جامعة سيدي محمد بن عبد الله بفاس
UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDALLAH DE FES
كلية العلوم ظهر المهراز فاس
FACULTE DES SCIENCES DHAR EL MEHRAZ FES

Formation Doctorale : Mathématiques et Applications

Discipline : Mathématiques Appliquées

Spécialité : Contrôle Optimal

Laboratoire : Mathématiques Appliquées aux sciences de l'Ingénieur

THESE DE DOCTORAT

Présentée par

Zakaria Hamidi

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DE LA STABILISATION D'UNE CLASSE DE SYSTÈMES BILINÉAIRES À RETARD.

Soutenue le 16 juillet 2020 devant le jury composé de :

Pr. Abdelaziz TAJMOUATI	***Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, Fès***	***Président***
Pr. Kaïs AMMARI	***Faculté des Sciences, Monastir (Tunis)***	***Rapporteur***
Pr. Larbi BERRAHMOUNE	***Ecole Normale Supérieur, Rabat***	***Rapporteur***
Pr. Aziz BLALI	***Ecole Normale Supérieur, Fès***	***Rapporteur***
Pr. Najib GUESSOUS	***Ecole Normale Supérieur, Fès***	***Examinateur***
Pr. Lahcen Maniar	***Faculté des sciences Smlalia, Marrakech***	***Examinateur***
Pr. Abdelhai ELAZZOUZI	***Faculté poly-disciplinaire, Taza***	***Co-Directeur de thèse***
Pr. Mohamed OUZAHRA	***Ecole Normale Supérieure, Fès***	***Directeur de thèse***

Année universitaire : 2019-2020

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude de la stabilisation d'une classe de systèmes non linéaires, à savoir les systèmes bilinéaires. Ces systèmes sont issus des problèmes réels de la mécanique, l'ingénierie, la chimie... . L'objectif principal est de démontrer des résultats de stabilité partielle ou globale. Dans un premier lieu, nous étudions la question de stabilisation de systèmes bilinéaires à retard. Nous montrons aussi que sous des conditions suffisantes, les systèmes considérés sont globalement stabilisables via une famille de commandes en rétro-action. Dans un deuxième lieu, nous étudions la stabilisation globale ou partielle des systèmes non homogènes sans retard. Les résultats établis sont aussi appliqués à quelques équations aux dérivées partielles.

Abstract

This thesis is devoted to the study of the stabilization of a class of nonlinear systems, namely those of bilinear type. These systems appear in the modeling of various real world problems in mechanics, engineering, chemistry, etc. The main objective is to establish partial and global stability results. First, we study the question of stabilization of delayed bilinear systems. More precisely, we show that under sufficient conditions the considered systems are globally stabilizable via a family of feedback controls. In the second place, we consider the global and partial stabilization for undelayed non-homogeneous bilinear systems. The established results are further applied to some partial differential equations.

Remerciements

J'exprime en premier lieu ma plus profonde gratitude au professeur **Mohamed OUZAHRA**, pour m'avoir accueilli dans son équipe pour mon initiation à un domaine de recherche très passionnant. Je lui suis infiniment reconnaissant pour sa disponibilité, ses conseils, son soutien, pour les compétences qu'il m'a apporté et la confiance qu'il m'a octroyé lors de l'accomplissement de ce travail. J'ai beaucoup apprécié de travailler à ses cotés tant sur le plan scientifique que sur le plan humain.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements au professeur **Abdelhai ElAZZOUZI** qui fut pour moi un co-directeur de thèse attentif et très disponible très sérieux. Ses qualités humaines m'ont beaucoup apporté et appris. J'ai beaucoup apprécié de travailler à ses cotés sur le plan scientifique.

J'exprime mes remerciements au professeur **Abdelaziz TAJMOUATI**, professeur à la faculté des sciences Dhar El Mahraz, université Sidi Mohamed Ben Abdelah Fés, pour avoir accepté d'être président du jury.
Je remercie vivement les professeurs **Kaïs AMMARI**, professeur à la Faculté des Sciences, Monastir (Tunis) et **Larbi BERRAHMOUNE**, professeur à l'école normale supérieur de Rabat et **Aziz BLALI**, professeur à l'école normale supérieur de Fès, qui m'ont fait honneur d'être les rapporteurs de cette thèse. Je les remercie également pour I'intérêt qu'ils ont manifesté pour ce travail et pour les remarques fructueuse.

Professeurs **Najib GUESSOUS** et **Lahcen Maniar** m'ont fait I'honneur d'accepter de faire partie de mon jury de thèse, je tiens à leur exprimer toutes mes sincères remerciements pour leurs remarques et l'intention qu'ils ont donné à cette thèse pour la lecture détaillé de ce document.
Je suis particulièrement reconnaissant au professeur **Najib Guessouss** pour ses qualités et son dévouement comme responsable de notre laboratoire MASI.

J'exprime également mes vifs remerciements au professeur **Rachid ELAYADI** qui as été toujour disponibles pour m'accorder l'aide et le

soutien et de me faire profiter de ses connaissances scientifiques.

Je n'oublie pas mes collègues de laboratoire **R. Touati et A. Benzaza, M. Jidou Khayar, S. Alaoui, H. Najib, S. Yahyaoui** pour leur gentillesse et leurs encouragements ainsi que pour leurs disponibilité.

Je remercie également tous les doctorants et docteurs du Département de Mathématiques de la FST Tanger : **Mabdaoui, Jellouli, El Kouri, Fihri**. Sans oublier mes amis : **H. Briak et Youssef Al fakih** pour leurs soutiens.

Ces quelques lignes sont dédiées à ma famille. J'ai eu de la chance d'avoir des **parents** qui ont donner gout à la connaissance et qui m'ont soutenu dans les moments les plus difficiles. Pour cela, je lui adresse un grand Merci. Ma reconnaissance va également à mon frère **Badr**, ma sœur **Souad**, mes nièces **Sara** et **Yousra** qui m'ont toujours encouragé dans cette voie.
Mes profonds remerciements s'adressent aussi à Mon oncle **AAfif Abdellah, AAfif Musapha, et AAFIF Mehdi** pour leurs soutiens psychologiques durant ces années de thèse.
Une personne avec qui j'ai vécu beaucoup d'événements et j'ai eu beaucoup d'expériences de vie grace à lui **ma grande-mère**. Que son âmes repose en paix **"ALLAH IRHAMHA"**.

Cette thèse est dédiée à la mémoire de ma Grande Mère.

Table des matières

1 Introduction générale et Préliminaires **2**

1.1 Introduction générale 2

1.1.1 Quelques exemples de motivation 4

1.1.2 Résultats établis 12

1.2 Préliminaires 18

1.2.1 Généralités sur les semi-groupes 18

1.2.2 Équation d'évolution semi-linéaire 24

1.2.3 Résultats de stabilisations 30

1.2.4 Plan de la thèse 40

2 Feedback stabilization of delayed bilinear systems **42**

2.1 Introduction 42

2.2 Well-posedness problem 43

2.3 Stabilization results 45

2.3.1 Weak stabilization 46

2.3.2 Strong stabilization 48

2.4 Applications 49

3 Strong stabilization of distributed bilinear systems with time delay **54**

3.1 Introduction 54

3.2 A well-posedness results 55

3.3 Stabilization results 60

3.4 Applications 65

4 Partial stabilization of non-homogeneous bilinear systems **68**

4.1 Introduction 68

4.2 **Feedback** stabilization 69

4.2.1 Problem statement 69
4.2.2 Partial weak stabilization 70
4.2.3 Global strong stabilization 74
4.3 Applications 76
4.4 Conclusion 81

5 Strong stabilization of non-homogeneous bilinear systems 82
5.1 Introduction 82
5.2 Global strong stabilization 84
5.3 Partial strong stabilization 87
5.4 An application 89
5.5 Conclusion 90

6 Conclusion et perspectives 91

Bibliographie 93

Liste des Abréviations

X'	: dual topologique d'un espace vectoriel normé X
$<,>_{X\times X'}$	: produit de dualité entre X et son dual
$<,>_X$	: produit scalaire (si X est un espace de Hilbert)
$\|.\|_X$	: norme définie sur l'espace X
$\mathcal{L}(E,F)$	: ensemble des opérateurs linéaires continus d'un espace vectoriel normé E vers un espace vectoriel normé F
$\mathcal{L}(X)$	: l'ensemble des applications linéaires et continues d'un espace vectoriel normé X dans X
Ω	: ouvert borné de $\mathbb{R}^n$
$\partial\Omega$	: frontière de Ω
χ_ω	: fonction caractéristique de $\omega \subset \Omega$ avec ω ouvert de Ω
A^*	: adjoint de A
$\mathcal{D}(A)$	: domaine de A
$\ker(A)$	: noyau de A
$Im(A)$	: image de A
$\mathcal{R}(\lambda,A)$	: résolvante de l'opérateur A
$\rho(A)$	: l'ensemble résolvant de A
$\sigma(A)$	: le spectre de A
$r(A)$	: le rayon spectral de A
$\frac{\partial y(t)}{\partial t}$	: dérivée partielle première de la fonction y par rapport à la variable t
$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$	: dérivée partielle seconde de la fonction y par rapport à la variable x
$\rightarrow$	: convergence forte
$\rightharpoonup$	: convergence faible
$L^2(\Omega)$	: espace des fonctions de carrés sommables
$L^p(\Omega)$	: espace des fonctions p-sommables sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$
$H^k(\Omega)$	: espace de Sobolev d'ordre k
$H_0^1(\Omega)$	: espace des fonctions de $H^1(\Omega)$ de trace nulle sur $\partial\Omega$
δ_{ij}	: symbole de kroneker
∇f	: gradient de f : $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1},...,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$.
Δy	: laplacien de y : $\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}$

Chapitre 1

Introduction générale et Préliminaires

1.1 Introduction générale

Un système est un ensemble de composants inter-connectés, qui peuvent être explicitement ou implicitement définis. La liaison entre ces parties est due à un ensemble particulier de variables, appelées les états du système, qui permettent la connaissance du comportement du système à un moment donné. En d'autres termes, l'état à un moment donné est uniquement déterminé par l'état à l'instant initial ou bien de l'histoire passée sur un intervalle de temps bien déterminé et de l'entrée présente.
La modélisation d'un système vise à établir les relations qui lient les variables caractéristiques de ce processus entre elles et à représenter rigoureusement son comportement dans un domaine de fonctionnement donné. Ceci nécessite des techniques permettant de disposer d'une représentation mathématique du système étudié.
Dans le même sens, on peut dire que la modélisation théorique exige une connaissance précise des phénomènes intervenant dans le système. Un système dynamique peut être modélisé mathématiquement par une équation comprenant une entrée et une sortie qui peut capturer la description dynamique d'une classe donnée de systèmes physiques.
La théorie des systèmes dynamiques s'occupe de l'étude du comportement des systèmes réels qui évoluent dans le temps, par exemple : les systèmes écologiques, géologiques, biologiques, économiques, neuronaux et les sys-

tèmes physiques. En particulier, les progrès de la théorie du contrôle des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle) ont été étroitement associés aux progrès de la théorie des systèmes dynamiques, et inversement.

La théorie du contrôle des systèmes intervient dans différents contextes et de plusieurs manières. Les problèmes de contrôlabilité, d'observabilité et de stabilité des systèmes ont récemment fait l'objet de nombreux travaux [6, 19, 20, 45, 44, 46, 69, 74]. Le problème de contrôlabilité peut se formuler comme suit : Étant donné $T > 0$ décrivant le temps ; peut-on amener les solutions d'un état initial convenable (au temps $t = t_0$) à un état final (au temps $t = T$) tout en respectant éventuellement certains contraintes. Plusieurs travaux ont été publiés sur ce sujet depuis ces dernières décennies. Nous renvoyons par exemple aux références : [19, 20, 24, 45, 44, 46, 69, 71, 80, 88, 87], et les références qui y figurent.

L'observabilité consiste à étudier la possibilité d'estimer l'état du système à partir des mesures partielles sur un sous-ensemble du domaine ou du bord. Dans le cadre des systèmes linéaires, l'observabilité est une notion duale de la contrôlabilité.

La stabilisation a pour but d'atténuer les vibrations par rétro-action (contrôle en feedback), elle consiste donc à garantir la décroissance de l'énergie des solutions vers 0 plus ou moins rapidement via un mécanisme de dissipation.

Il existe plusieurs degrés de stabilité que l'on peut étudier. Le premier degré consiste à analyser simplement la convergence de l'énergie des solutions vers 0, i.e.,

$$E(t) \to 0 \text{ lorsque } t \to +\infty$$

c'est ce qu'on appelle la stabilisation forte. Le deuxième degré, s'intéresse à la convergence exponentielle de l'énergie, i.e. :

$$E(t) \leq Ce^{-\gamma t}, \text{ pour tout } t \geq 0,$$

avec C et γ deux constantes positives.

Quant au troisième, il étudie des situations intermédiaires, dans lesquelles la convergence des solutions n'est pas exponentielle, mais de type polynomial par exemple :

$$E(t) \leq \frac{C}{t^{\alpha}}, \forall t > 0$$

avec C et α des constantes positives qui dépendent éventuellement des états initiaux. On peut aussi envisager la notion de stabilisation faible, qui consiste à garantir la convergence faible de l'état vers un point d'équilibre. Les notions de stabilisation introduites ci-dessus s'intéresse à l'état tout entier, tandis que pour d'autres classes de systèmes importantes (systèmes de dimension finies et infinies), l'état ne peut être stabilisé globalement, on peut donc envisager la notion de stabilisation partielle, qui consiste à stabilisé une partie de l'état [89, 64].

Bien que les modèles linéaires soient fréquemment utilisés pour approcher les processus dynamiques réels, il y a d'autres problèmes réels qui ne peuvent être modélisés par des systèmes linéaires, mais ont des structures non-linéaires, éventuellement bilinéaires. Cette classe de systèmes a bénéficié ces dernières décennies d'un intérêt croissant. En effet, ces systèmes sont utilisés pour modéliser un grand nombre de phénomènes du monde réel dans des domaines très variés : nucléaire, échanges thermiques, processus chimiques, biologie, immunologie, mécanique, (pour plus de détails voir par exemple les références, [17, 51, 54],...).

L'utilisation des systèmes bilinéaires a deux avantages majeurs :

- Ils fournissent une meilleure modélisation d'un phénomène non linéaire qu'un système linéaire,
- Ils sont plus simples à étudier comparativement à certains systèmes non linéaires.

1.1.1 Quelques exemples de motivation

1.1.1.1 Exemples de systèmes bilinéaires sans retard

1.1.1.1.1 Systèmes bilinéaires en immunologie

En immunologie, les systèmes bilinéaires résultent de la division des cellules et de la loi chimique de l'action de masse qui conduit à la destruction des cellules tumorales ciblées, pour plus de détails voir [52] et [53], [76].

Le cycle cellulaire est l'ensemble des étapes qui constituent et délimitent la vie d'une cellule. Ce cycle est composé de plusieurs phases de croissance. Ces phases sont :

- $G1$: la phase de croissance ;
- S : la phase de synthèse de l'ADN ;

— $G2$: la phase de préparation à la division ;
— M : la phase de division, ou mitose.

La chimiothérapie consiste à traiter un cancer par des substances chimiques. Les médicaments utilisés comprennent trois catégories :

— les agents tueurs : tuent les cellules cancéreuses ;
— les agents bloqueurs : maintiennent les cellules dans une phase du cycle et empêchent leur évolution vers la phase suivante ;
— les agents recruteurs : stimulent les cellules dormantes dans la phase $G0$ pour qu'elles entrent dans la phase $G1$.

Il s'avère qu'un grand nombre de médicaments de chimiothérapie sont cycle-spécifiques, ce qui signifie que leur effet sur la cellule cancéreuse dépend de l'évolution de cette cellule dans le cycle $G1 - S - G2 - M$. (voir [76] pour une classification détaillée des médicaments). Pour cela il est nécessaire de prendre en considération le cycle cellulaire dans la modélisation de la chimiothérapie. Ainsi, la population des cellules cancéreuses peut être modélisée par des compartiments, en fonction de l'effet des médicaments sur les différentes phases du cycle cellulaire. On note par n le nombre de compartiments, et par $x_i(t)$ le nombre de cellules cancéreuses dans le i-ème compartiment à l'instant t, où $1 \leq i \leq n$. Si on suppose que la croissance des cellules suit une loi exponentielle, alors, pour $i > 1$, on a :

$$\dot{x_i}(t) = a_{i-1}x_{i-1}(t) - a_i x_i(t)$$

où a_{i-1} et a_i sont les taux de transfert des cellules des compartiments $i-1$ et i à i et $i+1$ respectivement. On suppose que les phases $G1$ et $G0$ appartiennent au premier compartiment. Puisque chaque cellule du n-ème compartiment sera divisée en deux nouvelles cellules $G1$ ou $G0$, alors l'évolution du premier compartiment est décrite par :

$$\dot{x}_1(t) = 2a_n x_n(t) - a_1 x_1(t)$$

Si on suppose maintenant qu'un agent tueur u_1 est administré pour tuer les cellules du compartiment i, et que les cellules sont tuées durant leur transfert au compartiment $i+1$, alors la $(i+1)$-ème équation de croissance devient :

$$\dot{x}_{i+1}(t) = a_i x_i(t) - a_{i+1}x_{i+1}(t) + b_{1,i}u_1(t)\,x_i(t) \tag{1.1}$$

où $u_1(t)$ est la concentration de l'agent tueur à l'instant t. On suppose, en plus, qu'un agent bloqueur u_2 est administré pour bloquer le transfert des

cellules du j-ème au $(j+1)$-ème compartiment. Alors les j-ème et $(j+1)$-ème équations de croissance deviennent respectivement :

$$\dot{x}_j(t) = a_{j-1}x_{j-1}(t) - a_j x_j(t) + b_{2,j}u_2(t)\,x_j(t) \tag{1.2}$$

$$\dot{x}_{j+1}(t) = a_j x_j(t) - a_{j+1}x_{j+1}(t) + b_{2,j}u_2(t)\,x_j(t) \tag{1.3}$$

où $u_2(t)$ est la concentration de l'agent bloqueur à l'instant t. $b_{1,j}$ et $b_{2,j}$ sont des constantes négatives. On note par $x \in \mathbb{R}^n$le vecteur représentant la quantité des cellules cancéreuses dans chaque compartiment, et par $x_0 \in \mathbb{R}^n$ la quantité initiale des cellules. D'après (1.1), (1.2), et (1.3), on obtient le modèle de chimiothérapie suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + u_1(t)\,B_1x(t) + u_2(t)\,B_2x(t), \text{ pour } t \geq 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où $A = \begin{pmatrix} -a_1 & 0 & \dots & \dots & 2a_n \\ a_1 & -a_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & a_2 & a_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & a_{n-1} & -a_n \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & b_{1,i} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & -b_{2,j} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & b_{2,j} & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1.1.1.2 Systèmes bilinéaires en nucléaire

Dans le domaine du nucléaire, une réaction en chaîne se produit lorsqu'un neutron cause la fission d'un noyau fissile produisant un plus grand nombre de neutrons qui à leur tour causent d'autres fissions.
Une réaction en chaîne non contrôlée, qui se produit avec une quantité suffisamment importante de combustible fissile (masse critique) peut mener à une explosion d'énergie, c'est le principe d'une bombe atomique. La réaction

en chaîne peut aussi être contrôlée et utilisée dans un réacteur nucléaire pour produire de l'énergie.
Par exemple, une fission nucléaire résulte de la fusion de neutrons avec des noyaux actifs d'uranium, ce qui conduit à l'apparition de nouveaux neutrons dont le nombre est supérieur à un. Ces neutrons, à leur tour, réagissent avec les noyaux actifs de la même manière et le nombre de neutrons augmente donc. Si ce processus est traité approximativement comme un processus de diffusion linéaire, nous arrivons à l'équation suivante (simplifiée) voir [41] :

$$u_t = a^2 \Delta u + v\,(x,t)\,u, \tag{1.4}$$

où $u\,(x,t) \leq 0$ est la densité de neutron au point x à l'instant t et $v > 0$, puisque la réaction en chaîne est équivalente à l'existence de sources de matériaux diffusant (neutrons) proportionnelles à leur concentration (densité neutron).
Dans une centrale nucléaire, la réaction en chaîne est généralement contrôlée au moyen de ce qu'on appelle des barres de contrôle, qui est une « pièce mobile» de matériau neutrophage servant à diminuer le facteur de multiplication des neutrons par capture stérile de neutrons, qui peuvent à leur tour absorber des neutrons. Dans l'équation (1.4), cela peut être associé au changement de la valeur et du signe du coefficient v, qui peut donc être considéré comme un contrôle multiplicatif.

1.1.1.2 Exemples de systèmes à retard

En général, lors de la modélisation d'un système, nous cherchons toujours à assurer à celui-ci certaines performances souhaitées. Si L'approximation par des modèles bilinéaires a permis l'obtention des résultats pratiques qu'on estiment suffisants, il n'en va plus de même aujourd'hui où le souci de performances devient de plus en plus exigeant. En effet, un système dépend non seulement de l'état présent mais également de l'état passé (plusieurs exemples existent en économie, biologie, ingénierie,...). Ceci conduit à des modèles faisant apparaitre un terme retard. Les systèmes à retard sont des systèmes dynamiques régis par des équations différentielles fonctionnelles. Plusieurs type de retard existent en littératures :
Le retard discret, indiquant que l'état du système au temps t dépend de son état au temps $t - r$ (r peut décrire un temps de gestation par exemple, ou

le temps nécessaire à une cellule pour devenir résistante à une drogue, ou encore un temps de rémission, etc.).
Le retard continu, ou distribué, lorsque l'évolution au temps t dépend de tout ce qui s'est déroulé entre le temps t et un temps plus ancien (éventuellement infini). On parle souvent d'effet mémoire. Ces termes temporels non locaux faisant intervenir les valeurs de l'état à des instants antérieurs, discrets ou distribués sont soit d'ordre 0 (équations à retard), soit d'ordre 1 (équations de type neutre).
Le comportement asymptotique des solutions d'équations à retards est souvent très riche, le retard étant souvent perçu comme un facteur déstabilisant, pouvant par exemple faire apparaître des solutions oscillantes dans des systèmes non-oscillants en l'absence de retard. La nature du retard (discret, continu, infini, dépendant de l'état,...) et la présence de la dérivée de l'état au temps passé (type neutre) rendent l'analyse des équations à retard plus complexe. Ceci nécessite une étude mathématique plus élaborée que pour les équations différentielles ordinaires. L'importance des systèmes à retard a été mise en évidence par Volterra [81] dans l'étude des matériaux visco-élastiques et dans l'interaction des espèces, par Yorke [85] en épidémiologie, par Wang [83] dans la théorie du contrôle et par Hetzer et al. [37] en climatologie. Des motivations biologiques pour modéliser et étudier théoriquement les systèmes à retard peuvent être trouvées dans le livre de May [49]. Des exemples concrets de modèles à retard en biologie mathématique sont contenus dans les livres de Macdonald, [48] et Gopalsamy [28]. Nous citons aussi le livre [32] qui a poussé l'étude des équations à retard à un niveau très avancé.

Une équation différentielle à retard peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = f(t,\, u_t), \text{ pour } t \geq 0, \\ u_0 = \varphi \in \mathcal{C}, \end{cases}$$

où f est une fonction définie de $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}$ à valeurs dans X, $\mathcal{C}$ est appelé espace de phase et $u_t \in \mathcal{C}$. Si le retard est fini, $\mathcal{C}$ est souvent un sous espace des fonctions définies de $[-r, 0]$ dans X. Quand le retard est infini, $\mathcal{C}$ est constitué des fonctions définies de $]-\infty, 0]$ dans X. Dans tous les cas u_t est définie

par :

$$u_t(\theta) = u(t+\theta) \text{ pour } \theta \in [-r, 0] \text{ ou } \theta \in]-\infty, 0].$$

1.1.1.2.1 Modèle de compétition de Lotka-Volterra

Nous nous plaçons dans la ligne des travaux d'écologie mathématique initiée dans les années 1920 par les travaux de Lotka et Volterra, travaux dans lesquels a été introduite la représentation des interactions entre espèces par des systèmes d'équations différentielles. Les modèles prédateur-proie élaborés par ces deux scientifiques séparément sont les modèles fondateurs de l'écologie moderne. L'objectif poursuivi par l'élaboration du modèle de Volterra était d'expliquer un phénomène très répandu dans les systèmes prédateur-proie réels, à savoir les oscillations avec décalage de phase des abondances des proies et des prédateurs. Le modèle suivant a été proposé en 1928 [82] pour décrire l'interaction entre une population de proies et une population de prédateurs. Il est décrit par le système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}P_1(t) = (a - bP_2(t))P_1(t) \text{ pour } t \geq 0, \\ \dfrac{d}{dt}P_2(t) = (-c + dP_1(t) + \displaystyle\int_{-r}^{0} k(s)P_1(t+s)ds)P_2(t) \text{ pour } t \geq 0, \\ P_1(\theta) = \varphi_1(\theta) \text{ pour } -r \leq \theta \leq 0 \text{ et } P_2(0) = P_2^0, \end{cases}$$

où P_1 et P_2 désignent respectivement les populations de proies et de prédateurs et les paramètres suivants désignent :
a est le taux de croissance naturelle des proies en l'absence de prédation,
b est le taux de mortalité des proies dû à la prédation,
c est le taux de mortalité naturelle des prédateurs en l'absence de proies,
d est le taux de croissance naturelle des prédateurs en présence de proies.
k est une fonction noyau qui décrit la manière dont le gain du prédateur à chaque instant t dépend de l'abondance de la population des proies P_1 dans un intervalle de temps passé $[t-r, t], r > 0$. La conversion des proies mangées par les prédateurs s'effectue de façon continue durant un temps r, à compter de la mort de la proie, ce qui est décrit par le dernier terme de la seconde équation qui fait apparaître un retard fini continu distribué.
Dans [15], Brelot a ensuite introduit le retard infini ($r = +\infty$) dans le modèle

de Volterra pour modéliser un problème biologique héréditaire :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}P_1(t) = P_1(t)(a - bP_2(t) - \int_0^{+\infty} k(s)P_2(t-s)ds) \text{ pour } t \geq 0, \\ \frac{d}{dt}P_2(t) = P_2(t)(-c + dP_1(t) - \int_0^{+\infty} k(s)P_1(t-s)ds) \text{ pour } t \geq 0, \\ P_1(\theta) = \varphi_1(\theta) \text{ et } P_2(\theta) = \varphi_2(\theta) \text{ pour } \theta \leq 0. \end{cases}$$

La circulation spatiale et la migration des espèces d'un endroit à un autre peuvent compliquer les interactions écologiques et influencer le comportement de leur évolution. Par exemple, si la nourriture est fournie de façon homogène dans l'espace, la diffusion spatiale peut découler de la tendance des espèces à migrer des régions de plus grande densité de population vers les régions de faible densité de population.

