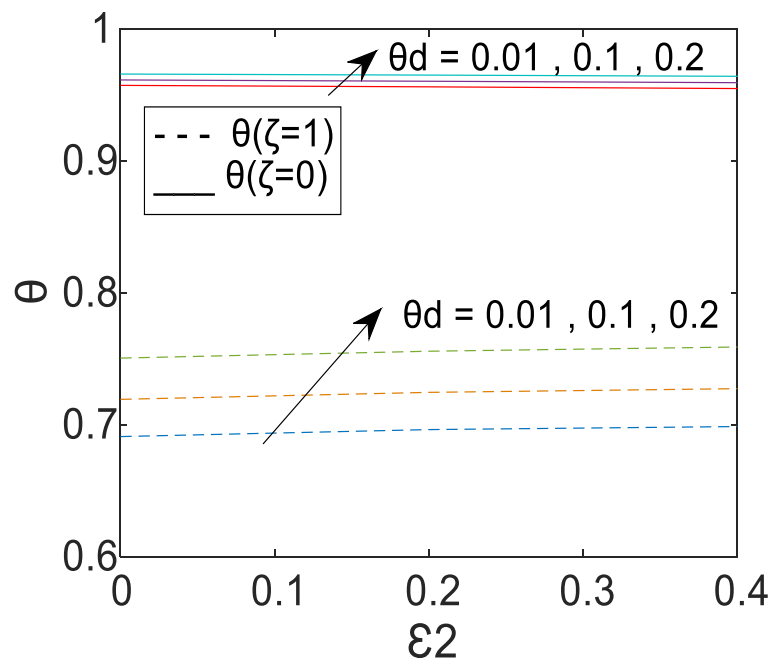
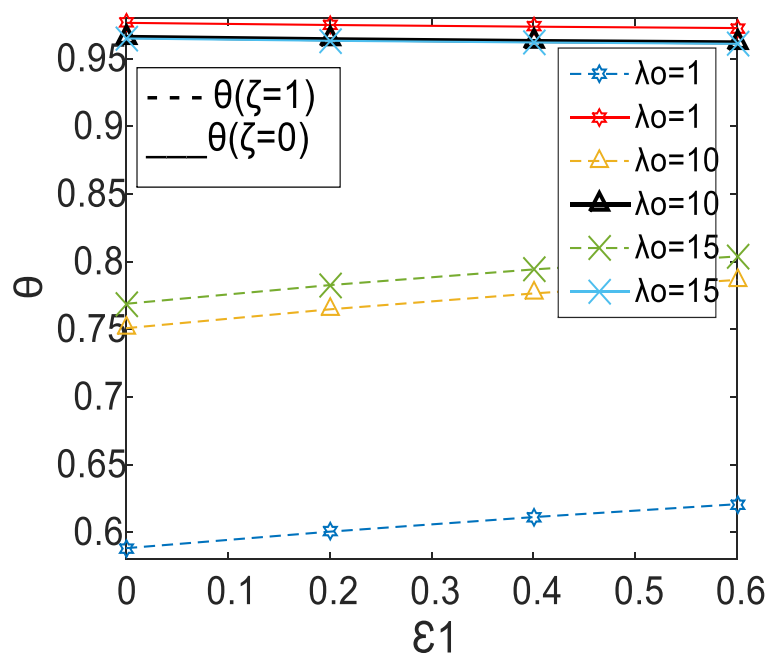


Figure. 3.6 L'effet des gradients de la conductivité thermique (a) ε_1 et (b) ε_2 sur les la température des surfaces inférieure et supérieure de la plaque pour différentes valeurs de la température de l'environnement froid θ_d .

(a)



b)

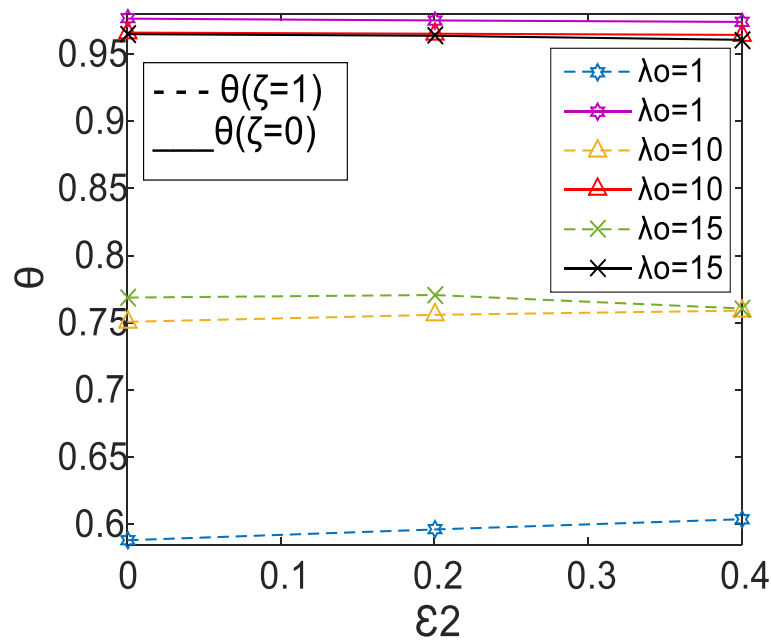


Figure. 3.7 L'effet des gradients de la conductivité thermique (a) ϵ_1 et (b) ϵ_2 sur les la température des surfaces inférieure et supérieure de la plaque pour différentes valeurs du paramètre d'inhomogénéité λ_0 .

3.5.3 L'effet de ϵ_1 et ϵ_2 sur la distribution de la température:

En plus des effets étudiés ci-dessus, on peut aussi remarquer à partir des **Figures 3.3- 3.6**, que, pour toute valeur fixe de N_r , Bi_1 , Bi_2 et θ_d , l'augmentation des gradients de conductivité thermique conduit à améliorer le transfert thermique au sein de la plaque, principalement pour ϵ_1 . Ces résultats concordent bien avec les résultats affichés dans le **Tableau 3.2**. Cela est dû au fait que lorsque le matériau devient plus conducteur, cela facilite énormément le transfert de chaleur.

Pour avoir une évaluation plus détaillée des effets des gradients de conductivité thermique et des autres paramètres sur le transfert de chaleur à travers la plaque FG, nous procédons au calcul des $\Delta\theta = \theta(0) - \theta(1)$ et des différences relatives (%) des $\Delta\theta$ sur les **Tableaux 3.4 et 3.5** tel que :

$$\% \text{ difference} = \frac{\Delta\theta(\epsilon_i = k) - \Delta\theta(\epsilon_i = 0)}{\Delta\theta(\epsilon_i = 0)} ; i = 1; 2 \text{ and } k = 0; 0.2; 0.4; 0.6 \quad (3.52)$$

Différent de tous les paramètres précédents, λ_0 montre un autre comportement concernant l'effet de l'augmentation des gradients de conductivité thermique. À partir de la **Figure 3.7a** et du **Tableau 3.4**, il est montré que pour toute valeur fixe $\lambda_0 = (5; 10; 15)$, l'augmentation du gradient de conductivité thermique ε_1 de 0 à 0,6 conduit à une amélioration du transfert de chaleur à l'intérieur de la plaque. Cependant, des résultats fascinants peuvent être extraits de la **Figure 3.7b** et du **Tableau 3.5**. En effet, l'augmentation du gradient de conductivité thermique ε_2 de 0 à 0,4 conduit à une amélioration du transfert thermique au sein de la plaque pour des valeurs $\lambda_0 = (5; 10)$.

Lorsque la valeur λ_0 est égale à 15, le transfert de chaleur à l'intérieur de la plaque augmente à mesure que le gradient de conductivité thermique ε_2 passe de 0 à 0,2. Alors que la température des surfaces supérieure et inférieure diminue avec l'augmentation du gradient de conductivité thermique ε_2 de 0,2 à 0,4. Cette diminution simultanée de la température supérieure et inférieure peut être expliquée par une amélioration du processus de refroidissement à travers la plaque FG (voir la **Figure 3.7b**). Par conséquent, on peut en conclure que le processus de refroidissement est lancé lorsque la conductivité thermique sans dimension λ_2 atteint une valeur critique $\lambda_{2_{cr}}$ correspondant à $(\lambda_0; \varepsilon_2)_{cr}$ (voir l'**Equation (3.11)**). En effet, la valeur positive du pourcentage de différence de $\Delta\theta$ (+ 2%) observée dans le **Tableau 3.5**, confirme que $\Delta\theta (\varepsilon_2 = 0,4) > \Delta\theta (\varepsilon_2 = 0)$ et révèle que le transfert de chaleur à l'intérieur de la plaque était également réduit.

Tableau. 3.4 $\Delta\theta$ et la différence relative en fonction de ε_1 et les différents paramètres.

		$\theta(0) - \theta(1)$				% difference			
		ε_1				ε_1			
		0	0,2	0,4	0,6	0	0,2	0,4	0,6
N_r	0	0,1308	0,1224	0,1154	0,1093	0,00%	-6,42%	-11,77%	-16,44%
	2	0,2069	0,1918	0,1793	0,1688	0,00%	-7,30%	-13,34%	-18,41%
	4	0,2153	0,1996	0,1866	0,1754	0,00%	-7,29%	-13,33%	-18,53%
	6	0,2183	0,2024	0,1891	0,1779	0,00%	-7,28%	-13,38%	-18,51%
Bi_1	0	0,2147	0,1990	0,1860	0,1750	0,00%	-7,31%	-13,37%	-18,49%
	2	0,2158	0,2000	0,1870	0,1760	0,00%	-7,32%	-13,35%	-18,44%
	4	0,2168	0,2009	0,1878	0,1767	0,00%	-7,29%	-13,36%	-18,49%
Bi_2	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
	2	0,3276	0,3099	0,2944	0,2809	0,00%	-5,40%	-10,13%	-14,26%
	4	0,4428	0,4255	0,4101	0,3962	0,00%	-3,91%	-7,38%	-10,52%
θ_d	0,01	0,2662	0,2477	0,2321	0,2188	0,00%	-6,95%	-12,81%	-17,81%
	0,1	0,2421	0,2249	0,2105	0,1982	0,00%	-7,10%	-13,05%	-18,13%
	0,2	0,2153	0,1996	0,1866	0,1754	0,00%	-7,29%	-13,33%	-18,53%

	1	0,3882	0,3744	0,3624	0,3518	0,00%	-3,55%	-6,65%	-9,37%
λ_0	10	0,2153	0,1996	0,1865	0,1755	0,00%	-7,29%	-13,36%	-18,48%
	15	0,1960	0,1806	0,1677	0,1571	0,00%	-7,90%	-14,45%	-19,86%

Tableau. 3.5 $\Delta\theta$ et la différence relative en fonction de ε_2 et les différents paramètres.

		$\theta(0) - \theta(1)$			% difference		
		ε_2			ε_2		
		0	0,2	0,4	0	0,2	0,4
N_r	0	0,1308	0,1273	0,1243	0,00%	-2,69%	-4,95%
	2	0,2068	0,2010	0,1969	0,00%	-2,82%	-4,80%
	4	0,2153	0,2093	0,2052	0,00%	-2,79%	-4,66%
	6	0,2183	0,2123	0,2083	0,00%	-2,78%	-4,61%
Bi_1	0	0,2146	0,2086	0,2046	0,00%	-2,79%	-4,67%
	2	0,2158	0,2098	0,2058	0,00%	-2,79%	-4,65%
	4	0,2168	0,2107	0,2067	0,00%	-2,79%	-4,63%
Bi_2	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,00%	0,00%	0,00%
	2	0,3276	0,3222	0,3203	0,00%	-1,65%	-2,23%
	4	0,4428	0,4391	0,4398	0,00%	-0,84%	-0,67%
θ_d	0,01	0,2662	0,2598	0,2562	0,00%	-2,40%	-3,76%
	0,1	0,2421	0,2358	0,2319	0,00%	-2,60%	-4,20%
	0,2	0,2153	0,2093	0,2052	0,00%	-2,79%	-4,69%
λ_0	1	0,3882	0,3789	0,3702	0,00%	-2,40%	-4,65%
	10	0,2153	0,2093	0,2052	0,00%	-2,79%	-4,66%
	15	0,1960	0,1929	0,2000	0,00%	-1,58%	+2,00%

Enfin, en choisissant $T_u = 2000$ ° C (température du milieu chaud), les valeurs de température T sont obtenues en multipliant les températures adimensionnelles θ par 2000. Si l'on regarde les résultats des **Figures 3.3-3.7** et du **Tableau 3.3**, la température de la surface métallique ($\zeta = 1$) est la plus affectée, et une grande partie de cette influence provient de l'effet de ε_1 . D'une part, si l'on prend l'exemple de la **Figure 3.3a**, une augmentation de la température adimensionnelle de l'ordre de 0.04 (ce qui équivaut à 80 ° C) est notée à la surface du métal lorsque ε_1 passe de 0 à 0.6 (avec $N_r = (2; 4; 6)$). D'autre part, bien que l'effet de ε_2 sur la température de la surface métallique puisse paraître négligeable dans certains cas (voir figures 3b et 5b), il peut produire plus de 14 ° C de différence dans d'autres cas (voir **Figures 3.4b** et **3.6b**). D'autres exemples sont présentés dans le **Tableau 3.3**. En fait, la température de la surface métallique ($\zeta = 1$) augmente de 1501,4 ° C, lorsque $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.0$, à 1594,4 ° C, lorsque $\varepsilon_1 = 0.6$ et $\varepsilon_2 = 0.4$, ce qui fait une différence d'environ 93 ° C (soit 6% relative). Les résultats obtenus montrent que

la dépendance à la température de la conductivité thermique a un effet insignifiant avec des différences relatives ne dépassant pas 6%.

3.6 Conclusion :

Cette étude du transfert thermique a été menée pour des plaques FGM dont la composition suit une loi exponentielle et avec des conditions aux limites convectives-radiatives.

Nous signalons que d'après ce qui existe déjà dans la littérature, c'est pour la première fois que nous avons réussi à rapporter et à implémenter la DTM pour le problème de transfert de chaleur non linéaire stationnaire impliquant une non-linéarité aussi complexe. La méthode de Ferrari a été utilisée et considérée comme une solution exacte pour vérifier la validité de cette méthode dans le cas où la conductivité ne dépend pas de la température, tandis que la méthode des éléments finis a été utilisée dans le cas où la température influence la conductivité thermique. Les résultats indiquent que cette dépendance à la température montre un effet mineur sur la solution. L'ensemble du travail peut servir de référence pour le processus de conception et pour d'autres recherches basées sur des solutions analytiques de distribution de température dans des plaques FG avec des propriétés dépendant de la température. Sur la base des résultats, les conclusions peuvent être résumées comme suit:

- ❖ L'augmentation du paramètre de conduction de rayonnement conduit à une augmentation significative de la distribution de la température à l'intérieur de la plaque FG.
- ❖ Lorsque Bi_1 devient important, la plaque FG est plus chauffée par convection par l'environnement chaud, tandis que la diminution de la distribution de température en augmentant Bi_2 s'explique par la perte de chaleur via le processus de convection.
- ❖ L'augmentation de θ_d conduit à minimiser la perte de chaleur à travers la surface inférieure. Ainsi, le processus de refroidissement par convection est diminué.
- ❖ La résistance thermique moyenne de la plaque FG diminue considérablement avec une augmentation du paramètre de conductivité thermique λ_0 , ce qui se traduit par une amélioration du transfert de chaleur à travers la plaque FG.
- ❖ L'augmentation des gradients de conductivité thermique conduit à une amélioration du transfert thermique au sein de la plaque, principalement pour ϵ_1 .
- ❖ Pour un gradient de conductivité thermique critique ϵ_2 , l'augmentation du paramètre de conductivité thermique peut provoquer un processus de refroidissement à travers la plaque.

Chapitre 4. Flambement et post-flambement thermique des plaques

FGM

4.1 Introduction :

Comme il a été précédemment introduit dans l'introduction générale. Les revêtements barrières thermiques ont été conçus pour protéger les alliages métalliques dans les applications aéronautiques contre les élévations de la température. Toutefois, la résistance thermique n'est pas le seul souci lors du choix des céramiques dans les barrières thermiques.

Le rôle du revêtement permet aussi de fournir des structures FG qui résistent face aux mécanismes de défaillance causés par les sels fondus tels que la corrosion et l'effet CMAS ($\text{CaO-MgO-Al}_2\text{O}_3\text{-SiO}_2$) en particulier dans les avions et la marine [106-108]. L'étude du flambement thermique des plaques FG revêtues soumises à une élévation de température non linéaire n'a pas été étudiée auparavant. Par conséquent, la première partie de ce chapitre développe ce problème. Dans cette partie, deux types de champs de température non linéaires sont étudiés : une loi de puissance et une loi sinusoïdale. La composition est censée être graduée suivant une loi de puissance dans le sens de l'épaisseur de la plaque FGM et les conditions thermiques aux bords sont prises de type Dirichlet.

La seconde partie fera l'objet d'une comparaison critique entre la modélisation du phénomène du flambement avec des conditions thermiques aux bords de type Dirichlet et la modélisation avec des conditions thermiques radiative convective aux bords. Pour cette fin, on considère que composition graduelle de la plaque FGM suit une loi exponentielle dans le sens de l'épaisseur.

Dans les deux parties, nous suivrons la stratégie de résolution décrite dans le 1er chapitre. A partir des équations directrices : d'équilibre et de compatibilité, et les solutions analytiques du transfert de chaleur obtenues dans les chapitres 2 et 3, nous développerons une solution analytique qui permet de suivre les positions d'équilibre lors du flambement.

Les équations directrices seront établies en tenant compte des imperfections géométriques et les non-linéarités géométriques ont été modélisées à l'aide des hypothèses de Von Karman grandes déformations avec le tenseur de Green Lagrange. Les plaques sont supposées être simplement appuyées sur des bords qui sont radicalement immobiles. Les solutions doivent satisfaire les conditions aux limites et la méthode de Galerkin sera adoptée pour obtenir les expressions explicites des relations température-déflexion. Les chemins d'équilibre seront alors construits et une analyse sera effectuée sur l'effet des différents paramètres sur le comportement de flambement thermique. Il s'agit des effets comme le rapport d'épaisseur de revêtement, le type d'élévation de température, la taille de l'imperfection géométrique, les

gradients de conductivités thermiques, le rapport entre les températures des milieux chaud/froid et le type des conditions thermiques aux bords.

4.2 Formulation mathématique :

Dans ce dernier chapitre, nous considérons des plaques FGM minces géométriquement imparfaites. La théorie classique des plaques avec grandes déformation définie dans la stratégie de résolution détaillée dans chapitre 1 a été adoptée.

