كلية العلوم و التقنيات فاس
ⵜⴰⵖⵣⵍⵓⵍⵜ ⵏ ⵜⵇⴰⵙⵙⴰⵢⵏ ⴷ ⵜⵙⵏⵙⵜⵜ
Faculté des Sciences et Techniques de Fès

جامعة سيدي محمد بن عبد الله
ⵜⴰⵙⴷⴰⵡⵉⵜ ⵙⵜⴷ ⵎⵃⵎⴷ ⴱⵏ ⵄⴱⴷⵍⵍⴰⵀ
Université Sidi Mohamed Ben Abdellah

Centre d'Études Doctorales : Sciences et Techniques de l'Ingénieur

N° d'ordre : ***51/2019***

THÈSE

Présentée par

Mr : Ahmed SANHAJI

Pour l'obtention du

Doctorat En Mathématiques

Spécialité : **Équations aux Dérivées Partielles**

Intitulée :

****

COURBES PROPRES ET APPLICATION À L'ÉTUDE DE NON-RÉSONANCE SUR LE POTENTIEL POUR DES PROBLÈMES ELLIPTIQUES DE NEUMANN

****

Thèse présentée et soutenue le 24 Juillet 2019

Devant le jury composé de :

Nom Prénom	Titre	Établissement	
Azzeddine EL BARAKA	PES	Faculté des Sciences et Techniques, Fès	Président
Mohammed HADDA	PES	ENSAM, Meknès	Rapporteur
Youssef AKDIM	PES	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, Fès	Rapporteur
Mimoun MOUSSAOUI	PH	CRMEF, Taza	Rapporteur
Soumia LALAOUI RHALI	PH	Faculté Polydisciplinaire de Taza	Examinatrice
Abdelhai ELAZZOUZI	PH	Faculté Polydisciplinaire de Taza	Examinateur
Ahmed DAKKAK	PES	Faculté Polydisciplinaire de Taza	Directeur de thèse

Laboratoire d'accueil : Laboratoire des Sciences de l'Ingénieur.

Etablissement : Faculté Polydisciplinaire de Taza.

Centre d'Études Doctorales : Sciences et Techniques de l'Ingénieur

Résumé de la thèse

La présente thèse porte sur deux questions principales qui s'inscrivent dans le domaine mathématique de l'analyse des équations aux dérivées partielles. Ce domaine a pour objet d'établir des liens avec des situations provenant du monde réel. Plus précisément nous nous sommes intéressés à une classe de problèmes elliptiques avec condition de Neumann au bord. Cette thèse se présente sous forme de deux parties qui ne peuvent pas être lues indépendamment l'une de l'autre, ces deux parties sont précédées d'une introduction générale et du chapitre 1 dans lequel nous donnons un bref rappel des différents outils dont nous faisons un usage fréquent dans les autres chapitres.

- Dans la première partie, nous avons traité la première question principale, c'est l'existence des courbes propres du p-Laplacien avec poids. Ainsi on a démontré l'existence des solutions non triviales de certains problèmes associés à une équation de type

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,\alpha,u) & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $f(x,\alpha,u) = (\alpha m_1(x) + \beta(\alpha) m_2(x)) |u|^{p-2} u$ avec $m_1, m_2 \in L^\infty(\Omega)$, en supposant m_1 change de signe sur Ω et $\int_\Omega m_1 < 0$ et $\inf_{\text{ess}\,\Omega} m_2 > 0$. En outre, nous avons étudié certaines propriétés de ces courbes.

- Dans la deuxième partie on trouve la réponse de la seconde question principale de ce travail, c'est l'étude du problème de non-résonance, cette partie est organisée en deux chapitres, dans le chapitre 4, on traite la question de non-résonance sous la courbe propre principale de $-\Delta_p$, c'est à dire nous avons prouvé un résultat d'existence pour le problème suivant pour tout $h \in L^\infty(\Omega)$

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f_h(x,\alpha,u) & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $f_h(x,\alpha,u) = \alpha m_1(x) |u|^{p-2} u + m_2(x) g(u) + h$, avec $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, en se basant sur une approche qui repose sur la notion de degré de Laury-Schauder. Dans le chapitre 5 on traite la question de non-résonance entre les deux premières courbes de p-Laplacien avec poids mais ici seulement dans le cas linéaire $p = 2$.

Mots clés : Opérateur p-Laplacien, valeur propre, courbe propre, problème de Neumann, problème elliptique, non-résonance.

UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES - FES
Centre d'Études Doctorales : Sciences et Techniques de l'Ingénieur

---

THÈSE

Pour l'obtention du

Doctorat En Mathématiques

FD : Mathématiques et Applications

Spécialité : Équations aux Dérivées Partielles

Présentée par

Ahmed SANHAJI

Sous la direction du Pr. **Ahmed DAKKAK**

Intitulée

==========

COURBES PROPRES ET APPLICATION À L'ÉTUDE DE NON-RÉSONANCE SUR LE POTENTIEL POUR DES PROBLÈMES ELLIPTIQUES DE NEUMANN

==========

Soutenue le 24 juillet 2019

Devant le jury composé de :

Président :	Pr. Azzedine EL BARAKA	Faculté des Sciences et Techniques de Fès
Rapporteurs :	Pr. Mohammed HADDA	ENAM Meknès
	Pr. Youssef AKDIM	Faculté des Sciences Dhar El Mehraz de Fès
	Pr. Mimoun MOUSSAOUI	CRMEF de Taza
Examinateurs :	Pr. Soumia LALAOUI RHALI	Faculté Polydisciplinaire de Taza
	Pr. Abdelhai ELAZZOUZI	Faculté Polydisciplinaire de Taza
Directeur :	Pr. Ahmed DAKKAK	Faculté Polydisciplinaire de Taza

Je dédie ce modeste travail à l'esprit

de ma mère, décédée le 08 juillet 2018.

A mon père et à toute ma famille
surtout à ma petite fille ***Sara****.*

A tous ceux qui ont fait des sacrifices

pour m'offrir les conditions propices
à ma réussite.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à remercier mon directeur de thèse le professeur ***Ahmed DAKKAK****, pour m'avoir fait confiance, et d'avoir accepté de diriger cette thèse. Merci à lui pour sa générosité : il m'a partagé ses connaissances et ses idées mathématiques, pour sa gentillesse et sa patience, il a consacré beaucoup du temps à discuter avec moi et à corriger mes textes mathématiques et non mathématiques. Je le remercie aussi pour ses qualités pédagogiques et hummaines . C'est un grand honneur d'avoir pu travailler avec lui.*

Je tiens à remercier très vivement le professeur ***Azzeddine EL BARAKA*** *qui me fait l'honneur de présider le jury de soutenance de cette thèse.*

Je souhaite remercier les professeurs ***Mohammed HADDA****,* ***Youssef AKDIM*** *et* ***Mimoun MOUSSAOUI****, d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce manuscrit de thèse. Merci pour leur lecture rigoureuse, leurs remarques et leurs conseils donnés pour l'amélioration de ce manuscrit. C'est un honneur pour moi qu'ils aient pris le temps de lire avec attention mon travail et de me faire part de leurs avis de spécialistes sur celui-ci. Je voudrais exprimer aussi mes sincères remerciements aux professeurs* ***Soumia LALAOUI RHALI*** *et* ***Abdelhai ELAZZOUZI*** *qui ont examiné ce travail de thèse et qui ont accepté de faire partie de mon jury.*

Je remercie toute ma famille qui n'a jamais cessé de me soutenir. Je dois également adresser ici un grand merci à mes collègues et amis doctorants qui m'auront soutenu tout au long de ma thèse.

Merci à toute l'équipe du laboratoire des sciences et de l'ingénieur à faculté polydisciplinaire de Taza.

A. SANHAJI

TABLE DES MATIÈRES

Introduction Générale **6**

1 Rappels et généralités **19**
1.1 **Espaces Fonctionnels** 19
1.1.1 Espaces de Lebesgue 20
1.1.2 Espaces de Sobolev 20
1.1.3 Injections de Sobolev, Inégalité de Poincaré 22
1.1.4 Notion de trace et formule d'intégration par parties 23
1.2 **Opérateur p-Laplacien, solutions d'un problème elliptique de Neumann.** 24
1.3 **Opérateurs monotones et propriétés du p-Laplacien.** 25
1.4 **Opérateurs de Nemytskii** 27
1.5 **Genre et cogenre.** 29
1.6 **Degré topologique.** 30
1.6.1 Degré topologique de Brouwer 30
1.6.2 Degré topologique de Leray-Schauder 31
1.7 **Estimation L^∞, régularité des solutions et principe de maximum.** 32
1.8 **Alternative de Fredholm** 33

I Existence des Courbes Propres pour Certains Problèmes Elliptiques de Neumann **35**

2 Existence des courbes propres **36**
2.1 **Existence des courbes propres : Cas abstrait** 36
2.1.1 Introduction à la Théorie de Ljusternik-Schnirelmann 37
2.1.2 Définition des courbes propres, énoncé du résultat principal d'existence 39

3 Existence des courbes propres du p-Laplacien avec poids indéfinis pour un problème de Neumann **42**
3.1 **Rappel sur le spectre du p-Laplacien avec poids, définition et proprietés** 43
3.1.1 Le spectre du p-Laplacien avec poids pour un problème de Neumann 43

3.1.2 Spectre du p-Laplacien avec poids pour un problème de Neumann : Cas unidimensionnel 48
3.2 **Existence de la courbe propre principale du p-Laplacien avec poids indéfinis** 50
3.3 **Existence de la seconde courbe propre du p-Laplacien avec poids indéfinis** 57
3.4 **Courbes propres du p-Laplacien avec poids indéfinis en dimension un** . 62
3.4.1 Existence des courbes propres du p-Laplacien avec poids indéfinis en dimension un 64
3.4.2 La caractérisation variationnelle des courbes propres $\mathscr{C}_n$ avec $n \geq 2$ 67
3.4.3 La caractérisation variationnelle de la courbe propre principale $\mathscr{C}_1$ 71
3.4.4 La concavité et la différentiabilité de la courbe propre principale $\mathscr{C}_1$ 74
3.4.5 Comportement asymptotique de $\mathscr{C}_n$ 76

II Étude de Non-Résonance pour Certains Problèmes Elliptiques de Neumann 79

4 Non-résonance sous la courbe propre principale 80
4.1 **Non-résonance sous la première valeur propre** 81
4.2 **Cas possibles** 81
4.2.1 Problème homotopique 84
4.2.2 Résultat principal et lemmes techniques 86
4.2.3 Preuve du résultat principal 92
4.3 **Non-résonance sous la courbe propre principale** 96

5 Non-résonance entre les deux premières courbes propres 99
5.1 **Non-résonance entre les deux premières valeurs propres.** 100
5.1.1 Énoncé du résultat principal et lemmes téchniques 100
5.1.2 Preuve du résultat principal 109
5.2 **Non-résonance entre les deux premières courbes propres.** 113

Bibliographie 115

LISTE DES NOTATIONS

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
Ω	Domaine borné de $\mathbb{R}^N$
$\partial\Omega$	Frontière topologique de Ω
$x = (x_1, \cdots, x_N)$	Point de $\mathbb{R}^N$
$dx = dx_1\, dx_2 \cdots dx_N$	Mesure de Lebesgue sur $\partial\Omega$
$p > 1$	Exposant de Lebesgue
$p' > 1$	Exposant conjugé de p vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$
$d\sigma$	Mesure superficielle sur $\partial\Omega$
ν	vecteur directeur de la normale extérieure à $\partial\Omega$
v^+	$v^+ = \max(0, v)$
v^-	$v^- = \max(0, -v)$
∇v	Gradient de v défini par $\nabla v \overset{def}{=} \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial v}{\partial x_N}\right)$
$-\Delta_p v$	$p-$Laplacien de v défini par $-\Delta_p v \overset{def}{=} -div(\lvert\nabla v\rvert^{p-2}\nabla v)$
$\lambda_n(m)$	$n^{ième}$ valeur propre du $p-$Laplacien avec poids m
X	Espace de Banach arbitraire
X'	Dual topologique de l'espace de Banach X
$\mathscr{C}(\overline{\Omega})$	Ensemble des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$
$\mathscr{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$	Ensemble des fonctions de $\mathscr{C}(\overline{\Omega})$ $\alpha-$Hölderiennes, avec $0 < \alpha < 1$; i.e.

	$\mathscr{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \overset{def}{=} \left\{ v \in \mathscr{C}(\overline{\Omega}) \mid \exists C > 0;\ \forall x, y \in \overline{\Omega},\ \lvert v(x) - v(y) \rvert \leq \lvert x - y \rvert^{\alpha} \right\}$
$\mathscr{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$	Ensemble des fonctions de $\mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$ $\alpha -$ Hölderiennes, avec $0 < \alpha < 1$; i.e. $\mathscr{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \overset{def}{=} \left\{ v \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega}) \mid \forall i \in \{1, \cdots, N\},\ \frac{\partial v}{\partial x_i} \in \mathscr{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \right\}$
$D(\Omega)$	Ensemble des fonctions de class $\mathscr{C}^{\infty}$ à support compact dans Ω
$D'(\Omega)$	Espace des distributions sur Ω
$L^p(\Omega)$	Espace de Lebesgue sur Ω d'exposant p
$L^{\infty}(\Omega)$	Espace de Lebesgue sur Ω d'exposant ∞
$W^{1,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev sur Ω d'exposant p
$W_0^{1,p}(\Omega)$	Adhérence de $D(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ pour la norme $\lVert . \rVert_{W^{1,p}(\Omega)}$
$W^{-1,p'}(\Omega)$	Dual topologique de $W_0^{1,p}(\Omega)$
$\lVert v \rVert_p$	Norme de v sur $L^p(\Omega)$ définie par $\lVert v \rVert_p \overset{def}{=} \left(\int_{\Omega} \lvert v \rvert^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$
$\lVert v \rVert_{1,p}$	Norme de v sur $W^{1,p}(\Omega)$ définie par $\lVert v \rVert_{1,p} \overset{def}{=} \left(\lVert v \rVert_p^p + \lVert \nabla v \rVert_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$
$\lVert v \rVert_{W_0^{1,p}(\Omega)}$	Norme de v sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ définie par $\lVert v \rVert_{W_0^{1,p}(\Omega)} \overset{def}{=} \lVert \nabla v \rVert_p$
$\lVert F \rVert_{W^{-1,p'}(\Omega)}$	Norme de F sur $W^{-1,p'}(\Omega)$ définie par $\lVert F \rVert_{W^{-1,p'}(\Omega)} \overset{def}{=} \max \left\{ \lVert f_i \rVert_{p'}, 0 \leq i \leq N \right\}$ où $(f_0, ..., f_N) \in (L^{p'}(\Omega))^{N+1}$

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'étude d'un phénomène physique du monde réel est basée sur les lois de la physique (mécanique, thermodynamique, électromgnétisme, ect.). L'application de ces lois est alors amenée généralement à un bilan qui se modélise par une équation différentielle ordinaire ou par une équation aux dérivées partielles (EDP).

Tout au long de cette thèse nous allons traiter quelques équations aux dérivées partielles faisant intervenir l'opérateur $p-$Laplacien, noté $-\Delta_p$ et définit par :

$$-\Delta_p u = -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u$$

qui est un opérateur elliptique non-linéaire lorsque $p \neq 2$.
L'opérateur $p-$Laplacien, apparaît naturellement dans la modélisation de nombreux problèmes en sciences expérimentales : problèmes de réaction-diffusion non-linéaires, dynamique des populations, écoulements de fluides non-newtoniens, membrane élastique non-linéaire fixiée sur le bord $\partial\Omega$ d'un domaine Ω [8]. En particulier M.C. Pélissier dans [50] modélise l'écoulement des glaciers de montagne par des équations aux dérivées partielles faisant intervenir l'opérateur $-\Delta_p$. Elle justifie sa présence par le fait que la glace peut-être considérée comme un fluide pseudo-plastique et satisfait une loi de déformation non-linéaire.

L'étude des équations aux dérivées partielles fait appel à presque toutes les branches de l'analyse. C'est pourquoi, on a réservé un chapitre (Rappels et généralités)

dans ce rapport où nous présentons certains rappels des principaux résultats d'analyse fonctionnelle que nous utiliserons durant ce travail. Également l'étude d'une équation aux dérivées partielles nécessite une définition précise de la notion de solution cherchée pour l'équation en question.

Par ailleurs, notre objectif dans ce travail est l'étude d'une famille de problèmes elliptiques de Neumann de type

$$(\mathscr{P}_{\alpha,p,f,\Omega}) \quad \begin{cases} -\Delta_p u = f(x,\alpha,u) & \text{dans} \quad \Omega \qquad (0.0.1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \qquad (0.0.2) \end{cases}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$, Ω désigne un domaine borné assez régulier de $\mathbb{R}^N$, $-\Delta_p u = -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $-\Delta_p$ représente l'opérateur p-Laplacien sur l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, x parcourt Ω, $\partial\Omega$ est la frontière de Ω et $u \in W^{1,p}(\Omega)$, lorsqu'elle existe, s'appelle solution du problème. L'équation (0.0.2) de ce problème est une variante des conditions aux limites, appelée condition de Neumann au bords. on rencontre dans la littérature d'autres types de conditions comme par exemple la condition de Dirichlet, conditions périodiques, Mêlée (ou mixte), de Robin, de Steklov....
Enfin, $f(x,\alpha,u)$ est une fonction appelée non-linéarité du problème, souvent "comparée" à une fonction $(p-1)$-homogène en s de la forme $m(x)|s|^{p-2}s$ avec m est une fonction poids.

Avant d'aborder les différentes situations que nous allons envisager pour f tout au long de ce rapport, il est important de donner la signification d'une solution (ou solution faible) u de notre problème, qui se traduit par :

Il existe une fonction $u \in W^{1,p}(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla w\, dx = \int_\Omega f(x,\alpha,u)\, w\, dx \;\forall\, w \in W^{1,p}(\Omega), \tag{0.0.3}$$

on s'apperçoit que la condition (0.0.2) est absorbée par la formulation (0.0.3).

A partir de ce bref apperçu, on voit bien le rôle que va jouer la non-linéarité f dans les perspectives de nos résultats antérieurs.
Avant de s'attaquer au coeur du sujet - et c'est toujours le cas pour l'étude des EDPs non-linéaires -, on fera recours au cadre fonctionnel pour notre étude qui est l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ $(1 < p < +\infty)$, c'est un espace de Banach, séparable, uniformément convexe (donc refléxif) et de dimension infinie. $W^{1,p}(\Omega)$ à la particularité de contenir les constantes réelles qui représentent ici un atout majeur pour en tirer des informations sur la localisation - si c'est possible - de la solution (sur et sous-solutions) ou même parfois de passer à des troncatures de f en vue de réduire le coût des hypothèses.
En plus, comparé avec $W_0^{1,p}(\Omega)$, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ contient donc plus de fonctions tests et la solution cherchée abrite dans un espace plus grand, mais il a l'inconvénient

majeur du manque de l'inégalité de type Poincaré :

$$\|u\|_p \leq C \|\nabla u\|_p. \tag{0.0.4}$$

Une telle inégalité (0.0.4) est toujours vérifiée par les éléments de $W_0^{1,p}(\Omega)$. Entre un petit avantage et ce grand inconvénient, nous allons installer modéstement nos résultats, qui tournent autour de deux axes principaux :
Les courbes propres et la résonance.

► Commençons par l'étude des courbes propres, ce qui revient à traiter le problème $(\mathscr{P}_{\alpha,p,f,\Omega})$ dans le cas particulier où

$$f(x,\alpha,u) = (\alpha\, m_1(x) + \beta\, m_2(x))|u|^{p-2}u, \tag{0.0.5}$$

où m_1, m_2 sont deux fonctions poids qui vérifient des conditions que nous allons préciser plus tard ; dans cette situation $(\mathscr{P}_{\alpha,p,f,\Omega})$ sera un problème aux valeurs propres à deux paramètres réels (α,β), et l'ensemble des couples (α,β) qui décrivent certaines courbes appelées courbes propres, suscite un intérêt particulier.
A notre connaissance, la littérature sur les courbes propres propose deux modèles.

Le premier modèle consiste à formuler $\beta = \beta_n(\alpha), n \geq 1$ variationnellement via les arguments de la théorie des points critiques sur les varietés, citons par exemple quelques reférences dans ce domaine, Mingarilli [46], Fleckinger et Lapidus [34], Binding et Brown [11], Binding, Brown, Huang et Picard [12] et la liste est longue.

Le second modèle est récent et moins populaire que le premier, mais il est incontournable dans la question du comportement asymptotique des courbes propres, comme on va le voir par la suite, ce point de vue initialement introduit par A. Dakkak et M. Hadda [24] et developpé ensuite par A. Dakkak et M. Moussaoui [25], et puis A. Dakkak et A. Sanhaji [52, 54], repose sur la simple remarque suivante :

$$\lambda_n(\alpha\, m_1 + \beta\, m_2) = 1, \tag{0.0.6}$$

où λ_n est la $n^{ième}$ valeur propre du p-Laplacien avec poids donnée par le procédé d'inf-sup.

Notre point de vue sur les courbes propres peut être expliqué comme étant un problème inverse d'un problème aux valeurs propres à deux paramètres dans le sens où, pour un réel $\lambda > 0$ donné on cherche à déterminer une fonction poids $m \in F_2 = \text{vect}(m_1, m_2)$ telle que

$$\lambda_n(m) = \lambda,$$

ou encore par homogénéité de λ_n par rapport au poids,

$$\lambda_n(\frac{m}{\lambda}) = 1,$$

ce qui revient donc à chercher les couples $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_n(\alpha\, m_1 + \beta\, m_2) = 1.$$

Notre contribution vise en premier lieu à étudier la courbe propre principale du p-Laplacien avec condition de Neumann, mais contrairement au cas de Dirichlet, celle-ci révèle un sérieux problème du fait que $\lambda_n(m)$ peut s'annuler et donc notre principe sur les courbes propres ne marche pas dans ce cas ; pour y remédier nous avons suivi les mêmes démarches du travail [24], pour cela nous avons mis les hypothèses suivantes

$$\textbf{(A1)} : m_1 \text{ change de signe sur } \Omega \text{ et } \int_\Omega m_1(x)\,dx < 0,$$

$$\textbf{(A2)} : \inf_\Omega ess\, m_2 > 0.$$

Dans notre travail [52], sous les hypothèses **(A1)** et **(A2)** on montre le résultat suivant, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ il existe un unique $\beta = \beta_1(\alpha)$ tel que

$$\lambda_1(\alpha\, m_1 + \beta\, m_2) = 1.$$

Puis, dans un autre travail [54] ici dans le cas où $N = 1$, on donne la caractérisation

variationnelle de $\beta_1(\alpha)$ par

$$\beta_1(\alpha) = \inf_{\substack{u\in W^{1,p}(I)\\ u\neq 0}} \frac{\displaystyle\int_I |u'|^p dx - \alpha \int_I m_1|u|^p dx}{\displaystyle\int_I m_2|u|^p dx}$$

où $I = \Omega$ $(N = 1)$, puis on montre que cette courbe propre notée $\mathscr{C}_1$ jouie des propriétés analytiques importantes telles que la différentiabilité et la concavité. Le contexte de notre article le veut puisqu'on traite toutes les courbes propres cependant on s'apperçoit vite que ses deux derniers résultats sont encore valables pour $N \geq 1$.

On montre ensuite, dans le même travail [54] que si les poids m_1 et m_2 vérifient

(A1) et **(A2)** dans le cas où $n = 1$

et

$m_1 \neq 0$ et **(A2)** dans le cas où $n \geq 2$.

Alors nous avons le comportement asymptotique suivant

- $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \dfrac{\beta_n(\alpha)}{\alpha} = -\sup\limits_I ess \dfrac{m_1}{m_2}$,
- $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} \dfrac{\beta_n(\alpha)}{\alpha} = -\inf\limits_I ess \dfrac{m_1}{m_2}$.

où $\beta_n(\alpha)$ est l'unique réel β vérifiant

$$\lambda_n(\alpha\, m_1 + \beta\, m_2) = 1.$$

Notons qu'en utilisant la technique de P. A. Binding et Y. X. Huang dans [15] qui reposant sur la formulation

$$\beta_n(\alpha) = \inf_{K\in\Gamma_n} \max_{u\in K} \frac{\displaystyle\int_I |u'|^p dx - \alpha \int_I m_1|u|^p dx}{\displaystyle\int_I m_2|u|^p dx},$$

où $\Gamma_n = \left\{K \subset S : \text{ K est symétrique, compact et } \gamma(K) \geq n\right\}$ et S est la sphère unité

de l'espace $W^{1,p}(I)$ et γ est la fonction genre, nous n'avons pas réussi à étudier ce comportement asymptotique pour $n \geq 2$.

En se basant sur le travail de A. Dakkak et M. Moussaoui [25] nous visons à affaiblir l'hypothèse **(A2)** sur le poids m_2 en supposant tout simplement $m_2 > 0$ p.p. dans Ω, afin de garantir l'existence de la seconde courbe propre du p-Laplacien ; pour cela nous avons établi que

- Pour tout $\beta < 0$, si $\mathrm{mes}\big(\{x \in \Omega : m_1(x) > 0\}\big) \neq 0$ alors $\exists\, \alpha_2^+(\beta) \geq \lambda_2(m_1)$ tel que

$$\lambda_2(\alpha_2^+(\beta)\, m_1 + \beta\, m_2) = 1.$$

- Pour tout $\beta < 0$, si $\mathrm{mes}\big(\{x \in \Omega : m_1(x) < 0\}\big) \neq 0$ alors $\exists\, \alpha_2^-(\beta) \leq \lambda_{-2}(m_1)$ tel que

$$\lambda_2(\alpha_2^-(\beta)\, m_1 + \beta\, m_2) = 1.$$

De plus si $\lambda_2(\alpha\, m_1 + \beta\, m_2) = 1$ avec $\beta < 0$ alors $\alpha = \alpha_2^+(\beta)$ ou $\alpha = \alpha_2^-(\beta)$. Ici la technique untilisée est variationnelle et repose sur le fait que $\alpha_2^+(\beta)$ (respectivement $\alpha_2^-(\beta)$) est la seconde valeur propre positive (respectivement négative) de l'opérateur $-\Delta_p - \beta\, m_2 J_p$ avec poids m_1 où $J_p(u) = |u|^{p-2}u$. Ce qui termine nos contributions sur les courbes propres.

► Passons maintenant au second volet de ce mémoire qui traite l'étude de non-résonance moyennant des conditions sur le potentiel de la non-linéarité f, plus précisément nous nous intéressons à un résultat d'existence pour des problèmes de type $(\mathscr{P}_{\alpha,p,f,\Omega})$ faisant intervenir une non-linéarité f qui s'écrit sous la forme suivante

$$f(x,\alpha,u) = \alpha\, m_1(x)|u|^{p-2}u + m_2(x)g(u) + h(x), \tag{0.0.7}$$

où m_1, m_2 sont toujours deux fonctions poids, g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $h \in L^\infty(\Omega)$. La méthode employée pour obtenir ce résultat fait appel au degré de Leray-Schauder. La littérature dans ce domaine est très riche, et afin de mieux

placer nos résultats, nous allons citer quelques travaux dédiés aux questions de la non-résonance, parmis ces travaux on trouve par exemple dans le cas linéaire ($p = 2$) et pour un problème autonome (i.e. $m_1 = 0$, $m_2 = 1$) ceux de P. Omari et F. Zanolin [47], ces auteurs ont monté que si les hypothèses suivantes sont satisfaites

$$\alpha = \lambda_k,\ k \geq 2,\ N = 1,$$

$$\lambda_{k-1} - \lambda_k \leq \liminf_{s\to\pm\infty} \frac{g(s)}{s} \leq \limsup_{s\to\pm\infty} \frac{g(s)}{s} \leq 0,$$

$$\lambda_{k-1} - \lambda_k < \limsup_{s\to+\infty \text{ ou } -\infty} \frac{G(s)}{s^2};\ \liminf_{s\to+\infty \text{ ou } -\infty} \frac{G(s)}{s^2} \leq 0,$$

alors le problème $(\mathscr{P}_{\alpha,p,f,\Omega})$ possède au moins une solution pour tout $h \in L^\infty(\Omega)$ sachant que $G(s) = \int_0^s g(t)dt$ est le potentiel de g et $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \leq \lambda_k \to +\infty$ désigne le spectre de $-\Delta$ dans $H^1(\Omega)$. Il semble que la méthode de P. Omari et F. Zanolin ne s'adapte pas au cas où $(k = 1)$ avec la convention $(\lambda_0 = -\infty)$. Dans [41] J.P. Gossez et P. Omari ont étudié le problème associé à l'opérateur linéaire $-\Delta$ dans le cas où $N \geq 1$, $\alpha = 0$, $m_1 = 0$ et $m_2 = 1$. Les auteurs ont montré que le problème admet au moins une solution $u \in H^1(\Omega)$ pour tout $h \in L^\infty(\Omega)$, lorsque la fonction g et son potentiel G vérifient les hypothèses suivantes

$$g(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \quad (g \text{ est surjective}),$$

$$\limsup_{s\to-\infty} \frac{g(s)}{s} \leq \lambda_- \text{ et } \limsup_{s\to+\infty} \frac{g(s)}{s} \leq \lambda_+,$$

$$\liminf_{s\to-\infty} \frac{2G(s)}{s} < \lambda_- \text{ ou } \liminf_{s\to+\infty} \frac{2G(s)}{s} < \lambda_+,$$

où (λ_+, λ_-) appartient à la courbe principale du spectre de Fučík de $-\Delta$ avec condition de Neumann au bord (voir [28]).

Ensuite, A. Dakkak et A. Anane se sont focalisé sur le côté non-autonome (i.e. le poids m_1 est non constant), ces auteurs ont montré pour un problème de type $(\mathscr{P}_{\alpha,p,f,\Omega})$ faisant intervenir l'opérateur non-linéaire $-\Delta_p$ un résultat d'existence pour tout $h \in L^\infty(\Omega)$, lorsque les hypothèses suivantes sont satisfaites

$$1 < p < +\infty, N \geq 1,\ \alpha = \lambda_1(m_1) \text{ et } m_2 = 1,$$

$$m_1 \text{ change de signe sur } \Omega \text{ et } \int_\Omega m_1 < 0,$$

$$\limsup_{s\to\pm\infty} \frac{g(s)}{|s|^{p-2}s} \le 0;\ \liminf_{s\to\pm\infty} \frac{G(s)}{|s|^p} < 0.$$

Dans le même travail on trouve un autre résultat d'existence pour un problème associé à l'opérateur linéaire $-\Delta$, pour tout $h \in L^1(\Omega)$, en considérant les hypothèses suivantes

$$N \ge 1,\ \alpha = \lambda_2(m_1)\,,\ m_1 \text{ non constant et } m_2 = 1,$$

$$-c \le \liminf_{s\to\pm\infty} \frac{g(s)}{s} \le \limsup_{s\to+\infty} \frac{g(s)}{s} \le 0$$

$$-c < \limsup_{s\to\pm\infty} \frac{2G(s)}{s^2} \le 0;\ \limsup_{s\to+\infty \text{ ou } -\infty} \frac{2G(s)}{s^2} < 0,$$

où c est l'unique réel strictement positif tel que $\lambda_1(\lambda_2 m_1 - c) = 1$.
Récement M. Tanaka dans [56] a repris le même problème en remplaçant $-\Delta_p$ par un opérateur de type

$$\mathscr{A}\,u = -\mathrm{div}A(x,\nabla u)$$

avec $A(x,y) = a_\infty(x)|y|^{p-2}y + \widetilde{a}(x,|y|)\,y$ p.p. $x \in \Omega$, $y \in \mathbb{R}^N$, $a_\infty \in C^1(\overline{\Omega},\mathbb{R})$ et $\widetilde{a}$ est une fonction continue sur $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$, dans le cas où $1 < p < +\infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$, m_1, $h \in L^\infty(\Omega)$ et $m_2 = 1$, l'auteur montre que si les fonctions g et $\widetilde{a}$ vérifient les hypothèses suivantes

$$g \text{ est de Carathéodory et } \lim_{|t|\to+\infty} \frac{g(x,t)}{|t|^{p-2}t} = 0 \text{ uniformèment dans } \Omega$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\widetilde{a}(x,t)}{|t|^{p-2}} = 0 \text{ uniformèment dans } \Omega,$$

alors le problème $(\mathscr{P}_{\alpha,p,f,\Omega})$ admet au moins une solution pour tout $h \in L^\infty(\Omega)$, sa technique utilise une approche variationnelle.

