

N° d'ordre: 3105

THESE

En vue de l'obtention du : **DOCTORAT**

Structure de Recherche : Laboratoire de Physique des Hautes Energie-MS

Discipline : Physique

Spécialité : Physique Mathématique

Présentée et soutenue le : 15/05/2018 par :

Mohamed MISKAOUI

Contributions à L'étude des GUTs avec des Symétries de Familles et Réalisation dans la Théorie-F

JURY

Mohammed DAOUD,	PES, Faculté des Sciences Ain Chock, Casablanca	Président
Lalla Btisam DRISSI,	PH, Faculté des sciences, Rabat	Examinateur
El Hassan SAIDI,	PES, Faculté des Sciences, Rabat	Directeur de Thèse
Rachid AHL LAAMARA,	PH, CRMEF de Fès-Meknès, Meknès	Co-Directeur de Thèse
Allal GHANMI,	PH, Faculté des Sciences, Rabat	Rapporteur
Jamal ZEROUAOUI,	PES, Faculté des Science, Kénitra	Rapporteur

Résumé

La construction des modèles théoriques qui décrivent tous les phénomènes physiques est l'un des grands défis de la physique des hautes énergies. Des théories de jauge préexistantes telle que le modèle standard (MS) et les Théories de Grande Unification (GUTs) décrivent avec succès les forces électromagnétiques, fortes et faibles à de différentes échelles d'énergie. Toutefois, certains phénomènes physiques observés comme le phénomène d'oscillation des neutrinos semble être étrange et ne trouve pas une explication convaincante dans ces modèles. À cet égard, l'hypothèse de l'existence d'une symétrie de famille qui se brise à une échelle très grande est considérée la façon la plus remarquable pour expliquer l'origine des masses de fermions ainsi que leurs mélanges observés qui font partie de ce qu'on appelle problèmes de saveur. Ce mémoire de thèse porte sur la construction des GUTs étendues par des symétries de familles discrètes. À 4 dimensions, nous étudions les GUTs qui fournissent un cadre convaincant pour établir l'unification des quarks et des leptons et aussi pour expliquer les masses minuscules des neutrinos à travers le mécanisme de seesaw. Dans ce contexte, nous examinons leurs extensions par les symétries de familles pour décrire le phénomène d'oscillation des neutrinos. En d'autre part, nous étudions la théorie-F en tant qu'un cadre prometteur pour construire les modèles de GUT, offrant ainsi de nouvelles opportunités pour aborder certains des problèmes en suspens auxquels sont confrontés les GUTs à 4 dimensions. Nous effectuons cette construction dans la configuration semi-locale de la théorie-F compactifiée sur une variété de Calabi-Yau elliptiquement fibrée avec une symétrie maximale E_8 . De plus, nous examinons la mise en œuvre des symétries de familles dans les modèles F-GUTs comme des monodromies en utilisant la méthode basée sur la théorie de Galois en plus de la méthode basée sur la théorie des caractères de représentations.

Mots-clefs: Construction de Modèles, Modèles de GUT, Théorie-F, Théorie des Cordes, Symétries de Familles, Oscillations des Neutrinos, Monodromies.

Abstract

The construction of theoretical models that describe all physical phenomena is one of the great challenges of high energy physics. Pre-existing gauge theories such as Standard Model (SM) and Grand Unification Theories (GUTs) describe successfully the electromagnetic, strong and weak forces at different energy scales. However, some observed physical phenomena like the neutrinos oscillation phenomenon seems strange and can not find a convincing explanation in these models. In this respect, the hypothesis of family symmetry that breaks at very large energy scale is considered the most remarkable way of explaining the origin of the fermion masses and their observed mixing that are part of what is called the flavor problems. This dissertation is about the construction of GUTs extended by discrete family symmetries. In 4 dimensions, we study the GUTs that provide a convincing framework for establishing the unification of quarks and leptons and also for explaining the tiny masses of neutrinos through the seesaw mechanism. In this context, we examine their extensions by family symmetries to describe the neutrino oscillation phenomenon. On the other hand, we are studying F-theory as a promising framework for building GUT models, thus providing new opportunities to address some of the outstanding issues facing 4-dimensional GUTs. In addition, we examine the implementation of family symmetries in F-GUT models as monodromies using the Galois theory method in addition to the method based on characters theory.

Key words : ModelS building, GUT models, F-theory, String Theory, Family Symmetries, Neutrinos Oscillations, Monodromies.

Dedicace

Je dédie ce modeste travail et ma profonde gratitude à tous celui qui a sacrifié pour m'offrir les conditions propices à ma réussite :

A l'âme de mon cher père Hassan Miskaoui, source de mon inspiration dans la vie, à ma chère mère Fadma Essakhi pour son soutien incroyable durant la période de préparation de doctorat. Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être. Ce travail est le fruit de vos sacrifices que vous avez consentis pour mon éducation et ma formation.

Je dédie aussi ce travail à mes chers frères et sœurs qui m'ont toujours encouragée dans mes études et m'ont préparés le climat favorable d'avancement.

Cette thèse mémoire est aussi dédié à mon Cher oncle Hassan Essakhi, qui m'avez toujours aidé de ses sages conseils depuis le décès de mon père. A tous les membres de ma famille, petits et grands

Je leur offre ce travail comme un hommage de mon respect et de mon dévouement. Que dieu les garde.

Remerciement

Je tiens avant toute chose à remercier Allah le tout puissant de m'avoir comblée de sa grâce et de m'avoir donné la patience et le courage durant ces années d'étude.

Ce mémoire de thèse a été réalisé au sein du Laboratoire de Physique des Hautes Energies-Modélisation et Simulation de l'Université Mohammed V, Faculté des Sciences de Rabat, dans le cadre d'une thèse de doctorat, sous la direction du Professeur El Hassan SAIDI et le co-encadrement du Professeur Rachid AHL LAAMARA.

Je voudrais tout d'abord exprimer mes plus sincères remerciements à mon directeur de thèse Monsieur **El Hassan SAIDI**, Professeur de l'Enseignement Supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, de m'avoir accueilli et intégrée dans l'équipe de recherche de son laboratoire, de m'avoir fait confiance en acceptant d'encadrer ce travail doctoral et de m'avoir guidé tout au long de mes études. Merci beaucoup cher Professeur pour votre disponibilité, votre support, votre encouragement, votre soutien inestimable et votre compréhension quotidienne. Merci extrêmement pour les remarques et les multiples conseils durant toutes nos discussions scientifiques et pour toutes les heures que vous avez consacrées pour diriger cette recherche. Je voudrais finalement vous remercier pour votre intérêt permanent à mon égard et pour votre soutien sur le plan humain.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur **Rachid AHL LAAMARA**, Professeur Habilité au Centre Régional des Métiers de l'Education et de la Formation de Fès-Meknès, non seulement d'avoir co-diriger ce mémoire de thèse, pour son aide scientifique, son attention de tout instant sur mes travaux, sa rigueur et la clarté de ses explications mais aussi pour ses qualités humaines, son soutien, sa disponibilité et ses discussions non scientifiques qui m'ont facilité ce parcours doctoral.

Je suis très honorés par l'intérêt porté à ce travail par les membres du jury qui ont accepté de le lire et l'évaluer. Je les remercie aussi pour leurs disponibilités, leurs suggestions et leurs conseils.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur **Mohammed DAOUD**, Professeur de l'Enseignement Supérieur à la Faculté des Sciences Ain Chock de Casablanca, pour l'honneur qu'elle m'a fait d'accepter la présidence du jury. Un grand merci également pour son enseignement de bonne qualité durant le cycle Master. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde considération.

Je remercie très chaleureusement Madame **Lalla Btissam DRISSI**, Professeur Habilité à la Faculté des Sciences de Rabat, pour avoir accepté de juger ce travail en tant qu'examinateur. Veuillez agréer, Madame, l'assurance de mon profond respect.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur **Allal GHANMI**, Professeur Habilité à la Faculté des Sciences de Rabat, pour avoir accepté de rapporter mon travail de thèse. Je le remercie de l'intérêt qu'il a manifesté à l'égard de ce travail de recherche en s'engageant à être rapporteur. Qu'il trouve ici le témoignage de mes vifs remerciements.

J'adresse aussi mes remerciements à Monsieur **Jamal ZEROUAOUI**, Professeur de l'Enseignement supérieur à la Faculté des Sciences de Kénitra, pour tout le savoir qui nous a transmis durant le cycle du Master. Merci aussi de l'honneur qu'il m'a fait en acceptant

d'être rapporteur. Il m'a toujours réservé le meilleur accueil, malgré ses obligations professionnelles. Qu'il en soit remercié.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté à me rencontrer et répondre à mes questions durant mes recherches.

Mes remerciements à tous mes amis, mes collègues ainsi qu'aux membres et chercheurs du LPHE-MS, qui ont contribué à ce que cette thèse se passe dans la bonne humeur. Afin de n'oublier personne, je remercie très sincèrement tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à ce travail ou qui ont permis sa réalisation.

Enfin, je remercie toutes celles et tous ceux qui m'ont accompagné et soutenu tout au long de ce parcours, notamment ma chère mère, mes frères, mes sœurs et mon oncle ; sans leur appui, la réalisation de ce travail n'aurait pas été possible. Je ne saurai exprimer mes sincères sentiments de reconnaissance à toute ma famille.

Table des matières

Contenu	i
Introduction générale	1
I Du modèle standard vers la Théorie de Grand Unification	7
I.1 Modèle standard et son extension supersymétrique	7
I.1.1 Symétrie de jauge et contenu en particules	7
I.1.2 Mécanisme de Higgs et masses des fermions	9
I.1.3 Problèmes du modèle standard	10
I.1.4 Supersymétrie et MSSM	11
I.2 Modèles $SU(5)$	14
I.2.1 Vers la Théorie de Grande Unification	14
I.2.2 Modèle de Georgi-Glashow	15
I.2.3 Extensions du modèle de Georgi-Glashow	24
I.2.4 Modèle $SU(5)$ supersymétrique	25
I.3 Modèles $SO(10)$	29
I.3.1 Secteurs fermionique, de jauge et de Higgs	29
I.3.2 Brisure des modèles $SO(10)$	30
I.3.3 Modèle $SO(10)$ minimal supersymétrique	32
I.3.4 Classes de modèles $SO(10)$	36
II Extension des GUTs par des symétries de familles	39
II.1 Masses et mélange des neutrinos : Cadre théorique et expérimental	39
II.1.1 Généralités sur les neutrinos	39
II.1.2 Masses des neutrinos et mécanismes de seesaw	40
II.1.3 Mélange des saveurs de neutrinos	44
II.2 Symétries de familles	47
II.2.1 Motivation	47
II.2.2 Symétries de familles continues et discrètes	48
II.2.3 Symétries de familles dans les GUTs	50
II.3 Modèle $SU(5)$ avec la symétrie de famille A_4 : Modèle de CKL	52
II.3.1 Description du modèle	52
II.3.2 Secteurs des quarks et leptons chargés	54
II.3.3 Mélange des Neutrinos	55
III Ingénierie des GUTs dans la théorie-F	59
III.1 De la théorie des cordes à la théorie-F	59
III.1.1 Généralités sur la théorie des cordes	59
III.1.2 Phénoménologie des cordes	61
III.1.3 Théorie-F : Motivation et description	62

III.2	Théorie-F dans le cadre de la supercorde type IIB	64
III.2.1	Compactification et fibration elliptique	64
III.2.2	Modèle de Tate et émergence du groupe de jauge	65
III.2.3	Modèles Global, Local et semi local	67
III.3	Modèles F-GUT et approche de revêtement spectral	68
III.3.1	Symétrie E_8 et construction de modèles semi-locaux	68
III.3.2	Approche de revêtement spectral	69
III.3.3	Monodromies et décomposition du revêtement spectral $\mathcal{C}_N$	72
III.4	Construction des modèles F-GUT avec le monodromie $\mathbb{Z}_2$	73
III.4.1	Modèle $SU(5)$	74
III.4.2	Modèle $SO(10)$	83
IV	Symétries de familles discrètes dans les modèles F-GUT	91
IV.1	Monodromies et symétries non-abéliennes	91
IV.1.1	Monodromies abéliens et non abéliens	91
IV.1.2	Symétries non-abéliennes associées au revêtement spectral $\mathcal{C}_N$	92
IV.2	Symétries non-abéliennes par la théorie de Galois	94
IV.2.1	Introduction à la théorie de Galois	94
IV.2.2	Groupes de Galois associés aux polynômes d'ordre $n = 3, 4$	95
IV.3	Modèle $SU(5)$ avec le monodromie non abélien A_4	98
IV.3.1	Modèle $SU(5) \times A_4 \times U(1)_\perp$: Modèle de Leontaris et al.	98
IV.3.2	Secteur des quarks et leptons chargés	104
IV.3.3	Secteur du neutrinos	106
IV.4	Symétries non-abéliennes par la théorie des caractères	109
IV.4.1	Caractères de représentations irréductibles	109
IV.4.2	Représentations des monodromies non abéliens et tables de caractère	112
IV.4.3	Méthode des caractères dans l'approche de revêtement spectral	115
Contributions		
I	Contributions I : Building SO_{10}-models with $\mathbb{D}_4$ symmetry	121
	Résumé	121
	Contenu	122
II	Contributions II : MSSM-like from $SU_5 \times D_4$ models	139
	Résumé	139
	Contenu	140
III	Contributions III : Fermion masses and mixing in $SU(5) \times D_4 \times U(1)$ model	179
	Résumé	179
	Contenu	180
Conclusion générale		213
A	Annexe A	217
A.1	Autres modèles d'unification	217
A.1.1	Modèle de Pati-Salam	217
A.1.2	Modèle $SU(5)$ Flipped	218

A.1.3	Modèle E_6	220
A.2	Produits tensoriels de représentations	222
Bibliographie		226

Liste des publications et communications

LISTE DES PUBLICATIONS :

- [1] R. Ahl Laamara, M. Miskaoui, E.H Saidi, Building SO_{10} - models with $\mathbb{D}_4$ symmetry, *Nucl.Phys. B901 (2015) 59-75*.
- [2] R. Ahl Laamara, M. Miskaoui, E.H Saidi, MSSM-like from $SU_5 \times D_4$ models, *Nucl.Phys. B906 (2016) 1-39*.
- [3] R. Ahl Laamara, M.A. Loualidi, M. Miskaoui, E.H. Saidi, Fermion masses and mixing in $SU(5) \times D_4 \times U(1)$ model, *Nucl.Phys. B916 (2017) 430-462*.
- [4] R. Ahl Laamara, M.A. Loualidi, M. Miskaoui, E.H. Saidi, Hybrid seesaw neutrino model in SUSY $SU(5) \times \mathbb{A}_4$ model (*soumis*).

LISTE DES COMMUNICATIONS ORALES :

- [1] Journées Doctorales nationales CPM-2016, du 26 au 28 mai 2016 à l'Institut Scientifique et Faculté des Sciences de Rabat, Rabat, Maroc.
- [2] Journées Nationales des Doctorants et des Jeunes Chercheurs, du 18 au 20 juillet 2017 à l'Ecole Normale Supérieure de L'Enseignement Technique de Rabat, Rabat, Maroc.

Introduction générale

La compréhension des lois fondamentales de l'univers et la recherche d'un seul modèle qui est capable de fournir une explication unique et cohérente pour des phénomènes apparemment différents est l'une des mystères de la physique théorique depuis des décennies. À travers les siècles, l'unification reste toujours un principe puissant dans la recherche de théories fondamentales en physique. En effet, dans la deuxième moitié du XIX^{ème} siècle, Maxwell n'a pas seulement formulé une théorie solide des phénomènes électriques et magnétiques, mais il a été capable de décrire les champs électriques et magnétiques dans un cadre unifié, appelé électromagnétisme. En outre, après la théorie universelle de la gravitation introduite en 1687 par I. Newton, les travaux d'Einstein les a conduit à présumer en 1915 l'existence d'une version moderne de la théorie de Newton ; c'est la théorie de la relativité générale. Cette dernière elle-même est une unification des concepts de l'espace et du temps. D'ailleurs, selon notre compréhension actuelle de tous les phénomènes physiques observés, la nature est gouvernée par quatre forces fondamentales ; les interactions électromagnétiques, faibles, fortes et gravitationnelles. Ainsi, la théorie de Maxwell décrit la force électromagnétique alors que la relativité d'Einstein décrit la force gravitationnelle

Après la naissance de la mécanique quantique dans les années 1920, son développement avec la relativité restreinte a produit la théorie quantique des champs. Cette dernière permet pour la première fois d'une description quantique de l'électromagnétisme appelée l'électrodynamique quantique (abrégé QED) ; cette formulation quantique qui décrit l'interaction électromagnétique entre électrons, positrons et photons, présente un grand succès en comparaison avec l'expérience. En d'autre part, les développements de la théorie quantique des champs qui constitue le schéma général de la physique moderne a exhibé l'importance des symétries et de leurs liens avec les lois de conservation. Ainsi, d'une façon analogue à l'électrodynamique quantique, une formulation quantique de la théorie qui décrit les interactions de quarks a été construite. Cette théorie basée sur la symétrie $SU(3)$ est connue sous le nom de chromodynamique quantique (QCD) ; elle postule l'existence de particules sans masse qui collent les quarks ensemble en les liant très fortement, appelées gluons. En outre, dans les années 1960, l'interaction faible et l'électromagnétisme ont été unifiées par Abdus Salam, Weinberg et Glashow dans la théorie dite électrofaible [1][2][3], de plus, cette dernière a été rejointe par la chromodynamique quantique pour établir le modèle standard de la physique des particules [4].

En plus de la découverte de la mécanique quantique et la théorie de la relativité, le modèle standard (abrégé en MS) est considéré comme l'une des grandes découvertes scientifiques du XX^{ème} siècle, où il a réussi de nombreux tests expérimentaux au cours des dernières décennies et il a été toujours en mesure de s'adapter parfaitement aux résultats expérimentaux. Il y a encore différentes raisons qui permettent de croire que le modèle standard n'est qu'une théorie effective d'une théorie plus fondamentale. Les insuffisances du modèle standard ouvriront sans aucun doute la voie à une nouvelle physique au-delà de ce dernier. En effet, il existe de nombreux modèles prometteurs qui répondent aux questions ouvertes du MS. La Supersymétrie qui a été inventée au début des années soixante-dix par Golfand et Likhtman [5], est considérée comme l'extension la plus

motivée et la plus attrayante du modèle standard, car elle permet de fournir une solution élégante à une partie des problèmes du MS. D'ailleurs, l'extension supersymétrique du modèle standard avec un nombre minimal de champs ajoutés, donne naissance de ce qu'on appelle le modèle standard supersymétrique minimal (MSSM). Ce modèle résout le problème de la hiérarchie lié à la masse du boson de Higgs, fournit un candidat à la matière noire ignoré dans le MS ainsi qu'il permet l'unification des trois constantes de couplage du MS à une grande échelle d'énergie. D'un autre côté, autre type de théories au-delà du modèle standard qui décrit les trois interactions dans un cadre unifié consiste aux Théories de Grande Unifications; encore appelée GUT (pour Grand Unified Theory en anglais). En effet, les modèles de jauge basés sur ce type de théories permettent d'étendre la structure de la symétrie de jauge du MS et en conséquence, les trois groupes du modèle standard sont inclus dans un seul groupe simple qui devrait avoir la même constante de couplage $g_1 = g_2 = g_3 = g_{GUT}$. Par exemple, les GUTs basées sur les symétries $SU(5)$, $SO(10)$ et E_6 [6][7][8][9], visent à unifier les trois forces fondamentales du MS en une seule, via l'unification de leurs constantes de couplage à une certaine échelle d'énergie d'environ $M_{GUT} \sim 10^{14-16}$ GeV; appelée échelle de GUT. En effet, dans le cas où les modèles de GUT sont supersymétrisés, ils permettent alors d'obtenir une convergence parfaite des couplages de jauge à l'échelle d'énergie $M_{GUT} \sim 10^{16}$ GeV. En outre, l'une des plus grandes prédictions des GUTs depuis le premier modèle d'unification proposé par Georgi et Glashow en 1974 [6], est le phénomène de désintégration du proton. En effet, ces modèles exigent que le proton ne soit pas stable et puisse se désintégrer. De plus, les expériences sur la désintégration du proton comme celle de SuperKamiokande a permis de lui attribuer une durée de vie selon le mode de désintégration ($\tau(p \rightarrow \pi^0 \mu^+) > 7.7 \times 10^{33}$ année et $\tau(p \rightarrow K^+ \bar{\nu}) \geq 5.9 \times 10^{33}$ année) [10][11]. Heureusement, l'expérience SuperKamiokande dont l'objectif est de chercher une preuve expérimentale de la désintégration du proton, fournit également des mesures liées à la physique des neutrinos. En effet, ces derniers étaient considérés dans le MS comme des particules sans masse comme le photon, toutefois les expériences SuperKamiokande en 1998 et SNO en 2002 ont mis en évidence des oscillations entre les saveurs de neutrinos lors de la propagation [12][13], ce qui implique alors que les neutrinos sont des particules massives. Par ailleurs, la faible masse des neutrinos peut être générée d'une façon élégante à travers le mécanisme appelé "mécanisme de seesaw" [14][15][16]. Ce dernier peut trouver une explication naturelle dans les théories de Grande Unification. Entre autres, le mécanisme de seesaw de type I entraîne des neutrinos de chiralité droite qui acquièrent la masse à l'échelle d'environ M_{GUT} [14]. Les expériences sur les oscillations des neutrinos ne confirment pas seulement les masses non nulles de neutrinos, mais elles prouvent également l'hypothèse d'oscillation des neutrinos qui a été suggérée par le physicien italien Bruno Pontecorvo depuis 1968 [17]; c'est à dire que les neutrinos se transforment en saveurs les uns dans les autres $\nu_{e,\mu,\tau} \longleftrightarrow \nu_{e,\mu,\tau}$. Cette découverte devrait mener à des changements fondamentaux dans notre connaissance de la physique et de l'astronomie, alors que plusieurs découvertes sur les neutrinos sont encore à faire.

Malgré que le mécanisme de seesaw s'adapte parfaitement avec les extensions du MS tel que les GUTs pour expliquer la faible masse des neutrinos, mais le mélange fort observé entre les trois saveurs de neutrinos ne trouve pas une explication convaincante dans ces modèles. En effet, d'expliquer l'origine des masses des fermions ainsi que leurs mélanges observés est considéré l'un des problèmes centraux dans les modèles de jauge ($\mathcal{G}_{Jaug} = \text{MS}, SU(5), SO(10)\dots$); appelé problème de saveur [18]. Ce dernier a attiré

beaucoup d'attention surtout depuis la confirmation du phénomène d'oscillation des neutrinos qui nécessite une nouvelle physique. D'ailleurs, les symétries de familles –symétries agissantes sur les trois familles de fermions– sont considérées la possibilité la plus prometteuse qui permette de rectifier parfaitement le problème de la saveur. En particulier, le phénomène d'oscillation des neutrinos pourrait être lié à l'existence d'une symétrie de famille discrète plus fondamentale qui se brise à une échelle d'énergie très élevée. Encore, l'extension des modèles de jauge $\mathcal{G}_{Jaug}$ par des symétries de familles notée $\mathcal{G}_F$, permet la construction de modèles qui explique remarquablement le mélange de neutrinos observé, obtenant ainsi des paramètres d'oscillation des neutrinos compatibles avec les dernières mesures expérimentales.

Le modèle standard reste jusqu'à présent le modèle théorique de référence utilisé pour décrire les trois interactions fortes, faibles et électromagnétiques. De plus, une grande partie d'incohérences du modèle standard peuvent être résolues dans ses extensions (NMSSM, NMSSM, GUTs, symétries de familles, etc.). Toutefois, nous savons qu'aucune de ses extensions ne peut fournir une description complète de la nature puisqu'elles ne contiennent pas la force gravitationnelle, ceci est dû au fait que la relativité générale permet d'expliquer la physique à l'échelle macroscopique alors que le MS et ses extensions qui reposent sur la théorie quantique des champs décrivent le monde microscopique. D'où, les moyens mathématiques employés dans les deux théories sont radicalement différents. A ce que l'on pense aujourd'hui, le concept de l'unification des quatre forces fondamentales implique qu'il devrait exister un modèle unique qui permet d'expliquer l'infiniment petit et l'infiniment grand dans un cadre unifié à une énergie suffisamment élevée. D'ailleurs, pour incorporer la force gravitationnelle aux trois autres interactions fondamentales, il est nécessaire de décrire la gravitation dans le cadre de la physique quantique.

Actuellement, la théorie des cordes est le candidat le plus prometteur qui vise à unifier la théorie quantique des champs et la relativité générale, offrant ainsi une théorie quantique cohérente de la gravité. Initialement, elle a été conçue dans les années 1970 comme une tentative pour décrire l'interaction forte. Néanmoins, son étude sérieuse pour décrire les quatre interactions de la nature, n'a commencée qu'à partir des années 1980. En outre, la notion de particule qui fonde la théorie quantique des champs est abandonnée dans la théorie des cordes, où l'objet fondamental est une corde définie à l'échelle de la distance de Planck. D'ailleurs, depuis les travaux de John Schwarz et Michel Green en 1984 [19], la théorie des cordes a gagnée l'intérêt de la communauté des physiciens et des mathématiciens.

Pendant les années 1980, plusieurs développements montrent qu'on peut distinguer cinq théories des cordes qui entraînent la supersymétrie (appelées souvent supercordes), où la version non supersymétrique de la théorie des cordes est inconsistante. En effet, il a été démontré que les cinq théories de supercordes sont libre d'anomalies et vivent dans un espace-temps à 10 dimensions, dans le langage des physiciens elles s'appellent : type I, type IIA, type IIB, Hétérotique $E_8 \times E_8$ et Hétérotique $SO(32)$ [20]. En d'autre part, plusieurs chercheurs se sont penchés sur la question de l'équivalence entre ces théories puisque l'existence de cinq théories des cordes n'est pas souhaitable. Effectivement, cette équivalence a été établi dans les années 90 avec la découverte des dualités [21]; cette découverte est appelée la seconde révolution. Il a été compris que les différentes théories des cordes sont des manifestations différentes d'une seule théorie à 11 dimensions appelée théorie-M, découverte par Edward Witten en 1995 [22].

Bien que la théorie des cordes a été développée pour plus de 30 ans, mais il n'existe

aucune preuve expérimentale de sa validité à cause de la difficulté à la tester expérimentalement aux accélérateurs de particules. Dans un autre ordre d'idée, la théorie des cordes a développé un sous-domaine qui vise à établir un contact avec la physique observée à basse énergie ; ce cadre est connu sous le nom de phénoménologie des cordes ou encore construction des modèles de la corde [23]. Autrement dit, la phénoménologie des cordes permet d'étudier les modèles qui proviennent de la théorie des cordes, qui satisfont toute la physique des particules et les observations cosmologiques. A ce stade, une tâche cruciale pour examiner le lien entre la théorie des cordes et la physique observée, c'est de trouver une compactification de la théorie des cordes qui permette de reproduire le modèle standard de la physique des particules ou une de ces extensions ; ce problème est connu comme le problème des constructions de modèles. La phénoménologie des cordes a été principalement employée pour la théorie des cordes Hétérotiques $E_8 \times E_8$ et aux théories des cordes de type II avec les D-branes. Cependant, cela ne fournit aucune prédiction unique jusqu'à présent [24][25].

En 1996, le physicien Cumrun Vafa a proposé une théorie définie en 12 dimensions dite théorie-F [26], cette dernière a été suggérée comme une formulation non-perturbative de la théorie des cordes de type IIB avec une variation du champ scalaire axio-dilaton τ . En outre, après l'idée originale de C. Vafa, la théorie-F a reçu plus d'attention à cause de sa structure riche dans la direction des dualités avec la théorie M et la théorie des cordes Hétérotique [27][28]. En d'autre part, la théorie-F fournit un cadre adapté remarquablement aux applications phénoménologiques, ainsi une nouvelle série d'études en 2008 ont conduit à des progrès étonnants sur la construction des modèles de GUTs dans la théorie-F [29], offrant ainsi une façon de donner une explication géométrique aux groupes de jauge de GUT dans le cadre de la théorie-F. La compactification de la théorie-F sur une variété de Calabi-Yau à quatre dimensions elliptiquement fibrée, peut conduire à des GUTs à 4 dimensions avec une supersymétrie $\mathcal{N} = 1$. Pratiquement, le fait que la gravité est supposée d'être beaucoup plus faible que les autres forces dans la construction des modèles de GUT, cela entraîne une limite de découplage de la gravité qui est liée à la géométrie interne. Des activités intenses ont été développées dans la construction de modèles locaux, globaux et semi-locaux, or chacune de ces configurations demande la présence d'une structure géométrique spécifique [29][31].

La phénoménologie des modèles de GUT dans la théorie-F (abrégé modèles F-GUT) est devenue un domaine de recherche actif, du fait qu'elle fournit des résolutions naturelles aux problèmes habituels dans les GUTs à quatre dimensions. Récemment, Il y a eu plusieurs travaux sur la construction des modèles F-GUT qui entraînent des symétries autres que celles de jauge ; ces dernières possèdent des implications importantes à basse énergie. Notamment, des modèles F-GUT avec des groupes abéliens $U(1)$ qui interviennent comme des groupes de Mordell-Weil [32], en plus de ceux qui permettent des symétries de familles discrètes [33][34][35][36]. En effet, ces constructions sont fondamentales pour des raisons à la fois conceptuelles et phénoménologiques.

En accord avec ces motivations, les travaux effectués dans ce mémoire de thèse concernent l'étude des GUTs à quatre dimensions et en théorie-F. En particulier, l'étude des modèles de GUT à quatre dimensions est étendue par les symétries de familles discrètes qui offrent une possibilité puissante pour la construction de modèles semi-réalistes. Dans la même direction des constructions de modèles, Nous employons deux méthodes pour combiner les symétries familles discrètes avec les modèles de GUT issus de la théorie-F compactifiée

sur une variété de Calabi-Yau à 4 dimensions elliptiquement fibrée. Le travail de thèse de doctorat est composé de quatre chapitres consacré à l'étude bibliographique et trois contributions, en plus d'une introduction générale, d'une conclusion et d'une annexe.

Dans le premier chapitre, nous présenterons une brève revue du modèle standard en décrivant tout ses aspects fondamentaux y compris le contenu en particules, secteur de Higgs et les masses de fermions. Nous discuterons après les limites du modèle standard qui visent à motiver la nécessité d'aller au-delà du Modèle Standard. Ensuite, nous explorerons différentes approches des extensions du MS, nous discuterons d'abord son extension supersymétrique qui a des grands intérêts au niveau phénoménologique. Nous présenterons après des modèles de la Théorie de Grande Unification, qui visent à décrire les différentes interactions du modèle standard par un seul groupe de jauge, en particulier nous étudierons les modèles basés sur les groupes de jauge $SU(5)$ et $SO(10)$.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des GUTs étendus par des symétries de familles. Nous présenterons d'abord les mécanismes accessibles et responsables de la génération des masses aux neutrinos, ainsi que l'aspect théorique et expérimental du mélange entre les trois différents saveurs de neutrinos. Dans la deuxième partie, nous étudierons un nouveau type de symétries agissant sur les trois familles de fermions ; appelées symétrie des familles. Après, nous étudierons la possibilité de combiner les modèles de GUT avec les symétries de familles, nous présentons en détailles un exemple du modèle $SU(5)$ avec symétrie de famille discrète A_4 .

Le troisième chapitre est dédié à la construction des modèle GUT $\mathcal{G}_{GUT} = SU(5)$, $SO(10)$ et E_6 dans le cadre de la théorie-F. Après nous donnerons une brève introduction sur la théorie des cordes ainsi que certains de ses aspects phénoménologiques, nous passerons en revue quelques ingrédients de base pour motiver et décrire la théorie-F. En particulier, nous fixerons notre attention sur l'étude de la théorie-F dans le cadre de la théorie des corde de type IIB, et nous définirons le formalisme de revêtement spectral. Ensuite, après avoir analysé les ingrédients nécessaires pour construire des modèles GUT dans le cadre de la théorie-F, nous compléterons ce chapitre en étudiant des exemples de modèles $\mathcal{G}_{GUT} = SU(5)$ et $SO(10)$ en présence du monodromie $\mathbb{Z}_2$.

Dans le quatrième chapitre, nous étudierons la réalisation des groupes discrets non abéliens dans les modèles F-GUT. En effet, nous étudierons la mise en œuvre des groupes discrets dans ce cadre de tel façon qu'ils agissent sur les racines de revêtement spectral $\mathcal{C}_N$ comme des monodromies non-abéliens, où nous analyserons cette accomplissement à travers deux méthodes : (i)- méthode en utilisant la théorie de Galois, (ii)- méthode basée sur la théorie des caractères des groupes discrets.

Le dernier chapitre sera axé autour de nos contributions dans le domaine. La première contribution est consacrée à la construction des modèles de GUT à 4 dimensions étendus par des symétries de familles. En particulier, nous avons étudié dans cette publication les masses et les mélanges des fermions dans un cadre original du modèle $SU(5)$ basé sur la symétrie discrète D_4 . Dans le secteur des neutrinos, les masses de neutrinos sont générées à travers le mécanisme de seesaw de type I, de plus, la symétrie D_4 nous a permis d'obtenir le mélange entre les trois saveurs de neutrinos en accord avec les résultats expérimentales. Nous avons également étudié le mélange dans le secteur des quarks où la matrice de mélange CKM obtenue est très proche de celle de l'expérience.

Les deux dernières contributions sont dévouées essentiellement à la construction de modèles F-GUT avec des monodromies non-abéliens. Dans la deuxième publication, nous avons construit le modèle $SO(10)$ combiné avec le monodromie non-abélien D_4 en utilisant

Introduction générale

la méthode basée sur les caractères de représentations des groupes finis. Dans la troisième publication, nous avons étudié les modèles $SU(5) \times D_4 \times U(1)$ par la même méthode. En plus, en employant la brisure de la symétrie de jauge $SU(5)$ par l'hyperflux, nous avons construit explicitement la théorie effective à basse énergie du modèle tout en dérivant le spectre de type MSSM.

Chapitre I

Du modèle standard vers la Théorie de Grand Unification

La recherche d'une théorie en physique des particules fait généralement appel au concept de la symétrie, car les particules existantes dans la nature présentent des propriétés similaires, d'où cela pousse les physiciennes à suggérer des symétries auxquelles ces particules obéissent. De plus, les interactions forte, faible et électromagnétique qui gouvernent l'univers avec la force de la gravité, pourraient être combinées et formulées par des symétries dans le cadre d'une théorie renormalisable.

Ce chapitre a l'objectif d'étudier les modèles de la physique des particules qui visent à décrire les trois interactions fondamentales dans le cadre des théories de jauge non-abéliennes. Dans la section 1, après une brève revue du modèle standard ainsi que ces limites qui vise à motiver la nécessité d'aller au-delà, nous étudions en premier temps l'extension supersymétrique du modèle standard qui apporte des solutions à une partie d'incohérence de ce modèle. Dans la section 2, nous donnons quelques motivations derrière les Théories de Grand Unification, puis nous étudions le modèle de GUT $SU(5)$, sa version minimale ainsi que ses différents types d'extensions. Dans la section 3, nous étudions le modèle de GUT basé sur le groupe de jauge $SO(10)$, nous analysons d'abord certains de ses aspects y compris le contenu en particules et la brisure de la symétrie, nous étudions après son extension supersymétrique et nous présentons à la fin différentes classes de modèles $SO(10)$.

I.1 Modèle standard et son extension supersymétrique

I.1.1 Symétrie de jauge et contenu en particules

A la fin des années 1960, Glashow, Weinberg et Salam ont formulé un modèle de la physique des particules basé sur la symétrie interne $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$; c'est à dire la symétrie portant sur les propriétés intrinsèques des particules (charge, spin, etc.). Ce modèle est connu sous le nom du modèle standard [1][2][3]; il décrit avec succès les interactions fortes, faibles et électromagnétiques dans le cadre de la théorie quantique des champs. Les fermions interagissant par les interactions faibles sont suggérés d'être ordonnés dans des doublets de la symétrie $SU(2)_L$, ainsi que les particules sensibles aux interactions fortes sont ordonnées dans des triplets de $SU(3)_C$ selon les trois couleurs de quarks. En outre, les particules en interactions électromagnétiques sont décrites par la symétrie $U(1)_{em}$ qui est considérée comme un sous-groupe au $SU(2)_L \times U(1)_Y$.

Le modèle standard forme une théorie de jauge basée sur le groupe $SU(3)_C \times SU(2)_L \times$

Génération	1ère	2ème	3ème
Quarks	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$
Leptons	$\begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mu \\ \nu_\mu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tau \\ \nu_\tau \end{pmatrix}$

TABLE I.1 – Trois générations de quarks et de leptons du MS.

$U(1)_Y$ où C désigne la charge de couleur, L indique que seulement les particules de chiralité gauche sont sensibles à l'interaction faible et Y s'identifie à l'hypercharge, ce modèle explique pratiquement toutes les particules élémentaires et les interactions qui ont été observées dans les accélérateurs

Bosons de jauge

Le MS possède $12_{MS} = 8_{SU(3)_C} + 3_{SU(2)_L} + 1_{U(1)_Y}$ générateurs, et par conséquent 12 bosons de jauge de spin 1 qui jouent le rôle des messagers des interactions fortes, faibles et électromagnétiques. Nous avons 8 gluons G_μ^a qui transmettent l'interaction forte décrite par $SU(3)_C$, en plus des 4 bosons de jauge $W_\mu^\pm, Z_\mu^0$ et A_μ associés aux interactions faible et électromagnétique respectivement ; ces derniers proviennent d'un mélange des bosons $W_\mu^{1,2,3}$ et B_μ de l'interaction électrofaible décrite par la symétrie $SU(2)_L \times U(1)_Y$. En effet, le photon A_μ qui transmet l'interaction électromagnétique n'est pas associé au groupe $U(1)_Y$ du MS puisque la charge de ce dernier n'est pas identique à la charge électrique $U(1)_{em}$. Néanmoins, la charge électrique est liée à l'hypercharge par la relation de Gell-Man-Nishijima $Q_{em} = T_3 + \frac{Y}{2}$ où T_3 est l'isospin défini comme le troisième générateur du groupe $SU(2)_L$ et Y est l'hypercharge du groupe $U(1)_Y$.

Fermions

Outre que les bosons de jauge, le MS décrit également les particules fermioniques de spin 1/2 qui interagissent avec les trois forces fondamentales. Ces fermions sont assemblés en trois familles de quarks notés Q et de leptons notés L leptons. De plus, le MS prédit trois générations pour chaque quark et lepton comme présenté dans le tableau (I.1) Les quarks Q connaissent toutes les interactions fondamentales dans la nature, ce qui implique que ils pourraient se transformer non trivialement sous la symétrie du MS. Encore, les leptons L n'ont pas d'interactions fortes, et seulement leur partie gauche $L_L = \frac{(1-\gamma^5)}{2}L$ qui est sensible à l'interaction faible¹. En conséquence, les leptons gauches L_L se transforment comme des doublets sous $SU(2)_L$ tandis que les leptons droits L_R sont des singlets sous ce groupe. Enfin, les nombres quantiques de l'hypercharge $U(1)_Y$ sont attribués afin d'obtenir la charge électrique correcte pour les champs à partir de la relation de Gell-Man-Nishijima. Les fermions et les bosons vecteurs décrits dans le MS sont réalisés par des représentations sous les symétries $SU(3)_C, SU(2)_L$ et $U(1)_Y$ dans le tableau (I.2) :

En outre, le MS standard inclut également un boson scalaire ϕ réside dans la représentation **2** du groupe $SU(2)_L$ appelé champ de Higgs. Ce champ est responsable de la brisure de la symétrie électrofaible, en plus que son couplage aux fermions et aux bosons vecteurs génère une masse à ces derniers.

1. Tous les fermions ψ du modèle standard possèdent deux états de chiralité ; les particules de chiralité gauche ψ_L , et ceux de chiralité droite ψ_R .

Particules	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
Q_L^i	3	2	1/3
$(u^c)_R^i$	$\bar{3}$	1	-4/3
$(d^c)_R^i$	$\bar{3}$	1	2/3
L_L^i	1	2	-1
$(e^c)_R^i$	1	1	2
B_μ	1	1	0
W_μ^a	1	3	0
$G_\mu^{a'}$	8	1	0
ϕ	1	2	1

TABLE I.2 – Contenu en particules du MS et leurs représentations sous les groupes $SU(3)_C$, $SU(2)_L$ et $U(1)_Y$, où $Q_L^i = (u^i, d^i)_L^T$, $L_L^i = (\nu_e^i, e^i)_L^T$ et l'indice i est référée aux 3 générations de fermions $i = 1, 2, 3$.

I.1.2 Mécanisme de Higgs et masses des fermions

La partie $SU(3)_C$ de la symétrie du MS décrit l'interaction nucléaire forte ; sa version quantique appelé la chromodynamique quantique (QCD). De plus, la symétrie $SU(2)_L \times U(1)_Y$ est le groupe de jauge unifiant l'électromagnétisme à l'interaction faible dans le cadre de la théorie électrofaible. D'ailleurs, le lagrangien de l'interaction électrofaible est donné comme une somme de différents termes

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Jauge} + \mathcal{L}_{Matière} + \mathcal{L}_Y + \mathcal{L}_{Higgs}, \quad (I.1)$$

où les lagrangiens $\mathcal{L}_{Jauge}$ et $\mathcal{L}_{Matière}$ traduisent les termes cinétiques des fermions et des boson de jauge ainsi que leurs interactions [30]. En outre, $\mathcal{L}_{Higgs}$ est le lagrangien du champ de Higgs, alors que $\mathcal{L}_Y$ est le lagrangien de Yukawa qui traduit les interactions des fermions avec le champ de Higgs

Mécanisme de Higgs

Le secteur de Higgs du MS est constitué par un champ scalaire doublet $\phi = (\phi^+, \phi^0)^T$ sous $SU(2)_L$ et d'hypercharge $Y = 1/2$. Le lagrangien de Higgs $\mathcal{L}_{Higgs}$ qui décrit le comportement du champ ϕ est donné par

$$\mathcal{L}_{Higgs} = (\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}_\mu \phi) - V(\phi). \quad (I.2)$$

Le premier terme correspond au terme cinétique du champ de Higgs ϕ et les termes d'interaction de jauge à travers la dérivée covariante définie comme $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu + ig_2 \frac{T_a}{2} W_\mu^a$, alors que $V(\phi)$ est le potentiel de Higgs qui s'écrit en terme du champ ϕ sous la forme

$$V(\phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2, \quad \lambda > 0. \quad (I.3)$$

Le fait que le champ de Higgs ϕ réside dans une représentation non-triviale de $SU(2)_L$, la symétrie électrofaible $SU(2)_L \times U(1)_Y$ peut être brisée vers la symétrie $U(1)_{em}$ par le mécanisme de Englert-Brout-Higgs (abrégié souvent mécanisme de Higgs) [37].

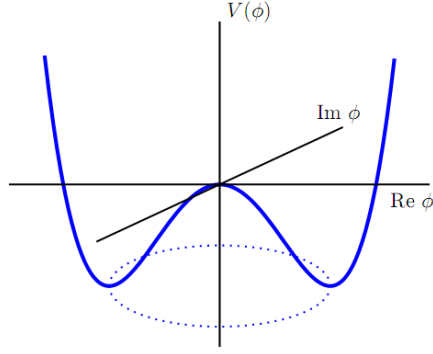


FIGURE I.1 – Minimum du potentiel de Higgs $V(\phi)$ dans le cas où $\mu^2 < 0$.

Si $\mu^2 < 0$, alors le minimum du potentiel $V(\phi)$ est réalisé pour une valeur moyenne du vide (VEV) non nulle du champ de Higgs ϕ , voir la figure (I.1)

$$\langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ avec } v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}. \quad (\text{I.4})$$

Autre que la brisure spontanée de la symétrie électrofaible, le mécanisme de Higgs permet également de générer les masses aux particules élémentaires du modèle, où les termes de masse des bosons de jauge $W_\mu^\pm$, Z_μ^0 et A_μ sont dérivés à partir du lagrangien $\mathcal{L}_{Higgs}$; ce dernier comporte les termes qui couplent le boson de Higgs aux bosons de jauge [30]. En plus, les fermions acquièrent une masse à travers le lagrangien de Yukawa $\mathcal{L}_Y$ qui couple les fermions de chiralité droite et gauche au champ de Higgs, il est donné par [30]

$$\mathcal{L}_Y = Y_u^{ij} \bar{Q}_{L_i} \tilde{\phi} u_{R_j} + Y_d^{ij} \bar{Q}_{L_i} \phi d_{R_j} + Y_l^{ij} \bar{L}_{L_i} \phi e_{R_j} + h.c., \quad (\text{I.5})$$

où $\tilde{\phi} \equiv i\sigma_2 \phi^*$ et Y_u^{ij} , Y_d^{ij} et Y_l^{ij} sont des matrices 3×3 associées aux couplages de Yukawa. En effet, lorsque le champ de Higgs ϕ obtient son VEV, alors les matrices de masse des quarks et leptons sont obtenues comme suit

$$M_u^{ij} = \frac{v Y_u^{ij}}{\sqrt{2}}, \quad M_d^{ij} = \frac{v Y_d^{ij}}{\sqrt{2}}, \quad M_e^{ij} = \frac{v Y_e^{ij}}{\sqrt{2}}. \quad (\text{I.6})$$

I.1.3 Problèmes du modèle standard

Le modèle standard est considéré comme l'un des modèles les plus réussis de la physique moderne, puisqu'il a résisté à un nombre impressionnant de tests de précision jusqu'à aujourd'hui. Notamment, le boson de Higgs a été postulé théoriquement dans le MS avant que les expériences au CERN confirment en 2012 l'existence d'un boson de Higgs d'une masse $m_\phi \simeq 125$ GeV [38]. Cependant, le MS laisse plusieurs questions sans réponse pour être une théorie fondamentale. Ces questions posent des problèmes de compatibilité avec quelques phénomènes observés et conduisent alors à la recherche de nouvelles théories au-delà du MS. En fait, le MS possède plusieurs problèmes, mais nous allons présenter ici brièvement certains de ces défis importants :

- **Gravitation** : l'un des problèmes les plus évidents dans le MS est l'absence de la gravité comme une quatrième force fondamentale, ceci est dû au fait que la gravité n'est pas renormalisable comme une théorie quantique des champs [39].
- **Problème de la hiérarchie** : ce problème découle de la masse de Higgs m_ϕ qui est considérée dans le MS comme un paramètre libre, où des corrections radiatives sur cette masse mène à une divergence quadratique puisque le Higgs n'est protégé par aucune symétrie. Ceci rend alors la masse de Higgs infinie [40].
- **Unification des constantes de couplage** : le fait qu'il existe trois constantes de couplage g_1 , g_2 et g_3 associées aux groupes $U(1)_Y$, $SU(2)_L$ et $SU(3)_C$, implique que le MS ne forment pas une vraie unification. Vu que l'évolution des trois constantes de couplage avec l'échelle d'énergie ne commencent à s'unifier qu'à partir d'une énergie d'environ 10^{14} GeV (voir la figure I.2). Cela indique la possibilité d'existence d'une symétrie de jauge plus grande à haute énergie, où les trois constantes de couplage sont intégrées dans une seule.

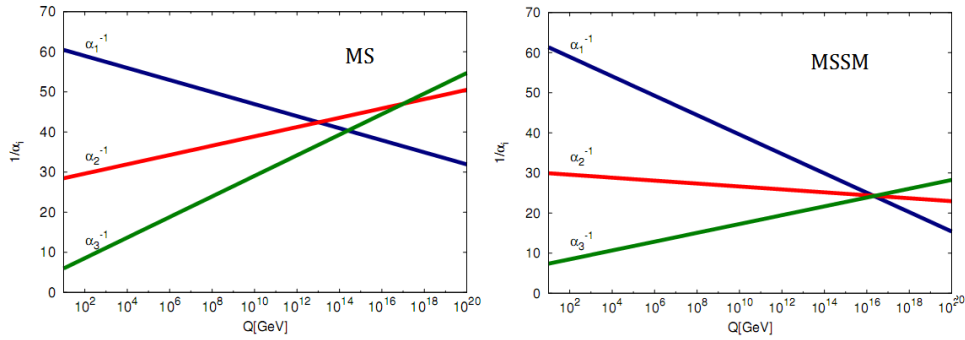


FIGURE I.2 – L'évolution des constantes de couplage g_1 , g_2 et g_3 ($\alpha_i = g_i^2/4\pi$) en fonction de l'énergie Q . A gauche : cas du MS. A droite : cas du MSSM.

- **Masses des neutrinos** : une autre incohérence du MS consiste aux neutrinos qui sont considérés comme des particules non massives; en effet cela provient de l'absence de neutrinos droits qui permettent de générer un terme de masse renormalisable de type $Y_\nu^{ij} \bar{L}_{L_i} \phi \nu_{R_j}$ et qui génère ainsi la masse du neutrino de la même façon que les autres fermions. En plus, la découverte des oscillations de neutrinos prouve l'existence d'une masse très faible pour ces derniers (l'observation expérimentale récente sur la somme des trois neutrinos $\Sigma_i |m_i| < 0.17\text{eV}$ [41]).

I.1.4 Supersymétrie et MSSM

Bien que la MS souffre à beaucoup de problèmes, il reste encore un modèle qui a un très grand nombre de prédictions en accord avec les résultats expérimentaux. Pour cette raison, les physiciens cherchent à résoudre les problèmes rencontrés dans le MS à travers l'extension du modèle par différentes façons. Plusieurs approches ont été poursuivies pour étendre le modèle standard à une théorie plus fondamentale. En particulier, une possibilité très intéressante dans le cadre des extensions du MS est l'extension par la supersymétrie. Cette extension présente une solution élégante aux plusieurs problèmes dans le MS tel que

le problème de la hiérarchie et le problème de l'unification des constantes de couplage. Notamment, le problème de la hiérarchie mentionné précédemment consiste à des divergences quadratique proviennent des corrections radiatives de la masse de Higgs, ces divergences quadratiques seront annulées par l'ajoute de la supersymétrie car les corrections quantiques impliquant des particules du MS sont précisément annulées par les contributions des superpartenaires correspondants (pour une discussion détaillée, voir [42]).

La supersymétrie présente aussi une caractéristique intéressante pour l'unification des constantes de couplage où la combinaison de la supersymétrie avec le MS permet l'unification de jauge à une échelle de $M \sim 10^{16} \text{GeV}$, ceci ouvre un cadre attirant pour la construction des modèles de grande unification (ces modèles seront l'objectif des sections suivantes).

Supersymétrie

La supersymétrie (abrégé SUSY) a été inventée par Golfand et Likhtman en 1971 [5]. Elle a été étudiée comme étant une extension non triviale de la symétrie de Poincaré de l'espace-temps, ceci permet les directions bosonique usuels paramétrées par les coordonnées x^μ d'être étendu par des directions fermioniques paramétrées par les nombres de Grassman θ^α et $\bar{\theta}^\alpha$. En outre, l'extension supersymétrique de l'espace-temps décrite par le groupe de Poincaré $\mathbb{R}^{1,3} \rtimes SO(1,3)$, se traduit dans l'extension de l'algèbre de Lie de Poincaré par des générateurs supersymétriques Q_α^A et $\bar{Q}_{\dot{\beta}B}$; appelés aussi supercharges. Ces derniers permettent de transformer un fermion en boson et vice-versa, en d'autre terme ils associent pour chaque fermion un partenaire bosonique qui ne s'en distingue que par son spin, formant ainsi des couples appelés multiplets ou supermultiplets. En général, l'algèbre de Poincaré étendue par $\mathcal{N}$ générateurs supersymétriques Q_α^A et $\bar{Q}_{\dot{\beta}B}$ ($A, B = 1, 2, \dots, \mathcal{N}$) est appelée algèbre supersymétrique. En particulier, dans le cas le plus simple où $\mathcal{N} = 1$, l'algèbre supersymétrique ne possède qu'un seul générateur Q_α et son conjugué $\bar{Q}_{\dot{\beta}}$ satisfont aux relations suivantes [43].

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu P_\mu, \quad (\text{I.7})$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0, \quad (\text{I.8})$$

$$[Q_\alpha, M_{\mu\nu}] = (\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta \quad ; \quad [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, M_{\mu\nu}] = (\sigma_{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \bar{Q}_{\dot{\beta}}, \quad (\text{I.9})$$

$$[P_\mu, Q_\alpha] = [P_\mu, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] = 0, \quad (\text{I.10})$$

où $\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta} = 1, 2$ indiquent les spineurs de Weyl à deux composantes, P_μ et $M_{\mu\nu}$ sont respectivement les générateurs de translation et de rotation, ainsi que $\sigma^\mu = (1, \sigma_i)$ avec σ_i sont les matrices de Pauli.

En outre, l'application du formalisme supersymétrique $\mathcal{N} = 1$ dans le cadre du MS donne naissance de ce qu'on appelle le modèle standard supersymétrique minimal ou MSSM [44]. A ce stade, chaque boson (fermion) du modèle standard aura un partenaire supersymétrique fermionique (bosonique) qui porte le même nombre quantique sous le MS et ne s'en distingue que par son nombre quantique de spin. Encore, les partenaires supersymétrique (superpartenaires) des fermions du MS sont appelés des sfermions et se couplent dans ce qu'on appel un multiplet chiral, alors que les superpartenaires des bosons de jauge sont appelés jaugino et se couplent dans ce qu'on appel un multiplet vectoriel. Le contenu en particule du MSSM y compris les superchamps chiraux et vectoriel sont

Particules	Multiplets chiraux	Spin 0	Spin 1/2
Quarks, Squarks	Q	$\tilde{q} = (\tilde{u}_L, \tilde{d}_L)$	$q = (u_L, d_L)$
	U^c	$\tilde{u}_R^c$	u_R^c
	D^c	$\tilde{d}_R^c$	d_R^c
Leptons, Sleptons	L	$\tilde{l} = (\tilde{\nu}_L, \tilde{e}_L)$	$l = (\nu_L, e_L)$
	E^c	$\tilde{e}_R^c$	e_R^c
Higgs, Higgsino	H_u	$\tilde{h} = (H_u^+, H_u^0)$	$h = (\tilde{H}_u^+, \tilde{H}_u^0)$
	H_d	(H_d^0, H_d^-)	$(\tilde{H}_d^0, \tilde{H}_d^-)$
Particules	Multiplets vectoriel	Spin 1	Spin 1/2
jauge, Jaugino	G^a	G_μ^a	$\tilde{G}^a$
	W^a	W_μ^a	$\tilde{W}^a$
	B	B_μ	$\tilde{B}$

TABLE I.3 – Contenu en particules du MSSM y compris les fermions, bosons de jauge et champs de Higgs ainsi que leurs superpartenaires.

présentés dans le tableau (I.3)

Dans ce modèle, les couplages de Yukawa conduisant aux masses des fermions sont inclus dans une partie du lagrangien supersymétrique total appelé superpotentiel W , alors le superpotentiel W_{MSSM} du MSSM contenant les termes de masse des fermions et de Higgs s'écrit comme

$$W_{MSSM} = Y_u^{ij} Q_{L_i} H_u \bar{U}_j + Y_d^{ij} Q_{L_i} H_d \bar{D}_j + Y_e^{ij} L_{L_i} H_d \bar{E}_j + \mu H_u H_d, \quad (\text{I.11})$$

où Y_u^{ij}, Y_d^{ij} et Y_e^{ij} sont les constantes de couplage de Yukawa. Nous remarquons que le MSSM entraîne un deuxième champ de Higgs de type-down H_d (H_u appelé Higgs de type-up) afin de générer des masses aux leptons et aux quarks de type down. Encore, le superpotentiel W_{MSSM} ne comporte que les termes invariants sous le groupe de jauge, renormalisables et qui conservent les nombres baryonique B et leptonique L . Cependant, si nous tenant en compte les couplages renormalisables invariants sous le groupe de jauge mais qui violent les nombre L et B , alors le superpotentiel W_{MSSM} doit contenir les termes suivants

$$W_{\Delta L=1} = \alpha_{ijk} Q_i L_j \bar{D}_k + \beta_{ijk} L_i L_j \bar{E}_k + \eta_i L_i H_u, \quad (\text{I.12})$$

$$W_{\Delta B=1} = \gamma_{ijk} \bar{D}_i \bar{D}_j \bar{U}_k, \quad (\text{I.13})$$

où $\alpha_{ijk}, \beta_{ijk}, \eta_i$ et γ_{ijk} sont les constantes de couplage. Les termes $\alpha_{ijk} Q_i L_j \bar{D}_k$ et $\gamma_{ijk} \bar{D}_i \bar{D}_j \bar{U}_k$ qui violent respectivement le nombre leptonique et baryonique conduisent à la désintégration rapide du proton, ce qui n'est pas en accord avec les résultats expérimentaux concernant la durée de vie du proton. Ces termes peuvent généralement être éliminés si on impose une symétrie discrète appelée la symétrie-R (ou parité-R) [45], cette symétrie agit sur les superchamps par une charge P_R défini comme suit

$$P_R = (-1)^{3(B-L)+2s}. \quad (\text{I.14})$$

Avec s désigne le spin de la particule. Cette symétrie implique que les particules ordinaires du MS ont la charge $P_R = +1$ tandis que tous les superpartenaires ont une charge

$P_R = -1$, ceci entraîne une disparition des termes $W_{\Delta L=1}$ et $W_{\Delta B=1}$ puisqu'ils violent la symétrie-R.

I.2 Modèles $SU(5)$

I.2.1 Vers la Théorie de Grande Unification

Les incohérences conceptuelles rencontrées dans le modèle standard nous pousse à croire que ce modèle ne présente pas une théorie complète qui explique tous les phénomènes physiques observés. Toutefois, l'hypothèse la plus généralement consiste à admettre que le modèle standard constitue une limite à basse énergie d'une théorie plus fondamentale et complète. En particulier, si nous croyons en l'unification des interactions électrofaibles et fortes, alors des extensions du modèle standard doivent être introduites. En effet les extensions les plus naturelles du modèle standard consistent aux Théories de Grande Unification (GUTs). L'idée générale des Théories de Grand unification est de réduire les interactions électrofaibles et fortes à un seul groupe de jauge avec une seule constante de couplage, ainsi que d'unifier tous les multiplets fermioniques de chaque famille en une ou deux représentations différentes ; ces représentations appartiennent au groupe de jauge $\mathcal{G}_{GUT}$ appelé modèle de la Théorie de Grande Unification ou modèle de GUT.

Nous avons vu dans le modèle standard que les quarks de chiralité gauche $((u, d)_L^T)$ sont reliés par la symétrie $SU(2)_L$ qui se brise par le mécanisme de Higgs à une échelle d'énergie $M_{EW} \sim 10^2 \text{ GeV}$. De manière similaire, il est possible de relier les secteurs de quarks et de leptons sous une symétrie plus grande où les interactions électrofaibles et fortes s'unifient à une échelle d'énergie de $M_{GUT} \sim 10^{14-16} \text{ GeV}$. Cette symétrie entre les deux secteurs provient du fait que les quarks et les leptons apparaissent dans les mêmes représentations du groupe $\mathcal{G}_{GUT}$, offrant alors une explication à l'annulation de l'anomalie de jauge entre les deux secteurs dans le modèle standard [46]. En d'autre part, il est évident que le regroupement des quarks et des leptons dans les mêmes multiplets du groupe $\mathcal{G}_{GUT}$ entraîne l'existence de bosons de jauge autres que ceux du modèle standard, leurs masses seront de l'ordre de l'échelle de brisure du groupe $\mathcal{G}_{GUT} \xrightarrow{M_{GUT}} SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$.

Le choix du groupe $\mathcal{G}_{GUT}$ de GUT n'est pas unique mais il est contraint par la réponse de quelques questions ouvertes du MS. Entre autre, le modèle de GUT $\mathcal{G}_{GUT}$ doit incorporer le MS, ceci implique que les trois constantes de couplage g_1, g_2 et g_3 associées aux trois interactions doivent être unifiées à l'échelle d'énergie de M_{GUT} à une constante de couplage unique g_{GUT} du groupe $\mathcal{G}_{GUT}$. En particulier, la première tentative du modèle de GUT est celle proposée par Pati et Salam, ils ont proposé un modèle qui unifie les quarks et les leptons en deux représentations irréductibles sous le groupe $\mathcal{G}_{GUT} = SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$ connu sous le nom modèle de Pati-Salam (PS) [47]. Néanmoins, il ne présente pas un modèle d'unification fondamental puisque son groupe de jauge est semi-simple et par conséquent il ne possède pas une constante de couplage unique. Peu de temps après, une autre possibilité du modèle de GUT basé sur un groupe simple $\mathcal{G}_{GUT} = SU(5) \supset SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ a été proposé par Georgi et Glashow connu sous le nom modèle $SU(5)$ de Georgi-Glashow [6]. En fait, le modèle $SU(5)$ possède le rang $r = 4$ égal à celui du MS. Or, des modèles de GUT basés sur des groupes de Lie de rang $r > 4$ sont possibles, on parle sur le modèle $\mathcal{G}_{GUT} = SO(10)$ de rang $r = 5$ et le modèle E_6 de rang $r = 6$ [7][9]. Nous allons étudier ces modèles par la suite.

I.2.2 Modèle de Georgi-Glashow

Le premier modèle physique que nous allons étudier dans cette section comme modèle d'unification est celui basé sur la symétrie $SU(5)$; il permet l'unification des trois forces fondamentales dans une échelle d'énergie $M_{GUT} \sim 10^{14-16} \text{ GeV}$ et les décrit dans un seul groupe de jauge simple. Ce modèle a été l'une des premières tentatives pour unifier le modèle standard dans un groupe de même rang $\text{rang}(MS) = \text{rang}(SU(5)) = 4$. En fait, il existe neuf groupes de $\text{rang} = 4$ qui peuvent être réalisés comme des groupes de GUT

$$SU(2)^4, SO(5)^2, G_2, SO(8), SO(9), Sp(8), F, SU(3)^2 \text{ et } SU(5), \quad (\text{I.15})$$

sauf que les deux premiers groupes sont exclues puisqu'ils ne contiennent pas le groupe $SU(3)$ comme sous-groupe, les cinq groupes suivant $G_2, SO(8), SO(9), Sp(8)$ et F ne possèdent pas de représentations complexes et par conséquent ils peuvent pas produire la chiralité observable des particules du modèle standard à basse énergie, finalement les deux groupes restant $SU(3)^2$ et $SU(5)$ fonctionnerait très bien comme étant des candidats aux modèles de GUT de range $r = 4$, mais il paraît que le groupe $SU(3)^2$ peut pas produire le générateur de charge électrique sans ajouter une longue liste des champs de matière exotique qui n'incluent pas dans le spectre de matière du MS. Ainsi, le modèle $SU(5)$ est le seul groupe qui admet des représentations complexes pour la matière chirale du MS ainsi qu'il possède le groupe de jauge $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ comme un sous-groupe maximal. Par ailleurs, puisque le groupe $SU(5)$ est simple, cela implique qu'à l'échelle de brisure M_{GUT} , les constantes de couplage sont unifiées

$$g_1(M_{GUT}) = g_2(M_{GUT}) = g_3(M_{GUT}) = g_5, \quad (\text{I.16})$$

où g_5 désigne la constante de couplage associé au modèle $SU(5)$.

Historiquement, le modèle $\mathcal{G}_{GUT} = SU(5)$ a été proposé par *H. Georgi* et *S. L. Glashow* en 1974, et souvent appelé le modèle de Georgi-Glashow [6]. A ce stade, toutes les particules du MS peuvent être regroupées dans les représentations anti-symétrique 10, et anti-fondamentale $\bar{5}$ du groupe $SU(5)$:

$$\bar{5} = \begin{pmatrix} d_r^c \\ d_b^c \\ d_g^c \\ e^- \\ -\nu_e \end{pmatrix}, \quad 10 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & u_g^c & -u_b^c & u_r & d_r \\ -u_g^c & 0 & u_r^c & u_b & d_b \\ u_b^c & -u_r^c & 0 & u_g & d_g \\ -u_r & -u_b & -u_g & 0 & e^c \\ -d_r & -d_b & -d_g & -e^c & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{I.17})$$

Chaque quark sera compté en trois à cause des trois couleurs r, b et g ; ceci nous donne 15 fermions en total qui résident dans la représentation $10 + \bar{5}$ du groupe $SU(5)$. En plus de la matière du MS qui résident dans (I.17), le doublet de Higgs du modèle standard $\phi = (1, 2)_{\frac{1}{2}}$ responsable de la brisure de symétrie électrofaible, est incorporé dans la plus petite représentation non triviale 5_H du modèle $SU(5)$ donnée par

$$5_H = (\phi, T)^T, \quad (\text{I.18})$$

où le doublet de Higgs ϕ est couplé avec un triplet $T = (3, 1)$ appelé un triplet de Higgs de couleur qui n'existe pas dans le secteur de Higgs du MS.

Bosons de jauge

Le groupe de Lie $SU(5)$ possède 24 générateurs T_a , $a = 1, \dots, 24$ dont les trois générateurs T_1 , T_2 et T_3 sont des matrices 5×5 qui peuvent être données juste en insérant les matrices de Pauli $\sigma_{1,2,3}$ dans celles du groupe $SU(5)$

$$T_{1,2,3} = \left(\begin{array}{c|c} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 2} \\ \hline 0_{2 \times 3} & \sigma_{1,2,3} \end{array} \right), \quad (\text{I.19})$$

avec les matrices de Pauli $\sigma_{1,2,3}$ sont données comme suit

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{I.20})$$

ces trois générateurs sont associés aux bosons de jauge $V_\mu^{1,2,3} = \{W^1, W^2, W^3\}$ du groupe $SU(2)_L$. Ensuite, le générateur T_4 associé au boson $V_\mu^4 = B$ est donné par la matrice diagonale

$$T_4 = \frac{1}{\sqrt{15}} \text{diag}(2, 2, 2, -3, -3). \quad (\text{I.21})$$

En ce qui concerne les générateurs $T_{5,\dots,24}$, nous allons les définir en deux catégories, $T_{5,\dots,12}$ et $T_{13,\dots,24}$; les huit générateurs $T_{5,\dots,12}$ sont associés aux huit bosons de jauge $V_\mu^{1,\dots,8}$ (huit gluons) du groupe $SU(3)_C$, ils sont donnés en termes des matrices 3×3 de Gell-Mann $\lambda_{1,\dots,8}$ du groupe $SU(3)$

$$T_{5,\dots,12} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_{1,\dots,8} & 0_{3 \times 2} \\ \hline 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 2} \end{array} \right), \quad (\text{I.22})$$

avec les matrices $\lambda_{1,\dots,8}$ sont données par

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}, \quad (\text{I.23})$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} ; \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (\text{I.24})$$

En d'autre part, en plus des 12 bosons de jauge du modèle standard (huit gluons G_{ab} , trois bosons $W^\pm$, Z^0 et le photon γ) qui sont reliés aux bosons vecteurs $V_\mu^{1,\dots,12}$, le modèle de Georgi-Glashow comporte également 12 nouveaux bosons $V_\mu^{1,\dots,12}$ appelés **leptoquarks** X et Y . En outre, les 12 générateurs $T_{13,\dots,24}$ sont

$$T_{13,\dots,18} = \left(\begin{array}{c|c} 0_{3 \times 3} & A_{3 \times 2} \\ \hline A_{2 \times 3}^\dagger & 0_{2 \times 2} \end{array} \right) ; \quad T_{19,\dots,24} = \left(\begin{array}{c|c} 0_{3 \times 3} & B_{3 \times 2} \\ \hline B_{2 \times 3}^\dagger & 0_{2 \times 2} \end{array} \right) \quad (\text{I.25})$$

où les six générateurs $T_{13,\dots,18}$ sont définies par le déplacement du nombre $-i$ dans les entrées de la matrices $A_{3 \times 2}$, alors que les générateurs $T_{19,\dots,24}$ sont définies par le déplacement du nombre 1 dans les entrées de la matrices $B_{3 \times 2}$. Les 12 générateurs $T_{13,\dots,24}$ sont associés aux bosons de jauge X et Y qui portent une charge électrique $Q_X = +\frac{4}{3}$ et $Q_Y = +\frac{1}{3}$, en

plus qu'ils se transforment non trivialement sous les groupes $SU(3)_C$ et $SU(2)_L$, d'où ils entraînent la désintégration rapide du proton.

En résumé, les 24 générateurs $T_{1,\dots,24}$ sont associés aux 24 bosons de jauge $V_\mu^a, a = 1, \dots, 24$ prédits par le modèle $SU(5)$; ces 24 bosons de jauge peuvent être transformés dans la représentation adjointe 24 du groupe $SU(5)$ comme $V_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{a=1}^{24} V_\mu^a T_a$, où

$$V_\mu = \left(\begin{array}{ccc|cc} G_{rr} - \frac{2B}{\sqrt{30}} & G_{rg} & G_{rb} & X_r^c & Y_r^c \\ G_{gr} & G_{gb} - \frac{2B}{\sqrt{30}} & G_{gb} & X_g^c & Y_g^c \\ G_{br} & G_{bg} & G_{bb} - \frac{2B}{\sqrt{30}} & X_b^c & Y_b^c \\ \hline X_r & X_g & X_b & \frac{W^3}{\sqrt{2}} + \frac{3B}{\sqrt{30}} & W^+ \\ Y_r & Y_g & Y_b & W^- & -\frac{W^3}{\sqrt{2}} + \frac{3B}{\sqrt{30}} \end{array} \right). \quad (I.26)$$

Quantification de la charge électrique

Le modèle de Georgi-Glashow donne une explication remarquable à la quantification de la charge électrique associée aux particules élémentaires. En effet, l'hypercharge des particules élémentaires dans le MS ne sont déterminées par aucune considération théorique, mais ils sont fixées afin de reproduire les de charges électriques observées. En outre, puisque les quarks et les leptons sont affectés au même multiplet, alors leurs charges doivent être liées car la trace de tout générateur du groupe $SU(5)$ doit être nulle. L'utilisation de l'opérateur de charge électrique Q sur la représentation fondamentale nous donne [48]

$$Tr Q = Tr(Q_{d^c}, Q_{d^c}, Q_{d^c}, Q_e, Q_{\nu_e}) = 0, \quad (I.27)$$

cela implique que la charge électrique du quark down est $Q(d) = -1/3$ selon la trace

$$Q(d^c) + Q(e) + Q(\nu_e) = 0 \rightarrow Q(d^c) = -\frac{1}{3}Q(e). \quad (I.28)$$

Le modèle $SU(5)$ prédit également que la charge du quark up soit $Q(u) = 2/3$. L'opérateur de la charge électrique Q peut être calculé en utilisant la formule de Gell-Mann-Nishijima

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} = \frac{1}{2}T_{11} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}T_{12} \quad (I.29)$$

$$= \text{diag}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0\right), \quad (I.30)$$

où le générateur T_{12} correspond au groupe $U(1)$ non brisé qui est identifié avec l'hypercharge $U(1)_Y$. Alors, l'opérateur de la charge électrique Q est considéré comme un générateur de $SU(5)$ et en conséquence, la quantification de la charge électrique provient naturellement comme l'une des propriétés intrinsèques du modèle $SU(5)$.

Lagrangien du modèle

Comme dans le cas du MS, le lagrangien total du modèle $SU(5)$ s'écrit comme étant somme des lagrangiennes de différents secteurs

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{jauge} + \mathcal{L}_C^F + \mathcal{L}_C^S + \mathcal{L}_Y, \quad (I.31)$$

où $\mathcal{L}_{jauge}$ est les lagrangien cinétique des bosons de jauge, $\mathcal{L}_C^F$ est le lagrangien des fermions, $\mathcal{L}_C^S$ le lagrangien des champs scalaires, ainsi que $\mathcal{L}_Y$ est le lagrangien de Yukawa

qui génère la masse aux fermions après la brisure de la symétrie.

Nous rappelons que les bosons de jauge du modèle $SU(5)$ résident dans la représentation 24 qui se décompose en termes des représentations du MS comme suit

$$24 = \underbrace{(8, 1)_0}_{G_\mu} \oplus \underbrace{(1, 3)_0}_{W^{1,2,3}} \oplus \underbrace{(1, 1)_0}_{B_\mu} \oplus \underbrace{(3, 2)_{-\frac{5}{3}}}_{X_\mu} \oplus \underbrace{(\bar{3}, 2)_{\frac{5}{3}}}_{Y_\mu}. \quad (I.32)$$

De plus, Les termes cinétiques et les auto-interactions des bosons de jauge sont contenus dans le lagrangien $\mathcal{L}_{Jauge}$ qui s'écrit sous la forme

$$\mathcal{L}_{Jauge} = -\frac{1}{4}A^{a\mu\nu}A_{\mu\nu}^a = -\frac{1}{4}\text{Tr}(A^{\mu\nu}A_{\mu\nu}), \quad (I.33)$$

avec $A_{\mu\nu}$ est le champ de force associé au champ vecteur $A_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}A_{\mu\nu}^a T_a$, il est donné par $A_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \frac{ig_5}{\sqrt{2}}[A_\nu, A_\mu]$. D'un autre côté, l'expression du lagrangien cinétique $\mathcal{L}_C^F$ est défini comme un lagrangien d'interaction entre les fermions et les bosons de jauge, il est donné par

$$\mathcal{L}_C^F = \frac{i}{2}\text{Tr}\{\bar{10}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu 10\} + i\bar{5}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu 5, \quad (I.34)$$

où la dérivée covariant $\mathcal{D}_\mu$ dans le modèle $SU(5)$ est défini par $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ig_5 V_\mu^a T_a$. En outre, le lagrangien de secteur scalaire [48]

$$\mathcal{L}_C^S = \frac{1}{2}\text{Tr}\{(\mathcal{D}_\mu 24_H)^\dagger (\mathcal{D}_\mu 24_H)\} + (\mathcal{D}_\mu 5_H)^\dagger (\mathcal{D}_\mu 5_H) - V, \quad (I.35)$$

où V est le potentiel scalaire responsable de la brisure spontanée de la symétrie, tandis que les dérivées covariants de la représentation fondamental 5_H et adjoint 24_H , sont données par

$$\mathcal{D}_\mu 24_H = \partial_\mu 24_H + ig_5 [V_\mu, 24_H], \quad (I.36)$$

$$\mathcal{D}_\mu 5_H = \partial_\mu 5_H + ig_5 \sum_{a=1}^{24} V_\mu^a T_a 5_H. \quad (I.37)$$

Secteur de Higgs et brisure de symétrie

En général, le secteur scalaire des GUTs doit y avoir au moins deux représentations différentes, une qui comporte le Higgs responsable de la brisure de la symétrie de GUT vers le modèle standard et l'autre responsable de la brisure de la symétrie du MS. La symétrie $SU(5)$ doit être brisée vers le modèle standard à l'échelle d'énergie M_{GUT} , ainsi que la symétrie du modèle standard va encore se briser vers la symétrie $U(1)_{em}$ à l'échelle électrofaible ($10^2 GeV$). Alors, la brisure de symétrie $SU(5)$ s'effectue en deux étapes selon les modes suivants :

$$SU(5) \xrightarrow{M_{GUT}} SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y, \quad (I.38)$$

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \xrightarrow{M_Z} U(1)_{em}. \quad (I.39)$$

— *Brisure* $SU(5) \rightarrow SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$

Le secteur scalaire du modèle $SU(5)$ est plus étendu que celui du modèle standard. En effet, la brisure spontanée de la symétrie de jauge $SU(5)$ vers le modèle standard est réalisée par le mécanisme de Higgs, où le champ de Higgs noté Σ_S qui gouverne la brisure $SU(5) \rightarrow MS$ réside dans la représentation adjointe 24_H . De plus, depuis la brisure de la symétrie $SU(5)$ se réalise par un Higgs la représentation adjointe 24_H , alors le rang du groupe reste préservé. En outre, la décomposition du Higgs 24_H en terme des représentations du MS implique un singlet noté $\Sigma_S = (1, 1)_0$ selon la décomposition suivante

$$24_H = \underbrace{(8, 1)_0}_{\Sigma_O} \oplus \underbrace{(1, 3)_0}_{\Sigma_T} \oplus \underbrace{(3, 2)_{-\frac{5}{3}}}_{\Sigma_X} \oplus \underbrace{(\bar{3}, 2)_{\frac{5}{3}}}_{\Sigma_{X^c}} \oplus \underbrace{(1, 1)_0}_{\Sigma_S}, \quad (I.40)$$

de plus, une fois que le Higgs 24_H acquière un VEV dans la direction du champ scalaire Σ_S , la brisure de la symétrie de jauge souhaitée est alors réalisée. Encore, les scalaires Σ_X et Σ_{X^c} dans la décomposition du Higgs 24_H , vont jouer le rôle des bosons de Goldston une fois la symétrie $SU(5)$ est brisée. Le potentiel scalaire le plus général du modèle $SU(5)$ est donné comme une somme

$$V = V(24_H) + V(5_H) + V(24_H, 5_H), \quad (I.41)$$

pour des raisons de simplicité, on considère la symétrie discrète ($24_H \rightarrow -24_H$), alors les potentiels scalaires renormalisables des Higgs 24_H et 5_H invariant sous la symétrie $SU(5)$ sont

$$V(5_H) = -\frac{\mu_5^2}{2} 5_H^\dagger 5_H + \frac{a_5}{4} (5_H^\dagger 5_H)^2, \quad (I.42)$$

$$V(24_H) = -\frac{\mu^2}{2} Tr \{24_H^2\} + \frac{a}{4} Tr \{24_H^2\}^2 + \frac{b}{4} Tr \{24_H^4\}, \quad (I.43)$$

$$V(24_H, 5_H) = \lambda_1 5_H^\dagger 5_H \{24_H^2\} + \lambda_2 5_H^\dagger 24_H^2 5_H + \lambda_3 5_H^\dagger 24_H 5_H. \quad (I.44)$$

La brisure de la symétrie $SU(5)$ vers le MS nécessite que la structure du VEV de Higgs 24_H soit dans la direction T_4

$$\langle \Sigma_{24} \rangle = \frac{v_{24}}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}. \quad (I.45)$$

Si les constantes de couplage dans le potentiel (I.43) vérifient les conditions $\mu^2 > 0$ et $30a + 7b > 0$, alors le minimum du potentiel obtenu est [48]

$$v_{24} = \sqrt{\frac{15\mu^2}{30a + 7b}}. \quad (I.46)$$

Après la brisure spontanée de la symétrie $SU(5)$, les bosons de la jauge du MS restent sans masse, tandis que les bosons vecteurs du leptokuark $X \sim (3, 2)_{-\frac{5}{6}}$ et $Y \sim (\bar{3}, 2)_{\frac{5}{6}}$

reçoivent une masse à l'échelle de GUT

$$M_X^2 = M_Y^2 = \frac{25}{8} g_5^2 v_{24}^2. \quad (I.47)$$

— *Brisure* $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$

La deuxième brisure qui concerne de la symétrie électrofaible est réalisée par le VEV de Higgs $\langle 5_H \rangle$, car 5_H est la plus petite représentation qui inclut le doublet de Higgs du modèle standard $\phi = (1, 2)_{\frac{1}{2}} \in 5_H$. Puisque cette brisure est réalisée par un Higgs qui réside dans la représentation fondamentale, ceci entraîne alors la réduction du rang 4 de la symétrie $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Le potentiel le plus général pour le champ de Higgs 5_H est donné par l'équation (I.42), de plus, pour effectuer la brisure de la symétrie du MS, nous devons prendre le VEV du Higgs 5_H dans la direction

$$\langle 5_H \rangle = v_5 (0, 0, 0, 0, 1)^T, \quad (I.48)$$

où les deux dernières composantes du Higgs 5-uplet correspondent au doublet de Higgs doublet du MS.

Masses des fermions

Le lagrangien de Yukawa de la théorie est obtenu à travers les couplages entre le champ de Higgs dans la représentation fondamentale 5_H , et la matière qui réside dans les représentations 10 et $\bar{5}$. Le modèle $SU(5)$ possède un lagrangien de Yukawa $\mathcal{L}_Y$ renormalisable définit comme étant la somme du lagrangien qui fournit la masse aux leptons chargés et quarks de typ-down, ainsi que le lagrangien qui donne la masse aux quarks de type-up [49]

$$\mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_Y^{d,l} + \mathcal{L}_Y^u, \quad (I.49)$$

$$= Y_5 10. \bar{5}. 5_H^\dagger + \frac{1}{8} \varepsilon_5 Y_{10} 10. 10. 5_H + h.c., \quad (I.50)$$

où ε_5 est attribué au tenseur de Levi-Civita de dimension 5, après la brisure du groupe $SU(5)$, le premier lagrangien $\mathcal{L}_Y^{d,L}$ peut être réécrit en termes des champs du MS comme suit

$$\mathcal{L}_Y^{d,L} = Y_5 Q d^c \phi^\dagger + Y_5 e^c L \phi^\dagger. \quad (I.51)$$

Puisque dans les modèle $SU(5)$, les quarks et les leptons sont généralement placés dans la même représentation $\bar{5}$, alors la matrice de masse des quarks down est exactement le transposé de celle des leptons chargés $Y_d = Y_L^T$ à l'échelle de GUT . Cependant, cette relation entre les quarks down leptons chargés n'est pas compatible avec les valeurs expérimentales. D'où, pour concilier cette relation, nous devons passer aux extensions du modèle de Georgi-Glashow. Le deuxième lagrangien $\mathcal{L}_Y^u$ qui génère la masse aux quarks de type-up s'écrit comme

$$\mathcal{L}_Y^u = \frac{1}{8} \varepsilon_5 Y_{10} 10. 10. 5_H, \quad (I.52)$$

$$= \frac{1}{8} \varepsilon_{ijklm} Y_{10} (10)^{ij} \cdot (10)^{kl} \cdot (5_H)^m, \quad (I.53)$$

avec i, j, k, l et m sont les indices du groupe $SU(5)$, ils prennent les valeurs $i, j, k, l, m = 1, 2, 3, 4, 5$. Nous développons ce couplage en termes des champs du MS et nous obtenons

$$\mathcal{L}_Y^u = \frac{1}{2} u^c (Y_{10} + Y_{10}^T) Q \phi. \quad (\text{I.54})$$

Finalement le lagrangien de Yukawa total est

$$\mathcal{L}_Y = Y_5 Q d^c \phi^\dagger + Y_5 e^c L \phi^\dagger + \frac{1}{2} u^c (Y_{10} + Y_{10}^T) Q \phi + h.c. \quad (\text{I.55})$$

Challenges et inconsistants du modèle

Le modèle $SU(5)$ est un candidat de GUT très attrayant et résout certains des problèmes et des défauts présentés dans le MS, mais il produit également quelques-uns de ses propres, on parle de :

Unification des constantes de couplage

L'évolution des constantes de couplage g_1 , g_2 et g_3 du modèle standard en fonction de l'échelle d'énergie, donne les résultats présentés à la figure (I.2). Or, les trois constantes de couplage se rapprochent à une énergie de $M_{GUT} \sim 6 \times 10^{14} \text{GeV}$, bien qu'elles ne se rencontrent pas [51], d'où le modèle $SU(5)$ minimal ne produit pas une unification parfaite au niveau des couplages de jauge. En outre, Les constantes de couplage dans l'extension supersymétrique du modèle standard se rencontrent précisément à une énergie de $M_{GUT} \sim 2 \times 10^{16} \text{GeV}$ (voir figure (I.2)), d'où les modèles de GUT supersymétriques seront plus intéressants à les étudiés comme des modèles d'unification parfaites.

Désintégration du proton

Dans le MS, la conservation du nombre de baryonique et leptonique est une symétrie accidentelle où tous les termes renormalisables et invariants sous le MS préservent les nombres baryonique et leptonique. Cependant, ces derniers sont naturellement violés dans les GUTs puisque les leptons et les quarks se situent dans la même représentation irréductible du groupe de jauge $\mathcal{G}_{GUT}$. En outre, la désintégration du proton dans le modèle $SU(5)$ peut être médiée par les nouveaux bosons de jauge X et Y , en plus du triplet de Higgs coloré T .

Les bosons de jauge de X et Y interagissent entre les quarks et les leptons, alors l'opérateur qui mène à la désintégration rapide du proton à travers l'échanges des bosons X et Y provient du lagrangien cinétique $\mathcal{L}_C^F$ des fermions. En outre, en découplant les champs de jauge X et Y dans le lagrangien $\mathcal{L}_C^F$, on obtiendra l'opérateur effectif de dimension 6 donné par [49]

$$L_{d=6}^{X,Y} = \frac{g_5^2}{m_X^2} u^c d^c u^c e^c, \quad (\text{I.56})$$

cette interaction peut conduire à deux différentes modes de désintégration du proton $p \rightarrow \pi^0 e^+ (\mu^+)$ et $p \rightarrow \pi^0 \bar{\nu}$ voir la figure (I.3) Le taux de désintégration de ces processus est proportionnel aux couplages du lagrangienne effectif $\mathcal{L}_{d=6}^{X,Y}$, il est donné par

$$\Gamma_X \sim g_5^2 \frac{m_p^5}{m_X^4},$$

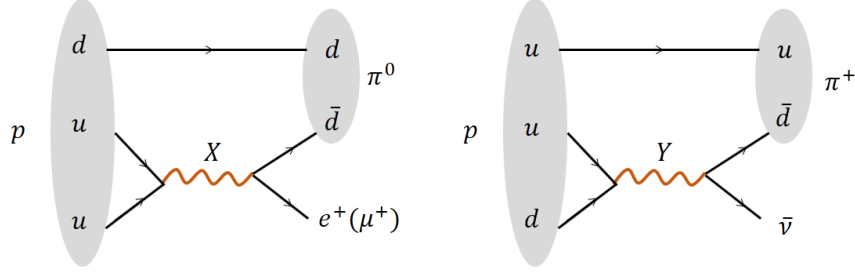


FIGURE I.3 – Les opérateurs de dimension six qui induisent la désintégration du proton via les leptoquarks. A gauche : la désintégration du proton suivant le mode $p \rightarrow \pi^0 e^+(\mu^+)$. A droite : la désintégration du proton suivant le mode $p \rightarrow \pi^0 \bar{\nu}$.

où m_X est la masse des bosons de jauge X et Y , et m_p est la masse du proton, en effet la puissance cinq de la masse du proton a été ajoutée pour rendre le taux de désintégration Γ_X à une dimension d'énergie. La borne expérimentale du processus $p \rightarrow \pi^0 e^+$ fournit une durée de vie $\tau_{p \rightarrow \pi^0 e^+} > 1.6 \times 10^{34}$ année [10] ($\tau_{p \rightarrow \pi^0 \mu^+} > 7.7 \times 10^{33}$ année). Cependant, pour que le modèle $SU(5)$ prédit une durée de vie du proton en accord avec la borne expérimentale, ceci pousse l'échelle de masse m_X d'être

$$m_X > 5.5 \times 10^{15}. \quad (\text{I.57})$$

Où cette échelle de masse est très proche de l'échelle des GUTs supersymétriques, ce qui rend les recherches sur la désintégration des protons plus importants dans ce cadre.

En d'autre part, la désintégration du proton ne se limite pas seulement aux opérateurs médiés par les bosons X et Y , mais on peut déduire également des opérateurs qui conduisent à la désintégration rapide du proton à partir du secteur de Yukawa ; ces opérateurs sont médiés par le triplet de couleur T inclus dans le Higgs fondamentale 5_H . Ecrivons les couplages de Yukawa du lagrangien (I.50) en terme de triplet de Higgs coloré T

$$\mathcal{L}_Y^T = \left(\frac{1}{2} Q Y_{10} Q - u^c Y_{10} e^c \right) T + (L Y_5 Q - d^c Y_5 u^c) T^\dagger. \quad (\text{I.58})$$

En découplant le triplet de couleur T dans ce lagrangien, on obtient alors l'opérateur effectif de dimension 6 donné par l'interaction de Fermi comme suit

$$\mathcal{L}_{d=6}^T = \frac{Y_{10} Y_5}{2m_T^2} Q Q Q L + \frac{Y_5 Y_{10}}{m_T^2} d^c u^c u^c e^c, \quad (\text{I.59})$$

où m_T est la masse du triplet de Higgs coloré, ainsi que Y_{10} et Y_5 sont les constantes de couplage. Selon ce lagrangien effectif $\mathcal{L}_{d=6}^T$, son taux de désintégration est donné par [48][49]

$$\Gamma_T \sim (Y_{10} Y_5)^2 \frac{m_p^5}{m_T^4}. \quad (\text{I.60})$$

A partir de cette expression, nous remarquons que si l'opérateur $\mathcal{L}_{d=6}^T$ possède des constantes de couplage Y_{10} et Y_5 très petites en plus d'une masse du triplet m_T très grande, alors nous pourrions avoir une grande durée de vie du proton, mais ce n'est pas le cas puisque

les nucléons sont constitués de quarks de la première génération, alors le produit de leurs constantes de couplage correspondantes est généralement de l'ordre de $(Y_{10}Y_5) \sim 3.40 \times 10^{-10}$ [11]. En considérant la limite inférieure expérimentale de la durée de vie du proton $\tau_{p \rightarrow \pi^0 e^+} > 1.6 \times 10^{34}$ année, nous obtenons la borne inférieure de la masse du triplet

$$m_T > 3.64 \times 10^{11} \text{ GeV}. \quad (\text{I.61})$$

Dans un autre ordre d'idée, pour maintenir la masse du triplet m_T à une grande échelle, tandis que la masse du doublet de Higgs reste dans l'échelle électrofaible, c'est ce qu'on appelle le problème de la séparation du doublet-triplet de Higgs.

Séparation du doublet-triplet de Higgs

Nous avons mentionné précédemment que le doublet de Higgs du MS ϕ est inclu dans la plus petite représentation $5_H \in SU(5)$. Toutefois, le Higgs doublet ϕ ne réside pas tout seul dans cette représentation, mais il est couplé avec un triplet de couleur supplémentaire $T = (3, 1)_{\frac{1}{3}}$ que nous avons vu précédemment qu'il contribue comme un médiateur dans la désintégration du proton. En raison de la structure de Higgs 5_H , le problème de la séparation du doublet-triplet de Higgs est la question comment forcer la masse du doublet de Higgs d'être à l'échelle électrofaible, alors que la masse du triplet de couleur soit extrêmement lourd dans l'échelle de M_{GUT} ($m_T > 4.48 \times 10^{11} \text{ GeV}$) pour étendre la durée de vie du proton au-dessus des limites expérimentales actuelles. En effet, une solution naturelle à ce problème en évitant l'ajustement fin, implique généralement l'ajout des champs supplémentaires dans des représentations de dimension supérieure au modèle ou des symétries supplémentaires [53].

Masse du neutrino

Un des plus grands problèmes rencontrés dans le modèle standard est la prédiction des masses nulle de neutrinos. Ces masses sont encore absentes dans le modèle $SU(5)$ minimal ; ceci est dû à l'absence du neutrino droit dans ces modèles. Cependant, il existe plusieurs façons de générer des masses de neutrinos dans le modèle $SU(5)$ dans les deux versions supersymétrique et non supersymétrique. A ce stade, le modèle doit être étendu par des champs de fermions et de Higgs supplémentaires pour tenir compte des masses de neutrinos non nulles.

Masses des quarks down et leptons chargées

Nous avons vu que le modèle $SU(5)$ minimal prédit une relation entre les masses des fermions à l'échelle M_{GUT} ; $m_b = m_\tau$, $m_s = m_\mu$ et $m_d = m_e$. En effet, ceci rend le modèle irréaliste au niveau des masses des fermions malgré que la première relation $m_b = m_\tau$ entre la masse du quark bottom et du lepton tau peut être acceptable à l'échelle M_{GUT} (nous avons $m_b \simeq 3m_\tau$) [11]. Cependant, au-delà du modèle de Georgi-Glashow est nécessaire pour éviter cette relation, ceci peut être réalisé par l'introduction d'un Higgs supplémentaire dans une représentation de dimension supérieure, ou par des opérateurs non renormalisables au modèle pour étendre les paramètres d'espace permettant plus de liberté pour les masses de fermions.

Au fond, le modèle Georgi-Glashow est le modèle d'unification le plus simple au-delà du modèle standard. C'est un modèle très prédictif, mais ce n'est certainement pas réaliste. A savoir, les constantes de couplage ne sont pas complètement unifiées à l'échelle de GUT, les neutrinos restent sans masse, la désintégration rapide du proton qui est en désaccord

avec la bonde expérimental, l'unification à l'échelle M_{GUT} , et les masses de quarks down et de leptons chargés contredit les résultats expérimentaux. Toutes ces insuffisance peuvent être contournées dans le cadre des extensions du modèle de Georgi-Glashow.

I.2.3 Extensions du modèle de Georgi-Glashow

Nous avons vu précédemment que le modèle $SU(5)$ souffre de plusieurs problèmes qui les rendent pas réaliste, d'où il nécessite des modifications appropriées pour un modèle de GUT réaliste. Ici nous allons étudier les extensions du modèle $SU(5)$ minimal proposé par Georgi et Glashow ; ces extensions sont introduites pour objectif de traiter les problèmes rencontrer dans le modèle $SU(5)$ minimal. En effet, le premier type d'extension du modèle $SU(5)$ a été proposé pour ajuster la relation entre les quarks down et les leptons chargés. Dans ce contexte, pour obtenir une relation cohérente entre les masses des quarks down et les leptons chargés, il existe deux façons possibles qui incluent dans deux différents extensions du modèle de Georgi-Glashow : *le modèle renormalisable* et le modèle non-renormalisable. Dans le modèle $SU(5)$ renormalisable les masses des quarks down et les leptons chargés sont ajustées par l'introduction d'un Higgs supplémentaire dans la représentation 45 [54], tandis que dans le modèle non renormalisable les masses sont réalisées en tenant compte de l'effet des opérateurs de dimension supérieure [55].

Modèle $SU(5)$ non-renormalisable

Le modèle $SU(5)$ non-renormalisable est proposé pour la première fois par Ellis and Gaillard comme extension du modèle de Georgi-Glashow [55]. En outre, ce modèle consiste à ajouter le lagrangien $\Delta\mathcal{L}_Y$ qui comporte des termes non-renormalisables de dimension 5 donné par

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L}_Y = & Y'_5 10. \bar{5}. \left(\frac{24_H}{\Lambda} 5_H \right)^\dagger + Y''_5 \left(\frac{24_H}{\Lambda} 10 \right). \bar{5}. 5_H^\dagger, \\ & + \frac{1}{8} \varepsilon_5 Y'_{10} 10. 10. \left(\frac{24_H}{\Lambda} 5_H \right) + \frac{1}{8} \varepsilon_5 Y''_{10} 10. \left(\frac{24_H}{\Lambda} 10 \right). 5_H, \end{aligned} \quad (I.62)$$

où Λ est l'échelle du cutoff —l'échelle d'énergie où les opérateurs effectifs devient importants— et Y'_5 , Y''_5 , Y'_{10} , et Y''_{10} sont les constantes de couplage. Nous ajoutons ces termes au lagrangien $\mathcal{L}_Y$ dans (I.50), on obtient les matrices de masses suivantes [55]

$$\begin{aligned} Y_u &= -\frac{1}{2} (Y_{10} + Y_{10}^T) + \frac{3}{2\sqrt{15}} \frac{v_{24}}{\Lambda} (Y'_{10} + Y_{10}^{\prime T}) - \frac{3}{4\sqrt{15}} \frac{v_{24}}{\Lambda} (2Y''_{10} - Y_{10}^{\prime\prime T}), \\ Y_d &= Y_5^T - \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{v_{24}}{\Lambda} Y'_5 + \frac{2}{\sqrt{15}} \frac{v_{24}}{\Lambda} Y''_5, \\ Y_e &= Y_5 - \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{v_{24}}{\Lambda} Y'_5 - \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{v_{24}}{\Lambda} Y''_5. \end{aligned} \quad (I.63)$$

Modèle $SU(5)$ renormalisable

Le modèle $SU(5)$ renormalisable consiste à étendre le modèle de Georgi-Glashow par un Higgs supplémentaire dans la représentation 45_H , ce modèle a été proposé par Georgi-Jarlskog où il garde la renormalisabilité du modèle en tenant compte que les couplages de

Yukawa à l'arbre [54]. Le lagrangien de Yukawa $\mathcal{L}_Y$ de ce modèle qui inclut l'interaction avec le Higgs 45_H est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y = & Y_{10} 10.10.5_H + Y'_{10} 10.10.45_H + \\ & Y_5 10.\bar{5}.5_H^\dagger + Y'_5 10.\bar{5}.45_H^\dagger + h.c., \end{aligned} \quad (I.64)$$

en utilisant les VEVs des Higgs 5_H et 45_H [56],

$$\langle 5_H \rangle^\alpha = (0, 0, 0, 0, v_5)^T, \quad (I.65)$$

et

$$(45_H)_{\gamma}^{\alpha\beta} = -(45_H)_{\gamma}^{\beta\alpha}, \quad \sum_{\beta=1}^5 (45_H)_{\beta}^{\alpha\beta} = 0 \quad (I.66)$$

$$\langle (45_H)_{\gamma}^{\alpha 5} \rangle = v_{45} [\text{diag}(1, 1, 1, -3, 0)]_{\gamma}^{\alpha}, \quad (I.67)$$

alors les masses pour les leptons chargés et les quarks de type-down sont données par [54] :

$$m_d = Y_5 v_5 + 2Y'_5 v_{45}, \quad (I.68)$$

$$m_e = Y_5 v_5 - 6Y'_5 v_{45}, \quad (I.69)$$

nous remarquons que l'introduction de Higgs supplémentaire dans représentation 45_H est suffisant pour ajuster les masses des fermions dans un modèle renormalisable.

Masses des neutrinos

Comme dans le cas du MS, les neutrinos restent encore des particules non massives dans le modèle $SU(5)$ minimal, toutefois, les expériences prouvent que les neutrinos ont une masse très faible. Portant, afin de générer des masses de neutrinos dans le modèle $SU(5)$, le modèle doit être étendu par le secteur de Higgs ou de fermions. Or, l'implémentation des champs supplémentaires reste nécessaire même dans les deux modèles renormalisable et non renormalisable pour générer les masses aux neutrinos. En outre, les neutrinos dans le modèle $SU(5)$ peuvent avoir des masses à travers le mécanisme seesaw en étendant le modèle par un neutrino droit 1_ν (seesaw type I) [14], par un Higgs dans la représentation 15_H (seesaw type II) [57] ou par un champ fermionique dans la représentation 24_F (seesaw type III) [59]. Nous allons étudier en détailles les trois mécanismes de seesaw dans le chapitre suivant.

I.2.4 Modèle $SU(5)$ supersymétrique

En général, les GUTs supersymétriques sont des extensions de ceux non supersymétriques, où la théorie effective à basse énergie dans ces modèle satisfont la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ en plus de la symétrie de la jauge du modèle standard, et par conséquent, le spectre comprend tous les particules du MS ainsi que leurs partenaires supersymétriques.

La version supersymétrique minimale du modèle de Georgi-Glashow est la version la plus simple du modèle $SU(5)$ supersymétrique, elle a été étudiée pour la première fois dans la référence [60]. En réalité, la combinaison entre la supersymétrie et les modèles de GUT est motivée par la résolution de certains problèmes rencontrés dans les modèles non-supersymétrique. En particulier, la supersymétrie à petite échelle résout le problème de la

hiérarchie de jauge. De plus, en utilisant les équations du groupe de renormalisation (RGE) [51][52], les trois constantes de couplage du modèle standard supersymétrique minimale (MSSM) au-dessus de l'échelle TeV, se rencontrent presque exactement à l'échelle $M_{GUT} \sim 2 \times 10^{16} \text{ GeV}$ ou les trois interactions s'unifient dans un groupe de GUT (voir figure 1.2).

Dans le contexte du modèle $SU(5)$ supersymétrique, toute la matière chirale du modèle standard supersymétrique minimal (MSSM) est unifiée dans les mêmes représentations du modèle $SU(5)$ non supersymétrique, où les deux représentations $\bar{5} = (D^c, L)$ et $10 = (Q, U^c, E^c)$ sont considérées comme des superchamps chiraux. En outre, le secteur de Higgs dans le modèle minimal est composé de trois Higgses 5_{H_u} , $\bar{5}_{H_d}$ et 24_H , c'est-à-dire un Higgs dans la représentation 24_H nécessaire pour la brisure de la symétrie de jauge $SU(5)$, mais cette fois deux types de Higgses 5_{H_u} , $\bar{5}_{H_d}$ sont nécessaires pour générer les masses aux fermions. Effectivement, les représentations dans les théories supersymétriques signifient également les supermultiplets, donc elles contiennent à la fois les particules et leurs superpartenaires.

Couplages de Yukawa et secteur de Higgs

La construction du modèle $SU(5)$ supersymétrique dépend du superpotentiel de la théorie, il est principalement noté par W et doit être holomorphe dans les composantes scalaires des superchamps chiraux, c'est l'une des raisons de l'introduction d'un deuxième doublet Higgs dans le MSSM. Le superpotentiel total du modèle $SU(5)$ supersymétrique est donné comme

$$W = W_C + W_Y + W_{BS}, \quad (\text{I.70})$$

où W_C est le superpotentiel associé au secteur caché ; il contient des termes doux qui brisent la supersymétrie à l'échelle de l'ordre de TeV, W_Y est le superpotentiel de Yukawa qui génère les masses aux fermions et W_{BS} est le superpotentiel responsable de la brisure de la symétrie de jauge $SU(5)$.

Les masses de Dirac pour les quarks et les leptons chargées sont générées à partir des couplages de Yukawa qui impliquent les champs de Higgs up 5_{H_u} et down $\bar{5}_{H_d}$. En effet, le Higgs up 5_{H_u} est responsable aux masses des quarks up, tandis que le Higgs down $\bar{5}_{H_d}$ génère les masses aux quarks down et lepton chargées. Le superpotentiel de Yukawa s'écrit sous la forme suivante

$$W_Y = y_u^{ab} 10_a \cdot 10_b \cdot 5_{H_u} + y_d^{ab} 10_a \cdot \bar{5}_b \cdot \bar{5}_{H_d}, \quad (\text{I.71})$$

avec y_u^{ab} et y_d^{ab} sont des matrices 3×3 de Yukawa. Le premier couplage du superpotentiel W_Y donne la masse aux quarks de type up, tandis que les quarks down et les leptons chargés reçoivent leurs masses à partir du deuxième couplage. De plus, Les matrices de masses des fermions sont données en termes des VEVs des doublets de Higgs $H_u \in 5_{H_u}$ et $H_d \in \bar{5}_{H_d}$

$$m_u = y_u \langle H_u \rangle, \quad (\text{I.72})$$

$$m_e = m_d = y_d \langle H_d \rangle, \quad (\text{I.73})$$

nous remarquons que ce modèle prédit l'égalité entre les masses des quarks down et les leptons chargées $m_e = m_d$, ce qui montre que la situation est similaire à celle du modèle minimal de Georgi-Glashow. En outre, les neutrinos n'ont pas une masse puisque le modèle ne contient pas le neutrino droit.

La symétrie $SU(5)$ doit être brisée par le Higgs adjoint 24_H pour préserver le rang du groupe lors de la brisure. Le superpotentiel W_{BS} responsable de la brisure est donné par

$$W_{BS} = zTr24_H + xTr24_H^2 + yTr24_H^3 + \lambda 5_{H_u} 24_H \bar{5}_{H_d} + \mu 5_{H_u} \bar{5}_{H_d}, \quad (I.74)$$

cette brisure exige un VEV dans l'échelle de M_{GUT}

$$\langle 24_H \rangle = v_{24} diag(2, 2, 2, -3, -3). \quad (I.75)$$

Après la brisure de la symétrie $SU(5)$, le triplet de Higgs T coloré et le doublet de Higgs H acquièrent les masses suivantes [48][49]

$$m_T = \mu + 2\lambda v_{24}, \quad (I.76)$$

$$m_H = \mu - 3\lambda v_{24}, \quad (I.77)$$

or, afin de récupérer la masse du Higgs doublet à basse énergie, nous pouvons effectuer la séparation du doublet-triplet de Higgs tout en considérant l'ajustement fin sur les paramètres des masses (I.76) et (I.77) comme

$$\mu = 3\lambda v_{24}, \quad (I.78)$$

de sorte que la masse du Higgs triplet coloré devient

$$m_T = 5\lambda v_{24}. \quad (I.79)$$

Désintégration du proton

Nous avons vu dans le modèle $SU(5)$ non supersymétrique, que la désintégration du proton par les opérateurs de dimension $d = 6$ est médiée par les bosons X et Y ; ces derniers sont principalement générés via le mode $p \rightarrow e^+ \pi^0$. Cependant, la bonde expérimentale pour ce mode ($\tau_{p \rightarrow \pi^0 e^+} \geq 1.6 \times 10^{34}$ année) est en désaccord avec la prédiction du modèle. En outre, le modèle $SU(5)$ supersymétrique n'aura pas de problème de désintégration du proton à travers ce type d'opérateurs, ceci est dû au fait que l'échelle d'énergie $M_{GUT} \approx 2 \times 10^{16}$ GeV est plus large que celui du modèle non supersymétrique. En fait, la désintégration rapide du proton dans le modèle $SU(5)$ supersymétrique, provient des opérateurs de dimension $d = 4$ et $d = 5$ donnés par [61][62].

$$10.\bar{5}.\bar{5} \supset (U^c D^c D^c) + (QLD^c) + (E^c LL), \quad (I.80)$$

$$10.10.10.\bar{5} \supset (QQQL) + (U^c D^c D^c E^c). \quad (I.81)$$

L'opérateur trilinéaire $10.\bar{5}.\bar{5}$ de dimension $d = 4$, constitue par des termes qui violent les nombre baryonique B et leptonique L , induisant ainsi une désintégration rapide du proton. Toutefois, cette opérateur peut être éliminé en imposant au modèle des symétries supplémentaires tel que la parité- R comme dans le cas du modèle MSSM [45]. En d'autre part, le deuxième opérateur de dimension $d = 5$, provient du superpotentiel de Yukawa dans l'équation (I.71); cet opérateur contient des termes induits par l'échange du triplet de Higgs coloré. En outre, la désintégration du proton découle de la conversion des squarks et sleptons aux quarks et leptons $\tilde{q}\tilde{l} \rightarrow ql$ via l'échange d'un wino $\tilde{w}$ pour le couplage $QQQL$, ainsi que via l'échange d'un higgsino $\tilde{h}$ pour le couplage $U^c D^c D^c E^c$, voir la figure

(I.4).

