

N° d'ordre : 3723

THÈSE

En vue de l'obtention du : **DOCTORAT**

Structure de recherche : Équipe des sciences de la matière et du rayonnement

Discipline : Physique

Spécialité : Physique des hautes énergies

Présentée et soutenue le 31/12/2022 par :

Mohamed OUALAID

Inflation Branaire et Réchauffement Cosmologique

Jury

Yassine HASSOUNI	PES, Université Mohammed V, Faculté des sciences de Rabat	Président
Rachid MARKAZI	PH, Université Ibn Zohr de Agadir, École Supérieure de Technologie de Guelmim	Rapporteur\Examinateur
Morad EL BAZ	PES, Université Mohammed V, Faculté des sciences de Rabat	Rapporteur\Examinateur
Omar EL BOUNAGUI	PH, Université Mohammed V, Faculté des sciences de Rabat	Rapporteur\Examinateur
Moha EL IDRISSE	PH, Université Sultan Moulay Slimane de Béni- Mellal, Faculté Polydisciplinaire de Khouribga	Examinateur
Adil BELHAJ	PH, Université Mohammed V, Faculté des sciences de Rabat	Directeur de Thèse

Année universitaire : 2022/2023

DÉDICACES

Cette thèse est dédiée

À mes très chers parents, qui ont fait preuve de beaucoup de patience et de sacrifice, Je te remercie pour toutes ces années de sacrifices, de sollicitudes, d'encouragement et de prières.

À mes très chers frères et sœurs, qui m'avez toujours soutenu et encouragé, puisse dieu vous donne santé, bonheur, courage et surtout réussite.

À toutes ma famille maternelle et paternelle, mes proches et à ceux qui me donnent de l'amour et de la vivacité.

*Je tiens à remercier professeur **Moulay Brahim SEDRA** pour la collaboration.*

*Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à **Mohamed BENALI** pour sa collaboration scientifique et son aide précieuse au quotidien.*

*Je souhaite remercier les membres de l'équipe ESMaR. Particulièrement, je tiens à remercier **Hajar BELMAHI, Mustapha LAMAAOUNE, Anas EL BALALI** et **Yassine SE-KHMANI** pour la discussion et la collaboration.*

À mes amis, je vous remercie pour votre soutien morale et vos conseils.

Remerciements

Ce mémoire de thèse a été réalisé au sein de l'équipe des sciences de la matière et du rayonnement (ESMaR), département de physique de la Faculté des Sciences de Rabat et sous la direction de Monsieur Adil BELHAJ, Professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat .

*Je voudrais, dans un premier temps remercier mon directeur de thèse Monsieur **Adil BELHAJ**, Professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté des sciences de Rabat de m'avoir accueilli et intégré dans son équipe de recherche. Je le remercie également pour ses conseils, ses orientations et sa confiance.*

*Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à Monsieur **Yassine HASSOUNI**, Professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, de m'avoir honoré de présider de ce jury de mon doctorat.*

*J'adresse mes remerciements les plus profonds à Monsieur **Rachid MARKAZI**, Professeur de l'enseignement supérieur à l'école Supérieure de Technologie de Guelmim (Université Ibn Zohr), d'avoir accepté de rapporter et examiner le contenu scientifique de ma thèse.*

*J'exprime mes plus vifs remerciements à Monsieur **Morad EL BAZ**, Professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, d'avoir accepté de rapporter et examiner ce travail doctoral.*

*Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à Monsieur **Omar EL BOUNAGUI**, Professeurs de l'enseignement supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, d'avoir accepté de rapporter et examiner le contenu de ma thèse.*

*Mes remerciements vont aussi à Monsieur **Moha EL IDRISI**, Professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté Polydisciplinaire de Khouribga (Université Sultan Moulay Slimane), qui a bien voulu examiner ce travail doctoral.*

Je souhaite remercier les membres de l'équipe ESMaR. Particulièrement, je tiens à remercier les collaborateurs et les doctorants pour la discussion et la collaboration.

Finalement, je tiens à remercier très sincèrement tous ceux qui ont participé de près ou de loin à ce travail.

M.©

Résumé

Dans ce travail doctoral, nous discutons l'inflation cosmologique, qui est une phase d'accélération de l'expansion de l'univers. Cette dernière est considérée comme une réponse aux problèmes du modèle standard de la cosmologie permettant certaines production perturbatives aux grandes échelles sur les fonds diffus cosmologique (Cosmic Microwave Background (CMB)). Particulièrement, nous étudions les modèles cosmologiques d'inflation à partir de la physique des branes en se basant sur le scénario de Randall-Sundrum. Précisément, nous calculons les paramètres observables associés, y compris ceux de la perturbation. Pour ce faire, nous examinons d'abord le modèle standard inflationnaire en calculant les quantités cosmologiques correspondantes à des potentiels scalaires connus. Ensuite, nous proposons des modèles dans le cadre de la théorie des supercordes type IIB en présence des de D3-branes. Concrètement, nous traitons certains potentiels avec un seul champ scalaire inspirés par la dite théorie. Dans ce contexte, nous présentons une étude détaillée concernant le potentiel logarithmique et le potentiel tachyonique inflationnaire des cordes ouvertes (OSTI). En présence de la tension de D3-brane, nous fournissons des contraintes sur le champ scalaire produisant des modèles inflationnaires compatibles avec les résultats de Planck. Après, nous étudions la phase de réchauffage de ces deux modèles. En effet, nous observons que la température de réchauffage dépend des formes du potentiel scalaire. Entre autres, nous trouvons que l'OSTI génère de petites températures, supportées par les échelles la théorie de grande unification (GUT). Finalement, nous investigations le comportement cosmologique du modèle inflationnaire branaire de Starobinsky. Concrètement, nous découvrons que l'indice spectral et le rapport tenseur-scalaire sont en bon accord avec les données observationnelles de Planck et BICEP/Keck. En faisant varier les valeurs de la masse de Planck à cinq dimensions M_{5p} , nous examinons le comportement thermique correspondant. Plus précisément, nous calculons et analysons les paramètres cosmologiques de réchauffement. Pour une valeur spécifique de la tension de la D3-brane, nous fournissons de bonnes prédictions des quantités impliquées. En prenant $M_{5p} = 10^{12}$ TeV, nous obtenons des températures acceptables de réchauffement.

Mots-clés : Inflation, Réchauffement, Physique des Branes, Formalisme Randall-Sundrum, Cosmologie, Théorie des cordes, Théorie de Gauss-Bonnet, Potentiel de Starobinsky, Théorie-M.

Abstract

In this doctoral thesis, we discuss cosmological inflation, which is a phase of acceleration of the expansion of the universe. The latter is considered as an answer to the problems of the standard model of cosmology allowing certain cosmological productions at large scales on the Cosmic Microwave Background (CMB). In particular, we study cosmological inflation models from brane physics based on the Randall-Sundrum scenario. Precisely, we calculate the corresponding observable parameters, including the ones associated with the perturbation. To do so, we first examine the standard inflationary model by computing the cosmological quantities corresponding to known scalar potentials. Then, we propose models within type IIB superstring theory with D3-branes. In particular, we deal with certain potentials with a single scalar field inspired by such a theory. In this context, we present a detailed study concerning the logarithmic potential and the open string inflationary tachyonic potential (OSTI). Turning on the the D3-brane effect via its tension, we provide constraints on the scalar field producing inflationary models consistent with Planck's results. Next, we study the reheating phase of such two models. Specifically, we observe that the reheating temperature depends on the scalar potential forms. Among others, we find that OSTI generates small temperatures, supported by Grand Unification Theory (GUT) scales. Finally, we investigate the cosmological behaviors of Starobinsky inflationary brane model. Concretely, we find that the spectral index and the tensor-scalar ratio are in good agreement with the observational data of Planck and BICEP/Keck. Varying the five dimensional Planck Mass M_{5p} , we inspect the corresponding thermal behavior. More precisely, we compute and analyze the cosmological parameters of such a thermal phase. For a specific value of the D3-brane tension, we provide good predictions of the involved quantities. Taking $M_{5p} = 10^{12}$ TeV, we obtain acceptable reheating temperatures.

Keywords : Inflation, Reheating, Brane Physics, Randall-Sundrum Formalism, Cosmology, String theory, Gauss-Bonnet Theory, Starobinsky Potential, M-Theory.

Liste des publications

Articles principaux

- A. Belhaj, M. Benali, Y. Hassouni, M. Oualaid and M. B. Sedra, *On brane cosmological behaviors of Starobinsky inflationary model*, Int. J. Mod. Phys. A **37**, 08 (2022) 2250043.
- A. Belhaj, Y. Hassouni, M. Oualaid and M. B. Sedra, *On stringy inflation potentials*, Mod. Phys. Lett. A **36**, 31 (2021) 2150225.
- A. Belhaj, H. Es-Sobbahi, M. Oualaid and E. Torrente-Lujan, *Reconstructing slow-roll Scalar-Tensor Gauss-Bonnet single field inflation from running spectral data*, arXiv:2108.11881.

Articles en collaboration avec d'autres doctorants

- A. Belhaj, M. Benali, M. Lamaaoune, M. Oualaid, *On Inflation Models from $f(R)$ Gravity with Kinetic Couplings*. Article soumis.
- A. Belhaj, H. Belmahi, M. Benali, M. Oualaid and M. B. Sedra, *Light Trajectories and Thermal Shadows casted by Black Holes in a Cavity*, submitted to Astrophysical Journal, arXiv:2206.00615.
- A. Belhaj, Y. Hassouni, M. Oualaid and Y. Sekhmani, *Rotating Ayón-Beato-García Black holes in 4D Einstein Gauss-Bonnet Gravity and Their Shadows*, Int. J. Mod. Phys. D (IJMPD) **25** (2023) 2350016.

Table des figures

1.1	<i>Schéma original de Hubble [43]. Les vitesses des galaxies lointaines sont représentées en fonction de la distance. Les disques noirs et le trait plein représentent la solution pour un mouvement solaire estimé en se basant sur les données individuelles des nébuleuses, les cercles et la ligne pointillée représentent la solution obtenue et regroupant les nébuleuses en 9 groupes distincts.</i>	11
1.2	<i>Composition actuelle de l'univers, selon le modèle ΛCDM, où nous prenons $\Omega_K = 0$. Ceci est cohérent avec les dernières mesures du modèle de Planck [12].</i>	19
1.3	<i>Une histoire illustrée de quelques événements clés dans l'évolution de l'univers, avec le temps approximatif où ils se sont produits. Source de l'image: NASA.</i>	22
1.4	<i>Carte de température du FDC observée par satellite de Planck en 2018. La température du FDC est de 2,725K, avec des fluctuations 0,01%. Image créée par la collaboration ESA/Planck [12].</i>	25
2.1	<i>Diagrammes conformes dans le plan (η, r), où la lumière se propage en lignes droites.</i>	33
2.2	<i>Schéma du processus inflationnaire.</i>	37
2.3	<i>Représentation schématique du potentiel des modèles à grand champ avec $n = 2$.</i>	40
2.4	<i>Représentation schématique du potentiel des modèles à petit champs avec $n = 2$.</i>	41
2.5	<i>(a) L'espace-temps et (b) l'espace-temps perturbé.</i>	43

TABLE DES FIGURES

2.6	<i>Contraintes sur le rapport tenseur-scalaire $r_{0,002}$ dans le modèle Λ CDM, en utilisant Planck TT,TE, EE+lowE et Planck TT,TE,EE+lowE+lensing (rouge et vert, respectivement), et contraintes combinées avec BAO et BICEP2/Keck (bleu). Cela suppose la relation de cohérence inflationniste et la variation de l'indice spectral $dn_s/d\ln k$ négligeable. Crédit image : collaboration Planck [12].</i>	55
4.1	<i>Champ scalaire ϕ_i en fonction de α ($M_{4p} = 1$).</i>	83
4.2	<i>Indice spectral scalaire n_s en fonction du rapport tenseur-scalaire r pour $0,001 \leq \alpha \leq 0,5$.</i>	84
4.3	<i>Variation des indices spectraux $\frac{dn_s}{d\ln k}$ en fonction de r.</i>	85
4.4	<i>Variation de N_{re} et T_{re} en fonction de n_s pour le modèle Starobinsky $p = 1$. Les graphiques en haut correspondent à $\alpha = 0.01$ et en bas à $\alpha = 0.05$, en utilisant $M_{5p} = 10^5$ TeV et $T = 1.60 \times 10^{-3}$ TeV⁴.</i>	88
4.5	<i>Variation de N_{re} et T_{re} en fonction de n_s pour le modèle Starobinsky $p = 1$. Les graphiques en haut correspondent à $\alpha = 0.01$ et en bas à $\alpha = 0.05$, en utilisant $M_{5p} = 10^{12}$ TeV et $T = 1.60 \times 10^{39}$ TeV⁴.</i>	89
4.6	<i>Indice spectral n_s en fonction du rapport tenseur-scalaire r pour $N_k = 60$ et $2 \leq \phi_0 \leq 6$ ($M_{4p} = 1$).</i>	91
4.7	<i>Variation des indices spectraux $\frac{dn_s}{d\ln k}$ en fonction de ϕ_0 pour $N_k = 60$ et $2 \leq \phi_0 \leq 6$ ($M_{4p} = 1$).</i>	92
4.8	<i>M en fonction de ϕ_0 pour $N_k = 60$ et $2 \leq \phi_0 \leq 6$.</i>	93
4.9	<i>Diagrammes des N_{re} et T_{re} en fonction de n_s pour le modèle logarithmique.</i>	94
4.10	<i>Indice spectral n_s en fonction du rapport tenseur-scalaire r pour $N_k = 60$ et $6 \leq \phi_0 \leq 9$ ($M_{4p} = 1$).</i>	96
4.11	<i>Variation des indices spectraux $\frac{dn_s}{d\ln k}$ en fonction de ϕ_0 pour $N_k = 60$ et $6 \leq \phi_0 \leq 9$ ($M_{4p} = 1$).</i>	97
4.12	<i>M en fonction de ϕ_0 pour $N_k = 60$ et $6 \leq \phi_0 \leq 9$.</i>	98
4.13	<i>Diagrammes des N_{re} et T_{re} en fonction de n_s pour le modèle tachyonique à cordes ouvertes.</i>	99
A.1	<i>Représentation géométrique du champ gravitationnel autour du soleil.</i>	161
A.2	<i>montre la courbure de l'espace-temps.</i>	161
A.3	<i>transformation de gallile.</i>	162
A.4	<i>Le champ de gravité est éliminé pour la référence en chute libre.</i>	166
A.5	<i>Le champ gravitationnel est équivalent à un référentiel d'accélération dans le vide.</i>	166

Liste des tableaux

1.1	<i>Les équations d'état pour différents fluides, ainsi que les densités et les facteurs d'échelles correspondants.</i>	16
3.1	<i>Certains types des modèles qu'ont été étudiés dans l'inflation branaire.</i>	71
3.2	<i>Valeurs numériques de n_s et r.</i>	73
3.3	<i>Valeurs numériques de n_s et r dans inflation branaire.</i>	74
4.1	<i>Les contraintes sur l'amplitude du modèle de Starobinsky pour différentes valeurs de N_k en prenant deux valeurs de la masse de Planck à cinq dimensions, où le paramètre sans dimension α est dans la gamme $0.001 \leq \alpha \leq 0.5$.</i>	87

Table des matières

Dédicaces	i
Remerciements	i
Résumé	ii
Abstract	iii
Liste des publications	iv
Liste des figures	vi
Liste des tableaux	viii
Introduction générale	1
I Modélisation de l'inflation	5
1 Modèle standard de la cosmologie	6
1.1 Principes et fondements cosmologiques	7
1.1.1 Métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	7
1.1.2 Loi de Hubble	10
1.2 Équations algébriques cosmologiques	12

TABLE DES MATIÈRES

1.2.1	Équation d'Einstein	12
1.2.2	Équations de Friedmann et Raychaudhuri	13
1.3	Généralités sur l'univers	17
1.3.1	Composition de l'univers	17
1.3.2	Histoire de l'Univers	20
1.3.3	Âge de l'univers	20
1.3.4	Brève histoire cosmologique	21
1.4	Problèmes classiques du modèle standard de l'inflation	26
1.4.1	Problème d'horizon	26
1.4.2	Distance angulaire de l'horizon	27
1.4.3	Problème de la platitude (Flatness)	29
1.4.4	Problème du monopole	30
2	Inflation standard	31
2.1	Solutions aux problèmes du relatifs à l'univers	32
2.1.1	Problème de l'horizon	32
2.1.2	Problème de la platitude	34
2.1.3	Problème du monopole	34
2.2	Dynamique de l'inflation	34
2.3	Scénario du roulement lent	37
2.4	Modèles d'inflation	39
2.4.1	Modèles à grandes valeurs des champs	40
2.4.2	Modèles à petites valeurs des champs	40
2.4.3	Modèles hybrides	41
2.5	Perturbations cosmologiques	42
2.5.1	Perturbations métriques	42
2.5.2	Perturbations scalaires	44
2.5.3	Perturbations tensorielles	47
2.6	Spectre de puissance des perturbations	47
2.7	Contraintes observationnelles sur l'inflation	54
3	Inflation branaire	57
3.1	Physique des branes	57
3.2	Formalisme de Randall-Sundrum	60

TABLE DES MATIÈRES

3.2.1	Équation d'Einstein sur une D3-brane	61
3.2.2	Équation de Friedmann sur la D3-brane	64
3.3	Inflation branaire	66
3.3.1	Approximation du roulement lent dans l'inflation branaire	66
3.3.2	Perturbation cosmologiques dans l'inflation branaire	69
3.4	Modélisation de l'inflation branaire	71
4	Comportements thermiques inflationnaires	75
4.1	Quantités thermiques du réchauffement N_{re} et T_{re}	76
4.2	Modèle de Starobinsky	79
4.2.1	Dynamique de l'inflation et perturbations cosmologiques	80
4.2.2	Prédictions de Réchauffement	87
4.3	Modèle de inflation logarithmique	89
4.3.1	Dynamique de l'inflation et perturbations cosmologiques	89
4.3.2	Prédictions de Réchauffement	93
4.4	Modèle de Tachyonique à cordes ouvertes	94
4.4.1	Dynamique de l'inflation et perturbations cosmologiques	94
4.4.2	Prédictions de Réchauffement	98
II	Contributions scientifiques	100
	Conclusion générale	157
	ANNEXE	159
A	Relativité générale	160
A.1	Postulats de la relativité générale	162
A.2	Principe de la relativité	162
A.3	Principe d'équivalence d'Einstein	164
A.3.1	Masse d'inertie et gravitation masse	164
A.3.2	Principe d'équivalence faible	165
A.3.3	Principe d'équivalence d'Einstein	167
A.4	Force gravitationnel	167
A.4.1	Référence d'inertie locale	167

TABLE DES MATIÈRES

A.4.2	Équation de géodésique	168
A.4.3	Tenseur métrique	169
A.4.4	Composant des vitesses et des accélérations	170
A.4.5	Constante de cosmologie	171
B	Équations de mouvement des champs physiques	172
B.1	Formalisme vectoriel de l'espace-temps	172
B.2	Théorie classique des champs	174
B.2.1	Champ	174
B.2.2	Action et équation d'Euler-Lagrange	175
B.3	Équations de mouvement	176
B.3.1	Équation de Klein-Gordon	176
B.3.2	Champ de Dirac	176
B.3.3	Champ vectoriel	177
B.4	Champs quantiques libres	178

Introduction générale

Les découvertes observationnelles ont suggéré que l'univers est passé par un scénario appelé inflation. Ce dernier peut être considéré comme un candidat pour résoudre de nombreux problèmes associés à la cosmologie standard, notamment l'horizon et la platitude [1–4]. L'inflation cosmologique représente une phase d'accélération de l'expansion de l'univers. Cette dernière est considérée comme une réponse aux problèmes du modèle standard de la cosmologie, autorisant la production causale de perturbations cosmologiques aux grandes échelles sur les fonds diffus cosmologique (Cosmic Microwave Background (CMB)). Ce phénomène a été largement étudié en relation avec diverses questions telles que les trous noirs, l'énergie noire et la matière noire [5–7]. Dans ce scénario, les champs scalaires jouent un rôle important puisqu'ils sont nécessaires pour fournir certaines propriétés physiques associées aux comportements d'homogénéité et d'isotropie. Ces objets peuvent être injectés dans plusieurs théories physiques y compris la théorie des cordes. Dans cette théorie, les champs scalaires sont généralement dérivés à partir de la compactification sur des espaces non triviaux, comme les espaces toriques de Calabi-Yau. Il se trouve que le modèle le plus simple consiste à utiliser un seul champ scalaire homogène. Cet objet sans spin pourrait interagir avec la gravité de différentes manières, notamment via son potentiel. Plusieurs formes du potentiel scalaire ont été traitées afin de construire des modèles inflationnaires à partir de différentes théories de gravité, y compris les théories modifiées [8–11]. Cependant, certains d'entre eux ont été mis en évidence et rejetés par les données observationnelles de Planck, où les paramètres cosmologiques pertinents ne se situent pas dans les intervalles observables [12–14]. Un examen attentif montre que pour retrouver des modèles présentant un bon accord avec

ces données, diverses approches ont été suggérées [15, 16]. En relation avec le modèle Λ CDM, l'analyse des modèles inflationnaires a également été effectuée en considérant les paramètres de perturbation. De plus, des liens avec les espace de type AdS sont aussi établis et examinés. De plus, certains modèles basés sur la physique des D3-branes en utilisant le mécanisme de Randall-Sundrum (RS-2) ont été largement développés. Différentes formes du potentiel scalaire impliquant certains paramètres comme la tension de la brane ont été explorées. De plus, des modèles gravitationnels inspirés des supercordes et de la compactification de la théorie-M ont également été étudiés pour décrire l'inflation où le champ scalaire a été lié aux déformations géométriques des espaces internes représentés par les paramètres de taille et de forme [17–19]. Dans ces activités, des modèles d'un champ scalaire ont été étudiés à l'aide de différentes méthodes et routes où les observables cosmologiques ont été calculées et examinés [20]. Le champ scalaire a été utilisé pour faire le lien entre les prédictions théoriques et les données d'observation fournies par le fond diffus cosmologique (FDC) et les résultats expérimentaux de Planck. Une étude approfondie montre que les modèles de modification de la relativité générale (GR) ont été exploités afin de fournir des résultats intéressants. Les modèles les plus traités sont la gravité $f(R)$, où R est le scalaire de Ricci. Ces modèles ont été étudiés en considérant différents potentiels et diverses extensions impliquant des contributions de matière non triviales [21, 22]. Une voie possible est d'aller au-delà de cette théorie est d'introduire des modèles de gravité modifiée impliquant une autre quantité telle que la trace du tenseur énergie-momentum $T_{\mu\nu}$ [23]. De cette façon, la théorie $f(R, T)$ a été largement étudiée où l'inflation et le secteur noir prennent des places essentielles [24]. Une autre méthode consiste à ajouter de nouveaux termes dans l'action d'Einstein-Hilbert décrivant les interactions non triviales avec le champ scalaire. Ceci implique un terme cinétique récemment proposé dans [25, 26]. Cependant, ce modèle ne fournit pas de résultats correspondant aux données d'observation actuelles [12]. En utilisant des approximations de type roulement lent, les observables pertinents cosmologiques comme l'indice spectral n_s et le rapport tenseur/scalaire r ont été calculées et examinées pour différents modèles de gravité $f(R)$ avec un nombre donné de e-folding supportés par les données observationnelles [12–14]. Certains modèles ont fourni certaines valeurs numériques en accord parfait avec les résultats de la collaboration de Planck [12, 13]. D'autres modèles ont été explorés pour produire de telles quantités numériques. Concrètement, il s'agit des théories de gravité de Gauss-Bonnet où les quantités cosmologiques ont été déterminées [27–29]. Récemment, un intérêt particulier a été accordé au scénario de réchauffement. Celui-ci a été considéré comme une phase de transition

entre la fin de l'inflation et le début des contributions dominées par le rayonnement [30–35]. Ce scénario repose sur trois quantités physiques: le réchauffage T_{re} , l'équation d'état effective ω_{re} et le nombre de e-folding N_{re} . L'étude de ces quantités fournit certaines contraintes sur les modèles étudiés.

Il a été observé que les formes du potentiel scalaire jouent un rôle primordial en physique des modèles inflationnaires intégrés dans diverses théories y compris théorie des cordes et les théories de gravité modifiée. Il s'avère que des illustrations célèbres sont le potentiel d'inflation chaotique et l'inflation du modèle standard supersymétrique minimal (MSSM). Outre ces modèles étudiés, d'autres formes du potentiel scalaire ont été abordées et traitées dans le cadre de la physique des trous noirs et de la quintessence de l'énergie noire dans des scénarios associés à la théorie des cordes.

Le but de ce travail doctoral est de contribuer à ces activités en étudiant les comportements cosmologiques et thermiques de quelques potentiels scalaires en se basant sur la physique des cordes et des branes. Plus précisément, nous nous intéressons d'abord aux paramètres cosmologiques en introduisant la tension de la D3-brane, considéré comme un objet fondamental de la théorie des cordes de type IIB. Pour certains modèles inspirés des cordes, nous découvrons que ces paramètres fournissent certaines contraintes sur les valeurs du champ scalaire qui sont en bon accord avec les contraintes observationnelles de Planck. Ensuite, nous examinons l'aspect thermique des ces potentiels scalaires en considérant la structure de la phase de réchauffage. Concrètement, nous montrons qu'une telle phase est associée à de petites valeurs de température supportées par les échelles de la théorie de grande unification (GUT) [36–42].

Ce travail doctoral est structuré en deux parties. La première partie de ce mémoire se compose de quatre chapitres qui sont présentés comme suit. Dans le premier chapitre, nous donnons une présentation générale sur la physique de la cosmologie standard du big-bang. En particulier, nous discutons ses limites et ses lacunes. Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons aux modèles d'inflation ordinaires, et la distribution des perturbations inhomogènes générées par l'inflation. Dans le troisième chapitre, nous exposons les quantités cosmologiques dans le cadre de la physique des D3-branes de la théorie des supercordes de type IIB. Dans le quatrième chapitre, nous discutons l'aspect thermique en considérant la phase de réchauffage. En particulier, nous remarquons qu'une telle phase est associée à de petites valeurs de température supportées par les échelles énergétiques de GUT. Dans la deuxième partie, nous présentons nos contributions scientifiques traitant certains modèles de

Introduction générale

l'inflation à partir de la physique de D3-branes. Nous terminons ce travail doctoral par une conclusion générale.

Première partie I

Modélisation de l'inflation

Modèle standard de la cosmologie

Le modèle standard de la cosmologie est actuellement le plus accepté pour décrire les caractéristiques de l'univers. Il est basé sur la théorie de la relativité générale qui a été établie par Albert Einstein en 1915. Ce modèle, dans lequel l'espace-temps est en expansion, a permis de comprendre certaines observations commençant par le recul des galaxies. Pendant ces années, la cosmologie consistait principalement à décrire et à reconstruire les effets observationnels de cette expansion. Puis, dans la seconde moitié du vingtième siècle, le modèle du big bang chaud a été formulé. Ce dernier inclut la description des processus physiques se produisant dans cet espace-temps en expansion ainsi que l'histoire thermique de l'univers qui lui est associée. Plus récemment, la cosmologie est entrée dans une phase de précision avec le flux des données d'observation de haute précision telles que les mesures du fond diffus cosmologique (FDC), les études sur les galaxies, les détecteurs de rayons cosmiques et les ondes gravitationnelles.

Dans ce chapitre, nous allons présenter l'univers de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), qui décrit un espace-temps en expansion, homogène et isotrope. En outre, nous allons discuter le modèle du big bang chaud de l'univers qui décrit l'univers depuis la singularité initiale (il y a environ 13,7 milliards d'années), ainsi que certains problèmes modernes de ce modèle.

1.1 Principes et fondements cosmologiques

La distribution des galaxies et des structures cosmologiques dans l'espace qui nous entoure apparaît isotrope à grande échelle, c'est-à-dire invariant par translation et par rotation. Ceci implique que l'espace-temps possède une symétrie sphérique autour de nous. Ce fait observationnel, combiné au principe copernicien qui énonce que nous ne devrions pas vivre dans une position centrale ou spatialement favorisée dans l'univers, conduit à la conclusion que l'univers doit être homogène à grande échelle. Ce dernier est appelé le principe cosmologique.

1.1.1 Métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Nous appliquons le principe cosmologique qui dicte que notre univers observable est homogène et isotrope aux grandes échelles. Ces propriétés peuvent être exprimées dans un système de coordonnées où la métrique symétrique peut s'écrire sous la forme

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.1)$$

où μ et ν varient de 0 à 3. ds^2 est la distance quadratique entre les points séparés par dx^μ . $g_{\mu\nu}$ est un tenseur 4×4 symétrique qui décrit les propriétés géométriques de l'espace-temps et le champ de gravitation. La métrique pour un univers homogène et isotrope est appelée métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) donnée par la forme suivante

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - K r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right], \quad (1.2)$$

où $a(t)$ est le facteur d'échelle cosmique, t est le temps cosmique. Il est noter que r, θ et ϕ sont les coordonnées spatiales. Le paramètre K décrit la courbure de l'espace-temps et peut prendre les valeurs discrètes suivantes:

- $K = 0$: Dans ce cas, la courbure est nulle conduisant à un l'univers plat.
- $K = -1$: L'espace-temps est de courbure négatif. Dans ce cas, par analogie avec une surface hyperbolique, on dit que l'univers est ouvert.
- $K = 1$: On obtient un espace-temps de courbure positif équivalent à une surface de la sphère. Alors, l'univers est fermé.

En considérant la métrique $g_{\mu\nu}$, il est possible d'obtenir le symbole de Christoffel à partir du tenseur métrique

1.1. Principes et fondements cosmologiques

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}), \quad (1.3)$$

où on a utilisé la notation $\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} = \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}}$. Le tenseur $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ est symétrique lorsqu'on échange μ et ν décrivant la courbure de l'espace-temps. Les coefficients du symbole de Christoffel sont utilisés dans les calculs pratiques de la géométrie de l'espace, afin de déterminer les géodésiques des variétés riemanniennes.

À présent, nous avons besoin d'une dérivée covariante ∇ représentant un opérateur qui peut remplacer la dérivée partielle mais de façon indépendante aux coordonnées. La dérivée covariante d'un vecteur V^{μ} est donnée par

$$\nabla_{\mu}V^{\mu} = \partial_{\nu}V^{\mu} + \Gamma_{\nu\rho}^{\mu}V^{\rho}. \quad (1.4)$$

Si V_{μ} est covariant, alors on a

$$\nabla_{\nu}V_{\mu} = \partial_{\nu}V_{\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}V_{\rho}. \quad (1.5)$$

Le commutateur de la dérivée covariante agissant sur V^{ρ} est donné par

$$\begin{aligned} [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]V^{\rho} &= (\partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda})V^{\sigma} \\ &= R_{\sigma\mu\nu}^{\rho}V^{\sigma}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Par suite, on trouve

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}, \quad (1.7)$$

qui représente le tenseur de courbure, appelé tenseur de Riemann. Le tenseur de Riemann avec les indices bas s'écrit sous la forme suivante

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda}R_{\sigma\mu\nu}^{\lambda}. \quad (1.8)$$

Considérons les composantes de ce tenseur en coordonnées normales de Riemann au point P. Dans ce cas, les symboles de Christoffel dans l'équation (1.7) vont s'annuler bien que leurs dérivées ne le sont pas. À partir de l'équation (1.8), on obtient

$$\begin{aligned} R_{\rho\sigma\mu\nu} &= g_{\rho\lambda}(\partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}), \\ &= \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\partial_{\sigma}g_{\rho\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\rho}g_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\partial_{\sigma}g_{\rho\mu} + \partial_{\nu}\partial_{\rho}g_{\mu\sigma}). \end{aligned} \quad (1.9)$$

1.1. Principes et fondements cosmologiques

Le tenseur de Riemann possède les propriétés suivantes.

- Il est antisymétrique sous l'échange des deux premiers ou des deux derniers indices

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}. \quad (1.10)$$

- Il est symétrique sous l'échange des blocs $\mu\nu$ et $\rho\sigma$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (1.11)$$

- La somme des permutations cycliques sur les trois derniers indices est nulle

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0. \quad (1.12)$$

Considérons la dérivée covariante du tenseur de Riemann évaluée en coordonnées normales riemanniennes

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} &= \partial_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \partial_\lambda (\partial_\mu \partial_\sigma g_{\rho\nu} - \partial_\mu \partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma g_{\rho\mu} + \partial_\nu \partial_\rho g_{\mu\sigma}). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Par permutation cyclique sur les trois premiers indices, on obtient l'identité différentielle appelée identité de Bianchi. Celle-ci est donnée comme suit

$$\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} = 0. \quad (1.14)$$

En utilisant l'identité de Bianchi, nous obtenons l'identité d'Einstein suivante

$$\nabla_\nu G^{\mu\nu} = \nabla_\nu (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R) = 0. \quad (1.15)$$

Alors, nous pouvons définir le tenseur d'Einstein qui est donné par

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (1.16)$$

où $G_{\mu\nu}$ est le tenseur d'Einstein d'ordre 2 ce qui signifie que l'on peut le représenter sous forme matricielle. Rappelons que $R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$ est le tenseur de Ricci et R est le scalaire de Ricci qui donné par $R = 2K$, avec K est la courbure de Gauss.

1.1.2 Loi de Hubble

L'astronome Edwin Hubble dans les années 1920 et 1930 a fait une extraordinaire observation du mouvement de galaxies [43]. Il a constaté que la lumière émise par les galaxies éloignées était toujours décalée vers le rouge, c'est-à-dire l'augmentation de la longueur d'onde λ . En plus, il a été découvert que cette augmentation est proportionnelle à la distance d de la galaxie. Ce décalage est caractérisé par le paramètre

$$z = \frac{\delta \lambda}{\lambda} \propto d. \quad (1.17)$$

En effet, Hubble a montré que ce décalage vers le rouge est dû à l'effet Doppler. Alors, il a attribué une vitesse de récession $v = cz$ à la galaxie. La loi de Hubble peut s'écrire sous la forme suivante

$$v = H d, \quad (1.18)$$

où H est la constante de Hubble qui vaut $H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ avec $a(t)$ le facteur d'échelle. Ce dernier change avec le temps à cause de l'expansion de l'univers et ceci peut être vu par sa dépendance de t . Il a été observé pour la première fois en 1929, comme le montre la figure (1.1), que la valeur actuelle de H , que nous désignons par H_0 , est de l'ordre de $500 \text{ km} \cdot \text{sec}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ avec Mpc (Mega-parsecs) est la distance qui sépare deux galaxies. Un parsecs correspond à environ $3 \times 10^{18} \text{ cm}$.

Cette valeur fournit des informations précieuses sur le contenu de l'univers. La première bonne estimation a été réalisée en 1958 dans Ref. [44], où la valeur de $75 \text{ km} \cdot \text{sec}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ a été obtenue. Enfin, les mesures les plus récentes fournies par la mission Planck ont donné la valeur $H_0 = 67.80 \pm 0.77 \text{ km} \cdot \text{sec}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ [12, 13]. Cette valeur est plutôt petite par rapport aux mesures précédentes.

Une propriété intéressante des espaces-temps FLRW est que la lumière est décalée vers le rouge lors de son mouvement, en raison de la dépendance temporelle du facteur d'échelle. Considérons un objet au repos dans un système de coordonnées comparables avec une coordonnée radiale r_1 , et un observateur situé à $r_0 = 0$. La lumière émise par cet objet au temps t_1 avec une fréquence ν_1 , est reçue par l'observateur au temps t_0 avec une fréquence ν_0 . En effet, la relation entre ν_0 et ν_1 peut être démontré. Puisque la lumière se déplace le long des géodésiques avec $ds = 0$, la trajectoire radiale de la lumière voyageant vers l'observateur

1.1. Principes et fondements cosmologiques

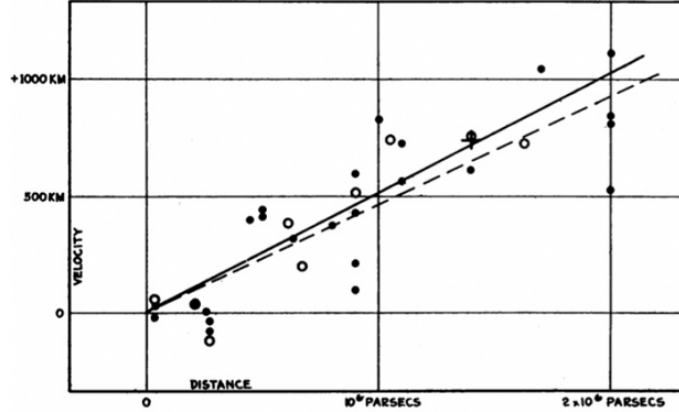


FIGURE 1.1 – Schéma original de Hubble [43]. Les vitesses des galaxies lointaines sont représentées en fonction de la distance. Les disques noirs et le trait plein représentent la solution pour un mouvement solaire estimé en se basant sur les données individuelles des nébuleuses, les cercles et la ligne pointillée représentent la solution obtenue et regroupant les nébuleuses en 9 groupes distincts.

($d\theta = d\phi = 0$ et $dr/dt < 0$) est donnée par

$$\frac{dt}{a(t)} = \frac{dr}{\sqrt{1 - K r^2}}. \quad (1.19)$$

Maintenant, nous considérons l'émission de deux sommets successifs d'une onde lumineuse. La première est émise à (t_1, r_1) et reçue à $(t_0, 0)$ tandis que la seconde est émise à $(t_1 + \delta t_1, r_1)$ et reçue à $(t_0 + \delta t_0, 0)$. D'après l'équation (1.19), on obtient

$$\int_{r_1}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - K r^2}} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (1.20)$$

En soustrayant la troisième intégrale de la deuxième, dans la limite où $\delta t_0, \delta t_1 \ll a/\dot{a}$, on trouve

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\delta t_1}{a(t_1)}. \quad (1.21)$$

Sachant que le retard δt entre deux sommets n'est rien d'autre que l'inverse de la fréquence, on obtient

$$\frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} = 1 + z, \quad (1.22)$$

où la dernière égalité définit le décalage vers le rouge z . Cette quantité dépend seulement du rapport entre le facteur d'échelle à la réception et le facteur d'échelle à l'émission. En termes de longueur d'onde λ , l'équation (1.22) donne $\lambda_0/\lambda_1 = a(t_0)/a(t_1)$. On voit que la longueur d'onde de la lumière se contracte et se prolonge simplement avec le facteur d'échelle $\lambda \propto a$.

1.2 Équations algébriques cosmologiques

1.2.1 Équation d'Einstein

La dynamique des métriques dans l'espace-temps en général (c'est-à-dire non nécessairement FLRW) est décrite par l'action d'Einstein-Hilbert qui s'écrit

$$S = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (1.23)$$

où $M_{\text{Pl}} = 1/\sqrt{8\pi G}$ est la masse de Planck, R est le scalaire de Ricci et $d^4x \sqrt{-g} = d^4x \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})}$ est le volume élémentaire à 4 dimensions. Alors, on peut ajouter un terme de la matière gravitationnelle. La constante cosmologique Λ dans l'action (1.23) peut décrire un univers qui correspond au notre. L'action totale est donnée par

$$S = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (R + 2\Lambda) + \int d^4x \sqrt{-g} L_m, \quad (1.24)$$

où L_m est la densité lagrangienne de la matière gravitationnelle de l'univers. La variation de l'action S par rapport à la métrique $g_{\mu\nu}$ donne

$$\delta S = \int \left[\frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \frac{\delta [\sqrt{-g} (R + 2\Lambda)]}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta \sqrt{-g} L_m}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (1.25)$$

Afin de trouver les solutions possibles, cette variation de l'action l'équation (1.24) doit être nulle ce qui implique

$$\frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \frac{\delta [\sqrt{-g} (R + 2\Lambda)]}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta \sqrt{-g} L_m}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (1.26)$$

Le côté droit de l'équation (1.26) est proportionnel au tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \frac{\delta \sqrt{-g} L_m}{\delta g^{\mu\nu}} &= \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} L_m - \sqrt{-g} \frac{\delta L_m}{\delta g^{\mu\nu}} \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} \left(2 \frac{\delta \sqrt{-g} L_m}{\delta g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} L_m \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

1.2. Équations algébriques cosmologiques

De même, nous pouvons définir le tenseur d'Einstein à partir du côté gauche de l'équation (1.26) de la manière suivante

$$\frac{\delta [\sqrt{-g} (R - 2 \Lambda)]}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\sqrt{-g} M_{\text{Pl}}^2}{2} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \right). \quad (1.28)$$

En utilisant les équations (1.26), (1.28) et (1.27), on obtient l'équation d'Einstein qui est défini par

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} &= \frac{1}{M_{\text{Pl}}^2} T_{\mu\nu} \\ G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} &= 8\pi G T_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (1.29)$$

où $G_{\mu\nu}$ est le tenseur d'Einstein. $R_{\mu\nu}$ et R sont le tenseur et le scalaire de Ricci qui décrivent la courbure et la géométrie de l'espace-temps. $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion qui décrit les informations sur le contenu de matière/énergie dans l'univers, G représente la constante gravitationnelle de valeur $G \simeq 6.6742 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ et Λ est la constante cosmologique qui a été ajoutée par Einstein pour établir des solutions décrivant un univers statique.

1.2.2 Équations de Friedmann et Raychaudhuri

Maintenant, nous pouvons calculer les tenseurs $T_{\mu\nu}$ et $G_{\mu\nu}$ lorsque nous considérons un univers FLRW. Insérant les composantes de la métrique de FLRW donnée par l'équation (1.2) dans la définition du tenseur d'Einstein de l'équation (1.16), on obtient

$$\begin{aligned} G_{00} &= 3H^2 + \frac{3K}{a^2}, \\ G_{ij} &= -g_{ij} \left(H^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{K}{a^2} \right), \\ G_{0i} &= G_{i0} = 0, \end{aligned} \quad (1.30)$$

où les indices i et j correspondent aux indices spatiaux et varient de 1 à 3. L'indice 0 représente la composante temporelle de la métrique. Ces composantes sont données explicitement dans l'annexe 1.3.1, ainsi que les symboles de Christoffel de la métrique FLRW.

Pour établir la forme du tenseur énergie-impulsion, nous considérons un fluide parfait comme matière qui décrit notre univers homogène et isotrope avec une densité ρ , une pression P , et une vitesse quadratique u_μ . Dans ce cas, le tenseur énergie-impulsion est donné comme

1.2. Équations algébriques cosmologiques

suit

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}. \quad (1.31)$$

Nous considérons un observateur au repos par rapport au fluide parfait. Ainsi, nous avons $u_0 = -1$ et $u_i = 0$. On a $T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, P, P, P)$ pour un fluide de matière parfait. En injectant les composantes de la métrique (1.2) et les tenseurs $G_{\mu\nu}$ et $T_{\mu\nu}$ dans l'équation d'Einstein (1.29), nous trouvons deux équations importantes en cosmologie qui sont appelées respectivement l'équation de Friedmann et l'équation de Raychaudhuri. Ces équations prennent la forme suivantes

$$H^2 = \frac{\rho}{3 M_{\text{Pl}}^2} - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (1.32)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\rho + 3P}{6M_{\text{Pl}}^2} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.33)$$

Lorsque la courbure et la constante cosmologique sont absentes $K = \Lambda = 0$, l'équation de Friedmann fournit une relation entre le facteur de Hubble et la densité d'énergie, et la présence d'énergie dans l'univers entraîne sa contraction ou son expansion. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{\rho}{3 M_{\text{Pl}}^2}, \\ &= \frac{8\pi G}{3} \rho. \end{aligned} \quad (1.34)$$

De même, si $\Lambda = 0$, l'équation de Raychaudhuri nous informe que l'énergie est présente avec ou sans pression. Cela montre que le facteur d'échelle n'est pas constant. On note que le facteur d'échelle s'accélère ($\ddot{a} > 0$) si $\rho + 3P < 0$, ce qui est possible pour des fluides à pression négative (en supposant que ρ soit positif), et nous verrons que c'est le cas pendant l'inflation.

À partir de la dérivée covariante du tenseur d'énergie-impulsion, nous avons $\nabla T_{\mu\nu} = 0$. En outre, nous implémentons la composante temporelle dans l'équation de conservation $\nabla T_{\mu\nu} = 0$, c'est-à-dire que nous prenons $\nu = 0$, ce qui permet d'écrire

$$\nabla_\mu T^{0\mu} = -\dot{\rho} - 3\frac{\dot{a}}{a}\rho - 3\frac{\dot{a}}{a}P. \quad (1.35)$$

Cela peut être simplement réécrite comme l'équation de continuité suivante

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0. \quad (1.36)$$

1.2. Équations algébriques cosmologiques

L'équation de continuité (1.36) a une solution simple lorsque l'équation d'état défini par $\omega = \frac{P}{\rho}$ est constante. Ces solutions sont données par l'expression suivante

$$\rho(a) = \rho_{\text{in}} \left(\frac{a}{a_{\text{in}}} \right)^{-3(1+\omega)}, \quad (1.37)$$

où ρ_{in} est la valeur initiale de ρ lorsque $a = a_{\text{in}}$. L'équation (1.37) donne plusieurs solutions simples qui sont explicitées dans le tableau (4.1). Par exemple, la matière noire a une valeur $\omega_{\text{mat}} = 0$ et nous trouvons $\rho_{\text{mat}} \propto a^{-3}$, ce qui signifie que la matière a une échelle inversement proportionnelle au volume de l'espace-temps dans lequel elle se situe. Pour le rayonnement, nous avons $\omega_{\text{ray}} = \frac{1}{3}$ et alors on a $\rho_{\text{ray}} \propto a^{-4}$. Si l'espace-temps est en expansion, le rayonnement se dilue avec l'augmentation du volume de l'espace-temps ($\propto a^{-3}$).

Afin d'identifier l'effet de la courbure K et de la constante cosmologique Λ avec un fluide, nous réécrivons l'équation (1.32) comme suit

$$H^2 = \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2} [\rho_{\text{mat}} + \rho_{\text{ray}} + \rho_K + \rho_\Lambda] \equiv \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2} \rho_{\text{tot}}, \quad (1.38)$$

où on a défini ρ_{mat} qui est la densité d'énergie de toute la matière ainsi que les autres constituants non relativistes présents dans l'univers. Dans cette équation, nous avons

- ρ_{ray} : la densité d'énergie du rayonnement,
- $\rho_K = -3 M_{\text{Pl}}^2 K/a^2$: la densité d'énergie de la courbure,
- $\rho_\Lambda = M_{\text{Pl}}^2 \Lambda$: la densité d'énergie de la constante cosmologique,
- ρ_{tot} la densité d'énergie totale de l'univers.

Nous remarquons que $\rho_K \propto a^{-2}$. D'après l'équation (1.37), nous pouvons en déduire que $\omega_K = -\frac{1}{3}$. De même $\rho_\Lambda \propto a^0$. Alors, nous associons la constante cosmologique d'un fluide à l'équation d'état est $\omega_\Lambda = -1$. Les valeurs constantes de ω et les formes de la dépendance de la densité d'énergie par rapport au facteur d'échelle discuté ci-dessus sont résumées dans le tableau (1.1).

Si le facteur d'échelle $a(t)$ a évolué de façon homogène avec le temps, le côté droit de l'équation de Friedmann (1.37) est rapidement dominé par un seul fluide (celui avec le plus petit ω si l'espace-temps est en expansion, ou avec le plus grand ω si l'espace-temps se contracte).

1.2. Équations algébriques cosmologiques

fluide	l'équation d'état ω	$\rho(a)$	$a(t)$
matière noire	0	$\propto a^{-3}$	$\propto t^{2/3}$
rayonnement	1/3	$\propto a^{-4}$	$\propto t^{1/2}$
courbure spatiale	-1/3	$\propto a^{-2}$	$\propto t$
constante cosmologique	-1	$\propto a^0$	$\propto e^{Ht}$

TABLE 1.1 – Les équations d'état pour différents fluides, ainsi que les densités et les facteurs d'échelles correspondants.

Dans cette limite, ce facteur peut être intégrée, ce qui donne

$$a(t) = \begin{cases} a_{\text{in}} \left[1 \pm \frac{3}{2} (1 + \omega) H_{\text{in}} (t - t_{\text{in}}) \right]^{\frac{2}{3(1+\omega)}} & \text{si } \omega \neq -1 \\ a_{\text{in}} \exp [H_{\text{in}} (t - t_{\text{in}})] & \text{si } \omega = -1, \end{cases} \quad (1.39)$$

où a_{in} et t_{in} sont deux constantes d'intégration. Le signe \pm dépend de l'espace-temps est en expansion (signe $+$) ou en contraction (signe $-$). Dans ce travail doctoral, nous considérons seulement le cas d'un espace-temps en expansion. Pour les valeurs de ω discutées précédemment, les profils correspondants de $a(t)$ sont présentés dans le tableau (1.1). Ensuite, nous considérons que l'univers est constitué de plusieurs champs avec des équations d'état indépendantes $\omega_i = P_i/\rho_i$. Alors, l'équation de continuité (1.36) se généralise à travers la formule suivante

$$\sum_i [\dot{\rho}_i + 3 H(\rho_i + P_i)] = 0. \quad (1.40)$$

Nous notons que l'équation (1.40) peut être résolue parce que chaque terme disparaît individuellement. Alors, il correspond au cas des fluides multiples qui n'interagissent pas, c'est-à-dire aucun transfert d'énergie entre les champs. Ainsi, comme nous l'avons fait précédemment, nous pouvons trouver la densité d'énergie totale ρ_T comme suit

$$\rho_T(a) = \sum_i \rho_i^{\text{in}} \left(\frac{a_i}{a_i^{\text{in}}} \right)^{-3(1+\omega_i)}. \quad (1.41)$$

1.3 Généralités sur l'univers

1.3.1 Composition de l'univers

Il est possible d'utiliser l'équation (1.41) pour estimer la densité d'énergie de chaque composant de l'univers à tout moment si on connaît les valeurs actuelles de leur densité d'énergie. Cela est possible si nous supposons que chaque composant possède une équation d'état constante et qu'il n'y a pas de transfert d'énergie entre les composants.

On définit la densité critique de l'univers à partir de l'équation (1.34), lorsque la courbure et la constante cosmologique sont nulles ($K = \Lambda = 0$)

$$\rho_{\text{cr}} = 3 M_{\text{Pl}}^2 H^2. \quad (1.42)$$

Nous définissons également à partir de la densité critique les quantités sans dimension $\Omega_i = \rho_i / \rho_{\text{cr}}$ pour des fluides contenus dans l'univers, où Ω_i décrit la fraction de l'univers qui est contenue dans chaque constituant. Ainsi, nous pouvons réécrire l'équation de Friedmann (1.32) comme suit

$$1 - \Omega_K = \Omega_{\text{mat}} + \Omega_{\text{ray}} + \Omega_{\Lambda}, \quad (1.43)$$

$$1 - \Omega_K = \Omega_{\text{tot}} = \sum_i \Omega_i, \quad (1.44)$$

où Ω_{mat} , Ω_{Λ} , Ω_K et Ω_{ray} sont des quantités associées à la matière, la constante cosmologique, la courbure et le rayonnement, respectivement. Elles sont données par

$$\Omega_{\text{mat}} = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho, \quad \Omega_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{3H^2}, \quad \Omega_K = \frac{-K}{a^2 H^2}. \quad (1.45)$$

Pour montrer comment chaque terme évolue en arrière ou en avant dans le temps à partir de leurs valeurs actuelles, nous pouvons appliquer la mise à l'échelle du facteur d'échelle de l'équation (1.41) pour chaque constituant

$$1 - \frac{\Omega_K^0}{a^2} = \frac{\Omega_{\text{mat}}^0}{a^3} + \frac{\Omega_{\text{ray}}^0}{a^4} + \Omega_{\Lambda}^0, \quad (1.46)$$

où l'exposant "0" signifie qu'il s'agit de sa valeur actuelle. Selon les dernières observations [12], nous donnons maintenant les valeurs de Ω_i^0 pour chaque composant connu dans l'univers

1.3. Généralités sur l'univers

(voir [12] pour une description détaillée de la façon dont chaque mesure est effectuée et pour les bandes d'erreur).

— **Courbure**

Il n'y a pas encore de détection statistiquement significative d'une quelconque courbure non nulle ($K \neq 0$) dans l'univers. Autrement dit, toutes les mesures sont cohérentes avec un univers plat ($K = 0$). La dernière valeur est $\Omega_K^0 = 0,0007 \pm 0,0019$, avec une précision de 68%.

Nous séparons la composante de la matière en deux parties, la matière baryonique et la matière noire froide, c'est-à-dire $\Omega_{\text{mat}}^0 = \Omega_{\text{mb}}^0 + \Omega_{\text{mn}}^0$. On explique chaque composante séparément.

— **Matière baryonique**

Il s'agit du constituant de l'univers qui correspond à la matière ordinaire (atomes, noyaux, etc.) et qui est dominé par les baryons froids tels que les protons et les neutrons, qui sont plus lourds que les leptons (les électrons et les neutrinos). Bien que cette composante représente la totalité de la matière que nous voyons autour de nous, les dernières mesures montrent que ce constituant ne représente qu'une très faible fraction de la densité d'énergie totale de l'univers, avec $\Omega_{\text{mb}}^0 \simeq 0.049$.

— **Matière noire**

Cette composante de la matière dans l'univers est nécessaire pour expliquer de multiples observations de notre univers. Notamment, les courbes de rotation des galaxies et les fluctuations du FDC observées par le satellite de Planck. La matière noire dont $\omega = 0$, est sans pression et n'interagit pas électromagnétiquement, d'où le nom de " matière noire ". Malgré que la nature de la matière noire est inconnue, elle est beaucoup plus abondante dans l'univers que la matière baryonique, avec $\Omega_{\text{mn}}^0 = 0.262$. Alors, environ 5 fois la densité d'énergie de la matière ordinaire est contenue dans la matière noire.

— **Rayonnement**

Les rayonnement se diluent beaucoup plus vite que la matière lors de l'expansion de l'univers, voir l'équation (1.37) avec $\omega = 1/3$. La densité d'énergie présente contenue dans le rayonnement est beaucoup plus faible que celle contenue dans la matière, avec $\Omega_{\text{ray}}^0 = 9.23 \times 10^{-5}$.

— **Constante cosmologique**

Une constante cosmologique dont $\omega = -1$ est également nécessaire pour expliquer plu-

1.3. Généralités sur l'univers

sieurs preuves que l'expansion de l'univers accélère. En fait, ce fluide d'énergie noire doit être le constituant dominant de l'univers aujourd'hui, avec $\Omega_{\Lambda}^0 = 0.6889 \pm 0.0056$, bien que nous ne connaissions pas la nature exacte de ce fluide d'énergie noire. Cependant, il est probable qu'il s'agit d'une constante cosmologique ou d'une constante similaire, car les dernières mesures [12] de l'équation d'état sont $\omega = -1.03 \pm 0.03$ avec un niveau de confiance de 68%, ce qui est cohérent avec la constante cosmologique.

Les fractions de la densité d'énergie de chaque composante contenue dans l'univers sont résumées dans la figure (1.2). Notons que la majorité de la densité d'énergie de l'univers est contenue dans des fluides que nous ne comprenons pas actuellement. L'univers est dominé

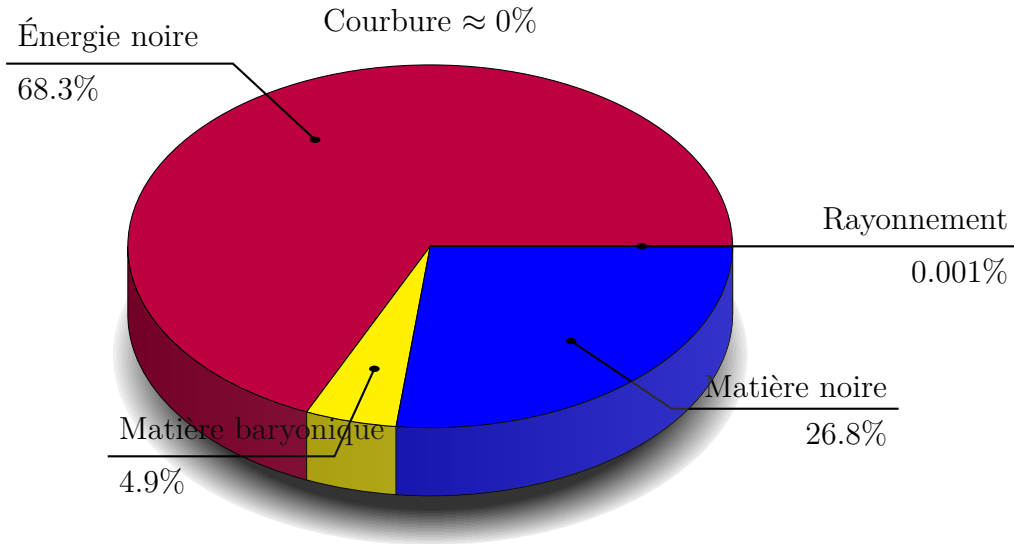


FIGURE 1.2 – Composition actuelle de l'univers, selon le modèle Λ CDM, où nous prenons $\Omega_K = 0$. Ceci est cohérent avec les dernières mesures du modèle de Planck [12].

actuellement par l'énergie noire, ce qui signifie que $\rho_{\text{tot}} \simeq \text{constante}$. Comme la matière froide $\rho_{\text{mat}} \equiv \rho_{\text{mn}} + \rho_{\text{mb}}$ a une échelle de a^{-3} , sa contribution augmente lorsqu'on se déplace vers l'arrière dans le temps et devient plus grande que celle de l'énergie noire à un certain point a_{acc} défini par $\rho_{\text{mat}}(a_{\text{acc}}) = \rho_{\text{en}}(a_{\text{acc}})$, c'est-à-dire $a_{\text{acc}}/a_0 = [\Omega_{\text{mat}}^0/\Omega_{\text{en}}^0]^{1/3}$ où l'indice " a_{acc} " représente le début de la phase de l'énergie noire.

Il peut être plus pratique de faire un lien entre le temps t et le décalage vers le rouge z . Soit un photon émis à l'instant t arrivant à son observateur. Le décalage vers le rouge qui se traduit par l'équation (1.22) s'écrit comme suit

$$1 + z = \frac{a_0}{a}. \quad (1.47)$$

1.3. Généralités sur l'univers

Selon cette définition, le décalage vers le rouge de transition entre les périodes de matière et d'énergie noire est donné par

$$z_{\text{acc}} = \left[\frac{\Omega_{\text{en}}^0}{\Omega_{\text{mat}}^0} \right]^{1/3} - 1. \quad (1.48)$$

En utilisant les valeurs de Ω_i^0 précédentes, on trouve $z_{\text{acc}} \simeq 0,29$. Ensuite, le rayonnement se désintègre plus rapidement ($\rho_{\text{tot}} \propto a^{-4}$) que la matière. Sa contribution par rapport à la matière augmente lorsqu'on se déplace vers l'arrière dans le temps. Par conséquent, le rayonnement domine le contenu de l'univers lorsque $a < a_{\text{eq}}$, où a_{eq} est défini par $\rho_{\text{mat}}(a_{\text{eq}}) = \rho_{\text{ray}}(a_{\text{eq}})$, ce qui donne

$$z_{\text{eq}} = \left[\frac{\Omega_{\text{mat}}^0}{\Omega_{\text{ray}}^0} \right]^{1/3} - 1, \quad (1.49)$$

où l'indice "eq" signifie l'égalité entre matière et rayonnement, qui donne $z_{\text{eq}} \simeq 3402$ avec les valeurs de Ω_i^0 mentionnées au-dessus. Lorsque $a < a_{\text{eq}}$ (ou de manière équivalente $z > z_{\text{eq}}$), l'univers est dominé par le rayonnement.