1.1.1.2.2 Modèle de la dynamique d'une population distribuée

La dynamique des populations s'intéresse à l'évolution, au cours du temps, de populations d'êtres vivants (des cellules par exemple) présentant bien souvent des caractéristiques propres. Parmi les axes de recherche actuels dans ce domaine, nous citons celui lancé par le groupe de Adimy et ces collaborateurs [1, 2], dans le cadre de la modélisation mathématique en médecine et en biologie, qui s'intéresse à la dynamique du prion, à savoir comment les bonnes protéines de prion interagissent-elles avec les mauvaises, conduisant à de graves maladies, ainsi qu'à une réflexion plus générale concernant la notion d'adaptation dans une population.
Le modèle à retard infini suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}P(t,x) = \delta\frac{\partial^2}{\partial x^2}P(t,x) + cP(t,x)(1 - \int_{-\infty}^{0} h(\theta)P(x,t+\theta)d\theta) \text{ for } t \geq 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}P(t,0) = \frac{\partial}{\partial t}P(t,\pi) = 0 \text{ pour } t > 0, \\ P(\theta,x) = \varphi(\theta)(x) \text{ pour } 0 \leq x \leq \pi \text{ et } -\infty < \theta \leq 0. \end{cases}$$

décrit les dynamiques d'une population distribuée d'une seule espèce, où $P(t,x)$ représente la taille de la population totale à la position x et à l'instant t, les deux constantes δ et c sont positives mesurant respectivement le taux de diffusion et la croissance intrinsèque et $h :]-\infty, 0] \to \mathbb{R}^+$ est une fonction intégrable vérifiant

$$\int_{-\infty}^{0} h(\theta)d\theta = 1.$$

La fonction φ est un élément d'un espace vectoriel approprié de fonctions allant de $]-\infty,0]$ à $X = L^2([0,\pi])$. Le modèle a été étudié par plusieurs auteurs, à savoir Bonilla et Linan [10], Britton [16] et Ruan et Wu [70].

1.1.1.2.3 Modèle Mathématique d'un système bilinéaire à retard

Nous considérons l'équation aux dérivée partielle à retard suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}x(t,\xi) = \dfrac{\partial^2}{\partial \xi^2}x(t,\xi) - d(\xi)\,x(t,\xi) + v(t)\,b(\xi)\,x(t-r,\xi) & \text{Si } \ t \geq 0; \xi \in [0,1] \\ \dfrac{\partial}{\partial \xi}x(t,\xi) = 0 & \text{Si } \xi = 0,1 \\ x(s,\xi) = h(s,\xi) & \text{Si } s \in [-r,0] \end{cases} \tag{1.5}$$

avec $d, b \in \mathcal{C} := C[0;1]$; $u \in L^p(\mathbb{R}^+)\,(p \in]1;+\infty[)$ et $h \in X := C([-r;0];\mathcal{C})$. Nous mentionnons que (1.5) peut être interprétée comme un modèle de croissance d'une population en $[0,1]$. La variable $u(t;\xi)$ est la densité de population à l'instant t et à la position ξ. Les fonctions d et b, lorsqu'elles sont positives, représentent respectivement le taux de mortalité et le taux de naissance et r est le retard dû à la grossesse (voir, par exemple, [[23], Exemple VI.6.19] avec $u = 1$). Afin de reformuler (1.5]) sous la forme bilinéaire, nous introduisons, dans l'espace produit $Z := \mathcal{C} \times X$, les opérateurs suivants :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & (\Delta - M_d)\,\delta_0 - \delta_0' \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial s} \end{pmatrix}$$

avec

$$\mathcal{D}(A) := \{0\} \times \left\{\varphi \in C^1([-r,0];\mathcal{C}), \varphi(0) \in \mathcal{D}(\cdot)\right\}$$

et

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & M_b\delta_{-r} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}; \mathcal{D}(\Delta) := \left\{f \in C^2[0,1], f'(0) = f'(1) = 0\right\}$$

et

$$\delta_0\varphi := \varphi(0)\ ;\ \delta_0'\varphi := \varphi'(0)$$

et

$$M_d\varphi(\xi) := d(\xi)\,\varphi(\xi) \ \text{ et } \ M_b\varphi(\xi) := b(\xi)\,\varphi(\xi)$$

et le système aura la forme d'un système bilinéaire à retard :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \mathcal{A}y(t) + v(t)By(t-r) & \text{for all } t > 0 \\ y_0 = \varphi \in \mathcal{C} \end{cases}$$

1.1.2 Résultats établis

La stabilisation des systèmes bilinéaires à retard est un problème d'intérêt pratique et théorique puisque l'existence d'un retard dans un système physique peut engendrer une instabilité ou une mauvaise performance. Dans cette thèse, on s'intéresse au problème de stabilisation d'une classe des systèmes bilinéaires à retard. Plus précisément, on détermine le comportement asymptotique de l'énergie, ensuite donner une estimation de la vitesse de décroissance de l'énergie vers 0.
Dans les prochains paragraphes de ce chapitre, nous énoncerons les résultats les plus importants que nous avons obtenus. Les détails seront fournis dans les prochains chapitres.

1.1.2.1 Stabilisation de systèmes bilinéaires à retard discret

Le problème de stabilisation a été considéré pour une classe de systèmes bilinéaires à retard décrit par :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + v(t)By(t-r) & \text{pour tout } t > 0 \\ y_0 = \varphi \in \mathcal{C} \end{cases} \tag{1.6}$$

où X est un espace de Hilbert réel ou complexe muni d'un produit scalaire $< ., . >$ et A est un opérateur linéaire $A : D(A) \subseteq X \to X$ générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$, B est un opérateur linéaire de X dans X, $v(t)$ est le contrôle et r un réel positif qui représente le retard que l'on suppose fini, φ est une fonction continue de $[-r, 0]$ vers X.
Nous considérons l'espace de Banach $\mathcal{C} := C([-r, 0]; X)$, des fonctions continues à valeurs dans X sur $[-r, 0]$ muni de la norme :

$$\|\varphi\|_{\mathcal{C}} = \sup_{-r\leq\theta\leq 0} \|\varphi(\theta)\|_X \text{ , pour tout } \varphi \in \mathcal{C}.$$

Pour toute fonction continue u de $[-r, +\infty)$ vers X et $t \in [0, +\infty)$, on définit la fonction u_t comme étant un élément de $\mathcal{C}$ donnée par :

$$u_t(\theta) = u(t+\theta) \text{ pour tout } \theta \in [-r, 0].$$

On se propose de construire un contrôle qui permet la stabilisation du système (1.6). Plus précisément, on montre que le contrôle :

$$v(t) = -\langle y(t), By(t-r)\rangle,$$

stabilise faiblement le système (1.6), en supposant que l'opérateur B est compact de X dans X et que pour tout $y \in X$,

$$\langle BS(t-r)y, S(t)y\rangle = 0 \quad \text{pour tout } t \geq r \Longrightarrow y = 0.$$

De plus, on montre que le système (1.6) est fortement stable si on suppose que l'opérateur B est borné et vérifiant la condition suivante : il existe $\delta > 0$ et $T > r$ tels que,

$$\int_r^T |\langle BS(s-r)\xi, S(s)\xi\rangle| \, ds \geq \delta \|\xi\|^2, \quad \text{pour tout } \xi \in X,$$

et nous avons l'estimation suivante

$$\|y(t)\| = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \text{ lorsque } t \longrightarrow +\infty$$

Nous supposons dans l'ensemble de cette section que l'espace d'état X peut être décomposé en :

$$X = X_u \bigoplus X_s$$

où X_u et X_s sont deux sous-espaces fermés de X, qui sont orthogonaux entre eux et invariants sous $S(t)$. Notons que $S(t)$ induit un C_0-semi-groupe $S_u(t)$ (respectivement, $S_s(t)$) sur X_u (respectivement, X_s). Soient $y \in X$ et $(y_s; y_u)$ l'unique couple de $X_s \times X_u$ tel que :

$$y = y_s + y_u.$$

On note par (H_1) et (H_2) les deux hypothèses suivantes :

$(\mathbf{H}_1)$ $BX^u \subseteq X^u$.

$(\mathbf{H}_2)$ $BX^s \subseteq X^s$.

Sous l'hypothèse $(\mathbf{H}_1)$, on considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{y}^u(t) = A^u y^u(t) + v(t) B^u y^u(t-r), \quad \text{pour tout } t > 0 \\ \\ y_0^u = \varphi^u \in C^u := C([-r, 0]; X^u) \end{cases} \tag{1.7}$$

avec $B^u = P^u B P^u$ et P^u est la projection orthogonale sur X^u.
Considérons le contrôle de type feedback suivant :

$$v(t) := -\langle y^u(t), B^u y^u(t-r)\rangle. \tag{1.8}$$

Avec le contrôle ci-dessus, le système (1.7) devient

$$\begin{cases} \dot{y}^u(t) = A^u y^u(t) + F(y_t^u), \quad \text{pour tout } t > 0 \\ \\ y_0^u = \varphi^u \in C^u \end{cases}$$

avec

$$\begin{array}{rccl} F: & C^u & \to & X^u \\ & \psi & \mapsto & -\langle \psi(0), B^u\psi(-r)\rangle B^u\psi(-r) \end{array}$$

D'abord, on montre que le système (1.7), contrôlé par le contrôle (1.8), admet une solution globale unique.
De plus, en supposant que les conditions ci-dessous sont vérifiées :

1. $S^u(t)$ est un semi-groupe de contractions,
2. $\dim X^u < +\infty$,
3. il existe $\delta, T > 0$ tels que :

$$\int_0^T |\langle B^u S^u(s)\xi, S^u(s)\xi\rangle| \, ds \geq \delta \|\xi\|^2, \quad \text{pour tout } \xi \in X^u. \tag{1.9}$$

on montre que le système (1.7) est fortement stable via le contrôle (1.8). De plus, on a l'estimation asymptotique suivante :

$$\|y^u(t)\| = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \text{ lorsque } t \longrightarrow +\infty.$$

En supposant que le semi-groupe $S^s(t)$ est exponentiellement stable, nous montrons l'existence de la solution globale du système (1.6), de plus nous fournissons une estimation exponentielle de la composante $y^s(t)$ de l'état $y(t)$ donnée par :

$$\|y^s(t)\| \leq R\exp(-\sigma t), \forall t \geq 0 \text{ (pour un certain } R, \sigma > 0). \tag{1.10}$$

En combinant les deux estimations précédentes de $y^u(t)$ et $y^s(t)$, nous obtenons le résultat de stabilisation du système (1.6).

Théorème 1.1.1 *Supposons que A génère un C_0-semi-groupe $S(t)$, et que $(\boldsymbol{H}_1)$ et $(\boldsymbol{H}_2)$ sont vérifiées. De plus, on suppose que :*

1. *$S^u(t)$ est un semi-groupe de contractions,*
2. $\dim X^u < +\infty$,
3. *l'estimation (1.9) est vérifiée,*
4. *$S^s(t)$ est exponentiellement stable.*

Dans le cas ou $\dim X^u = +\infty$, *on peut supposer (sans perte de généralité) que* $X^u = X$ *et* $X^s = (0)$ *Alors pour* $0 \leq r < \frac{\delta}{T\|B^u\|\|A^u\|}$, *le contrôle (1.8) stabilise fortement le système (1.6) et on a l'estimation asymptotique suivante :*

$$\|y(t)\| = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \text{ lorsque } t \longrightarrow +\infty.$$

Les résultats obtenus dans cette section ont fait l'objet de deux publications [34, 36].

1.1.2.2 Stabilisation partielle de systèmes bilinéaires non-homogènes

Cette section résume les résultats obtenus dans les deux articles [33, 35]. Considérons le système bilinéaire non homogène suivant :

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + u(t)(By(t) + b), & \forall t > 0 \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1.11}$$

où A est un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe linéaire de contractions $S(t)$ sur un espace de Hilbert X muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle$ et de norme correspondante $\|.\|$, $B : X \to X$ est un opérateur linéaire borné de X, b est un vecteur fixe, et $u(t)$ est un contrôle.
La notion de stabilisation partielle inclut la notion de stabilisation classique conventionnelle, et permet d'obtenir la stabilisation de certaines parties de l'état lorsque la stabilisation globale de l'état est impossible ou coûteuse.
Nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes de stabilisation partielle faible et forte du système (1.11). Un tel problème a été étudié pour les systèmes bilinéaires homogènes dans [64]. Notre but est de prolonger cette étude au cas des systèmes bilinéaires non-homogènes.
On considère le contrôle :

$$u(t) = -\rho \frac{\langle y(t), By(t) + b \rangle}{|\langle y(t), By(t) + b \rangle| + 1}, \quad (\rho > 0) \tag{1.12}$$

Le système (1.11) devient alors :

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + f(y(t)), & \forall t > 0 \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1.13}$$

avec

$$f(y) = -\frac{\rho \langle y, By + b \rangle}{|\langle y, By + b \rangle| + 1} (By + b), \quad \forall y \in X.$$

On note par Y l'espace des sorties qui est supposé un espace de Banach muni de la norme $\|.\|_Y$, et par $C \in \mathcal{L}(X, Y)$ l'opérateur de sortie.

L'objectif ici est d'étudier le problème de stabilisation partielle et globale du système (1.11). Dans un premier lieu, on montre que le contrôle (1.12) stabilise partiellement faiblement le système (1.11) lorsque l'opérateur de contrôle B ou le semi-groupe est compact et la condition suivante est satisfaite :

$$\forall y \in X : \langle BS(t)y + b, S(t)y \rangle = 0, \quad \forall t \geq 0 \Longrightarrow Cy = 0. \tag{1.14}$$

Une question naturelle qu'on peut se poser est la suivante.
Existe t-il des conditions nécessaires pour avoir la stabilisation partielle faible du système (1.11) ?
On a le résultat suivant :

Proposition 1.1.1 *On suppose que A génère un C_0-semi-groupe sur X, $C \in \mathcal{L}(X, Y)$, $B \in \mathcal{L}(X)$ et $b \in X$. Si le système (1.11) est partiellement faiblement stabilisable, alors pour tout $y \in X$, on a :*

$$BS(t)y + b = 0, \ \forall t \geq 0 \Longrightarrow \ CS(t)y \rightharpoonup 0, \ \textit{lorsque } t \to +\infty. \tag{1.15}$$

Ensuite, nous montrons que le système (1.11) est fortement stable.
Dans cette partie, on assume que l'espace d'état X peut être décomposé en :

$$X = X_1 \oplus X_2, \tag{1.16}$$

où X_1 et X_2 sont deux sous espaces fermés de H, orthogonaux entre eux, et invariants par $S(t)$. Alors $S(t)$ induit un C_0-semi-groupe $S_1(t)$ (respectivement, $S_2(t)$) sur X_1 (respectivement, X_2).

Alors, on a le théorème suivant :

Théorème 1.1.2 *On suppose que :*

1. *A est le générateur infinitésimale d'un C_0-semi-groupe linéaire de contractions $S(t)$ sur X,*
2. *B est un opérateur compact de X,*
3. *pour tout $y \in X$*

$$\langle BS(t)y + b, S(t)y \rangle = 0 \quad \forall t \geq 0 \Longrightarrow y = 0, \tag{1.17}$$

4. $\dim X_1 < +\infty$,
5. *$S_2(t)$ est exponentiellement stable.*

Alors, le contrôle (1.12) stabilise fortement globalement le système (1.11).

1.2 Préliminaires

Dans cette partie, nous présentons différents résultats classiques rencontrés dans la littérature qui s'avèrent nécessaires et fondamentaux dans la réalisation de ce travail. A la lumière de ces outils et techniques, nous avons été inspirés dans la formulation de nos hypothèses. Ces outils comprennent la théorie des semi-groupes, les résultats d'existence et d'unicité et de la régularité des solutions ainsi que des résultats de stabilisation de quelques classes de systèmes semi-linéaires.

1.2.1 Généralités sur les semi-groupes

La théorie des semi-groupes joue un rôle très important dans plusieurs disciplines mathématiques. On trouve beaucoup d'applications de cette théorie dans les domaines classiques comme la théorie des équations aux dérivées partielles ou des processus stochastiques issues des problèmes réels d'ingénierie et aussi dans la théorie du contrôle en dimension infinie. Dans cette section nous rappelons quelques résultats essentiels sur les semi-groupes. En général, la notion de semi-groupe généralise celle de la fonction exponentielle de A au cas où l'opérateur A est non borné sur un espace abstrait. Une telle généralisation est nécessaire afin d'étendre le concept d'une solution du problème de Cauchy. Dans ce chapitre nous nous intéressons essentiellement au cas important des C_0- semi-groupes dans un espace de Hilbert (Voir par exemple : [23, 66],...).
D'abord, on commence par donner une définition général d'un semi-groupe.

Définition 1.2.1 *([8])*
Soit X un espace de Hilbert. On appelle semi-groupe (généralement non-linéaire) sur X toute famille d'opérateurs continus $S(t) : X \to X$, $t \in \mathbb{R}$ avec

1. *$S(0) = Id_X$ où Id_X est l'identité sur X,*
2. *$S(t+s) = S(t)S(s)$, pour tout $t, s \in \mathbb{R}^+$.*

Si de plus on a

$$\|S(t)x - S(t)y\| \leq \|x - y\| \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}^+ \text{ et } x, y \in X$$

alors, $S(t)$ est dit un semi-groupe de contraction dans X.

La famille d'opérateur $(S(t))_{t\geq 0}$ est liée à un opérateur A qu'on introduit dans la définition suivante.

Définition 1.2.2 *On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ l'opérateur A défini par :*

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \tag{1.18}$$

pour tout $x \in X$ tel que la limite (1.18) existe.

On appelle alors domaine de A, noté $\mathcal{D}(A)$, l'ensemble des $x \in X$ pour lesquels la limite (1.18) existe i.e. :

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

Remarque 1.2.1 *Le générateur infinitésimal d'un semi-groupe est unique.(voir [23])*

1.2.1.1 C_0-Semi-groupes

Le but de cette partie, est de donner des propriétés des C_0-semi-groupes défini ci-dessous.

Définition 1.2.3 *Un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ est de classe C_0 où bien C_0-semi-groupe, on peut dire aussi que $(S(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu, si pour tout $t \geq 0$, on a $S(t) \in \mathcal{L}(X)$, et $\lim_{t\to 0^+} S(t)x = x$, pour tout $x \in X$.*

Remarque 1.2.2 *Si on remplace la dernière condition par $\lim_{t\to 0^+} \|S(t) - Id\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$, alors dans ce cas on dit que $(S(t))_{t\geq 0}$ est uniformément continu.*

Théorème 1.2.1 *[66]*
Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe sur X de générateur infinitésimal A. Alors, il existe deux constantes $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ telles que :

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \text{ pour tout } t \geq 0 \tag{1.19}$$

Dans le cas où $\omega = 0$ et $M = 1$ le C_0-semi-groupe généré par A est dit de contractions.

Les propriétés suivantes sont des relations liant un C_0-semi-groupe et son générateur infinitésimal.

Proposition 1.2.1 *[23]*
Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe sur X de générateur infinitésimal A. Alors pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ on a les propriétés suivantes :

1. $S(t)x \in \mathcal{D}(A)$ *et* $\int_0^t S(s)xds \in \mathcal{D}(A)$, *pour tout* $t \geq 0$.
2. $\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(s)xds = S(t)x$, *pour tout* $x \in X$.
3. $\frac{d}{dt}(S(t)x) = AS(t)x = S(t)Ax$, *pour tout* $x \in X$.
4. $\frac{d^n}{dt^n}(S(t)x) = A^nS(t)x = S(t)A^nx$, *pour tout* $x \in X$.
5. $S(t)x - x = \int_0^t S(s)Axds$, *pour tout* $t \geq 0$.
6. *pour tout* $n \geq 1$, $\mathcal{D}(A^n)$ *est dense dans* X *et* A *est fermé.*

Corollaire 1.2.1 *Si A est un opérateur générateur d'un C_0-semi-groupe $S(t)$, alors $\mathcal{D}(A)$ est dense dans X et A est un opérateur linéaire fermé.*

1.2.1.1.1 Les opérateurs m-dissipatifs sur X

Soit $(X, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-espace de Hilbert.

Définition 1.2.4 *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur linéaire dans X. On dit que :*

1. *A est dissipatif si :*

$$< Ay, y > \leq 0,\ \forall y \in \mathcal{D}(A). \tag{1.20}$$

2. *A est maximal si $\mathcal{R}(I - A) = X$.*

Remarque 1.2.3

1. *la relation (1.20) est équivalente à :*

$$\forall x \in \mathcal{D}(A), \lambda > 0, \|x - \lambda Ax\| \geq \|x\|. \tag{1.21}$$

2. *$(A, \mathcal{D}(A))$ est un opérateur dissipatif, alors $\forall \lambda > 0$ l'opérateur $(Id - \lambda A)$ est injectif.*
3. *Si A est dissipatif et $\forall \lambda > 0, Id - \lambda A$ est surjectif alors $(A, D(A))$ est maximal-dissipatif (ou m-dissipatif)*

Les opérateurs maximaux et dissipatifs possèdent des propriétés remarquables que nous allons rappeler.

1.2.1.1.2 Théorème de Hille-Yosida

Dans cette partie nous présentons un résultat concernant les C_0-semi-groupes. Il s'agit du théorème de Hille-Yosida qui permet de caractériser les opérateurs qui sont générateurs de C_0-semi-groupes. Il a été démontré pour la première fois indépendamment par Hille dans [38] et par Yosida dans [86] pour les C_0-semi-groupes de contractions. Quelques années plus tard, Feller dans [25], Miyadera dans [50], Phillips dans [67] donnent une preuve pour le cas général d'un C_0-semi-groupe.

D'aprés la proposition 1.2.1, si A est un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe sur X, alors A est fermé de domaine dense. Réciproquement, si A est fermé de domaine dense, il existe des conditions nécessaire et suffisante pour qu'il engendre un semi-groupe sur X, elles sont données par les deux théorèmes suivantes :

Théorème 1.2.2 *(Théorème de Hille-Yosida voir : [66])*
Un opérateur A (généralement non borné) génère un C_0-semi-groupe de contractions si et seulement si :

1. *A est fermé et $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$*
2. *L'ensemble résolvant de A, donné par*

$$\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{R} : (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\right\} \tag{1.22}$$

contient $]0, +\infty[$ et pour tout $\lambda > 0$ on a :

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda} \tag{1.23}$$

Remarque 1.2.4 *Le point 2 du théorème précédent est équivalent à : $(A, \mathcal{D}(A))$ est m-dissipatif*

Le théorème suivant généralise celui de Hille-Yosida dans le cas des semi-groupes qui ne sont pas de contractions

Théorème 1.2.3 *(Théorème de Feller-Miyadera-Phillips, voir [23])*
Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur linéaire dans un espace de Banach X, $\omega, M \in \mathbb{R}$ tels que $M \geq 1$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $(A, \mathcal{D}(A))$ *génère un* C_0*-semi-groupe* $(S(t))_{t\geq 0}$ *vérifiant :*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \text{ pour tout } t \geq 0$$

2. A *est fermé,* $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ *et pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$ *avec* $\Re(\lambda) > \omega$ *on a* $\lambda \in \rho(A)$ *et*

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{M}{(\Re(\lambda) - \omega)^{-n}}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

La remarque suivante permet de déterminer le semi-groupe dans le cas où l'opérateur A est borné.

Remarque 1.2.5 *Si* $A \in \mathcal{D}(A)$ *est un opérateur borné, alors le semi-groupe générateur de* A *est donné par :*

$$S(t) = e^{At} = \sum_{k\geq 0} \frac{A^k t^k}{k!}$$

Exemple 1.2.1 *On suppose que* Ω *est un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$*, de frontière* $\partial\Omega$ *de classe* $C^2(\Omega)$*, et soit* $X = L^2(\Omega)$ *muni du produit scalaire usuel* $< y, z >= \int_\Omega y(x) z(x) dx$*. On considère sur* X *l'équation de la chaleur suivante :*

$$\begin{cases} \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \Delta y(x,t) + f(x,t), & \forall (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ y(x,t) = 0, & \forall (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \\ y(x,0) = 0 & \forall x \in \Omega \end{cases}$$

Pour se ramener au cadre abstrait, il suffit de poser

$$\mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \text{ et } Ay = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}.$$

Alors, on a les résultats suivants :

L'opérateur A est maximal dissipatif.

En effet, en utilisant la formule de Green on a pour tout $y \in \mathcal{D}(A)$

$$\begin{aligned} < y, \Delta y > &= \int_\Omega y(x,t) \Delta y(x,t) dx \\ &= -\int_\Omega |\nabla y(x,t)|^2 \end{aligned}$$

d'où la dissipativité de l'opérateur A. Il reste à montrer que A est maximal. En effet, la théorie des équations elliptique linéaire permet de montrer que pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe unique solution $\mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ qui vérifie l'équation $y' - \Delta y = f$ d'où le résultats.

Remarque 1.2.6 *En utilisant le Théorème de Hille-Yosida on montre que l'opérateur Δ génère un C_0-semi-groupe de contraction.*

Le théorème suivant assure la décomposition canonique de l'espace d'état en somme directe des deux espaces cette décomposition est due à Foguel [26] et Foias et Nagy [56].

Théorème 1.2.4 *On suppose que $(S(t))_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe de contraction dans X, alors X peut être décomposé en une somme directe $X = X_{cnu} \bigoplus X_u$ où les sous-espaces X_{cnu} et X_u sont invariant par $(S(t))_{t\geq 0}$. De plus on a :*

1. *La restriction de $(S(t))_{t\geq 0}$ à X_u est un semi-groupe unitaire.*
2. *la restriction de $(S(t))_{t\geq 0}$ à $X = X_{cnu}$ est un semi-groupe complètement non unitaire et faiblement stable,*
3. *La décomposition est unique et X_u peut être caractérisé par*

$$X_u = \{x \in X : \|S(t)x\| = \|S^*(t)x\| = \|x\|, \forall t \geq 0\} = \overline{K_u}$$

avec $K_u = X_u \cap \mathcal{D}(A)$.

1.2.1.2 Semi-groupes non-linéaires

Soit X un espace de Hilbert muni de la norme $\|.\|$.
Ici, On donne quelques propriétés concernant les semi-groupes non linéaires. D'abord, dans le cas où le semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ généré par un opérateur A est linéaire on a $AT(t) = T(t)A, \forall t \geq 0$ sur $\mathcal{D}(A)$

Remarque 1.2.7 *En général, dans le cas des semi-groupes non-linéaire on a : $AT(t) \neq T(t)A, \forall t > 0$, (voir : [43])*

On définit les ensembles suivants :

Définition 1.2.5 *[8]*
Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe (généralement non linéaire) sur X.