D'après le premier chapitre, deux équation gouvernent le phénomène du flambement/ post-flambement de la plaque FGM. Ces deux **Equations (1.128) et (1.130)** s'écrivent :

$$D\nabla^4 w - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} \right) \right] = 0 \quad (4.1)$$

$$E_0 \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \right] - \left[\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right] = 0 \quad (4.2)$$

Compte tenu des conditions aux limites d'appuis simples considérées, la deuxième **Equation (4.2)** appelée de compatibilité admet une solution de la forme :

$$w = W \sin(\lambda x) \sin(\beta y) \quad (4.3)$$

$$w^* = \mu h \sin(\lambda x) \sin(\beta y) \quad (4.4)$$

$$\lambda = \frac{n\pi}{a}; \beta = \frac{m\pi}{b} \text{ et } m, n = 1; 2; 3 \dots \quad (4.5)$$

$$f = f_1 \cos(2\lambda x) + f_2 \cos(2\beta y) + f_3 \sin(2\lambda x) \sin(2\beta y) + f_4 \cos(2\lambda x) \cos(2\beta y) + \frac{1}{2} N_{x0} x^2 + \frac{1}{2} N_{y0} y^2 \quad (4.6)$$

Avec :

$$f_1 = E_0 \frac{\beta^2}{32\lambda^2} W[W + 2\mu h] \quad (4.7)$$

$$f_2 = E_0 \frac{\lambda^2}{32\beta^2} W[W + 2\mu h] \quad (4.8)$$

$$f_3 = f_4 = 0 \quad (4.9)$$

L'application de la méthode de Galerkin sur la deuxième équation dite d'équilibre permet de déduire les contraintes de compression nécessaire pour garder les arrêtes immobiles ($u = 0$ (sur $x = 0, a$) et $v = 0$ (sur $y = 0, b$)) :

$$N_{x0} = \frac{E_1}{8(1-\nu^2)}(\lambda^2 + \nu\beta^2)(W + 2\mu h)W + \frac{4E_2}{ab(1-\nu^2)}\left(\frac{\lambda^2 + \nu\beta^2}{\lambda\beta}\right)W - \frac{\Phi_1}{1-\nu} \quad (4.10)$$

$$N_{y0} = \frac{E_1}{8(1-\nu^2)}(\beta^2 + \nu\lambda^2)(W + 2\mu h)W + \frac{4E_2}{ab(1-\nu^2)}\left(\frac{\beta^2 + \nu\lambda^2}{\lambda\beta}\right)W - \frac{\Phi_1}{1-\nu} \quad (4.11)$$

L'introduction de des expressions des contraintes de compression dans l'équation d'équilibre permet de déduire la charge thermique :

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & \frac{h\pi i^2 \bar{D} \left(n^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + m^2 \right) (1-\nu)}{\left(\frac{b}{h} \right)^2} \frac{W_h}{W_h + \mu} \\ & + \bar{E}_1 \frac{h\pi i^2 \left[(3-\nu^2) \left(n^4 \left(\frac{b}{a} \right)^4 + m^4 \right) + 4\nu \left(\frac{b}{a} \right)^2 n^2 m^2 \right]}{16(1+\nu) \left(\frac{b}{h} \right)^2 \left(n^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + m^2 \right)} W_h (W_h + 2\mu) \\ & + 4\bar{E}_2 \frac{h \left(n^4 \left(\frac{b}{a} \right)^4 + m^4 + 2\nu n^2 m^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right)}{mn \left(\frac{b}{h} \right)^2 (1+\nu) \left(n^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + m^2 \right)} W_h \end{aligned} \quad (4.12)$$

Où:

$$W_h = \frac{W}{h} \quad ; \quad \bar{E}_1 = \frac{E_1}{h} \quad ; \quad \bar{E}_2 = \frac{E_2}{h^2} \quad and \quad \bar{D} = \frac{D}{h^2} \quad (4.13)$$

$$D(\lambda^2 + \beta^2)W + [2\lambda^2\beta^2(f_1 + f_2) + \lambda^2 N_{x0} + \beta^2 N_{y0}](W + \mu h) = 0 \quad (4.14)$$

Avec :

$$N_{x0} = \frac{E_1}{8(1-\nu^2)} (\lambda^2 + \nu\beta^2)(W + 2\mu h)W + \frac{4E_2}{ab(1-\nu^2)} \left(\frac{\lambda^2 + \nu\beta^2}{\lambda\beta} \right) W - \frac{\Phi_1}{1-\nu} \quad (4.15)$$

$$N_{y0} = \frac{E_1}{8(1-\nu^2)} (\beta^2 + \nu\lambda^2)(W + 2\mu h)W + \frac{4E_2}{ab(1-\nu^2)} \left(\frac{\beta^2 + \nu\lambda^2}{\lambda\beta} \right) W - \frac{\Phi_1}{1-\nu} \quad (4.16)$$

La forme explicite des chemins d'équilibre peut être déduite en combinant l'expression de la charge exprimée par l'Equation (4.12) et sa définition :

$$\Phi_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z)\alpha(z)\Delta T(z)dz \quad (4.17)$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z)\alpha(z)\Delta T(z)dz \\ &= \frac{h\pi^2 \bar{D} \left(n^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + m^2 \right) (1-\nu)}{\left(\frac{b}{h} \right)^2} \frac{W_h}{W_h + \mu} \\ &+ \bar{E}_1 \frac{h\pi^2 \left[(3-\nu^2) \left(n^4 \left(\frac{b}{a} \right)^4 + m^4 \right) + 4\nu \left(\frac{b}{a} \right)^2 n^2 m^2 \right]}{16(1+\nu) \left(\frac{b}{h} \right)^2 \left(n^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + m^2 \right)} W_h (W_h + 2\mu) \\ &+ 4\bar{E}_2 \frac{h \left(n^4 \left(\frac{b}{a} \right)^4 + m^4 + 2\nu n^2 m^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right)}{mn \left(\frac{b}{h} \right)^2 (1+\nu) \left(n^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + m^2 \right)} W_h \end{aligned} \quad (4.18)$$

Cette expression est générale et permet de déduire les chemins d'équilibre en pré-flambement et post-flambement pour chaque type d'élévation de la température considéré.

4.3 Plaque FGM revêtue ayant des propriétés physiques suivant une loi de puissance :

4.3.1 Elévation de température suivant la loi de puissance :

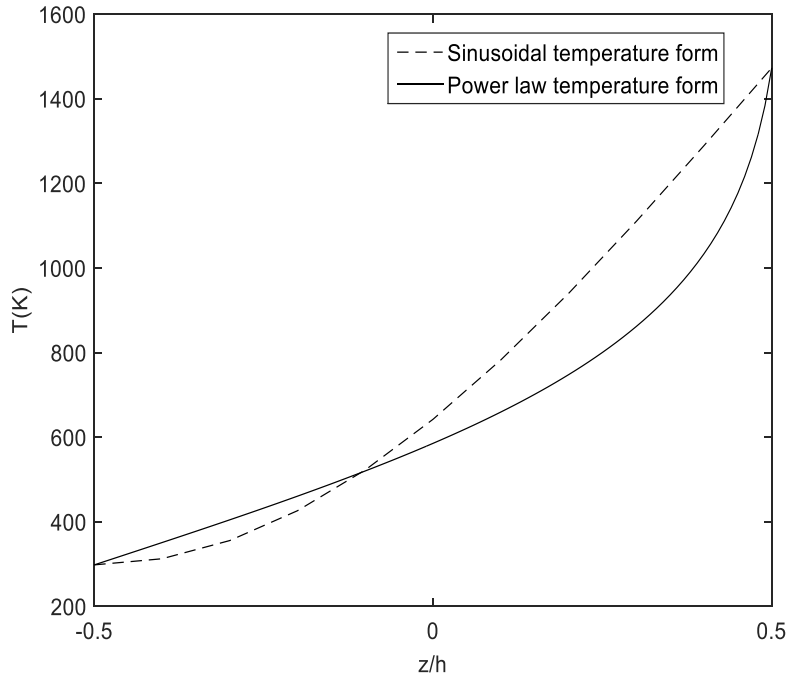


Figure. 4.1 Profils de température Sinusoïdal et de loi de puissance (p=2) pour une plaque FGM.

La température initiale dans l'épaisseur de la plaque est supposée être uniforme telle que $T_i = T_m$.

Nous adoptons une augmentation de la température suivant l'**Equation (4.19)** avec p=2. Le profil de la température est tracé sur la **Figure 4.19**.

Ce profil a été trouvé comme solution de l'équation de la chaleur dans une plaque FGM (voir l'**Equation (2.23)**):

$$T(z) = T_m + (T_c - T_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right) \frac{\sum_{i=0}^{inf} (-1)^i \frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{ip} \left(\frac{k_{cm}}{k_m} \right)^i}{ip + 1}}{\sum_{i=0}^{inf} (-1)^i \frac{\left(\frac{k_{cm}}{k_m} \right)^i}{ip + 1}} \quad (4.19)$$

Sachant que :

$$\Delta T(z) = T(z) - T_i \quad (4.20)$$

Lorsque l'expression de la température **Equation (4.19)** est substituée dans l'**Equation (4.17)**, puis en combinant les **Equations (4.17)** et **(4.18)**, le chemin d'équilibre température-déflexion est obtenu grâce à l'expression de (ΔT_{cp}) :

L'indice « cp » accordé à ΔT indique *chemin d'équilibre* dans le cas d'une élévation de la température qui suit une loi de *puissance*.

$$\Delta T_{cp} = \left[\frac{\pi^2 \bar{D} \left(n^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + m^2 \right) (1 - \nu) \frac{W_h}{\left(\frac{b}{h} \right)^2 W_h + \mu} + \pi^2 \left[(3 - \nu^2) \left(n^4 \left(\frac{b}{a} \right)^4 + m^4 \right) + 4\nu \left(\frac{b}{a} \right)^2 n^2 m^2 \right]}{16(1 + \nu) \left(\frac{b}{h} \right)^2 \left(n^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + m^2 \right)} \right] * \frac{hS}{(h - h_c)(Q + R)} \quad (4.21)$$

$$+ \frac{4\bar{E}_2 \frac{W_h(W_h + 2\mu) + \left(n^4 \left(\frac{b}{a} \right)^4 + m^4 + 2\nu n^2 m^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right)}{mn \left(\frac{b}{h} \right)^2 (1 + \nu) \left(n^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + m^2 \right)} W_h}{1}$$

Avec:

$$Q = \sum_{i=0}^5 \frac{\left(\frac{h - h_c}{h} \right)^{ip+1} \left(-\frac{k_{cm}}{k_m} \right)^i}{ip + 1} * \left[\frac{\frac{\alpha_m E_m \left(\frac{h - h_c}{h} \right)^{ip+1}}{ip + 2} + \frac{\alpha_{cm} E_m + \alpha_m E_{cm} \left(\frac{h - h_c}{h} \right)^{(i+1)p+2}}{(i + 1)p + 2} + \frac{\alpha_{cm} E_{cm} \left(\frac{h - h_c}{h} \right)^{(i+2)p+2}}{(i + 2)p + 2} \right] \quad (4.22)$$

$$R = \alpha_c E_c \sum_{i=0}^5 \frac{\left(\frac{h - h_c}{h} \right)^{ip+1} \left(-\frac{k_{cm}}{k_m} \right)^i}{(ip + 1)(ip + 2)} \left[1 - \left(\frac{h - h_c}{h} \right)^{ip+2} \right] \quad (4.23)$$

et

$$S = \sum_{i=0}^5 (-1)^i \frac{\left(\frac{k_{cm}}{k_m} \right)^i}{ip + 1} \quad (4.24)$$

4.3.2 Elévation de température suivant une loi sinusoïdale :

Dans ce cas, on suppose que le profil final de la température est défini comme (voir **Figure 4.1**) [109]:

$$T(z) = T_m + (T_c - T_m) \left[1 - \cos \left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (4.25)$$

Similairement au cas précédent, on pose $T_i = T_m$. Le chemin d'équilibre température-déflexion est obtenu en substituant l'**Equation (4.25)** dans **(4.17)**, puis en combinant les **Equations (4.17), (4.18)** :

$$\Delta T_{cs} = \left[\begin{aligned} & \frac{\pi^2 \bar{D} \left(n^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + m^2 \right) (1 - \nu)}{\left(\frac{b}{h} \right)^2} \frac{W_h}{W_h + \mu} + \\ & \frac{\pi^2 \left[(3 - \nu^2) \left(n^4 \left(\frac{b}{a} \right)^4 + m^4 \right) + 4\nu \left(\frac{b}{a} \right)^2 n^2 m^2 \right]}{16(1 + \nu) \left(\frac{b}{h} \right)^2 \left(n^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + m^2 \right)} \frac{hF}{h - h_c} \\ & \frac{W_h(W_h + 2\mu) + \left(n^4 \left(\frac{b}{a} \right)^4 + m^4 + 2\nu n^2 m^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right)}{4\bar{E}_2 \frac{mn \left(\frac{b}{h} \right)^2 (1 + \nu) \left(n^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + m^2 \right)} W_h \end{aligned} \right] \quad (4.26)$$

Avec:

$$\begin{aligned} F = & \left(E_m \alpha_m \left(\frac{h - h_c}{h} \right) + \frac{(E_m \alpha_{cm} + E_{cm} \alpha_m) \left(\frac{h - h_c}{h} \right)^{p+1}}{p + 1} + \frac{E_{cm} \alpha_{cm} \left(\frac{h - h_c}{h} \right)^{2p+1}}{2p + 1} \right) \\ & + E_c \alpha_c \left(\frac{h_c}{h} - I_{00} \right) \\ & - (E_m \alpha_m I_0 + (E_{cm} \alpha_m + E_m \alpha_{cm}) I_1 + E_{cm} \alpha_{cm} I_2) \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$I_{00} = \int_{1-\frac{h_c}{h}}^1 \cos \left(\pi \left(\frac{h - h_c}{2h} \right) z \right) dz \quad (4.28)$$

et

$$I_i = \int_0^{1-\frac{h_c}{h}} \cos \left(\pi \left(\frac{h - h_c}{2h} \right) z \right) z^{ip} dz \quad ; \quad j = (0; 1; 2) \quad (4.29)$$

Note : L'indice « cs » accordé à ΔT indique *chemin d'équilibre* dans le cas d'une élévation *sinusoïdale* de la température.

4.3.3 Résultats et discussion:

4.3.3.1 Validation:

Afin d'illustrer davantage la précision des résultats obtenus, une étude de comparaison est réalisée pour le flambement en température critique avec les résultats donnés dans la littérature. Les résultats obtenus dans le cas où la température suit la loi de puissance sont comparés à ceux prédits par [79]. Lorsque $h_c \rightarrow 0$ dans les **Equations (4.26-4.29)**, la température critique de flambement et le chemin d'équilibre température-déflexion de la plaque FGM non revêtue sont obtenus. La plaque est constituée d'un mélange du métal (aluminium) et de la céramique (alumine), dont les propriétés sont considérées comme:

$$\begin{aligned} E_m &= 70 \text{ GPa} ; \alpha_m = 23 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} ; k_m = 204 \text{ W/mK} \\ E_c &= 380 \text{ GPa} ; \alpha_c = 7,4 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} ; k_c = 10,4 \frac{\text{W}}{\text{m}} \text{K} ; \nu_m = \nu_c = 0.3 \end{aligned} \quad (4.30)$$

Les données ont été tirées des études [79, 43, 44]. Les mêmes propriétés sont utilisées dans le reste de ce travail.

La **Figure 4.2** représente une comparaison des résultats obtenus avec ceux prédits par [79]. Cette figure indique clairement que les résultats sont en bon accord.

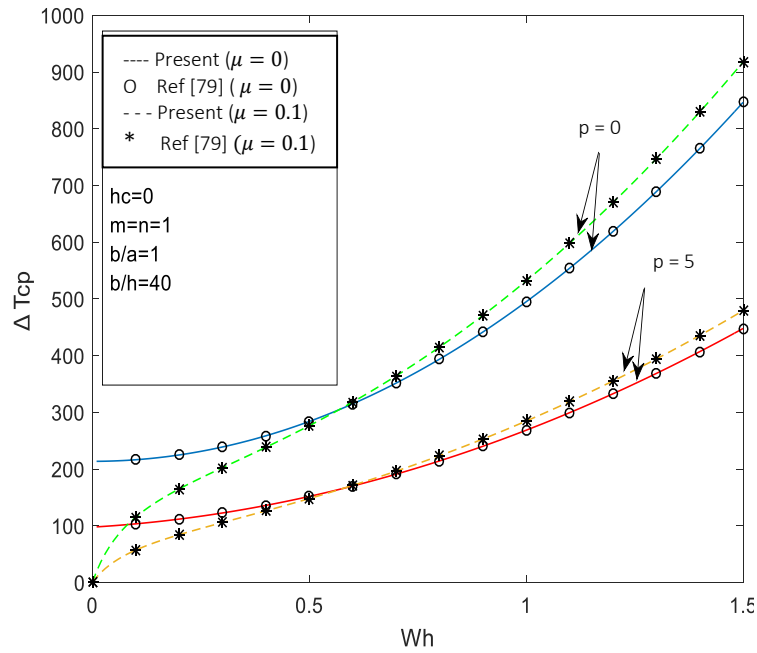


Figure. 4.2 Comparaison des courbes température-déflexion centrale pour des plaques FGM parfaites et imparfaites sans revêtement.

Dans la section suivante, nous discuterons l'effet des différents paramètres sur le comportement en pré flambement, flambement et post-flambement thermique des plaques FGM revêtues ou pas, soumise à deux types d'échauffement (loi de puissance et sinusoïdale).

4.3.3.2 Effet de l'épaisseur du revêtement :

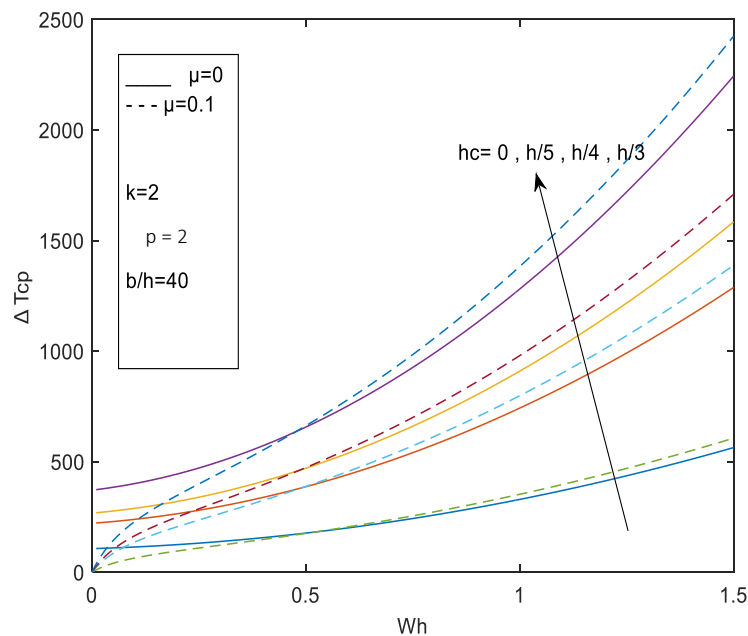
La **Figure 4.3** représente l'effet de l'épaisseur du revêtement sur le flambage des plaques FGM avec et sans présence d'imperfections géométriques. Quatre valeurs de h_c sont considérées $h_c = (0; h/5; h/4; h/3)$. Les **Figures 4.3a** et **4.3b** présentent les résultats de l'élévation de la température suivant la loi de puissance et sinusoïdale respectivement. En absence d'imperfections géométriques, l'état en pré flambement se manifeste sans déformation, la température critique de flambement est un point de bifurcation stable, puisqu'après ce point, la courbe suit un chemin bifurqué stable.

En présence d'imperfections géométriques, on voit la plaque suivre le chemin d'équilibre et ne jamais atteindre le point de bifurcation. Ce comportement est observé dans toutes les parties concernant cette présente étude, quand les conditions thermiques sont de type Dirichlet.