En conclusion, l'histoire de l'univers est constituée de trois phases principales:

— une époque de rayonnement pour laquelle $z > z_{\text{eq}}$. Pendant celle-ci, on a

$$\rho_{\text{tot}} \propto a^{-4} \quad \text{et} \quad a = t^{1/2}, \quad (1.50)$$

— une époque de matière où $z_{\text{acc}} < z < z_{\text{eq}}$ pendant laquelle on a

$$\rho_{\text{tot}} \propto a^{-3} \quad \text{et} \quad a = t^{2/3}, \quad (1.51)$$

— une époque d'énergie sombre où $z < z_{\text{acc}}$ pendant laquelle on a $\rho_{\text{tot}} \simeq \text{constante}$ et $a \propto e^{Ht}$.

1.3.2 Histoire de l'Univers

Dans cette section, nous allons voir comment déterminer l'âge de l'univers et une description de certains événements clés de l'histoire de l'univers.

1.3.3 Âge de l'univers

Lorsque l'univers est dominé par un fluide parfait, le facteur d'échelle $a(t)$ peut être dérivé à partir de l'équation (1.39) en négligeant les phases de transition entre les trois époques

1.3. Généralités sur l'univers

mentionnées ci-dessus. Nous pouvons alors calculer une forme approximative pour $a(t)$ correspondant à toute l'histoire de l'univers. Les constantes d'intégration t_{in} et a_{in} apparaissant dans l'équation (1.39) peuvent être fixées en exigeant la continuité de a et \dot{a} aux temps de transition. On obtient alors

$$\frac{a(t)}{a_0} \simeq \begin{cases} \exp [H_0(t - t_0)] & \text{si } t > t_{\text{acc}} \\ \frac{1}{1+z_{\text{acc}}} \left[1 + \frac{3}{2} H_0(t - t_{\text{acc}}) \right]^{2/3} & \text{si } t_{\text{eq}} < t < t_{\text{acc}} \\ \frac{1}{1+z_{\text{eq}}} \left[1 + 2 \left(\frac{1+z_{\text{eq}}}{1+z_{\text{acc}}} \right)^{3/2} H_0(t - t_{\text{eq}}) \right]^{1/2} & \text{si } t_{\text{BB}} < t < t_{\text{eq}} \end{cases} \quad (1.52)$$

où t_{acc} est le temps de transition entre les époques de la matière et de l'énergie noire et t_{eq} est le temps de transition entre les époques du rayonnement et de la matière. Ils sont donnés par

$$H_0(t_0 - t_{\text{acc}}) = \ln(1 + z_{\text{acc}}), \quad (1.53)$$

$$H_0(t_{\text{acc}} - t_{\text{eq}}) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{1 + z_{\text{acc}}}{1 + z_{\text{eq}}} \right)^{3/2}. \quad (1.54)$$

En remontant dans le temps, on remarque que a passe à 0 en un temps fini. Dans ce cas, la singularité correspondante est appelée le big bang qui se produit au moment t_{BB} . En utilisant l'équations (1.52), nous trouvons

$$t_0 - t_{\text{BB}} \simeq H_0^{-1} \left[\frac{2}{3} + \ln(1 + z_{\text{acc}}) - \frac{1}{6} \left(\frac{1 + z_{\text{acc}}}{1 + z_{\text{eq}}} \right)^{3/2} \right]. \quad (1.55)$$

Nous remarquons que l'âge de l'univers est associée à la constante de Hubble H_0^{-1} . À partir des valeurs de z_{acc} , z_{eq} précédentes, nous obtenons $t_0 - t_{\text{BB}} \simeq 0,92 H_0^{-1} \simeq 1,33 \times 13,7$ milliards d'années.

1.3.4 Brève histoire cosmologique

Dans cette partie, nous présentons une brève description de certains événements clés de l'histoire de l'univers. Ces phénomènes sont résumés dans la figure (1.3). La singularité initiale de l'image du big bang est postulée parce que tous les photons se déplaçant dans un univers en expansion sont tels que leur longueur d'onde évolue comme a^{-1} . Dans le modèle du big bang chaud de l'univers, cette singularité initiale est suivie d'une période chaude dominée

1.3. Généralités sur l'univers

par le rayonnement qui se refroidit progressivement. Lorsque le rayonnement se refroidit et se dilue, il devient dominant par rapport à la densité de matière de l'univers. La période dominée par le rayonnement est donc suivie d'une période dominée par la matière. C'est au cours de cette période que se forment les structures connues de l'univers actuel, notamment les galaxies, les étoiles et les planètes. Enfin, la matière se dilue avec l'expansion du volume de l'espace-temps et c'est la constante cosmologique (qui a une densité constante et ne se dilue pas) qui domine. Finalement, nous entrons dans la période actuelle d'expansion accélérée à cause de l'énergie noire. Nous décrivons certains événements clés de l'évolution de l'univers,

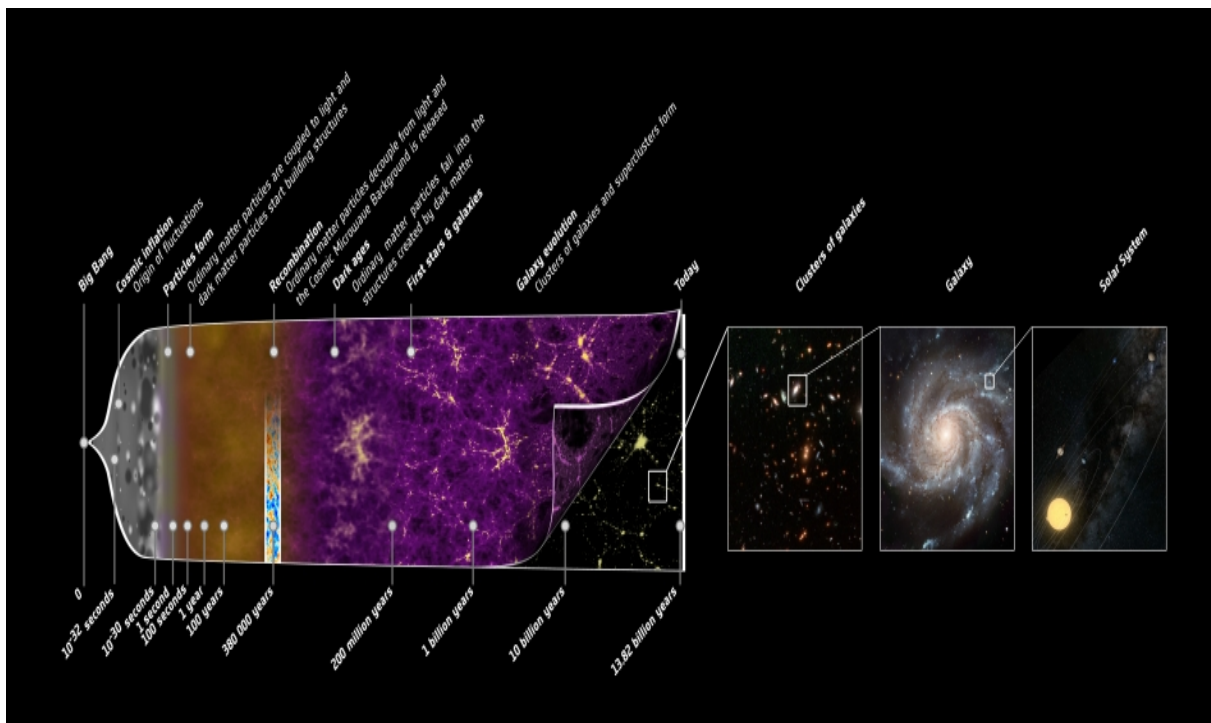


FIGURE 1.3 – Une histoire illustrée de quelques événements clés dans l'évolution de l'univers, avec le temps approximatif où ils se sont produits. Source de l'image: NASA.

avec les moments où ils se produisent par rapport au big bang. Nous commençons par la description des événements de l'univers après une période d'inflation, qui est une période d'expansion accélérée à $t \approx 10^{-35} s$, et qui est traitée en détail par la suite. Celle-ci constitue le sujet principal de cette thèse. Nous supposons que l'inflation laisse l'univers rempli d'un plasma chaud qui contient les particules fondamentales du modèle standard à $t \sim 10^{-35} s$ (possible après une période de réchauffage).

Une fois l'inflation est terminée, l'univers est dominé par les rayonnements et le premier événement important est la transition de phase électrofaible à $t \sim 10^{-12} s$ [45–51]. Cette

1.3. Généralités sur l'univers

transition de phase, la symétrie $SU(2) \times U(1)$ du champ électrofaible est brisée en symétrie $U(1)$ du champ électromagnétique actuel. Cela correspond au début de "l'époque des quarks", au cours de laquelle les quatre forces fondamentales sont les mêmes qu'aujourd'hui, mais la température est très élevée pour permettre la liaison des quarks, c'est-à-dire que les collisions entre les particules dans le plasma quark-gluon chaud sont trop énergétiques pour permettre la combinaison des quarks.

À $t \sim 10^{-6} s$, lorsque la température diminue en dessous de ~ 938 MeV (l'énergie de repos des nucléons), les quarks et les gluons peuvent se lier pour former des hadrons (soit des baryons, soit des mésons) et des anti-hadrons. Cela marque la fin de la période des quarks et le début de la période des hadrons. La quantité de matière par rapport à l'antimatière créée ici doit être importante car on n'observe pratiquement pas d'antimatière dans la nature [52]. Cependant, on ne sait pas encore comment cette asymétrie s'est produite.

Lorsque l'énergie de l'univers diminue, les nouveaux couples hadron/anti-hadron ne se forment pas et la plupart des hadrons existants s'annihilent avec les anti-hadrons, créant des photons de haute énergie. Environ une seconde après le big bang, presque tous les hadrons ont été annihilés. Si des fluctuations de densité suffisamment importantes ont été introduites pendant l'inflation, il est possible qu'entre la fin de l'inflation et quelques secondes après le big bang se forment des trous noirs primordiaux. Ces trous noirs peuvent avoir une très grande masses.

À $t \sim 1s$, les neutrinos se découplent de la matière et commencent à circuler librement dans l'espace, laissant un fond cosmique de neutrinos ($C\nu B$) de très faible énergie qui existent encore aujourd'hui. Ce phénomène est similaire à celui du fond diffus cosmologique qui est émis beaucoup plus tard, voir ci-dessous.

La nucléosynthèse du big bang (BBN) a lieu entre $t \sim 10 s$ et $t \sim 20 min$, produisant les noyaux des éléments chimiques et des isotopes les plus légers, notamment le deutérium, l'hélium, le lithium et le béryllium (bien que le béryllium soit instable et se désintègre ensuite en hélium et en lithium), lorsque la température de l'univers est de ~ 10 MeV (l'énergie de liaison des noyaux) [53, 54]. Le BBN se termine à des températures inférieures à 100 KeV, lorsque tout le deutérium a formé de l'hélium. Les noyaux de ces éléments se forment à ce moment-là, l'énergie de l'univers est encore trop élevée pour permettre aux électrons de se lier à ces noyaux. La durée du BBN signifie que le seul des processus rapides et simples peuvent se produire, et que les éléments plus lourds ne se forment que plus tard dans l'histoire de l'univers, par le biais de supernovae et de kilonovae [55, 56].

1.3. Généralités sur l'univers

À $t \sim 47,000$ ans (décalage vers le rouge $z \sim 3400$), la densité d'énergie de la matière commence à dominer par rapport au rayonnement, et l'univers entre dans l'époque dominée par la matière. À partir de ce point, les perturbations du rayonnement libre ne sont plus effacées et alors les structures peuvent commencer à se former dans la période dominée par la matière. À ce point, le contenu en matière de l'univers est dominé par la matière noire, mais comme la nature de la matière noire est encore inconnue, le modèle du big bang chaud ne fournit pas d'explication quant à son origine. À $t \sim 100,000$ ans, la température de l'univers est plus basse pour former les premières molécules (hydrure d'hélium).

À $t \sim 370,000$ ans (décalage vers le rouge $z \sim 1080$), l'univers est suffisamment refroidi pour que les électrons chargés se combinent aux protons et forment les premiers atomes d'hydrogène neutres, dans une phase appelée "recombinaison". À ce moment-là, l'univers devient transparent pour la première fois et les photons se dispersent sur les particules chargées et peuvent alors traverser librement l'univers sans être gênés. Presque tous les protons et les électrons de l'univers sont liés à des atomes neutres, ce qui fait que le libre parcours moyen des photons devient très grand. En d'autres mots, la section efficace photon-atome est beaucoup plus petite que la section efficace photo-électron. Ainsi, les photons sont "découplés" de la matière ce qui donne naissance au fond diffus cosmologique (FDC), souvent appelé "la lumière la plus ancienne de l'univers". La distribution de température du FDC est la même que celle avec laquelle il a été émis, mais sa température est décalée vers le rouge par l'expansion de l'espace-temps entre son émission et aujourd'hui. La température moyenne du FDC aujourd'hui est $T_{FDC} = 2,725 K$. La dernière image de Planck des fluctuations de température du FDC est présentée dans la figure 1.4, où les couleurs montrent que le FDC est homogène et isotrope jusqu'à une partie sur 10^5 , et que les déviations de l'homogénéité sont des prédictions clés de l'inflation [57].

Après la recombinaison, l'univers n'est plus opaque aux photons, mais il n'y a plus de structures émettant de la lumière, d'où le nom "âge sombre" donné à cette époque. Il est alors très difficile d'observer quoi que ce soit à cette époque. Il n'y avait que deux sources de photons à cette époque, les photons du FDC et la rare ligne de spin de 21 cm de l'hydrogène neutre, qui correspond à la diffusion spontanée d'un photon de 21 cm par un électron descendant d'un état d'énergie. Bien que cette émission de 21 cm soit rare, l'univers était rempli par l'hydrogène neutre. Alors, une quantité détectable de cette longueur d'onde de lumière pourrait avoir été émise pendant l'âge sombre. De nombreux télescopes essaient actuellement de détecter cette lumière, notamment la dernière expérience EDGES [58].

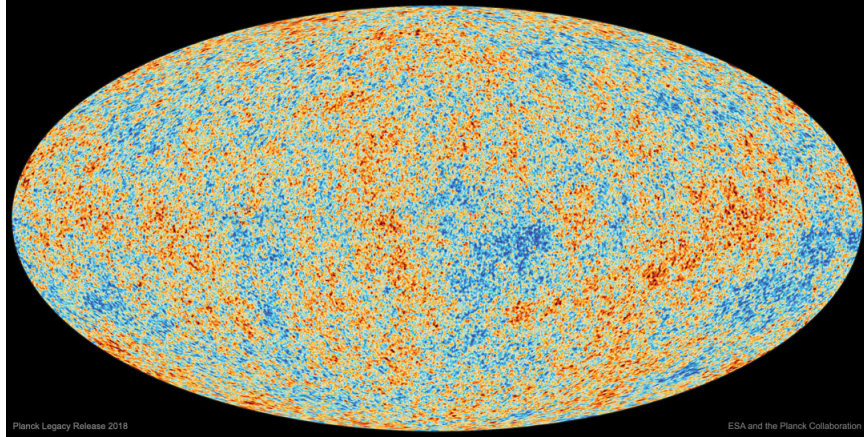


FIGURE 1.4 – Carte de température du FDC observée par satellite de Planck en 2018. La température du FDC est de $2,725\text{K}$, avec des fluctuations $0,01\%$. Image créée par la collaboration ESA/Planck [12].

Avec le développement des perturbations pendant la période de la matière, les premières étoiles (appelées étoiles de population III) commencent à se former à $t \sim 100,000$ ans, fournissant la première lumière visible après la recombinaison et mettant fin à l'âge sombre. Ces premières étoiles étaient presque entièrement constituées d'hydrogène (et d'un peu d'hélium), et ont progressivement commencé à remplir l'univers d'éléments plus lourds au fur et à mesure qu'elles évoluaient et devenaient des supernovas.

Les galaxies commencent alors à se former. Ces premières galaxies se forment des objets suffisamment énergétiques pour ioniser l'hydrogène neutre. Ces objets produisent des photons suffisamment énergétiques pour couper la liaison électron-proton de l'hydrogène et laisser des particules chargées séparées, dans un processus appelé "réionisation" [59–62]. Les objets sont supposés capables de produire ces photons de haute énergie comprennent les quasars, ainsi que les étoiles de population III et la formation des premières galaxies elles-mêmes.

La réionisation se situe entre $t \sim 150$ millions d'années et $t \sim 1$ milliard d'années, ou à un décalée vers le rouge $6 < z < 20$. Cependant, l'univers avait connue depuis la recombinaison en raison de la grande quantité d'expansion et il n'est pas revenu à un état opaque aux photons après la réionisation. C'est-à-dire que la moyenne du chemin libre des photons reste grande, encore aujourd'hui, en raison des interactions de diffusion qui restent faibles en conséquence de la dilution de la matière.

En entrant dans la période actuelle à $t \sim 9$ milliards d'années, l'énergie noire commence à dominer l'univers et l'expansion de l'univers s'accélère [63]. Pendant cette époque, la structure à grande échelle de l'univers se développe pour former la chaîne cosmique que nous

1.4. Problèmes classiques du modèle standard de l'inflation

observons aujourd'hui, remplie par des amas de galaxies, des galaxies, des étoiles et des systèmes planétaires. La nature de l'énergie noire est encore inconnue et représente un domaine de recherche très actif dans la cosmologie moderne.

1.4 Problèmes classiques du modèle standard de l'inflation

Nous avons décrit ci-dessus les principaux événements et caractéristiques du modèle de cosmologie du big bang chaud. Il faut mentionner qu'il laisse plusieurs questions sans réponse sur l'univers lorsque nous comparons cette théorie aux observations, ce qui nous permet d'introduire une phase initiale d'inflation cosmologique dans notre conception de l'univers. Les trois problèmes sont appelés problèmes de l'horizon, la planéité et du monopole, mais cette liste n'est pas complète. Ce modèle pose d'autres questions, comme l'origine et la nature de la matière noire, de l'énergie noire ainsi que la nature de la physique au niveau de la singularité du big bang. Dans cette section, nous décrivons en détail ces trois problèmes. La plupart des cosmologistes modernes considèrent en effet ces problèmes comme la motivation initiale de l'inflation, mais aujourd'hui, la motivation principale pour étudier l'inflation est de déterminer la structure de l'univers à grande échelle.

1.4.1 Problème d'horizon

Tout d'abord, nous discutons le problème de l'horizon du modèle du big bang chaud, qui est une conséquence du temps de déplacement de la lumière fini et de l'existence d'un horizon causal dans le modèle du big bang chaud [2,3]. Cet horizon causal agit comme une barrière entre les événements observables et non observables ainsi tout les processus physique ne peuvent agir sur des échelles plus grandes que l'horizon causal. Cela signifie que l'univers est inhomogène à des échelles plus grandes que l'horizon causal, car les régions causales distinctes ne peuvent pas se contacter pour trouver un équilibre. L'horizon causal est défini comme la distance physique (propre) la plus éloignée à laquelle pourrait provenir un photon reçu à un instant t_{re} .

Dans cette partie, nous allons calculer la taille de l'horizon causal au moment de la recombinaison et montrer qu'elle est plus petite que le diamètre de la dernière surface de diffusion, c'est-à-dire que le dernière surface de diffusion est constituée de plusieurs régions

1.4. Problèmes classiques du modèle standard de l'inflation

déconnectées causalement. Par conséquent, l'homogénéité des observations du FDC (voir la figure 1.4) nécessite soit un réglage précis, soit une période d'inflation, soit une autre explication.

Si un photon est émis à l'instant t_{em} et au rayon r_{em} et se déplace directement ($d\phi = d\theta = 0$) vers un observateur à $r = 0$. Sa trajectoire est donnée par $ds^2 = 0$. Cela donne

$$\frac{dt}{a(t)} = \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \quad (1.56)$$

Nous considérons le cas d'un univers plat ($K = 0$) et la position de la terre comme l'origine de la coordonnée radiale r . Notre coordonnée de référence est $r = 0$. Nous pouvons intégrer l'équation (1.56) pour obtenir r . En effet, nous avons

$$r(t) = r_{\text{em}} - \int_{t_{\text{em}}}^t \frac{d\hat{t}}{a(\hat{t})}, \quad (1.57)$$

La distance physique entre le photon et son point d'émission est définie par

$$d_{\text{phy}}(t) = a(t)r(t). \quad (1.58)$$

Afin de trouver la taille de l'horizon, nous considérons que le photon a été émis au temps le plus proche possible, $t_{\text{em}} = t_{\text{BB}}$ le temps du big bang, et reçu au temps le plus éloigné possible, $r(t_{\text{re}}) = 0$. Alors, l'équation (1.57) devient

$$r_{\text{em}} = \int_{t_{\text{BB}}}^{t_{\text{re}}} \frac{dt}{a(t)}. \quad (1.59)$$

Ainsi, la taille de l'horizon à un instant t_{re} est donnée par

$$d_{\text{hor}}(t_{\text{re}}) = a(t_{\text{re}})r_{\text{em}} = a(t_{\text{re}}) \int_{t_{\text{BB}}}^{t_{\text{re}}} \frac{dt}{a(t)}. \quad (1.60)$$

La taille de l'horizon causal à la dernière surface de diffusion est alors trouvée en prenant $t_{\text{re}} = t_{\text{dsd}}$ dans l'équation (1.60).

1.4.2 Distance angulaire de l'horizon

Nous allons maintenant calculer la distance angulaire de l'horizon au moment du recombinaison, telle qu'elle est vue par un observateur actuel sur la terre au temps $t_0 > t_{\text{dsd}}$, notée

1.4. Problèmes classiques du modèle standard de l'inflation

par $\Delta\Omega_{\text{hor}}(t_0)$. Nous supposons que la dernière surface de diffusion est une sphère instantanée de rayon constant, c'est-à-dire que $dt = dr = 0$. Alors, la métrique FLRW s'écrit

$$ds = a(t_{\text{dsd}}) r_{\text{dsd}} d\Omega, \quad (1.61)$$

où on a utilisé $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin\theta d\phi^2$. $r_{\text{dsd}} = \int_{t_{\text{dsd}}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$ est la distance de la terre à la dernière surface de diffusion qui se trouve à partir de (1.57) avec $t = t_0$, $t_{\text{em}} = t_{\text{dsd}}$ et $r(t_0) = 0$. En combinant tous ces résultats, nous trouvons que la taille angulaire de l'horizon causal de la dernière surface de diffusion, comme vu de la terre est

$$\Delta\Omega_{\text{hor}}(t_0) = \frac{d_{\text{hor}}(t_{\text{dsd}})}{a(t_{\text{dsd}})r_{\text{dsd}}} = a \frac{\int_{t_{\text{BB}}}^{t_{\text{dsd}}} \frac{dt}{a(t)}}{\int_{t_{\text{dsd}}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}}. \quad (1.62)$$

Nous écrivons cette quantité avec le modèle cosmologique de la section (1.3.1), qui se compose de trois époques: une époque de rayonnement, de matière et une époque d'énergie noire. La recombinaison se produit au cours de la période de matière (avec $z_{\text{dsd}} \simeq 1090$, voir Réf. [13]), de sorte que $t_{\text{BB}} < t < t_{\text{dsd}} < t_{\text{acc}}$. Par conséquent, selon l'équation (1.39), t_{dsd} peut être exprimé en termes de décalage vers le rouge de recombinaison z_{dsd} par

$$H_0 (t_0 - t_{\text{dsd}}) \simeq \frac{2}{3} + \ln(1 + z_{\text{acc}}) - \frac{2}{3} \left[\frac{1 + z_{\text{acc}}}{1 + z_{\text{dsd}}} \right]^{\frac{3}{2}}. \quad (1.63)$$

Les intégrales apparaissant dans l'équation (1.62) peuvent être divisées selon $\int_{t_{\text{BB}}}^{t_{\text{dsd}}} = \int_{t_{\text{BB}}}^{t_{\text{eq}}} + \int_{t_{\text{eq}}}^{t_{\text{dsd}}}$ et $\int_{t_{\text{dsd}}}^{t_0} = \int_{t_{\text{dsd}}}^{t_{\text{acc}}} + \int_{t_{\text{acc}}}^{t_0}$. En utilisant l'équation (1.52), on peut calculer chacune de ces intégrales.

On obtient

$$\begin{aligned} a_0 H_0 \int_{t_{\text{BB}}}^{t_{\text{eq}}} \frac{dt}{a} &\simeq \frac{(1 + z_{\text{acc}})^{3/2}}{\sqrt{1 + z_{\text{eq}}}}, & a_0 H_0 \int_{t_{\text{eq}}}^{t_{\text{dsd}}} \frac{dt}{a} &\simeq 2(1 + z_{\text{acc}})^{3/2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + z_{\text{dsd}}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + z_{\text{eq}}}} \right), \\ a_0 H_0 \int_{t_{\text{acc}}}^{t_0} \frac{dt}{a} &\simeq z_{\text{acc}}, & a_0 H_0 \int_{t_{\text{dsd}}}^{t_{\text{acc}}} \frac{dt}{a} &\simeq 2(1 + z_{\text{acc}})^{3/2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + z_{\text{acc}}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + z_{\text{dsd}}}} \right). \end{aligned} \quad (1.64)$$

En utilisant ces expressions, on peut exprimer $\Delta\Omega_{\text{hor}}(t_0)$ en fonction de z_{eq} , z_{dsd} et z_{acc} , comme suit

$$\Delta\Omega_{\text{hor}}(t_0) = \frac{\frac{2}{\sqrt{1+z_{\text{dsd}}}} - \frac{1}{\sqrt{1+z_{\text{eq}}}}}{\frac{2+3z_{\text{acc}}}{(1+z_{\text{acc}})^{3/2}} - \frac{2}{(1+z_{\text{dsd}})}}. \quad (1.65)$$

1.4. Problèmes classiques du modèle standard de l'inflation

Ce rapport d'intégrales dans l'équation (1.62) peut être déterminé à l'aide de la relation suivante

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a(t)} = \frac{1}{H_0 a_0} \int_{z_2}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{\sum_i \Omega_i^0 (1+z)^{3(1+\omega_i)}}}. \quad (1.66)$$

À partir de cela, la taille angulaire de l'horizon causal à la dernière diffusion peut être trouvée numériquement comme suit

$$\Delta\Omega_{\text{hor}}(t_0) = \frac{\int_{z_{\text{dsd}}}^{\infty} dz / \sqrt{\sum_i \Omega_i^0 (1+z)^{3(1+\omega_i)}}}{\int_{\infty}^{z_{\text{dsd}}} dz / \sqrt{\sum_i \Omega_i^0 (1+z)^{3(1+\omega_i)}}} \simeq 0.0054 \text{ rad} \simeq 0.3\check{\text{r}}. \quad (1.67)$$

Ce qui correspond à environ 1/450,000 de la surface totale du ciel. Cela signifie que nous devons attendre que la dernière surface de diffusion soit composée d'environ 450,000 taches distinctes dont les propriétés physiques n'ont, aucune raison d'être similaires et peuvent être complètement différentes. Cependant, les observations nous indiquent que le FDC est homogène et isotrope jusqu'à de faibles fluctuations de l'ordre de $\delta T/T \simeq 10^{-5}$ sur l'ensemble du ciel [12], et que nous avons alors une contradiction dans l'image standard, et ce problème est connu sous le nom de problème de l'horizon.

On notera qu'il s'agit essentiellement d'un problème de conditions initiales. Si on suppose que les conditions dans chaque tâche sont identiques avant la dernière diffusion, alors ce problème disparaît. Une autre façon de résoudre le problème de l'horizon sans ajuster les conditions initiales est d'introduire une phase d'inflation cosmologique, comme nous le discuterons dans la section suivante.

1.4.3 Problème de la platitude (Flatness)

Le problème de la platitude est également un problème de précision qui découle de la contrainte observationnelle sur $1 - \Omega_{\text{tot}} = \Omega_K$ [65]. Lorsque $\Omega_{\text{tot}} = 1$ (ou $K = 0$), l'univers est globalement plat, ($\Omega_{\text{tot}} > 1$, ou $K = 1$, l'univers est fermé et fini), ($\Omega_{\text{tot}} < 1$ ou $K = -1$, l'univers est ouvert et infini). Comme K est une constante, le signe de $1 - \Omega_{\text{tot}}$ ne peut pas changer au cours de l'évolution cosmique. Selon les contraintes observationnelles, Ω_{tot}^0 est bien proche de 1, $100 \Omega_{\text{tot}}^0 = -0.10_{-0.65}^{+0.62}$ à 95% [13]. Cependant, $\Omega_{\text{tot}} = 1$ est un point d'équilibre instable. Afin que Ω_{tot} soit en accord avec les contraintes données aujourd'hui, il a dû être égal à 1 dans le cadre d'un niveau extrêmement élevé de précision dans l'univers. Le problème de la planéité est le point d'interrogation qui explique pourquoi l'univers primitif

1.4. Problèmes classiques du modèle standard de l'inflation

présente un tel ajustement précis de la valeur de ce paramètre [64, 65]. D'après la définition (1.43), la différence entre la fraction la densité d'énergie totale et l'unité est donnée par

$$1 - \Omega_{\text{tot}} = \Omega_K = \frac{1}{1 + \sum \frac{\Omega_i}{\Omega_k}}. \quad (1.68)$$

Nous rappelons que $\Omega_{\text{ray}} \propto a^{-4}$ et $\Omega_K \propto a^{-2}$. C'est pourquoi, quand on évalue cette quantité dans l'univers primitif où le rayonnement est le constituant dominant ($\sum \Omega_i \simeq \Omega_{\text{ray}}$), on obtient

$$1 - \Omega_{\text{tot}} \simeq \frac{1}{1 + \frac{\Omega_{\text{ray}}^0}{1 - \Omega_{\text{tot}}^0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2} \simeq \frac{1 - \Omega_{\text{tot}}^0}{\Omega_{\text{ray}}^0} \left(\frac{1}{1 + z}\right)^2. \quad (1.69)$$

Si on prend $|\Omega_K^0| \simeq 10^{-3}$ et $|\Omega_{\text{ray}}^0| \simeq 10^{-4}$ (selon les valeurs données dans la section (1.3.1)), on obtient $|1 - \Omega_{\text{tot}}^0| \simeq 10^{-15}$ pour $z \simeq 10^{10}$ et $|1 - \Omega_{\text{tot}}^0| \simeq 10^{-55}$ pour $z = z_{\text{GUT}} \simeq 1028$. En conséquence, on peut voir que la déviation par rapport à un univers plat $|1 - \Omega_{\text{tot}}|$ doit être réglée précisément à une valeur minimale au début du temps afin d'expliquer la planéité actuelle de l'univers. C'est ce qu'on appelle le problème de la planéité [64, 65].

1.4.4 Problème du monopole

Le problème des monopoles est le paradoxe apparent entre la prédiction de l'abondance des monopoles magnétiques résultant de la séparation spontanée des symétries dans les théories de grande unification (GUT) [36–42], lorsque l'univers se refroidit à moins de $M_{\text{GUT}} \simeq 10^{16} \text{ GeV}$, et le nombre observé de monopoles magnétiques dans l'univers aujourd'hui. Ces théories GUT prévoient la production d'un grand nombre de ces monopoles à des températures élevées et ils doivent encore exister dans l'univers moderne en quantité telle qu'ils seraient le constituant dominant de l'univers [38, 39]. Cependant, les recherches de ces objets n'ont pas permis de trouver de monopoles magnétiques [39, 40], ce qui conduit au paradoxe du problème des monopoles. L'inflation propose une solution à ce problème en diminuant efficacement la densité de ces monopoles à moins de 1 pour chaque zone causale de l'univers.

CHAPITRE 2

Inflation standard

L'inflation cosmologique est le paradigme principal pour l'univers très ancien. Durant cette période, l'espace-temps subit une période d'expansion accélérée à très haute énergie (entre 10^3 et 10^{15} GeV) [66–70]. Cette proposition fournit une solution claire aux certains problèmes classiques du modèle du big bang chaud. En effet, une caractéristique plus importante de l'inflation cosmique est peut-être sa capacité à produire une structure à grande échelle de l'univers moderne lorsque les fluctuations quantiques du vide (des champs gravitationnels et de matière) sont amplifiées et se développent en une toile cosmique [71–75]. Cela pourrait expliquer l'homogénéité et l'isotropie observées de l'univers et permet à l'inflation de devenir une théorie prédictive. Les mesures de ces inhomogénéités permettent de connaître les conditions de l'inflation. Par exemple, l'inflation prédit que le spectre des fluctuations cosmologiques doit être presque exactement invariant d'échelle. Autrement dit, leur puissance est approximativement égale à toutes les échelles spatiales, qui montre une cohérence avec les dernières observations [12].

En fait, l'inflation est peut-être le seul modèle en physique qui conduit à des prédictions dans lequel un effet basé sur la relativité générale et la mécanique quantique, compte tenu de nos capacités technologiques actuelles, peuvent être testées expérimentalement. Il est intéressant de noter que des autres explications possibles de l'univers primitif ont été proposées. Cependant l'inflation a dépassé ces explications en devenant une partie acceptée de la cosmologie moderne [76–81]. Les données de haute précision permettant de tester le paradigme

inflationniste sont aujourd'hui plus facilement disponibles que jamais, et peuvent être utilisées pour tester l'inflation. Les observations récentes du satellite Planck (qui se basent sur les données précédentes du satellite WMAP) permettent de contrôler l'inflation [82]. Les données sur les plus petites échelles du FDC (CMB) sont également fournies par des télescopes à micro-ondes terrestres tels que le télescope cosmologique d'Atacama et le télescope du pôle Sud [83–86].

Dans ce chapitre, nous présentons le scénario de l'inflation considéré comme un moyen de résoudre les problèmes classiques associés à la cosmologie standard du big bang. Nous abordons également les principes et les outils qui sont généralement utilisés pour étudier l'inflation.

2.1 Solutions aux problèmes du relatifs à l'univers

Dans cette section, nous discutons comment l'inflation a permis de résoudre certains problèmes de la cosmologie standard.

2.1.1 Problème de l'horizon

Afin de comprendre comment une période d'inflation peut résoudre le problème de l'horizon, nous introduisons l'aspect conforme de espace-temps. Particulièrement, le temps conforme η est défini comme

$$dt = a d\eta. \quad (2.1)$$

En négligeant les coordonnées angulaires, la métrique FLRW (1.2) écrite en temps conforme s'exprime par

$$ds^2 = a^2(\eta)(-d\eta^2 + dr^2). \quad (2.2)$$

Dans cette paramétrisation temporelle, les géodésiques nulles pour la propagation des photons suivent une trajectoire très simple $d\eta = dr$. Par suite, la taille de l'horizon au temps conforme η est donnée par

$$d_{\text{hor}} = a(\eta)(\eta - \eta_{\text{BB}}), \quad (2.3)$$

où η_{BB} est la valeur du temps conforme au big bang. En supposant que l'univers est dominé par un seul fluide avec une équation d'état ω , et $t_{\text{BB}} = 0$, alors le facteur d'échelle s'écrit

2.1. Solutions aux problèmes du relatifs à l'univers

comme suit

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3(1+\omega)}}, \quad (2.4)$$

où a_0 est une constante définie par l'équation (1.39). Cette quantité est positive pour un univers en expansion et $\omega > -1$. En intégrant $dt = ad\eta$, le temps conforme est exprimé comme suit

$$\eta = \eta_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{3\omega+1}{3(1+\omega)}}, \quad (2.5)$$

où nous avons utilisé

$$\eta_0 = \frac{3}{a_0 t_0} \frac{1+\omega}{3\omega+1}. \quad (2.6)$$

D'après l'équation (2.5), si $\omega > -\frac{1}{3}$, et $t \rightarrow 0$, alors on a $\eta \rightarrow 0$. Par suite, nous trouvons $\eta_{\text{BB}} = 0$. Alors, la taille de l'horizon est $d_{\text{hor}}(\eta) = a\eta$, ce qui est fini et peut conduire à un problème d'horizon. Ce cas est représenté par le côté gauche de la figure (2.1), où nous représentons la cosmologie standard du big bang sans inflation.

Cependant, si $\omega < -\frac{1}{3}$, on a un univers en expansion comme nous le voyons plus tard. D'après l'équation (2.5), lorsque $t \rightarrow 0$, nous obtenons $\eta \rightarrow -\infty$. Cela donne $\eta_{\text{BB}} = -\infty$. Par conséquent, la taille de l'horizon causal devient infinie, voir l'équation (2.3). Puisque $\omega < -\frac{1}{3}$, la définition de η_0 signifie que η est autorisé à devenir négatif et la singularité à $a = 0$ n'est réalisée que dans le passé infini. Cela explique que le problème de l'horizon est éliminé dans ce cas [87, 88]. Cela est représenté dans la partie droite de la figure (2.1). Nous observons le diagramme conforme lorsque l'inflation est présente et que nous étendons le temps conforme à des valeurs négatives. Deux taches sur le FDC sont causalement connectées puisque leurs cônes de lumière passés se croisent indiqué par la région noire.

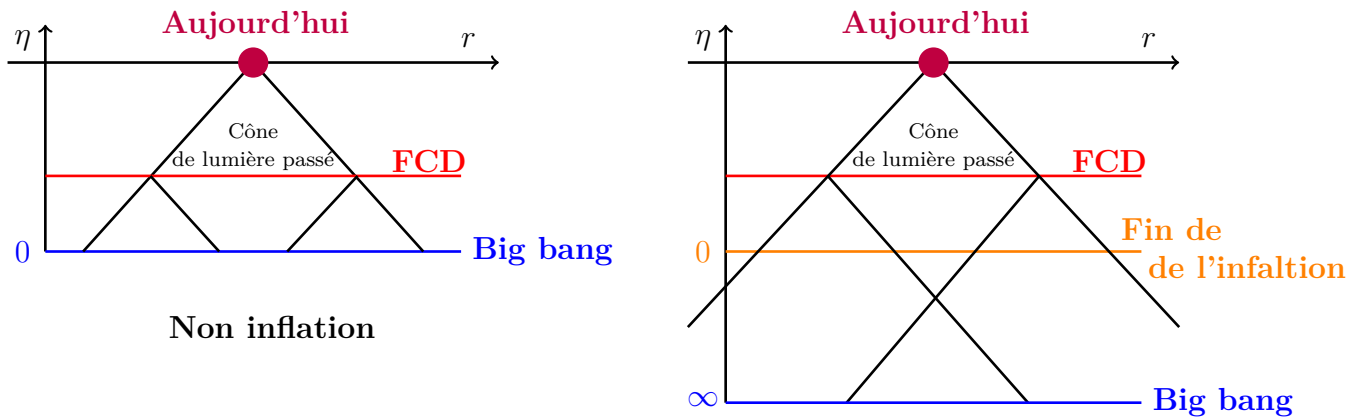


FIGURE 2.1 – Diagrammes conformes dans le plan (η, r) , où la lumière se propage en lignes droites.

2.2. Dynamique de l'inflation

2.1.2 Problème de la platitude

Il est possible de résoudre le problème de la platitude en utilisant l'équation (1.43) qui est donnée par

$$\Omega_{\text{tot}} - 1 = -\Omega_K = \frac{-K}{a^2 H^2}. \quad (2.7)$$

Le terme $a^2 H^2$ de l'équation au-dessus augmente pendant l'inflation, ainsi Ω_{tot} est rapidement tend vers l'unité. Après la fin de la période inflationniste, l'évolution de l'univers est suivie par la phase conventionnelle du big bang et $|\Omega_{\text{tot}} - 1|$ recommence à augmenter. Comme l'expansion inflationniste continue suffisamment longtemps et conduit Ω_{tot} très près de l'unité, Ω_{tot} reste proche de l'unité même à l'époque actuelle.

2.1.3 Problème du monopole

Le problème du monopole était initialement la principale motivation pour développer la cosmologie inflationnaire. Pendant l'époque inflationniste, l'univers a connu une expansion importante au cours de laquelle la densité des particules indésirables s'est diluée dans l'univers. En produisant une expansion suffisante, la dilution assurait que les particules restaient complètement en dehors de l'univers observable, ce qui rendait assez difficile de localiser un seul monopole magnétique.

2.2 Dynamique de l'inflation

L'inflation est une période d'expansion accélérée. Alors, le facteur d'échelle a augmenté à un rythme croissant. Par suite, nous pouvons écrire la contrainte

$$\ddot{a} > 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{aH} \right) < 0. \quad (2.8)$$

Le dernier facteur correspond à la longueur de Hubble de mouvement $1/(aH)$. Cette dernière montre que l'univers observable devient plus petit pendant l'inflation. Ce processus a permis à cette région observable de s'étendre. L'équation de Raychauduri (1.32), en l'absence d'une constante cosmologique, exige que

$$\rho + 3P < 0. \quad (2.9)$$

2.2. Dynamique de l'inflation

Cela signifie que l'inflation sera modélisée par un fluide avec une pression négative conditionnée par $\rho > 0$. Plus précisément, pour l'inflation, l'équation d'état est définie par $\omega < -1/3$. Puisque l'inflation a lieu à très hautes énergies, le formalisme nécessaire pour décrire la physique de cette période est la théorie des champs. Alors, une représentation simple de l'inflation est de considérer que l'expansion est contrôlée par un champ scalaire réel ϕ , que nous appelons "l'inflaton". Autrement dit, la densité d'énergie de l'univers primitif est dominée par ce dernier. Cette hypothèse est totalement compatible avec la platitude, l'isotropie et l'homogénéité de l'univers. Cependant, la physique de l'inflation ne peut pas être testée par un accélérateur de particules en raison des énergies très élevées qui dépassent actuellement les limites des études expérimentales sur la terre. Ceci signifie que la forme du potentiel $V(\phi)$, qui décrit l'auto-interaction du champs scalaires ϕ , relativement est inconnue. Cela permet de proposer de nombreux modèles d'inflation. qui peuvent être testés par rapport aux observations.

La dynamique de ce champ scalaire est généralement abordé en utilisant les méthodes développées en théorie des champs. En effet, l'action pour un champ scalaire unique ϕ , couplé de façon minimale à la gravité, est donnée par

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_{Pl}^2}{2} R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right], \quad (2.10)$$

où R est la courbure scalaire. M_{Pl} est la masse de Planck à 4-dimensions, et $g_{\mu\nu}$ indique la métrique associée avec son déterminant g . $V(\phi)$ est le potentiel du champ scalaire. Sa forme reste toujours une question ouverte [89, 90]. À partir de cette action, le tenseur d'énergie-impulsion de ϕ s'écrit comme suit

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\rho\lambda} \partial_\rho \phi \partial_\lambda \phi + V(\phi) \right]. \quad (2.11)$$

En variant le champ scalaire, nous trouvons l'équation de mouvement comme suit

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] \right) = -\frac{g^{\mu\nu}}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \partial_\nu \phi) - \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (2.12)$$

Comme expliqué précédemment, nous supposons que nous vivons dans un univers plat. Dans un univers FLRW, cette équation de mouvement produit la relation suivante

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (2.13)$$

2.2. Dynamique de l'inflation

où on a utilisé $V'(\phi) = \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}$. Cette équation est appelée l'équation de Klein-Gordon. Dans cette équation, nous avons supposé que ϕ est homogène et nous rappelons que le point représente une dérivée par rapport au temps cosmique t . Puisque ϕ est un champ scalaire, alors il possède un seul degré de liberté. Il n'a pas de contrainte anisotrope et peut-être identifiée comme un fluide parfait. En comparant (2.11) pour l'espace plat avec $T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, P, P, P)$ pour un fluide parfait, le champ ϕ a une densité d'énergie et une pression données par

$$\rho = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \quad (2.14)$$

$$P = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi). \quad (2.15)$$

En outre, nous pouvons écrire l'équation d'état de ϕ comme suit

$$\omega = \frac{P}{\rho} = \frac{\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi)}{\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)}. \quad (2.16)$$

Pour avoir une pression négative, qui est nécessaire pour assurer la réalisation de l'inflation, nous devons imposer la contrainte

$$V(\phi) > \frac{\dot{\phi}^2}{2}. \quad (2.17)$$

Cette relation implique que l'énergie potentielle doit dominer l'énergie cinétique si nous avons un univers en expansion. Il est à noter également qu'avec les formes de densité d'énergie et de pression données par les équations (2.14) et (2.15), nous pouvons trouver l'équation de mouvement (2.13) en introduisant celles-ci dans l'équation de continuité (1.36). Pour le champ inflaton, nous trouvons que l'équation de Friedmann (1.32) est

$$H^2 = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}{3M_{\text{Pl}}^2}. \quad (2.18)$$

Pour des conditions initiales données sur ϕ et $\dot{\phi}$ et tout potentiel $V(\phi)$, l'équation de Klein-Gordon (2.13) ainsi que l'équation de Friedmann (2.18) peuvent être résolues bien que des méthodes numériques doivent souvent être utilisées. Cela est important pour décrire la dynamique de l'inflaton. Pour un potentiel donné, l'inflation sera continue jusqu'à ce que $P < -\rho/3$. Lorsque cette condition n'est pas remplie, l'inflation se termine et suivie par phase de réchauffement. Ce phénomène remplit l'univers avec des particules du modèle standard.

2.3 Scénario du roulement lent

Nous allons maintenant mieux quantifier les conditions dans lesquelles un champ scalaire peut donner lieu à une période inflationnaire. On peut proposer un modèle avec un champ scalaire commençant par un potentiel presque plat, c'est-à-dire satisfaisant initialement la première condition de roulement lent $\dot{\phi} \ll V(\phi)$. Le champ scalaire roule lentement vers le bas de son potentiel. Cette approximation est appelée roulement lent. Les équations de mouvement (2.13) et (2.18), pour l'inflation à roulement lent, deviennent

$$3H\dot{\phi} \simeq -V'(\phi) \quad (2.19)$$

$$H^2 \simeq \frac{8\pi}{3M_{pl}^2}V(\phi). \quad (2.20)$$

Il est facilement de vérifier que cette approximation de roulement lent exige que la pente et la courbure du potentiel soient petites: $V'(\phi), V''(\phi) \ll V$.

Le processus inflationnaire se produit lorsque la partie cinétique du champ d'inflaton est sous-dominante par rapport au champ potentiel $V(\phi)$. Lorsque les deux quantités deviennent comparables, la période inflationnaire finit par donner lieu au processus de réchauffage illustré dans la figure (2.2).

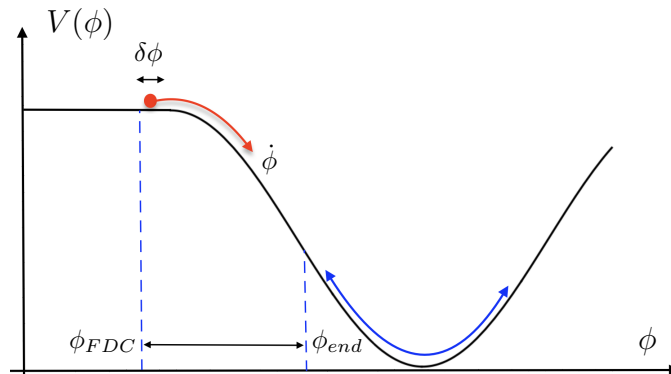


FIGURE 2.2 – Schéma du processus inflationnaire.

Nous pouvons définir les paramètres, appelés les paramètres de roulement lent introduits afin de préciser les conditions des dérivés première et seconde du champs scalaire ϕ [91]. Ces

2.3. Scénario du roulement lent

paramètres sont définis par

$$\epsilon_H(\phi) \equiv \frac{M_{pl}^2}{4\pi} \left(\frac{H'(\phi)}{H(\phi)} \right)^2 \quad (2.21)$$

$$\eta_H(\phi) \equiv \frac{M_{pl}^2}{4\pi} \left(\frac{H''(\phi)}{H(\phi)} \right) \quad (2.22)$$

$$\xi_H^2(\phi) \equiv \frac{M_{pl}^2}{8\pi} \left(\frac{H'(\phi)H''(\phi)}{H^2(\phi)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.23)$$

On réécrit les paramètres de roulement lent selon le potentiel qui sont définis comme suit

$$\epsilon_V(\phi) \equiv \frac{M_{pl}^2}{16\pi} \left(\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2 \quad (2.24)$$

$$\eta_V(\phi) \equiv \frac{M_{pl}^2}{8\pi} \frac{V''(\phi)}{V(\phi)} \quad (2.25)$$

$$\xi_V^2(\phi) \equiv \left(\frac{M_{pl}^2}{8\pi} \right)^2 \left(\frac{V'(\phi)V'''(\phi)}{V^2(\phi)} \right). \quad (2.26)$$

On remarque alors que les équations (2.19) et (2.20) sont en accord avec l'approximation du roulement lent lorsque les conditions suivantes sont satisfaites

$$\epsilon_V(\phi) \ll 1, \quad |\eta_V(\phi)| \ll 1. \quad (2.27)$$

Ces conditions sont suffisantes, mais non nécessaires, puisque la validité des approximations du roulement lent était une exigence dans sa dérivation. La signification physique de $\epsilon_V(\phi)$ peut être explicitement observée en exprimant l'équation (2.8) en termes de ϕ . La condition inflationnaire est alors équivalente à

$$\frac{\ddot{a}}{a} > 0 \quad (2.28)$$

$$\epsilon_V(\phi) < 1. \quad (2.29)$$

Par conséquent, l'inflation se termine lorsque la valeur $\epsilon_V(\phi_f) = 1$ est atteinte. Dans le cadre de ces approximations, il est facile de déterminer le facteur d'échelle entre le début et la fin de l'inflation. Comme la taille de l'expansion est une quantité énorme, il est utile de la

2.4. Modèles d'inflation

calculer en termes de nombre de e-fold N , défini par

$$N \equiv \ln \frac{a_f}{a} \simeq \int_{t_i}^{t_f} H dt \simeq \frac{8\pi}{M_{pl}^2} \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V}{V'(\phi)} d\phi, \quad (2.30)$$

où ϕ_i est la valeur de l'inflaton à un instant initial. ϕ_f est sa valeur à un instant final. Pour un potentiel $V(\phi)$ donné, cette expression peut alors être inversée pour donner $\phi(N)$.

Afin de résoudre le problème de platitude, Ω doit être $|\Omega_f - 1| \lesssim 10^{-60}$ juste après la fin de l'inflation. Pendant ce temps, le rapport $|\Omega - 1|$ entre la phase initiale et la phase finale de l'inflation lente est donné par

$$\frac{|\Omega_f - 1|}{|\Omega_i - 1|} \approx \left(\frac{a_i}{a_f} \right)^2 = e^{-2N_i}, \quad (2.31)$$

où nous avons utilisé le fait que H est presque constant pendant l'inflation lente. En supposant que $|\omega_i - 1|$ est d'ordre unitaire, le nombre de e-folds doit être $N \geq 60$ pour résoudre le problème de planéité. Nous avons besoin d'un nombre similaire e-folds pour résoudre le problème de l'horizon, Par conséquent, $N > 60$ est considéré comme un objectif standard du nombre minimum de e-folds électroniques pour tout nouveau modèle d'inflation.

2.4 Modèles d'inflation

Les différents types de modèles inflationnaires avec un seul champ scalaire peuvent être classés approximativement de la manière suivante [92]. La première classe (type I) est constituée des modèles à "grand champ", dans lesquels la valeur initiale de l'inflaton est grande et où il diminue lentement vers le minimum du potentiel pour des valeurs plus faibles de ϕ . L'inflation chaotique [93] est l'un des modèles représentatifs de cette classe. La deuxième classe (type II) se compose des modèles à "petit champ", dans lesquels le champ de l'inflaton est petit au départ et évolue lentement vers le minimum potentiel pour des valeurs plus grandes de ϕ . La nouvelle inflation et l'inflation naturelle sont des exemples de ce type [94, 95]. La troisième classe (type III) est constituée des modèles d'inflation hybride [96], dans lesquels l'inflation se termine typiquement par une transition de phase déclenchée par la présence d'un second champ scalaire. Nous notons que plusieurs modèles d'inflation ne peuvent pas être classés dans les trois types ci-dessus. Par exemple, certains modèles n'ont pas de minimum potentiel, comme l'inflation quintessentielle et l'inflation tachyonique [97, 98]. Il existe

2.4. Modèles d'inflation

d'autres modèles d'inflation dans lesquels une expansion accélérée est réalisée sans utiliser le potentiel de l'inflaton. Par exemple, nous citons la k-inflation et l'inflation fantôme [99]. Dans ce cas, l'inflation se produit en présence de termes cinématiques d'ordre supérieur d'un champ scalaire.

2.4.1 Modèles à grandes valeurs des champs

Maintenant, nous traitons le premier type des potentiel. Le modèle à grand champ est généralement caractérisé par le potentiel monomial suivant

$$V(\phi) = V_0\phi^n, \quad (2.32)$$

où V_0 est une quantité constante. Les potentiels quadratiques dans l'inflation chaotique correspondent à $n = 2$ et $n = 4$. Dans ce cas, l'inflation se produit pour des valeurs de ϕ à l'échelle de Planck. Ce potentiel est illustré dans la figure (2.3).

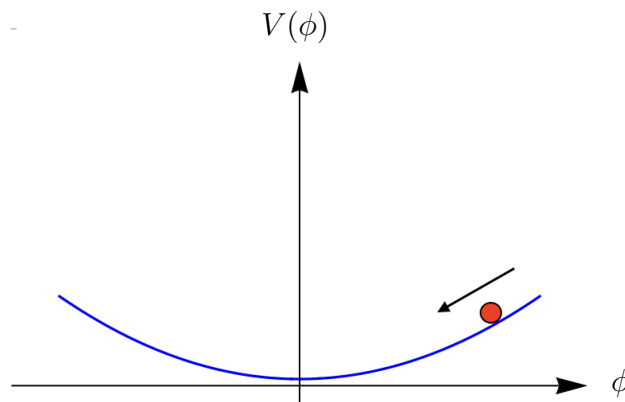


FIGURE 2.3 – Représentation schématique du potentiel des modèles à grand champ avec $n = 2$.

Ces modèles satisfont naturellement aux conditions initiales distribuées aléatoirement avec des régions de l'espace-temps qui ont initialement $\phi > M_{pl}$.

2.4.2 Modèles à petites valeurs des champs

Les modèles à petites valeurs des champ sont généralement décrits par des potentiels qui apparaissent naturellement lors de la décomposition spontanée de la symétrie. Ce type est

2.4. Modèles d'inflation

caractérisé par le potentiel suivant

$$V(\phi) = V_0 \left[1 - \left(\frac{\phi}{\mu} \right)^n \right], \quad (2.33)$$

où l'exposant n diffère d'un modèle à l'autre. $V(\phi)$ est généralement considéré comme le terme d'ordre inférieur dans un développement de Taylor à partir d'un potentiel plus général. Dans ce type de potentiel, l'inflation a lieu lorsque le champ est situé dans un état de vide, très proche du sommet de la colline, et diminue jusqu'à un minimum stable comme on peut le voir dans la figure (2.4). Ces modèles sont typiquement caractérisés par $\frac{d^2V}{d^2\phi} < 0$ et $\eta < -\epsilon$.

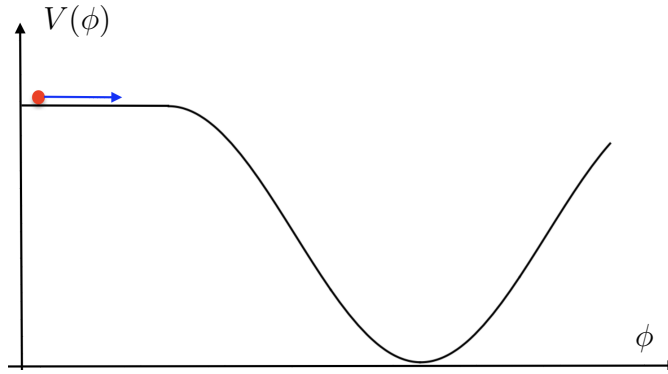


FIGURE 2.4 – Représentation schématique du potentiel des modèles à petit champs avec $n = 2$.

2.4.3 Modèles hybrides

Les modèles de inflation hybrides mettent en jeu plusieurs champs scalaires. Ce scénario est en particulier motivé par la physique des particules [100–102]. Dans ces modèles, le champ d'inflation ϕ évolue vers un minimum de son potentiel, mais le minimum présente une énergie $V(\phi_{min}) = \Lambda^4$ différente de zéro. Dans ce cas, l'inflation continue pour toujours à moins qu'un champ auxiliaire ψ soit ajouté pour interagir avec ϕ et arrêter l'inflation à un moment donné pour lequel $\phi = \phi_c$. Ces modèles sont bien décrits par $\frac{dV}{d^2\phi} < 0$ et $0 < \epsilon < \eta$, où V correspond au potentiel d'inflation efficace à 1-champ.

Au cours de la phase inflationniste initiale, le potentiel d'inflation hybride est décrit par un champ unique

$$V(\phi) = \Lambda^4 \left[1 + \left(\frac{\phi}{\mu} \right)^n \right], \quad (2.34)$$

2.5. Perturbations cosmologiques

où n est un exposant qui se distingue d'un modèle à l'autre. Pour $\phi/\mu \gg 1$, le comportement des modèles à grand champ est récupéré. De même, lorsque $\phi/\mu \ll 1$, la dynamique est similaire aux modèles à petit champ, mais maintenant le champ évolue vers un point fixe dynamique plutôt que de s'en éloigner. Suivant [96], le modèle d'inflation hybride de Linde est un exemple qui est défini comme suit

$$V = \frac{\lambda}{4} \left(\psi^2 - \frac{M^2}{\lambda} \right)^2 + \frac{1}{2} g^2 \phi^2 \psi^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad (2.35)$$

où m est la masse. M indique la masse effective négative du champ ψ , g et λ sont des constantes des couplages.

2.5 Perturbations cosmologiques

Après avoir établi un aperçu sur la théorie et les modèles décrivant l'inflation standard, nous passons à la discussion des perturbations. Le grand succès de l'inflation est non seulement de fournir une solution aux problèmes classiques du big bang chaud, mais aussi de fournir une explication naturelle des anisotropies du CMB et de la structure à grande échelle de l'univers lorsqu'elle est combinée à la mécanique quantique. Ces déviations de l'homogénéité et de l'isotropie proviennent des fluctuations quantiques du vide des champs couplés de l'inflaton et de la gravitation, et devraient avoir un spectre de puissance presque invariant par rapport à l'échelle, ce qui correspond aux observations [12]. Ainsi, les mesures des anisotropies du FDC nous permettent d'imposer des contraintes sur le potentiel $V(\phi)$.

