

# THÈSE

## En vue de l'obtention du DOCTORAT

Centre de Recherche : Centre de Recherches Mathématiques et Applications de Rabat  
Structure de Recherche : Laboratoire de Mathématiques, Statistique et Applications  
Discipline : Mathématiques Appliquées  
Spécialité : Statistique et Mathématiques financières

Présentée et Soutenue le 20/04/2024

par :

**Khalid BELABBES**

## Contributions de la théorie de l'incertitude à l'optimisation de portefeuille d'actifs financiers

### Devant le JURY :

Nezha AMMOR	PES	Faculté des Sciences de Rabat, Université Mohammed V	Président
Zine el abidine ABDELALI	PES	Faculté des Sciences de Rabat, Université Mohammed V	Examineur/Rapporteur
Mohamed FIHRI	PH	Faculté des Sciences de Rabat, Université Mohammed V	Examineur/Rapporteur
Abderrahim EL ATTAR	PH	Faculté des Sciences Juridiques, Economiques et Sociales-Ain Sebaa-Casablanca, Université Hassan II	Examineur/Rapporteur
Mostafa EL HACHLOUFI	PES	Faculté des Sciences Juridiques, Economiques et Sociales-Ain Sebaa, Université Hassan II, Casablanca	Co-Directeur de thèse
Zine el abidine GUENNOUN	PES	Faculté des Sciences de Rabat, Université Mohammed V	Directeur de thèse

**Année Universitaire : 2023 - 2024**

## **Résumé**

L'optimisation de portefeuille des actifs financiers consiste à chercher au sein d'un ensemble d'actifs financier donné, lesquels permettant de s'adapter à diverses contraintes. Il s'agit de déterminer le meilleur choix pour équilibrer l'objectif de minimiser le risque et de maximiser le rendement. Les vraies décisions sont généralement prises dans l'état d'indétermination. Pour traiter rationnellement l'indétermination, il existe deux systèmes mathématiques, l'un est la théorie des probabilités et l'autre est la théorie de l'incertitude. La théorie des probabilités est une branche des mathématiques pour modéliser les fréquences, tandis que la théorie de l'incertitude est une branche des mathématiques pour modéliser les degrés de croyance. En supposant que les rendements des titres sont des variables incertaines, nous avons proposé de nouveaux problèmes d'optimisation de portefeuille sur plusieurs périodes et prenons Tail Value at Risk (TVaR) comme mesure cohérente du risque d'investissement. Les contraintes reflétant la réalité, dans lesquelles les coûts de transaction, la liquidité des titres et la diversification du portefeuille sont pris en compte. En outre, nous avons introduit de nouveaux problèmes d'optimisation de portefeuille international lorsque les prix futurs des titres et les taux de change sont considérés comme des variables incertaines, données par des estimations d'experts et évaluées par des experts plutôt que par des données historiques. Nous proposons des modèles Mean-VaR pour la sélection de portefeuilles internationaux en prenant la valeur à risque incertaine (VaR) comme mesure du risque d'investissement. Finalement, nous avons proposé un nouveau modèle Mean-VaR qui permet sélectionner un portefeuille optimal dans un marché financier islamique en utilisant la VaR comme mesure de risque et prenant en considération la Zakat et les coûts de transactions et la diversification en utilisant la théorie de l'incertitude.

**Mots-clefs :** théorie de l'incertitude, optimisation, risque, rendement, finance islamique.

## **Abstract**

Portfolio optimization of financial assets involves searching within a given set of financial assets to determine which ones adapt to various constraints. It is about finding the best choice to balance the objective of minimizing risk and maximizing return. Real decisions are usually made in a state of uncertainty. To rationally deal with uncertainty, there are two mathematical systems, one being probability theory and the other being uncertainty theory. Probability theory is a branch of mathematics for modeling frequencies, while uncertainty theory is a branch of mathematics for modeling degrees of belief. Assuming that security returns are uncertain variables, we have proposed new multi-period portfolio optimization problems and take Tail Value at Risk (TVaR) as a coherent measure of investment risk. Constraints reflecting reality, in which transaction costs, security liquidity, and portfolio diversification are considered. Additionally, we have introduced new international portfolio optimization problems when future security prices and exchange rates are considered as uncertain variables, given by expert estimates, and evaluated by experts rather than historical data. We propose Mean-VaR models for international portfolio selection by taking uncertain value at risk (VaR) as a measure of investment risk. Finally, we have proposed a new Mean-VaR model that allows for optimal portfolio selection in an Islamic financial market using VaR as a risk measure and taking into consideration Zakat, transaction costs, and diversification using uncertainty theory.

**Keywords:** uncertainty theory, optimization, risk, return, islamic finance.

## REMERCIEMENTS

---

Les travaux présentés dans ce rapport ont été réalisés au sein du **laboratoire Mathématiques, Statistique et Applications**.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude envers mon directeur de thèse, Monsieur **Zine El Abidine GUENNOUN**, Professeur d'enseignement supérieur à l'Université Mohamed V, Faculté des Sciences de Rabat, pour son enthousiasme et sa motivation constants tout au long de ces années. Ses commentaires et suggestions ont grandement enrichi le contenu et la présentation de cette thèse. Je souhaite également remercier chaleureusement mon co-encadrant, Monsieur **Mostafa ELHACHLOUFI**, Professeur d'enseignement supérieur à l'Université Hassan II, Faculté des Sciences Juridiques, Économiques et Sociales Ain sbaa-Casablanca, pour ses précieux conseils et remarques tout au long de la période de recherche.

Je tiens également à exprimer ma gratitude envers Madame **Nezha AMMOR**, Professeur d'enseignement supérieur à l'Université Mohamed V, Faculté des Sciences de Rabat, pour avoir accepté de présider le jury de thèse.

Je tiens à adresser mes sincères remerciements à Monsieur **Abderrahim EL ATTAR**, Professeur à l'Université Hassan II, Faculté des Sciences Juridiques, Économiques et Sociales Ain sbaa-Casablanca et Monsieur **Zine El Abidine ABDELALI** et Monsieur **Mohamed Fihri**, Professeurs à l'Université Mohamed V, Faculté des Sciences de Rabat, qui ont accepté de juger cette thèse en qualité de rapporteurs. Qu'ils soient tous honorés par ce travail.

Je souhaite également remercier ma famille pour son soutien constant et mes frères pour leurs conseils précieux durant la préparation de cette soutenance.

Enfin, je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance envers toutes les personnes qui m'ont soutenu et encouragé tout au long de cette recherche. Leur soutien inestimable a été d'une grande valeur pour moi, et je leur en suis infiniment reconnaissant.

## RESUME

---

L'optimisation de portefeuille des actifs financiers est l'un des sujets les plus importants dans la recherche en mathématiques financières. Il consiste à chercher au sein d'un ensemble d'actifs financier donné, les proportions de valeurs permettant de s'adapter à diverses contraintes, il capture le rendement le plus élevé sous un niveau de risque minimum. La sélection du portefeuille consiste à déterminer le meilleur choix pour équilibrer l'objectif de minimiser le risque et de maximiser le rendement.

Les vraies décisions sont généralement prises dans l'état d'indétermination. Pour traiter rationnellement l'indétermination, il existe deux systèmes mathématiques, l'un est la théorie des probabilités et l'autre est la théorie de l'incertitude. La théorie des probabilités est une branche des mathématiques pour modéliser les fréquences, tandis que la théorie de l'incertitude est une branche des mathématiques pour modéliser les degrés de croyance.

En supposant que les rendements des titres sont des variables incertaines, nous avons proposé de nouveaux problèmes d'optimisation de portefeuille sur plusieurs périodes et prenons Tail Value at Risk (TVaR) comme mesure cohérente du risque d'investissement. Les contraintes reflétant la réalité, dans lesquelles les coûts de transaction, la liquidité des titres et la diversification du portefeuille sont pris en compte.

En outre, nous avons introduit de nouveaux problèmes d'optimisation de portefeuille international lorsque les prix futurs des titres et les taux de change sont considérés comme des variables incertaines, données par des estimations d'experts et évaluées par des experts plutôt que par des données historiques. Nous proposons des modèles Mean-VaR pour la sélection de portefeuilles internationaux en prenant la valeur à risque incertaine (VaR) comme mesure du risque d'investissement.

Finalement, nous avons proposé un nouveau modèle Mean-VaR qui permet désélectionner un portefeuille optimal dans un marché financier islamique en utilisant la VaR comme mesure de risque et prenant en considération la Zakat et les coûts de transactions et la diversification en utilisant la théorie de l'incertitude.

---

**Mots-clefs :** théorie de l'incertitude, optimisation, risque, rendement, finance islamique.

## ABSTRACT

---

Portfolio optimization of financial assets is one of the most important topics in financial mathematics research. It consists of within a set of given financial assets, the proportions of values allowing it to adapt to various constraints, it gives the highest return with a minimum level of risk. Portfolio selection involves determining the best choice to balance the objective of minimizing risk and maximizing return.

Real decisions are usually made in the state of indeterminacy. To deal with indeterminacy rationally, there are two mathematical systems, one is probability theory, and the other is uncertainty theory. Probability theory is a branch of mathematics for modeling frequencies, while uncertainty theory is a branch of mathematics for modeling degrees of belief. In other words, for a certain quantity, if the distribution function is close enough to the true frequency, then you should treat the quantity as a random variable. Otherwise, the quantity must be considered as an uncertain variable.

We have introduced novel multi-Période portfolio selection problems when security returns are uncertain variables, given by expert estimations, and have utilized Tail Value at Risk (TVaR) as a measure of investment risk. Equivalent deterministic forms of mean-TVaR models are proposed under the assumption that security returns and liquidity obey certain types of uncertainty distributions.

Additionally, we have addressed new international portfolio optimization problems when future security prices and exchange rates are considered as uncertain variables. Here, we have proposed Mean-VaR models for international portfolio selection, leveraging uncertain Value at Risk (VaR) as a measure of portfolio risk.

Finally, we proposed a new Mean-VaR model which makes it possible to opt for an optimal portfolio in an Islamic financial market by exploiting VaR as a risk measure. These models incorporate real-world constraints, including transaction costs, securities liquidity, and portfolio diversification and Zakat using the theory of uncertainty.

---

**Keywords:** uncertainty theory, optimization, portfolio, return, risk, islamic finance.

## LISTES DES FIGURES

---

- Figure 1.1 La théorie des probabilités et la théorie de l'incertitude.
- Figure 1.2 Variable incertaine
- Figure 1.3 Distribution d'incertitude
- Figure 1.4 La distribution incertaine linéaire
- Figure 1.5 La distribution incertaine triangulaire
- Figure 1.6 La distribution incertaine normale
- Figure 1.7 L'espérance mathématique incertaine
- Figure 2.1 La ligne temporelle d'investissement
- Figure 2.2 Frontière efficiente selon le modèle MV
- Figure 2.3 La Valeur à Risque
- Figure 3.1 Tendances générales d'une courbe de risque
- Figure 3.2 Une courbe de confiance
- Figure 3.3 La courbe de confiance et risque d'investissement
- Figure 4.1 Comportement du rendement de l'investissement en fonction de la valeur d'entropie à l'aide du modèle 4.4
- Figure 4.2 Comportement du rendement de l'investissement en fonction de la valeur des coûts de transaction à l'aide du modèle 4.4
- Figure 4.3 Rendement de l'investissement du modèle 4.4 avec les facteurs réels et sans les facteurs réels
- Figure 4.4 L'investissement Multi-périodes
- Figure 4.5 Le comportement du capital terminal en fonction du niveau de diversification du modèle 4.4
- Figure 4.6 Le comportement du capital terminal en fonction du taux de rotation du modèle 4.4
- Figure 4.7 Les frontières efficientes du modèle 4.4 avec et sans contraintes de diversification et de liquidité
- Figure 5.1 Contrat de la Mudaraba
- Figure 5.2 Contrat de la Mourabaha
- Figure 5.3 Contrat de l'Ijara
- Figure 5.4 Contrat de la Musharaka
- Figure 5.5 Contrat du Salam
- Figure 5.6 Contrat de l'Istisna'a

## LISTE DES TABLEAUX

---

Table 4.1	Les cours boursiers actuels en MAD
Table 4.2	Les taux de change actuels
Table 4.3	Les cours boursiers normaux incertains en MAD
Table 4.4	Taux de change futurs
Table 4.5	Allocation d'argent en utilisant le modèle (4.10) (%)
Table 4.6	Taux de rendement normaux incertains
Table 4.7	Taux de rotation normaux incertains
Table 4.8	L'allocation optimale utilisant le modèle (4.10) (%)
Table 4.9	L'allocation optimale du modèle (4.10) sans diversification (%)
Table 4.10	Allocation optimale du modèle 4.4 sans contraintes de liquidité (%)
Table 5.1	Taux de rendement normaux
Table 5.2	Portefeuille optimal conforme à la Shariah utilisant le modèle 5
Table 5.3	Portefeuille optimal conforme à la Shariah en utilisant le modèle 5.3
Table 5.4	Portefeuille optimal conforme à la Shariah sans contrainte de diversification

## LISTE DES ABREVIATIONS

---

VaR	Valeur à risque
TVaR	Valeur extrême à risque
CVaR	Valeur à risque conditionnelle
SV	Semi-Variance
EA	Ecart-Absolu
MV	Moyenne-Variance
UT	Théorie de l'incertitude
i.i.d.	Indépendantes et identiquement distribuées
PLS	Partage des profits et des pertes
CPF	Financement à coût majoré
FL	Location financière
JV	Coentreprise
MF	Financement de la fabrication

## TABLE DES MATIERES

---

---

REMERCIEMENTS .....	i
RESUME .....	ii
ABSTRACT .....	iii
LISTE DES TABLEAUX .....	iv
LISTE DES FIGURES .....	v
LISTE DES ABREVIATIONS .....	vi
INTRODUCTION GENERALE .....	1
CHAPITRE 1 : ELEMENTS DE LA THEORIE DE L'INCERTITUDE .....	6
1. LA MESURE DE L'INCERTITUDE .....	7
2. LA VARIABLE INCERTAINE .....	8
3. LA DISTRIBUTION INCERTAINE .....	8
a. DEFINITIONS ET EXEMPLES .....	9
b. LA DISTRIBUTION DE L'INCERTITUDE RECIPROQUE .....	9
c. LOI OPERATIONNELLE : DISTRIBUTION RÉCIPROQUE .....	10
d. L'ESPERANCE MATHEMATIQUE INCERTAINE .....	12
e. LA VARIANCE .....	14
f. LE MOMENT D'ORDRE K .....	15
4. CONCLUSION .....	15
CHAPITRE 2 : CADRE CONCEPTUEL ET ETAT DE L'ART DE LA THEORIE MODERNE DU PORTEFEUILLE .....	17
1. LES ACTIFS FINANCIERS .....	17
a. LES ACTIONS .....	17
b. LES OBLIGATIONS .....	17
c. LES PRODUITS DERIVES .....	18
d. LES TITRES DE CREANCE NEGOCIABLES .....	18
2. LE RENDEMENT FINANCIER .....	18
a. LE RENDEMENT ARITHMETIQUE .....	18
b. LE RENDEMENT LOGARITHMIQUE .....	18
3. LE RISQUE FINANCIER .....	19
a. TYPOLOGIE DES RISQUES FINANCIERS .....	19
b. LA MESURE DE RISQUE COHERENTE .....	20

<b>4. UN PORTEFEUILLE D'ACTIFS FINANCIERS .....</b>	<b>22</b>
a. DEFINITION D'UN PORTEFEUILLE .....	22
b. PORTEFEUILLE EFFICIENT .....	22
<b>5. MODELES D'OPTIMISATION DE PORTEFEUILLE FINANCIER .....</b>	<b>23</b>
a. LE MODÈLE MOYENNE-VARIANCE DE MARKOWITZ (1952) .....	23
b. LE MODÈLE DE MARCHÉ DE SHARPE (1963) .....	25
c. LE MODÈLE D'ÉQUILIBRE DES ACTIFS FINANCIERS (1964) .....	26
d. LE MODÈLE MOYENNE-SEMI-VARIANCES DE HAMZA ET JANSSEN (1995) .....	26
e. LE MODÈLE BASÉ SUR LA VALEUR À RISQUE VAR (2000) .....	27
f. LE MODÈLE BASE SUR LA CVAR .....	29
<b>6. CONCLUSION .....</b>	<b>30</b>
<b>CHAPITRE 3 : APPROCHES D'OPTIMISATION DE PORTEFEUILLES BASES SUR LA THEORIE DE L'INCERTITUDE .....</b>	<b>31</b>
<b>1. MODELES D'OPTIMISATION DE PORTEFEUILLE .....</b>	<b>31</b>
a. LES MODÈLES MOYENNE-VARIANCE ET MOYENNE-SEMI- VARIANCE DE HUANG (2012) .....	31
b. LES MODÈLES MOYENNE-VAR ET MOYENNE-TVAR .....	34
c. LE MODÈLES DE MOYEN-COURBE-DE-RISQUE .....	36
d. LE MODÈLES DE MOYENNE- INDICE DE RISQUE .....	38
<b>2. APPROCHES D'OPTIMISATION DE PORTEFEUILLE MULTI         PÉRIODEES.....</b>	<b>39</b>
a. MODÈLES DE MOYENNE-VARIANCE MULTI-PÉRIODEES DE ZHONGFENG QIN .....	39
b. MODÈLES DE LA SELECTION DE PORTEFEUILLE MULTI PÉRIODEES BASE SUR L'INDICE DE RISQUE DE HUANG ET QIAO ...	41
c. MODÈLE DE LA SELECTION INCERTAIN DE PORTEFEUILLE MULTI PÉRIODEES BASE SUR L'ÉCART ABSOLU DE ZHANG .....	42
d. MODÈLE DE LA SELECTION DE PORTEFEUILLE INCERTAIN MULTI PÉRIODEES MOYENNE-SEMI-VARIANCE DE CHEN .....	45
<b>3. APPROCHES D'OPTIMISATION DE PORTEFEUILLE FINANCIER         DANS LE MARCHÉ INTERNATIONAL .....</b>	<b>47</b>
a. LE MODÈLE MOYENNE-VARIANCE DE HUANG .....	47
b. LE MODÈLE MOYENNE-CHANCE DE HUANG ET WANG .....	48

4. CONCLUSION .....	50
<b>CHAPITRE 4 : CONTRIBUTIONS DE LA THEORIE DE L'INCERTITUDE A L'OPTIMISATION DE PORTEFEUILLE D' ACTIONS .....</b>	<b>51</b>
1. MODÈLES INTERNATIONAUX MOYENNE-VAR DIVERSIFIES POUR L'OPTIMISATION DE PORTEFEUILLE BASE SUR LA THEORIE DE L'INCERTITUDE .....	51
a. FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLÈME .....	51
b. MODÈLES EQUIVALENTS DETERMINANTS .....	53
c. APPLICATION ACTUARIELLE ET DISCUSSION.....	55
2. MODÈLE DE MOYENNE-TVAR POUR L'OPTIMISATION DE PORTEFEUILLE SUR PLUSIEURS PÉRIODEES AVEC DES CONTRAINTES REALISTES BASEES SUR LA THEORIE DE L'INCERTITUDE .....	59
a. FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME .....	59
b. MODÈLES EQUIVALENTS DETERMINANTS .....	62
c. APPLICATION ACTUARIELLE ET DISCUSSION .....	63
3. CONCLUSION .....	66
<b>CHAPITRE 5: OPTIMISATION DE PORTEFEUILLE DE PRODUITS FINANCIERS ISLAMIQUE DANS LE CADRE DE LA THEORIE DE L'INCERTITUDE .....</b>	<b>67</b>
1. ELEMENTS DE LA FINANCE ISLAMIQUE .....	67
a. L'INTERDICTION DE L'INTÉRÊT (RIBA) .....	67
b. L'INTERDICTION DE LA SPÉCULATION (GHARAR) ET LE MAYSIR..	67
2. LES PRODUITS FINANCIERS ISLAMIQUES .....	68
a. LES MUDARABAH .....	68
b. LES MURABAHA .....	69
c. LES IJARA .....	69
d. LES MUSHARAKA .....	69
e. SALAM .....	70
f. ISTISNA'A .....	70
3. LES RISQUES FINANCIERS ISLAMIQUES .....	71
a. RISQUE DE NON-CONFORMITÉ .....	71
b. RISQUE DE CRÉDIT .....	71
c. RISQUE DE MARCHÉ .....	71
d. RISQUE DE LIQUIDITÉ .....	71

e. RISQUE OPÉRATIONNEL .....	71
<b>4. MODÈLES D'OPTIMISATION DE PORTEFEUILLE D'ACTIFS DANS UN MARCHÉ CONFORME À LA SHARIAH .....</b>	<b>71</b>
a. FORMULATION DU MODÈLE D'OPTIMISATION .....	71
b. MODÈLES DÉTERMINANTS ÉQUIVALENTS .....	73
c. APPLICATIONS ACTUARIELLE ET DISCUSSION .....	74
<b>5. CONCLUSION .....</b>	<b>75</b>
<b>CONCLUSION GÉNÉRALE .....</b>	<b>77</b>
<b>REFERENCES .....</b>	<b>81</b>

## INTRODUCTION GENERALE

---

### Contexte du travail

L'optimisation de portefeuille, ou l'allocation optimale des actifs au sein d'un portefeuille financier, représente l'un des axes les plus cruciales de la recherche en mathématiques financières. L'objectif principal de chaque investisseur ou institution financière est de parvenir à une allocation de portefeuille optimale. Le processus d'optimisation de portefeuille implique l'exploration, au sein d'un univers d'actifs financiers donné, des valeurs et des proportions d'actifs permettant de répondre à diverses contraintes tout en procurant le rendement le plus élevé avec un niveau de risque minimal. En somme, il s'agit de choisir judicieusement parmi les opportunités offertes par les titres disponibles afin d'atteindre un équilibre entre la maximisation du rendement espéré et la minimisation du risque. Harry Markowitz<sup>1</sup> [Mar 52] fut le précurseur en proposant un modèle pour optimiser un portefeuille d'actifs financiers, connu sous le nom de modèle de Markowitz ou modèle de moyenne-variance (MV). Ce modèle vise à maximiser le rendement du portefeuille pour un niveau de risque donné, ou à minimiser l'écart-type ou la variance pour un rendement donné.

$$\begin{aligned} & \text{Min} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \cdot x_j \cdot \text{cov}(e_i, e_j) \\ & \text{S.c.} \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \cdot r_i \geq \theta \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1 \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

où  $\theta$  est le rendement minimum attendu par l'investisseur.

Cependant, malgré la renommée théorique du modèle de Markowitz, les chercheurs n'ont pas manqué de le critiquer. Plusieurs remarques ont été formulées concernant le choix de la variance comme mesure de risque, l'hypothèse de la fonction objective quadratique, l'assomption de normalité des rendements des actifs financiers et le calcul de la matrice de variance-covariance. Nous examinerons en détail ces critiques dans le

---

1



Harry Markowitz est un économiste américain et un lauréat du prix Nobel de sciences économiques en 1990. Il est connu pour son travail pionnier dans le domaine de la théorie moderne du portefeuille.

premier chapitre de notre travail. En réponse aux limitations inhérentes au modèle de moyenne-variance, plusieurs chercheurs ont entrepris d'améliorer ou de développer de nouveaux modèles.

Pour développer des modèles de programmation linéaire, Speranza [Spe 93] a proposé l'écart semi-absolu, alors que la mesure du risque l'écart absolu a été utilisé, au lieu de la variance, par Konno et Yamazaki [Kon 91]. D'un autre part, pour réduire la charge de calcul et linéariser le modèle de sélection de portefeuille, plusieurs modèles ont été développés dont ceux de Sharpe, Stone et Hamza et Janssen sont les plus populaires. En se basant sur la semi-variance comme mesure du risque, plusieurs modèles développés par Homaifar [Hom 99], Grootveld et Hallerbach [Gro 99] et Huang [Hua 08] pour allouer un capital dans un portefeuille. Dans le même sens, Chopra [Cho 93] et Hlouskova [Hlo 00] proposent des modèles en se basant sur la variance pour faire face aux différentes situations.

La notion de Value-At-Risk (VAR), utilisée pour la première fois dans les années 1980 par la banque Bankers Trust sur les marchés financiers américains, a été largement popularisée dans les années 1990 par la banque JP Morgan grâce à son système de RiskMetrics. Auparavant, les méthodes utilisées pour détecter et gérer les risques de marché ne permettaient pas de comparer les mesures de risque entre les différentes activités de marché. L'augmentation de la volatilité des marchés financiers, le développement des produits dérivés et surtout une série de faillites et de krachs boursiers ont incité les institutions financières à adopter un indicateur commun et synthétique des risques financiers. Ce n'est qu'en 1995, avec les accords de Bâle, que ce nouvel indicateur a été concrétisé et est rapidement devenu un standard dans l'évaluation des risques financiers. La VAR permet de quantifier la perte maximale pouvant affecter un portefeuille pour une certaine probabilité sur une période donnée. Dans cette perspective, plusieurs modèles d'optimisation de portefeuille ont été proposés. Par exemple les publications d'Alexander et Baptista [Ale 04], Campbell, Huisman et Koedijk [Cam 01], Vorst [Vor 01], Alexander [Ale 06] et Huang et al. [Hun 09].

Cependant, même les différents avantages que présente cette mesure de risque, Szergõ a mis en évidence plusieurs inconvénients de la VaR, parmi lesquels le plus notable est qu'elle ne satisfait pas la sous-additivité. Cela signifie que, selon cette mesure, la diversification ne garantit pas nécessairement une réduction du risque.

Les vraies décisions sont généralement prises dans l'état d'indétermination. Pour traiter rationnellement l'indétermination, il existe deux systèmes mathématiques, l'un est la théorie des probabilités [Kol 33] et l'autre est la théorie de l'incertitude [Liu 07]. La théorie des probabilités est une branche des mathématiques pour modéliser les fréquences, tandis que la théorie de l'incertitude est une branche des mathématiques

pour modéliser les degrés de croyance. En d'autres termes, pour une certaine quantité, si la fonction de distribution est suffisamment proche de la fréquence historique, alors cette quantité est traitée comme une variable aléatoire. Sinon, il faut considérer la quantité comme une variable incertaine. Par exemple, dans de nombreux cas, des événements inattendus se produisent sur le marché financier, tels que la baisse des taux d'intérêt par la banque centrale ou des événements inattendus des entreprises, poussent les investisseurs à ne pas croire que les données passées des rendements des titres peuvent bien refléter leurs rendements futurs. Ce qui pousse les investisseurs à penser à utiliser la théorie d'incertitude pour surmonter plusieurs limitations et proposer d'autres solutions à la sélection de portefeuille. L'introduction de cet outil a contribué, sans aucun doute, à la croissance dans le nombre d'études sur l'optimisation de portefeuille au cours des dernières décennies. Liu a présenté un modèle incertain de déviation moyenne-semi-absolue [Liu 12]. Le modèle Mean-VaR pour la sélection de portefeuilles à rendements incertains a été discuté par Ning [Nin 12]. Qin, Kar et Zheng ont proposé un modèle d'ajustement de portefeuille incertain utilisant l'écart semi-absolu [Qin 14]. Qian et al. [Qia 16] ont présenté des modèles de sélection de portefeuille basés sur l'entropie croisée de variables incertaines. Huang et Zhao [Hua 14] discutent du modèle moyenne-chance pour la sélection de portefeuille basé sur la mesure incertaine. Récemment, le modèle moyenne-variance pour l'optimisation de portefeuille avec risque de fond basé sur la théorie de l'incertitude a été présenté par Zhai et Bai [Zha 17].

Zhang et Huang [Zha 15] ont discuté du problème de budgétisation des investissements des projets en utilisant les entrées de trésorerie annuelles, les dépenses d'investissement initiales et les sorties de trésorerie sur la base des évaluations d'experts.

Tous ces articles mentionnés ci-dessus proposaient des principes d'optimisation de portefeuille sur une seule période. Ils allouent leur capital au début de l'investissement et le conservent jusqu'à la fin de la période d'investissement. Sur un marché réel, de nombreux investisseurs préfèrent investir à long terme pour obtenir un meilleur rendement en ajustant leurs stratégies d'investissement de temps en temps et en tenant compte des nouvelles conditions du marché. Pour cette raison, les problèmes de sélection de portefeuille sur plusieurs périodes ont attiré de nombreux chercheurs tels que Zhang [Zha 16], Chang, Sun et Peng [Cha 20], Li, Zhu, Sun et Teo [Li 18].

## **Objectifs et contributions**

Pour optimiser un portefeuille d'actifs financiers, les chercheurs soit maximisent le rendement pour un risque donné, soit minimisent le risque pour un rendement donné. Cependant, il n'existe pas beaucoup de modèles, dans la littérature, agissent sur les deux en même temps (c'est-à-dire en maximisant le rendement et minimisant le risque dynamiquement).

Tous ces travaux et autres ont proposé des problèmes d'optimisation de portefeuille à une seule période. Ils allouent leur capital au début de l'investissement et le conservent jusqu'à la fin de la période d'investissement. Dans un marché réel, de nombreux investisseurs préfèrent investir à long terme pour obtenir plus de rendement en ajustant leurs stratégies d'investissement de temps à autre et en tenant compte des nouvelles conditions du marché.

D'un autre côté, les chercheurs n'ont discuté que du problème d'optimisation du portefeuille domestique, plutôt que de l'optimisation du portefeuille international. Mais, avec le développement remarquable des investissements transnationaux et les progrès de l'informatique et des télécommunications, l'investissement de portefeuille international a été un sujet brûlant, ce qui conduit plusieurs chercheurs à étudier et à prouver ses bénéfices et ses avantages aux investisseurs.

En se basant sur la théorie de l'incertitude, trois modèles basés sur la mesure de risque TVaR pour l'optimisation de portefeuille sur plusieurs périodes avec des facteurs reflétant la réalité et prenant en considération la diversification de portefeuille optimal ont été proposés.