1. *On appelle orbite positive issue de y_0 l'ensemble*

$$\mathcal{O}^+(y_0) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}^+} S(t)y_0$$

2. *L'ensemble ω-limite fort de y_0 (qui peut être vide) est donné par :*

$$\Omega(y_0) = \{y \in X : \exists (t_n)_n \to +\infty; S(t_n) y_0 \to y lorsque\ n \to +\infty\}$$

3. *L'ensemble ω-limite faible de y_0 (qui peut être vide) est définit par :*

$$\Omega_w(y_0) = \{y \in X : \exists (t_n)_n \to +\infty; S(t_n) y_0 \rightharpoonup y\ lorsque\ n \to +\infty\}$$

Définition 1.2.6 *[8]*
Un sous ensemble Ω de X est dit positivement invariant par $S(t)$ si $S(t)\Omega \subset \Omega$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, et il est dit invariant si $S(t)\Omega = \Omega$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Le théorème suivant donne une condition suffisante qui fournit des informations sur les ensembles ω-limites.

Théorème 1.2.5 *[8]*

1. *Si $\mathcal{O}^+(y)$ est pré-compact, alors $\Omega(y)$ est non vide et invariant dans X.*
2. *Si $S(t)$ est séquentiellement faiblement continu sur X (i.e., $S(t) y_n \rightharpoonup S(t) y_n$ si $y_n \to y$), alors $\mathcal{O}^+(y))$ est non vide, borné et $\Omega_w(y)$ est invariant dans X.*

Remarque 1.2.8 *Le théorème précédent est particulièrement utile pour l'étude des semi-groupes non linéaires de type paraboliques ou hyperboliques ayant des orbites $\mathcal{O}^+(y)$ pré-compact.*

1.2.2 Équation d'évolution semi-linéaire

1.2.2.1 Résultats d'existence et de régularité de la solution de systèmes semi-linéaires sans retard

Nous rappelons quelques résultats d'existence et d'unicité de la solution d'une classe d'équations d'évolutions semi-linéaires.
Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + f(t, y(t)), \qquad \forall t > t_0 \\ \\ y(t_0) = y_0 \in X \end{cases} \tag{1.24}$$

où A est un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $S(t)$ dans un espace de Hilbert réel X muni du produit scalaire $< .,. >$ et de la norme correspondante $\|.\|$, $f : \mathbb{R} \times X \to X$ est une fonction donnée et y_0 représente l'état initial. On rappelle quelques définitions de la solution ("Mild", faible, classique et forte) du système (1.24)

Définition 1.2.7 *Une solution continue y de l'équation intégrale*

$$y(t) = S(t - t_0) y_0 + \int_{t_0}^{t} S(t - s) f(s, y(s)) ds$$

est appelée solution ("mild" solution en anglais) du problème (1.24).

Nous commençons par le résultat classique suivant qui assure l'existence et l'unicité du "mild" solution de (1.24) pour les fonctions continues de Lipschitz.

Théorème 1.2.6 *[66]*
Soient $t_1 > t_0$ et $f : [t_0, t_1] \times X \to X$ une fonction continue en t sur $[t_0, t_1]$ et Lipschitzienne sur X. Alors pour tout $y_0 \in X$ le problème (1.24) admet une unique solution $y \in C([t_0, t_1]; X)$. De plus, la fonction $y_0 \longmapsto y$ est Lipschitzienne continue de X vers $C([t_0, t_1]; X)$.

On rappelle la définition d'une application localement Lipschitzienne.

Définition 1.2.8 *On dit que f est localement Lipschitzienne en y uniformément en t sur un intervalle borné si et seulement si, pour tout $t_0, c \geq 0$, il existe une constante L_{c,t_0} telle que pour tout $u, v \in X$ avec $\|u\| \leq c, \|v\| \leq c$ et $t \in [0, t_0]$ on a*

$$\|f(t, u) - f(t, v)\| \leq L_{c,t_0} \|u - v\|.$$

Dans le théorème ci-dessus, si la fonction f est uniformément Lipschitzienne alors l'existence d'une solution globale du problème (1.24) est assurée. Il semble naturel de se poser la question suivante "Si on assume que f est localement lipschitzienne en y et uniformément en t sur un intervalle borné, a t-on l'existence global du "mild" solution ?

Théorème 1.2.7 *[66]*
Soit $f : [0, +\infty[\times X \to X$ une fonction continue en t pour tout $t \geq 0$ et localement Lipschitzienne en y, uniformément en t sur un intervalle

borné. Si A génère un C_0-semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ sur X alors pour tout $y_0 \in X$ il existe $t_{max} > 0$ tel que (1.24) admet unique solution y sur $[0, t_{max}[$. De plus, si $t_{max} < \infty$ alors $\lim_{t \to t_{max}} \|y(t)\| = +\infty$.

On rappelle la définition de la solution faible du système (1.24).

Définition 1.2.9 *[8]*
Soit $t_1 > t_0$ et $f \in L^1(t_0, t_1; X)$. Une fonction $y \in C([t_0, t_1]; X)$ est appelée solution faible de (1.24) sur $[t_0, t_1]$ si il vérifie :

1. $y(t_0) = y_0$,
2. *Si $\omega \in \mathcal{D}(A^*)$ la fonction $t \longmapsto < y(t), \omega >$ est absolument continue sur $[t_0, t_1]$ et satisfait :*

$$\frac{d}{dt} < y(t), \omega > = < y(t), A^*\omega > + < f(t), \omega >, p.p\ t \in [t_0, t_1].$$

Le théorème suivant permet de caractériser la solution faible du système (1.24).

Théorème 1.2.8 *[8]*
Une fonction $y : [t_0, t_1] \to X$ est une solution faible de (1.24) sur $[t_0, t_1]$ si et seulement si, $f(., y(.)) \in L^1(t_0, t_1; X)$ et y vérifie la formule de la variation de la constante suivante :

$$y(t) = S(t - t_0) y_0 + \int_{t_0}^{t} S(t - s) f(s, y(s)) ds, \text{ pour tout } t \in [t_0, t_1]$$

On peut alors se demander : "à quelles conditions sur f et y obtient-on une solution faible du système (1.24) ?".
Le résultat suivant répond à cette question.

Théorème 1.2.9 *[18]*
Soit $f : \mathbb{R} \times X \to X$ une fonction continue en t et localement Lipschitzienne en y. Alors pour tout $y_0 \in X$ le système (1.24) admet unique solution faible y défini sur un intervalle maximal $[t_0, t_{max}[$ avec $t_{max} > t_0$, $y \in C([t_0, t_{max}[; X)$. De plus, si $y_n \in C([t_0, t_{max}[; X)$ une suite de solutions faibles du système (1.24) telle que $y_n(0) \to y_0$ lorsque $n \to +\infty$, alors $y_n \to y$ lorsque $n \to +\infty$ dans $C([t_0, t_{max}[; X)$ avec y est une solutions faible du système (1.24) satisfaisant $y(0) = y_0$. De plus, si $t_{max} < +\infty$ alors $\lim_{t \to t_{max}} \|y(t)\| = \infty$.

Définition 1.2.10 *Soit $t_1 > t_0$ et $f \in L^1(t_0, t_1; X)$. Une fonction y est appelée solution classique de (1.24) sur $[t_0, t_1[$ si il vérifie les conditions suivantes :*

1. *$y(t) \in \mathcal{D}(A)$ pour tout $t \in [t_0, t_1]$,*
2. *$y \in C([t_0, t_1[\,; X) \cap C^1(]t_0, t_1[\,; X)$,*
3. *y vérifie le système (1.24).*

Définition 1.2.11 *[66]*
On appelle solution forte du problème à valeur initiale (1.24) toute fonction y différentiable presque partout sur $[0, T]$ et telle que $y_0 \in L^1(0, T; X)$, $y(0) = y_0$ et $y'(t) = Ay(t) + f(t, y(t))$ presque partout sur $[0, T]$.

Remarque 1.2.9
1. *Toute solution forte est nécessairement faible, mais la réciproque est fausse en général.*
2. *Toute solution classique est une solution faible, mais la réciproque est fausse en général.*

Maintenant, nous rappelons un résultat qui permet de caractériser le comportement asymptotique de la solution du système (1.24).

Théorème 1.2.10 *[8]*
Soit A un générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction $S(t)$ dans un espace de Hilbert X. Supposons que $f : X \to X$ satisfait les hypothèses suivantes :

1. *f est localement Lipschitzienne,*
2. *$\xi_n \rightharpoonup \xi \implies f(\xi_n) \to f(\xi)$, $n \to +\infty$.*
3. *$< f(\xi), \xi > \leq 0, \forall \xi \in X$.*

Alors, pour tout $y_0 \in X$, (1.24) admet une unique solution faible $y(y_0, t)$ sur $\mathbb{R}^+$. De plus $T(t) y_0 = y(y_0, t)$ est un semi-groupe non-linéaire dans X, $\Omega_w(y_0)$ est non vide est invariant par $T(t)$, pour tout $y_0 \in X$ et $y \in \Omega_w(y_0)$, on a :

$$< T(t) y, f(T(t) y) >= 0, \forall t \in \mathbb{R}^+ \tag{1.25}$$

de plus, si l'unique solution de l'équation précédente est $y = 0$, alors $y(t, y_0) \rightharpoonup 0$, lorsque $t \to +\infty$.

1.2.2.2 Résultats d'existence et de régularité de la solution des systèmes à retard

Le long de ce paragraphe, on suppose que X est un espace de Banach sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$) et que r est une constante positive.
Soit $C=C\left([-r,0];X\right)$ l'espace de Banach des fonctions continues à valeur dans X sur $[-r,0]$ munit de la norme $\|.\|$. Pour tout nombre réel tels que $a\leq b$ et toute fonction continue $u:[a-r,b]\to X$, u_t désigne l'élément de $\mathcal{C}$ donné par $u_t(q)=u(t+q)$ pour tout $q\in[-r,0]$.

1.2.2.2.1 Cas des systèmes non-autonomes

Maintenant, nous rappelons quelques résultats classiques d'existence pour certaines classes de systèmes semi-linéaires non-autonomes.
Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt}=Ay(t)+F(t,y_t), & t>a \\ \\ y_a=\varphi\in\mathcal{C}. \end{cases} \tag{1.26}$$

Nous commençons par un résultat d'existence du (mild) solution du système (1.26).

Théorème 1.2.11 *[78]*
Soit $F:[a,b]\times\mathcal{C}\to X$ une fonction continue satisfaisant la condition de Lipschitz suivante :

$$\left\|F(t,\xi)-F\left(t,\tilde{\xi}\right)\right\|_X\leq L\left\|\xi-\tilde{\xi}\right\|_{\mathcal{C}},\ \text{pour tout } t\in[a,b],\ \text{et } \xi,\tilde{\xi}\in\mathcal{C}$$

où L est une constante positive. Supposons que $(S(t))_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X satisfaisant $\|S(t)\|\leq e^{\omega t}$, pour tout $t\geq 0$, avec ω une constante. Alors pour tout $\varphi\in\mathcal{C}$ donné, il existe une fonction unique solution du système (1.26) donnée par :

$$\begin{cases} y(t)=S(t-a)\varphi+\int_a^t S(t-s)F(s,y_s)\,ds & t>a \\ \\ y_a=\varphi\in\mathcal{C}. \end{cases} \tag{1.27}$$

Le but du théorème suivant est de donner des conditions suffisantes qui permettent d'assurer l'existence d'une solution forte du système (1.26).

Théorème 1.2.12 *[78]*
Supposons que les hypothèses du Théorème 1.2.11 sont satisfaites, et que $F : [a,b] \times \mathcal{C} \to X$ *est continument différentiable et qu'il existe* γ, β *deux constantes positives telles que :*

$$\left\| D_t F(t,\xi) - D_t F\left(t,\tilde{\xi}\right) \right\| \leq \beta \left\| \xi - \tilde{\xi} \right\|_{\mathcal{C}}$$

et

$$\left\| D_\xi F(t,\xi) - D_\xi F\left(t,\tilde{\xi}\right) \right\| \leq \beta \left\| \xi - \tilde{\xi} \right\|_{\mathcal{C}}$$

pour tout $t \in [a,b]$ *et* $\xi, \tilde{\xi} \in \mathcal{C}$, *où* $D_t F(t,\xi)$ *et* $D_\xi F(t,\xi)$ *désignent les dérivées de* $F(t,\xi)$ *par rapport à* t *et* ξ *respectivement. Alors, pour tout* $\varphi \in \mathcal{C}$ *tels que*

$$\varphi(0) \in \mathcal{D}(A),\ \dot{\varphi} \in \mathcal{C} \text{ et } \dot{\varphi}\left(0^-\right) = A\varphi(0) + F(a,\varphi)$$

Alors (1.26) admet une solution classique.

1.2.2.2.2 Cas des systèmes autonomes

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + F(y_t), & t > a \\ \\ y_a = \varphi \in \mathcal{C}. \end{cases} \tag{1.28}$$

On note par (K1) et (K2) les hypothèses suivantes :
$(K1)$ A génère un C_0-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés ;
$(K2)$ $F : \mathcal{C} \to X$ est localement Lipschitzienne continue, i.e., pour tout $R > 0$ il existe une constante $L(R) > 0$ telle que $\|F(\varphi) - F(\xi)\| \leq L(R)\|\Phi - \xi\|$ si $\|\Phi\|, \|\xi\| \leq R$. On a le théorème suivant :

Théorème 1.2.13 *[84] Supposons que les hypothèses(K1)-(K2) sont vérifiées. Alors on a :*

1. *pour tout* $\varphi \in \mathcal{C}$, *il existe un intervalle maximal d'existence* $[-r, T_\varphi)$ *et une unique solution (mild)* $y(t,\varphi)$ *du système (1.28) défini sur* $[-r, T_\varphi)$ *avec* $T_\varphi = +\infty$ *ou bien* $\lim\limits_{t \to T_\varphi^-} \|y(t,\varphi)\| = +\infty$.
2. *De plus,* $y(t,\varphi)$ *est une fonction continue par rapport à* φ, *dans le sens suivant : si* $\varphi \in \mathcal{C}$ *et* $t \in [0, T_\varphi)$, *alors il existe deux constantes*

positives L et ϵ telles que pour tout $\xi \in \mathcal{C}$ avec $\|\varphi - \xi\|_{\mathcal{C}} < \epsilon$ et $T_\xi \leq T_\varphi$ on a :

$$\|y(s,\varphi) - y(s,\xi)\| \leq L \|\varphi - \xi\|_{\mathcal{C}}, \forall s \in [-r, T_\xi]$$

3. *Si F est différentiable et sa dérivé F' est localement Lipschitzienne et continue, $\varphi \in \mathcal{C}$ tel que $\varphi(0) \in \mathcal{D}(A)$, $\varphi(0) \in \mathcal{C}$ et $\dot{\varphi}^-(0) = A\varphi(0) + F(\varphi)$, alors pour tout $t \in [0, T_\varphi)$, on a $y(t,\varphi) \in \mathcal{D}(A)$, et la fonction $t \in [0, T_\varphi] \to y(t,\varphi) \in X$ est continument différentiable et satisfaisant (1.28).*

1.2.3 Résultats de stabilisations

1.2.3.1 Problème de stabilisation de systèmes bilinéaires homogènes

Dans cette partie, nous considérons le cas des systèmes bilinéaires homogènes distribués. Ces systèmes constituent une première généralisation des systèmes non-linéaires. Nous allons discuter la question d'existence ainsi que le problème de stabilisation selon certains travaux issues de la littérature. l'un des principaux résultats sur le comportement asymptotique de l'état de cette classe est due à Ball et Slemrod ([8]).
Considérons le système bilinéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + u(t)By(t) \qquad t > t_0 \\ \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.29}$$

où X est un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $< ., . >$ et A est un opérateur linéaire $A : D(A) \subseteq X \to X$ générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$, B est un opérateur linéaire de X dans X et $u(t)$ est le contrôle.
La définition suivante concerne la stabilisabilité faible et forte du système (1.29).

Définition 1.2.12 *Le système (1.29) est dit faiblement (respectivement. fortement) stabilisable si il existe un contrôle $v(t) = v(y(t))$ tel que la solution de (1.29) satisfait :*

1. *Pour tout y_0, il existe une unique solution faible $y(t)$ de (1.29) définie pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.*
2. *0 est un point d'équilibre stable au sens de Liapunov du système (1.29).*
3. *Pour tout $y_0 \in X$, $y(t) \to 0$ (respectivement. $y(t) \rightharpoonup 0$), quand $t \to +\infty$.*

Définition 1.2.13 *Le système (1.29) est dit exponentiellement stabilisable, si il existe un contrôle $u(t) = f(y(t)))$ tel que la solution de (1.29) satisfait :*
Pour tout $y_0 \in X$, il existe $M(y_0)$, $\sigma(y_0) > 0$ tel que l'unique solution faible $y(t)$ de (1.29) partant de y_0 vérifie :

$$\|y(t)\| \leq Me^{-\sigma t}, \forall t \geq 0. \tag{1.30}$$

Le système (1.29) est dit uniformément exponentiellement stabilisable, si (1.30) est vérifiée pour des σ et M, indépendant de y_0.

Dans ce qui suit, nous donnons des conditions suffisantes sous lesquelles le système (1.29) est globalement stable par une famille de contrôles non linéaires.

1.2.3.1.1 Stabilisation faible des systèmes bilinéaires homogènes

Une approche naturelle pour la stabilisation est de dériver (formellement) l'énergie $\|y(t)\|$ le long des trajectoires de (1.29), ce qui permet d'obtenir :

$$\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 = 2\Re\left(< Ay(t), y(t) >\right) + 2\Re\left(v(t) < y(t), By(t) >\right).$$

On suppose que A est dissipatif, alors on peut choisir le contrôle quadratique $v(t) = - < y(t), By(t) >$ qui permet d'obtenir l'inégalité de dissipation de l'énergie suivante :

$$\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 \leq -2 < y(t), By(t) >^2 .$$

Théorème 1.2.14 *[8]*
On suppose que A génère un C_0-semi-groupe de contraction et $B : X_\omega \to$

X (avec X_ω est un espace de Hilbert muni de la topologie faible) un opérateur compact tel que :

$$\forall \Phi \in X : \quad < S(t)\Phi, BS(t)\Phi >= 0, \ t \in \mathbb{R}^+ \implies \Phi = 0$$

Alors (1.29) est faiblement stablisable par le contrôle quadratique

$$u(t) = - < By(t), y(t) > \tag{1.31}$$

Preuve 1.2.1 Le système (1.29) contrôlé par (1.31), s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + f(y(t)), & t > t_0 \\ \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.32}$$

avec $f(\xi) = -\langle B\xi, \xi \rangle$.
Soit $c \geq 0$ et $u, v \in X_\omega$ avec $\|u\| \leq c, \|v\| \leq c$. On a :

$$\begin{aligned} \|f(u) - f(v)\| &\leq \|< Bv - Bu, v > Bv\| + \|< Bu, v - u > Bv\| \\ &\quad + \|< Bu, u > (Bv - Bu)\|, \end{aligned}$$

alors

$$\|f(u) - f(v)\| \leq 3c^2 \|B\|^2 \|u - v\|,$$

f est localement Lipschitzienne avec $L_C = 3\|B\|^2 c^2$ (puisque B est borné). Soit $(\xi_n)_n$ une suite d'éléments de X_ω telle que $\xi_n \to \xi$, lorsque $n \to +\infty$, avec $\xi \in X$. Puisque B est séquentiellement faiblement continu, alors $< B\xi_n, \xi_n > \to < B\xi, \xi >$, et $B\xi_n \to B\xi$ lorsque $n \to +\infty$ d'où f est séquentiellement faiblement continu. Soit $\xi \in X$, on a :

$$< f(\xi), \xi >= - < B\xi, \xi > \leq 0.$$

Alors f satisfait les conditions du Théorème 1.2.10 ce qui nous assure l'existence d'une solution faible $y(t, y_0)$ du système (1.29), et $T(t)y_0 = y(t, y_0)$ définit un semi-groupe dans X et $\Omega_w \neq \emptyset$. Soit $\xi \in X$, et $t \in \mathbb{R}^+$ on a $< T(t)\xi, f(T(t)) >= 0$ alors $< T(t)\xi, BT(t)\xi >= 0$ d'ou $f(T(t)\xi) = 0$. En appliquant la formule de la variation de la constante on a :

$$e^{tA}\xi = T(t)\xi$$

Or on a $< T(t)\xi, f(T(t)\xi) >= 0$ alors $< e^{tA}\xi, Be^{tA}\xi >= 0$. En utilisant le Théorème 1.2.10, alors $\xi = 0$, d'où

$$y(t, y_0) \rightharpoonup 0 \text{ lorsque } t \to 0$$

Remarque 1.2.10 *Ce problème a été étudié dans le cas* $X = \mathbb{R}^n$ *par Jurdjevic et Quinn [40], et Slemrod [73].*

1.2.3.1.2 Applications aux équations hyperboliques

Soient V un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire $< ., . >_V$, P un opérateur linéaire auto-adjoint, défini positif sur V et telle que P^{-1} est un opérateur compact. $V_P = \mathcal{D}\left(P^{\frac{1}{2}}\right)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$< x_1, x_2 >_P = < P^{\frac{1}{2}} x_1, P^{\frac{1}{2}} x_2 >_V$$

On considère l'équation abstraite d'onde suivante :

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + Py(t) + u(t)\, y(t) = 0 \tag{1.33}$$

où $u(t)$ est un contrôle réel. On munit l'espace $X = V_P \times V$ du produit scalaire :

$$< (x_1, y_1), (x_2, y_2) >_X = < x_1, x_2 >_P + < y_1, y_2 >_V,$$

qui est un espace de Hilbert. Posons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -P & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -I & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(P) \times V_P$$

A est anti-adjoint et l'injection $V_P \hookrightarrow V$ est compact, ce qui implique que $B : X \to X$ est compact. Le système (1.33) peut s'écrire sous la forme de (1.29) dans X.

Théorème 1.2.15 *[8]*
Le système (1.33) est faiblement stabilisable par $u(t)$ *si et seulement si les valeurs propres de* P *sont simples.*

1.2.3.2 Stabilisation forte de systèmes bilinéaires homogènes

Dans cette partie on va rappeler quelques résultats concernant la stabilisabilité forte des systèmes bilinéaires (1.29). On suppose que :
(H1) : $(\lambda Id - A)^{-1}$ est compact dans X pour tout $\lambda > 0$.
(H2) : B un opérateur auto-adjoint tel que $< Bx, x >$ à une signe constante pour tout $x \in X$, et soient :

$$M = \left\{ x \in X : < Be^{tA}x, e^{tA}x >= 0, \forall t \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

et

$$N = \left\{ x \in \mathcal{D}(A) :< Ae^{tA}x, e^{tA}x >= 0, \forall t \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

On a le théorème suivant :

Théorème 1.2.16 *[14] On suppose que les hypothèse (H1)-(H2) sont vérifiées et que*

$$M \cap N = \{0\}.$$

Alors le contrôle

$$u(t) = -\rho < By(t), y(t) >, \text{ avec } \rho > 0.$$

stabilise fortement le système (1.29).

La proposition suivante répond au problème de stabilisation (1.29) sous contrainte de saturation de la forme

$$u(t) = -\rho \frac{< By(t), y(t) >}{1 + |< By(t), y(t) >|} \text{ pour tout } \rho > 0 \tag{1.34}$$

Proposition 1.2.2 *[14]*
On suppose que les hypothèses (H1)-(H2) sont vérifiées et que $M \cap N = \{0\}$. Alors le contrôle (1.34) stabilise fortement le système (1.29).

Remarque 1.2.11 *Les deux résultats précédentes peuvent être déduits de la théorie standard des semi-groupes de contraction non-linéaire générés par les opérateurs monotones maximaux en utilisant le principe d'invariance de Lasalle (voir [8]).*

L'objectif de résultat suivant est donner une estimation asymptotique de l'état stabilisé.

Théorème 1.2.17 *[9]*
Soit $S(t)$ un semi-groupe de contraction, $B \in \mathcal{L}(X)$ et borné. On suppose de plus que la condition :

$$\int_0^T |< BS(t)y, S(t)y >| dt \geq \delta \|y\|^2, \ (\delta, T > 0) \tag{1.35}$$

le contrôle quadratique

$$u(t) = - < y(t), By(t) >, \tag{1.36}$$

stabilise fortement le système (1.29) avec une estimation asymptotique de la forme :

$$\|y(t)\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \text{ quand } t \to +\infty$$

Remarque 1.2.12 *Le résultat précédent s'étend au cas d'un opérateur de contrôle non linéaire localement Lipschitzienne voir [61].*

1.2.3.3 Problème de stabilisation de systèmes bilinéaires non-homogènes

Le problème de stabilisation des systèmes non-homogènes a fait l'objet de nombreux travaux on peut citer a titre d'exemple [3, 11, 14, 22].
Dans cette partie, nous rappelons quelques résultats concernant le problème de stabilisation des systèmes bilinéaires non-homogènes suivant :

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + u(t)(By(t) + b) \qquad t > t_0 \\ \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.37}$$

où X est un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $< ., . >$ et A est un opérateur linéaire $A : D(A) \subseteq X \to X$ générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$, B est un opérateur linéaire borné de X dans X et $u(t)$ est le contrôle et b un vecteur de X.
On suppose de plus les hypothèses suivantes :
(H1) : A est anti-adjoint ($A^* = -A$).
(H2) : B un opérateur anti-adjoint ($B^* = -B$).
(H3) : $b \in D_0 = \cap_{k\geq 0}\mathcal{D}\left(A^k\right)$.
Le résultat suivant concerne la stabilisation du système (1.37) via le contrôle suivant :

$$u(t) = - < b, y(t) > .$$

Théorème 1.2.18 *[11]*
On suppose que les hypothèse (H1),(H2) et (H3) sont vérifiées et que le sous-espace engendré par $\left\{b, Ab, ..., A^k b, ...\right\}$ est dense dans X, alors le contrôle

$$u(t) = - < b, y(t) >,$$

stabilise faiblement le système (1.37).

Exemple 1.2.2 *[11]*

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + u(t)(By(t) + b), & t > t_0 \\ \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.38}$$

où $X = L^2(R)$ désigne l'espace de Hilbert de toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont de carré intégrables i.e :

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{R}} f^2(x)\,dx < +\infty$$

Nous savons que $A = \frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2}$ est un opérateur anti-adjoint dans X et $\mathcal{D}(A) = H^1(R)$ avec

$$H^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \frac{\partial f(t)}{\partial t} \in L^2(\mathbb{R}) \right\}$$

On définit l'opérateur B par :

$$\begin{array}{lll} B : L^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & B(f) = sin(x) f(-x) \end{array}$$

on remarque que B est un opérateur linéaire borné et anti-adjoint. On note par $b(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$, on remarque aussi que toutes ses dérivés appartient à $H^1(R)$. Alors le système (1.38) est faiblement stabilisable via le contrôle en feedback suivant :

$$u(t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} y(x,t)\,dx, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Dans le cas où l'opérateur A ne vérifie pas la condition (H1), le théorème suivant assure la stabilisation du système (1.29) en ajoutant la condition suivante que l'on note (H4).