D'après les courbes, nous constatons que la température critique de flambement augmente en augmentant l'épaisseur du revêtement céramique h_c .

En addition, au cours du post flambement nous pouvons parler de l'existence de deux domaines. En effet, pour une élévation de température donnée, quand la déflexion w est inférieure à une valeur proche de la moitié de l'épaisseur de la plaque (par exemple $w < 0.5h$ quand $h_c=0$ et $w < 0.4h$ quand $h_c=h/3$), les plaques imparfaites atteignent des déflexions supérieures à celles des plaques parfaites, contrairement au deuxième domaine ; lorsque les déflexions sont suffisamment larges. Les courbes montrent aussi que la différence entre les chemins d'équilibre des plaques d'épaisseurs différentes devient plus grande en progressant dans le post flambement. Par ailleurs, lorsque $p=2$, la plaque se déforme moins lorsqu'elle est soumise à un échauffement sinusoïdal que lorsqu'elle est soumise à un échauffement qui suit la loi de puissance.

(a)



(b)

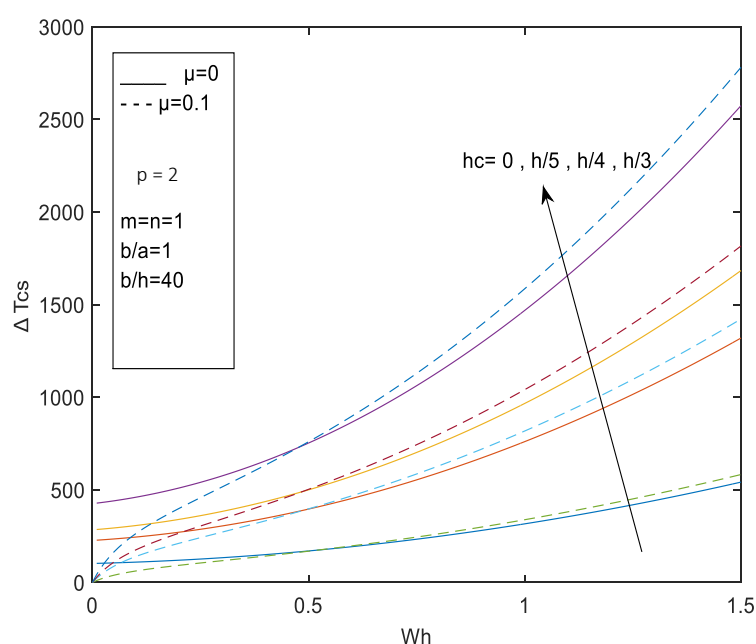
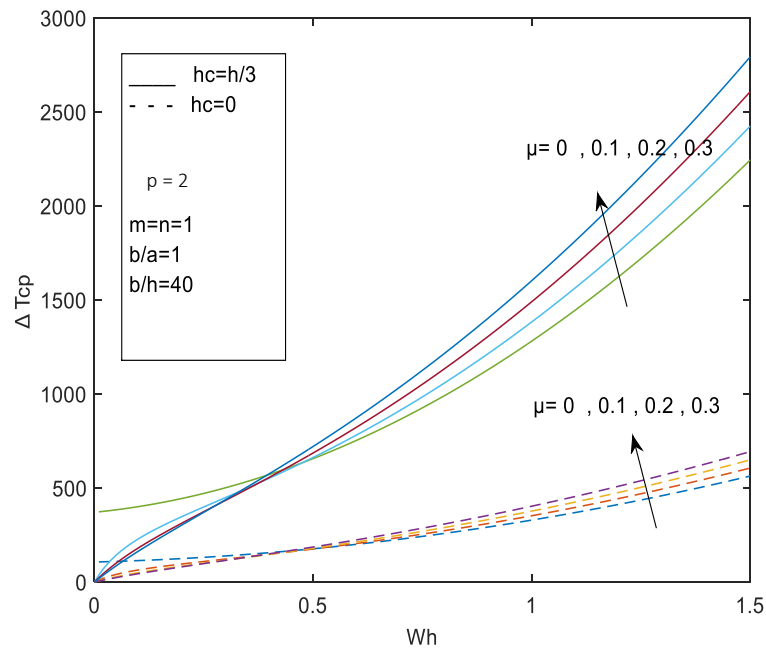


Figure. 4.3 Effet de l'épaisseur du revêtement sur les courbes d'équilibre de la plaque:
(a) loi de puissance, (b) loi sinusoïdale.

4.3.3.3 Effet de la taille des imperfections

La **Figure 4.4** représente l'effet de la taille des imperfections μ sur le comportement en flambement. Les **Figures 4.4a** et **4.4b** concernent les plaques FGM revêtues et non revêtues soumises respectivement à des élévations de température suivant les lois de puissance et sinusoïdale respectivement. Dans les deux cas de chargement thermique, lorsque la déflexion est faible (c-à-d $w < 0.5h$ quand la plaque est non revêtue : « $hc=0$ » / $w < 0.4h$ pour la plaque revêtue avec un revêtement d'épaisseur : « $hc=h/3$ »), l'apport de chaleur nécessaire pour que la plaque ait la même déflexion, diminue en augmentant la taille des imperfections. En d'autres termes, la plaque perd la résistance à la déformation par flambement en augmentant la taille de l'imperfection initiale. Cependant, une réponse opposée est constatée lorsque la déflexion devient suffisamment grande ($w > 0.5h$ / $w > 0.4h$).

(a)



(b)

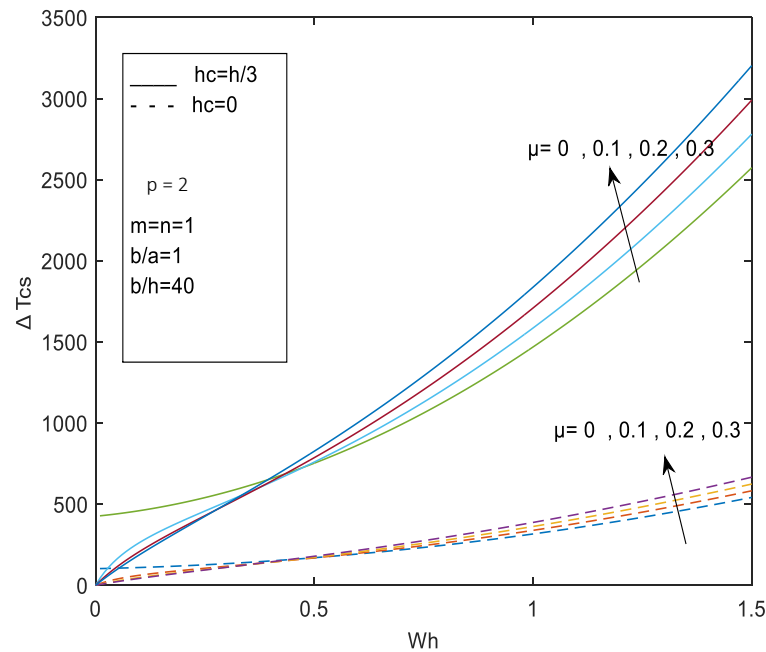


Figure. 4.4 Effet de la taille des imperfections sur les courbes d'équilibre de la plaque:
(a) loi de puissance, (b) loi sinusoïdale.

4.3.3.4 Effet de l'indice de loi de puissance

Lorsque la plaque FGM revêtue est soumise à un échauffement qui suit la loi de puissance (voir **Figure 4.5**), les courbes température-déflexion révèlent l'existence d'une plage d'indices de loi de puissance critique correspondant à une zone intéressante où les déflexions sont moindres.

Les indices associés vont de $p=0.4$ à $p=1$, ce domaine caractérise les plaques FGM riche en céramique. D'après les courbes, il faut apporter plus de chaleur à la plaque FGM revêtue pour qu'elle ait la même déflexion d'une plaque homogène revêtue. L'indice k est d'une grande importance, et il existe une valeur optimale qui offre aux plaques plus résistantes face au flambement et aux déformations en post flambement. La **Figure 4.6** permet d'illustrer les valeurs optimales obtenues pour des plaques FGM sans et avec des revêtements de différentes épaisseurs h_c .

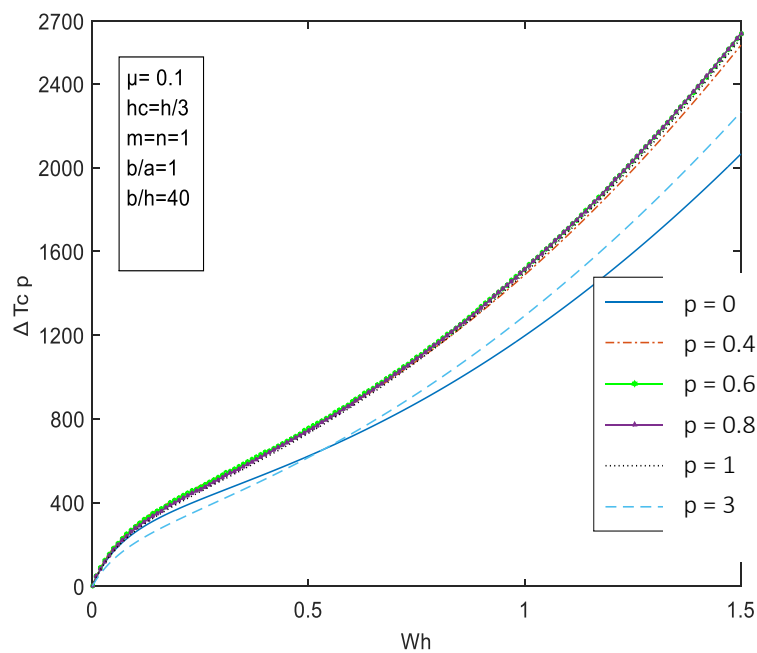


Figure. 4.5 Effet de l'indice de puissance sur les courbes d'équilibre de la plaque FGM revêtue soumise à une augmentation de température obéissant à la loi de puissance.

Comme on peut le voir sur cette figure, lorsque les plaques atteignent une déflexion $w=3h$, l'indice de loi de puissance optimal (correspondant au maximum d'apport thermique) augmente légèrement de 0 à 0,8 en augmentant l'épaisseur du revêtement entre 0 et $h/2$. L'indice de loi de puissance optimal reste dans cet intervalle même si les plaques atteignent des déflexions plus importantes. Les résultats obtenus sont dus au fait que la non-linéarité de la distribution de température dépend de l'indice de loi de puissance p .

Les valeurs optimales de l'indice p obtenues dans le cas où la plaque est revêtue sont non nulles. Ceci est dû au fait que la distribution finale de la température au niveau du revêtement n'est pas linéaire mais suit la loi de puissance (qui dépend de p) même si le revêtement est homogène. Nous signalons que dans le cas où la température est linéaire dans l'épaisseur du revêtement,

les valeurs optimales de l'indice p seront toutes nulles (plaques 100% céramique), et ce, pour toutes les épaisseurs de revêtement considérées.

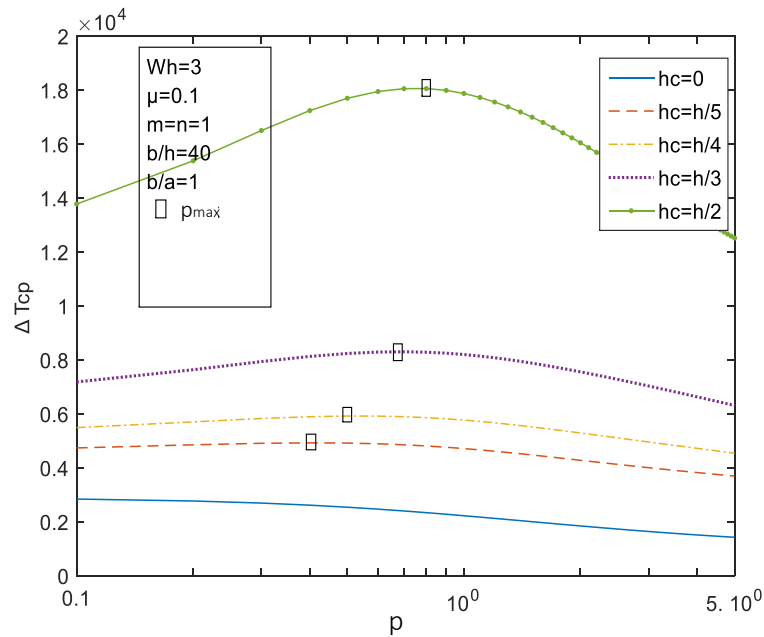


Figure. 4.6 ΔT_{cp} à $W_h=3$ pour différentes valeurs de l'indice de puissance p . Cas d'une plaque FGM soumise à une élévation de la température suivant la loi de puissance.

En ce qui concerne la forme de température sinusoïdale, les **Figures 4.7** et **4.8** montrent une autre réponse. La température critique de flambement diminue en augmentant l'indice de loi de puissance. En fait, la non-linéarité de la forme de température ne dépend pas de cet indice. Ainsi, l'influence de cet indice ne reflète que l'effet direct de la composition du matériau sur la réponse de la plaque. En d'autres termes, la plaque se déforme moins lorsque la fraction volumique de la céramique augmente (p diminue).

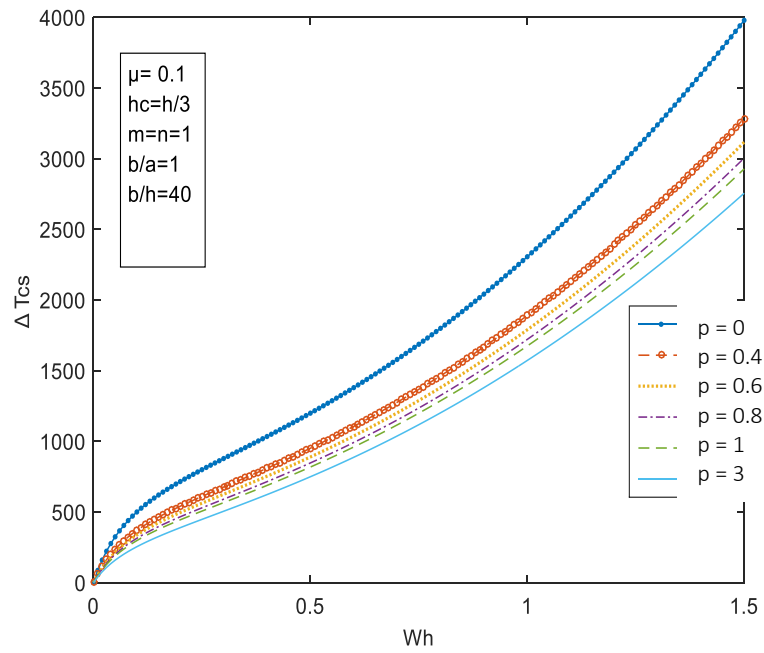


Figure. 4.7 Effet de l'indice de puissance sur les courbes d'équilibre de la plaque FGM revêtue soumise à une augmentation de température obéissant à la loi sinusoïdale.

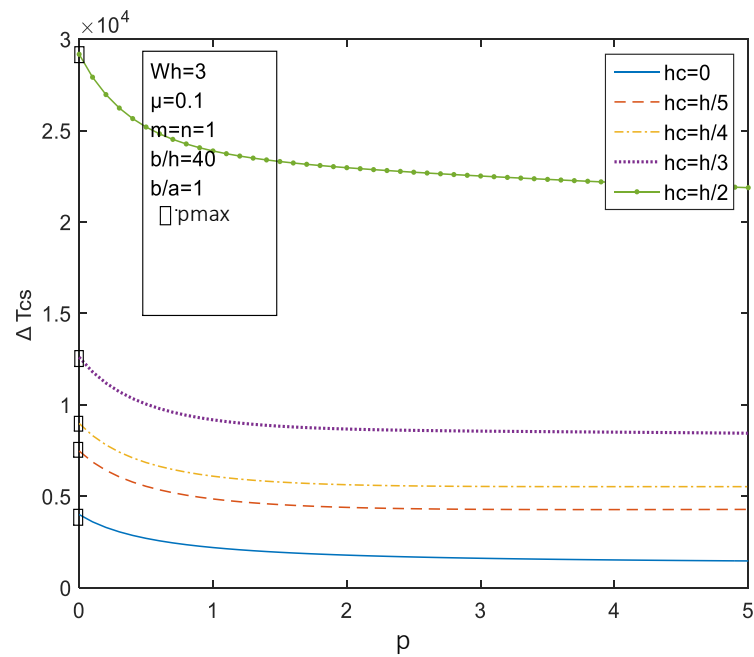


**Figure. 4.8 La charge ΔT_{cs} à $W_h=3$ pour différentes valeurs de l'indice de puissance p .
Cas d'une plaque FGM soumise à une élévation de la température suivant la loi de puissance.**

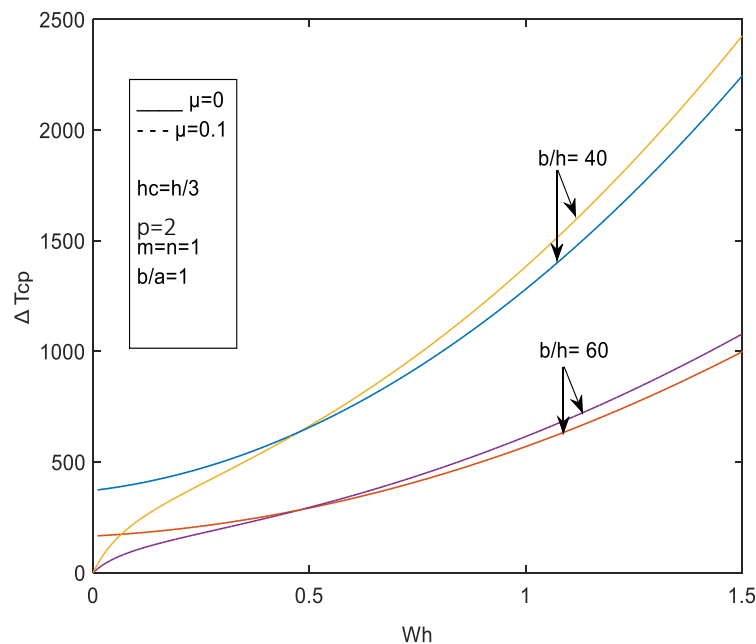
4.3.3.5 Effet des paramètres géométriques:

Les **Figures 4.9** et **4.10** représentent l'effet du rapport d'épaisseur (b/h) et du rapport d'aspect (b/a) respectivement, sur le chemin d'équilibre. Les figures a et b concernent les plaques FGM revêtues soumises respectivement à des élévations de température suivant les lois de puissance et sinusoïdale respectivement.

Les courbes température-déflexion sont tracées avec deux valeurs de rapport d'épaisseur $b/h = (40; 60)$ et de rapport d'aspect $b/a = (1; 2)$.

À partir des **Figures 4.9** et **4.10**, les réponses suivent la même logique pour les deux cas de forme d'élévation de température. On remarque qu'en augmentant le rapport d'épaisseur (b/h) ou le rapport d'aspect (b/a), la température critique de flambement augmente et les plaque deviennent plus résistantes aux déformations en post-flambement. Ceci peut être expliqué par l'augmentation de la rigidité de la plaque en augmentant ces paramètres. D'autant plus, la différence entre les chemins d'équilibre de deux plaques ayant différentes épaisseurs devient remarquable en progressant en post flambement (en augmentant W_h).