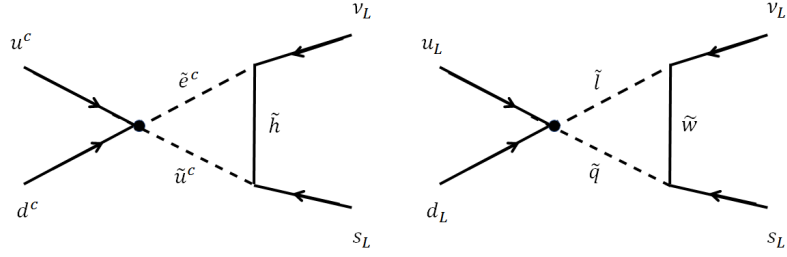


FIGURE I.4 – Les opérateurs de dimension 5 qui conduisent à la désintégration du proton dans le modèle $SU(5)$ SUSY. A gauche : la désintégration du proton via l’échange d’un higgsino $\tilde{h}$. A droite : la désintégration du proton via l’échange d’un wino $\tilde{w}$.

Le mode qui domine la désintégration du proton dans ce cas est $p \rightarrow K^+ \bar{\nu}$ [63], où la limite récente vient de l’expérience Superkamiokand est $\tau_{p \rightarrow K^+ \bar{\nu}} \geq 5.9 \times 10^{33}$ année [11]. En outre, l’analyse du modèle $SU(5)$ supersymétrique minimal dans la référence [64], montre que l’unification des couplages de jauge contraint la masse du triplet de Higgs coloré d’être $m_T \leq 3.6 \times 10^{15} GeV$, or cette dernière est inférieure à la limite $m_T \geq 7.6 \times 10^{16} GeV$ nécessaire pour la stabilité du proton. Quoique, cette étude sur la désintégration du proton nous ne pouvons pas la prendre pour acquis puisqu’elle est gouverné par les deux hypothèses suivantes : (i) les prédictions du modèle sont affectées seulement par la présence d’opérateurs renormalisables, (ii) les masses de jaugino, Higgsino et les deux premières générations de sfermions, sont supposées d’être de l’ordre de $\mathcal{O}(TeV)$.

Commentaires sur le modèle $SU(5)$ supersymétrique minimal

Ce modèle a été proposé pour éluder les inconsistances qui existe dans le modèle de Georgi-Glashow. En effet, il a pu unifier les couplage de jauge à une échelle d’énergie de $M_{GUT} \approx 2 \times 10^{16} GeV$ ainsi que sa prédiction sur la durée de vie du proton qui reste encore en accord avec les limites de désintégration du proton. Cependant, ce modèle n’est pas phénoménologiquement réaliste au niveau des masses des fermions ; où il prédit la relation entre les quarks down et les leptons chargés $m_e = m_d$, en plus de l’absence de masses de neutrinos et qu’il ne donne pas une solution au problème de séparation du doublet-triplet de Higgs. Partant de ce fait, des extensions du modèle $SU(5)$ supersymétrique minimal sont nécessaires pour la réalisation d’un modèle $SU(5)$ satisfaisant. Comme dans le cas du modèles de Georgi-Glashow, nous pouvons étendre le modèle minimal par des champs soit fermionique ou bosonique pour éviter les incohérences de ce modèle. Or, d’avoir introduire les champs de Higgs $45_H + \overline{45}_H$ dans le modèle $SU(5)$ est capable d’éviter les l’égalités de masses entre les quarks down et les leptons chargés. En outre, afin de générer des masses de neutrinos, on peut utiliser les mécanismes de seesaw (de Type I, II ou III) après une extension dans le secteur de Higgs ou de fermion, alors que la séparation du doublet-triplet de Higgs, peut être réalisé par des mécanismes entraîne des Higgs dans des représentations 50 , $\overline{50}$ et 75 [53].

I.3 Modèles $SO(10)$

I.3.1 Secteurs fermionique, de jauge et de Higgs

A côté de l'étude large sur le modèle $SU(5)$, l'un des modèles qui semble d'être le plus prometteur et couramment utilisé dans les GUTs est celui basé sur la symétrie de jauge $SO(10)$ de rang 5. Il a d'abord été abordé par Georgi [7], et Fritzsh et Minkowski en 1975 [8]. En général, ce modèle possède un certain nombre de caractéristiques supplémentaires par rapport au modèle $SU(5)$. A titre d'exemple, tous les fermions de la matière s'intègrent dans une seule représentation du groupe $SO(10)$, deuxièmement, cette représentation contient également le neutrino droit conduisant alors à des masses de neutrinos non nulles.

Fermions

La propriété la plus remarquable dans ce modèle est qu'une famille de quarks et de leptons du MS en plus du neutrino droit, s'intègrent parfaitement dans la représentation spinorielle 16 du groupe $SO(10)$. Par exemple, la première famille de quarks et de leptons est organisée sous la forme

$$16_M = (Q, u^c, d^c, L, \nu^c, e^c), \quad (\text{I.82})$$

donc tous les fermions du même famille localisent dans une seule représentation. Comme nous l'avons vu dans le modèle $SU(5)$, les quinze fermions du MS sont mis en deux représentations irréductibles $\bar{5} = (L, u^c)$ et $10 = (Q, d^c, e^c)$. Encore, la représentation 16 se transforme sous le modèle $SU(5)$ comme étant $16 = 10 + \bar{5} + 1$ où la seizième particule est identifiée avec le neutrino droit qui réside dans la représentation singlet $1 = \nu^c$. D'où, le modèle $SO(10)$ présent une théorie d'unification naturelle au niveau du regroupement de la matière ordinaire dans une seule représentation.

Bosons de jauge

Dans le cas du groupe $SO(N)$, la représentation adjointe est de dimension $N(N-1)/2$ (pour $SU(N)$, elle est de dimension N^2-1), le groupe $SO(10)$ possède alors 45 générateurs et par conséquent 45 bosons de jauge qui se transforment dans sa représentation adjointe 45. Cette représentation se décompose sous les sous-groupes $SU(5)$ et $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ comme suit

$$45 = 24 + 1 + 10 + \bar{10}, \quad (\text{I.83})$$

et

$$45 = \left. \begin{aligned} &(8, 1, 0) + (1, 3, 0) + (1, 1, 0) \\ &+ \left(3, 2, \frac{1}{6}\right) + \left(\bar{3}, 2, -\frac{1}{6}\right) + \left(3, 2, \frac{1}{6}\right) \\ &+ \left(\bar{3}, 2, -\frac{1}{6}\right) + \left(\bar{3}, 1, -\frac{2}{3}\right) + \left(3, 1, \frac{2}{3}\right) \\ &+ (1, 1, 1) + (1, 1, -1) + (1, 1, 0) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Bosons de jauge du MS} \\ \text{Bosons de jauge} \\ \text{supplémentaires} \end{array} . \quad (\text{I.84})$$

La représentation adjointe 45 du groupe est associée avec les 45 bosons de jauge prédit par le modèle $SO(10)$, y compris les 12 bosons de jauge du modèle standard (huit gluons G^a ($a = 1, \dots, 8$), trois bosons W^i ($i = 1, 2, 3$) et le champ B associé au $U(1)_Y$). En outre, il existe 33 bosons de jauge supplémentaires, ces bosons portent des charges sous les groupes $SU(3)_C$, $SU(2)_L$ et $U(1)_Y$ comme indiqué dans l'équation (I.84). D'ailleurs, toutes les bosons de jauge supplémentaires ayant une charge de couleur peuvent produire la désintégration rapide du proton.

Secteur de Higgs

Le secteur de Higgs n'est pas complètement fixé dans ce modèle car il existe un certain nombre de choix de représentations pour identifier le secteur de Higgs, ce qui donne alors diverses prédictions pour les masses de fermions. Tout d'abord, nous allons définir les types de Higgs qui peuvent se coupler avec la matière chirale via les couplages de Yukawa. Le produit tensoriel de deux représentations spinorielles $16 \otimes 16$ se décompose sous le groupe $SO(10)$ comme étant

$$16 \otimes 16 = 10 \oplus 120 \oplus 126, \quad (\text{I.85})$$

où 10 est la représentation fondamentale de $SO(10)$, 120 est la représentation complètement antisymétrique de 3 indices, alors que la représentation complètement antisymétrique de 5 indices 252, se décompose en somme de $126 \oplus \bar{126}$. En outre, selon le produit (I.85), on remarque que les Higgs qui peuvent se coupler via les couplages de Yukawa sont 10, 120 et $\bar{126}$, d'où tous ces types de Higgs comportent des doublets sous la symétrie $SU(2)_L$ nécessaire pour générer les masses aux fermions. En plus, le choix de Higgs introduit, implique une classe différente du modèle $SO(10)$.

Modèle $SO(10)$ minimal

Le modèle $SO(10)$ le plus simple est appelé le modèle minimal, il a été considéré par Babu et Mohapatra [65], ce modèle considère la possibilité la plus économique dans le secteur de Higgs pour générer des masses viables aux fermions. En outre, il comporte les Higgs qui interagissent avec les fermions dans les représentations 10_H et $\bar{126}_H$. Nous allons voir par la suite que la combinaison des deux Higgs dans ce cas est suffisant pour donner les masses aux fermions en ajustant la relation indésirable entre les fermions chargées ($m_{u,s,b} = m_{e,\mu,\tau}$) prédite par le modèle $SU(5)$ minimal, en plus, ce modèle prédit les masses des neutrinos à travers le mécanisme de seesaw.

Modèle $SO(10)$ non-minimal

Une autre classe du modèle $SO(10)$ qui est largement étudié dans la littérature correspond à l'ajout d'un multiplet de Higgs dans la représentation 120_H au modèle minimal ; c'est une extension au modèle $SO(10)$ minimal appelé *le modèle $SO(10)$ non minimal* [66]. Le secteur de Higgs responsable aux masses des fermions constitue par $\{10_H, 120_H, \bar{126}_H\}$, où le Higgs $\bar{126}_H$ joue le rôle du Higgs $\bar{45}_H \in SU(5)$ qui entraîne la relation de masse entre les quarks down et les leptons chargés, par le mécanisme de Georgi-Jarlskog. On remarque bien que ces deux types de modèles $SO(10)$ (minimal et non-minimal) se différencient dans le secteur de Higgs qui interagit avec les fermions pour fournir leurs masses. En fait, une classification complète se fait sur les modèles $SO(10)$ en tenant compte également le choix du Higgs responsable à la brisure de la symétrie de jauge $SO(10)$.

I.3.2 Brisure des modèles $SO(10)$

Maintenant, nous allons étudier les modes de brisure de la symétrie $SO(10)$ vers la symétrie du modèle standard pour décrire la physique à basse énergie. En fait, le groupe $SO(10)$ possède plusieurs sous-groupes, notamment les sous-groupes maximaux de rang 5 ; $SU(5) \times U(1)$ et $SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$. D'ailleurs, la brisure peut être effectuée également vers des sous-groupes de rang inférieur à 5 avant d'aboutir à la symétrie du modèle standard. Contrairement au modèle $SU(5)$, le groupe $SO(10)$ ne possède pas seulement une seule étape de brisure de la symétrie, il peut être brisé vers un groupe intermédiaire en premier étape, puis vers le modèle standard. En général, il existe de

nombreuses façons de briser le groupe $SO(10)$ vers un sous-groupe intermédiaire de rang $r \leq 5$ et puis vers le MS, les chemins les plus intéressants sont donnés dans la figure (I.5) [67]

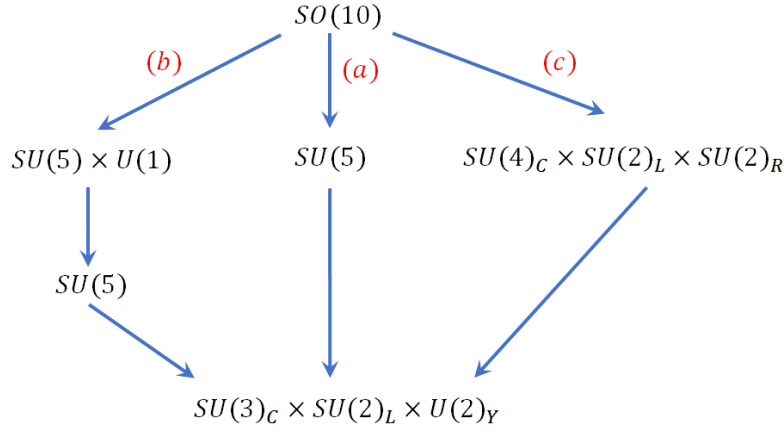


FIGURE I.5 – Différents chemins de brisure du groupe $SO(10)$ vers le modèle standard.

(a) **Brisure $SO(10) \rightarrow SU(5)$**

La brisure vers le sous-groupe $SU(5)$ réduit le rang du groupe par un, d'où ce type de brisure nécessite un Higgs dans une représentation non adjointe telle que 16_H ou 126_H . En effet, la brisure vers $SU(5)$ par un de ces deux type de Higgs est effectuée depuis la décomposition des Higgs 16_H et 126_H contiennent le singlet sous $SU(5)$ selon les décompositions suivantes [68]

$$16 \rightarrow 10 + \bar{5} + 1, \quad (I.86)$$

$$126 \rightarrow 50 + 45 + \bar{15} + 10 + \bar{5} + 1. \quad (I.87)$$

Pour compléter la brisure vers le MS, un Higgs supplémentaire dans la représentation adjoint $24_H \in SU(5)$ est nécessaire ; ce champ de Higgs peut provenir de la représentation adjoint 45 ou d'une représentation de dimension plus grande comme 54 ou 210 du groupe $SO(10)$.

(b) **Brisure $SO(10) \rightarrow SU(5) \times U(1)$**

Dans ce cas, la brisure est réalisée vers le sous-groupe maximal $SU(5) \times U(1)$ dont le rang est le même que $SO(10)$. En fait, le modèle basé sur la symétrie $SU(5) \times U(1)$ peut être traité comme étant un modèle $SU(5)$ standard avec une symétrie supplémentaire $U(1)$, ou il peut être traité comme le modèle appelé le modèle $SU(5)$ Flipped [69]. La première brisure vers le groupe intermédiaire $SU(5) \times U(1)$ ne dépend pas de la nature du modèle $SU(5)$ et ceci peut être réalisée avec des champs de Higgs dans les représentations 45_H ou 210_H , ces dernières acquièrent des VEVs à l'échelle M_{GUT} le long du composant singlet 1_0 selon les décompositions suivantes

$$\begin{aligned}
 SO(10) &\rightarrow SU(5) \times U(1) \\
 45 &\rightarrow 24_0 + 10_1 + \bar{10}_{-1} + 1_0, \\
 210 &\rightarrow 75 + 40_{-1} + \bar{40}_1 + 24_0 + 10_1 \\
 &\quad + \bar{10}_{-1} + 5_2 + \bar{5}_{-2} + 1_0.
 \end{aligned} \quad (I.88)$$

En d'autre part, La brisure vers le modèle standard exige d'autres champs de Higgs en plus de ceux dans les représentations 45_H ou 210_H . Dans cette étape, le choix du Higgs responsable de cette brisure dépend cette fois de la nature du modèle $SU(5) \times U(1)$ considéré. Or, dans le cas où le modèle est considéré comme le modèle $SU(5)$ *Flipped*², alors il est connu que sa brisure vers le MS nécessitent des champs de Higgs dans les représentations 10_1 et $\overline{10}_{-1}$ proviennent des représentations 16 et 16 respectivement du groupe $SO(10)$, de plus dans le cas du modèle $SU(5)$ standard, la brisure est réalisée par la représentation adjoint $24 \in SU(5)$ comme dans l'exemple précédent.

(c) **Brisure $SO(10) \rightarrow SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$**

La brisure du groupe $SO(10)$ vers le model de Pati-Salam est parmi les chemins de brisure les plus populaires dans la littérature [70], la première brisure demande un Higgs dans le représentation 210, alors que la brisure du modèle PS vers le MS est réalisée par le Higgs dans $(10, 1, 3)_H$ provient de la représentation $\overline{126}_H$ du groupe $SO(10)$, ce chemin de brisure sera traité par la suite.

Par ailleurs, il existe un autre scénario intéressant de la brisure du modèle $SO(10)$, ce type de brisure se produit en plusieurs étapes; c'est à dire à travers deux groupes intermédiaires selon le schéma suivant [70]

$$SO(10) \rightarrow \text{Pati-Salam} \rightarrow SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L} \rightarrow \text{MS},$$

la première brisure vers le modèle PS est la même comme dans le cas précédent, de plus, la deuxième étape consiste à briser le modèle PS vers le modèle basé sur la symétrie $SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ appelée symétrie "gauche-droite", ceci est accompli en brisant la partie $SU(4)_C$ du modèle PS vers la symétrie $SU(4)_C \times U(1)_{B-L}$ en utilisant le Higgs $(15, 1, 1)$ provient de la représentation 45 du groupe $SO(10)$.

I.3.3 Modèle $SO(10)$ minimal supersymétrique

Le modèle $SO(10)$ minimal est défini comme étant un modèle qui dispose le minimum d'interaction de Yukawa contribuant aux spectres de masses. En plus, la minimalité du modèle est souvent imposée sur le contenu de Higgs; le modèle $SO(10)$ appelé minimal au sens qu'il ne contient que les opérateurs renormalisables à l'échelle M_{GUT} et qu'il possède un nombre minimal des champs Higgs compatibles avec les données expérimentales à basse énergie. Le modèle $SO(10)$ minimal dans le cas non supesymétrique a été considéré par Babu et Mohapatra dans [65], une année plus tard, ils proposent sa version supesymétrique pour la première fois dans [71]. Ensuite, une analyse détaillée à ce modèle est réalisé dans [72].

Dans cette partie, nous mettons l'accent sur la version supersymétrique du modèle $SO(10)$ minimal, puisqu'il est plus prédictif au niveau de l'unification des constantes de couplage par rapport au modèle non supersymétrique. Dans le modèle $SO(10)$ minimal supersymétrique, tous les fermions du MS, et leurs superpartenaires sont inclus dans la représentation irréductible 16. En outre, le secteur de jauge est fixé, puisque les bosons de jauge doivent appartenir à la représentation adjointe 45 de $SO(10)$. L'incorporation du Higgs électrofaible dans les représentations du modèle $SO(10)$ est fixée par l'exigence qu'il doit se coupler avec les fermions du MS via les couplages de Yukawa. Comme cela a

2. Pour une introduction sur ce modèle, voir l'annexe.

été expliqué précédemment, les seules représentations possibles pour les champs de Higgs sont 10, 126 et $\overline{126}$, en conséquence, ce modèle minimal possède un secteur de Higgs total $\{10_H, 126_H, \overline{126}_H, 210\}$.

Couplages de Yukawa

Parmi les quatre Higgs du modèle, seul les Higgse 10_H et $\overline{126}_H$ peuvent se coupler avec la matière bilinéaire $16_i \times 16_j$ au niveau d'arbre selon le superpotentiel de Yukawa suivant

$$W_Y = Y_{10}^{ij} 16_i \cdot 16_j \cdot 10_H + Y_{126}^{ij} 16_i \cdot 16_j \cdot \overline{126}_H, \quad (I.89)$$

où la matière chirale pour la i -ème génération est située dans la représentation 16_i avec ($i = 1, 2, 3$), les couplages Y_{10}^{ij} et Y_{126}^{ij} sont définis comme des matrices 3×3 .

Dans les GUTs supersymétriques, la brisure des symétries de GUT est réalisée à l'échelle $M_{GUT} \sim 10^{16}$ GeV. En outre, nous avons mentionné précédemment qu'il existe des chaînes de brisure différentes du modèle $SO(10)$ vers le modèle standard. Par exemple, la brisure par les Higgs 16_H ou 126_H réduisent le rang du groupe $SO(10)$ par un, mais ils laissent le sous-groupe $SU(5)$ intact. En plus, la brisure vers le groupe $SU(5) \times U(1)$ de rang 5 est réalisée par les Higgs dans les représentations 45_H ou 54_H ou 210_H . La brisure du groupe $SO(10)$ au groupe de jauge Pati-Salam est l'un des choix beaucoup plus considérés dans la littérature [73], nous considérons ici la brisure $SO(10) \rightarrow SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$ par le Higgs contenant dans la représentation 210_H . Encore, sous la symétrie du PS, les multiplets de Higgs et de matière se décomposent comme suit

$$\begin{aligned} 10 &\rightarrow (6, 1, 1) + (1, 2, 2), \\ 16 &\rightarrow (4, 2, 1) + (\overline{4}, 1, 2), \\ \overline{126} &\rightarrow (10, 1, 3) + (\overline{10}, 3, 1) + (6, 1, 1) + (15, 2, 2), \\ 126 &\rightarrow (\overline{10}, 1, 3) + (10, 3, 1) + (6, 1, 1) + (15, 2, 2), \\ 210 &\rightarrow (15, 1, 1) + (1, 1, 1) + (15, 3, 1) + (15, 1, 3) \\ &\quad + (6, 2, 2) + (10, 2, 2) + (\overline{10}, 2, 2). \end{aligned} \quad (I.90)$$

Après la brisure vers le modèle de PS via le VEV du Higgs $\langle 1, 1, 1 \rangle_{210_H} \in 210_H$, la deuxième brisure du groupe $SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$ vers le MS est effectuée par le VEV du Higgs $\langle 10, 1, 3 \rangle_{\overline{126}_H} \in \overline{126}_H$. Après les deux brisures, nous trouvons deux paires de doublets de Higgs qui sont dans la même représentation que la paire (H_u, H_d) du MSSM; une paire notée (H_{10}^u, H_{10}^d) provient de la représentation $(1, 2, 2) \in 10_H$ et l'autre notée (H_{126}^u, H_{126}^d) vient de celle $(15, 2, 2) \in 126_H$. Maintenant, les couplages Yukawa dans le superpotentiel (I.89) s'écrivent en termes des deux paires de doublets de Higgs sous la forme

$$\begin{aligned} W_Y &= U_i^c \left(Y_{10}^{ij} H_{10}^u + Y_{126}^{ij} H_{126}^u \right) Q_j + D_i^c \left(Y_{10}^{ij} H_{10}^d + Y_{126}^{ij} H_{126}^d \right) Q_j \\ &\quad + E_i^c \left(Y_{10}^{ij} H_{10}^d - 3Y_{126}^{ij} H_{126}^d \right) L_j + \nu_i^c \left(Y_{10}^{ij} H_{10}^u - 3Y_{126}^{ij} H_{126}^u \right) L_j \\ &\quad + \nu_i^c \left(Y_{126}^{ij} v_R \right) \nu_j^c, \end{aligned} \quad (I.91)$$

où U_i^c , D_i^c , ν_i^c et E_i^c sont les superchamps de quarks et leptons droits sous $SU(2)_L$. Q_j et L_j sont les superchamps de quarks et leptons gauches sous $SU(2)_L$, de plus, $H_{10}^{u,d}$ et $H_{126}^{u,d}$

sont des superchamps de Higgs doublets découlent de H_{10} et $H_{\overline{126}}$ respectivement.

Masses des fermions chargés

Les trois premiers termes dans le superpotentiel W_Y génèrent les masses aux quarks et leptons chargés [74]

$$\begin{aligned} m_u &= Y_{10}^u v_{10}^u + Y_{126} v_{126}^u, \\ m_d &= Y_{10} v_{10}^d + Y_{126} v_{126}^d, \\ m_e &= Y_{10} v_{10}^d - 3Y_{126} v_{126}^d, \end{aligned} \quad (\text{I.92})$$

où $v_{126}^{u,d}$ et $v_{10}^{u,d}$ sont les VEVs des champs

$$\begin{aligned} \langle (15, 2, 2)_{u,d} \rangle_{126_H} &= v_{126}^{u,d}, \\ \langle (1, 2, 2)_{u,d} \rangle_{10_H} &= v_{10}^{u,d}. \end{aligned} \quad (\text{I.93})$$

Notons que dans le cas où le modèle $SO(10)$ n'a que le champ de Higgs 10_H qui contribue à des masses de fermions, alors le superpotentiel W_Y ne comporte que le couplage de type $Y_{10}^{ij} 16_i \cdot 16_j \cdot 10_H$; ce couplage prédit une relation de masse indésirable entre les leptons et les quarks $m_u = m_d = m_e$. En fait, l'introduction du Higgs $\overline{126}$ est crucial dans le modèle $SO(10)$ puisque son couplage avec les fermions est capable de corriger la relation de masse indésirable entre les leptons et les quarks de la même manière discutée par Georgi et Jarlskog dans le modèle $SU(5)$ [54].

Masse du neutrino

Le deux dernier termes dans le superpotentiel W_Y sont les termes de masse de Dirac et de Majorana respectivement pour les neutrinos. En effet, le terme de masse de Dirac conduit à la masse du neutrino de Dirac comme dans les cas des quarks et leptons chargés

$$m_\nu^D = Y_{10} v_{10}^u - 3Y_{126} v_{126}^u. \quad (\text{I.94})$$

Pour générer un terme de mass de Majorana pour les neutrinos, le terme bilinéaire $\nu_i^c \cdot \nu_j^c$ doit être couplé avec le Higgs $(10, 1, 3) \in \overline{126}_H$ dont le VEV $\langle 10, 1, 3 \rangle_{\overline{126}_H} = \langle \overline{10}, 1, 3 \rangle_{126_H} = v_R$ est défini dans l'échelle intermédiaire de la brisure du modèle de PS M_I ($M_{MS} < M_I < M_{GUT}$) [74], d'où la masse de Majorana du neutrino droit est donnée par

$$m_\nu^R = Y_{126} v_R. \quad (\text{I.95})$$

La matrice de masse effective du neutrino léger est déterminée en utilisant le mécanisme de seesaw de type I donné par la formule

$$m_\nu = (m_\nu^D) (m_\nu^R)^{-1} (m_\nu^D)^T, \quad (\text{I.96})$$

où m_ν^D et m_ν^R sont les masses de Dirac et de Majorana respectivement. Le Higgs $\overline{126}_H$ contribue dans les masses de Dirac de toutes les fermions en plus de la masse de Majorana pour le neutrino droit. En outre, le Higgs $(10, 3, 1) \in \overline{126}_H$ peut contribuer dans la masse du neutrino léger via le mécanisme de seesaw de type II. Dans le cadre du MS, le couplage entre les leptons $L_i L_j$ et le triplet de Higgs $\Delta_L \in (10, 3, 1)_{\overline{126}_H}$ génère la masse de Majorana

à travers le mécanisme de seesaw de type II

$$m_\nu^L = Y_{126} v_L, \quad (\text{I.97})$$

où v_L est le VEV de triplet de Higgs $v_L = \langle \Delta_L \rangle$ de l'ordre de $\mathcal{O}(10^2 eV)$. La masse totale du neutrino est donnée par la combinaison des deux type de seesaw I et II comme suit

$$m_\nu = m_\nu^L - (m_\nu^D) (m_\nu^R)^{-1} (m_\nu^D)^T. \quad (\text{I.98})$$

Nous remarquons que la masse effective du neutrino m_ν est formée par la combinaison des mécanismes de seesaw de type I et II. Toutefois, dans le cas où le premier terme de la masse m_ν domine, on dit que le neutrino a obtenu la masse à travers le seesaw de type II ; ceci est étudié dans [75]. En d'autre part, si le second terme de la masse m_ν domine, alors dans ce cas la masse du neutrino est générée via le mécanisme de seesaw de type I [72][76].

Désintégration du proton

Comme nous l'avons vu dans le modèle $SU(5)$ supersymétrique, la désintégration du proton est étudiée dans le mode de la désintégration le plus dominant $p \rightarrow K^+ \bar{\nu}$. Où, ce dernier est induit par les couplages $QQQL$ et $U^c U^c D^c E^c$ médiés par des triplets de Higgs $T \in 5_{H_u}$ et $\bar{T} \in \bar{5}_{H_d}$. En fait, dans le modèle $SO(10)$ supersymétrique minimal, la situation est presque similaire à l'exception que la désintégration rapide du proton découle de deux type d'opérateurs de dimensions-5 ; un opérateur qui entraîne le Higgs 10_H et l'autre opérateur entraîne le Higgs $\bar{126}_H$. En outre, les triplets de Higgs ($T' = (3, 1, -\frac{2}{3})$ et $\bar{T}' = (\bar{3}, 1, \frac{2}{3})$ sous le MS) proviennent des champs de Higgs $(6, 1, 1)_{10_H}$ et $(6, 1, 1)_{\bar{126}_H}$ sous la symétrie de PS. Néanmoins, l'étude de la désintégration du proton dépend de type du modèle $SO(10)$ considéré.

En général, pour le modèle $SO(10)$, les couplages de Yukawa des fermions chargés peuvent être reliés à la matrice de masse du neutrino. D'ailleurs, il a été montré dans [77], que les amplitudes de désintégration du proton qui proviennent des opérateurs de dimension 5 peuvent être associées aux paramètres de neutrinos. De plus, ces amplitudes sont supprimées lorsque le VEV du Higgs provient de la représentation $v_R \in \bar{126}_H$ est très grand ($v_R \gtrsim 10^{16} GeV$) [78]. D'un autre côté, dans le cas du modèle $SO(10)$ non minimal avec les champs de Higgs $\{10_H, 120_H, \bar{126}_H\}$ qui interagissent avec les fermions, la contribution du Higgs 120_H dans ce modèle peut induire la suppression des amplitudes de désintégration du proton provenant des opérateurs de dimension 5 $QQQL$ et $U^c U^c D^c E^c$ [79].

Séparation du double-triplet de Higgs

Le problème usuel de la séparation du double-triplet de Higgs rencontré dans le modèle $SU(5)$ (voir la section précédente), existe également dans le modèle $SO(10)$. Par ailleurs, la possibilité la plus fréquente pour éviter ce problème dans ce modèle est réalisée via le mécanisme dit de Dimopoulos-Wilczek [80]. Ce mécanisme entraîne un couplage entre le Higgs ordinaire 10_H avec des Higgs supplémentaires dans les représentations $45'_H$ et $10'_H$ selon le couplage

$$Y_T 10_H 45'_H 10'_H, \quad (\text{I.99})$$

où le Higgs $45'_H$ développe un VEV autour de l'échelle de GUT suivant la direction

$$\langle 45'_H \rangle = i\sigma_2 \times \text{diag}(0, 0, v_0, v_0, v_0). \quad (\text{I.100})$$

Cette structure particulière du VEV de Higgs s'appelle la forme de Dimopoulos-Wilczek (DW), elle permet de générer une très grande masse au triplet de Higgs, alors que le doublet de Higgs reste sans masse dans ce couplage. Cela conduit alors à la séparation du DT de Higgs sans ajustement fin.

Encore, le mécanisme de partenaire manquant considéré dans le modèle $SU(5)$ [53], peut être étendu pour le modèle $SO(10)$ afin de réaliser la séparation du DT de Higgs. En effet, ceci demande des champs de Higgs lourds dans les représentations 126 , $\overline{126}$ et 210 du groupe $SO(10)$, qui contiennent respectivement les Higgs 50 , $\overline{50}$ et 75 de $SU(5)$ [81].

I.3.4 Classes de modèles $SO(10)$

Nous avons vu précédemment que le secteur de Higgs dans le modèle $SO(10)$ n'est pas unique, ce qui rend la théorie moins prédictive. De plus, sans tenir en compte les extensions de $SO(10)$ dans le secteur fermionique, il existe un grand nombre de modèles $SO(10)$ qui se diffèrent uniquement dans le secteur de Higgs, et qui tentent à décrire l'ensemble des données expérimentales disponibles aujourd'hui. Ici nous présentons brièvement quelques classes de modèles $SO(10)$ étudiés dans la littérature.

A côté du modèle $SO(10)$ minimal étudié précédemment, un autre modèle est largement considéré dans la littérature, il s'agit du modèle $SO(10)$ non-minimal [82]; ce dernier peut être manipulé comme une extension du modèle $SO(10)$ minimal par le Higgs 120_H qui se décompose en terme de représentations du groupe de PS comme suit

$$120 = (1, 2, 2) + (15, 2, 2) + (\overline{10}, 1, 1) + (10, 1, 1) + (6, 3, 1) + (6, 1, 3). \quad (\text{I.101})$$

Dans le cas supersymétrique ce modèle est caractérisé par le secteur de Higgs total $\{10_H + 120_H + \overline{126}_H + 126_H + 210_H\}$ [83]. Or, le superpotentiel de Yukawa W_Y dans ce modèle est déterminé par le couplage de la matière bilinéaire $16_i.16_j$ avec les Higgs 10_H , 120_H et $\overline{126}_H$, il est donné par

$$W_Y = Y_{10}^{ij} 16_i.16_j.10_H + Y_{126}^{ij} 16_i.16_j.\overline{126}_H + Y_{120}^{ij} 16_i.16_j.120_H. \quad (\text{I.102})$$

La contribution du champ de Higgs 120_H dans les masses des fermions peut être traitée comme étant une correction, préservant ainsi la plupart des caractéristiques du modèle $SO(10)$ minimal. En particulier, le Higgs 120_H ajoute une correction sur les masses de quarks et de leptons chargés comme suit

$$\begin{aligned} m_u &= Y_{10} v_{10}^u + Y_{126}^u v_{126}^u + Y_{120} (v_1^u + v_{15}^u), \\ m_d &= Y_{10} v_{10}^d + Y_{126} v_{126}^d + Y_{120} (v_1^d + v_{15}^d), \\ m_e &= Y_{10} v_{10}^d - 3Y_{126} v_{126}^d + Y_{120} (v_1^d - 3v_{15}^d), \\ m_\nu^D &= Y_{10} v_{10}^u - 3Y_{126} v_{126}^u + Y_{120} (v_1^u - 3v_{15}^u), \\ m_\nu^R &= Y_{126} v_R, \\ m_\nu^L &= Y_{126} v_L, \end{aligned} \quad (\text{I.103})$$

où $v_1^{u,d}$ et $v_{15}^{u,d}$ sont respectivement les VEVs des composantes doublets des Higgs $(1, 2, 2)$ et $(15, 2, 2)$ qui sont tous les deux inclus dans la représentation $120_H \in SO(10)$.

D'autre part, nous rappelons que la brisure du groupe $SO(10)$ vers le groupe du MS peut se produire à travers d'un groupe intermédiaire ou plus conformément au champ de Higgs considéré pour la brisure. En réalité, il est possible de briser le groupe $SO(10)$ vers le groupe $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ à une seule étape ; cette brisure peut être réalisée par un Higgs dans la représentation 144_H [84]. Par ailleurs, le secteur de Higgs dans ce modèle est composé de deux Higgs $\{144_H \text{ et } \overline{144}_H\}$, et les masses de fermions dans ce modèle proviennent des couplages de Yukawa non-renormalisables suivants

$$\left(\frac{1}{\Lambda} 16.16.144_H.144_H \right) \text{ et } \left(\frac{1}{\Lambda} 16.16.\overline{144}_H.\overline{144}_H \right), \quad (\text{I.104})$$

où Λ est l'échelle de coupure (cutoff) qui est supposé d'être de l'ordre de l'échelle de la corde M_{st} et la brisure de la symétrie est réalisé par le VEV $\langle 144_H \rangle \sim M_{GUT}$. En outre, les couplages de Yukawa (I.104) présentent des masses de l'ordre de $\mathcal{O}(M_{GUT}/M_{st})$, et qui donc explique naturellement les masses légères de la première et de la deuxième génération. Cependant, les couplages de Yukawa de la troisième génération ne sont pas si petits, d'où, une solution alternative aux couplages des fermions de troisième génération est réalisée si nous considérons l'existence de représentations de matière 10 et 45. Ces dernières se couplent avec la troisième génération de la matière 16 via les couplages à l'arbre $16.144.10$ et $16.144.45$, pour plus de détails voir les références [84][85].

Finalement, une classe de modèles $SO(10)$ dans les deux cas supersymétrique et non supersymétrique ont été étudiés dans la référence [86], ces modèles considèrent le Higgs 45_H ou 210_H pour la brisure de la symétrie de jauge $SO(10)$. Le point commun de cette classe de modèles est l'absence de Higgs 10_H qui est toujours présent dans la plupart des modèles $SO(10)$. En plus, le Higgs $\overline{126}_H$ (plus 126_H dans le cas supersymétrique) est toujours présent pour fournir le doublet de Higgs du MS ainsi que pour générer la masse de Majorana du neutrino droit. Les résultats et les prédictions pour tous ces modèles sont étudiés dans la référence [86].

Chapitre II

Extension des GUTs par des symétries de familles

Expliquer les masses observées de quarks et de leptons ainsi que les mélanges entre les trois générations reste un problème majeur dans le MS et les GUTs. En effet, les modèles de jauge construits jusqu'à présent traitent séparément les trois familles de quarks et de leptons, ce qui implique que la notion de saveur qui est une partie très importante de ces modèles a été complètement ignorée jusqu'à présent. Ce chapitre est consacré à l'étude des modèles de GUT prenant en compte les trois familles de fermions, où il s'agit d'un point de départ pour aller au-delà du MS.

Dans la section 1, nous présentons une étude générale sur la physique des neutrinos dans le cadre théorique et expérimental. Dans la section 2, après avoir donné quelques motivations d'introduire les symétries de familles, nous présentons les différents types de symétries qui peuvent être appliquées aux modèles de jauge comme des symétries de saveurs, puis nous mettons le point aux GUTs étendus par des symétries de familles discrètes. Dans la section 3, nous présentons en détail un exemple de modèle $SU(5)$ étendu par la symétrie de famille discrète A_4 .

II.1 Masses et mélange des neutrinos : Cadre théorique et expérimental

II.1.1 Généralités sur les neutrinos

Le neutrino trouve sa place dans le modèle standard comme une particule élémentaire qui existe avec une hélicité gauche et réside dans la représentation $(1, 2)_{1/2}$ sous le groupe de jauge $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. En particulier, il est ordonné avec l'électron dans un doublet $(e, \nu_e)_L^T$ sous la symétrie $SU(2)_L$. Contrairement aux électrons qui ont une charge électrique négative et constituent tous les atomes, les neutrinos sont neutres, n'interagissent que très peu avec la matière et sont donc difficiles d'être détectés. De plus, ils n'existent pas dans les atomes, mais ils sont créés à travers de nombreux processus partout dans l'Univers.

Historiquement, l'hypothèse de l'existence des neutrinos a été émise en 1930 par le physicien Wolfgang Pauli pour expliquer le spectre énergétique continu des électrons émis dans la désintégration β . Après cela, Enrico Fermi a introduit les neutrinos à la base de sa célèbre théorie de la désintégration β en 1932, il a montré également comment dans la désintégration β d'un noyau, un électron et un neutrino sont créés simultanément. Mais il a fallu encore 25 ans avant que le neutrino ne soit détecté expérimentalement.

Après l'hypothèse de l'existence du neutrino qui a été émise par Pauli en 1930, plusieurs développements et découvertes ont été réalisés pour confirmer définitivement son existence

En 1932 : Théorie de la désintégration β , "Neutrino nommé par Fermi"

En 1954 : Détection de neutrinos expérimentalement par Cowan et Reines [87].

En 1964 : Découverte du neutrino muonique ν_μ par Lederman, Schwartz et Steinberger [88].

En 1965 : Détection du neutrino atmosphérique [89].

En 1968 : Début de l'expérience des neutrinos solaires par Davis [90].

En 1998 : Découverte de l'oscillation et de la masse des neutrinos à la collaboration SuperKamiokand [12].

En 2000 : Découverte du neutrino tauique au Fermilab à la collaboration de l'expérience DONUT [91]

Après plusieurs expériences qui ont été abordées pour avoir une indice au phénomène d'oscillation des neutrinos. Ce sont les expériences Super-Kamiokande en 1998 [12], et SNO (Sudbury Neutrino Observatory) en 2001 [13], qui ont définitivement mis en évidence le phénomène des oscillations des neutrinos, cette découverte montre alors que les neutrinos ont une masse. Le prix Nobel de 2015 a été attribué à Arthur McDonald au nom de la collaboration SNO, et à Takaaki Kajita au nom de la collaboration Super-Kamiokande, pour la découverte du phénomène d'oscillations de neutrinos.

II.1.2 Masses des neutrinos et mécanismes de seesaw

Avant la découverte des oscillations des neutrinos, des modèles théoriques tels que le modèle standard postule des masses nulles aux neutrinos. Toutefois, la découverte des masses et de mélange des neutrinos a été une preuve d'une nouvelle physique au-delà du modèle standard. D'où, différents modèles tels que le mécanisme de seesaw cherchent à rendre compte des masses de neutrinos.

Ici, nous allons présenter les différents mécanismes théoriques qui permettent de générer et d'expliquer la faiblesse des masses de neutrinos. Ces mécanismes peuvent être incorporés dans les extensions du MS et peuvent avoir une justification convaincante dans les théories de grande unification.

Seesaw type I : Neutrinos droits

Comme nous avons vu dans le chapitre I, les neutrinos dans le modèle standard sont considérés comme des particules sans masse, car ce modèle ne contient pas les neutrinos d'hélicité droite, en plus que seuls les neutrinos d'hélicité gauche $\nu_{\alpha L}$ (et les antineutrinos d'hélicité droite $\bar{\nu}_{\alpha R}$) sont observés expérimentalement. La façon la plus simple de mettre en œuvre les masses des neutrinos est d'introduire un neutrino droit ν_R pour chaque génération (la situation est similaire pour le modèle $SU(5)$ minimal) ; ces dernières impliquent l'ajout des trois neutrinos droits dans la représentation triviale 1. Dans le lagrangien du modèle standard, l'ajout d'un neutrino droit implique un terme de masse de Dirac du neutrino à partir du couplage de Yukawa

$$\mathcal{L}_\nu^{Dirac} = \lambda \bar{L} \phi \nu_R + hc, \quad (II.1)$$

ce terme de Dirac pour le neutrino est introduit de la même manière que pour les autres fermions, alors la brisure de la symétrie électrofaible conduit à une masse du neutrino $m_D = \lambda \frac{v}{\sqrt{2}}$. Cependant, puisque la constante de couplage λ devrait être du même ordre

II.1. Masses et mélange des neutrinos : Cadre théorique et expérimental

que les autres constantes de couplage de fermions chargés dans le modèle standard, cette masse est beaucoup trop grande pour décrire les oscillations des neutrinos.

En d'autre part, le fait que le neutrino n'a pas de charge électrique et que celui d'hélicité droite se transforme comme un singlet sous $SU(2)_L$, on peut construire un deuxième terme de masse invariant sous le MS appelé terme de masse de Majorana, il est donné par le lagrangien suivant

$$\mathcal{L}_\nu^{Majorana} = M\nu_R\bar{\nu}_R^c + hc, \quad (II.2)$$

où $\bar{\nu}_R^c$ est défini à l'aide de l'opérateur de conjugaison de charge comme $C : \bar{\nu}_L \xrightarrow{C} \bar{\nu}_R^c = C(\bar{\nu}_R)^T$ et l'opérateur C peut être représenté par les matrices de Dirac $C = i\gamma_0\gamma_2$. Effectivement, le term de masse de Majorana est fabriqué par un couplage entre deux neutrinos d'hélicité droits où un champ de Majorana considère que la particule est identique à son antiparticule. Les deux termes de masse du neutrino $\mathcal{L}_\nu^{Dirac}$ et $\mathcal{L}_\nu^{Majorana}$ peuvent pas être exclus du lagrangien total du MS, donc nous pouvons écrire le lagrangien total du neutrino comme suit

$$\mathcal{L}_\nu^{D+M} = m_D\bar{\nu}_L\nu_R + \frac{1}{2}M_R\nu_R\bar{\nu}_R^c + hc. \quad (II.3)$$

Ce lagrangien peut être mis sous la représentation matricielle suivante

$$\mathcal{L}^I = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{\nu}_R^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D^T & M_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ \nu_R \end{pmatrix} + h.c. \quad (II.4)$$

Dans la limite où les valeurs de M_R sont beaucoup plus grandes que les valeurs de m_D , il est possible de diagonaliser m_ν par bloc et d'obtenir les valeurs propres de masses suivantes

$$m_\nu^I = -m_D M_R^{-1} m_D^T, \quad (II.5)$$

en pratique, la masse de Dirac est de l'ordre $\mathcal{O}(10^2 \text{ GeV})$ tandis que la masse de Majorana peut naturellement prendre des valeurs autour de l'échelle de GUT, ce qui rend la masse effective du neutrino m_ν^I dans la relation (II.5), convenable avec les prédictions expérimentales. Cette relation appelée la formule du mécanisme de seesaw de type I [14], ce mécanisme est représenté schématiquement dans la figure (II.1).

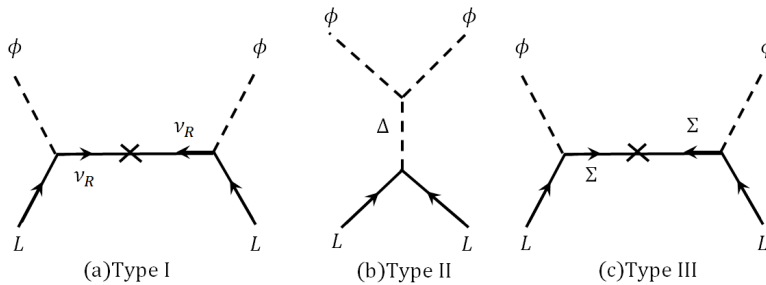


FIGURE II.1 – Les trois mécanismes de seesaw : Type I, Type II et Type III.

En outre, l'extension du modèle $SU(5)$ par des neutrinos droits dans les représentations 1_ν , donne naissance de la masse du neutrino par ce mécanisme en générant les masses de Dirac et Majorana par la même procédure ; où on rappelle que $\bar{\nu}_L \in \bar{5}_M$ et $\nu_R \in 1_\nu$. En plus, dans les modèles de rang plus grand comme $SO(10)$ et E_6 , les masses de neutrino sont générées naturellement par le mécanisme de seesaw de type I car le neutrino droit

est incorporé inévitablement dans ces modèles.

Seesaw de type II : Triplet de Higgs avec $Y = 2$

Nous avons vu qu'un terme de Majorana dans le mécanisme de seesaw de type I s'agit d'un couplage entre deux neutrinos droits $\nu_R \bar{\nu}_R^c$. En outre, un terme de Majorana qui comporte un couplage entre deux neutrino gauches $\nu_L \bar{\nu}_L^c$ s'écrit dans le cadre du modèle standard comme étant $L \bar{L}^c$, ce terme n'est pas un invariant de jauge puisque il possède une hypercharge $Y(L \bar{L}^c) = -2$. Cependant, afin de garantir l'invariance de jauge pour ce terme et générer une masse faible du neutrino sans introduire le neutrino droit, il faut donc étendre le modèle par un triplet de Higgs Δ de $SU(2)_L$ avec l'hypercharge $Y = 2$. Ce mécanisme est connu sous le nom du mécanisme de seesaw de type II [15], le terme de masse du neutrino via ce mécanisme provient du couplage suivant

$$\mathcal{L}^{II} = \lambda_\Delta \bar{L}_L^c i \sigma_2 \Delta L_L + h.c., \quad (\text{II.6})$$

où λ_Δ est la constante de couplage et σ_2 est la deuxième matrice de Pauli. Le triplet de Higgs $\Delta = (\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0)$ donne naissance au terme de masse du neutrino lorsque la troisième composante (électriquement neutre) acquiert un VEV $\langle \Delta^0 \rangle = v_\Delta / \sqrt{2}$, on obtient finalement la masse du neutrino suivante

$$m_\nu^{II} = \lambda_\Delta v_\Delta / \sqrt{2}. \quad (\text{II.7})$$

Le VEV v_Δ est contraint expérimentalement d'être inférieur à quelques GeVs, d'où le neutrino reçoit une masse très petite si le VEV v_Δ est très petit. En principe, le VEV v_Δ est relié avec celui du Higgs doublet v du MS par la relation

$$v_\Delta \simeq \frac{\mu_\Delta v^2}{M_\Delta^2}, \quad (\text{II.8})$$

où M_Δ est la masse du triplet Δ alors que μ_Δ est un couplage qui a une dimension de masse. Encore, la relation (II.8) est obtenue à partir de la minimisation du potentiel scalaire du triplet de Higgs Δ et son interaction avec le Higgs doublet ϕ .

En d'autre part, dans le langage du modèle $SU(5)$, nous pouvons appliquer le mécanisme de seesaw de type II en étendant le modèle par un Higgs dans la représentation 15_H . En effet, Dorsner et Perez ont étudié le modèle $SU(5)$ avec l'extension du secteur de Higgs dans la représentation symétrique 15_H [57], ce Higgs contient le triplet de Higgs Δ de $SU(2)_L$ selon la décomposition

$$15_H = (6, 1)_{-\frac{4}{3}} + (3, 2)_{\frac{1}{3}} + \underbrace{(1, 3)_2}_{\Delta},$$

alors le Higgs 15_H se couple avec le couplage bilineaire $\bar{5}_M \bar{5}_M$ pour construire le terme de masse de Majorana (seesaw de type II) suivant

$$\lambda_{15} 15_H \bar{5}_M \bar{5}_M.$$

A vrai dire que le modèle de Georgi-Glasow étendu par le Higgs 15_H présente un modèle réaliste au niveau de l'unification des constantes de couplage et la stabilité du proton en accord avec les expériences ainsi que la génération des masses aux neutrinos [58].

Seesaw de type III : Triplet fermionique avec $Y = 0$

En plus des mécanismes de seesaw de type I et II, il se trouve également une autre façon permettant de générer la masse du neutrino ; c'est le mécanisme de seesaw de type III [16]. Ce dernier est réalisé en étendant le secteur fermionique du MS par un triplet Σ de $SU(2)_L$ avec une hypercharge $Y = 0$; il réside dans la représentation $\Sigma = (1, 3)_0$ sous la symétrie du modèle standard. Le triplet possède trois composants $\Sigma = (\Sigma^1, \Sigma^2, \Sigma^3)$ et se couple avec le lepton $\bar{L}_L$ et le Higgs ϕ pour construire les termes de masses qui ressemblent à ceux construits dans le mécanisme de seesaw de type I

$$-\mathcal{L}^{III} = \lambda_\Sigma \bar{L}_L \Sigma \tilde{\phi} + \frac{1}{2} M_\Sigma \text{Tr} (\bar{\Sigma}^c \Sigma) + h.c., \quad (\text{II.9})$$

ceci donnant naissance à ce qu'on appelle le mécanisme de seesaw de type III (voir la figure (II.1)) [16]. Notons que la trace dans le lagrangien est introduit puisque le triplet Σ peut être représenté comme une matrice 2×2 donnée par

$$\Sigma = \Sigma^a \sigma_a = \begin{pmatrix} \Sigma^0/\sqrt{2} & \Sigma^+ \\ \Sigma^- & -\Sigma^0/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad (\text{II.10})$$

où σ_a désigne les trois matrices de Pauli σ_1, σ_2 et σ_3 , ainsi que $\Sigma^0 = \Sigma^3$ et $\Sigma^\pm = (\Sigma^1 \mp i \Sigma^2)/\sqrt{2}$. Après la brisure spontanée de la symétrie électrofaible, la masse du neutrino est donnée par

$$m_\nu^{III} = -m_D M_\Sigma^{-1} m_D^T = -\frac{v^2}{2} \lambda_\Sigma^T M_\Sigma^{-1} \lambda_\Sigma, \quad (\text{II.11})$$

où la masse du triplet notée M_Σ n'est pas protégé par la symétrie de jauge, alors cette masse pourrait atteindre des valeurs autour de l'échelle de GUT afin de garantir la petitesse de la masse du neutrino.

Comme dans le cas des deux premiers mécanismes, le seesaw de type III, peut être appliqué dans le modèle $SU(5)$ étendu par un champ fermionique dans la représentation adjoint 24_F , ce champ comporte le triplet $\Sigma = \Sigma_{(1,3)_0}$ du MS selon la décomposition suivante

$$24_F = (1, 1)_0 + \underbrace{(1, 3)_0}_\Sigma + (8, 1)_0 + (3, 2)_{-\frac{5}{6}} + (\bar{3}, 2)_{\frac{5}{6}}. \quad (\text{II.12})$$

Le triplet fermionique $\Sigma_{(1,3)_0} = (1, 3)_0$ est responsable à la génération de la masse du neutrino à travers le mécanisme de seesaw de type III où le terme de masse du neutrino provient du couplage suivant

$$\lambda_{24} \bar{5}_M 24_F 5_H. \quad (\text{II.13})$$

Le fait que le champ 24_F contient un triplet $\Sigma_{(1,3)_0}$ et un singlet $\Sigma_{(1,1)_0}$, le triplet fermionique est donc responsable à la génération de la masse du neutrino par le mécanisme de seesaw de type III, alors que le singlet fermionique $\Sigma_{(1,1)_0}$ est traité comme le neutrino droit qui est profité pour générer un terme de masse pour le neutrino à travers le seesaw de type I. L'extension des modèles $SU(5)$ avec des champs fermioniques 24_F dans le cas supérsymétrique et nonsupérsymétrique sont étudiés dans [59]. En réalité, tout modèle qui génère les masses aux neutrinos à travers la combinaison de deux différents mécanismes de

seesaw, on dit que la masse du neutrino émerge du mécanisme de seesaw hybrid.

II.1.3 Mélange des saveurs de neutrinos

La découverte des oscillations des neutrinos, montre que ces derniers ont des masses non nulles. En effet, les expériences SuperKamiokande et SNO ont démontré définitivement que les neutrinos peuvent osciller d'un type en un autre $\nu_\alpha \leftrightarrow \nu_\beta$. En fait, la notion d'oscillation qui a été suggérée pour la première fois par le physicien Italien Bruno Pontecorvo en 1957, consiste l'oscillation du neutrino électronique vers son antiparticule ($\nu_e \leftrightarrow \bar{\nu}_e$) d'une manière similaire aux oscillations des kaons neutres $K^0 \rightarrow \bar{K}^0$ [92]. Onze ans plus tard, Pontecorvo a proposé que les neutrinos puissent osciller entre la saveur de l'électron et du muon $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$ pour expliquer le déficit des neutrinos solaires découvert par R. Davies [93], où seuls les neutrinos ν_e et ν_μ sont les saveurs connus à l'époque. En outre, Pontecorvo et Gribov ont proposé 1969 que l'oscillation de neutrinos est une conséquence du mélange fort entre les trois saveurs de neutrinos ν_e, ν_μ et ν_τ [94].

Le phénomène d'oscillation implique qu'un neutrino peut changer spontanément de saveur, et par conséquent au moins deux des trois neutrinos doivent posséder une masse. Autrement dit que le processus d'oscillation des neutrinos est complètement lié à la masse des neutrinos car l'oscillation ne peut pas être possible sauf que si les neutrinos ont une masse. Les oscillations peuvent se produire si les neutrinos physiques (ν_e, ν_μ, ν_τ) consistent en une superposition d'états propres de masse (ν_1, ν_2, ν_3). En général, la liaison entre les états propres de saveur (ν_e, ν_μ, ν_τ) associés aux interactions faibles et les états propres de masse (ν_1, ν_2, ν_3) est décrite par une matrice 3×3 unitaire appelée la matrice de mélange,

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{II.14})$$

cette matrice notée U_{PMNS} pour les travaux de Pontecorvo, Maki, Nakagawa et Sakata [95]. La paramétrisation standard de cette matrice en tenant compte que le neutrino est une particule de Dirac, est donnée par

$$\begin{aligned} U_{PMNS} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{-i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (\text{II.15}) \end{aligned}$$

avec $c_{ij} = \cos(\theta_{ij})$, $s_{ij} = \sin(\theta_{ij})$, cette matrice est paramétrées par trois angles de mélanges θ_{12} , θ_{13} , θ_{23} et une phase complexe dite phase de Dirac δ ; cette phase implique la conservation de la symétrie CP si $\delta = 0, \pi$ et 2π . En général, les angles de mélanges et la phase de Dirac varient de $\theta_{ij} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\delta \in [0, 2\pi]$. En effet, la matrice de mélange U_{PMNS} peut contenir deux phases supplémentaires α et β appelées les phases de Majorana où la matrice devient $\tilde{U}_{PMNS} = U_{PMNS} \times \text{diag}(1, e^{i\alpha}, e^{i\beta})$; ces phases de Majorana ont aucun effet sur les oscillations des neutrinos, mais elles contribuent dans la violation de la symétrie CP si elle existait. La structure de la matrice U_{PMNS} qui explique le mélanges du neutrinos est similaire à celle des quarks connue sous le nom U_{CKM} (Cabibo, Kobayashi

II.1. Masses et mélange des neutrinos : Cadre théorique et expérimental

et Maskawa) [96], cette matrice décrit également le mélange entre les quarks, toutefois, il paraît que les valeurs des paramètres des deux matrices sont complètement différents puisque le mélange entre les quarks est très faible, ceci veut dire que le phénomène d'oscillation ne s'implique pas pour les quarks.

Après l'expérience SuperKamiokand en 1998, Une nouvelle génération d'expériences étudie les oscillations des neutrinos pour comprendre la liaison entre les états de masse et les états de saveur des neutrinos. En effet, Les expériences d'oscillation de neutrinos ne sont pas sensibles aux masses absolues de neutrinos, mais aux différences de masses au carré des neutrinos $\Delta m_{ij}^2 = m_j^2 - m_i^2$ et les angles de mélanges θ_{ij} . En outre, les paramètres de mélanges mesurés à partir des expériences sont notés selon les sources de production des neutrinos considérées ; ceci veut dire que par exemple les expériences étudiant les oscillations des neutrinos qui sont d'origine des réactions nucléaires (comme KAMLAND, SNO et SK), contribuent dans la mesure des paramètres θ_{12} et Δm_{12}^2 qu'on note dans ce cas comme $\theta_{12} \equiv \theta_{sol}$ et $\Delta m_{12}^2 \equiv \Delta m_{sol}^2$, de même pour les neutrinos qui proviennent de l'interaction des rayons cosmique avec l'atmosphère (neutrinos atmosphériques), les expériences sur les neutrinos atmosphériques comme T2K, K2K, NOvA et MINOS, mesurent les paramètres $\theta_{23} \equiv \theta_{atm}$ et $\Delta m_{32}^2 \equiv \Delta m_{atm}^2$, alors que les neutrinos provenant des réacteurs (comme CHOOZ, Double CHOOZ, RENO et Daya Bay), ils contribuent dans les mesures des paramètres d'oscillation des neutrinos θ_{13} et Δm_{31}^2 .

Matrices de mélanges : TBM, BM et Golden Ratio

Jusqu'à récemment, l'angle de mélange θ_{13} était à peu près inconnu. En effet, l'expérience CHOOZ n'a fourni qu'une borne supérieure de cet angle $\sin^2(2\theta_{13}) \lesssim 0.15$ [97]. Une classe des matrices de mélanges ont été suggérées pour s'adapter avec les résultats d'expériences sur les oscillations de neutrinos jusqu'à 2010¹. Notamment, les mélanges du neutrinos les plus populaires sont : Tri-bimaxial (TBM), Bi-maximal (BM) et Golden-ratio (GR), en effet ces matrices de mélanges conduisent aux angles de mélanges $\theta_{13} = 0$ et $\theta_{23} = \pi/4$, tandis que la valeur de l'angle solaire θ_{12} dépend de chaque type matrice de mélange.

La matrice de mélange Bimaximal (BM) a été proposée par Vissani en 1997 [98], elle correspond à la matrice de la forme

$$U_{BM} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (\text{II.16})$$

notons qu'à partir de l'équation (II.15), nous pouvons écrire les angles de mélanges $\sin \theta_{13}$, $\sin \theta_{12}$ et $\sin \theta_{23}$ en termes d'éléments de la matrice de U_{PMNS} comme suit

$$\sin^2 \theta_{13} = |U_{e3}|^2, \quad \sin^2 \theta_{12} = \frac{|U_{e2}|^2}{1 - |U_{e3}|^2}, \quad \sin^2 \theta_{23} = \frac{|U_{\mu 3}|^2}{1 - |U_{e3}|^2}, \quad (\text{II.17})$$

et en conséquence, la matrice de mélange U_{BM} amène aux angles de mélanges

$$\sin^2 \theta_{13} = 0, \quad \sin^2 \theta_{12} = \sin^2 \theta_{23} = 1/2. \quad (\text{II.18})$$

1. Sont adaptés comme les matrices de mélanges les plus convenable avec les résultats d'expériences sur les oscillations de neutrinos jusqu'à 2010.

En outre, la matrice de mélange appelée Tribimaximal (TBM) est la plus populaire par rapport aux autres mélanges, elle a été proposée par Harison, Perkins et Scott en 2002 [99]. A côté des mêmes angles de mélanges $\sin^2 \theta_{13} = 0$ et $\sin^2 \theta_{23} = 1/2$ prédissent par la matrice BM, la matrice TBM implique l'angle solaire d'être $\sin^2 \theta_{12} = 1/3$. Cette matrice est donnée par

$$U_{TBM} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (\text{II.19})$$

En d'autre part, la matrice de mélange de neutrinos appelée Golden-Ratio a été proposée par Datta, Ling et Ramond en 2003 [100], les éléments de cette matrice s'écrivent en terme du nombre d'ore $\eta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ comme suit

$$U_{GR} = \begin{pmatrix} \frac{\eta}{\sqrt{2+\eta}} & \frac{1}{\sqrt{2+\eta}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{4+2\eta}} & \frac{\eta}{\sqrt{4+2\eta}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{4+2\eta}} & -\frac{\eta}{\sqrt{4+2\eta}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (\text{II.20})$$

où cette matrice donnera également les même angles du réacteur θ_{13} et atmosphérique θ_{23} prédites par les matrices de mélanges BM et TBM, alors que l'angle solaire est donnée en fonction du nombre η par $\tan \theta_{12} = \eta^{-1}$, cela implique que l'angle solaire est $\theta_{12} \approx 31.7^\circ$.

En somme, les trois matrices de mélanges BM, TBM et GR impliquent ensembles l'angle du réacteur $\theta_{13} = 0$, ceci dû au fait que l'élément U_{e3} des trois matrices est nul. En d'autre part, un mélange des neutrinos basé sur la matrice appelée trimaximal (TM) possède l'élément $U_{e3} \neq 0$ [101]. Ce mélange est noté comme TM_2 puisqu'il maintenir la deuxième colonne de la matrice de mélange TB, la matrice U_{TM_2} est définie par ²

$$U_{\text{TM}_2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \cos \vartheta & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \sin \vartheta e^{i\rho} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \cos \vartheta - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta e^{-i\rho} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \vartheta - \frac{1}{\sqrt{6}} \sin \vartheta e^{i\rho} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \cos \vartheta + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta e^{-i\rho} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \vartheta - \frac{1}{\sqrt{6}} \sin \vartheta e^{i\rho} \end{pmatrix}, \quad (\text{II.22})$$

En utilisant l'équation (II.17), alors la matrice TM_2 implique les angles de mélanges suivantes

$$\sin^2 \theta_{13} = \frac{2}{3} \sin^2 \vartheta \quad , \quad \sin^2 \theta_{12} = \frac{1}{3-2\sin^2 \vartheta} \quad , \quad \sin^2 \theta_{23} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} \cos \rho \sin 2\vartheta}{1+2\cos^2 \vartheta}. \quad (\text{II.23})$$

Alors cette matrice permet naturellement d'une valeur non nulle de l'angle θ_{13} , et une valeur non maximale de l'angle atmosphérique θ_{23} , ainsi que l'angle $\sin^2 \theta_{12} \geq \frac{1}{3}$. De plus, les valeurs exacte des ces angles dépend du paramètre qui doit être fixé par les données expérimentales d'oscillations de neutrinos.

2. Malgré que le terme trimaximal a été initialement utilisé pour le cas où la deuxième colonne de la matrice de mélange reste identique à celle du TBM. Néanmoins, il existe une autre matrice de mélange noté TM_1 qui préserve la première colonne de la matrice TB, elle est donnée par [101] :

$$U_{\text{TM}_1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \vartheta & \frac{2}{\sqrt{6}} \sin \vartheta e^{i\rho} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \vartheta - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta e^{-i\rho} & \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \vartheta - \frac{1}{\sqrt{6}} \sin \vartheta e^{i\rho} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \vartheta + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta e^{-i\rho} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \vartheta - \frac{1}{\sqrt{6}} \sin \vartheta e^{i\rho} \end{pmatrix} \quad (\text{II.21})$$

Paramètres	Meilleur fit (3σ) [104]	Meilleur fit (3σ) [105]
$\sin^2 \theta_{12}$	0.306 (0.271 – 0.345)	0.321 (0.273 – 0.379)
$\sin^2 \theta_{23}$ (NH)	0.441 (0.385 – 0.635)	0.430 (0.384 – 0.635)
$\sin^2 \theta_{23}$ (IH)	0.587 (0.393 – 0.640)	0.596 (0.388 – 0.638)
$\sin^2 \theta_{13}/10^{-2}$ (NH)	2.166 (1.934 – 2.393)	2.155 (1.89 – 2.39)
$\sin^2 \theta_{13}/10^{-2}$ (IH)	2.179 (1.953 – 2.408)	2.140 (1.89 – 2.39)
$\delta/^\circ$ (NH)	261 (0 – 360)	252 (0 – 360)
$\delta/^\circ$ (IH)	277 (145 – 391)	259 (0 – 31 et 142 – 360)
$\Delta m_{12}^2 [10^{-5} eV^2]$	7.50 (7.03 – 8.09)	7.56 (7.05 – 8.14)
$ \Delta m_{31}^2 [10^{-3} eV^2]$ (NH)	2.524 (2.407 – 2.643)	2.55 (2.43 – 2.67)
$ \Delta m_{31}^2 [10^{-3} eV^2]$ (IH)	2.514 (2.399 – 2.635)	2.49 (2.37 – 2.61)

TABLE II.1 – Mesures expérimentales des paramètres d'oscillation des neutrinos dans les deux types d'hierarchies ; normale (NH) et inversée (IH).

L'angles du réacteur θ_{13} n'a été déterminé que récemment. En effet, les expériences T2K et MINOS [102], ont annoncé en 2011 la première indice sur l'angle de mélange du réacteur θ_{13} , une année plus tard les deux expériences Daya Bay et RENO [103], ont confirmé définitivement la valeur non nulle de l'angle θ_{13} . Après cette découverte en 2012, plusieurs expériences ont été réalisées pour améliorer les mesures des paramètres d'oscillations θ_{ij} et Δm_{ij}^2 dans les deux configurations connus des trois états de masse m_1 , m_2 et m_3 . En effet, toutes les expériences sur les paramètres d'oscillations de neutrinos, sont effectuées en deux types d'hierarchies : soit en hiérarchie dite normale (NH) qui se réfère à la situation dans laquelle $m_3 > m_2 > m_1$; ce qui signifie $\Delta m_{31}^2 > 0$, ou encore en hiérarchie inversée (IH) $m_1 > m_2 > m_3$ qui signifie $\Delta m_{31}^2 < 0$.

Résultats expérimentaux récents

Les dernières expériences sur les oscillations des neutrinos ont permis d'obtenir les mesures les plus récentes pour les paramètres de la matrice de mélange ; ces mesures concernent les angles de mélanges θ_{ij} , les différences de masse au carré Δm_{ij}^2 ainsi que la phase de Dirac δ ; ils sont extraits auprès des références [104] et [105], voir le tableau (II.1).

D'autre part, bien que la valeur maximale de l'angle $\theta_{23} = 45^\circ$ appartient à la gamme 3σ des résultats d'expériences T2K et IceCube [106], l'expérience NOvA a exclu cette valeur maximale de l'angle atmosphérique [107]. En effet, on distingue dans cette expérience deux régions (appelées aussi octants) de l'angle θ_{23} ; la première région correspond à $\theta_{23} > 45^\circ$ (l'octant supérieur), alors que la deuxième région correspond à $\theta_{23} < 45^\circ$ (l'octant inférieur).

II.2 Symétries de familles

II.2.1 Motivation

Généralement, la définition de la saveur n'est pas unique, mais elle résume en particulier les effets traitant les masses et le mélange des trois saveurs de quarks et de leptons dans le MS et au-delà. Ces effets sont paramétrés par les matrices de Yukawa qui construisent les matrices de masses de quarks et de leptons et qui conduisent par la suite à ce qu'on appelle les matrices de mélanges, ces dernières donnent des indications remarquables sur le

mélange existait entre les trois familles. En effet, le problème de la compréhension de l'origine de trois familles de quarks et leptons et leurs masses ainsi que leurs angles de mélanges est appelé le problème de la saveur [18].

Afin d'expliquer les mélanges observés dans les secteurs de quarks et de leptons en plus de la hiérarchie entre les trois générations, il faut introduire la saveur comme indice de génération des quarks et des leptons (souvent appelée famille), ceci peut être expliqué dans la construction de modèles au-delà du modèle standard tel que les extensions du modèle standard et les GUTs. En outre, la façon la plus commode pour tenir en compte les trois générations afin d'expliquer leur hiérarchie ainsi que leur mélange est d'introduire une certaine symétrie entre les familles, ce type de symétries connu sous le nom de symétries de familles ou de saveurs.

Dans le cadre de la physique au-delà du MS, les symétries de familles sont appelées aussi des symétries horizontales puisqu'elles agissent sur les particules de même espèce mais de familles différentes, tandis que les symétries de jauge (comme le MS et les GUTs) qui unifient les différentes particules de même famille sont appelées des symétries verticales, voir la figure (II.2).

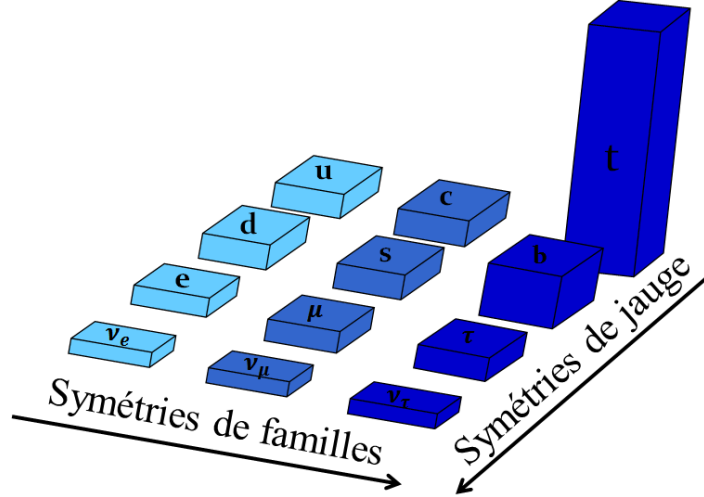


FIGURE II.2 – Illustration schématique des symétries de jauge et de familles.

Les symétries de familles présentent un moyen remarquable pour décrire la structure observable des masses et mélange de quarks et de leptons. En particulier, elles sont largement étudiées dans les modèles au-delà du MS pour expliquer le phénomène d'oscillation de neutrinos observé. En plus, ils peuvent être considérées comme des symétries qui assurent la suppression naturelle de toutes les interactions indésirables tel que les opérateurs qui induisent la désintégration rapide du proton.

II.2.2 Symétries de familles continues et discrètes

Dans les constructions de modèles au-delà du MS, les symétries de familles ou les symétries horizontales sont introduites afin de résoudre les problèmes de la saveur existés dans les modèles basés uniquement sur les groupes jauge $\mathcal{G}_J = MS, SU(5), SO(10), \dots$ etc. Par ailleurs, un modèle de jauge basé sur une symétrie de saveur doit alors posséder une symétrie totale $\mathcal{G}_J \times \mathcal{G}_F$, où $\mathcal{G}_F$ est la symétrie agissant sur les trois familles de

la matière considérée dans le groupe de jauge $\mathcal{G}_J$. En outre, malgré que les symétries de familles ne sont pas encore confirmées, mais ils restent encore une option largement utilisée dans la littérature pour donner une explication à certains phénomènes observés. En fait, la sélection d'une symétrie de famille n'est unique, car il y a plusieurs candidats qui peuvent jouer ce rôle ; ils peuvent être des symétries discrètes, continues, globales, locales, abéliennes ou non abéliennes. Toutefois, le choix d'un groupe agissant sur les trois familles de la matière est contraint par les exigences phénoménologique, d'où, les deux classes principales des symétries de familles ayant une implication dans la construction de modèles sont les symétries basées sur des groupes non abéliens continus ou ceux basés sur des groupes discrets.

Symétries de familles continues

Les symétries de familles qui se basent sur les groupes continus consistent aux groupes de Lie $U(1)$, $SU(2)$, $U(2)$, $SO(3)$, $SU(3)$ et $U(3)$. Historiquement, Froggatt et Nielsen ont proposé en 1979 le premier modèle physique impliquant une symétrie de famille [108], leur modèle est basé sur la symétrie de jauge du modèle standard $\mathcal{G}_J = SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ étendu par le groupe abélien $\mathcal{G}_F = U(1)_{FN}$ comme symétrie de saveur. En effet, ce modèle a été proposé pour décrire la hiérarchie de masses observée dans le secteur des quarks où chaque famille de quarks possède une charge différente de l'autre sous la symétrie $U(1)_{FN}$. Cependant, la symétrie abélienne n'est pas un bon candidat pour décrire parfaitement les mélanges des fermions puisqu'elle contient que la représentation unidimensionnelle, d'où des groupes qui possèdent des représentations supérieures à un sont requis. En d'autre part, les groupes de type $SU(2)$ et $U(2)$ ont des représentations de dimension $R \geq 1$. Ces groupes peuvent être considérés comme des bons candidats agissant sur les trois générations. En effet, les deux groupes contiennent la représentation 2 qui peut être identifiée avec les deux premières générations tandis que la génération la plus lourde réside dans la représentation triviale 1. Ceci permet de garantir la hiérarchie entre la troisième et les deux premières générations.

Des modèles supersymétriques basés sur la symétrie de saveur $U(2)$ ont été étudiés dans [109], le point commun entre ces modèles est qu'ils produisent les rapports de masse de fermions chargés comparable avec les mesures expérimentales. Notamment, la combinaison de la symétrie de saveur $U(2)$ avec le modèle $SU(5)$ étudiée dans la référence [110], explique avec succès les rapports de masse des quarks ainsi que leurs paramètres de mélanges connus. Toutefois, malgré que ce modèle décrive bien le mélange des quarks, mais il n'offre pas une explication complète pour le mélange de neutrinos (l'angle atmosphérique est petit). Cela suggère alors fortement une symétrie de famille qui intègre la troisième génération avec les deux premières. C'est pourquoi les symétries de familles de type $SU(3)$ et $SO(3)$ sont suggérées pour être plus adaptées puisqu'ils possèdent la représentation 3 ; cette dernière peut être identifiée avec les trois générations. Une classe de modèles avec la symétrie $SU(3)$ ont été étudiés dans [111], ils donnent une description réaliste aux masses de quarks et de mélanges de neutrinos (mélange Bimaximal). En outre, les symétries de familles $SO(3)$ et $SU(3)$ ont été implémentés également pour plusieurs modèles afin de produire le mélange tribimaximal dans le secteur des neutrinos [111][112].

Symétries de familles discrètes

Les symétries discrètes non abéliennes peuvent ne pas être familières à tous les physiciens de particules par rapport aux symétries continues non-abéliennes qui sont bien

Groupe G_F	Ordre
S_N	$N!$
A_N	$N!/2$
D_N	$2N$
$\Delta(3N^2)$	$3N^2$
$\Delta(6N^2)$	$6N^2$

TABLE II.2 – Certains groupes discrets $\mathcal{G}_F$ et leurs ordres.

connus et utilisés dans la physique des particules. En fait, les symétries discrètes non abéliennes sont devenues un outil très important pour la physique de la saveur et surtout pour manipuler les trois familles de fermions. D'où, les symétries agissantes sur les trois familles de quarks et de leptons peuvent être également de nature finies et discrètes. Des symétries discrètes qui peuvent être à la base des symétries de familles appliquées aux modèles de jauge $\mathcal{G}_J$ sont montrés dans le tableau (II.2)

où S_N est le groupe symétrique de toutes les permutations à N objets, A_N est le groupe alterné des permutations paires, alors que D_N est le groupe de symétrie d'un polygone à N cotés ; il est appelé souvent le groupe diédral de dimension $2N$. Encore, le groupe discret $\Delta(3N^2)$ est isomorphe à $(Z_N \times Z'_N) \rtimes Z_3$ où le cas du groupe $\Delta(3)$ ce n'est que le groupe abélien Z_3 et $\Delta(12)$ est isomorphe au groupe A_4 , or le plus petit groupe non trivial est $\Delta(27)$. En outre, le groupe discret $\Delta(6N^2)$ est isomorphe à $(Z_N \times Z'_N) \rtimes S_3$; en effet, dans le cas le plus simple $\Delta(6)$ ce n'est que le groupe de symétrie S_3 , et le cas du groupe $\Delta(24)$ est isomorphe au groupe symétrique S_4 d'ordre 24. D'ailleurs, le groupe non trivial le plus simple est le groupe $\Delta(54)$ d'ordre 54³. Dans un autre ordre d'idée, le fait qu'il existe trois familles de fermions chiraux dans la nature, alors les candidats des symétries de familles discrètes sont limités aux groupes qui ont des représentations irréductibles de dimension deux ou trois ; c'est à dire les groupes S_4 , S_3 , A_4 , A_5 , D_4 , $\Delta(27)$, $\Delta(54)$ et $\Delta(96)$ etc. Ces symétries discrètes sont introduites dans la construction de modèles au-delà du MS pour contrôler les couplages de Yukawa des trois générations et pour expliquer les masses des fermions et leurs mélanges. En outre, la découverte des masses faibles et de mélange fort des neutrinos implique la nécessité d'introduire des symétries de familles. De plus, depuis Harrison, Perkins et Scott ont suggéré que les paramètres de mélange du neutrinos pourraient être approximées en termes du mélange tribimaximal (avant la confirmation que de l'angle réacteur est non nul $\theta_{13} \neq 0$) [99], il y a eu de nombreuses propositions de modèles pour expliquer la structure de la matrice de mélange en termes des symétries de familles discrètes.

II.2.3 Symétries de familles dans les GUTs

Les symétries de familles forment un outil très puissant pour contourner le problème de saveur. En plus, elles sont largement étudiées dans le cadre des modèles au-delà du MS pour expliquer le phénomène d'oscillation des neutrinos observé. Les masses de neutrinos au-delà du MS se produisent à travers le mécanisme de seesaw qui exige la violation du nombre leptonique et qui génère ainsi une masse du neutrino droit à l'échelle de GUT. Ceci indique que la masse du neutrino pourraient être reliée aux symétries de GUT où

3. Pour une introduction sur les groupes discrets voir la référence [113].

G_F	G_{GUT}	$SU(5)$	$SO(10)$	PS
S_3			[121]	
A_4		[116]	[122]	[126]
S_4		[117]	[123]	[127]
D_4		[118]		
A_5		[119]		
$\Delta(27)$			[124]	[128]
$\Delta(96)$		[120]	[125]	

TABLE II.3 – Liste partielle des modèles $SU(5)$, $SO(10)$ et Pati-Salam combinés avec des symétries de familles discrètes.

les fermions de même famille sont unifiés. En d'autre part, la combinaison des modèles de GUT avec les symétries de familles fournit des théories de saveur prometteuses et capables d'adresser certaines questions sans réponse dans le MS ou les modèles de GUT.

Flavons

Généralement, pour tout modèle au-delà du MS basé sur une symétrie de famille $\mathcal{G}_F$ que ce soit continue ou discrète, afin de produire les masses et les mélanges des fermions observés à basse énergie, la symétrie de la saveur doit être brisée à travers le VEV de certains champs de Higgs appelés "flavons". En effet, ces flavons sont les champs scalaires traités comme des singlets sous le groupe de jauge $\mathcal{G}_{GUT}$, mais chargés sous le groupe de symétrie de famille $\mathcal{G}_F$, alors que pour les champs de Higgs usuels c'est l'inverse. Pourtant, le phénomène d'oscillation du neutrinos observé peut être expliquer comme une conséquence de la brisure spontanée de la symétrie de famille $\mathcal{G}_F$ dans une certaine échelle d'énergie très élevée (autour de M_{GUT}). En fait, les symétries de familles continue sont bien adaptées pour les modèle de GUT, mais les symétries discrètes sont étudiées largement dans le cadre des modèles de GUT tel que $\mathcal{G}_{GUT} = SU(5)$ et $SO(10)$, ceci est motivé par le secteur de neutrinos et en particulier au fait que le mélange tribimaximal pourrait être obtenu naturellement et d'une façon économique en utilisant des groupes discrets non abéliens tel que le groupe A_4 . En d'autre part, il a été montré dans [114], que l'introduction des symétries de familles dans les modèles de GUT supersymétriques peuvent contraindre les opérateurs qui conduisent à la désintégration rapide du proton et en conséquence, ils assurent la stabilité du proton. Il a été montré également dans [115], que ces symétries assurent la suppression naturelle des courants neutres changeant la saveur (FCNC).

Plusieurs études basées sur les symétries discrètes ont été consacrées pour décrire le secteur de neutrino. Entre autre, des modèle de GUT avec des symétries de familles discrètes ont l'objectif pour induire les mélanges TBM, BM, GR dans le secteur du neutrino avant la confirmation de l'angle du réacteur θ_{13} non nulle, tandis que d'autres sont introduits pour ajuster les paramètres d'oscillations du modèle avec les dernières données expérimentales.

II.3 Modèle $SU(5)$ avec la symétrie de famille A_4 : Modèle de CKL

Nous avons vu précédemment que l'action des symétries de familles sur les modèles de jauge au-delà du MS joue un rôle très important pour expliquer les masses et les mélanges des fermions, et en particulier pour décrire le mélange des neutrinos observé. Dans cette section, nous allons présenter un modèle de GUT supersymétrique combiné avec une symétrie de saveurs non abélienne ; ce modèle est basé sur la plus petit groupe de GUT $SU(5)$ et sur la symétrie de familles A_4 ; le plus petit groupe discret qui contient la représentation irréductible 3. Ce modèle a été étudié par Cooper, King et Luhn [129], il possède une symétrie totale $SU(5) \times A_4 \times U(1)_R \times U(1) \times Z_2 \times Z_3 \times Z_5$ pour décrire les masses des fermions ainsi le mélange entre les saveurs de neutrinos.

II.3.1 Description du modèle

Le modèle de Cooper, King et Luhn (abrégé CKL) est basé sur le groupe de jauge de GUT $\mathcal{G}_{GUT} = SU(5)$, il contient des champs fermioniques dans les représentations $10 + \bar{5}$ notés comme $T + F$ où le neutrino droit se localise dans la représentation triviale 1 notée N . En outre, le secteur de Higgs qui se couple avec les fermions contient deux types de Higgs $5 = H_5$ et $\bar{5} = H_{\bar{5}}$. En plus, afin de corriger la relation entre les quarks de type down et les leptons chargés, le secteur de Higgs est étendu par le Higgs dans la représentation $\bar{45}$ noté $H_{\bar{45}}$. Ce modèle est étendu également par la symétrie discrète A_4 où les trois générations de fermions T , F et N ainsi que les Higgs H_5 , $H_{\bar{5}}$ et $H_{\bar{45}}$ se transforment sous les représentations de symétrie de saveur A_4 comme suit

Champs	N	F	T_1	T_2	T_3	H_5	$H_{\bar{5}}$	$H_{\bar{45}}$
$SU(5)$	1	$\bar{5}$	10	10	10	5	$\bar{5}$	$\bar{45}$
A_4	3	3	1''	1'	1	1	1'	1''

(II.24)

les trois familles de fermions $T_{i=1,2,3} = (Q_{L_i}, u_i^c, e_i^c)$ sont ordonnées dans trois différents représentations du groupe A_4 ; $(T_1, \mathbf{1}'')$, $(T_1, \mathbf{1}')$ et $(T_1, \mathbf{1})$, alors que les trois générations de fermions $F_i = (L_{L_i}, d_i^c)$ et $N_i = \nu_i^c$ sont unifiées dans la représentation **3**. D'un autre côté, le modèle possède onze champs de flavons responsables de la brisure de la symétrie A_4 ainsi qu'ils servent à produire la hiérarchie de masses et le mélange des trois familles, ces flavons sont triviaux sous le groupe de jauge $SU(5)$ mais pas nécessairement sous la symétrie A_4 , ils sont organisés dans le tableau suivant

Flavons	φ_S	ξ	ξ'	ξ''	φ_T	θ	θ'	θ''	$\tilde{\theta}'$	σ
$SU(5)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
A_4	3	1	1'	1''	3	1	1'	1''	1'	1

(II.25)

Les onze champs de flavons sont introduits dans ce modèle pour différents raisons ; les champs φ_S, ξ, ξ' et ξ'' contrôlent la structure des masses et de mélange dans le secteur de neutrinos, tandis que les flavons $\varphi_T, \theta, \theta', \theta''$ et $\tilde{\theta}'$, contribuent aux masses de quarks et de leptons chargés. Encore, le champ de flavon supplémentaire σ sert les autres flavons d'obtenir leurs VEVs.

Symétries supplémentaires

II.3. Modèle $SU(5)$ avec la symétrie de famille A_4 : Modèle de CKL

Encore, ce modèle nécessite des symétries supplémentaires afin d'obtenir la structure des masses et des mélanges de fermions désirable ainsi que pour interdire des opérateurs indésirable dans le modèle. Le modèle entraîne la symétrie supplémentaire $U(1)_R \times U(1) \times Z_2 \times Z_3 \times Z_5$ où les champs de matière ainsi de Higgs sont chargés sous cette symétrie selon les tableaux suivants :

Champs	N	F	T_1	T_2	T_3	H_5	$H_{\bar{5}}$	$H_{\bar{45}}$
$SU(5)$	1	$\bar{5}$	10	10	10	5	$\bar{5}$	$\bar{45}$
A_4	3	3	1''	1'	1	1	1'	1''
$U(1)_R$	1	1	1	1	1	0	0	0
$U(1)$	1	-1	3	3	0	0	-1	-2
Z_2	+	+	+	+	+	+	+	-
Z_3	ω	ω^2	ω^2	1	1	1	ω	ω^2
Z_5	ρ	ρ^4	1	1	1	1	ρ	ρ

(II.26)

pour les champs de matière et de Higgs, et

Flavons	φ_S	ξ	ξ'	ξ''	φ_T	θ	θ'	θ''	$\tilde{\theta}'$	σ
$SU(5)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
A_4	3	1	1'	1''	3	1	1'	1''	1'	1
$U(1)_R$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$U(1)$	-2	-2	-2	-2	2	-1	-1	-1	-5	2
Z_2	+	+	+	+	+	-	+	+	-	+
Z_3	ω	ω	ω	ω	1	ω	ω^2	ω^2	ω^2	1
Z_5	ρ^3	ρ^3	ρ^3	ρ^3	1	1	1	1	1	1

(II.27)

pour les champs de flavons. La symétrie $U(1)_R$ joue le rôle de la parité-R qui élimine les opérateurs conduisant à la désintégration rapide du proton, de plus les symétries restantes $U(1)$, Z_2 , Z_3 et Z_5 ont été introduites afin de contrôler les matrices de Yukawa dans les secteurs des quarks et leptons. Notamment, les flavons φ_S , ξ , ξ' et ξ'' qui vont contribuer aux masses et mélange des neutrinos peuvent aussi être couplés avec les opérateurs de Yukawa associés aux quarks et leptons chargés, alors la symétrie Z_5 assiste à limiter les interactions de ces flavons seulement avec le secteur du neutrino.

Des champs scalaires supplémentaires φ_S^0 , φ_T^0 et ξ^0 appelés champs messagers "driving fields" sont introduits dans le modèle ; ces champs portent une charge +2 sous $U(1)_R$ et transforment non trivialement sous la symétries $\mathcal{G}_F = A_4 \times U(1) \times Z_2 \times Z_3 \times Z_5$

Flavons	φ_S^0	φ_T^0	ξ^0
$SU(5)$	1	1	1
A_4	3	3	1
$U(1)_R$	2	2	2
$U(1)$	-4	4	4
Z_2	+	+	+
Z_3	1	ω	ω
Z_5	1	ρ^4	ρ^4

comme ces champs φ_S^0 , φ_T^0 et ξ^0 portent une charge +2 sous la symétrie $U(1)_R$, alors ils se couplent linéairement aux champs de flavons dans le superpotentiel W_F donné par

$$W_F = \varphi_T^0 (g_1 \sigma \varphi_T + g_2 \varphi_T \varphi_T) + \varphi_S^0 (g_3 \varphi_S \varphi_S + g_4 \varphi_S \xi + g_4' \varphi_S \xi' + g_4'' \varphi_S \xi'') + \xi^0 (g_5 \varphi_S \varphi_S + g_6 \xi \xi + g_7 \xi' \xi'). \quad (\text{II.28})$$

En d'autre part, les champs messagers servent les champs de flavons à obtenir leurs VEVs en minimisant le superpotentiel scalaire $\frac{\partial W_F}{\partial \chi} = 0$ avec $\chi = \varphi_S^0$, φ_T^0 et ξ^0 [130]. En conséquence, les flavons triplets φ_S et φ_T obtiennent les VEVs suivants

$$\langle \varphi_T \rangle = v_T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } v_T = -\frac{g_1 \langle \sigma \rangle}{2g_2}, \quad (\text{II.29})$$

et

$$\langle \varphi_S \rangle = v_S \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } v_S^2 = -\frac{g_6 u^2 + g_7 u' u''}{3g_5}, \quad u = -\frac{g_4' u' + g_4'' u''}{g_4}, \quad (\text{II.30})$$

où on note par $\langle \xi \rangle = u$, $\langle \xi' \rangle = u'$ et $\langle \xi'' \rangle = u''$

II.3.2 Secteurs des quarks et leptons chargés

Superpotentiels des quarks de type down et leptons chargés

Les termes de masses des quarks de type-down et lepton chargés sont dérivés du superpotentiel W_d qui comporte des opérateurs invariants sous la symétrie de jauge $SU(5)$ ainsi que la symétrie de famille $\mathcal{G}_F = A_4 \times U(1)_R \times U(1) \times Z_2 \times Z_3 \times Z_5$, il est donné par

$$\begin{aligned} W_d = & \left(\frac{\theta^2 \theta''}{\Lambda_d^4} (F \varphi_T)' + \frac{\theta^4 (\theta')^2}{\Lambda_d^4} (F \varphi_T)'' \right) H_{\bar{5}} T_1 + \frac{\sigma \theta \theta' (\theta'')^2}{\Lambda_d^6} (F \varphi_T) H_{\bar{45}} T_1 \\ & + \frac{(\theta')^2 \theta''}{\Lambda_d^4} (F \varphi_T) H_{\bar{5}} T_2 + \left(\frac{\theta \theta''}{\Lambda_d^3} (F \varphi_T)' + \frac{\theta \theta'}{\Lambda_d^3} (F \varphi_T)'' \right) H_{\bar{45}} T_2 \\ & + \left(\frac{\sigma^2 \theta^2 (\theta')^2}{\Lambda_d^7} (F \varphi_T) + \frac{1}{\Lambda_d} (F \varphi_T)'' \right) H_{\bar{5}} T_3 + \left(\frac{\sigma^2 \theta^3}{\Lambda_d^6} (F \varphi_T)' \right) H_{\bar{45}} T_3, \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

où Λ_d est l'échelle de coupure de la théorie. En outre, Le superpotentiel W_u qui génère les masses aux quarks de type-up est donné par

$$\begin{aligned} W_u = & \frac{\theta^4 (\theta')^2}{\Lambda_u^6} T_1 T_1 H_5 + \left(\frac{\theta^2 (\theta')^2 (\theta'')^2}{\Lambda_u^6} + \frac{\sigma \theta (\theta')^2 \tilde{\theta}'}{\Lambda_u^5} \right) (T_1 T_2 + T_2 T_1) H_5 \\ & + \frac{\theta^2 \theta'}{\Lambda_u^3} (T_1 T_3 + T_3 T_1) H_5 + \frac{\theta \tilde{\theta}'}{\Lambda_u^2} T_2 T_2 H_5 + \frac{\theta' (\theta'')^2}{\Lambda_u^3} (T_2 T_3 + T_3 T_2) H_5 + T_3 T_3 H_5, \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

où l'échelle de coupure associé au secteur de quarks de type-up Λ_u peut être différente de celle des quarks de type-down Λ_d . En plus, les deux superpotentiels W_d et W_u peuvent

entraîner d'autres opérateurs de dimension supérieures, sauf que leur contribution sur les matrices de masses des quarks et de leptons est négligeable [129].

Matrices de masses

Le champ de Higgs $H_{\overline{45}}$ est introduit dans ce modèle pour distinguer entre les masses des quarks de type-down et celles des leptons chargés; nous rappelons qu'il dispose des propriétés suivantes

$$\begin{aligned} (H_{\overline{45}})_c^{ab} &= -(H_{\overline{45}})_c^{ba} \text{ et } (H_{\overline{45}})_c^{aa} = 0, \\ \langle (H_{\overline{45}})_i^{i5} \rangle &= v_{45} \quad , \quad i = 1, 2, 3, \\ \langle (H_{\overline{45}})_i^{45} \rangle &= -3v_{45}. \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

Après la brisure de la symétrie $SU(5)$, les superpotentiels W_d et W_u se décomposent en termes des champs du modèle standard où les composants doublet des Higgs H_5 , $H_{\overline{5}}$ et $H_{\overline{45}}$ acquièrent leurs VEVs v_u et v_d pour briser la symétrie électrofaible et générer les masses aux fermions. En outre, après la brisure de la symétrie de famille A_4 par le VEV des champs de flavons du modèle, la matrice de masse pour les quarks de type down et leptons chargés est donnée par

$$m = v_d \eta_T \begin{pmatrix} k_f \eta_\sigma \eta_\theta \eta_{\theta'} \eta_{\theta''}^2 & \eta_\theta^2 \eta_{\theta''} & \eta_\theta^2 \eta_\theta \\ \eta_{\theta'}^2 \eta_{\theta''} & k_f \eta_\theta \eta_{\theta''} & k_f \eta_\theta \eta_{\theta'} \\ \eta_\sigma^2 \eta_\theta^2 \eta_{\theta'}^2 & k_f \eta_\sigma^2 \eta_\theta^3 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{II.34})$$

ou cette matrice est la matrice de masse des quarks down $m = m_d$ dans le cas où le coefficient $k_f = 1$, bien que la matrice de masse des leptons chargés est donnée comme étant le transposé $m_e = m_d^T$ avec $k_f = -3$. De plus, les paramètres de la matrice sont définis comme suit

$$\eta_i = \frac{\langle |\varphi_i| \rangle}{\Lambda}, \quad (\text{II.35})$$

où $\varphi_i = \varphi_T, \theta^i, \tilde{\theta}'$ et σ . Pour les quarks de type-up, la matrice de masse obtenue est donnée par

$$m_u \sim v_u \begin{pmatrix} \eta_\theta^4 \eta_{\theta'}^2 & \eta_\theta^2 \eta_{\theta'}^2 \eta_{\theta''}^2 + \eta_\sigma \eta_\theta \eta_{\theta'}^2 \eta_{\tilde{\theta}'} & \eta_\theta^2 \eta_{\theta'} \\ \eta_\theta^2 \eta_{\theta'}^2 \eta_{\theta''}^2 + \eta_\sigma \eta_\theta \eta_{\theta'}^2 \eta_{\tilde{\theta}'} & \eta_\theta \eta_{\tilde{\theta}'} & \eta_{\theta'} \eta_{\theta''}^2 \\ \eta_\theta^2 \eta_{\theta'} & \eta_{\theta'} \eta_{\theta''}^2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.36})$$

Pour une discussion numérique sur les masses des fermions chargés ainsi que leur hiérarchie voir [129]

II.3.3 Mélange des Neutrinos

Dans ce modèle, la matrice de masse du neutrino est obtenue par le mécanisme de seesaw de type I qui se forme par les termes de Dirac et de Majorana. En effet, le terme de masse de Dirac est donné par le couplage $y F N H_5$. Or, en utilisant les produits tensoriels des représentations du groupe A_4 dans l'Annexe, nous obtenons la matrice de masse de Dirac

$$m_D = y v_u \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{II.37})$$

Encore, le terme de masse de Majorana s'agit du superpotentiel de Majorana W_M invariant sous la symétrie totale du modèle, il est donné par

$$W_M = (y_1 \varphi_S + y_2 \xi + y_2' \xi' + y_2'' \xi'') NN, \quad (\text{II.38})$$

avec y, y_1, y_2, y_2', y_2'' sont des constantes de couplage. La matrice de Majorana s'écrit donc sous la forme suivante

$$M_R = \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta & \gamma'' - \alpha & \gamma' - \alpha \\ \gamma'' - \alpha & 2\alpha + \gamma' & \beta - \alpha \\ \gamma' - \alpha & \beta - \alpha & 2\alpha + \gamma'' \end{pmatrix}, \quad (\text{II.39})$$

où $\alpha = y_1 \langle \varphi_S \rangle$, $\beta = y_2 \langle \xi \rangle$, $\gamma' = y_2' \langle \xi' \rangle$ and $\gamma'' = y_2'' \langle \xi'' \rangle$. Donc la matrice de masse du neutrino effectif est donnée par le mécanisme de seesaw de type I comme

$$m_\nu = -m_D M_R^{-1} m_D^T, \quad (\text{II.40})$$

notons que la matrice M_R peut induire le mélange U_{TBM} dans le cas où $\gamma' = \gamma''$; ceci implique que la matrice de Majorana pourrait être s'écrit comme étant une somme d'une partie qui préserve le mélange U_{TBM} et l'autre qui le viole

$$M_R = M_R^{TBM} + \delta M_R, \quad (\text{II.41})$$

avec

$$M_R^{TBM} = \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta & \gamma - \alpha & \gamma - \alpha \\ \gamma - \alpha & 2\alpha + \gamma & \beta - \alpha \\ \gamma - \alpha & \beta - \alpha & 2\alpha + \gamma \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \delta M_R = \Delta \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.42})$$

et les paramètres γ et Δ sont définis comme suit

$$\gamma = \frac{1}{2} (\gamma' + \gamma'') \quad \text{et} \quad \Delta = \frac{1}{2} (\gamma' - \gamma''). \quad (\text{II.43})$$

Puisque la matrice de mélange du neutrino est traitée comme une déviation du mélanges U_{TBM} par le terme δM_R , alors le paramètre Δ doit être très petit $|\Delta| \ll |\alpha|, |\beta|$ et par conséquent la matrice M_R se diagonalise d'une façon perturbative par la matrice $U_{TM} = U_{TBM} + \delta U$. Cette matrice de diagonalisation est la matrice de mélange TM_2 ⁴

$$U_{TM} \approx \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \alpha_3^* \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_3 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \alpha_3^* \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_3 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \alpha_3^* \end{pmatrix}, \quad (\text{II.44})$$

avec $\alpha_{13}^* = -\alpha_{13}$ peut être considéré comme paramètre de déviation du mélange TM, il s'écrit en terme des paramètres α, β, γ , et Δ de la matrice M_R comme suit

$$\alpha_{13} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\text{Re} \frac{\Delta}{(\alpha - \gamma)} + \text{Im} \frac{\Delta}{(\alpha - \gamma)} \frac{\text{Im} \frac{\beta}{(\alpha - \gamma)}}{\text{Re} \frac{\beta}{(\alpha - \gamma)}} \right) - i \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\text{Im} \frac{\Delta}{(\alpha - \gamma)}}{\text{Re} \frac{\Delta}{(\alpha - \gamma)}} \right). \quad (\text{II.45})$$

4. La diagonalisation perturbative de la matrice M_R est étudiée en détails dans la référence [130].

Le mélange U_{TBM} pourrait être rétabli dans la limite où $\Delta = \frac{1}{2}(\gamma' - \gamma'') = 0$. En conséquence, le paramètre Δ est considéré comme une sort de déviation de la matrice de mélange U_{TBM} pour obtenir une valeur non nulle de l'angle réacteur $\theta_{13} \neq 0$.

Pour finir cette section, nous rappelons que les symétries discrètes dans le cadre des constructions des modèles au-delà de MS génèrent d'une façon naturelle les mélanges TBM, BM, GR dans le secteur du neutrino, sauf que ce type de mélange se manifeste avec la valeur non nulle de l'angle θ_{13} . De là, différentes tentatives ont été utilisées dans les constructions de modèles afin d'expliquer les dernières mesures sur les mélanges du neutrinos. Une façon pour aller au-delà du mélange TBM est d'effectuer une déviation de la matrice de mélange TBM, cette dernière consiste à considérer des corrections à la matrice de masse des neutrinos (à travers la matrice de Dirac ou Majorana) pour briser la symétrie $\mu - \tau$ et garantir l'angle réacteur $\theta_{13} \neq 0$. En fait, c'est la méthode utilisé dans ce modèle actuel pour obtenir la valeur non nulle de l'angle θ_{13} , bien que la matrice de mélange totale coïncide avec la matrice TM. En d'autre part, il existe plusieurs façons qui consistent à réaliser la déviation du mélange TBM ; soit une déviation à partir du mélange de leptons chargés ou encore par une déviation à travers un autre type de mécanisme de seesaw.

Chapitre III

Ingénierie des GUTs dans la théorie-F

La théorie-F est considérée comme un cadre prometteur pour étudier la phénoménologie des cordes, puisqu'elle permet l'existence des symétries de jauge $\mathcal{G}_{GUT} = SU(5)$, $SO(10)$ et E_6 dans sa géométrie interne. Ce chapitre concerne l'ingénierie des modèles de GUT dans le cadre de la théorie-F. Dans la section 1, après avoir donné une brève introduction sur la théorie des cordes ainsi que certains de ses aspects phénoménologiques, nous décrivons la théorie-F et la motivation derrière son introduction. Dans la section 2, nous étudions la théorie-F dans le cadre de la théorie des corde de type IIB tout en présentant les ingrédients nécessaires pour incorporer les modèles de GUT dans sa géométrie interne. Dans la section 3, nous introduisons le formalisme de revêtement spectral qui vise à étudier les propriétés locales de la surface $\mathcal{S}_{GUT}$ tout en découplant la géométrie complète, cette dernière nous permet d'étudier l'approche semi-locale qui suppose que les modèles de GUT proviennent de la symétrie maximale E_8 . Dans la section 4, après une discussion sur l'importance des monodromies $\mathcal{Z}_N$ dans la construction des modèles de F-GUT semi-réalistes, nous étudions en particulier les modèles $\mathcal{G}_{GUT} = SU(5)$ et $SO(10)$ en présence du monodromie $\mathcal{Z}_2$ qui jouent un rôle principal pour des modèle à basse énergie phénoménologiquement satisfaisants.

III.1 De la théorie des cordes à la théorie-F

III.1.1 Généralités sur la théorie des cordes

Les modèles de jauge supersymétriques tel que le MSSM et les modèles de la théorie de grande unification résolvent certains, mais pas tous les problèmes du modèle standard. En fait, l'un des plus grands problèmes posés par ces théories de jauge est l'absence de description de la gravitation comme une quatrième force. Il est donc clair qu'une nouvelle physique est encore nécessaire pour unifier les quatre forces fondamentales de la nature. Le candidat principal à une telle nouvelle physique qui décrit la gravité avec les trois autres forces fondamentales est la théorie des cordes. Cette dernière a été proposée à la fin des années 1960 par Gabriele Veneziano comme une théorie pour décrire et modéliser les interactions fortes avant l'apparition de la chromodynamique quantique (QCD). Toutefois, en 1974, Scherk et Schwarz [131] remarquèrent que le spectre des états de cette théorie quantique comporte une particule non massive et de spin 2, susceptible d'être identifiée au graviton (boson de jauge associé à la force gravitationnelle), ainsi la théorie des cordes pourrait être adaptée comme une théorie de la gravité quantique.