(H4) : A opérateur linéaire fermé de X dans X, de domaine dense et il existe $\lambda \geq 0$ tel que $A + \lambda I$ est anti-adjoint (où I désigne l'identité). Alors on a le théorème suivant :

Théorème 1.2.19 *[22]*

Sous les hypothèse (H2)-(H4) si,

1. *$b \in \mathcal{D}\left((A^*)^k\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$,*
2. *le sous-espace engendré par $\left\{b, Ab, ..., A^k b, ...\right\}$ est dense dans X.*

Alors le système (1.29) est faiblement sabilisable par le contrôle

$$u(t) = - < b, y(t) > .$$

Exemple 1.2.3 *On considère le système suivant :*

$$\begin{cases} \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} - \lambda I\right) y(x,t) + u(t) \left(sin(x)\, y(t,-x) + e^{\frac{-x^2}{2}}\right), \qquad t > t_0 \\ \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.39}$$

le système aura la forme (1.37) en posant :

$$X = L^2(R),\ A = \frac{\partial}{\partial x} - \lambda I d,\ \mathcal{D}(A) = H^1(\mathbb{R})\ et\ b(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

et

$$B : X \to X$$

défini par :

$$B(f) = sin(x)\, f(-x).$$

Alors le système (1.39) est stabilisable via le contrôle en feedback suivant :

$$u(t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} y(x)\, dx.$$

Le résultat suivant est dû a Bounit (voir : [12]), il a pour but la stabilisation forte du système (1.37) via un contrôle borné sous un certain nombre de conditions suffisantes :
On considère les hypothèses suivantes :
(H5) : A génère un C_0-semi-groupe de contraction.
(H6) : Il existe $\lambda > 0$ tel que $R(A) = (\lambda I d - A)^{-1}$ est compact.
On considère aussi les deux ensembles suivants :

$$M = \left\{x \in X :< BS(t)\, x + b, S(t)\, x >= 0,\ \forall t \in \mathbb{R}^+\right\}$$

et

$$N = \left\{x \in \mathcal{D}(A) :< AS(t)\, x, S(t)\, x >= 0,\ \forall t \in \mathbb{R}^+\right\}$$

Si le C_0-semi-groupe généré par A est de contraction alors d'après le Théorème 1.2.4, X peut être décomposé en une somme directe X_u et X_{cnu} et on a le résultat suivant :

Théorème 1.2.20 *On suppose que $(S(t))_{t\geq 0}$ est compact et de contraction. Alors $M \cap X_u = \{0\}$ si et seulement si*

$$u(t) = -\rho \frac{< Bx + b, x >}{1 + < Bx + b, x >^2}$$

stabilise fortement le système (1.37).

1.2.3.4 Problème de stabilisation de systèmes bilinéaires à retard en dimension finie

Les équations fonctionnelles à retard ont des applications dans plusieurs domaines notamment en génie électronique, en biologie, en mécanique,... où la transmission de l'information et de la réponse d'un système de contrôle ne se fait pas instantanément. Il convient donc de faire une étude qui puisse nous permettre de décrire le système dynamique avec mémoire ou des systèmes dynamiques avec réactions à retard ou avec un décalage de temps. Plusieurs auteurs (voir par exemple les références [32, 84, 81]) ont mis en évidence l'importance des systèmes à mémoire dans plusieurs domaines scientifiques. On sait que les retards dans le temps conduisent souvent à des mauvaises performances et à l'instabilité de nombreux processus physiques.
Dans ce paragraphe introductif, nous présenterons quelques résultats de stabilisation des systèmes bilinéaires à retard constant en dimension finie.
On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + u(t)(By(t-r)), & t > t_0 \\ \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.40}$$

Où $y \in \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, u_2, ..., u_m)' \in \mathbb{R}^m$, $By = (B_1 y, B_2 y, ..., B_m y)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Remarque 1.2.13 *On note ici par A' le transposé de la matrice A.*

On note par (H7) et (H8) les hypothèses suivantes :
(H7) : $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ possède n valeurs propres, deux à deux distinct ,purement imaginaires. Soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de A associées au vecteurs propres $q_1, q_2, ..., q_n$.

On note par

$$\sum_P = \left\{ P \in \mathbb{R}^{n\times n} : P' = P, P > 0, A'P + PA \leq 0 \right\}$$

Remarque 1.2.14 *On remarque que* $\sum_P \neq \emptyset$ *(Si on prend* $P = S^* \times S$ *avec* $S = (q_1, q_2, ..., q_n)^{-1}$

(H8) : On suppose qu'il existe $P \in \sum_P$ tel que $|q_k' P D q_k'| \neq 0$ avec $|c|$ est le module de c.
Alors on a le résultat suivant :

Théorème 1.2.21 *[39]*
Si (H7) et (H8) sont vérifiées alors le contrôle quadratique

$$u(t) = -y'(t-\tau) B'Py(t)$$

stabilise le système (1.2.21).

Preuve 1.2.2 Considérons le système (1.40) contrôlé par (1.2.21) on aura le système en boucle fermé suivant :

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + y'(t-\tau) B'Py(t) By(t-\tau)$$

On considère la fonction suivante $V(t) = y'(t) Py(t) \geq 0$ on a

$$\begin{aligned} \tfrac{dV}{dt} &= y'(t) Py(t) + y'(t) Py(t) \\ &= y'(t) (A'P + PA') y(t) - 2y'(t) PBy(t-\tau) y'(t-\tau) B'Py(t) \end{aligned}$$

Puisque $P \in \sum_P$ alors $A'P + PA \leq 0$ d'où $\frac{dV}{dt} \leq 0$.
On a aussi :

$$\frac{dV}{dt} = 0 \iff y'(t)(A'P + PA) y(t) = y'(t) PBy(t-\tau) y'(t-\tau) B'Py(t)$$

alors

$$y'(t) PBy(t-\tau) = 0 \tag{1.41}$$

d'où

$$\dot{y}(t) = Ay(t)$$

Soit $y(0) \in \mathbb{R}^n$, l'hypothèse (H7) assure l'existence d'une suite $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ d'élément de $\mathbb{C}$ telle que $y(0) = \sum_{k=1}^{n} a_k q_k$, alors la solution de (1.2.2) est de la forme

$$y(t) = e^{tA}y(0) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{tA} q_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j\geq 0} \frac{t^j}{j!} A^j q_k$$

alors

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j\geq 0} \frac{t^j}{j!} \lambda_k^j q_k = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{\lambda_k t} q_k$$

Sans perdre de généralité, on suppose que $0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq ... \leq |\lambda_n|$. En remplaçant (1.2.2) dans (1.41) on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_k a_j e^{\lambda_k t} e^{\lambda_j t} q_k' P e^{-\lambda_j \tau} B q_j = 0$$

alors

$$\begin{array}{ll} \left(a_n^2 q_n' P e^{-\lambda_n \tau} B q_n\right) e^{2\lambda_n} & + a_n \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k e^{\lambda_k t} q_k' P e^{-\lambda_n \tau} B q_n\right) e^{\lambda_n t} \\ & + a_n \sum_{k=1}^{n-1} \left(a_j e^{\lambda_j t} q_n' P e^{-\lambda_j \tau} B q_j\right) e^{\lambda_n t} \\ & + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} a_k a_j e^{\lambda_k t} e^{\lambda_j t} q_k' P e^{-\lambda_j \tau} B q_j = 0 \end{array}$$

En utilisant le fait que $|\lambda_j| < |\lambda_n|$, on a $a_n = 0$. On procède par la même méthode, on montre que pour tout $k = n-1, ..., 1$ on a $a_k = 0$, d'où

$$V' = 0 \iff y = 0$$

En appliquant le principe d'invariance de Lasalle on a le résultat.

1.2.4 Plan de la thèse

Le reste de cette thèse est organisé comme suit :
Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la stabilisation des systèmes bilinéaire homogène avec retard. Dans un premier temps on étudie l'existence et l'unicité d'une solution globale "mild". Ensuite, sous des conditions suffisantes, on étudie la stabilisation globale faible et forte des systèmes bilinéaires à retard, via une famille de commandes quadratique où le retard est compensé dans la loi de feedback. La dernière partie de ce chapitre est consacrée aux exemples d'application.

Dans le troisième chapitre, on montre la stabilisation forte des systèmes bilinéaires. Aussi, on caractérise des contrôles assurant la stabilisation en

améliorant les conditions suffisantes proposés dans le chapitre précédent.
Le quatrième chapitre est consacré à l'étude de la stabilisation des systèmes bilinéaires non-homogènes. Ce chapitre est structuré comme suit : nous commençons par donner des conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilisation partielle faible et forte du système étudié. Ensuite, en utilisant une méthode de décomposition, nous établirons la stabilisation forte globale pour ce système. Enfin, , nous donnons des exemples d'applications.
Le cinquième chapitre sera consacré à l'étude de stabilisation des systèmes bilinéaires non-homogènes.

Chapitre 2

Feedback stabilization of delayed bilinear systems

2.1 Introduction

Bilinear systems arise naturally as models for a variety of real world problems such as thermal processes, biology, engineering, economics.. (see e.g. [51, 54] and the references therein). Bilinear systems constitute a class of non-linear systems which are jointly linear in state and input variables. They were introduced in the control theory due to their simple form and their applicability. Due to numerous factors ; the identification of system parameters, the computation of variables, the information transmission.., the modeling procedure may give rise some delays in time [30, 75]. Therefore, the presence of time-delay in the control or state evolution may generate some instability phenomenal (see e.g. [21, 57]). The question of feedback stabilization of delayed systems is of theoretical and practical importance. Accordingly, a large amount of literature is available on the stabilization of the following undelayed bilinear system :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + v(t)By(t) & \text{for all } t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

(see e.g.[8, 9, 61]). The stabilization of the delayed version of (2.1) has been studied by several authors (see e.g. [42, 58, 59]..). Stabilization problems for delayed bilinear systems were mainly considered in finite dimensional (see e.g. ([39],[47],[60] and the references therein). Moreover, in [58, 59] the authors

proved that if the undelayed part of (2.1) is exponentially stable, then the whole system retains this property under some appropriate conditions.
The goal of this chapter is to study the stabilization of bilinear systems with single delay that can be described by :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + v(t)By(t-r) & \text{for all } t > 0 \\ y_0 = \varphi \in \mathcal{C} \end{cases} \tag{2.2}$$

Here, we suppose that A is the infinitesimal generator of a linear C_0-semigroup $S(t)$ on a real Hilbert space X with inner product $\langle .,. \rangle$ and corresponding norm $\|.\|$. The control operator $B : X \to X$ is linear and bounded, the positive real number r denotes the delay and φ is a continuous function from $[-r, 0]$ into X. In the sequel of this chapter, we consider the Banach space $\mathcal{C} := C([-r, 0]; X)$ of continuous $X-$valued functions on $[-r, 0]$ with the supremum norm :

$$\|\varphi\|_C = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} \|\varphi(\theta))\|_X \text{ for all } \varphi \in \mathcal{C}.$$

For any continuous function φ from $[-r, +\infty)$ to X and $t \in [0, +\infty)$, we denote by φ_t the element of $\mathcal{C}$ given by :

$$\varphi_t(\theta) = \varphi(t + \theta) \text{ for all } \theta \in [-r, 0].$$

In this chapter, we give sufficient conditions for the weak and strong stabilization of (2.2) by using a delayed quadratic control. The stabilization assumptions are formulated in term of observability like assumption. Moreover, in the case of strong stability we provide an explicit polynomial decay estimate of the stabilized state.

2.2 Well-posedness problem

Let us consider the system (2.2) controlled by the following feedback control :

$$v(t) = -\langle y(t), By(t-r) \rangle . \tag{2.3}$$

This leads to the following closed loop system :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + F(y_t) & \text{for all } t > 0 \\ y_0 = \varphi \in \mathcal{C}, \end{cases} \tag{2.4}$$

where the function F is defined from $C([-r,0],X)$ to X by

$$F(\zeta) = -\langle \zeta(0), B\zeta(-r)\rangle B\zeta(-r) \text{ for all } \zeta \in C.$$

We start with the following result which assures the existence and the uniqueness of the global mild solution of system (2.4) and provides an estimate that will be needed in the stabilization results.

Proposition 2.2.1 *Assume that A generates a C_0-semi-group $S(t)$. Then, (2.4) admits a unique global mild solution on $[-r,+\infty)$. Moreover, if $S(t)$ is of contractions, then we have*

$$\|y(\tau)\|^2 - \|y(t)\|^2 \geq 2\int_\tau^t |\langle By(s-r), y(s)\rangle|^2 ds, \text{ for all } 0 \leq \tau \leq t. \quad (2.5)$$

Proof 2.2.1 We will prove the well-posedness of a global mild solution using the step-by-step method in time intervals of length r.
In the time-interval $[0,r]$, the system (2.4) reads as follows :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + F(y_t) & \text{for all } t \in [0,r] \\ y(\theta) = \varphi(\theta) & \text{for all } \theta \in [-r,0] \end{cases} \quad (2.6)$$

For $t \in [0,r]$, we have $y(t-r) = \varphi(t-r)$ and $F(y_t) = -\langle y_t(0), B\varphi(t-r)\rangle B\varphi(t-r)$.
Then, observing that F is a continuous linear function on $C([-r,0],X)$, we deduce that (see [84], p. 38) the system (2.6) admits a unique mild solution y on $[-r,r]$.
Now, the system (2.4) restricted to the time interval $[r,2r]$ is equivalent to the following one :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + F_1(z_t) & \text{for all } r < t \leq 2r \\ z_r(\theta) = y_r(\theta) & \text{for all } \theta \in [-r,0] \end{cases} \quad (2.7)$$

where F_1 is now defined by $F_1(z_t) = -\langle z_t(0), By(t-r)\rangle By(t-r)$. Using the same argument as in the first step, we can see that the system (2.7) admits a unique mild solution on $[0,2r]$. By iterating this procedure all over the intervals $[nr,(n+1)r]$ for $n \in \mathbb{N}$, we can construct the global mild solution y.
Let us now establish the estimates (2.5). To this end, let us fix $T > 0$ and consider the function

$$\begin{array}{rcl} f : [0,T] & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & F(y_t) \end{array}$$

We have that $f \in C([0,T],X)$, therefore there exists a sequence of functions $(f_n) \subset C^1([0,T],X)$ such that

$$f_n \longrightarrow f \text{ uniformly in } C([0,T];X)$$

Let $(\xi_n) \subset D(A)$ such that (ξ_n) converges to $\varphi(0)$ in X, and define the function :

$$y_n(t) = S(t)\xi_n + \int_0^t S(t-s) f_n(s)\, ds,\ t \in [0,T] \tag{2.8}$$

Then $y_n(t) \in D(A)$ and $y_n \in C^1([0,T),X)$. Moreover,

$$\begin{cases} \dot{y}_n(t) = Ay_n(t) + f_n(t) & \text{for all } t \in (0,T) \\ y_n(0) = \xi_n(0). \end{cases}$$

Using the fact that A is dissipative, we obtain

$$\frac{d}{dt}\|y_n(t)\|^2 \leq 2\langle f_n(t), y_n(t)\rangle, \text{ for all } t \in (0,T)$$

and therefore

$$\|y_n(t)\|^2 - \|y_n(\tau)\|^2 \leq 2\int_\tau^t \langle f_n(s), y_n(s)\rangle\, ds \quad \text{for all} \quad 0 < \tau \leq t < T$$

By using (2.8) and the fact that f_n is bounded with respect to n, it follows that y_n is bounded as well on $[0,T]$. By passing to the limit, we get via the dominated convergence Theorem,

$$\|y(\tau)\|^2 - \|y(t)\|^2 \geq 2\int_\tau^t |\langle By(s-r), y(s)\rangle|^2\, ds \quad \text{for all} \quad 0 < \tau \leq t < T$$

Since T is arbitrary and $y(t)$ is continuous with respect to t, we deduce that this last inequality holds for all $0 \leq \tau \leq t \leq T$.

Remark 2.2.1 *From the inequality (2.5), it comes :*

$$\|y(t)\| \leq \|\varphi\|_C \quad \textit{for all } t \geq -r. \tag{2.9}$$

2.3 Stabilization results

In this section, we will give sufficient conditions for weak and strong stabilization of the delayed bilinear system (2.2).

2.3.1 Weak stabilization

In the next result, we discuss weak stability of system (2.4) under a weak observability like condition.

Theorem 2.3.1 *Suppose that :*

1. *A is the infinitesimal generator of a linear C_0-semi-group of contractions $S(t)$ on X,*
2. *B is compact from X to X,*
3. *for all $y \in X$,*

$$\langle BS(t-r)y, S(t)y\rangle = 0 \quad \text{for all } t \geq r \Longrightarrow y = 0. \tag{2.10}$$

Then the feedback control (2.3) weakly stabilizes the system (2.2).

Proof 2.3.1 According to Proposition 2.2.1, the system (2.2), excited by the control (2.3), possesses a unique global mild solution $y(s)$ given by :

$$y(s) = S(s)\varphi(0) - \int_0^s S(s-\tau)\langle By(\tau-r), y(\tau)\rangle By(\tau-r)\,d\tau \quad \text{for all } s \geq 0.$$

Then, using the inequality (2.9) and the fact that the semi-group $S(s)$ is of contractions, we get

$$\|y(s) - S(s)\varphi(0)\| \leq \|B\|\,\|\varphi\|_C \int_0^s |\langle By(\tau-r), y(\tau)\rangle|\,d\tau \quad \text{for all } s \geq 0. \tag{2.11}$$

In the other side, we have for all $s \geq r$

$$\begin{aligned} |\langle BS(s-r)y_0(0), S(s)y_0(0)\rangle| &\leq |\langle BS(s-r)y_0(0) - By_s(-r), S(s)y_0(0)\rangle| \\ &\quad + |\langle By_s(-r), S(s)y_0(0) - y(s)\rangle| \\ &\quad + |\langle By_s(-r), y(s)\rangle|. \end{aligned}$$

Then, using (2.11) and the fact that the semi-group $S(t)$ is of contractions, it comes

$$\begin{aligned} |\langle BS(s-r)y_0(0), S(s)y_0(0)\rangle| &\leq \|B\|^2\,\|\varphi\|_C^2 \int_0^{s-r} |\langle By_\tau(-r), y_\tau(0)\rangle|\,d\tau \\ &\quad + \|B\|^2\,\|\varphi\|_C^2 \int_0^s |\langle By(\tau-r), y(\tau)\rangle|\,d\tau \\ &\quad + |\langle By_s(-r), y(s)\rangle| \quad \text{for all } s \geq r. \end{aligned}$$

It follows from the above inequality that, for all $s \geq r$ we have

$$\begin{aligned} |\langle BS(s-r)y_0(0), S(s)y_0(0)\rangle| &\leq 2\,\|B\|^2\,\|\varphi\|_C^2 \int_0^s |\langle By_\tau(-r), y(\tau)\rangle|\,d\tau \\ &\quad + |\langle By(s-r), y(s)\rangle|. \end{aligned}$$

Now, we fix $T > r$. Then, using the superposition property of the solution, we obtain

$$\begin{aligned}|\langle BS(s-r)y_t(0), S(s)y_t(0)\rangle| &\leq 2\|B\|^2\|\varphi\|_C^2\int_0^s|\langle By_{t+\tau}(-r), y_{t+\tau}(0)\rangle|\,d\tau \\ &+|\langle By_{t+s}(-r), y_{t+s}(0)\rangle| \quad \text{for all } (s,t)\in[r,T]\times\mathbb{R}^+.\end{aligned}$$

Integrating the last inequality with respect to $s\in[r,T]$, we obtain :

$$\begin{aligned}\int_r^T|\langle BS(s-r)y(t), S(s)y(t)\rangle|\,ds &\leq 2\|B\|^2\|\varphi\|_C^2\int_r^T\int_0^s|\langle By_{t+\tau}(-r), y_{t+\tau}(0)\rangle|\,d\tau ds \\ &+\int_r^T|\langle By_{t+s}(-r), y_{t+s}(0)\rangle|\,ds \quad \text{for all } t\in\mathbb{R}^+.\end{aligned}$$

We can see that

$$\int_r^T\int_0^s|\langle By_{t+\tau}(-r), y_{t+\tau}(0)\rangle|\,d\tau ds \leq (T-r)\int_t^{t+T}|\langle By(\tau-r), y(\tau)\rangle|\,d\tau\,.$$

Then, for all $t\in\mathbb{R}^+$ we have

$$\int_r^T|\langle BS(s-r)y(t), S(s)y(t)\rangle|\,ds \leq \left(4(T-r)\|B\|^2\|\varphi\|_C^2+1\right)\int_t^{t+T}|\langle By(\tau-r), y(\tau)\rangle|\,d\tau \tag{2.12}$$

which by using Hölder's inequality gives

$$\int_r^T|\langle BS(s-r)y(t), S(s)y(t)\rangle|\,ds \leq K\left(\int_t^{t+T}|\langle By(s-r), y(s)\rangle|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{for all } t\in\mathbb{R}^+ \tag{2.13}$$

with $K=\sqrt{T}\left(2(T-r)\|B\|^2\|\varphi\|_C^2+1\right)$.
Let us introduce the weak $\omega-$limit set

$$\Omega_w=\{\phi\in X : \exists t_n\to+\infty \quad \text{such that } y(t_n)\rightharpoonup\phi\}\,.$$

Since X is reflexive, it comes that : $\Omega_w\neq\emptyset$. Let $\phi\in\Omega_w$ and $t_n\to+\infty$ be such that $y(t_n)\rightharpoonup\phi$. Since B is compact, it follows that for all $t\geq r$, we have

$$\langle BS(t-r)y(t_n), S(t)y(t_n)\rangle\to\langle BS(t-r)\phi, S(t)\phi\rangle \text{ as } n\to+\infty. \tag{2.14}$$

Then, by the dominated convergence theorem, we have

$$\int_r^T\langle BS(s-r)y(t_n), S(s)y(t_n)\rangle\,ds\to\int_r^T\langle BS(s-r)\phi, S(s)\phi\rangle\,ds \text{ as } n\to+\infty.$$

Applying (2.13) for $t=t_n$, it comes

$$\int_r^T|\langle BS(s-r)y(t_n), S(s)y(t_n)\rangle|\,ds \leq K\left(\int_{t_n}^{t_n+T}|\langle By(\tau-r), y(\tau)\rangle|^2\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.15}$$

Moreover, the inequality (2.5) implies

$$\int_{t_n}^{t_n+T} |\langle By(\tau - r), y(\tau)\rangle|^2 d\tau \leq \frac{1}{2}\left(\|y(t_n)\|^2 - \|y(t_n+T)\|^2\right) \qquad (2.16)$$

Having in mind that $\|y(t)\|$ is decreasing with respect to t, we deduce that $\|y(t)\|$ converge. Thus, we have from (2.15) and (2.16) that :

$$\int_r^T |\langle BS(s-r)y(t_n), S(s)y(t_n)\rangle| ds \longrightarrow 0 \text{ as } n \longrightarrow +\infty \cdot$$

Consequently,

$$\langle BS(t-r)\phi, S(t)\phi\rangle = 0 \text{ for all } t \in [r,T].$$

But $T > r$ is arbitrary, then (2.10) implies $\phi = 0$.
We conclude that $y(t) \rightharpoonup 0$ as $t \to +\infty$. This completes the proof.

Remark 2.3.1 *For $r = 0$, we retrieve the same result regarding the undelayed bilinear system (2.1) (see [8]).*

2.3.2 Strong stabilization

In the next result, we proceed to the strong stabilization question.

Theorem 2.3.2 *Suppose that :*

1. *A is the infinitesimal generator of a linear C_0-semi-group of contractions $S(t)$ on X,*
2. *B is a linear bounded operator,*
3. *there exist $\delta > 0$ and $T > r$ such that :*

$$\int_r^T |\langle BS(s-r)\xi, S(s)\xi\rangle| ds \geq \delta \|\xi\|^2, \quad \text{for all } \xi \in X. \qquad (2.17)$$

Then, the feedback control (2.3) strongly stabilizes the system (2.2), and we have the following decay estimate

$$\|y(t)\| = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \text{ as } t \longrightarrow +\infty \qquad (2.18)$$

Proof 2.3.2 Using the estimate (2.12) and taking into account (2.17), we get

$$\delta \|y(t)\|^2 \leq \left(4(T-r)\|B\|^2 \|\varphi\|_C^2 + 1\right) \int_t^{t+T} |\langle By(\tau - r), y(\tau)\rangle| d\tau.$$

This together with (2.5) and Hölder's inequality implies that :

$$\sqrt{2}\delta \left\| y\left(t\right) \right\| ^{2}\leq \left(4\left\| B\right\| ^{2}\left\| \varphi \right\| _{C}^{2}\left(T-r\right) +1\right) \sqrt{T}\left(\left\| y\left(t\right) \right\| ^{2}-\left\| y\left(t+T\right) \right\| ^{2}\right) ^{\frac{1}{2}}.$$

Thus

$$\left\| y\left(t\right) \right\| ^{4}\leq K_{1}\left(\left\| y\left(t\right) \right\| ^{2}-\left\| y\left(t+T\right) \right\| ^{2}\right).$$

with $K_{1}=T\left(\frac{\left(4\left\| B\right\| ^{2}\left\| \varphi \right\| _{C}^{2}\left(T-r\right) +1\right) }{\sqrt{2}\delta }\right) ^{2}$. Then, letting $s_{k}=\left\| y\left(kT\right) \right\| ^{2}$ and using the fact that $\left(s_{k}\right) _{k}$ is decreasing, the above inequality reads as follows :

$$s_{k+1}\leq s_{k}-\frac{1}{K_{1}}s_{k+1}^{2}$$

From ([4], Lemma 5.2) we obtain

$$s_{k}\leq \frac{M}{k+1},\quad \text{for all } k\geq 0$$

Finally, using again the fact that $\|y(t)\|$ decreases, we deduce the estimate (2.18).

Remark 2.3.2 *In the case $r=0$, we retrieve the results of [9, 61] regarding the undelayed bilinear system (2.1).*

2.4 Applications

To illustrate the above established results, we present below two examples concerning the wave and the heat equation with bilinear delayed terms.

Example 2.4.1 *Let us consider the following system defined on $\Omega=(0,1)$ by*

$$\begin{cases} \frac{\partial^{2}z}{\partial t^{2}}\left(x,t\right) =\frac{\partial^{2}z}{\partial x^{2}}\left(x,t\right) +v\left(t\right) \frac{\partial z}{\partial t}\left(x,t-2\right), & t\geq 0, x\in\Omega \\ z=0 & \text{in } \partial\Omega \\ z_{0}\left(x,t-2\right) =\varphi_{1}(x,t), \frac{\partial z}{\partial t}\left(x,t-2\right) =\varphi_{2}(x,t) & \text{for all } t\in[-2,0] \end{cases} \tag{2.19}$$

This system can be written in the form of (2.2) by taking $X=H_{0}^{1}\left(0,1\right) \times L^{2}\left(0,1\right)$ as state space with the inner product :

$$\left\langle \begin{pmatrix} v_{1} \\ v_{2} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} v_{3} \\ v_{4} \end{pmatrix}\right\rangle _{X}=\left\langle v_{1},v_{3}\right\rangle _{H_{0}^{1}(0,1)}+\left\langle v_{2},v_{4}\right\rangle _{L^{2}(0,1)}$$

and by letting $y(t) = \begin{pmatrix} z(.,t) \\ \frac{\partial z}{\partial t}(.,t) \end{pmatrix}$.

