

Année universitaire : 2021-2022

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude de la stabilisation des systèmes bilinéaires sur un espace de Banach. Il s'agit d'une classe de systèmes non linéaires. Ces systèmes servent à modéliser des problèmes réels issus de la mécanique, l'ingénierie, la chimie... Au début, nous étudions la question de stabilisation des systèmes bilinéaires sur des espaces de Banach réflexifs. Ainsi, nous montrons que sous des conditions suffisantes, les systèmes considérés sont faiblement, fortement ou exponentiellement stabilisable via une famille de commandes en rétro-action. On traite aussi la question de robustesse du contrôle face à des perturbations du générateur et de l'opérateur de contrôle. Nous étudions également le cas d'un espace non réflexif où l'on traite la stabilisation faible étoile ainsi que la stabilisation forte. Les résultats obtenus sont alors appliqués pour stabiliser certaines équations aux dérivées partielles par des contrôles multiplicatifs.

Mots clés : Stabilisation, semi-groupes, systèmes bilinéaires, topologie faible, topologie faible étoile.

Abstract

This thesis is devoted to the study of the stabilization of bilinear systems on a Banach space. These systems form a subclass of non linear systems, and are used to represent real problems resulting from the mechanics, engineering, chemistry. . . At the beginning, we study the question of stabilization of bilinear systems on reflexive Banach spaces. Thus, we show that under sufficient conditions, the considered systems are weakly, strongly or exponentially stabilizable via a family of feedback controls. We also discuss the robustness of the stabilising control when the generator and the operator control are perturbed. We further study the case of a non-reflexive state space, where we study the strong and weak star stabilization. The obtained results are then applied to stabilize various PDE by multiplicative control.

Keywords : Stabilization, semi-groups, bilinear systems, weak topology, weak star topology.

Remerciements

Je tiens à exprimer ma gratitude au **Pr. Mohamed OUZAHRA**, pour la direction et l'encadrement de ma thèse de doctorat. Qu'il trouve ici l'expression de mon respect et de ma reconnaissance.

J'adresse mes remerciements au **Pr. Mustapha ECH-CHERIF EL KETTANI**, professeur à la faculté des sciences Dhar El Mahraz, université Sidi Mohamed Ben Abdelah Fès, qui ma honoré par sa présidence du jury de ma soutenance.

Je remercie vivement les professeurs **Mohamed BENDAOUD**, professeur à ENSAM-Meknès et **Hassane Zguitti**, professeur à la Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, université Sidi Mohamed Ben Abdelah Fès et **Driss MESKINE**, professeur à EST Essaouira, Université Cadi Ayyad, pour avoir accepté d'évaluer cette thèse entant que rapporteurs. Je les remercie également pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour ce travail et pour leurs remarques fructueuses.

Je remercie également **Pr. Aziz BLALI**, professeur à l'école normale supérieur de Fès et **Pr.Lahoussine LAFHIM**, professeur à la Faculté des Sciences Dhar ElMahraz Fès qui ont accepté d'examiner ce travail. Je tiens à leur exprimer mes sincères remerciements pour leurs remarques et l'intention qu'ils ont donné à cette thèse pour la lecture détaillé de ce document.

Mes remerciements vont particulièrement au **Pr.Abdelmoujib BENKI-RANE**, **Pr. Aziz BLALI**, **Pr. Najib GUESSOUS**, **Pr. EL AISSAOUI**, **Pr. Abdelfattah TOUZANI**, pour leurs soutiens et leurs conseils durant mon parcourt de formation doctorale.

Mes remerciements vont également au **Pr. Lahoussuine LAFHIM** pour sa collaboration, ses remarques pertinentes et ses conseils durant la réalisation de ce travail.

Mes remerciements vont également aux **Pr. Adil BROURI** et **Pr. Rachid El AYADI** pour leur collaboration.

Je n'oublierais pas de remercier vivement tous mes collègues qui m'ont donné un coup de main lorsque j'en avais besoin, je citerai **ZAKARIA HAMIDI**, **Rachid Touati**, **Soufiane EL YAHYAOU**, **Hanane NAJIB**, **Safae EL ALAOU** ... Un grand merci pour mon cher ami Rachid

Mes remerciements vont aussi à tous mes collègues du CRMEF, Meknès pour leurs soutiens et leurs encouragements.

J'adresse mes remerciements à tout le personnel de l'école nationale supérieure de Fès et de la faculté des sciences Dhar mehras Fès pour leur soutien et leur aide tout au long de ce parcours.

Je n'oublierai pas de remercier vivement tous mes professeurs de la faculté des sciences Meknès, je citerais **Pr. Rachid CHIBLOUN**, **Pr. Abdeslam ELKASSIMI**, **Pr. Youssef RAMI**, **Pr. Mustapha SARIH**.

Je remercie infiniment tous les membres de ma famille, je citerai mon frère **Mohamed BENZAZA** pour son soutien permanent et ses encouragements le long de mes études.

Je remercie infiniment mon cher ami **SSI Mohamed** pour son soutien permanent, ses encouragements le long de mes années de formation doctorale.

Table des matières

1	Introduction générale	3
2	Préliminaires	9
2.1	Quelques résultats d'analyse fonctionnelle	9
2.1.1	Topologie faible $\sigma(X, X')$	9
2.1.2	Topologie faible étoile $\sigma(X', X)$	11
2.1.3	Espaces réflexifs	13
2.1.4	Espaces séparables	14
2.1.5	Espaces uniformément convexes	15
2.1.6	Lemmes techniques	16
2.2	Généralités sur les semi-groupes	17
2.2.1	C_0 -Semi-groupes linéaires	18
2.3	Équations d'évolution semi-linéaires	23
2.3.1	Résultats d'existence et de régularité	23
2.3.2	Propriétés asymptotiques	26
2.4	Problème de stabilisation des systèmes bilinéaires	28
2.4.1	Définitions	28
2.4.2	Stabilisation faible	29
2.4.3	Stabilisation forte	31
2.4.4	Stabilisation exponentielle	32
3	Stabilisation exponentielle des systèmes bilinéaires	35
3.1	Introduction	35
3.2	Résultats de stabilisation	36
3.3	Robustesse du contrôle de stabilisation	44
3.3.1	Perturbation de la dynamique	44

3.3.2	Perturbation de la dynamique et de l'opérateur de contrôle	47
3.4	Exemples	48
3.5	Conclusion	55
4	Stabilisation forte des systèmes bilinéaires	57
4.1	Introduction	57
4.2	Stabilisation forte	57
4.3	Stabilisation via la décomposition de l'espace d'état	67
4.4	Applications	70
4.5	Conclusion	75
5	Stabilisation faible et faible étoile des systèmes bilinéaires	77
5.1	Introduction	77
5.2	Stabilisation faible étoile	78
5.3	Stabilisation faible	79
5.4	Stabilisation faible via la décomposition de l'espace d'état . .	81
5.5	Exemples	83
5.6	Conclusion	85
6	Conclusion et perspectives	87
	Bibliographie	89

Liste des Abréviations

X'	: dual topologique d'un espace vectoriel normé X
$\langle, \rangle_{X \times X'}$	: produit de dualité entre X et son dual
$\langle, \rangle_X$	: produit scalaire (si X est un espace de Hilbert)
$\ \cdot\ _X$	: norme définie sur l'espace X
$\mathcal{L}(E, F)$	: espace des opérateurs linéaires continus d'un espace vectoriel normé E vers un espace vectoriel normé F
$\mathcal{L}(X)$	: espace des applications linéaires et continues d'un espace vectoriel normé X dans X
Ω	: ouvert borné de $\mathbb{R}^n$
$\partial\Omega$	: frontière de Ω
χ_ω	: fonction caractéristique de $\omega \subset \Omega$ avec ω ouvert de Ω
A^*	: adjoint de A
$\mathcal{D}(A)$	: domaine de A
$\ker(A)$	: noyau de A
$Im(A)$	: image de A
$\mathcal{R}(\lambda, A)$	: résolvante de l'opérateur A
$\rho(A)$	: l'ensemble résolvant de A
$\sigma(A)$	: le spectre de A
$r(A)$	: le rayon spectral de A
$\frac{\partial y(t)}{\partial t}$	: dérivée partielle première de la fonction y par rapport à la variable t
$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$	: dérivée partielle seconde de la fonction y par rapport à la variable x
$\rightarrow$	: convergence forte
$\rightharpoonup$	: convergence faible
$L^2(\Omega)$	: espace des fonctions de carrés sommables
$L^p(\Omega)$	: espace des fonctions p-sommables
$H^k(\Omega)$	: espace de Sobolev d'ordre k
$H_0^1(\Omega)$	: espace des fonctions de $H^1(\Omega)$ de trace nulle sur $\partial\Omega$
δ_{ij}	: symbole de kroneker
∇f	: gradient de f : $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$.
Δy	: Laplacien de y : $\Delta y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}$

Introduction générale

Chapitre 1

Introduction générale

Les résultats de la théorie du contrôle présentent un grand intérêt théorique et pratique, ils interviennent dans différents domaines, en biologie, en écologie et en économie [61, 86], ainsi qu'en mécanique [38, 79] (modélisation d'une suspension active), et en chimie [30] (approximation du comportement d'une colonne à distiller),... Un système dynamique peut être modélisé mathématiquement par une équation comprenant une entrée et une sortie qui peut capturer la description dynamique du système étudié. L'étude de la théorie du contrôle repose sur trois axes essentielles :

Le problème de contrôlabilité consiste à amener les solutions d'un système d'évolution (décrit par des équations différentielle ou des EDP) d'un état initial à un état final désiré en un temps fini, et ce, en agissant par un contrôle approprié appliqué sur le bord ou bien sur une partie du domaine dans lequel l'équation évolue. On trouve plusieurs recherches sur le sujet dans la littérature. Concernant le cas des systèmes linéaires avec contrôle additifs, nous renvoyons par exemple aux livres de Lasiecka et Triggiani [56] et de Fattorini [33], aux articles de Russell [80] et de Zuazua [89, 90].

L'observabilité consiste à étudier la possibilité d'évaluer l'énergie totale des solutions au moyen de mesures partielles sur un sous-ensemble du domaine ou du bord. Pour obtenir des estimées d'observabilité, il existe diverses méthodes, comme la technique des multiplicateurs, l'analyse micro locale [8], les inégalités de Carleman ainsi que les inégalités d'Ingham [35, 41, 52, 53, 57] ou les critères et les critères spectraux fréquentiels [21, 58].

L'un des problèmes importants de la théorie du contrôle est le problème de

stabilisation par retour d'état, qui consiste à déterminer un contrôle u , défini sur un voisinage d'un point d'équilibre x_0 et qui permet de ramener le système perturbé à son état d'équilibre.

On voit que dans les problèmes de contrôlabilité, le contrôle peut entrer dans le système librement en boucle ouverte, tandis que pour les problèmes de stabilisation, le contrôle est souvent de type feedback (ou en boucle fermée). Bien que, les liens entre les problèmes de stabilisation et de contrôlabilité sont étroits, la stabilisation ne peut pas toujours être obtenue comme conséquence de la contrôlabilité, et c'est pour cela que son étude est parfois faite indépendamment et directement.

Parmi les méthodes de stabilisation des systèmes non linéaires, on peut envisager les approches basées sur les fonctions de Lyapunov, les méthodes de linéarisation, ainsi que l'estimation de l'énergie.

Il existe plusieurs degrés de stabilité que l'on peut étudier :
Le premier degré consiste à analyser simplement la convergence de l'énergie des solutions vers l'équilibre par exemple l'origine 0,

$$E(t) \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty$$

c'est ce qu'on appelle la stabilisation forte. Le deuxième degré, s'intéresse à la convergence exponentielle de l'énergie :

$$E(t) \leq Ce^{-\gamma t}, \text{ pour tout } t \geq 0,$$

avec C et γ deux constantes positives.

Quant au troisième, il étudie des situations intermédiaires, dans lesquelles la convergence des solutions n'est pas exponentielle, mais de type polynomial par exemple :

$$E(t) \leq \frac{C}{t^\alpha}, \forall t > 0$$

avec C et α des constantes positives qui dépendent éventuellement des états initiaux.

On peut aussi envisager la notion de stabilisation faible (resp. stabilisation faible étoile), qui consiste à garantir la convergence faible (resp. convergence faible étoile) de l'état vers son point d'équilibre.

Dans le cas linéaire, le problème de stabilisation a été entièrement résolu et une théorie complète existe à ce sujet (voir [25]). Par contre, dans le cas non linéaire, ce problème a fait l'objet de nombreuses études, ce qui a donné lieu

à plusieurs résultats de stabilisation, mais il reste encore un grand nombre de problèmes ouverts [5].

Les systèmes bilinéaires occupent une place importante dans la théorie des systèmes non linéaires. L'étude de la stabilisation de tels systèmes a attiré l'attention de nombreux chercheurs ces dernières années (voir par exemple [22, 26, 43, 44, 49]). L'intérêt qu'ils suscitent est dû au fait qu'ils modélisent de nombreux phénomènes concrets. En effet, même si les modèles linéaires sont fréquemment utilisés pour approcher les processus dynamiques réels, il y a d'autres problèmes réels qui ne peuvent être modélisés par des systèmes linéaires, mais ont des structures non-linéaires, éventuellement bilinéaires. C'est le cas par exemple de certains problèmes d'échanges thermiques, processus chimiques, biologie, immunologie, mécanique, nucléaire... (pour plus de détails voir par exemple les références [20, 47, 50, 61, 62, 63, 85],...). Dans cette thèse nous allons considérer les systèmes bilinéaires qu'on peut écrire sous la forme abstraite suivante,

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + v(t)By(t), & t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

où X est un espace de Banach réel, A est un opérateur non borné de domaine $D(A)$ qui génère un semi-groupe de contractions $S(t)$ sur X , $B : X \rightarrow X$ est un opérateur linéaire borné, et la fonction scalaire $v(t)$ est le contrôle. Ici y' représente la dérivée par rapport au temps.

Dans le cas où X est un espace de Hilbert, le problème de stabilisation par rétroaction de (1.1) a été étudié par de nombreux auteurs (voir [4, 6, 13, 17, 65, 67]) . Dans [6], les auteurs ont étudié la stabilisation faible de (1.1) par le contrôle

$$v(t) = -\langle y(t), By(t) \rangle, \quad (1.2)$$

sous l'hypothèse (d'observation faible) suivante :

$$\langle BS(t)\xi, S(t)\xi \rangle = 0, \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow \xi = 0. \quad (1.3)$$

De plus, sous l'hypothèse (d'observation forte) suivante :

$$\int_0^T |\langle BS(t)\xi, S(t)\xi \rangle| dt \geq \delta \|\xi\|^2, \quad \forall \xi \in X \quad (T, \delta > 0), \quad (1.4)$$

il a été montré (voir [13, 64, 65]) que la commande (1.2) stabilise fortement le système (1.1) et donne l'estimation de la décroissance de l'énergie :

$$\|y(t)\| = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \text{ quand } t \rightarrow +\infty. \quad (1.5)$$

La stabilisation polynomiale et logarithmique est étudiée dans [4]. Dans [66] il a été montré que sous (1.4), le contrôle

$$v(t) = -\frac{\langle By(t), y(t) \rangle}{\|y(t)\|^2} 1_{\{t \geq 0 / y(t) \neq 0\}} \quad (1.6)$$

stabilise exponentiellement le système (1.1). La question de robustesse des contrôles (1.2) (resp. (1.6)) a été discutée dans le contexte d'un espace de Hilbert dans [15] (resp. [66]) (voir aussi [51]) pour le cas de dimension finie. Récemment, la question de stabilisation du système (1.1) sur un espace de Banach (qui n'est pas nécessairement réflexif) a été traitée dans [70]. Une étude des systèmes bilinéaires non bornés sur un espace d'état réflexif a été considérée dans [68]. De plus, en utilisant une décomposition adéquate du système (1.1), il a été montré dans [65, 66] que stabiliser un système bilinéaire parabolique comme (1.1) dans un espace de Hilbert revient à stabiliser un sous-système de (1.1).

Dans une partie de ce travail nous supposons que l'espace d'état X peut être écrit comme une somme directe de deux sous-espaces fermés X_1 et X_2 , invariants par A , et tels que le semi-groupe devient exponentiellement stable sur le sous-espace X_2 . Cette approche a été précédemment utilisée pour des systèmes linéaires définis dans un espace de Banach (voir [77, 84]).

Notre contribution à travers cette thèse porte essentiellement sur la stabilisation par retour d'état des systèmes bilinéaires sur un espace de Banach. Nous présentons deux méthodes de stabilisation basées sur des techniques différentes. Ce travail se compose de trois axes :

- La stabilisation exponentielle robuste des systèmes bilinéaires.
- La stabilisation forte avec estimation .
- la stabilisation faible et faible étoile.

La stabilisation des systèmes bilinéaires dans un espace de Banach est un problème d'intérêt pratique et théorique puisqu'en général l'espace d'état n'est pas forcément un Hilbert. Dans cette thèse, on s'intéresse au problème de stabilisation d'une classe de systèmes bilinéaires dans un Banach. Dans le cas d'un espace réflexif, on détermine le comportement asymptotique de l'énergie, ensuite on donne une estimation de la vitesse de décroissance de l'énergie vers l'équilibre 0 et on étudie la robustesse du contrôle. Dans le cas non réflexif on introduit la notion de stabilité faible étoile et on étudie la stabilité forte.

Plan de la thèse

Cette thèse est présentée en quatre chapitres avec une introduction et une conclusion.

Dans le deuxième chapitre, on rappelle quelques résultats classiques d'analyse fonctionnelle et de la théorie des semi-groupes. Ensuite on énonce quelques résultats d'existence et d'unicité concernant les systèmes semi-linéaires. On donne aussi un recueil de quelques résultats sur la stabilisation des systèmes bilinéaires et semi-linéaires.

Dans le troisième chapitre, on montre que la stabilisation des systèmes bilinéaires sous un contrôle adéquat peut être exponentielle, et que le contrôle est robuste face à certaines perturbations de la dynamique et de l'opérateur du contrôle. La dernière partie de ce chapitre est consacrée aux exemples d'application.

Dans le quatrième chapitre on étudie la stabilisation forte des systèmes bilinéaires. Dans un premier temps on traite l'existence et l'unicité d'une solution globale "mild". Ensuite, sous des conditions suffisantes, on a étudié la stabilisation globale faible et forte des systèmes bilinéaires, via une famille de commandes quadratiques "feedback". La dernière partie de ce chapitre est consacrée aux exemples d'application.

Dans le cinquième chapitre, on étudie la stabilisation faible et faible étoile des systèmes bilinéaires dans un espace de Banach non nécessairement réflexif. A la fin de ce chapitre, des exemples d'applications sont présentés.

Chapitre 2

Préliminaire

Chapitre 2

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous présentons quelques résultats classiques rencontrés dans la littérature qui s'avèrent fondamentaux dans la réalisation de ce travail. Ces outils comprennent des résultats d'analyse fonctionnelle, de la théorie des semi-groupes, des propriétés concernant les solutions de certaines équations d'évolution ainsi que des résultats de stabilisation de quelques classes de systèmes semi-linéaires.

Dans ce chapitre, X désignera un espace de Banach réel ou complexe et X' son dual topologique.

2.1 Quelques résultats d'analyse fonctionnelle

2.1.1 Topologie faible $\sigma(X, X')$

Soit $f \in X'$. On désigne par $\varphi_f : X \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$. Lorsque f décrit X' on obtient une famille $(\varphi_f)_{f \in X'}$ d'applications de X dans $\mathbb{R}$.

Définition 2.1.1 [19].

La topologie faible $\sigma(X, X')$ sur X est la topologie la moins fine sur X rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f \in X'}$.

Proposition 2.1.1

La topologie faible $\sigma(X, X')$ est séparée.

Proposition 2.1.2 [19].

Pour tout $x_0 \in E$, on obtient une base de voisinages de x_0 pour la

topologie $\sigma(X, X')$ en considérant tous les ensembles de la forme

$$V = \{x \in X : |\langle f_i, x - x_0 \rangle| < \varepsilon, \forall i \in I\}$$

où I est fini, $f_i \in X'$ et $\varepsilon > 0$.

Notation : On désigne par $x_n \rightharpoonup x$ la convergence de x_n vers x pour la topologie faible $\sigma(X, X')$.

Proposition 2.1.3 [19].

Soit (x_n) une suite de X . On a

- (i) $[x_n \rightharpoonup x \text{ pour } \sigma(X, X')] \iff [\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \forall f \in X']$
- (ii) Si $x_n \rightarrow x$ fortement, alors $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(X, X')$
- (iii) Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(X, X')$, alors $\|x_n\|$ est bornée et $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.
- (iv) Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(X, X')$ et si $f_n \rightarrow f$ fortement dans X' (i.e. $\|f_n - f\|_{X'} \rightarrow 0$), alors $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Exemple 2.1.1 [19].

Dans un espace de Banach de dimension infinie :

La sphère unité $S = \{x \in X; \|x\| = 1\}$ n'est jamais fermé pour la topologie faible $\sigma(X, X')$, et la boule unité ouverte $U = \{x \in X; \|x\| < 1\}$ n'est jamais ouverte pour la topologie faible $\sigma(X, X')$.

Tout ensemble fermé pour la topologie faible $\sigma(X, X')$ est fermé pour la topologie forte. La réciproque est en générale fausse.

Theorem 2.1.1 [19].

Soit $C \subset X$ convexe. Alors C est faiblement fermé pour $\sigma(X, X')$ si et seulement s'il est fortement fermé.

Remarque 2.1.1 Un convexe fermé coïncide avec l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent. D'autre part, le théorème précédent implique que si une suite (x_n) converge faiblement vers x , alors il existe une suite de combinaisons convexes des x_n qui converge fortement vers x .

Corollaire 2.1.1 *Soit $\varphi : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe, s.c.i. (pour la topologie forte). Alors, φ est s.c.i. pour la topologie faible $\sigma(X, X')$. En particulier si $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(X, X')$, alors*

$$\varphi(x) \leq \liminf \varphi(x_n).$$

Remarque 2.1.2 *On retrouve en particulier que si $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(X, X')$ alors $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.*

En effet, la fonction $\varphi(x) = \|x\|$ est convexe et continue pour la topologie forte, donc à fortiori φ est s.c.i. pour la topologie forte, et par conséquent φ est s.c.i. pour la topologie faible $\sigma(X, X')$.

Théorème 2.1.1 [19].

Soient X et F deux espaces de Banach. Soit T un opérateur linéaire et continu de X dans F . Alors T est continu de X muni de la topologie faible $\sigma(X, X')$ dans F muni de la topologie faible $\sigma(F, F')$.

2.1.2 Topologie faible étoile $\sigma(X', X)$

Soit X un espace de Banach, soit X' son dual (muni de la norme duale $\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |\langle f, x \rangle|$) et soit X'' son bidual, i.e. le dual de X' , muni de la norme

$$\|\xi\| = \sup_{\substack{f \in X' \\ \|f\| \leq 1}} |\langle \xi, f \rangle|.$$

On a une injection canonique $j : X \rightarrow X''$ définie comme suit : soit $x \in X$ fixé, l'application $f \mapsto \langle f, x \rangle$ de X' dans $\mathbb{R}$ constitue une forme linéaire continue sur X' i.e. un élément de X'' noté jx . On a donc,

$$\langle jx, f \rangle_{X'', X'} = \langle f, x \rangle_{X', X} \quad \forall x \in X, \quad \forall f \in X'.$$

Il est clair que j est linéaire et que j est une isométrie i.e. $\|jx\|_{X''} = \|x\|_X$ pour tout $x \in X$; en effet

$$\|jx\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle jx, f \rangle| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle| = \|x\|$$

On va définir maintenant une troisième topologie sur X' : la topologie faible étoile que l'on note $\sigma(X', X)$. Pour chaque $x \in X$ on considère l'application $j_x : X' \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f \mapsto j_x(f) = \langle f, x \rangle$.

Lorsque x parcourt X on obtient une famille d'applications $(j_x)_{x \in X}$ de X' dans $\mathbb{R}$.