(a)



(b)

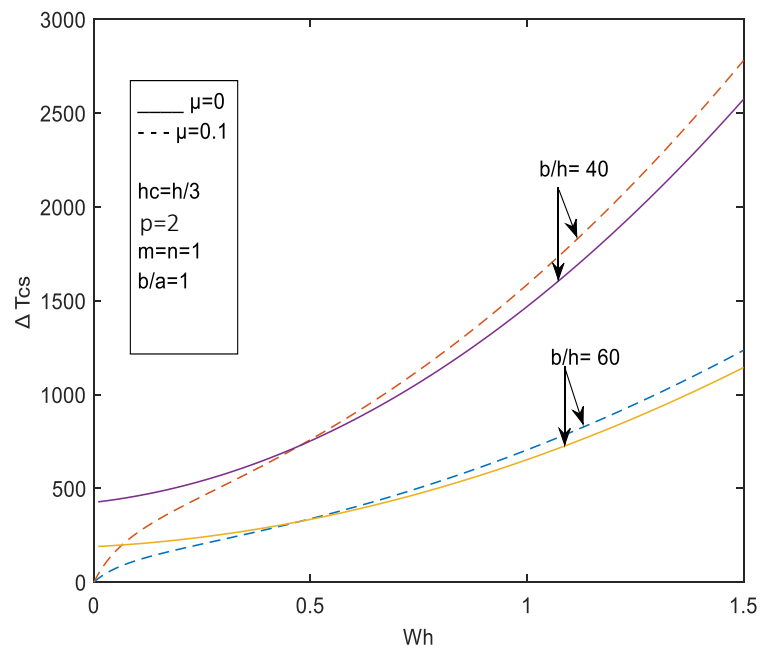
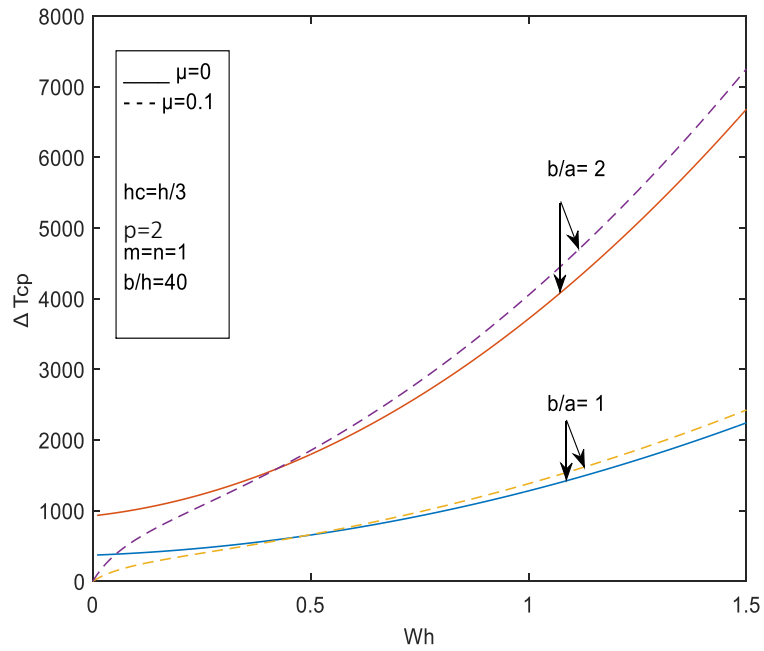


Figure. 4.9 Effet de du rapport d'épaisseur (b/h) sur les courbes d'équilibre de la plaque: (a) loi de puissance, (b) loi sinusoïdale.

(a)



(b)

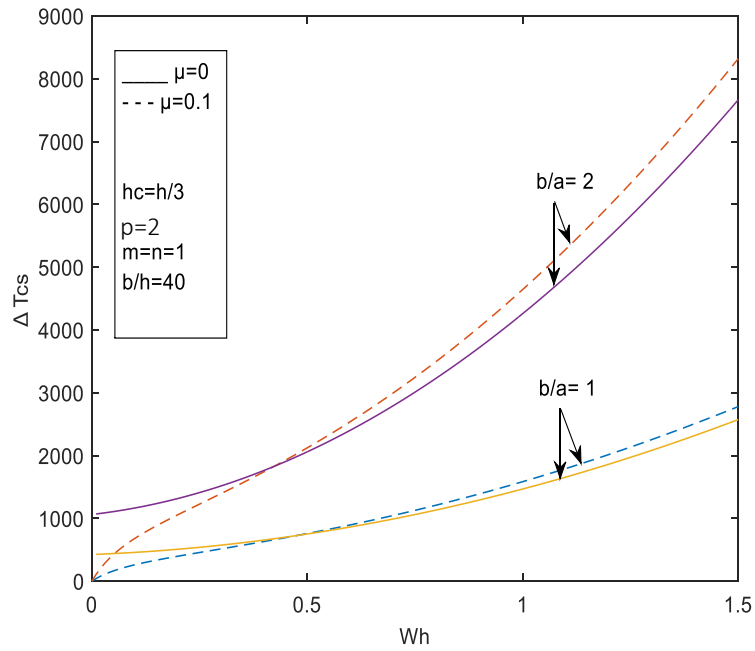


Figure. 4.10 Effet du rapport d'aspect (b/a) sur les courbes d'équilibre de la plaque: (a) loi de puissance, (b) loi sinusoïdale.

4.4 Plaque FGM avec propriétés physiques suivant une loi exponentielle :

4.4.1 Elévation de température : problème avec conditions aux bords de type Dirichlet:

Nous adoptons une augmentation de la température suivant l'**Equation (2.75)** trouvée par la méthode DTM. Après un changement de variable, cette équation peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\theta(Y) = \eta + \tau \left(\frac{Y}{h} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} (\tau * \ln(1 + \varepsilon_2 \eta) - \tau * \ln(1 + \varepsilon_1 * \eta) + \tau * \ln(\lambda_0)) \left(\frac{Y}{h} + \frac{1}{2} \right)^2 + \dots ; \quad -\frac{h}{2} \leq Y \leq \frac{h}{2} \quad (4.31)$$

Avec :

$$T(Y) = \theta(Y) * T_c \quad (4.32)$$

$$\theta \left(-\frac{h}{2} \right) = \eta = 1 \text{ et } \theta \left(+\frac{h}{2} \right) = \theta_m \quad (4.33)$$

On obtient :

$$T(Y) = T_c * \left[1 + \tau \left(\frac{Y}{h} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} (\tau * \ln(1 + \varepsilon_2) - \tau * \ln(1 + \varepsilon_1) + \tau * \ln(\lambda_0)) \left(\frac{Y}{h} + \frac{1}{2} \right)^2 + \dots \right] \quad (4.34)$$

Lorsque l'expression de la température ; **Equation (4.34)**, est substituée dans **(4.17)**, puis en combinant les **Equations (4.17), (4.18)**, le chemin d'équilibre température-déflexion est obtenu. Détaillons la procédure :

$$T(Y) = \bar{T}(Y) + T_c \quad (4.35)$$

Tel que :

$$\bar{T}(Y) = T_c * \left[\tau \left(\frac{Y}{h} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} (\tau * \ln(1 + \varepsilon_2) - \tau * \ln(1 + \varepsilon_1) + \tau * \ln(\lambda_0)) \left(\frac{Y}{h} + \frac{1}{2} \right)^2 + \dots \right] \quad (4.36)$$

La température initiale dans l'épaisseur de la plaque est supposée être uniforme telle que $T_i = T_m$.

$$\Delta T(Y) = T(Y) - T_i = T(Y) - T_m = \bar{T}(Y) + T_c - T_m = \bar{T}(Y) + \Delta T_c \quad (4.37)$$

Finalement, la combinaison des **Equations (4.37), (4.17)** et **(4.18)** permet d'écrire :

$$\Delta T_c = \frac{\left(\Phi_1 - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(Y) \alpha(Y) \bar{T}(Y) dY \right)}{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(Y) \alpha(Y) dY} \quad (4.38)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
\Phi_1 = & \frac{h p i^2 \bar{D} \left(n^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + m^2 \right) (1 - \nu)}{\left(\frac{b}{h} \right)^2} \frac{W_h}{W_h + \mu} \\
& + \bar{E}_1 \frac{h p i^2 \left[(3 - \nu^2) \left(n^4 \left(\frac{b}{a} \right)^4 + m^4 \right) + 4 \nu \left(\frac{b}{a} \right)^2 n^2 m^2 \right]}{16(1 + \nu) \left(\frac{b}{h} \right)^2 \left(n^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + m^2 \right)} W_h (W_h + 2\mu) \\
& + 4\bar{E}_2 \frac{h \left(n^4 \left(\frac{b}{a} \right)^4 + m^4 + 2 \nu n^2 m^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right)}{m n \left(\frac{b}{h} \right)^2 (1 + \nu) \left(n^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + m^2 \right)} W_h
\end{aligned} \tag{4.39}$$

4.4.2 Elévation de température : problème avec condition aux bords radiative-convective:

Nous adoptons une augmentation de la température suivant l'**Equation (3.23)** trouvée par la méthode DTM. Après un changement de variable, cette équation peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}
\theta(Y) = & \eta + \tau \left(\frac{Y}{h} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} (\tau * \ln(1 + \varepsilon_2 \eta) - \tau * \ln(1 + \varepsilon_1 * \eta) + \tau * \ln(\lambda_0)) \left(\frac{Y}{h} + \frac{1}{2} \right)^2 \\
& + \dots ; \quad -\frac{h}{2} \leq Y \leq \frac{h}{2}
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Avec :

$$T(Y) = \theta(Y) * T_u \tag{4.21}$$

$$\theta \left(-\frac{h}{2} \right) = \eta = \theta_c \text{ et } \theta \left(+\frac{h}{2} \right) = \theta_m \tag{4.42}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
T(Y) = & \left[\theta_c + \tau \left(\frac{Y}{h} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} (\tau * \ln(1 + \varepsilon_2 \theta_c) - \tau * \ln(1 + \varepsilon_1 * \theta_c) + \tau * \ln(\lambda_0)) \left(\frac{Y}{h} + \frac{1}{2} \right)^2 \right. \\
& \left. + \dots \right] * T_u
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Lorsque l'expression de la température **Equation (4.43)** dessus est substituée dans **(4.17)**, puis en combinant les **Equations (4.17)** et **(4.18)**, le chemin d'équilibre température-déflexion est obtenu. Détaillons la procédure :

L'**Equation (4.43)** peut s'exprimer comme suit :

$$T(Y) = \bar{T}(Y) + \theta_c T_u = \bar{T}(Y) + T_c \quad (4.44)$$

Tel que :

$$\bar{T}(Y) = T_u * \left[\tau \left(\frac{Y}{h} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} (\tau * \ln(1 + \varepsilon_2 \theta_c) - \tau * \ln(1 + \varepsilon_1 \theta_c) + \tau * \ln(\lambda_0)) \left(\frac{Y}{h} + \frac{1}{2} \right)^2 + \dots \right] \quad (4.45)$$

La température initiale dans l'épaisseur de la plaque est supposée être uniforme telle que $T_i = T_d$. Si on remplace l'**Equation (4.45)** dans $\Delta T(Y) = T(Y) - T_i$, on obtient:

$$\Delta T(Y) = T(Y) - T_d = \bar{T}(Y) + T_c - T_d = \bar{T}(Y) + \Delta T_c \quad (4.46)$$

Finalement, la combinaison des **Equation (4.17)**, **(4.18)** et **(4.46)** permet d'écrire :

$$\Delta T_c = \frac{\left(\Phi_1 - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(Y) \alpha(Y) \bar{T}(Y) dY \right)}{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(Y) \alpha(Y) dY} \quad (4.47)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
\Phi_1 = & \frac{h p i^2 \bar{D} \left(n^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + m^2 \right) (1 - \nu)}{\left(\frac{b}{h} \right)^2} \frac{W_h}{W_h + \mu} \\
& + \bar{E}_1 \frac{h p i^2 \left[(3 - \nu^2) \left(n^4 \left(\frac{b}{a} \right)^4 + m^4 \right) + 4 \nu \left(\frac{b}{a} \right)^2 n^2 m^2 \right]}{16(1 + \nu) \left(\frac{b}{h} \right)^2 \left(n^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + m^2 \right)} W_h (W_h + 2\mu) \\
& + 4\bar{E}_2 \frac{h \left(n^4 \left(\frac{b}{a} \right)^4 + m^4 + 2 \nu n^2 m^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right)}{m n \left(\frac{b}{h} \right)^2 (1 + \nu) \left(n^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + m^2 \right)} W_h
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Note :

Dans les deux problèmes, remarquons que l'intégrale $\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(Y) \alpha(Y) \bar{T}(Y) dY$ est difficile à calculer analytiquement. Nous avons donc procédé à l'évaluer numériquement à l'aide de la méthode de quadrature adaptative prédisposée dans l'outil Matlab.

Aussi un changement de variable doit être effectué pour l'expression des propriétés physiques, en particulier le module de Young E et l'expansion thermique α :

$$P(z) = P_1 e^{n_p \frac{z}{h}} \quad ; \quad 0 \leq z \leq h \tag{4.49}$$

Equivalent à :

$$P(Y) = P_1 e^{n_p \frac{Y + \frac{h}{2}}{h}} \quad ; \quad -\frac{h}{2} \leq Y \leq \frac{h}{2} \tag{4.50}$$

4.4.3 Modélisation avec conditions thermiques aux bords de type Dirichlet :

4.4.3.1 Effet de la longueur b :

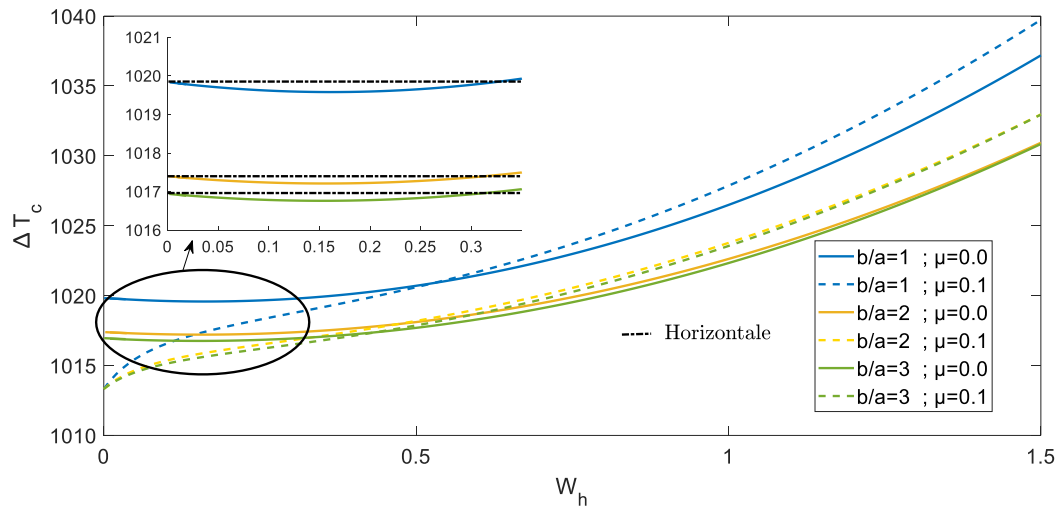


Figure. 4.11 L'effet du rapport longueur-largeur b/a sur les chemins d'équilibre de la plaque FGM.

La **Figure 4.11** illustre l'effet du rapport longueur-largeur sur le comportement de la plaque FGM. Ayant une largeur a fixée, plus la plaque (avec ou sans imperfection initiale) est longue moins elle résiste au flambage. En effet, ce gain peut être quantifié par une marge de température d'environ 3°C qui est obtenue en multipliant la longueur par un facteur de 3.

Les plaques FGM parfaites répondent par un flambement par bifurcation et le chemin d'équilibre bifurqué débute par une région instable jusqu'au point limite inférieur situé entre $W_h=0.15$ et $W_h=0.20$ avant de reprendre sa stabilité. D'autre part, en présence d'imperfection géométrique, les plaques répondent aussi par un flambement par bifurcation mais cette fois-ci avec un chemin d'équilibre bifurqué stable. On constate aussi que le point de bifurcation est le même (environ $\Delta T_c = 1013^\circ\text{C}$) peu importe le rapport longueur-largeur.

Ce comportement d'instabilité a été observé pour toutes les plaques parfaites étudiées dans la suite de ce travail.

4.4.3.2 Effet de l'épaisseur h :

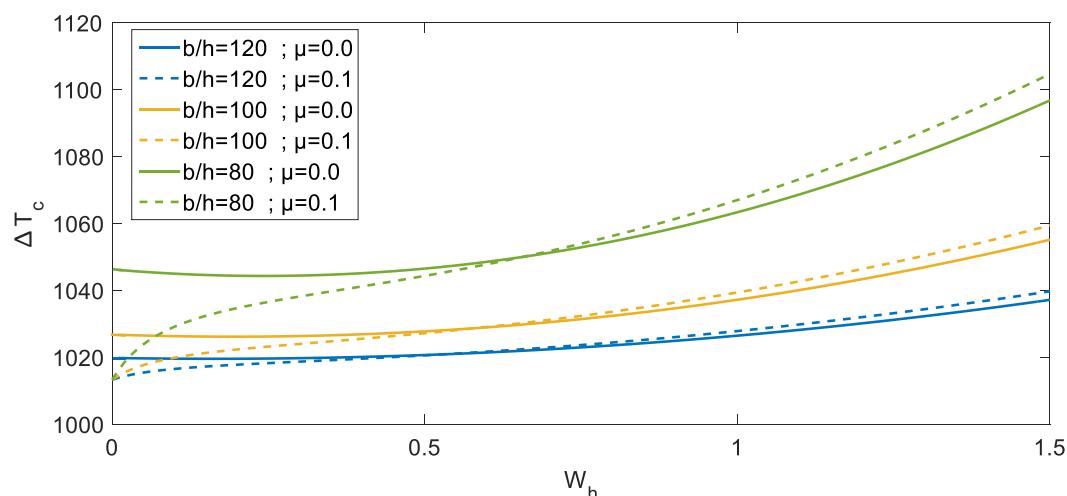


Figure. 4.12 L'effet du rapport longueur-hauteur b/h sur les chemins d'équilibre de la plaque FGM.

La **Figure 4.12** illustre l'effet de l'épaisseur sur le comportement de la plaque. Notons qu'ici, l'épaisseur est le seul paramètre géométrique qui varie. D'après les résultats, plus la plaque FGM (avec ou sans imperfection initiale) est épaisse plus la résistance au flambage est meilleure. Pour les plaques parfaites, un gain de température d'environ 27°C en termes de stabilité primaire (c'est-à-dire chemin avant bifurcation) est obtenu en multipliant l'épaisseur par un facteur de 1.5.

