

# THÈSE

En vue de l'obtention du : *DOCTORAT*

**Structure de Recherche :** Physique des Hautes Énergies- Modélisation et Simulation  
**Discipline :** Physique  
**Spécialité :** Physique Quantique-Optique

Présentée et soutenue le : 23/07/2022 par :

Youness LAHLOU

## Mesure des corrélations quantiques dans des états Gaussiens bi-modes en cavités optomécaniques de type Fabry-Pérot.

### JURY

Mohamed BENNAI	PES, Université Hassan II, Faculté des Sciences, Ben M'Sik de Casablanca.	Président
Morad EL BAZ	PES, Université Mohammed V, Faculté des Sciences de Rabat.	Rapporteur/Examineur
Rachid AHL LAAMARA	PH, Université Mohammed V, Faculté des Sciences de Rabat.	Rapporteur/Examineur
Mohammed EL FALAKI	PH, Université Chouaib Doukkali, Faculté des Sciences de El Jadida.	Rapporteur/Examineur
Elmehdi SALMANI	PH, Université Mohammed V, Faculté des Sciences de Rabat.	Examineur
Mohammed DAOUD	PES, Université Ibn Tofail, Faculté des Sciences de Kenitra.	Directeur de thèse

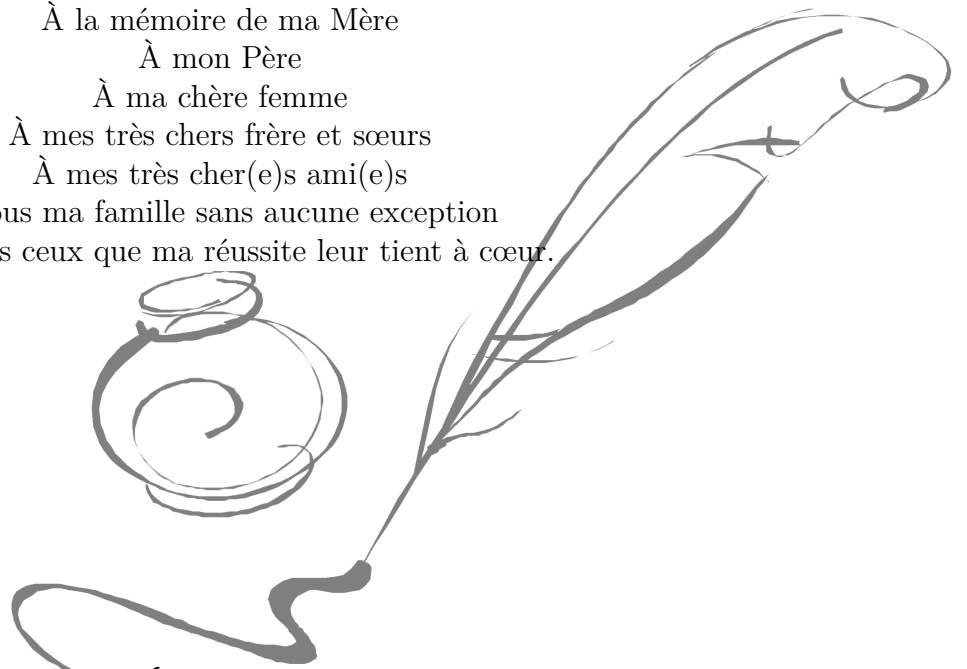
Année universitaire : 2021/2022



# *Dedicas*



À mes respectueux professeurs  
À la mémoire de ma Mère  
À mon Père  
À ma chère femme  
À mes très chers frère et sœurs  
À mes très cher(e)s ami(e)s  
À tous ma famille sans aucune exception  
Et à tous ceux que ma réussite leur tient à cœur.



*LAFLOU Youness*





## Remerciements



*Cette thèse de Doctorat a été effectuée au sein du Laboratoire de Physique des Hautes énergies Modélisation Et Simulation (LPHE-MS) de la Faculté des Sciences de Rabat, dirigé par Monsieur El Hassan SAIDI (PES), Professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat. Je tiens à le remercier chaleureusement pour m'avoir accueilli au LPHE-MS. Je le remercie également pour son aide, sa disponibilité, ainsi que pour les efforts qu'il a fournis durant nos études de Master.*

*Un grand merci également à mon encadrant Monsieur Mohammed DAOUD (PES), Professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté des Sciences Kenitra, que j'ai eu la chance de rencontrer lors de mon projet de fin d'étude au Laboratoire LPHE-MS et à qui je dédie également ce mémoire. Je le remercie pour son aide précieuse, pour la qualité de ses conseils, pour avoir toujours été là pour m'encourager, pour me soutenir, et pour m'avoir permis de reprendre confiance et m'avoir laissé la liberté nécessaire à l'accomplissement de mes travaux.*

*Ma sincère gratitude va également à Monsieur Mohamed BENNAI (PES), professeur à la faculté des sciences de ben Ben M'Sik de Casablanca, qui a accepté la présidence du jury, et pour avoir supporté les difficultés du voyage de Casablanca à Rabat pour être avec les membres du jury. Je vous prie d'accepter, Monsieur, l'expression de mon respect et de ma profonde gratitude.*

*Mes salutations vont également à Monsieur Morad EL BAZ (PES), professeur à la Faculté des Sciences de Rabat, pour avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse. Je le remercie également pour son aide, ses discussions, ses encouragements et sa motivation.*

*Mes remerciements s'adressent à Monsieur Rachid Ahl LAAMARA (PH), Professeur à la Faculté des Sciences de Rabat, pour avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse et qui m'a dirigé vers l'équipe de l'information quantique. Je le remercie également pour son aide, sa disponibilité, ses nombreux conseils qui m'ont guidé dans des moments critiques. Ses multiples propositions ont été autant d'éléments déterminants sans lesquels ce travail n'aurait certainement pas achevé.*

*Mes remerciements vont également à Monsieur Mohammed EL FALAKI (PH), Professeur à la Faculté des Sciences d'El Jadida, pour avoir accepté d'être le rapporteur de ma thèse ainsi que pour avoir supporté les difficultés du voyage d'El Jadida à Rabat pour être avec les membres du jury de cette thèse.*

---

*Ma sincère gratitude va également à Monsieur Elmehdi SALMANI (PH), Professeur à la Faculté des Sciences de Rabat, pour avoir accepté de faire partie des membres du jury de cette thèse. Je le remercie pour son intérêt et sa responsabilité en tant qu'examineur de ce travail. Je vous prie d'agréer, Monsieur, l'expression de mes sentiments distingués.*





## *Resumes*



L'optomécanique des cavités est un domaine en évolution rapide opérant à l'intersection de la mécanique quantique et de l'optique moderne. D'une manière générale, l'optomécanique quantique fournit un outil universel permettant d'obtenir le contrôle quantique du mouvement mécanique. Pour décrire la physique de base qui sous-tend les principaux aspects de l'optomécanique des cavités, il suffit de considérer un résonateur Fabry-Pérot à commande optique, dont l'une des extrémités du miroir est fixe et l'autre est liée de manière harmonique et peut osciller sous l'action de la pression de rayonnement du champ lumineux intracavité de fréquence  $\omega_L$ . Lorsque la pression de radiation pousse le miroir, elle modifie la longueur de la cavité, et donc l'intensité et la phase du champ lumineux intracavité. Cette thèse s'inscrit donc dans la volonté de comprendre la nature des corrélations quantiques entre les modes optiques et mécaniques dans les systèmes optomécaniques. Dans ce contexte, nous avons abordé les deux types de corrélations quantiques : l'intrication et la discordance quantique. Nous nous concentrons sur des cavités optomécaniques de type Fabry-Pérot pilotées par des lasers discrets et de lumière comprimée et le comportement stationnaire et dynamique de ces corrélations a été étudié en fonction de paramètres caractérisant le système étudié et son environnement. La dynamique des modes optiques et mécaniques est régie par l'équation de Heisenberg-Langevin. Nous montrons que le couplage optique-mécanique par la pression de radiation entre les modes optique et mécanique est important pour générer des différentes formes des corrélations quantiques. Les résultats ont montré que l'intrication ne peut être générées qu'en transférant les fluctuations quantiques de la lumière comprimée au mode optomécanique étudié.

**Mots-clefs :** Intrications Quantiques, Corrélations Quantiques, Cavités Optomécaniques de FP, Discordance Quantique Gaussienne.



## *Abstract*



**C**avity optomechanics is a rapidly evolving field operating at the intersection of quantum mechanics and modern optics. In general, quantum optomechanics provides a universal tool for achieving quantum control of mechanical motion. In cavity optomechanics, it is sufficient to consider an optically driven Fabry-Pérot resonator, where one of its extremities is a fixed mirror and the other one harmonically bounds and oscillates under interaction between the radiation pressure and the light field of frequency  $\omega_L$ . When the radiation pressure pushes the mirror, it changes the length of the cavity and then the intensity and the phase of the inter-cavity light field. This thesis is part of the effort to understand the nature of quantum correlations between optical and mechanical modes in optomechanical systems. We have addressed, in this direction, the two types of quantum correlations : entanglement and quantum discord. We focus on the optomechanical cavities of Fabry-Pérot, driven by discrete LASERs and squeezed light. The dynamic behavior of these correlations has been studied as a function of parameters characterizing the evolving systems under environment fluctuations. The dynamics associated with the both optical and mechanical modes are governed by the Heisenberg-Langevin equation. We show that the optical-mechanical coupling by the radiation pressure between the optical and mechanical modes is important to generate different forms of quantum correlations. The results show that entanglement can be generated by transferring the quantum fluctuations of the squeezed light to the optomechanical mode under study.

**Keywords :** Quantum Entanglement, Quantum Correlations, Cavity optomechanics of FP, Gaussian Quantum Discord.

# Table des matières

<b>Dedicas</b>	<b>i</b>
<b>Remerciements</b>	<b>ii</b>
<b>Résumé</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iv</b>
<b>Table des figures</b>	<b>xi</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xiii</b>
<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
<b>I Théorie de l'information quantique</b>	<b>6</b>
I.1 Introduction . . . . .	6
I.2 Théorie de l'information classique . . . . .	6
I.2.1 Notion de l'information classique . . . . .	7
I.2.2 Canaux de communication . . . . .	7
I.2.3 Entropie de Shannon . . . . .	7
I.2.4 Entropie conjointe et entropie conditionnelle . . . . .	8
I.2.5 Information mutuelle . . . . .	10
I.3 Théorie de l'information quantique . . . . .	11
I.3.1 Espace de Hilbert . . . . .	12

I.3.2	Notion de bit quantique (qubit) . . . . .	12
I.3.3	Sphère de Bloch . . . . .	13
I.3.4	Matrice densité . . . . .	15
I.3.4.1	Définition . . . . .	15
I.3.4.2	Matrice densité réduite . . . . .	16
I.3.5	État pur et état mixte . . . . .	17
I.3.5.1	État pur . . . . .	17
I.3.5.2	État mixte . . . . .	17
I.3.6	Opérateurs de mesure . . . . .	19
I.3.7	Entropie de Von Neumann . . . . .	20
I.4	Étude de L'intrication quantique dans les systèmes à variables discrètes . . . . .	21
I.4.1	Paradoxe EPR . . . . .	21
I.4.2	Intrication quantique dans les systèmes bipartites . . . . .	22
I.4.2.1	Intrication des états à deux qubits . . . . .	22
I.4.2.2	Critère d'inséparabilité . . . . .	23
I.4.2.3	Décomposition de Schmidt . . . . .	24
I.4.3	Fonctions des mesures d'intrication . . . . .	24
I.4.3.1	Entropie d'intrication . . . . .	24
I.4.3.2	Concurrence et Entropie de formation . . . . .	25
I.4.3.3	Discorde quantique . . . . .	27
I.4.3.4	Mesure géométrique de la discorde quantique . . . . .	30
I.4.3.5	Monogamie d'intrication . . . . .	33
I.4.3.6	Concept de la monogamie d'intrication . . . . .	34
I.4.3.7	Monogamie de l'intrication dans un système à trois qubits . . . . .	35
I.5	Conclusion . . . . .	37
<b>II</b>	<b>Information quantique avec variables continues</b>	<b>38</b>
II.1	Introduction . . . . .	38
II.2	Introduction au système des variables continues . . . . .	39

II.2.1	Quantification du champ électromagnétique . . . . .	39
II.2.2	Description de l'espace de phase . . . . .	41
II.3	États gaussiens de systèmes à variables continues . . . . .	43
II.4	Évolution des états Gaussiens et transformations symplectiques. . . . .	43
II.4.1	Transformations symplectiques . . . . .	44
II.5	États gaussiens bimodes . . . . .	45
II.6	Information quantique avec variables continues . . . . .	46
II.6.1	Entropies et information mutuelle . . . . .	46
II.6.1.1	Entropie de Von Neumann . . . . .	46
II.6.1.2	Entropie des états gaussiens . . . . .	46
II.6.1.3	Information mutuelle et entropies conditionnelles . . . . .	48
II.6.2	Entropie de Rényi . . . . .	48
II.7	Séparabilité des états Gaussiens . . . . .	49
II.8	Quantification de l'intrication bipartite dans les états gaussiens. . . . .	50
II.8.1	Intrication de formation pour les états Gaussiens . . . . .	51
II.8.2	Négativité logarithmique . . . . .	51
II.9	Intrication quantique d'états gaussiens à deux modes. . . . .	52
II.9.1	Paramétrisation symplectique des états gaussiens à deux modes . . . . .	52
II.9.1.1	transposition partielle et négativités. . . . .	52
II.9.2	Intrication de formation pour les états Gaussiennes symétriques . . . . .	53
II.10	Corrélation quantique au-delà de l'intrication . . . . .	54
II.10.1	Discorde quantique Gaussienne . . . . .	54
II.10.2	Rényi-2 comme mesures des corrélations. . . . .	55
II.10.3	Cohérence quantique Gaussienne . . . . .	56
II.10.4	Intrication intrinsèque Gaussien . . . . .	57
II.10.5	Discorde gaussien de Hellinger . . . . .	58
II.11	Conclusion . . . . .	59
<b>III</b>	<b>Systèmes Optomécanique quantique en cavité</b>	<b>60</b>

III.1 Introduction . . . . .	60
III.2 Opto-mécanique quantique en cavité . . . . .	61
III.2.1 Qu'est-ce que l'optique quantique "Optomécanique" ? . . . . .	61
III.2.2 Systèmes optomécaniques . . . . .	61
III.2.3 Cavité Fabry-Pérot (F-P) à deux miroirs (classique) . . . . .	62
III.2.4 Expression de la finesse de la cavité F-P . . . . .	63
III.2.5 Stabilité de la cavité F-P . . . . .	63
III.2.6 Phénomène de bistabilité . . . . .	63
III.2.7 Cavité Fabry-Pérot optomécanique . . . . .	64
III.2.7.1 Description générale . . . . .	64
III.2.7.2 Paramètres optomécanique . . . . .	65
III.3 Principes de couplage opto-mécanique . . . . .	66
III.3.1 Description du couplage optomécanique . . . . .	66
III.3.2 Couplage optomécanique par pression de radiation . . . . .	67
III.3.3 Corrélations quantiques dans les systèmes optomécaniques . . . . .	67
III.4 L'Hamiltonien optomécanique . . . . .	68
III.4.1 Hamiltonien piloté dans un repère tournant . . . . .	70
III.4.2 Force de pression des radiations . . . . .	70
III.5 Équations quantiques de Heisenberg-Langevin du mouvement . . . . .	71
III.6 Linéarisation des équations de Langevin du mouvement . . . . .	72
III.7 Conclusion . . . . .	72
<b>IV Contributions d'étude des corrélations quantique des états Gaussiens bi-</b> <b>    modes dans les systèmes opto-mécanique</b> . . . . .	<b>74</b>
IV.1 Cohérence quantique versus corrélations non classiques en opto-mécanique . . . . .	76
IV.1.1 Introduction . . . . .	76
IV.1.2 Modèle et Hamiltonien . . . . .	76
IV.1.3 Linéarisation des équations quantiques de Langevin . . . . .	78
IV.1.4 Matrice de covariance en régime permanent . . . . .	79
IV.1.5 Résultats et discussion . . . . .	80

---

IV.1.6 Conclusion . . . . .	82
IV.2 Intrication intrinsèque Gaussien et corrélations quantiques plus général de deux oscillateurs mécaniques . . . . .	83
IV.2.1 Introduction . . . . .	85
IV.2.2 Système opto-mécanique à double cavité . . . . .	85
IV.2.2.1 Hamiltonien du système . . . . .	85
IV.2.2.2 Dynamique du système . . . . .	86
IV.2.3 Solutions des équations quantiques de Langevin . . . . .	87
IV.2.3.1 Cas du régime non adiabatique . . . . .	87
IV.2.3.2 Cas du régime adiabatique . . . . .	88
IV.2.4 Matrice de covariance . . . . .	88
IV.2.5 Résultats et discussions . . . . .	89
IV.2.5.1 Cas du régime non adiabatique . . . . .	89
IV.2.5.2 Cas du régime adiabatique . . . . .	91
IV.2.6 Conclusion . . . . .	92
<b>V Conclusion générale et perspectives</b>	<b>94</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>97</b>

# Table des figures

I.1	L'entropie $H(p)$ en fonction de la probabilité $p$ . . . . .	8
I.2	Une visualisation théorique des différents types d'entropies . . . . .	9
I.3	L'information mutuelle . . . . .	11
I.4	La représentation de la sphère de Bloch d'un qubit. Tout qubit $ \psi\rangle$ admet une représentation en termes de deux angles $\theta$ et $\varphi$ où $0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \varphi < 2\pi$ . . . . .	14
I.5	Représentation des trois états de bases orthonormées sur la sphère de Bloch, ici $ i\rangle =  \odot\rangle$ et $ -i\rangle =  \ominus\rangle$ , $ 0\rangle =  \uparrow\rangle$ et $ 1\rangle =  \downarrow\rangle$ . . . . .	15
I.6	Caractérisation de l'intrication bipartites partagée dans le systèmes à trois qubits : l'inégalité Coffman-Kundu-Wootters. . . . .	33
III.1	Exemple de dispositifs optomécaniques avec a)- miroir de Bragg, b)- membrane en SiN, c)- micro-tore en silice, d)- cavité à cristaux photoniques, e)- micro-membrane couplé à une cavité micro-ondes. . . . .	62
III.2	Lumière laser entrant dans une cavité de Fabry-Pérot classique ou interféromètre de Fabry-Pérot. . . . .	62
III.3	Schéma d'une Cavité optomécanique Fabry-Pérot avec un mode optique caractérisé par $\omega_c$ la fréquence de cavité et $(a, a^+)$ l'opérateur d'annihilation et de création est entraîné par un laser de fréquence $\omega_L$ et de puissance $P$ et $\kappa$ le de taux de dissipation, un mode mécanique caractérisé par $\omega_m$ la fréquence mécanique et $(b, b^+)$ l'opérateur d'annihilation et de création et $\gamma$ le de taux de d'amortissement. L'opérateur $a^{in}$ et $b^{in}$ représente le bruit affectant le mode optique(mécanique). . . . .	65
III.4	Schéma d'un système optomécanique à cavité Fabry-Pérot (FP) pilotée par laser. Le miroir gauche est fixe et le miroir droit est mobile. . . . .	66
III.5	Les corrélations optomécaniques sont mesurées en envoyant deux faisceaux dans la cavité à miroir mobile, un faisceau signal intense dont les fluctuations de la pression de radiation déplacent le miroir, et un faisceau sonde qui détecte les mouvements résultants. . . . .	68

III.6 Schéma de l'interaction optomécanique. Le champ optique $\hat{a}_{in}$ est couplé à la cavité optique avec une fréquence de résonance $\omega_c$ et un taux de décroissance $\kappa$ . Le déplacement de l'oscillateur mécanique $\hat{q}$ avec une fréquence de résonance $\omega_m$ et un taux de décroissance $\gamma$ modifie la fréquence de résonance de la cavité et donc le champ intracavité $\hat{a}$ . Le déplacement mécanique transmis au champ optique est lu à travers le champ de sortie de la cavité $\hat{a}_{out}$ . . . . .	69
IV.1 Un système optomécanique à double cavité pompé par de la lumière comprimée et piloté par des sources laser cohérentes. . . . .	76
IV.2 EoF(ligne verte), GQD(ligne bleue) et QC(ligne rouge) en fonction du nombre de phonons thermiques $n_{th}$ pour deux valeurs de compression $r$ . [(a)-(b)] et [(c)-(d)] correspondent respectivement aux sous-systèmes mécanique et optique. Nous avons utilisé $C = 34$ et $\gamma/\kappa = 0,05$ . . . . .	81
IV.3 EoF(ligne verte), GQD(ligne bleue) et QC(ligne rouge) versus la coopérativité optomécanique $C$ pour deux valeurs de $n_{th}$ . [(a)-(b)] et [(c)-(d)] correspondent respectivement aux sous-systèmes mécanique et optique. Nous avons utilisé $r = 1,5$ et $\gamma/\kappa = 0,05$ . . . . .	82
IV.4 Description schématique du système optomécanique considéré, comprenant deux cavités Fabry-Pérot pompées par des lasers cohérents et alimentées par de la lumière comprimée bimode. . . . .	86
IV.5 The Gaussian intrinsic entanglement (GIE) $E_{\downarrow}^G(\rho_{AB})$ (panel (a)) and the Gaussian Hellinger discord (GHD) $D_H(\hat{\rho}_{AB})$ (panel (b)) of the two mechanical modes $A$ and $B$ versus the thermal bath temperature $T$ for different values of the squeezing parameter $r$ . We used $C = 34$ and $\frac{\gamma}{\kappa} = 0.05$ . . . . .	90
IV.6 L'intrication intrinsèque Gaussienne (GIE) $E_{\downarrow}^G(\rho_{AB})$ (panneau (a)) et la discordie Gaussienne de Hellinger (GHD) $D_H(\hat{\rho}_{AB})$ (panneau (b)) des deux modes mécaniques $A$ et $B$ contre la coopérativité optomécanique $C$ pour différentes valeurs du nombre moyen des photons thermiques $n_{th}$ . Nous avons utilisé $n_{th}, \frac{\gamma}{\kappa} = 0.01$ et $r = 2$ . . . . .	91
IV.7 L'intrication intrinsèque gaussien (GIE) $E_{\downarrow}^G(\rho_{AB})$ des deux modes mécaniques $A$ et $B$ versus le température du bain thermal $T$ . $r = 0,5$ dans le panneau (a), $r = 1$ dans le panneau (b). Nous avons utilisé $C = 34$ et $\frac{\gamma}{\kappa} = 0,05$ . . . . .	92
IV.8 L'intrication intrinsèque Gaussienne (EIG) $E_{\downarrow}^G(\rho_{AB})$ des deux modes mécaniques $A$ et $B$ en fonction de la coopérativité optomécanique $C$ . $n_{th} = 16$ dans le panneau (a), $n_{th} = 22$ dans le panneau (b). Nous avons utilisé $\frac{\gamma}{\kappa} = 0.05$ et $r = 2$ . . . . .	92

# Liste des tableaux

I.1	Propriétés de l'entropie conjointe et conditionnelle.. . . . .	10
I.2	Propriétés de l'information mutuelle. . . . .	11
I.3	Exemples des systèmes présentant la structure de Qubit . . . . .	12
I.4	Correspondance entre bit quantique et bit classique. . . . .	13
III.1	Paramètres expérimentaux pour des échantillons utilisé dans des expériences d'optomécaniques de cavité, Avec la fréquence du résonateur mécanique $\omega_m$ et sa masse $m$ , le taux de dissipation mécanique(optique) $\gamma_m = \omega_m/Q_m$ ( $\kappa = \omega_c/Q_c$ ), le facteur de suppression de bande latérale $\kappa/\omega_m$ déterminant la capacité à réaliser un refroidissement au voisinage de l'état fondamental et enfin le taux de couplage optomécanique $g_0$ . . . . .	65

# Introduction Générale

Au début du vingtième siècle, les physiciens ont été confrontés à des faits incroyables concernant les observations (mesures) dans le monde microscopique. Ils ont découvert les propriétés contradictoires de la lumière, c'est-à-dire le fait que la lumière possède à la fois des propriétés d'onde et de particule. En effet, la lumière se comporte comme une collection de particules d'énergie minimale appelées photons. Dans les mesures utilisant la lumière, nous observons la lumière après ses interactions avec la cible. Par exemple, lorsque nous mesurons la position de la matière, nous détectons des photons après des interactions avec eux. Comme les photons possèdent une quantité de mouvement et de l'énergie, la vitesse de l'objet est inévitablement perturbée [1]. En particulier, cette perturbation ne peut être ignorée lorsque la masse de l'objet mesuré est faible par rapport à l'énergie du photon. Ainsi, même si nous mesurons la vitesse d'un objet après avoir mesuré sa position, nous ne pouvons pas connaître la vitesse d'un objet précisément parce que la vitesse d'origine a été perturbée par la première mesure. Pour la même raison, si nous mesurons d'abord la vitesse, sa position sera perturbée. Par conséquent, notre concept naïf de mesure parfaite ne peut être appliqué, même en principe. Dans le monde macroscopique, la masse des objets est beaucoup plus importante que la quantité de mouvement des photons. Nous pouvons donc effectivement ignorer la perturbation causée par les collisions des photons. Bien que nous considérons qu'une mesure parfaite est possible dans ce monde macroscopique, la même intuition ne peut être appliquée au monde microscopique. En plus de l'impossibilité de mesures parfaites dans le monde microscopique, aucune particule microscopique n'a à la fois une position et une vitesse déterminées. Ce fait est profondément lié à la dualité onde-particule dans le monde microscopique et peut être considéré comme l'autre côté de l'inexistence de mesures parfaites. Ainsi, il est impossible de comprendre complètement ce monde microscopique en se basant sur nos intuitions macroscopiques, mais il est possible de prédire de manière probabiliste sa valeur mesurée en se basant sur la formulation mathématique de la théorie quantique [2].

La mécanique quantique [3–5] est une description de la nature qui a été constamment testée et remise en question pendant 100 ans sans jamais se révéler fausse. Elle décrit très précisément le comportement de la nature à l'échelle microscopique. Cependant, en dépit de son grand succès, elle ne semble pas encore achevée, car elle ne repose pas sur des principes physiques clairs, contrairement, par exemple, à la relativité restreinte [6] qui peut être dérivée de deux principes très séduisants : les lois de la physique sont les mêmes dans tous les cadres inertiels et la vitesse de la lumière est identique dans le vide pour tous les cadres inertiels. La mécanique quantique [3–5], en revanche, est actuellement basée sur une série d'axiomes mathématiques dont la signification physique est très peu claire. Un objectif ambitieux pour les physiciens serait certainement de reformuler ces axiomes en termes plus physiques et naturels. Un moyen possible d'atteindre cet objectif ambitieux est d'étudier les liens entre la

mécanique quantique[3–5] et la théorie de l'information [7–9]. Plus précisément, comprendre la manière dont le monde microscopique est observé a besoin d'une considération quantitative du point de vue de "l'information". Ainsi, pour formuler clairement ce problème, nous avons besoin de diverses théories et techniques concernant l'information. Par conséquent, l'approche traditionnelle de la mécanique quantique est insuffisante. D'autre part, les théories relatives à l'information ne s'intéressent qu'au traitement des données et non au processus d'extraction de l'information. Par conséquent, dans ce contexte de mécanique quantique, nous devons prendre en compte le processus d'obtention d'informations à partir de particules microscopiques (mécaniques quantiques). Nous devons nous ouvrir au nouveau domaine de recherche qu'est la science de l'information quantique [1, 10]. On peut dire que la théorie de l'information a été découverte par Claude Shannon dans les années quarante 21 et que son ouvrage fondamental [11] a ouvert un nouveau champ de recherche qui a notamment conduit à la société de l'information dans laquelle nous vivons aujourd'hui. Ce développement a également été rendu possible grâce aux possibilités technologiques offertes par la mécanique quantique, sans lesquelles le transistor, le circuit intégré ou le laser, par exemple, n'auraient pas été inventés. En un sens, il est intéressant de constater que notre société de l'information et de la communication, où l'Internet ou les communications intercontinentales semblent évidents et où la planète est devenue un petit village, est la conséquence de deux domaines scientifiques, la mécanique quantique [3–5] et la théorie de l'information [7–9], qui ont travaillé séparément au lieu de combiner leurs efforts. En effet, la mécanique quantique était nécessaire pour construire les outils rendant tout cela possible et la théorie de l'information nous indique comment utiliser ces outils pour atteindre nos objectifs. Ce domaine de la théorie d'information quantique [12, 13] doit être divisé en deux parties : (1) science de ordinateur quantique [14], dans laquelle les algorithmes et la complexité sont analysés à l'aide d'une approche basée sur l'informatique, et (2) la théorie de l'information quantique [12, 13], dans laquelle divers protocoles sont examinés du point de vue de la théorie de l'information et leurs propriétés et limites sont étudiées. Plus précisément, étant donné que la théorie de l'information quantique se concentre sur la quantité d'informations accessibles, elle peut être considérée comme la théorie de l'évaluation quantitative du processus d'extraction d'informations, comme mentionné ci-dessus. Notre thèse actuelle s'inscrit dans le cadre du traitement de la théorie de l'information quantique et ne concerne pas l'informatique quantique et ses opérations.

Dans tout protocole visant à manipuler ou à transmettre des informations, les symboles sont codés dans les états d'un système physique tel qu'un photon polarisé ou un atome. Si l'on permet à ces systèmes d'évoluer selon les lois de la mécanique quantique, de nouveaux types de traitement de l'information deviennent possibles. Parmi ceux-ci figurent la cryptographie quantique [15], la téléportation [16, 17], l'accélération exponentielle de certains calculs et les mesures de haute précision. D'une certaine manière, la mécanique quantique permet un traitement de l'information qui ne pourrait être effectué de manière classique. La technologie de l'information quantique a franchi des étapes remarquables au cours des trois dernières décennies et promet des avancées encore plus révolutionnaires dans les trois prochaines. Des propositions pionnières comme la cryptographie [15] et la téléportation quantiques [16, 17] ont été démontrées dans d'innombrables expériences avec divers matériels quantiques et sont entrées dans une phase d'exploitation commerciale. Le moment semble venu pour les dispositifs d'informatique quantique sélectionnés de répondre aux attentes élevées qu'ils suscitent [18]. Traditionnellement, deux approches principales du traitement de l'information quantique ont été suivies. D'une part, une approche "numérique", selon laquelle l'information est codée dans des systèmes possédant un nombre discret et fini de degrés de liberté, appelés qubits ou qudits. Des exemples typiques d'implémentation de qubits sont les spins nucléaires d'atomes individuels dans une molécule, la polarisation des photons, les états fondamentaux/excité d'ions piégés, etc. Parallèlement, une

approche "analogique" a également été conçue, basée sur le codage de l'information quantique et des corrélations dans des degrés de liberté à spectre continu (variables continues). L'exemple le plus connu d'information quantique continue est l'oscillateur harmonique quantifié [10, 19], qui peut être décrit par des variables continues telles que la position et la quantité de mouvement (une description alternative est la représentation discrète, mais à dimension infinie en termes d'états énergétiques). Parmi les exemples de systèmes quantiques à variables continues figurent les modes quantifiés de systèmes bosoniques tels que les différents degrés de liberté du champ électromagnétique [10, 20], les modes vibratoires des solides, les ensembles atomiques, les spins nucléaires dans un point quantique, les jonctions Josephson et les condensats de Bose-Einstein. Parce qu'ils fournissent la description quantique du champ électromagnétique qui se propage, les systèmes quantiques à variation continue sont particulièrement pertinents pour la communication quantique et les techniques de détection, de détection et d'imagerie à limites quantiques. De même, le codage atomique ou à l'état solide des systèmes continus-variables peut être utilisé pour effectuer des calculs quantiques. Les systèmes bosoniques sont non seulement utiles pour la modélisation physique du calcul quantique basé sur les qubits (par exemple, les modes vibrationnels quantifiés des ions incarnent le moyen de communication entre les qubits dans les ordinateurs quantiques à piège à ions), mais ils permettent également de nouvelles approches du calcul quantique. Cette seconde approche a connu un succès considérable en raison de sa polyvalence, les implémentations englobant souvent différents systèmes physiques, par exemple la quadrature de la lumière et les moments magnétiques collectifs d'ensembles atomiques, qui obéissent à la même algèbre canonique.

Les principaux outils d'analyse du traitement de l'information quantique à variation continue sont les états gaussiens et les transformations Gaussiennes [21, 22]. Les états gaussiens constituent une famille particulière de systèmes à variation continue et sont définis par des fonctions de Wigner Gaussiennes [23]. Cette famille d'états est relativement facile à générer et à manipuler expérimentalement. De plus, d'un point de vue théorique, elle fournit des outils avantageux pour coder et traiter l'information quantique avec des variables continues en raison de la limitation des degrés de liberté [10, 22], qui se limite uniquement au vecteur de déplacement et à la matrice de covariance. De plus, la caractéristique Gaussienne de cette classe d'états quantiques peut être préservée lors de certaines transformations, par exemple les transformations unitaires telles que celles associées aux formes symplectiques dans l'espace des phases [10, 24], ou les transformations non unitaires telles que celles décrivant la dynamique bruyante, tant markovienne [25] que non markovienne [26], produite par l'interaction inévitable avec l'environnement. Ces dernières années, une attention croissante a été accordée à cette classe d'états, car ils jouent un rôle majeur dans l'information quantique à variables continues [10, 22, 27]. Les états cohérents [28] et les états thermiques des systèmes bosoniques sont gaussiens [29, 30], tout comme les états créés à partir de ces états par amplification et perte linéaire. Fréquemment, les opérations non linéaires peuvent être approximées avec un haut degré de précision par des transformations Gaussiennes. Par exemple, comprimé est un processus qui diminue la variance d'une variable continue (position ou champ électrique, par exemple) tout en augmentant la variance de la variable conjuguée (quantité de mouvement ou champ magnétique). Pression linéaire est Gaussienne et pression non linéaire peut généralement être approché au premier ordre par un processus linéaire gaussien. De plus, toute transformation d'un état à variable continue peut être construite par des processus gaussiens ainsi que par l'application répétée d'un processus non linéaire unique tel que la photodétection. Sans exagération, les états gaussiens quantiques sont l'un des éléments constitutifs des systèmes d'information quantique à variables continues qui ont été utilisés avec succès pour réaliser des progrès incroyables au cours de la dernière décennie dans la technologie optique quantique ou optomécanique. Les membres des communautés de l'optique quantique et de la physique atomique sont familiers avec les aspects

fondamentaux des états et transformations quantiques gaussiens.

L'optique quantique a fourni les outils permettant d'étudier les fondements de la mécanique quantique avec une précision exquise. L'interaction d'un atome isolé et d'un champ lumineux a fourni le test idéal pour les idées controversées. Par exemple, les "sauts quantiques" sont une manifestation de la discontinuité inhérente au processus de mesure quantique [31, 32], qui peut être directement observée. L'un des concepts clés de l'optique quantique est l'état cohérent, introduit par Schrödinger, et utilisé par Glauber et Sudarshan pour étudier la cohérence d'ordre élevé de la lumière [33, 34]. La lumière comprimée [? ], dans laquelle le bruit quantique est réduit dans une quadrature au détriment du bruit accru dans l'autre quadrature, a également joué un rôle central dans le développement de l'optique quantique. Dès le début, l'optique quantique a combiné l'étude de la physique fondamentale avec des applications technologiques. La lumière comprimée, par exemple, permet un nouveau type de mesure de précision, avec des applications, par exemple, dans la détection des ondes gravitationnelles [35] et pour les communications sans bruit [36]. Le modèle de Jaynes-Cummings (MCJ) [37, 38], qui décrit l'interaction entre un atome à deux niveaux et un mode unique du champ électromagnétique, a permis d'étudier les propriétés non classiques de l'interaction atome-champ. L'une des conséquences importantes de la quantification du champ a été l'effondrement et la renaissance des oscillations de Rabi [39], qui ont été testées dans un dispositif d'électrodynamique quantique (QED) à cavité [40, 41]. Une approche de la théorie de l'information [42] pour la MOC a montré que le champ de la cavité, initialement préparé dans un état cohérent de grande amplitude, devient un état de superposition cohérent après un certain temps d'interaction [43, 44]. Alors que l'optique quantique se concentre sur la physique de la lumière et des atomes, l'information quantique se concentre sur les propriétés et les applications du qubit, parmi ces propriétés figurent l'intrication et les corrélations quantiques.

Les corrélations quantiques, en tant que fondement de la physique quantique, jouent un rôle crucial dans la source de la théorie quantique et ont également de grandes applications dans la technologie quantique. D'autre part, la génération d'effets quantiques à diverses échelles microscopiques et macroscopiques a fait l'objet d'une grande attention [1, 45]. Avec l'élargissement récent des techniques de refroidissement par laser, la production de composants optiques à faible perte et les oscillateurs mécaniques à haute précision, il est maintenant possible de mettre en place des résonateurs nanomécaniques, qui peuvent être contrôlés avec une très grande précision et peuvent encore atteindre le stade quantique des oscillations [46]. En particulier, l'intrication quantique, qui est une sorte de corrélation quantique, a été envisagée dans divers systèmes quantiques [47]. En outre, elle est identifiée comme l'une des distinctions entre les mondes classique et quantique. Cependant, elle devient une ressource fondamentale pour divers algorithmes quantiques tels que la téléportation quantique [48, 49], le codage dense quantique [50, 51], la cryptographie quantique [15] et l'informatique quantique. En dépit d'un développement considérable, il existe encore un certain nombre de questions sans réponse, malgré les évolutions de ces dernières années. En particulier, la catégorisation et l'existence de l'intrication pour les systèmes quantiques multipartites sont loin d'être complètes [52]. Par conséquent, la vitalité de l'intrication exige que deux questions soient abordées : la première est la génération réussie de l'intrication entre deux ou plusieurs sous-systèmes et la seconde est le problème de la dégradation de l'intrication avec le temps en raison de la décohérence qui est le résultat de l'interaction avec les environnements. La question de la génération de l'intrication a été abordée à plusieurs reprises et il existe de nombreux schémas réalisables expérimentalement à cette fin [53]. Ainsi, une fois que l'intrication créée entre deux ou plusieurs sous-systèmes n'est pas très bien protégée de l'environnement. L'intrication étant une quantité très cassable, elle peut être totalement détruite lorsque le système quantique interagit avec l'environnement. D'autre part, une préoccupation intéressante est récemment devenue très importante : démontrer comment

générer une intrication mécanique macroscopique. L'intrication macroscopique peut présenter des faits spécifiques pour les phénomènes quantiques [54–56] et peut expliquer le passage du quantique au classique, ainsi que la limite entre les champs quantiques et classiques [57–59]. En outre, la génération d'intrication quantique dans un système mécanique macroscopique constitue un champ d'investigation intéressant et a attiré l'attention de nombreux chercheurs. Plusieurs schémas ont été proposés pour créer une intrication quantique dans divers résonateurs mécaniques.

De cette façon, l'optomécanique des cavités [60, 61] peut offrir une base normale pour introduire une corrélation entre les résonateurs mécaniques puisque l'optomécanique des cavités explore une interaction naturelle entre les degrés de liberté mécaniques et optiques. Cette caractéristique essentielle des systèmes opto-mécaniques est au cœur de la motivation pour étudier la création d'intrication mécanique macroscopique dans un système optomécanique à deux cavités. Récemment, il a été démontré que la possibilité de générer des états non-classiques des modes optiques et mécaniques des cavités optiques est éloignée l'une de l'autre [62, 63]. Néanmoins, le degré de dynamique d'intrication n'était pas important. D'autre part, pour augmenter la quantité d'intrication, il a été proposé de placer des amplificateurs paramétriques optiques à l'intérieur de deux systèmes optomécaniques couplés et spatialement séparés [64]. Cependant, grâce aux nouveaux résultats d'expériences avancées, nous pouvons générer une quantité importante d'intrication stationnaire entre des systèmes optomécaniques couplés sans avoir recours à une situation complexe. Dans cette thèse, nous étudions les corrélations non classiques et l'intrication entre des systèmes optomécaniques couplés.

Notre thèse est organisée comme suit : Dans le premier chapitre (I), nous verrons quels concepts théoriques nécessaires à la compréhension de la théorie de l'information quantique. Dans une première partie je présente la description la théorie de l'information quantique classique. La deuxième partie présente les outils théoriques de base de la théorie de l'information quantique. La troisième partie sera alors naturellement la description d'étude de L'intrication quantique dans les systèmes à variables discrètes.

Le second chapitre est consacré à l'information quantique avec variables continues (II). Après une rapide introduction sur les systèmes à variables continues, nous présenterons les états gaussiens des systèmes à variables continues. Viendra ensuite la partie sur la quantification de l'intrication quantique d'états gaussiens, puis celle concernant sa caractérisation. La dernière partie est consacrée à la description des corrélation quantique au-delà de l'intrication.

Le troisième chapitre est consacré aux outils de base de l'optomécanique quantique dans les cavités (III). Dans la première partie, nous commençons par la présentation de quelques dispositifs optomécaniques qui peuvent être utilisés dans l'investigation de certains phénomènes purement quantiques. Dans la deuxième partie, nous passerons à une description détaillée d'une cavité optomécanique de type Fabry-Pérot en discutant la notion fondamentale de mode de champ. La troisième partie est consacrée à la description des principes du couplage optomécanique par pression de radiation. Dans la dernière partie, nous présenterons l'Hamiltonien optomécanique décrivant un ensemble de modes optiques et ceux de nature mécanique. Cet Hamiltonien sera utilisé ultérieurement dans les équations de Heisenberg-Langevin régissant l'évolution des modes optiques et mécaniques dans une cavité.

Enfin le cinquième chapitre présente les résultats obtenus sur le couplage optomécanique (IV). Y sont présentés les effets observés à différentes températures et pressions de la cavité et différentes puissances du faisceau laser. Finalement, nous terminerons ce thèse par une conclusion générale et des perspectives que nous examinerons à l'avenir (V).

# Théorie de l'information quantique

## I.1 Introduction

Ce chapitre établit les bases de la théorie de l'information quantique (*QIT*). L'objectif central de la QIT est de qualifier la transmission d'informations classiques ou quantiques sur des canaux quantiques. Puis, nous abordons plusieurs mesures d'information qui sont importantes pour quantifier la quantité d'information et de corrélations présentes dans les systèmes quantiques à variables discrètes.

La première mesure fondamentale que nous présentons est l'entropie de von Neumann (ou simplement l'entropie quantique). Il s'agit de la généralisation quantique de l'entropie de Shannon, mais elle rend compte de l'incertitude classique et quantique dans un état quantique. L'entropie quantique donne un sens à la notion de qubit d'information. Cette notion est différente de celle de qubit physique, qui est la description d'un état quantique d'un électron ou d'un photon. Le qubit d'information est l'unité de mesure informationnelle quantique fondamentale, qui détermine la quantité d'information quantique présente dans un système quantique. Les définitions initiales sont analogues aux définitions classiques de l'entropie, mais nous découvrons rapidement un écart radical par rapport aux notions classiques intuitives. Nous définissons ensuite plusieurs autres mesures d'information quantiques, telles que l'information mutuelle quantique, dont les définitions sont similaires à celles du monde classique, mais où les entropies de Shannon sont remplacées par des entropies quantiques. Ce remplacement peut sembler rendre l'entropie quantique quelque peu triviale en surface, mais un simple calcul révèle qu'un état maximalelement intriqué sur deux qubits enregistre deux bits d'information mutuelle quantique (rappelons que la plus grande information mutuelle possible dans le monde classique est d'un bit dans le cas de deux bits maximalelement corrélés).

## I.2 Théorie de l'information classique

Le terme "information", dans le contexte de la théorie de l'information, a une signification précise qui diffère quelque peu de l'expérience quotidienne que nous en avons. Rappelons que la notion de bit physique fait référence à la représentation physique d'un bit, et que le bit d'information est une mesure de ce que nous apprenons du résultat d'une expérience aléatoire. Le mot "surprise" résume peut-être mieux la notion d'information telle qu'elle s'applique dans

le contexte de la théorie de l'information.

Cette partie débute notre étude formelle de l'information classique. Notre objectif est de fournir une compréhension intuitive des mesures d'information, en fonction des parties qui ont accès aux systèmes classiques. Nous définissons des formules mathématiques précises qui mesurent la quantité d'information encodée dans un système physique unique ou dans plusieurs systèmes physiques. L'avantage de développer cette théorie est que nous pouvons étudier l'information en tant que telle sans avoir à considérer les détails du système physique qui l'enregistre.

### I.2.1 Notion de l'information classique

La théorie classique de l'information a été fondée par Claude Shannon. Il s'agit d'une application dans le domaine des communications et d'autres, qui explique comment compresser au maximum l'information et la transmettre de façon à réduire au maximum le taux d'erreur sur un canal bruité. De plus, la théorie de Shannon est connue en statistique par sa célèbre formule de l'entropie qui est analogue à la formule de l'entropie de Boltzmann.

Nous commençons cette partie, par faire quelques rappels nécessaires de la théorie de l'information classique dont nous avons besoin pour construire la théorie de l'information quantique. Nous présentons la définition de l'entropie de Shannon, l'information mutuelle introduite par Claude Shannon, puis la notion d'entropie conjointe, et celle conditionnelle

### I.2.2 Canaux de communication

La communication d'informations par une séquence de messages se fait sur ce que nous appellerons maintenant un canal de communication ou dans la terminologie de Shannon, un canal. Ce canal comprend d'abord une source, qui génère les symboles du message à partir d'un alphabet. À côté de la source vient un codeur, qui transforme les symboles ou les arrangements de symboles en mots de code, en utilisant l'un des nombreux algorithmes de codage possibles, dont le but est de comprimer l'information dans le plus petit nombre de bits. Ensuite, l'étape de l'émetteur, qui convertit les mots cryptés en formes d'onde physiques ou en signaux. Ces signaux sont ensuite propagés dans un tube de transmission physique, qui peut être constitué de vide, d'air, de fil de cuivre, de fil coaxial ou de fibre optique. À l'extrémité du tuyau se trouve un récepteur, dont la fonction est de convertir les signaux reçus en données du mot de code d'origine. enfin l'étape de décodage, qui décode et décompresse les données et restitue la séquence de symboles originale au destinataire du message. Dans un canal de communication idéal, il n'y a aucune perte, ni aucune altération des informations du message ainsi communiqué. Mais dans des canaux réalistes ou non idéaux, il existe toujours une possibilité finie qu'une partie de cette information soit perdue ou altérée, pour diverses raisons physiques, par exemple la distorsion du signal et le bruit additif, qui ne seront pas analysés ici. La seule caractéristique à considérer ici est qu'une fraction des mots de code ou des symboles reçus peut différer de ceux qui ont été transmis. Dans ce cas, on dit qu'il existe des erreurs de symbole.

### I.2.3 Entropie de Shannon

La notion de l'entropie est considérée comme un concept crucial en théorie de l'information. L'entropie de Shannon constitue un outil fondamental de la théorie de l'information classique [65]. Elle peut être définie pour des variables aléatoires discrètes ou continues. Dans le cas

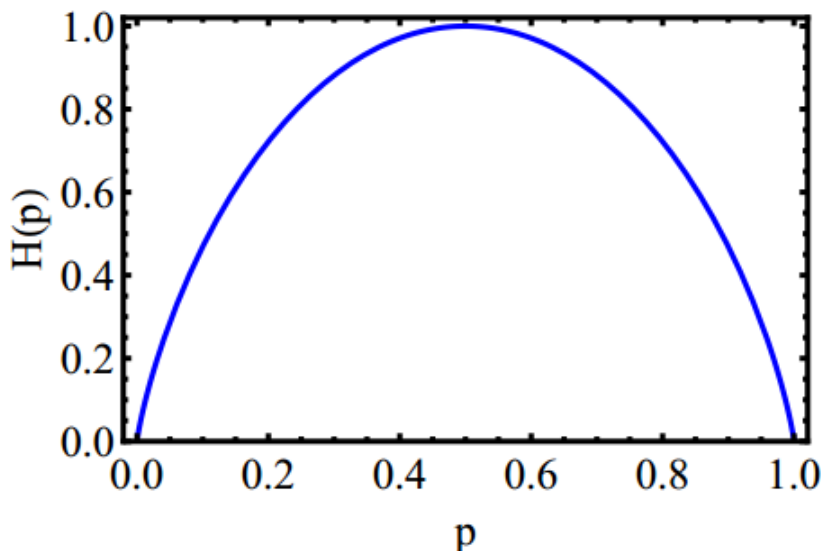
discret, où la variable ne prend qu'un nombre fini ou une valeur dénombrable [67? ], l'entropie d'une variable aléatoire est une mesure quantitative de l'incertitude associée aux valeurs prises par la variable aléatoire  $p$  et elle est définie comme

$$H(X) = - \sum_{x \in X} p(x) \log_2(x) \quad (\text{I.1})$$

où  $p(x)$  est une distribution de probabilité. Pour l'unité de l'entropie dépend de la base choisie pour le logarithme ( $\log_2$  : bit (binary unit)). Notons bien que  $H(X)$  ne dépend que de la loi de  $X$ . C'est une quantité définie positive. De plus  $H(X)$  est maximale lorsque  $X$  est munie de la loi uniforme. Pour une variable aléatoire binaire  $X$  avec deux événements valant 0 et 1 avec la probabilité  $p(0) = p$  et  $p(1) = (1 - p)$ . Elle est donnée par l'entropie de Shannon qui est une fonction de  $p$  :

$$H(p) = -p \log_2 p - (1 - p) \log_2 (1 - p) \quad (\text{I.2})$$

La figure (I.1) représente l'entropie de Shannon binaire en fonction de  $p$ , Pour  $p = 1/2$  l'entropie est maximale, et pour  $p = 0$ ,  $p = 1$ , l'incertitude de l'observateur est nulle.