Le point de départ de nos contributions dans cette partie est le travail de A. Dakkak et A. Anane [20]. La principale originalité de nos travaux que nous allons présenter ici, réside dans l'insertion d'un second poids m_2 dans l'expresion de la non-linéarité f, ce qui permet d'étudier dans un premier temps la non-résonance sous la courbe propre principale de $-\Delta_p$ avec poids et dans un second temps permet d'étudier la

non-résonance entre les deux premières courbes propres de $-\Delta$ avec poids.
Cette partie est composée de deux chapiters (chapitre 4 et chapitre 5). Notre premier but dans le chapitre 4 est l'étude de la non-résonance sous la première valeur propre de $-\Delta_p$ avec poids m_1, $(\lambda_1(m_1))$; ainsi dans le cas où $1 < p < +\infty$, $N \geq 1$ et $\alpha = \lambda_1 = \lambda_1(m_1)$, on montre que le problème suivant

$$(\mathscr{P}_{\lambda_1}) \quad \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda_1 m_1(x)|u|^{p-2}u + m_2(x)g(u) + h(x) & \text{dans} \quad \Omega \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

admet au moins un solution $u \in W^{1,p}(\Omega)$ pour tout $h \in L^\infty(\Omega)$, lorsque m_1, m_2 et g satisfont les hypothèses suivantes

$$m_1 \text{ change de signe sur } \Omega \text{ et } \int_\Omega m_1 < 0,$$

$$\inf_\Omega ess\, m_2 > 0,$$

$$\limsup_{s\to\pm\infty} \frac{g(s)}{|s|^{p-2}s} \leq 0;\ \lim\inf_{s\to\pm\infty} \frac{G(s)}{|s|^p} < 0.$$

La méthode à laquelle on s'interesse pour obtenir ce résultat est basée sur le fait que toute fonction propre positive φ associée à la première valeur propre ne s'annulle pas sur $\overline{\Omega}$, ainsi on a nécessairement $\min_{\overline{\Omega}} \varphi > 0$, et c'est la raison pour laquelle la méthode de P. Omari et F. Zanolin ne s'adapte pas dans le cas où $k = 1$. Pour pallier à cette difficulté nous avons montré une équivalece entre les deux hypothèses suivantes

$$\limsup_{s\to\pm\infty} \frac{G(s)}{|s|^p} \leq 0,$$

et

$$\lim\inf_{s\to\pm\infty} \frac{G(s) - G(r\,s)}{|s|^p} < 0 \text{ pour tout } r \in]0,1[,$$

la valeur convenable du réel r pour cette étude est $r = \dfrac{\min \varphi}{\max \varphi}$. Remarquons bien que le cas d'un problème autonome est exclu pour notre situation (car $\dfrac{\min \varphi}{\max \varphi} = 1$), ce qui montre qu'on est positionné dans un état d'un problème purement non-autonome qui

nécessite une étude à part entière.
Le second but de ce chapitre est l'étude de la non-résonance sous la courbe propre principale de $-\Delta_p$ avec poids, c'est à dire nous allons montrer un résultat d'existence pour le problème suivant

$$(\mathscr{P}_\alpha)\quad \begin{cases} -\Delta_p u = \alpha\, m_1(x)|u|^{p-2}u + m_2(x)g(u) + h(x) & \text{dans} \quad \Omega \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $h \in L^\infty(\Omega)$. Ce dernier résultat sera démontré grâce au résultat obtenu dans la première section de ce chapitre, en remarquant tout simplement que le problème $(\mathscr{P}_\alpha)$ peut être mis sous la forme $(\mathscr{P}_{\lambda_1})$ où $\lambda_1 = 1$.
On passe maintenant au chapitre 5, qui contient deux sections, la première est réservée à l'étude de la non-résonance entre les deux premières valeurs propres de $-\Delta$ avec poids m_1, ainsi nous allons montrer que si les hypothèses suivantes sont vérifiées

$$-c \le \liminf_{s\to\pm\infty} \frac{g(s)}{s} \le \limsup_{s\to\pm\infty} \frac{g(s)}{s} \le 0,$$

$$-c < \limsup_{|s|\to\infty} \frac{2G(s)}{s^2}; \liminf_{s\to+\infty ou -\infty} \frac{2G(s)}{s^2} < 0,$$

où c est donnée par $\lambda_1(\lambda_2 m_1 - c\, m_2) = 1$ $((\lambda_2 = (\lambda_2(m_1))$, alors le problème suivant

$$(\mathscr{P}_2)\quad \begin{cases} -\Delta\, u = \lambda_2 m_1(x)|u|^{p-2}u + m_2(x)g(u) + h(x) & \text{dans} \quad \Omega \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

admet au moins une solution $u \in H^1(\Omega)$ pour tout $h \in L^\infty(\Omega)$.
Dans la seconde section on montre dans le cas où $\alpha \ge \lambda_2(m_1)$ ou $\alpha \le \lambda_2(m_1)$ un résultat d'existence pour le problème suivant

$$(\mathscr{P})\quad \begin{cases} -\Delta\, u = \alpha\ m_1(x)|u|^{p-2}u + m_2(x)g(u) + h(x) & \text{dans} \quad \Omega \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

pour tout $h \in L^\infty(\Omega)$, lorsque g et son potentiel G vérifient les hypothèses suivantes

$$\beta_1 \leq \liminf_{s\to\pm\infty} \frac{g(s)}{s} \leq \limsup_{s\to\pm\infty} \frac{g(s)}{s} \leq \beta_2$$

$$\beta_1 < \limsup_{|s|\to\infty} \frac{2G(s)}{s^2}; \liminf_{s\to+\infty\, ou\, -\infty} \frac{2G(s)}{s^2} < \beta_2$$

où $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$ avec $\beta_2 - \beta_1 = c$ et c de telle sorte que $\lambda_1(\lambda_2 m_1 - c\, m_2) = 1$.

CHAPITRE 1

RAPPELS ET GÉNÉRALITÉS

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats utilisés tout au long de ce travail.
Dans tout ce qui suit, X désigne un espace de Banach muni de la norme $\|.\|_X$, $S_X = \{u \in X;\ \|u\|_X = 1\}$ est la sphère unité de X, X' le dual topologique de X, et $\langle ., . \rangle$ le produit de dualité $\left(X', X\right)$. On note par $\rightharpoonup$ la convergence faible dans X (resp. X') et par $\to$ la convergence forte dans X (resp. X').

1.1 Espaces Fonctionnels

Les outils d'analyse fonctionnelle sont les ingrédients quasiment essentiels à l'étude des équations aux dérivées partielles, notamment les espaces de Lebesgue et ceux de Sobolev constituent un outil fondamental, alors leurs compréhension est donc une étape nécessaire avant d'aborder les équations en question. Nous reprenons dans cette section certains énoncés de O. Kavian [42] et de H. Brezis [16], pour une présentation plus complète des espaces de Sobolev, ou pour la démonstration des résultats que nous annonçons ici, on pourra consulter par exemple R.A. Adams [1] et V.G. Maz'ja [45].
Dans tout ce qui suit Ω désigne un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, N un entier naturel non nul et p est un réel donné de l'interval $[1, +\infty[$.

1.1.1 Espaces de Lebesgue

Définition des espaces de Lebesgue : Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ est défini par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable}; \int_\Omega |u|^p \, dx < +\infty \right\}$$

où dx est la mesure de Lebesgue sur Ω. Dans la suite on conviant de noter $\int_\Omega (.) = \int_\Omega (.) dx$. L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme :

$$\| u \|_p = \left(\int_\Omega |u|^p \right)^{\frac{1}{p}};$$

est un espace de Banach.
Pour $p = \infty$, on note

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable}; \sup_\Omega ess|u| < +\infty \right\},$$

que l'on munit de la norme :

$$\| u \|_\infty = \inf \left\{ C > 0 \text{ tel que } |u| \leq C \text{ p.p. dans } \Omega \right\}.$$

Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, on note p' le conjugué de Hölder de p, c'est à dire le réel tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Pour $1 < p < +\infty$ l'espace $L^p(\Omega)$ est séparabale, réflexif et son dual est isomorphe à $L^{p'}(\Omega)$, donc l'espace dual de $L^p(\Omega)$ peut s'identifie à l'espace $L^{p'}(\Omega)$.
$L^1(\Omega)$ est séparable mais pas réflexif, son dual est $L^\infty(\Omega)$, par contre le dual de $L^\infty(\Omega)$ contient strictement $L^1(\Omega)$.

1.1.2 Espaces de Sobolev

Définition des espaces de Sobolev : Pour $1 \leq p \leq \infty$, l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \,|\, \exists (g_i)_{1 \leq i \leq N} \subset L^p(\Omega) \,/\, \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \, \varphi \; \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \forall i = 1, ..., N \right\}$$

où $\mathscr{D}(\Omega)$, désigne l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact contenu dans Ω. Pour chaque $u \in W^{1,p}(\Omega)$ la famille $(g_i)_{1\leq i\leq N}$ est unique, et les dérivées partielles au sens des distributions de u coïnsident avec les g_i. On note $g_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ pour tout $i = 1,...,N$ et $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1},...,\dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right)$.
On munit l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ de la norme suivante :

$$\|u\|_{1,p} = \begin{cases} \left(\|u\|_p^p + \|\nabla u\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty; \\ \\ \max\left(\|u\|_p, \|\nabla u\|_p\right) & \text{si } p = \infty; \end{cases}$$

où

$$\|\nabla u\|_p^p = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2\right)^{\frac{p}{2}} = \int_\Omega |\nabla u|^p,$$

$|.|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^N$.
Pour $1 < p < \infty$, muni de cette norme, $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable et uniformément convexe donc réflexif.
De façon plus générale, pour tout $1 \leq p < \infty$ et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on peut définir l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ comme suit :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega); |D^\alpha u| \in L^p(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ t.q. } |\alpha| \leq N\right\},$$

une norme naturelle sur $W^{m,p}(\Omega)$ est définie par :

$$\|u\|_{m,p} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty; \\ \\ \max\left(\|D^\alpha u\|_p\right) & \text{si } p = \infty; \end{cases}$$

où pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ on note $|\alpha| = \displaystyle\sum_{i=1}^N \alpha_i$ et $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 ... \partial^{\alpha_N} x_N}$.
Par convention, on note $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. Pour $p \in]1,\infty[$, l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ muni de sa norme naturelle est un espace réflexif.

Si $p \in]1,+\infty[$, on note par $W_0^{m,p}(\Omega)$ la fermeture de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ (i.e. $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathscr{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}$).
On désigne par $W^{-1,p'}(\Omega)$, avec $p' = \frac{p}{p-1}$, $1 \leq p < \infty$ l'espace dual de l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ que l'on peut caractériser comme suit :
$F \in W^{-1,p'}(\Omega)$, alors il existe $(f_0, ..., f_N) \in (L^{p'}(\Omega))^{N+1}$ tel que

$$< F, v >= \int_\Omega f_0\, v + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega f_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

et

$$\|F\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} = \max\left\{\|f_i\|_{p'}, 0 \leq i \leq N\right\}.$$

Pour $p = 2$, au lieu de $W^{m,p}(\Omega)$, on note souvent $H^m(\Omega)$ i.e. l'espace des classes de fonctions de carré intégrable dont chaque dérivée partielle jusqu'à l'ordre m est aussi de carré intégrable. L'espace $H^m(\Omega)$ est alors de Hilbert, lorsqu'il est muni de sa norme naturelle.

1.1.3 Injections de Sobolev, Inégalité de Poincaré

Théorème 1.1.1 (**Rellich-Kondrachov** [1, 16]) *On suppose que Ω est un ouvert borné de classe $\mathscr{C}^1$ et $p \geq 1$. Alors nous avons :*

(i) *Si $p < N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, pour tout $q \in [1, p^*[$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$.*

(ii) *Si $p = N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, pour tout $q \in [1, +\infty[$.*

(iii) *Si $p > N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset \mathscr{C}(\overline{\Omega})$,*

avec injections compactes.

Remarque 1.1.1 *On remarque en particulier que*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega) \text{ si } 1 \leq p < +\infty,$$

avec injection compacte.

Proposition 1.1.1 (**Inégalité de Poincaré** [1, 16]) *On suppose que* Ω *est un ouvert borné. Alors il existe une constante* C *(qui dépend de* Ω *et* p*) telle que pour tout* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\|u\|_p \leq C\|\nabla u\|_p.$$

Remarque 1.1.2

1. *La semi-norme* $\|\nabla u\|_p$ *définit une norme sur* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *équivalente à la norme de* $W^{1,p}(\Omega)$.

2. *L'espace* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *muni de la norme* $\|\nabla u\|_p$ *est un espace de Banach séparable et uniformément convexe donc réflexif.*

Pour $N = 1$, on pose $\Omega = I$ où I est un intervalle ouvet de $\mathbb{R}$.

Corollaire 1.1.1

1. *L'injection* $W_0^{1,p}(I) \subset L^q(I)$ *est compacte pour tout* $q \in [1, +\infty[$.

2. *L'injection* $W_0^{1,p}(I) \subset C(\overline{I})$ *est compacte pour tout* $p \in]1, +\infty[$.

1.1.4 Notion de trace et formule d'intégration par parties

Proposition 1.1.2 *(cf. [1]) Soit* Ω *un ouvert borné à frontière lipschitzienne et* $1 \leq p < +\infty$*. Alors il existe une unique application linéaire continue* $\tau : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$*, qui prolonge l'application de restriction* $u \to u_{|\partial\Omega}$ *définie sur le sous-espace dense* $C^1(\overline{\Omega})$*. Cette application, appelée application trace, n'est pas surjective.*
De plus $\ker\tau = W_0^{1,p}(\Omega)$ *et* $Im\,\tau = W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ *(il s'agit d'espaces de Sobolev d'ordre fractionnaire que l'on n'a pas définit en tant que tels ici).*

L'opérateur "trace" ainsi construit permet d'écrire la formule d'intégration par parties suivante.

Proposition 1.1.3 *On suppose que* Ω *un ouvert de classe* $\mathscr{C}^1$*, alors nous avons*

$$\forall u, v \in W^{1,p}(\Omega); \quad \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v\, dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + \int_{\partial\Omega} \tau(u)\tau(v)\nu_i\, d\sigma,$$

où ν_i est la $i^{ième}$ composante du vecteur directeur de la normale extérieure à $\partial\Omega$ et $d\sigma$ est la mesure superficielle relative à $\partial\Omega$.

Cette formule porte aussi le nom de formule de Green. Si $u \in W^{2,p}(\Omega)$, alors nous avons

$$\int_\Omega -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\, v\, dx = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v\, dx - \int_{\partial\Omega} v|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma,$$

où $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u.\nu$, est la dérivée de u suivant la normale extérieure ν.

Ceci va nous permettre de définir l'opérateur p-Laplacien sur $W^{1,p}(\Omega)$ et de donner la relation qui lie les solutions faibles et classiques des problèmes elliptiques.

1.2 Opérateur p-Laplacien, solutions d'un problème elliptique de Neumann.

On définit l'opérateur p-Laplacien $-\Delta_p$ sur l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ vers son dual $\left(W^{1,p}(\Omega)\right)'$ par :

$$\langle -\Delta_p u, v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v\, dx \ \ \forall u, v \in W^{1,p}(\Omega),$$

ou tout simplement $-\Delta_p u = -\text{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$. On peut vérifier facilement que $-\Delta_p \in (W^{1,p}(\Omega))'$. Pour les propriétés de l'opérateur p-Laplacien et pour plus de détaille on pourra consulter [9], [44] et [57]. On définit de même l'opérateur J_p : $(W^{1,p}(\Omega), \|.\|_{1,p}) \longrightarrow (W^{1,p}(\Omega))'$ par

$$\langle J_p(u), v\rangle = \int_\Omega |u|^{p-2}\, u\, v\, dx \ \ \forall u, v \in W^{1,p}(\Omega),$$

on note $J_p(u) = |u|^{p-2}\, u$.

Nous donnons maintenant la définition de ce qu'on appelle une solution faible d'une classe de problèmes elliptiques non-linéaires avec condition de Neumann au bord de

Ω faisant intervenir l'opérateur $p-$Laplacien. Considèrons le problème suivant

$$(\mathscr{P}) \quad \begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) & \text{dans } \Omega \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où f est une fonction de Carathéodory (voir la section 1.4).

Définition 1.2.1 *On dit que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ est une solution faible de $(\mathscr{P})$ si*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v \, dx = \int_\Omega f(x,u)\, v dx, \ \forall v \in W^{1,p}(\Omega).$$

On dit aussi que u est une solution classique de $(\mathscr{P})$ si

$$u \in W^{2,p}(\Omega), \ -\Delta_p u = f(x,u) \ \text{ p.p. dans } \Omega \text{ et } \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ \text{ p.p sur } \partial\Omega.$$

D'après la formule de Green nous remarquons que toute solution classique de $(\mathscr{P})$ est aussi solution faible, mais la réciproque n'est pas vraie en genéral.
On dit que u est une fonction propre du p-Laplacien avec poids m associée à la valeur propre λ, si u est une solution non triviale de $(\mathscr{P})$ avec $f(x,u) = \lambda\, m(x)|u(x)|^{p-2}u(x)$, le paramètre λ est alors appelé valeur propre.

1.3 Opérateurs monotones et propriétés du p-Laplacien.

Définition 1.3.1 (cf. [61]) *Soit X un espace de Banach et X' son dual topologique. On suppose que T est un opérateur continue et défini de l'espace X tout entier vers X'.*
1. *On dit que T est coercif si* $\dfrac{\langle T(u), u\rangle}{\|u\|} \to +\infty$ *quand* $\|u\| \to +\infty$.
2. *On dit que T est :*

i) *Monotone, si pour tout $u, v \in X$ on a $\langle T(u) - T(v), u - v\rangle \geq 0$.*

ii) *Strictement monotone, si pour tout* $u \neq v \in X$ *on a :*

$$\langle T(u) - T(v), u - v \rangle > 0.$$

iii) *Uniformément monotone si* $\exists\, c > 0$ *et* $\exists\, \mu > 0$ *tel que :*

$$\langle T(u) - T(v), u - v \rangle \geq c \| u - v \|^{\mu}.$$

3. *On dit que* T *est de type* (S_0) *si pour toute suite* (u_n) *de* X *telle que* $u_n \rightharpoonup u$ *dans* X *et* $\langle T(u_n), u \rangle \to \langle \chi, u \rangle$ *alors* $u_n \to u$ *dans* X.

4. *On dit que* T *est de type* (S_1) *si pour toute suite* (u_n) *de* X *telle que* $u_n \rightharpoonup u$ *dans* X *et* $T(u_n) \rightharpoonup \chi$ *dans* X' *alors* $u_n \to u$ *dans* X.

5. *On dit que* T *est pseudo-monotone si pour toute suite* (u_n) *de* X *telle que* $u_n \rightharpoonup u$ *dans* X *et* $\limsup_{n \to +\infty} \langle T(u_n), u_n - u \rangle \leq 0$ *alors* $T(u_n) \rightharpoonup T(u)$ *dans* X' *et* $\langle T(u_n), u_n \rangle \to \langle T(u), u \rangle$.

6. *On dit que* T *est de type* (S_+) *si pour toute suite* (u_n) *de* X *telle que* $u_n \rightharpoonup u$ *dans* X *et* $\limsup_{n \to +\infty} \langle T(u_n), u_n - u \rangle \leq 0$ *alors* $u_n \to u$ *dans* X.

Proposition 1.3.1 (cf. [61])

1. *Tout opérateur de type* (S_+) *est pseudo-monotone.*
2. *Tout opérateur coercif et pseudo-monotone est surjectif (i.e.* $T(X) = X'$*).*

Exemple 1.3.1 *Soient* $X = W^{1,p}(\Omega)$, $J_p(u) = |u|^{p-2}u$ *et* $T = -\Delta_p + a(x)J_p$ *tel que* $a \in L^{\infty}(\Omega)$ *avec* $\inf_{\Omega} ess\, a > 0$. *Alors* T *vérifie tous les points de la définition précédente ; de plus* T *constitue un homéomorphisme de* X *vers son dual* X'. *Il en est de même pour* $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ *et*

$$\begin{aligned} T = T_0 : \quad & (W_0^{1,p}(\Omega), \|.\|_{1,p}) \longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega) \\ & v \longmapsto T(v) = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-1} \nabla u \nabla v \, dx, \end{aligned}$$

T_0 est aussi appelé $p-$Laplacien.

En fait, $-\Delta_p$ est défini sur l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ tout entier, et T_0 n'est pas la restriction de $-\Delta_p$ à $W_0^{1,p}(\Omega)$ encore appelé $p-$Laplacien et noté $-\Delta_p$, pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on a

$$-\Delta_p u \in (W^{1,p}(\Omega))' \bigcap W^{-1,p'}(\Omega).$$

Pour la démonstration voir [44].

1.4 Opérateurs de Nemytskii

Définition 1.4.1 (Fonction de Carathéodory) *Soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on dit que f est une fonction de Carathéodory si :*

- **i)** *La fonction $s \longmapsto f(x,s)$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour presque tout $x \in \Omega$.*
- **ii)** *La fonction $x \longmapsto f(x,s)$ est mesurable pour tout $s \in \mathbb{R}$.*

On désigne par $\mathscr{M}$ l'ensemble des fonctions mesurables de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1.4.1 *([42]) Si $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory, alors pour tout $u \in \mathscr{M}$, la fonction $N_f u : \Omega \to \mathbb{R}$ défini par*

$$(N_f u)(x) = f(x, u(x)) \text{ pour tout } x \in \Omega,$$

est une fonction mesurable.

D'après la proposition précedente une fonction de Carathéodory $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définit un opérateur $N_f : \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{M}$, appelé opérateur de Nemytskii associé à fonction f, plus précisement

$$\begin{aligned} N_f : \quad & \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{M} \\ & u \longmapsto f(.,u). \end{aligned}$$

Proposition 1.4.2 *Supposons que* $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction de Carathéodory satisfaisant la condition de croissance suivante :*

$$|f(x,s)| \leq C|s|^r + b(x) \text{ pour tout } x \in \Omega, s \in \mathbb{R},$$

où C *est une constante positive,* $r > 0$ *et* $b \in L^q(\Omega)$ *avec* $1 \leq q < +\infty$. *Alors*

$$N_f(L^{rq}(\Omega)) \subset L^q(\Omega).$$

De plus, N_f *est continue de* $L^{rq}(\Omega)$ *dans* $L^q(\Omega)$.

En ce qui concerne le potentiel d'un opérateur de Nemytskii, nous avons la proposition suivante

Proposition 1.4.3 *([26, 43]) On suppose que* $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est de Carathéodory et vérifiant la condition de croissance suivante :*

$$(f_0) \qquad |f(x,s)| \leq a|s|^{q-1} + b(x) \text{ pour tout } x \in \Omega, s \in \mathbb{R},$$

où a *est une constante positive,* $q > 1$, *et* $b \in L^{q'}(\Omega)$ *tel que* $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.
Considérons $F : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *le potentiel de* f *qui est défini par* $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\,dt$.
Alors :

i) *La fonction* F *est de Carathéodory et il existe une constante* $C_1 \geq 0$ *et* $c \in L^1(\Omega)$ *telle que*

$$|F(x,s)| \leq C_1|s|^q + c(x) \text{ pour tout } x \in \Omega, s \in \mathbb{R}.$$

ii) $\Phi_f : L^q(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, *la fonctionnelle énergie associée à* f *définie par :*

$$\Phi_f(u) = \int_\Omega N_F u(x)\,dx = \int_\Omega F(x,u)\,dx,$$

est de class C^1 *sur* $L^q(\Omega)$ *et on a* $\Phi'_f = N_f$.

1.5 Genre et cogenre.

La notion de genre que nous allons définir agit sur les sous-ensembles fermés, symétriques et ne contenant pas l'origine d'un espace de Banach. L'origine de cette notion revient à Krasnoselskii [55, 61].

Définition 1.5.1 *Soit X un espace de Banach. On désigne par $\mathscr{F}_{sym}(X)$ l'ensemble des parties fermées symétriques de X ne contenant pas l'origine, plus précisément :*

$$\mathscr{F}_{sym}(X) = \Big\{ A \subset X ; A \text{ est fermée, non vide, } 0 \notin A \text{ et } -A = A \Big\}.$$

On définit la fonction genre par :

$$\begin{aligned} \gamma : \mathscr{F}_{sym} \quad (X) &\longrightarrow \mathbb{N} \bigcup \{\infty\} \\ A &\longmapsto \gamma(A), \end{aligned}$$

avec

$$\gamma(A) = \inf \Big\{ n \geq 1 ; \exists \varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ continue et impaire} \Big\}.$$

Par convention on posera $\gamma(\emptyset) = 0$, s'il n'existe pas d'entier $n \geq 1$ et de fonction φ continue et impaire de A dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on pose $\gamma(A) = +\infty$. On notera également que $\gamma(A)$ aurait pu être défini par :

$$\gamma(A) = \inf \big\{ n \geq 1 ; \exists \varphi : A \longrightarrow S^{n-1} \text{ continue et impaire} \big\},$$

où S^{n-1} est la sphére unité de $\mathbb{R}^n$.

De la même façon on définit la fonction cogenre, pour $A \in \mathscr{F}_{sym}(X)$ par :

$$\theta(A) = \max \Big\{ n \geq 1 ; \exists \varphi : S^{n-1} \longrightarrow A \text{ continue et impaire} \Big\}.$$

Proposition 1.5.1 *([55, 61]) Soit X un espace de Banach et $A, B \in \mathscr{F}_{sym}(X)$.*

1. $\gamma(A) \leq \dim X$.
2. *Si A un ensemble fini non vide, alors* $\gamma(A) = 1$.
3. γ *est sous-additif* $\gamma(A \bigcup B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$.
4. *S'il existe* $f : A \longrightarrow B$ *une application continue et impaire, alors* $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.
5. *Si* $A \subset B$ *alors* $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.
6. *S'il existe un homéomorphisme impair* $f : A \longrightarrow B$, *alors* $\gamma(A) = \gamma(B)$.
7. *Si A est compact alors* $\gamma(A) < \infty$.
8. *Si A est compact, alors il existe un voisinage fermé de A ayant le même genre que A. Plus précisément, il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que si*

$$A_\varepsilon = \{ x \in X;\ dist(x, A) \leq \varepsilon \},$$

   on a $\gamma(A) = \gamma(A_\varepsilon)$.
9. *Si* $\gamma(B) < \infty$, *alors* $\gamma(\overline{A \setminus B}) = \gamma(A \bigcap B^c) \geq \gamma(A) - \gamma(B)$.

La fonction cogenre vérifie les même propriétés sauf peut être 3) et 8).

1.6 Degré topologique.

1.6.1 Degré topologique de Brouwer

Posons

$$E_1 = \left\{ (f, \mathscr{O}, y) : \mathscr{O} \subset \mathbb{R}^N \text{ ouvert borné, } f \in \mathscr{C}(\overline{\mathscr{O}}, \mathbb{R}^N) \text{ et } y \notin f(\partial\mathscr{O}) \right\}.$$

Théorème 1.6.1 *([42, 55]) Il existe une unique fonction $d : E_1 \longrightarrow \mathbb{Z}$ appelé degré topologique de Brouwer vérifiant*

p1. *$d(I,\mathcal{O},y) = 1$ pour tout $y \in \mathcal{O}$ où I l'identité de $\mathbb{R}^N$.*

p2. *(Invariance par homotopie). Si $h : [0,1] \times \overline{\mathcal{O}} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ et $y : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ sont des applications continues telles que $y(t) \notin h(t,.)(\partial\mathcal{O})$ pour tout $t \in [0,1]$ alors $d(h(t,.),\mathcal{O},y(t))$ est indépendant de $t \in [0,1]$.*

p3. *Si $d(f,\mathcal{O},y) \neq 0$, alors il existe $x \in \mathcal{O}$ tel que $f(x) = y$.*

p4. *Si $f_{|\partial\mathcal{O}} = g_{|\partial\mathcal{O}}$, alors $d(f,\mathcal{O},y) = d(g,\mathcal{O},y)$.*

p5. *(Théorème de Borsuk) : Si de plus $\mathcal{O}$ est symétrique avec $0 \in \mathcal{O}$ et f est impaire sur $\overline{\mathcal{O}}$. Alors $d(f,\mathcal{O},0)$ est un entier impair, en particulier $d(f,\mathcal{O},0) \neq 0$.*

Pour la preuve de ce théorème et plus de détails voir [29] et [42].

1.6.2 Degré topologique de Leray-Schauder

Soient X un espace de Banach et $\mathcal{O}$ une partie non vide de X. Si $T : \mathcal{O} \longrightarrow X$ est un opérateur continue, on dit que T est compact si pour toute partie bornée B de $\mathcal{O}$, $T(B)$ est relativement compact dans X. Posons

$$E_2 = \Big\{(I-T,\mathcal{O},y) : \mathcal{O} \subset X \text{ ouvert borné, } T : \mathcal{O} \to X \text{ compact et } y \notin (I-T)(\partial\mathcal{O})\Big\}$$

où I l'identité de X.

Théorème 1.6.2 *([42, 55]) Il existe une unique fonction $d : E_2 \longrightarrow \mathbb{Z}$ appelé degré topologique de Leray-Schauder vérifiant*

p1. *$d(I,\mathcal{O},y) = 1$ pour tout $y \in \mathcal{O}$.*

p2. *(Invariance par homotopie) : Si $h : [0,1] \times \overline{\mathcal{O}} \longrightarrow X$ est une application compacte et $y : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est une application continue telle que $y(t) \notin (I - h(t,.))(\partial\mathcal{O})$ pour tout $t \in [0,1]$ alors*

$d((I-h(t,.),\mathcal{O},y(t)))$ est indépendant de $t \in [0,1]$.

p3. *Si* $d(I-T,\mathcal{O},y)\neq 0$, *alors* $(I-T)^{-1}\{y\}\neq\emptyset$.

p4. *Si* F *et* G *sont compactes et* $F_{|\partial\mathcal{O}}=G_{|\partial\mathcal{O}}$, *alors* $d(I-F,\mathcal{O},y)=d(I-G,\mathcal{O},y)$.

p5. *(Théorème de Borsuk) : Si de plus* $\mathcal{O}$ *est symétrique avec* $0\in\mathcal{O}$ *et* T *est impaire sur* $\overline{\mathcal{O}}$. *Alors* $d(I-T,\mathcal{O},0)$ *est un entier impair, en particulier* $d(I-T,\mathcal{O},0)\neq 0$.

Pour plus de détails sur la notion du degré topologique on pourra consulter les références suivantes : [42, 61]

1.7 Estimation L^∞, régularité des solutions et principe de maximum.

Considérons le problème $(\mathscr{P})$ donné au début du paragraphe1.2 avec f est une fonction de Carathédory vérifiant la condition de croissance (f_0) (voir proposition 1.4.1) où l'exposant $q\in[1,p^*[$ avec $p^*=\frac{Np}{N-p}$.

Proposition 1.7.1 (Estimation L^∞)

Sous les hypothèses ci-dessus nous avons : si $u\in W^{1,p}(\Omega)$ *est une solution faible de* $(\mathscr{P})$ *alors* $u\in L^\infty(\Omega)$ *; de plus* $\|u\|_\infty\leq c$ *où* c *est une constante qui dépend de* a, p, q, N, $\|b\|_{q'}$ *et* $\|u\|_{p_0}$ *avec* $p_0=p^*$ *si* $p^*<\infty$ *et* $p_0=2pq$ *si* $p^*=\infty$.

Pour la preuve on pourra utiliser la partie annexe de [3].