Définition 2.1.2 La topologie faible étoile $\sigma(X', X)$ est la topologie la moins fine sur X' rendant continues toutes les applications $(j_x)_{x \in X}$.

Proposition 2.1.4 La topologie faible étoile $\sigma(X', X)$ est séparée.

Proposition 2.1.5 On obtient une base de voisinages d'un point $f_0 \in X'$ pour la topologie $\sigma(X', X)$ en considérant tous les ensembles de la forme

$$V = \{f \in X'; \quad |\langle f - f_0, x_i \rangle| < \varepsilon, \quad \forall i \in I\}$$

où I est fini, $x_i \in X$ et $\varepsilon > 0$.

Notation : Étant donnée une suite (f_n) de X' , on désigne par $f_n \xrightarrow{*} f$ la convergence de f_n vers f pour la topologie faible étoile $\sigma(X', X)$. Afin d'éviter les confusions, on précisera souvent " $f_n \xrightarrow{*} f$ pour $\sigma(X', X)$ ", " $f_n \rightharpoonup f$ pour $\sigma(X', X'')$ " et " $f_n \rightarrow f$ fortement".

Proposition 2.1.6 [19] Soit (f_n) une suite de X' . On a

- (i) $[f_n \xrightarrow{*} f \text{ pour } \sigma(X', X)] \Leftrightarrow [\langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \quad \forall x \in X]$
- (ii) Si $f_n \rightarrow f$ fortement, alors $f_n \rightharpoonup f$ pour $\sigma(X', X'')$, et si $f_n \rightharpoonup f$ pour $\sigma(X', X'')$, alors $f_n \xrightarrow{*} f$ pour $\sigma(X', X)$.
- (iii) Si $f_n \xrightarrow{*} f$ pour $\sigma(X', X)$ alors $\|f_n\|$ est bornée et $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.
- (iv) Si $f_n \xrightarrow{*} f$ pour $\sigma(X', X)$ et si $x_n \rightarrow x$ fortement dans X , alors $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Remarque 2.1.3 Si $f_n \xrightarrow{*} f$ pour $\sigma(X', X)$ (ou même si $f_n \rightharpoonup f$ pour $\sigma(X', X'')$) et si $x_n \rightarrow x$ pour $\sigma(X, X')$ on ne peut pas conclure que $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Proposition 2.1.7 [19] Soit $\varphi : X' \rightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire et continue pour la topologie $\sigma(X', X)$. Alors il existe $x \in X$ tel que

$$\varphi(f) = \langle f, x \rangle, \quad \forall f \in X'$$

Lemme 2.1.1 Soit X un espace vectoriel et soient $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ des formes linéaires sur X telles que

$$[\varphi_i(v) = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n] \Rightarrow [\varphi(v) = 0] \quad \forall v \in X.$$

Alors il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i$.

Corollaire 2.1.2 *Soit H un hyperplan de X' fermé pour la topologie $\sigma(X', X)$. Alors H est de la forme*

$$H = \{f \in X'; \quad \langle f, x \rangle = \alpha\}$$

pour un certain $x \in X$, $x \neq 0$ et un certain $\alpha \in \mathbb{R}$.

Remarque 2.1.4 *Lorsque j n'est pas surjective de X sur X'' (i.e. $j(X) \neq X''$) alors la topologie $\sigma(X', X)$ est strictement moins fine que la topologie $\sigma(X', X'')$. Il existe même des convexes fermés pour $\sigma(X', X'')$ qui ne sont pas fermés pour $\sigma(X', X)$. Par exemple si $\xi \in X''$ et $\xi \notin j(X)$, alors*

$$H = \{f \in X'; \langle \xi, f \rangle = 0\}$$

est un hyperplan fermé pour $\sigma(X', X'')$, mais il n'est pas fermé pour $\sigma(X', X)$. On voit qu'il existe deux types de convexes fermés dans X' :

- a) les convexes fortement fermés (ou fermés pour $\sigma(X', X'')$),*
- b) les convexes fermés pour $\sigma(X', X)$.*

Théorème 2.1.2 *(Banach-Alaoglu-Bourbaki)[19].*

L'ensemble $B_{X'} = \{f \in X'; \|f\| \leq 1\}$ est compact pour la topologie faible étoile $\sigma(X', X)$.

2.1.3 Espaces réflexifs

Définition 2.1.3 *Soit X un espace de Banach et soit j l'injection canonique de X dans X'' . On dit que X est réflexif si $j(X) = X''$.*

Lorsque X est réflexif, on identifie implicitement X et X'' (à l'aide de l'isomorphisme j).

Théorème 2.1.3 *(Kakutani)[19].*

Soit E un espace de Banach. Alors X est réflexif si et seulement si $B_X = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$ est compact pour la topologie $\sigma(X, X')$.

Lemme 2.1.2 *(Goldstine)[19].*

Soit X un espace de Banach. Alors $j(B_X)$ est dense dans $B_{X''}$ pour la topologie $\sigma(X'', X')$.

Remarque 2.1.5 *On notera que $j(B_X)$ est fermé dans $B_{X''}$ pour la topologie forte.*

Proposition 2.1.8 [19] *Soit X un espace de Banach réflexif et soit $M \subset X$ un sous-espace vectoriel fermé. Alors M muni de la norme induite par X est réflexif.*

Corollaire 2.1.3 *Soit X un espace de Banach. Alors X est réflexif si et seulement si X' est réflexif.*

Corollaire 2.1.4 *Soit X un espace de Banach réflexif. Soit $K \subset X$ un sous-ensemble convexe, fermé et borné. Alors K est compact pour la topologie $\sigma(X, X')$.*

Corollaire 2.1.5 *Soient X un espace de Banach réflexif, $A \subset X$ un convexe fermé, non vide et $\varphi : A \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe, s.c.i., $\varphi \not\equiv +\infty$ telle que*

$$\lim_{\substack{x \in A \\ \|x\| \rightarrow \infty}} \varphi(x) = +\infty.$$

Alors φ atteint son minimum sur A , i.e., il existe $x_0 \in A$ tel que $\varphi(x_0) = \min_A \varphi$.

2.1.4 Espaces séparables

Définition 2.1.4 *On dit qu'un espace métrique E est séparable s'il existe un sous-ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense dans E .*

Proposition 2.1.9 *Soit E un espace métrique séparable et soit F un sous-ensemble de E . Alors F est séparable.*

Théorème 2.1.4 *Soit X un espace de Banach tel que X' soit séparable. Alors X est séparable.*

Remarque 2.1.6 *La réciproque n'est pas vraie. Il existe des espaces de Banach X séparables tels que X' ne soit pas séparable; par exemple $X = L^1(\Omega)$.*

Corollaire 2.1.6 *Soit X un espace de Banach. Alors $(X \text{ est réflexif et séparable}) \iff (X' \text{ est réflexif et séparable})$.*

Théorème 2.1.5 [19].

Soit X un espace de Banach séparable. Alors B_X est métrisable pour la topologie $\sigma(X', X)$.

Réciproquement si B_X est métrisable pour $\sigma(X', X)$, alors X est séparable.

Remarque 2.1.7 X' n'est jamais métrisable pour $\sigma(X', X)$, sauf en dimension finie.

Théorème 2.1.6 [19].

Soit X un espace de Banach tel que X' soit séparable. Alors B_X est métrisable pour la topologie $\sigma(X, X')$, et réciproquement.

Corollaire 2.1.7 *Soit X un espace de Banach séparable et soit (f_n) une suite bornée dans X' . Alors il existe une sous-suite extraite (f_{n_k}) qui converge pour la topologie $\sigma(X', X)$.*

Théorème 2.1.7 [19] *Soit X un espace de Banach réflexif et soit (x_n) une suite bornée dans E . Alors il existe une sous-suite extraite (x_{n_k}) qui converge pour la topologie $\sigma(X, X')$.*

Théorème 2.1.8 (Eberlein-Smulian)[19].

Soit X un espace de Banach tel que toute suite bornée (x_n) possède une sous-suite extraite (x_{n_k}) convergente pour la topologie $\sigma(X, X')$. Alors X est réflexif.

2.1.5 Espaces uniformément convexes

Définition 2.1.5 *On dit qu'un espace de Banach X est uniformément convexe si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que*

$$(x, y \in X, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \quad \text{et} \quad \|x - y\| > \varepsilon) \Rightarrow \left\| \frac{x + y}{2} \right\| < 1 - \delta$$

On notera que cette définition fait intervenir une propriété géométrique de la boule unité (qui doit être " bien ronde ") et qu'elle n'est pas stable par passage à une norme équivalente.

Exemple 2.1.2 [19]

On prend $X = \mathbb{R}^2$. La norme $\|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2)^{\frac{1}{2}}$ est uniformément convexe tandis que la norme $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$ n'est pas uniformément convexe.

Exemple 2.1.3 [19]

Les espaces de Hilbert sont uniformément convexes, de même que les espaces $L^p(\Omega)$ pour $1 < p < \infty$. Par contre $L^1(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$ et $C(K)$ (K compact) ne sont pas uniformément convexes.

Le théorème suivant donne un critère géométrique qui assure la réflexivité de l'espace.

Théorème 2.1.9 (Milman-Pettis)[19].

Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.

Proposition 2.1.10 *Soit X un espace de Banach uniformément convexe.*

Soit (x_n) une suite dans X telle que $x_n \rightarrow x$ pour la topologie faible $\sigma(X, X')$ et $\limsup \|x_n\| \leq \|x\|$. Alors $x_n \rightarrow x$ fortement.

Remarque 2.1.8 *Les propriétés de séparabilité, de réflexivité et d'uniforme convexité sont aussi étroitement liées aux propriétés de différentiabilité de la fonction $x \mapsto \|x\|$.*

Nous terminons cette section par rappeler des lemmes classiques qui seront utilisés pour établir nos résultats de stabilisation.

2.1.6 Lemmes techniques

J désigne la fonction dualité définie par :

$$J(x) = \{x^* \in X^* : \|x^*\| = \|x\|, \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2\}, \forall x \in X.$$

Lemme 2.1.3 [48].

Soit $t \in \mathbb{R} \rightarrow f(t) \in X$ une fonction qui vérifie

1. *la fonction $t \rightarrow \|f(t)\|$ est presque partout différentiable sur $\mathbb{R}$,*
2. *la dérivée faible "weak dérivative f' de f existe presque partout sur $\mathbb{R}$.*

Alors, pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\|f(t)\| \frac{d}{dt} \|f(t)\| = \langle f'(t), x^* \rangle, \quad \forall x^*(t) \in J(f(t)). \quad (2.1)$$

Lemme 2.1.4 [3].

Soit $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs vérifiant

$$s_{k+1} \leq s_k - C s_{k+1}^{\alpha+2}, \quad \forall k \geq 0, \quad (2.2)$$

où $C > 0$ et $\alpha > -1$ sont des constantes. Alors, il existe une constante positive M telle que

$$s_k \leq \frac{M}{(k+1)^{\frac{1}{1+\alpha}}}, \quad \forall k \geq 0.$$

Dans le résultat suivant on rappelle le Lemme de Gronwall.

Lemme 2.1.5 ([1]p.13).

Soient φ, ψ et y des fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ à valeurs positives et vérifiant

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)y(s)ds$$

Alors

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(u)du\right) ds$$

Lemme 2.1.6 [55].

Soit u une fonction positive croissante sur $[0, +\infty[$ telle que $u(0) = 0$ et considérons la fonction suivante :

$$v(x) = x - (I + u)^{-1}(x), \quad x \in [0, +\infty[,$$

où I désigne la fonction identité. Soit $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite numérique positive telle que :

$$s_{k+1} + u(s_{k+1}) \leq s_k, \quad \forall k \geq 0.$$

Alors $s_k \leq x(k)$, où x est la solution de :

$$\frac{d}{dt}x(t) + v(x(t)) = 0, \quad t > 0, \quad x(0) = s_0.$$

2.2 Généralités sur les semi-groupes

Dans cette section nous rappelons quelques résultats essentiels sur les C_0 -semi-groupes. La notion de semi-groupe généralise celle de la fonction exponentielle de A au cas où l'opérateur A est non borné. Une telle généralisation est utile afin d'étendre le concept d'une solution du problème de Cauchy. (Voir par exemple : [28, 74]).

2.2.1 C_0 -Semi-groupes linéaires

Le but de cette partie, est de donner des propriétés d'un C_0 -semi-groupe linéaire en relation avec son générateur et sa résolvante.

Définition 2.2.1 [6].

Soit X un espace de Banach. On appelle C_0 -semi-groupe linéaire sur X toute famille d'opérateurs linéaires continus $S(t) : X \rightarrow X$, $t \in \mathbb{R}^+$ tels que

1. $S(0) = Id_X$ où Id_X est l'identité sur X ,
2. $S(t+s) = S(t)S(s)$, pour tout $t, s \in \mathbb{R}^+$.
3. $\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t)x = x$, pour tout $x \in X$.

Si de plus on a

$$\|S(t)x - S(t)y\| \leq \|x - y\| \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}^+ \text{ et } x, y \in X,$$

alors $S(t)$ est dit un C_0 -semi-groupe de contraction dans X .

Définition 2.2.2 On dit que $(S(t))_{t \geq 0}$ est uniformément continu s'il vérifie la relation $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t) - Id\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$.

La famille d'opérateur $(S(t))_{t \geq 0}$ est liée à un opérateur A qu'on introduit dans la définition suivante.

Définition 2.2.3 On appelle générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$, l'opérateur A défini par :

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \quad (2.3)$$

pour tout $x \in X$ tel que la limite existe.

On appelle alors domaine de A , noté $\mathcal{D}(A)$, l'ensemble :

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

Remarque 2.2.1 Le générateur infinitésimal d'un semi-groupe est unique (voir [28]).

Théorème 2.2.1 [74].

Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe sur X . Alors, il existe deux constantes $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ telles que :

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \text{ pour tout } t \geq 0. \quad (2.4)$$

Dans le cas où $\omega = 0$ et $M = 1$, le C_0 -semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ est de contraction.

Les propriétés suivantes sont des relations liant un C_0 -semi-groupe et son générateur infinitésimal.

Proposition 2.2.1 [28].

Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe sur X de générateur infinitésimal A . Alors pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ on a les propriétés suivantes :

1. pour tout $t \geq 0$ et $x \in \mathcal{D}(A)$, on a $S(t)x \in \mathcal{D}(A)$, et pour tout $x \in X$, $\int_0^t S(s)x ds \in \mathcal{D}(A)$.
2. $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(s)x ds = S(t)x$, $\forall x \in X$,
3. $\frac{d}{dt}(S(t)x) = AS(t)x = S(t)Ax$, $\forall x \in X$,
4. $S(t)x - x = \int_0^t S(s)Axd s$ $\forall x \in \mathcal{D}(A)$ et $\forall t \geq 0$.

Corollaire 2.2.1 Si A est un générateur d'un C_0 -semi-groupe $S(t)$, alors $\mathcal{D}(A)$ est dense dans X et A est un opérateur linéaire fermé.

Définition 2.2.4 On dit qu'un opérateur A est dissipatif si pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, il existe $x^* \in J(x)$ tel que $\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$, où J désigne la fonction dualité définie par :

$$J(x) = \{x^* \in X^* : \|x^*\| = \|x\|, \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2\}, \forall x \in X. \quad (2.5)$$

Définition 2.2.5 Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur fermé de X

$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ non bijective}\}$ est le spectre de A .

$\rho(A) := \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ est l'ensemble résolvant.

$R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}$ pour $\lambda \in \rho(A)$ est la résolvante.

Lemme 2.2.1 ([28], p 55).

Soit $(A, D(A))$ un générateur infinitésimal d'un C_0 -semi groupe $(T(t))_{t \geq 0}$, alors pour tout λ dans $\mathbb{C}$ et $t > 0$ on a.

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} T(t)x - x &= (A - \lambda I) \int_0^t e^{-\lambda s} T(s)x ds, \quad \text{si } x \in X \\ &= \int_0^t e^{-\lambda s} T(s)(A - \lambda I)x ds, \quad \text{si } x \in D(A). \end{aligned}$$

Theorem 2.2.1 ([28], p. 57).

Soit $(A, D(A))$ un générateur infinitésimal d'un C_0 -semi groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ vérifiant :

$$\|T(t)\| \leq M e^{wt}, \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\operatorname{Re} \lambda > w$, on a

$$\begin{aligned} R(\lambda, A)^n x &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} R(\lambda, A)x \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty s^{n-1} e^{-\lambda s} T(s)x ds. \end{aligned}$$

En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\operatorname{Re} \lambda > w$, on a l'estimation :

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - w)^n}.$$

Théorème de Hille-Yosida

Dans cette partie nous présentons un résultat concernant les C_0 -semi-groupes. Il s'agit du théorème de Hille-Yosida qui permet de caractériser les opérateurs qui sont générateurs de C_0 -semi-groupes. Ce résultat a été démontré par Hille dans [45] et par Yosida dans [87] pour les C_0 -semi-groupes de contractions. Quelques années plus tard, Feller dans [34], Miyadera dans [60], Phillips dans [75] ont donné une preuve pour le cas général d'un C_0 -semi-groupe.

D'après la Proposition 2.2.1, si A est un générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe sur X , alors A est fermé de domaine dense. Réciproquement, si A est fermé de domaine dense, alors il existe des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il engendre un C_0 -semi-groupe sur X , qu'on rappelle dans les deux théorèmes suivants :

Théorème 2.2.2 (*Théorème de Hille-Yosida, [74]*).

Un opérateur A (généralement non borné) génère un C_0 -semi-groupe de contraction si et seulement si :

1. A est fermé et $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$,
2. l'ensemble résolvant de A , donné par

$$\rho(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X) \right\} \quad (2.6)$$

contient $]0, +\infty[$ et pour tout $\lambda > 0$ on a :

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda} \quad (2.7)$$

Remarque 2.2.2 Le point 2 du théorème précédent est équivalent à : $(A, \mathcal{D}(A))$ est m -dissipatif.

Le théorème suivant généralise celui de Hille-Yosida dans le cas des semi-groupes qui ne sont pas de contraction.

Théorème 2.2.3 (*Théorème de Feller-Miyadera-Phillips, [28]*).

Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur linéaire dans un espace de Banach X , et soient $\omega, M \in \mathbb{R}$ avec $M \geq 1$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $(A, \mathcal{D}(A))$ génère un C_0 -semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ vérifiant :

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \text{ pour tout } t \geq 0$$

2. A est fermé, $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\Re(\lambda) > \omega$, on a $\lambda \in \rho(A)$ et

$$\|(\lambda I - A)^{-n}\| \leq \frac{M}{(\Re(\lambda) - \omega)^n}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Remarque 2.2.3 Si A est un opérateur borné, alors le semi-groupe générateur de A est donné par :

$$S(t) = e^{tA} = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k A^k}{k!}.$$

Exemple 2.2.1 On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$ de classe C^2 , et soit $X = L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire usuel

$\langle y, z \rangle = \int_{\Omega} y(x) z(x) dx$. On considère sur X l'équation de la chaleur suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \Delta y(x,t), & \forall (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ y(x,t) = 0, & \forall (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \\ y(x,0) = 0, & \forall x \in \Omega \end{cases}$$

Pour se ramener au cadre abstrait, il suffit de poser

$$\mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \text{ et } Ay = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}.$$

Alors, l'opérateur A est maximal dissipatif.

Exemple 2.2.2 [29], p 69). Soit $\Omega = [0, 1]$, et considérons l'équation de la chaleur suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(\cdot, t) = \frac{\partial^2 y(\cdot, t)}{\partial x^2} + u(t) By(\cdot, t) & \text{sur } \Omega \times (0, \infty) \\ y'(0) = y'(1) = 0 & t \geq 0 \\ y(\cdot, 0) = y_0 \in C([0, 1]) & \text{sur } \Omega, \end{cases} \quad (2.8)$$

où $By = y$, pour tout $y \in C([0, 1])$.

L'opérateur A définie par $Ay = \frac{\partial^2 y(\cdot, t)}{\partial x^2}$ dont le domaine est

$$D(A) = \left\{ y \in C^2([0, 1]) \text{ tel que } y'(0) = y'(1) = 0 \right\}. \quad (2.9)$$

génère un C_0 semi-groupe $T(t)$, $t \geq 0$ fortement continu sur $Y = C([0, 1])$ (voir [29], page 69).

$$(T(t)y)(s) = \int_0^1 k(s, r) y(r) dr \quad \text{pour } y \in C([0, 1]) \text{ et } s \in [0, 1], \quad (2.10)$$

où

$$k(s, r) = 1 + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-\pi^2 n^2 t} \cos(\pi n s) \cdot \cos(\pi n r) \quad (2.11)$$

Remarque 2.2.4 Le Laplacien ne génère pas de semi-groupe dans $L^\infty(\Omega)$.

Exemple 2.2.3 [28, 59]

Soit $\Omega = (0, \infty)$.

- Soit $X = L^p(\Omega)$, $p > 1$. L'opérateur

$$A = -\frac{\partial}{\partial x}$$

de domaine

$$D(A) = \{y \in W^{1,p}(\Omega); y(0) = 0\}$$

génère un C_0 semi-groupe de contraction $S(t)$ sur l'espace d'état $X = L^p(\Omega)$, $p > 1$ (voir [28], p. 34).

- Soit $X = L^1(\Omega)$. L'opérateur

$$A = -\frac{\partial}{\partial x}$$

dont le domaine est

$$D(A) = \left\{ y \in L^1(\Omega) : y \text{ est absolument continu, et } y(0) = 0 \right\}.$$

génère dans l'espace d'état $X = L^1(\Omega)$ le semi-groupe de contraction suivant

$$(S(t)y)(\tau) = \begin{cases} y(\tau - t) & \tau \geq t \\ 0 & 0 \leq \tau < t. \end{cases} \quad (2.12)$$

2.3 Équations d'évolution semi-linéaires

2.3.1 Résultats d'existence et de régularité

Nous rappelons quelques résultats d'existence et d'unicité de la solution d'une classe d'équations d'évolutions semi-linéaires.

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + f(t, y(t)), & \forall t > t_0 \\ y(t_0) = y_0 \in X \end{cases} \quad (2.13)$$

où A est un générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $S(t)$ dans un espace de Banach réel X , $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ est une fonction donnée et y_0 représente l'état initial. On rappelle quelques définitions de la solution ("mild", faible, classique et forte) du système (2.13).

Définition 2.3.1 *Une solution continue y de l'équation intégrale*

$$y(t) = S(t - t_0)y_0 + \int_{t_0}^t S(t - s)f(s, y(s))ds$$

est appelée solution ("mild" solution en anglais) du problème (2.13).

Nous commençons par le résultat classique suivant qui assure l'existence et l'unicité du "mild" solution de (2.13) pour les fonctions f qui sont Lipschitziennes.

Théorème 2.3.1 [74].

Soient $t_1 > t_0$ et $f : [t_0, t_1] \times X \rightarrow X$ une fonction continue en t sur $[t_0, t_1]$ et Lipschitzienne sur X . Alors pour tout $y_0 \in X$, le problème (2.13) admet une unique solution $y \in C([t_0, t_1]; X)$. De plus, la fonction $y_0 \mapsto y$ est Lipschitzienne continue de X vers $C([t_0, t_1]; X)$.

On rappelle la définition d'une application localement Lipschitzienne.

Définition 2.3.2 *On dit que f est localement Lipschitzienne en y uniformément en t sur un intervalle borné si et seulement si, pour tout $t_0, c \geq 0$, il existe une constante L_{c, t_0} telle que pour tout $u, v \in X$ avec $\|u\| \leq c, \|v\| \leq c$ et $t \in [0, t_0]$ on a*

$$\|f(t, u) - f(t, v)\| \leq L_{c, t_0} \|u - v\|.$$

Dans le théorème ci-dessus, si la fonction f est uniformément Lipschitzienne alors l'existence d'une solution globale du problème (2.13) est assurée.

Si on suppose que f est localement Lipschitzienne en y et uniformément en t sur un intervalle borné, alors on a le résultat suivant :

Théorème 2.3.2 [74].