Dans cette section, nous discutons l'approche standard des perturbations et démontrons certaines caractéristiques principales des prédictions de l'inflation.

2.5.1 Perturbations métriques

Dans la théorie des perturbations de la relativité générale, nous considérons un espace-temps perturbé, proche d'un espace-temps simple et symétrique. En développant la théorie des perturbations, on aura deux espace-temps différents qui sont illustrés dans la figure (2.5).

Cela signifie qu'il y a un système de coordonnées de l'espace-temps perturbé dont la métrique peut être écrite comme suit

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \quad (2.36)$$

2.5. Perturbations cosmologiques

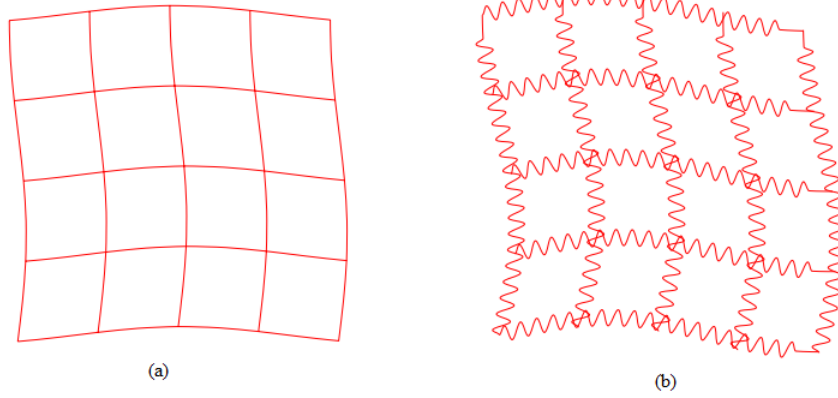


FIGURE 2.5 – (a) L'espace-temps et (b) l'espace-temps perturbé.

où $\bar{g}_{\mu\nu}$ est la métrique de l'espace-temps et $\delta g_{\mu\nu}$ représente une petite perturbation.

Pour une distribution inhomogène de la matière, les équations d'Einstein impliquent que nous devons également prendre en compte les perturbations métriques inhomogènes de la métrique spatialement plate de la FRW. À partir de l'équation (2.2), nous pouvons utiliser le temps conforme η

$$ds^2 = \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = a^2(\eta)(-d\eta^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (2.37)$$

En d'autres termes, nous avons

$$\bar{g}_{\mu\nu} = a^2(\eta)\eta_{\mu\nu}, \quad (2.38)$$

où $\eta_{\mu\nu}$ est la métrique de Minkowski donnée par

$$[\eta_{\mu\nu}] \equiv [\eta^{\mu\nu}] \equiv \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Nous écrivons la métrique de l'univers perturbé de la manière suivante

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} = a^2(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}), \quad (2.39)$$

où $h_{\mu\nu}$ est la perturbation supposée petite.

2.5. Perturbations cosmologiques

Afin de suivre la dynamique de ces perturbations cosmologiques, il peut être utile de les décomposer en composantes scalaire, vectorielle et tensorielle. Nous allons donner les composantes temporelles et spatiales de la métrique perturbée. En effet, nous avons

$$g_{\mu\nu} = a^2 \eta_{\mu\nu} + a^2 \begin{bmatrix} -2A & -B_i \\ -B_i & -2\psi\delta_{ij} + 2E_{ij} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

où on a utilisé

$$[h_{\mu\nu}] \equiv \begin{bmatrix} -2A & -B_i \\ -B_i & -2\psi\delta_{ij} + 2E_{ij} \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

A , B , et E sont des perturbations scalaires. On exploite

$$D \equiv -\frac{1}{6}h_i^i \equiv -\frac{1}{6}h, \quad (2.42)$$

où h est la trace de la perturbation métrique spatiale h , et E sans trace.

Puisque les indices sur $h_{\mu\nu}$ peuvent être élevés et baissés avec $\eta_{\mu\nu}$, nous obtenons

$$[h^{\mu\nu}] \equiv \begin{bmatrix} -2A & +B_i \\ +B_i & -2\psi\delta_{ij} + 2E_{ij} \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

Au-delà de l'homogénéité et de l'isotropie, nous pouvons étendre la métrique de l'élément linéaire plat FLRW

$$ds^2 = a^2(\eta) - (1 + 2A)d\eta^2 - 2B_i d\eta dx^i + [(1 - 2\psi)\delta_{ij} + 2E_{ij}] dx^i dx^j, \quad (2.44)$$

où a est le facteur d'échelle, A est appelé la perturbation de la fonction de lapse et représente une fluctuation dans l'intervalle de temps approprié par rapport à l'intervalle de temps de coordonnées. Les perturbations métriques ont été divisées en éléments scalaires, vectoriels et tenseurs en fonction de leurs propriétés de transformation sur les hypersurfaces spatiales. Les équations d'Einstein pour les parties scalaire, vectorielle et tensorielle se découpent ensuite en ordre linéaire.

2.5.2 Perturbations scalaires

Les perturbations métriques scalaires A , $\partial_i B$, $\psi\delta_{ij}$ et $\partial_{ij}E$ sont responsables de la structure de l'univers c'est-à-dire la déviation de l'univers homogène et isotrope. Elles sont

2.5. Perturbations cosmologiques

construites à partir de 3-scalaires, de leurs dérivées et de la métrique spatiale de la géométrie associée. La courbure scalaire de Ricci intrinsèque des surfaces à temps constant est donnée par

$$R = \frac{4}{a^2} \nabla^2 \psi, \quad (2.45)$$

où $\nabla^2 \equiv \delta^{ij} \partial_{ij}$ est le laplacien spatial. Alors, nous référons à ψ comme la perturbation de courbure. Nous pouvons décomposer par Fourier une perturbation scalaire arbitraire. En ce qui concerne l'ensemble complet des vecteurs propres du laplacien spatial $\nabla^2 \psi = -k^2 \psi$, le nombre d'ondes en mouvement k indique les valeurs propres correspondantes.

Selon la transformation de jauge

$$t \longrightarrow t + \delta t, \quad (2.46)$$

$$x^i \longrightarrow x^i + \delta^{ij} \partial_j \delta x, \quad (2.47)$$

δt détermine le découpage du temps et δx le découpage spatial. Les perturbations métriques scalaires sont transformées comme suit

$$A \longrightarrow A - \dot{\delta} t, \quad (2.48)$$

$$B \longrightarrow B + a^{-1} \delta t - a \dot{\delta} x, \quad (2.49)$$

$$E \longrightarrow E - \delta x, \quad (2.50)$$

$$\psi \longrightarrow \psi + H \delta t. \quad (2.51)$$

Bien que B et E soient séparément dépendants de la jauge spatiale, nous pouvons construire des perturbations métriques scalaires qui sont invariantes sous la transformation de jauge [103]. La jauge longitudinale correspond à une transformation de jauge spécifique

$$\Phi \equiv A - \frac{d}{dt} \left[a^2 \left(\dot{E} - \frac{B}{a} \right) \right], \quad (2.52)$$

$$\Psi \equiv \psi + a^2 H \left(\dot{E} - \frac{B}{a} \right). \quad (2.53)$$

Les perturbations de la matière dépendent également de la jauge. Le champ scalaire, la densité et les perturbations de pression sont soumis à la règle de la transformation suivante

$$\delta \rho \longrightarrow \delta \rho - \dot{\rho} \delta t. \quad (2.54)$$

2.5. Perturbations cosmologiques

La perturbation adiabatique de la pression est définie de la façon suivante

$$\delta P_{ad} \equiv \frac{\dot{P}}{\dot{\rho}} \delta \rho. \quad (2.55)$$

Par conséquent, la partie non-adiabatique de la perturbation de pression réelle, ou perturbation d'entropie, est une perturbation invariante de jauge

$$\delta P_{nad} = \delta P - \frac{\dot{P}}{\dot{\rho}} \delta \rho. \quad (2.56)$$

La partie scalaire du moment cinétique est donnée par $\partial_i \delta q$ où δq se transforme en

$$\delta q \longrightarrow \delta q + (\rho + P) \delta t. \quad (2.57)$$

Suivant [104], nous pouvons ainsi obtenir la perturbation de la densité de mouvement invariante

$$\delta \rho_m \longrightarrow \delta \rho - 3H \delta q. \quad (2.58)$$

Nous construisons deux autres combinaisons invariantes de jauge couramment utilisées en termes de perturbations de la matière et de la métrique. La perturbation de la courbure sur les hypersurfaces de densité uniforme, définie par Bardeen, Steinhardt et Turner [105, 106], est donnée par

$$-\zeta \equiv \psi + \frac{H}{\dot{\rho}} \delta \rho. \quad (2.59)$$

La perturbation de la courbure en mouvement est

$$\mathcal{R} \equiv \psi - \frac{H}{\rho + P} \delta q, \quad (2.60)$$

La différence entre les deux perturbations de la courbure R et $-\zeta$ est proportionnelle à la perturbation de la densité de mouvement

$$-\zeta = \mathcal{R} + \frac{H}{\dot{\rho}} \delta \rho_m. \quad (2.61)$$

Pour l'inflation à un seul champ scalaire, nous avons $\delta q = -\dot{\phi} \delta \phi$. Alors, on écrit

$$\mathcal{R} \equiv \psi + \frac{H}{\dot{\phi}} \delta \phi. \quad (2.62)$$

2.6. Spectre de puissance des perturbations

Dans l'inflation à champ unique à déroulement lent, nous avons $\delta\rho/\dot{\rho} \simeq \delta\phi/\dot{\phi}$ et alors on a $\delta\rho_m \simeq 0$. Enfin, nous remarquons qu'une autre variable utilisée pour décrire les perturbations scalaires pendant l'inflation est la perturbation du champ dans la jauge spatialement plate (où $\psi = 0$). Selon [107, 108], elle est définie de manière invariante par rapport à la jauge

$$\delta\phi_\psi = \delta\phi + \frac{\dot{\phi}}{H}\psi. \quad (2.63)$$

2.5.3 Perturbations tensorielles

Les perturbations tensorielles h_{ij} sont transversales $\partial^i h_{ij} = 0$ et sans trace $\delta_{ij} h_{ij} = 0$. Elles sont automatiquement indépendantes des transformations de jauge des coordonnées. Elles sont appelées ondes gravitationnelles car elles constituent la partie libre du champ gravitationnel et évoluent indépendamment des perturbations linéaires de la matière. Nous décomposerons les perturbations tensorielles arbitraires en modes propres du Laplacien spatial, $\nabla^2 e_{ij} = -k^2 e_{ij}$, avec k un nombre d'onde en mouvement et une amplitude scalaire $h(t)$

$$h_{ij} = h(t) e_{ij}^{+\times}(x), \quad (2.64)$$

avec deux états de polarisation possibles.

Pour les perturbations tensorielles, il n'y a pas d'équation de contrainte car elles constituent les degrés de liberté gravitationnels libres (ondes gravitationnelles). La partie spatiale des équations d'Einstein donne une équation d'onde pour l'amplitude, définie dans l'équation (2.64), des perturbations métriques tensorielles

$$\ddot{h} + 3H\dot{h} + \frac{k^2}{a^2}h = 0. \quad (2.65)$$

2.6 Spectre de puissance des perturbations

À l'époque de la nucléosynthèse primordiale, l'univers est dominé par un rayonnement composé de photons et des neutrinos relativistes. De plus, il existe des baryons étroitement couplés aux photons par diffusion de Thomson et de la matière noire froide qui s'est découplée. Il existe probablement aussi une forme d'énergie sombre qui domine la densité de l'univers à ce jour. Toutes ces différentes composantes peuvent avoir des perturbations de densité différentes $\delta\rho_i$. Elles sont caractérisées par les perturbations de courbure invariantes

2.6. Spectre de puissance des perturbations

de jauge pour chaque composant

$$\zeta_i \equiv -\psi - \frac{H}{\dot{\rho}} \delta\rho_i. \quad (2.66)$$

La perturbation de courbure totale ζ_i , définie dans l'équation (4.30), est simplement donnée par la somme pondérée des perturbations de courbure individuelles

$$\zeta = \sum_i \frac{\dot{\rho}_i}{\dot{\rho}} \zeta_i. \quad (2.67)$$

Nous examinerons les spectres des perturbations scalaires et tensorielles générées dans un modèle de l'inflation avec un seul champ scalaire. Les perturbations de plusieurs champs scalaires du premier ordre vérifient l'équation d'onde suivante

$$\delta\ddot{\phi}_I + 3H\delta\dot{\phi}_I + \frac{k^2}{a^2}\delta\phi_I + \sum_i V_{IJ}\delta\phi_J = -2V_I A + \dot{\phi}_I \left[\dot{A} + 3\dot{\psi} + \frac{k^2}{a^2}(a^2\dot{E} - aB) \right], \quad (2.68)$$

où I et J sont des indices qui indiquent le nombre des champs scalaires équivalents. L'équation de mouvement (2.68) du champ scalaire perturbé pour un seul champ scalaire peut être écrite très simplement dans la jauge spatialement plate (où $\psi = 0$). En éliminant les perturbations métriques restantes, on obtient l'équation d'onde suivante

$$\delta\ddot{\phi}_\psi + 3H\delta\dot{\phi}_\psi + \left[\frac{k^2}{a^2} + V_{\phi\phi} - \frac{8\pi G}{a^3} \frac{d}{dt} \left(\frac{a^3 \dot{\phi}^2}{H} \right) \right] \delta\phi_\psi = 0, \quad (2.69)$$

où une définition invariante de la jauge de $\delta\phi_\psi$ est donnée dans (2.63).

En introduisant de nouvelles variables, $\nu = a\delta\phi_\psi$ et $z = a\dot{\phi}/H$, l'équation (2.69) se réduit à

$$\nu'' + \left(k^2 - \frac{z''}{z} \right) \nu = 0, \quad (2.70)$$

où le prime désigne une dérivée par rapport au temps conforme $\tau \equiv \int a^{-1} dt$ [108, 109]. Le terme de masse effective, z''/z , peut s'exprimer comme suit

$$\frac{z''}{z} = (aH)^2 \left[2 + 5\epsilon - 3\eta + 9\epsilon^2 - 7\epsilon\eta + \eta^2 + \xi^2 \right], \quad (2.71)$$

où on a utilisé

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad \eta \equiv 2\epsilon - \frac{\dot{\epsilon}}{2H\epsilon}, \quad \xi^2 \equiv \left(2\epsilon - \frac{\dot{\eta}}{H\eta} \right) \eta. \quad (2.72)$$

2.6. Spectre de puissance des perturbations

ϵ , η et ξ^2 sont des paramètres de ralentissement correspondent à l'ordre principal dans une expansion de ralentissement. Ils sont définis dans l'équation (2.24) en termes des dérivées premières, seconde et troisième du potentiel scalaire [110, 111].

En négligeant la dépendance temporelle de ϵ et de η pendant l'inflation lente ainsi que les termes d'ordre 2 et plus dans l'expansion lente, nous obtenons

$$\tau \simeq -\frac{1}{(1-\epsilon)aH}, \quad (2.73)$$

où on a utilisé

$$\frac{z''}{z} = \frac{\nu_R^2 - (1/4)}{\tau^2}, \quad \nu_R^2 \simeq \frac{3}{2} + 3\epsilon - \eta. \quad (2.74)$$

La solution générale de l'équation (2.71) s'exprime alors comme une combinaison linéaire de fonctions de Hankel

$$\nu \simeq \frac{\sqrt{\pi/\tau}}{2} e^{i(1+2\nu_R)\pi/4} \left[c_1 H_{\nu_R}^{(1)}(k | \tau |) + c_2 H_{\nu_R}^{(2)}(k | \tau |) \right]. \quad (2.75)$$

Le spectre de puissance pour les perturbations du champ scalaire est donné par

$$P_{\delta\phi}(\tau, k) \equiv \frac{4\pi k^3}{(2\pi)^3} \left| \frac{\nu}{a} \right|^2. \quad (2.76)$$

En imposant l'état de vide habituel de Minkowski,

$$\nu \longrightarrow \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}}, \quad (2.77)$$

dont le passé asymptotique ($k\tau \longrightarrow -\infty$) correspond au choix $c_1 = 1$ et $c_2 = 0$ dans l'équation (2.75), le spectre de puissance aux petites échelles ($k \gg aH$) est alors

$$P_{\delta\phi} \equiv \left(\frac{k}{2\pi a} \right)^2. \quad (2.78)$$

Aux grandes échelles ($k \ll aH$), nous avons

$$P_{\delta\phi}(\tau, k) \equiv \left((1-\epsilon) \frac{\Gamma(\nu_R)}{\Gamma(3/2)} \frac{H}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{|k\tau|}{2} \right)^{3-2\nu_R}, \quad (2.79)$$

où on a utilisé la relation $H_v^{(1)}(k | \tau |) \longrightarrow -(i/\pi)\Gamma(\nu)(k | \tau | / 2)^{-\nu}$ pour $k\tau \longrightarrow 0$

2.6. Spectre de puissance des perturbations

et $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$. D'après la définition de la perturbation de la courbure (2.60), nous remarquons la relation

$$R = \frac{H}{\dot{\phi}} \delta\phi_\psi. \quad (2.80)$$

Ainsi, la perturbation de la courbure devient constante aux échelles de super-Hubble. Nous utilisons l'équation (2.79) pour définir l'amplitude initiale peu après la sortie de Hubble. En effet, nous obtenons

$$P_R(\tau, k) = \left(\frac{H}{\dot{\phi}} \right)^2 P_{\delta\phi}(\tau, k). \quad (2.81)$$

À grande échelle ($k \ll aH$), nous trouvons

$$P_R(\tau, k) = \frac{2^{2\nu-3}}{(2\pi)^2} \left[\frac{\Gamma(\nu_R)}{\Gamma(3/2)} \right]^2 \left(\frac{H}{-a\tau\dot{\phi}} \right)^2 (-k\tau)^{3-2\nu_R}. \quad (2.82)$$

Le spectre de puissance est calculé lorsque $k = aH$. À partir l'équation (2.73), nous trouvons

$$aH = \frac{-1}{(1-\epsilon)}\tau, \quad (2.83)$$

où le spectre de puissance est calculé à $k = aH$

$$-a\tau = \frac{1}{(1-\epsilon)}H, \quad -k\tau = \frac{k}{(1-\epsilon)}aH. \quad (2.84)$$

Ainsi, (2.82) devient

$$P_R(\tau, k) = 2^{2\nu-3} \left[\frac{\Gamma(\nu_R)}{\Gamma(3/2)} \right]^2 (1-\epsilon)^{2\nu_R-1} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{H}{\dot{\phi}} \right)^2 \left(\frac{k}{aH} \right)^{3-2\nu_R}, \quad (2.85)$$

où encore on a

$$P_R(k) = \left[2^{2\nu-3} \left[\frac{\Gamma(\nu_R)}{\Gamma(3/2)} \right]^2 (1-\epsilon)^{2\nu_R-1} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{H}{\dot{\phi}} \right)^2 \right]_{k=aH}. \quad (2.86)$$

C'est le spectre de perturbation primordial. L'expression (2.86) ne dépend plus du temps, puisque par définition, elle doit être évaluée pour chaque échelle au moment de la sortie de l'horizon ($k = aH$). Nous pouvons maintenant supposer que l'équation (2.86) a été dérivée séparément pour chaque k différent, de sorte que les paramètres du roulement lent soient approximés comme étant constants. En fixant $\nu_R = \frac{3}{2}$ dans (2.86), nous obtenons le résultat

2.6. Spectre de puissance des perturbations

suivant

$$P_R(k) = \left[\left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{H}{\dot{\phi}} \right)^2 \right]_{k=aH}. \quad (2.87)$$

Une notation alternative largement utilisée pour le spectre de puissance scalaire est la perturbation fractionnelle de la densité lorsque les perturbations adiabatiques de la densité réintègrent l'échelle de Hubble pendant l'ère dominée par la matière [111, 112]. Elle est donnée par

$$A_s^2 = \frac{4}{25} P_R(k). \quad (2.88)$$

En exploitant de l'énergie potentielle et de sa dérivée première à la sortie de Hubble, elle s'exprime également comme suit

$$A_s^2 = \frac{1}{24\pi^2} \frac{1}{M_{Pl}^2} \frac{V}{\epsilon} \Big|_{k=aH}. \quad (2.89)$$

La normalisation COBE correspond à $A_s^2 \simeq 2 \times 10^{-9}$ pour le mode qui a croisé le rayon de Hubble environ 60 e-folds avant la fin de l'inflation [113]. On peut déterminer l'échelle d'énergie de l'inflation en utilisant les informations de la normalisation COBE. Par exemple, considérons le potentiel quadratique $V(\phi) = \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2$. L'inflation se termine à $\epsilon \simeq 1$, ce qui donne $\phi_f \simeq M_{Pl}/\sqrt{4\pi}$. La valeur du champ associé à $N = 60$ e-folds avant la fin de l'inflation est $\phi_{60} \simeq 3M_{Pl}$. En remplaçant cette valeur par l'équation (2.89) et en utilisant $A_s^2 \simeq 2 \times 10^{-9}$, on trouve que la masse de l'inflaton m_ϕ est $m_\phi \simeq 10^{-6} M_{Pl}$.

On définit l'indice spectral, n_s par l'expression suivante

$$n_s \equiv \frac{d \ln A_s^2}{d \ln k}, \quad (2.90)$$

Nous constatons d'abord que

$$\frac{d \ln k}{dt} = \frac{d \ln(aH)}{dt} = \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{H}}{H} = (1 + \epsilon)H, \quad (2.91)$$

où on a utilisé $\dot{H} = -\epsilon H^2$ dans l'approximation du roulement lent. En somme, on obtient

$$\frac{d}{d \ln k} = \frac{1}{1 - \epsilon} \frac{1}{H} \frac{d}{dt} = \frac{1}{1 - \epsilon} \frac{\dot{\phi}}{H} \frac{d}{d\phi} = -\frac{M_{Pl}^2}{1 - \epsilon} \frac{V'}{V} \frac{d}{d\phi} \quad (2.92)$$

$$\approx \frac{1}{H} \frac{d}{dt} = -M_{Pl}^2 \frac{V'}{V} \frac{d}{d\phi}. \quad (2.93)$$

2.6. Spectre de puissance des perturbations

Par conséquent, nous trouvons également

$$\frac{d \ln A_s^2}{d \ln k} = \frac{1}{A_s^2} \frac{d A_s^2}{d \ln k} = \frac{\epsilon}{V} \frac{d}{d \ln k} \left(\frac{V}{\epsilon} \right) = \frac{1}{V} \frac{dV}{d \ln k} - \frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{d \ln k} \quad (2.94)$$

$$\approx -M_{Pl}^2 \frac{V'}{V^2} \frac{dV}{d\phi} - \frac{1}{\epsilon} H^{-1} \dot{\epsilon} = -2\epsilon - (-2\eta + 4\epsilon) = -6\epsilon + 2\eta. \quad (2.95)$$

Pour discuter des résultats d'observation, il est important de définir l'indice spectral des perturbations scalaires. Ce dernier vérifie la relation suivante

$$n_s - 1 = \frac{d \ln A_s^2}{d \ln k} \quad (2.96)$$

$$= -6\epsilon + 2\eta, \quad (2.97)$$

où n_s est un paramètre de la cosmologie appelé l'indice spectral qui détermine la dépendance de la perturbation adiabatique primordiales (défini à l'échelle pivot de 0.05Mpc^{-1}). Comme les paramètres ϵ et η sont beaucoup plus petits que l'unité pendant l'inflation lente, les perturbations scalaires générées dans l'inflation standard sont proches de l'invariance d'échelle ($n_s \simeq 1$). Lorsque $n_s < 1$ ou $n_s > 1$, le spectre de puissance s'élève sur les grandes ou les petites longueurs d'onde, nous désignons le spectre comme étant rouge ou bleu, respectivement.

Nous définissons la variation de l'indice spectral en termes de paramètres de roulement lent

$$\alpha_s = \frac{dn_s}{d \ln k} = 16\epsilon\eta - 24\epsilon^2 - 2\zeta^2. \quad (2.98)$$

Puisque l'équation (2.98) est d'ordre 2 dans les paramètres de roulement lent, on s'attend à ce que la variation soit faible dans le roulement lent.

Les perturbations vectorielles linéaires peuvent disparaître lorsqu'il s'agit d'un univers dominé par le champ scalaire. Cependant, les perturbations tensorielles peuvent exister et décrire la propagation des ondes gravitationnelles libres. L'équation d'onde des perturbations tensorielles (2.65) peut être écrite en termes de $u = ah/2\sqrt{8\pi G}$, où h est l'amplitude des ondes gravitationnelles définies dans l'équation (2.64), sous forme de

$$u'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) u = 0. \quad (2.99)$$

Il s'agit de la même forme exacte que l'équation scalaire (2.70). En utilisant l'équation (2.71),

2.6. Spectre de puissance des perturbations

nous avons

$$\frac{a''}{a} = (aH)^2(2 - \epsilon). \quad (2.100)$$

Dans l'approximation du roulement lent, cela correspond à

$$\frac{a''}{a} \simeq \frac{\nu_T^2 - (1/4)}{\tau^2}, \quad \nu_T \simeq \frac{3}{2} + \epsilon. \quad (2.101)$$

En négligeant la dépendance temporelle de ϵ et en utilisant la même normalisation de (2.77), nous trouvons le spectre de puissance tensoriel aux grandes échelles ($k \ll aH$) comme étant

$$P_T(k, \tau) \simeq \frac{64\pi}{M_{Pl}^2} \left((1 - \epsilon) \frac{\Gamma(\nu_T)}{\Gamma(3/2)} \frac{H}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{|k\tau|}{2} \right)^{3-2\nu_T}. \quad (2.102)$$

Comme dans le cas des perturbations scalaires, à l'ordre principal dans le roulement lent, le spectre de puissance des perturbations tensorielles s'écrit

$$P_T(k) \simeq \frac{2}{M_{Pl}^2} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \Big|_{k=aH}. \quad (2.103)$$

Nous utilisons une notation alternative largement utilisée pour le spectre de puissance tensorielles

$$A_T^2 = \frac{8\pi}{25} P_T, \quad (2.104)$$

$$= \frac{4}{25\pi} \left(\frac{H}{M_{Pl}} \right)^2 \Big|_{k=aH}. \quad (2.105)$$

En exploitant l'énergie potentielle $H = V/3 M_{Pl}^2$, il peut se récrire comme suit

$$A_T^2 = \frac{4}{75\pi} \left(\frac{V}{M_{Pl}^4} \right) \Big|_{k=aH}. \quad (2.106)$$

L'indice spectral correspondant aux perturbations tensorielles s'exprime

$$n_T \equiv \frac{d \ln P_T}{d \ln k} \quad (2.107)$$

$$= \frac{d \ln V}{d \ln k} = -2\epsilon. \quad (2.108)$$

D'autre part, on définit la variation de l'indice spectral en fonction des paramètres de rou-

2.7. Contraintes observationnelles sur l'inflation

lement lent définis dans(2.24) par

$$\alpha_T = \frac{dn_T}{d \ln k} = -4\epsilon(2\epsilon - \eta). \quad (2.109)$$

Il est primordial de rappeler qu'une quantité observationnelle importante est le rapport tenseur/scalaire qui est défini comme suit

$$r \equiv \frac{A_T^2}{A_s^2} \simeq 16\epsilon. \quad (2.110)$$

Puisque $\epsilon \ll 1$, l'amplitude des perturbations tensorielles est évincée par rapport à celle des perturbations scalaires. À partir des équations (2.107) et (2.110), on trouve une relation entre r et n_T , telle que

$$r = -8n_T. \quad (2.111)$$

Cette expression est dite relation de consistance de l'inflation à champ unique dans l'approximation du roulement lent [111].

2.7 Contraintes observationnelles sur l'inflation

Comme précédent, nous supposons que l'inflation est dirigée par un seul champ scalaire et discutons des contraintes actuelles sur de tels modèles de inflation. Il est a noter que quels modèles sont actuellement favorisés par les données expérimentales. Cette discussion est principalement basée sur la figure (2.6), qui est illustrée dans le travail développée dans la référence [114]. Cette interprétation est faite en utilisant les données finales du satellite Planck publiées en 2018.

Les observations de Planck pour l'indice spectral n_s et le rapport tenseur-scalaire r à $k = 0.002 \text{ Mpc}^{-1}$ peuvent être comparées aux prédictions théoriques des modèles d'inflation. Certains modèles sont bien adaptés aux données expérimentales. En supposant que le modèle cosmologique Λ CDM ("LambdaCDM") est un modèle qui avec deux constituants majoritaires, à savoir de la matière noire froide (Cold Dark Matter) et de l'énergie noire et en combinant les données de Planck avec celles de BAO, la contrainte sur l'indice spectral est

$$n_s = 0.9665 \pm 0.0038 \quad (68\%, TT, TE, EE, EE + lowE + lensing + BAO). \quad (2.112)$$

2.7. Contraintes observationnelles sur l'inflation

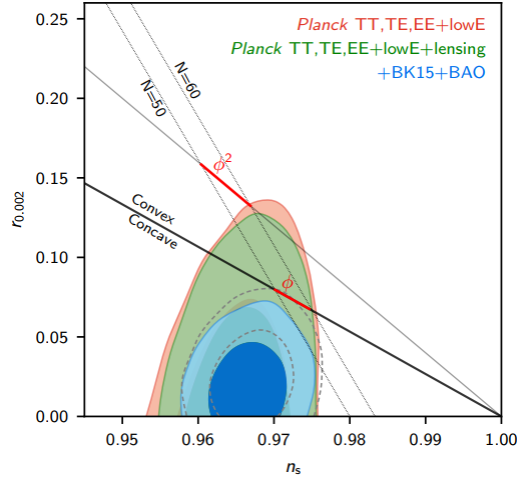


FIGURE 2.6 – Contraintes sur le rapport tenseur-scalaire $r_{0.002}$ dans le modèle Λ CDM, en utilisant Planck $TT, TE, EE+lowE$ et Planck $TT, TE, EE+lowE+lensing$ (rouge et vert, respectivement), et contraintes combinées avec BAO et BICEP2/Keck (bleu). Cela suppose la relation de cohérence inflationniste et la variation de l'indice spectral $dn_s/d\ln k$ négligeable. Crédit image : collaboration Planck [12].

Dans la figure (2.6), les lignes en tirets montrent les lieux où le nombre de e-folds N est approximativement constant, en considérant une inflation simple $V \propto (\phi/M_{Pl})^p$ à champ unique. Les lignes pleines montrent la relation n_s-r approximative pour les potentiels localement quadratiques et linéaires au premier ordre dans le scénario du roulement lent. Les lignes rouges montrent la bande autorisée approximative en supposant $50 < N < 60$ et un potentiel de loi de puissance pour la durée de l'inflation. La ligne noire pleine (correspondant à un potentiel linéaire) sépare les potentiels concaves et convexes.

La valeur supérieure du rapport tenseur-scalaire r par Planck 2018 à un niveau de précision de 95% est

$$r_{0.002} < 0.10, \quad (95\%, TT, TE, EE, EE + lowE + lensing). \quad (2.113)$$

En rajoutant BK15 et les données de BAO, et du Planck, on peut obtenir une condition plus faible sur r . En effet, on a

$$r_{0.002} < 0.055, \quad (95\%, TT + lowE + lensing + BK15 + BAO), \quad (2.114)$$

$$r_{0.002} < 0.058, \quad (95\%, TT, TE, EE + lowE + lensing + BK15 + BAO). \quad (2.115)$$

En ajoutant la variation de l'indice spectral, $dn_s/d\ln k$, comme paramètre supplémentaire

2.7. Contraintes observationnelles sur l'inflation

unique à la base du Λ CDM, l'expérience Planck 2018 fournit des contraintes de n_s et $dn_s/d\ln k$ comme suit

$$\left. \begin{aligned} dn_s/d\ln k &= -0.0045 \pm 0.0067, \\ n_s &= 0.9641 \pm 0.0044, \\ n_{s,0.002} &= 0.979 \pm 0.0021. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} 68\%, TT, TE, EE \\ + lowE + lensing. \end{array} \quad (2.116)$$

$$\left. \begin{aligned} dn_s/d\ln k &= -0.004 \pm 0.0067, \\ n_s &= 0.9659 \pm 0.0040, \\ n_{s,0.002} &= 0.979 \pm 0.0021. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} 68\%, TT, TE, EE \\ + lowE + lensing + BAO. \end{array} \quad (2.117)$$

où n_s est défini par défaut à $k = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ et $n_{s,0.002}$ correspondant à $k = 0.002 \text{ Mpc}^{-1}$.

CHAPITRE 3

Inflation branaire

Le modèle standard présente un ensemble de données portant sur la physique des particules [115, 116]. Cette théorie repose sur une symétrie de jauge $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ décrivant trois parmi les quatre forces fondamentales [117, 118]. Cependant, certaines limites de telle théorie apparaissent. Pour surmonter ces problèmes, des extensions et des nouvelles théories ont été proposées. Nous citons la théorie-M vivant à 11 dimensions ainsi la théorie des cordes à 10 dimensions. Un examen de cette dernière montre qu'il existe un secteur important produisant une physique basée sur des objets étendus appelés D -branes [119, 121]. Ces objets jouent un rôle primordial au niveau des pontages avec d'autres modèles. Dans ce chapitre, nous allons exploiter la physique des branes afin d'élaborer des modèles associés à des scénarios inflationnaires. Pour ce faire, un rappel sur la physique sous-jacente est nécessaire.

3.1 Physique des branes

Les branes apparaissent de façon naturelle dans la théorie des cordes à 10 dimensions. Classiquement, cette théorie est proposée pour construire un cadre dans lequel on peut aborder la dynamique d'un objet unidimensionnel balayant une surface réelle à deux dimensions. On distingue deux types

3.1. Physique des branes

1. corde ouverte
2. corde fermées.

En oubliant le secteur fermionique, l'action décrivant la dynamique d'une corde s'exprime comme suit

$$S = \frac{-T}{2} \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu \quad (3.1)$$

où τ et σ sont les coordonnées de la surface d'univers. α et β indiquent les directions de cette surface. T est la tension de la corde. h est le déterminant de la métrique bidimensionnelle $h_{\alpha\beta}$. À deux dimensions, nous rappelons que l'action précédente représente un couplage entre un champ scalaire X_μ et une métrique $h_{\alpha\beta}$.

L'action précédente peut être généralisée en ajoutant un terme fermionique. En effet, cette action s'exprime comme suit

$$S = \frac{-T}{2} \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu \pm \psi^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu \quad (3.2)$$

où ψ^μ sont des spineurs de Majorana à deux dimensions mais aussi les vecteurs par rapport à l'espace temps. ρ^α représente les matrices qui vérifient les relations d'anti-commutations

$$\{\rho^\alpha, \rho^\beta\} = 2\eta^{\alpha\beta}. \quad (3.3)$$

Il est à noter que l'action précédente est invariante sous certaines transformations. Nous citons, par exemple, les symétries suivantes

1. supersymétrie associée aux champs

$$\chi^\mu \longleftrightarrow \psi^\mu \quad (3.4)$$

2. supersymétrie associée aux variation des champs

$$\delta\chi^\mu = \bar{\chi}\psi^\mu \quad (3.5)$$

où χ est un spineur Majorana. En utilisant les méthodes de la théorie classique des champs, nous obtenons les équations de mouvement suivantes

$$\partial_\alpha \partial^\alpha \chi^\mu = 0 \quad (3.6)$$

$$\rho^\alpha \partial_\alpha \psi^\mu = 0. \quad (3.7)$$

3.1. Physique des branes

Ces relations représentent les équations de mouvement d'une supercorde. Pour une corde ouverte super-symétrique. Certaines conditions doivent être imposées. Nous donnons les relations de bords suivantes

$$\partial S_F = \int d\tau [\psi_+^\mu \partial \psi_+^\mu - \psi_-^\mu \partial \psi_-^\mu]_{\sigma=0}^{\sigma=\pi}. \quad (3.8)$$

Ces contraintes sont résolues comme suit

$$\psi_+^\mu = \pm \psi_-^\mu \quad (3.9)$$

$$\partial \psi_+^\mu = \pm \partial \psi_-^\mu. \quad (3.10)$$

Ces solutions génèrent deux secteurs différents

- Secteur de Ramond, R
- Secteur de Neveu-Schwars, NS.

Le premier secteur est défini par

$$\psi_+(\tau, 0) = \psi_-(\tau, 0) \quad (3.11)$$

$$\psi_+(\tau, \pi) = \psi_-(\tau, \pi). \quad (3.12)$$

En revanche, le deuxième est défini par

$$\psi_+(\tau, 0) = -\psi_-(\tau, 0) \quad (3.13)$$

$$\psi_+(\tau, \pi) = -\psi_-(\tau, \pi). \quad (3.14)$$

En combinant deux cordes ouvertes, nous obtenons quatre secteurs illustrés comme suit

- R-R
- R-NS
- NS-R
- NS-NS

Une étude profonde montre que cette théorie pourrait produire des objets non triviaux. Notamment, les champs tensoriels apparaissant lorsqu'on introduit l'aspect quantique. Ce dernier fournit une belle classification à 10 dimensions en présence des structures supersymétries. On distingue cinq modèles qui sont classés comme suit

1. supercorde IIA

3.2. Formalisme de Randall-Sundrum

2. supercorde IIB
3. supercorde hétérotique, $E_8 \times E_8$
4. supercorde hétérotique, $SO(32)$
5. supercorde type I, $SO(32)$.

Il a été démontré que le spectre des états non massifs de ces cinq modèles contient les champs suivants

$$g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \phi, A_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}. \quad (3.15)$$

Les champs tensoriels $A_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}$ représentent les formes différentielles d'ordre $p + 1$. Ces dernières se couplent automatiquement à des D-branes de dimension p dits Dp -branes. Ces objets sont définis à travers des hypersurfaces de dimensions $(p + 1)$ dans l'espace-temps à dix dimensions, sur lequel des cordes ouvertes sont attachées. La physique de ces objets est largement étudiée et développée [121]. Elle représente une pièce relevante utilisée pour élaborer des pontages avec d'autres modèles vivant dans les dimensions inférieures. Ces liens dépendent de la théorie considérée on présence des branes associées. De ce fait, il faudrait rappeler une classification des objets Généralement, nous pouvons citer

- Type IIA: D0, D2, D4, D6-branes
- Type IIB: D(-1), D1, D3, D5-branes
- Type I: D1, D5-branes.

Il se trouve que les D3-branes peuvent être considérés comme les objets fondamentaux. Ceci est dû au fait que le volume d'univers associé est identifié avec notre monde réel à quatre dimensions.

3.2 Formalisme de Randall-Sundrum

Dans cette section, nous allons présenter le formalisme de Randall-Sundrum exploité pour modéliser le scénario de l'inflation. Ce mécanisme est inspiré des théories vivant dans des espaces non ordinaires. Ces théories sont obtenues en combinant la gravité et la physique quantique. Elles exigent des dimensions supplémentaires généralisant le modèle de Kaluza-Klein [122]. En utilisant le scénario de la compactification, les modèles à quatre dimensions sont dérivés en introduisant les paramètres qui contrôlent la forme et la taille des variétés internes de dimension d . Cette dimension est fixée par la théorie en question. En effet, la

3.2. Formalisme de Randall-Sundrum

théorie des cordes implique la contrainte suivante

$$4 + d = 10. \tag{3.16}$$

En revanche, la théorie M suggère la condition suivante

$$4 + d = 11. \tag{3.17}$$

Certains développements en théorie des supergravités ont montré que les quantités physiques, les constantes, et les paramètres géométriques pourraient être liés. D'après les travaux de [123], il a été suggéré la relation suivante

$$M_p^2 = M_{fund}^{2+d} R^d, \tag{3.18}$$

où M_p représente la masse de Planck à quatre dimensions. M_{fund}^{2+d} indique celle associée à la théorie de départ et R^d correspond à la taille L de la variété compacte

$$L \sim R^d. \tag{3.19}$$

En exploitant la physique des branes de la théorie de supercorde IIB, Randall et Sundrum ont élaboré un modèle en considérant deux branes parallèles séparées par une dimension cachée.

Pour connecter ce scénario au monde réel, il a été proposé que la matière et les interactions physiques sont localisée sur une $D3$ -brane considéré comme un objet solutionique de la théorie type IIB. La gravité associée se propage dans la géométrie d'Anti de Sitter AdS_5 en se basant sur la conjecture de Maldacena qui montre que la physique de $D3$ -brane est équivalente à la théorie des cordes de type IIB sur l'espace $AdS_5 \times S^5$. En examinant cette dualité, il a été démontré que certaines modifications devraient être apportées aux équations de Friedmann produisant des nouvelles idées concernant l'inflation.

3.2.1 Équation d'Einstein sur une D3-brane

Avant d'élaborer les équation relevantes de la cosmologie, nous présentons l'équation d'Einstein associée. Considérons un espace-temps à 5 dimensions en présence d'une $D3$ -brane de la théorie supercorde type IIB utilisée dans le modèle de Randall-Sundrum [124].

3.2. Formalisme de Randall-Sundrum

Ce dernier est obtenu à partir de l'action suivante

$$S = S_{EH} + S_{brane}, \quad (3.20)$$

où S_{EH} représente l'action d'Einstein-Hilbert donnée par

$$S_{EH} = \int d^5x \sqrt{-g^{(5)}} \left(\frac{R}{2\kappa_5^2} + L_m \right), \quad (3.21)$$

κ_5^2 est la constante de couplage gravitationnelle à 5 dimensions. R et L_m sont la courbure scalaire et le lagrangien qui contrôle la matière à 5 dimensions. $g^{(5)}$ est le déterminant de la métrique associée. S_{brane} indique l'action sur la $D3$ -brane à 4 dimensions qui s'exprime sous la forme suivante

$$S_{brane} = \int d^4x \sqrt{-g^{(4)}} \left[\frac{K^\pm}{2\kappa_5^2} + L_{brane} \right], \quad (3.22)$$

où K^\pm est la trace de la courbure de chaque coté de la $D3$ -brane. L_{brane} représente le lagrangien effectif à 4 dimensions qui contient des informations physiques associées à la matière injectée dans le volume d'univers de la $D3$ -brane. Généralement, il s'écrit comme une fonction générique de la métrique branaire $g_{\mu\nu}$ et des champs de matières représentés par des scalaires et des fermions

Les équations d'Einstein à 5 dimensions (bulk) s'écrivent sous la forme suivante

$$G_{AB}^{(5)} = \kappa_5 (T_{AB} + \tau_{AB} \delta(B)), \quad (3.23)$$

où $\delta(B)$ indique certaines contributions de la $D3$ -brane. T_{AB} est le tenseur d'énergie-impulsion à 5 dimensions donnée par

$$T_{AB} = -2 \frac{\delta L_m^{(5)}}{\delta g^{AB}} + g_{AB}^{(5)} L_m^{(5)}. \quad (3.24)$$

$\tau_{\mu\nu}$ est le tenseur d'énergie-impulsion associé à la $D3$ -brane. Il est défini par

$$\tau_{\mu\nu} = -2 \frac{\delta L_{brane}}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} L_{brane}. \quad (3.25)$$

Pour des raisons de simplicité, nous considérons les actions suivantes

$$S_{EH} = - \int d^5x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2\kappa_5^2} + \Lambda_5 \right), \quad (3.26)$$

3.2. Formalisme de Randall-Sundrum

$$S_{brane} = \int d^4x \sqrt{-g} (-T), \quad (3.27)$$

où Λ_5 est la constante cosmologique et T est la tension de $D3$ -brane supposée constante.

Dans cette solution, nous considérons la forme suivante de la métrique suivante

$$ds^2 = e^{-k(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^\alpha, \quad (3.28)$$

où y représente la dimension supplémentaire. Cette métrique est invariante sous la symétrie \mathbb{Z}_2 agissant sur la direction dimension comme suit

$$y \rightarrow -y. \quad (3.29)$$

Cette symétrie possède un point fixe $y = 0$ où la $D3$ -brane est localisée. En utilisant les équations d'Einstein, nous obtenons deux relations indépendantes

$$6K'^2(y) = -\kappa_5^2 \Lambda_5, \quad (3.30)$$

$$3K''(y) = \kappa_5^2 T \delta(y). \quad (3.31)$$

La première équation pourrait être résolue comme suit

$$K(y) = \sqrt{\frac{-\kappa_5^2 \Lambda_5}{6}} y. \quad (3.32)$$

Cette solution exige la contrainte suivante

$$\Lambda_5 < 0. \quad (3.33)$$

En intégrant la deuxième équation et en utilisant la symétrie \mathbb{Z}_2 , nous arrivons à la relation suivante

$$\Lambda_5 = \frac{-\kappa_5^2}{6} T^2, \quad (3.34)$$

qui montre un lien entre la constante cosmologique à 5 dimensions et la tension de la $D3$ -brane contrôlant la physique à 4 dimensions.

3.2.2 Équation de Friedmann sur la D3-brane

Pour obtenir les équations cosmologiques, certaines simplifications seront considérées. D'abord, nous considérons la forme de la métrique suivante

$$ds^2 = a^2 b^2 (dt^2 - dy^2) - a^2 \delta_{ij} dx^i dy^j, \quad (3.35)$$

où a et b sont des quantités qui dépendent de t et y . Cette forme assure certaines propriétés physiques comme l'homogénéité à l'isotropie à 4 dimensions identifié avec le volume d'univers de la D3-brane localisée à $y = 0$. En utilisant cette métrique, les équations d'Einstein s'expriment sous les formes suivantes

$$a^2 b^2 G_0^0 = 3 \left[2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{a''}{a} + \frac{a'b'}{ab} + kb^2 \right], \quad (3.36)$$

$$a^2 b^2 G_5^5 = 3 \left[\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - 2 \frac{a'^2}{a^2} - \frac{a'b'}{ab} + kb^2 \right], \quad (3.37)$$

$$a^2 b^2 G_5^0 = 3 \left[-\frac{a'}{a} + 2 \frac{\dot{a}a'}{a^2} + \frac{\dot{a}b'}{ab} + \frac{a'\dot{b}}{ab} \right], \quad (3.38)$$

$$a^2 b^2 G_j^i = \left[3 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} - \frac{\dot{b}^2}{b^2} - 3 \frac{a''}{a} - \frac{b''}{b} + \frac{b'^2}{b^2} + kb^2 \right] \delta_{ij}, \quad (3.39)$$

où le point indique la dérivée temporelle et le prime représente la dérivée par rapport à y . Ces équations peuvent se mettre sous la forme

$$a^2 b^2 G_0^0 = a^2 b^2 (\rho_B + \rho \delta(y - y_b)) \quad (3.40)$$

$$a^2 b^2 G_5^5 = -a^2 b^2 T_5^5 \quad (3.41)$$

$$a^2 b^2 G_5^0 = -a^2 b^2 T_5^0 \quad (3.42)$$

$$a^2 b^2 G_j^i = -a^2 b^2 (\rho_B + P \delta(y - y_b)) \delta_{ij}, \quad (3.43)$$

où on a utilisé la notion $a' = \frac{da}{dy}$.

Concernant le modèle Randall-Sundrum, nous allons prendre

$$\rho_b = -P_b = \Lambda_5, \quad (3.44)$$

$$T_5^0 = 0. \quad (3.45)$$

3.2. Formalisme de Randall-Sundrum

En examinant les équations précédentes à $y = 0$, nous pouvons trouver

$$\dot{\rho} + \frac{3\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0, \quad (3.46)$$

obtenu à partir de la composante 05. En utilisant la métrique ci-dessus, les équations d'Einstein donnent la relation suivante

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\kappa_5^2 \Lambda_5}{6} + \left(\frac{a'}{ab}\right)^2 - \frac{k}{a^2} + \frac{\mu}{a^4} \quad (3.47)$$

où μ représente une constante d'intégration. Cette équation peut s'écrire aussi comme suit

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\kappa_5^2 \Lambda_5}{6} + \frac{\kappa_5^4 \rho_b^2}{36} - \frac{k}{a^2} + \frac{\epsilon}{a^4}. \quad (3.48)$$

En utilisant la factorisation suivante

$$\rho_b = \rho + T, \quad P_b = P - T, \quad (3.49)$$

on obtient

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\kappa_5^2 \Lambda_5}{6} + \frac{\kappa_5^4 T^2}{36} + \frac{\kappa_5^4 \rho^2}{36} + \frac{\kappa_5^4 T \rho}{18} - \frac{k}{a^2} + \frac{\mu}{a^4}. \quad (3.50)$$

La constante cosmologique Λ_4 sur la D3-brane peut être obtenue à partir de la constante cosmologique à cinq dimensions. En effet, on a

$$\Lambda_4 = \frac{\kappa_5^2}{2} \left(\Lambda_5 + \frac{\kappa_5^2}{6} T^2 \right) \quad (3.51)$$

$$\Lambda_4 = \frac{4\pi}{M_{5p}^3} \left(\Lambda_5 + \frac{4\pi}{3M_{5p}^3} T^2 \right), \quad (3.52)$$

où on a utilisé l'identification suivante

$$\frac{8\pi}{M_{4p}^2} = \frac{\kappa_5^4}{6} T \quad (3.53)$$

$$M_{4p} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left(\frac{M_{5p}^2}{\sqrt{T}} \right) M_{5p}. \quad (3.54)$$

3.3. Inflation branaire

avec M_{4p} et M_{5p} sont la masse de Planck à 4-dimensions et 5-dimensions respectivement. Alors, nous obtenons l'équation de Friedmann

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3M_{4p}^2} \rho \left[1 + \frac{\rho}{2T}\right] + \frac{\Lambda_4}{3} + \frac{\mu}{a^4}. \quad (3.55)$$

Le terme $\frac{\mu}{a^4}$ représente une contribution radiative sur la $D3$ -brane, où μ pourrait être interprété comme la masse d'un objet identique à un trou noir. Par la suite, nous allons considérer la situation associée à la contrainte suivante

$$\mu = \Lambda_4 = 0. \quad (3.56)$$

Dans ce cas, l'équation de Friedmann devient

$$H^2 = \frac{8\pi}{3M_{4p}^2} \rho \left(1 + \frac{\rho}{2T}\right). \quad (3.57)$$

Deux limites peuvent être considérées

1. énergies basses
2. énergies plus élevées.

Dans la première limite, l'inflation branaire se réduit à l'inflation standard. En revanche, la deuxième limite apporte des modifications relevantes qui feront l'objet d'une discussion détaillée sur l'effet de la physique des branes sur les quantités cosmologiques.

3.3 Inflation branaire

3.3.1 Approximation du roulement lent dans l'inflation branaire

Le but de cette section est d'identifier les conditions physiques associées au scénario de l'inflation. Pour ce faire, nous allons supposer que le tenseur énergie-impulsion sur le $D3$ -brane est dominé par la dynamique d'un champ scalaire ϕ à travers un potentiel $V(\phi)$ décrivant une auto-interaction. En utilisant les variations des champs de matière, cette quantité scalaire vérifie l'équation de mouvement suivante

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (3.58)$$

3.3. Inflation branaire

qui est dite l'équation de Klein-Gordon. Cette dernière génère la contrainte suivante

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0. \quad (3.59)$$

La dérivée temporelle donne la relation

$$2H\dot{H} = 2H \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right), \quad (3.60)$$

qui s'écrit également comme suit

$$2H\dot{H} = \frac{4\pi}{3M_4^2} (\rho + P) \left(1 + \frac{\rho}{T} \right). \quad (3.61)$$

En combinant ces équations, nous obtenons

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3M_4^2} \left[(\rho + 3P) + \frac{\rho}{T} (2\rho + 3P) \right]. \quad (3.62)$$

La condition de l'inflation $\ddot{a} > 0$ exige la contrainte

$$P < \frac{-\rho}{3} \left[\frac{T + 2\rho}{T + \rho} \right]. \quad (3.63)$$

En considérant la limite $T \gg \rho$, on retrouve la contrainte standard $P < \frac{-\rho}{3}$ [125]. Dans la limite $\rho \gg T$, en revanche, une contrainte supplémentaire doit être imposée sur P exigée par l'expansion accélérée

$$P < \frac{-2\rho}{3}. \quad (3.64)$$

En présence d'un champ scalaire, cette condition se traduit par

$$\dot{\phi}^2 - V(\phi) + \frac{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)}{2T} (5\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)) < 0. \quad (3.65)$$

En considérant la limite $\dot{\phi}^2 + 2V(\phi) \ll T$, cette dernière se réduit à

$$\dot{\phi}^2 < V(\phi). \quad (3.66)$$

Maintenant, nous traitons le scénario de l'inflation en appliquant l'approximation du roulement lent. Dans telle approximation, la dynamique du champ scalaire est contrôlée par deux

3.3. Inflation branaire

équations relevantes

$$H^2 \simeq \frac{8\pi}{3M_{4p}^2} V \left(1 + \frac{V}{2T}\right), \quad (3.67)$$

$$\dot{\phi} \simeq -\frac{V'}{3H}. \quad (3.68)$$

Dans cette approximation, deux paramètres cosmologiques apparaissent de façon naturelle appelés paramètres de roulement lent

$$\epsilon = \frac{M_{4p}^2}{4\pi} \left(\frac{V'}{V}\right)^2 \left[\frac{T(T+V)}{(2T+V)^2}\right], \quad \eta = \frac{M_{4p}^2}{4\pi} \left(\frac{V''}{V}\right) \left[\frac{T}{2T+V}\right].$$

Ces paramètres doivent vérifier les conditions de roulement lent

$$\epsilon \ll 1, \quad \eta \ll 1 \quad (3.69)$$

qui se traduisent respectivement par

$$\frac{M_4}{4\pi} \left(\frac{V'}{V}\right)^2 \frac{T(T+V)}{(2T+V)^2} \ll 1 \quad (3.70)$$

$$\frac{M_4 V''}{8\pi V} \frac{T}{2T+V} \ll 1. \quad (3.71)$$

Nous remarquons rapidement que les conditions de l'inflation standard peuvent être récupérées en utilisant la limite $T \rightarrow +\infty$. En examinant ces relations, nous observons que ces paramètres seront faibles à conditions que certaines contraintes soient appliquées y compris la détermination de la valeur initiale ϕ_i et finale ϕ_f du champ scalaire. Par suite, l'effet de la tension de la D3-brane pourrait favoriser d'avantage l'inflation [121]. Il sera possible de calculer le nombre de e-folds à travers la relation

$$N_k = \int_{t_i}^{t_f} H dt. \quad (3.72)$$

En utilisant les valeurs ϕ_i et ϕ_f , cette relation s'exprime comme suit

$$N_k = -\frac{8\pi}{M_{4p}^2} \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V}{V'} \left[1 + \frac{V}{2T}\right] d\phi. \quad (3.73)$$

3.3. Inflation branaire

À haute énergie $V \gg T$, les paramètres du roulement lent deviennent

$$\epsilon = \frac{M_{4p}^2 T V'^2}{4 \pi V^3}, \quad (3.74)$$

$$\eta = \frac{M_{4p}^2 T}{4 \pi} \left(\frac{V''}{V^2} \right). \quad (3.75)$$

De même, le nombre de e-folds se réduit à

$$N_k = -\frac{4 \pi}{M_{4p}^2 T} \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V^2}{V'} d\phi. \quad (3.76)$$

3.3.2 Perturbation cosmologiques dans l'inflation branaire

Pour tester un modèle d'inflation, le spectre de perturbation relatif aux fluctuations quantiques des champs autour de leurs comportements homogènes devrait être examiné. En effet, certaines quantités devraient être approchées. Suivant [126, 127], une quantité scalaire a été traitée

$$\xi = R - H \frac{\delta \rho}{\dot{\rho}}, \quad (3.77)$$

qui représente la perturbation de la courbure scalaire R sur la $D3$ -brane. En considérant une géométrie branaire plate, en présence d'un champ scalaire, cette géométrie se réduit à

$$\xi = H \frac{\delta \phi}{\dot{\phi}}, \quad (3.78)$$

où la variation $\delta \phi$ est donnée par

$$\delta \phi = \frac{H}{2\pi}. \quad (3.79)$$

En exploitant l'approximation de roulement lent, le spectre de perturbation scalaire s'exprime sous la forme [125]

$$A_s^2 = \frac{4}{25} \frac{H^2}{\dot{\phi}} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \simeq \frac{512 \pi}{75 M_{4p}^6} \frac{V^3}{V'^2} \left[\left(1 + \frac{V}{2T} \right)^3 \right]_{k=aH} \quad (3.80)$$

évaluée à $k = aH$ associé aux fluctuations de champs. les perturbation tensorielles sont également pertinentes. Suivant le travail [125], on définit l'amplitude de perturbations tensorielles à travers la relation suivante

$$A_T^2 = \frac{4}{25 \pi} \left(\frac{H}{M_{4p}} \right)^2. \quad (3.81)$$

3.3. Inflation branaire

En physique des branes, elle prend la forme suivante

$$A_T^2 = \frac{32}{75 M_{4p}^4} \left[V \left[1 + \frac{V}{2T} \right] \right]_{k=aH}. \quad (3.82)$$

Dans la limite associée aux hautes énergies, ces expressions se réduisent aux

$$A_s^2 \simeq \frac{512 \pi}{600 M_{4p}^6 T^3} \left(\frac{V^6}{V'^2} \right), \quad (3.83)$$

$$A_T^2 \simeq \frac{16}{75 M_{4p}^4} \left(\frac{V^2}{T} \right). \quad (3.84)$$

Par suite, nous nous intéressons à des indices spectraux dans l'approche de roulement lent.

Dans ce cas, l'indice spectrale scalaire qu'est défini par

$$n_s - 1 = \left. \frac{d \ln A_s^2}{d \ln k} \right|_{k=aH}, \quad (3.85)$$

produit la relation

$$n_s - 1 = -6 \epsilon + 2 \eta. \quad (3.86)$$

En utilisant le fait que ϵ et η sont nuls lorsque la limite associée aux hautes énergies est appliquée, nous remarquons que $n_s - 1$ est proche de zéro. Particulièrement, nous retrouvons le spectre de Harrison-Zel'Donich. La variation de l'indice spectrale α_s représente une quantité importante qui est définie par

$$\alpha_s = \left. \frac{d n_s}{d \ln k} \right|_{k=aH} \quad (3.87)$$

$$= -24 \epsilon^2 + 16 \epsilon \eta - 2 \zeta^2, \quad (3.88)$$

où on a utilisé

$$\zeta^2 = \frac{M_{4p}^4 T^2}{16 \pi^2} \left(\frac{V' V'''}{V^4} \right). \quad (3.89)$$

Concernant le comportement tensoriel, nous avons deux quantités à savoir

$$n_T = \left. \frac{d \ln A_T^2}{d \ln k} \right|_{k=aH} \simeq -2 \epsilon, \quad (3.90)$$

3.4. Modélisation de l'inflation branaire

Potentiel	$V(\phi)$
Chaotique	$\frac{1}{2}m^2\phi^2$
Naturelle	$\Lambda^4(1 - \cos(\phi/f))$
Hilltop	$\Lambda^4(1 - (\phi/\mu)^p)$
Higgs-Like	$\Lambda^4(1 - (\phi/\mu)^2)^2$
Exponential SUSY	$\Lambda^4(1 - e^{-\phi/f})$

TABLE 3.1 – *Certains types des modèles qu'ont été étudiés dans l'inflation branaire.*

et sa variation est donnée par

$$\alpha_T = -4\epsilon\eta + 8\epsilon^2. \quad (3.91)$$

Ces paramètres spectraux peuvent donner des informations sur le potentiel. Pour vérifier la validité des modèles associées, un rapport tenseur-scalaire r sera nécessaire. Il est donné par

$$r = \frac{A_T^2}{A_s^2} \simeq \epsilon \left[\frac{T}{T+V} \right]_{k=aH}. \quad (3.92)$$

À haute énergie, ce rapport se réduit à

$$r = \epsilon \frac{T}{V}. \quad (3.93)$$

Après avoir donné toutes les quantités cosmologiques, nous passons maintenant à la modélisation de l'inflation branaire. Plusieurs modèles ont été proposés en considérant des formes simples du potentiel scalaire avec un seul champ scalaire ϕ .