Jusqu'à présent, la théorie des cordes est considérée le candidat le plus prometteur capable d'unifier les quatre interactions fondamentales, il est connue également comme

Type	Supersymétrie	Chirale	Groupe de jauge
Type I	$\mathcal{N} = 1$	Oui	$SO(32)$
Type IIA	$\mathcal{N} = 2$	Non	$U(1)$
Type IIB	$\mathcal{N} = 2$	Oui	—
Hétérotique HO	$\mathcal{N} = 1$	Oui	$SO(32)$
Hétérotique HE	$\mathcal{N} = 1$	Non	$E_8 \times E_8$

TABLE III.1 – Cinq versions de théories des cordes ainsi que leurs caractéristiques

une théorie cohérente de la gravité quantique. En effet, la relativité générale développée par Albert Einstein en 1915 et le modèle standard de la physique des particules, peuvent être obtenues en tant que des théories effectives pour des énergies au dessous de l'échelle de la théorie des cordes. L'idée de départ de cette théorie est de considérer que l'objet fondamental est une corde unidimensionnelle au lieu d'une particule ponctuelle. En outre, toutes les particules élémentaires existées sont interprétées comme des différentes modes de vibrations d'une corde de taille $l_s \sim \frac{1}{M_s}$, où M_s est l'échelle de la corde. De plus, l'un des modes de vibration possède les propriétés du graviton ; la particule associée à la force gravitationnelle. Par conséquent, la relativité générale est inclus naturellement dans la théorie des cordes.

Autrefois, la théorie des cordes bosonique (ouverte ou fermée) est la première théorie des cordes qui fut découverte. Néanmoins, à cause de la consistance interne de la théorie, elle ne pourrait être cohérente que si l'espace-temps dans lequel cette théorie est définie, possède une dimension égale à 26 [23]. En outre, la théorie des cordes bosonique ne présente pas une théorie d'unification consistante puisqu'elle prédit une particule de masse au carré négative appelée tachyon, de plus elle n'entraîne pas les fermions nécessaires pour décrire la matière. L'idée pour remédier à ces limitations est d'introduire la supersymétrie à la corde bosonique [23]. Avec l'appariation de la supersymétrie, des recherches sur la théorie des cordes supersymétrique (la supercorde) mène en 1984 à la découvert de la supercorde de "type I" par Green et Schwarz. Ils ont montrè que la supercorde de type I est libre d'anomalie si la dimension de l'espace-temps est 10, et elle possède un secteur de cordes ouvertes avec un groupe de jauge $SO(32)$ ainsi qu'un secteur de cordes fermées [19]. Après plusieurs études sur la théorie des supercordes, on arrivait en total à cinq versions distinctes des théorie des cordes qui sont consistantes à 10 dimensions [20], ils sont présentées dans le tableau (III.1)

Après la première révolution de la théorie des supercordes [21], une deuxième révolution a eu lieu en 1995 qui montre l'existence de dualités (notées S, T et U) reliant les cinq différentes théories des supercordes. En effet, E. Witten a introduit l'idée que la théorie des supercordes de type IIA peut être envisagée comme une limite particulière d'une théorie à 11 dimensions appelée théorie-M [22]. De plus, à la fin du 1995, Polshinski introduisait des objets non perturbatifs de dimension spatial p qui interagissent par l'échange de cordes ouvertes appelés les Dp-branes (ou p-brane de Dirichlet) [20]. En generale, une Dp-brane est définie comme étant une hypersurface sur laquelle les extrémités des cordes ouverts peuvent s'attachent selon les conditions aux limites de Dirichlet.

III.1.2 Phénoménologie des cordes

Jusqu'au milieu des années 80, la théorie des cordes a été proposée comme une théorie d'unification pour décrire la force gravitationnelle de telle façon qu'elle soit attachée aux autres forces fondamentales. En outre, tous les résultats théoriques obtenus durant les études sur les dualités et la nature non perturbative de la théorie des cordes ont changé radicalement notre conception de la physique théorique et conduisent après à des applications concrètes. Effectivement, l'une des applications les plus remarquables est la réalisation des modèles de physique des particules dans les théories des cordes, cela est motivée par l'idée que si la théorie des cordes est réalisée dans la nature, alors elle devrait produire le MS ou certaines de ses extensions à basse énergie. Ce genre d'études inclus dans le domaine appelé la phénoménologie des cordes [23] ; le but est tout simplement de construire des modèles qui relient la théorie des cordes à la physique observée à basse énergie.

Pour construire de tels modèles à basse énergie à partir des théories des supercordes définies à 10 dimensions, l'un des ingrédients cruciaux consiste à la notion de compactification. En effet, puisqu'il n'y a que quatre dimensions observées de l'espace-temps, la théorie en 10 dimensions doit être compactifiée sur des variétés compactes X dont la taille est trop petite pour être observable aux échelles d'énergie actuelle. Encore, l'idée du mécanisme de compactification est de considérer l'espace-temps de 10 dimensions comme étant un produit $\mathbb{R}^{1,3} \times X$ où $\mathbb{R}^{1,3}$ est l'espace temps de Minkowski non compact ainsi que X est un espace compact qui permet d'encoder les six dimensions non observables¹. En fait, le processus de compactification ne réduit pas seulement les dimensions supplémentaires mais il peut réduire également le nombre de supersymétrie [133]. En outre, la géométrie de la variété interne X code de nombreuses propriétés physiques (le groupe de jauge, le contenu de la matière et les valeurs des constantes de couplage, etc.) associées à la théorie résultante à 4 dimensions. Cependant, dans le cadre mathématique actuel, il n'existe pas de principes qui nous permettent de fixer le choix de la géométrie interne X . Il existe donc un nombre énorme de possibilités afin de compactifier les six dimensions internes, où chacune de ces possibilités conduit à une théorie physique complètement différente de l'autre, d'où l'espace de toutes les possibilités est connu sous le nom "string Landscape" [134].

D'un autre côté, la phénoménologie des cordes consiste à étudier les compactifications des théories des cordes qui conduisent à une physique à basse énergie. A ce stade, deux approches ont été introduites pour produire la physique à basse énergie à partir de la théorie des cordes ; il s'agit des approches bottom-up et top-down. Dans la première approche (bottom-up) [135], nous construisons d'abord une configuration locale en tenant compte d'un secteur de jauge (par exemple le modèle standard ou une de ses extensions) d'intérêt physique. Ensuite, nous intégrons ce secteur local dans un espace de compactification global cohérent qui incorpore la gravité. Par contre, dans l'approche top-down [23], de nombreuses propriétés telles que la gravité sont intégrées dès le début. Ainsi, la structure de la physique à basse énergie (MS) pourrait être dérivée de la théorie des cordes par une compactification appropriée en réduisant la dimension et le nombre de la supersymétrie de la théorie.

Une classe de modèles basés sur les deux approches a été construite pour faire contact avec la physique à basse énergie. Avant la révolution des D-branes, des modèles à 4 dimensions ont été réalisés à partir de la théorie Hétérotique $E_8 \times E_8$ compactifiée sur les variétés de

1. L'idée de dimensions supplémentaires a été proposée pour la première fois en 1921 par T. Kaluza, puis développée par O. Klein en 1926. Dans leur théorie, ils considéraient une cinquième dimension pour unifier les interactions gravitationnelles et électromagnétiques [132].

Secteur	Représentation sous $SO(8)$	Champs à 10D
NS-NS	$1 + 28 + 35$	ϕ, B_2, g
R-R	$1 + 28 + 35$	C_0, C_2, C_4
NS-R	$8 + 56$	λ, ψ
R-NS	$8 + 56$	λ, ψ

TABLE III.2 – Spectre non massif de la théorie des corde de type IIB.

Clabi-Yau de dimension 3 ou sur des orbifolds à 6 dimensions réels [24]. Cette théorie a reçue plus d'attention puisqu'elle a été la plus prometteuse pour construire des modèle a 4 dimensions ; où le groupe de jauge du modèle standard $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ est considéré comme un sous-groupe de l'un des groupes E_8 . D'ailleurs, après la révolution des D-branes, des modèles basés sur l'approche bottom-up commencent d'être étudié, il s'agit des modèles de D-branes intersectées auprès des théories des cordes de type II [25]. Dans ce type de modèles, le MS est réalisé localement dans des D-branes qui incluent dans la géométrie interne, ceci est dû au fait que les cordes ouvertes dérivantes les particules du MS sont sensibles à la géométrie locale au voisinage des D-branes, alors que l'incorporation de la gravité implique de tenir en compte les cordes fermées qui sont sensibles à la géométrie toute entière.

III.1.3 Théorie-F : Motivation et description

Symétrie $SL(2, \mathbb{Z})$ dans la théorie des cordes type IIB

La théorie des cordes IIB est une théorie chirale, son spectre non massif provient du produit tensoriel de deux spineurs de même chiralité. Le spectre non massif bosonique est formulé par les secteurs R-R (Ramond-Ramond) et NS-NS (Neveu-Schwarz-Neveu-Schwarz), tandis que le spectre fermionique est formulé par les secteurs NS-R et R-NS. Le contenu des champs ainsi que leurs représentations sous le petit groupe $SO(8)$ sont résumés dans le tableau (III.2) [23]. En effet, dans le secteur NS-NS, nous avons le dilaton ϕ , un champ 2-forme B_2 et le graviton g . En outre, le secteur R-R contient l'axion C_0 , les champs 2-forme C_2 et 4-forme C_4 . Dans chaque secteur fermionique NS-R et R-NS, nous avons un gravitino ψ et un dilatino λ . Les champs bosonique dans les secteurs NS-NS et R-R peuvent être réécrits d'une façon plus pratique en définissant les champs suivants

$$H_3 = dB_2, \quad \tau = C_0 + ie^{-\phi}, \quad G_3 = F_3 + \tau dB_2, \quad (\text{III.1})$$

$$\tilde{F}_5 = F_5 - \frac{1}{2}C_2 \wedge dB_2 + \frac{1}{2}C_2 \wedge F_3, \quad (\text{III.2})$$

où $F_p = dC_{p-1}$, et le champ τ encode la constante de couplage de la corde de type IIB à travers la relation $g_s = e^\phi$; il est connu sous le nom axio-dilaton. En utilisant ces définitions, nous pouvons écrire l'action bosonique de la corde de type IIB à 10 dimension dans le cadre d'Einstein [23]

$$S_{IIB} = \frac{2\pi}{l_s^8} \left(\int d^{10}x \sqrt{-g} R - \frac{1}{2} \frac{\partial \tau \bar{\partial} \tau}{(\text{Im } \tau)^2} + \frac{1}{\text{Im } \tau} G_3 \wedge * - G_3 + \frac{1}{2} \tilde{F}_5 \wedge * \tilde{F}_5 + C_4 \wedge H_3 \wedge F_3 \right), \quad (\text{III.3})$$

avec R est la courbure de l'espace à 10D, l_s est la longueur fondamentale de la corde, le champ $\tilde{F}_5$ est un champ auto-dual ; c'est à dire $\tilde{F}_5 = * \tilde{F}_5$. L'action S_{IIB} intervient la

Champs	Sources électriques	Sources magnétiques
C_0	D(-1) brane	D7 brane
C_2	D1 brane	D5 brane
C_4	D3 brane	D3 brane

TABLE III.3 – Sources électrique et magnétique des champs C_p du secteur R-R.

symétrie $SL(2, \mathbb{Z})$ définie par les transformations suivantes

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \begin{pmatrix} C_2 \\ B_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{III.4})$$

$$C_4 \rightarrow C_4 \quad \text{avec} \quad ad - bc = 1. \quad (\text{III.5})$$

Le champ τ se transforme dans la représentation fondamental du groupe $SL(2, \mathbb{Z})$, les champs 2-formes B_2 et C_2 se transforme comme un doublet tandis que le champ 4-formes C_4 et le graviton g restent invariant. Si nous prenons l'exemple $a = b = d = 1$ et $c = 0$, ceci implique la transformation du champ $\tau \rightarrow \tau + 1$, encore dans le cas où $a = d = 0$ et $b = -c = 1$, l'axio-dilaton admet la transformation $\tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}$ qui induit la dualité entre les couplages fort/faible de la théorie de type IIB.

D'ailleurs, les champs de p-formes dans les secteurs R-R et NS-NS sont des généralisations du champ de jauge habituel A_μ (1-forme) rencontré dans la théorie des champs. Comme le champ ordinaire A_μ a une source électrique et magnétique, donc les champs de p-formes possèdent également ces sources. D'où, tout champ de p-forme C_p possède une source électrique (p-1)-brane, ainsi qu'il possède une source magnétiques (p+7)-brane comme le montre le tableau (III.3)

Théorie-F

En 1996, Cumrun Vafa a proposé une théorie définie à 12 dimensions appelée théorie-F [26], cette dernière a été motivée par l'examen de la dualité entre la théorie-M et la corde de type IIB. En outre, la théorie-F aborde à la fois l'absence d'une interprétation géométrique de la symétrie $SL(2, \mathbb{Z})$ présente dans la théorie des cordes de type IIB et la nécessité d'un cadre non perturbatif pour décrire des compactifications avec les 7-branes. En effet, C. Vafa a d'abord noté que la symétrie $SL(2, \mathbb{Z})$ agissant sur le champ axio-dilaton τ_{IIB} est similaire à la transformation modulaire sur la structure complexe d'un tore $\tau (T^2)$. De plus, le couplage de la corde lié au dilaton ϕ ainsi que le D7-brane sensible au champ C_0 décrivent la forme d'un tore T^2 . D'où, la symétrie $SL(2, \mathbb{Z})$ qui est interprétée géométriquement comme un tore auxiliaire conduit à une théorie de 12-dimensionnelle : c'est la théorie-F.

Dans la théorie des cordes de type IIB à 10 dimensions, le champ axio-dilaton τ_{IIB} est considéré comme constant dans la géométrie interne, alors que la théorie-F se réalise par la variation de l'axio-dilaton en présence de 7-branes, ceci implique une courbe elliptique qui est fibrée sur la géométrie interne de la corde de type IIB à 10 dimension.

Dualité avec autres théories des cordes

En plus de la description de la théorie-F qui a été proposée par Vafa comme une géométrisation du régime non-perturbatif de la théorie des corde de type IIB avec la

variation de l'axio-dilaton. La théorie-F peut être formulée indirectement via des dualités avec d'autres théorie des cordes, il existe deux autres façons différentes de penser à la théorie-F :

- Une théorie duale à la théorie-M compactifiée sur un tore T^2 d'un volume nul [28].
- Une théorie duale à la théorie des cordes Hétérotique $E_8 \times E_8$, où les études dans [27], ont montré que la compactification de la théorie-F sur la surface K3 induire une théorie à 8 dimension duale à la théorie Hétérotique $E_8 \times E_8$ compactifiée sur un tore T^2 .

Dans ce mémoire de thèse, notre étude est exclusivement portée sur la théorie-F dans le cadre de la supercorde type IIB

III.2 Théorie-F dans le cadre de la supercorde type IIB

III.2.1 Compactification et fibration elliptique

Nous avons vu précédemment que la théorie des corde de type IIB à 10 dimension possède la symétrie $SL(2, \mathbb{Z})$, cette symétrie agit sur le champ scalaire complexe $\tau_{IIB} = \chi + ie^{-\phi}$ de la même façon que la structure complexe d'un tore $\tau(T^2)$. Encore, la variation du champ τ_{IIB} le long de la géométrie interne de la corde de type IIB implique la théorie-F dans un espace total à 12 dimensions. En conséquence, la théorie de corde type IIB peut être imaginée comme la compactification toroïdal de la théorie-F

Théorie-F compactifiée sur $T^2 \equiv$ Théorie des cordes de type IIB à 10D

La compactification de la théorie-F donne naissance à plusieurs théories en différentes dimensions conformément au type de la compactification employée. Or, la compactification la plus intéressante est celle qui conduit à quatre dimensions observables; ce type de compactification peut produire de nouveaux modèles de jauge $\mathcal{N} = 1$ à quatre dimensions d'intérêt phénoménologique. L'idée est qu'au lieu de compactifier sur le tore T^2 , nous compactifions la théorie-F sur une variété de Calabi-Yau χ_4 de dimension 4 elliptiquement fibrée sur la base $\mathcal{B}_3$. Localement la variété χ_4 est réalisée comme^{2 3} [27].

$$\chi_4 \sim \mathcal{B}_3 \times T^2, \quad (\text{III.6})$$

où $\mathcal{B}_3$ est une base de dimension 3 complexe, alors que T^2 est la fibre de l'espace total. Il s'en suit alors que la théorie-F sur χ_4 peut être vue comme la théorie de type IIB sur $\mathcal{B}_3$ dans laquelle l'axio-dilaton τ_{IIB} varie le long de la base $\mathcal{B}_3$. En outre, le tore T^2 peut être décrit algébriquement par l'équation de *Weierstrass* qui décrit une courbe elliptique comme suit

$$y^2 = x^3 + fx + g, \quad (\text{III.7})$$

2. En générale les variétés de Calabi-Yau de dimension n notés CY_n , sont des espaces complexes, compacts, Kählériens et ayant le groupe d'holonomie $SU(n)$.

3. On dit que $\pi : X \rightarrow B$ est une fibration elliptique lisse sur la base B si :

1. X et B sont deux variétés lisses de dimension n et $n - 1$ respectivement.
2. π est une projection surjective tel que le fibré modèle est π .
3. Il existe une section σ telle que $\sigma : B \rightarrow X$.

avec f et g sont des constantes complexes reliées à la structure complexe du tore T^2 . Cependant, Afin de décrire la variation du tore le long de la base $\mathcal{B}_3$, l'équation (III.7) qui décrit une courbe elliptique va maintenant décrire une fibration elliptique donnée par

$$y^2 = x^3 + f(z_i)x + g(z_i), \quad (\text{III.8})$$

où $f(z_i)$ et $g(z_i)$ ne sont plus des constantes mais ils dépendent des coordonnées z_i de la base $\mathcal{B}_3$. En particulier, dans la compactification sur une variété de Calabi-Yau elliptiquement fibrée, $f(z)$ et $g(z)$ sont des fonctions d'ordre 8 et 12 respectivement dans la base $\mathcal{B}_3$. Dans le langage des fibrés, on dit qu'ils sont des sections aux fibrés en droits $\mathcal{L}^8$ et $\mathcal{L}^{12}$ respectivement.

Selon la théorie-F, avoir identifier le champ axio-dilaton avec la structure complexe d'un tore $\tau_{IIB} = \tau_{T^2}$, ceci permet à déduire la relation entre les singularités de la fibration elliptique et l'emplacement des 7-branes de la corde type IIB. Partant de ce fait, nous définissons le discriminant Δ de la fibration elliptique (III.8) comme suit

$$\Delta = 4f^3 + 27g^2, \quad (\text{III.9})$$

les emplacements des 7-branes sont localisés par la valeur nulle du discriminant $\{\Delta = 0\} \subset \mathcal{B}_3$; en effet, ceci implique que la fibration elliptique dispose une singularité, on dit aussi que la fibre est dégénérée, voir figure (III.1).

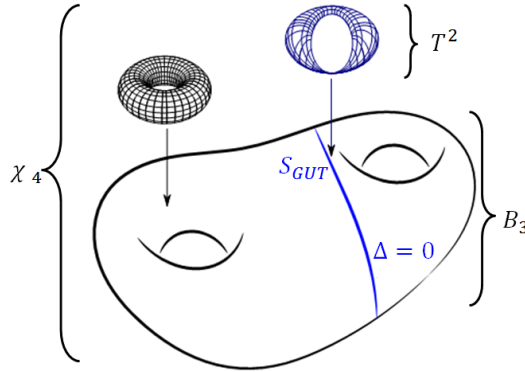


FIGURE III.1 – Description schématique de la variété de CY χ_4 elliptiquement fibrée sur la base $\mathcal{B}_3$. La fibration se manifeste en tant qu'un tore T^2 pour chaque point z_i de la base $\mathcal{B}_3$, le tore se contracte en un point lorsque le discriminant $\Delta = 0$.

A chaque point z_i de la base $\mathcal{B}_3$, l'équation (III.8) définit un tore T^2 dont le module caractérise les valeurs des champs χ et ϕ .

III.2.2 Modèle de Tate et émergence du groupe de jauge

La fibration elliptique possède une singularité lorsque le discriminant s'annule $\Delta = 0$. Cependant, la dégénérescence de la fibre n'est pas unique car il existe plusieurs façons dont la fibre dégénère selon l'ordre en z des polynômes f , g et le discriminant Δ . D'un autre côté, une classification complète des types de singularités a été effectuée par Kodaira dans le cadre de la surface K3 elliptiquement fibrée. Les travaux de Kodaira permettent de classer les différents types de singularités qui peuvent apparaître dans une fibration

$Ord(f)$	$Ord(g)$	$Ord(\Delta)$	Groupe
≥ 0	≥ 0	0	<i>non</i>
0	0	N	$SU(N)$
≥ 1	1	2	<i>non</i>
1	≥ 2	3	$SU(2)$
≥ 2	2	4	$SU(3)$
2	≥ 3	$N+6$	$SO(2N+8)$
≥ 2	3	$N+6$	$SO(2N+8)$
≥ 3	4	8	E_6
3	≥ 5	9	E_7
≥ 4	5	10	E_8

TABLE III.4 – Classification de Kodaira des différentes type de singularités selon l'ordre en z des polynômes f , g et Δ .

elliptique [136], où chaque type de singularité est affectée à une symétrie de jauge vivante dans la brane, elles sont résumées dans le tableau (III.4)

En d'autre part, une procédure algorithmique appelée algorithme de Tate [137][138], permet de généraliser les classifications de Kodaira utilisées dans le cas de la surface K3, cette algorithme est très utile lorsque la compactification est effectuée dans les variétés de CY de dimension plus grande, c'est le cas de la compactification de la théorie-F dans une variété χ_4 de dimension 4. Sous cette algorithme, la forme de Weierstrass (III.7) est réécrite sous la forme de Tate en effectuant une redéfinition des coordonnées locales

$$y^2 + a_1 x y + a_3 y = x^3 + a_2 x^2 + a_4 x + a_6, \quad (\text{III.10})$$

avec a_n sont des fonctions polynomiales dans la base $\mathcal{B}_3$ (en langage des fibrés, elles sont des sections à certains *fibrés en droites* $\mathcal{L}^n$). Maintenant, la forme du tore T^2 est déterminée par les paramètres a_n au lieu de f et g , d'où la relation entre ces paramètres est donnée par

$$f = -\frac{1}{48} (\beta_2^2 - 24\beta_4), \quad g = -\frac{1}{864} (-\beta_2^3 + 36\beta_2\beta_4 - 216\beta_6), \quad (\text{III.11})$$

avec

$$\beta_2 = a_1^2 + 4a_2, \quad \beta_4 = a_1 a_3 + 2a_4, \quad \beta_6 = a_3^2 + 4a_6. \quad (\text{III.12})$$

La classification des singularités dans l'algorithme de Tate dépend des paramètres a_n de la base $\mathcal{B}_3$. De plus, les a_n s'écrivent en terme de la coordonnée normale z comme

$$a_1 = b_5 z^{r_1}, a_2 = b_4 z^{r_2}, a_3 = b_3 z^{r_3}, \quad (\text{III.13})$$

$$a_4 = b_2 z^{r_4}, a_6 = b_0 z^{r_6}, \Delta = \Delta' z^\alpha. \quad (\text{III.14})$$

Particulièrement, les singularités sont classées selon l'ordre en z des paramètres a_n et le discriminant Δ , en effet, dans le cas où $z = 0$, ceci définit un diviseur appelé aussi surface de jauge $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}_3$; cette surface porte la singularité correspondante aux ordres en z . En d'autre terme, z représente la coordonnée normale à la surface $\mathcal{S}$ dans la base $\mathcal{B}_3$. Dans le langage des fibrés c'est *le fibré normal* à la surface $\mathcal{S}$, il est caractérisé par la première classe de Chern $c_1(NS) = -t$.

Type	Groupe	a_1	a_2	a_3	a_4	a_6	Δ
I_0	0	0	0	0	0	0	0
I_1	—	0	0	1	1	1	1
I_2	—	0	0	1	1	2	2
I_{2n}^s	$SU(2N)$	0	1	N	N	$2N$	$2N$
I_{2n+1}^s	$SU(2N+1)$	0	1	N	$N+1$	$2N+1$	$2N+1$
I_1^{*s}	$SO(10)$	1	1	2	3	5	7
IV^{*s}	E_6	1	2	3	3	5	8
III^{*s}	E_7	1	2	3	3	5	9
II^s	E_8	1	2	3	4	5	10

TABLE III.5 – Résultats partielles de l’algorithme de Tate. Différents type de singularités, leurs groupes de jauge ainsi que leurs ordres des coefficients $a_n \sim z^N$ correspondants

Les différentes types de singularités selon l’ordre de z des paramètres a_n et le discriminant Δ ainsi que leurs groupes de jauge correspondants sont résumés dans le tableau (III.5) [138] avec a_n étant des fonctions polynomiales de la base $\mathcal{B}_3$. Les indices des coefficients a_n ont été choisis de façon à indiquer la section à laquelle ils appartiennent.

III.2.3 Modèles Global, Local et semi local

En plus de la construction des modèles à basse énergie dans la théorie de supercordes, la théorie-F est considérée l’une des plus grandes tentatives qui relient les dimensions supplémentaires aux modèles de la physique des particules à quatre dimensions. Entre autre, la construction des modèles de GUT dans la théorie-F compactifiée sur une variété de CY χ_4 de dimension quatre elliptiquement fibrée a suscité beaucoup d’intérêt depuis dix ans. En effet, les symétries de GUT tel que $SU(5)$, $SO(10)$ et E_6 sont incorporées naturellement dans les 7-branes à travers les singularités de la fibration elliptique (III.5). Plusieurs modèles de GUT ont été construits dans la théorie-F à l’aide de l’approche de bottom-up ; en effet, les modèles F-GUT dans la configuration locale se réalisent localement dans les 7-branes qui portent les symétries de jauge, puis ils étendent à une version globale qui incorpore la gravité et par conséquent ils tiennent en compte les propriétés de la géométrie totale χ_4 .

Dans un modèle local, on s’intéresse à la surface de jauge $\mathcal{S}_{GUT}$ qui supporte la symétrie de GUT, cette surface est enroulée par une 7-brane qui est localisée par la valeur nulle du discriminant $\Delta = 0$ de la fibration elliptique [29][139]. En outre, la construction des modèles locaux dans la théorie-F peuvent donc être utilisés pour étudier les modèles GUT d’intérêt phénoménologique sans avoir besoin de comprendre la géométrie globale de l’espace χ_4 . Par ailleurs, la réalisation globale des modèles de GUT consiste à une construction explicite de la géométrie interne $\chi_4 \sim \mathcal{B}_3 \times T^2$, de plus, cette construction est réalisée souvent en termes de la géométrie torique des variétés χ_4 [140].

En d’autre part, il est encore possible d’étudier des modèles de GUT dans la surface $\mathcal{S}_{GUT}$ dans le cadre des modèles appelés semi-locaux [141], dans cette approche on suppose que la surface de jauge $\mathcal{S}_{GUT}$ possède une singularité maximale E_8 de la fibration elliptique, or la réalisation des symétrie de GUT dans la surface $\mathcal{S}_{GUT}$ est envisagée comme une

déformation de la singularité E_8 dans la forme de Tate.

Découplage de la Gravité

L'une des propriétés clés dans la constructions des modèles de jauge dans le cadre de la théorie-F est qu'il est possible de découpler la gravité de la théorie de jauge, ceci est dû au fait que la gravité se propage dans tout l'espace alors que les théories de jauge vivent localement sur la géométrie des 7-branes ; ce procédé appelé la limite de découplage de la gravité [31].

La gravité devient très importante à l'échelle de Planck, il est donc intéressant d'analyser la limite où la gravité peut être découplée du reste de la théorie de jauge. En effet, les échelles de Planck M_{Pl} et de GUT M_{GUT} ont une interprétation géométrique où ils dépendent généralement aux volumes de la base $\mathcal{B}_3$ et de la surface de GUT $\mathcal{S}_{GUT}$ comme suit [29][31] :

$$M_{Pl}^2 \propto Vol(\mathcal{B}_3) \quad \text{et} \quad M_{GUT}^4 \propto Vol^{-1}(\mathcal{S}_{GUT}). \quad (\text{III.15})$$

Si nous cherchons à découpler la gravité de la théorie de jauge à quatre dimensions, ceci implique la limite où $M_{Pl} \rightarrow \infty$ tandis que l'échelle M_{GUT} reste fixée. En d'autre part, selon (III.15), la limite de découplage de la gravité indique géométriquement que le volume de la base $\mathcal{B}_3$ tend vers l'infini $Vol(\mathcal{B}_3) \rightarrow \infty$ alors que le volume de la surface de jauge $Vol(\mathcal{S}_{GUT})$ reste fixé. Ceci revient à exiger que le rapport $\frac{Vol(\mathcal{S}_{GUT})}{Vol(\mathcal{B}_3)} \rightarrow 0$, d'où il s'ensuit que la surface $\mathcal{S}_{GUT}$ possède certaines hypothèses géométriques.

III.3 Modèles F-GUT et approche de revêtement spectral

III.3.1 Symétrie E_8 et construction de modèles semi-locaux

Dans le cadre de la théorie-F compactifiée sur une variété de Calabi-Yau elliptiquement fibrée $\chi_4 \sim \mathcal{B}_3 \times T^2$, les symétries de jauge de type GUT s'incorporent dans la surface $\mathcal{S}_{GUT} \subset \mathcal{B}_3$ à travers les singularités de la fibration elliptique. Ceci mène à construire des modèles de GUT supersymétriques d'intérêt phénoménologique dans une 7-brane qui enroule la surface (4-cycle) $\mathcal{S}_{GUT}$ à l'intérieur de l'espace ambiant $\mathcal{B}_3$. A ce stade, les cordes fermées qui engendrent les gravitons, se propagent dans l'espace ambiant $\mathcal{B}_3$, tandis que les cordes ouvertes attachées à la 7-brane qui enroule la surface $\mathcal{S}_{GUT}$, produisent les bosons de jauge associés à la symétrie de jauge dans $\mathcal{S}_{GUT}$. De plus, l'intersection entre deux 7-branes dans l'espace $\mathcal{B}_3$ –une 7-brane enroulante la surface de jauge $\mathcal{S}_{GUT}$ avec une autre 7-brane enroulante une surface $\mathcal{S}' \subset \mathcal{B}_3$ – donne lieu à une courbe complexe appelée une courbe de matière, où la quantification des modes des cordes ouvertes qui s'attachent à une paire de 7-branes, produit la matière légère qui apparaît à basse énergie comme des particules ordinaires (quarks, leptons et Higgs). Enfin, lorsque trois courbes de matière se rencontrent dans un point dans la surface $\mathcal{S}_{GUT}$, ceci entraîne un couplage de Yukawa appartient au superpotentiel du modèle considéré. Ces caractéristiques sont résumées dans le tableau III.6

Les classifications des singularités dans le modèle de Tate (voir le tableau III.5) montre que la singularité maximale qui peut être atteinte est la singularité E_8 [141]. En outre, dans l'approche semi-locale de la théorie-F, on considère normalement que la géométrie interne possède une symétrie maximale E_8 , à partir de laquelle viennent toutes les interactions.

Caractéristique	Dimension interne	Espace interne
Gravité	6 dim	B_3
Champs de jauge	4 dim	S_{GUT}
Matière	2 dim	$S_{GUT} \cap S'$
Interactions	0 dim	$S_{GUT} \cap S' \cap S''$

TABLE III.6 – Différentes caractéristiques dans la théorie-F ainsi que leurs dimensions et la nature de l'espace interne dans lequel sont définis.

Partant de ce fait, les symétries de jauge des modèles de GUT dans la géométrie locale $\mathcal{S}_{GUT}$ peuvent être donc considérées comme des déformations de la singularité E_8 , ainsi les groupes de GUT connus $SO(10)$, $SU(5)$ et E_6 proviennent de la brisure de la symétrie E_8 comme suit

$$\begin{aligned}
 E_8 &\rightarrow SU(5) \times SU(5)_\perp, \\
 E_8 &\rightarrow SO(10) \times SU(4)_\perp, \\
 E_8 &\rightarrow E_6 \times SU(3)_\perp,
 \end{aligned} \tag{III.16}$$

où le deuxième facteur accompagnant le groupe de GUT pour chaque brisure, appelé le groupe commutant ou le groupe perpendiculaire. La brisure de la symétrie E_8 est réalisée par le VEV d'un Higgs Φ dans l'adjoint du groupe perpendiculaire $SU(N)_\perp$ avec $N = 3, 4, 5$ [141][142]. De plus, les valeurs propres du champ Φ sont données en termes des poids fondamentaux t_i du groupe perpendiculaire $SU(N)_\perp$ comme suit

$$\Phi \sim \text{diag}(t_1; \dots; t_N) \text{ avec } \sum_{i=1}^N t_i = 0.$$

III.3.2 Approche de revêtement spectral

Les symétries de jauge de type GUT ($SU(5)$, $SO(10)$ et E_6) sont introduites dans la géométrie interne de la théorie-F en utilisant les singularités de la fibration elliptique. Or, ces symétries de jauge sont examinées localement comme une résolution de la singularité E_8 . En outre, pour analyser les symétries de jauge dans la surface $\mathcal{S}_{GUT}$ tout en construisant le spectre à basse énergie, nous utilisons une technique connue sous le nom de revêtement spectral.

L'approche de revêtement spectral est appliquée d'une façon attractive dans les constructions de modèles semi-locaux de la théorie-F. En fait, cette technique est utilisée au début dans des modèles qui découlent de la dualité entre la théorie-F et la corde Hétérotique [143]. De plus, cette approche dans le cadre de la théorie-F n'est qu'une extension de celle utilisée dans la corde Heterotique. Il faut maitre en évidence que les modèles globaux dans la théorie-F ou Heterotique utilise cette technique pour étudier le flux de jauge qui induire la chiralité, où elle est largement utilisée dans la théorie-F avec des singularités $SU(5)$ [144], $SO(10)$ [145], et E_6 [146]. Néanmoins, dans cette thèse nous allons étudier cette approche dans le cadre de la théorie-F sans tenir en compte la dualité avec la corde Hétérotique.

En général, dans un modèle de type GUT en théorie-F, la surface de jauge $\mathcal{S}_{GUT}$ dont laquelle les symétries de jauge, les courbes de matière et les interactions de Yukawa sont localisés, ce n'est qu'un diviseur de la base $\mathcal{B}_3$ en posant la coordonnée normale $z = 0$.

La construction par l'approche de revêtement spectral peut être considérée comme la restriction du modèle de Tate au voisinage du 7-brane enroulant la surface $\mathcal{S}_{GUT}$ sans tenir en compte certaines informations globales. Le point de départ est de considérer un espace auxiliaire de dimension trois complexe $W = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathcal{S}_{GUT}} \oplus \mathcal{K}_{\mathcal{S}_{GUT}})$ qui est une **projectivisation de l'espace total des fibrés canoniques**, cette espace n'est pas un espace de Calabi-Yau mais il sert à traiter la surface $\mathcal{S}_{GUT}$ comme une base de la fibration de l'espace total W . On peut l'exprimer explicitement par la projectivisation suivante [147]

$$W = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathcal{S}_{GUT}} \oplus \mathcal{K}_{\mathcal{S}_{GUT}}) \rightarrow \mathcal{S}_{GUT} \quad (\text{III.17})$$

où $\mathcal{O}_{\mathcal{S}_{GUT}}$ et $\mathcal{K}_{\mathcal{S}_{GUT}}$ sont notés respectivement comme les fibrés trivial et canonique sur $\mathcal{S}_{GUT}$, toutefois, cette projection ne possède pas une relation triviale avec la base $\mathcal{B}_3$, mais si on compare cette nouvelle fibration avec celle considérée dans la compactification de la théorie-F, alors on constate que la fibration utilisée dans la compactification sur la variété de Calabi-Yau χ_4 est elliptique sur la base $\mathcal{B}_3$ tandis que l'espace W est dit $\mathbb{P}^1$ -fibré sur la base $\mathcal{S}_{GUT}$; c'est à dire que la fibre employée dans la dernière est une fibration- $\mathbb{P}^1$

$$\begin{array}{rcl} T^2 & : & \chi_4 \dashrightarrow \mathcal{B}_3 \\ & & \cup \\ \mathbb{P}^1 & : & W \dashrightarrow \mathcal{S}_{GUT} \end{array} \quad (\text{III.18})$$

La surface $\mathcal{S}_{GUT}$ qui était considérée dans la compactification sur χ_4 comme un diviseur $\mathcal{S}_{GUT} \approx \mathcal{B}_3|_{z=0}$ est imaginée maintenant dans cette vision locale comme une base de la fibration (III.17).

Revêtement spectral avec singularité $SU(5)$

Pour illustrer l'approche de revêtement spectral dans les modèles de F-GUT, on considère le modèle de GUT $SU(5)$ dans la surface de jauge $\mathcal{S}_{GUT}$, ceci implique la brisure de la singularité maximale E_8 comme

$$E_8 \rightarrow SU(5) \times SU(5)_\perp, \quad (\text{III.19})$$

dans ce cas du modèle $SU(5) \times SU(5)_\perp$, la surface $\mathcal{S}_{GUT}$ possède une singularité $SU(5)$ donnée par l'équation

$$y^2 = x^3 + b_5xy + b_4x^2z + b_3yz^2 + b_2xz^3 + b_0z^5. \quad (\text{III.20})$$

L'approche de revêtement spectral est complètement codée dans le groupe $SU(5)_\perp$; le groupe commutant avec $SU(5)$. On considère les cordonnées homogènes (U, V) pour paramétrer chaque fibre $W_p \cong \mathbb{P}^1$ dans l'espace total W . En général, on peut construire des revêtements spectraux $\mathcal{C}_5, \mathcal{C}_{10}$ et $\mathcal{C}_{15}$ associés aux représentations de $SU(5)_\perp$ à savoir $5_\perp, 10_\perp$ et $15_\perp$ respectivement [144]. En particulier, l'équation de revêtement spectral $\mathcal{C}_5 \subset W$ associée à la singularité $SU(5)$ dans l'équation (III.20) est décrite par l'équation

$$\mathcal{C}_5 : b_0U^5 + b_1U^4V + b_2U^3V^2 + b_3U^2V^3 + b_4UV^4 + b_5V^5 = 0, \quad (\text{III.21})$$

avec les b_k sont des fonctions dans la surface $\mathcal{S}_{GUT}$ tandis que les coordonnées homogènes U et V de la fibre $\mathbb{P}^1$ sont des sections aux fibrés $\mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{K}_{\mathcal{S}_{GUT}}$ et $\mathcal{O}(1)$ respectivement; le fibré $\mathcal{O}(1)$ s'appelle le fibré en droit d'ordre 1 dans $\mathbb{P}^1$. Nous pouvons définir le paramètre affine $s = \frac{U}{V}$, alors tout voisinage dans la surface $\mathcal{S}_{GUT}$ est modelé par un revêtement

spectral $\mathcal{C}_5$ donné par l'équation

$$\mathcal{C}_5 \quad : \quad b_0 s^5 + b_1 s^4 + b_2 s^3 + b_3 s^2 + b_4 s + b_5 = 0 \quad , \quad (\text{III.22})$$

cette équation peut être imaginée comme un diviseur dans l'espace total des fibrés canonique W et le paramètre s est une section au *fibré canonique* $\mathcal{K}_{\mathcal{S}_{GUT}}$ dont sa première classe de Chern est définie comme $c_1(\mathcal{K}_{\mathcal{S}_{GUT}}) = -c_1(\mathcal{S}_{GUT}) = -c_1$, cela implique que la classe d'homologie de l'équation de revêtement spectral $\mathcal{C}_5$ est $[\mathcal{C}_5] = \eta + 5c_1(\mathcal{K}_{\mathcal{S}_{GUT}}) = \eta - 5c_1$. En outre, dans l'espace totale W , la surface $\mathcal{S}_{GUT}$ réside en $s = 0$ comme

$$W|_{s=0} = \mathcal{S}_{GUT}. \quad (\text{III.23})$$

A propos des équations de revêtement spectrales $\mathcal{C}_5$ et $\mathcal{C}_{15}$ associées aux représentations $10_\perp$ et $15_\perp$, nous pouvons les construire par analogie avec celle de $\mathcal{C}_5$, et on déduit brièvement que

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{10} \quad : \quad & \sum_{k=0}^{10} c_k s^{k-10} = 0, \\ \mathcal{C}_{24} \quad : \quad & \sum_{k=0}^{24} d_k s^{k-24} = 0, \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

tandis que leurs classes d'homologie sont données par

$$\begin{aligned} [\mathcal{C}_{10}] &= 2\eta - 10c_1, \\ [\mathcal{C}_{10}] &= 3\eta - 15c_1, \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

Détermination des courbes de matière

Nous avons vu dans ce qui précède que la matière est localisée dans ce qu'on appelle des courbes de matière ; ces courbes proviennent de l'intersection entre deux 7-branes, une brane enroulante la surface de jauge $\mathcal{S}_{GUT}$ qui porte la symétrie de jauge (la symétrie $SU(5)$ dans ce cas) et la deuxième 7-brane porte la symétrie $U(1) \subset SU(5)_\perp$, cette intersection peut être analysée algébriquement dans le discriminant Δ associé à la singularité $SU(5)$ [144], mais la situation actuelle n'est pas suffisante pour extraire les propriétés de toutes les courbes de matière associées au modèle $SU(5) \times SU(5)_\perp$. L'intersection entre deux 7-branes pour déterminer les courbes de matière

$$\Sigma_{\text{Matière}} = 7\text{-brane}_{\mathcal{S}_{GUT}} \cap 7\text{-brane}_{\mathcal{S}'} \quad (\text{III.26})$$

se traduit dans l'approche de revêtement spectral comme l'intersection suivante

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{Matière}} &= \mathcal{C}_N \cap \mathcal{S}_{GUT} \\ &= \mathcal{C}_N|_{s=0} \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

avec $N = 5, 10$ et 15 . Ceci signifie que les courbes de matière $\Sigma_{\text{Matière}}$ en générale sont dérivées à partir de l'intersection des revêtements spectraux $\mathcal{C}_N$ avec la surface de jauge $\mathcal{S}_{GUT}$. De là, les propriétés des courbes de matière Σ_{10} , Σ_5 et Σ_1 du modèle $SU(5) \times SU(5)_\perp$ peuvent être attirées conformément au type de revêtement $\mathcal{C}_N$.

III.3.3 Monodromies et décomposition du revêtement spectral $\mathcal{C}_N$

L'approche de revêtement spectral offre la possibilité de construire les symétrie de GUT ainsi que déterminer les propriétés des courbes de matière dans la surface $\mathcal{S}_{GUT}$. Néanmoins, afin de produire des modèles phénoménologiquement satisfaisants, la notion de monodromie ou la décomposition de l'équation de revêtement spectral est très essentiel dans cette approche. Pour illustrer ceci, on prend toujours l'exemple du modèle $SU(5)_{GUT} \times SU(5)_{\perp}$ qui provient de la décomposition du groupe exceptionnel E_8 comme

$$E_8 \rightarrow SU(5)_{GUT} \times SU(5)_{\perp} ,$$

comme nous avons discuté précédemment, le groupe $SU(5)_{GUT}$ est défini comme le groupe de jauge dans la théorie effective à 4 dimension tandis que le deuxième groupe $SU(5)_{\perp}$ constitue une symétrie supplémentaire sur la théorie effective ; cette symétrie est étudiée dans l'approche du revêtement spectral. La matière résidante dans la représentation adjoint 248 du groupe exceptionnel E_8 , va se décomposer sous le groupe $SU(5)_{GUT} \times SU(5)_{\perp}$ comme suit

$$\begin{aligned} 248 \rightarrow & (24, 1_{\perp}) \oplus (1, 24_{\perp}) \oplus \\ & (10, 5_{\perp}) \oplus (\overline{10}, \bar{5}_{\perp}) \oplus \\ & (\bar{5}, 10_{\perp}) \oplus (5, \overline{10}_{\perp}) , \end{aligned} \quad (III.28)$$

ce qui montre que ce modèle possède cinq représentations $10 \in SU(5)_{GUT}$ et dix cinquantuplet $(\bar{5}, 10_{\perp})$ on plus de vingt quatre singlets $(1, 24_{\perp})$, ces représentations sont localisées dans les courbes de matière notées Σ_{10} , Σ_5 et Σ_1 . En pratique, pour obtenir des modèles consistants. On considère la brisure de la symétrie E_8 en terme de la sous-algèbre de Cartan $U(1)_{\perp}^4 \subset SU(5)_{\perp}$, alors la brisure de la symétrie E_8 devient

$$E_8 \rightarrow SU(5)_{GUT} \times U(1)_{\perp}^4 . \quad (III.29)$$

Cette brisure montre que les cinq courbes de matière Σ_{10} sont distinguées par des 2-cycles t_i dans la surface de jauge $\mathcal{S}_{GUT}$, en d'autre termes, les courbes de matière portent des charges sous la sous-algèbre de Cartan $U(1)_{\perp}^4$. La même chose pour les courbes Σ_5 et Σ_1 , ils sont caractérisés respectivement par les charge $t_i + t_j$ et $\pm(t_i - t_j)$. En effet les charges t_i sont les 5 poids fondamentaux du groupe $SU(5)_{\perp}$

$$\begin{aligned} \Sigma_{10} : & t_i , \\ \Sigma_5 : & t_i + t_j , \\ \Sigma_1 : & \pm(t_i - t_j), \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (III.30)$$

Prenons l'exemple de la courbe de matière Σ_{10} décrite par l'équation $\mathcal{C}_5$

$$\mathcal{C}_5 : b_0 s^5 + b_1 s^4 + b_2 s^3 + b_3 s^2 + b_4 s + b_5 = 0 , \quad (III.31)$$

où les informations sur la géométrie interne sont codées dans les coefficient b_i du $\mathcal{C}_5$. En plus, les courbes de matière dans (III.28) sont associées aux poids fondamentaux t_i du

groupe $SU(5)$; ces poids sont également les racines de l'équation $\mathcal{C}_5$ comme

$$\mathcal{C}_5 : b_0 \prod_{i=1}^5 (s - t_i) . \quad (\text{III.32})$$

Dans la présence de quatre $U(1)$ s, les couplages de Yukawa du modèle $SU(5)$ pour générer les masse aux quarks et leptons doivent être invariants sous $U(1)_\perp^4$, en d'autre termes, ils doivent être satisfaire la condition de la trace nulle $\sum_{i=1}^5 t = 0$. Pour les équations de revêtement spectraux $\mathcal{C}_5$ et $\mathcal{C}_{10}$, les cinq représentations 10_{t_i} résident dans la même courbe de matière Σ_{10} , la même chose pour les dix représentations $\bar{5}_{t_i+t_j}$, il résident dans la courbe de matière $\Sigma_{\bar{5}}$ (ceci sera étudié en détails dans la section suivante). Cependant, un modèle $SU(5)$ semi réaliste doit contenir une représentation $\bar{5}_M$ qui doit être identifiée à la matière, et deux autres représentations $\bar{5}_{H_u} + \bar{5}_{H_d}$ doivent être identifiées aux Higgs de type up et down respectivement. Alors la détermination des courbes de matière avec les équations de revêtement spectraux $\mathcal{C}_5$ et $\mathcal{C}_{10}$ ne conduit pas généralement à un modèle $SU(5)$ réaliste.

Pour contourner cette difficulté, les équations de revêtements spectral $\mathcal{C}_5$ et $\mathcal{C}_{10}$ doivent être décomposées par l'action des symétries appelées monodromies [141][142][144]. Ces derniers sont introduits comme des symétries agissants sur les poids t_i pour autoriser tous les couplage de Yukawa afin de construire un modèle réaliste. Dans le cas du groupe $SU(5)_\perp$, les monodromies possibles sont celui qui appartiennent au groupe de Weyl $S_5 \subset W(SU(5)_\perp)$ agissant sur les poids fondamentaux t_i . L'action des monodromies ont une implication très importante dans la décomposition de l'équation de revêtement spectral $\mathcal{C}_5$. Pour une idée claire sur l'introduction de ces symétries, nous allons étudier par la suite certains modèles GUT en présence de ces monodromies

III.4 Construction des modèles F-GUT avec le monodromie $\mathcal{Z}_2$

Il est connu au cours de ces dernières années que la théorie F est un cadre prometteur pour la construction des modèles de GUT dans la théorie des cordes. En effet, la compactification de la théorie-F sur les variétés de Calabi-Yau elliptiquement fibrées est bien adaptée à l'étude des symétries de jauge ($SU(5)$, $SO(10)$ et E_6) dans la phénoménologie des cordes. En outre, l'approche bottom-up permette à construire des modèles locaux dans la surface de jauge $\mathcal{S}_{GUT}$ qui inclue dans l'espace interne total χ_4 , ces modèles visent à répondre à de nombreuses questions concernant la physique des particules tel que la stabilité du proton, la séparation du doublet-triplet de Higgs, et la génération des masses aux neutrinos.

Dans cette section, nous allons étudier la construction des modèles GUT ($\mathcal{G}_{GUT} = SU(5)$ et $SO(10)$) dans la théorie-F compactifiée dans une variété de CY elliptiquement fibrée sur la base $\mathcal{B}_3$, dans cette construction nous allons utiliser l'approche de revêtement spectral pour déterminer les spectres de masse et les propriétés nécessaires pour des modèles effectifs à basse énergie. En plus, pour avoir des modèles semi-réalistes, nous allons utiliser la décomposition de l'équation de revêtement spectral en introduisant les

monodromies $\mathcal{Z}_N$, en particulier nous allons étudier les modèles $\mathcal{G}_{GUT}$ en utilisant le monodromie le plus petit $\mathcal{Z}_2 \subset W(SU(N)_\perp)$ pour les deux cas

$$\begin{aligned} E_8 &\rightarrow SU(5) \times SU(5)_\perp, \\ E_8 &\rightarrow SO(10) \times SU(4)_\perp. \end{aligned} \quad (\text{III.33})$$

III.4.1 Modèle $SU(5)$

Pour construire le modèle $SU(5) \times SU(5)_\perp$ dans la théorie-F, on profite de l'approche de revêtement spectral qui se localise sur le diviseur $\mathcal{S}_{GUT}$ appartenant à l'espace de CY elliptiquement fibré ; dans ce cas, le diviseur $\mathcal{S}_{GUT}$ sera traité comme une base de l'espace total des fibrés canoniques $W = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathcal{S}_{GUT}} \oplus \mathcal{K}_{\mathcal{S}_{GUT}})$. En outre, dans ce cas du modèle $SU(5) \times SU(5)_\perp$, la surface de jauge $\mathcal{S}_{GUT}$ porte la singularité $SU(5)$ résultante de la brisure de la singularité maximale E_8

$$E_8 \rightarrow SU(5) \times SU(5)_\perp, \quad (\text{III.34})$$

alors que la singularité $SU(5)$ est codée dans la forme de Tate

$$y^2 = x^3 + b_5 xy + b_4 x^2 z + b_3 y z^2 + b_2 x z^3 + b_0 z^5. \quad (\text{III.35})$$

Selon la brisure de la singularité E_8 effectuée dans (III.34), sa représentation adjointe se décomposera sous le modèle comme suit

$$\begin{aligned} 248 &\rightarrow (24, 1_\perp) \oplus (1, 24_\perp) \oplus \\ &\quad (10, 5_\perp) \oplus (\overline{10}, \overline{5}_\perp) \oplus \\ &\quad (\overline{5}, 10_\perp) \oplus (5, \overline{10}_\perp), \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

ce qui montre que ce modèle possède cinq représentations $10 \in SU(5)_{GUT}$ et dix 5-uplets $(\overline{5}, 10_\perp)$ en plus de vingt quatre singlets $(1, 24_\perp)$, ces représentation sont localisées dans les courbes de matière notées Σ_{10} , Σ_5 et Σ_1 . En effectuant la brisure $SU(5)_\perp \rightarrow U(1)_\perp^4$ par un VEV non-nul du Higgs adjoint noté $\Phi = \text{diag}(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$, la brisure de la symétrie E_8 devient

$$E_8 \rightarrow SU(5)_{GUT} \times U(1)_\perp^4,$$

les courbes de matière Σ_{10} , Σ_5 et Σ_1 sont caractérisées respectivement par les poids t_i , $t_i + t_j$ et $\pm(t_i - t_j)$ de la sous-algèbre de Cartan $U(1)_\perp^4$

$$\begin{aligned} \Sigma_{10} &: t_i, \\ \Sigma_5 &: t_i + t_j, \\ \Sigma_1 &: \pm(t_i - t_j), \quad i \neq j, \end{aligned} \quad (\text{III.37})$$

ces poids fondamentaux satisfont à la condition de la trace $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 0$. Les cinq courbes de matière Σ_{10} sont déterminées par l'équation de revêtement spectral $\mathcal{C}_5$ associée à la représentation fondamentale $5_\perp$ du groupe $SU(5)_\perp$, tandis que les courbes $\Sigma_5, \Sigma_1 \in SU(5)_{GUT}$ sont associés aux équations de revêtements spectraux $\mathcal{C}_{10}$ et $\mathcal{C}_{24}$ respectivement,

ils sont définies comme suit

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_5 & : b_0 s^5 + b_1 s^4 + b_2 s^3 + b_3 s^2 + b_4 s + b_5 = 0, \\ \mathcal{C}_{10} & : \sum_{k=0}^{10} c_k s^{k-10} = 0, \\ \mathcal{C}_{24} & : \sum_{k=0}^{24} d_k s^{k-24} = 0. \end{aligned} \tag{III.38}$$

Les courbes de matière Σ_{10} , $\Sigma_{\bar{5}}$ et Σ_1 ne sont que des courbes résultantes de l'intersection entre la surface de jauge $\mathcal{S}_{GUT}$ et les revêtements spectraux $\mathcal{C}_5$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_{15}$

$$\begin{aligned} \Sigma_{10} & \rightarrow \mathcal{C}_5 \cap \mathcal{S}_{GUT}, \\ \Sigma_5 & \rightarrow \mathcal{C}_{10} \cap \mathcal{S}_{GUT}, \\ \Sigma_1 & \rightarrow \mathcal{C}_{15} \cap \mathcal{S}_{GUT}. \end{aligned} \tag{III.39}$$

En outre, les courbes de matière qui sont déterminées dans l'approche de revêtement spectral comme étant l'intersection entre la surface de jauge et les revêtement spectral, peuvent être imaginées globalement comme l'intersection entre deux surfaces

$$\begin{aligned} \Sigma_{10} & = \mathcal{S}' \cap \mathcal{S}_{GUT}, \\ \Sigma_5 & = \mathcal{S}'' \cap \mathcal{S}_{GUT}, \\ \Sigma_1 & = \mathcal{S}''' \cap \mathcal{S}_{GUT}. \end{aligned} \tag{III.40}$$

La surface $\mathcal{S}_{GUT}$ est le diviseur qui porte la singularité $SU(5)$ tandis que les surfaces $\mathcal{S}'$, $\mathcal{S}''$ et $\mathcal{S}'''$ sont des surfaces dans la base $\mathcal{B}_3$ qui portent la symétrie $U(1) \in SU(5)_\perp$. Alors, en utilisant les intersections entre les équations de revêtements spectraux et la surface de jauge défini par $s = 0$ on obtient les équations des courbes de matière

$$\Sigma_{10} : 10_{t_i} \rightarrow b_5 = 0, \tag{III.41}$$

$$\Sigma_5 : \bar{5}_{t_i+t_j} \rightarrow c_{10} = 0. \tag{III.42}$$

Nous remarquons que le modèle $SU(5) \times SU(5)_\perp$ sans factorisation du revêtement spectral $\mathcal{C}_4$ implique que toutes les cinq courbes 10_{t_i} et les dix $\bar{5}_{t_i+t_j}$ sont localisés dans les mêmes courbes de matière définies par les équations (III.41 et III.42) respectivement, c'est pourquoi le modèle souffre de plusieurs problèmes :

- i) Le terme de masse du quark top provient du couplage de Yukawa $10_{t_i}.10_{t_i}.\bar{5}_{-t_i-t_j}$ n'est pas autorisé puisqu'il n'est pas invariant sous le groupe perpendiculaire $SU(5)_\perp$
- ii) La matière chirale à basse énergie dans $\bar{5}_M$ et les Higgs up 5_{H_u} et down $\bar{5}_{H_d}$ sont localisés dans la même courbe de matière Σ_5
- iii) Puisque $\bar{5}_M$ qui contient la matière et le Higgs de type down $\bar{5}_{H_d}$ résident dans la même courbe de matière notée Σ_5 , alors l'existence du couplage de Yukawa qui assure les masses aux particules quarks down et leptons implique également l'existence d'un couplage de type $10.\bar{5}_M.\bar{5}_M$ invariant sous le modèle $SU(5) \times SU(5)_\perp$; ce couplage de dimension-4 pose le problème de la désintégration rapide du proton.

A ce stade, rappelons que les classes des modèles de F-GUT semi-réalistes (cas du modèle $SU(5)$) doivent répondre au moins aux contraintes suivantes :

- Le modèle de $SU(5)$ devrait avoir 3 générations de la matière chirale 10_M et $\bar{5}_M$.
- Existence de deux types de Higgs 5_{H_u} et $\bar{5}_{H_d}$ pour fournir la masse aux particules élémentaires (quarks et leptons).

- Absence des opérateurs de dimension 4 et 5 qui mènent à la désintégration rapide du proton.
- Absence du terme- μ ($\mu 5_{H_u} \bar{5}_{H_d}$) à l'arbre qui génère la masse de Higgs à une grande échelle.

Une partie de ces exigences phénoménologique dans la construction du modèle $SU(5) \times SU(5)_\perp$ dans la théorie-F sont effectuées par l'introduction des monodromies [141][142][144]. L'action de ces derniers apparaît dans l'identification des cinq poids fondamentaux t_i , ainsi que dans l'identification des quatre $U(1)$ de la sous-algèbre de Cartan du groupe perpendiculaire $SU(5)_\perp$. En outre, l'introduction des monodromies implique la factorisation de l'équation de revêtement spectral comme suit

$$\mathcal{C}_5 \rightarrow \prod_i \mathcal{C}_i. \quad (\text{III.43})$$

Dans le modèle $SU(5)$, les monodromies possibles sont ceux qui appartiennent au groupe symétrique S_5 ; le groupe de Weyl associé au groupe $SU(5)_\perp$, chaque type de monodromie affecte sur la factorisation de l'équation $\mathcal{C}_5$ de la façon suivante

$$\begin{aligned} \text{Monodromie } \mathcal{Z}_2 & : \mathcal{C}_5 \rightarrow \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_1, \\ \text{Monodromie } \mathcal{Z}_3 & : \mathcal{C}_5 \rightarrow \mathcal{C}_3 \times \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_1, \\ \text{Monodromie } \mathcal{Z}_4 & : \mathcal{C}_5 \rightarrow \mathcal{C}_4 \times \mathcal{C}_1, \\ \text{Monodromie } \mathcal{Z}_2 \times \mathcal{Z}_2 & : \mathcal{C}_5 \rightarrow \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_1, \\ \text{Monodromie } \mathcal{Z}_2 \times \mathcal{Z}_3 & : \mathcal{C}_5 \rightarrow \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_3. \end{aligned} \quad (\text{III.44})$$

L'action de ces monodromies peut être se voir dans l'identification des poids fondamentaux t_i comme suit

$$\begin{aligned} \text{Monodromie } \mathcal{Z}_2 & : t_1 = t_2, \\ \text{Monodromie } \mathcal{Z}_3 & : t_1 = t_2 = t_3, \\ \text{Monodromie } \mathcal{Z}_4 & : t_1 = t_2 = t_3 = t_4, \\ \text{Monodromie } \mathcal{Z}_2 \times \mathcal{Z}_2 & : t_1 = t_2 \text{ et } t_3 = t_4, \\ \text{Monodromie } \mathcal{Z}_2 \times \mathcal{Z}_3 & : t_1 = t_2 \text{ et } t_3 = t_4 = t_4. \end{aligned} \quad (\text{III.45})$$

Certains de ces monodromies jouent un rôle très important dans la construction du modèle $SU(5)$ dans la théorie-F, voir [142][144]. Rappelons que l'équation de revêtement spectral associé à la représentation fondamentale du groupe $SU(5)_\perp$ est écrite en termes des coefficient b_k de la surface de jauge $\mathcal{S}_{GUT}$ et les 2-cycle t_i sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_5 & : b_0 s^5 + b_1 s^4 + b_2 s^3 + b_3 s^2 + b_4 s + b_5 = 0, \\ & : b_0 \prod_{i=1}^5 (s - t_i), \end{aligned} \quad (\text{III.46})$$

en comparant l'équation des b_k et celle des t_i , on obtient la relation $b_1 = b_0 \sum_i t_i = 0$. Les autres coefficients b_k en termes des t_i sont donnés par

$$\begin{aligned} b_2 &= b_0 \sum_{i < j} t_i t_j, \\ b_3 &= b_0 \sum_{i < j < k} t_i t_j t_k, \\ b_4 &= b_0 \sum_{i < j < k < l} t_i t_j t_k t_l, \\ b_5 &= b_0 \prod_{i=1}^5 t_i. \end{aligned} \tag{III.47}$$

Le monodromie $\mathcal{Z}_2$ agit sur la factorisation de revêtement spectral $\mathcal{C}_5$ de la manière suivante

$$\mathcal{C}_5 : (a_1 + a_2 s + a_3 s^2)(a_4 + a_5 s)(a_6 + a_7 s)(a_8 + a_9 s) = 0, \tag{III.48}$$

Le premier facteur de l'équation $\mathcal{C}_5$ correspond au monodromie $\mathcal{Z}_2$ qui permet de l'identification des poids $t_1 \longleftrightarrow t_2$, tandis que les termes restants correspondent aux trois $U(1)$. En plus, nous pouvons déterminer la classe d'homologie pour chacun des coefficients a_i par comparaison avec les coefficients b_i [141][142][144] :

$$\begin{aligned} b_0 &= a_3 a_5 a_7 a_9, \\ b_1 &= a_3 a_5 a_7 a_8 + a_3 a_5 a_6 a_9 + a_3 a_4 a_7 a_9 + a_2 a_5 a_7 a_9, \\ b_2 &= a_3 a_5 a_6 a_8 + a_3 a_4 a_7 a_8 + a_2 a_5 a_7 a_8 + a_3 a_4 a_6 a_9 + a_2 a_5 a_6 a_9 + a_2 a_4 a_7 a_9 \\ &\quad + a_1 a_5 a_7 a_9, \\ b_3 &= a_3 a_4 a_6 a_8 + a_2 a_5 a_6 a_8 + a_2 a_4 a_7 a_8 + a_1 a_5 a_7 a_8 + a_2 a_4 a_6 a_9 + a_1 a_5 a_6 a_9 \\ &\quad + a_1 a_4 a_7 a_9, \\ b_4 &= a_2 a_4 a_6 a_8 + a_1 a_5 a_6 a_8 + a_1 a_4 a_7 a_8 + a_1 a_4 a_6 a_9, \\ b_5 &= a_1 a_4 a_6 a_8, \end{aligned} \tag{III.49}$$

pour résoudre la contrainte

$$b_1 = a_3 a_5 a_7 a_8 + a_3 a_4 a_9 a_7 + a_2 a_5 a_7 a_9 + a_3 a_5 a_6 a_9 = 0. \tag{III.50}$$

nous utilisons l'Ansatz suivante

$$a_2 = -\lambda(a_5 a_7 a_8 + a_4 a_9 a_7 + a_5 a_6 a_9), \quad a_3 = \lambda a_5 a_7 a_9, \tag{III.51}$$

nous pouvons déterminer les classes d'homologie des inconnues $a_1, \dots, a_9$ en utilisant celle des coefficients b_i selon l'équation générale $[b_k] = [a_l] + [a_m] + [a_n] + [a_p]$ avec $k + l + m + n + p = 24$. Les classes des neuf paramètres $a_1, \dots, a_9$ ne sont déterminées que si nous choisissons les trois classes $[a_l] = \chi_l, l = 5, 7, 8$. Le reste des classes d'homologie des coefficients sont présentées dans le tableau (III.7).

On combinant les équations (III.41) et (III.49), alors les courbes Σ_{10t_i} dans ce cas sont données par :

$$b_5 = a_1 a_4 a_5 a_6 = 0 \rightarrow a_1 = 0, a_4 = 0, a_5 = 0, a_6 = 0, \tag{III.52}$$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
$\eta - 2c_1 - \chi$	$\eta - c_1 - \chi$	$\eta - \chi$	$-c_1 + x_5$	x_5	$-c_1 + x_7$	x_7	$-c_1 + \chi_9$	χ_9

TABLE III.7 – Classes d'homologie pour les coefficients a_i du modèle $SU(5)$ dans le cas $\mathcal{Z}_2$.

ce qui implique

$$\begin{aligned} 10_{t_1, t_2} &\rightarrow a_1 = 0, & 10_{t_3} &\rightarrow a_4 = 0, \\ 10_{t_4} &\rightarrow a_5 = 0, & 10_{t_5} &\rightarrow a_6 = 0. \end{aligned} \quad (\text{III.53})$$

L'action du monodromie $\mathcal{Z}_2$ sur l'équation $\mathcal{C}_5$, rend le modèle $SU(5)$ possède quatre courbes différents caractérisées par les poids t_i ; ils sont distinguées dans la surface $\mathcal{S}_{GUT}$ par les équations (III.53). Les courbes Σ_5 sont traitées de façon similaire en utilisant l'intersection du revêtement spectral $\mathcal{C}_{10}$ avec la surface $\mathcal{S}_{GUT}$ et nous obtenons que les courbes $\Sigma_{\bar{5}_{t_i+t_j}}$ sont caractérisées par l'équation

$$\Sigma_{\bar{5}_{t_i+t_j}} \rightarrow \mathcal{C}_{10}(s)|_{s=0} = c_{10}.$$

Afin d'exhiber l'effet du monodromie $\mathcal{Z}_2$ dans les courbes $\Sigma_{\bar{5}_{t_i+t_j}}$, il suffit d'écrire l'équation $c_{10} = 0$ en termes des paramètres a_i après la factorisation $\mathcal{C}_5 \rightarrow \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_1$. De plus, nous pouvons convertir les coefficients $c_n = c_n(t_j)$ aux fonctions des $c_n(b_j)$, et puisque nous nous intéressons en particulier pour le coefficient c_{10} qui décrit les courbes de matière $\Sigma_{\bar{5}_{t_i+t_j}}$, alors le coefficient c_{10} peut être exprimé en termes des b_k comme

$$c_{10}(b_k) = b_3^2 b_4 - b_2 b_3 b_5 + b_0 b_5^2 = 0. \quad (\text{III.54})$$

En utilisant les équations $b_k(a_i)$ dans (III.49) et l'Ansatz posée dans (III.51), nous pouvons factoriser cette équation en sept termes qui correspondent aux sept 5-uplets après l'action de monodromie $\mathcal{Z}_2$. En outre, leurs classes d'homologie peuvent être spécifiées en utilisant ceux des paramètres a_i [142][144].

$$\begin{aligned} c_{10}(a_i) = 0 = & (a_1 - \lambda a_4 (a_7 a_8 + a_6 a_9)) \times (a_1 - \lambda (a_5 a_6 + a_4 a_7) a_8) \times (a_1 - \lambda a_6 (a_5 a_8 + a_4 a_9)) \\ & \times (a_4 a_7 a_9 + a_5 (a_7 a_8 + a_6 a_9)) \times (a_5 a_6 + a_4 a_7) \times (a_5 a_8 + a_4 a_9) \times (a_7 a_8 + a_6 a_9). \end{aligned} \quad (\text{III.55})$$

alors nous obtenons sept courbes $\Sigma_{\bar{5}_{t_i+t_j}}$ définies par les équations suivantes

$$\begin{aligned} \bar{5}_{t_1, 2+t_3} &\rightarrow a_1 - \lambda a_4 (a_7 a_8 + a_6 a_9) = 0, \\ \bar{5}_{t_1, 2+t_4} &\rightarrow a_1 - \lambda (a_5 a_6 + a_4 a_7) a_8 = 0, \\ \bar{5}_{t_1, 2+t_5} &\rightarrow a_1 - \lambda a_6 (a_5 a_8 + a_4 a_9) = 0, \\ \bar{5}_{t_1+t_2} &\rightarrow a_4 a_7 a_9 + a_5 (a_7 a_8 + a_6 a_9) = 0, \\ \bar{5}_{t_3+t_4} &\rightarrow a_5 a_6 + a_4 a_7 = 0, \\ \bar{5}_{t_3+t_5} &\rightarrow a_7 a_8 + a_6 a_9 = 0, \\ \bar{5}_{t_4+t_5} &\rightarrow a_5 a_8 + a_4 a_9 = 0. \end{aligned} \quad (\text{III.56})$$

Chiralité et brisure par flux

Les courbes de matière $\Sigma_{\bar{5}_{t_i+t_j}}$ et $\Sigma_{10_{t_i}}$ sont déterminés dans l'approche du revêtement spectral comme étant l'intersection des revêtements $\mathcal{C}_5$ et $\mathcal{C}_{10}$ avec la surface de jauge $\mathcal{S}_{GUT}$. Du point de vue globale, la matière chargées $\bar{5}_{t_i+t_j}$ et 10_{t_i} localisées dans les courbes $\Sigma_{\bar{5}_{t_i+t_j}}$ et $\Sigma_{10_{t_i}}$, peuvent être envisagées comme étant l'intersection du 7-brane de jauge $(\mathbb{R}^{1,3} \times \mathcal{S}_{GUT})$ qui porte la symétrie de jauge avec d'autres 7-branes $(\mathbb{R}^{1,3} \times \mathcal{S}')$ associés aux symétries $U(1) \subset SU(5)_\perp$, de plus les courbes de matière résultantes sont de dimension 6 et nécessitent un flux non nul pour générer leurs chiralités à 4 dimensions. Si on note le flux $U(1)_\perp$ par $F_{U(1)_\perp}$, alors sa restriction sur les courbes de matière Σ_{10} et $\Sigma_{\bar{5}}$ est donnée par les paramètres M_{10} et $M_{\bar{5}}$ comme suit

$$M_{10} = F_{U(1)_\perp} \cdot [\Sigma_{10}] \quad \text{et} \quad M_{\bar{5}} = F_{U(1)_\perp} \cdot [\Sigma_{\bar{5}}],$$

ces paramètres satisfont à la relation de la trace $\sum_i M_5^i + \sum_j M_{10}^j = 0$. En effet, dans les modèles F-GUT et en particulier dans le modèle $SU(5)$, il existe deux type des flux qui contribuent au spectre de masse; le premier type est le flux associé à l'un des quatre $U(1) \subset SU(5)_\perp$ ou plutôt à l'un des trois $U(1)$ restent après l'action du monodromie $\mathcal{Z}_2$ sur le modèle, ce type de flux préserve la symétrie de jauge $SU(5)$ et affect uniquement sur la chiralité de la matière chargées $\bar{5}_{t_i+t_j}$ et 10_{t_i} . Le deuxième type de flux est celui responsable à la brisure de la symétrie de jauge $SU(5)$ vers le groupe $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. En fait, la brisure de la symétrie $SU(5)$ à 4 dimension par le Higgs localisé dans la représentation adjoint 24 n'est pas valable dans le cadre de la théorie-F, pour cela *Vafa et ses collaborateurs* ont introduit un autre mécanisme qui permet de briser la structure du groupe $SU(5)$; cette brisure consiste à introduire un flux $U(1) \subset SU(5)$ non nul le long du 7-brane de jauge [29]. En outre il existe différents chemins pour la brisure du groupe $SU(5)$, alors afin d'effectuer la brisure vers le modèle standard, il faut choisir un flux $U(1) \subset SU(5)$ bien choisi. En particulier nous choisissons le flux de l'hypercharge noté $U(1)_Y$ dite aussi hyperflux dans la littérature de la théorie-F, ce choix de flux est proportionnel à $U(1)_Y \simeq F_Y \text{diag}(2, 2, 2, -3, -3)$ et conduit exactement au spectre de masse du modèle standard. Notons par $M_{10,5}$ les restrictions du flux $U(1)$ qui génère la chiralité sur les courbes de matière $\Sigma_{\bar{5}_{t_i+t_j}}$ et $\Sigma_{10_{t_i}}$, ils désignent également les nombre de représentations 5 et $10 \in SU(5)$ satisfont la condition de la trace $\sum M_5 + \sum M_{10} = 0$. Alors après la brisure du groupe $SU(5)$ par l'hyperflux $U(1)_Y$, la matière chirale $\bar{5}$ et 10 dans se décompose en termes du représentation du modèle standard comme suit [148][149]

$$5 \in SU(5) : \begin{cases} n_{(3,1)_{-\frac{1}{3}}} - n_{(\bar{3},1)_{\frac{1}{3}}} = M_5, \\ n_{(1,2)_{\frac{1}{2}}} - n_{(1,2)_{-\frac{1}{2}}} = M_5 + N_Y, \end{cases}, \quad (\text{III.57})$$

et

$$10 \in SU(5) : \begin{cases} n_{(3,2)_{-\frac{1}{6}}} - n_{(\bar{3},2)_{\frac{1}{6}}} = M_{10}, \\ n_{(3,1)_{-\frac{2}{3}}} - n_{(\bar{3},1)_{\frac{2}{3}}} = M_{10} - N_Y, \\ n_{(1,1)_1} - n_{(1,1)_{-1}} = M_{10} + N_Y. \end{cases}, \quad (\text{III.58})$$

où $N_Y = \int_{\Sigma_{\bar{5},10}} F_Y = F_Y \cdot [\Sigma_{\bar{5},10}]$ est la restriction du flux $U(1)_Y$ sur les courbes de matière $\Sigma_{\bar{5}}$ et Σ_{10} . En général, le boson de jauge associé au flux de l'hypercharge $U(1)_Y$ peut recevoir une masse sous le mécanisme de Green-Schwartz [148], pour éviter la masse du

Courbes de matière	$U(1)_i$	Classes d'homologie	Flux $U(1)_Y$	Multiplicité
$10^{(1)}$	$t_{1,2}$	$\eta - 2c_1 - \chi$	$-N$	M_{10}^1
$10^{(2)}$	t_3	$-c_1 + \chi_5$	N_5	M_{10}^2
$10^{(3)}$	t_4	$-c_1 + \chi_7$	N_7	M_{10}^3
$10^{(4)}$	t_5	$-c_1 + \chi_9$	N_9	M_{10}^4
$5^{(0)}$	$-t_1 - t_2$	$-c_1 + \chi$	N	M_5^0
$5^{(1)}$	$-t_{1,2} - t_3$	$\eta - 2c_1 - \chi$	$-N$	M_5^1
$5^{(2)}$	$-t_{1,2} - t_4$	$\eta - 2c_1 - \chi$	$-N$	M_5^2
$5^{(3)}$	$-t_{1,2} - t_5$	$\eta - 2c_1 - \chi$	$-N$	M_5^3
$5^{(4)}$	$-t_3 - t_4$	$-c_1 + \chi - \chi_9$	$N - N_9$	M_5^4
$5^{(5)}$	$-t_3 - t_5$	$-c_1 + \chi - \chi_7$	$N - N_7$	M_5^5
$5^{(6)}$	$-t_4 - t_5$	$-c_1 + \chi - \chi_5$	$N - N_5$	M_5^6

TABLE III.8 – Propriétés des courbes de matière du modèle $SU(5)$, en présence du monodromie $\mathcal{Z}_2$.

boson de jauge au $U(1)_Y$, on considère que le flux F_Y se limite d'une façon triviale sur les 2-cycle appartient à la base $\mathcal{B}_3$ et non triviale sur ceux qui appartiennent à la surface $\mathcal{S}_{GUT}$, en particulier cela implique

$$F_Y \cdot c_1 = F_Y \cdot (-t) = 0. \quad (\text{III.59})$$

Après la détermination des courbes de matière et leurs classes d'homologie, nous pouvons déterminer le spectre chirale à 4 dimension en termes de la restriction du flux $U(1)$. En outre, nous pouvons également déduire la restriction de l'hyperflux $U(1)_Y$ responsable de la décomposition de la matière dans 10 et 5 en termes des représentations du modèle standard, voir le tableau (III.8) avec $\chi_7 + \chi_8 + \chi_9 = \chi$ implique que $N = N_7 + N_8 + N_9$.

Modèle effectif à basse énergie

En général, un modèle semi-réaliste doit contenir 3 générations de quarks et de leptons ($10_M + \bar{5}_M$) en plus de deux Higgs up 5_{H_u} et down $\bar{5}_{H_d}$ pour fournir les masses aux fermions. L'une des motivations pour construire les modèles GUT dans la théorie-F est de résoudre les problèmes habituels rencontrés dans les modèles de GUT à 4 dimension, notamment, le problème de la séparation du doublet-triplet de Higgs puisqu'ils vivent dans la même représentations $5_{H_u}/\bar{5}_{H_d}$, le problème de terme- μ et les opérateurs de dimension 4 et 5 qui conduisent à la désintégration rapide du proton.

Les exigences phénoménologiques mentionnés précédemment, peuvent être établies dans les modèles F- $SU(5)$ à cause des symétries supplémentaire associés au groupe $SU(5)$, ainsi que les paramètres des fluxes $U(1)_Y$ et $U(1)_\perp$ qui peuvent être traités comme des paramètres libres. Des modèles simples qui répondent aux contraintes phénoménologique sont étudiés dans [149]. Suivant ces modèles, nous commençons par identifier les trois familles de fermions 10_M et $\bar{5}_M$ dans les courbes suivantes

$$\begin{aligned} 10_{M_3} &= 10_{t_{1,2}} & ; & \quad \bar{5}_{M_2} = \bar{5}_{t_{1,2}+t_3}, \\ 10_{M_{1,2}} &= 10_{t_3} & ; & \quad \bar{5}_{M_3} = \bar{5}_{t_{1,2}+t_4}, \\ 10_{M_{1,2}} &= 10_{t_4} & ; & \quad \bar{5}_{M_1} = \bar{5}_{t_3+t_4}, \end{aligned} \quad (\text{III.60})$$

Courbes de matière	$U(1)_i$	Flux $U(1)_Y$	Multiplicité
$10^{(1)} \equiv 10_{M_3}$	$t_{1,2}$	$-N = 0$	$M_{10}^1 = 1$
$10^{(2)} \equiv 10_{M_1}$	t_3	$N_5 = -1$	$M_{10}^2 = 1$
$10^{(3)} \equiv 10_{M_2}$	t_4	$N_7 = 1$	$M_{10}^3 = 1$
$10^{(4)}$	t_5	$N_9 = 0$	$M_{10}^4 = 0$
$5^{(0)} \equiv 5_{H_u}$	$-t_1 - t_2$	$N = 0$	$M_5^0 = 1$
$5^{(1)}$	$-t_{1,2} - t_3$	$-N = 0$	$M_5^1 = -1$
$5^{(2)}$	$-t_{1,2} - t_4$	$-N = 0$	$M_5^2 = -1$
$5^{(3)}$	$-t_{1,2} - t_5$	$-N = 0$	$M_5^3 = 0$
$5^{(4)}$	$-t_3 - t_4$	$N - N_9 = 0$	$M_5^4 = -1$
$5^{(5)} \equiv 5_{H_d}$	$-t_3 - t_5$	$N - N_7 = -1$	$M_5^5 = 1$
$5^{(6)}$	$-t_4 - t_5$	$N - N_5 = 1$	$M_5^6 = -1$

TABLE III.9 – Courbes de matière 10 et 5 du modèle $SU(5)$ en présence du monodromie $\mathcal{Z}_2$. Les trois dernières colonnes présentent les charges t_i sous $\frac{U(1)^4}{\mathcal{Z}_2}$, la restriction de flux $U(1)_Y$ sur les courbes de matière ainsi que leurs multiplicités.

tandis que les Higgs up et down sont localisés dans les courbes

$$\begin{aligned} \bar{5}_{H_u} &= \bar{5}_{-t_1-t_2}, \\ \bar{5}_{H_d} &= \bar{5}_{t_3+t_5}. \end{aligned} \quad (\text{III.61})$$

Pour garantir l'existence des trois familles de fermions du modèle standard, les paramètres de flux sont pris comme suit

$$\begin{aligned} M_{10}^1 &= M_{10}^2 = M_{10}^3 = 1, \\ M_5^1 &= M_5^2 = M_5^4 = -1, \\ N &= 0, \end{aligned} \quad (\text{III.62})$$

ainsi que pour avoir les deux types de Higgs up et down, les paramètres

$$M_5^0 = 1, \quad M_5^5 = 0, \quad N_7 = 1.$$

En plus, pour satisfaire la condition de la trace sur les paramètres de flux, nous choisissons $M_5^6 = N_5 = -1$ et $N_9 = M_{10}^4 = 0$. Le spectre total à basse énergie est présenté dans le tableau (III.9)

En utilisant les décompositions (III.57) et (III.58), nous obtenons le spectre de matière chirale du modèle standard dans (III.10) [146]. Nous rappelons que les formules de décomposition (III.57) et (III.58), comptent respectivement le nombre des représentations 5 moins le nombre des $\bar{5}$, ainsi que le nombre des 10 moins le nombre des $\bar{10}$. Puisque les quarks down d^c et les leptons chargés L sont localisés dans la représentation $\bar{5}$ de $SU(5)$, ceci implique que pour obtenir la matière chirale d^c et L , il faut que $n_{(\bar{3},1)_{\frac{1}{3}}} > n_{(3,1)_{-\frac{1}{3}}}$ et

Courbes	$M_{10,5}$	N_Y	Spectre du MS
$10^{(1)} \equiv T_3$	1	0	$Q + u^c + e^c$
$10^{(2)} \equiv T_{2,1}$	1	-1	$Q + 2 \times u^c$
$10^{(3)} \equiv T_{1,2}$	1	1	$Q + 2 \times e^c$
$10^{(4)}$	0	0	—
$5^{(0)}$	1	0	$H_u + T_u$
$5^{(1)}$	-1	0	$d^c + L$
$5^{(2)}$	-1	0	$d^c + L$
$5^{(3)}$	0	0	—
$5^{(4)}$	-1	0	$d^c + L$
$5^{(5)}$	1	-1	H_d
$5^{(6)}$	-1	1	T_d

TABLE III.10 – Décomposition des courbes 10 et 5 en termes du spectre du MS après le choix des paramètres des flux $M_{10,5}$ et N_Y .

$n_{(1,2)_{-\frac{1}{2}}} > n_{(1,2)_{\frac{1}{2}}}$; en d'autres termes

$$\begin{aligned} n_{(3,1)_{-\frac{1}{3}}} - n_{(\bar{3},1)_{\frac{1}{3}}} &= M_5 < 0, \\ n_{(1,2)_{\frac{1}{2}}} - n_{(1,2)_{-\frac{1}{2}}} &= M_5 + N_Y < 0, \end{aligned} \quad (\text{III.63})$$

par exemple prenons la matière associée à la représentation $5^{(1)}$ avec les flux $M_5^{(1)} = -1$ et $N = 0$, la décomposition de cette représentation donne le spectre du MS suivant

$$5^{(1)} : \begin{cases} n_{(3,1)_{-\frac{1}{3}}} - n_{(\bar{3},1)_{\frac{1}{3}}} = -1 \rightarrow d^c, \\ n_{(1,2)_{\frac{1}{2}}} - n_{(1,2)_{-\frac{1}{2}}} = -1 \rightarrow L. \end{cases} \quad (\text{III.64})$$

D'une façon similaire pour la matière chirale dans la représentation 10, prenons l'exemple de la représentation $10^{(1)}$ qui porte la 3ème génération de la matière chirale et tenant compte les choix des paramètres de flux dans le tableau (III.10), on obtient le spectre du matière du MS suivant

$$10^{(1)} : \begin{cases} n_{(3,2)_{-\frac{1}{6}}} - n_{(\bar{3},2)_{\frac{1}{6}}} = 1 \rightarrow Q, \\ n_{(3,1)_{-\frac{2}{3}}} - n_{(\bar{3},1)_{\frac{2}{3}}} = 1 \rightarrow u^c, \\ n_{(1,1)_1} - n_{(1,1)_{-1}} = 1 \rightarrow e^c. \end{cases} \quad (\text{III.65})$$

Avant d'analyser la phénoménologie du modèle à basse énergie obtenu, nous devons discuter les singlets 1_{ij} du modèle F- $SU(5)$. Jusqu'à présent les singlets notés $1_{ij} = \theta_{ij}$ sont ignorés dans les modèle semi-locaux dans la théorie-F mais ils jouent un rôle très important dans la phénoménologie du modèle effectif. En plus nous rappelons que le modèle $SU(5)$ possède 24 singlets $(1, 24_{\perp})$; ils sont notés comme des courbes de matière $\Sigma_{1_{\pm(t_i-t_j)}}$. En outre, les propriétés géométriques des singlets dans la surface $\mathcal{S}_{GUT}$ peuvent être déterminées en examinant le revêtement spectral $\mathcal{C}_{20}$ et son intersection avec la surface de jauge en $s = 0$

$$\Sigma_{1_{\pm(t_i-t_j)}} \rightarrow \mathcal{C}_{20}(s)|_{s=0}, \quad (\text{III.66})$$

pour déterminer les classes d'homologie des singlets θ_{ij} nous pouvons écrire les équations associés aux singlets θ_{ij} en termes des paramètres a_i et les factorisés pour déterminer leurs homologies, pour une étude détaillée voir [150]

Ces singlets ont un rôle crucial et décisif dans le modèle effectif à basse énergie ; certains d'entre eux peuvent acquérir des VEVs pour générer les masses aux fermions, où dans le cadre des symétries de familles ces singlets qui acquièrent des VEVs s'appellent des flavons. En outre, certains de ces singlets peuvent être identifiés aux neutrinos droits nécessaires pour les masses des neutrinos légers.

Succès du modèle effectif

Suivant le spectre total de la matière chirale du MS obtenu dans le tableau (III.10), le modèle obtenu répond aux pluparts des défis rencontrés dans le modèle $SU(5)$ à 4 dimensions :

1. Le modèle prédit 3 familles de fermions chirale, d'où les matrices de masse des quarks up, down et leptons chargés peuvent être calculées en utilisant les couplages de Yukawa invariants dans ce modèle, voir [150].
2. Il résout également le problème de séparation doublet-triplet de Higgs à travers des paramètres de flux. En effet, le doublet et le triplet de Higgs-down proviennent de deux représentations différentes $H_d \subset 5^{(5)}$ et $T_d \subset 5^{(6)}$. En outre, le triplet de Higgs coloré peut avoir une masse très grande $m_T = \lambda \frac{\langle \theta_{15} \rangle \langle \theta_{14} \rangle}{M}$ à travers le couplage $\lambda 5^{(6)} \bar{5}^{(0)}$ invariant sous le groupe de jauge $SU(5)$; cet opérateur traduit l'interaction entre les deux triplets de couleur $T_u \subset 5^{(0)}$ et $\bar{T}_d \subset \bar{5}^{(6)}$. En effet, le couplage $\lambda 5^{(6)} \bar{5}^{(0)}$ possède une charge $(-2t_1 + t_4 + t_5)$ sous la symétrie $\frac{U(1)^4}{\mathbb{Z}_2}$, bien qu'il doit se coupler aux flavons $\theta_{15}\theta_{14}$ pour respecter l'invariance sous la symétrie totale du modèle.
3. le problème du terme- μ est évité par la symétrie du modèle puisque le couplage $\mu 5^{(0)} 5^{(5)}$ n'est pas invariant sous $\frac{U(1)^4}{\mathbb{Z}_2}$, et par conséquent, le terme- μ est généré comme étant $\mu = \lambda' \langle \theta_{15} \rangle \langle \theta_{14} \rangle \langle \theta_{43} \rangle$ à travers le couplage $\lambda' \theta_{15} \theta_{14} \theta_{43} 5^{(0)} 5^{(5)}$ avec la constante de couplage λ' qui doit être très petite.
4. les opérateurs de dimension 4 ($10_M \cdot \bar{5}_M \cdot \bar{5}_M$) qui entraînent la désintégration rapide du proton sont usuellement interdits dans les modèle F-SU(5) par la symétrie-R (parité de matière), cette symétrie est considérée comme une partie de la géométrie interne [150]. Cependant, ces opérateurs sont interdits dans ce modèle par la symétrie $\frac{U(1)^4}{\mathbb{Z}_2}$ puisque tous ces couplages de ce type ne sont pas invariants.

III.4.2 Modèle $SO(10)$

Comme nous avons mentionné précédemment, le modèle $SO(10)$ peut être réalisé dans la théorie-F par la déformation de la singularité E_8 selon la brisure

$$\begin{aligned} E_8 &\rightarrow SO(10) \times SU(4)_\perp, \\ 248 &\rightarrow (1, 15_\perp) + (45, 1_\perp) + (10, 6_\perp) + (16, 4_\perp) + (\bar{16}, \bar{4}_\perp). \end{aligned} \quad (\text{III.67})$$

D'après la décomposition de la représentation 248 sous la symétrie totale $SO(10) \times SU(4)_\perp$, nous remarquons qu'il ya quatre courbes de matière 16 (et $\bar{16}$), six courbes de matière 10, et quinze singlets. Les équations de ces courbes en termes des quatre poids

Paramètres	Classes d'homologie
x	$2(c_1 - t)$
y	$3(c_1 - t)$
z	$-t$
b_i	$(6 - i)c_1 - t$

TABLE III.11 – Classes d'homologie des paramètres x , y , z et b_i de la géométrie interne.

fondamentaux $t_{1,2,3,4}$ du groupe $SU(4)_\perp$ sont

$$\Sigma_{16} : t_i, \quad (\text{III.68})$$

$$\Sigma_{10} : t_i + t_j, \quad (\text{III.69})$$

$$\Sigma_1 : \pm(t_i - t_j), \quad i \neq j, \quad (\text{III.70})$$

où $\sum t_i = 0$. Comme dans le cas du modèle $SU(5)$, afin qu'avoir la singularité $SO(10)$ dans la surface $\mathcal{S}_{GUT}$ à $z = 0$, nous utilisons l'algorithme de Tate et remplacer les coefficients a_i par

$$a_1 = -b_5 z, a_2 = b_4 z, a_3 = -b_3 z^2, a_4 = b_2 z^3, a_6 = b_0 z^5,$$

la forme de Weierstrass devient alors

$$y^2 = x^3 + b_5 x y z + b_4 x^2 z + b_3 y z^2 + b_2 x z^3 + b_0 z^5, \quad (\text{III.71})$$

avec les b_i sont des paramètres de la surface $\mathcal{S}_{GUT}$ indépendants de z . L'équation (III.71) se transforme comme une section de $6[c_1(\mathcal{S}_{GUT}) - t]$ tel que les classes d'homologie pour les paramètres x, y, z et b_i sont données dans le tableau (III.11).

avec $c_1(\mathcal{S}_{GUT}) = c_1$ et $-t$ sont respectivement les premières classes de Chern des fibrés tangent et normale à la surface $\mathcal{S}_{GUT}$.

Revêtement spectral $SU(4)_\perp$ avec monodromie $\mathcal{Z}_2$

Le groupe perpendiculaire $SU(4)_\perp$ qui commute avec le groupe $SO(10)$, est décrit dans l'approche de revêtement spectral au voisinage de $\mathcal{S}_{GUT}$ par le revêtement $\mathcal{C}_4 \subset W = \mathbb{P}(\mathcal{K}_S \oplus \mathcal{O}_S)$ associé à la représentation $4_\perp$, il est donné par

$$\mathcal{C}_4 : b_0 s^4 + b_2 s^2 + b_3 s + b_4 = 0, \quad (\text{III.72})$$

$$: b_0 \prod_{i=1}^4 (s - t_i), \quad (\text{III.73})$$

alors que le revêtement $\mathcal{C}_6$ associé à la représentation $6_\perp \in SU(4)_\perp$ est exprimé en fonction de la coordonnée s comme suit

$$\mathcal{C}_6 : \sum_{k=0}^6 c_k s^{k-6} = 0. \quad (\text{III.74})$$

Nous avons vu que les monodromies jouent un rôle très important dans la construction des modèles de GUT semi-réalistes. Le modèle $SO(10)$ dans la configuration semi locale,

peut entraîner la factorisation du revêtement spectral $\mathcal{C}_4$ via l'introduction des monodromies $\mathcal{Z}_N \subset W(SU(4))$ qui agissant sur l'identification les quatre poids fondamentaux t_i du groupe $SU(4)_\perp$ [145][151]. Or, la factorisation de l'équation de revêtement spectral $\mathcal{C}_4$ en présence du monodromie $\mathcal{Z}_2$ est donnée par

$$\mathcal{C}_4 : (a_1 + a_2s + a_3s^2)(a_4 + a_5s)(a_6 + a_7s) = 0, \quad (\text{III.75})$$

le premier facteur de l'équation $\mathcal{C}_4$ est quadratique en s compte tenu du fait que nous avons choisi le monodromie $\mathcal{Z}_2$, cela correspond à l'identification des deux poids $t_1 \leftrightarrow t_2$. Nous pouvons maintenant comparer les équations (III.72) et (III.75) pour obtenir des équations b_i en termes de coefficients a_i

$$\begin{aligned} b_0 &= a_3a_5a_7, \\ b_1 &= a_3a_5a_6 + a_3a_4a_7 + a_2a_5a_7, \\ b_2 &= a_3a_4a_6 + a_2a_5a_6 + a_2a_4a_7 + a_1a_5a_7, \\ b_3 &= a_2a_4a_6 + a_1a_5a_6 + a_1a_4a_7, \\ b_4 &= a_1a_4a_6, \end{aligned} \quad (\text{III.76})$$

Nous pouvons résoudre la contrainte $b_1 = 0$ en adoptant l'Ansatz suivante [145]

$$a_2 = -\lambda(a_5a_6 + a_4a_7), \quad (\text{III.77})$$

$$a_3 = \lambda a_5a_7, \quad (\text{III.78})$$

où λ est indéterminée. Maintenant, nous pouvons déterminer les classes d'homologie des coefficients a_i en utilisant les équations (III.76), où la classes d'homologie de b_k égale à la classe d'homologie de chaque produit de a_i comme

$$[b_k] = \eta - k c_1 = [a_l] + [a_m] + [a_n], \quad \text{avec} \quad k + l + m + n = 15, \quad (\text{III.79})$$

où $\eta = 6c_1 - t$, et par conséquent cela conduit à

$$\begin{aligned} \eta &= [a_3] + [a_5] + [a_7], \\ \eta - c_1 &= [a_2] + [a_5] + [a_7], \\ \eta - 2c_1 &= [a_1] + [a_5] + [a_7], \\ \eta - 3c_1 &= [a_1] + [a_4] + [a_7], \\ \eta - 4c_1 &= [a_1] + [a_4] + [a_6], \end{aligned} \quad (\text{III.80})$$

ici nous avons 5 équations à 7 inconnues, de plus, nous pouvons résoudre les équations en fonction de deux paramètres libres que nous pouvons établir comme :

$$[a_5] = \chi_5, \quad [a_7] = \chi_7, \quad (\text{III.81})$$

$$\chi = \chi_5 + \chi_7, \quad (\text{III.82})$$

la résolution du système d'équations (III.76) nous permettons à déterminer les classes d'homologie des a_i restantes

$$\begin{aligned}
 [a_1] &= \eta - 2c_1 - \chi, \\
 [a_2] &= \eta - c_1 - \chi, \\
 [a_3] &= \eta - \chi, \\
 [a_4] &= -c_1 + \chi_5, \\
 [a_6] &= -c_1 + \chi_7.
 \end{aligned} \tag{III.83}$$

Classes d'homologie de la courbe de matière 16

D'après l'équation (III.72), les courbes de la matière 16 sont données par $b_4 = a_1 a_4 a_6 = 0$, ce qui signifie que nous obtenons trois courbes 16 définies par les équations

$$a_1 = 0, \quad a_4 = 0, \quad a_6 = 0, \tag{III.84}$$

dont les classes d'homologies sont présentées dans l'équation (III.83).

Classes d'homologie de la courbe de matière 10

L'équation de revêtement spectral $\mathcal{C}_6$ associé à la courbe de matière 10 est donnée par

$$\mathcal{C}_6 : s^6 + c_1 s^5 + c_2 s^4 + c_3 s^3 + c_4 s^2 + c_5 s + c_6 = 0, \tag{III.85}$$

$$: b_0^2 \prod_{i < j} (s + t_i + t_j) = 0, \tag{III.86}$$

nous comparons les coefficients de s entre les équations (III.85) et (III.86), alors les expressions des c_i en termes de poids fondamentaux t_i sont obtenues [145] :

$$\begin{aligned}
 c_1 &= c_3 = c_5 = 0, \\
 c_2 &= -2(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3) b_0^2, \\
 c_4 &= [t^4 + 2t_1^3(t_2 + t_3) + (t_2^2 + t_2 t_3 + t_3^2)^2 + t_1^2(3t_2^2 + 8t_2 t_3 + 3t_3^2) \\
 &\quad + 2t_1(t_2^3 + 4t_2^2 t_3 + 4t_2 t_3^2 + t_3^3)] b_0^2, \\
 c_6 &= -(t_1 + t_2)^2 (t_1 + t_3)^2 (t_2 + t_3)^2 b_0^2.
 \end{aligned} \tag{III.87}$$

Nous pouvons maintenant utiliser les équations (III.73) et (III.87) pour écrire les coefficients c_i en termes de b_i

$$c_2 = -2b_0 b_2, \tag{III.88}$$

$$c_4 = b_2^2 - 4b_4 b_0, \tag{III.89}$$

$$c_6 = -b_3^2, \tag{III.90}$$

en remplaçant ces expressions dans l'équation (III.85) on obtient donc

$$\mathcal{C}_6 : s^6 - 2b_0b_2s^4 + (b_2^2 - 4b_4b_0)s^2 - b_3^2 = 0. \quad (\text{III.91})$$

Comme dans le cas du courbe de matière 16, la courbe 10 est définie en $s = 0$ du revêtement $\mathcal{C}_6$, ce qui donne $b_3^2 = 0$. Encore, afin de déterminer les équations et les classes d'homologie pour les courbes de la matière 10 lorsque l'action de la monodromie $\mathcal{Z}_2$ est imposée, nous devons exprimer cette équation en termes des coefficients a_i de l'équation (III.76), nous avons alors

$$b_3 = (a_5a_6 + a_4a_7)(a_1 - \lambda a_4a_6), \quad (\text{III.92})$$

Les courbes de la matière 10 sont maintenant définies par l'équation

$$(a_5a_6 + a_4a_7)(a_1 - \lambda a_4a_6)(a_5a_6 + a_4a_7)(a_1 - \lambda a_4a_6) = 0, \quad (\text{III.93})$$

nous avons donc quatre courbes de la matière 10, dont deux ont la classe d'homologie $[a_1] = \eta - 2c_1 - \chi$, tandis que les deux autres ont la classe d'homologie $[a_5a_6] = [a_5] + [a_6] = -c_1 + \chi$.

Restrictions de Flux et multiplicités

Pour étudier la phénoménologie du modèle $SO(10)$ dans la théorie-F, la symétrie $SO(10)$ doit être brisée vers $SU(5)$. Nous rappelons que le Higgs 10_H qui se couple avec la matière bilinéaire à travers le couplage de Yukawa $W \supset 16_M \cdot 16_M \cdot 10_H$ est toujours présent dans le modèle. Néanmoins, puisque des champs de Higgs dans les représentations de type 120, 210, et $126 + \bar{126}$, qui peuvent briser le groupe $SO(10)$ vers modèle $SU(5)$, sont absents dans la théorie-F, alors la façon la plus convenable pour briser dans le cadre de la théorie-F et d'utiliser un flux abélien comme dans le cas du modèle $SU(5)$ étudié précédemment. En fait, deux types de flux nuls sont requis pour déterminer le spectre de matière; le premier type de flux affecte sur la chiralité des multiplets du modèle $SO(10)$, alors que le deuxième noté $U(1)_X \subset SO(10)$ permet de briser la symétrie vers le groupe $SU(5)$ [145]. En outre, si on note par F_X la 2-forme associée au flux $U(1)_X$, alors pour éviter la masse de Green-Schwartz pour le boson de gauge correspond au $U(1)_X$, nous exigeons que $F_X \cdot \eta = F_X \cdot c_1 = 0$ avec η, c_1 sont des 2-cycles (la même chose pour le flux de l'hypercharge $U(1)_Y$).

Nous introduisons les notations suivantes pour les paramètres de flux $U(1)_X$

$$\begin{aligned} M &= F_X \cdot (\eta - 3c_1) \quad , \quad P = F_X \cdot (\chi - c_1), \\ C &= -F_X \cdot c_1 \quad , \quad \chi = \chi_5 + \chi_7. \\ P_n &= F_X \cdot (\chi_n - c_1), \quad n = 5, 7, \end{aligned}$$

Supposons que M_{10}^a est le nombre des représentations $10_{t_1+t_3} \in SO(10)$, après la brisure du groupe $SO(10)$ vers $SU(5)$ on obtient les multiplicités suivantes

$$10_{t_1+t_3, -t_2-t_4} \begin{cases} 5_{-t_2-t_4} : & M_{10}^a + (M - P) = M_{51}, \\ \bar{5}_{t_1+t_3} : & M_{10}^a - (M - P), \end{cases} \quad (\text{III.94})$$

Courbe	$U(1)_i$	Section	Homologie	$U(1)_X$
16	$t_{1,2}$	a_1	$\eta - 2c_1 - \chi$	$M - P$
16	t_3	a_4	$-c_1 + \chi_5$	P_5
16	t_4	a_6	$-c_1 + \chi_7$	P_7
10	$t_{1,2} + t_3$	$(a_1 - \lambda a_4 a_6)$	$\eta - 2c_1 - \chi$	$M - P$
10	$t_{1,2} + t_4$	$(a_1 - \lambda a_4 a_6)$	$\eta - 2c_1 - \chi$	$M - P$
10	$t_1 + t_2$	$(a_5 a_6 + a_4 a_7)$	$-c_1 + \chi$	P
10	$t_3 + t_4$	$(a_5 a_6 + a_4 a_7)$	$-c_1 + \chi$	P

TABLE III.12 – Propriétés des courbes de matière 16 et 10 du modèle $SO(10)$ dans le cas de monodromie $\mathcal{Z}_2$. La dernière colonne présente la restriction de flux $U(1)_X$ sur chaque courbe de matière.

tel que M_{5_1} représente le nombre de $5 \in SO(10)$. D'une manière similaire, si on suppose que M_{10}^b est le nombre de $10_{t_1+t_3} \in SO(10)$, on obtient

$$10_{t_3+t_4, -t_1-t_2} \begin{cases} \bar{5}_{-t_1-t_2} : & M_{10}^b + P, \\ \bar{5}_{t_3+t_4} : & M_{10}^b - P. \end{cases} \quad (\text{III.95})$$

Maintenant supposons que M_{16}^1 est la multiplicité de 16_{t_1} . A partir du tableau (III.12), la courbe 16_{t_1} va se décomposer en présence de flux comme suit ⁴ :

$$16_{t_1,2} = \begin{cases} 10_{t_{1,2}} : & M_{16}^1 = M_{10_1}, \\ \bar{5}_{t_{1,2}+t_5} : & M_{16}^1 - (M - P), \\ 1_{t_{1,2}-t_5} : & M_{16}^1 + (M - P). \end{cases}$$

De même pour les deux courbes de matières restent 16_{t_3} et 16_{t_4} , nous avons ⁵

$$16_{t_3} = \begin{cases} 10_{t_3} : & M_{16}^3, \\ \bar{5}_{t_3+t_5} : & M_{16}^3 - P_5, \\ 1_{t_3-t_5} : & M_{16}^3 + P_5 \end{cases} \quad (\text{III.96})$$

$$16_{t_4} = \begin{cases} 10_{t_4} : & M_{16}^4, \\ \bar{5}_{t_4+t_5} : & M_{16}^4 - P_7, \\ 1_{t_4-t_5} : & M_{16}^4 + P_7. \end{cases} \quad (\text{III.97})$$

4. On peut interpréter les multiplicités obtenues à partir de la décomposition de représentation 16 comme suit :

$$\# \bar{5}_{t_{1,2}+t_5} - \# 5_{-t_{1,2}-t_5} = M_{16}^1 - (M - P)$$

tel que chaque nombre M_{5_i} signifie :

$$\# 5 - \# \bar{5} = M_{5_i}$$

5. Pour les singlets, on note leurs multiplicités par :

$$M_{ij} = \# 1_{t_i-t_j} - \# 1_{t_j-t_i}$$

avec les singlets $1_{t_i-t_j}$ on les note par $\theta_{ij} = 1_{t_i-t_j}$

Courbe	$U(1)_i$	Section	Homologie	$U(1)_X$
16	$t_{1,2}$	a_1	$\eta - 2c_1 - \chi$	$M - P$
16	t_3	a_4	$-c_1 + \chi_5$	P_5
16	t_4	a_6	$-c_1 + \chi_7$	P_7
10	$t_{1,2} + t_3$	$(a_1 - \lambda a_4 a_6)$	$\eta - 2c_1 - \chi$	$M - P$
10	$t_{1,2} + t_4$	$(a_1 - \lambda a_4 a_6)$	$\eta - 2c_1 - \chi$	$M - P$
10	$t_1 + t_2$	$(a_5 a_6 + a_4 a_7)$	$-c_1 + \chi$	P
10	$t_3 + t_4$	$(a_5 a_6 + a_4 a_7)$	$-c_1 + \chi$	P

TABLE III.13 – Propriétés des courbes de matière 16 et 10 du modèle $SO(10)$ dans le cas de monodromie $\mathcal{Z}_2$. La dernière colonne présent la restriction de flux $U(1)_X$ sur chaque courbe de matière.

où les M_{5_i} et M_{10_i} représentent le nombre des représentations 5, $10 \in SU(5)$ après la brisure $SO(10) \rightarrow SU(5)$ par le flux non nul $U(1)_X$, les nouvelles courbes de matière 10_{t_i} et $\bar{5}_{t_i+t_j}$ sont comparables aux celles du modèle $SU(5)$ avec le monodromie $\mathcal{Z}_2$ étudié dans la sous-section précédente, sauf que dans la construction du modèle $SU(5)$ avec les revêtement spectral $\mathcal{C}_5$ et $\mathcal{C}_{10}$, la chiralité des courbes de matière 10 et 5 est garanti en utilisant un flux non nul associé au $U(1)$ restant après l'introduction de l'action du monodromie $\mathcal{Z}_2$ sur $U(1)^4$.