**Fig. I.1** – L'entropie  $H(p)$  en fonction de la probabilité  $p$

L'entropie est reliée aux ressources physiques nécessaires pour stocker ou transmettre un message. Asymptotiquement, il est possible de stocker un message de  $N$  symboles en utilisant  $NH(X)$  bits physiques, avec une erreur tendant vers 0 lorsque  $N$  tend vers l'infini [68]. Chaque symbole de l'alphabet apporte donc en moyenne  $H(X)$  bits d'information.

L'entropie de Shannon satisfait quelques propriétés fondamentales que nous rappelons ci-dessous :

- L'entropie de Shannon est une fonction continue, positive et symétrique
- $H(X) + H(Y) \geq H(X, Y)$  si  $X$  et  $Y$  sont indépendants.

#### I.2.4 Entropie conjointe et entropie conditionnelle

L'entropie conjointe est une mesure de l'entropie utilisée en théorie de l'information. Elle mesure combien d'information est contenu dans un système à deux variables aléatoires [69].

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires, l'entropie conjointe  $H(X, Y)$  est l'entropie du couple  $(X, Y)$  elle s'exprime par :

$$H(X, Y) = - \sum_{x,y} p(x, y) \log_2(p(x, y)), \quad (\text{I.3})$$

avec  $p(x, y)$  sont des probabilités reliant à la résultats réalisons par  $x$  et  $y$ . Évidemment, cette grandeur est permet de quantifie l'incertitude totale sur le couple  $(X, Y)$ , et elle vérifie l'inégalité suivante

$$H(X, Y) \leq H(X) + H(Y). \quad (\text{I.4})$$

On notera que l'entropie conjointe ne dépend pas de l'ordre des variables, de façon claire, l'entropie conjointe est préserve la propriété de symétrie

$$H(X, Y) = H(Y, X). \quad (\text{I.5})$$

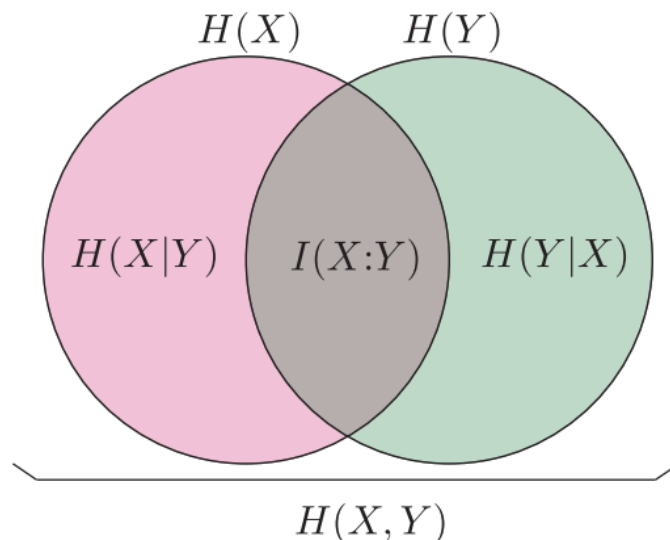
Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables indépendantes, on a  $H(X, Y) = H(X) + H(Y)$ . En effet, L'entropie conditionnelle mesure l'entropie restante provenant de la variable aléatoire  $Y$ , si l'on connaît parfaitement la seconde variable aléatoire  $X$ . En conséquence, l'entropie de  $Y$  est conditionnée par la connaissance de  $X$ . Cette entropie est notée par  $H(Y|X)$  est permet de mesure l'information dans  $Y$  sachant que  $X$  est connaît, elle donnée par

$$H(X|Y) = - \sum_{x,y} p(x, y) \log_2(p(x|y)), \quad (\text{I.6})$$

Les entropies conditionnelles et conjointes sont reliées par :

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X). \quad (\text{I.7})$$

ceci est illustre parfaitement dans le Fig. (I.2)



**Fig. I.2** – Une visualisation théorique des différents types d'entropies

Les propriétés de l'entropie des variables  $X$  et  $Y$  :

- $H(X, Y) = H(Y, X)$
- $\max \{H(X), H(Y)\} \leq H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$
- $H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$  avec égalité si et seulement si les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes

— La connaissance d'une variable supplémentaire ne peut pas augmenter l'entropie

$$H(Y|X) \leq H(Y)$$

— L'entropie ne peut pas décroître si on ajoute un nouveau événement

$$H(Y) \leq H(Y, X).$$

On peut résumer la plupart des propriétés de l'entropie conjointe et conditionnelle dans le tableau suivant

$H(X, Y) = H(Y, X)$	symétrie de l'entropie conjointe
$H(X, Y) \geq 0$	non négativité de l'entropie conjointe
$H(X   Y) \geq 0, H(Y   X) \geq 0$	non négativité de l'entropie conditionnelle
$H(X   Y) = H(X, Y) - H(Y)$	relation entre l'entropie conditionnelle et l'entropie conjointe.
$H(X, Y) \geq H(Y)$	entropie conjointe par rapport à l'entropie d'une seule variable aléatoire
$H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$	subadditivité
$H(X, Y, Z) + H(Y) \leq H(X, Y) + H(Y, Z)$	subadditivité forte
$H(X   Y) \leq H(X)$	réduction de l'incertitude par conditionnement
$H(X, Y, Z) = H(X) + H(Y   X) + H(Z   X, Y)$	règle de la chaîne pour l'entropie conjointe
$H(X, Y   Z) = H(Y   X, Z) + H(X   Z)$	règle de la chaîne pour l'entropie conditionnelle.

**Tab. I.1** – Propriétés de l'entropie conjointe et conditionnelle..

## I.2.5 Information mutuelle

L'information mutuelle quantifie la dépendance ou les corrélations des deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ . Autrement dit c'est la quantité d'information partagée entre les deux variables. Elle mesure à quel point la connaissance d'une variable aléatoire réduit l'incertitude sur l'autre variable aléatoire. En ce sens, il s'agit de l'information commune entre les deux variables aléatoires. Elle est définie par

$$\begin{aligned} I(X : Y) &= H(X) + H(Y) - H(X, Y) \\ &= H(X) + H(X|Y) \\ &= H(Y) + H(Y|X). \end{aligned} \tag{I.8}$$

On remarque que si les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, l'information mutuelle est nulle. Cependant, si  $X$  et  $Y$  sont identiques, l'information mutuelle  $H(X, Y)$  est égale à l'entropie de la source. La figure ci dessous (I.3) résume, pour le cas de deux variables aléatoires, les relations entre les différentes entropies  $H(X)$ ,  $H(Y)$ ,  $H(X, Y)$ ,  $H(X|Y)$ ,  $H(Y|X)$  et de l'information mutuelle  $I(X : Y)$ .

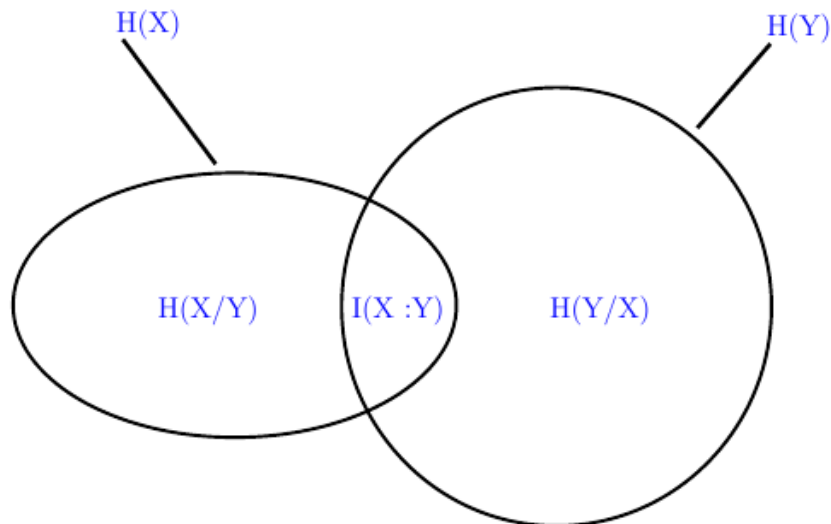


Fig. I.3 – L'information mutuelle

Les propriétés de l'information mutuelle des variables  $X$  et  $Y$  sont :

- Elle croît en fonction de la dépendance de deux variables ainsi que de leur entropie
- Elle est symétrique :

$$I(X, Y) = I(Y, X)$$

- $I(X; Y) = 0$  si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.
- $I(X; Y) \geq 0$ .

On peut résumer la plupart des propriétés de l'information mutuelle et leur relation avec l'entropie conjointe et conditionnelle dans le tableau suivant

$I(X; Y) = I(Y; X)$	symétrie de information mutuelle.
$I(X; Y) = H(X) - H(X   Y)$	information mutuelle, entropie, et entropie conditionnelle
$I(Y; X) = H(Y) - H(Y   X)$	information mutuelle, entropie et entropie conditionnelle
$I(X; X) = H(X)$	information mutuelle et entropie mutuelle
$I(X; X) \geq 0$ ,	non négativité de l'auto-information mutuelle
$I(X; Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y)$	information mutuelle, entropie et entropie conjointe
$I(X; Y   Z) = H(X   Z) - H(X   Y, Z)$	information mutuelle conditionnelle et entropie conditionnelle.
$I(X, Y; Z) = I(X; Z   Y) + I(Y; Z)$	règle de la chaîne pour l'information mutuelle
$I(X; Y) \leq I(X; Z)$ si $X \mapsto Y \mapsto Z$	inégalité de traitement des données

Tab. I.2 – Propriétés de l'information mutuelle.

## I.3 Théorie de l'information quantique

La théorie de l'information quantique (*QIT*), est un développement de la théorie de l'information de Claude Shannon exploitant les propriétés de la mécanique quantique [70], notamment

le principe de superposition et encore l'intrication. En effet, toute information est codée sur un support quantique, puisque la description de la nature est quantique. Clairement, il est nécessaire de rappeler quelques éléments de la théorie quantique de l'information. Nous décrivons l'essentiel de la théorie d'information : l'entropie de Von Neumann et ses propriétés. Ensuite, on aborde le formalisme mathématique ainsi que les outils nécessaires pour introduire les états et les opérateurs des systèmes quantiques qui sont vivant dans l'espace de Hilbert.

### I.3.1 Espace de Hilbert

La première étape dans le traitement d'un problème de physique par la mécanique quantique consiste à identifier l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Un espace de Hilbert est un espace vectoriel linéaire complexe de dimension finie(ou infinie) sur le corps  $\mathbb{C}$  pourvu d'un produit scalaire désigné par la notation de Dirac ket et bra  $\langle | \rangle$ . La base et la dimension de l'espace sont définies de la même façon que d'un espace vectoriel réel. Un vecteur de norme 1 de  $\mathbb{C}^2$  est appelé qubit (quantum bit). Dans la notation de Dirac on définit : l'espace des vecteurs ket  $\{|\psi\rangle\}$  et son espace dual des vecteurs bra  $\{\langle\psi|\}$  où le produit scalaire entre deux vecteurs s'écrit  $\langle\psi|\phi\rangle$ . La correspondance entre les deux espaces est manifestée par la conjugaison complexe comme suit :

$$|\psi\rangle = C_1 |\psi_1\rangle + C_2 |\psi_2\rangle \quad \langle\psi| = C_1^* \langle\psi_1| + C_2^* \langle\psi_2|$$

Le produit scalaire satisfait plusieurs propriétés :

- Le produit scalaire :  $\langle\psi|\phi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle^*$
- La distributivité :  $\langle\phi|(C_1 |\psi_1\rangle + C_2 |\psi_2\rangle) = C_1 \langle\phi|\psi_1\rangle + C_2 \langle\phi|\psi_2\rangle$
- La norme positive :  $\langle\psi|\psi\rangle \geq 0$
- Pour le cas où  $\langle\psi|\phi\rangle = 0$  , les vecteurs d'états sont donc orthogonaux les uns aux autres.

### I.3.2 Notion de bit quantique (qubit)

En général dans la mécanique quantique, le système quantique le plus simple est un système à deux états c'est le qubit (ou le bit quantique). Un qubit c'est la plus petite unité de stockage de l'information quantique [71]. Parmi les exemples de systèmes présentant la structure de qubit, il y'a le spin  $s = 1/2$  de particules (spin up et down) ou aussi la polarisation du photon, atome à deux niveaux, position dans un potentiel de double puits profond. Pour clarifier l'encodage, sous unité de qubit, des systèmes quantiques mentionnés, nous allons tracer le tableau suivant

Degré de liberté	États de base possibles $ 0\rangle$	États de base possibles $ 1\rangle$
Spin 1/2	$ m = 1/2\rangle$	$ m = -1/2\rangle$
Polarisation du photon	$ \text{Horizontale}\rangle$	$ \text{Verticale}\rangle$
Atome "à deux niveaux"	$ \text{État fondamental}\rangle$	$ \text{État excité}\rangle$
Position dans un potentiel de double puits profond	$ \text{Gauche}\rangle$	$ \text{Droite}\rangle$

**Tab. I.3** – Exemples des systèmes présentant la structure de Qubit

Le qubit est connu comme l'unité d'information quantique similairement au bit en information classique, et il est à la base de tous les protocoles du codage quantique et de la cryptographie quantique. Le qubit peut se trouve dans le cas général, dans l'un ou l'autres de deux

états. C'est un vecteur unitaire dans un espace vectoriel complexe de Hilbert de dimension deux, explicitement  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ . La base de cet espace de Hilbert, nommée base de calcul ou base computationnelle, est formée de deux vecteurs orthonormés  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$ , de sorte que tout état quantique à deux niveaux  $|\psi\rangle$  s'écrit sous la forme de la superposition de deux qubits ;

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle. \quad (\text{I.9})$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des nombres complexes qui doivent satisfaire la condition de normalisation  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  et les états  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$  doivent être orthogonaux. L'équation (I.9) traduit le fait qu'un qubit se présente comme une superposition linéaire d'états. Il s'ensuit qu'un qubit peut se trouver dans un continuum d'états entre  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$ , du moins tant qu'on ne l'observe pas. Pour savoir si un qubit est dans un état donné, il faudrait pouvoir déterminer les valeurs des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ . Les principes de la mécanique quantique nous disent que, lorsque nous mesurons un qubit, nous obtenons soit la valeur 0 avec la probabilité  $|\alpha|^2$ , soit la valeur 1 avec la probabilité  $|\beta|^2$  et tout naturellement ces deux probabilités ont pour somme l'unité. Il importe de souligner que lorsqu'on effectue une mesure sur un qubit, le résultat ne peut être que 0 ou 1, mais ce résultat n'a qu'une valeur probabiliste.

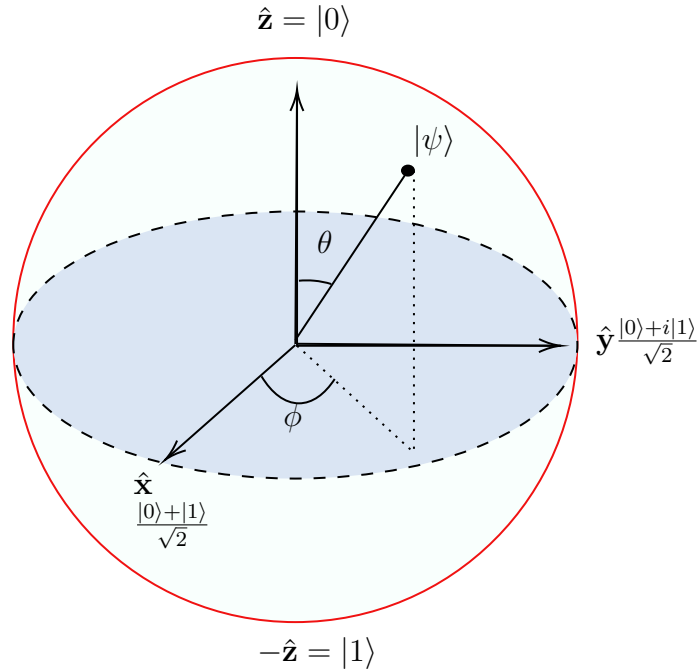
**Remarque**

Bit quantique	Bit classique
1 bit : $ 0\rangle$ ou $ 1\rangle$ ou $\frac{1}{\sqrt{2}}( 0\rangle +  1\rangle) \dots$	1 bit : 0 ou 1.
$n$ bits codent une superposition des $2^n$ .	$n$ bits codent une valeur parmi $N = 2^n$ .
État : $\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$ , avec $\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1$ .	État : $V = \alpha V_0 + \beta V_1$ avec $\alpha + \beta = 1$ .
Mesure : $ 0\rangle$ avec la probabilité $\alpha\alpha^*$ et $ 1\rangle$ avec la probabilité $\beta\beta^*$ .	Mesure : $V$ , intégrité de l'état du bit.
$\alpha$ et $\beta$ complexes.	$\alpha$ et $\beta$ réels.

**Tab. I.4** – Correspondance entre bit quantique et bit classique.

### I.3.3 Sphère de Bloch

En mécanique quantique, la sphère de Bloch (aussi connu comme la sphère de Poincaré en optique) est une représentation géométrique de l'espace des états purs d'un système quantique à deux niveaux (qubit), nommé d'après le physicien et mathématicien Félix Bloch. La mécanique quantique se formalise dans les espaces de Hilbert, ou plus exactement, dans les espaces de Hilbert projectifs. L'espace projectif des états purs d'un système à 2 niveaux est isomorphe à une sphère. La métrique naturelle de la sphère de Bloch est la métrique de Fubini-Study. Le qubit le plus utilisé par les physiciens est le spin d'une particule de spin  $s = -1/2$ . Si on mesure la composante  $Z$  du spin, le résultat sera up ou down. Dans le cas d'un qubit, le vecteur d'état qui est composé par une combinaison de deux états 0 et 1, et généralement représente par un point sur la sphère de Bloch.



**Fig. I.4** – La représentation de la sphère de Bloch d’un qubit. Tout qubit  $|\psi\rangle$  admet une représentation en termes de deux angles  $\theta$  et  $\varphi$  où  $0 \leq \theta \leq \pi$  et  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

L’état pur d’un qubit dans la représentation géométrique de Bloch est donné par l’expression suivante

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} |1\rangle, \quad (\text{I.10})$$

où  $\theta$  et  $\phi$  sont réels. Le paramètre  $\theta$  exprime l’amplitude relative des états de base tandis que  $\phi$  exprime leur phase relative (Voir (fig1.4)). L’équation (I.10) présente une image de l’espace des états d’un qubit. Le vecteur de Bloch pour l’état pur d’un qubit dans un espace euclidien tridimensionnel  $\mathbb{R}^3$  est donné par les coordonnées suivantes

$$\begin{cases} x = \sin \theta \cos \phi \\ y = \sin \theta \sin \phi \\ z = \cos \theta \end{cases}$$

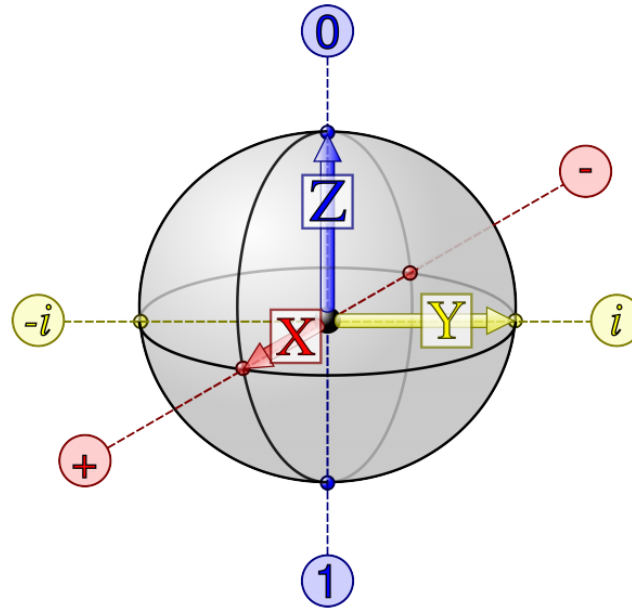
Les états des trois bases orthonormées ci-dessous

$$\mathcal{B}_1 = \{|\uparrow\rangle \ ; \ |\downarrow\rangle\} \quad \text{ou bien} \quad \{|0\rangle \ ; \ |1\rangle\} \quad (\text{I.11})$$

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) = |+\rangle \ ; \ \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) = |-\rangle \right\} \quad (\text{I.12})$$

$$\mathcal{B}_3 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle) = |\odot\rangle \ ; \ \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle) = |\ominus\rangle \right\} \quad (\text{I.13})$$

sont représentés sur la sphère de Bloch comme le indiqué dans la figure sous-dessus



**Fig. I.5** – Représentation des trois états de bases orthonormées sur la sphère de Bloch, ici  $|i\rangle = |\odot\rangle$  et  $|-i\rangle = |\ominus\rangle$ ,  $|0\rangle = |\uparrow\rangle$  et  $|1\rangle = |\downarrow\rangle$

Ces trois bases s'appellent, pour des raisons évidentes les bases  $Z$ ,  $X$  et  $Y$  en information quantique. Elles correspondent aux bases des états propres des trois matrices de Pauli du spin  $\sigma_z$ ,  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ . Ces matrices sont aussi appelées souvent  $Z$ ,  $X$  et  $Y$ .

La matrice densité (dont nous discuterons en détail dans la section suivante) du système des états purs correspondante à  $|\psi\rangle$  peut être exprimée à travers les matrices de Pauli et du vecteur de Bloch [72] tel que :

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2} \left( I + \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \right) \quad (\text{I.14})$$

avec  $\vec{n} = (n_1; n_2; n_3) = (\sin(2\theta) \cos(\varphi); \sin(2\theta) \sin(\varphi); \cos(2\theta))$  : le vecteur de Bloch et  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  sont les matrices de Pauli usuelles :

$$\begin{aligned} \sigma_x = X &= |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_y = Y &= -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_z = Z &= |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{I.15})$$

### I.3.4 Matrice densité

#### I.3.4.1 Définition

On considère un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Les états quantiques du système sont caractérisés par des fonctions d'ondes  $\psi \in \mathcal{H}$  (des ket vecteurs  $|\psi\rangle$ ). La matrice densité [73], où opérateur densité est une entité mathématique introduite par le mathématicien et physicien John Von Neumann. Elle permet de résumer en une seule matrice tout l'ensemble possible des états quantiques d'un

système physique donné à un instant donné, mariant ainsi mécanique quantique et physique statistique. La matrice densité  $\rho$  d'un état  $\psi$  est l'opérateur défini comme l'extérieure produit

$$\rho = |\psi\rangle \langle \psi|, \quad (\text{I.16})$$

qui est un état pur. Si toutefois un état n'est pas complètement connu, mais seules les probabilités  $\{p_i\}$ , avec lequel l'un de plusieurs états  $|\psi_i\rangle$  est connu, il est appelé un système d'états mixtes et la matrice de densité prend la forme :

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (\text{I.17})$$

avec  $p_i \geq 0$  et  $\sum p_i = 1$ , L'opérateur densité n'est évidemment pas une observable puisqu'il ne peut être lié à aucun processus de mesure.

Les propriétés suivantes de la matrice densité sont :

- projecteur  $\rho^2 = \rho$ .
- Hermécticité  $\rho = \rho^\dagger$ .
- Normalisation  $Tr(\rho) = 1$ .
- Positivité  $0 \leq \rho \leq 1$ .

Pour des états purs, nous avons  $\rho^2 = \rho$  et  $Tr(\rho^2) = 1$ , alors que pour les états mixtes  $Tr(\rho^2) < 1$ .

### I.3.4.2 Matrice densité réduite

On considère un système bipartite  $AB$  formé des sous-systèmes  $A$  et  $B$ , qui sont décrits par deux espaces de Hilbert complexes tel que  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  (la base est  $|i\rangle_A \otimes |j\rangle_B$ , de l'espace de tous les états possibles du système bipartite  $AB$ ). L'opérateur densité réduit [9] du système  $A$  et  $B$  est défini par

$$\begin{aligned} \text{tr}_B |\psi\rangle \langle \psi| &= \text{tr}_B \left( \sum_{ik} x_i x_k |k_A\rangle \langle i_A| \otimes |k_B\rangle \langle i_B| \right) & \text{tr}_A |\psi\rangle \langle \psi| &= \text{tr}_A \left( \sum_{ik} x_i x_k |k_A\rangle \langle i_A| \otimes |k_B\rangle \langle i_B| \right) \\ &= \sum_{ik} x_i x_k |k_A\rangle \langle i_A| \times \text{tr}_B (|k_B\rangle \langle i_B|) & &= \sum_{ik} x_i x_k \text{tr}_B (|k_B\rangle \langle i_B|) \times |k_A\rangle \langle i_A| \\ &= \sum_{ik} x_i x_k |k_A\rangle \langle i_A| \times \langle k_B | i_B \rangle & &= \sum_{ik} x_i x_k |i_A\rangle \langle k_A| \times \langle k_B | i_B \rangle \\ &= \sum_{ik} x_i x_k \delta_{ik} |k_A\rangle \langle i_A| & &= \sum_{ik} x_i x_k \delta_{ik} |k_B\rangle \langle i_B| \\ &= \sum_i x_i^2 |i_A\rangle \langle i_A| & &= \sum_i x_i^2 |i_B\rangle \langle i_B| \\ &= \rho_A & &= \rho_B \end{aligned}$$

où  $tr_A, tr_B$  représentent la trace partielle sur le sous-système  $A, B$ . Elle sont définies comme :

$$\text{tr}_A(\rho_{AB}) = \sum_i \langle i | \rho_{AB} | i \rangle_A, \quad \text{tr}_B(\rho_{AB}) = \sum_j \langle j | \rho_{AB} | j \rangle_B \quad (\text{I.18})$$

L'opérateur densité réduit [74] décrit un sous-système d'un système quantique composé. Son importance découle du fait que plusieurs propriétés importantes d'un système quantique sont complètement déterminées par les valeurs propres de la matrice densité réduite du système. Il détermine complètement le résultat de toute mesure effectuée seulement par un sous-système. Ces idées vont être clarifiées après qu'on ait introduit la notion de l'intrication quantique [75].

### I.3.5 État pur et état mixte

En physique quantique, un état quantique est une entité mathématique qui fournit une distribution de probabilité pour les résultats de chaque mesure possible sur un système. La connaissance de l'état quantique ainsi que les règles d'évolution du système dans le temps épuisent tout ce qui peut être prédit sur le comportement du système. Un mélange d'états quantiques est à nouveau un état quantique. Les états quantiques qui ne peuvent pas être écrits comme un mélange d'autres états sont appelés états quantiques purs, tandis que tous les autres états sont appelés états quantiques mixtes. Ma compréhension jusqu'à présent est la suivante : un état pur est un état de base d'un système, et un état mixte représente une incertitude sur le système, c'est-à-dire que le système est dans l'un d'un ensemble d'états avec une certaine probabilité (classique). Cependant, les superpositions semblent également être une sorte de mélange d'états.

#### I.3.5.1 État pur

Commençons par les états purs. Considérons un ensemble d'objets donnés dans les états  $\{|\psi_i\rangle\}$ . Si tous les objets sont dans le même état, l'ensemble est représenté par un état pur. Pour faire des déclarations probabilistes, il faut considérer l'ensemble des systèmes identiquement préparés.

Supposons que le système soit, par exemple, dans l'état  $|\psi\rangle$ , que nous pouvons développer par rapport aux états propres d'un opérateur (hermitien)  $A$ .

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle, \quad \text{où } A|n\rangle = a_n |n\rangle \quad (\text{I.19})$$

La valeur de l'espérance est alors donnée par

$$\langle A \rangle_\psi = \sum_n |c_n|^2 a_n = \sum_n \frac{N_n}{N} a_n \quad (\text{I.20})$$

où  $|c_n|^2$  est la probabilité de mesurer la valeur propre  $a_n$ . Elle correspond à la fraction  $N_n/N$ , l'incidence de la valeur propre  $a_n$  se produit, où  $N_n$  est le nombre de fois où cette valeur propre a été mesurée sur un ensemble de  $N$  objets.

L'état pur est caractérisé par une matrice de densité de la forme

$$\rho_{\text{pure}} = |\psi\rangle \langle \psi|, \quad \text{où } \text{tr} \rho_{\text{pure}}^2 = 1 \quad (\text{I.21})$$

#### I.3.5.2 État mixte

Étudions ensuite le cas où les  $N$  systèmes (objets) de l'ensemble ne sont pas tous dans le même état, c'est-à-dire que  $N_i$  systèmes sont dans l'état  $|\psi_i\rangle$  respectivement, tel que  $\sum N_i = N$ . La probabilité  $p_i$  de trouver un système individuel de l'ensemble décrit par l'état  $|\psi_i\rangle$  est alors donnée par

$$p_i = \frac{N_i}{N}, \quad \text{où } \sum_i p_i = 1 \quad (\text{I.22})$$

Nous pouvons donc écrire l'état mixte comme une somme convexe, c'est-à-dire une somme pondérée avec  $\sum_i p_i = 1$ , de matrices de densité d'état pur

$$\rho_{\text{mix}} = \sum_i p_i \rho_i^{\text{pure}} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (\text{I.23})$$

La valeur de l'espérance est à nouveau, c'est-à-dire

$$\langle A \rangle_{\rho_{\text{mix}}} = \text{Tr}(\rho_{\text{mix}} A) \quad (\text{I.24})$$

où nous pouvons exprimer la valeur attendue de l'état mixte comme une somme convexe des valeurs attendues des états purs qui le composent, c'est-à-dire

$$\langle A \rangle_{\rho_{\text{mix}}} = \sum_i p_i \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle \quad (\text{I.25})$$

**Preuve :**

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\rho_{\text{mix}} A) &= \text{Tr}\left(\sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| A\right) = \\ &= \sum_n \sum_i p_i \langle n | \psi_i \rangle \langle \psi_i | A | n \rangle = \\ &= \sum_i p_i \langle \psi_i | A \underbrace{\sum_n |n\rangle \langle n|}_{\mathbb{1}} \psi_i \rangle = \\ &= \sum_i p_i \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle. \end{aligned} \quad (\text{I.26})$$

où

$$\rho_{\text{mix}}^2 = \sum_i \sum_j p_i p_j |\psi_i\rangle \underbrace{\langle \psi_i | \psi_j \rangle}_{\delta_{ij}} \langle \psi_j| = \sum_i p_i^2 |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \neq \rho_{\text{mix}} \quad (\text{I.27})$$

où nous avons, entre autres, supposé que  $|\psi_i\rangle$  et  $|\psi_j\rangle$  sont orthonormés. On peut alors calculer la trace de  $\rho^2$ , qui, contrairement aux états purs, n'est plus égale à 1 mais plus petite

$$\text{tr} \rho_{\text{mix}}^2 = \sum_n \langle n | \sum_i \sum_j p_i p_j |\psi_i\rangle \langle \psi_i | \psi_j \rangle \langle \psi_j | n \rangle \quad (\text{I.28})$$

$$= \sum_i \sum_j p_i p_j \langle \psi_i | \psi_j \rangle \langle \psi_j | \sum_n \langle n | \psi_i \rangle \quad (\text{I.29})$$

$$= \sum_i \sum_j p_i p_j |\langle \psi_i | \psi_j \rangle|^2 \quad (\text{I.30})$$

$$= \sum_i p_i^2 < \sum_i p_i = 1 \quad (\text{I.31})$$

La dernière étape de ce calcul est évidente, puisque  $0 \leq p_i \leq 1$  et donc  $p_i^2 \leq p_i$ . Nous concluons que la trace de  $\rho^2$  est une bonne mesure de la mixité d'une matrice de densité, puisqu'elle est égale à 1 pour les états purs et strictement inférieure à 1 pour les états mixtes. Pour un état maximalelement mixte, nous avons pour une dimension donnée  $d$  du système

$$\text{tr} \rho_{\text{mix}}^2 = \frac{1}{d} > 0 \quad (\text{I.32})$$

### I.3.6 Opérateurs de mesure

La mesure d'une observable d'un système quantique dans l'état  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_n$  est caractérisée par un ensemble d'opérateurs  $\{\mathcal{M}_i\}$ . Appelons  $\{\lambda_i\}$  l'ensemble des résultats possibles de la mesure du système quantique et rappelons que ces résultats sont les valeurs propres des opérateurs de mesure et doivent être des nombres réels pour permettre une interprétation physique du processus de mesure. Seuls les opérateurs auto-adjoints ont des valeurs propres réelles. Ainsi, les opérateurs de mesure  $\mathcal{M}_i$  doivent être auto-adjoints.

$$\mathcal{M}_i^\dagger \mathcal{M}_i = \mathcal{M}_i^2 = \mathcal{M}_i. \quad (\text{I.33})$$

Selon le postulat de mesure de la mécanique quantique, la probabilité que le résultat d'indice  $i$ ,  $\lambda_i$ , se produise à la suite de la mesure  $\mathcal{M}_i$  suivante

$$p(i) = \langle \psi | \mathcal{M}_i | \psi \rangle. \quad (\text{I.34})$$

La somme des probabilités de tous les résultats possibles de la mesure doit être égale à 1.

$$\sum_i p(i) = \sum_i \langle \psi | \mathcal{M}_i | \psi \rangle = 1. \quad (\text{I.35})$$

Cela implique que les opérateurs de mesure doivent satisfaire l'équation de complétude

$$\sum_i \mathcal{M}_i = \mathbb{1}. \quad (\text{I.36})$$

La mesure entraîne un changement d'état du système; si l'état du système immédiatement avant la mesure est  $|\psi\rangle$  alors, après la mesure  $\mathcal{M}_i$ , l'état du système est  $|\varphi_i\rangle = \mathcal{M}_i|\psi\rangle$ . L'état normalisé du système est

$$|\varphi_i'\rangle = \frac{\mathcal{M}_i|\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | \mathcal{M}_i | \psi \rangle}}. \quad (\text{I.37})$$

**Exemple I.3.1** *Considérons un qubit unique dans l'état  $|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$ . Il n'y a que deux résultats possibles d'une mesure dans la base canonique  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ ; nous ne pouvons observer que les états de base  $|0\rangle$  ou  $|1\rangle$ . Les projecteurs correspondants sont*

$$\mathcal{M}_0 = |0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_1 = |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{I.38})$$

*Ces deux opérateurs sont auto-adjoints et  $\mathcal{M}_0^\dagger \mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0$  et  $\mathcal{M}_1^\dagger \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_1$ . La probabilité de l'issue 0 correspondant à l'état de base  $|0\rangle$  est*

$$p(0) = \langle \psi | \mathcal{M}_0 | \psi \rangle = |\alpha_0|^2 \quad (\text{I.39})$$

*En effet,*

$$\mathcal{M}_0|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.40})$$

*et*

$$p(0) = \langle \psi | (\mathcal{M}_0|\psi\rangle) = \begin{pmatrix} \alpha_0^* & \alpha_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ 0 \end{pmatrix} = |\alpha_0|^2. \quad (\text{I.41})$$

L'état normalisé du qubit après application du projecteur  $\mathcal{M}_0$ , jusqu'à une phase, est donné par

$$|\varphi'_0\rangle = \frac{\mathcal{M}_0|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\mathcal{M}_0|\psi\rangle}} = \frac{\alpha_0|0\rangle}{\sqrt{|\alpha_0|^2}} = |0\rangle. \quad (\text{I.42})$$

De même, la probabilité de l'issue 1 correspondant à l'état de base  $|1\rangle$  est

$$p(1) = \langle\psi|\mathcal{M}_1|\psi\rangle = |\alpha_1|^2 \quad (\text{I.43})$$

L'état normalisé du qubit après application du projecteur  $\mathcal{M}_1$ , jusqu'à une phase, est donné par

$$|\varphi'_1\rangle = \frac{\mathcal{M}_1|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\mathcal{M}_1|\psi\rangle}} = \frac{\alpha_1|1\rangle}{\sqrt{|\alpha_1|^2}} = |1\rangle \quad (\text{I.44})$$

La condition de complétude est satisfaite :  $p(0) + p(1) = |\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 = 1$ . Également, on note que la somme des opérateurs projecteurs donne l'identité  $c$ - $a$ - $d$  ;  $\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1 = \mathbb{1}_{2 \times 2}$

### I.3.7 Entropie de Von Neumann

En théorie quantique de l'information, la notion d'entropie de Shannon a un analogue quantique pour mesurer l'intrication quantique, cet analogue est donné par l'entropie de Von Neumann.

Les distributions des probabilités classiques seront remplacées par des opérateurs densité agissant sur un espace de Hilbert composé et la sommation sera remplacée par la trace. Ainsi, un opérateur densité d'un système bipartite  $AB$ , partagé entre  $A$  et  $B$ , joue le rôle d'une probabilité  $p_{ij}$  conjointe, tandis que les états marginaux (opérateur densité réduit de  $A$  et  $B$ )  $\rho_A = \text{tr}_B(\rho)$  et  $\rho_B = \text{tr}_A(\rho)$  (trace partielle) jouent le rôle des probabilités marginales  $p_i$  et  $p_j$ , respectivement. Dans ce cas, l'entropie de Shannon sera remplacée par l'entropie de Von Neumann (l'entropie quantique), définie par [68, 76]

$$S(\rho) = -\text{tr} \rho \log_2 \rho = -\sum_K p_K \log_2 p_K. \quad (\text{I.45})$$

L'entropie de Von Neumann est donc une généralisation quantique des celle de Shannon utilise en information classique comme dans le domaine de la compression des données et la capacité maximale de transmission d'un canal avec bruit. Objectif est de généraliser l'information classique mutuelle dans le cas quantique et donner ses conséquences et ses implications. La première extension quantique naturelle est l'information quantique mutuelle donnée par

$$\begin{aligned} I(\rho) &= S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho) \\ &= S(\rho_A) - S(\rho|\rho_B). \end{aligned} \quad (\text{I.46})$$

où  $\rho_A$  et  $\rho_B$  sont les matrices densités réduites des sous système  $A$  et  $B$ .

Nous citons certaines propriétés de l'entropie de Von Neumann :

- L'entropie est définie positive et nulle si et seulement si  $\rho$  est un état pur,  $S(\rho) \geq 0$ .
- Si un système composite  $AB$  est dans un état pur, alors les entropies des matrices densités réduites sont égales,  $S(A) = S(B)$ .
- L'entropie de Von Neumann  $S$  est additive, alors pour les matrices réduites  $\rho_A$  et  $\rho_B$  des sous systèmes  $A$  et  $B$ , on a  $S(\rho_A \otimes \rho_B) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B)$ .
- L'entropie est sous-additive,  $S(\rho_{AB}) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B)$ .

- Si  $U$  une transformation unitaire, on a :  $S(\rho) = S(U\rho U^+)$ .
- L'entropie de Von Neumann  $S$  est concave.
- L'entropie est fortement sous-additive pour toutes trois systèmes  $A$ ,  $B$  et  $C$   
 $S(\rho_{ABC}) + S(\rho_c) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B)$ .

## I.4 Étude de L'intrication quantique dans les systèmes à variables discrètes

Le domaine de l'information quantique est actuellement un champ de recherche très actif. Et en particulier la communication quantique a atteint une certaine maturité technologique. Le traitement de l'information quantique dépend essentiellement de divers phénomènes de la mécanique quantique, parmi lesquels l'intrication. L'intrication à été considérée comme l'un des éléments les plus cruciales. C'est un phénomène observé en mécanique quantique dans lequel l'état quantique de deux objet doit être décrit globalement, sans pouvoir séparer un objet de l'autre quoi qu'ils puissent être spatialement scindés. En effet , l'intrication est une ressource importante dans le traitement quantique de l'information. Elle joue un rôle important dans plusieurs protocoles importants pour la communication quantique tels que la téléportation quantique [16, 77], la cryptographie quantique [78], le codage [79] et le calcul quantique [71], etc... L'intrication quantique est une forme de corrélation entre deux ou plusieurs particules (qui peuvent ou ne peuvent pas être séparées). Traditionnellement, l'intrication a été considérée comme synonyme de corrélations quantiques. Le but principal dans les études de l'intrication est de trouver une manière générale pour quantifier et caractériser la quantité d'intrication d'un état quantique donné.

Dans cette section, nous allons définir le paradoxe EPR et l'intrication quantique. Ensuite on présente quelques mesures des corrélations quantiques. Dans la suite, on introduit la notion de l'entropie d'intrication qui est basée sur la notion de la concurrence [80] introduite par Wootters [80]. On s'intéresse plus particulièrement à la définition de la discorde quantique [81]. Vu les difficultés analytiques que l'on rencontre avec cette définition de la discorde entropique, on introduit la version géométrique de la discorde quantique [82] basé sur la norme de Hilbert-Schmidt. On termine ce section avec le concept de la monogamie de l'intrication.

### I.4.1 Paradoxe EPR

Les relations de complémentarité et d'incertitude affirment que les systèmes physiques ne peuvent pas présenter simultanément deux propriétés complémentaires ou, du moins, que deux de ces propriétés ne peuvent pas être connues simultanément par un observateur. Cela soulève la question suivante : Les systèmes ont-ils ces propriétés complémentaires et refusent-ils simplement de nous le dire, ou n'ont-ils pas ces propriétés en premier lieu ? En d'autres termes, la question est de savoir si la complémentarité résulte simplement d'une sorte de perturbation inévitable d'un système lors de la mesure ou si les propriétés complémentaires n'existent pas en premier lieu, et ne peuvent donc pas être connues simultanément.

Existe-t-il un moyen de savoir laquelle de ces deux options est correcte ? Avant de tenter de répondre à cette question, il convient de préciser ce que nous entendons par "propriétés réelles" en premier lieu. Une notion très concise est donnée par Einstein, Podolsky et Rosen (EPR) dans leur célèbre article de 1935 dans la Physical Review [80].

L'argument EPR : tel que présenté en 1935 [80], repose sur le raisonnement suivant. Tout d'abord, il faut rappeler que le principe d'incertitude (ou d'indétermination) interdit de connaître

simultanément la valeur précise de deux grandeurs physiques dites incompatibles, typiquement, la vitesse et la position d'une particule. Plus on mesure une grandeur avec précision, plus la mesure de l'autre est indéterminée. En conséquence de ce principe, l'EPR déduit deux affirmations mutuellement exclusives :

- 1- La description de la réalité donnée par la mécanique quantique n'est pas complète.
- 2- Les deux quantités physiques incompatibles n'ont pas simultanément une réalité objective.

L'interprétation de Copenhague conclut que (2) est vrai et que (1) est faux, tandis que l'EPR entend démontrer que (1) est vrai et que (2) est faux. Pour cela, ils développent une expérience de pensée qui conduit à la détermination simultanée de deux quantités physiques non commutables, et donc à la conclusion que (2) est faux et donc que (1) est vrai, les deux affirmations s'excluant mutuellement. Pour démontrer que (2) est faux, il est essentiel de définir précisément ce qu'est la notion de "réalité" d'une grandeur physique (par exemple "position"). L'EPR met en évidence une condition suffisante de "réalité" : si, sans aucunement perturber l'état d'un système, la valeur d'une grandeur physique de ce système peut être prédite avec une probabilité égale à 1, alors il existe un élément de réalité correspondant à cette grandeur physique. L'argument proposé en 1935 concernait la mesure des positions et des vitesses d'une paire de particules.

## I.4.2 Intrication quantique dans les systèmes bipartites

Le phénomène d'intrication (entanglement) joue un rôle important en la théorie de l'information quantique comme le calcul quantique [71, 83], la téléportation quantique [16], la cryptographie quantique [78], et le codage [79], etc...

L'intrication quantique est la différence majeure entre la description classique et celle quantique des systèmes physiques qui est la conséquence directe du principe de superposition quantique. Il décrit la présence des corrélations quantique (Schrödinger), et aussi elle est utilisée comme une interface entre la théorie de l'information et la théorie quantique (Feynman). De plus, les systèmes intriqués sont les systèmes qui ne peuvent être complètement décrits l'un sans l'autre, et le système combine contient plus d'information que les sous systèmes pris séparément.

### I.4.2.1 Intrication des états à deux qubits

Pour bien expliquer le phénomène d'intrication, on considère un système bipartite  $AB$  (deux qubits) associés aux espaces de Hilbert  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  comme  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . Soient  $|\psi_A\rangle$  et  $|\psi_B\rangle$  des états définis dans les espaces de Hilbert  $\mathcal{H}_A$  et  $\mathcal{H}_B$  respectivement, dont  $|\psi_A\rangle \in \mathcal{H}_A$  et  $|\psi_B\rangle \in \mathcal{H}_B$ . Par définition, les sous-systèmes  $A$  et  $B$  représentent un état intriqué si :

$$|\psi\rangle \neq |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle \quad (\text{I.47})$$

Par exemple, l'état suivant est séparable car elle factorisable comme

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B), \quad (\text{I.48})$$

sinon l'état est intriqué

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A + |1\rangle_A) \otimes |1\rangle_B. \quad (\text{I.49})$$

### I.4.2.2 Critère d'inséparabilité

Parmi les objectifs de la théorie d'intrication est d'obtenir un critère de séparabilité pour distinguer les états séparables des autres non séparables (intriqués).

#### États séparables :

- Dans le cas d'un état pur bipartite  $\rho_{AB}$ , c'est à dire  $\rho_{AB} = |\psi\rangle_{AB}\langle\psi|$  est séparable si et seulement si il peut être écrit comme le produit de deux états  $|\psi_{AB}\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$ . Ainsi, un état pur est séparable si l'un des opérateurs densité réduites,  $\rho_A$  ou  $\rho_B$  est dans un état pur.
- Un état mixte est dit séparable s'il peut être représenté comme un mélange statistique des états purs séparables

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B = \sum_i p_i |\psi_i\rangle_A \langle\psi_i| \otimes |\psi_i\rangle_B \langle\psi_i| \quad (\text{I.50})$$

avec  $|\psi_i\rangle_A$  et  $|\psi_i\rangle_B$  sont des vecteurs d'états sur les espaces  $H_A$  et  $H_B$  respectivement, et les probabilités classiques  $p_i \geq 0$ ,  $\sum_i p_i = 1$ .

#### États non séparables (intriqués) :

- Un état pur est intriqué si et seulement si l'opérateur densité  $\rho_{AB}$  ne peut pas être écrit comme un opérateur de produit, c'est à dire

$$\rho_{AB} \neq \rho_A \otimes \rho_B \quad (\text{I.51})$$

A titre d'exemple, les états intriqués les plus célèbres sont les états de Bell, qui sont des états maximalelement intriqués sur  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ . Ils sont donnés par

$$|\phi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B) \quad (\text{I.52})$$

et les trois états intriqués supplémentaires

$$\begin{aligned} |\phi^-\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B - |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B) \\ |\psi^+\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B) \\ |\psi^-\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B - |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B) \end{aligned} \quad (\text{I.53})$$

Ces états sont appelés aussi les pairs EPR qui forment une base orthonormée de l'espace d'état de deux qubits. Grâce à une transformation unitaire locale sur l'un des sous-systèmes, on peut transformer un état en l'autre.

- Un état mixte est intriqué si et seulement si l'état est corrélé et non séparable

$$\rho_{AB} \neq \sum_I p_I \rho_A \otimes \rho_B \quad (\text{I.54})$$

Nous remarquons que les deux systèmes en interaction deviennent en général non séparables. La détermination de la séparabilité d'un état est un problème qui n'est pas aisé de façon générale. Il y a une autre façon de déterminer la séparabilité des états purs et

mixtes. Cette méthode est basée sur la décomposition de Schmidt.

### I.4.2.3 Décomposition de Schmidt

L'opérateur densité et la trace partielle ne sont que le début d'une vaste gamme d'outils en vue d'étudier des systèmes quantiques composés, qui sont au cœur de la théorie quantique de l'informatique. Un autre outil très important est la décomposition de Schmidt [84]. Dans cette partie, nous présentons cet outil et nous essayons de donner ses avantages pour discuter le phénomène de l'intrication.

#### **Théorème I.4.1** (*Décomposition de Schmidt*)

Supposons que  $|\psi\rangle$  est un état pur d'un système composite,  $AB$ , qui est décrit par

$$|\psi\rangle = \sum_i \lambda_i |i_A\rangle |i_B\rangle, \quad r \leq \min(d_A, d_B) \quad (\text{I.55})$$

où  $|i_A\rangle, |i_B\rangle$  sont les états orthonormés  $|i_A\rangle$  pour le système  $A$  et  $B$  respectivement,  $d_A$  et  $d_B$  sont des sous-système  $A$  et  $B$  et  $\lambda_i$  sont des nombres réels non négatifs satisfaisant  $\sum_i \lambda_i^2 = 1$  connu comme coefficients Schmidt.

Les coefficients de Schmidt  $\lambda_i$  correspondent aux racines carrées des valeurs propres de l'une des matrices densités réduites

$$\rho_A = \sum_{i=1} \lambda_i |i_A\rangle \langle i_A|, \quad \rho_B = \sum_{i=1} \lambda_i |i_B\rangle \langle i_B| \quad (\text{I.56})$$

En outre, le nombre de Schmidt  $r$ , est donné par le nombre des valeurs propres non nulles de  $\rho_A$  ou  $\rho_B$ . A partir de l'équation (I.55), il devient clair que les états séparables sont ceux qui ont exactement un nombre de Schmidt  $r = 1$ . Généralement, la décomposition de Schmidt ne peut pas être étendue de manière simple aux systèmes avec plus de deux sous-systèmes. Malheureusement, pour les états mixtes, il n'y a pas d'analogie à la décomposition de Schmidt.

## I.4.3 Fonctions des mesures d'intrication

Parmi les mesures d'intrication quantique qui ont été proposées pour les systèmes composites, on cite l'entropie d'intrication, la concurrence [80], entropie de formation, la discordance quantique [81] et sa variante géométrique [82].