3.4 Modélisation de l'inflation branaire

Dans cette section, nous allons discuter certains potentiels qui pourraient être utilisés pour modéliser l'inflation branaire. Un examen montre que plusieurs formes ont été étudiées. Parmi ces modèles nous citons quelques formes dans le tableau (3.1). En examinant les résultats associés, nous remarquons que l'effet de la tension de la D3-brane est relevant. Particulièrement, les quantités cosmologiques sont modifiées par des termes provenant de la théorie des supercordes des type IIB. En effet, les paramètres du roulement lent et les quantités des perturbations dépendent de la tension T . Pour comprendre le scénario branaire, nous considérons un modèle simple qui est largement étudié. Ce modèle est basé le potentiel

3.4. Modélisation de l'inflation branaire

polynomial suivant

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{n} \phi^n, \quad (3.94)$$

où λ est une quantité représentant la densité d'énergie de vide et n est un exposant. Pour ce modèle, nous pouvons calculer les quantités cosmologiques dans le cadre de roulement lent. Les valeurs obtenues pourraient être comparées avec celles des données de Planck 2018 [12]. En évinçant l'effet de la tension de la $D3$ -brane, nous obtenons

$$\epsilon = \frac{M_4^2 n^2}{16\pi\phi^2} \quad (3.95)$$

$$\eta = \frac{M_4^2 (n-1)(n-2)n^2}{8\pi\phi^2} \quad (3.96)$$

$$\zeta^2 = \frac{M_4^2 (n-1)(n-2)n^2}{8\pi\phi^2}. \quad (3.97)$$

En impliquant la condition associée à la fin de l'inflation $\epsilon(\phi) = 1$, nous trouvons

$$\phi_f = \frac{nM_4}{4\sqrt{\pi}}. \quad (3.98)$$

Cette relation permet de calculer le nombre de e-folds comme suit

$$N = - \left[\frac{4\pi\phi^2}{M_4^2 n} \right]_{\phi_i}^{\phi_f}. \quad (3.99)$$

En utilisant les relations précédentes, nous trouvons l'indice spectral n_s

$$n_s - 1 = - \frac{M_4^2 n(n+2)}{8\pi\phi^2}. \quad (3.100)$$

Le rapport tenseur-scalaire r est donné par

$$r = \frac{16n}{4N + n}. \quad (3.101)$$

En variant le nombre de e-folds, nous calculons numériquement n_s et r . Ces résultats sont donnés dans le tableau (3.2) en prenant deux valeurs de N qui sont 60 et 70. Ils sont collectés en variant n . En examinant ce tableau, nous observons que certaines valeurs sont compatibles avec les données expérimentales de Planck 2018 [12]. Maintenant, nous allons introduire l'effet de la $D3$ -brane sur les observables cosmologiques.

3.4. Modélisation de l'inflation branaire

	N=60		N=70	
n	n_s	r	n_s	r
4	0.9508	0.2622	0.9577	0.2253
3	0.9588	0.1975	0.9646	0.1696
2	0.9669	0.1322	0.9716	0.1134
1	0.9751	0.0663	0.9786	0.0569

TABLE 3.2 – Valeurs numériques de n_s et r .

Pour ce faire, nous calculons les paramètres de roulement lent. En effet, nous obtenons

$$\epsilon = \frac{M_4^2 n^3}{\phi^{2+n}} \alpha \quad (3.102)$$

$$\eta = \frac{M_4^2 (n-1)n^2}{\phi^{2+n}} \alpha \quad (3.103)$$

$$\zeta^2 = \frac{(n-1)(n-2)n^4}{\phi^{2(2+n)}} \alpha^2 \quad (3.104)$$

où α est un nouveau paramètre portant une information sur la physique des branes. Il est donné par

$$\alpha = \frac{T}{4\pi\lambda}. \quad (3.105)$$

En utilisant la contrainte $\epsilon(\phi_e) = 1$, nous obtenons la valeur de ϕ_f

$$\phi_f = \left(M_4^2 n^3 \alpha \right)^{\frac{1}{2+n}}. \quad (3.106)$$

En utilisant les relations précédentes, nous trouvons le nombre d'e-folds

$$N = \frac{1}{M_4^2 n^2 (2+n) \alpha} \left(\phi_i^{2+n} - \phi_f^{2+n} \right). \quad (3.107)$$

La valeur initiale du champ scalaire est calculée comme suit

$$\phi_i = \left[M_4^2 n^2 \alpha (n + N(2+n)) \right]^{\frac{1}{2+n}}. \quad (3.108)$$

Comme le modèle précédent, l'indice spectrale est donné par

$$n_s - 1 = -\frac{2(2n+1)}{n + N(2+n)} \quad (3.109)$$

3.4. Modélisation de l'inflation branaire

où on a utilisé la valeur initiale du champ scalaire. Cette dernière peut être exploitée pour déterminer l'expression du rapport tenseur-scalaire r . Après un calcul simple, nous obtenons

$$r = 4\pi n^4 \alpha^2 M_4^2 \left[n^2 \alpha M_4^2 (n + N(2 + n)) \right]^{\frac{2(n+1)}{2+n}}. \quad (3.110)$$

Nous allons calculer les paramètres cosmologiques en fixant le nombre d'e-folds dans l'approximation du roulement lent en présence de la $D3$ -brane.

Ces paramètres dépendent de la nouvelle quantité α provenant de la théorie des cordes. Pour tester ce modèle, certains paramètres doivent être fixés. En considérant $\alpha = 0.3$, nous présentons les valeurs numériques associées aux valeurs suivantes $N = 60$ et $N = 70$. Ces valeurs sont données dans le tableau (3.3). Un examen montre que le modèle avec $N = 60$

	$N = 60$		$N = 70$	
n	n_s	r	n_s	r
4	0.955	0.1657	0.9577	0.1422
3	0.9537	0.1119	0.9603	0.0961
2	0.9586	0.0623	0.9745	0.0534
1	0.9668	0.0208	0.9715	0.0178

TABLE 3.3 – Valeurs numériques de n_s et r dans inflation branaire.

et $n = 4$ présente des valeur très proche aux valeur expérimentales de Planck. Cela montre que le scénario de roulement lent dans la théorie de corde type IIB pourrait être considéré comme un cadre relevant permettant de générer des valeurs cosmologiques comparatives avec le monde observatoire [12–14].

Dans le chapitre suivant, nous allons considérer certains potentiels scalaires supportés par le théorie des cordes.

Comportements thermiques inflationnaires

Dans ce chapitre, nous allons étudier certaines quantités thermiques associés à l’inflation. En effet, la transition entre l’inflation et les étapes ultérieures de l’évolution de l’univers (dominance du rayonnement et de la matière) est appelée réchauffement. Pendant le réchauffement, le champ d’inflaton perd son énergie, ce qui conduit finalement à la production de matière ordinaire et l’inflaton est transformé en particules qui peuplent l’univers à des époques plus avancées. Aucune observable cosmologique directe ne peut normalement être associée à cette période de réchauffage. Des limites indirectes peuvent toutefois être dérivées. Une possibilité consiste à considérer l’évolution cosmologique pour les échelles observables du FDC depuis le moment du croisement de Hubble jusqu’à l’époque actuelle. Plusieurs modèles de réchauffement ont été proposés, les plus simples impliquent la désintégration perturbative d’un champ d’inflaton oscillant à la fin de l’inflation [128, 129], tandis que des scénarios plus complexes incluent des processus non perturbative tels que la désintégration par résonance paramétrique, l’instabilité tachyonique et le préchauffage instantané [130–133]. Le mot préchauffage indique le stade initial du réchauffement, Au cours du temps, les événements de diffusion répartiront la distribution, ce qui conduira finalement à un spectre de corps noir caractérisé par une température finale T_{re} , qui correspond normalement à la température du début de la période qui dominée par les rayonnements.

Cette quantité est largement étudiée afin de déterminer la température de l’univers. Elle est également reliée à N_{re} qui est le nombre de e-folds décrivant le réchauffement qui se produit

entre la fin de l'inflation t_{end} et le début dominée par le rayonnement t_{re} .

4.1 Quantités thermiques du réchauffement N_{re} et T_{re}

Dans cette partie, nous allons décrire comment déterminer le nombre de e-folds du réchauffement N_{re} et la température de réchauffement T_{re} en fonction d'indice spectral scalaire. Pour ne pas compliquer les calculs, nous allons considérer un modèle avec un seul champ scalaire. C'est l'inflation à champ unique dans le contexte du régime à haute énergie du scénario RS-II du monde branaire. Afin de calculer les formules relevantes, nous suivons principalement les travaux réalisées références [30, 31, 134]. Il est à noter que la phase de réchauffement est importante permettant d'obtenir ce que nous connaissons comme l'univers chaud du big-bang. Il se trouve que l'énergie du champ scalaire se transforme en rayonnement thermique pendant le processus de réchauffement par la création de particules. Le champ d'inflaton oscille autour du minimum de son potentiel et la densité d'énergie de l'univers est contrôlée par un paramètre d'état effectif ω_{re} . Ce dernier qui prend certaines valeurs, à savoir $\omega_{re} = -1/3, 0, 2/3$ et 1, relie le facteur d'échelle et la densité d'énergie à travers $\rho \propto a^{-3(1+\omega_{re})}$. Les calculs donnent

$$\frac{a_{end}}{a_{re}} = \left(\frac{\rho_{end}}{\rho_{re}} \right)^{3(1+\omega_{re})}. \quad (4.1)$$

Les indices end et re représentent la fin de l'inflation et la fin de la phase de réchauffement, respectivement. Le nombre de e-folds du réchauffement est lié au facteur d'échelle à la fois à la fin de l'inflation et du réchauffement. En effet, on a la relation

$$e^{-N_{re}} = \frac{a_{end}}{a_{re}}. \quad (4.2)$$

En combinant les équations (4.1) et (4.2), nous pouvons écrire le nombre de e-folds du réchauffement par la formule suivante

$$N_{re} = \frac{1}{3(1+\omega_{re})} \ln \left(\frac{\rho_{end}}{\rho_{re}} \right). \quad (4.3)$$

4.1. Quantités thermiques du réchauffement N_{re} et T_{re}

À haute énergie $\rho \gg T$, l'équation de Friedmann (3.57) devient

$$H^2 \simeq \frac{4\pi}{3M_{4p}^2 T} \rho^2. \quad (4.4)$$

En combinant la dérivée temporelle de l'équation (3.57) avec l'équation de continuité du champ scalaire $\dot{\rho} = -3H(\rho + P)$, le paramètre du roulement lent ϵ s'exprime comme suit

$$\epsilon = \frac{6\dot{\phi}^2/2}{\dot{\phi}^2/2 + V}. \quad (4.5)$$

En utilisant la dernière équation (4.5), nous pouvons trouver le terme cinétique

$$\frac{\dot{\phi}^2}{2} = \frac{V\epsilon}{6 - \epsilon}. \quad (4.6)$$

Nous pouvons écrire l'expression de la densité d'énergie du champ scalaire $\rho = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V$ en fonction du paramètre de roulement lent ϵ et du potentiel du champ scalaire V . En effet, on a

$$\rho = V \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2V} + 1 \right) \quad (4.7)$$

En utilisant le terme cinétique, nous obtenons

$$\rho = V \left(\frac{\epsilon}{6 - \epsilon} + 1 \right). \quad (4.8)$$

Par conséquent, la relation entre le potentiel et la densité d'énergie à la fin de l'inflation ($\epsilon(\phi_{end}) = 1$) est donnée par

$$V_{end} = \frac{5}{6} \rho_{end}. \quad (4.9)$$

En utilisant cette relation, nous trouvons

$$N_{re} = \frac{1}{3(1 + \omega_{re})} \ln \left(\frac{6 V_{end}}{5 \rho_{re}} \right). \quad (4.10)$$

À la fin de la phase de réchauffement, la densité d'énergie de l'univers s'exprime comme suit

$$\rho_{re} = \frac{\pi^2}{30} g_{re} T_{re}^4, \quad (4.11)$$

4.1. Quantités thermiques du réchauffement N_{re} et T_{re}

où g_{re} est un paramètre décrivant le nombre de degrés de liberté internes des particules relativistes à la fin du réchauffement. Cette quantité dépend de la théorie en questions et les particules associées. Pour le modèle standard [32, 33], on $g_{re} = \mathcal{O}(100)$ pour $\gtrsim 175$ GeV. En revanche, pour le modèle standard supersymétrique minimal (MSSM), on a $g_{re} = \mathcal{O}(200)$. En exploitant la notion de l'entropie, nous arrivons à la relation suivante

$$gT^3 a^3 = \text{const.} \quad (4.12)$$

En utilisant la conservation de l'entropie entre le réchauffement et aujourd'hui

$$g_{re} T_{re}^3 a_{re}^3 = g_0 T_0^3 a_0^3, \quad (4.13)$$

où g_0 désigne le nombre de degrés de liberté internes des particules relativistes actuelles, nous trouvons

$$g_{re} T_{re}^3 = \left(\frac{a_0}{a_{re}}\right)^3 \left[2T_0^3 + \frac{21}{4}T_{\nu 0}^3\right]. \quad (4.14)$$

où on a utilisé

$$T_{\nu 0} = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T_0. \quad (4.15)$$

Nous rappelons que $T_0 = 2,725$ K est la température de l'univers actuel. Le rapport $\frac{a_0}{a_{re}}$ peut être écrit comme

$$\frac{a_0}{a_{re}} = \frac{a_0}{a_{eq}} \frac{a_{eq}}{a_{re}}, \quad (4.16)$$

où nous introduisons $e^{-N_{RD}} = \frac{a_{re}}{a_{eq}}$, avec N_{RD} indiquant la durée en e-folds de la phase dominée par le rayonnement. L'équation (4.14) prend la forme suivante exprimée comme suit

$$T_{re} = T_0 \left(\frac{a_0}{a_{eq}}\right) e^{N_{RD}} \left(\frac{43}{11g_{re}}\right). \quad (4.17)$$

En comparant la longueur d'onde $\lambda_0 \simeq \frac{a_0}{k}$ avec le rayon de Hubble d'aujourd'hui $d_H \simeq \frac{1}{H_0}$, on obtient

$$\frac{d_H}{\lambda_0} = \frac{k}{a_0 H_0} = \frac{a_k H_k}{a_0 H_0}, \quad (4.18)$$

où l'indice k désigne l'échelle traverse le rayon de Hubble. En exploitant [31], le rapport $\frac{a_0}{a_{eq}}$ s'écrit comme suit

$$\frac{a_0}{a_{eq}} = \frac{a_0 H_k}{k} e^{-N_k} e^{-N_{re}} e^{-N_{RD}}. \quad (4.19)$$

4.2. Modèle de Starobinsky

Les équations (4.19) et (4.17) donnent

$$T_{re} = \left(\frac{43}{11g_{re}} \right)^{1/3} \left(\frac{a_0 T_0}{k} \right) H_k e^{-N_k} e^{-N_{re}}. \quad (4.20)$$

En remplaçant l'équation (4.20) dans (4.10), on retrouve l'expression de N_{re} qui donne

$$N_{re} = \frac{4}{1 - 3\omega_{re}} \left[-\frac{1}{4} \ln \left(\frac{3^2 \cdot 5}{\pi^2 g_{re}} \right) - \frac{1}{3} \ln \left(\frac{11g_{re}}{43} \right) - \ln \left(\frac{k}{a_0 T_0} \right) - \ln \left(\frac{V_{end}^{1/4}}{H_k} \right) - N_k \right]. \quad (4.21)$$

En considérant $g_{re} \sim \mathcal{O}(100)$ et en utilisant l'échelle pivot $\frac{k}{a_0} = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ de Planck, nous trouvons l'expression final du nombre de e-folds de réchauffement

$$N_{re} = \frac{4}{1 - 3\omega_{re}} \left[61.6 - N_k - \ln \left(\frac{V_{end}^{1/4}}{H_k} \right) \right]. \quad (4.22)$$

H_k peut être donné par la définition du rapport tenseur-scalaire $r = A_T^2/A_S^2$. En considérant A_S^2 à l'échelle du pivot et en utilisant l'expression pour A_T^2 dans la limite de haute énergie (3.84), on obtient

$$H_k = \left(\frac{25\pi}{4} r A_S^2 M_{4p}^2 \right)^{1/2}. \quad (4.23)$$

En combinant les équations (4.11) et (4.10), on peut calculer la température du réchauffement suivant la relation

$$T_{re} = \left[\left(\frac{43}{11g_{re}} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{a_0 T_0}{k} H_k e^{-N_k} \left[\frac{3^2 \cdot 5 V_{end}}{\pi^2 g_{re}} \right]^{-\frac{1}{3(1+\omega_{re})}} \right]^{\frac{3(1+\omega_{re})}{3\omega_{re}-1}}, \quad (4.24)$$

où H_k et N_k le taux de Hubble et le nombre de e-folds, respectivement. V_{end} indique le potentiel scalaire à la fin de l'expansion inflationniste. Ainsi, il est implicite que N_{re} et T_{re} dépendent des observables A_s^2 , n_s et r que nous avons déjà discutés. Il est également remarquable que N_{re} et T_{re} dépendent de la masse de Planck à 5-dimensions, qui entre dans V_{end} et H_k .

4.2 Modèle de Starobinsky

Dans cette section, nous discutons certains aspects de réchauffement du potentiel Starobinsky en calculant deux quantités correspondantes N_{re} et T_{re} en fonction des paramètres

4.2. Modèle de Starobinsky

cosmologiques dans le cadre de la physique des branes. Alors, la première étape consiste à calculer les paramètres cosmologiques dépendant du modèle Starobinsky et l'étude de la dynamique de l'inflation.

4.2.1 Dynamique de l'inflation et perturbations cosmologiques

Dans cette partie, nous étudions le modèle d'inflation branaire décrit par un potentiel de champ scalaire réel qui pourrait être traité à partir de scénarios de supercordes de type IIB. Nous constatons qu'une grande classe de potentiel peut impliquer deux paramètres physiques indépendants. De manière concrète, la description générale des potentiels étudiés prend la forme suivante

$$V(\phi) = \lambda f\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right) \quad (4.25)$$

où λ indique la densité d'énergie du vide et ϕ_0 représente la variation du champ $\Delta\phi$ pendant le processus d'inflation. Plusieurs modèles dépendant de la fonction f ont été approchés, ce qui donne certains résultats dans différents contextes, notamment dans des géométries de branes et de supergravités.

Particulièrement, nous étudions le potentiel généralisé de Starobinsky qui se définit comme suit

$$V(\phi) = V_0 e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{4p}}} \left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{4p}}} - 1\right)^{\frac{2p}{2p-1}}, \quad (4.26)$$

où V_0 est un paramètre donné par l'expression suivante

$$V_0 = 6 \left(\frac{2p-1}{4p}\right) M_{4p}^2 M^2 \left(\frac{1}{2p}\right)^{\frac{1}{2p-1}}. \quad (4.27)$$

Par la suite, le paramètre de masse M sera fixé par les données numériques de COBE [137]. Ce potentiel scalaire sera étudié aux limites des hautes énergies où l'effet D3-brane devient important. Alors, à partir des équations (3.74) et (3.89), les paramètres de roulement lent s'expriment

$$\epsilon = \frac{2\alpha\chi^2(\chi-1)^{\frac{2-6p}{2p-1}}(1+\chi(p-1)-2p)^2}{3(1-2p)^2} \quad (4.28)$$

$$\eta = \frac{\alpha\chi^2(\chi-1)^{\frac{2-6p}{2p-1}}(\chi(13p-10p^2-4)+2(p-1)^2\chi^2+2(1-2p)^2)}{3(1-2p)^2} \quad (4.29)$$

$$\zeta^2 = \frac{\alpha^2\chi^4(\chi-1)^{\frac{4-12p}{2p-1}}(1+\chi(p-1)-2p)F}{9(1-2p)^4}, \quad (4.30)$$

4.2. Modèle de Starobinsky

où χ et F sont comme suit

$$\begin{aligned} F &= 4(p-1)^3 e^{\sqrt{6} \frac{\phi}{M_{4p}}} - 4(2p-1)^3 + \chi^2 (-40p^3 + 82p^2 - 55p + 12) + \chi (17p-12)(1-2p)^2 \\ \chi &= e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{4p}}}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Il est à noter que α est un paramètre sans dimension donné par

$$\alpha = \frac{T}{V_0 \pi}. \quad (4.32)$$

En considérant la limite des hautes énergies, et en utilisant l'équation (3.76), nous trouvons le nombre de e-folding qui est donné par

$$N_k = \frac{2\sqrt{\frac{3}{2}}(2p-1)}{\alpha M_{4p}} \int_{\phi_i}^{\phi_e} \frac{\chi^{-2} (\chi-1)^{\frac{4p-1}{2p-1}}}{1 + \chi(p-1) - 2p} d\phi.$$

En effet, le calcul permet d'obtenir l'expression

$$N_k = -\frac{3(2p-1)}{\alpha p(1-2p)^2(3p-1)} [I(\phi_e) - I(\phi_i)]. \quad (4.33)$$

La fonction $I(\phi)$, en termes de χ , peut être écrite de la manière suivante

$$I(\phi) = \chi^{-2} (\chi-1)^{\frac{2-6p}{1-2p}} [\omega_a + \omega_b + \omega_c], \quad (4.34)$$

où ω_a , ω_b et ω_c sont donnés par

$$\begin{aligned} \omega_a &= -p(3p-1)(1+2\chi-2p), \\ \omega_b &= \chi^2 p^2 (p+2) F_1 \left[1, \frac{2-6p}{1-2p}, \frac{3-8p}{1-2p}, 1-\chi \right], \\ \omega_c &= \chi^2 (p-1)^3 F_1 \left[1, \frac{2-6p}{1-2p}, \frac{3-8p}{1-2p}, \frac{(\chi-1)(p-1)}{p} \right], \end{aligned}$$

où F_1 est une fonction hypergéométrique.

Maintenant, nous trouvons les quantités cosmologiques. En utilisant l'équation (3.83), nous obtenons l'expression qui décrit le spectre de puissance scalaire

$$A_s^2 = \frac{8\chi^{-8}(1-2p)^2(\chi-1)^{\frac{2-12p}{1-2p}}}{25\pi^2\alpha^3 M_{4p}^4 (1+\chi(p-1)-2p)^2} V_0. \quad (4.35)$$

4.2. Modèle de Starobinsky

En exploitant l'équation (3.86), nous trouvons que l'indice spectral scalaire n_s vérifie la relation

$$n_s - 1 = -\frac{2\alpha\chi^2(\chi-1)^{\frac{2-6p}{2p-1}}(4\chi^2(p-1)^2 + \chi(-14p^2 + 23p - 8) + 4(1-2p)^2)}{3(1-2p)^2}. \quad (4.36)$$

À partir de l'équation (3.93), on peut obtenir le rapport tenseur-scalaire r . En effet, il est exprimé par l'expression suivante

$$r = \frac{2\pi\alpha^2\chi^4(\chi-1)^{\frac{2-8p}{2p-1}}(\chi(p-1) - 2p + 1)^2}{3(1-2p)^2}. \quad (4.37)$$

Pour examiner la validité du potentiel de Starobinsky en physique des branes que nous avons proposé, certaines quantités observables sont nécessaires. En utilisant l'équation (3.87), la variation de l'indice spectral est donnée par

$$\frac{dn_s}{d\ln k} = -\frac{2\alpha^2\chi^4(\chi-1)^{\frac{4-12p}{2p-1}}(\chi(p-1) - 2p + 1)E}{9(1-2p)^4}, \quad (4.38)$$

où on a utilisé

$$E = \chi^2(-104p^3 + 274p^2 - 231p + 60) + \chi(49p - 60)(1-2p)^2 + 20(p-1)^3 e^{\sqrt{6}\frac{\phi}{M_{4p}}} - 20(2p-1)^3.$$

Particulièrement, nous prenons $p = 1$. De ce cas, le potentiel de l'inflation de Starobinsky se réduit à

$$V(\phi) = V_0(1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{4p}}})^2, \quad (4.39)$$

où l'équation (4.27) donne

$$V_0 = \frac{3}{4}M^2 M_{4p}^2. \quad (4.40)$$

En exploitant les équations (4.56) et (4.29), les paramètres du roulement lent deviennent

$$\epsilon = \frac{2\alpha\chi^2}{3(\chi-1)^4}, \quad (4.41)$$

$$\eta = \frac{-\alpha\chi^2(\chi-2)}{3(\chi-1)^4}, \quad (4.42)$$

$$\zeta^2 = \frac{\alpha^2\chi^4(\chi-4)}{9(\chi-1)^7}. \quad (4.43)$$

4.2. Modèle de Starobinsky

La contrainte associée à la fin de l'inflation $\epsilon(\phi_e) = 1$ est nécessaire pour calculer d'autres quantités appropriées correspondant à la fin de l'inflation: le nombre de e-folds et le spectre de perturbation. Ces quantités doivent dépendre de la valeur du champ scalaire à la fin de l'inflation. En considérant l'équation (4.41), nous obtenons

$$\phi_e = \sqrt{\frac{3}{2}} M_{4p} \log \left[1 + \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha + 2\sqrt{6}\alpha}}{\sqrt{6}} \right]. \quad (4.44)$$

Pour $p = 1$, l'équation (4.33) se réduit à

$$N_k = -\frac{3}{\alpha} [J(\phi_e) - J(\phi_i)], \quad (4.45)$$

où la fonction J , en terme χ , est donnée par

$$J(\chi) = \frac{1}{2}\chi^{-2} - 3\chi^{-1} + \chi - 3\ln \chi. \quad (4.46)$$

Pour obtenir les valeurs de ϕ_i associées au nombre de e-folds N_k , nous devons résoudre numériquement l'équation (4.45) pour un intervalle possible de α . Dans la figure (4.1), les valeurs du champ scalaire ϕ_i sont données en fonction du paramètre α pour différentes valeurs du nombre de e-folds. De nombreux comportements sont observés. Cette figure montre que les valeurs du champ scalaire ϕ_i augmentent avec α et N_k . En fixant V_0 , les valeurs de ϕ_i sont croissantes en fonction de la tension T de la D3-brane.

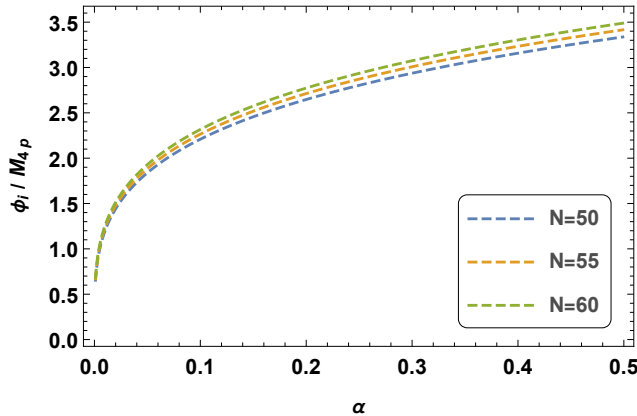


FIGURE 4.1 – Champ scalaire ϕ_i en fonction de α ($M_{4p} = 1$).

Il est à noter que les valeurs des champs sont utilisées pour étudier le modèle inflationnaire branaire proposé. Pour déterminer sa validité, il faut examiner les deux paramètres

4.2. Modèle de Starobinsky

observables du spectre de puissance primordial, qui sont le rapport entre les perturbations tensorielles et scalaires. En effet, le spectre de puissance scalaire est donné par

$$A_s^2 = \frac{8 \chi^{-8} (\chi - 1)^{10}}{25 \pi^2 \alpha^3 M_{4p}^4} V_0. \quad (4.47)$$

En utilisant l'équation (4.36), nous obtenons l'indice spectral n_s vérifiant la relation

$$n_s - 1 = -\frac{2 \alpha \chi^2 (\chi + 4)}{3 (\chi - 1)^4}. \quad (4.48)$$

À l'aide de l'équation (4.37), le rapport tenseur-scalaire r est obtenu comme suit

$$r = \frac{2 \pi \alpha^2 \chi^4}{3 (\chi - 1)^6}. \quad (4.49)$$

Les comportements de l'indice spectral scalaire et du rapport tenseur-scalaire peuvent être analysés en fixant N_k . En considérant différentes valeurs $N_k = 50$, $N_k = 55$ et $N_k = 60$, les comportements de n_s et r sont présentés dans la figure (4.2), où α varie dans l'intervalle $0.001 \leq \alpha \leq 0.5$.

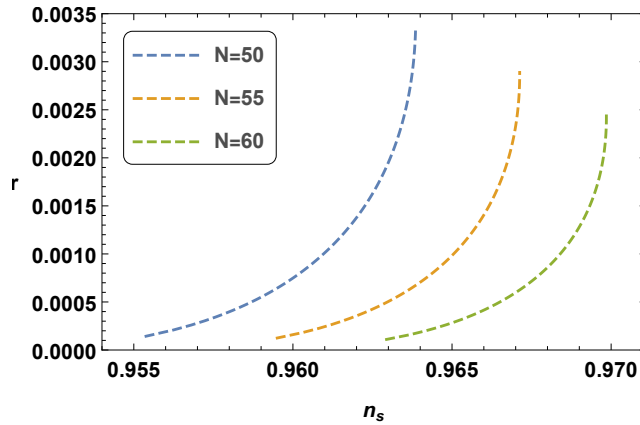


FIGURE 4.2 – Indice spectral scalaire n_s en fonction du rapport tenseur-scalaire r pour $0,001 \leq \alpha \leq 0,5$.

Les courbes dans le plan $(r - n_s)$ montrent que r augmente dans l'intervalle du paramètre α . De plus, r et n_s augmentent lorsque N_k diminue. Il apparaît que le nombre de e-folds électroniques peut modifier la courbe de la trajectoire dans le plan $(r - n_s)$ pour α . Des résultats similaires ont été observés pour l'inflation de Starobinsky dans la théorie $f(R, T)$

4.2. Modèle de Starobinsky

[138]. En prenant $p = 1$, la figure (4.2) montre que la bande de n_s est différente du modèle d'inflation de Starobinsky en relativité générale [14]. De plus, la variation du paramètre α peut changer r et n_s . Ainsi, le modèle branaire de l'inflation de Starobinsky pourrait fournir des prédictions intéressantes pour n_s et r qui correspondent aux données de Planck 2018 [12]. On note que les résultats dans le plan $(r - n_s)$ pour un telle intervalle de α correspondent aux résultats des données BICEP/Keck [14]. À partir de l'équation (4.38), nous pouvons obtenir la variation de l'indice spectral scalaire. Il est exprimé comme suit

$$\frac{dn_s}{d \ln k} = -\frac{2\alpha^2 \chi^4 (\chi^2 + 11\chi + 20)}{9(\chi - 1)^8}. \quad (4.50)$$

La même contrainte sur α est considérée pour obtenir les résultats correspondant aux données de Planck. La figure (4.3) représente certains aspects de l'évolution de l'indice spectral scalaire en fonction de r . En considérant différentes valeurs de r , les résultats correspondants

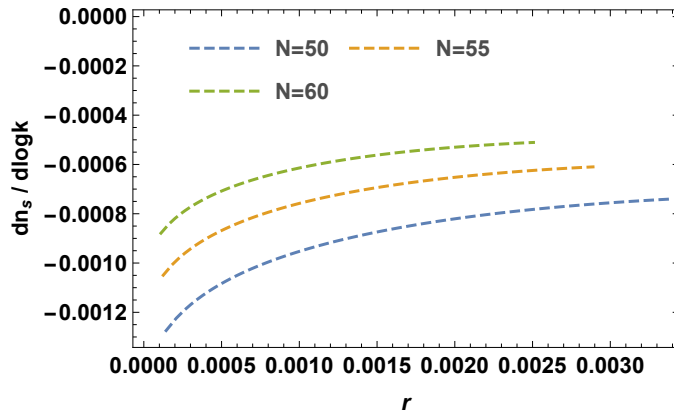


FIGURE 4.3 – Variation des indices spectraux $\frac{dn_s}{d \ln k}$ en fonction de r .

apparaissent dans une telle figure. On remarque que les valeurs de la variation sont non nulles pour r dans un intervalle de $5 \cdot 10^{-5} \leq r \leq 3 \cdot 10^{-3}$. Le modèle cosmologique branaire de Starobinsky est bien compatible avec le modèle cosmologique standard [139, 140]. Il apparaît que les valeurs de la variation l'indice spectral scalaire sont proches des données observationnelles. Pour déterminer le comportement de l'amplitude V_0 du potentiel, nous examinons l'effet de la D3-brane en présence du champ scalaire. En effet, l'expression associée doit être calculée. En utilisant les équations (4.47) et (4.32), nous pouvons obtenir l'expression de V_0

4.2. Modèle de Starobinsky

qui est donné par

$$V_0 = \left[\frac{25 A_S^2 T^3 \chi^8}{8 \pi (\chi - 1)^{10}} \right]^{\frac{1}{4}} M_{4p}. \quad (4.51)$$

En exploitant la relation entre la masse de Planck à quatre dimensions à cinq dimensions, nous arrivons à

$$V_0 = \sqrt{\frac{3}{4 \pi}} \left[\frac{25 A_S^2 T \chi^8}{8 \pi (\chi - 1)^{10}} \right]^{\frac{1}{4}} M_{5p}^3. \quad (4.52)$$

Afin de trouver une limite supérieure de la masse de Planck à cinq dimensions, nous considérons la dynamique inflationnaire dans le régime de hautes énergies $V \gg T$. Pendant l'inflation, le potentiel de Starobinsky doit satisfaire la contrainte $V \simeq V_0$. En utilisant l'équation (3.54) et la dernière condition pour le régime de haute énergie, nous obtenons la contrainte suivante sur l'amplitude du potentiel

$$V_0 \gg \frac{3 M_{5p}^6}{4 \pi M_{4p}^2}. \quad (4.53)$$

En considérant les équations (4.47) et (4.53), la limite supérieure pour la masse de Planck à cinq dimensions est donnée par

$$M_{5p} \ll \left(\frac{100 A_S^2 \alpha^3 \chi^8}{24 \pi (\chi - 1)^{10}} \right)^{\frac{1}{6}} M_{4p}. \quad (4.54)$$

En utilisant l'équation (4.54), nous pouvons obtenir la masse de Planck à cinq dimensions autour de $M_{5p} \ll 10^{14}$ TeV. Il est possible de prendre certaines valeurs de la masse de Planck à cinq dimensions jusqu'à une telle condition. Dans le tableau (4.1), nous fournissons la contrainte sur V_0 en prenant deux valeurs de la masse de Planck à cinq dimensions $M_{5p} = 10^5$ TeV et $M_{5p} = 10^5$ TeV correspondant aux tensions de brane $T = 1.60 \times 10^{-3}$ TeV⁴ et $T = 1.60 \times 10^{39}$ TeV⁴, respectivement.

Dans le tableau (4.1), nous remarquons que l'amplitude du modèle Starobinsky V_0 prend des valeurs subplanckiennes. Elle augmente en même temps que la masse de Planck à cinq dimensions. Une étude précise permet de constater que des comportements similaires ont été obtenus en considérant différents modèles de potentiel et en prenant les valeurs de la masse de Planck à cinq dimensions $M_{5p} = 10^5$ TeV et $M_{5p} = 10^{12}$ TeV [141, 142].

4.2. Modèle de Starobinsky

	$M_{5p} = 10^5 \text{ TeV}$ et $T = 1.60 \times 10^{-3} \text{ TeV}^4$	$M_{5p} = 10^{12} \text{ TeV}$ et $T = 1.60 \times 10^{39} \text{ TeV}^4$
N_k	Constraint sur V_0 [TeV]	Constraint sur V_0 [TeV]
50	$0.684 \times 10^3 \lesssim V_0 \lesssim 1.479 \times 10^3$	$0.119 \times 10^{10} \lesssim V_0 \lesssim 5.13 \times 10^{10}$
55	$0.676 \times 10^3 \lesssim V_0 \lesssim 1.460 \times 10^3$	$0.109 \times 10^{10} \lesssim V_0 \lesssim 5.07 \times 10^{10}$
60	$0.670 \times 10^3 \lesssim V_0 \lesssim 1.442 \times 10^3$	$0.108 \times 10^{10} \lesssim V_0 \lesssim 5.02 \times 10^{10}$

TABLE 4.1 – Les contraintes sur l’amplitude du modèle de Starobinsky pour différentes valeurs de N_k en prenant deux valeurs de la masse de Planck à cinq dimensions, où le paramètre sans dimension α est dans la gamme $0.001 \leq \alpha \leq 0.5$.

4.2.2 Prédictions de Réchauffement

Nous rappelons que le réchauffement est un scénario thermique qui dépend de plusieurs quantités cosmologiques, qui seront étudiées à l’aide des méthodes numériques. En effet, nous étudions les prédictions de réchauffement du potentiel de Starobinsky pour $p = 1$. En particulier, nous examinons la variation du nombre de e-folds de réchauffement N_{re} et de la température de réchauffement T_{re} en fonction de l’indice spectral scalaire n_s . Pour examiner l’effet associé, nous considérons deux valeurs de la masse de Planck à cinq dimensions $M_{5p} = 10^5 \text{ TeV}$ et $M_{5p} = 10^{12} \text{ TeV}$ en prenant un intervalle spécifique du paramètre α . Pour des raisons de simplicité, cependant, nous traitons seulement deux valeurs qui sont $\alpha = 0.001$ et $\alpha = 0.05$ associées au nombre de e-folds $N_k = 60$. Dans la figure (4.4), nous illustrons le nombre de e-folds et la température maximale de réchauffement pour la limite inférieure de la masse de Planck à cinq dimensions $M_{5p} = 10^5 \text{ TeV}$ en variant le paramètre d’équation d’état ω_{re} , en prenant les valeurs $\omega_{re} = -1/3, 0, 2/3$ et 1.

Le point d’intersection des courbes montre que le point de réchauffement instantané est associé à une limite de zéro de N_{re} . Cependant, il a été observé que ce point d’intersection correspond à $n_s = 0.962$ pour $\alpha = 0.001$ et $n_s = 0.968$ pour $\alpha = 0.05$. De plus, la région verticale orange concerne les limites de Planck-2018 qui sont $n_s = 0,965 \pm 0,004.28$. En effet, nous notons que la température maximale de réchauffement est d’environ $T_{re} \sim 10^3$ pour $M_{5p} = 10^5 \text{ TeV}$. La région rose représente les températures étant inférieures à l’échelle électrofaible $T < 100$. Pour $0 < \omega_{re} < 1$, il a été observé une compatibilité avec les bornes de Planck-2018 sur n_s en considérant $\alpha = 0.001$. Par contre, pour $\alpha = 0.05$, seuls les modèles correspondant à $\omega_{re} = -1/3$ et $\omega_{re} = 0$ sont compatible avec les bornes de Planck-2018. Ainsi, la valeur $\alpha = 0.001$ pourrait fournir un bon résultat par rapport à $\alpha = 0.05$.

Dans la figure (4.5), nous représentons les comportements cosmologiques de N_{re} et T_{re} en

4.2. Modèle de Starobinsky

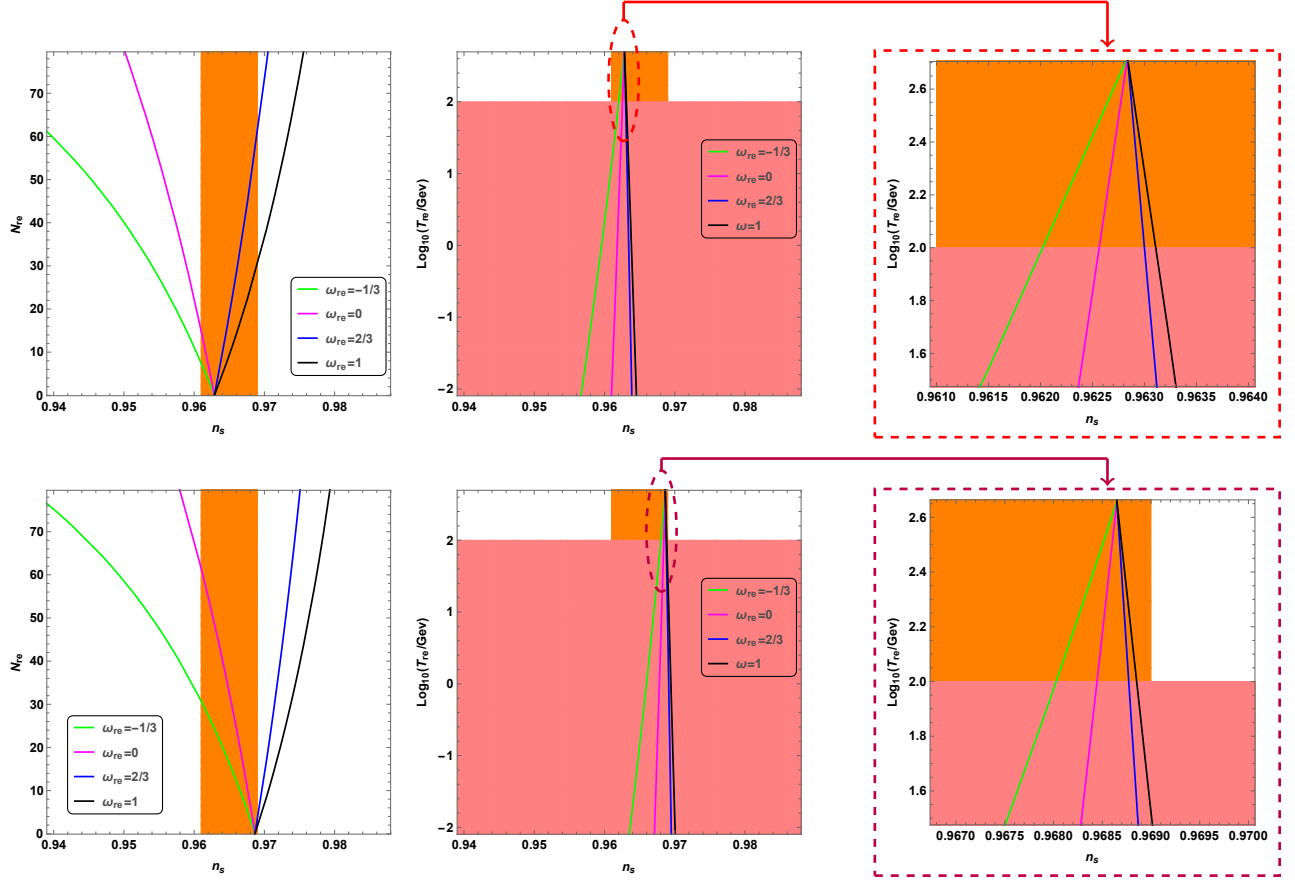


FIGURE 4.4 – Variation de N_{re} et T_{re} en fonction de n_s pour le modèle Starobinsky $p = 1$. Les graphiques en haut correspondent à $\alpha = 0.01$ et en bas à $\alpha = 0.05$, en utilisant $M_{5p} = 10^5 \text{ TeV}$ et $T = 1.60 \times 10^{-3} \text{ TeV}^4$.

fonction de l'indice spectral scalaire n_s en considérant les mêmes valeurs de α et de $M_{5p} = 10^{12}$ pour $\omega_{re} = -1/3, 0, 2/3$ et 1.

Il a été remarqué que la température maximale de réchauffement se situe autour de $T_{re} \sim 10^{11} \text{ GeV}$ pour la masse de Planck à cinq dimensions $M_{5p} = 10^{12}$. Dans les figures (4.4) et (4.5), il ressort que les valeurs de n_s associées au point d'intersection de toutes les courbes lors d'un réchauffement instantané augmentent avec une augmentation du paramètre α . De même, la température de réchauffement augmente avec la masse de Planck à cinq dimensions. Des comportements similaires sont observés dans les potentiels d'inflation naturelle, Hilitop, de type Higgs et super symétrique (SUSY) exponentiel utilisés dans le modèle branaire RS-II [141].

4.3. Modèle de inflation logarithmique

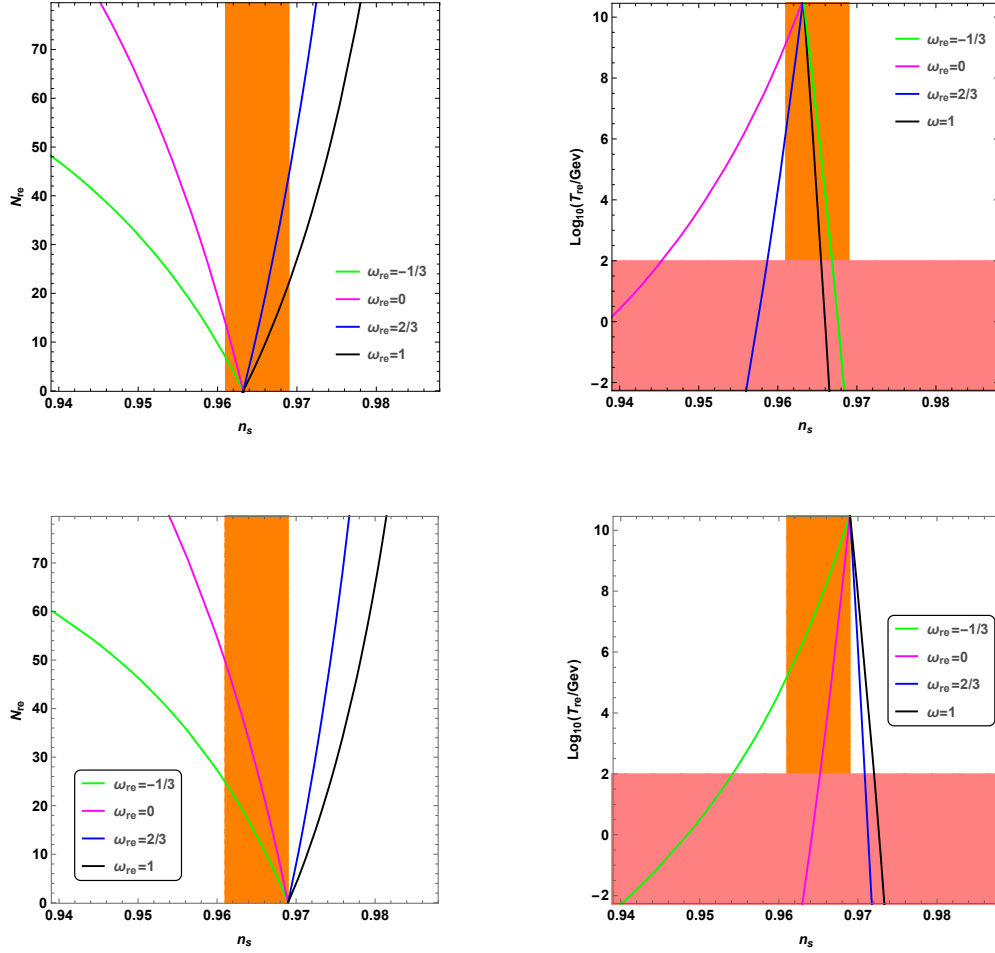


FIGURE 4.5 – Variation de N_{re} et T_{re} en fonction de n_s pour le modèle Starobinsky $p = 1$. Les graphiques en haut correspondent à $\alpha = 0.01$ et en bas à $\alpha = 0.05$, en utilisant $M_{5p} = 10^{12}$ TeV et $T = 1.60 \times 10^{39}$ TeV⁴.

4.3 Modèle de inflation logarithmique

4.3.1 Dynamique de l'inflation et perturbations cosmologiques

Dans ce cette partie, nous étudions le modèle d'inflation logarithmique décrit par le potentiel suivant

$$V(\phi) = M^4 \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^2 \right], \quad (4.55)$$

où le paramètre de masse M , identifié avec $\lambda^{\frac{1}{4}}$, est fixé par les données numériques de COBE. De la même façon, les paramètres cosmologiques, dans l'approximation du roulement lent,

4.3. Modèle de inflation logarithmique

dépend de la corde. En effet, les paramètres du roulement lent sont trouvés sous la forme suivante

$$\epsilon = \frac{M_{4p}^2 \alpha}{\phi^2 \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^2 \right]^3}, \quad (4.56)$$

$$\eta = -\frac{M_{4p}^2 \alpha}{2 \phi^2 \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^2 \right]^2}, \quad (4.57)$$

$$\zeta^2 = \frac{M_{4p}^4 \alpha^2}{2 \phi^4 \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^2 \right]^4}. \quad (4.58)$$

où α est un paramètre sans dimension, défini par la formule suivante

$$\alpha = \frac{T}{M^4 \pi}. \quad (4.59)$$

De la même manière que le modèle précédent, la condition correspondant à la fin de l'inflation $\epsilon(\phi_e) = 1$ est utilisée pour calculer les autres paramètres cosmologiques. Ces quantités sont liées à la valeur du champ scalaire à la fin de l'inflation. On constate que l'équation (4.56) ne pas résolue directement. Nous pouvons cependant approcher numériquement une telle équation en considérant ϕ_0 qui varie dans l'intervalle de $2 M_{4p} \leq \phi_0 \leq 6 M_{4p}$. En effet, ϕ satisfaisant $\epsilon(\phi) = 1$ sera noté par ϕ_e . En insérant cette valeur dans l'expression du potentiel et en utilisant les calculs intégraux, nous obtenons le nombre de e-folds

$$N_k = -\frac{2}{\alpha M_{4p}^2} \int_{\phi_i}^{\phi_e} \phi \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^2 \right]^2 d\phi.$$

En effet, le calcul fournit l'expression suivante

$$N_k = -\frac{2}{\alpha M_{4p}^2} [I(\phi_e) - I(\phi_i)], \quad (4.60)$$

où on a utilisé

$$I(\phi) = \phi^2 - \phi^2 \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \phi^2 \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^2 \right]^2. \quad (4.61)$$

4.3. Modèle de inflation logarithmique

Nous exploitons les méthodes numériques pour trouver les valeurs de ϕ_i en fixant N_k et α pour l'intervalle de ϕ_0 . Le spectre de puissance scalaire est calculé comme suit

$$A_s^2 = \frac{16 M^4}{75 \pi^2 \alpha^3 M_{4p}^6} \phi^2 \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^2 \right]^6. \quad (4.62)$$

En utilisant l'équation (3.86), nous obtenons l'indice spectral n_s à travers la relation

$$n_s - 1 = - \frac{M_{4p}^2 \alpha \left(6 + \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^2 \right] \right)}{\phi^2 \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^2 \right]^3}. \quad (4.63)$$

À partir de l'équation (3.93), nous trouvons le rapport tenseur-scalaire r qui peut être écrit comme suit

$$r = \frac{M_{4p}^2 \pi \alpha^2}{\phi^2 \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^2 \right]^4}. \quad (4.64)$$

Les résultats associés peuvent être discutés en fixant N_k . En prenant le nombre de e-folds $N_k = 60$, les comportements de l'indice spectral et du rapport tenseur-scalaire pour différentes valeurs de α sont représentés sur la figure (4.6).

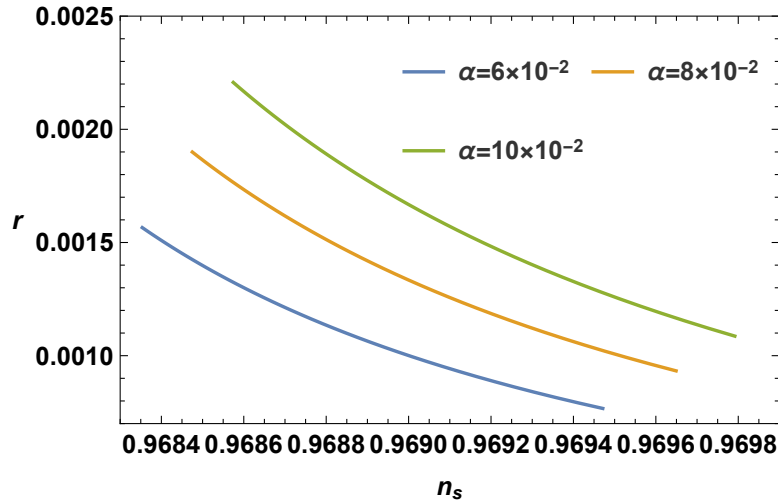


FIGURE 4.6 – Indice spectral n_s en fonction du rapport tenseur-scalaire r pour $N_k = 60$ et $2 \leq \phi_0 \leq 6$ ($M_{4p} = 1$).

On observe que r augmente avec l'augmentation de α . Les valeurs de n_s et r sont corres-

4.3. Modèle de inflation logarithmique

pondent aux données de Planck 2018. Ceci a été obtenu en considérant l'intervalle de champ scalaire ci-dessus.

Pour examiner la validité du potentiel des cordes, nous devons traiter d'autres quantités cosmologiques. En particulier, la variation de l'indice spectral scalaire peut être facilement calculée à partir de l'équation (3.87). En effet, nous avons

$$\frac{dn_s}{d \ln k} = -\frac{M_{4p}^4 \alpha^2}{\phi^4 \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^2 \right]^6} \left[24 + 8 \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^2 \right] + \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^2 \right]^2 \right]. \quad (4.65)$$

La même contrainte sur ϕ_0 est considérée pour obtenir les résultats associés à Planck 2018. Dans la figure (4.7), nous représentons certains aspects de la variation de l'indice spectral scalaire en fonction de ϕ_0 . En prenant certaines valeurs de α , il résulte que les valeurs de la

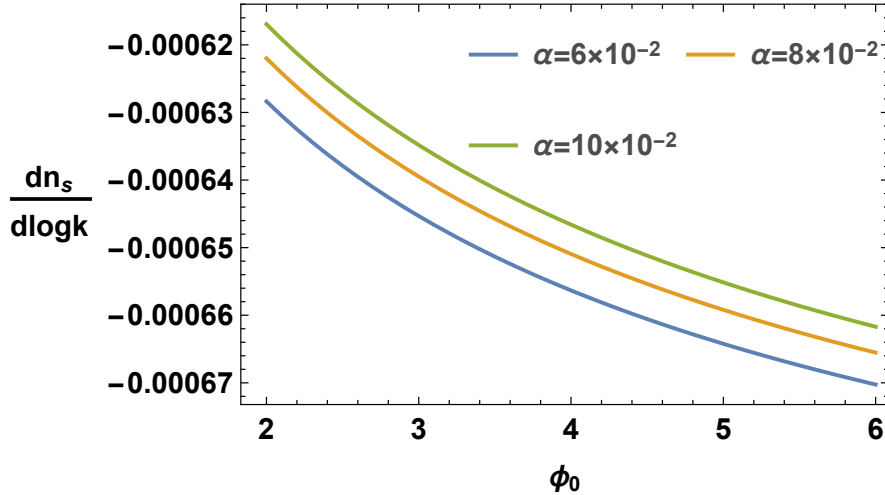


FIGURE 4.7 – Variation des indices spectraux $\frac{dn_s}{d \ln k}$ en fonction de ϕ_0 pour $N_k = 60$ et $2 \leq \phi_0 \leq 6$ ($M_{4p} = 1$).

variation de l'indice spectral scalaire sont proches des données observationnelles.

Pour étudier le paramètre de masse, nous examinons l'effet de la D3-brane en présence d'un champ scalaire. En utilisant (4.62), nous obtenons l'expression de M comme suit

$$M = \left[\frac{75 \alpha^3 M_{4p}^6 \pi^2 A_s^2}{16 \phi^2 \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^2 \right]^6} \right]^{\frac{1}{4}}. \quad (4.66)$$

En appliquant la normalisation de COBE, nous pouvons étudier les comportements d'échelle

4.3. Modèle de inflation logarithmique

M en fonction de ϕ_0 . En prenant $A_S^2 = 2.5 \times 10^{-9}$, la figure (4.8) représente ces aspects cosmologiques pour différentes valeurs du paramètre de la corde α , en faisant varier ϕ_0 dans l'intervalle $2M_{4p} \leq \phi_0 \leq 6M_{4p}$. Pour illustrer ce comportement, nous considérons $M_{4p} = 1$. Les mêmes aspects apparaissent dans la courbe précédente de la figure (4.8). Il a

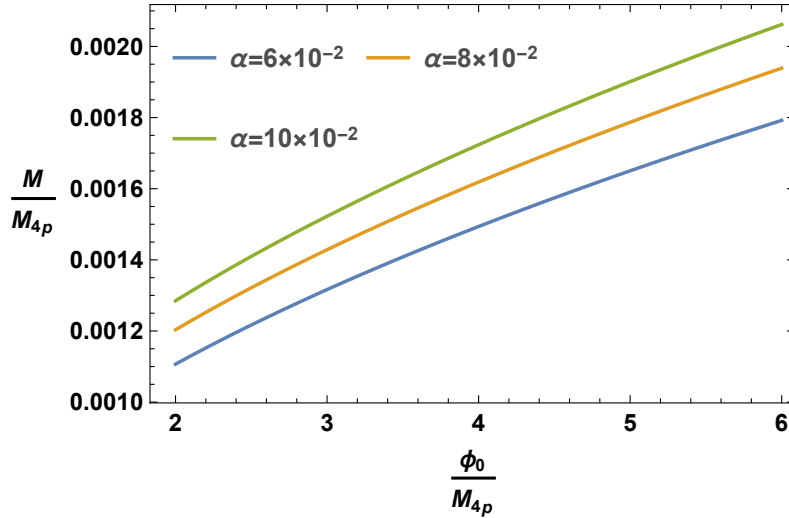


FIGURE 4.8 – M en fonction de ϕ_0 pour $N_k = 60$ et $2 \leq \phi_0 \leq 6$.

été remarqué sur la figure (4.8) qu'une telle intervalle fournit un résultat qui correspond à l'ordre de l'échelle GUT ($\sim 10^{16}$ GeV) [36, 37].

4.3.2 Prédictions de Réchauffement

De la même manière, nous pouvons donner des prédictions de réchauffement pour le modèle d'inflation logarithmique. Nous utilisons la masse de Planck à 4-dimensions $M_{4p} = 1.22 \times 10^{19} \text{ GeV}$, la valeur de $\alpha = 6 \times 10^{-2}$ associée à $N_k = 60$ et $\phi_0 = 2.44 \times 10^{19}$ GeV.

Dans la figure (4.9), nous représentons N_{re} et T_{re} , en fonction de l'indice spectral scalaire n_s pour les valeurs suivantes de $\omega_{re} = -1/3, 0, 2/3$ et 1. Pour ce potentiel, il a été remarqué que le point d'intersection correspond à $n_s = 0.966$. De plus, la région verticale rose foncée est associée aux limites de Planck-2018, pour $n_s = 0.965 \pm 0.004$.