En d'autres part, l'étude du modèle effectif à basse énergie suivant le chemin de brisure $SO(10) \xrightarrow{U(1)_X} SU(5) \xrightarrow{U(1)_Y} MS$, est étudiée en détails dans la référence [145]. En d'autre part, avant de clôturer cette section, nous donnons un petit commentaire sur le modèle E_6 qui peut être étudié dans la théorie-F en utilisant l'approche de revêtement spectral. La surface $\mathcal{S}_{GUT}$ peut porter la singularité E_6 selon la brisure

$$E_8 \rightarrow E_6 \times SU(3)_\perp, \quad (\text{III.98})$$

d'où les courbes de matière du modèle E_6 , proviennent de la décomposition de la représentation adjoint 248 en termes des représentations du groupe jauge E_6 et son groupe perpendiculaire $SU(3)_\perp$ comme suit

$$248 \rightarrow (78, 1_\perp) + (1, 8_\perp) + (27, 3_\perp) + (27, \bar{3}_\perp), \quad (\text{III.99})$$

ce modèle possède trois courbes de matière $27/\bar{27}$ notées comme $\Sigma_{27/\bar{27}}$ en plus de huit singlets Σ_1 . De plus, ces courbes peuvent être s'exprimées en termes des poids fondamentaux t_i ($i = 1, 2, 3$) dans la sous algèbre de Cartan $U(1)^3 \subset SU(3)_\perp$

$$\begin{aligned} \Sigma_{27/\bar{27}} &: t_i = 0 \\ \Sigma_1 &: \pm(t_i - t_j) = 0, \quad i \neq j \end{aligned} \quad (\text{III.100})$$

dans l'approche de revêtement spectral, la courbe de matière $\Sigma_{27_{t_i}}$ est déterminée par le revêtement spectral $\mathcal{C}_3$ associé à la représentation $3_\perp \in SU(3)_\perp$, il est défini par le polynôme $\mathcal{C}_3$ d'ordre 3

$$\mathcal{C}_3 : b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3 = 0, \quad (\text{III.101})$$

La construction de ce modèle en présence de monodromie $\mathbb{Z}_2$ est étudiée en détailles dans la référence [146].

Chapitre IV

Symétries de familles discrètes dans les modèles F-GUT

Les symétries discrètes ont été largement utilisées pour traiter des problèmes fondamentaux des modèles effectifs à basse énergie tel que la hiérarchie de masses des fermions, interdire les opérateurs indésirables dans le modèle, ainsi que d'expliquer le mélange fort dans le secteur du neutrino. Nous avons vu dans le chapitre précédent que les monodromies de type $\mathcal{Z}_N$ sont introduites dans les modèles F-GUT afin de générer la hiérarchie de masses entre les trois familles de fermions ainsi d'éliminer les opérateurs qui empêchent la stabilité du proton. Cependant, le mélange observable dans le secteur du neutrino n'est pas garanti dans ce cas, d'où des symétries de familles non abéliennes sont exigées. Ce chapitre est dédié à la construction des modèles F-GUT avec des monodromies non abéliennes. Dans la section 1, nous présentons une revue qualitative sur la comparaison entre les monodromies de type $\mathcal{Z}_N$ et les monodromies non abéliennes Γ_N , associés au revêtement spectral $\mathcal{C}_N$. Dans la section 2, nous présentons brièvement les notions et résultats de base de la théorie de Galois nécessaires pour définir un groupe de Galois associé au polynôme d'ordre n , puis nous allons limiter notre étude sur comment peut-on déterminer les groupes de Galois associés aux polynômes d'ordre 3 et 4, puisque ces dernières sont les plus intéressantes pour implémenter les monodromies non abéliennes dans la construction des modèles F-GUT. Dans la section 3, en utilisant les résultats de la théorie de Galois, nous étudions en détail l'exemple du modèle $SU(5)$ combiné avec les monodromies non abéliennes A_4 . Dans la section 4, nous abordons la théorie des caractères, un outil simple et puissant pour déterminer la décomposition d'une représentation arbitraire en termes des représentations irréductibles d'un groupe discret. De plus, à côté de la méthode basée sur la théorie de Galois, nous profitons de la théorie des caractères de représentations comme une deuxième méthode pour implémenter des symétries de familles comme des monodromies agissant sur le revêtement spectral $\mathcal{C}_N$.

IV.1 Monodromies et symétries non-abéliennes

IV.1.1 Monodromies abéliennes et non abéliennes

Les monodromies est une tâche capitale dont le but est de construire des modèles F-GUT réalistes. En plus, nous avons vu précédemment que leur action relie les racines t_i des équations de revêtements spectraux $\mathcal{C}_N$, et par conséquent ils influencent sur l'identification des courbes de matière. En outre, dans le cas du modèle $SU(5) \times SU(5)_\perp$, la monodromie agissant sur les 5 racines t_i peut être n'importe quel sous-groupe $\mathcal{Z}_N \subset S_5$. En termes des

équations de revêtement spectral, l'équation $\mathcal{C}_5$ sera décomposé en différents facteurs

$$\mathcal{C}_5 = \prod_i \mathcal{C}_i, \quad (\text{IV.1})$$

où les facteurs $\mathcal{C}_i$ sont influencés par les monodromies considérés dans le modèle. Les monodromies possibles ainsi que leurs décompositions associées sont données dans l'équation (III.44). Notamment, le cas minimal du monodromie $\mathcal{Z}_2$ dans le modèle $SU(5) \times SU(5)_\perp$, implique que la symétrie $SU(5) \times U(1)_\perp^4$ agissant sur les courbes de matière 10_{t_i} et $\bar{5}_{t_i+t_j}$, se réduit à la symétrie $SU(5) \times \frac{U(1)_\perp^4}{\mathcal{Z}_2}$, or il se produit une identification des racines $t_1 = t_2$ de l'équation $\mathcal{C}_5$. En conséquence, le couplage de Yukawa $10_{t_1} \cdot 10_{t_1} \cdot 5_{-t_1-t_2}$ qui est violé par la symétrie $U(1)_\perp^4$, devient invariant sous la symétrie $\frac{U(1)_\perp^4}{\mathcal{Z}_2}$ dû à la présence du monodromie $\mathcal{Z}_2$

$$10_{t_1} \cdot 10_{t_1} \cdot 5_{-t_1-t_2} \xrightarrow{\mathcal{Z}_2} 10_{t_1} \cdot 10_{t_1} \cdot 5_{-2t_1}. \quad (\text{IV.2})$$

En résumé, le type des monodromies introduits dans les modèles de F-GUT jusqu'à présent, sont les symétries $\mathcal{Z}_N$ ou $\mathcal{Z}_N \times \mathcal{Z}_M$ agissant sur les racines t_i de l'équation de revêtement spectral $\mathcal{C}_N$. Toutefois, puisque ces monodromies ne sont qu'une partie spéciale de la symétrie S_N , il sera alors plus intéressant de profiter la partie non-abélienne de la symétrie S_N pour la phénoménologie des modèles F-GUT.

Comme nous avons discuté dans le chapitre 2, les symétries non abéliennes assistent à expliquer la saveur des modèles de GUT. En particulier, le phénomène d'oscillation des neutrinos pourrait être décrit par la brisure des symétries de familles non abéliennes à une grande échelle d'énergie. En outre, les symétries de familles introduites dans les modèles de GUT à 4 dimensions, sont considérés comme des extensions horizontales aux groupes de jauge puisque les symétries des modèles ne sont pas contrôlées par des contraintes supplémentaires. Cependant, les modèles F-GUT dans l'approche semi-locale ne permettent pas d'implémenter les symétries discrètes d'une façon aléatoire, ceci est dû au fait que tous les modèles construits localement dans la 7-brane enroulant la surface $\mathcal{S}_{GUT}$, doivent être gouvernés par la symétrie maximale E_8 [141]. La façon la plus claire de profiter aux symétries non abéliennes dans la construction des modèles de GUT, tout en respectant la symétrie maximale E_8 , c'est à travers les groupes perpendiculaire $SU(N)_\perp$ qui commutent avec les groupes de jauge de type GUT. Comme le groupe $SU(N)_\perp$ avec $N = 3, 4, 5$ décrit les équations en s de revêtement spectral $\mathcal{C}_N$ et $\mathcal{C}_{N(N-1)/2}$, alors les symétries non-abéliennes doivent être des sous-groupes au S_N ainsi qu'ils vont agir sur les racines t_i de la même façon que les monodromies $\mathcal{Z}_N$. Sauf que ces dernières consistent à identifier les racines monodromies t_i et en conséquence identifier les courbes de matière, alors que les symétries non abéliennes permutent les racines t_i entre eux, la chose qui entraîne un mélange entre les différentes courbes de matière. En conséquence, des différentes courbes de matière seront attribuées dans des représentations non triviales du groupe discret non abélien.

IV.1.2 Symétries non-abéliennes associées au revêtement spectral $\mathcal{C}_N$

Pour étudier comment les symétries de familles non abéliennes se manifestent dans la construction des modèles F-GUT, nous considérons le cas du modèle $SU(5) \times SU(5)_\perp$

provient de la symétrie E_8 . Le groupe perpendiculaire $SU(5)_\perp$ admet 5 poids fondamentaux t_1, t_2, t_3, t_4 et t_5 , ils sont reliés entre eux par le groupe symétrique S_5 ; le group de Weyl du $SU(5)_\perp$. Les monodromies non abéliens notés Γ_N agissent sur les t_i d'une façon analogue que les $\mathcal{Z}_N$, donc elles doivent aussi être des sous-groupes à S_5 . D'autre part, puisque l'ingénierie du modèle de GUT $SU(5)$ se réalise dans la surface $\mathcal{S}_{GUT}$ en utilisant l'approche de revêtement spectral, alors les poids fondamentaux t_i se comportent également comme les racines de l'équation $\mathcal{C}_5$, c'est pourquoi alors le choix du monodromie non abélien pourrait établir une décomposition de l'équation de revêtement spectral $\mathcal{C}_5$. En effet, la symétrie discrète A_4 qui a été utilisé largement dans la littérature pour décrire le mélange du neutrinos, peut être identifié avec le monodromie non abélien $\Gamma_4 = A_4$ qui agit sur les quatre racines t_1, t_2, t_3 et t_4 tout en laissant la racine t_5 fixée. En conséquence, l'équation $\mathcal{C}_5$ va se décomposer en produit $\mathcal{C}_4 \times \mathcal{C}_1$ où dans ce cas le facteur $\mathcal{C}_4$ admet que les quatre racines t_i sont reliées entre eux par le monodromie $\Gamma_4 = A_4$, alors que le facteur $\mathcal{C}_1$ admet la racine t_5 fixée par la symétrie $U(1)$. Cependant, la procédure pour introduire les monodromies non abéliens dans l'approche de revêtement spectral n'est pas évident comme dans le cas des monodromies $\mathcal{Z}_N$ ainsi qu'il pose certaines difficultés. La première est que le monodromie agissant sur les permutations des quatre racines t_i peut être le groupe S_4 ou un de ses sous-groupes transitifs, c'est à dire $(A_4, D_4, V_4$ et $Z_4)$, or le revêtement spectral $\mathcal{C}_4$ ne présent pas un moyen pour sélectionner le monodromie opérant sur les racines t_1, t_2, t_3 et t_4 . La même chose pour les monodromies associés à la décomposition qui entraîne le facteur $\mathcal{C}_3$, il admet plus d'un seul monodromie agissant sur les racines t_1, t_2 et t_3 , en résumé

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_4 &: (t_1, t_2, t_3, t_4) \rightarrow S_4, A_4, D_4, V_4 \text{ et } Z_4, \\ \mathcal{C}_3 &: (t_1, t_2, t_3) \rightarrow S_3 \text{ et } Z_3,\end{aligned}$$

où les décompositions qui entraînent les facteurs $\mathcal{C}_2$ admettent le monodromie abélien Z_2 . En d'autre part, nous avons vu dans le chapitre précédent que les monodromies de type $\mathcal{Z}_N$ sont introduits à travers l'identification des symétries $U(1)_\perp^4 \subset SU(5)_\perp$ comme

$$SU(5)_\perp \rightarrow U(1)_\perp^4 \xrightarrow{\mathcal{Z}_N} \frac{U(1)_\perp^4}{\mathcal{Z}_N}.$$

Toutefois, cette procédure n'est pas pratique pour tenir en compte les monodromies non abéliens dans les modèles GUT. Pour ces raisons, il doit exister une façon pour considérer la brisure du groupe perpendiculaire $SU(5)_\perp$ vers les monodromies $\Gamma_4 \subset S_4$, en plus d'une méthode capable de fixer le choix du monodromie Γ_4 associé à l'équation de revêtement spectral $\mathcal{C}_N$. Par ailleurs, ceci sera nécessaire pour construire des modèle F-GUT avec des symétries de familles non abéliennes.

Dans ce mémoire de thèse, nous allons étudier deux méthodes différentes pour construire les modèle F-GUT avec des monodromies non abéliens; la première méthode est basée sur la théorie de Galois, alors que la deuxième est basée sur les caractères des représentations des groupes discrets. Les deux méthodes permettent d'attribuer les groupes non abéliens $\Gamma_N \subset S_N$ au revêtement spectral $\mathcal{C}_N$.

IV.2 Symétries non-abéliennes par la théorie de Galois

IV.2.1 Introduction à la théorie de Galois

La théorie de Galois est née au XIX^{ème} siècle pour étudier l'existence de formules algébriques qui permettent de déterminer les solutions des polynômes en fonction de leurs coefficients. Elle porte le nom du mathématicien français Evariste Galois (1811-1832) qui a fait un travail très important dans ce domaine [152][153][154]. Cette théorie est bien motivée par le résultat célèbre d'Abel qui montre l'impossibilité de résoudre l'équation générale de degré $n \geq 5$ par radicaux¹. En effet, l'idée principale de la théorie de Galois est d'associer à chaque équation son propre groupe de symétrie agissant sur les racines de l'équation appelé de nos jours **le groupe de Galois**. D'où, cette idée permet de traduire des propriétés algébriques des équations (telles que la résolubilité par radicaux) aux propriétés des groupes de symétries.

Groupe de Galois

Soit $f(x)$ un polynôme d'ordre n de la forme suivante

$$f(x) : a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0, \quad (\text{IV.3})$$

où les coefficients $a_1, \dots, a_n$ sont définis dans un corps $\mathcal{K}$. Notons par $\mathcal{F}$, l'extension minimale du corps $\mathcal{K}$ qui contient les racines x_i du polynôme $f(x)$ appelée extension du corps $\mathcal{K}$; c'est-à-dire le corps que nous obtenons en formant toutes les expressions construites à partir des éléments de $\mathcal{K}$ et les racines x_i ($\mathcal{F} = \mathcal{K}(x_1, x_2, \dots, x_n)$). Le groupe de Galois (noté $\text{Gal}(\mathcal{F}/\mathcal{K})$ en l'honneur de son inventeur) associé au polynôme $f(x)$ sur $\mathcal{K}$, est un sous-groupe de la symétrie S_n de toutes les permutations des racines x_i du polynôme $f(x)$. Il vérifie deux propriétés énoncées par Galois [152][153] :

- (i) Toute équation algébrique en racines x_i définie sur $\mathcal{K}$ est invariant sous le groupe de Galois $\text{Gal}(\mathcal{F}/\mathcal{K})$.
- (ii) Réciproquement, toute équation algébrique en racines x_i invariante par le groupe de Galois $\text{Gal}(\mathcal{F}/\mathcal{K})$ est définie sur $\mathcal{K}$.

Encore, Galois a introduit la notion de groupe *résoluble*; c'est à dire le groupe G qui possède une suite finie de sous-groupes

$$\{1\} = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{n-1} \subset G_n = G, \quad (\text{IV.4})$$

de sorte que chaque groupe G_i est un sous-groupe distingué de G_{i+1} et que le quotient G_{i+1}/G_i soit un groupe abélien pour tout $i = 0, \dots, n-1$. Par ailleurs, Galois a démontré que le polynôme (IV.3) est résoluble par radicaux si et seulement si son groupe de Galois est un groupe résoluble [152]. Ainsi, il a démontré que les groupes S_n ne sont pas résolubles

1.

Théorème IV.1 (Abel en 1826) : Il n'existe pas de formule générale pour résoudre par radicaux l'équation de degré 5 [155].

pour $n \geq 5$. Ces résultats de Galois impliquent l'existence des polynômes de degré $n \geq 5$ qui ne sont pas résolubles par radicaux, ce qui alors est en accord avec les résultats d'Abel [155].

Théorème IV.2 *Soit $f(x)$ un polynôme de degré n défini sur $\mathcal{K}$:*

- a) Si $f(x)$ est irréductible dans le corps $\mathcal{K}$, alors son groupe de Galois $\text{Gal}(\mathcal{F}/\mathcal{K})$ est d'ordre divisible par n .*
- b) On dit que le polynôme $f(x)$ est irréductible dans le corps $\mathcal{K}$ si et seulement si son groupe de Galois sur $\mathcal{K}$ est une sous-groupe transitif du groupe S_n [152].*

En effet, on peut conclure que pour un tel polynôme $f(x)$ d'ordre n et de coefficients dans $\mathcal{K}$, son groupe de Galois $\text{Gal}(\mathcal{F}/\mathcal{K})$ associé peut être un des sous-groupes transitifs de S_n ; c'est à dire

$$\text{Gal}(\mathcal{F}/\mathcal{K}) = S_n, A_n, D_n, Z_n, \dots \quad (\text{IV.5})$$

La situation est similaire lorsque nous cherchons à attribuer les monodromies non abéliens $\Gamma \subseteq \{S_3, S_4\}$ aux équations des revêtements spectraux $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ puisque le choix du monodromie n'est pas unique pour chaque équation. Dans la section suivante nous allons étudier les outils mathématiques incluent dans la théorie de Galois pour pouvoir déterminer le groupe de Galois associé au polynôme de degré 3 et 4.

IV.2.2 Groupes de Galois associés aux polynômes d'ordre $n = 3, 4$

Nous profitons de la théorie de Galois dans les modèles F-GUT pour déterminer les monodromies non-abéliens associés au revêtement spectral $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$. D'où, il sera utile d'étudier les techniques mathématiques de la théorie de Galois qui servent à déterminer le groupe de Galois associé au polynôme cubique et quartique.

Polynôme cubique

Prenons l'exemple d'un polynôme général $f(x)$ d'ordre 3 et irréductible dans le corps $\mathcal{K}$

$$f(x) : a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = 0, \quad (\text{IV.6})$$

avec les racines $x_i = (x_1, x_2, x_3)$ sont définies dans le corps $\mathcal{F} \supset \mathcal{K}$. Avant d'examiner quelle est le groupe de Galois $\text{Gal}(\mathcal{F}/\mathcal{K})$ associé au polynôme $f(x)$, nous rappelons que selon le théorème (IV.2), il est claire que le groupe de Galois $\text{Gal}(\mathcal{F}/\mathcal{K})$ sera l'un des groupes S_3 ou Z_3 puisque le polynôme $f(x)$ est d'ordre 3. Algébriquement, la différence principale entre les deux groupes discretes S_3 et Z_3 peut se voir au niveau de leurs générateurs. En effet, le groupe symétrique S_3 possède deux générateurs à savoir ; la transposition (12) et le 3-cycle (123), alors que le groupe Z_3 possède uniquement le 3-cycle (123) comme générateur. On rappelle que le point clé pour déterminer le groupe de Galois $\text{Gal}(\mathcal{F}/\mathcal{K})$ associé au polynôme $f(x)$ est d'introduire les équations algébriques dans $\mathcal{K}$ reliant les racines x_i du polynôme $f(x)$ puisque ces équations sont invariants sous l'action du groupes de Galois $\text{Gal}(\mathcal{F}/\mathcal{K})$. Dans cette exemple, si le polynôme $f(x)$ possède un groupe de Galois $\text{Gal}(\mathcal{F}/\mathcal{K}) = S_3$ alors toutes les équations dans $\mathcal{K}$ qui relient les trois racines x_i doivent être invariantes sous les permutations des racines (12) et (123). Néanmoins, si une des équations dans $\mathcal{K}$ n'est pas invariant uniquement sous la permutation (12), donc le groupe de Galois sera Z_3 .

En fait, on peut construire plusieurs équations algébriques dans $\mathcal{K}$ en termes des racines x_i pour examiner l'invariance sous les générateurs des groupes de permutations. Toutefois, cette difficulté sera réduite par l'introduction d'une seule équation algébrique en termes des racines qui vérifie l'invariance sous la transposition (12). A ce niveau, nous introduisons le discriminant Δ associé au polynôme $f(x)$, il s'écrit en termes des racines x_i comme suit

$$\Delta = (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2. \quad (\text{IV.7})$$

Il est clair que le δ définit comme

$$\delta = \sqrt{\Delta} = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3), \quad (\text{IV.8})$$

n'est pas invariant sous la transposition des racines $(x_i x_j)$.

Théorème IV.3 *Soit Δ le discriminant d'un polynôme cubique $f(x)$ irréductible dans $\mathcal{K}$, et soit $\mathcal{F}$ l'extension du corps $\mathcal{K}$. Alors le groupe de Galois $\text{Gal}(\mathcal{F}/\mathcal{K}) = S_3$ si et seulement si $\delta = \sqrt{\Delta} \notin \mathcal{K}$, et $\text{Gal}(\mathcal{F}/\mathcal{K}) = Z_3$ si et seulement si $\delta = \sqrt{\Delta} \in \mathcal{K}$. Alors que nous avons l'équivalence suivante [152].*

$$\delta = \sqrt{\Delta} \in \mathcal{K} \Leftrightarrow \Delta \text{ est un carré parfait dans } \mathcal{K} \quad (\text{IV.9})$$

Résumé

Soit un polynôme $f(x)$ d'ordre 3 et irréductible dans $\mathcal{K}$. Si le discriminant Δ associé au $f(x)$ peut s'écrire comme un carré parfait dans $\mathcal{K}$, alors son groupe de Galois est $\text{Gal}(\mathcal{F}/\mathcal{K}) = Z_3$, sinon c'est $\text{Gal}(\mathcal{F}/\mathcal{K}) = S_3$.

Polynôme quartique

Jusqu'à ce niveau, nous avons compris que le groupe de Galois d'un polynôme d'ordre 3 peut être déterminé en examinant uniquement son discriminant Δ puisque le groupe S_3 possède un seul sous-groupe transitif Z_3 . Toutefois pour un polynôme d'ordre $n > 3$, le discriminant Δ n'est plus suffisant pour la détermination du groupe de Galois de ce polynôme. Par exemple, le polynôme d'ordre 4 que nous allons traiter par la suite comme revêtement spectral d'ordre 4, possède 5 groupes de permutation qui peuvent jouer le rôle du groupe de Galois $\text{Gal}(\mathcal{F}/\mathcal{K}) = S_4, A_4, D_4, V_4, Z_4$.

Dans la théorie de Galois, le groupe de Galois pour d'un polynôme d'ordre 4 peut être déterminé en deux étapes ; la première est d'utiliser le discriminant pour examiner l'existence de la transposition (12) et le 4-cycle (1234)² comme des générateurs du groupe $\text{Gal}(\mathcal{F}/\mathcal{K})$. En fait, on peut séparer les sous-groupes transitifs de la symétrie S_4 en deux parties ; les groupes qui contiennent la transposition (12) et/ou le 4-cycle (1234) tel que S_4, D_4 et Z_4 et ceux qui ne les contiennent pas comme A_4 et V_4 .

Exemple 1 *Soit $f(x)$ un polynôme de degré 4 et irréductible dans un corps $\mathcal{K}$*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4. \quad (\text{IV.10})$$

On note par x_1, x_2, x_3 et x_4 les racines de $f(x)$ dans l'extension du corps $\mathcal{F}$. En utilisant les théorèmes (IV.2) et (IV.3), on peut classer les groupes de Galois associés au polynôme $f(x)$ selon le discriminant, voir le tableau (IV.1)

2. Il est clair que la racine carrée du discriminant $\sqrt{\Delta} = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$ d'un polynôme quadratique n'est pas invariant sous les permutations $(x_i x_j)$ et $(x_i x_j x_k x_l)$.

Discriminant	$\Delta = \delta^2$	$\Delta \neq \delta^2$
$G(F/K)$	A_4 et V_4	S_4, D_4 et Z_4

TABLE IV.1 – Groupes de Galois associés au polynôme quartique suivant son discriminant Δ .

	$\Delta = \delta^2$	$\Delta \neq \delta^2$
$g(x)$ irréductible	A_4	S_4
$g(x)$ réductible	V_4	D_4, Z_4

TABLE IV.2 – Groupe de Galois associé au polynôme quartique suivant son discriminant Δ et la réductibilité de la résolvante cubique $g(x)$.

La deuxième étape consiste à introduire une autre équation algébrique en termes des racines du polynôme pour mieux spécifier le groupe de Galois associé au polynôme d'ordre 4. A ce stade, nous allons introduire ce qu'on appelle la résolvante cubique $g(x)$ d'un polynôme quartique $f(x)$, elle s'écrit en termes des racines de $f(x)$ comme suit

$$g(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3), \quad (\text{IV.11})$$

avec les racines α_1, α_2 et α_3 s'expriment en termes des racines du polynôme $f(x)$ par les relations suivantes

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= x_1x_2 + x_3x_4, \\ \alpha_2 &= x_1x_3 + x_2x_4, \\ \alpha_3 &= x_2x_3 + x_1x_4. \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

Il est clair que les racines α_1, α_2 et α_3 sont invariants sous les groupes D_4, V_4 et Z_4 . En d'autres termes, tout groupe qui contient la permutation 3-cycle (123) brise l'invariance des α_i , d'où la résolvante $g(x)$ nous permet d'examiner si le groupe de Galois $\text{Gal}(\mathcal{F}/\mathcal{K})$ associé au polynôme $f(x)$ entraîne la permutation (123) ou pas.

D'une manière similaire au discriminant Δ , la résolvante (IV.11) peut être également s'écrit en termes des coefficients a_i du polynôme $f(x)$. En général, la résolvante cubique $g(x)$ d'un polynôme quartique $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ est donnée en termes des coefficients $a_0 \dots a_4$ comme suit $g(x) = a_4^3x^3 - a_2a_4^2x^2 + (a_1a_3 - 4a_0a_4)a_4x - a_1^2a_4 + 4a_0a_2a_4 - a_0a_4^2$ [152][154]. Notons que les discriminants des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont égaux, voir [152][154].

Dans la théorie de Galois, l'irréductibilité de la résolvante $g(x)$ avec le carré parfaite du discriminant sont capables d'identifier le groupe de Galois d'un polynôme $f(x)$ d'ordre 4 [152], nous combinons ces résultats dans le tableau (IV.2)

Exemple 2 Soit $f(x)$ un polynôme d'ordre 4 irréductible dans $\mathcal{K}$, $\Delta_{f(x)}$ son discriminant et $g(x)$ sa résolvante cubique associée. Nous présentons dans le tableau (IV.3), des exemples de polynômes $f(x)$ d'ordre 4 et leurs groupes de Galois $\text{Gal}(\mathcal{F}/\mathcal{K})$ correspondants.

Avec ces techniques de base de la théorie de Galois, nous pouvons déterminer les groupes de Galois agissant sur les racines des polynômes d'ordre 3 et 4. En outre, nous allons

Polynôme $f(x)$	Discriminant $\Delta_{f(x)}$	Résolvante $g(x)$	$G(F/K)$
$x^4 + 2x + 2$	101×4^2	$x^3 - 8x - 4$	S_4
$x^4 + 8x + 12$	$(576)^2$	$x^3 - 48x - 64$	A_4
$x^4 + 3x + 3$	$21 \times (15)^2$	$(x+3)(x^2 - 3x - 3)$	D_4 ou Z_4
$x^4 + 36x + 63$	$(4320)^2$	$(x-18)(x+6)(x+12)$	V_4

TABLE IV.3 – Exemples de polynômes $f(x)$ d'ordre 4 ainsi que leurs groupes de Galois $G(F/K)$ associés conformément aux $\Delta_{f(x)}$ et $g(x)$.

utiliser ces résultats comme un moyen pour identifier les monodromies non abéliens comme des groupes de Galois associés aux équations de revêtement spectral.

IV.3 Modèle $SU(5)$ avec le monodromie non abélien A_4

La construction de modèles de GUT dans la théorie-F avec des symétries de familles non abéliennes ont plus d'avantages que les modèles F-GUT construits dans le chapitre précédent. Dans cette section, nous allons étudier le modèle $SU(5) \times A_4 \times U(1)$ qui a été construit par Leontaris et al. dans la référence [34], ce modèle entraîne le monodromie non abélien A_4 à travers la méthode basé sur la théorie de Galois, or le groupe discret A_4 , joue le rôle d'une symétrie de famille à base énergie.

IV.3.1 Modèle $SU(5) \times A_4 \times U(1)_\perp$: Modèle de Leontaris et al.

Dans la construction de ce modèle, tout d'abord on considère la compactification de la théorie-F sur une variété de Calabi-Yau à 4 dimensions complexe elliptiquement fibrée sur la base $\mathcal{B}_3$. De plus, on considère la symétrie de jauge dans la surface de jauge $S_{GUT} \subset \mathcal{B}_3$ possède une singularité $SU(5)$ provient de la singularité maximale E_8 . En particulier, la construction du modèle $SU(5) \times A_4 \times U(1)$ dans l'approche de revêtement spectral est réalisée en effectuant la première brisure du groupe $SU(5)_\perp$ vers le groupe de permutation S_4 selon la chaîne de brisure suivante

$$SU(5)_\perp \rightarrow SU(4)_\perp \times U(1)_\perp \rightarrow S_4 \times U(1)_\perp. \quad (\text{IV.13})$$

La brisure de la partie $SU(4)_\perp$ vers le groupe discret S_4 pourrait être réalisée par un flux non abélien conjecturé dans [33][34]. En outre la réduction de la symétrie $S_4 \rightarrow A_4$ ici, devient comme une tache à accomplir par la théorie de Galois.

La première brisure $SU(5)_\perp \rightarrow SU(4)_\perp \times U(1)_\perp$ implique la décomposition de l'équation $\mathcal{C}_5 \rightarrow \mathcal{C}_4 \times \mathcal{C}_1$ comme suit

$$\sum_{k=0}^5 b_k s^{5-k} = (a_1 + a_2 s + a_3 s^2 + a_4 s^3 + a_4 s^4) (a_6 + a_7 s), \quad (\text{IV.14})$$

d'ou les coefficients b_k s'écrivent en termes des nouvelles coefficients a_n comme suit

$$\begin{aligned} b_0 &= a_5 a_7, \quad b_5 = a_1 a_6, \\ b_i &= a_{6-i} a_6 + a_{5-i} a_7 \text{ pour } i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (\text{IV.15})$$

IV.3. Modèle $SU(5)$ avec le monodromie non abélien A_4

$a_k(k = 1, \dots, 5)$	a_6	a_7	λ
$\eta - (6 - k)c_1 - \chi$	χ	$c_1 + \chi$	$\eta - 2c_1 - 2\chi$

TABLE IV.4 – Classes d'homologie des paramètres a_i et λ .

Courbes	Equation	Homologie	Multiplicité	Flux $U(1)_Y$
10_a	a_1	$\eta - 5c_1 - \chi$	M_{10}	$-N$
10_b	a_6	χ	M'_{10}	N
5_c	$a_2^2 a_7 + a_2 a_3 a_6 + \lambda a_1 a_6^2$	$2\eta - 7c_1 - \chi$	M_5	$-N$
$\bar{5}_d$	$a_6^2 a_3 + (a_2 a_6 + a_1 a_7) a_3$	$\eta - 3c_1 + \chi$	M'_5	N

TABLE IV.5 – Propriétés des courbes de matière 10 et 5 du modèle $SU(5)$ dans le cas de la brisure du groupe perpendiculaire $SU(5)_\perp \rightarrow SU(4)_\perp \times U(1)_\perp$.

La condition de la trace nulle $b_1 = \sum_{i=1}^5 t_i = 0$ du groupe $SU(5)_\perp$ implique que $b_1 = a_5 a_6 + a_4 a_7 = 0$, d'ailleurs pour déterminer les classes d'homologie des paramètres a_i , nous allons utiliser la solution Ansatz de l'équation $a_5 a_6 + a_4 a_7 = 0$, cette équation est résolue en introduisant le paramètre λ

$$a_4 = \pm \lambda a_6, \quad a_5 = \mp \lambda a_7, \quad (\text{IV.16})$$

en utilisant les classes d'homologie des coefficients b_k

$$[b_k] = \eta - k c_1, \quad (\text{IV.17})$$

alors on obtient facilement toutes les classes d'homologie des paramètres a_i en termes des 2-cycles η et c_1 , tel que la classe d'homologie $[a_6] = \chi$

A ce niveau, on peut déterminer les courbes de matière Σ_{10} et Σ_5 associés aux factorisations $\mathcal{C}_4 \times \mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_6 \times \mathcal{C}_4$ respectivement dans la brisure $SU(5)_\perp \rightarrow SU(4)_\perp \times U(1)_\perp$. Nous présentons dans le tableau (IV.5) les courbes de matière 10 et 5, leurs classes d'homologie et leurs multiplicités, ainsi que la restriction du flux $U(1)_Y$.

Après que nous avons déterminé les propriétés géométriques des courbes de matière associées à la décomposition $\mathcal{C}_4 \times \mathcal{C}_1$ dans le modèle $SU(5) \times SU(4)_\perp \times U(1)_\perp$, maintenant nous allons dériver le modèle $SU(5) \times A_4 \times U(1)_\perp$ selon les étapes que nous avons citées précédemment. Le choix particulier du monodromie non abélien agissant sur l'équation $\mathcal{C}_4$, joue un rôle décisif pour la viabilité du modèle construit puisque ce choix impose des contraintes sur les paramètres a_i de la géométrie interne. Ainsi, il affecte sur le modèle construit à basse énergie.

En premier lieu, le flux non abélien responsable de la brisure $SU(4)_\perp \rightarrow S_4$ implique que les racines t_1, t_2, t_3 et t_4 de l'équation $\mathcal{C}_4$ sont reliées entre eux par le monodromie S_4 . Toutefois, le monodromie A_4 sera attribué à l'équation $\mathcal{C}_4$ en tenant compte des conditions sur les paramètres a_n de $\mathcal{C}_4$

$$\mathcal{C}_4 = a_1 + a_2 s + a_3 s^2 + a_4 s^3 + a_5 s^4. \quad (\text{IV.18})$$

Les contraintes sur les paramètres a_i de la géométrie interne sont dérivées à partir de la théorie de Galois en examinant le discriminant $\Delta_{\mathcal{C}_4}$ et la résolvante $R(s)$ du polynôme $\mathcal{C}_4$

comme nous avons vu précédemment.

On considère que les coefficients a_i du polynôme $\mathcal{C}_4$ appartiennent à un certain corps $a_n \in \mathcal{K}$. et les racine t_1, t_2, t_3 et t_4 appartiennent à l'extension minimale du corps $\mathcal{K}$ qu'on note comme $\mathcal{F}$. En fait, si nous n'imposons aucune contrainte sur les coefficients a_i , alors le groupe de Galois associé à l'équation $\mathcal{C}_4$ est le groupe symétrique S_4 puisqu'il est obtenu à partir de la brisure du groupe $SU(4)_\perp$ par un flux non-abélien. Le discriminant $\Delta_{\mathcal{C}_4}$ du polynôme $\mathcal{C}_4$ est donné par [33][34]

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathcal{C}_4} = & 265a_1^3a_5^3 - \left(7a_2^2 - 144a_1a_3a_2^2 + 192a_1^2a_4a_2 + 128a_1^2a_3^2\right)a_5^2 \\ & - 2\left(-2\left(a_2^2 - 4a_1a_3\right)a_3^3 - \left(9a_2^2 - 40a_1a_3\right)a_2a_4a_3 + 3\left(a_2^2 - 24a_1a_3\right)a_1a_4^2\right)a_5 \\ & - a_4^2\left(4a_4a_2^3 + a_2^2a_3^2 - 18a_2a_4a_3a_1 + \left(4a_3^3 + 27a_1a_4^2\right)a_1\right), \end{aligned} \quad (\text{IV.19})$$

en termes des racines t_1, t_2, t_3 et t_4 , il s'exprime comme

$$\Delta_{\mathcal{C}_4} = [(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)(t_1 - t_4)(t_2 - t_3)(t_2 - t_4)(t_3 - t_4)]^2 \quad (\text{IV.20})$$

$$(t_2 - t_3)(t_2 - t_4) - (t_2 - t_1)(t_3 - t_4) - (t_3 - t_1)(t_4 - t_1). \quad (\text{IV.21})$$

La première contrainte qui doit être imposée pour réduire la symétrie de Galois $S_4 \rightarrow A_4$ associé à l'équation $\mathcal{C}_4$, est d'examiner le discriminant $\Delta_{\mathcal{C}_4}$ comme étant un carré parfait $\Delta_{\mathcal{C}_4} = \delta^2 \in \mathcal{K}^2$. Cependant, écrire le discriminant $\Delta_{\mathcal{C}_4}$ comme étant $\Delta_{\mathcal{C}_4} = \delta^2$ en termes des coefficient a_i n'est pas trivial. D'où, nous allons dépasser cette difficulté comme suite : tout d'abord nous considérons le discriminant $\Delta_{\mathcal{C}_4}$ comme un polynôme en fonction d'un certain paramètre a_k

$$\Delta_{\mathcal{C}_4} \equiv f(a_k) = c_n a_k^n + \dots + c_0, \text{ tel que } n \leq 4. \quad (\text{IV.22})$$

La condition nécessaire pour que le discriminant $\Delta_{\mathcal{C}_4}$ s'écrive comme un carré parfait, c'est lorsque le discriminant du polynôme $\Delta_{f(a_k)}$ s'annule. Cependant, puisque le discriminant $\Delta_{\mathcal{C}_4}$ dépend de 5 paramètres a_k , alors il y a 5 possibilités pour écrire le discriminant $\Delta_{\mathcal{C}_4}$ comme un polynôme $\Delta_{\mathcal{C}_4} \equiv f(\mathbf{a}_k)$ qui dépend d'un des 5 variables $\mathbf{a}_k$, nous écrivons chaque polynôme en termes de son variable comme suit

$$\Delta = \begin{cases} f(\mathbf{a}_5) = 0\mathbf{a}_5^4 + 256a_1^3\mathbf{a}_5^3 + \dots \\ f(\mathbf{a}_4) = -27a_1^2\mathbf{a}_4^4 + \dots \\ f(\mathbf{a}_3) = 16a_1a_5\mathbf{a}_3^4 + \dots \\ f(\mathbf{a}_2) = -27a_5^2\mathbf{a}_2^4 + \dots \\ f(\mathbf{a}_1) = 0\mathbf{a}_1^4 + 256a_5^3\mathbf{a}_1^3 + \dots \end{cases} \quad (\text{IV.23})$$

le polynôme $f(\mathbf{a}_3)$ est le choix convenable à traiter comme polynôme de variable $\mathbf{a}_3$ puisque le coefficient de l'ordre supérieur est positif non nul [33][34]. le polynôme $f(\mathbf{a}_3)$ s'écrit en terme de la variable $\mathbf{a}_3$ comme

$$\Delta_{\mathcal{C}_4} \equiv f(\mathbf{a}_3) = c_4\mathbf{a}_3^4 + c_3\mathbf{a}_3^3 + c_2\mathbf{a}_3^2 + c_1\mathbf{a}_3 + c_0, \quad (\text{IV.24})$$

IV.3. Modèle $SU(5)$ avec le monodromie non abélien A_4

avec les coefficients c_k sont des paramètres qui s'expriment en fonctions des a_k ($k = 1, 2, 4, 5$). Le discriminant $\Delta_{f(\mathbf{a}_3)}$ du polynôme $f(\mathbf{a}_3)$ est proportionnel à $\Delta_{f(\mathbf{a}_3)} \propto D_a^2 D_b^3$ avec

$$\begin{aligned} D_a &= a_1 a_4^2 - a_2^2 a_5, \\ D_b &= (27 a_1^2 a_4 - a_2^3) a_4^3 - 6 a_1 a_2^2 a_5 a_4^2 + 4096 a_1^3 a_5^3 + 3 a_2 (9 a_2^3 - 256 a_1^2 a_4) a_5^2, \end{aligned} \quad (\text{IV.25})$$

on rappelle que le discriminant $\Delta_{\mathcal{C}_4}$ peut s'écrire comme un carré parfait $\Delta_{\mathcal{C}_4} = \delta^2(a_k)$ si le discriminant $\Delta_{f(\mathbf{a}_k)}$ associé au polynôme $\Delta_{\mathcal{C}_4} \equiv f(\mathbf{a}_3)$ est nul, c'est à dire $\Delta_{f(\mathbf{a}_3)} \propto D_a^2 D_b^3 = 0$. Pour satisfaire cette contrainte, ceci implique $D_a = 0$ ou $D_b = 0$, la première équation $D_a = 0$ est vérifiée si nous exigeons la condition suivante

$$a_2^2 = 2 a_1 a_3 \text{ et } a_4^2 = 2 a_3 a_5, \quad (\text{IV.26})$$

cette condition est suffisante pour écrire le discriminant $\Delta_{\mathcal{C}_4} = \delta^2(a_k)$. En outre, l'équation $D_b = 0$ implique la condition [33][34]

$$(a_2^2 a_5 - a_4^2 a_1)^2 = \left(\frac{16 a_1 a_5 - a_2 a_4}{3} \right)^3. \quad (\text{IV.27})$$

Les deux conditions (IV.26) et (IV.27) garantissent le carré parfait du discriminant $\Delta_{\mathcal{C}_4} = \delta^2(a_k)$, prenant la première condition (IV.26) et la remplacer dans l'expression du discriminant dans (IV.19), nous avons

$$\Delta_{\mathcal{C}_4} = \delta^2(a_k) = \left[a_2 a_4 (a_3^2 - 2 a_2 a_4) (a_3^2 - a_2 a_4) / a_3^3 \right]^2. \quad (\text{IV.28})$$

Jusqu'à ce niveau, nous avons dérivé la condition nécessaire sur les paramètres a_n pour que le discriminant $\Delta_{\mathcal{C}_4}$ soit un carré parfait, ce qui implique que l'équation $\mathcal{C}_4$ peut avoir les groupes discrets A_4 ou V_4 comme un groupe de Galois. Cependant, pour réduire le groupe de Galois d'être le groupe A_4 , une condition supplémentaire sur les paramètres a_i doit être implémentée en examinant la résolvante cubique $R(s)$ associé au polynôme $\mathcal{C}_4$. Elle est donnée en termes des racines α_i par

$$R(s) = (s - \alpha_1)(s - \alpha_2)(s - \alpha_3), \quad (\text{IV.29})$$

avec les racines α_i de la résolvante $R(s)$ sont reliées aux racines t_i de l'équation $\mathcal{C}_4$ par les relations

$$\alpha_1 = t_1 t_2 + t_3 t_4, \quad (\text{IV.30})$$

$$\alpha_2 = t_1 t_3 + t_2 t_4, \quad (\text{IV.31})$$

$$\alpha_3 = t_2 t_3 + t_1 t_4. \quad (\text{IV.32})$$

La résolvante devient très utile en termes des paramètres a_i pour la détermination du groupe de Galois. On rappelle qu'elle s'écrit en termes des coefficients a_i du polynôme $\mathcal{C}_4$ comme suit

$$R(s) = a_5^3 s^3 - a_3 a_5^2 s^2 + (a_2 a_4 - 4 a_1 a_5) a_5 s - a_2^2 a_5 + 4 a_1 a_3 a_5 - a_1 a_4^2. \quad (\text{IV.33})$$

L'irréductibilité de la résolvante $R(s)$ est la deuxième condition nécessaire pour que l'équation de revêtement spectral $\mathcal{C}_4$ possède la symétrie A_4 comme un groupe de Galois agissant

sur les racines de l'équation. En fait, l'irréductibilité de la résolvante $R(s)$ n'est pas trivial à étudier, par exemple pour les groupe de Galois S_4 , D_4 et Z_4 qui exigent la réductibilité de la résolvante $R(s)$, la façon la plus simple pour que $R(s)$ soit réductible est de poser $R(s=0) = 0$ ce qui implique

$$4a_1a_3a_5 - a_2^2a_5 - a_1a_4^2 = 0, \quad (\text{IV.34})$$

dans ce cas la résolvante $R(s)$ sera factorisée par le facteur s comme suit

$$R(s) = s \left(a_5^3 s^2 - a_3 a_5^2 s + (a_2 a_4 - 4a_1 a_5) a_5 \right), \quad (\text{IV.35})$$

en conséquence, la réductibilité de la résolvante est garanti. En outre, pour le cas actuel du groupe A_4 , la résolvante $R(s)$ est irréductible si

$$4a_1a_3a_5 - a_2^2a_5 - a_1a_4^2 \neq 0. \quad (\text{IV.36})$$

Au fond, la brisure du groupe $SU(4)_\perp \rightarrow S_4$ par un flux non-abélien en plus des conditions (IV.26) et (IV.36) imposées sur les paramètres a_i de l'équation $\mathcal{C}_4$, implique que le modèle que nous avons, possède une symétrie totale $SU(5) \times A_4 \times U(1)_\perp$, où les racines t_1, t_2, t_3 et t_4 sont reliées entre eux par le monodromie A_4 , alors que la racine t_5 est fixée par la symétrie $U(1)_\perp$.

Le spectre de matière pour ce modèle sera dérivé à partir de celui de la factorisation $\mathcal{C}_4 \times \mathcal{C}_1$. Maintenant, nous allons exploiter les propriétés algébriques du groupe A_4 pour déterminer le spectre des courbes de matière du modèle $SU(5) \times A_4 \times U(1)_\perp$. En outre, l'action du monodromie A_4 au niveau des courbes de matière va agir de la manière suivante : toute courbe de matière quadr-uplet est réductible sous A_4 , ainsi, elle sera décomposée en deux courbes ; une courbe triplet et autre singlet³. Nous allons écrire les courbes de matière dans la base du groupe A_4 au lieu de la base t_1, t_2, t_3 et t_4

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} \rightarrow t_\alpha = \begin{pmatrix} t_s = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \\ t_a = t_1 + t_2 - t_3 - t_4 \\ t_b = t_1 - t_2 + t_3 - t_4 \\ t_c = t_1 - t_2 - t_3 + t_4 \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.37})$$

avec t_s est le singlet invariant sous toutes les permutations. D'après le spectre de matière dans le tableau (IV.5), la courbe de matière 10_a associée à l'équation a_1 est identifiée aux quatre racines t_1, t_2, t_3 et t_4 , cette courbe quadr-uplet peut être décomposée sous le groupe A_4 en deux courbes ; une courbe triplet 10_{t_α} et une courbe singlet 10_{t_s} , elles sont notées sous les représentations de A_4 comme suit

$$10_{t_\alpha} = (10, 3) \text{ et } 10_{t_s} = (10, 1). \quad (\text{IV.38})$$

En termes des équations de la géométrie interne, l'équation a_1 doit être écrite comme produit de deux équation $a_1 \sim \beta_1 \times \beta_2$. En plus, pour associer à chaque courbe sa propre classe d'homologie et multiplicité qui génère la chiralité, alors la décomposition est introduite en terme d'une brisure par un flux non nul ; ce flux doit être proportionnel à l'un des générateurs du groupe A_4 , et doit être choisi également de tel façon que le groupe lui même reste préservé. Prenons la même courbe $10_a = (10, 4)$ comme exemple pour illustrer

3. Ceci sera vérifier facilement dans la méthode basée sur la théorie des caractères de représentations.

IV.3. Modèle $SU(5)$ avec le monodromie non abélien A_4

Courbe	Courbe sous $SU(5) \times A_4 \times U(1)_\perp$	Multiplicité	Flux $U(1)_Y$
10_1	$(10, 3)_0$	M_{T_1}	0
10_2	$(10, 1)_0$	M_{T_2}	$-N$
10_3	$(10, 1)_{t_5}$	M_{T_3}	$+N$
5_1	$(5, 3)_0$	M_{F_1}	0
5_2	$(5, 3)_0$	M_{F_2}	$-N$
5_3	$(5, 3)_{t_5}$	M_{F_3}	$+N$
5_4	$(5, 1)_{t_5}$	M_{F_4}	0

TABLE IV.6 – Propriétés des courbes de matière 10 et 5 dans le cas du modèle $SU(5) \times A_4 \times U(1)_\perp$.

cette brisure. Selon le tableau (IV.5), sa classe d'homologie est $[10_a] = \eta - 5c_1 - \chi$ avec une multiplicité M_{10} , si nous choisissons le flux non nul $U(1)_s$ dans la direction du singlet

$$(10, 4) = \begin{cases} (10, 3) = M_{10}, \\ (10, 1) = M_{10} + N_s, \end{cases} \quad (\text{IV.39})$$

alors les deux courbe $10_{a_1} = (10, 3)$ et $10_{a_2} = (10, 1)$ ont des chiralités différentes, en plus que la symétrie A_4 reste préservée. En outre, les classes d'homologie des nouvelles courbes sont déterminées et contraintes par les classes d'homologie des courbes dans (IV.5) comme

$$[10_a] = [10_{a_1}] + [10_{a_2}], \quad (\text{IV.40})$$

donc on peut écrire les classes d'homologie des courbes de matière 10_{a_1} et 10_{a_2} en respectant l'homologie de 10_a comme

$$[10_{a_1}] = a\eta + bc_1, \quad (\text{IV.41})$$

$$[10_{a_2}] = c\eta + dc_1 - \chi, \quad (\text{IV.42})$$

avec $a + c = 1$ et $b + d = -5$. Une analyse similaire pour déterminer les propriétés des courbes de matière $5_{t_i+t_j}$ et $5_{t_i+t_5}$ sous la symétrie A_4 , par exemple la courbe de matière $5_c = 5_{t_i+t_j}$ avec $i < j = 1, 2, 3, 4$ est considérée comme une courbe six-uplet et par conséquent il va se décomposer comme une somme de deux triplets sous la base irréductible du groupe A_4 [34]. On regroupe toutes les propriétés des courbes de matière 10 et 5 dans le tableau (IV.6)

Modèle effectif à basse énergie

Une fois que nous avons spécifié les courbes de matière associées au modèle $SU(5) \times A_4 \times U(1)_\perp$ ainsi que leurs propriétés, nous pouvons maintenant étudier les implications de ce modèle à basse énergie. A ce stade, la symétrie de jauge $SU(5)$ doit être brisée vers le modèle standard en utilisant un flux non nul, cette brisure peut conduire au spectre de masse du modèle standard si le flux non nul utilisé est l'hyperflux $U(1)_Y \subset SU(5)$; ce type de flux permet de décomposer ou briser les représentations 5 et 10 du groupe $SU(5)$ en termes des représentations du modèle standard selon les équations (III.57) et (III.58) respectivement.

Nous combinons ces ingrédients ensembles, les propriétés du spectre de masse de ce modèle sont résumées dans le tableau (IV.7)

Courbe	Courbe sous $SU(5) \times A_4 \times U(1)_\perp$	Contenu en matière
10_1	$(10, 3)_0$	$3 [M_{T_1} Q_L + u_L^c (M_{T_1} - N_Y) + e_L^c (M_{T_1} + N_Y)]$
10_2	$(10, 1)_0$	$M_{T_2} Q_L + u_L^c (M_{T_2} - N_Y) + e_L^c (M_{T_2} + N_Y)$
10_3	$(10, 1)_{t_5}$	$M_{T_3} Q_L + u_L^c (M_{T_3} - N_Y) + e_L^c (M_{T_3} + N_Y)$
5_1	$(5, 3)_0$	$3 [M_{F_1} \bar{d}_L^c + (M_{F_1} + N_Y) \bar{L}]$
5_2	$(5, 3)_0$	$3 [M_{F_2} \bar{D} + (M_{F_2} + N_Y) \bar{H}_d]$
5_3	$(5, 3)_{t_5}$	$3 [M_{F_3} D + (M_{F_3} + N_Y) H_u]$
5_4	$(5, 1)_{t_5}$	$M_{F_4} \bar{d}_L^c + (M_{F_4} + N_Y) \bar{L}$

TABLE IV.7 – Décomposition des courbes de matière 10 et 5 sous les particules du MS en terme des paramètres des flux $M_{T_{1,2,3}}$ et N_Y .

Modèle avec $N_Y = 0$

En général, un modèle semi-réaliste doit contenir 3 générations des quarks (10_M) et 3 générations des Leptons (5_M) en plus de deux Higgs up 5_{H_u} et down 5_{H_d} pour fournir les masses aux fermions. Ces exigences sont complètement liées au choix des paramètres des fluxes M_{10_i} , M_{5_j} et N_Y du modèle $SU(5) \times A_4 \times U(1)$. En effet, nous allons construire un modèle effectif dans le cas le plus simple où le paramètre du flux $N_Y = 0$. En outre, les exigences des trois générations des fermions sont atteintes en tenant compte la condition $\sum_i M_{10_i} + \sum_j M_{5_j} = 0$ sur les paramètres M_{10_i} et M_{5_j} proviennent du flux qui génère la chiralité des fermions. Partant de ce fait, les paramètres de flux sont choisis comme suit

$$\begin{aligned}
 M_{T_1} &= M_{F_1} = 0, \\
 M_{T_3} &= 2M_{T_2} = 2, \\
 M_{F_1} &= M_{F_2} = -M_{F_3} = -1.
 \end{aligned}
 \tag{IV.43}$$

Après la brisure de la symétrie $SU(5)$ par l'hyperflux et le choix des paramètres de flux considéré dans (IV.43), le spectre de matière du modèle $SU(5) \times A_4 \times U(1)$ à basse énergie est résumé dans le tableau (IV.8)

A côté des fermions du modèle standard ainsi que les champs de Higgs de type up et down, le tableau (IV.8) contient également les courbes de matière singlets sous $SU(5)$; leurs propriétés géométriques sont déterminées à partir du revêtement spectral $\mathcal{C}_{15}$ du groupe perpendiculaire $SU(5)_\perp$. Le singlet θ_c est identifié avec les neutrinos droits ν_R , tandis que les singlets θ_a , θ_b et θ_d , sont traités comme des flavons du modèle $SU(5) \times A_4 \times U(1)_\perp$. En outre, la dernière colonne du tableau contient la symétrie-R des courbes de matière, cette symétrie aide à éliminer les opérateurs qui conduisent à la désintégration rapide du proton, d'où seul les couplages autorisés sont ceux ayant une symétrie-R égale à 2

IV.3.2 Secteur des quarks et leptons chargés

Quarks de type up

Les termes de masses des quarks de type up sont déterminés par les couplages de Yukawa de type $\lambda^{ij} T_i \cdot T_j \cdot H_u \equiv 10_M \cdot 10_M \cdot 5_{H_u}$, alors les couplages de Yukawa de type-up

IV.3. Modèle $SU(5)$ avec le monodromie non abélien A_4

Courbe	$SU(5) \times A_4 \times U(1)_\perp$	M	Matière du MS	Symétrie-R
10_1	$(10, 3)_0$	0	-	1
$10_2 = T_3$	$(10, 1)_0$	1	$Q_L + u_L^c + e_L^c$	1
$10_3 = T$	$(10, 1)_{t_5}$	2	$2Q_L + 2u_L^c + 2e_L^c$	1
$\bar{5}_1 = F$	$(\bar{5}, 3)_0$	1	$3L + 3d_L^c$	1
$\bar{5}_2 = H_d$	$(\bar{5}, 3)_0$	1	$3\bar{D} + 3H_d$	0
$\bar{5}_3 = H_u$	$(\bar{5}, 3)_{t_5}$	1	$3D + 3H_u$	0
5_4	$(5, 1)_{t_5}$	0	-	1
θ_a	$(1, 3)_{-t_5}$	-	Flavon	0
θ_b	$(1, 1)_{-t_5}$	-	Flavon	0
θ_c	$(1, 3)_0$	-	ν_R	1
θ_d	$(1, 3)_0$	-	Flavon	0
$\theta_{a'}$	$(1, 3)_{t_5}$	-	-	0
$\theta_{b'}$	$(1, 1)_{t_5}$	-	-	0

TABLE IV.8 – Spectre de matière du MS à partir du modèle $SU(5) \times A_4 \times U(1)_\perp$ dans le cas $N_Y = 0$.

invariants sous la symétrie du modèle $SU(5) \times A_4 \times U(1)_\perp$ sont donnés par

$$T_3.T_3.H_u.\theta_a\} \quad \text{Troisième génération}$$

$$\left. \begin{array}{l} T.T_3.H_u.\theta_a.\theta_b \\ T.T_3.H_u.(\theta_a)^2 \end{array} \right\} \quad \text{3ème-1ère/2ème génération} \quad (\text{IV.44})$$

$$\left. \begin{array}{l} T.T.H_u.\theta_a.(\theta_b)^2 \\ T.T.H_u.(\theta_a)^2.\theta_b \\ T.T.H_u.(\theta_a)^3 \end{array} \right\} \quad \text{1ère/2ème génération}$$

afin de garantir l'invariance sous la symétrie $A_4 \times U(1)_\perp$, les couplage de Yukawa $\lambda^{ij}T_i.T_j.H_u$ sont couplés avec des flavons du modèle θ_a et θ_b . En utilisant le choix des VEVs pour les champs de Higgs up H_u et les flavons θ_d et θ_a comme

$$\langle H_u \rangle = (v_u, 0, 0)^T, \quad \langle \theta_a \rangle = (a, 0, 0)^T \quad \text{et} \quad \langle \theta_b \rangle = b, \quad (\text{IV.45})$$

alors le premier couplage de Yukawa contribue à la génération de la masse au quark top $m_t = yv_u a$ où le flavon θ_a est introduit pour garantir l'invariance sous le groupe A_4 et la symétrie $U(1)_\perp$. En utilisant les produit de Kronecker des représentations du groupe A_4 présentés dans l'Annexe, alors la matrice de masse totale pour les quarks de type up est

$$m_{u,c,t} = v_u a \begin{pmatrix} y_3 b^2 + y_4 a^2 & y_3 b^2 + y_4 a^2 & y_2 b \\ y_3 b^2 + y_4 a^2 & y_3 b^2 + y_4 a^2 & y_2 b \\ y_2 b & y_2 b & y_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.46})$$

Quarks de type-down et leptons chargés

La matrice de masse des quarks de type-down est dérivée des couplage de Yukawa de type $T.F.H_d \equiv 10_M.\bar{5}_M.\bar{5}_{H_d}$. Les couplages invariants sous la symétrie $A_4 \times U(1)_\perp$ sont

$$\left. \begin{array}{l} F.H_d.T_3 \\ F.H_d.T_3.\theta_d \end{array} \right\} \text{ Troisième génération}$$

$$\left. \begin{array}{l} F.H_d.T.\theta_b \\ F.H_d.T.\theta_a \\ F.H_d.T.\theta_a.\theta_d \\ F.H_d.T.\theta_b.\theta_d \end{array} \right\} \text{ 1ère/2ème génération} \quad (\text{IV.47})$$

Leptons chargés

Nous avons vu dans le chapitre II et en particulier dans le modèle de Georgi-Glashow $SU(5)$ que les masses des quarks de type down et les leptons chargés sont obtenues des mêmes couplages de Yukawa de type $10_M.\bar{5}_M.\bar{5}_{H_d}$. Par conséquent, la matrice de masse des leptons chargés dans le modèle $SU(5) \times A_4 \times U(1)_\perp$ provient des même opérateurs dans (IV.47). En utilisant les VEVs du Higgs down et le flavon θ_d sous la représentation du groupe A_4 comme $\langle H_d \rangle = (0, 0, v_d)^T$ et $\langle \theta_d \rangle = (d_1, d_2, d_3)^T$; ce choix est motivé par l'exigence d'avoir la 3ème génération comme la génération la plus lourde. D'ou, la matrice masses des Leptons chargés est donnée par

$$m_{e,\mu,\tau} = v_d \begin{pmatrix} y_7 d_2 b + y_{11} d_3 a & y_7 d_2 b + y_{11} d_3 a & y_3 d_2 \\ y_5 a & y_5 a & y_2 d_1 \\ y_4 b & y_4 b & y_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.48})$$

IV.3.3 Secteur du neutrinos

Selon le spectre de matière présenté dans le tableau (IV.8) du modèle actuel, les neutrinos gauches sont localisés avec les quarks down d^c dans la courbe de matière $\bar{5}_1 = F$. De plus, leurs trois saveurs sont organisés sous forme d'un triplet $\bar{5}_1 = (\bar{5}, 3)_0$ sous la symétrie de familles A_4 . En d'autre part, les neutrinos droits sont choisis pour être situés dans la courbe de matière $\theta_c = (1, 3)_0$ qui est non chargée sous la symétrie $U(1)_\perp$. Comme le modèle $SU(5)$ possède les neutrino droit ν_R et gauche L qui contribuent dans les matrices de Dirac m_D et de Majorana M_R , alors la masse effective du neutrino m_ν^{eff} est obtenue à travers le mécanisme de seesaw de type I; $m_\nu^{eff} = m_D M_R^{-1} m_D^T$

Neutrino de Dirac

La matrice de masse de Dirac m_D couple les neutrinos de chiralité gauche $\bar{5}_1 = F$ avec les neutrinos droits θ_c , les deux types de neutrinos vivent dans la représentation 3 sous la symétrie de familles et portent une charge nulle sous $U(1)_\perp$. les opérateurs d'ordre le plus bas en tenant compte l'invariance sous la symétrie du modèle $SU(5) \times A_4 \times U(1)_\perp$ sont

$$\begin{aligned} \theta_c.F.H_u.\theta_a, \\ \theta_c.F.H_u.\theta_b. \end{aligned} \quad (\text{IV.49})$$

En utilisant les VEVs du Higgs H_u et les flavons θ_a et θ_b comme dans (IV.45), ces opérateurs contribuent dans la matrice de Dirac m_D comme suit

$$m_D = v_u \begin{pmatrix} y_0 a & 0 & 0 \\ 0 & y_1 a & y_9 b \\ 0 & y_8 b & y_1 a \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.50})$$

avec $y_0 = y_1 + y_2 + y_3$, cette matrice montre qu'il existe un mélange fort entre la deuxième et la troisième génération alors que le mélange de ces dernières avec la première génération n'existe pas. Toutefois, des opérateurs d'ordre supérieurs peuvent être ajoutés comme des corrections à la matrice (IV.50), en particulier, nous pouvons ajouter une correction aux opérateurs par le flavon θ_d puisqu'il garde l'invariance sous la symétrie du modèle; les opérateurs sont

$$\begin{aligned} &\theta_c.F.H_u.\theta_a.\theta_d, \\ &\theta_c.F.H_u.\theta_b.\theta_d, \end{aligned} \quad (\text{IV.51})$$

nous remarquons que le premier opérateur est suffisant comme contribution aux éléments off-diagonaux de la matrice de Dirac pour avoir un mélange entre les trois saveurs. Développons ces opérateurs sous les produits des représentations du groupe A_4 , alors la matrice de masse de Dirac totale obtenue est donnée par

$$M_D = v_u \begin{pmatrix} y_0 a & z_3 d_2 b & z_2 d_3 b \\ z_1 d_2 b & y_1 a & y_9 b \\ z_4 d_3 b & y_8 b & y_1 a \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.52})$$

avec les coefficients z_i sont les constantes de couplage de l'opérateur ajouté comme correction à la matrice de Dirac.

Neutrino de Majorana

La matrice de masse de Majorana M_R provient de l'opérateur de Majorana pour les neutrinos droits est donnée par le couplage $M\nu^c\nu^c \equiv M\theta_c.\theta_c$. En effet, dans ce modèle les neutrinos droits résident dans la représentation du modèle $(1, 3)_0$; ceci signifie que les trois saveurs des neutrinos s'organisent dans un triplet sous le monodromie (symétrie de famille) A_4 , en plus qu'ils portent une charge nulle sous la symétrie $U(1)_\perp$. Le couplage $M\theta_c.\theta_c$ est autorisé sous la symétrie du modèle, d'où son développement sous les produits de représentations du groupe A_4 implique une contribution diagonale dans la matrice de Majorana

$$M_R = M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.53})$$

En plus, on peut ajouter des corrections à la matrice M_R en utilisant des opérateurs qui relient le couplage $\theta_c.\theta_c$ par des flavons singlets du modèle, voir le tableau (IV.8). Pour construire des opérateurs de Majorana invariants sous la symétrie $A_4 \times U(1)_\perp$, les flavons qui seront couplés aux opérateurs de Majorana doivent avoir une charge nulle sous symétrie $U(1)_\perp$. Ainsi, selon le tableau (IV.8), le seul flavon qui possède une charge nulle sous la symétrie $U(1)_\perp$ est le flavon θ_d qui réside dans un triplet sous le groupe A_4 . Alors,

les correction du matrice de Majorana admettent des opérateurs de type

$$y\theta_c.\theta_c.(\theta_d)^n \quad \text{avec } n = \{1, 2, \dots\} \quad (\text{IV.54})$$

on rappel que cette opérateur avec $n = 0$ implique la matrice diagonal (IV.53), tandis que cet opérateur avec $n = 1$ est suffisant pour remplir les éléments non diagonaux du matrice (IV.53). Les opérateurs d'ordre supérieur $n = \{2, 3, \dots\}$ peuvent être considérés comme des corrections supplémentaires à la matrice de Majorana. La matrice de masse total de Majorana M_R en considérant seulement les corrections du première ordre $n = 1$ est donnée par

$$M_R = M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & d_3 & d_2 \\ d_3 & 0 & d_1 \\ d_2 & d_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.55})$$

Matrice de masse des neutrinos

La matrice de masse totale des neutrinos est obtenue via le mécanisme de seesaw de type I en utilisant les matrices de neutrino de Majorana (IV.55) et de Dirac (IV.52). En outre, nous posons la condition $z_1 = z_3$ et $z_2 = z_4$ pour réduire les paramètres dans la matrice de masse. Nous définissons ensuite certains paramètres sans dimensions

$$Y_1 = \frac{y_1}{y_0} \leq 1, \quad Y_{2,3} = \frac{y_{8,9}b}{y_0a}, \quad (\text{IV.56})$$

$$Z_1 = \frac{z_1d_2b}{y_0a}, \quad Z_2 = \frac{z_2d_3b}{y_0a}, \quad (\text{IV.57})$$

nous implémentons ces reparamétrisations, alors la matrice de masse de Dirac devient plus simplifiée. Elle est donnée par

$$M_D = y_0v_u a \begin{pmatrix} 1 & Z_1 & Z_2 \\ Z_1 & Y_1 & Y_3 \\ Z_2 & Y_2 & Y_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.58})$$

En utilisant les matrices (IV.55) et (IV.58), la matrice totale du neutrino est obtenue sous la forme

$$M_{eff} = m_0 \begin{pmatrix} 1 + Z_1^2 + Z_2^2 & Y_1Z_1 + Y_3Z_2 + Z_1 & Y_2Z_1 + Y_1Z_2 + Z_2 \\ Y_1Z_1 + Y_3Z_2 + Z_1 & Y_1^2 + Y_3^2 + Z_1^2 & Y_1(Y_2 + Y_3) + Z_1Z_2 \\ Y_2Z_1 + Y_1Z_2 + Z_2 & Y_1(Y_2 + Y_3) + Z_1Z_2 & Y_1^2 + Y_2^2 + Z_2^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.59})$$

où le nouveau paramètre m_0 est défini comme suit

$$m_0 = \frac{y_0^2 v_u^2 a^2}{M}, \quad (\text{IV.60})$$

Les résultats numériques sur les paramètres d'oscillations des neutrinos sont étudiés dans la référence [34].

IV.4 Symétries non-abéliennes par la théorie des caractères

IV.4.1 Caractères de représentations irréductibles

Comme dans le cas des groupes continus, les propriétés des groupes discrets sont bien étudiés via leurs représentations, qui acquièrent donc une importance considérable dans le domaine de la physique. Cependant, il peut intervenir des représentations de très grandes dimensions, de sorte qu'on essaie de les décomposer en sous-représentations plus petites ; des représentations irréductibles. D'où, afin de contrôler toutes les représentations des groupes, il suffit ainsi de maîtriser leurs représentations irréductibles. D'un autre côté, un outil mathématiques appelé théorie des caractères intervient [156], cette théorie a pour objectif de caractériser les représentations irréductibles et de calculer la décomposition d'une représentation quelconque en somme directe de représentations irréductibles. Cette théorie extrêmement puissante et permet de développer de nombreuses propriétés de la théorie des représentations. Ici, nous allons présenter quelques concepts mathématiques importants pour cette théorie qui nous permettront de mieux comprendre comment construire l'ensemble des représentations d'un groupe discret en utilisant leurs caractères associés.

Définition IV.1 Soit $V : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ une représentation d'un groupe discret G , alors le caractère de la représentation V noté χ_V est l'application définie par $\chi_V : G \rightarrow \mathbb{C}$, telle que

$$\chi_V(g) = \text{Tr}(g|_V) \quad , \quad \forall g \in G, \quad (\text{IV.61})$$

où $\text{Tr}(g|_V)$ signifie la trace de l'élément $g \in G$ dans la représentation V .

Propriétés 1 :

(i) Le caractère χ_V de la représentation V est constant sur toutes les classes de conjugaison C_i de G , ceci veut dire que le caractère est invariant sur les classes de conjugaison du groupe G

$$\chi_V(g) = \chi_V(hgh^{-1}) \quad \text{pour tout } g, h \in G. \quad (\text{IV.62})$$

(ii) Soit e l'élément neutre du groupe G , alors le caractère $\chi_V(e) = \dim V$. En effet, la représentation matricielle de l'élément neutre e est l'identité $\rho(e) = Id_V$, et par conséquent $\chi_V(e) = \text{Tr}(Id_V) = \dim V$.

(iii) Soit V^* la représentation duale à V qu'on note dans la représentation matricielle comme $\rho_{V^*}(g)$ pour tout $g \in G$. Elle est définie comme

$$\rho_{V^*}(g) = \rho_{\overline{V}}(g) = \rho_V(g^{-1}). \quad (\text{IV.63})$$

Alors, le caractère de la représentation duale V^* est définie comme

$$\chi_{V^*}(g) = \overline{\chi_V(g)} = \chi_V(g^{-1}). \quad (\text{IV.64})$$

En particulier, si la représentation V et sa représentation duale V^* sont égales $V \equiv V^*$, alors le caractère $\chi_V(g) \in \mathbb{R}$ pour tout $g \in G$.

Propriétés 2 :

Soient V et W deux représentations du groupe discret G et soient $\chi_V(g)$ et $\chi_W(g)$ leurs caractères pour tout élément $g \in G$, alors nous avons :

(i) Le caractère $\chi_{V \oplus W}(g)$ de la somme direct de deux représentations V et W , est égal à la somme de leurs caractères

$$\chi_{V \oplus W}(g) = \chi_V(g) + \chi_W(g). \quad (\text{IV.65})$$

(ii) Le caractère $\chi_{V \otimes W}(g)$ du produit tensoriel de deux représentations V et W , est égal au produit de leurs caractères

$$\chi_{V \otimes W}(g) = \chi_V(g) \times \chi_W(g). \quad (\text{IV.66})$$

(iii) Les caractères de la partie symétrique $\text{Sym}^2 V$ et antisymétrique $\wedge^2 V$ de la représentation $V \times V = \text{Sym}^2 V + \wedge^2 V$ sont définis en terme du caractère $\chi_V(g)$ de la représentation V comme suit

$$\chi_{\wedge^2 V}(g) = \frac{1}{2} (\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2)), \quad (\text{IV.67})$$

$$\chi_{\text{Sym}^2 V}(g) = \frac{1}{2} (\chi_V(g)^2 + \chi_V(g^2)), \quad (\text{IV.68})$$

où le caractère du produit $V \otimes V$ est donné comme $\chi_{V \otimes V}(g) = \chi_V(g)^2$. Ces propositions donnent des moyens de construire de nouveaux caractères de G à partir de caractères déjà connus

Décomposition par les caractères des représentations

Soit V une représentation de G qui se décompose comme suit

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r, \quad (\text{IV.69})$$

où $U_1, \dots, U_r$ sont des représentations irréductibles, alors le caractère $\chi_V(g)$ s'écrit comme étant une somme des caractères $\chi_{U_1}(g), \dots, \chi_{U_r}(g)$

$$\chi_V(g) = \chi_{U_1}(g) + \dots + \chi_{U_r}(g). \quad (\text{IV.70})$$

Exemple

Puisque nous avons introduit des résultats fondamentaux sur la théorie des caractères, nous pouvons maintenant appliquer ces résultats à l'exemple du groupe de permutation à trois objets S_3 . Ce dernier contient $3! = 6$ éléments et peut être généré par 2 permutations $a = (12)$ et $b = (123)$ satisfont à la relation $a^2 = b^3 = 1$. En fait, les générateur a et b peuvent être présentés comme des matrice 3×3 dans la base canonique

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.71})$$

Les 6 éléments du groupe S_3 s'écrivent en termes des générateurs a et b ($S_3 = \{e, a, b, ab, ba, aba\}$) et peuvent être classés en trois classes de conjugaison

$$C_1 : \{e\} \quad ; \quad C_2 : \{b, aba\} \quad ; \quad C_3 : \{a, ab, ba\}, \quad (\text{IV.72})$$

IV.4. Symétries non-abéliennes par la théorie des caractères

où l'indice $n = 1, 2, 3$ indique le nombre d'éléments dans chaque classe de conjugaison C_n . En outre, les éléments de C_2 comportent les 3-cycles ainsi que les éléments du classe C_3 agissant comme des transpositions sur les trois objets de S_3 .

Représentations et caractères

Le nombre de représentations irréductibles du groupe S_3 est égale au nombre des classes de conjugaison qui est dans ce cas 3, alors le groupe S_3 possède trois représentations V_i irréductible satisfont à la relation

$$\sum_i V_i^2 = \text{Ord}(S_3) = 6. \quad (\text{IV.73})$$

On peut verifir facilement que les représentation irréductible du groupe S_3 sont : deux singlets 1 et $1'$, et un doublet 2, où 1 est la représentation triviale envoyant tout élément $g \in S_3$ à $1 \in \mathbb{C}^*$, la représentation $1'$ appelée la représentation alternée ainsi que le doublet 2 appelé la représentation standard.

Puisque le caractère est une quantité reste inchangée pour des éléments de même classe de conjugaison, il suffit alors de considérer le caractère d'une représentation de chaque classe de conjugaison de S_3 . Si note les caractères des représentations de S_3 par $\chi_1(g)$, $\chi_{1'}(g)$ et $\chi_2(g)$, alors les caractères des représentations 1, $1'$ et 2 sont bien déterminées en utilisant les relations *d'orthogonalités* des caractères [113].

Pour trouver les caractères des représentations irréductibles, nous considérons la représentation la plus simple qui s'appelle la représentation par permutation de dimension 3, le caractère de cette dernière sous l'élément neutre e ainsi que les deux générateurs a et b , est défini comme la trace de leurs représentation matricielle (IV.71), donc

$$\chi_3(e, a, b) = (3, 1, 0). \quad (\text{IV.74})$$

De plus, la représentation par permutation d'un group G est définie également comme le nombre d'éléments fixés [156]. D'où, les valeurs des $\chi_{1,1',2}(g)$ avec $g \in S_3$ sont présentées sous forme de tableau, appelé table des caractères,

S_3	e	a	b
$\chi_1(g)$	1	1	1
$\chi_{1'}(g)$	1	-1	1
$\chi_2(g)$	2	0	-1

(IV.75)

Selon la table de caractère du groupe S_3 , Il est clair que le caractère de la représentation par permutation 3 ($\chi_3(e, a, b) = (3, 1, 0)$) peut être s'écrit comme somme des caractères des représentation triviale 1 et standard 2 pour $g = a, b$ et e

$$\begin{aligned} \chi_3(a) &= \chi_1(a) + \chi_2(a), \\ 1 &= 1 + 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.76})$$

pour le générateur a ,

$$\begin{aligned} \chi_3(b) &= \chi_1(b) + \chi_2(b), \\ 0 &= 1 - 1, \end{aligned} \quad (\text{IV.77})$$

pour le générateur b et

$$\begin{aligned}\chi_3(e) &= \chi_1(e) + \chi_2(e), \\ 3 &= 1 + 2\end{aligned}\tag{IV.78}$$

pour l'élément neutre e . Alors nous pouvons écrire la relation entre les caractères $\chi_3(g)$, $\chi_1(g)$ et $\chi_2(g)$ pour tout $g \in G$ comme

$$\chi_3(g) = \chi_1(g) + \chi_2(g) \text{ pour } \forall g \in G \tag{IV.79}$$

ce qui implique que la représentation 3 va se décomposer en somme $3 = 1 \oplus 2$. Encore, nous pouvons appliquer un changement de base sur les matrices 3×3 (IV.71), nous obtiendrons alors les générateurs a et b pour chaque représentation de S_3 sous la forme

$$\begin{aligned}1 : & \quad a = 1 & ; & \quad b = 1, \\ 1' : & \quad a = -1 & ; & \quad b = 1, \\ 2 : & \quad a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & ; & \quad b = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On voit que le caractère de toute représentation réductible d'un groupe fini G , est une combinaison linéaire des caractères des représentations irréductibles; ces derniers sont appelés les caractères irréductibles.

IV.4.2 Représentations des monodromies non abéliens et tables de caractère

La théorie des caractères est un outil puissant permet de classifier les groupes finis ainsi que d'étudier leur structure. En effet, les caractères des représentations irréductibles codent de nombreuses propriétés qui nous permettent de comprendre la décomposition des représentations réductibles en leurs composantes irréductibles. Ici, nous allons assembler les caractères des représentations irréductibles associées aux groupes discrets dans ce qu'on appelle des tables de caractères [113]. En particulier, on se focalise sur les groupes discrets qui agissent comme des monodromies sur les équations de revêtement spectral $\mathcal{C}_4$ et $\mathcal{C}_3$ dans les modèles F-GUT.

Revêtement spectral $\mathcal{C}_3$

Dans le cas de l'équation de revêtement spectral $\mathcal{C}_3$ qui peut être considérée dans les modèles $SU(5)$, $SO(10)$ et E_6 avec leurs groupes commutants $SU(3)_\perp$, $SU(4)_\perp$ et $SU(3)_\perp$ respectivement, le seul monodromie non abélien qui peut relier les trois racines t_1, t_2 et t_3 est le groupe S_3 .

Le groupe S_3 est le groupe symétrique de trois objets, nous rappelons qu'il possède $3! = 6$ éléments qui peuvent être fabriqués par deux générateurs a et b donnés dans (IV.71), il possède également trois représentations irréductibles 1, 1' et 2 satisfait à la relation $1^2 + 1'^2 + 2^2 = \text{Ord}(S_3)$. Encore, ces représentations sont en correspondance avec des

diagrammes simples dits tableaux de Young ; ils sont représentés comme suit [157]

$$\mathbf{1} : \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array}, \quad \mathbf{2} : \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}, \quad \mathbf{1}' : \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \quad (\text{IV.80})$$

En d'autre part, les caractères des représentations $\mathbf{1}, \mathbf{1}'$ et $\mathbf{2}$ suivant les classes de conjugaisons C_1, C_2 et C_3 sont résumés dans la table de caractère suivante

S_3	C_1	C_2	C_3
χ_1	1	1	1
$\chi_{1'}$	1	1	-1
χ_2	2	-1	0

(IV.81)

Revêtement spectral $\mathcal{C}_4$

En ce qui concerne l'équation de revêtement spectral $\mathcal{C}_4$, les monodromies non abéliens permutants les racines t_1, t_2, t_3 et t_4 sont les groupes de permutations de quatre objets ; symétrique S_4 , alterné A_4 et diédral D_4 .

Groupe S_4

Le groupe S_4 est le groupe symétrique de toutes les permutations de quatre objets, il contient $4! = 24$ éléments qui peuvent être construits par trois générateurs $a=2$ -cycle, $b=3$ -cycle et $c=4$ -cycle subissent à la relation

$$a^2 = b^3 = c^4 = e.$$

De plus, ces 24 éléments peuvent être également classés en cinq classes de conjugaison $[C_1, C_3, C_6, C'_6, C_8]$, et en conséquence le groupe S_4 possède cinq représentation irréductible ; deux singlets $\mathbf{1}$ et $\mathbf{1}'$, un doublet $\mathbf{2}$ et deux triplets $\mathbf{3}$ et $\mathbf{3}'$. On note que ces représentations sont reliées entre eux par l'ordre du groupe selon la relation $1^2 + 1'^2 + 2^2 + 3^2 + 3'^2 = 24$. En termes des tableaux de Young, les cinq représentations irréductibles sont données par

$$\mathbf{1} : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array}, \quad \mathbf{2} : \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}, \quad \mathbf{3} : \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \quad (\text{IV.82})$$

et

$$\mathbf{3}' : \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}, \quad \mathbf{1}' : \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \quad (\text{IV.83})$$

Leur table de caractère pour chaque classe de conjugaison est donnée comme

S_4	C_1	C_3	C_6	C'_6	C_8
χ_1	1	1	1	1	1
$\chi_{1'}$	1	1	-1	-1	1
χ_2	2	2	0	0	-1
χ_3	3	-1	1	-1	0
$\chi_{3'}$	3	-1	-1	1	0

(IV.84)

Groupe A_4

Le groupe alterné A_4 est le groupe des permutations paires de quatre objets, il contient $(4!)/2 = 12$ éléments qui peuvent être construits par deux générateurs $S = (14)(23)$ et $T = (123)$ satisfont à la relation $S^2 = T^3 = (ST)^3 = 1$. De plus les 12 éléments du groupe sont regroupés dans quatre classes de conjugaison

$$\begin{aligned} C_1 &= \{e\}, \\ C_4 &= \{T, ST, TS, STS\}, \\ C'_4 &= \{T^2, ST^2, T^2S, TST\}, \\ C_3 &= \{S, T^2ST, TST^2\}. \end{aligned}$$

Par conséquent, le groupe alterné A_4 possède quatre représentations irréductibles ; trois singlets $1, 1', 1''$ et un triplet 3 satisfont à la relation $1^2 + 1'^2 + 1''^2 + 3^2 = 12$. En outre, les caractères de ces représentations selon leurs classes de conjugaison C_n sont résumés dans la table de caractère suivante avec $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$

A_4	C_1	C_3	C_4	C'_4
χ_1	1	1	1	1
$\chi_{1'}$	1	1	ω	ω^2
$\chi_{1''}$	1	1	ω^2	ω
χ_3	3	-1	0	0

(IV.85)

Groupe D_4

Le groupe D_4 est le groupe de symétrie d'un carré et est souvent appelé le groupe dièdre. Il est d'ordre 8 et isomorphe au groupe $Z_4 \rtimes Z_2$, il consiste alors à des 2-cycles et des 4-cycles. D'où le groupe D_4 est généré par deux générateurs $a = (24)$ et $b = (1234)$ obéissent à la relation $a^2 = b^4 = e$. En outre, les huit éléments du groupe forment cinq classes de conjugaison

$$\begin{aligned} C_1 &= \{e\}, & C'_1 &= \{b^2\}, & C''_1 &= \{a, b^2a\} \\ C'''_1 &= \{ba, b^3a\} & C_2 &= \{b, b^3\} \end{aligned}.$$

D'un autre côté, le groupe D_4 contient 5 représentations irréductibles ; quatre singlets $1_1, 1_2, 1_3$ et 1_4 et une doublet 2 , leurs caractères conformément aux classes de conjugaison C_n sont résumés dans la table de caractère suivante

D_4	C_1	C_2	C''_1	C'_2	C''_2
χ_{1_1}	1	1	1	1	1
χ_{1_2}	1	-1	1	1	-1
χ_{1_3}	1	-1	1	-1	1
χ_{1_4}	1	1	1	-1	-1
χ_2	2	0	-2	0	0

(IV.86)

IV.4.3 Méthode des caractères dans l'approche de revêtement spectral

Les symétries discrètes $\Gamma \subseteq S_N$ peuvent être réalisées comme des symétries de familles (agissant sur les trois familles des fermions à basse énergie) ainsi que des monodromies (agissant sur les poids fondamentaux t_i du revêtement spectral $\mathcal{C}_N$) dans la construction des modèles de GUT dans la théorie-F. A première vue, la méthode basée sur la théorie de Galois que nous avons étudiée dans la section précédente, a connu un grand succès pour l'ingénierie du modèle $SU(5)$ avec des symétries discrètes non abéliennes, en particulier les modèles $SU(5) \times A_4 \times U(1)$ [33][34], $SU(5) \times S_3 \times U(1)$ [34], $SU(5) \times D_4 \times U(1)$ [35], et $SU(5) \times V_4 \times U(1)$ [36], ont été étudiés dans la littérature et sont motivés par le secteur du neutrino. D'autre part, la méthode basé sur la théorie des caractères est un autre chemin pour identifier les symétries discrètes Γ aux équations de revêtement spectral $\mathcal{C}_N$ dans la construction des modèles F-GUT. En effet, les caractères des représentations est une propriété naturelle des monodromies et utile pour distinguer les représentations de même dimension, et donc pour distinguer les monodromies agissants sur la même équation de revêtement spectral $\mathcal{C}_N$.

Les monodromies non abéliens peuvent être introduits dans les modèles F-GUT par la méthode basée sur les caractères des représentations en supposant l'existence d'un flux non abélien comme dans le cas des modèles basés sur la théorie de Galois ; en effet, nous supposons tout d'abord que ce flux brise le groupe perpendiculaire qui commute avec le groupe de gauge selon le modèle de GUT considéré

$$\begin{aligned} E_8 &\rightarrow \mathcal{G}_{GUT} \times SU(N)_\perp, \\ &\rightarrow \mathcal{G}_{GUT} \times U(1)^{k-N} \times \Gamma_k, \end{aligned} \quad (IV.87)$$

où $N = 3, 4, 5$ pour les modèles de GUT $\mathcal{G}_{GUT} = E_6, SO(10)$ et $SU(5)$ respectivement.

Modèle $SU(5)$

Dans le cas du modèle $SU(5)$, le flux non abélien a l'objectif de briser le groupe $SU(5)_\perp$ vers le groupe de $\Gamma_k \subseteq W_{SU(5)_\perp}$. Ceci implique que le modèle $\mathcal{G}_{GUT} = SU(5)$ possède une symétrie totale de type

$$SU(5) \times U(1)^{k-5} \times \Gamma_k, \quad (IV.88)$$

et le groupe discret Γ_k avec $k = 1, \dots, 5$, forme un sous-groupe de S_5 ; le groupe de permutation des cinq poids fondamentaux t_i . En outre, selon la symétrie du modèle $SU(5)$ (IV.88), nous pouvons classer différents modèles $SU(5)$ basés sur des symétries discrètes selon le nombre des $U(1)$ restants dans la symétrie totale. En premier lieu, supposons que la symétrie (IV.88) ne possède aucune symétrie $U(1)$, ceci veut dire que les monodromies agissants sur les poids fondamentaux est le groupe symétrique S_5 ou un de ses sous-groupe transitifs de type

$$\begin{aligned} &SU(5) \times S_5; \quad SU(5) \times D_5; \quad SU(5) \times A_5 \\ &SU(5) \times Z_5; \quad SU(5) \times F_{20}, \end{aligned}$$

où F_{20} est le groupe de Frobenius d'ordre 20 [156]. Les groupes discrets S_5, A_5, D_5, F_{20} et Z_5 agissent sur les cinq poids fondamentaux t_1, t_2, t_3, t_4 et t_5 du revêtement spectral non factorisé $\mathcal{C}_5$. Toutefois, il apparaît que ce type des monodromies est indésirable dans la construction des modèles semi réalistes.

Dans le cas d'existence d'une seule symétrie $U(1)$ dans le modèle $SU(5)$, ceci implique que le flux non abélien brise le groupe $SU(5)_\perp$ vers le groupe $U(1)_\perp \times \Gamma_4$. En plus de cela, le revêtement spectral $\mathcal{C}_5$ se décompose en $\mathcal{C}_4 \times \mathcal{C}_1$, ainsi que les symétries discrètes possibles dans ce cas sont classées comme suit

$$\begin{aligned} & SU(5) \times S_4 \times U(1)_\perp, \\ & SU(5) \times A_4 \times U(1)_\perp, \\ & SU(5) \times D_4 \times U(1)_\perp, \\ & SU(5) \times V_4 \times U(1)_\perp, \\ & SU(5) \times Z_4 \times U(1)_\perp, \end{aligned} \tag{IV.89}$$

or les monodromies $\Gamma_4 = S_4, A_4, D_4, V_4$ et Z_4 vont agir sur les quatre racines t_1, t_2, t_3 et t_4 de l'équation $\mathcal{C}_4$, alors que la cinquième racine t_5 de l'équation $\mathcal{C}_1$ est fixée par la symétrie $U(1)_\perp$.

Encore, l'existence de deux symétries $U(1)$, entraîne la factorisation du revêtement spectral en $\mathcal{C}_3 \times \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_1$, et par conséquent le modèle $SU(5)$ possède la symétrie totale de type

$$\begin{aligned} & SU(5) \times S_3 \times U(1)_\perp^2, \\ & SU(5) \times Z_3 \times U(1)_\perp^2, \end{aligned} \tag{IV.90}$$

dans ce cas, le monodromie $\Gamma_3 = S_3$ est la seule symétrie discrète non abélienne qu'on peut associer au modèle $SU(5)$ dans la factorisation $\mathcal{C}_3 \times \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_1$.

Modèle $SO(10)$

Concernant le modèle $\mathcal{G}_{GUT} = SO(10)$, les symétries de familles $\Gamma_4 \subseteq S_4$ pourraient être considérées comme des monodromies agissant sur les racines du revêtement spectral $\mathcal{C}_4$, en effet, le modèle $SO(10)$ peut être accompagné par deux types des symétries discrètes non abéliennes ; le premier type ne comporte aucune symétrie $U(1)$, et par conséquent le revêtement spectral $\mathcal{C}_4$ reste non factorisé, alors que le second type ne possède qu'un seul groupe $U(1)$ qui peut se voir dans la factorisation $\mathcal{C}_3 \times \mathcal{C}_1$. Partant de ce fait, les modèles $SO(10)$ avec aucune symétrie $U(1)$ peuvent être classés comme suit

$$\begin{array}{lll} SO(10) \times S_4 & ; & SO(10) \times A_4 & ; & SO(10) \times D_4 \\ SO(10) \times V_4 & ; & SO(10) \times Z_4 & . \end{array}$$

En outre, nous avons deux modèles avec une symétrie $U(1)$ supplémentaires

$$SO(10) \times S_3 \times U(1)_\perp \tag{IV.91}$$

$$SO(10) \times Z_3 \times U(1)_\perp \tag{IV.92}$$

Modèle E_6

Le seul monodromie non abélien qui s'entraîne dans le modèle $\mathcal{G}_{GUT} = E_6$ est le groupe discret S_3 qui opère sur les trois poids fondamentaux t_1, t_2 et t_3 associés au groupe $SU(3)_\perp$. De plus, l'action complète du groupe S_3 exige que l'équation de revêtement spectral $\mathcal{C}_3$

reste non factorisée et la symétrie totale du modèle ne comporte aucune symétrie $U(1)_\perp$

$$E_6 \times S_3. \quad (\text{IV.93})$$

Application de la méthode des caractères

Afin d'illustrer la méthode des caractères des représentations dans la construction des modèles de F-GUT avec des symétries de familles, nous allons considérer le cas du modèle $\mathcal{G}_{GUT} = SU(5)$ avec la décomposition du revêtement spectral $\mathcal{C}_4 \times \mathcal{C}_1$. Par ailleurs, la brisure du groupe perpendiculaire $SU(5)_\perp$ par un flux non abélien comme dans la section précédent, ceci induit le modèle $SU(5)$ avec la symétrie de famille $S_4 \times U(1)_\perp$

$$SU(5) \times S_4 \times U(1)_\perp, \quad (\text{IV.94})$$

où les quatre racines t_1, t_2, t_3 et t_4 sont reliées par la symétrie du monodromie S_4 , alors que la racine t_5 est fixée par la symétrie $U(1)_\perp$. Néanmoins, puisque les quatre racines du polynôme $\mathcal{C}_4$ pourraient être reliées par les sous-groupes transitifs (A_4, D_4, V_4 ou Z_4) du groupe S_4 , il est donc intéressant de choisir un de ces groupes pour construire des modèles semi-réalistes à basse énergie. D'une part, nous avons vu dans la section précédente que la théorie de Galois peut sélectionner l'un des symétries de familles $\Gamma_4 = S_4, A_4, D_4, V_4$ et Z_4 selon les conditions apportées sur les coefficients a_n du polynôme $\mathcal{C}_4$. En d'autre part, dans la méthode des caractères des représentations, la sélection des monodromies Γ_4 dépend de la décomposition des courbes de matière Σ_{10} et Σ_5 qui se comportent comme des représentations réductibles sous les monodromies Γ_4 .

Après la brisure par le flux non abélien, les courbes de matière dans le tableau (IV.5) de la décomposition $SU(4)_\perp \times U(1)_\perp$, seront traitées comme des courbes réductibles qui doivent être décomposées en termes des courbes irréductibles selon le monodromie considéré. Par exemple, la courbe de matière 10_a est un quadriplet $(10_a, 4)$ qui se décomposera en principe comme une somme directe des courbes irréductibles à travers le caractère de la représentation 4. Dans le cas du monodromie S_4 , la courbe $(10_a, 4)$ sera considérée comme un quadruplet qui porte les caractères sous les générateurs $S = (12), T = (123)$ et $U = (1234)$ du groupe S_4 ; elle sera notée comme $(10_a, 4_{2,1,0})$ où les indices du quadruplet 4 sont les caractères sous S, T et U de la représentation par permutation de S_4 .

$$\chi_4(S) = 2, \quad \chi_4(T) = 1, \quad \chi_4(U) = 0, \quad (\text{IV.95})$$

La représentation $4_{2,1,0}$ est réductible sous le groupe S_4 , il doit ensuite se décomposer en somme de représentations irréductibles du groupe S_4 comme suit

$$4_{2,1,0} = \mathbf{n}_1 1_{1,1,1} \oplus \mathbf{n}_2 1_{-1,1,-1} \oplus \mathbf{n}_3 2_{0,-1,0} \oplus \mathbf{n}_4 3_{1,0,-1} \oplus \mathbf{n}_5 3_{-1,0,1}, \quad (\text{IV.96})$$

la seule solution sur les coefficients $\mathbf{n}_i$ pour préserver le caractère de la représentation 4 est $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_4 = 1$ et $\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_5 = 0$ puisque $(2, 1, 0) = (1, 1, 1) + (1, 0, -1)$, ceci implique que la décomposition de la représentation $4_{2,1,0}$ est sous la forme

$$4_{2,1,0} = 1_{1,1,1} \oplus 3_{1,0,-1} \quad (\text{IV.97})$$

en terme des courbes de matière, la courbe $(10_a, 4_{2,1,0})$ qui s'écrit dans la base canonique $(t_1, t_2, t_3, t_4)^T$ se décompose sous le monodromie S_4 en deux courbes dans la base des

représentations irréductibles $\{t_s, (t_\alpha, t_\beta, t_\gamma)^T\}$; une courbe triplette $(10_a, 3_{1,0,-1})$ et l'autre singlete $(10_a, 1_{1,1,1})$, alors nous avons

$$(10_a, 4_{2,1,0}) = (10_a^{(1)}, 1_{1,1,1}) \oplus (10_a^{(2)}, 3_{1,0,-1}). \quad (\text{IV.98})$$

D'une façon similaire à la courbe de matière 5_c présentée dans le tableau (IV.5), cette courbe est portée sur un six-uplet $5_c = 5_{t_i+t_j} = (5_c, 6)$ dont la représentation 6 peut être identifié à la représentation antisymétrique $6 = (4 \times 4)_{\text{antisym}}$ du groupe $SU(4)_\perp$. En effet, après la brisure par un flux non abélien, la représentation antisymétrique $6 \in SU(4)_\perp$ correspondra à celle antisymétrique du monodromie S_4 . En outre, nous rappelons que les caractères de la représentation antisymétrique $6 \in S_4$ peuvent être calculés en utilisant la relation (IV.67), et on obtient alors

$$\chi_6(S) = \chi_6(T) = \chi_6(U) = 0. \quad (\text{IV.99})$$

Par conséquent, on aura une courbe notée sous la symétries $SU(5) \times S_4$ comme $(5_c, 6_{0,0,0})$; cette dernière va se décomposer en termes des représentations irréductibles tout en préservant les caractères de la représentation $6_{0,0,0}$, alors

$$(5_c, 6_{0,0,0}) = (5_c^{(1)}, 3_{1,0,-1}) \oplus (5_c^{(2)}, 3_{-1,0,1}). \quad (\text{IV.100})$$

En d'autre part, après la décomposition des courbes de matière 10_a , 5_c et 5_d sous le monodromie S_4 en termes des courbes irréductibles tel que (IV.98) et (IV.100), alors les propriétés des nouvelles courbes tel que leurs classes d'homologie et leur restriction sous l'hyperflux, peuvent être déterminées en tenant compte les propriétés des courbes originales. Une revue du modèle $SU(5)$ avec le monodromie S_4 en utilisant la méthode des caractères des représentations est étudiée dans [118]. En résumé, le choix du monodromie dans cette construction apparaitre en particulier dans la décomposition des représentations 4 et 6. Or, dans le cas du monodromie S_4 , ces représentations portent les caractères $4_{2,1,0}$ et $6_{0,0,0}$ sous les générateurs S , T et U du groupe symétrique S_4 .

Par ailleurs, une étude similaire peut être effectuée dans la construction du modèle $SU(5)$ basé sur les monodromies A_4 , D_4 . Notamment, dans le cas du monodromie A_4 , nous rappelons que les courbes de matière 10_a et 5_c qui résident respectivement dans les représentations 4 et 6, seront décomposées sous les représentations irréductibles du groupe A_4 . En outre, les représentations 4 et 6 doivent porter des caractères selon les générateurs $T = (123)$ et $V = (12)(34)$ du groupe A_4 comme $4_{\chi(T),\chi(V)}$ et $6_{\chi(T),\chi(V)}$. En utilisant les formules de caractères des représentation induites, nous calculons les caractères des représentations $4_{\chi(T),\chi(V)}$ et $6_{\chi(T),\chi(V)}$ et nous avons

$$\begin{pmatrix} \chi_4(T) = 1 \\ \chi_4(V) = 0 \end{pmatrix} \rightarrow 4_{1,0} \quad , \quad \begin{pmatrix} \chi_6(T) = 0 \\ \chi_6(V) = -2 \end{pmatrix} \rightarrow 6_{0,-2}. \quad (\text{IV.101})$$

Ensuite, en utilisant la table de caractère du groupe A_4 , les représentations irréductibles sont notées par leurs caractères suivant les générateurs S et V comme $1_{1,1}$, $1_{1,\omega}$, $1_{1,\omega^2}$ et $3_{0,-1}$. Alors la décomposition approprié aux courbes de matière quadr-uplet et six-uplet

tout en préservant les caractères des représentations sont

$$\begin{aligned} 4|_{A_4} &= 4_{1,0} = 1_{1,1} \oplus 3_{0,-1}, \\ 6|_{A_4} &= 6_{0,-2} = 3_{0,-1} \oplus 3_{0,-1}, \end{aligned}$$

alors dans ce cas du modèle $SU(5) \times A_4 \times U(1)_\perp$, les courbes de matière $(10_a, 4_{1,0})$ et $(5_c, 6_{0,-2})$ les courbes se décomposeront sous le monodromie A_4 comme suit

$$\begin{aligned} (10_a, 4_{1,0}) &= (10_a^{(1)}, 1_{1,1}) \oplus (10_a^{(2)}, 3_{0,-1}), \\ (5_c, 6_{0,-2}) &= (5_c^{(1)}, 3_{0,-1}) \oplus (5_c^{(2)}, 3_{0,-1}). \end{aligned} \tag{IV.102}$$

Notons que le spectre des courbes de matière 10 et 5 associés à ce modèle basé sur le monodromie A_4 en utilisant la méthode basée sur le caractère des représentations irréductibles, sont les mêmes obtenus à partir de la méthode basé sur la théorie de Galois (voir le modèle $SU(5) \times A_4 \times U(1)_\perp$ dans la section précédente). Le cas du modèle $SU(5)$ basé sur le monodromie D_4 , est étudié en détailles dans nos contributions.

Contribution I

Building SO_{10} -models with $\mathbb{D}_4$ symmetry

Abstract

En utilisant les caractères de représentations des groupes finis ainsi que les monodromies des courbes de matière dans la construction des modèles F-GUT, nous complétons des résultats partiels dans la littérature en construisant des modèles $SO(10)$ avec la symétrie discrète D_4 . Nous révisons d'abord les modèles basés sur S_4 et S_3 à partir de la méthode des caractères des groupes discrets ; puis nous étendons la construction du modèle basé sur D_4 . Nous trouvons qu'il existe trois types de modèles $SO(10) \times D_4$ selon la façon dont les triplets sous S_4 se décomposent en termes de représentations irréductibles du groupe D_4 comme : (α) $1_{+,-} \oplus 1_{+,-} \oplus 1_{-,+}$; (β) $1_{+,+} \oplus 1_{+,-} \oplus 1_{-,-}$; ou aussi (γ) $1_{+,-} \oplus 2_{0,0}$. Les superpotentiels et d'autres caractéristiques sont également donnés.

Building SO_{10} -models with $\mathbb{D}_4$ symmetry

R. Ahl Laamara^{a,b}, M. Miskaoui^{a,b}, E.H. Saidi^{b,c,*}

^a LPHE-Modeling and Simulations, Faculty of Sciences, Rabat, Morocco

^b Centre of Physics and Mathematics, CPM, Morocco

^c International Centre for Theoretical Physics, Miramare, Trieste, Italy

Received 30 July 2015; received in revised form 4 September 2015; accepted 7 October 2015

Available online 22 October 2015

Editor: Stephan Stieberger

Abstract

Using characters of finite group representations and monodromy of matter curves in F-GUT, we complete partial results in literature by building SO_{10} models with dihedral $\mathbb{D}_4$ discrete symmetry. We first revisit the S_4 - and S_3 -models from the discrete group character view; then we extend the construction to $\mathbb{D}_4$. We find that there are three types of $SO_{10} \times \mathbb{D}_4$ models depending on the ways the S_4 -triplets break down in terms of irreducible $\mathbb{D}_4$ -representations: (α) as $\mathbf{1}_{+,-} \oplus \mathbf{1}_{+,-} \oplus \mathbf{1}_{-,+}$; or (β) $\mathbf{1}_{+,+} \oplus \mathbf{1}_{+,-} \oplus \mathbf{1}_{-,-}$; or also (γ) $\mathbf{1}_{+,-} \oplus \mathbf{2}_{0,0}$. Superpotentials and other features are also given.

© 2015 The Authors. Published by Elsevier B.V. This is an open access article under the CC BY license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>). Funded by SCOAP³.