Here, A *is given by* $A = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \end{pmatrix}$ *with* $D(A) = (H_0^1(0,1) \cap H^2(\Omega)) \times H_0^1(0,1)$. *Furthermore, the eigenvalues of the Laplace operator with Dirichlet boundary conditions are given by :* $\lambda_m = -m^2\pi^2$, $\forall m \geq 1$, *with corresponding eigenfunctions* $\omega_m(x) = \sqrt{2}\sin(m\pi x)$.

Let $\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \in X$ *with* $\eta_1 = \sum_{m=1}^{+\infty} c_m \omega_m$ *and* $\eta_2 = \sum_{m=1}^{+\infty} m\pi d_m \omega_m$ *with* c_m *are* d_m *real numbers. Then the semi-group of contractions* $S(t)$ *generated by* A *is defined by :*

$$S(t)\eta = \sum_{m=1}^{+\infty} \begin{pmatrix} c_m \cos(m\pi t) + d_m \sin(m\pi t) \\ -m\pi c_m \sin(m\pi t) + m\pi d_m \cos(m\pi t) \end{pmatrix} \omega_m.$$

It follows that

$$BS(t-2)\eta = \sum_{m=1}^{+\infty} \begin{pmatrix} 0 \\ -m\pi c_m \sin(m\pi(t-2)) + m\pi d_m \cos(m\pi(t-2)) \end{pmatrix} \omega_m$$

and

$$\begin{aligned} \langle BS(t-2)\eta, S(t)\eta \rangle &= \sum_{m=1}^{+\infty} m^2\pi^2 c_m^2 \sin(m\pi(t-r))\sin(m\pi t) \\ &- \sum_{m=1}^{+\infty} m^2\pi^2 c_m d_m \cos(m\pi(t-2))\sin(m\pi t) \\ &- \sum_{m=1}^{+\infty} m^2\pi^2 c_m d_m \sin(m\pi t)\cos(m\pi t) \\ &+ \sum_{m=1}^{+\infty} \left(m^2\pi^2 d_m^2 \cos^2(m\pi t)\right). \end{aligned}$$

Thus, we have

$$\begin{aligned} \int_r^T \langle BS(s-r)\eta, S(s)\eta \rangle ds &= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m^2\pi^2(d_m^2 - c_m^2)}{4m\pi} \left[\sin(2m\pi T - m\pi r) - \sin(m\pi r)\right] \\ &+ \sum_{m=1}^{+\infty} (T-2)\frac{m^2\pi^2(d_m^2 + c_m^2)}{2}\cos(m\pi r) \\ &+ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m^2\pi^2 c_m d_m}{2m\pi}\left[\cos(2m\pi T - m\pi r) - \cos(m\pi r)\right]. \end{aligned}$$

Hence, taking $T = 4$ *and* $r = 2$, *it holds*

$$\begin{aligned}\int_2^4 \langle BS(s-2)\eta, S(s)\eta\rangle ds &= \sum_{m=1}^{+\infty} m^2\pi^2\left(d_m^2 + c_m^2\right) \\ &\geq \gamma\left(\sum_{m=1}^{+\infty} c_m^2 + m^2\pi^2 d_m^2\right), \text{for all } \eta \in C\,.\end{aligned}$$

We conclude that the system (2.19) is strongly stabilizable with the feedback control

$$v(t) = -\int_0^1 \frac{\partial z}{\partial t}(x,t)\frac{\partial z}{\partial t}(x,t-2)\,dx$$

and we have the estimate (2.18).

The following figure of the above system with $\varphi_1(x,t) = 0.5\sin(2\pi x)$ *illustrates the asymptotique behavior of the stabilized state.*

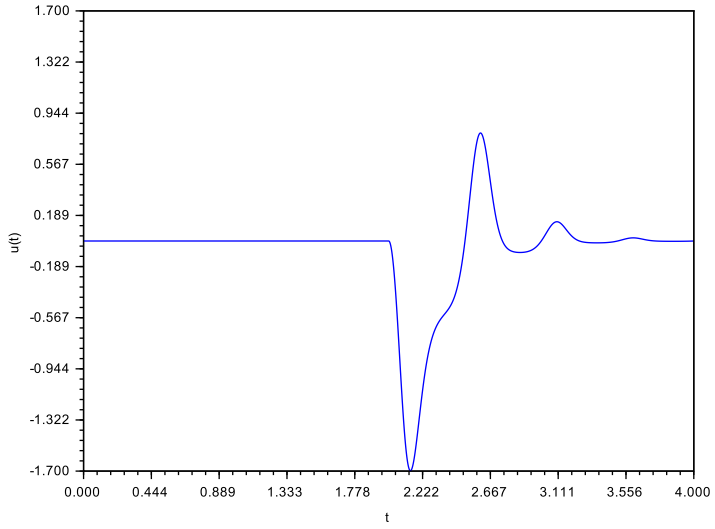


FIGURE 2.1 – The stabilizing control

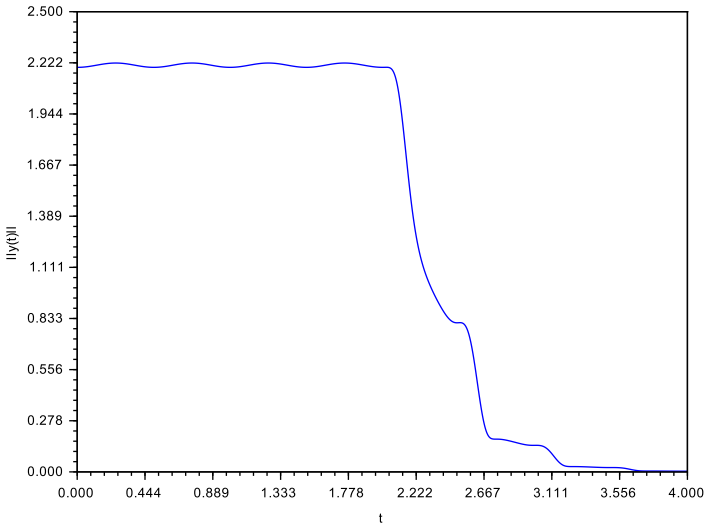


FIGURE 2.2 – The stabilized state

Example 2.4.2 *Let us consider the system defined by :*

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,t) + v(t) Bz(x,t-r) & x \in (0,1),\ t > 0 \\ z'(0,t) = z'(1,t) = 0 & t \geq 0 \\ z(x,t) = \varphi(x,t) & x \in (0,1),\ t \in (-r,0) \end{cases} \tag{2.20}$$

Here the state space is $L^2(\Omega)$ *with* $\Omega = (0,1)$ *and the operator* A *is defined by* $A = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, *with domain* $D(A) = \{z \in H^2(\Omega) : z'(0,t) = z'(1,t) = 0\}$. *The positif number* r *is the delay.*
We denote the orthonormal eigenfunctions of A *by* $(\varphi_j)_{j\geq 1}$. *We have :*

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\cos(j\pi x) & \text{if } j \in \mathbb{N}^* \\ 1 & \text{else} \end{cases}$$

with the associated eigenvalues $\lambda_j = -(j-1)^2\pi^2$ *for all* $j \geq 1$. *Here, the operator of control is defined by :*

$$Bz = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} \langle z, \varphi_j \rangle \varphi_j.$$

Moreover, we have for all $t \geq r$

$$\begin{aligned} \langle BS(t-r)y, S(t)y \rangle = 0, \quad \forall t \geq r &\Longrightarrow \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} e^{\lambda_j(2t-r)} |\langle y, \varphi_j \rangle|^2 = 0 \\ &\Longrightarrow y = 0. \end{aligned}$$

By applying Theorem 1, we deduce that (2.20) is weakly stabilizable using the feedback

$$v(t) = -\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} \int_0^1 z(x, t-r)\, \varphi_j(x)\, dx \int_0^1 z(x,t)\, \varphi_j(x)\, dx.$$

Chapitre 3

Strong stabilization of distributed bilinear systems with time delay

3.1 Introduction

Bilinear systems represent a class of non-linear systems which are jointly linear in state and input variables. These systems arise naturally as models for many dynamical processes, such as nuclear fission, chemical reactions, fluid flow, distillation columns (see for example [51, 55, 54] and the references therein). In practice, due to information transmission, the system parameters, the computation of variables, and so on..., one or more time delays usually arise in real systems. Furthermore, the presence of time-delay in the control or state evolution often encountered in almost all engineering systems to be controlled, and frequently it provokes an instability, so the use of an adequate feedback law is needed to remedy to such disturbance. This work is concerned with the feedback stabilization question of the following delayed bilinear system :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + v(t)\,By(t-r), \quad \text{for all} \;\; t > 0 \\ \\ y_0 = \varphi \in C := C\left([-r, 0]\,; X\right) \end{cases} \tag{3.1}$$

where A is the infinitesimal generator of a linear C_0-semi-group $S(t)$ on a real Hilbert space X, endowed with inner product $\langle .,. \rangle$ and corresponding norm $\|.\|$. The control operator $B : X \to X$ is linear and bounded, the positive real number r denotes the delay and $C := C\left([-r, 0]\,; X\right)$ is the Banach

space of continuous X-valued functions on $[-r, 0]$, with the supremum norm $\|\varphi\|_C = \sup_{-r\leq\theta\leq 0} \|\varphi(\theta))\|_X$. If φ is a continuous function from $[-r, +\infty)$ to X and $t \in [0, +\infty)$, then, the history function φ_t denotes the element of C defined by : $\varphi_t(\theta) = \varphi(t+\theta)$ for all $\theta \in [-r, 0]$. The question of feedback stabilization was the subject of numerous studies for finite dimensional bilinear systems with finite delays, for instance, we refer to [39, 47, 60] and the references therein. Using the Lyapunov stability approach and the separation principle for bounded controllers, the authors in [39] gave sufficient conditions to obtain the global stabilization of MIMO delayed bilinear systems. In [47], the authors have used the Lyapunov method to study the problem of stabilizing a bilinear system with time-varying delay. In [60] the problem of stabilization of a class of bilinear systems with delayed state and saturating actuators was considered ; the stabilization conditions and the corresponding memoryless control laws were expressed in terms of symmetric positive solutions of a finite dimensional algebraic Riccati equation. In the context of infinite dimensional bilinear systems, the case of systems without delay (i.e $r = 0$) has been studied in various works (see, e.g. [8, 9, 33, 61]).
In [62, 63], it has been shown that the non-delayed version of (3.1) can be divided into two uncoupled subsystems, one of which is stable without applying controls, while the other one is unstable. Then, it has been proved that stabilizing the whole system turns out to stabilizing its unstable part. This idea was previously used for linear systems in [68, 79]. Motivated by the above discussion, we will consider the strong stabilization problem for distributed bilinear systems with delay.
The paper is organized as follows : In Section 2 we give some preliminaries regarding the well-posedness, and we exhibit the decomposition technique. In the third section, we study the strong stabilization of the system (3.1). Section 4 is devoted to two illustrative examples.

3.2 A well-posedness results

Let us consider the following autonomous system :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + F(y_t), \quad \text{for all } t > 0 \\ \\ y_0 = \varphi \in C, \end{cases} \tag{3.2}$$

where $F : C \longrightarrow X$ is continuous and satisfies the following locally Lipschitz condition : for each $\alpha > 0$, there exists a constant $L(\alpha) > 0$ such that for all $\varphi_1, \varphi_2 \in C$ with $\|\varphi_1\| \leq \alpha,\ \|\varphi_2\| \leq \alpha$, we have :

$$\|F(\varphi_1) - F(\varphi_2)\|_X \leq L(\alpha) \|\varphi_1 - \varphi_2\|_C .$$

The following theorem discusses the problem of existence and uniqueness for the system (3.2).

Theorem 3.2.1 ([84], p. 51) *Let A generate a C_0- semi-group $S(t)$ and assume that F is locally Lipschitz. Then :*

1. *for each $\varphi \in C$, there exists a maximal interval of existence $[-r, T_\varphi)$ and a unique mild solution $y(t, \varphi)$ of (3.2) defined on $[-r, T_\varphi)$ and either $T_\varphi = +\infty$ or $\limsup_{t \longrightarrow T_\varphi^-} \|y(t, \varphi)\| = +\infty$.*
2. *Moreover, $y(t, \varphi)$ is a continuous function of φ, in the sense that if $\varphi \in C$ and $t \in [0, T_\varphi)$, then there exists positive constants L and ε such that for all $\psi \in C$ with $\|\varphi - \psi\|_C < \varepsilon$ and $T_\psi \leq T_\varphi$ we have :*

$$\|y(s, \varphi) - y(s, \psi)\| \leq L \|\varphi - \psi\|_C , \forall s \in [-r, T_\psi]$$

3. *If F is differentiable with a locally Lipschitz continuous derivative F', and if $\varphi \in C$ is such that $\varphi(0) \in D(A)$, $\dot{\varphi}(0) \in C$ and $\dot{\varphi}^-(0) = A\varphi(0) + F(\varphi)$, then for all $t \in [0, T_\varphi)$, we have $y(t, \varphi) \in D(A)$, and the function $t \in [0, T_\varphi) \longrightarrow y(t, \varphi) \in X$ is continuously differentiable and satisfies the equation (3.2).*

In the whole of this paper we suppose that : the state space X can be decomposed into : $X = X^u + X^s$ where X^u and X^s are two closed subspaces of X, which are orthogonal to each one and invariants under $S(t)$. Note that $S(t)$ induces a C_0-semi-group $S^u(t)$ (resp. $S^s(t)$) on X^u (resp. X^s). Let $y \in X$ and let (y^s, y^u) denote the unique couple of $X^s \times X^u$ such that : $y = y^s + y^u$.
In the sequel, we consider the following assumptions :

$(\mathbf{H}_1)$ $BX^u \subseteq X^u$.

$(\mathbf{H}_2)$ $BX^s \subseteq X^s$.

Under the assumption $(\mathbf{H}_1)$, we consider the following evolving on X^u :

$$\begin{cases} \dot{y}^u(t) = A^u y^u(t) + v(t) B^u y^u(t-r), & \text{for all } t > 0 \\ \\ y_0^u = \varphi^u \in C^u := C([-r, 0]; X^u) \end{cases} \tag{3.3}$$

with $B^u = P^u B P^u$ and P^u is the orthogonal projection on X^u.
In the sequel, we consider the following feedback control :

$$v(t) := -\langle y^u(t), B^u y^u(t-r) \rangle .$$

With the above feedback, the system (3.3) becomes

$$\begin{cases} \dot{y}^u(t) = A^u y^u(t) + F(y_t^u), & \text{for all } t > 0 \\ \\ y_0^u = \varphi^u \in C^u \end{cases}$$

where

$$\begin{array}{rccl} F: & C^u & \to & X^u \\ & \psi & \mapsto & -\langle \psi(0), B^u \psi(-r) \rangle B^u \psi(-r) \end{array}$$

We first study the well-posedness question of the system (3.3).

Proposition 3.2.1 *Let A generate a C_0-semi-group $S(t)$, and assume that $(\boldsymbol{H}_1)$ holds, and that the semi-group $S^u(t)$ is of contraction. Then, (3.3) admits a unique global mild solution $y^u(t)$. Moreover, we have the following inequality :*

$$\|y^u(\tau)\|^2 - \|y^u(t)\|^2 \geq 2 \int_\tau^t \langle y^u(s), B^u y^u(s-r) \rangle^2 ds, \quad \text{for all } t \geq \tau \geq 0 \tag{3.4}$$

Proof 3.2.1 We will use the result of Theorem 3.2.1. To this end, let us first show that F is locally Lipschitz. From the definition of F, it comes that for all φ_1, φ_2 in C^u, we have :

$$\|F(\varphi_1) - F(\varphi_2)\|_{X^u} \leq \left(\|\varphi_1\|_{C^u}^2 + \|\varphi_1\|_{C^u} \|\varphi_2\|_{C^u} + \|\varphi_2\|_{C^u}^2 \right) \|B\|^2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{C^u}$$

where $\|B\|$ is the norm of B in the space $\mathcal{L}(X)$.
According to Theorem 3.2.1, there exist a maximal interval of existence $[-r, T_{\varphi^u})$ and a unique local mild solution $y^u(t, \varphi^u)$ of (3.3) defined on

$[-r, T_{\varphi^u})$.
Consider the following function :

$$\begin{array}{rcl} f : [0, T_{\varphi^u}) & \longrightarrow & X^u \\ t & \longmapsto & F\left(y_t^u\right) \end{array}$$

Let $0 < T < T_{\varphi^u}$. We have that $f \in C\left([0, T_{\varphi^u}); X^u\right)$, so there exist a sequence $(f_n)_n \subset C^1\left([0, T]; X^u\right)$ such that :

$$f_n \longrightarrow f \ \text{ uniformly in } \ C\left([0, T]; X^u\right).$$

Let $(\xi_n) \subset D\left(A^u\right)$ such that $(\xi_n)_n$ converges to $\varphi^u(0)$ in X^u, and define the function :

$$y_n^u(t) = S^u(t)\xi_n + \int_0^t S^u(t-s) f_n(s)\, ds, \ t \in [0, T]. \tag{3.5}$$

Then $y_n^u(t) \in D\left(A^u\right)$ and $y_n^u \in C^1\left([0, T], X^u\right)$ (see [66], p. 187) and we have

$$\dot{y}_n^u(t) = A^u y_n^u(t) + f_n(t), \ t \in (0, T), \ \ y_n^u(0) = \xi_n.$$

Using the dissipativity of A^u, we obtain :

$$\frac{d}{dt}\left\|y_n^u(t)\right\|^2 \leq 2\left\langle f_n(t), y_n^u(t)\right\rangle, \quad \text{for all } t \in (0, T)$$

Integrating this inequality and using the continuity of y^u with respect to t, we derive :

$$\left\|y_n^u(t)\right\|^2 - \left\|y_n^u(\tau)\right\|^2 \leq 2\int_\tau^t \left\langle f_n(s), y_n^u(s)\right\rangle ds, \text{ for all } \ 0 \leq \tau \leq t \leq T.$$

Using (3.5) and the fact that f_n is bounded with respect to n, we can see that y_n^u is bounded as well. Then, by passing to the limit in the last estimation, we get via the dominated convergence Theorem,

$$\left\|y^u(\tau)\right\|^2 - \left\|y^u(t)\right\|^2 \geq 2\int_\tau^t \left\langle y^u(s), B^u y^u(s-r)\right\rangle^2 ds, \quad 0 \leq \tau \leq t \leq T$$

In particular, we have :

$$\left\|y^u(t)\right\| \leq \|\varphi\|_C, \quad -r \leq t \leq T \tag{3.6}$$

Since T is arbitrary, the inequality (3.6) holds for all $t < T_{\varphi^u}$. We deduce from Theorem 3.2.1 that $T_{\varphi^u} = \infty$. In other words, the system (3.3) possesses a unique global solution.

Remark 3.2.1 *Note that in the above proposition, there is no constraint on* $\dim X^u$.

Now, we are in the position to study the well-posedness for the system (3.1). Let us consider the following feedback control :

$$v(t) = -\langle y(t), B^u y(t-r)\rangle. \tag{3.7}$$

Proposition 3.2.2 *Assume that* A *is the infinitesimal generator of a* C_0*-semi-group of contraction* $S(t)$ *on* X *such that* $(\boldsymbol{H}_1)$*-*$(\boldsymbol{H}_2)$ *hold. Then the system (3.1), controlled with (3.7), admits a unique global mild solution* $y(t)$.

Proof 3.2.2 Let us note that the control (3.7) can be written in the following form :

$$v(t) = -\langle y^u(t), B^u y^u(t-r)\rangle.$$

Thus the system (3.1) leads to the following closed-loop system :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + F(y_t), & \text{for all } t > 0 \\ \\ y_0 = \varphi \in C, \end{cases}$$

where

$$\begin{array}{rccc} F: & C & \longrightarrow & X \\ & \psi & \longmapsto & -\langle \psi^u(0), B^u\psi^u(-r)\rangle B\psi(-r) \end{array}$$

It is clear that the mapping $F : \psi \longrightarrow -\langle \psi^u(0), B^u\psi^u(-r)\rangle B\psi(-r)$ is locally Lipschitz. Then, (3.1) possesses a unique local mild solution $y(t)$, which we decompose into $y(t) = y^s(t) + y^u(t)$, where $y^s(t) \in X^s$ and $y^u(t) \in X^u$.

Let $[0, T_\varphi)$ be the maximal interval of existence for the mild solution $y(t)$ of (3.1). Then, we have :

$$\begin{cases} y(t) = S(t)\varphi(0) + \int_0^t S(t-\tau)v(\tau)By(\tau-r)\,d\tau, \quad 0 \le t < T_\varphi \\ \\ y_0 = \varphi \in C \end{cases}$$

Under assumptions $(\mathbf{H}_1)$ and $(\mathbf{H}_2)$ the component y^u is the solution of the system (3.3) and is given by :

$$\begin{cases} y^u(t) = S^u(t)\varphi^u(0) + \int_0^t S^u(t-\tau)v(\tau)B^u y^u(\tau-r)d\tau, \quad 0 \le t < T_\varphi \\ y_0^u = \varphi^u \in C^u \end{cases}$$

Similarly, y^s is given by :

$$\begin{cases} y^s(t) = S^s(t)\varphi^s(0) + \int_0^t S^s(t-\tau)v(\tau)B^s y^s(\tau-r)d\tau, \quad 0 \le t < T_\varphi \\ y_0^s = \varphi^s \in C^s := C([-r,0];X^s) \end{cases}$$

where $B^s = P^s B P^s$ and P^s is the orthogonal projection on X^s. It follows that : For all $r \le t < r + T_\varphi$, we have :

$$\|y^s(t-r)\| \le \|S^s(t-r)\varphi^s(0)\| + \int_0^{t-r} \|v(\tau)S^s(t-r-\tau)B^s y^s(\tau-r)\|d\tau$$

which implies

$$\|y^s(t-r)\| \le \|\varphi^s(0)\| + \int_0^{t-r} |v(\tau)| \, \|B^s y^s(\tau-r)\|d\tau$$

Using Gronwall's inequality, we get :

$$\|y^s(t-r)\| \le \|\varphi^s(0)\| \exp\left(\int_0^{t-r} |v(\tau)| \, \|B\|d\tau\right)$$

Observing that (3.4) holds for all $t \ge 0$, we deduce that

$$\int_0^{+\infty} |v(t)|^2 dt \le \frac{\|y_0^u\|^2}{2}.$$

Thus Hölder's inequality yields :

$$\|y^s(t-r)\| \le \|\varphi^s(0)\| \exp\left(\|B\| M\sqrt{t-r}\right) \quad \text{for all } r \le t < T_\varphi + r$$

with $M = \frac{\|y_0^u\|}{\sqrt{2}}$. As a consequence, $\|y^s(t-r)\|$ is bounded on $[r, T_\varphi + r)$. In other word $\|y^s(t)\|$ is bounded on $[0, T_\varphi)$. This together with (3.6) implies that $y(t)$ is bounded on $[0, T_\varphi]$ and hence by Theorem 1 we have $T_\varphi = +\infty$

3.3 Stabilization results

Let us start with the following result regarding the system (3.3).