Soit $f : [0, +\infty[\times X \rightarrow X$ une fonction continue en t pour tout $t \geq 0$ et localement Lipschitzienne en y , uniformément en t sur tout intervalle borné. Si A génère un C_0 -semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ sur X alors pour tout $y_0 \in X$, il existe $t_{max} > 0$ tel que (2.13) admet unique solution y sur $[0, t_{max}[$. De plus, si $t_{max} < \infty$ alors $\lim_{t \rightarrow t_{max}} \|y(t)\| = +\infty$.

On rappelle la définition de la solution faible du système (2.13).

Définition 2.3.3 [6].

Soit $t_1 > t_0$ et $f \in L^1(t_0, t_1; X)$. Une fonction $y \in C([t_0, t_1]; X)$ est appelée solution faible de (2.13) sur $[t_0, t_1]$ si elle vérifie :

1. $y(t_0) = y_0$,
2. pour tout $\omega \in \mathcal{D}(A^*)$ la fonction $t \mapsto \langle y(t), \omega \rangle$ est absolument continue sur $[t_0, t_1]$ et satisfait :

$$\frac{d}{dt} \langle y(t), \omega \rangle = \langle y(t), A^* \omega \rangle + \langle f(t), \omega \rangle, \text{ p.p } t \in [t_0, t_1].$$

Le théorème suivant permet de caractériser la solution faible du système (2.13).

Théorème 2.3.3 [6].

Une fonction $y : [t_0, t_1] \rightarrow X$ est une solution faible de (2.13) sur $[t_0, t_1]$ si et seulement si, $f(\cdot, y(\cdot)) \in L^1(t_0, t_1; X)$ et y vérifie la formule de la variation de la constante suivante :

$$y(t) = S(t - t_0)y_0 + \int_{t_0}^t S(t - s)f(s, y(s))ds, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

On peut alors se demander : "à quelles conditions sur f et y obtient-on une solution faible du système (2.13) ?".

Le résultat suivant répond à cette question.

Théorème 2.3.4 [24].

Soit $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ une fonction continue en t et localement Lipschitzienne en y . Alors pour tout $y_0 \in X$ le système (2.13) admet une unique solution faible y définie sur un intervalle maximal $[t_0, t_{\max}[$ avec $t_{\max} > t_0$, $y \in C([t_0, t_{\max}[; X)$. De plus, si $y_n \in C([t_0, t_{\max}[; X)$ est une suite de solutions faibles du système (2.13) telle que $y_n(0) \rightarrow y_0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, alors $y_n \rightarrow y$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ dans $C([t_0, t_{\max}[; X)$ avec y est une solution faible du système (2.13) satisfaisant $y(0) = y_0$. De plus, si $t_{\max} < +\infty$ alors $\lim_{t \rightarrow t_{\max}} \|y(t)\| = \infty$.

Définition 2.3.4 Soit $t_1 > t_0$ et $f \in L^1(t_0, t_1; X)$. Une fonction y est appelée solution classique de (2.13) sur $[t_0, t_1[$ si elle vérifie les conditions suivantes :

1. $y(t) \in \mathcal{D}(A)$ pour tout $t \in [t_0, t_1]$,

2. $y \in C([t_0, t_1[; X) \cap C^1([t_0, t_1[; X)$,
3. y vérifie le système (2.13).

Définition 2.3.5 [74].

On appelle *solution forte* du problème à valeur initiale (2.13) toute fonction y différentiable presque partout sur $[0, T]$ et telle que $y \in L^1([0, T]; X)$, $y(0) = y_0$ et $y'(t) = Ay(t) + f(t, y(t))$ presque partout sur $[0, T]$.

- Remarque 2.3.1**
1. Toute solution forte est nécessairement faible, mais la réciproque est fausse en général.
 2. Toute solution classique est une solution faible, mais la réciproque est fausse en général.

2.3.2 Propriétés asymptotiques

Soit X un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, de norme associée $\|\cdot\|$.

Ici, on donne quelques propriétés concernant les semi-groupes non linéaires. D'abord, dans le cas où le semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ généré par un opérateur linéaire A , on a $AT(t) = T(t)A, \forall t \geq 0$ sur $\mathcal{D}(A)$.

Remarque 2.3.2 En général, dans le cas des semi-groupes non-linéaire on a : $AT(t) \neq T(t)A, \forall t > 0$ (voir [54]).

Définition 2.3.6 [6].

Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe (généralement non linéaire) sur X .

1. On appelle *orbite positive* issue de y_0 l'ensemble

$$\mathcal{O}^+(y_0) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}^+} S(t)y_0.$$

2. L'ensemble ω -limite fort de y_0 (qui peut être vide) est donné par :

$$\Omega(y_0) = \{y \in X : \exists (t_n)_n \rightarrow +\infty; S(t_n)y_0 \rightarrow y \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty\}.$$

3. L'ensemble ω -limite faible de y_0 (qui peut être vide) est défini par :

$$\Omega_w(y_0) = \{y \in X : \exists (t_n)_n \rightarrow +\infty; S(t_n)y_0 \rightharpoonup y \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty\}.$$

Définition 2.3.7 [6]

Un sous ensemble Ω de X est dit positivement invariant par $S(t)$ si $S(t)\Omega \subset \Omega$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, et il est dit invariant si $S(t)\Omega = \Omega$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Le théorème suivant donne une condition suffisante qui fournit des informations sur les ensembles ω -limites.

Théorème 2.3.5 [6]

1. Si $\mathcal{O}^+(y)$ est pré-compact, alors $\Omega(y)$ est non vide et invariant dans X .
2. Si $S(t)$ est séquentiellement faiblement continu sur X (i.e., $S(t)y_n \rightharpoonup S(t)y$ si $y_n \rightarrow y$), alors $\mathcal{O}^+(y)$ est non vide, bornée et $\Omega_w(y)$ est invariant dans X .

Remarque 2.3.3 Le Théorème précédent est particulièrement utile pour l'étude des semi-groupes non linéaires de type paraboliques ou hyperboliques ayant des orbites $\mathcal{O}^+(y)$ pré-compactes.

Maintenant, nous rappelons un résultat qui permet de caractériser le comportement asymptotique de la solution du système (2.13).

Théorème 2.3.6 [6]

Soit A un générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction $S(t)$ dans un espace de Hilbert X . Supposons que $f : X \rightarrow X$ satisfait les hypothèses suivantes :

1. f est localement Lipschitzienne,
2. $\xi_n \rightarrow \xi \implies f(\xi_n) \rightarrow f(\xi)$, $n \rightarrow +\infty$,
3. $\langle f(\xi), \xi \rangle \leq 0, \forall \xi \in X$.

Alors, pour tout $y_0 \in X$, (2.13) admet une unique solution faible $y(y_0, t)$ sur $\mathbb{R}^+$. De plus $T(t)y_0 = y(y_0, t)$ est un semi-groupe non-linéaire sur X , $\Omega_w(y_0)$ est non vide et invariant par $T(t)$, et pour tout $y_0 \in X$ et $y \in \Omega_w(y_0)$, on a :

$$\langle T(t)y, f(T(t)y) \rangle = 0, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad (2.14)$$

de plus, si l'unique solution de l'équation (2.14) est $y = 0$, alors $y(t, y_0) \rightarrow 0$, lorsque $t \rightarrow +\infty$.

2.4 Problème de stabilisation des systèmes bilinéaires

2.4.1 Définitions

Dans cette partie, nous considérons le cas des systèmes bilinéaires homogènes distribués. Nous allons discuter la question d'existence ainsi que le problème de stabilisation selon certains travaux issus de la littérature. L'un des principaux résultats sur le comportement asymptotique de l'état de cette classe est dû à Ball et Slemrod [6].

Considérons le système bilinéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + u(t)By(t), & t > t_0 \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (2.15)$$

où X est un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et A est un opérateur linéaire $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$, B est un opérateur linéaire de X dans X et $u(t)$ est le contrôle.

Définition 2.4.1 *Le point d'équilibre 0 est dit stable au sens de Liapunov pour le système (2.15) si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall t_0 \geq 0, \exists \delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0, \text{ tel que } \|y_0\| < \delta \Rightarrow \|y(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 \quad (2.16)$$

La stabilité au sens de Lyapunov de l'origine du système veut dire que pour tout $t \geq t_0$, la solution du système (2.15) reste au voisinage de l'origine si y_0 est au voisinage de l'origine. En d'autres termes, pour tout $t \geq t_0$, une petite perturbation de la condition initiale y_0 autour de l'origine donne naissance à une solution $y(t)$ qui reste proche de l'origine. Remarquons que la stabilité au sens de Lyapunov n'implique pas la convergence des solutions vers l'origine, c'est pourquoi la notion de stabilité précédente toute seule est insuffisante pour l'étude du comportement des solutions.

La définition suivante concerne la stabilisation faible et forte du système (2.15).

Définition 2.4.2 *Le système (2.15) est dit faiblement (respectivement fortement) stabilisable s'il existe un contrôle $u(t) = v(y(t))$ tel que la solution de (2.15) satisfait :*

1. *Pour tout y_0 , il existe une unique solution faible $y(t)$ de (2.15) définie pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,*
2. *0 est un point d'équilibre stable au sens de Liapunov,*
3. *pour tout $y_0 \in X$, $y(t) \rightarrow 0$ (respectivement $y(t) \rightarrow 0$), quand $t \rightarrow +\infty$.*

Définition 2.4.3 *Le système (2.15) est dit exponentiellement stabilisable, s'il existe un contrôle $u(t) = f(y(t))$ tel que la solution de (2.15) satisfait : Pour tout $y_0 \in X$, il existe $M = M(y_0)$, $\sigma = \sigma(y_0) > 0$ tels que l'unique solution faible $y(t)$ de (2.15) partant de y_0 vérifie :*

$$\|y(t)\| \leq M e^{-\sigma t}, \forall t \geq 0. \quad (2.17)$$

Le système (2.15) est dit uniformément exponentiellement stabilisable, si (2.17) est vérifiée pour des constantes σ et M , indépendantes de y_0 .

Dans ce qui suit, nous donnons des conditions suffisantes sous lesquelles le système (2.15) est globalement stable par une famille de contrôles non linéaires.

2.4.2 Stabilisation faible

Une approche naturelle pour la stabilisation est de dériver l'énergie $\|y(t)\|$ le long des trajectoires de (2.15), ce qui permet d'obtenir :

$$\frac{d}{dt} \|y(t)\|^2 = 2\Re(\langle Ay(t), y(t) \rangle) + 2\Re(v(t) \langle y(t), By(t) \rangle).$$

On suppose que A est dissipatif, alors on peut choisir le contrôle quadratique $v(t) = -\langle y(t), By(t) \rangle$ qui permet d'obtenir l'inégalité de dissipation de l'énergie suivante :

$$\frac{d}{dt} \|y(t)\|^2 \leq -2 \langle y(t), By(t) \rangle^2.$$

Théorème 2.4.1 [6].

On suppose que A génère un C_0 -semi-groupe de contraction et $B : X_\omega \rightarrow X$ (avec X_ω est un espace de Hilbert muni de la topologie faible) un opérateur compact tel que :

$$\forall \Phi \in X : \langle S(t)\Phi, BS(t)\Phi \rangle = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+ \implies \Phi = 0$$

Alors (2.15) est faiblement stabilisable par le contrôle quadratique

$$u(t) = - \langle By(t), y(t) \rangle \quad (2.18)$$

Preuve 2.4.1 Le système (2.15) contrôlé par (2.18) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + f(y(t)), & t > t_0 \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (2.19)$$

avec $f(\xi) = - \langle B\xi, \xi \rangle B\xi$.

Soit $c \geq 0$ et $u, v \in X$ avec $\|u\| \leq c, \|v\| \leq c$. On a :

$$\begin{aligned} \|f(u) - f(v)\| &\leq \| \langle Bv - Bu, v \rangle Bv \| + \| \langle Bu, v - u \rangle Bv \| \\ &\quad + \| \langle Bu, u \rangle (Bv - Bu) \|, \end{aligned}$$

alors

$$\|f(u) - f(v)\| \leq 3c^2 \|B\|^2 \|u - v\|.$$

Donc f est localement Lipschitzienne.

Soit $(\xi_n)_n$ une suite d'éléments de X_ω telle que $\xi_n \rightarrow \xi$, lorsque $n \rightarrow +\infty$, avec $\xi \in X$. Puisque B est séquentiellement faiblement continu, alors $\langle B\xi_n, \xi_n \rangle \rightarrow \langle B\xi, \xi \rangle$, et $B\xi_n \rightarrow B\xi$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, d'où f est séquentiellement faiblement continu. Soit $\xi \in X$, on a :

$$\langle f(\xi), \xi \rangle = - \langle B\xi, \xi \rangle \leq 0.$$

Alors f satisfait les conditions du Théorème 2.3.6 ce qui nous assure l'existence d'une solution faible $y(t, y_0)$ du système (2.15), et $T(t)y_0 = y(t, y_0)$ définit un semi-groupe dans X et on a $\Omega_\omega \neq \emptyset$. Soient $\xi \in X$, et $t \in \mathbb{R}^+$. On a $\langle T(t)\xi, f(T(t)\xi) \rangle = 0$ alors $\langle T(t)\xi, BT(t)\xi \rangle = 0$ d'où $f(T(t)\xi) = 0$. En appliquant la formule de la variation de la constante on voit que :

$$e^{tA}\xi = T(t)\xi.$$

Or on a $\langle T(t)\xi, f(T(t)\xi) \rangle = 0$, alors $\langle e^{tA}\xi, Be^{tA}\xi \rangle = 0$. En utilisant le Théorème 2.3.6, on déduit que $\xi = 0$, d'où

$$y(t, y_0) \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty.$$

Remarque 2.4.1 *Le problème de stabilisation faible a été étudié dans le cas $X = \mathbb{R}^n$ par Jurdjevic et Quinn [46], et Slemrod [82].*

2.4.3 Stabilisation forte

Dans cette partie on va rappeler quelques résultats concernant la stabilité forte du système bilinéaire (2.15). On suppose que :

(H1) : $(\lambda Id - A)^{-1}$ est compact dans X pour tout $\lambda > 0$.

(H2) : B un opérateur auto-adjoint tel que $\langle Bx, x \rangle$ a un signe constant pour tout $x \in X$, et soient :

$$M = \{x \in X : \langle Be^{tA}x, e^{tA}x \rangle = 0, \forall t \in \mathbb{R}^+\}$$

et

$$N = \{x \in \mathcal{D}(A) : \langle Ae^{tA}x, e^{tA}x \rangle = 0, \forall t \in \mathbb{R}^+\}.$$

On a le théorème suivant :

Théorème 2.4.2 [18]. *On suppose que les hypothèses (H1)-(H2) sont vérifiées et que*

$$M \cap N = \{0\}.$$

Alors le contrôle

$$u(t) = -\rho \langle By(t), y(t) \rangle, \text{ avec } \rho > 0,$$

stabilise fortement le système (2.15).

La proposition suivante répond au problème de stabilisation de (2.15) sous contrainte de saturation de la forme $|u(t)| \leq \rho$, $\rho > 0$.

On considère le contrôle suivant :

$$u(t) = -\rho \frac{\langle By(t), y(t) \rangle}{1 + |\langle By(t), y(t) \rangle|} \text{ pour tout } \rho > 0. \quad (2.20)$$

Proposition 2.4.1 [18].

On suppose que les hypothèses (H1)-(H2) sont vérifiées et que $M \cap N = \{0\}$. Alors le contrôle (2.20) stabilise fortement le système (2.15).

Remarque 2.4.2 *Les deux résultats précédents peuvent être déduits de la théorie standard des semi-groupes de contraction non-linéaires générés par des opérateurs maximaux monotones en utilisant le principe d'invariance de Lasalle (voir [6]).*

L'objectif du résultat suivant est de donner une estimation asymptotique de l'état stabilisé.

Théorème 2.4.3 [13, 64].

Soit $S(t)$ un semi-groupe de contraction, $B \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur borné. On suppose de plus que :

$$\int_0^T | \langle BS(t)y, S(t)y \rangle | dt \geq \delta \|y\|^2, \quad \forall y \in X, \quad (\delta, T > 0), \quad (2.21)$$

alors le contrôle quadratique

$$u(t) = - \langle y(t), By(t) \rangle, \quad (2.22)$$

stabilise fortement le système (2.15) et on a l'estimation asymptotique suivante :

$$\|y(t)\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty.$$

Remarque 2.4.3 *Le résultat précédent s'étend au cas d'un opérateur de contrôle non linéaire localement Lipschitzien (voir [64]).*

2.4.4 Stabilisation exponentielle

Théorème 2.4.4 [66].

Soit $S(t)$ un semi-groupe de contraction, $B \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur borné. On suppose de plus que la condition (2.21) est vérifiée. Alors le contrôle

$$v(t) = - \frac{\langle By(t), y(t) \rangle}{\|y(t)\|^2} 1_{\{t \geq 0 / y(t) \neq 0\}} \quad (2.23)$$

stabilise exponentiellement le système (2.15).

Conclusion

Les résultats de stabilisation rappelés précédemment concernent le cas d'un système bilinéaire qui évolue dans un espace d'état qui est un Hilbert. Dans la suite nous allons considérer le cas où l'espace d'état est un Banach.

Chapitre 3

Stabilisation exponentielle des systèmes bilinéaires

Chapitre 3

Stabilisation exponentielle des systèmes bilinéaires

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de la stabilisation d'un système par un contrôle de type feedback sur un espace de Banach. En utilisant une décomposition appropriée de l'espace d'état, nous fournissons des conditions suffisantes pour la stabilisation exponentielle du système en question. Par ailleurs, nous montrons que la loi de feedback proposée reste un contrôle stabilisant sous certains types de perturbations sur la dynamique et l'opérateur de contrôle. Enfin, nous proposons des exemples d'illustrations.

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + v(t)By(t), & t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

où X est un espace de Banach réel, A est un opérateur non borné de domaine $D(A)$ qui génère un semi-groupe de contractions $S(t)$ sur X , $B : X \rightarrow X$ est un opérateur linéaire borné, et la fonction scalaire $v(t)$ est le contrôle. Ici y' représente la dérivée par rapport au temps. Ce type de système est également appelé bilinéaire car la partie d'entrée est linéaire par rapport à v et y .

Dans ce chapitre nous supposons que l'espace d'état X peut s'écrire comme une somme directe de deux sous-espaces fermés X_1 et X_2 , invariants par A , et tels que $S(t)$ induit un semi-groupe exponentiellement stable sur

X_2 . Cette approche a été précédemment utilisé pour des systèmes linéaires (voir [77, 84]).

3.2 Résultats de stabilisation

Considérons l'hypothèse suivante concernant l'application dualité donnée par (2.5) :

(H) : L'application dualité J est univoque et globalement Lipschitzienne. Dans la suite $L > 0$ désigne une constante de Lipschitz de J , (ie),

$$\|J(z_1) - J(z_2)\| \leq L\|z_1 - z_2\|, \quad \forall z_1, z_2 \in X.$$

Pour d'autres propriétés de l'application dualité J , nous renvoyons aux [9, 16, 31, 32, 37, 88].

Dans cette section, nous allons généraliser les résultats établis dans un espace d'Hilbert [66] à un espace de Banach. Pour cela, nous considérons le contrôle

$$v(t) = -\frac{\langle By(t), J(y(t)) \rangle}{\|y(t)\|^2} 1_{\{t \geq 0/y(t) \neq 0\}}. \quad (3.2)$$

On remarque que si X est un espace de Hilbert, alors X^* peut être identifié à X , et le produit de dualité coïncide avec le produit scalaire défini sur X . Dans ce cas, le contrôle (3.2) prend la forme (2.23).

Cela nous amène à considérer dans ce qui suit le système en boucle fermée

$$\begin{cases} y_t(t) = Ay(t) + F(y(t)), & t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (3.3)$$

où F est définie par

$$F(z) = -\frac{\langle Bz, J(z) \rangle}{\|z\|^2} 1_{X-\{0\}} Bz, \quad \forall z \in X.$$

On rappelle qu'une fonction $y \in C([0, T]; X)$ est une solution "mild" du système (3.3) sur $[0, T]$ si $F(y(\cdot)) \in L^1(0, T; X)$ et si y satisfait la formule de la variation de la constante suivante :

$$y(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)F(y(s))ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

La fonction y est une solution classique de (3.3) si $y(t) \in \mathcal{D}(A)$, $t \in [0, T]$, y est continue sur $[0, T]$, continument différentiable sur $(0, T)$ et satisfait (3.3)

(voir [73], p. 126 & pp. 183-184).

La fonction F est globalement Lipschitzienne sur X . En effet, pour $y, z \in X$ on a

$$\|F(y) - F(z)\| = \left\| \frac{\langle By, J(y) \rangle}{\|y\|^2} \mathbf{1}_{X-\{0\}} By - \frac{\langle Bz, J(z) \rangle}{\|z\|^2} \mathbf{1}_{X-\{0\}} Bz \right\|$$

en effectuant le calcul on a

$$\begin{aligned} \|z\|^2 \|y\|^2 \|F(y) - F(z)\| &\leq \left\| \langle \|z\|^2 By, J(y) \rangle y - \langle \|z\|^2 By, J(z) \rangle y \right\| + \\ &\left\| \langle \|z\|^2 By, J(z) \rangle y - \langle \|z\|^2 By, J(z) \rangle z \right\| + \left\| \langle \|z\|^2 By, J(z) \rangle z - \langle \|z\|^2 Bz, J(z) \rangle z \right\|. \end{aligned}$$

Or nous avons

$$\left\| \langle \|z\|^2 By, J(y) \rangle y - \langle \|z\|^2 By, J(z) \rangle y \right\| \leq L \|z\|^2 \|y\|^2 \|B\|^2 \|y - z\|.$$

$$\left\| \langle \|z\|^2 By, J(z) \rangle y - \langle \|z\|^2 By, J(z) \rangle z \right\| \leq \left\| \langle \|z\|^2 By, J(z) \rangle y \right\| \|y - z\|.$$

$$\left\| \langle \|z\|^2 By, J(z) \rangle z - \langle \|z\|^2 Bz, J(z) \rangle z \right\| \leq \|B\| \|z\|^4 \|y - z\|.$$

Donc on peut conclure que F est Lipschitzienne. Ainsi le système (3.3) admet une unique solution $y(t)$ qui dépend de y_0 et est définie pour tout $t \geq 0$ par (voir [73], p. 185) :

$$y(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)F(y(s))ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.4)$$

De plus, en reformulant les techniques utilisées dans [12, 66], on a pour $T \in [0, T_{\max})$, la fonction $F : t \rightarrow v(t)By(t)$ est continue, alors elle existe une suite de fonctions $(f_n) \subset C^1([0, T], X)$ telle que :

$$f_n \rightarrow F \text{ in } (C^0([0, T], X); \|\cdot\|_\infty).$$

Considérons $(y_n) \subset C^0([0, T], X)$ vérifiant :

$$y_n(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)f_n(s)ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.5)$$

Pour $y_0 \in \mathcal{D}(A)$, on a y_n est une solution de l'équation (voir [73], p. 185) :

$$\dot{y}_n(t) = Ay_n(t) + f_n(t), \quad y_n(0) = y_0.$$

Avec l'hypothèse (H), la fonction $\|\cdot\|^2$ est Fréchet-différentiable, donc d'après le Lemme 2.1.3, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|y_n(t)\|^2 &= \langle \dot{y}_n(t), J(y_n(t)) \rangle \\ &= \langle Ay_n(t), J(y_n(t)) \rangle + \langle f_n(t), J(y_n(t)) \rangle \end{aligned}$$

Puisque A est dissipatif, on déduit que :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|y_n(t)\|^2 \leq \langle f_n(t), J(y_n(t)) \rangle. \quad (3.6)$$

De plus, d'après (3.4) et (3.5) on a :

$$\|y_n(t) - y(t)\| \leq \int_0^T \|f_n(s) - F(s)\| ds \leq T \sup_{t \in [0, T]} \|f_n(t) - F(t)\|, \quad \forall t \in [0, T]$$

Et du fait que (f_n) converge uniformément vers F , on déduit que :

$$y_n(t) \rightarrow y(t), \text{ as } n \rightarrow +\infty.$$

En intégrant la relation (3.6), on trouve

$$\|y_n(t)\|^2 - \|y_n(s)\|^2 \leq 2 \int_s^t \langle f_n(\tau), J(y_n(\tau)) \rangle d\tau, \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T.$$

d'où en utilisant le théorème de la convergence dominée :

$$\|y(t)\|^2 - \|y(s)\|^2 \leq 2 \int_s^t \langle F(\tau), J(y(\tau)) \rangle d\tau, \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T.$$

ou encore

$$\|y(t)\|^2 - \|y(s)\|^2 \leq 2 \int_s^t \frac{\langle By(\tau), J(y(\tau)) \rangle^2}{\|y(\tau)\|^2} \mathbf{1}_{\{\tau \geq 0: y(\tau) \neq 0\}}(\tau) d\tau, \quad (3.7)$$

pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$ et pour tout $y_0 \in X$. En particulier, on a

$$\|y(t)\| \leq \|y_0\|, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.8)$$

Le lemme suivant fournit une estimation qui sera utile pour établir la stabilisation.