### I.4.3.1 Entropie d'intrication

L'entropie d'intrication est une mesure d'intrication qui est basée sur l'entropie de Von Neumann lorsqu'on utilise un système dans un état pur. Tandis que pour l'états mixtes multipartite, la quantification du degré de l'intrication est plus compliquée et n'est pas encore complètement comprise. Elle s'exprime en terme de l'entropie de Von Neumann donnée par :

$$S(\rho) = -\text{tr} \rho \log \rho. \quad (\text{I.57})$$

On considère un état quantique  $|\psi\rangle_{AB}$  composé de deux sous-systèmes  $A$  et  $B$ . Pour chaque état pur, l'entropie d'intrication  $E(|\psi\rangle_{AB})$  est définie par :

$$E(|\psi\rangle_{AB}) = -\text{tr}\rho_A \log \rho_A = -\text{tr}\rho_B \log \rho_B. \quad (\text{I.58})$$

L'intrication d'un état pur bipartite est quantifiée par l'entropie d'intrication  $E$  qui est exprimée par les matrices densités réduites  $\rho_A$  et  $\rho_B$ . On général, on dit que l'état est séparable ou bien intriqué si seulement si :

- La valeur de l'entropie d'intrication est égale à zéro (état est séparable)
- La valeur de l'entropie d'intrication est maximale (l'état est dit maximalelement intriqué)

Elle atteint la valeur  $E(|\psi\rangle) = \ln(N)$  si  $p_i = \frac{1}{N} \forall i$ ,  $N$  est la dimension de la matrice densité réduite. Considérons à titre d'exemple l'état de spin  $|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$ . La matrice densité réduite  $\rho_A$  du spin  $A$ , obtenue par la trace sur la partie  $B$ , est donnée par :

$$\rho_A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{I.59})$$

Dans ce cas  $E(|\psi\rangle_{AB}) = \ln(2)$ . Cette mesure d'intrication est insuffisante lorsque l'état est mixte. En effet, elle devient incapable de faire la distinction entre les corrélations quantiques et classiques. Dans ce cas, la discordance quantique est la mesure adéquate pour quantifier un état intriqué donné.

### I.4.3.2 Concurrence et Entropie de formation

La concurrence a été initialement présentée comme une grandeur auxiliaire, utilisée pour calculer l'intrication de formation de deux systèmes. Cependant, la concurrence peut également être considérée comme une mesure d'intrication indépendante [80] et fournit un moyen pour accéder à la séparabilité d'un système à deux qubits [80, 85].

Plusieurs mesures de la quantité d'intrication ont été proposées pour les systèmes composés, particulièrement la concurrence et l'intrication de formation. Dans le cas d'un système à deux qubits, la concurrence bipartite la plus utilisée qu'a été proposée par Wootters [80].

- Dans le cas où  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  est un état pur, la quantité d'intrication de formation (l'entropie de formation) est donnée par :

$$E(|\psi\rangle) = \varepsilon(C(|\psi\rangle)), \quad (\text{I.60})$$

où la concurrence  $C$  est définie par

$$C(|\psi\rangle) = |\langle\psi|\tilde{\psi}\rangle|, \quad (\text{I.61})$$

où le tilde représente l'opérateur "spin-flip", avec

$$|\tilde{\psi}\rangle = (\sigma_y \otimes \sigma_y) |\psi^*\rangle, \quad (\text{I.62})$$

où  $\sigma_y$  est la matrice de Pauli suivant la direction  $y$ , et  $|\psi^*\rangle$  est le conjugué complexe de  $|\psi\rangle$  dans la base standard  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ , alors :

$$C(|\psi\rangle) = |\langle\psi|\sigma_y \otimes \sigma_y |\psi^*\rangle|. \quad (\text{I.63})$$

la fonction  $\varepsilon$  est définie par

$$\varepsilon(C) = H\left(\frac{1 + \sqrt{1 - |C|^2}}{2}\right), \quad (\text{I.64})$$

avec  $H(x)$  est l'entropie binaire défini comme

$$H(x) = -x \log_2 x - (1 - x) \log_2 (1 - x). \quad (\text{I.65})$$

Si  $C = 0$  l'état est séparable, et si  $C = 1$  l'état est au contraire maximalement intriqué.

**Exemple I.4.1** *Un état pur à deux qubits prend la forme :*

$$|\psi\rangle = \alpha_{00} |00\rangle + \alpha_{01} |01\rangle + \alpha_{10} |10\rangle + \alpha_{11} |11\rangle \quad (\text{I.66})$$

où  $\alpha_{00}$ ,  $\alpha_{01}$ ,  $\alpha_{10}$  et  $\alpha_{11}$  sont des nombres complexes qui vérifient la condition de normalisation suivante

$$|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2 + |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2 = 1 \quad (\text{I.67})$$

On peut montrer que  $|\psi\rangle$  est séparable si  $\alpha_{00}\alpha_{11} = \alpha_{01}\alpha_{10}$ . De sorte que l'on peut prendre la différence entre  $\alpha_{00}\alpha_{11}$  et  $\alpha_{01}\alpha_{10}$  en tant que mesure de l'intrication et on définit la concurrence par

$$C(\psi) = 2 |\alpha_{00}\alpha_{11} - \alpha_{01}\alpha_{10}| \quad (\text{I.68})$$

La concurrence est égale à 0 pour un état séparable et à 1 pour un état maximalement intriqué.

— L'intrication pour les états mixtes est donnée par [85] :

$$E(\rho) = \varepsilon(C(\rho)) \quad (\text{I.69})$$

La concurrence pour un état mixte de deux qubits est définie comme suit :

$$C(\rho) = \inf \sum_i p_i C(|\psi_i\rangle) \quad (\text{I.70})$$

où  $C(|\psi_i\rangle)$  est la concurrence  $|\psi_i\rangle$  donnée par l'équation (I.68). Wootters et Hill ont obtenu une formule explicite de la concurrence [86]. Elle est donnée par :

$$C(\rho) = \max \{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\} \quad (\text{I.71})$$

avec  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$  sont les racines carrés des valeurs propres de la matrice  $\rho(\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)$  ( $\rho^*$  le complexe conjugué de  $\rho$ ).

**Exemple I.4.2** *À titre d'illustration, on considère un état quantique bipartite  $\rho$  de forme X*

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{41} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (\text{I.72})$$

La concurrence peut être présentée comme une expression simple impliquant les éléments diagonaux et non-diagonaux de la matrice densité correspondante. La concurrence d'un état décrit par une matrice de forme X peut facilement être trouvée en utilisant la formule (I.71). Elle est donnée par :

$$C(\rho) = 2 \max \{0, \lambda_1, \lambda_2\} \quad (\text{I.73})$$

avec :

$$\lambda_1 = |\rho_{14}| - \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}} \quad (\text{I.74})$$

et

$$\lambda_1 = |\rho_{23}| - \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} \quad (\text{I.75})$$

avec  $\rho_{11}, \rho_{14}, \rho_{22}, \rho_{23}, \rho_{32}, \rho_{33}, \rho_{41}$  et  $\rho_{44}$  sont les éléments de l'opérateur densité donné dans l'équation (I.72)

### I.4.3.3 Discorde quantique

En théorie de l'information quantique, la discorde quantique [87] est une mesure de corrélations entre deux sous systèmes non classiques d'un système quantique. Il comprend des corrélations qui sont dues à des effets physiques quantiques, mais ne comportent pas nécessairement l'intrication quantique. Généralement, un état quantique bipartite contient à la fois des corrélations classiques et quantiques, qui sont quantifiés conjointement par leur " information mutuelle quantique " qui est une mesure théorique de l'information de la corrélation totale dans l'état quantique bipartite. En particulier, si  $\rho_{AB}$  désigne l'opérateur densité d'un système bipartite composé ( $AB$ ) et  $\rho_A$  (resp  $B$ ) désigne l'opérateur densité de la partie  $A$  (resp  $B$ ), alors l'information quantique mutuelle est définie comme [88] :

$$I(A, B) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}) \quad (\text{I.76})$$

où  $\rho_{AB}$  est l'état d'un système quantique bipartite composé de la particule  $A$  et  $B$ ,  $\rho_{A(B)} = \text{tr}_{B(A)}(\rho_{AB})$  est l'état réduit de  $A(B)$ , et  $S(\rho)$  est l'entropie de Von Neumann de l'état  $\rho$  [89]. Considérons les opérateurs de projections  $\{\mathcal{M}_k\}$  pour décrire une mesure de Von Neumann pour le système  $A$ . Nous rappelons que l'opérateur de mesure à valeur positive généralisé n'est pas nécessaire. Alors l'état après avoir mesuré la particule  $B$ , qui correspond au résultat  $K$  est

$$\rho_{AB} \rightarrow \rho_k^B = \frac{(\mathcal{M}_k \otimes I) \rho_{AB} (\mathcal{M}_k \otimes I)}{p_k^B} \quad (\text{I.77})$$

où la mesure de Von Neumann pour le sous-système  $A$  s'écrit comme

$$\mathcal{M}_k = U \Pi_k U^\dagger : \quad k = 0, 1, \quad (\text{I.78})$$

avec  $\Pi_k = |k\rangle\langle k|$  est le projecteur pour le sous-système  $A$  dans la base  $|k\rangle$ ,  $U \in SU(2)$  est l'opérateur unitaire de déterminant unité et la probabilité  $p_k^B$  est égale :

$$p_k^B = \text{Tr}[(\mathcal{M}_k \otimes I) \rho_{AB} (\mathcal{M}_k \otimes I)]. \quad (\text{I.79})$$

En utilisant tous les éléments de l'ensemble  $\{\mathcal{M}_k\}$ , les états après de mesure de la particule  $B$  sont caractérisés par l'ensemble  $\{p_k^B, \rho_k^B\}$ . Notons que  $\rho_B$  reste inchangée, pour tout ensemble après mesure. L'information sur la particule  $B$  que acquiert la partie  $A$ , en faisant usage d'un ensemble des mesures projecteurs spécifique, est donnée par

$$S(\rho_B) - \sum_k p_k^B S(\rho_k^B) \quad (\text{I.80})$$

L'obstacle majeur pour évaluer la discorde quantique est relié à la procédure compliquée de maximisation pour calculer la corrélation classique, car la maximisation doit être faite sur toutes les mesures possibles. Donc la mesure des corrélations classiques résultante est donnée

par :

$$J(\rho_{AB}) = \max_{\{\mathcal{M}\}} \left[ S(\rho_B) - \sum_k p_k^B S(\rho_k^B) \right] \quad (\text{I.81})$$

$$= S(\rho_B) - \tilde{S}_{\min}, \quad (\text{I.82})$$

où  $\tilde{S}_{\min}$  désigne la valeur minimale de l'entropie conditionnelle. Nous avons

$$\tilde{S}_{\min} = \sum_k p_k^B S(\rho_k^B). \quad (\text{I.83})$$

La notion de la discorde quantique a été introduite par Harold Ollivier et H. Wojciech Zurek. en 2001 [90] et indépendamment de L. Henderson et V. Vedral [55, 89]. La discorde quantique est une mesure de la corrélation quantique. Plus précisément, c'est la différence entre l'information mutuelle (une quantité qui mesure la corrélation totale) entre deux sous-systèmes (classique et quantique) et la corrélation classique. Il s'en suit le résultat suivant :

$$D(\rho_{AB}) = I(\rho_{AB}) - J(\rho_{AB}) \quad (\text{I.84})$$

$$= S(\rho_A) + \tilde{S}_{\min} - S(\rho_{AB}) \quad (\text{I.85})$$

Pour un état général du système à deux qubits (état mixte), la qualification de la discorde quantique est relativement compliquée. Les quelques résultats disponibles dans la littérature ont été obtenu pour des classes d'états  $X$  du système à deux qubits.

#### Propriétés I.4.1 *La discorde quantique satisfait les propriétés suivantes :*

- *La discorde quantique est toujours positive  $D(\rho_{AB}) \geq 0$ .*
- *$D(\rho_{AB}) = 0$  si et seulement si l'état  $\rho_{AB}$  est la diagonale de Bloch dans sa base propre, est  $\rho_{AB} = \sum_j p_j \rho_{AB} p_j$  où  $\rho_{AB} = \sum_j \tau_j p_j$ , avec  $\{\tau\}$  c'est une distribution de probabilité.*
- *La valeur de la discorde quantique est supérieure ou égale à l'entropie de von Neumann du sous système mesuré, c'est-à-dire  $D(\rho_{AB}) \leq S(\rho_A)$ .*

Dans ce qui suit, l'expression analytique de la discorde quantique par un d'état de type  $X$ . La matrice densité d'un état de ce système à deux qubits  $AB$  dans la base standard  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$  est donnée par

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} \rho_{00} & 0 & 0 & \rho_{03} \\ 0 & \rho_{11} & \rho_{12} & 0 \\ 0 & \rho_{21} & \rho_{22} & 0 \\ \rho_{30} & 0 & 0 & \rho_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{I.86})$$

qui s'écrit dans la base  $\{|00\rangle, |11\rangle, |01\rangle, |10\rangle\}$  sous la forme suivante

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{03} & 0 & 0 \\ \rho_{30} & \rho_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{11} & \rho_{12} \\ 0 & 0 & \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}. \quad (\text{I.87})$$

Autrement, cette matrice densité  $\rho_{AB}$  peut s'écrire sous la forme de deux matrices réduites

$$\rho_{AB} = (\rho_{AB})_1 + (\rho_{AB})_2 \quad (\text{I.88})$$

avec

$$(\rho_{AB})_1 = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{03} \\ \rho_{30} & \rho_{33} \end{pmatrix} \quad (\rho_{AB})_2 = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}. \quad (\text{I.89})$$

Les valeurs propres de la matrice densité  $\rho_{AB}$  de deux qubits sont données à partir de  $(\rho_{AB})_1$  et  $(\rho_{AB})_2$  sous la forme

$$\lambda_1^\pm = \frac{1}{2} \text{tr}(\rho_{AB})_1 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \text{tr}(\rho_{AB})_1\right)^2 - \det(\rho_{AB})_1} \quad (\text{I.90})$$

où

$$\lambda_2^\pm = \frac{1}{2} \text{tr}(\rho_{AB})_2 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \text{tr}(\rho_{AB})_2\right)^2 - \det(\rho_{AB})_2} \quad (\text{I.91})$$

Donc pour que  $\rho_{AB}$  soit de rang 2, il suffit de considérer

$$\det(\rho_{AB})_1 = 0 \quad \det(\rho_{AB})_2 = 0 \quad (\text{I.92})$$

Dans ce cas, les valeurs propres de la matrice densité  $\rho_{AB}$  de deux qubits est de rang 2 sont données par

$$\lambda_1^+ = \text{tr}(\rho_{AB})_1 = \rho_{00} + \rho_{33} \quad (\text{I.93})$$

et

$$\lambda_2^+ = \text{tr}(\rho_{AB})_2 = \rho_{11} + \rho_{22} \quad (\text{I.94})$$

alors on peut remarquer que

$$\lambda_1^+ + \lambda_2^+ = 1 \quad (\text{I.95})$$

c'est à dire que

$$\text{tr}(\rho_{AB})_1 \neq 0 \quad \text{et} \quad \text{tr}(\rho_{AB})_2 \neq 0. \quad (\text{I.96})$$

L'entropie conjointe de l'état  $\rho_{AB}$  est

$$S(\rho_{AB}) = -\lambda_1^+ \log_2 \lambda_1^+ - \lambda_2^+ \log_2 \lambda_2^+ \quad (\text{I.97})$$

où  $\rho_A$  et  $\rho_B$  sont les états marginaux de  $\rho_{AB}$  avec

$$S(\rho_A) = -\lambda_1^A \log_2 \lambda_1^A - \lambda_2^A \log_2 \lambda_2^A, \quad S(\rho_B) = -\lambda_1^B \log_2 \lambda_1^B - \lambda_2^B \log_2 \lambda_2^B \quad (\text{I.98})$$

où les valeurs propres de  $\rho_A$  et  $\rho_B$  sont respectivement

$$\begin{cases} \lambda_1^A = \rho_{00} + \rho_{11} & \lambda_2^A = \rho_{22} + \rho_{33} \\ \lambda_1^B = \rho_{00} + \rho_{22} & \lambda_2^B = \rho_{11} + \rho_{33} \end{cases} \quad (\text{I.99})$$

Il en résulte que l'information mutuelle, définie par (I.8), prend la forme :

$$I(\rho_{AB}) = H(\lambda_1^A) + H(\lambda_1^B) - H(\lambda_1^+). \quad (\text{I.100})$$

Pour calculer la forme explicite des corrélations classiques  $J(\rho_{AB})$ , nous utilisons la décomposition spectrale de la matrice densité  $\rho_{AB}$

$$\rho^{AB} = \lambda_1^+ |\psi_1\rangle \langle \psi_1| + \lambda_2^+ |\psi_2\rangle \langle \psi_2| \quad (\text{I.101})$$

où les valeurs propres  $\lambda_1^+$  et  $\lambda_2^+$  sont données par (I.93), (I.94) et les états propres  $|\psi_1\rangle$  et  $|\psi_2\rangle$

sont donner par

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{|\rho_{03}|^2 + |\rho_{33}|^2}} [\rho_{03} |00\rangle + \rho_{33} |11\rangle], \quad (\text{I.102})$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{|\rho_{12}|^2 + |\rho_{22}|^2}} [\rho_{12} |01\rangle + \rho_{22} |10\rangle]. \quad (\text{I.103})$$

En attachant un qubit  $C$  au système bipartite  $AB$ , nous écrivons la purification de  $\rho_{AB}$  comme

$$|\psi\rangle = \sqrt{\lambda_1^+} |\psi_1\rangle \otimes |0\rangle + \sqrt{\lambda_2^+} |\psi_2\rangle \otimes |1\rangle, \quad (\text{I.104})$$

de telle sorte que l'ensemble du système  $ABC$  est décrit par l'état pur de densité  $\rho_{ABC} = |\psi\rangle \langle\psi|$  pour que  $\rho_{AB} = \text{tr}_C(\rho_{ABC})$  et  $\rho_{BC} = \text{tr}_A(\rho_{ABC})$ . D'après la relation de Koashi-Winter [91], la valeur minimale de l'entropie conditionnelle coïncide avec l'intrication de formation de  $\rho_{BC}$  et nous avons

$$\tilde{S}_{\min} = E(\rho_{BC}) = H\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - |\mathcal{C}(\rho_{BC})|^2}\right), \quad (\text{I.105})$$

où la concurrence de la matrice densité  $\rho_{BC}$  est

$$|\mathcal{C}(\rho_{BC})|^2 = \frac{4(\rho_{00} + \rho_{33})(\rho_{11} + \rho_{22})(|\rho_{03}||\rho_{12}| - |\rho_{22}||\rho_{33}|)^2}{(|\rho_{03}|^2 + |\rho_{33}|^2)(|\rho_{12}|^2 + |\rho_{22}|^2)}. \quad (\text{I.106})$$

Il en résulte que la discorde quantique est donnée par

$$D(\rho_{AB}) = S(\rho_A) - S(\rho_{AB}) + E(\rho_{BC}). \quad (\text{I.107})$$

Finalement, par l'utilisation des équations (I.97), (I.98) et (I.105), alors l'expression explicite de la discorde quantique s'écrit

$$\begin{aligned} D(\rho_{AB}) &= H(\rho_{00} + \rho_{11}) - H(\rho_{00} + \rho_{33}) \\ &+ H\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4(\rho_{00} + \rho_{33})(\rho_{11} + \rho_{22})(|\rho_{03}||\rho_{12}| - |\rho_{22}||\rho_{33}|)^2}{(|\rho_{03}|^2 + |\rho_{33}|^2)(|\rho_{12}|^2 + |\rho_{22}|^2)}}\right). \end{aligned} \quad (\text{I.108})$$

Dans le cas général, pour obtenir la discorde quantique, il faut faire des efforts considérables pour minimiser l'entropie conditionnelle  $\tilde{S}_{\min}$  de toutes les mesures possibles sur les particules  $A$ . Dans la prochaine partie, nous présentons une méthode géométrique pour éviter ces difficultés technique dans le calcul de la discorde quantique.

#### I.4.3.4 Mesure géométrique de la discorde quantique

Dans la section précédente, nous avons passé en revue la discorde quantique définie par le biais de l'entropie de Von Neumann. La mesure géométrique de la discorde quantique a été introduite par Dakic et al [82]. Elle est définie comme la plus proche distance entre l'état considéré et l'état de discorde nulle [82]. La distance est caractérisée par la norme de Hilbert-Schmidt. Elle est donnée par

$$D_g(\rho) = \min_{\chi \in \Omega_0} \|\rho - \chi\|^2, \quad (\text{I.109})$$

où  $\Omega_0$  est l'ensemble des états de discorde nulle, et  $\|\rho - \chi\|^2 = \text{Tr}(\rho - \chi)^2$  est la norme de Hilbert-Schmidt. Un état  $\chi \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  est de discorde zéro si et seulement si  $\chi$  est un état

classique[92]. Elle s'écrit comme

$$\chi = \sum_{k=1}^m p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k| \otimes \rho_k, \quad (\text{I.110})$$

où  $p_k$  est une distribution de probabilité, et  $\{|\psi_k\rangle\}$  est une base orthonormale arbitraire dans  $\mathcal{H}_A$  et  $\rho_k$  est un ensemble d'états arbitraires (opérateurs de densité) agissant sur  $\mathcal{H}_B$ . Dakic et al [82] ont également obtenu une expression facilement calculable pour la mesure géométrique de la discordance quantique pour un système à deux qubits. En effet un état général s'exprime à l'aide de la décomposition de Fano-Bloch comme

$$\rho = \frac{1}{4} \left[ I \otimes I + \sum_{i=1}^3 (x_i \sigma_i \otimes I + y_i I \otimes \sigma_i) + \sum_{i,j=1}^3 R_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right] \quad (\text{I.111})$$

où  $x_i = \text{tr} \rho (\sigma_i \otimes I)$ ,  $y_i = \text{tr} \rho (I \otimes \sigma_i)$  sont les composantes des vecteurs locaux de Bloch,  $\sigma_i (i \in 1, 2, 3)$  sont les trois matrices de Pauli.

et  $R_{ij} = \text{tr} \rho (\sigma_i \otimes \sigma_j)$  sont les composantes du tenseur de corrélation, pour chaque état  $\rho$ , nous associons un triple  $\{\vec{x}, \vec{y}, R\}$ . Pour un système de deux qubits, l'état de discordance nulle est de la forme

$$\chi = p_1 |\psi_1\rangle \langle \psi_1| \otimes \rho_1 + p_2 |\psi_2\rangle \langle \psi_2| \otimes \rho_2 \quad (\text{I.112})$$

où  $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$  est une base orthonormée,  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont les matrices densités  $2 \times 2$  et  $p_1$  et  $p_2$  sont les nombres positives tels que  $p_1 + p_2 = 1$ . Nous définissons  $t = p_1 - p_2$  et les trois vecteurs suivants par

$$\vec{e} = \langle \psi_1 | \vec{\sigma} | \psi_1 \rangle \quad (\text{I.113})$$

$$\vec{s}_{\pm} = \text{tr} (p_1 \rho_1 \pm p_2 \rho_2) \quad (\text{I.114})$$

Il est facile de démontrer que  $t\vec{e}$  et  $\vec{s}_+$  représentent les vecteurs de Bloch locaux du premier et du second qubit, respectivement, tandis que le vecteur  $\vec{s}_-$  est directement liée au tenseur de corrélation qui est de la forme  $T = \vec{e} \cdot \vec{s}_-^T$ . Par conséquent, un état de discordance nulle  $\chi$  est associé à  $\vec{\chi} = \{t\vec{e}, \vec{s}_+, T\}$ , où  $\|\vec{e}\|, \|\vec{s}_{\pm}\|$  et  $\in [-1, 1]$  La distance entre les états  $\rho$  et  $\chi$  est donnée par

$$\begin{aligned} \|\rho - \chi\|^2 &= \|\rho\|^2 - 2\text{tr} \rho \chi + \|\chi\|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( 1 + \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + \|T\|^2 \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( 1 + t\vec{x}\vec{e} + \vec{y}\vec{s}_+ + \vec{e}T\vec{s}_- \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \left( 1 + t^2 + \|\vec{s}_+\|^2 + \|\vec{s}_-\|^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{I.115})$$

Tout d'abord, nous optimisons la distance en fonction des paramètres  $\vec{s}_{\pm}$  et  $t$ . Nous obtenons

$$\frac{\partial \|\rho - \chi\|^2}{\partial t} = \frac{1}{d} (-\vec{x}\vec{e} + t) = 0 \quad (\text{I.116})$$

$$\frac{\partial \|\rho - \chi\|^2}{\partial \vec{s}_+} = \frac{1}{d} (-\vec{y} + \vec{s}_+) = 0 \quad (\text{I.117})$$

$$\frac{\partial \|\rho - \chi\|^2}{\partial \vec{s}_-} = \frac{1}{d} (-T\vec{e} + \vec{s}_-) = 0 \quad (\text{I.118})$$

qui donne la solution  $t = \vec{x}\vec{e}$ ,  $\vec{s}_+ = \vec{y}$  et  $\vec{s}_- = T\vec{e}$ . En utilisant ces résultats, nous obtenons

$$\|\rho - \chi\|^2 = \frac{1}{4} \left( \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{R}\|^2 - \vec{e} (\vec{x}\vec{x}^T + RR^T) \vec{e} \right), \quad (\text{I.119})$$

qui atteint le minimum quand  $\vec{e}$  est un vecteur propre de la matrice  $K = \vec{x}\vec{x}^T + RR^T$ .

Une expression analytique de la mesure géométrique de la discorde quantique est donnée par

$$D_g(\rho) = \frac{1}{4} \left( \|x\|^2 + \|R\|^2 - K_{\max} \right), \quad (\text{I.120})$$

avec  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$  et  $K_{\max}$  est la plus grande valeur propre de la matrice  $K$  qui donnée par

$$K := xx^T + RR^T. \quad (\text{I.121})$$

$K$  est une matrice  $3 \times 3$ . Les valeurs propres de la matrice  $K$  sont  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$ . Il est facile de voir que

$$\|x\|^2 + \|R\|^2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3. \quad (\text{I.122})$$

La mesure géométrique de la discorde quantique est donnée par la formule compacte suivante

$$D_g(\rho) = \frac{1}{4} \min \{ \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3 \}. \quad (\text{I.123})$$

La comparaison de ces valeurs propres est un élément clé dans le procédé de calcul de  $D_g(\rho)$ .

#### Exemple I.4.3 *Calcul de la discorde géométrique pour les états de type X*

On considère un état de type X de deux qubits qui se pose généralement comme la matrice densité réduite à deux qubits dans la base de calcul  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ . La matrice densité d'un état X de deux qubits est

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{00} & 0 & 0 & \rho_{03} \\ 0 & \rho_{11} & \rho_{12} & 0 \\ 0 & \rho_{21} & \rho_{22} & 0 \\ \rho_{30} & 0 & 0 & \rho_{33} \end{pmatrix}. \quad (\text{I.124})$$

L'état X peut être réécrite dans la représentation de Fano-Bloch avec la matrice de corrélation R donnée par

$$R = \begin{pmatrix} \rho_{03} + \rho_{12} + \rho_{21} + \rho_{30} & i(\rho_{03} - \rho_{12} + \rho_{21} - \rho_{30}) & 0 \\ i(\rho_{03} + \rho_{12} - \rho_{21} - \rho_{30}) & -\rho_{03} + \rho_{12} + \rho_{21} - \rho_{30} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{00} - \rho_{11} - \rho_{22} - \rho_{33} \end{pmatrix}, \quad (\text{I.125})$$

et  $x = (0, 0, \rho_{00} + \rho_{11} - \rho_{22} - \rho_{33})^T$ , la mesure géométrique de la discorde quantique peut être calculée à l'aide de l'équation (I.123) qui est donnée par

$$D_g(\rho) = \frac{1}{4} \min \{ \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3 \}, \quad (\text{I.126})$$

où, les valeurs propres de la matrice K, en termes d'éléments de la matrice densité  $\rho$ , sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = 4(|\rho_{12}| + |\rho_{03}|)^2, \\ \lambda_2 = 4(|\rho_{12}| - |\rho_{03}|)^2, \\ \lambda_3 = 2[(\rho_{00} - \rho_{22})^2 + (\rho_{11} - \rho_{33})^2]. \end{cases} \quad (\text{I.127})$$

Nous observons que  $\lambda_1$  est toujours plus grand que  $\lambda_2$ . Par conséquent on doit traiter les deux cas séparément de la mesure géométrique de la discorde quantique, que sont  $\lambda_1 \leq \lambda_3$  et  $\lambda_1 \geq \lambda_3$ .

Pour  $\lambda_1 \leq \lambda_3$ , la mesure géométrique de la discorde quantique est

$$D_g(\rho) = \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2) \quad (\text{I.128})$$

tandis que pour  $\lambda_1 \geq \lambda_3$ , nous avons

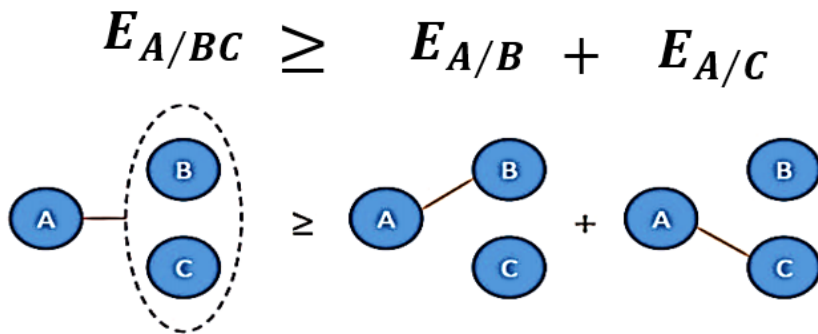
$$D_g(\rho) = \frac{1}{4}(\lambda_2 + \lambda_3). \quad (\text{I.129})$$

### I.4.3.5 Monogamie d'intrication

Dans un système multipartite et à traversent un canal quantique [93], l'intrication peut être transférée d'un système vers un autre système séparé spatialement du premier, c'est à dire que les corrélations quantiques peuvent être partagées entre les qubits d'un système englobant plusieurs qubits. La distribution des corrélations quantiques au sein d'un système multipartite suit des restrictions assez sévères contrairement à la distribution des corrélations classiques. Ces restrictions ont conduit au concept de monogamie des corrélations quantiques. Cette propriété transcrit la monogamie introduite par Coffman, Kundu et Wootters (CKW) en 2000 [94] pour un système de trois qubits. Une généralisation à plusieurs qubits a été proposée par Osborne et al en 2006 [95].

Le concept de la monogamie d'intrication peut être décrit comme suit : on note par  $E_{A/B}$  l'intrication partagée entre  $A$  et  $B$ ,  $E_{A/C}$  celle partagée entre  $A$  et  $C$ ,  $E_{A/BC}$  l'intrication partagée entre  $A$  et le système composite comprenant  $B$  et  $C$ . En utilisant ces notations, la mesure d'intrication,  $E$  est dite monogame si l'inégalité suivante est satisfaite

$$E_{A/BC} \geq E_{A/B} + E_{A/C}. \quad (\text{I.130})$$



**Fig. I.6** – Caractérisation de l'intrication bipartites partagée dans le systèmes à trois qubits : l'inégalité Coffman-Kundu-Wootters.

L'inégalité Coffman-Kundu-Wootters traduit le principe de monogamie d'intrication, la somme de la quantité d'intrication partagée entre  $A$  et  $B$  plus la quantité possible d'intrication entre  $A$  et  $C$ , de sorte que leur somme ne dépasse pas l'intrication bipartite totale entre  $A$  et le système composite  $BC$ .

### I.4.3.6 Concept de la monogamie d'intrication

Dans cette section nous examinons un système à trois qubits. L'expression générale d'un état pur d'un système à trois qubits dans  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  est donnée par

$$|\psi\rangle_{ABC} = \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3=0}^1 \psi_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3} |\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\rangle, \quad (\text{I.131})$$

où  $\{|\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\rangle \equiv |\varepsilon_1\rangle \otimes |\varepsilon_2\rangle \otimes |\varepsilon_3\rangle\}$  est la base de calcul pour les trois qubits. Par exemple, l'état  $|000\rangle$  représente trois spin "up". Les huit coefficients  $\{\psi_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3}\}$  sont des nombres complexes satisfaisant la contrainte de normalisation  $\langle \psi | \psi \rangle = 1$ .

Pour bien comprendre l'inégalité (I.130), nous étudions les états qui peuvent saturer cette inégalité. Pour cela, on considère l'intrication entre trois qubits. Ici, nous allons focaliser notre discussion sur deux types bien distincts [96] : les états de type  $W$  et les états de type Greenberger-Horne-Zeilinger ( $GHZ$ ) [97]. Ces deux états sont définis par

$$|W\rangle = |001\rangle + |010\rangle + |100\rangle. \quad (\text{I.132})$$

et

$$|GHZ\rangle = |000\rangle + |111\rangle. \quad (\text{I.133})$$

Chaque état pur à trois qubits peut être transformé sous des opérations locales en des états de type  $W$  et de type  $GHZ$ . Pendant toutes les transformations locales, les corrélations quantiques restent intacts sous ces opérations locales. D'autre part, l'état de  $W$  dans un certain sens moins intriqué que l'état  $GHZ$ . Il est également important de noter que les états de type  $W$  maximisent l'intrication bipartite moyenne dans un système à trois qubits.

L'état spécial  $|GHZ\rangle$  [97] est un état maximalelement intriqué par rapport à tous les bipartitions ( $A|BC$ ,  $AB|C$ ,  $AC|B$ ). Par ailleurs, l'état de  $W$  présente la particularité d'être le seul état qui sature l'inégalité de la monogamie (I.130).

Considérons maintenant la matrice densité réduite  $\rho_{AB}$  de l'état  $W$  que l'on obtient en prenant la trace partielle sur  $C$

$$\rho_{AB} = \text{tr}_C |W\rangle_{ABC} \langle W| = \frac{1}{3} |00\rangle_{AB} \langle 00| + \frac{2}{3} |\psi^+\rangle_{AB} \langle \psi^+|. \quad (\text{I.134})$$

A cause de la symétrie de permutation, les états  $\rho_{BC}$  et  $\rho_{AC}$  sont donnés par des expressions similaires. Quelle que soit la mesure d'intrication  $E$  choisie, elle devrait être maximale pour l'état  $|\psi^+\rangle$ . De ce fait, on prend  $E = 1$  pour les états présentant une intrication maximale et  $E = 0$  pour les états non-intriqués. On peut conclure que l'intrication moyenne de la décomposition de  $\rho_{AB}$  dans (I.134) est donnée par

$$E(\rho_{AB}) = \frac{1}{3} (E|00\rangle_{AB} \langle 00|) + \frac{2}{3} E(|\psi^+\rangle_{AB} \langle \psi^+|) = \frac{2}{3}. \quad (\text{I.135})$$

Il existe d'autres décompositions spectrales qui sont possibles pour la matrice  $\rho_{AB}$ . La décomposition (I.134) présente une intrication minimale [96] et par conséquent, on prend  $E(\rho_{AB}) = \frac{2}{3}$ . Notons qu'à cause de la symétrie de la permutation de l'état  $|W\rangle$ , nous avons  $E(\rho_{AC}) = E(\rho_{BC}) = 2/3$ . Ainsi, la moyenne globale de l'intrication de l'état  $|W\rangle$  de trois qubits est donné par

$$\frac{1}{3} [E(\rho_{AB}) + E(\rho_{BC}) + E(\rho_{AC})] = \frac{2}{3}. \quad (\text{I.136})$$

Pour un état mixte de trois qubits  $\rho_{ABC}$ ,  $\frac{2}{3}$  c'est la valeur maximale possible de l'intrication.

### I.4.3.7 Monogamie de l'intrication dans un système à trois qubits

Pour bien expliquer la monogamie d'intrication pour les systèmes à trois qubits, on utilise le tangle note  $\tau$ . L'entropie linéaire peut être utilisée pour quantifier l'intrication d'un état pur bipartite. Dans ce cas, la notion de tangle est donnée par

$$\tau(|\psi\rangle_{AB}\langle\psi|) := S_{lin}(\rho_A), \quad (\text{I.137})$$

où l'opérateur densité réduite est  $\rho_A = \text{Tr}_B|\psi\rangle_{AB}\langle\psi|$  et l'entropie linéaire  $S_{lin}$  est donnée par l'expression

$$S_{lin}(\rho) = 2(1 - \text{Tr}\rho^2). \quad (\text{I.138})$$

$S_{lin}(\rho) = 1$  pour un état à deux qubits maximalement intriqués.

Tout état bipartite mixte  $\rho_{AB} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle_{AB}\langle\psi_i|$  est un mélange des états purs. Un calcul analytique permet de voir que le tangle de  $\rho_{AB}$  dans le cas des états bipartites mixtes [85]. On définit

$$\tilde{\rho}_{AB} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho_{AB}^* (\sigma_y \otimes \sigma_y), \quad (\text{I.139})$$

avec  $\rho_{AB}$  l'état de deux qubits,  $\rho_{AB}^*$  son complexe conjugué. En désignant par  $\{\lambda_i\}$  l'ensemble des valeurs propres, par ordre décroissant, de l'opérateur hermitien  $\sqrt{\sqrt{\rho_{AB}}\tilde{\rho}_{AB}\sqrt{\rho_{AB}}}$ .

Alors le tangle de  $\rho_{AB}$  est donnée par l'expression [80]

$$\tau(\rho_{AB}) = (\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4)^2, \quad (\text{I.140})$$

pour

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4. \quad (\text{I.141})$$

Si cette dernière inégalité n'est pas satisfaite par les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ , alors  $\tau(\rho_{AB}) = 0$ . Le tangle c'est la mesure analytique de l'intrication bipartite. Dans la suite de cette section, nous considérons un système à trois parties  $ABC$  où chaque partie est constituée par un qubit. Nous avons vu que, si deux parties présentent une intrication maximale, le troisième ne peut pas partager l'intrication avec les deux autres. Maintenant, nous montrons que l'intrication ne peut pas être partagée, mais cette fois en utilisant la notion de mesure d'intrication. Si les deux parties du système partagent un état pur  $|\psi\rangle_{AB}$  du sous-système composite  $AB$ , alors l'entropie linéaire de cet état,  $S_{lin}(|\psi\rangle_{AB}\langle\psi|)$ , est nulle.

Dans la suite on montre que les deux états  $W$  et  $GHZ$  sont maximalement intriqués, mais de façons distinctes : l'état de  $W$  de deux qubits maximise l'intrication bipartite après la trace sur le troisième qubit alors que l'état de  $GHZ$  maximise l'intrication bipartite entre un qubit et les deux autres qubits. Pour cela On considère un état pur général à 3 qubits

$$|\phi\rangle_{ABC} \in \mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2,$$

et on définit l'intrication bipartite relativement aux trois bi-partitions possibles du système tripartite par

$$\tau_{A|BC}, \tau_{B|AC}, \tau_{C|AB},$$

avec  $\tau_{A|BC} \equiv \tau_{A|BC}(|\phi\rangle_{ABC}\langle\phi|)$  mesure le tangle entre le qubit  $A$  et le système  $BC$ . Alors nous définissons la valeur du tangle moyen par

$$\tau_1(|\phi\rangle_{ABC}\langle\phi|) = \frac{\tau_{A|BC} + \tau_{B|AC} + \tau_{C|AB}}{3}. \quad (\text{I.142})$$

Dans le cas général le tangle moyen  $\tau_1 (|\phi\rangle_{ABC} \langle\phi|)$  est toujours positif et pour des systèmes à trois qubits, le tangle ne peut pas être supérieur à l'unité. La valeur maximale de  $\tau_1$  est obtenue par l'état  $GHZ$ .

$$\tau_1 (|GHZ\rangle_{ABC} \langle GHZ|) = 1. \quad (\text{I.143})$$

D'autre part, on définit une autre valeur moyenne pour le tangle de trois qubits. Cette valeur, notée par  $\tau_2$ , est basée sur la notion de tangle de deux qubits à un état de trois qubit  $|\phi\rangle_{ABC}$ . Explicitement, elle est donnée par

$$\tau_2 (|\phi\rangle_{ABC} \langle\phi|) = \frac{\tau_{A|B} + \tau_{B|C} + \tau_{A|C}}{3}, \quad (\text{I.144})$$

où  $\tau_{A|B} \equiv \tau(\rho_{AB})$  (de même pour  $\tau_{B|C} \equiv \tau(\rho_{BC})$  et  $\tau_{A|C} \equiv \tau(\rho_{AC})$ ) est la matrice de densité réduite de deux qubits obtenue à partir de  $|\phi\rangle_{ABC}$ . Pour l'état  $GHZ$

$$\tau_2 (|GHZ\rangle_{ABC} \langle GHZ|) = 0, \quad (\text{I.145})$$

parce que chaque matrice densité réduite de deux qubit de  $|GHZ\rangle_{ABC}$  est séparable. Pour que  $B$  et  $C$  ne sont pas corrélés avec  $A$ , alors il n'y a pas de corrélation entre  $A$  et  $BC$ . L'intrication quantique entre le système  $A$  et le système composite  $BC$  ne garantit pas l'intrication entre  $A$  et  $B$  ou entre  $A$  et  $C$ . En effet, l'état  $GHZ$  est un état quantique "extrême" et l'intrication bipartite entre un qubit et le système composite de deux qubits est maximale

$$1 = \tau_1 (|GHZ\rangle_{ABC} \langle GHZ|) > \tau_2 (|GHZ\rangle_{ABC} \langle GHZ|) = 0. \quad (\text{I.146})$$

Cette inégalité entre  $\tau_1$  et  $\tau_2$  est toujours valable pour tout état pur arbitraire de trois qubit  $|\phi\rangle_{ABC}$  et les matrices densité réduite  $\rho_{AB}$ ,  $\rho_{BC}$  et  $\rho_{AC}$ . Ceci se traduit par :

$$\tau_1 (|\phi\rangle_{ABC} \langle\phi|) \geq \tau_2 (|\phi\rangle_{ABC} \langle\phi|). \quad (\text{I.147})$$

Cette inégalité n'est jamais saturée par un état intriqué de trois qubits [98]. Le tangle moyen donnée par (I.147) est maximisé par l'état  $|W\rangle$

$$\tau_2 (|\phi\rangle_{ABC} \langle\phi|) \geq \tau_2 (|W\rangle_{ABC} \langle W|) = \frac{4}{9} \quad (\text{I.148})$$

dans le cas de l'état  $|W\rangle_{ABC}$  définit par :

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle).$$

L'inégalité de monogamie est satisfaite et devient dans ce cas une égalité. La formule (I.140) s'écrit

$$\tau_{A|BC}^2 = \tau_{A|B}^2 + \tau_{A|C}^2. \quad (\text{I.149})$$

Sachant que l'état  $W$  est symétrique par rapport aux permutations des qubits  $A$ ,  $B$  et  $C$ , nous avons la relation suivante entre  $\tau_1$  et  $\tau_2$

$$\tau_1 (|\phi\rangle_{ABC} \langle\phi|) = 2\tau_2 (|\phi\rangle_{ABC} \langle\phi|). \quad (\text{I.150})$$

Il faut rappeler que la première caractérisation du concept de monogamie des corrélations quantiques dans les systèmes à trois qubits a été introduite par Coffman, Kundu et Wootters [99], et cette notion a été étendue à d'autres mesures des corrélations quantiques.

## I.5 Conclusion

La théorie quantique de l'information explore la possibilité d'utiliser l'intrication quantique comme une ressource physique pour des applications contrairement dans la physique classique. John Von Neumann a défini la théorie de l'information sur des définitions de bases différentes de celles de Shannon mais dont les propriétés sont similaires. L'étude de l'intrication quantique est donc l'un des sujets les plus importants et intéressants dans le domaine du traitement de l'information quantique. Dans ce chapitre, un certain nombre de définitions liées à des notions souvent rencontrées en théorie classique de l'information ont été introduites. Nous avons introduit également les notions essentielles de l'information quantique, le formalisme de l'opérateur densité, les qubits, l'entropie de Von Neumann et le phénomène de l'intrication. Ensuite, nous avons présenté les mesures des corrélations quantiques dans des systèmes bipartites. Aussi on a discuté la discordance quantique permettant de classer les états selon leurs degrés d'intrication et nous avons donné la version géométrique de cette mesure. Finalement, nous avons discuté la notion de la monogamie d'intrication, pour quelques cas simples, nous avons donné les relations de la monogamie mathématiques qui sont satisfaites. La rigueur a été sacrifiée en faveur du développement d'une compréhension intuitive des limites au partage de l'intrication et conséquentes limitations au partage des corrélations classiques aussi bien. La relation de monogamie dans les états de type  $W$  et  $GHZ$  a été examinée.

# Information quantique avec variables continues

## II.1 Introduction

La technologie de l'information quantique a franchi des étapes remarquables au cours des trois dernières décennies [71] et promet des avancées encore plus révolutionnaires au cours des trois prochaines [100]. En effet, deux approches principales du traitement de l'information quantique ont été suivies. D'une part, une approche "digital", selon laquelle l'information est codée dans des systèmes possédant un nombre discret et fini de degrés de liberté, appelés qubits ou qudits[101]. Les exemples typiques de mise en œuvre de qubits sont les spins nucléaires des atomes individuels dans une molécule [102], la polarisation des photons[103], les états fondamentaux/excités des ions piégés, etc. Cette approche a été discutée en profondeur dans le premier chapitre. En parallèle, une approche analogique a également été conçue, basée sur l'encodage de l'informations quantique et des corrélations dans des degrés de liberté à spectre continu connu sous le nom variables continues CV, tels que ceux associés aux la position et de quantité de mouvement d'une particule [104]. Cette deuxième approche a connu un grand succès en raison de sa polyvalence, les implémentations englobant souvent différents systèmes physiques, par exemple les quadratures de la lumière et les moments magnétiques collectifs des ensembles atomiques, qui obéissent à la même algèbre canonique.

Dans le contexte du traitement quantique de l'information selon la seconde approche, nous passerons en revue dans ce chapitre les principaux aspects de l'intrication dans les systèmes à variables continues. Dans le but d'être aussi autonome que possible, nous commencerons par une introduction générale au continu-variable, dans laquelle nous passerons en revue un résumé des propriétés structurelles des systèmes continus-variables associés à des espaces de Hilbert de dimension infinie dont les applications possibles dans les tâches d'information et de communication quantiques suscitent un intérêt et une attention croissants - en nous concentrant sur la famille particulièrement pertinente des états gaussiens. La raison pour laquelle ce chapitre est principalement axé sur la discussion des critères de séparabilité et des propriétés d'intrication des états gaussiens est due à leur grande pertinence pratique dans les applications de l'optique quantique et de l'information quantique, au cadre très propre qu'ils fournissent pour l'étude de la structure des corrélations non-locales, et à la conséquence évidente que, ces dernières années, la plupart des études et des résultats sur l'intrication à variation continue ont été obtenus pour les états gaussiens.

## II.2 Introduction au système des variables continues

Les systèmes quantiques à variables continues sont des systèmes quantiques obéissant aux relations de commutation canoniques. Comme nous le verrons dans la prochaine sous-section, de tels systèmes nécessitent toujours l'adoption d'espaces de Hilbert de dimension infinie, même lorsqu'un nombre fini de degrés de liberté est considéré. En plus de rendre leur dynamique potentiellement intraitable, ce fait implique également que l'étude des propriétés liées au contenu en information et en corrélation des systèmes à variables continues s'avère particulièrement difficile. À ce stade, la meilleure façon de traiter théoriquement les systèmes à variables continues est d'utiliser une analyse appropriée de l'espace de phase. Un système CV archétype est un champ quantifié, tel que le champ électromagnétique, qui sera traité dans la prochaine sous-section.

