جامعة سيدي محمد بن عبد الله بفاس
UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH DE FES

كلية العلوم والتقنيات فاس
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE FÈS

N° d'ordre : 82/2023

Centre des Etudes Doctorales : Sciences et Techniques et Sciences Médicales
Formation Doctorale : Sciences de l'Ingénieur, Sciences Physiques, Mathématiques et Informatique

Discipline : Mathématiques
Spécialité : Mathématiques Appliquées
Laboratoire : Sciences de l'Ingénieur

Thèse pour l'obtention de DOCTORAT

Théorie des capacités dans les espaces généralisés et applications

Présentée par : **Rachid ELHARCH**

Soutenue le **11 novembre 2023**

Devant le jury composé de :

Prénom et Nom	Grade	Etablissement	Qualité
Elhoussine AZROUL	PES	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz Fès	Président
Mohamed RHOUDAF	PES	Faculté des Sciences Meknès	Rapporteur
Abdelhai EL AZZOUZI	PES	Faculté Polydisciplinaire de Taza	Rapporteur
Mounir MEKKOUR	PH	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz Fès	Rapporteur
Ahmed ABERQI	PH	Ecole Nationale des Sciences Appliquées Fès	Examinateur
Youssef AKDIM	PES	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz Fès	Directeur de thèse
Soumia LALAOUI RHALI	PES	Faculté Polydisciplinaire de Taza	Co- Directeur de thèse
Hassib MOULAY CHERIF	PH	Faculté Polydisciplinaire de Taza	Invité

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des Sciences et Techniques - Fès-
Laboratoire Sciences de l'Ingénieur

Résumé de la thèse

Présentée par

Rachid ELHARCH

Pour l'obtention du

Doctorat en Mathématiques

FD : Sciences de l'Ingénieur, Sciences Physiques, Mathématiques et Informatique

Spécialité : Mathématiques appliquées

Intitulée

Théorie des capacités dans les espaces généralisés et applications.

Encadré par

Pr. Youssef Akdim & Pr. Soumia Lalaoui Rhali

Introduction générale

Le concept physique du potentiel newtonien que Poisson a proposé pour faire progresser la mécanique newtonienne a donné naissance à un champ mathématique appelé théorie du potentiel. La théorie classique du potentiel est une branche de mathématiques qui étudie les fonctions harmoniques, c'est-à-dire les fonctions qui satisfont l'équation de Poisson ou l'équation de Laplace. La théorie du potentiel a été étudiée en particulier après les travaux de Gauss en 1840. Plusieurs problèmes et méthodes proposés par Gauss sont devenues des idées de base des recherches modernes en ce domaine. Gauss et d'autres chercheurs ont découvert que la méthode des potentiels pouvait être utilisée non seulement pour résoudre les problèmes de la théorie de la gravitation, mais aussi pour résoudre un large éventail de problèmes de physique mathématique, en particulier l'électrostatique et l'électricité. Et depuis, la théorie du potentiel a envisagé plusieurs applications réelles dans différents domaines (nous renvoyons le lecteur à [59],[17]). Signalons par exemple qu'en physique, la théorie du potentiel apparait pour modéliser les forces fondamentales de la nature telles que la gravité et la force électrostatique. En mécanique, elle est utilisée pour résoudre des problèmes liés au mouvement des particules et des objets. La théorie du potentiel est également utilisée en géophysique pour étudier les champs gravitationnels et magnétiques de la terre. En outre, elle a de nombreuses applications en finance, elle y est utilisée pour modéliser les cours des actions et les taux d'intérêt.

La théorie du potentiel non linéaire (NPT) est un développement plus récent qui étend la théorie classique du potentiel à des contextes non linéaires. Elle vise à étudier les propriétés des solutions des équations différentielles elliptiques et paraboliques non linéaires (voir par exemple [59]). C'est une branche qui se focalise sur la régularité des équations aux dérivées partielles tout en fournissant des énoncés étroitement liés à ceux des deux théories : théorie classique du potentiel linéaire et théorie de la régularité des équations linéaires.

Dans la première moitié du 20ème siècle, la généralisation des principaux problèmes et l'achèvement des formulations existantes dans la théorie du potentiel ont été grandement stimulés

par l'étude de la théorie du potentiel sur la base des notions générales de mesure de Radon, de capacité et de fonctions généralisées comme c'est mentionné dans [80]. La théorie des espaces de Sobolev et des capacités est l'un des aspects importants de la théorie du potentiel classique et non linéaire.

Tout au long du siècle dernier, la théorie du potentiel non linéaire s'est développée en un vaste domaine d'étude qui a sucité l'intêret de plusieurs chercheurs. Les concepts et les techniques de cette théorie sont actuellement utilisés dans divers domaines mathématiques, notamment l'analyse harmonique, l'analyse fonctionnelle, la théorie des probabilités et la théorie des fonctions, ainsi que les mathématiques pour la physique.

Les débuts de la théorie du potentiel non linéaireu (NPT) reviennent aux années soixante, avec les travaux de base de De Giorgi, Nash et Moser [78, 95, 96]. Plus tard, Maz'ya et Khavin [65] et Meyers [82] ont étudié la théorie du potentiel non linéaire dans l'espace de Lebesgue classique $L^p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$. Les auteurs ont introduit le concept de capacité dans ces espaces et ont fourni de riches applications en analyse fonctionnelle, analyse harmonique, théorie des dérivées partielles et théorie des probabilités. Ce concept a été spécialement développé par Adams [1], Hedberg [57], Hedberg et Wol [58].

Notons que la capacité est un outil nécessaire à la fois dans la théorie du potentiel classique et non linéaire, elle offre un moyen standard pour caractériser les ensembles. La capacité d'un ensemble peut être définie de plusieurs façons. Une propriété commune des capacités est qu'elles mesurent les petits ensembles plus précisément que la mesure de Lebesgue habituelle. La théorie de Choquet [40] fournit une approche standard des capacités. Dans ce cadre, il existe deux types naturels de capacités, à savoir la capacité de Sobolev et la capacité relative. Ces deux capacités ont chacune leurs avantages. Premièrement, la capacité relative est étroitement liée au critère de Wiener, à la topologie fine et à la théorie des potentiels non linéaires ([29, 76]). D'autre part, la capacité de Sobolev est un outil essentiel pour étudier la représentative quasi-continue et des propriétés fines pour les fonctions de Sobolev.

La capacité de Sobolev a trouvé un grand nombre d'applications et qui sont intensivement présentées dans [[91], [34],[32]]. Elle représente un outil de base pour démontrer le théorème de Brézis-Browder dans les espaces de Sobolev. Notre contribution à ce propos vise à généraliser le théorème de Brezis-Browder au cadre de l'espace de Sobolev anisotropique $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$. Par ailleurs, dans le cadre des espaces de Sobolev à exposant constant, nous référons le lecteur par exemple aux travaux [81], [49]. Nous mentionnons aussi que Boccardo et ses collaborateurs ont abordé dans [31] le problème d'existence de solution pour le problème suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\triangle u + u \mid \nabla u \mid^2 = \mu & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N, N \geq 2$ et μ est une mesure de Radon sur Ω.

Plus précisément, les auteurs ont prouvé l'existence d'une solution u dans $H^{1,0}(\Omega)$ pour le problème $(\mathcal{P})$ si et seulement si la mesure μ ne charge pas les ensembles de capacité nulle dans Ω. Aussi, Kilpeläinen [64] a également introduit la capacité de Sobolev avec poids en discutant le rôle de cette capacité dans la définition ponctuelle des fonctions dans les espaces de Sobolev impliquant des poids de la classe $\mathcal{A}_p$ de Muckenhoupt. Le concept précédent a été généralisé par N. Aissaoui et A. Benkirane [5], en remplaçant $L^p(\Omega)$ par un espace d'Orlicz. Plus tard, cette théorie a été étudiée par M.C Hassib, Y. Akdim, A. Benkirane et N. Aissaoui dans les espaces de Musielak-Orlicz [5] et [3]).

L'un des objectifs de la première partie de cette thèse est d'étendre la notion de capacité définie dans [82] sur l'espace de Lebesgue à l'espace de Sobolev anisotropique $W^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ et d'éxploiter ses propriétés en l'etude du potentiel non linéaire pour le cas anisotropique. Plus précisément, étant donné une fonction k définie sur $\mathbb{R}^N$, $(N \geq 2)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, intégrable et positive, nous nous intéressons en premier à définir la capacité anisotropique $C_{k;\overrightarrow{p}}$ et à discuter la convergence en $C_{k;\overrightarrow{p}}$. Puis nous nous concentrons sur la caractérisation des parties X de $\mathbb{R}^N$ admettant un potentiel pour la capacité $C_{k;\overrightarrow{p}}$.

Dans une deuxième contribution, nous nous focalisons sur les propriétés de la capacité de Sobolev anisotropique $C_{\overrightarrow{p}}$ que nous définissons sur l'espace de Sobolev anisotropique $W^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$. L'objectif étant de caractériser l'espace de Sobolev anisotropique à valeur nulle sur le bord $B_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$.

En choisissant comme espace fonctionnel l'espace de Sobolev fractionnaire à exposant variable $W^{s,q(.),p(.,.)}(\Omega)$ nous proposons, dans une autre contribution, la caractérisation de l'espace de Sobolev fractionnaire à exposants variables et à valeur nulle sur bord $H^{s,q(.),p(.,.)}(\Omega)$. Ceci a été envisagé grâce à l'exploitation de nouvelles propriétés de la capacité $C^s_{q(.).p(.,.)}$. Ces résultats nous ont permis de conclure que l'énergie intégrale de Dirichlet admet un minimum dans $H^{s,q(.),p(.,.)}(\Omega)$.

Notre objectif en la deuxième partie de cette thèse est l'étude de problèmes d'existence de solutions pour des équations aux dérivées partielles (EDP) non linéaires dans les espaces de Sobolev anisotropiques puis dans les espaces de Sobolev avec poids.

Les équations aux dérivées partielles sont probablement apparues pour la première fois lors de la naissance de la mécanique rationnelle au cours du 17ème siècle (Newton, Leibniz...). Elles interviennent dans plusieurs domaines d'application, non seulement dans les domaines traditionnels de la physique qui comprennent les problèmes de diffusion, les phénomènes de propagation, et le domaine de la mécanique des fluides décrit par les équations hydrodynamiques telles que l'équation de Navier Stokes et l'équation de Schrödinger dépendante du temps utilisées en mécanique quantique et en ingénierie, mais aussi récemment dans les domaines de la chimie pour modéliser les réactions chimiques, de l'économie pour étudier l'évolution des marchés, du traite-

ment d'images pour restaurer les dégradations et dans d'autres domaines tels que l'aéronautique et la métérologie, nous renvoyons le lecteur par exemple aux travaux [16, 63, 90]. Cependant, l'étude systématique des EDP est beaucoup plus récente, et ce n'est qu'au cours du 20ème siècle que les mathématiciens ont commencé à développer l'arsenal nécessaire. Une étape importante a été entamée par Schwartz et des mathématiciens russes lorsqu'ils ont donné naissance à la théorie des distributions (vers 1950), le développement du calcul pseudo différentiel est dû à Hormander (au début des années 1970). Il est certainement bon de garder à l'esprit que l'étude des EDP est toujours un domaine de recherche très actif au début du 21ème siècle. En outre, cette recherche n'a pas seulement un impact sur les sciences appliquées, mais joue également un rôle très important dans le développement actuel des mathématiques elles-mêmes, tant en géométrie qu'en analyse. La préoccupation première du mathématicien confronté à une equation aux dérivées partielles est de lui donner un sens dans des espaces fonctionnels appropriés, (espace de Lebesgue, espace de Sobolev, espace de Sobolev anisotropique ....) et d'y démontrer l'existence d'au moins une solution et parfois l'unicité de cette solution. Avant de détailler notre contribution dans cette deuxième partie de thèse, rappelons quelques techniques et résultats relatifs à l'existence d'une solution de l'équation non linéaire de Leray-Lions. Soit Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Pour $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, $(p > 1)$, considérons le problème variationnel associé à l'équation suivante :

$$\begin{cases} Au = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.0.1}$$

L'opérateur A défini par $Au = -diva(x, u, \nabla u)$ est de type Leray-Lions. Il est défini de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans son dual, a est une fonction de Carathéodory satisfaisant les conditions de monotonie, de croissance et d'ellipciticité sur Ω. Ce problème a été étudié par Leray et Lions [74] en 1965. Ils ont démontré l'existence d'une solution u vérifiant :

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(x, u, \nabla u)\nabla v dx = \langle f, v\rangle, \ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases} \tag{0.0.2}$$

L'étude se limite au cas où $1 < p < N$ car si $p \geq N$ alors $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\Omega)$ et par la suite $(C^0(\Omega))' \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$, donc si f est une mesure de Radon elle devient alors un élément du dual $W^{-1,p'}(\Omega)$. Dans le cas $p > 2 - \frac{1}{N}$, avec f une mesure de Radon, Boccardo et Gallouet [30] ont montré que la solution faible du problème (0.0.2) appartient à $W_0^{1,q}(\Omega)$ avec $1 < q < \frac{N(p-1)}{N-1}$. Or si p est proche de 1, plus précisement si $1 < p < 2 - \frac{1}{N}$, alors ∇u n' appartient pas à $W_{loc}^{1,1}(\Omega)$. Pour surmonter cette difficulté, Bénilan, Boccardo, Gallouet, Gariepy, Pierre et Vazquez ont introduit dans [24] un nouvel espace $T_{loc}^{1,1}(\Omega)$ dans lequel on peut donner un sens au ∇u, qui n'est pas en général localement intégrable. D'autre part, la détermination de solution du problème (0.0.2) pour le cas où $f \in L^1(\Omega)$ a conduit à l'adoption de trois types de solutions :

1. Solutions entropiques qui ont été développées pour les équations elliptiques par P. Bénilan

et al [24] et aussi pour les équations paraboliques par A. Prignet [92].