Proposition 1.7.2 (**Régularité de Tolksdorf** [58])
Soit $u\in W^{1,p}(\Omega)\bigcap L^\infty(\Omega)$ *tel que* $\Delta_p u\in L^r(\Omega)$ *où* $r\in[1,\infty]$. *Alors nous avons :*

1. *Si* $r=\infty$ *alors* $u\in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ *et* $\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}\leq K_1$ *pour un certain* $\alpha\in]0,1[$ *et pour une certaine constante* K_1, *avec* K_1 *et* α *ne dépendent que de* N, p, $\|u\|_\infty$ *et* $\|\Delta_p u\|_\infty$.

2. *Si $r > Np'$, alors pour tout ouvert ω, tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$, on a $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\omega})$ et $\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\omega})} \leq K_2$ pour un certain $\alpha \in]0,1[$ et pour une certaine constante K_2, avec K_2 et α ne dépendent que de N, p, $\|u\|_\infty$, $\|\Delta_p u\|_r$ et ω.*

1.8 Alternative de Fredholm

Considérons le problème de Neumann suivant :

$$(\mathscr{P}_h) \quad \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda m(x)|u|^{p-2}u + h(x) & \text{dans} \quad \Omega \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^N$, $1 < p < \infty$, $-\Delta_p$ repésente le p-Laplacien et $m \in L^\infty(\Omega)$ est une fonction poids.

Proposition 1.8.1 *Si λ n'est pas une valeur propre associée au problème $(\mathscr{P}_0)$, alors $(\mathscr{P}_h)$ admet au moins une solution pour tout $h \in (W^{1,p}(\Omega))'$.*

Preuve. Le problème $(\mathscr{P}_h)$ est équivalent à

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = (\lambda m(x)+1)|u|^{p-2}u + h(x) & \text{dans} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Comme l'opérateur $-\Delta_p + J_p$ est un homéomorphisme de $W^{1,p}(\Omega)$ vers $(W^{1,p}(\Omega))'$ où $J_p(u) = |u|^{p-2}u$; donc u est une solution de $(\mathscr{P}_h)$ si et seulement si :

$$u = (-\Delta_p + J_p)^{-1}((\lambda m(x)+1)|u|^{p-2}u + h) = G_1(u).$$

Dans ce qui suit on pose

$$G_t(u) = (-\Delta_p + J_p)^{-1}((\lambda m(x)+1)|u|^{p-2}u + t\,h), \quad t \in [0,1]$$

de telle sorte que $G_t : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\Omega)$ est un opérateur compact.
En vue d'appliquer le théorème de point fixe de Leray-Shauder, nous avons d'abord G_0 est une fonction impaire et $0 \notin (I - G_0)(\partial B(0,R))\ \forall R > 0$ (car λ n'est pas une valeur propre), donc d'après la propriété de Borsuk nous avons

$$d(I - G_0, B(0,R), 0) \neq 0 \quad \forall R > 0.$$

Comme λ n'est pas une valeur propre, nous avons

$$\exists R > 0;\ 0 \notin (I - G_t)(\partial B(0,R)) \quad \forall t \in [0,1].$$

En effet, par l'absurde on suppose que pour tout entier n il existe $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ et il existe $t_n \in [0,1]$ tels que $\|u_n\| = n$ et $G_{t_n}(u_n) = u_n$. Posons $v_n = \dfrac{u_n}{n}$ de sorte que (v_n) est une suite bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$, donc par passage à une sous-suite on a

$$t_n \to t,\ v_n \rightharpoonup v \text{ dans } W^{1,p}(\Omega) \text{ et } v_n \to v \text{ dans } L^p(\Omega),$$

il s'en suit que

$$(-\Delta_p + J_p)^{-1}((\lambda m(x) + 1)|v|^{p-2}v = v$$

c'est à dire λ est une valeur propre, ce qui est absurde.
Enfin, par la propiété de l'homotopie du degré topologique nous obtenons

$$d(I - G_1, B(0,R), 0) = d(I - G_0, B(0,R), 0) \neq 0,$$

ce qui donne l'existence de $u \in B(0,R)$ tel que $u = G_1(u)$.

Première partie

Existence des Courbes Propres pour Certains Problèmes Elliptiques de Neumann

CHAPITRE 2

EXISTENCE DES COURBES PROPRES

2.1 Existence des courbes propres : Cas abstrait

Le long de cette section, nous désignions par

- X un espace de Banach, réflexif, séparable et de dimension infinie.
- F, G et H trois fonctionnelles de $X \longrightarrow \mathbb{R}$ paires, $q-$ homogènes pour un certain $q > 0$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur X, non identiquement nulles et telles que $F(0) = G(0) = H(0) = 0$.

Dans cette section, nous énonçons un résultat d'existence pour le problème non linéaire à deux paramètres suivant :

$$(\mathscr{VP})_{(G,\alpha F+\beta H)} \quad G'(u) = \lambda\left(\alpha F'(u) + \beta H'(u)\right),\ u \in X \setminus \{0\},$$

sous la contrainte $N = \left\{u \in X;\ G(u) = 1\right\}$.

D'abord nous allons rappeler un résultat fondamental de la théorie de Ljusternik-Schnirelmann qui fournit l'existence d'au moins une suite de valeurs propres $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ du problème $(\mathscr{VP})_{(G,\alpha F+\beta H)}$, afin de définir par la suite les courbes propres $\mathscr{C}_n$ où $n \geq 1$.

2.1.1 Introduction à la Théorie de Ljusternik-Schnirelmann

Nous commençons par une modeste introduction sur la théorie générale des valeurs propres non linéaires.
Soient δ et λ deux nombres réels. Posons $N_\delta = \{u \in X;\, G(u) = \delta\}$.
Considérons le problème aux valeurs propres suivant :

$$(\mathscr{VP})_{(G,F)} \quad \begin{cases} G'(u) = \lambda F'(u) \\ \\ \quad u \in N_\delta. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Le problème $(\mathscr{VP})_{(G,F)}$ est un problème de points critiques de la fonctionnelle F sous la contrainte N_δ.
L'étude d'un tel problème dans le cas où X est un espace de Hilbert et F, G des opérateurs linéaires (compacts) a fait l'objet des nombreux travaux d'intérêt fondamental, nous citons particulièrment ceux de Courant-Hilbert [18] et de Rabinowitz [51], c'est ce qu'on appelle la caractérisation min-max des valeurs propres linéaires.
Dans le cas où X un espace de Banach et F, G des opérateurs non linéaires, il s'agit de la théorie des valeurs propres non linéaires. Cette théorie utilise des outils de "mesure" dans un certain sens pour les ensembles. Il existe "au moins" deux théories biens connues dans ce cadre, la théorie de Morse et de Morse-Conley [10, 17] qui utilisent la notion de l'indice et la théorie Ljusternik-Schnirelmann qui est basée sur la notion du genre [55, 61].
Nous nous intéressons dans ce tarvail à la théorie Ljusternik-Schnirelmann. Ainsi on cherche à obtenir les points critiques en min-maximisant la fonctionnelle F sur certaines familles de sous ensembles de N_δ définies à partir de la fonction genre.
Supposons de plus que les fonctionnelles F et G de X vers $\mathbb{R}$ vérifient les conditions suivantes :

- ($\mathbf{H_1}$) $F' : X \to X'$ (dual topologique) est fortement continue, c'est-à-dire
  si $u_n \rightharpoonup u$ dans X alors $F'(u_n) \to F'(u)$ dans X' quand $n \to +\infty$.
- ($\mathbf{H_2}$) $G' : X \to X'$ est uniformément continue sur les ensembles bornés de X et est de type (S_1), c'est-à-dire

si $u_n \rightharpoonup u$ dans X et $G'(u_n) \to \chi$ dans X', alors $u_n \to u$ quand $n \to +\infty$.

($\mathbf{H_3}$) N_δ est borné, $\inf_{u\in N_\delta} \langle G'(u), u\rangle > 0$ et $u \neq 0$ implique $\langle G'(u), u\rangle > 0$ et $\lim_{t\to+\infty} G(tu) = +\infty$ (c'est-à-dire G est coercive).

$u \in X$ est une solution du problème $(\mathcal{VP})_{(G,F)}$ si et seulement si u est un point critique de la fonctionnelle F sous la contrainte N_δ. Nous disons alors que u est un vecteur propre associée à la valeur propre λ.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$\mathcal{K}_n = \Big\{K \subset N_\delta;\ K \text{ compact, symétrique, } \gamma(K) \geq n \text{ et } F(u) > 0\ \forall u \in K\Big\},$$

et nous définissons le nombre c_n de la façon suivante :

$$c_n = \begin{cases} \sup\limits_{K\in\mathcal{K}_n} \min\limits_{u\in K} F(u) & si \quad \mathcal{K}_n \neq \emptyset \\ 0 & si \quad \mathcal{K}_n \doteq \emptyset \end{cases}$$

et μ la multiplicité globale par

$$\mu = \begin{cases} \sup\{n \in \mathbb{N}^*; c_n > 0\} \\ 0 \quad si \quad c_1 = 0 \end{cases}$$

Théorème 2.1.1 (cf. [4, 61]) *Sous les hypothèses* ($\mathbf{H_1}$), ($\mathbf{H_2}$) *et* ($\mathbf{H_3}$) *nous avons :*

1. Existence d'une valeur propre. *Si $c_n > 0$, alors le problème $(\mathcal{VP})_{(G,F)}$ possède au moins une paire de vecteurs propres $(u_n, -u_n)$ associés à une valeur prore $\lambda_n \neq 0$ tel que $F(u_n) = c_n$.*

Si de plus F' et G' sont positivement homogènes de degré $a > 0$ (c'est-à-dire $F'(tu) = t^a F'(u)$ et $G'(tu) = t^a G'(u)$ pour tout $u \in X$ et $t > 0$), alors $\lambda_n = \frac{\delta}{c_n}$.

2. Multiplicité. *Le problème $(\mathcal{VP})_{(G,F)}$ a au moins μ paires de vecteurs propres $(u_n, -u_n)$ associés à des valeurs prores non nulles.*

Si $c_n = c_{n+1} = ... = c_{n+p} > 0$, $p \geq 1$, alors l'ensemble de tous les vecteurs propres de $(\mathcal{VP})_{(G,F)}$ est de genre au moins égale à $p+1$. En particulier cet ensemble es infini.

3. Niveaux critiques. $+\infty > c_1 \geq c_2 \geq ... \geq c_n \geq 0$ *et* $c_n \to 0$ *quand* $n \to +\infty$.

Si de plus F' *et* G' *sont positivement homogènes, alors*

$$\lambda_n \to +\infty \text{ quand } n \to +\infty.$$

2.1.2 Définition des courbes propres, énoncé du résultat principal d'existence

Signalons tout d'abord que les résultats de ce paragraphe sont inspirés de la thèse de M. Hadda [38]. Considérons maintenant le problème aux valeurs propres à deux paramètres suivant :

$$(\mathscr{VP})_{(G,\alpha F+\beta H)} \quad G'(u) = \lambda(\alpha F'(u) + \beta H'(u)),\ u \in X \setminus \{0\},$$

sous la contrainte $N = \{u \in X;\ G(u) = 1\}$ (ici on prend $\delta = 1$ et posons $N_1 = N$).
Dans ce cas, nous désignons par $\mathscr{K}_n$ l'ensemble

$$\mathscr{K}_n = \left\{K \subset N;\ K \text{ compact, symétrique, } \gamma(K) \geq n\right\}.$$

Nous gardons les hypothèses ($\mathbf{H_2}$) et ($\mathbf{H_3}$) citées ci-dessus et nous remplaçons ($\mathbf{H_1}$) par l'hypothèse suivant :
($\mathbf{H_1'}$) $F', H' : X \longrightarrow X'$ sont fortement continues.
Notre objectif dans cette section est d'étudier l'existence des couples $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que le problème $(\mathscr{VP})_{(G,\alpha F+\beta H)}$ admet au moins une solution non triviale dans l'espace de Banach X.
Par application du théorème 2.1.1 on peut définir la $n^{ième}$ valeur propre et la $n^{ième}$ courbe propre associées au problème $(\mathscr{VP})_{(G,\alpha F+\beta H)}$.

Définition 2.1.1 *Nous définissons la $n^{ième}$ valeur propre associée au problème $(\mathscr{VP})_{(G,\alpha F+\beta H)}$ par :*

$$\frac{1}{\lambda_n(\alpha F+\beta H,G)}=\begin{cases}\sup\limits_{K\in\mathscr{K}_n}\min\limits_{u\in K}(\alpha F+\beta H)(u) \ si\ \exists K\in\mathscr{K}_n \ tel\ que \\ \qquad (\alpha F+\beta H)(u)>0 \ \forall u\in K \\ \\ 0 \qquad\qquad sinon.\end{cases}$$

Pour $\lambda>0$ le problème $(\mathscr{VP})_{(G,\alpha F+\beta H)}$ revient donc à trouver les couples réels (α,β) de telle sort que

$$\lambda_n(\alpha F+\beta H,G)=\lambda,$$

c'est à dire trouver une fonctionnelle $L=\alpha F+\beta H$ dans l'espace $vect(F,H)$ telle que $\lambda_n(L,G)=\lambda$. Notre point de vue sur les courbes propres pourra ainsi être observé comme étant un problème inverse. Par homogénéité et sans perte de généralité on peut prendre dans tout ce qui suit $\lambda=1$.

Définition 2.1.2 *Nous définissons la $n^{ième}$ courbe propre $\mathscr{C}_n(F,H,G)$ associée au problème $(\mathscr{VP})_{(G,\alpha F+\beta H)}$ par :*

$$\mathscr{C}_n(F,H,G)=\Big\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2;\ \lambda_n(\alpha F+\beta H,G)=1\Big\}. \tag{2.1.2}$$

Avant d'énoncer le résultat d'existence des courbes propres nous avons besoin du lemme technique suivant

Lemme 2.1.1 *Supposons qu'il existe $K_0\in\mathscr{K}_n$ tel que $H(u)>0\ \forall u\in K_0$. Si $0<\beta<\lambda_n(H,G)$, alors*

$$K\cap\big\{u\in X;\ G(u)-\beta H(u)>0\big\}\neq\emptyset,\ \forall K\in\mathscr{K}_n.$$

Preuve. Raisonnement par absurde, supposons qu'il existe $K_1\in\mathscr{K}_n$ tel que

$$K_1\cap\big\{u\in X;\ G(u)-\beta H(u)>0\big\}=\emptyset,$$

dans ce cas nous avons $G(u)-\beta H(u)\leq 0\ \forall u\in K_1$, et comme $K_1\in\mathscr{K}_n$, alors $K_1\subset N$, c'est à dire $G(u)=1\ \forall u\in K_1$, donc

$$\frac{1}{\beta}\leq H(u)\ \forall u\in K_1,$$

ce qui donne

$$\frac{1}{\beta}\leq \inf_{u\in K_1} H(u)\leq \sup_{K\in\mathscr{K}_n}\inf_{u\in K} H(u)=\frac{1}{\lambda_n(H,G)},$$

par suite $\beta\geq\lambda_n(H,G)$, ceci contredit l'hypothèse du lemme. D'où la conclusion.
D'après ce lemme la définition suivante à un sens

Définition 2.1.3 *Supposons que* $F(u)>0\ \forall u\in X\setminus\{0\}$, $H(u)\geq 0\ \forall u\in X$ *et* $\exists K_0\in\mathscr{K}_n$ *tel que* $H(u)>0\ \forall u\in K_0$.

1. *Pour* $\beta<\lambda_n(H,G)$, *nous posons*

$$\frac{1}{\alpha_n(\beta)}=\sup_{K\in\mathscr{K}_n}\inf_{u\in K\cap A_\beta^+}\frac{F(u)}{G(u)-\beta H(u)},$$

où $A_\beta^+=\{u\in X;\ G(u)-\beta H(u)>0\}$.

2. *Pour* $\alpha\leq 0$, *on pose*

$$\frac{1}{\beta_n(\alpha)}=\sup_{K\in\mathscr{K}_n}\min_{u\in K}\frac{H(u)}{G(u)-\alpha F(u)}.$$

Théorème 2.1.2 (cf. [38]) *En plus des hypothèses* $(\mathbf{H_1'})$, $(\mathbf{H_2})$ *et* $(\mathbf{H_3})$, *nous supposons que* $F(u)>0\ \forall u\in X\setminus\{0\}$, $H(u)\geq 0\ \forall u\in X$ *et* $\exists K_0\in\mathscr{K}_n$ *tel que* $H(u)>0\ \forall u\in K_0$. *Alors nous avons*

1. *Si* $\beta<\lambda_n(H,G)$, *alors*

$$(\alpha,\beta)\in\mathscr{C}_n(F,H,G)\Leftrightarrow\alpha=\alpha_n(\beta).$$

2. *Si* $\beta>\lambda_n(H,G)$, *alors*

i) $(\alpha,\beta)\in\mathscr{C}_n(F,H,G)\Rightarrow\alpha\leq 0$ *et* $\beta_n(\alpha^+)\leq\beta\leq\beta_n(\alpha^-)$,

ii) *Si de plus l'application* $\psi\to\lambda_n(\psi,G)$ *est continue, alors la réciproque du point* **i)** *est aussi vraie,*

$$\text{où}\qquad \frac{1}{\beta_n(\alpha)}=\sup_{K\in\mathscr{K}_n}\min_{u\in K}\frac{H(u)}{G(u)-\alpha F(u)}\ \text{et}\ \beta_n(\alpha^\pm)=\lim_{t\to\alpha^\pm}\beta_n(t)$$

CHAPITRE 3

EXISTENCE DES COURBES PROPRES DU P-LAPLACIEN AVEC POIDS INDÉFINIS POUR UN PROBLÈME DE NEUMANN

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'existence des courbes propres du p-Laplacien avec poids pour un problème de Neumann c'est-à-dire nous étudions le prblème inverse d'un problème aux valeurs propres à deux paramètres. En fait ce problème est formulé comme suit :

Trouver tous les réels α, β tels que $\lambda_n(\alpha\, m_1 + \beta\, m_2) = 1$.

où λ_n est une valeur propre du p-Laplacien avec poids, $n \in \mathbb{N}^*$, m_1 et m_2 deux fonctions poids qui satisfont certaines conditions.

3.1 Rappel sur le spectre du p-Laplacien avec poids, définition et proprietés

Dans cette section, on présente brièvement quelques résultats liés au spectre du p-Laplacien avec poids pour un problème aux valeurs propres de Neumann.

3.1.1 Le spectre du p-Laplacien avec poids pour un problème de Neumann

Considérons le problème aux valeurs propres non linéaires suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda\, m(x)|u|^{p-2}u & \text{dans} \quad \Omega \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

où Ω est un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$, $1 < p < +\infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $m \in M^+(\Omega)$ avec $M^+(\Omega) = \left\{ m \in L^\infty(\Omega) : \text{mes}\,(\{x \in \Omega : m(x) > 0\}) \neq 0 \right\}$.

Définition 3.1.1 *Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.*
1) *Le couple (u,λ) est une solution du problème* (3.1.1) *si*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v\, dx = \lambda \int_\Omega m(x)|u|^{p-2}u\, v\, dx, \ \textit{pour tout } v \in W^{1,p}(\Omega).$$

2) *λ est appelée valeur propre du problème* (3.1.1) *s'il existe $u \in W^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}$ tel que (u,λ) est une solution du problème* (3.1.1). *Dans ce cas, u est appelée fonction propre associée à la valeur propre λ.*

Définition 3.1.2 *L'ensemble des valeurs propres positives du problème* (3.1.1) *est appelé le spectre positif du p-Laplacien avec poids m, noté $\sigma^+(-\Delta_p, m)$.*

Supposons que $m \in M^+(\Omega)$, alors d'après le travail de A. Dakkak [22], le spectre de l'opérateur $p-$Laplacien contient au moins une suite de valeurs propres $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ positives telle que

$$0 \leq \lambda_1(m) < \lambda_2(m) \leq \lambda_3(m) \leq \ldots \leq \lambda_n(m) \to \infty \quad \text{quand} \quad n \to +\infty,$$

donnée par la formulation variationnelle suivante :

$$\lambda_n(m) = \inf_{K\in\Gamma_n(m)} \sup_{u\in K} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p}{\displaystyle\int_\Omega m(x)|u|^p} \text{ pour } n \geq 2, \tag{3.1.2}$$

où

$$\Gamma_n(m) = \left\{ K \subset W^{1,p}(\Omega) : K \text{ est compact symétrique, } \gamma(K) \geq n \text{ et } \int_\Omega m(x)|u|^p > 0 \ \forall u \in K \right\}$$

avec $\gamma(K)$ désigne le genre de K.
Et pour $n = 1$ on a

$$\lambda_1(m) = \inf_{u\in\mathscr{A}_1(m)} \int_\Omega |\nabla u|^p \tag{3.1.3}$$

où $\mathscr{A}_1(m) = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega) : \displaystyle\int_\Omega m(x)|u|^p = 1 \right\}$.
La formulation variationnelle de la première valeur propre $\lambda_1(m)$ a été établie par A. Dakkak (voir [21]). De la même façon, dans le cas où $m \in M^-(\Omega)$ (c'est-à-dire $-m \in M^+(\Omega)$), le problème (3.1.1) admet au moins une suite de valeurs propres négatives notée $(\lambda_{-n})_{n\geq 1}$ telle que

$$0 \geq \lambda_{-1}(m) > \lambda_{-2}(m) \geq \lambda_{-3}(m) \geq \ldots \geq \lambda_{-n}(m) \to -\infty \quad \text{quand} \quad n \to +\infty,$$

et

$$\lambda_{-n}(m) = -\lambda_n(-m).$$

Définition 3.1.3 *Le spectre négatif du p-Laplacien avec poids m noté $\sigma^-(-\Delta_p, m)$ est défini par $\sigma^-(-\Delta_p, m) = -\sigma^+(-\Delta_p, -m)$.*

La formulation variationnelle (3.1.2) ainsi que les propriétés des valeus propres $\lambda_n(m)$ ont fait l'objet de plusieurs travaux parmis lesquels nous citons par exemples [3, 4, 7, 59].
Si le poids m change de signe sur des sous-ensembles de Ω de mesure non nulle, alors le problème (3.1.1) admet au moins deux suites de valeurs propres $(\lambda_n(m))_{n\geq 1}$ et $(\lambda_{-n}(m))_{n\geq 1}$.

Soit $m \in M^+(\Omega)$, nous venons de voir que dans le cas où le spectre positif contient au moins une suite de valeurs propres caractérisées par la formulation (3.1.2). Certains auteurs ont donnés un intérêt particulier à l'étude de la première valeur propre $\lambda_1(m)$ appelée aussi valeur propre principale qui joue un rôle important, par exemple nous citons notamment, le travail d'Anane [3] dans le cas d'un problème de Dirichlet, et ceux de A. Dakkak [21] dans le cas d'un problème de Neumann.
D'après (3.1.3), il est évident que 0 est une valeur propre principale du problème (3.1.1), associée aux fonctions constantes comme fonctions propres. Dans le théorème suivant nous allons donner les propriétés fondamentales de la valeur propre principale $\lambda_1(m)$.

Théorème 3.1.1 (cf. [21], [36]) *Soit m une fonction poids telle que $m \in M^+(\Omega)$, alors nous avons :*

1. *$\lambda_1(m)$ est une valeur propre du p-Laplacien avec poids m, de plus si m change de signe sur Ω et $\int_\Omega m\,dx < 0$. Alors $\lambda_1(m) > 0$ et $\lambda_1(m)$ est l'unique valeur propre principale non nulle.*

2. *Toute fonction propre associée à $\lambda_1(m)$ ne s'annule pas sur $\overline{\Omega}$, et par suite elle garde un signe constant sur $\overline{\Omega}$.*

3. *$\lambda_1(m)$ est simple, c'est à dire : Si $(u, \lambda_1(m))$ et $(v, \lambda_1(m))$ sont deux solutions de (3.1.1), alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $u = a\,v$.*

4. *$\lambda_1(m)$ est isolée, c'est à dire : Il existe $b > \lambda_1(m)$ tel que*

$$\sigma(-\Delta_p, m) \bigcap]0, b[= \{\lambda_1\}$$

5. *Toute fonction propre associée à une valeur propre strictement positive autre que $\lambda_1(m)$, change de signe sur Ω.*

6. *Si $\int_\Omega m\,dx > 0$. Alors $\lambda_1(m) = 0$ est l'unique valeur propre principale positive.*

7. *Si $\int_\Omega m\,dx = 0$. Alors $\lambda_1(m) = 0$ et 0 est l'unique valeur propre principale.*

Pour la preuve du théorème et pour plus de détails sur les propriétés de la première valeur propre $\lambda_1(m)$, on pourra consulter [21].

Proposition 3.1.1 *Soit $m, m' \in M^+(\Omega)$.*

1. *Si $m' \leq m$, alors $\lambda_1(m') \geq \lambda_1(m)$ (la monotonie de λ_1 par rapport au poids).*

2. *Si $m' \leq m$, $mes(\{x \in \Omega : m' < m\}) \neq 0$ et $\int_\Omega m dx < 0$, alors $\lambda_1(m') > \lambda_1(m)$ (la stricte monotonie de λ_1 par rapport au poids).*

Proposition 3.1.2 *Soit $(m_k)_k$ une suite de $M^+(\Omega)$ telle que $m_k \to m$ dans $L^\infty(\Omega)$ quand $k \longrightarrow +\infty$. Alors nous avons*

1. *Si $m \in M^+(\Omega)$, alors $\lim_{k\to+\infty} \lambda_1(m_k) = \lambda_1(m)$ (i.e. l'application $\lambda_1 : m \to \lambda_1(m)$ est continue par rapport au poids).*

2. $\lim_{k\to+\infty} \lambda_1(m_k) = +\infty$ *si et seulement si $m \leq 0$ p.p. dans Ω.*

Preuve. 1. La démonstration se trouve dans [21], on pourra également s'inspirer de la proposition précédente.

2. Soit $(m_k)_k$ une suite dans $M^+(\Omega)$ telle que $m_k \to m$ dans $L^\infty(\Omega)$ quand $k \longrightarrow +\infty$.

Supposons d'abord que $\lim_{k\to+\infty} \lambda_1(m_k) = +\infty$, nous montrons que $m \leq 0$ p.p. dans Ω. En effet, supposons que $mes(\{x \in \Omega : m(x) > 0\}) \neq 0$, ainsi par la continuité de λ_1 par rapport au poids, on obtient $\lim_{k\to+\infty} \lambda_1(m_k) = \lambda_1(m)$, qui est une quantité finie, ce qui donne une contradiction. Inversement, si $m \leq 0$ p.p. dans Ω, supposons qu'il existe un reél $\lambda > 0$ et une sous-suite de $(m_k)_k$ notée encore $(m_k)_k$ telle que

$$\lambda_1(m_k) \leq \lambda.$$

On pose $r = \frac{2\lambda}{\lambda_1(2)}$, puisque $m_k \to m$ dans $L^\infty(\Omega)$ quand $k \longrightarrow +\infty$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $k \geq N$, nous avons

$$\| m_k - m \|_\infty \leq \frac{2}{r}$$

par conséquent

$$m_k \leq m + \frac{2}{r} \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

Donc, en utilisant le fait que $m \leq 0$ p.p. $x \in \Omega$, nous concluons que

$$m_k \leq \frac{2}{r} \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

Il en résulte que

$$\lambda_1(m_k) \geq \lambda_1(\frac{2}{r}) = r\lambda_1(2) = 2\lambda,$$

ce qui donne une contradiction. Par conséquent, $\lim_{k\to+\infty} \lambda_1(m_k) = +\infty$.

Proposition 3.1.3 (Une autre caractérisation de $\lambda_2(m)$).

$$\lambda_2(m) = \inf\Big\{\lambda > \lambda_1(m) \,/\, \lambda \textit{ est une valeur propre associée au problème } (3.1.1)\Big\}$$

Preuve. Supposons par l'absurde, qu'il existe $\lambda \in]\lambda_1(m), \lambda_2(m)[\bigcap \sigma(-\Delta_p, m)$. Soit u une fonction propre associée à λ, i.e

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w = \lambda \int_\Omega m(x)|u|^{p-2}u\,w \quad \forall\, w \in W^{1,p}(\Omega), \tag{3.1.4}$$

comme $\lambda \neq \lambda_1(m)$ nous avons $u^+ \neq 0$ et $u^- \neq 0$.
En prenant u^+, u^- et u comme fonctions tests dans l'équation (3.1.4), on obtient respectivement

$$\int_\Omega |\nabla u^+|^p = \lambda \int_\Omega m(x)|u^+|^p, \tag{3.1.5}$$

$$\int_\Omega |\nabla u^-|^p = \lambda \int_\Omega m(x)|u^-|^p, \tag{3.1.6}$$

$$\int_\Omega |\nabla u|^p = \lambda \int_\Omega m(x)|u|^p. \tag{3.1.7}$$

D'autre part, on prend $K_0 = F_2 \bigcap S$, où $F_2 = \langle u^+, u^-\rangle$ est le sous-espace vectoriel engendré par u^+ et u^- donc $\gamma(K_0) = 2$. Soit $v \in K_0$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $v = a\,u^+ + b\,u^-$.
On considère les notations suivantes $\Omega^+ = \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$, $\Omega^- = \{x \in \Omega : u(x) < 0\}$ et $\Omega_0 = \{x \in \Omega : u(x) = 0\}$.

En combinant (3.1.5), (3.1.6) et (3.1.7), on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega m(x)|v|^p &= \int_\Omega m(x)|a\,u^+ + b\,u^-|^p \\ &= \int_{\Omega^+} m(x)|a\,u^+|^p + \int_{\Omega^-} m(x)|b\,u^-|^p \\ &= |a|^p \int_\Omega m(x)|u^+|^p + |b|^p \int_\Omega m(x)|u^-|^p \\ &= \frac{|a|^p}{\lambda}\int_\Omega |\nabla u^+|^p + \frac{|b|^p}{\lambda}\int_\Omega |\nabla u^-|^p \\ &= \frac{1}{\lambda}\left(|a|^p \int_\Omega |\nabla u^+|^p + |b|^p \int_\Omega |\nabla u^-|^p\right) \\ &= \frac{1}{\lambda}\int_\Omega |\nabla v|^p.\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\displaystyle\int_\Omega m(x)|v|^p}{\displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^p},$$

par conséquent

$$\frac{1}{\lambda} = \min_{v\in K_0} \frac{\displaystyle\int_\Omega m(x)|v|^p}{\displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^p} \leq \frac{1}{\lambda_2(m)}$$

ce qui est absurde car $\lambda_2(m) > \lambda$.