La région orange foncée indique les températures qui sont inférieures à l'échelle électro-faible $T < 100$. Il a été observé que pour $0 < \omega_{re} < 1$ les résultats sont compatibles avec les limites de Planck-2018 sur n_s prenant des valeurs dans l'intervalle $0.951 < n_s < 0.974$. Cependant, il a été remarqué que le cas $\omega_{re} = 2/3$ fournit des résultats proches des limites

4.4. Modèle de Tachyonique à cordes ouvertes

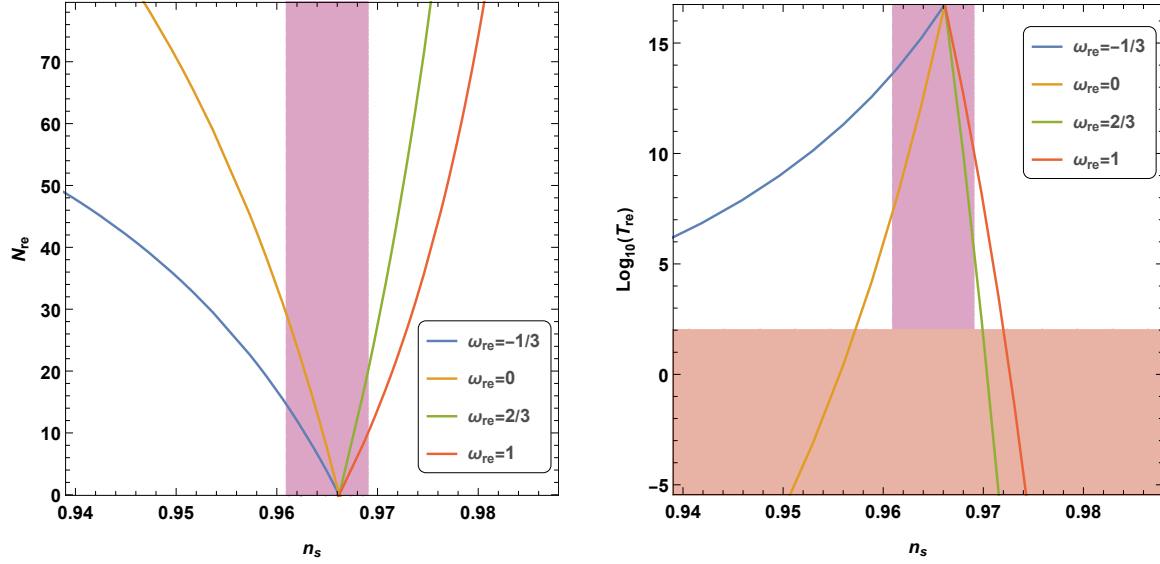


FIGURE 4.9 – Diagrammes des N_{re} et T_{re} en fonction de n_s pour le modèle logarithmique.

de Planck n_s . Pour ce potentiel logarithmique, la température maximale de réchauffement est d'environ 10^{16} GeV, ce qui pourrait être compatible avec l'échelle GUT.

4.4 Modèle de Tachyonique à cordes ouvertes

4.4.1 Dynamique de l'inflation et perturbations cosmologiques

Le troisième modèle est le potentiel de tachyonique à cordes ouvertes qui repose sur l'expression suivant

$$V(\phi) = -M^4 \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^2 \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^2 \right], \quad (4.67)$$

où M , identifié comme précédemment avec $\lambda^{\frac{1}{4}}$, sera fixé par les données numériques de COBE. Dans ce cas, nous considérons la contrainte $\frac{\phi_0}{M_{4p}} < 10$ [16], correspond à la limite de haute énergie où l'effet D3-brane est examiné. De cette manière, les paramètres cosmologiques dans les approximations de roulement lent sont acceptables. Les paramètres du roulement

4.4. Modèle de Tachyonique à cordes ouvertes

lent sont donnés par

$$\epsilon = -\frac{M_{4p}^2 \alpha \phi_0^2 \left(1 + \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^2\right]\right)^2}{\phi^4 \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^2\right]^3}, \quad (4.68)$$

$$\eta = -\frac{M_{4p}^2 \alpha \phi_0^2 \left(3 + \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^2\right]\right)}{2 \phi^4 \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^2\right]^2}, \quad (4.69)$$

$$\zeta^2 = \frac{M_{4p}^4 \alpha^2 \phi_0^2 \left(1 + \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^2\right]\right)}{2 \phi^8 \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^2\right]^4}. \quad (4.70)$$

Comme dans le modèle précédent, certaines méthodes numériques seront exploitées. En effet, la contrainte $\epsilon(\phi_e) = 1$ sera traitée en considérant l'intervalle de champ scalaire $6 M_{4p} \leq \phi_0 \leq 9 M_{4p}$. En utilisant le calcul intégral, on trouve que le nombre de e-folds est donné par

$$N_k = \frac{2}{\alpha M_{4p}^2 \phi_0^2} \int_{\phi_i}^{\phi_e} \frac{\phi^3 \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^2\right]^2}{\left(1 + \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^2\right]\right)} d\phi, \quad (4.71)$$

Le calcul donne comme résultat par l'expression suivante

$$N_k = \frac{2}{\alpha M_{4p}^2 \phi_0^2} [J(\phi_e) - J(\phi_i)], \quad (4.72)$$

où $J(\phi)$ est une fonction du champ scalaire. Pour obtenir une expression compacte, nous devons introduire la fonction gamma incomplète

$$\Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt, \quad x > 0, \quad (4.73)$$

où x est une variable positive et a est un paramètre réel. En particulier, la fonction $J(\phi)$ peut être écrite comme suit

$$J(\phi) = \frac{-3\phi^4}{8} - \frac{\phi_0^4 \Gamma\left(0, -2 \left(1 + \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^2\right]\right)\right)}{2e^2} + \frac{1}{4} \phi^4 \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^2\right]. \quad (4.74)$$

4.4. Modèle de Tachyonique à cordes ouvertes

Dans la suite, nous allons déterminer les perturbations cosmologiques associées. Premièrement, nous obtenons le spectre de puissance scalaire

$$A_s^2 = \frac{16 M^4 \phi^{10} \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^2 \right]^6}{75 \pi^2 \alpha^3 M_{4p}^6 \phi_0^8 \left(1 + \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^2 \right] \right)^2}. \quad (4.75)$$

En utilisant l'équation (3.86), nous obtenons l'indice spectral n_s

$$n_s - 1 = \frac{M_{4p}^2 \alpha \phi_0^2}{\phi^4 \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^2 \right]^3} \left[6 + 9 \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^2 \right] + 5 \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^2 \right]^2 \right]. \quad (4.76)$$

D'après l'équation (3.93), le rapport tenseur-scalaire r est

$$r = \frac{M_{4p}^2 \alpha^2 \pi \phi_0^4 \left(1 + \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^2 \right] \right)^2}{\phi^6 \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^2 \right]^4}. \quad (4.77)$$

Les comportements correspondants peuvent être étudiés en fixant N_k . En prenant le nombre de e-folds $N_k = 60$, le comportement de l'indice spectral et du rapport tenseur-scalaire pour différentes valeurs de α est décrit dans la figure (4.10). On observe que r augmente avec

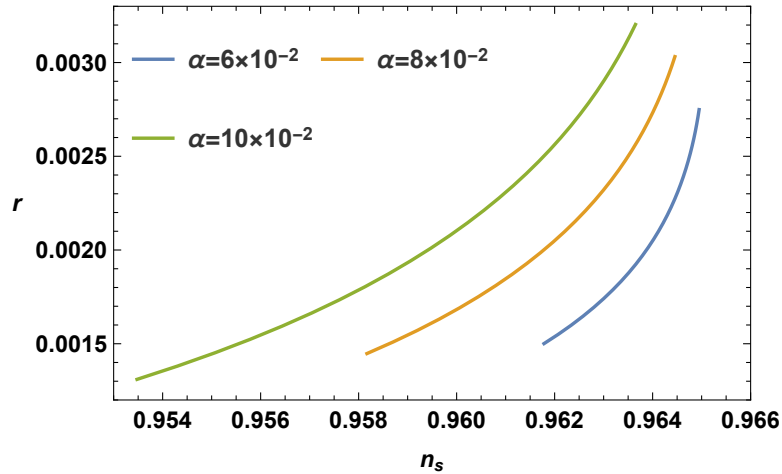


FIGURE 4.10 – Indice spectral n_s en fonction du rapport tenseur-scalaire r pour $N_k = 60$ et $6 \leq \phi_0 \leq 9$ ($M_{4p} = 1$).

l'augmentation de α . Les valeurs obtenues de n_s et r correspondent exactement à celles de

4.4. Modèle de Tachyonique à cordes ouvertes

Planck 2018 pour le nouveau intervalle considéré en gardant les mêmes valeurs de α de modèle de l'inflation logarithmique. Pour vérifier la validité du potentiel, nous devons considérer d'autres quantités comme nous l'avons fait pour le modèle précédent. La variation de l'indice spectral scalaire peut être calculé à partir de l'équation (3.87), sous la forme suivante

$$\frac{dn_s}{d \ln k} = -\frac{M_{4p}^4 \alpha^2 \phi_0^4 \left(1 + \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^2\right]\right)}{\phi^8 \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^2\right]^6} D(\phi), \quad (4.78)$$

où nous avons utilisé

$$D(\phi) = 24 + 48 \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^2\right] + 41 \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^2\right]^2 + 16 \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^2\right]^3. \quad (4.79)$$

Dans la figure (4.11), nous représentons la variation de l'indice spectral scalaire.

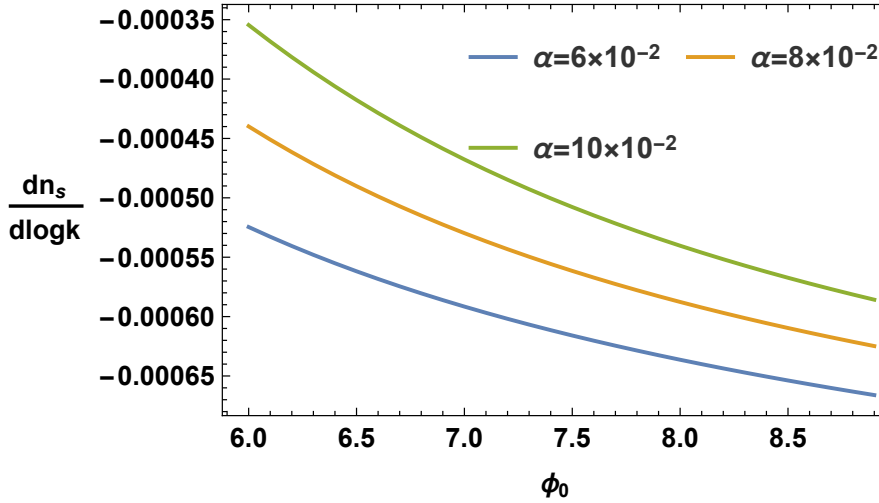


FIGURE 4.11 – Variation des indices spectraux $\frac{dn_s}{d \ln k}$ en fonction de ϕ_0 pour $N_k = 60$ et $6 \leq \phi_0 \leq 9$ ($M_{4p} = 1$).

Nous remarquons que les résultats associés à les variations des indices spectral ont été fournis dans l'intervalle de ϕ_0 sont compatible les données de Planck 2018. Comme précédent, nous examinons le paramètre de masse dans le troisième modèle d'inflation en présence des D3-

4.4. Modèle de Tachyonique à cordes ouvertes

branes. En particulier, les calculs donnent l'expression suivante

$$M = \left[\frac{75 \alpha^3 M_{4p}^6 \pi^2 \phi_0^8 \left(1 + \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^2 \right] \right)^2 A_s^2}{16 \phi^{10} \ln \left[\left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^2 \right]^6} \right]^{\frac{1}{4}}. \quad (4.80)$$

En appliquant la normalisation de COBE, nous inspectons de tels comportements, en considérant $A_s^2 = 2.5 \times 10^{-9}$. La figure (4.12) illustre ces aspects cosmologiques pour différentes valeurs du paramètre α associé à l'intervalle $6 M_{4p} \leq \phi_0 \leq 9 M_{4p}$ en prenant $M_{4p} = 1$.

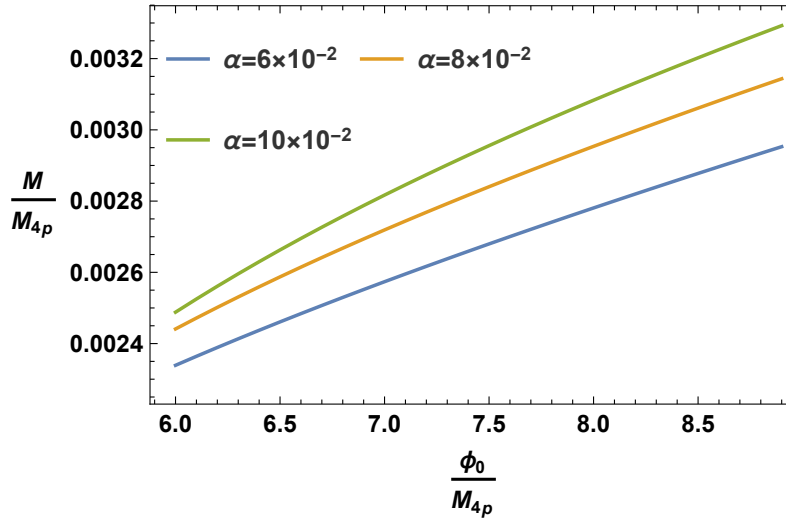


FIGURE 4.12 – M en fonction de ϕ_0 pour $N_k = 60$ et $6 \leq \phi_0 \leq 9$.

En examinant la figure (4.12), nous remarquons qu'un tel intervalle fournit un résultat correspondant à l'ordre de l'échelle du GUT ($\sim 10^{16}$ GeV) [36, 37].

4.4.2 Prédictions de Réchauffement

Maintenant, nous étudions la variation du nombre de e-folds N_{re} et de la température T_{re} de réchauffement en fonction de l'indice spectral scalaire n_s pour le modèle tachyonique des cordes ouvertes. Comme précédent, nous considérons la masse de Planck à 4-dimensions $M_{4p} = 1.22 \times 10^{19}$ GeV et la valeur de $\alpha = 6 \times 10^{-2}$ correspondant à $N_k = 60$ et $\phi_0 = 7.32 \times 10^{19}$ GeV. Dans la figure (4.13), nous présentons N_{re} et T_{re} , en fonction de l'indice spectral scalaire n_s en prenant $\omega_{re} = -1/3, 0, 2/3$ et 1.

Le point d'intersection de toutes les courbes au réchauffement instantané correspond à $n_s =$

4.4. Modèle de Tachyonique à cordes ouvertes

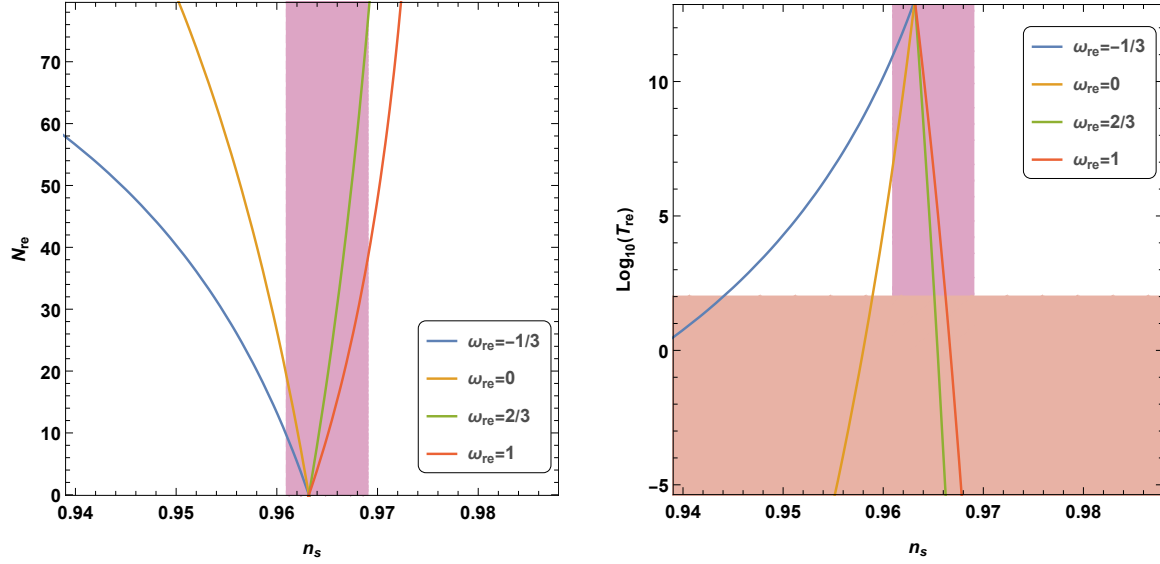


FIGURE 4.13 – Diagrammes des N_{re} et T_{re} en fonction de n_s pour le modèle tachyonique à cordes ouvertes.

0.963. Comme le modèle précédent, la région orange foncée représente des températures inférieures à l'échelle électrofaible $T < 100$ GeV. À partir de cette figure, nous observons que, pour $0 < \omega_{re} < 1$, les valeurs de n_s sont conditionnées par $0.955 < n_s < 0.967$. Cependant, les valeurs $\omega_{re} = 2/3$ et 1 sont bien compatibles avec les limites de Planck sur n_s . Une remarque importante est associée à la température maximale de réchauffage qui converge vers $10^{13} GeV$. Finalement, nous constatons que le second modèle de cordes pourrait fournir de bonnes prédictions en physique des branes.

Deuxième partie II

Contributions scientifiques

La dernière partie sera consacrée à la présentation de nos travaux traitant certains modèles branaires de l'inflation. Les études théoriques et observationnelles pourraient avoir un impact sur quelques domaines comme

- la cosmologie
- la physique des branes
- la théorie des cordes
- le pontage avec les résultats expérimentaux.

Avant de présenter nos contributions scientifiques, nous identifions les résultats trouvés relatifs à la modélisation branaire de l'inflation

- Étudier l'effet de la tension de la D3-branes sur les observables cosmologiques
- Examiner le comportement thermique de l'inflation branaire
- Établir un lien avec résultats expérimentaux.

Ces études ont été réalisées dans le cadre de la théorie des supercordes de type IIB. Il est à noter que cette théorie possède une solution solitonique appelée D3-brane. Cet objet produit des modèles à quatre dimensions provenant de la théorie de supergravité à cinq dimensions en se basant sur la conjecture de Maldacena. En utilisant le scénario du roulement lent, nous avons étudié certains modèles inflationnaires en présence de la tension de la D3-branes. Ce paramètre modifie totalement le modèle standard de l'inflation.

Article 1

Titre: On stringy inflation potentials

Auteurs: Adil Belhaj, Yassine Hassouni, **Mohamed Oualaid**, Moulay Brahim Sedra

Journal: Modern Physics Letters A, Vol. 36, No. 31, 2150225 (2021).

Résumé: Nous étudions les modèles cosmologiques d'inflation à partir de la physique des branes en se basant sur le scénario de Randall-Sundrum. Particulièrement, nous examinons certains paramètres cosmologiques associés à deux potentiels scalaires: potentiel logarithmique et potentiel tachyonique inflationnaire des cordes ouvertes (OSTI). En présence de la tension de D3-brane, nous présentons des contraintes sur le champ scalaire fournissant des modèles inflationnaires compatibles avec les résultats de Planck. Ensuite, nous traitons la phase de réchauffage de ces modèles. Précisément, nous observons que la température de réchauffage dépend des formes du potentiel scalaire. Entre autres, nous trouvons que l'OSTI produit de petites températures, supportées par les échelles la théorie de grande unification (GUT).

1 Modern Physics Letters A
 2 2150225 (17 pages)
 3 © World Scientific Publishing Company
 4 DOI: 10.1142/S0217732321502254



6 **On stringy inflation potentials**

7 A. Belhaj^{*,†,‡}, Y. Hassouni^{*,§}, M. Oualaid^{*,¶} and M. B. Sedra^{†,||}
 8 **Département de Physique, Équipe des Sciences de la Matière et du Rayonnement*
 9 *(ESMaR), Faculté des Sciences, Université Mohammed V de Rabat, Rabat, Morocco*
 10 *†Moulay Ismail University, FSTE, LSTI,*
 11 *BP-509 Boutalamine, Errachidia 52000, Morocco*
 12 *‡a-belhaj@um5r.ac.ma*
 13 *§y.hassouni@um5r.ac.ma*
 14 *¶mohamed_oualaid@um5.ac.ma*
 15 *||mysedra@yahoo.fr*

16 Received 30 March 2021
 17 Revised 4 September 2021
 18 Accepted 30 September 2021
 19 Published

20 We investigate cosmological inflation models from Randall–Sundrum brane physics. In
 21 particular, we examine certain cosmological parameters for two potentials, being a log-
 22 arithmical one and open string tachyonic inflation (OSTI). In the presence of the brane
 23 tension, we give scalar field constraints providing inflationary models matching with
 24 Planck results. Then, we discuss the reheating phase of such models. Precisely, the re-
 25 heating temperature depends on the potential forms. Among others, we find that OSTI
 26 provides small temperatures, supported by GUT scales.

27 *Keywords:* Inflation; braneworld model; running spectral index; reheating phase.

28 **1. Introduction**

29 The study of inflation models has received a relevant interest in connection with
 30 various higher dimensional supergravity models.^{1–5} The associated cosmological
 31 parameters have been approached using different ways and methods including ana-
 32 lytical and numerical ones. Concretely, such inflation models are based on the
 33 dynamics of one or several fields including scalar ones.⁶ The origin of such fields
 34 remains an open question allowing to elaborate different mechanisms and scenar-
 35 ios. In this way, various scalar fields have been explored to provide interesting
 36 inflationary models. Among others, superstring and M-theory compactifications on
 37 nontrivial manifolds have been exploited, where the axion fields play a primordial

[‡]Corresponding author.

A. Belhaj et al.

1 role in inflationary building models. In these investigations, Calabi–Yau and G2
 2 manifolds have provided certain promising results.^{7,8} A close examination shows
 3 that an alternative extra-dimensional model has been exploited to unveil data on
 4 such universe problems. In particular, a special emphasis has been put on Randall–
 5 Sundrum (RS-2) suggesting that the observed universe is interpreted as a D3-brane
 6 living in higher dimensional supergravity theories.^{9–11} In these models, the relevant
 7 investigated parameters depend on the stringy spectrum content. Many potential
 8 forms have been dealt with providing interesting inflationary models.^{12–15} The well-
 9 known shapes are the chaotic inflation potential and the minimal supersymmetric
 10 standard model (MSSM) inflation being extensively investigated. Besides such mod-
 11 els, other models have been much approached including the exponential and the
 12 inverse power-law potentials. They are explored in relation with the quintessential
 13 dark energy in brane and tachyonic inflation models. More details could be found
 14 in many works including the ones reported in Refs. 16–34. A large number of them
 15 have been supported by recent result of Planck experimental data.^{35,36}

16 At the end of inflation, the universe behaves as a cold and non-thermal state
 17 in the absence of matter fields. However, at a very high temperature, the universe
 18 should reach to a thermal state. It has been suggested that this could be obtained
 19 by considering the reheating scenario being a transition phase between the end of
 20 inflation and beginning of radiation dominated contributions. Such a phase has been
 21 considered as complex processes needing nontrivial reflections and investigations.
 22 This has been approached in terms of three parameters: the reheating temperature
 23 T_{re} , the effective equation of state ω_{re} and the number of e-foldings N_{re} . These
 24 parameters could impose certain constraints on cosmological models, engineered
 25 from different theories including brane physics.

26 The aim of this paper is to contribute to these activities by studying cosmological
 27 inflation models using Randall–Sundrum brane theory. Precisely, we investigate
 28 certain cosmological parameters of the logarithmic one and open string tachyonic
 29 inflation (OSTI) potentials. In the presence of the brane tension, we present scalar
 30 field constraints providing inflationary models matching with Planck results. We
 31 observe that the reheating phase of such predicted models depends on the potential
 32 forms. Among others, we find that OSTI provides small temperatures, supported
 33 by GUT scales.³⁷

34 The organization of this paper is as follows. In Sec. 2, we give a concise review
 35 on inflation models from brane physics. In Sec. 3, we compute and discuss the
 36 associated cosmological parameters of two proposed potentials in terms of the brane
 37 tension. In Sec. 4, we deal with the corresponding reheating phase. Section 5 is
 38 devoted to conclusion.

39 2. Brane inflation models

40 In this section, we give a concise review on brane inflation models. This concerns a
 41 D3-brane cosmology embedded in a five-dimensional spacetime.¹⁶ First, we consider

On stringy inflation potentials

1 the slow-roll approximations in type IIB superstring with D-brane objects. Then,
 2 we unveil data on cosmological perturbation parameters. Such computations can
 3 be found in many places including the works reported in Refs. 9–11, 16–28, 38–41.

4 **2.1. Slow roll inflation from brane physics**

5 To start, we assume that the universe is considered as a perfect fluid with the
 6 energy density ρ and the pressure p . To get the relevant cosmological quantities,
 7 the Friedman equation is needed. In a flat Friedmann–Robertson–Walker model,
 8 with a scale factor $a(t)$, this equation which describes the time evolution reads as

$$9 \quad H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3M_{4p}^2} \rho \left[1 + \frac{\rho}{2T}\right] + \frac{\Lambda_4}{3} + \frac{\mu}{a^4}, \quad (2.1)$$

10 where $H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$ indicates the Hubble parameter. Concretely, the first term of
 11 (2.1) is relevant for inflation dynamics involving stringy physical parameters. It is
 12 recalled that M_{4p} denotes the four-dimensional Planck scale being linked to the
 13 five-dimensional one M_{5p} via the relation $M_{4p} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left(\frac{M_{5p}^2}{\sqrt{T}}\right) M_{5p}$ where T is the
 14 D3-brane tension. Λ_4 is the cosmological constant. It is noted that the term $\frac{\mu}{a^4}$ can
 15 represent the dark radiation. The needed quantities can be elaborated by consider-
 16 ing an inflationary theory driven by a spin vanishing field ϕ . In such a theory, the
 17 dynamics can be established by considering a perfect fluid with a time-dependent
 18 energy density $\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)$ and a pressure $p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$.

19 In the process of inflation, certain contributions could be removed. In particu-
 20 lar, the term representing the dark radiation is reduced. Therefore, it could be
 21 neglected. Similarly, in the Randall–Sundrum model the four-dimensional cosmo-
 22 logical constant Λ_4 can be given in the term of Λ_5

$$23 \quad \Lambda_4 = \frac{4\pi}{M_{5p}^3} \left(\Lambda_5 + \frac{4\pi T^2}{3M_{5p}^3}\right), \quad (2.2)$$

24 where $\Lambda_5 \sim \frac{4\pi T^2}{3M_{5p}^3}$ represents the bulk cosmological constant in five-dimensional.
 25 However, we can put the four-dimensional cosmological constant to zero. In such
 26 approximations, the Friedmann-like equation (2.1) reduces to

$$27 \quad H^2 = \frac{8\pi}{3M_{4p}^2} \rho \left(1 + \frac{\rho}{2T}\right). \quad (2.3)$$

28 In this way, $V(\phi)$ is modeled to be the dominant energy contribution to inflation,
 29 where the involved scalar field should verify the Klein–Gordon equation

$$30 \quad \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (2.4)$$

31 where one has used $V' = \frac{dV}{d\phi}$. It is noted that the inflation dynamics requires that
 32 such a scalar field moves away from the false vacuum and slowly rolls down to the
 effective potential minimum.³¹ In the slow-roll approximations, the cosmological

A. Belhaj et al.

1 equations (2.3) and (2.4) become

$$2 \quad H^2 \simeq \frac{8\pi}{3M_{4p}^2} V \left(1 + \frac{V}{2T} \right), \quad (2.5)$$

$$3 \quad \dot{\phi} \simeq -\frac{V'}{3H}. \quad (2.6)$$

4 The slow-roll requirement is controlled by two cosmological parameters given by

$$5 \quad \epsilon = \frac{M_{4p}^2}{4\pi} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \left[\frac{T(T+V)}{(2T+V)^2} \right], \quad \eta = \frac{M_{4p}^2}{4\pi} \left(\frac{V''}{V} \right) \left[\frac{T}{2T+V} \right].$$

6 It has been conducted that inflation ends when any of the two parameters equals
 7 one. Using slow-roll approximations, such parameters are very small, namely
 8 $\max\{\epsilon, |\eta|\} \ll 1$. Thus, it is possible to calculate the number of e-foldings be-
 9 tween the beginning and the end of inflation. Indeed, it is given by $N_k = \int_{t_i}^{t_e} H dt$.
 10 Taking ϕ_i and ϕ_e as the values of the scalar field at the beginning and at the end
 11 of inflation respectively, N_k reads as

$$12 \quad N_k = -\frac{8\pi}{M_{4p}^2} \int_{\phi_i}^{\phi_e} \frac{V}{V'} \left[1 + \frac{V}{2T} \right] d\phi. \quad (2.7)$$

13 In the high-energy limit assured by $V \gg T$, the slow-roll parameters are given by

$$14 \quad \epsilon = \frac{M_{4p}^2 T}{4\pi} \frac{V'^2}{V^3}, \quad (2.8)$$

$$15 \quad \eta = \frac{M_{4p}^2 T}{4\pi} \left(\frac{V''}{V^2} \right). \quad (2.9)$$

16 Similarly, the number of e-foldings takes the following form

$$17 \quad N_k = -\frac{4\pi}{M_{4p}^2 T} \int_{\phi_i}^{\phi_e} \frac{V^2}{V'} d\phi. \quad (2.10)$$

18 **2.2. Cosmological perturbations**

19 Here, we consider the discussion of the cosmological perturbations in inflation
 20 from D-brane physics. In particular, we approach the gauge invariant perturba-
 21 tion parameter $\zeta = -\psi - H \frac{\delta\rho}{\rho}$ with ψ as the curvature perturbation defined on
 22 slices of the uniform density. At super-horizon scale,³² it reduces to the curvature
 23 perturbation being almost constant. It turns out that this aspect does not depend
 24 on the gravitational field equations.³⁴ For a spatially flat hypersurface, one should
 25 have $\zeta = H \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}}$, where $\delta\phi$ on the large scale is $|\delta\phi| = \frac{H}{2\pi}$. Considering the slow-roll
 26 approximations and according to Ref. 16, the spectrum of the scalar perturbations
 27 reads as

$$28 \quad A_s^2 = \frac{4}{25} \frac{H^2}{\dot{\phi}} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \simeq \frac{512\pi}{75M_{4p}^6} \frac{V^3}{V'^2} \left[\left(1 + \frac{V}{2T} \right)^3 \right]_{k=\alpha H}. \quad (2.11)$$

1 Moreover, following Ref. 16, the amplitudes of the tensor perturbations and the
2 tensor spectral index take the following form

$$3 \quad A_T^2 = \frac{4}{25\pi} \left(\frac{H}{M_{4p}} \right)^2 \simeq \frac{32}{75M_{4p}^4} \left[V \left[1 + \frac{V}{2T} \right] \right]_{k=aH}. \quad (2.12)$$

4 In the high-energy limit, however, these expressions reduce to

$$5 \quad A_s^2 \simeq \frac{512\pi}{600M_{4p}^6 T^3} \left(\frac{V^6}{V'^2} \right), \quad (2.13)$$

$$6 \quad A_T^2 \simeq \frac{16}{75M_{4p}^4} \left(\frac{V^2}{T} \right). \quad (2.14)$$

7 Exploiting the slow-roll approximations,¹⁶ the scale dependence of the scalar power
8 spectra is obtained from the scalar spectral index satisfying the following relations

$$9 \quad n_s - 1 = \left. \frac{d \ln A_s^2}{d \ln k} \right|_{k=aH} \simeq -6\epsilon + 2\eta. \quad (2.15)$$

$$10 \quad n_T = \left. \frac{d \ln A_T^2}{d \ln k} \right|_{k=aH} \simeq -2\epsilon. \quad (2.16)$$

11 Using ϵ and η in the high-energy limit, we obtain the Harrison–Zel’dovich spectrum
12 ($n_s = 1$). The running of the spectral index is manifested. In this way, one can define
13 the spectral index running as follows

$$14 \quad \left. \frac{dn_s}{d \ln k} \right|_{k=aH} \simeq -24\epsilon^2 + 16\epsilon\eta - 2\xi^2, \quad (2.17)$$

15 where one has

$$16 \quad \xi^2 = \frac{M_{4p}^4 T^2}{16\pi^2} \left(\frac{V'V'''}{V^4} \right).$$

17 According to Ref. 16, the tensor-to-scalar ratio is given by

$$18 \quad r = \frac{A_T^2}{A_s^2} \simeq \left[\epsilon \left[\frac{1}{1 + \frac{V}{T}} \right] \right]_{k=aH}. \quad (2.18)$$

19 In the high-energy limit, this becomes

$$20 \quad r \simeq \epsilon \frac{T}{V}. \quad (2.19)$$

21 Having represented fundamental relations on inflation from type IIB superstrings,
22 we move to elaborate certain explicit models using analytical and numerical ap-
23 proaches.

24 3. Stringy Inflation Models

25 In this section, we investigate brane inflation models described by a real scalar
26 potential embedded in type IIB superstring scenarios. A close inspection shows that
a large class of potentials involve two independent physical parameters. Precisely,

A. Belhaj et al.

1 a generic form of such potentials takes the following form

$$2 \quad V(\phi) = \lambda f\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right), \quad (3.1)$$

3 where λ is associated with the vacuum energy density and ϕ_0 indicates the change
4 field variation $\Delta\phi$ during the inflation processes. Various models depending on the
5 function f have been dealt with providing certain results in different backgrounds
6 including brane and supergravity geometries. Concretely, we consider two brane
7 inflation models based on potentials associated with the logarithmic inflation in
8 brane physics and OSTI models by exploiting stringy parameters including the
9 brane tension.

10 **3.1. Logarithmic inflation in brane physics**

11 Here, we investigate a logarithmic inflation model described by the following po-
12 tential

$$13 \quad V(\phi) = 2M^4 \ln\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right), \quad (3.2)$$

14 where the mass parameter M , identified with $\lambda^{\frac{1}{4}}$, will be fixed by COBE numerical
15 data. This potential will be investigated at high-energy limits, where the D3-brane
16 effect is relevant. In this way, the cosmological parameters in the slow-roll approx-
17 imations carry a stringy dependence. Indeed, the slow-roll parameters are found
18 to be

$$19 \quad \epsilon = \frac{M_{4p}^2 \alpha}{6\phi^2 \ln\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)}, \quad (3.3)$$

$$20 \quad \eta = -\frac{M_{4p}^2 \alpha}{8\phi^2 \ln\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)}, \quad (3.4)$$

$$21 \quad \xi^2 = \frac{M_{4p}^4 \alpha^2}{16\phi^4 \ln\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)}, \quad (3.5)$$

22 where α , being a dimensionless parameter, is given by

$$23 \quad \alpha = \frac{T}{M^4 \pi}. \quad (3.6)$$

24 The condition corresponding to the end of inflation $\epsilon(\phi_e) = 1$ is needed to compute
25 other relevant quantities associated with the end of inflation including the number
26 of e-folds and perturbation spectrums. Such quantities depend on the value of the
27 scalar field at the end of inflation. A close examination shows that Eq. (3.3) could
28 not be solved directly. We can, however, approach such an equation numerically by
29 considering ϕ_0 which varies in range the $2M_{4p} \leq \phi_0 \leq 6M_{4p}$. Indeed, ϕ satisfying
 $\epsilon(\phi) = 1$ will be denoted by ϕ_e . Putting this value in the potential expression and

1 using integral calculations, we can obtain the number of e-foldings via the relations

$$2 \quad N_k = -\frac{8}{\alpha M_{4p}^2} \int_{\phi_i}^{\phi_e} \phi \ln\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right) d\phi. \quad (3.7)$$

3 Indeed, the computation provides

$$4 \quad N_k = -\frac{2}{\alpha M_{4p}^2} [I(\phi_e) - I(\phi_i)], \quad (3.8)$$

5 where one has

$$6 \quad I(\phi) = \phi^2 - 2\phi^2 \ln\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right) + 2\phi^2 \ln\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right). \quad (3.9)$$

7 Numerical methods will be used to find the values of ϕ_i by fixing N_k and α for the
8 previous range of ϕ_0 .

9 Having computed such parameters, the cosmological perturbations can also be
10 approached. The scalar power spectrum is found to be

$$11 \quad A_s^2 = \frac{64M^4}{25\pi^2\alpha^3 M_{4p}^6} \phi^2 \ln\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right). \quad (3.10)$$

12 Using Eq. (2.15), we get the spectral index n_s

$$13 \quad n_s - 1 = -\frac{M_{4p}^2 \alpha \left(3 + \ln\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)\right)}{3\phi^2 \ln\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)}. \quad (3.11)$$

14 From Eq. (2.19), we obtain the tensor-to-scalar ratio r which can be written as

$$15 \quad r = \frac{M_{4p}^2 \pi \alpha^2}{8\phi^2 \ln\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)}. \quad (3.12)$$

16 The associated behaviors can be discussed by fixing N_k . To be concrete, we fix the
17 number of e-foldings to $N_k = 60$. For each value of ϕ_0 , we obtain ϕ_i by solving
18 Eq. (3.7). Putting ϕ_0 and ϕ_i in the equations of n_s and r , we can get the behaviors
19 of the spectral index and the tensor-to-scalar ration for different values of α . These
20 behaviors are plotted in Fig. 1. From this figure, it has been observed that r increases
21 by increasing α . The key point here concerns the values of n_s and r which match
22 with the Planck data 2018.³⁶ However, the curves $r - n_s$ are inside of the 2σ
23 constraints for $N_k = 60$. The predictions of the model are within the 95% C.L.
24 region from Planck data. This has been obtained by considering the above scalar
25 field range. To examine the validity of the proposed stringy potential, we should
26 deal with other quantities. In particular, the running of the scalar spectral index
27 can be easily computed from Eq. (2.17). Indeed, we have

$$28 \quad \frac{dn_s}{d \ln k} = -\frac{M_{4p}^4 \alpha^2}{3\phi^4 \ln\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)} \left[6 + 5 \ln\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)\right]. \quad (3.13)$$

A. Belhaj et al.

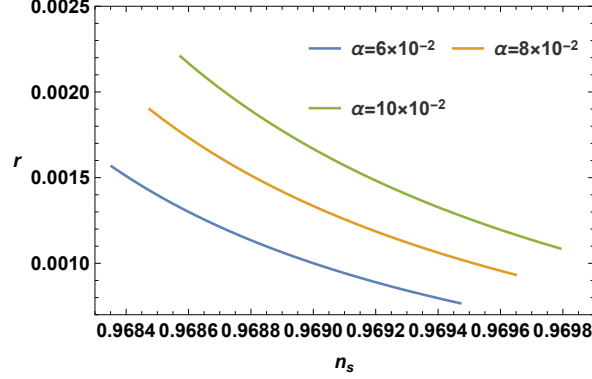


Fig. 1. (Color online) The spectral index n_s vs. the tensor-to-scalar ratio r for $N_k = 60$ and $2 \leq \phi_0 \leq 6$ ($M_{4p} = 1$). The blue, orange and green curves are inside of the 2σ constraints.³⁶

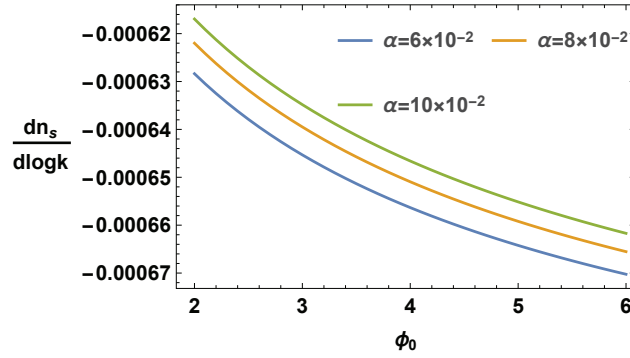
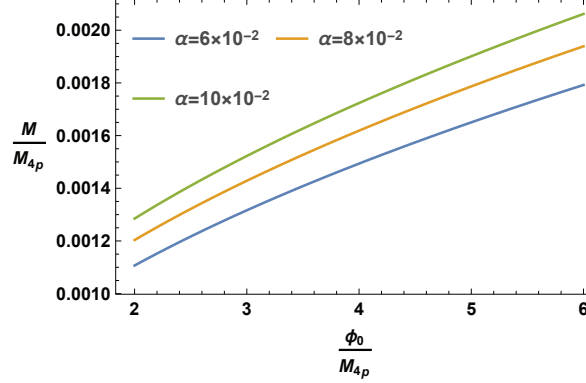


Fig. 2. (Color online) The running of the spectral indexes $\frac{dn_s}{d \ln k}$ vs. ϕ_0 for $N_k = 60$ and $2 \leq \phi_0 \leq 6$ ($M_{4p} = 1$).

1 To get results associated with the Planck 2018, the same constraint on ϕ_0 is con-
 2 sidered. In Fig. 2, we show certain aspects of the running of the scalar spectral
 3 index in terms of ϕ_0 . Taking similar values of α , relevant results appear in such a
 4 figure. It follows that the values of the running scalar spectral index are close to
 5 the observational data. It has been observed small values. However, these values
 6 match perfectly with 95%, TT, TE, EE + lowE + lensing + BK15 + BAO.³⁶ To ex-
 7 amine the mass parameter, we inspect the brane effect in the presence of the scalar
 8 field. The corresponding expression should be computed. Using (2.13), we obtain
 9 the following expression for the mass parameter M

$$10 \quad M = \left[\frac{25\alpha^3 M_{4p}^6 \pi^2 A_s^2}{64\phi^2 \ln\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)} \right]^{\frac{1}{4}}. \quad (3.14)$$

On stringy inflation potentials

Fig. 3. (Color online) M in terms of ϕ_0 for $N_k = 60$ and $2 \leq \phi_0 \leq 6$.

1 Applying the COBE normalization, we can examine the behaviors of the scale M
 2 as a function of ϕ_0 . Taking $A_S^2 = 2.5 \times 10^{-9}$, Fig. 3 illustrates such cosmological
 3 aspects for different values of the stringy parameter α by varying ϕ_0 in the range
 4 $2M_{4p} \leq \phi_0 \leq 6M_{4p}$. To show such a behavior, we take $M_{4p} = 1$.

5 Similar aspects appear in the previous the curve of Fig. 1. It has remarked from
 6 Fig. 3 that such a range provides a result supported by the order of the GUT. It
 7 is recalled that the energy of the grand unification or the GUT scale is the energy
 8 level which could allow to unify the electromagnetic, the weak and the strong force.
 9 The approximate value of such an energy is around $10^{16} \text{ GeV} \sim 10^{-3} M_{4p}$.

10 3.2. Open string tachyonic inflation in the presence 11 of brane effect

12 The second explicit model concerns OSTI relying on the following potential

$$13 \quad V(\phi) = -2M^4 \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^2 \ln \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right) \quad (3.15)$$

14 where M , identified as before with $\lambda^{\frac{1}{4}}$, will be fixed by COBE numerical data. Ac-
 15 cording to Ref. 42, this potential is positif only where $\left(\frac{\phi}{\phi_0} \right) < 1$. Here, we consider
 16 the constraint $\frac{\phi_0}{M_{4p}} < 10$,³³ at high-energy limits, where the D3-brane effect is rele-
 17 vant. In this way, the cosmological parameters in the slow-roll approximations will
 18 be approached. The computations show that slow-roll parameters are given by

$$19 \quad \epsilon = - \frac{M_{4p}^2 \alpha \phi_0^2 \left(1 + 2 \ln \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right) \right)^2}{6\phi^4 \ln \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)}, \quad (3.16)$$

$$20 \quad \eta = - \frac{M_{4p}^2 \alpha \phi_0^2 \left(3 + 2 \ln \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right) \right)}{8\phi^4 \ln \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)}, \quad (3.17)$$

A. Belhaj et al.

$$\xi^2 = \frac{M_{4p}^4 \alpha^2 \phi_0^2 \left(1 + 2 \ln \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)\right)}{16 \phi^8 \ln \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)}. \quad (3.18)$$

As the previous model, certain numerical methods will be exploited. Indeed, the constraint $\epsilon(\phi_e) = 1$ will be handled by considering the scalar field range $6M_{4p} \leq \phi_0 \leq 9M_{4p}$. Using integral calculations, we find that the number of e-foldings is given by

$$N_k = \frac{8}{\alpha M_{4p}^2 \phi_0^2} \int_{\phi_i}^{\phi_e} \frac{\phi^3 \ln \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)}{\left(1 + 2 \ln \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)\right)} d\phi. \quad (3.19)$$

The computation gives

$$N_k = \frac{2}{\alpha M_{4p}^2 \phi_0^2} [J(\phi_e) - J(\phi_i)], \quad (3.20)$$

where $J(\phi)$ is a function of the scalar field. To bring a compact expression, we should introduce the incomplete gamma function

$$\Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt, \quad x > 0, \quad (3.21)$$

where x is a positive variable and where a is a real parameter. In particular, the function $J(\phi)$ can be written as

$$J(\phi) = \frac{-3\phi^4}{8} - \frac{\phi_0^4 \Gamma\left(0, -2 \left(1 + 2 \ln \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)\right)\right)}{2e^2} + \frac{1}{2} \phi^4 \ln \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right). \quad (3.22)$$

In what follows, we examine the associated cosmological perturbations. First, we get the scalar power spectrum

$$A_s^2 = \frac{64M^4 \phi^{10} \ln \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)}{25\pi^2 \alpha^3 M_{4p}^6 \phi_0^8 \left(1 + 2 \ln \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)\right)^2}. \quad (3.23)$$

Using Eq. (2.15), we obtain the spectral index n_s

$$n_s - 1 = \frac{M_{4p}^2 \alpha \phi_0^2}{3\phi^4 \ln \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)} \left[3 + 19 \ln \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)\right]. \quad (3.24)$$

From Eq. (2.19), the tensor-to-scalar ratio r is found to be

$$r = \frac{M_{4p}^2 \alpha^2 \pi \phi_0^4 \left(1 + 2 \ln \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)\right)^2}{8\phi^6 \ln \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)}. \quad (3.25)$$

The corresponding behaviors can be discussed by fixing N_k . Taking the number of e-folds $N_k = 60$, the behaviors of the spectral index and the tensor-to-scalar

On stringy inflation potentials

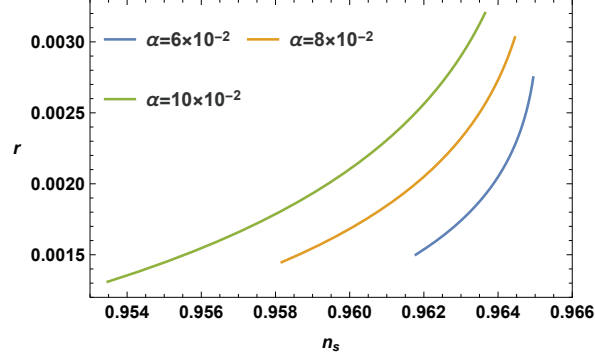


Fig. 4. (Color online) The spectral index n_s vs. the tensor-to-scalar ratio r for $N_k = 60$ and $6 \leq \phi_0 \leq 9$ ($M_{4p} = 1$).

1 ratio for different values of α are depicted in Fig. 4. From this figure, it has been
 2 observed that r increases by increasing α . The obtained values of n_s and r which
 3 match perfectly with the prediction of the model are within the 95% C.L. region
 4 from Planck data for the new considered range by keeping the same values of α . To
 5 check the validity of such a stringy potential, we should consider other quantities
 6 as we have done for the previous model. The running of the scalar spectral index
 7 can be calculated from Eq. (2.17). Such computations provide

$$8 \quad \frac{dn_s}{d \ln k} = - \frac{M_{4p}^4 \alpha^2 \phi_0^4 \left(1 + 2 \ln \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)\right)}{12 \phi^8 \ln \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)} D(\phi), \quad (3.26)$$

9 where we have

$$10 \quad D(\phi) = 24 + 356 \ln \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right). \quad (3.27)$$

11 In Fig. 5, we illustrate the running of the scalar spectral index. It has been
 12 remarked that results associated with Planck 2018³⁶ have been provided in the
 13 second range of ϕ_0 . However, for $\alpha = 10 \times 10^{-2}$, the running of the spectral index
 14 values can match perfectly with 95%, TT, TE, EE+lowE+lensing+BK15+BAO.³⁶
 15 In terms of the comparison, we can note that the running of the spectral index values
 16 in Fig. 2 is more compatible with the Planck values compared to Fig. 5. As before,
 17 we examine the aspect of the mass parameter in the second inflation potential in
 18 the presence of D3-brane effect. In particular, the computations give the following
 19 expression

$$20 \quad M = \left[\frac{25 \alpha^3 M_{4p}^6 \pi^2 \phi_0^8 \left(1 + 2 \ln \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)\right)^2 A_s^2}{64 \phi^{10} \ln \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)} \right]^{\frac{1}{4}}. \quad (3.28)$$

A. Belhaj et al.

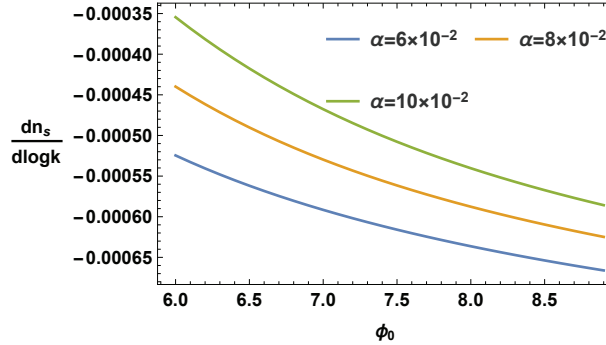


Fig. 5. (Color online) The running of the spectral indexes $\frac{dn_s}{d \ln k}$ vs. ϕ_0 for $N_k = 60$ and $6 \leq \phi_0 \leq 9$ ($M_{4p} = 1$).

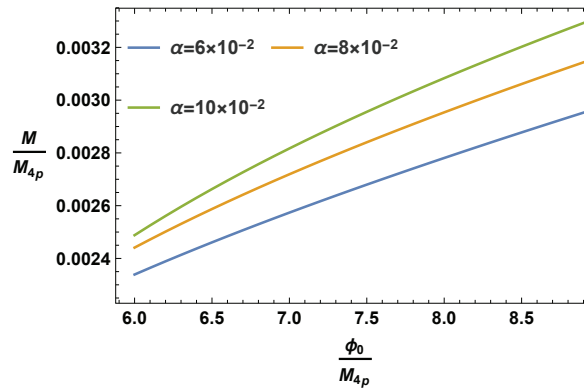


Fig. 6. (Color online) The scale M vs. ϕ_0 for $N_k = 60$ and $6 \leq \phi_0 \leq 9$.

1 Applying the COBE normalization, we inspect such behaviors. Considering
 2 $A_S^2 = 2.5 \times 10^{-9}$, Fig. 6 illustrates these cosmological aspects for different
 3 values of the parameter α associated with the second range $6M_{4p} \leq \phi_0 \leq 9M_{4p}$ by
 4 taking $M_{4p} = 1$. It has remarked from Fig. 6 that such a range provides a result
 5 matching with the order of the GUT scale ($\sim 10^{-3} M_{4p}$).³⁷

6 4. Reheating Predictions in Stringy Inflatons

7 In this section, we investigate the reheating aspects associated with such stringy
 8 potentials by computing two relevant quantities namely N_{re} and T_{re} in terms of
 9 the involved cosmological parameters using brane physics. The corresponding calcu-
 10 lations can be found in many works including the works reported in Refs. 43–46.
 11 It is remarked that the reheating phase could unveil physical data supporting pro-
 12 posed cosmological models. During such a phase, the scalar field oscillates around

2nd Reading

On stringy inflation potentials

1 its potential minimum and the relevant energy density are provided by an effective
 2 equation-of-state (EoS) parameter ω_{re} . *A priori*, this parameter could be considered
 3 as a time dependance quantity. In many theoretical models, however, it has been
 4 approached as a constant having certain particular values. Here, we take $-1/3$, 0 ,
 5 $2/3$ and 1 . In this way, this energy density is linked to the scale factor via the
 6 relation $\rho \propto a^{-3(1+\omega_{\text{re}})}$. An examination shows that one writes

$$7 \quad \frac{\rho_{\text{end}}}{\rho_{\text{re}}} = \left(\frac{a_{\text{end}}}{a_{\text{re}}} \right)^{-3(1+\omega_{\text{re}})}. \quad (4.1)$$

8 Here, the subscripts “end” and “re” indicate the end of inflation and the end of
 9 reheating phase, respectively. According to Ref. 44, the number of e-folds of re-
 10 heating is linked to the scale factor both at the end of inflation and reheating. The
 11 associated relation is

$$12 \quad e^{-N_{\text{re}}} = \frac{a_{\text{end}}}{a_{\text{re}}}. \quad (4.2)$$

13 This can be written as

$$14 \quad N_{\text{re}} = \frac{1}{3(1+\omega_{\text{re}})} \ln \left(\frac{3}{2} \frac{V_{\text{end}}}{\rho_{\text{re}}} \right). \quad (4.3)$$

15 At the end of the reheating phase, the energy density could take the following from

$$16 \quad \rho_{\text{re}} = \frac{\pi^2}{30} g_{\text{re}} T_{\text{re}}^4, \quad (4.4)$$

17 where g_{re} denotes the number of internal degrees of freedom of relativistic particles
 18 at the end of reheating, which could be around $g_{\text{re}} = \mathcal{O}(100)$ for $\gtrsim 175$ GeV sported
 19 by Standard Model data of particle physics.^{45,46} Using the entropy conservation,
 20 the reheating temperature T_{re} and the today one T_0 are related via the relation

$$21 \quad T_{\text{re}} = T_0 \left(\frac{a_0}{a_{\text{eq}}} \right) e^{N_{\text{RD}}} \left(\frac{43}{11g_{\text{re}}} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (4.5)$$

22 where N_{RD} is the length of radiation dominated epoch in e-folds. Following Ref. 44,
 23 $\frac{a_0}{a_{\text{eq}}}$ is given by

$$24 \quad \frac{a_0}{a_{\text{eq}}} = \frac{a_0 H k}{k} e^{-N_k} e^{-N_{\text{re}}} e^{-N_{\text{RD}}}. \quad (4.6)$$

25 In this way, the temperature T_{re} can be expressed as

$$26 \quad T_{\text{re}} = \left(\frac{43}{11g_{\text{re}}} \right)^{1/3} \left(\frac{a_0 T_0}{k} \right) H_k e^{-N_k} e^{-N_{\text{re}}}. \quad (4.7)$$

27 Putting Eq. (4.7) in Eq. (4.3), one finds

$$28 \quad N_{\text{re}} = \frac{4}{1-3\omega_{\text{re}}} \left[-\frac{1}{4} \ln \left(\frac{3^2 \cdot 5}{\pi^2 g_{\text{re}}} \right) - \frac{1}{3} \ln \left(\frac{11g_{\text{re}}}{43} \right) \right. \\ 29 \quad \left. - \ln \left(\frac{k}{a_0 T_0} \right) - \ln \left(\frac{V_{\text{end}}^{1/4}}{H_k} \right) - N_k \right]. \quad (4.8)$$

2nd Reading

A. Belhaj et al.

- 1 Assuming $g_{\text{re}} \sim \mathcal{O}(100)$ and considering the pivot scale $\frac{k}{a_0} = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ from
 2 Planck, one gets also

$$3 \quad N_{\text{re}} = \frac{4}{1 - 3\omega_{\text{re}}} \left[61.6 - N_k - \ln \left(\frac{V_{\text{end}}^{1/4}}{H_k} \right) \right], \quad (4.9)$$

- 4 where H_k can be written down using the definition of the tensor-to-scalar ratio
 5 $r = A_T^2/A_S^2$. Taking A_S^2 at the pivot scale and using the expression for A_T^2 in the
 6 high-energy limit, one finds

$$7 \quad H_k = \left(\frac{25\pi}{4} r A_S^2 M_{4p}^2 \right)^{1/2}. \quad (4.10)$$

- 8 Combining Eqs. (4.4) and (4.3), the reheating temperature is found to be

$$9 \quad T_{\text{re}} = \left[\left(\frac{43}{11g_{\text{re}}} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{a_0 T_0}{k} H_k e^{-N_k} \left[\frac{3^2 \cdot 5 V_{\text{end}}}{\pi^2 g_{\text{re}}} \right]^{-\frac{1}{3(1+\omega_{\text{re}})}} \right]^{\frac{3(1+\omega_{\text{re}})}{3\omega_{\text{re}}-1}}. \quad (4.11)$$

- 10 It is noted that this thermal quantity depends on many cosmological parameters
 11 and the used potentials. In what follows, we approach this quantity for studied
 12 stringy potentials.

13 4.1. Reheating phase of the logarithmic potential

- 14 Before illustrating such thermal aspects, we inspect the variation of the number of
 15 e-folds reheating N_{re} and the temperature reheating T_{re} , respectively, in terms of
 16 the scalar spectral index n_s . To do so, one uses the four-dimensional Planck mass
 17 $M_{4p} = 1.22 \times 10^{19} \text{ GeV}$ and the value of $\alpha = 6 \times 10^{-2}$ associated with $N_k = 60$ and
 18 $\phi_0 = 2.44 \times 10^{19} \text{ GeV}$. In Fig. 7, we plot parametrically N_{re} and T_{re} , respectively,

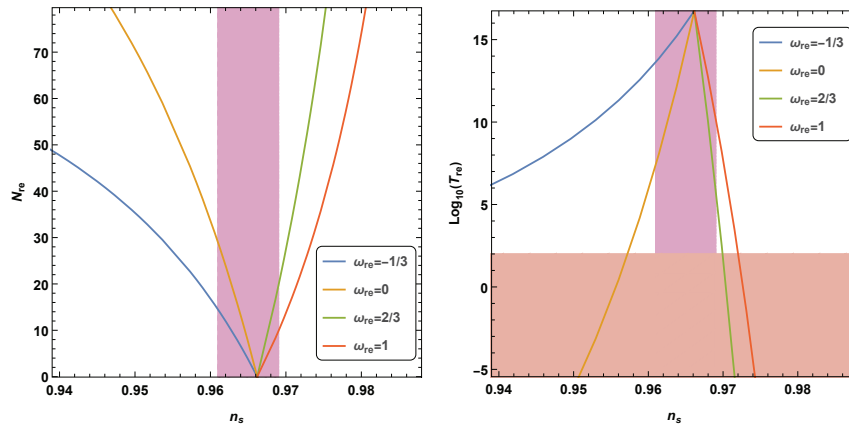


Fig. 7. (Color online) Parametrical plots of N_{re} and T_{re} as function of n_s for logarithmic model.