### II.2.1 Quantification du champ électromagnétique

Nous commençons cette section en soulignant les propriétés spécifiquement quantiques et mécaniques du champ électromagnétique, qui ne sont pas présentes dans un traitement classique. C'est pourquoi nous allons commencer immédiatement par quantifier le champ électromagnétique. Nous utiliserons une expansion du vecteur du champ électromagnétique en termes de modes de cavité. Le problème se réduit alors à la quantification de l'oscillateur harmonique correspondant à chaque mode de cavité individuel. Classiquement, le champ électromagnétique est décrit par les équations de Maxwell. La résolution de ces équations nous permet de décrire le champ électromagnétique comme suit

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k,\lambda} E_k \mathbf{e}_k^{(\lambda)} \left[ \alpha_{k,\lambda} e^{i(kr - \omega_k t)} + \alpha_{k,\lambda}^* e^{-i(kr - \omega_k t)} \right] \quad (\text{II.1})$$

où  $k$  est l'indice du mode,  $\mathbf{E}$  une constante contenant tous les préfacteurs dimensionnels,  $\lambda$  la polarisation,  $\omega_k$  la fréquence angulaire,  $\mathbf{e}_k^{(\lambda)}$  le vecteur de polarisation et  $\alpha_k$  et  $\alpha_k^*$  sont les amplitudes complexes. Pour quantifier le champ électromagnétique, nous remplaçons les amplitudes complexes par les opérateurs d'annihilation et de création, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \alpha_{k,\lambda} &\rightarrow \hat{a}_{k,\lambda} \\ \alpha_{k,\lambda}^* &\rightarrow \hat{a}_{k,\lambda}^\dagger \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Puisque les photons sont des bosons, alors les relations de commutation appropriées à choisir pour les opérateurs  $\hat{a}_{k,\lambda}$  et  $\hat{a}_{k,\lambda}^\dagger$  sont les relations de commutation des bosons qui sont les suivantes ;

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{k,\lambda}, \hat{a}_{k',\lambda'}^\dagger] &= \delta_{k,k'} \delta_{\lambda,\lambda'}, \\ [\hat{a}_{k,\lambda}, \hat{a}_{k',\lambda'}] &= 0, \\ [\hat{a}_{k,\lambda}^\dagger, \hat{a}_{k',\lambda'}^\dagger] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

Par conséquent, le comportement dynamique des amplitudes du champ électrique peut alors être décrit par un ensemble d'oscillateurs harmoniques indépendants obéissant aux relations de commutation ci-dessus. Par souci de brièveté, fixons la polarisation et laissons donc tomber l'indice  $\lambda$ . En suite, nous introduisons une paire d'opérateurs,  $\hat{x}_k$  et  $\hat{p}_k$ , appelés les quadratures du champ électromagnétique. Ils apparaissent comme la partie "réelle" et la partie "imaginaire",

respectivement, de l'amplitude "complexe"  $\hat{a}_k$  multipliée par  $1/\sqrt{2}$  :

$$\hat{x}_k = \frac{(\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger)}{\sqrt{2}}, \quad \hat{p}_k = -i \frac{(\hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger)}{\sqrt{2}} \quad (\text{II.4})$$

qui sont équivalents à la position et moment d'un oscillateur harmonique. Il est facile de voir à partir des relations des commutations bosoniques (II.2.1) que  $\hat{x}$  et  $\hat{p}$  sont des observables canoniquement conjuguées satisfaites

$$[\hat{x}_k, \hat{x}_j] = 0, \quad [\hat{x}_k, \hat{p}_j] = i\delta_{k,j}, \quad [\hat{p}_k, \hat{p}_j] = 0 \quad (\text{II.5})$$

ici, nous fixons la constante de Plank à  $\hbar = 1$  (ce qui est toujours possible par un changement d'échelle approprié des unités physiques). Ces relations de commutation conduisent immédiatement à la relation d'incertitude d'Heisenberg, à savoir

$$\Delta\hat{x}_k\Delta\hat{p}_k \geq |\langle[\hat{x}_k, \hat{p}_k]\rangle| = \frac{1}{2}. \quad (\text{II.6})$$

Les relations de commutation associées à  $\hat{x}_k$  et  $\hat{p}_k$  peuvent être réécrites sous la forme compacte suivante, qui s'avérera très utile pour l'analyse de l'espace de phase,

$$[\hat{r}_k, \hat{r}_l] = i\Omega_{kl} \quad (\text{II.7})$$

où  $\hat{\mathbf{r}} = (\hat{q}_1, \hat{p}_1, \dots, \hat{q}_n, \hat{p}_n)^T$  est un vecteur d'opérateurs et  $\Omega_{kl} \equiv [\Omega]_{kl}$  sont les éléments de la matrice symplectique :

$$\mathbf{\Omega} = \bigoplus_{k=1}^n \omega, \quad \omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.8})$$

En termes de ces quadratures, l'Hamiltonien de l'oscillateur harmonique s'écrit comme suit

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_k^2}{2} + \frac{\hat{x}_k^2}{2} \quad (\text{II.9})$$

Également, il peut être écrit en termes d'opérateurs de création et d'annihilation

$$\hat{H} = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} = \hat{N}_k + \frac{1}{2} \quad (\text{II.10})$$

où  $\hat{N}$  est appelé l'opérateur nombre. Les vecteurs propres de  $\hat{N}$  sont appelés états de Fock et notés  $|n\rangle$ . La valeur propre associée sera  $n = 0, 1, 2, \dots$  et nous disons qu'un état de Fock  $|n\rangle$  contient  $n$  photons (ou quanta de lumière), l'état ne contenant aucun photon étant l'état de vide  $|0\rangle$ . À partir de là, les opérateurs de mode peuvent être compris comme des opérateurs qui ajoutent (opérateur de création) ou retirent (opérateur d'annihilation) un photon de l'état. Formellement, nous les définissons comme suit

$$\begin{cases} \hat{a}_k |n\rangle_k & = \sqrt{n} |n-1\rangle_k \\ \hat{a}_k^\dagger |n\rangle_k & = \sqrt{n+1} |n+1\rangle_k \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

Remarquons que  $\hat{N}_k$  a un spectre discret, tandis que  $\hat{x}_k$  et  $\hat{p}_k$ , au contraire, ont des spectres continus. En effet, leurs vecteurs propres sont définis comme

$$\hat{x}_k |x\rangle_k = x_k |x\rangle_k, \quad \hat{p}_k |p\rangle_k = p_k |p\rangle_k \quad (\text{II.12})$$

Avec ces notations,  $|x\rangle_k$  est un état propre de position tandis que  $|p\rangle_k$  est un état propre de quantité de mouvement. Puisque les opérateurs  $\hat{x}_k$  et  $\hat{p}_k$  sont hermitiens, leur famille respective d'états propres forme deux bases orthonormées de l'espace de Fock

$$\langle x | x' \rangle_{kk} = \delta(x_k - x'_k), \quad \langle p | p' \rangle_{kk} = \delta(p_k - p'_k) \quad (\text{II.13})$$

qui donnent deux résolutions de l'identité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x\rangle \langle x| dx = \mathbb{1} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |p\rangle \langle p| dp = \mathbb{1} \quad (\text{II.14})$$

Les deux bases sont liées par la transformée de Fourier :

$$|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ixp} |x\rangle, \quad |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ixp} |p\rangle \quad (\text{II.15})$$

Cependant, les états de quadrature ne sont pas vraiment normalisables, et ils ne peuvent donc pas être générés expérimentalement (du moins au sens strict). Néanmoins, ils apparaîtront dans de nombreuses astuces mathématiques. Par exemple, ils sont liés à la fonction d'onde de l'état et à sa transformée de Fourier : la fonction d'onde  $\psi(x)$  d'un état  $|\psi\rangle$  et sa transformée de Fourier  $\psi(p)$  sont

$$\psi(x) = \langle x | \psi \rangle \quad \psi(p) = \langle p | \psi \rangle \quad (\text{II.16})$$

Contrairement aux états en quadrature, les fonctions d'onde en quadrature ont une signification physique. Leurs modules au carré rendent compte des distributions de probabilité en quadrature  $|\psi(q)|^2$  et  $|\tilde{\psi}(p)|^2$  de l'état pur  $|\psi\rangle$ , qui peuvent être mesurées avec précision.

En conséquence, un système à variation continue est un système quantique vivant dans un espace de Hilbert de dimension infinie et décrit par des observables à spectre continu. Dans ce chapitre et dans le reste de cette thèse, un système continu-variable est représenté par  $n$ -modes du champ électromagnétique quantifié. Il peut être compris comme un système correspondant à  $n$  oscillateurs harmoniques quantiques. Nous associerons généralement  $n$ -modes à un produit tensoriel de  $n$  espaces de Hilbert. Chaque mode est associé à un espace de Hilbert couvert par la base de Fock et possède ses propres opérateurs de mode  $\hat{a}_k$  et  $\hat{a}_k^\dagger$  qui vérifient les relations de commutation (II.2.1).

## II.2.2 Description de l'espace de phase

Les états d'un système CV de  $n$ -modes sont l'ensemble des opérateurs semi-définis positifs de classe de trace  $\{\rho\}$  sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} = \bigotimes_{k=1}^n \mathcal{H}_k$ . Cependant, il n'est pas toujours très pratique de traiter avec des matrices infinies. Une description alternative, tout aussi complète, de tout état quantique  $\rho$  d'un système CV peut donc être fournie par des fonctions continues multivariées appropriées, telles que l'une des fonctions caractéristiques  $s$ -ordonnées ;

$$\chi_\rho^s(\boldsymbol{\xi}) = \text{Tr}[\rho \hat{D}(\boldsymbol{\xi})] e^{s\|\boldsymbol{\xi}\|^2/2}, \quad (\text{II.17})$$

avec  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $\|\cdot\|$  représentant la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^{2n}$  et  $\hat{D}(\boldsymbol{\xi}) = e^{i\hat{\mathbf{R}}^\top \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\xi}}$  est l'opérateur de déplacement qui a été généralisé au cas du mode  $n$ , et connu sous le nom d'opérateur de Weyl. Bien qu'expression donne dans l'équation (II.17) puisse paraître assez impénétrable au premier abord, nous verrons dans ce qui suit qu'elle peut être transformée en fonctions plus simples (et peut-être plus familières) décrivant l'état. Le vecteur  $\boldsymbol{\xi}$  appartient à l'espace réel à  $2n$ -

dimensions  $\Gamma = (\mathbb{R}^{2n}, \Omega)$  équipé d'une forme symplectique  $\Omega$ , qui est appelé espace des phases quantiques, en analogie avec l'espace des phases de Liouville de la mécanique Hamiltonienne classique. Remarquez que dans le cas quantique, on ne peut pas décrire l'état d'un système en termes d'un seul point de l'espace des phases (contrairement à la mécanique classique), à cause du principe d'incertitude de Heisenberg; les régions de l'espace des phases (dont l'aire dépend du produit des incertitudes des opérateurs canoniques) sont donc typiquement adoptées pour représenter picturalement un état particulier. Observez également, à partir de la définition des fonctions caractéristiques, que dans l'image de l'espace des phases, la structure du produit tensoriel est remplacée par une structure de somme directe, de sorte que l'espace des phases à  $n$  modes se décompose comme suit :  $\Gamma = \bigoplus_k \Gamma_k$ , où  $\Gamma_k = (\mathbb{R}^{2n}, \omega)$  est l'espace des phases local associé au mode  $k$ .

La famille des fonctions caractéristiques est à son tour reliée, via une transformée de Fourier complexe, aux distributions de quasi-probabilité réelles  $W_\rho^s$ , qui constituent un autre ensemble de descriptions complètes des états quantiques d'un système CV

$$W_\rho^s(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\pi^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \chi_\rho^s(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\boldsymbol{\kappa}^\top \Omega \boldsymbol{\xi}} d^{2n} \boldsymbol{\kappa} \quad (\text{II.18})$$

Ces distributions sont appelées "quasi"-probabilité, car leur somme est égale à l'unité, mais ne se comportent pas entièrement comme on pourrait l'attendre des distributions de probabilité. En particulier, il existe des états quantiques  $\hat{\rho}$  (infiniment nombreux) pour lesquels la fonction  $W_\rho^s$  n'est pas une distribution de probabilité régulière pour certaines valeurs de  $s$ , car elle peut prendre des valeurs négatives ou même être singulière en certains points de l'espace des phases. Une exception est le cas  $s = -1$ , qui correspond à la "Q-fonction" de Husimi [105]  $W_\rho^{-1}(\boldsymbol{\xi}) = \langle \boldsymbol{\xi} | \rho | \boldsymbol{\xi} \rangle / \pi$  et représente une distribution non négative et régulière pour tout état quantique  $\hat{\rho}$ . Le cas  $s = 0$  correspond à la "fonction de Wigner" [106], qui sera dénotée simplement par  $W_\hat{\rho}$  dans la suite. De même, par souci de simplicité,  $\chi_\rho$  représentera la fonction caractéristique symétriquement ordonnée  $\chi_\rho^0$ . Enfin, le cas  $s = 1$  donne la représentation dite "P-représentation", qui a été introduite indépendamment par Glauber [33] et Sudarshan [34], et correspond à l'expansion de  $\hat{\rho}$  dans la base des états cohérents, par exemple pour un mode unique  $\hat{\rho} = \int W_\hat{\rho}^1(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2 \alpha$ .

En se concentrant sur les expansions symétriquement ordonnées, si l'opérateur  $\hat{O}$  peut être exprimé par  $\hat{O} = f(\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger)$  pour  $k = 1, \dots, n$ , où  $f$  est une fonction, disons, symétriquement ordonnée des opérateurs de champ, alors on a

$$\text{Tr}[\rho \hat{O}] = \int_{\mathbb{R}^{2n}} W_\rho^0(\boldsymbol{\kappa}) \tilde{f}(\boldsymbol{\kappa}) d^{2n} \boldsymbol{\kappa} \quad (\text{II.19})$$

où  $\tilde{f}(\boldsymbol{\kappa}) = f(\boldsymbol{\kappa}_k + i\boldsymbol{\kappa}_{k+1}, \boldsymbol{\kappa}_k - i\boldsymbol{\kappa}_{k+1})$  ( $k = 1, \dots, 2n$ ). De cette dernière équation, on peut déduire les identités suivantes pour la trace

$$\text{Tr} \rho = 1 = \int_{\mathbb{R}^{2n}} W_\rho(\boldsymbol{\kappa}) d^{2n} \boldsymbol{\kappa} = \chi_\rho(0) \quad (\text{II.20})$$

$$\text{Tr} \rho^2 = \mu_\rho = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^{2n}} [W_\rho(\boldsymbol{\kappa})]^2 d^{2n} \boldsymbol{\kappa} = \int_{\mathbb{R}^{2n}} |\chi_\rho(\boldsymbol{\xi})|^2 d^{2n} \boldsymbol{\xi} \quad (\text{II.21})$$

L'équation (II.20) représente la condition de normalité des états quantiques, tandis que l'équation (II.21) représente leur pureté. Il est donc utile de garder à l'esprit que le formalisme de la fonction de Wigner est complètement équivalent au formalisme plus habituel de l'opérateur de densité. En particulier, les états gaussiens que nous introduisons maintenant sont beaucoup plus faciles à étudier dans l'espace des phases.

## II.3 États gaussiens de systèmes à variables continues

Un moyen largement connu pour rendre les systèmes à variables continues plus traçables est de considérer la restriction aux états gaussiens. Déjà bien connue dans la littérature ancienne sur l'optique quantique, l'étude des systèmes gaussiens est devenue plus récemment un thème central de l'information quantique à variables continues.

Les états Gaussiens, définis comme les états ayant une fonction de Wigner  $W_{\hat{\rho}}$  Gaussienne ou une fonction caractéristique Gaussienne  $\chi_{\hat{\rho}}$ . Formellement,

$$W_{\rho}(\mathbf{r}) = \frac{\exp\left[-(1/2)(\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}})^T \sigma^{-1}(\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}})\right]}{(2\pi)^n \sqrt{\det \sigma}} \quad (\text{II.22})$$

$$\chi_{\rho}(\boldsymbol{\xi}) = \exp\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^T (\boldsymbol{\Omega}\sigma\boldsymbol{\Omega}^T) \boldsymbol{\xi} - i(\boldsymbol{\Omega}\bar{\mathbf{r}})^T \boldsymbol{\xi}\right]$$

De tels états sont complètement caractérisés par les premiers et seconds moments des opérateurs de quadrature. En particulier, le premier moment est appelé le vecteur de déplacement ou, plus simplement, la valeur moyenne

$$\bar{\mathbf{r}} := \langle \hat{\mathbf{r}} \rangle = \text{Tr}(\hat{\mathbf{r}}\hat{\rho}) \quad (\text{II.23})$$

et le second moment est appelé la matrice de covariance  $V$ , dont l'élément est défini par

$$\sigma_{ij} := \frac{1}{2} \langle \{\Delta\hat{r}_i, \Delta\hat{r}_j\} \rangle, \quad (\text{II.24})$$

où  $\Delta\hat{r}_i := \hat{r}_i - \langle \hat{r}_i \rangle$  et  $\{, \}$  est l'anticommutateur. En particulier, les éléments diagonaux de la matrice de covariance fournissent les variances des opérateurs de quadrature, c'est-à-dire,

$$\sigma_{ij} := \sigma(\hat{r}_i), \quad (\text{II.25})$$

où  $\sigma(\hat{r}_i) = \langle (\Delta\hat{x}_i)^2 \rangle = \langle \hat{x}_i^2 \rangle - \langle \hat{x}_i \rangle^2$ . La matrice de covariance est une matrice réelle et symétrique de dimension  $2N \times 2N$  qui doit satisfaire le principe d'incertitude [23, 107]

$$\sigma + i\boldsymbol{\Omega} \geq 0 \quad (\text{II.26})$$

À partir des termes diagonaux de l'équation (II.26), on peut facilement dériver la relation d'Heisenberg habituelle pour la position et la quantité de mouvement donne dans l'équation (II.6).

## II.4 Évolution des états Gaussiens et transformations symplectiques.

Lorsqu'une évolution préserve le caractère Gaussien d'un état, elle peut être décrite par des transformations appropriées des opérateurs de position et de moment ou, de manière équivalente, de  $\hat{\mathbf{r}}$ , qui préservent les relations de commutation (II.7). Ces transformations sont appelées transformations symplectiques et constituent le principal outil utilisé pour décrire la cinématique des états Gaussiens dans l'espace des phases.

Considérons une transformation unitaire  $U = \exp(-i\hat{H})$  où  $\hat{H}$  est l'Hamiltonien du système (et nous considérons conventionnellement un intervalle de temps unitaire). Évidemment, puisque la transformation est unitaire, nous avons  $U^\dagger U = \mathbb{1}$  et elle transforme un état sous forme de

$$\hat{\rho} \rightarrow U\hat{\rho}U^\dagger \quad (\text{II.27})$$

Si l'unitaire est tel qu'il fait correspondre un état Gaussien à un autre état Gaussien, on l'appelle un unitaire Gaussien. Tous les unitaires Gaussiens sont générés par des Hamiltoniens qui sont des polynômes du second ordre dans les opérateurs de mode. En particulier, si nous définissons le vecteur des opérateurs de mode  $\hat{a} = \{\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_n\}$ , le Hamiltonien doit être de la forme

$$\hat{H} = \hat{a}^\dagger \alpha + \hat{a}^\dagger F \hat{a} + \hat{a}^\dagger G \hat{a}^\dagger + \text{H.c.} \quad (\text{II.28})$$

où  $\alpha$  est un vecteur complexe et  $F, G$  sont des matrices complexes symétriques de  $n \times n$ , et H.c. signifie Hermitien conjugate. Dans la représentation de Heisenberg, les unitaires Gaussiens correspondent à une transformation de Bogoliubov

$$\hat{a} \rightarrow U^\dagger \hat{a} U = A\hat{a} + \hat{a}^\dagger B + \alpha \quad (\text{II.29})$$

où  $A, B$  sont des matrices qui satisfont  $AB^T = BA^T$  et  $AA^T = BB^T + \mathbb{1}$ . Cependant, plutôt que d'exprimer cette transformation linéaire au niveau des opérateurs de mode, nous préférons généralement l'analyser au niveau des quadratures.

### II.4.1 Transformations symplectiques

En termes d'opérateurs de quadrature, une unitaire Gaussienne est décrite plus simplement. Définissons le vecteur de quadrature  $\hat{\mathbf{r}} = \{\hat{x}_1, \hat{p}_1, \dots, \hat{x}_n, \hat{p}_n\}$ . Ensuite, une unitaire Gaussienne est définie comme suit

$$\hat{\mathbf{r}} \rightarrow \mathcal{S}\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{d} \quad (\text{II.30})$$

où  $\mathbf{d}$  est un vecteur réel de dimension  $2n$  et  $\mathcal{S}$  est une matrice réelle  $2n \times 2n$ . Encore une fois, les relations de commutation doivent être préservées et ceci est respecté si la matrice  $\mathcal{S}$  est symplectique, c'est-à-dire si

$$\mathcal{S}\Omega\mathcal{S}^T = \Omega \quad (\text{II.31})$$

Il est clair que les valeurs propres de  $\hat{\mathbf{r}}$  doivent également suivre la même règle de transformation et donc les quadratures se transforment en

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathcal{S}\mathbf{r} + \mathbf{d}, \quad (\text{II.32})$$

sous une transformation symplectique. En ce qui concerne les valeurs moyennes et la matrice de covariance, la règle de transformation est la suivante

$$\langle \hat{\mathbf{r}} \rangle \rightarrow \mathcal{S}\langle \hat{\mathbf{r}} \rangle + \mathbf{d} \quad \text{and} \quad \sigma \rightarrow \mathcal{S}\sigma\mathcal{S}^T \quad (\text{II.33})$$

De façon remarquable, l'inverse est également vrai, c'est-à-dire que toute transformation symplectique de la forme (II.33) est générée par une transformation unitaire induite par des Hamiltoniens de la forme (II.28)]. Dans ce contexte, il est intéressant de noter qu'une décomposition utile d'une transformation symplectique générique  $\mathcal{S}$  est la suivante :

$$\mathcal{S} = \mathcal{O} \begin{pmatrix} \mathcal{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{D}^{-1} \end{pmatrix} \mathcal{O}', \quad (\text{decomposition de Euler}) \quad (\text{II.34})$$

où  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}'$  sont des matrices orthogonales et symplectiques, tandis que  $\mathcal{D}$  est une matrice diagonale positive. L'implication physique de la décomposition d'Euler (II.4.1) est que toute transformation symplectique peut être mise en œuvre au moyen de deux dispositifs passifs (décrits par les matrices orthogonales  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}'$ ) et par des compresseurs mono-modes (décrits par  $\mathcal{D}$ ) [108].

## II.5 États gaussiens bimodes

Nous pouvons identifier différentes classes d'états gaussiens bimodes ou, plus généralement, bipartites. Cependant, comme ces états constituent le scénario le plus simple pour étudier la question fondamentale de l'intrication dans l'information quantique, il est utile d'introduire des classes d'équivalence d'états gaussiens avec la même quantité d'intrication, c'est-à-dire des états gaussiens dont les CM sont reliés par des transformations symplectiques locales et qui sont donc localement équivalents. Si nous écrivons le CM d'un état gaussien à deux modes comme suit :

$$\sigma = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix} \quad (\text{II.35})$$

où  $A, B$  et  $C$  sont des matrices  $2 \times 2$ , alors nous pouvons définir quatre invariants symplectiques locaux, c'est-à-dire des quantités qui restent inchangées par des transformations symplectiques locales :

$$I_1 = \det[A], \quad I_2 = \det[B], \quad I_3 = \det[C], \quad I_4 = \det[\sigma]. \quad (\text{II.36})$$

Les CM des états localement équivalents peuvent être réduits à la norme suivante

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & a & 0 & c_2 \\ c_1 & 0 & b & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & b \end{pmatrix} \quad (\text{II.37})$$

où les valeurs de  $a, b, c_1$ , et  $c_2$  sont déterminées par les invariants symplectiques locaux (II.36), à savoir  $a^2 = I_1, b^2 = I_2, c_1 c_2 = I_3$  et  $(ab - c_1^2)(ab - c_2^2) = I_4$ .

En effet, les deux valeurs propres symplectiques du CM d'un état gaussien générique à deux modes peuvent être calculées en termes d'invariants symplectiques

$$d_{\pm} = \sqrt{\frac{\Delta(\sigma) \pm \sqrt{\Delta(\sigma)^2 - 4I_4}}{2}} \quad (\text{II.38})$$

avec  $\Delta(\sigma) = I_1 + I_2 + 2I_3$  et, à son tour, la relation d'incertitude (II.26) se réduit à

$$d_- \geq 1/2. \quad (\text{II.39})$$

Notez que pour un état gaussien pur à deux modes, nous avons  $I_4 = 1/16$  et  $\Delta(\sigma) = 1/2$ , c'est-à-dire qu'un état gaussien pur a une incertitude minimale. De plus, les états purs bipartites ont nécessairement une forme normale symétrique, c'est-à-dire  $a = b$  dans l'équation (II.37), comme on peut le voir en mettant en équation les entropies des sous-systèmes.

## II.6 Information quantique avec variables continues

### II.6.1 Entropies et information mutuelle

#### II.6.1.1 Entropie de Von Neumann

Dans la théorie classique de l'information, de nombreux problèmes se posent pour les variables continues. En particulier, l'entropie de Shannon devient mal définie, et il faut la remplacer par le concept d'entropie différentielle qui est définie jusqu'à une certaine constante additive. En revanche, la situation est en fait plus favorable dans un contexte quantique, car un système à variables continues peut toujours être décrit dans un espace de Hilbert infini, mais dénombrable. Plus précisément, tout état quantique à  $n$ -modes d'un système continu-variable est décrit par son opérateur de densité opérateur

$$\rho = \sum_{j,k=0}^{\infty} \rho_{j,k} |j_1, \dots, j_n\rangle \langle k_1, \dots, k_n| \quad (\text{II.40})$$

où  $j = (j_1, \dots, j_n)$  et  $k = (k_1, \dots, k_n)$ . Ensuite, la définition de l'entropie de Von Neumann peut être appliquée directement à un système quantique à variation continue comme suit

$$S_V(\rho) = -\text{Tr} \rho \log \rho. \quad (\text{II.41})$$

Cette quantité est bien définie à condition que la somme converge. En fait, il s'avère que cette quantité diverge pour presque tous les états de l'espace de Fock [109]. Mais ce n'est pas si grave, car elle prend toujours une valeur finie sur l'ensemble compact d'états à énergie bornée, qui est l'ensemble qui nous intéresse, et également est l'ensemble d'intérêt pour la théorie de l'information quantique. Eq. (II.41) est, en fait, la contrepartie directe de l'entropie de Shannon dans la théorie classique de l'information [110]. Les implications mathématiques et physiques les plus fondamentales de la théorie de l'information quantique, qui vont de la limite de Holevo [111] à toute la généalogie des protocoles de communication quantiques [112, 113], reposent sur une propriété clé satisfaite par l'entropie de Von Neumann, l'inégalité de subadditivité forte

$$S_V(\rho_{AB}) + S_V(\rho_{BC}) \geq \mathcal{S}(\rho_{ABC}) + S_V(\rho_B) \quad (\text{II.42})$$

pour un état tripartite arbitraire  $\rho_{ABC}$ . L'inégalité de subadditivité forte implique en particulier que l'information mutuelle

$$I_M(\rho_{AB}) = S_V(\rho_A) + S_V(\rho_B) - S_V(\rho_{AB}), \quad (\text{II.43})$$

qui est une mesure des corrélations totales entre les sous-systèmes  $A$  et  $B$  dans l'état biparti  $\rho_{AB}$ , est toujours non négative. Remarquez que, dans l'équation (II.43),  $\mathcal{S}(\rho_{AB})$  désigne l'entropie globale de l'état  $\rho_{AB}$ , tandis que  $\mathcal{S}(\rho_A)$  et  $\mathcal{S}(\rho_B)$  correspondent aux entropies marginales des états réduits des sous-systèmes  $A$  et  $B$  respectivement.

#### II.6.1.2 Entropie des états gaussiens

Notre objectif ici est de calculer l'entropie de Von Neumann d'un état gaussien. Dans un premier temps, on montre que l'entropie d'un état gaussien à  $n$  modes  $\rho_G$  ne dépend pas de son premier moment. Pour cela, il suffit de noter que l'entropie est invariante sous une opération

de déplacement (puisque c'est une opération unitaire). En conséquence, l'entropie d'un état gaussien est entièrement déterminée par la matrice de covariance  $\sigma$  de cet état. Pour être plus précis, nous utilisons le théorème de Williamson affirmant l'existence d'une transformation symplectique  $\mathcal{S}$  telle que

$$\mathcal{S}\sigma\mathcal{S}^T = \bigoplus_{k=1}^n \begin{bmatrix} \nu_k & 0 \\ 0 & \nu_k \end{bmatrix} \quad (\text{II.44})$$

où les  $\{\nu_k\}_{k=1,\dots,n}$  sont les valeurs propres symplectiques de l'état. Par conséquent, conformément au théorème de Williamson, il existe une opération unitaire qui transforme l'état gaussien  $\rho_G$  en un produit de  $n$  états thermiques avec  $\bar{n}_k = \frac{1}{2}(\nu_k - 1)$  photons dans le mode  $k$ . En notant  $\rho_{\text{th}}(\bar{n})$  l'état thermique mono-mode avec un nombre moyen de photons  $\bar{n}$ , on a :

$$S_V(\rho_G) = \sum_{k=1}^n S_V(\rho_{\text{th}}(\bar{n}_k)) \quad (\text{II.45})$$

**Entropie d'un état thermique :** Nous calculons maintenant explicitement l'entropie de Von Neumann de d'un état thermique. L'opérateur de densité d'un état thermique mono-mode  $\rho_{\text{th}}$  est donné par :

$$\rho_{\text{th}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{(\bar{n} + 1)^{n+1}} |n\rangle\langle n| \quad (\text{II.46})$$

où  $\bar{n} = \text{Tr}(\rho\hat{N})$  est le nombre moyen de photons thermiques dans l'état. Calculons maintenant l'entropie de Von Neumann de cet état  $\rho$  :

$$\begin{aligned} S(\rho_{\text{th}}) &= -\text{tr} \rho_{\text{th}} \log_2 \rho_{\text{th}} \\ &= -\frac{1}{\bar{n} + 1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1}\right)^k \log_2 \left[ \frac{1}{\bar{n} + 1} \left(\frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1}\right)^k \right] \\ &= -\frac{1}{\bar{n} + 1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1}\right)^k \left[ -\log_2(\bar{n} + 1) + k \log_2 \frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.47})$$

Puis en utilisant l'identité suivante,

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad (\text{II.48})$$

on obtient finalement :

$$S(\rho_{\text{th}}) = (\bar{n} + 1) \log_2(\bar{n} + 1) - \bar{n} \log_2 \bar{n} \quad (\text{II.49})$$

Comme nous l'avons vu précédemment, une conséquence du théorème de Williamson est que tout état gaussien peut être généré en agissant sur un état thermique avec des transformations unitaires. Ainsi, l'entropie de Von Neumann d'un état gaussien générique se réduit à celle de l'état thermique obtenu à partir de celui-ci par diagonalisation symplectique, puisque les opérations unitaires n'affectent pas l'entropie de l'état entier. Dans le cas d'un état gaussien bimode  $\rho_{AB}$  avec  $\sigma$ , en utilisant l'additivité de l'entropie de Von Neumann (II.41) pour les états de produit tensoriel, c'est-à-dire,

$$S_V(\rho_A \otimes \rho_B) = S_V(\rho_A) + S_V(\rho_B), \quad (\text{II.50})$$

nous obtenons

$$S_V(\rho_{AB}) = f(d_+) + f(d_-), \quad (\text{II.51})$$

où  $d_{\pm}$  sont les valeurs propres symplectiques de  $\sigma$  écrites explicitement dans l'équation (II.38) et  $f(x)$  est par

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \log \left(x + \frac{1}{2}\right) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \log \left(x - \frac{1}{2}\right) \quad (\text{II.52})$$

### II.6.1.3 Information mutuelle et entropies conditionnelles

À partir des entropies de Von Neumann de l'état  $\varrho_{AB}$  et des deux sous-systèmes  $\varrho_A = \text{Tr}_B[\varrho_{AB}]$  et  $\varrho_B = \text{Tr}_A[\varrho_{AB}]$ , il est possible d'évaluer la quantité d'informations sur  $\varrho_{AB}$  que l'on peut obtenir en s'adressant aux parties individuelles. Ceci est bien sûr lié aux corrélations entre les deux modes et peut être quantifié au moyen de l'information mutuelle quantique ou des entropies conditionnelles [114].

L'information mutuelle quantique est définie dans l'équation (II.43) et peut être facilement exprimé en termes d'invariants symplectiques (II.36) de  $\sigma$  et de ses valeurs propres symplectiques (II.38) comme suit :

$$I_M(\varrho_{AB}) = f\left(\sqrt{I_1}\right) + f\left(\sqrt{I_2}\right) - f(d_+) - f(d_-). \quad (\text{II.53})$$

Notez que  $f\left(\sqrt{I_1}\right) = S_V(\varrho_A)$  et  $f\left(\sqrt{I_2}\right) = S_V(\varrho_B)$ , puisque  $\varrho_A$  et  $\varrho_B$  sont des états gaussiens mono-modes. Il est également intéressant de noter que, dans le cas d'états purs, les entropies  $S_V(\varrho_A) = S_V(\varrho_B)$  correspondent à la mesure unique d'intrication pour les états bipartis purs [115].

Les entropies conditionnelles sont définies comme :

$$\begin{aligned} S_{A|B}(\varrho_{AB}) &= S_V(\varrho_{AB}) - S_V(\varrho_B) \\ &= f(d_+) + f(d_-) - f\left(\sqrt{I_2}\right) \\ S_{B|A}(\varrho_{AB}) &= S_V(\varrho_{AB}) - S_V(\varrho_A) \\ &= f(d_+) + f(d_-) - f\left(\sqrt{I_1}\right) \end{aligned} \quad (\text{II.54})$$

et peut également prendre des valeurs négatives. Si  $S_{A|B}(\varrho_{AB}) \geq 0$ , l'entropie conditionnelle donne la quantité d'informations que la partie  $A$  devrait envoyer à la partie  $B$  afin de permettre la connaissance complète de l'état global  $\varrho_{AB}$ . Si  $S_{A|B}(\varrho_{AB}) < 0$ , la partie  $A$  n'a pas besoin d'envoyer d'informations à l'autre et, en outre, ils gagnent  $-S_{A|B}(\varrho_{AB})$  bits d'intrication, respectivement [des considérations analogues s'appliquent à  $S_B | A(\varrho_{AB})$ ]. Ceci a été prouvé pour le cas des systèmes quantiques à variables discrètes [112] et conjecturé [116] pour les systèmes de dimension infinie.

## II.6.2 Entropie de Rényi

Cependant, en théorie de l'information classique et quantique, plusieurs autres quantités entropiques ont été introduites et étudiées. En particulier, les entropies de Rényi- $\alpha$  [117] constituent une famille intéressante d'entropies additives, dont l'interprétation est liée aux dérivées de l'énergie libre par rapport à la température [118], et qui ont trouvé des applications notamment dans l'étude des capacités des canaux [119–121], de la valeur de travail de l'information [122], et des spectres d'intrication dans les systèmes à plusieurs corps [123]. Les entropies sont en

général des mesures de l'ignorance concernant la préparation d'un état. Les entropies de Rényi- $\alpha$  sont définies comme suit

$$\mathcal{S}_\alpha(\rho) = \frac{1}{1-\alpha} \log [\text{Tr}(\rho^\alpha)], \quad (\text{II.55})$$

et reproduire l'entropie de Von Neumann dans la limite  $\alpha \rightarrow 1$ . L'entropie de Rényi peut être évaluée sur un état gaussien générique à  $n$ -modes  $\varrho$  en termes de sa matrice de covariance  $\sigma$

$$\mathcal{S}_\alpha(\rho) = \frac{\sum_{k=1}^N \ln [g_\alpha(\nu_k)]}{1-\alpha} \quad (\text{II.56})$$

où  $\{\nu_k\}$  sont les valeurs propres symplectiques de  $\sigma$ , et

$$g_\alpha(x) = 2^\alpha / [(x+1)^\alpha - (x-1)^\alpha]. \quad (\text{II.57})$$

Dans la Réf. [124], il a été démontré qu'un choix particulier,  $\alpha = 2$ , fournit une mesure d'information naturelle et facilement calculable pour tout état gaussien multi-mode. L'entropie de Rényi-2 est directement liée à la pureté, et peut donc être calculée très facilement pour un état gaussien  $\varrho$

$$\mathcal{S}_2(\rho) = -\ln [\text{Tr}(\rho^2)] = \frac{1}{2} \ln(\det \sigma) \quad (\text{II.58})$$

Cette mesure est interprétée de manière opérationnelle (modulo une constante additive) comme l'entropie de Shannon classique de l'espace de phase  $H$  de la distribution de Wigner  $W_\varrho$  de l'état  $\varrho$  (II.22), défini comme [125]

$$H(W_\varrho(\xi)) = -\int W_\varrho(\xi) \ln \{W_\varrho(\xi)\} d^{2N} \xi \quad (\text{II.59})$$

En effet, on a  $H(W_\varrho(\xi)) = \mathcal{S}_2(\rho) + N(1 + \ln \pi)$  [81]. Une propriété cruciale de  $\mathcal{S}_2$  dans le scénario gaussien (et seulement là, car ce n'est pas vrai pour les autres états, pas même les états de qubits!) est qu'elle remplit une condition analogue à celle de la (II.42) pour l'entropie de Von Neumann. Soit  $\rho_{ABC}$  un état gaussien tripartite dont les sous-systèmes englobent un nombre arbitraire de modes. En écrivant sa matrice de covariance sous forme de bloc comme dans l'équation II.35, et en utilisant la définition (II.58), nous avons le suivant [124] : L'entropie de Rényi-2  $\mathcal{S}_2$  satisfait à la subadditivité forte en égalité pour tous les états gaussiens  $\varrho_{ABC}$ ,

$$\begin{aligned} & \mathcal{S}_2(\rho_{AB}) + \mathcal{S}_2(\rho_{BC}) - \mathcal{S}_2(\rho_{ABC}) - \mathcal{S}_2(\rho_B) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\det \sigma_{AB} \det \sigma_{BC}}{\det \sigma_{ABC} \det \sigma_B} \right) \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{II.60})$$

La subadditivité forte est un marteau puissant dans la boîte à outils du théoricien de "l'information quantique" [126]. Au-delà de son apparente simplicité, le résultat (II.60) a des conséquences profondes. Il permet de reformuler de manière cohérente le cœur de la théorie de l'information quantique, dans le monde gaussien [10], en utilisant l'entropie de Rényi-2, plus simple et physiquement naturelle, en remplacement de celle de Von Neumann.

## II.7 Séparabilité des états Gaussiens

Un état biparti  $\varrho_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  est séparable s'il peut être écrit comme une combinaison convexe d'états produits [127], à savoir,  $\varrho_{AB} = \sum_k p_k \varrho_k^{(A)} \otimes \varrho_k^{(B)}$  où  $p_k \geq 0$ ,  $\sum_k p_k = 1$ , et

$\varrho_k^{(h)} \in \mathcal{H}_h, h = A, B$ . Trouver la combinaison convexe d'un état séparable est une tâche difficile ; néanmoins, la séparabilité peut être révélée à l'aide de cartes positives mais pas complètement positives. En particulier, la positivité sous transposition partielle (**PPT**), c'est-à-dire la transposition appliquée seulement à une partie d'un système, a été introduite dans la théorie de l'intrication par A. Peres [128] comme une condition nécessaire à la séparabilité. En effet, si on applique, par exemple, la transposition uniquement aux éléments du premier sous-système  $A$  d'un état séparable  $\varrho_{AB}$ , on a  $\varrho_{AB}^{\top A} = \sum_k p_k \left( \varrho_k^{(A)} \right)^\top \otimes \varrho_k^{(B)}$ . Maintenant, puisque  $\left[ \varrho_k^{(A)} \right]^\top = \left[ \varrho_k^{(A)} \right]^*$ , la transposition correspond à la conjugaison complexe et la matrice transposée est une matrice de densité légitime elle-même, étant non négative, auto-adjointe et avec une trace unitaire. Alors aucune des valeurs propres de  $\varrho^{T_A}$  n'est négative si  $\varrho$  est séparable. Le critère **PPT** n'est généralement que nécessaire et on sait qu'il existe des états intriqués avec une matrice de densité transposée partielle positive, appelés états intriqués liés [129]. R. Simon a toutefois prouvé que pour les états gaussiens à deux modes, il représente également une condition suffisante pour la séparabilité [130].

Comme la conjugaison complexe correspond à l'inversion temporelle de l'équation de Schrödinger, en termes de variables contiguës, la transposition correspond à un changement de signe des variables de quantité de mouvement, c'est-à-dire à une réflexion en miroir. Pour un système bimode décrit par la matrice de densité  $\varrho_{AB}$ , une transposition partielle par rapport au système  $A$  sera effectuée sur l'espace des phases par l'action de la matrice  $\Delta_A = \text{Diag}(1, -1) \oplus \mathbb{1}_2$ , où le premier facteur de la somme directe, représentant la réflexion miroir, se réfère au sous-système  $A$  et le second au sous-système  $B$  (la transposition partielle par rapport au sous-système  $B$  est obtenue de manière similaire). Par conséquent, la positivité de l'opérateur de transposition partielle conduit à la relation d'incertitude suivante :

$$\tilde{\sigma} + \frac{i}{2}\Omega \geq 0, \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\sigma} \geq -\frac{i}{2}\tilde{\Omega}_A \quad (\text{II.61})$$

où  $\tilde{\sigma} = \Delta_A \sigma \Delta_A$  et  $\tilde{\Omega}_A = \Delta_A \Omega \Delta_A$ . De plus, en rappelant la définition (II.36) des quatre invariants symplectiques locaux, nous avons maintenant :

$$\tilde{I}_1 = I_1, \quad \tilde{I}_2 = I_2, \quad \tilde{I}_3 = -I_3, \quad \tilde{I}_4 = I_4, \quad (\text{II.62})$$

où  $\tilde{I}_k$  sont les invariants symplectiques rapportés à  $\tilde{\sigma}$ . Ainsi, en termes de valeurs propres symplectiques  $\tilde{d}_\pm$  du matrice e covariance partiellement transposé, le critère **PPT** se réduit à :

$$\tilde{d}_- \geq 1/2 \quad \text{avec} \quad \tilde{d}_\pm = \sqrt{\frac{\tilde{\Delta}(\boldsymbol{\sigma}) \pm \sqrt{\tilde{\Delta}(\boldsymbol{\sigma})^2 - 4I_4}}{2}} \quad (\text{II.63})$$

où  $\tilde{\Delta}(\boldsymbol{\sigma}) = I_1 + I_2 - 2I_3$ . Dans la Réf. [130], il a été montré que le critère **PPT** est nécessaire pour la séparabilité.

## II.8 Quantification de l'intrication bipartite dans les états gaussiens.

La question de la quantification de l'intrication bipartite en général (pure et mixte) ne peut pas encore être considérée comme complètement résolue. Nous avons assisté à une prolifération de mesures d'intrication, chacune étant motivée par des contextes spécifiques dans lesquels les corrélations quantiques jouent un rôle central, et rendant compte de caractérisations opé-

rationnelles et d'ordonnements différents, et dans certains cas non équivalents, des états intriqués. Des exposés détaillés sur le sujet peuvent être trouvés, par exemple, dans les Réf. [75]. La première généralisation naturelle de la quantification de l'intrication aux états mixtes est certainement l'intrication de formation, que nous aborderons dans la prochaine sous-section.

### II.8.1 Intrication de formation pour les états Gaussiens

L'intrication de formation  $E_F(\varrho)$  est définie comme l'extension convexe [131] de l'entropie d'intrication, c'est-à-dire la moyenne pondérée de l'intrication à l'état pur (voir premier chapitre),

$$E_F(\varrho) = \min_{\{p_k, |\psi_k\rangle\}} \sum_k p_k E_V(|\psi_k\rangle), \quad (\text{II.64})$$

minimisée sur toutes les décompositions de l'état mixte  $\varrho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle$ . Il s'agit clairement d'un problème d'optimisation d'une difficulté redoutable, et une solution explicite n'est connue que pour les états mixtes de deux qubits [80], et pour les états hautement symétriques comme les états de Werner et les états isotropes en dimension arbitraire [132, 133]. Dans les systèmes CV, une expression explicite de l'intrication de formation n'est disponible que pour les états gaussiens symétriques à deux modes [134]. À ce jour, l'additivité de l'intrication de formation reste un problème ouvert [135].

### II.8.2 Négativité logarithmique

Une classe importante de monotones d'intrication est définie par les négativités, qui quantifient la violation du critère **PPT** de séparabilité (voir Sec. (II.7)), c'est-à-dire à quel point la transposition partielle de  $\varrho$  n'est pas positive. La négativité  $\mathcal{N}(\varrho)$  [136, 137] est définie comme suit

$$\mathcal{N}(\varrho) = \frac{\|\varrho^{T_i}\|_1 - 1}{2}, \quad \text{avec} \quad \|\hat{O}\|_1 = \text{Tr} \sqrt{\hat{O}^\dagger \hat{O}} \quad (\text{II.65})$$

La négativité a l'avantage d'être une mesure calculable de l'intrication, en étant

$$\mathcal{N}(\varrho) = \max \left\{ 0, -\sum_k \tilde{\lambda}_k \right\}, \quad (\text{II.66})$$

où les  $\{\tilde{\lambda}_k\}$  sont les valeurs propres négatives de transposition partielle.

La négativité peut être définie pour les systèmes **CV** également [138], même si une mesure de relation est plus souvent utilisée, la négativité logarithmique  $E_{\mathcal{N}}(\varrho)$  [137, 138],

$$E_{\mathcal{N}}(\varrho) = \log \|\varrho^{T_i}\|_1 = \log[1 + 2\mathcal{N}(\varrho)]. \quad (\text{II.67})$$

La négativité logarithmique est additive et, bien qu'elle ne soit pas convexe, est une monotonie d'intrication complète sous **LOCC** [139]; elle constitue une borne supérieure pour l'intrication distillable [137]  $E_{\mathcal{N}}(\varrho) \geq E_D(\varrho)$ , et coïncide avec le coût d'intrication sous les opérations préservant la positivité de la transposition partielle [140]. La négativité et la négativité logarithmique ne sont pas continues dans la norme de trace sur les espaces de Hilbert de dimension infinie; cependant, ce problème peut être contourné en se limitant aux états physiques d'énergie moyenne finie.

Le grand avantage des négativités est qu'elles sont facilement calculables pour les états gaussiens généraux ; elles fournissent une quantification appropriée de l'intrication en particulier pour les états gaussiens arbitraires  $1 \times n$  et bi-symétriques  $n \times m$ , en quantifiant directement le degré de violation du critère **PPT** nécessaire et suffisant pour la séparabilité, Eq. (II.63). Selon [138, 141–143], la négativité d'un état gaussien avec matrice de covariance  $\sigma$  est donnée par

$$\mathcal{N}(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( \prod_k \tilde{d}_k^{-1} - 1 \right), & \text{pour } k : \tilde{d}_k < 1 \\ 0 & \text{si } \tilde{d}_i \geq 1 \forall i \end{cases} \quad (\text{II.68})$$

Ici, l'ensemble  $\{\tilde{d}_k\}$  est constitué par les valeurs propres symplectiques du CM partiellement transposé  $\tilde{\sigma}$ . En conséquence, la négativité logarithmique s'écrit

$$E_{\mathcal{N}}(\sigma) = \begin{cases} -\sum_k \log \tilde{d}_k, & \text{for } k : \tilde{d}_k < 1 \\ 0 & \text{if } \tilde{d}_i \geq 1 \forall i \end{cases} \quad (\text{II.69})$$

## II.9 Intrication quantique d'états gaussiens à deux modes.

Dans cette section, nous discuterons de la caractérisation des états intriqués proto-typiques des systèmes CV, c'est-à-dire les états gaussiens à deux modes. Cela inclut la détermination explicite des négativités et leur relation avec les mesures entropiques globales et marginales [142, 144, 145], ainsi que l'évaluation des mesures Gaussiennes d'intrication [146]. Nous comparerons ensuite les deux familles de mesures en fonction de leur ordonnancement dans les états intriqués.

### II.9.1 Paramétrisation symplectique des états gaussiens à deux modes

Selon l'équation (II.37), les états gaussiens à deux modes peuvent être classés en fonction de leurs quatre covariances de forme standard  $a, b, c_1$  et  $c_2$ . Il est pertinent de fournir une reparamétrisation des états de forme standard en termes d'invariants symplectiques qui admettent une interprétation directe pour les états gaussiens génériques [142, 144, 145]. A savoir, les paramètres de l'Eq. (II.37) peuvent être déterminés en termes des deux invariants symplectiques locaux

$$\mu_1 = (\text{Det } A)^{-1/2} = 1/a, \quad \mu_2 = (\text{Det } B)^{-1/2} = 1/b, \quad (\text{II.70})$$

qui sont les puretés marginales des états mono-modes réduits, et des deux invariants symplectiques globaux

$$\mu = (\text{Det } \sigma)^{-1/2} = \left[ (ab - c_1^2) (ab - c_2^2) \right]^{-1/2}, \quad \Delta = a^2 + b^2 + 2c_1c_2 \quad (\text{II.71})$$

qui sont, respectivement, l'équation de pureté globale et l'équation sérielle ( $\Delta(\sigma) = I_1 + I_2 + 2I_3$ ). Les équations (II.70), (II.71) peuvent être inversées pour donner une paramétrisation physique des états bimodes en termes de quatre paramètres indépendants  $\mu_1, \mu_2, \mu$ , et  $\Delta$ . Cette paramétrisation est particulièrement utile pour l'évaluation de l'intrication

#### II.9.1.1 transposition partielle et négativités.

La condition **PPT** pour la séparabilité, Eq. (II.63) a évidemment une forme très simple pour les états gaussiens à deux modes. En termes d'invariants symplectiques, la transposition

partielle correspond à inverser le signe de  $\text{Det}[\gamma]$ ,

$$\sigma = \begin{pmatrix} A & C \\ C^\top & B \end{pmatrix} \xrightarrow{e \rightarrow e^{T_i}} \tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} A & \tilde{C} \\ \tilde{C}^\top & B \end{pmatrix}, \quad (\text{II.72})$$

avec  $\text{Det}[\tilde{C}] = -\text{Det}[C]$ . Pour une forme standard CM Eq. (II.37), cela signifie simplement  $c_1 \rightarrow c_1$ ,  $c_2 \rightarrow -c_2$ . En conséquence, la sérielle  $\Delta = \text{Det} A + \text{Det} B + 2 \text{Det} C$ ,  $\Delta[\sigma]$  est transformée, par transposition partielle, en

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} &= \text{Det} A + \text{Det} B + 2 \text{Det} \tilde{C} = \text{Det} A + \text{Det} B - 2 \text{Det} C \\ &= \Delta - 4 \text{Det} C = -\Delta + 2/\mu_1^2 + 2/\mu_2^2 \end{aligned} \quad (\text{II.73})$$

D'après l'équation (II.37), les valeurs propres symplectiques de la transposée partielle  $\tilde{\sigma}$  d'un CM à deux modes  $\sigma$  sont rapidement déterminées en termes d'invariants symplectiques [147].

$$2\tilde{d}_\mp^2 = \tilde{\Delta} \mp \sqrt{\tilde{\Delta}^2 - \frac{4}{\mu^2}} \quad (\text{II.74})$$

Le critère PPT est alors ré-exprimé par l'inégalité suivante

$$\tilde{\Delta} \leq 1 + 1/\mu^2, \quad (\text{II.75})$$

qui équivaut à la séparabilité. L'état  $\sigma$  est séparable si et seulement si  $\tilde{d}_- \geq 1$ . Par conséquent, la négativité logarithmique Eq. (II.69) est une fonction décroissante de  $\tilde{d}_-$

$$E_{\mathcal{N}} = \max \left\{ 0, -\log \tilde{d}_- \right\}, \quad (\text{II.76})$$

comme pour la plus grande valeur propre symplectique de la transposition partielle, on a  $\tilde{d}_+ > 1$  pour tous les états gaussiens à deux modes [142, 144].