3.1.2 Spectre du p-Laplacien avec poids pour un problème de Neumann : Cas unidimensionnel

Dans ce cadre il est naturel de poser la question si le spectre positif contient des valeurs propres autres que celles données par la formulation variationnelle (3.1.2). A ce propos, nous pouvons citer le résultat classique suivant :
Dans le cas d'un problème de Dirichlet et avec $p = 2$ et $m \in M^+(\Omega)$, les auteurs dans [5] ont montré que le spectre du p-Laplacien contient uniquement la suite des valeurs propres données par la formulation (3.1.2)

$$\sigma(-\Delta, m) = \left\{\mu_k(m),\ k \in \mathbb{N}^*\right\};\ \text{avec}\ \mu_1(m) < \mu_2(m) \leq \cdots \leq \mu_n(m) \to +\infty,$$

où $\mu_k(m)$ sont comptées avec leurs multiplicités et chaque valeur propre $\mu_k(m)$ vérifie le principe de la stricte monotonie c'est-à-dire : Si $m, m' \in M^+(\Omega)$, $m \leq m'$ p.p. dans Ω et $mes\{x \in \Omega;\ m(x) < m'(x)\} \neq 0$, alors $\mu_k(m') < \mu_k(m)$.
Dans le cas $N = 1$, $p \neq 2$ et $m = 1$, les auteurs dans [48, 49, 30] ont déterminé complétement le spectre $\sigma(-\Delta_p, m)$, ainsi que la caractérisition des fonctions propres.
Dans le cas où $N = 1$, $p \neq 2$, $m(x) \geq 0$ et continue, le problème du spectre est résolu dans [32].
Plus genéralement et toujours dans la cas de Dirichlet unidimensionnel et $p > 1$, en considérant un poids $m \in M^+(I)$ tel que $m \neq 1$ où I est un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$, Anane , Chakrone et Moussa [6] ont montré que le spectre $\sigma^+(-\Delta_p, m)$ est entièrement déterminé par la suite $(\lambda_n(m))_{n\geq 1}$ donnée par la formulation (3.1.2). Ils ont établit les résultats suivants :

Théorème 3.1.2 ([6]) *Soit $m \in M^+(I)$ tel que $m \neq 1$ et $p > 1$. Alors nous avons*

1. *Toute fonction propre associée à la valeur propre $\lambda_n(m)$, admet exactement $n+1$ zéros dans $\overline{I}$.*
2. *Pour tout $n \geq 1$, toute valeur propre $\lambda_n(m)$, est simple et vérifie la propriété de la stricte monotonie par rapport au poids et au domaine.*

Dans le cas $N = 1$, $p > 1$ et $m \in M^+(I)$, mais cette fois-ci pour un problème de Neumann, Dakkak, El Habib et Tsouli (voir [23]) ont montré des résultas analogues résumés dans le théorème suivant :

Théorème 3.1.3 ([23]) *Soit $m \in M^+(I)$ tel que $m \neq 1$ et $p > 1$. Alors nous avons*

1. *Toute fonction propre associée à une valeur propre $\lambda_n(m)$, admet exactement $n-1$ zéros dans I.*
2. *Toute valeur propre dans le spectre est simple.*
3. *Pour tout $n \geq 1$, λ_n vérifie la propriété de la stricte monotonie par rapport au poids et au domaine.*

Remarque 3.1.1 *Il est important de signaler que le cas d'un problème périodique unidimsionnel avec poids et $p > 1$ reste un problème ouvert.*

3.2 Existence de la courbe propre principale du p-Laplacien avec poids indéfinis

Dans cette section, nous allons étudier le problème suivant : Trouver tous les nombres reéls α et β tels que $\lambda_1(\alpha\, m_1 + \beta\, m_2) = 1$. Plus précisément, nous cherchons tous les couples réels (α, β) tels que le problème suivant admet au moins une solution non triviale $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

$$\begin{cases} -\Delta_p u = (\alpha\, m_1(x) + \beta\, m_2(x))|u|^{p-2}u & \text{dans} \quad \Omega \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

L'ensemble de tels couples (α, β) a une structure d'une courbe continue appelé courbe propre principale de $-\Delta_p$ avec poids et avec condition de Neumann au bord de Ω.

Définition 3.2.1 *Etant donné deux poids m_1 et m_2 de $M^+(\Omega)$. Nous définissons le graphe de la première courbe propre du p-Laplacien avec poids pour un problème de Neumann par*

$$\mathscr{C}_1 = \left\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2; \lambda_1(\alpha\, m_1 + \beta\, m_2) = 1\right\}.$$

Théorème 3.2.1 *Soient m_1 et m_2 deux fonctions poids dans $M^+(\Omega)$. Supposons que m_1 et m_2 vérifient respectivement les hypothèses suivantes*

(A1) *m_1 change de signe sur Ω et $\displaystyle\int_\Omega m_1(x)\,dx < 0$,*

(A2) $\inf\limits_{\Omega} ess\, m_2 > 0$.

Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ il existe un unique réel $\beta_1(\alpha)$ tel que :

$$\lambda_1(\alpha\, m_1 + \beta_1(\alpha)\, m_2) = 1.$$

Preuve. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Considérons la fonction suivante $f_\alpha : t \longmapsto \lambda_1(\alpha\, m_1 + t\, m_2)$. D'après la propositon 3.1.1 et la propsition 3.1.2, on peut montrer que f_α est continue et décroissante, il s'ensuit que f_α est injective. Afin de montrer que l'équation $f_\alpha(t) = 1$ admet une solution nous distinguons les trois cas suivants :

1^{er} **cas** $0 \leq \alpha \leq \lambda_1(m_1)$**.**

Si $\alpha = 0$, on convient de poser $\beta_1(0) = 0$, à la fin de cette preuve on verra la raison de cette convention (voir proposition 3.2.1) et si $\alpha = \lambda_1(m_1)$, on prend $\beta_1(\lambda_1(m_1)) = 0$.
Pour tout $0 < \alpha < \lambda_1(m_1)$, nous avons

$$f_\alpha(0) = \lambda_1(\alpha\, m_1) = \frac{\lambda_1(m_1)}{\alpha} > 1.$$

D'autre part, puisque $\dfrac{\alpha}{t}\, m_1 + m_2 \to m_2$ dans $L^\infty(\Omega)$ quand $t \to +\infty$, alors

$$\lim_{t\to+\infty} f_\alpha(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\lambda_1(\frac{\alpha}{t} m_1 + m_2) = 0,$$

comme $1 \in]0, \frac{\lambda_1(m_1)}{\alpha}[$, donc il existe un unique réel $t_\alpha = \beta_1(\alpha) \in]0, +\infty[$ qui vérifie $f_\alpha(t_\alpha) = 1$.

$2^{ième}$ **cas** $\alpha > \lambda_1(m_1)$**.**

Dans ce cas on a $\alpha > 0$ et

$$0 < f_\alpha(0) = \lambda_1(\alpha\, m_1) = \frac{\lambda_1(m_1)}{\alpha} < 1. \tag{3.2.2}$$

Posons $\gamma_\alpha = \dfrac{-\alpha\, \|m_1\|_\infty}{\inf\limits_\Omega ess\, m_2}$,

$$A_\alpha = \Big\{ t < 0 : \alpha\, m_1 + t\, m_2 \leq 0 \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega \Big\} \quad \text{et} \quad \tau_\alpha = \sup A_\alpha,$$

on peut aisément voir

$$\alpha\, m_1 + \gamma_\alpha\, m_2 \leq 0 \quad \text{presque partout dans } \Omega.$$

Donc $A_\alpha \neq \emptyset$, nous allons prouver que $\tau_\alpha \in A_\alpha$. En effet, nous montrons d'abord que $\tau_\alpha < 0$. Puisque $f_\alpha(0) > 0$, et f_α est une fonction continue alors il existe $\eta < 0$ tel que $f_\alpha(t) > 0$ pour tout $t \in [\eta, 0]$. Donc $\lambda_1(\alpha m_1 + t m_2) > 0$ pour tout $t \in [\eta, 0]$, ce qui donne que

$$\alpha\, m_1 + t\, m_2 \in M^+(\Omega) \quad \text{pour tout} \quad t \in [\eta, 0],$$

par conséquent $\tau_\alpha \leq \eta < 0$. En outre, d'après la définition de τ_α nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $t_n \in A_\alpha$ tel que $\tau_\alpha - \frac{1}{n} < t_n$.
On en déduit que

$$\alpha\, m_1(x) + \tau_\alpha\, m_2(x) \leq \alpha\, m_1(x) + t_n\, m_2(x) + \frac{1}{n} m_2(x) \leq \frac{1}{n} \| m_2 \|_\infty \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Par conséquent lorsque n tendre vers $+\infty$, on obtient

$$\alpha\, m_1(x) + \tau_\alpha\, m_2(x) \leq 0 \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega.$$

D'où , $\tau_\alpha \in A_\alpha$. Ainsi la proposition 3.1.2 entraîne alors que

$$\lim_{t \to \tau_\alpha} f_\alpha(t) = +\infty. \tag{3.2.3}$$

En combinant (3.2.2) et (3.2.3), on en déduit qu'il existe un réel unique $t_\alpha = \beta_1(\alpha) \in]\tau_\alpha, 0[$ qui vérifie

$$f_\alpha(t_\alpha) = 1.$$

$3^{ième}$ **cas** $\alpha < 0$**.**
Dans ce cas nous avons $\int_\Omega \alpha\, m_1\, dx > 0$, ainsi

$$f_\alpha(0) = \lambda_1(\alpha\, m_1) = 0 < 1. \tag{3.2.4}$$

Nous cherchons un réel θ_α tel que $\lim_{t\to\theta_\alpha} f_\alpha(t) = +\infty$.

En effet, posons $\mu_\alpha = \dfrac{\alpha\|m_1\|_\infty}{\inf_\Omega ess\, m_2}$,

$$B_\alpha = \Big\{ t<0;\ \alpha\, m_1 + t\, m_2 \le 0 \quad \text{p.p.} \quad x\in\Omega \Big\} \quad \text{et} \quad \theta_\alpha = \sup B_\alpha,$$

il est claire que $\mu_\alpha \in B_\alpha$, donc $B_\alpha \neq \emptyset$. On montre que $\theta_\alpha \in B_\alpha$.

On a $f_\alpha(t) > 0$ pour tout $t < 0$, car d'après la stricte monotonie de λ_1 pa rapport au poids nous avons

$$f_\alpha(t) = \lambda_1(\alpha\, m_1 + t\, m_2) > \lambda_1(\alpha\, m_1) = 0$$

puisque f_α est continue, alors il existe $\rho < 0$ tel que $f_\alpha(t) > 0$ pour tout $t \in [\rho, 0[$. Ainsi

$$\alpha\, m_1 + t\, m_2 \in M^+(\Omega) \text{ pour tout } t \in [\rho, 0[$$

par conséquent $\theta_\alpha \le \rho < 0$.

D'autre part en utilisant la définition de θ_α, nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $T_n \in B_\alpha$ tel que $\theta_n - \frac{1}{n} < T_n$. Donc

$$\alpha\, m_1(x) + \theta_\alpha\, m_2(x) \le \alpha\, m_1(x) + T_n\, m_2(x) + \frac{1}{n} m_2(x) \le \frac{1}{n}\|m_2\|_\infty \quad \text{p.p.} \quad x\in\Omega$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

En passant à la limite dans l'inégalité ci-dessus lorsque $n \to +\infty$, on obtient

$$\alpha\, m_1(x) + \theta_\alpha\, m_2(x) \le 0 \quad \text{p.p.} \quad x\in\Omega.$$

D'où , $\theta_\alpha \in A_\alpha$. Ainsi la proposition 3.1.2 implique

$$\lim_{t\to\theta_\alpha} f_\alpha(t) = +\infty. \tag{3.2.5}$$

En combinant (3.2.4) et (3.2.5) on obtient qu'il existe un réel unique $t_\alpha = \beta_1(\alpha) \in]\theta_\alpha, 0[$ qui vérifie

$$f_\alpha(t_\alpha) = 1.$$

Ce qui termine la preuve.

Proposition 3.2.1

1. $\lim_{\alpha \longrightarrow 0} \beta_1(\alpha) = 0$.
2. *L'application* $\alpha \longrightarrow \beta_1(\alpha)$ *est continue.*

Preuve. 1. Nous allons montrer que $\lim_{\alpha \longrightarrow 0^+} \beta_1(\alpha) = 0$ et $\lim_{\alpha \longrightarrow 0^-} \beta_1(\alpha) = 0$.
Soit $\alpha > 0$ et proche de 0, alors $\beta_1(\alpha) > 0$ (car si $0 < \alpha < \lambda_1(m_1)$ alors $\beta_1(\alpha) > 0$).
Donc $L = \limsup_{\alpha \longrightarrow 0^+} \beta_1(\alpha) \geq 0$, on va montrer que $L = 0$.
Si $L = +\infty$, alors il existe une suite (α_k) telle que $\alpha_k > 0$, $\lim_{k \longrightarrow +\infty} \alpha_k = 0$ et $\lim_{\alpha \longrightarrow 0} \beta_1(\alpha_k) = +\infty$.
Or $\lambda_1(\alpha_k m_1 + \beta_1(\alpha_k) m_2) = 1$, alors par l'homogénéité de λ_1 par rapport au poids on a,

$$\lambda_1\Big(\frac{\alpha_k}{\beta_1(\alpha_k)} m_1 + m_2\Big) = \beta_1(\alpha_k) \tag{3.2.6}$$

comme $\lim_{k \longrightarrow +\infty} \frac{\alpha_k}{\beta_1(\alpha_k)} = 0$, et d'après la continuité de λ_1 par rapport au poids on aura

$$\lambda_1\Big(\frac{\alpha_k}{\beta_1(\alpha_k)} m_1 + m_2\Big) \longrightarrow \lambda_1(m_2) = 0 \text{ quand } k \longrightarrow +\infty$$

par passage à la limite quand $k \longrightarrow +\infty$ dans (3.2.6), on obtient $\lambda_1(m_2) = 0 = +\infty$ ce qui est absurde, ainsi $0 \leq L < +\infty$.
Considérons la suite (α_k) vérifiant $\alpha_k > 0$, $\lim_{k \longrightarrow +\infty} \alpha_k = 0$ et $\lim_{\alpha \longrightarrow 0} \beta_1(\alpha_k) = L < +\infty$.
Supposons que $L > 0$, alors d'après la continuité de λ_1 par rapport au poids on a

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} \lambda_1(\alpha_k m_1 + \beta_1(\alpha_k) m_2) = \lambda_1(L m_2)$$

et puisque $(\alpha_k, \beta_1(\alpha_k)) \in \mathscr{C}_1$ on a

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} \lambda_1(\alpha_k m_1 + \beta_1(\alpha_k) m_2) = 1$$

donc $\lambda_1(L m_2) = 1$, on utilise l'homogénéité de λ_1 par rapport au poids, on obtient

$$0 = \lambda_1(m_2) = L$$

ce qui est absurde, ainsi

$$L = \limsup_{\alpha \longrightarrow 0^+} \beta_1(\alpha) \leq 0. \tag{3.2.7}$$

D'autre part, $\beta_1(\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in]0, \lambda_1(m_1)[$, alors

$$\liminf_{\alpha \longrightarrow 0^+} \beta_1(\alpha) \geq 0. \tag{3.2.8}$$

de (3.2.7) et (3.2.8) on obtient

$$0 \leq \liminf_{\alpha \longrightarrow 0^+} \beta_1(\alpha) \leq \limsup_{\alpha \longrightarrow 0^+} \beta_1(\alpha) \leq 0$$

d'où

$$\lim_{\alpha \longrightarrow 0^+} \beta_1(\alpha) = \liminf_{\alpha \longrightarrow 0^+} \beta_1(\alpha) = \limsup_{\alpha \longrightarrow 0^+} \beta_1(\alpha) = 0. \tag{3.2.9}$$

Montrons que $\lim_{\alpha \longrightarrow 0^-} \beta_1(\alpha) = 0$.
On sait que si $\alpha < 0$, alors $\beta_1(\alpha) < 0$ donc $\limsup_{\alpha \longrightarrow 0^-} \beta_1(\alpha) \leq 0$.
Soit $\delta < 0$ tel que $\limsup_{\alpha \longrightarrow 0^-} \beta_1(\alpha) < \delta < 0$, alors il existe une suite (α_k) telle que $\alpha_k < 0$, $\lim_{k \longrightarrow +\infty} \alpha_k = 0$ et $\lim_{k \longrightarrow +\infty} \beta_1(\alpha_k) < \delta$. Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } \beta_1(\alpha_k) < \delta + \varepsilon < 0 \text{ pour tout } k \geq N_\varepsilon,$$

ce qui donne

$$\alpha_k m_1 + \beta_1(\alpha_k) m_2 \leq \alpha_k m_1 + (\delta + \varepsilon) m_2$$

et par la monotonie de λ_1 par rapport au poids, on obtient

$$\lambda_1(\alpha_k m_1 + (\delta + \varepsilon) m_2) \leq 1, \tag{3.2.10}$$

comme $\lim_{k \longrightarrow +\infty} \alpha_k = 0$, alors par la continuité de λ_1 par rapport au poids nous avons

$$\lambda_1((\delta + \varepsilon) m_2) \leq 1,$$

ce qui entraîne, en utilisant l'homogénéité de λ_1

$$-(\delta + \varepsilon) \lambda_1(-m_2) \leq 1$$

puisque $\inf_{\Omega} ess\, m_2 > 0$, alors $\lambda_1(-m_2) = +\infty$, ainsi $+\infty \leq 1$ ce qui est absurde.
Donc

$$\limsup_{\alpha \longrightarrow 0^-} \beta_1(\alpha) \geq 0. \tag{3.2.11}$$

En plus puisque $\beta_1(\alpha) < 0$ pour tout $\alpha < 0$, alors

$$\liminf_{\alpha \longrightarrow 0^-} \beta_1(\alpha) \leq 0. \tag{3.2.12}$$

de (3.2.11) et (3.2.12) on obtient

$$0 \leq \limsup_{\alpha \longrightarrow 0^-} \beta_1(\alpha) \leq \liminf_{\alpha \longrightarrow 0^-} \beta_1(\alpha) \leq 0$$

d'où

$$\lim_{\alpha \longrightarrow 0^-} \beta_1(\alpha) = \liminf_{\alpha \longrightarrow 0^-} \beta_1(\alpha) = \limsup_{\alpha \longrightarrow 0^-} \beta_1(\alpha) = 0. \tag{3.2.13}$$

Finalement, en combinant (3.2.9) et (3.2.13), on obtient

$$\lim_{\alpha \longrightarrow 0} \beta_1(\alpha) = \lim_{\alpha \longrightarrow 0^-} \beta_1(\alpha) = \lim_{\alpha \longrightarrow 0^+} \beta_1(\alpha) = 0$$

ce qui achève la démonstration de **1)**.

2. Soit $\alpha, \alpha_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $\alpha \neq \alpha_0$, et $\lambda_1(\alpha\, m_1 + \beta_1(\alpha)\, m_2) = 1$, nous allons montrer que $\lim_{\alpha \longrightarrow \alpha_0} \beta_1(\alpha) = \beta_1(\alpha_0)$. En effet, par l'absurde on suppose que $\lim_{\alpha \longrightarrow \alpha_0} \beta_1(\alpha) \neq \beta_1(\alpha_0)$. Donc il existe une suite $(\alpha_k)_{k \geq 1}$ telle que $\lim_{k \longrightarrow +\infty} \alpha_k = \alpha_0$, et il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\left\{k \in \mathbb{N} \,/\, \beta_1(\alpha_k) \notin [\beta_1(\alpha_0) - \varepsilon,\, \beta_1(\alpha_0) + \varepsilon]\right\} \text{ est infini}$$

deux cas se présentent :

1^{er} **cas** $\left\{k \in \mathbb{N} \,/\, \beta_1(\alpha_k) < \beta_1(\alpha_0) - \varepsilon\right\}$ est infini.

Donc il existe une sous-suite de (α_k) notée aussi (α_k) telle que

$$\alpha_k m_1 + \beta_1(\alpha_k) m_2 \leq \alpha_k m_1 + \beta_1(\alpha_0) m_2 - \varepsilon\, m_2$$

par la monotonie de λ_1 par rapport au poids, on obtient

$$1 = \lambda_1(\alpha_k m_1 + \beta_1(\alpha_k) m_2) \geq \lambda_1(\alpha_k m_1 + \beta_1(\alpha_0) m_2 - \varepsilon\, m_2)$$

passant à la limite quand $k \longrightarrow +\infty$ dans l'inégalité ci-dessus on aura

$$1 \geq \lambda_1(\alpha_0 m_1 + \beta_1(\alpha_0) m_2 - \varepsilon\, m_2)$$

la monotonie stricte de λ_1 par rapport au poids donne

$$1 \geq \lambda_1(\alpha_0 m_1 + \beta_1(\alpha_0) m_2 - \varepsilon\, m_2) > \lambda_1(\alpha_0 m_1 + \beta_1(\alpha_0) m_2) = 1$$

ce qui absurde.
$2^{ième}$ **cas** $\{k \in \mathbb{N} \,/\, \beta_1(\alpha_k) > \beta_1(\alpha_0) + \varepsilon\}$ est infini.
Par les mêmes arguments que ceux du premier cas on a une contradiction.

3.3 Existence de la seconde courbe propre du p-Laplacien avec poids indéfinis

Soient m_1 et m_2 deux fonctions poids qui satisfont la condition suivante :

$$(\mathbf{A}) \qquad m_1,\, m_2 \in M^+(\Omega) \text{ et } m_2 > 0 \text{ p.p dans} \Omega.$$

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = (\alpha\, m_1(x) + \beta\, m_2(x))|u|^{p-2}u & \text{dans} \quad \Omega, \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.3.1}$$

La seconde courbe propre du p-Laplacien avec poids est définie comme étant l'ensemble $\mathscr{C}_2$ des couples $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que le problème (3.3.1) admet au moins une solution non triviale $u \in W^{1,p}(\Omega)$ $\Big($ i.e. $\mathscr{C}_2 = \Big\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \lambda_2(\alpha\, m_1 + \beta\, m_2) = 1\Big\}\Big)$.
Remarquons d'abord que l'ensemble $\mathscr{C}_2$ est une partie non vide de $\mathbb{R}^2$ car elle contient au moins les éléments suivants $(\lambda_{\pm 2}(m_1), 0)$ et $(0, \lambda_2(m_2))$. Soit $m \in L^\infty(\Omega)$, considérons les notations suivantes

$$\Omega_m^+ = \{x \in \Omega :\, m(x) > 0\} \text{ et } \Omega_m^- = \{x \in \Omega :\, m(x) < 0\}.$$

Remarque 3.3.1 *Soit (α,β) un élément de $\mathscr{C}_2$.*

1. *Si $\alpha > \lambda_2(m_1)$, alors nous avons $\beta < 0$.*

2. *Si $mes(\Omega^-_{m_1}) > 0$ et $\alpha < \lambda_{-2}(m_1)$, alors nous avons $\beta < 0$.*

En effet, supposons pour le premier point que $\alpha > \lambda_2(m_1)$ et $\beta \geq 0$, donc

$$\alpha\, m_1 \leq \alpha\, m_1 + \beta\, m_2,$$

en utilisant la monotonie de λ_2 par rapport au poids, nous obtenons

$$\lambda_2(\alpha\, m_1 + \beta\, m_2) \leq \lambda_2(\alpha\, m_1) = \frac{\lambda_2(m_1)}{\alpha} < 1,$$

puisque, $(\alpha,\beta) \in \mathscr{C}_2$, alors $\lambda_2(\alpha\, m_1 + \beta\, m_2) = 1$, ainsi nécessairement $\beta < 0$.
La preuve de la seconde assertion peut être effectuée de manière similaire à celle de la première.

Théorème 3.3.1 *Soit $m_1, m_2 \in M^+(\Omega)$ deux fonctions poids. Si la condition $(\boldsymbol{A})$ est vérifiée, alors nous avons :*
1. *Pour tout $\beta < 0$, il existe un unique $\alpha_2^+(\beta) > \lambda_2(m_1)$ tel que $(\alpha_2^+(\beta),\beta) \in \mathscr{C}_2$, où*

$$\frac{1}{\alpha_2^+(\beta)} = \sup_{K\in\Gamma_2} \inf_{u\in K\setminus\mathbb{R}} \frac{\displaystyle\int_\Omega m_1\,|u|^p}{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p - \beta \int_\Omega m_2\,|u|^p}. \tag{3.3.2}$$

2. *Si $mes(\Omega^-_{m_1}) > 0$, donc pour tout $\beta < 0$, il existe un unique $\alpha_2^-(\beta) < \lambda_{-2}(m_1)$ tel que $(\alpha_2^-(\beta),\beta) \in \mathscr{C}_2$, où*

$$\frac{1}{\alpha_2^-(\beta)} = \inf_{K\in\Gamma_2} \sup_{u\in K\setminus\mathbb{R}} \frac{\displaystyle\int_\Omega m_1\,|u|^p}{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p - \beta \int_\Omega m_2\,|u|^p}, \tag{3.3.3}$$

avec $\Gamma_2 = \Big\{K \subset S : K$ est un compact symétrique et $\gamma(K) \geq 2\Big\}$ et S est la sphère unité de l'espace $W^{1,p}(\Omega)$.

Preuve. 1. Soit $\beta < 0$, et on définit $\alpha_2^+(\beta)$ comme suit :

$$\frac{1}{\alpha_2^+(\beta)} = \sup_{K\in\Gamma_2} \inf_{u\in K\setminus\mathbb{R}} \frac{\displaystyle\int_\Omega m_1 |u|^p}{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p - \beta \int_\Omega m_2 |u|^p}. \tag{3.3.4}$$

Par définition de $\alpha_2^+(\beta)$ et en tenant compte du fait que toute fonction propre associée à $\lambda_2(m_1)$ change signe sur Ω, on en déduit qu'il existe une fonction propre u qui change de signe sur Ω telle que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v - \beta \int_\Omega m_2 |u|^{p-2} u\, v = \int_\Omega \alpha_2^+(\beta)\, m_1 |u|^{p-2} u\, v \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega). \tag{3.3.5}$$

Remarquons d'abord que, si $w \in W^{1,p}(\Omega)$ est une fonction propre de l'opérateur $-\Delta_p - \beta\, m_2 J_p$ qui change de signe sur Ω associée à une valeur propre $\lambda > 0$, alors $\lambda \geq \alpha_2^+(\beta)$. D'après (3.3.5), nous avons

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v = \int_\Omega (\alpha_2^+(\beta)\, m_1 + \beta m_2)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\, v \ \forall v \in W^{1,p}(\Omega),$$

il en résulte que 1 est une valeur propre de l'opérateur $-\Delta_p$ avec poids $\alpha_2^+(\beta)\, m_1 + \beta\, m_2$, puisque la fonction propre correspondante u change de signe sur Ω, on conclut alors que

$$\lambda_2(\alpha_2^+(\beta)\, m_1 + \beta\, m_2) \leq 1. \tag{3.3.6}$$

D'autre part, en utilisant (3.3.4) on a pour tout $K \in \Gamma_2$, il existe $u_K \in K$ tel que

$$\begin{aligned} \min_{u\in K} \quad & \frac{\displaystyle\int_\Omega m_2 |u|^p}{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p - \beta \int_\Omega m_1 |u|^p} \\ & = \frac{\displaystyle\int_\Omega m_1 |u_K|^p}{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_K|^p - \beta \int_\Omega m_2 |u_K|^p} \leq \frac{1}{\alpha_2^+(\beta)}, \end{aligned}$$

il en résulte que

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega (\alpha_2^+(\beta)\, m_1 + \beta\, m_2)|u_K|^p}{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_K|^p} \leq 1.$$

Ainsi

$$\min_{u\in K} \frac{\int_\Omega (\alpha_2^+(\beta)\, m_1 + \beta\, m_2)\,|u|^p}{\int_\Omega |\nabla u|^p}$$
$$= \frac{\int_\Omega (\alpha_2^+(\beta)\, m_1 + \beta\, m_2)\,|u_K|^p}{\int_\Omega |\nabla u_K|^p} \le 1 \text{ pour tout } K \in \Gamma_2,$$

ce qui implique

$$\sup_{K\in\Gamma_2} \min_{u\in K} \frac{\int_\Omega (\alpha_2^+(\beta)\, m_1 + \beta\, m_2)\,|u|^p}{\int_\Omega |\nabla u|^p} \le 1.$$

Puisque

$$\frac{1}{\lambda_2(\alpha_2^+(\beta)\, m_1 + \beta\, m_2)} = \sup_{K\in\Gamma_2} \min_{u\in K} \frac{\int_\Omega (\alpha_2^+(\beta)\, m_1 + \beta\, m_2)\,|u|^p}{\int_\Omega |\nabla u|^p}$$

on déduit que

$$\lambda_2(\alpha_2^+(\beta)\, m_1 + \beta\, m_2) \ge 1. \tag{3.3.7}$$

En combinant (3.3.6) et (3.3.7), il résulte donc

$$\lambda_2(\alpha_2^+(\beta)\, m_1 + \beta\, m_2) = 1.$$

Soit $\gamma > 0$ tel que $\lambda_2(\gamma\, m_1 + \beta\, m_2) = 1$, alors il existe une fonction propre u qui change de signe sur Ω et

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} u \nabla w = \int_\Omega (\gamma\, m_1 + \beta m_2)\,|u|^{p-2} u\, w \;\forall\; w \in W^{1,p}(\Omega).$$

Par conséquent

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} u \nabla w - \int_\Omega \beta\, m_2 |u|^{p-2} u\, w = \gamma \int_\Omega m_1\,|u|^{p-2} u\, w \;\forall\, \omega \in W^{1,p}(\Omega) \tag{3.3.8}$$

de cette dernière équation, on déduit que γ est une valeur propre de l'opérateur $-\Delta_p - \beta\, m_2 J_p$ avec poids m_1, puisque la correspondante fonction propre u change de signe

sur Ω, on conclut alors que

$$\gamma \geq \alpha_2^+(\beta).$$

Supposons par contradiction que $\gamma > \alpha_2^+(\beta)$, donc

$$\frac{1}{\gamma} < \frac{1}{\alpha_2^+(\beta)} = \sup_{K\in\Gamma_2} \min_{u\in K} \frac{\displaystyle\int_\Omega m_1 |u|^p}{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p - \beta \int_\Omega m_2 |u|^p},$$

par l'inégalité ci-dessus on déduit qu'il existe $K_0 \in \Gamma_2$ tel que

$$\frac{1}{\gamma} < \min_{u\in K_0} \frac{\displaystyle\int_\Omega m_1 |u|^p}{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p - \beta \int_\Omega m_2 |u|^p},$$

puisque K_0 est un compact, alors pour tout $u \in K_0$ on a

$$\frac{1}{\gamma} < \frac{\displaystyle\int_\Omega m_1 |u_0|^p}{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_0|^p - \beta \int_\Omega m_2 |u_0|^p}.$$

Par conséquent

$$1 < \min_{u\in K_0} \frac{\displaystyle\int_\Omega (\gamma\, m_1 + \beta\, m_2)|u_0|^p}{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_0|^p}$$

il s'ensuit que

$$1 < \sup_{K\in\Gamma_2} \min_{u\in K} \frac{\displaystyle\int_\Omega (\gamma\, m_1 + \beta\, m_2)|u|^p}{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2} = \frac{1}{\lambda_2(\gamma\, m_1 + \beta\, m_2)} = 1,$$

ce qui donne une contradiction, nous avons donc $\gamma = \alpha_2^+(\beta)$.

Pour la démonstration de l'assertion **2)** du théorème, nous définissons $\alpha_2^-(\beta)$ comme suit

$$\frac{1}{\alpha_2^-(\beta)} = \inf_{K\in\Gamma_2}\max_{u\in K\setminus\mathbb{R}} \frac{\displaystyle\int_\Omega m_1|u|^p}{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p - \beta\int_\Omega m_2|u|^p} \tag{3.3.9}$$

et on suit les mêmes arguments comme dans la preuve de **1)**.

3.4 Courbes propres du p-Laplacien avec poids indéfinis en dimension un

Dans la présente section nous étudions l'existence des courbes propres du $p-$Laplacien avec poids pour un problème de Neumann unidimensionnel. De plus, on établit une formulation variationnelle des courbes propres et on montre que toutes les courbes propres ayant le même comportement asymptotique. Enfin on termine cette section par l'étude de quelques propriétés de la courbe propre principale, notament la concavité et la différentiabilité.
Conséderons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\left(|u'|^{p-2}u'\right)' = \left(\alpha\, m_1(x) + \beta_n(\alpha)\, m_2(x)\right)|u|^{p-2}u \quad \text{dans} \quad I=]a,b[\\ \\ \qquad\qquad u'(a) = u'(b) = 0 \end{cases} \tag{3.4.1}$$

où $a,b\in\mathbb{R}$ $(a<b)$, $1<p<+\infty$ et m_1, m_2 sont deux fonctions poids satisfont la condition suivante :

$$m_1, m_2 \in M^+(I) \text{ et } \inf_I ess\, m_2 > 0 \tag{3.4.2}$$

avec

$$M^+(I) = \left\{ m\in L^\infty(I) : \text{mes}(\{x\in I : m(x)>0\}) \neq 0 \right\}.$$

Définition 3.4.1 *Etant donnée deux fonctions poids $m_1, m_2 \in M^+(\Omega)$ non identiquement nulles. On définit la $n^{ième}$ courbe propre du p-Laplacien avec poids et*

avec condition de Neumann au bord par

$$\mathscr{C}_n \overset{def}{=} \Big\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2;\lambda_n(\alpha\, m_1+\beta\, m_2)=1\Big\}. \tag{3.4.3}$$

Notre objectif est de montrer que lorsque le poids m_2 vérifie la condition (3.4.2), l'ensemble $\mathscr{C}_n$ est effectivement une courbe continue. Néanmoins, avec la notation (3.4.3) nous avons pu établir que toutes les courbes propres ont même comportement asymptotique (voir la sous-section 3.4.5).