Lemme 3.2.1 *Soit A un opérateur qui génère un C_0 -semi-groupe de contraction $S(t)$. Soit B un opérateur linéaire borné. Alors pour tout $T > 0$, la solution "mild" $y(t)$ du système (3.3) vérifie l'estimation suivante*

$$\int_0^T |\langle BS(s)y(t), J(S(s)y(t)) \rangle| ds \leq C \|y(t)\| \left(\int_t^{t+T} \frac{|\langle By(s), J(y(s)) \rangle|^2}{\|y(s)\|^2} \mathbf{1}_E(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.9)$$

où $E := \{s \geq 0 / y(s) \neq 0\}$ et $C > 0$.

Preuve 3.2.1 On a

$$\begin{aligned} \langle BS(t)y_0, J(S(t)y_0) \rangle &= \langle BS(t)y_0 - By(t), J(S(t)y_0) \rangle + \\ &\quad \langle By(t), J(S(t)y_0) - J(y(t)) \rangle + \langle By(t), J(y(t)) \rangle \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} |\langle BS(t)y_0, J(S(t)y_0) \rangle| &\leq \|B\| \|J(S(t)y_0)\| \|S(t)y_0 - y(t)\| + \\ &\quad \|B\| \|y(t)\| \|J(S(t)y_0) - J(y(t))\| + |\langle By(t), J(y(t)) \rangle| \\ &\leq (1 + L) \|B\| \|y_0\| \|S(t)y_0 - y(t)\| + |\langle By(t), J(y(t)) \rangle| \end{aligned}$$

La relation (3.4) donne

$$\|S(t)y_0 - y(t)\| \leq \|B\| \int_0^T \frac{|\langle By(s), J(y(s)) \rangle|}{\|y(s)\|} \mathbf{1}_E(s) ds.$$

De plus, en utilisant (3.8) on trouve

$$\int_0^T |\langle By(t), J(y(t)) \rangle| dt \leq \|y_0\| \int_0^T \frac{|\langle By(s), J(y(s)) \rangle|}{\|y(s)\|} \mathbf{1}_E(s) ds.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} &\int_0^T |\langle BS(t)y_0, J(S(t)y_0) \rangle| dt \\ &\leq \|y_0\| (T \|B\|^2 (1 + L) + 1) \int_0^T \frac{|\langle By(s), J(y(s)) \rangle|}{\|y(s)\|} \mathbf{1}_E(s) ds. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité Hölder, on trouve la relation suivante :

$$\begin{aligned} &\int_0^T |\langle BS(t)y_0, J(S(t)y_0) \rangle| dt \\ &\leq \|y_0\| (T^{\frac{3}{2}} \|B\|^2 (1 + L) + \sqrt{T}) \left(\int_0^T \frac{|\langle By(s), J(y(s)) \rangle|^2}{\|y(s)\|^2} \mathbf{1}_E(s) ds \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

ensuite en remplaçant y_0 par $y(t)$ dans l'inégalité précédente et en utilisant (3.8), on déduit que

$$\int_0^T |\langle BS(t)y(t), J(S(t)y(t)) \rangle| dt \leq C \|y(t)\| \left(\int_t^{t+T} \frac{|\langle By(s), J(y(s)) \rangle|^2}{\|y(s)\|^2} \mathbf{1}_E(s) ds \right)^{\frac{1}{2}},$$

où $C = T^{\frac{3}{2}} \|B\|^2 (1 + L) + \sqrt{T}$.

Dans la suite, nous supposons que l'espace d'état X peut s'écrire comme somme directe de deux sous-espaces fermés X_1 et X_2 qui sont invariants pour le semi-groupe $S(t)$

$$S(t)X_1 \subset X_1 \text{ et } S(t)X_2 \subset X_2. \quad (3.10)$$

Notons par $S_1(t)$ et $S_2(t)$ les restrictions de $S(t)$ à X_1 et X_2 . Les opérateurs $S_1(t)$ et $S_2(t)$ sont des C_0 -semi-groupes de X_1 et X_2 respectivement, et soient A_1 et A_2 leurs générateurs. L'approche consiste ici à décomposer l'espace d'état en deux sous-espaces appropriés, invariants par A et à étudier les projections du système initial sur de tels sous-espaces comme exemple d'opérateur A vérifiant cette propriété le cas où le spectre $\sigma(A)$ de A peut-être décomposé en $\sigma(A) = \sigma_1(A) \cup \sigma_2(A)$, où $\sigma_1(A) = \{\lambda \in \sigma(A) / \operatorname{Re}(\lambda) \geq -\delta\}$ et $\sigma_2(A) = \{\lambda \in \sigma(A) / \operatorname{Re}(\lambda) < -\delta\}$ pour un certain $\delta > 0$, tel que $\sigma_1(A)$ est borné et puisse être séparé à partir de l'ensemble $\sigma_2(A)$ tout au long d'une courbe lisse (voir [84]).

Nous supposons en outre que

$$BX_i \subset X_i, \quad i = 1, 2 \quad (3.11)$$

de sorte que le système initial (3.1) induit sur X_1 et X_2 les systèmes suivants

$$\frac{d}{dt}y_1(t) = A_1y_1(t) + v(t)B_1y_1(t), \quad y_1(0) = y_{01} \in X_1, \quad (3.12)$$

et

$$\frac{d}{dt}y_2(t) = A_2y_2(t) + v(t)B_2y_2(t), \quad y_2(0) = y_{02} \in X_2, \quad (3.13)$$

respectivement, où B_i est la restriction de B sur X_i .

Notons par $B_i = \Pi_i \circ B$, $i = 1, 2$ ou

$$\Pi_i : X \rightarrow X_i$$

$$y \mapsto y_i, \quad \text{ou } y = y_1 + y_2, \quad y_i \in X_i, \quad i = 1, 2.$$

Il est clair que si le système (3.1) est stabilisable, le sous-système (3.12) l'est également. L'inverse est donné par le théorème suivant.

Théorème 3.2.1 *Supposons que*

- (i) (3.10) et (3.11) sont vérifiées,
- (ii) le semi-groupe $S_1(t)$ est de contraction et $S_2(t)$ est exponentiellement stable,
- (iii) il existe $\delta, T > 0$ tel que

$$\int_0^T |\langle B_1S_1(t)\xi_1, J(S_1(t)\xi_1) \rangle| dt \geq \delta \|\xi_1\|^2, \quad \forall \xi_1 \in X_1. \quad (3.14)$$

Alors il existe $\rho_1 > 0$ tel que pour tout $0 < \rho < \rho_1$, le contrôle

$$v(t) = -\rho \frac{\langle B_1y_1(t), J(y_1(t)) \rangle}{\|y_1(t)\|^2} 1_{\{t \geq 0 / y_1(t) \neq 0\}} \quad (3.15)$$

stabilise exponentiellement (3.1).

Preuve 3.2.2 L'opérateur en boucle fermée

$$F_1 : z \mapsto -\rho \frac{\langle B_1 z, J(\Pi_1 z) \rangle}{\|\Pi_1 z\|^2} B_1 z$$

est globalement Lipschitzien sur X , donc le système (3.1) contrôlé avec

$$v(t) = -\rho \frac{\langle B_1 y(t), J(\Pi_1 y(t)) \rangle}{\|\Pi_1 y(t)\|^2} \mathbf{1}_{\{t \geq 0 / \Pi_1 y(t) \neq 0\}}$$

possède une unique solution globale $y(t)$.

De plus, selon le Lemme 3.2.1, la solution $y_1(t)$ de (3.12) satisfait (3.9), donc nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^T |\langle B_1 S_1(s) y_1(t), J(S_1(s) y_1(t)) \rangle| ds \leq \\ C \|y_{01}(t)\| \left(\int_t^{t+T} \frac{|\langle B y_1(s), J(y_1(s)) \rangle|^2}{\|y_1(s)\|^2} \mathbf{1}_{E_1} ds \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.16)$$

où $E_1 = \{s \geq 0 / y_1(s) \neq 0\}$ et $C > 0$.

En appliquant (3.7) à la solution $y_1(t)$ du système (3.12), on obtient

$$\|y_1(t)\|^2 - \|y_1(s)\|^2 \leq 2 \int_s^t \langle F_1(y_1(\tau)), J(y_1(\tau)) \rangle d\tau \quad (3.17)$$

De (3.14) et (3.16), nous aurons

$$\int_t^{t+T} \frac{|\langle B y_1(\tau), J(y_1(\tau)) \rangle|^2}{\|y_1(\tau)\|^2} \mathbf{1}_{\{\tau \geq 0 / y_1(\tau) \neq 0\}} d\tau \geq \alpha \|y_1(t)\|^2, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.18)$$

pour un certain $\alpha = \alpha(\rho) > 0$.

Prenons $u_k = \|y_1(kT)\|^2$, $\forall k \in \mathbb{N}$. posons $s = kT$ et $t = (k+1)T$ dans (3.18), nous obtenons

$$u_k - u_{k+1} \geq 2 \int_{kT}^{(k+1)T} \frac{|\langle B y_1(\tau), J(y_1(\tau)) \rangle|^2}{\|y_1(\tau)\|^2} \mathbf{1}_{\{\tau \geq 0 / y_1(\tau) \neq 0\}} d\tau. \quad (3.19)$$

Ensuite, en utilisant à nouveau (3.18) et le fait que $\|y_1(t)\|$ est décroissante, on obtient

$$u_k - u_{k+1} \geq 2\alpha u_{k+1} \quad (3.20)$$

ce qui donne

$$u_{k+1} \leq \frac{1}{1 + 2\alpha} u_k.$$

Donc

$$\|y_1(kT)\| \leq r^k \|y_{01}\|, \quad \text{où } r = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\alpha}}. \quad (3.21)$$

Appliquant cette estimation pour la partie entière $k = E(\frac{t}{T})$ de $\frac{t}{T}$, on déduit que

$$\|y_1(t)\| \leq C_1 \lambda^t \|y_{01}\|, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.22)$$

où $C_1 = \sqrt{1 + 2\alpha}$ et $\lambda = r^{\frac{1}{T}} < 1$, ce qui donne la stabilité exponentielle du système (3.12) par le contrôle $v(t)$.

D'autre part, il existe $\eta, C_2 > 0$ tel que

$$\|y_1(t)\| \leq C_2 e^{-\eta t} \|y_{01}\|, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.23)$$

Nous étudions maintenant la convergence exponentielle de la composante $y_2(t)$ de $y(t)$.

Nous avons

$$\|S_2(t)\| \leq M e^{-\sigma t}, \quad \forall t \geq 0 \text{ (pour } M, \sigma > 0). \quad (3.24)$$

Puisque X_2 est fermé, la projection Π_2 sur X_2 est continue. Ainsi en utilisant le fait que X_2 est invariant par B , on déduit de (3.4)

$$y_2(t) = S_2(t)y_{02} + \int_0^t v(\tau) S_2(t - \tau) B_2 y_2(\tau) d\tau, \quad \forall t \geq 0,$$

où $B_2 := \Pi_2 B$. donc

$$\|y_2(t)\| \leq M e^{-\sigma t} \|y_{02}\| + M \|B_2\| \int_0^t e^{-\sigma(t-\tau)} |v(\tau)| \|y_2(\tau)\| d\tau, \quad \forall t \geq 0.$$

Il découle de l'expression de $v(t)$ que

$$\|y_2(t)\| \leq M e^{-\sigma t} \|y_{02}\| + \rho C_3 \int_0^t e^{-\sigma(t-\tau)} \|y_2(\tau)\| d\tau, \quad \forall t \geq 0,$$

pour $C_3 > 0$. Posons $g(t) = \|y_2(t)\| e^{\sigma t}$, alors cette dernière inégalité s'écrit sous la forme :

$$g(t) \leq M \|y_{02}\| + \rho C_3 \int_0^t g(\tau) d\tau, \quad \forall t \geq 0.$$

L'inégalité de Gronwall implique que

$$g(t) \leq M \|y_{02}\| e^{\rho C_3 t},$$

d'ou

$$\|y_2(t)\| \leq M \|y_{02}\| e^{(\rho C_3 - \sigma)t}.$$

Par conséquent, en prenant $\rho > 0$ tel que $\rho C_3 - \sigma < 0$, nous concluons que

$$\|y(t)\| \leq N \|y_0\| e^{-\beta t}, \quad \forall t \geq 0$$

où $N > 0$ et $\beta = \min(\eta, \sigma - \rho C_3) > 0$.

Le résultat suivant traite le cas où $\dim X_1 < \infty$.

Corollaire 3.2.1 *Supposons que $\dim X_1 < \infty$, et que les conditions (i) & (ii) du Théorème 3.2.1 sont vérifiées. Si de plus on a*

$$\langle B_1 S_1(t) \xi_1, S_1(t) \xi_1 \rangle = 0, \forall t \geq 0, \implies \xi_1 = 0, \quad (3.25)$$

alors il existe $\rho_1 > 0$ pour lequel le contrôle

$$v(t) = -\rho \frac{\langle B_1 y_1(t), y_1(t) \rangle}{\|y_1(t)\|^2} 1_{\{t \geq 0 / y_1(t) \neq 0\}} \quad (3.26)$$

stabilise exponentiellement (3.1) pour tout $0 < \rho < \rho_1$.

Preuve 3.2.3 Puisque $\dim X_1 < \infty$, on a $J = id_{X_1}$ et le produit de dualité peut être identifié avec le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans l'espace Euclidien X_1 (avec une norme associée désignée par $\|\cdot\|$), de sorte que l'inégalité (3.14) devient

$$\int_0^T |\langle B_1 S_1(t) y_1, S_1(t) y_1 \rangle| dt \geq \delta \|y_1\|^2, \forall y_1 \in X_1.$$

De plus puisque $\dim X_1 < \infty$, cette dernière inégalité est équivalente à la propriété d'observabilité faible (3.25). Ainsi le résultat découle du Théorème 3.2.1.

Dans le cas où $X_1 = X$ et $X_2 = \{0\}$, nous obtenons le résultat suivant.

Corollaire 3.2.2 *Supposons que A génère un C_0 -semi-groupe $S(t)$ de contractions sur X , et que*

$$\int_0^T |\langle BS(t)\xi, J(S(t)\xi) \rangle| dt > \delta \|\xi\|^2, \quad \forall \xi \in X \text{ (pour } T, \delta > 0). \quad (3.27)$$

Alors il existe $\rho_1 > 0$ pour lequel, le contrôle

$$v(t) = -\rho \frac{\langle By(t), J(y(t)) \rangle}{\|y(t)\|^2} 1_{\{t \geq 0 / y(t) \neq 0\}} \quad (3.28)$$

stabilise exponentiellement (3.1) pour tout $0 < \rho < \rho_1$.

Remarque 3.2.1 *L'estimation (3.14) est une généralisation de l'inégalité d'observabilité exacte. En effet, si $B_1 = C^*C$ définit sur un espace d'Hilbert X_1 pour un certain opérateur linéaire (output) C de X_1 vers un espace de sortie Y , alors on récupère l'inégalité d'observabilité exacte au sens d'un système linéaire (c'est-à-dire l'observabilité exacte de la paire*

(C, A)). De plus, pour les EDP, une inégalité comme (3.27) peut être vérifiée en utilisant les estimations de Carleman (voir par exemples [8, 30, 78]). De plus, dans le cas où X_1 est de dimension finie, cette inégalité peut être aussi vérifiée via une condition de rang (voir par exemple [81, 84]).

3.3 Robustesse du contrôle de stabilisation

Dans cette section, nous discutons la robustesse du contrôle de stabilisation (3.15) sous certaines classes de perturbations des paramètres du système (3.1), à savoir la dynamique A et l'opérateur de contrôle B . Ici, nous considérerons des perturbations de même nature que l'opérateur soumis à la perturbation. Plus précisément, les perturbations de la dynamique seront supposées relativement bornées, tandis que celles de l'opérateur de contrôle seront supposées bornées.

3.3.1 Perturbation de la dynamique

Considérons le système suivant, qui est la version perturbée de (3.1) sur sa dynamique.

$$\begin{cases} y'(t) = (A + P)y(t) + v(t)By(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (3.29)$$

avec une perturbation $P \in \mathcal{L}(D(A), X)$, i.e., $P : D(A) \rightarrow X$ est linéaire, $D(A) \subset D(P)$ et il existe $\alpha, \beta > 0$ vérifiant $\|Px\| \leq \alpha \|x\| + \beta \|Ax\|, \forall x \in D(A)$.

Définissons le paramètre suivant (pour un certain $T > 0$)

$$L_P = \sup\left\{\left(\int_0^T \|PS(t)x\|^2 dt\right)^{1/2} / x \in D(A) \text{ and } \|x\| = 1\right\},$$

et considérons l'opérateur $A_P := A + P$.

Soit l'ensemble des perturbations suivant :

$$\Gamma = \{P \in \mathcal{L}(D(A), X) / L_P \text{ est fini, } A_P \text{ est dissipatif et } PX_i \subset X_i, i = 1, 2\}.$$

On peut remarquer que Γ est un espace vectoriel et que tout P appartenant à Γ est admissible par rapport à $S(t)$. (ie) il existe $\gamma > 0$ telle que

$\int_0^T \|PS(t)x\|^2 dt \leq \gamma \|x\|^2, \forall x \in X$, (voir [29, 60]). De plus, en utilisant la propriété de superposition du semi-groupe $S(t)$, on peut montrer que si L_P est fini pour un certain $T_1 > 0$, alors il est fini pour tout $T > 0$. En effet si $T \leq T_1$ L_P est fini pour T et dans le cas où $T_1 \leq T$ on utilise les propriétés de semi groupe $T = nT_1 + T_2$ avec $T_2 \leq T_1$.

Il est donc possible de prendre le même T dans les inégalités (3.14), que nous considérerons dans la suite.

Dans le résultat suivant, nous montrerons que le contrôle (3.15) reste stabilisant pour le système (3.1) contre les perturbations $P \in \Gamma$ de "petite amplitude".

Théorème 3.3.1 *Supposons que les hypothèses du Théorème 3.2.1 sont vérifiées. Alors il existe $0 < \gamma < 1$ tel que pour tout $P \in \Gamma$ satisfaisant $L_P \leq \gamma$, le contrôle*

$$v(t) = -\rho \frac{\langle B_1 y_1(t), J(y_1(t)) \rangle}{\|y_1(t)\|^2} 1_{\{t \geq 0 / y_1(t) \neq 0\}} \quad (3.30)$$

stabilise exponentiellement le système perturbé (3.29) pour chaque $0 < \rho < \rho_1$, où $\rho_1 > 0$ est indépendant de la perturbation P .

Preuve 3.3.1 Soit $P \in \Gamma$. L'opérateur $A_P = A + P$, de domaine $D(A)$, génère un C_0 -semi-groupe $T(t)$ de contraction sur X pour $L_P < 1$ (voir [28], p. 199). En outre, le semi-groupe $T(t)$ induit deux semi-groupes $T_1(t)$ et $T_2(t)$ sur X_1 et X_2 respectivement. De plus, si $P = P_1 + P_2$ est la décomposition de P sur la somme directe $X = X_1 \oplus X_2$ de X , alors les opérateurs A_{P_i} , $i = 1, 2$ sont dissipatifs et les semi-groupes $T_1(t)$ et $T_2(t)$ sont de contractions.

Puisque X_i , $i = 1, 2$ sont fermés dans X , alors il existe une constante $k > 0$ indépendante de P telle que

$$\|P_i\| \leq k \|P\|, i = 1, 2. \quad (3.31)$$

De plus, $T_2(t)$ est exponentiellement stable pour $L_P < \gamma_1 = \frac{1}{2\lambda}$ (voir [72], Théorème 2), ou

$$\lambda = \sup \left\{ \left(\int_0^{+\infty} \|S_2(t)x\|^2 dt \right)^{1/2} / x \in D(A_2) \text{ et } \|x\| = 1 \right\},$$

qui est finit car le semi-groupe $S_2(t)$ est exponentiellement stable.

Maintenant nous allons vérifier que l'estimation (3.14) est robuste sous la

perturbation P_1 .

De la formule (3.4), on a

$$S_1(t)y_{01} = T_1(t)y_{01} - \int_0^t T_1(t-s)P_1S_1(s)y_{01}ds.$$

En utilisant (3.8) et (3.31), on trouve

$$\|S_1(t)y_{01} - T_1(t)y_{01}\| \leq \int_0^t \|P_1S_1(s)y_{01}\| ds \leq \sqrt{T}kL_P \|y_{01}\|, \forall t \in [0, T]. \quad (3.32)$$

Maintenant un calcul simple donne

$$\begin{aligned} & \langle B_1T_1(t)y_{01}, J(T_1(t)y_{01}) \rangle \\ &= \langle B_1S_1(t)y_{01}, J(S_1(t)y_{01}) \rangle + \langle B_1S_1(t)y_{01}, J(T_1(t)y_{01}) - J(S_1(t)y_{01}) \rangle \\ &+ \langle B_1 \int_0^t T_1(t-s)P_1S_1(s)y_{01}ds, J(T_1(t)y_{01}) - J(S_1(t)y_{01}) \rangle \\ &+ \langle B_1 \int_0^t T_1(t-s)P_1S_1(s)y_{01}ds, J(S_1(t)y_{01}) \rangle. \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & |\langle B_1T_1(t)y_{01}, J(T_1(t)y_{01}) \rangle| \\ &\geq |\langle B_1S_1(t)y_{01}, J(S_1(t)y_{01}) \rangle| - |\langle B_1S_1(t)y_{01}, J(T_1(t)y_{01}) - J(S_1(t)y_{01}) \rangle| \\ &- \left| \langle B_1 \int_0^t T_1(t-s)P_1S_1(s)y_{01}ds, J(T_1(t)y_{01}) - J(S_1(t)y_{01}) \rangle \right| \\ &- \left| \langle B_1 \int_0^t T_1(t-s)P_1S_1(s)y_{01}ds, J(S_1(t)y_{01}) \rangle \right|. \end{aligned}$$

En intégrant sur l'intervalle $[0, T]$, on obtient via (3.32), l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} & \int_0^T |\langle B_1T_1(t)y_{01}, J(T_1(t)y_{01}) \rangle| dt \geq \\ & \left(\delta - (L \|B_1\| + \sqrt{T}Lk \|B_1\| L_P + L \|B_1\|) kT^{3/2} L_P \right) \|y_{01}\|^2. \end{aligned}$$

D'ou,

$$\int_0^T |\langle B_1T_1(t)y_{01}, J(T_1(t)y_{01}) \rangle| dt \geq \delta' \|y_{01}\|^2,$$

avec $\delta' = \delta - (L \|B_1\| + \sqrt{T}Lk \|B_1\| L_P + L \|B_1\|) kT^{3/2} L_P$, où $0 < L_P < \gamma_2$ pour un certain $\gamma_2 > 0$ indépendant de P et assez petit.