En outre, le présent travail propose de nouveaux problèmes d'optimisation de portefeuille international lorsque les prix futurs des titres et les taux de change sont considérés comme des variables incertaines, données par des estimations d'experts et évaluées par des experts au lieu de données historiques. Nous fournissons des modèles Mean-VaR pour la sélection de portefeuilles internationaux en prenant la valeur à risque incertaine (VaR) comme mesure du risque d'investissement. Certaines contraintes du monde réel, dans lesquelles les coûts de transaction et la diversification du portefeuille sont pris en compte comme des facteurs de réalité. Les applications chiffrées ont prouvé la performance des modèles proposés.

Ainsi, nous développons des modèles d'optimisation de portefeuille conformes à la charia où les rendements des titres sont représentés par des variables incertaines en raison du manque de données historiques, fournies par les estimations des experts. Le modèle proposé suit les principes de la charia en évitant les risques excessifs et en fournissant une méthode éthique d'optimisation du portefeuille. Le problème d'optimisation de portefeuille conforme à la charia est obtenu en maximisant le rendement du portefeuille et en minimisant les investissements à risque, mesurés à l'aide de la valeur à risque (VaR). Les contraintes réelles, dans lesquelles les coûts de transaction, la Zakat et la diversification du portefeuille, sont pris en compte. Des applications à la bourse de Malaisie « Bursa Malaysia » sont données pour établir l'efficacité des modèles introduits.

## Organisation du travail

Ce travail est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, nous avons présenté quelques éléments de la théorie de l'incertitude, en définissant la mesure de l'incertitude, la variable incertaine et la distribution d'incertitude et en introduisant l'espérance, la variance et le moment d'ordre  $k$  d'une variable incertaine.

Dans le deuxième chapitre, nous avons défini les types d'actifs financiers, le rendement financier et le risque financier. Nous avons également examiné les diverses approches d'optimisation de portefeuille d'actifs financiers qui existent dans la littérature, en mettant en lumière les critiques formulées à l'égard de chacune de ces approches ainsi que certains avantages et inconvénients associés à certaines d'entre elles.

Le troisième chapitre est consacré à introduire un ensemble de problèmes d'optimisation de portefeuille d'actions basés la théorie de l'incertitude qui se distinguent entre les modèles d'optimisation de portefeuille sur une période, les approches d'optimisation de portefeuille multi périodes et les approches d'optimisation de portefeuille financier dans le marché international.

Dans le quatrième chapitre, nous allons fournir quelques contributions de la théorie de l'incertitude dans l'optimisation de portefeuille d'actions :

Des modèles moyen-VaR diversifiés pour l'optimisation de portefeuille international basé sur la théorie de l'incertitude et des modèles de moyen-TVaR pour l'optimisation de portefeuille sur plusieurs périodes avec des contraintes réalistes basées sur la théorie de l'incertitude. Dans ce dernier modèle, les taux de change futurs ainsi que les prix futurs des actifs sont modélisés par des variables incertaines.

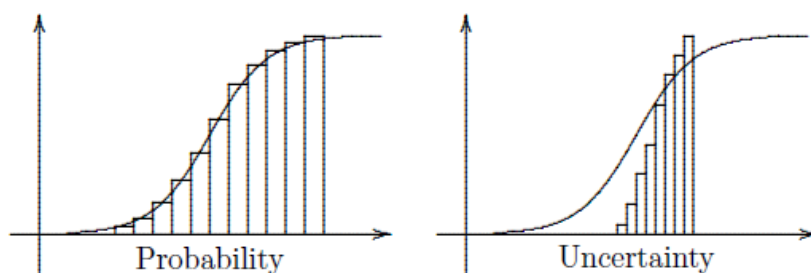
Dans une approche distinctive, nous culminons ce rapport en introduisant une approche innovante pour sélectionner un portefeuille optimal dans le contexte d'un marché financier conforme à la Sharia, basée sur les principes de la théorie de l'incertitude. Le problème d'optimisation de portefeuille conforme à la Sharia est obtenu en introduisant un problème bi-objectif qui maximise le rendement du portefeuille et minimise le risque de l'investissement, mesuré à l'aide de la valeur à risque (VaR). Les contraintes réelles, dans lesquelles les coûts de transaction, la Zakat et la diversification du portefeuille, sont pris en compte.

## CHAPITRE 1 : ELEMENTS DE LA THEORIE DE L'INCERTITUDE

---

Lorsqu'aucun échantillon n'est disponible pour estimer les fonctions de distribution, ou qu'une situation d'urgence (par exemple, une guerre, une pandémie, une inondation, un tremblement de terre, un accident et même une rumeur) survient, nous devons inviter des experts du domaine à évaluer le degré de croyance que chaque événement se produira. Certaines personnes pensent peut-être que le degré de croyance devrait être modélisé par la probabilité ou la théorie des ensembles flous. Cependant, il est généralement inapproprié car les deux peuvent conduire à des résultats contre-intuitifs. Pour traiter rationnellement cette indétermination, Liu a fondé la théorie de l'incertitude. C'est un autre outil mathématique pour modéliser les degrés de croyance personnelle. Comme la fréquence est la base empirique de la théorie des probabilités, le degré de croyance est la base empirique de la théorie de l'incertitude. En d'autres termes, pour une certaine quantité, si la fonction de distribution (peu importe comment est obtenue) est suffisamment proche de la fréquence historique, alors cette quantité est traitée comme une variable aléatoire. Sinon, il faut considérer la quantité comme une variable incertaine (Figure 1).

Dans ce chapitre, on va introduire quelques propriétés de cette théorie, en commençant par la mesure de l'incertitude, en passant par la variable incertaine, l'espérance, la variance d'une variable incertaine et en terminant par la distribution incertaine.



**Figure 1.1 L'utilisation de la théorie des probabilités ou de la théorie de l'incertitude**

Lorsque la fonction de distribution (courbe de gauche) est suffisamment proche de la fréquence, il faut utiliser la théorie des probabilités. Mais Lorsque la fonction de distribution (courbe de droite) s'écarte loin de la fréquence, il faut utiliser la théorie de l'incertitude.

## 1. La mesure de l'incertitude

Dans cette section, on fournira les axiomes de normalité, dualité, sous-additivité et produit de la théorie de l'incertitude. À partir de ces quatre axiomes, on introduira la mesure incertaine qui est un concept fondamental de la théorie de l'incertitude.

### Définitions

Soit  $T$  un ensemble non vide (L'ensemble des rendements possibles).  $L$  est appelée **tribu** de  $T$  si :

$$* T \in L$$

$$* \text{ si } A \in L \text{ alors } A^c \in L$$

$$* \text{ si } A_1, A_2, \dots, A_n \in L \text{ alors } \bigcup_{i=1}^n A_i \in L$$

$L$  est appelée  **$\sigma$ -algèbre sur  $T$**  si la dernière condition est remplacée par :

$$* \text{ si } A_1, A_2, \dots \in L \text{ alors } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in L$$

De plus, le couple  $(T, L)$  est appelé **espace mesurable** et tout élément de  $L$  est appelé **ensemble mesurable** ou **événement**.

L'action suivante est de définir une **mesure incertaine  $M$  sur la  $\sigma$ -algèbre  $L$** . C'est-à-dire qu'un nombre  $M(A)$  sera attribué à chaque événement  $A$  pour indiquer le degré de croyance avec lequel nous pensons que  $A$  se produira. Afin de traiter rationnellement les degrés de croyance, la mesure incertaine  $M$  doit vérifier les trois propriétés suivantes [Liu 07] :

$$(1) \text{ La normalité : } M(T)=1$$

$$(2) \text{ La dualité : } M(A) + M(A^c) = 1$$

$$(3) \text{ La sous-additivité : } M\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} M(A_i)$$

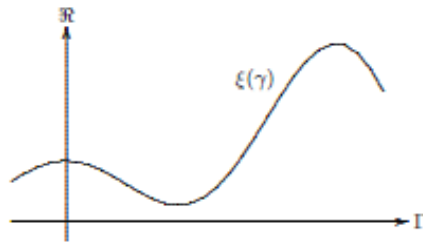
Le triplet  $(T, L, M)$  est appelé **un espace d'incertitude**.

Une mesure d'incertitude est interprétée comme le degré de croyance personnelle (et non la fréquence) d'un événement incertain susceptible à se produire. Ainsi, mesure d'incertitude et degré de croyance sont synonymes et seront utilisés de manière interchangeable dans ce rapport.

## 2. La variable incertaine

La variable incertaine est un concept fondamental de la théorie de l'incertitude. Il est utilisé pour représenter des quantités avec incertitude. Dans cette section, l'accent est mis principalement sur la variable incertaine, la distribution de l'incertitude, l'indépendance, la loi opérationnelle, l'espérance, la variance, les moments, la distance et l'entropie.

Une variable incertaine est une fonction  $\xi$  de l'espace d'incertitude  $(T, L, M)$  à l'ensemble des nombres réels tels que  $\{\xi \in B\}$  est un événement pour tout ensemble Borel  $B$  de nombres réels.



**Figure 1.2** Variable incertaine

L'événement  $\{\xi \in B\}$  est un sous ensemble de  $T$  c.-à-d.  $\{\xi \in B\} = \{\gamma \in T / \xi(\gamma) \in B\}$

Soient  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  des variables incertaines, et  $f$  une fonction à valeur réelle. Alors  $\xi = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  est une variable incertaine défini par

$$\xi(\alpha) = f(\xi_1(\alpha), \xi_2(\alpha), \dots, \xi_n(\alpha)), \text{ pour tout } \alpha \text{ de } T$$

Par exemple, si  $\xi_1$  et  $\xi_2$  deux variables incertaines, alors la somme  $\xi = \xi_1 + \xi_2$  et le produit  $\xi = \xi_1 \cdot \xi_2$  sont des variables incertaines définies respectivement par

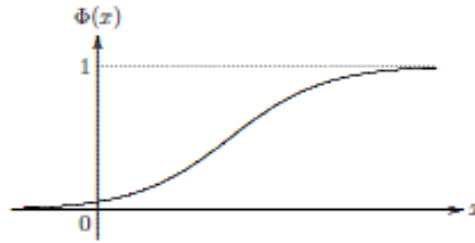
Pour tout  $\alpha$  de  $T$ , on a  $\xi(\alpha) = \xi_1(\alpha) + \xi_2(\alpha)$  et  $\xi(\alpha) = \xi_1(\alpha) \cdot \xi_2(\alpha)$

## 3. La distribution de l'incertitude

Cette section introduit le concept de distribution d'incertitude afin de décrire les variables incertaines.

La distribution d'incertitude  $\Phi$  d'une variable incertaine  $\xi$  est défini par :

$$\text{Pour tout réel } x, \text{ on a : } \Phi(x) = M(\xi \leq x) \quad (1.1)$$



**Figure 1.3** Distribution d'incertitude

Les variables incertaines sont dites identiquement distribuées (i.d.) si elles ont la même distribution d'incertitude.

Peng et Iwamura [Pen 10] ont prouvé une condition suffisante et nécessaire de distribution d'incertitude :

Une fonction  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  est une distribution d'incertitude si et seulement s'elle est une fonction croissante sauf  $\Phi(x) = 0$  et  $\Phi(x) = 1$ .

**a. Définitions et exemples**

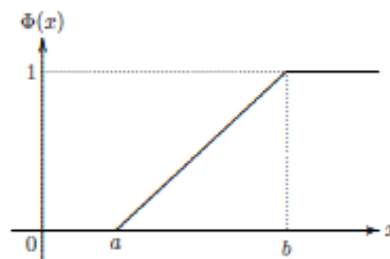
On va introduire, dans la suite de cette section, **quelques fonctions de distributions d'incertitude spéciales**.

Soit  $\xi$  une variable incertaine.

- On dit que  $\xi$  est une variable incertaine **linéaire** et on écrit  $\xi \sim L(a, b)$  si sa distribution d'incertitude  $\Phi$  est définie par :

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases} \quad (1.2)$$

avec  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ .

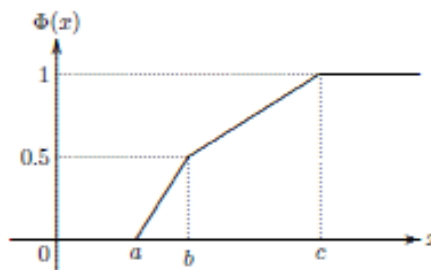


**Figure 1.4** La distribution incertaine linéaire

- On dit que  $\xi$  est une variable incertaine **triangulaire (Zigzag)** et on écrit  $\xi \sim Z(a, b, c)$  si sa distribution d'incertitude  $\Phi$  est définie par :

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{2(b-a)} & \text{si } a \leq x \leq b \\ \frac{x+c-2b}{2(c-b)} & \text{si } b \leq x \leq c \\ 1 & \text{si } x > c \end{cases} \quad (1.3)$$

avec  $a, b$  et  $c$  des réels tels que  $a < b < c$ .

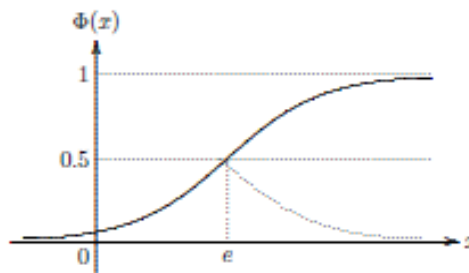


**Figure 1.5** La distribution incertaine triangulaire

- On dit que  $\xi$  est une variable incertaine **normale** et on écrit  $\xi \sim N(e, \sigma)$  si sa distribution d'incertitude  $\Phi$  est définie par

$$\Phi(x) = (1 + \exp(\frac{\pi|e-x|}{\sqrt{3}\sigma}))^{-1} \quad (1.4)$$

avec  $e$  et  $\sigma$  des réels tels que  $\sigma > 0$ .



**Figure 1.6** La distribution incertaine normale

D'un autre part, en utilisant l'axiome de la dualité d'une mesure de l'incertitude, on a, pour tout réel  $x$ ,  $M(\xi \leq x) = \Phi(x)$ ,  $M(\xi > x) = 1 - \Phi(x)$

De plus, si  $\Phi$  est continue alors  $\Phi(x) = M(\xi < x)$  et  $1 - \Phi(x) = M(\xi \geq x)$  (1.5)

Une distribution d'incertitude  $\Phi(x)$  est dite **régulière** s'elle est continue et strictement croissante, et  $0 \leq \Phi(x) \leq 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = 0$ .

Par exemple, la distribution de l'incertitude linéaire et la distribution de l'incertitude normale sont toutes régulières. Cependant, la distribution de l'incertitude  $\Phi(x) = 0.5$  ne l'est pas.

### b. La réciproque de la distribution de l'incertitude

Puisque la distribution d'incertitude régulière  $\Phi$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  alors elle possède une fonction réciproque noté  $\Phi^{-1}$  et définie sur l'intervalle  $]0, 1[$ .

Notons que la distribution réciproque de l'incertitude  $\Phi^{-1}$  est définie sur l'intervalle ouvert  $]0, 1[$ . Si nécessaire, nous pouvons étendre le domaine à  $[0, 1]$  via

$$\Phi^{-1}(0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \Phi^{-1}(\alpha) \text{ et } \Phi^{-1}(1) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \Phi^{-1}(\alpha)$$

Soit  $\xi$  une variable incertaine.

- Si  $\xi$  est une variable incertaine linéaire, alors sa distribution d'incertitude réciproque  $\Phi^{-1}$  est définie par

$$\Phi^{-1}(\alpha) = (1 - \alpha).a + \alpha.b \quad (1.6)$$

- Si  $\xi$  est une variable incertaine triangulaire, alors sa distribution d'incertitude réciproque  $\Phi^{-1}$  est définie par

$$\Phi^{-1}(\alpha) = \begin{cases} (1 - 2\alpha).a + 2\alpha b, & \text{si } \alpha < 0.5 \\ (2 - 2\alpha).b + (2\alpha - 1)c, & \text{si } \alpha \geq 0.5 \end{cases} \quad (1.7)$$

- Si  $\xi$  est une variable incertaine Normal, alors sa distribution d'incertitude réciproque  $\Phi^{-1}$  est définie par

$$\Phi^{-1}(\alpha) = e + \frac{\sqrt{3}\sigma}{\pi} \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \quad (1.8)$$

### c. Loi opérationnelle : distribution réciproque

Cette section fournit la loi opérationnelle pour calculer les distributions d'incertitude réciproques de la fonction strictement monotone des variables incertaines [Liu 10].

Soient  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  des variables incertaines indépendantes avec des distributions d'incertitude régulières  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$  respectivement. Si  $f$  est une fonction strictement croissante par rapport à  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$  et strictement décroissante par

rapport à  $\xi_{m+1}, \xi_{m+2}, \dots, \xi_n$ , alors la distribution réciproque incertaine de la variable  $\xi = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  a une distribution d'incertitude réciproque définie par :

$$\Psi^{-1}(\alpha) = f(\Phi_1^{-1}(\alpha), \dots, \Phi_m^{-1}(\alpha), \Phi_{m+1}^{-1}(1 - \alpha), \dots, \Phi_n^{-1}(1 - \alpha)) \quad (1.9)$$

Par exemple, si  $\xi_1, \xi_2$  sont des variables incertaines linéaires indépendantes avec des distributions d'incertitude régulières  $\Phi_1, \Phi_2$  respectivement et  $f$  la fonction définies par :

$$f(x_1, x_2) = x_1 - x_2 \quad (1.10)$$

On a  $f$  est strictement croissante par rapport à  $x_1$  et strictement décroissante par rapport à  $x_2$ . Alors la variable incertaine  $\xi = \xi_1 - \xi_2$  a la distribution d'incertitude réciproque définie par :

$$\Psi^{-1}(\alpha) = \Phi_1^{-1}(\alpha) - \Phi_2^{-1}(1 - \alpha)$$

Par conséquent :  $\Psi^{-1}(\alpha) = (1 - \alpha) \cdot (a_1 - b_2) + \alpha \cdot (b_1 - a_2)$  (1.11)

Notons que, à partir de ce résultat, on peut déduire que si  $\xi_1$  et  $\xi_2$  sont des variables incertaines linéaires indépendantes  $\xi_1 \sim L(a_1, b_1)$  et  $\xi_2 \sim L(a_2, b_2)$ , alors la différence  $\xi_1 - \xi_2$  est aussi une variable incertaine linéaire telle que

$$L(a_1, b_1) - L(a_2, b_2) = L(a_1 - b_2, b_1 - a_2)$$

#### d. L'espérance mathématique incertaine

Liu [Liu 07] a défini l'espérance mathématique incertaine comme la valeur moyenne de la variable incertaine au sens de mesure incertaine et représente la taille de la variable incertaine.

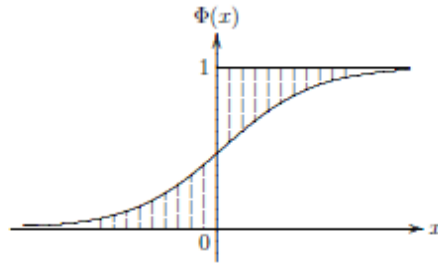
Soit  $\xi$  une variable incertaine. L'espérance mathématique incertaine de la variable incertaine  $\xi$  est définie par :

$$E(\xi) = \int_0^{+\infty} M(\xi \geq r) dr - \int_{-\infty}^0 M(\xi \leq r) dr \quad (1.12)$$

à condition qu'au moins une des deux intégrales soit finie.

Si  $\Phi$  est la distribution d'incertitude de la variable incertaine  $\xi$ , Liu a proposé le théorème suivant :

$$E(\xi) = \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(r)) dr - \int_{-\infty}^0 \Phi(r) dr \quad (1.13)$$



**Figure 1.7** L'espérance mathématique incertaine

En se basant sur la dernière équation, Liu [Liu 10] a fourni les propriétés suivantes :

- Via intégration par partie de la dernière équation, on a :  $E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x d\Phi(x)$
- En substituant  $\Phi(x)$  par  $\alpha$  dans le dernier théorème, on a :  $E(\xi) = \int_0^1 \Phi^{-1}(\alpha) \cdot d\alpha$
- Soient  $\xi, \eta$  deux variables incertaines indépendantes d'espérances mathématiques finies. Pour tout nombre réel  $a$  et  $b$ , nous avons :

$$E(a\xi + b\eta) = aE(\xi) + bE(\eta) \quad (1.15)$$

- Si  $\varphi(x)$  est la fonction dérivée de la distribution d'incertitude  $\Phi(x)$ , alors nous avons :

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x) \cdot dx \quad (1.16)$$

Par exemples, si  $\xi$  est une variable incertaine linéaire  $L(a, b)$ , alors

$$E(\xi) = \int_0^1 ((1 - \alpha) \cdot a + \alpha \cdot b) d\alpha = \frac{a+b}{2}$$

et si  $\xi$  est une variable incertaine triangulaire  $Z(a, b, c)$ , alors  $E(\xi) = \frac{a+2b+c}{4}$

De plus, Liu et Ha [Liu 10] ont introduit un théorème important pour calculer l'espérance incertaine d'une fonction monotone des variables incertaines.

Soient  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  des variables incertaines indépendantes avec des distributions d'incertitude régulières  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$  respectivement. Si  $f$  est une fonction strictement croissante par rapport à  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$  et strictement décroissante par rapport à  $\xi_{m+1}, \xi_{m+2}, \dots, \xi_n$ , alors l'espérance mathématique incertaine de la variable

$$\xi = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

est 
$$E(\xi) = \int_0^1 f(\Phi_1^{-1}(\alpha), \dots, \Phi_m^{-1}(\alpha), \Phi_{m+1}^{-1}(1 - \alpha), \dots, \Phi_n^{-1}(1 - \alpha)) d\alpha \quad (1.17)$$

### e. La Variance

La variance de la variable incertaine fournit un degré de dispersion de la distribution autour de sa moyenne. Une petite valeur de variance indique que la variable incertaine est étroitement concentrée autour de sa moyenne, et une grande valeur de variance indique que la variable incertaine a un large écart autour de sa moyenne.

Soit  $\xi$  une variable incertaine d'espérance finie  $e$ .

Liu a défini la variance d'une variable incertaine comme suit :  $V(\xi) = E[(\xi - e)^2]$

Cette définition nous dit que la variance est simplement la moyenne de  $(\xi - e)^2$ . Puisque  $(\xi - e)^2$  est une variable incertaine non négative, nous avons aussi :

$$V(\xi) = \int_0^{+\infty} M((\xi - e)^2 \geq r) dr \quad (1.18)$$

Si  $a$  et  $b$  sont deux réels, alors  $V(a\xi + b) = E[(a\xi + b - (a \cdot e + b))^2] = a^2 E((\xi - e)^2)$

Donc 
$$V(a\xi + b) = a^2 V(\xi) \quad (1.19)$$

Soit  $\xi$  une variable incertaine avec une distribution d'incertitude continue  $\Phi$ .

On a:  $V(\xi) = \int_0^{+\infty} M((\xi - e)^2 \geq r) dr = V(\xi) = \int_0^{+\infty} M((\xi \geq e + \sqrt{r}) \cup (\xi \leq e - \sqrt{r})) dr$

$$\leq \int_0^{+\infty} M(\xi \geq e + \sqrt{r}) dr + \int_0^{+\infty} M(\xi \leq e - \sqrt{r}) dr$$

Donc 
$$V(\xi) = \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(e + \sqrt{r}) + \Phi(e - \sqrt{r})) dr \quad (1.20)$$

En changeant  $e + \sqrt{r}$  par Yao [Yao 15] a proposé la formule suivante :

$$V(\xi) = \int_0^1 (\Phi^{-1}(\alpha) - e)^2 d\alpha \quad (1.21)$$

Par exemple, si  $\xi$  est une variable incertaine linéaire  $L(a, b)$  de distribution d'incertitude  $\Phi$ , alors  $\Phi^{-1}(\alpha) = (1 - \alpha) \cdot a + ab$  et  $E(\xi) = \frac{a+b}{2}$ , donc :

$$V(\xi) = \int_0^1 (\Phi^{-1}(\alpha) - e)^2 d\alpha = \int_0^1 ((1 - \alpha) \cdot a + ab - \frac{a+b}{2})^2 d\alpha = \frac{(b-a)^2}{12}$$

#### f. Le Moment d'ordre k

Soient  $\xi$  une variable incertaine et  $k$  un entier positif. On a  $E(\xi^2)$  est appelé le  $k$ -ième moment (ou le moment d'ordre  $k$ ) de  $\xi$ .

Soit  $\xi$  une variable incertaine de distribution d'incertitude  $\Phi$  et  $k$  un entier positif.

Si  $k$  un entier positif impair, alors

$$\begin{aligned} E(\xi^k) &= \int_0^{+\infty} M(\xi^k \geq r) dr - \int_{-\infty}^0 M(\xi^k \leq r) dr \\ &= \int_0^{+\infty} M(\xi \geq \sqrt[k]{r}) dr - \int_{-\infty}^0 M(\xi \leq \sqrt[k]{r}) dr \\ &= \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(\sqrt[k]{r})) dr - \int_{-\infty}^0 \Phi(\sqrt[k]{r}) dr \end{aligned} \quad (1.22)$$

Si  $k$  un entier positif pair, alors

$$\begin{aligned} E(\xi^k) &= \int_0^{+\infty} M(\xi^k \geq r) dr = \int_0^{+\infty} M((\xi \geq \sqrt[k]{r}) \cup (\xi \leq -\sqrt[k]{r})) dr \\ &\leq \int_0^{+\infty} M(\xi \geq \sqrt[k]{r}) dr + M(\xi \leq -\sqrt[k]{r}) dr \\ &= \int_0^{+\infty} (1 - (\Phi(\sqrt[k]{r}) - \Phi(-\sqrt[k]{r}))) dr \end{aligned} \quad (1.23)$$

De sa part, Sheng-Kar [She 15] ont prouvé que

$$E(\xi^k) = \int_0^1 \Phi^{-1}(\alpha)^k \cdot d\alpha \quad (1.24)$$

Par exemple, le moment d'ordre 2 de la variable incertaine linéaire  $\xi \sim L(a, b)$  est :

$$E(\xi^2) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

Alors que le moment d'ordre 2 de la variable incertaine normale  $\xi \sim N(e, \sigma)$  est :

$$E(\xi^2) = e^2 + \sigma^2$$

#### 4. Conclusion

En tant que concept fondamental de la théorie de l'incertitude, la variable incertaine a été présentée par Liu en 2007. Afin de décrire la variable incertaine, Liu a également introduit la distribution de l'incertitude. Plus tard, Peng-Iwamura s'est avéré une condition suffisante et nécessaire pour la distribution de l'incertitude. De plus, Liu a proposé la distribution d'incertitude réciproque, et a vérifié une condition suffisante et nécessaire pour cela.

Suivant le concept d'indépendance des variables incertaines proposé par Liu, la loi opérationnelle a été donnée par pour calculer la distribution d'incertitude et la distribution d'incertitude réciproque d'une fonction strictement monotone de variables incertaines indépendantes. Afin de classer les variables incertaines, Liu a proposé l'opérateur de valeur attendue. De plus, la linéarité de l'espérance a été vérifiée par Liu. En tant que contribution importante, Liu-Ha a dérivé une formule utile pour calculer les espérances de fonctions strictement monotones de variables indépendantes incertaines. En se basant sur l'espérance, Liu a présenté aussi la variance, les moments et la distance entre les variables incertaines.

## CHAPITRE 2 : CADRE CONCEPTUEL ET ETAT DE L'ART DE LA THEORIE MODERNE DU PORTEFEUILLE

---

Depuis longtemps, la sélection du portefeuille d'actifs financiers est un sujet qui a coulé beaucoup d'encre dans le domaine de la finance. Elle implique la gestion des capitaux confiés en respectant les contraintes réglementaires et contractuelles, tout en appliquant les politiques d'investissement établies en interne, dans le but de réaliser le meilleur rendement possible en fonction du niveau de risque sélectionné. Dans ce cadre, les investisseurs se sont donc intéressés au cours des actions ou à leurs rendements et aux risques inhérents. L'objectif de ce premier chapitre était de mettre en lumière l'optimisation de portefeuille, plus particulièrement aux différents modèles d'optimisation de portefeuille financier, en commençant par définir les différents actifs financiers, puis en présentant les méthodes de calcul de la rentabilité et du risque d'un actif financier. Dans ce sens, la notion de cohérence sera aussi présentée. Ensuite nous allons introduire les modèles de sélection de portefeuille les plus utilisés dans la littérature.

Ces notions seront utilisées pour comparer les différentes mesures de risque que nous allons présenter par la suite.

### **1. Les actifs financiers**

Un actif financier désigne un titre ou un contrat, négociable sur le marché financier, qui offre à son détenteur la possibilité de générer des revenus ou des gains en capital, moyennant une certaine exposition au risque. Ces actifs se déclinent en diverses catégories, présentant chacune un niveau de risque et un potentiel de rendement différent. Il est donc crucial de comprendre le rapport entre rendement et risque associé à chaque type d'actif financier.

#### **a. Les actions**

Une action représente une part du capital d'une entreprise, conférant à son détenteur le statut de propriétaire d'une fraction de celle-ci. Ce statut octroie divers droits, notamment celui de recevoir des dividendes et de participer aux décisions lors des assemblées générales d'actionnaires.

#### **b. Les obligations**

Les obligations, quant à elles, sont des titres de créance émis par une entreprise afin de lever des fonds sur les marchés financiers. Contrairement aux actions, elles ne représentent pas de propriété, mais plutôt une dette contractée envers les investisseurs. Les obligations garantissent un remboursement et le versement

d'intérêts à des dates spécifiées, offrant ainsi un investissement considéré comme plus sûr, car les coupons et les taux d'intérêt sont connus à l'avance.

### c. Les produits dérivés

Les produits dérivés sont des instruments financiers qui confèrent à leurs détenteurs des droits et des obligations. Un contrat dérivé peut accorder au détenteur le droit d'acheter un actif spécifique à un prix prédéterminé à une date ultérieure, quel que soit le prix du marché à ce moment-là.