Notez que les équations ((II.37), (II.73), (II.75)) permettent d'obtenir la condition nécessaire suivante pour une intrication bimode

$$\sigma \text{ Intriqué} \Rightarrow \text{Det}[C] < 0 \quad (\text{II.77})$$

## II.9.2 Intrication de formation pour les états Gaussiennes symétriques

La décomposition convexe optimale impliquée dans la définition de l'équation (II.64) de l'intrication de formation [148] a été remarquablement résolue dans le cas particulier des états gaussiens mixtes symétriques à deux modes [c'est-à-dire avec  $\text{Det}[A] = \text{Det}[B]$  dans l'équation (II.37)], et s'avère être Gaussienne. En effet, le minimum absolu est réalisé dans l'ensemble des états gaussiens purs à deux modes [134], ce qui donne

$$E_F = \max \left[ 0, h(\tilde{d}_-) \right] \quad (\text{II.78})$$

avec

$$h(x) = \frac{(1+x)^2}{4x} \log \left[ \frac{(1+x)^2}{4x} \right] - \frac{(1-x)^2}{4x} \log \left[ \frac{(1-x)^2}{4x} \right]. \quad (\text{II.79})$$

Une telle quantité est, à nouveau, une fonction monotone décroissante de la plus petite valeur propre symplectique  $\tilde{\nu}_-$  de la transposée partielle  $\tilde{\sigma}$  d'une Gaussienne symétrique à deux modes CM  $\sigma$ , fournissant ainsi une quantification de l'intrication des états symétriques équivalente à celle fournie par les négativités. Des bornes inférieures sur l'intrication de formation ont été dérivées pour des états gaussiens non symétriques à deux modes [149].

## II.10 Corrélation quantique au-delà de l'intrication

Pour les états purs, l'intrication est le seul type de corrélation quantique. Un état pur séparable est essentiellement classique, et les sous-systèmes ne présentent aucune corrélation. En revanche, pour les états mixtes, on peut identifier une distinction plus fine entre les corrélations classiques et quantiques, de sorte que même la plupart des états séparables présentent un caractère quantique défini [89, 90].

Les corrélations d'un système quantique bipartite  $\varrho_{AB}$ , quantifiées par l'information mutuelle (voir Subsec. (II.6.1.3)), peuvent être divisées en une partie quantique, appelée discorde quantique, et une partie classique [90]. Les corrélations classiques sont définies comme la quantité maximale d'information que nous pouvons obtenir sur une partie du système en mesurant localement l'autre sous-système, et, ainsi, peuvent être écrites comme une fonction des entropies de Von Neumann des deux sous-systèmes comme suit

$$\mathcal{C}_{A|B}(\varrho_{AB}) = \max_{\{\Pi_k\}} \left\{ S_V(\varrho_A) - \sum_k p_k S_V(\varrho_{A|B}^{\Pi_k}) \right\}, \quad (\text{II.80})$$

où l'ensemble  $\{\Pi_k\}$ ,  $\Pi_k \geq 0$  et  $\sum_k \Pi_k = \mathbb{1}$ , représente une mesure positive à valeur d'opérateur (POVM),  $\varrho_{A|B}^{\Pi_k} = \text{Tr}_B[\varrho_{AB} \mathbb{1} \otimes \Pi_k] / p_k$  est l'état conditionnel du sous-système  $A$  lorsque la  $k$ -ème résultat se produit dans une mesure du sous-système  $B$  et  $p_k = \text{Tr}_{AB}[\varrho_{AB} \mathbb{1} \otimes \Pi_k]$ . Le maximum est pris sur l'ensemble des POVM réalisables sur un sous-système. Les corrélations classiques sont ainsi obtenues en correspondance de la POVM qui minimise l'entropie conditionnelle  $\sum_k p_k S_V(\varrho_{A|B}^{\Pi_k})$ , permettant d'obtenir la plus grande quantité d'informations sur l'état du système  $A$ . En effet, la définition ci-dessus est en général non symétrique par rapport à l'échange des sous-systèmes. La discorde quantique est alors définie comme suit :

$$\mathcal{D}_{A|B}(\varrho_{AB}) = I_M(\varrho_{AB}) - \mathcal{C}_{A|B}(\varrho_{AB}) \quad (\text{II.81})$$

$I_M(\varrho_{AB})$  étant l'information mutuelle (II.53).

### II.10.1 Discorde quantique Gaussienne

Dans le cas particulier d'un état gaussien à deux modes, la discorde quantique Gaussienne est évaluée en tenant compte uniquement des mesures Gaussiennes effectuées sur les sous-systèmes et peut être écrite comme [150]

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{A|B}(\varrho_{AB}) &= S_V(\varrho_B) - S_V(\varrho_{AB}) + f\left(\sqrt{E_{A|B}^{\min}}\right) \\ &= f\left(\sqrt{E_{A|B}^{\min}}\right) - S_{A|B}(\varrho_{AB}) \end{aligned} \quad (\text{II.82})$$

où  $f(x)$  a été défini dans l'équation (II.79),  $S_{A|B}(\varrho_{AB})$  est l'entropie conditionnelle (II.54) et, en termes d'invariants symplectiques (II.54),  $E_{A|B}^{\min}$  s'écrit[150]

$$E_{A|B}^{\min} = \begin{cases} \left[ \frac{|I_3| + \sqrt{I_3^2 - (I_1 - 4I_4)(I_2 - 1/4)}}{2(I_2 - 1/4)} \right]^2 & \text{if } \frac{(I_1 I_2 - I_4)^2}{(I_1 + 4I_4)(I_2 + 1/4)I_3^2} \leq 1 \\ \frac{I_1 I_2 + I_4 - I_3^2 - \sqrt{(I_1 I_2 + I_4 - I_3^2)^2 - 4I_1 I_2 I_4}}{2I_2} & \text{si non} \end{cases} \quad (\text{II.83})$$

et alors l'expression explicite de la discorde quantique (II.82) peut être facilement évaluée.

La quantité  $f\left(\sqrt{E_{A|B}^{\min}}\right)$  correspond à l'entropie moyenne de Von Neumann de l'état conditionnel gaussien mono-mode dans lequel est laissé le sous-système  $A$  après la mesure Gaussienne sur le sous-système  $B$  minimisant l'entropie conditionnelle de l'équation (II.80) (voir Réf. [150] pour les détails du calcul). On peut obtenir le résultat suivant :  $\mathcal{D}_{B|A}(\varrho_{AB})$  en échangeant les rôles des deux sous-systèmes.

Il convient de noter que la discorde quantique peut être non nulle même si l'état est séparable, ce qui indique que l'intrication n'est pas la seule source de corrélations quantiques. Par exemple, il existe des exemples d'algorithmes de calcul quantique montrant une accélération par rapport à leurs homologues classiques, même en l'absence d'intrication [151, 152]. Les états avec une discordance nulle représentent essentiellement une distribution de probabilité classique intégrée dans un système quantique, tandis qu'une discordance positive, même sur des états séparables (mixtes), est un indicateur de quantification [153, 154], et peut être associée de manière opérationnelle à l'impossibilité de diffusion locale [155].

Dans le cas d'états gaussiens purs à deux modes, puisque  $\Delta(\sigma) = I_1 + I_2 + 2I_3 = 1/2$  et  $I_4 = 1/16$ , on a  $S_V(\varrho_{AB}) = f\left(\sqrt{E_{A|B}^{\min}}\right) = 0$ , et donc la discorde quantique Gaussienne (II.82) se réduit à l'entropie de l'intrication, c'est à dire  $\mathcal{D}_{A|B}(\varrho_{AB}) = \mathcal{D}_{B|A}(\varrho_{AB}) = S_V(\varrho_A) = S_V(\varrho_B)$ .

## II.10.2 Rényi-2 comme mesures des corrélations.

Dans cette sous-section, nous nous attacherons à définir les quantificateurs gaussiens de Rényi-2 de l'intrication. Pour un état gaussien bipartite  $\varrho_{AB}$  avec une matrice de covariance de forme standard donnée dans l'équation (II.53), les corrélations totales entre les sous-systèmes  $A$  et  $B$  peuvent être quantifiées par l'information mutuelle de Rényi-2  $\mathcal{I}_2$ , définie comme suit [124]

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2(\rho_{A:B}) &= \mathcal{S}_2(\rho_A) + \mathcal{S}_2(\rho_B) - \mathcal{S}_2(\rho_{AB}) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\text{Det } \sigma_A \text{ Det } \sigma_B}{\text{Det } \sigma_{AB}} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.84})$$

qui mesure la distinguabilité dans l'espace des phases entre la fonction de Wigner de  $\varrho_{AB}$  et la fonction de Wigner associée au produit des marginaux  $\varrho_A \otimes \varrho_B$  (qui est, par définition, un état dans lequel les sous-systèmes  $A$  et  $B$  sont complètement non corrélés). Remarquons que, d'après résultat de l'équation (II.60) la quantité  $\mathcal{I}_2(\rho_{A:B})$  est toujours non négative, et disparaît si et seulement si  $\varrho_{AB} = \varrho_A \otimes \varrho_B$ , c'est-à-dire,  $\sigma_{AB} = \sigma_A \oplus \sigma_B$ .

Il a été introduit une mesure Gaussienne Rényi-2 des corrélations classiques à sens unique [89, 124, 150, 150]. Il a été définie  $\mathcal{C}_{A|B}(\varrho_{AB})$  comme la diminution maximale de l'entropie Rényi-2 du sous-système  $A$ , étant donné qu'une mesure Gaussienne a été effectuée sur le sous-système  $B$ , où la maximisation est sur toutes les mesures Gaussiennes de matrice de covariance

respectivement,  $\tilde{\sigma}_A^\Pi$  et  $\tilde{\sigma}_B^\Pi$ . On a alors

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_2(\rho_{A|B}) &= \sup_{\Gamma_B^I} \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\det \sigma_A}{\det \tilde{\sigma}_A^\Pi} \right); \\ \mathcal{J}_2(\rho_{B|A}) &= \sup_{\Gamma_A^I} \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\det \sigma_B}{\det \tilde{\sigma}_B^\Pi} \right),\end{aligned}\tag{II.85}$$

où les corrélations classiques unidirectionnelles  $\mathcal{J}_2(\rho_{B|A})$ , avec des mesures Gaussiennes sur  $A$ , ont été définies en conséquence en inversant les rôles des deux sous-systèmes,  $A \leftrightarrow B$ . Remarquez que, pour le même état  $\varrho_{AB}$ ,  $\mathcal{J}_2(\varrho_{A|B}) \neq \mathcal{J}_2(\varrho_{B|A})$  en général : Les corrélations classiques dépendent du sous-système mesuré.

À la suite de l'étude historique d'Ollivier et Zurek [90], et des recherches récentes sur la discordance quantique Gaussienne [124, 150], la discordance de Rényi-2 a été définie comme la différence entre l'information mutuelle (II.84) et les corrélations classiques (II.85).

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_2(\sigma_{A|B}) &= \mathcal{I}_2(\sigma_{A:B}) - \mathcal{J}_2(\sigma_{A|B}) \\ &= \inf_{\Gamma_B^\Pi} \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\det \sigma_B \det \tilde{\sigma}_A^\Pi}{\det \sigma_{AB}} \right) \\ \mathcal{D}_2(\sigma_{B|A}) &= \mathcal{I}_2(\sigma_{A:B}) - \mathcal{J}_2(\sigma_{B|A}) \\ &= \inf_{\Gamma_A^\Pi} \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\det \sigma_A \det \tilde{\sigma}_B^\Pi}{\det \sigma_{AB}} \right)\end{aligned}\tag{II.86}$$

La discordance est clairement une quantité non symétrique également. Elle rend compte des corrélations quantiques générales, même en l'absence d'intrication [90, 156]. Un fait intéressant est que tous les états gaussiens possèdent un discordance non nul, à l'exception des états produits qui sont complètement non corrélés.

### II.10.3 Cohérence quantique Gaussienne

La cohérence découle du principe de superposition, où elle est responsable de nombreux effets quantiques importants tels que l'intrication et d'autres types des corrélations quantiques [157]. Dans la référence [158], il a été établi un cadre rigoureux pour quantifier la cohérence des états quantiques de dimension finie, tandis que, dans la référence [16], un cadre pour quantifier la cohérence des états gaussiens a été fourni. Un état  $\rho$  (de variables discrètes ou continues) est dit incohérent s'il est diagonal lorsqu'il est exprimé dans une base orthonormale fixe [159]. Une carte quantique est appelée opération incohérente (ICPTP) si elle est complètement positive, qu'elle préserve la trace et qu'elle fait correspondre tout état incohérent à un état incohérent. Pour le cas des états Gaussiens, les conditions nécessaires pour que toute mesure de cohérence (indiquer  $\mathcal{C}$ ) doit satisfaire, sont les suivantes

- i)  $\mathcal{C}(\rho) \geq 0$  et  $\mathcal{C}(\rho) = 0$  ssi  $\rho \in \mathcal{I}$ , où  $\mathcal{I}$  désigne l'ensemble de tous les états incohérents.
- ii) la mesure  $\mathcal{C}$  est monotone sous toutes les cartes incohérentes complètement positives et préservant la trace (ICPTP), c'est-à-dire,  $\mathcal{C}(\rho) \geq \mathcal{C}(ICPTP(\rho))$ .

Pour tout état gaussien mono-modal  $\rho$  avec la matrice de bloc  $\mathcal{S}_{j_p} = \text{diag}(s_j, s_j)$  pour  $p = 1, 2$  et  $j \in \{o, m\}$ , une mesure de cohérence est définie comme suit

$$\mathcal{C}(\rho) = \inf_{\delta} \{S(\rho \parallel \delta), \quad \delta \text{ est un état incohérent}\}\tag{II.87}$$

où  $S(\rho \ln \delta) = \text{tr}(\rho \ln \rho) - \text{tr}(\rho \ln \delta)$ ; est l'entropie relative, inférieur court sur tous les états gaussiens incohérents. L'entropie  $S(\rho) = -\text{tr}(\rho \ln \rho)$  de  $\rho$  et  $\inf[\text{tr}(\rho \ln \delta)]$  sont donnés par [99, 159]

$$S(\rho) = f(\eta_{j_p}) \quad (\text{II.88})$$

$$\inf[\text{tr}(\rho \ln \delta)] = (\bar{n}_{j_p} + 1) \ln(\bar{n}_{j_p} + 1) - \bar{n}_{j_p} \ln \bar{n}_{j_p} \quad (\text{II.89})$$

où  $n_{j_p} = \sqrt{\det \mathcal{S}_{j_p}}$ ,  $\bar{n}_{j_p} = \frac{1}{2}(s_j - 1)$  (pour  $p = 1, 2$  et  $j \in \{o, m\}$ ) et la fonction  $f(x)$  est défini par

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln \left(x + \frac{1}{2}\right) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \ln \left(x - \frac{1}{2}\right) \quad (\text{II.90})$$

Comme dans le cas d'un mode unique, les équations (II.88)-(II.89) peuvent être généralisées aux états gaussiens multimodes. Ainsi, pour le cas simple d'un état gaussien symétrique à deux modes  $\rho(\mathcal{V}_j)$  avec une matrice de covariance ( $\mathcal{V}_j$ ) (Eq. (IV.28)), une mesure de cohérence est définie comme [159]

$$\mathcal{C}^j(\rho) = -\sum_{p=1}^2 f(\eta_{j_p}) + \sum_{p=1}^2 \left[ (\bar{n}_{j_p} + 1) \ln(\bar{n}_{j_p} + 1) - \bar{n}_{j_p} \ln \bar{n}_{j_p} \right] \quad \text{for } j \in \{o, m\} \quad (\text{II.91})$$

où  $\{\eta_{j_p}\}_{p=1}^2 = \{\eta_{j,+}, \eta_{j,-}\}$  sont l'ensemble des valeurs propres symplectiques de la CM  $\mathcal{V}_j$  (Eq. (IV.28)) [10], et  $\bar{n}_{j_p} = \frac{1}{2}(s_j - 1)$  est déterminé par la matrice de covariance du  $p^{iem}$  modes  $s_{j_p}$ . De plus, en utilisant les expressions explicites de  $\eta_{j,+}, \eta_{j,-}$  données par [24]

$$\eta_{j,\pm} = \sqrt{\frac{\Delta_j \pm \sqrt{\Delta_j^2 - 4 \det \mathcal{V}_j}}{2}} \quad (\text{II.92})$$

La cohérence du sous-système optique(mécanique)  $\mathcal{C}^o(\mathcal{C}^m)$  peut être quantifiée comme suit : [159]

$$\mathcal{C}^j = -f(\eta_{j,+}) - f(\eta_{j,-}) + 2f(s_j) \quad \text{for } j \in \{o, m\} \quad (\text{II.93})$$

où  $\Delta_j = \det \mathcal{S}_{j_1} + \det \mathcal{S}_{j_2} + 2 \det \mathcal{K}_{j_1 j_2}$  et la fonction  $f$  est définie par l'équation (II.90).

## II.10.4 Intrication intrinsèque Gaussien

Pour décider de l'intrication dans un système bipartite, il est nécessaire de quantifier la quantité des corrélations quantiques [160]. Cela ne peut être accompli sans introduire des mesures d'intrication [160]. Jusqu'à présent, à part la mesure d'intrication de formation qui quantifie la quantité d'intrication à l'état pur nécessaire pour créer un état quantique partagé [80], aucune mesure d'intrication n'a été définie explicitement avec une signification physique claire [161]. Par exemple, la mesure d'intrication distillable est bien définie dans [162, 163], où il quantifie l'intrication à l'état pur, et on peut distiller à partir d'un état quantique partagé, cependant, il ne peut pas être calculé sous une forme compacte. En revanche, la négativité logarithmique est une mesure calculable de l'intrication pour tout état, mais elle ne possède pas de signification physique apparente [164]. En ce sens, Mišta et Tatham ont défini un quantificateur physiquement significatif de l'intrication bipartite appelé intrication intrinsèque (IE) [161]. Ce quantificateur est opérationnellement associé au protocole d'accord de clé secrète [163]. De plus, pour les sous-classes remarquables d'états gaussiens mixtes symétriques et asymétriques à deux modes, y compris les états minimaux gaussiens les moins intriqués (GLEMS) et les états thermiques comprimés (STS), l'intrication intrinsèque Gaussienne a été calculée analytiquement

[161].

Il est intéressant de noter qu'il a été démontré que l'intrication intrinsèque gaussien est une quantité significative sur le plan expérimental, qui reste en accord avec d'autres quantités optimisées telles que la discorde Gaussienne optimale [150, 165], où l'optimum peut être atteint par détection homodyne ou hétérodyne. Pour les états gaussiens mixtes à deux modes avec matrice de covariance (IV.42), l'état bipartite  $\hat{\rho}_{AB}$  décrivant deux modes mécaniques  $A$  et  $B$  est un état thermique écrasé, où l'intrication intrinsèque gaussien correspondant est donné par [161]

$$E_{\downarrow}^G(\hat{\rho}_{AB}) = \begin{cases} \ln \left[ \frac{4(a-c)^2+1}{4(a-c)} \right] & \text{si } a - c < 1/2 \text{ and } a \leq 1.205, \\ 0 & \text{si } a - c \geq 1/2. \end{cases} \quad (\text{II.94})$$

De manière surprenante, il a été constaté que l'intrication intrinsèque gaussien coïncide exactement avec l'intrication gaussien Rényi-2 [124] pour tous les états purs ainsi que pour plusieurs classes importantes d'états mixtes symétriques et asymétriques [161].

### II.10.5 Discorde gaussien de Hellinger

Nous nous concentrons maintenant sur le comportement des corrélations quantiques des deux modes mécaniques au-delà de l'intrication. Pour cela, nous utilisons la discordance Gaussienne de Hellinger qui est une mesure géométrique [166].

La raison derrière la définition de quantificateurs géométriques de corrélations non classiques peut être justifiée en général par le fait que leur simple évaluation [156]. Pour les états gaussiens à deux modes, une discordance géométrique [166] et sa version redimensionnée [167] ont été introduites sur la base de la distance de Hilbert-Schmidt définie comme [166]

$$D_{HS}(\hat{\rho}_{AB}) = \min_{\{\hat{\chi}\}} [d_{HS}(\hat{\rho}_{AB}, \hat{\chi})]^2, \quad (\text{II.95})$$

où  $\hat{\chi}$  est l'ensemble des états avec une discordance nulle.

Il a été démontré dans la réf. [166] que la métrique de Hilbert-Schmidt peut être utilisée pour définir une mesure de discorde géométrique Gaussienne en termes de distance de Hellinger  $D_H(\hat{\rho}_{AB})$  donnée par

$$D_H(\hat{\rho}_{AB}) = \min_{\hat{\sigma} \in \mathcal{G}_P} \frac{1}{2} [d_{HS}(\hat{\rho}_{AB}, \hat{\sigma})] = 1 - \max_{\hat{\sigma} \in \mathcal{G}_P} \mathcal{A}(\hat{\rho}_{AB}, \hat{\sigma}), \quad (\text{II.96})$$

où  $\mathcal{A}(\hat{\rho}_{AB}, \hat{\sigma}) = \text{Tr}(\sqrt{\hat{\rho}_{AB}}\sqrt{\hat{\sigma}})$  est l'affinité d'un état gaussien arbitraire à deux modes  $\hat{\rho}_{AB}$  et l'ensemble  $\mathcal{G}_P$  des états gaussiens de discordance nulle  $\hat{\sigma}$ . L'affinité  $\mathcal{A}(\hat{\rho}_{AB}, \hat{\sigma})$  est une quantité positive et symétrique par rapport à  $\hat{\rho}_{AB}$  et  $\hat{\sigma}$ . Il peut être interprété comme une mesure de distinction entre deux états quantiques  $\hat{\rho}_{AB}$  et  $\hat{\sigma}$ . Sa valeur maximale 1 est atteinte lorsque les deux états quantiques  $\hat{\rho}_{AB}$  et  $\hat{\sigma}$  coïncident. Il s'ensuit que  $D_H(\hat{\rho}_{AB})$  disparaît si l'état gaussien bimode  $\hat{\rho}_{AB}$  ne possède que des corrélations classiques, c'est-à-dire des états produits gaussiens [150]. Pour les états gaussiens à deux modes généralement mixtes, la discorde de Hellinger Gaussienne a été évaluée analytiquement [166]. En particulier, pour les états thermiques symétriques comprimés qui correspondent au CM ((IV.42)), la discorde de Hellinger Gaussienne admet l'expression simple suivante [166] :

$$D_H(\hat{\rho}_{AB}) = \frac{a - \sqrt{a^2 - c^2}}{a + \sqrt{a^2 - c^2}}, \quad (\text{II.97})$$

Remarquez que  $D_H(\hat{\varrho}_{AB}) = 0$  si et seulement si  $c = 0$ . Ceci est une conséquence du fait que la discordance quantique disparaît si et seulement si l'état  $\hat{\varrho}_{AB}$  est un état produit et donc si et seulement si le déterminant de la matrice  $V_3$  est nul [150]. Notez qu'une propriété particulière de la discordance quantique est qu'elle peut prendre des valeurs non nulles même lorsque l'état n'est pas intriqué, ce qui signifie que l'intrication n'est pas la seule source de corrélations non classiques.

## II.11 Conclusion

Dans le deuxième chapitre de cette thèse, nous nous sommes intéressés aux spécificités de la théorie quantique de l'information à variables continues. Tout d'abord, nous avons introduit le domaine de l'optique quantique et la représentation dans l'espace des phases. Ensuite, nous avons introduit les états gaussiens et les opérations Gaussiennes. Ces états et transformations sont essentiels en optique quantique, car ils correspondent exactement à ce qui est relativement facile à faire expérimentalement, tout en ayant un formalisme théorique qui permet leur étude. Ce deuxième point est essentiel car l'optique quantique est en général décrite dans un espace de Hilbert de dimension infinie, ce qui rend les analyses théoriques infaisables dans la plupart des cas, à l'exception notable des états et opérations gaussiens.

Enfin, nous avons décrit les spécificités des variables continues par rapport aux outils de l'information quantique. Il est intéressant de noter que si les variables continues posent de nombreux problèmes en théorie de l'information classique, ce n'est pas forcément le cas en théorie de l'information quantique où les entropies par exemple restent bien définies pour les variables continues. Nous avons également insisté sur les propriétés des états gaussiens qui sont extrémaux par rapport à diverses fonctions comme l'entropie par exemple. Ces propriétés font que les états gaussiens, en plus d'être facilement décrits théoriquement, sont souvent les états les plus appropriés pour diverses tâches de communication quantique, et en particulier, pour la réalisation et la quantification de l'intrication et des corrélations quantiques.

# Systemes Optomécanique quantique en cavité

## III.1 Introduction

Le domaine de l'optomécanique étudie l'interaction entre les degrés de liberté optiques et mécaniques médiée par la force de pression du rayonnement. L'utilisation de microcavités optiques peut considérablement améliorer cette interaction optomécanique. Le domaine de l'optomécanique des cavités a connu un développement rapide au cours des deux dernières décennies, stimulé à l'origine par le domaine de la détection des ondes gravitationnelles. Grâce au développement des techniques de micro/nano-fabrication, divers systèmes optomécaniques à cavité présentant des facteurs de qualité optique et mécanique élevés ont été développés. Les chercheurs ont utilisé la force de pression de rayonnement des photons pour contrôler et manipuler les mouvements des résonateurs mécaniques afin d'étudier les effets mécaniques quantiques des résonateurs mécaniques macroscopiques, comme le refroidissement de l'état fondamental des résonateurs mécaniques macroscopiques, la compression quantique des mouvements mécaniques et la production de lumière comprimée. En outre, les systèmes optomécaniques à cavité ont permis de réaliser la transparence et les modes sombres induits par l'optomécanique, le couplage fort et les corrélations non classiques entre un résonateur mécanique et un champ optique, le transfert d'énergie topologique, le contrôle et le refroidissement non réciproques des modes mécaniques, le transport non réciproque de la lumière et l'intrication quantique entre les résonateurs mécaniques. Les systèmes optomécaniques à cavité constituent également des plateformes idéales pour la détection de précision, en raison de la réponse renforcée par la résonance mécanique et de la sensibilité de lecture renforcée par la résonance optique. Contrairement aux systèmes de détection traditionnels basés sur les systèmes micro-électromécaniques (MEMs), qui utilisent des circuits électriques pour lire le signal, le mécanisme de lecture optique présente moins de bruit nuisible, comme le bruit de Johnson, et peut facilement atteindre des niveaux quantiques limités, connus sous le nom de bruit de grenaille. Par exemple, le bruit de grenaille a limité la sensibilité de déplacement de l'ordre de  $10^{-19}$  m/ $\sqrt{\text{Hz}}$  a été réalisée à l'aide de systèmes optomécaniques à cavité. La mesure ultrasensible du déplacement a permis de détecter avec précision diverses quantités physiques, telles que la force et la masse, etc. Outre la très haute précision, les capteurs optomécaniques à cavité offrent également les avantages suivants : petite taille, faible poids, faible consommation d'énergie, capacité d'intégration sur puce, compatibilité avec le couplage de fibres, etc. et ont donc un grand potentiel pour être utilisés dans

des applications réelles dans un avenir proche.

Dans ce chapitre, nous allons nous concentrer sur la description du système optomécanique dans la cavité Fabry-Pérot. Nous commencerons par définir ce qu'est le système optomécanique. Ensuite, nous l'introduisons dans la Cavité Fabry-Pérot. Nous avons également discuté des phénomènes de stabilité et introduit les paramètres nécessaires dans ce type de système optomécanique. Nous discuterons également du couplage optomécanique. Ensuite, afin de discuter des corrélations quantiques entre le mode optomécanique, nous introduisons l'Hamiltonien du système optomécanique et dérivons l'équation de mouvement de Heisenberg-Langevin qui permet, à son tour, de dériver la matrice de covariance décrite dans les systèmes optomécaniques de Cavite.

## III.2 Opto-mécanique quantique en cavité

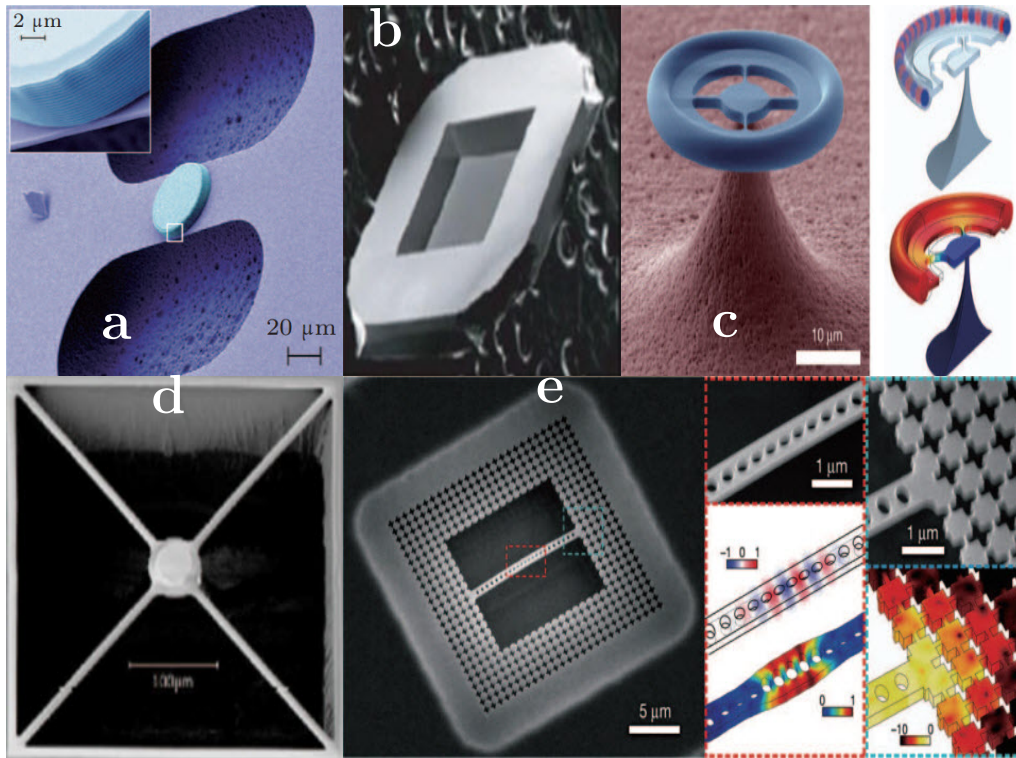
Ces dernières années ont été marquées par une série de développements à l'intersection de deux sujets auparavant distincts. Les (micro-)cavités optiques [168] et les résonateurs micro (nano) mécaniques [169], chacun un sujet à part entière avec une riche histoire scientifique et technologique, se sont, en un sens, entremêlés expérimentalement par le mécanisme sous-jacent des forces de pression de rayonnement optique. Ces forces et la physique qui leur est associée ont suscité un intérêt majeur dans le domaine de la physique atomique [170–173] pendant plus de cinq décennies et le contexte optomécanique émergent présente de nombreux parallèles avec ce domaine. Le mariage entre les deux sujets, l'optique et la mécanique quantique, crée la naissance de la nouvelle expérience appelée optomécanique quantique en cavité. L'optomécanique quantique en cavité est un domaine de recherche fondamentale en pleine expansion à l'échelle internationale, promettant de nombreuses applications pour l'information quantique [60], qui étudier l'interaction par l'utilisation de l'effet de la pression de rayonnement entre le rayonnement électromagnétique et la vibration mécanique d'un miroir mobile

### III.2.1 Qu'est-ce que l'optique quantique "Optomécanique" ?

L'optique quantique est un domaine de recherche qui étudie et exploite les conséquences de la quantification du champ électromagnétique et de son interaction avec la matière. Déclenchée par l'invention du laser, elle a connu des avancées majeures, façonnant notre compréhension des fondements de la physique et permettant de nouvelles technologies de manipulation des systèmes quantiques. L'optique quantique ou bien l'optomécanique quantique désigne l'ensemble des expériences dans lesquelles la lumière ou bien l'interaction entre lumière et matière doivent être quantifiées. C'est un domaine de recherche en plein essor, à la frontière entre la mécanique quantique et l'optique.

### III.2.2 Systèmes optomécaniques

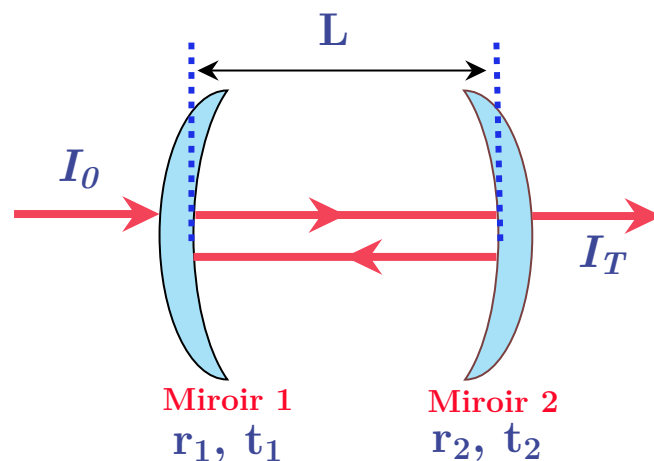
A l'ère de la technologie, de nombreux dispositifs capables de démontrer des effets quantiques sont apparus. La figure. (III.1), prise de [174], montre quelques exemples de tels dispositifs. Bien que ces dispositifs diffèrent expérimentalement, il est intéressant qu'ils puissent tous être conçus à l'aide du modèle de cavité opto-mécanique de Fabry-Pérot, et ainsi leur fonctionnement peut être décrit avec le même formalisme mathématique [60].



**Fig. III.1** – Exemple de dispositifs optomécaniques avec a)- miroir de Bragg, b)- membrane en SiN, c)- micro-tore en silice, d)- cavité à cristaux photoniques, e)- micro-membrane couplée à une cavité micro-ondes.

### III.2.3 Cavité Fabry-Pérot (F-P) à deux miroirs (classique)

En optomécanique, une cavité F-P (appelée aussi résonateur) est un dispositif dans lequel certains rayons lumineux sont susceptibles de rester confinés grâce à des miroirs sur lesquels ils se réfléchissent. Ces cavités sont indispensables aux lasers pour que leur lumière passe plusieurs fois dans leur milieu amplificateur. Elles sont parfois présentes dans des interféromètres de F-P [175, 176] et des oscillateurs optomécaniques. Dans sa configuration la plus simple, une cavité F-P est constituée de deux miroirs plans ou sphériques face à face séparés par un espace  $L$  et ayant un taux de réflexion  $r_1, r_2$  et un taux de transmission  $t_1, t_2$  (afficher sur Fig. ((III.2))).



**Fig. III.2** – Lumière laser entrant dans une cavité de Fabry-Pérot classique ou interféromètre de Fabry-Pérot.

Lorsque la cavité F-P entraîne par un faisceau laser incident d'intensité  $I_0$ , après un aller-retour dans celui-ci, l'intensité lumineuse de l'onde en sortie de la cavité est donnée par [176]

$$I_T = I_0 \frac{T^2}{(1-R)^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{2\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 \sin^2(\delta/2)}. \quad (\text{III.1})$$

Avec  $\delta = 2kL$  où  $k$  est le vecteur d'onde du laser entraîne la cavité, et  $R = |r_1| |r_2|$ ,  $T = |t_1| |t_2|$ .

### III.2.4 Expression de la finesse de la cavité F-P

Parmi les paramètres les plus importants de la cavité F-P c'est la finesse  $\mathcal{F}$ , définie par

$$\mathcal{F} = \pi \frac{R}{1-R^2} \quad (\text{III.2})$$

La finesse ne dépend que de la transmission et des pertes des deux miroirs. Elle détermine aussi l'amplification de l'intensité intracavité moyenne  $\bar{I}$  à résonance qui est reliée à l'intensité moyenne incidente  $\bar{I}^{\text{in}}$  par la relation.

$$\bar{I} = \frac{2}{\pi} \mathcal{F} \bar{I}^{\text{in}} \quad (\text{III.3})$$

Dans le cas d'une cavité sans perte optique, tous les photons incidents finissent par ressortir de la cavité après un certain temps de stockage. Le faisceau réfléchi a donc la même intensité moyenne que le faisceau incident. Par contre il subit une variation de phase qui dépend de la longueur de la cavité [177].

### III.2.5 Stabilité de la cavité F-P

Une cavité constituée de deux miroirs ne peut confiner la lumière que dans certaines positions des miroirs. Dans ces cas, on dit que la cavité est stable. Si elle est instable, un rayon présent dans la cavité en sortira après quelques réflexions sur les miroirs, et sera perdu. Le raisonnement ci-dessus se généralise directement à toute cavité linéaire de longueur  $L$  fermée par deux miroirs concaves de rayons de courbure  $R_1$ , et  $R_2$ . La condition de stabilité d'une cavité Fabry-Pérot est donnée [178]

$$0 < \left(1 - \frac{L}{R_1}\right) \left(1 - \frac{L}{R_2}\right) < 1. \quad (\text{III.4})$$

Les cavités vérifiant la condition (III.4) sont stables.

### III.2.6 Phénomène de bistabilité

Considérons un milieu, non linéaire, de longueur  $l$  placé dans une cavité Fabry Pérot, la lumière transmise par la cavité peut présenter une bistabilité optique [179], c'est-à-dire qu'il peut détecter deux valeurs différentes d'intensité de transmission pour une intensité particulière du faisceau d'entrée. Pour le montrer, supposons que  $\delta \ll 1$ . Cela signifie que le résonateur

fonctionne près de la résonance. Dans ce cas, l'équation. (III.1) récrit comme

$$I_T = I_0 \frac{T^2}{(1-R)^2} \frac{1}{1 + (\mathcal{F}/\pi)^2 \delta^2} \quad (\text{III.5})$$

la contribution des effets de milieu non-linéaires provoque par conséquent un déphasage de la lumière transmise en fonction de l'intensité [179] :

$$\delta = \delta_0 + \delta_2 I_T \quad (\text{III.6})$$

Nous suggérons que  $\delta_0$  et  $\delta_2$  ont des signes opposés et en remplaçant l'équation. (III.6) dans l'équation. (III.5), on en déduit

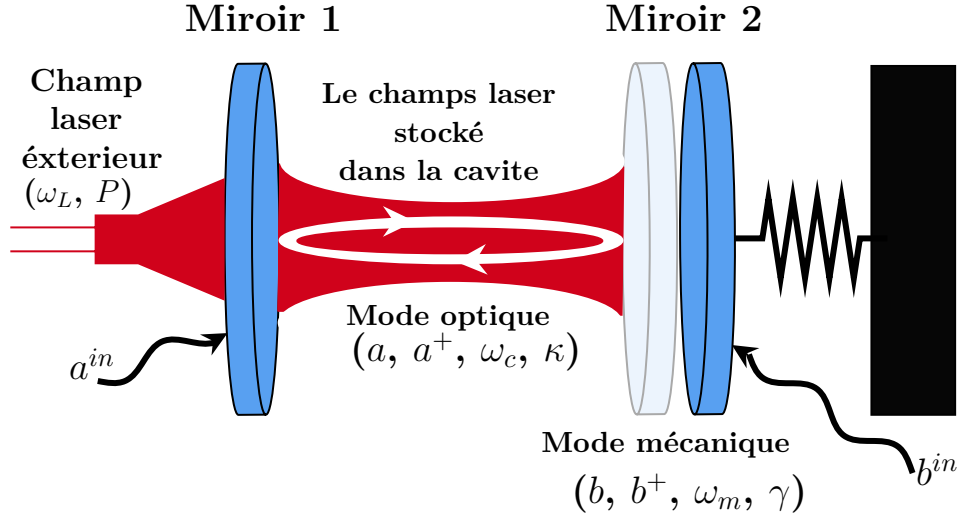
$$\frac{T^2}{(1-R)^2} I_0 = I_T \left[ 1 + (\mathcal{F}/\pi)^2 (\delta_0 + \delta_2 I_T)^2 \right] \quad (\text{III.7})$$

En général, l'équation (III.7) accepte trois solutions pour la lumière transmise (qui est un polynôme du troisième degré en  $I_T$ ). Il existe une ou deux solutions réelles pour la lumière transmise, selon les paramètres de l'équation (III.7). Le dernier cas représente le phénomène de bistabilité.

## III.2.7 Cavité Fabry-Pérot optomécanique

### III.2.7.1 Description générale

La cavité Fabry-Pérot classique [176] est composée par deux miroirs fixes, si on en remplaçant l'un de ces deux miroirs fixes par un miroir mobile de taux de réflexion presque égal à 1 [180] On obtient une nouvelle cavité Fabry-Pérot optomécanique [181]. Le degré de liberté unidimensionnel introduit par l'élément mécanique mobile ajoute un mode de résonance mécanique libre à la cavité. Ce mode peut interagir avec le champ laser stocké dans la cavité grâce à la pression de radiation appliquée au miroir mobile. Les modes optiques de la cavité est contrôlée par un faisceau laser, et la partie transmise à travers la cavité agit sur le miroir mobile par la force de la pression de rayonnement qui provoque le déplacement du miroir mobile. D'autre part, le mouvement du miroir entraîne une modification de la longueur de la cavité en modulant la phase du faisceau laser stocké dans le miroir [182]. La combinaison de ces deux processus (déplacement du miroir et changement de phase du champ de la cavité), lorsqu'ils sont correctement appliqués, produit une variété de phénomènes optomécaniques (enchevêtrement, refroidissement, transparence, compression du bruit, etc.).



**Fig. III.3** – Schéma d'une Cavité optomécanique Fabry-Pérot avec un mode optique caractérisé par  $\omega_c$  la fréquence de cavité et  $(a, a^+)$  l'opérateur d'annihilation et de création est entraîné par un laser de fréquence  $\omega_L$  et de puissance  $P$  et  $\kappa$  le de taux de dissipation, un mode mécanique caractérisé par  $\omega_m$  la fréquence mécanique et  $(b, b^+)$  l'opérateur d'annihilation et de création et  $\gamma$  le de taux de d'amortissement. L'opérateur  $a^{in}$  et  $b^{in}$  représente le bruit affectant le mode optique(mécanique).

### III.2.7.2 Paramètres optomécanique

Dans le monde de technologie actuel, il existe un ensemble sophistiqué des dispositifs mécaniques optiques de haute qualité, c'est-à-dire que lorsqu'une cavité mécanique (ou optique) de coefficient quantile  $Q_m \gg 1$  ( $Q_c \gg 1$ ) est efficacement couplée à une cavité optomécanique, de nombreuses expériences peuvent démontrer avec succès les principes fonctionnels de l'optomécanique dans une cavité à connecter. Le tableau (III.1) suivant résume les paramètres optomécaniques pertinents pour certaines implémentations expérimentales courantes typiques [60].

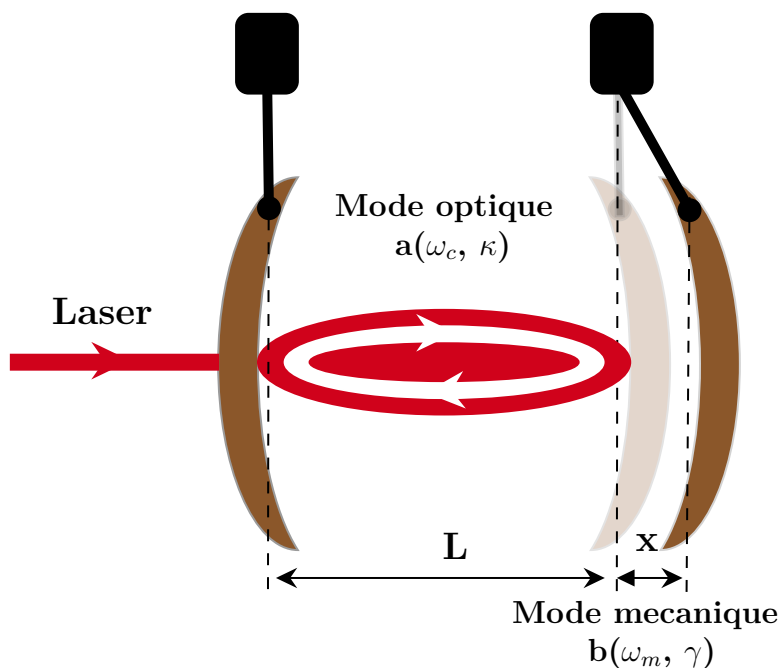
Référence	$\Omega_m/2\pi$ [Hz]	$m$ [ kg]	$\Gamma_m/2\pi$ [Hz]	$Q \cdot f$ [ Hz]	$\kappa/2\pi$ [Hz]	$\frac{\kappa}{\Omega_m}$	$g_0/2\pi$ [Hz]
(Murch et al., 2008)	$4.2 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^{-22}$	$1 \cdot 10^3$	$1.7 \cdot 10^6$	$6.6 \cdot 10^5$	15.7	$6 \cdot 10^5$
(Chan et al., 2011)	$3.9 \cdot 10^9$	$3.1 \cdot 10^{-16}$	$3.9 \cdot 10^4$	$3.9 \cdot 10^{14}$	$5 \cdot 10^8$	0.13	$9 \cdot 10^5$
(Teufel et al., 2011)	$1.1 \cdot 10^7$	$4.8 \cdot 10^{-14}$	32	$3.5 \cdot 10^{12}$	$2 \cdot 10^5$	0.02	$2 \cdot 10^2$
(Verhagen et al., 2012)	$7.8 \cdot 10^7$	$1.9 \cdot 10^{-12}$	$3.4 \cdot 10^3$	$1.8 \cdot 10^{12}$	$7.1 \cdot 10^6$	0.09	$3.4 \cdot 10^3$
(Thompson et al., 2008)	$1.3 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^{-11}$	0.12	$1.5 \cdot 10^{11}$	$5 \cdot 10^5$	3.7	$5 \cdot 10^1$
(Kleckner et al., 2011)	$9.7 \cdot 10^3$	$1.1 \cdot 10^{-10}$	$1.3 \cdot 10^{-2}$	$9 \cdot 10^9$	$4.7 \cdot 10^5$	55	$2.2 \cdot 10^1$
(Gr�oblacher et al., 2009)	$9.5 \cdot 10^5$	$1.4 \cdot 10^{-10}$	$1.4 \cdot 10^2$	$6.3 \cdot 10^9$	$2 \cdot 10^5$	0.22	3.9
(Arcizet et al., 2006)	$8.14 \cdot 10^5$	$1.9 \cdot 10^{-7}$	81	$8.1 \cdot 10^9$	$1 \cdot 10^6$	1.3	1.2
(Cuthbertson et al., 1996)	318	1.85	$2.5 \cdot 10^{-6}$	$4.1 \cdot 10^{10}$	275	0.9	$1.2 \cdot 10^{-3}$

**Tab. III.1** – Paramètres expérimentaux pour des échantillons utilisés dans des expériences d'optomécaniques de cavité. Avec la fréquence du résonateur mécanique  $\omega_m$  et sa masse  $m$ , le taux de dissipation mécanique(optique)  $\gamma_m = \omega_m/Q_m$  ( $\kappa = \omega_c/Q_c$ ), le facteur de suppression de bande latérale  $\kappa/\omega_m$  déterminant la capacité à réaliser un refroidissement au voisinage de l'état fondamental et enfin le taux de couplage optomécanique  $g_0$ .

### III.3 Principes de couplage opto-mécanique

#### III.3.1 Description du couplage optomécanique

L'optomécanique fait largement référence aux interactions entre la lumière et un objet en mouvement. Cette interaction, connue sous le nom de couplage optomécanique, permet d'atteindre un régime où les propriétés du système optomécanique (laser, miroir) peuvent être gouvernées par la pression de radiation exercée par le laser sur le miroir [183]. Elle découle de l'idée que la lumière peut exercer une force sur un objet matériel, une idée émise pour la première fois par Kepler en 1619, le couplage optomécanique montre toutes les interactions entre le champ lumineux et le mouvement du miroir qui réfléchit le faisceau. Le mouvement du miroir entraîne un changement de phase de la lumière réfléchi, mais le miroir se déplace sous l'action de la pression de rayonnement du champ lumineux [184, 185]. Le premier effet peut être utilisé pour mesurer le déplacement du miroir mobile grâce à la détection de la phase du faisceau réfléchi. Le deuxième effet correspond à l'action en retour de la mesure : la lumière perturbe les déplacements d'un miroir que l'on cherche à mesurer. La combinaison de ces deux phénomènes conduit à l'existence d'une limite quantique pour la sensibilité de la mesure, mais est également responsable d'un certain nombre d'effets quantiques.



**Fig. III.4** – Schéma d'un système optomécanique à cavité Fabry-Pérot (FP) pilotée par laser. Le miroir gauche est fixe et le miroir droit est mobile.

Le couplage optomécanique décrit un phénomène selon lequel un champ de rayonnement optique interagit avec le mode de vibration mécanique. Par exemple, nous nous concentrons sur un système optomécanique Fabry-Pérot (III.4). Les champs de la cavité exercent une pression de rayonnement sur le miroir mobile, ce qui entraîne des changements à la fois de la fréquence de résonance et du taux d'amortissement ainsi que des modes mécaniques. En même temps, la vibration mécanique du ressort module la position du miroir mobile, ce qui modifie la longueur de la cavité  $L$  et la fréquence de résonance optique  $\omega_c$ .