4.4.3.3 Effet de la taille des imperfections géométriques initiales

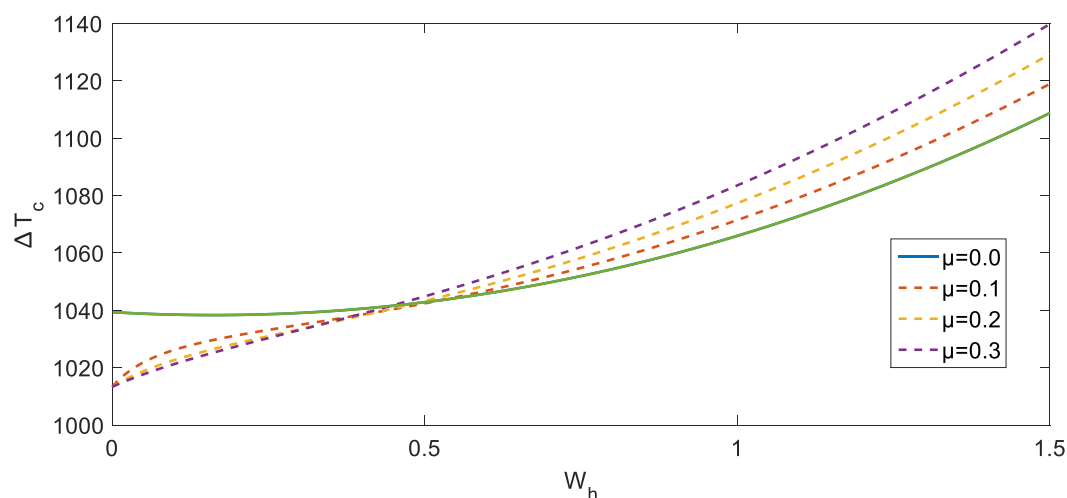


Figure. 4.13 L'effet de la taille des imperfections initiales sur les chemins d'équilibre de la plaque FGM.

La **Figure 4.13** montre les résultats obtenus concernant l'effet de la taille des imperfections. D'après les courbes obtenues, les plaques qui flambent en premier sont celles qui possèdent une imperfection de grande taille. De plus, l'existence d'une imperfection produit la déflexion de la plaque avant de flamber par bifurcation stable. Cette déflexion commence lorsque l'élévation de la température atteint une valeur critique bien définie 1014°C peu importe la taille de l'imperfection initiale. En revanche, dans le cas d'une plaque parfaite, aucune déflexion n'est remarquée avant une valeur critique de bifurcation instable 1039°C.

En ce qui concerne le post flambement, les courbes montrent que plus la taille de l'imperfection diminue, plus la plaque résiste à la déflexion tant que $w < 0.4h$, le contraire se passe lorsque $w > 0.4h$.

4.4.3.4 Effet des gradients de conductivité thermique ε_1 et ε_2 :

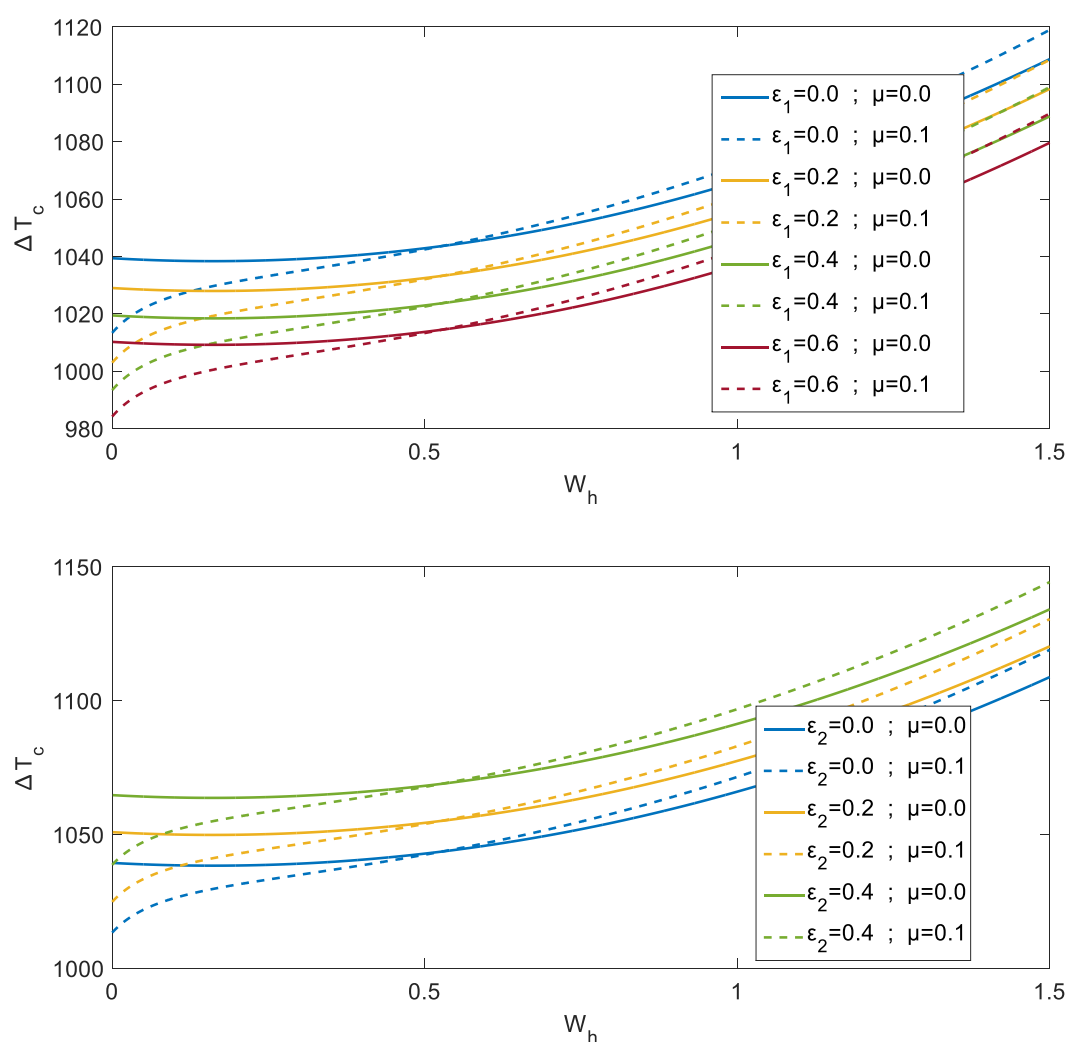


Figure. 4.14 L'effet des gradients de conductivité thermique : a) ε_1 b) ε_2 .

La **Figure 4.14** représente l'effet des gradients de conductivités thermiques sur la courbe d'équilibre température-déflexion. D'une part, les résultats de la première **Figure 4.14a** montrent que le fait de négliger la dépendance de la conductivité thermique de la céramique à la température (c-à-dire $\varepsilon_1 = 0$) surestime la capacité de la plaque (avec ou sans imperfection initiale) à résister face au flambement. En passant de $\varepsilon_1 = 0$ à $\varepsilon_1 = 0.3$ la plaque FGM (parfaite ou imparfaite) perd en termes de stabilité primaire une marge de température d'environ 30°C. D'autre part, la **Figure 4.14b** illustre un comportement opposé si on néglige la dépendance de la conductivité thermique du métal. En effet, les températures de flambement sont sous-estimées en prenant $\varepsilon_2 = 0$. La plaque résiste mieux au flambement si on tient compte de cette dépendance et un passage de $\varepsilon_2 = 0$ à $\varepsilon_2 = 0.3$ fait gagner la plaque FGM (parfaite ou imparfaite) environ 25°C en termes de stabilité primaire. Ces résultats peuvent facilement être expliqués par l'augmentation / la diminution des températures au sein de la plaque en élevant ε_1 / ε_2 , ce qui engendre l'augmentation / la diminution des contraintes thermiques, affaiblissant/fortifiant ainsi la plaque FGM et la rendant plus vulnérable/résistante face au flambement.

Similairement aux effets précédents (b , h , μ , m et n) la plaque imparfaite possède une certaine résistance à la déformation lors de son état pré flambement. Toutefois, remarquons ici que la quantité chaleur nécessaire pour que les plaques imparfaites flambent dépend des gradients ε_1 et ε_2 . En effet, plus $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ diminue plus l'apport de chaleur nécessaire augmente/ diminue. D'ailleurs, dans les effets qui vont suivre (θ_m et λ_0), les températures critiques de flambement dépendront des valeurs que prendront les paramètres étudiés.

4.4.3.5 Effet de la température de la surface métallique θ_m

L'effet de la température de la surface métallique θ_m sur la réponse de la plaque est présenté sur la **Figure 4.15**. Les résultats montrent que plus cette surface est chaude plus la température de flambement diminue, que ce soit en présence d'imperfection géométrique ou pas. En effet, on observe qu'un passage d'un rapport de 0.01 à 0.2 rend la plaque plus vulnérable en perdant sa résistance face au flambement. Cette perte est quantifiée par une baisse de la température critique d'environ 240°C.

On peut donc constater qu'en se fixant une température T_m supérieure, les températures au sein de la plaque augmentent (voir **Figure 3.8**), et par conséquent, la résistance de la plaque face au flambement diminue.

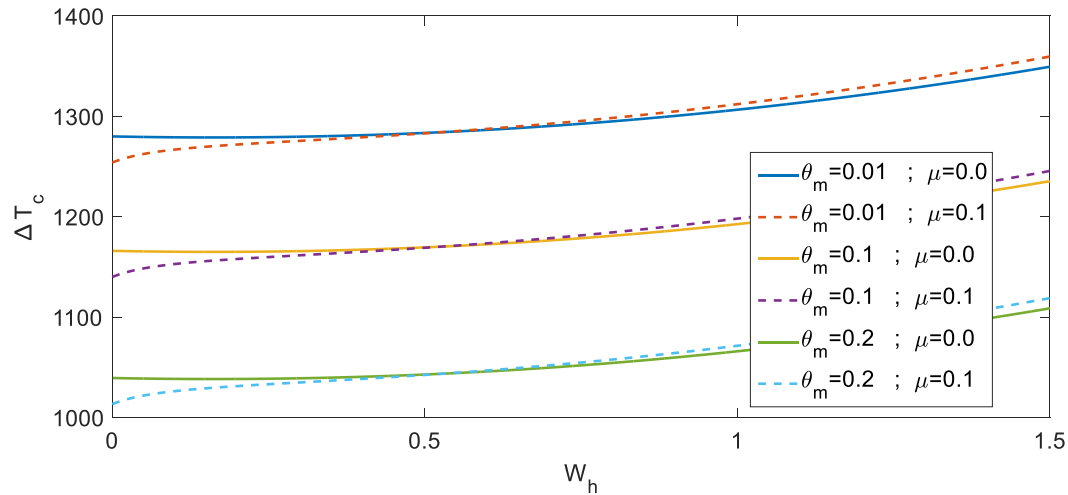


Figure. 4.15 L'effet de la température de la surface métallique θ_m sur la réponse de la plaque FGM.

4.4.3.6 Effet du paramètre d'inhomogénéité λ_0 :

La **Figure 4.16** représente l'effet du rapport de la conductivité thermique (ou paramètre d'inhomogénéité) sur la courbe d'équilibre température-déflexion. D'après les résultats, plus la conductivité du métal baisse en s'approchant de celle de la céramique, moins la plaque (avec ou sans imperfection initiale) résiste face au flambement. On constate donc qu'en passant d'un rapport de conductivité $\lambda_0 = 15$ à $\lambda_0 = 1$, les plaques FGM parfaites et imparfaites perdent en terme de stabilité primaire une marge de température d'environ 330°C.

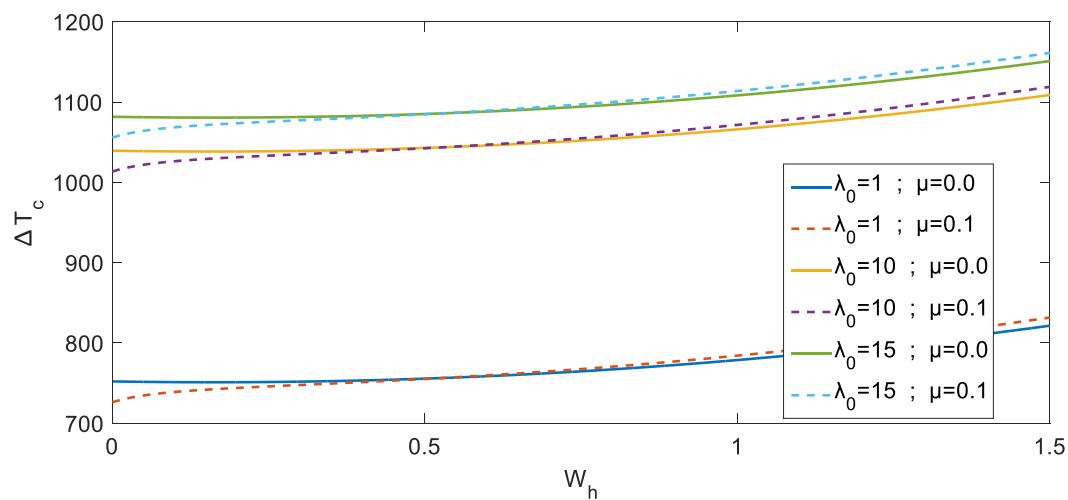


Figure. 4.16 L'effet du rapport de la conductivité thermique sur la réponse de la plaque FGM.

4.4.4 Modélisation avec conditions thermiques radiative convective aux bords:

4.4.4.1 Effet de la longueur b :

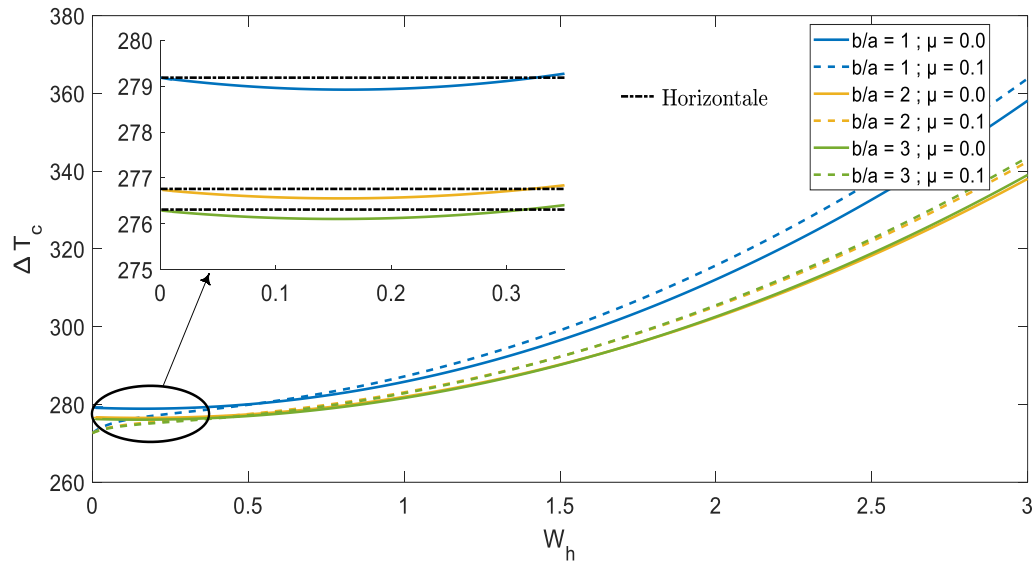


Figure. 4.17 L'effet du rapport b/a sur la réponse de la plaque FGM.

La **Figure 4.17** illustre l'effet du rapport longueur-largeur sur le comportement de la plaque. Ayant une largeur a fixée, plus la plaque (avec ou sans imperfection initiale) est longue moins elle résiste au flambage. En effet, ce gain peut être quantifié par une marge de température d'environ 3°C qui est obtenue en multipliant la longueur par un facteur de 3. D'autre part, en présence d'imperfection géométrique, la température critique de flambage semble être la même (environ $\Delta T_c = 273^\circ\text{C}$) peu importe le rapport longueur-largeur.

4.4.4.2 Effet de l'épaisseur h :

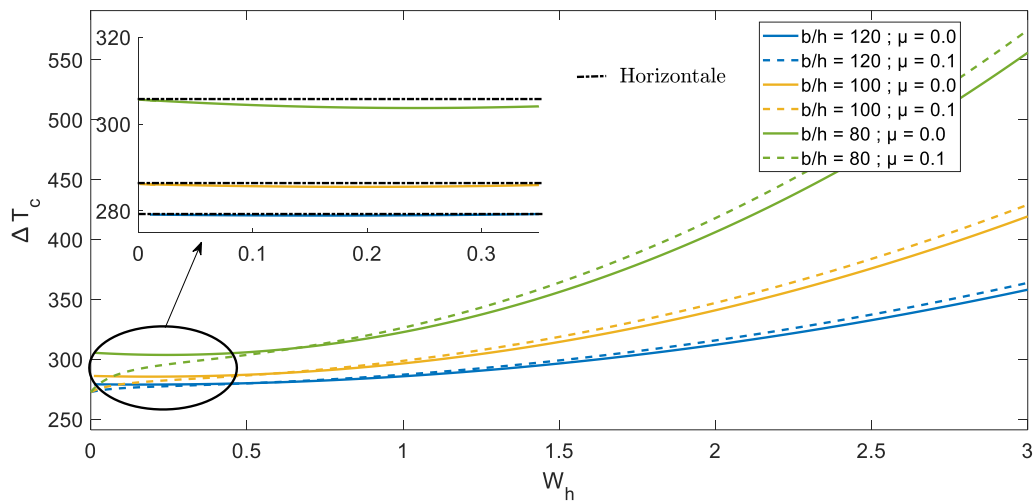


Figure. 4.18 L'effet du rapport b/h sur la réponse de la plaque FGM.

La **Figure 4.18** illustre l'effet du rapport longueur/épaisseur sur les chemins d'équilibre des plaques FGM. Notons qu'ici, l'épaisseur est le seul paramètre géométrique qui varie. D'après les résultats, plus la plaque FGM (avec ou sans imperfection initiale) est épaisse plus elle résiste au flambage. Pour des plaques parfaites, un gain de température d'environ 27°C en termes de stabilité primaire (c'est-à-dire chemin avant bifurcation) est obtenu en multipliant l'épaisseur par un facteur de 1.5.

4.4.4.3 Effet de la taille des imperfections géométriques initiale :

La **Figure 4.19** montre l'influence de la taille des imperfections initiale sur la réponse de plaque en termes de flambement. D'après les courbes obtenues, les plaques imparfaites flambent par bifurcation stable lorsque l'élévation de la température atteint une valeur critique bien définie 273°C peu importe la taille de l'imperfection initiale. En revanche, dans le cas d'une plaque parfaite, le flambement se produit lorsque l'élévation de la température atteint une valeur critique de bifurcation instable égale à 299°C .

En ce qui concerne le post flambement, les courbes montrent que plus la taille de l'imperfection diminue, plus la plaque résiste à la déflexion tant que $w < 0.5h$, le contraire se passe lorsque $w > 0.5h$. Donc, la capacité de charge d'une plaque avec une taille d'imperfection grande devient meilleure lorsque la flexion est suffisamment importante dans le processus de post-flambage. Le même résultat a été obtenu dans plusieurs travaux antérieurs [110,111].

