

# THÈSE

*En vue de l'obtention du : DOCTORAT*

*Centre de Recherche : Centre de Recherche en Énergie*

*Structure de Recherche : Equipe de Modélisation et Simulation en Mécanique  
et Energétique*

*Discipline : Physique*

*Spécialité : Mécanique des Fluides*

*Présentée et soutenue le 10/09/2022 par :*

*Maryam BERNATCHOU*

*Etude Numérique de la Convection Naturelle Thermosolutale dans un  
Nanofluide avec la Prise en Compte de l'Effet Soret*

## JURY

Mohammed Ouadi BENSALAH	PES, Université Mohammed V, Faculté des Sciences - Rabat	Président
Bennasser BAHRAR	PES, ENSET Mohammadia	Rapporteur / Examineur
Mohamed DRIOUICH	PH, Faculté polydisciplinaire de Beni Mellal	Rapporteur / Examineur
Mohammed SAMMOUDA	PH, Faculté polydisciplinaire de Beni Mellal	Rapporteur / Examineur
Mohammed TAIBI	PH, Faculté des Sciences, Ain Chock – Casablanca	Examineur
Kamal GUERAOU	PES, Université Mohammed V, Faculté des Sciences - Rabat	Examineur
Ahmed RTIBI	PH, Université Mohammed V, Faculté des Sciences - Rabat	Co-Directeur de Thèse
Mohammed CHERRAJ	PH, Université Mohammed V, Faculté des Sciences - Rabat	Directeur de Thèse

Année Universitaire : 2021/2022

## *Dédicace*

*A*

*Mes parents*

*Mes sœurs*

*Tous mes proches*

*Tous mes amis*

*Tous ceux qui me sont chers*

*Tous ceux qui m'ont aidé et encouragé*

## *Remerciements*

Le présent travail présenté dans ce manuscrit a été réalisé dans le cadre d'une thèse de doctorat au sein de l'Equipe de Modélisation et Simulation en Mécanique et Energétique.

En premier lieu, je remercie Dieu de m'avoir donné la force, le courage, et la volonté pour l'accomplissement de ce travail.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui, par leur participation et encouragements, m'ont permis de mener à bien ce travail de thèse. En particulier, Monsieur **Bensalah Mohammed Ouadi**, Professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, pour avoir accepté de présider le jury.

Je remercie Monsieur **Bahrar Bennasser**, Professeur de l'enseignement supérieur à l'ENSET de Mohammedia.

Mes remerciements vont également à Messieurs **Driouich Mohamed et Sammouda Mohamed**, Professeurs Habilités à la Faculté polydisciplinaire de Beni Mellal, qui ont bien voulu faire partie de ce Jury.

Je tiens à remercier Monsieur **Taibi Mohammed**, Professeur Habilité à la Faculté des Sciences de Ain Chock de Casablanca.

Je tiens à exprimer ma grande estime et toute ma gratitude à Monsieur **Kamal Gueraoui**, Professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, qui m'a guidé tout au long de cette thèse. Je le remercie très sincèrement de m'avoir accordé de son temps pour le suivi du déroulement de ce travail avec intérêt et compétence. Je vous remercie pour vos conseils et pour votre encadrement. Votre disponibilité permanente, votre soutien et votre collaboration m'ont permis de mener à bien ce travail.

Je remercie mon Co-encadrant Monsieur **Ahmed RTIBI**, Professeur Habilité à la Faculté des Sciences de Rabat, qui sans lui, ce travail n'aurait pu aboutir.

Je remercie mon encadrant Monsieur **Mohammed CHERRAJ**, Professeur Habilité à la Faculté des Sciences de Rabat, pour l'aide qu'il m'a apportée durant ces trois années de thèse.

Enfin, je remercie du fond du cœur ma famille pour leur amour et leur soutien constant. Je leur dédie cette thèse.

## *Résumé*

Dans le présent travail, nous présentons une étude numérique de la convection thermosolutale d'un nanofluide métallique composé de nanoparticules de cuivre et d'un fluide de base binaire, dans une cavité rectangulaire inclinée, avec la prise en compte de l'effet Soret et sous l'influence d'un champ magnétique. Les faces latérales de la paroi sont adiabatiques et imperméables, sauf au niveau de la partie inférieure gauche, nous appliquons une température constante. Les bases du rectangle sont maintenues à des températures et concentrations uniformes. La méthode des volumes finis a été utilisée pour résoudre les équations gouvernantes.

La première partie de cette thèse a porté sur l'étude du transfert de chaleur et de masse par convection thermosolutale du nanofluide ( $\text{Cu} - \text{H}_2\text{O}$ ) en prenant en compte l'influence de l'effet Soret, et ce, à travers la variation des nombres de Soret, de Lewis, de Prandtl, de Rayleigh, ainsi que l'angle d'inclinaison de la cavité, le rapport de forme de la cavité et la fraction volumique des nanoparticules. Les résultats montrent que le transfert de chaleur s'améliore avec l'augmentation des nombres de Lewis et de Prandtl, et avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules. Il diminue avec le rapport de forme de la cavité. Quant au transfert de la masse, il augmente avec l'augmentation du nombre de Soret et du rapport de forme de la cavité, et diminue avec l'augmentation du nombre de Lewis.

La seconde partie a porté sur l'analyse de l'effet d'appliquer un champ magnétique uniforme sur le transfert de chaleur et de masse par convection thermosolutale du même nanofluide, en faisant varier le nombre de Hartmann, le nombre de Rayleigh, le rapport des forces de poussées, et l'angle d'inclinaison de la cavité. Les résultats indiquent que le transfert de chaleur diminue avec l'augmentation du nombre de Hartmann et avec la diminution du nombre de Rayleigh. Pour le transfert de masse, il diminue avec l'augmentation du nombre de Hartmann.