### d. Les titres de créance négociables

Les titres de créance négociables sont des créances qui peuvent être achetées ou vendues sur le marché financier. Une entreprise peut décider de vendre ses créances à d'autres entreprises pour réduire son risque. Par exemple, une entreprise peut céder une créance de 2 millions MAD à une autre entreprise pour 1,8 million MAD, réduisant ainsi son risque de non-paiement. En contrepartie, l'acheteur peut réaliser un bénéfice en acquérant une créance dont la valeur est inférieure au montant qu'elle rapportera à l'échéance.

## 2. Le rendement financier

Dans le domaine financier, le rendement d'un actif est le revenu (dividende, intérêt) obtenu grâce à un investissement. Les rendements des titres sont les informations de base pour les investisseurs, et chaque décision est prise sur la base de ces informations. Il existe deux types de rendement d'un actif financier :

### a. Le rendement arithmétique

Nous nous limitons ici au scénario en temps discret, où une période (par exemple, une semaine ou un mois) s'écoule entre les instants  $t$  et  $t + 1$ . Par convention, la période  $t$  représente celle écoulée entre les instants  $t - 1$  et  $t$ . Si l'on note  $P_t$  le prix d'un actif à l'instant  $t$  et  $P_{t-1}$  le prix de cet actif à l'instant  $t - 1$ , alors son rendement simple entre  $t - 1$  et  $t$  est calculé comme suit :

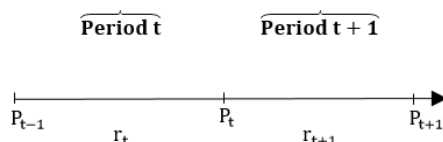
$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad (2.1)$$

L'inconvénient du rendement arithmétique est qu'il n'est pas additif. En effet, son calcul privilégie les deux instants  $t-1$  et  $t$ , et néglige ainsi l'évolution de la valeur.

### b. Le rendement logarithmique

Sachant que si  $r \ll 1$  alors  $\ln(r + 1) = r$  et  $1 + r_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}$  (2.2)

Alors 
$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$$



**Figure 2.1 La ligne temporelle d'investissement**

On peut donc représenter le rendement  $r_t$  comme étant la différence entre les logarithmes des prix observés au temps  $t$  et  $t - 1$ , ou encore le logarithme du quotient de ces mêmes prix. Ce rendement est appelé **le rendement logarithmique**.

Sauf pour de très courtes périodes (généralement moins d'un jour), et pour les applications théoriques impliquant le calcul et la mesure précise des courbes et des tests de normalité des distributions des rendements d'investissement, les rendements logarithmiques ne sont pas aussi courants que les rendements arithmétiques.

Cependant, les rendements logarithmiques ont leurs propres avantages, ils sont souvent préférés dans les calculs de rendements sur de longues périodes, en particulier lorsque les variations de prix sont importantes.

### 3. Le risque financier

Le développement continu des activités financières et l'instabilité de l'environnement dans lequel évoluent les établissements financiers accroissent leur exposition aux risques financiers. Le risque, défini comme un événement préjudiciable et aléatoire, est étroitement lié à la notion d'incertitude. Pour un investisseur, le risque associé à un actif financier peut être décrit comme l'incertitude entourant la valeur de cet actif à une date ultérieure. On peut distinguer trois caractéristiques principales chez un investisseur :

*Risque-averse* : désigne l'investisseur qui préfère éviter le risque autant que possible et cherche à minimiser les pertes potentielles.

*Riscophile* : désigne l'investisseur qui est enclin à prendre des risques et qui ne craint pas de s'exposer à des pertes potentielles dans l'espoir de réaliser des gains plus élevés.

*Risque-neutre* : désigne l'investisseur qui est indifférent à la prise de risque et dont les décisions d'investissement ne sont pas influencées par le niveau de risque associé à un actif financier.

#### a. Typologie des risques financiers

Il existe plusieurs types de risque que peut rencontrer un investissement. Cependant, les gestionnaires du risque se concentrent souvent sur quatre grandes classes de risques financiers :

**-Le risque de marché :** Il provient des variations d'un facteur du marché dont les principaux facteurs de sont :

Le risque des prix des actions grâce à la variation continue selon l'offre et la demande.

Le risque des taux d'intérêt se réfère à la possibilité qu'un porteur de créance ou de dette, contractée à un taux fixe ou variable, soit exposé à des variations des taux d'intérêt entre la date de l'engagement et la date du règlement.

Quant au risque de change, il survient lorsque les activités financières sont menées dans une devise différente de la devise nationale de l'investisseur. Ce risque est directement lié aux fluctuations des cours des devises internationales entre elles.

Le risque des matières premières grâce à des fluctuations défavorables des prix des matières premières.

**-Le risque de crédit :** également nommé risque de défaut ou risque de contrepartie, se présente lorsque la partie engagée dans le contrat ne parvient pas à honorer ses obligations telles qu'elles ont été convenues.

**-Le risque opérationnel :** selon les directives de Bâle, désigne les pertes directes ou indirectes résultant d'un dysfonctionnement ou d'une défaillance des systèmes internes, des personnes ou causées par des événements externes. Il peut être engendré par les employés, les processus de gestion internes, les systèmes, ou par des événements externes.

**-Le risque de liquidité :** se manifeste lorsque la vente de titres devient difficile en raison de l'absence ou de la rareté de demande sur le marché pour ces titres. Les actions non cotées illustrent bien ce type de risque, car le vendeur doit lui-même trouver un acheteur pour ses titres.

Face à ces risques, la gestion des risques financiers a suscité un intérêt croissant ces dernières années, entraînant ainsi d'importants investissements dans le développement de systèmes efficaces et la mise en place d'outils de gestion des risques.

## **b. La mesure de risque Cohérente**

Soit  $(T, L, M)$  un espace d'incertitude et  $V$  un ensemble non vide de variables incertaines mesurables à valeurs réelle. On appelle une mesure de risque  $\rho$  toute fonction :

$$\begin{aligned}\rho : V &\rightarrow IR \\ X &\rightarrow \rho(X)\end{aligned}$$

La fonction  $\rho$  fait correspondre à la variable  $X$  qui représente le risque, un nombre positif  $\rho(X)$  qui permet de quantifier le niveau de ce risque.

Qu'est-ce qu'une bonne mesure de risque ?

Une bonne mesure de risque, selon Artzner et Heath [Art 97], doit satisfaire les quatre propriétés suivantes :

**(P1) Invariance par translation**

$$\forall X \in T, \forall m \in \mathbb{R} : \rho(X + m) = \rho(X) + m \quad (2.3)$$

Cette propriété signifie que si l'addition (ou la soustraction) d'un montant initial sur  $m$  au portefeuille initial dans l'actif de référence, la mesure de risque  $\rho$  accroît (ou décroît) par  $m$ .

**(P2) Sous-additivité**

$$\forall X, Y \in T : \rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y) \quad (2.4)$$

Cette condition se manifeste par le fait que la mesure de risque prend en compte les effets de diversification. Autrement dit, le risque associé à un portefeuille doit être inférieur ou égal à la somme des risques de ses actifs qui le composent. Lorsque deux portefeuilles A et B sont combinés, la mesure de risque du portefeuille résultant doit être inférieure à la somme des mesures de risque initiales de A et B. Ainsi, la propriété de sous-additivité garantit une réduction du risque par la diversification du portefeuille.

**(P3) Homogénéité positif**

$$\forall X \in T, \forall m \in \mathbb{R} : \rho(m.X) = m.\rho(X) \quad (2.5)$$

Cela exprime que, la multiplication de chaque risque d'un portefeuille par un scalaire positif augmente la mesure de risque par le même scalaire.

**(P4) Monotonie**

$$\forall X \in T, \forall Y \in T : \rho(X) \leq \rho(Y) \quad (2.6)$$

Cette caractéristique implique que si le risque d'un portefeuille est plus élevé que celui d'un autre, alors le capital nécessaire pour le premier portefeuille est également plus élevé que celui requis pour le second.

Une mesure de risque vérifiant ces quatre propriétés est dite **cohérente**.

## 4. Un Portefeuille d'actifs financiers

### a. Définition d'un portefeuille

Un portefeuille est un ensemble d'actifs financiers détenus par un investisseur, qu'il soit un professionnel ou un particulier. Ces actifs peuvent inclure des actions, des obligations, des produits dérivés, des matières premières, et autres. Le choix des actifs pour constituer un portefeuille est généralement guidé par le couple rendement/risque : plus le rendement potentiel est élevé, plus les actifs sont considérés comme risqués. Pour réduire le risque global, les investisseurs diversifient souvent leur portefeuille en détenant une variété d'actifs différents.

On suppose qu'un investisseur dispose de 'n' actions  $A_1, A_2, \dots, A_n$  de rendements  $R_{A_1}, R_{A_2}, \dots, R_{A_n}$  respectivement.

Le rendement attendu du portefeuille composé des actifs  $A_1, A_2, \dots, A_n$  est

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n w_i E(R_{A_i}) \quad (2.7)$$

tel que  $w_i$  est le poids de l'action  $A_i$  dans le portefeuille  $A_i$  et  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ .

### b. Portefeuille efficient

Chaque combinaison possible d'actifs peut être représentée dans un graphique illustrant le risque par rapport au rendement. Pour chaque niveau de rendement, il existe un portefeuille qui minimise le risque associé. De manière inverse, pour chaque niveau de risque, il est possible de trouver un portefeuille qui maximise le rendement anticipé. L'ensemble de ces portefeuilles est connu sous le nom de **frontière efficiente**.

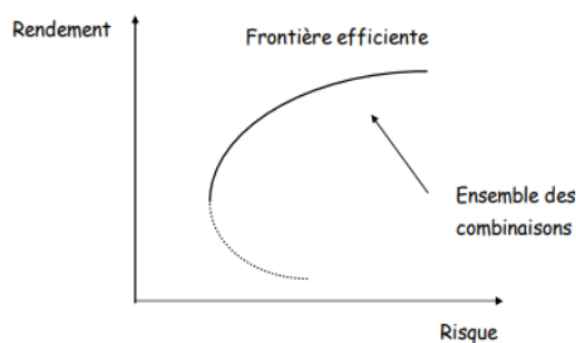


Figure 2.2 Frontière efficiente

La figure 2.2 illustre la frontière efficiente. La zone située au-dessus de cette frontière ne peut être atteinte uniquement en détenant des actifs risqués. Par conséquent, la construction d'un tel portefeuille est impossible. Les points situés en dessous de la frontière sont considérés comme sous-optimaux et ne sont pas attrayants pour un investisseur rationnel.

La construction de la frontière efficiente permet de déterminer le portefeuille optimal pour un niveau de risque donné  $r$ . Ce problème peut être formulé comme suit :

$$\begin{aligned} & \text{Max } E(R_p) \\ & \text{S.c } \begin{cases} \text{Risk}_p < r \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1 \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (2.8)$$

tel que  $\text{Risk}_p$  est le risque du portefeuille.

## 5. Modèles d'optimisation de portefeuille financier

### a. Les Modèles de Markowitz

La théorie moderne du portefeuille et les modèles de choix de portefeuille ont émergé avec la publication de l'article pionnier d'Harry Markowitz [Mar 52]. Il a été le premier à introduire l'idée de mesurer le rendement d'un portefeuille par l'espérance mathématique de la combinaison des rendements des actifs le composant, et le risque par sa variance. L'objectif de cette approche est de rechercher un portefeuille efficace, caractérisé par un rendement espéré maximal parmi les portefeuilles qui présentent la même variance de rendement.

En supposant que le vecteur  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  est la proportion du capital  $C$  investie dans chaque action  $i$  de rendement  $e_i$ , le rendement du portefeuille est une variable aléatoire dont l'espérance est définie par :

$$E(R_p) = E[\sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i] = \sum_{i=1}^n x_i \cdot E(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot r_i \quad (2.9)$$

Alors que la variance du rendement de portefeuille est donnée par :

$$V(R_p) = V[\sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \cdot x_j \cdot \text{cov}(e_i, e_j) \quad (2.10)$$

Le modèle de Markowitz est formulé donc de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & \text{Min } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \cdot x_j \cdot \text{cov}(e_i, e_j) \\ & \text{S.c } \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \cdot r_i \geq \theta \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1 \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (2.11)$$

avec  $\theta$  le rendement minimum attendu par l'investisseur.

En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, la fonction Lagrangienne est donnée par :

$$L(x_1, \dots, x_n, \rho_1, \rho_2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \cdot x_j \cdot \text{cov}(e_i, e_j) + \rho_1 \cdot \left( \sum_{i=1}^n x_i \cdot r_i - \theta \right) + \rho_2 \cdot \left( \sum_{i=1}^n x_i - 1 \right)$$

Par conséquent

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 2 \sum_{j=1}^n x_j \cdot \text{cov}(e_i, e_j) + \rho_1 \cdot r_i + \rho_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \rho_1} = \sum_{j=1}^n x_j \cdot r_j - \theta = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \rho_2} = \sum_{j=1}^n x_j - 1 = 0 \quad , \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n.$$

L'approche de Markowitz, également connue sous le nom d'approche Moyenne-Variance (MV), présente certaines limitations. Elle suppose que :

- Les rendements suivent une distribution normale,
- La construction de la matrice des covariances nécessite d'importantes ressources matérielles informatiques,
- Les facteurs reflétant la réalité du marché ne sont pas intégrés dans l'approche de Markowitz,
- Le modèle n'est pas sensible aux différences entre les gains et les pertes,
- La variance n'est pas cohérente car elle ne respecte pas les axiomes de monotonie et d'invariance par translation.

Face à ces critiques, des tentatives de modification du modèle ont été proposées afin de pallier ces limitations.

Une des mesures du risque baissier la plus étudiée est la semivariance, suggérée par Markowitz (1959) comme une alternative à la variance afin de combler ses lacunes. Contrairement à la variance qui prend en compte tous les rendements dans le calcul, la semivariance ne considère que les rendements inférieurs à la moyenne.

Markowitz (1959) a défini la mesure de la semivariance comme suit :

$$SV(R_i) = E(\min (R_i - \mu_i; 0)^2) \tag{2.12}$$

tel que  $R_i$  est le rendement du titre  $i$ ,  $\mu_i$  est la moyenne des rendements du titre  $i$ .

Après avoir défini la semivariance, Markowitz (1959) a remplacé la mesure de la variance par la mesure semivariance dans son modèle MV.

## **b. Le modèle de marché de Sharpe (1963)**

### **Modèle unifactoriel**

Pour alléger l'algorithme de Markowitz pour optimiser le portefeuille, notamment en termes d'estimations des paramètres du modèle. En 1963, William Sharpe [Sha 63] a proposé une solution avec une caractéristique fondamentale : l'hypothèse selon laquelle les rendements des différentes valeurs sont exclusivement liés entre eux par leur relation commune avec un facteur de base sous-jacent, tel qu'une grandeur

économique indice boursier. Cela permet de déterminer un coefficient appelé le "bêta", qui représente la corrélation entre le rendement d'un titre et celui du portefeuille de marché. Cette hypothèse purement empirique appelée "modèle unifactoriel" ou "modèle à un indice", peut être modélisée par la régression linéaire simple suivante :

$$e_i = \alpha_i + \beta_i \cdot R_i + \varepsilon_i \quad , \text{ pour } i = 1, \dots, n \quad (2.13)$$

tels que :

$e_i$  est le rendement du titre  $i$ ,

$\alpha_i, \beta_i$  sont les estimateurs non biaisés des paramètres propres à ce titre  $i$ ,

$R_i$  est le rendement du facteur de base (indice boursier, taux de croissance,...),

$\varepsilon_i$  est une variable aléatoire appelée bruit blanc qui, pour tout  $i=1, \dots, n$ , vérifie :

$$E(\varepsilon_i) = 0, \quad \forall i \neq j: \text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \text{ et } \text{cov}(\varepsilon_i, I_i) = 0$$

Il s'ensuit que le rendement espéré et la variance des rendements sont donnés respectivement par :

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i + \sum_{i=1}^n x_i \beta_i \cdot E(I) \quad (2.14)$$

et 
$$V(R_p) = (\sum_{i=1}^n x_i \beta_i)^2 \cdot V(I) + \sum_{i=1}^n x_i^2 V(\varepsilon_i) \quad (2.15)$$

### Modèle de marché

Le modèle unifactoriel de Sharpe simplifie les calculs pour faciliter l'utilisation pratique. Sharpe a donc supposé que les rendements des actifs étaient composés d'un facteur commun à tous les actifs et d'une composante propre à chaque titre. Les recherches ont montré que le meilleur facteur explicatif était la rentabilité du marché dans son ensemble, représentée par  $R_M$ .

$$e_i = \alpha_i + \beta_i \cdot R_M + \varepsilon_i \quad , \text{ pour } i = 1, \dots, n \quad (2.16)$$

Les paramètres  $\alpha_i, \beta_i$  sont estimés à l'aide de la régression linéaire simple :

$$\beta_i = \frac{\text{cov}(e_i, R_M)}{V(R_M)} \quad \text{et} \quad \alpha_i = E(e_i) - \beta_i \cdot E(R_M) \quad (2.17)$$

Le coefficient  $\beta_i$ , également connu sous le nom de coefficient bêta, représente le risque systématique du titre  $i$ . Il mesure la sensibilité du rendement de ce titre aux fluctuations du marché. Un  $\beta_i$  supérieur à 1 indique une plus grande volatilité que le marché, tandis qu'un  $\beta_i$  inférieur à 1 indique une volatilité moindre que le marché. Un  $\beta_i$  égal à 1 signifie que le titre fluctue en même proportion que le marché.

### c. Modèle d'équilibre des actifs financiers (1971)

Le Modèle d'Évaluation des Actifs Financiers (MEDAF), développé par Sharpe, vise à estimer le rendement attendu d'un actif financier en fonction de son risque systématique. Pour justifier le risque associé à un actif financier risqué, les investisseurs exigent un rendement supérieur à celui d'un actif sans risque. Cette différence de rendement est appelée prime de risque, et elle est nécessaire pour inciter les investisseurs à prendre des risques.

Le MEDAF repose sur plusieurs hypothèses, notamment l'efficacité des marchés financiers, où il n'y a pas de coûts de transaction ni de taxes sur les dividendes, et où tous les actifs sont parfaitement négociables. De plus, la détermination du coefficient bêta se base sur des données historiques, supposant que les facteurs influençant les variations du marché dans le passé seront les mêmes à l'avenir.

Le modèle suppose également que tous les investisseurs disposent de la même information et des mêmes estimations de rendement, qu'ils ont la même période d'investissement, prennent leurs décisions en même temps, détiennent leurs actifs pendant la même période, et ont la même vision des performances futures des actifs.

En résumé, le MEDAF offre une approche théorique pour estimer le rendement attendu d'un actif financier en prenant en compte son risque systématique, ce qui permet aux investisseurs d'évaluer et de comparer les opportunités d'investissement.

La relation du MEDAF se présente alors comme suit :

$$E(R_i) = r_f + \beta_i \cdot (E(R_M) - r_f) \quad (2.18)$$

tel que  $\beta_i$  est la mesure du risque systématique de l'actif, c'est-à-dire au risque non diversifiable. C'est la volatilité de la rentabilité de l'actif considéré rapportée à celle du marché.

et  $E(R_M)$  est la rentabilité espérée sur le marché,

et  $r_f$  est le taux d'intérêt sans risque,

et  $(E(R_M) - r_f)$  représente la prime de risque du marché.

### d. Le modèle Moyenne-Semi-Variance de Hamza et Janssen (1995)

Comme précisé auparavant, le modèle de Markowitz souffre de plusieurs inconvénients. En effet, cette approche n'est applicable que si les rendements sont normalement distribués, ce qui n'est toujours pas le cas. D'un autre côté, Ballestero [Bal 05], Bond et Satchell [Bon 02], Estrada [Est 04], Unser [Uns 00] et Lee [Lee 88] ont montré que la variance traite de manière équivalente les rendements supérieurs et inférieurs à la moyenne, ce qui peut ne pas correspondre à la perception du risque par les investisseurs. En réalité, les investisseurs considèrent généralement le risque

comme étant associé aux rendements inférieurs à une valeur cible, telle que le rendement moyen ou un rendement donné appelé le "Benchmark".

Pour cette raison, le recours aux mesures du **DownSide Risk** semble nécessaire afin de capturer convenablement les caractéristiques des rendements des portefeuilles et de tenir compte de la nature asymétrique des rendements.

Pour remédier cette lacune, Markowitz [Mar 59] a remplacé la variance dans son fameux modèle moyenne-variance par la mesure de DownSide Risk **Semi-variance**.

En supposant que  $r_i$  soit le rendement d'un actif  $i$  de rendement moyen  $e_i$ , alors la semi-variance de  $r_i$  est définie par :

$$SV(r_i) = E[(r_i - e_i)^-]^2 \quad (2.19)$$

$$\text{tel que } (r_i - e_i)^- = \begin{cases} r_i - e_i & \text{si } r_i \leq e_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Contrairement aux différents modèles de Sharpe qui supposent la normalité de la distribution des rendements, le modèle de Hamza et Janssen [Ham 95] reconnaît que les rendements peuvent suivre une distribution asymétrique. Ils ont proposé une approche basée sur la Semi-Variance en combinant deux semi-variances de rendement du portefeuille en dessous de la moyenne et au-dessus de la moyenne :

$$F(\alpha, \beta) = \alpha E[(r_i - e)^-]^2 + \beta E[(r_i - e)^+]^2 \quad (2.20)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux paramètres positifs indiquant le degré d'aversion au risque de l'investisseur.

En considérant  $F$  comme fonction objective, le problème d'optimisation est formulé comme suit :

$$\text{Min } F(\alpha, \beta)$$

$$S.c \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \cdot r_i \geq \theta \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1 \dots, n \end{cases} \quad (2.21)$$

#### e. Le modèle Basée sur La valeur à risque VaR (2000)

La Value at Risk (VaR) est une mesure de risque utilisée sur les marchés financiers, originaire du secteur de l'assurance mais popularisée dans le domaine financier dans les années 1980. Elle a été introduite aux États-Unis et largement adoptée par les institutions financières et réglementée par des normes telles que le Comité de Bâle II pour les banques et Solvabilité II pour les assurances. La VaR est une mesure

statistique qui permet de quantifier la perte maximale qui pourrait toucher un portefeuille pour une certaine probabilité  $\alpha$  sur une période donnée  $t$ .

Par exemple, une banque annonce une VaR quotidienne sur son portefeuille de 50 millions DH pour un niveau de confiance de 99%, cela implique qu'il y a seulement une chance sur 100, sous des conditions normales de marché, que la perte associée à la suite de la détention de ce portefeuille sur une journée, excède 50 millions DH.

Les principaux paramètres qui influencent la VaR sont :

-La distribution des rendements des actifs du portefeuille : Cette distribution est souvent supposée normale, bien que certaines institutions financières utilisent des distributions historiques. Cependant, la taille de l'échantillon historique peut poser un problème en termes de précision et de cohérence temporelle.

-Le niveau de confiance choisi, généralement 95% ou 99% : C'est la probabilité que les pertes du portefeuille ne dépassent pas la VaR.

-L'horizon temporel sélectionné : Plus l'horizon est long, plus les pertes potentielles peuvent être importantes.

Si  $\xi$  est une variable aléatoire qui représente les pertes d'un actif financier, alors

$$P(\xi \leq VaR) = \alpha \quad (2.22)$$

Il convient de souligner que la valeur à risque est en fait le quantile d'ordre  $\alpha$  de la distribution  $F$  de la variable aléatoire  $\xi$ . Pour un niveau de confiance à risque  $\alpha$ , on a :

$$VaR_\alpha(\xi) = \Phi^{-1}(\alpha)$$

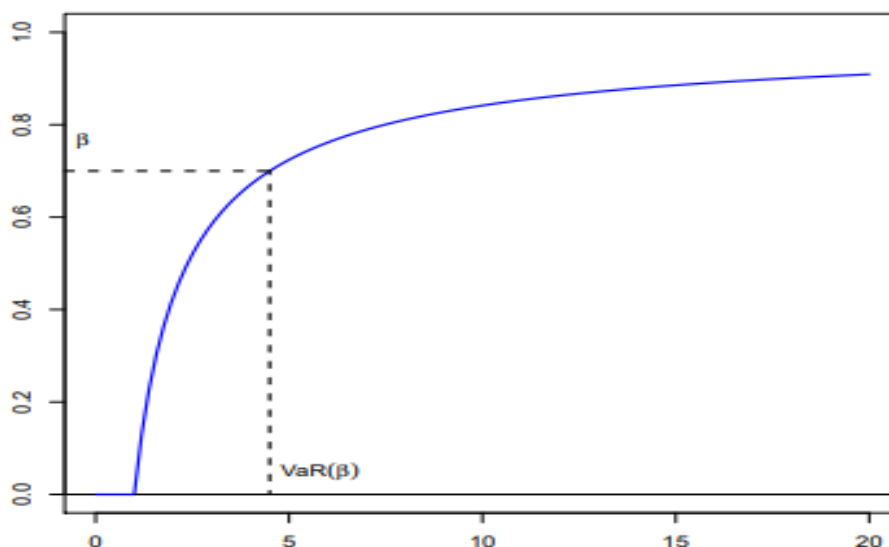


Figure 2.3 La Valeur à Risque

Le problème d'optimisation est formulé par Jorion [Jor 96] comme suit :

$$\begin{aligned} & \text{Min VaR} \\ \text{S.c } & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \cdot r_i \geq \theta \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1 \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Plusieurs chercheurs ont proposé des différentes méthodologies pour estimer la VaR. La plupart du temps, les approches de calcul de la VaR reposent sur une approximation linéaire des risques du portefeuille et supposent une distribution normale (ou log-normale) conjointe des paramètres de marché sous-jacents, voir, par exemple, Duffie et Pan [Duf 97], RiskMetrics [Ris 96]. En outre, des outils basés sur des simulations historiques ou Monte Carlo sont utilisés lorsque le portefeuille contient des instruments non linéaires tels que des options [Buc 99]. Des discussions sur les problèmes d'optimisation impliquant la VaR peuvent être trouvées dans les articles de Litterman [Lit 98], Luciano et Kast [Luc 01], Lucas et Klaassen [Luc 98].

La Value at Risk (VaR) présente plusieurs limitations. Tout d'abord, la distribution des pertes n'est pas toujours normale, ce qui peut affecter la précision de la mesure. De plus, la VaR est une fonction non convexe, ce qui signifie que la fusion de deux portefeuilles ne garantit pas nécessairement une réduction du risque, rendant ainsi la mesure incohérente dans certains cas

Une autre limitation de la VaR est qu'elle ne fournit qu'une estimation de la perte maximale à un certain niveau de confiance et sur un horizon temporel donné. Elle ne donne aucune information sur les pertes potentielles au-delà de ce seuil.

Pour pallier ces limites, une nouvelle mesure de risque appelée Conditional Value at Risk (CVaR) peut être utilisée. Contrairement à la VaR, la CVaR représente la perte moyenne des valeurs qui dépassent le seuil défini par la VaR, offrant ainsi une perspective plus complète du risque.

#### **f. Le modèle Basée sur La CVaR**

La valeur à risque conditionnelle (CVaR) est également connue sous d'autres noms tels que la Tail Value at Risk (TVaR), ou Expected Shortfall (ES). Elle représente la perte moyenne des valeurs qui dépassent le seuil défini par la VaR, offrant ainsi une mesure plus complète du risque.

Plus précisément, la CVaR est le quantile correspondant à la perte potentielle qu'un titre ou un portefeuille peut subir en raison de mouvements défavorables des prix de marché, avec un certain niveau de confiance, sachant que cette perte dépasse déjà la VaR. En d'autres termes, la CVaR prend en compte les cas extrêmes et les événements

entraînant de grandes pertes, ce qui en fait une mesure de risque plus robuste et plus puissante que la VaR.

Soit  $\xi$  une variable aléatoire et  $\alpha \in ]0, 1[$  le niveau de confiance du risque. Alors TVaR de  $\xi$  au niveau de confiance  $\alpha$  et à l'instant  $t$ ,  $TVaR_{\alpha,t}$ , est la fonction

$$TVaR_{\alpha,t} = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 VaR_{\beta,t} \cdot d\beta \quad (2.24)$$

Dans le cas continu, la TVaR est exprimée comme suit :

$$TVaR_{\alpha,t} = E(\xi/\xi > VaR_{\alpha,t}) \quad (2.25)$$

Le problème d'optimisation basé sur la CVaR est formulé comme suit :

$$\begin{aligned} & \text{Min CVaR} \\ & \text{S. c } \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \cdot r_i \geq \theta \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1 \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Une description simple de l'approche de minimisation de CVaR et des problèmes d'optimisation avec des contraintes de CVaR peut être trouvée dans travail de synthèse d'Uryasev [Ury 00].

## 6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit plusieurs définitions et concepts fondamentaux relatifs à l'optimisation de portefeuilles. Nous avons également examiné différents modèles d'optimisation de portefeuilles, tous basés sur le principe Moyenne-Risque. En plus de la célèbre théorie de Markowitz, nous avons exploré des mesures de risque alternatives à la simple variance, prenant en compte la réalité de la non-normalité des rendements financiers, une hypothèse souvent plus proche de la réalité. Il est important de noter que notre présentation n'a pas couvert tous les modèles de sélection de portefeuilles disponibles, ni n'a abordé toutes les contraintes possibles pour encadrer les optimisations. Cependant, nous avons fourni une bibliographie exhaustive pour permettre au lecteur d'approfondir sa compréhension des méthodes connues et moins connues. Le prochain chapitre constitue une continuité de celui-ci, où nous aborderons les méthodes pour la constitution de portefeuilles optimaux dans le cadre de la théorie de l'incertitude.