### III.3.2 Couplage optomécanique par pression de radiation

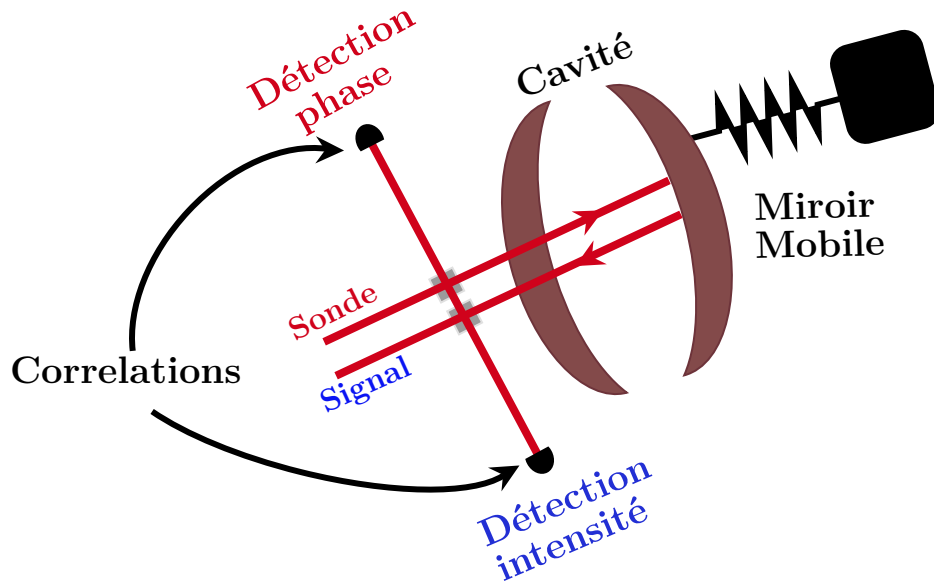
Dans notre discussion, le mécanisme fondamental qui lie les propriétés du champ de rayonnement de la cavité au mouvement mécanique est le transfert de quantité de mouvement des photons, c'est-à-dire la pression de rayonnement. La forme la plus simple de couplage de la pression de rayonnement est le transfert de quantité de mouvement dû à la réflexion qui se produit dans une cavité Fabry-Pérot. Un seul photon transfère la quantité de mouvement  $|\Delta p| = 2h/\lambda$  où ( $\lambda$  : longueur d'onde du photon). En conséquence, la force de pression de radiation est donnée par [60]

$$\langle \hat{F} \rangle = 2\hbar k \frac{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle}{\tau_c} = \hbar \frac{\omega}{L} \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle \quad (\text{III.8})$$

Ici,  $\tau_c = 2L/c$  désigne le temps d'aller-retour de la cavité (avec  $L$  la longueur de la cavité où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide),  $\hat{a}^\dagger \hat{a}$  est l'opérateur d'annihilation (création) d'un mode de cavité. Par conséquent,  $\hbar \frac{\omega}{L}$  décrit la force de pression de radiation causée par un photon intracavité. Le paramètre  $G = \omega/L$  qui apparaît dans cette expression décrit également le changement de la fréquence de résonance de la cavité en fonction de la position, c'est-à-dire le paramètre d'attraction de fréquence. Dans la section suivante, qui introduit une description Hamiltonienne de l'interaction entre un miroir mobile et une cavité optique, cette relation sera dérivée dans toute sa généralité.

### III.3.3 Corrélations quantiques dans les systèmes optomécaniques

Pour bien comprendre les corrélations quantiques dans les système optomécanique, en utilisant une cavité Fabry-Pérot, les deux oscillateurs harmoniques, le mode optique à l'intérieur de la cavité et le mode de vibration du miroir mobile, sont couplés non linéairement. L'intensité lumineuse du champ laser est proportionnelle à la pression de radiation (voir (III.8)), et a pour effet de déplacer le miroir mobile, ce dernier mouvement modifiant la phase du faisceau réfléchi. En règle générale, les fluctuations quantiques sont compressées le long d'une phase en quadrature, il est donc purement optomécanique. Pour générer un champ qui doit être amplifié le long de l'autre phase en quadrature [60]. Ces deux comportements contradictoires des fluctuations quantiques constituent la base de la génération de corrélations quantiques dans les systèmes optomécaniques [186].



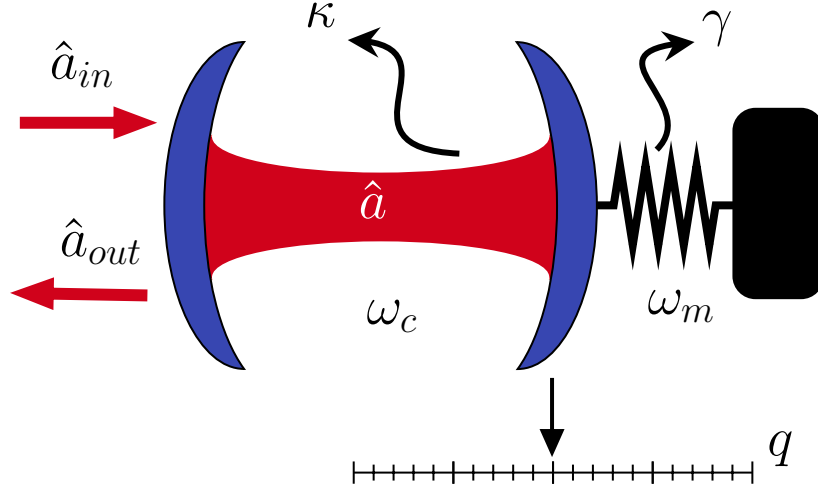
**Fig. III.5** – Les corrélations optomécaniques sont mesurées en envoyant deux faisceaux dans la cavité à miroir mobile, un faisceau signal intense dont les fluctuations de la pression de radiation déplacent le miroir, et un faisceau sonde qui détecte les mouvements résultants.

### III.4 L'Hamiltonien optomécanique

Le modèle simple d'un système optomécanique consiste en une cavité optique linéaire, avec l'un des miroirs suspendu à un ressort permettant au miroir d'osciller dans la direction de l'axe optique de la cavité. Un tel système peut être décrit avec l'Hamiltonien suivant

$$\hat{H} = \underbrace{\frac{m_{eff}\omega_m^2 \hat{q}^2}{2} + \frac{\hat{p}^2}{2m_{eff}}}_{\hat{H}_m} + \overbrace{\hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a}}^{\hat{H}_o}, \quad (\text{III.9})$$

où  $\hat{H}_m$  désigne le Hamiltonien de l'oscillateur mécanique de masse effective  $m_{eff}$  et de fréquence de résonance  $\omega_m$  et  $\hat{H}_o$  correspond à l'énergie optique stockée à l'intérieur de la cavité de fréquence de résonance  $\omega_c$ .



**Fig. III.6** – Schéma de l'interaction optomécanique. Le champ optique  $\hat{a}_{in}$  est couplé à la cavité optique avec une fréquence de résonance  $\omega_c$  et un taux de décroissance  $\kappa$ . Le déplacement de l'oscillateur mécanique  $\hat{q}$  avec une fréquence de résonance  $\omega_m$  et un taux de décroissance  $\gamma$  modifie la fréquence de résonance de la cavité et donc le champ intracavité  $\hat{a}$ . Le déplacement mécanique transmis au champ optique est lu à travers le champ de sortie de la cavité  $\hat{a}_{out}$ .

Jusqu'à présent, nous ne voyons pas dans l'équation (III.9) d'interaction entre le champ de la cavité optique et l'oscillateur mécanique. On l'introduit en considérant un oscillateur mécanique déformant la cavité optique par son mouvement. Cela signifie que le déplacement mécanique  $\hat{q}$  du mode de l'oscillateur est couplé de manière paramétrique à l'énergie optique stockée à l'intérieur de la cavité optique, de sorte que le  $\omega_c$  de l'équation (III.9) n'est plus statique, mais qu'il est plutôt fonction du déplacement de l'oscillateur  $\omega_c(\hat{q})$ .

La fréquence de résonance de la cavité optique peut être développée selon Taylor en tant que  $\omega_c(q) \approx \omega_c + q\partial\omega_c/\partial q + \dots$  pour un petit déplacement du miroir par rapport à la longueur de la cavité  $L$ , le maintien des termes au premier ordre fournit une bonne approximation de la fréquence de résonance

$$\omega_c(\hat{q}) \approx \omega_c - G\hat{q}. \quad (\text{III.10})$$

Ici, nous avons défini un décalage de fréquence optique par déplacement comme  $G = -\partial\omega_c/\partial x$ . Dans le cas d'une cavité linéaire on a  $G = \omega_c/L$ , où  $L$  est la longueur de la cavité. Les résonateurs en mode galerie murmurant de rayon  $R$  donnent  $G = \omega_c/R$ . Il est évident qu'une cavité avec une longueur de trajet plus courte donne un couplage optomécanique plus fort. L'Hamiltonien optique peut maintenant être réécrit comme

$$\begin{aligned} \hbar\omega_c\hat{a}^\dagger\hat{a} &\approx \hbar(\omega_c - G\hat{q})\hat{a}^\dagger\hat{a} \\ &= \hbar\omega_c\hat{a}^\dagger\hat{a} - \underbrace{g_0\hat{a}^\dagger\hat{a}(\hat{b} + \hat{b}^\dagger)}_{\hat{H}_{int}}, \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

où nous avons utilisé la définition de l'opérateur de position  $\hat{q} = x_{zpf}(\hat{b} + \hat{b}^\dagger)$  et nous avons défini la force de couplage optomécanique du vide

$$g_0 = Gx_{zpf}. \quad (\text{III.12})$$

Cette dernière équation permet de quantifier le couplage entre un photon unique et un phono unique. L'Hamiltonien de l'équation (III.11) se compose d'un Hamiltonien optique non perturbé et d'un Hamiltonien d'interaction  $\hat{H}_{int}$  capturant le couplage de l'amplitude mécanique au

champ optique.

### III.4.1 Hamiltonien piloté dans un repère tournant

Généralement, le taux de couplage optomécanique est beaucoup plus petit que la largeur de la ligne de cavité ou la fréquence mécanique. Ce problème est généralement résolu en injectant un champ cohérent brillant dans la cavité optique. La cavité fortement entraînée contient un grand nombre des photons, ce qui augmente considérablement la force de pression du radiation et conduit à un couplage optomécanique amélioré. Lors de l'expression de l'Hamiltonien optomécanique entraîné, il est commode de travailler dans un référentiel tournant à la fréquence laser incidente  $\omega_L$  en éliminant les oscillations rapides dans l'Hamiltonien. Cela se fait par transformation unitaire  $\hat{H} \rightarrow \hat{U} \left( \hat{H} - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \hat{U}^\dagger$ <sup>1</sup>, où  $\hat{U} = e^{i\omega_L t \hat{a}^\dagger \hat{a}}$ . L'Hamiltonien optomécanique<sup>2</sup> entièrement entraîné dans le cadre rotatif se lit

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_o + \hat{H}_m + \hat{H}_{int} + \hat{H}_{laser} \\ &= \hbar\Delta_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} - \hbar g_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) + \hbar E (\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

où nous avons défini le désaccord du lecteur laser  $\Delta_0 = \omega_c - \omega_L$ , les deux premiers termes  $\hat{H}_o = \hbar\Delta_0 \hat{a}^\dagger \hat{a}$  et  $\hat{H}_m = \hbar\omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b}$  représentent respectivement les Hamiltoniens libres optique et mécanique. Le troisième terme  $\hat{H}_{int} = -\hbar g_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b} + \hat{b}^\dagger)$  représente le Hamiltonien d'interaction entre les modes optiques et mécaniques. Finalement, le terme  $\hat{H}_{laser} = \hbar E (\hat{a}^\dagger + \hat{a})$ , est le Hamiltonien décrivant la pompe laser de fréquence  $\omega_L$  alimentant la cavité où  $E$  est une force motrice liée à la puissance laser d'entrée  $P$  comme  $|E| = \sqrt{2P\kappa/\hbar\omega_L}$ .

### III.4.2 Force de pression des radiations

Le couplage du champ de rayonnement de la cavité au mouvement mécanique est au cœur de l'optomécanique de la cavité. L'interaction est assurée par une force de pression de radiation imposée à l'élément mécanique par un transfert de moment des photons. La force de pression de radiation est donnée comme la dérivée de l'Hamiltonien d'interaction par rapport à la position [60]

$$\hat{F} = \frac{d\hat{H}_{int}}{d\hat{q}} = \hbar G \hat{a}^\dagger \hat{a} = \hbar \frac{g_0}{x_{zpf}} \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (\text{III.14})$$

La dynamique du système peut être considérée comme des fluctuations quantiques autour d'un état stationnaire classique, c'est à dire  $\hat{a} = \alpha + \delta\hat{a}$  et  $\hat{b} = \beta + \delta\hat{b}$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  est l'amplitude moyenne et  $\delta\hat{a}$  et  $\delta\hat{b}$  désigne les fluctuations. Alors la partie d'interaction d'Hamiltonien

$$\hat{H}_{int} = -\hbar g_0 (\alpha + \delta\hat{a})^\dagger (\alpha + \delta\hat{a}) \left( (\beta + \delta\hat{b}) + (\beta + \delta\hat{b})^\dagger \right). \quad (\text{III.15})$$

On peut omettre le première terme  $\hbar g_0 |\alpha|^2 \left( (\beta + \delta\hat{b}) + (\beta + \delta\hat{b})^\dagger \right)$  car elle conduit à une force de pression de rayonnement constante qui décale simplement la position d'équilibre du résonateur.

1. Cette relation peut être obtenue comme suit : d'abord, on transforme l'équation de Schrödinger vérifiée par l'état  $|\psi\rangle$ , i.e.,  $i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi\rangle \rightarrow i\hbar \frac{\partial (\hat{U}^\dagger |\tilde{\psi}\rangle)}{\partial t} = \hat{H} \hat{U}^\dagger |\tilde{\psi}\rangle$  avec  $|\tilde{\psi}\rangle = \hat{U} |\psi\rangle$ . Après un calcul simple, on trouve  $i\hbar \frac{\partial |\tilde{\psi}\rangle}{\partial t} = \hat{H}^{\text{sec}} |\tilde{\psi}\rangle$  avec  $\hat{H}^{\text{sec}} = \hat{U} \left( \hat{H} - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \hat{U}^\dagger$ .

2. On a pas pris en considération les termes de dissipations et de fluctuations où ils peuvent être ajoutés dans les équations de Heisenberg-Langevin

Négligeant également le terme du second ordre  $\delta\hat{a}^+\delta\hat{a}$ ,  $\delta\hat{a}^+\delta\hat{b}$ ,  $\delta\hat{a}^+\delta\hat{b}^+$ ,  $\delta\hat{a}\delta\hat{b}$  et  $\delta\hat{a}\delta\hat{b}^+$ . Nous avons

$$\hat{H}_{int}^{(lin)} = -hg_0 \left( \alpha^* \delta\hat{a} + \alpha \delta\hat{a}^+ \right) (\beta^* + \beta). \quad (\text{III.16})$$

Sans perte de généralité, on suppose que  $\alpha = \sqrt{n_{cav}}$  comme une valeur réelle. Où la partie d'interaction

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int}^{(lin)} &= \hbar g_0 \sqrt{n_{cav}} \left( \delta\hat{a}^+ + \delta\hat{a} \right) (\beta^* + \beta) \\ &= \hbar g \left( \beta^* + \beta \right) \left( \delta\hat{a}^+ + \delta\hat{a} \right), \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

avec  $g = g_0 \sqrt{n_{cav}}$  est le couplage opto-mécanique généralisé, il dépend de l'intensité du laser et le couplage à photon unique  $g_0$  est obtenu pour  $n_{cav} = 1$ .

## III.5 Équations quantiques de Heisenberg-Langevin du mouvement

L'équation de mouvement quantique de Langevin pour les opérateurs optiques et mécaniques peut être dérivée à partir d'Hamiltonien (III.13) en utilisant l'équation de mouvement de Heisenberg [187]  $\frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathcal{O}} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{\mathcal{O}}, \hat{H}] + \hat{N}$ , où le  $\hat{N}$  représente l'opérateur de bruit. Pour le cas d'un système optomécanique constitué de deux cavités (voir Fig. (IV.1)), le Hamiltonien  $\hat{H}$ , donné par la relation (III.13) s'écrit

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^2 \left[ \hbar \left( \omega_{c_j} - \omega_{L_j} \right) \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \hbar \omega_{m_j} \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j + \hbar g_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \left( \hat{b}_j^\dagger + \hat{b}_j \right) + \hbar \varepsilon_j \left( e^{i\varphi_j} \hat{a}_j^\dagger + e^{-i\varphi_j} \hat{a}_j \right) \right]. \quad (\text{III.18})$$

Ensuite, l'équation quantique de Heisenberg-Langevin validée par le  $j^{eme}$  mode de cavité et le  $j^{eme}$  mode mécanique des opérateurs  $\hat{a}_j$  et  $\hat{b}_j$ , respectivement, sont décrivant [60, 174]

$$\frac{d\hat{a}_j}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left[ \hat{a}_j, \hat{H} \right] - \kappa \hat{a}_j + \sqrt{2\kappa} \hat{a}_j^{in} \quad (\text{III.19})$$

$$\frac{d\hat{b}_j}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left[ \hat{b}_j, \hat{H} \right] - \gamma \hat{b}_j + \sqrt{2\gamma} \hat{b}_j^{in}, \quad (\text{III.20})$$

où  $\hat{a}_j^{in}$  et  $\hat{b}_j^{in}$  ce sont des quantités représentent le  $j^{eme}$  opérateur de bruit affectant le  $j^{eme}$  mode optique (mécanique). Ils ont les fonctions de corrélations suivantes [60, 188]

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}_j^{in, \dagger} \hat{a}_j^{in} \rangle &= 0 \\ \langle \hat{a}_j^{in} \hat{a}_j^{in, \dagger} \rangle &= \delta(t - t') \\ \langle \hat{b}_j^{in} \hat{b}_j^{in, \dagger} \rangle &= (n_{th,j} + 1) \delta(t - t') \\ \langle \hat{b}_j^{in, \dagger} \hat{b}_j^{in} \rangle &= n_{th,j} \delta(t - t'), \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

avec  $n_{th,j} = \left( e^{\frac{\hbar m_j}{K_B T_j}} - 1 \right)^{-1}$  est la valeur moyenne des photons thermiques stockés dans la cavité, où  $T_j$  et  $K_B$  sont respectivement la température du  $j^{eme}$  réservoir et la constante de Boltzmann.

## III.6 Linéarisation des équations de Langevin du mouvement

En raison de la non-linéarité de la pression de rayonnement (voir Équation (III.8)), les équations de Langevin à couplage non linéaire (III.19) (III.20) ne permettent généralement pas des solutions analytiques. Par contre, pour résoudre ces équations, on utilise la méthode de linéarisation développée en [174]. En fait, il décompose chaque opérateur ( $\hat{a}_j$  et  $\hat{b}_j$ ) sous la forme suivante :

$$\mathcal{O}_j = \langle \mathcal{O}_j \rangle + \delta \mathcal{O}_j = \mathcal{O}_{js} + \delta \mathcal{O}_j, \mathcal{O}_j \equiv \hat{a}_j, \hat{b}_j, \quad (\text{III.22})$$

où  $\langle \mathcal{O}_j \rangle$  est un nombre complexe qui est la moyenne de  $\mathcal{O}_j$ ,  $\delta \mathcal{O}_j$  est un opérateur dépendant du temps représentant les fluctuations de  $\mathcal{O}_j$ . Pour décrire l'opérateur d'annihilation sous la forme (III.22), la moyenne de  $\langle \mathcal{O}_j \rangle$  est nulle, et que son module est très petit devant le module de  $\langle \mathcal{O}_j \rangle$ . Deuxièmement, la deuxième hypothèse permet une approximation au premier ordre de la quantité étudiée de  $\delta \mathcal{O}_j$ . Notez que dans ce cas, les termes non négligeables ne contiennent pas le produit des opérateurs, et par conséquent, tous les termes commutent. Les valeurs moyennes  $b_{js}$  et  $a_{js}$  est obtenue en remplaçant la dérivée temporelle par zéro et en factorisant les valeurs moyennes dans les équations (III.19)-(III.20), on obtient donc

$$\langle \hat{a}_j \rangle = a_{js} = \frac{-i\varepsilon_j e^{i\varphi_j}}{\kappa_j/2 - i\Delta'_j} \quad \text{et} \quad \langle \hat{b}_j \rangle = b_{js} = \frac{-ig_j |a_{js}|^2}{\gamma_j/2 + i\omega_{\mu_j}}, \quad (\text{III.23})$$

avec  $\Delta'_j = \Delta_j - g_j (b_{js}^* + b_{js})$  est le  $j^{\text{th}}$  désaccord effectif de la cavité, y compris les effets de la pression de radiation [60]. On suppose que les deux cavités sont actionnées par un laser de forte puissance ( $|a_{js}| \gg 1$ , pour  $j = 1, 2$ ). Ceci peut être réalisé en considérant des lasers de fortes puissances  $\varphi_j$  [60]. Par conséquent, les termes non linéaires  $\delta \hat{a}_j^\dagger \delta \hat{a}_j$ ,  $\delta \hat{a}_j \delta \hat{b}_j$  et  $\delta \hat{a}_j \delta \hat{b}_j^\dagger$  peuvent être négligés. On obtient alors

$$\delta \dot{\hat{b}}_j = -(\gamma_j/2 + i\omega_{\mu_j}) \delta \hat{b}_j + G_j (\delta \hat{a}_j - \delta \hat{a}_j^\dagger) + \sqrt{\gamma_j} \hat{b}_j^{\text{in}} \quad (\text{III.24})$$

$$\delta \dot{\hat{a}}_j = -(\kappa_j/2 - i\Delta'_j) \delta \hat{a}_j - G_j (\delta \hat{b}_j^\dagger + \delta \hat{b}_j) + \sqrt{\kappa_j} \delta \hat{a}_j^{\text{in}}. \quad (\text{III.25})$$

Notons que les équations (III.24) et (III.25) ont été obtenues en choisissant  $a_{js} = -i|a_{js}|$ , ce qui est correspondant de étendre la phase  $\varphi_j$  du  $j^{\text{ème}}$  laser comme suit  $\varphi_j = -\arctan(2\Delta'_j/\kappa_j)$ , où  $G_j = g_j |a_{js}|$  est le  $j^{\text{ème}}$  paramètre de couplage dans le régime linéarisé [60]. Il est donné par :

$$G_j = \frac{\omega_{c_j}}{l_j} \sqrt{\frac{2\kappa_j \wp_j}{m_{\mu_j} \omega_{\mu} \omega_{L_j} \left( \left( \frac{\kappa_j}{2} \right)^2 + (\Delta'_j)^2 \right)}}. \quad (\text{III.26})$$

## III.7 Conclusion

Récemment, les forces optiques, notamment les forces de pression de rayonnement et les forces de gradient optique, ont été utilisées pour contrôler des nanoparticules ou manipuler des guides d'ondes et des résonateurs à l'échelle nanométrique. Parmi elles, l'optomécanique en cavité, qui explore l'interaction des modes optiques et mécaniques dans diverses cavités optiques, s'est développée rapidement dans un large éventail d'applications, notamment le refroidissement par laser du mouvement mécanique vers son état fondamental quantique, la translation pho-

ton-phonon, la détection, etc., car les forces de pression de rayonnement agissant sur les objets mécaniques à l'échelle micro/nanométrique peuvent être renforcées par la forte intensité du champ optique dans les cavités. Grâce au développement des techniques de nano-fabrication, des résonateurs optomécaniques tels que des microtoroïdes vibrants, des résonateurs à disque couplés verticalement et des cavités à cristaux photoniques en échelle couplées latéralement ont été étudiés récemment. Pour un système optomécanique, le couplage entre les modes mécaniques et optiques est le point clé, et un taux de couplage élevé est nécessaire pour diverses applications basées sur l'optomécanique des cavités. Afin d'améliorer le couplage entre les modes mécaniques et optiques, diverses techniques optomécaniques ont été développées.

Dans ce chapitre, nous avons abordé les concepts fondamentaux des systèmes optomécaniques, en particulier la cavité Fabry-Pérot. Nous avons également discuté de la façon dont nous pouvons générer et partager des corrélations quantiques entre les modes de résonance dans l'intérieur de la cavité. L'étude et la quantification de ces corrélations est le sujet principal de cette thèse. Le chapitre suivant est consacré à nos contributions sur ce sujet.

Chapitre **IV**

**Contributions d'étude des corrélations  
quantique des états Gaussiens bi-modes  
dans les systèmes opto-mécanique**

## Quantum coherence versus nonclassical correlations in optomechanics

Y. Lahlou<sup>\*,\*\*</sup>, M. Amazioug<sup>†,‡,††</sup>, J. El Qars<sup>‡,§,‡‡</sup>,  
N. Habiballah<sup>‡,§,¶,§§</sup>, M. Daoud<sup>¶,||,¶¶</sup> and M. Nassik<sup>‡,|||</sup>

<sup>\*</sup>*LPHE-MS, Department of Physics, Faculty of Sciences,  
Mohammed V University, Rabat, Morocco*

<sup>†</sup>*Ecole Normale Supérieure, Mohammed V University, Rabat, Morocco*

<sup>‡</sup>*EPTHE, Department of Physics, Faculty of Sciences,  
Ibn Zohr University, Agadir, Morocco*

<sup>§</sup>*Faculty of Applied Sciences, Ibn Zohr University, Ait-Melloul, Morocco*

<sup>¶</sup>*Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics,  
Strada Costiera, 11, 34151 Trieste, Italy*

<sup>||</sup>*Department of Physics, Faculty of Sciences,  
University Ibn Tofail, Kénitra, Morocco*

<sup>\*\*</sup>*youness\_lahlou@um5.ac.ma*

<sup>††</sup>*amazioug@gmail.com*

<sup>‡‡</sup>*j.elqars@gmail.com*

<sup>§§</sup>*n.habiballah@uiz.ac.ma*

<sup>¶¶</sup>*m\_daoud@hotmail.com*

<sup>|||</sup>*m.nassik@uiz.ac.ma*

Received 17 August 2019

Revised 21 September 2019

Accepted 8 October 2019

Published 25 November 2019

Coherence arises from the superposition principle, where it plays a central role in quantum mechanics. In *Phys. Rev. Lett.* **114**, 210401 (2015), it has been shown that the freezing phenomenon of quantum correlations beyond entanglement is intimately related to the freezing of quantum coherence (QC). In this paper, we compare the behavior of entanglement and quantum discord with quantum coherence in two different subsystems (optical and mechanical). We use respectively the entanglement of formation (EoF) and the Gaussian quantum discord (GQD) to quantify entanglement and quantum discord. Under thermal noise and optomechanical coupling effects, we show that EoF, GQD and QC behave in the same way. Remarkably, when entanglement vanishes, GQD and QC remain almost unaffected by thermal noise, keeping nonzero values even for high-temperature, which is in concordance with *Phys. Rev. Lett.* **114**, 210401 (2015). Also, we find that the coherence associated with the optical subsystem is more robust —

<sup>\*\*</sup>Corresponding author.

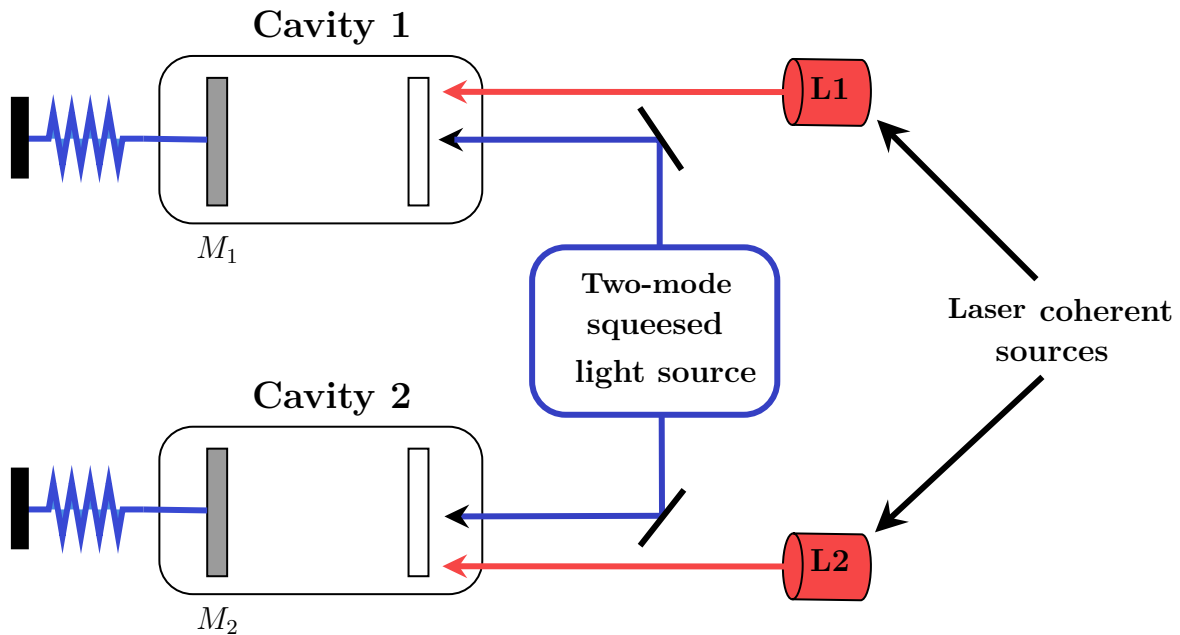
## IV.1 Cohérence quantique versus corrélations non classiques en opto-mécanique

### IV.1.1 Introduction

La cohérence qui découle du principe de superposition joue un rôle central dans la mécanique quantique. Dans Phys. Rev. Lett. 114, 210401 (2015), il a été montré que le phénomène de gel des corrélations quantiques au-delà de l'intrication est intrinsèquement lié au gel de la cohérence quantique (QC). Dans cet article, nous comparons le comportement de l'intrication et de la discordance quantique avec la cohérence quantique dans deux sous-systèmes différents (optique et mécanique). Nous utilisons respectivement l'intrication de formation (EoF) et la discordance quantique gaussienne (GQD) pour quantifier l'intrication et les corrélations quantiques. Sous l'effet du bruit thermique et du couplage optomécanique, nous montrons que EoF, GQD et QC se comportent de la même manière. De façon remarquable, lorsque l'intrication disparaît, GQD et QC ne sont pratiquement pas affectés par le bruit thermique, conservant des valeurs non nulles même à haute température, ce qui est en accord avec les résultats publiés dans Phys. Rev. Lett. 114, 210401 (2015). De plus, nous constatons que la cohérence associée au sous-système optique est plus robuste contre le bruit thermique que celles du sous-système mécanique. Nos résultats confirment que les cavités optomécaniques constituent une ressource puissante de CQ.

### IV.1.2 Modèle et Hamiltonien

Dans cette section, nous allons illustrer le schéma du modèle proposé ainsi que décrire et analyser l'hamiltonien du système optomécanique. La figure suivante illustre le système technique proposé.



**Fig. IV.1** – Un système optomécanique à double cavité pompé par de la lumière comprimée et piloté par des sources laser cohérentes.

Dans la Fig. (IV.1), nous considérons deux cavités de Fabry-Pérot couplées à une lumière commune bi-mode comprimée, où chaque cavité est composée d'un miroir fixe (partiellement

transmetteur) et d'un miroir mobile (noté  $M_{p=1,2}$ ) parfaitement réfléchissant. La masse et la fréquence du  $p^{\text{ième}}$  miroir mobile sont, respectivement,  $\mu_p$  et  $\omega_{M_p}$ . La cavité  $p^{\text{ième}}$  reçoit un seul mode de la lumière d'entrée comprimée sous vide, et pompée par un champ laser cohérent. De plus, le champ intra-cavité  $p^{\text{ième}}$  est couplé à son miroir mobile correspondant via la pression de radiation, avec un taux de couplage  $g_p = \frac{\omega_{ap}}{L_p} \sqrt{\frac{\hbar}{\mu_p \omega_{M_p}}}$  [60], où  $\omega_{ap}$  ( $L_p$ ) est la fréquence (longueur) de la  $p^{\text{ième}}$  cavité. Dans un cadre tournant avec la fréquence  $\omega_{L_p}$ , le Hamiltonien du système est donné par [189]

$$\mathcal{H}/\hbar = \sum_{p=1}^2 \left[ \omega_{M_p} b_p^\dagger b_p + (\omega_{ap} - \omega_{L_p}) a_p^\dagger a_p + g_p a_p^\dagger a_p (b_p^\dagger + b_p) + (a_p^\dagger \varepsilon_p e^{i\phi_p} + a_p \varepsilon_p e^{-i\phi_p}) \right], \quad (\text{IV.1})$$

où  $\phi_p$  et  $\varepsilon_p = \sqrt{\frac{2\kappa_p \mathcal{P}_p}{\hbar \omega_{L_p}}}$  ( $p = 1, 2$ ) sont respectivement la phase et l'intensité du champ cohérent d'entrée  $p^{\text{ième}}$ , et  $\kappa_p$  est le taux de décroissance de la cavité. De plus,  $\mathcal{P}_p(\omega_{L_p})$  est la puissance de la pompe de commande (la fréquence) du champ laser d'entrée  $p^{\text{ième}}$ . Les miroirs mobiles sont considérés comme des oscillateurs harmoniques quantiques avec des opérateurs d'annihilation et de création  $b_p$  et  $b_p^\dagger$ , avec  $[b_p, b_p^\dagger] = 1$  ( $p = 1, 2$ ). D'autre part,  $a_p$  et  $a_p^\dagger$  sont les opérateurs d'annihilation et de création du  $p^{\text{ième}}$  mode de la cavité, avec  $[a_p, a_p^\dagger] = 1$  ( $p = 1, 2$ ).

En considérant l'équation (IV.1), les équations de Langevin quantiques non linéaires décrivant la dynamique des miroirs mobiles ainsi que les modes optiques s'écrivent comme suit [190] :

$$\dot{b}_p = - \left( i\omega_{M_p} + \frac{\gamma_p}{2} \right) b_p - ig_p a_p^\dagger a_p + \sqrt{\gamma_p} b_p^{\text{in}} \quad (\text{IV.2})$$

$$\dot{a}_p = - \left( \frac{\kappa_p}{2} - i\Delta_p \right) a_p - ig_p a_p (b_p^\dagger + b_p) - i\varepsilon_p e^{i\phi_p} + \sqrt{\kappa_p} a_p^{\text{in}} \quad (\text{IV.3})$$

où  $\Delta_p$  et  $\Delta_p = \omega_{L_p} - \omega_{a_p}$  sont respectivement le taux d'amortissement mécanique et le désaccord du laser ( $p = 1, 2$ ),  $b_p^{\text{in}}$  est l'opérateur de bruit  $p^{\text{ième}}$  décrivant le couplage entre le mode mécanique  $p^{\text{ième}}$  et son propre environnement, tandis que,  $a_p^{\text{in}}$  est l'opérateur de vide comprimé agissant sur le mode de la cavité optique  $p^{\text{ième}}$ .

Pour une grande valeur du facteur de qualité mécanique  $\mathcal{O}_p = \omega_{M_p}/\gamma_p \gg 1$  les bains mécaniques peuvent être considérés comme markoviens [191]. Ainsi, en supposant cela, nous avons les relations des corrélations non nulles [191, 192]

$$\langle b_p^{\text{in}}(\omega) b_p^{\text{in}\dagger}(\omega') \rangle = (n_{th_p} + 1) \delta(\omega + \omega') \quad (\text{IV.4})$$

$$\langle b_p^{\text{in}\dagger}(\omega) b_p^{\text{in}}(\omega') \rangle = n_{th_p} \delta(\omega + \omega') \quad (\text{IV.5})$$

où  $n_{th_p} = \left[ \exp\left(\frac{\hbar \omega_{M_p}}{k_B T_p}\right) - 1 \right]^{-1}$  est le nombre moyen de phonons du  $p^{\text{ième}}$  bain thermique à la température  $T_p$ .  $k_B$  est la constante de Boltzmann.

L'opérateur de vide comprimé  $a_p^{\text{in}}$  possède les propriétés des corrélations non nulles suivantes [193].

$$\langle a_p^{\text{in}}(\omega) a_p^{\text{in}\dagger}(\omega') \rangle = (\mathcal{N} + 1) \delta(\omega + \omega'), p \in \{1, 2\} \quad (\text{IV.6})$$

$$\langle a_p^{\text{in}\dagger}(\omega) a_p^{\text{in}}(\omega') \rangle = \mathcal{N} \delta(\omega + \omega'), p \in \{1, 2\} \quad (\text{IV.7})$$

$$\langle a_q^{\text{in}}(\omega) a_p^{\text{in}\dagger}(\omega') \rangle = \mathcal{M} \delta(\omega + \omega' - 2\omega_M), q \neq p \in \{1, 2\} \quad (\text{IV.8})$$

$$\langle a_q^{\text{in}\dagger}(\omega) a_p^{\text{in}}(\omega') \rangle = \mathcal{M} \delta(\omega + \omega' + 2\omega_M), q \neq p \in \{1, 2\} \quad (\text{IV.9})$$

où  $\mathcal{N} = \sinh^2 r$ ,  $\mathcal{M} = \sinh r \cosh r$  avec  $r$  est le paramètre de compression.

### IV.1.3 Linéarisation des équations quantiques de Langevin

Les équations de Langevin quantiques non linéaires (IV.2)-(IV.3) sont en général non résolubles analytiquement. De cette manière, nous utilisons le schéma de linéarisation donné dans la Réf. [194], c'est-à-dire que nous écrivons chaque opérateur comme suit

$$b_p = \bar{b}_p + \delta b_p \quad ; \quad a_p = \bar{a}_p + \delta a_p \quad (IV.10)$$

où  $\delta b_p$  et  $\delta a_p$  sont les opérateurs de fluctuations.  $\bar{b}_p$  et  $\bar{a}_p$  sont respectivement les valeurs moyennes des opérateurs  $b_p$  et  $a_p$ . Considérant les éqs. (IV.2)-(IV.3) dans leur régime permanent, on peut obtenir :

$$\bar{a}_p = \frac{-i\varepsilon_p e^{i\phi_p}}{\frac{\kappa_p}{2} - i\Delta'_p} \quad ; \quad \bar{a}_p = \frac{-ig_p |\bar{a}_p|^2}{\frac{\gamma_p}{2} - i\omega_{M_p}} \quad (IV.11)$$

où  $\Delta'_p = \Delta_p - g_p (\bar{b}_p + \bar{b}_p^*)$  est le désaccord effectif de la cavité qui dépend de la déplacement des miroirs dû à la force de pression de rayonnement [60]. Remplacer (IV.10) dans Eqs. (IV.2) et (IV.3), on a donc

$$\delta \dot{b}_p = - \left( i\omega_{M_p} + \frac{\gamma_p}{2} \right) \delta b_p + \mathcal{G}_p (\delta a_p - \delta a_p^+) + \sqrt{\gamma_p} b_p^{in} \quad (IV.12)$$

$$\delta \dot{a}_p = - \left( \frac{\kappa_p}{2} - i\Delta'_p \right) \delta a_p - \mathcal{G}_p (\delta b_p^+ + \delta b_p) + \sqrt{\kappa_p} a_p^{in} \quad (IV.13)$$

où  $\mathcal{G}_p = g_p |\bar{a}_p|$  est le  $p^{ième}$  couplage optomécanique effectif [60].  $\phi_p$  est une phase arbitraire du laser d'entrée  $p^{ième}$ , qui peut être choisie comme  $\phi_p = -\arctan\left(\frac{2\Delta'_p}{\kappa_p}\right)$  et donc  $\bar{a}_p = -i |\bar{a}_p|$  [195]. En utilisant les notations  $\delta a_p(t) = \delta \tilde{a}_p(t) e^{i\Delta'_p t}$ ,  $\delta b_p(t) = \delta \tilde{b}_p(t) e^{-i\omega_{M_p} t}$ ,  $\tilde{a}_p^{in} = e^{-i\Delta'_p t} a_p^{in}$  et  $\tilde{b}_p^{in} = e^{i\omega_{M_p} t} b_p^{in}$ , les équations (IV.12) et (IV.13) sont devenues

$$\delta \dot{\tilde{b}}_p = -\frac{\gamma_p}{2} \delta \tilde{b}_p + \mathcal{G}_p \left( \delta \tilde{a}_p e^{i(\Delta'_p + \omega_{M_p})t} - \delta \tilde{a}_p^+ e^{-i(\Delta'_p - \omega_{M_p})t} \right) + \sqrt{\gamma_p} \tilde{b}_p^{in} \quad (IV.14)$$

$$\delta \dot{\tilde{a}}_p = -\frac{\kappa_p}{2} \delta \tilde{a}_p - \mathcal{G}_p \left( \delta \tilde{b}_p^+ e^{-i(\Delta'_p - \omega_{M_p})t} + \delta \tilde{b}_p e^{-i(\Delta'_p + \omega_{M_p})t} \right) + \sqrt{\kappa_p} \tilde{a}_p^{in} \quad (IV.15)$$

Ensuite, en utilisant l'approximation des ondes tournantes (RWA) [60, 196] (c'est-à-dire  $\omega_{M_p} \gg \kappa_p$  avec  $p = 1; 2$ ), le désaccord effectif de la cavité est réduit à  $\Delta'_p \approx \Delta_p$ , et on peut négliger les termes tournant à  $\pm 2\omega_{M_p}$ . De plus, lorsque la cavité est pilotée dans la bande latérale rouge ( $\Delta'_p = -\omega_{M_p}$  avec  $p = 1; 2$ ), les équations (IV.14) et (IV.15) peuvent s'écrire

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{\tilde{b}}_p \\ \delta \dot{\tilde{a}}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma_p}{2} & \mathcal{G}_p \\ -\frac{\kappa_p}{2} & -\mathcal{G}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \tilde{b}_p \\ \delta \tilde{a}_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma_p} \tilde{b}_p^{in} \\ \sqrt{\kappa_p} \tilde{a}_p^{in} \end{pmatrix} \quad (IV.16)$$

Enfin, à partir de l'équation (IV.16) et en utilisant la transformée de Fourier, on peut obtenir

$$\delta \tilde{b}_p(\omega) = -\frac{\mathcal{G}_p}{b(\omega)} \sqrt{\gamma_p} \tilde{b}_p^{in}(\omega) + \frac{\left(\frac{\gamma_p}{2} + i\omega\right)}{b(\omega)} \sqrt{\kappa_p} \tilde{a}_p^{in}(\omega) \quad (IV.17)$$

$$\delta \tilde{a}_p(\omega) = \frac{\left(\frac{\gamma_p}{2} + i\omega\right)}{\xi_p(\omega)} \sqrt{\gamma_p} \tilde{b}_p^{in}(\omega) + \frac{\mathcal{G}_p}{\xi_p(\omega)} \sqrt{\kappa_p} \tilde{a}_p^{in}(\omega) \quad (IV.18)$$

où  $\xi_p(\omega) = \mathcal{G}_p^2 + \left(\frac{\gamma_p}{2} + i\omega\right) \left(\frac{\kappa_p}{2} + i\omega\right)$

### IV.1.4 Matrice de covariance en régime permanent

Les équations de Langevin quantiques linéaires permettent de déduire la matrice de covariance (CM) qui décrit l'évolution des états stationnaires du système [160, 174]. Par conséquent, cela nous permet de caractériser le comportement non classique entre les différents modes par paires en utilisant différents quantificateurs de corrélations quantiques.

Par souci de simplicité, on considère deux cavités identiques pilotées par deux sources laser cohérentes identiques, et des bains thermiques identiques. Donc,  $\mu_{1,2} = \mu$ ,  $\omega_{a_{1,2}} = \omega_a$ ,  $\omega_{M_{1,2}} = \omega_M$ ,  $\kappa_{1,2} = \kappa$  et  $\gamma_{1,2} = \gamma$  et  $T_1 = T_2 = T$  ( $n_{th_{1,2}} = n_{th}$ ), etc. Pour dériver la formule explicite du CM décrivant l'ensemble du système, on considère le type EPR opérateurs de quadrature  $\delta\tilde{X}_{j_p}$  et  $\delta\tilde{Y}_{j_p}$  ( $j = m$  (o)) pour le sous-système mécanique (optique) défini par [195]

$$\delta\tilde{X}_{m_p} = \frac{\delta\tilde{b}_p^+ + \delta\tilde{b}_p}{\sqrt{2}}, \quad \delta\tilde{Y}_{m_p} = \frac{\delta\tilde{b}_p - \delta\tilde{b}_p^+}{i\sqrt{2}}; \quad p = 1, 2 \quad (\text{IV.19})$$

$$\delta\tilde{X}_{o_p} = \frac{\delta\tilde{a}_p^+ + \delta\tilde{a}_p}{\sqrt{2}}, \quad \delta\tilde{Y}_{o_p} = \frac{\delta\tilde{a}_p - \delta\tilde{a}_p^+}{i\sqrt{2}}; \quad p = 1, 2 \quad (\text{IV.20})$$

Les éléments CM du système à l'état stationnaire sont donnés par [193]

$$\mathcal{V}_{ii'} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega d\omega' e^{-i(\omega+\omega')t} \mathcal{V}_{ii'}(\omega, \omega') \quad (\text{IV.21})$$

où la fonction de corrélation dans le domaine fréquentiel entre les éléments  $i$  et  $i'$  du vecteur  $U^T(t) = (\delta\tilde{X}_{m_1}, \delta\tilde{Y}_{m_1}, \delta\tilde{X}_{m_2}, \delta\tilde{Y}_{m_2}, \delta\tilde{X}_{o_1}, \delta\tilde{Y}_{o_1}, \delta\tilde{X}_{o_2}, \delta\tilde{Y}_{o_2})$  sont définis par [160]

$$\mathcal{V}_{ii'} = \frac{1}{2} \langle \{U_i(\omega), U_{i'}(\omega')\} \rangle \quad \text{for } i, i' = 1; \dots; 8 \quad (\text{IV.22})$$

Après quelques calculs algébriques, on obtient finalement

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1 & 0 & \mathcal{V}_{13} & 0 & \mathcal{V}_{15} & 0 & \mathcal{V}_{17} & 0 \\ 0 & \mathcal{V}_1 & 0 & -\mathcal{V}_{13} & 0 & \mathcal{V}_{15} & 0 & -\mathcal{V}_{17} \\ \mathcal{V}_{13} & 0 & \mathcal{V}_1 & 0 & \mathcal{V}_{17} & 0 & \mathcal{V}_{15} & 0 \\ 0 & -\mathcal{V}_{13} & 0 & \mathcal{V}_1 & 0 & -\mathcal{V}_{17} & 0 & \mathcal{V}_{15} \\ \mathcal{V}_{15} & 0 & \mathcal{V}_{17} & 0 & \mathcal{V}_2 & 0 & \mathcal{V}_{57} & 0 \\ 0 & \mathcal{V}_{15} & 0 & -\mathcal{V}_{17} & 0 & \mathcal{V}_2 & 0 & -\mathcal{V}_{57} \\ \mathcal{V}_{17} & 0 & \mathcal{V}_{15} & 0 & \mathcal{V}_{57} & 0 & \mathcal{V}_2 & 0 \\ 0 & -\mathcal{V}_{17} & 0 & \mathcal{V}_{15} & 0 & -\mathcal{V}_{57} & 0 & \mathcal{V}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.23})$$

La matrice de covariance du sous-système mécanique (optique) appelée  $\mathcal{V}_m$  ( $\mathcal{V}_o$ ) peut être obtenue en considérant la matrice de covariance globale donnée par l'Eq. (IV.23), où

$$\mathcal{V}_m = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1 & 0 & \mathcal{V}_{13} & 0 \\ 0 & \mathcal{V}_1 & 0 & -\mathcal{V}_{13} \\ \mathcal{V}_{13} & 0 & \mathcal{V}_1 & 0 \\ 0 & -\mathcal{V}_{13} & 0 & \mathcal{V}_1 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{V}_o = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_2 & 0 & \mathcal{V}_{57} & 0 \\ 0 & \mathcal{V}_2 & 0 & -\mathcal{V}_{57} \\ \mathcal{V}_{57} & 0 & \mathcal{V}_2 & 0 \\ 0 & -\mathcal{V}_{57} & 0 & \mathcal{V}_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.24})$$

avec

$$\mathcal{V}_1 = \frac{\kappa C \cosh(2r) + (1 + 2n_{th})(\kappa + \gamma + \gamma C)}{2(\kappa + \gamma)(1 + C)}; \quad \mathcal{V}_{13} = \frac{\kappa C \sinh(2r)}{2(\kappa + \gamma)(1 + C)} \quad (\text{IV.25})$$

$$\mathcal{V}_2 = \frac{(\kappa + \gamma + \kappa C) \cosh(2r) + (1 + 2n_{th}) \gamma C}{2(\kappa + \gamma)(1 + C)} \quad ; \quad \mathcal{V}_{57} = \frac{(\kappa + \gamma + \kappa C) \sinh(2r)}{2(\kappa + \gamma)(1 + C)} \quad (\text{IV.26})$$

où  $C$  est la coopérativité optomécanique donnée par [60]

$$C = \frac{4G}{\gamma\kappa} = \frac{8\omega_a^2}{\mu\gamma\omega_M\omega_L L^2} \frac{P}{\left[\left(\frac{\kappa}{2}\right)^2 + \omega_M^2\right]} \quad (\text{IV.27})$$

Les matrices  $\mathcal{V}_m$  et  $\mathcal{V}_o$  données par l'équation (IV.24) correspondent à des états thermiques comprimés symétriques à deux modes [160], et peuvent donc être écrites sous la forme suivante

$$\mathcal{V}_j = \begin{pmatrix} s_j & 0 & k_j & 0 \\ 0 & s_j & 0 & -k_j \\ k_j & 0 & s_j & 0 \\ 0 & -k_j & 0 & s_j \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} s_{j_1} & k_{j_1 j_2} \\ k_{j_1 j_2} & s_{j_2} \end{pmatrix} \quad \text{for } j \in \{o, m\} \quad (\text{IV.28})$$

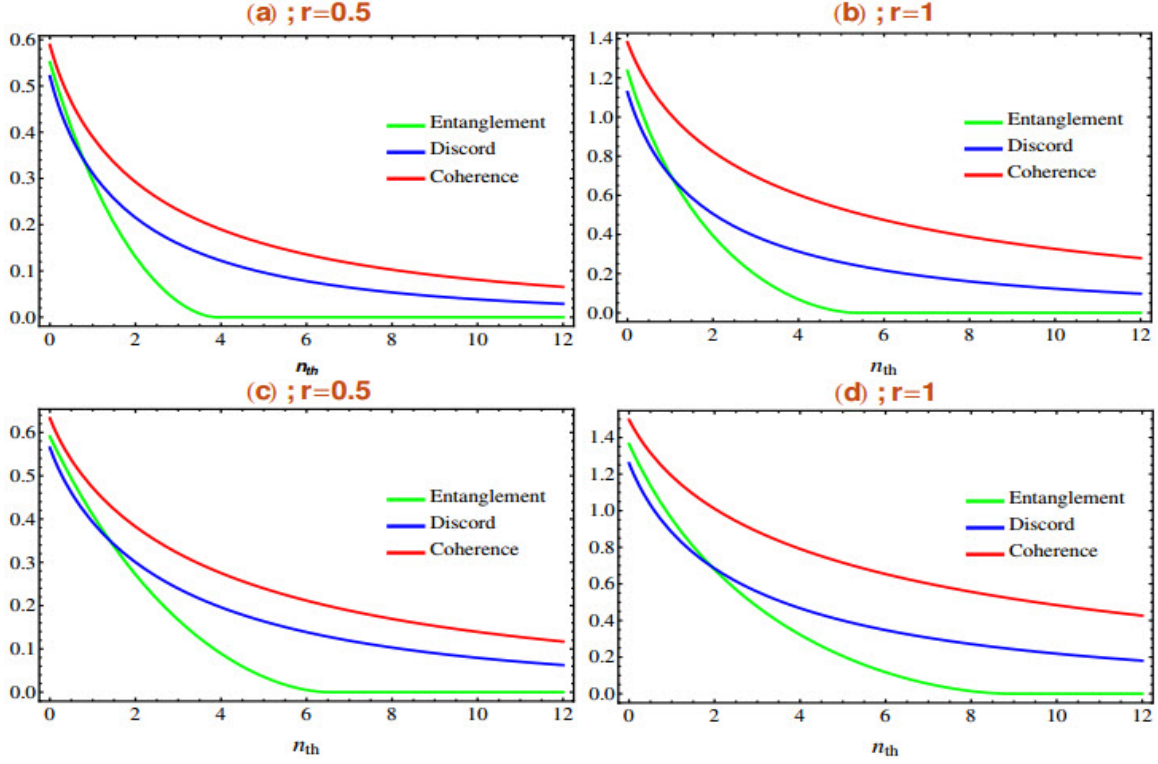
où l'indice  $j_1(j_2)$  représente le premier (second) mode mécanique (pour  $j = m$ ) ou le premier (second) mode optique (pour  $j = o$ ).  $S_{j_1} = S_{j_2} = \text{diag}(s_j, s_j)$  sont les sous-matrices décrivant les premier et second modes dans le sous-système considéré, tandis que les corrélations entre eux sont décrites par la sous-matrice  $K_{j_1 j_2} = \text{diag}(k_j, -k_j)$ . Pour le sous-système mécanique  $j \equiv m$  ( $s_m = \mathcal{V}_1$  et  $k_m = \mathcal{V}_{13}$ ); tandis que, pour le sous-système optique  $j \equiv o$  ( $s_o = \mathcal{V}_2$  et  $k_o = \mathcal{V}_{57}$ ).