**Mots clés :** Convection naturelle thermosolutale, Nanofluide, Cavité inclinée, Effet Soret, Champ magnétique, Méthode des volumes finis

## *Abstract*

In this work, we present a numerical study of double diffusive natural convection in an inclined rectangular cavity filled with a metallic nanofluid containing Copper nanoparticles suspended in a binary base fluid in the presence of an external uniform magnetic field and considering the Soret effect. The longer walls of the cavity are maintained at uniform temperatures and concentrations while the short ones are adiabatic and impermeable except in the left lower region, a constant temperature is applied. The finite volume method is used to solve the system of equations.

The first part of this thesis focused on studying the thermosolutal natural convection heat and mass transfer of a nanofluid ( $\text{Cu} - \text{H}_2\text{O}$ ), taking into consideration the Soret effect, and this through the variation of the Soret number, Lewis number, Prandtl number, thermal Rayleigh number, inclination angle of the cavity, nanoparticle volume fraction and aspect ratio of the cavity. Results show that the heat transfer increases by increasing the nanoparticles volume fraction, and the Lewis number and Prandtl number. It decreases by increasing the cavity aspect ratio. For the mass transfer, it increases by increasing Soret number and the cavity aspect ratio, and decreases with increasing Lewis number.

The second part focused on analyzing the effect of applying an external uniform magnetic field on the thermosolutal natural convection heat and mass transfer of the same nanofluid, by varying the Hartmann number, Thermal Rayleigh number, Buoyancy ratio, and cavity inclination angle. The obtained results indicated that the heat transfer decreases by increasing Hartmann number and decreasing thermal Rayleigh number. For the mass transfer, it decreases by increasing Hartmann number

**Keywords:** Thermosolutal natural convection, Nanofluid, Inclined cavity, Soret effect, Magnetic field, Finite volume method

## *Liste des Publications et Communications*

- 1) Bernatchou, M., Rtibi, A., Gueraoui, K., El Hamma, M., Cherraj, M., 'STUDY OF THERMOSOLUTAL NATURAL CONVECTION OF CU-WATER NANOFLUID IN AN INCLINED CAVITY' (2022) JP Journal of Heat and Mass Transfer, pp. 37-56.
- 2) El Hamma, M., Taibi, M., Rtibi, A., Gueraoui, K., Bernatchou, M., 'EFFECT OF MAGNETIC FIELD ON THERMOSOLUTAL CONVECTION IN A CYLINDRICAL CAVITY FILLED WITH NANOFLUID, TAKING INTO ACCOUNT SORET AND DUFOUR EFFECTS', (2022) JP Journal of Heat and Mass Transfer, 26, pp. 1-26.
- 3) Bernatchou, M., Gueraoui, K., Rtibi, A., Cherraj, M., El Hamma, M., 'EFFECT OF MAGNETIC FIELD ON DOUBLE DIFFUSIVE NATURAL CONVECTION IN AN INCLINED CAVITY FILLED WITH NANOFLUID CONSIDERING THE SORET EFFECT', (2022) JP Journal of Heat and Mass Transfer, 25, pp. 1-25.
- 4) El Hamma, M., Rtibi, A., Taibi, M., Gueraoui, K., Bernatchou, M., 'Theoretical and Numerical Study of Thermosolutal Convection in a Cylindrical Porous Cavity Filled with a Nanofluid and Taking into Account Soret and Dufour Effects', (2022) International Journal on Engineering Applications, 10 (1), pp. 56-65.
- 5) Bernatchou, M., Gueraoui, K., Cherraj, M., Rtibi, A., El Hamma, M., ' Effect of Magnetic Field on Thermosolutal Convection Heat and Mass Transfer in a Square Cavity Filled with Nanofluid', (2022) International Conference on INTEGRATED DESIGN AND PRODUCTION, CPI'2022.

## *Nomenclature*

$A_r$	Rapport de forme de la cavité ( $A_r = \frac{L}{h}$ )
$B_0$	Amplitude du champ magnétique
$C$	Concentration ( $\text{Kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )
$\tilde{C}$	Concentration adimensionnelle
$C_p$	Chaleur spécifique à pression constante ( $\text{J} \cdot \text{Kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ )
$D$	Diffusivité massique ( $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ )
$\vec{E}$	Champ électrique
$\vec{F}$	Force de Lorentz
$g$	Accélération gravitationnelle ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ )
$h$	Hauteur de la cavité (m)
$H_a$	Nombre de Hartmann
$\vec{j}$	Vecteur densité du courant électrique
$K_e$	Diffusivité thermique du nanofluide ( $K_e = \frac{K_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}}$ ) ( $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ )
$K$	Conductivité thermique ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ )
$K_{CT}$	Coefficient de Soret
$L$	Largeur de la cavité (m)
$L_e$	Nombre de Lewis
$N$	Rapport des poussées ( $N = \frac{\beta_s \Delta C}{\beta_T \Delta T}$ )
$Nu$	Nombre de Nusselt local
$\overline{Nu}$	Nombre de Nusselt moyen

Etude Numérique de la Convection Naturelle Thermosolutale dans un Nanofluide avec la  
Prise en Compte de l'Effet Soret

P	Pression
$P_r$	Nombre de Prandtl
$R_T$	Nombre de Rayleigh thermique
S	Terme source dans les équations
$S_r$	Nombre de Soret
$S_c$	Nombre de Schmidt
Sh	Nombre de Sherwood local
$\overline{Sh}$	Nombre de Sherwood moyen
t	Temps (s)
T	Température (K)
$\tilde{T}$	Température adimensionnelle
u, w	Composantes du vecteur vitesse ( $m \cdot s^{-1}$ )
$\tilde{u}, \tilde{w}$	Composantes adimensionnelles du vecteur vitesse
$\vec{v}$	Vecteur vitesse
x, z	Coordonnées cartésiennes (m)
$\tilde{x}, \tilde{z}$	Coordonnées cartésiennes adimensionnelles