On trouve dans la littérature sur les courbes propres de $-\Delta_p$ une autre définition. En fait Binding et Huang [15] ont considéré la $n^{ième}$ courbe propre du p-Laplacien comme étant la courbe de la fonction β_n définie par

$$\beta_n(\alpha)=\inf_{K\in\Gamma_n}\max_{u\in K}\frac{\displaystyle\int_I |u'|^p\,dx-\alpha\int_I m_1|u|^p\,dx}{\displaystyle\int_I m_2|u|^p\,dx},$$

où $\Gamma_n=\Big\{K\subset S:\ \text{K est symétrique, compact et } \gamma(K)\geq n\Big\}$ et S est la sphère unité de l'espace $W^{1,p}(I)$.

Notons que avec cette dernière définition, les auteures dans [15] ont étudié seulement le comportement asymptotique de courbe propre principale, ils se sont basés sur la simplicité géométrique et algébrique de la valeur propre principale du p-Laplacien. C'est pour cela leur technique ne s'adapte pas pour les autres courbes propres $\mathscr{C}_n$ où $n\geq 2$. Pour exposer nos résultats, on rappelle en premier lieu l'énoncé d'un résultat qu'on va faire usage dans cette section.

Lemme 3.4.1 (cf. [23, 24])

1. *Soit $m\in M^+(I)$, alors pour tout $n\geq 1$ l'application $\lambda_n : m\longrightarrow \lambda_n(m)$ est continue dans $(M^+(I),\|.\|_\infty)$.*
2. *Soit $(m_k)_k$ une suite dans $M^+(I)$ telle que $m_k\longrightarrow m$ dans $L^\infty(I)$ quand $k\longrightarrow+\infty$, alors*

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty}\lambda_n(m_k)=+\infty \text{ si et seulement si } m\leq 0 \text{ presque partout dans } I.$$

Maintenant, on est en mesure de donner notre premier résultat de cette section.

3.4.1 Existence des courbes propres du p-Laplacien avec poids indéfinis en dimension un

Nous établissons l'existence de la $n^{ième}$ courbe propre. Soit $m \in L^\infty(I)$. D'abord on introduit les notations suivantes :

$$I_m^+ \overset{def}{=} \{x \in I; m(x) > 0\} \text{ et } I_m^- \overset{def}{=} \{x \in I; m(x) < 0\}.$$

Théorème 3.4.1 *Soient m_1 et m_2 deux fonctions poids. On suppose que m_1 et m_2 vérifient la condition* (3.4.2) *en plus si $mes(I_{m_1}^-) > 0$. Alors nous avons :*

1. *Si $n \geq 2$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ il existe un unique nombre réel $t_n(\alpha)$ tel que*

$$\lambda_n(\alpha\, m_1 + t_n(\alpha)\, m_2) = 1.$$

2. *Si $n = 1$, en outre supposons que le poids m_1 change de signe sur I et $\int_I m_1\, dx < 0$. Alors nous avons pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ il existe un unique nombre réel $t_1(\alpha)$ qui satisfait*

$$\lambda_1(\alpha\, m_1 + t_1(\alpha)\, m_2) = 1.$$

Preuve. **1.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, nous considérons la fonction $f_\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $t \longmapsto \lambda_n(\alpha\, m_1 + t\, m_2)$. D'après la proposition 3.1.1 et le lemme 3.4.1 on peut montrer que f_α est une fonction continue et décoissante, donc f_α est injective. Pour montrer que l'équation $f_\alpha(t) = 1$ admet une solution, nous distinguons les trois cas suivants :

1^{er} **cas $\lambda_{-n}(m_1) < \alpha < \lambda_n(m_1)$.**
Si $\alpha = 0$, alors l'unique réel t_0 qui vérifie $\lambda_n(\alpha\, m_1 + t_0\, m_2) = 1$ est $t_0 = \lambda_n(m_2)$.
Supposons que $\alpha \neq 0$, dans ce cas nous avons

$$f_\alpha(0) = \frac{\lambda_n(m_1)}{\alpha} \quad \text{si } \alpha > 0$$

et

$$f_\alpha(0) = \frac{\lambda_{-n}(m_1)}{\alpha} \quad \text{si } \alpha < 0,$$

alors $f_\alpha(0) > 1$ car $mes(I^-_{m_1}) > 0$.
Puisque $\frac{\alpha}{t} m_1 + m_2 \to m_2$ dans $L^\infty(I)$ quand $t \to +\infty$, donc

$$\lim_{t\to+\infty} f_\alpha(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\lambda_n(\frac{\alpha}{t} m_1 + m_2) = 0,$$

comme $1 \in]0, f_\alpha(0)[$, alors il existe un unique réel $t_n(\alpha) \in]0, +\infty[$ qui vérifie $f_\alpha(t_n(\alpha)) = 1$.

$2^{ième}$ **cas** $\alpha \geq \lambda_n(m_1)$**.**
Si $\alpha = \lambda_n(m_1)$, on prend $t_n = 0$.
Pour $\alpha > \lambda_n(m_1)$, nous avons $\alpha > 0$, ainsi

$$0 < f_\alpha(0) = \lambda_n(\alpha\, m_1) = \frac{\lambda_n(m_1)}{\alpha} < 1. \tag{3.4.4}$$

Soit $\gamma_\alpha = \dfrac{-\alpha \| m_1 \|_\infty}{\inf\limits_I ess\, m_2}$,

$$A_\alpha = \left\{ t < 0 : \alpha\, m_1 + t\, m_2 \leq 0 \quad \text{p.p.} \quad x \in I \right\} \quad \text{et} \quad \tau_\alpha = \sup A_\alpha$$

on peut aisément voir

$$\alpha\, m_1 + \gamma_\alpha\, m_2 \leq 0 \quad \text{p.p. dans } I,$$

donc $A_\alpha \neq \emptyset$, nous allons prouver que $\tau_\alpha \in A_\alpha$. En effet, tout d'abord, nous montrons que $\tau_\alpha < 0$. Puisque $f_\alpha(0) > 0$, et f_α est une fonction continue alors il existe $\eta < 0$ tel que $f_\alpha(t) > 0$ pour tout $t \in [\eta, 0]$. Donc $\lambda_n(\alpha\, m_1 + t\, m_2) > 0$ pour tout $t \in [\eta, 0]$, ce qui donne

$$\alpha\, m_1 + t\, m_2 \in M^+(I) \quad \text{pour tout} \quad t \in [\eta, 0],$$

Par conséquent $\tau_\alpha \leq \eta < 0$. En outre, par utilisation de la définition de τ_α, nous avons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $t_k \in A_\alpha$ tel que $\tau_\alpha - \frac{1}{k} < t_k$. Il s'ensuit que

$$\alpha\, m_1(x) + \tau_\alpha\, m_2(x) \leq \alpha\, m_1(x) + t_k\, m_2(x) + \frac{1}{k} m_2(x) \leq \frac{1}{k} \| m_2 \|_\infty \quad \text{p.p.} \quad x \in I$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Par conséquent, en passant à la limite avec $k \to +\infty$, on obtient

$$\alpha\, m_1(x) + \tau_\alpha\, m_2(x) \leq 0 \quad \text{p.p.} \quad x \in I,$$

ainsi, $\tau_\alpha \in A_\alpha$. Donc grâce au lemme 3.4.1 on trouve

$$\lim_{t \to \tau_\alpha} f_\alpha(t) = +\infty, \tag{3.4.5}$$

il résulte de (3.4.4) et (3.4.5) qu'il existe un unique réel $t_n(\alpha) \in]\tau_\alpha, 0[$ qui vérifie

$$f_\alpha(t_n(\alpha)) = 1.$$

$3^{ième}$ **cas** $\alpha \leq \lambda_{-n}(m_1)$**.**

Si $\alpha = \lambda_{-n}(m_1)$, on prend $t_n = 0$.

Pour $\alpha < \lambda_{-n}(m_1)$, dans ce cas nous avons $\alpha < 0$ et

$$0 < f_\alpha(0) = \lambda_n(\alpha\, m_1) = \frac{\lambda_{-n}(m_1)}{\alpha} < 1. \tag{3.4.6}$$

Nous cherchons un réel θ_α tel que $\lim\limits_{t \to \theta_\alpha} f_\alpha(t) = +\infty$.

En effet, soit $\mu_\alpha = \dfrac{\alpha \| m_1 \|_\infty}{\inf\limits_I ess\, m_2}$,

$$B_\alpha = \left\{ t < 0 : \alpha\, m_1 + t\, m_2 \leq 0 \text{ p.p. } x \in I \right\} \quad \text{et} \quad \theta_\alpha = \sup B_\alpha.$$

C'est claire que $\mu_\alpha \in B_\alpha$, donc $B_\alpha \neq \emptyset$.

Le reste de la preuve peut être effectué de manière similaire à celle du cas 2.

Pour prouver la conclusion **2)**, on suppose de plus que le poids m_1 change de signe sur I et $\displaystyle\int_I m_1 dx < 0$, alors par la même preuve que la première, en prenant en considération que $\lambda_{-1}(m_1) = 0$.

Remarquons que si par exemple $\int_I m_1 dx = 0$, alors $\lambda_1(m_1) = \lambda_{-1}(m_1) = 0$ et donc le premier cas de la preuve n'a pas de sens.

Lemme 3.4.2 *Soit* $(\alpha, \beta) \in \mathscr{C}_n$

1. *Si* $\alpha > \lambda_n(m_1)$, *alors nous avons* $\beta < 0$.
2. *Si* $mes(I^-_{m_1}) > 0$ *et* $\alpha < \lambda_{-n}(m_1)$, *alors nous avons* $\beta < 0$.

Preuve. Vérification de la première assertion **1)**, soit $\alpha > \lambda_n(m_1)$ supposons par absurde, que $\beta \geq 0$, alors on obtient

$$\alpha\, m_1 \leq \alpha\, m_1 + \beta\, m_2,$$

donc par la monotonie de λ_n par rapport au poids, on obtient

$$1 = \lambda_n(\alpha\, m_1 + \beta\, m_2) \leq \lambda_n(\alpha\, m_1) = \frac{\lambda_n(m_1)}{\alpha} < 1.$$

En tenant compte que $(\alpha, \beta) \in \mathscr{C}_n$ (i.e. $\lambda_n(\alpha\, m_1 + \beta\, m_2) = 1$), ce qui est donne une contradiction, donc nécessairement nous avons $\beta < 0$. Pour conclure la preuve de l'assertion **2)** il suffit de suivre la même démarche précédente en remarquant que $\lambda_{-n}(m_1) = -\lambda_n(-m_1)$.

3.4.2 La caractérisation variationnelle des courbes propres $\mathscr{C}_n$ avec $n \geq 2$

On va établir dans cette sous-section une caractérisation variationnelle des courbes propres $\mathscr{C}_n$ avec $n \geq 2$. Pour cela, nous introduisons à nouveau la formulation de $\beta_n(\alpha)$ donnée par P. A. Binding et Y. X. Huang dans [15].

$$\beta_n(\alpha) = \inf_{K \in \Gamma_n} \max_{u \in K} \frac{\displaystyle\int_I |u'|^p dx - \alpha \int_I m_1 |u|^p dx}{\displaystyle\int_I m_2 |u|^p dx}, \tag{3.4.7}$$

où $\Gamma_n = \left\{ K \subset S : \text{ K est symétrique, compact et } \gamma(K) \geq n \right\}$ et S est la sphère unité de l'espace $W^{1,p}(I)$, puis nous montrons que le graphe de $\beta_n(\alpha)$ est confondu avec $\mathscr{C}_n$ la

$n^{ième}$ courbe propre de $-\Delta_p$ avec poids.

Théorème 3.4.2 *Supposons que les deux poids m_1 et m_2 vérifient la condition* (3.4.2) *et nous reprenons la notation du théorème* 3.4.1. *Alors pour $n \geq 2$ nous avons*

$$t_n(\alpha) = \beta_n(\alpha) \quad \textit{pour tout } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Preuve. On considère φ_n une fonction propre associée à la valeur propre $\lambda_n(\alpha\ m_1 + t_n(\alpha)\ m_2) = 1$, i.e.

$$\int_I |\varphi_n'|^{p-2}\varphi_n' v' dx = \int_I (\alpha\ m_1 + t_n(\alpha)\ m_2)|\varphi_n|^{p-2}\varphi_n v dx \quad \forall v \in W^{1,p}(I),$$

alors d'après le résultat de A. Dakkak, S. El Habib et N. Tsouli [23] la fonction propre φ_n admet exactement $n-1$ zéros dans I, et ne s'annule pas sur le bord de I.

On désigne par $Z(\varphi_n) = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$ l'ensemble des zéros de φ_n dans I avec $x_1 < x_2 <, \ldots, < x_{n-1}$, et nous prenons $x_0 = a$ et $x_n = b$, pour $i = 1, \ldots, n$ on définit la fonction u_i comme la restriction de φ_n sur $I_i =]x_{i-1}, x_i[$ et $\widetilde{u}_i$ son prolongement par zéro sur I.

Nous considérons le sous-espace $F_n = vect(\widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_n)$ qui est un sous-espace vectoriel de dimension n de l'espace $W^{1,p}(I)$ et on pose $K_{\varphi_n} = F_n \cap S$, où S est la sphère unité de $W^{1,p}(I)$.

Soit $u \in K_{\varphi_n}$, donc $u \neq 0$ et il existe $(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $u = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \widetilde{u}_i$.

On en déduit

$$|u|^p = \sum_{i=1}^{n} |\delta_i|^p |\widetilde{u}_i|^p,$$

car $I_i \cap I_j \neq \emptyset$ pour $i \neq j$.

Il est clair que K_{φ_n} est un compact symétrique et $\gamma(K_{\varphi_n}) = n$, par conséquent $K_{\varphi_n} \in \Gamma_n$.

En utilisant (3.4.7), on obtient

$$\beta_n(\alpha) \leq \max_{u \in K_{\varphi_n}} \frac{\displaystyle\int_I |u'|^p dx - \alpha \int_I m_1 |u|^p dx}{\displaystyle\int_I m_2 |u|^p dx},$$

puisque $u \in K_{\varphi_n}$, alors

$$\begin{aligned}\int_I |u'|^p dx &= \sum_{i=1}^n |\delta_i|^p \int_{I_i} |\widetilde{u}_i'|^p dx \\ &= \sum_{i=1}^n |\delta_i|^p \int_{I_i} |\varphi_n'|^{p-2} \varphi_n' \widetilde{u}_i' dx \\ &= \sum_{i=1}^n |\delta_i|^p \int_I |\varphi_n'|^{p-2} \varphi_n' \widetilde{u}_i' dx,\end{aligned}$$

car $\widetilde{u}_i'(x) = 0$ sur $I \setminus I_i$.

Maintenant, en utilisant le fait que φ_n est une fonction propre associée à la valeur propre $\lambda_n(\alpha\, m_1 + t_n(\alpha)\, m_2) = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_I |u'|^p dx &= \sum_{i=1}^n |\delta_i|^p \int_I (\alpha\, m_1 + t_n(\alpha)\, m_2) |\varphi_n|^{p-2} \varphi_n \widetilde{u}_i dx \\ &= \sum_{i=1}^n |\delta_i|^p \int_{I_i} (\alpha\, m_1 + t_n(\alpha)\, m_2) |\varphi_n|^{p-2} \varphi_n \widetilde{u}_i dx \\ &= \sum_{i=1}^n |\delta_i|^p \int_{I_i} (\alpha\, m_1 + t_n(\alpha)\, m_2) |\widetilde{u}_i|^p dx \\ &= \int_I (\alpha\, m_1 + t_n(\alpha)\, m_2) \sum_{i=1}^n |\delta_i|^p |\widetilde{u}_i|^p dx \\ &= \int_I (\alpha\, m_1 + t_n(\alpha)\, m_2) |u|^p dx,\end{aligned}$$

ainsi

$$\frac{\displaystyle\int_I |u'|^p dx - \alpha \int_I m_1 |u|^p dx}{\displaystyle\int_I m_2 |u|^p dx} = \frac{\displaystyle\int_I (\alpha\, m_1 + t_n(\alpha)\, m_2) |u|^p dx - \alpha \int_I m_1 |u|^p dx}{\displaystyle\int_I m_2 |u|^p dx} = t_n(\alpha).$$

On déduit alors que

$$\beta_n(\alpha) \leq t_n(\alpha). \tag{3.4.8}$$

D'autre part, d'après la définition de $t_n(\alpha)$ nous avons

$$\lambda_n(\alpha\, m_1 + t_n(\alpha)\, m_2) = 1$$

cela signifie que

$$\sup_{K\in\Gamma_n}\min_{u\in K}\frac{\int_I(\alpha\ m_1+t_n(\alpha)\ m_2)|u|^p\,dx}{\int_I|u'|^p\,dx}=1,$$

et puisque pour tout $K\in\Gamma_n$, il existe $u_K\in K$ tel que

$$\begin{aligned}\frac{\int_I(\alpha\ m_1+t_n(\alpha)\ m_2)|u_K|^p\,dx}{\int_I|u_K'|^p\,dx} &= \min_{u\in K}\frac{\int_I(\alpha\ m_1+t_n(\alpha)\ m_2)|u|^p\,dx}{\int_I|u'|^p\,dx}\\ &\le \frac{1}{\lambda_n(\alpha\ m_1+t_n(\alpha)\ m_2)}=1,\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\alpha\int_I m_1|u_K|^p\,dx+t_n(\alpha)\int_I m_2|u_K|^p\,dx\le\int_I|u_K'|^p\,dx$$

on conclut que

$$t_n(\alpha)\int_I m_2|u_K|^p\,dx\le\int_I|u_K'|^p\,dx-\alpha\int_I m_1|u_K|^p\,dx.$$

Grâce à l'hypothèse $\inf_I ess\, m_2>0$, on obtient

$$t_n(\alpha)\le\frac{\int_I|u_K'|^p\,dx-\alpha\int_I m_1|u_K|^p\,dx}{\int_I m_2|u_K|^p\,dx}\le\max_{u\in K}\frac{\int_I|u'|^p\,dx-\alpha\int_I m_1|u|^p\,dx}{\int_I m_2|u|^p\,dx},$$

cela est vrai pour tout $K\in\Gamma_n$, donc

$$t_n(\alpha)\le\inf_{K\in\Gamma_n}\max_{u\in K}\frac{\int_I|u'|^p\,dx-\alpha\int_I m_1|u|^p\,dx}{\int_I m_2|u|^p\,dx}=\beta_n(\alpha).\tag{3.4.9}$$

Finalement, en combinant (3.4.8) et (3.4.9), on obtient

$$t_n(\alpha) = \beta_n(\alpha).$$

3.4.3 La caractérisation variationnelle de la courbe propre principale $\mathscr{C}_1$

De nouveau dans cette sous-section nous avons besoin de l'hypothèse supplémentaire suivante sur le poids m_1

$$m_1 \text{ change signe sur } I \text{ et } \int_I m_1\,dx < 0. \tag{3.4.10}$$

On définit $\beta_1(\alpha)$ comme suit

$$\beta_1(\alpha) = \inf_{\substack{u\in W^{1,p}(I)\\ u\neq 0}} \frac{\displaystyle\int_I |u'|^p\,dx - \alpha\int_I m_1|u|^p\,dx}{\displaystyle\int_I m_2|u|^p\,dx}. \tag{3.4.11}$$

Théorème 3.4.3 *Supposons que m_1 et m_2 vérifient les conditions* (3.4.2) *et* (3.4.10). *Alors*

$$t_1(\alpha) = \beta_1(\alpha) \quad \textit{pour tout } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Preuve. Considérons $(\alpha, t_1(\alpha)) \in \mathscr{C}_1$ où $t_1(\alpha)$ est donnée par le théorème 3.4.1, nous allons montrer que $\beta_1(\alpha) = t_1(\alpha)$. En effet, comme $(\alpha, t_1(\alpha)) \in \mathscr{C}_1$ alors nous avons $\lambda_1(\alpha\, m_1 + t_1(\alpha)\, m_2) = 1$, i.e.

$$\inf_{u\in\mathscr{A}(\alpha\, m_1+t_1(\alpha)\, m_2)} \int_I |u'|^p\,dx = 1 \tag{3.4.12}$$

où $\mathscr{A}(\alpha\, m_1 + t_1(\alpha)\, m_2) = \left\{u \in W^{1,p}(I) : \displaystyle\int_I (\alpha\, m_1 + t_1(\alpha)\, m_2)|u|^p = 1\right\}$.
Fixons $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $u \in W^{1,p}(I) \setminus \{0\}$, nous allons étudier les deux cas suivants :

1^{er} **cas :** $\int_I (\alpha\, m_1 + t_1(\alpha)\, m_2)|u|^p\, dx > 0$**.**

Posons

$$v = \frac{u}{\left(\int_I (\alpha\, m_1 + t_1(\alpha)\, m_2)|u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}},$$

on a

$$\int_I (\alpha\, m_1 + t_1(\alpha)\, m_2)|v|^p\, dx = 1,$$

ce qui implique que $v \in \mathscr{A}(\alpha\, m_1 + t_1(\alpha)\, m_2)$.

Ainsi, d'après (3.4.12) on obtient

$$1 \leq \int_I |v'|^p\, dx,$$

c'est-à-dire

$$1 \leq \frac{\int_I |u'|^p\, dx}{\int_I (\alpha\, m_1 + t_1(\alpha)\, m_2)|u|^p\, dx},$$

par conséquent

$$\int_I |u'|^p\, dx \geq \int_I (\alpha\, m_1 + t_1(\alpha)\, m_1)|u|^p\, dx.$$

$2^{ième}$ **cas :** $\int_I (\alpha\, m_1 + t_1(\alpha)\, m_2)|u|^p\, dx \leq 0$**.**

Dans ce cas, nous avons

$$\int_I |u'|^p\, dx \geq 0,$$

donc il est facile de voir que

$$\int_I |u'|^p\, dx \geq \int_I (\alpha\, m_1 + t_1(\alpha)\, m_2)|u|^p\, dx,$$

Ainsi, dans les deux cas nous avons

$$\int_I |u'|^p\, dx - \alpha \int_I m_1|u|^p\, dx \geq t_1(\alpha) \int_I m_2|u|^p\, dx,$$

puisque $\inf_I ess\, m_2 > 0$ et $u \neq 0$, donc

$$t_1(\alpha) \leq \frac{\displaystyle\int_I |u'|^p dx - \alpha \int_I m_1 |u|^p dx}{\displaystyle\int_I m_2 |u|^p dx},$$

ce qui donne

$$t_1(\alpha) \leq \inf_{\substack{u \in W^{1,p}(I) \\ u \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_I |u'|^p dx - \alpha \int_I m_1 |u|^p dx}{\displaystyle\int_I m_2 |u|^p dx} = \beta_1(\alpha),$$

il en résulte que

$$t_1(\alpha) \leq \beta_1(\alpha). \tag{3.4.13}$$

D'autre part, soit $u \in \mathscr{A}(\alpha\, m_1 + \beta_1(\alpha)\, m_2)$, alors d'après la définition de $\beta_1(\alpha)$ nous avons

$$\beta_1(\alpha) \leq \frac{\displaystyle\int_I |u'|^p dx - \int_I \alpha\, m_1 |u|^p dx}{\displaystyle\int_I m_2 |u|^p dx},$$

par conséquent

$$\int_I (\alpha\, m_1 + \beta_1(\alpha)\, m_2) |u|^p dx \leq \int_I |u'|^p dx,$$

et comme $u \in \mathscr{A}(\alpha\, m_1 + \beta_1(\alpha)\, m_2)$ alors $\displaystyle\int_I (\alpha\, m_1 + \beta_1(\alpha)\, m_2) |u|^p dx = 1$, c'est-à-dire

$$1 \leq \int_I |u'|^p dx,$$

ainsi

$$1 \leq \inf_{u \in \mathscr{A}(\alpha\, m_1 + \beta_1(\alpha)\, m_2)} \int_I |u'|^p dx,$$

il s'ensuit

$$1 \leq \lambda_1(\alpha\, m_1 + \beta_1(\alpha)\, m_2).$$

Supposons par contradiction que $t_1(\alpha) < \beta_1(\alpha)$. Donc, en utilisant la propriété de stricte monotonie par rapport au poids de λ_1 on en déduit

$$1 = \lambda_1(\alpha\, m_1 + t_1(\alpha)\, m_2) > \lambda_1(\alpha\, m_1 + \beta_1(\alpha)\, m_2) \geq 1.$$

ce qui est absurde, par conséquent

$$t_1(\alpha) \geq \beta_1(\alpha). \tag{3.4.14}$$

Enfin, à partir de (3.4.13) et (3.4.14) on en déduit $t_1(\alpha) = \beta_1(\alpha)$.

3.4.4 La concavité et la différentiabilité de la courbe propre principale $\mathscr{C}_1$

Notre but dans cette sous-section est d'étudier la concavité et la différentiabilité de $\mathscr{C}_1$ la courbe propre principale du p-Laplacien.

Proposition 3.4.1 *Supposons que les deux poids m_1 et m_2 vérifient les conditions* (3.4.2) *et* (3.4.10). *Alors la fonction $\alpha \longrightarrow \beta_1(\alpha)$ est concave et différentiable, et pour tout $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ nous avons*

$$\beta_1'(\alpha_0) = -\frac{\displaystyle\int_I m_1|\varphi_{\alpha_0}|^p dx}{\displaystyle\int_I m_2|\varphi_{\alpha_0}|^p dx},$$

où φ_{α_0} est une fonction propre associée à la valeur propre $\lambda_1(\alpha_0 m_1 + \beta_1(\alpha_0) m_2) = 1$.

Preuve. Pour $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ et $t \in]0,1[$, nous avons

$$\begin{aligned}
\beta_1(t\mu_1 + (1-t)\mu_2) &= \inf_{\substack{u \in W^{1,p}(I) \\ u \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_I |u'|^p dx - (t\mu_1 + (1-t)\mu_2) \int_I m_1|u|^p dx}{\displaystyle\int_I m_2|u|^p dx} \\
&\geq t \inf_{\substack{u \in W^{1,p}(I) \\ u \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_I |u'|^p dx - \mu_1 \int_I m_1|u|^p dx}{\displaystyle\int_I m_2|u|^p dx} \\
&\quad + (1-t) \inf_{\substack{u \in W^{1,p}(I) \\ u \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_I |u'|^p dx - \mu_2 \int_I m_1|u|^p dx}{\displaystyle\int_I m_2|u|^p dx} \\
&\geq t\beta_1(\mu_1) + (1-t)\beta_1(\mu_2).
\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité permet de dire que la fonction $\alpha \to \beta_1(\alpha)$ est concave.
Maintenant, nous étudions la différentiabilité de la fonction $\alpha \to \beta_1(\alpha)$ sur $\mathbb{R}$. Soit $\alpha, \alpha_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \neq \alpha_0$, et soit φ_0 une fonction propre associée à la valeur propre

$\lambda_1(\alpha_0\, m_1 + \beta_1(\alpha_0)\, m_2) = 1$.

D'une part nous avons

$$\begin{aligned}\beta_1(\alpha) &\leq \frac{\displaystyle\int_I |\varphi_0'|^p\, dx - \alpha \int_I m_1 |\varphi_0|^p\, dx}{\displaystyle\int_I m_2 |\varphi_0|^p\, dx} \\ &\leq \frac{\displaystyle\int_I |\varphi_0'|^p\, dx - \alpha_0 \int_I m_1 |\varphi_0|^p\, dx}{\displaystyle\int_I m_2 |\varphi_0|^p\, dx} - (\alpha - \alpha_0) \frac{\displaystyle\int_I m_1 |\varphi_0|^p\, dx}{\displaystyle\int_I m_2 |\varphi_0|^p\, dx} \\ &\leq \beta_1(\alpha_0) - (\alpha - \alpha_0) \frac{\displaystyle\int_I m_1 |\varphi_0|^p\, dx}{\displaystyle\int_I m_2 |\varphi_0|^p\, dx}.\end{aligned} \tag{3.4.15}$$

Ensuite, on en déduit que

$$\limsup_{\alpha \to \alpha_0^+} \frac{\beta_1(\alpha) - \beta_1(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} \leq - \frac{\displaystyle\int_I m_1 |\varphi_0|^p\, dx}{\displaystyle\int_I m_2 |\varphi_0|^p\, dx}, \tag{3.4.16}$$

et

$$\limsup_{\alpha \to \alpha_0^-} \frac{\beta_1(\alpha) - \beta_1(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} \geq - \frac{\displaystyle\int_I m_1 |\varphi_0|^p\, dx}{\displaystyle\int_I m_2 |\varphi_0|^p\, dx}. \tag{3.4.17}$$

D'autre part, de la même manière comme dans l'inégalité (3.4.15), on obtient

$$\beta_1(\alpha_0) \leq \beta_1(\alpha) - (\alpha_0 - \alpha) \frac{\displaystyle\int_I m_1 |\varphi_0|^p\, dx}{\displaystyle\int_I m_2 |\varphi_0|^p\, dx},$$

donc

$$- \frac{\displaystyle\int_I m_1 |\varphi_0|^p\, dx}{\displaystyle\int_I m_2 |\varphi_0|^p\, dx} \leq \liminf_{\alpha \to \alpha_0^+} \frac{\beta_1(\alpha) - \beta_1(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} \tag{3.4.18}$$

et

$$- \frac{\displaystyle\int_I m_1 |\varphi_0|^p\, dx}{\displaystyle\int_I m_2 |\varphi_0|^p\, dx} \geq \liminf_{\alpha \to \alpha_0^-} \frac{\beta_1(\alpha) - \beta_1(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0}. \tag{3.4.19}$$

grâce aux deux inégalités (3.4.16) et (3.4.18), nous obtenons

$$\beta_1'(\alpha_0^+) = -\frac{\displaystyle\int_I m_1|\varphi_0|^p\,dx}{\displaystyle\int_I m_2|\varphi_0|^p\,dx}, \tag{3.4.20}$$

grâce aux deux inégalités (3.4.17) and (3.4.19), nous obtenons

$$\beta_1'(\alpha_0^-) = -\frac{\displaystyle\int_I m_1|\varphi_0|^p\,dx}{\displaystyle\int_I m_2|\varphi_0|^p\,dx}. \tag{3.4.21}$$

Finalement en combinant (3.4.20) et (3.4.21), on déduit que la fonction est différentiable en α_0 et

$$\beta_1'(\alpha_0) = -\frac{\displaystyle\int_I m_1|\varphi_0|^p\,dx}{\displaystyle\int_I m_2|\varphi_0|^p\,dx}.$$

3.4.5 Comportement asymptotique de $\mathscr{C}_n$

Le but de cette sous-section est d'étudier le comportement asymptotique des courbes propres $\mathscr{C}_n$, pour cela, nous investissons le résultat principal du théorème 3.4.1. En fait, définir $\mathscr{C}_n$ où $n \geq 2$ par son expression $\beta_n(\alpha)$ donnée par la formulation variationnelle (3.4.7), rend malheureusement l'étude de son comportement asymptotique très difficile. L'idée du résultat suivant est parfaitement inspirée du travail de A. Dakkak et M. Hadda [24].