Notez qu'en utilisant Eq. (IV.28), nous pouvons étudier diverses quantités (c'est-à-dire la cohérence quantique, l'intrication et la discordance quantique) témoignant du comportement non classique des sous-systèmes mécaniques et optiques.

Dans ce paper, nous avons basés sur les mesures CQG (II.93), EoF (II.78) et DQG (II.83) pour étudier le comportement des corrélations quantiques dans le système optomécanique de la cavité Fabry Pérot proposé. Nous notons que les expressions explicites des mesures ont déjà été discutées en détail dans le chapitre 2.

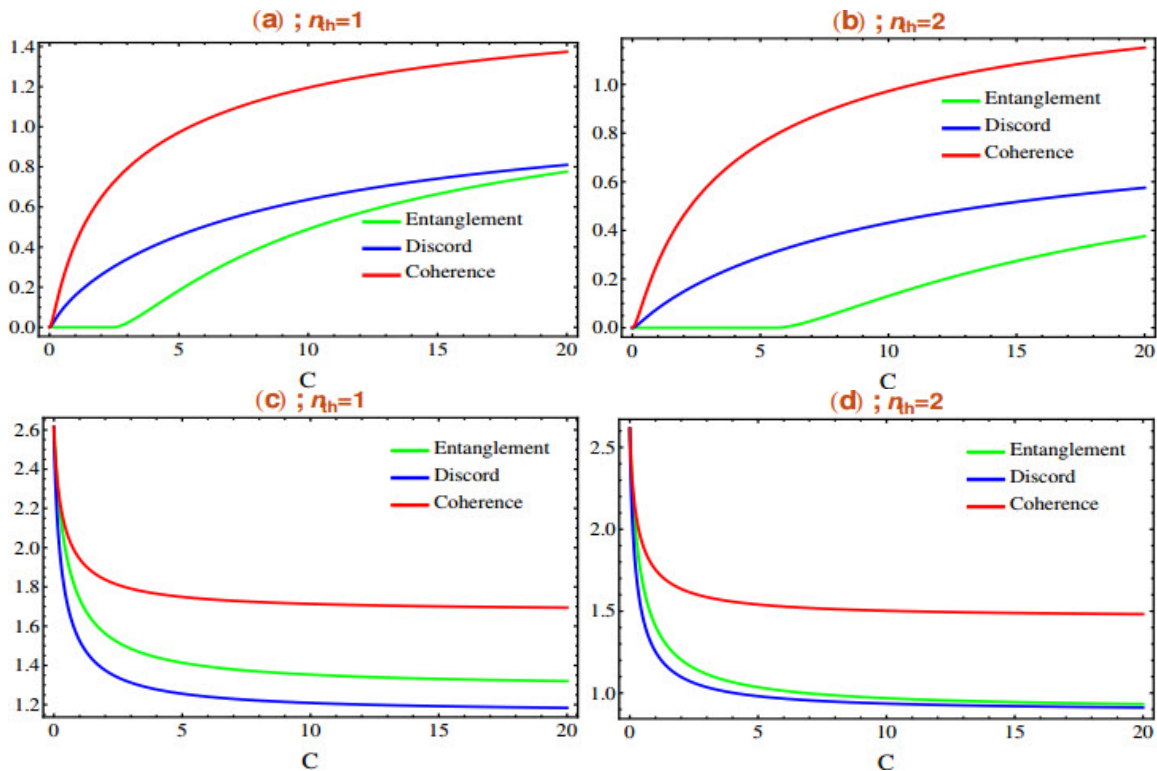
## IV.1.5 Résultats et discussion

La figure (IV.2) montre que pour une valeur fixe du paramètre de compression  $r$ , l'intrication de formation EoF, la discordance quantique Gaussienne GQD et la cohérence quantique QC des deux modes mécaniques ainsi que des deux modes optiques il ya une diminution avec l'augmentation du nombre moyen des phonons thermiques  $n_{th}$ , ce qui signifie que la température dégrade la caractéristique quantique des deux sous-systèmes étudiés. De plus, la figure (IV.2) montre que sous bruits thermiques, l'intrication mécanique et optique décroît rapidement jusqu'à zéro par rapport au GQD et au QC. En particulier, nous remarquons que l'intrication mécanique (Figs. 2(a)-2(b)) est plus affectée par le bruit thermique que le bruit optique (Figs. 2(c)-2(d)). De manière intéressante, la figure 2 montre qu'au-delà de l'intrication (c'est-à-dire lorsque EoF=0), les GQD et les QC subissent un *comportement congelé* en fonction de l'effet de la température. En effet, la GQD et la QC dans les deux sous-systèmes considérés diminuent de façon monotone lorsque la température augmente. D'autre part, lorsque l'intrication disparaît complètement, le GQD et le QC persistent et restent presque constants [atteignant un régime asymptotique] même pour des valeurs élevées du nombre moyen des phonons thermiques  $n_{th}$  (i.e. haute température) [198]. Plus important encore, la Fig. (IV.2) révèle un comportement très important du GQD et du QC sous bruit thermique. De plus, dans les sous-systèmes mécaniques et optiques, les GQD et QC correspondant aux états intriqués ont tendance à diminuer drastiquement sous l'effet de la température.



**Fig. IV.2** – EoF(ligne verte), GQD(ligne bleue) et QC(ligne rouge) en fonction du nombre de phonons thermiques  $n_{th}$  pour deux valeurs de compression  $r$ . [(a)-(b)] et [(c)-(d)] correspondent respectivement aux sous-systèmes mécanique et optique. Nous avons utilisé  $C = 34$  et  $\gamma/\kappa = 0,05$ .

D'autre part, les GQD et QC associés aux états non intriqués montrent un comportement robuste, c'est-à-dire qu'ils diminuent asymptotiquement, restant presque constants même pour des valeurs élevées du nombre moyen de phonons thermiques  $n_{th}$ . Nous soulignons ici qu'une telle cadence remarquable correspondant au phénomène de gel des GQD et QC au-delà de l'intrication est tout à fait en accord avec l'interprétation physique donnée dans [156, 198]. De plus, en comparant la Fig. 2(a) avec la Fig. 2(c); et la Fig. 2(b) avec la Fig. 2(d), nous remarquons que sous effet thermique, la cohérence quantique mesurée dans le sous-système optique est plus importante que celle mesurée dans le sous-système mécanique. Cela s'explique par le fait que le sous-système optique est influencé par la fluctuation du point zéro provenant de l'environnement sous vide. En revanche, le sous-système mécanique est influencé par le bruit thermique de son bain. Donc, cela justifie le fait que les deux modes optiques qui sont dans un environnement beaucoup plus cohérent que les deux modes mécaniques, doivent avoir une plus grande quantité de cohérence [174]. Ensuite, en fixant le paramètre de compression à  $r = 1, 5$ , la Fig. (IV.3) montre la dépendance des EoF, GQD et QC des sous-systèmes considérés sur la coopérativité optomécanique  $C$  pour deux valeurs différentes du nombre moyen de phonons ( $n_{th} = 1$ ;  $n_{th} = 2$ ). De façon remarquable, contrairement à l'intrication optique illustrée sur les figures 3(c)-3(d), les figures 3(a)-3(b) montrent que la condition  $C \neq 0$  est nécessaire pour créer une intrication entre les deux résonateurs mécaniques. De plus, la figure (IV.3) montre que dans les mêmes circonstances, EoF, GQD et GQC des deux modes optiques se comportent de manière opposée par rapport à ceux des deux modes mécaniques.



**Fig. IV.3** – EoF (ligne verte), GQD (ligne bleue) et QC (ligne rouge) versus la coopérativité optomécanique  $C$  pour deux valeurs de  $n_{th}$ . [(a)-(b)] et [(c)-(d)] correspondent respectivement aux sous-systèmes mécanique et optique. Nous avons utilisé  $r = 1, 5$  et  $\gamma/\kappa = 0, 05$ .

En effet, pour une valeur fixe du nombre moyen des phonons thermiques  $n_{th}$ , nous remarquons que lorsque la coopérativité optomécanique  $C$  augmente, les EoF, GQD et GQC mécaniques augmentent (Figs. 3(a)-3(b)), alors que les EoF, GQD et GQC optiques diminuent (Figs. 3(c)-3(d)). Cela peut être interprété comme un transfert de cohérence quantique du sous-système optique au sous-système mécanique (c'est-à-dire un transfert de cohérence quantique de la lumière à la matière). Enfin, comme on peut le voir sur les Figs. (IV.2)-(IV.3), dans les sous-systèmes mécaniques et optiques, GQD et QC sont toujours non nuls même dans les régions où EoF est nul. Ainsi, d'une part, une GQD non nulle dans des états séparables témoigne de la présence d'une *quantités des corrélations* dans ces états. D'autre part, une QC non nulle dans ces états traduit la caractéristique non-classique des deux sous-systèmes considérés sans intrication.

### IV.1.6 Conclusion

Dans ce travail, nous avons comparé le comportement de l'intrication et de la discordance quantique avec la cohérence quantique dans deux systèmes bipartites différents. Le premier est composé de deux modes mécaniques mixtes, tandis que le second est constitué de deux modes optiques mixtes. Nous avons utilisé respectivement l'intrication de formation EoF et la discordance quantique Gaussienne standard GQD pour quantifier l'intrication et la discordance quantique. Pour quantifier la cohérence quantique QC, nous avons employé la mesure de cohérence quantique Gaussienne proposée dans [159]. Essentiellement, nous nous sommes intéressés à l'influence du bruit thermique et du couplage optomécanique sur les trois mesures étudiées.

Dans les deux sous-systèmes considérés, nous avons montré que EoF résiste mieux que GQD et QC au bruit thermique, où il disparaît rapidement avec l'augmentation de la température.

En particulier, l'EoF des deux modes optiques est plus robuste que l'EoF mécanique. Cela rend les modes optiques utiles pour le traitement de l'information quantique, principalement dans les environnements dissipatifs et bruyants.

En particulier, au-delà de l'intrication (c'est-à-dire lorsque EoF est nul), il a été constaté que le comportement du GQD suit "uniformément" celui du QC. En effet, GQD et QC montrent que tous les deux un comportement résistif contre le bruit thermique, où ils diminuent asymptotiquement avec l'augmentation du nombre moyen des phonons thermiques  $n_{th}$ . De plus, ils restent presque constants sans s'annuler même pour des valeurs élevées de  $n_{th}$ , ce qui correspond à un *comportement figé*.

Fait intéressant, tous les résultats obtenus montrent que la quantité de GQD et EoF ne peut jamais dépasser celle de QC, ce qui signifie que la cohérence quantique est une ressource des corrélations non classiques.

Notre travail constitue une confirmation du résultat moyen effectué dans la Réf. [198] c'est-à-dire qu'au-delà de l'intrication, le gel de la discorde quantique et la cohérence quantique sont deux phénomènes qui ne peuvent être séparés l'un de l'autre. De plus, ce travail peut contribuer à la compréhension du comportement non classique des systèmes optomécaniques dans des environnements dissipatifs et bruyants. Ceci est très intéressant pour plusieurs applications dans le traitement et la communication de l'information quantique.

## IV.2 Intrication intrinsèque Gaussien et corrélations quantiques plus général de deux oscillateurs mécaniques

# GAUSSIAN INTRINSIC ENTANGLEMENT AND MORE GENERAL QUANTUM CORRELATIONS OF TWO MECHANICAL OSCILLATORS

Y. Lahlou,<sup>1\*</sup> B. Maroufi,<sup>2</sup> J. El Qars,<sup>3</sup> and M. Daoud<sup>4,5</sup>

<sup>1</sup>*LPHE-MS, Department of Physics, Faculty of Sciences  
Mohammed V University, Rabat, Morocco*

<sup>2</sup>*Faculty of Sciences Ben Msik  
University Hassan II, Casablanca, Morocco*

<sup>3</sup>*Faculty of Applied Sciences  
Ibn Zohr University, Ait-Melloul, Morocco*

<sup>4</sup>*Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics  
Miramare, Trieste 34151, Italy*

<sup>5</sup>*Department of Physics, Faculty of Sciences  
Ibn Tofail University, Kénitra, Morocco*

\*Corresponding author e-mail: youness\_lahlou@um5.ac.ma

## Abstract

Considering two mixed mechanical resonators, we investigate two different kinds of quantum correlations, i.e., entanglement and quantum discord. We use two Fabry–Pérot cavities coupled by squeezed light. To quantify entanglement and quantum discord, we employ respectively the Gaussian intrinsic entanglement and the Gaussian Hellinger discord. We found that these two forms of quantum correlations decay under influence of thermal noise, while optomechanical coupling enhances them. In addition, the Gaussian Hellinger discord measured in separable states shows a resilient behavior against thermal effects than that measured in entangled states. Importantly, we show that when the Gaussian intrinsic entanglement vanishes, the Gaussian Hellinger discord remains almost constant, keeping a nonzero value even for high temperatures. Finally, based on a comparative study, we show that, in the adiabatic regime, the entanglement of the two considered modes is more robust than that in the nonadiabatic regime.

**Keywords:** cavity optomechanics, quantum correlations, quantum discord, Gaussian intrinsic entanglement, Gaussian Hellinger discord.

## 1. Introduction

Quantum entanglement is a key resource that can be exploited not only in quantum information processing and quantum communication tasks [1] but also to study various phenomena of physics, such as quantum–classical transition [2–4], wave-function collapse theories [5–7], theory of black holes [8], and also spin-orbital models [9]. Entangled states are defined as those that cannot be created only with local operations and classical communication (LOCC) [10,11]. Also, entanglement is regarded a different

## IV.2.1 Introduction

En considérant deux résonateurs mécaniques mixtes, nous étudions deux types différents de corrélations quantiques, c'est-à-dire l'intrication et la discorde quantique. Nous utilisons deux cavités Fabry-Pérot couplées par de la lumière comprimée. Pour quantifier l'intrication et la discorde quantique, nous utilisons respectivement l'intrication intrinsèque Gaussienne et la discorde Gaussienne de Hellinger. Nous avons constaté que ces deux formes de corrélations quantiques diminuent sous l'influence du bruit thermique, tandis que le couplage optomécanique les renforce. En outre, la discorde Gaussienne de Hellinger mesurée dans des états séparables présente un comportement plus résistant aux effets thermiques que celle mesurée dans des états intriqués. Nous montrons que lorsque l'intrication intrinsèque Gaussienne disparaît, la discorde de Hellinger Gaussienne reste presque constante, conservant une valeur non nulle même à haute température. Enfin, sur la base d'une étude comparative, nous montrons que, dans le régime adiabatique, l'intrication des deux modes considérés est plus robuste que dans le régime non adiabatique.

## IV.2.2 Système opto-mécanique à double cavité

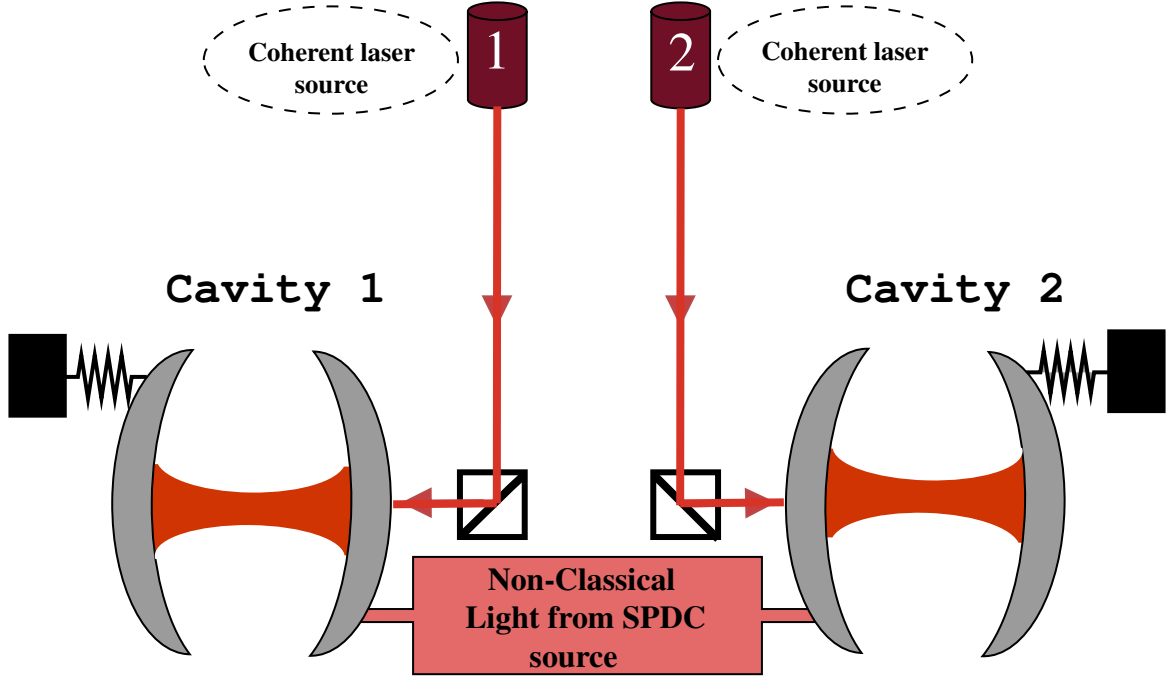
### IV.2.2.1 Hamiltonien du système

Nous considérons dans la Fig. (IV.4) un système optomécanique de deux cavités Fabry-Pérot, où chaque cavité est constituée de deux miroirs. Le premier miroir est fixe avec une transmission non nulle, tandis que le second est mobile et totalement réfléchissant. Nous considérons chaque miroir mobile comme un oscillateur quantique amorti à  $\gamma_j$ , avec une masse  $m_j$  et une fréquence  $\omega_{m_j}$ . Les deux cavités sont pompées par de la lumière comprimée bimode et pilotées par des lasers de fréquences  $\omega_{L_{1,2}}$ , de puissances  $P_{1,2}$  et de phases  $\psi_{1,2}$ . L'amplitude du  $j^{\text{ème}}$  laser de pompe est donnée par  $\varkappa_j = \left(\frac{2\kappa_j P_j}{\hbar\omega_{L_j}}\right)^{1/2}$ , où  $\kappa_j$  est le taux de désintégration de la  $j^{\text{ème}}$  cavité.

La dynamique du système peut être décrite par le Hamiltonien non linéaire [189]

$$\mathcal{H} = \hbar \sum_{j=1}^2 \left( (\omega_{c_j} - \omega_{L_j}) c_j^\dagger c_j + \omega_{m_j} b_j^\dagger b_j + \eta_j c_j^\dagger c_j (b_j^\dagger + b_j) + \varkappa_j (e^{i\psi_j} c_j^\dagger + e^{-i\psi_j} c_j) \right), \quad (\text{IV.29})$$

où  $c_j$  ( $b_j$ ) est l'opérateur d'annihilation du mode  $j^{\text{ème}}$  cavité (mécanique), et  $\eta_j = \frac{\omega_{c_j}}{l_j} \left(\frac{\hbar}{m_j \omega_{m_j}}\right)^{1/2}$  est le couplage optomécanique via la pression de rayonnement entre le champ de la  $j^{\text{ème}}$  cavité et le  $j^{\text{ème}}$  miroir mobile avec  $\omega_{c_j}$  et  $l_j$  sont respectivement la fréquence et la longueur de la  $j^{\text{ème}}$  cavité. Pour des raisons de notation, nous désignons par  $A$  et  $B$ , le premier et le second mode mécanique. Sans perte de généralité, nous considérons les deux cavités sont identiques, c'est-à-dire  $\omega_{m_{1,2}} = \omega_m$ ,  $\kappa_{1,2} = \kappa$ ,  $\gamma_{1,2} = \gamma$ ,  $\psi_{1,2} = \psi$ , etc. Enfin, nous remarquons que l'équation (IV.29) s'écrit dans un cadre tournant avec  $\omega_{L_j}$ .



**Fig. IV.4** – Description schématique du système optomécanique considéré, comprenant deux cavités Fabry-Pérot pompées par des lasers cohérents et alimentées par de la lumière comprimée bimode.

#### IV.2.2.2 Dynamique du système

Dans le système optomécanique, le mouvement mécanique du système induit un décalage de la fréquence de la résonance optique, qui à son tour entraîne une modification de l'intensité de la lumière diffusée, d'où la force de pression radiative agissant sur le mouvement [199]. Mathématiquement, l'expression du système optomécanique peut être décrit par l'Hamiltonien non linéaire, où l'on peut maintenant capturer la dynamique causée par cet Hamiltonien à travers les équations de Langevin non linéaires quantiques, qui déduit en dérivant l'équation de Heisenberg-Langevin effective du mouvement de dans le champ de la cavité. Cela implique d'abord la résolution de l'équation de mouvement de Heisenberg pour les opérateurs de bain  $c_j (j = 1, 2)$ , puis leur substitution dans l'équation de mouvement de Heisenberg pour les opérateurs d'abaissement du mode cavité  $b_j (j = 1, 2)$ . Par conséquent, on obtient l'ensemble des équations non linéaires écrites comme suit [60]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}c_j &= \dot{c}_j = i[\mathcal{H}, c_j] - \frac{\kappa}{2}c_j + \sqrt{\kappa}\Upsilon_j^{in} \\ &= -\left(\frac{\kappa}{2} - i\Omega\right)c_j - i\eta c_j(b_j^\dagger + b_j) - ie^{i\psi} + \sqrt{\kappa}\Upsilon_j^{in}, \end{aligned} \quad (\text{IV.30})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}b_j &= \dot{b}_j = i[\mathcal{H}, b_j] - \frac{\gamma}{2}b_j + \sqrt{\gamma}\varsigma_j \\ &= -\left(\frac{\gamma}{2} + i\omega_m\right)b_j - i\eta c_j^\dagger c_j + \sqrt{\gamma}\varsigma_j, \end{aligned} \quad (\text{IV.31})$$

où  $\Omega = \omega_L - \omega_c$  est le désaccord du laser, et  $\Upsilon_j^{in}$  peut être considéré comme un champ quantique aléatoire. Dans le cas le plus simple, il représente le champ électrique fluctuant du vide Couplé à la cavité à certains moments. En résumé, il désigne le  $j^{\text{ième}}$  opérateur de bruit de vide comprimé d'entrée avec une valeur moyenne nulle, c'est-à-dire  $\langle \Upsilon_j^{in} \rangle = 0$ . Il possède les fonctions de

corrélation suivantes [60, 61]

$$\langle \Upsilon_j^{in\dagger}(\omega) \Upsilon_j^{in}(\omega'); \Upsilon_j^{in}(\omega) \Upsilon_j^{in\dagger}(\omega') \rangle = 2\pi(N; N+1)\delta(\omega + \omega') \text{ for } j = 1, 2, \quad (\text{IV.32})$$

$$\langle \Upsilon_j^{in}(\omega) \Upsilon_{j'}^{in}(\omega'); \Upsilon_{j'}^{in\dagger}(\omega) \Upsilon_j^{in\dagger}(\omega') \rangle = 2\pi(M; M)\delta(\omega + \omega' - 2\omega_m) \text{ for } j \neq j' = 1, 2, \quad (\text{IV.33})$$

avec  $N = \sinh^2 r$  et  $M = \sinh t \cosh r$ , où  $r$  quantifie la compression.

Dans l'équation (IV.31),  $\varsigma_j$  est le  $j^{\text{ième}}$  opérateur de bruit décrivant le couplage entre le  $j^{\text{ième}}$  mode mécanique et son propre environnement avec une valeur moyenne nulle  $\langle \varsigma_j \rangle = 0$ . Lorsque la fréquence de l'oscillateur mécanique  $\omega_m$  est supérieure au taux d'amortissement  $\gamma$  (c'est-à-dire le processus markovien), l'opérateur  $\varsigma_j$  a les fonctions des corrélations suivantes [200]

$$\langle \varsigma_j^\dagger(-\omega) \varsigma_j(\omega'); \varsigma_j(\omega) \varsigma_j^\dagger(-\omega') \rangle = 2\pi(n_{th}; n_{th} + 1)\delta(\omega + \omega'), \quad (\text{IV.34})$$

où  $n_{th} = [\exp(\hbar\omega_m/k_B T) - 1]^{-1}$  est la moyenne des excitations du phonon,  $T$  est la température ambiante du  $j^{\text{ième}}$  miroir, et  $k_B$  est la constante de Boltzmann.

## IV.2.3 Solutions des équations quantiques de Langevin

### IV.2.3.1 Cas du régime non adiabatique

Les termes quadratiques dans les équations. (IV.31) et (IV.30) résultent de la nature non linéaire de la pression de rayonnement [199]. Il est donc impossible de les résoudre exactement. Ainsi, nous adoptons l'approche de linéarisation donnée dans [201]. En effet, afin d'atteindre un niveau satisfaisant d'interaction optomécanique, le système doit être intensément pompé par des lasers puissants (c'est-à-dire de forts champs intra-cavités). Ainsi, la valeur moyenne en régime permanent des opérateurs  $c_j$  ( $b_j$ ) sera supérieure à sa fluctuation correspondante, c'est-à-dire  $|\langle c_j \rangle| \gg |\delta c_j|$  ( $|\langle b_j \rangle| \gg |\delta b_j|$ ) [202]. Dans ce schéma, nous considérons la dynamique des petites fluctuations autour de l'état stationnaire du système en décomposant chaque opérateur de mode comme une somme de sa valeur moyenne et une petite fluctuation de valeur moyenne nulle ( $\langle \delta c_j \rangle = \langle \delta b_j \rangle = 0$ ). Cela s'écrit  $c_j = \langle c_j \rangle + \delta c_j$ ,  $b_j = \langle b_j \rangle + \delta b_j$ . Les valeurs moyennes  $\langle c_j \rangle$  et  $\langle b_j \rangle$  sont des nombres complexes et peuvent être évaluées en mettant les dérivées temporelles à zéro et en factorisant les moyennes dans Eqs. ((IV.30)) et ((IV.31)). Ainsi, on obtient  $\langle c_j \rangle = \frac{-i\eta e^{i\psi}}{\kappa/2 - i\Omega'}$ ,  $\langle b_j \rangle = \frac{-i\kappa |\langle c_j \rangle|^2}{\gamma/2 + i\omega_m}$ , où  $\Omega' = \Omega - \eta(\langle b_j \rangle + \langle b_j \rangle^*)$  est le désaccord effectif de la cavité [60]. En choisissant la phase du champ d'entrée comme étant  $\tan \psi = -2\Omega'/\kappa$  (i.e.,  $\langle c_j \rangle = -i|\langle c_j \rangle|$ ) et en rapportant l'expression linéarisée de  $c_j$  et  $b_j$  dans les équations ((IV.30)) et ((IV.31)), on obtient

$$\delta \dot{c}_j = -\left(\frac{\kappa}{2} - i\Omega'\right) \delta c_j - \mathcal{G}(\delta b_j^\dagger + \delta b_j) + \sqrt{\kappa} \Upsilon_j^{in}, \quad (\text{IV.35})$$

$$\delta \dot{b}_j = -\left(\frac{\gamma}{2} + i\omega_m\right) \delta b_j + \mathcal{G}(\delta c_j - \delta c_j^\dagger) + \sqrt{\gamma} \varsigma_j, \quad (\text{IV.36})$$

où  $\mathcal{G} = \eta|\langle c_j \rangle|$  est le couplage effectif [60]. De plus, nous supposons que le système est piloté dans la bande latérale rouge (c'est-à-dire,  $\Omega' = -\omega_m$ ) qui correspond au régime de transfert d'état quantique [190]. De plus, en écrivant chaque opérateur dans l'image d'interaction comme  $\delta \mathcal{O}_j = \delta \tilde{\mathcal{O}}_j e^{-i\omega_m t}$  ( $\mathcal{O}_j \equiv c_j, b_j$ ), l'approximation des ondes tournantes (RWA) permet de négliger

les termes en rotation rapide qui oscillent avec  $\pm 2\omega_m$  [60]. Ainsi, nous obtenons

$$\delta\dot{\tilde{c}}_j = -\frac{\kappa}{2} \delta\tilde{c}_j - \mathcal{G} \delta\tilde{b}_j + \sqrt{\kappa} \tilde{\Upsilon}_j^{in}, \quad (\text{IV.37})$$

$$\delta\dot{\tilde{b}}_j = -\frac{\gamma}{2} \delta\tilde{b}_j + \mathcal{G} \delta\tilde{c}_j + \sqrt{\gamma} \tilde{\zeta}_j, \quad (\text{IV.38})$$

Enfin, en effectuant la transformée de Fourier sur les équations ((IV.37))-((IV.38)), et en résolvant le système d'équations obtenu, on a

$$\delta\tilde{b}_j(\omega) = \frac{(\kappa + 2i\omega) \sqrt{\gamma}}{\frac{\kappa\gamma\mathcal{C}}{2} + (\gamma + 2i\omega)(\kappa + 2i\omega)} \tilde{\zeta}_j(\omega) + \frac{\kappa\sqrt{\gamma\mathcal{C}}}{\frac{\kappa\gamma\mathcal{C}}{2} + (\gamma + 2i\omega)(\kappa + 2i\omega)} \tilde{\Upsilon}_j^{in}(\omega) \quad (\text{IV.39})$$

où nous avons introduit la coopérativité optomécanique  $\mathcal{C} = 4\mathcal{G}^2/\kappa\gamma$ .

### IV.2.3.2 Cas du régime adiabatique

Les fluctuations quantiques peuvent être bien transférées de la lumière comprimée à deux modes vers les deux miroirs mobiles lorsque les modes des cavités optiques suivent de manière adiabatiquement les modes mécaniques. Une telle situation peut être obtenue en utilisant des résonateurs mécaniques avec un grand facteur de qualité mécanique (c'est-à-dire  $\omega_m \gg \gamma$ ) et un faible couplage optomécanique effectif (c'est-à-dire  $\kappa \gg \mathcal{G}, \gamma$ ) [203]. Ainsi, en insérant la solution stationnaire de ((IV.37)) dans ((IV.38)), on a

$$\delta\dot{\tilde{b}}_j = -\frac{\Theta}{2} \delta\tilde{b}_j + \sqrt{\gamma} \tilde{\zeta}_j + \sqrt{\Theta_a} \tilde{\Upsilon}_j^{in}, \quad (\text{IV.40})$$

où  $\Theta$  and  $\Theta_a$  sont respectivement donnés par  $\Theta = \gamma + \Theta_a$  et  $\Theta_a = 4\mathcal{G}^2/\kappa$ . Enfin, la transformée de Fourier de l'équation ((IV.40)) permet d'obtenir

$$\delta\tilde{b}_j = \frac{\sqrt{\gamma} \tilde{\zeta}_j(\omega) + \sqrt{\Theta_a} \tilde{\Upsilon}_j^{in}(\omega)}{\frac{\Theta}{2} + i\omega}, \quad (\text{IV.41})$$

## IV.2.4 Matrice de covariance

Dans l'ensemble du système impliquant deux modes mécaniques et deux modes optiques, la fonction de corrélation de toute paire d'opérateurs de fluctuation peut être évaluée comme

$$V_{ss'} = \frac{1}{4\pi^2} \int \int d\omega d\omega' e^{-i(\omega+\omega')t} V_{ss'}(\omega, \omega'),$$

où  $V_{ss'}(\omega, \omega') = \langle \{\tilde{v}_s(\omega), \tilde{v}_{s'}(\omega')\} \rangle / 2$  ( $s, s' = 1, \dots, 8$ ) est la fonction de corrélation dans le domaine fréquentiel entre les éléments  $s$  et  $s'$  du vecteur des opérateurs de quadrature  $\tilde{v} = (\delta\tilde{x}_1^m, \delta\tilde{y}_1^m, \delta\tilde{x}_2^m, \delta\tilde{y}_2^m, \delta\tilde{x}_1^{op}, \delta\tilde{y}_1^{op}, \delta\tilde{x}_2^{op}, \delta\tilde{y}_2^{op})$ , où  $\delta\tilde{x}_j^m(\omega) = (\delta\tilde{b}_j^\dagger(\omega) + \delta\tilde{b}_j(\omega)) / \sqrt{2}$ ,  $\delta\tilde{y}_j^m(\omega) = i(\delta\tilde{b}_j^\dagger(\omega) - \delta\tilde{b}_j(\omega)) / \sqrt{2}$  ( $\delta\tilde{x}_j^{op}(\omega) = (\delta\tilde{c}_j^\dagger(\omega) + \delta\tilde{c}_j(\omega)) / \sqrt{2}$ ,  $\delta\tilde{y}_j^{op}(\omega) = i(\delta\tilde{c}_j^\dagger(\omega) - \delta\tilde{c}_j(\omega)) / \sqrt{2}$ ) pour  $j = 1, 2$ , où  $\delta\tilde{x}_j^m$  et  $\delta\tilde{y}_j^m$  ( $\delta\tilde{x}_j^{op}$  et  $\delta\tilde{y}_j^{op}$ ) sont respectivement la position  $j$ th et les opérateurs de quadrature d'impulsion correspondent au mode  $j$ th mécanique (optique). En utilisant l'expression de  $V_{ss'}$ , et les propriétés des corrélations des opérateurs de bruits  $\tilde{\Upsilon}_j^{in}$  et  $\tilde{\zeta}_j$  donnés par les Eqs. [(IV.32)-(IV.34)], la matrice de covariance décrivant les états de quatre modes peut être obtenue explicitement dans les régimes non adiabatique et adiabatique. Dans ce qui suit,

nous nous intéressons au comportement non classique en régime permanent des deux modes mécaniques  $A$  et  $B$ , où leur matrice de covariance (notée  $V$ ) peut s'écrire sous la forme bloc suivante

$$V = \begin{pmatrix} V_1 & V_3 \\ V_3^T & V_2 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.42})$$

$V_1 = V_2 = \text{diag}(a, a)$  et  $V_3 = \text{diag}(c, -c)$ , où  $a$  et  $c$  sont des fonctions du paramètre de compression  $r$ , de la coopérativité optomécanique  $\mathcal{C}$ , du nombre moyen des photons thermiques  $n_{th}$  et des taux d'amortissement  $\gamma$  et  $\kappa$ . Les expressions de  $a$  et  $c$  dans le régime adiabatique se écrit

$$a = \frac{(2 \sinh(r)^2 + 1) \mathcal{C} + 2n_{th} + 1}{2(\mathcal{C} + 1)}. \quad (\text{IV.43})$$

$$c = \frac{\sinh(r) \cosh(r) \mathcal{C}}{(\mathcal{C} + 1)}. \quad (\text{IV.44})$$

En régime non adiabatique, ils sont

$$a = \frac{(\alpha \mathcal{C} + \alpha + 1)(2n_{th} + 1)}{2(\alpha + 1)(\mathcal{C} + 1)} + \frac{\mathcal{C} \cosh(2r)}{2(\alpha + 1)(\mathcal{C} + 1)}. \quad (\text{IV.45})$$

$$c = \frac{\mathcal{C} \sinh(2r)}{2(\alpha + 1)(\mathcal{C} + 1)}. \quad (\text{IV.46})$$

En utilisant l'approche présentée ci-dessus, nous allons analyser l'intrication et la discorde quantique comme deux aspects différents des corrélations quantiques dans les systèmes optomécaniques de la cavité Fabry-Perot. Pour cela, nous utilisons respectivement les mesures suivantes, l'intrication intrinsèque gaussienne et la discorde Gaussien de Hellinger données respectivement par les expressions explicites de Eqs (II.94), (II.97). L'analyse de nos résultats a été discutée dans la section suivante.

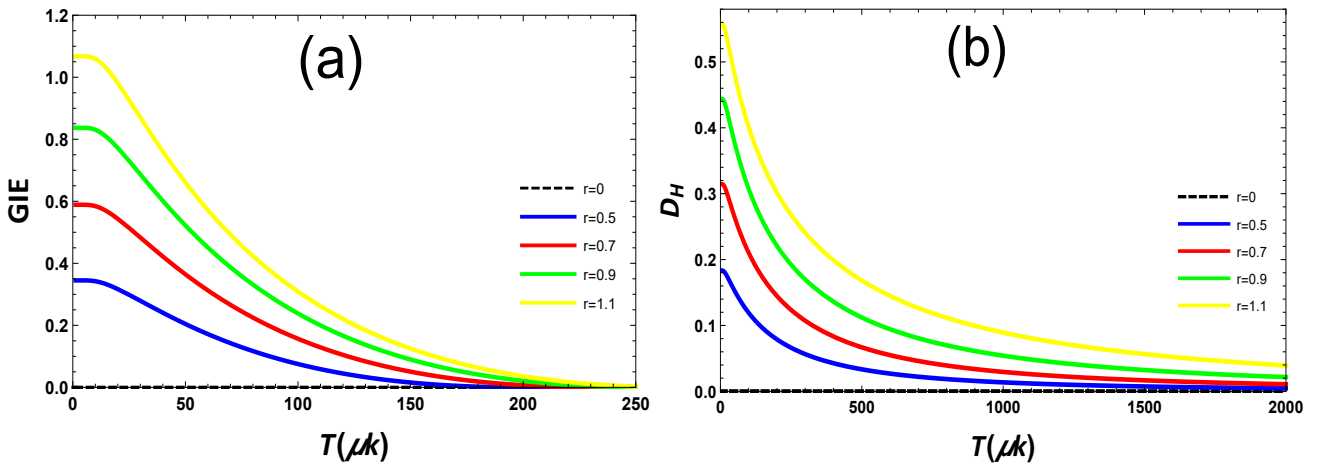
## IV.2.5 Résultats et discussions

### IV.2.5.1 Cas du régime non adiabatique

L'intrication intrinsèque Gaussienne  $E_{\downarrow}^G(\hat{\rho}_{AB})$  et la discorde Gaussienne Hellinger  $D_H(\hat{\rho}_{AB})$  sont des fonctions du paramètre de compression  $r$ , de la coopérativité optomécanique  $\mathcal{C}$ , du nombre moyen de photons thermiques  $n_{th}$  (ou de manière équivalente du bain thermique température  $T$ ) et les taux d'amortissement  $\gamma$  et  $\kappa$ . Pour l'estimation numérique de telles quantités, nous prenons les paramètres de [204]. Les deux cavités de longueur  $l = 25$  mm et de fréquence  $\omega_c/2\pi = 5,26 \times 10^{14}$  Hz sont pompées par des lasers de puissance  $P = 11$  mW et de fréquence  $\omega_L/2\pi = 2,82 \times 10^{14}$  Hz. Les miroirs mobiles ont une masse  $m = 145$  ng et oscillent à une fréquence mécanique  $\omega_m/2\pi = 947$  KHz et amortis à  $\gamma/2\pi = 140$  Hz.

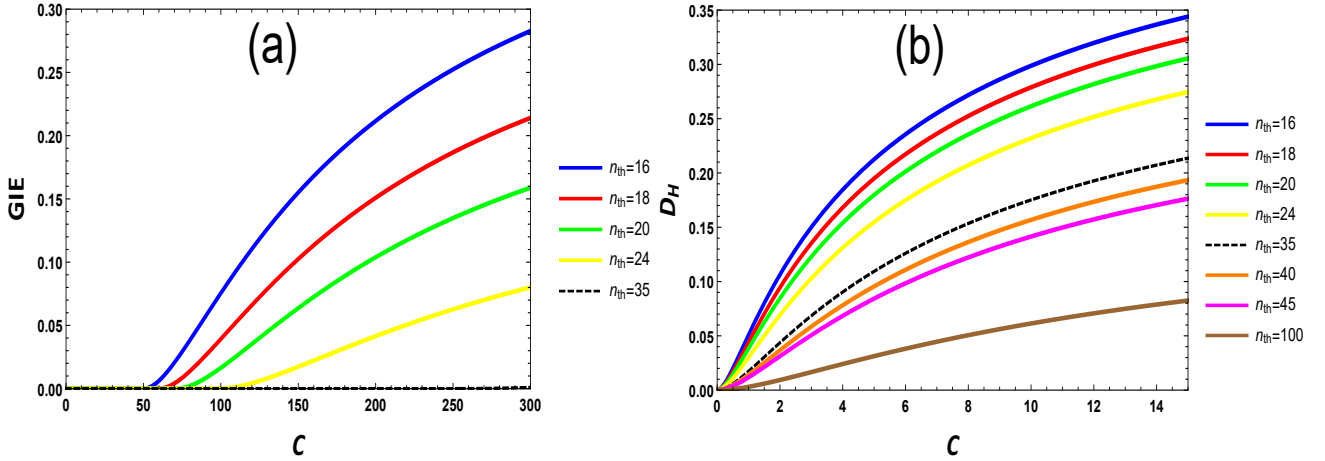
Fig. (IV.5) montre le comportement du GIE  $E_{\downarrow}^G(\hat{\rho}_{AB})$  (panneau a) et le GHD  $D_H(\hat{\rho}_{AB})$  (panneau b) des deux modes mécaniques  $A$  et  $B$  en fonction de la température du bain thermal  $T$  pour diverses compressions  $r$ . Comme le montre la Fig. (IV.5), avec une compression non nulle ( $r \neq 0$ ), des corrélations quantiques (intrication et discorde quantique) peuvent être détectées entre les deux résonateurs mécaniques spatialement disjoints  $A$  et  $B$ . Alors que, sans lumière comprimée ( $r = 0$ ), les deux modes mécaniques restent non corrélés, c'est-à-dire  $E_{\downarrow}^G(\hat{\rho}_{AB}) = D_H(\hat{\rho}_{AB}) = 0$  quelles que soient les valeurs des autres paramètres. Ceci est une conséquence du fait que la discordance Gaussienne est nulle si et seulement si l'état gaussien

est un état produit. C-à-d,  $\det V_3 = -c^2 = 0$  [150], est bien vérifié pour  $r = 0$  (cavités non corrélées). De plus,  $\det V_3 < 0$  est une condition nécessaire pour qu'un état gaussien à deux modes  $\hat{\rho}_{AB}$  soit intriqué [205]. Le rôle de la lumière comprimée dans la création de corrélations quantiques peut être physiquement justifié par le transfert des fluctuations quantiques de celle-ci vers les deux résonateurs mécaniques  $A$  et  $B$  [195]. De plus, pour une valeur donnée du paramètre de compression  $r$ , on remarque que les deux GIE  $E_{\downarrow}^G(\hat{\rho}_{AB})$  et GHD  $D_H(\hat{\rho}_{AB})$  diminuent avec l'augmentation des valeurs de la température du bain thermal  $T$ . Cela signifie que les corrélations quantiques des deux modes mécaniques ont tendance à se dégrader sous les bruits thermiques. Cependant, les corrélations quantiques, capturées par le GHD  $D_H(\hat{\rho}_{AB})$  au-delà de l'intrication (quantité des corrélations), montrent un comportement robuste contre les bruits thermiques causés par des valeurs élevées de la température  $T$ . Chose intéressante, la Fig. (IV.5) montre que le (GHD)  $D_H(\hat{\rho}_{AB})$  correspondant aux états intriqués (c'est à dire.  $E_{\downarrow}^G(\hat{\rho}_{AB}) > 0$ ) se désintègre considérablement sous la température ambiante. Alors que, dans les régions où l'intrication  $E_{\downarrow}^G(\hat{\rho}_{AB})$  est nulle, la  $D_H(\hat{\rho}_{AB})$  diminue asymptotiquement (sans disparaître), démontrant un comportement robuste face aux effets destructeurs des bruits thermiques.



**Fig. IV.5** – The Gaussian intrinsic entanglement (GIE)  $E_{\downarrow}^G(\rho_{AB})$  (panel (a)) and the Gaussian Hellinger discord (GHD)  $D_H(\hat{\rho}_{AB})$  (panel (b)) of the two mechanical modes  $A$  and  $B$  versus the thermal bath temperature  $T$  for different values of the squeezing parameter  $r$ . We used  $\mathcal{C} = 34$  and  $\frac{\gamma}{\kappa} = 0.05$ .

Il est intéressant de remarquer que le GHD  $D_H(\hat{\rho}_{AB})$  reste presque constant même pour des températures élevées. Ce comportement surprenant de la discordance quantique a été discuté dans [198] et démontré dans [206]. Ainsi, on peut conclure que le GHD  $D_H(\hat{\rho}_{AB})$  est plus résilient que le GIE  $E_{\downarrow}^G(\hat{\rho}_{AB})$  par rapport aux bruits thermiques. De plus, on remarque que le GHD  $D_H(\hat{\rho}_{AB})$  est toujours non nul en particulier dans les régions où le (GIE)  $E_{\downarrow}^G(\hat{\rho}_{AB})$  est nul, ce qui témoigne de l'existence des corrélations non classiques même dans les états séparables des deux modes mécaniques.

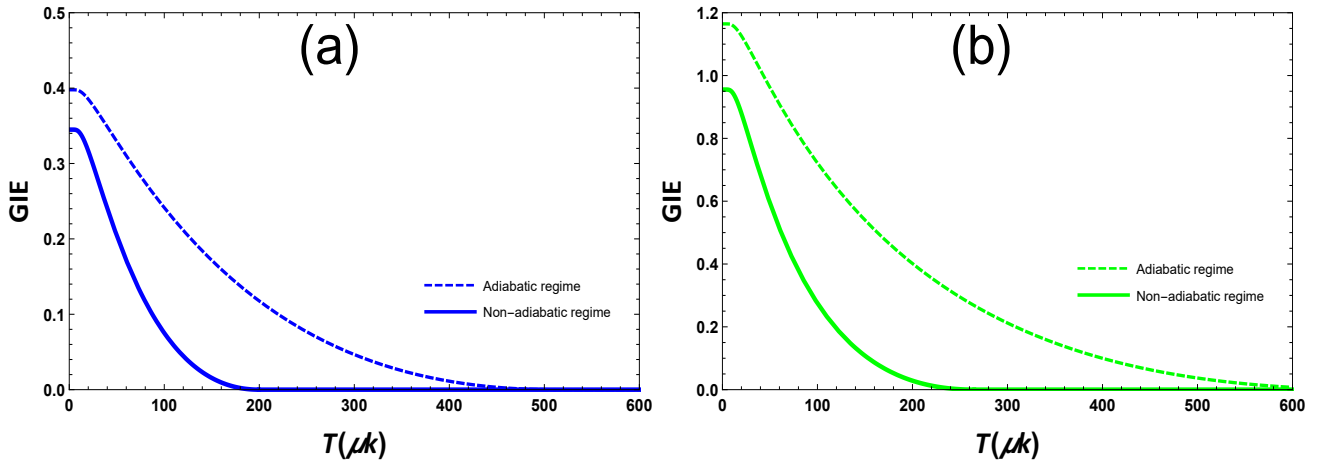


**Fig. IV.6** – L'intrication intrinsèque Gaussienne (GIE)  $E_{\downarrow}^G(\hat{\rho}_{AB})$  (panneau (a)) et la discordie Gaussienne de Hellinger (GHD)  $D_H(\hat{\rho}_{AB})$  (panneau (b)) des deux modes mécaniques  $A$  et  $B$  contre la coopérativité optomécanique  $\mathcal{C}$  pour différentes valeurs du nombre moyen des photons thermiques  $n_{th}$ . Nous avons utilisé  $n_{th}, \frac{\gamma}{\kappa} = 0.01$  et  $r = 2$ .