1. Introduction

In F-theory set-up, the study of GUT-models with discrete symmetries Γ given by S_n permutation groups is generally done by using the splitting spectral method [1–7]; see also [8] and the references therein. In the interesting case of $SU_5 \times \Gamma$ models, the discrete Γ 's are mainly given by subgroups of the permutation symmetry S_5 ; in particular those subgroups like S_4 , $S_3 \times S_2$, S_3 , $S_2 \times S_2$ and $S_2 \simeq \mathbb{Z}_2$. To build SU_5 GUT-models with exotic discrete groups like the alternating A_4 and the dihedral $\mathbb{D}_4$, one needs extra tools like Galois-theory [9–15]. In the case of

* Corresponding author.

E-mail address: h-saidi@fsr.ac.ma (E.H. Saidi).

$\mathrm{SO}_{10} \times \Upsilon$ models the situation is quite similar except that here the discrete Υ 's are subgroups of the permutation symmetry $\mathbb{S}_4$.

In [9], an exhaustive study has been performed for several $\mathrm{SO}_{10} \times \Upsilon$ models, broken down to SU_5 , by using splitting spectral method applied for the discrete subgroups Υ given by $\mathbb{S}_3$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{S}_2 \times \mathbb{S}_2$ and $\mathbb{S}_2$; the common denominator of these Υ 's is that they are subgroups of $\mathbb{S}_4$; the Weyl group of the $\mathrm{SU}_4^\perp$ perpendicular symmetry to GUT gauge invariance in the E_8 breaking down to $\mathrm{SO}_{10} \times \mathrm{SU}_4^\perp$. In this paper, we would like to complete the analysis of [9] and subsequent studies by considering the case of the order 8 dihedral symmetry $\mathbb{D}_4$. This discrete group is known to have two kinds of irreducible representations with dimensions 1 and 2; their multiplicities are read from the character relation $8 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$ teaching us the two following things: (i) $\mathbb{D}_4$ -group has four 1-dim representations $\mathbf{1}_{p,q}$, including the trivial $\mathbf{1}_{+,+}$, the sign $\mathbf{1}_{-,+}$ as well as two others $\mathbf{1}_{+,-}$ and $\mathbf{1}_{-,-}$; and (ii) it has a unique 2-dim representation $\mathbf{2}_{0,0}$ with vanishing character vector $(0, 0)$. These irreducible representations are phenomenologically interesting; first because one of the four possible 1-dim representations of $\mathbb{D}_4$ may be singled out to host the heaviest top-quark generation $\mathbf{16}_3$; and the unique 2-dim representation of $\mathbb{D}_4$ to accommodate the two other $\mathbf{16}_{1,2}$ quark u - and c -families. This picture goes with the idea of [13] where Yukawa matrix $Y_{\{c,s,t\}}$ for the (u, c, t) quarks is approximated by a rank one matrix ($\mathrm{rank} Y = 1$). There, the u, c quarks are taken in the massless approximation; and the third quark as a massive one. Moreover, $\mathbb{D}_4$ -monodromy has also enough different singlets to accommodate the three quark generations independently; a property that may be used for studying superpotential prototypes leading to higher rank mass matrix with hierarchical eigenvalues.

The presentation is as follows: First we recall some useful aspects on $\mathrm{SO}_{10} \times \Upsilon$ models concerning standard $\mathbb{S}_4$ and $\mathbb{S}_3$ discrete symmetries. By using irreducible representations $\mathbf{R}_i$ of these finite groups, we show how their character functions $\chi_{\mathbf{R}_i}$ can be used to characterise the matter curve spectrum of these models. With these $\chi_{\mathbf{R}_i}$ character tools at hand, we turn to build the above mentioned three $\mathrm{SO}_{10} \times \mathbb{D}_4$ models. We end this study by a conclusion and discussions on building superpotentials.

2. $\mathrm{SO}_{10} \times \mathbb{S}_4$ model

We begin by recalling that in $\mathrm{SO}_{10} \times \mathbb{S}_4$ model of F-theory GUTs, matter curves carry quantum numbers in the $\mathrm{SO}_{10} \times \mathrm{SU}_4^\perp$ representations following from the breaking of the E_8 gauge symmetry of F-theory on elliptically fibred Calabi–Yau fourfold (CY4) with 7-brane wrapping $\mathcal{S}_{\mathrm{GUT}}$; the so called GUT surface [1,9,12,13,16],

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \rightarrow & \mathrm{CY4} \\ \downarrow & , & \mathcal{B}_3 \supset \mathcal{S}_{\mathrm{GUT}} \\ \mathcal{B}_3 & & \end{array}$$

In this construction, the base $\mathcal{B}_3$ is a complex 3 dim manifold containing $\mathcal{S}_{\mathrm{GUT}}$; and the fibre E is given by a particular Tate representation of the complex elliptic curve, namely

$$y^2 = x^3 + b_5xyz + b_4x^2z + b_3yz^2 + b_2xz^3 + b_0z^5 \quad (2.1)$$

where the homology classes $[x]$, $[y]$, $[z]$, $[b_k]$, associated with the holomorphic sections x , y , z and b_k , are expressed in terms of the Chern class $c_1 = c_1(\mathcal{S}_{\mathrm{GUT}})$ of the tangent bundle of the $\mathcal{S}_{\mathrm{GUT}}$ surface; and the Chern class $-t$ of the normal bundle $\mathcal{N}_{\mathcal{S}_{\mathrm{GUT}}|\mathcal{B}_3}$ as follows

$$\begin{aligned} [y] &= 3(c_1 - t), & [z] &= -t \\ [x] &= 2(c_1 - t), & [b_k] &= (6c_1 - t) - kc_1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Recall also that in SO_{10} models building with discrete symmetries Γ , the E_8 symmetry of underlying F-theory on CY4 is broken down to $\text{SO}_{10} \times \Gamma$; where SO_{10} is the GUT gauge symmetry and Γ a discrete monodromy group contained in $\mathbb{S}_4$. This symmetric $\mathbb{S}_4$ is isomorphic to the Weyl symmetry group of the perpendicular $\text{SU}_4^\perp$ to GUT symmetry inside E_8 ; that is the commutant of SO_{10} in the exceptional E_8 group of F-theory GUTs.

From the decomposition of the E_8 adjoint representations down to $\text{SO}_{10} \times \text{SU}_4^\perp$ ones namely

$$\begin{aligned} 248 \rightarrow & (\mathbf{45}, \mathbf{1}_\perp) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{15}_\perp) \oplus \\ & (\mathbf{16}, \mathbf{4}_\perp) \oplus (\overline{\mathbf{16}}, \overline{\mathbf{4}}_\perp) \oplus (\mathbf{10}, \mathbf{6}_\perp) \end{aligned} \quad (2.3)$$

we learn the matter content of $\text{SO}_{10} \times \text{SU}_4^\perp$ theory; and then of the desired curves spectrum of the $\text{SO}_{10} \times \mathbb{S}_4$ model. This spectrum is given by the following SO_{10} multiplets, labelled by four weights t_i of the fundamental representation of $\text{SU}_4^\perp$,

$$\mathbf{16}_{t_i}, \quad \mathbf{16}_{-t_i}, \quad \mathbf{10}_{t_i+t_j}, \quad \mathbf{1}_{t_i-t_j} \quad (2.4)$$

with the traceless condition

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0 \quad (2.5)$$

The discrete symmetry $\mathbb{S}_4$ acts by permutation of the t_i curves; it leaves stable the constraint (2.5) as well as observable of the model.

In $\text{SO}_{10} \times \mathbb{S}_4$ theory, the 16-plets and the 10-plets are thought of as *reducible* multiplets of the $\mathbb{S}_4$ Weyl symmetry of $\text{SU}_4^\perp$; however from the view of GUT phenomenology, this $\mathbb{S}_4$ monodromy symmetry must be broken since it treats the three GUT-generations on equal footing. But, for later use, we propose to study first the structure of the $\mathbb{S}_4$ based model and some of its basic properties; then turn back to study the breaking of $\mathbb{S}_4$ down to the subgroup $\mathbb{S}_3$; and after to the $\mathbb{D}_4$ we are interested in this paper.

2.1. Spectrum in $\mathbb{S}_4$ model

The 16_{t_i} components of the four 16-plets and the $10_{t_i+t_j}$ of the six 10-plets are related among themselves by $\mathbb{S}_4$ monodromy; they are respectively given by the zeros of the holomorphic sections b_4 and d_6 , describing the intersections of the spectral covers $\mathcal{C}_4 = 0$ and $\mathcal{C}_6 = 0$ with the GUT surface $s = 0$. The defining equations of these spectral covers are as shown on the following table,

matters curves	weight	$\mathbb{S}_4$	homology	holomorphic section
16_{t_i}	t_i	4	$\eta - 4c_1$	$b_4 = b_0 \prod_{i=1}^4 t_i = 0$
$10_{t_i+t_j}$	$t_i + t_j$	6	$\eta' - 6c_1$	$d_6 = d_0 \prod_{j>i=1}^4 T_{ij} = 0$

(2.6)

with [9,12,17]

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_4 &= \sum_{k=0}^4 b_k s^{5-k} = b_0 \prod_{i=1}^4 (s - t_i) \\ \mathcal{C}_6 &= \sum_{k=0}^6 d_k s^{6-k} = d_0 \prod_{j>i=1}^6 (s - T_{ij}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

and $T_{ij} \equiv t_i + t_j$. The homology class $[b_4] = \eta - 4c_1$ is obtained by using the relation $[b_0] + \sum [t_i]$ together with the canonical class $[b_0] = \eta$ and $[t_i] = -c_1$; the same feature leads to $[d_6] = \eta' - 6c_1$.

The $\mathbb{S}_4$ invariance of $\mathcal{C}_4$ is manifestly exhibited

$$\mathcal{C}_4 = \frac{b_0}{4!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_4} \prod_{i=1}^4 (s - t_{\sigma(i)}) \quad (2.8)$$

A similar relation is also valid for $\mathcal{C}_6$. In what follows, and to fix ideas, we will think of the defining equations of the spectral covers $\mathcal{C}_4$ and $\mathcal{C}_6$ as given by the last column of eqs. (2.7) involving b_0 and the four roots t_i (resp d_0 and the six T_{ij} 's).

2.2. Characters in $\mathrm{SO}_{10} \times \mathbb{S}_4$ model

The discrete symmetry group of the $\mathrm{SO}_{10} \times \mathbb{S}_4$ model has 24 elements that can be arranged into five conjugacy classes $\mathfrak{C}_1, \dots, \mathfrak{C}_5$ with representatives given by p-cycles (12...p) and products type $(\alpha\beta)(\gamma\delta)$ as shown on table (2.9). This finite group has five irreducible representations $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_5$ whose dimensions can be learnt from the usual relation $24 = 1^2 + 1^{2'} + 2^2 + 3^2 + 3^{2'}$ linking group order to the square of $\dim \mathbf{R}_i$; their characters $\chi_{\mathbf{R}_j}$, describing mappings: $\mathbb{S}_4 \rightarrow \mathbb{C}$, are conjugacy class functions; associating to each class $\mathfrak{C}_i$ the numbers $\chi_{ij} = \chi_{\mathbf{R}_j}(\mathfrak{C}_i)$; whose explicit expressions are as given below

$\mathfrak{C}_i \backslash \text{irrep } \mathbf{R}_j$	χ_I	$\chi_{3'}$	χ_2	χ_3	χ_ϵ	order
$\mathfrak{C}_1 \equiv e$	1	3	2	3	1	1
$\mathfrak{C}_2 \equiv (\alpha\beta)$	1	-1	0	1	-1	6
$\mathfrak{C}_3 \equiv (\alpha\beta)(\gamma\delta)$	1	-1	2	-1	1	3
$\mathfrak{C}_4 \equiv (\alpha\beta\gamma)$	1	0	-1	0	1	8
$\mathfrak{C}_5 \equiv (\alpha\beta\gamma\delta)$	1	1	0	-1	-1	6

(2.9)

There are various manners to approach the properties of reducible $\mathcal{R}$ and irreducible $\mathbf{R}_i$ representations of the permutation group $\mathbb{S}_4$; the natural way may be the one using graphic methods based on the Young diagrams [18]; where the five irreducible representations are represented by 5 diagrams as follows

$$1: \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array}, \quad 2: \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}, \quad 3: \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \quad (2.10)$$

and

$$3': \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}, \quad 1': \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \quad (2.11)$$

But here we will deal with $\mathbb{S}_4$ by focusing on the properties of its three generators (a, b, c) ; these are basic operators of the $\mathbb{S}_4$ group; and are generally chosen as given by the transpositions $\tau_1 = (12)$, $\tau_2 = (23)$ and $\tau_3 = (34)$; they can be also taken as follows

$$\begin{aligned} A &= (12) = \tau_1 \\ B &= (123) = \tau_1 \tau_2 \\ C &= (1234) = \tau_1 \tau_2 \tau_3 \end{aligned} \quad (2.12)$$

These three generators are not independent seen that they are non-commutating operators, $AB \neq BA$, $AC \neq CA$, $BC \neq CB$; a feature that makes extracting total information a complicated matter; so we will restrict to use their representation characters $\chi_{R_i}(A)$, $\chi_{R_i}(B)$ and $\chi_{R_i}(C)$ with R_i given by (2.10)–(2.11); we also use the sums of $\chi_{R_i}(G)$ and their products. To that purpose, let us briefly recall some useful tools on $\mathbb{S}_4$ -representations that we illustrate on $\text{SO}_{10} \times \mathbb{S}_4$ -theory. First notice that the 4-dim permutation module $\mathcal{V}_4$ of the group $\mathbb{S}_4$ is interpreted in $\text{SO}_{10} \times \mathbb{S}_4$ -model in terms of the four matter curves $\mathbf{16}_i$; its 6-dim antisymmetric tensor product $\mathcal{V}_6 = (\mathcal{V}_4 \otimes \mathcal{V}_4)_{\text{antisym}}$ as describing the Higgs curves $\mathbf{16}_{[ij]}$; and the $\mathcal{V}_4 \otimes \mathcal{V}_4^*$ tensor product module is associated with flavons ϑ_{ij} . All these spaces are reducible under $\mathbb{S}_4$; and so permutation operators of $\mathbb{S}_4$ can be generically decomposed as sums

$$n_1 \mathbf{1} \oplus n'_1 \mathbf{1}' \oplus n_2 \mathbf{2} \oplus n'_2 \mathbf{2}' \oplus n_3 \mathbf{3} \oplus n'_3 \mathbf{3}' \quad (2.13)$$

on the irreducible modules with some n_i multiplicities; for example

$$\begin{aligned} \mathbf{4} &= \mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \\ \mathbf{6} &= \mathbf{3} \oplus \mathbf{3}' \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{aligned} \mathcal{V}_4 &= \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_3 \\ \mathcal{V}_6 &= \mathcal{V}'_3 \oplus \mathcal{V}''_3 \end{aligned} \quad (2.14)$$

with $\mathbf{6} = (\mathbf{4} \otimes \mathbf{4})_{\text{antisym}}$. In practice, the use of irreducible representations as in (2.13) for $\text{SO}_{10} \times \mathbb{S}_4$ modelling is achieved by starting from eqs. (2.6); then look for an adequate basis vector change of the weight $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ into a new $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ basis where one of the components, say x_0 , has the form

$$x_0 = \frac{1}{4} (t_1 + t_2 + t_3 + t_4) \quad (2.15)$$

this sum of weights is associated with the trivial representation $\mathbf{1}$, the completely symmetric representation; it is invariant under $\mathbb{S}_4$; but also under all its subgroups including the $\mathbb{S}_3$ and the $\mathbb{D}_4$ we will encounter below. The three other $(x_1, x_2, x_3) = \vec{x}$ transform as an irreducible triplet $\mathbf{3}$ under of $\mathbb{S}_4$; but differently under subgroups $\mathbb{S}_3$ and $\mathbb{D}_4$; their explicit expressions $\vec{x} = \vec{x}(t_1, t_2, t_3, t_4)$ are given by;

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{4} (t_1 + t_2 - t_3 - t_4) \\ x_2 &= \frac{1}{4} (t_1 - t_2 + t_3 - t_4) \\ x_3 &= \frac{1}{4} (t_1 - t_2 - t_3 + t_4) \end{aligned} \quad (2.16)$$

with (2.5) mapped to

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = t_1 \quad (2.17)$$

With the basis change of $\{|t_\mu\rangle\}$ into $\{|x_0\rangle; |x_i\rangle\}$, the four matter 16_{t_μ} and the six Higgs $10_{t_\mu+t_\nu}$ multiplets get splitted like

$$16_{t_\mu} \rightarrow \begin{pmatrix} 16'_0 \\ 16'_i \end{pmatrix}_{|x\rangle}, \quad 10_{t_\mu+t_\nu} \rightarrow \begin{pmatrix} 10'_{[ij]} \\ 10'_i \end{pmatrix}_{|x \otimes x\rangle} \quad (2.18)$$

In matrix notation with basis $\{|x_0\rangle; |x_i\rangle\}$, permutation operators $P_\sigma^{(4)}$ acting on $\mathcal{V}_4$ and operators $P_\sigma^{(6)}$ on $\mathcal{V}_6$ have the representation

$$\mathbf{P}_\sigma^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1 \times 3} \\ 0_{3 \times 1} & \mathcal{P}_\sigma^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_\sigma^{(6)} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_\sigma^{(3)} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & \mathcal{P}_\sigma^{(3')} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

To describe the new matter curves $\{16'_0, 16'_i\}$ and $\{10'_i, 10'_{[ij]}\}$ we shall use the character $\chi_{\mathbf{R}_i}$ of the irreducible representations of $\mathbb{S}_4$ given by (2.9); in particular the character of the (A, B, C) generators of $\mathbb{S}_4$; and which we denote as $\chi_{\mathbf{R}_i}^{(G)}$ where G stands for (A, B, C) ,

$\chi_{\mathbf{R}_j}^{(G)}$	χ_I	$\chi_{3'}$	χ_2	χ_3	χ_ϵ
A	1	-1	0	1	-1
B	1	0	-1	0	1
C	1	1	0	-1	-1

(2.20)

Because of a standard feature of the trace of direct sum of matrices namely $Tr(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) = Tr \mathcal{A} + Tr \mathcal{B}$, we also use the following property relating the characters of reducible $\mathcal{R}$ representations to their $\mathbf{R}_i$ irreducible components

$$\mathcal{R} = n_1 \mathbf{R}_1 \oplus n_2 \mathbf{R}_2 \Rightarrow \chi_{\mathcal{R}}^{(G)} = n_1 \chi_{\mathbf{R}_1}^{(G)} + n_2 \chi_{\mathbf{R}_2}^{(G)} \quad (2.21)$$

For the example of the quartet $\mathbf{4} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3}$ of the group $\mathbb{S}_4$, we have the relation $\chi_{\mathbf{1} \oplus \mathbf{3}}^{(G)} = \chi_{\mathbf{1}}^{(G)} + \chi_{\mathbf{3}}^{(G)}$; and remembering the interpretation of the characters in terms of fix points of the permutation symmetry; the character vector

$$\chi_{\mathbf{4}}^{(G)} = (2, 1, 0) \equiv \chi_{\mathbf{1} \oplus \mathbf{3}}^{(G)} \quad (2.22)$$

splits therefore as the sum of two terms: $\chi_{\mathbf{1}}^{(G)} = (1, 1, 1)$ and $\chi_{\mathbf{3}}^{(G)} = (1, 0, -1)$; in agreement with the character table (2.20). Applying also this property to $\mathbf{3} \oplus \mathbf{3}' = \mathbf{6}$, we have $\chi_{\mathbf{6}}^{(G)} = \chi_{\mathbf{3}}^{(G)} + \chi_{\mathbf{3}'}^{(G)}$; from which we learn the value of the character of the reducible 6-dimensional representation of $\mathbb{S}_4$; it vanishes identically. Therefore, the matter curves spectrum of the $\text{SO}_{10} \times \mathbb{S}_4$ model in the $\{|x\rangle\}$ and $\{|x \otimes x'\rangle\}$ bases reads as follows

matters curves	$\mathbb{S}_4$	homology	$\text{U}(1)_X$ flux	character $\chi_{\mathbf{R}}^{(G)}$
$16'_0$	$\mathbf{1}$	$-c_1$	0	$(1, 1, 1)$
$16'_i$	$\mathbf{3}$	$\eta - 3c_1$	0	$(1, 0, -1)$
$10'_{[ij]}$	$\mathbf{3}'$	$-3c_1$	0	$(-1, 0, 1)$
$10'_i$	$\mathbf{3}$	$\eta' - 3c_1$	0	$(1, 0, -1)$

(2.23)

where the homology classes of the new matter curves $16'_0, 16'_i$; and $10'_{[ij]}, 10'_i$ are derived from the homology of the reducible curve multiplets $16_{t_\mu}, 10_{t_\mu+t_\nu}$ of table eqs. (2.6) as follows

$$\begin{aligned} [16_{t_\mu}] &= [16'_0] + [16'_i] \\ [10_{t_\mu+t_\nu}] &= [10'_{[ij]}] + [10'_i] \end{aligned} \quad (2.24)$$

Notice that though the matter curves spectrum looks splitted, it is still invariant under $\mathbb{S}_4$ monodromy. It is just a property of the $|x_{0,i}\rangle$ frame where the completely symmetric x_0 component weight, the centre of weights, is thought of as the origin of the frame. Notice also that the 15 flavons of the $\text{SO}_{10} \times \mathbb{S}_4$ model split as $3 \oplus 12$; with the 12 charged ones splitting like $12 = 6 \oplus 6^*$

where the 6, currently denoted as $\vartheta_{+(t_\mu-t_\nu)}$ with $\mu < \nu$; and the other 6^* with $\vartheta_{-(t_\mu-t_\nu)}$. Because of the real values of the characters (2.9), the complex adjoints $6^* = 3^* \oplus 3'^*$ may be thought in terms of dual representations namely $3^* \sim 3'$ and $3'^* \sim 3$; so the characters for the 12 charged flavons read as

flavons	character $\chi_{\mathbf{R}}^{(G)}$
1_i	$(1, 0, -1)$
$1_{[ij]}$	$(-1, 0, 1)$
$1_{[ij]}$	$(-1, 0, 1)$
1_i	$(1, 0, -1)$

(2.25)

3. Building $\mathrm{SO}_{10} \times \mathbb{D}_4$ models

First we describe the key idea of our method that we illustrate on the example of $\mathrm{SO}_{10} \times \mathbb{S}_3$ model; seen that $\mathbb{S}_3$ is a subgroup of $\mathbb{S}_4$ just as $\mathbb{D}_4$. Then we turn to study the $\mathrm{SO}_{10} \times \mathbb{D}_4$ theory; and derive its matter curves spectrum and their characters; comments on the superpotentials W of $\mathbb{D}_4$ models and others aspects will be given in conclusion and discussion section.

3.1. Revisiting $\mathrm{SO}_{10} \times \mathbb{S}_3$ model

To engineer $\mathrm{SO}_{10} \times \Gamma$ models with discrete symmetries Γ contained in $\mathbb{S}_4$, we have to break the $\mathbb{S}_4$ symmetry down to its subgroup Γ . Seen that $\mathbb{S}_4$ has 30 subgroups; one ends with a proletariat of SO_{10} models with discrete symmetries; some of these monodromies are related amongst others by similarity transformations. For example, $\mathbb{S}_4$ has four $\mathbb{S}_3$ subgroups obtained by fixing one of the four t_i roots of the spectral cover $\mathcal{C}_4$ of eq. (2.7); but these $\mathbb{S}_3$ groups are isomorphic to each other; and so it is enough to consider just one of them; say the one fixing the weight t_4 ; and permuting the other three t_1, t_2, t_3 ; i.e.:

$$\begin{aligned} \sigma(t_4) &= t_4 \\ \sigma(\{t_1, t_2, t_3\}) &= \{t_1, t_2, t_3\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

leading to $\sigma \in \mathbb{S}_4/\mathcal{J}$, with $\mathcal{J} = \langle t_4 - \sigma(t_4) \rangle$; it is isomorphic to $\mathbb{S}_3$. Let us describe rapidly our method of engineering $\mathrm{SO}_{10} \times \mathbb{S}_3$ model; and extend later this construction to the case of the order 8 dihedral $\mathbb{D}_4$.

Starting from the matter spectrum of the $\mathrm{SO}_{10} \times \mathbb{S}_4$ model (2.6), we can derive the properties of the matter curves of the $\mathrm{SO}_{10} \times \mathbb{S}_3$ model by using the breaking pattern

$$\mathbb{S}_4 \rightarrow \mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_1 \quad (3.2)$$

where $\mathbb{S}_1$ factor is associated with the fixed weight t_4 ; it may be interpreted in terms of a conserved $\mathrm{U}_1^\perp$ symmetry inside $\mathrm{SU}_4^\perp$. The descent from $\mathbb{S}_4$ to $\mathbb{S}_3$ model is known to be due turning on an abelian flux piercing the $\mathbb{S}_4$ – matter and Higgs multiplets; and is commonly realised by the splitting spectral method like $\mathcal{C}_4 = \mathcal{C}_3 \times \mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_6 = \tilde{\mathcal{C}}_3 \times \tilde{\mathcal{C}}_3'$.

By using the gauge 2-form field strength $\mathbf{F}_X$ of the $\mathrm{U}(1)_X$ gauge symmetry considered in [9]; and by thinking of the $\mathbb{S}_4$ invariance of the $\mathrm{SO}_{10} \times \mathbb{S}_4$ model of table (2.23) in terms of vanishing quantized flux $\mathcal{F}_\xi^X$ of the 2-form $\mathbf{F}_X$ over a 2-cycle ξ in the homology of base of the CY4, namely

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_\xi^X|_H &= \int_\xi \mathbf{F}_X = 0 \\
\mathcal{F}_{c_1}^X|_H &= \int_{c_1} \mathbf{F}_X = 0, \quad H = \mathbb{S}_4; \\
\mathcal{F}_\eta^X|_H &= \int_\eta \mathbf{F}_X = 0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

then the breaking of $\mathbb{S}_4$ monodromy down to discrete subgroups H may be realised¹ as in Table 1 of Ref. [9] by giving non-zero value to $\mathcal{F}_\xi^X$ as follows

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_\xi^X|_H &= N \neq 0 \\
\mathcal{F}_{c_1}^X|_H &= 0, \quad H \subset \mathbb{S}_4 \\
\mathcal{F}_\eta^X|_H &= 0
\end{aligned} \tag{3.4}$$

where N is an integer. The above relation is in fact just an equivalent statement of breaking monodromies by using the splitting spectral cover method where covers $\mathcal{C}_n$ are factorised as product $\mathcal{C}_{n_1} \times \mathcal{C}_{n_2}$ with $n_1 + n_2 = n$. The extra relations $\mathcal{F}_{c_1}^X|_H = \mathcal{F}_\eta^X|_H = 0$ are the usual conditions to avoid Green–Schwarz mass for the $U(1)_X$ gauge field potential [2,3,9]. In our approach, the effect of the abelian non-zero flux $\mathcal{F}_\xi^X|_H$ is interpreted in terms of piercing the irreducible $\mathbb{S}_4$ -triplets 16_i , 10_i and $10_{[ij]}$ as follows

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{16}_i & \rightarrow \begin{array}{c|c} \text{curves} & \text{number} \\ \hline \mathbf{16}_a & 3 - N = 2 \\ \mathbf{16}_3 & 3 - 2N = 1 \end{array}
\end{array} \tag{3.5}$$

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{10}_i & \rightarrow \begin{array}{c|c} \text{curves} & \text{number} \\ \hline \mathbf{10}_a & 2 \\ \mathbf{10}_3 & 1 \end{array}
\end{array} \tag{3.6}$$

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{10}_{[ij]} & \rightarrow \begin{array}{c|c} \text{curves} & \text{number} \\ \hline \mathbf{10}_{[a3]} & 2 \\ \mathbf{10}_{[12]} & 1 \end{array}
\end{array} \tag{3.7}$$

In geometrical words, flux piercing of the 16_i triplet corresponds to breaking the isotropy of the 3-dimension subspace $\mathcal{V}_3$ of eq. (2.14) as a direct sum $\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$; the same breaking happens for the spaces $\mathcal{V}'_3$ and $\mathcal{V}''_3$ associated with 10_i and $10_{[ij]}$; and to any non-trivial representation of $\mathbb{S}_4$. Due to the non-zero flux, the $\mathbb{S}_4$ -triplet $\{x_1, x_2, x_3\}$ gets splitted into a $\mathbb{S}_3$ -doublet $\{|y_1\rangle, |y_2\rangle\}$ and a $\mathbb{S}_3$ -singlet $\{|y_3\rangle\}$; the new y_μ weights are related to the previous weights x_μ as follows

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{1}{3} (x_1 + x_2 - 2x_3) \\
y_2 &= \frac{1}{3} (x_1 - 2x_2 + x_3)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

and

$$\begin{aligned}
y_3 &= \frac{1}{3} (x_1 + x_2 + x_3) \\
y_0 &= x_0
\end{aligned} \tag{3.9}$$

¹ In Table 1 of Ref. [9], the $SO_{10} \times \mathbb{S}_4$ model monodromy is broken down to $\mathbb{Z}_2$.

their expressions in terms of the canonical t_μ -weights are obtained through the relations $x_0 = x_0(t_\mu)$, $x_i = x_i(t_\mu)$. In the $\{|y_i\rangle\}$ basis, the distribution of the abelian flux among the new directions in the 4-dim permutation module $\mathcal{V}_4$ is as illustrated on the following 4×4 traceless matrix

$$\begin{pmatrix} 4N & & & \\ & -N & & \\ & & -N & \\ & & & -2N \end{pmatrix}_{|y_i\rangle} \quad (3.10)$$

Recall that the permutation group $\mathbb{S}_3$ has order 6, three conjugacy classes and three irreducible representations; $6 = 1^2 + 1'^2 + 2^2$; its character table is as follows

$\mathfrak{C}_i \backslash \text{irrep } R_j$	χ_I	χ_2	χ_ϵ	order
$\mathfrak{C}_1 \equiv e$	1	2	1	1
$\mathfrak{C}_2 \equiv (\alpha\beta)$	1	0	-1	3
$\mathfrak{C}_3 \equiv (\alpha\beta\gamma)$	1	-1	1	2

(3.11)

The group $\mathbb{S}_3$ has two non-commuting generators that can be chosen like $A = (12)$ and $B = (123)$ with characters as in above table. Using similar notations as for the case of the group $\mathbb{S}_4$; in particular the property regarding the relation between the characters of reducible $\mathcal{R}$ and irreducible R_i representations of $\mathbb{S}_3$, we have

$$\chi_{\mathcal{R}}^{(g)} = n_1 \chi_{R_1}^{(g)} + n_2 \chi_{R_2}^{(g)} \quad (3.12)$$

where now $g = (A, B)$. Moreover, by using the interpretation of the character $\chi_{\mathcal{R}}^{(g)}$ in terms of fix points of $\mathbb{S}_3$ -permutations; we have, on one hand $\chi_{1 \oplus 2}^{(g)} = (1, 0)$; and on the other hand $\chi_1^{(g)} = (1, 1)$ and $\chi_2^{(g)} = (0, -1)$, in agreement with character table (3.11),

$$(1, 0) = (1, 1) + (0, -1) \quad (3.13)$$

Furthermore, by remembering that the $\text{SO}_{10} \times \mathbb{S}_3$ -modelling is done by starting from $\mathbb{S}_4$ -multiplets and, due to non-zero flux, they decompose into irreducible $\mathbb{S}_3$ representations. For the matter sector of the $\text{SO}_{10} \times \mathbb{S}_3$ model, the four 16-plets transforming in quartet multiplet **4** decomposes in terms of irreducible $\mathbb{S}_3$ representations as the sum of two singlets **1**₁, **1**₂ and a doublet as follows

$$\mathbf{4} = \mathbf{1}_1 \oplus \mathbf{1}_2 \oplus \mathbf{2} \quad (3.14)$$

However, seen that in $\mathbb{S}_3$ representation theory, we have two kinds of singlets namely the trivial e and the sign ϵ , we must determine the nature of the singlets **1**₁ and **1**₂ involved in above equation. While one of these singlets; say the **1**₁ should be a trivial singlet as it corresponds just to the weight $y_0 = x_0$ of eqs. (2.15)–(3.9), we still have to determine the nature of the **1**₂; but this is also a trivial object since it can be checked directly from our explicit construction as it corresponds precisely to the weight y_3 given by eq. (3.9). Nevertheless, this result can be also obtained by using the following consistency relation given by the restriction of the $\mathbb{S}_4$ relation $\chi_4^{(G)} = \chi_1^{(G)} + \chi_3^{(G)}$ down to its subgroup $\mathbb{S}_3$; namely

$$\chi_4^{(G)} \Big|_{\mathbb{S}_3} = \chi_1^{(G)} \Big|_{\mathbb{S}_3} + \chi_3^{(G)} \Big|_{\mathbb{S}_3} \quad (3.15)$$

By restricting this relationship to the $g = (A, B)$ generators of $\mathbb{S}_3$ and using $\chi_3^{(g)} = \chi_{1 \oplus 2}^{(g)}$, the restricted eq. (3.15) reads as $\chi_1^{(g)} + \chi_{1 \oplus 2}^{(g)}$ and leads to

$$(2, 1) = (1, 1) + (0, -1) + (k, l) \quad (3.16)$$

from which we learn that (k, l) should be equal to $(1, 1)$; and so the $\mathbf{1}_2$ singlet must be in the trivial representation. A similar reasoning leads to the decompositions of the $\mathbb{S}_4$ -characters $\chi_3^{(G)}$ and $\chi_{3'}^{(G)}$ down to their $\mathbb{S}_3$ -counterparts; we find $\chi_3^{(g)} = \chi_{1 \oplus 2}^{(g)}$ and $\chi_{3'}^{(g)} = \chi_{1' \oplus 2}^{(g)}$ with the value

$$\begin{aligned} \chi_{1 \oplus 2}^{(g)} &= (1, 1) + (0, -1) \\ \chi_{1' \oplus 2}^{(g)} &= (-1, 1) + (0, -1) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Therefore, the $\mathbb{S}_3$ -matter curves spectrum following from the breaking of (2.23) is given by

matters curves	$\mathbb{S}_3$	homology	$U(1)_X$ flux	character $\chi_R^{(g)}$
$16''_0$	$\mathbf{1}_{+,+}$	$4\xi - c_1$	$4N$	$(1, 1)$
$16''_i$	$\mathbf{2}_{0,-}$	$\eta - 2c_1 - 2\xi$	$-2N$	$(0, -1)$
$16''_3$	$\mathbf{1}_{+,+}$	$-c_1 - 2\xi$	$-2N$	$(1, 1)$
$10''_{[12]}$	$\mathbf{1}_{-,+}$	$2\xi - c_1$	$2N$	$(-1, 1)$
$10''_{[i3]}$	$\mathbf{2}_{0,-}$	$-2c_1 - 2\xi$	$-2N$	$(0, -1)$
$10''_i$	$\mathbf{2}_{0,-}$	$\eta' - 2c_1 - 2\xi$	$-2N$	$(0, -1)$
$10''_3$	$\mathbf{1}_{+,+}$	$2\xi - c_1$	$2N$	$(1, 1)$

(3.18)

where we have indexed the irreducible $\mathbb{S}_3$ -representations by their characters. In this table, ξ is a new 2-cycle; and the integer N standing for the abelian flux $\int_\xi \mathbf{F}_X$ inducing the breaking down to $\mathbb{S}_3$; see also eq. (3.4). Moreover, using properties on characters of tensor products; in particular the typical relations $X_{p,q} \otimes Y_{k,l} = \sum Z_{n,m}$ requiring $pk = \sum n$ and $ql = \sum m$, we obtain the following $\mathbb{S}_3$ -algebra

$$\begin{aligned} \mathbf{2}_{0,-} \otimes \mathbf{2}_{0,-} &= \mathbf{1}_{+,+} \oplus \mathbf{1}_{-,+} \oplus \mathbf{2}_{0,-} \\ \mathbf{1}_{p,+} \otimes \mathbf{2}_{0,-} &= \mathbf{2}_{0,-} \\ \mathbf{1}_{p,+} \otimes \mathbf{1}_{+,+} &= \mathbf{1}_{p,+} \\ \mathbf{1}_{+,+} \otimes \mathbf{1}_{-,+} &= \mathbf{1}_{-,+} \end{aligned} \quad (3.19)$$

with $p = \pm 1$.

3.2. $\mathrm{SO}_{10} \times \mathbb{D}_4$ models

We first recall useful aspects on the dihedral group $\mathbb{D}_4$ and the characters of their representations; then we build three $\mathrm{SO}_{10} \times \mathbb{D}_4$ -models and give their matter and Higgs curves spectrum by using specific properties of the breaking of $\mathbb{S}_4$ down to $\mathbb{D}_4$.

3.2.1. Characters in $\mathbb{D}_4$ models

The dihedral $\mathbb{D}_4$ group is an order 8 subgroup of $\mathbb{S}_4$ with the usual decomposition property $8 = 1_1 + 1_2 + 1_3 + 1_4 + 2^2$ showing that, generally speaking, $\mathbb{D}_4$ has 5 irreducible representations: four of them are 1-dimensional, denoted as $\mathbf{1}_i$; the fifth has 2-dimensions. The finite group $\mathbb{D}_4$ has two generators a and c satisfying the relations $a^2 = 1$, $c^4 = 1$, and $aca = c^3$ with $c^3 = c^{-1}$ and $a = a^{-1}$. It has 5 conjugation classes $\mathfrak{C}_\alpha$ given by

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_1 &\equiv \{e\}, & \mathfrak{C}_2 &\equiv \{c^2\}, & \mathfrak{C}_3 &\equiv \{c, c^3\} \\ \mathfrak{C}_4 &\equiv \{a, c^2a\}, & \mathfrak{C}_5 &\equiv \{ca, c^3a\}\end{aligned}\quad (3.20)$$

The character table of the irreducible representation of $\mathbb{D}_4$ is as follows

$\mathfrak{C}_i \backslash \chi R_j$	χ_{1_1}	χ_{1_2}	χ_{1_3}	χ_{1_4}	χ_2	number
$\mathfrak{C}_1$	1	1	1	1	2	1
$\mathfrak{C}_2$	1	1	1	1	-2	1
$\mathfrak{C}_3$	1	1	-1	-1	0	2
$\mathfrak{C}_4$	1	-1	1	-1	0	2
$\mathfrak{C}_5$	1	-1	-1	1	-0	2

(3.21)

To make contact between the three $(A, B, C) \equiv G$ generators of $\mathbb{S}_4$ and the two above (a, c) generators of $\mathbb{D}_4$; notice that the dihedral group has no irreducible 3-cycles; then we have

$$a = A|_{\mathbb{D}_4} \quad c = C|_{\mathbb{D}_4} \quad (3.22)$$

and therefore the following

$\chi_{ij}^{(g)}$	χ_{1_1}	χ_{1_2}	χ_{1_3}	χ_{1_4}	χ_2
a	1	-1	1	-1	0
c	1	1	-1	-1	0

(3.23)

exhibiting explicitly the difference between the four singlets. For convenience, we denote now on the 5 irreducible representations of the dihedral group by their characters as follows

$$\mathbf{1}_{+,+}, \quad \mathbf{1}_{+,-}, \quad \mathbf{1}_{-,+}, \quad \mathbf{1}_{-,-}, \quad \mathbf{2}_{0,0} \quad (3.24)$$

Notice that from the above character table for the (a, c) generators of $\mathbb{D}_4$, we can build three different kinds of $\mathbb{D}_4$ algebras; these are:

- $\mathbb{D}_4$ -algebra I

$$\begin{aligned}\mathbf{2}_{0,0} \otimes \mathbf{2}_{0,0} &= \mathbf{1}_{+,+} \oplus \mathbf{1}_{-,-} \oplus \mathbf{1}_{+,-} \oplus \mathbf{1}_{-,+} \\ \mathbf{1}_{p,q} \otimes \mathbf{1}_{p,q} &= \mathbf{1}_{pp',qq'} \\ \mathbf{1}_{p,q} \otimes \mathbf{2}_{0,0} &= \mathbf{2}_{0,0}\end{aligned}\quad (3.25)$$

- $\mathbb{D}_4$ -algebra II

$$\begin{aligned}\mathbf{2}_{0,0} \otimes \mathbf{2}_{0,0} &= \mathbf{1}_{+,+} \oplus \mathbf{1}_{-,-} \oplus \mathbf{2}_{0,0} \\ \mathbf{1}_{p,q} \otimes \mathbf{1}_{p,q} &= \mathbf{1}_{pp',qq'} \\ \mathbf{1}_{p,q} \otimes \mathbf{2}_{0,0} &= \mathbf{2}_{0,0}\end{aligned}\quad (3.26)$$

- $\mathbb{D}_4$ -algebra III

$$\begin{aligned}\mathbf{2}_{0,0} \otimes \mathbf{2}_{0,0} &= \mathbf{1}_{+,-} \oplus \mathbf{1}_{-,+} \oplus \mathbf{2}_{0,0} \\ \mathbf{1}_{p,q} \otimes \mathbf{1}_{p,q} &= \mathbf{1}_{pp',qq'} \\ \mathbf{1}_{p,q} \otimes \mathbf{2}_{0,0} &= \mathbf{2}_{0,0}\end{aligned}\quad (3.27)$$

To engineer the $\mathrm{SO}_{10} \times \mathbb{D}_4$ models, we proceed as in the case of $\mathbb{S}_3$; we start from the spectrum (2.23) of the $\mathbb{S}_4$ model and break its monodromy down to $\mathbb{D}_4$ by turning on an appropriate abelian flux (3.4) that pierces the $1 + 3$ matter curves $16_0 \oplus 16_i$ and the $3 + 3'$ Higgs curves $10_i \oplus 10_{[ij]}$. We distinguish three cases depending the way the $\mathbb{S}_4$ -triplet is splitted; they are described below:

3.2.2. Three $\mathrm{SO}_{10} \times \mathbb{D}_4$ models

First, we study the two cases where the $\mathbb{S}_4$ -triplet 16_i and the two $\mathbb{S}_4$ -triplets $10_i \oplus 10_{[ij]}$ are completely reduced down in terms of $\mathbb{D}_4$ singlets. Then, we study the other possible case where these triplets are decomposed as sums of a $\mathbb{D}_4$ -singlet and a $\mathbb{D}_4$ -doublet.

α) $\mathrm{SO}_{10} \times \mathbb{D}_4$ -models I and II

We will see below that according to the values of the characters of the $\mathbb{D}_4$ -generators, there are two configurations for the splitting $3 = 1 + 1 + 1$; they depend on presence or absence of trivial 1_{++} representation as given below:

- a splitting with no $\mathbb{D}_4$ -trivial singlet

$$\mathbf{3} = \mathbf{1}_{+,-} \oplus \mathbf{1}_{+,-} \oplus \mathbf{1}_{-,+} \quad (3.28)$$

- a splitting with a $\mathbb{D}_4$ -trivial singlet

$$\mathbf{3} = \mathbf{1}_{+,+} \oplus \mathbf{1}_{-,-} \oplus \mathbf{1}_{+,-} \quad (3.29)$$

To establish this claim, we start from the character of the generators of $\mathbb{S}_4$; and consider the computation of the following restriction down to $\mathbb{D}_4$ subgroup

$$\chi_4^{(g)} \Big|_{\mathbb{D}_4} = \chi_1^{(g)} \Big|_{\mathbb{D}_4} + \chi_3^{(g)} \Big|_{\mathbb{D}_4} \quad (3.30)$$

Thinking of the triplet $\mathbf{3}$ as the direct sum of three singlets $\mathbf{1}_1 \oplus \mathbf{1}_2 \oplus \mathbf{1}_3$, we then have the following character relationship

$$\chi_4^{(g)} \Big|_{\mathbb{D}_4} = \chi_{\mathbf{1}_1}^{(g)} \Big|_{\mathbb{D}_4} + \chi_{\mathbf{1}_2}^{(g)} \Big|_{\mathbb{D}_4} + \chi_{\mathbf{1}_3}^{(g)} \Big|_{\mathbb{D}_4} + \chi_{\mathbf{1}_4}^{(g)} \Big|_{\mathbb{D}_4} \quad (3.31)$$

By combining eqs. (2.22) and (3.22), we learn that the left hand side of equation is nothing but $\chi_4^{(g)} \Big|_{\mathbb{D}_4} = (2, 0)$; while, by using the characters of the singlets of table (3.21), the right hand side decomposes like

$$(2, 0) = (1, 1) + (k_1, l_1) + (k_2, l_2) + (k_3, l_3) \quad (3.32)$$

with $k_i = \pm 1$ and $l_i = \pm 1$. Explicitly

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + k_3 &= +1 \\ l_1 + l_2 + l_3 &= -1 \end{aligned} \quad (3.33)$$

which can be solved in two manners: (i) either as

$$(2, 0) = (1, 1) + (1, -1) + (1, -1) + (-1, 1) \quad (3.34)$$

involving three kinds of irreducibles 1-dim representations of $\mathbb{D}_4$; the trivial representation with character $(1, 1)$ and two others with characters $(-1, 1)$ appearing once and the $(1, -1)$ appearing twice; or (ii) like

$$(2, 0) = (1, 1) + (1, -1) + (1, 1) + (-1, -1) \quad (3.35)$$

where the trivial representation appears twice. Accordingly, we have the following curves spectrums:

- $SO_{10} \times \mathbb{D}_4$ -model I

It is given by the decomposition (3.34); its matter spectrum reads as

matters curves	$\mathbb{D}_4$	homology	$U(1)_X$ flux	character $\chi_R^{(g)}$
$\mathbf{16}_0''$	$\mathbf{1}_{+,+}$	$4\xi - c_1$	$4N$	$(1, 1)$
$\mathbf{16}_1''$	$\mathbf{1}_{+,-}$	$\eta - c_1 - \xi$	$-N$	$(1, -1)$
$\mathbf{16}_2''$	$\mathbf{1}_{+,-}$	$-c_1 - \xi$	$-N$	$(1, -1)$
$\mathbf{16}_3''$	$\mathbf{1}_{-,+}$	$-c_1 - 2\xi$	$-2N$	$(-1, 1)$
$\mathbf{10}_{[12]}''$	$\mathbf{1}_{-,+}$	$2\xi - c_1$	$2N$	$(-1, 1)$
$\mathbf{10}_{[13]}''$	$\mathbf{1}_{+,-}$	$-c_1 - \xi$	$-N$	$(1, -1)$
$\mathbf{10}_{[23]}''$	$\mathbf{1}_{+,-}$	$-c_1 - \xi$	$-N$	$(1, -1)$
$\mathbf{10}_1''$	$\mathbf{1}_{+,-}$	$\eta' - 2c_1 - \xi$	$-N$	$(1, -1)$
$\mathbf{10}_2''$	$\mathbf{1}_{-,+}$	$-c_1 - \xi$	$-N$	$(-1, 1)$
$\mathbf{10}_3''$	$\mathbf{1}_{-,+}$	$2\xi - c_1$	$2N$	$(-1, 1)$

(3.36)

and

flavons	character $\chi_R^{(g)}$
$\mathbf{1}_{-,+}$	$(-1, 1)$
$\mathbf{1}_{+,-}$	$(1, -1)$
$\mathbf{1}_{+,-}$	$(1, -1)$
$\mathbf{1}_{+,-}$	$(1, -1)$
$\mathbf{1}_{-,+}$	$(-1, 1)$
$\mathbf{1}_{-,+}$	$(-1, 1)$

(3.37)

together with their adjoints.

- $SO_{10} \times \mathbb{D}_4$ -model II

It is given by the decomposition (3.35) with matter curve spectrum like

matters curves	$\mathbb{D}_4$	homology	$U(1)_X$ flux	character $\chi_R^{(g)}$
$\mathbf{16}_0''$	$\mathbf{1}_{+,+}$	$4\xi - c_1$	$4N$	$(1, 1)$
$\mathbf{16}_1''$	$\mathbf{1}_{+,-}$	$\eta - c_1 - \xi$	$-N$	$(1, -1)$
$\mathbf{16}_2''$	$\mathbf{1}_{-,-}$	$-c_1 - \xi$	$-N$	$(-1, -1)$
$\mathbf{16}_3''$	$\mathbf{1}_{+,+}$	$-c_1 - 2\xi$	$-2N$	$(1, 1)$
$\mathbf{10}_{[12]}''$	$\mathbf{1}_{+,-}$	$2\xi - c_1$	$2N$	$(1, -1)$
$\mathbf{10}_{[13]}''$	$\mathbf{1}_{+,+}$	$-c_1 - \xi$	$-N$	$(1, 1)$
$\mathbf{10}_{[23]}''$	$\mathbf{1}_{-,-}$	$-c_1 - \xi$	$-N$	$(-1, -1)$
$\mathbf{10}_1''$	$\mathbf{1}_{-,+}$	$\eta' - 2c_1 - \xi$	$-N$	$(-1, 1)$
$\mathbf{10}_2''$	$\mathbf{1}_{-,-}$	$-c_1 - \xi$	$-N$	$(-1, -1)$
$\mathbf{10}_3''$	$\mathbf{1}_{+,+}$	$2\xi - c_1$	$2N$	$(1, 1)$

(3.38)

and

flavons	character $\chi_R^{(g)}$
$\mathbf{1}_{+,-}$	$(1, -1)$
$\mathbf{1}_{+,+}$	$(1, 1)$
$\mathbf{1}_{-,-}$	$(-1, -1)$
$\mathbf{1}_{-,+}$	$(-1, 1)$
$\mathbf{1}_{-,-}$	$(-1, -1)$
$\mathbf{1}_{+,+}$	$(1, 1)$

(3.39)

β) $\mathrm{SO}_{10} \times \mathbb{D}_4$ -model III

This model corresponds to the splitting $\mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{2}$; the restricted character relation (3.30) decomposes like

$$\chi_4^{(g)} \Big|_{\mathbb{D}_4} = \chi_1^{(g)} + \chi_{1'}^{(g)} + \chi_2^{(g)} \quad (3.40)$$

leading to

$$(2, 0) = (1, 1) + (k_1, l_1) + (k_2, l_2) \quad (3.41)$$

and then $(k_1, l_1) + (k_2, l_2) = (1, -1)$. However seen that the character $\chi_2^{(g)} = (0, 0)$; it follows that

$$\mathbf{3} = \mathbf{2}_{0,0} \oplus \mathbf{1}_{+,-} \quad (3.42)$$

Therefore the matter spectrum of the $\mathrm{SO}_{10} \times \mathbb{D}_4$ -model III is given by

matters curves	$\mathbb{D}_4$	homology	$\mathrm{U}(1)_X$ flux	character $\chi_R^{(g)}$
$\mathbf{16}_0''$	$\mathbf{1}_{+,+}$	$4\xi - c_1$	$4N$	$(1, 1)$
$\mathbf{16}_i''$	$\mathbf{2}_{0,0}$	$\eta - 2c_1 - 2\xi$	$-2N$	$(0, 0)$
$\mathbf{16}_3''$	$\mathbf{1}_{+,-}$	$-c_1 - 2\xi$	$-2N$	$(1, -1)$
$\mathbf{10}_{[12]}''$	$\mathbf{1}_{-,+}$	$2\xi - c_1$	$2N$	$(-1, 1)$
$\mathbf{10}_{[i3]}''$	$\mathbf{2}_{0,0}$	$-2c_1 - 2\xi$	$-2N$	$(0, 0)$
$\mathbf{10}_i''$	$\mathbf{2}_{0,0}$	$\eta' - 2c_1 - 2\xi$	$-2N$	$(0, 0)$
$\mathbf{10}_3''$	$\mathbf{1}_{+,-}$	$2\xi - c_1$	$2N$	$(1, -1)$

(3.43)

and

flavons	character $\chi_R^{(g)}$
$\mathbf{1}_{-,+}$	$(-1, 1)$
$\mathbf{2}_{0,0}$	$(0, 0)$
$\mathbf{2}_{0,0}$	$(0, 0)$
$\mathbf{1}_{+,-}$	$(1, -1)$

(3.44)

Notice that in tables (3.36)–(3.43), the homology classes of the new curves are obtained as usual by requiring the sum of their homology classes to be equal to the class of their mother matter curve in $\mathbb{S}_4$ model. The extra 2-cycle class ξ and the corresponding integral flux $N = \int_{\xi} \mathbf{F}_X$ are associated with the breaking of $\mathbb{S}_4$ down to $\mathbb{D}_4$; the 2-form $\mathbf{F}_X$ is as in eq. (3.4).

4. Conclusion and discussions

In this work, we have used characters of discrete group representations to approach the engineering of $\text{SO}_{10} \times \Gamma$ models with discrete monodromy Γ contained in $\mathbb{S}_4$; this method generalises straightforwardly to $\text{SU}_5 \times \Gamma$ and its breaking down to MSSM. In this construction, curves of the GUT-models are described by the characters $\chi_{\mathbf{R}_i}$ of the irreducible representations $\mathbf{R}_i$ of the discrete group Γ .

After having introduced the idea of the character based method; we have revisited the study of the $\mathbb{S}_4$ - and $\mathbb{S}_3$ -models from the view of monodromy irreducible representations and their characters; see table (2.23) for the case $\Gamma = \mathbb{S}_4$, the table (3.18) for $\mathbb{S}_3$ -model. Then, we have extended the construction to the dihedral group where we have found that there are three $\text{SO}_{10} \times \mathbb{D}_4$ -models with curves spectrum as in tables (3.36), (3.38) and (3.43).

The approach introduced and developed in this study has two remarkable particularities: (i) first it allows to build GUT-models with subgroups inside the $\mathbb{S}_4$ permutation symmetry like $\mathbb{D}_4$ and $\mathbb{A}_4$ without resorting to the use of Galois theory. The latter is known to lead to non-linear constraints on the holomorphic sections of the spectral covers; and requires more involved tools for their solutions. (ii) Second, it is based on a natural quantity of discrete symmetry groups; namely the characters of their representations; known as basic objects to deal with finite order symmetry groups.

4.1. Building superpotentials using characters

The character based method developed in this study can be also used to build superpotentials. For the case of $\text{SO}_{10} \times \mathbb{D}_4$ -models; superpotentials W invariant under discrete symmetry $\mathbb{D}_4$ are obtained by requiring their character as $\chi_{\mathbf{R}}^{(g)}(W) = (1, 1)$. By focusing on the models (3.36)–(3.38); and denoting the matter curves with (p, q) character as $\mathbf{16}_{p,q}$ and the Higgs curve with character (α, β) like $\mathbf{10}_{\alpha,\beta}$; and restricting to typical tri-coupling superpotential, we have the following candidate

$$W = \sum \lambda_{pq}^{p'q'} \mathbf{16}_{p,q} \otimes \mathbf{16}_{p',q'} \otimes \mathbf{10}_{1/pp',1/qq'}$$

More general expressions can be written down by implementing flavons as well. However, to write down phenomenologically acceptable Yukawa couplings that agree with low energy effective field constraints such as reproducing a MSSM like spectrum and suppressing rapid proton decay, one must have a diagonal tree-level Yukawa coupling for the heaviest top-quark family; one also needs to introduce extra discrete symmetries such as R-parity or the $\mathbb{Z}_2$ geometric symmetry of [19,9,12] to rule out undesired couplings. Diagonal tree level 3-couplings for the top-quark family have been studied in [9] for the case of $\mathbb{S}_3$ and its subgroups; they extend directly to our analysis; it reads in character language as

$$W_{tree} = \lambda_{top} \mathbf{16}_{+-} \otimes \mathbf{16}_{+-} \otimes \mathbf{10}_{++}$$

singling out the spectrum of the $\mathbb{D}_4$ -model (3.38). For the spectrum (3.43), a superpotential with a diagonal Yukawa coupling for a top-quark in a $\mathbb{D}_4$ -singlet requires flavons; if taking the top-quark matter curve in $\mathbf{16}_{+-}$ as above; a superpotential W_* candidate would have the form

$$W_* \sim \mathbf{16}_{+-} \otimes \mathbf{16}_{+-} \otimes \mathbf{10}_{-+} \otimes \mathbf{1}_{-+}$$

a similar conclusion is valid if taking the top-quark in $\mathbf{16}_{++}$.

4.2. Breaking symmetries in $SO_{10} \times \mathbb{D}_4$ -models

The descent from $SO_{10} \times \mathbb{D}_4$ -theory to $SU_5 \times \Gamma$ -models with discrete symmetries $\Gamma \subset \mathbb{D}_4$ follows by using $U(1)_X$ flux to pierce the matter **16** and Higgs **10** curves as done in [9]. For matter sector for example, we start from M_{16} multiplets $\{\mathbf{16}_i\}_{M_{16}}$ and use N flux units of $U(1)_X$ to pierce the curve package; and decompose it like $\{\mathbf{10}\}_{M_{16}} \oplus \{\mathbf{5}\}_{M_{16}-N} \oplus \{\mathbf{1}\}_{M_{16}+N}$; similar decompositions are valid for the Higgs sector; explicit MSSM-like models using discrete group character approach will be given in [17]. One can also break the $\mathbb{D}_4$ monodromy group down to $\mathbb{Z}_4$ subgroup by using flux and following the same character based method described in this paper.

Acknowledgements

Saidi would like to thank the ICTP-Senior Associate programme for supporting his stay at ICTP, the International Centre for Theoretical Physics, Trieste Italy; where this work has been completed.

References

- [1] C. Beasley, J.J. Heckman, C. Vafa, GUTs and exceptional branes in F-theory – I, *J. High Energy Phys.* 0901 (2009) 058, arXiv:0802.3391 [hep-th].
- [2] R. Donagi, M. Wijnholt, Model building with F-theory, *Adv. Theor. Math. Phys.* 15 (2011) 1237, arXiv:0802.2969 [hep-th].
- [3] C. Beasley, J.J. Heckman, C. Vafa, GUTs and exceptional branes in F-theory – II: experimental predictions, *J. High Energy Phys.* 0901 (2009) 059, arXiv:0806.0102 [hep-th].
- [4] R. Donagi, M. Wijnholt, Breaking GUT groups in F-theory, *Adv. Theor. Math. Phys.* 15 (2011) 1523, arXiv:0808.2223 [hep-th].
- [5] R. Donagi, M. Wijnholt, Higgs bundles and UV completion in F-theory, *Commun. Math. Phys.* 326 (2014) 287, arXiv:0904.1218 [hep-th].
- [6] J. Marsano, N. Saulina, S. Schafer-Nameki, Monodromies, fluxes, and compact three-generation F-theory GUTs, *J. High Energy Phys.* 0908 (2009) 046, arXiv:0906.4672 [hep-th].
- [7] J.J. Heckman, A. Tavanfar, C. Vafa, The point of $E(8)$ in F-theory GUTs, *J. High Energy Phys.* 1008 (2010) 040, arXiv:0906.0581 [hep-th].
- [8] A. Maharana, E. Palti, Models of particle physics from type IIB string theory and F-theory: a review, *Int. J. Mod. Phys. A* 28 (2013) 1330005, arXiv:1212.0555 [hep-th].
- [9] I. Antoniadis, G.K. Leontaris, Building $SO(10)$ models from F-theory, *J. High Energy Phys.* 1208 (2012) 001, arXiv:1205.6930 [hep-th].
- [10] Athanasios Koroas, Stephen F. King, George K. Leontaris, Andrew K. Meadowcroft, Phenomenological implications of a minimal F-theory GUT with discrete symmetry, arXiv:1505.00937 [hep-ph].
- [11] Athanasios Koroas, Stephen F. King, George K. Leontaris, Andrew Meadowcroft, Discrete family symmetry from F-theory GUTs, arXiv:1406.6290 [hep-ph].
- [12] I. Antoniadis, G.K. Leontaris, Neutrino mass textures from F-theory, *Eur. Phys. J. C* 73 (2013) 2670, arXiv:1308.1581 [hep-th].
- [13] Sergio Cecotti, Miranda C.N. Cheng, Jonathan J. Heckman, Cumrun Vafa, Yukawa couplings in F-theory and non-commutative geometry, arXiv:0910.0477.
- [14] Patrick Morandi, *Field and Galois Theory*, Springer, 1996.
- [15] H. Ishimori, T. Kobayashi, H. Ohki, H. Okada, Y. Shimizu, M. Tanimoto, Non-Abelian discrete symmetries in particle physicists, arXiv:1003.3552 [hep-th].
- [16] R. Ahl Laamara, L.B. Drissi, F.Z. Hassani, E.H. Saidi, A.A. Soumail, *Nucl. Phys. B* 847 (2011) 275–296, arXiv:1011.3299;
L.B. Drissi, F.Z. Hassani, H. Jehjoui, E.H. Saidi, *Phys. Rev. D* 81 (2010) 105030, arXiv:1008.2689.
- [17] R. Ahl Laamara, M. Miskaoui, E.H. Saidi, MSSM-like from $SU_5 \times \mathbb{D}_4$ model, LPHE-MS preprint, 2015.

- [18] William Fulton, Joe Harris, *Young Tableaux with Applications to Representation Theory and Geometry*, Springer-Verlag, 1991.
- [19] H. Hayashi, T. Kawano, Y. Tsuchiya, T. Watari, Flavor structure in F-theory compactifications, *J. High Energy Phys.* 1008 (2010) 036, arXiv:0910.2762 [hep-th].

Contribution II

MSSM-like from $SU_5 \times D_4$ models

Abstract

En utilisant les caractères de représentations des groupes finis et de la brisure de symétrie de jauge par l'hyperflux ainsi que des contraintes sur la famille de quark top, nous étudions la théorie minimale effective à basse énergie à partir des modèles $SU(5) \times D_4$ incorporés dans la théorie-F avec un flux non abélien. Le spectre des courbes de matière de ces modèles est obtenu à partir de la théorie $SU(5) \times S_5$ avec le monodromie S_5 en effectuant deux brisures ; la première consiste de la brisure du groupe S_5 vers S_4 ; et puis vers le sous-groupe diédral D_4 . Par conséquent, en fonction des façons de décomposer les triplets de S_4 , nous terminons avec trois types de modèles D_4 . Des constructions explicites de ces théories sont données et un spectre de type MSSM est dérivé.

MSSM-like from $SU_5 \times D_4$ models

R. Ahl Laamara^{a,b}, M. Miskaoui^{a,b}, E.H. Saidi^{b,c,*}

^a LPHE-Modeling and Simulations, Faculty of Sciences, Mohamed V University, Rabat, Morocco

^b Centre of Physics and Mathematics, CPM, Morocco

^c International Centre for Theoretical Physics, Miramare, Trieste, Italy

Received 21 November 2015; received in revised form 15 February 2016; accepted 24 February 2016

Available online 2 March 2016

Editor: Stephan Stieberger

Abstract

Using finite discrete group characters and symmetry breaking by hyperflux as well as constraints on top-quark family, we study minimal low energy effective theory following from $SU_5 \times D_4$ models embedded in F-theory with non-abelian flux. Matter curves spectrum of the models is obtained from $SU_5 \times S_5$ theory with monodromy S_5 by performing two breakings: first from symmetric group S_5 to S_4 subsymmetry, and next to dihedral D_4 subgroup. As a consequence, and depending on the ways of decomposing triplets of S_4 , we end with three types of D_4 -models. Explicit constructions of these theories are given and a MSSM-like spectrum is derived.

© 2016 The Authors. Published by Elsevier B.V. This is an open access article under the CC BY license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>). Funded by SCOAP³.

1. Introduction

Recently, there has been an increasing interest in building $SU_5 \times \Gamma$ GUT models, with discrete symmetries Γ , embedded in Calabi–Yau compactification of F-theory down to 4D space time [1–11]; and in looking for low energy minimal prototypes with broken monodromies [12–19]. This class of supersymmetric GUTs with discrete groups leads to quasi-realistic field spectrum having quark and lepton mass matrices with properties fitting with MSSM requirements. In the geometric engineering of these F-GUTs, splitting spectral cover method together with Galois

* Corresponding author.

E-mail address: h-saidi@fsr.ac.ma (E.H. Saidi).

theory tools is used to generate appropriate matter curves spectrum [20–25]; and a *geometric* Z_2 parity has been also introduced to suppress unwanted effects such as exotic couplings and undesired proton decay operators [26–29].

In this paper, we develop another manner to deal with monodromy of F-GUT that is different from the one proposed first in [18], and further explored in [27,30,31], where matter curves of the same orbit of monodromy are identified. In our approach, we use the non-abelian flux conjecture of [15,16] to think of monodromy group of F-theory SU_5 models as a non-abelian flavor symmetry Γ . Non-trivial irreducible representations of the non-abelian discrete group Γ are used to host the three generations of fundamental matter; a feature that opens a window to build semi-realistic models with matter curves distinguished from each other in accord with mass hierarchy and mixing neutrino physics [32–34].

In this work, we study the family of supersymmetric $SU_5 \times \Gamma_p \times U(1)^{5-p}$ models in the framework of F-theory GUT; with *non-abelian* monodromies Γ_p contained in the permutation group S_5 [30–42]; and analyse the realisation of low energy constraints under which one can generate an effective field spectrum that resembles to MSSM. A list of main constraints leading to a good low energy spectrum is described in section 5; it requires amongst others a tree-level Yukawa coupling for top-quark family. To realise this condition with non-abelian Γ_p , we consider the case where Γ_p is given by the order 8 dihedral group D_4 ; this particular non-abelian discrete symmetry has representations which allow more flexibility in accommodating matter generations. Recall that the non-abelian alternating A_4 group has no irreducible doublet as shown in the character relation $12 = 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$; and the irreducible representation of non-abelian S_4 and S_3 , which can be respectively read from $24 = 3^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$ and $6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$, has a doublet and two singlets. The non-abelian dihedral group D_4 however has representations R_i with dimensions, that can be read from $8 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$, seemingly more attractable phenomenologically; it has 5 irreducible R_i 's, four singlets, indexed by their basis characters as 1_{++} , 1_{+-} , 1_{-+} , 1_{--} , and an irreducible doublet 2_{00} , offering therefore several pictures to accommodate the three generations of matter of the electroweak theory; in particular more freedom in accommodating top quark family.

To deal with the engineering of $SU_5 \times D_4$ -models, we develop a *new method* based on finite discrete group characters χ_{R_i} , avoiding as a consequence the complexity of Galois theory approach. The latter is useful to study F-theory models with the dihedral D_4 and the alternating A_4 subgroups of S_4 as they are not directly reached by the standard splitting spectral cover method; they are obtained in Galois theory by putting constraints on the discriminant of underlying spectral covers, and introducing other monodromy invariant of the covers such a resolvent [14,15,29].

To derive the D_4 -matter curves spectrum in $SU_5 \times D_4$ -models, we think of it in terms of a two steps descent from S_5 -theory: a first descent down to S_4 , and a second one to D_4 by turning on appropriate flux that will be explicitly described in this work, see also appendix C. By studying all scenarios of breaking the triplets S_4 -theory in terms of irreducible D_4 -representations, we end with three kinds of D_4 -models: one having a field spectrum involving all D_4 -representations including doublet 2_{00} (*model I*), the second theory (*model II*) has no doublet 2_{00} nor the singlet 1_{--} , and the third model has no 2_{00} , but does have 1_{--} . We have studied the curves spectrum of the three D_4 -models; and we have found that only model III allows a tree level 3-couplings and exhibits phenomenologically interesting features.

The presentation is as follows: In section 2, we study the $SU_5 \times S_5$ model, and describe the picture of the two steps breaking $S_5 \rightarrow S_4 \rightarrow S_3$ by using standard methods. In section 3, we introduce our method; and we revisit the construction of the S_4 - and S_3 -models from the view of discrete group characters. In section 4, we use character group method to build three

$SU_5 \times \mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ models. In section 5, we solve basic conditions for deriving MSSM-like spectrum from $SU_5 \times \mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ models. In section 6, we conclude and make discussions. Last section is devoted to three appendices: In appendix A, we give relations regarding group characters. In appendix B, we report details on other results obtained in this study; and in appendix C we exhibit the link between non-abelian monodromies and flavor symmetry.

2. Spectral covers in $SU_5 \times \Gamma$ models

In F-GUT models with SU_5 gauge symmetry, matter curves carry quantum numbers in $SU_5 \times SU_5^\perp$ bi-representations following from the breaking of E_8 as given below

$$\begin{aligned} 248 \rightarrow & (24, 1_\perp) \oplus (1, 24_\perp) \oplus \\ & (10, 5_\perp) \oplus (\overline{10}, \bar{5}_\perp) \oplus \\ & (\bar{5}, 10_\perp) \oplus (5, \overline{10}_\perp) \end{aligned} \quad (2.1)$$

In this SU_5 theory, the perpendicular $SU_5^\perp$ is restricted to its Cartan–Weyl subsymmetry $(U_1^\perp)^4$, see appendix C for some explicit details; and the matter content of the model is labelled by five weights t_i like

$$10_{t_i}, \quad \overline{10}_{-t_i}, \quad \bar{5}_{t_i+t_j}, \quad 5_{-t_i-t_j}, \quad 1_{t_i-t_j} \quad (2.2)$$

with traceless condition

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 0 \quad (2.3)$$

The components of the five 10-plets 10_{t_i} and those of the ten 5-plets $\bar{5}_{t_i+t_j}$ are related to each other by monodromy symmetries Γ ; offering a framework of approaching GUT-models with discrete symmetries originating from geometric properties of the elliptic Calabi–Yau fourfold CY4 which, naively, can be thought of as given by the 4-dim complex space

$$CY4 \sim E \times \mathcal{B}_3 \quad (2.4)$$

In this fibration, the complex 3-dim base $\mathcal{B}_3$ contains the complex GUT surface $\mathcal{S}_{GUT}$ wrapped by 7-brane; and the complex elliptic curve E fiber is as follows

$$y^2 = x^3 + b_5xy + b_4x^2z + b_3yz^2 + b_2xz^3 + b_0z^5 \quad (2.5)$$

where the homology classes $[x]$, $[y]$, $[z]$ and $[b_k]$; associated with the holomorphic sections x , y , z and b_k , are expressed in terms of the Chern class $c_1 = c_1(\mathcal{S}_{GUT})$ of the tangent bundle of the $\mathcal{S}_{GUT}$ surface; and the Chern class $-t$ of the normal bundle $\mathcal{N}_{\mathcal{S}_{GUT}|\mathcal{B}_3}$ like

$$\begin{aligned} [y] &= 3(c_1 - t), & [z] &= -t \\ [x] &= 2(c_1 - t), & [b_k] &= (6c_1 - t) - kc_1 \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.1. Matter curves in $SU_5 \times \mathbb{S}_5$ model

Matter curves of $SU_5 \times U(1)^{5-k} \times \Gamma_k$ models live on GUT surface $\mathcal{S}_{GUT}$ with monodromy symmetries Γ_k contained in $\mathbb{S}_5$, the Weyl group of $SU_5^\perp$, see eq. (C.8) of appendix C. In the case

of $\Gamma_5 = \mathbb{S}_5$; these curves organise into reducible multiplets¹ of $\mathbb{S}_5$ with the following characteristic properties

Matters curves	Weights	$\mathbb{S}_5$ repres	Homology classes	Holomorphic sections
10_{t_i}	t_i	5	$\eta - 5c_1$	$b_5 = b_0 \prod_{i=1}^5 t_i$
$\bar{5}_{t_i+t_j}$	$t_i + t_j$	10	$\eta' - 10c_1$	$d_{10} = d_0 \prod_{j>i=1}^5 T_{ij}$
$1_{t_i-t_j}$	$t_i - t_j$	20	$\eta'' - 20c_1$	$g_{20} = g_0 \prod_{i \neq j=1}^5 S_{ij}$

(2.7)

where the t_i s as above, $T_{ij} = t_i + t_j$ with $i < j$, and $S_{ij} = t_i - t_j$ with $i \neq j$. These t_i s, T_{ij} s, and S_{ij} s are respectively interpreted as the simple zeros of the spectral covers $\mathcal{C}_5 = 0$ describing ten-plets, $\mathcal{C}_{10} = 0$ describing five-plets and $\mathcal{C}_{20} = 0$ for flavon singlets [45–50]

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_5 &= b_0 \prod_{i=1}^5 (s - t_i) \equiv b_0 \prod_{i=1}^5 s_i \\
 \mathcal{C}_{10} &= d_0 \prod_{j>i=1}^5 (s - T_{ij}) \equiv d_0 \prod_{j>i=1}^5 s_{ij} \\
 \mathcal{C}_{20} &= g_0 \prod_{i \neq j}^5 (s - S_{ij}) \equiv g_0 \prod_{i \neq j}^5 s'_{ij}
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

The homology classes of the complex curves in (2.7) are nicely obtained by defining the spectral covers in terms of the usual holomorphic sections; for the 5-sheeted covering of S_{GUT} , we have

$$\mathcal{C}_5 = b_0 s^5 + b_1 s^4 + b_2 s^3 + b_3 s^2 + b_4 s + b_5 = 0 \tag{2.9}$$

with $b_1 = 0$ due to traceless condition; and homology classes of the complex holomorphic sections b_k as follows

Holomorphic sections	Homology classes
s	$-c_1$
b_k	$\eta - k c_1$

(2.10)

with canonical homology class η given by

$$\eta = 6c_1 - t \tag{2.11}$$

with c_1 and $-t$ as in eqs. (2.6). From these relations, the homology class $[10_{t_i}] = [\mathcal{C}_5|_{s=0}]$ is given by $[b_5]$; by using $b_5 = b_0 \prod_{i=1}^5 t_i$, we have $[b_5] = \eta - 5c_1$ in agreement with (2.6). For the

¹ An equivalent spectrum can be also given by using irreducible representations of $\mathbb{S}_5$ and their characters; to fix ideas see the analogous $\mathbb{S}_4$ - and $\mathbb{S}_3$ -models studied in section 3.

10-sheeted covering, we have

$$\mathcal{C}_{10} = \sum_{k=0}^{10} d_k s^{10-k} \quad (2.12)$$

and leads to the homology class $[d_{10}] = \eta' - 10c_1$ where, due to $d_0 = b_0^3$, the class η' can be related to the canonical η of the 5-sheeted cover like 3η . Similar relation can be written down for singlets

$$\mathcal{C}_{20} = \sum_{k=0}^{20} g_k s^{20-k} \quad (2.13)$$

leading to $[g_{20}] = \eta'' - 20c_1$ with the property $\eta'' = 9\eta$.

For later use, we consider together with (2.7) the so called geometric Z_2 parity of [19], but as approached in [14,15] in dealing with local models. For simplicity, we use a short way to introduce this parity by requiring, up to an overall phase, invariance of $\mathcal{C}_5 = 0$, $\mathcal{C}_{10} = 0$, $\mathcal{C}_{20} = 0$ under the following transformations along the spectral fiber; see [14–16] for explicit details,

$$\begin{aligned} s'_i &= e^{-i\phi} s_i \\ b'_k &= e^{i[\beta+(5-k)\phi]} b_k \\ d'_k &= e^{i[\gamma+(10-k)\phi]} d_k \\ g'_k &= e^{i[\delta+(20-k)\phi]} g_k \end{aligned} \quad (2.14)$$

Under this phase change, the spectral covers eqns transform like

$$\begin{aligned} \mathcal{C}'_5 &= e^{i\beta} \mathcal{C}_5 \\ \mathcal{C}'_{10} &= e^{i\gamma} \mathcal{C}_{10} \\ \mathcal{C}'_{20} &= e^{i\delta} \mathcal{C}_{20} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Focusing on 10-plets, and equating above $\mathcal{C}'_5$ with the one deduced from construction of [16] namely $\mathcal{C}'_5 = e^{i(\zeta-\phi)} \mathcal{C}_5$, we learn that we should have $\beta = \zeta - \phi$, and therefore $b'_k = e^{i[\zeta+(k-6)\phi]} b_k$. For the particular choice $\phi = \pi$, we have $s'_i = -s_i$ and

$$b'_k = (-)^k e^{i\zeta} b_k \quad (2.16)$$

If we put $\zeta = 0$, we get $(b'_0, b'_5) = (+b_0, -b_5)$; while by taking $\zeta = \pi$, we have $(b'_0, b'_5) = (-b_0, +b_5)$; below we set $\zeta = \pi$. To get the parity of the holomorphic sections d_k and g_k of eqs. (2.8), we use their relationships with the b_k coefficients. By help of the relations $d_{10} = b_3^2 b_4 - b_2 b_3 b_5 + b_0 b_5^2$ and $g_{20} = 256 b_4^5 b_0^4 + \dots$, it follows that $Z_2(d_{10}) \sim Z_2(b_3^2 b_4)$ and $Z_2(g_{20}) = Z_2(b_4^5 b_0^4)$, so we have [27,30,31]

$$\begin{aligned} Z_2(d_{10}) &= -1, & Z_2(g_{20}) &= -1, & Z_2(b_5) &= +1 \\ Z_2(d_0) &= -1, & Z_2(g_0) &= -1, & Z_2(b_0) &= -1 \end{aligned} \quad (2.17)$$

in agreement with the homology class properties $\eta' = 3\eta$ and $\eta'' = 9\eta$.

2.2. Models with broken $\mathbb{S}_5$

To engineer matter curves with monodromy $\Gamma_k \subset \mathbb{S}_5$, we generally use spectral cover splitting method combined with constraints inspired from Galois theory [14–16,26,27]. In this study, we develop a new method without need of the involved tools of Galois group theory, our approach uses characters $\chi_{\mathbf{R}}(g)$ of discrete group representations, and relies directly the roots of the spectral covers. To illustrate the method, but also for later use, we first study the two interesting cases by using the standard method:

- $\Gamma_4 = \mathbb{S}_4 \subset \mathbb{S}_5$,
- $\Gamma_3 = \mathbb{S}_3 \subset \mathbb{S}_5$.

The case $\Gamma_4 = \mathbb{D}_4$ requires more tools: it will be studied later after revisiting $\mathbb{S}_4$ - and $\mathbb{S}_3$ -models from the view of characters of their representations.

2.2.1. $\mathbb{S}_4$ -model in standard approach

To engineer the breaking of $\mathbb{S}_5$ down to $\mathbb{S}_4$, we proceed as follows: First, we use $\mathbb{S}_5$ -invariance to rewrite the holomorphic polynomial $\mathcal{C}_5$ like

$$\mathcal{C}_5 = \frac{b_0}{5!} \sum_{\sigma \in \Gamma} \prod_{i=1}^5 (s - t_{\sigma(i)}) \quad (2.18)$$

and similarly for $\mathcal{C}_{10}$ and $\mathcal{C}_{20}$. To break $\mathbb{S}_5$ down to $\mathbb{S}_4$, we impose a condition fixing one of the weight [51], for example

$$\sigma(t_5) = t_5 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma(5) = 5 \quad (2.19)$$

This requirement breaks $\mathbb{S}_5$ down to one of the five possible $\mathbb{S}_4$ subgroups living inside $\mathbb{S}_5$, and leads to the following features:

(a) the traceless condition (2.3) of the orthogonal $SU_5^\perp$ is solved as $t_5 = -(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)$; it is manifestly $\mathbb{S}_4$ -invariant. To deal with this t_5 weight, we shall think about the breaking of $\mathbb{S}_5$ down to $\mathbb{S}_4$ in terms of the descent of the symmetry $SU_5 \times U(1)^{5-k} \times \Gamma_k$ from $k = 5$ to $k = 4$ as follows [58,59]

$$\begin{aligned} SU_5 \times U(1)^{5-5} \times \mathbb{S}_5 &\rightarrow SU_5 \times U(1)^{5-4} \times \mathbb{S}_4 \\ &\sim SU_5 \times \mathbb{S}_4 \times U(1) \end{aligned} \quad (2.20)$$

(b) the spectral covers $\mathcal{C}_5$ and $\mathcal{C}_{10}$ split as the product of two factors: (α) the spectral cover $\mathcal{C}_5$ factorises like $\mathcal{C}_4 \times \mathcal{C}_1$ with

$$\mathcal{C}_4 = A_0 \prod_{i=1}^4 (s - t_i), \quad \mathcal{C}_1 = a_0 (s - t_5) \quad (2.21)$$

and²

² The holomorphic sections A_l and a_m eqs. (2.21) are directly derived by expanding the factorised forms of the spectral covers $\mathcal{C}_4$ and $\mathcal{C}_1$; we will not give these details here; for example the relevant A_4 and a_1 are given by $A_4 = A_0 \prod_{i=1}^4 t_i$ and $a_1 = -a_0 t_5$.

$$\begin{aligned} b_0 &= A_0 \times a_0 \\ b_5 &= A_4 \times a_1 \end{aligned} \quad (2.22)$$

together with the transformations following from (2.14)–(2.15). Notice that the above factorisations put conditions on the field $\mathcal{K}$ where live the holomorphic sections; a feature that is also predicted by Galois theory [28,29]. As a naive illustration, we use the comparison with arithmetics in the set of integers $\mathcal{Z}$; an integer number like 6 can be factorised in $\mathcal{Z}$ as $6 = 2 \times 3$, while a prime integer like 5 has no factorisation.

By using $C'_5 = C'_4 \times C'_1$ and equating $e^{i(\zeta-\phi)} (C_4 \times C_1)$ with $(e^{i\xi} C_4) \times (e^{i\psi} C_1)$, it follows that $\zeta - \phi = \xi + \psi$, and

$$\begin{aligned} A'_4 &= e^{i\xi} A_4 \\ a'_1 &= e^{i(\zeta-\xi-\phi)} a_1 \end{aligned} \quad (2.23)$$

from which we learn that A_4 and a_1 sections transform differently, and then $Z_2(b_4) = Z_2(A_4) \times Z_2(a_1)$. (β) the C_{10} splits in turns like $\tilde{C}_6 \times \tilde{C}_4$ with

$$C_6 = \tilde{A}_0 \prod_{j>i=1}^4 (s - T_{ij}), \quad C_4 = \tilde{a}_0 \prod_{i=1}^4 (s - T_{i5}) \quad (2.24)$$

and

$$\begin{aligned} d_0 &= \tilde{A}_0 \times \tilde{a}_0 \\ d_{10} &= \tilde{A}_6 \times \tilde{a}_4 \end{aligned} \quad (2.25)$$

as well as $\tilde{C}_6 = e^{2i\tilde{\xi}} \tilde{C}_6$ and $\tilde{C}_4 = e^{2i\tilde{\psi}} \tilde{C}_4$ with $\tilde{\xi} + \tilde{\psi} = \tilde{\zeta} - \phi$.

Under the above splitting, the spectrum (2.7) decomposes in terms of reducible $\mathbb{S}_4$ multiplets as follows

Curves	Weights	S_4	$U_1^\perp$	Homology	Sections	Z_2	$U(1)_Y$ flux
10_{t_i}	t_i	4	0	$\eta - 4c_1 + \chi$	A_4	κ_4	N
10_{t_5}	t_5	1	1	$-\chi - c_1$	a_1	κ_1	$-N$
$5_{t_i+t_j}$	t_i+t_j	6	0	$\eta' - 6c_1 + \tilde{\chi}$	$\tilde{A}_6$	$\tilde{\kappa}_6$	N
$5_{t_i+t_5}$	t_i+t_5	4	1	$-\tilde{\chi} - 4c_1$	$\tilde{a}_4$	$\tilde{\kappa}_4$	$-N$

with

$$\begin{aligned} A_4 &= A_0 \prod_{i=1}^4 t_i, & \tilde{A}_6 &= \tilde{A}_0 \prod_{j>i=1}^4 T_{ij} \\ a_1 &= a_0 t_5, & \tilde{a}_4 &= \tilde{a}_0 \prod_{i=1}^4 T_{i5} \end{aligned} \quad (2.27)$$

and where κ_i and $\tilde{\kappa}_k$ refer to Z_2 parities; for instance

$$\begin{aligned} \kappa_4 &= Z_2(A_4), & \tilde{\kappa}_6 &= Z_2(\tilde{A}_6) \\ \kappa_1 &= Z_2(a_1), & \tilde{\kappa}_4 &= Z_2(\tilde{a}_4) \\ \kappa_4 \kappa_1 &= Z_2(b_5), & \tilde{\kappa}_4 \tilde{\kappa}_6 &= Z_2(d_{10}) \end{aligned} \quad (2.28)$$

The last column of eq. (2.26) refers to the hyperflux of the $U(1)_Y$ gauge field strength; it breaks SU_5 gauge symmetry down to standard model gauge invariance, and also pierces the matter curves of the model as shown in table.

2.2.2. $\mathbb{S}_3$ -model in standard approach

The breaking of $\mathbb{S}_5$ down to $\mathbb{S}_3$ may be obtained from above $\mathbb{S}_4$ model by further breaking $\mathbb{S}_4$ down to $\mathbb{S}_3$; this corresponds to $SU_5 \times U(1)^{5-5} \times \mathbb{S}_5 \rightarrow SU_5 \times U(1)^{5-3} \times \mathbb{S}_3$. This can be realised by fixing one of the four t_i roots, say t_4 , so that the breaking pattern is given by

$$\begin{aligned} SU_5 \times U(1)^{5-5} \times \mathbb{S}_5 &\rightarrow SU_5 \times U(1)^{5-3} \times \mathbb{S}_3 \\ &\sim SU_5 \times \mathbb{S}_3 \times U(1)^2 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Setting $U(1)^2 = U_1^\perp \times U_1^\perp$, the previous $\mathbb{S}_4$ spectrum decomposes into reducible $\mathbb{S}_3$ multiplets as follows,

Curves	$\mathbb{S}_3$	$U_1^\perp \times U_1^\perp$	Homology	Section	$U(1)_Y$ flux
10_{t_i}	3	(0, 0)	$\eta - 3c_1 - \chi - \chi'$	A'_3	$-N - P$
10_{t_4}	1	(1, 0)	$\chi' - c_1$	A'_1	P
10_{t_5}	1	(0, 1)	$\chi - c_1$	a_1	N
$5_{t_i+t_j}$	3	(0, 0)	$\eta' - 3c_1 - \tilde{\chi} - \tilde{\chi}'$	$\tilde{A}'_3$	$-N - P$
$5_{t_i+t_4}$	3	(1, 0)	$\tilde{\chi}' - 3c_1$	$\tilde{A}''_3$	P
$5_{t_i+t_5}$	3	(0, 1)	$\tilde{\chi} - 3c_1 - \tilde{\chi}'$	$\tilde{a}'_3$	$N - P$
$5_{t_4+t_5}$	1	(1, 1)	$\tilde{\chi}' - c_1$	$\tilde{a}''_1$	P

(2.30)

with

$$b_5 = (A'_3 A'_1) \times a_1, \quad d_{10} = (\tilde{A}'_3 \tilde{A}''_3) \times (\tilde{a}'_3 \tilde{a}''_1) \quad (2.31)$$

where A'_3, A'_1, a_1 and $\tilde{A}'_3, \tilde{A}''_3, \tilde{a}'_3, \tilde{a}''_1$ are given by relations of form as in (2.27). An extra column for Z_2 -parity can be also added as in (2.26) with the property

$$\begin{aligned} Z_2(b_5) &= Z_2(A'_3) \times Z_2(A'_1) \times Z_2(a_1) \\ Z_2(d_{10}) &= Z_2(\tilde{A}'_3) \times Z_2(\tilde{A}''_3) \times Z_2(\tilde{a}'_3) \times Z_2(\tilde{a}''_1) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Observe also that here we have two new homology class cycles χ and χ' with

$$\int_{\chi} \mathcal{F}_X = N, \quad \int_{\chi'} \mathcal{F}_X = P \quad (2.33)$$

The non-zero P is responsible for the second splitting; this is because the breaking of $\mathbb{S}_5$ down to $\mathbb{S}_3$ has been undertaken into two stages: first $\mathbb{S}_5 \rightarrow \mathbb{S}_4$; and second $\mathbb{S}_4 \rightarrow \mathbb{S}_3$. In what follows we extend this idea to the breaking pattern of $\mathbb{S}_5$ down to $\mathbb{D}_4$.

3. Revisiting $\mathbb{S}_4$ and $\mathbb{S}_3$ -models

In this section, we develop tools towards the study of the breaking of $\mathbb{S}_5$ monodromy down to its $\mathbb{D}_4$ sub-symmetry. To our knowledge these tools, have not been used before, even for $\mathbb{S}_n$ permutation groups, so we begin by revisiting the $\mathbb{S}_4$ - and $\mathbb{S}_3$ -models from the view of characters of their irreducible representations, and turn in next section to develop the $\mathbb{D}_4$ theory.

3.1. $SU_5 \times \mathbb{S}_4 \times U_1^\perp$ model

In the canonical t_i -weight basis, the matter spectrum of $\mathbb{S}_4$ -model is given by (2.26); there matter curves are organised into *reducible* multiplets of $\mathbb{S}_4 \times U_1^\perp$. Below, we give another manner to approach the spectrum of $\mathbb{S}_4$ -model.

By help of the standard relation $24 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2$ showing that $\mathbb{S}_4$ has 5 *irreducible* representations $\mathbf{R}_i$ and 5 *conjugacy* classes $\mathfrak{C}_i$ [39–42], and by using properties of the irreducible $\mathbf{R}_i$ representations of $\mathbb{S}_4$ given in appendix, eq. (2.26) may be expressed in terms of the $\mathbf{R}_i$ s and their $\chi_R^{(a,b,c)}$ characters as follows

Curves	Weights	Irrep $\mathbb{S}_4$	$\chi_R^{(a,b,c)}$	$U_1^\perp$	Homology	$U(1)_Y$ flux
10_{x_i}	x_i	3	$(1, 0, -1)$	0	$\eta - 3c_1$	0
10_{x_4}	x_4	1	$(1, 1, 1)$	0	$\chi - c_1$	N
10_{t_5}	t_5	1	$(1, 1, 1)$	1	$-\chi - c_1$	$-N$
$5_{X_{ij}}$	X_{ij}	3'	$(-1, 0, 1)$	0	$\eta' - 3c_1$	0
$5_{X_{i4}}$	X_{i4}	3	$(1, 0, -1)$	0	$-3c_1 + \chi'$	N
$5_{X_{i5}}$	X_{i5}	3	$(1, 0, -1)$	0	$-3c_1 - \chi'$	$-N$
$5_{X_{45}}$	X_{45}	1	$(1, 1, 1)$	1	$-c_1$	0

(3.1)

Notice that $\mathbb{S}_4$ has three generators denoted here by (a, b, c) and chosen as given by 2-, 3- and 4-cycles; they obey amongst others the cyclic properties $a^2 = b^3 = c^4 = I_{id}$; these three generators are non-commuting permutation operators making extraction of full information from them a difficult task, but part of these information is given their $\chi_R^{(a,b,c)}$'s; these characters are real numbers as collected in following table [39–42],

χ_{ij}	χ_I	$\chi_{3'}$	χ_2	χ_3	χ_ϵ
a	1	-1	0	1	-1
b	1	0	-1	0	1
c	1	1	0	-1	-1

(3.2)

Notice also that the **4**- and **6**-representations of $\mathbb{S}_4$, which have been used in the canonical formulation of section 2, are decomposed in (3.1) as direct sums of irreducible components as follows:

$$\begin{aligned} \mathbf{4}_{(2,1,0)} &= \mathbf{1}_{(1,1,1)} \oplus \mathbf{3}_{(1,0,-1)} \\ \mathbf{6}_{(0,0,0)} &= \mathbf{3}_{(1,0,-1)} \oplus \mathbf{3}'_{(-1,0,1)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Notice moreover that the previous t_i -weights are now replaced by new quantities x_i given by some linear combinations of the t_i 's fixed by representation theory of $\mathbb{S}_4$. One of these weights, say x_4 , is given by the usual completely $\mathbb{S}_4$ -symmetric term

$$x_4 \sim (t_1 + t_2 + t_3 + t_4) \quad (3.4)$$

transforming in the trivial representation of $\mathbb{S}_4$; the three other x_i are given by some orthogonal linear combinations of the four t_i 's that we express as follows

$$x_i = \alpha_i t_1 + \beta_i t_2 + \gamma_i t_3 + \delta_i t_4 \quad (3.5)$$

These three weights transform as an irreducible triplet of $\mathbb{S}_4$; but seen that we have two kinds of 3-dim representations in $\mathbb{S}_4$ namely **3** and **3'**, the explicit expressions of (3.5) depend in which

of the two representations the x_i s are sitting; details are reported in appendix where one also finds the relationships $t_\mu = U_{\mu\rho}x_\rho$ and $t_\mu \pm t_\nu = (U_{\mu\rho} \pm U_{\nu\rho})x_\rho$. Notice finally that the explicit expressions of $X_{\mu\nu}$ weights in (3.1) are not needed in our approach; their role will be played by the characters of the representations.

3.2. $SU_5 \times \mathbb{S}_3 \times (U_1^\perp)^2$ model

The spectrum of GUT-curves of the $SU_5 \times \mathbb{S}_3 \times (U_1^\perp)^2$ model follows from the spectrum of the $SU_5 \times \mathbb{S}_5$ theory by using splitting spectral method. By working in the canonical basis for t_i -weights, this spectrum, expressed in terms of reducible multiplets, is given by (2.30). Here, we revisit the $SU_5 \times \mathbb{S}_3 \times (U_1^\perp)^2$ curves spectrum by using irreducible representations of $\mathbb{S}_3$ and their characters.

We start by recalling that $\mathbb{S}_3$ has three irreducible representations as shown of the usual character relation $6 = 1^2 + 1'^2 + 2^2$ linking the order of $\mathbb{S}_3$ to the squared dimensions of its irreducible representations; these irreducible representations are nicely described in terms of Young diagrams [42]

$$1: \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array}, \quad 2: \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}, \quad 1': \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \quad (3.6)$$

The group $\mathbb{S}_3$ is a non-abelian discrete group; it has two non-commuting generators (a, b) satisfying $a^2 = b^3 = 1$ with characters as follows

χ_R	χ_I	χ_2	χ_ϵ
a	1	0	-1
b	1	-1	1

(3.7)

The spectrum of matter curves in the $\mathbb{S}_3$ -model is obtained here by starting from the $\mathbb{S}_4$ spectrum (t_1, t_2, t_3) (2.30); and then breaking $\mathbb{S}_4$ monodromy to $\mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_1$. We find

Curves	Weights	Irrep $\mathbb{S}_3$	$\chi_R^{(a,b)}$	$U_1^\perp$	Homology	$U(1)_Y$ flux
10_{x_i}	x_i	2	$(0, -1)$	0	$\eta - 2c_1 - \chi'$	$-P$
10_{x_3}	x_3	1	$(1, 1)$	0	$-\chi - c_1$	$-N$
10_{x_4}	x_4	1	$(1, 1)$	0	$\chi' - c_1$	P
10_{t_5}	t_5	1	$(1, 1)$	1	$\chi - c_1$	N
$5_{X_{ij}}$	X_{ij}	2	$(0, -1)$	0	$\eta' - 2c_1$	0
$5_{X_{i3}}$	X_{i3}	1	$(-1, 1)$	0	$-c_1 - \chi' - \chi$	$-P - N$
$5_{X_{i4}}$	X_{i4}	2	$(0, -1)$	0	$-2c_1$	0
$5_{X_{34}}$	X_{34}	1	$(1, 1)$	0	$\chi' - c_1$	P
$5_{X_{i5}}$	X_{i5}	2	$(0, -1)$	0	$-2c_1$	0
$5_{X_{35}}$	X_{35}	1	$(1, 1)$	0	$-c_1 - \chi' + \chi$	$N - P$
$5_{X_{45}}$	X_{45}	1	$(1, 1)$	1	$\chi' - c_1$	P

(3.8)

where the integers P and N are as in eq. (2.33).

4. $SU_5 \times \mathbb{D}_4$ models

First notice that the engineering of the $SU_5 \times \mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ theory has been recently studied in [16] by using Galois theory, but here we use a method based on characters of the irreducible representations of $\mathbb{D}_4$, and find at the end that there are in fact three kinds of $SU_5 \times \mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ models, they are explicitly constructed in this section. To that purpose, we first review useful aspects on characters of the dihedral group, then we turn to construct the three $\mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ models.

4.1. Characters in $\mathbb{D}_4$ models

The dihedral $\mathbb{D}_4$ is an order 8 subgroup of $\mathbb{S}_4$ with no 3-cycles; there are three kinds of such subgroups inside $\mathbb{S}_4$; an example of $\mathbb{D}_4$ subgroup is the one having the following elements

$$I_{id}, \quad \begin{matrix} (24) \\ (13) \end{matrix}, \quad \begin{matrix} (13)(24) \\ (12)(34) \\ (14)(23) \end{matrix}, \quad \begin{matrix} (1234) \\ (1432) \end{matrix} \quad (4.1)$$

with non-commuting generators $a = \langle (24) \rangle$ and $b = \langle (1234) \rangle$ satisfying $a^2 = b^4 = I$ and $aba = b^3$. The two other $\mathbb{D}_4$ and $\mathbb{D}_4'$ have similar contents; but with other transpositions and 4-cycles. In terms of (a, b) generators, the eight elements (4.1) of the dihedral $\mathbb{D}_4$ reads as

$$I_{id}, \quad \begin{matrix} a \\ b^2a \end{matrix}, \quad \begin{matrix} b^2 \\ ab \\ ba \end{matrix}, \quad \begin{matrix} b \\ b^3 \end{matrix} \quad (4.2)$$

they form 5 conjugacy classes as follows

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_1 &= \{I_{id}\}, & \mathfrak{C}_2 &= \{b^2\}, & \mathfrak{C}_3 &= \{b, b^3\} \\ \mathfrak{C}_4 &= \{a\}, & \mathfrak{C}_5 &= \{ab\} \end{aligned} \quad (4.3)$$

The dihedral group $\mathbb{D}_4$ has also 5 irreducible representations R_i ; this can be directly learnt on the character formula $8 = 1_1^2 + 1_2^2 + 1_3^2 + 1_4^2 + 2^2$, linking the order of $\mathbb{D}_4$ with the sum of d_i^2 , the squares of the dimensions d_i of the irreducible R_i representations of $\mathbb{D}_4$. So, the order 8 dihedral group has four irreducible representations with 1-dim; and a fifth irreducible $\mathbb{D}_4$ -representation with 2-dim [42]. The character table of $\mathbb{D}_4$ representations is given by

$\mathfrak{C}_i \backslash \chi R_j$	$\chi 1_1$	$\chi 1_2$	$\chi 1_3$	$\chi 1_4$	$\chi 2$	Number
$\mathfrak{C}_1$	1	1	1	1	2	1
$\mathfrak{C}_2$	1	1	1	1	-2	1
$\mathfrak{C}_3$	1	1	-1	-1	0	2
$\mathfrak{C}_4$	1	-1	1	-1	0	2
$\mathfrak{C}_5$	1	-1	-1	1	0	2

(4.4)

from which we learn the following characters of the (a, b) generators

$\chi_{ij}^{(g)}$	$\chi 1_1$	$\chi 1_2$	$\chi 1_3$	$\chi 1_4$	$\chi 2$
a	1	-1	1	-1	0
b	1	1	-1	-1	0

(4.5)

For other features see [41]. With these tools at hand, we turn to engineer the $SU_5 \times \mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ models with dihedral monodromy symmetry.

4.2. Three $\mathbb{D}_4$ -models

As in the case of $\mathbb{S}_3$ monodromy, the breaking of $\mathbb{S}_4$ down to $\mathbb{D}_4$ is induced by non-zero flux piercing the curves of the $SU_5 \times \mathbb{S}_4 \times U_1^\perp$ model. Using properties from the character table of $\mathbb{D}_4$, we distinguish three kinds of models depending on the way the $\mathbb{S}_4$ -irreducible triplets have been pierced; there are three possibilities and are as described in what follows:

4.2.1. First case: $\mathbf{3} = \mathbf{1}_{+,-} \oplus \mathbf{2}_{0,0}$

In this model, the various irreducible triplets of $\mathbb{S}_4$; in particular those involved in:

- (i) the five 10-plets namely $\mathbf{5} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{1}_{t_5}$, and
- (ii) the ten 5-plets which includes the four 10-plets charged under $U_1^\perp$ namely $\mathbf{4}_{t_5} = \mathbf{1}_{t_5} \oplus \mathbf{3}_{t_5}$, and the six uncharged 10-plets given by $\mathbf{6} = \mathbf{3} \oplus \mathbf{3}'$,

are decomposed as sums of two singlets $\mathbf{1}_{p,q} + \mathbf{1}_{p',q'}$ and a doublet $\mathbf{2}_{0,0}$. The character properties of the $\mathbb{D}_4$ -representations indicate that the decompositions of the triplets should be as

$$\begin{aligned} \mathbf{3}|_{\mathbb{D}_4} &= \mathbf{1}_{+,-} \oplus \mathbf{2}_{0,0} \\ \mathbf{3}'|_{\mathbb{D}_4} &= \mathbf{1}_{-,+} \oplus \mathbf{2}_{0,0} \end{aligned} \quad (4.6)$$

By substituting these relations back into the restricted spectrum resulting from (3.1), we end with the following $SU_5 \times \mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ spectrum

- *five 10-plets*

Curves	Weights	$\mathbb{D}_4$	$\chi_{\mathbf{R}}^{(a,b)}$	$U_1^\perp$	Homology	$U(1)_Y$ flux
10_{y_i}	y_i	$\mathbf{2}$	$(0, 0)$	0	$\eta - 2c_1 - \varphi$	$-N - P$
10_{y_3}	y_3	$\mathbf{1}$	$(1, -1)$	0	$-c_1$	0
10_{y_4}	y_4	$\mathbf{1}$	$(1, 1)$	0	$\chi' - c_1$	P
10_{t_5}	t_5	$\mathbf{1}$	$(1, 1)$	1	$\chi - c_1$	N

(4.7)

where $\chi_{\mathbf{R}}^{(a,b)}$ stands for the character of the generators in the $\mathbf{R}$ representation; $\varphi = \chi + \chi'$, and the integers N and P as in eqs. (2.33). Notice that the multiplets 10_{y_4} and 10_{t_5} transform in the same trivial $\mathbb{D}_4$ -representation; but having different t_5 -charges; the 10_{y_3} transforms also as a singlet; but with character $(1, -1)$; it is a good candidate for accommodating the top-quark family.

- *ten 5-plets*

Curves	Weight	$\mathbb{D}_4$	$\chi_{\mathbf{R}}^{(a,b)}$	$U_1^\perp$	Homology	$U(1)_Y$ flux
$5_{Y_{i3}}$	Y_{i3}	2	$(0, 0)$	0	$\eta' - 2c_1 + \varphi$	$N + P$
$5_{Y_{12}}$	Y_{12}	1	$(-1, 1)$	0	$-\chi - c_1$	$-N$
$5_{Y_{i4}}$	Y_{i4}	2	$(0, 0)$	0	$-\chi' - c_1$	$-P$
$5_{Y_{34}}$	Y_{34}	1	$(1, -1)$	0	$-2c_1$	0
$5_{Y_{i5}}$	Y_{i5}	2	$(0, 0)$	1	$-\chi' - c_1$	$-P$
$5_{Y_{35}}$	Y_{35}	1	$(1, -1)$	1	$-\chi - c_1$	$-N$
$5_{Y_{45}}$	Y_{45}	1	$(1, 1)$	1	$\varphi - 2c_1$	$N + P$

(4.8)

where we have set $\varphi = \chi + \chi'$. From this table, we learn that among the ten 5-plets, two sit in the $1_{+,-}$ representation with character $(1, -1)$, but with different t_5 charges; one in $1_{-,+}$ with character $(-1, 1)$ with no t_5 charge; and a fourth in the trivial representation of $\mathbb{D}_4$ with a unit t_5 charge.