Théorème 3.4.4 *Supposons que les deux poids m_1 et m_2 satisfont les hypothèses* (3.4.2) *et* (3.4.10)*, alors nous avons*

1. $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\beta_n(\alpha)}{\alpha} = -\sup_I ess\frac{m_1}{m_2}.$

2. $\displaystyle\lim_{\alpha\to-\infty} \frac{\beta_n(\alpha)}{\alpha} = -\inf_I ess\frac{m_1}{m_2}.$

Preuve. Vérifions l'assertion **1)**. On considère $\alpha > \lambda_n(m_1)$, donc grâce au théorème 3.4.1 on déduit qu'il existe $\beta_n(\alpha)$ tel que $(\alpha, \beta_n(\alpha)) \in \mathscr{C}_n$, i.e.

$$\lambda_n(\alpha\, m_1 + \beta_n(\alpha)\, m_2) = 1.$$

D'autre part, on remarquera que

$$\alpha\, m_1 + \beta_n(\alpha)\, m_2 = \alpha(m_1 + \frac{\beta_n(\alpha)}{\alpha}\, m_2),$$

ce qui entraîne que

$$\lambda_n(m_1 + \frac{\beta_n(\alpha)}{\alpha}\, m_2) = \alpha,$$

qui est une quantité finie et positive, donc

$$m_1 + \frac{\beta_n(\alpha)}{\alpha}\, m_2 \in M^+(I).$$

Ainsi il existe un sous-ensemble $I_\alpha \subset I$ tel que

$$mes(I_\alpha) \neq 0 \quad \text{et} \quad m_1(x) + \frac{\beta_n(\alpha)}{\alpha}\, m_2(x) > 0 \quad \text{p.p.} \quad x \in I_\alpha.$$

Par conséquent,

$$\frac{-\beta_n(\alpha)}{\alpha} < \frac{m_1(x)}{m_2(x)} \quad \text{p.p.} \quad x \in I_\alpha$$

il s'ensuit que

$$\frac{-\beta_n(\alpha)}{\alpha} < \sup_I ess \frac{m_1}{m_2},$$

ce qui implique

$$\limsup_{\alpha \to +\infty} \frac{-\beta_n(\alpha)}{\alpha} \leq \sup_I ess \frac{m_1}{m_2}. \tag{3.4.22}$$

D'autre part, soit $l = \liminf_{\alpha \to +\infty} \frac{-\beta_n(\alpha)}{\alpha}$, donc pour une sous-suite de $(\alpha_k)_k$ telle que $\alpha_k \to +\infty$, nous avons

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{-\beta_n(\alpha_k)}{\alpha_k} = l \quad \text{et} \quad \lambda_n(m_1 + \frac{\beta_n(\alpha_k)}{\alpha_k}\, m_2) = \alpha_k.$$

Puisque

$$m_1 + \frac{\beta_n(\alpha_k)}{\alpha_k}\, m_2 \to m_1 - l\, m_2 \quad \text{dans } L^\infty(I) \quad \text{et} \quad \alpha_k \to +\infty,$$

alors par le lemme 3.4.1, on obtient $m_1 - l\, m_2 \leq 0$ *p.p.* $x \in I$, c'est-à-dire

$$\frac{m_1}{m_2} \leq l \quad \text{p.p. dans } I,$$

ou encore

$$\sup_I ess \frac{m_1}{m_2} \leq l = \liminf_{\alpha \to +\infty} \frac{-\beta_n(\alpha)}{\alpha}. \tag{3.4.23}$$

Finalement, en combinant (3.4.22) et (3.4.23), on obtient

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{\beta_n(\alpha)}{\alpha} = -\sup_I ess \frac{m_1}{m_2},$$

ce qui achève la démonstration du premier résultat.

Nous pouvons prouver l'assertion **2)** de la même manière comme **1)**.

Deuxième partie

Étude de Non-Résonance pour Certains Problèmes Elliptiques de Neumann

CHAPITRE 4

NON-RÉSONANCE SOUS LA COURBE PROPRE PRINCIPALE

Ce chapitre est consacré à l'étude du problème de non-résonance, cette étude est organisée en deux sections, dans la première section nous étudions la non-résonance sous la première valeur propre de $-\Delta_p$ avec poids m_1 ($\lambda_1(m_1)$) et dans la seconde section nous étudions la non-résonance sous la courbe propre principale du p-Laplacien avec poids. Il s'agit de montrer un résultat d'existence pour le problème elliptique de Neumann suivant :

$$(\mathscr{P}_\alpha) \quad \begin{cases} -\Delta_p u = \alpha\, m_1(x)|u|^{p-2}u + m_2(x)g(u) + h(x) & \text{dans} \quad \Omega \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$), $-\Delta_p u = -\text{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ désigne l'opérateur p-Laplacien avec $1 < p < \infty$, $h \in L^\infty(\Omega)$ une fonction destinée à être arbitraire, $m_1, m_2 \in L^\infty(\Omega)$ sont deux fonctions poids vérifiant certaines conditions, g est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue, $\alpha \in \mathbb{R}$ et ν est le vecteur directeur de la normale extérieure à $\partial\Omega$.

4.1 Non-résonance sous la première valeur propre

Dans cette section, on se propose de donner un résultat d'existence pour le problème $(\mathscr{P}_\alpha)$ dans le cas particulier où $\alpha = \lambda_1(m_1)$, la fonction g et son potentiel $G = \int_0^s g(t)dt$, m_1 et m_2 satisfont respectivement les conditions suivantes

$(\mathbf{g}^\pm)$ $\quad \limsup_{s\to\pm\infty} \dfrac{g(s)}{|s|^{p-2}s} \leq 0,$

$(\mathbf{G}^\pm)$ $\quad \liminf_{s\to\pm\infty} \dfrac{G(s)}{|s|^p} < 0,$

$(\mathbf{A1})$ $\quad m_1$ change de signe sur Ω et $\int_\Omega m_1(x)dx < 0,$

$(\mathbf{A2})$ $\quad \inf_\Omega ess\, m_2 > 0.$

C'est-à-dire nous montrons que le problème suivant admet au moins une solution, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ pour tout $h \in L^\infty(\Omega)$

$$(\mathscr{P}_{\lambda_1}) \quad \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda_1 m_1(x)|u|^{p-2}u + m_2(x)g(u) + h(x) & \text{dans} \quad \Omega \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

où $\lambda_1 = \lambda_1(m_1)$ est la valeur propre principale de $-\Delta_p$ avec poids m_1.
Le résultat principal de cette section est une généralisation du travail de A. Anane et A. Dakkak ([20]). L'originalité de ce travail réside dans l'insertion d'un deuxième poids m_2 dans le second membre de l'équation $(\mathscr{P}_{\lambda_1})$. La méthode employée pour obtenir ce résultat fait appel au degré topologique de Leray-Schauder.

4.2 Cas possibles

Pour étudier le problème $(\mathscr{P}_{\lambda_1})$, nous allons suggérer les quatre cas possibles ci-dessous.

Premier cas

$$(g_{-1}^+) : \liminf_{s\to+\infty} \frac{g(s)}{|s|^{p-2}s} < \delta \quad \text{et} \quad (g_{-1}^-) : \liminf_{s\to-\infty} \frac{g(s)}{|s|^{p-2}s} < \delta,$$

Deuxième cas

$$(g_{-1}^{-}) : \liminf_{s\to-\infty} \frac{g(s)}{|s|^{p-2}s} < \delta \quad \text{et} \quad (g_0^{+}) : \liminf_{s\to+\infty} \frac{g(s)}{|s|^{p-2}s} \geq \delta,$$

Troisième cas

$$(g_{-1}^{+}) : \liminf_{s\to+\infty} \frac{g(s)}{|s|^{p-2}s} < \delta \quad \text{et} \quad (g_0^{-}) : \liminf_{s\to-\infty} \frac{g(s)}{|s|^{p-2}s} \geq \delta,$$

Quatrième cas

$$(g_0^{+}) : \liminf_{s\to+\infty} \frac{g(s)}{|s|^{p-2}s} \geq \delta \quad \text{et} \quad (g_0^{-}) : \liminf_{s\to-\infty} \frac{g(s)}{|s|^{p-2}s} \geq \delta,$$

où $\delta = \dfrac{-\lambda_1 \| m_1^+ \|_\infty}{\gamma}$, $\gamma = \inf_{\Omega} ess\, m_2$ et $m_1^+ = max(m_1, 0)$.

Par une méthode classique des sur et sous-sotutions ordonnées (voir [2], [40]) on peut montrer facilement que si la fonction g vérifie les hypothèes du premier cas, alors le problème $(\mathscr{P}_{\lambda_1})$ admet au moins une solution pour tout $h \in L^\infty(\Omega)$. Il reste à étudier les autres cas, pour cela nous allons garder les hypothèses (g_0^+) et (g_0^-) afin de les utiliser par la suite, alors que (g_{-1}^+) et (g_{-1}^-) seront exploitées dans la construction des fonctions troncatures que nous allons définir ultérieurement.

Proposition 4.2.1

1. *Si la fonction g vérifie l'hypothèse (g_{-1}^-) alors, pour tout $h \in L^\infty(\Omega)$ il existe $A = A_h < 0$ tel que :*

$$\lambda_1 m_1(x)|A|^{p-2}A + m_2(x)g(A) + h(x) > 0 \quad p.p.\ dans \quad \Omega. \tag{4.2.1}$$

2. *Si la fonction g vérifie l'hypothèse (g_{-1}^+) alors, pour tout $h \in L^\infty(\Omega)$ il existe $B = B_h > 0$ tel que :*

$$\lambda_1 m_1(x)|B|^{p-2}B + m_2(x)g(B) + h(x) < 0 \quad p.p.\ dans \quad \Omega. \tag{4.2.2}$$

Preuve. Nous allons montrer seulement la première assertion car la preuve de la seconde se fait de la même manière.

Fixons $\varepsilon > 0$. D'après l'hypothèse (g_{-1}^{-}) nous avons

$$\liminf_{s\to-\infty}\frac{g(s)}{|s|^{p-2}s} < \frac{-\lambda_1\|m_1^+\|_\infty}{\gamma} - \varepsilon.$$

Soit $A_h < 0$ tel que

$$-\varepsilon|A_h|^{p-2}A_h \geq \|h\|_\infty$$

alors

$$\varepsilon|A_h|^{p-1} \geq \|h\|_\infty,$$

anisi,

$$\varepsilon|A_h|^{p-1} + h(x) \geq 0 \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega.$$

Par conséquent, il existe $A < A_h$ tel que

$$\varepsilon\gamma|A|^{p-1} + h(x) > \varepsilon\gamma|A_h|^{p-1} + h(x) \geq 0 \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega \tag{4.2.3}$$

et

$$\frac{g(A)}{|A|^{p-2}A} < \frac{-\lambda_1\|m_1^+\|_\infty}{\gamma} - \varepsilon. \tag{4.2.4}$$

En effet, supposons par contradiction que pour tout $s < A_h$, alors nous avons

$$\frac{g(s)}{|s|^{p-2}s} \geq \frac{-\lambda_1\|m_1^+\|_\infty}{\gamma} - \varepsilon,$$

donc

$$\liminf_{s\to-\infty}\frac{g(s)}{|s|^{p-2}s} \geq \frac{-\lambda_1\|m_1^+\|_\infty}{\gamma} - \varepsilon$$

ce qui donne une contradiction.

Et par l'inégalité (4.2.4), on obtient

$$-m_2(x)\frac{g(A)}{|A|^{p-2}A} > \frac{m_2(x)}{\gamma}\lambda_1\|m_1^+\|_\infty + \varepsilon m_2(x) \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega$$

puisque $\gamma = \inf_{\Omega} ess\, m_2$, on obtient

$$(-\lambda_1 m_1(x) - m_2(x)\frac{g(A)}{|A|^{p-2}A})|A|^{p-1} + \quad h(x) > (-\lambda_1 m_1(x) + \lambda_1 \| m_1^+ \|_\infty)|A|^{p-1} +$$
$$+\varepsilon |A|^{p-1} + h(x) \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega,$$

de plus, il est facile de voir que

$$-\lambda_1 m_1(x) + \lambda_1 \| m_1^+ \|_\infty \geq 0 \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega.$$

Par conséquent, en utilisant (4.2.3) on en déduit que

$$\lambda_1\, m_1(x)|A|^{p-2}A + m_2(x)\, g(A) + h(x) > 0 \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega,$$

cela permet de conclure la preuve de (4.2.1).

4.2.1 Problème homotopique

Afin d'utilisé la technique de degrée topologique dans démonstration du résultat principal de ce chapitre nous allons introduire le problème homotopique suivant

$$(\mathscr{P}_{i,\mu}) \quad \begin{cases} -\Delta_p u = (1-\mu)\theta|u|^{p-2}u + \mu f_i(x,u) & \text{dans} \quad \Omega \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\theta < 0$ un réel fixé, $\mu \in [0,1]$ et pour $i \in \{2,3,4\}$ les fonctions $f_i(.,.)$ sont définies comme suit : Pour chaque $s \in \mathbb{R}$ et pour p.p. x dans Ω

$$f_2(x,s) = f_4(x, T_A^+(s)), \tag{4.2.5}$$

$$f_3(x,s) = f_4(x, T_B^-(s))$$

et

$$f_4(x,s) = \lambda_1 m_1(x)|s|^{p-2}s + m_2(x)g(s) + h(x),$$

où $T_A^+(s) = max(s,A)$, $T_B^-(s) = min(s,B)$, A et B sont données par proposition 4.2.1.

Proposition 4.2.2 *Si u est une solution de $(\mathscr{P}_{i,\mu})$ pour $i = 2$ ou $i = 3$, alors nous avons :*

1. *Si $i = 2$, alors $u(x) \geq A$ p.p. $x \in \Omega$ et u est aussi une solution du problème $(\mathscr{P}_{4,\mu})$.*

2. *Si $i = 3$, alors $u(x) \leq B$ p.p. $x \in \Omega$ et u est aussi une solution du problème $(\mathscr{P}_{4,\mu})$, où A et B proviennent de la proposition 4.2.1.*

Preuve. 1. Puisque u est une solution de $(\mathscr{P}_{2,\mu})$, alors

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla(u-A)^- dx = \int_{\Omega^-} [(1-\mu)\theta|u|^{p-2}u + \mu f_2(x,u)](u-A)^- dx,$$

où $\Omega^- = \{x \in \Omega, u(x) \leq A\}$.
En utilisant le fait que $u - A = (u-A)^+ - (u-A)^-$, nous obtenons

$$-\int_\Omega |\nabla(u-A)^-|^p dx = \int_{\Omega^-} [(1-\mu)\theta|u|^{p-2}u + \mu f_2(x,A)](u-A)^- dx, \tag{4.2.6}$$

puisque $A < 0$ et $\theta < 0$, donc il est facile de voir que

$$(1-\mu)\theta|u|^{p-2}u(u-A)^- \geq 0 \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega. \tag{4.2.7}$$

En combinant (4.2.6), (4.2.7) et d'après la proposition 4.2.1, on obtient

$$-\int_\Omega |\nabla(u-A)^-|^p dx \geq 0,$$

ainsi $\nabla(u-A)^- = 0$, ce qui signifie $(u-A)^- = C$ où C est une constante réelle. Nous montrons que $C = 0$, pour cela en procède par l'absurde. Supposons que $C \neq 0$, alors C est positive et $u(x) = A - C$ p.p. $x \in \Omega$, et en tenant compte du fait que u est une solution de $(\mathscr{P}_{2,\mu})$ nous avons

$$0 = \Delta_p u = (1-\mu)\theta|A-C|^{p-2}(A-C) + \mu f_2(x,A) > 0,$$

ce qui donne une contradiction, donc $(u-A)^- \equiv 0$. Ceci complète la preuve de la première assertion.

Pour la preuve de la seconde assertion **2)**, on utilise des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de **1)**.

Corollaire 4.2.1

1. *Si g satisfait l'hypothèse* (g_{-1}^{-}) *et u est une solution de* $(\mathscr{P}_{2,1})$*, alors u est aussi une solution de* $(\mathscr{P}_{\lambda_1})$.

2. *Si g satisfait l'hypothèse* (g_{-1}^{+}) *et u est une solution de* $(\mathscr{P}_{3,1})$*, alors u est aussi une solution de* $(\mathscr{P}_{\lambda_1})$.

Nous sommes maintenant en mesure de donner l'énoncé du résultat principal de cette section.

4.2.2 Résultat principal et lemmes techniques

Théorème 4.2.1 *Soit* $m_1, m_2 \in M^+(\Omega)$. *Supposons que* (***A1***) *et* (***A2***) *ont lieu et que la fonction g et son potentiel G vérifient respectivement* $(\mathbf{g}^{\pm})$ *et* $(\mathbf{G}^{\pm})$. *Alors le problème* $(\mathscr{P}_{\lambda_1})$ *admet au moins une solution non triviale* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *pour tout* $h \in L^{\infty}(\Omega)$.

La preuve de ce théorème repose sur la théorie du degré topologique, pour cela nous allons traiter trois lemmes techniques. Le premier et le deuxième donnent des estimations à priori sur les solutions des problèmes homotopiques $(\mathscr{P}_{i,\mu})$, $(i = 2,3,4)$, ils sont inspirés du travail de A. Anane et A. Dakkak. Le troisième lemme permet de montrer une équivalence entre l'hypothèse $(\mathbf{G}^{\pm})$ ci-dessus et l'hypothèse suivante :

$$(\mathbf{G}_r^{\pm}) : \liminf_{s \longrightarrow \pm\infty} \frac{G(s) - G(rs)}{|s|^p} < 0,$$

où $r \in]0,1[$.

Lemme 4.2.1 *Supposons que la fonction g vérifie* $(\mathbf{g}^{\pm})$ *et les hypothèses du cas i, où* $i \in \{2,3,4\}$. *Si* $(u_n)_n$ *est une suite de solutions de* $(\mathscr{P}_{i,\mu_n})$*, alors nous avons :*

1. $(u_n)_n$ *est une suite de* $L^{\infty}(\Omega)$.

2. *Si* $\|u_n\|_{\infty} \longrightarrow +\infty$ *lorsque* $n \longrightarrow +\infty$. *Alors, pour une sous-suite nous avons :*

i) $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_\infty} \longrightarrow v$ *fortement dans* $\mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$, *où* $v = +\varphi$ *si* $i = 2$, $v = -\varphi$ *si* $i = 3$, $v = \pm\varphi$ *si* $i = 4$ *et* φ *est une fonction propre positive de* $-\Delta_p$ *avec poids* m_1 *associée à la valeur propre* λ_1 *telle que* $\|\varphi\|_\infty = 1$.

ii)

$$\int_\Omega \frac{|g(u_n)|}{\|u_n\|_\infty^{p-1}} dx \longrightarrow 0 \quad quand \quad n \longrightarrow +\infty. \tag{4.2.8}$$

Preuve. 1. Soit (u_n) une suite de solutions de $(\mathscr{P}_{i,\mu_n})$, d'après l'estimation L^∞ [4] et le théorème de régularité de Tolksdorf [58], il est clair que $(u_n)_n \subset \mathscr{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, comme $\mathscr{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ est une injection continue, pour certain $\alpha \in]0,1[$ indépendant de n, il en résulte que $(u_n)_n \subset L^\infty(\Omega)$, de plus $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_\infty}$ est une suite bornée dans $\mathscr{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.

2. i) Comme $\mathscr{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$ est une injection compacte, donc il existe une fonction $v \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$ telle que (pour une sous-suite de (v_n))

$$v_n \longrightarrow v \quad \text{fortement dans} \quad \mathscr{C}^1(\overline{\Omega}) \quad \text{et} \quad \|v\|_\infty = 1. \tag{4.2.9}$$

Pour des raisons de simplicité de la preuve, on suppose que le cas $i = 2$ est vérifié, donc la fonction g vérifie les hypothèse (g_{-1}^-) celle-ci combinnée avec (g^+), nous permettons d'écrire

$$g(s) = q(s)|s|^{p-2}s + r(s) \quad \text{pour tout} \quad s \in [A, +\infty[, \tag{4.2.10}$$

où A provient de la proposition 4.2.1, q et r sont deux fonctions continues sur $[A, +\infty[$ et telles que

$$-\lambda_1 \|m_1^+\|_\infty \leq q(s) \leq 0 \quad \text{pour tout} \quad s \in [A, +\infty[,$$

et

$$\frac{r(s)}{|s|^{p-2}s} \longrightarrow 0 \quad \text{uniformément, quand} \quad s \to +\infty. \tag{4.2.11}$$

Comme u_n est une solution de $(\mathscr{P}_{2,\mu_n})$, on obtient

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla w dx = \int_\Omega [(1-\mu_n)\theta|u_n|^{p-2}u_n + \mu_n f_2(x,u_n)]\, w dx \tag{4.2.12}$$

pour tout $w \in W^{1,p}(\Omega)$.
D'après la proposition 4.2.2, nous avons $u_n \geq A$ p.p. dans Ω, et par utilisation de (4.2.4) et (4.2.10) nous écrivons :

$$f_2(x,u_n) = (\lambda_1 m_1(x) + m_2(x)q(u_n))|u_n|^{p-2}u_n + m_2(x)r(u_n) + h(x). \tag{4.2.13}$$

D'autre part, puisque $(u_n)_n \subset L^\infty(\Omega)$ et q est une fonction continue, on conclut alors que $q(u_n)$ est une suite bornée dans $L^\infty(\Omega)$, donc il existe une sous-suite qui vérifie :

$$q(u_n) \rightharpoonup^* q_0 \quad \text{dans} \quad L^\infty(\Omega),$$

où $-\lambda_1 \| m_1^+ \|_\infty \leq q_0(x) \leq 0 \quad$ p.p. dans $\quad \Omega$
et par (4.2.11), nous avons pour une sous-suite

$$\frac{|r(u_n)|}{\|u_n\|_\infty^{p-1}} \longrightarrow 0 \quad \text{fortement dans} \quad L^\infty(\Omega).$$

On peut aussi supposer pour une sous-suite, $\mu_n \longrightarrow \mu \in [0,1]$.
En combinant (4.2.12), (4.2.13) et on divise par $\|u_n\|_\infty^{p-1}$, puis par passage à la limite lorsque $n \longrightarrow +\infty$, on obtient

$$\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla w dx = \int_\Omega m_{\mu,\theta,q_0}(x)|v|^{p-2}vw dx \quad \forall w \in W^{1,p}(\Omega), \tag{4.2.14}$$

où v est donné par (4.2.9) et $m_{\mu,\theta,q_0} = (1-\mu)\theta + \mu(\lambda_1 m_1 + m_2 q_0)$.
D'abord, remarquons que $\mu \neq 0$ car si $\mu = 0$, alors en choisissant v comme fonction test dans l'équation (4.2.14), nous obtenons

$$\int_\Omega |\nabla v|^p dx = \theta \int_\Omega |v|^p dx < 0,$$

ce qui donne une contradiction.
Maintenant on montre que

$$mes\left(\{x \in \Omega, m_{\mu,\theta,q_0}(x) > 0\}\right) \neq 0. \tag{4.2.15}$$

En effet, on procède par l'absurde et on suppose que $m_{\mu,\theta,q_0}(x) \leq 0$ p.p. dans Ω, en prenant v comme fonction test dans l'équation (4.2.14), on aura

$$\int_\Omega |\nabla v|^p dx = \int_\Omega m_{\mu,\theta,q_0}(x)|v|^p dx.$$

Puisque $m_{\mu,\theta,q_0}(x) \leq 0$ p.p. dans Ω, alors $\int_\Omega |\nabla v|^p dx = 0$, ceci implique que

$$m_{\mu,\theta,q_0}(x)|v|^p = 0,$$

en utilisant le fait que $v \neq 0$, on obtient $m_{\mu,\theta,q_0} = 0$.
D'autre part, il est facile de voir que $m_{\mu,\theta,q_0} \leq \mu\lambda_1 m_1 \leq \lambda_1 m_1$.
Donc

$$0 = \int_\Omega m_{\mu,\theta,q_0} dx \leq \lambda_1 \int_\Omega m_1 dx.$$

par conséquent $\int_\Omega m_1 dx \geq 0$, ce qui contredit l'hypothèse sur le poids m_1 qui est $\int_\Omega m_1 dx < 0$.
En vertu de (4.2.14) et (4.2.15) on peut voir que 1 est une valeur propre du $p-$Laplacain avec poids m_{μ,θ,q_0}, alors

$$\frac{1}{\mu} = \lambda_1(\mu\lambda_1 m_1) \leq \lambda_1(m_{\mu,\theta,q_0}) \leq 1. \tag{4.2.16}$$

Puisqe $\mu \in [0,1]$, donc par (4.2.16) on a nécessairement $\mu = 1$. En utilisant la propriété de monotonie stricte de λ_1 par rapport au poids et la définition de q_0, on en déduit que

$$q_0 \equiv 0 \quad \text{et} \quad m_{\mu,\theta,q_0} \equiv \lambda_1 m_1.$$

Ainsi, en vertu de (4.2.14) et la simplicité de λ_1, on obtient $v = \pm\varphi$.
Enfin, du fait que $u_n \geq A$ et on divise sur $\|u_n\|_\infty$, puis par passage à la limite lorsque $n \longrightarrow +\infty$, on obtient $v \geq 0$, par suite $v = \varphi$.

La démonstration dans les deux cas $i = 2$ et $i = 3$ est presque similaire au cas précédent.

ii) D'après (4.2.10) et (4.2.11), on obtient

$$\int_\Omega \frac{|g(u_n)|}{\|u_n\|_\infty^{p-1}}dx \le \int_\Omega -q(u_n)|v_n|^{p-1} + \int_\Omega \frac{|r(u_n)|}{\|u_n\|_\infty^{p-1}}dx,$$

le second membre de cette l'inégalité tend vers 0 quand $n \longrightarrow +\infty$, ainsi on trouve (4.2.8).

Lemme 4.2.2 *Soit (u_n) une suite de solutions de $(\mathscr{P}_{i,\mu_n})$ pour $i \in \{2,3,4\}$ telle que $\|u_n\|_\infty \longrightarrow +\infty$ quand $n \longrightarrow +\infty$, fixons $a \in \Omega$ et $\eta > 0$ tels que $B(a,\eta) \subset \Omega$. Si g vérifie $(\mathbf{g}^{\pm})$ et les hypothèses du cas i, alors nous avons*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_0^1 \frac{|g(u_n(\sigma_x(t))||\nabla u_n(\sigma_x(t))||x-a|}{\| u_n \|_\infty{}^p}dt = 0 \ \ p.p.\ x \in \partial B(a,\eta), \tag{4.2.17}$$

où $\sigma_x(t) = a + t(x-a)$ et $B(a,\eta)$ est la boule de centre a et de rayon η.

Preuve. Pour la simplicité de la peruve nous allons se placer dans le cas $i = 2$, les autres cas se traitent de la même façon.
D'abord, en utilisant (4.2.8) nous avons

$$\int_{B(a,\eta)} \frac{|m_2(x)g(u_n)|}{\|u_n\|_\infty^{p-1}}dx \le \int_\Omega \frac{|m_2(x)g(u_n)|}{\|u_n\|_\infty^{p-1}}dx \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow \infty,$$

ce qui implique

$$\int_{B(a,\eta)} \frac{|m_2(x)g(u_n)|}{\|u_n\|_\infty^{p-1}}dx \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^1(B(a,\eta)) \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow \infty,$$

donc par passage au système de coordonnés sphériques, nous obtenons

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_{[0,\pi]^N}\int_0^{2\pi}\int_0^\eta t^{N-1}\frac{|g(u_n(a+t\omega))|}{\| u_n \|_\infty{}^{p-1}}\prod_{j=1}^{N-2}(\sin\theta_j)^{N-1-j}d\theta_j d\theta_{N-1}dt = 0 \tag{4.2.18}$$

où, $\omega = \frac{x-a}{\eta} \in \partial B(0,1)$.
De l'égalité ci-dessus on obtient

$$\frac{|g(u_n(\sigma_x(\tau)))|}{\|u_n\|_\infty^{p-1}} \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow \infty \text{ p.p. } x \in \partial B(a,\eta) \text{ et p.p. } \tau \in [0,1].$$

En utilisant l'hypothèse ($\mathbf{g}^{\pm}$), nous pouvons montrer que la fonction g satisfait la condition de croissance suivante :

$$|g(s)| \leq c|s|^{p-1} + b \quad \text{pour tout} \quad s \in [A, +\infty[$$

où, b et c sont deux réels positifs.
D'après la proposition 4.2.2, nous avons $u_n \geq A$, on en déduit facilement que

$$\left(\frac{|g(u_n(\sigma_x(.)))|}{\|u_n\|_\infty^{p-1}}\right)_n \quad \text{et} \quad \left(\frac{|\nabla(u_n(\sigma_x(.)))|}{\|u_n\|_\infty}\right)_n \quad \text{sont bornées dans} \quad L^\infty([0,1]).$$

Ainsi on peut achever la démonstration du lemme en utilisant le théorème de convergence dominé de Lebesgue.

Lemme 4.2.3 *Soit $r \in]0,1[$, supposons qu'il existe un réel $d < 0$ tel que*

$$d < \liminf_{s \longrightarrow +\infty} \frac{G(s)}{|s|^p} \leq \limsup_{s \longrightarrow +\infty} \frac{G(s)}{|s|^p} \leq 0, \tag{4.2.19}$$

alors il y a une équivalence entre $(\boldsymbol{G}^+)$ et $(\boldsymbol{G}_r^+)$, où

$$(\boldsymbol{G}^+) : \liminf_{s \longrightarrow +\infty} \frac{G(s)}{|s|^p} < 0 \quad ; \quad (\boldsymbol{G}_r^+) : \liminf_{s \longrightarrow +\infty} \frac{G(s) - G(rs)}{|s|^p} < 0.$$

Le résultat reste valable lorsqu'on remplace le signe $+$ par le signe $-$.

Preuve. Supposons que ($\mathbf{G}^+$) est vérifiée, alors il existe une suite $(s_n)_n$ telle que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} s_n = +\infty,$$

et

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{G(s_n)}{|s_n|^p} = \liminf_{s \longrightarrow +\infty} \frac{G(s)}{|s|^p} = l < 0.$$

D'après (4.2.19), on déduit que $d < l < 0$ et $\left(\frac{G(rs_n)}{|rs_n|^p}\right)_n$ est une suite bornée, ce qui entraîne pour une sous-suite qu'on a

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{G(rs_n)}{|rs_n|^p} = k \text{ où } k \in [l, 0],$$

d'où

$$\liminf_{s\longrightarrow+\infty}\frac{G(s)-G(rs)}{|s|^p}\leq\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{G(s_n)-G(rs_n)}{|s_n|^p}=l-r^pk\leq l(1-r^p)<0,$$

donc (G_r^+) est vérifiée.

Réciproquement, supposons que (G_r^+) est vérifiée, alors il existe une suite $(\widetilde{s}_n)_n$ telle que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\widetilde{s}_n=+\infty$$

et

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{G(\widetilde{s}_n)-G(r\widetilde{s}_n)}{|\widetilde{s}_n|^p}=\liminf_{s\longrightarrow+\infty}\frac{G(s)-G(rs)}{|s|^p}=l_r<0,$$

il est facile de voir que $\left(\frac{G(\widetilde{s}_n)}{\widetilde{s}_n^p}\right)_n$ et $\left(\frac{G(r\widetilde{s}_n)}{r\widetilde{s}_n^p}\right)_n$ sont deux suites bornées, donc quitte à passer à des sous-suites, il existe $k,k^{'}\in]d,0]$ tels que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{G(\widetilde{s}_n)}{|\widetilde{s}_n|^p}=k\text{ et }\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{G(r\widetilde{s}_n)}{r|\widetilde{s}_n|^p}=k^{'}.$$

En combinant les deux dernières formules, on obtient

$$k-k^{'}r^p=l_r<0,$$

on en déduit donc $k\neq0$ ou $k^{'}\neq0$.

Finalement, on a

$$\liminf_{s\longrightarrow+\infty}\frac{G(s)}{|s|^p}\leq\min\left\{k,k^{'}\right\}<0.$$

D'où $(\mathbf{G}^+)$ est vérifiée.