Theorem 3.3.1 *Let A generate a C_0-semi-group $S(t)$ and assume that $(\boldsymbol{H}_1)$ holds. Furthermore, suppose that :*

1. *$S^u(t)$ is a contraction semi-group,*
2. *$\dim X^u < +\infty$,*
3. *there exist $\delta, T > 0$ such that :*

$$\int_0^T |\langle B^u S^u(s)\xi, S^u(s)\xi\rangle| \, ds \geq \delta \|\xi\|^2, \quad \text{for all } \xi \in X^u. \tag{3.8}$$

Then for $0 \leq r < \frac{\delta}{T\|B^u\|\|A^u\|}$, the feedback $v(t) = -\langle y^u(t), B^u y^u(t-r)\rangle$ strongly stabilizes the system (3.3), and we have the following decay estimate :

$$\|y^u(t)\| = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \text{ as } t \longrightarrow +\infty.$$

Proof 3.3.1 According to Proposition 3.2.1, the system (3.3) possesses a unique global mild solution which is given by :

$$y^u(t) = S^u(t)\varphi^u(0) - \int_0^t S^u(t-\tau)\langle y^u(\tau), B^u y^u(\tau-r)\rangle B^u y^u(\tau-r)\, d\tau, \ \forall t \geq 0. \tag{3.9}$$

It follows from (3.6) and (3.9) that

$$\|y^u(t) - S^u(t)\varphi^u(0)\| \leq \|B\| \|\varphi\|_C \int_0^t |\langle y^u(\tau), B^u y^u(\tau-r)\rangle| \, d\tau, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.10}$$

We also have

$$\begin{aligned} |\langle B^u S^u(\tau) y^u(0), S^u(\tau) y^u(0)\rangle| \leq \ & |\langle B^u S^u(\tau) y^u(0) - B^u y^u(\tau-r), S^u(\tau) y^u(0)\rangle| \\ & + |\langle B^u y^u(\tau-r), S^u(\tau) y^u(0) - y^u(\tau)\rangle| \\ & + |\langle B^u y^u(\tau-r), y^u(\tau)\rangle|, \quad \text{for all } \tau \geq 0. \end{aligned}$$

Using the fact that the semi-group $S^u(t)$ is of contraction, it comes :

$$\begin{aligned} |\langle B^u S^u(\tau) y^u(0), S^u(\tau) y^u(0)\rangle| \leq \ & \|B^u\| \|S^u(\tau) y^u(0) - y^u(\tau-r)\| \|y^u(0)\| \\ & + \|B^u\| \|y^u(\tau-r)\| \|S^u(\tau) y^u(0) - y^u(\tau)\| \\ & + |\langle B^u y^u(\tau-r), y^u(\tau)\rangle|, \quad \text{for all } \tau \geq 0. \end{aligned}$$

It follows from (3.10) that, for all $\tau \geq r$,

$$\begin{aligned} \|y^u(\tau-r) - S^u(\tau)\varphi^u(0)\| \leq \ & \|y^u(\tau-r) - S^u(\tau-r)\varphi^u(0)\| \\ & + \|S^u(\tau-r)\varphi^u(0) - S^u(\tau)\varphi^u(0)\| \\ & \leq \|B^u\| \|\varphi\|_C \int_0^{\tau-r} |\langle y^u(\rho), B^u y^u(\rho-r)\rangle| \, d\rho \\ & + \|S^u(\tau-r)\varphi^u(0) - S^u(\tau)\varphi^u(0)\| \end{aligned}$$

Using the fact that $\dim X^u < +\infty$, we can see that $S^u(t)$ is Lipschitz in $[0,T]$, and hence :

$$\|S^u(\tau-r)\varphi^u(0) - S^u(\tau)\varphi^u(0)\| \leq r\|A^u\|\|\varphi^u(0)\|$$

From (3.6) and (3.10) we have for all $\tau \geq 0$:

$$\|B^u\|\|y^u(\tau-r)\|\|S^u(\tau)y^u(0) - y^u(\tau)\| \leq \|B^u\|^2\|\varphi\|_C^2 \int_0^\tau |\langle y^u(\rho), B^u y^u(\rho-r)\rangle| d\rho.$$

It follows that :

$$\begin{aligned}|\langle B^u S^u(\tau)y^u(0), S^u(\tau)y^u(0)\rangle| \leq\ & r\|A^u\|\|B^u\|\|y^u(0)\|^2 \\ & + \|B^u\|^2\|\varphi^u\|_{C^u}^2 \int_0^{\tau-r} |\langle y^u(\rho), B^u y^u(\rho-r)\rangle| d\rho \\ & + \|B^u\|^2\|\varphi^u\|_{C^u}^2 \int_0^{\tau} |\langle y^u(\rho), B^u y^u(\rho-r)\rangle| d\rho \\ & + |\langle y^u(\tau), B^u y^u(\tau-r)\rangle|, \text{ for all } \tau \geq r \quad .\end{aligned}$$

Then using the superposition property of the solution, we get :

$$\begin{aligned}|\langle B^u S^u(\tau)y^u(t), S^u(\tau)y^u(t)\rangle| \leq\ & r\|A^u\|\|B^u\|\|y^u(t)\|^2 \\ & + \|B^u\|^2\|\varphi^u\|_{C^u}^2 \int_0^{\tau-r} |\langle y^u(t+\rho), B^u y^u(t+\rho-r)\rangle| d\rho \\ & + \|B^u\|^2\|\varphi^u\|_{C^u}^2 \int_0^{\tau} |\langle y^u(t+\rho), B^u y^u(t+\rho-r)\rangle| d\rho \\ & + |\langle y^u(t+\tau), B^u y^u(t+\tau-r)\rangle|, \text{for all } \tau \geq r,\ t \geq 0.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Using (3.8) and the fact that $\|S^u(t)\xi\|$ decreases with respect to t, we can see that for all $0 \leq r \leq r_0 =: \frac{\delta}{T\|B^u\|\|A^u\|}$, we have :

$$\begin{aligned}\int_r^{T+r} |\langle B^u S^u(\tau)\xi, S^u(\tau)\xi\rangle| d\tau &\geq \delta\|S^u(r_0)\xi\|^2 \\ &\geq \delta'\|\xi\|^2, \quad \text{for all } \xi \in X^u,\end{aligned} \tag{3.12}$$

where $\delta' = \delta \inf_{\|\xi\|=1} \left(\|S^u(r_0)\xi\|^2\right)$.
Integrating the inequality (3.11) over $[r, r+T]$ with respect to τ and using the Hölder's inequality, we obtain :

$$\begin{aligned}&\int_r^{T+r} |\langle B^u S^u(\tau)y^u(t), S^u(\tau)y^u(t)\rangle| d\tau \leq rT\|A^u\|\|B^u\|\|y^u(t)\|^2 \\ &+ \left(2T\|B^u\|^2\|\varphi^u\|_{C^u}^2 + 1\right) \int_0^{T+r} |\langle y^u(t+\tau), B^u y^u(t+\tau-r)\rangle| d\tau\end{aligned}$$

Then using (3.12), we get :

$$\begin{aligned}\delta'\|y^u(t)\|^2 \leq\ & rT\|A^u\|\|B^u\|\|y^u(t)\|^2 \\ & + \left(2T\|B^u\|^2\|\varphi^u\|_{C^u}^2 + 1\right) \int_0^{T+r} |\langle y^u(t+\tau), B^u y^u(t+\tau-r)\rangle| d\tau\end{aligned}$$

Hence, Hölder's inequality gives :

$$(\delta' - rT\|A^u\|\|B^u\|)\|y^u(t)\|^2 \leq K\left(\int_t^{t+T+r} |\langle y^u(\tau), B^u y^u(\tau - r)\rangle|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

with $K = \sqrt{T+r}\left(2T\|B^u\|^2\|\varphi^u\|_C^2 + 1\right)$.
Combining (3.4) and the above inequality, we obtain :

$$(\delta' - rT\|A^u\|\|B^u\|)\|y^u(t)\|^2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}K\left(\|y^u(t)\|^2 - \|y^u(t+T+r)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Then

$$\|y^u(t)\|^4 \leq K_1\|y^u(t)\|^2 - K_1\|y^u(t+T+r)\|^2$$

with

$$K_1 = \left(\frac{K}{\delta'\sqrt{2} - rT\|A^u\|\|B^u\|\sqrt{2}}\right)^2.$$

Letting $s_k = \|y^u(k(T+r))\|^2$ and observing that $s_{k+1} \leq s_k$, we derive :

$$s_{k+1} \leq s_k - \frac{1}{K_1}s_{k+1}^2.$$

From ([4], Lemma 5.2), we obtain

$$s_k \leq \frac{M}{k+1}, \text{ for all } k \geq 0.$$

Finally, using again the fact that $\|y^u(t)\|$ decreases, we deduce the following estimate :

$$\|y^u(t)\| = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \text{ as } t \longrightarrow +\infty.$$

We now proceed to our stabilization result of the system (3.1). The next result provides an exponential estimate of the component $y^s(t)$.

Theorem 3.3.2 *Let assumptions of Proposition 2 hold and assume that $S^s(t)$ is exponentially stable. Then, the system (3.1) possesses a unique global mild solution $y(t)$ whose component $y^s(t)$ satisfies the following estimate :*

$$\|y^s(t)\| \leq R\exp(-\sigma t), \forall t \geq 0 \ (\textit{for some } R, \sigma > 0). \tag{3.13}$$

Proof 3.3.2 From Proposition 3.2.2, the system (3.1) admits a unique global mild solution $y(t)$ defined on $\mathbb{R}^+$.
Let $y^s(t)$ be the component of $y(t)$ on X^s. Then, we have :

$$\begin{cases} y^s(t) = S^s(t)\varphi^s(0) + \int_0^t S^s(t-\tau)v(\tau)B^s y^s(\tau - r)d\tau, \quad 0 \leq t < T_\varphi \\ \\ y_0^s = \varphi^s \in C^s \end{cases}$$

It follows that for all $t \geq r$, we have :

$$\|y^s(t-r)\| \leq \|S^s(t-r)\varphi^s(0)\| + \int_0^{t-r} \|v(\tau) S^s(t-r-\tau) B^s y^s(\tau-r)\| d\tau$$

Let $\alpha, \beta > 0$ such that :

$$\|S^s(t)\| \leq \beta e^{-\alpha t}, \forall\ t \geq 0.$$

Then we have :

$$\|y^s(t-r)\| \leq \beta e^{-\alpha(t-r)} \|\varphi^s(0)\| + e^{-\alpha t} \int_0^{t-r} \beta e^{\alpha r} e^{\alpha\tau} |v(\tau)| \|B^s y^s(\tau-r)\| d\tau$$

which implies

$$\|y^s(t-r)\| e^{\alpha t} \leq \beta e^{\alpha r} \|\varphi^s(0)\| + e^{\alpha r} \int_0^{t-r} \beta e^{\alpha\tau} |v(\tau)| \|B^s y^s(\tau-r)\| d\tau$$

Letting $\omega^s(t) = \|y^s(t-r)\| e^{\alpha t}$, this last inequality reads as follows :

$$\omega^s(t) \leq \beta e^{\alpha r} \|\varphi^s(0)\| + \int_0^{t-r} \beta e^{\alpha r} |v(\tau)| \|B\| \omega^s(\tau) d\tau.$$

Using Gronwall's inequality, we get :

$$\omega^s(t) \leq \beta e^{\alpha r} \|\varphi^s(0)\| \exp\left(\int_0^{t-r} \beta e^{\alpha r} |v(\tau)| \|B\| d\tau\right)$$

But, we know that : $\int_0^{+\infty} |v(t)|^2 dt \leq \frac{\|y_0^u\|^2}{2}$. Thus Hölder's inequality yields :

$$\omega^s(t) \leq \beta e^{\alpha r} \|\varphi^s(0)\| \exp\left(\beta e^{\alpha r} \|B\| M\sqrt{t-r}\right), \text{ for all } t \geq r$$

with $M = \frac{\|y_0^u\|}{\sqrt{2}}$. Then, we have for all $t \geq r$:

$$\|y^s(t-r)\| \leq \beta e^{\alpha r} \|\varphi^s(0)\| \exp\left(\beta e^{\alpha r} \|B\| M\sqrt{t} - \alpha t\right), \tag{3.14}$$

It follows that :

$$\|y^s(t)\| \leq \beta e^{\alpha r} \|\varphi^s(0)\| \exp\left(M\beta e^{\alpha r} \|B\| \sqrt{t+r} - \alpha(t+r)\right) \text{ for all } t \geq 0,$$

which gives the desired estimation (3.13).

Combining Theorems 3.3.1 and 3.3.2, we obtain the stabilization result of the whole system (3.1).

Theorem 3.3.3 *Let A generate a C_0-semi-group $S(t)$ and assume that $(\boldsymbol{H}_1)$ and $(\boldsymbol{H}_2)$ hold. Furthermore, suppose that :*

1. $S^u(t)$ *is a contraction semi-group,*

2. $\dim X^u < +\infty$,

3. *the estimate (3.8) holds,*

4. $S^s(t)$ *is exponentially stable.*

Then for $0 \leq r < \frac{\delta}{T\|B^u\|\|A^u\|}$, *the feedback (3.7) strongly stabilizes the system (3.1) and we have the following decay estimate :*

$$\|y(t)\| = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \text{ as } t \longrightarrow +\infty.$$

Remark 3.3.1 *Concerning the bound of* r *given in the statement of the above theorem, we can see from (3.8) that :* $\|B^u\| \neq 0$. *Moreover, if* $A^u = 0$, *then there is no constraint on the delay term.*

3.4 Applications

Example 3.4.1 *Let us consider the system defined on* $\Omega = (0,1)$ *by :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,t) + u(t) z(x,t-r), & x \in (0,1), \quad t > 0 \\ z'(0,t) = z'(1,t) = 0, & t \geq 0 \\ z(x,t) = \varphi(x,t), & x \in [0,1], \quad t \in [-r,0] \end{cases} \tag{3.15}$$

Here, we take $X = L^2(\Omega)$ *as state space, and the operator* A *is defined by*

$$A = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{ with domain } D(A) = H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1).$$

The eigenfunctions of A *are defined as follows :*

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\cos(j\pi x), & \text{if } j \in \mathbb{N}^* \\ 1, & \text{else} \end{cases}$$

with corresponding eigenvalues $\lambda_j = -j^2\pi$, $j \geq 0$. *The semigroup associated to* A *is given by :*

$$S(t)\xi = \sum_{j=0}^{+\infty} e^{\lambda_j t} \langle \xi, \phi_j \rangle \phi_j.$$

The state space X *can be decomposed according to* $X = X^u \oplus X^s$, *where* $X^u = span\{\phi_0\}$. *Here, we have,* $S^u(t) = Id_{X^u}$ *and* $B^u = Id_{X^u}$, *so (3.8)*

holds. We conclude that the system (3.15) is strongly stabilizable using the feedback control :

$$v(t) = -\int_0^1 z^u(x,t)\, z^u(x,t-r)\, dx$$

and we have the estimate :

$$\|z(t)\| = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \text{ as } t \longrightarrow +\infty.$$

Example 3.4.2 *Consider the following uncoupled ODE-PDE system :*

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) = -y(t) + u(t)\, y(t-r), & x \in \Omega = (0,1), \quad t > 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial t}(x,t) = \Delta z(x,t) + u(t)\, z(x,t-r), & x \in \Omega = (0,1), \quad t > 0 \\ z(0,t) = z(1,t) = 0, & t \geq 0 \\ z(x,t) = \varphi(x,t), \quad y(t) = \mu_1(t), \quad \dot{y}(t) = \mu_2(t), & x \in [0,1], \quad t \in [-r,0] \end{cases} \tag{3.16}$$

Here the state space $X = \mathbb{R}^2 \times L^2(\Omega)$ can be decomposed into :

$$X = X^s \oplus X^u,$$

with $X^u = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ and $X^s = \{0\} \times L^2(\Omega)$.

Taking $\omega(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, the system (3.16) can be written in the form :

$$\begin{cases} \dot{\omega}(t) = A\omega(t) + u(t)\, B\omega(t-r), & \text{for all } t > 0 \\ \omega(t) = \begin{pmatrix} \mu_1(t) \\ \mu_2(t) \\ \varphi(.,t) \end{pmatrix}, & t \in [-r,0] \end{cases}$$

where

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix} \text{ and } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Id \end{pmatrix}$$

Here the domain of A is given by :

$$D(A) = \mathbb{R}^2 \times H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)$$

The operator A can be decomposed into $A = A^s \oplus A^u$ where

$$A^u = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

and

$$A^s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix}.$$

Moreover, the subspace X^u is invariant under B and we have :

$$B^u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hence to apply Theorem 3.3.2, it suffices to show that (3.8) holds. Let us first observe that for all $x \in X^u$, we have :

$$\langle B^u S^u(s)\, x, S^u(s)\, x \rangle = 0, \quad \forall s \geq 0 \Longrightarrow x = 0.$$

Hence, since X^u is of finite dimensional, this gives (3.8) (see Lemma 17, [65]). We conclude that the system (3.16) is strongly stabilizable.

Chapitre 4

Partial stabilization of non-homogeneous bilinear systems

4.1 Introduction

Let us consider the following non-homogeneous bilinear system :

$$\begin{cases} y_t(t) = Ay(t) + u(t)(By(t) + b), & \forall t > 0 \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{4.1}$$

where A is the infinitesimal generator of a linear C_0-semi-group of contractions $S(t)$ on a Hilbert space H, with inner product $\langle .,. \rangle$ and corresponding norm $\|.\|$, $B : H \to H$ is a bounded linear operator of H, b is a fixed vector and the scalar valued function $u(t)$ is a control. Systems like (4.1) have been used to model processes in several fields ; biologic, physic, engineering, etc (e.g. [51], [77] and [41]). As an example, if $u(x,t)$ denotes the temperature of a rod of unit length at point x at time t, then the heat-transfer in this rod can be described by the following model (see for instance, [77]) :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + v(t)(u - \theta(x)) & \text{in } x \in (0,1), \forall t > 0. \\ \\ u_0 \in L^2(\Omega) \end{cases} \tag{4.2}$$

In the context of infinite dimensional state space, the case of homogeneous bilinear systems (i.e $b = 0$), has been studied in various works (see [8], [9], [14], [64], and the references therein...). The question of feedback stabilization of the finite dimensional version of (4.1) has been the subject of many researches (see for instance, [29], [72], and the references therein...). [29] provided a

stabilizing control for system (4.1), when the matrix A has no eigenvalues in the right-half plane. In [72], sufficient conditions for feedback stabilization have been formulated in the case where A is stable, but not asymptotically stable. The case of the non-homogeneous distributed bilinear system (4.1)has been studied in the context of real Hilbert state space. [11] showed that if A and B are skew-adjoint, then under the controllability assumption of the pair (A, b), the feedback

$$u(t) = -\langle b, y(t)\rangle, \tag{4.3}$$

weakly stabilizes the system (4.1). [3] proved that if A is dissipative, B is skew-adjoint and $\langle b, S(t)y\rangle = 0$, $\forall t \geq 0 \Rightarrow y = 0$, then the system (4.1) is weakly stabilizable with the control (4.3). In the case where A generates a compact semi-group, [12] gave necessary and sufficient conditions for system (4.1) to be strongly stabilizable by the following a priori bounded control :

$$u(t) = \frac{-\langle By(t) + b, y(t)\rangle}{1 + |\langle By(t) + b, y(t)\rangle|^2}.$$

In this work, we provide necessary and sufficient conditions for partial weak and strong stabilization of system (4.1) when the dynamic A generates a C_0-semi-group of contractions, and the operator of control B is linear bounded. More precisely, we consider the problem of choosing a bounded control $u(t)$ in such a way that a privileged part of the state $y(t)$ of (4.1) converges to zero. This is the so called partial stabilization. Such a problem has been considered for homogeneous bilinear systems in [64]. The notion of partial stabilization extends the conventional one, and enables us to achieve the stabilization of some parts of the state when the stabilization of the full state is impossible or not required.

4.2 Feedback stabilization

The objective of this section is to study the problem of partial weak stabilization and the global strong stabilization of (4.1).

4.2.1 Problem statement

Let us consider the following feedback control :

$$u(t) = -r\frac{\langle y(t), By(t) + b\rangle}{|\langle y(t), By(t) + b\rangle| + 1}, \quad (r > 0) \tag{4.4}$$

so the system (4.1) becomes :

$$\begin{cases} y_t(t) = Ay(t) + f(y(t)), & \forall t > 0 \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{4.5}$$

where

$$f(y) = -\frac{r\langle y, By+b\rangle}{|\langle y, By+b\rangle| + 1}(By+b), \quad \forall y \in H.$$

Let the output state space Y be a Banach space with norm $\|.\|_Y$, and let $C \in \mathcal{L}(H,Y)$ be a fixed output operator.

We recall the following definition of partial weak and strong stabilization.

Definition 4.2.1 *The system (4.1) is weakly (resp. strongly) partially stabilizable if there exists a feedback control $u(t) = f(y(t))$, $f : H \to \mathbb{k} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ such that the system (4.1) with $u(t)$ satisfies the following properties :*

1. *for each y_0 there exists a unique mild solution $y(t)$ defined for all $t \geq 0$,*
2. *$\{0\}$ is a Lyaponov stable equilibrium for (4.1),*
3. *for all $y_0 \in H$, $Cy(t) \rightharpoonup 0$ (resp. $Cy(t) \to 0$), as $t \to +\infty$.*

Where the symbol "$\rightharpoonup$" (resp. "$\longrightarrow$") refers to the weak (resp. strong) convergence.

4.2.2 Partial weak stabilization

The following theorem provides sufficient conditions for partial weak stabilization of system (4.1) when the control operator B is compact.

Theorem 4.2.1 *Let $C \in \mathcal{L}(H,Y)$, and suppose that :*

1. *A is the infinitesimal generator of a linear C_0-semi-group of contractions $S(t)$ on H,*
2. *B or $S(t)$ is compact from H to H,*
3. *for all $y \in H$;*

$$\langle BS(t)y + b, S(t)y\rangle = 0, \quad \forall t \geq 0 \Longrightarrow Cy = 0. \tag{4.6}$$

Then the feedback (4.4) weakly partially stabilizes the system (4.1).

Proof 4.2.1 Since the map f is locally Lipschitz and dissipative, the system (4.5) possesses a unique global solution $y(t)$, which is given by the following variation of constants formula (see [66], p. 185) :

$$y(t) = S(t) y_0 - r \int_0^t \frac{\langle y(s), By(s) + b \rangle}{|\langle y(s), By(s) + b \rangle| + 1} S(t-s)(By(s) + b) ds. \quad (4.7)$$

Since, the operator A is dissipative, an approximation argument (see Lemma 5.5 in [7]) shows that, for all $y_0 \in D(A)$ and $0 \leq \tau \leq t$, we have :

$$\|y(\tau)\|^2 - \|y(t)\|^2 \geq 2r \int_\tau^t \frac{|\langle By(s) + b, y(s) \rangle|^2}{|\langle By(s) + b, y(s) \rangle| + 1} ds. \quad (4.8)$$

This last inequality holds, by density for all $y_0 \in H$. In particular, we have :

$$\|y(t)\| \leq \|y_0\|, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.9)$$

This shows that the equilibrium 0 is Lyaponov stable. Moreover, it comes from (4.7) and (4.9) that

$$\|y(t) - S(t) y_0\| \leq r (\|B\| \|y_0\| + \|b\|) \|y_0\| \int_0^t \frac{|\langle By(\tau) + b, y(\tau) \rangle|}{|\langle By(\tau) + b, y(\tau) \rangle| + 1} d\tau, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.10)$$

Let us introduce the weak $\omega-$limit set :

$$\Omega_w(y_0) = \{\phi \in H : \exists t_n \to +\infty \quad \text{such that } y(t_n) \rightharpoonup \phi\}.$$

Since H is reflexive, it comes from (4.9) that :

$$\Omega_w(y_0) \neq \emptyset.$$

Let $\phi \in \Omega_w(y_0)$ and $t_n \to +\infty$ be such that $y(t_n) \rightharpoonup \phi$. We know that $S(t)$ is a bounded operator and B is compact, then for all $t \geq 0$, we have

$$S(t) y(t_n) \rightharpoonup S(t) \phi \qquad \text{and} \qquad BS(t) y(t_n) \to BS(t) \phi, \text{ as } n \to +\infty.$$

It follows that :

$$\langle BS(t) y(t_n) + b, S(t) y(t_n) \rangle \to \langle BS(t) \phi + b, S(t) \phi \rangle, \text{ as } n \to +\infty. \quad (4.11)$$

In the sequel, we fix $T > 0$. By the dominated convergence theorem, we have from (4.11)

$$\int_0^T \langle BS(s) y(t_n) + b, S(s) y(t_n) \rangle ds \to \int_0^T \langle BS(s) \phi + b, S(s) \phi \rangle ds, \text{ as } n \to +\infty.$$

Moreover, for all $s \geq 0$ we have :

$$\begin{aligned} |\langle BS(s)y_0 + b, S(s)y_0\rangle| &\leq |\langle BS(s)y_0 - By(s), S(s)y_0\rangle| \\ &+ |\langle By(s) + b, S(s)y_0 - y(s)\rangle| \\ &+ |\langle y(s), By(s) + b\rangle|. \end{aligned}$$

Then, using (4.9) and the contraction property of $S(t)$, we deduce that :

$$\begin{aligned} |\langle BS(s)y_0 + b, S(s)y_0\rangle| &\leq (2\|B\|\|y_0\| + \|b\|)\|S(s)y_0 - y(s)\| \\ &+ |\langle y(s), By(s) + b\rangle|. \end{aligned}$$

This inequality, together with (4.10) gives

$$\begin{aligned} |\langle BS(s)y_0 + b, S(s)y_0\rangle| &\leq K_1 \int_0^T \frac{|\langle y(\tau), By(\tau) + b\rangle|}{|\langle y(\tau), By(\tau) + b\rangle| + 1} d\tau \\ &+ |\langle y(s), By(s) + b\rangle|, \end{aligned}$$

with

$$K_1 = r(2\|B\|\|y_0\| + \|b\|)(\|B\|\|y_0\| + \|b\|).$$

Now, using the superposition property of the solution, we obtain via (4.9) :

$$\begin{aligned} |\langle BS(s)y(t) + b, S(s)y(t)\rangle| \leq K_1 \int_0^T \frac{|\langle By(t+\tau) + b, y(t+\tau)\rangle|}{|\langle By(t+\tau) + b, y(t+\tau)\rangle| + 1} d\tau \\ + |\langle y(t+s), By(t+s) + b\rangle|, \quad \forall (s,t) \in [0,T] \times \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Thus, integrating the last inequality with respect to $s \in [0,T]$, we deduce via Hölder's inequality, that :

$$\int_0^T |\langle BS(s)y(t) + b, S(s)y(t)\rangle| ds \leq K \left(\int_t^{t+T} |\langle y(s), By(s) + b\rangle|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.12}$$

with $K = (TK_1 + 1)\sqrt{T}$. Then, applying (4.12) for $t = t_n$, it comes :

$$\int_0^T |\langle BS(s)y(t_n) + b, S(s)y(t_n)\rangle| ds \leq K \left(\int_{t_n}^{t_n+T} |\langle y(s), By(s) + b\rangle|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.13}$$

Moreover, using (4.9), we can see that :

$$\int_0^t \frac{|\langle y(s), By(s) + b\rangle|^2}{|\langle By(s) + b, y(s)\rangle| + 1} ds \geq \frac{\int_0^t |\langle y(s), By(s) + b\rangle|^2 ds}{1 + (\|B\|\|y_0\| + \|b\|)\|y_0\|}, \ \forall t \in (0, +\infty). \tag{4.14}$$

Inequality (4.8), together with (4.14), implies that the integral $\int_0^{+\infty} |\langle y(s), By(s)+b\rangle|^2 ds$ converges. Hence, letting $n \to +\infty$ in (4.13) leads to :

$$\langle BS(t)\phi + b, S(t)\phi\rangle = 0, \ \forall t \in [0,T].$$

But T is arbitrary, then (4.6) implies

$$C\phi = 0.$$

Following the same techniques, we can show that 0 is the unique limit point for $Cy(t)$. We conclude that $Cy(t) \rightharpoonup 0$, as $t \to +\infty$. This completes the proof.

We now, treat the case of skew-adjoint control operator on a real Hilbert state space.

Theorem 4.2.2 *Let H be a real Hilbert space and $C \in \mathcal{L}(H,Y)$, and suppose that :*

i. A is the infinitesimal generator of a linear C_0-semi-group of contractions $S(t)$ on H,

ii. $B^* = -B$,

iii. for all $y \in H$;

$$\langle b, S(t)y\rangle = 0, \quad \forall t \geq 0 \Longrightarrow Cy = 0. \tag{4.15}$$

Then the system (4.1) is partially weakly stabilizable with the feedback control :

$$u(t) = -r\frac{\langle y(t), b\rangle}{|\langle y(t), b\rangle| + 1}, \quad (r > 0).$$

Proof 4.2.2 The crucial role of the compactness of B in the proof of Theorem 1 was, roughly speaking, the fact that for all $(x_n) \subseteq H$; $x_n \rightharpoonup x$, as $n \longrightarrow +\infty$, we have

$$\langle Bx_n + b, x_n\rangle \longrightarrow \langle Bx + b, x\rangle, \text{ as } n \longrightarrow +\infty. \tag{4.16}$$

Since B is skew-adjoint in the real Hilbert space, we have :

$$\langle Bx, x\rangle = 0, \ \forall x \in H \tag{4.17}$$

Thus, we have,

$$\langle Bx_n + b, x_n\rangle = \langle b, x_n\rangle \longrightarrow \langle b, x\rangle, \text{ as } n \longrightarrow +\infty. \tag{4.18}$$

We conclude by the same arguments as in the proof of Theorem 1.

In the next result we give a necessary condition for partial weak stabilization.

Proposition 4.2.1 *Let A generate a C_0-semi-group on H, $C \in \mathcal{L}(H, Y)$, $B \in \mathcal{L}(H)$ and $b \in H$. If the system (4.1) is partially weakly stabilizable, then for all $y \in H$;*

$$BS(t)y + b = 0, \ \forall t \geq 0 \Longrightarrow \ CS(t)y \rightharpoonup 0, \ \text{as } t \to +\infty. \tag{4.19}$$

Proof 4.2.3 Suppose that the system (4.1) is partially weakly stabilizable, and let $y_0 \in H$ be such that $BS(t)y_0 + b = 0$, $\forall t \geq 0$. Hence $y(t) = S(t)y_0$ is the mild solution of (4.5) starting at $y(0) = y_0$. Then, the partial stabilization implies that :

$$CS(t)y_0 \rightharpoonup 0, \text{ as } t \to +\infty. \tag{4.20}$$

Remark 4.2.1

1. *If C is a compact operator, then the weak convergence of Theorems 1 and 2 becomes in the strong sense.*
2. *For $C = I$, we retrieve the global weak stabilization.*
3. *There exist systems which are not globally stabilizable, but which are partially stabilizable (see Example 1 below).*

4.2.3 Global strong stabilization

In this part, we assume that the state space H can be decomposed into :

$$H = H_1 \oplus H_2, \tag{4.21}$$

where H_1 and H_2 are two closed subspaces of H, which are orthogonal to each one, and invariant under $S(t)$. Then $S(t)$ induces a C_0-semi-group $S_1(t)$ (resp. $S_2(t)$) on H_1 (resp. H_2).