## CHAPITRE 3 : APPROCHES D'OPTIMISATION DE PORTEFEUILLES BASES SUR LA THEORIE DE L'INCERTITUDE

---

En 1989, Michaud a montré que l'utilisation des données historiques pour calculer la moyenne d'un échantillon et estimer le rendement espéré ne peut être efficace. D'un autre part, Black et Littermann [Bla 92] ont prouvé que les données historiques sont souvent de mauvais prédicteurs du comportement futur. Par conséquent, des chercheurs ont modélisé les rendements d'actifs à l'aide de la théorie de l'incertitude.

### 1. Modèles d'optimisation de portefeuille

#### a. Les Modèles Moyenne-Variance et Moyenne-Semi-variance de Huang (2012)

Étant donné que le marché des capitaux est complexe, les rendements futurs des titres sont parfois disponibles principalement sur la base de jugements d'experts. Huang [Hua 12] a traité le problème de sélection de portefeuille dans lequel les rendements des titres sont donnés sous réserve d'estimations d'experts. Deux nouveaux modèles moyenne-variance et moyenne-semi-variance sont proposés.

Supposant que  $e_i$ , le rendement de l'actif  $i$ , est une variable incertaine d'espérance mathématique  $r_i$ . Le rendement du portefeuille est défini par :

$$E(R_p) = E[\sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i] = \sum_{i=1}^n x_i \cdot E(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot r_i \quad (3.1)$$

La variance et la semi-variance du rendement de portefeuille sont données par :

$$V(R_p) = V[\sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i] \quad \text{et} \quad SV(R_p) = SV[\sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i] \quad (3.2)$$

Les modèles moyenne-Variance et de moyenne-semi-variance de Huang sont :

$$\begin{aligned} & \text{Min} \quad V\left[\sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i\right] \\ & \text{S. c} \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \cdot E(e_i) \geq \theta \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1 \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3)$$

et

$$\begin{aligned} & \text{Min} \quad SV\left[\sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i\right] \\ & \text{S. c} \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \cdot E(e_i) \geq \theta \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1 \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4)$$

avec  $\theta$  le rendement minimum attendu par l'investisseur.

Puisque les modèles incertains moyenne-variance et moyenne-semi-variance sont complexes, Huang a proposé des méthodes pour estimer les valeurs de l'espérance, la variance et la semi-variance du rendement du portefeuille.

Huang a utilisé la loi opérationnelle pour obtenir la distribution incertaine réciproque pour déterminer la distribution incertaine réciproque du rendement du portefeuille.

Soit  $\Phi_i$  les distributions d'incertitude continue des rendements d'actifs  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , respectivement, et  $\Psi$  la distribution d'incertitude du rendement du portefeuille  $\sum_{i=1}^n x_i \cdot \xi_i$

La distribution d'incertitude  $\Psi$  du rendement incertain du portefeuille peut être obtenue via  $\Psi^{-1}(\alpha) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \Phi_i^{-1}(\alpha)$  avec  $0 \leq \alpha \leq 1$

L'espérance du rendement incertain du portefeuille  $\sum_{i=1}^n x_i \cdot \xi_i$  est calculée par  $E[\sum_{i=1}^n x_i \cdot \xi_i] = \sum_{j=1}^{9999} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \Phi_i^{-1}(0.0001j)/9999$

La méthode pour calculer  $E[\sum_{i=1}^n x_i \cdot \xi_i]$  est comme suit :

---

**Méthode 1 :**

**Etape 1.** Posons  $e = 0$

**Etape 2.** Posons  $j = 1$

**Etape 3.** Soit  $y_j = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \Phi_i^{-1}(0.0001j)$   
et  $e = e + y_j$

**Etape 4.** Si  $j < 9999$  alors  $j = j + 1$  et retourner à l'étape 3

**Etape 5.** Retourner  $e = e/9999$

---

Notons que lorsque nous utilisons des modèles moyenne-variance pour sélectionner le portefeuille optimal, les distributions d'incertitude des rendements des titres doivent être symétriques. Ensuite, il est clair que dans ce cas, le rendement devrait être égale à la valeur de  $\Psi^{-1}(0.5)$ . Ainsi :

$$E[\sum_{i=1}^n x_i \cdot \xi_i] = \Psi^{-1}(0.5) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \Phi_i^{-1}(0.5) \quad (3.5)$$

En se basant sur la formule de la variance donnée dans le chapitre 1, Huang a introduit la variance du rendement du portefeuille comme suit :

$$V(\sum_{i=1}^n x_i \cdot \xi_i) = \int_e^{+\infty} 2(1 - e)(1 - \Psi(r) + \Psi(2e - r))dr \quad (3.6)$$

En supposant que, dans les modèles moyenne-variance, pour sélectionner le portefeuille optimal, les distributions d'incertitude des titres doit être symétrique, donc :

$$\begin{aligned}
V(\sum_{i=1}^n x_i, \xi_i) &= \int_e^{+\infty} 2(1-e)(1-\Psi(r) + \Psi(2e-r))dr \\
&= 4 \int_e^{+\infty} (1-e)(1-\Psi(r))dr
\end{aligned} \tag{3.7}$$

La méthode pour calculer  $V(\sum_{i=1}^n x_i, \xi_i)$  est comme suit :

---

**Méthode 2:**

**Etape 1.** Posons  $v = 0$

**Etape 2.** Posons  $e = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \Phi_1^{-1}(0.5)$

**Etape 3.** Posons  $b = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \Phi_1^{-1}(0.9999)$

**Etape 4.** Générer aléatoirement une valeur  $a$  à partir de  $(0.5, 0.9999)$ .

**Etape 5.** Soit  $v = v + (\sum_{i=1}^n x_i \cdot \Phi_1^{-1}(a) - e)(1 - \alpha)$

**Etape 6.** Répétez les étapes 4 à 5 pour  $N$  fois, où  $N$  est suffisamment grand nombre.

**Etape 7.** Retourner  $v = v \cdot 4 \cdot (b - e)/N$

---

En se basant sur la formule de la semi-variance, introduit par Huang, est défini par :

$$SV(\xi) = E[(\xi - e)^-]^2 \tag{3.8}$$

avec  $(\xi - e)^- = \begin{cases} \xi - e & \text{si } \xi \leq e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Alors 
$$\begin{aligned}
SV(\xi) &= \int_0^{+\infty} M\{((\xi - e)^-)^2 > r\}dr \\
&= \int_0^{+\infty} M\{\xi \leq e - \sqrt{r}\}dr = \int_{-\infty}^e 2(e - r)\Phi(r)dr
\end{aligned} \tag{3.9}$$

La semi-variance du rendement du portefeuille  $\sum_{i=1}^n x_i, \xi_i$  est introduite par :

$$SV(\sum_{i=1}^n x_i, \xi_i) = \int_{-\infty}^e 2(e - r)\Psi(r)dr \tag{3.10}$$

La méthode pour calculer  $SV(\sum_{i=1}^n x_i, \xi_i)$  est donnée comme suit :

---

**Méthode 3:**

**Etape 1.** Posons  $sv = 0$

**Etape 2.** Posons  $e = \sum_{j=1}^{9999} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \Phi_1^{-1}(0.0001j)/9999$

**Etape 3.** Utiliser la méthode de bisection pour déterminer  $\beta$  tel que

$$e = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \Phi_1^{-1}(\beta)$$

**Etape 4.** Posons  $a = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \Phi_1^{-1}(0.0001)$

**Etape 5.** Générer aléatoirement une valeur  $a$  à partir de  $(0.0001, \beta)$ .

**Etape 6.** Soit  $sv = sv + (e - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \Phi_1^{-1}(a))\alpha$

**Etape 7.** Répétez les étapes 5 à 6 pour  $N$  fois, où  $N$  est suffisamment grand nombre.

**Etape 7.** Retourner  $sv = sv \cdot 2 \cdot (e - a)/N$

---

De plus, un algorithme intelligent hybride, basé sur les algorithmes génétiques et les estimations de l'espérance, la variance et la semi-variance du rendement du portefeuille, est proposé pour résoudre les modèles d'optimisation introduits.

### b. Les modèles Moyenne-VaR et Moyenne-TVaR

Peng [Pen 13] a introduit le concept de Value at Risk (VaR) de la variable incertaine. Ses propriétés fondamentales sont aussi examinées. Ensuite, Peng a développé la Tail Value at Risk (TVaR) d'une variable incertaine et a proposé ses propriétés fondamentales. La méthodologie VaR ou TVaR suggérée peut-être largement utilisée comme outil d'analyse des risques dans des environnements incertains.

Soit  $\xi$  une variable incertaine et  $\alpha$  le niveau de confiance au risque. Alors la VaR de  $\xi$  est la fonction

$$VaR_{\alpha}(\xi) = \inf(x | M(\xi \leq x) \geq \alpha) \quad (3.11)$$

Par conséquent, la valeur à risque est un quantile de la distribution d'incertitude  $\Phi$  de la variable incertaine  $\xi$ . Pour un niveau de confiance au risque  $\alpha$ , on a :

$$VaR_{\alpha}(\xi) = \inf(x | \Phi(\xi) \geq \alpha) = \Phi^{-1}(\alpha) \quad (3.12)$$

Un inconvénient de la VaR est qu'elle ne donne aucune information sur la gravité des pertes au-delà du niveau de VaR. Il peut arriver que les VaR de deux variables incertaines soient égales mais l'une à une queue plus épaisse et plus risquée que l'autre.

La TVaR, introduite par Peng, tient compte de la gravité de l'échec et pas seulement du risque d'échec. La TVaR est considérée comme une meilleure mesure du risque, en ce sens qu'elle est affectée par les valeurs extrêmes dans la queue (alors que la VaR ne l'est pas). Il est défini comme suit :

$$TVaR_{\alpha}(\xi) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 VaR_t(\xi) dt \quad (3.13)$$

En supposant que  $\xi_i$  est le rendement du titre  $i$  et  $x_i$  est la proportion du titre  $i$  dans le portefeuille, le rendement total d'un portefeuille est  $\sum_{i=1}^n x_i \cdot \xi_i$  tel que  $n$  est le nombre des titres composant le portefeuille.

La perte, étant la valeur négative de celle-ci, est donc donnée par :

$$f(\xi) = - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \xi_i$$

Ainsi, la VaR de la perte du portefeuille peut être décrit comme suit :

$$VaR_{\alpha}(\xi) = \inf(x | M(f(\xi) \leq x) \geq \alpha)$$

Soit  $\Phi$  la fonction de distribution de  $\sum_{i=1}^n x_i \cdot \xi_i$ .

La  $VaR_{\alpha}$  de la perte  $f(x, \xi)$  est exprimé, par Yan [Yan 11], comme suit :

$$VaR_\alpha(\xi) = \inf(x | M(f(\xi) \leq x) \geq \alpha) = -\Phi^{-1}(1 - \alpha) \quad (3.14)$$

Pour obtenir le rendement maximal de l'investissement et éviter les risques, Yan a proposé le modèle d'optimisation de portefeuille suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Max } E[\sum_{i=1}^n x_i \cdot \xi_i] \\ & \text{S.c } \begin{cases} VaR_\alpha(\xi) \leq \delta \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1 \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (3.15)$$

tel que  $\delta$  est le niveau de risque prédéfini.

D'une manière similaire, Ning, Yan et Xie [Nin 13], s'est basé sur la TVaR pour quantifier le risqué de ce portefeuille, et a proposé le modèle suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Max } E[\sum_{i=1}^n x_i \cdot \xi_i] \\ & \text{S.c } \begin{cases} TVaR_\alpha(\xi) \leq \delta \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1 \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Par exemple, si les rendements  $\xi_i$  sont des variables incertaines normales indépendantes,  $\xi_i \sim N(e_i, \sigma_i), i = 1, 2, \dots, n$ , alors le rendement total  $\sum_{i=1}^n x_i \cdot \xi_i \sim N(\sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i, \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sigma_i)$ ,

Par conséquent : 
$$\Phi^{-1}(1 - \alpha) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot (e_i - \frac{\sqrt{3}\sigma_i}{\pi} \ln \frac{\alpha}{1-\alpha})$$

et 
$$\begin{aligned} TVaR_\alpha(\xi) &= \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 -\sum_{i=1}^n x_i \cdot (e_i - \frac{\sqrt{3}\sigma_i}{\pi} \ln \frac{t}{1-t}) dt \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot (-e_i + \frac{\sqrt{3}}{\pi} [-\ln(1 - \alpha) - \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln(\alpha)] \sigma_i) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ainsi, les modèles Moyenne-VaR et Moyenne-TVaR sont respectivement sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} & \text{Max } \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i \\ & \text{S.c } \begin{cases} -\sum_{i=1}^n x_i \cdot (e_i - \frac{\sqrt{3}\sigma_i}{\pi} \ln \frac{\alpha}{1-\alpha}) \leq \delta \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1 \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (3.18)$$

et 
$$\begin{aligned} & \text{Max } \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i \\ & \text{S.c } \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \cdot (-e_i + \frac{\sqrt{3}}{\pi} [-\ln(1 - \alpha) - \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln(\alpha)] \sigma_i) \leq \delta \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1 \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (3.19)$$

### c. Le modèle de Moyen-Courbe-de-risque

La définition de risque la plus ancienne et la plus populaire est la variance. Elle a été donnée par Markowitz en 1952. Cependant, la variance peut parfois ne pas être raisonnable. De plus, la mesure de risque Value at-risk (VaR) reflète l'inquiétude des gens. Cependant, la VaR ne donne qu'un faible rendement valeur que les investisseurs peuvent subir. D'autres événements à faible rendement peuvent également se produire. Et une fois qu'un événement de rendement très faible (c'est-à-dire un événement de perte énorme) se produit, les investisseurs peuvent ne pas être en mesure de le supporter. Cela est également vrai dans la sélection de portefeuille incertaine. Ainsi, une nouvelle mesure du risque qui fournit des informations sur toutes les pertes probables doit être donnée.

Soit  $\xi$  un taux de rendement incertain d'un titre et  $\Phi$  sa distribution d'incertitude, et  $r_f$  le taux d'intérêt sans risque. Pour définir un risque qui donne l'information sur toutes les pertes probables et les chances d'occurrence de ces pertes, **une courbe de risque de l'actif** est donnée comme suit :

$$\forall r \geq 0, R(\xi) = M(r_f - \xi \geq r) \quad (3.20)$$

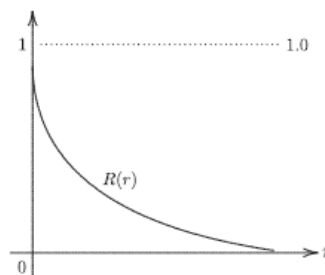
C'est clair que lorsque  $r_f - \xi \geq 0$ , le taux de rendement du titre est inférieur à l'intérêt sans risque de taux, et la différence est la valeur  $r_f - \xi$ . Cette valeur peut certainement être comprise comme une perte. Par conséquent,

$$\forall r \geq 0, r_f - \xi \geq r \quad (3.21)$$

décrit toutes les pertes probables sur le titre.

De manière équivalente, la courbe de risque peut également être exprimée par :

$$\forall \alpha \in ]0, 1[, R^{-1}(\alpha) = r_f - \Phi^{-1}(\alpha) \quad (3.22)$$



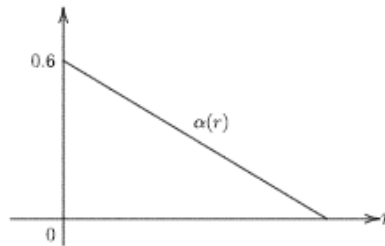
**Figure 3.1** Tendence générale d'une courbe de risque.

Plus la valeur  $r$  est grande, plus la valeur  $R(r)$  est faible.

Tous les investisseurs savent qu'ils peuvent perdre aussi bien que gagner en investissement. Par conséquent, ils auront une tolérance maximale envers la chance d'occurrence de chaque niveau de perte probable. Nous l'appelons courbe de confiance

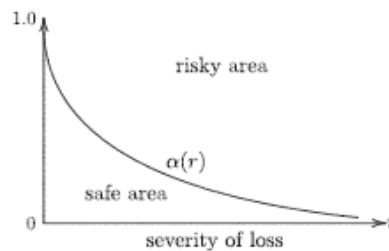
$\alpha(r)$  qui donne la tolérance maximale des investisseurs envers la chance d'occurrence de chaque niveau de perte probable. Bien que différents investisseurs aient une courbe de confiance différente, la tendance commune de la courbe est que plus la perte est grave (c'est-à-dire plus la valeur  $r$  est élevée), plus le niveau de tolérance des investisseurs vis-à-vis du risque de survenance de la perte est faible. Un exemple de courbe de confiance est donné ci-dessous.

La courbe de confiance peut être exprimée comme suit :  $\alpha(r) = a - b.r$



**Figure 3.2** Une courbe de confiance

Un portefeuille est sûr si sa courbe de risque est inférieure à la courbe de confiance  $\alpha(r)$ , un portefeuille est risqué si une partie de sa courbe de risque est au-dessus de la courbe de confiance  $\alpha(r)$ .



**Figure 3.3** La courbe de confiance et risque d'investissement

Par conséquent, l'expression mathématique du modèle de sélection est la suivante :

$$\begin{aligned} & \text{Max } E[\sum_{i=1}^n x_i \cdot \xi_i] \\ & \text{S. c } \begin{cases} R(x_1, \dots, x_n, r) \leq \alpha(r), \quad \forall r \geq 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Par suite :

$$\begin{aligned} & \text{Max } \sum_{i=1}^n x_i \cdot E(\xi_i) \\ & \text{S. c } \begin{cases} x_1 \cdot \Phi_1^{-1}(\alpha(r)) + \dots + x_n \cdot \Phi_n^{-1}(\alpha(r)) \geq r_f - r, \quad \forall r \geq 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Par exemple, supposons que les taux de rendement des  $i$ èmes titres soient tous des variables incertaines normales  $\xi_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , respectivement. Ensuite, le modèle de risque moyen incertain peut être transformé sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \text{Max } \sum_{i=1}^n x_i \cdot \mu_i \\ \text{S. c } & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \cdot (\mu_i - \frac{\sqrt{3} \cdot \sigma_i}{\pi} \ln \frac{1-\alpha(r)}{\alpha(r)}) \geq r_f - r, & \forall r \geq 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1 \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (3.25)$$

#### d. Le modèle de Moyenne- Indice de risque

Les investisseurs peuvent choisir d'investir dans des actifs sans risque et d'obtenir, avec certitude, un taux d'intérêt sans risque. Ainsi, tout rendement inférieur au taux d'intérêt sans risque sera considéré comme une perte.

Le rendement moyen du portefeuille inférieur au taux d'intérêt sans risque est appelé **l'indice de risque**.

Soit  $\xi$  un taux de rendement incertain d'un titre, et  $r_f$  le taux d'intérêt sans risque. Alors **l'indice de risque** du portefeuille est défini par :

$$RI(\xi) = E[(r_f - \xi)^+] \quad (3.26)$$

avec 
$$(r_f - \xi)^+ = \begin{cases} r_f - \xi & \text{si } r_f \geq \xi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si  $\xi$  est continue de fonction de distribution d'incertitude  $\Phi$ , alors :

$$\begin{aligned} RI(\xi) &= \int_0^{+\infty} M\{r_f - \xi \geq r\} dr \\ &= \int_0^{+\infty} M\{\xi \leq r_f - r\} dr = \int_0^{r_f} M\{\xi \leq t\} dt \\ &= \int_0^{r_f} \Phi(t) dt \end{aligned} \quad (3.27)$$

Par exemple, si  $\xi$  est une variable incertaine linéaire  $L(a, b)$ , alors  $RI(\xi) = \frac{(r_f - a)^2}{2(b - a)}$

Lors d'un investissement, plusieurs investisseurs exigent que le portefeuille soit suffisamment sûr, puis recherchent le rendement maximal. À un niveau de confiance donné, l'objectif doit être atteint.

Soient  $x_i$  les proportions d'investissement dans les titres  $i$ ,  $\xi_i$  les rendements incertains des  $i$ èmes titres,  $i = 1, 2, \dots, n$ , respectivement,  $\gamma$  le niveau de confiance prédéterminé que l'investisseur accepte, et  $c$  la valeur tolérable de l'investisseur en dessous du risque taux d'intérêt libre. Le modèle d'optimisation de portefeuille d'indice de risque est exprimé mathématiquement par Huang [Hua 12] comme suit :

$$\begin{aligned} & \text{Max } f \\ & \text{S.c. } \begin{cases} M(\sum_{i=1}^n x_i \cdot \xi_i) \geq f) \geq \gamma \\ \text{RI}(\sum_{i=1}^n x_i \cdot \xi_i) \leq c \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1 \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Soit  $\Phi_i$  la distribution d'incertitude continue du  $i$ -ième taux de rendement incertain  $\xi_i$  dont la fonction réciproque  $\Phi_i^{-1}(\alpha)$  existe et est unique pour chaque  $\alpha$  de  $]0, 1[$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , respectivement. Ensuite, le modèle précédant peut-être transformer sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \text{Max } x_1 \cdot \Phi_1^{-1}(1 - \gamma) + x_2 \cdot \Phi_2^{-1}(1 - \gamma) + \dots + x_n \cdot \Phi_n^{-1}(1 - \gamma) \\ & \text{S.c. } \begin{cases} \beta r_f - \int_0^\beta (x_1 \cdot \Phi_1^{-1}(\alpha) + x_2 \cdot \Phi_2^{-1}(\alpha) + \dots + x_n \cdot \Phi_n^{-1}(\alpha)) d\alpha \leq c \\ x_1 \cdot \Phi_1^{-1}(\alpha) + \dots + x_n \cdot \Phi_n^{-1}(\alpha) = r_f \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1 \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Par exemple, supposons que les taux de rendement des  $i$ èmes titres soient tous des variables incertaines normales  $N \sim (\mu_i, \sigma_i)$ , pour  $i = 1, 2, \dots, n$  respectivement, alors le modèle d'indice de risque peut être transformé sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \text{Max } \sum_{i=1}^n (x_i \cdot \mu_i - \frac{\sqrt{3} x_i \sigma_i}{\pi} \ln \frac{\gamma}{1-\gamma}) \\ & \text{S.c. } \begin{cases} \beta(r_f - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \mu_i) - \frac{\sqrt{3}}{\pi} \sum_{i=1}^n x_i \sigma_i [\beta \ln \beta + (1 - \beta) \ln(1 - \beta)] \leq c \\ \beta = \exp(\pi(r_f - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \mu_i) / \sqrt{3} \sum_{i=1}^n x_i \sigma_i) / (1 + \exp(\pi(r_f - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \mu_i) / \sqrt{3} \sum_{i=1}^n x_i \sigma_i)) \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1 \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (3.30)$$

## 2. Approches d'optimisation de portefeuille multi-périodes

### a. Modèles de moyenne-variance multi-périodes de Zhongfeng Qin

Le problème de sélection de portefeuille multi-périodes attire de plus en plus l'attention des chercheurs car il est conforme au problème pratique de prise de décision d'investissement. Zhongfeng [Zho 11] a été le premier chercheur, qui a établi plusieurs formes de modèle de sélection de portefeuille moyenne-variance multi-périodes avec des rendements incertains. Il a considéré que l'investisseur entre dans le marché avec  $n + 1$  titres risqués.

L'investisseur souhaite répartir son capital initial  $w_0$  parmi les  $n + 1$  actifs pour atteindre un certain objectif. Le capital peut être réallouée entre les  $n + 1$  actifs au début de chacune des  $T - 1$  périodes consécutives suivantes. Le taux de rendement de chaque titre risqué à la période  $t$  dans l'horizon de planification est représenté par

un vecteur  $\xi_t = (\xi_t^0, \xi_t^1, \dots, \xi_t^n)$ , dans lequel  $\xi_t^i$  est le rendement incertain pour la  $i$ ème actif à la période  $t$ . Les vecteurs  $\xi_t$ ,  $t = 0, 1, \dots, T - 1$  sont supposés indépendants de rendement moyen  $E[\xi_t]$  et de variance  $V[\xi_t]$ . Soient  $w_t$  le capital de l'investisseur au début de la période  $t$ ,  $x_t^i$  le montant investi dans le  $i$ ème actif risqué au début de la période  $t$ . L'investisseur souhaite trouver une stratégie d'investissement optimale  $x_t = (x_t^0, x_t^1, \dots, x_t^n)$ , pour  $t = 0, 1, 2, \dots, T - 1$  telle que la valeur moyenne  $E[w_T]$  du capital terminal  $w_T$  est maximisée sous réserve que la variance  $V[w_T]$  du capital terminale soit inférieure ou égale à un niveau de risque prédéfini ou la variance  $V[w_T]$  du capital terminale est minimisée sous réserve que le capital terminal attendue  $E[w_T]$  soit supérieure ou égale à un niveau prédéfini. En outre, deux formes de la formulation moyenne-variance pour le problème de sélection de portefeuille multipériode avec des rendements incertains sont établies comme suit :

$$\begin{aligned} & \text{Min } V[w_T] \\ & \text{s. c. } \begin{cases} E[w_T] \geq r \\ w_{t+1} = \sum_{i=1}^n x_t^i \cdot \xi_t^i + (w_t - \sum_{i=1}^n x_t^i) \xi_t^0 \\ t = 0, 1, \dots, T - 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.31)$$

et

$$\begin{aligned} & \text{Max } E[w_T] \\ & \text{s. c. } \begin{cases} V[w_T] \leq d \\ w_{t+1} = \sum_{i=1}^n x_t^i \cdot \xi_t^i + (w_t - \sum_{i=1}^n x_t^i) \xi_t^0 \\ t = 0, 1, \dots, T - 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.32)$$

En pratique, il est difficile pour les investisseurs d'attribuer des niveaux de confiance raisonnables  $r$  et  $d$  aux deux modèles ci-dessus. Plus précisément, les investisseurs peuvent vouloir maximiser directement le capital terminal attendue  $E[w_T]$  et entre-temps minimiser la variance  $V[w_T]$  du capital terminal. Dans ce cas, Zhongfeng a proposé un modèle de programmation bi-objectif moyenne-variance multi-période comme suit :

$$\begin{aligned} & \text{Max } E[w_T] \\ & \text{Min } V[w_T] \\ & \text{s. c. } \begin{cases} w_{t+1} = \sum_{i=1}^n x_t^i \cdot \xi_t^i + (w_t - \sum_{i=1}^n x_t^i) \xi_t^0 \\ t = 0, 1, \dots, T - 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Afin de faciliter la résolution de ce dernier modèle, nous le convertirons en un modèle de programmation à objectif unique en pondérant ses deux objectifs contradictoires :

$$\begin{aligned} & \text{Max } E[w_T] - \rho \cdot V[w_T] \\ & \text{s. c. } \begin{cases} w_{t+1} = \sum_{i=1}^n x_t^i \cdot \xi_t^i + (w_t - \sum_{i=1}^n x_t^i) \xi_t^0 \\ t = 0, 1, \dots, T - 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.34)$$

## b. Modèle de la sélection de portefeuille multi-périodes basé sur l'indice de risque de Huang et Qiao

Huang et Qiao [Hua 12] traitent le problème de sélection de portefeuille multi-périodes lorsque les rendements des titres sont donnés par des évaluations d'experts. Les taux de rendement des titres sont considérés comme des variables incertaines et un modèle d'ajustement de l'indice de risque incertain est proposé. Les ajustements optimaux du portefeuille sont déterminés dans le but de maximiser le capital supplémentaire totale dans les limites du contrôle de la valeur de l'indice de risque cumulé sur l'horizon d'investissement et de la satisfaction de l'autofinancement à chaque période.