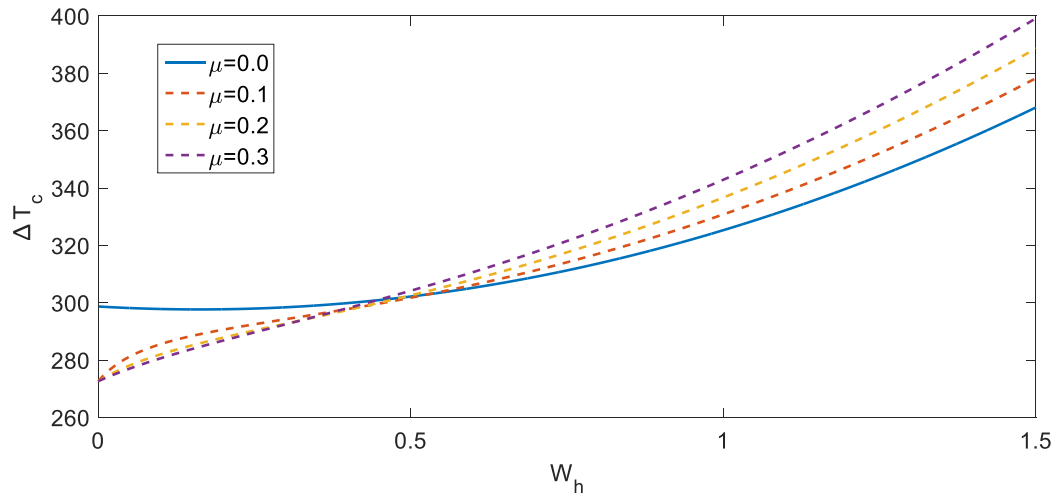


Figure. 4.19 L'effet de la taille de l'imperfection initiale μ sur la réponse de la plaque FGM.

4.4.4.4 Effet de m et n

Afin de voir l'effet du mode de flambement m sur la courbe d'équilibre température-déflexion nous avons tracé la **Figure 4.20**. Pour simplifier, nous avons pris des plaques avec $a=b$. Les effets de m et n seront identiques pour des raisons de symétrie. Il suffit donc d'étudier l'effet d'un seul au lieu des deux. D'après les résultats, la plaque FGM (avec ou sans imperfection initiale) résiste au flambage en augmentant ce paramètre. En effet, en passant de $m = 1$ à $m = 3$, la plaque FGM sans imperfection initiale gagne en terme de stabilité primaire une marge de température d'environ 100°C . Au contraire, les plaques imparfaites flambent toute à la même température quel que soit la valeur de m .

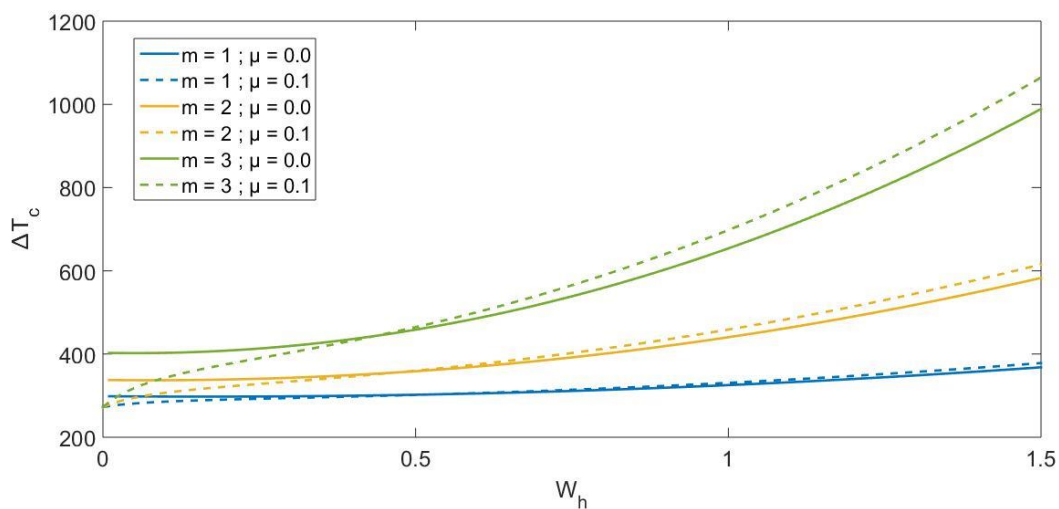


Figure. 4.20 L'effet du mode de flambement m sur la réponse de la plaque FGM.

D'autre part, pour les effets (longueur et épaisseur et mode de flambement) représentés sur les **Figures 4.17-4.20**, il faudrait fournir une augmentation identique de 273°C pour que la plaque FGM imparfaite flambe. En effet en présence d'imperfection géométrique, la plaque imparfaite possède une certaine résistance à la déflexion en état de pré flambement. Cette résistance n'est pas influencée par la variation de b , h , μ , m et n , contrairement au effet qui vont suivre : N_r , Bi_1 , Bi_2 , λ_0 , θ_d , ε_1 et ε_2 . En effet la température critique de flambage semble être la même (avec $\Delta T_c = 273^{\circ}\text{C}$) peu importe le mode de flambement m , l'épaisseur de la plaque h ou sa longueur b .

4.4.4.5 Effet du paramètre de radiation :

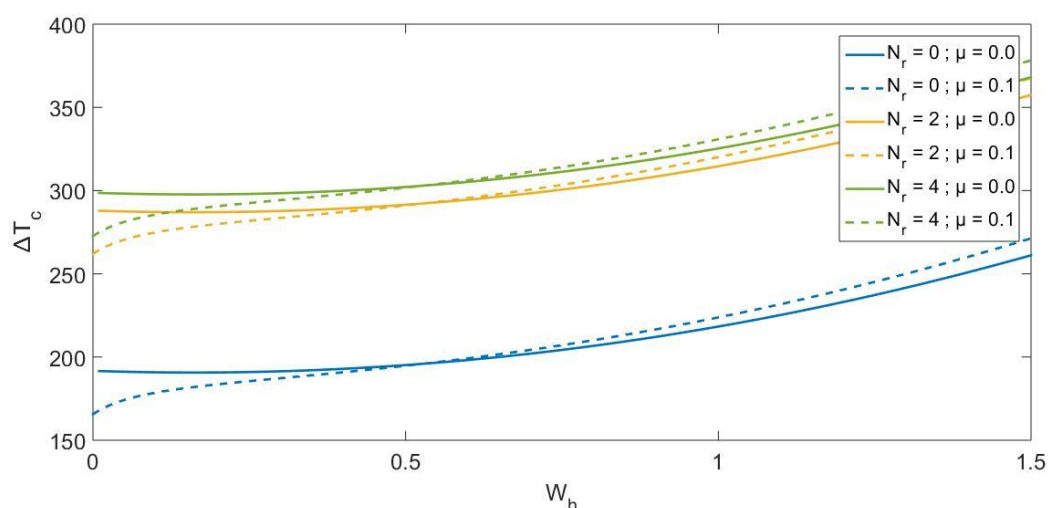


Figure. 4.21 L'effet du paramètre de radiation N_r sur la réponse de la plaque FGM.

La **Figure 4.21** présente l'effet du paramètre de radiation sur la courbe d'équilibre température-déflexion. D'après les résultats, la plaque FGM (avec ou sans imperfection initiale) résiste au flambage en augmentant ce paramètre. En effet, en passant de $N_r = 0$ à $N_r = 4$, la plaque FGM (avec ou sans imperfection initiale) gagne en terme de stabilité primaire une marge de température d'environ 110°C .

Similairement aux effets précédents, la plaque imparfaite possède une certaine résistance à la déformation lors de son état pré flambement. Toutefois, en comparaison toujours avec ce que nous avons trouvé dans les résultats des effets précédents, remarquons ici que la quantité chaleur nécessaire pour que les plaques imparfaites flambent dépend de la radiation. En effet, plus ce dernier diminue plus l'apport de chaleur nécessaire sera minime. D'ailleurs, dans la

plupart des effets qui vont suivre, les plaques imparfaites auront le même type de comportement.

4.4.4.6 Effet du nombre de Biot Bi_1 et Bi_2 :

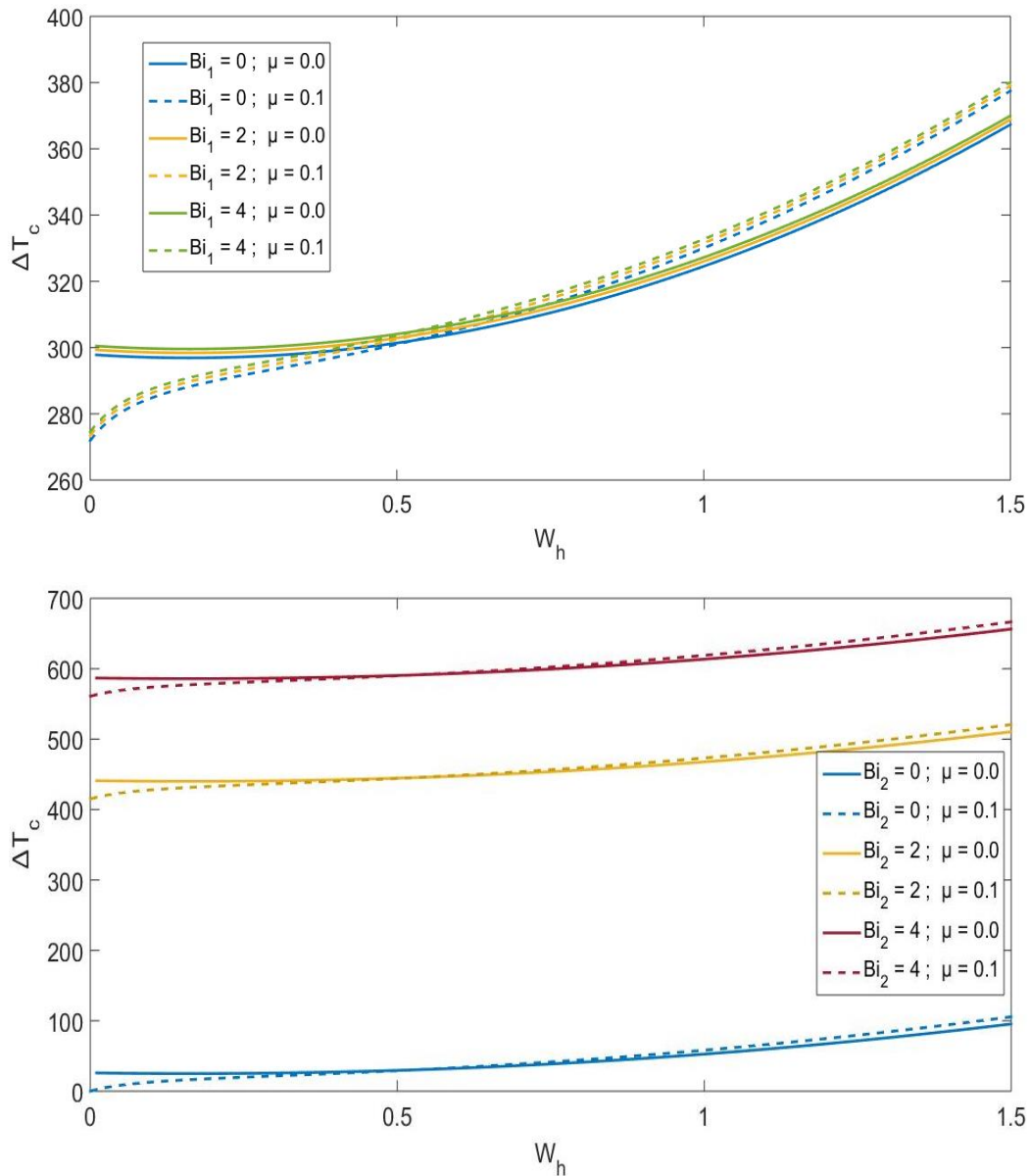


Figure. 4.22 L'effet du nombre de Biot : a) Bi_1 b) Bi_2 sur la réponse de la plaque FGM.

La **Figure 4.22** représente l'effet de la variation du nombre de Biot sur le comportement en flambage. Les résultats montrent que l'augmentation de Bi_1 et Bi_2 fournit plus de résistance à la plaque (avec ou sans imperfection initiale) face au flambement. En effet, dans le cas des plaques parfaites par exemple, en élevant de 0 à 4 les valeurs de Bi_1 et Bi_2 , on obtient

des augmentations respectives de la différence de température critique de flambage ΔT_c de 297°C à 301°C et de 25°C à 590°C. On peut voir aussi que l'effet de l'augmentation de Bi_2 offre aux plaques un gain plus important de résistance face au flambement que celui offert par l'augmentation de Bi_1 . Ceci est dû au fait que Bi_2 a un effet de refroidissement par convection comme mentionné dans la **Figure 3.4** du chapitre 3. Ainsi, là où plus de résistance au flambage est demandée, une valeur de Bi_2 élevée est souhaitable. D'autre part, dans le cas des plaques imparfaites, seule la plaque ayant la surface métallique isolée ($Bi_2=0$) ne possède aucune résistance à la déflexion lors de son état de pré flambement. De plus, le flambement se fait sans bifurcation.

4.4.4.7 Effet du rapport de la conductivité thermique λ_0

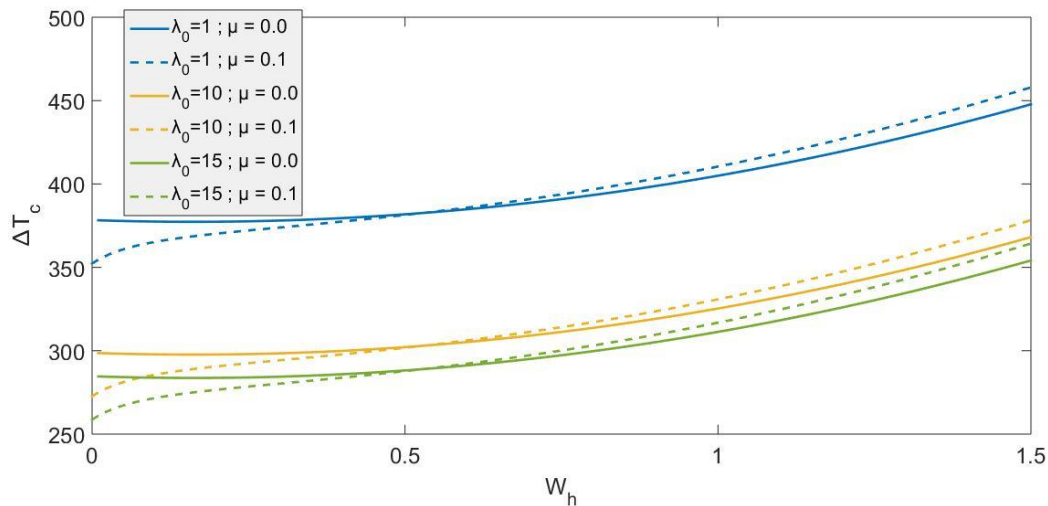


Figure. 4.23 L'effet du rapport de la conductivité thermique λ_0 sur la réponse de la plaque FGM.

La **Figure 4.23** représente l'effet du rapport de la conductivité thermique sur la courbe d'équilibre température-déflexion. D'après les résultats, plus la conductivité du métal baisse en s'approchant de celle de la céramique, mieux la plaque (avec ou sans imperfection initiale) résiste face au flambement. Ceci est dû à une importante baisse des températures dans la moitié froide de la plaque ($0 \leq z \leq +h/2$). La **Figure 3.7** du chapitre 3 illustre clairement cette baisse. On constate donc qu'en passant d'un rapport de conductivité $\lambda_0=15$ à $\lambda_0=1$, les plaques FGM parfaites et imparfaites gagnent en terme de stabilité primaire une marge de température d'environ 90°C. Remarquons que la réponse observée en utilisant des conditions aux bords radiative convective, est totalement différente de celle qui a été observée dans le cas d'une

modélisation avec des conditions thermiques Dirichlet. Par conséquent, le choix des conditions thermiques adaptées lors de la conception est d'une grande importance.

4.4.4.8 L'effet du rapport entre les températures des milieux chaud et froid

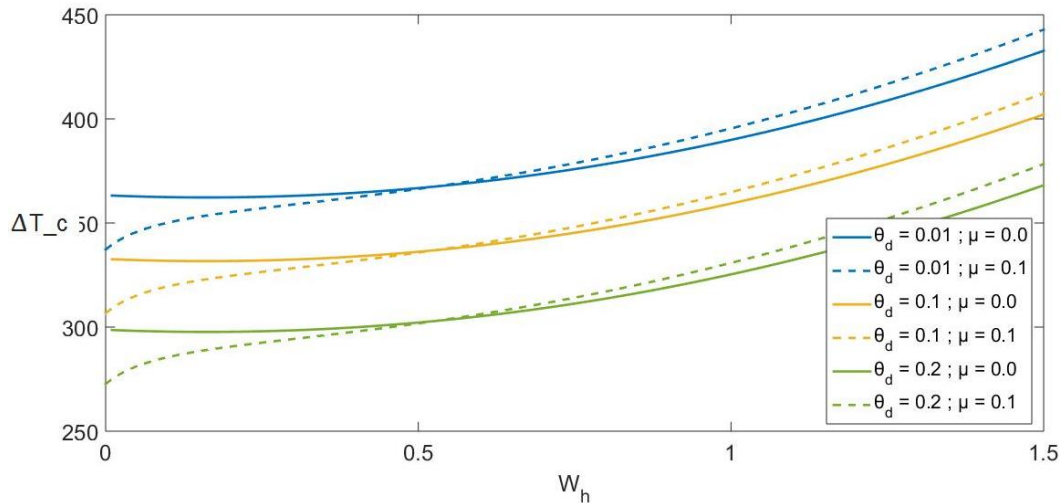


Figure. 4.24 L'effet du rapport entre les températures des milieux chaud et froid : θ_d sur la réponse de la plaque FGM.

L'effet du rapport entre les températures des milieux chaud et froid est présenté sur la **Figure 4.24**. Les résultats montrent que plus ce rapport augmente plus la température de flambement augmente, que ce soit en présence d'imperfection géométrique ou pas. En effet, on observe qu'un passage d'un rapport de 0.01 à 0.2 rend la plaque plus vulnérable en perdant sa résistance face au flambement pouvant être quantifiée par une baisse de la température critique de flambement d'environ 65°C.

L'explication de ceci vient du fait que lorsque la différence entre les températures des deux milieux augmentent (θ_d augmente), les températures des deux faces de la plaque T_c et T_m augmentent [51] et par conséquent, la résistance de la plaque FGM face au flambement diminue.