2. Solutions renormalisées qui ont été initialement proposées pour l'étude de l'équation de Boltzmann par R. Di Perna et P. L. Lions [48], et par la suite l'idée a été appliquée aux équations elliptiques et paraboliques.

3. Solutions appelées SOLA (Solution obtained as a Limit of Approximations) adoptées par Dall' Aglio [43, 46].

Les deux parties constituant cette thèse sont structurées comme suit :

– La première partie (chapitres 2, 3 et 4) est consacrée à l'étude de la théorie des capacités dans les espaces de Sobolev anisotropiques et dans les espaces de Sobolev fractionnaires à exposants variables.

Le chapitre 1 est réservé aux préliminaires qui représentent les ingrédients nécessaires pour entamer les autres chapitres. Dans le deuxième chapitre, nous donnons une généralisation des résultats obtenus dans [82] dans l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ au cas de l'espace de sobolev anisotropique $W^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$. Nous définissons la capacité anisotropique $C_{k,\vec{p}}$ comme suit :

$$\forall X \subset \mathbb{R}^N, C_{k,\vec{p}}(X) = \inf_{f \in S_{\vec{p}}(X)} \Big\{ \|f\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega)} \Big\}, \tag{0.0.3}$$

où

• $S_{\vec{p}}(X) = \left\{ f \in W^{1,\vec{p}}(\Omega) : k * f \geq 1 \text{ sur } X \right\}$,

• k est une fonction positive integrable sur $\mathbb{R}^N$.

En premier, nous montrons que cette capacité est une capacité extérieure, nous envisageons ensuite des résultats spécifiques de convergence en $C_{k;\overrightarrow{p}}$ permettant par la suite de bien situer les parties X de $\mathbb{R}^N$ admettant d'une part une capacité nulle et d'autre part un potentiel pour la capacité $C_{k;\overrightarrow{p}}$. De plus, nous prouvons que $C_{k,\vec{p}}$ est une capacité de Choquet.

A la fin de ce chapitre, nous proposons également une application de nos principaux résultats à la théorie du potentiel. Nous traitons le problème variationnel suivant :

Soit X un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$ tel que $C_{k,\vec{p}}(X) < \infty$. Existe t-il $f_0 \in W_+^{1,\vec{p}}(\Omega)$ tel que $k * f_0 \geq 1$, $C_{k,\vec{p}}$- q.e sur X, et

$$\|f_0\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega)} = \inf \Big\{ \|f\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega)} : f \in W_+^{1,\vec{p}}(\Omega) \text{ et } k * f \geq 1 \text{ sur } X \Big\} ?$$

Notre objectif dans le troisième chapitre est de définir et caractériser l'espace de Sobolev anisotropique à valeurs nulles sur le bord $B_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$. Pour ce faire, nous définissons la capacité anisotropique $C_{\vec{p}}$ d'un ensemble $E \subset \Omega$ comme suit

$$C_{\vec{p}}(E) = \inf_{u \in A(E)} \left\{ \|u\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega)} \right\},$$

où

$$A(E) = \left\{ u \in W^{1,\vec{p}}(\Omega) : u \geq 1 \,\text{sur un ouvert contenant } E \text{ et } u \geq 0 \right\}.$$

Nous élaborons en premier des résultats de $C_{\overrightarrow{p}}$-convergence, puis nous discutons la $C_{\overrightarrow{p}}$-quasicontinuité des fonctions définies sur Ω. Par ailleur, l'espace $B_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$ consiste en les fonctions $u \in W^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$, ayant une représentative quasicontinue $\widetilde{u}$ sur $W^{1,\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^N)$ et telle que $\widetilde{u} = 0$ $C_{\overrightarrow{p}}$-quasi partout sur $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$. Nos résultats de $C_{\overrightarrow{p}}$-convergence et $C_{\overrightarrow{p}}$-quasicontinuité nous permettent, dans une seconde étape, d'extraire les propriétés topologiques de $B_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ muni de la norme $\|u\|_{B_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)} = \|\widetilde{u}\|_{W^{1,\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^N)}$ et de montrer que

$$W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) \subset B_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) \subset W^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega).$$

Nous exploitons ensuite les résultats obtenus pour montrer que l'opérateur énergie intégrale de Dirichlet défini sur $B_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ atteint son minimum dans $B_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$. Le dernier chapitre de la première partie est un prolongement de l'étude commencée par M. Berghout à propos de la capacité $C^s_{q(.),p(.,.)}$ décrite dans l'espace de Sobolev fractionnaire à exposants variables $W^{s,q(.),p(.,.)}(\mathbb{R}^N)$ où $s \in (0,1)$, $q(.)$ et $p(.,.)$, sont deux fonctions mesurables à exposants variables [28]. En effet, nous présentons de nouveaux résultats de cette capacité en terme de convergence et de quasicontinuité, ce qui nous permet d'une part, d'identifier l'espace de Sobolev fractionnaire à exposants variables à valeurs nulles sur le bord $H^{s,q(.),p(.,.)}(\Omega)$ et d'autre part, de montrer que l'opérateur énergie intégral de Dirichlet correspondant à une fonction $g \in W^{s,q(.),p(.,.)}(\Omega)$ atteint son minimum dans $H^{s,q(.),p(.,.)}(\Omega)$.

– La deuxième partie fait l'objet de l'étude de quelques problèmes non linéaires d'équations aux dérivées partielles dans les espaces de Sobolev anisotropiques et avec poids.
Dans le chapitre 5, nous utilisons le concept de la capacité $C_{\vec{p}}$ définie au chapitre 3 et l'approximation de type Hedberg donnée dans [23] pour généraliser le théorème de H. Brezis et F.E Browder au cas de l'espace de Sobolev anisotropique $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$ tout en supposant que Ω est un ouvert satisfaisant des hypothèses de régularité. Comme application de nos résultats, nous étudions l'existence d'une solution pour le problème unilatéral fortement non linéaire suivant :

$$\begin{cases} u \in K_\Phi, g(.,u) \in L^1(\Omega), ug(.,u) \in L^1(\Omega), \\ \langle Su, v-u\rangle + \displaystyle\int_\Omega g(.,u)(v-u)dx \geq \langle f, u-v\rangle, \ \forall v \in K_\Phi \cap L^\infty(\Omega) \end{cases} \tag{0.0.4}$$

• $f \in W^{-1,\vec{p'}}(\Omega)$,

• L'obstacle Φ est un élément de $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et

$$K_\Phi = \left\{ v \in W_0^{1,\vec{p}}(\Omega), v \geq \Phi \,\text{p.p sur}\, \Omega \right\}, \tag{0.0.5}$$

• S est un opérateur pseudo-monotone défini de $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$ dans $W^{-1,\vec{p'}}(\Omega)$ qui satisfait les hypothèses suivantes :

1. S est continu de chaque sous-espace de dimension finie de $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$ dans $W^{-1,\vec{p'}}(\Omega)$ pour la topologie faible*,
2. S transforme tout ensemble borné en un ensemble borné,
3. S est coercif , i.e.

$$\forall v_0 \in K_\Phi \cap L^\infty(\Omega); \frac{\langle S(v), v - v_0\rangle}{\|v\|} \to +\infty \text{ avec } \|v\|_{W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)} \to \infty.$$

• g est une fonction de Carathéodory de $\Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, satisfaisant :

4. $s.g(x,s) \geq 0, \forall s \in \mathbb{R}$ et presque partout sur Ω;
5. $h_t = \sup_{|s|\leq t} |g(x,s)| \in L^1(\Omega), \forall t \geq 0.$

L'objectif du chapitre 6 est d'établir l'existence d'une solution pour le problème unilatéral dégénéré défini dans l'espace de Sobolev avec poids $W_0^{1,p}(\Omega, \nu_1, \nu_2)$ sous la forme :

$$\begin{cases} u \in K_\phi, \Theta(x,u,\nabla u) \in L^1(\Omega, \nu_2), \\ \langle A(u), T_k(v-u)\rangle + \displaystyle\int_\Omega \nu_2 \Theta(x,u,\nabla u) T_k(v-u)\, dx \;\geq\; \langle f, T_k(v-u)\rangle \\ \text{pour tout } v \in K_\phi \text{ et tout } k > 0, \end{cases} \tag{0.0.6}$$

avec

• ν_1, ν_2 sont deux fonctions poids appartenant à la clase des $\mathcal{A}_p$-weights.

• $K_\phi = \left\{ v \in W_0^{1,p}(\Omega, \nu_1, \nu_2),\ v \geq \phi \text{ presque partout dans } \Omega \right\}$.

• $A(u) = -div(\nu_1 a(x,u,\nabla u))$ est un opérateur de Leray-Lions agissant de l'espace de Sobolev avec poids $W_0^{1,p}(\Omega, \nu_1, \nu_2)$ dans son dual $W^{-1,p'}(\Omega, \nu_1, \nu_2)$ $(1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\ )$.

• $f \in L^1(\Omega)$.

• $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ est une fonction de Carathéodory satisfaisantt pour presque tout $x \in \Omega$, et tous $\tau \in \mathbb{R}$, ζ, η dans $\mathbb{R}^N$ avec $\zeta \neq \eta$, les hypothèses suivantes :

$$| a(x,\tau,\zeta) | \leq \beta \left(h(x) + | \tau |^{p-1} + | \zeta |^{p-1} \right), \tag{0.0.7}$$

$$[a(x,\tau,\zeta) - a(x,\tau,\eta)](\zeta - \eta) > 0, \tag{0.0.8}$$

$$a(x,\tau,\zeta).\zeta \geq \alpha | \zeta |^p, \tag{0.0.9}$$

où $h \in L^{p'}(\Omega, \nu_1)$ et pour tout x, on a $h(x) \geq 0$. α, β sont deux constantes strictement positives. $\Theta(x,u,\nabla u)$ est une fonction de Carathéodory qui satisfait les conditions mentionnées ci-dessous :

$$\Theta(x,\tau,\zeta)\tau \geq 0, \tag{0.0.10}$$

$$| \Theta(x,\tau,\zeta) | \leq d(| \tau |)(h_1(x) + | \zeta |^p), \tag{0.0.11}$$

$$| \Theta(x,\tau,\zeta) | \geq \rho_2 \frac{\nu_1}{\nu_2} | \zeta |^p \text{ , pour } | \tau | > \rho_1. \tag{0.0.12}$$

Signalons que le contenu de cette thèse a fait l'objet de quatre articles publiés et un cinquième qui est soumis pour publication.