On stringy inflation potentials

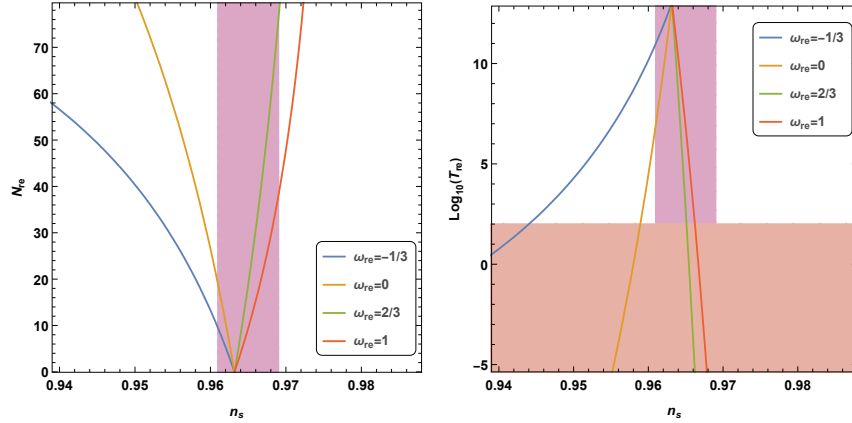


Fig. 8. (Color online) Parametrical plots of N_{re} and T_{re} as function of n_s for OSTI model.

1 as a function of the scalar spectral index n_s for the following values of $\omega_{\text{re}} = -1/3$,
 2 0 , $2/3$ and 1 for the logarithmic potential.

3 The curves meet at an instantaneous reheating point defined by the vanishing
 4 limit of N_{re} . For this potential, it has been remarked that this intersecting point cor-
 5 responds to $n_s = 0.966$. Moreover, the vertical dark pink region is associated with
 6 the Planck-2018 bounds³⁶ being $n_s = 0.965 \pm 0.004$. However, this bond corresponds
 7 to 1σ constraints. The dark orange region indicates temperatures being below the
 8 electroweak scale $T < 100$ GeV. It has been observed that for $0 < \omega_{\text{re}} < 1$ it is
 9 compatible with the Planck bounds-2018 on n_s being localized $0.951 < n_s < 0.974$.
 10 However, it has been remarked that the case $\omega_{\text{re}} = 2/3$ provides results close to the
 11 Planck bounds n_s . For this logarithmic potential, the maximum reheating temper-
 12 ature is around 10^{16} GeV, which could be supported by GUT scale.

13 4.2. Reheating phase of OSTI model

14 Here, we discuss the variation of the number of the e -folds reheating N_{re} and the
 15 temperature reheating T_{re} , respectively, in terms of the scalar spectral index n_s
 16 for OSTI model. As before, we consider the four-dimensional Planck mass $M_{4p} =$
 17 1.22×10^{19} GeV and the value of $\alpha = 6 \times 10^{-2}$ corresponding to $N_k = 60$ and
 18 $\phi_0 = 7.32 \times 10^{19}$ GeV. In Fig. 8, we show N_{re} and T_{re} , respectively, as functions of
 19 the scalar spectral index n_s by taking $\omega_{\text{re}} = -1/3, 0, 2/3$ and 1 . The point, where
 20 all the curves intersect at instantaneous reheating, corresponds to $n_s = 0.963$. As
 21 the previous model, the dark orange region reveals temperatures being below the
 22 electroweak scale $T < 100$ GeV. From this figure, we observe that, for $0 < \omega_{\text{re}} < 1$,
 23 the value of n_s is constrained by $0.955 < n_s < 0.967$. However, the values $\omega_{\text{re}} =$
 24 $2/3$ and 1 bring a good compatibility with the Planck bounds on n_s . A crucial
 25 remark is associated with the maximum reheating temperature converging around

A. Belhaj et al.

1 10^{13} GeV. In particular, we anticipate that the second stringy model could provide
2 good predictions in terms of brane physics.

3 **5. Conclusion**

4 In this work, we have investigated cosmological inflation models from Randall–
5 Sundrum brane physics. More precisely, we have considered two models being log-
6 arithmical one and OSTI. In particular, we have examined certain cosmological
7 parameters for such potentials. Using numerical methods, we have computed the rel-
8 evant parameters including the spectral ones. In the presence the brane tension, we
9 have proposed certain scalar field constraints providing inflationary models match-
10 ing with the Planck results. After that, we have approached the reheating phase of
11 such two models. Precisely, it has been remarked that the reheating temperature
12 depends on the potential forms. Among others, we have found that the OSTI pro-
13 vides small temperatures supported by GUT scales. This work comes up with some
14 open questions. A natural question is to make contact with stringy models obtained
15 from compactification scenarios. We anticipate that these models could bring new
16 features by introducing other stringy parameters associated with internal spaces.
17 We hope to address such questions in future.

18 **Acknowledgments**

19 The authors would like to thank M. Benali and E. Torrente-Lujan for collaborations
20 and discussions on related topics. This work is partially supported by the ICTP
21 through AF.

22 **References**

- 23 1. C. P. Burgess, *Pramana* **63**, 1269 (2004).
- 24 2. J. M. Cline, arXiv:hep-th/0501179.
- 25 3. A. Linde, *eConf C040802* (2004) L024 [*J. Phys. Conf. Ser.* **24**, 151 (2005)].
- 26 4. L. Pilo, A. Riotto and A. Zaffaroni, *JHEP* **0407**, 052 (2004).
- 27 5. S. Kachru, R. Kallosh, A. Linde, J. Maldacena, L. McAllister and S. P. Trivedi,
28 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **0310**, 013 (2003).
- 29 6. R. Brandenberger, Topics in cosmology, *PoS P2GC* (2006) 007.
- 30 7. M. J. Stott *et al.*, *Phys. Rev. D* **96**, 083510 (2017).
- 31 8. B. S. Acharya *et al.*, *JHEP* **2018**, 130 (2018).
- 32 9. L. Randall and R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 337 (1999).
- 33 10. L. Randall and R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4690 (1999).
- 34 11. A. Belhaj, P. Diaz, M. Naciri and A. Segui, *Int. J. Mod. Phys. D* **17**, 911 (2008).
- 35 12. J. D. Barrow and P. Parsons, *Phys. Rev. D* **52**, 5576 (1995).
- 36 13. A. A. Gerasimov and S. L. Shatashvili, *JHEP* **10**, 034 (2000).
- 37 14. D. Choudhury, D. Ghoshal, D. P. Jatkar and S. Panda, *Phys. Lett. B* **544**, 231 (2002).
- 38 15. J. A. Minahan and B. Zwiebach, *JHEP* **09**, 029 (2000).
- 39 16. R. Maartens, D. Wands, B. A. Bassett and I. P. C. Heard, *Phys. Rev. D* **62**, 041301
40 (2000).
- 41 17. E. Papantonopoulos and V. Zamarias, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **10**, 001 (2004).

2nd Reading

On stringy inflation potentials

- 1 18. R. Allahverdi, J. Garcia-Bellido, K. Enqvist and A. Mazumdar, *Phys. Rev. Lett.* **97**,
2 191304 (2006).
- 3 19. D. H. Lyth, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **04**, 006 (2007).
- 4 20. J. C. Bueno Sanchez, K. Dimopoulos and D. H. Lyth, *J. Cosmol. Astropart. Phys.*
5 **0701**, 015 (2007).
- 6 21. M. Becker, L. Leblond and S. E. Shandera, *Phys. Rev. D* **76**, 123516 (2007).
- 7 22. K. Skenderis and P. K. Townsend, *J. Phys. A* **40**, 6733 (2007).
- 8 23. D. Astefanesei, K. Goldstein and S. Mahapatra, *Gen. Relat. Gravit.* **40**, 2069 (2008).
- 9 24. R. Kallosh, N. Sivanandam and M. Soroush, *JHEP* **603**, 060 (2006).
- 10 25. A. R. Liddle, arXiv:astro-ph/9901124.
- 11 26. E. Papantonopoulos and V. Zamarias, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **11**, 005 (2006).
- 12 27. E. E. Flanagan, S.-H. Tye and I. Wasserman, *Phys. Rev. D* **62**, 044039 (2000).
- 13 28. R. Maartens, *Living Rev. Relativ.* **7**, 7 (2004).
- 14 29. P. Binetruy, C. Deffayet, U. Ellwanger and D. Langlois, *Phys. Lett. B* **477**, 2815
15 (2000).
- 16 30. P. Brax, C. Van de Bruck and A. C. Davis, *Rep. Prog. Phys.* **67**, 2183 (2004).
- 17 31. A. D. Linde, *Phys. Lett. B* **108**, 389 (1982).
- 18 32. A. Riotto, arXiv:hep-ph/0210162.
- 19 33. J. Martin, C. Ringeval, R. Trotta and V. Vennin, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **03**, 039
20 (2014).
- 21 34. D. Wands, K. A. Malik, D. H. Lyth and A. R. Liddle, *Phys. Rev. D* **62**, 043527 (2000).
- 22 35. Planck Collab. (P. A. R. Ade *et al.*), *Astron. Astrophys.* **594**, 20 (2016).
- 23 36. Planck Collab. (N. Aghanim *et al.*), *Astron. Astrophys.* **641**, 1432 (2018).
- 24 37. K. Freese, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3233 (1990).
- 25 38. E. Witten, *Phys. Rev. D* **46**, 5467 (1992).
- 26 39. S. L. Shatashvili, *Clay Math. Proc.* **1**, 315 (2002).
- 27 40. L. Kofman and A. D. Linde, *JHEP* **07**, 004 (2002).
- 28 41. J. E. Lidsey and D. Seery, *Phys. Rev. D* **75**, 043505 (2007).
- 29 42. J. Martin, C. Ringeval and V. Vennin, *Phys. Dark Universe* **5**, 75 (2014).
- 30 43. L. Dai, M. Kamionkowski and J. Wang, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 041302 (2014).
- 31 44. J. L. Cook, E. Dimastrogiovanni, D. A. Easson and L. M. Krauss, *J. Cosmol. Astro-*
32 *part. Phys.* **1504**, 047 (2015).
- 33 45. R. Allahverdi, R. Brandenberger, F. Y. Cyr-Racine and A. Mazumdar, *Annu. Rev.*
34 *Nucl. Part. Sci.* **60**, 27 (2010).
- 35 46. M. A. Amin, M. P. Hertzberg, D. I. Kaiser and J. Karouby, *Int. J. Mod. Phys. D* **24**,
36 1530003 (2014).

Article 2

Titre: On brane cosmological behaviors of Starobinsky inflationary model

Auteurs: A. Belhaj, M. Benali, Y. Hassouni, **Mohamed Oualaid**, M. B. Sedra

Journal: International Journal of Modern Physics A, Vol. 37, No. 08, 2250043 (2022)

Résumé: Dans ce travail, nous étudions d'abord les comportements cosmologiques du modèle inflationnaire branaire de Starobinsky. Particulièrement, nous calculons les paramètres observables associés, y compris ceux de la perturbation. Entre autres, nous découvrons que l'indice spectral et le rapport tenseur-scalaire sont en bon accord avec les données observationnelles de Planck et BICEP/Keck. En faisant varier les valeurs de la masse de Planck à cinq dimensions M_{5p} , nous examinons les comportements thermiques. Plus précisément, nous calculons et examinons les paramètres cosmologiques de réchauffement. Pour une valeur spécifique de la tension de la D3-brane, nous fournissons de bonnes prédictions des quantités impliquées. En prenant $M_{5p} = 10^{12}$ TeV, nous obtenons des températures acceptables de réchauffage.

On brane cosmological behaviors of Starobinsky inflationary model

A. Belhaj,^{*} M. Benali,[†] Y. Hassouni,[‡] and M. Oualaid[§]

*Département de Physique,
Équipe des Sciences de la matière et du rayonnement, ESMaR,
Faculté des Sciences, Université Mohammed V de Rabat, Rabat, Morocco*
** a-belhaj@um5r.ac.ma*
† mohamed_benali4@um5.ac.ma
‡ y.hassouni@um5r.ac.ma
§ mohamed_oualaid@um5.ac.ma

M. B. Sedra

*Moulay Ismail University, FSTE, LSTI, BP-509 Boutalamine,
Errachidia 52000, Morocco*
mysedra@yahoo.fr

Received 14 June 2021

Revised 5 January 2022

Accepted 14 February 2022

Published 8 March 2022

In this paper, we first study the brane cosmological behaviors of Starobinsky inflationary model. In particular, we compute the associated parameters including the perturbation ones. Among others, we find that the spectral index and the tensor-to-scalar ratio are in a good agreement with Planck observational and BICEP/Keck data. Varying the five-dimensional Planck mass M_{5p} values, we investigate the thermal behaviors. Concretely, we calculate and examine the reheating cosmological parameters. For a specific value of the stringy parameter, we provide good predictions of the involved quantities. Taking $M_{5p} = 10^{12}$ TeV, we obtain acceptable reheating temperatures.

Keywords: Inflation; braneworld model; running spectral index; reheating phase.

PACS numbers: 04.60.Cf, 98.80.Bp

1. Introduction

Cosmological models have provided relevant explanations for certain universe problems. Many models have been explored including higher-dimensional supergravity theories in order to evince certain issues.^{1–6} In this context, various cosmological

^{*}Corresponding author.

parameters have been computed and analyzed using different analytical and numerical methods.^{7–26} In particular, contacts with observational constraints have also been investigated.^{27,28}

A close inspection shows that such models are based on the dynamics of the scalar fields. The origin of such spinless particles is still an open question. An examination reveals that many theories could provide possible candidates of such fields. String theory and related models, including brane physics, have opened windows to approach interesting inflationary scenarios. Among others, a model relying on the D3-brane physics has received a relevant interest in connections with type IIB superstring spectrum.^{7–9} This model, called Randall–Sundrum (RSII), has been considered as a promoting one by investigating different scalar potentials involving certain physical parameters. Besides such parameters, the brane tension has also been implemented to study the associated cosmological behaviors.²⁵ Many works exploiting various scalar potentials have been supported by recent experimental finding including Planck ones.^{27,28} In connection with Λ CDM model, the analysis of inflationary models has also been investigated by considering perturbation parameters. Moreover, links with anti-de Sitter (AdS) backgrounds are also established and examined.

Recently, a special emphasis has been put on the reheating scenario. This has been considered as a transition phase between the end of inflation and the beginning of radiation dominated contributions.^{29–32} This scenario relies on three physics quantities, the reheating T_{re} , the effective equation of state ω_{re} and the number of e -folding N_{re} . The inspection of such quantities provides certain constraints on the studied models.

It has been observed that the scalar potential forms play a primordial role in the physical examination of inflationary models embedded in various theories including string theory and modified gravity theories. It turns out that famous illustrations are the chaotic inflation potential and the minimal supersymmetric Standard Model (MSSM) inflation. Besides such investigated models, other potential shapes have been examined and deal with in connections with black hole physics and dark energy quintessence in stringy scenarios. Motivated by the brane universe being a very rich subject, the Starobinsky model has been considered as an excellent model of slow-roll cosmological aspects at large field limits. This model is in a good agreement with the Planck measurements of the cosmic microwave backgrounds (CMB).³³ To inspect inflationary models that meet both the observational data and the Swampland criteria, many studies of the Starobinsky model have been reported including in general relativity. This could open new roads to examine such a model in the brane cosmology and provide a comparative study using the results associated with the Planck data.

The aim of this work is to contribute to these activities by investigating the cosmological and thermal behaviors of the Starobinsky scalar potential using stringy physics. In particular, we first approach the cosmological parameters by introducing the brane tension. Among others, we find that such parameters provide

certain constraints on the scalar field values being in a good agreement with Planck observational and BICEP/Keck data. Varying the five-dimensional Planck mass M_{5p} values, we investigate the thermal behaviors by computing and examining the reheating cosmological parameters. For a specific value of the stringy parameter, we provide good predictions of the involved quantities. Taking $M_{5p} = 10^{12}$ TeV, we find acceptable reheating temperatures.

This paper is structured as follows. In Sec. 2, we give a short review on cosmological quantities in brane physics. In Sec. 3, we study brane cosmological quantities of the Starobinsky model. Section 4 is devoted to the associated thermal behaviors. Conclusions and final remarks are given in Sec. 5.

2. Brane Inflation Models

Before going ahead, we first give a concise review on the brane inflation cosmology developed in many works. Cosmological brane models can be embedded in five-dimensional space–time obtained from type IIB superstring.⁸ To start, we first discuss slow-roll approximations. Then, we move to reconsider cosmological perturbation calculations.^{7–20}

2.1. Slow-roll approximation in brane physics

In type IIB superstring backgrounds, the four-dimensional Einstein equations induced on the D3-brane can be written as

$$G_{\mu\nu} = -\Lambda_4 g_{\mu\nu} + \frac{8\pi}{M_{4p}^2} \tau_{\mu\nu} + \left(\frac{8\pi}{M_{5p}^3} \right)^2 \pi_{\mu\nu} - E_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

where Λ_4 represents the four-dimensional cosmological constant, $\tau_{\mu\nu}$ indicates the matter stress-energy tensor on the D3-brane, and $\pi_{\mu\nu}$ is a tensor quadratic in $\tau_{\mu\nu}$. $E_{\mu\nu}$ is the projection of the five-dimensional Weyl tensor describing the effect of bulk graviton degrees of freedom on brane dynamics. Assuming that the bulk space–time is not purely AdS, the tensor $E_{\mu\nu}$ represents the motion of the matter on the brane. In standard four-dimensional Einstein’s theory, the associated contributions could be neglected and evinced. The effective cosmological constant Λ_4 on the D3-brane can be obtained from the five-dimensional bulk cosmological constant

$$\Lambda_4 = \frac{4\pi}{M_{5p}^3} \left(\Lambda_5 + \frac{4\pi T^2}{3M_{5p}^3} \right), \quad (2.2)$$

where T is the brane tension. For later use, we assume that the universe is considered as a perfect fluid with the energy density ρ and the pressure p . To get the relevant cosmological quantities, the Friedmann equation should be used. Considering a flat Friedmann–Robertson–Walker model, with a scale factor $a(t)$, the brane Friedmann equation takes the following form:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi}{3M_{4p}^2} \rho \left[1 + \frac{\rho}{2T} \right] + \frac{\Lambda_4}{3} + \frac{\mu}{a^4}, \quad (2.3)$$

where $H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$ is the Hubble parameter. Precisely, the first term of Eq. (2.3) is relevant for inflation dynamics involving stringy contributions. It is noted that M_{4p} indicates the four-dimensional Planck mass scale being linked to the five-dimensional one M_{5p} via the relation

$$M_{4p} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left(\frac{M_{5p}^2}{\sqrt{T}} \right) M_{5p}. \quad (2.4)$$

It is noted, in passing, that μ can represent the mass of a black hole living in the bulk via the relation $\mu = M_{\text{BH}} G_N^{(5)}$ where $G_N^{(5)}$ is nothing but the Newton constant in five dimensions obtained from the ten-dimensional type IIB superstring using the dimension reduction scenarios.²² The needed quantities can be obtained by considering an inflationary theory driven by a scalar field ϕ . In such a theory, the dynamics can be approached by taking a perfect fluid with a time-dependent energy density $\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)$ and a pressure $p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$.

Removing the two terms $\frac{\Lambda_4}{3}$ and $\frac{\mu}{a^4}$, the Friedmann-like equation (2.3) becomes

$$H^2 = \frac{8\pi}{3M_{4p}^2} \rho \left(1 + \frac{\rho}{2T} \right). \quad (2.5)$$

In this way, $V(\phi)$ is considered as a relevant energy contribution to inflation, where the scalar field should obey the Klein–Gordon equation of motion

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (2.6)$$

where one has used $V' = \frac{dV}{d\phi}$. It is important to note that the inflation dynamics requires that such a scalar field moves away from the false vacuum and slowly rolls down to the effective potential minimum.²³ In the slow-roll approximations, the cosmological equations (2.5) and (2.6) reduce, respectively, to

$$H^2 \simeq \frac{8\pi}{3M_{4p}^2} V \left(1 + \frac{V}{2T} \right), \quad (2.7)$$

$$\dot{\phi} \simeq -\frac{V'}{3H}. \quad (2.8)$$

It is worth noting that the slow-roll requirement is controlled by two cosmological parameters which read as

$$\epsilon = \frac{M_{4p}^2}{4\pi} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \left[\frac{T(T+V)}{(2T+V)^2} \right], \quad \eta = \frac{M_{4p}^2}{4\pi} \left(\frac{V''}{V} \right) \left[\frac{T}{2T+V} \right].$$

It has been conducted that inflation ends when any of the two parameters equals one. Using slow-roll approximations, these parameters are very small, namely $\max\{\epsilon, |\eta|\} \ll 1$. Thus, it is possible to calculate the number of e -foldings between the beginning and the end of inflation. Indeed, it is given by $N_k = \int_{t_i}^{t_e} H dt$. Taking ϕ_i and ϕ_e being the values of the scalar field at the beginning and at the

end of inflation, respectively, N_k is given by

$$N_k = -\frac{8\pi}{M_{4p}^2} \int_{\phi_i}^{\phi_e} \frac{V}{V'} \left[1 + \frac{V}{2T} \right] d\phi. \quad (2.9)$$

Assuming the inflationary dynamics can take place in the high-energy regime $V \gg T$ of RSII, the brane tension will be relevant in the discussion of the slow-roll parameters. At low energies $V \ll T$, however, the slow-roll parameters reduce to the standard inflation without the brane tension effects. In the high-energy limit required by $V \gg T$, the slow-roll parameters are given by

$$\epsilon = \frac{M_{4p}^2 T}{4\pi} \frac{V'^2}{V^3}, \quad (2.10)$$

$$\eta = \frac{M_{4p}^2 T}{4\pi} \left(\frac{V''}{V^2} \right). \quad (2.11)$$

Similarly, the number of e -foldings is found to be

$$N_k = -\frac{4\pi}{M_{4p}^2 T} \int_{\phi_i}^{\phi_e} \frac{V^2}{V'} d\phi. \quad (2.12)$$

2.2. Cosmological perturbations

Here, we reconsider the discussion of the cosmological perturbations in inflation from D-brane physics. Precisely, we deal with the gauge invariant perturbation parameter $\zeta = -\psi - H \frac{\delta\rho}{\rho}$ with ψ as the curvature perturbation defined on slices of the uniform density. At super-horizon scale,²⁴ it reduces to the curvature perturbation being almost constant. It turns out that this aspect does not depend on the gravitational field equations.²⁶ For a spatially flat hypersurface, one should have $\zeta = H \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}}$, where $\delta\phi$ on the large scale is $|\delta\phi| = \frac{H}{2\pi}$. Using the slow-roll approximations, the spectrum of scalar perturbations reads as

$$A_s^2 = \frac{4}{25} \frac{H^2}{\dot{\phi}^2} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \simeq \frac{512\pi}{75M_{4p}^6} \frac{V^3}{V'^2} \left[\left(1 + \frac{V}{2T} \right)^3 \right]_{k=aH}. \quad (2.13)$$

The amplitude of the tensor perturbations and the tensor spectral index is given by

$$A_T^2 = \frac{4}{25\pi} \left(\frac{H}{M_{4p}} \right)^2 \simeq \frac{32}{75M_{4p}^4} \left[V \left[1 + \frac{V}{2T} \right] \right]_{k=aH}. \quad (2.14)$$

In the high-energy limits, however, these expressions become

$$A_s^2 \simeq \frac{512\pi}{600M_{4p}^6 T^3} \left(\frac{V^6}{V'^2} \right), \quad (2.15)$$

$$A_T^2 \simeq \frac{16}{75M_{4p}^4} \left(\frac{V^2}{T} \right). \quad (2.16)$$

Using the slow-roll approximations,⁸ the scale dependence of the scalar power spectra can be obtained from the scalar spectral index satisfying the following relations:

$$n_s - 1 = \left. \frac{d \ln A_s^2}{d \ln k} \right|_{k=aH} \simeq -6\epsilon + 2\eta, \quad (2.17)$$

$$n_T = \left. \frac{d \ln A_T^2}{d \ln k} \right|_{k=aH} \simeq -2\epsilon. \quad (2.18)$$

Using ϵ and η in high-energy limits, we obtain the Harrison–Zel’dovich spectrum ($n_s = 1$). The running of the spectral index is manifested. In this way, the running of the scalar spectral index is defined as follows:

$$\left. \frac{dn_s}{d \ln k} \right|_{k=aH} \simeq -24\epsilon^2 + 16\epsilon\eta - 2\zeta^2, \quad (2.19)$$

where one has

$$\zeta^2 = \frac{M_{4p}^4 T^2}{16\pi^2} \left(\frac{V' V'''}{V^4} \right).$$

Following Ref. 8, the tensor-to-scalar ratio reads

$$r = \frac{A_T^2}{A_s^2} \simeq \left[\epsilon \left[\frac{1}{1 + \frac{V}{T}} \right] \right]_{k=aH}. \quad (2.20)$$

In the high-energy limits, this ratio reduces to

$$r \simeq \epsilon \frac{T}{V}. \quad (2.21)$$

Having represented fundamental relations on inflation from the type IIB superstring, we move to elaborate certain explicit computations using analytical and numerical approaches.

3. Starobinsky Inflation on the Brane Space

In this section, we study brane inflation models described by a real scalar potential which could be dealt with from type IIB superstring scenarios. An examination reveals that a large class of potentials can involve two independent physical parameters. Concretely, the general picture of the studied potentials takes the following form:

$$V(\phi) = \lambda f \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right), \quad (3.1)$$

where λ indicates the vacuum energy density and ϕ_0 represents the change field variation $\Delta\phi$ during the inflation processes. Several models depending on the function f have been approached giving certain results in different backgrounds including brane and supergravity geometries.

Here, we consider the generalized Starobinsky potential which reads as

$$V(\phi) = V_0 e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{4p}}} \left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{4p}}} - 1 \right)^{\frac{2p}{2p-1}}, \quad (3.2)$$

where one has used

$$V_0 = 6 \left(\frac{2p-1}{4p} \right) M_{4p}^2 M^2 \left(\frac{1}{2p} \right)^{\frac{1}{2p-1}}. \quad (3.3)$$

The mass parameter M will be fixed by COBE numerical data. The present potential will be inspected at high-energy limits where the D3-brane effect is relevant. Roughly, the slow-roll parameters are found to be

$$\epsilon = \frac{2\alpha\chi^2(\chi-1)^{\frac{2-6p}{2p-1}}(1+\chi(p-1)-2p)^2}{3(1-2p)^2}, \quad (3.4)$$

$$\eta = \frac{\alpha\chi^2(\chi-1)^{\frac{2-6p}{2p-1}}(\chi(13p-10p^2-4)+2(p-1)^2\chi^2+2(1-2p)^2)}{3(1-2p)^2}, \quad (3.5)$$

$$\zeta^2 = \frac{\alpha^2\chi^4(\chi-1)^{\frac{4-12p}{2p-1}}(1+\chi(p-1)-2p)F}{9(1-2p)^4}, \quad (3.6)$$

where one has

$$F = 4(p-1)^3 e^{\sqrt{6}\frac{\phi}{M_{4p}}} - 4(2p-1)^3 + \chi^2(-40p^3 + 82p^2 - 55p + 12) + \chi(17p-12)(1-2p)^2, \quad (3.7)$$

$$\chi = e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{4p}}}$$

and where the stringy parameter α is a dimensionless parameter given by

$$\alpha = \frac{T}{V_0\pi}. \quad (3.8)$$

Considering the high-energy limit, and using Eq. (2.12), we get the number of e -foldings which is given by

$$N_k = \frac{2\sqrt{\frac{3}{2}}(2p-1)}{\alpha M_{4p}} \int_{\phi_i}^{\phi_e} \frac{\chi^{-2}(\chi-1)^{\frac{4p-1}{2p-1}}}{1+\chi(p-1)-2p} d\phi.$$

Indeed, the calculation gives

$$N_k = -\frac{3(2p-1)}{\alpha p(1-2p)^2(3p-1)} [I(\phi_e) - I(\phi_i)]. \quad (3.9)$$

The function $I(\phi)$, in terms of χ , can be rewritten as follows:

$$I(\phi) = \chi^{-2}(\chi-1)^{\frac{2-6p}{1-2p}} [\omega_a + \omega_b + \omega_c], \quad (3.10)$$

where the ω -terms are given by

$$\begin{aligned}\omega_a &= -p(3p-1)(1+2\chi-2p), \\ \omega_b &= \chi^2 p^2 (p+2) F_1 \left[1, \frac{2-6p}{1-2p}, \frac{3-8p}{1-2p}, 1-\chi \right], \\ \omega_c &= \chi^2 (p-1)^3 F_1 \left[1, \frac{2-6p}{1-2p}, \frac{3-8p}{1-2p}, \frac{(\chi-1)(p-1)}{p} \right],\end{aligned}$$

where F_1 is a hypergeometric function. Using Eq. (2.15), we find the expression describing the scalar power spectrum

$$A_s^2 = \frac{8\chi^{-8}(1-2p)^2(\chi-1)^{\frac{2-12p}{1-2p}}}{25\pi^2\alpha^3 M_{4p}^4 (1+\chi(p-1)-2p)^2} V_0. \quad (3.11)$$

Using Eq. (2.17), the spectral index n_s is found to be

$$n_s - 1 = -\frac{2\alpha\chi^2(\chi-1)^{\frac{2-6p}{2p-1}} (4\chi^2(p-1)^2 + \chi(-14p^2 + 23p - 8) + 4(1-2p)^2)}{3(1-2p)^2}. \quad (3.12)$$

From Eq. (2.21), the tensor-to-scalar ratio r can be obtained. Indeed, it is given by

$$r = \frac{2\pi\alpha^2\chi^4(\chi-1)^{\frac{2-8p}{2p-1}} (\chi(p-1) - 2p + 1)^2}{3(1-2p)^2}. \quad (3.13)$$

To inspect the validity of the proposed Starobinsky potential, other quantities are needed. Concretely, the running of the scalar spectral index can be computed. Using Eq. (2.19), the running of the spectral index satisfies

$$\frac{dn_s}{d\ln k} = -\frac{2\alpha^2\chi^4(\chi-1)^{\frac{4-12p}{2p-1}} (\chi(p-1) - 2p + 1)E}{9(1-2p)^4}, \quad (3.14)$$

where one has

$$\begin{aligned}E &= \chi^2 (-104p^3 + 274p^2 - 231p + 60) \\ &+ \chi(49p-60)(1-2p)^2 + 20(p-1)^3 e^{\sqrt{6}\frac{\phi}{M_{4p}}} - 20(2p-1)^3.\end{aligned}$$

Instead of being general, we consider only the case $p=1$. In this way, the potential of the Starobinsky inflation reduces to

$$V(\phi) = V_0 \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{4p}}} \right)^2, \quad (3.15)$$

where Eq. (3.3) gives

$$V_0 = \frac{3}{4} M^2 M_{4p}^2. \quad (3.16)$$

Exploiting Eqs. (3.4)–(3.6), the slow-roll parameters become

$$\epsilon = \frac{2\alpha\chi^2}{3(\chi-1)^4}, \quad (3.17)$$

$$\eta = \frac{-\alpha\chi^2(\chi-2)}{3(\chi-1)^4}, \quad (3.18)$$

$$\zeta^2 = \frac{\alpha^2\chi^4(\chi-4)}{9(\chi-1)^7}. \quad (3.19)$$

The constraint associated with the end of inflation $\epsilon(\phi_e) = 1$ is needed to calculate other relevant quantities corresponding to the end of inflation including the number of e -folds and perturbation spectrums. These quantities should depend on the value of the scalar field at the end of inflation. Taking Eq. (3.17), we get

$$\phi_e = \sqrt{\frac{3}{2}}M_{4p} \log \left[1 + \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha + 2\sqrt{6\alpha}}}{\sqrt{6}} \right]. \quad (3.20)$$

For $p = 1$, Eq. (3.9) reduces to

$$N_k = -\frac{3}{\alpha}[J(\phi_e) - J(\phi_i)], \quad (3.21)$$

where the function J , in terms of χ , is given by

$$J(\chi) = \frac{1}{2}\chi^{-2} - 3\chi^{-1} + \chi - 3\ln \chi. \quad (3.22)$$

To reach the values of ϕ_i associated with the number of e -foldings N_k , we should solve (3.21) numerically for a possible range of α . In Fig. 1, the values of the scalar field ϕ_i are illustrated in terms of the string parameter α for different values of the number of e -foldings. Many behaviors are observed. It follows from this figure that

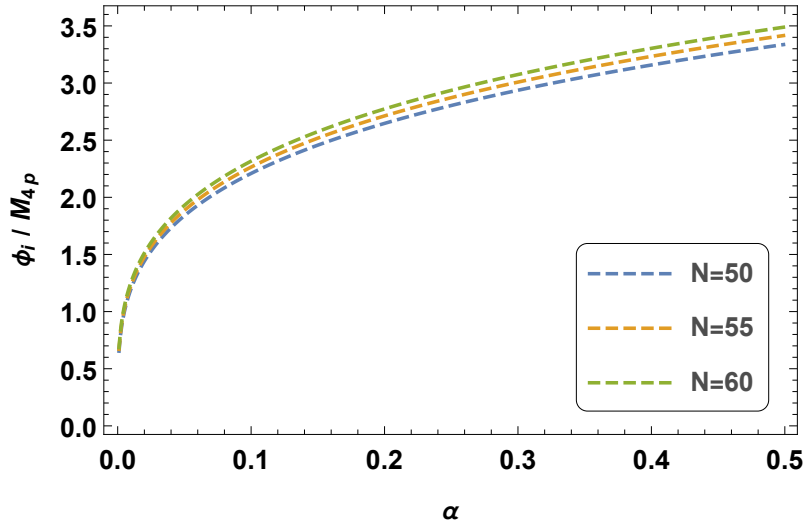


Fig. 1. Scalar field ϕ_i as function of α ($M_{4p} = 1$).

the values of the scalar field ϕ_i increase by increasing either α or N_k . Fixing V_0 , the values of ϕ_i increase in terms of the brane tension T . The values of such a field will be used to investigate the proposed inflationary brane model. To determine its viability, the two observable parameters of the primordial power spectrum being the ratio of the tensor to scalar perturbations should be approached. Indeed, the scalar power spectrum is given by

$$A_s^2 = \frac{8\chi^{-8}(\chi-1)^{10}}{25\pi^2\alpha^3 M_{4p}^4} V_0. \quad (3.23)$$

Using Eq. (3.12), we obtain the spectral index n_s via the relation

$$n_s - 1 = -\frac{2\alpha\chi^2(\chi+4)}{3(\chi-1)^4}. \quad (3.24)$$

With the help of Eq. (3.13), the tensor-to-scalar ratio r is found to be

$$r = \frac{2\pi\alpha^2\chi^4}{3(\chi-1)^6}. \quad (3.25)$$

The corresponding behaviors can be analyzed by fixing N_k . Considering different values of the number of e -folds $N_k = 50$, $N_k = 55$ and $N_k = 60$, such behaviors of the scalar spectral index and the tensor-to-scalar ratio where α varies in range $0.001 \leq \alpha \leq 0.5$ are presented in Fig. 2. A close examination on the curves in the $r - n_s$ plane reveals that r increases in the considered range of the parameter α . Moreover, r and n_s increase by decreasing and increasing N_k , respectively. It turns out that the number of e -foldings can modify the trajectory curve in the plane $(r - n_s)$ for the above-mentioned range of α . Similar behaviors have been observed for the Starobinsky inflation in the $f(R, T)$ theory.³⁴ Taking $p = 1$, however, we remark that the range of n_s , in Fig. 2, is different than the Starobinsky inflation in general relativity.³³ Moreover, the variation of the parameter α can change r

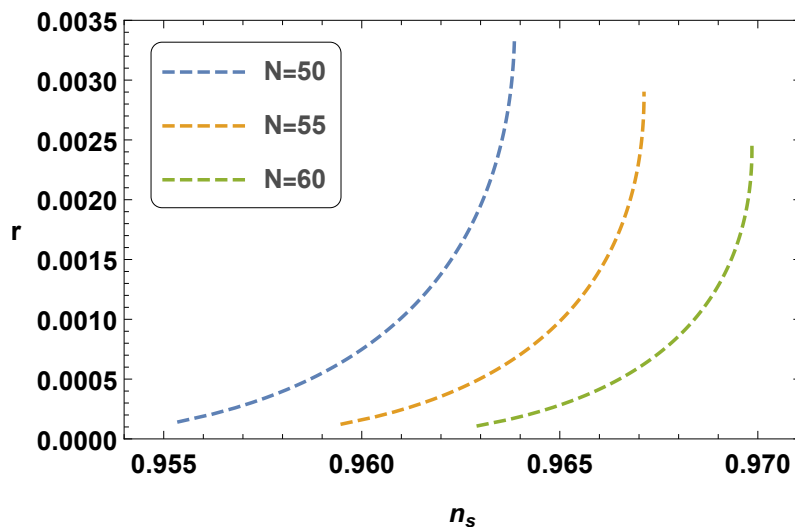


Fig. 2. Scalar spectral index n_s versus the tensor-to-scalar ratio r for $0.001 \leq \alpha \leq 0.5$.

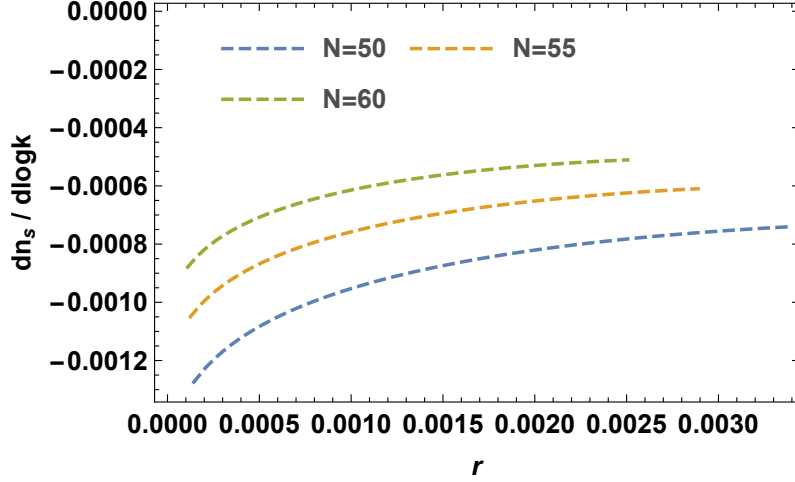


Fig. 3. Running of the spectral indices $\frac{dn_s}{d \ln k}$ versus r .

and n_s . In this way, the brane model of the Starobinsky inflation could provide interesting predictions for n_s and r . The relevant point here concerns the values of n_s and r which are matching with the Planck data 2018.²⁸ It is noted that the results corresponding to the $(r - n_s)$ plane in such a range of α match with the results of BICEP/Keck data.³³ From Eq. (3.14), we can get the running of the scalar spectral index. It reads as

$$\frac{dn_s}{d \ln k} = -\frac{2\alpha^2 \chi^4 (\chi^2 + 11\chi + 20)}{9(\chi - 1)^8}. \quad (3.26)$$

To obtain the results corresponding to Planck findings, the same constraint on α should be taken into account. Figure 3 illustrates certain aspects of the running of the scalar spectral index in terms of r .

Considering different values of r , relevant results appear in such a figure. It has been remarked nonzero running values for r in the range $5.10^{-5} \leq r \leq 3.10^{-3}$. The Starobinsky brane cosmological model exhibits a good compatibility with the associated standard cosmological model.^{35,36} It follows that the values of the running scalar spectral index are close to the observational data. To inspect the V_0 amplitude behavior of the potential, we examine the brane effect in the presence of the scalar field. Indeed, the associated expression should be calculated. Using Eqs. (3.8) and (3.23), we can get the expression of V_0 . Computations give

$$V_0 = \left[\frac{25A_S^2 T^3 \chi^8}{8\pi(\chi - 1)^{10}} \right]^{\frac{1}{4}} M_{4p}. \quad (3.27)$$

Exploiting the relation between the four-dimensional and five-dimensional Planck mass, we obtain

$$V_0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left[\frac{25A_S^2 T^3 \chi^8}{8\pi(\chi - 1)^{10}} \right]^{\frac{1}{4}} M_{5p}^3. \quad (3.28)$$

Table 1. The constraints on the amplitude of the Starobinsky model for different values of N_k by taking two values of the five-dimensional Planck mass, where the dimensionless parameter α is in the range $0.001 \leq \alpha \leq 0.5$.

N_k	$M_{5p} = 10^5 \text{ TeV}$ and $T = 1.60 \times 10^{-3} \text{ TeV}^4$	$M_{5p} = 10^{12} \text{ TeV}$ and $T = 1.60 \times 10^{39} \text{ TeV}^4$
	Constraint on V_0 [TeV]	Constraint on V_0 [TeV]
50	$0.684 \times 10^3 \lesssim V_0 \lesssim 1.479 \times 10^3$	$0.119 \times 10^{10} \lesssim V_0 \lesssim 5.13 \times 10^{10}$
55	$0.676 \times 10^3 \lesssim V_0 \lesssim 1.460 \times 10^3$	$0.109 \times 10^{10} \lesssim V_0 \lesssim 5.07 \times 10^{10}$
60	$0.670 \times 10^3 \lesssim V_0 \lesssim 1.442 \times 10^3$	$0.108 \times 10^{10} \lesssim V_0 \lesssim 5.02 \times 10^{10}$

In order to find an upper bound of the five-dimensional Planck mass, we consider the inflationary dynamics in the high-energy regime $V \gg T$. During the inflation, the Starobinsky potential should satisfy the constraint $V \simeq V_0$. Using Eq. (2.4) and the last condition for the high-energy regime, we get the following constraint on the potential amplitude

$$V_0 \gg \frac{3M_{5p}^6}{4\pi M_{4p}^2}. \quad (3.29)$$

Considering Eqs. (3.23) and (3.29), the upper bound for the five-dimensional Planck mass is given by

$$M_{5p} \ll \left(\frac{100A_S^2 \alpha^3 \chi^8}{24\pi(\chi - 1)^{10}} \right)^{\frac{1}{6}} M_{4p}. \quad (3.30)$$

Using Eq. (3.30), we can obtain the five-dimensional Planck mass around $M_{5p} \ll 10^{14} \text{ TeV}$. It is possible to take certain values of the five-dimensional Planck mass up to such a condition. In Table 1, we provide the constraint on V_0 by taking two values of the five-dimensional Planck mass $M_{5p} = 10^5 \text{ TeV}$ and $M_{5p} = 10^{12} \text{ TeV}$ corresponding to the brane tensions $T = 1.60 \times 10^{-3} \text{ TeV}^4$ and $T = 1.60 \times 10^{39} \text{ TeV}^4$, respectively.³⁷ It has been remarked from Table 1 that the amplitude of the Starobinsky model V_0 takes sub-Planckian values. It increases by increasing the five-dimensional Planck mass. A close inspection reveals that similar behaviors have been obtained by considering different potential models and taking the values of the five-dimensional Planck mass $M_{5p} = 10^5 \text{ TeV}$ and $M_{5p} = 10^{12} \text{ TeV}$.^{38,39}

4. Reheating Predictions of Starobinsky Model in the Brane Framework

In this section, we discuss the reheating aspects of the present potential by calculating two relevant quantities namely: N_{re} and T_{re} in terms of the certain cosmological parameters in the framework of branes. The associated computation can be found in many places.^{29–32} It is noted that the reheating phase could bring physical data supporting proposed cosmological inflationary models. During such a phase, the scalar field oscillates around its potential minimum and the dominant energy density is brought by an effective equation-of-state parameter (EoS) ω_{re} . This state

parameter takes certain values namely $\omega_{\text{re}} = -1/3, 0, 2/3$ and 1. The energy density is related to the scale factor as follows $\rho \propto a^{-3(1+\omega_{\text{re}})}$. Indeed, one has

$$\frac{\rho_{\text{end}}}{\rho_{\text{re}}} = \left(\frac{a_{\text{end}}}{a_{\text{re}}} \right)^{-3(1+\omega_{\text{re}})}, \quad (4.1)$$

where the subscripts *end* and *re* indicate the end of inflation and the end of reheating phase, respectively. For the braneworld case, we have $\rho_{\text{end}} = \left(\frac{6}{5}V_{\text{end}}\right)^{38}$. The number of *e*-folds of reheating is related to the scale factor both at the end of inflation and reheating.³⁰ Indeed, one has

$$e^{-N_{\text{re}}} = \frac{a_{\text{end}}}{a_{\text{re}}}. \quad (4.2)$$

Calculations show that one can write

$$N_{\text{re}} = \frac{1}{3(1+\omega_{\text{re}})} \ln \left(\frac{6}{5} \frac{V_{\text{end}}}{\rho_{\text{re}}} \right). \quad (4.3)$$

At the end of the reheating phase, the energy density can be given by

$$\rho_{\text{re}} = \frac{\pi^2}{30} g_{\text{re}} T_{\text{re}}^4, \quad (4.4)$$

where g_{re} indicates the number of internal degrees of freedom of relativistic particles at the end of reheating, which could be around $g_{\text{re}} = \mathcal{O}(100)$ for $\gtrsim 175$ GeV supported by Standard Model data of particle physics.^{31,32} The entropy conservation allows one to write the relation between the reheating temperature T_{re} and the today one T_0 . Indeed, one gets

$$T_{\text{re}} = T_0 \left(\frac{a_0}{a_{\text{eq}}} \right) e^{N_{\text{RD}}} \left(\frac{43}{11g_{\text{re}}} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (4.5)$$

where N_{RD} is the length of radiation dominated epoch in *e*-folds. According to Ref. 30, $\frac{a_0}{a_{\text{eq}}}$ reads as

$$\frac{a_0}{a_{\text{eq}}} = \frac{a_0 H_k}{k} e^{-N_k} e^{-N_{\text{re}}} e^{-N_{\text{RD}}}. \quad (4.6)$$

For instance, T_{re} can be written as

$$T_{\text{re}} = \left(\frac{43}{11g_{\text{re}}} \right)^{1/3} \left(\frac{a_0 T_0}{k} \right) H_k e^{-N_k} e^{-N_{\text{re}}}. \quad (4.7)$$

Inserting Eq. (4.7) in Eq. (4.3), one finds

$$N_{\text{re}} = \frac{4}{1-3\omega_{\text{re}}} \left[-\frac{1}{4} \ln \left(\frac{3^2 \cdot 5}{\pi^2 g_{\text{re}}} \right) - \frac{1}{3} \ln \left(\frac{11g_{\text{re}}}{43} \right) - \ln \left(\frac{k}{a_0 T_0} \right) - \ln \left(\frac{V_{\text{end}}^{1/4}}{H_k} \right) - N_k \right]. \quad (4.8)$$

Taking $g_{\text{re}} \sim \mathcal{O}(100)$ and using the pivot scale $\frac{k}{a_0} = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ from Planck constraints, one obtains

$$N_{\text{re}} = \frac{4}{1 - 3\omega_{\text{re}}} \left[61.6 - N_k - \ln \left(\frac{V_{\text{end}}^{1/4}}{H_k} \right) \right]. \quad (4.9)$$

H_k can be given by defining the tensor-to-scalar ratio $r = A_T^2/A_S^2$. Considering A_S^2 at the pivot scale and exploiting the expression for A_T^2 in the high-energy limit Eq. (2.16), one gets

$$H_k = \left(\frac{25\pi}{4} r A_S^2 M_{4p}^2 \right)^{1/2}. \quad (4.10)$$

Equations (4.3) and (4.4) give the reheating temperature

$$T_{\text{re}} = \left[\left(\frac{43}{11g_{\text{re}}} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{a_0 T_0}{k} H_k e^{-N_k} \left[\frac{3^2 \cdot 5 V_{\text{end}}}{\pi^2 g_{\text{re}}} \right]^{-\frac{1}{3(1+\omega_{\text{re}})}} \right]^{\frac{3(1+\omega_{\text{re}})}{3\omega_{\text{re}}-1}}. \quad (4.11)$$

It is recalled that this thermal quantity depends on many cosmological quantities, which will be approached using numerical methods. Indeed of being general, we investigate the reheating predictions of the Starobinsky potential for $p = 1$. In

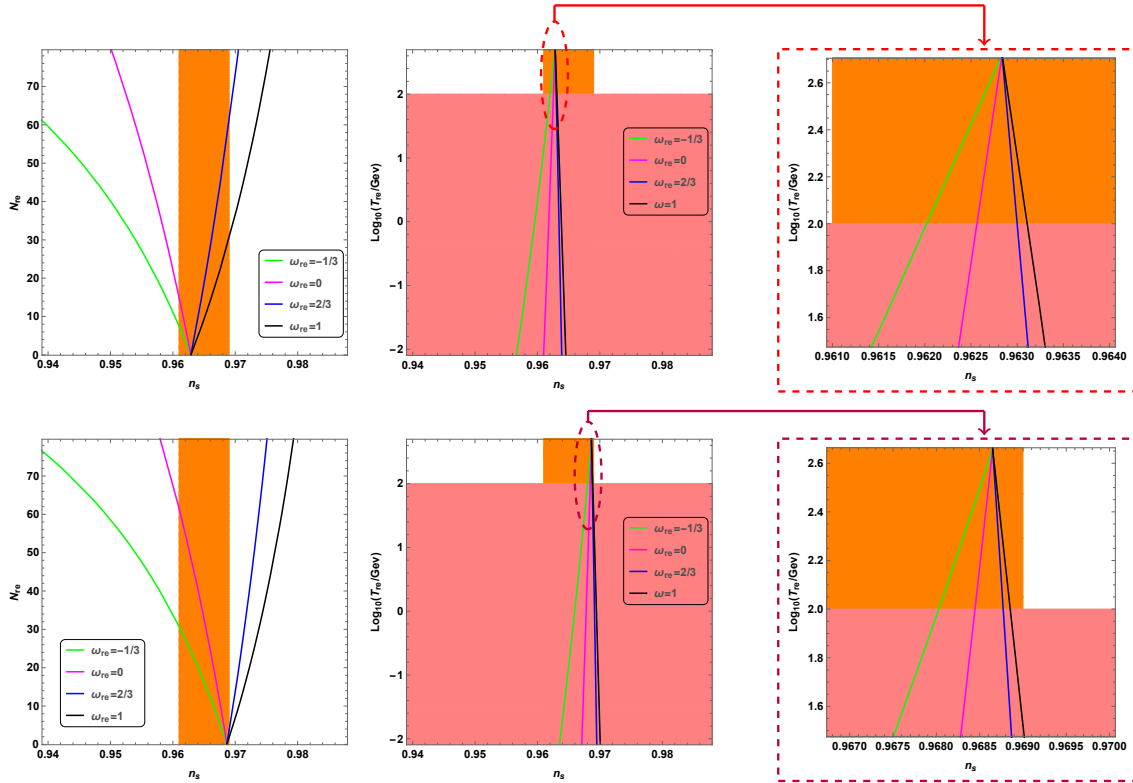


Fig. 4. (Color online) N_{re} and T_{re} variation as function of n_s for Starobinsky $p = 1$ model. The top panels $\alpha = 0.01$ and the bottom $\alpha = 0.05$ by taking $M_{5p} = 10^5 \text{ TeV}$ and $T = 1.60 \times 10^{-3} \text{ TeV}^4$.

particular, we examine the variation of the number of e -folds reheating N_{re} and the reheating temperature T_{re} in terms of the scalar spectral index n_s . To inspect the associated effect, we consider two values of five-dimensional Planck mass $M_{5p} = 10^5$ TeV and $M_{5p} = 10^{12}$ TeV by taking a specific range of the stringy parameter α . For simplicity reasons, however, we deal with only two values which are $\alpha = 0.001$ and $\alpha = 0.05$ associated with the number of e -folds $N_k = 60$. In Fig. 4, we illustrate the number of e -folds reheating and the maximum reheating temperature for the lower limit of the five-dimensional Planck mass $M_{5p} = 10^5$ TeV by varying the effective equation-of-state parameter ω_{re} , taking the values $-1/3$, 0 , $2/3$ and 1 . A close examination shows that the point at which the curves intersect at instantaneous reheating point is associated with a vanishing limit of N_{re} . However, it has been observed that this intersecting point corresponds to $n_s = 0.962$ for $\alpha = 0.001$

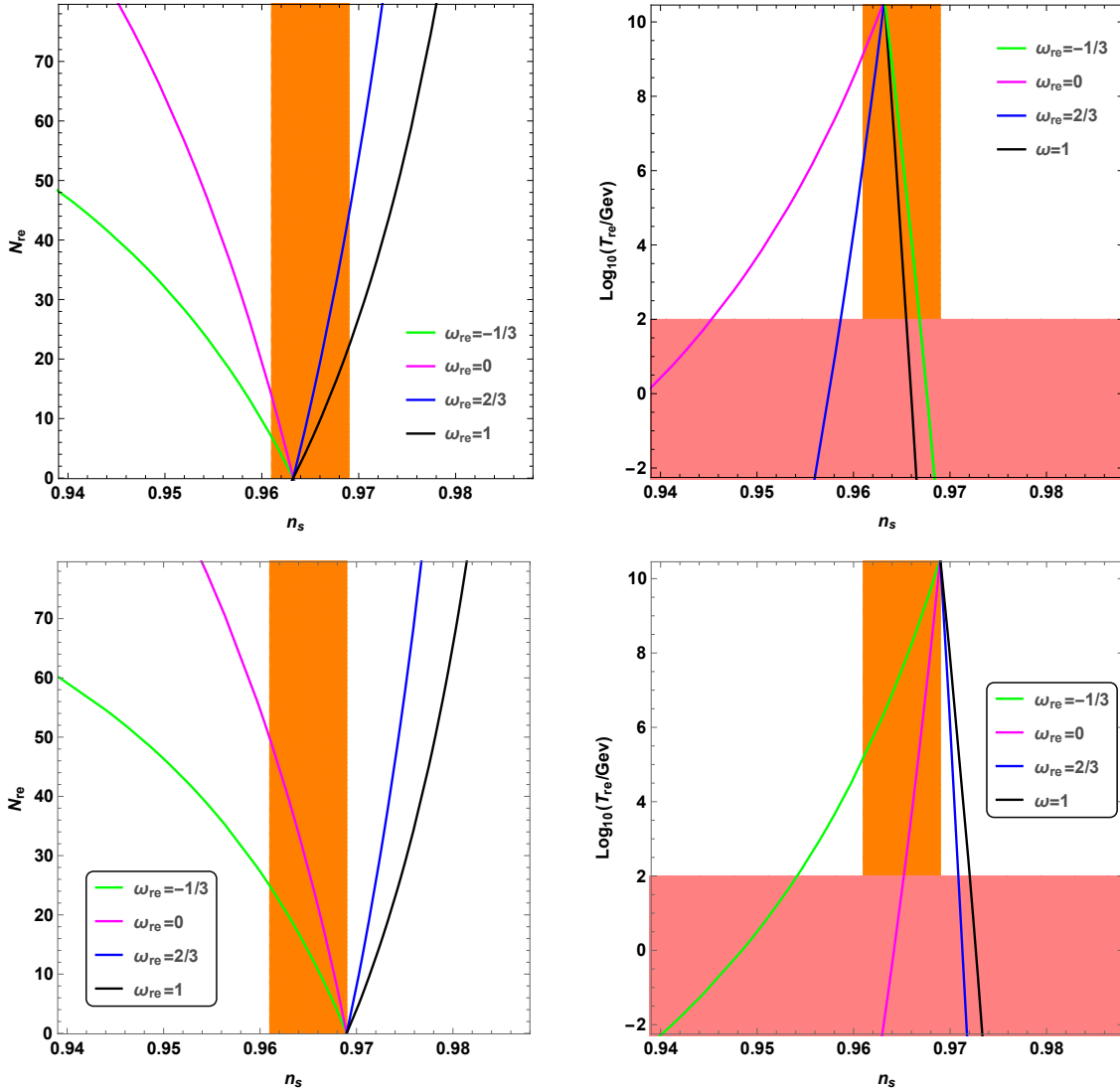


Fig. 5. N_{re} and T_{re} variation as function of n_s for Starobinsky $p = 1$ model. The top panels $\alpha = 0.01$ and the bottom $\alpha = 0.05$ by taking $M_{5p} = 10^{12}$ TeV and $T = 1.60 \times 10^{39}$ TeV⁴.

and $n_s = 0.968$ for $\alpha = 0.05$. Moreover, the vertical orange region concerns the Planck-2018 bounds being $n_s = 0.965 \pm 0.004$.²⁸ In particular, we note that the maximum reheating temperature is about $T_{\text{re}} \sim 10^3$ GeV for $M_{5p} = 10^5$ TeV. The pink region represents the temperatures being below the electroweak scale $T < 100$ GeV. For $0 < \omega_{\text{re}} < 1$, it has been observed a compatibility with the Planck bounds-2018 on n_s by taking $\alpha = 0.001$. For $\alpha = 0.05$, however, only the models corresponding to $\omega_{\text{re}} = -1/3$ and $\omega_{\text{re}} = 0$ match with the Planck bounds-2018. In this way, the value $\alpha = 0.001$ could provide a good result compared to $\alpha = 0.05$. In Fig. 5, we represent the cosmological behaviors of N_{re} and T_{re} as functions of the scalar spectral index n_s by taking the same values of α and $M_{5p} = 10^{12}$ TeV for $\omega_{\text{re}} = -1/3, 0, 2/3$ and 1. It has been remarked that the maximum reheating temperature is around $T_{\text{re}} \sim 10^{11}$ GeV for the five-dimensional $M_{5p} = 10^{12}$ TeV. It follows from Figs. 4 and 5 that n_s associated with the point where all the curves intersect at an instantaneous reheating increases by increasing the dimensionless parameter α . Moreover, the reheating temperature increases by increasing the five-dimensional Planck mass. Similar behaviors are observed in the natural, Hilitop, Higgs-like and the exponential SUSY inflation potentials used in the RSII brane model.³⁸

5. Conclusion

In this work, we have studied a cosmological inflation model from RSII brane physics. Concretely, we have dealt with the Starobinsky model using brane physics. Precisely, we have approached the involved cosmological parameters using analytical and numerical methods. In terms of the brane tension, we have computed inflation parameters including the perturbation ones. Performing analytical and numerical computation, constraints on the scalar field have been provided. Concretely, we have remarked that the Starobinsky brane cosmological model shows a relevant compatibility not only with the standard Starobinsky model but also with other results of the brane inflation. The obtained findings are in a good agreement with Planck observational and BICEP/Keck data. In the end of this work, we have investigated the thermal behaviors by computing and examining the reheating cosmological parameters by varying the five-dimensional Planck mass M_{5p} values. For a specific value of the stringy parameter, we have provided good predictions of the involved quantities. After that, we have obtained acceptable reheating temperatures for $M_{5p} = 10^{12}$ TeV.

Acknowledgments

One of the authors (A. Belhaj) would like to thank mathematics department of FST at Sulttan Moulay Slimane University in Beni Mellal for hospitality. In particular, he would like to thank the administrative staff (Bahija) and N. Askour for scientific helps. This work is partially supported by the ICTP through AF.