- *flavons*

Among the 24 flavons of the $SU_5 \times \mathbb{S}_4 \times U_1^\perp$ model, there are 20 ones charged under $\mathbb{D}_4$ monodromy symmetry; but because of hermitic feature, they can be organised into $\mathbf{10} \oplus \mathbf{10}'$ subsets with opposite $\mathbb{D}_4$ characters and opposite t_5 charges. Moreover due to reducibility of the 10-dim multiplet as $\mathbf{10} = \mathbf{4}_{t_5} \oplus \mathbf{6}$, which is also equal to $(\mathbf{1}_{t_5} \oplus \mathbf{3}_{t_5}) \oplus (\mathbf{3} \oplus \mathbf{3}')$; and therefore to the direct sum $\mathbf{1}_{+,+}^{t_5} \oplus (\mathbf{1}_{+,-}^{t_5} \oplus \mathbf{2}_{0,0}^{t_5})$ plus $(\mathbf{1}_{+,-} \oplus \mathbf{2}_{0,0}) + (\mathbf{1}_{-,+} \oplus \mathbf{2}_{0,0})$; one ends with (α) flavons doublets $\vartheta^i, \vartheta_{t_5}^i$ having character $(0, 0)$ with and without t_5 charges, and (β) flavon singlets having characters $(\pm 1, \pm 1)$ with and without t_5 charges; they are as collected below:

Curves	Weights	$\mathbb{D}_4$ irrep	$\chi_{\mathbf{R}}^{(a,b)}$ character	t_5 charge
$1_{\pm Z_{i3}}$	$\pm Z_{i3}$	2	$(0, 0)$	0
$1_{\pm Z_{12}}$	$\pm Z_{12}$	1	$\pm(-1, 1)$	0
$1_{\pm Z_{i4}}$	$\pm Z_{i4}$	2	$(0, 0)$	0
$1_{\pm Z_{34}}$	$\pm Z_{34}$	1	$\pm(1, -1)$	0
$1_{\pm Z_{i5}}$	$\pm Z_{i5}$	2	$(0, 0)$	∓ 1
$1_{\pm Z_{35}}$	$\pm Z_{35}$	1	$\pm(1, -1)$	∓ 1
$1_{\pm Z_{45}}$	$\pm Z_{45}$	1	$\pm(1, 1)$	∓ 1

(4.9)

4.2.2. Second case: $\mathbf{3} = \mathbf{1}_{+,-} \oplus \mathbf{1}_{+,-} \oplus \mathbf{1}_{-,+}$

This is a completely reducible model; under restriction to dihedral subsymmetry, the $\mathbf{3}$ and $\mathbf{3}'$ triplets of $\mathbb{S}_4$ are decomposed as follows

$$\begin{aligned}
 \mathbf{3}|_{\mathbb{D}_4} &= \mathbf{1}_{+,-} \oplus \mathbf{1}_{+,-} \oplus \mathbf{1}_{-,+} \\
 \mathbf{3}'|_{\mathbb{D}_4} &= \mathbf{1}_{-,+} \oplus \mathbf{1}_{-,+} \oplus \mathbf{1}_{+,-}
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

by substituting these decompositions back into the spectrum of $SU_5 \times \mathbb{S}_4 \times U_1^\perp$ -theory given by (3.1), we obtain the curves spectrum of the second $SU_5 \times \mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ -model:

- *five 10-plets*

The spectrum of the 10-plets in the $\mathbb{D}_4$ -model II can be also deduced from (4.7) by splitting the $\mathbf{2}_{0,0}$ doublet as $\mathbf{1}_{+,-} \oplus \mathbf{1}_{-,+}$; we have

Curves	$\mathbb{D}_4$ irrep	Character	$U_1^\perp$	Homology	$U(1)_Y$ flux
$10_{+,-}$	$\mathbf{1}_{+,-}$	$(1, -1)$	0	$\eta - c_1 - \chi - \chi'$	$-N - P$
$10_{-,+}$	$\mathbf{1}_{-,+}$	$(-1, 1)$	0	$-c_1$	0
$10_{+,-}$	$\mathbf{1}_{+,-}$	$(1, -1)$	0	$-c_1$	0
$10_{+,+}$	$\mathbf{1}_{+,+}$	$(1, 1)$	0	$\chi' - c_1$	P
$10_{+,+}^{t_5}$	$\mathbf{1}_{+,+}$	$(1, 1)$	1	$\chi - c_1$	N

(4.11)

Here we have two matter multiplets namely $10_{+,+}$ and $10_{+,+}^{t_5}$; they transform in the same trivial $\mathbb{D}_4$ -representation with character $(1, 1)$; but having different t_5 -charges. We also have two $10_{+,-}$ multiplets transforming in $\mathbf{1}_{+,-}$ with character $(1, -1)$; but with different fluxes; and one multiplet $10_{-,+}$ with character $(-1, 1)$; it will be interpreted in appendix B as the one accommodating the top-quark family.

• *ten 5-plets*

Curves	$\mathbb{D}_4$ irrep	$\chi_{\mathbf{R}}^{(a,b)}$	$U_1^\perp$	Homology	$U(1)_Y$ flux
$5_{+,-}$	$\mathbf{1}_{+,-}$	$(1, -1)$	0	$\eta' - c_1 + \chi + \chi'$	$N + P$
$5_{-,+}$	$\mathbf{1}_{-,+}$	$(-1, 1)$	0	$-c_1$	0
$5_{-,+}$	$\mathbf{1}_{-,+}$	$(-1, 1)$	0	$-\chi - c_1$	$-N$
$5_{+,-}$	$\mathbf{1}_{+,-}$	$(1, -1)$	0	$-\chi' - c_1$	$-P$
$5_{-,+}$	$\mathbf{1}_{-,+}$	$(-1, 1)$	0	$-c_1$	0
$5_{+,-}$	$\mathbf{1}_{+,-}$	$(1, -1)$	0	$-c_1$	0
$5_{+,-}^{t_5}$	$\mathbf{1}_{+,-}$	$(1, -1)$	1	$-\chi' - c_1$	$-P$
$5_{-,+}^{t_5}$	$\mathbf{1}_{-,+}$	$(-1, 1)$	1	$-c_1$	0
$5_{+,-}^{t_5}$	$\mathbf{1}_{+,-}$	$(1, -1)$	1	$-\chi - c_1$	$-N$
$5_{+,+}^{t_5}$	$\mathbf{1}_{+,+}$	$(1, 1)$	1	$-2c_1 + \chi + \chi'$	$N + P$

(4.12)

where N and P as in eqs. (2.33).

In this model, there is no flavon doublets; there are only singlet flavons transforming in the representations $\mathbf{1}_{+,+}$, $\mathbf{1}_{-,-}$, $\mathbf{1}_{+,-}$, $\mathbf{1}_{-,+}$ with and without t_5 charges; they are denoted in what follows as $\vartheta_{p,q}$ and $\vartheta_{p,q}^{\pm t_5}$ with $p, q = \pm 1$.

4.2.3. *Third case: $\mathbf{3} = \mathbf{1}_{+,+} \oplus \mathbf{1}_{-,-} \oplus \mathbf{1}_{+,-}$*

This $\mathbb{D}_4$ -model differs from the previous one by the characters of the singlets; since in this case the $\mathbb{S}_4$ -triplets $\mathbf{3}|_{\mathbb{S}_4}$ and $\mathbf{3}'|_{\mathbb{S}_4}$ are decomposed in terms of irreducible representations of $\mathbb{D}_4$ like

$$\begin{aligned}
 \mathbf{3}|_{\mathbb{D}_4} &= \mathbf{1}_{+,+} \oplus \mathbf{1}_{-,-} \oplus \mathbf{1}_{+,-} \\
 \mathbf{3}'|_{\mathbb{D}_4} &= \mathbf{1}_{+,+} \oplus \mathbf{1}_{-,-} \oplus \mathbf{1}_{-,+}
 \end{aligned}
 \tag{4.13}$$

Substituting these relationships back into (3.1), we get the curve spectrum of the third model namely:

• *five 10-plets*

Curves	$\mathbb{D}_4$ irrep	Character	$U_1^\perp$	Homology	$U(1)_Y$ flux
$10_{+,+}$	$\mathbf{1}_{+,+}$	$(1, 1)$	0	$\eta - c_1 - \varphi$	$-N - P$
$10_{-,-}$	$\mathbf{1}_{-,-}$	$(-1, -1)$	0	$-c_1$	0
$10_{+,-}$	$\mathbf{1}_{+,-}$	$(1, -1)$	0	$-c_1$	0
$10_{+,+}^{t_5}$	$\mathbf{1}_{+,+}$	$(1, 1)$	0	$\chi' - c_1$	P
$10_{+,+}^{t_5}$	$\mathbf{1}_{+,+}$	$(1, 1)$	1	$\chi - c_1$	N

(4.14)

Here we have three $10_{p,q}$ matter multiplets in the trivial $\mathbb{D}_4$ -representation with character $(p, q) = (1, 1)$; one of them namely $10_{+,+}^{t_5}$ having a t_5 charge and the two others not. A fourth curve $10_{+,-}$ in $1_{+,-}$ without t_5 charge nor a flux; and a fifth $10_{-,-}$ in $1_{-,-}$ with no t_5 but carrying a flux.

• *ten 5-plets*

Curves	$\mathbb{D}_4$ irrep	$\chi_{\mathbf{R}}^{(a,b)}$	$U_1^\perp$	Homology	$U(1)_Y$ flux
$5_{+,+}$	$\mathbf{1}_{+,+}$	$(1, 1)$	0	$\eta' - c_1 + \chi + \chi'$	$N + P$
$5_{-,-}$	$\mathbf{1}_{-,-}$	$(-1, -1)$	0	$-\kappa_1 \chi' - c_1$	$-\kappa_1 P$
$5_{-,+}$	$\mathbf{1}_{-,+}$	$(-1, 1)$	0	$-\chi - c_1$	$-N$
$5_{+,+}$	$\mathbf{1}_{+,+}$	$(1, 1)$	0	$-\kappa_2 \chi' - c_1$	$-\kappa_2 P$
$5_{-,-}$	$\mathbf{1}_{-,-}$	$(-1, -1)$	0	$-c_1$	0
$5_{+,-}$	$\mathbf{1}_{+,-}$	$(1, -1)$	0	$-c_1$	0
$5_{+,+}^{t_5}$	$\mathbf{1}_{+,+}$	$(1, 1)$	1	$-\kappa_1 \chi' - c_1$	$-\kappa_1 P$
$5_{-,-}^{t_5}$	$\mathbf{1}_{-,-}$	$(-1, -1)$	1	$-\kappa_2 \chi' - c_1$	$-\kappa_2 P$
$5_{+,-}^{t_5}$	$\mathbf{1}_{+,-}$	$(1, -1)$	1	$-\chi - c_1$	$-N$
$5_{+,+}^{t_5}$	$\mathbf{1}_{+,+}$	$(1, 1)$	1	$-2c_1 + \chi + \chi'$	$N + P$

(4.15)

with $\kappa_1 + \kappa_2 = 1$ whose values will be fixed by the derivation of MSSM. The ten 5-plets $5_{p,q}$ splits as follows: 4 with $p = q = 1$; the two $5_{+,+}^{t_5}$ having a t_5 charge and the two others $5_{+,+}$ chargeless; the $U_1^\perp$ charges and the (N, P) fluxes allow to distinguish the four. There are also 3 types of $5_{-,-}$ -plets; two $5_{+,-}$ and one $5_{-,+}$. This model has no flavon doublets: there are only singlet flavons $\vartheta_{p,q}$ and $\vartheta_{p,q}^{\pm t_5}$ with $p, q = \pm 1$.

5. MSSM like spectrum

First, we describe the breaking of the $SU_5 \times \mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ theory down to supersymmetric standard model, then we study the derivation of the spectrum of MSSM like model with $\mathbb{D}_4$ monodromy and where the heaviest top-quark family is singled out.

5.1. Breaking gauge symmetry

Gauge symmetry is broken by $U(1)_Y$ hyperflux; by assuming doublet–triplet splitting produced by N units of $U(1)_Y$, but still preserving $\mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$, the 10-plets and 5-plets get decomposed into irreducible representations of standard model symmetry. The 5-plets of the $SU_5 \times \mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ models with multiplicity M_5 split as [60,61]

$$\begin{aligned}
 n_{(3,1)_{-1/3}} - n_{(\bar{3},1)_{+1/3}} &= M_5 \\
 n_{(1,2)_{+1/2}} - n_{(1,2)_{-1/2}} &= M_5 + N
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

leading to a difference between number of triplets and doublets in the low energy MSSM effective theory. These two relations are important since for $N \neq 0$ the correlation is somehow relaxed; by choosing

$$M_5^{(Higgs)} = 0 \quad (5.2)$$

the coloured triplet–antitriplet fields $(3, 1)_{-1/3}$ and $(\bar{3}, 1)_{+1/3}$ in the Higgs matter curve come in pair that form heavy massive states; which decouple at low energy. Moreover, by making particular choices of the $M_5^{(matter)}$ multiplicities, we can also have the desired matter curve properties for accommodating fermion families; in particular the chirality property $n_{(1,2)_{+1/2}} \neq n_{(1,2)_{-1/2}}$ which is induced by hyperflux. Furthermore, due to the flux, we also have different numbers of down quarks d_L^c and lepton doublets L .

For the 10-plets of the GUT-model with multiplicity M_{10} , we have the following decompositions [27,62,63]

$$\begin{aligned} n_{(3,2)_{+1/6}} - n_{(\bar{3},2)_{-1/6}} &= M_{10} \\ n_{(\bar{3},1)_{-2/3}} - n_{(3,1)_{+2/3}} &= M_{10} - N \\ n_{(1,1)_{+1}} - n_{(1,1)_{-1}} &= M_{10} + N \end{aligned} \quad (5.3)$$

The first relation with $M_{10} \neq 0$ generates up-quark chirality since the number $n_{(3,2)_{+1/6}}$ of $Q_L = (3, 2)_{+1/6}$ representations differs from the number $n_{(\bar{3},2)_{+1/6}}$ of $\bar{Q}_L = (\bar{3}, 2)_{-1/6}$. With non-zero units of hyperflux, the two extra relations lead to the other desired splitting; the second relation leads for $N \neq 0$ to lifting the multiplicities between $Q = (3, 2)_{+1/6}$ and $u^c = (\bar{3}, 1)_{-2/3}$ while the third relation ensures the chirality property of e_L^c .

In what follows, we study the derivation of an effective matter curve spectrum that resembles to the field content of MSSM. In addition to three families and

$$\sum M_{10} + \sum M_5 = 0 \quad (5.4)$$

as well as total hyperflux conservation

$$\sum_{fluxes} N_i = 0 \quad (5.5)$$

we demand the following:

- only a tree-level Yukawa coupling is allowed; and is given by the top-quark family,
- the heaviest third generation is the least family affected by hyperflux,
- MSSM matter generations are in $\mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ representations,
- no dimension 4 and 5 proton decay operators are allowed,
- no μ -term at a tree level,
- two Higgs doublets H_u and H_d as required by MSSM.

5.2. Building the spectrum

Seen that there are three possible $SU_5 \times \mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ models, we focus on the first model with curve spectrum given by eqs. (4.7)–(4.8); and consider first the 10-plets; then turn after to 5-plets. Results regarding the two other models II and III are reported in appendix B.

5.2.1. Ten-plets sector in $\mathbb{D}_4$ -model I

The five 10-plets of the $\mathbb{D}_4$ model carry different quantum numbers with respect to $\mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ representations, different hyperflux units (N, P) ; and different $M_{10}^{(n)}$ multiplicities satisfying the properties (5.3). By thinking about $\sum M_{10}$ as given by the number of MSSM generations

$$\sum M_{10} = 3 \quad (5.6)$$

and taking into account that the two components of the 10_i -doublet are monodromy equivalent; it follows that one of the five 10-plets should be disregarded; at least at a tree level analysis. Moreover, using the property that top-quark 10-plet should be a $\mathbb{D}_4$ -singlet; one may choose the $M_{10}^{(n)}$'s as in following table,

Curves	$\mathbb{D}_4$ irrep	$U_1^\perp$	$U(1)_Y$ flux	Multiplicity	
10_i	$\mathbf{2}_{0,0}$	0	$-N - P$	$M_{10}^{(a)}$	2
10_3	$\mathbf{1}_{+,-}$	0	0	$M_{10}^{(3)}$	1
10_4	$\mathbf{1}_{++}$	0	P	$M_{10}^{(4)}$	0
10_5	$\mathbf{1}_{++}$	1	N	$M_{10}^{(5)}$	0

(5.7)

where chiral modes of 10_4 have been ejected ($M_{10}^{(4)} = 0$). Notice that the top-quark generation can a priori be taken in any one of the three $\mathbb{D}_4$ -singlets; that is either 10_3 or 10_4 ; or 10_5 ; the basic difference between these $\mathbb{D}_4$ -singlets is given by t_5 charge and hyperflux. But the choice of the 10_3 -multiplet looks be the natural one as it is unaffected by hyperflux, a desired property for MSSM and beyond; and has no t_5 charge

$$\mathbf{10}_3 = (Q_L, U_L^c, e_L^c) \equiv \mathbf{10}_{+,-} \quad (5.8)$$

This multiplet captures also an interesting signature of $\mathbb{D}_4$ monodromy in the sense it behaves as a $\mathbb{D}_4$ -singlet $\mathbf{1}_{+,-}$ with non-trivial character $(+1, -1)$. The importance of this feature at modelling level is twice: (i) first it fixes the quantum numbers of the 5_{H_u} Higgs representation as a $\mathbb{D}_4$ -singlet $5_{p,q}$ as shown on the tree level top-quark Yukawa coupling

$$10_{+,-} \otimes 10_{+,-} \otimes 5_{H_u} \quad (5.9)$$

Monodromy invariance of (5.9) under $\mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ requires 5_{H_u} in the trivial representation with no t_5 charge; i.e: $5_{H_u} \sim 1_{+,+}$. However, an inspection of the characters of the $U_1^\perp$ chargeless 5-plets reveals that there is no $(5_{+,+})_{t_5=0}$ in the spectrum of the $\mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ -models I and II constructed above. To bypass this constraint, we realise the role of the Higgs 5_{H_u} by allowing VEVs to come from flavons as well; in other words by thinking of 5_{H_u} as follows

$$5_{H_u} \rightarrow 5_{p,q} \otimes \vartheta_{p',q'} \quad \text{with} \quad pp' = 1, \quad qq' = 1 \quad (5.10)$$

where $\vartheta_{p',q'}$ stands for a flavon in the representation $1_{p',q'}$.

(ii) second it gives an important tool to distinguish between matter and Higgs in the 5-plets sector as manifestly exhibited by the tri-coupling $10_{+,-} \otimes \bar{5}^M \otimes \bar{5}_{H_d}$. This interaction requires matter $\bar{5}_3^M$ and Higgs $\bar{5}_{H_d}$ to be in different $\mathbb{D}_4$ -singlets $1_{p,q}$ and $1_{p',q'}$ with $pp' = 1$ and $qq' = -1$; see discussion given later on.

By choosing the hyperflux units as $N = P = 1$; and using (5.3) we obtain the matter content

Curves	$\mathbb{D}_4$	$U_1^\perp$	Flux	Matter content	$\mathbb{Z}_2$ parity
10_i	$\mathbf{2}_{0,0}$	0	-2	$2Q_L \oplus 4e_L^c$	$\kappa_{43} = -$
10_3	$\mathbf{1}_{+,-}$	0	0	$Q_L \oplus U_L^c \oplus e_L^c$	$\kappa_{42} = -$
10_4	$\mathbf{1}_{+,+}$	0	1	$U_L^c \ominus e_L^c$	$\kappa_{41} = +$
10_5	$\mathbf{1}_{+,+}$	1	1	$U_L^c \ominus e_L^c$	$\kappa_1 = +$

(5.11)

Notice that by following [16] using Galois theory, the 10-plets have been attributed $\mathbb{Z}_2$ parity charges as reported by the last column of above table. In our formulation these parities correspond to $s_i \rightarrow -s_i$ and κ_1 and $\kappa_4 = \kappa_{41}\kappa_{42}\kappa_{43}$ as in eq. (2.28); by help of (2.14) and (2.22) we obtain

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_2(b_5) &= +1, & \mathbb{Z}_2(b_0) &= -1 \\ \mathbb{Z}_2(d_{10}) &= -1, & \mathbb{Z}_2(d_0) &= -1 \end{aligned} \quad (5.12)$$

in agreement with (2.17).

5.2.2. Five-plets sector

Like for 10-plets, the ten 5-plets carry different quantum numbers of $\mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ representations, hyperflux units (N, P) and $M_5^{(n)}$ multiplicities as in (5.1). To have a matter curve spectrum that resembles to MSSM, we choose the $M_5^{(n)}$'s and the hyperflux as

Curves	$\mathbb{D}_4$ irrep	$U_1^\perp$	Homology	Flux	Multiplicity
$5_{Y_{i3}}$	$\mathbf{2}_{0,0}$	0	$\eta' - 2c_1 - \chi' + \xi'$	$-N - P$	$M_5^{(1)}$
$5_{Y_{12}}$	$\mathbf{1}_{-,+}$	0	$\chi' - c_1$	N	$M_5^{(2)}$
$5_{Y_{i4}}$	$\mathbf{2}_{0,0}$	0	$\xi' - c_1$	P	$M_5^{(3)}$
$5_{Y_{34}}$	$\mathbf{1}_{+,-}$	0	$-2c_1$	0	$M_5^{(4)}$
$5_{Y_{i5}}$	$\mathbf{2}_{0,0}$	-1	$\xi' - c_1$	P	$M_5^{(5)}$
$5_{Y_{35}}$	$\mathbf{1}_{+,-}$	-1	$\chi' - c_1$	N	$M_5^{(6)}$
$5_{Y_{45}}$	$\mathbf{1}_{+,+}$	-1	$-2c_1 - \chi' - \xi'$	$-N - P$	$M_5^{(7)}$

(5.13)

where χ' and ξ' are two classes playing similar role as in the case of breaking $\mathbb{S}_5$ monodromy down to $\mathbb{S}_3$. By using (5.4)–(5.6), we have

$$\sum M_5 = - \sum M_{10} = -3 \quad (5.14)$$

and thinking of this number as $\sum M_5 = 3 - 6$, a possible configuration for a MSSM like spectrum is given by

$$\begin{aligned} M_5^{(1)} &= 2 \\ M_5^{(2)} &= 0 \\ M_5^{(3)} &= -4 \\ M_5^{(4)} &= 0 \\ M_5^{(6)} &= 1 \\ M_5^{(7)} &= -2 \end{aligned} \quad (5.15)$$

By choosing the hyperflux as $N = P = 1$, and putting back into above table, we obtain, after relabelling, the 5-plets

Curves	$\mathbb{D}_4$	$U_1^\perp$	Flux	$M_5^{(n)}$	Matter	Parity
$(5_i^M)_0$	$\mathbf{2}_{0,0}$	0	-2	2	$2\bar{d}_L^c$	$\tilde{\kappa}_{61} = +$
$(5_{-,+}^{H_u})_0$	$\mathbf{1}_{-,+}$	0	1	0	H_u	$\tilde{\kappa}_{62} = +$
$(5_{+,-}^M)_0$	$\mathbf{1}_{+,-}$	0	1	-4	$-4\bar{d}_L^c - 3\bar{L}$	$\tilde{\kappa}_{63} = -$
$(5_{+,+}^{H_d})_{-t_5}$	$\mathbf{1}_{+,+}$	-1	1	0	$-H_d$	$\tilde{\kappa}_{41} = +$
$(5_{+,-}^M)_{-t_5}$	$\mathbf{1}_{+,-}$	-1	1	1	$\bar{d}_L^c$	$\tilde{\kappa}_{42} = +$
$(5_i^M)_{-t_5}$	$\mathbf{2}_{0,0}$	-1	-2	-2	$-2\bar{d}_L^c$	$\tilde{\kappa}_{43} = +$
$(5_i^M)_0$	$\mathbf{2}_{0,0}$	0	0	0	0	$\tilde{\kappa}_{64} = +$

(5.16)

From this table we learn that the up-Higgs 5-plet $(5_{-,+}^{H_u})_0$ has a character equal to $(-1, +1)$ and no t_5 charge; by substituting in (5.10), we obtain $5_{H_u} \sim (5_{-,+}^{H_u})_0 \otimes (\vartheta_{-,+})_0$.

We also learn that the 5-plet $(5_{+,-}^M)_0$ is the least multiplet affected by hyperflux; and because of our assumptions, it is the candidate for matter $\bar{5}_3^M$; the partner of 10_3 in the underlying SO_{10} GUT-model. With this choice, the down-type quarks tri-coupling for the third family namely $10_3 \otimes \bar{5}_3^M \otimes \bar{5}^{H_d}$; and which we rewrite like

$$10_{+,-} \otimes \bar{5}_{p,q}^M \otimes \bar{5}_{p',q'}^{H_d} \quad \text{with} \quad pp' = 1, qq' = -1 \quad (5.17)$$

This coupling requires the matter $\bar{5}_3^M$ and the down-Higgs $\bar{5}^{H_d}$ multiplets to belong to different $\mathbb{D}_4$ singlets seen that 10_3 is in $\mathbf{1}_{+,-}$ representation. However, the candidates $(\bar{5}_{-,-}^{H_d})_{t_5}$ and $\bar{5}_3^M \equiv (\bar{5}_{-,+}^M)_0$ are ruled out because of the non conservation of t_5 charge. Nevertheless, a typical diagonal mass term of third family may be generated by using a flavon $\vartheta_{-t_5}^+$ carrying -1 unit charge under $U_1^\perp$ and transforming as a trivial $\mathbb{D}_4$ singlet. This leads to the realisation $\bar{5}^{H_d} \sim (\bar{5}_{-,-}^{H_d})_{t_5} (\vartheta_{++})_{-t_5}$; and then to

$$(10_{+,-})_0 \otimes (\bar{5}_{-,+}^M)_0 \otimes (\bar{5}_{-,-}^{H_d})_{t_5} \otimes (\vartheta_{++})_{-t_5} \quad (5.18)$$

Non-diagonal 4-order coupling superpotentials with one $(10_{+,-})_0$ are as follows³

$$\begin{aligned} & (10_{+,-})_0 \otimes (10_{+,+})_0 \otimes (5_{-,+}^{H_u})_0 \otimes (\vartheta_{-,-})_0 \\ & (10_{+,-})_0 \otimes (10_{+,+})_{t_5} \otimes (5_{-,+}^{H_u})_0 \otimes (\vartheta_{-,-})_{-t_5} \\ & (10_{+,-})_0 \otimes (5_{-,+}^{H_u})_0 \otimes (10_{0,0}^i)_0 \otimes (\vartheta_{0,0}^i)_0 \\ & (10_{+,-})_0 \otimes (10_{+,-})_0 \otimes (5_{-,+}^{H_u})_0 \otimes (\vartheta_{-,-})_0 \\ & (10_{+,-})_0 \otimes (5_{-,+}^{H_u})_0 \otimes (10_{0,0}^i)_0 \otimes (\vartheta_{0,0}^i)_0 \end{aligned}$$

³ A complete classification requires also use Z_2 parity; see [16].

$$\begin{aligned}
(10_{+,+})_0 \otimes (5_{-,+}^{H_u})_0 \otimes (10_{0,0}^i)_0 \otimes (\vartheta_{0,0}^i)_0 \\
(10_{+,+})_{t_5} \otimes (5_{-,+}^{H_u})_0 \otimes (10_{0,0}^i)_0 \otimes (\vartheta_{0,0}^i)_{-t_5}
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Below, we discuss some properties of these couplings.

5.3. More on couplings in $\mathbb{D}_4$ model I

First, we study the quark sector; and turn after to the case of leptons.

5.3.1. Quark sector

From the view of supersymmetric standard model with $SU(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$ gauge symmetry; and denoting the triplet and doublet components of the Higgs 5-plets $5^{H_x} = 3^{H_x} \oplus 2^{H_x}$ respectively like $D_x \oplus H_x$, the usual tree level up/down-type Yukawa couplings in SU_5 model split like

$$\begin{aligned}
10^M . 10^M . 5^{H_u} &\rightarrow Qu^c H_u + u^c e^c D_u^c + QQ D_u^c \\
10^M . \bar{5}^M . \bar{5}^{H_d} &\rightarrow Qd^c H_d + e^c L H_d + QD_d^c L
\end{aligned} \tag{5.20}$$

They involve up/down Higgs triplets D_u^c and D_d^c , which are exotic to MSSM; but with the hyperflux $U_Y(1)$ choice we have made in $SU_5 \times \mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ model (5.11), (5.16), they are removed; therefore we have

$$\begin{aligned}
10^M . 10^M . 5^{H_u} &\rightarrow Qu^c H_u \\
10^M . \bar{5}^M . \bar{5}^{H_d} &\rightarrow Qd^c H_d + e^c L H_d
\end{aligned} \tag{5.21}$$

with right hand sides capturing same monodromy representations as left hand sides; that is Q , u^c same $\mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ representations as 10^M , and so on. In what follows, we study each of these terms separately by taking into account $\vartheta_{p,q}$ flavon contributions up to order four couplings; some of these flavons are interpreted as right neutrinos; they will be discussed at proper time.

• Up-type Yukawa couplings

Because of the $\mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ monodromy charge of the up-Higgs 5-plet like $(5_{-,+}^{H_u})_0$, there is no monodromy invariant 3-coupling type $10^M . 10^M . 5^{H_u}$. As shown by eq. (5.10), one needs to go to higher orders by implementing flavons with quantum numbers depending on the monodromy representation of the 10-plets. Indeed, by focusing on the third generation $10_3^M \equiv (10_{+,-})_0$; we can distinguish diagonal and non-diagonal interactions; an inspection of $\mathbb{D}_4$ quantum numbers of matter and Higgs multiplets reveals that we need $\mathbb{D}_4$ -charged flavons to have monodromy invariant superpotentials as shown below

$$W_{top}^{(4)} = \alpha_3 \text{Tr}[(10_{+,-})_0 \otimes (10_{+,-})_0 \otimes (5_{-,+}^{H_u})_0 \otimes (\vartheta_{-,+})_0] \tag{5.22}$$

By restricting to VEVs $\langle \vartheta_{-,+} \rangle = \rho_0$ and $\langle H_u \rangle = v_u$; this non-renormalisable coupling leads to the top quark mass term $m_t Q_3 u_3^c$ with m_t equal to $\alpha_3 v_u \rho_0$. Such a term should be thought of as a particular contribution to a general up-quark mass terms $u_i^c M^{ij} u_j$ with 3×3 mass matrix as follows

$$M_{u,c,t} = v_u \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & \alpha_3 \rho_0 \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

where the (*)s refer to contributions coming from other terms including non-diagonal couplings; one of them is

$$Tr[(10_{+,-})_0 \otimes (5_{-,+}^{H_u})_0 \otimes (10_{0,0})_0 \otimes (\vartheta_{0,0})'_0] \quad (5.24)$$

it involves a 10-plet doublet $(10_{0,0})_0 \equiv (10_i)_0$ and a flavon doublet $(\vartheta_{0,0})'_0 \equiv (\vartheta_i)'_0$ with VEVs (ρ_1, ρ_2) ; the latter $(\vartheta_{0,0})'_0$ will be combined the 10_i -plet doublet like $(10_{0,0})_0 \otimes (\vartheta_{0,0})'_0$ to make a scalar. Indeed, the tensor product can be reduced as direct sum over irreducible representations of $\mathbb{D}_4$ having amongst others the $\mathbb{D}_4$ -component

$$S_{-,-} = (10_{0,0})_0 \otimes (\vartheta_{0,0})'_0|_{-,-} \quad (5.25)$$

with $(-, -)$ charge character. This negative charge is needed to compensate the $(-, -)$ charge coming from $(10_{+,-})_0 \otimes (5_{-,+}^{H_u})_0$. Restricting to quarks, this reduction corresponds to $(10_{0,0})_0 \otimes (\vartheta_{0,0})'_0 \rightarrow Q_i \otimes \rho_i$ with

$$Q_i \otimes \rho_i|_{(-,-)} = Q_1 \rho_2 - Q_2 \rho_1 \quad (5.26)$$

Putting back into (5.24), and thinking of $S_{-,-}$ in terms of the linear combination $\alpha_2(Q_1 \rho_2 - Q_2 \rho_1)$ of quarks, we obtain $\alpha_2 v_u (Q_1 \rho_2 - Q_2 \rho_1) u_3^c$; which can be put into the form $u_i^c M^{ij} u_j$ with mass matrix as

$$M_{u,c,t} = v_u \begin{pmatrix} * & * & \alpha_2 \rho_2 \\ * & * & -\alpha_2 \rho_1 \\ * & * & \alpha_3 \rho_0 \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

One can continue to fill this mass matrix by using the VEV's of other flavons; however to do that, one needs to rule out couplings with those flavons describing right neutrinos ν_i^c . Extending ideas from [16], the 3 generations of the right handed neutrinos ν_i^c in $SU_5 \times \mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ model should be as

$$\begin{aligned} \nu_3^c &\rightarrow (\vartheta_{+,-})_0 \\ (\nu_1^c, \nu_2^c)^\top &\rightarrow (\vartheta_{0,0})_0 \end{aligned} \quad (5.28)$$

with the following features among the set of 15 flavons of the model

Flavons	SU_5	$\mathbb{D}_4$ irrep	$U_1^\perp$	Z_2 Parity	VEV
$(\vartheta_{0,0})'_0$	1	2	0	+	$(\rho_1, \rho_2)^\top$
$(\vartheta_{-,+})_0$	1	1	0	+	ρ_0
$(\vartheta_{0,0})_{\pm t_5}$	1	2	± 1	+	$(\sigma_1, \sigma_2)^\top$
$(\vartheta_{+,-})_{\pm t_5}$	1	1	± 1	+	—
$(\vartheta_{+,+})_{\pm t_5}$	1	1	± 1	$\mp$	ω
$(\vartheta_{0,0})_0 = (\nu_1^c, \nu_2^c)^\top$	1	2	0	—	—
$(\vartheta_{+,-})_0 = \nu_3^c$	1	1	0	—	—

Therefore, the contribution to (5.27) coming from the diagonal couplings of the doublets $(10_{0,0})_0$ follows from

$$W^{(4)} = Tr[(5_{-,+}^{H_u})_0 \otimes [(10_{0,0})_0 \otimes (10_{0,0})_0]|_{p,q} \otimes (\vartheta_{-,+})_0] \quad (5.30)$$

However, though monodromy invariant, this couplings cannot generate the mass term $m Q_{1,2} u_{1,2}^c$ since the matter curve $(10_{0,0})_0$ don't contain the quark $u_{1,2}^c$; so the mass matrix (5.27) for the up-type quarks is

$$M_{u,c,t} = v_u \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_2 \rho_2 \\ 0 & 0 & -\alpha_2 \rho_1 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \rho_0 \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

it is a rank one matrix; it gives mass to the third generation (top-quark), while the two first generations are massless.

Masses for lighter families

The rank one property of above mass matrix (5.31) is a known feature in GUT models building including F-Theory constructions; see for instance [36,43,44,64]. To generate masses for the up-quarks in the first two generations, different approaches have been used in literature: (i) approach based on flux corrections using non-perturbative effects [20] or non-commutative geometry [21]; and (ii) method using δW deformations of the GUT superpotential W by higher order chiral operators [14,43,44,64–66]. Following the second way of doing, masses to the two lighter families are generated by higher dimensional operators corrections that are invariant under $\mathbb{D}_4$ symmetry and Z_2 parity. This invariance requirement leads to involve 6- and 7-dimensional chiral operators which contribute to the up-quark mass matrix as follows

$$\delta W = \sum_{i=1}^5 x_i \delta W_i \quad (5.32)$$

with

$$\begin{aligned} \delta W_1 &= (10_{0,0}^i)_0 \otimes (10_{+,+})_0 \otimes (5_{-,+}^{H_u})_0 \otimes (\vartheta_{0,0}^i)_{-t_5} \otimes (\vartheta_{+,+})_{t_5} \\ \delta W_2 &= (10_{0,0}^i)_0 \otimes (10_{+,+})_{t_5} \otimes (5_{-,+}^{H_u})_0 \otimes (\vartheta_{0,0}^i)_{-t_5} \otimes (\vartheta_{0,0}^i)_{-t_5} \otimes (\vartheta_{+,+})_{t_5} \\ \delta W_3 &= (10_{0,0}^i)_0 \otimes (10_{+,+})_{t_5} \otimes (5_{-,+}^{H_u})_0 \otimes (\vartheta_{0,0}^i)_{-t_5} \otimes (\vartheta_{+,-})_{-t_5} \otimes (\vartheta_{+,+})_{t_5} \end{aligned} \quad (5.33)$$

and

$$\begin{aligned} \delta W_4 &= (10_{+,-})_0 \otimes (10_{+,+})_0 \otimes (5_{-,+}^{H_u})_0 \otimes (\vartheta_{-,+})_0 \otimes (\vartheta_{+,-})_{-t_5} \otimes (\vartheta_{+,+})_{t_5} \\ \delta W_5 &= (10_{+,-})_0 \otimes (10_{+,+})_{t_5} \otimes (5_{-,+}^{H_u})_0 \otimes (\vartheta_{0,0}^i)_{-t_5}^2 \otimes (\vartheta_{+,+})_{t_5} \end{aligned} \quad (5.34)$$

Notice that the adjunction of $(\vartheta_{+,+})_{t_5}$ chiral superfield is required by invariance under Z_2 parity. Using this deformation, a higher rank up-quark mass matrix is obtained as usual by giving VEVs to flavons as in (5.29) and $\langle (\vartheta_{+,-})_{-t_5} \rangle = \varphi$. By calculating the product of the operators in eqs. (5.33)–(5.34) using $\mathbb{D}_4$ fusion rules, we obtain

$$\begin{aligned} x_1 \delta W_1 &= (10_{0,0}^i)_0 \otimes (10_{+,+})_0 \otimes (5_{-,+}^{H_u})_0 \otimes (\vartheta_{0,0}^i)_{-t_5} \otimes (\vartheta_{+,+})_{t_5} \\ &= x_1 v_u (Q_1 \sigma_1 - Q_2 \sigma_2) u_2^c \omega \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} x_2 \delta W_2 &= (10_{0,0}^i)_0 \otimes (10_{+,+})_{t_5} \otimes (5_{-,+}^{H_u})_0 \otimes (\vartheta_{0,0}^i)_{-t_5} \otimes (\vartheta_{+,-})_{-t_5} \otimes (\vartheta_{+,+})_{t_5} \\ &= x_2 v_u (Q_1 \sigma_2 - Q_2 \sigma_1) u_1^c \omega \varphi \end{aligned} \quad (5.35)$$

The operator

$$\left(10_{0,0}^i\right)_0 \otimes \left(10_{+,+}\right)_{t_5} \otimes \left(5_{-,+}^{H_u}\right)_0 \otimes \left(\vartheta_{0,0}^i\right)_{-t_5} \otimes \left(\vartheta_{0,0}^i\right)_{-t_5} \otimes \left(\vartheta_{+,+}\right)_{t_5}$$

contributes in the up-quark mass matrix (5.31) as a correction to the matrix elements $m_{1,1}$ and $m_{1,2}$; it has the same role as the higher operator (5.35); so we will not take it into account in the quark mass matrix. Expanding the remaining operators by help of the $\mathbb{D}_4$ rules, we have

$$\begin{aligned} x_4 \delta W_4 &= \left(10_{+,-}\right)_0 \otimes \left(10_{+,+}\right)_0 \otimes \left(5_{-,+}^{H_u}\right)_0 \otimes \left(\vartheta_{-,+}\right)_0 \otimes \left(\vartheta_{+,-}\right)_{-t_5} \otimes \left(\vartheta_{+,+}\right)_{t_5} \\ &= x_4 v_u \rho_0 \varphi \omega Q_3 u_2^c \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} x_5 \delta W_5 &= \left(10_{+,-}\right)_0 \otimes \left(10_{+,+}\right)_{t_5} \otimes \left(5_{-,+}^{H_u}\right)_0 \otimes \left(\vartheta_{0,0}^i\right)_{-t_5}^2 \otimes \left(\vartheta_{+,+}\right)_{t_5} \\ &= x_5 v_u \omega Q_3 u_1^c (\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_1) = 0 \end{aligned}$$

Summing up all contributions, we end with the following up-quark matrix

$$M_{u,c,t} = v_u \begin{pmatrix} x_2 \sigma_1 \omega \varphi & x_1 \omega & \alpha_2 \rho_2 \\ -x_2 \sigma_1 \omega \varphi & -x_1 \omega & -\alpha_2 \rho_1 \\ 0 & x_4 \rho_0 \varphi \omega & \alpha_4 \rho_0 \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

• Down-type Yukawa

Following the same procedure as in up-Higgs type coupling, we can build invariant operators for the down-type Yukawa

$$\begin{aligned} &\left(10_{+,-}\right)_0 \otimes \left(\bar{5}_{+,-}^M\right)_0 \otimes \left(\bar{5}_{+,+}^{H_d}\right)_{t_5} \otimes \left(\vartheta_{+,+}\right)_{-t_5} \\ &\left(\bar{5}_{+,-}^M\right)_0 \otimes \left(\bar{5}_{+,+}^{H_d}\right)_{t_5} \otimes \left(10_{0,0}\right)_0 \otimes \left(\vartheta_{0,0}\right)_{-t_5} \end{aligned} \quad (5.37)$$

Restricting VEV of down Higgs $\langle H_d \rangle = v_d$, and using the flavons VEVs as in (5.29) as well as taking into account multiplicities, the first coupling gives a mass term of the form $m_i d_i^c Q_3$ with $m_i = \omega v_d y_{3,i}$ where $y_{3,i}$ are coupling constants. For the second term, we need to reduce $\left(10_{0,0}\right)_0 \otimes \left(\vartheta_{0,0}\right)_{-t_5}$ into irreducible $\mathbb{D}_4$ representations; and restricts to the component $S_{(+,-)} = Q_i \otimes \sigma_i|_{(+,-)}$ with

$$S_{(+,-)} = Q_1 \sigma_1 + Q_2 \sigma_2 \quad (5.38)$$

So the couplings in eqs. (5.37) may expressed like

$$y_{3,i} Q_3 d_i^c \omega v_d + y_{1,i} (Q_1 \sigma_1 + Q_2 \sigma_2) d_i^c v_d \quad (5.39)$$

leading to the mass matrix

$$m_{d,s,b} = v_d \begin{pmatrix} y_{1,1} \sigma_1 & y_{1,2} \sigma_1 & y_{1,3} \sigma_1 \\ y_{1,1} \sigma_2 & y_{1,2} \sigma_2 & y_{1,3} \sigma_2 \\ y_{3,1} \omega & y_{3,2} \omega & y_{3,3} \omega \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

5.3.2. Lepton sector

First we consider the charged leptons; and then turn to neutrinos.

• Charged leptons

Charged leptons masses are determined by the same operators used in the case of the down quark sector $10^M \otimes \bar{5}^M \otimes \bar{5}^{H_d}$; using spectrum eqs. (5.11), (5.16), the appropriate operators which provide mass to charged leptons are

$$\begin{aligned} & (10_{+,-})_0 \otimes (\bar{5}_{+,-}^M)_0 \otimes (\bar{5}_{+,+}^{H_d})_{t_5} \otimes (\vartheta_{+,+})_{-t_5} \\ & (10_{0,0})_0 \otimes (\bar{5}_{+,-}^M)_0 \otimes (\bar{5}_{+,+}^{H_d})_{t_5} \otimes (\vartheta_{0,0})_{-t_5} \end{aligned} \quad (5.41)$$

giving the lepton mass term $m^{ij} e_i^c L_j$ with mass matrix

$$m_{e,\mu,\tau} = v_d \begin{pmatrix} z_{1,1}\sigma_1 & z_{1,2}\sigma_1 & z_{1,3}\sigma_1 \\ z_{1,1}\sigma_2 & z_{1,2}\sigma_2 & z_{1,3}\sigma_2 \\ z_{3,1}\omega & z_{3,2}\omega & z_{3,3}\omega \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

• Neutrinos

Right handed neutrinos are as in eq. (5.28), they have negative R-parity. Dirac neutrino term is embedded in the coupling $(\nu_i^c \otimes \bar{5}^M) \otimes 5^{H_u}$ where the right neutrino ν_i^c is an SU_5 singlet; it allows a total neutrino mass matrix using see-saw I mechanism [18]. The invariant operators that give the Dirac neutrino in $SU_5 \times \mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ model are

$$\begin{aligned} & x_{1,i} (\vartheta_{+,-})_0 \otimes (\bar{5}_{+,-}^M)_0 \otimes (5_{-,+}^{H_u})_0 \otimes (\vartheta_{-,+})_0 \\ & x_{2,i} (\vartheta_{0,0})_0 \otimes (\bar{5}_{+,-}^M)_0 \otimes (5_{-,+}^{H_u})_0 \otimes (\vartheta_{0,0})'_0 \end{aligned} \quad (5.43)$$

Using the $\mathbb{D}_4$ algebra rules and flavon VEV's, these couplings lead to

$$\begin{aligned} & x_{1,i} v_u \rho_0 L_i \nu_3^c \\ & x_{2,i} v_u \rho_2 L_i \nu_1^c - x_{2,i} v_u \rho_1 L_i \nu_2^c \end{aligned} \quad (5.44)$$

and then to a Dirac neutrino mass matrix as

$$m_D = v_u \begin{pmatrix} x_{2,1}\rho_2 & -x_{2,1}\rho_1 & x_{1,1}\rho_0 \\ x_{2,2}\rho_2 & -x_{2,2}\rho_1 & x_{1,2}\rho_0 \\ x_{2,3}\rho_2 & -x_{2,3}\rho_1 & x_{1,3}\rho_0 \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

The Majorana neutrino term is given by $M \nu_i^c \otimes \nu_j^c$; by using eqs. (5.11), (5.16), the Majorana neutrino couplings in $SU_5 \times \mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ model are as follows

$$\begin{aligned} & (\vartheta_{+,-})_0 \otimes (\vartheta_{+,-})_0 \\ & (\vartheta_{0,0})_0 \otimes (\vartheta_{0,0})_0 \\ & (\vartheta_{+,-})_0 \otimes (\vartheta_{0,0})_0 \otimes (\vartheta_{0,0})'_0 \end{aligned} \quad (5.46)$$

we can also add the singlet $(\vartheta_{-,+})_0$ as a correction of the last two operators. The operators in above (5.46) lead to

$$m \nu_3^c \nu_3^c, \quad M \nu_1^c \nu_2^c, \quad \lambda \nu_3^c (\nu_1^c \rho_1 + \nu_2^c \rho_2) \quad (5.47)$$

and ends with a Majorana neutrino mass matrix like

$$m_M = \begin{pmatrix} 0 & M & \lambda\rho_1 \\ M & 0 & \lambda\rho_2 \\ \lambda\rho_1 & \lambda\rho_2 & m \end{pmatrix} \quad (5.48)$$

The general neutrino mass matrix is calculated using see-saw I mechanism; it reads as $\mathbf{M}_\nu = -m_D m_M^{-1} m_D^\top$; and leads to the following effective neutrino mass matrix

$$\mathbf{M}_\nu \simeq \xi_0 \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{1,2} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{1,3} & m_{2,3} & m_{3,3} \end{pmatrix} \quad (5.49)$$

with

$$\begin{aligned} m_{1,1} &= \lambda^2 x_{2,1}^2 \rho_2^4 - 2x_{2,1}^2 \rho_1 \rho_2 m M + 2\lambda x_{2,1} \rho_2^2 (\lambda x_{2,1} \rho_1^2 - x_{1,1} M \rho_0) \\ &\quad + (\lambda x_{2,1} \rho_1^2 + x_{1,1} M \rho_0)^2 \\ m_{2,2} &= \lambda^2 x_{2,2}^2 \rho_2^4 - 2x_{2,2}^2 \rho_1 \rho_2 m M + 2\lambda x_{2,2} \rho_2^2 (\lambda x_{2,2} \rho_1^2 - x_{1,2} M \rho_0) \\ &\quad + (\lambda x_{2,2} \rho_1^2 + x_{1,2} M \rho_0)^2 \\ m_{3,3} &= \lambda^2 x_{2,3}^2 \rho_2^4 - 2x_{2,3}^2 \rho_1 \rho_2 m M + 2\lambda x_{2,3} \rho_2^2 (\lambda x_{2,3} \rho_1^2 - x_{1,3} M \rho_0) \\ &\quad + (\lambda x_{2,3} \rho_1^2 + x_{1,3} M \rho_0)^2 \end{aligned} \quad (5.50)$$

and

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= \lambda^2 x_{2,1} x_{2,2} \rho_2^4 - 2x_{2,1} x_{2,2} \rho_1 \rho_2 m M + (\lambda x_{2,1} \rho_1^2 + x_{1,1} \rho_0 M)(\lambda x_{2,2} \rho_1^2 + x_{1,2} \rho_0 M) \\ &\quad + \lambda \rho_2^2 [2\lambda x_{2,1} x_{2,2} \rho_1^2 - \rho_0 M (x_{1,1} x_{2,2} + x_{2,1} x_{1,2})] \\ m_{1,3} &= \lambda^2 x_{2,1} x_{2,3} \rho_2^4 - 2x_{2,1} x_{2,3} \rho_1 \rho_2 m M + (\lambda x_{2,1} \rho_1^2 + x_{1,1} \rho_0 M)(\lambda x_{2,3} \rho_1^2 + x_{1,3} \rho_0 M) \\ &\quad + \lambda \rho_2^2 [2\lambda x_{2,1} x_{2,3} \rho_1^2 - \rho_0 M (x_{1,1} x_{2,3} + x_{2,1} x_{1,3})] \\ m_{2,3} &= \lambda^2 x_{2,2} x_{2,3} \rho_2^4 - 2x_{2,2} x_{2,3} \rho_1 \rho_2 m M + (\lambda x_{2,2} \rho_1^2 + x_{1,2} \rho_0 M)(\lambda x_{2,3} \rho_1^2 + x_{1,3} \rho_0 M) \\ &\quad + \lambda \rho_2^2 [2\lambda x_{2,2} x_{2,3} \rho_1^2 - \rho_0 M (x_{1,3} x_{2,2} + x_{2,3} x_{1,2})] \end{aligned} \quad (5.51)$$

and where we have set

$$\xi_0 = \frac{v_u^2}{M(mM - 2\lambda^2 \rho_1 \rho_2)} \quad (5.52)$$

To obtain neutrino mixing compatible with experiments we need a particular parametrisation and some approximations on $\mathbf{M}_\nu$. To that purpose, recall that there are three approaches to mixing using: (i) the well know *Tribimaximal* (TBM) mixing matrix, (ii) *Bimaximal* (BM) and (iii) *Democratic* (DC); all of the TBM, BM and DC mixing matrices predict a zero value for the angle θ_{13} . However recent results reported by MINOS [24], Double Chooz [25], T2K [54], Daya Bay [55], and RENO [56] collaborations revealed a non-zero θ_{13} ; such non-zero θ_{13} has been recently subject of great interest; in particular by perturbation of the TBM mixing matrix [57].

To estimate the proper masses of the $\mathbf{M}_\nu$ matrix; we diagonalise it by using the unitary U_{TBM} TBM mixing matrix; we use the μ - τ symmetry requiring $m_{2,2} = m_{3,3}$, $m_{1,2} = m_{1,3}$; as well as the condition $m_{2,3} = m_{1,1} + m_{1,2} - m_{2,2}$. So we have $\mathbf{M}_\nu^{diag} = U_{TBM}^\top \mathbf{M}_\nu U_{TBM}$ with

$$U_{TBM} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (5.53)$$

and therefore

$$\mathbf{M}_\nu^{diag} \simeq \xi_0 \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (5.54)$$

with eigenvalues as

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \xi_0(m_{1,1} - m_{1,2}) \\ \lambda_2 &= \xi_0(m_{1,1} + 2m_{1,2}) \\ \lambda_3 &= \xi_0(2m_{3,2} - m_{1,1} - m_{1,2}) \end{aligned} \quad (5.55)$$

6. Conclusion and discussions

In this paper, we have developed a method based on characters of discrete group representations to study $SU_5 \times \mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ -GUT models with dihedral monodromy symmetry. After having revisited the construction of $SU_5 \times \mathbb{S}_4 \times U_1^\perp$ and $SU_5 \times \mathbb{S}_3 \times (U_1^\perp)^2$ models from the character representation view, we have derived three $SU_5 \times \mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ models (referred here to as I, II and III) with curves spectrum respectively given by eqs. (4.7)–(4.8), (4.11)–(4.12) and (4.14)–(4.15). These models follow from the three different ways of decomposing the irreducible $\mathbb{S}_4$ -triplets in terms of irreducible representations of $\mathbb{D}_4$; see eqs (4.6), (4.10), (4.13); such richness may be interpreted as due to the fact that $\mathbb{D}_4$ has four kinds of singlets with generator group characters given by the (p, q) pairs with $p, q = \pm 1$.

Then we have focused on the curve spectrum (4.7)–(4.8) of the first $SU_5 \times \mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ model; and studied the derivation of a MSSM-like spectrum by using particular multiplicity values and turning on adequate fluxes. We have found that with the choice of: (i) top-quark family $\mathbf{10}_3$ as $(\mathbf{10}_{+,-})_0$, transforming into a $\mathbb{D}_4$ -singlet with $\chi^{(a,b)}$ character equal to $(1, -1)$; and (ii) a 5^{H_u} up-Higgs as $(5_{-,+})_0$, transforming into a different $\mathbb{D}_4$ -singlet with character equal to $(-1, 1)$; there is no tri-Yukawa couplings of the form

$$(\mathbf{10}_{+,-})_0 \otimes (\mathbf{10}_{+,-})_0 \otimes (5^{H_u})_{++}$$

as far as $\mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ invariance is required; this makes $SU_5 \times \mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ model with two quark generations accommodated into a $\mathbb{D}_4$ -doublet non interesting phenomenologically. Monodromy invariant couplings require implementation of flavons $\vartheta_{p,q}$ by thinking of $5^{H_u} \sim (5_{-,+})_0 \otimes (\vartheta_{-,+})_0$ leading therefore to a superpotential of order 4. The same property appears with the down-Higgs couplings where $\mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ invariance of $\mathbf{10}_3 \otimes \bar{5}_3^M \otimes \bar{5}^{H_d}$ requires: (α) a matter $\bar{5}_3^M \equiv (\bar{5}_{-,+}^M)_0$ in a $U_1^\perp$ chargeless $\mathbb{D}_4$ -singlet with character $(-1, 1)$; and (β) a curve $\bar{5}^{H_d}$ with a $\mathbb{D}_4$ -character like $(\bar{5}_{-,-})_{+t_5}$ composed with a charged flavon $(\vartheta_{++})_{-t_5}$; that is as

$$(\bar{5}_{-,-})_{+t_5} \otimes (\vartheta_{++})_{-t_5}$$

By analysing the conditions that a $\mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ -spectrum has to fulfil in order to have a tri-Yukawa coupling for top-quark family $\mathbf{10}_3$, we end with the constraint that the character of 5^{H_u} up-Higgs

should be equal to $(1, 1)$ as clearly seen on $10_{+,-} \otimes 10_{+,-} \otimes 5^{H_u}$. This constraint is valid even if 10_3 was chosen like $10_{+,+}$. By inspecting the spectrum of the three studied $SU_5 \times \mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ models; it results that the spectrum of the third model given by eqs. (4.14)–(4.15) which allow tri-Yukawa coupling; for details on contents and couplings of models II and III; see appendix B.

Acknowledgements

Saidi thanks ICTP Trieste, Italy for kind hospitality where part of this work has been done.

Appendix A. Characters in $\mathbb{S}_4$ -models

In this appendix, we give details on some useful properties of Γ -models studied in this paper, in particular on the representations of $\mathbb{S}_4$ and their characters.

A.1. Irreducible representations of $\mathbb{S}_4$

First, recall that $\mathbb{S}_4$ has five *irreducible* representations; as shown on the character formula $24 = 1^2 + 1'^2 + 2^2 + 3^2 + 3'^2$; these are the 1-dim representations including the trivial **1** and the sign $\epsilon = \mathbf{1}'$; a 2-dim representation **2**; and the 3-dim representations **3** and **3'**, obeying some “duality relation”. This duality may be stated in different manners, but, in simple words, it may be put in parallel with polar and axial vectors of 3-dim Euclidean space. In the language of Young diagrams, these five irreducible representations are given by

$$\mathbf{1}: \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad \mathbf{2}: \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad \mathbf{3}: \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \quad (\text{A.1})$$

and

$$\mathbf{3}': \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array}, \quad \mathbf{1}': \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad (\text{A.2})$$

This diagrammatic description is very helpful in dealing with $\mathbb{S}_4$ representation theory [40–42], it teaches us a set of useful information, in particular helpful data on the three following:

i) Expressions of (3.5)

In the representation 3 of the permutation group $\mathbb{S}_4$, the three x_i -weights in (3.5) read in terms of the t_i 's as

$$\vec{x} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t_1 - t_2 - t_3 + t_4 \\ t_1 + t_2 - t_3 - t_4 \\ t_1 - t_2 + t_3 - t_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 - t_2 - t_3 \\ x_4 - t_3 - t_4 \\ x_4 - t_4 - t_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

where $x_4 = \frac{1}{2}(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)$ is the completely symmetric term. The normalisation coefficient $\frac{1}{2}$ is fixed by requiring the transformation $x_i = U_{ij}t_j$ as follows

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det U = 1 \quad (\text{A.4})$$

For the representation $3'$, we have

$$\vec{x}' = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} t_1 - 3t_2 + t_3 + t_4 \\ t_1 + t_2 - 3t_3 + t_4 \\ t_1 + t_2 + t_3 - 3t_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_4 - 2t_2 \\ x_4 - 2t_3 \\ x_4 - 2t_4 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

The entries of these triplets are cyclically rotated by the (234) permutation.

ii) $\mathbb{S}_4$ -triplets as 3-cycle (234)

The $\{|t_i\rangle\}$ and $\{|x_i\rangle\}$ weight bases are related by the orthogonal 5×5 matrix

$$\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad |x_i\rangle = U_{ij} |t_j\rangle \quad (\text{A.6})$$

with U as in (A.4); and then

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{2} (x_4 + x_1 + x_2 + x_3) \\ t_2 &= \frac{1}{2} (x_4 - x_1 + x_2 - x_3) \\ t_3 &= \frac{1}{2} (x_4 - x_1 - x_2 + x_3) \\ t_4 &= \frac{1}{2} (x_4 + x_1 - x_2 - x_3) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

From these transformations, we learn $t_i = U_{ki} x_k$; and then $t_i \pm t_j = (U_{ki} \pm U_{kj}) x_k$ which can be also expressed $t_i \pm t_j = V_{ij}^{\pm kl} X_{kl}^{\pm}$. Similar relations can be written down for $\{|x'_i\rangle\}$.

A.2. Characters

The discrete symmetry group $\mathbb{S}_4$ model has 24 elements arranged into five conjugacy classes $\mathfrak{C}_1, \dots, \mathfrak{C}_5$ as in table (A.8); it has five irreducible representations $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_5$ with dimensions given by the relation $24 = 1^2 + 1'^2 + 2^2 + 3^2 + 3'^2$; their character table $\chi_{ij} = \chi_{\mathbf{R}_j}(\mathfrak{C}_i)$ is as given below

$\mathfrak{C}_i \backslash \text{irrep } \mathbf{R}_j$	χ_I	$\chi_{3'}$	χ_2	χ_3	χ_ϵ	Number
$\mathfrak{C}_1 \equiv e$	1	3	2	3	1	1
$\mathfrak{C}_2 \equiv (\alpha\beta)$	1	-1	0	1	-1	6
$\mathfrak{C}_3 \equiv (\alpha\beta)(\gamma\delta)$	1	-1	2	-1	1	3
$\mathfrak{C}_4 \equiv (\alpha\beta\gamma)$	1	0	-1	0	1	8
$\mathfrak{C}_5 \equiv (\alpha\beta\gamma\delta)$	1	1	0	-1	-1	6

(A.8)

The $\mathbb{S}_4$ group has 3 non-commuting generators (a, b, c) which can be chosen as given by the 2-, 3- and 4-cycles obeying amongst others the cyclic relations $a^2 = b^3 = c^4 = I_{id}$. In our approach the character of these generators have been used in the engineering of GUT models with $\mathbb{S}_4$ monodromy, they are as follows

χ_{ij}	χ_I	$\chi_{3'}$	χ_2	χ_3	χ_ϵ
a	1	-1	0	1	-1
b	1	0	-1	0	1
c	1	1	0	-1	-1

(A.9)

In the $SU_5 \times \mathbb{S}_4$ theory considered in paper, the various curves of the spectrum of the GUT-model belong to $\mathbb{S}_4$ -multiplets which can be decomposed into irreducible representation of $\mathbb{S}_4$. In doing so, one ends with curves indexed by the characters of the generators of $\mathbb{S}_4$ as follows

$$\begin{aligned} \mathbf{4} &= \mathbf{1}_{(1,1,1)} \oplus \mathbf{3}_{(1,0,-1)} \\ \mathbf{6} &= \mathbf{3}_{(1,0,-1)} \oplus \mathbf{3}'_{(-1,0,1)} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Appendix B. Results on $SU_5 \times \mathbb{D}_4$ models II and III

In this appendix, we collect results regarding the $SU_5 \times \mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ models II and III of subsections 4.2.2 and 4.2.3. In addition to higher order terms, we also study when couplings like

Couplings	SU_5	$\mathbb{D}_4$	$U_1^\perp$	Parity
$10_i \otimes 10_j \otimes 5_{H_u}$	1	$1_{+,+}$	0	+
$10_i \otimes \bar{5}_j \otimes \bar{5}_{H_d}$	1	$1_{+,+}$	0	+
$\nu_i^c \otimes \bar{5}_M \otimes 5_{H_u}$	1	$1_{+,+}$	0	+
$m \nu_i^c \otimes \nu_j^c$	1	$1_{+,+}$	0	+

(B.1)

can be generated.

B.1. $SU_5 \times \mathbb{D}_4$ model II

The spectrum of the $SU_5 \times \mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ model II under breaking $SU_5 \times \mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ to MSSM is given by:

Curve in D_4 model II	$U_1^\perp$	Spectrum in MSSM
$10_1 = 10_{+,-}$	0	$M_1 Q_L + u_L^c (M_1 - N - P) + e_L^c (M_1 + N + P)$
$10_2 = 10_{-,+}$	0	$M_2 Q_L + u_L^c M_2 + e_L^c M_2$
$10_3 = 10_{+,-}$	0	$M_3 Q_L + u_L^c M_3 + e_L^c M_3$
$10_4 = 10_{+,+}$	0	$M_4 Q_L + u_L^c (M_4 + P) + e_L^c (M_4 - P)$
$10_5 = 10_{+,+}$	1	$M_5 Q_L + u_L^c (M_5 + N) + e_L^c (M_5 - N)$
$5_1 = 5_{+,-}$	0	$M'_1 \bar{d}_L^c + (M'_1 + N + P) \bar{L}$
$5_2 = 5_{-,+}$	0	$M'_2 \bar{d}_L^c + M'_2 \bar{L}$
$5_3 = 5_{-,+}$	0	$M'_3 \bar{D}_d + (M'_3 - N) \bar{H}_d$
$5_4 = 5_{+,-}$	0	$M'_4 D_u + (M'_4 - P) H_u$
$5_5 = 5_{-,+}$	0	$M'_5 \bar{d}_L^c + M'_5 \bar{L}$
$5_6 = 5_{+,-}$	0	$M'_6 \bar{d}_L^c + M'_6 \bar{L}$
$5_7 = 5_{+,-}^{t5}$	-1	$M'_7 \bar{d}_L^c + (M'_7 - P) \bar{L}$
$5_8 = 5_{-,+}^{t5}$	-1	$M'_8 \bar{d}_L^c + M'_8 \bar{L}$
$5_9 = 5_{+,-}^{t5}$	-1	$M'_9 \bar{d}_L^c + (M'_9 - N) \bar{L}$
$5_{10} = 5_{+,+}^{t5}$	-1	$M'_{10} \bar{d}_L^c + (M'_{10} + N + P) \bar{L}$

(B.2)

To get 3 generations of matter curves and 2 Higgs doublets of MSSM, taking into account the constraints in subsection 5.1, we make the following choice of the flux parameters, $P = -N = 1$, and

$$\begin{aligned} M_1 &= M_2 = M_3 = M_4 = -M_5 = 1 \\ M'_1 &= M'_3 = M'_4 = M'_8 = M'_{10} = 0 \\ M'_2 &= M'_5 = M'_6 = M'_9 = -M'_7 = -1 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Using the property $\sum_i M_5^i = -\sum_i M_{10}^i = -3$, the localisation of Higgs curves are as $5^{H_u} = 5_{-,+}$, $\bar{5}^{H_d} = 5_{+,-}$, and the third generation like $10_1 = 10^{M_3}$, and $5_2 = 5^{M_3}$. The distribution of the matter curves is collected in the following table:

Curve in D_4 model II	$U_1^\perp$	Spectrum in MSSM	Z_2 parity
$10_1 = 10^{M_3} = (10_{+,-})_0$	0	$Q_L + u_L^c + e_L^c$	–
$10_2 = (10_{-,+})_0$	0	$Q_L + u_L^c + e_L^c$	–
$10_3 = (10_{+,-})_0$	0	$Q_L + u_L^c + e_L^c$	–
$10_4 = (10_{+,+})_0$	0	$Q_L + 2u_L^c$	+
$10_5 = (10_{+,+})_{t_5}$	1	$-Q_L - 2u_L^c$	–
$5_1 = (5_{+,-})_0$	0	–	+
$5_2 = 5^{M_3} = (5_{-,+})_0$	0	$-\bar{d}_L^c - \bar{L}$	–
$5_3 = (5_{-,+}^{H_u})_0$	0	H_u	+
$5_4 = (5_{+,-}^{H_d})_0$	0	$-\bar{H}_d$	+
$5_5 = 5^{M_1} = (5_{-,+})_0$	0	$-\bar{d}_L^c - \bar{L}$	–
$5_6 = 5^{M_2} = (5_{+,-})_0$	0	$-\bar{d}_L^c - \bar{L}$	–
$5_7 = (5_{+,-})_{-t_5}$	–1	$\bar{d}_L^c$	+
$5_8 = (5_{-,+})_{-t_5}$	–1	–	+
$5_9 = (5_{+,-})_{-t_5}$	–1	$-\bar{d}_L^c$	+
$5_{10} = (5_{+,+})_{-t_5}$	–1	–	+

From this spectrum, we learn that we have three families of fermions, an extra vector like pairs, $d_L^c + \bar{d}_L^c$, $Q_L + \bar{Q}_L$; and two $2(u_L^c + \bar{u}_L^c)$ which are expected to get a large mass if some of the singlet states acquire large VEV's. In this $\mathbb{D}_4$ model; there are only singlet flavons transforming in the representations $1_{+,+}$, $1_{+,-}$, $1_{-,+}$; with and without t_5 charges, they are classified as $(\vartheta_{p,q})_{0,\pm t_5}$ with $p, q = \pm 1$; they lead to the following order 4-couplings

• *Up-type quark Yukawa couplings*

The allowed Yukawa couplings that are invariant under $\mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ are:

$$\begin{aligned} &(10_{+,-})_0 \otimes (10_{+,-})_0 \otimes (5_{-,+}^{H_u})_0 \otimes (\vartheta_{-,+})_0 \\ &(10_{-,+})_0 \otimes (10_{-,+})_0 \otimes (5_{-,+}^{H_u})_0 \otimes (\vartheta_{-,+})_0 \\ &(10_{+,-})_0 \otimes (10_{+,-})_0 \otimes (5_{-,+}^{H_u})_0 \otimes (\vartheta_{-,+})_0 \\ &(10_{+,-})_0 \otimes (10_{-,+})_0 \otimes (5_{-,+}^{H_u})_0 \otimes (\vartheta_{+,-})_0 \\ &(10_{-,+})_0 \otimes (10_{+,-})_0 \otimes (5_{-,+}^{H_u})_0 \otimes (\vartheta_{+,-})_0 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

• *Down-type quark Yukawa couplings*

The Yukawa couplings down-type are:

$$\begin{aligned}
 & (10_{+, -})_0 \otimes (\bar{5}_{-, +})_0 \otimes (5_{+, -}^{H_d})_0 \otimes (\vartheta_{-, +})_0 \\
 & (10_{+, -})_0 \otimes (\bar{5}_{-, +})_0 \otimes (5_{+, -}^{H_d})_0 \otimes (\vartheta_{-, +})_0 \\
 & (10_{+, -})_0 \otimes (\bar{5}_{+, -})_0 \otimes (5_{+, -}^{H_d})_0 \otimes (\vartheta_{+, -})_0 \\
 & (10_{-, +})_0 \otimes (\bar{5}_{-, +})_0 \otimes (5_{+, -}^{H_d})_0 \otimes (\vartheta_{+, -})_0 \\
 & (10_{-, +})_0 \otimes (\bar{5}_{-, +})_0 \otimes (5_{+, -}^{H_d})_0 \otimes (\vartheta_{+, -})_0 \\
 & (10_{-, +})_0 \otimes (\bar{5}_{+, -})_0 \otimes (5_{+, -}^{H_d})_0 \otimes (\vartheta_{-, +})_0 \\
 & (10_{+, -})_0 \otimes (\bar{5}_{-, +})_0 \otimes (5_{+, -}^{H_d})_0 \otimes (\vartheta_{-, +})_0 \\
 & (10_{+, -})_0 \otimes (\bar{5}_{-, +})_0 \otimes (5_{+, -}^{H_d})_0 \otimes (\vartheta_{-, +})_0 \\
 & (10_{+, -})_0 \otimes (\bar{5}_{+, -})_0 \otimes (5_{+, -}^{H_d})_0 \otimes (\vartheta_{+, -})_0
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

B.2. $SU_5 \times \mathbb{D}_4$ model III

The spectrum of the model $SU_5 \times \mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ Model III is as follows

Curves in D_4 model III	$U_1^\perp$	Spectrum in MSSM
$10_1 = 10_{+, +}$	0	$M_1 Q_L + u_L^c (M_1 - N - P) + e_L^c (M_1 + N + P)$
$10_2 = 10_{-, -}$	0	$M_2 Q_L + u_L^c M_2 + e_L^c M_2$
$10_3 = 10_{+, -}$	0	$M_3 Q_L + u_L^c M_3 + e_L^c M_3$
$10_4 = 10_{+, +}$	0	$M_4 Q_L + u_L^c (M_4 + P) + e_L^c (M_4 - P)$
$10_5 = 10_{+, +}$	1	$M_5 Q_L + u_L^c (M_5 + N) + e_L^c (M_5 - N)$
$5_1 = 5_{+, +}$	0	$M'_1 \bar{d}_L^c + (M'_1 + N + P) \bar{L}$
$5_2 = 5_{-, -}$	0	$M'_2 \bar{d}_L^c + (M'_2 - \kappa_1 P) \bar{L}$
$5_3 = 5_{-, +}$	0	$M'_3 D_u + (M'_3 - N) \bar{H}_d$
$5_4 = 5_{+, +}$	0	$M'_4 \bar{D}_d + (M'_4 - \kappa_2 P) H_u$
$5_5 = 5_{-, -}$	0	$M'_5 \bar{d}_L^c + M'_5 \bar{L}$
$5_6 = 5_{+, -}$	0	$M'_6 \bar{d}_L^c + M'_6 \bar{L}$
$5_7 = 5_{+, +}^{t_5}$	-1	$M'_7 \bar{d}_L^c + (M'_7 - \kappa_1 P) \bar{L}$
$5_8 = 5_{-, -}^{t_5}$	-1	$M'_8 \bar{d}_L^c + (M'_8 - \kappa_2 P) \bar{L}$
$5_9 = 5_{+, -}^{t_5}$	-1	$M'_9 \bar{d}_L^c + (M'_9 - N) \bar{L}$
$5_{10} = 5_{+, +}^{t_5}$	-1	$M'_{10} \bar{d}_L^c + (M'_{10} + N + P) \bar{L}$

The 3 generations of fermions and the 2 Higgs H_u , H_d are obtained by taking the fluxes like $N = -P = -1$ with $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = 1$, and

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = -M_5 = 1$$

$$\begin{aligned}
M'_1 &= M'_3 = M'_4 = M'_7 = M'_{10} = 0 \\
M'_2 &= M'_5 = M'_6 = M'_8 = -M'_9 = -1
\end{aligned} \tag{B.8}$$

We choose the Higgs curves as $5^{H_u} = (5_{+,+}^{H_u})_0$, $5^{H_d} = (5_{-,+}^{H_d})_0$ and the third 10^{M_3} , $\bar{5}^{M_3}$ generation as follow

Curves in D_4 model III	$U_1^\perp$	Spectrum in MSSM	Z_2 parity
$10_1 = 10^{M_3} = (10_{+,+})_0$	0	$Q_L + u_L^c + e_L^c$	–
$10_2 = (10_{-,-})_0$	0	$Q_L + u_L^c + e_L^c$	–
$10_3 = (10_{+,-})_0$	0	$Q_L + u_L^c + e_L^c$	–
$10_4 = (10_{+,+})_0$	0	$Q_L + 2e_L^c$	+
$10_5 = (10_{+,+})_{t_5}$	1	$-Q_L - 2e_L^c$	–
$5_1 = (5_{+,+})_0$	0	–	+
$5_2 = 5^{M_3} = (5_{-,-})_0$	0	$-\bar{d}_L^c - \bar{L}$	–
$5_3 = (5_{-,+}^{H_d})_0$	0	$-\bar{H}_d$	+
$5_4 = (5_{+,+}^{H_u})_0$	0	H_u	+
$5_5 = 5^{M_1} = (5_{-,-})_0$	0	$-\bar{d}_L^c - \bar{L}$	–
$5_6 = 5^{M_2} = (5_{+,-})_0$	0	$-\bar{d}_L^c - \bar{L}$	–
$5_7 = (5_{+,+})_{-t_5}$	–1	–	+
$5_8 = (5_{-,-})_{-t_5}$	–1	$-\bar{d}_L^c$	+
$5_9 = (5_{+,-})_{-t_5}$	–1	$\bar{d}_L^c$	+
$5_{10} = (5_{+,+})_{-t_5}$	–1	–	+

• *Up-type quark Yukawa couplings*

The allowed Yukawa couplings that are invariant under $\mathbb{D}_4 \times U_1^\perp$ and preserving parity symmetry are:

$$(10_{+,-})_0 \otimes (10_{+,-})_0 \otimes (5_{+,+}^{H_u})_0 \tag{B.10}$$

for third generation; and

$$\begin{aligned}
&(10_{-,-})_0 \otimes (10_{-,-})_0 \otimes (5_{+,+}^{H_u})_0 \\
&(10_{+,+})_0 \otimes (10_{+,+})_0 \otimes (5_{+,+}^{H_u})_0 \\
&(10_{+,+})_0 \otimes (10_{-,-})_0 \otimes (5_{+,+}^{H_u})_0 \otimes (\vartheta_{-,-})_0 \\
&(10_{+,+})_0 \otimes (10_{+,-})_0 \otimes (5_{+,+}^{H_u})_0 \otimes (\vartheta_{+,-})_0 \\
&(10_{-,-})_0 \otimes (10_{+,-})_0 \otimes (5_{+,+}^{H_u})_0 \otimes (\vartheta_{-,+})_0
\end{aligned} \tag{B.11}$$

• *Down-type quark Yukawa couplings*

The Yukawa couplings down-type are:

$$(10_{+,+})_0 \otimes (\bar{5}_{-,-})_0 \otimes (5_{-,+}^{H_d})_0 \otimes (\vartheta_{+,-})_0 \tag{B.12}$$

for third generation, and

$$\begin{aligned}
& (10_{+,+})_0 \otimes (\bar{5}_{-,-})_0 \otimes (5_{-,+}^{H_d})_0 \otimes (\vartheta_{+,-})_0 \\
& (10_{+,+})_0 \otimes (\bar{5}_{+,-})_0 \otimes (5_{-,+}^{H_d})_0 \otimes (\vartheta_{-,-})_0 \\
& (10_{-,-})_0 \otimes (\bar{5}_{-,-})_0 \otimes (5_{-,+}^{H_d})_0 \otimes (\vartheta_{-,+})_0 \\
& (10_{-,-})_0 \otimes (\bar{5}_{-,-})_0 \otimes (5_{-,+}^{H_d})_0 \otimes (\vartheta_{-,+})_0 \\
& (10_{-,-})_0 \otimes (\bar{5}_{+,-})_0 \otimes (5_{-,+}^{H_d})_0 \\
& (10_{+,-})_0 \otimes (\bar{5}_{-,-})_0 \otimes (5_{-,+}^{H_d})_0 \\
& (10_{+,-})_0 \otimes (\bar{5}_{-,-})_0 \otimes (5_{-,+}^{H_d})_0 \\
& (10_{+,-})_0 \otimes (\bar{5}_{+,-})_0 \otimes (5_{-,+}^{H_d})_0 \otimes (\vartheta_{-,+})_0
\end{aligned} \tag{B.13}$$

For the neutrino sectors in both models II and III, the couplings are embedded in the Dirac and Majorana operators as for model I; their mass matrix depend on the choice of the localisation of right neutrino in the singlet curves $\vartheta_{\pm,\pm}$.

Appendix C. Monodromy and flavor symmetry

We begin by recalling that in F-theory GUTs, quantum numbers of particle fields and their gauge invariant interactions descend from an affine E_8 singularity in the internal Calabi–Yau Geometry: $CY_4 \sim \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}_3$. The observed gauge bosons, the 4D matter generations and the Yukawa couplings of standard model arise from symmetry breaking of the underlying E_8 gauge symmetry of compactification of F-theory to 4D space time.

In this appendix, we use known results on F-theory GUTs to exhibit the link between non-abelian monodromy and flavor symmetry which relates the three flavor generations of SM. First, we briefly describe how abelian monodromy like $\mathbb{Z}_p$ appear in F-GUT models; then we study the extension to non-abelian discrete symmetries such the dihedral $\mathbb{D}_4$ we have considered in present study.

C.1. Abelian monodromy

One of the interesting field realisations of the F-theory approach to GUT is given by the remarkable $SU_5 \times SU_5^\perp$ model with basic features encoded in the internal geometry; in particular the two following useful ones: (i) the $SU_5 \times SU_5^\perp$ invariance follows from a particular breaking way of E_8 ; and (ii) the full spectrum of the field representations of the model is as in eq. (2.1). From the internal CY4 geometry view, SU_5 and $SU_5^\perp$ have interpretation in terms of singularities; the SU_5 lives on the so called GUT surface $\mathcal{S}_{GUT}$; it appears in terms of the singular locus of the following Tate form of the elliptic fibration $y^2 = x^3 + b_5xy + b_4x^2z + b_3yz^2 + b_2xz^3 + b_0z^5$; it is the gauge symmetry visible in 4D space time of the GUT model. Quite similarly, the $SU_5^\perp$ may be also imagined to have an analogous geometric representation in the internal geometry, but with different physical interpretation it lives as well on a complex surface $\mathcal{S}'$, another divisor of the base $\mathcal{B}_3$ of the complex four dimensional elliptic CY4 fibration. Obviously these two divisors are different, but intersect. Here, we want to focus on aspects of the representations of $SU_5^\perp$ appearing in eq. (2.1) and too particularly on the associated matter curves Σ_{t_i} , $\Sigma_{t_i+t_j}$, $\Sigma_{t_i-t_j}$, which are nicely described in the spectral cover method using an extra spectral parameter s . If

thinking of the hidden $SU_5^\perp$ in terms of a broken symmetry by an abelian flux or Higgsing down to its Cartan subgroup, the resulting symmetry of the GUT model becomes $U(1)^4 \times SU_5$ with⁴

$$\begin{aligned} U(1)^4 &= U(1)_1 \times U(1)_2 \times U(1)_3 \times U(1)_4 \\ &\equiv \prod_{i=1}^4 U(1)_i \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

The extra $U(1)$'s in the breaking $U(1)^4 \times SU_5$ put constraints on the superpotential couplings of the effective low energy model; the simultaneous existence of $U(1)^4$ is phenomenologically undesirable since it does not allow a tree-level Yukawa coupling for the top quark. This ambiguity is overcome by imposing abelian monodromies among the $U(1)$'s allowing the emergence of a rank one fermion mass matrix structure, see eqs. (C.4)–(C.5) given below.

Following the presentation of section 2 of this paper, the spectral covers describing the above invariance are given by polynomials with an affine variable s as in eq. (2.8), see also (2.9), (2.12), (2.13). To fix the ideas, we consider monodromy properties of 10-plets Σ_{t_i} encoded in the spectral cover equation

$$\mathcal{C}_5 : b_5 + b_3 s^2 + b_2 s^3 + b_4 s^4 + b_0 s^5 = 0 \quad (\text{C.2})$$

The location of the seven branes on GUT surface associated to this SU_5 representation is given by $b_5 = 0$. Using the method of [18,27,30,31], the possible abelian monodromies are $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ and $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$; they lead to factorisations of the $\mathcal{C}_5$ spectral cover as

$$\mathcal{C}_2 \times (\mathcal{C}_1)^3, \quad \mathcal{C}_3 \times (\mathcal{C}_1)^2, \quad \mathcal{C}_4 \times \mathcal{C}_1, \quad \mathcal{C}_3 \times \mathcal{C}_2, \quad (\mathcal{C}_2)^2 \times \mathcal{C}_1 \quad (\text{C.3})$$

and to the respective identification of the weights $\{t_1, t_2\}, \{t_1, t_2, t_3\}, \{t_1, t_2, t_3, t_4\}, \{t_1, t_2\} \cup \{t_3, t_4, t_5\}$ and $\{t_1, t_2\} \cup \{t_3, t_4\}$.

The algebraic equations for the matter curves $\Sigma_{t_i}, \Sigma_{t_i+t_j}, \Sigma_{t_i-t_j}$ in terms of the t_i weights associated with the $SU_5^\perp$ fundamental representation are respectively given by $t_i = 0, (t_i + t_j)_{i < j} = 0$ and $\pm(t_i - t_j)_{i < j} = 0$, they are denoted like $10_{t_i}, \bar{5}_{t_i+t_j}$ and $1_{\pm(t_i-t_j)}$, see eq. (2.2).

As a first step to approach non-abelian monodromies we are interested in here, it is helpful to notice the two useful following things: (a) the homology 2-cycles in the CY4 underlying $SU_5 \times U(1)^4$ invariance has monodromies captured by a finite discrete group that can be used as a constraint in the modelling. (b) From the view of phenomenology, these monodromies must be at least $\mathbb{Z}_2$ in order to have top-quark Yukawa coupling at tree level as noticed before. Notice moreover that under this $\mathbb{Z}_2$, matter multiplets of the SU_5 model split into two $\mathbb{Z}_2$ sectors⁵: even and odd; for example the two tenplets $\{10_{t_1}, 10_{t_2}\}$ are interchanged under $t_1 \leftrightarrow t_2$; the corresponding eigenstates are given by $10_{t_\pm}$ with eigenvalues ± 1 . By requiring the identification

⁴ Recall the three useful relations: (a) Let $\vec{H} = (H_1, \dots, H_4)$ the generators of the $U(1)_i$ charge factors and $E_{\pm\alpha_i}$ the step operators associated with the simple roots $\vec{\alpha}_i$, then we have $[E_{+\alpha_i}, E_{-\alpha_i}] = \vec{\alpha}_i \cdot \vec{H}$. (b) If denoting by $|\vec{\mu}\rangle$ a weight vector of the fundamental representation of $SU_5^\perp$, then we have $\vec{\alpha}_i \cdot \vec{H} |\vec{\mu}\rangle = \lambda_i |\vec{\mu}\rangle$ with $\lambda_i = \vec{\alpha}_i \cdot \vec{\mu}$. (c) using the 4 usual fundamental weight vectors $\vec{\omega}_i$ dual to the 4 simple roots, the 5 weight vectors $\{\vec{\mu}_k\}$ of the representation are: $\vec{\mu}_1 = \vec{\omega}_1, \vec{\mu}_2 = \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1, \vec{\mu}_3 = \vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2, \vec{\mu}_4 = \vec{\omega}_4 - \vec{\omega}_3, \vec{\mu}_5 = -\vec{\omega}_4$.

⁵ In general we have two $\mathbb{Z}_2$ eigenstates: $t_\pm = \frac{1}{2}(t_1 \pm t_2)$ with eigenvalues ± 1 . While any function of t_+ is $\mathbb{Z}_2$ invariant, only those functions depending on $(t_-)^2$ which are symmetric with respect to $\mathbb{Z}_2$.

$t_1 \leftrightarrow t_2$, naively realised by setting $t_1 = t_2 = t$, matter couplings in the model get restricted; therefore the off diagonal tree level Yukawa coupling

$$10_{t_1}.10_{t_2}.5_{-t_1-t_2} \quad (\text{C.4})$$

which is invariant under $SU_5 \times U(1)^4$, becomes after $t_1 \leftrightarrow t_2$ identification a diagonal top-quark interaction invariant under $\mathbb{Z}_2$ monodromy. The resulting Yukawa coupling reads as follows [27, 30, 31]

$$10_t.10_t.5_{-2t} \quad (\text{C.5})$$

the other diagonal coupling $10_0.10_0.5_{-2t}$ is forbidden by the $U(1)$ symmetry; see footnote 5. Notice that for bottom-quark the typical Yukawa coupling $10_t.\bar{5}_{t_i+t_j}.\bar{5}_{t_k+t_l}$ is allowed by $\mathbb{Z}_2$ while $10_0.\bar{5}_{t_i+t_j}.\bar{5}_{t_k+t_l}$ is forbidden.

In this monodromy invariant theory, the symmetry of the model is given by $SU_5 \times U(1)^3 \times \mathbb{Z}_2$; it may be interpreted as the invariance that remains after taking the coset with respect to $\mathbb{Z}_2$; that is by a factorisation of type $G = H \times \mathbb{Z}_2$ with $H = G/\mathbb{Z}_2$. Indeed, starting from $SU_5 \times U(1)^4$ and performing the two following operations: (i) use the traceless property of the *fundamental* representation of $SU_5^\perp$ to think of (C.1) like

$$U(1)^4 = \left(\prod_{i=1}^5 U(1)_{t_i} \right) / \mathcal{J} \quad (\text{C.6})$$

with $\mathcal{J} = \{t_i \mid t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 0\} \simeq U(1)_{diag}$. This property is a rephrasing of the usual $U(5)$ factorisation, i.e. $SU(5) = \frac{U(5)}{U(1)}$. (ii) Substitute the product $U(1)_{t_1} \times U(1)_{t_2}$ by the reduced abelian group $U(1)_t \times \mathbb{Z}_2$ where monodromy group has been explicitly exhibited. In this way of doing, one disposes of a discrete group that may be promoted to a symmetry of the fields spectrum. To that purpose, we need two more steps: first explore all allowed discrete monodromy groups; and second study how to link these groups to flavor symmetry. For the extension of above $\mathbb{Z}_2$, a similar method can be used to build other prototypes; in particular models with abelian discrete symmetries like $SU_5 \times U(1)^{5-k} \times \mathbb{Z}_k$ with $k = 3, 4, 5$; or more generally as

$$SU_5 \times U(1)^{5-p-q} \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \quad (\text{C.7})$$

where $1 < p + q \leq 5$ and $\mathbb{Z}_1 \equiv I_{id}$, $\mathbb{Z}_0 \equiv I_{id}$. Notice that the discrete groups in eq. (C.7) are natural extensions of those of the theories with $SU_5 \times U(1)^{5-k} \times \mathbb{Z}_k$ symmetry; and that the condition $p + q \leq 5$ on allowed abelian monodromies is intimately related with the Weyl symmetry $\mathcal{W}_{SU_5^\perp}$ of $SU_5^\perp$. Therefore, we end with the conclusion that the $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ abelian discrete groups in above relation are in fact particular subgroups of the non-abelian symmetric group $\mathcal{W}_{SU_5^\perp} \simeq \mathbb{S}_5$.

C.2. Non-abelian monodromy and flavor symmetry

To begin notice that the appearance of abelian discrete symmetry in the SU_5 based GUT models with invariance (C.7) is remarkable and suggestive. It is remarkable because these finite discrete symmetries have a geometric interpretation in the internal CY4, and constitutes then a prediction of F-theory GUT. It is suggestive since such kind of discrete groups, especially their non-abelian generalisation, are highly desirable in phenomenology, particularly in playing the role of a flavor symmetry. In this regards, it is interesting to recall that it is quite well established that neutrino flavors are mixed; and this property requires non-abelian discrete group symmetries

like the alternating $\mathbb{A}_4$ group which has been subject to intensive research during last decade [32–34,52,53].

Following the conjecture of [15,16], non-abelian discrete symmetries may be reached in F-theory GUT by assuming the existence of a non-abelian flux breaking the $SU_5^\perp$ down to a non-abelian group $\Gamma \subset \mathcal{W}_{SU_5^\perp}$. In this view, one may roughly think about the $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ group of (C.7) as special symmetries of a family of SU_5 based GUT models with invariance given by

$$SU_5 \times U(1)^{5-k} \times \Gamma_k \quad (\text{C.8})$$

where now Γ_k is a subgroup of $\mathbb{S}_5$ that can be a non-abelian discrete group. In this way of doing, one then distinguishes several SU_5 GUT models with non-abelian discrete symmetries classified by the number of surviving $U(1)$'s. In presence of no $U(1)$ symmetry, we have prototypes like $SU_5 \times \mathbb{S}_5$ and $SU_5 \times \mathbb{A}_5$; while for a theory with one $U(1)$, we have symmetries as follows

$$\begin{aligned} SU_5 \times U(1) \times \mathbb{S}_4 \\ SU_5 \times U(1) \times \mathbb{A}_4 \\ SU_5 \times U(1) \times \mathbb{D}_4 \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

where the alternating $\mathbb{A}_4$ and dihedral $\mathbb{D}_4$ are the usual subgroups of $\mathbb{S}_4$ itself contained in $\mathbb{S}_5$. In the case with two $U(1)$'s, monodromy gets reduced like $SU_5 \times U(1)^2 \times \mathbb{S}_3$.

Moreover, by using non-abelian discrete monodromy groups Γ_k , one ends with an important feature; these discrete groups have, in addition to trivial representations, higher dimensional representations that are candidates to host more than one matter generation. Under transformations of Γ_k , the generations get in general mixed. Therefore the non-abelian Γ_k 's in particular those having 3- and/or 2-dimensional irreducible representations may be naturally interpreted in terms of flavor symmetry.

In the end of this section, we would like to add a comment on the splitting spectral cover construction regarding non-abelian discrete monodromy groups like $\mathbb{A}_4$ and $\mathbb{D}_4$. In the models (C.9), the spectral cover for the fundamental $\mathcal{C}_5$ is factorised like $\mathcal{C}_5 = \mathcal{C}_4 \times \mathcal{C}_1$ and similarly for $\mathcal{C}_{10}$ and $\mathcal{C}_{20}$ respectively associated with the antisymmetric and the adjoint of $SU_5^\perp$. In the $\mathcal{C}_4 \times \mathcal{C}_1$ splitting, we have

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_4 &= a_5 s^4 + a_4 s^3 + a_3 s^2 + a_2 s + a_1 \\ \mathcal{C}_1 &= a_7 s + a_6 \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

where the a_i 's are complex holomorphic sections. For the generic case where the coefficients a_i are free, the splitted spectral cover $\mathcal{C}_4 \times \mathcal{C}_1$ has an $\mathbb{S}_4$ monodromy. To have splitted spectral covers with monodromies given by the subgroups $\mathbb{A}_4$ and $\mathbb{D}_4$, one needs to put constraints on the a_i 's; these conditions have been studied in [14,16]; they are non linear relations given by Galois theory. Indeed, starting from $SU_5 \times SU_5^\perp$ model and borrowing tools from [16], the breaking of $SU_5 \times SU_5^\perp$ down to $SU_5 \times \mathbb{D}_4 \times U(1)$ model considered in this paper may be imagined in steps as follows: first breaking $SU_5^\perp$ to subgroup $SU_4^\perp \times U(1)$ by an abelian flux; then breaking the $SU_4^\perp$ part to the discrete group $\mathbb{S}_4$ by a non-abelian flux as conjectured in [15,16]; deformations of this flux lead to subgroups of $\mathbb{S}_4$. To obtain the constraints describing the $\mathbb{D}_4$ splitted spectral cover descending from $\mathcal{C}_4 \times \mathcal{C}_1$, we use Galois theory; they are given by a set of two constraints on the holomorphic sections of $\mathcal{C}_4 \times \mathcal{C}_1$; and are obtained as follows:

(i) The first constraint comes from the discriminant $\Delta_{\mathcal{C}_4}$ of the spectral cover $\mathcal{C}_4$ which should not be a perfect square; that is $\Delta_{\mathcal{C}_4} \neq \delta^2$. The explicit expression of the discriminant of $\mathcal{C}_4$ has

been computed in literature; so we have

$$108a_0(\lambda a_6^2 + 4a_1a_7)(\kappa^2 a_7^2 + a_0(\lambda a_6^2 + 4a_1a_7))^2 \neq \delta^2 \quad (\text{C.11})$$

where dependence into a_6 and a_7 is due to solving the traceless condition $b_1 = 0$ in $\mathcal{C}_5 = \mathcal{C}_4 \times \mathcal{C}_1$.

(ii) The second constraint is given by a condition on the cubic resolvent which should be like $R_{\mathcal{C}_4}(s)|_{s=0} = 0$. The expression of $R_{\mathcal{C}_4}(s)$ is known; it leads to

$$a_2^2 a_7 = a_1 (a_0 a_6^2 + 4a_3 a_7) \quad (\text{C.12})$$

where a_0 is a parameter introduced by the solving the traceless condition $b_1 = 0$; for explicit details see [16].

References

- [1] C. Vafa, Evidence for F theory, Nucl. Phys. B 469 (1996) 403, arXiv:hep-th/9602022.
- [2] R. Donagi, M. Wijnholt, Model building with F-theory, Adv. Theor. Math. Phys. 15 (2011) 1237, arXiv:0802.2969 [hep-th].
- [3] C. Beasley, J.J. Heckman, C. Vafa, GUTs and exceptional branes in F-theory – I, JHEP 0901 (2009) 058, arXiv:0802.3391 [hep-th].
- [4] C. Beasley, J.J. Heckman, C. Vafa, GUTs and exceptional branes in F-theory – II: experimental predictions, JHEP 0901 (2009) 059, arXiv:0806.0102 [hep-th].
- [5] T. Weigand, Lectures on F-theory compactifications and model building, Class. Quantum Gravity 27 (2010) 214004, arXiv:1009.3497 [hep-th].
- [6] R. Donagi, M. Wijnholt, Higgs bundles and UV completion in F-theory, Commun. Math. Phys. 326 (2014) 287, arXiv:0904.1218 [hep-th].
- [7] R. Donagi, M. Wijnholt, Breaking GUT groups in F-theory, Adv. Theor. Math. Phys. 15 (2011) 1523, arXiv:0808.2223 [hep-th].
- [8] R. Blumenhagen, T.W. Grimm, B. Jurke, T. Weigand, Global F-theory GUTs, Nucl. Phys. B 829 (2010) 325, arXiv:0908.1784.
- [9] J. Tate, Algorithm for determining the type of a singular fiber in an elliptic pencil, in: Modular Functions of One Variable IV, in: Lect. Notes Math., vol. 476, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [10] Sven Krippendorff, Sakura Schafer-Nameki, Jin-Mann Wong, arXiv:1507.05961.
- [11] F. Denef, Les houches lectures on constructing string vacua, arXiv:0803.1194.
- [12] J. Marsano, N. Saulina, S. Schafer-Nameki, Monodromies, fluxes, and compact three-generation F-theory GUTs, JHEP 0908 (2009) 046, arXiv:0906.4672 [hep-th].
- [13] Florent Baume, Eran Palti, Sebastian Schwieger, On E_8 and F-theory GUTs, arXiv:1502.03878.
- [14] Athanasios Kiarozasy, Stephen F. King, George K. Leontaris, Andrew Meadowcroft, Discrete family symmetry from F-theory GUTs, arXiv:1406.6290v4 [hep-ph].
- [15] I. Antoniadis, G.K. Leontaris, Neutrino mass textures from F-theory, Eur. Phys. J. C 73 (2013) 2670, arXiv:1308.1581 [hep-th].
- [16] Athanasios Kiarozasy, Stephen F. King, George K. Leontaris, Andrew K. Meadowcroft, Phenomenological implications of a minimal F-theory GUT with discrete symmetry, arXiv:1505.00937v3 [hep-th].
- [17] Anshuman Maharana, Eran Palti, Models of particle physics from type IIB string theory and F-theory: a review, arXiv:1212.0555.
- [18] J.J. Heckman, A. Tavanfar, C. Vafa, The point of $E(8)$ in F-theory GUTs, JHEP 1008 (2010) 040, arXiv:0906.0581 [hep-th].
- [19] Hirotaka Hayashi, Teruhiko Kawano, Yoichi Tsuchiya, Taizan Watari, HEP 1008 (2010) 036, arXiv:0910.2762 [hep-th].
- [20] A. Font, L.E. Ibanez, F. Marchesano, D. Regalado, Non-perturbative effects and Yukawa hierarchies in F-theory $SU(5)$ unification, JHEP 1303 (2013) 140, arXiv:1211.6529 [hep-th];
A. Font, L.E. Ibanez, F. Marchesano, D. Regalado, JHEP 1307 (2013) 036 (Erratum).
- [21] S. Cecotti, M.C.N. Cheng, J.J. Heckman, C. Vafa, arXiv:0910.0477 [hep-th].
- [22] L. Aparicio, A. Font, L.E. Ibanez, F. Marchesano, JHEP 1108 (2011) 152, arXiv:1104.2609 [hep-th].
- [23] Asan Damanik, Nonzero θ_{13} and neutrino masses from modified TBM, EJTP 11 (31) (2014) 125–130.

- [24] P. Adamson, et al., MINOS Collaboration, Phys. Rev. Lett. 107 (2011) 181802, <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.181802>, arXiv:1108.0015 [hep-ex].
- [25] Y. Abe, et al., DOUBLE-CHOOZ Collaboration, Phys. Rev. Lett. 108 (2012) 131801, arXiv:1112.6353 [hep-ex].
- [26] H. Hayashi, T. Kawano, Y. Tsuchiya, T. Watari, Flavor structure in F-theory compactifications, JHEP 1008 (2010) 036, arXiv:0910.2762 [hep-th].
- [27] I. Antoniadis, G.K. Leontaris, Building SO(10) models from F-theory, JHEP 1208 (2012) 001, arXiv:1205.6930 [hep-th].
- [28] Patrick Morandi, Field and Galois Theory, Springer, 1996.
- [29] Michael Artin, Algebra, Prentice-Hall Inc., 1991.
- [30] J.C. Callaghan, S.F. King, G.K. Leontaris, G.G. Ross, Towards a realistic F-theory GUT, arXiv:1109.1297 [hep-th].
- [31] Emilian Dudas, Eran Palti, On hypercharge flux and exotics in F-theory GUTs, arXiv:1007.1297 [hep-th].
- [32] S.F. King, C. Luhn, Neutrino mass and mixing with discrete symmetry, Rep. Prog. Phys. 76 (2013) 056201, arXiv:1301.1340 [hep-ph].
- [33] Guido Altarelli, Ferruccio Feruglio, Discrete flavor symmetries and models of neutrino mixing, arXiv:1000.0211 [hep-th].
- [34] S.F. King, A. Merle, S. Morisi, Y. Shimizu, M. Tanimoto, Neutrino mass and mixing: from theory to experiment, New J. Phys. 16 (2014) 045018, arXiv:1402.4271 [hep-ph].
- [35] H. Hayashi, T. Kawano, R. Tatar, T. Watari, Codimension-3 singularities and Yukawa couplings in F-theory, arXiv:0901.4941 [hep-th].
- [36] S.F. King, G.K. Leontaris, G.G. Ross, Family symmetries in F-theory GUTs, Nucl. Phys. B 838 (2010) 119, arXiv:1005.1025 [hep-ph].
- [37] G.K. Leontaris, Aspects of F-Theory GUTs, PoS CORFU 2011 (2011) 095, arXiv:1203.6277 [hep-th].
- [38] J. Marsano, Hypercharge flux, exotics, and anomaly cancellation in F-theory GUTs, Phys. Rev. Lett. 106 (2011) 081601, arXiv:1011.2212 [hep-th].
- [39] William Fulton, Joe Harris, Young Tableaux with Applications to Representation Theory and Geometry, Springer-Verlag, 1991.
- [40] H. Ishimori, T. Kobayashi, H. Ohki, H. Okada, Y. Shimizu, M. Tanimoto, Non-Abelian discrete symmetries in particle physics, arXiv:1003.3552 [hep-th].
- [41] R. Ahl Laamara, M. Miskaoui, E.H. Saidi, Building SO₁₀ models with $\mathbb{D}_4$ symmetry, arXiv:1511.03166 [hep-th].
- [42] El Hassan Saidi, On building superpotentials in F-GUTs, Prog. Theor. Exp. Phys. (2016) 013, arXiv:1512.02530.
- [43] G.K. Leontaris, G.G. Ross, Yukawa couplings and fermion mass structure F-theory GUTs, JHEP 02 (2011) 108, arXiv:1009.6000 [hep-ph].
- [44] C. Ludeling, H.P. Nilles, C.C. Stephan, The potential fate of local model building, arXiv:1101.3346 [hep-ph].
- [45] J.J. Heckman, Particle physics implications of F-theory, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 60 (2010) 237, arXiv:1001.0577 [hep-th].
- [46] T.W. Grimm, The $N = 1$ effective action of F-theory compactifications, Nucl. Phys. B 845 (2011) 48, arXiv:1008.4133 [hep-th].
- [47] C.M. Chen, J. Knapp, M. Kreuzer, C. Mayrhofer, Global SO(10) F-theory GUTs, JHEP 1010 (2010) 057, arXiv:1005.5735 [hep-th].
- [48] J.C. Callaghan, S.F. King, E6 models from F-theory, JHEP 1304 (2013) 034, arXiv:1210.6913 [hep-ph].
- [49] R. Tatar, W. Walters, GUT theories from Calabi–Yau 4-folds with SO(10) singularities, JHEP 1212 (2012) 092, arXiv:1206.5090 [hep-th].
- [50] J.C. Callaghan, S.F. King, G.K. Leontaris, Gauge coupling unification in E6 F-theory GUTs with matter and bulk exotics from flux breaking, JHEP 1312 (2013) 037, arXiv:1307.4593 [hep-ph].
- [51] El Hassan Saidi, Breaking discrete symmetries in F-GUT, LPHE-MS-1511.
- [52] Fredrik Björkeröth, Francisco J. de Anda, Ivo de Medeiros Varzielas, Stephen F. King, JHEP 06 (2015) 141, arXiv:1503.03306.
- [53] S.F. King, Neutrino mass models, Rep. Prog. Phys. 67 (2004) 107, arXiv:hep-ph/0310204.
- [54] K. Abe, et al., T2K Collab, Phys. Rev. Lett. 107 (2011) 041801, <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.041801>, arXiv:1106.2822 [hep-ph].
- [55] F.P. An, et al., Phys. Rev. Lett. 108 (2012) 171803, <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.171803>, arXiv:1203.1669v2 [hep-ex].
- [56] J.K. Ahn, et al., RENO Collab., Phys. Rev. Lett. 108 (2012) 191802, <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.191802>, arXiv:1204.0626v2 [hep-ex].
- [57] S. Boudjemaa, S.F. King, Deviations from tri-bimaximal mixing: charged lepton corrections and renormalization group running, arXiv:0808.2782v3 [hep-th].

- [58] J. Marsano, N. Saulina, Sakura Schafer Nameki, Compact F-theory GUTs with $U(1)_{PQ}$, arXiv:0912.0272v2 [hep-th].
- [59] J. Marsano, N. Saulina, Sakura Schafer Nameki, F-theory compactifications for supersymmetric GUTs, arXiv:0904.3932v3 [hep-th].
- [60] S. Krippendorff, D.K.M. Penaa, P.K. Oehlmann, F. Ruehle, Rational F-theory GUTs without exotics, arXiv:1401.5084v1 [hep-th].
- [61] T.W. Grimm, H. Hayashi, F-theory fluxes, chirality and Chern–Simons theories, arXiv:1111.1232v2 [hep-th].
- [62] E. Dudas, E. Palti, Froggatt–Nielsen models from $E(8)$ in F-theory GUTs, arXiv:0912.0853 [hep-th].
- [63] M. Cvetič, T.W. Grimm, D. Klevers, Anomaly cancellation and Abelian gauge symmetries in F-theory, arXiv:1210.6034v2 [hep-th].
- [64] R.N. Mohapatra, Neutrino mass and grand unification of flavor, arXiv:1007.1633 [hep-ph].
- [65] K.S. Babu, S.M. Barr, Natural gauge hierarchy in $SO(10)$, arXiv:hep-ph/9402291v1.
- [66] Z. Berezhiani, M. Chianese, G. Mielec, S. Morisi, Chances for SUSY-GUT in the LHC epoch, arXiv:1505.04950 [hep-ph].

Contribution III

Fermion masses and mixing in $SU(5) \times D_4 \times U(1)$ model

Abstract

Nous proposons un modèle de GUT supersymétrique $SU(5) \times G_f$ avec la symétrie de saveur $G_f = D_4 \times U(1)$ fournissant une bonne description aux masses et mélanges des fermions. Le modèle possède vingt huit paramètres libres, dix-huit sont fixés pour produire des valeurs expérimentales approximatives des paramètres physiques dans les secteurs de quarks et de leptons chargés. Dans le secteur des neutrinos, la matrice TBM est générée au premier ordre par le biais du mécanisme de seesaw de type I, et la déviation par rapport au TBM est étudiée pour se réconcilier avec les mesures expérimentales des angles de mélange. D'autres caractéristiques dans le secteur chargé telles que les relations Georgi-Jarlskog et la matrice de mélange CKM sont également étudiées.

Fermion masses and mixing in $SU(5) \times D_4 \times U(1)$ model

R. Ahl Laamara^{a,b,c}, M.A. Loualidi^{a,c}, M. Miskaoui^{a,c}, E.H. Saidi^{a,c,*}

^a LPHE-Modeling and Simulations, Faculty of Sciences, Mohammed V University, Rabat, Morocco

^b Centre Régional des Métiers de L'Education et de La Formation, Fès-Meknès, Morocco

^c Centre of Physics and Mathematics, CPM, Morocco

Received 17 October 2016; received in revised form 12 January 2017; accepted 13 January 2017

Editor: Tommy Ohlsson

Abstract

We propose a supersymmetric $SU(5) \times G_f$ GUT model with flavor symmetry $G_f = D_4 \times U(1)$ providing a good description of fermion masses and mixing. The model has twenty eight free parameters, eighteen are fixed to produce approximative experimental values of the physical parameters in the quark and charged lepton sectors. In the neutrino sector, the TBM matrix is generated at leading order through type I seesaw mechanism, and the deviation from TBM studied to reconcile with the phenomenological values of the mixing angles. Other features in the charged sector such as Georgi–Jarlskog relations and CKM mixing matrix are also studied.