Publications :

- Y. Akdim , R. Elharch, M.C. Hassib et S. Lalaoui Rhali. Capacity in anisotropic Sobolev spaces. Nonlinear Dynamics and Systems Theory. 21 (2) (2021), 115–125.
- Y. Akdim , R. Elharch, M.C. Hassib et S. Lalaoui Rhali. Capacity and anisotropic Sobolev spaces with zero boundary values. Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 22 (1) (2022), 1–12.
- Y. Akdim , R. Elharch, M.C. Hassib et S. Lalaoui Rhali. Some results of capacity in fractional Sobolev spaces with variable exponents. Journal of Elliptic and Parabolic Equations,(2022).
- Y. Akdim , R. Elharch, M.C. Hassib et S. Lalaoui Rhali.Theorem of Brezis and Browder type in anisotropic Sobolev spaces. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2. 72, 313–327 (2023).

Article soumis

- Y. Akdim, M. Belayachi, R. Elharch and S. Lalaoui Rhali. On a nonlinear degenerate elliptic unilateral problem.

Chapitre 1

Capacités dans les espaces de Sobolev anisotropiques

Nous définissons la capacité $C_{k,\vec{p}}$ sur l'espace de Soboolev anisotropique $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$ où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N (N \geq 2)$, en donnant quelques ses propriétés, en particulier, nous montrons que $C_{k,\vec{p}}$ définit une capacité de Choquet. Pour illustrer nos résultats, nous présentons une application de cette capacité.

1.1 Espace de Sobolev anisotropique et Capacités

1.1.1 Espace de Sobolev anisotropique

Soit Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^N (N \geq 2)$,
soit $1 < p_0, p_1, ..., p_N < \infty$, notons

$$\vec{p} = (p_0, p_1, ..., p_N),\ D^0 u = u \text{ et } \quad D^i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{avec } i = 1, ..., N.$$

$$\underline{p} = \min\{p_0, p_1, ..., p_N\} \quad \text{avec} \quad \underline{p} > 1.$$

L'espace de Sobolev anisotropique $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$ est défini comme suit

$$W^{1,\vec{p}}(\Omega) = \{u \in L^{p_0}(\Omega)\, D^i u \in L^{p_i}(\Omega), i = 1, ..., N\}.$$

La théorie des espaces anisotropiques a été développée dans [101],[87], [93],[94].
L'espace de Sobolev anisotropique $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega)} = \sum_{i=0}^{N} \|D^i u\|_{L^{p_i}(\Omega)}.$$

Et il a été démontré dans ([1])que $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$ est un espace de Banach separable et réflexif.

L'espace $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$, est défini comme étant la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ par rapport à cette norme.

Il a été prouvé que $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$ et $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$ est un espace de Banach réflexif. Notons,

$$W_+^{1,\vec{p}}(\Omega) = \{u \in W^{1,\vec{p}}(\Omega)/u \geq 0\}.$$

Définition 1.1.1 *Nous désignons par $W^{-1,\vec{p'}}(\Omega)$ le dual de l'espace de Sobolev anisotropique $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$ où $\vec{p'} = (p'_0, p'_1, ..., p'_N)$, $p'_i = \dfrac{p_i}{p_i - 1}$ avec $p_i > 1$, $i = 0, 1, ..., , N$.*
Pour chaque $f \in W^{-1,\vec{p'}}(\Omega)$, il existe $f_i \in L^{p'_i}(\Omega)$ telle que

$$f = f_0 - \sum_{i=1}^{N} D^i f_i.$$

De plus, pour tout u dans$W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$ on a

$$\langle f, u\rangle = \sum_{i=0}^{N} \int_\Omega f_i D^i u \, dx.$$

Nous définissons également la norme de l'espace dual

$$||f||_{W^{-1,\vec{p'}}(\Omega)} = \sum_{i=0}^{N} ||f_i||_{L^{p'_i}(\Omega)}.$$

1.1.2 Généralités sur les capacités

Définition 1.1.2 *Soit E un espace topologique et T la classe des ensembles de Borel dans E, soit $C : T \to [0, +\infty]$ une fonction.*
1) La fonction C est appelée capacité si les propriètés suivantes sont satisfaits :
i) $C(\emptyset) = 0$
ii) $X \subset Y \Rightarrow C(X) \leq C(Y)$ pour tout X et Y dans T (monotonie),
iii) Pour toute suite d'éléments $(X_n) \subset T$

$$C(\bigcup_n X_n) \leq \sum_n C(X_n), \text{ (sous-addivité dénombrable)}.$$

2) La capacité C est une capacité extérieure si pour tout $X \in T$,

$$C(X) = \inf\{C(O) : O \supset X, O \text{ est un ouvert open }\}.$$

3) La capacité C est une capacité intérieure si pour tout $X \in T$,

$$C(X) = \sup\{C(K) : K \subset X, K \text{ est un compact}\}.$$

4) Une propriété, qui est vraie sauf peut-être sur un ensemble de capacité nulle est dite vrai C-quasi partout (on note$C - q.e$) .

Définition 1.1.3 *Soit f une fonction finie à valeurs réelles C-q.e et (f_n) une suite de fonctions finies à valeurs réelles C-q.e.*
1) On dit que (f_n) converge vers f en capacité C si

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \to +\infty} C\left(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) = 0.$$

2) On dit que (f_n) converge vers f C -quasi-uniformément (on note $C-q.u$) if

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X \in T : C(X) < \varepsilon \text{ et } (f_n) \text{ converge vers } f \text{ uniformément sur } X^c.$$

1.2 Capacités dans l'espace de Sobolev anisotropique

1.2.1 Capacité anisotropique $C_{k,\vec{p}}$

Soient k une fonction intégrable positive sur $\mathbb{R}^N$ et $X \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$. On note

$$S_{\vec{p}}(X) = \Big\{ f \in W^{1,\vec{p}}(\Omega) : k * f \geq 1 \text{ sur } X \Big\},$$

où $k * f$ est la convolution de k et f.
La capacitéanisotropique $C_{k,\vec{p}}$ est définée comme suit :

$$C_{k,\vec{p}}(X) = \inf_{f \in S_{\vec{p}}(X)} \Big\{ \|f\|_{W^{1,\vec{p}}}(\Omega) \Big\}.$$

Dans le cas où $S_{\vec{p}}(X) = \emptyset$, on pose $C_{k,\vec{p}}(X) = \infty$.
Les fonctions $f \in S_{\vec{p}}(X)$ sont dites $\vec{p}$- admissibles pour X.

Remarque 1.2.1

Soit

$$B_{k,\vec{p}}(X) = \inf \Big\{ \|f\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega)} : f \in W^{1,\vec{p}}_{+}(\Omega) et k * f \geq 1 \text{ on } X \Big\}$$

,
then,

$$C_{k,\vec{p}}(X) = B_{k,\vec{p}}(X).$$

Dans la suite, nous présentons quelques propriétés de la capacité anisotropique $C_{k,\vec{p}}$, en particulier nous avons montré que cette capacité est une capacité de Choquet.

Théorème 1.2.1

La capacité anisotropique $C_{k,\vec{p}}$ est une capacité extérieure.

Proposition 1.2.1

La capacité anisotropique $C_{k,\vec{p}}$ vérifie les propriétés suivantes :
1) S'il existe $f \in W^{1,\vec{p}}(\Omega)$ tel que $|k * f| = +\infty$ sur X, alors $C_{k,\vec{p}}(X) = 0$.
2) Si $C_{k,\vec{p}}(X) = 0$, alors il existe $f \in W^{1,\vec{p}}_{+}(\Omega)$ tel que $k * f = +\infty$.

1.2.2 Convergence en $C_{k,\vec{p}}$- capacité

Théorème 1.2.2

Soient f et $(f_n)_n$ des éléments de $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$ et considérons les propositions suivantes :
i) f_n converge fortement vers f dans $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$.
ii) $k * f_n \to k * f$ en $C_{k,\vec{p}}$-capacité .
iii) Il existe une sous-suite (f_{n_j}) de la suite (f_n) telle que $k * f_{n_j} \rightharpoonup k * f$ $C_{k,\vec{p}}$ - q.u.
iv) $k * (f_{n_j}) \to k * f$ en $C_{k,\vec{p}}$ - q.e.
alors on a

$$i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow iv).$$

Théorème 1.2.3

Soient $(K_n)_n$ une suite décroissante de compacts et $K = \bigcap_n K_n$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} C_{k,\vec{p}}(K_n) = C_{k,\vec{p}}(K).$$

Proposition 1.2.2

Soient $(f_n)_n$, $f \in W^{1,\vec{p}}(\Omega)$ tel que $f_n \rightharpoonup f$ converge faiblement dans $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$.
Alors,

$$\liminf(k * f_n) \leq k * f \leq \limsup(k * f_n)\, C_{k,\vec{p}} - q.e.$$

Théorème 1.2.4

Soient $(X_n)_n$ est une suite croissante d'ensembles et $X = \bigcup_n X_n$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} C_{k,\vec{p}}(X_n) = C_{k,\vec{p}}(X).$$

Corollaire 1.2.1

Soit $(E_n)_n$ une suite de sous-ensembles de $\mathbb{R}^N$.
Alors on a,

$$C_{k,\vec{p}}(\liminf E_n) \leq \liminf C_{k,\vec{p}}(E_n).$$

Définition 1.2.1

Dans la terminologie de Choquet, une capacité C est appelée une capacité au sens de choquet s' elle satisfait les propriétés suivantes :

i) $C(\emptyset) = 0$;

ii) C *croissante ;*

iii) Si $(E)_n$ *est une suite croissante d'ensembles, alors* $\sup_n C(X_n) = C(\bigcup_n X_n)$;

iv) Si $(K)_n$ *est une suite décroissante de compacts , alors* $\inf_n C(K_n) = C(\bigcap_n K_n)$.

En combinant les théorèmes 1.2.1, 1.2.3 et 1.2.4, on déduit le résultat suivant

Théorème 1.2.5

La capacité anisotropique $C_{k,\vec{p}}$ *est une capacité au sens de Choquet.*

Définition 1.2.2

Soit C *une capacité au sens de Choquet. Un sous-ensemble* $X \subset \mathbb{R}^N$ *est dite capacitable si ona,*

$$C(X) = \sup \{C(K) : K \subset X, K \, compact\} .$$

Théorème 1.2.6

Tous les ensembles analytiques sont $C_{k,\vec{p}}$*- capacitables.*

1.3 Application : Potentiel non linéaire

Dans ce paragraphe, nous proposons d'étudier une application de la capacité $C_{k,\vec{p}}$. En particulier nous traitons le problème variationnel suivant :
soit X un sous ensemble de $\mathbb{R}^N$ tel que $C_{k,\vec{p}}(X) < \infty$.Existe t'il $f_0 \in W_+^{1,\vec{p}}(\Omega)$ tel que

$$k * f_0 \geq 1 \, C_{k,\vec{p}} - q.esur X,$$

et

$$\|f_0\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega)} = \inf \left\{ \|f\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega)} : f \in W_+^{1,\vec{p}}(\Omega) \;\; et \, k * f \geq 1 \, dans \, X \right\}. \tag{1.3.1}$$

Définition 1.3.1 *Quand elle existe, la fonction* f_0*, solution du problème (1.3.1) est appelée* $C_{k,\vec{p}}$ *- distrubution de* X*, et* $k * f_0$ *est appellé le* $C_{k,\vec{p}}$ *potential de* X*.*

En se basant sur les propriètés de la capcité anisotropique que nous avons déja établi, nous envisageons qu'une condition suffisante pour qu'un sous ensemble X de $\mathbb{R}^N$admette un $C_{k,\vec{p}}(X)$ potentiel est qu'il soit de $C_{k,\vec{p}}(X)$ capacité finie.

Théorème 1.3.1

Soit X un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$ tel que $C_{k,\vec{p}}(X) < \infty$,notons
$\Omega_X = \left\{ f \in W_+^{1,\vec{p}}(\Omega) : k * f \geq 1 \, C_{k,\vec{p}}(X) \ - q.e \, dans \, X \right\}$.*Alors il existe un unique $f_0 \in W_+^{1,\vec{p}}(\Omega)$ tel que :*
i) $\|f_0\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega)} = \inf \left\{ \|f\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega)} : f \in \Omega_X \right\}$.
ii) $k * f_0 \geq 1 \, dans \ \ X \, et \, \|f_0\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega)} = C_{k,\vec{p}}(X)$.