Par conséquent, selon le Théorème 3.2.1, le système perturbé (3.29) est exponentiellement stabilisable par le contrôle (3.30) pourvu que $0 < L_P < \gamma := \inf(1, \gamma_1, \gamma_2)$.

3.3.2 Perturbation de la dynamique et de l'opérateur de contrôle

Ici, nous allons étudier la stabilisation exponentielle du système perturbé suivant

$$\begin{cases} y'(t) = A_P y(t) + v(t) B_Q y(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (3.33)$$

où $A_P = A + P$ et $B_Q = B + Q$ pour P et Q appartenant respectivement aux ensembles suivants de perturbations admissibles :

$\Gamma = \{P \in L(D(A), X)/A_P \text{ est dissipatif et } PX_i \subset X_i, i = 1, 2\}$ et $\Lambda = \{Q \in \mathcal{L}(X)/ QX_1 \subset X_1\}$.

Théorème 3.3.2 *Considérons les hypothèses du Théorème 3.2.1. Alors il existe $0 < \gamma < 1$ et $\beta > 0$ tel que pour tout $P \in \Gamma$ et $Q \in \Lambda$ vérifiant $L_P \leq \gamma$ et $\|Q\| < \beta$, le contrôle feedback*

$$v(t) = -\rho \frac{\langle (B_1 + Q_1)y_1(t), J(y_1(t)) \rangle}{\|y_1(t)\|^2} 1_{\{t \geq 0/y_1(t) \neq 0\}} \quad (3.34)$$

stabilise exponentiellement le système perturbé (3.33) pourvu que $0 < \rho < \rho_1$, où $\rho_1 > 0$ est indépendant de P et Q .

Preuve 3.3.2 Afin d'appliquer le résultat du Théorème 3.3.1, il suffit de montrer que

$$\int_0^T |\langle (B_1 + Q_1)T_1(t)y_{01}, J(T_1(t)y_{01}) \rangle| dt \geq \delta \|y_{01}\|^2, \quad \forall y_{01} \in X_1,$$

pour certains $\delta, T > 0$, où $T_1(t)$ est un semi-groupe généré par l'opérateur $A_1 + P_1$ (la restriction de $A + P$ sur X_1).

Pour tout $y_1 \in X_1$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^T |\langle (B_1 + Q_1)T_1(t)y_{01}, J(T_1(t)y_{01}) \rangle| dt &\geq \int_0^T |\langle B_1 T_1(t)y_{01}, J(T_1(t)y_{01}) \rangle| dt - \\ &\quad \int_0^T |\langle Q_1 T_1(t)y_{01}, J(T_1(t)y_{01}) \rangle| dt \\ &\geq (\delta' - \|Q_1\| T) \|y_{01}\|^2 \end{aligned}$$

où δ' est la constante donnée dans la preuve du Théorème 3.3.1.

Donc, en prenant $\beta = \frac{\delta'}{T}$ et γ comme dans le Théorème 3.3.1, nous obtenons le résultat cherché.

Nous avons le corollaire suivant.

Corollaire 3.3.1 *Supposons que les hypothèses du Corollaire 3.2.2 sont vérifiées. Alors il existe $0 < \gamma < 1$ et $\beta > 0$ tel que pour chaque $P \in \Gamma$ et $Q \in \Lambda$ vérifiant $L_P \leq \gamma$ et $\|Q\| < \beta$, le contrôle de type feedback*

$$v(t) = -\rho \frac{\langle (B + Q)y(t), J(y(t)) \rangle}{\|y(t)\|^2} \mathbf{1}_{\{t \geq 0/y(t) \neq 0\}}$$

stabilise exponentiellement le système perturbé (3.33) pour $0 < \rho < \rho_1$, où $\rho_1 > 0$ est indépendant de P et de Q .

3.4 Exemples

Exemple 3.4.1 *Considérons le système suivant*

$$\begin{cases} \varphi_t(x, t) = -\varphi_x(x, t) + v(t)a(x)\varphi(x, t), & (x, t) \in (0, +\infty)^2 \\ \theta_t(x, t) = \theta_{xx}(x, t) + v(t)b(x)\theta(x, t), & (x, t) \in (0, 1) \times (0, +\infty) \\ \varphi(0, t) = 0, & t \geq 0 \\ \theta(0, t) = \theta(1, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

où $(a, b) \in L^\infty(0, +\infty) \times L^\infty(0, 1)$, $a(x) \geq a_0 > 0$, a.e. $x \in (0, +\infty)$.

Soit $y(t) = (\varphi(\cdot, t), \theta(\cdot, t)) \in X := L^p(0, +\infty) \times L^2(0, 1)$ avec $p > 1$, on obtient le système suivant

$$y'(t) = Ay(t) + v(t)By(t), \quad y(0) = (\varphi(\cdot, 0), \theta(\cdot, 0)) \in X,$$

où l'opérateur de contrôle est donné par $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la dynamique

est définie par $A = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix}$ dans le domaine $D(A) = D_1 \times D_2$, où

$$D_1 = \{y_1 \in W^{1,p}(0, +\infty), y_1(0) = 0\} \quad \text{et} \quad D_2 = H_0^1(0, 1) \cap H_0^2(0, 1).$$

L'application dualité J est Lipschitzienne sur $L^p(0, +\infty)$ et est donnée par la formule suivante (voir[9], p. 82)

$$J(\xi) = \left\{ \frac{|\xi|^{p-2}}{\|\xi\|^{p-2}} \xi \right\}, \quad \forall \xi \in L^p(0, +\infty)$$

pour $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a

$$\langle y, J(\xi) \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{|\xi|^{p-2}(s)}{\|\xi\|^{p-2}} \xi(s)y(s)ds, \quad \forall \xi \in L^p(0, +\infty), \forall y \in L^q(0, +\infty).$$

Ici, on a $X = X_1 \oplus X_2$ avec $X_1 = L^p(0, +\infty) \times \{0\}$ et $X_2 = \{0\} \times L^2(0, 1)$. De plus, l'opérateur A génère le semi-groupe

$$S(t) = \begin{pmatrix} S_1(t) & 0 \\ 0 & S_2(t) \end{pmatrix},$$

où $S_1(t)$ est le semi-groupe généré par $A_1 = -\frac{\partial}{\partial x}$, $D(A_1) = D_1$ et $S_2(t)$ par $A_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $D(A_2) = D_2$ (voir [28], p. 34). De plus, il est clair que $BX_1 \subset X_1$ et on a $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi les hypothèses du Théorème 3.2.1 peuvent être facilement vérifiées. Nous concluons la stabilisation exponentielle du système (3.35) par le contrôle

$$v(t) = -\rho \frac{\int_0^{+\infty} a(x) |\varphi(x, t)|^p dx}{\int_0^{+\infty} |\varphi(x, t)|^p dx} \mathbf{1}_{E_1}(t),$$

où $E_1 = \{t \geq 0, \varphi(\cdot, t) \neq 0\}$ pour un gain $\rho > 0$ qui est assez petit. En d'autres termes, le système couplé suivant est exponentiellement stable :

$$\begin{cases} \varphi_t(x, t) = -\varphi_x(t) - \rho \frac{\int_0^{+\infty} a(x) |\varphi(x, t)|^p dx}{\int_0^{+\infty} |\varphi(x, t)|^p dx} a(x) \mathbf{1}_{E_1}(t) \varphi(x, t), & (x, t) \in (0, +\infty)^2 \\ \theta_t(x, t) = \theta_{xx}(x, t) - \rho \frac{\int_0^{+\infty} a(x) |\varphi(x, t)|^p dx}{\int_0^{+\infty} |\varphi(x, t)|^p dx} b(x) \mathbf{1}_{E_1}(t) \theta(x, t), & (x, t) \in (0, 1) \times (0, +\infty) \\ \varphi(0, t) = 0, & t \geq 0 \\ \theta(0, t) = \theta(1, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

Ci-dessous, on prend $p = 3/2$ pour lequel on trace l'état stabilisé correspondant à $a(x) = 1$ et $b(x) = \mathbf{1}_{(0.25, 0.5)}$, $\varphi_0(x) = xe^{-x}$ et $\theta_0(x) = x(1 - x)$. Dans ce cas, la commande de stabilisation est $v(t) = -\rho \mathbf{1}_{\{t \geq 0: \varphi(t) \neq 0\}}$ et la norme de l'état est donnée par :

$$\|(\varphi(t), \theta(t))\| = \left(\int_0^{+\infty} |\varphi(x, t)|^{3/2} dx \right)^{2/3} + \left(\int_0^1 \theta(x, t)^2 dx \right)^{1/2}.$$

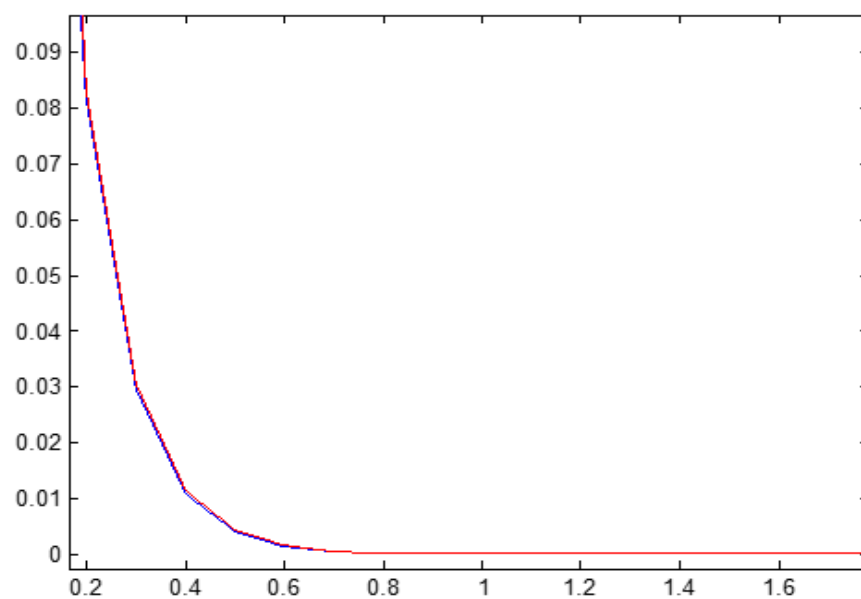


FIGURE 3.1 – Evolution de $\|(\varphi(t), \theta(t))\|$ pour $\rho = 0.1$ (en rouge) et $\rho = 0.01$ (en bleu).

Exemple 3.4.2 Soit $\Omega = (0, +\infty)$ et considérons le système suivant

$$\begin{cases} y_t(\cdot, t) = -y_x(\cdot, t) + v(t)By(\cdot, t), & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty) \\ y(0, t) = 0, & \text{dans } (0, +\infty) \\ y(\cdot, 0) = y_0 \in L^p(\Omega), & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (3.36)$$

où $y_t(\cdot, t)$ et $y_x(\cdot, t)$ sont les dérivées partielles, le paramètre $v(t) \in \mathbf{R}$ est le contrôle et la solution correspondante $y(\cdot, t) \in X$ est l'état. De plus, l'opérateur $A = -\frac{\partial}{\partial x}$ de domaine $D(A) = \{y \in W^{1,p}(\Omega); y(0) = 0\}$ génère un semi-groupe de contraction $S(t)$ sur l'espace d'état $X = L^p(\Omega)$, $p > 1$ (voir [28], p. 34), l'opérateur de contrôle est donné par $B(y) = hy - \langle y, k \rangle g$, pour tout $y \in X$, où $h \in L^\infty(\Omega)$, $k \in L^q(\Omega)$ et $g \in L^p(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. B est un opérateur linéaire borné de $L^p(\Omega)$.

Dans la suite, nous supposons que $h \geq c > \|g\|_p \|k\|_q$, où $\|\cdot\|_p$ désigne la norme naturelle de $L^p(\Omega)$. Alors à partir de la définition de J nous avons pour tout $y \in X$

$$\begin{aligned} \langle hy, J(y) \rangle &= \int_0^{+\infty} h(s)y(s) \frac{|y(s)|^{p-2}}{\|y\|^{p-2}} y(s) ds \\ &\geq c \int_0^{+\infty} \frac{|y(s)|^p}{\|y\|^{p-2}} ds = c \|y\|^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |\langle g, J(y) \rangle| &\leq \|g\|_p \|J(y)\|_q \\ &= \|g\|_p \|y\| \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \langle By, J(y) \rangle &\geq \langle hy, J(y) \rangle - |\langle g, J(y) \rangle| |\langle k, y \rangle| \\ &\geq (c - \|g\|_p \|k\|_q) \|y\|^2 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\langle BS(t)y, J(S(t)y) \rangle \geq \delta \|S(t)y\|^2, \forall t \geq 0, \forall y \in X, (\delta = (c - \|g\|_p \|k\|_q) > 0).$$

Mais, nous savons que $\|S(t)y\| = \|y\|$ pour tout $t \geq 0$, ce qui nous permet d'obtenir (3.27) à partir de la dernière inégalité. En appliquant le corollaire 3.2.2, nous en déduisons que (3.36) est exponentiellement stabilisable.

Comme indiqué dans la Remarque 3.2.1, la stabilisation par rapport à la topologie d'un espace d'état qui est un Banach peut améliorer la vitesse de convergence fournie par la stabilisation dans un espace de Hilbert. Pour clarifier cela, nous traçons les états stabilisés correspondant à $y_0 = 10xe^{-x}$, $p = 3/2$ et $p = 2$.

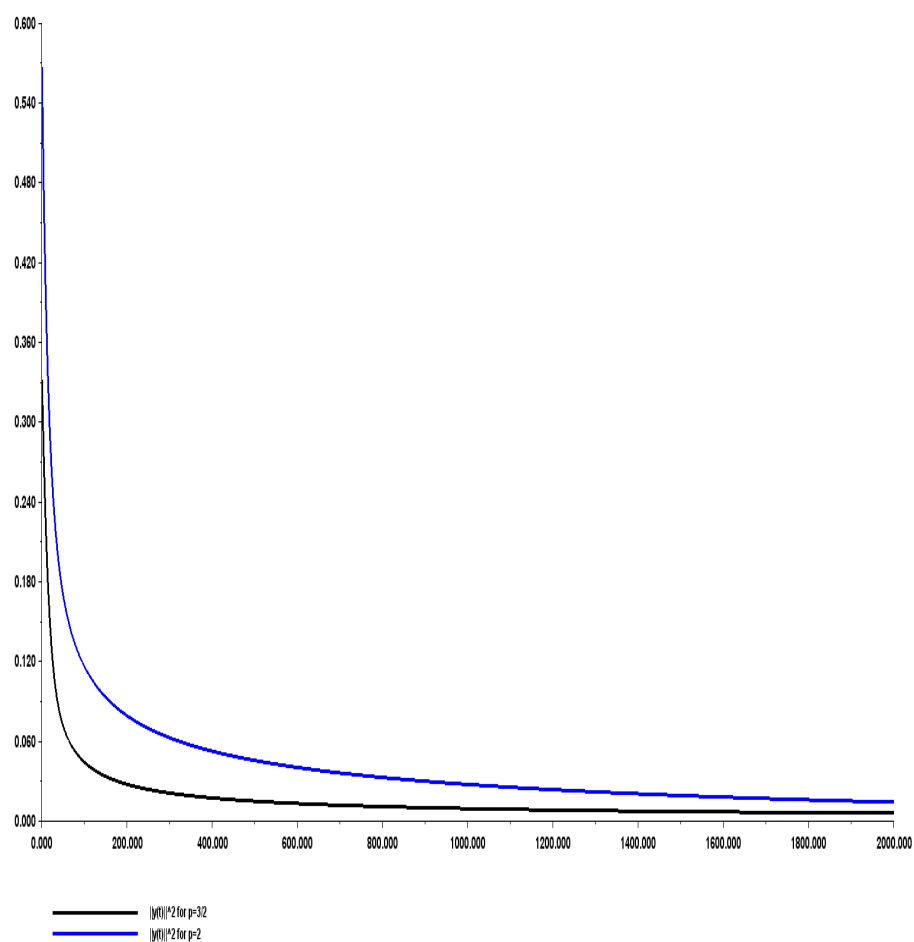


FIGURE 3.2 – Evolution de $\|y(t)\|^2$ pour $p = 3/2$ (courbe noire) et $p = 2$ (courbe bleue).

Cette figure montre que la stabilisation dans l'espace de Banach $L^p(\Omega)$ avec $p = 3/2$ est plus rapide que la stabilisation dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$.

Examinons maintenant la propriété de robustesse du contrôle stabilisateur. Considérons le système perturbé suivant :

$$\begin{cases} y_t(\cdot, t) = -y_x(\cdot, t) + v(t)((h + \epsilon)y(\cdot, t) - \langle y(\cdot, t), k \rangle g) - \frac{\epsilon}{\sqrt{x}}y(\cdot, t), \\ y(0, t) = 0, \\ y(\cdot, 0) = y_0 \in L^1(\Omega), \end{cases} \quad (3.37)$$

Ici, pour chaque $\epsilon > 0$, on a $P(y) = -\frac{\epsilon}{\sqrt{x}}y$ et $Q(y) = \epsilon y$. Nous pouvons vérifier que P est A -borné et dissipatif (voir [68]), et que Q est un opérateur borné de X . Ainsi, d'après le corollaire 3.3.1, le système perturbé (3.37) reste exponentiellement stable sous les perturbations P et Q pour un $\epsilon > 0$ assez petit.

Examinons maintenant notre approche de stabilisation ainsi que la robustesse du contrôle stabilisant face aux perturbations P et Q .

Ceci est illustré dans la figure suivante pour $p = 3$, $\epsilon = 0.1$ et $\epsilon = 0.01$.

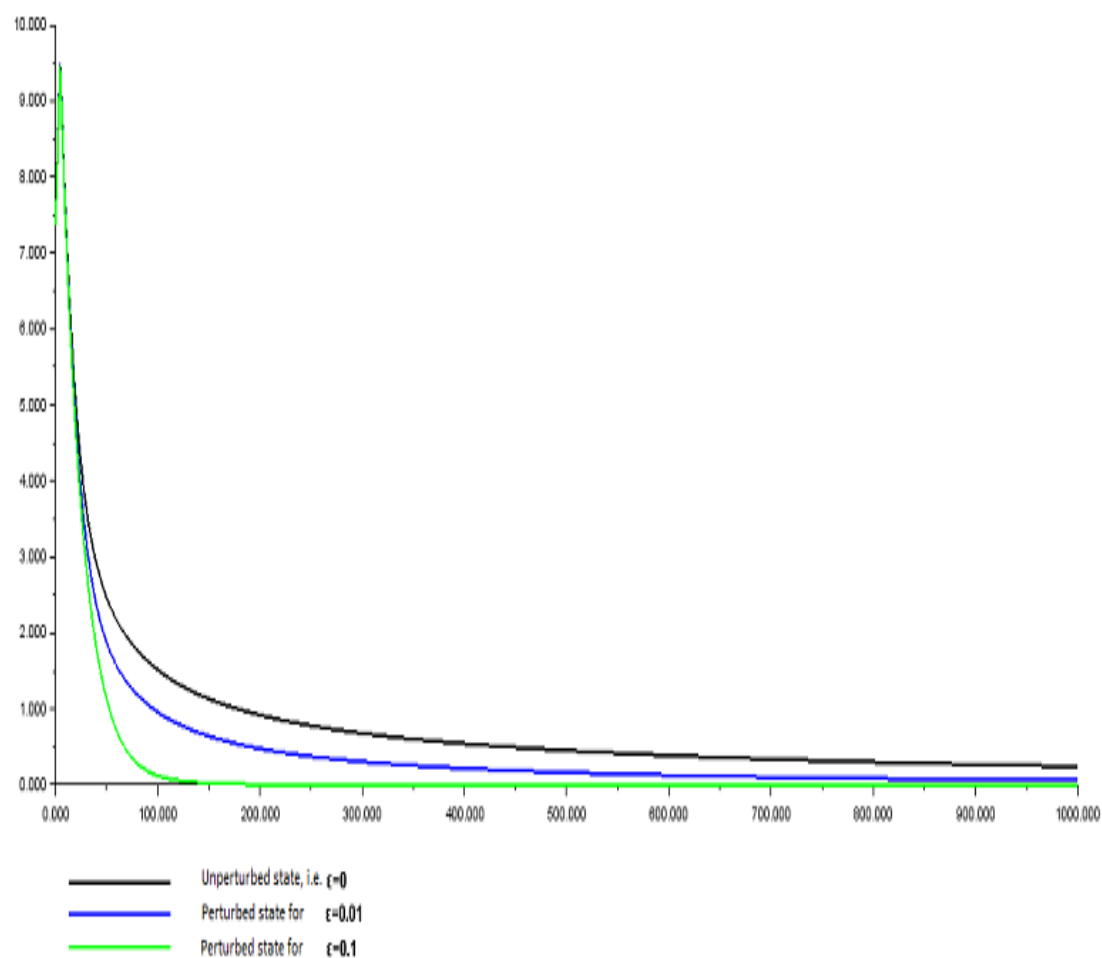


FIGURE 3.3 – Temps d'évolution de $\|y(t)\|^2$ sans perturbations (courbe noire), avec perturbations (courbe bleue et verte).

A partir de cette figure, nous pouvons voir que le contrôle considéré (normalisé) se traduit par une stabilité rapide, et que la stabilité obtenue est maintenue sous les perturbations P et Q correspondant à $\epsilon > 0$ assez petit.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la stabilisation exponentielle des systèmes bilinéaires contrôlés évoluant dans un espace d'état réflexif. En utilisant une décomposition adéquate de l'espace d'état, nous avons formulé des conditions suffisantes en terme d'inégalités d'observabilité pour garantir la stabilisation exponentielle. La question de robustesse est également abordée.

Chapitre 4

Stabilisation forte des systèmes bilinéaires

Chapitre 4

Stabilisation forte des systèmes bilinéaires

4.1 Introduction

Nous étudions dans ce chapitre la stabilité forte par retour d'état, selon que l'espace d'état X est réflexif ou non, et nous illustrons les résultats obtenus par des exemples.

Considérons le système bilinéaire suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + u(t)By(t), & t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

où X est un espace de Banach réel, A est un opérateur non borné de domaine $\mathcal{D}(A)$, $B : X \rightarrow X$ est un opérateur linéaire borné et la fonction $u(t)$ est le contrôle.

Tout au long de ce chapitre, on suppose que A génère un C_0 -semi-groupe $S(t)$ de contraction sur X .

4.2 Stabilisation forte

Dans cette section, nous nous intéresserons à la stabilisation forte du système (4.1). Pour cela, considérons le contrôle de type feedback suivant :

$$u(t) = \langle y(t), By(t) \rangle_+ =: - \sup_{y^*(t) \in J(y(t))} \langle By(t), y^*(t) \rangle. \quad (4.2)$$

Nous commençons cette section par rappeler que pour une fonction convexe, $f : X \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, le sous différentiel de f au point $x_0 \in \text{dom}(f)$ est défini par :

$$\partial f(x_0) = \left\{ x^* \in X^* : \langle x^*, x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0), \quad \forall x \in \text{dom}(f) \right\}. \quad (4.3)$$

On a le resultat suivant

Lemme 4.2.1 [42].

Si une fonction convexe f est continue au point $x \in \text{dom}(f)$, alors les assertions suivantes sont vérifiées.

- (i) $f'(x, \cdot)$ est une fonction sous linéaire continue sur X , ie
- (ii) Pour tout $y \in X$, $f'(x, y) = \sup\{\langle x^*, y \rangle : x^* \in \partial f(x)\}$ et le sup est atteint en un point x^* .

On peut montrer le lemme suivant :

Lemme 4.2.2 La fonction $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$f(y) = - \sup_{y^* \in J(y)} \langle By, y^* \rangle \quad (4.4)$$

est localement Lipschitzienne. De plus, le sup qui apparait dans (4.4) est atteint en un point y^* .

Preuve 4.2.1 Soit $g(x) = \frac{1}{2} \|x\|^2$. Alors le sous différentiel ∂g de l'application convexe g n'est autre que l'application dualité J associée à la norme $\|\cdot\|$. D'après le Lemme 4.2.1, la fonction définie par :

$$h(y) = - \sup_{y^* \in J(y)} \langle By, y^* \rangle, \text{ pour tout } y \in X$$

est une fonction sous linéaire continue sur X , donc elle est localement Lipschitzienne. Par conséquent, encore une fois d'après le lemme 4.2.1, h atteint son maximum en un point y^* .