For all $t \geq 0$, let $(y_1(t), y_2(t))$ denote the unique couple of $H_1 \times H_2$ such that $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$.

Theorem 4.2.3 *We assume that :*

1. *A is the infinitesimal generator of a linear C_0-semi-group of contractions $S(t)$ on H,*
2. *B is compact operator of H,*

3. for all $y \in H$ *;*

$$\langle BS(t)y + b, S(t)y\rangle = 0 \quad \forall t \geq 0 \Longrightarrow y = 0. \tag{4.22}$$

4. $\dim H_1 < +\infty$*,*

5. $S_2(t)$ *is exponentially stable.*

Then the control (4.4) globally stabilizes (4.1).

Proof 4.2.4 Applying Theorem 1 with $C = I$, we obtain :

$$y(t) \rightharpoonup 0, \text{ as } t \to +\infty. \tag{4.23}$$

Then, using the fact that $\dim H_1 < +\infty$, we deduce that :

$$y_1(t) \to 0 \text{ as, } t \to +\infty. \tag{4.24}$$

For the component $y_2(t)$ of $y(t)$, it follows from (4.7) that :

$$y_2(t) = S_2(t)y_{02} - r\int_0^t \frac{\langle y(s), By(s) + b\rangle}{|\langle y(s), By(s) + b\rangle| + 1} S_2(t-s)(By(s) + b)\,ds. \tag{4.25}$$

Let $\sigma, M > 0$ be such that :

$$\|S_2(t)\| \leq Me^{-\sigma t}, \ \forall t \geq 0. \tag{4.26}$$

Since B is compact, we have :

$$By(t) + b \to b, \text{ as } t \to +\infty.$$

It follows from this and (4.23) that :

$$u(t) \to 0, \text{ as } t \to +\infty.$$

Let $\varepsilon > 0$ and $t_1 \geq 0$ be such that :

$$|u(t)|\,\|By(t) + b\| \leq \varepsilon, \ \forall t \geq t_1. \tag{4.27}$$

Taking $y_2(t)$ as initial state, the relation (4.7) reads as follows :

$$y_2(t) = S_2(t - t_1)y_2(t_1) + \int_{t_1}^t u(s)S_2(t-s)(By(s) + b)\,ds.$$

Then, using (4.26) and (4.27), we obtain :

$$\|y_2(t)\| \leq Me^{-\sigma(t-t_1)}\|y_2(t_1)\| + \frac{Mr\varepsilon}{\sigma}\left(1 - e^{-\sigma(t-t_1)}\right).$$

It follows that :

$$\|y_2(t)\| \to 0, \text{ as } t \to +\infty. \tag{4.28}$$

From (4.24) and (4.28), we conclude that $y(t) \longrightarrow 0$, as $t \longrightarrow +\infty$.

In the next result, we give a necessary condition for global strong stabilization. The proof of this proposition follows from similar techniques as in Proposition 1.

Proposition 4.2.2 *Let A generate a C_0-semi-group on H, $B \in \mathcal{L}(H)$ and $b \in H$. Moreover, if the system (4.1) is globally strongly stabilizable, then for all $y \in H$;*

$$BS(t)y + b = 0,\ \forall t \geq 0 \Longrightarrow S(t)y \to 0,\ \text{as } t \to +\infty. \tag{4.29}$$

4.3 Applications

Example 4.3.1 *Consider the system defined in $\Omega := (0,1)$ by the following heat equation :*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} z(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} z(x,t) + \pi^2 \langle z, \varphi_1 \rangle \varphi_1 + u(t) Bz(x,t) + u(t) b, & \text{in } \Omega \times (0,+\infty) \\ z'(0) = z'(1) = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,+\infty) \end{cases} \tag{4.30}$$

where $\varphi_1(x) = \sqrt{2}\cos(\pi^2 x)$. Here, the state space is $H = L^2(\Omega)$ and the operator A is defined by :

$$Az = \frac{\partial^2 z(x)}{\partial x^2} + \pi^2 \langle z, \varphi_1 \rangle \varphi_1,\ \forall z \in D(A) = \left\{ z \in H^2(\Omega) / z'(0) = z'(1) = 0 \right\}.$$

The eigenfunctions of A are given by :

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\cos(j\pi x), & \text{if } j \in \mathbb{N}^* \\ 1, & j = 0 \end{cases}$$

with corresponding eigenvalues $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$ and $\lambda_j = -j^2\pi^2, \quad \forall j \geq 2$.
The semi-group associated to A is of contractions and is given by :

$$S(t)z = \sum_{j=0}^{+\infty} e^{\lambda_j t} \langle z, \varphi_j \rangle \varphi_j,\ \forall z \in H.$$

Let us take $b = -\varphi_2$ and define the following compact operator :

$$Bz = \langle z, \varphi_0 \rangle \varphi_2 + \sum_{j=1}^{p} \langle z, \varphi_j \rangle \varphi_j,\ \forall z \in H, (p \geq 2).$$

We aim to stabilize the following part of the state :

$$Cz = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \langle z, \varphi_j \rangle \varphi_j,\ \text{where } \alpha_j \in \mathbb{R}, \forall 1 \leq j \leq p$$

Then for all $z \in H$, we have :

$$\begin{aligned}\langle BS(t)z + b, S(t)z\rangle &= 0, \ \forall t \geq 0 \\ &\Longrightarrow e^{\lambda_2 t}\langle z, \varphi_2\rangle(\langle z, \varphi_0\rangle - 1) + \sum_{j=1}^{p} e^{2\lambda_j t}\langle z, \varphi_j\rangle^2 = 0, \ \forall t \geq 0 \\ &\Longrightarrow \langle z, \varphi_j\rangle = 0, \quad \forall j = 1, ..., p \\ &\Longrightarrow Cz = 0\end{aligned}$$

It follows from Theorem 1 and Remark 1 that the system (4.30) is strongly partially stabilizable with respect to the output operator C using the following control law :

$$u(t) = -r\frac{\xi(z(t))}{1 + |\xi(z(t))|}, \tag{4.31}$$

where

$$\xi(z) = \langle z, \varphi_0\rangle\langle z, \varphi_2\rangle - \langle z, \varphi_2\rangle + \sum_{j=1}^{p}\langle z, \varphi_j\rangle^2$$

Remark 4.3.1 *Notice that system (4.30) is not stabilizable in Ω, since the implication (4.29) fails for $y = \varphi_0$. However, the above stabilizing control $u(t)$ ensures, by virtue of (4.9), the boundedness of the full state.*

Below, we give simulations for $\alpha_j = 1$, $\forall j = 1, ...p$ and $z_0(x) = 1 + \sqrt{2}\cos(\pi x)$.

Figure 1 shows that the whole state is unstable. However, as we can in Figure 2, the system is partially stabilizable with respect to C. Finally, Figure 3 describes the evolution of the stabilizing control.

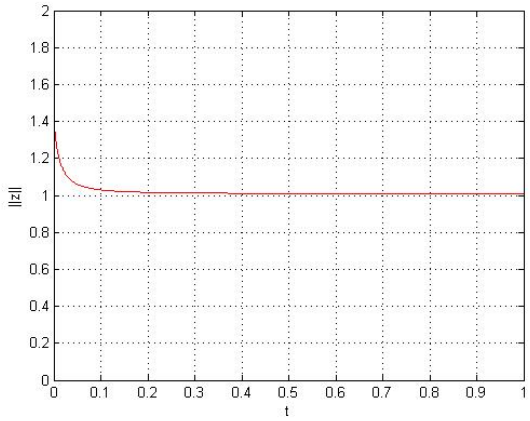


Figure 1 : The evolution of $\|z(t)\|$.

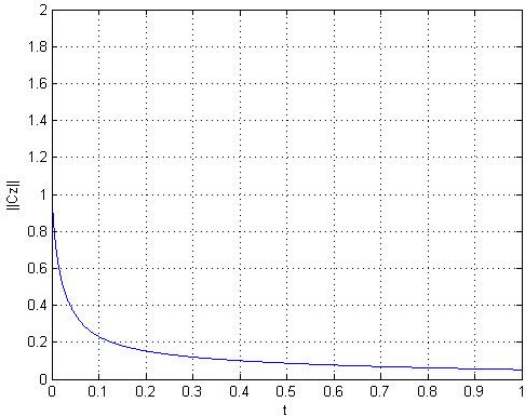


Figure 3 : Figure 2 : The evolution of $\|Cz(t)\|$.

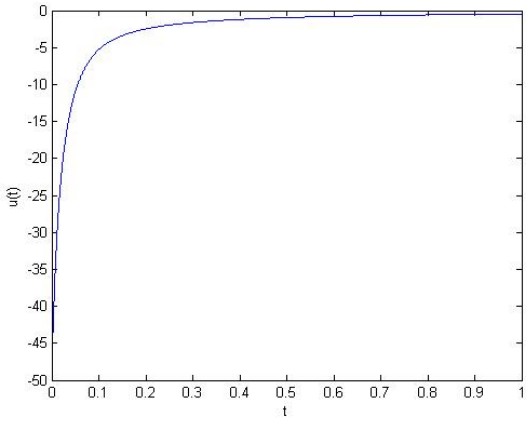


Figure 3 : The evolution of the stabilizing control.

Example 4.3.2 *Consider the following hyperbolic equation :*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,t) + u(t)\, z(t) + u(t)\, q = 0,\ \Omega = (0,1), \tag{4.32}$$

where $u(t)$ *is a real valued control and* $q \in L^2(0,1)$. *Let* $H = H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$ *with the inner product :*

$$\langle (y_1, z_1), (y_2, z_2) \rangle = \langle y_1, y_2 \rangle_{H_0^1(0,1)} + \langle z_1, z_2 \rangle_{L^2(0,1)},\ \forall (y_i, z_i) \in H,\ i = 1, 2.$$

The system (4.32) is equivalent to (4.1) with $y = \begin{pmatrix} z \\ z_t \end{pmatrix}$ *and :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -I & 0 \end{pmatrix} \text{ and } b = \begin{pmatrix} 0 \\ -q \end{pmatrix}.$$

The operator A generates a semi-group of contractions and B is a compact operator from H to H. Furthermore, the eigenvalues of $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ with Dirichlet boundary conditions are given by :
$\lambda_m = m^2\pi^2$, $m \geq 1$, *with corresponding eigenfunctions* $\varphi_m(x) = \sqrt{2}\sin(m\pi x)$.
Let $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \in H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$ *with*

$$\mu_1 = \sum_{m=1}^{+\infty} c_m \varphi_m \text{ and } \mu_2 = \sum_{m=1}^{+\infty} m\pi d_m \varphi_m, \qquad (c_m, d_m) \in \mathbb{R}^2, \forall m \geq 1.$$

Separation of variable yields

$$S(t)\mu = \sum_{m=1}^{+\infty} \begin{pmatrix} c_m \cos(m\pi t) + d_m \sin(m\pi t) \\ -m\pi c_m \sin(m\pi t) + m\pi d_m \cos(m\pi t) \end{pmatrix} \varphi_m.$$

Furthermore,

$$BS(t)\mu = \sum_{m=1}^{+\infty} \begin{pmatrix} 0 \\ -c_m \cos(m\pi t) - d_m \sin(m\pi t) \end{pmatrix} \varphi_m.$$

Then

$$\langle BS(t)\mu, S(t)\mu \rangle = \sum_{m=1}^{+\infty} m\pi \left[\left(\frac{c_m^2}{2} - \frac{d_m^2}{2} \right) \sin(2m\pi t) - c_m d_m \cos(2m\pi t) \right],$$

and

$$\langle b, S(t)\mu \rangle = \sum_{m=1}^{+\infty} q_m \left[m\pi c_m \sin(m\pi t) - m\pi d_m \cos(m\pi t) \right],$$

with

$$q = \sum_{i=1}^{+\infty} q_m \varphi_m, \quad (q_m)_{m\geq 1} \subseteq \mathbb{R}.$$

Suppose that

$$\langle BS(t)\mu + b, S(t)\mu \rangle = 0, \ \forall t \geq 0.$$

Then for all $t \geq 0$, we have :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} m\pi \left[\left(\frac{c_m^2}{2} - \frac{d_m^2}{2} \right) \sin(2m\pi t) + c_m q_m \sin(m\pi t) \right] = \sum_{m=1}^{+\infty} m\pi \left[c_m d_m \cos(2m\pi t) + d_m q_m \cos(m\pi t) \right]$$

.

Remarking that

$$t \mapsto \sum_{m=1}^{+\infty} m\pi \left[\left(\frac{c_m^2}{2} - \frac{d_m^2}{2} \right) \sin(2m\pi t) + c_m q_m \sin(m\pi t) \right], \tag{4.33}$$

is an odd function and that

$$t \mapsto \sum_{m=1}^{+\infty} m\pi \left[c_m d_m \cos(2m\pi t) + d_m q_m \cos(m\pi t) \right],$$

is an even one, we deduce that for all $t \geq 0$*, we have :*

$$\sum_{m=1}^{+\infty} m\pi \left(\frac{c_m^2}{2} - \frac{d_m^2}{2} \right) \sin(2m\pi t) = -\sum_{m=1}^{+\infty} m\pi c_m q_m \sin(m\pi t), \tag{4.34}$$

and

$$\sum_{m=1}^{+\infty} m\pi c_m d_m \cos(2m\pi t) = -\sum_{m=1}^{+\infty} m\pi d_m q_m \cos(m\pi t). \tag{4.35}$$

In other words

$$\begin{cases} \sum\limits_{m=1}^{+\infty} m\pi \left[\left(\frac{c_m^2}{2} - \frac{d_m^2}{2} \right) \sin(2m\pi t) + c_m q_m \sin(m\pi t) \right] = 0, & \forall t \geq 0 \\ \sum\limits_{m=1}^{+\infty} m\pi \left[c_m d_m \cos(2m\pi t) + d_m q_m \cos(m\pi t) \right] = 0, & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

which can be written as follows :

$$\begin{cases} \sum\limits_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \sin(m\pi t) = 0, & \forall t \geq 0 \\ \sum\limits_{m=1}^{+\infty} \beta_m \cos(m\pi t) = 0, & \forall t \geq 0 \end{cases} \tag{4.36}$$

where

$$\alpha_m = \begin{cases} m\pi \left[\left(\frac{c_m^2}{\frac{2}{4}} - \frac{d_m^2}{\frac{2}{4}} \right) + c_m q_m \right], & \text{if } m \text{ is even} \\ m\pi c_m q_m, & \text{else} \end{cases}$$

and

$$\beta_m = \begin{cases} m\pi \left(\frac{c_m d_m}{\frac{2}{2}} + d_m q_m \right), & \text{if } m \text{ is even} \\ m\pi d_m q_m, & \text{else} \end{cases}$$

Using Cantor theorem related to trigonometric functions (see [5]), we deduce that

$$\alpha_m = \beta_m = 0, \ \forall m \geq 1.$$

In the sequel, we take

$$q_m = \begin{cases} 0, & \text{if } m \text{ is even} \\ 1, & \text{else} \end{cases}$$

then we have

$$\alpha_m = \begin{cases} m\pi\left[\left(\frac{c_{\frac{m}{2}}^2}{4} - \frac{d_{\frac{m}{2}}^2}{4}\right)\right], & \text{if } m \text{ is even} \\ m\pi c_m, & \text{else} \end{cases}$$

and

$$\beta_m = \begin{cases} m\pi\left(\frac{c_{\frac{m}{2}} d_{\frac{m}{2}}}{2}\right), & \text{if } m \text{ is even} \\ m\pi d_m, & \text{else} \end{cases}$$

and hence

$$c_m = d_m = 0, \ \forall m \geq 1,$$

thus $\mu = 0$. *Hence, (4.6) holds for* $C = I$. *We conclude that the system (4.32) is weakly stabilizable with the control :*

$$u(t) = -r \frac{\left\langle q - \frac{\partial z}{\partial t}(x,t), \frac{\partial z}{\partial t}(x,t) \right\rangle_{L^2(0,1)}}{\left| \left\langle q - \frac{\partial z}{\partial t}(x,t), \frac{\partial z}{\partial t}(x,t) \right\rangle_{L^2(0,1)} \right| + 1}.$$

4.4 Conclusion

In this chapter we have proposed a bounded feedback control, which partially or globally stabilizes an infinite dimensional non-homogeneous bilinear system under a weak observability assumption. Necessary conditions are given as well. Partial controllability is an extension of the conventional one, and there are systems which are partially, but not globally, stabilizable. Furthermore, this work gives an opening to other questions ; which is the case of studying the strong stabilization with decay estimate of non-homogenuous bilinear system (4.1), extending the results established for $b = 0$ in [9] and [64].

Chapitre 5

Strong stabilization of non-homogeneous bilinear systems

5.1 Introduction

This work considers the feedback stabilization question of the non-homogeneous bilinear system :

$$\begin{cases} y_t(t) = Ay(t) + u(t)(By(t) + b), & \forall t > 0 \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{5.1}$$

where A is the infinitesimal generator of a linear C_0-semi-group of contractions $S(t)$ on a Hilbert space H, with inner product $\langle .,. \rangle$ and corresponding norm $\|.\|$, $B : H \to H$ is a bounded linear operator of H, b is a fixed vector and the scalar valued function $u(t)$ is a control.

The case of homogeneous systems (i.e $b = 0$) has been studied in various works (see, e.g. [8], [9],[61]). In [8], it has been proved that if B is compact and the following implication is verified

$$\langle BS(t)z, S(t)z \rangle = 0, \ \forall t \geq 0 \Longrightarrow z = 0, \tag{5.2}$$

then, the homogeneous part of system (5.1) is weakly stabilizable by the quadratic control

$$u(t) = -\langle y(t), By(t) \rangle. \tag{5.3}$$

In [9], it has been shown that if the control oerator B is self-adjoint, monotone and satisfies the following inequality :

$$\delta \|z\|^2 \leq \int_0^T |\langle BS(t)z, S(t)z \rangle| \, dt, \forall z \in H, \quad (\delta, T > 0), \tag{5.4}$$

then, the quadratic feedback control (5.3) strongly stabilizes the homogeneous part of (5.1) and the decay rate of the corresponding stabilized state has been explicitly estimated.

In [61], it has been shown that if B is locally Lipschitz and satisfies the assumption (5.4), then the feedback control (5.3) strongly stabilizes the system (5.1) with $b = 0$. Moreover, a few works have been dedicated to the case of non-homogeneous distributed bilinear system (5.1) (see e.g. [11], [14], [3], [12], [13] and the references therein). In [11], it has been proved that if A and B are skew-adjoint, then under the controllability assumption of the pair (A, b) the feedback $u(t) = -\langle b, y(t)\rangle$ weakly stabilizes the system (5.1). In [3], it has been shown that if A is dissipative, B is skew-adjoint and $\langle b, S(t)\, y\rangle = 0, \ \ \forall t \geq 0 \Rightarrow y = 0$, then the system (5.1) is weakly stabilizable with the control $u(t) = -\langle b, y(t)\rangle$. In the case where A generates a compact semi-group on a Hilbert state space and the resolvent of the operator A is compact, [12] gave necessary and sufficient conditions for system (5.1) to be strongly stabilizable by the following bounded control :

$$u(t) = \frac{-\langle By(t) + b, y(t)\rangle}{1 + |\langle By(t) + b, y(t)\rangle|^2}.$$

In [13], it has been proved that if the following assumptions

1. $\langle BS(t)\, x_n, S(t)\, x_n\rangle \longrightarrow 0 \Longrightarrow x_n \longrightarrow 0$, as $n \longrightarrow +\infty$,
2. $\exists \alpha \geq 0$, $\langle Bx, Ax\rangle + \langle Ax, B^*x\rangle \leq \alpha \|x\| \ \forall x \in D(A)$,

are verified, then the system (5.1) is strongly stabilizable. However, in [14] it has been demonstrated that if A generates a compact semi-group on a Hilbert state space and the condition (5.2) is verified, then the system (5.1) is strongly stabilizable by $u(t) = -\langle By(t) + b, y(t)\rangle$. Recently, the partial and global stabilization of the system (5.1) has been considered. This consists on stabilizing only a part $Cy(t)$, where C maps the state space H to an other space Y. Then, sufficient and necessary conditions for weak and strong partial and global stabilization are given. The main contribution of this work is to provide sufficient conditions for partial and global strong stabilization of system (5.1).

The notion of partial stabilization extends the global one, and enables us to stabilize some parts or components of the state when the stabilization

of the full state is impossible or not required. Partial stabilization has been discussed for homogeneous bilinear system in [33], the question of weak and strong stabilization has been studied for system (5.1) under a weak observability like assumption, but no estimate has been established.

In the next section, we discuss the global stabilization and we give sufficient conditions that ensure strong stabilization of the full state. This leads to an explicit asymptotic decay rate. In the third section, we consider the question of partial stabilization which consists on stabilizing only a part of the state. In the fourth section, we present an application to the wave equation.

5.2 Global strong stabilization

In this section, we aim to provide an explicit asymptotic estimate for the state of system (5.1). Motivated by the previous work [33], we consider the following control :

$$u(t) = -\rho \frac{\langle y(t), By(t) + b \rangle}{|\langle y(t), By(t) + b \rangle| + 1}, \quad (\rho > 0). \tag{5.5}$$

This leads to the closed loop system :

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + f(y(t)), & \forall t > 0 \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{5.6}$$

where

$$f(y) = -\frac{\rho \langle y, By + b \rangle}{|\langle y, By + b \rangle| + 1} (By + b), \quad \forall y \in H. \tag{5.7}$$

Our main result can be stated as follows :

Theorem 5.2.1 *Suppose that :*

1. *A is the infinitesimal generator of a linear C_0-semi-group of contractions $S(t)$ on H,*
2. *B is a linear bounded operator,*
3. *there exist $\delta, T > 0$ such that :*

$$\int_0^T |\langle BS(s)y + b, S(s)y \rangle| \, ds \geq \delta \|y\|^2, \quad \forall y \in H. \tag{5.8}$$

Then, the feedback (5.5) strongly stabilizes the system (5.1).

Proof 5.2.1 Observing that f is locally Lipschitz and dissipative, we deduce that the system (5.6) possesses a unique global solution $y(t)$ given by the following variation of constants formula (see [66], p. 185) :

$$y(t) = S(t)y_0 - \rho\int_0^t \frac{\langle y(s), By(s)+b\rangle}{|\langle y(s), By(s)+b\rangle|+1} S(t-s)(By(s)+b)\,ds. \quad (5.9)$$

Using an approximation argument (see Lemma 5.5 in [7]) and the fact that the operator A is dissipative, we can show that :

$$\|y(\tau)\|^2 - \|y(t)\|^2 \geq 2\rho\int_\tau^t \frac{|\langle By(s)+b, y(s)\rangle|^2}{|\langle By(s)+b, y(s)\rangle|+1} ds, \quad \forall 0 \leq \tau \leq t \quad (5.10)$$

In particular, we have

$$\|y(t)\| \leq \|y_0\|, \quad \forall t \geq 0. \quad (5.11)$$

Moreover, using (5.9) and (5.11) we get :

$$\|y(t) - S(t)y_0\| \leq \rho(\|B\|\|y_0\| + \|b\|)\int_0^t \frac{|\langle By(\tau)+b, y(\tau)\rangle|}{|\langle By(\tau)+b, y(\tau)\rangle|+1} d\tau, \quad \forall t \geq 0. \quad (5.12)$$

Furthermore, for all $s \geq 0$ we have :

$$\begin{aligned} |\langle BS(s)y_0+b, S(s)y_0\rangle| &\leq |\langle BS(s)y_0 - By(s), S(s)y_0\rangle| \\ &+ |\langle By(s)+b, S(s)y_0 - y(s)\rangle| \\ &+ |\langle y(s), By(s)+b\rangle|. \end{aligned}$$

Then, using (5.11) and the contraction property of $S(t)$ we deduce that :

$$\begin{aligned} |\langle BS(s)y_0+b, S(s)y_0\rangle| &\leq (2\|B\|\|y_0\| + \|b\|)\|S(s)y_0 - y(s)\| \\ &+ |\langle y(s), By(s)+b\rangle|. \end{aligned}$$

It comes from (5.12) and (5.13) that for all $T > 0$, we have :

$$\begin{aligned} |\langle BS(s)y_0+b, S(s)y_0\rangle| &\leq K_1\int_0^T \frac{|\langle y(\tau), By(\tau)+b\rangle|}{|\langle y(\tau), By(\tau)+b\rangle|+1} d\tau \\ &+ |\langle y(s), By(s)+b\rangle|, \end{aligned}$$

with

$$K_1 = \rho(2\|B\|\|y_0\| + \|b\|)(\|B\|\|y_0\| + \|b\|).$$

Now, using the superposition property of the solution $y(t)$, we obtain via the above inequality :

$$|\langle BS(s)y(t)+b, S(s)y(t)\rangle| \leq K_1 \int_0^T \frac{|\langle By(t+\tau)+b, y(t+\tau)\rangle|}{|\langle By(t+\tau)+b, y(t+\tau)\rangle|+1} d\tau + |\langle y(t+s), By(t+s)+b\rangle|, \quad \forall (s,t) \in [0,T]\times\mathbb{R}^+.$$

Thus, integrating the last inequality with respect to $s \in [0,T]$, we deduce that :

$$\left(\int_0^T |\langle BS(s)y(t)+b, S(s)y(t)\rangle| ds\right)^2 \leq K^2 \int_t^{t+T} |\langle y(s), By(s)+b\rangle|^2 ds, \tag{5.13}$$

with $K = (TK_1+1)\sqrt{T}$.
Letting $s_k = \|y(kT)\|^2$ we get from (5.10) :

$$s_k - s_{k+1} \geq 2\rho \int_{kT}^{(k+1)T} \frac{|\langle By(s)+b, y(s)\rangle|^2}{|\langle By(s)+b, y(s)\rangle|+1} ds. \tag{5.14}$$

This together with (5.11), gives :

$$s_k - s_{k+1} \geq \frac{2\rho}{(\|B\|\,\|y_0\|+\|b\|)\|y_0\|+1} \int_{kT}^{(k+1)T} |\langle By(s)+b, y(s)\rangle|^2 ds$$

Then taking into account (5.8) and (5.13), we obtain

$$s_k - s_{k+1} \geq \frac{2\delta^2\rho}{K^2((\|B\|\,\|y_0\|+\|b\|)\|y_0\|+1)} \|y(kT)\|^4.$$

Since $\|y(t)\|$ is decreasing, it follows that

$$s_k \geq u(s_{k+1}) + s_{k+1}, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

where $u(s) = \gamma s^2$ with $\gamma = \dfrac{2\delta^2\rho}{K^2((\|B\|\,\|y_0\|+\|b\|)\|y_0\|+1)}$.