***Symboles Grecs***

$\alpha_f$	Diffusivité thermique du fluide ( $m^2 \cdot s^{-1}$ )
$\rho$	Masse volumique ( $Kg \cdot m^{-3}$ )
$\varphi$	Fraction volumique des nanoparticules
$\beta_T$	Coefficient d'expansion thermique ( $K^{-1}$ )
$\beta_S$	Coefficient d'expansion solutale ( $m^3 \cdot Kg^{-1}$ )
$\nu_f$	Viscosité cinématique ( $m^2 \cdot s^{-1}$ )
$\Omega$	Vorticité ( $s^{-1}$ )

Etude Numérique de la Convection Naturelle Thermosolutale dans un Nanofluide avec la  
Prise en Compte de l'Effet Soret

$\tilde{\Omega}$	Vorticité adimensionnelle
$\Psi$	Fonction de courant ( $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ )
$\tilde{\Psi}$	Fonction de courant adimensionnelle
$\Delta C$	Ecart de concentration ( $\text{Kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )
$\Delta T$	Ecart de température ( $^{\circ}\text{K}$ )
$\theta$	Angle d'inclinaison de la cavité
$\sigma$	Conductivité électrique ( $\text{S m}^{-1}$ )
$\vartheta$	Volume du fluide
$\mu$	Viscosité dynamique

***Indices***

0	Référence
C	Chaud
F	Froid
$f$	Fluide de base
Inf	Paroi inférieure
nf	Nanofluide
s	Nanoparticule
Sup	Paroi supérieure

## *Table des matières*

Dédicace .....	i
Remerciements .....	ii
Résumé .....	iii
Abstract .....	iv
Liste des Publications et Communications.....	v
Nomenclature .....	vi
Table des matières .....	ix
Liste des figures .....	xiii
Liste des tableaux .....	xv
Introduction Générale.....	1
Généralités et Synthèse bibliographique .....	4
1.1 Introduction .....	4
1.2 Convection naturelle et convection thermosolutale.....	4
1.3 Thermodiffusion .....	5
1.4 Magnétoconvection .....	5
1.5 Nanofluides.....	6
1.5.1 Types de nanofluides.....	6
1.5.2 Préparation des nanofluides .....	7
1.5.3 Propriétés thermophysiques .....	7
1.5.3.1 Masse volumique .....	7
1.5.3.2 Coefficient d'expansion thermique .....	8
1.5.3.3 Chaleur spécifique .....	8
1.5.3.4 Conductivité thermique .....	8
1.5.3.5 Viscosité .....	9

Etude Numérique de la Convection Naturelle Thermosolutale dans un Nanofluide avec la  
Prise en Compte de l'Effet Soret

1.5.4	Applications des nanofluides dans l'industrie.....	10
1.5.4.1	Radiateurs automobiles.....	10
1.5.4.2	Applications médicales et biomédicales.....	11
1.5.4.3	Aéronautique et défense.....	11
1.5.4.4	Application dans les réacteurs nucléaires.....	11
1.5.4.5	Refroidissement et chauffage des bâtiments.....	12
1.6	Synthèse bibliographique.....	12
1.6.1	Convection thermosolutale dans une cavité remplie de nanofluide.....	12
1.6.2	Convection thermosolutale dans une cavité remplie de nanofluide en présence de l'Effet Soret.....	15
1.6.3	Convection thermosolutale dans une cavité remplie de nanofluide en présence d'un champ magnétique.....	16
1.7	Conclusion.....	17
2	Formulation mathématique du Problème.....	19
2.1	Introduction.....	19
2.2	Description du problème.....	19
2.2.1	Hypothèses simplificatrices.....	20
2.3	Formulation mathématique.....	20
2.3.1	Equation de continuité.....	20
2.3.2	Equation de conservation de l'énergie.....	21
2.3.3	Equation de conservation de la concentration.....	22
2.3.4	Equation de conservation de la quantité de mouvement.....	22
2.3.5	Equation de conservation de la quantité de mouvement en présence d'un champ magnétique.....	24
2.3.6	Conditions aux limites.....	25
2.4	Adimensionnalisation.....	26
2.4.1	Variables adimensionnelles.....	26
2.4.2	Equations adimensionnelles.....	27

Etude Numérique de la Convection Naturelle Thermosolutale dans un Nanofluide avec la  
Prise en Compte de l'Effet Soret

2.4.3	Conditions aux limites adimensionnelles .....	28
2.5	Transfert thermique et massique.....	29
2.6	Conclusion .....	29
3	Résolution numérique .....	31
3.1	Introduction .....	31
3.2	Méthode des volumes finis .....	31
3.3	Discrétisation des équations .....	32
3.3.1	Discrétisation des équations de transport .....	32
3.3.2	Discrétisation de l'équation de la fonction de courant .....	46
3.3.3	Conditions aux limites.....	48
3.4	Processus de résolution.....	49
3.5	Profil initial.....	51
3.6	Conclusion .....	51
4	Résultats et discussion .....	53
4.1	Introduction .....	53
4.2	Convection naturelle thermosolutale en présence de l'effet Soret.....	53
4.2.1	Effet du nombre de Lewis ( $Le$ ) .....	53
4.2.2	Effet du nombre de Soret ( $Sr$ ).....	56
4.2.3	Effet du nombre de Prandtl ( $Pr$ ).....	57
4.2.4	Effet de l'angle d'inclinaison ( $\theta$ ) .....	58
4.2.5	Effet du rapport de forme de la cavité ( $Ar$ ) .....	59
4.2.6	Profils de concentration, température et vorticité .....	60
4.2.7	Effet de la fraction volumique en nanoparticules ( $\varphi$ ) .....	61
4.3	Convection naturelle thermosolutale en présence de l'effet Soret et d'un champ magnétique.....	62
4.3.1	Effet du nombre de Hartmann ( $Ha$ ) .....	63
4.3.1.1	Transfert de chaleur et de masse.....	63