References

1. S. Kachru, R. Kallosh, A. Linde, J. Maldacena, L. McAllister and S. P. Trivedi, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **0310**, 013 (2003), arXiv:hep-th/0308055.
2. L. Pilo, A. Riotto and A. Zaffaroni, *J. High Energy Phys.* **0407**, 052 (2004), arXiv:hep-th/0401004.
3. A. Linde, *eConf C040802*, L024 (2004).
4. A. Linde, *J. Phys. Conf. Ser.* **24**, 151 (2005), arXiv:hep-th/0503195.
5. J. M. Cline, Inflation from string theory, arXiv:hep-th/0501179.
6. C. P. Burgess, *Pramana* **63**, 1269 (2004), arXiv:hep-th/0408037.
7. A. Belhaj, P. Diaz, M. Naciri and A. Segui, *Int. J. Mod. Phys. D* **17**, 911 (2008), arXiv:hep-th/0701211.
8. R. Maartens, D. Wands, B. A. Bassett and I. P. C. Heard, *Phys. Rev. D* **62**, 041301 (2000), arXiv:hep-ph/9912464.
9. E. Papantonopoulos and V. Zamarias, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **10**, 001 (2004), arXiv:gr-qc/0403090.
10. R. Allahverdi, J. Garcia-Bellido, K. Enqvist and A. Mazumdar, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 191304 (2006), arXiv:hep-ph/0605035.
11. D. H. Lyth, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **04**, 006 (2007), arXiv:hep-ph/0605283.
12. J. C. Bueno Sanchez, K. Dimopoulos and D. H. Lyth, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **0701**, 015 (2007), arXiv:hep-ph/0608299.
13. M. Becker, L. Leblond and S. E. Shandera, *Phys. Rev. D* **76**, 123516 (2007), arXiv:0709.1170.
14. K. Skenderis and P. K. Townsend, *J. Phys. A* **40**, 6733 (2007), arXiv:hep-th/0610253.
15. D. Astefanesei, K. Goldstein and S. Mahapatra, *Gen. Relativ. Gravit.* **40**, 2069 (2008), arXiv:hep-th/0611140.
16. R. Kallosh, N. Sivanandam and M. Soroush, *J. High Energy Phys.* **0603**, 060 (2006), arXiv:hep-th/0602005.
17. A. R. Liddle, Introduction to cosmological inflation, arXiv:astro-ph/9901124.
18. E. Papantonopoulos and V. Zamarias, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **11**, 005 (2006), arXiv:gr-qc/0608026.
19. E. E. Flanagan, S.-H. Tye and I. Wasserman, *Phys. Rev. D* **62**, 044039 (2000), arXiv:hep-ph/9910498.
20. R. Maartens, *Living Rev. Rel.* **7**, 7 (2004), arXiv:gr-qc/0312059.
21. P. Binetruy, C. Deffayet, U. Ellwanger and D. Langlois, *Phys. Lett. B* **477**, 2815 (2000), arXiv:hep-th/9910219.
22. P. Brax, C. Van de Bruck and A. C. Davis, *Rep. Prog. Phys.* **67**, 2183 (2004), arXiv:hep-th/0404011.
23. A. D. Linde, *Phys. Lett. B* **108**, 389 (1982).
24. A. Riotto, Inflation and the theory of cosmological perturbations, arXiv:hep-ph/0210162.
25. J. Martin, C. Ringeval, R. Trotta and V. Vennin, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **03**, 039 (2014), arXiv:1312.3529.
26. D. Wands, K. A. Malik, D. H. Lyth and A. R. Liddle, *Phys. Rev. D* **62**, 043527 (2000), arXiv:astro-ph/0003278.
27. Planck Collab. (P. A. R. Ade *et al.*), *Astron. Astrophys.* **594**, A20 (2016), arXiv:1502.02114.
28. Planck Collab. (Y. Akrami *et al.*), Planck 2018 results. X. Constraints on inflation, arXiv:1807.06211.
29. L. Dai, M. Kamionkowski and J. Wang, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 041302 (2014), arXiv:1404.6704.

30. J. L. Cook, E. Dimastrogiovanni, D. A. Easson and L. M. Krauss, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **1504**, 047 (2015), arXiv:1502.04673.
31. R. Allahverdi, R. Brandenberger, F. Y. Cyr-Racine and A. Mazumdar, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **60**, 27 (2010), arXiv:1001.2600.
32. M. A. Amin, M. P. Hertzberg, D. I. Kaiser and J. Karouby, *Int. J. Mod. Phys. D* **24**, 1530003 (2014), arXiv:1410.3808.
33. BICEP/Keck Collab. (P. A. R. Ade et al.), *Phys. Rev. Lett.* **127**, 15 (2021), arXiv:2110.00483.
34. T. Shiromizu, K. I. Maeda and M. Sasaki, *Phys. Rev. D* **62**, 024012 (2000), arXiv:gr-qc/9910076.
35. F. Renzi, M. Shokri and A. Melchiorri, What is the amplitude of the gravitational waves background expected in the Starobinsky model?, arXiv:1909.08014.
36. S. Meza, D. Altamirano, M. Zahid Mughal and C. Rojas, Numerical analysis of the generalized Starobinsky inflationary model, arXiv:2104.01139v1.
37. T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla and C. Skordis, *Phys. Rep.* **513**, 189 (2012), arXiv:1106.2476.
38. C. Osses, N. Videla and G. Panotopoulos, *Eur. Phys. J. C* **81**, 485 (2021), arXiv:2101.08882
39. A. Mohammadi, T. Golanbari, S. Nasri and K. Saaidi, Brane inflation: Swampland criteria, TCC, and reheating constraint, arXiv:2006.09489.

Article 3

Titre: Reconstructing slow-roll Scalar-Tensor Gauss-Bonnet single field inflation from running spectral data

Auteurs: A. Belhaj H. Es-Sobbahi, **Mohamed Oualaid**, E. Torrente-Lujan

Journal: <https://arxiv.org/abs/2108.11881>.

Résumé: Nous examinons l'inflation cosmologique d'une famille de modèles scalaires-tensoriels caractérisés par des couplages cinétiques non minimaux dépendant du scalaire et des termes de Gauss-Bonnet. En utilisant le scénario du roulement lent, nous calculons en détail certaines observables comme les indices spectraux, le rapport scalaire-tensoriel, leur déroulement et leur déroulement du déroulement en fonction des paramètres qui caractérisent le modèle scalaire-tensoriel. Des équations reliant les perturbations scalaires et tensorielles et les paramètres de fonctionnement d'ordre supérieur sont présentées et examinées. Nous trouvons des expressions détaillées pour les contraintes entre ces paramètres. Pour un modèle spécifique, nous analysons ces quantités. Ensuite, nous établissons un contact avec les dernières données observationnelles de Planck.

Reconstructing slow-roll Scalar-Tensor Gauss-Bonnet single field inflation from running spectral data

A. Belhaj^{1*}, H. Es-Sobbahi^{2†}, M. Oualaid^{1‡}, E. Torrente-Lujan^{3,4§}

¹ Dept. de Physique, Equipe des Sciences de la matière et du rayonnement, ESMaR

Faculty of Science, Mohammed V University, Rabat, Morocco

² LHEP-MS, Faculty of Science, Mohammed V University, Rabat, Morocco

³ IFT, Dep. de Física, Univ. de Murcia, Campus de Espinardo, E-30100 Murcia, Spain

⁴ TH-division, CERN, CH-1211 Geneva 23, Switzerland

August 27, 2021

Abstract

We examine cosmological inflation in a broad family of scalar-tensor models characterized by scalar-dependent non minimal kinetic couplings and Gauss-Bonnet terms. Using a slow roll-approximation, we compute in detail theoretical expectations of observables as spectral indexes, scalar-to-tensor ratio, their running and their running of the running in terms of the parameters which characterize the scalar-tensor model. Hierarchies of consistency equations relating scalar and tensor perturbations and higher order running parameters are presented and examined at the slow roll approximation for the kind of models of interest in this work. From We find detailed expressions for constraints among these parameters. For a specific model, we analyse such quantities and make contact with latest Planck observational data .

Keywords: Inflation with non-minimal kinetic, Gauss-Bonnet terms, Running spectral data.

*a-belhaj@um5r.ac.ma

†essobbahi@

‡oualaid@

§torrente@cern.ch

¶Authors in alphabetical order.

Contents

1	Introduction	2
2	The model and background equations	4
3	First and higher order perturbations. Running Consistency equations	8
4	A simple toy model: the monomial model	10
5	Concluding and further remarks	13

1 Introduction

Gravity Einstein theory, general relativity (GR) has repeatedly demonstrated its effectiveness at present epochs of the cosmological evolution at least, even in extreme environments: in the weak and strong field regimes in cosmological epochs down to the end of the radiation dominated era. This is the case for the recent observation of gravitational waves [1] or observations, for the first time presented, consistent with expectations for the shadow of a Kerr black hole (BH) as predicted by standard Einsteins-Hilbert (EH) general relativity [2, 3]. Less is known however about the behaviour of gravity at earlier times, at the beginning of the radiation era or, specially at a, highly probable, inflation era. Hints for modifications to the minimal Einstein theory, defined by adding new terms to the EH action, might appear at these very early times in the history of the Universe.

The cosmic inflation scenario [4, 5] has indeed been favored, albeit strongly constrained, by the latest observational data [6–8] as a suitable pre-Big Bang (BB) scenario for the early universe, providing the circumstantial explanation to flatness, horizon and monopole problems, among others, for the standard hot BB cosmology [9–14]. Inflation provides also, most relevantly for the scope of this work, an account of fluctuations which constitute the seeds for the large scale structure and the observed CMB anisotropies, as well as predicts a nearly scale invariant power spectrum [15–22].

Given the observational CMB data, “bottom-up” methods has been explored to reconstruct the terms of a “true” gravitational lagrangian with a scalar sector [8]. These include Taylor expansions of V (and possibly other functions deforming EH gravity), free-form spline searches, non-parametric techniques or more theoretical approaches where general Lagrangians including “all” the possible terms consistent, only restricted by mild symmetry or technical assumptions, are considered. While these techniques will be more and more important in the future, at present level of resolution “top-down” theoretical approaches are certainly useful. In this analysis specific theoretical models, beyond minimal GR, with a small number of free parameters are explored. These toy models allow us to draw, hopefully, clean conclusions about the potential phenomenological interest of some

or other types of extra terms [23–29].

One of the main findings consistently drawn from Planck data is the, mild but not null, scale dependence of the scalar spectral index n_S and a practically negligible running. The index n_S is different from one at least at 8σ [8]. This result is consistent with a slow-roll inflation epoch with a natural exit. Constraints on the tensor-to-scalar ratio r are also very stringent.

Planck observations have substantially tightened the constraints on slow-roll inflationary models, ruling out for example hybrid models with $n_S > 1$ and power-law inflation. Monomial potential models with $V(\varphi) \propto \varphi^n$ with $n \geq 2$ and low-scale SUSY models are strongly disfavoured [8, 30]. The aim of this work is to contribute these activities by investigating the slow-roll Scalar-Tensor inflation from running spectral data. Using the slow-roll approximation, we can relate the primordial perturbations to the scalar potential, other non-minimal scalar-dependent parameters appearing in the model and its derivatives. This scenario allows us to directly constrain the parameters defining the model. More precisely, we provide accurate expressions for observable quantities as the scalar and tensorial spectral indexes n_S, n_T and the scalar-to-tensor ratio r as their running counterparts in some specific non-minimal gravitational models. These models include simple but not trivial scalar non-minimal kinetic terms and Gauss-Bonnet terms, both of them some scalar-dependent couplings.

Let us summarize quantitatively the latest Planck results [8] which be relevant for some part of this work. The scalar spectral index n_S is different from one at least at 8σ with a practically negligible running and running of the running: $n_S = 0.959 \pm 0.006, r < 0.10(95\%CL)$. The Planck 2018 already constraints running and running of running parameters: $dn_S/dlnk = 0.01 \pm 0.01, d^2n_S/dlnk^2 = 0.02 \pm 0.01$ ($CL \simeq 68\%$), therefore is becoming theoretically relevant to give expressions for these parameters in models beyond GR. Constraints on the tensor-to-scalar ratio r assuming the consistency relation, $n_T = -r/8$, which is the case for slow-roll inflation driven by a single scalar field with a canonical kinetic term. It is possible to get upper bounds on r without imposing the consistency condition. Deviations of this conditions do indeed occur in the models of inflation based on generic scalar-tensor theories which are to be presented in this work. Finally the Planck observations also constraint the slow-roll parameters. They obtain [8], at % 95 CL, $\epsilon_1 < 0.004 - 0.006, \epsilon_2 = 0.030 \pm 0.006$.

The structure of this work is as follows. In section 2, we present the model: a scalar tensor model with minimal coupling of the scalar field to scalar curvature, non-minimal kinetic coupling of the scalar field to the Einstein’s tensor and coupling of the scalar field to the 4d Gauss-Bonnet invariant. We get the equations of motion in a flat FRW background and define slow-roll parameters. In section 3, we analyse the first and second order scalar and tensorial perturbations for this model and provide expressions for the scalar spectral index and tensor/scalar ratio in terms of the slow-roll parameters. In section 4, we give an explicit model. Section 5 is devoted to further physical discussion,

summary and conclusions.

2 The model and background equations

We investigate generic scalar-tensor models with minimal Einstein-Hilbert sector, non-minimal kinetic coupling of the scalar field to the Einstein's tensor and coupling of the scalar field to the Gauss-Bonnet (GB) 4-dimensional invariant. The associated action, in the Einstein Frame, can be written as

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} R - \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi) + J_1(\varphi) G_{\mu\nu} \partial^\mu \varphi \partial^\nu \varphi - J_2(\varphi) \mathcal{G}(R) \right] \quad (2.1)$$

where $G_{\mu\nu}$ is the Einstein's tensor, and \mathcal{G} is the GB 4-dimensional invariant given by

$$\mathcal{G} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho}, \quad (2.2)$$

where one has taken $\kappa^2 = M_p^{-2} = 8\pi G = 1$. φ is a real scalar field with a potential $V(\varphi)$, which, together with J_1 and J_2 , differentiable functions of φ , describe the model. R is the Ricci scalar. A possible cosmological constant Λ can be included through the scalar potential V . The family of models defined by the above action, (2.1), depends on three scalar dependent quantities V , J_1 and J_2 which should be provided by the UV completion of the theory. As the scope of this work is model-independent, they are left arbitrary, they are chosen with the only restriction of producing suitable inflation observables, matching the observational evidence [6–8].

In what follows, we assume a spatially flat FRW, homogeneous and isotropic, background metric in any of the forms

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 d\vec{r}^2 \quad (2.3)$$

or $ds^2 = a(\eta)^2(-d\eta^2 + d\vec{r}^2)$ where a is a scale factor. The metric and the scalar field equations of motion can be written as follows, using (2.3), [23, 29, 31]

$$3H^2 = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V + 9H^2 J_1 \dot{\varphi}^2 + 24H^3 J_2, \quad (2.4)$$

$$-2\dot{H} = \dot{\varphi}^2 + 6H^2 J_1 \dot{\varphi}^2 - 2\frac{d}{dt}(H J_1 \dot{\varphi}^2) + 8H^3 J_2 - 8\frac{d}{dt}(H^2 J_2), \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V' &= -24H^2 (H^2 + \dot{H}) J_2' - 6H J_1 \dot{\varphi} (3H^2 + 2\dot{H}) \\ &\quad - 3H^2 (2J_1 \ddot{\varphi} + J_1' \dot{\varphi}^2) \end{aligned} \quad (2.6)$$

where the dot represents derivatives with respect the time variable t , $H \equiv \dot{a}/a$ is the Hubble parameter and J_1' and J_2' are derivatives with respect φ . Only two of the previous equations are independent due to the existence of the Bianchi identities. Taking $J_1 = J_2 = 0$, we recover explicitly the standard Friedman equations with a single scalar field

$$3H^2 = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V, \quad (2.7)$$

$$-2\dot{H} = \dot{\varphi}^2, \quad (2.8)$$

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V' = 0. \quad (2.9)$$

After a simple computation, we get from the field equations (2.4)-(2.6) expressions for $\dot{\varphi}^2$ and V as follows

$$V = H^2 \left(3 - \epsilon_1 - \frac{5}{2}\Delta_1 - 2k_1 - \frac{1}{2}\Delta_1(\Delta_2 - \epsilon_1) - \frac{1}{3}k_1(k_2 - \epsilon_1) \right), \quad (2.10)$$

$$\dot{\varphi}^2 = H^2 \left(2\epsilon_1 - \Delta_1 - 2k_1 + \Delta_1(\Delta_2 - \epsilon_1) + \frac{2}{3}k_1(k_2 - \epsilon_1) \right) \quad (2.11)$$

where we have used the parameter definitions¹

$$\epsilon_1 = \left(\frac{\dot{1}}{H} \right) = -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (2.12)$$

$$k_1 = 3J_1\dot{\varphi}^2, \quad (2.13)$$

$$\Delta_1 = 8H\dot{J}_2. \quad (2.14)$$

For further use, we define also the following parameter hierarchy: for any quantity X , in particular for $X = \epsilon_1, k_1, \Delta_1$, we define ($n \geq 1$) (using the number of e-folds variable N , $N \equiv \log a$, $dN \equiv -Hdt$)

$$X_{n+1} = -\frac{d \log |X_n|}{dN} = \frac{d \log |X_n|}{d \log a}. \quad (2.15)$$

This set of parameters satisfies the following properties, for any X_n

$$-\frac{dX_n}{dN} = X_n X_{n+1} = -X'_n \varphi_{,N}, \quad (2.16)$$

$$\frac{d^2 X_n}{dN^2} = X_{n+1} (X_{n+1} + X_{n+2}) \quad (2.17)$$

where $X_{,N} \equiv dX/dN$. The main reason for the use of these definitions is the following. In terms of the wavenumber k , defined by $k \equiv aH$, we have

$$\frac{dX}{dN} = (\epsilon_1 - 1) \frac{dX}{d \log k} \quad (2.18)$$

and

$$\frac{d^2 X}{dN^2} = -\epsilon_1 \epsilon_2 \frac{dX}{d \log k} - (1 - \epsilon_1)^2 \frac{d^2 X}{d \log k^2}. \quad (2.19)$$

Or, equivalently,

$$\frac{dX}{d \log k} = \frac{1}{(\epsilon_1 - 1)} \frac{dX}{dN}, \quad (2.20)$$

$$\frac{d^2 X}{d \log k^2} = \frac{1}{(\epsilon_1 - 1)^2} \left(\frac{dX}{dN} + \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{(\epsilon_1 - 1)} \frac{d^2 X}{dN^2} \right). \quad (2.21)$$

¹We use the conventions of the PLANCK collaboration [8].

Then, for small values of the parameters ($\epsilon_1 \rightarrow 0$) both derivatives coincide

$$\frac{dX}{d \log k} \simeq -\frac{dX}{dN}, \quad (2.22)$$

$$\frac{d^2 X}{d \log k^2} \simeq -\frac{d^2 X}{dN^2} \quad (2.23)$$

meanwhile, for $\epsilon_1 \rightarrow 1$, we have the relations

$$\frac{dX}{dN} \simeq 0, \quad (2.24)$$

$$\frac{dX}{d \log k} \simeq -\frac{1}{\epsilon_2} \frac{d^2 X}{dN^2}. \quad (2.25)$$

A quasi-exponential inflationary expansion is provided, in particular, in the slow-roll regime. This regime is defined by the conditions $\epsilon_i, k_i, \Delta_i \ll 1$ (slow-roll conditions). Under this assumption, the field equations (2.4)-(2.6) are greatly simplified. They become

$$3H^2 - V \simeq 0, \quad (2.26)$$

$$\dot{H} + \dot{\varphi}^2 \simeq -6H^2 J_1 \dot{\varphi}^2 - 8H^3 \dot{J}_2 = -H^2(2k_1 + \Delta_1), \quad (2.27)$$

$$\dot{\varphi} + \frac{V'}{3H} \simeq -6H^2 J_1 \dot{\varphi} - 8H^3 J_2'. \quad (2.28)$$

At the slow-roll approximation level, there is a degeneracy of models: different triplets, (V, J_1, J_2) , appearing in the action (2.1) provide exactly the same observational results. For the purpose of disentangling the effective dependence on the scalar dependent quantities, it is convenient to rewrite slow-roll field equations (2.27) and (2.28) in a slightly different way. Using the number of e-folds, N as a independent variable, we have

$$\epsilon_1 = \frac{\dot{\varphi}^2}{2H^2}(1 + 6H^2 J_1) + 4H \dot{J}_2, \quad (2.29)$$

$$-H \frac{d\varphi}{dN} + \frac{V'}{3H} \simeq -6H^2 J_1 \dot{\varphi} - 8H^3 J_2' \quad (2.30)$$

which can be written as

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dN} \right)^2 (1 + 2V J_1) - \frac{4}{3} V J_2' \frac{d\varphi}{dN}, \quad (2.31)$$

$$\frac{d\varphi}{dN} = \frac{V' 1 + 8J_2' V^2 / 3V'}{V 1 + 2V J_1}. \quad (2.32)$$

It follows from such expressions that the model depends only on the scalar combinations

$$v \equiv V'/V, \quad f_1 \equiv V J_1, \quad f_2 \equiv V J_2'. \quad (2.33)$$

In terms of the reduced variables v, f_1, f_2 and the quantity

$$f_3 \equiv J_2/v,$$

we can write

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dN} \right)^2 (1 + 2f_1) - \frac{4}{3} f_2 \frac{d\varphi}{dN}, \quad (2.34)$$

$$\frac{d\varphi}{dN} = v \frac{1 + 8/3f_3}{1 + 2f_1}. \quad (2.35)$$

The number of e -folds reads as

$$N = \int_{\varphi_i}^{\varphi_e} \frac{1}{v} \frac{1 + 2f_1}{1 + 8/3f_3} d\varphi \quad (2.36)$$

where φ_i and φ_e are the values of the scalar field at the beginning and at the end of the inflation period, respectively. The rest of slow-roll parameters can also be written in terms of v, f_1, f_2 and f_3 . After a straightforward computation, we find the following relevant expressions

$$\epsilon_1 = \frac{v}{2} \varphi_{,N} = \frac{v^2 (1 + 8/3f_3)}{2 (1 + 2f_1)}, \quad (2.37)$$

$$k_1 = f_1 (\varphi_{,N})^2 = f_1 v^2 \frac{(1 + 8/3f_3)^2}{(1 + 2f_1)^2}, \quad (2.38)$$

$$\Delta_1 = -\frac{8}{3} f_2 \varphi_{,N} = -\frac{8f_2 v (1 + 8/3f_3)}{3 (1 + 2f_1)}. \quad (2.39)$$

Higher order parameters, for example $\epsilon_2, k_2, \Delta_2$, are easily obtained using Eq (2.16). Successful inflation occurs when $0 < \epsilon_1 < 1$. The value of the quantity $\epsilon_1(\varphi_i) \rightarrow 0$ depends strongly on the quantity Gauss-Bonnet related quantity $f_3 \propto J_2$. Small values $\epsilon_1(\varphi_i) \approx 0$ can be reached in different regimes: we have two cases, in the first one, if

$$\varphi_{,N} \simeq 0, \quad (2.40)$$

then GB-related quantity

$$f_3^e \simeq -3/8 \quad (2.41)$$

. In a second case when,

$$f_3^e = -1/2, \quad (2.42)$$

then is required that

$$\varphi_{,N} \simeq -\frac{v}{3} \frac{1}{1 + 2f_1}. \quad (2.43)$$

The graceful exit of inflation depends on whether the equation $\epsilon_1(\varphi_e) = 1$ can be accomplished for some φ_e . The graceful exit relation becomes

$$\epsilon_1(\varphi_e) = 1 = \frac{v^2 (1 + 8/3f_3)}{2 (1 + 2f_1)} \Big|_{\varphi_e}. \quad (2.44)$$

which is a second degree equation in v , it can be written as

$$(v^2/2)(1 + 8/3f_3) - (1 + 2f_1) = 0, \quad (2.45)$$

with the solution

$$\frac{1}{2}v^2 |_{\varphi_e} = \frac{1 + 2f_1}{(1 + 8/3f_3)}. \quad (2.46)$$

At this point we get a relation connecting the theoretical quantities in the action and inflation exit. The condition for having a real solution for v , and then a graceful inflation exit, is that

$$(f_2)^2 \geq -\frac{9}{8}(1 + 2f_1) \quad (2.47)$$

evaluated at φ_e . This becomes a constraint imposed on the, otherwise arbitrary, J_1 and J_2 functions:

$$(VJ_2')^2 \geq -9/8(1 + VJ_1) \quad (2.48)$$

which implies a "uncertainty"-like condition between the potential and kinetical functions evaluated at this moment

$$V(\varphi_e)J_1(\varphi_e) \geq -\frac{1}{2}. \quad (2.49)$$

3 First and higher order perturbations. Running Consistency equations

The spectral indexes are defined by [8, 23, 26, 27]

$$n_S - 1 = \frac{d \log P_S}{d \log k}, \quad (3.1)$$

$$n_T = \frac{d \log P_T}{d \log k}. \quad (3.2)$$

where P_S, P_T are the power spectra of the scalar and tensor modes. The running and the running of running of the spectral indexes are given by the following expressions in terms of the slow-roll parameters [26, 27, 31]

$$n_S - 1 = -2\epsilon_1 - \frac{2\epsilon_1\epsilon_2 - \Delta_1\Delta_2}{2\epsilon_1 - \Delta_1}, \quad (3.3)$$

$$n_T = -2\epsilon_1. \quad (3.4)$$

Moreover, the scalar-to-tensor ratio takes the following form [31]

$$r = 8 \left(\frac{2\epsilon_1 - \Delta_1}{1 - \frac{1}{3}k_1 - \Delta_1} \right) \simeq 8 \left(1 - \frac{1}{3}k_1 - \Delta_1 \right) (2\epsilon_1 - \Delta_1) \simeq 8(2\epsilon_1 - \Delta_1) + O^2, \quad (3.5)$$

where O^2 are terms quadratic in the slow-roll parameters. In this class of models, as in standard GR single scalar inflation, the parameters n_S, n_T and r are not independent variables. The models predict a relation among them which reads as

$$r + 8n_T \simeq -8\Delta_1 + O^2. \quad (3.6)$$

This relation differs from the standard inflation relation $r = -8n_T$ by Δ_1 , this is a supposedly small quantity, proportional to the GB term

$$r + 8n_T \simeq -64H\dot{J}_2. \quad (3.7)$$

It turns out that we can express observable quantities like the scalar and tensor power spectrum, the spectrum index and tensor/scalar ratio in terms of v, f_1, f_2 (evaluated at $\varphi = \varphi_i$). For instance, the tensor spectrum index and the tensor/scalar ratio are given by

$$n_T = -v^2 \frac{(1 + 8f_2/3v)}{1 + 2f_1}, \quad (3.8)$$

$$r = 8v^2 \frac{(1 + 8f_2/3v)^2}{(1 + 2f_1)}. \quad (3.9)$$

meanwhile the scalar spectral index is written as

$$n_S - 1 = -\frac{9v(I_1 + v^2) + 24f_2(I_2 + 2v^2) + 64f_2^2v + 2f_1v(3v + 8f_2)^2}{3(1 + 2f_1)^2(3v + 8f_2)} \quad (3.10)$$

where one has

$$I_1 \equiv -\left(1 + \frac{8f_2}{3v}\right) \left((2 + 4f_1)v' - 2vf_1'\right) - \frac{1}{3}8(1 + 2f_1)v\left(\frac{f_2}{v}\right)', \quad (3.11)$$

$$I_2 \equiv \frac{2}{3}f_2(3 + 8f_2v)f_1' - (1 + 2f_1)\left(\left(1 + \frac{8f_2}{3}\right)(f_2v' + vf_2') + \frac{8}{3}f_2v\left(\frac{f_2}{v}\right)'\right) \quad (3.12)$$

In concrete models we can invert the relations (3.9)-(3.10) to get the triplet of theoretical values v, f_1, f_2 in terms of the observable triplet (n_S, n_T, r) , or, in terms of the original variables (V, J_1, J_2) .

One can get further relations between the different spectral parameters and their runnings. For example, the physical scalar spectral index can be related to the scalar ratio, the running of the logarithm of the ratio and the parameter n_T . It is straightforward to check that the equation (3.10) can be written as

$$n_S - 1 = -2\epsilon_1 + \frac{d}{dN} \log(2\epsilon_1 - \Delta_1), \quad (3.13)$$

which, using the expressions (3.5), can be written as

$$n_S - 1 = n_T + (\epsilon_1 - 1) \frac{d \log r}{d \log k} + O^2 \quad (3.14)$$

where O^2 are terms of superior order: $O^2 = \frac{1}{3}k_2 + \Delta_2$. From (3.14), when $\epsilon_1 \simeq 1$ then we arrive to the constraint

$$n_S - 1 = n_T + O^2 \quad (3.15)$$

or

$$n_S - 1 = -r/8 - \Delta_1 + \Delta_2 + \frac{1}{3}k_2. \quad (3.16)$$

Hierarchies of consistency equations relating scalar and tensor perturbations and the lowest levels and higher order running parameters have been presented (i.e. [26, 27]). The scale running and the running of the running of the scalar spectral index can be easily computed at the slow roll approximation for the kind of models of interest in this work. From (3.13) and (3.14). They are given by

$$\frac{dn_S}{d \log a} = -\frac{1}{8} \frac{dr}{d \log a} - \frac{d^2 \log r}{d \log a^2} - \frac{d\Delta_1}{d \log a}, \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{r}{8} \left(\frac{d \log r}{d \log a} \right) - \frac{d^2 \log r}{d \log a^2} - \frac{d\Delta_1}{d \log a}, \\ \frac{d^2 n_S}{d \log a^2} &= -\frac{r}{4} \left(\frac{d^2 \log r}{d \log a^2} \right) - \frac{d^3 \log r}{d \log a^3} - \frac{d^2 \Delta_1}{d \log a^2}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Using Eqs 2.16) and (2.17), we obtain

$$\frac{d\Delta_1}{d \log a} = \Delta_1 \Delta_2, \quad (3.19)$$

$$\frac{d^2 \Delta_1}{d \log a^2} = \Delta_1 \Delta_2 (\Delta_2 + \Delta_2). \quad (3.20)$$

In terms of the derivatives with respect to the field φ , they become as follows

$$\frac{d \log r}{d \log a} = -(\log r)' \varphi_{,N}, \quad (3.21)$$

$$\frac{d^2 \log r}{d \log a^2} = (\log r)'' (\varphi_{,N})^2 + \frac{1}{2} (\log r)' ((\varphi_{,N})^2)', \quad (3.22)$$

together with

$$\frac{d^3 \log r}{d \log a^3} = -(\log r)''' (\varphi_{,N})^3 - \left(\frac{3}{2} (\log r)'' ((\varphi_{,N})^2)' + \frac{1}{2} (\log r)' ((\varphi_{,N})^2)'' \right) \varphi_{,N}. \quad (3.23)$$

4 A simple toy model: the monomial model

We provide will provide an explicit model dealing with power-law potentials and scalar couplings. In this case, the expressions can be further worked out. Concretely, we focus our attention to couplings of monomial types parameterized as follows

$$V = \frac{\lambda}{n} \varphi^n, \quad J_1 = \beta'_1 \varphi^{m_1 - n}, \quad J_2 = \beta'_2 \varphi^{m_2 - n}. \quad (4.1)$$

where λ is a coupling parameter. The physical results depend only on the combinations ($\beta_1 = \frac{\lambda \beta'_1}{n}, \beta_2 = \frac{\lambda \beta'_2}{n(m_2 - n)}$ ($m_2 \neq n$), $\beta_2 = 0$ for $m_2 = n$) which are given by

$$v = \frac{n}{\varphi}, \quad f_1 = \beta_1 \varphi^{m_1}, \quad f_2 = \beta_2 \varphi^{m_2 - 1}. \quad (4.2)$$

In this way, they effectively depend only on two real parameters $\beta_{1,2}$ and on the integer n . Taking $c = \frac{8\beta_2}{3n}$ and $b = 2\beta_1$, we get slow-roll parameters

$$\epsilon_1 = \frac{n^2 (1 + c\varphi^{m_2})}{2\varphi^2 (1 + b\varphi^{m_1})}, \quad (4.3)$$

$$k_1 = \frac{n^2 b\varphi^{m_1} (1 + c\varphi^{m_2})^2}{2\varphi^2 (1 + b\varphi^{m_1})^2}, \quad (4.4)$$

$$\Delta_1 = \frac{-cn^2\varphi^{m_2} (1 + c\varphi^{m_2})}{\varphi^2 (1 + b\varphi^{m_1})}. \quad (4.5)$$

From Eq (2.16), we obtain higher order-slow-roll parameters ϵ_1, k_1 and Δ_1 which are given by

$$\epsilon_1 = \frac{n}{\varphi^2} \left(\frac{(1 + c\varphi^{m_2}) + (1 + bm_1\varphi^{m_1})(-m_2c\varphi^{m_2} + 2c\varphi^{m_2} + 2)}{(1 + b\varphi^{m_1})^2} \right), \quad (4.6)$$

$$k_1 = \frac{-n\varphi^{-m_1}}{\varphi^2} \left(\frac{(1 + b\varphi^{m_1})(2cm_2\varphi^{m_2+m_1} + m_1\varphi^{m_1}(1 + c\varphi^{m_2}))}{(1 + b\varphi^{m_1})^2} - \frac{2\varphi^{m_1}(1 + c\varphi^{m_2})((1 + b\varphi^{m_1}) + m_1b\varphi^{m_1})}{(1 + b\varphi^{m_1})^2} \right), \quad (4.7)$$

$$\Delta_1 = \frac{n}{\varphi^2} \left(\frac{bm_1\varphi^{m_1}(1 + c\varphi^{m_2}) + (1 + b\varphi^{m_1})(1 + c\varphi^{m_2} - m_2c\varphi^{m_2})}{(1 + b\varphi^{m_1})^2} \right). \quad (4.8)$$

In this way, the number of e-foldings is

$$N = \int_{\varphi_{end}}^{\varphi^*} \frac{\varphi}{n} \frac{1 + b\varphi^{m_1}}{1 + c\varphi^{m_2}} d\varphi. \quad (4.9)$$

The last expression can be integrated in a closed form in order to provide

$$\begin{aligned} N - N_0 &= \frac{\varphi^2}{2n} {}_2F_1 \left(1, \frac{2}{m_2}, 1 + \frac{2}{m_2}, -c\varphi^{m_2} \right) \\ &+ \frac{b\varphi^{m_1+2}}{2 + m_1} {}_2F_1 \left(1, \frac{m_1 + 2}{m_2}, 1 + \frac{m_1 + 2}{m_2}, -c\varphi^{m_2} \right) \\ &= \frac{\varphi^2}{2n} g_1(c, \varphi) + b \frac{\varphi^{m_1+2}}{2 + m_1} g_2(c, \varphi) \end{aligned} \quad (4.10)$$

where ${}_2F_1$ is the Hypergeometric function. For small Gauss-Bonnet coupling ($c \rightarrow 0$), the functions g_1 and g_2 reduce to

$$g_1 \simeq 1 - \frac{2c\varphi^{m_2}}{2 + m_2} + O(c)^2, \quad (4.11)$$

$$g_2 \simeq 1 - \frac{(2 + m_1)c\varphi^2}{2 + m_1 + m_2} + O(c)^2. \quad (4.12)$$

At the leading order in c and b , we find

$$N - N_0 \simeq \frac{\varphi^2}{2n} - c \frac{2\varphi^{m_2+2}}{n(2 + m_2)} + b \frac{\varphi^{m_1+2}}{2 + m_1}. \quad (4.13)$$

In the large coupling ($c, b \rightarrow \infty$), however, we get

$$N - N_0 \simeq \frac{b/c}{n(m_1 - m_2 + 1)} \varphi^{m_1 - m_2 + 1}. \quad (4.14)$$

Now we are in position to study a special subcase. When the Gauss-Bonnet term is of the type $J_2 \sim 1/\varphi^n$ or ($m_2 = 0$) corresponding to $J_2 \sim \varphi^{-1}$, we get the slow-roll parameters

$$\epsilon_1 = \frac{n^2}{2\varphi^2} \frac{(1+c)}{(1+b\varphi^{m_1})}, \quad (4.15)$$

$$k_1 = \frac{n^2 b \varphi^{m_1}}{2\varphi^2} \frac{(1+c)^2}{(1+b\varphi^{m_1})^2}, \quad (4.16)$$

$$\Delta_1 = \frac{-cn^2}{\varphi^2} \frac{(1+c)}{(1+b\varphi^{m_1})}. \quad (4.17)$$

For higher order-slow-roll parameters ϵ_1, k_1 and Δ_1 are given by

$$\epsilon_1 = \frac{n}{\varphi^2} \frac{(1+c) \left(b m_1 \varphi^{m_1} + 2(1+b\varphi^{m_1}) \right)}{(1+b\varphi^{m_1})^2}, \quad (4.18)$$

$$k_1 = \frac{n}{\varphi^2} \frac{(1+c) \left(2b m_1 \varphi^{m_1} + \varphi^{m_1} (m_1 - 2)(1+b\varphi^{m_1}) \right)}{(1+b\varphi^{m_1})^2}, \quad (4.19)$$

$$\Delta_1 = \frac{n}{\varphi^2} \frac{(1+c) \left(b m_1 \varphi^{m_1} + 2(1+b\varphi^{m_1}) \right)}{(1+b\varphi^{m_1})^2}. \quad (4.20)$$

For this model, the number of e-foldings takes the following form

$$N = \int_{\varphi_{end}}^{\varphi^*} \frac{\varphi}{n} \frac{1+b\varphi^{m_1}}{1+c} d\varphi. \quad (4.21)$$

Integrating this expression, we find

$$N = \frac{1}{n(1+c)} \left(\frac{\varphi^2}{2} + \frac{b\varphi^{m_1+2}}{m_1+2} \right)_{\varphi_{end}}^{\varphi^*}. \quad (4.22)$$

Roughly, the scalar spectral index and the tensor-to-scalar ratio are, respectively,

$$n_S = 1 - \frac{n}{\varphi^2} \frac{b m_1 \varphi^{m_1} (1+c) + (1+b\varphi^{m_1})(n(1+c) + 2c + 2)}{(1+b\varphi^{m_1})^2}, \quad (4.23)$$

$$n_T = -\frac{n^2}{\varphi^2} \frac{(1+c)}{(1+b\varphi^{m_1})}, \quad (4.24)$$

$$r = 8 \frac{n^2}{\varphi^2} \frac{(1+c)^2}{(1+b\varphi^{m_1})}. \quad (4.25)$$

The running of spectral indexes are given by the following expressions

$$\frac{dn_S}{d \log k} = \frac{1}{(1-\epsilon_1)} \frac{dn_S}{d \log a}, \quad (4.26)$$

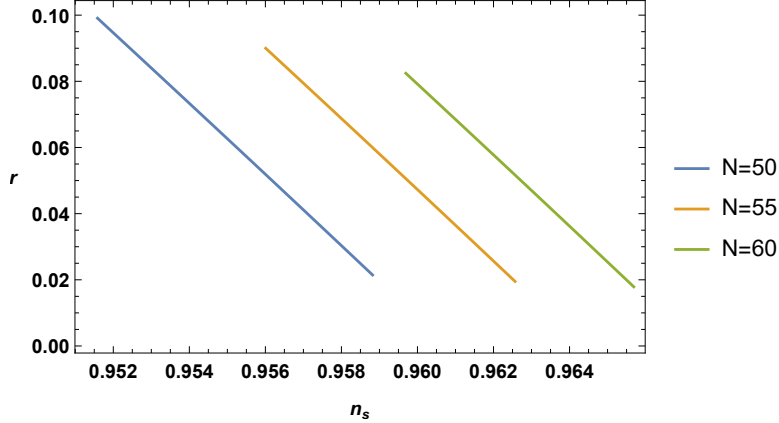


Figure 1: The scalar spectral index n_s vs the tensor-to-scalar ratio r different values of number of e-folds N and $7 \leq m_1 \leq 40$.

where one has

$$\begin{aligned} \frac{dn_S}{d \log a} &= -n'_S \varphi_{,N}, \\ \frac{dn_S}{d \log a} &= -\frac{n^2(1+c)^2(A_1 + A_2)}{A_3}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Here, the terms A_i take the following form

$$\begin{aligned} A_1 &= (1 + b\varphi^{m_1}) \left((4 + 2n)(1 + b\varphi^{m_1}) + bm_1\varphi^{m_1}(4 + n) \right) \\ A_2 &= bm_1^2\varphi^{m_1}(-1 + b\varphi^{m_1}) \\ A_3 &= \varphi^4(1 + b\varphi^{m_1})^4. \end{aligned}$$

For the sake of illustration we present some simple numerical results for this toy model. In Fig.1, we present the correlation between the spectral indexes r, n_S for some parameters chosen to provided results consistent with the Planck observations. In Fig.2 (Left), we illustrate certain variations of the running of the scalar spectral index in terms of m_1 . Similarly, in Fig.2 (Right), we show the tensor spectral index in terms of the same parameter m_1 .

5 Concluding and further remarks

In this work, we have investigated the possibility of constraining scalar-tensor models of gravitation beyond GR using CMB observations. For the sake of concreteness we have focused in particular in slow-roll inflation originated in models with minimal coupling to scalar curvature, non-minimal scalar kinetic terms and scalar coupling to the Gauss-Bonnet invariant. After presenting the general approach, we have explored some cases where the potential, kinetic coupling and the Gauss-Bonnet coupling are power monomials of different grades. At the slow-roll approximation, we have found that inflation

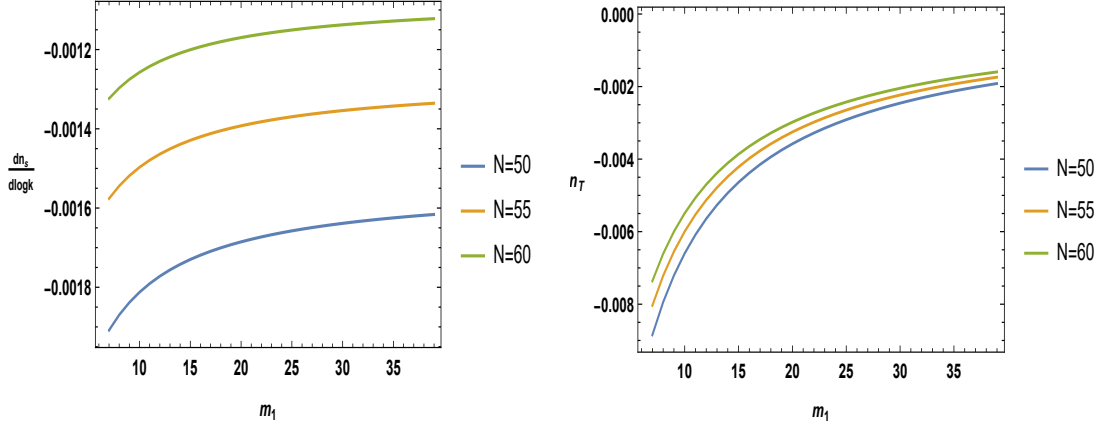


Figure 2: The running of the scalar spectral indexes $\frac{dn_s}{d \ln k}$ (Left) vs m_1 and n_T (right). For $7 \leq m_1 \leq 40$ and $b = 0.5$, $c = 0.4$.

only depends on two particular combinations of the potential and the other non-minimal couplings. We have given detailed explicit expressions for the theoretical predictions of observables as n_S, n_T and r and their first and second level runnings. In the framework of such models, we have presented some numerical results about the overall effect of the non-minimal couplings in viable inflation scenarios. In particular, we have studied how the present and future CMB observations have the power for discriminating existing inflation scenarios within the scope of these models. For the models considered here, it has been shown that the Introduction of additional interactions, given by non-minimal, kinetic and Gauss-Bonnet couplings, can lower the tensor-to-scalar ratio to values that are consistent with latest observational constraints, and the problem of large fields in chaotic inflation can be avoided.

The Planck observations have, consistently along the years, significantly restricted the space of inflationary models. The latest observational data disfavor monomial-type models $V \propto \varphi^n$ with $n \geq 2$ in the minimally coupled scalar field. With the Introduction of additional interactions like non-minimal, kinetic couplings and Gauss-Bonnet couplings, it has been revealed that the tensor-to-scalar ratio can be lowered to values that are consistent with latest observational constraints [8, 30].

Acknowledgment

The work of ETL has been supported in part by the Ministerio de Educación y Ciencia, grants FIS2011-24924, FIS2015-28521, Universidad de Murcia project E024-018 and Fundacion Seneca (21257/PI/19 and 20949/PI/18). ETL acknowledges interesting and motivating conversations with L. Granda at early stages of this work.

References

- [1] B. P. Abbott *et al.* [LIGO Scientific and Virgo Collaborations], Phys. Rev. Lett. **116** (2016) no.6, 061102 doi:10.1103/PhysRevLett.116.061102 [arXiv:1602.03837 [gr-qc]].
- [2] K. Akiyama *et al.* [Event Horizon Telescope Collaboration], Astrophys. J. **875** (2019) no.1, L1. doi:10.3847/2041-8213/ab0ec7
- [3] K. Akiyama *et al.* [Event Horizon Telescope Collaboration], Astrophys. J. **875** (2019) no.1, L6. doi:10.3847/2041-8213/ab1141
- [4] A. H. Guth, Phys. Rev. D**23**, 347 (1981).
- [5] A. Albrecht. P. J. Steinhardt, Phys. Rev Lett. **48**, 1220 (1982)
- [6] A. R. Ade et al., Planck Collaboration (Planck 2013 results. XXII. Constraints on inflation), Astron. and Astrophys. **571** (2014) A22; arXiv:1303.5082 [astro-ph.CO]
- [7] P. A. R. Ade et al., Planck Collaboration (Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation), Astron. and Astrophys. **594**, (2016) A20; arXiv:1502.02114 [astro-ph.CO]
- [8] Y. Akrami et al., Planck Collaboration (Planck 2018 results. X. Constraints on inflation), arXiv:1807.06211 [astro-ph.CO]
- [9] A. D. Linde, Particle physics and inflationary cosmology, (Harwood, Chur, Switzerland, 1990) Contemp. Concepts Phys. 5, 1 (1990) [hep-th/0503203].
- [10] A. R. Liddle, D. H. Lyth, Phys. Rept. **231**, 1 (1993); arXiv:astro-ph/9303019
- [11] A. Riotto, DFPD-TH/02/22; arXiv:hep-ph/0210162
- [12] D. H. Lyth, A. Riotto, Phys. Rept. **314**, 1 (1999); arXiv:hep-ph/9807278
- [13] V. Mukhanov, Physical Foundations of Cosmology (Cambridge University Press, 2005).
- [14] D. Baumann, TASI 2009; arXiv:0907.5424 [hep-th]
- [15] A. A. Starobinsky and H. J. Schmidt, Class. Quant. Grav. **4**, 695 (1987).
- [16] V. F. Mukhanov and G. V. Chibisov, JETP Lett. 33 (1981) 532 [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 33 (1981) 549].
- [17] A. A. Starobinsky, JETP Lett. 30 (1979) 682 [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 30 (1979) 719].
- [18] S. W. Hawking, Phys. Lett. B 115, 295 (1982).
- [19] A. A. Starobinsky, Phys. Lett. B 117 (1982) 175.

- [20] A. H. Guth and S. Y. Pi, Phys. Rev. Lett. 49, 1110 (1982).
- [21] J. M. Bardeen, Phys. Rev. D **22**, 1882 (1980).
- [22] J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt and M. S. Turner, Phys. Rev. D **28**, 679 (1983).
- [23] I. Fomin and S. Chervon, “Inflation with explicit parametric connection between general relativity and scalar–tensor gravity,” Mod. Phys. Lett. A **33** (2018) no.28, 1850161 doi:10.1142/S0217732318501614 [arXiv:1802.10462 [gr-qc]]. I. Fomin and S. Chervon, “Exact and Slow-Roll Solutions for Exponential Power-Law Inflation Connected with Modified Gravity and Observational Constraints,” Universe **6** (2020) no.11, 199 doi:10.3390/universe6110199 I. V. Fomin, S. V. Chervon and A. V. Tsyganov, “Generalized scalar-tensor theory of gravity reconstruction from physical potentials of a scalar field,” Eur. Phys. J. C **80** (2020) no.4, 350 doi:10.1140/epjc/s10052-020-7893-y [arXiv:2004.08544 [gr-qc]].
- [24] G. Hikmawan, A. Suroso and F. P. Zen, “Nonlinearity analysis for cosmological inflation with minimal and non-minimal coupling of scalar field from horndeski theory for special cases: de sitter expansion and decaying scalar field,” J. Phys. Conf. Ser. **1949** (2021) no.1, 012001 doi:10.1088/1742-6596/1949/1/012001
- [25] G. Hikmawan, A. Suroso and F. P. Zen, “Extracting new inflation model from the most general scalar-tensor theory,” J. Phys. Conf. Ser. **1127** (2019) no.1, 012007 doi:10.1088/1742-6596/1127/1/012007 G. Hikmawan, A. Suroso and F. P. Zen, “Power function inflation potential analysis for cosmological model with Gauss-Bonnet term,” J. Phys. Conf. Ser. **856** (2017) no.1, 012006 doi:10.1088/1742-6596/856/1/012006
- [26] M. Cortes and A. R. Liddle, “The Consistency equation hierarchy in single-field inflation models,” Phys. Rev. D **73** (2006), 083523 doi:10.1103/PhysRevD.73.083523 [arXiv:astro-ph/0603016 [astro-ph]].
- [27] M. Cortes, A. R. Liddle and P. Mukherjee, “On what scale should inflationary observables be constrained?,” Phys. Rev. D **75** (2007), 083520 doi:10.1103/PhysRevD.75.083520 [arXiv:astro-ph/0702170 [astro-ph]]. G. Cabass, E. Di Valentino, A. Melchiorri, E. Pajer and J. Silk, “Constraints on the running of the running of the scalar tilt from CMB anisotropies and spectral distortions,” Phys. Rev. D **94** (2016) no.2, 023523 doi:10.1103/PhysRevD.94.023523 [arXiv:1605.00209 [astro-ph.CO]]. H. Motohashi and W. Hu, “Running from Features: Optimized Evaluation of Inflationary Power Spectra,” Phys. Rev. D **92** (2015) no.4, 043501 doi:10.1103/PhysRevD.92.043501 [arXiv:1503.04810 [astro-ph.CO]].
- [28] I. Wolfson and R. Brustein, “Small field models of inflation that predict a tensor-to-scalar ratio $r = 0.03$,” Phys. Rev. D **100** (2019) no.4, 043522

doi:10.1103/PhysRevD.100.043522 [arXiv:1903.11820 [astro-ph.CO]]. L. Wu, Q. Gao, Y. Gong, Y. Jia and T. Li, “The Upper Bound on the Tensor-to-Scalar Ratio Consistent with Quantum Gravity,” *Commun. Theor. Phys.* **73** (2021) no.7, 075402 doi:10.1088/1572-9494/abf824 [arXiv:2010.13394 [gr-qc]].

- [29] J. Chen, “Reconstruction of inflation model from tensor-to-scalar ratio,” [arXiv:1904.04293 [gr-qc]]. Q. Huang, H. Huang, F. Tu, L. Zhang and J. Chen, “Slow expansion in the scalar-tensor theory of gravity,” *Annals Phys.* **409** (2019), 167921 doi:10.1016/j.aop.2019.167921 J. Chen, “Reconstruction of inflation model from tensor-to-scalar ratio,” [arXiv:1904.04293 [gr-qc]].
- [30] P. A. R. Ade et al., A Joint Analysis of BICEP2/Keck Array and Planck Data, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 101301 (2015); arXiv:1502.00612 [astro-ph.CO]
- [31] L. N. Granda and D. F. Jimenez, arXiv:1905.08349 [gr-qc]. L. N. Granda and D. F. Jimenez, arXiv:1907.06806 [hep-th].

Conclusion générale

Dans ce travail doctoral, nous avons étudié les comportements cosmologiques et thermiques de certains potentiels scalaires en introduisant la physique des cordes et des branes.

D'abord, nous avons exposé la physique du modèle du big-bang chaud, considéré comme un cadre pour élaborer des modèles décrivant notre univers. Ces modèles sont basés sur la Relativité Générale (RG) d'Einstein et le principe cosmologique selon lequel l'univers est supposé homogène et isotrope aux grandes échelles. Cette homogénéité et cette isotropie observées permettent de décrire l'aspect géométrique et l'évolutionnaire de l'univers en introduisant deux quantités cosmologiques qui sont le tenseur de courbure spatiale et le tenseur d'isotropie. Dans ce cadre, certaines équations sont utilisées pour décrire ces comportements physiques de l'univers. En effet, nous avons remarqué que les équations d'Einstein sont importantes contenant à la fois la géométrie et la matière. Ces équations permettent d'élaborer les équations cosmologiques du mouvement de Friedmann de Raychaudhuri, en considérant l'univers comme un fluide parfait. Nous avons observé que ces équations pourraient être utilisées pour définir plusieurs paramètres cosmologiques mesurables. Bien que ces modèles soient très convaincants, certaines limites et les lacunes ont été évoquées.

Après avoir présenté le modèle du big-bang chaud, nous avons abordé le scénario d'inflation dans l'univers résolvant de nombreux problèmes difficiles de la cosmologie standard. La théorie associée a produit plusieurs prédictions qui pourraient être testées par des observations cosmologiques. Étant une période d'expansion accélérée, l'inflation suppose que l'univers doit être plat. Cela permet de résoudre le problème de la platitude. Dans ce travail, nous avons considéré des modèles simples, où l'inflation est décrite par un seul champ sca-

laire, appelé l'inflaton, qui roule lentement dans une vallée très plate. Nous avons remarqué que cette phase inflationnaire se termine lorsqu'au moins un des paramètres de roulement lent atteint l'ordre de l'unité. Après, nous avons considéré la distribution des perturbations inhomogènes générés par l'inflation.

Ces modèles ont été également abordés à partir de la théorie des cordes type IIB en introduisant un paramètre important appelé la tension de la brane. Nous avons vu que la tension de la D3-brane modifie toutes les équations fondamentales de la cosmologie inflationnaire branaire. En utilisant le formalisme du roulement lent, nous avons calculé toutes les observables cosmologiques pour certains potentiels scalaires. Nous avons observé que les résultats théoriques obtenus dans ce travail doctoral possèdent un très bon accord avec les récentes données observationnelles récentes. Finalement, nous avons abordé l'aspect thermique en considérant la phase de réchauffage. En particulier, nous avons trouvé qu'une telle phase est associée à de petites valeurs de température supportées par les échelles énergétiques de GUT.

Ce travail ouvre des pistes de recherche dans le cadre de la théorie des supercordes de type IIB, en introduisant d'autres branes comme D1 et D7. La théorie-M pourrait être aussi considérée comme un sujet intéressant pour les modèles inflationnaires.

ANNEXE

ANNEXE A

Relativité générale

La relativité générale est les résultats des efforts consentis par Einstein entre 1907 et 1915 qui lui ont permis de donner des explications des interactions gravitationnelles dans le cadre relativiste. Avant Einstein, la théorie newtonienne postulait que la force gravitationnelle exercée entre deux masses M_1 et M_2 à distants de r est donnée par

$$\vec{F} = -G \frac{M_1 M_2}{r^2} \vec{u}. \quad (\text{A.1})$$

Les effets de l'interaction gravitationnelle se faisaient donc sentir instantanément dans tout l'espace, en contradiction flagrante avec les lois de la relativité restreinte, établit par Einstein. La gravitation a de nombreuses propriétés intéressantes. C'est une force d'attraction, qui agit à une grand distance. C'est une force qui ne peut être annulée. Par ailleurs, lors de l'étude de la chute libre d'un objet, la gravitation ne dépend pas de la masse de l'objet qui tombe (selon Newton). En effet, prenons par exemple un objet de masse m . Cet objet a un poids

$$P = mg, \quad (\text{A.2})$$

qui est exactement la force de gravitation du terre agissant sur un objet donnée par

$$\vec{F} = -G \frac{M_T m}{R_T^2} \vec{u}, \quad (\text{A.3})$$

où g est le champ de gravitation, M_T est la masse du Terre. R_T est le rayon de la terre et G est la constante de Newton. Le champ gravitationnel est

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2}. \quad (\text{A.4})$$

En d'autres termes, quelle que soit la masse de l'objet, il va tomber à la même vitesse et le champ de gravitation ne dépend que de la masse de l'objet qui nous attire. Une conséquence directe de cela est que nous pouvons représenter géométriquement le champ de gravitation autour de chaque objet.

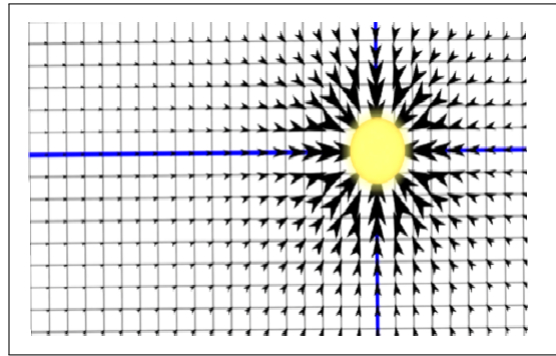


FIGURE A.1 – *Représentation géométrique du champ gravitationnel autour du soleil.*

Cela montre que la gravitation est plutôt une propriété géométrique. Einstein a montré que les planètes ne suivent pas des orbites à cause de la masse du soleil, en raison de la courbure de l'espace-temps.

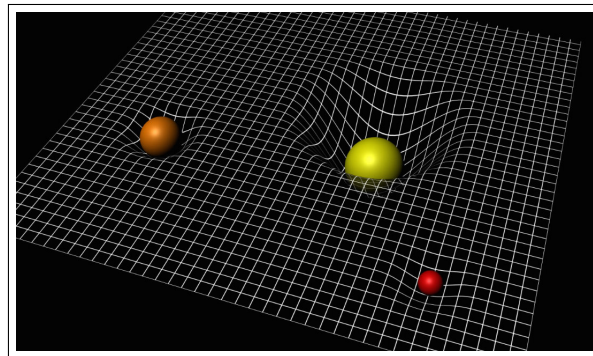


FIGURE A.2 – *montre la courbure de l'espace-temps.*

A.1 Postulats de la relativité générale

La relativité générale découle de trois postulats:

1. Espace-temps qui est une variété différentiable à 4 dimensions.
2. Le principe d'équivalence.
3. Les équations d'Einstein.

A.2 Principe de la relativité

En mécanique classique, le principe de relativité restreinte de Galilée postule que les lois de la physique sont les mêmes pour tous les observateurs inertiels, c'est-à-dire animés d'un mouvement rectiligne et uniforme.

Soit un observateur inertiel O dans le système de coordonnées (x, y, z, t) et un observateur inertiel O' le système de coordonnées (x', y', z', t') qui est en mouvement rectiligne uniforme par rapport à O a la vitesse \vec{v} suivant l'axe (ox) .