Huang et Qiao ont considéré un investissement dans  $n$  actifs. La durée d'investissement est divisée en  $T$  périodes. Supposons qu'à l'instant 0, l'investisseur avait déjà un portefeuille  $(x_{1,0}, x_{2,0}, \dots, x_{n,0})$ , où  $x_{i,0}$  est le capital du  $i$ ème titre,  $i = 1, 2, \dots, n$ , respectivement. Soit  $W_{k-1}$  le capital de l'investisseur au début de la période  $k$  (c'est-à-dire l'instant  $k - 1$ ), et  $x_{i,k-1}$  le capital de l' $i$ ème titre au début de la période  $k$ . Alors

$$W_{k-1} = \sum_{i=1}^n x_{i,k-1} \quad , k = 1, \dots, T$$

Au début de chaque période  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots, T$ , l'investisseur ajuste l'investissement dans chaque titre en augmentant ou en diminuant son capital

$$\Delta X_{k-1} = (\Delta x_{1,k-1}, \Delta x_{2,k-1}, \dots, \Delta x_{n,k-1}) \quad , k = 1, \dots, T$$

Soit  $\xi_{i,k}$  le taux de rendement incertain du titre  $i$  pendant la période  $k$ . À la fin de la période  $k$ , le capital total de l'investisseur devient

$$W_k = \sum_{i=1}^n (x_{i,k-1} + \Delta x_{i,k-1})(1 + \xi_{i,k}) \quad , k = 1, \dots, T$$

Ainsi, après ajustement, à la fin de la période  $k$ , l'incrément de capital est :

$$\Delta W_k = W_k - W_{k-1} = \sum_{i=1}^n (x_{i,k-1} + \Delta x_{i,k-1})\xi_{i,k} + \Delta x_{i,k-1} \quad , k = 1, \dots, T \quad (3.35)$$

Puisque les taux de rendement des titres sont incertains, l'accroissement de capital  $\Delta W_k$  est également incertain. S'il s'agit d'une valeur positive, alors l'investisseur gagne de l'argent. Mais si elle est une valeur négative, l'investisseur perd de l'argent. En d'autres termes, l'investisseur fait face à un risque à chaque ajustement. Comme la valeur  $W_k \cdot r_f$  est la rémunération de l'investissement sans risque, il est raisonnable de supposer que, lorsque l'accroissement de capital est inférieur à  $W_0 \cdot r_f$ , l'investisseur perd de l'argent. Pour calculer le montant moyen que l'investisseur peut perdre, un indice de risque à la période  $k$  est défini par :

$$RI(\xi) = E[(W_0 \cdot r_f - \Delta W_k)^+] \quad (3.36)$$

$$\text{avec } (W_0 \cdot r_f - \Delta W_k)^+ = \begin{cases} W_0 \cdot r_f - \Delta W_k & \text{si } W_0 \cdot r_f \geq \Delta W_k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Supposons qu'il y ait un coût de transaction pour chaque transaction du titre  $i$  qui est calculé comme  $c_i |\Delta x_{i,k-1}|$ , où  $c_i$  est un nombre constant. Alors le coût de transaction total pour le portefeuille pendant la période  $k$  est :

$$\sum_{i=1}^n c_i |\Delta x_{i,k-1}| \quad , \quad k = 1, 2, \dots, T$$

Si l'investissement s'autofinance, il est facile de voir que :

$$\sum_{i=1}^n \Delta x_{i,k-1} + \sum_{i=1}^n c_i |\Delta x_{i,k-1}| = 0 \quad , \quad k = 1, 2, \dots, T \quad (3.37)$$

Désormais, avec l'indice de risque, il est facile pour l'investisseur de déterminer l'ampleur de la perte qu'il peut supporter. Si l'investisseur exige que la perte moyenne totale de l'investissement ne soit pas supérieure à un niveau prédéfini  $c$ , et s'il souhaite poursuivre une valeur maximale attendue de l'augmentation de capital, le modèle est défini comme suit :

$$\begin{aligned} & \text{Max} \quad E[\sum_{k=1}^T \Delta W_k] \\ & \text{s. c.} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_{i,0} = W_0 \\ \sum_{i=1}^n |\Delta x_{i,k-1}| + \sum_{i=1}^n c_i |\Delta x_{i,k-1}| = 0 \\ \sum_{k=1}^T R I_k \leq c \\ W_k = \sum_{i=1}^n (x_{i,k-1} + \Delta x_{i,k-1})(1 + \xi_{i,k}) \\ i = 0, 1, \dots, n, \quad k = 0, 1, \dots, T \end{cases} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Supposant que les taux de rendements dans chaque période  $\xi_{i,k}$  sont des variables incertaines normales  $N \sim (\mu_{i,k}, \sigma_{i,k})$ , pour  $i = 1, 2, \dots, n$ . Notons  $\mu_k = \sum_{i=1}^n (x_{i,k-1} + \Delta x_{i,k-1}) \mu_{i,k}$  et  $\sigma_k = \sum_{i=1}^n (x_{i,k-1} + \Delta x_{i,k-1}) \sigma_{i,k}$ , alors le modèle précédent peut-être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \text{Max} \quad \sum_{k=1}^T \sum_{i=1}^n (x_{i,k-1} + \Delta x_{i,k-1}) \mu_{i,k} + \Delta x_{i,k-1} \\ & \text{s. c.} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_{i,0} = W_0 \\ \sum_{i=1}^n |\Delta x_{i,k-1}| + \sum_{i=1}^n c_i |\Delta x_{i,k-1}| = 0 \\ x_{i,k-1} + \Delta x_{i,k-1} \geq 0 \\ \sum_{k=1}^T \beta_k (W_0 \cdot r_f - \mu_k) - \frac{\sqrt{3}}{\pi} \sigma_k [\beta_k \ln \beta_k + (1 - \beta_k) \ln (1 - \beta_k)] \leq c \\ i = 0, 1, \dots, n, \quad k = 0, 1, \dots, T \end{cases} \end{aligned} \quad (3.39)$$

### c. Modèle de la sélection incertain de portefeuille multi périodes basé sur l'écart absolu de Zhang

L'écart absolu est une mesure de risque couramment utilisée, qui a attiré plus d'attention dans l'optimisation de portefeuille. Compte tenu des coûts de transaction,

des contraintes d'emprunt, des contraintes de seuil, des contraintes de cardinalité et du contrôle des risques, Zhang [Zha 16] a présenté un nouveau modèle de sélection de portefeuille incertain à écart absolu moyen multi périodes, dans lequel une politique d'investissement optimale peut être générée pour aider les investisseurs non seulement à obtenir un rendement optimal, mais aussi à avoir une bonne maîtrise des risques. Dans ce modèle, le taux de rendement de l'actif et le risque sont quantifiés par une espérance incertaine et un écart absolu incertain, respectivement.

L'écart absolu incertain de la variable incertaine  $\xi$  d'espérance finie  $e$  est défini par :

$$AD(\xi) = E[|\xi - e|]$$

$$\begin{aligned} \text{Par suite : } AD(\xi) &= \int_0^{+\infty} M(|\xi - e| \geq r) dr - \int_{-\infty}^0 M(|\xi - e| \leq r) dr \\ &= \int_0^{+\infty} M(|\xi - e| \geq r) dr = \int_0^{+\infty} M((\xi \geq r + e) \cup (\xi \leq -r + e)) dr \\ &= \int_e^{+\infty} (1 - \Phi(r)) dr - \int_{-\infty}^e \Phi(r) dr \end{aligned} \quad (3.40)$$

Zhang a supposé qu'il existe  $n$  actifs risqués et un actif sans risque sur le marché financier pour la négociation. Un investisseur veut répartir son capital initial  $W_1$  entre  $n + 1$  actifs au début de la période 1, et obtient le capital final à la fin de la période. Il peut réallouer son capital entre les  $n + 1$  actifs au début de chacune des  $T$  périodes d'investissement consécutives suivantes. Les taux de rendement des  $n$  actifs risqués à chaque période sont notés comme des variables incertaines triangulaires.

Soient  $x_{i0}$  la proportion d'investissement initial de l'actif risqué  $i$  à la période 0,  $x_{it}$  la proportion d'investissement de l'actif risqué  $i$  à la période  $t$ ,  $x_{ft}$  la proportion d'investissement de l'actif sans risque à la période  $t$ ,  $x_t$  le portefeuille à la période  $t$ , où  $x_t = (x_{ft}, x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt})$ ,  $x_{ft}^b$  la borne inférieure de la proportion d'investissement en actifs sans risque à la période  $t$ ,  $R_{it}$  le rendement de l'actif risqué l'actif  $i$  à la période  $t$ ,  $r_{pt}$  le taux de rendement du portefeuille  $x_t$  à la période  $t$ ,  $r_{bt}$  le taux d'emprunt de l'actif sans risque à la période  $t$ ,  $r_{lt}$  le taux de prêt de l'actif sans risque à la période  $t$ ,  $u_{it}$  les limites supérieures de  $x_{it}$ ,  $r_{Nt}$  le taux de rendement net du portefeuille  $x_t$  à la période  $t$ ,  $W_t$  la forme nette du capital détenu au début de la période  $t$ ,  $c_{it}$  le coût unitaire de transaction actif  $i$  à la période  $t$  et  $K$  le nombre souhaité d'actifs risqués dans le portefeuille à la période  $t$ .

Le risque du taux de rendement du portefeuille à chaque période est quantifié par l'écart absolu incertain. Le taux de rendement du titre  $i$  à la période  $t$ ,  $R_{it} = (a_{it}, \alpha_{it}, \beta_{it})$ , est une variable incertaine triangulaire pour tout  $i = 1, \dots, n$  et  $t = 1, \dots, T$ . Le taux de rendement attendu du portefeuille  $x_t = (x_{ft}, x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt})$  à la période  $t$  peut être exprimé comme suit :

$$r_{pt} = \sum_{i=1}^n E(R_{it}) x_{it} + r_{ft}(1 - \sum_{i=1}^n x_{it})$$

$$= \sum_{i=1}^n (a_{it} + \frac{\beta_{it} - \alpha_{it}}{4}) x_{it} + r_{ft} (1 - \sum_{i=1}^n x_{it}), \quad t = 1, \dots, T \quad (3.41)$$

$$\text{avec } r_{ft} = \begin{cases} r_{lt} & , \quad 1 - \sum_{i=1}^n x_{it} \geq 0 \\ r_{bt} & , \quad 1 - \sum_{i=1}^n x_{it} \leq 0 \end{cases}$$

où  $1 - \sum_{i=1}^n x_{it} \geq 0$  signifie que le prêt est autorisé sur l'actif sans risque et  $1 - \sum_{i=1}^n x_{it} \leq 0$  signifie que l'emprunt est autorisé sur l'actif sans risque.

La contrainte d'emprunt de l'actif sans risque à la période  $t$  est :

$$x_{ft} = 1 - \sum_{i=1}^n x_{it} \geq x_{ft}^b \quad (3.42)$$

Zhang a supposé que les coûts de transaction à la période  $t$  sont une fonction en forme de  $V$  de la différence entre le portefeuille de la  $t$ -ième période  $x_t = (x_{ft}, x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt})$  et le portefeuille de la  $t-1$ ème période  $x_{(t-1)} = (x_{f(t-1)}, x_{1(t-1)}, x_{2(t-1)}, \dots, x_{n(t-1)})$ . Le coût de transaction de l'actif  $i$  à la période  $t$  peut être exprimé par :

$$C_{it} = c_{it} |x_t - x_{(t-1)}| \quad (3.43)$$

Par conséquent, les coûts de transaction totaux du portefeuille  $x_t$  à la période  $t$  peuvent être représentés par :  $C_t = \sum_{i=1}^n c_{it} |x_t - x_{(t-1)}|$ ,  $t = 1, \dots, T$

$$D'où : r_{Nt} = \sum_{i=1}^n (a_{it} + \frac{\beta_{it} - \alpha_{it}}{4}) x_{it} + r_{ft} (1 - \sum_{i=1}^n x_{it}) - \sum_{i=1}^n c_{it} |x_t - x_{(t-1)}|, \quad t = 1, \dots, T$$

Ensuite, la forme nette du capital détenu au début de la période  $t$  peut-être écrite comme :

$$\begin{aligned} W_{t+1} &= W_t (1 + r_{Nt}) \\ &= W_t (1 + \sum_{i=1}^n (a_{it} + \frac{\beta_{it} - \alpha_{it}}{4}) x_{it} + r_{ft} (1 - \sum_{i=1}^n x_{it}) - \sum_{i=1}^n c_{it} |x_t - x_{(t-1)}|) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Puisque l'écart absolu incertain de la variable incertaine  $\xi = (a, \alpha, \beta)$  est :

$$AD(r) = \begin{cases} \frac{4a^2 - 12(a - \alpha)a + 4a(\alpha + \beta) - 6(a - \alpha)(\alpha + \beta) + 9(a - \alpha)^2 + (\alpha + \beta)^2}{32\alpha} & \text{si } \beta \leq \alpha \\ \frac{(\alpha + 3\beta)^2}{32\beta} & \text{si } \beta \geq \alpha \end{cases}$$

Alors l'écart absolu du portefeuille  $x_t$  peut être exprimé comme suit :

$$AD_t(x_t) = AD_t(r_{1t}x_{1t} + r_{2t}x_{2t} + \dots + r_{nt}x_{nt}) \quad (3.45)$$

Les contraintes de seuil limitent le montant du capital à investir dans chaque action et empêchent de très petits investissements dans n'importe quelle action. Les contraintes de seuil de la sélection de portefeuille multi-périodes peuvent être exprimées comme :

$$0 \leq x_{it} \leq u_{it} \quad (3.46)$$

où  $u_{it}$  est la borne supérieure de  $x_{it}$ .

Pour formuler des contraintes de cardinalité dans le modèle de portefeuille multi-périodes, des variables de décision zéro-un sont ajoutées comme :

$$z_{it} = \begin{cases} 0 & \text{si l'un des actifs } i \text{ de la période } t \text{ (} i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \text{) est détenu} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{avec } \sum_{i=1}^n z_{it} \leq K$$

Lorsque les investisseurs peuvent donner un niveau de risque tolérable à la période  $t$ , et veulent maximiser le capital terminal au niveau de risque donné, le modèle moyen écart absolu incertain multi-périodes avec contraintes réelles est le suivant :

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \prod_{t=1}^T (\sum_{i=1}^n (a_{it} + \frac{\beta_{it} - \alpha_{it}}{4}) x_{it} + r_{ft} (1 - \sum_{i=1}^n x_{it}) - \sum_{i=1}^n c_{it} |x_t - x_{(t-1)}|) \\ & \begin{cases} W_{t+1} = W_t (1 + \sum_{i=1}^n (a_{it} + \frac{\beta_{it} - \alpha_{it}}{4}) x_{it} + r_{ft} (1 - \sum_{i=1}^n x_{it}) - \sum_{i=1}^n c_{it} |x_t - x_{(t-1)}|) \\ AD_t (r_{1t} x_{1t} + r_{2t} x_{2t} + \dots + r_{nt} x_{nt}) \leq AD_{0t} \\ 1 - \sum_{i=1}^n x_{it} \geq x_{ft}^b \\ \sum_{i=1}^n z_{it} \leq K, \quad z_{it} \in \{0,1\} \\ 0 \leq x_{it} \leq u_{it} z_{it}, \quad i = 0,1, \dots, n, \quad k = 0,1, \dots, T \end{cases} \end{aligned} \quad (3.47)$$

#### d. Modèle de la sélection de portefeuille incertain multi-périodes moyenne-semi-variance de Chen

Chen [Che 18] a discuté le problème de sélection de portefeuille multi-périodes lorsque les données historiques sont insuffisantes pour l'estimation des rendements des titres. En considérant les rendements des titres comme des variables incertaines, Chen propose un modèle basé sur la mesure de risque semi-variance sur plusieurs périodes pour la sélection de portefeuille avec des contraintes réelles.

Chen suppose qu'un investisseur répartit son capital initiale  $W_0$  parmi les  $n$  titres au début de la période 1, et obtient le capital terminal à la fin de la période  $T$ . L'investisseur pourra réajuster son capital à chaque début des  $T - 1$  périodes consécutives suivantes.

Soient  $r_{t,i}$  le rendement de l'actif risqué l'actif  $i$  à la période  $t$ ,  $r_f$  le rendement de l'actif sans risque,  $d_{t,i}$  le coût unitaire de transaction actif  $i$  à la période  $t$ ,  $W_t$  le capital à la fin de la période  $t$ ,  $\Delta W_t$  l'incrément du capital entre la période  $t - 1$  et  $t$ ,  $\varepsilon_{t,i}$  la proportion minimale allouée au titre  $i$  à la période  $t$ , si le titre  $i$  est détenu,  $\delta_{t,i}$  la proportion maximale allouée au titre  $i$  à la période  $t$ , si le titre  $i$  est détenu,  $m_t$  le nombre de titres que les investisseurs souhaitent détenir en portefeuille à la période  $t$ ,  $z_{it}$  est la variable binaire :

$$z_{it} = \begin{cases} 0 & \text{si l'un des actifs } i \text{ de la période } t \text{ (} i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \text{) est détenu} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Chen suppose que le coût de transaction est une fonction en  $V$  des différences entre le portefeuille  $x_t$  à la période  $t$  et le portefeuille  $x_{t-1}$  à la période  $t - 1$ . Par conséquent, le coût de transaction total du portefeuille  $x_t$  à la période  $t$  peut être représenté par :

$$D_t = \sum_{i=1}^n d_{t,i} |x_{t,i} - x_{t-1,i}| \quad , \quad t = 1, \dots, T$$

Ainsi, le taux de rendement net du portefeuille  $x_t$  à la période  $t$  après paiement des coûts de transaction est :

$$R_{t,N} = \sum_{i=1}^n r_{t,i} \cdot x_{t,i} - \sum_{i=1}^n d_{t,i} |x_{t,i} - x_{t-1,i}| \quad , \quad t = 1, \dots, T$$

De plus, le capital à la fin de la période  $t + 1$  peut être exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} W_{t+1} &= W_t(1 + R_{t,N}) \\ &= W_t(1 + \sum_{i=1}^n r_{t,i} \cdot x_{t,i} - d_{t,i} |x_{t,i} - x_{t-1,i}|) \quad , \quad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

Récursivement, le capital terminal obtenue à la fin de la période  $T$  peut être exprimée par :

$$W_T = W_0 \prod_{t=1}^T (1 + \sum_{i=1}^n r_{t,i} \cdot x_{t,i} - d_{t,i} |x_{t,i} - x_{t-1,i}|)$$

Outre les coûts de transaction, les investisseurs sont généralement confrontés à d'autres contraintes du monde réel telles que la cardinalité et les contraintes de délimitation. La contrainte de cardinalité impose une limite au nombre d'actifs en portefeuille soit pour simplifier la gestion du portefeuille, soit pour réduire les coûts de transaction. La contrainte de délimitation limite la proportion de chaque actif dans le portefeuille à se situer entre les limites inférieure et supérieure afin d'éviter des avoirs très petits (ou grands) et irréalistes. Plus précisément, un minimum  $\varepsilon_{t,i}$  et un maximum  $\delta_{t,i}$  pour chaque actif  $i$  à la période  $t$  sont donnés, et nous imposons que soit  $x_{t,i} = 0$  soit  $\varepsilon_{t,i} \leq x_{t,i} \leq \delta_{t,i}$ . De plus, les contraintes de cardinalité sur le portefeuille à la période  $t$  sont exprimées par :

$$\sum_{i=1}^n z_{it} = m_t \quad , \quad t = 1, \dots, T$$

En considérant que l'investisseur adopte la semi-variance comme mesure du risque et  $r_f$  le taux d'intérêt sans risque, la semi-variance du taux de rendement du portefeuille à la période  $t$  est définie comme :

$$SV_t = E([\Delta W_t - W_0 r_f]^-)^2$$

Par suite, le modèle de moyenne-semi-variance sur plusieurs périodes pour la sélection de portefeuille incertaine peut être formulé comme suit :

$$\begin{aligned}
& \text{Max} && E(W_T) \\
& \text{s. c.} && \begin{cases} \sum_{t=1}^T SV(W_t) \leq \alpha \\ \sum_{i=1}^n x_{t,i} = 1 \\ \varepsilon_{t,i} \leq x_{t,i} \leq \delta_{t,i} \\ \sum_{i=1}^n z_{it} = m_t \\ z_{it} \in \{0,1\} \\ 0 \leq x_{it} \leq u_{it} z_{it} \\ i = 0,1, \dots, n, \quad k = 0,1, \dots, T \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.48}$$

### 3. Approches d'optimisation de portefeuille financier dans le marché international

Un portefeuille international est une sélection de titres qui se concentre sur les marchés étrangers plutôt que sur les marchés nationaux. Avec le développement croissant de l'économie transnationale et la libéralisation des flux de capitaux, les investissements de portefeuille internationaux deviennent facilement disponibles et attirent de plus en plus l'attention des chercheurs. Nombreux ont étudié ce problème et ont constaté que le portefeuille international était significatif pour les investisseurs car il pouvait apporter plus d'avantages aux investisseurs que le seul investissement national. Par exemple, Solnik [Sol 96] a confirmé les avantages de construire un portefeuille international sur le marché américain. Chiou [Chi 09] a montré que le portefeuille international bénéficiait aux investisseurs locaux même après la prise en compte de l'impact des diverses contraintes d'investissement. Dans cette section, on va introduire quelques problèmes d'optimisation de portefeuille d'actifs financiers internationaux basés sur la théorie de l'incertitude.

#### a. Le modèle Moyenne-Variance de Huang

Sur la base des derniers développements de la théorie de l'incertitude, Huang [Hua 10] a discuté, le problème de sélection de portefeuille prenant en compte simultanément les taux de change incertains et les rendements des titres.

Soit  $\xi_h$  les taux de rendement incertains du portefeuille libellés dans la devise nationale,  $\xi_f$  les taux de rendement incertains du portefeuille libellés dans la devise étrangère,  $r_0$  le taux de change initial et  $r_t$  le taux de change futur. Le taux de change est exprimé sous la forme d'équivalent en devise nationale pour une unité de devise étrangère. Il est clair que le rendement des investisseurs acquis dans le pays étranger peut être exprimé, en devise nationale, comme suit :

$$1 + \xi_h = (1 + \xi_f) \frac{r_t}{r_0}$$

qui peut se transformer sous la forme suivante :

$$\xi_h = \frac{\xi_f r_0 + r_t - r_0 + \xi_f (r_t - r_0)}{r_0} = \xi_f + \frac{r_t - r_0}{r_0} + \frac{r_t - r_0}{r_0} \xi_f$$

Notons que  $\frac{r_t - r_0}{r_0}$  est le taux de variation du taux de change.

En considérant  $\eta$  le taux de variation incertain du taux de change défini par :  $\eta = \frac{r_t - r_0}{r_0}$

Alors :

$$\xi_h = \xi_f + \eta + \eta \xi_f$$

Généralement, dans la plupart des investissements de portefeuille internationaux, le produit  $\xi_f \cdot \eta$  est très petit, de sorte qu'il peut être négligé. Ainsi :  $\xi_h = \xi_f + \eta$

Soient  $x_i$  la proportion d'investissement dans le  $i$ -ème pays marché boursier,  $\xi_i$  le rendement incertain du titre du marché boursier du  $i$ -ème pays libellé dans la devise du  $i$ -ème pays,  $i = 1, 2, \dots, n$  respectivement,  $\eta_i$  le taux de variation du taux de change de la devise nationale par rapport à la  $i$ ème devise du pays et  $\gamma$  le niveau de risque maximal que l'investisseur peut tolérer. Ensuite, dans le cas où l'investisseur souhaite maximiser le rendement à un niveau de risque spécifique donné, le modèle international moyen-variance incertain est le suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Max } E[ \sum_{i=1}^n x_i \cdot (\xi_i + \eta_i) ] \\ \text{S. c. } & \begin{cases} V[ \sum_{i=1}^n x_i \cdot (\xi_i + \eta_i) ] \leq c \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1 \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Lorsque l'investisseur veut minimiser le risque pour un niveau de rendement donné, la formulation est la suivante :

$$\begin{aligned} & \text{Min } V[ \sum_{i=1}^n x_i \cdot (\xi_i + \eta_i) ] \\ \text{S. c. } & \begin{cases} E[ \sum_{i=1}^n x_i \cdot (\xi_i + \eta_i) ] \geq \theta \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1 \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (3.50)$$

où  $\theta$  représente le rendement minimum que l'investisseur peut accepter.

### b. Le modèle Moyenne-Chance de Huang et Wang

Huang et Wang [Hua 19] ont utilisé la théorie de l'incertitude, pour discuter l'investissement de portefeuille international dans une situation où les prix futurs des titres et les taux de change sont considérés comme des variables incertaines.

Supposons que  $\tilde{P}_i$  et  $P_{i0}$  sont respectivement le prix futur incertain et le prix actuel du titre du  $i$ -pays, libellés dans la devise du  $i$ -pays,  $\tilde{C}_i$  et  $C_{i0}$  le taux de change futur incertain et le taux de change au comptant actuel de la devise locale à la devise du  $i$ -

pays respectivement, pour  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\xi_i$  le taux de rendement incertain du  $i$ -pays libellé en devise locale,  $i = 1, 2, \dots, n$ , respectivement. Alors :

$$\xi_i = \frac{\tilde{P}_i \tilde{C}_i}{P_{i0} C_{i0}} - 1$$

Soit  $x_i$  la proportion d'investissement dans le titre du  $i$ -pays,  $i = 1, 2, \dots, n$ , respectivement. Ensuite, le rendement total de l'investisseur obtenu sur les marchés internationaux des valeurs mobilières en termes de devise nationale est :

$$r_p = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \left( \frac{\tilde{P}_i \tilde{C}_i}{P_{i0} C_{i0}} - 1 \right)$$

L'investisseur cherche à maximiser le rendement, tandis que la chance que le rendement du portefeuille n'atteigne pas la valeur seuil prédéfinie  $r$  est inférieure à un niveau tolérable donné  $\beta$ . Nous le décrivons mathématiquement et obtenons un modèle de portefeuille international moyenne-chance incertain comme suit :

$$\begin{aligned} & \text{Max } E\left[\sum_{i=1}^n x_i \cdot \left( \frac{\tilde{P}_i \tilde{C}_i}{P_{i0} C_{i0}} - 1 \right)\right] \\ \text{S.c. } & \begin{cases} M\left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot \left( \frac{\tilde{P}_i \tilde{C}_i}{P_{i0} C_{i0}} - 1 \right) \leq r\right) \leq \beta \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Supposons que le prix du titre incertain  $\tilde{P}_i$  et le taux de change  $\tilde{C}_i$  ont des fonctions de distribution d'incertitude continues et strictement croissantes  $\Phi_i$  et  $\Psi_i$ , respectivement. Alors le modèle précédant est équivalent à la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \text{Max } \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \cdot \left( \frac{\Phi_i^{-1}(\alpha) \Psi_i^{-1}(\alpha)}{P_{i0} C_{i0}} - 1 \right) d\alpha \\ \text{S.c. } & \begin{cases} \left( \sum_{i=1}^n x_i \cdot \left( \frac{\Phi_i^{-1}(\beta) \Psi_i^{-1}(\beta)}{P_{i0} C_{i0}} - 1 \right) \right) \geq r \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Par exemple, si pour  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\tilde{P}_i$  le prix du titre et  $\tilde{C}_i$  le taux de change sont des variables incertaines normales  $\tilde{P}_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$  et  $\tilde{C}_i \sim N(e_i, s_i)$ , alors le modèle (3.52) est converti comme suit :

$$\begin{aligned} & \text{Max } \sum_{i=1}^n x_i \cdot \left( \frac{\mu_i e_i + \sigma_i s_i}{P_{i0} C_{i0}} - 1 \right) \\ \text{S.c. } & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \left( \frac{\mu_i e_i + \frac{\sqrt{3} e_i \sigma_i \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) + \frac{\sqrt{3} \mu_i s_i \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)}{\pi} + \frac{3 \sigma_i s_i}{\pi^2} \ln^2\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)}{P_{i0} C_{i0}} - 1 \right) \geq r \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (3.53)$$

En outre, Huang et Wang ont examiné l'impact de la couverture à terme sur les investissements de portefeuille internationaux incertains en comparant les investissements de portefeuille internationaux non couverts par des contrats à terme avec ceux couverts par des contrats à terme. À un faible niveau de risque tolérable, les contrats à terme ont une bonne performance en matière de couverture du risque et apportent un rendement élevé. Mais, lorsque le niveau de risque tolérable devient important, la réduction du risque causée par les contrats à terme élimine également le rendement élevé potentiel. De plus, la prise en compte des contrats à terme dans un portefeuille international peut apporter un rendement plus stable et relativement élevé que le fait qu'aucun contrat à terme ne soit pris en compte. Et aucun investissement dans des contrats à terme n'a également la possibilité d'obtenir des rendements supérieurs à ceux des investissements à terme.

#### **4. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons réuni et exposé quelques-uns des modèles encadrant les problèmes d'optimisation de portefeuille incertaine. Nous avons fourni au lecteur un certain support pour découvrir certaines nouveautés. Dans le prochain chapitre, nous proposeront certains problèmes d'optimisation de portefeuilles en se basant sur la théorie de l'incertitude. L'introduction des approches basées sur les variables incertaines afin de modéliser le prix et le taux de change et exprimer la VaR d'un portefeuille d'actifs financiers de certains marché international et la constitution de portefeuilles optimaux, prenant en considération quelques contraintes reflétant la réalité du marché financier, sera notre contribution majeure.

## CHAPITRE 4 : CONTRIBUTIONS DE LA THEORIE DE L'INCERTITUDE A L'OPTIMISATION DE PORTEFEUILLE D'ACTIONS

---

---

Dans ce chapitre, nous proposons certaines approches de sélection du portefeuille d'actifs financiers dans un environnement incertain. Afin de modéliser les risques des investissements nous allons utiliser les mesures de risques VaR et TVaR.

Les principales contributions se résument dans la proposition des modèles incertains internationaux Moyenne-VaR pour l'optimisation de portefeuille et des modèles Moyenne-TVaR pour la sélection de portefeuille sur plusieurs périodes tout en prenant en considération les contraintes reflétant la réalité des marchés.

### 1. Modèles internationaux Moyenne-VaR diversifiés pour l'optimisation de portefeuille basé sur la théorie de l'incertitude.

Un portefeuille international est une sélection de titres qui se concentre sur les marchés étrangers plutôt que sur les marchés nationaux. Le rendement d'un portefeuille international dépend des prix des titres et des taux de change. Dans nos modèles, comme mentionné ci-dessus, ces deux éléments seront représentés par des variables incertaines en raison d'un manque d'informations historiques. De plus, nous prendrons en compte le coût de transaction et la diversification en tant que deux facteurs représentant le marché et affectant le rendement des investissements. Notez que les variables sont supposées indépendantes.

#### a. Formulation mathématique du problème

Supposons que le coût de transaction est une fonction en  $V$  de la différence entre un portefeuille donné  $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$  et un nouveau portefeuille  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Ensuite, le coût de transaction pour le titre  $i$  peut être exprimé par :

$$d_i |x_{0i} - x_i|$$

où  $d_i$  est le coût de transaction unitaire du titre  $i$ .

Pour un nouvel investisseur, il n'a aucun actif sous la main. Nous avons supposé que  $x_{0i} = 0, i = 1, \dots, n$ . Le coût de transaction pour un titre  $i$  peut être exprimé sous la forme  $d_i x_i$ .

Contrairement aux proverbes : « Ne mettez pas tous vos œufs dans le même panier », qui signifient qu'il faut diversifier notre portefeuille, les modèles traditionnels d'optimisation de portefeuille conduisent toujours à des allocations concentrées sur un périmètre limité d'actifs, et l'investisseur subit considérablement le risque [Man 14]. L'indice de concentration industrielle d'Orris Herfindahl, défini comme la somme des

parts au carré de la contribution de chaque produit à la production totale de l'entreprise, est utilisé comme mesure de diversification.

L'entropie de Shannon est une mesure bien connue de la diversification [Sha 49]. Il est utilisé dans plusieurs secteurs, comme dans l'industrie, la mesure d'entropie de la diversification d'une entreprise est diversement définie comme "une moyenne pondérée des parts des segments" [Pal 85]. Récemment Chen [Che 16] l'applique dans la théorie de la sélection de portefeuille comme contrainte pour assurer un portefeuille de diversification en supposant que  $x_i$  soit le poids du titre  $i$  dans le portefeuille.