© 2017 The Author(s). Published by Elsevier B.V. This is an open access article under the CC BY license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>). Funded by SCOAP³.

1. Introduction

Standard Model (SM) of elementary particle physics is a great achievement of modern quantum physics; but despite this success basic questions still remain without answer; one of them concerns the origin of the three generations of fermions, quark–lepton masses and mixing angles. Although the SM is sufficient to describe the masses of charged leptons and quarks, neutrinos $(\nu_i)_{i=1,2,3}$ are considered as massless particles in this model which is in conflict with observations. Indeed, neutrino oscillation experiments have shown that they have very tiny masses m_i

* Corresponding author.

Table 1

The global fit values for the squared-mass differences Δm_{ij}^2 and mixing angles θ_{ij} as reported by Ref. [6]. NH and IH stand for normal and inverted hierarchies respectively.

Parameters	Best fit ^(+1σ,+2σ,+3σ) _(-1σ,-2σ,-3σ) (NH)	Best fit ^(+1σ,+2σ,+3σ) _(-1σ,-2σ,-3σ) (IH)
$\Delta m_{21}^2 [10^{-5} \text{ eV}^2]$	$7.60^{(+0.19,+0.39,+0.58)}_{(-0.18,-0.34,-0.49)}$	$7.60^{(+0.19,+0.39,+0.58)}_{(-0.18,-0.34,-0.49)}$
$ \Delta m_{31}^2 [10^{-3} \text{ eV}^2] $	$2.48^{(+0.05,+0.11,+0.17)}_{(-0.07,-0.13,-0.18)}$	$-2.38^{(+0.05,+0.10,+0.16)}_{(-0.06,-0.12,-0.18)}$
$\sin^2 \theta_{12}$	$0.323^{(+0.016,+0.034,+0.052)}_{(-0.016,-0.031,-0.045)}$	$0.323^{(+0.016,+0.034,+0.052)}_{(-0.016,-0.031,-0.045)}$
$\sin^2 \theta_{23}$	$0.567^{(+0.032,+0.056,+0.076)}_{(-0.124,-0.153,-0.174)}$	$0.573^{(+0.025,+0.048,+0.067)}_{(-0.039,-0.138,-0.170)}$
$\sin^2 \theta_{31}$	$0.0226^{(+0.0012,+0.0024,+0.0036)}_{(-0.0012,-0.0024,-0.0036)}$	$0.0229^{(+0.0012,+0.0023,+0.0036)}_{(-0.0012,-0.0024,-0.0036)}$

and that the different flavors are mixed with some mixing angles θ_{ij} . The PMNS matrix which describe the mixing in the lepton sector contains two large angles θ_{12} and θ_{23} consistent with tribimaximal mixing matrix (TBM) [1], and a vanishing angle θ_{13} which is in disagreement with the recent neutrino experiments¹ [2–5]. The measurements of the mixing angles and the squared-mass differences was reported by several global fits of neutrino data [6–8]; see Table 1. This mixing together with the non-zero neutrino mass might be the best evidence of physics beyond the standard model; in this context, many models have been proposed in recent years, and Supersymmetric Grand Unified Theories (SUSY-GUTs) are one of the most appealing extension of the SM unifying three forces of nature in a single gauge symmetry group [9–11]. These quantum field theories contain naturally the right-handed neutrino needed to generate light masses for neutrinos through the seesaw mechanism. Moreover, particles are unified into different representations of the GUT groups; for instance, in $SO(10)$ GUT model [11], all the fermions including the right-handed neutrino belong to the 16-dimensional spinor representation of $SO(10)$, and in $SU(5)$ GUT model, all the matter fits into two irreducible representations, the conjugate five $F = \bar{5}$ and the ten $T = 10$ [10]. In addition, extending GUT models with flavor symmetries might be the key to understand the flavor structure; indeed many flavor symmetries have been suggested in GUT models, in particular, the non-abelian discrete alternating A_4 and symmetric S_4 groups are widely studied in the literature. These discrete groups have been used in many papers to realize the TBM matrix [15], and used recently to accommodate a non-zero reactor angle [16–20], and lately, the models studied in Refs. [21,22] provided successfully the masses for all fermions and the mixing in the charged and chargeless sectors including spontaneous CP violation. In addition, there are many other non-abelian discrete groups proposed as family symmetry with the $SU(5)$ GUT group; for example the $SU(5) \times T'$ model [23], and the $SU(5) \times \Delta(96)$ model [24]. As for the flavor models based on $SO(10)$ gauge group, we refer for instance to the $SO(10) \times A_4$ model [25], $SO(10) \times S_4$ model [26], $SO(10) \times PSL(2, 7)$ model [27], and $SO(10) \times \Delta(27)$ model [28].

In this paper, we propose a supersymmetric $SU(5) \times G_f$ GUT model with flavor symmetry $G_f = D_4 \times U(1)$ providing a good description of fermion masses; and leading as well to neutrino mixing properties agreeing with known results. The model has *twenty eight free parameters* in which we need to fix eighteen in order to produce the approximative experimental

¹ In addition to the TBM matrix approximation, similar mixing matrices with vanishing θ_{13} have been proposed such as Bimaximal (BM) [12], Golden-Ratio (GR) [13] and Democratic [14] mixing pattern.

values of the physical parameters in the quark and lepton sectors as given by Tables (5.2)–(5.3) and Tables (5.5)–(5.9). To fix ideas, let us comment rapidly some key points of this G_f based construction and some motivations behind the choice of the discrete D_4 dihedral symmetry.

First, notice that the discrete flavor D_4 symmetry is the finite dihedral group; and, like the alternating A_4 , it is also a non-abelian subgroup of the symmetric S_4 with particular properties. It has 5 irreducible representations: four singlets $\mathbf{1}_{p,q}$ with indices $p, q = \pm 1$; and one doublet $\mathbf{2}_{0,0}$ offering therefore several pictures to engineer hierarchy among the three generations of matter; for example by accommodating one generation in a given $\mathbf{1}_{p,q}$ representation, while the two others in the $\mathbf{2}_{0,0}$ doublet. Another example is to treat the three generations in quite similar manner by accommodating them in 1-dimensional representations $\mathbf{1}_{p_i,q_i}$ but with different characters. Recall that the order of D_4 —which is 8—is linked to the sum of the squared dimensions of its five irreducible representations $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_5$ like $8 = 1_{+,+}^2 + 1_{+,-}^2 + 1_{-,+}^2 + 1_{-,-}^2 + 2_{0,0}^2$; the four representations $\mathbf{R}_i \equiv \mathbf{1}_{p,q}$ and the fifth $\mathbf{R}_5 = \mathbf{2}_{0,0}$ are indexed by the characters $\chi(\alpha), \chi(\beta)$ of the two non-commuting generators α and β of the dihedral D_4 ; a remarkable feature of discrete group theory allowing to distinguish the four D_4 singlets in a natural way.

Besides particularities of its singlet representations as well as its similarity with the popular alternating A_4 group; our interest into a flavor invariance $G_f \supset D_4$ has been also motivated from other reasons; in particular by the wish to complete partial results in supersymmetric GUTs which aren't embedded in brane picture of F-theory compactification along the line of [33]; and also by special features of the dihedral group. The discrete D_4 symmetry has been considered as flavor symmetry in several models to study the mixing in the lepton sector, see for instance [29–31], and one of its interesting properties is that it predicts the $\mu - \tau$ symmetry in a natural way as noticed by Grimus and Lavoura (GL) [29]. It was considered also in heterotic orbifold model building [32], as well as in constructing viable MSSM-like prototypes in F-theory [33]. But to our knowledge, the dihedral group D_4 was never used as a flavor symmetry in GUT models which doesn't descend from string compactification; this lack will be completed in present study.

To build the supersymmetric model $SU(5) \times D_4 \times U(1)_f$, we need building blocks of the construction and their couplings; in particular the chiral superfields Φ_i of the prototype; their quantum numbers under flavor symmetry and their superpotential $W(\Phi)$. After identifying the $SU(5)$ superfield spectrum with appropriate D_4 quantum numbers, we introduce an additional global $U(1)_f$ symmetry which will make our model quasi-realistic— $U(1)_f \equiv U(1)$. As we will show; this extra continuous symmetry is needed to control the superpotential in the quark- and lepton-sectors, and also to prevent dangerous operators that mediate rapid proton decay. Our $SU(5) \times D_4 \times U(1)$ model involves, in addition to the usual $SU(5)$ superfield spectrum collected in Tables (2.7)–(2.8), *eleven* flavon superfields carrying quantum numbers under the flavor symmetry $D_4 \times U(1)$ as given by (2.13)–(2.14); these flavon superfields will play an important role in obtaining the appropriate masses for the quarks and leptons. Moreover, we have *twenty eight* free parameters—*fifteen* Yukawa coupling constants, *eleven* flavon VEVs, the 45-dimensional Higgs VEV and the cutoff scale Λ —where we fix *eighteen* of them; *eight* in the quark and charged lepton sectors and *ten* in the neutrino sector. We end this study by performing a numerical study, where we use the experimental values of $\sin \theta_{ij}$ and Δm_{ij} to make predictions concerning numerical estimations of the parameters obtained in the neutrino sector.

The paper is organized as follows. In section 2, we present the superfield content of the $SU(5)$ model as well as a superfield spectrum containing flavons superfields in D_4 representations. Then, we assign $U(1)$ charges to all the superfields of the model. In section 3, we first study the neutrino mass matrix and its diagonalization with the TBM matrix; then we study the deviation of the TBM matrix by introducing extra flavon superfields, and we make a numerical study

to fix the parameters of the neutrino sector. In section 4, we study the mass matrix of the up quark sector and we make a comment concerning the scale of the flavon VEVs derived from the experimental values of the quark up masses; then, we analyse the down quarks–charged leptons sector by calculating their mass matrices as well as the mixing matrix of the quarks. In section 5, we give our conclusion and numerical results. In Appendix A, we give all the higher dimensional operators yielding to the rapid proton decay which are forbidden by the $U(1)$ symmetry. In Appendix B, we give useful tools and details on D_4 tensor products.

2. $SU(5)$ model with $D_4 \times U(1)$ flavor symmetry

In this section, we first describe the chiral superfields content of the supersymmetric $SU(5)$ GUT model; then we extend this model by implementing the D_4 flavor symmetry accompanied with extra flavon superfields which are gauge singlets. This extension is further stretched with a flavor symmetry $U(1)$ needed to exclude unwanted couplings.

2.1. Superfields in $SU(5)$ model

In this subsection, we review briefly the building blocks of the usual supersymmetric $SU(5)$ -GUT model that contain the minimal supersymmetric model (MSSM) quarks and leptons as well as the right-handed neutrino; we also use this description to fix some notations and conventions. We will focus mainly on the chiral superfields of the model and the invariant superpotential; the Kahler sector of the model involving as well gauge superfields is understood the presentation. The chiral sector of $SU(5)$ model has two kinds of building blocks: matter and Higgs; they are as follows

• Matter superfields

In supersymmetric $SU(5)$ -GUT, each family $\mathcal{F}$ of quarks Q (with colors r, b, g) and leptons L fits nicely into a reducible $SU(5)$ representation involving the leading irreducible $\mathbf{1}$, $\mathbf{\bar{5}}$, $\mathbf{10}$. In superspace language, left-handed fermions are described by chiral superfields $F_i \equiv \mathbf{\bar{5}}_i$ and $T_i \equiv \mathbf{10}_i$; the right-handed neutrinos are also described by chiral superfields but living in $SU(5)$ singlets $N_i \equiv \mathbf{1}_i$. The index $i = 1, 2, 3$ refers to the three possible generations of matter $\mathcal{F}_i = \{F_i, T_i, N_i\}$; for example the first family $\mathcal{F}_1$, the constituents of F_1 and T_1 are explicitly as follows [35]

$$F_1 = \begin{pmatrix} d_r^c \\ d_b^c \\ d_g^c \\ e^- \\ -\nu_e \end{pmatrix}, \quad T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & u_g^c & -u_b^c & u_r & d_r \\ -u_g^c & 0 & u_r^c & u_b & d_b \\ u_b^c & -u_r^c & 0 & u_g & d_g \\ -u_r & -u_b & -u_g & 0 & e^c \\ -d_r & -d_b & -d_g & -e^c & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

• Higgs superfields

We distinguish several kinds of $SU(5)$ -GUT Higgs superfields; in particular the H_5 , $H_{\bar{5}}$, H_{24} and the $H_{\bar{45}}$. The chiral superfields $H_5 = 5_{H_u}$ and $H_{\bar{5}} = \bar{5}_{H_d}$ are respectively the analogue of two light Higgs doublet superfields H_u and H_d of the MSSM; in general the MSSM Higgs doublet H_d is a combination of the $H_{\bar{5}}$ Higgs with the 45-dimensional Higgs denoted by $H_{\bar{45}}$. This extra Higgs superfield will also used later on in order to distinguish the down quarks masses from the leptons masses.

The $SU(5)$ GUT symmetry is broken down to the standard model symmetry $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ by the VEV of the adjoint Higgs H_{24} . This is done by choosing $\langle H_{24} \rangle$ along the following particular Cartan direction in the Lie algebra of $SU(5)$

$$\langle H_{24} \rangle = \sqrt{\frac{2}{15}} v_{24} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & -\frac{3}{2} & \\ & & & & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

so the $SU(5)$ fields are given in standard model terms as

$$\begin{aligned} 10_M &\rightarrow (3, 2)_{\frac{1}{3}} + (\bar{3}, 1)_{-\frac{4}{3}} + (1, 1)_2 \\ \bar{5}_M &\rightarrow (1, 2)_{-1} + (\bar{3}, 1)_{\frac{2}{3}} \\ 5_{H_u} &\rightarrow (1, 2)_1 + (3, 1)_{-\frac{2}{3}} \\ \bar{5}_{H_d} &\rightarrow (1, 2)_{-1} + (\bar{3}, 1)_{\frac{2}{3}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

and

$$24 \rightarrow (8, 1)_0 + (1, 3)_0 + (1, 1)_0 + (3, 2)_{-\frac{5}{3}} + (\bar{3}, 2)_{\frac{5}{3}} \quad (2.4)$$

as well as

$$45 \rightarrow (8, 2)_1 + (\bar{6}, 1)_{-\frac{2}{3}} + (3, 3)_{-\frac{2}{3}} + (\bar{3}, 2)_{-\frac{7}{3}} + (3, 1)_{-\frac{1}{3}} + (\bar{3}, 1)_{\frac{8}{3}} + (1, 2)_1 \quad (2.5)$$

In what follows we describe our extension of supersymmetric $SU(5)$ -GUT by a global flavor symmetry G_f which is given $D_4 \times U(1)_f$, the product of the finite discrete Dihedral group and the $U(1)_f$ global continuous phase.

2.2. Implementing D_4 flavor symmetry

Here, we present our extension of the supersymmetric $SU(5)$ GUT model by the flavor symmetry D_4 , details of the Dihedral group D_4 are provided in [Appendix B](#). First, we give the D_4 -quantum numbers of the superfields of usual SUSY $SU(5)$ matter; then we describe the needed extra matter required by dihedral flavor symmetry.

In the usual $SU(5)$ model reviewed in previous subsection, the matter and Higgs superfields are as collected in first line of Tables (2.7)–(2.8); they are unified in the $SU(5)$ representations with link to MSSM as

$$\begin{aligned} 10_m &= (u^c, e^c, Q_L) & , & & 5_{H_u} &= (\Delta_u, H_u) \\ \bar{5}_m &= (d^c, L) & , & & \bar{5}_{H_d} &= (\Delta_d, H_d) \end{aligned} \quad (2.6)$$

The three generations of 10_m^i and $\bar{5}_m^i$ are denoted as T_i and F_i respectively, the three right-handed neutrinos denoted as N_i are singlets under $SU(5)$; and the two GUT Higgses denoted as H_5 and $H_{\bar{5}}$ like 5_{H_u} and $\bar{5}_{H_d}$.

In our extension with a D_4 flavor symmetry, we have a larger set of chiral superfields that can be organized into two basic subsets: (a) the usual $SU(5)$ matter and Higgs superfields; but carrying as well quantum numbers under D_4 ; and (b) an extra subset of chiral superfields required by D_4 flavor invariance; they are as described below.

a) *Matter and Higgs sectors in $SU(5) \times D_4$*

The superfield content of this sector is same as the $SU(5)$ matter and Higgs superfields; but with extra quantum numbers under D_4 flavor invariance as given here below

Matter	T_1	T_2	T_3	F_1	$F_{2,3}$	N_1	$N_{2,3}$
$SU(5)$	10_m^1	10_m^2	10_m^3	$\bar{5}_m^1$	$\bar{5}_m^{2,3}$	1_v^1	$1_v^{2,3}$
D_4	$1_{+,-}$	$1_{+,-}$	$1_{+,+}$	$1_{+,-}$	$2_{0,0}$	$1_{+,+}$	$2_{0,0}$

(2.7)

and

Higgs	H_5	$H_{\bar{5}}$	$H_{\bar{45}}$
$SU(5)$	5_{H_u}	$\bar{5}_{H_d}$	$\bar{45}_H$
D_4	$1_{+,-}$	$1_{+,+}$	$1_{+,-}$

(2.8)

The matter superfields 10_m^i of the three generations $i = 1, 2, 3$ are assigned into the D_4 representations $1_{+,-}$, $1_{+,-}$ and $1_{+,+}$ respectively; while the $\bar{5}_m^i$ matter superfields are assigned into the D_4 singlet $1_{+,-}$ and the D_4 doublet $2_{0,0}$. The right-handed neutrino N_1 sits in the D_4 trivial singlet $1_{+,+}$, and the two $N_{2,3}$ sit together in the D_4 doublet $2_{0,0}$. The GUT Higgses H_5 , $H_{\bar{5}}$ and $H_{\bar{45}}$ are put in different D_4 singlets; $1_{+,-}$, $1_{+,+}$ and $1_{+,-}$ respectively.

b) *Flavon sector*

In addition to the $SU(5)$ superfields of (2.7)–(2.8), the $SU(5) \times D_4$ model has eleven flavon chiral superfields namely four doublets and seven singlets; they transform as singlets under gauge group $SU(5)$, but carry charges under D_4 flavor symmetry as follows

Flavons	Γ	Ω	F	ϕ	φ	η	χ	σ	ρ	ρ'	ζ
$SU(5)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
D_4	$1_{+,-}$	$1_{+,-}$	$1_{+,-}$	$2_{0,0}$	$2_{0,0}$	$1_{+,+}$	$2_{0,0}$	$2_{0,0}$	$1_{+,-}$	$1_{-,-}$	$1_{+,+}$

(2.9)

These flavon superfields couple to the matter and Higgs superfields of the model. The above quantum numbers are required by the building of the chiral superpotential $W_{SU_5 \times D_4}$ of the supersymmetric model. This complex superpotential is a superspace density which, after performing superspace integration, leads to a space time lagrangian density $\mathcal{L}_{SU_5 \times D_4}$ describing matter couplings through Higgs and flavons. The typical form of $\mathcal{L}_{SU_5 \times D_4}$ is given by

$$\mathcal{L}_{SU_5 \times D_4} = \int d^2\theta W_{SU_5 \times D_4}(\Phi_1, \dots) + hc \quad (2.10)$$

where the generic Φ_i 's stand for the chiral superfields of Tables (2.7)–(2.9). This superpotential involves several free coupling parameters to be studied in forthcoming sections. The flavons in Table (2.9) have been required by D_4 invariance; they are briefly commented below:

(i) *Neutrinos couplings*

Invariant neutrinos superpotential $W_{SU_5 \times D_4}(N, \dots)$ under D_4 flavor symmetry requires in turns the flavons η , χ , ρ , ρ' , ζ , σ :

- the flavon η and χ are needed to produce the TBM matrix in the neutrino mass matrix.
- the flavons ρ , ρ' , ζ and σ are added to generate the deviation from TBM matrix.

(ii) *Quarks and charged leptons superpotentials*

Flavor symmetry invariant superpotentials $W_{SU(5) \times D_4}(T, F, \dots)$ involving quarks and charged leptons require the flavon superfields Γ , Ω , F , ϕ , φ with quantum numbers as listed in (2.9) for the following purposes:

- the three flavons Ω , Γ and F contribute to the up-, charm- and top-quark masses respectively.
- the two flavons Γ and Ω are also needed by down quarks/charged leptons in order to generate masses for the first two families.
- the flavon ϕ is required by down quarks/charged leptons in order to produce the mass of the third family.
- the flavon φ is needed for two goals: first to contribute to the mass of the first two generations of down quarks/charged leptons together with the flavon singlets Γ and Ω ; and second to couple to the 45-dimensional Higgs H_{45} in order to distinguish between the down quarks and charged leptons mass matrices.

2.3. Need of $U(1)_f$ symmetry

In order to engineer a semi-realistic model, we need additional flavor symmetries; in our D_4 based proposal, we found that we have to add an abelian $U(1)$ symmetry to fully control the couplings of $SU(5) \times D_4$ model for reasons such as the ones given below:

(i) *Eliminate unwanted couplings*

The global $U(1)$ symmetry is necessary to eliminate unwanted couplings and to produce the observed mass hierarchies, it makes the model quasi-realistic for the two following things:

- first to control the superpotential of the quark and lepton sectors in the $SU(5) \times D_4$ model; for example the flavon F , transforming as $1_{+,-}$, is used to generate a heavy mass for the top quark; but the two other flavons Γ and Ω share the same D_4 representation $1_{+,-}$ and so can couple quark and lepton superfields in a D_4 invariant manner. These coupling cannot be dropped out without imposing an extra constraint; moreover, the three flavons could be mixed in the operators of each family of the Yukawa up type; so they could affect the top quark mass, and consequently risking to lose the mass hierarchy between the top and the up, charm quarks. This issue is handled by accommodating the flavons which possess the same D_4 representation in different $U(1)$ representations as in Table (2.13).
- second, the $U(1)$ charge assignments are chosen to produce the TBM as well as its deviation to get a non-zero reactor angle in the neutrino sector which will be discussed in section 3.

(ii) *Avoid rapid proton decay*

The $U(1)$ flavor symmetry is also needed to forbid the operators yielding to rapid proton decay such as the couplings of type $10_m \bar{5}_m \bar{5}_m$. The $SU(5) \times D_4$ model have several invariant operators of this type and of other types which will be discussed in Appendix A; they are prevented by the extra global $U(1)$ symmetry with charge assignments as in the following tables:

* *families*

matter	T_1	T_2	T_3	F_1	$F_{2,3}$	N_1	$N_{2,3}$
$SU(5)$	10_m^3	10_m^1	10_m^1	$\bar{5}_m^1$	$\bar{5}_m^{2,3}$	1_v^1	$1_v^{2,3}$
D_4	$1_{+,-}$	$1_{+,-}$	$1_{+,+}$	$1_{+,-}$	$2_{0,0}$	$1_{+,+}$	$2_{0,0}$
$U(1)$	12	7	−27	14	14	−6	−6

(2.11)

* *Higgs*

Higgs	H_5	$H_{\bar{5}}$	$H_{\bar{45}}$
$SU(5)$	5_{H_u}	$\bar{5}_{H_d}$	$\bar{45}_H$
D_4	$1_{+,-}$	$1_{+,+}$	$1_{+,-}$
$U(1)$	−8	11	10

(2.12)

* *flavons*

flavons	Γ	Ω	F	ϕ	φ
$SU(5)$	1	1	1	1	1
D_4	$1_{+,-}$	$1_{+,-}$	$1_{+,-}$	$2_{0,0}$	$2_{0,0}$
$U(1)$	−6	−16	62	2	−31

(2.13)

flavons	η	χ	σ	ρ	ρ'	ζ
$SU(5)$	1	1	1	1	1	1
D_4	$1_{+,+}$	$2_{0,0}$	$2_{0,0}$	$1_{+,-}$	$1_{-,-}$	$1_{+,+}$
$U(1)$	12	12	−24	−24	−24	36

(2.14)

3. Neutrino sector in $SU(5) \times D_4 \times U(1)$ model

In this section, we first study the mass matrices of Dirac and Majorana neutrinos; then we use the seesaw type I to get a neutrino mass matrix compatible with TBM as a leading approximation. Next, we study the deviation from TBM by adding new flavons. Notice that the right-handed neutrinos are $SU(5)$ singlets, thus the light neutrino masses are only generated through type-I seesaw mechanism [34]

$$m_\nu = m_D M_R^{-1} m_D^T \quad (3.1)$$

where the m_D and M_R are the Dirac and the Majorana mass matrices respectively.

3.1. Neutrino mass matrix and tribimaximal mixing

We begin by considering Dirac mass matrix involving left- and right-handed neutrinos; and turn after to calculate the Majorana masses.

3.1.1. Dirac neutrinos

The Dirac mass matrix couples the left-handed neutrinos in the $(F_i)_{i=1,2,3}$ to the right-handed ones $(N_i)_{i=1,2,3}$ living in different representations of $SU(5) \times G_f$ with flavor symmetry $G_f =$

$D_4 \times U(1)$. As described in section 2, the F_1 lives in the non-trivial D_4 singlet $1_{+,-}$ while F_2 and F_3 live together in the D_4 doublet $2_{0,0}$; they have the same $U(1)$ charge $q_{F_i} = 14$. The right-handed neutrinos have different quantum numbers under D_4 ; the N_1 lives in the D_4 representation $1_{+,+}$ while N_2 and N_3 live together in the D_4 doublet $2_{0,0}$; they have the same $U(1)$ charge $q_{N_i} = -6$. The chiral superpotential $W_D(F, N, H)$ for neutrino Yukawa couplings respecting gauge invariance and flavor $D_4 \times U(1)$ symmetry is given by

$$W_D = \lambda_1 N_1 F_1 H_5 + \lambda_2 N_{2,3} F_{2,3} H_5 \quad (3.2)$$

where λ_1 and λ_2 are Yukawa coupling constants. Using the tensor product of D_4 irreducible representations given in Eqs. (B.4)–(B.5) and denoting the Higgs by H_u , the superpotential (3.2) become

$$W_D = \lambda_1 H_u (v_e L_e) + \lambda_2 H_u (v_\mu L_\mu + v_\tau L_\tau) \quad (3.3)$$

When the Higgs doublet develop its VEV as usual $\langle H_u \rangle = v_u$, we get the Dirac mass matrix of neutrinos

$$m_D = v_u \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

3.1.2. Majorana neutrinos

A Majorana mass matrix couples the three right-handed neutrinos N_i to themselves; this mass matrix is obtained from the superpotential $W_M(N, \dots)$ respecting gauge invariance and flavor symmetry of the model. Using Tables (2.11)–(2.14), one can check that this chiral superpotential is given by

$$W_M = \lambda_3 N_1 N_1 \eta + \lambda_4 N_{2,3} N_{2,3} \eta + \lambda_5 N_1 N_{2,3} \chi \quad (3.5)$$

In this expression, we have added the third term involving the flavon χ to satisfy the TBM conditions and to generate appropriate masses for the neutrinos. This term—which is at the renormalizable level—will contribute to the entries (12) and (13) in the Majorana mass matrix. By using the multiplication rule of D_4 representations, the superpotential W_M develops into

$$W_M = \lambda_3 (v_1 v_1) \eta + \lambda_4 (v_2 v_3 + v_3 v_2) \eta + \lambda_5 v_1 (v_2 \chi_2 + v_3 \chi_1) \quad (3.6)$$

and by taking the VEVs of the flavons χ and η as

$$\langle \chi_1 \rangle = \langle \chi_2 \rangle = v_\chi, \quad \langle \eta \rangle = v_\eta$$

we find the Majorana neutrino mass matrix M_R as follows

$$M_R = \begin{pmatrix} \lambda_3 v_\eta & \lambda_5 v_\chi & \lambda_5 v_\chi \\ \lambda_5 v_\chi & 0 & \lambda_4 v_\eta \\ \lambda_5 v_\chi & \lambda_4 v_\eta & 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

The light neutrino mass matrix is obtained using type I seesaw mechanism formula $m_\nu = m_D M_R^{-1} m_D^T$, and we find

$$m_\nu = v_u^2 \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^2 \lambda_4 v_\eta}{\lambda_3 \lambda_4 v_\eta^2 - 2\lambda_5^2 v_\chi^2} & -\frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_5 v_\chi}{\lambda_3 \lambda_4 v_\eta^2 - 2\lambda_5^2 v_\chi^2} & -\frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_5 v_\chi}{\lambda_3 \lambda_4 v_\eta^2 - 2\lambda_5^2 v_\chi^2} \\ -\frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_5 v_\chi}{\lambda_3 \lambda_4 v_\eta^2 - 2\lambda_5^2 v_\chi^2} & \frac{\lambda_2^2 \lambda_5^2 v_\chi^2}{\lambda_3 \lambda_4^2 v_\eta^3 - 2\lambda_4 \lambda_5^2 v_\eta v_\chi^2} & -\frac{\lambda_2^2 (\lambda_5^2 v_\chi^2 - \lambda_3 \lambda_4 v_\eta^2)}{\lambda_3 \lambda_4^2 v_\eta^3 - 2\lambda_4 \lambda_5^2 v_\eta v_\chi^2} \\ -\frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 \lambda_5 v_\eta v_\chi}{\lambda_3 \lambda_4^2 v_\eta^3 - 2\lambda_4 \lambda_5^2 v_\eta v_\chi^2} & -\frac{\lambda_2^2 (\lambda_5^2 v_\chi^2 - \lambda_3 \lambda_4 v_\eta^2)}{\lambda_3 \lambda_4^2 v_\eta^3 - 2\lambda_4 \lambda_5^2 v_\eta v_\chi^2} & \frac{\lambda_2^2 \lambda_5^2 v_\chi^2}{\lambda_3 \lambda_4^2 v_\eta^3 - 2\lambda_4 \lambda_5^2 v_\eta v_\chi^2} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

this form of m_ν can realize the TBM matrix by adopting the following

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda_2 \\ \lambda_4 v_\eta &= \lambda_3 v_\eta + \lambda_5 v_\chi\end{aligned}\quad (3.9)$$

so the above mass matrix m_ν is diagonalized as $M_\nu = U^T m_\nu U = \text{diag}(m_1, m_2, m_3)$ with the TBM matrix U given by

$$U = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

It predicts the mixing angles as follows

$$\sin^2 \theta_{12} = \frac{1}{3}, \quad \sin^2 \theta_{23} = \frac{1}{2}, \quad \sin^2 \theta_{13} = 0 \quad (3.11)$$

the eigen-masses are

$$m_1 = \frac{\lambda_1^2 v_u^2}{\lambda_3 v_\eta - \lambda_5 v_\chi}, \quad m_2 = \frac{\lambda_1^2 v_u^2}{\lambda_3 v_\eta + 2\lambda_5 v_\chi}, \quad m_3 = -\frac{\lambda_1^2 v_u^2}{\lambda_3 v_\eta + \lambda_5 v_\chi} \quad (3.12)$$

which yield to a non-vanishing solar and the atmospheric mass-squared differences Δm_{21}^2 and Δm_{31}^2 .

3.2. Deviation of mixing angles θ_{13} and θ_{23}

In this subsection we study the deviation from TBM matrix which consists of breaking the μ – τ symmetry in the neutrino mass matrix in order to reconcile the reactor angle θ_{13} with the global fit data in Table 1. Recently, the deviation from TBM using additional flavons has been extensively studied in the literature and there are two matrix perturbations that allow for a suitable deviation of the mixing angles (for deviation by using non-trivial singlets, see for example Ref. [36]), they are:

$$\delta M_{33}^{12} = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \delta M_{22}^{13} = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

where the indices (12), (33), (13) and (22) are the elements that should be perturbed in the neutrino matrix to deviate from TBM and ε is the deviation parameter.

Using the flavon superfields σ , ζ , ρ and ρ' of Table (2.14), we see that we can perform a symmetric perturbation of the superpotential (3.5) that induces a deviation of the Majorana neutrino mass matrix M_R of Eq. (3.7). Thus, the additional higher dimensional operators that respect the symmetries of the model are as follows:

$$\delta W_M = \frac{1}{\Lambda} (\lambda_6 N_1 N_{2,3} \sigma \zeta + \lambda_7 N_{2,3} N_{2,3} \rho \zeta + \lambda_8 N_{2,3} N_{2,3} \rho' \zeta) \quad (3.14)$$

The invariance of δW_M may be explicitly exhibited by using the D_4 representation language,

$$\begin{aligned}N_1 N_{2,3} \sigma \zeta &\sim 1_{+,+} \otimes 2_{0,0} \otimes 2_{0,0} \otimes 1_{+,+} \\ N_{2,3} N_{2,3} \rho \zeta &\sim 2_{0,0} \otimes 2_{0,0} \otimes 1_{+,-} \otimes 1_{+,+} \\ N_{2,3} N_{2,3} \rho' \zeta &\sim 2_{0,0} \otimes 2_{0,0} \otimes 1_{-,-} \otimes 1_{+,+}\end{aligned} \quad (3.15)$$

Hence, to obtain the desired D_4 invariant, the tensor product between the D_4 doublets should be $1_{+,+}$ for the first term, $1_{+,-}$ for the second term and $1_{-,-}$ for the last term. Thus, we obtain

$$\delta W_M = \frac{1}{\Lambda} (\lambda_6 (v_1 v_3) \sigma \zeta + \lambda_7 (v_2 v_2 + v_3 v_3) \rho \zeta + \lambda_8 (v_2 v_2 - v_3 v_3) \rho' \zeta) \quad (3.16)$$

Assuming that

$$\lambda_7 = \lambda_8, \quad \lambda_6 = 2\lambda_7 \quad (3.17)$$

and if we choose the VEVs of the flavons as

$$\langle \rho \rangle = \langle \rho' \rangle = \langle \sigma \rangle, \quad \text{with} \quad \langle \sigma \rangle = (v_\sigma, 0)^T \quad (3.18)$$

we get the second matrix perturbation in Eq. (3.13)

$$\delta M = \Lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{with} \quad \varepsilon = \lambda_6 \frac{\langle \zeta \rangle \langle \sigma \rangle}{\Lambda^2} \quad (3.19)$$

With this correction, the previous Majorana neutrino mass matrix M_R gets deformed as

$$M'_R = \Lambda \begin{pmatrix} \frac{\lambda_3 v_\eta}{\Lambda} & \frac{\lambda_5 v_\chi}{\Lambda} & \frac{\lambda_5 v_\chi}{\Lambda} + \varepsilon \\ \frac{\lambda_5 v_\chi}{\Lambda} & \varepsilon & \frac{\lambda_3 v_\eta + \lambda_5 v_\chi}{\Lambda} \\ \frac{\lambda_5 v_\chi}{\Lambda} + \varepsilon & \frac{\lambda_3 v_\eta + \lambda_5 v_\chi}{\Lambda} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

In order to extract the mixing matrix and the neutrino masses, we will parameterize M'_R in the following way

$$\begin{aligned} a &= \frac{\lambda_3 v_\eta}{\Lambda} \\ c &= \frac{\lambda_5 v_\chi}{\Lambda} \end{aligned} \quad (3.21)$$

which leads to

$$M'_R = \Lambda \begin{pmatrix} a & c & c + \varepsilon \\ c & \varepsilon & a + c \\ c + \varepsilon & a + c & 0 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Notice that since the Dirac mass matrix m_D is diagonal (see Eq. (3.4)), it does not affect the correction induced in the Majorana matrix M'_R , and by using type I seesaw mechanism formula $m_\nu^{eff} = m_D M_R'^{-1} m_D^T$, we obtain the new neutrino mass matrix with elements given explicitly as

$$\begin{aligned} m_{11} &= \frac{m_0}{k} (a^2 + 2ac + c^2) \\ m_{22} &= \frac{m_0}{k} (c^2 + 2c\varepsilon + \varepsilon^2) \\ m_{33} &= -\frac{m_0}{k} (a\varepsilon - c^2) \\ m_{12} &= m_{21} = -\frac{m_0}{k} (a\varepsilon + c\varepsilon + ac + c^2) \\ m_{13} &= m_{31} = \frac{m_0}{k} (c\varepsilon - ac - c^2 + \varepsilon^2) \\ m_{23} &= m_{32} = -\frac{m_0}{k} (-a^2 - ac + c^2 + \varepsilon c) \end{aligned} \quad (3.23)$$

where $k = a^3 + 2a^2c - ac^2 - 2ac\varepsilon - 2c^3 - c^2\varepsilon + 2c\varepsilon^2 + \varepsilon^3$ and $m_0 = \frac{\lambda_1^2 v_u^2}{\Lambda}$. This is a symmetric matrix that can be diagonalized by a similarity transformation like $m_v^{diag} = \tilde{U}^T m_v^{eff} \tilde{U}$. The system of eigenvectors and eigenvalues can be computed perturbatively; we find up to order $O(\varepsilon^2)$, the unitary matrix $\tilde{U}$ which diagonalize the neutrino mass matrix m_v^{eff} given in terms of its eigenvectors as

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\varepsilon}{2a\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{3\varepsilon}{4a\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\varepsilon}{4a\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{3\varepsilon}{4a\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\varepsilon}{4a\sqrt{2}} \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2) \quad (3.24)$$

consequently, the reactor and atmospheric angles develops into

$$\sin \theta_{13} = \left| \frac{\varepsilon}{2a\sqrt{2}} \right|, \quad \sin \theta_{23} = \left| \frac{\varepsilon}{4a\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right| \quad (3.25)$$

while the solar angle θ_{12} maintain its TBM value; $\sin \theta_{12} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. It is easy to check that the matrix $\tilde{U}$ coincides with the TBM matrix in the limit $\varepsilon \rightarrow 0$. As for the eigenvalues of m_v^{eff} , they read up to order $O(\varepsilon^2)$,

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{m_0}{-c + \sqrt{a^2 - a\varepsilon + \varepsilon^2}} \\ m_2 &= \frac{m_0}{\varepsilon + a + 2c} \\ m_3 &= -\frac{m_0}{c + \sqrt{a^2 - a\varepsilon + \varepsilon^2}} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Using these masses, we calculate the solar and the atmospheric mass-squared differences

$$\begin{aligned} \Delta m_{sol}^2 = \Delta m_{21}^2 &= -4 \frac{m_0^2 (3a\varepsilon + 3c\varepsilon + 6ac + 3c^2)}{4(a-c)(a+2c)(a\varepsilon - 4c\varepsilon + ac + a^2 - 2c^2)} \\ \Delta m_{atm}^2 = \Delta m_{31}^2 &= 2m_0^2 \frac{c(\varepsilon - 2a)}{(a^2 - c^2)(-2a\varepsilon + a^2 - c^2)} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Since the parameters a and c contribute to the tiny mass of neutrinos (see Eq. (3.26)), the VEVs v_η and v_χ should be small and close to the cutoff $v_\eta, v_\chi \lesssim \Lambda$ which means that

$$|a| \lesssim 1, \quad |c| \lesssim 1 \quad (3.28)$$

3.2.1. Fixing a for allowed $\sin \theta_{ij}$

Focusing on relations in Eq. (3.25), we fix the parameter of deviation ε in the range of $O(\frac{1}{10})$, and we use the experimental values of $\sin \theta_{ij}$ given in Table 1; then, we plot in Fig. 1 $\sin \theta_{23}$ as a function of $\sin \theta_{13}$ in terms of the ratio $\frac{\varepsilon}{a}$ induced by the VEV of the singlet η . The values of the ratio $\frac{\varepsilon}{a}$ that are compatible with both $\sin \theta_{13}$ and $\sin \theta_{23}$ are shown in the left panel (right panel) of Fig. 1 within their 3σ allowed range for the normal hierarchy (inverted hierarchy) case; see Table 1. We observe that for the left panel, the mixing angles θ_{13} and θ_{23} vary within the acceptable 3σ ranges

$$\begin{aligned} 0.138 &\lesssim \sin \theta_{13} \lesssim 0.161 \\ 0.626 &\lesssim \sin \theta_{23} \lesssim 0.638 \end{aligned} \quad (3.29)$$

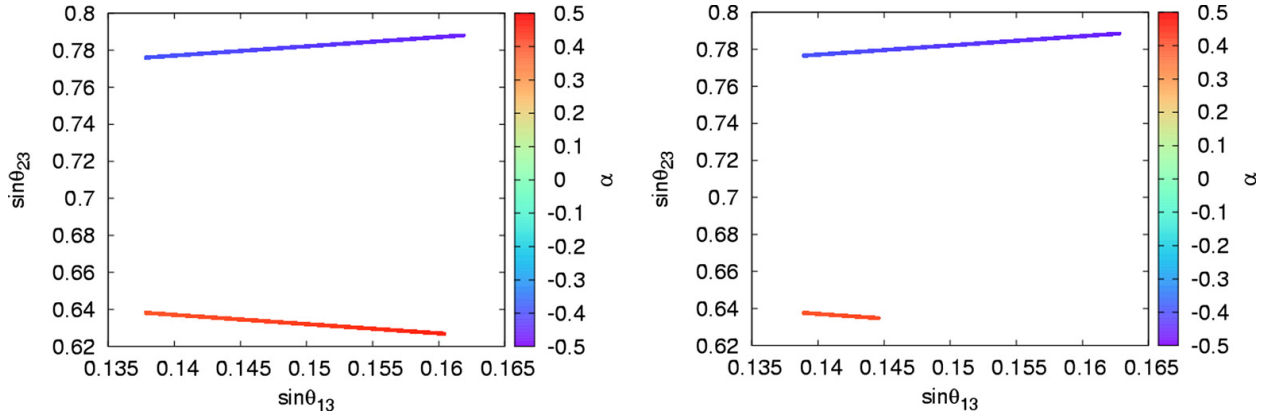


Fig. 1. Left: $\sin \theta_{23}$ as a function of $\sin \theta_{13}$ with the relative parameter $\frac{\varepsilon}{a}$ shown in the palette. Right: The same variation as in the left panel but for inverted hierarchy. (For interpretation of the colors in this figure, the reader is referred to the web version of this article.)

for the orange line which corresponds to

$$0.38 \lesssim \frac{\varepsilon}{a} \lesssim 0.45 \quad (3.30)$$

and

$$\begin{aligned} 0.138 &\lesssim \sin \theta_{13} \lesssim 0.162 \\ 0.776 &\lesssim \sin \theta_{23} \lesssim 0.788 \end{aligned} \quad (3.31)$$

for the blue line which corresponds to

$$-0.45 \lesssim \frac{\varepsilon}{a} \lesssim -0.38 \quad (3.32)$$

As for the right panel of Fig. 1, the mixing angles θ_{13} and θ_{23} vary within the acceptable 3σ ranges

$$\begin{aligned} 0.139 &\lesssim \sin \theta_{13} \lesssim 0.144 \\ 0.634 &\lesssim \sin \theta_{23} \lesssim 0.637 \end{aligned} \quad (3.33)$$

for the orange line which corresponds to

$$0.39 \lesssim \frac{\varepsilon}{a} \lesssim 0.41 \quad (3.34)$$

and

$$\begin{aligned} 0.139 &\lesssim \sin \theta_{13} \lesssim 0.163 \\ 0.776 &\lesssim \sin \theta_{23} \lesssim 0.788 \end{aligned} \quad (3.35)$$

for the blue line which corresponds to

$$-0.46 \lesssim \frac{\varepsilon}{a} \lesssim -0.39 \quad (3.36)$$

In order to get estimations of the parameter a , we plot in the left panel in Fig. 2 $\sin \theta_{13}$ as a function of ε with the parameter a shown in the palette on the right while $\sin \theta_{23}$ is considered as an input parameter to get the value of the parameter a compatible with both mixing angles. We observe that the values of $\sin \theta_{13}$ in the interval $[0.138, 0.162]$ for ε of $O(\frac{1}{10})$ corresponds to

$$-0.25 \lesssim a \lesssim -0.0007 \quad (3.37)$$

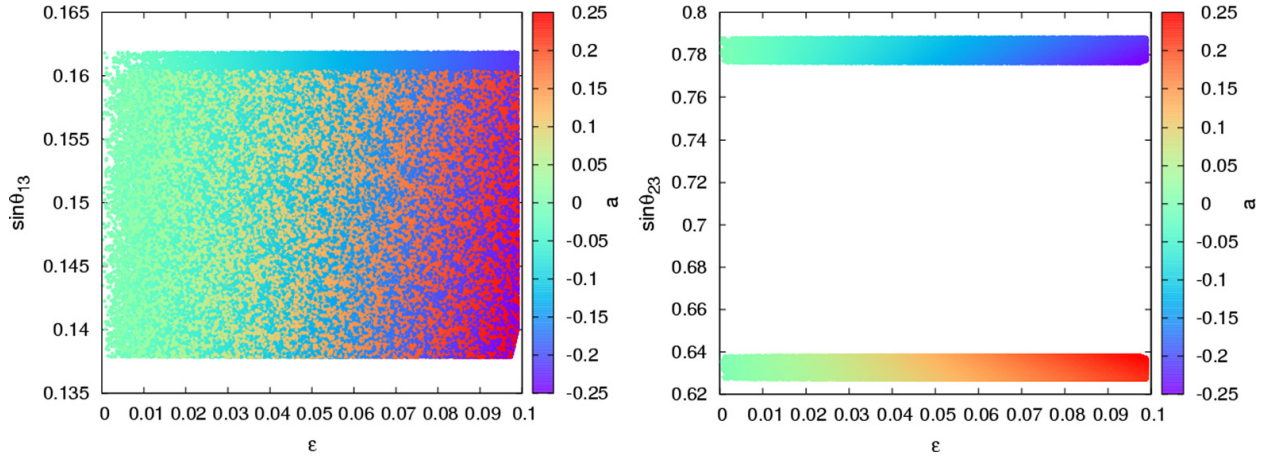


Fig. 2. Left: $\sin\theta_{13}$ as a function of ε with the relative parameter a shown in the palette. Right: The same as in the left panel but for $\sin\theta_{23}$ instead of $\sin\theta_{13}$.

while for values of $\sin\theta_{13}$ in the interval $[0.138, 0.161]$, we have

$$0.0003 \lesssim a \lesssim 0.25 \quad (3.38)$$

Normally, the left panel in Fig. 2 is sufficient to obtain the allowed ranges of the parameter a because the intervals obtained in Eqs. (3.37)–(3.38) are compatible with both mixing angles θ_{13} and θ_{23} , but the allowed range of the parameter a in the left panel provide us only the allowed values of $\sin\theta_{13}$. To extract the allowed ranges of $\sin\theta_{23}$ that are compatible with the ranges of the parameter a obtained in Eqs. (3.37)–(3.38), we plot in the right panel of Fig. 2 $\sin\theta_{23}$ as a function of ε with the parameter a shown in the palette on the right while $\sin\theta_{13}$ is considered as an input parameter. We observe that the values of $\sin\theta_{23}$ in the interval $[0.776, 0.788]$ corresponds to the range of the parameter a given in Eq. (3.37)

$$-0.25 \lesssim a \lesssim -0.0002 \quad (3.39)$$

while for values of $\sin\theta_{23}$ in the interval $[0.626, 0.638]$, we have the range of a given in Eq. (3.38).

$$0.0004 \lesssim a \lesssim 0.25 \quad (3.40)$$

3.2.2. Fixing c for allowed Δm_{ij}

To fix the parameter c , we consider the second relation in Eq. (3.27) where we have two unknown parameters (namely m_0 and c). Thus, we plot in Fig. 3 Δm_{31} as a function of m_0 with the parameter c presented in the palette on the right. In the left panel of Fig. 3, Δm_{31} vary within its 3σ allowed range for the normal hierarchy case; see Table 1. For the rest of the parameters of Eq. (3.27), we have earlier fixed the parameter ε in the range of $O(\frac{1}{10})$, and from Eqs. (3.37), (3.38), (3.39), and (3.40) we have fixed the parameter a in the interval $[-0.25 : 0.25]$. We also have restricted the parameter c in the range $[-1 : 1]$ in Eq. (3.28). Gathering all these restrictions, we observe from the color palette in the left panel of Fig. 3 that c can take any value in the range $[-1 : 1]$ —except the zero value which is easy to notice from the second relation in Eq. (3.27)). One can also see that for the 3σ allowed range of Δm_{31} , the values of c close to zero—presented by the green light color—corresponds to the values of m_0 close to zero, and as m_0 increases—say $m_0 \gtrsim 0.03$ eV—the parameter c vary from large negative (blue–purple colors) to large positive values (orange–red colors).

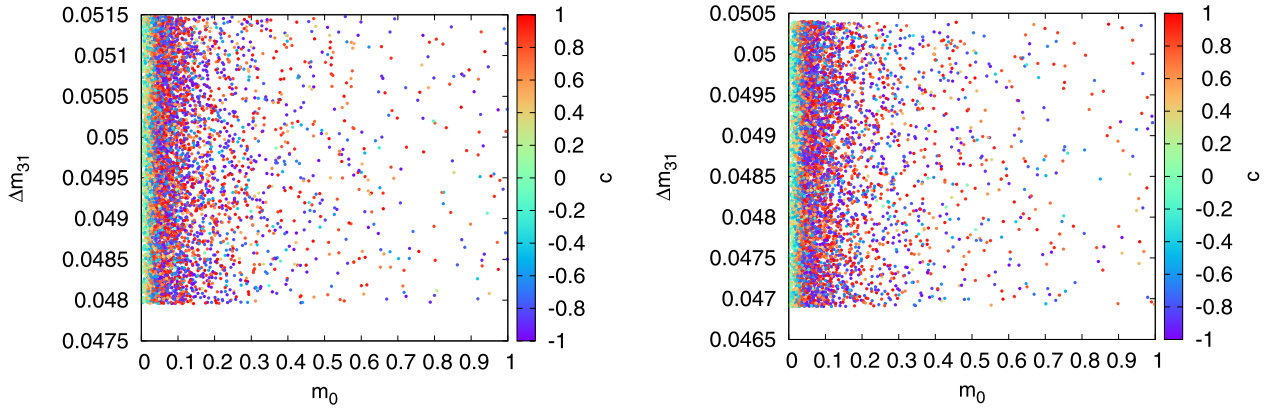


Fig. 3. Left: Δm_{31} [eV] as a function of m_0 [eV] with the parameter c presented in the palette on the right for normal hierarchy. Right: same variation in the left panel but for inverted hierarchy. (For interpretation of the colors in this figure, the reader is referred to the web version of this article.)

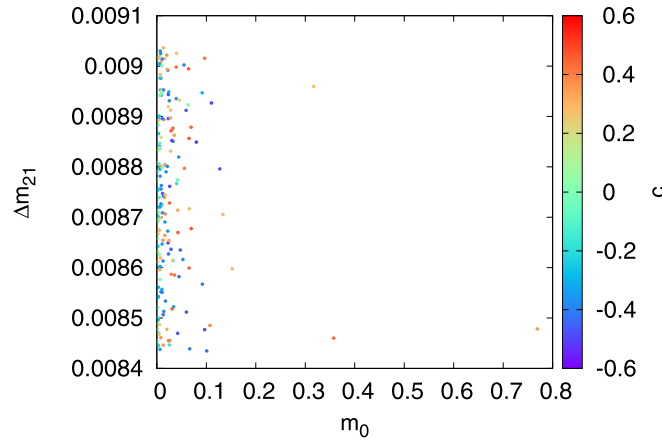


Fig. 4. Δm_{21} [eV] as a function of m_0 [eV] with the parameter c presented in the palette on the right.

For the right panel, Δm_{31} vary within its 3σ allowed range for the inverted hierarchy case, and the parameters m_0 and c vary in the same ranges as in the left panel. One can see approximately the same distribution of colors as in the left panel, and the only difference is the 3σ allowed range of Δm_{31} . Now we consider the first relation in Eq. (3.27) to get the allowed ranges of m_0 and c in the case of Δm_{21} , thus, we plot in Fig. 4 Δm_{21} as a function of m_0 with the parameter c presented in the palette on the right. We observe that range of the parameter c is reduced to

$$-0.6 \lesssim c \lesssim 0.6 \quad (3.41)$$

and the range of the parameter m_0 is reduced to

$$0.00018 \text{ eV} \lesssim m_0 \lesssim 0.77 \text{ eV} \quad (3.42)$$

4. Charged fermions in $SU(5) \times D_4 \times U(1)$ model

In this section we give the invariant operators under $SU(5) \times D_4 \times U(1)$ that determine the mass matrices of the up-, down-quarks and the charged leptons. Moreover we add operator which contain the 45-dimensional Higgs in order to avoid the bad relation between the down quarks and the leptons $Y_d = Y_e^T$ predicted in the GUT scale. Recall that the mass matrices of the quarks and charged leptons can be embedded in the Yukawa couplings given by

$$10_M \cdot 10_M \cdot 5_{H_u} \supset Q_L u^c H_u \quad (4.1)$$

for the up-quarks type, and

$$10_M \bar{5}_M \bar{5}_{H_d} \supset Q_L d^c H_d + L e^c H_d \quad (4.2)$$

for the down-quarks and charged leptons.

4.1. Up quark sector

We start with the mass matrix of the up quark which originate from the up-type Yukawa couplings $10.10.5 \equiv T.T.H_u$. The leading order (LO) $D_4 \times U(1)$ invariant superpotential giving rise to the mass matrix of the up quarks reads

$$W_{up} = \frac{y_1}{\Lambda} T_1 T_1 \Omega H_5 + \frac{y_2}{\Lambda} T_2 T_2 \Gamma H_5 + \frac{y_3}{\Lambda} T_3 T_3 F H_5 \quad (4.3)$$

where y_1 , y_2 and y_3 are the Yukawa coupling constants and Λ is the cutoff scale of the model. The superpotential W_{up} decompose into the SM Yukawa couplings as follows

$$W_{up} = \frac{y_1}{\Lambda} (Q_{L_1} u^c) \Omega H_u + \frac{y_2}{\Lambda} (Q_{L_2} c^c) \Gamma H_u + \frac{y_3}{\Lambda} (Q_{L_3} t^c) F H_u \quad (4.4)$$

When the flavon develop their VEVs as

$$\langle \Omega \rangle = v_\Omega, \quad \langle \Gamma \rangle = v_\Gamma, \quad \langle F \rangle = v_F \quad (4.5)$$

and the Higgs as usual $\langle H_u \rangle = v_u$, this leads to a diagonal up quark mass matrix given by

$$M_{up} = v_u \begin{pmatrix} \frac{y_1}{\Lambda} v_\Omega & 0 & 0 \\ 0 & \frac{y_2}{\Lambda} v_\Gamma & 0 \\ 0 & 0 & \frac{y_3}{\Lambda} v_F \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

where the eigen-masses are

$$m_u = v_u \frac{y_1 v_\Omega}{\Lambda}, \quad m_c = v_u \frac{y_2 v_\Gamma}{\Lambda}, \quad m_t = v_u \frac{y_3 v_F}{\Lambda} \quad (4.7)$$

By using the experimental values of the up quark, the charm quark and the top quark masses as given by the Particle Data Group [39] namely $m_u \simeq 2.3$ MeV, $m_c \simeq 1.275$ GeV and $m_t \simeq 173.21$ GeV, and by taking the VEV $v_u \approx 174$ GeV we obtain the following constraints

$$\begin{aligned} y_1 v_\Omega &\approx 1.32 \times 10^{-5} \Lambda \\ y_2 v_\Gamma &\approx 7.32 \times 10^{-3} \Lambda \\ y_3 v_F &\approx 0.995 \Lambda \end{aligned} \quad (4.8)$$

Notice that if we assume the coupling constant $y_3 \approx O(1)$, the VEV v_F should be close to the cutoff scale Λ in order to accomodate the numerical value of the top quark mass.

4.2. Down quark and charged lepton sector

The $D_4 \times U(1)$ invariant superpotential generating the masses of the down quarks and charged leptons is given by

$$W_{e,d} = \frac{y_4}{\Lambda^2} T_2 F_1 \Omega \Omega H_{\bar{5}} + \frac{y_5}{\Lambda^2} T_1 (F_{2,3} \phi) \Gamma H_{\bar{5}} + \frac{y_6}{\Lambda} T_3 (F_{2,3} \phi) H_{\bar{5}} \quad (4.9)$$

where y_4 , y_5 and y_6 are the Yukawa coupling constants associated to the down quarks and charged leptons sector. The masses of the down quarks and charged leptons are generated from the same down-type Yukawa couplings (namely $10_M \bar{5}_M \bar{5}_{H_d}$) leading to the GUT mass relations

$$m_b = m_\tau \quad , \quad m_s = m_\mu \quad , \quad m_d = m_e \quad (4.10)$$

which are acceptable for the third generation at the GUT scale but fails for the first and second generations due to their inconstancy with the experimental values; so the alternative relations which are much closer to the present data are the well known Georgie–Jarskog (GJ) [37] formulas given by

$$m_b = m_\tau \quad , \quad m_d = 3m_e \quad , \quad 3m_s = m_\mu \quad (4.11)$$

These relations may be predicted by allowing additional couplings to the Higgs field that belongs to the 45-dimensional representation of $SU(5)$. The Higgs $H_{\bar{45}}$ couple to operators $T_i F_i$ and lead to different mass matrices of the down quarks and the charged leptons. Moreover, in addition to the GJ formulas, several relations between the down quarks and charged leptons are possible by considering Higgses that belong to different $SU(5)$ representations [38]. In order to reproduce the difference between the charged lepton mass and the down type quark mass in our model, we introduce the 45-dimensional Higgs denoted as $H_{\bar{45}}$ which transform as non-trivial singlet under D_4 flavor symmetry (namely $H_{\bar{45}} \sim 1_{+,-}$) as well as carrying the $U(1)$ charge $q_{U(1)} = 10$, this Higgs is antisymmetric and satisfy the following relations

$$\begin{aligned} (H_{\bar{45}})_{\bar{c}}^{ab} &= -(H_{\bar{45}})_{\bar{c}}^{ba} \quad , \quad (H_{\bar{45}})_a^{ab} = 0 \\ \langle (H_{\bar{45}})_i^{i5} \rangle &= v_{45} \quad , \quad i = 1, 2, 3 \\ \langle (H_{\bar{45}})_4^{45} \rangle &= -3v_{45} \end{aligned} \quad (4.12)$$

With respect to the invariance under $SU(5) \times D_4 \times U(1)$ symmetry model, the $H_{\bar{45}}$ Higgs can only combine with the operator given by

$$W_{e,d}^{45} = \frac{y_7}{\Lambda} T_2 (F_{2,3} \varphi) H_{\bar{45}} \quad (4.13)$$

Thus, the total superpotential of the down quarks and charged leptons reads as

$$W_{e,d} = \frac{y_4}{\Lambda^2} T_2 F_1 \Omega \Omega H_{\bar{5}} + \frac{y_5}{\Lambda^2} T_1 (F_{2,3} \varphi) \Gamma H_{\bar{5}} + \frac{y_6}{\Lambda} T_3 (F_{2,3} \phi) H_{\bar{5}} + \frac{y_7}{\Lambda} T_2 (F_{2,3} \varphi) H_{\bar{45}} \quad (4.14)$$

which becomes after performing tensor product under D_4 as

$$\begin{aligned} W_{e,d} &= \frac{y_4}{\Lambda^2} T_2 F_1 \Omega \Omega H_{\bar{5}} + \frac{y_5}{\Lambda^2} T_1 (F_2 \varphi_2 + F_3 \varphi_1) \Gamma H_{\bar{5}} + \frac{y_6}{\Lambda} T_3 (F_2 \phi_2 + F_3 \phi_1) H_{\bar{5}} \\ &\quad + \frac{y_7}{\Lambda} T_2 (F_2 \varphi_2 + F_3 \varphi_1) H_{\bar{45}} \end{aligned} \quad (4.15)$$

• Down mass matrix

Using Eq. (4.14), the $D_4 \times U(1)$ invariant superpotential of the down quarks in terms of the SM Yukawa couplings reads

$$\begin{aligned} W_d &= \frac{y_4}{\Lambda^2} (Q_{L_2} d^c) \Omega \Omega H_d + \frac{y_5}{\Lambda^2} Q_{L_1} (s^c \varphi_2 + b^c \varphi_1) \Gamma H_d + \frac{y_6}{\Lambda} Q_{L_3} (s^c \phi_2 + b^c \phi_1) H_d \\ &\quad + \frac{y_7}{\Lambda} Q_{L_2} (s^c \varphi_2 + b^c \varphi_1) h_{\bar{45}} \end{aligned} \quad (4.16)$$

where H_d and $h_{\overline{45}}$, are the doublet components of the $SU(5)$ Higgses $H_{\overline{5}}$ and $H_{\overline{45}}$ respectively. Taking the VEVs of the H_d as usual— $\langle H_d \rangle = v_d$ —and the flavons Γ and Ω as in Eq. (4.5), and assuming the VEVs of ϕ and φ as

$$\langle \phi \rangle = (v_\phi, 0)^T, \quad \langle \varphi \rangle = (0, v_\varphi)^T \quad (4.17)$$

the mass matrix of the down quarks is given by

$$M_d = \begin{pmatrix} 0 & v_d \alpha & 0 \\ v_d \beta & h & 0 \\ 0 & 0 & v_d \delta \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

where

$$\beta = y_4 \frac{v_\Omega^2}{\Lambda^2}, \quad \alpha = y_5 \frac{v_\Gamma v_\varphi}{\Lambda^2}, \quad \delta = y_6 \frac{v_\phi}{\Lambda}, \quad h = y_7 \frac{v_{45} v_\varphi}{\Lambda} \quad (4.19)$$

• *Leptons mass matrix*

Using Eq. (4.14), the $D_4 \times U(1)$ invariant superpotential of the charged leptons in terms of the SM Yukawa couplings reads

$$W_e = \frac{y_4}{\Lambda^2} (L_1 \mu^c) \Omega \Omega H_d + \frac{y_5}{\Lambda^2} (L_2 \varphi_2 + L_3 \varphi_1) e^c \Gamma H_d \\ + \frac{y_6}{\Lambda} (L_2 \phi_2 + L_3 \phi_1) \tau^c H_d - 3 \frac{y_7}{\Lambda} (L_2 \varphi_2 + L_3 \varphi_1) \mu^c h_{\overline{45}} \quad (4.20)$$

As the flavons VEVs are the same as in the down sector, we find the following charged leptons mass matrix

$$M_e = \begin{pmatrix} 0 & v_d \beta & 0 \\ v_d \alpha & -3h & 0 \\ 0 & 0 & v_d \delta \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

where α , β and δ are the same as in Eq. (4.19). Recall that the Higgs $H_{\overline{45}}$ contribute to the element 2–2 for both down quark and charged lepton mass matrices with the factor -3 in M_e to differentiate between the two sectors, this factor is an $SU(5)$ Clebsch–Gordan coefficient which come from the properties of the Higgs $H_{\overline{45}}$ given in Eq. (4.12). Diagonalizing the mass matrices M_d and M_e , the down-type quark masses are given by

$$m_d = \left| \frac{1}{2}h - \frac{1}{2}\sqrt{h^2 + 4v_d^2\alpha\beta} \right| = \left| \frac{y_4 y_5}{y_7} \frac{v_d^2 v_\Gamma v_\Omega^2}{v_{45} \Lambda^3} \right| \\ m_s = \left| \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}\sqrt{h^2 + 4v_d^2\alpha\beta} \right| = \left| y_7 \frac{v_{45} v_\varphi}{\Lambda} + \frac{y_4 y_5}{y_7} \frac{v_d^2 v_\Gamma v_\Omega^2}{v_{45} \Lambda^3} \right| \\ m_b = |v_d \delta| = \left| y_6 v_d \frac{v_\phi}{\Lambda} \right| \quad (4.22)$$

while for the charged leptons masses, we find

$$m_e = \left| -\frac{3}{2}h + \frac{1}{2}\sqrt{9h^2 + 4v_d^2\alpha\beta} \right| = \left| \frac{y_4 y_5}{3y_7} \frac{v_d^2 v_\Gamma v_\Omega^2}{v_{45} \Lambda^3} \right| \\ m_\mu = \left| -\frac{3}{2}h - \frac{1}{2}\sqrt{9h^2 + 4v_d^2\alpha\beta} \right| = \left| 3y_7 \frac{v_{45} v_\varphi}{\Lambda} + \frac{y_4 y_5}{3y_7} \frac{v_d^2 v_\Gamma v_\Omega^2}{v_{45} \Lambda^3} \right| \quad (4.23)$$

$$m_\tau = |v_d \delta| = \left| y_6 v_d \frac{v_\phi}{\Lambda} \right|$$

Thus, the masses of the quarks and charged leptons of the first and the second family are successfully differentiated by 45-dimensional Higgs $H_{\overline{45}}$, and the GJ relations are guaranteed if we assume

$$h \gg v_d \alpha \approx v_d \beta \quad (4.24)$$

To get the experimental values of down quark masses taking into account the GJ relation between the down quarks and charged leptons, we take several estimations of the mass parameters in (4.22). Taking into consideration the estimations assumed in the up quark sector (see Eq. (4.8)), to reach the numerical values of the down, strange and bottom quark masses as given by the Particle Data Group [39], namely $m_d \simeq 4.8$ MeV, $m_s \simeq 95$ MeV and $m_b \simeq 4.66$ GeV, we assume that $v_d \approx 174$ GeV and

$$\begin{aligned} \frac{y_4 y_5}{y_7 y_2 y_1^2} \frac{1}{v_{45}} &= 12.45 \times 10^4 \text{ GeV}^{-1} \\ y_7 v_{45} v_\phi &= 90.2 \Lambda \text{ MeV} \\ y_6 v_\phi &= 2.67 \times 10^{-2} \Lambda \end{aligned} \quad (4.25)$$

4.3. Quark mixing matrix

Regarding the mixing matrix of the quark sector, the unitary matrix that diagonalizing the up quark mass matrix is the identity matrix $U_{Up} = I_{id}$ since the up quark matrix obtained is diagonal (4.6), in the other hand, the down quark mass matrix (4.18) is diagonalized by the unitary matrix

$$U_{Down} = \begin{pmatrix} \frac{-h - \sqrt{h^2 + 4\alpha\beta v_d^2}}{\beta v_d \sqrt{4 + \left(\frac{h + \sqrt{h^2 + 4\alpha\beta v_d^2}}{\beta v_d}\right)^2}} & \frac{-h + \sqrt{h^2 + 4\alpha\beta v_d^2}}{\beta v_d \sqrt{4 + \left(\frac{h - \sqrt{h^2 + 4\alpha\beta v_d^2}}{\beta v_d}\right)^2}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{4 + \left(\frac{h + \sqrt{h^2 + 4\alpha\beta v_d^2}}{\beta v_d}\right)^2}} & \frac{2}{\sqrt{4 + \left(\frac{h - \sqrt{h^2 + 4\alpha\beta v_d^2}}{\beta v_d}\right)^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

and consequently the total mixing matrix for the quark sector is given by

$$|U_Q| = |U_{Up}^\dagger U_{Down}| = \begin{pmatrix} \frac{|-h - \sqrt{h^2 + 4\alpha\beta v_d^2}|}{\left| \beta v_d \sqrt{4 + \left(\frac{h + \sqrt{h^2 + 4\alpha\beta v_d^2}}{\beta v_d}\right)^2} \right|} & \frac{|-h + \sqrt{h^2 + 4\alpha\beta v_d^2}|}{\left| \beta v_d \sqrt{4 + \left(\frac{h - \sqrt{h^2 + 4\alpha\beta v_d^2}}{\beta v_d}\right)^2} \right|} & 0 \\ \frac{2}{\left| \sqrt{4 + \left(\frac{h + \sqrt{h^2 + 4\alpha\beta v_d^2}}{\beta v_d}\right)^2} \right|} & \frac{2}{\left| \sqrt{4 + \left(\frac{h - \sqrt{h^2 + 4\alpha\beta v_d^2}}{\beta v_d}\right)^2} \right|} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

Using the estimations in Eqs. (4.8)–(4.25) and assuming

$$\alpha \approx \beta \simeq 12.6 \times 10^{-5} \quad (4.28)$$

we obtain the total quark mixing matrix as follows

$$|U_Q| = |U_{Up}^\dagger U_{Down}| = \begin{pmatrix} 0.9743 & 0.225 & 0 \\ 0.225 & 0.9743 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

which are reasonably close to the experimental values— $|U_Q| \sim |U_{CKM}|$, especially the elements $|U_{ud}|$, $|U_{us}|$, $|U_{cd}|$ and $|U_{cs}|$, while the zero mixing elements predicted in (4.29), have non-zero but small values comparing to the observed values given by [39]

$$|U_{CKM}| = \begin{pmatrix} 0.97427 & 0.22536 & 0.00355 \\ 0.22522 & 0.97433 & 0.0414 \\ 0.00886 & 0.0405 & 0.99914 \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

We end this section by noticing that spontaneous breaking of discrete symmetry leads in general to cosmological domain walls [40]. To avoid this problem, various scenarios have been proposed, the most common ones are either based on inflation ideas [43] or by using explicit symmetry breaking which is used in several models such as the minimally extended supersymmetric standard model (NMSSM) and string theory inspired prototypes [41,42]. The inflation based scenario might be a nice solution of domain walls problem for GUT models provided the inflationary scale is big; say around $\mathcal{O}(10^{16})$ GeV [43]; at this scale, the topological defects are formed before the end of inflation. This is the case in our SUSY GUT model where the discrete symmetry D_4 is broken by the flavon superfields getting their VEVs at the GUT scale, and consequently the domain walls are inflated away. Notice by the way that the greatest danger of domain walls arises for broken symmetry at lower scale as topological defects may occur after the inflationary stage. For example, in the model proposed in Ref. [44] with superpotential $W(X)$ having Z_{n+3} as discrete symmetry, the domain walls problem occurs in the degenerate minima of $W(X)$; and it has been suggested that the annihilation of such walls as due to a small deformation of the superpotential that breaks explicitly Z_{n+3} symmetry. This idea is realized by adding to $W(X)$ a small deformation term $\delta W = \alpha X$ linear in the chiral superfield X which breaks Z_{n+3} symmetry explicitly, for further details see [44].

5. Conclusion and numerical results

In this paper we have constructed a supersymmetric $SU(5) \times D_4 \times U(1)_f$ GUT model providing a good description of quarks and leptons mass hierarchies and neutrino mixing properties. Besides the bosonic gauge field degrees of freedom and their superpartners described by vector superfields V valued in the Lie algebra of $SU(5)$, the supersymmetric GUT model has also chiral superfields $\{\Phi\}$ that play a basic role in this construction; they can be classified into three kinds as follows:

- (a) matter sector described by the generation superfields (T_i, F_i, N_i) carrying quantum numbers under the gauge symmetry as $T_i \sim \mathbf{10}_i$, $F_i \sim \bar{\mathbf{5}}_i$ and $N_i \sim \mathbf{1}_i$; but also under the flavor symmetry $G_f = D_4 \times U(1)_f$ as in (2.7)–(2.8).
- (b) Higgs sector described by the superfields $(H_5, H_{\bar{5}}, H_{\overline{45}})$ transform under the gauge symmetry as $H_5 \sim \mathbf{5}_H$, $H_{\bar{5}} \sim \bar{\mathbf{5}}_H$ and $H_{\overline{45}} \sim \overline{\mathbf{45}}_H$; and they carry as well non-trivial quantum number under $G_f = D_4 \times U(1)_f$ as in (2.8)–(2.12).

- (c) Flavons sector described by *eleven* chiral superfields; they are scalars under $SU(5)$ gauge invariance; but distinguished by quantum numbers under flavor symmetry $G_f = D_4 \times U(1)_f$ as shown on Tables (2.13)–(2.14).

The invariant chiral superpotential $W(\Phi)$ of the model has *twenty eight free parameters* in which we need to fix eighteen in order to produce the approximative experimental values of the physical parameters in the quark and lepton sectors as given by tables reported below; see Tables (5.2)–(5.3) and Tables (5.5)–(5.9). The total superpotential $W(\Phi) = W_{ch} + W_{chs}$ of the model has a contribution W_{ch} coming from the charged sector and another W_{chs} from the chargeless sector; they are as follows

$$\begin{aligned} W_{ch} &= W_{up} + W_{e,d} \\ W_{chs} &= W_D + W_M + \delta W_M \end{aligned} \quad (5.1)$$

where the superpotentials W_{up} and $W_{e,d}$ of the charged sector are given in Eqs. (4.3)–(4.15) and the superpotentials of the chargeless sector W_D , W_M and δW_M are given in Eqs. (3.2), (3.5) and (3.14).

Notice that the role of the discrete D_4 dihedral group factor in the flavor symmetry G_f may be compared with the role of the alternating group A_4 used in other $SU(5)$ based GUT models building; see for instance [21]. Here D_4 has been motivated by its natural description of μ – τ symmetry as well as by the wish to complete partial results in supersymmetric GUTs. The extra continuous global $U(1)_f$ invariance is necessary to control the superpotential $W(\Phi)$ of the GUT model and also to forbid higher dimensional operators that yields to rapid proton decay.

Among the key steps of this work, we mention the following ones: First, we have required a scale difference among the VEVs of the flavons Γ , Ω and F to fulfill the hierarchy among the three generations of up quarks. We then allowed for the presence of the flavon superfields φ and ϕ along with the flavons Γ and Ω used in the up sector, and the 45-dimensional Higgs in the down quarks–charged leptons sector in order to reconcile with the GJ relations which allow to distinguish between the two sectors. Next, we have studied the neutrino sector where the effective light neutrino mass matrix arise at LO through the type I seesaw mechanism; and by using the D_4 representation properties, the Dirac mass matrix was found diagonal thus allowing the Majorana mass matrix to control the TBM matrix. Finally, in order to generate a non-zero reactor angle, we have added four extra flavon superfields to induce the deviation from TBM pattern.

We end this study by giving comments and a summary of the numerical results obtained in the charged and chargeless fermion sectors. As noticed before, our model involves in total twenty eight free parameters in which we need to fix eighteen to produce the approximative experimental values of the physical parameters in the quark and lepton sectors.

5.1. Numerical results

First we give numerical results for the chargeless sector; see Tables (5.2) and (5.3); then we turn to give numerical estimations of flavon VEVs that lead to masses of the quarks and charged leptons; see Tables (5.5)–(5.9).

5.1.1. Neutrino sector

The neutrino sector in our model involves *fourteen free parameters* in which we have *fixed ten* parameters to reproduce the experimental values of the physical parameters in the allowed

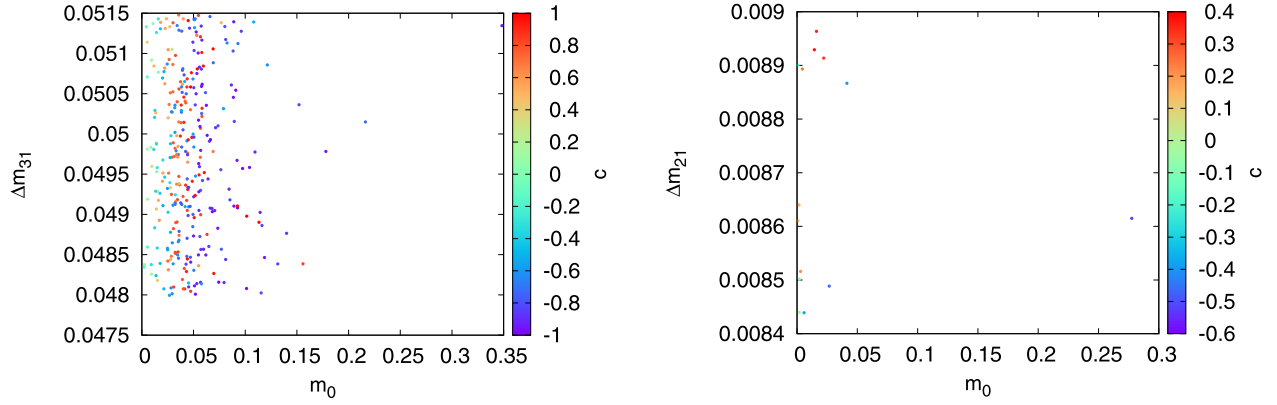


Fig. 5. Left: Δm_{31} [eV] as a function of m_0 [eV] and the parameter c presented in the palette on the right for NH with the parameters a , ε , $\sin \theta_{13}$ and $\sin \theta_{23}$ as inputs. Right: same variation in the left panel but for Δm_{21} [eV].

ranges. To produce the TBM pattern in the neutrino mass matrix as well as generating the non-zero reactor angle θ_{13} , we have *fixed six* parameters by imposing the constraints in Eqs. (3.9), (3.17), (3.18). The *four remaining* parameters to fix (namely ε , a , c and m_0), come from the parameterizations used in Eqs. (3.19)–(3.21). These four parameters are successfully confined to produce the physical parameters Δm_{ij} and $\sin \theta_{ij}$ in the neutrino sector.

As we have mentioned in section 3, the parameter of deviation ε is fixed in the range $[0 : 0.1]$, while the parameter a is fixed as in Eqs. (3.38)–(3.39). In the other hand, the remaining two parameters c and m_0 are fixed using the 3σ allowed ranges of Δm_{31} and Δm_{21} (see Figs. 3–4).

As a final comment, notice that more precise ranges of the parameters c and m_0 may be obtained if we consider their compatibility with the mixing angles $\sin \theta_{13}$ and $\sin \theta_{23}$. We distinguish two cases as follows:

i) m_0 and c for allowed Δm_{31} , $\sin \theta_{13}$ and $\sin \theta_{23}$

We plot in the left panel of Fig. 5 Δm_{31} as a function of m_0 , with c presented in the palette on the right, while the 3σ allowed ranges of $\sin \theta_{13}$ and $\sin \theta_{23}$ are included as input parameters. This inclusion of the mixing angles has reduced the allowed values of m_0 and c as can be seen in the left panel of Fig. 5. Since Δm_{31} , $\sin \theta_{13}$ and $\sin \theta_{23}$ depend also on the parameters a and ε , their values get also restricted. To summarize, we take few examples of the allowed values of a and ε that are compatible with the mixing angles $\sin \theta_{13}$ and $\sin \theta_{23}$ and the parameters c , m_0 and Δm_{31} as shown in the left panel of Fig. 5 (see Table (5.2)).

Free parameters				Observables		
ε	a	c	m_0 [eV]	$\sin \theta_{13}$	$\sin \theta_{23}$	Δm_{31} [eV]
0.0647	0.149	−0.732	0.0434	0.153	0.630	0.0484
0.0906	0.214	−0.951	0.0542	0.149	0.632	0.0495
0.0801	−0.199	0.819	0.0350	0.142	0.778	0.0505
0.0566	−0.142	0.903	0.0493	0.140	0.777	0.0492

(5.2)

ii) m_0 and c for allowed Δm_{21} , $\sin \theta_{13}$ and $\sin \theta_{23}$

We plot in the right panel of Fig. 5 the same as in the left panel but for Δm_{21} instead of Δm_{31} ; hence, we repeat the same study as in the previous case, and we take a few examples of the allowed values of a and ε that are compatible with the mixing angles $\sin \theta_{13}$ and $\sin \theta_{23}$ and the parameters c , m_0 and Δm_{31} as shown in the right panel of Fig. 5 (see Table (5.3)).

Free parameters				Observables		
ε	a	c	m_0 [eV]	$\sin \theta_{13}$	$\sin \theta_{23}$	Δm_{21} [eV]
0.0958	−0.215	0.284	0.0062	0.157	0.785	0.00860
0.0969	−0.240	0.387	0.0143	0.142	0.778	0.00892
0.0779	0.193	−0.244	0.00179	0.142	0.635	0.00877
0.0824	0.207	−0.443	0.0222	0.140	0.636	0.00899

(5.3)

5.1.2. Quarks and charged leptons sectors

The quarks and charged leptons mass matrices in (4.6), (4.18), (4.21) involve in total *fourteen free parameters* that we collect hereafter

$$\begin{array}{ccccccc}
 y_1, & y_2, & y_3, & y_4, & y_5, & y_6, & y_7 \\
 \nu_\Omega, & \nu_\Gamma, & \nu_F, & \nu_{45}, & \nu_\phi, & \alpha, & \beta
 \end{array}
 \quad (5.4)$$

From these free parameters we need to fix eight of them in order to reproduce the phenomenological charged fermion masses by taking into account the GJ relations as well as the quark mixing matrix. The choice of the parameters is done in three steps as follows:

- In the up quark sector, we have fixed three parameters as in Eq. (4.8) to generate the phenomenological masses of the three up-type quarks. To have masses agreeing with experimental values taken from Ref. [39]

Observables	Model values	Experimental values
m_u	2.3 MeV	$2.3^{+0.7}_{-0.5}$ MeV
m_c	1.275 GeV	1.275 ± 0.025 GeV
m_t	173.21 GeV	$173.21 \pm 0.51 \pm 0.71$ GeV

(5.5)

we need to fix the VEVs of the flavons Ω , Γ and F as follows

$$\begin{aligned}
 y_1 \frac{\nu_\Omega}{\Lambda} &\approx 1.32 \times 10^{-5} \\
 y_2 \frac{\nu_\Gamma}{\Lambda} &\approx 7.32 \times 10^{-3} \\
 y_3 \frac{\nu_F}{\Lambda} &\approx 0.995
 \end{aligned}
 \quad (5.6)$$

- In the down quarks–charged leptons sector, besides Eq. (4.8) used in the up-quark sector, we have fixed four parameters as in Eqs. (4.24)–(4.25) to establish the numerical masses of the down quarks. To ensure the values

Down quarks	Model values	Experimental values
m_d	4.8 MeV	$4.8^{+0.5}_{-0.3}$ MeV
m_s	95 MeV	95 ± 5 MeV
m_b	4.66 GeV	4.66 ± 0.03 GeV

(5.7)

we have used the following

$$\begin{aligned}
\frac{y_4 y_5}{y_7 y_2 y_1^2} \frac{1}{v_{45}} &\approx 12.45 \times 10^4 \text{ GeV}^{-1} \\
y_7 \frac{v_{45} v_\phi}{\Lambda} &\approx 90.2 \text{ MeV} \\
y_6 \frac{v_\phi}{\Lambda} &\approx 2.67 \times 10^{-2} \\
\alpha &\approx \beta \\
h &\gg v_d \alpha
\end{aligned} \tag{5.8}$$

- In addition to Eqs. (4.8), (4.24), (4.25) used to generate the phenomenological masses of the charged fermions, we have also imposed $\alpha \approx \beta \simeq 12.6 \times 10^{-5}$ fixing one more parameter of the GUT model. This choice allowed us to obtain approximately the experimental values of the CKM elements $|U_{ij}|$ collected in following table

Observables	Model values	Experimental values
$ U_{ud} $	0.9743	0.97427 ± 0.00014
$ U_{us} $	0.225	0.22536 ± 0.00061
$ U_{cd} $	0.225	0.22522 ± 0.00061
$ U_{cs} $	0.9743	0.97343 ± 0.00015
$ U_{ub} $	0	0.00413 ± 0.000049
$ U_{cb} $	0	0.0414 ± 0.0012
$ U_{tb} $	1	0.99914 ± 0.00005
$ U_{ts} $	0	$0.0405^{+0.0011}_{-0.0012}$
$ U_{td} $	0	$0.00886^{+0.00033}_{-0.00032}$

Appendix A. Proton decay in $SU(5) \times D_4 \times U(1)$ model

In this appendix we provide a discussion concerning the proton decay in our model $SU(5) \times D_4 \times U(1)$; it is organized into two sub-subsections: the first part concerns the usual 4 and 5 dimensional operators yielding to fast proton decay. The second part deals with those 7 and 8 operators induced by integrating out the colored Higgs triplets Δ_u and Δ_d from the superpotential (4.3), (4.16).

A.1. Four and five dim operators leading to proton decay

We start by recalling that in $SU(5)$ based GUT models, there are several baryon number violating terms leading to nucleon decay. The present experimental bounds come from Super-Kamiokande where the lower limit of lifetime for $p \rightarrow e^+ \pi^0$ is $\tau(p \rightarrow e^+ \pi^0) > 1.4 \times 10^{34}$ years and the lifetime limit for $p \rightarrow \nu K^+$ is obtained as 5.9×10^{33} years [45]. In supersymmetric $SU(5)$ model, the dangerous proton decay terms arise from the dimension 4 and dimension 5 operators which have the form

$$\begin{aligned}
10_M \bar{5}_M \bar{5}_M &\rightarrow \lambda_{QLd}(Q_L L d^c) + \lambda_{udd}(u^c d^c d^c) + \lambda_{ell}(e^c L L) \\
10_M \cdot 10_M \cdot 10_M \bar{5}_M &\rightarrow \lambda_{QQQL}(Q_L Q_L Q_L L) + \lambda_{uude}(u^c u^c d^c e^c)
\end{aligned} \tag{A.1}$$

Regarding the dimension 4 operators $10_M \cdot \bar{5}_M \cdot \bar{5}_M$, interaction processes involving violating lepton number term ($Q_{Li} L_j d_k^c$) and the violating baryon number ($u_1^c d_1^c d_k^c$) lead to rapid proton decay with family indices as $i = 1, 2$; $j = 1, 2$ and $k = 2, 3$. As we mentioned in subsection 2.2, the matter superfields $T_i = 10_m^i$ are assigned into the D_4 representations $1_{+,-}$, $1_{+,-}$ and $1_{+,+}$ respectively; while the $F_i = \bar{5}_m^i$ matter superfields are hosted by the D_4 singlet $1_{+,-}$ and the D_4 doublet $2_{0,0}$. Therefore, the dimension 4 operators yielding to proton decay in $SU(5) \times D_4 \times U(1)$ model are given by

$$\begin{aligned} T_1 \cdot F_1 \cdot F_{2,3} \quad , \quad T_2 \cdot F_1 \cdot F_{2,3} \\ T_1 \cdot F_{2,3} \cdot F_{2,3} \quad , \quad T_2 \cdot F_{2,3} \cdot F_{2,3} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

The operator couplings in the first row of (A.2) are forbidden by D_4 discrete symmetry while those of the second row are permitted. This feature may be exhibited by taking the tensor products of D_4 representations. For $T_1 \cdot F_1 \cdot F_{2,3}$ and $T_2 \cdot F_1 \cdot F_{2,3}$ we have $1_{+,-} \otimes 1_{+,-} \otimes 2_{0,0}$ behaving as a doublet. The undesired couplings $T_1 \cdot F_{2,3} \cdot F_{2,3}$ and $T_2 \cdot F_{2,3} \cdot F_{2,3}$ are eliminated by the global $U(1)$ symmetry (see Table (A.4)). As for the dimension 5 operators $10_M \cdot 10_M \cdot 10_M \cdot \bar{5}_M$ which are given in the second line in Eq. (A.1) are generically generated via color triplet Higgsino exchange [48]. For instance, the following dimension 5 operators lead to rapid proton decay

$$T_1 \cdot T_1 \cdot T_3 \cdot F_{2,3} \quad , \quad T_1 \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot F_{2,3} \quad , \quad T_1 \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot F_1 \quad (\text{A.3})$$

The first two couplings in Eq. (A.3) are excluded by the D_4 symmetry while the third one is invariant under D_4 , but is ruled out by the global $U(1)$ symmetry since its charge is $q_{U(1)} = 45$ and therefore is absent. The dimension 4 and 5 operators leading to rapid proton decay and suppressed by D_4 symmetry and global $U(1)$ are listed in the following table:

4- and 5-dim operators	D_4 invariance	$U(1)$
$T_1 \cdot F_1 \cdot F_{2,3}$	No	40
$T_2 \cdot F_1 \cdot F_{2,3}$	No	35
$T_1 \cdot F_{2,3} \cdot F_{2,3}$	Yes	40
$T_2 \cdot F_{2,3} \cdot F_{2,3}$	Yes	35
$T_1 \cdot T_1 \cdot T_3 \cdot F_{2,3}$	No	11
$T_1 \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot F_{2,3}$	No	45
$T_1 \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot F_1$	Yes	45

(A.4)

Notice that in our $SU(5) \times D_4 \times U(1)$ model, there are also operators with dimension² equal to 6 involving flavon superfields as

$$T_1 \cdot F_1 \cdot F_{2,3} \cdot \sigma \cdot \Omega \quad , \quad T_1 \cdot F_{2,3} \cdot F_{2,3} \cdot \rho \cdot \Omega \quad , \quad T_1 \cdot F_{2,3} \cdot F_{2,3} \cdot \rho' \cdot \Omega$$

and may lead to rapid nucleon decay; but can be eliminated by the usual R-parity [53]; this discrete symmetry is known to avoid all renormalizable baryon and lepton number violating operators such as $T_i \cdot F_j \cdot F_k$ in SUSY models. Concerning operators of dimension 5 (A.3), their couplings with the flavon superfields to form operators of dimension 6 are forbidden by the

² The 6-dimension operators are the highest dimensional couplings used in our model (except for the operators in Eq. (A.8) derived from the Yukawa superpotential), thus, we restrict our discussion concerning the higher couplings leading to fast proton decay to the 6 dimensional operators.

global $U(1)$ symmetry. Finally, notice that the MSSM μ -term $\mu H_u H_d$ coming from the coupling between the $SU(5)$ Higgses 5_{H_u} and $\bar{5}_{H_d}$ is forbidden by the D_4 discrete symmetry

A.2. More on proton decay suppression

Here we first examine the seven and eight dimensional couplings inherited from W_{up} and W_d superpotentials given by Eqs. (4.3), (4.16); these couplings are mediated by colored Higgsino triplet Δ and are relevant to nucleon decay after including the dressing procedure [54]. Then, we discuss the effect of the dressing through the exchange of charged winos $\tilde{w}^\pm$ and higgsinos $\tilde{h}^\pm$.

• Operators mediated by colored Higgsino triplet

First, recall that the minimal supersymmetric $SU(5)$ GUT in the low scale SUSY suffers from several problems; and has been ruled out as it predicts a fast proton decay arising from the operators of dimension five which are mediated by colored Higgsino triplet Δ ; these operators come from the Yukawa superpotential; see for instance [46,47]. In Ref. [47], after examining the RGEs for the gauge couplings at one loop, the mass of colored Higgs triplet is found to be $M_\Delta \leq 3.6 \times 10^{15}$ GeV which is less than the limit $M_\Delta \geq 7.6 \times 10^{16}$ GeV required to ensure the proton stability.

In our $SU(5) \times D_4 \times U(1)$ model, the operators mediated by the colored Higgsino triplet are inherited from the superpotentials W_{up} and W_d in Eqs. (4.3)–(4.16). These superpotentials, which have the same structure as homologue considered in [21], read in terms of colored Higgs triplets $\Delta_u \in H_5$ and $\Delta_d \in H_{\bar{5}}$ as follows

$$W'_{up} = \frac{y_1}{\Lambda} [Q_{L_1} Q_{L_1} + u^c e^c] \Omega \Delta_u + \frac{y_2}{\Lambda} [Q_{L_2} Q_{L_2} + c^c \mu^c] \Gamma \Delta_u + \frac{y_3}{\Lambda} [Q_{L_3} Q_{L_3} + t^c \tau^c] F \Delta_u \quad (\text{A.5})$$

and

$$W'_d = \frac{y_4}{\Lambda^2} [Q_{L_2} L_1 + c^c d^c] \Omega \Omega \Delta_d + \frac{y_5}{\Lambda^2} [Q_{L_1} L_2 \varphi_2 + u^c s^c \varphi_2] \Gamma \Delta_d + \frac{y_6}{\Lambda} [Q_{L_3} L_3 \phi_1 + t^c b^c \phi_1] \Delta_d \quad (\text{A.6})$$

Integrating out Δ_u and Δ_d in Eqs. (A.5)–(A.6), the remaining operators relevant for nucleon decay are of dimension seven and eight as follows

$$W_{7,8} = \frac{1}{M_\Delta} \left[\frac{y_1 y_4}{\Lambda^3} (Q_{L_1} Q_{L_1} Q_{L_2} L_1 + u^c e^c c^c d^c) \Omega^3 + \frac{y_1 y_6}{\Lambda^2} (Q_{L_1} Q_{L_1} Q_{L_3} L_3 + u^c e^c t^c b^c) \Omega \phi_1 + \frac{y_2 y_5}{\Lambda^3} (Q_{L_2} Q_{L_2} Q_{L_1} L_2 + c^c \mu^c u^c s^c) \varphi_2 \Gamma^2 + \frac{y_3 y_5}{\Lambda^3} (Q_{L_3} Q_{L_3} Q_{L_1} L_2 + t^c \tau^c u^c s^c) \varphi_2 \Gamma F \right] \quad (\text{A.7})$$

where M_Δ is the colored Higgs triplet mass which is expected to be at the GUT scale; say $\mathcal{O}(10^{16})$. Notice that it is known in GUT literature that the Higgsino mediated proton decay is strongly associated with the so called “doublet–triplet splitting” (DTS) problem [50] on how the Higgs triplets Δ_u and Δ_d acquire GUT-scale masses M_Δ while leaving their doublet partners H_u and H_d with only weak-scale masses. Several ways have been proposed to resolve this problem

such as: (i) tuning the parameters in the Higgs superpotential, see for instance [49]; (ii) using the Missing Partner Mechanism [51]; or (ii) using Double Missing Partner Mechanism [52]. In the present paper, the doublet–triplet splitting problem might be circumvented by using the Missing Partner Mechanism which is considered as the most used solution of DTS. The general idea of this mechanism relies on giving the colored Higgs triplet M_Δ a mass involving additional Higgses sitting the 50, $\overline{50}$ and 75 representations of $SU(5)$. We will not develop this issue here; we refer to literature where several papers using this approach have addressed this question; see for instance Ref. [21].

Returning to eqs. (A.7), the higher dimensional couplings in $W_{7,8}$ may be exhibited by using the superfield assignments of $SU(5) \times D_4 \times U(1)$ model; we have

$$\begin{aligned} & \frac{1}{M_\Delta} \frac{y_1 y_4}{\Lambda^3} [T_1.T_1.T_2.F_1.\Omega^3] \\ & \frac{1}{M_\Delta} \frac{y_1 y_6}{\Lambda^2} [T_1.T_1.T_3.F_{2,3}.\Omega.\phi] \\ & \frac{1}{M_\Delta} \frac{y_2 y_5}{\Lambda^3} [T_2.T_2.T_1.F_{2,3}.\varphi.\Gamma^2] \\ & \frac{1}{M_\Delta} \frac{y_3 y_5}{\Lambda^3} [T_3.T_3.T_1.F_{2,3}.\varphi.\Gamma.F] \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

By using Eqs. (4.8)–(4.25), it is clear that all the operators in the list (A.8) are highly suppressed by a factor proportional to

$$\frac{1}{M_\Delta} \frac{y_1 y_4}{\Lambda^3} \langle \Omega \rangle^3 \quad (\text{A.9})$$

for the first coupling; and

$$\frac{1}{M_\Delta} \frac{y_1 y_6}{\Lambda^2} \langle \Omega \rangle \langle \phi \rangle \quad (\text{A.10})$$

for the second coupling; and

$$\frac{1}{M_\Delta} \frac{y_2 y_5}{\Lambda^3} \langle \varphi \rangle \langle \Gamma \rangle^2 \quad (\text{A.11})$$

for the third coupling; and finally

$$\frac{1}{M_\Delta} \frac{y_3 y_5}{\Lambda^3} \langle \varphi \rangle \langle \Gamma \rangle \langle F \rangle \quad (\text{A.12})$$

for the last coupling. Assuming the Yukawa couplings $y_i \approx O(1)$, the first coupling (A.9) is suppressed by $\frac{2.3}{M_\Delta \times 10^{15}}$ which is of order of $10^{-31} \text{ GeV}^{-1}$; while the suppression of the remaining couplings (A.10)–(A.12) are of order $10^{-23} \text{ GeV}^{-1}$, $10^{-24} \text{ GeV}^{-1}$ and $10^{-22} \text{ GeV}^{-1}$ respectively. In what follows, we turn to study the contribution to proton decay coming from dressing diagrams with winos and higgsinos mediators.

• Dressing by higgsinos and winos exchange

The dressing of dimension five proton decay operators via the exchange of gluino, charginos and neutralinos concerns the process $qq \rightarrow \tilde{l}\tilde{q}$; and consists of converting the sleptons $\tilde{l}$ and $\tilde{q}$ squarks into leptons l' and quarks q' . In order for these operators to be relevant to proton decay, the bosons need to be transformed to fermions by a loop diagram through the gluino, neutralino,

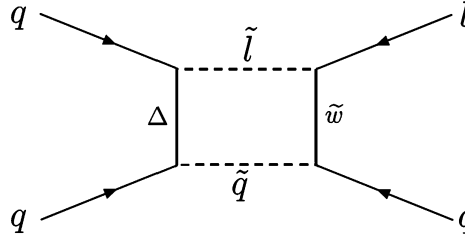


Fig. 6. Dimension 5 operator diagram mediated by the colored Higgs triplet Δ . The superparticles (dashed lines) are transformed in particles via wino exchange. A similar diagram with higgsino exchange and others can also drawn; see appendix C of Ref. [56].

charginos dressing procedure; this leads to four-fermion interactions $qqql$ and $u^c u^c d^c e^c$ with baryon and lepton violating dimension six operators [55]. In SUSY $SU(5)$ models, the dressing of the dimension five operators is studied in the limit where the dominant contribution to the $qqql$ operator comes from a diagram with charged wino dressing while the dominant contribution to the $u^c u^c d^c e^c$ operator arises from a charged higgsino dressing as illustrated in Fig. 6; see for instance Ref. [56] and the references therein.

In our $SU(5) \times D_4 \times U(1)$ model, the dressing of the operators $QQQL$ and $u^c u^c d^c e^c$ of (A.7) involves charged winos and higgsinos and an effective coupling depending on the flavon field VEVs. For clarity, we split the superpotential $W_{7,8}$ as the sum of two parts

$$W_{7,8} = W_{7,8}^L + W_{7,8}^R \quad (\text{A.13})$$

where the part $W_{7,8}^L$ contains the operators of type $QQQL$ coupled to flavons as follows

$$W_{7,8}^L = \frac{1}{M_\Delta} \left[\frac{y_1 y_4}{\Lambda^3} (Q_{L_1} Q_{L_1} Q_{L_2} L_1) \Omega^3 + \frac{y_1 y_6}{\Lambda^2} (Q_{L_1} Q_{L_1} Q_{L_3} L_3) \Omega \phi_1 \right. \\ \left. + \frac{y_2 y_5}{\Lambda^3} (Q_{L_2} Q_{L_2} Q_{L_1} L_2) \varphi_2 \Gamma^2 + \frac{y_3 y_5}{\Lambda^3} (Q_{L_3} Q_{L_3} Q_{L_1} L_2) \varphi_2 \Gamma F \right] \quad (\text{A.14})$$

and the $W_{7,8}^R$ part contains the operators of type $u^c u^c d^c e^c$ like

$$W_{7,8}^R = \frac{1}{M_\Delta} \left[\frac{y_1 y_4}{\Lambda^3} (u^c e^c c^c d^c) \Omega^3 + \frac{y_1 y_6}{\Lambda^2} (u^c e^c t^c b^c) \Omega \phi_1 + \frac{y_2 y_5}{\Lambda^3} (c^c \mu^c u^c s^c) \varphi_2 \Gamma^2 \right. \\ \left. + \frac{y_3 y_5}{\Lambda^3} (t^c \tau^c u^c s^c) \varphi_2 \Gamma F \right] \quad (\text{A.15})$$

The two first operators in Eq. (A.14) are dressed by the charged winos and are significant for the decay mode $p \rightarrow K^+ \bar{\nu}$; this wino dressing contributes to the amplitude of nucleon decay with a factor proportional to

$$\frac{1}{M_\Delta} \frac{y_1 y_4}{\Lambda^3} \langle \Omega \rangle^3 \left(\frac{m_{\tilde{w}}}{m_{\tilde{l}_1} m_{\tilde{q}_2}} \right) \quad (\text{A.16})$$

for the first operator and

$$\frac{1}{M_\Delta} \frac{y_1 y_6}{\Lambda^2} \langle \Omega \rangle \langle \phi_1 \rangle \left(\frac{m_{\tilde{w}}}{m_{\tilde{l}_3} m_{\tilde{q}_3}} \right)$$

for the second. The $m_{\tilde{w}}$ is the wino mass and $m_{\tilde{l}}$ and $m_{\tilde{q}}$ are the slepton and the squark masses respectively. If we take the masses of the sfermions and the charged winos as in Murayama and Pierce paper [47] ($m_{sf} \sim \mathcal{O}(1 \text{ TeV})$ and $m_{\tilde{w}} \in [100, 400] \text{ GeV}$), these extra contributions from

the ratio of the winos and superparticle masses are small and enhance the suppression of the factors in Eqs. (A.9)–(A.10).

Regarding the first operator in Eq. (A.15) which is dressed by charged higgsino is relevant to the same mode $p \rightarrow K^+ \bar{\nu}$, its contribution to the amplitude of nucleon decay is proportional to

$$\frac{1}{M_\Delta} \frac{y_1 y_4}{\Lambda^3} \langle \Omega \rangle^3 \left(\frac{m_{\tilde{h}}}{m_{\tilde{e}} m_{\tilde{c}}} \right) \quad (\text{A.17})$$

where $m_{\tilde{h}}$ is the charged higgsino mass and $m_{\tilde{e}}$ and $m_{\tilde{c}}$ are the masses of the selectron and the scharm respectively. Following [47], the mass of higgsino varies in the range $m_{\tilde{h}} \in [100, 1000]$ GeV; thus the ratio of the higgsino and the superparticle masses is also small and the contribution from charged higgsino dressing that arise in Eq. (A.17) is also highly suppressed.

Appendix B. Dihedral group D_4

The Dihedral group D_4 is a non-abelian discrete symmetry group generated by two non-commuting generators a and b obeying to the conditions $a^4 = b^2 = e$; they have the 4×4 matrix realization

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

The D_4 discrete group consists of eight elements which could be classified in the five conjugacy classes as

$$C_1 : \{e\}, \quad C_2 : \{a, a^3\}, \quad C_3 : \{a^2\}, \quad C_4 : \{b, a^2 b\}, \quad C_5 : \{ab, a^3 b\} \quad (\text{B.2})$$

It has five irreducible representations; four singlets $1_{+,+}$, $1_{+,-}$, $1_{-,+}$ and $1_{-,-}$, and one doublet $2_{0,0}$ where the sub-indices on the representations refer to their characters under the two generators a and b as in the table

χ_{ij}	e	a	b
$\chi_{1_{+,+}}$	+1	+1	+1
$\chi_{1_{+,-}}$	+1	−1	+1
$\chi_{1_{-,+}}$	+1	+1	−1
$\chi_{1_{-,-}}$	+1	−1	−1
$\chi_{2_{0,0}}$	2	0	0

(B.3)

The Kronecker product of two doublets $2_x = (x_1, x_2)^T$ and $2_y = (y_1, y_2)^T$ in the D_4 group is given by

$$2_x \times 2_y = 1_{+,+1} + 1_{+,−1} + 1_{−,+1} + 1_{−,−1}, \quad (\text{B.4})$$

where

$$\begin{aligned} 1_{+,+1} &= x_1 y_2 + x_2 y_1, \\ 1_{+,−1} &= x_1 y_1 + x_2 y_2, \\ 1_{−,+1} &= x_1 y_2 - x_2 y_1, \\ 1_{−,−1} &= x_1 y_1 - x_2 y_2, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

and the singlets product are

$$1_{\alpha,\beta} \times 1_{\gamma,\delta} = 1_{\alpha\gamma,\beta\delta} \quad \text{with } \alpha, \gamma, \beta, \delta = \pm. \quad (\text{B.6})$$

For more details on the D_4 Dihedral group see for instance Ref. [57].