Then we have (see for instance [4]) :

$$s_k = \|y(kT)\|^2 \leq \frac{M}{k+1} \leq \frac{M}{k}. \quad \forall k \geq 1, \ (M>0) \tag{5.15}$$

Finally, using the fact that $\|y(t)\|$ decrease, we deduce the following estimate

$$\|y(t)\| = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \quad \text{as } t \longrightarrow +\infty.$$

5.3 Partial strong stabilization

The following theorem provides sufficient conditions for partial strong stabilization.

Theorem 5.3.1 *Suppose that :*

1. *A is the infinitesimal generator of a linear C_0-semi-group of contractions $S(t)$ on H,*
2. *B is a linear bounded operator,*
3. *C is a linear operator,*
4. *there exist $\delta, T > 0$ such that :*

$$\int_0^T \langle BS(s)y + b, S(s)y \rangle ds \geq \delta \|Cy\|^2, \quad \forall y \in H. \tag{5.16}$$

Then, for all $r > 0$ the feedback (5.5) strongly partially stabilizes the system (5.1).

Proof 5.3.1 From (5.13) and (5.16), we have :

$$\|Cy(t)\|^4 \leq L \int_t^{t+T} |\langle y(s), By(s) + b \rangle|^2 ds, \forall t \geq 0, \tag{5.17}$$

where $L = \frac{K^2}{\delta^2}$. Moreover, using (5.10) and (5.11) we get :

$$\begin{aligned} \|y(t)\|^2 - \|y(t+T)\|^2 &\geq \frac{2\rho}{(\|B\| \|y_0\| + \|b\|) \|y_0\| + 1} \int_t^{t+T} |\langle By(s) + b, y(s) \rangle|^2 ds \\ &\geq \gamma \|Cy(t)\|^4, \end{aligned} \tag{5.18}$$

with $\gamma = \frac{2\rho}{((\|B\|\|y_0\| + \|b\|)\|y_0\| + 1)L}$.
Since $\|y(t)\|^2$ admits a finite limit at $+\infty$, it follows from (5.17) and (5.18) that $\|Cy(t)\| \longrightarrow 0$, as $t \longrightarrow +\infty$. In other word, the system (5.1) is strongly partially stabilizable.

In the following Theorem, we give some necessary condition ensuring the strong partial stabilization of 5.1.

Theorem 5.3.2 *We assume that :*

1. *A is the infinitesimal generator of a linear C_0-semi-group of contractions $S(t)$ on H,*

2. B *or* $S(t)$ *is compact from* H *to* H*,*

3. for all $y \in H$ *;*

$$\langle BS(t)y + b, S(t)y\rangle = 0 \quad \forall t \geq 0 \Longrightarrow By = 0. \tag{5.19}$$

4. $\dim H_1 < +\infty$*,*

5. $S_2(t)$ *is exponentially stable.*

Then, $By(t) \longrightarrow 0$

Proof 5.3.2 according to Theorem 1, we have that the control

$$u(t) = -\rho \frac{\langle y(t), By(t) + b\rangle}{|\langle y(t), By(t) + b\rangle| + 1}, \quad (\rho > 0) \tag{5.20}$$

weakly partially stabilizes (5.1)

$$By(t) \rightharpoonup 0, \text{ as } t \longrightarrow +\infty \tag{5.21}$$

if B is compact we have the result.

Suppose that the semigroups $S(t)$ is compact. We have $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$, then,

$$By(t) = By_1(t) + By_2(t) \tag{5.22}$$

Since $\dim H_1 < +\infty$, we have :

$$By_1(t) \longrightarrow 0 \text{ as } t \longrightarrow +\infty \tag{5.23}$$

Let $\sigma, M > 0$ be such that :

$$\|S_2(t)\| \leq Me^{-\sigma t}, \ \forall t \geq 0. \tag{5.24}$$

Let $\varepsilon > 0$ and $t_1 \geq 0$ such that for all $t \geq t_1$

$$\|By_1(t)\| \leq \varepsilon, \text{ and } e^{-\sigma(t-t_1)} \leq \varepsilon \tag{5.25}$$

For $y_2(t)$, it follows from (5.9) that :

$$\mathbf{y_2(t) = S_2(t-t_1)\,y_2(t_1) + \int_{t_1}^{t} u(s)\,S_2(t-s)\,(By_1(s) + By_2(s) + b)\,ds}, \quad \mathbf{\forall t \geq t_1} \tag{5.26}$$

then,

$$\begin{aligned} \|By_2(t)\| &\leq \|\mathbf{B}\|\,\|\mathbf{S_2(t-t_1)}\|\,\|\mathbf{y_2(t_1)}\| \\ &+ \int_{t_1}^{t} |u(s)|\,\|B\|\,\|\mathbf{S_2(t-s)}\|\,\|\mathbf{By_2(s)}\|\,\mathbf{ds} \\ &+ \int_{t_1}^{t} |u(s)|\,\|B\|\,\|\mathbf{S_2(t-s)}\|\,\|\mathbf{By_1(s) + b}\|\,\mathbf{ds} \end{aligned}$$

Then, for $t \geq t_1$, we have :

$$\begin{aligned} \|B\mathbf{y}_2(t)\| &\leq \|\mathbf{B}\| \|\mathbf{y}_2(t_1)\| Me^{-\sigma(t-t_1)} + \rho \int_{t_1}^{t} \|B\| Me^{-\sigma(t-s)} \|\mathbf{By_2}(\mathbf{s})\| \mathbf{ds} \\ &\quad + \rho M \|B\| (\varepsilon + \|\mathbf{b}\|) \frac{1 - e^{-\sigma(t-t_1)}}{\sigma} \\ &\leq \alpha_\varepsilon + \rho M \|B\| \int_{t_1}^{t} e^{-\sigma(t-s)} \|\mathbf{By_2}(\mathbf{s})\| \mathbf{ds} \end{aligned}$$

with $\alpha_\varepsilon = \|\mathbf{B}\| \|\mathbf{y}_2(t_1)\| M\varepsilon + \rho M \|B\| (\varepsilon + \|\mathbf{b}\|) \frac{1}{\sigma}$

Using Grornwall's inequality we have :

$$\|By_2(t)\| \longrightarrow 0, \text{ as } t \longrightarrow +\infty \tag{5.27}$$

then we have

$$By(t) \longrightarrow 0, \text{ as } t \longrightarrow +\infty. \tag{5.28}$$

5.4 An application

Example 5.4.1 *Consider the system of wave propagation in one dimensional described by the following equation :*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,t) + u(t) \frac{\partial z}{\partial t}(x,t) + u(t) q, & x \in (0,1), \quad t \geq 0 \\ z(x,0) = z_0(x), \quad \frac{\partial z}{\partial t}(x,0) = z_1(x), & x \in (0,1) \\ z(0,t) = z(1,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \tag{5.29}$$

The system (5.29) can be written in the form of (5.1) in the state space $H = H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$*, endowed with the inner product*

$$\langle X, Y \rangle_H = \int_0^1 \frac{dX_1}{dx}(x) \frac{dY_1}{dx}(x) dx + \int_0^1 X_2(x) Y_2(x) dx,$$

by taking :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \end{pmatrix} \text{ with } D(A) = \left(H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)\right) \times H_0^1(0,1).$$

and $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}$

Here, $\left(\varphi_n := \sqrt{2} \sin(n\pi x)\right)_{n \geq 1}$ *is a complete orthonormal eigenfunctions system of* $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ *associated to the eigenvalues* $(\lambda_n := -n^2\pi^2)_{n \geq 1}$.

Moreover, we know that for all $z = (z_1, z_2) \in H$ *we have*

$$S(t)z = \sum_{n=1}^{+\infty} \begin{pmatrix} \langle z_1, \varphi_n \rangle \cos(n\pi t) + \frac{1}{n\pi} \langle z_2, \varphi_n \rangle \sin(n\pi t) \\ \\ -n\pi \langle z_1, \varphi_n \rangle \sin(n\pi t) + \frac{1}{n\pi} \langle z_2, \varphi_n \rangle \cos(n\pi t) \end{pmatrix} \varphi_n.$$

Thus, integrating $\langle BS(t)z + b, S(t)z \rangle$ *over the interval* $[0, 2]$ *and taking into account this last formula, we get*

$$\begin{aligned} \int_0^2 \langle BS(t)z + b, S(t)z \rangle dt &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2\pi^2} \langle z_2, \varphi_n \rangle^2 + n^2\pi^2 \langle z_1, \varphi_n \rangle^2 \right) \\ &\geq \gamma \|z\|^2, \end{aligned}$$

with $\gamma = \frac{1}{\pi^2}$.
According to Theorem 1, we deduce that the system (5.29) is strongly stabilizable by the following feedback control

$$u(t) = -\rho \frac{\int_0^1 (z_t(x,t))^2 dx + q \int_0^1 z_t(x,t) dx}{\left| \int_0^1 (z_t(x,t))^2 dx + q \int_0^1 z_t(x,t) dx \right| + 1}, \quad \rho > 0 \tag{5.30}$$

Below, we develop the simulation for $z_0(x) = \sin(x)$ *and* $z_1(x) = x$.
The energy is given by :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial z}{\partial x}(x,t) \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial z}{\partial t}(x,t) \right)^2 dx. \tag{5.31}$$

5.5 Conclusion

In this paper we have proposed a bounded feedback control, which strongly stabilizes an infinite dimensional non-homogeneous bilinear system under a strong observability assumption. Furthermore, this work gives an opening to other questions ; which is the case of studying the stabilization of systems with Delay.

Chapitre 6

Conclusion et perspectives

Le présent travail s'intéresse à l'étude de la stabilisation des systèmes bilinéaires de dimension infinie, homogènes, non-homogènes, avec ou sans retard. Principalement, deux axes de recherche ont été évoqués.
Tout d'abord, nous avons étudié la question de stabilisation des systèmes bilinéaires avec un terme retard fini. On montre qu'avec un choix approprié du contrôle (en boucle fermée) le système est faiblement où fortement stable. Les conditions de stabilisation sont exprimées en terme d'inégalités d'observabilité faible ou forte.
Le second axe d'étude porte sur la stabilisation de systèmes bilinéaires non homogènes sans retard : Deux approches ont été proposées, la première est basée sur la décomposition de l'espace d'état. Cette méthode nous a permis de décomposer le système en deux sous-systèmes, l'un est «stable» et un autre «instable». Ensuite, nous montrons que l'on peut se concentrer sur la détermination d'un contrôle stabilisant pour la partie dite instable qui maintient la stabilité exponentielle de la partie stable. Cette méthode reste valide pour la classe de systèmes paraboliques. La deuxième approche s'applique aux différents type de systèmes paraboliques ou hyperboliques, elle consiste à étudier le système initial sans supposer la décomposition de l'espace d'état et de chercher une estimation de l'état via les propriétés des semi-groupe linéaire et de l'énergie.

Les développements futurs possibles en relation avec les problèmes abordés dans cette thèse peuvent être résumés comme suit :

— La stabilisation des systèmes bilinéaire non-homogène à retard

Les systèmes bilinéaire non-homogène modélisent une large classe des systèmes réels dans plusieurs disciplines : biologie, physique, ingénierie, etc (e.g. [51], [77] et [41]). En général, la plupart des études réalisées jusqu'à maintenant, dans le cadre de la stabilisation des systèmes bilinéaire non-homogènes, négligent l'effet de retard au cours des phases de conception. Cependant, ce retard négligé peut entraîner une instabilité. D'où l'intérêt de prendre en considération cet effet. Plusieurs questions restent ouvertes, par exemple le problème de stabilisation de cette classe.

— Stabilisation des systèmes bilinéaires de type neutre :
La théorie des équations aux dérivées partielles de type neutre a été développée récemment par plusieurs auteurs, nous référons à [1], [31], [32],[84]. La stabilisation de systèmes bilinéaire de type neutre est une question importante. En dimension finie, Goodall et.al, dans [27] ont montré que cette classe des systèmes est stabilisable via un contrôle en boucle fermé. Les auteurs ont présenté des critères de stabilité indépendant du retard. La méthode utilisée dans ce travail est la construction d'une fonctionnelle Lyapunov-Krasovskii. Plusieurs questions restent ouvertes, par exemple le problème de stabilisation en dimension infinie de cette classe.

— Stabilisation des systèmes bilinéaire à retard infini :
La modélisation et l'analyse des systèmes à retard à suscité beaucoup d'intérêt au cours des dernières décennies. En effet de nombreux résultats dans la littérature sur la stabilité et la stabilisation des systèmes bilinéaire à retard fini [34, 36],...
Dans le cas où le retard est infini, sous quelles conditions a t-on la stabilité des systèmes bilinéaire ?

Bibliographie

[1] M. Adimy et F. Crauste. « Global stability of a partial differential equation with distributed delay due to cellular replication ». In : *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications* 54.8 (2003), p. 1469-1491.

[2] M. Adimy, F. Crauste et S. Ruan. « A mathematical study of the hematopoiesis process with applications to chronic myelogenous leukemia ». In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 65.4 (2005), p. 1328-1352.

[3] M. Akkouchi et A. Bounabat. « Weak stabilizability of a nonautonomous and non-linear system ». In : *Mathematica Pannonica* 14(1) (2003), p. 56-61.

[4] K. Ammari et M. Tucsnak. « Stabilization of Bernoulli–Euler Beams by Means of a Pointwise Feedback Force ». In : *SIAM Journal on Control and Optimization* 39.4 (2000), p. 1160-1181.

[5] J. M. Ash. « A new proof of uniqueness for multiple trigonometric series ». In : *American Mathematical Monthly* 107.2 (1989), p. 409-410.

[6] M. Athans et P. L. Falb. *Optimal control : an introduction to the theory and its applications*. Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 2013.

[7] J. M. Ball. « On the asymptotic behavior of generalized processes, with applications to nonlinear evolution equations ». In : *Journal of differential equations* 27.2 (1978), p. 224-265.

[8] J. M. Ball et M. Slemrod. « Feedback stabilization of distributed semilinear control systems ». In : *Applied Mathematics and Optimization* 5.1 (1979), p. 169-179.

[9] L. Berrahmoune. « Stabilization and decay estimate for distributed bilinear systems ». In : *Systems & control letters* 36.3 (1999), p. 167-171.

[10] L. L. Bonilla et A. Linan. « Relaxation oscillations, pulses, and travelling waves in the diffusive Volterra delay-differential equation ». In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 44.2 (1984), p. 369-391.

[11] A. Bounabat et J.P. Gauthier. « Weak stabilizability of infinite dimensional nonlinear systems ». In : *Applied Mathematics Letters* 4.1 (1991), p. 95-98.

[12] H. Bounit. « Comments on the feedback stabilization for bilinear control systems ». In : *Applied mathematics letters* 16.6 (2003), p. 847-851.

[13] H. Bounit et H. Hammouri. « Stabilization of infinite-dimensional semilinear systems with dissipative drift ». In : *Applied Mathematics and Optimization* 37.2 (1998), p. 225-242.

[14] H. Bounit et H. Hammouri. « Feedback stabilization for a class of distributed semilinear control systems ». In : *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications* 37.8 (1999), p. 953-969.

[15] M. Brelot. « Sur le problème biologique héréditaire de deux espèces dévorante et dévorée ». In : *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 9.1 (1931), p. 57-74.

[16] N. F. Britton. « Spatial structures and periodic travelling waves in an integro-differential reaction-diffusion population model ». In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 50.6 (1990), p. 1663-1688.

[17] C. Bruni, G. Dipillo et G. Koch. « Bilinear systems : An appealing class of" nearly linear" systems in theory and applications ». In : *IEEE Transactions on automatic control* 19.4 (1974), p. 334-348.

[18] M. G. Crandall et A. Pazy. « On the range of accretive operators ». In : *Israel Journal of Mathematics* 27.3-4 (1977), p. 235-246.

[19] R. F. Curtain et A. J. Pritchard. *Functional analysis in modern applied mathematics*. T. 132. Academic press, 1977.

[20] R. F. Curtain et H. Zwart. *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*. T. 21. Springer Science & Business Media, 2012.

[21] R. Datko, J. Lagnese et M. P. Polis. « An example on the effect of time delays in boundary feedback stabilization of wave equations ». In : *SIAM Journal on Control and Optimization* 24.1 (1986), p. 152-156.

[22] Y. El Boukfaoui, A. Bounabat et H. Bouslous. « Stabilisabilité d'un système bilinéaire fortement dissipatif ». In : *Extracta mathematicae* 9.3 (1994), p. 168-172.

[23] K. J. Engel et R. Nagel. « One-parameter semigroups for linear evolution equations ». In : *Semigroup Forum*. T. 63. 2. Springer. 2001, p. 278-280.

[24] H. O. Fattorini et H. O. Emeritus. *Infinite dimensional optimization and control theory*. T. 54. Cambridge University Press, 1999.

[25] W. Feller. « On the generation of unbounded semi-groups of bounded linear operators ». In : *Annals of Mathematics* (1953), p. 166-174.

[26] S. Foguel. « Powers of a contraction in Hilbert space ». In : *Pacific Journal of Mathematics* 13.2 (1963), p. 551-562.

[27] D.P. Goodall et G.D. Hu. « Stability criteria for a class of feedback controlled, imperfectly known, bilinear time-delay systems of the neutral type ». In : *IFAC Proceedings Volumes* 30.6 (1997), p. 467-472.

[28] K. Gopalsamy. *Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics*. T. 74. Springer Science & Business Media, 2013.

[29] P. O Gutman. « Stabilizing controllers for bilinear systems ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 26.4 (1981), p. 917-922.

[30] K. P. Hadeler. « Delay equations in biology ». In : *Functional differential equations and approximation of fixed points*. Springer, 1979, p. 136-156.

[31] J. K. Hale. « Partial neutral functional differential equations ». In : *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées* 39.4 (1994), p. 339-344.

[32] J. K. Hale et S. M. V. Lunel. *Introduction to functional differential equations*. T. 3. Springer-verlag, 1977.

[33] Z. Hamidi et M. Ouzahra. « Partial stabilisation of non-homogeneous bilinear systems ». In : *International Journal of Control* 91.6 (2018), p. 1251-1258.

[34] Z. Hamidi, M. Ouzahra et A. A Elazzouzi. « Feedback stabilization of bilinear systems ». In : *Differential equations and dynamical systems* (2020).

[35] Z. Hamidi, M. Ouzahra et R. Ayadi. « Stabilisation of nonhomogenuous distributed biilinear systems ». In : *En cours* (2020).

[36] Z. Hamidi, M. Ouzahra et A. Elazzouzi. « Strong Stabilization of Distributed Bilinear Systems with Time Delay ». In : *Journal of Dynamical and Control Systems* (2019), p. 1-12.

[37] G. Hetzer. « A functional reaction-diffusion equation from climate modeling : S-shapedness of the principal branch of fixed points of the time-1-map ». In : *Differential and Integral equations* 8.5 (1995), p. 1047-1059.

[38] E. Hille. *Functional Analysis and Semi-Groups*. A.M.S., New York, 1948.

[39] D.W. Ho, G. Lu et Y. Zheng. « Global stabilisation for bilinear systems with time delay ». In : *IEE Proceedings-Control Theory and Applications* 149.1 (2002), p. 89-94.

[40] V. Jurdjevic et J. P. Quinn. « Controllability and stability ». In : *Journal of differential equations* 28.3 (1978), p. 381-389.

[41] A. Y. Khapalov. *Controllability of partial differential equations governed by multiplicative controls*. Springer, 2010.

[42] V. Komornik et C. Pignotti. « Energy decay for evolution equations with delay feedbacks ». In : *arXiv preprint arXiv :1807.06445* (2018).

[43] Y. Komura. « Nonlinear semi-groups in Hilbert space ». In : *Journal of the Mathematical Society of Japan* 19.4 (1967), p. 493-507.

[44] J. L. Lions. « Contrôle optimal de systemes gouvernés par des équations aux dérivées partielles ». In : (1968).

[45] J. L. Lions. « Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 1 ». In : *RMA* 8 (1988).

[46] J. L Lions. « Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems ». In : *SIAM review* 30.1 (1988), p. 1-68.

[47] P. L. Liu. « Stabilization criteria for bilinear systems with time-varying delay ». In : *Universal Journal of Electrical and Electronic Engineering* 2.2 (2014), p. 52-58.

[48] N. MacDonald. *Time lags in biological models*. T. 27. Springer Science & Business Media, 2013.

[49] R. M May. « Biological populations obeying difference equations : stable points, stable cycles, and chaos ». In : *Journal of Theoretical Biology* 51.2 (1975), p. 511-524.

[50] I. Miyadera. « On the generation of strongly continuous semi-groups of operators ». In : *Tohoku Math. J* (1952), p. 109-114.

[51] R. R. Mohler. *Bilinear control processes : with applications to engineering, ecology and medicine*. Academic Press, Inc., 1973.

[52] R. R. Mohler, C. F. Barton et C. S. Hsu. « T and B cell models in the immune system ». In : *Theoretical immunology* (1978), p. 415-436.

[53] R. R. Mohler et C. S. Hsu. « Systems compartmentation in immunological modeling ». In : *Systems Theory in Immunology*. Springer, 1979, p. 165-174.

[54] R. R. Mohler et A. Y. Khapalov. « Bilinear control and application to flexible ac transmission systems ». In : *Journal of Optimization Theory and Applications* 105.3 (2000), p. 621-637.

[55] R. R. Mohler et W. J. Kolodziej. « An overview of bilinear system theory and applications ». In : *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 10.10 (1980), p. 683-688.

[56] B. S. Nagy et C. Foias. *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert*. North-Holland, 1967.

[57] S. Nicaise et C. Pignotti. « Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks ». In : *SIAM Journal on Control and Optimization* 45.5 (2006), p. 1561-1585.

[58] S. Nicaise et C. Pignotti. « Exponential stability of abstract evolution equations with time delay ». In : *Journal of Evolution Equations* 15.1 (2015), p. 107-129.

[59] S. Nicaise et C. Pignotti. « Well-posedness and stability results for nonlinear abstract evolution equations with time delays ». In : *Journal of Evolution Equations* 18.2 (2018), p. 947-971.

[60] S. I. Niculescu et al. « Stability criteria for bilinear systems with delayed state and saturating actuators ». In : *Proceedings of 1995 34th IEEE Conference on Decision and Control*. T. 2. IEEE. 1995, p. 2064-2069.

[61] M. Ouzahra. « Strong stabilization with decay estimate of semilinear systems ». In : *Systems & Control Letters* 57.10 (2008), p. 813-815.

[62] M. Ouzahra. « Stabilisation of infinite-dimensional bilinear systems using a quadratic feedback control ». In : *International Journal of Control* 82.9 (2009), p. 1657-1664.

[63] M. Ouzahra. « Feedback stabilization of parabolic systems with bilinear controls. » In : *Electronic Journal of Differential Equations (EJDE)* 38 (2011), p. 1-10.

[64] M. Ouzahra. « Partial stabilisation of semilinear systems using bounded controls ». In : *International Journal of Control* 86.12 (2013), p. 2253-2262.

[65] M. Ouzahra. « Necessary and sufficient conditions for exponential stabilization of systems affine in controls ». In : *arXiv preprint arXiv :1710.02847* (2017).

[66] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer-Verlag New York, 1983.

[67] R. S. Phillips. « On the generation of semigroups of linear operators. » In : *Pacific Journal of Mathematics* 2.3 (1952), p. 343-369.

[68] A. J Pritchard et J. Zabczyk. « Stability and stabilizability of infinite-dimensional systems ». In : *Siam Review* 23.1 (1981), p. 25-52.

[69] L. Rosier. « A survey of controllability and stabilization results for partial differential equations ». In : *Journal européen des systemes automatisés* 41.3/4 (2007), p. 365.

[70] S. Ruan et J. Wu. « Reaction-diffusion equations with infinite delay ». In : *Canad. Appl. Math. Quart* 2.4 (1994), p. 485-550.

[71] D. L. Russell. « Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations : recent progress and open questions ». In : *Siam Review* 20.4 (1978), p. 639-739.

[72] E. P. Ryan. « Optimal feedback control of bilinear systems ». In : *Journal of Optimization Theory and Applications* 44.2 (1984), p. 333-362.

[73] M. Slemrod. « Stabilization of bilinear control systems with applications to nonconservative problems in elasticity ». In : *SIAM Journal on Control and Optimization* 16.1 (1978), p. 131-141.

[74] E. D. Sontag. *Mathematical control theory : deterministic finite dimensional systems*. T. 6. Springer Science & Business Media, 2013.

[75] H. Suh et Z. Bien. « Use of time-delay actions in the controller design ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 25.3 (1980), p. 600-603.

[76] A. Swierniak, U. Ledzewicz et H. Schattler. « Optimal control for a class of compartmental models in cancer chemotherapy ». In : *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* 13.3 (2003), p. 357-368.

[77] A. N. Tikhonov et A. A. Samarski. *Partial differential equations of mathematical physics*. T. 1. Holden-Day, 1964.

[78] C. C. Travis et G. Webb. « Existence and stability for partial functional differential equations ». In : *Transactions of the American Mathematical Society* 200 (1974), p. 395-418.

[79] R. Triggiani. « On the stabilizability problem in Banach space ». In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 52.3 (1975), p. 383-403.

[80] R. Trigiani et I. Lasiecka. *Control theory for partial differential equations : Continuous and approximation theories*. Cambridge Univ. Press, 2000.

[81] V. Volterra. « Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie. » In : *Waldyr M. Oliva* (1926).

[82] V. Volterra. « Sur la théorie mathématique des phénomenes héréditaires ». In : *Journal de mathématiques pures et appliquées* 7 (1928), p. 249-298.

[83] P. Wang et C. Keng. « Asymptotic stability of a time-delayed diffusion system ». In : *Journal of Applied Mechanics* ().

[84] J. Wu. *Theory and applications of partial functional differential equations*. T. 119. Springer Science & Business Media, 2012.

[85] J. A. Yorke. « Asymptotic stability for one dimensional differential-delay equations ». In : *Journal of Differential equations* 7.1 (1970), p. 189-202.

[86] K. Yosida. « On the differentiability and the representation of one-parameter semi-groups of linear operators. » In : *Journal of the Mathematical Society of Japan* 1 (1978), p. 15-21.

[87] E. Zuazua. « Some problems and results on the controllability of partial differential equations ». In : *European Congress of Mathematics*. Springer. 1998, p. 276-311.

[88] E. Zuazua. « Controllability of partial differential equations and its semi-discrete approximations ». In : *Discrete and continuous dynamical systems* 8.2 (2002), p. 469-517.

[89] A. Zuyev. « Partial asymptotic stabilization of nonlinear distributed parameter systems ». In : *Automatica* 41.1 (2005), p. 1-10.