Si  $A = \{A_1, \dots, A_n\}$  est une partition de l'ensemble  $\Omega$  et  $x_i$  est la probabilité de l'événement  $A_i$  avec  $i = 1, \dots, n$ . L'entropie de Shannon de  $A, E$ , est formellement définie comme :

$$\sum_{i=1}^n x_i \ln \left( \frac{1}{x_i} \right)$$

Il est important de noter que la valeur maximale de  $E$  est atteinte  $\ln(n)$  lorsque tous les  $x_i$  sont égaux et atteint sa valeur minimale 0 si  $x_i = 1$  où  $i = 1, \dots, n$ . Ensuite, une grande valeur d'entropie signifie que le portefeuille est plus diversifié et une petite signifie que le portefeuille est concentré. Les rendements des titres individuels sont les informations de base pour les investisseurs, et chaque décision est prise sur la base de ces informations. Le rendement d'un actif est défini comme :

$$\frac{\text{Prix du titre en fin de période} - \text{Prix de début} + \text{dividende}}{\text{Prix de début}}$$

En supposant que  $S_i$  et  $S_{i0}$  sont respectivement le prix futur incertain et le prix actuel du titre du  $i$ -pays, et libellés dans la devise du  $i$ -pays,  $\eta_i$  et  $\eta_{i0}$  sont le taux de change futur incertain et le taux de change au comptant actuel du devise locale à la devise du  $i$ -pays respectivement, pour  $i = 1, 2, \dots, n$ . Soit  $\xi_i$  le taux de rendement incertain, avec les distributions d'incertitude  $\Phi$ , du  $i$ -pays libellé en devise locale,  $i = 1, 2, \dots, n$ , respectivement. Par suite :

$$\xi_i = \frac{S_i \eta_i - S_{i0} \eta_{i0}}{S_{i0} \eta_{i0}}$$

Soient  $\Phi_i$  les distributions d'incertitude de  $S_i$  et  $\Phi'_i$  les distributions d'incertitude de  $\eta_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , respectivement. Le taux de rendement net du portefeuille,  $R_p$  est exprimé comme :

$$R_p = \sum_{i=1}^n \left( \frac{S_i \eta_i - S_{i0} \eta_{i0}}{S_{i0} \eta_{i0}} \right) x_i - d_i x_i = \sum_{i=1}^n \left( \frac{S_i \eta_i - S_{i0} \eta_{i0}}{S_{i0} \eta_{i0}} - d_i \right) x_i$$

Ensuite, le rendement attendu du portefeuille est :

$$E(R_p) = E \left[ \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{S_i \eta_i - S_{i0} \eta_{i0}}{S_{i0} \eta_{i0}} - d_i \right) \right] = \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{\Phi_i^{-1} \Phi_i'^{-1} - S_{i0} \eta_{i0}}{S_{i0} \eta_{i0}} - d_i \right) d\alpha$$

Le risque d'investissement est représenté par la VaR du portefeuille au niveau de confiance du risque  $\alpha$  comme suit :

$$\begin{aligned} VaR_p(\alpha) &= \sum_{i=1}^n x_i VaR_i(\alpha) = \sum_{i=1}^n x_i \Phi^{-1}(\alpha) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{\Phi_i^{-1}(\alpha) \Phi_i'^{-1}(\alpha) - S_{i0} \eta_{i0}}{S_{i0} \eta_{i0}} \right) \end{aligned}$$

Par conséquent, les modèles internationaux d'optimisation de portefeuille, dans le cas d'une maximisation du rendement de l'investissement sous un niveau de risque maximal  $\theta$  et en tenant compte d'un niveau minimal de diversification  $\tau$ , sont modélisés comme suit :

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{\Phi_i^{-1}(\alpha) \Phi_i'^{-1}(\alpha) - S_{i0} \eta_{i0}}{S_{i0} \eta_{i0}} - d_i \right) . d\alpha \\ \text{s. c.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{\Phi_i^{-1}(\alpha) \Phi_i'^{-1}(\alpha) - S_{i0} \eta_{i0}}{S_{i0} \eta_{i0}} \right) \leq \theta \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ \sum_{i=1}^n x_i \ln \left( \frac{1}{x_i} \right) \geq \tau \\ x_i \geq 0, \quad i = 1 \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Si l'investisseur souhaite minimiser le risque d'investissement avec un niveau de rendement de portefeuille minimum  $\beta$ , alors il peut utiliser le modèle suivant :

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{\Phi_i^{-1}(\alpha) \Phi_i'^{-1}(\alpha) - S_{i0} \eta_{i0}}{S_{i0} \eta_{i0}} \right) \\ \text{s. c.} \quad & \begin{cases} \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{\Phi_i^{-1}(\alpha) \Phi_i'^{-1}(\alpha) - S_{i0} \eta_{i0}}{S_{i0} \eta_{i0}} - d_i \right) . d\alpha \geq \beta \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ \sum_{i=1}^n x_i \ln \left( \frac{1}{x_i} \right) \geq \tau \\ x_i \geq 0, \quad i = 1 \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2)$$

## b. Modèles équivalents déterminants

En supposons que le prix du titre incertain  $S_i$  et le taux de change  $\eta_i$  sont des variables incertaines normales indépendantes  $S_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$  et  $\eta_i \sim N(e_i, m_i)$ , pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$ , respectivement.

La distribution réciproque de l'incertitude de  $S_i$  et  $\eta_i$  sont respectivement

$$\Phi_i^{-1}(\alpha) = \mu_i + \frac{\sqrt{3}\sigma_i}{\pi} \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \quad \text{et} \quad \Phi_i'^{-1}(\alpha) = e_i + \frac{\sqrt{3}m_i}{\pi} \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right).$$

On a : 
$$E(R_p) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{(\mu_i + \frac{\sqrt{3}\sigma_i}{\pi} \ln(\frac{\alpha}{1-\alpha})) (e_i + \frac{\sqrt{3}m_i}{\pi} \ln(\frac{\alpha}{1-\alpha})) - S_{i0}\eta_{i0}}{S_{i0}\eta_{i0}} - d_i \right) . d\alpha$$

$$= \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{(\mu_i e_i + \frac{\sqrt{3}\mu_i m_i}{\pi} \ln(\frac{\alpha}{1-\alpha}) + \frac{\sqrt{3}e_i \sigma_i}{\pi} \ln(\frac{\alpha}{1-\alpha}) + \frac{3m_i \sigma_i}{\pi^2} \ln(\frac{\alpha}{1-\alpha})^2) - S_{i0}\eta_{i0}}{S_{i0}\eta_{i0}} - d_i \right) . d\alpha$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{(\mu_i e_i + \frac{3m_i \sigma_i}{\pi^2} \times \frac{\pi^2}{3}) - S_{i0}\eta_{i0}}{S_{i0}\eta_{i0}} - d_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{\mu_i e_i + m_i \sigma_i - S_{i0}\eta_{i0}}{S_{i0}\eta_{i0}} - d_i \right)$$

et 
$$VaR_p(\alpha) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \left[ \frac{\mu_i e_i + \frac{\sqrt{3}(\mu_i m_i + e_i \sigma_i)}{\pi} \times \ln(\frac{\alpha}{1-\alpha}) + \frac{3m_i \sigma_i}{\pi^2} \times \ln(\frac{\alpha}{1-\alpha})^2}{S_{i0}\eta_{i0}} - 1 \right]$$

Ensuite, les modèles 4.1 et 4.2 peuvent être convertis sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} & \text{Max } \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{\mu_i e_i + m_i \sigma_i - S_{i0}\eta_{i0}}{S_{i0}\eta_{i0}} - d_i \right) \\ & \text{s. c. } \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \left[ \frac{\mu_i e_i + \frac{\sqrt{3}(\mu_i m_i + e_i \sigma_i)}{\pi} \times \ln(\frac{\alpha}{1-\alpha}) + \frac{3s_i \sigma_i}{\pi^2} \times \ln(\frac{\alpha}{1-\alpha})^2}{S_{i0}\eta_{i0}} - 1 \right] \leq \theta \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ \sum_{i=1}^n x_i \ln\left(\frac{1}{x_i}\right) \geq \tau \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (4.3)$$

et

$$\begin{aligned} & \text{Min } \sum_{i=1}^n x_i \cdot \left[ \frac{\mu_i e_i + \frac{\sqrt{3}(\mu_i m_i + e_i \sigma_i)}{\pi} \times \ln(\frac{\alpha}{1-\alpha}) + \frac{3s_i \sigma_i}{\pi^2} \times \ln(\frac{\alpha}{1-\alpha})^2}{S_{i0}\eta_{i0}} - 1 \right] \\ & \text{s. c. } \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{\mu_i e_i + m_i \sigma_i - S_{i0}\eta_{i0}}{S_{i0}\eta_{i0}} - d_i \right) \geq \beta \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ \sum_{i=1}^n x_i \ln\left(\frac{1}{x_i}\right) \geq \tau \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (4.4)$$

En supposons que  $S_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$  et  $\eta_i \sim L(a_i, b_i)$ , pour  $i = 1, 2, \dots, n$ , respectivement. La distribution d'incertitude réciproque de  $S_i$  et  $\eta_i$  sont respectivement

$$\Phi_i^{-1}(\alpha) = \mu_i + \frac{\sqrt{3}\sigma_i}{\pi} \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \text{ et } \Phi_i'^{-1}(\alpha) = (1-\alpha)a_i + \alpha \cdot b_i.$$

Donc :

$$\begin{aligned} & \Phi_i^{-1}(\alpha) \Phi_i'^{-1}(\alpha) = \left( \mu_i + \frac{\sqrt{3}\sigma_i}{\pi} \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \right) \left( (1-\alpha)a_i + \alpha \cdot b_i \right) \\ & = (1-\alpha)a_i \mu_i + \alpha \cdot b_i \mu_i + \frac{\sqrt{3}a_i \sigma_i}{\pi} (1-\alpha) \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) + \frac{\sqrt{3}b_i \sigma_i}{\pi} \alpha \cdot \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \\ & = (1-\alpha)a_i \mu_i + \alpha \cdot b_i \mu_i + \frac{\sqrt{3}a_i \sigma_i}{\pi} \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) + \frac{\sqrt{3}\sigma_i}{\pi} (b_i - a_i) \alpha \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \\ & E(R_p) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{(1-\alpha)a_i \mu_i + \alpha \cdot b_i \mu_i + \frac{\sqrt{3}a_i \sigma_i}{\pi} \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) + \frac{\sqrt{3}\sigma_i}{\pi} (b_i - a_i) \alpha \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) - S_{i0}\eta_{i0}}{S_{i0}\eta_{i0}} - d_i \right) . d\alpha \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{0.5\mu_i(a_i + b_i) + \frac{\sqrt{3}\sigma_i}{2\pi}(b_i - a_i) - S_{i0}\eta_{i0}}{S_{i0}\eta_{i0}} - d_i \right)$$

Par suite, les modèles 4.1 et 4.2 peuvent s'écrire sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{0.5\mu_i(a_i + b_i) + \frac{\sqrt{3}\sigma_i}{2\pi}(b_i - a_i) - S_{i0}\eta_{i0}}{S_{i0}\eta_{i0}} - d_i \right) \\ \text{s. c.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \left[ \frac{(1-\alpha)a_i\mu_i + \alpha b_i\mu_i + \frac{\sqrt{3}\sigma_i}{\pi} \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) + \frac{\sqrt{3}\sigma_i}{\pi}(b_i - a_i)\alpha \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)}{S_{i0}\eta_{i0}} - 1 \right] \leq \theta \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ \sum_{i=1}^n x_i \ln\left(\frac{1}{x_i}\right) \geq \tau \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (4.5)$$

et

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i=1}^n x_i \cdot \left[ \frac{(1-\alpha)a_i\mu_i + \alpha b_i\mu_i + \frac{\sqrt{3}\sigma_i}{\pi} \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) + \frac{\sqrt{3}\sigma_i}{\pi}(b_i - a_i)\alpha \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)}{S_{i0}\eta_{i0}} - 1 \right] \\ \text{s. c.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{0.5\mu_i(a_i + b_i) + \frac{\sqrt{3}\sigma_i}{2\pi}(b_i - a_i) - S_{i0}\eta_{i0}}{S_{i0}\eta_{i0}} - d_i \right) \geq \beta \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ \sum_{i=1}^n x_i \ln\left(\frac{1}{x_i}\right) \geq \tau \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (4.6)$$

### c. Application actuarielle et discussion

Pour illustrer l'application de nos modèles et montrer l'impact des facteurs qui reflètent la réalité sur les décisions de sélection de portefeuille, nous présenterons dans cette section un exemple numérique.

Supposons qu'un investisseur marocain envisage d'investir dans des investissements internationaux pendant un an à partir du 07 Novembre 2022. Il souhaite composer un portfolio à partir de cinq pays : le Maroc, les États-Unis, la Chine, l'Angleterre et la France. Nous utiliserons les indices MASI, S&P 500, composite de Shanghai, FTSE 100 et CAC 40 pour représenter les prix des titres financiers des cinq pays respectivement. La table 4.1 présente les indices de clôture, au 05 novembre 2022, comme les prix financiers courants tandis que la table 4.2 fournit les taux de change des devises des quatre pays par rapport à la devise d'origine à la même date lorsque le Maroc est le pays d'origine. En se basant sur les estimations d'experts à l'échéance de l'investissement, les cours de nos actions sont présentés dans la table 4.3.

**Table 4.1.** Les cours boursiers actuels en devise locale

L'indice	La notation	Les Cours boursiers actuels en devise locale
MASI	$S_{10}$	13413.80
S&P 500	$S_{20}$	4697.53
SSE Composite	$S_{30}$	3491.57
FTSE 100	$S_{40}$	7303.96
CAC 40	$S_{50}$	7040.79

**Table 4.2.** Les taux de change actuels

Devise étrangère en devise nationale	La notation	Les taux de change actuels
USD to MAD	$\eta_{20}$	9.08
CNY to MAD	$\eta_{30}$	1.42
GBP to MAD	$\eta_{40}$	12.23
EUR to MAD	$\eta_{50}$	10.49

**Table 4.3** Les cours boursiers normaux incertains en devise locale

L'indice	La notation	Les cours actuels des titres en MAD
MASI	$S_{11}$	$N(13751.50, 331.50)$
S&P 500	$S_{12}$	$N(5097.53, 99.7)$
SSE Composite	$S_{13}$	$N(3786.91, 295.34)$
FTSE 100	$S_{14}$	$N(7597.79, 293.79)$
CAC 40	$S_{15}$	$N(7338.29, 297.50)$

Nous supposons que les taux de change à l'échéance, sont modélisés par des variables normales et estimés par des experts et présentés dans la table 4.4.

**Table 4.4.** Taux de change normaux futurs incertains

Devise étrangère en MAD	La notation	Taux de change actuel
USD to MAD	$\eta_{12}$	$N(9.52, 0.44)$
CNY to MAD	$\eta_{13}$	$N(1.39, -0.03)$
GBP to MAD	$\eta_{14}$	$N(12.34, 0.11)$
EUR to MAD	$\eta_{15}$	$N(10.85, 0.36)$

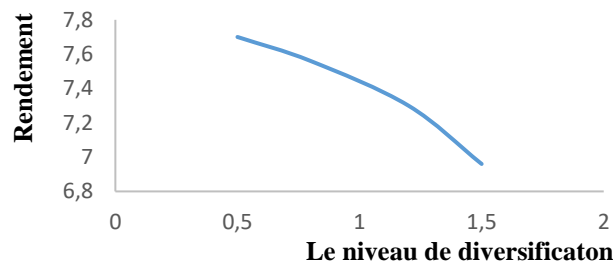
Pour mettre en évidence les apports du modèle 4.3, supposons que le taux de coût de transaction  $d_i$  est de 0,3%, le niveau de risque tolérable  $\theta$  est à 0,1%, 0,15%, 0,2% ou 0,3% et le niveau minimum de diversification  $\tau$  à 1. Nous fixons le niveau de confiance  $\alpha$  de la VaR à 95 %.

En utilisant le logiciel LINGO, nous pouvons remarquer, à partir de la table 4.5, que le rendement espéré augmente avec l'augmentation de la tolérance au risque  $\theta$ , ce qui est en accord avec la règle selon laquelle plus il y a de risque, plus il y a de gain. Lorsque  $\theta < 0,1$ , le modèle 4.3 est localement infaisable, alors que lorsque  $\theta$  est fixé à 0,1, le rendement attendu optimal correspondant est de 3,86 %. 69 % des capitaux sont investis dans la bourse marocaine, 8,42% des capitaux sont investis dans la bourse américaine, 8,06% des capitaux sont investis dans la bourse chinoise, 12,82% des capitaux sont investis dans la bourse anglaise et 1,70% des capitaux sont investis dans la bourse française. La majorité du capital est investie sur le marché marocain. Tout en augmentant la valeur de  $\theta$ , plus de capitaux sont investis sur le marché boursier américain et moins sont investis sur le marché boursier marocain. Lorsque  $\theta$  est fixé à 0,3, le rendement attendu optimal correspondant est augmenté à 11,26 %. 3,05% des capitaux sont investis dans la bourse marocaine, 69,47% des capitaux sont investis dans la bourse américaine, 7,90% des capitaux sont investis dans la bourse chinoise, 6,02% des capitaux sont investis dans la bourse anglaise et 13,56% des capitaux sont investis dans la bourse française. Jusqu'à ce que  $\theta$  soit égal à 0,3, aucun autre changement dans le rendement attendu ou la stratégie d'investissement. Cela signifie que si l'investisseur est prêt à supporter plus de risques, il est préférable d'investir une grande partie de son capital dans le titre américain.

**Table 4.5.** Allocation du capital en utilisant le modèle 4.3 (%)

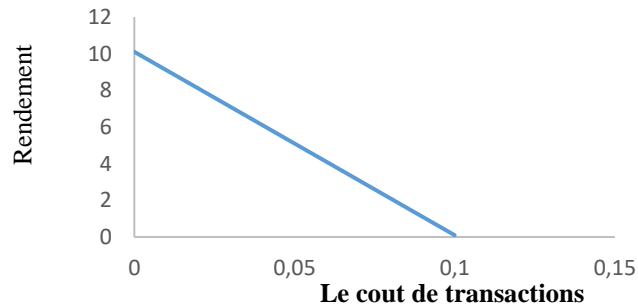
$\theta$	MA	USA	CN	GB	FR	Exp. Ret.
0.10	69.00	8.42	8.06	12.82	1.70	3.86
0.15	51.42	39.48	3.25	5.48	0.37	6.97
0.20	24.55	63.45	4.66	6.17	1.17	9.80
0.30	3.05	69.47	7.90	6.02	13.56	11.26
..	...	..	..	..	..	..
0.90	3.05	69.47	7.90	6.02	13.56	11.26

On en conclut que, d'après les tables 5 et 6, en présence de la contrainte d'entropie, le portefeuille optimal est plus diversifié. De plus, aux mêmes valeurs de tolérance au risque, le rendement attendu du modèle avec contrainte d'entropie est inférieur au rendement attendu sans contrainte d'entropie. Cela signifie qu'en présence de la contrainte d'entropie, le modèle peut apporter un rendement relativement faible si aucune contrainte d'entropie n'est prise en compte. La relation entre le rendement de l'investissement et la contrainte de diversification est illustrée à la figure 4.1.

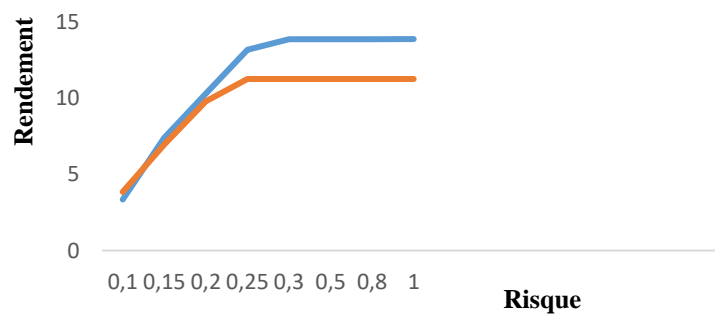


**Figure 4.1** Comportement du rendement de l'investissement en fonction de la valeur d'entropie à l'aide du modèle 4.3

Pour remarquer la relation entre les coûts de transaction et le rendement attendu, la figure 2 est dessinée. Le rendement attendu et le coût de transaction sont représentés respectivement sur l'axe vertical et l'axe horizontal. Le rendement attendu diminuera avec l'augmentation des niveaux de coûts de transaction, ce qui est en conscience avec l'intuitivité.



**Figure 4.2** Comportement du rendement de l'investissement en fonction de la valeur des coûts de transaction à l'aide du modèle 4.3



**Figure 4.3.** Rendement de l'investissement du modèle 4.3:

- avec les facteurs de réalité
- sans les facteurs de réalité

## 2. Modèle de valeur à risque Moyenne-TVaR pour l'optimisation de portefeuille sur plusieurs périodes avec des contraintes réalistes basées sur la théorie de l'incertitude

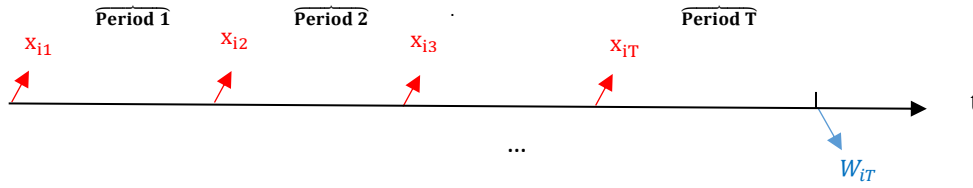
L'objectif de tout problème d'optimisation de portefeuille est d'imiter les marchés boursiers et de proposer les solutions optimales pour faire face aux diverses attentes des investisseurs. Dans ce travail, nous proposons de nouveaux problèmes d'optimisation de portefeuille multi-périodes lorsque les rendements des titres sont des variables incertaines, données par des estimations d'experts, et prenons la Tail value at risk (TVaR) comme une mesure cohérente du risque d'investissement dans le cadre de la théorie de l'incertitude. Les contraintes réelles, dans lesquelles les coûts de transaction, la liquidité des titres et la diversification du portefeuille sont pris en compte. Des formes déterministes équivalentes de modèles moyenne-TVaR sont proposées sous l'hypothèse que les rendements et la liquidité des titres obéissent à certains types de distributions d'incertitude. Nous avons adapté la méthode Delphi afin d'évaluer les valeurs attendues, l'écart-type et les taux de rotation des rendements des titres donnés.

### a. Formulation mathématique du problème

Dans nos modèles de sélection de portefeuille multi-périodes, nous supposons que les investisseurs veulent construire un portefeuille à partir de  $n$  actifs risqués sur le marché financier. Le capital initial  $W_0$  est réparti entre  $n$  actifs au début de la première période tandis que le capital total de l'investissement  $W_T$  est obtenue à la fin de la période  $T$ . L'investisseur peut réajuster son capital parmi les  $n$  actifs risqués au début de chaque période de l'investissement.

Pour faciliter la discussion, certaines notations nécessaires sont répertoriées comme suit :

Symboles	Explication
$\xi_{it}$	Le taux de rendement incertain au début de la période $t$ pour le titre $i$ ;
$\eta_{i,t}$	Le taux de liquidité incertain au début de la période $t$ pour le titre $i$ ;
$W_0$	Le capital initial de l'investissement ;
$W_t$	Le capital à la fin de la période $t$ ;
$T$	La durée de vie de l'investissement ;
$x_{it}$	La part du capital allouée au début de la période $t$ au titre $i$ ;
$d_{it}$	Le coût de transaction unitaire de l'actif risqué $i$ à la période $t$ ;
$e_{t,i}$	Le rendement du titre $i$ à la période $t$ ;
$\sigma_{t,i}$	L'écart-type du titre $i$ à la période $t$ ;
$R_{t,p}$	Le taux de rendement net du portefeuille à la période $t$ ;



**Figure 4.4.** L'investissement Multi-périodes

Le rendement du portefeuille est  $\sum_{i=1}^n x_{it} \cdot \xi_{it}$ .

IL est important de prendre en compte les coûts de transaction dans la sélection du portefeuille. Nous supposons qu'il s'agit d'une fonction en V de la différence entre le portefeuille à la période t et à la période t - 1. Ensuite, le coût de transaction pour le titre i à la période t peut être exprimé par :

$$d_{it}|x_{it} - x_{it-1}| \quad , t = 1, 2, \dots, T$$

Par conséquent, le coût de transaction pour le portefeuille à la période t est :

$$\sum_{i=1}^n d_{it}|x_{it} - x_{it-1}| \quad , t = 1, 2, \dots, T$$

Le taux de rendement net du portefeuille à la période t,  $R_{t,p}$  est exprimé donc par :

$$R_{t,p} = \sum_{i=1}^n (\xi_{it} x_{it} - d_{it}|x_{it} - x_{it-1}|) \quad , t = 1, 2, \dots, T$$

Par conséquent, le capital à la fin de la période t peut être représentée comme :

$$\begin{aligned} W_{t+1} &= W_t(1 + R_{t,p}) \\ &= W_t(1 + \sum_{i=1}^n (\xi_{it} x_{it} - d_{it}|x_{it} - x_{it-1}|)) \quad , t = 1, 2, \dots, T \end{aligned}$$

Récursivement, le capital terminal obtenue à la fin de la période T est :

$$W_T = W_0 \prod_{t=1}^T [1 + \sum_{i=1}^n (\xi_{it} x_{it} - d_{it}|x_{it} - x_{it-1}|)]$$

Comme les rendements des titres en portefeuille fluctuent continuellement, nous proposons un nombre déterministe pour caractériser le capital terminal. Pour cette raison, nous utilisons l'espérance incertaine du capital terminale à la fin de l'investissement  $E(W_T)$  comme suit :

$$E(W_T) = W_0 \prod_{t=1}^T [1 + \sum_{i=1}^n (E(\xi_{it})x_{it} - d_{it}|x_{it} - x_{it-1}|)]$$

Dans la pratique, le risque de liquidité est un facteur déterminant affectant la sélection optimale du portefeuille. Il mesure le degré de chance de convertir un investissement en liquidités sans perte significative. Les investisseurs rationnels préfèrent sélectionner des titres à forte liquidité. Le taux de rotation, qui est défini comme le pourcentage d'actions échangées, est utilisé pour le mesurer. Il est modélisé par une variable

incertaine  $\eta$ , due à l'incertitude du marché. Ensuite, la liquidité du portefeuille à l'instant  $t$ , est représentée formellement comme suit :

$$l_t = E(\sum_{i=1}^n x_{i,t} \cdot \eta_{i,t}) = \sum_{i=1}^n x_{i,t} \cdot E(\eta_{i,t}), \quad t = 1, 2, \dots, T$$

Supposons qu'un investisseur souhaite minimiser le risque d'investissement cumulé du portefeuille  $\sum_{t=1}^T \text{TVaR}_{\alpha,t}$  sachant que le capital terminal à la période  $T$ ,  $\prod_{t=1}^T [1 + \sum_{i=1}^n (E(\xi_{it})x_{it} - d_{it}|x_{it} - x_{it-1}|)]$ , doit être supérieur au niveau de rendement minimum donné  $\lambda$ . De plus, pour éviter l'allocation concentrative et contrôler la part maximale à investir dans chaque titre, nous utilisons des contraintes d'entropie. Soient  $\beta_t$  et  $l_t$  les niveaux minimaux de diversification et de liquidité que l'investisseur a prédéfinis à chaque période  $t$ . Par conséquent, le modèle de sélection de portefeuille incertain sur plusieurs périodes s'exprime formellement comme suit :

$$\begin{aligned} & \text{Min } \sum_{t=1}^T \text{TVaR}_t(\alpha) \\ \text{s. c. } & \begin{cases} W_0 \prod_{t=1}^T [1 + \sum_{i=1}^n (E(\xi_{it})x_{it} - d_{it}|x_{it} - x_{it-1}|)] \geq \lambda \\ \sum_{i=1}^n x_{it} = 1, \quad t = 1, \dots, T \\ -\sum_{i=1}^n x_{it} \ln(x_{it}) \geq \beta_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \\ \sum_{i=1}^n E(\eta_{i,t}) \geq l_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \\ x_{it} \geq 0, \quad t = 1, \dots, T; \quad i = 1 \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Si un investisseur veut maximiser le capital final au niveau de risque maximal donné  $\theta$ , alors le modèle de programmation adéquat s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} & \text{Max } W_0 \prod_{t=1}^T [1 + \sum_{i=1}^n (E(\xi_{it}) \cdot x_{it} - d_{it}|x_{it} - x_{it-1}|)] \\ \text{s. c. } & \begin{cases} \sum_{t=1}^T \text{TVaR}_t(\alpha) (\alpha) \leq \theta \\ \sum_{i=1}^n x_{it} = 1, \quad t = 1, 2, \dots, T \\ -\sum_{i=1}^n x_{it} \ln(x_{it}) \geq \beta_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \\ \sum_{i=1}^n E(\eta_{i,t}) \geq l_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \\ x_{it} \geq 0, \quad t = 1, \dots, T; \quad i = 1 \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Un investisseur rationnel veut toujours maximiser le capital terminal et minimiser le risque d'investissement, ce qui est totalement incohérents. Afin de sélectionner un portefeuille optimal sous un niveau donné d'aversion au risque, nous introduisons le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Max } W_0 \prod_{t=1}^T [1 + \sum_{i=1}^n (E(\xi_{it}) \cdot x_{it} - d_{it}|x_{it} - x_{it-1}|)] - \phi \cdot (\sum_{t=1}^T \text{TVaR}_t(\alpha)) \\ \text{s. c. } & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_{it} = 1, \quad t = 1, 2, \dots, T \\ -\sum_{i=1}^n x_{it} \ln(x_{it}) \geq \beta_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \\ \sum_{i=1}^n E(\eta_{i,t}) \geq l_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \\ x_{it} \geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad i = 1 \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Où  $\phi$  est un nombre non négatif. C'est le niveau d'aversion au risque. Plus la valeur de  $\phi$  est grande, plus l'investisseur est prudent.