4.2.3 Preuve du résultat principal

Fixons $h\in L^\infty(\Omega)$, nous allons distinguer trois cas (i.e. 2, 3 et 4), donc pour tout $i\in\{2,3,4\}$ nous supposons que les hypothèses du cas i sont vérifiées et nous montrons un résultat d'existence pour le problème $(\mathscr{P}_{i,\mu})$. Ainsi, d'après le corollaire 4.2.1, on peut en déduire l'existence d'une solution de $(\mathscr{P}_{\lambda_1})$. Notre preuve consiste à construire dans l'espace $\mathscr{C}(\overline{\Omega})$ un ouvert borné $\mathscr{O}$, tel que $0\in\mathscr{O}$ et aucune solution de $(\mathscr{P}_{i,\mu})$ où

$\mu \in [0,1]$ se trouve sur la frontière de $\mathscr{O}$. Cet ouvert $\mathscr{O}$ est de la forme suivante

$$\mathscr{O} = \mathscr{O}_{S,T} = \left\{ u \in \mathscr{C}(\overline{\Omega}); \quad T < u < S \right\}, \tag{4.2.20}$$

où S et T sont deux reéls tels que $T < 0 < S$.

Ainsi la preuve du théorème 4.2.1 découle immédiatement de la propriéte de l'invariance du degré de Leary-Shauder par homotopie. Pour cela, nous allons procéder par l'absurde, on suppose que ***"pour tout*** T ***et*** S ***avec*** $T < 0 < S$***, il existe*** $\mu \in [0,1]$ ***et*** $u \in \partial\mathscr{O}$ ***telle que*** u ***est une solution de*** $(\mathscr{P}_{i,\mu})$***"***.

Afin de simplifier cette preuve, nous supposons que le cas 2 est vérifiée, car la démonstration dans les autres cas en suivant la même démarche.

Pour $h \in L^\infty(\Omega)$ fixé on prend $T = 2A < 0$, où A provient de la proposition 4.2.1. Grâce à l'hypothèse $(\mathbf{G}^+)$ et par utilisation du lemme 4.2.3, on peut assurer l'existence d'une suite de nombres réels positifs $(s_n)_n$ qui vérifie

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} s_n = +\infty$$

et

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{G(s_n) - G(r s_n)}{s_n^p} = \liminf_{s \longrightarrow +\infty} \frac{G(s) - G(rs)}{|s|^p} < 0, \tag{4.2.21}$$

où, $r = \frac{min\varphi}{max\varphi}$ et φ est une fonction propre positive de $-\Delta_p$ avec poids m_1 associée à la première valeur propre λ_1 (voir le lemme 4.2.1). Ainsi nous avons le droit de poser $S = s_n$, pour ces valeurs de T et S il existe $(\mu_n) \subset [0,1]$ et $(u_n) \in \partial\mathscr{O}_{S_n,T}$ deux suites telles que u_n est une solution de $(\mathscr{P}_{i,\mu_n})$, or d'après la proposition 4.2.2, nous avons $u_n \geq A > 2A$, il en résulte que

$$\max(u_n) = s_n.$$

Soient $x_n, y_n \in \overline{\Omega}$ tels que

$$\max_{\overline{\Omega}}(u_n) = u_n(x_n) \text{ et } \min_{\overline{\Omega}}(u_n) = u_n(y_n).$$

Puisque $\overline{\Omega}$ est régulier, alors sans perte de généralité on peut supposer que

$$x_n \longrightarrow x_0 \text{ dans } \overline{\Omega} \text{ et } y_n \longrightarrow y_0 \text{ dans } \overline{\Omega},$$

où x_0 et y_0 sont deux points où la fonction propre φ atteint respectivement son maximum et son minimum.

En tenant compte du fait que Ω vérifie la caractère $\mathscr{C}^1$, alors il existe une suite de points $(z_k)_{k=1,...,m} \subset \Omega$ telle que

$$\bigcup_{k=1}^{m} B(z_k, |z_k - z_{k-1}|) \subset \Omega \quad \text{où,} \quad z_0 = x_0 \quad \text{et} \quad z_{m+1} = y_0.$$

Nous écrivons

$$\sigma_k = [z_k, z_{k+1}], \quad \text{pour tout} \quad k = 0, ..., m$$

de telle sorte que $\bigcup_{k=0}^{m} \sigma_k$ est une ligne brisée.

On note par $\delta_{0,n}$ le chemin de classe $\mathscr{C}^1$ qui joindre x_n et x_0 et $\gamma_{n,0}$ le chemin de classe $\mathscr{C}^1$ qui joindre y_0 et y_n dans $\overline{\Omega}$.

Posons, $\mathscr{C}_n$=$\delta_{0,n} \cup \left(\bigcup_{k=0}^{m} \sigma_k \right) \cup \gamma_{n,0}$ qui est un chemin de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux d'extrémités x_n et y_n, on peut toujous rectifier la suite $(z_k)_{k=1,...,m}$ de telle sorte que par le lemme 4.2.2 on obtient

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{|g(u_n(\sigma_k(t))||\nabla u_n(\sigma_k(t))||\sigma_k^{'}(t)|}{\| u_n \|_\infty^{\,p}} dt = 0 \text{ pour} \quad k = 1, ..., m-1. \tag{4.2.22}$$

Soit $r_n = \dfrac{min(u_n)}{max(u_n)}$, d'après le lemme 4.2.1, il est facile de montrer que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} r_n = r = \frac{min(\varphi)}{max(\varphi)} \in]0, 1[.$$

Pour achever la preuve, on doit chercher une contradiction avec l'hypothèse $(\mathbf{G}_r^+)$ du lemme 4.2.3, pour cela nous allons donc procéder en deux étapes :

Étape 1 : On montre que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{|G(s_n) - G(r_n s_n)|}{s_n^p} = 0.$

En effet, écrivons

$$\frac{G(s_n) - G(r_n s_n)}{s_n^p} = \frac{G(u_n(x_n)) - G(u_n(y_n))}{\| u_n \|_\infty^p} = \frac{1}{\| u_n \|_\infty^p} \int_{\mathscr{C}_n} d(G \circ u_n), \tag{4.2.23}$$

et remarquons, via ce qui précède que

$$\int_{\mathscr{C}_n} = \int_{\delta_{0,n}} + \sum_{k=1}^{m} \int_{\sigma_k} + \int_{\gamma_{n,0}},$$

où $\int_{\mathscr{C}_n}$ désigne l'intégrale le long du chemin $\mathscr{C}_n$.
Et puisque

$$d(G\circ u_n)(\sigma_k) = g(u_n(\sigma_k))\nabla u_n(\sigma_k).\sigma_k^{'}$$

donc, en utilisant le lemme 4.2.2 et d'après (4.2.22), on obtient

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{m-1} \int_{\sigma_k} d(G\circ u_n)(\sigma_k)}{\|u_n\|_\infty^p} = 0. \tag{4.2.24}$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in \partial B(z_1, |z_1 - x_0|)$ tel que

$$|x_\varepsilon - x_0| < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\int_{\sigma_{0,\varepsilon}} d(G\circ u_n)(\sigma_{0,\varepsilon})}{\|u_n\|_\infty^p} = 0, \tag{4.2.25}$$

où $\sigma_{0,\varepsilon} = [z_1, x_\varepsilon]$.
De même pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y_\varepsilon \in \partial B(z_m, |z_m - y_0|)$ tel que

$$|y_\varepsilon - y_0| < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\int_{\sigma_{m,\varepsilon}} d(G\circ u_n)(\sigma_{m,\varepsilon})}{\|u_n\|_\infty^p} = 0, \tag{4.2.26}$$

où $\sigma_{m,\varepsilon} = [z_1, x_\varepsilon]$.
Par le caractère $\mathscr{C}^1$ de $\partial\Omega$ on a $x_n \to x_0$ et $y_n \to y_0$ quand $n \to +\infty$, alors

$$\ell(\delta_{0,n}) \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \ell(\gamma_{n,0}) \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad n \longrightarrow +\infty,$$

où, $\ell(.)$ désigne la longueur du chemin corréspondant.
En combinant (4.2.24), (4.2.25) et (4.2.26), on en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ (indépendante de n et $\varepsilon > 0$) telle que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout n suffisamment

grand, on obtient

$$\frac{\left|\int_{\mathscr{C}_n} d(G\circ u_n)(\sigma_k)\right|}{\|u_n\|_\infty^p} < \varepsilon C.$$

D'où, cela permet de conclure la preuve de la première étape en remplaçant dans relation (4.2.23).

Étape 2 : On montre que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{|G(s_n)-G(rs_n)|}{s_n^p} = 0.$

En effet, on sait que G est dérivable donc par application du théorème des accroissements finis nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante c_n compris entre $r_n s_n$ et $r s_n$ telle que

$$\frac{|G(r_n s_n)-G(rs_n)|}{s_n^p} = \frac{(r_n-r)g(c_n)}{s_n^{p-1}}.$$

Puisque la fonction g satisfait la condition (g^+) on peut montrer facilement que g satisfait la condition de croissance suivante

$$|g(s)| \le c|s|^{p-1} + b, \quad \text{pour tout} \quad s \in [A, +\infty[,$$

où b et c sont deux réels positifs,

ce qui entraîne que la suite $\left(\dfrac{g(c_n)}{s_n^{p-1}}\right)_n$ est bornée.

Or

$$\frac{|G(s_n)-G(rs_n)|}{s_n^p} \le \frac{|G(s_n)-G(r_n s_n)|}{s_n^p} + \frac{|G(r_n s_n)-G(rs_n)|}{s_n^p}.$$

et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} r_n = r$, d'où grâce à la première étape, on conclut alors la preuve de la deuxième étape.

Finalement, nous obtenons une contradiction avec (4.2.21). Ce qui permet de conclure la preuve du théorème 4.2.1.

4.3 Non-résonance sous la courbe propre principale

Dans cette section, nous allons établir un résultat d'existence pour le problème $(\mathscr{P}_\alpha)$ dans le cas où α est quelconque dans $\mathbb{R}^*$, pour cela on se base sur le résultat

obtenu dans la section précedente (théorème 4.2.1). On se propose de montrer le théorème suivant.

Théorème 4.3.1 *Soient $m_1, m_2 \in M^+(\Omega)$ et $(\alpha,\beta) \in \mathscr{C}_1$ avec $\alpha \neq 0$. Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées*

$$(\mathbf{H1})\ \limsup_{s\longrightarrow\pm\infty} \frac{g(s)}{|s|^{p-2}s} \leq \beta,$$

$$(\mathbf{H2})\ \liminf_{s\longrightarrow\pm\infty} \frac{p\,G(s)}{|s|^{p}} < \beta,$$

et que les deux poids m_1 et m_2 vérifient respectivement (**A1**) *et* (**A2**). *Alors le problème $(\mathscr{P}_\alpha)$ admet moins une solution non triviale $u \in W^{1,p}(\Omega)$ pour tout $h \in L^\infty(\Omega)$.*

Preuve. Remarquons d'abord que le problème $(\mathscr{P}_\alpha)$ peut s'écrire sous la forme équivalente suivante

$$(\mathscr{P}_{\alpha,\beta}) \quad \begin{cases} -\Delta_p u = m_{\alpha,\beta}(x)|u|^{p-2}u + m_2(x)\widetilde{g}(u) + h(x) & \text{dans} \quad \Omega \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où

$$\widetilde{g}(s) = g(s) - \beta|s|^{p-2}s,$$

et

$$m_{\alpha,\beta} = \alpha\, m_1 + \beta\, m_2.$$

Remarquons que cette forme c'est exactement la forme du problème $(\mathscr{P}_{\lambda_\infty})$ qui permet d'étudier la non-résonance sous la première valeur propre du p-Laplacien avec poids dans la section pécédente, puisque $(\alpha,\beta) \in \mathscr{C}_1$, alors $\lambda_1(\alpha\, m_1 + \beta\, m_2) = 1$ est la première valeur propre du p-Laplacien avec le poids $m_{\alpha,\beta}$.
Donc grâce au théorème 4.2.1 de la section précédante, pour montrer que le problème $(\mathscr{P}_{\alpha,\beta})$ admet au moins une solution faible $u \in W^{1,p}(\Omega)$ pour tout $h \in L^\infty(\Omega)$, il suffit de montrer que la fonction $\widetilde{g}$ et son potentiel $\widetilde{G}(s) = \displaystyle\int_0^s \widetilde{g}(t)\,dt$ satisfont respectivement

les conditions ($\mathbf{g}^{\pm}$) et ($\mathbf{G}^{\pm}$). En effet,

$$\limsup_{\pm\infty} \frac{\widetilde{g}(s)}{|s|^{p-2}s} = \limsup_{\pm\infty} \left(\frac{g(s)}{|s|^{p-2}s} - \beta \right) \leq 0,$$

et

$$\liminf_{\pm\infty} \frac{p\,\widetilde{G}(s)}{|s|^{p}} = \liminf_{\pm\infty} \left(\frac{p\,G(s)}{|s|^{p}} - \beta \right) < 0.$$

Par conséquent, comme ($\mathscr{P}_{\alpha,\beta}$) et ($\mathscr{P}_{\alpha}$) sont équivalentes, alors le problème ($\mathscr{P}_{\alpha}$) admet au moins une solution $u \in W^{1,p}(\Omega)$, pour tout $h \in L^{\infty}(\Omega)$.

Remarque 4.3.1 *Le cas où $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ s'échape de notre étude.*

CHAPITRE 5

NON-RÉSONANCE ENTRE LES DEUX PREMIÈRES COURBES PROPRES

Ce chapitre a pour objet est l'étude d'existence des solutions du problème elliptique suivant :

$$(\mathscr{P})\begin{cases} -\Delta u = \alpha\, m_1(x)\, u + m_2(x) g(u) + h(x) & \text{dans} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$, ν est le vecteur directeur de la normale extérieure à $\partial\Omega$, $h \in L^\infty(\Omega)$ et les poids m_1 et m_2, vérifient l'hypothèse suivante :

- (**A1**) m_1 change de signe sur Ω et $\displaystyle\int_\Omega m_1 < 0$,
- (**A2**) $\inf_\Omega ess\, m_2 > 0$

avec $M^+(\Omega) = \left\{ m \in L^\infty(\Omega) : \text{mes}(\{x \in \Omega : m(x) > 0\}) \neq 0 \right\}$.

Ce chapitre est organisé comme suit : dans la section suivante, nous nous intéressons à l'existence des solutions pour le problème $(\mathscr{P})$ dans le cas où $\alpha = \lambda_2(m_1)$. Dans la seconde section, en s'appuyant sur le résultat obtenu dans la première section on va montrer un résultat d'existence pour le problème $(\mathscr{P})$ dans le cas où $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \geq \lambda_2(m_1)$ ou $\alpha \leq \lambda_{-2}(m_1)$.

5.1 Non-résonance entre les deux premières valeurs propres.

Dans cette section, nous nous intéressons à l'étude d'un résultat d'existence pour le problème de Neumann suivant :

$$(\mathscr{P}_2)\begin{cases} -\Delta u = \lambda_2\, m_1(x)u + m_2(x)g(u) + h(x) & \text{dans} \quad \Omega \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\lambda_2 = \lambda_2(m_1)$ est la seconde valeur propre de $-\Delta$ avec poids m_1 et avec condition de Neumann au bords.

5.1.1 Énoncé du résultat principal et lemmes téchniques

Lemme 5.1.1 *Soit $m_1, m_2 \in M^+(\Omega)$. On suppose que les conditions* (**A1**) *et* (**A2**) *sont vérifiées, alors il existe un réel unique, $c > 0$ tel que*

$$\lambda_1(\lambda_2 m_1 - c\, m_2) = 1. \tag{5.1.1}$$

Preuve. Posons $a = \dfrac{\inf\limits_{\Omega} ess(\lambda_2 m_1)}{\sup\limits_{\Omega} ess\, m_2}$ et $b = \dfrac{\sup\limits_{\Omega} ess(\lambda_2 m_1)}{\inf\limits_{\Omega} ess\, m_2}$, comme m_1 est une fonction non constante, alors nous avons $a < b$.

Soit $t \in [a, b[$. Considèrons la fonction poids $m_t = \lambda_2 m_1 - t\, m_2$ et on définit ensuite la fonction suivante :

$$\begin{aligned} f : [a, b[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \lambda_1(\lambda_2 m_1 - t\, m_2) \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

qui est une fonction croissante, continue et vérifie $f(a) = 0$ et $\lim\limits_{t\to b} f(t) = +\infty$.

D'après la propriété de la monotonie stricte de λ_1 par rapport au poids, on en déduit que f est strictement croissante sur $[a', b[$ où $a' = \max\{t : f(t) = 0\}$. En plus,

$$f(a') = 0 \leq f(0) = \lambda_1(\lambda_2 m_1) < \lambda_2(\lambda_2 m_1) = 1,$$

donc la conclusion découle immédiatement du théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 5.1.1 *Soit m_1, $m_2 \in M^+(\Omega)$. Supposons que* (**A1**) *et* (**A2**) *sont vérifiées et la fonction g et son potentiel G vérifient respectivement les deux hypothèses suivantes*

$$-c \leq \liminf_{s\longrightarrow\pm\infty} \frac{g(s)}{s} \leq \limsup_{s\longrightarrow\pm\infty} \frac{g(s)}{s} \leq 0 \tag{5.1.3}$$

$$-c < \limsup_{|s|\longrightarrow\infty} \frac{2G(s)}{s^2}; \liminf_{s\longrightarrow+\infty ou -\infty} \frac{2G(s)}{s^2} < 0 \tag{5.1.4}$$

où c est la constante donnée par (5.1.1). Alors le problème $(\mathscr{P}_2)$ admet au moins une solution non triviale $u \in H^1(\Omega)$ pour tout $h \in L^\infty(\Omega)$.

La preuve de ce théorème, s'inspire du travail de A. Dakkak [21]. De plus, la preuve nécessite quelques lemmes techniques, les deux premiers lemmes donnent des estimations à priori sur les solutions possibles du problème homotopique suivant :

$$(\mathscr{P}_{2,\theta,\mu}) \begin{cases} -\Delta u = ((1-\mu)\theta + \mu\lambda_2) m_1 u + \mu\, m_2\, g(u) + \mu\, h & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\mu \in [0,1]$, $\theta \in]\lambda_1, \lambda_2[$ et $\lambda_1 = \lambda_1(m_1)$.

Lemme 5.1.2 *Soient $\theta \in]\lambda_1, \lambda_2[$, $(\mu_{n,\theta})_n \subset [0,1]$ et si $(u_{n,\theta})_n$ une suite de solutions de $(\mathscr{P}_{2,\theta,\mu})$. Supposons que* (**A**) *et* (5.1.3) *ont lieu. Alors nous avons :*

1. *$(u_{n,\theta})_n$ est une suite de $L^\infty(\Omega)$ et si $\|u_{n,\theta}\|_\infty \longrightarrow +\infty$ quand $n \longrightarrow +\infty$, alors pour une sous-suite de $(u_{n,\theta})_n$ nous avons*

$$v_{n,\theta} = \frac{u_{n,\theta}}{\|u_{n,\theta}\|_\infty} \longrightarrow v_\theta \text{ fortement dans } \mathscr{C}^1(\overline{\Omega}). \tag{5.1.5}$$

2. *Supposons que l'hypothèse suivante est vérifiée*

$$(\mathbf{H}) \quad \exists \theta \in]\lambda_1, \lambda_2[: \limsup_{n\longrightarrow+\infty} \mu_{n,\theta} = 1,$$

alors nous avons l'une des assertions ci-dessous **i)** *ou* **ii)** *est vraie*

i) $v_\theta = \psi$ *où* ψ *est une fonction propre normée* ($\|\psi\|_\infty = 1$) *de* $-\Delta$ *associée à la valeur propre* $\lambda_2(m_1)$ *et*

$$\int_\Omega \frac{|g(u_{n,\theta})|}{\|(u_{n,\theta}\|_\infty} dx \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty. \tag{5.1.6}$$

De plus, il existe $\eta_1 > 0$ *et* $\eta_2 > 0$ *tels que pour n assez grand*

$$\eta_1 < \frac{\max(u_{n,\theta})}{-\min(u_{n,\theta})} < \eta_2 \tag{5.1.7}$$

ii) $v_\theta = \pm\varphi$ *où* φ *est une fonction propre normée* ($\|\varphi\|_\infty = 1$) *de* $-\Delta$ *associée à la valeur propre* $\lambda_1(\lambda_2 m_1 - c m_2) = 1$ *et*

$$\int_\Omega \frac{|g(u_{n,\theta}) + c\, u_{n,\theta}|}{\|u_{n,\theta}\|_\infty} dx \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty. \tag{5.1.8}$$

De plus, $u_{n,\theta}$ *garde un signe constant pour n suffisamment grand.*

3. *Si* **(H)** *n'est pas vérifée, alors il existe une suite* $(\theta_k)_k \subset]\lambda_1, \lambda_2[$ *et une suite strictement croissante des entiers naturels notée* $(n_k)_k \subset \mathbb{N}$ *telles que*

a) $\lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} \theta_k = \lambda_2$, $\lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} \mu_{n_k,\theta_k} = 1$ *et* $\lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} \|w_k\|_\infty = +\infty$ *où* $w_k = u_{n_k,\theta_k}$.

b) $\dfrac{w_k}{\|w_k\|_\infty} \longrightarrow \pm\varphi$ *fortement dans* $\mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$ *et*

$$\int_\Omega \frac{|g(w_k) + c\, w_k|}{\|w_k\|_\infty} dx \longrightarrow 0 \, quand \, k \longrightarrow +\infty.$$

Preuve. 1. Soit $(u_{n,\theta})_n$ une suite de solutions du problème $(\mathscr{P}_{2,\theta,\mu})$. D'après l'éstimation L^∞ [4] et la régularité de P. Tolksdorf [58] on peut voir que $(u_{n,\theta})_n \subset \mathscr{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, puisque $\mathscr{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ est une injection continue pour certain $\alpha \in]0,1[$ indépendant de n, donc $(u_{n,\theta})_n \subset L^\infty(\Omega)$ de plus $v_{n,\theta} = \dfrac{u_{n,\theta}}{\|u_{n,\theta}\|_\infty}$ est une suite bornée dans $\mathscr{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.
On a $\mathscr{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$ est une injection compacte, alors il existe une sous-suite de $(v_{n,\theta})_n$ notée encore $(v_{n,\theta})_n$ telle que

$$v_{n,\theta} \longrightarrow v_\theta \text{ fortement dans } \mathscr{C}^1(\overline{\Omega}) \text{ et } \|v_\theta\|_\infty = 1. \tag{5.1.9}$$

2. Grâce à l'hypothèse (5.1.3), Il est facile de voir que l'on peut écrire l'expression de la fonction g de la façon suivante :

$$g(s) = q(s)s + r(s) \text{ pour tout } s \in I\!R \tag{5.1.10}$$

où $-c \leq q(s) \leq 0$ et $\dfrac{r(s)}{s} \longrightarrow 0$ uniformément quand $|s| \longrightarrow +\infty$, puisque $u_{n,\theta}$ est une solution de $(\mathscr{P}_{2,\theta,\mu_n})$, alors

$$\int_\Omega \nabla u_{n,\theta} \nabla w dx = \int_\Omega [(1-\mu_n)\theta + \mu_n \lambda_2) m_1 u_{n,\theta} + \mu_n m_2 g(u_{n,\theta}) + \mu_n h] w dx \tag{5.1.11}$$

pour tout $w \in H^1(\Omega)$.
D'autre part, on a $(u_{n,\theta})_n \subset L^\infty(\Omega)$ et q est une fonction continue, on obtient que $q(u_n)$ est une suite bornée dans $L^\infty(\Omega)$, alors pour une sous-suite de $(u_{n,\theta})_n$ nous avons

$$q(u_{n,\theta}) \rightharpoonup^\star q_\theta \text{ dans } L^\infty(\Omega), \tag{5.1.12}$$

$$\frac{|r(u_{n,\theta})|}{\|u_{n,\theta}\|_\infty} \longrightarrow 0 \text{ fortement dans } L^\infty(\Omega), \tag{5.1.13}$$

où $-c \leq q_\theta(x) \leq 0$ p.p. dans Ω.
En divisant par $\|u_{n,\theta}\|_\infty$ puis par passage à la limite lorsque $n \longrightarrow +\infty$ dans l'équation (5.1.11), on en déduit

$$\int_\Omega \nabla v_\theta \nabla w \, dx = \int_\Omega (\lambda_2 \, m_1 + q_\theta \, m_2) v_\theta \, w \, dx \;\; \forall \, w \in H^1(\Omega). \tag{5.1.14}$$

Puisque $v_\theta \neq 0$, alors le réel 1 est une valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ avec poids $m_{q_\theta} = \lambda_2 \, m_1 + q_\theta \, m_2$.
En utilisant la monotonie de λ_2 par rapport au poids (voir [27]), nous obtenons

$$\lambda_2(m_{q_\theta}) \geq \lambda_2(\lambda_2 m_1) = 1.$$

Par conséquent $\lambda_2(m_{q_\theta}) = 1$ ou $\lambda_2(m_{q_\theta}) > 1$.
Premier cas : Si $\lambda_2(m_{q_\theta}) = 1$.
Alors, nous avons

$$q_\theta = 0 \quad \text{et} \quad v_\theta = \psi.$$

De plus, on note par F_{λ_2} l'espace vectoriel propre associé à $\lambda_2 = \lambda_2(m_1)$, comme F_{λ_2} est un espace vectoriel de dimension finie, alors nous pouvons prendre

$$\eta_1 < \min_{v \in F_{\lambda_2} \cap S} \left(\frac{\max(v)}{-\min(v)} \right) \quad \text{et} \quad \eta_2 > \max_{v \in F_{\lambda_2} \cap S} \left(\frac{\max(v)}{-\min(v)} \right)$$

où $S = \left\{ v \in F_{\lambda_2} : \ \|v\|_\infty = 1 \right\}$.
Puique $\dfrac{\max(v_{n,\theta})}{-\min(v_{n,\theta})} \longrightarrow \dfrac{\max(\psi)}{-\min(\psi)}$ quand $n \longrightarrow +\infty$, il en résulte que pour n assez grand

$$\eta_1 < \frac{\max(v_{n,\theta})}{-\min(v_{n,\theta})} < \eta_2.$$

D'après (5.1.10), on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{|m_2(x) g(u_{n,\theta})|}{\|u_{n,\theta}\|_\infty} dx &\leq \|m_2\|_\infty \int_\Omega -q(u_{n,\theta}) |v_{n,\theta}| dx \\ &\quad + \|m_2\|_\infty \int_\Omega \frac{|r(u_{n\theta})|}{\|u_{n\theta}\|_\infty} dx \end{aligned}$$

d'où le résultat (5.1.6) découle immediatement par passage à la limite dans l'inégalité ci-dessus.

Deuxième cas : Si $\lambda_2(m_{q_\theta}) > 1$.

Alors nous avons $\lambda_1(m_{q_\theta}) = 1$, et en utilisant la propriété de monotonie stricte de λ_1 par rapport au poids on peut monter que

$$q_\theta = -c,$$

et par la simplicité de λ_1 on aura

$$v_\theta = \pm \varphi.$$

Ainsi en utilisnat (5.1.10), on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{|g(u_{n,\theta}) + c\, u_{n,\theta}|}{\|u_{n,\theta}\|_\infty} dx &= \int_\Omega \frac{|(q(u_{n,\theta}) + c) u_{n,\theta} + r(u_{n\theta})|}{\|u_{n,\theta}\|_\infty} dx \\ &\leq \int_\Omega |q(u_{n,\theta}) + c| v_{n,\theta} + \int_\Omega \frac{|r(u_{n\theta})|}{\|u_{n\theta}\|_\infty} dx \end{aligned}$$

d'après (5.1.12) et (5.1.13) on peut aisément voir que le second membre de cette dernière inégalité tend vers 0 quand $n \longrightarrow +\infty$.

3. Soit $(\theta_k)_k$ une suite de $]\lambda_1, \lambda_2[$ telle que $\lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} \theta_k = \lambda_2$. On note par $\overline{\mu}_k = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mu_{n,\theta_k}$. Ainsi de la même façon comme dans la preuve du point **2)** il est facile de voir

$$\begin{cases} -\Delta v_{\theta_k} = \left[((1-\overline{\mu}_k)\theta_k + \overline{\mu}_k \lambda_2) m_1 + \overline{\mu}_k q_{\theta_k} m_2\right] v_{\theta_k} & \text{dans } \Omega \\ \\ \dfrac{\partial v_{\theta_k}}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $v_{\theta_k} = \dfrac{u_{n,\theta}}{\|u_{n,\theta}\|_\infty}$.

Du fait que l'hypothèse **(H)** n'est pas vérifiée nous avons $\overline{\mu}_k \neq 1$, donc

$$0 \leq \overline{\mu}_k < 1 \text{ et } -c \leq q_{\theta_k} \leq 0,$$

et nous rappelons que

$$q(u_{n,\theta_k}) \rightharpoonup^* q_{\theta_k} \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ quand } n \longrightarrow +\infty$$

où $g(s) = q(s)s + r(s)$ avec $-c \leq q(s) \leq 0$ et $\dfrac{r(s)}{r} \longrightarrow 0$ quand $|s| \longrightarrow +\infty$.

Considérons ensuite le poids

$$\overline{M}_k = ((1-\overline{\mu}_k)\theta_k + \overline{\mu}_k\lambda_2) m_1 + \overline{\mu}_k q_{\theta_k} m_2,$$

comme $q_{\theta_k} \leq 0$, alors on aura

$$\overline{M}_k \leq ((1-\overline{\mu}_k)\theta_k + \overline{\mu}_k\lambda_2) m_1.$$

Ce qui donne d'après la monotonie de λ_2 par rapport au poids

$$\begin{aligned} \lambda_2(\overline{M}_k) &\geq \lambda_2(((1-\overline{\mu}_k)\theta_k + \overline{\mu}_k\lambda_2) m_1) \\ &\geq \frac{\lambda_2}{(1-\overline{\mu}_k)\theta_k + \overline{\mu}_k\lambda_2} > 1. \end{aligned}$$

Comme 1 est une valeur propre alors

$$\lambda_1(\overline{M}_k) = 1. \tag{5.1.15}$$

Soient $(\mu_k)_k \subset [0,1]$ et $(q_{\theta_k})_k \subset L^\infty(\Omega)$, alors par passage aux sous-suites nous avons

$$\theta_k \longrightarrow \lambda_2,\ \overline{\mu}_k \longrightarrow \overline{\mu} \text{ et } q_{\theta_k} \longrightarrow^* \overline{q}_0 \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ quand } k \longrightarrow +\infty$$

où $-c \leq \overline{q}_0 \leq 0$.
En passant à la limite lorsque $k \longrightarrow +\infty$ dans (5.1.15), on obtient

$$\lambda_1(\lambda_2\, m_1 + \overline{\mu}\ \overline{q}_0\, m_2) = 1. \tag{5.1.16}$$

Grâce au lemme 5.1.1, on conclut que

$$\overline{\mu} = 1,\ \overline{q}_0 = -c \text{ et } u_{\theta_k} \longrightarrow \pm\varphi \text{ fortement dans } C^1(\Omega) \text{ quand } k \longrightarrow +\infty.$$

D'autre part, en utilisant (5.1.10), on aura

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{|g(w_k) + c\, w_k|}{\|w_k\|_\infty} dx &= \int_\Omega \frac{|q(w_k) w_k + c w_k + r(w_k)|}{\|w_k\|_\infty} dx \\ &\leq \int_\Omega |q(w_k) + c| \frac{w_k}{\|w_k\|_\infty} dx + \int_\Omega \frac{|r(w_k)|}{\|w_k\|_\infty} dx.\end{aligned}$$

où $w_k = u_{n_k,\theta_k}$.
Puisque $\dfrac{r(s)}{s} \longrightarrow 0$ quand $|s| \longrightarrow \infty$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_{\varepsilon,k}$ tel que pour tout $n \geq n_{\varepsilon,k}$ nous avons

$$\int_\Omega \frac{|g(u_{n_k,\theta_k}) + c\, u_{n_k,\theta_k}|}{\|u_{n_k,\theta_k}\|_\infty} dx \leq \int_\Omega |\overline{q}_{n,\theta_k} + c||v_{\theta_k}| dx + \varepsilon.$$

Ainsi si on prend $\varepsilon = \dfrac{1}{k}$, $n = n_k = n_{\varepsilon,k}$ puis on remplace dans l'inégalité ci-dessus, nous pouvons voir que le second membre tend vers 0 quand $k \longrightarrow +\infty$.
Finalement, on conclut par le fait que n_k peut être rectifié de telle sorte que :

$$\|u_{n_k,\theta_k}\|_\infty > k \text{ et } \|v_{n_k,\theta_k} - v_{\theta_k}\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq \frac{1}{k}.$$

Lemme 5.1.3 *Reprenons les hypothèses et les notations du lemme 5.1.2. Considérons $a \in \Omega$ et $\eta > 0$ tels que $B(a,\eta) \subset \Omega$.*

1. *Supposons que l'hypothèse* (**H**) *est vérifiée alors :*

i) *Si $v_\theta = \psi$, alors*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^1 \frac{|g(u_{n,\theta}(\sigma_x(t)))||\nabla u_{n,\theta}(\sigma_x(t))||x-a|}{\|u_{n,\theta}\|_\infty^2}dt = 0 \ \ p.p.\ x \in \partial B(a,\eta) \tag{5.1.17}$$

ii) *Si $v_\theta = \pm\varphi$, alors*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^1 \frac{|g(u_{n,\theta}(\sigma_x(t))) + c\,u_{n,\theta}(\sigma_x(t)||\nabla u_{n,\theta}(\sigma_x(t))||x-a|}{\|u_{n,\theta}\|_\infty^2}dt = 0 \ \ p.p.\ x \in \partial B(a,\eta). \tag{5.1.18}$$

2. *Supposons que* **(H)** *n'est pas vérifiée, alors nous avons*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^1 \frac{|g(w_k(\sigma_x(t))) + c\,w_k(\sigma_x(t)||\nabla w_k(\sigma_x(t))||x-a|}{\|w_k\|_\infty^2}dt = 0 \ \ p.p.\ x \in \partial B(a,\eta). \tag{5.1.19}$$

où $\sigma_x(t) = a + t(x-a)$ et $w_k = u_{n_k,\theta_k}$.