Etude Numérique de la Convection Naturelle Thermosolutale dans un Nanofluide avec la  
Prise en Compte de l'Effet Soret

4.3.1.2	Distribution de la température et de la concentration.....	64
4.3.1.3	Distribution des vitesses, de la vorticité et de la fonction de courant .....	67
4.3.2	Effet du nombre de Rayleigh thermique (RT).....	72
4.3.2.1	Transfert de chaleur .....	72
4.3.2.2	Distribution de la température et de la concentration.....	73
4.3.3	Effet du rapport des forces de poussées thermique et solutale ( $N$ ).....	73
4.3.4	Effet de l'angle d'inclinaison ( $\theta$ ) .....	75
4.4	Conclusion .....	75
Conclusion Générale et Perspectives .....		76
Références Bibliographiques.....		79

## *Liste des figures*

Figure 1: Modèle physique de la configuration étudiée .....	19
Figure 2: Configuration géométrique en présence d'un champ magnétique.....	24
Figure 3: Maillage et description d'un volume de contrôle bidimensionnel .....	31
Figure 4 : Organigramme de calcul.....	50
Figure 5: Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de $Le$ pour $\theta = 30^\circ$ , $RT = 104$ , $Pr = 6.2$ et $\varphi = 5\%$ .....	54
Figure 6: Variation du nombre de Sherwood moyen en fonction de $Le$ pour $\theta = 30^\circ$ , $RT =$ $104$ , $Pr = 6.2$ et $\varphi = 5\%$ .....	54
Figure 7: Effet de $Sr$ et $Le$ sur les Isoconcentrations et les Isothermes pour $\theta = 30^\circ$ , .....	56
Figure 8: Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de $Sr$ pour $\theta = 30^\circ$ , $RT =$ $104$ , $Pr = 6.2$ et $\varphi = 5\%$ .....	57
Figure 9: Variation du nombre de Sherwood moyen en fonction de $Sr$ pour $\theta = 30^\circ$ , $RT =$ $104$ , $Pr = 6.2$ et $\varphi = 5\%$ .....	57
Figure 10: Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de $Pr$ pour $\theta = 30^\circ$ , $Le =$ $10$ , $Sr = 1$ et $\varphi = 5\%$ .....	58
Figure 11: Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de $\theta$ pour $Sr = 1$ , $Le = 10$ , $Pr =$ $6.2$ et $\varphi = 5\%$ .....	59
Figure 12: Variation des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens en fonction de $Ar$ pour $Sr = 1$ , $Le = 10$ , $RT = 104$ , $Pr = 6.2$ et $\varphi = 5\%$ .....	59
Figure 13: Variation de la concentration à $X = 0.073$ et pour $Sr = 1$ , $Le = 10$ , $\theta = 30^\circ$ , $RT =$ $104$ , $Pr = 6.2$ et $\varphi = 5\%$ .....	60
Figure 14: Variation de la température à $X = 0.073$ et pour $Sr = 1$ , $Le = 10$ , $\theta = 30^\circ$ , $RT =$ $104$ , $Pr = 6.2$ et $\varphi = 5\%$ .....	61
Figure 15: Variation de la vorticité avec $Z$ pour $X = 12$ , $Sr = 1$ , $Le = 10$ , $\theta = 30^\circ$ , .....	61
Figure 16: Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de $\varphi$ pour $Sr = 1$ , $Le = 10$ , $Pr =$ $6.2$ .....	62
Figure 17: Variation du nombre de Nusselt local pour différentes valeurs de $Ha$ , et.....	63
Figure 18: Variation du nombre de Sherwood local pour différentes valeurs de $Ha$ , et .....	64
Figure 19: Variation de la température en fonction de $Ha$ pour $N = 1$ , $\theta = 30^\circ$ , $X = 12$ .....	65

Etude Numérique de la Convection Naturelle Thermosolutale dans un Nanofluide avec la  
Prise en Compte de l'Effet Soret

Figure 20: Variation de la concentration en fonction de $Ha$ pour $\theta = 30^\circ$ , $X = 12$ et $Z = 12$ .....	65
Figure 21: Variation relative de la température pour $Ha$ entre 0 et 100, et pour $N = 1$ .....	66
Figure 22: Variation relative de la concentration pour $Ha$ entre 0 et 100, et pour $N = 1$ .....	66
Figure 23: Distribution de la vitesse $U$ suivant l'axe $X$ à $Z = 0.5$ , et pour $RT = 106$ , $N = 1$ et $\theta = 30^\circ$ .....	67
Figure 24: Distribution de la vitesse $W$ suivant l'axe $X$ à $Z = 0.5$ , et pour $RT = 106$ , .....	68
Figure 25: Distribution de la vorticité suivant l'axe $X$ à $Z = 0.5$ , et pour $RT = 106$ , .....	68
Figure 26: Distribution de la fonction de courant $\Psi$ suivant l'axe $X$ à $Z = 0.5$ , et .....	69
Figure 27: Distribution de la vitesse $U$ suivant l'axe $Z$ à $X = 0.5$ , et pour $RT = 106$ ,.....	70
Figure 28: Distribution de la vitesse $W$ suivant l'axe $Z$ à $X = 0.5$ , et pour $RT = 106$ , .....	71
Figure 29: Distribution de la vorticité suivant l'axe $Z$ à $X = 0.5$ , et pour $RT = 106$ , .....	71
Figure 30: Distribution de la fonction de courant suivant l'axe $Z$ à $X = 0.5$ , et pour .....	72
Figure 31: Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de $Ha$ , pour différentes valeurs de $RT$ et de $\theta$ , et pour $N = 1$ .....	73
Figure 32: Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de $Ha$ , pour différentes valeurs de $N$ et pour $RT = 104$ et $\theta = 30^\circ$ .....	74
Figure 33: Variation relative de $Nu$ pour $Ha = 0$ à 100, $RT = 104$ et $\theta = 30^\circ$ .....	74