References

- [1] P.F. Harrison, D.H. Perkins, W.G. Scott, Tri-bimaximal mixing and the neutrino oscillation data, *Phys. Lett. B* 530 (2002) 167.
- [2] Y. Abe, et al., DOUBLE-CHOOZ Collaboration, Indication of reactor $\bar{\nu}_e$ disappearance in the Double Chooz experiment, *Phys. Rev. Lett.* 108 (2012) 131801.
- [3] F.P. An, et al., DAYA-BAY Collaboration, Observation of electron–antineutrino disappearance at Daya Bay, *Phys. Rev. Lett.* 108 (2012) 171803;
F.P. An, et al., DAYA-BAY Collaboration, Independent measurement of the neutrino mixing angle θ_{13} via neutron capture on hydrogen at Daya Bay, *Phys. Rev. D* 90 (2014) 071101.
- [4] J.K. Ahn, et al., RENO Collaboration, Observation of reactor electron antineutrinos disappearance in the RENO experiment, *Phys. Rev. Lett.* 108 (2012) 191802.
- [5] K. Abe, et al., T2K Collaboration, Observation of electron neutrino appearance in a muon neutrino beam, *Phys. Rev. Lett.* 112 (2014) 061802.
- [6] D.V. Forero, M. Tortola, J.W.F. Valle, Neutrino oscillations refitted, *Phys. Rev. D* 90 (2014) 093006.
- [7] M.C. Gonzalez-Garcia, M. Maltoni, T. Schwetz, Updated fit to three neutrino mixing: status of leptonic CP violation, *J. High Energy Phys.* 11 (2014) 052.
- [8] F. Capozzi, E. Lisi, A. Marrone, D. Montanino, A. Palazzo, Neutrino masses and mixings: status of known and unknown 3ν parameters, *Nucl. Phys. B* 908 (2016) 218–234.
- [9] F. Gursey, P. Ramond, P. Sikivie, A universal gauge theory model based on E_6 , *Phys. Lett. B* 60 (1976) 177.
- [10] H. Georgi, S.L. Glashow, Unity of all elementary particle forces, *Phys. Rev. Lett.* 32 (1974) 438.
- [11] H. Fritzsch, P. Minkowski, Unified interactions of leptons and hadrons, *Ann. Phys.* 93 (1975) 193.
- [12] V.D. Barger, S. Pakvasa, T.J. Weiler, K. Whisnant, Bimaximal mixing of three neutrinos, *Phys. Lett. B* 437 (1998) 107;
G. Altarelli, F. Feruglio, L. Merlo, Revisiting bimaximal neutrino mixing in a model with S_4 discrete symmetry, *J. High Energy Phys.* 05 (2009) 020;
D. Meloni, Bimaximal mixing and large θ_{13} in a SUSY $SU(5)$ model based on S_4 , *J. High Energy Phys.* 10 (2011) 010.
- [13] Y. Kajiyama, M. Raidal, A. Strumia, The Golden ratio prediction for the solar neutrino mixing, *Phys. Rev. D* 76 (2007) 117301;
L.L. Everett, A.J. Stuart, Icosahedral A_5 family symmetry and the golden ratio prediction for solar neutrino mixing, *Phys. Rev. D* 79 (2009) 020;
W. Rodejohann, Unified parametrization for quark and lepton mixing angles, *Phys. Lett. B* 671 (267) (2009) 085005;
A. Adulpravitchai, A. Blum, W. Rodejohann, Golden ratio prediction for solar neutrino mixing, *New J. Phys.* 11 (2009) 063026;
G.-J. Ding, L.L. Everett, A.J. Stuart, Golden ratio neutrino mixing and A_5 favor symmetry, *Nucl. Phys. B* 857 (2012) 219.
- [14] H. Fritzsch, Z.Z. Xing, Lepton mass hierarchy and neutrino oscillations, *Phys. Lett. B* 372 (1996) 265;
H. Fritzsch, Z.Z. Xing, Large leptonic favor mixing and the mass spectrum of leptons, *Phys. Lett. B* 440 (1998) 313;
H. Fritzsch, Z.Z. Xing, Maximal neutrino mixing and maximal CP violation, *Phys. Rev. D* 61 (2000) 073016.
- [15] G. Altarelli, F. Feruglio, C. Hagedorn, A SUSY $SU(5)$ grand unified model of tri-bimaximal mixing from A_4 , *J. High Energy Phys.* 03 (2008).
- [16] P. Ciafaloni, M. Picariello, E. Torrente-Lujan, A. Urbano, Neutrino masses and tribimaximal mixing in the minimal renormalizable supersymmetric $SU(5)$ grand unified model with A_4 flavor symmetry, *Phys. Rev. D* 79 (2009) 116010.
- [17] C. Hagedorn, S.F. King, C. Luhn, SUSY $S_4 \times SU(5)$ revisited, *Phys. Lett. B* 717 (2012) 207.
- [18] S. Antusch, S.F. King, M. Spinrath, Measurable neutrino mass scale in $A_4 \times SU(5)$, *Phys. Rev. D* 83 (2011) 013005.
- [19] D. Meloni, Bimaximal mixing and large θ_{13} in a SUSY $SU(5)$ model based on S_4 , *J. High Energy Phys.* 1110 (2011) 010.
- [20] M.D. Campos, A.E. Cárcamo Hernández, S. Kovalenko, I. Schmidt, E. Schumacher, *Phys. Rev. D* 90 (2014) 016006.

- [21] F. Bjorkerth, F.J. de Anda, I. de Medeiros Varzielas, S.F. King, Towards a complete $A_4 \times SU(5)$ SUSY GUT, *J. High Energy Phys.* 1506 (2015) 141.
- [22] M. Dimou, S.F. King, C. Luhn, Approaching minimal flavour violation from an $SU(5) \times S_4 \times U(1)$ SUSY GUT, *J. High Energy Phys.* 1602 (2016) 118.
- [23] M.C. Chen, K.T. Mahanthappa, CKM and Tri-bimaximal MNS matrices in a $SU(5) \times {}^{(d)}T$ model, *Phys. Lett. B* 652 (2007) 34;
M.-C. Chen, J. Huang, K. Mahanthappa, A.M. Wijangco, Large θ_{13} in a SUSY $SU(5) \times T'$ model, *J. High Energy Phys.* 1310 (2013) 112.
- [24] S.F. King, C. Luhn, A.J. Stuart, A grand $\Delta(96) \times SU(5)$ flavour model, *Nucl. Phys. B* 867 (2013) 203.
- [25] S. Morisi, M. Picariello, E. Torrente-Lujan, A model for fermion masses and lepton mixing in $SO(10) \times A_4$, *Phys. Rev. D* 75 (2007) 075015;
F. Bazzocchi, M. Frigerio, S. Morisi, Fermion masses and mixing in models with $SO(10) \times A_4$ symmetry, *Phys. Rev. D* 78 (2008) 116018;
A. Albaid, Fermion masses and mixings in a minimal $SO(10) \times A_4$ SUSY GUT, *Phys. Rev. D* 80 (2009) 093002.
- [26] D.G. Lee, R.N. Mohapatra, An $SO(10) \times S_4$ scenario for naturally degenerate neutrinos, *Phys. Lett. B* 329 (1994) 463;
Y. Cai, H.B. Yu, An $SO(10)$ GUT model with S_4 flavor symmetry, *Phys. Rev. D* 74 (2006) 115005;
C. Hagedorn, M. Lindner, R.N. Mohapatra, S_4 flavor symmetry and fermion masses: towards a grand unified theory of flavor, *J. High Energy Phys.* 0606 (2006) 042;
K.M. Patel, An $SO(10) \times S_4$ model of quark–lepton complementarity, *Phys. Lett. B* 695 (2011) 22;
P.S. Bhupal Dev, B. Dutta, R.N. Mohapatra, M. Severson, θ_{13} and proton decay in a minimal $SO(10) \times S_4$ model of flavor, *Phys. Rev. D* 86 (2012) 03500.
- [27] S.F. King, C. Luhn, A new family symmetry for $SO(10)$ GUTs, *Nucl. Phys. B* 820 (2009) 269;
S.F. King, C. Luhn, A supersymmetric grand unified theory of flavour with $PSL(2, 7) \times SO(10)$, *Nucl. Phys. B* 832 (2010) 414.
- [28] F. Bazzocchi, I. de Medeiros Varzielas, Tri-bi-maximal mixing in viable family symmetry unified model with extended seesaw, *Phys. Rev. D* 79 (2009) 093001.
- [29] W. Grimus, L. Lavoura, A discrete symmetry group for maximal atmospheric neutrino mixing, *Phys. Lett. B* 572 (2003) 189.
- [30] W. Grimus, A.S. Joshipura, S. Kaneko, L. Lavoura, M. Tanimoto, Lepton mixing angle $\theta_{13} = 0$ with a horizontal symmetry D_4 , *J. High Energy Phys.* 0407 (2004) 078;
H. Ishimori, T. Kobayashi, H. Ohki, Y. Omura, R. Takahashi, M. Tanimoto, Soft supersymmetry breaking terms from $D_4 \times Z_2$ lepton flavor symmetry, *Phys. Rev. D* 77 (2008) 115005;
A. Blum, R.N. Mohapatra, W. Rodejohann, Inverted mass hierarchy from scaling in the neutrino mass matrix: low and high energy phenomenology, *Phys. Rev. D* 76 (2007) 053003;
C. Hagedorn, W. Rodejohann, Minimal mass matrices for Dirac neutrinos, *J. High Energy Phys.* 0507 (2005) 03.
- [31] D. Meloni, S. Morisi, E. Peinado, Stability of dark matter from the $D_4 \times Z_2$ flavor group, *Phys. Lett. B* 703 (2011) 281;
A. Adulpravitchai, A. Blum, C. Hagedorn, A supersymmetric D_4 model for μ – τ symmetry, *J. High Energy Phys.* 0903 (2009) 046;
H. Ishimori, T. Kobayashi, H. Ohki, Y. Omura, R. Takahashi, M. Tanimoto, Soft supersymmetry breaking terms from $D_4 \times Z_2$ lepton flavor symmetry, *Phys. Rev. D* 77 (2008) 115005;
H. Ishimori, T. Kobayashi, H. Ohki, Y. Omura, R. Takahashi, M. Tanimoto, D_4 flavor symmetry for neutrino masses and mixing, *Phys. Lett. B* 662 (2008) 178.
- [32] P. Ko, T. Kobayashi, J.h. Park, S. Raby, *Phys. Rev. D* 76 (2007) 03500512;
P. Ko, T. Kobayashi, J.h. Park, S. Raby, *Phys. Rev. D* 76 (2007) 059901 (Erratum);
T. Kobayashi, S. Raby, R.J. Zhang, Searching for realistic 4d string models with a Pati–Salam symmetry – Orbifold grand unified theories from heterotic string compactification on a Z_6 orbifold, *Phys. Lett. B* 593 (2004) 262;
T. Kobayashi, H.P. Nilles, F. Ploger, S. Raby, M. Ratz, Stringy origin of non-Abelian discrete flavor symmetries, *Nucl. Phys. B* 768, 135.
- [33] R. Ahl Laamara, M. Miskaoui, E.H. Saidi, Building SO_{10} models with D_4 symmetry, *Nucl. Phys. B* 901 (2015) 95;
R. Ahl Laamara, M. Miskaoui, E.H. Saidi, MSSM-like from $SU_5 \times D_4$ models, *Nucl. Phys. B* 906 (1) (2016);
A. Karozasy, S.F. King, G.K. Leontaris, A.K. Meadowcroft, Phenomenological implications of a minimal F-theory GUT with discrete symmetry, *J. High Energy Phys.* 1510 (2015) 041.
- [34] P. Minkowski, $\mu \rightarrow e\gamma$ at a rate of one out of 10^9 muon decays? *Phys. Lett. B* 67 (1977) 421;

- M. Gell-Mann, P. Ramond, R. Slansky, in: P. Van Nieuwenhuizen, D.Z. Freedman (Eds.), *Supergravity: Proceedings of the Supergravity Workshop at Stony Brook, 27–29 September, 1979*, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 1979; T. Yanagida, in: A. Sugamoto, O. Sawada (Eds.), *Proceedings of the Workshop on Unified Theory and Baryon Number in the Universe*, KEK, February 13, KEK, Tsukuba, 1979; R.N. Mohapatra, G. Senjanovic, Neutrino mass and spontaneous parity nonconservation, *Phys. Rev. Lett.* 44 (1980) 912; J. Schechter, J.W.F. Valle, Neutrino masses in $SU(2) \times U(1)$ theories, *Phys. Rev. D* 22 (1980) 2227.
- [35] S.F. King, C. Luhn, Neutrino mass and mixing with discrete symmetry, *Rep. Prog. Phys.* 76 (2013) 056201.
- [36] B. Brahmachari, S. Choubey, M. Mitra, The A_4 flavor symmetry and neutrino phenomenology, *Phys. Rev. D* 77 (2008) 119901; James Barry, Werner Rodejohann, Deviations from tribimaximal mixing due to the vacuum expectation value misalignment in A_4 models, *Phys. Rev. D* 81 (2010) 093002; Werner Rodejohann, He Zhang, Simple two parameter description of lepton mixing, *Phys. Rev. D* 86 (2012) 093008; D. Aristizabal Sierra, I. de Medeiros Varzielas, Reactor mixing angle from hybrid neutrino masses, *J. High Energy Phys.* 07 (2014) 042; R.A. Laamara, M.A. Loualidi, E.H. Saidi, Type II seesaw supersymmetric neutrino model for $\theta_{13} \neq 0$, *Phys. Rev. D* 93 (2016) 113005.
- [37] H. Georgi, C. Jarlskog, A new lepton-quark mass relation in a unified theory, *Phys. Lett. B* 86 (1979) 297.
- [38] S. Antusch, M. Spinrath, New GUT predictions for quark and lepton mass ratios confronted with phenomenology, *Phys. Rev. D* 79 (2009) 095004.
- [39] K.A. Olive, et al., Particle Data Group, *Rev. Part. Phys., Chin. Phys. C* 38 (2014) 090001.
- [40] Y.B. Zeldovich, I.Y. Kobzarev, L.B. Okun, Cosmological consequences of the spontaneous break down of discrete symmetry, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 67 (1974), *Sov. Phys. JETP* 40 (1974) 1; T.W.B. Kibble, Topology of cosmic domains and strings, *J. Phys. A* 9 (1976) 1387.
- [41] A. Vilenkin, Gravitational field of vacuum domain walls and strings, *Phys. Rev. D* 23 (1981) 852; J. Preskill, S.P. Trivedi, F. Wilczek, M.B. Wise, Cosmology and broken discrete symmetry, *Nucl. Phys. B* 363 (1991) 207; H. Hattori, T. Kobayashi, N. Omoto, Entropy production by domain wall decay in the NMSSM, *Phys. Rev. D* 92 (2015) 103518.
- [42] S.A. Abel, S. Sarkar, P.L. White, On the cosmological domain wall problem for the minimally extended supersymmetric standard model, *Nucl. Phys. B* 454 (1995) 663–684.
- [43] M. Dine, F. Takahashi, T.T. Yanagida, Discrete R symmetries and domain walls, *J. High Energy Phys.* 07 (2010) 003; K.A. Olive, *Phys. Rep.* 190 (1990) 307; J. Preskill, S.P. Trivedi, F. Wilczek, M.B. Wise, *Nucl. Phys. B* 363 (1991) 207; A. Liddle, D. Lyth, *Phys. Rep.* 231 (1993) 1; G. Dvali, G. Senjanovic, Is there a domain wall problem? [arXiv:hep-ph/9501387](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9501387); A.H. Guth, *Phys. Rep.* 333 (2000) 555.
- [44] T. Asaka, J. Hashiba, M. Kawasaki, T. Yanagida, Cosmological moduli problem in gauge-mediated supersymmetry breaking theories, [arXiv:hep-ph/9711501](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9711501).
- [45] M. Miura, Super-Kamiokande Collaboration, *Nucl. Part. Phys. Proc.* 273–275 (2016) 516.
- [46] T. Goto, T. Nihei, Effect of RRRR dimension five operator on the proton decay in the minimal $SU(5)$ SUGRA GUT model, *Phys. Rev. D* 59 (1999) 115009.
- [47] H. Murayama, A. Pierce, Not even decoupling can save minimal supersymmetric $SU(5)$, *Phys. Rev. D* 65 (2002) 055009.
- [48] N. Sakai, T. Yanagida, *Nucl. Phys. B* 197 (1982) 533; S. Weinberg, *Phys. Rev. D* 26 (1982) 287; J. Ellis, D.V. Nanopoulos, S. Rudaz, *Nucl. Phys. B* 202 (1982) 43; P. Nath, R. Arnowitt, *Phys. Rev. D* 38 (1988) 1479.
- [49] S. Dimopoulos, H. Georgi, *Nucl. Phys. B* 193 (1981) 150; N. Sakai, *Z. Phys. C* 11 (1982) 153.
- [50] K.S. Babu, S.M. Barr, Eliminating the $d = 5$ proton decay operators from SUSY GUTs, *Phys. Rev. D* 65 (2002) 095009.
- [51] A. Masiero, D.V. Nanopoulos, K. Tamvakis, T. Yanagida, *Phys. Lett. B* 115 (1982) 380; B. Grinstein, *Nucl. Phys. B* 206 (1982) 387.
- [52] J. Hisano, T. Moroi, K. Tobe, T. Yanagida, *Phys. Lett. B* 342 (1995) 138, [arXiv:hep-ph/9406417](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9406417);

- S. Antusch, I.M. Varzielas, V. Maurer, C. Sluka, C. Sluka, M. Spinrath, Towards predictive flavour models in SUSY SU(5) GUTs with doublet–triplet splitting, *J. High Energy Phys.* 09 (2014) 141.
- [53] G.R. Farrar, P. Fayet, Phenomenology of the production, decay, and detection of new hadronic states associated with supersymmetry, *Phys. Lett. B* 76 (1978) 575.
- [54] P. Nath, A.H. Chamseddine, R.L. Arnowitt, Nucleon decay in supergravity unified theories, *Phys. Rev. D* 32 (1985) 2348.
- [55] K.S. Babu, S.M. Barr, Proton decay and realistic models of quark and lepton masses, *Phys. Lett. B* 381 (1996) 137, arXiv:hep-ph/9506261;
V.M. Belyaev, M.I. Vysotsky, More about proton decay due to $d = 5$ operators, *Phys. Lett. B* 127 (1983) 215.
- [56] D. Emmanuel-Costa, S. Wiesenfeldt, Proton decay in a consistent supersymmetric SU(5) GUT model, *Nucl. Phys. B* 661 (2003) 62–82.
- [57] H. Ishimori, T. Kobayashi, H. Ohki, H. Okada, Y. Shimizu, M. Tanimoto, Non-Abelian discrete symmetries in particle physics, arXiv:1003.3552.

Conclusion générale

La physique théorique des particules élémentaires tente de construire des modèles théoriques et de développer des outils mathématiques pour comprendre les expériences actuelles et faire des prédictions pour les expériences futures. Il a été établi au cours des quatre dernières décennies que notre connaissance de la physique des particules est contenue dans le modèle standard qui décrit la physique à basse énergie. Néanmoins, plusieurs découvertes ont récemment été validées, ce qui a inspiré les physiciens à réaliser que la physique au-delà du modèle standard est nécessaire. Notamment, la découverte des oscillations de neutrinos ouvre un nouveau domaine de recherche en physique des particules élémentaires, ainsi qu'elle apporte une indication expérimentale forte d'une nouvelle physique.

De point de vu théorique, la construction de modèles vise à développer des extensions (à des différentes échelles d'énergies) du modèle standard de la physique des particules de manière à résoudre les problèmes inhérent à cette théorie (ou à l'une de ses extensions), et à expliquer les phénomènes physiques détectés par les expériences. Depuis des années, des progrès remarquables concerne la construction de modèles ont été réalisés dans le cadre des théories de grande unifications qui fournissent un cadre convaincant pour établir l'unification des quarks et des leptons à l'échelle de 10^{16}GeV , ainsi que dans le cadre des modèles issus la théorie des corde qui a un certain nombre de caractéristiques remarquables à l'appui de sa proposition pour unifier les quatre forces fondamentales qui régissent l'Univers. Ces modèles s'évertuent de reproduire le spectre du MS à basse énergie en plus d'expliquer tous ou une partie des phénomènes injustifiés dans le MS. En d'autre part, le mélange fort observé entre les saveurs des neutrinos qui fait partie du problème de saveur rencontré dans les modèles de jauge, peut être expliqué parfaitement dans le cadre des symétries de saveurs.

Dans ce mémoire de thèse, nous avons porté une attention particulière à la construction des modèles théoriques basés sur les symétries discrètes non-abéliennes. En particulier, nous avons étudié à priori les modèles de GUT à 4 dimensions étendus par des symétries de familles, motivé ainsi par les données expérimentales sur les paramètres d'oscillation des neutrinos. Deuxièmement, nous avons étudié la théorie-F comme un cadre attractif pour construire les modèles de GUT dans l'approche semi-locale de la géométrie interne, puis nous avons étudié dans le même cadre les modèles de GUT combinés avec des monodromies non-abéliens ayant des implications phénoménologiques intéressantes à basse énergie

Modèles de GUT à 4 dimensions

Les deux premiers chapitres concernent l'étude des modèles de jauge à 4 dimensions. Dans le premier chapitre, nous avons présenté une revue du modèle standard en décrivant ses aspects fondamentaux ainsi que certains de ces problèmes qui inspire les physiciens d'aller au-delà du MS. Après que nous avons présenté le MSSM qui couvre une partie des lacunes du MS, nous avons étudié les modèles $SU(5)$ et $SO(10)$ de GUT dans leurs versions non-supersymétrique et supersymétrique. Effectivement, nous avons commencé par l'étude du modèle de Georgi-Glashow et ses incohérences qui nous ont amenés à

présenter certaines de ses extensions non minimales, ainsi que sa version supersymétrique. Ensuite, nous avons considéré le modèle $SO(10)$ où nous avons montré quelques unes de ses caractéristiques. Ainsi, nous l'avons étudié dans le cadre de la supersymétrie en présentant conformément au contenu du secteur scalaire plusieurs classes de modèles.

Dans le deuxième chapitre, nous avons étudié l'extension des modèles de GUT par les symétries de familles. Nous avons commencé ce chapitre par l'étude de la physique de neutrino, où nous avons présenté brièvement des généralités sur les neutrinos de leur suggestion jusqu'à la découverte du phénomène d'oscillation de neutrinos, nous avons étudié également les mécanismes théoriques pour générer leurs masses, et le mélange des neutrinos dans le cadre théorique et expérimental en fournissant ainsi les dernières mesures des paramètres d'oscillation des neutrinos. Ensuite, nous avons motivé les symétries de familles (continues et discrètes) comme un cadre remarquable pour résoudre le problème de saveur qui est une tâche négligée dans les modèles de jauge. En plus, nous avons étudié en particulier les modèles de GUT basés sur les symétries de familles discrètes qui pourraient fournir une explication satisfaisante au phénomène d'oscillation de neutrinos. Dans la même direction, nous avons complété ce chapitre en présentant l'exemple du modèle de Cooper, King et Luhn ; ce modèle décrit les masses de fermions ainsi le mélange entre les saveurs de neutrinos dans le cadre du groupe $SU(5) \times A_4 \times U(1)_R \times U(1) \times Z_2 \times Z_3 \times Z_5$. La physique des neutrinos s'est développée rapidement au cours des deux dernières décennies. En effet, au cours de ces dernières années, les expériences sur le phénomène des oscillations de neutrinos ont mesuré la plupart des paramètres d'oscillation avec une bonne précision. Néanmoins, plusieurs caractéristiques des neutrinos n'ont pas clairement adressées jusqu'à présent. Par exemple, on sait pas si les neutrinos sont des particules de Dirac ou Majorana. De plus, l'ordre des masses de neutrinos (ordre normale ou inversée), la valeur de la phase δ de violation de CP et l'octant de l'angle atmosphérique θ_{23} sont des propriétés de la physique du neutrino qui restent encore mal connus ou même complètement inconnu. D'où un riche programme expérimental est en préparation pour répondre aux ces questions ouvertes restantes. Du point de vue théorique, les résultats d'expériences récents sur l'oscillation des neutrinos peuvent certainement servir à limiter les classes de modèles qui sont en accord avec les mesures expérimentales. En outre, les futures expériences ayant l'objectif de répondre aux questions citées au-dessus, pourraient aider les physiciens à définir le bon chemin de construction des modèles d'unification ayant des prédictions favorable en physique de neutrino.

Modèles de GUT dans la théorie-F

Les deux derniers chapitres sont consacrés à l'ingénierie des modèles de GUT dans la théorie-F. Nous avons commencé le troisième chapitre, par une brève revue sur la théorie des cordes, la motivation derrière son introduction ainsi que certaines de ses aspects phénoménologique. Après, nous avons introduit et étudié la théorie-F en tant qu'un cadre au-delà du MS qui incorpore la supersymétrie et les symétries de GUT. Ensuite, nous avons introduire les outils de base nécessaires pour construire les modèles de GUT dans le cadre de la théorie-F, en étudiant ainsi les configurations globale, locale et semi-locale des modèles suivant la géométrie interne considérée. Nous avons introduit après le formalisme de revêtement spectral dans l'approche semi-locale qui assume que les modèles de GUT basés sur les symétries $\mathcal{G}_{GUT} = SU(5)$, $SO(10)$ et E_6 découlent de la symétrie E_8 d'où proviennent tous les champs de matière et les interactions. Nous avons terminé ce chapitre par une réalisation explicite des modèles $SU(5)$ et $SO(10)$ en supposant l'action du monodromie minimal $\mathcal{Z}_2$ sur les poids fondamentaux associés aux revêtements spectraux

$SU(5)_\perp$ et $SU(4)_\perp$ respectivement. De plus, en employant les propriétés des courbes de matière obtenues ainsi que la brisure des symétries de jauge par des flux abéliens $U(1)_{X,Y}$, nous avons étudié le spectre à basse énergie des modèles $SU(5)$ et $SO(10)$ satisfaisant aux contraintes phénoménologiques minimales.

Le quatrième chapitre de cette thèse est dédié à la construction des modèles F-GUT avec des symétries de familles. Nous avons commencé ce chapitre par une comparaison entre les monodromies abéliens $\mathcal{Z}_N$ et non abéliens $\Gamma_N \subseteq S_N$ en montrant la différence entre l'action de chaque type de monodromie sur l'équation de revêtement spectral $\mathcal{C}_N$. Puis, nous avons étudié brièvement quelques aspects fondamentaux de la théorie de Galois ; une théorie puissante qui nous permet d'associer des symétries discrètes au revêtement spectral $\mathcal{C}_N$ dans les modèles F-GUT. Ensuite, nous avons considéré le modèle $SU(5)$ combiné avec les monodromies A_4 en employant cette méthode, où nous avons effectué une analyse explicite sur la réalisation du monodromie A_4 sur le revêtement spectral $\mathcal{C}_N$, ainsi que sur l'implication du groupe A_4 comme une symétrie de famille sur le modèle effectif à basse énergie obtenu. Dans la dernière partie de ce chapitre, nous avons étudié la théorie des caractères de représentations comme une deuxième méthode pour entraîner les monodromies non abéliens dans les modèles F-GUT, où nous avons présenté quelques résultats généraux de cette théorie en fournissant après les tables de caractères des groupes non abéliens associés aux revêtements spectraux $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$. Puis, nous avons clôturé cette partie en étudiant comment cette méthode se manifeste dans la construction des modèles F-GUT avec des monodromies non abéliens. Les implications de cette méthode dans l'ingénierie des modèles F-GUT sont données dans certaines de nos contributions.

Récemment, les symétries de familles non abéliennes sont explorées comme des monodromies non-abéliens dans la configuration semi-locale des modèles F-GUT. En outre, la description globale des modèles F-GUT permet de vérifier des conditions de cohérence qui ne sont pas disponibles d'un point de vue purement local. Par conséquent, les monodromies devraient être employés dans la configuration globale, ce qui pourrait être un défi pour les travaux de futurs.

Annexe A

A.1 Autres modèles d'unification

Les GUTs basées sur les symétries de jauge $SO(10)$ et $SU(5)$ sont les modèles les plus simples pour étudier des théories d'unifications à l'échelle d'énergie de l'ordre de M_{GUT} . Dans cette section, nous allons discuter d'autres modèles de GUT basés sur des groupes de jauge semi-simples ou de rangs $r \geq 5$. En particulier, nous allons présenter brièvement les modèles Pati-Salam, $SU(5)$ flipped et E_6 .

A.1.1 Modèle de Pati-Salam

En 1974, J.C. Pati et A. Salam ont proposé un modèle d'unification basé sur le groupe de jauge $SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$; c'est la première tentative du modèle de GUT qui a été suggérée, et c'est encore le modèle qui a inspiré le modèle célèbre de Georgi et Glashow pour leur modèle $SU(5)$, il est connu sous le nom de *modèle de Pati-Salam (PS)* [47]. En outre, l'idée principale de ce modèle est de traiter les leptons comme une quatrième couleur, où les quarks et les leptons sont unifiés ensembles dans deux représentations irréductibles du groupe $SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$ notées $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q}^c$

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} u_{\textcolor{red}{r}} & u_{\textcolor{blue}{b}} & u_{\textcolor{green}{g}} & \nu \\ d_{\textcolor{red}{r}} & d_{\textcolor{blue}{b}} & d_{\textcolor{green}{g}} & e \end{pmatrix}, \mathcal{Q}^c = \begin{pmatrix} u_{\textcolor{red}{r}}^c & u_{\textcolor{blue}{b}}^c & u_{\textcolor{green}{g}}^c & \nu^c \\ d_{\textcolor{red}{r}}^c & d_{\textcolor{blue}{b}}^c & d_{\textcolor{green}{g}}^c & e^c \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Les champs de matière $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q}^c$ transforment comme $(4, 2, 1)$ et $(\bar{4}, 1, 2)$ sous la symétrie $SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$. En outre, en raison de la présence d'une symétrie $SU(2)_R$, le modèle de PS contient les particules droites sous la forme des doublets de $SU(2)_R$ où les leptons sont traités comme la 4ème couleur. En d'autre part, le modèle PS peut être traité comme une limite à basse énergie du modèle $SO(10)$, où comme indiqué précédemment, une famille de quarks et de leptons est inclus dans la représentation 16 de $SO(10)$, cette dernière peut être décomposée en terme de représentations du groupe $SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$ comme suit

$$16|_{SO(10)} \rightarrow (4, 2, 1) + (\bar{4}, 1, 2)|_{PS}. \quad (\text{A.2})$$

L'opérateur de la charge électrique est définie dans le modèle PS par la relation

$$Q = T_L^3 + T_R^3 + \frac{1}{2}(B - L), \quad (\text{A.3})$$

avec $T_{L,R}^3$ sont les valeurs propres du troisième générateur des groupes $SU(2)_{L,R}$, tandis que $(B - L)$ est proportionnel au 15^{ème} générateur du groupe $SU(4)_C$; il s'exprime dans

la représentation fondamentale comme suit

$$\frac{1}{2}(B - L) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Les bosons de jauge dans le modèle Pati-Salam résident dans les représentations adjointes des groupes $SU(4)_C$, $SU(2)_L$ et $SU(2)_R$, qui sont $(15, 1, 1)$, $(1, 3, 1)$ et $(1, 1, 3)$ respectivement, ces représentations se décomposent en fonction des bosons de jauge du MS comme suit

$$\begin{aligned} (15, 1, 1) &= (8, 1, 1) + (1, 1, 0) + \left(3, 1, \frac{1}{3}\right) + \left(\bar{3}, 1, -\frac{1}{3}\right), \\ (1, 3, 1) &= (1, 3, 0), \\ (1, 1, 3) &= (1, 1, 1) + (1, 1, 0) + (1, 1, -1), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

dans le cas du modèle $SO(10)$, ces bosons de jauge s'unifient dans la représentations 45, où

$$45 \rightarrow (15, 1, 1) + (1, 3, 1) + (1, 1, 3) + (6, 2, 2). \quad (\text{A.6})$$

En ce qui concerne le secteur de Higgs, le modèle PS possède le champ de Higgs dans la représentation irréductible $(1, 2, 2)_H$; ce champ de Higgs noté H contient les deux doublets de Higgs H_u et H_d du MSSM $H = (H_u, H_d)$ et se couple avec les champs de matière Q et Q^c pour générer les masses aux fermions à travers le couplage de Yukawa renormalisable donné par $\lambda Q H Q^c$.

En outre, le champ de Higgs qui brise la symétrie de PS vers modèle standard dépend essentiellement du chemin suivi, en effet, il existe plusieurs modes de brisure selon le groupe intermédiaire impliqué. Le cas le plus simple est la brisure du groupe PS vers le groupe SM sans entraîner aucun groupe intermédiaire. Pour ce fait, un champ de Higgs dans la représentation $(10, 1, 3)_H$ du groupe Pati-Salam est suffisant pour réduire la symétrie directement vers le MS; ceci est dû au fait que ce Higgs se transforme de manière non triviale sous les sous-groupes intermédiaires possibles.

A.1.2 Modèle $SU(5)$ Flipped

Le modèle " $SU(5)$ Flipped" (dit $SU(5)$ inversé en français) a été construit par Antoniadis, Ellis, Hagelin et Nanopoulos en 1987 [69], ce modèle est basé sur le groupe de jauge $SU(5) \times U(1)$. En fait, ce modèle ne présente pas une théorie d'unification complète, car le groupe $U(1)_Y$ associé à l'hypercharge du groupe de jauge du MS est inclus dans la partie $U(1)$ du modèle. Néanmoins, ce modèle possède plusieurs caractéristiques intéressantes que nous mentionnons ici.

Les champs de matière du modèle $SU(5)$ flipped résident dans les représentations $T = 10_{+1}$, $F = \bar{5}_{-3}$ et $S = 1_{+5}$, d'où les particules élémentaires sont distribuées dans ces

représentations de la manière suivante

$$F = \begin{pmatrix} u_r^c \\ u_b^c \\ u_g^c \\ e \\ \nu_e \end{pmatrix} \text{ et } T = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & d_g^c & -d_b^c & u_r & d_r \\ -d_g^c & 0 & d_r^c & u_b & d_b \\ d_b^c & -d_r^c & 0 & u_g & d_g \\ \hline -u_r & -u_b & -u_g & 0 & \nu^c \\ -d_r & -d_b & -d_g & -\nu^c & 0 \end{array} \right) \text{ et } S = e^c, \quad (\text{A.7})$$

en outre, les champs F , T et S s'écrivent pour les trois générations comme suit

$$F_i = (u_i^c, l_i) \text{ et } T_i = (q_i, d_i^c, \nu_i^c) \text{ et } S_i = e_i^c, \quad (\text{A.8})$$

avec $i = 1, 2, 3$. Le nom "Flipped" est dû au renversement des particules $u_i^c \longleftrightarrow d_i^c$, $e_i^c \longleftrightarrow \nu_i^c$ dans les représentations 10 , $\bar{5}$ et 1 par rapport au modèle $SU(5)$ de Georgi-Glashow¹. Encore, On remarque que ce modèle prédit l'existence de neutrinos de chiralité droite ν_i^c , ce qui entraîne alors des neutrinos massifs au contraire du modèle $SU(5)$ de Georgi-Glashow.

Dans le modèle $SU(5) \times U(1)$, l'hypercharge du modèle standard provient d'une combinaison linéaire d'un générateur diagonal de $SU(5)$ et du générateur de $U(1)$

$$Y = aT_{24} + bX, \quad (\text{A.9})$$

avec $T_{24} = \text{diag}(2, 2, 2, -3, -3)$ est le générateur du sous-groupe abélien de $SU(5)$, alors que X est le générateur du groupe $U(1)$. En effet, la formule (A.9) de l'hypercharge possède deux solutions pour générer les hypercharges aux particules du MS, la première est $a = 1$, $b = 0$, ce qui correspond au cas du modèle $SU(5)$ standard de Georgi-Glashow, la deuxième solution est $a = -1/5$ et $b = 1/5$, qui correspond au cas du modèle $SU(5) \times U(1)$. Encore, dans le modèle $SU(5)$, La charge électrique est définie comme étant un générateur de $SU(5)$. Cependant, dans le modèle $SU(5)$ Flipped, la charge électrique s'agit d'une combinaison linéaire des générateurs des groupes $SU(5)$ et $U(1)$. La formule de charge électrique pour ce modèle est donnée par :

$$Q = I_{3L} - \frac{1}{\sqrt{15}}T_{24} + \frac{1}{5}X, \quad (\text{A.10})$$

où $I_{3L} = T_3$. Pour briser le symétrie de GUT $SU(5) \times U(1)$ et la symétrie électrofaible, nous introduisons deux paires de champs de Higgs dans les représentations $10_{+1}^H + \bar{10}_{-1}^H$ et $5_{-2}^H + \bar{5}_{+2}^H$ où ils se transforment en termes des composantes du MS comme

$$10_{+1}^H = (Q_H, d_H^c, \nu_H^c) \quad , \quad \bar{10}_{-1}^H = (\bar{Q}_H, \bar{d}_H^c, \bar{\nu}_H^c), \quad (\text{A.11})$$

$$5_{-2}^H = (\bar{T}_d, H_d) \quad , \quad \bar{5}_{+2}^H = (T_u, H_u). \quad (\text{A.12})$$

En particulier, les composants doublets des Higgs $H_d \in 5_{-2}^H$ and $H_u \in \bar{5}_{+2}^H$ génèrent les masses aux fermions à travers le superpotentiel de Yukawa donné par

$$W_Y = \lambda^d 10_{+1} \cdot 10_{+1} \cdot 5_{-2}^H + \lambda^{u,\nu} 10_{+1} \cdot \bar{5}_{-3} \cdot \bar{5}_{+2}^H + \lambda^e \bar{5}_{-3} \cdot 1_{+5} \cdot 5_{-2}^H, \quad (\text{A.13})$$

1. Les bosons de jauge du modèle $SU(5) \times U(1)$ localisent dans la représentation adjoint 24 comme dans le cas du modèle $SU(5)$ standard.

où $\lambda^d, \lambda^{u,\nu}$ et λ^e sont les constantes de couplage associées aux fermions. En plus, les Higgs dans 10_{+1}^H et $\overline{10}_{-1}^H$ sont responsables de la brisure spontanée de la symétrie $SU(5) \times U(1)$ où ils acquièrent un VEV dans l'échelle de GUT le long de leurs composants singlet $\langle \nu_H^c \rangle = \langle \bar{\nu}_H^c \rangle \sim M_{GUT}$.

L'un des points intéressants pour ce modèle est la résolution du problème de la séparation du double-triplet de Higgs. Parmi les modèles de GUT connus, seul le modèle $SU(5)$ *Flipped* peut naturellement expliquer la séparation du doublet-triplet de Higgs grâce au couplages des Higgs 5_{-2}^H et $\bar{5}_{+2}^H$ avec 10_{+1}^H et $\overline{10}_{-1}^H$ selon le superpotentiel des champs scalaire suivant

$$W = \lambda_1 10_{+1}^H \cdot 10_{+1}^H \cdot 5_{-2}^H + \lambda_2 \overline{10}_{-1}^H \cdot \overline{10}_{-1}^H \cdot \bar{5}_{+2}^H, \quad (\text{A.14})$$

où cela donne des masses aux triplets T_u et $\bar{T}_d$ de couleur de Higgs à l'échelle M_{GUT} tout en laissant les doublets de Higgs H_u et H_d sans masse.

A.1.3 Modèle E_6

Le groupe exceptionnel E_6 a été considéré comme un groupe de grande unification depuis plus de quarante ans [9]. Ce modèle permet la possibilité qu'une génération entière de fermions du modèle standard plus d'un neutrino droit et un doublet Higgs soient unifiés dans une seule représentation 27. Malgré son potentiel, le modèle E_6 a été moins exploité dans la littérature par rapport aux modèles de GUT $SU(5)$ et $SO(10)$. Cependant, son popularité a augmenté à la fin des années quatre-vingts après qu'il a été démontré que la compactification de certains modèles de supercordes sur les variétés de Calabi-Yau, conduit au groupe de jauge E_6 dans le secteur visible, et que sa représentation qui décrit les multiplets de Higgs ainsi les champs de matière peuvent être utilisés pour construire des modèles réalistes [159] [20].

Le groupe E_6 est un groupe de Lie de rang 6, il possède les groupes $SO(10) \times U(1)$, $SU(3)^3$ et $SU(6) \times SU(2)$ comme des sous-groupes maximaux. De plus, la plus petite représentation non-triviale du groupe E_6 est de dimension 27; cette représentation se décompose sous le modèle $SO(10)$ comme suit

$$27 = 16 + 10 + 1, \quad (\text{A.15})$$

alors la représentation 27 du modèle E_6 contient une génération de fermions du $SO(10)$, en plus des champs fermioniques supplémentaires qui ressemblent à la matière ordinaire; ces champs exotiques doivent être lourds [160].

En outre, les bosons de jauge résident dans la représentation adjointe 78 du groupe E_6 qui se décompose aussi sous le groupe $SO(10)$ comme suit

$$78 = 45 + 16 + \overline{16} + 1. \quad (\text{A.16})$$

Encore, les champs de Higgs qui peuvent se coupler avec la matière pour générer les masses des fermions sont dérivés du produit bilinéaire suivant

$$27 \times 27 = \overline{27}_s + \overline{351}_s + \overline{351}'_a. \quad (\text{A.17})$$

Tournant maintenant à la brisure de la symétrie E_6 . Puisque le groupe E_6 est de rang 6, sa brisure alors vers le modèle standard demande la réduction du rang par deux

$r = 6 \rightarrow r = 4$; en effet il existe de nombreux chemins possibles d'arriver au modèle standard. D'ailleurs, vu que le groupe E_6 contient le groupe $SO(10) \times U(1)$ comme sous-groupe maximal, alors nous pouvons effectuer la brisure du modèle E_6 selon le chemin suivant

$$E_6 \rightarrow SO(10) \times U(1) \rightarrow \text{PS} \rightarrow \text{MS}. \quad (\text{A.18})$$

La première étape de brisure est vers le premier groupe intermédiaire $SO(10) \times U(1)$; cette brisure qui préserve le rang du groupe E_6 est réalisée par le Higgs dans la représentation adjointe 78_H . La décomposition des champs 27 et 78 du groupe E_6 sous $SO(10) \times U(1)$ est donnée par

$$\begin{aligned} 27 &= 16_1 + 10_{-2} + 1_4, \\ 78 &= 45_0 + 16_{-3} + \overline{16}_3 + 1_0, \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

le reste de la brisure vers le modèle PS et puis vers le MS peut être réalisé par le Higgs 27 comme dans le cas du modèle PS. Les masses des fermions dans le modèle E_6 proviennent du couplage $Y^{ij} 27_i \cdot 27_j \cdot 27_H$ où le champs 27_H contient les doublets de Higgs H_u et H_d du MSSM. En effet, Le modèle E_6 supersymétrique le plus simple consiste les champs de Higgs localisent dans les représentations $27 + \overline{27} + 78$; ce modèle peut se briser au niveau renormalisable uniquement à travers le groupe $SO(10)$; voir la référence [159].

Autre exemples de modèles E_6 supersymétrique ont été étudiés récemment dans la littérature; ces modèles se différencient dans le secteur de Higgs. Par exemple, le secteur de Higgs du modèles E_6 supersymétrique étudié dans [162] est composé de $\{27 + \overline{27} + 351' + \overline{351}'\}$ pour briser la symétrie E_6 au modèle standard ainsi que pour générer les masse aux fermions. En outre, deux Higgs supplémentaires $27' + \overline{27}'$ sont introduits dans ce modèle pour réaliser la séparation du doublet-triplet de Higgs. Le superpotentiel responsable aux masses des fermions de ce modèle est donné par

$$W_{E_6} = 27_i \cdot 27_j \cdot (Y_{27}^{ij} 27_H + Y_{\overline{351}}^{ij} \overline{351}_H + Y_{27'}^{ij} 27'_H). \quad (\text{A.20})$$

Les champs de Higgs 27_H et $\overline{351}_H$ dans le modèle E_6 jouent un rôle similaire que 10_H et $\overline{126}_H$ dans le modèle $SO(10)$ minimal pour la génération des masses des fermions (puisque $10_H \subset 27_H$ et $\overline{126}_H \subset \overline{351}_H$)

$$W_{SO(10)} = 16_i \cdot 16_j \cdot (Y_{10}^{ij} 10_H + Y_{\overline{126}}^{ij} \overline{126}_H). \quad (\text{A.21})$$

En outre, le Higgs supplémentaire $27'_H$ dans le superpotentiel W_{E_6} est introduit pour atteindre la séparation du doublet-triplet de Higgs ainsi qu'il contribue comme étant une correction dans les masses des fermions.

Une version réaliste du modèle E_6 était étudié dans [163]; ce modèle possède un secteur de Higgs constitué de $351' + \overline{351}' + 27 + \overline{27}$, pour briser la symétrie $E_6 \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ et générer les masses des fermions, ce modèle possède également un Higgs supplémentaire dans 78 au lieu des Higgs $27' + \overline{27}'$ pour obtenir la séparation du doublet-triplet de Higgs.

A.2 Produits tensoriels de représentations

La théorie des groupes est un ingrédient essentiel de la physique moderne. En particulier, tous les modèles étudiés dans ce mémoire de thèse pour décrire la physique observable à basse énergie, sont basés sur des groupes continus et discrets. En effet, dans les modèles physiques à 4 dimensions, les particules élémentaires sont manipulées comme des représentations irréductibles des groupes de Lie ($SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, $SU(5)$, $SO(10)$...etc), alors que les interactions physiques sont traitées comme des produits de ces représentations. D'un autre part, dans les modèles avec les symétries de familles, les représentations irréductibles des groupes discrets peuvent être identifiées aux trois familles de la matière, tandis que les mélanges observés entre les trois générations peuvent être obtenus à partir des produits de ces représentations.

Dans cette partie, nous résumons brièvement les règles de multiplications entre les représentations des groupes continus et discrets utilisés dans ce mémoire de thèse. Particulièrement, nous étudions ces produits dans le cas des groupes de Lie $SU(5)$ et $SO(10)$ de GUT sur lesquels est basé ce mémoire de thèse, ainsi que les produits tensoriels des représentations des groupes finis A_4 et S_4 utilisés dans les modèles $SU(5)$ dans les chapitres 3 et 4.

Groupes continus

Groupe $SU(5)$

Le groupe $SU(5)$ est défini comme l'ensemble des matrices hermitiennes et unitaires ($U^\dagger U = 1$, $\det(U) = 1$). Où, tout élément U du groupe $SU(5)$ peut s'écrire comme

$$U = \exp(-i\theta^a T_a), \quad a = 1, \dots, 24$$

où θ^a sont les paramètres du groupe, alors que les T_a représentent les 24 générateurs du groupe $SU(5)$ qui s'écrivent dans la représentation fondamentale comme des matrices hermitiennes de trace nulle (voir section 2 du chapitre I). Le groupe $SU(5)$ possède une infinité de représentations, mais celles les plus utilisées pour identifier le contenu en particule dans le modèle de Georgi-Glashow sont ; la représentation fondamentale 5, antisymétrique 10, symétrique 15 et adjointe 24. La décomposition des produits tensoriels de ces représentations sont

$$\begin{aligned} 5 \otimes \bar{5} &= 1 \oplus 24 & , & \quad \bar{10} \otimes 5 = \bar{5} \oplus \bar{45} & , & \quad 10 \otimes \bar{5} = 45 \oplus 5, \\ 5 \otimes 5 &= 10 \oplus 15 & , & \quad 10 \otimes 5 = \bar{10} \oplus \bar{40} & , & \quad 15 \otimes 10 = \bar{45} \oplus \bar{105}, \\ \bar{10} \otimes 10 &= 1 \oplus 24 \oplus 75 & , & \quad 15 \otimes 5 = \bar{35} \oplus \bar{40} & , & \quad \bar{15} \otimes 10 = 24 \oplus \bar{126}, \\ 10 \otimes 10 &= \bar{5} \oplus \bar{45} \oplus \bar{50} & , & \quad \bar{15} \otimes 5 = \bar{5} \oplus \bar{70} & , & \quad \bar{15} \otimes 15 = 1 \oplus 24 \oplus 200, \end{aligned} \tag{A.22}$$

$$\begin{aligned} 24 \otimes 5 &= 5 \oplus 45 \oplus 70, \\ 24 \otimes 10 &= 10 \oplus 15 \oplus 40 \oplus 175, \\ 24 \otimes 24 &= 1 \oplus 2(24) \oplus 75 \oplus \bar{126} \oplus 126 \oplus 200, \\ 5 \times \bar{45} &= 24 \oplus 75 \oplus 126. \end{aligned} \tag{A.23}$$

Groupe $SO(10)$

Le groupe $SO(10)$ présente l'ensemble des matrices 10×10 réelles orthogonales $UU^T = U^T U = 1$ avec $\det(U) = 1$, il a 45 générateurs T_{ij} ($i, j = 1, \dots, 10$) qui forment une base de l'algèbre de Lie $so(10)$. Brièvement, le groupe $SO(10)$ possède la représentation spinorielle

donnée par un spineur de dimension 16 qui contient toutes les fermions du MS en plus du neutrino droit. Encore, il possède la représentation vectorielle 10 et adjointe 45 qui entraînent respectivement le Higgs électrofaible et le Higgs responsable de la brisure de la symétrie $SO(10)$.

Les produits tensoriels entre les représentations du groupe sont donnés par

$$\begin{aligned} 10 \times 10 &= 1 + 45 + 54 & , & \quad 45 \times 10 = 10 + 120 + 320 \\ 16 \times 10 &= \overline{16} \times \overline{144} & , & \quad 45 \times 16 = 16 + 144 + 560 \\ 16 \times 16 &= 10 + 120 + \overline{126} & , & \quad \overline{16} \times 16 = 1 + 45 + 210 \end{aligned} \quad (A.24)$$

$$45 \times 45 = 1 + 45 + 54 + 210 + 770 + 945 \quad (A.25)$$

Groupes discrets

Group S_4

Nous rappelons que le groupe symétrique S_4 admet 5 représentations irréductibles notées par leurs caractères sous les générateurs S, T et U comme

$$1_{(1,1,1)}, \quad 1_{(-1,1,-1)}, \quad 2_{(0,-1,0)}, \quad 3_{(1,0,-1)}, \quad 3_{(-1,0,1)}, \quad (A.26)$$

Si nous prenons deux triplets $3_{(1,0,-1)} \in S_4$ notés comme $3_{(1,0,-1)}^a = (a_1, a_2, a_3)^T$ et $3_{(1,0,-1)}^b = (b_1, b_2, b_3)^T$, alors leur produit tensoriel est défini par

$$3_{(1,0,-1)}^a \otimes 3_{(1,0,-1)}^b = 9_{(1,0,1)} = 1_{(1,1,1)} \oplus 2_{(0,-1,0)} \oplus 3_{(1,0,-1)} \oplus 3_{(-1,0,1)}, \quad (A.27)$$

avec

$$\begin{aligned} 1_{(1,1,1)} &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ 2_{(0,-1,0)} &= \begin{pmatrix} a_1 b_1 + \omega a_2 b_2 + \omega^2 a_3 b_3 \\ a_1 b_1 + \omega^2 a_2 b_2 + \omega a_3 b_3 \end{pmatrix} \\ 3_{(1,0,-1)} &= \begin{pmatrix} a_2 b_3 + a_3 b_2 \\ a_3 b_1 + a_1 b_3 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 \end{pmatrix}, \quad 3_{(-1,0,1)} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (A.28)$$

et $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. En outre, le produit de deux triplets $3_{(1,0,-1)}$ et $3_{(-1,0,1)}$ notés comme $3_{(1,0,-1)}^a = (a_1, a_2, a_3)^T$ et $3_{(-1,0,1)}^{b'} = (b'_1, b'_2, b'_3)^T$, est donné en termes de représentations irréductibles comme

$$3_{(1,0,-1)}^a \otimes 3_{(-1,0,1)}^{b'} = 1_{(-1,1,-1)} \oplus 2_{(0,-1,0)} \oplus 3_{(1,0,-1)} \oplus 3_{(-1,0,1)}, \quad (A.29)$$

où

$$\begin{aligned} 1_{(-1,1,-1)} &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3, \\ 2_{(0,-1,0)} &= \begin{pmatrix} a_1 b_1 + \omega a_2 b_2 + \omega^2 a_3 b_3 \\ -a_1 b_1 - \omega^2 a_2 b_2 - \omega a_3 b_3 \end{pmatrix}, \\ 3_{(1,0,-1)} &= \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}, \quad 3_{(-1,0,1)} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 + a_3 b_2 \\ a_3 b_1 + a_1 b_3 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (A.30)$$

On donne également le produit de deux doublets notés $2_{(0,-1,0)}^x = (x_1, x_2)^T$ et $2_{(0,-1,0)}^y = (y_1, y_2)^T$ comme suit :

$$2_{(0,-1,0)}^x \otimes 2_{(0,-1,0)}^y = 1_{(1,1,1)} \oplus 1_{(-1,1,-1)} \oplus 2_{(0,-1,0)}, \quad (\text{A.31})$$

où

$$\begin{aligned} 1_{(1,1,1)} &= x_1 y_2 + x_2 y_1, \\ 1_{(-1,1,-1)} &= x_1 y_2 - x_2 y_1, \\ 2_{(0,-1,0)} &= \begin{pmatrix} x_2 y_2 \\ x_1 y_1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

finalemt, le produit entre les singlets $1_{(1,1,1)}$ et $1_{(-1,1,-1)}$ est

$$1_{(1,1,1)} \otimes 1_{(-1,1,-1)} = 1_{(-1,1,-1)}, \quad (\text{A.33})$$

Group A_4

De même, nous rappelons que le groupe alterné A_4 contient quatre représentations irréductibles notées par leurs caractères sous les générateurs S et T par

$$1_{(1,1)}, \quad 1_{(1,\omega)}, \quad 1_{(1,\omega^2)}, \quad 3_{(1,-1)}, \quad (\text{A.34})$$

le produit tensoriel entre deux triplets $3_{(1,-1)}^a = (a_1, a_2, a_3)^T$ et $3_{(1,-1)}^b = (b_1, b_2, b_3)^T$ du groupe A_4 est défini par

$$3_{(1,-1)}^a \otimes 3_{(1,-1)}^b = 1_{(1,1)} \oplus 1_{(1,\omega)} \oplus 1_{(1,\omega^2)} \oplus 3_{(1,-1)} \oplus 3_{(1,-1)}, \quad (\text{A.35})$$

où les composantes de chaque représentation en terme de celles des triplets $3_{(1,-1)}^a$ et $3_{(1,-1)}^b$ sont

$$\begin{aligned} 1 &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3, \\ 1' &= a_1 b_1 + \omega a_2 b_2 + \omega^2 a_3 b_3, \\ 1'' &= a_1 b_1 + \omega^2 a_2 b_2 + \omega a_3 b_3, \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

$$3_{(1,-1)} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 \\ a_3 b_1 \\ a_1 b_2 \end{pmatrix}, \quad 3'_{(1,-1)} = \begin{pmatrix} a_3 b_2 \\ a_1 b_3 \\ a_2 b_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.37})$$

De plus, les produits tensoriels entre les trois singlets du groupe A_4 sont définis par

$$\begin{aligned} 1_{(1,\omega)} \otimes 1_{(1,\omega^2)} &= 1_{(1,1)}, \\ 1_{(1,1)} \otimes 1_{(1,\omega)} &= 1_{(1,\omega)}, \\ 1_{(1,1)} \otimes 1_{(1,\omega)} &= 1_{(1,\omega)}. \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Finalement, nous notons que toutes les représentations des groupes A_4 et S_4 présentés ici, sont notées en terme de leurs caractères suivant les générateurs du groupe correspondant. En outre, en utilisant les propriétés des caractères présentés dans le chapitre IV, nous pouvons vérifier que les caractères de toutes les décompositions des produits

tensoriels sont préservés.

Bibliographie

- [1] S. L. Glashow, Partial Symmetries of Weak Interactions, Nucl. Phys. 22 (1961) 579-588.
- [2] S. Weinberg, A Model of Leptons, Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 1264-1266 ;
- [3] A. Salam, Weak and Electromagnetic Interactions, Conf. Proc., vol. C680519, pp. 367-377, 1968.
- [4] S. Glashow, J. Iliopoulos and L. Maiani, Weak Interactions with Lepton-Hadron Symmetry, Phys.Rev. D2,1285(1970).
- [5] Yu. A. Gol'fand and E. P. Likhtman, Extension of the Algebra of Poincare Group Generators and Violation of P invariance, JETP Letters, 13, 452 (1971).
- [6] H. Georgi and S. L. Glashow, Unity of All Elementary Particle Forces, Phys. Rev. Lett., 32, 438-441 (1974).
- [7] H. Georgi, The State of Art -Gauge Theories -, (Talk), AIP Conf. Proc., vol. 23, pp. 575-582, 1975.
- [8] H. Fritzsch and P. Minkowski, Unified Interactions of Leptons and Hadrons, Annals Phys., vol. 93, pp. 193-266, (1975).
- [9] F. Gursey, P. Sikivie, and P. Ramond, A Universal Gauge Theory Model Based on E6, Phys. Lett. 60B, 177 (1976) ; F. Gursey and M. Serdaroglu, E6 Gauge Field Theory Model Revisited, Nuovo Cimento 65A, 337 (1981) ; Y. Achiman and B. Stech, Quark Lepton Symmetry and Mass Scales in an E6 Unified Gauge Model, Phys. Lett. 77B, 389 (1978).
- [10] M. Miura (The Super-Kamiokande Collaboration), Search for Proton Decay via $p \rightarrow e^+ \pi^0$ and $p \rightarrow \mu^+ \pi^0$ in 0.31 megaton.years exposure of the Super- Kamiokande Water Cherenkov Detector, Phys. Rev. D 95, 012004 (2017).
- [11] C. Patrignani et al. (Particle Data Group) 2016 Chin. Phys. C40 100001.
- [12] Y. Fukuda et al., (Super-Kamiokande Collaboration), Measurements of the Solar neutrino flux from SuperKamiokand's fist 300 days, Phys. Rev. Lett. 81, 1998, p. 1158.
- [13] Q. R. Ahmad et al Measurement of the rate of $\nu_e + d \rightarrow p + p + e^-$ solar neutrinos at the Sudbury Neutrino Observatory. Phys Rev Lett 87 :071301(2001) ; Q. R. Ahmad et al Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral-current interactions in the Sudbury Neutrino Observatory. Phys. Rev. Lett. 89 : 011301(2002)

- [14] P. Minkowski, $\mu \rightarrow e\gamma$ at a rate of one out of 109 Muon Decays?, Phys. Lett. B67 421 (1977); M. Gell-Mann, P. Ramond, and R. Slansky, Supergravity : Proceedings of the Supergravity Workshop at Stony Brook, 27-29 September, 1979, edited by P. Van Nieuwenhuizen and D. Z. Freedman (Elsevier/North-Holland Amsterdam, 1979); T. Yanagida, in Proceeding of the Workshop on Unified Theory and Baryon Number in the Universe, KEK, February 13 edited by A. Sugamoto and O. Sawada (KEK, Tsukuba, 1979); R. N. Mohapatra and G. Senjanovic, Neutrino Mass and Spontaneous Parity Nonconservation, Phys. Rev. Lett. 44, 912 (1980); J. Schechter and J. W. F. Valle, Neutrino masses in $SU(2) \times U(1)$ theories, Phys. Rev. D22, 2227 (1980).
- [15] M. Magg and C. Wetterich, Neutrino mass problem and gauge hierarchy, Phys. Lett. B 94 (1980) 61; G. Lazarides, Q. Shafi and C. Wetterich, Proton lifetime and fermion masses in an $SO(10)$ model Nucl. Phys. B 181 (1981) 287; R.N. Mohapatra and G. Senjanovic, Neutrino masses and mixings in gauge models with spontaneous parity violation, Phys. Rev. D 23 (1981) 165; T.P. Cheng and L.-F. Li, Neutrino masses, mixings, and oscillations in $SU(2) \times U(1)$ models of electroweak interactions, Phys. Rev. D 22 (1980) 2860. 2860
- [16] R. Foot, H. Lew, X.-G. He and G.C. Joshi, See-saw neutrino masses induced by a triplet of leptons, Z. Phys. C 44 (1989) 441.
- [17] B. Pontecorvo, Neutrino Experiments and the Problem of Conservation of Leptonic Charge. Sov. Phys. JETP, 26 :984-988, (1968).
- [18] S. F. King, A. Merle, S. Morisi, Y. Shimizu and M. Tanimoto, Neutrino Mass and Mixing : from Theory to Experiment, New J. Phys. 16 (2014) 045018.
- [19] M. B. Green and J. H. Schwarz, Anomaly cancellations in supersymmetric D=10 gauge theory and superstring theory". Physics Letters B. 149 : 117 (1984).
- [20] J. Polchinski, String theory, vol.1, Cambridge University Press, 1998; M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, Superstring Theory : Volume 1, Introduction, Cambridge University Press, 29 juil. 1988 - 484 pages.
- [21] CumrunVafa, Lectures on Strings and Dualities, arXiv :hep-th/9702201.
- [22] Edward Witten, String theory dynamics in various dimensions, Nuclear Physics B, vol. 443, no 1, 1995, p. 85–126.
- [23] B. R. Greene, K. H. Kirklin, P. J. Miron and G. G. Ross, "A Three Generation Superstring Model. 1. Compactification And Discrete Symmetries," Nucl. Phys. B 278, 667 (1986); B. R. Greene, K. H. Kirklin, P. J. Miron and G. G. Ross, "A Three Generation Superstring Model. 2. Symmetry Breaking And The Low-Energy Theory," Nucl. Phys. B 292, 606 (1987); L. E. Ibáñez and M. A. Uranga, String theory and particle physics, An introduction to string phenomenology, Cambridge university press (2012); Candelas, Philip; Horowitz, Gary; Strominger, Andrew; Witten, Edward (1985). "Vacuum configurations for superstrings". Nuclear Physics B. 258 : 46–74.

- [24] L. E. Ibanez, H. P. Nilles and F. Quevedo, Wilson Lines and Symmetry Breaking on Orbifolds, *Physics Letters B* : 211-218, 1987 ; Kei-Jiro Takahashi, Three-Family Models from a Heterotic Orbifold on the E_6 Root Lattice, *Prog.Theor.Phys.*119 :491-507, (2008).
- [25] M. Berkooz, M. R. Douglas and R. G. Leigh, Branes Intersecting at Angles, *Nucl. Phys.* B480 : 265-278, 1996 ; Blumenhagen R. et al. Orientifolds of K3 and Calabi-Yau Manifolds with Intersecting D-Branes : *JHEP.* 2002. V. 0207. P. 026 ; Aldazabal G. et al. Intersecting Brane Worlds : *JHEP.* 2001. V. 0102. P. 047 ; R. Blumenhagen, M. Cvetič, P. Langacker, and G. Shiu, Toward realistic intersecting D-brane models, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* 55 (2005) 71-139,
- [26] Cumrun Vafa, Evidence for F-Theory, *Nucl. Phys.* B469 : 403-418, 1996.
- [27] H. Hayashi, R. Tatar, Y. Toda, T. Watari, and M. Yamazaki, New Aspects of Heterotic-F Theory Duality, *Nucl. Phys.* B806 : 224-299, 2009 ; David R. Morrison, Cumrun Vafa, Compactifications of F-Theory on Calabi-Yau Threefolds – II, *Nucl. Phys.* B476 : 437-469, 1996
- [28] Clifford V. Johnson, From M-theory to F-theory, with Branes, *Nucl.Phys.* B507 (1997) 227-244
- [29] R. Donagi and M. Wijnholt, Model Building with F-Theory, *Adv. Theor. Math. Phys.* 15,5 (2011), 1237-1317 ; C. Beasley, J. J. Heckman, and C. Vafa, GUTs and Exceptional Branes in F-theory - I, *JHEP* 0901 (2009) 058 ; C. Beasley, J. J. Heckman, and C. Vafa, GUTs and Exceptional Branes in F-theory - II : Experimental Predictions, *JHEP* 0901 (2009) 059 ; T. Weigand, Lectures on F-theory compactifications and model building, *Class. Quant. Grav.* 27 (2010) 214004 ; R. Donagi and M. Wijnholt, Breaking GUT Groups in F-Theory, *Adv.Theor.Math.Phys.* 15 (2011) no.6, 1523-1603 ; J. J. Heckman and C. Vafa, Flavor Hierarchy From F-theory, *Nucl.Phys. B* 837 :137-151 (2010) ; J. J. Heckman, J. Marsano, N. Saulina, S. Schafer-Nameki, and C. Vafa, Instantons and SUSY breaking in F-theory, 2008, arXiv :0808.1286
- [30] P. Langacker, Introduction to the Standard Model and Electroweak Physics, in : *Proceedings of Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics on The dawn of the LHC era (TASI 2008)* : Boulder, USA, June 2-27, 2008, 2010, pp. 3-48. arXiv :0901.0241.
- [31] C. Cordova, Decoupling Gravity in F-Theory, *Adv. Theor. Math. Phys.* 15 (2011) 689-740.
- [32] J. Borchmann, C. Mayrhofer, E. Palti and T. Weigand, Elliptic fibrations for $SU(5) \times U(1) \times U(1)$ F-theory vacua, *Phys. Rev. D* 88, 046005, (2013) ; M. Cvetič, A. Grassi, D. Klevers and H. Piragua, Chiral four-dimensional F-theory compactifications with $SU(5)$ and multiple $U(1)$ -factors, *JHEP*04(2014)010 ; D. R. Morrison and D. S. Park, F-Theory and the Mordell-Weil Group of Elliptically-Fibered Calabi-Yau Threefolds, *JHEP* 1210 :128,2012.
- [33] I. Antoniadis, G.K. Leontaris, Neutrino mass textures from F-theory, *Eur. Phys. J. C* 73 (2013) 2670.

- [34] Athanasios Karozasy, Stephen F. King, George K. Leontaris, Andrew Meadowcroft, Discrete family symmetry from F-theory GUTs, JHEP 1409 (2014) 107.
- [35] Athanasios Karozasy, Stephen F. King, George K. Leontaris, Andrew K. Meadowcroft, Phenomenological implications of a minimal F-theory GUT with discrete symmetry, JHEP 1510 (2015) 041.
- [36] M. C. Romão, A. Karozas, S. F. King, G. K. Leontaris and A. K. Meadowcroft, MSSM from F-theory SU(5) with Klein Monodromy, Phys. Rev. D 93, 126007 (2016).
- [37] F. Englert et R. Brout, Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons, Phys. Rev. Lett., 13 :321-323,1964 ; P. W. Higgs, Broken symmetries and the masses of gauge bosons, Phys. Rev. Lett., 13 :508-509, 1964.
- [38] G. Aad et al., Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC, Phys. Lett. B 716.1 (2012) :1-29 ; S. Chatrchyan et al., Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC, Phys. Lett. B 716.1 (2012) : 30-61 ; G. Aad et al., Combined Measurement of the Higgs Boson Mass in pp Collisions at $\sqrt{s} = 7$ and 8 TeV with the ATLAS and CMS Experiments, Phys. Rev. Lett. 114.19 (2015) : 191803.
- [39] M. H. Goroff and A. Sagnotti, Quantum Gravity At Two Loops, Phys.Lett. 160B (1985) 81-86.
- [40] S. P. Martin, A Supersymmetry primer, arXiv :9709356 [hep-ph] ; Yuri Shirman, TASI 2008 Lectures : Introduction to Supersymmetry and Supersymmetry Breaking, arXiv :hep-ph/0907.0039.
- [41] F. Couchot et al., Cosmological constraints on the neutrino mass including systematic uncertainties, A&A 606, A104 (2017).
- [42] M. Bertolini, Lectures on Supersymmetry, SISSA, 2016.
- [43] J. Wess and J. Bagger, Supersymmetry and Supergravity, Princeton University Press, 1983.
- [44] C.Csáki, The Minimal Supersymmetric Standard Model, Modern Physics Letters A, 11, 1996.
- [45] G. R. Farrar and P. Fayet, Phenomenology of the Production, Decay, and Detection of New Hadronic States Associated with Supersymmetry, Phys.Lett. B 76 (1978) 575-579.
- [46] A. Djouadi, The Anatomy of electro-weak symmetry breaking. II. The Higgs bosons in the minimal supersymmetric model, Phys. Rept. 459 (2008) 1-241.
- [47] J. C. Pati and A. Salam, Lepton number as the fourth color. Phys. Rev. D10 (1974) 275-289.

- [48] W. de Boer, Grand Unified Theories and Supersymmetry in Particle Physics and Cosmology, *Prog. Part. Nucl. Phys.* 33 :201-302, (1994).
- [49] G. Senjanovic, Neutrino mass : From LHC to grand unification, *Riv. Nuovo Cim.* 34 (2011)1-68; R. Mohapatra, Unification and Supersymmetry : The Frontiers of Quark-Lepton Physics. Graduate Texts in Contemporary Physics. Springer-Verlag, 2003.
- [50] G. G. Ross, Grand Unified Theories (Addison-Wesley, 1985).
- [51] H. Georgi, H. R. Quinn, S. Weinberg, Hierarchy of Interactions in Unified Gauge Theories, *Phys. Rev. Lett.* 33 (1974) 451-454.
- [52] J. R. Ellis, S. Kelley and D. V. Nanopoulos, Probing the desert using gauge coupling unification, *Phys. Lett. B* 260, 131 (1991).
- [53] A. Masiero, D. V. Nanopoulos, K. Tamvakis, and T. Yanagida, Naturally massless Higgs doublets in supersymmetric $SU(5)$, *Phys. Lett. B* 115, 380 (1982).
- [54] H. Georgi and C. Jarlskog, A new lepton-quark mass relation in a unified theory, *Phys. Lett. B* 86 (1979) 297.
- [55] J. R. Ellis and M. K. Gaillard, Fermion Masses and Higgs Representations in $SU(5)$, *Phys. Lett. B* 88, (1979) 315.
- [56] D.V. Nanopoulos, Protons are not forever, Harvard preprint HUTP-78/A062, (1978).
- [57] I. Dorsner and I. Mocioiu, Predictions from type II see-saw mechanism in $SU(5)$, *Nucl. Phys. B* 796 :123-136, (2008).
- [58] I. Dorsner and P. F. Perez, Unification without supersymmetry : neutrino mass, proton decay and light leptoquarks, *Nucl. Phys. B* 723 :53-76, 2005.
- [59] P. F. Perez, Renormalizable Adjoint $SU(5)$, *Phys. Lett. B* 654 :189-193, (2007); P. F. Perez, Supersymmetric Adjoint $SU(5)$, *Phys. Rev. D* 76 :071701, (2007); R. Awasthi, S. Choubey, M. Mitra, Probing Seesaw in an Adjoint SUSY $SU(5)$ Model at LHC, arXiv :1009.0509v1; B. Bajc, G. Senjanovic, Seesaw at LHC, *JHEP* 0708 :014, (2007).
- [60] S. Dimopoulos and H. Georgi, Softly broken supersymmetry and $SU(5)$, *Nucl. Phys. B* 193 (1981) 150; N. Sakai, Naturalnes in supersymmetric GUTS, *Z. Phys. C* 11 (1981) 153; R. Dermíšek, A. Mafi, and S. Raby, Supersymmetric grand unification under siege : Proton lifetime upper bound. *Phys. Rev. D*, 63 :035001, Dec2000. URL; B. Bajc, P. F. Perez and G. Senjanovic, Minimal supersymmetric $SU(5)$ theory and proton decay : Where do westand ? pages131–139, 2002, arXiv :hep-ph/0210374.
- [61] D. Emmanuel-Costa, S. Wiesenfeldt, Proton decay in a consistent supersymmetric $SU(5)$ GUT model, *Nucl. Phys. B* 661 (2003) 62-82.
- [62] S. Weinberg, Supersymmetry at ordinary energies. Masses and conservation laws, *Phys. Rev. D* 26, 287 (1982); N. Sakai and T. Yanagida, Proton decay in a class of supersymmetric grand unified models, *Nucl. Phys. B* 197, 533 (1982).

- [63] J. R. Ellis, D. V. Nanopoulos and S. Rudaz, GUTs 3 : SUSY GUTs 2, Nucl.Phys. B 202, 43 (1982); T. Goto and T. Nihei, Effect of an RRRR dimension 5 operator on the proton decay in the minimal SU(5) SUGRA GUT model, Phys. Rev. D 59, 115009 (1999); P. Nath, A. H. Chamseddine and R. Arnowitt, Nucleon decay in supergravity unified theories, Phys. Rev. D 32, 2348 (1985).
- [64] T. Goto and T. Nihei, Effect of an RRRR dimension 5 operator on the proton decay in the minimal SU(5) SUGRA GUT model, Phys.Rev. D59 (1999) 115009; H. Murayama and A. Pierce, Not Even Decoupling Can Save Minimal Supersymmetric SU(5), Phys.Rev.D65 :055009, 2002.
- [65] K.S. Babu, R.N. Mohapatra, Predictive Neutrino Spectrum in Minimal SO(10) Grand Unification, Phys.Rev.Lett.70 :2845-2848,1993
- [66] T. E. Clark, T. K. Kuo and N. Nakagawa, Phys. Lett. B 115, 26 (1982); C. S. Aulakh and R.N. Mohapatra, Phys. Rev. D 28, 217 (1983).
- [67] R. N. Mohapatra, Supersymmetric grand unification, hep-ph :9801235.
- [68] G. Anastaze, J. Derendinger and F. Buccella, Intermediate symmetries in the SO(10) model with $16 \oplus \overline{16} \oplus 45$ Higgses, Z. Phys. C20, 269 (1983); T. Clark, T.-K. Kuo and N. Nakagawa, An SO(10) supersymmetric grand unified theory, Phys.Lett. B115, 26 (1982).
- [69] I. Antoniadis, J. Ellis, J. S. Hagelin and D. V. Nanopoulos, Supersymmetric flipped SU(5) revitalized, Phys.Lett. B194 (1987) 231-235.
- [70] C. S. Aulakh, B. Bajc, A. Melfo and A. Rasin, G. Senjanovic, SO(10) theory of R-parity and neutrino mass, Nucl.Phys.B597 :89-109, 2001
- [71] K.S. Babu and R.N. Mohapatra, Predictive neutrino spectrum in minimal SO(10) grand unification, Phys. Rev. Lett. 70, 2845 (1993).
- [72] B. Bajc, G. Senjanovic and F. Vissani, $b - \tau$ Unification and Large Atmospheric Mixing : A Case for a Noncanonical Seesaw Mechanism Phys. Rev. Lett. 90, 051802 (2003); T. Fukuyama and N. Okada, Neutrino oscillation data versus minimal supersymmetric SO(10) model, JHEP 0211, 011 (2002)
- [73] T. Fukuyama, N. Okada, Neutrino oscillation data versus minimal supersymmetric SO(10) model, JHEP 0211 :011, 2002.
- [74] T. Fukuyama, SO(10) GUT in Four and Five Dimensions : A Review, Int. J. Mod. Phys. A, 28, 1330008 (2013).
- [75] K.Matsuda, Y.Koide, T.Fukuyama and H.Nishiura, How Far Can the SO(10) Two Higgs Model Describe the Observed Neutrino Masses and Mixings?, Phys. Rev. D65 :033008, 2002; K.Matsuda, Y. Koide and T. Fukuyama, Can the SO(10) Model with Two Higgs Doublets Reproduce the Observed Fermion Masses?, Phys. Rev. D64, 053015 (2001)

- [76] H. S. Goh, R. N. Mohapatra and S. P. Ng, Minimal SUSY SO(10), $b - \tau$ unification and large neutrino mixings, Phys.Lett. B570,215(2003) ; H. S. Goh, R. N. Mohapatra and S. P. Ng, Minimal SUSY SO(10) model and predictions for neutrino mixings and leptonic CP violation, Phys. Rev. D68,115008(2003).
- [77] H. S. Goh, R. N. Mohapatra and S. P. Ng, Proton Decay in a Minimal SUSY SO(10) Model for Neutrino Mixings, Phys.Lett. B587 (2004) 105-116 ; , T. Fukuyama, A. Ilakovac, T. Kikuchi, S. Meljanac and N. Okada, Detailed Analysis of Proton Decay Rate in the Minimal Supersymmetric SO(10) Model, JHEP0409 :052,2004 ; M. Severson, Neutrino Sector and Proton Lifetime in a Realistic SUSY SO(10) Model, Phys. Rev. D 92, 095026 (2015) ; M. Severson, Neutrino Mass and Proton Decay in a Realistic Supersymmetric SO(10) Model, arXiv :1601.06478.
- [78] T. Fukuyama, K. Ichikawa and Y. Mimura, Relation between proton decay and PMNS phase in the minimal SUSY SO(10) GUT, Physics Letters B Volume 764, 10 January 2017, Pages 114-120 ; T. Fukuyama, K. Ichikawa, Y. Mimura, Revisiting fermion mass and mixing fits in the minimal SUSY SO(10) GUT, Phys. Rev. D 94, 075018 (2016)
- [79] B. Dutta, Y. Mimura, R. N. Mohapatra, Suppressing Proton Decay in the Minimal SO(10) Model, Phys.Rev.Lett. 94 (2005) 091804 ; B. Dutta, Y. Mimura and R. N. Mohapatra, Proton decay and $\mu \rightarrow e + \gamma$ Connection in a Renormalizable SO(10) GUT for Neutrinos, Phys. Rev. D 87, 075008, 2013 ; B. Dutta, Y. Mimura and R.N. Mohapatra, Neutrino Mixing Predictions of a Minimal SO(10) Model with Suppressed Proton Decay, Phys.Rev. D72 (2005) 075009.
- [80] S. Dimopoulos and F. Wilczek, Supersymmetry and the scale of unification, Phys. Rev. D 24, 1681 (1981) ; R. N. Cahn, I. Hinchliffe and L. J. Hall, The hierarchy problem in supersymmetric grand unified theories, Phys. Lett. 109 B, 426 (1982)
- [81] K.S. Babu, I. Gogoladze and Z. Tavartkiladze, Missing Partner Mechanism in SO(10) Grand Unification, Phys. Lett. B650 :49-56, 2007 ; K. S. Babu, Ilia Gogoladze, Pran Nath and R. M. Syed, Variety of SO(10) GUTs with Natural Doublet-Triplet Splitting via the Missing Partner Mechanism, Phys. Rev. D 85, 075002, 2012.
- [82] R. Barbieri, D.V. Nanopoulos, G. Morchio and F. Strocchi, Neutrino masses in grand unified theories, Phys. Lett.B 90 (1980) 91.
- [83] S. Bertolini, M. Frigerio and M. Malinsky, Fermion masses in SUSY SO(10) with type II seesaw : a non-minimal predictive scenario, Phys. Rev. D70 :095002, 2004 ; A. Dueck and W. Rodejohann, Fits to SO(10) Grand Unified Models, JHEP 1309, 024 (2013).
- [84] K. S. Babu, I. Gogoladze, P. Nath and R. M. Syed, Fermion Mass Generation in SO(10) with a Unified Higgs Sector, Phys. Rev. D74 :075004, 2006.
- [85] P. Nath, R. M. Syed, Yukawa Couplings and Quark and Lepton Masses in an SO(10) Model with a Unified Higgs Sector, Phys. Rev. D 81, 037701, 2010 ; K.S. Babu, I. Gogoladze, P. Nath and R. M. Syed, A Unified Framework for Symmetry Breaking

- in $SO(10)$, Phys.Rev. D72 (2005) 095011 ; K.S.Babu et al., Unified framework for symmetry breaking in $SO(10)$, Phys.Rev.D 72,095011(2005).
- [86] K.S. Babu, B. Bajc and S. Saad, New Class of $SO(10)$ Models for Flavor, Phys. Rev. D 94, 015030 (2016).
- [87] F. Reines et C. L. Cowan, The Neutrino, Nature, vol. 178, p. 446, (1956).
- [88] G. Danby et al. Observation of High-Energy Neutrino Reactions and the Existence of Two Kinds of Neutrinos. Phys. Rev. Lett., 9 :36–44, 1962
- [89] C. V. Achar et al., The Kolar Gold Field neutrino experiment, Proceedings of the 9th International Cosmic Ray Conference, Vol. 1, p.1012, (1965) ; C. V. Achar, et al., Detection of muons produced by cosmic ray neutrinos deep underground, Phys. Lett. 18 (1965) 196-199.
- [90] Jr. R. Davis, D. S. Harmer and K. C. Hoffman, Search for neutrinos from the sun, Phys. Rev. Lett., 20 :1205-1209, (1968).
- [91] K. Kodama et al. Observation of tau-neutrino interactions. Phys. Lett., B504 :218–224, 2001.
- [92] B. Pontecorvo, Mesonium and anti-mesonium, JETP, vol. 33, pp. 549-551, (1957).
- [93] Jr. R. Davis , D. S. Harmer and K. C. Hoffman, Search for neutrinos from the sun, Phys. Rev. Lett., 20 :1205-1209, (1968)
- [94] V. N. Gribov, B. Pontecorvo, Neutrino astronomy and lepton charge, Phys. Lett. B 28, (1969), p. 493.
- [95] B. Pontecorvo, Inverse beta processes and nonconservation of lepton charge, Sov. Phys. JETP 7 (1958) 172-173 Zh.Eksp.Teor.Fiz. 34 (1957) 247 ; Z. Maki, M. Nakagawa, S. Sakata, Remarks on the Unified Model of Elementary Particles, Prog. Theor. Phys. 28 (1962) 870.
- [96] N. Cabibbo, Unitary Symmetry and Leptonic Decays". Physical Review Letters. 10 (12) : 531–533, (1963)
M. Kobayashi, T. Maskawa, CP-Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction, Progress of Theoretical Physics. 49 (2) : 652–657, (1973).
- [97] CHOOZ Collaboration, M. Apollonio et al., Search for neutrino oscillations on a long baseline at the CHOOZ nuclear power station, Eur. Phys. J. C 27 (2003) 331-374.
- [98] F. Vissani, A Study of the scenario with nearly degenerate Majorana neutrinos, arXiv :9708483 [hep-ph] ; V. D. Barger, et al., Bi-Maximal Mixing of Three Neutrinos, Phys. Lett. B 437 (1998) 107 ; A. J. Baltz, A. S. Goldhaber and M. Goldhaber, Solar Neutrino Puzzle : An Oscillation Solution with Maximal Neutrino Mixing, Phys. Rev. Lett. 81 (1998) 5730.
- [99] P. F. Harrison, D. H. Perkins and W. G. Scott, Tri-bimaximal mixing and the neutrino oscillation data, Phys. Lett. B 530.167 (2002).

- [100] Y. Kajiyama, M. Raidal and A. Strumia, The golden ratio prediction for the solar neutrino mixing, *Phys. Rev. D* 76 :117301, (2007); W. Rodejohann, Unified Parametrization for Quark and Lepton Mixing Angles, *Phys. Lett. B* 671 :267-271, (2009); A. Adulpravitchai, A. Blum and W. Rodejohann, Golden Ratio Prediction for Solar Neutrino Mixing, *New J. Phys.* 11 :063026, (2009); F. Feruglio and A. Paris, The Golden Ratio Prediction for the Solar Angle from a Natural Model with A5 Flavour Symmetry, *JHEP* 1103 :101,(2011).
- [101] C. H. Albright and W. Rodejohann, Comparing Trimaximal Mixing and Its Variants with Deviations from Tri-bimaximal Mixing, *Eur. Phys. J. C* 62 (2009) 599; C. H. Albright, A. Dueck and W. Rodejohann, Possible Alternatives to Tribimaximal Mixing, *Eur. Phys. J. C* 70 (2010) 1099; W. Grimus and L. Lavoura, A model for trimaximal lepton mixing, *JHEP* 0809 (2008) 106; Z. z. Xing and S. Zhou, Tri-bimaximal Neutrino Mixing and Flavor-dependent Resonant Leptogenesis, *Phys. Lett. B* 653 (2007) 278; Z. z. Xing and Z. h. Zhao, A review of mu-tau flavor symmetry in neutrino physics, *Rept. Prog. Phys.* 79 (2016) no.7, 076201.
- [102] K. Abe et al., (T2K Collaboration), Indication of Electron Neutrino Appearance from an Accelerator-Produced Off-Axis Muon Neutrino Beam, *Phys. Rev. Lett.* 107, 041801 (2011); P. Adamson et al., (MINOS Collaboration), Measurement of the neutrino mass splitting and flavor mixing by MINOS, *Phys. Rev. Lett.* 106 :181801, 2011.
- [103] Y. Abe et al., (DOUBLE-CHOOZ Collaboration), Indication of Reactor $\bar{\nu}_e$ Disappearance in the Double Chooz Experiment, *Phys. Rev. Lett.* 108, 131801 (2012); F. P. An et al. (DAYA-BAY Collaboration), Observation of Electron-Antineutrino Disappearance at Daya Bay, *Phys. Rev. Lett.* 108, 171803 (2012); J. K. Ahn et al. (RENO Collaboration), Observation of Reactor Electron Antineutrinos Disappearance in the RENO Experiment, *Phys. Rev. Lett.* 108, 191802 (2012).
- [104] I. Esteban, M. C. Gonzalez-Garcia, M. Maltoni, I. Martinez-Soler, and T. Schwetz, Updated fit to three neutrino mixing : exploring the accelerator-reactor complementarity, *JHEP* 01 (2017) 087.
- [105] P. F. de Salas, D. V. Forero, C. A. Ternes, M. Tortola, and J. W. F. Valle, Status of neutrino oscillations 2017, *arXiv :1708.01186 [hep-ph]*, (2017).
- [106] K. Abe et al. (T2K Collaboration), Observation of Electron Neutrino Appearance in a Muon Neutrino Beam, *Phys. Rev. Lett.* 112, 061802 (2014); M. G. Aartsen et al., (IceCube Collaboration), Measurement of Atmospheric Neutrino Oscillations at 6-56 GeV with IceCube DeepCore, *arXiv :1707.07081 [hep-ex]*
- [107] P. Adamson et al., (NOvA Collaboration), Measurement of the neutrino mixing angle θ_{23} in NOvA, *Phys. Rev. Lett.* 118, 151802 (2017).
- [108] C. D. Froggatt and H. B. Nielsen, Hierarchy Of Quark Masses, Cabibbo Angles And CP Violation, *Nucl. Phys. B* 147 (1979) 277.
- [109] A. Pomarol and D. Tommasini, Horizontal symmetries for the supersymmetric flavor problem, *Nucl. Phys. B* 466, 3-24 (1996); R. Barbieri, G. Dvali, L. Hall, Predictions From A U(2) Flavour Symmetry In Supersymmetric Theories, *Phys. Lett.*

- B377 (1996) 76-82; R. Barbieri, L.J. Hall, S. Raby, A. Romanino, Unified Theories with $U(2)$ Flavor Symmetry, Nucl.Phys. B493 (1997) 3-26; M. C. Chen and K. T. Mahanthappa, From CKM Matrix to MNS Matrix : A Model Based on Supersymmetric $SO(10) \times U(2)_F$ Symmetry, Phys. Rev. D 62, 113007 (2000).
- [110] R. Barbieri and L. Hall, A Grand Unified Supersymmetric Theory of Flavor, Nuovo Cim. A110 (1997) 1-30.
- [111] S. F. King and C. Luhn, Neutrino Mass and Mixing with Discrete Symmetry, Rept. Prog. Phys. 76 (2013) 056201; T. Appelquist, Y. Bai and M. Piai, Neutrinos and $SU(3)$ Family Gauge Symmetry, Phys. Rev. D 74 :076001 (2006); R. Barbieri, L. J. Hall, G. L. Kane, and G. G. Ross, Nearly degenerate neutrinos and broken flavor symmetry, (1999) arXiv :9901228 [hep-ph]; S. Antusch and S. F. King, From hierarchical to partially degenerate neutrinos via type II upgrade of type I seesaw models, Nucl. Phys. B 705, 239 (2005); S. F. King and G. G. Ross, Fermion masses and mixing angles from $SU(3)$ family symmetry, Phys. Lett. B 520 (2001)243; J. L. Chkareuli, C. D. Froggatt and H. B. Nielsen, Minimal mixing of quarks and leptons in the $SU(3)$ theory of flavour, Nucl. Phys. B 626 (2002) 307.
- [112] I. de M. Varzielas, G. G. Ross, $SU(3)$ family symmetry and neutrino bi-trimaximal mixing, Nucl. Phys. B 733 (2006) 31-47.
- [113] H. Ishimori et al., Non-Abelian Discrete Symmetries in Particle Physics, Prog. Theor. Phys. Suppl. 183 :1-163, (2010); W. Grimus, P. O. Ludl, Finite flavour groups of fermions, J. Phys. A 45, 233,001 (2012).
- [114] H. Murayama and D. B. Kaplan, Family Symmetries and Proton Decay, Phys. Lett. B 336 :221-228, (1994); R. Harnik, D. T. Larson, H. Murayama and M. Thormeier, Probing the Planck Scale with Proton Decay, Nucl. Phys. B 706, 372 (2005); C. D. Carone, L. J. Hall and H. Murayama, A Supersymmetric Theory of Flavor and R Parity, Phys. Rev. D 54, 2328 (1996); D. Kaplan and H. Muryama, Family symmetries and proton decay, Phys. Lett. 336B (1994) 221.
- [115] D. Kaplan and M. Schmaltz, Flavor unification and discrete non-Abelian symmetries, Phys.Rev.D49(1994)3741.
- [116] B. D. Callen, R. R. Volkas, Large lepton mixing angles from a 4+1-dimensional $SU(5) \times A(4)$ domain-wall braneworld model, Phys. Rev. D86 :056007, 2012; S. Antusch, S. F. King and M. Spinrath, Spontaneous CP violation in $A_4 \times SU(5)$ with Constrained Sequential Dominance 2, Phys. Rev. D 87, 096018 (2013); I. K. Cooper, S. F. King, C. Luhn, SUSY $SU(5)$ with singlet plus adjoint matter and A_4 family symmetry, Phys. Lett. B690 :396-402,2010; F. Björkeröth, F. J. de Anda, I. D. Varzielas and S. F. King, Towards a complete $A_4 \times SU(5)$ SUSY GUT, JHEP 06 (2015) 141
- [117] M. Dimou, S. F. King and C. Luhn, Phenomenological Implications of an $SU(5) \times S_4 \times U(1)$ SUSY GUT of Flavour, Phys. Rev. D 93, 075026 (2016); C. Hagedorn, S. F. King and C. Luhn, A SUSY GUT of Flavour with $S_4 \times SU(5)$ to NLO, JHEP 1006 :048,2010; D. Meloni, Bimaximal mixing and large θ_{13} in a SUSY $SU(5)$ model based on S_4 , JHEP 1110 (2011) 010; C. Hagedorn, S. F. King and C.

- Luhn, SUSY $S_4 \times SU(5)$ revisited, Phys.Lett. B717 (2012) 207-213 ; H. Ishimori, K. Saga, Y. Shimizu and M. Tanimoto, Tri-bimaximal Mixing and Cabibbo Angle in S_4 Flavor Model with SUSY, Phys.Rev.D81 :115009, 2010.
- [118] R. Ahl Laamara, M. A. Loualidi, M. Miskaoui and E.H.Saidi, Fermion masses and mixing in $SU(5) \times D_4 \times U(1)$ model, Nuclear Physics B 916 (2017) 430–462.
- [119] J. Gehrlein, S. T. Petcov, M. Spinrath and X. Zhang, Leptogenesis in an $SU(5) \times A_5$ Golden Ratio Flavour Model : Addendum, Nucl. Phys. B899 (2015) 617-630 ; J. Gehrlein, J. P. Oppermann, D. Schäfer and M. Spinrath, An $SU(5) \times A_5$ Golden Ratio Flavour Model, Nucl. Phys. B 890 (2015) 539 ; J. Gehrlein, S. T. Petcov, M. Spinrath and X. Zhang, Leptogenesis in an $SU(5) \times A_5$ Golden Ratio Flavour Model, Nucl. Phys. B 896 (2015) 311.
- [120] S. F. King, C. Luhn and A. J. Stuart, A Grand $\Delta(96) \times SU(5)$ Flavour Model, Nucl.Phys. B867 (2013) 203-235.
- [121] R. Dermisek and S. Raby, Bi-large Neutrino Mixing and CP violation in an $SO(10)$ SUSY GUT for Fermion Masses, Phys.Lett. B622 (2005) 327-338 ; A. Anandakrishnan and S. Raby, A. Wingerter, Yukawa Unification Predictions for the LHC, Phys.Rev. D87 (2013) no.5, 055005 ; R. Dermisek, M. Harada and S. Raby, $SO(10)$ SUSY GUT for Fermion Masses : Lepton Flavor and CP Violation, Phys.Rev.D74 :035011,2006.
- [122] W. Grimus and H. Kuhbock, Embedding the Zee-Wolfenstein neutrino mass matrix in an $SO(10) \times A_4$ GUT scenario, Phys. Rev. D 77, 055008, 2008 ; S. Morisi, M. Picariello, E. T. Lujan, A model for fermion masses and lepton mixing in $SO(10) \times A_4$, Phys.Rev.D75 :075015, 2007 ; C. Hagedorn, M. Lindner and R. N. Mohapatra, S_4 Flavor Symmetry and Fermion Masses : Towards a Grand Unified theory of Flavor, JHEP 0606 :042,2006 ; Y. Cai and H. B. Yu, An $SO(10)$ GUT Model with S_4 Flavor Symmetry, Phys. Rev. D74 :115005, 2006.
- [123] F. Björkeröth, F. J. de Anda, S. F. King and E. Perdomo, A natural $S_4 \times SO(10)$ model of flavour, JHEP 10 (2017) 148 ; K. M. Patel, An $SO(10) \times S_4$ Model of Quark-Lepton Complementarity, Phys.Lett.B695 :225-230,2011 ; P. S. B. Dev, R. N. Mohapatra and M. Severson, Neutrino Mixings in $SO(10)$ with Type II Seesaw and θ_{13} , Phys. Rev. D 84, 053005 (2011) ; P. S. B. Dev, B. Dutta, R. N. Mohapatra and M. Severson, θ_{13} and Proton Decay in a Minimal $SO(10) \times S_4$ model of Flavor, Phys. Rev. D 86, 035002, 2012 ; B. Dutta, Y. Mimura and R. N. Mohapatra, An $SO(10)$ Grand Unified Theory of Flavor, JHEP 1005 :034, 2010.
- [124] F. Björkeröth, F. J. de Anda, I. D. M. Varzielas, S. F. King, Towards a complete $\Delta(27) \times SO(10)$ SUSY GUT, Phys. Rev. D 94, 016006 (2016) ; F. Björkeröth, F. J. de Anda, I. D. M. Varzielas, S. F. King, Leptogenesis in a $\Delta(27) \times SO(10)$ SUSY GUT, JHEP 1701 (2017) 077.
- [125] I. D. M. Varzielas, G. G. Ross, Discrete family symmetry, Higgs mediators and θ_{13} , JHEP 1212 (2012) 041.

- [126] S. F. King, A to Z of Flavour with Pati-Salam, JHEP 1408 (2014) 130 ; S. F. King, M. Malinsky, A4 family symmetry and quark-lepton unification, Phys.Lett.B645 :351-357,2007 ; A. S. Belyaev, J. E. C. Molina, S. F. King, D. J. Miller, A. P. Morais and P. B. Schaefer, A to Z of the Muon Anomalous Magnetic Moment in the MSSM with Pati-Salam at the GUT scale, JHEP 1606 (2016) 142.
- [127] R. D. A. Toorop, F. Bazzocchi and L. Merlo, The Interplay Between GUT and Flavour Symmetries in a Pati-Salam $\times$ S4 Model, JHEP 1008 :001,2010.
- [128] A. E. C. Hernández, S. Kovalenko, J. W. F. Valle, C. A. Vaquera-Araujo, Predictive Pati-Salam theory of fermion masses and mixing, JHEP 1707 (2017) 118.
- [129] I. K. Cooper, S. F. King, C. Luhn, A4 $\times$ SU(5) SUSY GUT of Flavour with Trimaximal Neutrino Mixing, JHEP 1206 (2012) 130.**1203.1324**
- [130] S. F. King and C. Luhn, Trimaximal neutrino mixing from vacuum alignment in A4 and S4 models, JHEP 1109 :042, 2011.1107.5332.
- [131] Scherk, J., & Schwarz, J. H. (1974). Dual models for non-hadrons. Nuclear Physics B, 81, 118-144.
- [132] T. Kaluza, On the problem of unity in physics, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. (Math. Phys.) 966-972 (1921) ; O. Klein, Quantum theory and five dimensional theory of relativity, Z. Phys. 37 895-906 (1926).
- [133] B. R. Greene, String Theory on Calabi–Yau Manifolds, in C. Esthimiou and B. Greene, editors, Fields, Strings and Duality, TASI 1996, pages 543–726, World Scientific, 1997.
- [134] M. Douglas, The statistics of string / M theory vacua, JHEP 0305, 46 (2003). arXiv :hep-th/0303194 ; S. Ashok and M. Douglas, "Counting flux vacua", JHEP 0401, 060 (2004).
- [135] G. Aldazabal, L. E. Ibanez, F. Quevedo, and A. Uranga, D-branes at singularities : A Bottom up approach to the string embedding of the standard model, JHEP 0008 (2000) 002.
- [136] K. Kodaira, On compact complex analytic surfaces I, Annals of Mathematics, 71(1) :111-152, 1960 ; K. Kodaira, On compact analytic surfaces : II. Annals of Mathematics,77(3) :563-626, 1963.
- [137] M. Bershadsky, K. Intriligator, S. Kachru, D. R. Morrison, V. Sadov, and C. Vafa, Geometric singularities and enhanced gauge symmetries, Nucl. Phys., B481 :215-252, 1996.
- [138] J. Tate, Algorithm for determining the type of a singular fiber in an elliptic pencil, Lect. Notes Math., vol. 476, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [139] J. J. Heckman and C. Vafa, F-theory, GUTs, and the Weak Scale, JHEP 09 (2009) 079 ; A. Font and L. E. Ibanez, Yukawa Structure from U(1) Fluxes in F-theory Grand Unification, JHEP 02 (2009) 016 ; J. J. Heckman and C. Vafa, Flavor Hierarchy From F-theory, Nucl. Phys. B837 (2010) 137-151 ; R. Blumenhagen, Gauge

- Coupling Unification in F-Theory Grand Unified Theories, Phys. Rev. Lett. 102 (2009) 071601 ; J. J. Heckman, A. Tavanfar, and C. Vafa, Cosmology of F-theory GUTs, JHEP 04 (2010) 054 ; J. L. Bourjaily, Local Models in F-Theory and M-Theory with Three Generations.
- [140] R. Blumenhagen, T. W. Grimm, B. Jurke, and T. Weigand, Global F-theory GUTs, Nucl. Phys. B829 (2010) 325-369 ; P. Candelas, E. Perevalov, and G. Rajesh, Toric geometry and enhanced gauge symmetry of F-theory/heterotic vacua, Nucl. Phys. B507 (1997) 445-474 ; B. Andreas and G. Curio, From Local to Global in F-Theory Model Building, J. Geom. Phys. 60 (2010) 1089-1102.
- [141] J. J. Heckman, A. Tavanfar, and C. Vafa, The Point of $E(8)$ in F-theory GUTs, JHEP, 08 :040, 2010.
- [142] J. Marsano, N. Saulina, and S. S. Nameki, Monodromies, Fluxes, and Compact Three-Generation F-theory GUTs, JHEP, 08 :046, 2009.
- [143] H. Hayashi, R. Tatar, Y. Toda, T. Watari, and M. Yamazaki, New Aspects of Heterotic-F Theory Duality, Nucl. Phys. B806 (2009) 224-299 ; R. Blumenhagen, S. Moster, R. Reinbacher, and T. Weigand, Massless spectra of three generation $U(N)$ heterotic string vacua, JHEP 05 (2007) 041.
- [144] Emilian Dudas and Eran Palti. Froggatt-Nielsen models from $E(8)$ in Ftheory GUTs. JHEP, 01 :127, 2010, 0912.0853 ; E. Dudas and E. Palti, On hypercharge flux and exotics in F-theory GUTs. JHEP, 09 :013, 2010, 1007.1297 ; S. F. King, G. K. Leontaris, and G. G. Ross. Family symmetries in F-theory GUTs. Nucl. Phys., B838 :119-135, 2010, 1005.1025.
- [145] I. Antoniadis and G. K. Leontaris, Building $SO(10)$ models from F-theory, JHEP,08 :001,2012,1205.6930.
- [146] G. K. Leontaris, Aspects of F-Theory GUTs, PoS, CORFU2011 :095, 2011, 1203.6277 ; J. C. Callaghan and S. F. King, E_6 Models from F-theory, JHEP, 04 :034, 2013, 1210.6913 ; J. C. Callaghan, S. F. King, and G. K. Leontaris, Gauge coupling unification in E_6 F-theory GUTs with matter and bulk exotics from flux breaking. JHEP, 12 :037, 2013, 1307.4593.
- [147] R. Friedman, J. Morgan, and E. Witten, Vector bundles and F theory, Commun, Math. Phys. 187 (1997) 679-743 ; H. Hayashi, T. Kawano, Y. Tsuchiya, and T. Watari, More on Dimension-4 Proton Decay Problem in F-theory-Spectral Surface, Discriminant Locus and Monodromy, Nucl. Phys., B840 :304-348, 2010 ; J. Marsano and S. S. Nameki, Yukawas, G-flux, and Spectral Covers from Resolved Calabi-Yau's, JHEP, 11 :098, 2011.
- [148] J. Marsano, Hypercharge Flux, Exotics, and Anomaly Cancellation in F-theory GUTs, Phys. Rev. Lett., 106 :081601, 2011 ; C. Mayrhofer, E. Palti, and T. Weigand, Hypercharge Flux in IIB and F-theory : Anomalies and Gauge Coupling Unification, JHEP, 09 :082, 2013.
- [149] G. K. Leontaris and G. G. Ross, Yukawa couplings and fermion mass structure in F-theory GUTs, arXiv :1009.6000v1.

- [150] J. C. Callaghan, S. F. King, G. K. Leontaris, and G. G. Ross, Towards a Realistic F-theory GUT, JHEP, 04 :094, 2012, 1109.1399.
- [151] C. M. Chen, J. Knapp, M. Kreuzer and C. Mayrhofer, Global SO(10) F-theory GUTs, JHEP 1010 :057, 2010.
- [152] P. Morandi, Field and Galois Theory, Graduate Texts in Mathematics, Springer, September 2008.
- [153] R. Bourgne and D. Azra, Ecrits et mémoires mathématiques d'Evariste Galois, Gauthier-Villars, Paris (1962).
- [154] M. Artin, Algebra, Prentice-Hall Inc., 1991.
- [155] N. H. Abel, Mémoire sur les équations algébriques, où l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré, 1824.
- [156] G. James and M. Liebeck, Representations and Characters of Groups, Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2001.
- [157] W. Fulton and J. Harris, Young Tableaux with Applications to Representation Theory and Geometry, Springer-Verlag, 1991.
- [158] R. Ahl Laamara, M. Miskaoui, E. H. Saidi, Building SO₁₀- models with $\mathbb{D}_4$ symmetry, Nucl.Phys. B901 (2015) 59-75.
- [159] F. Gursey and P. Sikivie, E_7 as a Universal Gauge Group, 36, 775 (1976) ; P. Ramond, Vacuum configurations for superstrings, Nucl. Phys.B 110 (1976),
- [160] B. Bajc and V. Susič, A realistic renormalizable supersymmetric E_6 model, JHEP 1505 (2015) 108.
- [161] Y. Achiman and B.Stech,Quark-lepton symmetry and mass scales in an E_6 unified gauge model, Phy. Lett. B 77 (1978) 4–5.
- [162] B. Bajc and V. Susič, Towards the minimal renormalizable supersymmetric E_6 model, JHEP 1402 (2014) 058
- [163] K. S. Babu, B. Bajc and V. Susič, A Minimal Supersymmetric E_6 Unified Theory, JHEP 1505 (2015) 108.
- [164] R. Feger and T. W. Kephart, LieART – A Mathematica Application for Lie Algebras and Representation Theory, Comput. Phys. Commun. 192 (2015) 166-195.

Résumé

La construction des modèles théoriques qui décrivent tous les phénomènes physiques est l'un des grands défis de la physique des hautes énergies. Des théories de jauge préexistantes telle que le modèle standard (MS) et les Théories de Grande Unification (GUTs) décrivent avec succès les forces électromagnétique, forte et faible à de différentes échelles d'énergie. Toutefois, certains phénomènes physiques observés comme le phénomène d'oscillation des neutrinos semble être étrange et ne trouve pas une explication convaincante dans ces modèles. À cet égard, l'hypothèse de l'existence d'une symétrie de famille qui se brise à une échelle d'énergie très grande est considérée la façon la plus remarquable pour expliquer l'origine des masses de fermions ainsi que leurs mélanges observés qui font partie de ce qu'on appelle problème de la saveur. Ce mémoire de thèse porte sur la construction des GUTs étendues par des symétries de familles discrètes. À 4 dimensions, nous étudions les GUTs qui fournissent un cadre convaincant pour établir l'unification des quarks et des leptons et aussi pour expliquer les masses minuscules des neutrinos à travers le mécanisme de seesaw. Dans ce contexte, nous examinons leurs extensions par des symétries de familles pour décrire le phénomène d'oscillation des neutrinos. En d'autre part, nous étudions la théorie-F en tant qu'un cadre prometteur pour construire les modèles de GUT, offrant ainsi de nouvelles opportunités pour aborder certains des problèmes en suspens auxquels sont confrontés les GUTs à 4 dimensions. De plus, nous examinons la mise en œuvre des symétries de familles dans les modèles F-GUTs comme des monodromies en utilisant la méthode basée sur la théorie de Galois en plus de la méthode basée sur la théorie des caractères de représentations.

Mots-clés : Construction de Modèles, Modèles de GUTs, Théorie-F, Théories des Cordes, Symétries de Familles, Oscillation des Neutrinos, Monodromies.