Chapitre 2

Capacités et espace de Sobolev anisotropique à valeurs nulles au bord

L'objectif de ce chapitre est d'étendre la théorie des capacités aux espaces de Sobolev anisotropiques. En particulier, nous définissons la capacité $C_{\vec{p}}$ et nous ètablissons les principales propriétés de cette capacité, y compris la monotonicité, la sous-additivité dénombrable et plusieurs résultats de convergence. De plus, nous définirons l'espace de Sobolev anisotropique à valeurs nulles au bord $B_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$, où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N (N \geq 2)$, $\vec{p} = (p_0, p_1, ..., p_N)$ et $1 < p_0, p_1, ..., p_N < \infty$. Ce qui nous permet de montrer à la fin que l'intégrale de l'énergie de Dirichlet a un minimum $B_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$.

Avant de présenter nos résultats objet de ce chapitre, il convient de noter que l'espace de Sobolev à valeurs nulles au bord a été défini classiquement comme une complétion des fonctions lisses à support compact par rapport à l'espace de Sobolev [68].
L'espace de Sobolev à exposant variable à valeurs nulles au bord a été défini dans [54] suivant une méthode développée par Kilpeläinen, Kinnunen et Martio dans [72] pour les espaces munis de mesures métriques. D'autre part, cette notion a été généralisée par M. C. Hassib et Y. Akdim [14] aux espaces de Sobolev avec poids à exposant variable sur les espaces de mesure métriques. Dans [89], T. Ohno et T. Shimomura ont étudié l'espace de Musielak-Orlicz-Sobolev à valeurs nulles au bord sur tout espace métrique muni d'une mesure régulière de Borel.

2.1 Capacité anisotropique $C_{\vec{p}}$

Dans ce chapitre, nous supposons que Ω est ouvert borné de $\mathbb{R}^N (N \geq 2)$ et μ est une mesure de Lebesegue.

Définition 2.1.1

La capacité de Sobolev anisotropique $\vec{p}$-capacité de l'ensemble $E \subset \Omega$ est définie par

$$C_{\vec{p}}(E) = \inf_{u \in A(E)} \left\{ \|u\|_{W^{1,\vec{p}}(\Omega)} \right\},$$

où

$$A(E) = \Big\{ u \in W^{1,\vec{p}}(\Omega) : u \geq 1 \ \textit{sur un ouvert contenant l'ensemble } E \ \textit{and}\, u \geq 0 \Big\}.$$

Si $A(E) = \phi$, nous posons , $C_{\vec{p}}(E) = \infty$.
Les fonctions appartenant à $A(E)$ sont appelées fonctions admissibles pour E.

Théorème 2.1.1

La capacité anisotropique de Sobolev $C_{\vec{p}}$ est une capacité extérieure.

Le résultat suivant montre que la mesure de Lebesgue ne charge pas les ensembles de capacité nulle.

Proposition 2.1.1

Soient μ une mesure de Lebesegue sur Ω et $E \subset \Omega$, alors on a

$$\mu(E) \leq \mu(\Omega) C_{\vec{p}}(E).$$

Théorème 2.1.2

Soit (K_n) une suite décroissante de compacts tels que $(K_n) \in \Omega$ pour tout n et $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$, alors

$$\lim_{n \to \infty} C_{\vec{p}}(K_n) = C_{\vec{p}}(K).$$

Proposition 2.1.2

S'il existe $u \in W^{1,\vec{p}}(\Omega)$ tel que $u = +\infty$ sur un ouvert contenant E, alors $C_{\vec{p}}(E) = 0$.

2.1.1 Convergence en $C_{\vec{p}}$- capacité

Théorème 2.1.3

Soient u et $(u_n)_n$ des éléments de $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$ et considérons les propositions suivantes :
i) $u_n \to u$ fortement dans $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$.
ii) $u_n \to u$ en $C_{\vec{p}}$-capacité .
iii) Il existe une sous suite (u_{n_j}) telle que $u_{n_j} \to u$ en $C_{\vec{p}}$ - q.u.
iv) $(u_{n_j}) \to u$ en $C_{\vec{p}}$.- q.e.
Nous avons alors

$$i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow iv).$$

Corollaire 2.1.1 *Si $(u_n)_n$ est une suite de $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$ qui converge vers u dans $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$, alors il existe une sous suite de $(u_n)_n$ qui converge vers u, μ presque partout.*

2.1.2 Quasicontinuité

Définition 2.1.2

Une fonction $u : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ est $C_{\vec{p}}$ - quasi-continue dans Ω si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble X tel que $C_{\vec{p}}(X) < \varepsilon$ et $u_{|_{\Omega \setminus X}}$ est continue.

Théorème 2.1.4

La capacité anisotropique $C_{\vec{p}}$ satisfait les propriétés suivantes :

1) Supposons O est un ensemble ouvert de Ω et $E \subset \Omega$ tel que $\mu(E) = 0$, alors

$$C_{\vec{p}}(O) = C_{\vec{p}}(O - E).$$

2) Supposons u et v sont des fonctions $C_{\vec{p}}$ -quasi continues dans Ω, alors, on a
i) Si $u = v$, presque partout dans un ouvert $O \subset \Omega$, alors ona

$$u = v \, C_{\vec{p}} - \ \textit{quasi partout dans} \, O,$$

ii) Si $u \leq v$, presque partout sur un ouvert $O \subset \Omega$, alors

$$u \leq v \ C_{\vec{p}} - \ \textit{presque partout dans} \, O.$$

Une conséquence immédiate de Théoréme 2.1.4 et de la proposition 2.1.1 est que si un ensemble de $C_{\vec{p}}$ capacité nulle, alors , il est de measure nulle , pour la réciproque, il suffit que Ω soit borné.

Corollaire 2.1.2

Pour tout ouvert borné $O \subset \Omega$, on a

$$\mu(O) = 0 \Longleftrightarrow C_{\vec{p}}(O) = 0.$$

Proposition 2.1.3

Soient $(u_n)_n$, $u \in W^{1,\vec{p}}(\Omega)$ tells que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$, alors

$$\liminf(u_n) \leq u \leq \limsup(u_n) \ C_{\vec{p}} - q.e.$$

2.2 Espace de sobolev anisotropique à valeurs nulles sur le bord

Définition 2.2.1

On dit qu'une fonction u appartient à l'espace de Sobolev anisotropique à valeurs nulles sur le bord $B_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$, *s'il existe une fonction* $C_{\vec{p}}$*-quasi continue* $\tilde{u} \in W^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$ *telque* $\tilde{u} = u$ *presque partout dans* Ω *et* $\tilde{u} = 0$ $C_{\vec{p}}$ *-presque partout dans* $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$.
$B_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$ *est équipé de norm :*

$$||u||_{B_0^{1,\vec{p}}(\Omega)} = ||\tilde{u}||_{W^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N)}.$$

Théorème 2.2.1

$B_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$ *est un espace de Banch réflexif.*

Signalons que dans l'espace de Sobolev classique $W^{1,p}(\Omega)$, l'espace de Sobolev à valeurs nulles sur le bord coincide avec $W_0^{1,p}(\Omega)$. Pour le cas anisotropique on a juste l'inclusion suivante

Remarque 2.2.1

On a

$$W_0^{1,\vec{p}}(\Omega) \subset B_0^{1,\vec{p}}(\Omega) \subset W^{1,\vec{p}}(\Omega).$$

Proposition 2.2.1

Soit $u \in B_0^{1,\vec{p}}(\Omega), v \in W^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$ *des fonctions bornées. Si v is* $C_{\vec{p}}$*- quasi continue, alors*

$$uv \in B_0^{1,\vec{p}}(\Omega).$$

Théorème 2.2.2

Soit O dans Ω *telque* $C_{\vec{p}}(O) = 0$, *on a*

$$B_0^{1,\vec{p}}(\Omega) = B_0^{1,\vec{p}}(\Omega \backslash O).$$

2.3 Application : Minimisation de l'energie de Dirichlet

Définition 2.3.1

Soit $w \in W^{1,\vec{p}}(\Omega)$. *Pour toute fonction* $u \in B_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$, *définissons* $I_{\Omega,w}^{\vec{p}}(u)$ *par*

$$I_{\Omega,w}^{\vec{p}}(u) = \int_\Omega \mid w \mid dx + \sum_{i=0}^{N} \int_\Omega \left(\mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \mid^{p_i} + \mid \frac{\partial w}{\partial x_i} \mid^{p_i} \right) dx.$$

$I_{\Omega,w}^{\vec{p}}$ *t est appelé l'opérateur énergie de Dirichlet correspondant à la fonction de valeur nulle sur le bord w.*

Théorème 2.3.1

Soit $B_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$ l'espace de Sobolev anisotropique à valeurs nulles sur le bord. Alors il existe une fonction $u \in B_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$ en laquelle l'opèrateur energie de Dirichlet atteint son minimum, telle que

$$I^{\vec{p}}_{\Omega,w}(u) = \inf_{v \in B_0^{1,\vec{p}}(\Omega)} I^{\vec{p}}_{\Omega,w}(v).$$

Chapitre 3

Capacités dans l'espace de Sobolev fractionnaire à exposants variables

Notre objectif dans cette chapiter est de définir et étudier les propriétés de l'espace de Sobolev fractionnaire à valeurs nulles sur le bord. Notre outil fondamental est les capacités définis dans les espaces de Sobolev fractionnaires à exposants variables. Nous commençons par l'étude de la théorie de la capacité dans cet espace . Nous donnons les propriétés les plus importantes de cette capacité, y compris la convergence d'une suite, la détermination des sous-ensembles de Ω ayant une capacité nulle. De plus, nous définissons l'espace de Sobolev fractionnaire à exposants variables et à valeurs nulles sur le bord et nous prouvons certaines de ses propriétés de base, telles que la réflexivité. Pour illustrer nos résultats, nous montrons que l'énergie de Dirichlet a un minimiseur dans l'espace de Sobolev fractionnaire à exposants variables.

Récemment, les problèmes elliptiques impliquant l'opérateur Laplacien fractionnaire $p(x,.)$ ont fait l'objet de recherches intensives. Afin de résoudre ces problèmes, Kaufmann et al. [71] ont introduit en 2017 des résultats récents sur le nouvel espace de Sobolev fractionnaire à exposants variables $W^{s,q(x),p(x,y)}$ défini comme suit

$$W^{s,q(.),p(.,.)}(\Omega)=\Big\{u\in L^{q(.)}(\Omega):\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{s+\frac{d}{p(.,.)}}}\in L^{p(.,.)}(\Omega\times\Omega)\Big\},$$

où $s\in(0,1)$, $\Omega\in\mathbb{R}^N$ est un domaine borné avec une frontière de Lipschitz, $q:\overline{\Omega}\to(1,\infty)$ et $p:\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}\to(1,\infty)$ sont deux fonctions continues.

En outre, ils ont établi une injection continue et compacte de ces espaces dans les espaces de Lebesgue en appliquant une méthode directe de calcul des variations pour l'énergie fractionnaire suivante

$$\theta(u)=\int_\Omega\int_\Omega\frac{|u(x)-u(y)|^{p(x,y)}}{p(x,y)|x-y|^{N+sp(x,y)}}dxdy+\int_\Omega|u(x)|^{q(x)}dx, \tag{3.0.1}$$

les auteurs ont prouvé l'existence et l'unicité d'une solution pour un problème non local impliquant l'opérateur Laplacien $p(x,.)$. Ensuite, de nombreux chercheurs ont étudié la théorie et les applications de ce type d'espaces, nous réferons par exemple aux travaux [19, 20, 22, 45, 61].

Dans le cadre des espaces de Sobolev fractionnaires à des exposants variables dans lesquels Baalal et Berghout[21], ont récemment étudié deux types de capacités : La capacité de Sobolev $C^s_{q(.),p(.,.)}$ et la capacité relative, ils ont prouvé que les deux capacités sont des capacités de Choquet et que tous les ensembles de Borel sont capacitaires. Dans ce contexte, les capacités fractionnaires pour les espaces à exposant fixe ont été étudiées par de nombreux chercheurs, nous citons par exemple [104, 105, 98].