De plus, puisque B est un borné, la fonction f est localement Lipschitzienne. Ceci complète la preuve.

Lemme 4.2.3 Soit A un générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contraction $S(t)$ et soit B un opérateur linéaire borné. Supposons que l'espace d'état X soit séparable. Donc sous le contrôle (4.2);

1. le système (4.1) admet une unique solution "mild" $y(t)$ qui est globale.
2. Supposons que pour une fonction $k : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ croissante par rapport à chaque variable séparément et telle que, pour tous $y, z \in X$ et pour tout $y^* \in J(y), z^* \in J(z)$, on a

$$|\langle By, y^* \rangle - \langle Bz, z^* \rangle| \leq k(\|y\|, \|z\|) \|y - z\|. \quad (4.5)$$

Alors pour $T > 0$, la solution $y(t)$ du système (4.1) satisfait l'estimation suivante

$$\int_0^T |\langle S(s)y_0, BS(s)y_0 \rangle_+| ds \leq C \left(\int_0^T |\langle y(s), By(s) \rangle_+|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.6)$$

où $C = C(\|y_0\|)$ est une fonction croissante en $\|y_0\|$.

Preuve 4.2.2 D'après le Lemme 4.2.2, on déduit que la fonction donnée par $f(y) = - \sup_{y^* \in J(y)} \langle By, y^* \rangle By$ est localement Lipschitzienne sur X . Alors, il existe une unique solution faible locale de (4.1) sur un intervalle maximal $[0, T_{\max})$, (voir [74], page 185) qui satisfait la formule de la variation de la constante suivante

$$y(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)f(y(s))ds. \quad (4.7)$$

Le reste de la preuve se compose de plusieurs étapes.

Soit $T \in [0, T_{\max})$ et $y_0 \in D(A)$. On remarque que $F : t \rightarrow f(y(t)) = u(t)By(t)$ est continue, on peut trouver une suite $(F_n) \in C^1([0, T], X)$ telle que $F_n \rightarrow F$ dans $(C^0([0, T], X); \|\cdot\|_\infty)$ uniformément sur $[0, T]$.

Considérons maintenant les fonctions $y_n \in C^0([0, T], X)$ données par :

$$y_n(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)F_n(s)ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.8)$$

D'une part, en combinant (4.7) et (4.8) on obtient pour tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \|y_n(t) - y(t)\| &\leq \int_0^t \|F_n(s) - F(s)\| ds, \\ &\leq T \sup_{t \in [0, T]} \|F_n(t) - F(t)\| \end{aligned}$$

Par construction, F_n converge uniformément vers F , et donc $y_n(t) \rightarrow y(t)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

D'autre part, on a d'après ([74], page 185) que y_n est une solution classique du système suivant :

$$\begin{cases} y_n'(t) = Ay_n(t) + F_n(t), & t > 0 \\ y_n(0) = y_0 \end{cases}$$

En utilisant le lemme 2.1.3, on a pour tout $y_n^*(t) \in J(y_n(t))$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|y_n(t)\|^2 &= \langle y_n'(t), y_n^*(t) \rangle \\ &\leq \langle F_n(t), y_n^*(t) \rangle \end{aligned} \quad (4.9)$$

En tenant compte du fait que A est un opérateur dissipatif, et en intégrant (4.9) on obtient

$$\|y_n(t)\|^2 - \|y_n(s)\|^2 \leq 2 \int_s^t \langle F_n(\tau), y_n^*(\tau) \rangle d\tau \quad (4.10)$$

pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$ et tout $y_n^*(\tau) \in J(y_n(\tau))$, $\tau \in [s, t]$.

Puis, dans (4.2), on choisit $y_n^*(\tau) \in J(y_n(\tau))$ tel que $u(\tau) = -\langle By_n(\tau), y_n^*(\tau) \rangle$, ce qui donne

$$\|y_n(t)\|^2 - \|y_n(s)\|^2 \leq -2 \int_s^t |\langle By_n(\tau), y_n^*(\tau) \rangle|^2 d\tau. \quad (4.11)$$

D'ou

$$\|y_n(t)\|^2 \leq \|y_n(s)\|^2 \quad \text{pour tout } 0 \leq s \leq t \leq T. \quad (4.12)$$

On trouve quand $n \rightarrow +\infty$ l'inégalité

$$\|y(t)\| \leq \|y_0\| \quad \text{pour tout } 0 \leq t \leq T. \quad (4.13)$$

Puisque, $D(A)$ est dense, alors pour tout $y_0 \in X$

$$\|y(t)\| \leq \|y_0\| \quad \text{pour tout } 0 \leq t \leq T. \quad (4.14)$$

Donc, la solution $y(t)$ est globale (i.e. $t_{max} = +\infty$).

Montrons maintenant l'estimation (4.6).

A partir de l'étape ci-dessus, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n(t) = y(t) \quad \text{et} \quad y_n^*(t) \in J(y_n(t)) \quad \text{pour tout } n. \quad (4.15)$$

En appliquant le Lemme 4.2.1, nous en déduisons que l'application de dualité $x \mapsto J(x)$ est localement bornée, et donc la suite $(y_n^*(t))$ est bornée. En tenant

compte de la séparabilité de X et du fait que $J(\cdot)$ est faiblement étoile fermé (voir [23]), on déduit qu'il existe une sous-suite $(y_{n_k}^*(t))$ dans $J(y_{n_k}(t))$ qui converge faiblement étoile vers $y^*(t) \in J(y(t))$ quand $k \rightarrow +\infty$.

En considérant les sous-suites mentionnées, on obtient de (4.11) que pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\|y_{n_k}(t)\|^2 - \|y_{n_k}(s)\|^2 \leq -2 \int_s^t \left| \langle By_{n_k}(\tau), y_{n_k}^*(\tau) \rangle \right|^2 d\tau. \quad (4.16)$$

En se basant sur (4.8), on déduit via l'inégalité de Gronwall que $y_n(t)$ est uniformément bornée. Par conséquent, lorsque $k \rightarrow +\infty$, en appliquant le théorème de la convergence dominée on trouve que pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\|y(t)\|^2 - \|y(s)\|^2 \leq -2 \int_s^t |\langle By(\tau), y^*(\tau) \rangle|^2 d\tau \quad (4.17)$$

avec $y^*(\tau) \in J(y(\tau))$, pour tout $\tau \in [0, T]$.

Soit $y^*(t) \in J(y(t))$ tel que

$$\langle By, y \rangle_+ = -\langle By(t), y^*(t) \rangle \quad (4.18)$$

et soit $(S(t)y_0)^* \in J(S(t)y_0)$ tel que

$$\langle BS(t)y_0, (S(t)y_0)^* \rangle_+ = -\langle BS(t)y_0, (S(t)y_0)^* \rangle \quad (4.19)$$

De (4.2) et (4.5), on déduit que

$$\begin{aligned} |\langle BS(t)y_0, (S(t)y_0)^* \rangle| &\leq |\langle BS(t)y_0, (S(t)y_0)^* \rangle - \langle By(t), y^*(t) \rangle| \\ &\quad + |\langle By(t), y^*(t) \rangle| \\ &\leq k(\|S(t)y_0\|, \|y(t)\|) \|S(t)y_0 - y(t)\| \\ &\quad + |\langle By(t), y^*(t) \rangle|, \end{aligned} \quad (4.20)$$

puisque $\|S(t)y_0\| \leq \|y_0\|$ (due à la contraction du semi-groupe $S(t)$), il s'en suit que

$$k(\|S(t)y_0\|, \|y(t)\|) \leq k(\|y_0\|, \|y(t)\|), \quad (4.21)$$

car, k est croissante par rapport à la première variable.

Encore une fois, puisque k est croissante par rapport à la deuxième variable, on obtient de (4.5) et (4.14)

$$k(\|S(t)y_0\|, \|y(t)\|) \leq k(\|y_0\|, \|y_0\|), \quad \forall t \geq 0. \quad (4.22)$$

En Combinant (4.20), (4.21) et (4.22) on trouve la relation

$$|\langle BS(t)y_0, (S(t)y_0)^* \rangle| \leq k_{\|y_0\|} \|S(t)y_0 - y(t)\| + |\langle By(t), y^*(t) \rangle| \quad (4.23)$$

où $k_{\|y_0\|} = k(\|y_0\|, \|y_0\|)$ est une constante qui dépend seulement de $\|y_0\|$. D'autre part, pour tout $0 \leq t \leq T$, la formule de variation de la constante donne :

$$\|y(t) - S(t)y_0\| \leq \|B\| \|y_0\| \int_0^T |\langle By(s), y^*(s) \rangle| ds, \quad (4.24)$$

avec,

$$\langle By, y \rangle_+ = -\langle By(s), y^*(s) \rangle.$$

En insérant l'inégalité précédente dans (4.23) on arrive à

$$|\langle BS(t)y_0, (S(t)y_0)^* \rangle| \leq k_{\|y_0\|} \|B\| \|y_0\| \int_0^T |\langle By(s), y^*(s) \rangle| ds + |\langle By(t), y^*(t) \rangle|. \quad (4.25)$$

Maintenant, en intégrant la dernière formule, on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^T |\langle BS(s)y_0, (S(s)y_0)^* \rangle| ds &\leq k_{\|y_0\|} \|B\| \|y_0\| T \int_0^T |\langle By(s), y^*(s) \rangle| ds + \\ &\int_0^T |\langle By(s), y^*(s) \rangle| ds. \end{aligned}$$

Et en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\int_0^T |\langle BS(s)y_0, (S(s)y_0)^* \rangle| ds \leq C \left(\int_0^T |\langle By(s), y^*(s) \rangle|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.26)$$

où

$$C = k_{\|y_0\|} T^{\frac{3}{2}} \|B\| \|y_0\| + T^{\frac{1}{2}}.$$

En utilisant enfin les constructions (4.18) et (4.19), on déduit de (4.26) l'estimation souhaitée (4.6) ce qui complète la preuve du théorème.

Maintenant, nous présentons la stabilisation forte du système considéré.

Théorème 4.2.1 *Soit A un opérateur générant un C_0 -semi-groupe $S(t)$ de contraction sur X , et soit B un opérateur linéaire borné. Supposons que les assertions suivantes sont vérifiées :*

1. *il existe une fonction $k : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ croissante par rapport à chaque variable séparément telle que : pour tout $y, z \in X$ et pour tout $y^* \in J(y), z^* \in J(z)$*

$$|\langle By, y^* \rangle - \langle Bz, z^* \rangle| \leq k(\|y\|, \|z\|) \|y - z\|, \quad (4.27)$$

2. il existe $\delta, T > 0$ tels que

$$\int_0^T |\langle S(t)y, BS(t)y \rangle_+| dt \geq \delta \|y\|^2, \quad \forall y \in X. \quad (4.28)$$

Alors le contrôle (4.2) stabilise fortement le système (4.1), avec l'estimation

$$\|y(t)\| = O(t^{\frac{1}{2}}), \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty. \quad (4.29)$$

Preuve 4.2.3 Soit B un opérateur linéaire borné satisfaisant toutes les hypothèses du théorème. Tout d'abord, remarquons que d'après la preuve du Lemme 4.2.3 et l'inégalité (4.16), on a

Pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$ et pour tout $y_{n_k}^*(\tau) \in J(y_{n_k}(\tau))$ on a

$$\|y_{n_k}(t)\|^2 - \|y_{n_k}(s)\|^2 \leq -2 \int_s^t |\langle By_{n_k}(\tau), y_{n_k}^*(\tau) \rangle|^2 d\tau. \quad (4.30)$$

D'une part, on a $J = \partial g$ avec $g(x) = \frac{1}{2} \|x\|^2$ alors on obtient

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow +\infty} g'(y_{n_k}(\tau), By_{n_k}(\tau)) &= \limsup_{k \rightarrow +\infty} g^\circ(y_{n_k}(\tau), By_{n_k}(\tau)) \\ &= g^\circ(y(\tau), By(\tau)) \\ &= g'(y(\tau), By(\tau)) \end{aligned} \quad (4.31)$$

D'autre part, prenons $y_{n_k}^*(\tau) \in J(y_{n_k}(\tau))$ tel que

$$\langle y_{n_k}(\tau), By_{n_k}(\tau) \rangle_+ = -\langle By_{n_k}(\tau), y_{n_k}^*(\tau) \rangle$$

on a $g'(y_{n_k}(\tau), By_{n_k}(\tau)) = \langle By_{n_k}(\tau), y_{n_k}^*(\tau) \rangle$.

En tenant compte du fait que $\limsup_{k \rightarrow +\infty} y_{n_k}(\tau) = y(\tau)$ et que $y_{n_k}^*(\tau)$ converge faiblement étoile vers $y^*(\tau)$ (voir (4.15)), on déduit que

$$g'(y(\tau), By(\tau)) = \langle By(\tau), y^*(\tau) \rangle \quad (4.32)$$

Donc

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \langle By_{n_k}(\tau), y_{n_k}(\tau) \rangle_+ = -\langle By(\tau), y^*(\tau) \rangle. \quad (4.33)$$

En utilisant la formule (4.8), on déduit via l'inégalité de Gronwall que $y_n(t)$ est uniformément bornée dans $[0, T]$. Par suite, en combinant (4.30), (4.31) et (4.32), on obtient pour $k \rightarrow +\infty$ grâce au théorème de la convergence dominée que pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\|y(t)\|^2 - \|y(s)\|^2 \leq -2 \int_s^t |\langle y(\tau), By(\tau) \rangle_+|^2 d\tau. \quad (4.34)$$

Deuxièmement, en utilisant le Lemme 4.2.3, on a

$$\int_0^T |\langle S(s)y_0, BS(s)y_0 \rangle_+| ds \leq C \left(\int_0^T |\langle y(s), By(s) \rangle_+|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.35)$$

Ceci donne via (4.28)

$$\delta \|y_0\|^2 \leq C \left(\int_0^T |\langle y(s), By(s) \rangle_+|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La dernière inégalité est valable pour tout y_0 , donc en remplaçant y_0 par $y(t)$ et en utilisant la propriété de superposition on déduit que

$$\delta \|y(t)\|^2 \leq C \left(\int_0^T |\langle y(s+t), By(s+t) \rangle_+|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

donc

$$\delta \|y(t)\|^2 \leq C \left(\int_t^{t+T} |\langle y(s), By(s) \rangle_+|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Posons $v_k = \|y(kT)\|^2$, $k \in \mathbb{N}$, on trouve l'inégalité :

$$\delta v_k \leq C \left(\int_{kT}^{(k+1)T} |\langle y(s), By(s) \rangle_+|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.36)$$

Maintenant, posons $s = kT$ et $t = (k+1)T$ dans (4.34), nous obtenons

$$2 \int_{kT}^{(k+1)T} |\langle y(\tau), By(\tau) \rangle_+|^2 d\tau \leq v_k - v_{k+1}. \quad (4.37)$$

Donc (4.36) et (4.37) sont vérifiées.

$$2\delta^2 v_k^2 \leq C^2 (v_k - v_{k+1}).$$

Cette inégalité, associée au fait que v_k est une suite positive et décroissante, donne

$$v_{k+1} + \beta v_{k+1}^2 \leq v_k, \quad \text{avec } \beta = 2 \frac{\delta^2}{C^2}.$$

Ceci nous permet de conclure à partir du Lemme 2.1.4 que

$$v_k = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right).$$

Puisque $\|y(t)\|^2$ décroît avec le temps, on obtient

$$\|y(t)\|^2 = \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty,$$

ce qui complète la preuve du théorème.

Nous étudions maintenant le problème de stabilisation forte du système (4.1) dans le cas d'un espace réflexif.

On considère l'hypothèse suivante :

(H) : J est continue Lipschitzienne,

alors J est univoque et l'application $x \rightarrow J(x)$ est Lipschitzienne de X vers X^* (voir [88]). il existe plusieurs caractérisation de l'hypothèse (H). De plus, sous (H) on a $\|\cdot\|^2$ est Fréchet-différentiable et X est réflexive (voir [31, 32, 37]).

Dans ce cas le contrôle (4.2) s'écrit :

$$u(t) = -\langle By(t), J(y(t)) \rangle. \quad (4.38)$$

On peut alors démontrer le corolaire suivant :

Corollaire 4.2.1 *Supposons que l'hypothèse (H) est vérifiée et que :*

$$\exists \delta, T > 0 \quad / \quad \int_0^T |\langle BS(t)y, J(S(t)y) \rangle| dt \geq \delta \|y\|^2, \quad \forall y \in X. \quad (4.39)$$

Alors le contrôle (4.38) stabilise fortement le système (4.1) avec l'estimation :

$$\|y(t)\| = O\left(t^{-\frac{1}{2}}\right), \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty. \quad (4.40)$$

Preuve 4.2.4 L'estimation du Lemme 4.2.3 combiné avec (4.39) donne :

$$\delta \|y_0\|^2 \leq C \left(\int_0^T |\langle By(s), J(y(s)) \rangle|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}},$$

où $C = C(\|y_0\|)$ est une fonction décroissante de $\|y_0\|$.

Alors, en remplaçant y_0 par $y(t)$ dans l'inégalité précédente on obtient, via la propriété de superposition des propriétés de la solution :

$$\delta \|y(t)\|^2 \leq C \left(\int_0^T |\langle By(s+t), J(y(s+t)) \rangle|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

où $C = C(\|y_0\|)$ (rappelons que $\|y(t)\| \leq \|y_0\|$ et que C est décroissante par rapport à $\|y_0\|$).

Donc

$$\delta \|y(t)\|^2 \leq C \left(\int_t^{t+T} |\langle By(s), J(y(s)) \rangle|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit $u_k = \|y(kT)\|^2$, $k \in \mathbb{N}$ On déduit que :

$$\delta u_k \leq C \left(\int_{kT}^{(k+1)T} |\langle By(s), J(y(s)) \rangle|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.41)$$

En appliquant l'inégalité (4.34) pour $s = kT$ et $t = (k+1)T$, on obtient :

$$2 \int_{kT}^{(k+1)T} |\langle By(\tau), J(y(\tau)) \rangle|^2 d\tau \leq u_k - u_{k+1}$$

Les deux dernières inégalités impliquent

$$2\delta^2 u_k^2 \leq C^2(u_k - u_{k+1}).$$

Puisque (u_k) décroît, on déduit que :

$$u_{k+1} + \beta u_{k+1}^2 \leq u_k, \quad \beta = 2 \frac{\delta^2}{C^2}.$$

Maintenant on applique le résultat du Lemme 2.1.6 avec

$$v(x) = \beta x^2, \quad x \in [0, +\infty[.$$

On remarque que $v(s)$ est équivalent à Cs^2 , $C > 0$ au voisinage de l'origine.

Introduisons la fonction suivante :

$$w(t) = - \int_{u_0}^t \frac{ds}{v(s)}, \quad t > 0,$$

qui décroît de $w(0^+) = +\infty$ à $w(u_0) = 0$.

Alors la fonction définie par :

$$x(t) = w^{-1}(t), \quad t > 0$$

décroît vers 0, quand $t \rightarrow +\infty$, et par suite on a

$$v(x(t)) \sim Cx(t)^2, \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty.$$

Donc on peut conclure que la fonction

$$x(t) = w^{-1}(t), \quad t > 0$$

est l'unique solution de l'équation :

$$\frac{d}{dt}x(t) + v(x(t)) = 0; \quad x(0) = u_0.$$

Donc on a :

$$\dot{x}(t) \leq -Cx(t)^2, \quad t \rightarrow +\infty,$$

pour une constante $C > 0$.

Par suite on a

$$x(t) = O(1/t), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Donc en utilisant le Lemme 2.1.6 nous aurons

$$u_k = O(1/k).$$

Et puisque $\|y(t)\|$ décroît, alors on a le résultat cherché :

$$\|y(t)\|^2 = O(1/t), \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty.$$

Remarque 4.2.1 Dans le cas où X est un espace de Hilbert, on retrouve le résultat de [64].

4.3 Stabilisation via la décomposition de l'espace d'état

Dans cette section, on suppose que l'espace d'état X peut être écrit comme somme directe de deux sous espaces fermés X_1 et X_2 qui sont invariants par le semi-groupe $S(t)$:

$$S(t)X_1 \subset X_1 \quad \text{et} \quad S(t)X_2 \subset X_2. \quad (4.42)$$

Notons par $S_1(t)$, $S_2(t)$ les restrictions de $S(t)$ à X_1 et à X_2 respectivement. On suppose de plus que :

$$BX_1 \subset X_1 \quad \text{et} \quad BX_2 \subset X_2 \quad (4.43)$$

Alors le système initial (4.1) se décompose en deux sous systèmes :

$$\frac{d}{dt}y_1(t) = A_1y_1(t) + u(t)B_1y_1(t), \quad y_1(0) = y_{01} \in X_1 \quad (4.44)$$

et

$$\frac{d}{dt}y_2(t) = A_2y_2(t) + u(t)B_2y_2(t), \quad y_2(0) = y_{02} \in X_2 \quad (4.45)$$

où A_1 et A_2 génèrent les semi-groupes $S_1(t)$ et $S_2(t)$ respectivement. On voit clairement que si le système initial est stabilisable, alors les systèmes

(4.44) et (4.45) sont aussi stabilisables. La réciproque a été étudiée dans le cas d'un espace d'Hilbert dans [65, 67]. Dans cette section, on considère le cas où l'espace d'état est un espace de Banach. On a le théorème suivant :

Theorem 4.3.1 *Supposons que :*

1. (4.42) et (4.43) sont vérifiées,
2. $S_1(t)$ est un semi-groupe de contraction et que $S_2(t)$ est exponentiellement stable,
3. le système (4.44) est fortement stabilisable par un contrôle $u \in L^2(0, \infty)$.

Alors le système (4.1) est fortement stabilisable par $u(t)$, pourvu que (4.1) possède une solution globale.

Preuve 4.3.1 Soit $u \in L^2(0, \infty)$ tel que la solution du système :

$$\begin{cases} \frac{dy_1(t)}{dt} = A_1 y_1(t) + u(t) B_1 y_1(t), & t > 0 \\ y_1(0) = y_{01} \in X_1 \end{cases} \quad (4.46)$$

tend fortement vers 0, quand $t \rightarrow \infty$.

En utilisant le même contrôle $u(t)$ pour le système (4.45), on trouve :

$$y_2(t) = S_2(t) y_{02} + \int_0^t u(s) S_2(t-s) B_2 y_2(s) ds, \quad \forall t \in [0, t_{max}). \quad (4.47)$$

Soit $\sigma, M > 0$ tels que :

$$\|S_2(t)\| \leq M e^{-\sigma t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.48)$$

D'après (4.47) et (4.48), on a pour tout $t \in [0, t_{max})$:

$$\|y_2(t)\| \leq M e^{-\sigma t} \|y_{02}\| + M \|B_2\| \int_0^t |u(s)| e^{-\sigma(t-s)} \|y_2(s)\| ds. \quad (4.49)$$

Posons :

$$\varphi(s) = e^{\sigma s} \|y_2(s)\|, \quad s \in [0, t_{max}). \quad (4.50)$$

Donc

$$\varphi(t) \leq M \|y_{02}\| + M \|B_2\| \int_0^t |u(s)| \varphi(s) ds, \quad \forall t \in [0, t_{max}) \quad (4.51)$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall, on déduit que

$$\varphi(t) \leq M \|y_{02}\| e^{M \|B_2\| \int_0^t |u(s)| ds}. \quad (4.52)$$

D'ou

$$\|y_2(t)\| \leq M \|y_{02}\| e^{(M\|B_2\| \int_0^t |u(s)| ds) - \sigma t} \quad (4.53)$$

De plus, on a

$$e^{(M\|B_2\| \int_0^t |u(s)| ds) - \sigma t} \leq e^{(M\|B_2\| \sqrt{t} \|u\|_{L^2(0,+\infty)}) - \sigma t}, \quad \forall t \in [0, t_{max}) \quad (4.54)$$

où

$$\|u\|_{L^2(0,+\infty)} = \left(\int_0^{+\infty} |u(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

Donc

$$\|y_2(t)\| \leq N \|y_{02}\| e^{\frac{-\sigma t}{2}}, \quad \forall t \in [0, t_{max}) \quad (4.55)$$

pour une constante $N > 0$.