Preuve. Nous montrons seulement la convergence (5.1.17) car dans la preuve de (5.1.18) et (5.1.19) on procède de la même manière.

D'abord nous avons

$$\int_{B(a,\eta)} \frac{|g(u_{n,\theta})|}{\|u_{n,\theta}\|_\infty}dx \le \int_\Omega \frac{|g(u_{n,\theta})|}{\|u_{n,\theta}\|_\infty}dx,$$

Ainsi d'après (5.1.6), on obtient

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_{B(a,\eta)} \frac{|g(u_{n,\theta})|}{\|u_{n,\theta}\|_\infty}dx = 0.$$

ce qui donne par passage en coordonnées sphériques

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_{[0,\pi]^N} \int_0^{2\pi}\int_0^\eta t^{N-1}\frac{|g(u_{n,\theta}(a+t\omega))|}{\|u_{n,\theta}\|_\infty} \prod_{j=1}^{N-2}(\sin\theta_j)^{N-1-j}d\theta_j d\theta_{N-1}dt = 0 \tag{5.1.20}$$

où, $\omega = \frac{x-a}{\eta} \in \partial B(0,1)$.
L'égalité ci-dessus implique que

$$\frac{|g(u_{n,\theta}(\sigma_x(\tau)))|}{\|u_{n,\theta}\|_\infty} \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty \text{ p.p. } x \in \partial B(a,\eta) \text{ et p.p. } \tau \in [0,1].$$

D'après l'hypothèse (5.1.3) on peut montrer que g vérifie la condition de croissance suivante :

$$|g(s)| \leq a|s| + b, \text{ pour certains réels positifs } a, b \text{ et } \forall s \in \mathbb{R}$$

donc $\left(\frac{|g(u_{n,\theta}(\sigma_x(.)))|}{\|u_{n,\theta}\|_\infty}\right)_n$ et $\left(\frac{|\nabla(u_{n,\theta}(\sigma_x(.)))|}{\|u_{n,\theta}\|_\infty}\right)_n$ sont bornées dans $L^\infty([0,1])$.
Ainsi pour achèver la démonstration il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominé de Lebesgue.

Lemme 5.1.4

1. *Si la fonction G vérifie l'hypothèse suivante*

$$-c < \limsup_{s \longrightarrow +\infty} \frac{2G(s)}{s^2} \leq 0,$$

alors pour tout $r \in]0,1[$, *il existe* $\rho_r > -c(1-r^2)$ *et une suite de nombres réels positifs* (S_n) *telle que*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n = +\infty \; et \; \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{2G(S_n) - 2G(rS_n)}{S_n^2} = \rho_r.$$

2. *Si la fonction G vérifie*

$$-c < \limsup_{s \longrightarrow +\infty} \frac{2G(s)}{s^2} \leq 0 \; et \; -c < \liminf_{s \longrightarrow +\infty} \frac{2G(s)}{s^2} < 0,$$

alors pour tout $r \in]0,1[$, *il existe* $\rho \in]-c,0[$ *et une suite de nombres réels positifs* $(S_n^{'})$ *telle que*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n^{'} = +\infty, \; \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{2G(S_n^{'})}{S_n^{'2}} = \rho$$

et

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{2G(S_n^{'}) - 2G(rS_n^{'})}{S_n^{'2}} = \rho_r > -c(1-r^2).$$

On obtient la même conclusion lorsqu'on remplace $+\infty$ *par* $-\infty$, *dans ce cas, on note* $\rho^{'}$ *et* $\rho_r^{'}$ *à la place de* ρ *et* ρ_r *respectivement.*

Preuve. Posons $L_1 = \liminf_{s\longrightarrow+\infty} \frac{2G(s)}{s^2}$ et $L_2 = \limsup_{s\longrightarrow+\infty} \frac{2G(s)}{s^2}$.
On distingue les deux cas suivants :

Case1 : Si $L_1 = L_2$, alors il suffit de prendre $\rho = L_2$ et $\rho_r = (1-r^2)L_2$.

Case2 : Si $L_1 < L_2$, alors on prend $\rho \in]L_1, L_2[$ très proche de L_2 de telle sorte que :

$$\rho - r^2 L_2 > -c(1-r^2).$$

Or d'après les définitions de L_1 et L_2, il est facile de montrer qu'il existe une suite (S_n) telle que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = +\infty \text{ et } \frac{2G(S_n)}{S_n^2} = \rho.$$

Posons

$$\liminf_{n\longrightarrow+\infty} \frac{2G(S_n) - 2G(rS_n)}{S_n^2} = \rho - r^2 \limsup_{n\longrightarrow+\infty} \frac{2G(rS_n)}{rS_n^2}.$$

Puisque

$$\limsup_{n\longrightarrow+\infty} \frac{2G(rS_n)}{(rS_n)^2} \leq L_2,$$

alors nous avons

$$\rho_r \geq \rho - r^2 L_2 > -c(1-r^2).$$

5.1.2 Preuve du résultat principal

Notre but consiste à construire dans $\mathscr{C}(\overline{\Omega})$ un ouvert borné $\mathscr{O}$ tel que, s'il existe $\theta \in]\lambda_1, \lambda_2[$ de telle sorte que aucune solution du problème $(\mathscr{P}_{2,\theta,\mu})$ n'appartient pas à la frontière de $\mathscr{O}$ pour tout $\mu \in [0,1[$. L'invariance du degré de Leary-Shauder par homotopie donne alors la conclusion. Considérons l'ouvert suivant :

$$\mathscr{O} = \mathscr{O}_{S,T} = \left\{ u \in \mathscr{C}(\overline{\Omega}); \quad T < u < S \right\},$$

où S et T sont deux réels tels que $T < 0 < S$.
Pour la démonstration on utilise un raisonnement par l'absurde. En effet, on suppose que :
$\forall\, \theta \in]\lambda_1, \lambda_2[\quad \forall\, (T,S), \exists\, \mu = \mu_{\theta,S,T} \in [0,1[$ ***et*** $u = u_{\theta,S,T} \in \partial\mathscr{O}$ ***tel que*** u ***est une solution du problème*** $(\mathscr{P}_{2,\theta,\mu})$.

Ce qui donne

$$\max(u) = S \text{ ou } \min(u) = T. \tag{5.1.21}$$

Rappelons l'hypothèse (5.1.4) du théorème 5.1.1

$$-c < \limsup_{|s|\longrightarrow\infty} \frac{2G(s)}{s^2}; \liminf_{s\longrightarrow+\infty \text{ou} -\infty} \frac{2G(s)}{s^2} < 0$$

on suppose que l'hypothèse suivante est vraie

$$(\mathbf{H}^+) \qquad -c < \limsup_{|s|\longrightarrow\infty} \frac{2G(s)}{s^2} \text{ et } \liminf_{s\longrightarrow+\infty} \frac{2G(s)}{s^2} < 0.$$

Une preuve analogue sera adaptée dans le cas où l'hypothèse $(\mathbf{H}^-)$ est vérifiée avec

$$(\mathbf{H}^-) \qquad -c < \limsup_{|s|\longrightarrow\infty} \frac{2G(s)}{s^2} \text{ et } \liminf_{s\longrightarrow-\infty} \frac{2G(s)}{s^2} < 0.$$

D'après $(\mathbf{H}^+)$, puis grâce au lemme 5.1.4, il existe deux suites (T_n) et (S_n) telles que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} T_n = -\infty, \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{2G(T_n) - 2G(r\,T_n)}{T_n^2} = \rho_r' \tag{5.1.22}$$

et

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = +\infty, \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{2G(S_n)}{S_n^2} = \rho \; et \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{2G(S_n) - 2G(r\,S_n)}{S_n^2} = \rho_r \tag{5.1.23}$$

où ρ, ρ_r et ρ_r' sont données par le lemme 5.1.4 et $r = \dfrac{\min\varphi}{\max\varphi}$ avec φ est une fonction propre associée à la valeur propre $\lambda_1(\lambda_2\, m_1 - c\, m_2) = 1$.
Remarquons que, par passage à une sous-suite de (T_n) on pourra supposer

$$\frac{S_n}{-T_n} \leq \eta_1. \tag{5.1.24}$$

D'abord on convient de noter par

$$T = T_n,\ S = S_n,\ \mu_{n,\theta} = \mu_{\theta,T,S} \text{ et } u_{n,\theta} = u_{\theta,T,S}.$$

En remplaçant dans (5.1.21) et (5.1.23), on obtient

$$\|u_{n,\theta}\|_\infty \longrightarrow +\infty \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

Par ailleurs nous avons deux cas à envisager :

Premier cas : Supposons que l'hypothèse **(H)** est vérifiée (cf. lemme 5.1.2).

Ainsi d'après le lemme 5.1.2 nous avons

$$v_{n,\theta} = \frac{u_{n,\theta}}{\|u_{n,\theta}\|_\infty} \longrightarrow v_\theta \text{ avec } v_\theta = \psi \text{ ou } v_\theta = \pm\varphi.$$

i) Si $v_\theta = \psi$, nous affirmons que pour tout n assez grand, nous avons

$$\max(u_{n,\theta}) = S_n.$$

En effet, car sinon on aura

$$\max(u_{n,\theta}) < S_n \text{ et } \min(u_{n,\theta}) = T_n$$

donc,

$$\frac{\max(u_{n,\theta})}{-\min(u_{n,\theta})} < \frac{S_n}{-T_n} \leq \eta_1.$$

ce qui donne une contradiction avec la définition de η_1 donné par le lemme 5.1.2.

D'autre part, la fonction $u_{n,\theta}$ change de signe sur Ω, donc il existe $x_n \in \overline{\Omega}$ et $y_n \in \Omega$ tels que

$$u_{n,\theta}(x_n) = S_n \text{ et } u_{n,\theta}(y_n) = 0.$$

ce qui permet d'écrire

$$\frac{2G(S_n)}{S_n^2} = \frac{2G(u_{n,\theta}(x_n)) - 2G(u_{n,\theta}(y_n))}{\|u_{n,\theta}\|_\infty^2 \max(v_{n,\theta})^2} = \frac{2}{\max(v_{n,\theta})^2} \int_{\mathscr{C}_n} \frac{d(G \circ u_{n,\theta})}{\|u_{n,\theta}\|_\infty^2}$$

où

$$d(G \circ u_{n,\theta})(\mathscr{C}_n) = g(u_{n,\theta}(\mathscr{C}_n)) \nabla u_{n,\theta}(\mathscr{C}_n).\mathscr{C}_n', \text{ p.p. } x \in \Omega$$

et $\mathscr{C}_n$ est un chemin de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux relient x_n et y_n dans $\overline{\Omega}$.
Ainsi par application du lemme 5.1.3, on obtient

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_{\mathscr{C}_n}\frac{d(G\circ u_{n,\theta})}{\|u_{n,\theta}\|_\infty^2}=0.$$

Comme $\max(v_{n,\theta})\longrightarrow\max(\psi)$ quand $n\longrightarrow+\infty$, on déduit que

$$\rho=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{2G(S_n)}{S_n^2}=0,$$

ce qui est absurde car $\rho\in]-c,0[$.
ii) Si $v_\theta=\pm\varphi$, alors pour tout n suffisamment grand on a $u_{n,\theta}$ garde un signe constant sur Ω. Donc

$$\max(u_{n,\theta})=S_n \text{ ou } \min(u_{n,\theta})=T_n.$$

Supposons que $\max(u_{n,\theta})=S_n$ (lorsqu'on suppose $\min(u_{n,\theta})=T_n$ en suivant la même démarche), donc pour n assez grand nous avons $v_{n,\theta}=+\varphi$ et $\min(u_{n,\theta})>0$.
Posons

$$\overline{g}(s)=g(s)+cs,\ \overline{G}(s)=\int_0^s\overline{g}(s)ds.$$

Soit $x_n,\ y_n\in\overline{\Omega}$ tels que $u_{n,\theta}(x_n)=S_n$ et $u_{n,\theta}(y_n)=\min(u_{n,\theta})$.
Ecrivons

$$\begin{aligned}\frac{\overline{G}(S_n)-\overline{G}(r_nS_n)}{S_n^2}&=\frac{2\overline{G}(u_{n,\theta}(x_n))-2\overline{G}(u_{n,\theta}(y_n))}{\|u_{n,\theta}\|_\infty^2}\\&=\int_{\mathscr{C}_n}\frac{d(\overline{G}\circ u_{n,\theta})}{\|u_{n,\theta}\|_\infty^2}\end{aligned}$$

où $r_n=\dfrac{\min(u_{n,\theta})}{\max(u_{n,\theta})}\longrightarrow r=\dfrac{\min(\varphi)}{\max(\varphi)}$ quand $n\longrightarrow+\infty$.
En utilisant le résultat du lemme 5.1.3, on obtient

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_{\mathscr{C}_n}\frac{d(\overline{G}\circ u_{n,\theta})}{\|u_{n,\theta}\|_\infty^2}=0. \tag{5.1.25}$$

D'autre part, il est facile de vérifier que

$$0=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{\overline{G}(S_n)-\overline{G}(r_nS_n)}{S_n^2}=\frac{\rho_r+c(1-r^2)}{2}>0$$

ce qui donne une contradiction.

Deuxième cas : Supposons que l'hypothèse **(H)** n'est pas vérifiée, donc pour tout $\theta \in]\lambda_1, \lambda_2[$ tel que $\limsup_{n\longrightarrow+\infty} \mu_{n,\theta} < 1$, on prend une suite $(\theta_k) \subset]\lambda_1, \lambda_2[$ telle que

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty} \theta_k = \lambda_2,$$

et nous considérons les sous-suites

$$(T_{n_k})_k, (S_{n_k})_k \text{ et } (w_k)_k \text{ tel que } w_k = u_{n_k,\theta_k}.$$

Pour obtenir une contradiction on procède de la même façon comme dans le second point du cas précédent.

Finalement, si on suppose que l'hypothèse $(\mathbf{H}^-)$ est vérifiée nous affirmons d'après le lemme 5.1.4 qu'ils existe deux suites

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} T_n = -\infty, \ \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{2G(T_n) - 2G(rT_n)}{T_n^2} = \rho_r',$$

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = +\infty, \ \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{2G(S_n)}{S_n^2} = \rho \ et \ \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{2G(S_n) - 2G(rS_n)}{S_n^2} = \rho_r$$

où $r = \dfrac{\min\varphi}{\max\varphi}$.

Remarquons que par passage à une sous-suite de (S_n) on pourra supposer

$$\frac{S_n}{-T_n} \geq \eta_2.$$

Le reste de la preuve est similaire du cas où l'on supposé que $(\mathbf{H}^+)$ est vérifiée.

5.2 Non-résonance entre les deux premières courbes propres.

Dans cette section, nous allons prouver un résultat d'existence pour le problème $(\mathscr{P})$, pour cela nous avons besoin des hypothèses plus restrictives sur la fonction g et

son potentiel G.

$$(\mathbf{A}_g) \qquad \beta_1 \leq \liminf_{s\longrightarrow\pm\infty} \frac{g(s)}{s} \leq \limsup_{s\longrightarrow\pm\infty} \frac{g(s)}{s} \leq \beta_2,$$

$$(\mathbf{A}_G^{\pm}) \quad \beta_1 < \limsup_{|s|\longrightarrow\infty} \frac{2G(s)}{s^2}; \liminf_{s\longrightarrow+\infty\, ou\, -\infty} \frac{2G(s)}{s^2} < \beta_2,$$

où $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$ avec $\beta_2 - \beta_1 = c$ telle que $\lambda_1(\lambda_2 m_1 - c\, m_2) = 1$.

Théorème 5.2.1 *Soient $m_1, m_2 \in M^+(\Omega)$, $(\alpha, \beta_1) \in \mathscr{C}_1$ et $(\alpha, \beta_2) \in \mathscr{C}_2$, avec $\alpha \geq \lambda_2(m_1)$ ou $\alpha \leq \lambda_{-2}(m_1)$. Alors sous les conditions $(\boldsymbol{A})$, $(\boldsymbol{A}_g)$ et $(\boldsymbol{A}_G^{\pm})$, le problème $(\mathscr{P})$ admet au moins une solution faible non triviale $u \in H^1(\Omega)$ pour tout $h \in L^\infty(\Omega)$.*

Preuve. Le problème $(\mathscr{P})$ peut être s'écrire sous la forme équivalente suivante

$$(\mathscr{P}_e) \quad \begin{cases} -\Delta u = \widetilde{m}|u|^{p-2}u + m_2\, \widetilde{g}(u) + h & \text{dans} \quad \Omega \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où

$$\widetilde{g}(s) = g(s) - \beta_2\, s,$$

et

$$\widetilde{m} = \alpha\, m_1 + \beta_2\, m_2.$$

Remarquons que cette forme c'est exactement la forme du problème $(\mathscr{P}_2)$ déja étudié dans la section pécédante. Ainsi, puisque $(\alpha, \beta_2) \in \mathscr{C}_2$, donc 1 est la deuxième valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ avec poids $\widetilde{m}$ et avec condition de Neumann au bord de Ω. Alors grâce au théorème 5.1.1, il existe au moins une solution faible $u \in H^1(\Omega)$ du problème $(\mathscr{P}_e)$ pour tout $h \in L^\infty(\Omega)$ si la fonction $\widetilde{g}$ et son potentiel $\widetilde{G}$ vérifient les conditions (5.1.3) et (5.1.4). En effet, en utilisant $(\mathbf{A}_g)$, nous avons

$$\beta_1 - \beta_2 \leq \liminf_{|s|\longrightarrow\infty} \left(\frac{g(s)}{s} - \beta_2 \right) \leq 0,$$

cela implique

$$-c \leq \liminf_{|s|\longrightarrow\infty} \left(\frac{\widetilde{g}(s)}{s} \right) \leq 0.$$

Et par conséquent, $\widetilde{g}$ vérifié la condition (5.1.3).

D'autre part, en utilisant $(\mathbf{A}_G^{\pm})$, nous avons

$$\beta_1 - \beta_2 < \limsup_{|s|\longrightarrow\infty}\left(\frac{2G(s)}{s^2} - \beta_2\right); \liminf_{s\longrightarrow+\infty\, or\, -\infty}\left(\frac{2G(s)}{s^2} - \beta_2\right) < 0$$

ce qui donne

$$-c < \limsup_{|s|\longrightarrow\infty}\left(\frac{2\widetilde{G}(s)}{s^2}\right); \liminf_{s\longrightarrow+\infty\, or\, -\infty}\left(\frac{2\widetilde{G}(s)}{s^2}\right) < 0$$

ce la signifie que $\widetilde{G}$ vérifie la condition (5.1.4).

Finallement, puisque le problème $(\mathscr{P}_e)$ est équivalent au problème $(\mathscr{P})$. Alors le problème $(\mathscr{P})$ admet au moins une solution faible non triviale $u \in H^1(\Omega)$ pour tout $h \in L^\infty(\Omega)$.

Remarque 5.2.1 *L'étude de la non-résonance entre les deux premières courbes propres peut se faire sans probème en faisant des hypothèses plus générales sur la fonction h à savoir :*

1) *Si $N = 1$ ou $N = 2$, alors on peut prendre $h \in L^1(\Omega)$.*

2) *Si $N > 3$, alors on peut prendre $h \in L^r(\Omega)$ pour $r \geq (2^*)'$,*
où $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ et $\dfrac{1}{2^*} + \dfrac{1}{(2^*)'}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] **R.A. Adams**, Sobolev spaces, Academic Press, Pure and Applied Mathematics, New York-London, vol. 65, (1975).

[2] **M. Alif, P. Omari**, On a p-Laplace Neumann problem with asymptotically asymmetric perturbations, Nonlinear Analysis **51** (2002) 369-389

[3] **A. Anane**, Simplicité et isolation de la première valeur propre du p-Laplacien avec poids, C.R.A.S, Paris, t. **305** (1987), 725-728.

[4] **A. Anane**, Etude des valeurs propres et de la résonance pour l'operateur p-Laplacien , Thèse de Doctorat, Université Libre de Bruxelles, (1988).

[5] **A. Anane, O. Chakrone**, Sur un théorème de point critique et application à un problème de non-resonance entre les deux valeurs propres du p-Laplacien, Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, tome 9 $n°$ 1 (2000), p. 5-30.

[6] **A. Anane, O. Chakrone, M. Moussa**, Spectrum of one dimensional p-Laplacian operator with indefinite weight, EJQTDE, (2002), no **17**, 1-11.

[7] **A. Anane, N. Tsouli**, On the second eigenvalue of the p-Laplacian. Nonlinear Partial Differential Equations, A. Benkirane, J.P. Gossez (Eds.) Pitman Res. Notes in Math., **(343)** 1-9, (1996).

[8] **M. Belloni, B. Kawohl, and P. Juutinen**, The p-Laplacian eigenvalue problemas $p \to \infty$ in a Finsler metric. J. Europ. Math. Soc., pages 1-19, (2006).

[9] **A. Benazzi**, Etude du spectre d'un opérateur quasilinéaire elliptique du seconde ordre Thèse de Doctorat de $3^{\text{è}me}$ Cycle, Faculté des sciences Oujda, Maroc (1994).

[10] **V. Benci**, The Conley index and functional analysis. Séminaire de Mthémathiques Supérieures. Les presses de l'Universitéde Montréal. Montréal (1990).

[11] **P.A. Binding, P.J. Browne**, Asymptotics of eigencurves for second order ordinary differential equations, I, J. Differential Equations **88** (1990), 30-34 ; II, Ibid 89 (1991), 224-243.

[12] **P.A. Binding, P.J. Browne, Y.X. Huang, and R.H. Picard**, On eigencurves of elliptic boundary value problems, Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect. **A 118** (1991), 161-171.

[13] **P. A. Binding, Y. X. Huang**, The principal eigenvalue of the p-Laplacian Diff. Int. Eqns.**8** (1995), 405–414.

[14] **P.A. Binding, Y.X. Huang**, Two parameter problems for the p-Laplacian, V. Lakshmikanthan, (Ed.),Proceedings of the First International Congress on Nonlinear Analysts, Walter de Gruyter, New York, (1996), pp. 891–900

[15] **P.A. Binding, Y. X. Huang**, Bifurcation from eigencurves of the p-Laplacian. Diff. Int. Eqns. **8** (1995), 405-414.

[16] **H. Brezis**, Analyse fonctionnelle. Théorie et applications, Masson, (1993).

[17] **K.C. Chang**, Infinite Dimensional Morse Theory and its Applications. Les presses de l'Universitéde Montréal. Montréal **108**, (1985).

[18] **R. Courant, D. Hilbert**, Methodes of Mathematical Physics. Interscience, New York, (1943).

[19] **M. Cuesta**, Eigenvalue problems for the p-Laplacian with indefinite weight. Elec. J. Differ. Equ. 1-9 (2001).

[20] **A. Dakkak, A. Anane**, Nonresonance Conditions on the Potential for a Neumann Problem. Proceedings of the international conference held in Fez, partial differential equations pp. 85-102.

[21] **A. Dakkak**, Etude sur le spectre et la résonance pour des problèmes elliptiques de Neumann. Thèse de $3^{ème}$ cycle, Faculté des sciences, Oujda, Maroc,(1995).

[22] **A. Dakkak**, Valeures propres nonlinéaires, spectre de Fučík et application à l'étude de non-résonance pour l'opérateur p-Laplacien avec conditions aux bords. Thèse de doctorat, Faculté des sciences, Oujda, Maroc,(2000).

[23] **A. Dakkak, S. El Habib and N. Tsouli**, On the spectrum of one dimensional p-Laplacian for an eigenvalue problem with Neumann boundary conditions. Bol.Soc.Paran de Mat., **(3s.) v. 33 1** (2015) : 9-21.

[24] **A. Dakkak, M. Hadda**, Eigencurves of the p-Laplacian with weights and their asymptotic behavior. EJDE, Vol 2007(2007), No. 35, pp. 1–7.

[25] **A. Dakkak, M. Moussaoui**, On the second eigencurve for the p-Laplacian operator with weight. Bol. Soc. Paran. Mat., (3s.) v. 35 1 (2017) : 281Ű289.

[26] **D.G. De Figueiredo**, Lectures on the Ekeland variational principe with applications and detours. Variational Problems in Analysis. ICTP (Trieste)(1988).

[27] **D.G. De Figueiredo and J-P. Gossez**, Strict monotonicity of eigenvalues and unique continuation, Comm. Part. Diff. Equa., 17, pp 339-346, (1992).

[28] **D.G. De Figueiredo and J-P. Gossez**, On the first curve of the Fučík spectrum of an elliptic operator, Diff. Int. Equa., volume 7, number 5, pp-1285-1302, (1994).

[29] **K. Deimling**, Nonlinear Functional Analysis. Springer Verlag. New York. Berlin. Heidelberg (1980).

[30] **D. Del Pino, M. Elgueta, and R. Man'asevich**, A homotopic deformation along p of a Leray-Schauder degree result and existance for $-\left(|u'|^{p-2}u'\right)' + f(t,x) = 0$ J. Differential Equations **80** 1-13, (1989).

[31] **D. Del Santo, P. Omari**, Nonresonance conditions on the potential for a semilinear elliptic problem. J. Diff. Equ. pp. 120-138, (1994).

[32] **A. Elbert**, A half-linear second differential equations. Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai **30** Qualitative Theory of Differential Equations, Szeged, (Hungary), 124-143,(1982).

[33] **A. El Hachimi, J-P. Gossez**, A note on a nonresonance condition for a semilinear elliptic problem. Analysis T.M.A. **108** (1994), pp 229–236.

[34] **J. Fleckinger, M.L. Lapidus**, Eigenvalues of elliptic boundary value problems with an indefinite weight function, Tran. Amer. Math. Soc., **295** (1986), 305-324.

[35] **Garcia Azorero, J.P., Peral Alonso**, Existence and nonuniqueness for the p-Laplacian nonlinear eigenvalues. Commun. Partial Differ. Equ. **12**, (1987) 1389-1400.

[36] **T. Godoy, J.-P. Gossez, S. Paczka**, On the antimaximum principle for the p-Laplacian with indefinite weight. Nonlinear Anal. **51** (2002) 449–467.

[37] **M. Guedda, L. Veron**, Bifurcation phenomena associated to the p-Laplace operator. Trans. Amer. Math. Sot. **310** (1988) 419–431.

[38] **M. Hadda**, Existence et comportement asymptotique des courbes propres du p-Laplacien avec poids indéfinis, Thèse de Doctorat, Faculté des sciences Meknès (2007).

[39] **Y.X. Huang**, On eigenvalue problems of the p-Laplacian with Neumann boundary conditions. Proc. Amer. Math. Soc. **109** (1) (1990) 177-184.

[40] **J-P. Gossez, P. Omari**, A necessary and sufficient condition of nonresonance for a semilinear Neumann problem. Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 114, No. 2 (Feb.,1992), pp. 433-442.

[41] **J-P. Gossez, P. Omari**, On a semilinear elliptic Neumann problem with asymmetric nonlinearities. Transactions of Amer. Math. Soc. Volume 347, Number 7, pp. 2553-2562, July 1995.

[42] **O. Kavian**, Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, Mathématiques et Applications, Springer-Verlag, Paris, (1993).

[43] **M.A. Krasnoselskii**, Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations. Pergamon Press, Oxford, (1964).

[44] **J-L. Lions**, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod et Gauthiers-Villars, Paris 1969.

[45] **V.G. Maz'ja**, Sobolev Spaces ; Springer, Berlin (1985).

[46] **A.B. Mingarelli**, A Survey of the Regular Weighted Sturm-Liouville Problem : The Non-Definite Case. Applied Differential Equations, World Scientific, Singapore, (1986) 109-137.

[47] **P. Omari and F. Zanolin**, Nonresonance conditions on the potential for a second order periodic boundary value problem Proc.Amer.Math.Soc. **117**, (1993) pp 125–135.

[48] **M. Otani**, On certain second order ordinary differential equations associated with sobolev-poincaré-type inequalities. Nonlinear Anal., 8 **(11)** 1255-1270, (1984).

[49] **M. Otani**, A remark on certain nonlinear elliptic equations. Pro. Sci. Tokai Univ. N **19** 23-28, (1984).

[50] **M.C. Pélissier**, Sur quelques problèmes non linéairesen glaciologie. Thèse de doctorat de l'université Paris XI. Publications mathématiques d'Orsay, (1975).

[51] **P. Rabinowitz**, Minmax Methodes in Critical Point Theory with Applictions to Differential Equations. CBMS, Regional Conference N **65**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., (1986).

[52] **A. Sanhaji, A. Dakkak**, Nonresonance Conditions on the Potential for a Nonlinear Nonautonomous Neumann Problem, Bol. Soc. Paran de Mat. https ://doi.org/10.5269/bspm.v38i3.36296.

[53] **A. Sanhaji, A. Dakkak**, Nonresonance between the first two Eigencurves of Laplacian for a Nonautonomous Neumann Problem, ASTES Journal Vol. 2, No. **5**, 152-159 (2017)

[54] **A. Sanhaji, A. Dakkak**, On the eigencurves of one dimensional p-Laplacian with weights for an elliptic Neumann problem, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2 https ://doi.org/10.1007/s12215-019-00405-4

[55] **M. Struwe**, Variational Methods : Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems, Fourth Edition ,Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2008).

[56] **M. Tanaka**, Existence results for quasilinear elliptic equations with indefinite weight. Abstract and Applied Analysis. Volume 2012, Article ID 568120, 31 pages doi :10.1155/2012/568120

[57] **A. Touzani**, Quelques résultats sur le A_p-Laplacien avec poids indéfini. Thèse Doctorat Université Libre de Bruxilles, (1992).

[58] **P. Tolksdorf**, Regularity for more general class of quasilinear elliptic equation J.Diff. Eq. 8, (1983), pp. 773–817.

[59] **N. Tsouli**, Etude de l'ensemle nodale des fonctions propres de l'opérateur p-Laplacian, Thèse Doctorat, Faculté des sciences, Oujda, (1996).

[60] **J.L. Vazquez**, A Strong Maximum Principle for some quasilinear elliptic aquations. Appli. Math. Optim., **12** 191-202, (1984).

[61] **E. Zeidler**, Nonlinear Functional Analysis and its Applications. Springer Verlay, Tome 3, (1984).