En se basant sur le fait que $C^s_{q(.),p(.,.)}$ est une capacité extérieure, nous traitons la convergence d'une suite en la capacité $C^s_{q(.),p(.,.)}$ et nous donnons des conditions suffisantes sur un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^N$ garantissant que $C^s_{q(.),p(.,.)}(E) = 0$.

3.1 Capacités et espaces fractionnaires à exposants variables

3.1.1 Espaces fractionnaires à exposants variables

Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{R}^N (N \in \mathbb{N})$.

Soient $s \in (0,1)$ $q : \Omega \to [0, +\infty)$ et $p : \Omega \times \Omega \to [0, +\infty)$ deux fonctions mesurables à exposants variables.

Notons par $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions à exposant $q : \Omega \to [0, +\infty)$ et par $\mathcal{P}(\Omega \times \Omega)$ l'ensemble des fonctions à exposants variables $p : \Omega \times \Omega \to [0, +\infty)$.

Posons,

$p^- = essinf_{(x,y)\in\Omega\times\Omega} p(x,y)$, $\quad p^+ = esssup_{(x,y)\in\Omega\times\Omega} p(x,y)$

$q^- = essinf_{x\in\Omega} q(x)$, $\quad q^+ = esssup_{x\in\Omega} q(x)$.

Dans la suite, nous supposons que

$$1 < p^- \leq p(x,y) \leq p^+ < \infty \tag{3.1.1}$$

$$1 < q^- \leq q(x) \leq q^+ < \infty \tag{3.1.2}$$

L'espace de Lebesgue à exposant variable $L^{q(.)}$ est définie par :

$$L^{q(.)}(\Omega) = \Big\{ u \in L^0(\Omega) : \int_\Omega |u(x)|^{q(x)} dx < \infty \Big\}.$$

Rappelons la définition de l'espace de Sobolev fractionnaire à des exposants variables comme suit :

$$W^{s,q(.),p(.,.)}(\Omega) = \Big\{ u \in L^{q(.)}(\Omega) : \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{s+\frac{N}{p(.,.)}}} \in L^{p(.,.)}(\Omega \times \Omega) \Big\}. \tag{3.1.3}$$

Notons par $\varphi^{s,\Omega}_{q(.),p(.,.)}$ le modulaire dans $W^{s,q(.),p(.,.)}(\Omega)$ défini par :

$$\varphi^{s,\Omega}_{q(.),p(.,.)}(u) = \int_\Omega |u(x)|^{q(x)}dx + \int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^{p(x,y)}}{|x-y|^{N+sp(x,y)}}dxdy. \tag{3.1.4}$$

la semi-norme de Gagliardo à exposant variable correspondante est définie par

$$[u]^{s,p(.,.)}(\Omega) = \inf\Big\{\lambda > 0 : \int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|}{\lambda^{p(x,y)}|x-y|^{N+sp(x,y)}}dxdy \leq 1\Big\}$$

$W^{s,q(.),p(.,.)}(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme :

$$||u||_{s,q(.),p(.,.)} = ||u||_{L^{q(\Omega)}} + [u]^{s,p(.,.)}(\Omega).$$

Notons par $C_0^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions infiniment différentiables à support compact sur Ω. Nous considérons l'espace $W_0^{s,q(.),p(.,.)}(\Omega)$ qui est la fermeture dans $W^{s,q(.),p(.,.)}(\Omega)$ de l'ensemble $C_0^\infty(\Omega)$.
Notons que $\varphi^{s,\Omega}_{q(.),p(.,.)}$ le modulaire induit une norme notée par

$$||u||_{\varphi^{s,\Omega}_{q(.),p(.,.)}} = \inf\{\lambda > 0 : \varphi^{s,\Omega}_{q(.),p(.,.)}(\frac{1}{\lambda}u) \leq 1\},$$

et qui est équivalente à la norme $||u||_{s,q(.),p(.,.)}$. De plus

$$u \in W^{s,q(.),p(.,.)}(\Omega) \text{si} \;\; \text{et seulement si} \; \varphi^{s,\Omega}_{q(.),p(.,.)}(u) < \infty.$$

Proposition 3.1.1 *[21]*

Soient $s \in (0,1)$, $q \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $p \in \mathcal{P}(\Omega\times\Omega)$. L'espace $W^{s,q(.),p(.,.)}(\Omega)$ est separable, reflexif et uniformement convexe.

Proposition 3.1.2 *[21]*

Soient $s \in (0,1)$, $q \in P(\Omega)$ et $p \in P(\Omega\times\Omega)$. Soit $(u_n)_n, u \in W^{s,q(.),p(.,.)}(\Omega)$ tel que $n \in \mathbb{N}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\lim\limits_{n\to\infty} ||u_n - u||_{\varphi^{s,\Omega}_{q(.),p(.,.)}} = 0$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi^{s,\Omega}_{q(.),p(.,.)}(u_n - u) = 0$;
3. *u_n converge vers u dans Ω en mesure et on a*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^{s,\Omega}_{q(.),p(.,.)}(u_n) = \varphi^{s,\Omega}_{q(.),p(.,.)}(u).$$

3.1.2 Capacité fractionnaire $C^s_{q(.),p(.,.)}$

Définition 3.1.1 *[21]*

Soient $0 < s < 1$, $q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ *et* $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. *Pour* $E \subset \mathbb{R}^N$, *considérons l'ensemble*

$$B^s_{q(.),p(.,.)}(E) = \Big\{ u \in W^{s,q(.),p(.,.)}(\mathbb{R}^N) : u \geq 1 \ a.e \ \ on \ \ \ sur \ un \ voisonage \ de \, E \Big\}.$$

La capacité fractionnaire de Sobolev $C^s_{q(.),p(.,.)}$ *de l'ensemble* E *est dèfinie par*

$$C^s_{q(.),p(.,.)}(E) = \inf_{u \in B^s_{q(.),p(.,.)}(E)} \Big\{ \varphi^s_{q(.),p(.,.)}(u) \Big\},$$

Si $B^s_{q(.),p(.,.)}(E) = \phi$, *on pose* $C^s_{q(.),p(.,.)}(E) = \infty$.
Les fonctions appartenant à $B^s_{q(.),p(.,.)}(E)$ *sont appelées fonctions admissibles pour* E.

Théorème 3.1.1 *[21]*

$C^s_{q(.),p(.,.)}$ *est une capacité de choquet.*

Proposition 3.1.1

i) Soit $E \subset \mathbb{R}^N$, *on a*

$$\mu(E) \leq \ C^s_{q(.),p(.,.)}(E)$$

où $\mu(E)$ *est la mesure de Lebesgue de* E.

ii) S'il existe $u \in W^{s,q(.),p(.,.)}(\mathbb{R}^N)$ *tell que* $u = +\infty$ *sur un ouvert contenant* E *alors* $C^s_{q(.),p(.,.)}(E) = 0$.

Théorème 3.1.2

Soit u *et* $(u_n)_n$ *des éléments de* $W^{s,q(.),p(.,.)}(\mathbb{R}^N)$ *et considérons les propositions suivantes :*
i) $u_n \to u$ *fortement dans* $W^{s,q(.),p(.,.)}(\mathbb{R}^N)$.
ii) $u_n \to u$ *en* $C^s_{q(.),p(.,.)}$- *capacitè .*
iii) Il existe une sous suite (u_{n_j}) *tel que* $u_{n_j} \to u$ *in* $C^s_{q(.),p(.,.)}$ - *q.u.*
iv) $u_{n_j} \to u$ *in* $C^s_{q(.),p(.,.)}$.- *q.e.*
Alors ona

$$i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow iv).$$

Définition 3.1.2

Une fonction $u : \mathbb{R}^N \to [-\infty, +\infty]$ *est dite* $C^s_{q(.),p(.,.)}$ *quasi continue dans* $\mathbb{R}^N$ *si pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un ensemble* X *tel que* $C^s_{q(.),p(.,.)}(X) < \varepsilon$ *et la restriction de* u *à* $\mathbb{R}^N \backslash X$, *notée par* $u_{\mathbb{R}^N \backslash X}$ *est continue.*

Théorème 3.1.3

La capacité fractionnaire de Sobolev $C^s_{q(.),p(.,.)}$ satisfait les propriètés suivantes :

1) Si O est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $E \subset \mathbb{R}^N$ tel que $\mu(E) = 0$, alors

$$C^s_{q(.),p(.,.)}(O) = C^s_{q(.),p(.,.)}(O - E).$$

2) Soient u et v deux fonctions $C^s_{q(.),p(.)}$ - quasicontinues dans $\mathbb{R}^N$, on a
i) Si $u = v$, presque partout sur un ouvert $O \subset \mathbb{R}^N$, alors

$$u = v \ C^s_{q(.),p(.,.)} - \ \text{quasi partout dans} O,$$

ii) Si $u \leq v$, presque partout sur un ouvert $O \subset \mathbb{R}^N$, alors

$$u \leq v \ C^s_{q(.),p(.,.)} - \ \text{quasi partout dans } O.$$

Proposition 3.1.2

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. $(u_n)_n$, $u \in W^{s,q(.),p(.,.)}(\Omega)$telles que que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W^{s,q(.),p(.,.)}(\Omega)$ alors

$$\liminf(u_n) \leq u \leq \limsup(u_n) \ C^s_{q(.),p(.,.)} - q.e.$$

3.2 Espace fractionnaire à exposents variables et à valeurs nulles au bord

Définition 3.2.1

On dit qu'une fonction u appartient à l'espace fractionnaire à exposents variables et à valeurs nulles au bord, noté $u \in H^{s,q(.),p(.,.)}(\Omega)$, s'il existe une fonction $\tilde{u} \in W^{s,q(.),p(.,.)}(\mathbb{R}^N), C^s_{q(.),p(.,.)}$ - quasi continue,appelée réprésentative canonique telque $\tilde{u} = u$ presque partout dans Ω et $\tilde{u} = 0$ quasi partout dans $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$.
$H^{s,q(.),p(.,.)}(\Omega)$ est equipé de la norme

$$||u||_{H^{s,q(.),p(.,.)}(\Omega)} = ||\tilde{u}||_{W^{s,q(.),p(.,.)}(\mathbb{R}^N)}.$$

Remarque 3.2.1

Puisque $C^s_{q(.),p(.,.)}(E) = 0$ implique que $\mu(E) = 0$ pour tout $E \subset \mathbb{R}^N$, notons que la norme ne dépend pas du choix du représentant quasi-continu.

Théorème 3.2.1

$H^{s,q(.),p(.,.)}(\Omega)$ est un espace de Banach .

Corollaire 3.2.1

The space $H^{s,q(.),p(.,.)}(\Omega)$ est reflexive.

$$W_0^{s,q(.),p(.,.)}(\Omega) \subset H^{s,q(.),p(.,.)}(\Omega) \subset W^{s,q(.),p(.,.)}(\Omega).$$

Proposition 3.2.1

Soient $f \in H^{s,q(.),p(.,.)}(\Omega)$ et $g \in W^{s,q(.),p(.,.)}(\mathbb{R}^N)$. Si f est bornée et g est $C^s_{q(.),p(.,.)}$ - quasi continue, alors $fg \in H^{s,q(.),p(.,.)}(\Omega)$.

Théorème 3.2.2

Soient $E \subset \Omega$ tel que $C^s_{q(.),p(.,.)}(E) = 0$, alors

$$H^{s,q(.),p(.,.)}(\Omega) = H^{s,q(.),p(.,.)}(\Omega \backslash E).$$

Remarque 3.2.2

Si $C^s_{q(.),p(.,.)}(\partial\Omega) = 0$, alors $H^{s,q(.),p(.,.)}(\mathring{\Omega}) = H^{s,q(.),p(.,.)}(\overline{\Omega})$.

3.3 Application : Minimisation de l'energie de Dirichlet

Comme application de nos résultats, nous montrons que l'opèrateur ènèrgitique atteint son minimum dans l'esapce de Sobolev fractionnaire à valeurs nulles sur le bord.