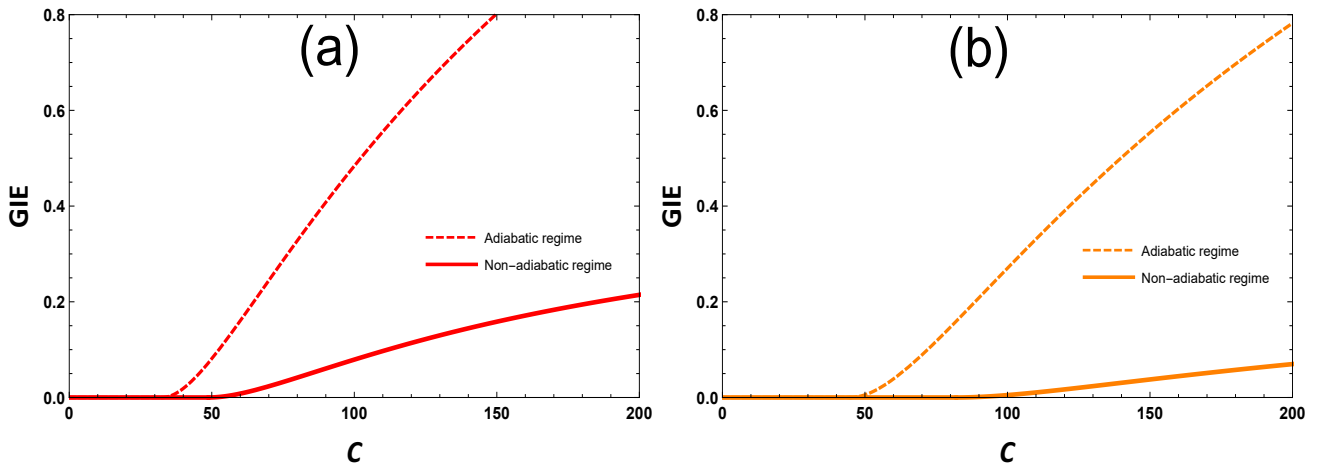
Ensuite, la Fig. (IV.6), montre l'influence du couplage optomécanique en termes de coopérativité optomécanique  $\mathcal{C}$  sur le GIE  $E_{\downarrow}^G(\hat{\rho}_{AB})$  (panneau a) et le GHD  $D_H(\hat{\rho}_{AB})$  (panneau b) des deux modes mécaniques  $A$  et  $B$ . Pour diverses valeurs du nombre moyen de photons thermiques  $n_{th}$ , Fig. (IV.6) montre qu'un couplage optomécanique non nul ( $\mathcal{C} \neq 0$ ) est nécessaire pour créer des corrélations entre les deux modes mécaniques  $A$  et  $B$ , alors qu'un couplage fort est nécessaire pour les intriquer. De plus, en comparant les panneaux (a) et (b) de la Fig. (IV.6), on remarque que le GHD  $D_H(\hat{\rho}_{AB})$  reste non nul dans les régions où les deux modes mécaniques sont séparables (c'est-à-dire  $E_{\downarrow}^G(\hat{\rho}_{AB}) = 0$ ), ce qui certifie l'existence de corrélations non classiques entre les modes  $A$  et  $B$  même s'ils sont non intriqués. Enfin, le panneau (IV.6)(b), montre que le GHD  $D_H(\hat{\rho}_{AB})$  est toujours non nul, même pour des valeurs élevées valeurs du nombre de photons thermiques  $n_{th}$  (température). C'est aussi un véritable indice de la robustesse du GHD  $D_H(\hat{\rho}_{AB})$  des modes mécaniques face à l'effet destructeur des bruits thermiques.

#### IV.2.5.2 Cas du régime adiabatique

Dans cette section, nous comparons le comportement de l'intrication dans les régimes adiabatique et non adiabatique. Sur la Fig. (IV.7), on montre les variations du GIE  $E_{\downarrow}^G(\hat{\rho}_{AB})$  des modes mécaniques  $A$  et  $B$  sous la température  $T$  pour deux valeurs différentes de compression  $r$ . Les résultats illustrés sur la Fig. (IV.7) montrent qu'après l'élimination adiabatique des deux modes optiques, le GIE  $E_{\downarrow}^G(\hat{\rho}_{AB})$  est considérablement amélioré, devenant plus résistant aux bruits thermiques. Par exemple, comme on peut le voir sur la Fig. ((IV.7)a), avec la compression  $r = 0,5$ , les deux modes  $A$  et  $B$  restent intriqués (ie,  $E_{\downarrow}^G(\hat{\rho}_{AB}) > 0$ ) pour  $0 \leq T \leq 200\mu\text{K}$  dans le régime non adiabatique, alors qu'ils restent intriqués pendant  $0 \leq T \leq 500\mu\text{K}$  dans le régime adiabatique. De plus, pour  $T = 0$  et  $r = 0,5$ ,  $E_{\downarrow}^G(\hat{\rho}_{AB}) \simeq 0,32$  au-delà du régime adiabatique, en revanche, est en régime adiabatique,  $E_{\downarrow}^G(\hat{\rho}_{AB}) \simeq 0,4$ . Notez que des résultats similaires ont été obtenus en utilisant diverses valeurs de compression de  $r$ .



**Fig. IV.7** – L’intrication intrinsèque gaussien (GIE)  $E_{\downarrow}^G(\varrho_{AB})$  des deux modes mécaniques  $A$  et  $B$  versus le température du bain thermal  $T$ .  $r = 0,5$  dans le panneau (a),  $r = 1$  dans le panneau (b). Nous avons utilisé  $\mathcal{C} = 34$  et  $\frac{\gamma}{\kappa} = 0,05$ .



**Fig. IV.8** – L’intrication intrinsèque Gaussienne (EIG)  $E_{\downarrow}^G(\varrho_{AB})$  des deux modes mécaniques  $A$  et  $B$  en fonction de la coopérativité optomécanique  $\mathcal{C}$ .  $n_{\text{th}} = 16$  dans le panneau (a),  $n_{\text{th}} = 22$  dans le panneau (b). Nous avons utilisé  $\frac{\gamma}{\kappa} = 0.05$  et  $r = 2$ .

Enfin, sur la Fig. (IV.8), nous montrons la dépendance du GIE  $E_{\downarrow}^G(\hat{\varrho}_{AB})$  à la coopérativité optomécanique  $\mathcal{C}$  dans les régimes adiabatique et non adiabatique. Pour deux valeurs différentes du nombre moyen des photons thermiques  $n_{\text{th}}$ , sur la Fig. (IV.8), nous montrons qu’une valeur minimale du couplage optomécanique est nécessaire pour intriquer deux modes  $A$  et  $B$ . En d’autres termes,  $E_{\downarrow}^G(\hat{\varrho}_{AB}) > 0$  pour  $\mathcal{C} \geq \mathcal{C}_0$  et  $E_{\downarrow}^G(\hat{\varrho}_{AB}) = 0$  pour  $\mathcal{C} < \mathcal{C}_0$ . D’autre part, cite comme Fig. (IV.8) montre clairement que la génération d’intrication entre les modes  $A$  et  $B$  en termes de couplage optomécanique est améliorée après la suppression adiabatique des modes optiques. En effet, la Fig. ((IV.8) a) (resp. Fig. (IV.8) b) montre qu’avec un nombre de phonons thermiques  $n_{\text{th}} = 16$  ( $n_{\text{th}} = 22$ ), deux modes mécaniques seront intriqués pour  $\mathcal{C} \geq 35$  ( $\mathcal{C} \geq 50$ ) dans le régime adiabatique, alors qu’ils le seront aussi pour  $\mathcal{C} \geq 50$  ( $\mathcal{C} \geq 100$ ) dans le régime non adiabatique.

## IV.2.6 Conclusion

Dans un système optomécanique ouvert pompé par de la lumière comprimée bimode et piloté par des lasers accordés au rouge, nous avons étudié deux aspects différents des corrélations

quantiques, à savoir l'intrication quantique et la discorde quantique de deux modes mécaniques mixtes  $A$  et  $B$ . Nous avons utilisé l'intrication intrinsèque Gaussienne et la distance de Hellinger Gaussienne, respectivement, pour quantifier l'intrication bipartite et pour capturer des corrélations quantiques plus générales. Ces deux indicateurs de non-classicalité ont été explicitement évalués et comparés sous l'influence des paramètres caractérisant le système optomécanique (amortissement et couplage) et son environnement (température et écrasement). Nous avons considéré les deux régimes, nonadiabatique et adiabatique.

Les résultats obtenus montrent que l'intrication intrinsèque Gaussienne (GIE)  $E_{\downarrow}^G(\hat{\rho}_{AB})$  et la discorde Gaussienne de Hellinger (GHD)  $D_H(\hat{\rho}_{AB})$  se comportent de manière similaire ; voir les figures (IV.5) et (IV.6) . En outre, le GHD  $D_H(\hat{\rho}_{AB})$  correspondant aux états intriqués, c'est-à-dire,  $E_{\downarrow}^G(\hat{\rho}_{AB}) > 0$  se dégrade considérablement sous l'effet des bruits thermiques induits par la température ambiante. Par ailleurs, dans les régions où l'intrication  $E_{\downarrow}^G(\hat{\rho}_{AB})$  est nulle, le GHD  $D_H(\hat{\rho}_{AB})$  diminue asymptotiquement sans disparaître, ce qui démontre un comportement robuste face aux effets destructeurs des bruits thermiques. Nous avons montré que l'intrication  $E_{\downarrow}^G(\hat{\rho}_{AB})$  et la discorde quantique  $D_H(\hat{\rho}_{AB})$  ne peuvent être créées que lorsque  $r \neq 0$  ou, en d'autres termes, au moyen d'un transfert de fluctuation quantique de la lumière comprimée bimode vers les états de deux modes mécaniques  $A$  et  $B$ . Ces résultats montrent que le GHD  $D_H(\hat{\rho}_{AB})$  peut être employé comme un quantificateur approprié pour capturer l'essence des corrélations non classiques - celles-ci peuvent se manifester entre deux modes mécaniques disjoints  $A$  et  $B$  même à haute température. Enfin, après l'élimination adiabatique des deux modes optiques, l'intrication quantique des deux modes mécaniques est devenue plus résistante aux bruits thermiques, et leur génération nécessite une valeur minimale de couplage optomécanique inférieure à celle requise dans le régime non adiabatique.

## Conclusion générale et perspectives

Le système typique de l'optique à cavité mécanique est une cavité optique dont la géométrie change sous l'influence de certains mouvements mécaniques (cavité Fabry-Pérot). Presque tous les systèmes de cavités optiques présentent des effets optomécaniques. La présence de la cavité renforce fortement ces effets, par rapport à un simple système en espace libre où la lumière rebondit sur le miroir en l'absence de toute cavité. Premièrement, l'intensité du laser entrant est renforcée par la résonance. Supposons que le laser soit initialement entré en résonance avec la cavité et l'ait remplie de lumière. Maintenant, un léger décalage de la résonance entraînera une diminution rapide de l'intensité de la lumière, ce qui entraînera également une diminution de son intensité. C'est ainsi que la lumière n'exerce pas de force. Il existe un véritable couplage entre le mouvement optique et le mouvement mécanique, et c'est le cœur du domaine de l'optomécanique. Ce domaine a connu un essor important ces dernières années, notamment dans le domaine de l'information quantique. En effet, le couplage optique-mécanique permet de contrôler l'état quantique du résonateur mécanique à l'aide de la lumière et de créer une intrication entre la lumière et le résonateur. Cette thèse s'inscrit donc dans la volonté de comprendre la nature de la corrélation quantitative entre les motifs optiques et mécaniques dans les systèmes optomécaniques.

Dans le premier chapitre (I), nous avons donné une description générale de l'information classique et quantique. Plus précisément, nous nous sommes d'abord concentrés sur le cas classique avant d'étendre notre analyse à l'homologue quantique. Dans ce dernier, nous avons restreint notre description au seul système quantique vivant dans l'espace de Hilbert de dimension finie, ce qui signifie que notre traitement se concentre sur le système à variables discrètes. Dans ce type de système, nous avons discuté et passé en revue les principaux concepts nécessaires à la quantification de l'intrication quantique ainsi que la quantification des corrélations quantiques. Bien entendu, notre thèse est développée dans le contexte d'un système optomécanique qui nécessite le traitement d'un état quantique des lumières. Pour cette raison, nous avons étendu, dans le deuxième chapitre, notre analyse au cas de variables continues aptes à décrire l'état quantique de la lumière.

Le deuxième chapitre (II), servait de préliminaire à l'exploitation des variables continues dans le cadre de la théorie de l'information quantique. Nous avons commencé par rappeler de quelques exemples pertinents de variables continues permettant de manipuler de l'information de façon quantique. Puis, nous avons présenté les outils théoriques de base, utilisés pour décrire un état quantique à variables continues. Nous avons discuté dans la suite deux objets fondamentaux qui nous permettait de décrire la dynamique des systèmes quantiques à variables

continues, aussi nous avons défini les états Gaussiens en se basant sur la fonction de Wigner, puis nous avons cité des exemples d'états Gaussiens qui ont des intérêts considérables en raison de leurs applications potentielles en optique quantique. Ensuite, nous avons présenté les ingrédients nécessaires pour leur traitement mathématique. Dans la dernière partie de ce chapitre nous nous sommes intéressés aux mesures entropiques utilisées pour quantifier la quantité d'information qui peut être contenue dans un état Gaussien en se limitant au cas simple des états bi-modes.

Le troisième chapitre (III), concentre sur les outils fondamentaux de cavités optiques et résonateurs mécaniques nécessaires pour décrire les systèmes opto-mécaniques quantiques de la cavité, nous avons commencé par la présentation de quelques dispositifs optomécaniques qui peuvent être utilisés dans l'investigation de certains phénomènes purement quantiques. Puis, nous avons décrit en détails la cavité optomécanique type Fabry-Pérot. Ensuite, nous avons présenté l'Hamiltonien optomécanique décrivant un ensemble de modes optiques et mécaniques. L'Hamiltonien optomécanique a été utilisé dans les équations de Heisenberg-Langevin gouvernant l'évolution des modes optiques et mécaniques dans la cavité. Enfin, nous avons attaqué l'élément clé dans la théorie de l'optomécanique quantique en cavité : c'est la notion du couplage optomécanique par pression de radiation.

Dans le quatrième chapitre (IV), nous avons inséré nos contributions consacrées à étudier et quantifier les corrélations quantiques dans le système optomécanique en utilisant les différentes mesures. La première publication (IV.1) porte sur la comparaison du comportement de l'intrication et de la discordance quantique avec la cohérence quantique dans deux sous-systèmes optomécaniques différents (optique et mécanique) de deux cavités spatialement disjointes et alimentées par de la lumière comprimée bi-mode. Nous avons utilisé respectivement l'intrication de formation (EoF) et la discordance quantique Gaussienne (GQD) pour quantifier l'intrication et la discordance quantique. Sous l'effet du bruit thermique et du couplage optomécanique, nous avons montré que EoF, GQD et QC se comportent de la même manière. De façon remarquable, lorsque l'intrication disparaît, GQD et QC ne sont pratiquement pas affectés par le bruit thermique, conservant des valeurs non nulles même à haute température. De plus, nous avons trouvé que la cohérence associée au sous-système optique est plus robuste contre le bruit thermique que celles du sous-système mécanique. Nos résultats confirment que les cavités optomécaniques constituent une ressource puissante de CQ.

Dans la deuxième publication (IV.2), nous avons étudié l'intrication intrinsèque Gaussienne et les corrélations quantiques plus générales de deux oscillateurs mécaniques dans un système optomécanique. Pour quantifier l'intrication et la discordance quantique, nous avons utilisé respectivement l'intrication intrinsèque Gaussienne et la discordance Gaussienne de Hellinger. Nous avons constaté que ces deux formes de corrélations quantiques se dégradent sous l'influence du bruit thermique, tandis que le couplage optomécanique les améliore. De plus, la discordance Gaussienne de Hellinger mesurée dans les états séparables montre un comportement résilient aux effets thermiques supérieur à celui mesuré dans les états intriqués. Fait important, nous montrons que lorsque l'intrication intrinsèque Gaussienne disparaît, la discordance Gaussienne de Hellinger reste presque constante, gardant une valeur non nulle même pour des températures élevées. Enfin, sur la base d'une étude comparative, nous avons montré que dans le régime adiabatique, l'intrication des deux modes considérés est plus robuste que celle dans le régime non adiabatique.

Avant de clore cette thèse, nous énumérons plusieurs questions qui méritent d'être approfondies à l'avenir. Comme nous l'avons vu précédemment, les systèmes optomécaniques sont basés sur l'état quantique de la lumière pour décrire la plupart des phénomènes à l'entrée de la Cavité FB. Ces types d'états quantiques vivent dans l'espace de Hilbert des systèmes à dimension infinie. Tout au long de cette thèse, nous avons restreint notre analyse à un cas particulier

qui est l'état gaussien. Ainsi, l'extension à l'étude des systèmes optomécaniques avec des états quantiques non-gaussiens sera l'une des questions que nous traiterons dans le futur. D'autre part, nombreuses mesures quantiques des corrélations quantiques et de l'intrication dans les systèmes quantiques de dimension finie restent sans aucune extension pour l'état des systèmes à variables continues. De plus, c'est le deuxième problème que nous traiterons à nouveau dans l'avenir. Une autre question qui mérite d'être étudiée plus avant est celle de savoir comment relier la description et l'analyse des systèmes optomécaniques avec la dynamique Markovienne ou non Markovienne des systèmes quantiques ouverts.

# Bibliographie

- [1] M. Hayashi, Quantum information. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2006).
- [2] R. P. Feynman, Mathematical formulation of the quantum theory of electromagnetic interaction. Physical Review, **80(3)** (1950) 440.
- [3] F. Schwabl, Quantum mechanics. Springer Science and Business Media, (2007).
- [4] E. Merzbacher, Quantum mechanics. Jones and Bartlett Publishers (1961).
- [5] A. Messiah, Quantum mechanics. Courier Corporation, (2014)..
- [6] A. P. French, Special relativity. CRC Press, (2017)..
- [7] R. B. Ash, Information theory. Courier Corporation, (2012).
- [8] F. M. Reza, An introduction to information theory. Courier Corporation, (1994)..
- [9] M. M. Wilde, Quantum information theory. Cambridge University Press, (2013).
- [10] C. Weedbrook, S. Pirandola, R. García-Patrón, N. J. Cerf, T. C. Ralph, J. H. Shapiro, and S. Lloyd, Gaussian quantum information. Reviews of Modern Physics, **84(2)** (2012) 621.
- [11] R. Calderbank, and N. J. Sloane, Claude Shannon (1916–2001). Nature, **410(6830)** (2001) 768-768.
- [12] M. Le Bellac, A short introduction to quantum information and quantum computation. Cambridge University Press, (2006).
- [13] M. A. Nielsen, and I. L. Chuang, Quantum computation and quantum information. Cambridge University Press, Cambridge, England, (2000)..
- [14] T. D. Ladd, F. Jelezko, R. Laflamme, Y. Nakamura, C. Monroe, and J. L. O’Brien, Quantum computers. nature, **464(7285)** (2010) 45-53.
- [15] N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel, and H. Zbinden, Quantum cryptography. Reviews of modern physics, **74(1)** (2002) 145.
- [16] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. Physical review letters, **70(13)** (1993) 1895.

- 
- [17] C. H. Bennett, and D. P. DiVincenzo, Quantum information and computation. *nature*, **404(6775)** (2000) 247-255.
- [18] S. M. Barnett, A. Beige, A. Ekert, B. M. Garraway, C. H. Keitel, V. Kendon, ... and M. S. Kim, Journeys from quantum optics to quantum technology. *Progress in Quantum Electronics*, **54** (2017) 19-45.
- [19] H. Dekker, Classical and quantum mechanics of the damped harmonic oscillator. *Physics Reports*, **80(1)** (1981) 1-110.
- [20] R. Piestun, and D. A. Miller, Electromagnetic degrees of freedom of an optical system. *JOSA A*, **17(5)** (2000) 892-902.
- [21] J. Fiurášek, Gaussian transformations and distillation of entangled Gaussian states. *Physical review letters*, **89(13)** (2002) 137904.
- [22] S. L. Braunstein, and P. Van Loock, Quantum information with continuous variables. *Reviews of modern physics*, **77(2)** (2005) 513.
- [23] R. Simon, E. C. G. Sudarshan, and N. Mukunda, Gaussian-Wigner distributions in quantum mechanics and optics. *Physical Review A*, **36(8)** (1987) 3868.
- [24] S. Olivares, Quantum optics in the phase space. *The European Physical Journal Special Topics*, **203(1)** (2012) 3-24.
- [25] T. Yu, and J. H. Eberly, Quantum open system theory : bipartite aspects. *Physical review letters*, **97(14)** (2006) 140403.
- [26] T. Yu, and J. H. Eberly, "Entanglement evolution in a non-Markovian environment." *Optics Communications* **283.5** (2010) 676-680.
- [27] G. Adesso, S. Ragy, and A. R. Lee, Continuous variable quantum information : Gaussian states and beyond. *Open Systems and Information Dynamics*, **21(01n02)** (2014) 1440001.
- [28] J. R. Klauder, and B. S. Skagerstam, Coherent states : applications in physics and mathematical physics. World scientific, (1985).
- [29] K. Marshall, D. F. James, A. Palar, and H. K. Lau, Universal quantum computing with thermal state bosonic systems. *Physical Review A*, **99(3)** (2019) 032345.
- [30] L. F. Borelli, L. D. S. Aguiar, J. A. Roversi, and A. Vidiella-Barranco, Quantum key distribution using continuous-variable non-Gaussian states. *Quantum Information Processing*, **15(2)** (2016) 893-904.
- [31] R. J. Cook, and H. J. Kimble, Possibility of direct observation of quantum jumps. *Physical review letters*, **54(10)** (1985) 1023.
- [32] P. L. Knight, R. Loudon, and D. T. Pegg, Quantum jumps and atomic cryptograms. *Nature*, **323(6089)** (1986) 608-609.
- [33] R. J. Glauber, Photon correlations. *Physical Review Letters*, **10(3)** (1963) 84.
- [34] E. C. G. Sudarshan, Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams. *Physical Review Letters*, **10(7)** (1963) 277.
- [35] J. Asasi, Enhanced sensitivity of LIGO gravitational wave detector by using squeezed state of light. *Nature Photonics*, **7** (2013) 613-619.

- 
- [36] H. Yuen, and J. Shapiro, Optical communication with two-photon coherent states—Part I : Quantum-state propagation and quantum-noise. *IEEE Transactions on Information Theory*, **24(6)** (1978) 657-668.
- [37] E. T. Jaynes, and F. W. Cummings, Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proceedings of the IEEE*, **51(1)** (1963) 89-109.
- [38] B. W. Shore, and P. L. Knight, The jaynes-cummings model. *Journal of Modern Optics*, **40(7)** (1993) 1195-1238.
- [39] J. H. Eberly, N. B. Narozhny, and J. J. Sanchez-Mondragon, Periodic spontaneous collapse and revival in a simple quantum model. *Physical Review Letters*, **44(20)** (1980) 1323.
- [40] G. Rempe, H. Walther, and N. Klein, Observation of quantum collapse and revival in a one-atom maser. *Physical review letters*, **58(4)** (1987) 353.
- [41] D. M. Meekhof, C. Monroe, B. E. King, W. M. Itano, and D. J. Wineland, Generation of nonclassical motional states of a trapped atom. *Physical review letters*, **76(11)** (1996). 1796.
- [42] S. J. D. Phoenix, and P. L. Knight, Fluctuations and entropy in models of quantum optical resonance. *Annals of Physics*, **186(2)** (1988) 381-407.
- [43] J. Gea-Banacloche, Collapse and revival of the state vector in the Jaynes-Cummings model : An example of state preparation by a quantum apparatus. *Physical review letters*, **65(27)** (1990) 3385.
- [44] D. Lv, S. An, M. Um, J. Zhang, J. N. Zhang, M. S. Kim, and K. Kim, Reconstruction of the Jaynes-Cummings field state of ionic motion in a harmonic trap. *Physical Review A*, **95(4)** (2017) 043813.
- [45] M. G. Ancona, and G. J. Iafrate, Quantum correction to the equation of state of an electron gas in a semiconductor. *Physical Review B*, **39(13)** (1989) 9536.
- [46] Y. Tsaturyan, A. Barg, E. S. Polzik, and A. Schliesser, Ultracoherent nanomechanical resonators via soft clamping and dissipation dilution. *Nature nanotechnology*, **12(8)** (2017) 776-783.
- [47] L. Viola, E. Knill, and S. Lloyd, Dynamical decoupling of open quantum systems. *Physical Review Letters*, **82(12)** (1999) 2417.
- [48] A. Zeilinger, Quantum teleportation. *Scientific American*, **282(4)** (2000) 50-59.
- [49] D. Bouwmeester, J. W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, Experimental quantum teleportation. *Nature*, 390(6660) (1997) 575-579.
- [50] L. Ye and G. C. Guo, Scheme for implementing quantum dense coding in cavity QED. *Physical Review A*, **71(3)** (2005) 034304.
- [51] X. Li, Q. Pan, J. Jing, J. Zhang, C. Xie and K. Peng, Quantum dense coding exploiting a bright Einstein-Podolsky-Rosen beam. *Physical review letters*, **88(4)** (2002) 047904.
- [52] Z. Ma, Z. Chen and F. F. Fanchini, Multipartite quantum correlations in open quantum systems. *New Journal of Physics*, **15(4)** (2013) 043023.

- 
- [53] R. Oliveira, O. C. Dahlsten and M. B. Plenio, Efficient generation of generic entanglement. arXiv preprint quant-ph/0605126 (2006).
- [54] Y. Chen, Macroscopic quantum mechanics : theory and experimental concepts of optomechanics. *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, **46(10)** (2013) 104001.
- [55] V. Vedral, Quantifying entanglement in macroscopic systems. *Nature*, **453(7198)** (2008) 1004-1007.
- [56] O. Gühne and G. Tóth, Entanglement detection. *Physics Reports*, **474(1-6)** (2009) 1-75.
- [57] G. T. Hooft, Physics on the boundary between classical and quantum mechanics. In *Journal of Physics : Conference Series* (Vol. 504, No. 1, p. 012003). IOP Publishing (2014, April).
- [58] W. H. Zurek, From quantum to classical. *Phys Today*, **37** (1991).
- [59] R. Jackiw, Quantum meaning of classical field theory. *Reviews of Modern Physics*, **49(3)** (1977) 681.
- [60] M. Aspelmeyer, T. J. Kippenberg and F. Marquardt, Cavity optomechanics. *Reviews of Modern Physics*, **86(4)** (2014) 1391.
- [61] T. J. Kippenberg and K. J. Vahala, Cavity opto-mechanics. *Optics express*, **15(25)** (2007) 17172-17205.
- [62] D. W. Brooks, T. Botter, S. Schreppler, T. P. Purdy, N. Brahms and D. M. Stamper-Kurn, Non-classical light generated by quantum-noise-driven cavity optomechanics. *Nature*, **488(7412)** (2012) 476-480.
- [63] E. Verhagen, S. Deléglise, S. Weis, A. Schliesser and T. J. Kippenberg, Quantum-coherent coupling of a mechanical oscillator to an optical cavity mode. *Nature*, **482(7383)** (2012) 63-67.
- [64] Y. Yan, W. Gu and G. Li, Entanglement transfer from two-mode squeezed vacuum light to spatially separated mechanical oscillators via dissipative optomechanical coupling. *SCIENCE CHINA Physics, Mechanics and Astronomy*, **58(5)** (2015) 1-8.
- [65] J. Lin, Divergence measures based on the Shannon entropy. *IEEE Transactions on Information theory*, **37(1)** (1991) 145-151.
- [66] H. Nyquist, Certain topics in telegraph transmission theory. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, **47(2)** (1928) 617-644.
- [67] M. M. Wilde, From classical to quantum Shannon theory. arXiv preprint arXiv :1106.1445 (2011).
- [68] C. Shannon, "théorie de l'information", (1993).
- [69] A. Wehrl, *Rev. Mod. Phys* (1978).
- [70] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloë, *Quantum Mechanics, Volume I, II*, Paris-New York : Éditions Hermann and John Wiley and Sons (1977).
- [71] M. Nielsen and A. Chuang, *Quantum Computation and Information* (2000).

- 
- [72] D. E. Koh, Entanglement of bipartite states and quantum teleportation : an introduction. arXiv preprint arXiv :0902.2807 (2009).
- [73] T. Traxler, Decoherence and the Physics of Open Quantum Systems Script to Reinhold Bertlmann's Lectures (2009).
- [74] W. H. Steeb and Y. Hardy, Problems and solutions in quantum computing and quantum information (2004).
- [75] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki and K. Horodecki, Quantum entanglement. Reviews of modern physics, **81(2)** (2009) 865.
- [76] V. Vedral, The role of relative entropy in quantum information theory. Reviews of Modern Physics, **74(1)** (2002) 197.
- [77] A. Zeilinger, Experiment and the foundations of quantum physics. In More Things in Heaven and Earth (pp. 482-498). Springer, New York, NY (1999).
- [78] A. K. Ekert, J. G. Rarity, P. R. Tapster and G. M. Palma, Practical quantum cryptography based on two-photon interferometry. Physical Review Letters, **69(9)** (1992) 1293.
- [79] C. H. Bennett and S. J. Wiesner, Communication via one-and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states. Physical review letters, **69(20)** (1992) 2881.
- [80] W. K. Wootters, Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. Physical Review Letters, **80(10)** (1998) 2245.
- [81] B. Groisman, S. Popescu and A. Winter, Phys. Rev. A (2005).
- [82] B. Dakic, V. vedral and C. Brukner, Phys. Rev. Lett, **105** (2010) 190502.
- [83] D. Deutsch, Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer. Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences, **400(1818)** (1985) 97-117.
- [84] A. Ekert and P. L. Knight, Entangled quantum systems and the Schmidt decomposition. American Journal of Physics, **63(5)** (1995) 415-423.
- [85] K. W. William , "Quantum Information and Computation", **1** (2001), 27.
- [86] S. A. Hill and W. K. Wootters, Entanglement of a pair of quantum bits. Physical review letters, **78(26)** (1997) 5022.
- [87] W. C. Qiang and L. Zhang, Geometric measure of quantum discord for entanglement of Dirac fields in noninertial frames. Physics Letters B, **742** (2015) 383-389.
- [88] Shi, M. Jiang F. Sun C. Du, J. Geometric picture of quantum discord for two-qubit quantum states. New Journal of Physics, **13** (7), (2011), 073016.
- [89] L. Henderson and V. Vedral, Classical, quantum and total correlations. Journal of physics A : mathematical and general, **34(35)** (2001) 6899.
- [90] H. Ollivier and W. H. Zurek, Quantum discord : a measure of the quantumness of correlations. Physical review letters, **88(1)** (2001) 017901.
- [91] M. Koachi and A. Winter, "Monogamy of quantum entanglement and other correlations." Phys. Rev. A. **69.2** (2004), 022309.

- 
- [92] S. Luo, Quantum discord for two-qubit systems. *Physical Review A*, **77(4)** (2008) 042303.
- [93] J. S. Kim, G. Gour and B. C. Sanders, Limitations to sharing entanglement. *Cont. Phys.*, **53(5)** (2012) 417-432.
- [94] V. Coffman, J. Kundu and W.K. Wootters, *Phys. Rev. A* **61** (2000) 052306.
- [95] S. Rana, P. Parashar, *Phys. Rev. A* **85** (2012) 024102.
- [96] W. Dür, G. Vidal et J. I. Cirac , "Three qubits can be entangled in two inequivalent ways." *Phys. Rev. A* **62.6** (2000) 062314.
- [97] D. Bouwmeester, J. W.Pan, , M.Daniell , H.Weinfurter et A.Zeilinger, *Phys. Rev. Lett* **82.7** (1999) 1345.
- [98] C. Sabín, and G. A. Guillermo, "A classification of entanglement in three-qubit systems." *The european phys. jour. D.* **48.3** (2008) 435-442.
- [99] C. S. Withers, "The moments of the multivariate normal." *Bull. of the Austral. Mathe. Soci.* **32.1** (1985) 103-107.
- [100] H. J. Kimble, "The quantum internet." *Nat.* **453.7198** (2008) 1023-1030.
- [101] D. Cozzolino, et al. "High-dimensional quantum communication : benefits, progress, and future challenges." *Adva. Quant. Techno.* **2.12** (2019) 1900038.
- [102] C. Schlegel, et al. "Direct observation of quantum coherence in single-molecule magnets." *Phys. rev. lett.* **101.14** (2008) 147203.
- [103] G. J. Pryde, et al. "Measurement of quantum weak values of photon polarization." *Phys. rev. lett.* **94.22** (2005) 220405.
- [104] E. P. Wigner, "Do the equations of motion determine the quantum mechanical commutation relations?." *Phys. Rev.* **77.5** (1950) 711.
- [105] K. Husimi, "Some formal properties of the density matrix." *Proc. Phys. Math. Soc. Jpn* **23** (1940), 264.
- [106] E. P. Wigner, *Phys. Rev.* **40** (1932) 749.
- [107] R. Simon, N. Mukunda and B. Dutta, *Phys. Rev. A* **49** (1994) 1567
- [108] S. L. Braunstein, *Phys. Rev. A* **71** (2005) 055801.
- [109] X. B. Wang, et al. "Quantum information with Gaussian states." *Phys. rep.* **448.1-4** (2007) 1-111.
- [110] I. Bengtsson and K. Życzkowski, *Geometry of Quantum States : An Introduction to Quantum Entanglement*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [111] A. S. Holevo, *Probl. Inf. Transm.* **9** (1973) 177.
- [112] M. Horodecki, J. Oppenheim, and A. Winter, *Nature* **436** (2005) 673.
- [113] I. Devetak, A. W. Harrow, and A. Winter, *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004) 230503.
- [114] D. Slepian and J. K. Wolf, *IEEE Trans. Inf. Theory*, **19**, (1973) 471.

- [115] S. Popescu and D. Rohrlich, Phys. Rev. A **56**, (1997) R3319.
- [116] M. G. Genoni, M. G. A. Paris and K. Banaszek, Phys. Rev. A **78**, (2008) 060303(R)
- [117] A. Rényi, Probability theory, Elsevier, 1970.
- [118] J. C. Baez, arXiv :1102.2098 (2011).
- [119] M. M. Wolf and J. Eisert, New J. Phys. **7** (2005) 93.
- [120] F. Caruso, J. Eisert, V. Giovannetti, and A. Holevo, New J. Phys. **10** (2008) 083030.
- [121] L. Miřta, R. Tatham, D. Girolami, N. Korolkova, and G. Adesso, Phys. Rev. A **83** (2011) 042325.
- [122] O. C. O. Dahlsten, R. Renner, E. Rieper, and V. Vedral, New J. Phys. **13** (2011) 053015.
- [123] F. Franchini, A. R. Its, and V. E. Korepin, J. Phys. A : Math. Theor. **41** (2008) 025302.
- [124] G. Adesso, D. Girolami, and A. Serafini, Phys. Rev. Lett. **109** (2002) 190502.
- [125] C. E. Shannon, Bell Syst. Tech. J. **27** (1948) 379.
- [126] M. A. Nielsen and D. Petz, Quant. Inf. Comput. **5** (2005) 507.
- [127] R. F. Werner, Phys. Rev. A **40** (1989) 4277.
- [128] A. Peres, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 1413.
- [129] P. Horodecki, Phys. Lett. A. **232** (1997) 333.
- [130] R. Simon, Phys. Rev. Lett. **84** (2000) 2726.
- [131] T. J. Osborne , "Quantum Inform. Comput", **7** (2007) 209 .
- [132] B. M. Terhal and K. G. H. Vollbrecht. Phys. Rev. Lett. **85** (2000) 2625.
- [133] K. G. H.Vollbrecht and R. F. Werner. Phys. Rev. A **64** (2001) 062307.
- [134] G. Giedke , M. M. Wolf , O. Krueger , R. F. Werner and J. I. Cirac. Phys. Rev. Lett. **91** (2003) 107901.
- [135] O. Krueger and R. F. Werner. (eds) Open Problems in Quantum Information Theory (Institute for Mathematical Physics, Technical University of Braunschweig)  
[http ://www.imaph.tu-bs.de/qi/problems/problems.html](http://www.imaph.tu-bs.de/qi/problems/problems.html)
- [136] K. Zyczkowski , P. Horodecki , A. Sanpera and M. Lewenstein. Phys. Rev. A. **58** (1998) 883.
- [137] J. Eisert. Ph.D. thesis University of Potsdam (2001).
- [138] G. Vidal and R. F. Werner. Phys. Rev. A **65** (2002) 032314.
- [139] M. B. Plenio. Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 090503.
- [140] K. Audenaert , M. B. Plenio and J. Eisert Phys. Rev. Lett. **90** (2003) 027901.
- [141] A. Serafini . Ph.D. thesis Universita degli Studi di Salerno (2004)  
[www.tampa.phys.ucl.ac.uk/quinfo/people/alessiothesis.pdf](http://www.tampa.phys.ucl.ac.uk/quinfo/people/alessiothesis.pdf)

- 
- [142] G. Adesso, A. Serafini and Illuminati F Phys. Rev. A **70** (2004) 022318
- [143] G. Adesso , A. Serafini and F. Illuminati Phys. Rev. Lett. **93** (2004) 220504.
- [144] G. Adesso , A. Serafini and F. Illuminati. Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 087901.
- [145] G. Adesso , A. Serafini and F. Illuminati. Open Sys. and Information Dyn. **12** (2005) 189.
- [146] G. Adesso and F. Illuminati. Phys. Rev. A **72** (2005) 032334.
- [147] A. Serafini , F. Illuminati and De S. Siena. J. Phys. A. **37** (2004) L21.
- [148] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, , J. A. Smolin, and W. K. Wootters. "Mixed-state entanglement and quantum error correction". Phys. Rev. A, **54(5)** (1996) 3824.
- [149] G. Rigolin and C. O. Escobar. "Lower bounds on the entanglement of formation for general Gaussian states". Phys. Rev. A. **69(1)** (2004) 012307.
- [150] P. Giorda and M. G. A. Paris, Phys. Rev. Lett. **105** (2010) 020503; G. Adesso and A. Datta, Phys. Rev. Lett. **105** (2010) 030501.
- [151] A. Datta, A. Shaji and C. Caves, Phys. Rev. Lett. **100** (2008) 050502.
- [152] B. P. Lanyon, M. Barbieri, M. P. Almeida and A. G. White, Phys. Rev. Lett. **101** (2008) 200501.
- [153] A. Brodutch and D. R. Terno, Phys. Rev. A **81** (2010) 062103.
- [154] A. Datta, arXiv : 1003.5256 (2010) [quant-ph]
- [155] M. Piani, P. Horodecki and R. Horodecki, Phys. Rev. Lett. **100** (2008) 090502.
- [156] K. Modi, A. Brodutch, H. Cable, T. Paterek and V. Vedral, Rev. Mod. Phys. **84** (2012) 1655.
- [157] A. Streltsov, G. Adesso, M. B. Plenio, Rev. Mod. Phys. **89** (2017) 041003.
- [158] T. Baumgratz, M. Cramer, and M. B. Plenio, Phys. Rev. Lett. **113** (2014) 140401.
- [159] J. Xu, Phys. Rev. A **93** (2016) 032111.
- [160] G. Adesso, Entanglement of Gaussian states, PhD thesis, University of Salerno (2007).
- [161] L. Mišta Jr and R. Tatham, Phys. Rev. Lett. **117** (2016) 240505.
- [162] C. H. Bennett, G. Brassard, S. Popescu, B. Schumacher, J. A. Smolin, and W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **76** (1996) 722; S. Virmani and M. B. Plenio, Phys. Lett. A **268** (2000) 31.
- [163] U. M. Maurer, IEEE Trans. Inf. Theory **39** (1993) 733.
- [164] J. Eisert, Ph.D. thesis, University of Potsdam, 2001; G. Vidal and R.F. Werner, Phys. Rev. A **65**(2002), 032314; G. Adesso et al, Phys. Rev. A **70**(2004) 022318.
- [165] S. Pirandola, G. Spedalieri, S. L. Braunstein, N. J. Cerf and S. Lloyd, Phys. Rev. Lett. **113** (2014) 140405.

- 
- [166] P. Marian, T. A. Marian, *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*. **48** (2015) 115301.
- [167] T. Tufarelli, T. MacLean, D. Girolami, R. Vasile and G. Adesso, *J. Phys. A : Math. Theor.* **46** (2013) 275308.
- [168] K. J. Vahala, "Optical microcavities," *Nat.* **424** (2003) 839–846.
- [169] H. G. Craighead, "Nano electromechanical systems," *Science* **290** (2000) 1532–1535.
- [170] T.W. Hansch and A. L. Schawlow, "Cooling of Gases by Laser Radiation," *Opt. Comm.* **13** (1975) 68–69.
- [171] D. J. Wineland, R. E. Drullinger, and F. L. Walls, "Radiation-Pressure Cooling of Bound Resonant Absorbers," *Phys. Rev. Lett.* **40** (1978) 1639–1642.
- [172] S. Chu, L. Hollberg, J. E. Bjorkholm, A. Cable, and A. Ashkin, "3-Dimensional Viscous Confinement and Cooling of Atoms by Resonance Radiation Pressure," *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985) 48–51.
- [173] S. Stenholm, "The Semiclassical Theory of Laser Cooling," *Rev. of Mod. Phys.* **58** (1986) 699–739.
- [174] W. P. Bowen and G. J. Milburn, *Quantum Optomechanics*, Boca Raton, (2015).
- [175] G. Hernández, "Fabry-pérot interferometers". *Camb. Univ. Pre.* **3** (1988).
- [176] M. Vaughan, "The Fabry-Pérot Interferometer : History, Theory, Practice and Applications" (CRC. Pre. (1989)).
- [177] S. Gröblacher, PhD thesis, University of Vienna (2010).
- [178] B. Cagnac, J. P. Faroux. "Lasers. Interaction lumière-atomes : Interaction lumière-atomes". *EDP sci* (2012).
- [179] A. Aspect, P. Grangier, *Optique quantique 2 : Photons*, Tome 2.École Polytechnique (2006).
- [180] A. Cleland and M. Roukes, *Appl. Phys. Lett.* **69** (1996) 2653.
- [181] T. J. Kippenberg and K. J. Vahala, *Science* **321** (2008) 1172 .
- [182] Y. Hadjar, Thèse de Doctorat de l'Université Paris VI (1998).
- [183] O. Arcizet, P.F. Cohadon, T. Briant, M. Pinard, A. Heidmann, *Nat.* **444** (2006) 71.
- [184] Y. Hadjar, P. F. Cohadon et all , "High-sensitivity optical measurement of mechanical Brownian motion", *Euro. phys. Lett.* **47** (1999) 545.
- [185] M. Pinard, et all, "Effective mass in quantum effects of radiation pressure", *Eur. Phys. J.* **D7** (1999), 107.
- [186] G. KELLER. Thèse de doctorat de l'Université Paris VI (2008).
- [187] C. Tannoudji, J. Roc et G. Grynberg. "Processus d'interaction entre photons et atomes" Editions du CNRS, Paris, 1988.

- [188] D. F. Walls and G. J. Milburn, (2008).
- [189] C. K. Law, Phys. Rev. A **51** (1995) 2537.
- [190] Y. D. Wang and A. A. Clerk, Phys. Rev. Lett. **108** (2012) 153603.
- [191] R. Benguria, and M. Kac, Phys. Rev. Lett, **46** (1981) 1.
- [192] V. Giovannetti and D. Vitali, Phys. Rev. A **63** (2001) 023812.
- [193] L. Mazzola and M. Paternostro, Phys. Rev. A **83** (2011) 062335.
- [194] E. A. Sete, H. Eleuch, and S. Das, Phys. Rev. A **84** (2011) 053817.
- [195] E. A. Sete, H. Eleuch and C. H. R. Ooi, J. Opt. Soc. Am. B **31** (2014) 2821.
- [196] J. Zhang , K. Peng and S. L. Braunstein. Phys. Rev. A **68** (2003) 013808.
- [197] P. Marian and T. A. Marian, Phys. Rev. Lett. **101** (2008) 220403.
- [198] T. R. Bromley, M. Cianciaruso, G. Adesso, Phys. Rev. Lett., **114** (2015) 210401.
- [199] M. Paternostro, L. Mazzola, and J. Li, J. Phys. B : At. Mol. Opt. Phys.**45** (2012) 154010.
- [200] D. F. Walls and G. J. Milburn, Quantum Optics (Springer,Berlin, 1998).
- [201] D. F. Walls and G. J. Milburn, Quantum Optics (Springer,Berlin, 1998).
- [202] D. Vitali, S. Gigan, A. Ferreira, H. R. Bohm, P. Tombesi, A. Guerreiro, V. Vedral, A. Zeilinger, and M. Aspelmeyer, Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 030405.
- [203] T. Briant, P. -F. Cohadon, A. Heidmann, and M. Pinard, Phys. Rev. A **68** (2003) 033823.
- [204] S. Gröblacher, K. Hammerer, M. R. Vanner and M. Aspelmeyer, Nat. **460** (2009) 724.
- [205] L. M. Duan, G. Giedke, J. I. Cirac and P. Zoller, Phys. Rev. Lett. **84** (2000) 2722; R. Simon, Phys. Rev. Lett. **84** (2000) 2726.
- [206] J. El Qars, M. Daoud and R. Ahl Laamaraa, J. Mod. Opt **65** (2018) 1584.

## Résumé

L'optomécanique des cavités est un domaine en évolution rapide opérant à l'intersection de la mécanique quantique et de l'optique moderne. D'une manière générale, l'optomécanique quantique fournit un outil universel permettant d'obtenir le contrôle quantique du mouvement mécanique. Pour décrire la physique de base qui sous-tend les principaux aspects de l'optomécanique des cavités, il suffit de considérer un résonateur Fabry-Pérot à commande optique, dont l'une des extrémités du miroir est fixe et l'autre est liée de manière harmonique et peut osciller sous l'action de la pression de rayonnement du champ lumineux intracavité de fréquence  $\omega_L$ . Lorsque la pression de radiation pousse le miroir, elle modifie la longueur de la cavité, et donc l'intensité et la phase du champ lumineux intracavité. Cette thèse s'inscrit donc dans la volonté de comprendre la nature des corrélations quantiques entre les modes optiques et mécaniques dans les systèmes optomécaniques. Dans ce contexte, nous avons abordé les deux types de corrélations quantiques : l'intrication et la discordance quantique. Nous nous concentrons sur des cavités optomécaniques de type Fabry-Pérot pilotées par des lasers discrets et de la lumière comprimée et le comportement stationnaire et dynamique de ces corrélations a été étudié en fonction de paramètres caractérisant le système étudié et son environnement. La dynamique des modes optiques et mécaniques est régie par l'équation de Heisenberg-Langevin. Nous montrons que le couplage optique-mécanique par la pression de radiation entre les modes optique et mécanique est important pour générer des différentes formes des corrélations quantiques. Les résultats ont montré que l'intrication ne peut être générées qu'en transférant les fluctuations quantiques de la lumière comprimée au mode optomécanique étudié.

**Mots-clefs :** Intrications Quantiques, Corrélations Quantiques, Cavités Optomécaniques de FP, Discordance Quantique Gaussienne.

## Abstract

Cavity optomechanics is a rapidly evolving field operating at the intersection of quantum mechanics and modern optics. In general, quantum optomechanics provides a universal tool for achieving quantum control of mechanical motion. In cavity optomechanics, it is sufficient to consider an optically driven Fabry-Pérot resonator, where one of its extremities is a fixed mirror and the other one harmonically bounds and oscillates under interaction between the radiation pressure and the light field of frequency  $\omega_L$ . When the radiation pressure pushes the mirror, it changes the length of the cavity and then the intensity and the phase of the inter-cavity light field. This thesis is part of the effort to understand the nature of quantum correlations between optical and mechanical modes in optomechanical systems. We have addressed, in this direction, the two types of quantum correlations : entanglement and quantum discord. We focus on the optomechanical cavities of Fabry-Pérot, driven by discrete LASERS and squeezed light. The dynamic behavior of these correlations has been studied as a function of parameters characterizing the evolving systems under environment fluctuations. The dynamics associated with the both optical and mechanical modes are governed by the Heisenberg-Langevin equation. We show that the optical-mechanical coupling by the radiation pressure between the optical and mechanical modes is important to generate different forms of quantum correlations. The results show that entanglement can be generated by transferring the quantum fluctuations of the squeezed light to the optomechanical mode under study.

**Keywords :** Quantum Entanglement, Quantum Correlations, Cavity optomechanics of FP, Gaussian Quantum Discord.

*Année Universitaire : 2021/2022*