## *Liste des tableaux*

Tableau 1: Expressions de $\varepsilon$ et de $S$ pour les différentes équations .....	33
Tableau 2: Variation relative de la température et de la concentration pour $Ha$ entre 0 et 100, et pour $N = 1$ et $\theta = 30^\circ$ .....	66
Tableau 3: Variation relative de $Nu$ pour $Ha$ entre 0 et 100, $RT = 104$ et $\theta = 30^\circ$ .....	75

## *Introduction Générale*

Face à la nécessité d'avoir des systèmes thermiques efficaces, les chercheurs s'intéressent depuis plusieurs années à l'amélioration des transferts de la chaleur et de la conductivité thermique des fluides. Les fluides caloporteurs jouent un rôle crucial dans les performances des machines de chaleur, seulement leur conductivité thermique est faible. Il est possible d'améliorer la conductivité thermique de ces fluides par la suspension d'une faible concentration de nanoparticules de taille nanométrique dans le mélange. Ce nouveau type de fluide est appelé 'Nanofluide'.

D'autre part, les transferts combinés de chaleur et de masse dans un fluide, dus à la présence des gradients de température et de concentration, a suscité l'intérêt de nombreux chercheurs et industriels compte tenu de ses applications dans plusieurs domaines. Lorsque la présence d'un gradient de concentration dans le fluide est due au gradient de température, on parle de l'effet Soret. Ce type de transport convectif attire l'attention de plusieurs chercheurs dans différents domaines notamment dans le domaine de la nature et dans l'industrie.

Aussi, l'étude des transferts de chaleur et de masse en convection naturelle, et en particulier la magnéto convection qui étudie la convection des fluides conducteurs d'électricité en présence d'un champ magnétique, est d'une grande importance dans les applications industrielles. La magnéto-convection trouve son application principalement dans la transformation des métaux, les centrales électriques, la pétrochimie, la fabrication des cristaux et les réacteurs nucléaires [1- 4].

Nous nous intéressons dans ce travail aux transferts couplés de chaleur et de masse en convection naturelle thermosolutale dans un nanofluide métallique  $\text{Cu} - \text{H}_2\text{O}$  composé de nanoparticules de cuivre et d'un fluide de base binaire, qui est confiné dans une cavité rectangulaire inclinée, avec la prise en compte de l'effet Soret. Nous nous intéressons également à l'étude de la convection naturelle thermosolutale du même nanofluide sous l'influence d'un champ magnétique externe. Nous analysons l'influence de certains paramètres sur les transferts de chaleur et de masse et sur les distributions de la température, de la concentration, et de la vitesse.

Concernant l'organisation du manuscrit de cette thèse, il est constitué de quatre chapitres. Le premier chapitre est consacré à la présentation des généralités sur la convection

## Introduction Générale

naturelle et sur les nanofluides et d'une étude bibliographique sur les travaux en relation avec notre sujet. Dans le deuxième chapitre, nous abordons la formulation mathématique de notre problème, à savoir les hypothèses simplificatrices, les équations gouvernantes et les conditions aux limites associées. Dans le troisième chapitre, on décrit de manière détaillée la méthode numérique utilisée pour la discrétisation des équations. Le quatrième chapitre porte sur la présentation des résultats obtenus ainsi que leurs interprétations. Nous terminons ce travail par une conclusion générale.

*Chapitre 1 : Généralités et Synthèse  
Bibliographique*

## **Généralités et Synthèse bibliographique**

### **1.1 Introduction**

Ce premier chapitre est consacré à la présentation de quelques notions de base sur la convection naturelle et sur les nanofluides. Nous présentons également une revue des travaux récents portant sur la convection naturelle thermosolutale dans des cavités remplies de nanofluides, avec la prise en compte l'effet Soret, et en présence d'un champ magnétique.

### **1.2 Convection naturelle et convection thermosolutale**

La convection naturelle thermique est le mouvement d'un fluide sous l'effet de l'application d'un gradient de température, et qui implique l'échange de chaleur entre le fluide mobile et la paroi. Elle constitue, avec la conduction et le rayonnement, l'un des trois modes de transfert thermique entre deux systèmes. La quantité de chaleur transmise par convection dépend de plusieurs paramètres tels que la différence de température entre la paroi et le fluide, la vitesse d'écoulement du fluide, la capacité thermique massique du fluide, la surface d'échange [5].

Selon le mode d'écoulement du fluide, le transfert de chaleur par convection est de type convection naturelle, forcée ou mixte. La convection naturelle apparaît sous le seul effet des différences de la température ou de la concentration au sein du fluide. La convection forcée apparaît quand la circulation du fluide est provoquée par une cause mécanique extérieure comme la pompe, la turbine ou le ventilateur. Si les deux causes existent simultanément, la convection est dite mixte.