Définition 3.3.1

Soit $g \in W^{s,q(.),p(.,.)}(\Omega)$. Pour toute $u \in H^{s,q(.),p(.,.)}(\Omega)$, nous définissons l'opérateur énergétique $I^{s,p(.,.)}_{\Omega,g}(u)$ correspondant à la fonction g par

$$I^{s,p(.,.)}_{\Omega,g}(u) = \int_\Omega |u(x)|^{q(x)}dx + \int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^{p(x,y)}}{|x-y|^{N+sp(x,y)}}dxdy + \int_\Omega\int_\Omega \frac{|g(x)-g(y)|^{p(x,y)}}{|x-y|^{N+sp(x,y)}}dxdy.$$

Lemme 3.3.1 *[67]*

Soit H un espace de Banach réflexif. Si $I : H \to \mathbb{R}$ est un opérateur convexe, semi-continu inférieurement et coercitif, alors il existe un élément dans H qui minimise I.

Théorème 3.3.1

Soit $H^{s,q(.),p(.,.)}(\Omega)$ l'espaces de Sobolev fractionnaire à exposants variables avec des valeurs nulles au bord. Alors Il existe une fonction u dans$H^{s,q(.),p(.,.)}(\Omega)$ telle que

$$I_{\Omega,g}^{s,p(.,.)}(u) = \inf_{v \in H^{s,q(.),p(.,.)}(\Omega)} I_{\Omega,g}^{s,p(.,.)}(v).$$

Chapitre 4

Théorème de Brezis Browder dans les espaces de Sobolev anisotropiques

Le but de ce travail est de donner une généralisation du théorème de H. Brezis et F.E. Browder au cas l'espace de Sobolev anisotropique $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$. En introduisant la capacité anistropique $C_{\vec{p}}$ et en utilisant une approximation de type Hedberg dans $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$, nous supposons que si Ω est un ensemble ouvert borné dans $\mathbb{R}^N (N \geq 2)$ satisfaisant la propriété des segments et nous envisageons des conditions suffisantes assurant que si $T \in W^{-1,p'}(\mathbb{R}^N)$ tel que $T = \mu + h$, où $\mu \in M^+(\Omega)$ et $h \in L^1_{loc}(\Omega)$ alors $\forall\, w \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N$, $\int_\Omega w d\mu$ et $\int_\Omega hw d\mu$ sont bien défini et ona $\langle T, u\rangle = \int T(x)u(x)dx$. En plus, nous appliquons ces résultats pour étudier l'existence d'une solution d'un problème unilatèral non linéaire dans le cadre de l'espace de Sobolev anisotrope $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$.

Signalons que le théorème de H. Brezis et F. E. Browder a été prouvé dans [34] avec $T \in W^{-m,p'}(\mathbb{R}^N) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ $(m \in \mathbb{N}, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) et $T(x)u(x) \geq \phi(x)$ a. e dans $\mathbb{R}^N$ pour $\phi \in L^1(\mathbb{R}^N)$, alors $Tu \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $\langle T, u\rangle = \int T(x)u(x)dx$.
Le développement de ces résultats est basé en particulier sur l'approximation de Hedberg ([34]) des fonctions $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ par une suite de fonctions $(u_n)_n$ qui satisfait

$$\begin{cases} u_n \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N), supp u_n \ \text{ est } \ \text{un } \ \text{compact}; \\ u_n u \geq 0 \, et \ \mid u_n \mid \leq u \ \ a.e \, dans \, \mathbb{R}^N; \\ u_n \to u \, dans \, W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \ \ quand \, n \to \infty. \end{cases} \tag{4.0.1}$$

Une généralisation du résultat précédent de H. Brezis et F. E. Browder a été donnée par L. Boccardo, D. Giachetti et F. Murat dans [32] en supposant que $T = \mu + h$ où μ est une mesure de Radon, $h \in L^1_{loc}(\Omega)$ et Ω est un ensemble ouvert. Plus précisément, les auteurs ont prouvé le résultat suivant :

Théorème 4.0.2 *[32] Soit Ω un ouvert $\mathbb{R}^N$, $m \in \mathbb{N}$, et $1 < p, p^{'} < +\infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Considérons $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$, $u \geq 0$ p.p dans Ω et $T \in W^{-m,p^{'}}(\Omega)$ telque $T = \mu + h$, où μ est mesure positive de Radon, $h \in L^1_{loc}(\Omega)$. Supposons en outre que*

$$h(x)u(x) \geq -|\Phi(x)| \; p.p \; x \in \Omega \;\; pour \;\; \Phi \in L^1(\Omega).$$

Alors

$$u \in L^1(\Omega, d\mu), hu \in L^1(\Omega),$$

et

$$\langle T, u \rangle = \int_\Omega u d\mu + \int_\Omega h u dx.$$

Notons qu'une application du théorème ci-dessus est l'étude de l'inégalité variationnelle non linéaire suivante

$$\begin{cases} u \in K_\Phi, \; g(., u) \in L^1(\Omega), \; ug(., u) \in L^1(\Omega), \\ \langle Au, v - u \rangle + \displaystyle\int_\Omega g(., u)(v - u) dx \geq \langle f, u - v \rangle, \; \forall v \in K_\Phi \cap L^\infty(\Omega), \end{cases} \tag{4.0.2}$$

où A est un opérateur pseudo-monotone agissant sur $W_0^{m,p}(\Omega)$, $f \in W^{-m,p^{'}}(\Omega)$,
$K_\Phi = \{v : v \in W_0^{m,p}(\Omega), v \geq \Phi \, p.p \, dans \, \Omega\}$, $\Phi \in W_0^{m,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et g satisfait la condition de signe $sg(x, s) \geq 0$ mais aucune restriction de croissance par rapport à s. $\Phi \in W_0^{m,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Signalons qu'une généralisation du théorème 4.0.2 et du problème unilatéral (4.0.2) dans le cadre des espaces d'Orlicz-Sobolev a été donnée par A. Benkirane dans [25] et dans l'espace de Musielak- Orlicz- Sobolev par M. C. Hassib, Y. Akdim, A. Benkirane et N. Aissaoui [56]. Cette généralisation a été établie par A. Benkirane dans l'espace de Musielak- Orlicz- Sobolev.
Notons également que l'approximation de Hedberg est due à Brézis, Browder [34], d'abord elle a été donnée dans l'espace de Sobolev classique $W^{1,p}(\Omega)$. Elle a été introduite pour caractériser l'action de certaines distributions dans l'espace dual. Ensuite, cette approximation a été établie par Benkirane et Gossez [26] dans l'espace d'Orlicz-Sobolev. Pour les espaces de Sobolev anisotropiques, en supposant que le vecteur $\vec{p}$ est admissible, l'approximation de type Hedberg a été donnée par Bendahmane [23] pour $u \in W^{1,\vec{p}}(\Omega)$.

4.1 Généralisation du théorème de Brezis Browder aux espaces de Sobolev anisotropiques

Nous présentons maintenant notre généralisation du théorème 4.0.2 à l'espace $W^{1,\vec{p}}(\Omega)$ et dont la preuve repose sur les résultats de la $C_{\vec{p}}$ capacité démontrés au chapitre 3.

Théorème 4.1.1

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N (N \geq 2)$ satisfaisant la propriété de segment et $\vec{p}$ un vecteur admissible. Considérons $w \in W_0^{1,\vec{p}}(\Omega), w \geq 0$ a.e. dans Ω et $T \in W^{-1,\vec{p'}}(\Omega)$ tel que $T = \mu + h$, où $\mu \in M^+(\Omega)$ (sous-ensemble des mesures de Radon positives) et $h \in L^1_{loc}(\Omega)$. Nous supposons que

$$hw \geq -|\Phi| \, p.psur \, \Omega \, pour \, \Phi \in L^1(\Omega).$$

Alors

$$hw \in L^1(\Omega), w \in L^1(\Omega, d\mu) \, et \, \langle T, w \rangle = \int_\Omega w d\mu + \int_\Omega hw dx.$$

Signalons qu' en utilisant les mêmes arguments que [52] et [34], nous aboutissons au resultat suivant qui sera utile pour montrer le théorème précédent.

Lemme 4.1.1

Soit Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N (N \geq 2)$. Considérons $T \in W^{-1,\vec{p'}}(\Omega) \cap M(\Omega)$, où $M(\Omega)$ désigné l'ensemble des mesures de Radon dans Ω. Si $E \subset \Omega$ tel que $C_{\vec{p}}(E) = 0$, alors E est $|T|$ - mesurable et $|T|(E) = 0$.

4.2 Application : Etude d'un problème unilatéral non linéaire

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N (N \geq 2)$ satisfaisant la propriété du segment, $f \in W^{-1,\vec{p'}}(\Omega)$ et soit l'ensemble convexe

Φ l'obstacle dans $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. et considérons l'ensemble convexe

$$K_\Phi = \left\{ v \in W_0^{1,\vec{p}}(\Omega), v \geq \Phi \, a.e \, in \, \Omega \right\}, \tag{4.2.1}$$

S est un opérateur pseudo-monotone défini de $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$ dans $W^{-1,\vec{p'}}(\Omega)$ qui satisfait les hypothèses suivantes :

– a) S est continu de chaque sous-espace de dimension finie de $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$ dans $W^{-1,\vec{p'}}(\Omega)$ pour la topologie faible ;

– b) S transforme tout ensemble borné en un ensemble borné. ;
– c) S est coercitif , i.e. pour tout $v_0 \in K_\Phi \cap L^\infty(\Omega)$; $\frac{\langle S(v), v-v_0\rangle}{\|v\|} \to +\infty$ avec $\|v\|_{W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)} \to \infty$.
g est une fonction de Carathodory de $\Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, satisfait :
– d) $s.g(x,s) \geq 0, \forall s \in \mathbb{R}$ et presque pour tout x in Ω;
– e) $h_t = \sup_{|s|\leq t} \mid g(x,s) \mid \in L^1(\Omega), \forall t \geq 0$.

Théorème 4.2.1

Soit Ω un ouvert borné satisfait la condition du segment , $f \in W^{-1,\vec{p'}}(\Omega)$. Si S vérifie les hypothèses $a) - c)$ et g verifie les conditions $d) - e)$ alors Le problème unilatéral non linéaire suivant :

$$\begin{cases} u \in K_\Phi, g(.,u) \in L^1(\Omega), ug(.,u) \in L^1(\Omega), \\ \langle Su, v-u\rangle + \displaystyle\int_\Omega g(.,u)(v-u)dx \geq \langle f, u-v\rangle, \ \forall v \in K_\Phi \cap L^\infty(\Omega) \end{cases} \tag{4.2.2}$$

admits au moins une solution.

Chapitre 5

Sur un problème unilatéral elliptique dégénéré non linéaire avec $f \in L^1(\Omega)$

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'existence d'une solution pour un problème unilatéral non linéaire de la forme suivante :

$$-div(\nu_1 a(x,u,\nabla u)) + \Theta(x,u,\nabla u)\nu_2 = f\, dans\, \Omega,$$

dans le cadre de l'espace de Sobolev avec poids $W_0^{1,p}(\Omega,\nu_1,\nu_2)$, où ν_1,ν_2 sont des $\mathcal{A}_p$-poids et $f \in L^1(\Omega)$ sachant que $\Theta(x,\tau,\zeta)$ soit un terme non linéaire ayant une condition de croissance par rapport à ζ, de non croissance par rapport à τ et satisfaisant une condition de signe sur τ.

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ et ν_1,ν_2 deux fonctions poids appartenant à la classe de poids $\mathcal{A}_p$. L'opérateur A défini par $A(u) = -div(\nu_1 a(x,u,\nabla u))$, est un opérateur de Leray-Lions agissant de l'espace sobolev avec poids $W_0^{1,p}(\Omega,\nu_1,\nu_2)$ dans son dual $W^{-1,p'}(\Omega,\nu_1,\nu_2)$ ($p' = \frac{p}{p-1}, 1 < p < \infty$).
Le but de cet article est de prouver l'existence d'une solution pour le problème unilatéral elliptique dégénéré non linéaire suivant :

$$\begin{cases} -div(\nu_1 a(x,u,\nabla u)) + \Theta(x,u,\nabla u)\nu_2 = f \in D'(\Omega), \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega,\nu_1,\nu_2), \Theta(x,u,\nabla u) \in L^1(\Omega,\nu_2), \end{cases}$$

où Θ est un élément non linéaire dégénéré d'ordre inférieur comprenant une certaine croissance naturelle par rapport à $\mid \nabla u \mid$. En ce qui concerne u, nous supposons qu'il n'y a pas de restrictions de croissance, cependant satisfait la condition de signe, $f \in L^1(\Omega)$.