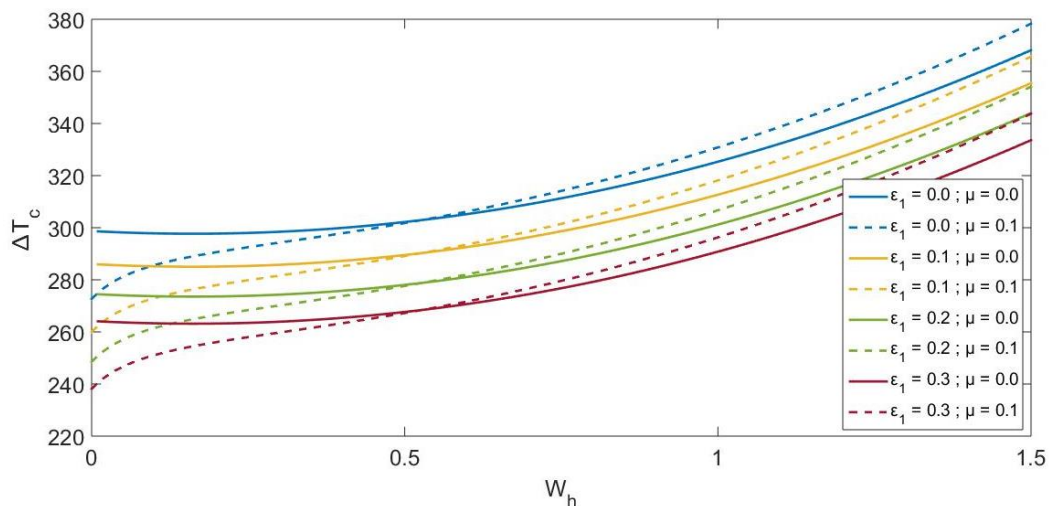
4.4.4.9 Effet des gradients de conductivité thermique ϵ_1 et ϵ_2 :

La **Figure 4.25** représente l'effet des gradients de conductivité thermique sur la courbe d'équilibre température-déflexion. D'après les résultats, la non considération de la dépendance de la conductivité à la température (c-à-dire $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$), surestime la capacité de la plaque (avec ou sans imperfection initiale) à résister face au flambement surtout pour la conductivité thermique de la céramique. A titre d'exemple, le passage de $\epsilon_1 = 0$ à $\epsilon_1 = 0.3$ ou $\epsilon_2 = 0$ à

$\varepsilon_2 = 0.3$, fait perdre la plaque FGM (parfaite ou imparfaite) en terme de stabilité primaire une marge de température d'environ 35°C ou 5°C respectivement. En revanche, dans le cas des conditions aux bords de type Dirichlet, la variation de ε_2 a un effet opposé sur la stabilité.

Dans plusieurs travaux antécédents, l'influence de la dépendance de toutes les propriétés physiques sur la réponse des plaques FGM a été étudiée par de nombreux auteurs. En général, les courbes d'équilibre sont surestimées lorsque la dépendance à la température n'est pas prise en compte. Ces travaux montrent l'influence globale sur la réponse en flambement lorsque tous les paramètres physiques dépendent de la température [112,113]. L'influence propre à chaque paramètre peut avoir une conséquence en faveur ou en défaveur de la stabilité de la structure. Ce travail permet de voir les conséquences qui peuvent avoir lieu sur la réponse en flambement, lorsque la conductivité thermique, elle seule, dépend de la température. Grace au gradient de la conductivité thermique ε_1 et ε_2 , nous avons tiré la manière dont est influencée la réponse de la plaque FGM lorsque la conductivité thermique dépend de la température. Remarquons que dans l'étude de cet effet, les résultats obtenus pour des conditions Dirichlet et ces présents résultats dont les conditions aux bords sont radiative-convective révèlent des réponses opposées en ce qui concerne l'effet de ε_2 . Par conséquent, le choix des conditions thermiques adaptées lors de la conception est d'une grande importance.

a)



b)

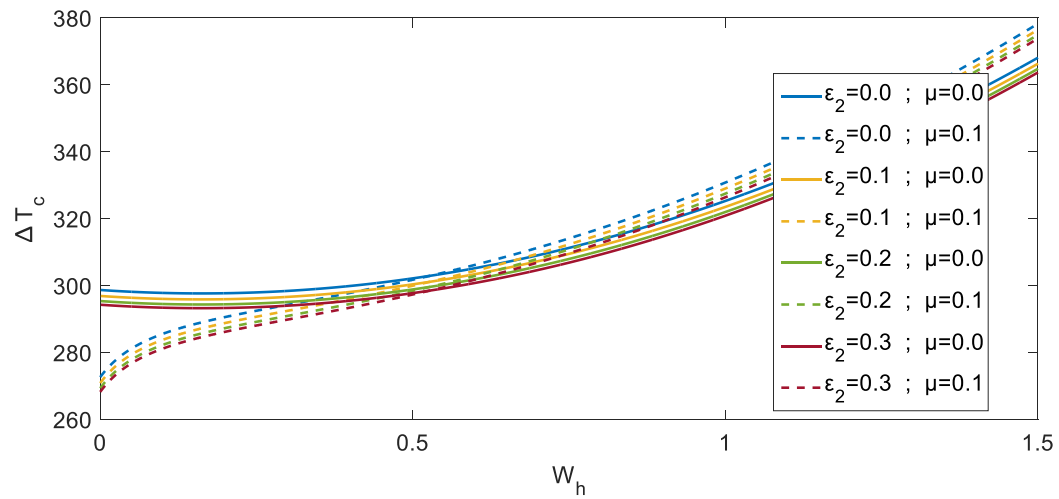


Figure. 4.25 L'effet des gradients de conductivité thermique : a) ϵ_1 b) ϵ_2 sur la réponse de la plaque FGM.

4.5 Conclusion:

Ce chapitre a fait l'objet d'une discussion critique focalisée sur l'effet des types de conditions aux bords sur le comportement de la plaque FGM en termes de flambement. Une attention particulière a été attribuée à l'influence des différents paramètres thermiques et géométriques tel que la taille des imperfections, l'épaisseur du revêtement, les gradients de la conductivité thermique et les échanges radiatives et convectives.

Les résultats les plus marquants peuvent être énumérés comme suit:

Dans le cas d'une plaque FGM avec une composition qui suit la loi de puissance :

- Les courbes d'équilibre sont stables que ce soit pour les plaques parfaites ou imparfaites.
- Le flambement des plaques parfaites se fait par bifurcation stable tandis que les plaques imparfaites flambent sans bifurcation.
- Le revêtement en céramique améliore la résistance des plaques FGM face au flambement.

Dans le cas d'une plaque FGM avec une composition qui suit la loi exponentielle :

- Le flambement des plaques parfaites se fait par bifurcation instable.
- Le flambement des plaques imparfaites se fait par bifurcation stable sauf dans le cas où la surface métallique est isolée ($Bi_2=0$).
- La capacité de charge de la plaque imparfaite devient meilleure que la plaque parfaite lorsque la flexion est suffisamment importante dans le processus de post-flambage.
- La résistance au flambement des plaques imparfaites n'est pas influencée par la variation de b , h , μ , m et n , contrairement aux autres paramètres étudiés.
- En passant d'un rapport de conductivité $\lambda_0 = 15$ à $\lambda_0 = 1$ (plaques deviennent riches en céramique), une modélisation avec condition type Dirichlet prévoit des plaques FGM qui perdent en terme de stabilité, contrairement à une modélisation avec des conditions aux bords radiative-convective.
- Une modélisation avec des conditions aux bords de type Dirichlet prévoit que la plaque FGM perdra en termes de stabilité en augmentant ε_2 . Une réponse opposée a été observée en optant pour la modélisation avec des conditions aux bords radiative-convective.

On peut donc dire qu'un mauvais choix des conditions aux bords thermiques peut donner des résultats divergents concernant l'effet de certains paramètres sur la réponse de la plaque en termes de flambement.

Conclusion générale

L'objectif de cette thèse est le développement d'une approche analytique pour étudier les instabilités dans les plaques FGM minces. L'approche de Galerkin utilisé dans ce travail a permis la résolution des équations gouvernantes de flambement thermique. Tandis que la méthode de la transformation différentielle a été utilisée pour évaluer la distribution de la température dans l'épaisseur des plaques FGM.

Deux types de lois de composition matérielle ont été adoptés : la loi de puissance et la loi exponentielle. En outre, les problèmes thermiques ont été modélisés avec les deux conditions thermiques aux bords : de type Dirichlet et de type convective-radiative.

Les résultats obtenus dans une première étude menée sur le transfert thermique avec des conditions aux limites de type Dirichlet:

- ❖ L'augmentation des gradients de conductivité thermique ε_1 et ε_2 produit des effets opposés. En effet, les températures à travers la plaque FGM deviennent plus hautes en augmentant ε_1 et deviennent plus basses en augmentant ε_2 .
- ❖ La non considération de la dépendance de la température peut produire des différences qui peuvent atteindre 46 K ; observée à la profondeur $\zeta = 0.25$, quand les gradients de la conductivité thermique passent de $\varepsilon_1 = 0.6$ et $\varepsilon_2 = 0.0$ à $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.0$.
- ❖ La performance de la plaque FGM en termes d'isolation thermique sera meilleure en optant pour des céramiques de basses conductivités thermiques et des métaux ayant des conductivités thermiques élevées.

La deuxième étude a été consacrée aux problèmes de transfert thermique avec conditions radiative-convective aux bords. Les conclusions peuvent être résumées comme suit:

- ❖ L'augmentation du paramètre Nr conduit à une augmentation significative de la distribution de la température à l'intérieur de la plaque FG.
- ❖ Lorsque Bi_1 devient important, la plaque FG est plus chauffée par convection par l'environnement chaud, tandis que la diminution de la distribution de température en augmentant Bi_2 s'explique par la perte de chaleur via le processus de convection.

- ❖ L'augmentation de θ_d conduit à minimiser la perte de chaleur à travers la surface inférieure. Ainsi, le processus de refroidissement par convection est diminué.
- ❖ La résistance thermique moyenne de la plaque FG diminue considérablement avec une augmentation du paramètre de conductivité thermique λ_0 , ce qui se traduit par une amélioration du transfert de chaleur à travers la plaque FGM.
- ❖ L'augmentation des gradients de conductivité thermique conduit à une amélioration du transfert thermique au sein de la plaque, principalement pour ε_1 .
- ❖ Pour un gradient de conductivité thermique critique ε_2 , l'augmentation du paramètre de conductivité thermique peut provoquer un processus de refroidissement à travers la plaque.

En dernière partie de ce travail, une discussion critique a été focalisée sur l'effet des types de conditions aux bords sur le comportement de la plaque FGM en termes de flambement. Une attention particulière a été attribuée à l'influence des différents paramètres thermiques et géométriques tel que la taille des imperfections, l'épaisseur du revêtement, les gradients de la conductivité thermique et les échanges radiatives et convectifs.

Les résultats les plus marquants peuvent être énumérés comme suit:

Dans le cas d'une plaque FGM avec une composition qui suit la loi de puissance et avec des conditions aux bords de type Dirichlet :

- Les courbes d'équilibre sont stables que ce soit pour les plaques parfaites ou imparfaites.
- Le flambement des plaques parfaites se fait par bifurcation stable tandis que les plaques imparfaites flambent sans bifurcation.
- Le revêtement en céramique améliore la résistance des plaques FGM face au flambement.

Dans le cas d'une plaque FGM avec une composition qui suit la loi exponentielle, pour les deux types de conditions thermiques aux bords:

- Le flambement des plaques parfaites se fait par bifurcation instable.
- Le flambement des plaques imparfaites se fait par bifurcation stable sauf dans le cas où la surface métallique est isolée ($Bi_2=0$).
- La capacité de charge de la plaque imparfaite devient meilleure que la plaque parfaite lorsque la flexion est suffisamment importante dans le processus de post-flambage.

- La résistance au flambement des plaques imparfaites n'est pas influencée par la variation de b , h , μ , m et n , contrairement aux autres paramètres étudiés.
- Une modélisation avec des conditions aux bords de type Dirichlet prévoit que la plaque FGM perdra en termes de stabilité en augmentant ε_2 . Une réponse opposée a été observée en optant pour la modélisation avec des conditions aux bords radiative-convective.
- En passant d'un rapport de conductivité $\lambda_0 = 15$ à $\lambda_0 = 1$ (plaques deviennent riches en céramique), une modélisation avec condition type Dirichlet prévoit des plaques FGM qui perdent en terme de stabilité, contrairement à une modélisation avec des conditions aux bords radiative-convective.
- On peut donc dire qu'un mauvais choix des conditions thermiques aux bords peut donner des résultats divergents. En effet, selon le type de condition adoptée, la variation de certains paramètres comme le rapport et les gradients de la conductivité thermique produit des résultats opposés en termes de flambement.

L'ensemble du travail peut servir de référence pour le processus de conception contre les instabilités en flambement thermique et pour d'autres recherches basées sur des solutions analytiques de distribution de température dans les plaques FGM avec des propriétés dépendant de la température.

Références

- [1] Koizumi M, FGM activities in Japan, Compos PART B, 8368, 1997, 1–4.
- [2] Emile Youssef, Etude théorique et expérimentale du flambement des pieux. Matériaux. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1994
- [3] Sylvain Drapier, Mécanique des Structures & Approximations Numériques, Ecole nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2019
- [4] Yin, H.M., Sun, L.Z., Paulino, G.H., (2004). „Micromechanics based elastic model for functionally graded materials with particle interactions.”” Acta Materialia 52, 3535–3543
- [5] Ewolo Ngak, F.P., Ntamack, G.E., Azrar, L. ‘Coupled state-space and Gauss integration procedures for static analysis of general functionally graded magnetoelectroelastic laminated plates’ Mechanics of Advanced Materials and Structures 2022, 29(11), pp. 1553–1569
DOI: <https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1829758>
- [6] Meuyou, H.H., Ewolo Ngak, F.P., Ntamack, G.E., Azrar, L ‘A virtual layers-state-space method for 3D responses of arbitrary functionally graded magnetoelectroelastic plates’ Composite Structures, 2021, 268, 113782
- [7] Ewolo Ngak, F.P., Ntamack, G.E., Azrar, L ‘Three-dimensional modeling of static deformation of arbitrary functionally graded multilayered multiferroic composites plates with weakly and highly conducting imperfect interfaces’ Journal of Intelligent Material Systems and Structures January 11, 2021, Volume: 32 issue: 17, page(s): 2066-2091 <https://doi.org/10.1177/1045389X20983883>
- [8] Ewolo Ngak, F.P., Ntamack, G.E., Azrar, L. ‘Semi-analytical solution for static and free vibration of multilayered functionally graded elastic plates with imperfect interfaces’ International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics, 2022, 23(4), pp. 285–306 <https://doi.org/10.1080/15502287.2021.1957041>

- [9] P. M. Naghdi, On the theory of thin elastic shells. *Quarterly Appl. Math*, 14: 369-380 1957.
- [10] Chi. Shyang-ho., Chung Yen-Ling. (2003), cracking in coating-substrate composites of multilayered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227-1243
- [11] Delale. F, Erdogan. F. (1983), The crack problem for a non-homogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics*; 50 (3): 609-614.
- [12] Xu, W.; Fu, Z.; Xi, Q. Thermal Conductivity Identification in Functionally Graded Materials via a Machine Learning Strategy Based on Singular Boundary Method. *Mathematics* 2022, 10, 458. <https://doi.org/10.3390/math10030458>
- [13] Carpio P, Salvador MD, Borrell A, Sánchez E. Thermal behaviour of multilayer and functionally-graded YSZ / $Gd_2Zr_2O_7$ coatings. *Ceram Int* 2017;43:4048–54. <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2016.11.178>.
- [14] Björklund S, Musalek R, Candidato RT, Paw L, Nait-ali B, Smith D. Thermophysical properties of YSZ and YCeSZ suspension plasma sprayed coatings having different microstructures. *Surf Coat Technol* 2017;318:28–38. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2017.02.054>.
- [15] A. Boulanouar, A. Rahmouni, M. Boukalouch, A. Samaouali, Y. Géraud, M. Harnafi and J. Sebbani, "Determination of Thermal Conductivity and Porosity of Building Stone from Ultrasonic Velocity Measurements," *Geomaterials*, Vol. 3 No. 4, 2013, pp. 138-144. doi: [10.4236/gm.2013.34018](https://doi.org/10.4236/gm.2013.34018).
- [16] Hanane Sghiouri El Idrissi, Abderrahim Samaouali, Younes El Rhaffari, Salah El Alami, Yves Géraud. Characterization of the Petrophysical Properties of the Timahdit Oil Shale Layers in Morocco. *Geosciences*, Geological Survey of Iran, 2020, 10 (9), pp.337.

- [17] Khosravifard A, Hematiyan MR, Marin L. Nonlinear transient heat conduction analysis of functionally graded materials in the presence of heat sources using an improved meshless radial point interpolation method. *Appl Math Model* 2011;35:4157–74. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.02.039>.
- [18] Meral G. Differential quadrature solution of heat- and mass-transfer equations 2013;37:4350–9. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.09.012>.
- [19] Gao XW. Element differential method and its application in thermal - mechanical problems 2018;82–108. <https://doi.org/10.1002/nme.5604>.
- [20] Zhang J, Chauhan S. Fast explicit dynamics finite element algorithm for transient heat transfer. *Int J Therm Sci* 2019;139:160–75. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2019.01.030>.
- [21] Aziz A, Khan WA. Classical and minimum entropy generation analyses for steady state conduction with temperature dependent thermal conductivity and asymmetric thermal boundary conditions: Regular and functionally graded materials. *Energy* 2011;36:6195–207. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2011.07.042>.
- [22] Verma KP, Maiti DK. Transient analysis of thermo-mechanically shock loaded four-parameter power law functionally graded shells. *Compos Struct* 2020;113388. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113388>.
- [23] Alibeigloo A., Coupled thermoelasticity analysis of carbon nano tube reinforced composite rectangular plate subjected to thermal shock, *Composites Part B* (2018), doi: 10.1016/j.compositesb.2018.09.003
- [24] Seyed Mahmoud Hosseini, Analytical solution for nonlocal coupled thermoelasticity analysis in a heat-affected MEMS/NEMS beam resonator based on Green–Naghdi theory, *Applied Mathematical Modelling*, 2018, <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.12.034>

- [25] Chen Z, Yi Y-B, Bao K, Zhao J. Numerical analysis of the coupling between frictionally excited thermoelastic instability and thermal buckling in automotive clutches. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*. 2019;233(1):178-187. doi:[10.1177/1350650118772664](https://doi.org/10.1177/1350650118772664)
- [26] Eduard Riks, Buckling Analysis of Elastic Structures: A Computational Approach, *Advances in Applied Mechanics*, Volume 34, 1997, Pages 1-76, [https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70319-3](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70319-3)
- [27] SUNIL SHANKAR WADDAR, CHARACTERISTICS OF CENOSPHERE/EPOXY SYNTACTIC FOAM COMPOSITES AND SANDWICHES UNDER MECHANICAL AND THERMAL LOADS, DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING NATIONAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY KARNATAKA, SURATHKAL, MANGALORE – 575025 MAY, 2019
- [28] Bateni, M., & Eslami, M. R. (2014). Non-linear in-plane stability analysis of FGM circular Shallow arches under central concentrated force. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 60, 5869. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.01.001>.
- [29] Tao, C., & Dai, T. (2020). Analyses of thermal buckling and secondary instability of post-buckled S-FGM plates with porosities based on a meshfree method. *Applied Mathematical Modelling*. doi:10.1016/j.apm.2020.07.032
- [30] http://www.enig-civil.com/uploads/1/6/0/2/16021160/plaques_et_coques_-_chapitre_1.pdf
- [31] P. G. Ciarlet, Ph. Destuynder, *A justification of the two space dimensional linear plate model*, *J. de Mécanique*, 18 (1979), 315-344
- [32] P. G. Ciarlet, Ph. Destuynder, COMPARAISON ENTRE LES MODÈLES TRIDIMENSIONNELS ET BIDIMENSIONNELS DE PLAQUES EN ÉLASTICITÉ, *R. A. I. R. O., Analyse numérique*, (vol. 15, n° 4, 1981, p 331 à 369)

- [33] JOHNS DJ, Thermal Stress Analyses, Therm Stress Anal, 1965.
<https://doi.org/10.1016/C2013-0-08286-2>
- [34] http://mms2.ensmp.fr/mmc_st_etienne_hk/elasticite_plane/polycop/chap7.pdf
- [35] Pierre Dubas, Calcul numérique des plaques et des parois minces, L'école polytechnique fédérale, 1955, Zurich.
<https://doi.org/10.3929/ethz-a-000089328>
- [36] Tran, L. V., Phung-Van, P., Lee, J., Wahab, M. A., & Nguyen-Xuan, H. (2016). *Isogeometric analysis for nonlinear thermomechanical stability of functionally graded plates. Composite Structures, 140*, 655–667.
doi:10.1016/j.compstruct.2016.01.001
- [37] Heldenfels, R. R. and Roberts, W. M., Experimental and theoretical determination of thermal stresses in flat plates, NACA TN 2769 (1952)
- [38] Prakash, T., Singha, M. K., & Ganapathi, M. (2008). *Thermal postbuckling analysis of FGM skew plates. Engineering Structures, 30(1)*, 22–32.
doi:10.1016/j.engstruct.2007.02.012
- [39] N. Yamaki, Postbuckling behavior of rectangular plates with small initial curvature loaded in edge compression, J. Appl. Mech. 26 (1959) 407–414.
- [40] Tung H Van, Thermal and thermomechanical postbuckling of FGM sandwich plates resting on elastic foundations with tangential edge constraints and temperature dependent properties, Compos Struct, 2015.
<https://doi:10.1016/j.compstruct.2015.06.043>.
- [41] Van Tung H, Nonlinear axisymmetric response of FGM shallow spherical shells with tangential edge constraints and resting on elastic foundations, Compos Struct, 2016.
<https://doi:10.1016/j.compstruct.2016.04.032>.