Lorsque les mouvements de convection naturelle des particules du fluide sont dus à la combinaison des gradients de température et de concentration, on parle de convection thermosolutale ou de double diffusion. Ce type de transport convectif a suscité l'intérêt de nombreux scientifiques et industriels dans des domaines comme la biologie, les géosciences, l'astrophysique, et la chimie. Il est souvent rencontré dans la nature notamment dans les océans, l'atmosphère, les lacs, et autres.

Dans cette thèse, nous nous limiterons aux problèmes de transfert de chaleur et de masse par convection naturelle thermosolutale dans les fluides confinés dans des cavités fermées.

### 1.3 Thermodiffusion

Quand les gradients de température et de concentration sont tous les deux induits par l'imposition de conditions aux limites, on parle de convection thermosolutale. L'effet Soret ou la thermo-diffusion apparaît lorsque la présence du gradient de concentration dans un fluide binaire est causée par le gradient de température qui est dû au flux de chaleur imposé au mélange initialement homogène. Le gradient de température donne lieu à une migration des particules des zones chaudes vers les zones froides.

L'effet Soret a fait l'objet d'un nombre important d'études dans les mélanges binaires. Il a été observé la première fois dans les mélanges liquides par l'allemand Carl Ludwig en 1856, mais il a fallu attendre jusqu'à la fin du 19ème siècle où Charles Soret prouva l'existence de cet effet. La thermo-diffusion est observée dans de nombreux processus dans la nature et la technologie. Nous pouvons citer les réservoirs de pétrole, les déchets radioactifs et réacteurs, la convection thermosolutale, et l'évolution prébiotique [6].

### 1.4 Magnétoconvection

La convection naturelle d'un fluide conducteur de l'électricité dans une cavité fermée représente un sujet pertinent de recherche scientifique, en raison de sa présence dans un grand nombre de procédés industriels. Avec l'application d'un champ magnétique externe, il est possible d'agir sur l'écoulement du fluide en convection pour éviter ou réduire les fluctuations et la formation des défauts, ou pour contrôler les transferts de chaleur et de masse. Dans ce sens, le ralentissement magnétique pour contrôler l'écoulement des fluides a fait l'objet de multiples applications dans l'industrie.

La magnétohydrodynamique (MHD) est une discipline qui décrit le comportement des fluides conducteurs d'électricité (métaux liquides, gaz faiblement ionisés et plasmas) en mouvement et en présence d'un champ magnétique. Elle étudie donc les interactions entre la vitesse d'écoulement et l'induction magnétique. Lorsqu'un fluide électriquement conducteur s'écoule en présence d'un champ magnétique, un courant électrique est induit. Ce courant agit réciproquement avec le champ magnétique pour produire une force électromotrice qui s'oppose au mouvement du fluide. C'est une généralisation de l'hydrodynamique (définie par les équations de Navier-Stokes) couplée à l'électromagnétisme (définie par les équations de Maxwell) [7]. Une sous-discipline de la MHD, qui est la magnéto-convection, étudie la convection naturelle en présence du champ magnétique. La magnéto-convection trouve son

application principalement dans la transformation des métaux, les centrales électriques, la pétrochimie, la fabrication des cristaux et les réacteurs nucléaires [1,2,3,4,8].

## 1.5 Nanofluides

Les fluides caloporteurs jouent un rôle crucial dans les performances des échangeurs de chaleur qui interviennent dans les systèmes de refroidissement des moteurs, des climatiseurs, des réfrigérateurs, des radiateurs, des chaudières, des centrales électriques thermiques et nucléaires, et autres. Les fluides caloporteurs classiques comme l'eau, l'éthylène glycol et les huiles ont une faible conductivité thermique, ce qui influence l'efficacité du transfert de chaleur de ces échangeurs thermiques.

Dans ce sens, un nouveau type de fluides offrant de meilleures propriétés thermophysiques, appelé 'Nanofluide', a été conçu par la suspension d'une faible concentration de nanoparticules de taille nanométrique inférieure à 100 nm dans un fluide de base. Choi [9] furent les premiers à introduire le concept de nanofluide en 1995, par l'incorporation de nanoparticules de conductivité thermique élevée dans un fluide de base améliorant la conductivité thermique du mélange. La suspension colloïdale de nanoparticules dans un fluide de base améliore les propriétés thermophysiques de ce fluide, à savoir la conductivité thermique, la masse volumique, la viscosité et la chaleur spécifique [10, 11]. Grâce à leurs propriétés améliorées de transfert thermique, les nanofluides peuvent être utilisés dans le refroidissement des composants électriques, des moteurs, des transformateurs, et des réacteurs nucléaires, dans la médecine, la défense, le chauffage et le refroidissement des bâtiments [10-12].

### 1.5.1 Types de nanofluides

Les fluides de base possèdent des propriétés thermiques très faibles. La dispersion de particules solides de taille nanométrique, appelées 'Nanoparticules', dans un liquide permet d'obtenir de meilleures propriétés de transfert de la chaleur comparées à celles des autres fluides classiques. Les nanoparticules utilisées dans la préparation des nanofluides sont fabriquées de divers matériaux, tels que les métaux (*Cu, Zn, Al, Fe*), les oxydes métalliques (*CuO, TiO<sub>2</sub>, Fe<sub>3</sub>O<sub>4</sub>, ZnO, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>*), les carbones et les matériaux hybrides. Les nanofluides peuvent être classés, selon le type des nanoparticules utilisées, en quatre catégories [11,13,14]: nanofluides à base de métal, nanofluides à base d'oxyde métallique, nanofluides à base de carbone, nanofluides hybrides.