## b. Modèles équivalents déterminants

Supposons que les taux de rendement des titres  $\xi_{it}$  et les taux de rotation  $\eta_{i,t}$  sont des variables incertaines normales  $\xi_{it} \sim N(e_{it}, \sigma_{it})$  et  $\eta_{i,t} \sim N(\mu_{it}, \tau_{it})$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $t=1, \dots, T$ .

Soit  $R_{t,p} = \sum_{i=1}^n x_{it} \xi_{it}$  le rendement du portefeuille à la fin de la période  $t$ .  $R_{t,p}$  est une variable normale incertaine d'espérance  $e_t = \sum_{i=1}^n x_{it} e_{it}$  et de variance

$$\sigma_t^2 = \sum_{i=1}^n x_{it}^2 \sigma_{it}^2, \quad t = 1, \dots, n.$$

La perte est donc donnée par  $-\sum_{i=1}^n x_{it} \xi_{it}$ . Alors :

$$\begin{aligned} \text{VaR}_t(\alpha) &= \inf \{k \mid M\{-\sum_{i=1}^n x_{it} \xi_{it} \leq k\} \geq \alpha\} \\ &= \inf \{k \mid M\{\sum_{i=1}^n x_{it} \xi_{it} \leq -k\} \leq 1 - \alpha\} = -\sum_{i=1}^n x_{it} \Phi_i^{-1}(1 - \alpha) \end{aligned}$$

tel que  $\Phi_i^{-1}$  est la distribution de la fonction réciproque de  $\Phi_i$ .

Par conséquent, la valeur à risque du titre  $i$  à la fin de la période  $t$  est exprimée par :

$$\text{VaR}_t(\alpha) = -\sum_{i=1}^n x_{it} e_{it} + \sum_{i=1}^n x_{it} \frac{\sqrt{3} \sigma_{it}}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right), \quad t=1, \dots, T$$

En utilisant la définition de la TVaR, la TVaR du titre  $i$  à la fin de la période  $t$  est :

$$\begin{aligned} \text{TVaR}_t(\alpha) &= \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 \left[ -\sum_{i=1}^n x_{it} e_{it} + \sum_{i=1}^n x_{it} \frac{\sqrt{3} \sigma_{it}}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{\beta}{1-\beta}\right) \right] \cdot d\beta \\ &= \sum_{i=1}^n x_{it} \left[ -e_{it} + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left( -\ln(1 - \alpha) - \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln(\alpha) \right) \sigma_{it} \right], \quad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

Par conséquent, la perte totale de l'investissement  $\sum_{t=1}^T \text{TVaR}_t(\alpha)$  est exprimée comme :

$$\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n x_{it} \left[ -e_{it} + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \sigma_{it} \left( -\ln(1 - \alpha) - \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln(\alpha) \right) \right].$$

Alors le modèle (4.8) et le modèle (4.9) peuvent être écrits comme suit :

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad W_0 \prod_{t=1}^T [1 + \sum_{i=1}^n (e_{it} \cdot x_{it} - d_{it} |x_{it} - x_{it-1}|)] \\ \text{S. c.} \quad &\begin{cases} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n x_{it} \left[ -e_{it} + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \sigma_{it} \left( -\ln(1 - \alpha) - \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln(\alpha) \right) \right] \leq \theta \\ \sum_{i=1}^n x_{it} = 1, \quad t = 1, \dots, T \\ -\sum_{i=1}^n x_{it} \ln(x_{it}) \geq \beta_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \\ \sum_{i=1}^n \mu_{it} \geq l_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \\ x_{it} \geq 0, \quad t = 1, \dots, T; \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (4.10)$$

et **Max**  $W_0 \prod_{t=1}^T [1 + \sum_{i=1}^n (e_{it} \cdot x_{it} - d_{it} |x_{it} - x_{it-1}|)]$   
 $- \phi \cdot (\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n x_{it} \left[ -e_{it} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\pi} \sigma_{it} (-\ln(1 - \alpha) - \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln(\alpha)) \right])$   
**S. c.**  $\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_{it} = 1, & t = 1, 2, \dots, T \\ -\sum_{i=1}^n x_{it} \ln(x_{it}) \geq \beta_t, & t = 1, 2, \dots, T \\ \sum_{i=1}^n \mu_{it} \geq l_t, & t = 1, 2, \dots, T \\ x_{it} \geq 0, & t = 1, \dots, T; \quad i = 1 \dots, n \end{cases}$  (4.11)

### c. Application actuarielle et discussion

Afin d'illustrer l'efficacité et le comportement de nos modèles proposés sur la sélection de portefeuille, deux exemples numériques sont présentés dans cette section. Supposons qu'un investisseur envisage d'ajuster son capital quatre fois au cours de l'investissement parmi les six actions choisies à la Bourse de Shanghai : Action 1 (code 600019), Action 2 (code 600115), Action 3 (code 600150), Action 4 (code 600229), Action 5 (code 600295) et Action 6 (code 600398). Les taux de rendement, les écarts-types et les taux de rotation sont estimés par des experts sur la base des informations disponibles. Les taux de rendement et les taux de rotation sont considérés comme des variables normales incertaines  $\xi_{it} \sim N(e_{it}, \sigma_{it})$  et  $\eta_{i,t} \sim N((\mu_{it}, \tau_{it}))$  et sont donnés respectivement dans les tables 4.6 et 4.7. Les résultats suivants sont obtenus par le logiciel LINGO.

**Table 4.6** Taux de rendement normal incertain

	<b>Action 1</b>	<b>Action 2</b>	<b>Action 3</b>
<b>Période 1</b>	N(0.0303, 0.0088)	N(0.0338, 0.0178)	N(0.0424, 0.0468)
<b>Période 2</b>	N(0.0465, 0.0252)	N(0.0565, 0.0367)	N(0.0530, 0.0516)
<b>Période 3</b>	N(0.0239, 0.0274)	N(0.0347, 0.0158)	N(0.0330, 0.0445)
<b>Période 4</b>	N(0.0648, 0.0297)	N(0.0894, 0.0687)	N(0.0675, 0.0294)

	<b>Action 4</b>	<b>Action 5</b>	<b>Action 6</b>
<b>Période 1</b>	N(0.0402, 0.0123)	N(0.0524, 0.0994)	N(0.0386, 0.0498)
<b>Période 2</b>	N(0.0654, 0.0315)	N(0.0336, 0.0417)	N(0.0539, 0.0475)
<b>Période 3</b>	N(0.0545, 0.1185)	N(0.0024, 0.0954)	N(0.0386, 0.0074)
<b>Période 4</b>	N(0.0834, 0.0678)	N(0.0536, 0.0157)	N(0.1062, 0.1167)

**Table 4.7** Taux de rotation normal incertain

	<b>Action 1</b>	<b>Action 2</b>	<b>Action 3</b>
<b>Période 1</b>	N(0.2300, 0.0022)	N(0.1201, 0.0065)	N(0.3276, 0.0033)
<b>Période 2</b>	N(0.2500, 0.0032)	N(0.1348, 0.0071)	N(0.2917, 0.0045)
<b>Période 3</b>	N(0.2750, 0.0045)	N(0.1436, 0.0057)	N(0.3056, 0.0037)
<b>Période 4</b>	N(0.2587, 0.0067)	N(0.1574, 0.0063)	N(0.2737, 0.0043)

	<b>Action 4</b>	<b>Action 5</b>	<b>Action 6</b>
<b>Période 1</b>	N(0.3101, 0.0068)	N(0.1010, 0.0070)	N(0.1029, 0.0045)
<b>Période 2</b>	N(0.2879, 0.0093)	N(0.1376, 0.0085)	N(0.1250, 0.0065)
<b>Période 3</b>	N(0.2896, 0.0085)	N(0.1260, 0.0073)	N(0.1376, 0.0048)
<b>Période 4</b>	N(0.2659, 0.0082)	N(0.1525, 0.0072)	N(0.1530, 0.0053)

En supposant que les taux de coût de transaction des six actifs risqués sont  $d_{it} = 0.003$ ;  $i = 1, 2, \dots, 6$ ;  $t = 1, 2, 3, 4$ . En plus de cela, au début de l'investissement, l'investisseur n'a aucun actif en main. Par conséquent, nous avons supposé que  $x_{i0} = 0$ ,  $i=1, \dots, 6$ . On pose aussi  $\alpha = 0.95$ ,  $\theta = 0.2$ ,  $l_t = 0.1$ ;  $t = 1, 2, 3, 4$  et  $\beta_t = 1$ ;  $t = 1, 2, 3, 4$ . En investissant 10 000 yuans RMB, le capital totale maximale espérée, en utilisant le modèle 4.10, est de 12 581,37 yuans RMB. Nous remarquons que le portefeuille optimal, présenté dans la table 4.8, est diversifié.

**Table 4.8.** L'allocation optimale utilisant le modèle 4.10 (%)

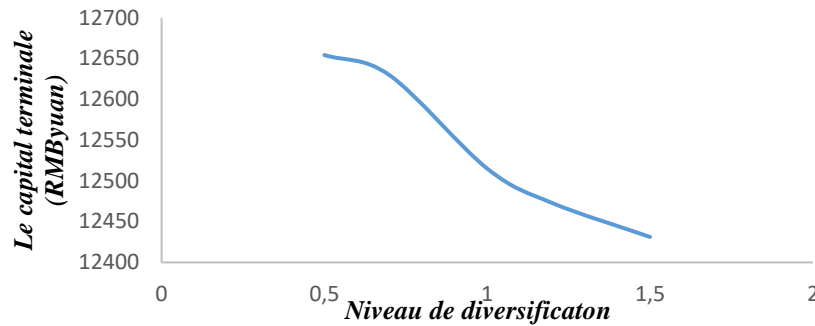
	<b>Action 1</b>	<b>Action 2</b>	<b>Action 3</b>	<b>Action 4</b>	<b>Action 5</b>	<b>Action 6</b>
<b>Période 1</b>	0.57	5.37	5.98	71.05	12.30	4.73
<b>Période 2</b>	2.29	11.60	5.98	70.37	0.53	9.23
<b>Période 3</b>	0.03	11.60	1.48	30.63	0	56.26
<b>Période 4</b>	1.05	16.52	1.58	15.83	0.27	64.75

Afin de souligner l'impact des contraintes réalistes sur le modèle 4.10, nous allons considérer deux sous-portefeuilles. L'un sans contrainte de diversification et l'autre sans contrainte de liquidité. Les résultats numériques ont montré que si l'on ne tient pas compte des contraintes de diversification, la solution optimale du modèle Mean-TVaR est concentrée et le capital espéré augmente à 12694,83 RMB yuan. Cela signifie que l'existence de contraintes de diversification dans notre modèle d'optimisation minimise le risque mais aussi le rendement total.

Pour étudier le comportement du capital terminal en fonction du niveau de diversification, nous allons modifier la valeur d'entropie prédéfinie  $\beta_t$  sur l'intervalle  $(0, \ln 6)$ . Le résultat est présenté dans la figure x. Nous remarquons que le capital terminal diminue en fonction du niveau de diversification.

**Table 4.9** L'allocation optimale du modèle 4.10 sans contraintes de diversification

	<b>Action 1</b>	<b>Action 2</b>	<b>Action 3</b>	<b>Action 4</b>	<b>Action 5</b>	<b>Action 6</b>
<b>Période 1</b>	0	0	0	100	0	0
<b>Période 2</b>	0	0	0	100	0	0
<b>Période 3</b>	0	0	0	36.46	0	63.54
<b>Période 4</b>	0	0	0	0	0	100

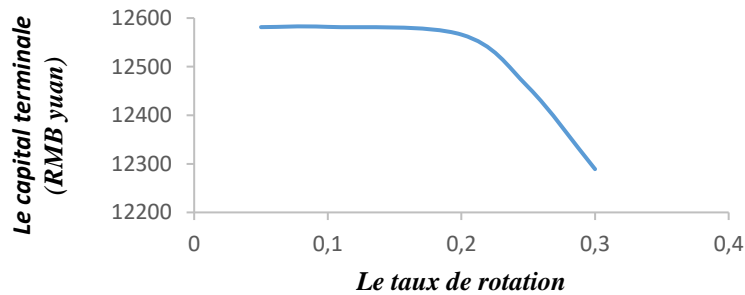


**Figure 4.5** Le comportement du capital terminal en fonction du niveau de diversification du modèle 4.10

On peut voir sur la figure 3 qu'en utilisant le modèle 4.10 sans contrainte de liquidité, lorsque le taux de rotation augmente, l'investisseur gagne moins du capital espéré terminale. En tant que cas particulier, en l'absence de contraintes de liquidité, le capital terminal est de 12515,11 Yuan RMB.

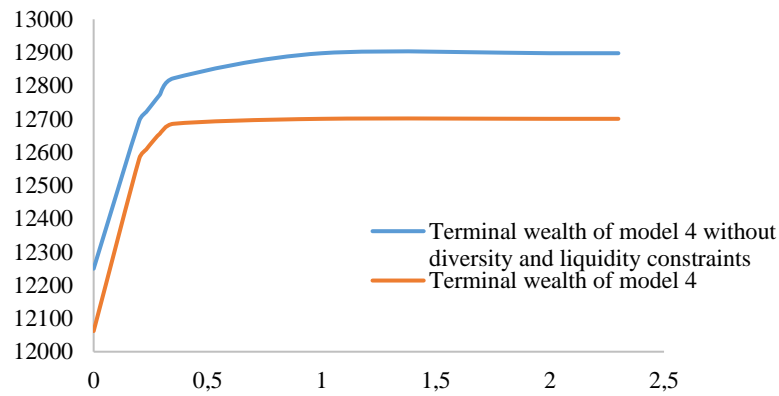
**Table 4.10** Allocation optimale du modèle 4.10 sans contraintes de liquidité (%)

	Action 1	Action 2	Action 3	Action 4	Action 5	Action 6
<b>Période 1</b>	16	7.02	16.70	38.01	18.82	3.45
<b>Période 2</b>	1.05	7.65	20.54	65.58	0	5.18
<b>Période 3</b>	0	8.55	7.57	18.85	0	65.03
<b>Période 4</b>	0.84	23.85	1.11	11.42	0.47	62.30



**Figure 4.6** Le comportement du capital terminal en fonction du taux de rotation du modèle 4.10

Afin de mettre en évidence le comportement du capital terminal optimale attendue en fonction de la TVaR, nous modifions les niveaux de tolérance au risque dans le modèle 4.10, avec et sans contraintes de diversification et de liquidité, et obtenons différents capitaux terminaux optimales attendues. Nous pouvons voir sur la figure 4.7 que plus le niveau de tolérance au risque est grand, plus le capital terminal du portefeuille optimal est grand dans les deux cas, avec des contraintes de diversification et de liquidité et sans contraintes de diversification et de liquidité.



**Figure 4.7** Les frontières efficaces du modèle 4.10 avec et sans contraintes de diversification et de liquidité

### 3. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre certains problèmes d'optimisation de portefeuilles en se basant sur la théorie de l'incertitude. La proposition des modèles diversifiés de moyen-VaR avec coûts de transaction pour l'optimisation de portefeuille incertain international et des modèles moyen-TVaR pour l'optimisation de portefeuilles incertains diversifiés sur plusieurs périodes avec des facteurs réalistes étaient notre contribution dans ce chapitre. Dans le prochain chapitre, nous fournissons une approche, basée sur la théorie de l'incertitude, pour la sélection de portefeuille de produits financiers islamique.

## CHAPITRE 5 : OPTIMISATION DE PORTEFEUILLE DANS UN MARCHÉ CONFORME À LA SHARIAH À L'AIDE DE LA THÉORIE DE L'INCERTITUDE

---

---

La finance islamique est un système financier basé sur les principes de la Sharia, la loi islamique. Elle est devenue de plus en plus populaire. Les nations du Golfe, tels que les Émirats arabes unis, l'Arabie saoudite et le Qatar, occupent une place avancée dans la finance islamique, cependant ce secteur est également en pleine croissance en Europe, en Asie et en Amérique du Nord, car elle offre une alternative éthique et socialement responsable aux systèmes financiers conventionnels.

La finance islamique est plus éthique et socialement responsable, car elle encourage la répartition des risques et des bénéfices entre les parties concernées. Elle peut également encourager la croissance économique dans les nations musulmanes en promouvant l'investissement et en offrant des solutions de financement innovantes.

### 1. Éléments de la finance islamique

La finance islamique, conformément aux principes de la charia, établit les règles et les normes pour les activités économiques. Ces principes reposent sur :

#### a. Interdiction de la Riba

En droit musulman, le terme "Riba" désigne tout excédent ou surplus perçu par l'une des parties sans qu'il n'y ait de contrepartie légitime et acceptable du point de vue de la Sharia. Le Riba se manifeste sous deux formes principales :

**Riba-Al-fadl** : Cela concerne tout excédent concret perçu lors d'un échange direct entre deux entités similaires qui sont vendues au poids ou à la mesure.

**Riba-Annassia** : Le Riba désigne l'excès perçu lors du remboursement d'une dette, généralement lié à un délai de paiement. Cette pratique est observée dans divers domaines tels que les crédits, les prêts, et les investissements proposés par les institutions financières classiques. Dans le cadre de la charia, le Riba est distingué de la transaction équitable par le fait que la contrepartie reçue doit compenser une valeur légitime. Par exemple, il peut s'agir de la perte de valeur due à l'utilisation d'un bien, de l'effort investi dans la production d'un objet, ou du risque pris dans la gestion d'un actif matériel.

#### b. Interdiction de la spéculation (Gharar) et du Maysir

La loi islamique, ou charia, exige que les transactions commerciales soient exemptes de Gharar, une forme d'incertitude significative concernant les biens échangés ou présentant un caractère aléatoire. Cela peut se produire lorsque la marchandise n'est pas clairement spécifiée, que le prix n'est pas fixé, que le vendeur n'a pas encore la

marchandise en sa possession, ou que le transfert de propriété est conditionné à un événement aléatoire.

Dans le domaine financier classique, cela correspond à des produits ou transactions à terme caractérisés par une incertitude quant à leur réalisation, comme les contrats à terme, les swaps, ou d'autres.

De plus, la charia interdit les transactions basées sur le Maysir, qui se réfère à tout contrat où les droits des parties dépendent d'un événement aléatoire. Ainsi, chaque contrat doit avoir des termes clairement définis au moment de sa conclusion, et toutes les conditions préalables doivent être satisfaites.

Bien que l'investissement avec un risque calculé soit autorisé, l'interdiction des contrats à terme impliquant le Gharar et le Maysir vise à éviter les transactions basées sur l'incertitude, la spéculation, voire la détention d'informations privilégiées. Les juristes musulmans soutiennent également que cela permet d'orienter les fonds disponibles vers le financement de l'économie réelle, plutôt que de les laisser alimenter des bulles financières dépourvues de productivité réelle.

## 2. Les produits financiers islamiques

Les produits financiers islamiques les plus courants sont les sukuk, les mudarabah, les murabaha, les ijara et les musharaka [Bou 92].

### a. Les mudarabah (Profit and loss sharing 'PLS')

Ils sont des contrats de partenariat entre un investisseur et un entrepreneur. Lors d'une association entre un investisseur et un entrepreneur, l'investisseur fournit le capital tandis que l'entrepreneur apporte son travail. Cette collaboration implique une répartition des résultats, que ce soit en cas de profit ou de perte. Cependant, c'est l'entrepreneur qui assume la responsabilité de la gestion du projet.

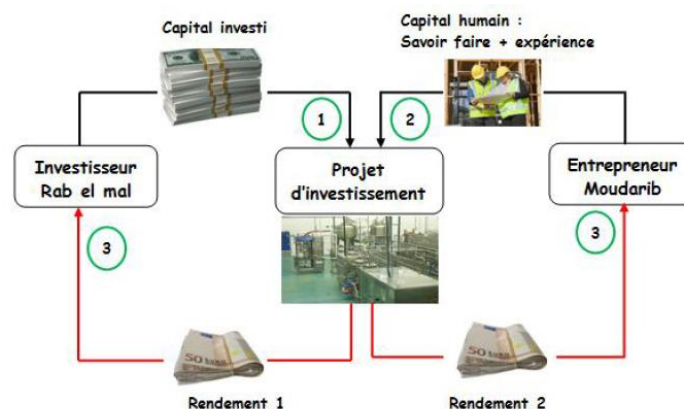


Figure 5.1 Contrat de la Mudaraba "PLS"

### b. Murabaha (Cost plus financing 'CPF')

C'est un contrat de vente à terme où le vendeur achète réellement un bien pour le revendre à un acheteur au comptant ou à crédit avec un bénéfice convenu entre les deux parties et ajouté au prix initial.

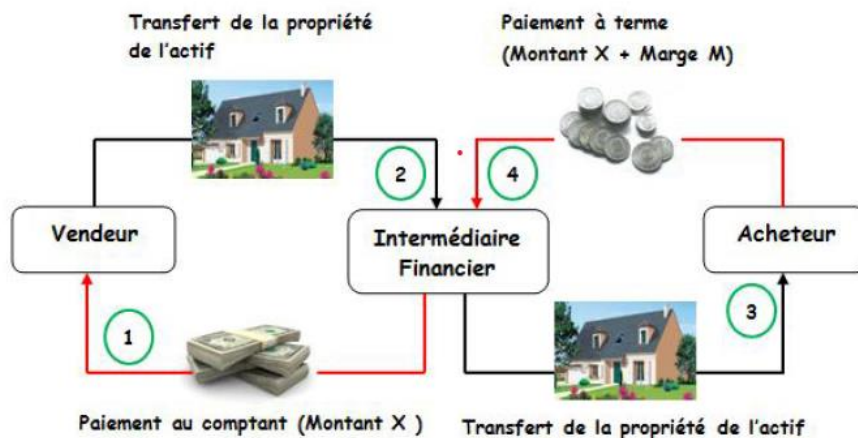


Figure 5.2 Contrat de la Mourabaha

### c. Les ijara (Financial Lease FL)

Il s'agit d'un contrat où l'acheteur achète un bien puis le met à la disposition du client en contrepartie d'un loyer pour une durée fixée. À la fin de cette durée, l'acheteur récupère son bien. Le contrat peut également inclure une option d'achat, c.-à-dire à la fin du période, le client peut devenir le propriétaire du bien.

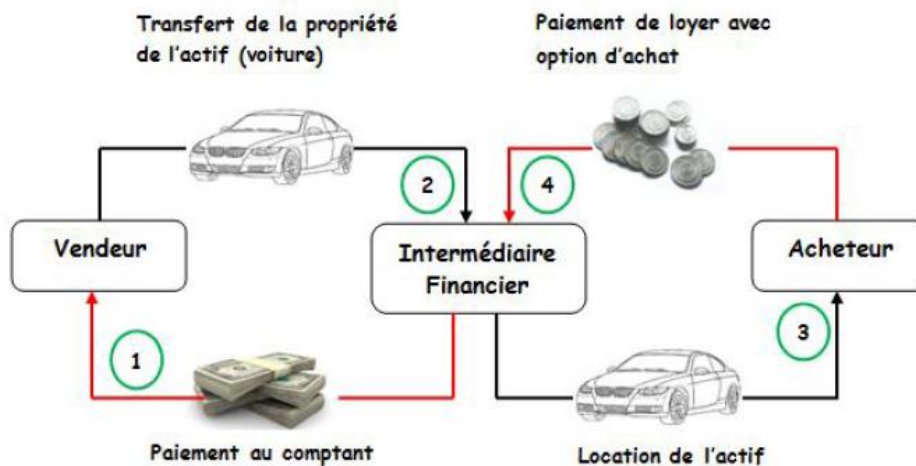


Figure 5.3 Contrat de l'Ijara

### d. Les Mousharaka (Joint-venture 'JV')

Ils sont des contrats de partenariat entre deux ou plusieurs parties pour un projet spécifique. Il y a deux types de Mousharaka :

**La Musharaka fixe** : la collaboration entre l'investisseur 1 et 2 continue jusqu'à l'arrivée à terme du contrat.

**La Mucharaka décroissante** : l'investisseur 1 se retire progressivement de la collaboration au cours de l'évolution du projet financé.

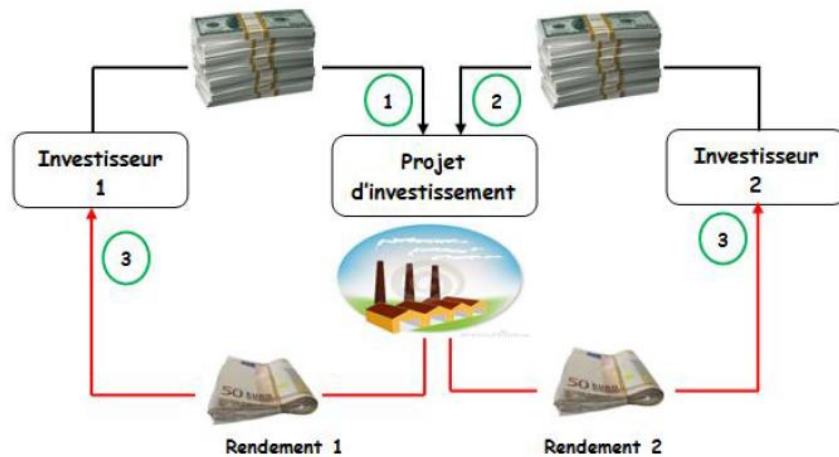


Figure 5.4 Contrat de la Mucharaka

#### e. Salam

C'est un accord de vente à terme utilisé principalement pour les biens agricoles ou manufacturés où les quantités et les qualités peuvent être fixées. Dans ce contrat, l'acheteur verse le prix spécifié comptant au vendeur en contrepartie d'une promesse de ce dernier de livrer le bien à une date ultérieure convenue.

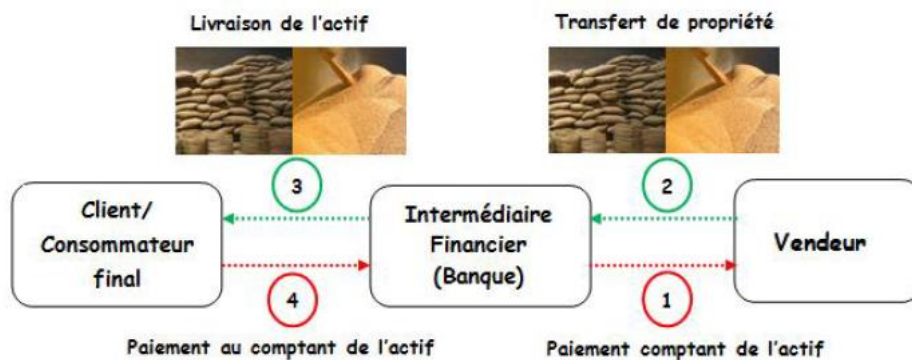


Figure 5.5 Contrat du Salam

#### f. Istisna'a (Manufacturing finance 'MF')

Dans cette opération, la banque agit en tant qu'entrepreneur, s'engageant à réaliser des travaux ou des projets spécifiques, tels que la construction d'un bâtiment. En retour, elle reçoit une rémunération anticipée de la part de l'autre partie, versée soit de manière fractionnée, soit à terme.

### **3. Les risques financiers islamiques**

Les risques financiers islamiques sont des risques spécifiques liés aux opérations financières conformes aux principes de la finance islamique. Les principaux types de risques financiers islamiques sont :

#### **a. Risque de non-conformité**

C'est le risque de ne pas respecter les principes de la finance islamique dans les opérations financières, ce qui peut entraîner des conséquences juridiques et financières.

#### **b. Risque de crédit**

Il s'agit du risque de défaut de paiement de la part d'un emprunteur ou d'une contrepartie dans une transaction financière.

#### **c. Risque de marché**

Ce risque est dû à des fluctuations des marchés financiers, tels que les taux d'intérêt, les taux de change, les cours des matières premières, etc.

#### **d. Risque de liquidité**

C'est le risque de ne pas pouvoir vendre rapidement des actifs financiers pour répondre aux besoins de liquidités.

#### **e. Risque opérationnel**

Il s'agit du risque de perte financière due à des erreurs opérationnelles, des fraudes, des défaillances des systèmes informatiques, etc.

Ces risques peuvent être gérés par des institutions financières islamiques en utilisant des techniques de gestion des risques similaires à celles utilisées par les institutions financières conventionnelles. Cependant, les institutions financières islamiques doivent également respecter les principes de la finance islamique dans la gestion des risques financiers.

### **4. Modèle d'optimisation de portefeuille dans un marché conforme à la Shariah**

#### **a. Formulation du modèle d'optimisation**

Supposons que les investisseurs souhaitent constituer un portefeuille à partir de  $n$  actifs risqués sur le marché financier islamique. Le capital initial est réparti entre  $n$  actifs au début de l'investissement tandis que le rendement total est obtenu à la fin.

Il est important de prendre en compte les coûts de transaction dans la sélection du portefeuille. Il s'agit du coût des actions achetées ou vendues, pour une valeur

contractuelle  $C_0$ , le client devra payer les frais suivants : la commission des courtiers, le droit de timbre et les frais de compensation.