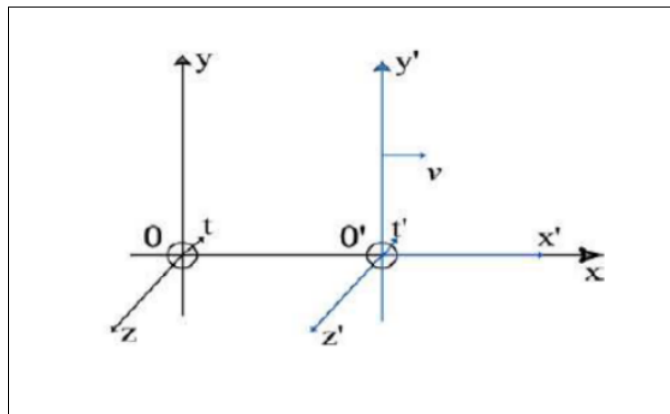


FIGURE A.3 – *transformation de galilée.*

En appliquant les transformations de Galilée suivantes

$$x' = x - vt \tag{A.5}$$

$$y' = y \tag{A.6}$$

$$z' = z \tag{A.7}$$

$$t' = t, \tag{A.8}$$

Einstein montre que la transformation de Galilée n'est pas correcte pour tout les lois de la physique par exemple les équations de Maxwell de l'électromagnétisme. Alors, Einstein a cherché une nouvelle transformation qui laisse les lois de la physique valable pour tout changement de référentiel. On aboutit aux transformations de Lorentz

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) \tag{A.9}$$

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \tag{A.10}$$

$$y' = y \tag{A.11}$$

$$z' = z, \tag{A.12}$$

où on a utilisé $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ qui est le facteur de Lorentz. c désigne la vitesse du lumière.

t et t' sont les temps mesurés par une horloge au repos respectivement par rapport à O et O' .

Ainsi, Einstein postule que les lois de la physique sont invariantes lorsque on passe d'un référentiel inertiel à un autre en utilisant les règles de transformations de Lorentz. Faisant intervenir les coordonnées spatiales, le concept de simultanéité profondément est modifié avec la nouvelle théorie. La théorie de la relativité restreinte amène aussi des nouveaux phénomènes physiques comme la dilatation du temps et la contraction des longueurs.

Cependant, la théorie de la gravitation basée sur les lois de Newton ne trouve pas de place dans le cadre de la relativité restreinte. Le premier pas vers la relativité générale et le traitement relativiste de la gravitation fut la géométrisation de la relativité restreinte par espace de H. Minkowski. En géométrie euclidienne, la distance entre deux points (x, y, z) et $(x + dx, y + dy, z + dz)$ s'exprime par $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, d'après le théorème de Pythagore. Les transformations de l'espace qui laissent invariante cette manière de mesurer les distances sont les translations et les rotations. De la même manière, les transformations de Lorentz

A.3. Principe d'équivalence d'Einstein

qui sont des translations dans l'espace et le temps forment le groupe des transformations de l'espace-temps qui laissent invariant le carré de l'intervalle de Minkowski. Soit un quadri-vecteur position $X = (ct, \vec{x})$. Alors, la variation élémentaire de deux quadri-vecteurs positions donne

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu \quad (\text{A.13})$$

$$= g_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu \quad (\text{A.14})$$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (\text{A.15})$$

où on a $g_{\mu\nu}$ est la métrique de Minkowski définie par le diagonale $g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$.

A.3 Principe d'équivalence d'Einstein

La force de gravitation a une propriété fondamentale inscrite maintenant dans un principe appelé "principe d'équivalence", ce qui la distingue des autres forces. Le mouvement de chute libre des objets est universel, indépendant de la masse et de la composition interne des objets, à déclaré Galilée. Cela a été prouvé expérimentalement par Einstein et joue un rôle fondamental dans la formulation du général relativité.

A.3.1 Masse d'inertie et gravitation masse

Il est à noter que deux concepts de masse peuvent être trouvés en physique:

- la masse d'inertie m_i qui est le coefficient qui apparaît dans la deuxième loi de Newton.

$$F = m_i a. \quad (\text{A.16})$$

- La masse gravitationnelle (pesante) m_g qui est le coefficient qui apparaît dans la loi de gravitation. C'est la capacité d'un corps qui reste dans l'état.

$$F_g = m_g g. \quad (\text{A.17})$$

Dans le cas de la relativité restreinte, nous nous intéressons au quadri-vecteur. Nous avons

$$P^\alpha = m u^\alpha. \quad (\text{A.18})$$

A.3. Principe d'équivalence d'Einstein

Dans tout référentiel inertiel $\{x^\alpha\}$, nous postulons que loi du relativité dynamique est

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = ma^\alpha = f^\alpha, \quad (\text{A.19})$$

où p^α est le quadri-vecteur impulsions, τ est le temps propre, u^α est le quadri-vecteur vitesses, a^α est le quadri-vecteur accélérations et est f^α le quadri-vecteur forces. C'est exactement la deuxième loi de Newton $F = m_i a$. Alors, la masse qui apparaît dans ces deux derniers rapports est la masse d'inertiel, qui est l'équivalence dans masse de l'énergie au repos d'un objet $E = m_i c^2$. Au contraire, la masse gravitationnelle m_g est une notion différente. En effet, m_g est similaire à la charge électrique dans l'électromagnétisme. On peut alors parler de la charge gravitationnelle. On peut écrire

$$a = \frac{m_g}{m_i} g. \quad (\text{A.20})$$

Selon Newton, $\frac{m_g}{m_i}$ peut être différent d'un objet à l'autre, comme c'est le cas pour dans le formalisme de l'électromagnétisme $\frac{q}{m}$. Expérimentalement, ce n'est pas vrai. Nous notons que chaque objet placé dans le même champ gravitationnel acquière la même accélération indépendamment de la masse et son composant interne. Ainsi, on a

$$m_i = m_g. \quad (\text{A.21})$$

A.3.2 Principe d'équivalence faible

Si vraiment $m_i = m_g$ pour n'importe quel objet, alors nous pouvons éliminer les effets d'un statique et uniforme champ gravitationnel g , s'il est placé dans un système de référence uniformément accéléré (référence d'inertiel).

Si $m_i = m_g$ est vérifié, la relation (A.20) peut être réécrite comme suit

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = g. \quad (\text{A.22})$$

Prenons le système de coordonnées $t' = t$ et $x' = x - \frac{1}{2}gt^2$, nous avons

$$\frac{d^2 x'}{dt'^2} = 0. \quad (\text{A.23})$$

Ainsi, le nouveau référentiel est un référentiel d'inertiel. Dans lequel le mouvement de

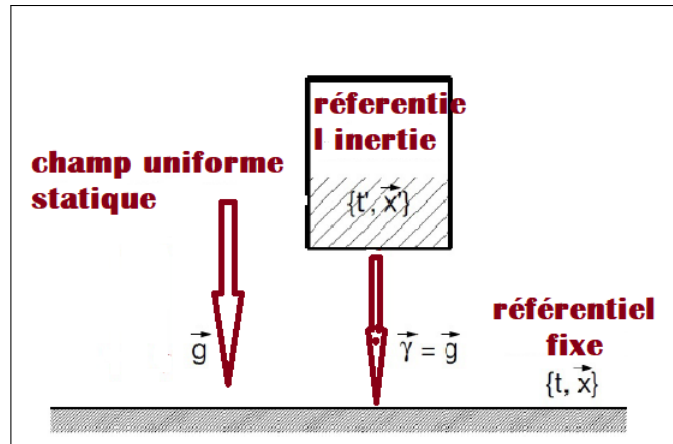


FIGURE A.4 – Le champ de gravité est éliminé pour la référence en chute libre.

chaque objet est extrémité uniforme rectiligne et dans laquelle l'effet de gravitation a disparu. De cette façon, on obtient un lien intéressant entre le principe d'équivalence et principe l'inertie. Inversement, on peut dire qu'un champ gravitationnel statique et uniforme g est équivalent à un référentiel accéléré dans le vide comme on montre dans la figure suivante

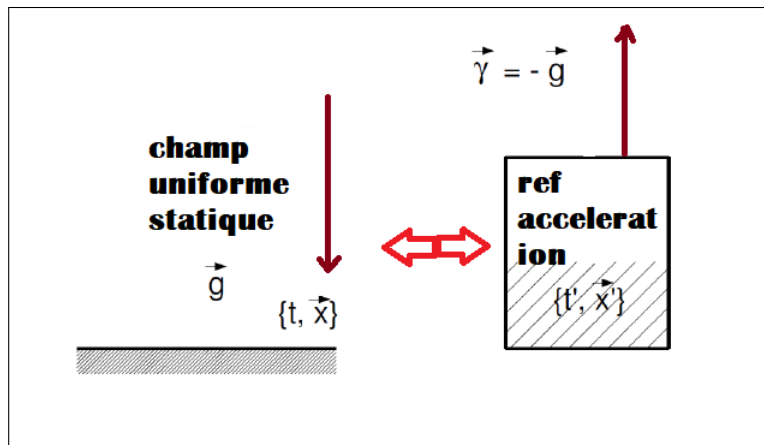


FIGURE A.5 – Le champ gravitationnel est équivalent à un référentiel d'accélération dans le vide.

Chaque champ gravitationnel peut être considéré comme statique et uniforme dans une très petite zone d'espace et une durée de temps, c'est-à-dire un petit voisinage d'espace-temps. Enfin, nous sommes amenés à établir le principe d'équivalence faible.

Principe d'équivalence faible: Dans tous les cas d'espace-temps et pour tout domaine gravitationnel arbitraire, nous pouvons choisir un cadre de référence appelé local inertiel tel que, dans le voisinage de l'événement considéré, le mouvement libre de chaque objet peut être rectiligne et uniforme.

A.3.3 Principe d'équivalence d'Einstein

Dans le principe d'équivalence faible (Weak equivalence princile), nous avons vu que (A.23) est vrai pour tous les objets. Cela signifie que les différents énergies (énergie de masse, énergie cinétique, etc.) contribuent séparément dans le même pour m_i et m_g . Cependant, puisque ces énergies différentes sont bien décrites par la relativité restreint, Einstein a postulé que la relativité restreint reste valable tout les référentiels localement inertiels comme en l'absence de gravité.

Principe d'équivalence d'Einstein: Dans la référence localement inertielle du (WEP), tout loi (non gravitationnelle) de la nature a la même chose que pour relativité restreinte.

Par exemple, les équations de Maxwell, le modèle standard et toutes les lois non gravitationnelles la physique restent valable dans les référence d'inerties locales. Le WEP est probablement équivalent, pour chaque théorie de la gravitation, à l'EEP.

A.4 Force gravitationnel

A.4.1 Référence d'inertie locale

Selon le principale d'équivalence d'Einstein au voisinage de chaque événement P, il devrait exister un référentiel localement inerte $\{x^\alpha\}$ où les lois de la physique en P sont celles de la relativité restreint(RR). Particulièrement, l'intervalle de la relativité restreint au point P et pour les coordonnées du système $\{x^\alpha\}$ est donné par:

$$ds^2|_p = g_{\alpha\beta}dX^\alpha dX^\beta \quad (\text{A.24})$$

où $g_{\alpha\beta}$ est la métrique de Minkowski au voisinage de P. L'intervalle s'écrit sous la forme

$$ds^2 = G_{\alpha\beta}dX^\alpha dX^\beta, \quad (\text{A.25})$$

où $G_{\alpha\beta}$ est la métrique définie au voisinage de P. Ce dernier admet un développement de Taylor suivant

$$G_{\alpha\beta}(X) = \eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G_{\alpha\beta}}{\partial X^\gamma \partial X^\delta} \Big|_p \Delta X^\gamma \Delta X^\delta + \Theta(\Delta X^3), \quad (\text{A.26})$$

où $\Delta X^\gamma = X^\gamma - X^\gamma|_p$ est la différence entre les coordonnées du point considéré et le

A.4. Force gravitationnel

point P. Ainsi, nous avons

$$G_{\alpha\beta}|_p = \eta_{\alpha\beta} \text{ et } \frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial X^\gamma}|_p = 0. \quad (\text{A.27})$$

La matrice $G_{\alpha\beta}(X)$ est la fonction du produit symétrique différentiel $dX^\gamma dX^\gamma$. Ça peut toujours être choisi symétrique $G_{\alpha\beta} = G_{\beta\alpha}$, Alors il a dix composantes. L'équation (A.26) et (A.27) donnent une formulation mathématique précis du cadre de référence localement inertiel et ainsi de EEP. C'est une référence qui diffère de celle inertielle par le terme de seconde ordre dans la distance d'un certain événement. La référence sera être définie comme une inertie globale.

A.4.2 Équation de géodésique

Dans un référentiel localement inertie $\{X^\alpha\}$ définie au voisinage de P. Les effet de gravitation disparaît légèrement. Pour dériver de l'expression du force gravitation dans P, nous considérons un référentiel qui n'est pas localement inertiel dans P. Nous introduisons un référentiel arbitraire note $\{x^\mu\}$, définie globalement dans l'espace-temps et reliée à $\{X^\alpha\}$ par une transformation de coordonnées inversible $x^\mu = x^\mu(X^\alpha)$. Considérons maintenant une particule dans un référentiel d'inertie locale $\{X^\alpha\}$. Cette particule est située dans ce point P et ne soumis aucune force.

Ainsi, son mouvement libre est décrit par

$$\frac{dX^\alpha}{d\tau^2} = 0, \quad (\text{A.28})$$

où τ est le temps propre que nous utilisons pour les particules massives ($ds^2 = -c^2 d\tau^2$). Quand on passe à la référence arbitraire $\{x^\mu\}$, nous avons par transformation de coordonnées

$$\frac{d^2 X^\alpha}{d\tau^2} = 0 = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \quad (\text{A.29})$$

$$= \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (\text{A.30})$$

En multiple par $\frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\alpha}$, on trouve l'équation de géodésique:

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\alpha} \frac{\partial X^\alpha}{\partial X^\mu} = \delta^\lambda_\mu.$$

A.4. Force gravitationnel

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (\text{A.31})$$

où on a utilisé

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\alpha} \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (\text{A.32})$$

$\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ est appelé symbole de Christoffel décrivant la courbure espace-temps vérifiant $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$. L'équation (A.31) et (A.32) décrivent le mouvement des particules dans la référence arbitraire $\{x^\mu\}$.

Ainsi, le terme ajouté dans (A.31) qui ressemble à un terme d'accélération inertielle peut être interprété comme le terme opposé d'une force de gravitation ou l'opposé d'un champ de gravitation.

A.4.3 Tenseur métrique

Les équations (A.31) et (A.32) présentent l'inconvénient d'appeler une référence intermédiaire système qui est localement inertielle. Maintenant, nous devons réécrire ces équations en fonction d'une quantité physique caractérisée la référence ferme $\{x^\mu\}$. Cette quantité s'appelle le tenseur métrique. Dans le cadre de référence $\{x^\mu\}$, l'équation (A.25) est donnée par

$$ds^2 = G_{\alpha\beta}(X) dX^\alpha dX^\beta \quad (\text{A.33})$$

$$= G_{\alpha\beta}(X) \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\text{A.34})$$

$$= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (\text{A.35})$$

Ainsi, on a

$$g_{\mu\nu} = G_{\alpha\beta}(X) \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu}. \quad (\text{A.36})$$

$g_{\mu\nu}$ est le tenseur métrique. C'est la quantité qui décrit le champ gravitation. Comme il s'agit d'une métrique symétrique, il comporte dix composants indépendants. En plus, nous allons montrer qu'il peut être vu comme une généralisation de la potentiel gravitationnel newtonienne.

Le tenseur donné en (A.36) et ses dérivés peuvent être calculés au point P autour de pour lequel la référence localement inertielle $\{X^\alpha\}$ est définie en utilisant le développement de Taylor (A.26). Tout d'abord, nous avons

A.4. Force gravitationnel

$$g_{\mu\nu}|_p = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.37})$$

D'après le théorème de Sylvester, le nombre de valeurs propres positives et négatives de (A.37) est le même que, ce qui signifie trois valeurs propres positives et une valeur propre négative. De plus, la signature est la même que ce qui est $(-, +, +, +)$ et $\det g_{\mu\nu} = g < 0$.

Pour la dérivée du tenseur métrique $\partial_\sigma g_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}$, nous utilisons la relation (A.30)

$$\partial_\sigma g_{\mu\nu}|_P = \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \right) \quad (\text{A.38})$$

$$= \left(\frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\sigma} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu} + \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 X^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} \right) \eta_{\alpha\beta} \quad (\text{A.39})$$

$$= (\Gamma_{\mu\lambda}^\sigma + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho) \eta_{\rho\nu}. \quad (\text{A.40})$$

À partir cette relation, nous pouvons lier $\Upsilon_{\nu\rho}^\mu$ à g . En réalité, à partir (A.37) et (A.40) nous pouvons montrer facilement que

$$g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})|_P = 2 \frac{\partial x^\rho}{\partial X^\alpha} \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (\text{A.41})$$

$g^{\rho\sigma}$ est l'inverse de la matrice $g_{\rho\sigma}$ avec $g^{\rho\sigma} g_{\rho\sigma} = \delta_\nu^\sigma$. Cette dernière est donnée par

$$g^{\rho\sigma}|_P = \frac{\partial x^\rho}{\partial X^\delta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^\gamma} \eta^{\delta\gamma}. \quad (\text{A.42})$$

Finalement, le symbole de Christoffel est donné par

$$\Upsilon_{\nu\rho}^\mu = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (\text{A.43})$$

C'est l'équation géodésique qui décrit le chemin de l'extremum dans une courbe espace.

A.4.4 Composent des vitesses et des accélérations

Considérons une particule ordinaire de masse positive en chute libre dans un champ de gravitation. Ses quatre vitesses sont définies comme

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

A.4. Force gravitationnel

où on a utilisé

$$d\tau^2 = -\frac{1}{c^2}ds^2 = \frac{1}{c^2}g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \quad (\text{A.44})$$

En général, les quatre composantes d'accélération ne sont pas égales à la dérivée de quatre composante du vitesses au temps propre. Selon le le principe d'équivalence d'Einstein, le champ gravitationnel est localement équivalent au champ d'inertie accéléré. Ils devraient donc exister dans la définition de l'accélération. La définition correcte dans la relativité générale est

$$a^\mu = \frac{dv^\mu}{d\tau}v^\nu v^\rho. \quad (\text{A.45})$$

Alors l'équation géodésique (A.31) peut être écrite simplement sous la forme suivant: $a^\mu = 0$. L'équation géodésique représentant le mouvement d'une particule libre dans l'espace-temps se traduit par équation. D'une certaine manière, le principe de relativité a été généralisé dans toutes les références: Le mouvement de chaque corps libre, non soumis à aucune forces externes, mais à des accélérations inertielles représentant l'effet de gravitation, est un mouvement accéléré. C'est l'origine historique du nom de la relativité générale.

A.4.5 Constante de cosmologie

La constante cosmologique est un paramètre ajouté par Einstein en février 1917 à ses équations de la relativité générale (1915).

Après la découverte en 1929 du décalage vers le rouge par Edwin Hubble impliquant un univers en expansion, Albert Einstein revient sur l'introduction de la constante cosmologique, la qualifiant de « plus grande bêtise de sa vie » (en tout cas d'après G. Gamow. Dans son autobiographie publiée en 1970). Néanmoins des découvertes récentes durant les années 1990, traitant des problèmes tels que l'énergie du vide, la théorie quantique des champs ou l'accélération de l'expansion de l'univers ont provoqué un regain d'intérêt pour ce paramètre, qui est par ailleurs compatible avec l'ensemble de la théorie de la relativité générale.

La constante cosmologique est notée Λ . Elle a la dimension d'une courbure de l'espace, en m^{-2} . Depuis les années 1990, les développements de la cosmologie ont montré que l'univers est en expansion.

Équations de mouvement des champs physiques

L'étude des forces s'appuie sur la notion de champ, fonction de l'espace-temps. Les excitations minimales du champ peuvent être considérés comme des particules. Dans cette partie, nous allons nous intéresser à la description classique et quantique des champs sans interactions (champs relativistes libres).

B.1 Formalisme vectoriel de l'espace-temps

La relativité restreinte postule que l'espace physique est un nouvel espace à quatre dimensions

$$4 = 1 + 3.$$

Dans cet espace, la position d'un objet possède quatre coordonnées appelées: quadrivecteur

$$\begin{aligned} x &= (x^0, x^1, x^2, x^3), \\ &= (ct, x, y, z), \\ &= x^\mu \end{aligned} \tag{B.1}$$

où l'indice μ prend les valeurs $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Remarques

B.1. Formalisme vectoriel de l'espace-temps

1. Les coordonnées ayant l'indice en haut sont dites: coordonnées contravariantes.
2. Les coordonnées covariantes possèdent un indice en bas.

$$X^0 = X_0, \quad X^i = -X_i \quad i = 1, 2, 3.$$

3. Le produit scalaire entre deux quadrivecteurs X et Y est donné par

$$X.Y = X^\mu Y_\mu = X_\mu Y^\mu = X_0 Y_0 - \vec{X} \cdot \vec{Y} = X_0 Y_0 - X_i Y_i. \quad (\text{B.2})$$

4. Le produit scalaire est un invariant de Lorentz.
5. La variation d'intervalle est

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (\text{B.3})$$

où $\eta_{\mu\nu}$ est la métrique de l'espace de Minkowski. Sous la forme matricielle, elle s'exprime comme suit

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

6. Les opérateurs quadrivectoriels sont

$$\begin{aligned} \partial_\mu &= (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad c = 1, \\ &= (\partial_t, \vec{\nabla}), \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

où on a utilisé

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}. \quad (\text{B.6})$$

7. On écrit

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial t^2} - \Delta = \square \quad (\text{B.7})$$

8. Le quadrivecteur énergie-impulsion s'écrit

$$P^\mu = (E, \vec{p}) \quad c = 1. \quad (\text{B.8})$$

B.2 Théorie classique des champs

B.2.1 Champ

En physique, la notion de champ apparaît comme une généralisation du concept de coordonnées. En mécanique classique, on rappelle qu'un état est caractérisé par sa position q_i et son moment conjugué p_i . On écrit

$$\text{état} \equiv (q_i, p_i) \quad i = 1, \dots \quad (\text{B.9})$$

Par suite, le champ est considéré comme extension de la variable spatial q_i

$$q_i(t) \longrightarrow \phi(t, \vec{x}).$$

C'est un objet défini en tout point de l'espace. On note le passage suivant

$$\begin{array}{l} \text{Mécanique classique} \longrightarrow \text{Théorie classique des champs} \\ q_i(t) \longrightarrow \phi(t, \vec{x}) \\ \text{indice discret} \longrightarrow \text{indice continu.} \end{array}$$

En exploitant le formalisme précédent, on utilise la notation suivante

$$\phi(t, \vec{x}) \equiv \phi(x^\mu) \equiv \phi(x). \quad (\text{B.10})$$

Remarques

1. On peut traiter plusieurs types de champs
 - scalaires
 - vectoriels
 - spinoriels (Dirac)
 - tenseurs.
2. Il faut considérer toutes les dérivées partielles $\partial_\mu \phi$.

B.2.2 Action et équation d'Euler-Lagrange

Chaque champ est décrit par une densité lagrangienne \mathcal{L} . Cette dernière est une fonction de ϕ et $\partial_\mu\phi$. En effet, on écrit

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi). \quad (\text{B.11})$$

Dans ce cas, le lagrangien est

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi). \quad (\text{B.12})$$

À partir de la densité lagrangienne \mathcal{L} , on peut définir une action

$$S = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) d^4x, \quad (\text{B.13})$$

où on a utilisé

$$d^4x = dt d^3x. \quad (\text{B.14})$$

L'invariance de cette action produit l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0. \quad (\text{B.15})$$

Remarques

1. Comme en mécanique ordinaire, on peut définir le moment conjugué $\Pi(x)$ par

$$\Pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)}. \quad (\text{B.16})$$

2. Cette quantité remplace le moment conjugué de q_i .
3. En physique classique, on a les crochet de Poisson

$$\{\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{y})\} = \{\Pi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})\} = 0, \quad (\text{B.17})$$

$$\{\phi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (\text{B.18})$$

où on a utilisé $x^0 = t$.

4. On a une quantité conservée dite tenseur-énergie-impulsion associée au champ ϕ

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \mathcal{L}, \quad \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{B.19})$$

B.3. Équations de mouvement

où la composante T^{00} représente l'énergie totale du système.

B.3 Équations de mouvement

B.3.1 Équation de Klein-Gordon

On considère un champ scalaire réel libre ϕ (de spin zéro) de masse m . L'action décrivant la dynamique de ϕ est

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right). \quad (\text{B.20})$$

Le dernier terme de masse peut s'interpréter comme une énergie potentielle. En utilisant l'équation d'Euler Lagrange, on trouve

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = \partial_\mu \partial^\mu \phi \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi, \quad (\text{B.22})$$

produisant l'équation de mouvement

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0. \quad (\text{B.23})$$

Cette équation possède deux solutions possibles

$$\phi(x) = A_k e^{-i(E_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})}, \quad (\text{B.24})$$

$$\phi(x) = B_k e^{-i(-E_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})}, \quad (\text{B.25})$$

où on a utilisé $E_k = \sqrt{k^2 + m^2}$.

B.3.2 Champ de Dirac

On considère un champ de Dirac sans interaction (libre). L'action correspondante s'écrit comme suit

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi} \gamma_\mu \partial^\mu \psi - m\bar{\psi} \psi, \quad \hbar = c = 1. \quad (\text{B.26})$$

B.3. Équations de mouvement

où γ^μ sont les matrices de Dirac vérifiant

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (\text{B.27})$$

La solution simple de ces matrices est

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & \mathbb{0}_2 \\ \mathbb{0}_2 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbb{0}_2 & \sigma^i \\ -\sigma^i & \mathbb{0}_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.28})$$

$\mathbb{1}_2$ est la matrice identité 2×2 , $\mathbb{0}$ indique une matrice nulle 2×2 . En revanche, σ^i sont les matrices de Pauli.

Remarques

1. Les champs indépendants sont ψ et $\bar{\psi}$.
2. L'action est un scalaire de Lorentz.

En utilisant l'équation d'Euler-Lagrange, on obtient l'équation de Dirac suivante

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0. \quad (\text{B.29})$$

B.3.3 Champ vectoriel

On considère un champ vectoriel A_μ correspondant à une particule de spin 1. Pour un champ non-massif, la densité lagrangienne s'exprime comme suit

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (\text{B.30})$$

où $F_{\mu\nu}$ est le tenseur antisymétrique (de Maxwell)

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (\text{B.31})$$

En appliquant l'équation d'Euler-Lagrange, on obtient l'équation de mouvement

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{B.32})$$

produisant les équations de Maxwell. Finalement, on donne la classification suivante représentant les champs libres

B.4. Champs quantiques libres

Champ	Spin	Particule	Lagrangien
Scalaire $\phi(x)$	0	Bosons de Higgs	$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$
Spineur $\psi(x)$	$\frac{1}{2}$	quarks et leptons	$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$
Vecteur $A^\mu(x)$	1	γ, Z^0, W^\pm , gluons	$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$

B.4 Champs quantiques libres

Pour élaborer une théorie quantique des champs, les relations de la mécanique quantique devraient être modifiées

$$[X^i, P^j] = i\delta^{ij} \longrightarrow [\phi(x, t), \Pi(y, t)] = i\delta(x - y), \quad (\text{B.33})$$

$$[X^i, X^j] = 0 \longrightarrow [\phi(x, t), \phi(y, t)] = 0, \quad (\text{B.34})$$

$$[P^i, P^j] = 0 \longrightarrow [\Pi(x, t), \Pi(y, t)] = 0. \quad (\text{B.35})$$

À partir de ces relations, on peut montrer que les fonctions d'ondes deviennent des opérateurs

$$\phi(x, t) \longrightarrow \text{opérateur.}$$

En utilisant les propriétés de la fonction de Dirac, on peut démontrer que les champs quantiques (scalaires, ...) peuvent être interprétés comme une distribution continue des opérateurs création et annihilation.

Exemple

On considère un champ scalaire de spin 0. En résolvant l'équation de Klein-Gordon, ϕ peut s'exprimer comme suit

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k \frac{1}{\sqrt{2E_k}} (a_k e^{-ikx} + a_k^+ e^{ikx}), \quad (\text{B.36})$$

où on a

$$[a_k, a_{k'}^+] = \delta(k - k'). \quad (\text{B.37})$$

Remarques

1. La quantification du champ vectoriel se fait de façon similaire en utilisant trois composantes.
2. Pour un spineur, il faut introduire la notion d'hélicité associée à la valeur de spin.

- [1] Supernova Cosmology Project collaboration, S. Perlmutter et al., *Measurements of Ω and λ from 42 high redshift supernovae*, *Astrophys. J* **517**, 565-586 (1999), [arXiv:astro-ph/9812133](#).
- [2] W. Rindler, *Visual horizons in world models*, *mnras* **116**, (1956) 662-677.
- [3] C. W. Misner, *The Isotropy of the Universe*, *apj* **151**, (1968) 431-457.
- [4] R. Dicke, *Gravitation and the Universe: The Jayne Lectures for 1969*, Philadelphia: American Philosophical Institute, (1970) 61 -62.
- [5] K. Garrett and G. Duda, *Dark Matter: A Primer*, *Adv. Astron.* **2011**, (2011) 968-283, [arXiv:1006.2483](#).
- [6] P. Carenza, R. Pasechnik, G. Salinas and Z. W. Wang, *Glueball Dark Matter revisited*, [arXiv:2207.13716](#).
- [7] Z. Li, A. Dekel, N. Mandelker, J. Freundlich and T. François, *The Response of Dark Matter Haloes to Gas Ejection: CuspCore II*, [arXiv:2206.07069](#).
- [8] A. De Felice and S. Tsujikawa, *$f(R)$ theories*, *Living Rev. Rel.* **13**, (2010) 3, [arXiv:1002.4928](#).
- [9] G. G. Luciano and Y. Liu, *Tachyon model of Barrow holographic dark energy and inflation mechanism*, [arXiv:2205.13458](#).
- [10] P. G. S. Fernandes, P. Carrilho, T. Clifton and D. J. Mulryne, *The 4D Einstein–Gauss–Bonnet theory of gravity: a review*, *Class. Quant. Grav.* **39**, (2022) 063001, [arXiv:2202.13908](#).

- [11] L. Aresté Saló, D. Benisty, E. I. Guendelman and J. d. Haro, *Quintessential inflation and cosmological seesaw mechanism: reheating and observational constraints*, JCAP **07**, (2021) 007, [arXiv:2102.09514](#).
- [12] Y. Akrami et al., Planck Collaboration, *Planck 2018 results. X. Constraints on inflation*, Astron. Astrophys. **641**, (2020) A10, [arXiv:1807.06211](#).
- [13] Planck Collaboration Collaboration, P. Ade et al., *Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters*, Astron. Astrophys. **571**, A16 (2014), [arXiv:1303.5076](#).
- [14] BICEP/Keck Collab. P. A. R. Ade et al., *BICEP / Keck XIII: Improved Constraints on Primordial Gravitational Waves using Planck, WMAP, and BICEP/Keck Observations through the 2018 Observing Season*, Phys. Rev. Lett. **127**, (2021) 151301, [arXiv:2110.00483](#).
- [15] J. Martin, C. Ringeval and V. Vennin, *Encyclopædia Inflationaris*, Phys. Dark Univ. **5-6**, (2014) 75-235 [arXiv:1303.3787](#).
- [16] J. Martin, C. Ringeval, R. Trotta and V. Vennin, *The Best Inflationary Models After Planck*, JCAP **03**, (2014) 039, [arXiv:1312.3529](#).
- [17] A. Belhaj, M. Benali, A. El Balali, W. El Hadri, H. El Moumni and E. Torrente-Lujan, *Black hole shadows in M-theory scenarios*, Int. J. Mod. Phys. D **30**, (2021) 2150026, [arXiv:2008.09908](#).
- [18] E. Witten, *Phase transitions in M theory and F theory*, Nucl. Phys. B **471**, (1996) 195-216, [arXiv:hep-th/9603150](#).
- [19] P. C. West, *E(11) and M theory*, Class. Quant. Grav. **18**, (2001) 4443-4460. [arXiv:hep-th/0104081](#).
- [20] B. A. Bassett, S. Tsujikawa and D. Wands, *Inflation dynamics and reheating*, Rev. Mod. Phys. **78**, (2006) 537-589, [arXiv:astro-ph/0507632](#).
- [21] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, *f(R) Theories Of Gravity*, Rev. Mod. Phys. **82**, (2010) 451-497, [arXiv:0805.1726](#).
- [22] L. Sebastiani and R. Myrzakulov, *F(R) gravity and inflation*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **12**, (2015) 1530003, [arXiv:1506.05330](#).
- [23] S. V. Babak and L. P. Grishchuk, *The Energy momentum tensor for the gravitational field*, Phys. Rev. D **61**, (2000) 024038 [arXiv:gr-qc/9907027](#).
- [24] T. Shiromizu, K. I. Maeda and M. Sasaki, *The Einstein Equations on the 3-Brane World*, Phys. Rev. **D62**, (2000) 024012 , [arXiv:gr-qc/9910076](#).

- [25] S. Chakraborty, *Boundary Terms of the Einstein–Hilbert Action*, *Fundam. Theor. Phys.* **187**, (2017) 43-59, [arXiv:1607.05986](#).
- [26] H. Burton and R. B. Mann, *Palatini variational principle for an extended Einstein–Hilbert action*, *Phys. Rev. D* **57**, (1998) 4754-4759, [arXiv:gr-qc/9711003](#).
- [27] A. Belhaj, H. Es-Sobhani, M. Oualaid and E. Torrente-Lujan, *Reconstructing slow-roll Scalar-Tensor Gauss-Bonnet single field inflation from running spectral data*, [arXiv:2108.11881](#) .
- [28] L. N. Granda and D. F. Jimenez, *Inflation with non-minimal kinetic and Gauss–Bonnet couplings*, *Eur. Phys. J. C* **81**, (2021) 10.
- [29] V. K. Oikonomou and F. P. Fronimos, *Generalized Horndeski-like Einstein Gauss-Bonnet inflation with massless primordial gravitons*, *Nucl. Phys. B* **971**, (2021) 115522, [arXiv:2108.10841](#).
- [30] L. Dai, M. Kamionkowski and J. Wang, *Reheating constraints to inflationary models*, *Phys. Rev. Lett.* **113**, (2014) 041302, [arXiv:1404.6704](#).
- [31] J. L. Cook, E. Dimastrogiovanni, D. A. Easson and L. M. Krauss, *Reheating predictions in single field inflation*, *JCAP* **04**, (2015) 047, [arXiv:1502.04673](#).
- [32] R. Allahverdi, R. Brandenberger, F. Y. Cyr-Racine and A. Mazumdar, *Reheating in Inflationary Cosmology: Theory and Applications*, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **60**, (2010) 27-51, [arXiv:1001.2600](#).
- [33] M. A. Amin, M. P. Hertzberg, D. I. Kaiser and J. Karouby, *Nonperturbative Dynamics Of Reheating After Inflation: A Review*, *Int. J. Mod. Phys. D* **24**, (2014) 1530003, [arXiv:1410.3808](#).
- [34] A. Belhaj, Y. Hassouni, M. Oualaid and M. B. Sedra, *On stringy inflation potentials*, *Mod. Phys. Lett. A* **36**, (2021) 2150225.
- [35] A. Belhaj, M. Benali, Y. Hassouni, M. Oualaid and M. B. Sedra, *On brane cosmological behaviors of Starobinsky inflationary model*, *Int. J. Mod. Phys. A* **37**, (2022) 2250043.
- [36] W. de Boer, *Grand unified theories and supersymmetry in particle physics and cosmology*, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **33**, (1994) 201-302, [arXiv:hep-ph/9402266](#).
- [37] A. J. Buras, J. R. Ellis, M. K. Gaillard and D. V. Nanopoulos, *Aspects of the Grand Unification of Strong, Weak and Electromagnetic Interactions*, *Nucl. Phys.* **B135**, (1978) 66-92.

- [38] Ya. B. Zeldovich and M. Yu. Khlopov, *On the Concentration of Relic Magnetic Monopoles in the Universe*, Phys. Lett. **79B**, (1978) 239-241.
- [39] J. Preskill, *Cosmological Production of Superheavy Magnetic Monopoles*, Phys. Rev. Lett. **43**, (1979) 1365.
- [40] G. 't Hooft, *Magnetic Monopoles in Unified Gauge Theories*, Nucl. Phys. **B79**, (1974) 276-284.
- [41] A. M. Polyakov, *Particle Spectrum in the Quantum Field Theory*, JETP Lett. **20**, (1974) 194-195.
- [42] H. Georgi and S. L. Glashow, *Unity of All Elementary Particle Forces*, Phys. Rev. Lett. **32**, (1974) 438-441.
- [43] E. Hubble, *A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae*, (1929) 168-173.
- [44] A. Sandage, *Current Problems in the Extragalactic Distance Scale*, Astrophys.J. **127**, (1958) 513-526.
- [45] D. A. Kirzhnits and A. D. Linde, *Macroscopic Consequences of the Weinberg Model*, Phys. Lett. **42B**, (1972) 471-474.
- [46] D. A. Kirzhnits, *Weinberg model in the hot universe*, JETP Lett. **15**, (1972) 529-531.
- [47] L. Dolan and R. Jackiw, *Symmetry Behavior at Finite Temperature*, Phys. Rev. **D9**, (1974) 3320-3341.
- [48] S. Weinberg, *Gauge and Global Symmetries at High Temperature*, Phys. Rev. **D9**, (1974) 3357-3378.
- [49] D. A. Kirzhnits and A. D. Linde, *A Relativistic phase transition*, Sov. Phys. JETP **40**, (1975) 628.
- [50] D. A. Kirzhnits and A. D. Linde, *Symmetry Behavior in Gauge Theories*, Annals Phys. **101**, (1976) 195-238.
- [51] M. Dine, R. G. Leigh, P. Y. Huet, A. D. Linde and D. A. Linde, *Towards the theory of the electroweak phase transition*, Phys. Rev. **D46**, (1992) 550-571, arXiv:hep-ph/9203203.
- [52] A. D. Sakharov, *Violation of CP Invariance, C asymmetry, and baryon asymmetry of the universe*, Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **5**, (1967) 32-35.
- [53] R. A. Alpher, H. Bethe and G. Gamow, *The origin of chemical elements*, Phys. Rev. **73**, (1948) 803-804.

- [54] G. M. Fuller, G. J. Mathews and C. R. Alcock, *The Quark - Hadron Phase Transition in the Early Universe: Isothermal Baryon Number Fluctuations and Primordial Nucleosynthesis*, Phys. Rev. **D37**, 1988.
- [55] A. Coc, E. Vangioni-Flam, P. Descouvemont, A. Adahchour and C. Angulo, *Updated Big Bang nucleosynthesis confronted to WMAP observations and to the abundance of light elements*, Astrophys. J. **600**, (2004) 544-552.
- [56] M. Pospelov and J. Pradler, *Big Bang Nucleosynthesis as a Probe of New Physics*, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **60**, (2010) 539-568 [arXiv:hep-th/1011.1054](#).
- [57] A. Penzias and R. W. Wilson, *A Measurement of excess antenna temperature at 4080-Mc/s*, Astrophys. J. **142**, (1965) 419-421.
- [58] J. D. Bowman, A. E. E. Rogers, R. A. Monsalve, T. J. Mozdzen and N. Mahesh, *An absorption profile centred at 78 megahertz in the sky-averaged spectrum*, Nature **555**, (2018) 67-70, [arXiv:hep-th/1810.05912](#).
- [59] J. E. Gunn and B. A. Peterson, *On the Density of Neutral Hydrogen in Intergalactic Space*, apj **142**, (1965) 1633-1636.
- [60] SDSS collaboration, R. H. Becker et al., *Evidence for Reionization at $Z \approx 6$: Detection of a Gunn-Peterson trough in a $Z = 6.28$ Quasar*, Astron. J. **122**, (2001) 2850.
- [61] R. Barkana and A. Loeb, *In the beginning: The First sources of light and the reionization of the Universe*, Phys. Rept. **349**, (2001) 125-238.
- [62] E. T. Vishniac, *Reionization and Small Scale Fluctuations in the Microwave Background*, apj **322**, (1987) 597.
- [63] Supernova Search Team collaboration, A. G. Riess et al., *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*, Astron. J. **116**, (1998) 1009-1038.
- [64] R. Dicke, *Gravitation and the Universe: The Jayne Lectures for 1969*, Philadelphia: American Philosophical Institute, (1970) 61 -62.
- [65] R. Dicke and P. Peebles, *General Relativity: An Einstein Centenary Survey*, Cambridge University Press, edited by S.W. Hawking and W. Israel, (1979).
- [66] K. Sato, *First Order Phase Transition of a Vacuum and Expansion of the Universe*, Mon.Not.Roy.Astron.Soc. **195**, (1981) 467-479.
- [67] A. H. Guth, *The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems*, Phys.Rev. **D23**, (1981) 347-356.

- [68] A. D. Linde, *A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems*, Phys.Lett. **B108**, (1982) 389-393.
- [69] A. Albrecht and P. J. Steinhardt, *Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking*, Phys.Rev.Lett. **48**, (1982) 1220-1223.
- [70] A. D. Linde, *Chaotic Inflation*, Phys.Lett. **B129**, (1983) 177-181.
- [71] V. F. Mukhanov and G. Chibisov, *The Vacuum energy and large scale structure of the universe*, Sov.Phys.JETP **56**, (1982) 258-265.
- [72] A. A. Starobinsky, *Dynamics of Phase Transition in the New Inflationary Universe Scenario and Generation of Perturbations*, Phys.Lett. **B117**, (1982) 175-178.
- [73] A. H. Guth and S. Pi, *Fluctuations in the New Inflationary Universe*, Phys.Rev.Lett. **49**, (1982), 1110-1113.
- [74] S. Hawking, *The Development of Irregularities in a Single Bubble Inflationary Universe*, Phys.Lett. **B115**, (1982) 295.
- [75] J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt and M. S. Turner, *Spontaneous Creation of Almost Scale-Free Density Perturbations in an Inflationary Universe*, Phys.Rev. **D28**, (1983) 679.
- [76] S. Alexander, R. H. Brandenberger and D. A. Easson, *Brane gases in the early universe*, Phys. Rev. D **62**, (2000) 103509, arXiv:hep-th/0005212.
- [77] J. Martin, P. Peter, N. Pinto Neto and D. J. Schwarz, *Passing through the bounce in the ekpyrotic models*, Phys. Rev. D **65**, (2002) 123513, arXiv:hep-th/0112128.
- [78] P. J. Steinhardt, N. Turok and N. Turok, *A Cyclic model of the universe*, Science **296**, (2002) 1436-1439, arXiv:hep-th/0111030.
- [79] R. Kallosh, L. Kofman and A. D. Linde, *Pyrotechnic universe*, Phys. Rev. D **64**, (2001) 123523, arXiv:hep-th/0104073.
- [80] J. Magueijo, *New varying speed of light theories*, Rept. Prog. Phys. **66**, (2003) 2025, arXiv:astro-ph/0305457.
- [81] R. Brandenberger, *Matter Bounce in Horava-Lifshitz Cosmology*, Phys. Rev. D **80**, (2009) 043516, arXiv:0904.2835.
- [82] G. Hinshaw, D. Larson, E. Komatsu, D. N. Spergel, C. L. Bennett, J. Dunkley et al., *Nine-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results*, **apjs** **208**, (2013) 19, arXiv:1212.5226.

- [83] J. Dunkley, E. Calabrese, J. Sievers, G. E. Addison, N. Battaglia, E. S. Battistelli, J. R. Bond, S. Das, M. J. Devlin and R. Dunner, *et al.* *The Atacama Cosmology Telescope: likelihood for small-scale CMB data*, JCAP **07**, (2013) 025, [arXiv:1301.0776](#).
- [84] J. L. Sievers *et al.*, Atacama Cosmology Telescope, *The Atacama Cosmology Telescope: Cosmological parameters from three seasons of data*, JCAP **10**, (2013) 060, [arXiv:1301.0824](#).
- [85] Z. Hou, C. L. Reichardt, K. T. Story, B. Follin, R. Keisler, K. A. Aird *et al.*, *Constraints on Cosmology from the Cosmic Microwave Background Power Spectrum of the 2500 deg² SPT-SZ Survey*, *apj* **782**, (2014) 74, [arXiv:1212.6267](#).
- [86] K. T. Story, C. L. Reichardt, Z. Hou, R. Keisler, K. A. Aird, B. A. Benson *et al.*, *A Measurement of the Cosmic Microwave Background Damping Tail from the 2500-Square-Degree SPT-SZ Survey*, *apj* **779**, (2013) 86, [arXiv:1210.7231](#).
- [87] A. H. Guth, *The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems*, *Phys.Rev.* **D23**, (1981) 347-356.
- [88] A. D. Linde, *A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems*, *Phys.Lett.* **B108**, (1982) 389-393.
- [89] G. Obied, H. Ooguri, L. Spodyneiko and C. Vafa, *De Sitter Space and the Swampland*, [arXiv:1806.08362](#).
- [90] E. Palti, *The Swampland: Introduction and Review*, *Fortsch. Phys.* **67**, (2019) 1900037, [arXiv:1903.06239](#).
- [91] E. J. Copeland, E. W. Kolb, A. R. Liddle and J. E. Lidsey, *Reconstructing the inflation potential, in principle and in practice*, *Phys. Rev. D* **48**, (1993) 2529-2547, [arXiv:hep-ph/9303288](#).
- [92] E. W. Kolb, *Dynamics of the inflationary era*, (1999), [arXiv:hep-ph/9910311](#).
- [93] A. D. Linde, *Chaotic Inflation*, *Physics Letters B*, **B129**, (1983) 177-181.
- [94] K. Freese, J. A. Frieman and A. V. Olinto, *Natural inflation with pseudo Nambu-Goldstone bosons*, *Phys. Rev. Lett B.* **65**, (1990) 3233.
- [95] A. D. Linde, *A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems*, *Phys. Lett. B* **108**, (1982) 389-393.

- [96] A. D. Linde, *Hybrid inflation*, Phys. Rev. D **49**, (1994) 748-754, arXiv:astro-ph/9307002.
- [97] M. Fairbairn and M. H. G. Tytgat, *Inflation from a tachyon fluid?*, Phys. Lett. B **546**, (2002) 1-7, arXiv:hep-th/0204070.
- [98] V. F. Mukhanov and G. V. Chibisov, *Quantum Fluctuations and a Nonsingular Universe*, JETP Lett. **33**, (1981)532-535.
- [99] C. Armendariz-Picon, T. Damour and V. F. Mukhanov, *k - inflation*, Phys. Lett. B **458**, (1994) 209-218, arXiv:hep-th/9904075.
- [100] E. J. Copeland, A. R. Liddle, D. H. Lyth, E. D. Stewart and D. Wands, *False vacuum inflation with Einstein gravity*, Phys. Rev. D **49**, (1994) 6410-6433, arXiv:astro-ph/9401011.
- [101] D. H. Lyth and A. Riotto, *Particle physics models of inflation and the cosmological density perturbation*, Phys. Rept. **314**, (1999) 1-146, arXiv:hep-ph/9807278.
- [102] A. D. Linde and A. Riotto, *Hybrid inflation in supergravity*, Phys. Rev. D **56**, (1997) R1841-R1844, arXiv:hep-ph/9703209.
- [103] H. Kodama, M. Sasaki, *Cosmological Perturbation Theory, Progress of Theoretical Physics Supplement*, Prog. Theor. Phys. Suppl, **78**, (1984) 1-166.
- [104] J. M. Bardeen, *Gauge-invariant cosmological perturbations*, Phys. Rev. D **22**, (1980).
- [105] J. M. Bardeen, *Lectures given at 2nd Guo Shou-jing Summer School on Particle Physics and Cosmology, Nanjing , China*, (1988).
- [106] J. Martin and D. J. Schwarz, *The Influence of cosmological transitions on the evolution of density perturbations*, Phys. Rev. D **57**, (1998) 3302-3316, arXiv:gr-qc/9704049 .
- [107] V. F. Mukhanov, L. A. Kofman and D. Y. Pogosian, *Cosmological Perturbations in the Inflationary Universe*, Phys. Lett. B **193**, (1987) 427-432.
- [108] M. Sasaki, *Large Scale Quantum Fluctuations in the Inflationary Universe*, Progress of Theoretical Physics, (1986) 1036-1046.
- [109] V. F. Mukhanov, *Quantum Theory of Gauge Invariant Cosmological Perturbations*, Sov. Phys. JETP **67**, (1988) 1297-1302.
- [110] J. c. Hwang and H. Noh, *Cosmological perturbations in generalized gravity theories*. Physical Review D **54**, (1996) 1460.

- [111] J. E. Lidsey, A. R. Liddle, E. W. Kolb, E. J. Copeland, *Reconstructing the inflaton potential—an overview*, Rev. Mod. Phys. **69**, (1997) 373.
- [112] A. R. Liddle and D. H. Lyth, *Cosmological inflation and large-scale structure*, Cambridge University Press, (2000).
- [113] E. F. Bunn, A. R. Liddle and M. J. White, *Four-year COBE normalization of inflationary cosmologies*, Phys. Rev. D **54**, (1996) R5917, [arXiv:astro-ph/9607038](#).
- [114] N. Christensen and R. Meyer, *Bayesian methods for cosmological parameter estimation from cosmic microwave background measurements*, [arXiv:astro-ph/0006401](#).
- [115] M. K. Gaillard, P. D. Grannis and F. J. Sciulli, *The Standard model of particle physics*, Rev. Mod. Phys. **71**, **S96-S111**, (1999), [arXiv:hep-ph/9812285](#).
- [116] Y. Aoki, G. Endrodi, Z. Fodor, S. D. Katz and K. K. Szabo, *The Order of the quantum chromodynamics transition predicted by the standard model of particle physics*, Nature **443**, (2006) 675-678, [arXiv:hep-lat/0611014](#).
- [117] J. Bagger and N. Lambert, *Gauge symmetry and supersymmetry of multiple M2-branes*, Phys. Rev. D **77**, (2008) 065008, [arXiv:0711.0955](#).
- [118] N. Arkani-Hamed, H. C. Cheng, B. A. Dobrescu and L. J. Hall, *Selfbreaking of the standard model gauge symmetry*, Phys. Rev. D **62**, (2000) 096006, [arXiv:hep-ph/0006238](#).
- [119] D. Langlois, *Brane cosmology: An Introduction*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **148**, (2003) 181-212, [arXiv:hep-th/0209261](#).
- [120] P. Brax and C. van de Bruck, *Cosmology and brane worlds: A Review*, Class. Quant. Grav. **20**, (2003) R201-R232, [arXiv:hep-th/0303095](#).
- [121] J. Nishimura and F. Sugino, *Dynamical generation of four-dimensional space-time in the IIB matrix model*, JHEP **05**, (2002) 001, [arXiv:hep-th/0111102](#).
- [122] M. Gogberashvili, *Four dimensionality in noncompact Kaluza-Klein model*, Mod. Phys. Lett. A **14**, (1999) 2025-2032, [arXiv:hep-ph/9904383](#).
- [123] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, *New dimensions at a millimeter to a Fermi and superstrings at a TeV*, Phys. Lett. B **436**, (1998) 257-263, [arXiv:hep-ph/9804398](#).
- [124] K. Yang, S. F. Guo and B. M. Gu, *A braneworld model in a massive gravity*, [arXiv:2208.04665](#).

- [125] R. Maartens, D. Wands, B. A. Bassett and I. Heard, *Chaotic inflation on the brane*, Phys. Rev. D **62**, (2000) 041301, arXiv:hep-ph/9912464.
- [126] A. Riotto, *Inflation and the theory of cosmological perturbations*, ICTP Lect. Notes Ser. **14**, (2003) 317-413, arXiv:hep-ph/0210162.
- [127] D. Wands, K. A. Malik, D. H. Lyth and A. R. Liddle, *A New approach to the evolution of cosmological perturbations on large scales*, Phys. Rev. D **62**, (2000) 043527, arXiv:astro-ph/0003278.
- [128] L. Abbott, E. Farhi, and M. B. Wise, *Particle Production in the New Inflationary Cosmology*, Phys.Lett. **B117**, (1982) 29.
- [129] A. Dolgov and A. D. Linde, *Baryon Asymmetry in Inflationary Universe*, Phys.Lett. **B116**, 1982.
- [130] L. Kofman, A. D. Linde and A. A. Starobinsky, *Reheating after inflation*, Phys. Rev. Lett. **73**, (1994) 3195-3198, arXiv:hep-th/9405187.
- [131] L. Kofman, A. D. Linde and A. A. Starobinsky, *Towards the theory of reheating after inflation*, Phys. Rev. D **56**, (1997) 3258-3295, arXiv:hep-ph/9704452.
- [132] B. R. Greene, T. Prokopec and T. G. Roos, *Inflaton decay and heavy particle production with negative coupling*, Phys. Rev. D **56**, (1997) 6484-6507, arXiv:hep-ph/9705357 .
- [133] G. N. Felder, L. Kofman and A. D. Linde, *Instant preheating*, Phys. Rev. D **59**, (1999) 123523, arXiv:hep-ph/9812289.
- [134] J. B. Munoz and M. Kamionkowski, *Equation-of-State Parameter for Reheating*, Phys. Rev. D **91**, (2015) 043521, arXiv:1412.0656.
- [135] R. Adhikari, M. R. Gangopadhyay and Yogesh, *Power Law Plateau Inflation Potential In The RS II Braneworld Evading Swampland Conjecture*, Eur. Phys. J. C **80**, (2020) 899, arXiv:2002.07061.
- [136] R. Adhikari, M. R. Gangopadhyay and Yogesh, *Lower Tensor to Scalar Ratio in a SUGRA Motivated Inflationary Potential*, Grav. Cosmol. **28**, (2022) 1-9, arXiv:1909.07217.
- [137] M. J. White and E. F. Bunn, *The COBE normalization of CMB anisotropies*, Astrophys. J. **450**, (1995) 477, erratum: Astrophys. J. **477**, (1995) 460, arXiv:astro-ph/9503054.
- [138] T. Shiromizu, K. i. Maeda and M. Sasaki, *The Einstein equation on the 3-brane world*, Phys. Rev. D **62**, (2000) 024012, arXiv:gr-qc/9910076.

- [139] F. Renzi, M. Shokri and A. Melchiorri, *What is the amplitude of the gravitational waves background expected in the Starobinski model*, Phys. Dark Univ. **27**, (2020) 100450, arXiv:1909.08014.
- [140] S. Meza, D. Altamirano, M. Z. Mughal and C. Rojas, *Numerical analysis of the generalized Starobinsky inflationary model*, Int. J. Mod. Phys. D **30**, (2021) 2150062, arXiv:2104.01139.
- [141] C. Osses, N. Videla and G. Panotopoulos, *Reheating in small-field inflation on the brane: The Swampland Criteria and observational constraints in light of the PLANCK 2018 results*, Eur. Phys. J. C **81**, (2021) 485, arXiv:2101.08882 .
- [142] A. Mohammadi, T. Golanbari, S. Nasri and K. Saaidi, *Brane inflation: Swampland criteria, TCC, and reheating predictions*, Astropart. Phys. **142**, (2022) 102734, arXiv:2006.09489.

Résumé

Dans ce travail doctoral, nous discutons l'inflation cosmologique, qui est une phase d'accélération de l'expansion de l'univers. Cette dernière est considérée comme une réponse aux problèmes du modèle standard de la cosmologie permettant certaines production perturbatives aux grandes échelles sur les fonds diffus cosmologique (Cosmic Microwave Background (CMB)). Particulièrement, nous étudions les modèles cosmologiques d'inflation à partir de la physique des branes en se basant sur le scénario de Randall-Sundrum. Précisément, nous calculons les paramètres observables associés, y compris ceux de la perturbation. Pour ce faire, nous examinons d'abord le modèle standard inflationnaire en calculant les quantités cosmologiques correspondantes à des potentiels scalaires connus. Ensuite, nous proposons des modèles dans le cadre de la théorie des supercordes type IIB en présence des de D3-branes. Concrètement, nous traitons certains potentiels avec un seul champ scalaire inspirés par la dite théorie. Dans ce contexte, nous présentons une étude détaillée concernant le potentiel logarithmique et le potentiel tachyonique inflationnaire des cordes ouvertes (OSTI). En présence de la tension de D3-brane, nous fournissons des contraintes sur le champ scalaire produisant des modèles inflationnaires compatibles avec les résultats de Planck. Après, nous étudions la phase de réchauffage de ces deux modèles. En effet, nous observons que la température de réchauffage dépend des formes du potentiel scalaire. Entre autres, nous trouvons que l'OSTI génère de petites températures, supportées par les échelles la théorie de grande unification (GUT). Finalement, nous investiguons le comportement cosmologique du modèle inflationnaire branaire de Starobinsky. Concrètement, nous découvrons que l'indice spectral et le rapport tenseur-scalaire sont en bon accord avec les données observationnelles de Planck et BICEP/Keck. En faisant varier les valeurs de la masse de Planck à cinq dimensions M_{5p} , nous examinons le comportement thermique correspondant. Plus précisément, nous calculons et analysons les paramètres cosmologiques de réchauffement. Pour une valeur spécifique de la tension de la D3-brane, nous fournissons de bonnes prédictions des quantités impliquées. En prenant $M_{5p} = 10^{12}$ TeV, nous obtenons des températures acceptables de réchauffement.

Mots-clés : Inflation, Réchauffement, Physique des Branes, Formalisme Randall-Sundrum, Cosmologie, Théorie des cordes, Théorie de Gauss-Bonnet, Potentiel de Starobinsky, Théorie-M.

Abstract

In this doctoral thesis, we discuss cosmological inflation, which is a phase of acceleration of the expansion of the universe. The latter is considered as an answer to the problems of the standard model of cosmology allowing certain cosmological productions at large scales on the Cosmic Microwave Background (CMB). In particular, we study cosmological inflation models from brane physics based on the Randall-Sundrum scenario. Precisely, we calculate the corresponding observable parameters, including the ones associated with the perturbation. To do so, we first examine the standard inflationary model by computing the cosmological quantities corresponding to known scalar potentials. Then, we propose models within type IIB superstring theory with D3-branes. In particular, we deal with certain potentials with a single scalar field inspired by such a theory. In this context, we present a detailed study concerning the logarithmic potential and the open string inflationary tachyonic potential (OSTI). Turning on the the D3-brane effect via its tension, we provide constraints on the scalar field producing inflationary models consistent with Planck's results. Next, we study the reheating phase of such two models. Specifically, we observe that the reheating temperature depends on the scalar potential forms. Among others, we find that OSTI generates small temperatures, supported by Grand Unification Theory (GUT) scales. Finally, we investigate the cosmological behaviors of Starobinsky inflationary brane model. Concretely, we find that the spectral index and the tensor-scalar ratio are in good agreement with the observational data of Planck and BICEP/Keck. Varying the five dimensional Planck Mass M_{5p} , we inspect the corresponding thermal behavior. More precisely, we compute and analyze the cosmological parameters of such a thermal phase. For a specific value of the D3-brane tension, we provide good predictions of the involved quantities. Taking $M_{5p} = 10^{12}$ TeV, we obtain acceptable reheating temperatures.

Keywords : Inflation, Reheating, Brane Physics, Randall-Sundrum Formalism, Cosmology, String theory, Gauss-Bonnet Theory, Starobinsky Potential, M-Theory.