Notre objectif est d'impliquer des conditions suffisantes sur a, Θ assurant l'existence d'au moins une solution pour le problème elliptique dégénéré non linéaire avec conditions aux limites de Dirichlet :

$$\begin{cases} u \in K_\phi, \Theta(x,u,\nabla u) \in L^1(\Omega,\nu_2), \\ \langle A(u), T_k(v-u)\rangle + \displaystyle\int_\Omega \nu_2 \Theta(x,u,\nabla u) T_k(v-u)\ \mathrm{d}x \geq \langle f, T_k(v-u)\rangle \\ \text{pour toute } \ v \in K_\phi \text{ et toute } \ k>0, \end{cases} \tag{5.0.1}$$

où

$$K_\phi = \left\{ v \in W_0^{1,p}(\Omega,\mu_1,\mu_2), v \geq \phi \ \text{ p.p. sur } \ \Omega \right\}.$$

Lorsque $\phi = -\infty$, l'existence a été démontrée dans [37, 38] pour le cas de l'équation avec f appartenant respectivement à $W^{-1,p'}(\Omega,\nu_1,\nu_2)$ et à $L^1(\Omega)$. Dans un travail récent [9], Akdim et ses collaborateurs ont établi un résultat d'existence en prouvant que les parties positives et négatives de la solution approchée convergent fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega,\nu_1,\nu_2)$, où le second terme $f \in W^{-1,p'}(\Omega,\nu_1,\nu_2)$. Tandis qu' Azroul et al. ont étudié dans [18] le problème précédent lorsque $f \in L^1(\Omega)$ dans l'espace de Sobolev avec poids $W_0^{1,p}(\Omega,\nu)$, où ν est une fonction poids qui satisfait une certaine hypothèse. Dans cette direction, nous pouvons également nous référer aux résultats obtenus dans [5, 7] dans les espaces de Sobolev avec poids et sans poids .

5.1 Résultat d'existence

Soit Ω un domaine bornè dans $\mathbb{R}^N, 1 < p < \infty$ et ν_1, ν_2 deux fonctions $\mathcal{A}_p$- poids . Considérons le problème elliptique dégénéré non linéaire avec condition limite de Dirichlet :

$$\begin{cases} u \in K_\phi, \Theta(x,u,\nabla u) \in L^1(\Omega,\nu_2), \\ \langle A(u), T_k(v-u)\rangle + \displaystyle\int_\Omega \nu_2 \Theta(x,u,\nabla u) T_k(v-u)\ \mathrm{d}x \geq \langle f, T_k(v-u)\rangle \\ \text{pour toute , } v \in K_\phi \text{ et toute } \ k>0, \end{cases} \tag{5.1.1}$$

$$K_\phi = \left\{ v \in W_0^{1,p}(\Omega,\nu_1,\nu_2), v \geq \phi \text{ presque partout dans } \Omega \right\}$$

où ϕ une fonction mesurable à valeurs sur $\overline{\mathbb{R}}$ telle que

$$\phi^+ \in W_0^{1,p}(\Omega,\nu_1,\nu_2) \cap L^\infty(\Omega), \tag{5.1.2}$$

Soit A l'opérateur deé Leray Lions deéfini par $A(u) = -div(\nu_1 a(x,u,\nabla u))$ et agissant de l'espace de Sobolev avec poids $W_0^{1,p}(\Omega,\nu_1,\nu_2)$ dans son dual $W^{-1,p'}(\Omega,\nu_1,\nu_2)$
$(1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\ )$.
ν_1, ν_2 sont deux fonctions poids appartenant à la classe des poids $\mathcal{A}_p$.

Hypothèses (A1)

Nous supposons que $f \in L^1(\Omega)$ et $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ est une fonction de Carathéodory qui satisfait pour presque tout $x \in \Omega$, pour tous $\tau \in \mathbb{R}$ et ζ, η dans $\mathbb{R}^N$ avec $\zeta \neq \eta$, on a les hypothèses suivantes :

$$| a(x,\tau,\zeta) | \leq \beta \left(h(x) + | \tau |^{p-1} + | \zeta |^{p-1} \right), \tag{5.1.3}$$

$$[a(x,\tau,\zeta)-a(x,\tau,\eta)](\zeta-\eta)>0, \tag{5.1.4}$$

$$a(x,\tau,\zeta).\zeta \geq \alpha \mid \zeta \mid^{p}, \tag{5.1.5}$$

où $h \in L^{p'}(\Omega,\nu_1)$, $h(x)\geq 0$, $\alpha>0$, $\beta>0$ sont deux constantes.

Hypothèses (A2)

$\Theta(x,u,\nabla u)$ est une fonction de Carathéodory qui satisfait les conditions mentionnées ci-dessous :

$$\Theta(x,\tau,\zeta)\tau \geq 0, \tag{5.1.6}$$

$$\mid \Theta(x,\tau,\zeta) \mid \leq d(\mid \tau \mid)(h_1(x)+ \mid \zeta \mid^{p}), \tag{5.1.7}$$

$$\mid \Theta(x,\tau,\zeta) \mid \geq \rho_2 \frac{\nu_1}{\nu_2} \mid \zeta \mid^{p}, for \mid \tau \mid > \rho_1, \tag{5.1.8}$$

Théorème 5.1.1

En plus de $(A_1)-(A_2)$, *supposons que* (5.1.2) *est vérifiée. Si* $f \in L^1(\Omega)$ *et* $\nu_1,\nu_2 \in \mathcal{A}_p$ *telles que* $\nu_2 \leq \nu_1$, *alors le problème* (5.1.1) *admet au moins une solution.*

Bibliographie

[1] D. R. Adams. Sets and functions of finite L^p-capacity. Indiana Univ. Math. J. **27** (4) (1978), 611–627.

[2] N. Aissaoui, Y. Akdim, A. Benkirane and M. C. Hassib. Capacity and Non-linear Potential in Musielak-Orlicz Spaces. Nonlinear Dynamics and Systems Theory. **16** (3) (2016), 276–293.

[3] N. Aissaoui, Y. Akdim, A. Benkirane and M. C. Hassib. Capacity, Theorem of H. Brezis and F.E. Browder Type in Musielak–Orlicz–Sobolev Spaces and Application. Nonlinear Dynamics and Systems Theory. **17**, (2) (2017), 175–192.

[4] N. Aissaoui and A. Benkirane. Capacités dans les epaces d'Orlicz. Ann. Sci. Math. Québec. **18** (1) (1994), 1–23.

[5] Y. Akdim, E. Azroul and A. Benkirane. Existence of solutions for quasilinear degenerated elliptic equations. Electronic Journal of Differential Equations, 2001 (71), 1–19 (2001).

[6] Y. Akdim, E. Azroul and A. Benkirane. Strongly nonlinear degenerated elliptic unilateral problems via convergence of truncations. Electronic Journal of Differential Equations (EJDE)[electronic only], 2002, 25–39 (2002).

[7] Y. Akdim, E. Azroul and A. Benkirane. Existence of solution for quasilinear degenerated elliptic unilateral problems. In Annales mathématiques Blaise Pascal 10, 1–20 (2003).

[8] Y. Akdim , M. Belayachi , R. Elharch and S. Lalaoui Rhali. On a nonlinear degenerate elliptic unilateral problem.(submitted)

[9] Y. Akdim, M. Belayachi and M. Hammoumi. Existence of solution for nonlinear degenerate elliptic unilateral problems having natural growth terms. Journal of Elliptic and Parabolic Equations 8,659–679 (2022). https ://doi.org/10.1007/s41808–022–00168-7.

[10] Y. Akdim, R. Elharch, M. C Hassib and S. Lalaoui Rhali. Capacity in anisotropic Sobolev spaces. Nonlinear Dynamics and Systems Theory. 21 (2) (2021), 115–125.

[11] Y. Akdim, R. Elharch, M. C Hassib and S. Lalaoui Rhali. Capacity and anisotropic Sobolev spaces with zero boundary values. Nonlinear Dynamics and Systems Theory. 22 (1) (2022), 1–12.

[12] Y. Akdim, R. Elharch, M. C Hassib and S. Lalaoui Rhali. Some results of capacity in fractional Sobolev spaces with variable exponents. J. Elliptic Parabol Equ (2022). https ://doi.org/10.1007/s41808–022–00189–2.

[13] Y. Akdim, R. Elharch, M. C Hassib and S. Lalaoui Rhali.Theorem of Brezis and Browder type in anisotropic Sobolev spaces. Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser 72, 313–327 (2023). https ://doi.org/10.1007/s12215–021–00678–8.

[14] Y. Akdim, M. C. Hassib. Weighted Variable Exponent Sobolev spaces on metric measure spaces. Moroccan Journal of Pure and Applied Analysis. **4** (2) (2018), 62–76.

[15] A.M. Alghamdi, S. Gala, C. Qian and M.A. Ragusa. The anisotropic integrability logarithmic regularity criterion for the 3D MHD equations. Electronic research archive. 28 (1),(2020), 183–193.

[16] L. Alvarez, P.L. Lions and J. M. Morel. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. II, SIAM Journal on numerical analysis, 29 (1992), pp. 845–866.

[17] D.H Armitag and S.J, Gardiner. Classical potential theory. Springer Science and Business Media, 2012.

[18] E. Azroul, A. Benkirane and O. Filali. Strongly nonlinear degenerated unilateral problems with data. Electronic Journal of Differential Equations (EJDE)[electronic only] 2002,49–64 (2002).

[19] E. Azroul, A. Benkirane and M. Shimi, Eigenvalue problems involving the fractional $p(x)$-Laplacian operator, Adv. Oper. Theory, 4 (2019), 539–555.

[20] A. Baalal and M. Berghout, Traces and fractional Sobolev extension domains with variable exponent. Int. J. Math. Anal., 12 (2018), 85–98.

[21] A. Baalal and M. Berghout. Theory of capacities in fracional Sobolev spaces with variable exponents. arXiv preprint arXiv :1904.08997 (2019).

[22] A. Bahrouni, V. D. Radulescu. On a new fractional Sobolev space and applications to nonlocal variational problems with variable exponent, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S, 11 (2018), 379–389.

[23] M. Bendahmane, M .Chrif and S. El Manouni. An approximation result in generalized anisotropic Sobolev spaces and applications. Zeitschrift fr Analysis und ihre Anwendungen. 30.(3), (2011), 341–353.

[24] P. Bénilan, L. Boccardo , T. Gallouë, R. Gariepy , M. Pierre and J.L. Vázquez. An L^1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 4 (1995), 241–273.

[25] A. Benkirane. A theorem of H. Brezis and F. Browder type in Orlicz-Sobolev spaces and application. Pitman Res. Notes Math. Ser. 343 (1996) 10–16.

[26] A. Benkirane and J. P Gossez. An approximation theorem in higher order Orlicz-Sobolev spaces and applications. Studia Math. TXCII (1989), 232– 255.

[27] O. Benslimane, A. Aberqi and J. Bennouna. Existence and uniqueness of entropy solution of a nonlinear elliptic equation in anisotropic Sobolev Orlicz space. Rendiconti delCircolo Matematico di Palermo (2020), 1–30.

[28] M. Berghout. Fractional variable exponents Sobolev trace spaces. arXiv preprint arXiv :2008.11030 (2020).

[29] M. Biegert, M. Warma. Regularity in capacity and the Dirichlet Laplacian. Potential Analysis, 25(3)(2006), 289–305.

[30] L. Boccardo, T. Gallouët and F. Murat. Unicité de la solution de certaines èquations non linéaires, C. R. Acad. Sci. Paris Serie I 315 (1992), 1159–1164.

[31] L. Boccardo, T.Gallouët and L. Orsina. Existence and nonexistence of solutions for some nonlinear elliptic equations. Journal d' Analyse Mathématique . **73** (1) (1997), 203–223.

[32] L. Boccardo, D. Giachetti and F. Murat. A generalization of a theorem of H. Brezis and F. Browder and applications to some unilateral problems. Anales de l'I.H.P., section C 7. (4) (1990), 367–384.

[33] L. Boccardo, F. Murat and J. Puel. Existence of bounded solutions for non linear elliptic unilateral problems. Annali di matematica pura ed applicata, 152(1), 183–196 (1988).