- [42] Wang Z, Han Q, Nash DH, Liu P, Hu D, Investigation of imperfect effect on thermal buckling of cylindrical shell with FGM coating, *Eur J Mech / A Solids*, 69, 2018, 221–30. <https://doi:10.1016/j.euromechsol.2018.01.004>.
- [43] Sofiye AH, Thermoelastic stability of freely supported functionally graded conical shells within the shear deformation theory, *Compos Struct*, 152, 2016, 74–84. <https://doi:10.1016/j.compstruct.2016.05.027>.
- [44] So AH, Zerín Z, Kuruoglu N, Thermoelastic buckling of FGM conical shells under non-linear temperature rise in the framework of the shear deformation theory, 108 , 2017, 279–90. <https://doi:10.1016/j.compositesb.2016.09.102>.
- [45] Yaghoobi MP, Ghannad M. An analytical solution for heat conduction of FGM cylinders with varying thickness subjected to non-uniform heat flux using a first-order temperature theory and perturbation technique. *Int Commun Heat Mass Transf* 2020;116:104684. <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2020.104684>.
- [46] Ye L, Ye Z. Aeroelastic Stability and Nonlinear Flutter Analysis of Heated Panel with Temperature-Dependent Material Properties. *J Aerosp Eng* 2020;33:04020068. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)as.1943-5525.0001173](https://doi.org/10.1061/(asce)as.1943-5525.0001173).
- [47] Cao L, Wang H, Qin QH. Fundamental solution based graded element model for steady-state heat transfer in FGM. *Acta Mech Solida Sin* 2012;25:377–92. [https://doi.org/10.1016/S0894-9166\(12\)60034-2](https://doi.org/10.1016/S0894-9166(12)60034-2).
- [48] Amiri Delouei A, Emamian A, Karimnejad S, Sajjadi H. A closed-form solution for axisymmetric conduction in a finite functionally graded cylinder. *Int Commun Heat Mass Transf* 2019;108:104280. <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2019.104280>.
- [49] Amiri Delouei A, Emamian A, Karimnejad S, Sajjadi H, Jing D. Two-dimensional analytical solution for temperature distribution in FG hollow spheres: General thermal boundary conditions. *Int Commun Heat Mass Transf* 2020;113:104531. <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2020.104531>.

- [50] Torabi M, Zhang K. Classical entropy generation analysis in cooled homogenous and functionally graded material slabs with variation of internal heat generation with temperature, and convective-radiative boundary conditions. *Energy* 2014;65:387–97. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2013.11.020>.
- [51] Wang X, Wang Z, Zeng T, Cheng S, Yang F. Exact analytical solution for steady-state heat transfer in functionally graded sandwich slabs with convective-radiative boundary conditions. *Compos Struct* 2018;192:379–86. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.03.006>.
- [52] J.K. Zhou, *Differential Transformation and its Applications for Electrical Circuits*, Huazhong University Press, Wuhan, China, 1986.
- [53] Ayaz F. On the two-dimensional differential transform method. *Appl Math Comput* 2003;143:361–74. [https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(02\)00368-5](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(02)00368-5).
- [54] Ayaz F. Solutions of the system of differential equations by differential transform method. *Appl Math Comput* 2004;147:547–67. [https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(02\)00794-4](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(02)00794-4).
- [55] Ertu VS. Comparing numerical methods for solving fourth-order boundary value problems. *Appl Math Comput* 2007;188:1963–8. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.11.075>.
- [56] Haziqah C, Hussin C, Kilic A. On the Solutions of Nonlinear Higher-Order Boundary Value Problems by Using Differential Transformation Method and Adomian Decomposition Method. *Math Probl Eng* 2011;2011:19p. <https://doi.org/10.1155/2011/724927>.
- [57] Aruna K, Sri A, Ravi V. Solution of singular two point boundary value problems with forcing function in integral form via differential transform method. *World J Model Simul* 2013;9:262–8.

[58] Sarp Ü, Rgen FEVİ, Ş SİKİK. Applications of differential transformation method to solve systems of ordinary and partial differential equations. J BAUN Inst Sci Technol 2018. <https://doi.org/10.25092/baunfbcd.423145>.

[59] Mosayebidorcheh S, Ganji DD, Farzinpoor M. Approximate solution of the nonlinear heat transfer equation of a fin with the power-law temperature-dependent thermal conductivity and heat transfer coefficient. Propuls Power Res 2014;3:41–7. <https://doi.org/10.1016/j.jprr.2014.01.005>.

[60] Torabi M, Yaghoobi H. Accurate Solution for Convective – Radiative Fin with Variable Thermal Conductivity and Nonlinear Boundary Condition by DTM. Arab J Sci Eng 2013;38:3575–85. <https://doi.org/10.1007/s13369-013-0636-8>.

[61] Hazarika SA, Deshamukhya T, Bhanja D, Nath S. Thermal analysis of a constructal T-shaped porous fin with simultaneous heat and mass transfer. Chinese J Chem Eng 2017;25:1121–36. <https://doi.org/10.1016/j.cjche.2017.03.034>.

[62] Deshamukhya T, Azmi S, Bhanja D, Nath S. An optimization study to investigate non-linearity in thermal behaviour of porous fin having temperature dependent internal heat generation with and without tip loss. Commun Nonlinear Sci Numer Simul 2019;67:351–65. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.07.024>.

[63] Farhatnia F, Ghanbari-mobarakeh M, Rasouli-jazi S, Oveissi S. THERMAL BUCKLING ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED CIRCULAR PLATE RESTING ON THE PASTERNAK ELASTIC FOUNDATION VIA THE 455 DIFFERENTIAL. Mech Eng 2017;15:545–63. <https://doi.org/10.22190/FUME170104004F>.

[64] Varghese E, Devadass CSC, Rajendran MG. APPLICATION OF DIFFERENTIAL TRANSFORMATION METHOD FOR THE STATIC ANALYSIS OF EULER-BERNOULLI BEAM. Int J Adv Res Sci Eng 2015;8354:144–9.

[65] Abbasi S, Farhatnia F, Jazi SR. Full Length Research Paper Application of Differential Transformation Method (DTM) for bending Analysis of Functionally Graded Circular Plates. *Casp J Appl Sci Res* 2013;2:17–23.

[66] Yaghoobi H, Torabi M. The application of differential transformation method to nonlinear equations arising in heat transfer ☆. *Int Commun Heat Mass Transf* 2011;38:815–20. <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2011.03.025>.

[67] Ummugulsum C-K, Ozan O. Exact Solutions of Some Partial Differential Equations Using the Modified Differential Transform Method. *Iran J Sci Technol Trans Sci* 2018;3. <https://doi.org/10.1007/s40995-018-0490-3>.

[68] Yu B, Zhou H, Yan J, Meng Z. A differential transformation boundary element method for solving transient heat conduction problems in functionally graded materials. *Numer Heat Transf Part A Appl* 2016;7782. <https://doi.org/10.1080/10407782.2016.1173471>.

[69] Peng H, Chen C. International Journal of Heat and Mass Transfer Hybrid differential transformation and finite difference method to annular fin with temperature-dependent thermal conductivity. *Int J Heat Mass Transf* 2011;54:2427–33. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2011.02.019>.

[70] Mosayebidorcheh S, Makinde OD, Ganji DD, Chermahini MA. DTM-FDM hybrid approach to unsteady MHD Couette flow and heat transfer of dusty fluid with variable properties. *Therm Sci Eng Prog* 2017;2:57–63. <https://doi.org/10.1016/j.tsep.2017.04.003>.

[71] Singh S, Singla RK. Experimental and numerical analysis of a nonlinear pin fin with temperature dependent properties and disparate boundary conditions. *Int Commun Heat Mass Transf* 2019;108:104313. <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2019.104313>.

[72] Lin Y, Chang K, Chen C. Hybrid differential transform method / smoothed particle hydrodynamics and DT / finite difference method for transient heat conduction problems. *Int*

Commun Heat Mass Transf 2020;113:104495.
<https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2020.104495>.

[73] Chang SH, Chang IL. A new algorithm for calculating one-dimensional differential transform of nonlinear functions. Appl Math Comput 2008;195:799–808.
<https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.05.026>.

[74] Jang B. Efficient analytic method for solving nonlinear fractional differential equations. Appl Math Model, 2014; 38: 1775–87.
<https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.09.018>.

[75] Hatami, Mohammad & Ganji, Davood & Sheikholeslami, Mohsen. (2017). DTM for Heat Transfer Problems. 10.1016/B978-0-12-805190-0.00003-6.

[76] Asaithambi, A. (2006). A shooting method for nonlinear heat transfer using automatic differentiation. Applied Mathematics and Computation, 180(1), 264–269.
doi:10.1016/j.amc.2005.12.011

[77] Ha, S. N. (2001). A nonlinear shooting method for two-point boundary value problems. Computers & Mathematics with Applications, 42(10-11), 1411–1420.
doi:10.1016/s0898-1221(01)00250-4

[78] Li, S.-R., Zhang, J.-H., & Zhao, Y.-G. (2007). Nonlinear thermomechanical post-buckling of circular FGM plate with geometric imperfection. Thin-Walled Structures, 45(5), 528–536.
doi:10.1016/j.tws.2007.04.002

[79] Tung H Van, Duc ND, Nonlinear analysis of stability for functionally graded plates under mechanical and thermal loads, Compos Struct, 2010.
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.10.015>.

[80] Kiani Y, Bagherizadeh E, Eslami MR, Thermal buckling of clamped thin rectangular FGM plates resting on Pasternak elastic foundation (Three approximate analytical solutions), 593, 2011, 581–93. <https://doi.org/10.1002/zamm.201000184>.

[81] Samsam Shariat BA, Eslami MR, Effect of Initial Imperfections on Thermal Buckling of Functionally Graded Plates, J Therm Stress, 2005.

<https://doi:10.1080/014957390967884>.

[82] Yang J, Imperfection sensitivity of the post-buckling behavior of higher-order shear deformable functionally graded plates, 43 2006, 5247–66.

<https://doi:10.1016/j.ijsolstr.2005.06.061>.

[83] Shen HS, Thermal postbuckling behavior of shear deformable FGM plates with temperature-dependent properties, Int J Mech Sci, 2007.

[84] F. Ebrahimi and M.R. Barati, Dynamic modeling of a thermo–piezo-electrically actuated nanosize beam subjected to a magnetic field, Appl. Phys. A 122 (4) (2016), pp. 1–18.

[85] Javaheri, R., & Eslami, M. R. (2002). Thermal Buckling of Functionally Graded Plates. AIAA Journal, 40(1), 162–169.

doi:10.2514/2.1626

[86] Javaheri, R., & Eslami, M. R. (2002). Buckling of Functionally Graded Plates under In-plane Compressive Loading. ZAMM, 82(4), 277.

doi:10.1002/1521-4001(200204)82:4<277::aid-zamm277>3.0.co;2-y

[87] Shariat BAS, Eslami MR, Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads, Compos Struct, 78, 2007, 433–9.

doi:10.1016/j.compstruct.2005.11.001.

[88] Zenkour AM, Sobhy M, Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates, Compos Struct, 2010.

doi:10.1016/j.compstruct.2010.06.012.

[89] Samsam Shariat BA, Eslami MR, Thermal buckling of imperfect functionally graded plates, Int J Solids Struct, 2006.

doi:10.1016/j.ijsolstr.2005.04.005.

- [90] L. Azrar, B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry F., An asymptotic-numerical method to compute the postbuckling behaviour of elastic plates and shells, *Numerical Methods in Engineering*, 36, (1993), 1251-1277
- [91] F. Mohri, L. Azrar, M. Potier-Ferry, Flexural–torsional post-buckling analysis of thin-walled elements with open sections, *Thin-Walled Structures*, 39, (2001), 907–938
- [92] F. Mohri, L. Azrar, M. Potier-Ferry, Lateral post-buckling analysis of thin-walled open section beams, *Thin-Walled Structures*, 40, (2002), 1013–1036
- [93] Abdoun Farah and Azrar Lahcen "Thermal buckling and vibration of laminated composite plates with temperature dependent properties by an asymptotic numerical method" *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, Volume 21, 23 Feb 2020 - Issue 1, Pages 43-57 <https://doi.org/10.1080/15502287.2020.1729899>
- [94] Abdoun, F., Azrar, L. "Nonlinear thermal analysis of multilayered composite and FGM plates with temperature-dependent properties based on an asymptotic numerical method" *Archive of Applied Mechanics*, Volume 91, pages 4361–4387 (2021) <https://doi.org/10.1007/s00419-021-01999-x>
- [95] Reddy JN, Analysis of functionally graded plates, 684, 2000, 663–84.
- [96] Li SR, Zhang JH, Zhao YG, Nonlinear thermomechanical post-buckling of circular FGM plate with geometric imperfection, *Thin-Walled Struct*, 2007.
doi:10.1016/j.tws.2007.04.002.
- [97] Prakash, T., Singha, M. K., & Ganapathi, M. (2009). Thermal snapping of functionally graded materials plates. *Materials & Design*, 30(10), 4532–4536.
doi:10.1016/j.matdes.2009.05.008
- [98] Ghannadpour, S. A. M., Ovesy, H. R., & Nassirnia, M. (2012). Buckling analysis of functionally graded plates under thermal loadings using the finite strip method. *Computers & Structures*, 108-109, 93–99.

doi:10.1016/j.compstruc.2012.02.011

[99] Ovesy, H. R., Ghannadpour, S. A. M., & Nassirnia, M. (2015). Post-buckling analysis of rectangular plates comprising Functionally Graded Strips in thermal environments. *Computers & Structures*, 147, 209–215.

doi:10.1016/j.compstruc.2014.09.011

[100] Lal, A., Jagtap, K. R., & Singh, B. N. (2013). Post buckling response of functionally graded materials plate subjected to mechanical and thermal loadings with random material properties. *Applied Mathematical Modelling*, 37(5), 2900–2920.

doi:10.1016/j.apm.2012.06.013

[101] Tran, L. V., Thai, C. H., & Nguyen-Xuan, H. (2013). An isogeometric finite element formulation for thermal buckling analysis of functionally graded plates. *Finite Elements in Analysis and Design*, 73, 65–76.

doi:10.1016/j.finel.2013.05.003

[102] Swaminathan, K., & Sangeetha, D. M. (2017). Thermal analysis of FGM plates – A critical review of various modeling techniques and solution methods. *Composite Structures*, 160, 43–60. doi:10.1016/j.compstruct.2016.10.047

[103] Ghasemi SE, Hatami M, Ganji DD. Thermal analysis of convective fin with temperature-dependent thermal conductivity and heat generation. *Case Studies in Thermal Engineering* 2014;4:1-8.

[104] Swaminathan K, Sangeetha DM. Thermal analysis of FGM plates – A critical review of various modeling techniques and solution methods. *Compos Struct* 2017.

<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.10.047>.

[105] Dogonchi AS, Ganji DD. Convection-radiation heat transfer study of moving fin with temperature-dependent thermal conductivity, heat transfer coefficient and heat generation. *Appl Therm Eng* 2016;103:705–12.

<https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2016.04.121>.

- [106] Jiang, K., Liu, S., & Wang, X. (2018). Low-thermal-conductivity and high-toughness CeO_2 – Gd_2O_3 co-stabilized zirconia ceramic for potential thermal barrier coating applications. *Journal of the European Ceramic Society*, 38(11), 3986–3993.
doi:10.1016/j.jeurceramsoc.2018.04.065
- [107] Gurrappa, I., & Sambasiva Rao, A. (2006). Thermal barrier coatings for enhanced efficiency of gas turbine engines. *Surface and Coatings Technology*, 201(6), 3016–3029.
doi:10.1016/j.surfcoat.2006.06.026
- [108] Nieto, A., Walock, M., Ghoshal, A., Zhu, D., Gamble, W., Barnett, B., Murugan, M., Pepi, M., Rowe, C., Pegg, R. (2018). Layered, composite, and doped thermal barrier coatings exposed to sand laden flows within a gas turbine engine: Microstructural evolution, mechanical properties, and CMAS deposition. *Surface and Coatings Technology*, 349, 1107–1116.
doi:10.1016/j.surfcoat.2018.05.089
- [109] Fazzolari FA, Natural frequencies and critical temperatures of functionally graded sandwich plates subjected to uniform and non-uniform temperature distributions, *Compos Struct*, 2015.
doi:10.1016/j.compstruct.2014.10.039.
- [110] Duc, N. D., & Cong, P. H. (2013). Nonlinear postbuckling of symmetric S-FGM plates resting on elastic foundations using higher order shear deformation plate theory in thermal environments. *Composite Structures*, 100, 566–574.
doi:10.1016/j.compstruct.2013.01.006
- [111] Thang, P. T., Nguyen, T.-T., & Lee, J. (2017). A new approach for nonlinear buckling analysis of imperfect functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates. *Composites Part B: Engineering*, 127, 166–174.
doi:10.1016/j.compositesb.2016.12.002
- [112] Tung, H. V. (2015). Thermal and thermomechanical postbuckling of FGM sandwich plates resting on elastic foundations with tangential edge constraints and temperature dependent properties. *Composite Structures*, 131, 1028–1039.
doi:10.1016/j.compstruct.2015.06.043

[113] Shen, H.-S. (2007). Thermal postbuckling behavior of shear deformable FGM plates with temperature-dependent properties. *International Journal of Mechanical Sciences*, 49(4), 466–478.

doi:10.1016/j.ijmecsci.2006.09.011