### 1.5.2 Préparation des nanofluides

Les nanofluides sont préparés par la dispersion de nanoparticules dans un fluide de base. Des surfactants sont utilisés pour la bonne dispersion des nanoparticules dans le fluide, et par conséquent, améliorer la stabilité des nanofluides. La stabilité des nanofluides dépend principalement de la méthode de préparation adoptée et peut avoir un effet important sur les propriétés thermophysiques de ces derniers, principalement sur le transfert de la chaleur. Les méthodes de préparation des nanofluides les plus courantes sont la méthode en une étape et la méthode en deux étapes [10,11,14,15,16,17,18].

Dans la méthode en une étape, la préparation et la dispersion des nanoparticules dans le fluide de base sont effectuées simultanément. Ainsi, les problèmes de coagulation des nanoparticules sont réduits car les opérations de séchage, stockage et transport des nanoparticules sont évitées, ce qui permet d'augmenter la stabilité du nanofluide.

Pour obtenir le nanofluide souhaité par la méthode en deux étapes, la préparation des nanoparticules et leur dispersion dans le fluide de base se font en deux étapes distinctes. Le principal inconvénient de cette méthode est l'agglomération des nanoparticules, réduisant ainsi la stabilité du nanofluide. En raison de ce problème, un surfactant est utilisé pour augmenter la stabilité du nanofluide. Cette méthode est la plus utilisée pour la fabrication des nanofluides en raison de la disponibilité des nanoparticules auprès des entreprises à un coût avantageux.

### 1.5.3 Propriétés thermophysiques

L'ajout des nanoparticules à un fluide de base donne lieu à des nanofluides avec des caractéristiques thermophysiques modifiées. Ces propriétés thermophysiques concernent la masse volumique, le coefficient d'expansion thermique, la chaleur spécifique, la conductivité thermique et la viscosité. Les principaux modèles disponibles pour évaluer les propriétés thermophysiques des nanofluides sont présentés.

#### 1.5.3.1 Masse volumique

La masse volumique d'un nanofluide est fortement liée à la température et à la concentration en nanoparticules. Elle peut être calculée théoriquement à partir de la masse volumique du fluide de base ( $\rho_f$ ) et de la masse volumique des nanoparticules ( $\rho_s$ ), selon le modèle proposé par Bock Choon Pak [19]:

$$\rho_{nf} = \rho_f(1 - \varphi) + \rho_s \varphi$$

Avec :

$$\varphi = \frac{\vartheta_s}{\vartheta_f + \vartheta_s} \approx \frac{\vartheta_s}{\vartheta_{nf}}$$

$\vartheta_s$ ,  $\vartheta_f$ ,  $\varphi$  sont respectivement le volume des nanoparticules, du fluide de base et la fraction volumique des nanoparticules.

### 1.5.3.2 Coefficient d'expansion thermique

Le coefficient d'expansion thermique d'un nanofluide correspond à la variation du volume du nanofluide pour une augmentation de la température du mélange d'un Kelvin. La relation suivante est utilisée pour calculer ce coefficient [20]:

$$\beta_{nf} = \beta_f(1 - \varphi) + \beta_s \varphi$$

### 1.5.3.3 Chaleur spécifique

La chaleur spécifique est la chaleur nécessaire pour changer la température du fluide d'un degré Kelvin. Il s'agit d'une propriété importante qui affecte le taux de transfert de la chaleur du nanofluide. Elle est mesurée en  $J/(Kg.K)$ . Deux principaux modèles ont été proposés dans la littérature pour calculer la chaleur spécifique des nanofluides. Le premier modèle proposé par Bock Choon Pak [19]:

$$Cp_{nf} = \varphi(Cp)_s + (1 - \varphi)(Cp)_f$$

Le deuxième modèle, qui est le plus utilisé, a été présenté par Xuan et al [21]:

$$(\rho Cp)_{nf} = \varphi(\rho Cp)_s + (1 - \varphi)(\rho Cp)_f$$

### 1.5.3.4 Conductivité thermique

La conductivité thermique est une grandeur qui caractérise la capacité d'un matériau à diffuser la chaleur dans les milieux. C'est un facteur majeur pour augmenter le transfert de la chaleur des nanofluides. La conductivité thermique des solides est beaucoup plus élevée que celle des liquides et gaz.

Maxwell [22] a proposé un modèle de calcul de la conductivité thermique des nanofluides, valable pour les mélanges de solides et liquides et applicable aux particules de taille sphérique. Ce modèle se présente comme suit :

$$k_{nf} = k_f \frac{2k_f + k_s + 2\varphi(k_s - k_f)}{2k_f + k_s - \varphi(k_s - k_f)}$$

Hamilton [23] ont modifié le modèle de Maxwell, en prenant en considération le facteur de forme des nanoparticules :

$$k_{nf} = k_f \frac{k_s + (n-1)k_f - (n-1)\varphi(k_f - k_s)}{k_s + (n-1)k_f + \varphi(k_f - k_s)}$$

Où n est un facteur de forme empirique définit par  $n = \frac{3}{\kappa}$ , avec  $\kappa = 0.5$  pour les particules cylindriques, et  $\kappa = 1$  pour les particules sphériques.