On remarque que $y_2(t)$ est bornée dans l'intervalle $[0, t_{max})$, donc c'est une solution globale (i.e., $t_{max} = +\infty$). De plus, $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ tend vers 0 fortement quand $t \rightarrow +\infty$.

Remarque 4.3.1 Dans le théorème ci-dessus, le contrôle de stabilisation ne doit pas être forcément de type feedback. Le cas des commandes de stabilisation de type feedback est discuté dans le résultat suivant.

Theorem 4.3.2 supposons que :

1. l'hypothèse (H) est vérifiée dans l'espace X_1 ,
2. (4.42) et (4.43) sont vérifiées,
3. $S_1(t)$ est un semi-groupe de contraction et $S_2(t)$ est exponentiellement stable,
4. il existe $\delta, T > 0$ tels que :

$$\int_0^T |\langle B_1 S_1(t) y_1, J(S_1(t) y_1) \rangle| dt \geq \delta \|y_1\|^2, \quad \forall y_1 \in X_1. \quad (4.56)$$

Alors le contrôle

$$u_1(t) = -\langle B_1 y_1(t), J(y_1(t)) \rangle \quad (4.57)$$

donne l'estimation (4.40) de la solution correspondante du système (4.1).

Preuve 4.3.2 En appliquons le résultat du Théorème 4.2.1 au sous système (4.44), on trouve que le contrôle quadratique : $u_1(t) = -\langle B_1 y_1(t), y_1(t) \rangle$ donne l'estimation $\|y_1(t)\|^2 = O(\frac{1}{t})$, quand $t \rightarrow +\infty$. Cette estimation combinée avec (4.55) donne l'estimation (4.40).

Corollaire 4.3.1 *Supposons que :*

1. (4.42) et (4.43) sont vérifiées,
2. $S_1(t)$ est un semi-groupe de contraction et $S_2(t)$ est exponentiellement stable,
3. $\dim X_1 < \infty$,
4. pour tout $y_1 \in X_1$, on a :

$$\langle B_1 S_1(t) y_1, S_1(t) y_1 \rangle = 0, \text{ pour tout } t \geq 0 \text{ si } y_1 = 0. \quad (4.58)$$

Alors le contrôle

$$u_1(t) = -\langle B_1 y_1(t), y_1(t) \rangle \quad (4.59)$$

assure l'estimation (4.40) pour la solution du système (4.1).

Preuve 4.3.3 Il découle du Théorème 4.3.2 et le fait que les hypothèses (4.56) et (4.58) sont équivalentes dans le contexte d'un espace de dimension fini (voir [69]).

Remarque 4.3.2 1. Si X est un espace d'Hilbert, alors on retrouve les résultats de [65].

2. Notons que les résultats de cette section ne nécessitent pas la réflexivité de tout l'espace d'état X .

4.4 Applications

Exemple 4.4.1 Soit $r, p \in \mathbf{R}$ tels que : $r > 2 > p > 1$ et soit $\frac{1}{p} - \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$, et $\Omega = (0, +\infty)$.

Considérons le système :

$$\begin{cases} y_t(\cdot, t) = -y_x(\cdot, t) + u(t) B y(\cdot, t), & \text{sur } \Omega \times (0, +\infty), \\ y(0, t) = 0, & \text{sur } (0, +\infty) \\ y(\cdot, 0) = y_0 \in L^p(\Omega), & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (4.60)$$

où

$$B y = g * y + h y, \forall y \in X = L^p(\Omega),$$

avec $h \in L^\infty(\Omega)$ et $g \in L^2(\Omega)$ sont tels que $h \geq c > \|g\|$.

On remarque que $B \notin \mathcal{L}(L^2(\Omega))$. Cependant, puisque $g \in L^2(\Omega)$, on a d'après l'inégalité de Young :

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_2, \quad \forall f \in L^p(\Omega),$$

où $\|\cdot\|_p$ désigne la norme naturelle de $L^p(\Omega)$, donc $B \in \mathcal{L}(L^p(\Omega))$.

De plus, l'opérateur non borné $A = -\frac{\partial}{\partial x}$ dont le domaine est

$$D(A) = \{y \in W^1(\Omega) / y(0) = 0\}$$

génère un semi-groupe de contraction sur l'espace d'état $X = L^p(\Omega)$ (voir [29], p. 34).

Il est également bien connu que (voir [9], p. 82)

$$J(f) = \left\{ \frac{|f|^{p-2}}{\|f\|^{p-2}} f \right\}, \quad \forall f \in L^p(\Omega).$$

Il s'ensuit que :

$$\langle y, J(f) \rangle = \int_{\Omega} \frac{|f|^{p-2}(s)}{\|f\|^{p-2}} f(s) y(s) ds, \quad \forall f \in L^p(\Omega), \forall y \in L^q(\Omega), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

De plus, on a

$$|\langle Bz, J(z) \rangle| \geq |\langle hz, J(z) \rangle| - |\langle g * z, J(z) \rangle|.$$

Et pour tout $z \in L^p(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} |\langle hz, J(z) \rangle| &= \left| \int_0^{+\infty} h(s) z(s) \frac{|z|^{p-2}}{\|z\|^{p-2}} z(s) ds \right| \\ &\geq c \int_0^{+\infty} \frac{|z(s)|^p}{\|z\|^{p-2}} ds \\ &= c \|z\|^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |\langle g * z, J(z) \rangle| &\leq \|g * z\|_X \|J(z)\|_{X^*} \\ &\leq \|g\| \|z\|^2 \end{aligned}$$

donc

$$|\langle Bz, J(z) \rangle| \geq (c - \|g\|) \|z\|^2, \quad \forall z \in L^p(\Omega).$$

On en déduit que :

$$\langle BS(t)y, J(S(t)y) \rangle \geq \delta \|S(t)y\|^2, \quad \forall y \in X,$$

avec $\delta = (c - \|g\|) > 0$.

Nous savons que $\|S(t)y\| = \|y\|, \forall t \geq 0$, alors la dernière inégalité donne (4.39). En appliquant le Théorème 4.2.1, on en déduit que (4.60) est fortement stabilisable et nous avons l'estimation suivante :

$$\|y(t)\| = O\left(t^{\frac{-1}{2}}\right), \text{ quand } t \rightarrow +\infty.$$

Exemple 4.4.2 Soit $\Omega = (0, +\infty)$, et considérons l'équation de transport suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(\cdot, t) = -\frac{\partial y}{\partial x}(\cdot, t) + u(t) By(\cdot, t) & \text{dans } \Omega \times (0, \infty) \\ y(0, t) = 0, & t \in [0, +\infty) \\ y(\cdot, 0) = y_0 \in L^1(\Omega) & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (4.61)$$

où $By = \varphi(x)y$, pour tout $y \in L^1(\Omega)$.

Dans la suite, on prend $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ tel que

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1. \end{cases}$$

Maintenant, soit $A = -\frac{\partial}{\partial x}$ dont le domaine est

$$D(A) = \left\{ y \in L^1(\Omega) : y \text{ est absolument continu sur } (0, \infty) \text{ et } y(0) = 0 \right\}.$$

Il a été montré dans [59], que A génère dans l'espace d'état $X = L^1(\Omega)$ le semi-groupe de contraction suivant :

$$(S(t)y)(\tau) = \begin{cases} y(\tau - t) & \tau \geq t \\ 0 & 0 \leq \tau < t. \end{cases} \quad (4.62)$$

En revanche, nous déduisons (voir [7]) l'expression simplifiée de l'application de dualité :

$$J(y) = \left\{ v \in L^\infty(\Omega) : v(x) \in \text{sign } y(x) \cdot \|y\|_{L^1(\Omega)}, \text{ a.e } x \in \Omega \right\}, \quad (4.63)$$

où, la fonction sign est définie pour tout $y \in L^1(\Omega)$ par :

$$\text{sign}(y(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } y(x) > 0 \\ [-|y(x)|, |y(x)|] & \text{si } y(x) = 0 \\ -1 & \text{si } y(x) < 0 \end{cases} \quad (4.64)$$

Soit $y \in X$, en utilisant la construction ci-dessus, on a pour tout $y^* \in J(y)$

$$\begin{aligned} \langle By; y^* \rangle &= \int_{\Omega} By(x) y^*(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \varphi(x) y(x) y^*(x) dx. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Maintenant, en remplaçant la valeur de $y^*(x)$ dans (4.65) on obtient l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \langle By; y^* \rangle &= \int_{\Omega} \varphi(x) y(x) \frac{y(x)}{|y(x)|} \|y\|_{L^1(\Omega)} dx \\ &= \|y\|_{L^1(\Omega)} \int_{\Omega} |\varphi(x)| |y(x)| dx. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Vérifions les hypothèses du Théorème 4.2.1.

- Fixons y et z dans $L^1(\Omega)$ et soit $y^* \in J(y)$ et $z^* \in J(z)$. On a

$$\begin{aligned} \left| \langle By; y^* \rangle - \langle Bz; z^* \rangle \right| &= \left| \|y\|_{L^1(\Omega)} \cdot \int_{\Omega} |\varphi(x)| |y(x)| dx \right. \\ &\quad \left. - \|z\|_{L^1(\Omega)} \cdot \int_{\Omega} |\varphi(x)| |z(x)| dx \right| \\ &= \left| \left[\|y\|_{L^1(\Omega)} - \|z\|_{L^1(\Omega)} \right] \int_{\Omega} |\varphi(x)| |y(x)| dx \right. \\ &\quad \left. + \|z\|_{L^1(\Omega)} \left[\int_{\Omega} |\varphi(x)| |y(x)| dx - \int_{\Omega} |\varphi(x)| |z(x)| dx \right] \right| \\ &\leq \left| \|y\|_{L^1(\Omega)} - \|z\|_{L^1(\Omega)} \right| \cdot \|y\|_{L^1(\Omega)} \cdot \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\quad + \|z\|_{L^1(\Omega)} \left[\int_{\Omega} |\varphi(x)| |y(x) - z(x)| dx \right] \\ &\leq \|y - z\|_{L^1(\Omega)} \cdot \|y\|_{L^1(\Omega)} \cdot \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\quad + \|z\|_{L^1(\Omega)} \cdot \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \|y - z\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \left(\|y\|_{L^1(\Omega)} + \|z\|_{L^1(\Omega)} \right) \cdot \|y - z\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Prenons $k(\mu, \nu) = \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} (\mu + \nu)$, alors, la première hypothèse de (4.27) est vérifiée.

- Soit $y \in L^1(\Omega)$, et soit $(S(t)y)^* \in J((S(t)y))$ tel que $\langle BS(t)y, S(t)y \rangle_+ = -\langle BS(t)y, (S(t)y)^* \rangle$.

On a

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 |\langle BS(t)y, S(t)y \rangle_+| dt &= \int_0^1 |\langle BS(t)y, (S(t)y)^* \rangle| dt \\
 &= \int_0^1 \|S(t)y\|_{L^1(\Omega)} \int_{\Omega} |\varphi(x)| |S(t)y(x)| dx dt \\
 &= \|y\|_{L^1(\Omega)} \int_0^1 \int_t^{+\infty} |\varphi(x)| |y(x-t)| dx dt \\
 &= \|y\|_{L^1(\Omega)} \int_0^1 \int_0^{+\infty} |\varphi(x+t)| |y(x)| dx dt \\
 &= \|y\|_{L^1(\Omega)} \int_0^{+\infty} |y(x)| \int_0^1 |\varphi(x+t)| dt dx
 \end{aligned}
 \tag{4.67}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} |y(x)| \int_0^1 |\varphi(x+t)| dt dx &= \int_0^1 |y(x)| \left(\int_0^{1-x} \sqrt[3]{x+t} dt + \int_{1-x}^1 1 dt \right) dx \\
 &\quad + \int_1^{+\infty} |y(x)| dx \\
 &= \int_0^1 |y(x)| \left(\frac{3}{4} (1 - x\sqrt[3]{x}) + 1 \right) dx \\
 &\quad + \int_1^{+\infty} |y(x)| dx \\
 &\geq \int_0^1 \frac{3}{4} |y(x)| dx + \int_1^{+\infty} |y(x)| dx \\
 &= \frac{3}{4} \|y\|_{L^1(\Omega)}.
 \end{aligned}
 \tag{4.68}$$

En combinant (4.67) et (4.68) on obtient

$$\int_0^1 |\langle BS(t)y; S(t)y \rangle_+| dt \geq M \|y\|_{L^1(\Omega)}^2, \quad M = \frac{3}{4}.$$

Par conséquent, nous arrivons à (4.28). Appliquons le Théorème 4.2.1, nous déduisons que (4.61) est fortement stabilisable.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la stabilisation forte des systèmes bilinéaires dans des espaces de Banach qui ne sont pas forcément réflexifs. De plus, sous une condition d'observabilité, un taux de décroissance de l'énergie est estimé.

Chapitre 5

Stabilisation faible
et faible étoile des
systèmes
bilinéaires

Chapitre 5

Stabilisation faible et faible étoile des systèmes bilinéaires

5.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la stabilisation faible et faible étoile des systèmes bilinéaires sur un espace de Banach (qui n'est pas forcément réflexif). Ici nous fournissons des conditions qui garantissent la stabilisation faible étoile. L'approche repose sur la théorie des semi groupes et utilise des résultats de l'analyse convexe et de l'application de dualité. Comme application, les équations de diffusion et de transport sont étudiées en détail.

On reprend le système bilinéaire suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + u(t)By(t) \\ y(0) = y_0 \in X \end{cases} \quad (5.1)$$

où X est un espace de Banach séparable muni de la norme $\| \cdot \|$ et $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ est un opérateur non borné générant un C_0 -semi-groupe de contraction $S(t)$ sur X , et B est un opérateur linéaire borné. On se propose dans ce chapitre d'étudier la stabilité du système (5.1) sous des conditions d'observabilité faibles.

5.2 Stabilisation faible étoile

Dans cette section, nous nous intéresserons à la stabilité faible étoile de (5.1) par le contrôle de type feedback suivant :

$$u(t) = \langle y(t), By(t) \rangle_+ =: - \sup_{y^*(t) \in J(y(t))} \langle By(t), y^*(t) \rangle. \quad (5.2)$$

On a le résultat suivant :

Théorème 5.2.1 *Soit A un opérateur non borné générant un C_0 -semi-groupe $S(t)$ de contraction sur X , et soit B un opérateur linéaire borné. Supposons que les assertions suivantes sont vérifiées :*

1. *Il existe une fonction $k : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ croissante par rapport à chaque variable séparément telle que, pour tous $y, z \in X$ et pour tous $y^* \in J(y), z^* \in J(z)$, on a*

$$|\langle By, y^* \rangle - \langle Bz, z^* \rangle| \leq k(\|y\|, \|z\|) \|y - z\|. \quad (5.3)$$

2. *Pour tout $(x_n) \subset X$ tel que $x_n \rightharpoonup^* x$ dans X , on a pour tout $\Phi_n(t) \in J(S(t)x_n)$*

$$\left[\langle BS(t)x_n, \Phi_n(t) \rangle \rightarrow 0, \quad \text{qd } n \rightarrow +\infty, \quad \forall t > 0 \right] \implies \left[x = 0 \right]. \quad (5.4)$$

Alors le système (5.1) est faiblement étoile stabilisable par le contrôle (5.2).

Preuve 5.2.1 Soit $(t_n)_n$ une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$. D'après le Lemme 4.2.3, les hypothèses du théorème entraînent que $\|y(t)\|$ est bornée. Donc, on peut en extraire une sous suite $(t_{n_k})_k \rightarrow +\infty$ telle que $y(t_{n_k})$ converge pour la topologie faible étoile vers $y(t) \in X$.

De plus, en utilisant (3.25) et la construction ci-dessus tout en effectuant certains calculs, on obtient

$$\int_0^T |\langle BS(s)y(t_n), (S(s)y(t_n))^* \rangle| ds \leq C \left(\int_{t_n}^{T+t_n} |\langle By(s), y^*(s) \rangle|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarquons que

$$\int_{t_n}^{T+t_n} |\langle By(s), y^*(s) \rangle|^2 ds \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty,$$

on déduit du théorème de la convergence dominé que

$$\int_0^T \lim_{n \rightarrow +\infty} |\langle BS(s)y(t_n), (S(s)y(t_n))^* \rangle| ds = 0.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\langle BS(s)y(t_n), (S(s)y(t_n))^* \rangle| = 0, \quad \text{por tout } s \geq 0.$$

Avec la condition d'observabilité faible (5.4), on trouve

$$y(t) = 0.$$

En procédant de la même manière, nous pouvons montrer que 0 est l'unique point limite faible étoile de la suite $y(t_n)$. En conséquence, 0 est la limite faible étoile de la suite $y(t_n)$.

Par conséquent le contrôle (4.2) stabilise faiblement étoile le système (5.1).

5.3 Stabilisation faible

Dans cette section, nous allons établir le résultat de la stabilisation faible. Nous avons le théorème suivant :

Théorème 5.3.1 *Supposons que l'hypothèse (H) est vérifiée, A génère un semi-groupe de contraction $S(t)$, B un opérateur linéaire borné et pour toute suite $(x_n) \subset X$ tel que $x_n \rightharpoonup x$ dans X, on a*

$$\left[\langle BS(t)x_n, J(S(t)x_n) \rangle \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow +\infty, \quad \forall t \geq 0 \right] \Rightarrow \left[x = 0. \right] \quad (5.5)$$

Alors le système (5.1) est faiblement stabilisable par le contrôle (4.38).

Preuve 5.3.1 La fonction $\|y(t)\|$ étant bornée dans l'espace réflexif X , il existe $t_n \rightarrow +\infty$ tel que :

$$y(t_n) \rightharpoonup \phi, \text{ avec } \phi \in X. \quad (5.6)$$

D'après le lemme 4.2.3, on a pour tout $T > 0$,

$$\int_0^T |\langle BS(s)y(t_n), J(S(s)y(t_n)) \rangle| ds \leq C \int_{t_n}^{t_n+T} |\langle By(s), J(y(s)) \rangle|^2 ds,$$

avec $C = C(\|y_0\|)$.

Par suite on a

$$\int_0^T |\langle BS(s)y(t_n), J(S(s)y(t_n)) \rangle| ds \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

En utilisant le théorème de la convergence dominée, on trouve :

$$\int_0^T \lim_{n \rightarrow +\infty} |\langle BS(s)y(t_n), J(S(s)y(t_n)) \rangle| ds = 0 \quad (5.7)$$

ce qui entraîne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\langle BS(s)y(t_n), J(S(s)y(t_n)) \rangle| = 0, \quad \forall s \in [0, T] \quad (5.8)$$

Or T est arbitraire, donc l'hypothèse (5.5) entraîne que $\phi = 0$. De plus, en utilisant la même méthode, on trouve que 0 est l'unique point limite de $y(t)$ dans X muni de la topologie faible. Ce qui implique le résultat.

Remarque 5.3.1 1. On remarque que la relation (5.5) est équivalent à dire que :

$$\langle BS(t)y, J(S(t)y) \rangle = 0, \forall t \Rightarrow y = 0, \quad (5.9)$$

à condition que l'une des conditions suivantes soit remplie

- i) $S(t)$ est un semi-groupe compact et J est continue,
- ii) J est séquentiellement continue de X_w (X muni de la topologie faible) vers X^* , (i.e.)

$$y_n \rightharpoonup y \Rightarrow J(y_n) \rightarrow J(y), \text{ (quand } n \rightarrow +\infty)$$

- iii) B est un opérateur compact et J est séquentiellement continue dans X muni de la topologie faible, (i.e.) :

$$y_n \rightharpoonup y \Rightarrow J(y_n) \rightharpoonup J(y), \text{ (quand } n \rightarrow +\infty) \quad (5.10)$$

Notons que (5.10) est vérifiée dans le cas d'un espace d'Hilbert.

- 2. Si B est un opérateur compact dans un espace d'Hilbert, alors le contrôle (5.9) stabilise faiblement le système (5.1), et on retrouve le résultat obtenu dans [6].

5.4 Stabilisation faible via la décomposition de l'espace d'état

Théorème 5.4.1 *Supposons que :*

1. (4.42) et (4.43) sont vérifiées,
 2. $S_1(t)$ est un semi-groupe de contraction et que $S_2(t)$ est exponentiellement stable,
 3. le système (4.44) est faiblement stabilisable par le contrôle $u \in L^2(0, \infty)$.
- Alors le système (5.1) est faiblement stabilisable par $u(t)$.

Preuve 5.4.1 Soit $u \in L^2(0, \infty)$ tel que la solution du système :

$$\begin{cases} \frac{dy_1(t)}{dt} = A_1 y_1(t) + u(t) B_1 y_1(t), & t > 0 \\ y_1(0) = y_{01} \in X_1 \end{cases} \quad (5.11)$$

tend faiblement vers 0, quand $t \rightarrow \infty$.

En utilisant le même contrôle $u(t)$ pour le système (4.45), on trouve :

$$y_2(t) = S_2(t) y_{02} + \int_0^t u(s) S_2(t-s) B_2 y_2(s) ds, \quad \forall t \in [0, t_{max}). \quad (5.12)$$

Soit $\sigma, M > 0$ tels que :

$$\|S_2(t)\| \leq M e^{-\sigma t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (5.13)$$

Ce qui donne pour tout $t \in [0, t_{max})$

$$\|y_2(t)\| \leq M e^{-\sigma t} \|y_{02}\| + M \|B_2\| \int_0^t |u(s)| e^{-\sigma(t-s)} \|y_2(s)\| ds. \quad (5.14)$$

Posons :

$$\varphi(s) = e^{\sigma s} \|y_2(s)\|, \quad s \in [0, t_{max}). \quad (5.15)$$

Donc

$$\varphi(t) \leq M \|y_{02}\| + M \|B_2\| \int_0^t |u(s)| \varphi(s) ds, \quad \forall t \in [0, t_{max}) \quad (5.16)$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall on trouve

$$\varphi(t) \leq M \|y_{02}\| e^{M \|B_2\| \int_0^t |u(s)| ds} \quad (5.17)$$

d'ou

$$\|y_2(t)\| \leq M \|y_{02}\| e^{(M\|B_2\| \int_0^t |u(s)| ds) - \sigma t} \quad (5.18)$$

De plus, on a

$$e^{(M\|B_2\| \int_0^t |u(s)| ds) - \sigma t} \leq e^{(M\|B_2\| \sqrt{t} \|u\|_{L^2(0,+\infty)}) - \sigma t}, \quad \forall t \in [0, t_{max}] \quad (5.19)$$

où

$$\|u\|_{L^2(0,+\infty)} = \left(\int_0^{+\infty} |u(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc

$$\|y_2(t)\| \leq N \|y_{02}\| e^{\frac{-\sigma t}{2}}, \quad \forall t \in [0, t_{max}]. \quad (5.20)$$

pour une constante $N > 0$.

On a $y_2(t)$ est bornée dans l'intervalle $[0, t_{max}]$, donc c'est une solution globale (i.e., $t_{max} = +\infty$).

De plus, $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ tend vers 0 faiblement, quand $t \rightarrow +\infty$.

Remarque 5.4.1 *Dans le théorème ci-dessus, le contrôle de stabilisation ne doit pas être forcément de type feedback. Le cas des commandes de stabilisation de type feedback est discuté dans le résultat suivant.*

Corollaire 5.4.1 *Supposons que :*

1. *l'hypothèse (H) est vérifiée dans l'espace X_1 ,*
2. *(4.42) et (4.43) sont vérifiées,*
3. *$S_1(t)$ est un semi-groupe de contraction et $S_2(t)$ est exponentiellement stable,*
4. *pour toute suite $(x_n) \subset X_1$ tel que $x_n \rightharpoonup x$ dans X_1 , on a*

$$\langle B_1 S_1(t) x_n, J(S_1(t) x_n) \rangle \rightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty, \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow x = 0. \quad (5.21)$$

Alors le contrôle (4.57) stabilise faiblement le système (5.1).