[34] H. Brezis and F. Browder. Some properties of higher-order Sobolev spaces.Journal de Mathèmatiques Pures et Appliquèes,(1982), 61(3), 245–259.

[35] H. Brezis. Analyse fonctionnelle, théorie et applications. Masson, Paris, 1983. J.Math. Pures App. (1982), 245–259.

[36] H. Brezis. équations et inéquations dans les espaces vectoriels en dualité. Ann. Inst. Fourier Grenoble. 18.1, (1968), 115–175.

[37] A.C. Cavalheiro. On a nonlinear degenerate elliptic equation having natural growth terms. Nonlinear Funct. Anal. Appl. 22(2), 355–370 (2017).

[38] A.C. Cavalheiro. Existence of solution in weighted Sobolev spaces for a strongly nonlinear degenerate elliptic equations having natural growth terms and L^1 data. Le Matematiche, 73 (2), 261–277 (2018).

[39] M. Cencelj, V.D. Radulescu and D. Repovš. Double phase problems with variable growth. Nonlinear Anal. 177 (2018), 270–287.

[40] G. Choquet. Theory of capacities. Ann. Inst. Fourier. **5** (1954), 131–295.

[41] G. Choquet. Forme abstraite du théorème de capacitabilité. Ann. Inst. Fourier. **9** (1959), 83–89.

[42] S.K. Chua, S. Rodney and R. Wheeden . A compact embedding theorem for generalized Sobolev spaces. Pacific J. Math, 265 (1), 17–57 (2013). https ://doi.org/10.2140/pjm.2013.265.17.

[43] A. Dall'Aglio. Approximated solutions of equations with L^1 data. Application to the H–convergence of quasi–linear parabolic equations, Ann. Mat. Pura Appl. 170, 207-240,(1996).

[44] A. Darbinyan and A. Tumanyan. On index stability of noetharian differential operators in anisotropic Sobolev spaces. Eurasian MathematicalJournal, 10 (1),(2019), 9–15.

[45] L. M. Del Pezzo and J. D. Rossi. Traces for fractional Sobolev spaces with variable exponents, Adv. Oper. Theory, 2 (2017), 435–446.

[46] T. Del Vecchio and M.R. Posteraro. An existence result for elliptic equations with measure data, Adv. Differ. Equ. 1, 899–917, (1996).

[47] L. Diening and P. Harjulehto, P. Hästlöand M. Ruzicka. Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2017, Springer-Verlag, Berlin, 2011.

[48] R.J. Diperna, P. L. Lions. On the Cauchy problem for Boltzmann equations global existence and weak stability, Ann of Math 130.1, p. 321, V366, (1989).

[49] L . C. Evans and R. F. Gariepy. Measure theory and fine properties of functions CRC Press. Boca Raton, 1992.

[50] E.B.Fabes, C.E.Kenig and R.P. Serapioni . The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations. Commun. Partial Differ. Equ. 7(1), 77–116 (1982).

[51] X. L. Fan and D. Zhao . On the generalized Orlicz-Sobolev Space$W^{k,p(x)}(\Omega)$ J. Gansu Educ. College 12 (1) (1998) 1–6.

[52] M. Grun-Rehomme. Caractérisation du sous-différentiel d'integrandes convexes dans les espaces de Sobolev. *J.Math. Pures et appl*, (1977), 149–156.

[53] P. Harjulehto, P. Hästö, M. Koskenoja and S. Varonen. Sobolev capacity on the space $W^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d)$, J. Funct. Spaces Appl. 1 (2003), no. 1, 1733.

[54] P. Harjulehto, P. Hästö, M. Koskenoja and S.Varonen. The Dirichlet energy integral and variable exponent Sobolev spaces with zero boundary values. Potential Analysis. **25** (3) (2006), 205–222.

[55] M. C. Hassib and Y. Akdim. Weighted Variable Exponent Sobolev spaces on metric measure spaces. Moroccan Journal of Pure and Applied Analysis 4 (2) (2018) 62–76.

[56] M. C. Hassib , Y. Akdim , A. Benkirane and N. Aissaoui. Capacity Theorem of H. Brezis and F.E. Browder Type in Musielak-Orlicz-Sobolev Spaces and Application. Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 17 (2) (2017), 175–192.

[57] L. I. Hedberg. Nonlinear potentials and approximation in the mean by analytic functions, *Math. Z.* **129** (1972), 299–319.

[58] L. I. Hedberg and T. H. Wolff. Thin sets in nonlinear potential theory, *Ann. Inst. Fourier.* **33** (1983), 161–187.

[59] L.Hedberg. Nonlinear potential theory. Potential Theory : Proceedings of the International Conference on Potential Theory, Nagoya (Japan), August 30-September 4, 1990, edited by Masanori Kishi, Berlin, New York : De Gruyter, 1992, pp. 43-54. https ://doi.org/10.1515/9783110859065.43.

[60] J. Heinonen, T. Kilpeläinen and O. Martio. Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations. Oxford Mathematical Monographs, Oxford. 1.993 (1993), 10.

[61] K. Ho and Y. H. Kim. A-priori bounds and multiplicity of solutions for nonlinear elliptic problems involving the fractional $p(.)$-Laplacian, Nonlinear Anal., 188 (2019), 179–201.

[62] A. Kufner. Weighted Sobolev Spaces. John Wiley and Sons, (1985).

[63] P. Komprobst , R. Deriche and G. Aubert. Image coupling, restoration and enhancement via PDE's, in Proceedings of International Conference on Image Processing, vol. 2, IEEE, 1997, pp. 458–461.

[64] T. Kilpeläinen. Weighted Sobolev spaces and capacity, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 19 (1994), no. 1, 95–113.

[65] V.P. Khavin and V. G. Maz'ya. Nonlinear potential theory. Uspekhi Math. Nauk. 27 (1972) 71–148.

[66] T. Kilpelinen. A remark on the uniqueness of quasi continuous functions, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 23 (1998), 261–262.

[67] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia. An introduction to variational inequalities and their applications. Academic Press, London, 1980.

[68] J. Kinnunen. Sobolev spaces. Department of Mathematics and Systems Analysis, Aalto University (2017).

[69] U. Kaufmann, J. D. Rossi and R.Vidal. Fractional Sobolev spaces with variable exponents and fractional $p(x)$-Laplacians, Elec. Jour. of Qual. Th, of Diff. Equa., vol. 76 (2017), pp.1–10.

[70] S. Kakutani. Weak convergence in uniformly convex spaces, Tohoku Math. J.45 (1938), 188–193.

[71] U. Kaufmann, J. D. Rossi and R. Vidal, Fractional Sobolev spaces with variable exponents and fractional $p(x)-$ Laplacians, Elec. Jour. of Qual. Th, of Diff. Equa., vol. 76 (2017), pp.1–10.

[72] T. Kilpelinen, J. Kinnunen, and O. Martio. Sobolev spaces with zero boundary values on metric spaces. Potential Analysis. **12** (3) (2000), 233–247.

[73] A. Kufner, O. John and S. Fuèík. Function Spaces, volume 3 of Mechanics. Analysis. Springer, New York (1977).

[74] J. Leray and J.L. Lions, Quelques résultats de visik sur les problèmes elliptiques semi linéaires par les mthodes de Minty et Browder, Bull. Soc. Math. France, 93, (1965), 97–107.

[75] S. Liang and S. Zheng. Gradient estimate of a variable power for nonlinear elliptic equations with Orlicz growth. Adv. Nonlinear Anal. 10.1 (2021), 172–193.

[76] P. Lindqvist and O. Martio. Two theorems of N. Wiener for solutions of quasilinear elliptic equations, Acta Math. 155 (1985), n°. 3-4,153–171.

[77] J. L. Lions. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod-Gauthier Villars, Paris, 1969.

[78] W. Littman, G. Stampacchia and H.F. Weinberger. Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients, Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa (III) 17 (1963) 43–77.

[79] J. Maly and W.P. Ziemer, Fine regularity of solutions of elliptic partial differential equations, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[80] Irina. Markina. Potential theory : the origin and applications. (1992) : 283-291.

[81] V. G. Maz'ya. Sobolev spaces. Translated from the Russian by TO Shaposhnikova. Springer Ser. Soviet Math., Springer, 1985.

[82] N. G. Meyers. A theory of capacities for potentials of functions in Lebesgue classes. Math, Scand. 26, (2) (1970), 255–292.

[83] G. Mingione, V. Radulescu. Recent developments in problems with nonstandard growth and nonuniform ellipticity. J. Math. Anal. Appl. 501, (1) (2021), 125–197.

[84] B. Muckenhoupt. Weighted norm inequalities for the hardy maximal function. Transactions of the American Mathematical Society, 165, 207–226 (1972).

[85] B. Muckenhoupt. The equivalence of two conditions for weight functions Studia Math, 49, 101–106 (1974).

[86] E. Di Nezza, G. Palatucci and E. Valdinoci, Hitchhiker's. Guide to the fractional Sobolev spaces, Bull. Sci. Math. 136 (2012), 521–573.

[87] S. M. Nikolski. On imbedding, continuation and approximation theorems for differentiable functions of several variables. Russian Math. Surveys **16** (5) (1961), 55–104.

[88] S. M. Nikolskiĭ. An imbedding theorem for function with partial derivatives considered in different metric. Am. Math. Soc. Transl. 2 **90** (1970), 27–44.

[89] T. Ohno and T. Shimomura. Musielak-Orlicz-Sobolev spaces with zero boundary values on metric measure spaces. Czechoslovak Mathematical Journal 66 (2) (2016) 371–394.

[90] P. Perona and J. Malik. Scale–space and edge detection using anisotropic diffusion, IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence, 12 (1990), 629–639.

[91] M. Pierre. Une introduction à la notion de capacité.Séminaire de théorie spectrale et géométrie, Tome 1 (1982-1983).13 http ://www.numdam.org/item/TSG

[92] A. Prignet. Existence and uniqueness of entropy solutions of parabolic problems with L^1 data. Nonlin. Analysis 28, 1943–1954, (1997).

[93] J. Rakosnik. Some remarks to anisotropic Sobolev spaces I. Beiträge zur Analysis. 13 (1979), 55–68.

[94] J. Rakosnik. Some remarks to anisotropic Sobolev spaces II. Beiträge zur Analysis. 15 (1981), 127–140.

[95] J. Serrin. Local behavior of solutions of quasi-linear equations, Acta Math. 111 (1964) 247–302.

[96] J. Serri. Isolated singularities of solutions of quasi-linear equations, Acta Math. 113 (1965) 219–240.

[97] X. Shi, V.D. Radulescu, D.Repovˇ and Q. Zhang. Multiple solutions of double phase variational problems with variable exponent. Adv. Calc. Var.13.4 (2020), 385–401.

[98] S. Shi and J. Xiao, On fractional capacities relative to bounded open Lipschitz sets, Potential Anal. 45 (2016), no. 2, 261–298.

[99] L. N. Slobodeckiĭ. Generalized Sobolev spaces and their application to boundary problems for partial differential equation. Am. Math. Soc. Transl. 2 **57** (1966), 207–275.

[100] A. Torchinsky. Real-variable methods in harmonic analysis. Academic Press, New York (1986).

[101] M. Troisi. Teoremi di inclusione per spazi di Sobolev non isotropi. Ricerche Mat. 18 (1969), 3–24.

[102] N. S. Trudinger. An imbedding theorem for$H_0(G,U)$ spaces. Studia. Math. 50 (1974), 17–30.

[103] B. O. Turesson. Nonlinear potential theory and weighted Sobolev spaces. Springer Science and Business Media, (2000).

[104] M. Warma. The fractional relative capacity and the fractional Laplacian with Neumann and Robin boundary conditions on open sets, Potential Anal. 42 (2015), no. 2, 499–547.

[105] J. Xiao. Optimal geometric estimates for fractional Sobolev capacities, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 354 (2016), 2, 149–153.

[106] D. Zhao, W. J. Qiang and X. L. Fan. On generalized Orlicz spaces $L^{p(x)}(\Omega)$, J.Gansu Sci.9(2) (1997), 1–7.

[107] W.P. Ziemer, Weakly Differentiable Functions. Sobolev spaces and functions of bounded variation, Springer-Verlag, New York, 1989.