Par exemple, sur le marché boursier islamique de Malaisie, les frais de courtage sont exprimés comme suit :

$$D_1 = \begin{cases} \max(0.3\% * C_0 ; 40) ; & C_0 > 100000 \\ \max(0.6\% * C_0 ; 40) ; & C_0 \leq 100000 \end{cases} \quad (5.1)$$

De plus, le droit de timbre est de 1 RM pour 1 000 RM de valeur transactionnelle des titres. Le droit de timbre est remis à concurrence de 1 000 RM :

$$D_2 = \max\left(\frac{C_0}{1000} ; 1000\right) \quad (5.2)$$

Enfin, les frais de compensation représentent 0,03% de la valeur de la transaction, plafonnés à 1000 RM. Nous avons alors  $D_3 = \max(0.03\% * C_0 ; 1000)$

Par suite, les coûts de transaction totaux,  $C$  pour le portefeuille est  $D = \sum_{k=1}^3 D_k$

De plus, la Zakat est l'aumône obligatoire versée annuellement selon les règles de solidarité de l'Islam. Chaque année, tout musulman dont le capital dépasse le Nissab doit payer 2,5% du montant total de ses revenus. Par conséquent, tout rendement inférieur au taux de la Zakat est considéré comme une perte. En notant Zakat par  $Z$ , on a :

$$Z = 2.5\% * \sum_{i=1}^n x_i E(\xi_i) \quad (5.3)$$

Ensuite, le taux de rendement net du portefeuille  $R_p$  est exprimé par :

$$R_p = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i - Z - D \quad (5.4)$$

Puisque les rendements des titres en portefeuille fluctuent continuellement, nous proposons un nombre déterministe pour caractériser le rendement final. Pour cette raison, nous utilisons la valeur attendue incertaine de rendement net de l'investissement  $E(R_p)$  comme suit :

$$\begin{aligned} E(R_p) &= \sum_{i=1}^n x_i E(\xi_i) - 2.5\% * \sum_{i=1}^n x_i E(\xi_i) - \sum_{k=1}^3 D_k \\ &= \sum_{i=1}^n 0,975 \cdot x_i \cdot E(\xi_i) - \sum_{k=1}^3 D_k \end{aligned} \quad (5.5)$$

Le risque d'investissement est représenté par la VaR de portefeuille au niveau de confiance en risque  $\alpha$  comme suit :

$$\begin{aligned} \text{VaR}_p(\alpha) &= \inf \{ k \mid M(-\sum_{i=1}^n x_i \xi_i \leq k) \geq \alpha \} \\ &= \inf \{ k \mid M(\sum_{i=1}^n x_i \xi_i \leq -k) \leq 1 - \alpha \} \\ &= -\sum_{i=1}^n x_i \Phi^{-1}(1 - \alpha) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Pour éviter toute concentration de portefeuille optimal sur quelques actifs, nous allons insérer une contrainte de diversification dans le problème d'optimisation. L'entropie de Shannon, qui est une mesure bien connue de la diversification [Sha 49].

Un investisseur rationnel souhaite toujours maximiser le rendement total de son portefeuille et minimiser le risque d'investissement. Par conséquent, le modèle d'optimisation du portefeuille peut être modélisé comme suit :

$$\begin{aligned}
& \text{Max} \quad \sum_{i=1}^n 0,975 \cdot x_i \cdot E(\xi_i) - \sum_{k=1}^3 D_k \\
& \text{Min} \quad \text{VaR}_p(\alpha) \\
& \text{S. c.} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_{it} = 1, \\ -\sum_{i=1}^n x_i \ln(x_i) \geq \beta \\ x_i \geq 0, \quad i = 1 \dots, n \end{cases} \quad (5.7)
\end{aligned}$$

où  $\beta$  est le niveau minimum de diversification.

Ce qui équivaut à minimiser le problème suivant :

$$\begin{aligned}
& \text{Min} \quad -(\sum_{i=1}^n 0,975 \cdot x_i \cdot E(\xi_i) - \sum_{k=1}^3 D_k) + \text{VaR}_{\alpha,p} \\
& \text{S.c.} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_{it} = 1 \\ -\sum_{i=1}^n x_i \ln(x_i) \geq \beta \\ x_i \geq 0, \quad i = 1 \dots, n \end{cases} \quad (5.8)
\end{aligned}$$

### b. Modèles équivalents déterminants

Supposons que les taux de rendement des titres  $\xi_i$ , soient toutes des variables incertaines normales  $\xi_i \sim N(e_i, \sigma_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  respectivement. Nous avons :

$$\begin{aligned}
E(R_p) &= \sum_{i=1}^n x_i e_i - (Z + D) \\
&= \sum_{i=1}^n x_i e_i - 2.5\% * x_i e_i - \sum_{k=1}^3 D_k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{et} \quad \text{VaR}_p(\alpha) &= \inf \{x \mid M\{-\sum_{i=1}^n x_i \xi_i \leq k\} \geq \alpha\} \\
&= \inf \{k \mid M\{\sum_{i=1}^n x_i \xi_i \leq -k\} \leq 1 - \alpha\} = -\sum_{i=1}^n x_i \cdot \Phi_i^{-1}(1 - \alpha) \\
&= -\sum_{i=1}^n x_i \cdot (e_i + \frac{\sqrt{3}\sigma_i}{\pi} \cdot \ln(\frac{1-\alpha}{\alpha}))
\end{aligned}$$

Par conséquent, le modèle (5.8), peut être converti sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
& \text{Min} \quad -(\sum_{i=1}^n 0,975 \cdot x_i \cdot E(\xi_i) - \sum_{k=1}^3 D_k) - \sum_{i=1}^n x_i \cdot (e_i + \frac{\sqrt{3}\sigma_i}{\pi} \cdot \ln(\frac{1-\alpha}{\alpha})) \\
& \text{S.c.} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_{it} = 1 \\ -\sum_{i=1}^n x_i \ln(x_i) \geq \beta \\ x_i \geq 0, \quad i = 1 \dots, n \end{cases} \quad (5.9)
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que les taux de rendement des titres  $\xi_i$ , soient toutes des variables linéaires  $\xi_i \sim L(a_i, b_i), i = 1, 2, \dots, n$  respectivement. Nous avons :

$$\begin{aligned} E(R_p) &= \sum_{i=1}^n x_i e_i - (Z + D) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i e_i - 2.5\% * x_i e_i - \sum_{k=1}^3 D_k \end{aligned}$$

et 
$$\text{VaR}_p(\alpha) = -\sum_{i=1}^n x_i \cdot \Phi_i^{-1}(1 - \alpha) = -\sum_{i=1}^n x_i \cdot (\alpha a_i + (1 - \alpha) b_i)$$

Par suite, le modèle (5.8), peut être converti sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & -\left(\sum_{i=1}^n 0,975 \cdot x_i \cdot \frac{a_i + b_i}{2} - \sum_{k=1}^3 D_k\right) - \sum_{i=1}^n x_i \cdot (\alpha a_i + (1 - \alpha) b_i) \\ \text{S. c.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ -\sum_{i=1}^n x_i \ln(x_i) \geq \beta \\ x_i \geq 0, \quad i = 1 \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (5.10)$$

### c. Application actuarielle et discussion

Afin d'illustrer l'efficacité et le comportement de nos modèles proposés sur la sélection de portefeuille, deux exemples numériques sont présentés dans cette section. Supposons qu'un investisseur envisage d'investir dans six actions cotées dans l'indice FTSE Bursa Malaysia Hijrah Shariah :

Action 1 (code KLKK), Action 2 (code PEPT), Action 3 (code TNB), Crosse 4 (code PCGB), Action 5 (code PETR) et Action 6 (code IOIB).

Les moyennes des taux de rendement et leur écarts types sont estimés par des experts sur la base des informations disponibles. Ils sont considérés comme des variables incertaines normales et sont donnés dans la table 5.1.

**Table 5.1.** Taux de rendement normaux

L'action	Taux de rendement normal	L'action	Taux de rendement normal
KLKK	N(0.00046685 , 0.01221049 )	PCGB	N(0.00135881 , 0.01851141 )
PEPT	N(0.00189257 , 0.01430498)	PETR	N(0.00055599 , 0.01951334 )
TNB	N(0.00021282 , 0.01776935 )	IOIB	N(0.00011651 , 0.01957401 )

Les résultats suivants, correspondent au portefeuille optimal conforme à la Shariah, sont obtenus par le logiciel LINGO.

En utilisant le modèle 5.8, nous supposons que le niveau de confiance du risque est limité à 5 %. Cette valeur établit un équilibre entre l'évitement des risques excessifs (Gharar) et la possibilité de réaliser des bénéfices, conformément à la Shariah qui

encourage l'acquisition et l'accumulation de capitaux. Ensuite, le portefeuille optimal conforme à la Shariah utilisant le modèle 5.3 est le suivant :

**Table 5.2.** Portefeuille optimal conforme à la Shariah utilisant le modèle 5.3

Scenario	KLKK	PEPT	TNB	PCGB	PETR	IOIB	Valeur Objective
$\alpha = 5, \beta = 1$	0	0.11	0	38.50	47.74	13.65	3219.217

Pour étudier le comportement du rendement du portefeuille en fonction du niveau de diversification, nous allons changer la valeur d'entropie prédéfinie sur l'intervalle  $[0, \ln 6]$ . On remarque que la solution optimale commence à se diversifier avec l'augmentation de  $\beta$ . Le résultat est présenté dans la table 5.3.

**Table 5.3.** Portefeuille optimal conforme à la Shariah en utilisant le modèle 5.3

Scenario	KLKK	PEPT	TNB	PCGB	PETR	IOIB	Valeur Objective
$\alpha = 5\%, \beta = 0.25$	0	0.80	0.01	2.3	95	1.89	3219.217
$\alpha = 5\%, \beta = 0.50$	0	0	0	19.97	80.03	0	3219.217
$\alpha = 5\%, \beta = 0.75$	0	0	0	44.47	54.20	1.33	3219.217
$\alpha = 5\%, \beta = 1.25$	0.025	0.966	4.08	35.46	36.66	22.79	3219.218
$\alpha = 5\%, \beta = 1.50$	0.87	5.40	10.65	29.46	29.82	23.80	3219.218

Les résultats numériques ont montré que si l'on ne considère pas les contraintes de diversification (la table 5.4), la valeur objective du portefeuille conforme à la Shariah sans contrainte de diversification se concentre uniquement sur le PCGB ou le PETR. Nous avons en outre fixé le niveau de confiance  $\alpha$  de la VaR à 5 %, 10 % et 15 %. Nous remarquons que la valeur objective augmente avec l'augmentation du niveau de confiance en matière de risque. Lorsque  $\alpha$  est fixé à 5%, la valeur objective correspondante est 3219,217. 100% des capitaux sont investis dans le PETR. De plus, lorsque  $\alpha$  est fixé à 10% et 15%, 100% des capitaux sont investis dans le PCGB. Les valeurs objectives correspondantes sont respectivement 3219,225 et 3219,230.

**Table 5.4.** Portefeuille optimal conforme à la Shariah sans contrainte de diversification

Scenario	KLKK	PEPT	TN B	PCGB	PETR	IOIB	Valeur Objective
$\alpha = 5\%$	0	0	0	0	100	0	3219.217
$\alpha = 10\%$	0	0	0	100	0	0	3219.225
$\alpha = 15\%$	0	0	0	100	0	0	3219.230

## 5. Conclusion

Le présent chapitre était un espace pour introduire quelques contributions de modèles d'optimisation de portefeuille d'actifs financiers dans un marché répondant aux principes de la Shariah. Les trois nouveaux modèles incertains d'optimisation de

portefeuille conforme à la sharia se distinguent des recherches existantes. Nos modèles caractérisent respectivement le rendement et le risque de l'investissement à travers des valeurs moyennes incertaines et la Value at Risk. Nous avons traité les rendements des titres comme des variables incertaines, en intégrant Zakat, les contraintes de diversification et les coûts de transaction dans l'analyse. De plus, nous avons transformé ces modèles en problèmes mathématiques déterministes, en supposant que les rendements des titres obéissent à des formes spécifiques de distributions d'incertitude. L'efficacité des modèles proposés est présentée à travers les exemples illustratifs.

---

---

## CONCLUSION GENERALE

---

---

Depuis son émergence en 1952, la théorie moderne du portefeuille a subi diverses transformations. Cette théorie a été soumise à une série de critiques, y compris de la part de son pionnier, Markowitz (1959). Cette théorie a été largement critiquée par plusieurs chercheurs dont le fondateur lui-même (Markowitz, 1959). Les principaux reproches qu'on lui a faits, portent sur l'hypothèse de la normalité des rendements et l'utilisation de la variance qui ne fait pas de distinction entre les gains et les pertes d'un actif financier.

L'utilisation de la Semi-variance, la Value at Risk, la Tail Value at risk et autres DownSide Risk a permis de passer outre ces contraintes et de fournir une mesure du risque mieux adaptée et plus appropriée aux investisseurs. Nous avons listé dans le chapitre 2 toute une panoplie des modèles d'optimisation de portefeuille utilisant ces mesures.

Les vraies décisions sont généralement prises dans l'état d'indétermination. Pour traiter rationnellement l'indétermination, il existe deux systèmes mathématiques, l'un est la théorie des probabilités (Kolmogorov, 1933) et l'autre est la théorie de l'incertitude (Liu, 2007). La théorie des probabilités est une branche des mathématiques pour modéliser les fréquences, tandis que la théorie de l'incertitude est une branche des mathématiques pour modéliser les degrés de croyance. En d'autres termes, pour une certaine quantité, si la fonction de distribution est suffisamment proche de la fréquence historique, alors cette quantité est traitée comme une variable aléatoire. Sinon, il faut considérer la quantité comme une variable incertaine. Dans ce sens, nous avons présenté, dans le premier chapitre, quelques éléments de la théorie de l'incertitude. Nous nous focalisons, dans le troisième chapitre, sur les approches d'optimisation de portefeuilles basés sur la théorie de l'incertitude.

Notre contribution se présente sous différentes formes :

*L'estimation de la VaR et de la TVaR à l'aide de la théorie de l'incertitude et l'introduction de modèles d'optimisation de portefeuille d'actions financières :*

1. Modèle Moyenne-TVaR pour l'optimisation de portefeuille sur plusieurs périodes avec des contraintes réalistes basées sur la théorie de l'incertitude.

L'objectif de tout problème d'optimisation de portefeuille est d'imiter les marchés boursiers et de proposer les solutions optimales pour faire face aux diverses attentes des investisseurs. Dans ce travail, nous avons proposé de nouveaux problèmes d'optimisation de portefeuille multi-périodes lorsque les rendements des titres sont des variables incertaines, données par des estimations d'experts, et prenons la Tail value at risk (TVaR) comme une mesure cohérente du risque d'investissement dans le cadre de la théorie de l'incertitude. Les contraintes réelles, dans lesquelles les coûts de transaction, la liquidité des titres et la diversification du portefeuille sont pris en compte. Des formes déterministes équivalentes de modèles moyenne-TVaR sont proposées sous l'hypothèse que les rendements et la liquidité des titres obéissent à certains types de distributions d'incertitude. Nous avons adapté la méthode Delphi afin d'évaluer les valeurs attendues, l'écart-type et les taux de rotation des rendements des titres donnés. Enfin, des exemples numériques sont donnés pour illustrer l'efficacité des modèles proposés.

## 2. Modèles internationaux Moyenne-VaR diversifiés pour l'optimisation de portefeuille basé sur la théorie de l'incertitude.

Nous nous sommes intéressés dans ce travail à proposer de nouveaux problèmes d'optimisation de portefeuille international lorsque les prix futurs des titres et les taux de change sont considérés comme des variables incertaines, données par des estimations d'experts et évaluées par des experts au lieu de données historiques. L'utilisation de la mesure incertaine est justifiée. Nous avons fourni des modèles Mean-VaR pour la sélection de portefeuilles internationaux en prenant la valeur à risque incertaine (VaR) comme mesure du risque d'investissement. Certaines contraintes du monde réel, dans lesquelles les coûts de transaction et la diversification du portefeuille sont pris en compte comme des facteurs de réalité. Des formes déterministes équivalentes des modèles sont proposées sous l'hypothèse que les prix des titres et les variables des taux de change obéissent à certains types de distribution d'incertitude. Enfin, des exemples chiffrés sont donnés pour établir l'impact des facteurs de réalité considérés sur l'investissement de portefeuille international incertain.

*Les articles suivants sont soumis pour publication :*

## 3. Modèle incertain pour une optimisation de portefeuille diversifiée et conforme à la Sharia avec des facteurs réalistes.

Cet article développe des modèles d'optimisation de portefeuille conformes à la Sharia. Les rendements des titres sont représentés par des variables incertaines en raison du

manque de données historiques, fournies par les estimations des experts. Le modèle proposé suit les principes de la Sharia en évitant les risques excessifs et en fournissant une méthode éthique d'optimisation du portefeuille. Le problème d'optimisation de portefeuille conforme à la Sharia est obtenu en maximisant le rendement du portefeuille et en minimisant les investissements à risque, mesurés à l'aide de la valeur à risque (VaR). Les contraintes réelles, dans lesquelles les coûts de transaction, la Zakat et la diversification du portefeuille, sont pris en compte. Des formes déterministes équivalentes des modèles sont proposées sous l'hypothèse que les rendements des titres obéissent à certains types de distribution d'incertitude. Enfin, des exemples numériques de Bursa Malaysia sont donnés pour établir l'impact des facteurs de réalité pris en compte sur les investissements de portefeuille incertains.

#### 4. Problèmes d'optimisation de portefeuille d'actifs financiers dans le cadre de la théorie de l'incertitude : une revue de la littérature.

Un grand nombre d'idées ont été suggérées afin de trouver les solutions optimales à certains problèmes d'optimisation de portefeuille lorsque les rendements d'actifs sont décrits comme des variables incertaines. En raison de l'absence d'une analyse critique de ces travaux proposés, cet article a passé en revue plus de 50 articles d'optimisation de portefeuille dans le cadre de la théorie de l'incertitude, en se concentrant sur les mesures de risque les approches de solutions utilisées dans chaque modèle afin de déterminer les principales lacunes et de proposer des travaux futurs possibles pour y faire face.

L'incertitude et le caractère aléatoire sont deux types fondamentaux d'indétermination. La variable aléatoire incertaine a été initiée par Liu en 2013 pour modéliser des systèmes complexes avec non seulement de l'incertitude mais aussi du caractère aléatoire. Comme perspective de ce travail et en utilisant la théorie du hasard, nous proposons de modéliser les rendements des titres composant le portefeuille d'actifs financiers par les variables aléatoires incertaines et de fournir un algorithme pour résoudre les modèles d'optimisation donnés.

Pour conclure, la gestion de portefeuille d'actifs financiers est un domaine en constante évolution. Comme perspective de ce travail, nous proposons :

- L'approfondissement de la recherche au niveau des mesures de risques et de facteurs de réalité.

- La proposition des problèmes d'optimisation de portefeuille d'actifs financiers dans un marché islamique en modélisant les rendements par des variables incertaines.
- La modélisation des systèmes complexes avec non seulement de l'incertitude mais aussi du caractère aléatoire en utilisant les variables aléatoires incertaines (Chance Theory) pour traiter les rendements des titres.
- La proposition des approches basées sur la machine Learning et des techniques telles que les réseaux neuronaux et les algorithmes génétiques pour construire des modèles prédictifs plus précis et pour automatiser le processus de sélection de portefeuille.

## REFERENCES

---

- [Ale 04] Alexander, Gordon J., and Alexandre M. Baptista. 'A comparison of VaR and CVaR constraints on portfolio selection with the mean-variance model', 2004, *Management science* 50.9, p.1261-1273.
- [Ale 06] Alexander, Siddharth, Thomas F. Coleman, and Yuying Li. "Minimizing CVaR and VaR for a portfolio of derivatives." *Journal of Banking & Finance* 30.2, 2006, p. 583-605.
- [Art 97] Artzner, Ph., F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath, 'Thinking Coherently', November 1997, *RISK* 10 p. 68-71.
- [Bal 05] Ballester E., 2005, 'Mean-Semi-variance Efficient Frontier: A Downside Risk Model for Portfolio Selection', *Applied Mathematical Finance* 12(1), p. 1-15
- [Bel 123] Belabbes K., El Hachloufi M., Guennoun Z. (2023), 'Diversified Mean-Value at Risk Models with Transaction Costs for International Portfolio Optimization Using Uncertainty Theory ', *Mathematical Modelling of Engineering Problems* Vol. 10, No. 4, August, 2023, p. 1473-1480
- [Bel 223] Belabbes K., El Hachloufi M., Guennoun Z. (2023), 'Mean-TVaR Models for Diversified Multi-Période Portfolio Optimization with Realistic Factors Based on Uncertainty Theory ', *Statistics, Optimization and Information Computing*, Vol. 11, September 2023, p. 963-977
- [Bon 02] Bond, Shaun A. and Stachell, Stephen E. 2002. Statistical Properties of the Sample Semi-variance. *Applied Mathematical Finance*, 9(4), p. 219-239.
- [Bou 92] Boualem. B, 'Introduction aux techniques islamiques de Financement', (1992), Edition Institut Islamique de Recherches et de Formation, Banque Islamique de Développement, Acte de séminaire N°37, p.32-55
- [Buc 99] Bucay N, Rosen D, 'Applying Portfolio Credit Risk Models to Retail Portfolios', 2001, *The Journal of Risk Finance* 2(3), p. 35-61,
- [Cam 01] Campbell R., Huisman R. and Koedijk K., 'Optimal portfolio selection in a Value-at-Risk framework', *Journal of Banking & Finance*, 2001, vol. 25, issue 9, p. 1789-1804

- [Cha 20] Chang J., Sun L., Bo Zhang, Peng J., 'Multi-Période portfolio selection with mental accounts and realistic constraints based on uncertainty theory', 2020, Journal of Computational and Applied Mathematics
- [Che 18] Chen W., Li D., Lu S., Liu W., 'Multi-Période mean-semi-variance portfolio optimization based on uncertain measure', 2018, Methodologies and Application, p. 6231-6247
- [Che 17] Chen, L., Peng, J., Zhang, B. and Rosyida, I., 2017, 'Diversified models for portfolio selection based on uncertain semi-variance', International Journal of Systems Science, 48(3)
- [Cho 93] Chopra V. K., and Ziemba W. T., 1993, 'The effect of errors in means, variances, and covariances in optimal portfolio choice' Journal of Portfolio Management, 19(2), p. 6-11.
- [Duf 97] Duffie D., and Pan, J., 1997, 'An Overview of Value at Risk', Journal of Derivatives, 4, p. 7-49
- [Est 04] Estrada J., Mean-Semi-variance Behaviour: An Alternative Behavioural Model, 2004, Journal of Emerging Market Finance, Volume 3, Issue 3 p. 35- 47
- [Ham 95] Hamza. F. & Janssen. J., 'Portfolio Optimization Model Using Asymmetric Risk Functions', 1995, Proceedings of the 5th International Actuarial Approach for Financial Risks, Brussels, Belgium. Vol, IIIbis. p. 3-32.
- [Hua 08] Huang, X. (2008). 'Mean-semi-variance models for fuzzy portfolio selection', Journal of computational and applied mathematics, p. 1-8.
- [Hua 12] Huang, X. 2012, 'Mean-variance models for portfolio selection subject to experts' estimations', Expert Systems with Applications, 39(5), p. 5887-5893.
- [Hlo 00] Hlouskova J., Michael J. Best, 'The efficient frontier for bounded assets', 2000, Mathematical Methods of Operations Research 52(2), p. 195-212
- [Hua 12] Huang X., Qiao L., 'A risk index model for multi-Période uncertain portfolio selection', Information Sciences, 2012, p. 108-116,
- [Hua 12] Huang X., 'Mean-variance models for portfolio selection subject to experts' estimations' Expert Systems with Applications 39.5, 2012, p. 5887-5893.

- [Hua 14] Huang X., Zhao T., 'Mean-chance model for portfolio selection based on uncertain measure', *Insurance: Mathematics and Economics* 59, 2014, p. 243–250
- [Hom 99] Homaifar G., Graddy D.B., 1990, 'Variance and lower partial moment betas as alternative risk measures in cost of capital estimations: a defense of the CAPM beta', *Journal of business finance and accounting*, 17, p. 677-688
- [Hua 09] Huang J. J., Lee K. J., Liang H. M. and Lin W. F., 2009, 'Estimating value at risk of portfolio by conditional copula-GARCH method', *Insurance: Mathematics and Economics*, 45, p.315-324
- [Hua 10] Huang X., 'Mean-variance models for international portfolio selection with uncertain exchange rates and security returns', 2010, *International Conference on Information Science and Applications*, p. 1-7
- [Gro 99] Grootveld H., and Hallerbach W., 'Variance vs downside risk: Is there really that much difference?', *European Journal of Operational Research*, 1999, vol. 114, issue 2, p. 304-319
- [Jor 96] Jorion P., 'Risk2: Measuring the risk in value at risk', *Financ. Anal. J.*, 52, 1996, p.47-56.
- [Luc 01] Luciano E. and Kast R., 'A Value at Risk Approach to Background Risk', 2001, *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory* volume 26, p. 91-115
- [Kol 33] Kolmogorov AN, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Julius Springer, Berlin, 1933.
- [Kon 91] Konno H., and Yamazaki H., 'Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Action Market', *Management Science*, , 1991, Vol. 37, No. 5 , p. 519-531
- [Lee 88] Lee, Wayne Y., and Ramesh KS Rao, 'Mean lower partial moment valuation and lognormally distributed returns', *Management Science* 34.4, 1988, p. 446-453.
- [Li 18] Li B., Zhu Y., Sun Y., Aw G., Teo K., 'Multi-Période portfolio selection problem under uncertain environment with bankruptcy constraint', 2017, *Applied Mathematical Modelling*

- [Lit 98] Litterman R., 'Building a Coherent Risk Measurement and Capital Optimization Model for Financial Firms', 1998, *Economic Policy Review*, Vol. 4, No. 3
- [Liu 07] Liu, B., 2007. *Uncertainty Theory*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin.
- [Liu 10] Liu, B., 2010. *Uncertainty Theory: A Branch of Mathematics for Modeling Human Uncertainty*. Springer-Verlag, Berlin
- [Liu 10] Liu YH, and Ha MH, Expected value of function of uncertain variables, 2010, *Journal of Uncertain Systems*, Vol.4, No.3, p. 181-186
- [Liu 12] Liu Y., Qin Z., 'Mean Semi-absolute Deviation Model for Uncertain Portfolio Optimization Problem', 2012, *Journal of Uncertain Systems* Vol.6, No.4, p.299-307
- [Luc 98] Lucas A. et Klaassen P., 'Extreme Returns, Downside Risk, and Optimal Asset Allocation', 1998, *The Journal of Portfolio Management* 25(1), p.71-79
- [Man 14] Mansini, R., Ogryczak, W., & Speranza, M. G., 'Twenty years of linear programming-based portfolio optimization', *European Journal of Operational Research*, 234(2), p. 518-535
- [Mar 52] Markowitz. H. (1952), 'Portfolio Selection'. *Journal of Finance*, Vol. 7, n°1, p. 77-91.
- [Mar 59] Markowitz, Harry M., 1959, 'Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments', *Cowles Foundation Monograph* 16.
- [Nin 13] Ning, Yufu, Limei Yan, and Yanhong Xie, 'Mean-TVaR model for portfolio selection with uncertain returns', *International Information Institute, Information* 16.2 (2013), Volume 15, Number 12, p.129-137
- [Pal 85] Palepu, K., 'Diversification strategy, profit performance and the entropy measure', 1985, *Strategic management journal*, 6(3), p. 239-255
- [Pen 13] Peng, J., 'Risk metrics of loss function for uncertain system. Fuzzy Optimization and Decision Making', 12(1), p. 53-64
- [Pen 10] Peng, Z., & Iwamura, K., 'A sufficient and necessary condition of uncertainty distribution', 2010, *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, 13(3), p.277-285.

- [Qia 16] Qian W., Mingqiang Y. and Wei Li. 'Portfolio selection models based on Cross-entropy of uncertain variables', 2016, Journal of Intelligent & Fuzzy Systems 31.2, p. 737-747.
- [Qin 14] Qin Z., Kar S., Zheng H., 'Uncertain portfolio adjusting model using semiabsolute deviation', 2014, Soft Computing 20(2), p. 1-9
- [Sha 63] Sharpe, W.F., 1963, 'A Simplified Model for Portfolio Analysis', Management Science, 9, p. 277-293
- [Sha 71] Sharpe. W.F. (1971), 'A Linear Programming Approximation for the General Portfolio Selection Problem'. J. Financial Quantitative Anal., 6, p. 1263-1275. Economic Theory.
- [Sha 49] Shannon, C. E., & Weaver, W. (1949). The mathematical theory of information. Urbana: University of Illinois Press, 97(6), 128-164.
- [She 15] Sheng YH, and Kar S, 'Some results of moments of uncertain variable through inverse uncertainty distribution', 2015, Fuzzy Optimization and Decision Making, Vol.14, No.1, p.57-76
- [Spe 93] Speranza. M.G., 'Linear programming Models for Portfolio Optimization', 1993, Finance, 14, p.107-123
- [Sol 96] Solnik, B., Boucrelle C., and Yann F., 'International Market Correlation and Volatility', 1996, Financial Analysts Journal, Iss: Sep/Oct p. 17-34
- [Ris 96] RiskMetrics, Tchnical document, 4-th Editio. J.P.Morgan, 1996.
- [Vor 01] Vorst, T. (2001), 'Optimal Portfolios under a Value at Risk Constraint', European Congress of Mathematics. Progress in Mathematics, vol 202.
- [Yan 11] Yan L., 'Mean-VaR Model for Uncertain Portfolio Selection', 2011, Journal of Information & Computational Science, p. 3523-3530
- [Yao 15] Yao K, 'A formula to calculate the variance of uncertain variable', 2015, Soft Computing, Vol.19, No.10, 2947-2953

- [Zha 15] Zhang, Q., Huang, X., & Zhang, C. (2015). A mean-risk index model for uncertain capital budgeting. *Journal of the Operational Research Society*, 66(5), p. 761-770
- [Zha 16] Zhang P., 'Multi-Période Mean Absolute Deviation Uncertain Portfolio Selection', 2016, *Industrial Engineering & Management Systems* Vol 15, No 1, March 2016, p.63-76
- [Zha 17] Zhai J., Bai M., 'Mean-variance model for portfolio optimization with background risk based on uncertainty theory', 2018, *International Journal of General Systems*, 47:3, p. 294-312
- [Zho 11] Zhongfeng Q., 'A Proposal of Multi-Période Mean-variance Portfolio Selection Model with Uncertain Returns', 2011, School of Economics and Management, Beijing University, Beijing