Preuve 5.4.2 Appliquons le résultat du Théorème 5.3.1 au sous système (4.44), on trouve que u_1 stabilise faiblement (4.44). De plus, on a l'inégalité :

$$2 \int_0^t |\langle B y_1(\tau), J(y_1(\tau)) \rangle|^2 d\tau \leq \|y_1(0)\|^2, \quad \forall t \geq 0,$$

ce qui entraine que $u_1 \in L^2(0, +\infty)$.

En appliquons le Théorème 5.4.1, on conclut que le système est faiblement stabilisable par le contrôle (4.57).

Remarque 5.4.2 1. Si X est un espace d'Hilbert, alors on retrouve les résultats de ([65]).

2. Les résultats de cette section ne nécessitent pas la réflexivité de tout l'espace d'état X .

5.5 Exemples

Exemple 5.5.1 Pour $p > 2$, on considère l'équation de la chaleur avec les conditions de Neumann au bord :

$$\begin{cases} y_t(\cdot, t) = \Delta y(\cdot, t) + u(t)y(\cdot, t), & \text{sur } \Omega \times (0, +\infty), \\ \frac{\partial y}{\partial \nu}(\cdot, t) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, +\infty) \\ y(\cdot, 0) = y_0 \in L^p(\Omega), & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (5.22)$$

ou Ω est un domaine ouvert borné de $\mathbf{R}^n$, $n \geq 1$ et dont la frontière $\partial\Omega$ est différentiable.

Prenons $X = L^p(\Omega)$ comme espace d'état. Ici l'hypothèse (H) est vérifiée (voir [36], p. 153). De plus, le semi-groupe $S(t)$ est de contractions et on a $\langle BS(t)y, J(S(t)y) \rangle = \|S(t)y\|^2$, pour tout $t \geq 0$ et $y \in X$. On déduit que l'implication (5.5) est vérifiée, puis on utilise le Théorème 5.3.1, pour affirmer que le contrôle $u(t) = -\|y(t)\|^2$ stabilise faiblement (5.22) dans $L^p(\Omega)$.

Remarquons que, pour $p > 2$ on obtient une convergence vers l'équilibre par rapport à la topologie de L^p — qui améliore la stabilité dans $L^2(\Omega)$.

Exemple 5.5.2 Soit $\Omega = [0, 1]$, et considérons l'équation de la chaleur suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(\cdot, t) = \frac{\partial^2 y(\cdot, t)}{\partial x^2} + u(t)By(\cdot, t) & \text{sur } \Omega \times (0, \infty) \\ y'(0) = y'(1) = 0 & t \geq 0 \\ y(\cdot, 0) = y_0 \in C([0, 1]) & \text{sur } \Omega, \end{cases} \quad (5.23)$$

ou $By = y$, pour tout $y \in C([0, 1])$.

Le domaine d'évolution est $\Omega = [0, 1]$ et l'opérateur A est définie par $Ay = \frac{\partial^2 y(\cdot, t)}{\partial x^2}$ de domaine

$$D(A) = \left\{ y \in C^2([0, 1]) \text{ tel que } y'(0) = y'(1) = 0 \right\}. \quad (5.24)$$

L'opérateur $T(t)$, $t \geq 0$ est un semi-groupe fortement continu sur $Y = C([0, 1])$ (voir [29], page 69).

$$(T(t)y)(s) = \int_0^1 k(s, r) y(r) dr \quad \text{pour } y \in C([0, 1]) \text{ et } s \in [0, 1], \quad (5.25)$$

où

$$k(s, r) = 1 + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-\pi^2 n^2 t} \cos(\pi n s) \cos(\pi n r) \quad (5.26)$$

Maintenant, d'après [7] nous obtenons l'expression de l'application de dualité $J : C([0, 1]) \rightarrow M([0, 1])$ (l'espace de toutes les mesures de Radon bornées sur $[0, 1]$) :

$$J(y) = \left\{ \mu \parallel y \parallel_{C([0, 1])}, \mu(y) \leq \max\{y(x_0) \operatorname{sign} y(x_0)\}, x_0 \in M_y \right\} \quad (5.27)$$

avec $\mu \in M([0, 1])$, $M_y = \{x_0 \in [0, 1] : |y(x_0)| = \parallel y \parallel_{C([0, 1])}\}$ et la fonction sign est donnée Pour tout $y \in C([0, 1])$ par :

$$\operatorname{sign}(y(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } y(x) > 0 \\ [-|y(x)|; |y(x)|] & \text{si } y(x) = 0 \\ -1 & \text{si } y(x) < 0 \end{cases} \quad (5.28)$$

- Soit y et z dans $C([0, 1])$ et soit $y^* \in J(y)$ et $z^* \in J(z)$. D'une part, de (2.5) et (5.27) il existe $\mu, \lambda \in M([0, 1])$ tels que

$$y^* = \mu \parallel y \parallel, \quad z^* = \lambda \parallel z \parallel, \quad \langle \mu, y \rangle = \parallel y \parallel \quad \text{et} \quad \langle \lambda, z \rangle = \parallel z \parallel. \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} \left| \langle By; y^* \rangle - \langle Bz; z^* \rangle \right| &= |\langle y; y^* \rangle - \langle z; z^* \rangle| \\ &= |\langle y; \mu \parallel y \parallel \rangle - \langle z; \lambda \parallel z \parallel \rangle| \\ &= | \parallel y \parallel \langle y; \mu \rangle - \parallel z \parallel \langle z; \lambda \rangle | \\ &= | \parallel y \parallel^2 - \parallel z \parallel^2 | \\ &= \left(\parallel y \parallel + \parallel z \parallel \right) \cdot \parallel y - z \parallel. \end{aligned}$$

En choisissant $k(\mu, \nu) = \mu + \nu$, on obtient la première hypothèse (5.3).

- Soit $y_n \in C([0, 1])$ tel que $y_n \rightharpoonup^* y$.
Supposons que pour tout $\Phi(t) \in J(S(t)y_n)$ on a

$$\langle BS(t)y_n, \Phi(t) \rangle \rightarrow 0.$$

En remarquant que

$$\langle BS(t)y_n, \Phi(t) \rangle = \|S(t)y_n\|^2,$$

on déduit que $\|S(t)y_n\| \rightarrow 0$.

De plus, puisque $y_n \rightharpoonup^* y$ et que $S(t)$ sont des opérateurs linéaires, on obtient $\|S(t)y_n\| \rightarrow y$. Donc, on trouve (5.4).

Finalement, selon le Theoreme 5.2.1, le contrôle

$$u(t) = - \sup_{y^*(t) \in J(y(t))} \langle By(t), y^*(t) \rangle$$

stabilise (5.23) pour la topologie faible étoile dans $C([0, 1])$.

5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la stabilisation des systèmes bilinéaires dans des espaces de Banach qui ne sont pas forcément réflexifs. Premièrement, en utilisant une forme équivalente de l'application de dualité, nous avons introduit un nouveau contrôle de type feedback. De plus, nous avons développé des conditions suffisantes pour garantir une stabilisation faible étoile et une stabilisation faible du système considéré.

Conclusion et perspectives

Chapitre 6

Conclusion et perspectives

Le présent travail s'intéresse à l'étude de la stabilisation des systèmes bilinéaires de dimension infinie, sur un Banach. Deux situations principales ont été distinguées.

Tout d'abord, nous avons étudié la question de stabilisation des systèmes bilinéaires dans le cas où l'espace d'état est réflexif. Nous avons montré qu'avec un choix approprié du contrôle (en boucle fermée) le système peut être rendu faiblement ou fortement voir exponentiellement stable et que dans ce dernier cas, le contrôle est robuste contre certaines perturbations de la dynamique et de l'opérateur de contrôle. Les conditions de stabilisation sont exprimées en terme d'inégalités d'observabilité faible ou forte.

Le second axe d'étude porte sur la stabilisation des systèmes bilinéaires dans le cas où l'espace d'état est un Banach séparable non nécessairement réflexif. Dans ce cas, nous avons introduit la notion de stabilité faible étoile sous une version faible de la condition d'observabilité faible, ainsi que la stabilité forte.

Ce travail a donné lieu aux papiers suivants : [10], [11] et [12].

Les développements futurs possibles en relation avec les problèmes abordés dans cette thèse peuvent être résumés comme suit :

- La stabilisation des systèmes bilinéaire non-homogène évoluant sur un espace de Banach.
- La stabilisation des systèmes bilinéaires en temps fini (voir, [71, 76, 83])

-
- La stabilisation des systèmes bilinéaires non bornés dans le cas d'un Hilbert (voir [14, 27]) dans le cas d'un espace de Banach réflexif [2]. La question de stabilité dans le cas d'un espace de Banach reste ouverte.
 - Pour La stabilisation des systèmes bilinéaires a retard dans un Hilbert nous renvoyons à [39, 40], la généralisation à un espace Banach est encore ouverte.

Bibliographie

- [1] W. AMES et B. PACHPATTE. *Inequalities for differential and integral equations*. T. 197. Elsevier, 1997.
- [2] K. AMMARI, S. EL ALAOUI et M. OUZAHRA. « Feedback stabilization of linear and bilinear unbounded systems in Banach space ». In : *Systems & Control Letters* 155 (2021), p. 104987.
- [3] K AMMARI et S NICAISE. *Stabilization of elastic systems by collocated feedback*. T. 2124. Springer, 2015.
- [4] K AMMARI et Mohamed OUZAHRA. « Feedback stabilization for a bilinear control system under weak observability inequalities ». In : *Automatica* 113 (2020), p. 108821.
- [5] Andrea BACCIOTTI. *Local stabilizability of nonlinear control systems*. World Scientific, 1992.
- [6] J. BALL et M. SLEMROD. « Feedback stabilization of distributed semilinear control systems ». In : *Applied Mathematics and Optimization* 5.1 (1979), p. 169-179.
- [7] V. BARBU. *Nonlinear differential equations of monotone types in Banach spaces*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [8] C. BARDOS, G. LEBEAU et J. RAUCH. « Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary ». In : *SIAM journal on control and optimization* 30.5 (1992), p. 1024-1065.
- [9] A BELMILOUDI. *Stabilization, optimal and robust control : Theory and Applications in Biological and Physical Sciences*. Springer Science & Business Media, 2008.

- [10] A. BENZAZA, A. BROURI et M. OUZAHRA. « Robust stabilization for affine control systems in Banach Spaces ». In : *Asian Journal of Control* (2022).
- [11] A. BENZAZA, H. LAFHIM et M. OUZAHRA. « Strong and weak $\star$ -star stabilization of bilinear systems on non reflexif Banach space ». In : *International Journal of Control* (2021).
- [12] A. BENZAZA et M. OUZAHRA. « Weak and strong stabilisation of bilinear systems in a Banach space ». In : *International Journal of Control* 92.12 (2019), p. 2784-2790.
- [13] L. BERRAHMOUNE. « Stabilization and decay estimate for distributed bilinear systems ». In : *Systems & control letters* 36.3 (1999), p. 167-171.
- [14] L. BERRAHMOUNE. « Stabilization of unbounded bilinear control systems in Hilbert space ». In : *Journal of mathematical analysis and applications* 372.2 (2010), p. 645-655.
- [15] L BERRAHMOUNE, Y ELBOUKFAOUI et M ERRAOUI. « Remarks on the feedback stabilization of system affine in control ». In : *European Journal of Control* 7.1 (2001), p. 17-28.
- [16] J BORWEIN et Jon VANDERWERFF. « Fréchet-Legendre functions and reflexive Banach spaces ». In : *Journal of Convex Analysis* 17.3-4 (2010), p. 915-924.
- [17] H. BOUNIT et H. HAMMOURI. « Stabilization of infinite-dimensional semilinear systems with dissipative drift ». In : *Applied Mathematics and Optimization* 37.2 (1998), p. 225-242.
- [18] H. BOUNIT et H. HAMMOURI. « Feedback stabilization for a class of distributed semilinear control systems ». In : *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications* 37.8 (1999), p. 953-969.
- [19] H. BREZIS. *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. T. 91. Dunod Paris, 1999.
- [20] C. BRUNI, G. DIPILLO et G. KOCH. « Bilinear systems : An appealing class of "nearly linear" systems in theory and applications ». In : *IEEE Transactions on automatic control* 19.4 (1974), p. 334-348.

- [21] N. BURQ et M. ZWORSKI. « Geometric control in the presence of a black box ». In : *Journal of the American Mathematical Society* 17.2 (2004), p. 443-471.
- [22] R CHABOUR, G SALLET et JC VIVAIDA. « Stabilization of Non Linear Two Dimensional Systems : A Bilinear Approach ». In : *Nonlinear Control Systems Design 1992*. Elsevier, 1993, p. 385-390.
- [23] F. CLARKE. *Optimization and Nonsmooth Analysis* Wiley New York. 1983.
- [24] M. G. CRANDALL et A. PAZY. « On the range of accretive operators ». In : *Israel Journal of Mathematics* 27.3-4 (1977), p. 235-246.
- [25] R. F. CURTAIN et H. ZWART. *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*. T. 21. Springer Science & Business Media, 2012.
- [26] WP DAYAWANSA et CF MARTIN. « Some sufficient conditions for the asymptotic stabilizability of three dimensional homogeneous polynomial systems ». In : *Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE. 1989, p. 1366-1369.
- [27] R. EL AYADI et M. OUZAHRA. « Feedback stabilization for unbounded bilinear systems using bounded control ». In : *IMA Journal of Mathematical Control and Information* 36.4 (2019), p. 1073-1087.
- [28] K. ENGEL et R. NAGEL. « One-parameter semigroups for linear evolution equations ». In : *Semigroup Forum*. T. 63. 2. Springer. 2001, p. 278-280.
- [29] KJ ENGEL et R NAGEL. « One-parameter semigroups for linear evolution equations. New York ». In : (2000).
- [30] M ESPANA et Ioan Doré LANDAU. « Reduced order bilinear models for distillation columns ». In : *Automatica* 14.4 (1978), p. 345-355.
- [31] M FABIAN, Vicente MONTESINOS et Václav ZIZLER. « Smoothness in Banach spaces. Selected problems. » In : *RACSAM* 100.1-2 (2006), p. 101-125.
- [32] M FABIAN, John HM WHITFIELD et Václav ZIZLER. « Norms with locally Lipschitzian derivatives ». In : *Israel Journal of Mathematics* 44.3 (1983), p. 262-276.

- [33] H. O. FATTORINI et H. O. EMERITUS. *Infinite dimensional optimization and control theory*. T. 54. Cambridge University Press, 1999.
- [34] W. FELLER. « On the generation of unbounded semi-groups of bounded linear operators ». In : *Annals of Mathematics* (1953), p. 166-174.
- [35] E. FERNÁNDEZ-CARA, E. ZUAZUA et al. « The cost of approximate controllability for heat equations : the linear case ». In : *Advances in Differential equations* 5.4-6 (2000), p. 465-514.
- [36] R. FRY et S. MCMANUS. « Smooth bump functions and the geometry of Banach spaces : a brief survey ». In : *Expositiones Mathematicae* 20.2 (2002), p. 143-183.
- [37] G GODEFROY, Vicente MONTESINOS et Václav ZIZLER. « Strong sub-differentiability of norms and geometry of Banach spaces ». In : *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae* 36.3 (1995), p. 493-502.
- [38] A HAC. « Design of disturbance decoupled observer for bilinear systems ». In : *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 114 (1992), p. 556-562.
- [39] Z HAMIDI, A ELAZZOUI et M OUZAHRA. « Feedback Stabilization of Delayed Bilinear Systems ». In : *Differential Equations and Dynamical Systems* (2021), p. 1-14.
- [40] Z HAMIDI, M OUZAHRA et A ELAZZOUI. « Strong Stabilization of Distributed Bilinear Systems with Time Delay ». In : *Journal of Dynamical and Control Systems* 26.2 (2020), p. 243-254.
- [41] A HARAUX. « Quelques propriétés des séries lacunaires utiles dans l'étude des vibrations élastiques ». In : *PITMAN RESEARCH NOTES IN MATHEMATICS SERIES* (1994), p. 113-113.
- [42] H. HARTWIG. « Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability. » In : *Zeitschrift Angewandte Mathematik und Mechanik* 71.1 (1991), p. 36-36.
- [43] H. HERMES. « Homogeneous coordinates and continuous asymptotically stabilizing feedback controls ». In : *Differential Equations, Stability and Control* 109.1 (1991), p. 249-260.

- [44] H. HERMES. « Homogeneous feedback controls for homogeneous systems ». In : *Systems & control letters* 24.1 (1995), p. 7-11.
- [45] E. HILLE. *Functional Analysis and Semi-Groups*. A.M.S., New York, 1948.
- [46] V. JURDJEVIC et J. P. QUINN. « Controllability and stability ». In : *Journal of differential equations* 28.3 (1978), p. 381-389.
- [47] N KALOUPSIDIS et J. TSINIAS. « Stability improvement of nonlinear systems by feedback ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 29.4 (1984), p. 364-367.
- [48] T KATO. « Nonlinear semigroups and evolution equations ». In : *Journal of the Mathematical Society of Japan* 19.4 (1967), p. 508-520.
- [49] M. KAWSKI. « Geometric homogeneity and stabilization ». In : *IFAC Proceedings Volumes* 28.14 (1995), p. 147-152.
- [50] A. KHAPALOV. *Controllability of partial differential equations governed by multiplicative controls*. Springer, 2010.
- [51] Mikhail V KHLÉBNIKOV. « Robust quadratic stabilization of bilinear control systems ». In : *IFAC-PapersOnLine* 48.11 (2015), p. 434-439.
- [52] Vilmos KOMORNIK. *Exact controllability and stabilization : the multiplier method*. T. 36. Elsevier Masson, 1994.
- [53] Vilmos KOMORNIK et Paola LORETI. *Fourier series in control theory*. Springer Science & Business Media, 2005.
- [54] Y. KOMURA. « Nonlinear semi-groups in Hilbert space ». In : *Journal of the Mathematical Society of Japan* 19.4 (1967), p. 493-507.
- [55] I. LASIECKA et D. TATARU. « Uniform boundary stabilization of semi-linear wave equations with nonlinear boundary damping ». In : *Differential and integral Equations* 6.3 (1993), p. 507-533.
- [56] I LASIECKA et R TRIGGIANI. *Control theory for partial differential equations : Volume 1, Abstract parabolic systems : Continuous and approximation theories*. T. 1. Cambridge University Press, 2000.
- [57] Gilles LEBEAU et Luc ROBBIANO. « Stabilisation de l'équation des ondes par le bord ». In : *Duke mathematical journal* 86.3 (1997), p. 465-491.

- [58] K. LIU, Z. LIU et B. RAO. « Exponential stability of an abstract non-dissipative linear system ». In : *SIAM journal on control and optimization* 40.1 (2001), p. 149-165.
- [59] G. LUMER et R. PHILLIPS. « Dissipative operators in a Banach space ». In : *Pacific Journal of Mathematics* 11.2 (1961), p. 679-698.
- [60] I. MIYADERA. « On the generation of strongly continuous semi-groups of operators ». In : *Tohoku Math. J* (1952), p. 109-114.
- [61] R. MOHLER. *Bilinear control processes : with applications to engineering, ecology and medicine*. Academic Press, Inc., 1973.
- [62] R. MOHLER et A. KHAPALOV. « Bilinear control and application to flexible ac transmission systems ». In : *Journal of Optimization Theory and Applications* 105.3 (2000), p. 621-637.
- [63] R. R. MOHLER et W. J. KOLODZIEJ. « An overview of bilinear system theory and applications ». In : *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 10.10 (1980), p. 683-688.
- [64] M. OUZAHRA. « Strong stabilization with decay estimate of semilinear systems ». In : *Systems & Control Letters* 57.10 (2008), p. 813-815.
- [65] M. OUZAHRA. « Stabilisation of infinite-dimensional bilinear systems using a quadratic feedback control ». In : *International Journal of Control* 82.9 (2009), p. 1657-1664.
- [66] M. OUZAHRA. « Exponential stabilization of distributed semilinear systems by optimal control ». In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 380.1 (2011), p. 117-123.
- [67] M. OUZAHRA. « Feedback stabilization of parabolic systems with bilinear controls. » In : *Electronic Journal of Differential Equations (EJDE)* 38 (2011), p. 1-10.
- [68] M. OUZAHRA. « Exponential stability of nondissipative linear system in Banach space and application to unbounded bilinear systems ». In : *Systems & Control Letters* 109 (2017), p. 53-62.
- [69] M. OUZAHRA. « Necessary and sufficient conditions for exponential stabilization of systems affine in controls ». In : *arXiv preprint arXiv :1710.02847* (2017).

- [70] M. OUZAHRA. « Uniform exponential stabilization of nonlinear systems in Banach spaces ». In : *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 43.12 (2020), p. 7311-7325.
- [71] M. OUZAHRA. « Finite-time control for the bilinear heat equation ». In : *European Journal of Control* 57 (2021), p. 284-293.
- [72] L. PANDOLFI et H. ZWART. « Stability of perturbed linear distributed parameter systems ». In : *Systems & control letters* 17.4 (1991), p. 257-264.
- [73] A. PAZY. « Applications to Partial Differential Equations—Linear Equations ». In : *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer, 1983, p. 206-229.
- [74] A. PAZY. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer-Verlag New York, 1983.
- [75] R. S. PHILLIPS. « On the generation of semigroups of linear operators. » In : *Pacific Journal of Mathematics* 2.3 (1952), p. 343-369.
- [76] A. POLYAKOV, J.M. CORON et L. ROSIER. « On homogeneous finite-time control for linear evolution equation in hilbert space ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 63.9 (2018), p. 3143-3150.
- [77] A. J. PRITCHARD et J. ZABCZYK. « Stability and stabilizability of infinite-dimensional systems ». In : *Siam Review* 23.1 (1981), p. 25-52.
- [78] L. ROSIER. « Etude de quelques problèmes de stabilisation ». Thèse de doct. Cachan, Ecole normale supérieure, 1993.
- [79] WJ RUGH. *Nonlinear system theory. Johns Hopkins Series in Information Sciences and Systems*. 1981.
- [80] D. L. RUSSELL. « Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations : recent progress and open questions ». In : *Siam Review* 20.4 (1978), p. 639-739.
- [81] E. RYAN. « Optimal feedback control of bilinear systems ». In : *Journal of Optimization Theory and Applications* 44.2 (1984), p. 333-362.
- [82] M. SLEMROD. « Stabilization of bilinear control systems with applications to nonconservative problems in elasticity ». In : *SIAM Journal on Control and Optimization* 16.1 (1978), p. 131-141.

- [83] M. SOGORÉ et C. JAMMAZI. « On the global finite-time stabilization of bilinear systems by homogeneous feedback laws. Applications to some PDE's ». In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 486.2 (2020), p. 123815.
- [84] R. TRIGGIANI. « On the stabilizability problem in Banach space ». In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 52.3 (1975), p. 383-403.
- [85] K WEI et A PEARSON. « On minimum energy control of commutative bilinear systems ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 23.6 (1978), p. 1020-1023.
- [86] D. WILLIAMSON. « Observation of bilinear systems with application to biological control ». In : *Automatica* 13.3 (1977), p. 243-254.
- [87] K. YOSIDA. « On the differentiability and the representation of one-parameter semi-groups of linear operators. » In : *Journal of the Mathematical Society of Japan* 1 (1978), p. 15-21.
- [88] M ZEMEK. « Strong monotonicity and Lipschitz-continuity of the duality mapping ». In : *Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica* 32.2 (1991), p. 61-64.
- [89] E. ZUAZUA. « Some problems and results on the controllability of partial differential equations ». In : *European Congress of Mathematics*. Springer. 1998, p. 276-311.
- [90] E. ZUAZUA. « Controllability of partial differential equations and its semi-discrete approximations ». In : *Discrete and continuous dynamical systems* 8.2 (2002), p. 469-517.