Un autre modèle utilisé pour calculer la conductivité thermique des nanofluides est celui de Yu & Choi [24], défini ci-dessous :

$$k_{nf} = k_f \frac{k_s + 2k_f + 2\varphi(k_s - k_f)(1+\lambda)^3}{k_s + 2k_f - \varphi(k_s - k_f)(1+\lambda)^3}$$

Avec  $\lambda$  : le rapport de l'épaisseur de la couche nanométrique sur le rayon des particules

Xuan [25] a proposé un modèle de Maxwell modifié qui prend en compte l'effet du mouvement brownien et la structure d'agrégation des clusters de nanoparticules.

$$k_{nf} = k_f \left( \frac{k_s + 2k_f + 2\varphi(k_s - k_f)}{k_s + 2k_f + \varphi(k_s - k_f)} + \frac{\varphi \rho_s C_p}{2k_f} \sqrt{\frac{T.K_B}{3\pi\mu_f r_c}} \right)$$

Avec T la température,  $K_B$  la constante de Boltzmann,  $r_c$  le rayon moyen des Clusters

Wasp [26] présentent un modèle modifié de Hamilton-Crosser, pour le cas des particules sphériques ( $\kappa = 1$ ) :

$$k_{nf} = k_f \frac{k_s + 2k_f + 2\varphi(k_s - k_f)}{k_s + 2k_f - \varphi(k_s - k_f)}$$

### 1.5.3.5 Viscosité

La viscosité des nanofluides mesure la tendance de la suspension à résister à l'écoulement. Elle peut être également définie comme le rapport entre la contrainte de cisaillement et le taux de cisaillement. L'amélioration du transfert de chaleur des nanofluides par l'ajout de nanoparticules dans le fluide de base s'accompagne d'une augmentation de la viscosité. Cette augmentation n'est pas désirée car elle diminue l'intérêt de l'usage des nanofluides. Les principaux paramètres influençant la viscosité sont la concentration en nanoparticules, la forme des particules, la température, la pression, ect [16].

Les équations hydrodynamiques ont été les premières tentatives utilisées par Einstein pour calculer la viscosité des suspensions de particules solides de forme sphérique. Le modèle proposé par Einstein [27], qui est valable pour les fractions volumiques inférieures à 1%, se présente comme :

$$\mu_{nf} = \mu_f(1 + 2,5\varphi)$$

Brinkman [28] a proposé un modèle basé sur celui d'Einstein, qui est applicable à une concentration en nanoparticules allant jusqu'à 4%.

$$\mu_{nf} = \mu_f \frac{1}{(1-\varphi)^{2,5}}$$

Bock Choon Pak [19] ont présenté le modèle suivant pour évaluer la viscosité des nanofluides à base d'eau et de nanoparticules de  $Al_2O_3$  et de  $TiO_2$ :

$$\mu_{nf} = \mu_f(1 + 39,11\varphi + 533,9\varphi^2)$$

Batchelor [29] a proposé un modèle prenant en considération le mouvement brownien des particules :

$$\mu_{nf} = \mu_f(1 + 2,5\varphi + 6,5\varphi^2)$$

#### **1.5.4 Applications des nanofluides dans l'industrie**

Les nanofluides sont utilisés dans plusieurs secteurs industriels tels que l'industrie automobile et l'industrie énergétique. Ils sont utilisés dans le refroidissement des machines électriques, électroniques et mécaniques, le transfert de chaleur dans la production d'énergie, refroidissement et chauffage des bâtiments, les systèmes d'énergie solaire, l'aéronautique et la défense, le transport, ect. Le rôle des nanofluides dans ces applications est discuté dans la suite [10,11,12,30,31].

##### **1.5.4.1 Radiateurs automobiles**

Les nouvelles tendances visant à obtenir des rendements plus élevés des nouveaux véhicules tels que la vitesse, l'accélération et la puissance ont conduit à une plus grande production de chaleur. La quantité excessive de chaleur produite dans les moteurs pendant le processus de combustion doit être dissipée avant qu'elle ne compromette les performances du moteur, l'économie du carburant, la sécurité, la fiabilité et la durée de vie des composants. Les liquides de refroidissement à base d'éthylène glycol et d'eau dans les radiateurs automobiles présentent des performances thermiques faibles en raison de leur faible conductivité thermique

et chaleur spécifique. L'ajout de nanoparticules en suspension dans un fluide de base permet d'obtenir des liquides de refroidissement avec des caractéristiques de transfert de chaleur élevées en raison de leur conductivité thermique et chaleur spécifiques élevées, ce qui permet d'améliorer le taux de refroidissement des moteurs.

### **1.5.4.2 Applications médicales et biomédicales**

Les nanofluides contribuent de manière significative dans les applications biomédicales telle que l'administration des médicaments. Les médicaments sont délivrés à des cellules spécifiques à l'aide des nanoparticules [30]. Ils sont également utilisés pour le traitement des cancers, principalement dans l'imagerie médicale des tumeurs et dans la délivrance des médicaments à des cellules spécifiques. Les nanofluides magnétiques à base de Fer sont utilisés pour guider les particules du médicament avec la circulation sanguine des patients atteint de cancer vers la tumeur grâce à des aimants. Ce qui permet d'administrer des doses élevées de médicaments ou de radiations sans endommager les tissus voisins [12,30]. Les nanofluides sont utilisés aussi dans la chirurgie en produisant un refroidissement efficace autour de la zone chirurgicale, réduisant ainsi le risque de dommage des organes [12].

### **1.5.4.3 Aéronautique et défense**

Les véhicules et équipements militaires sont équipés de moteurs à usage intensif, produisant beaucoup de chaleur. Ces équipements nécessitent une quantité suffisante de refroidissement et doivent être dotés d'un bon système de refroidissement. Les nanofluides ont un rôle important dans les équipements de défense [10,12,31].

### **1.5.4.4 Application dans les réacteurs nucléaires**

Les centrales nucléaires sont capables de répondre à des besoins massifs en électricité. Le déploiement des réacteurs nucléaires exige des normes de sécurité très strictes en raison des risques élevés qu'ils présentent. Un fluide caloporteur de nouvelle génération (nanofluide) joue un rôle important dans le maintien de la température du réacteur dans des conditions d'urgence [11]. Les nanofluides jouent un rôle important dans les réacteurs nucléaires, en augmentant le flux thermique critique. Le flux thermique critique décrit la limite thermique où un changement de phase se produit pendant le chauffage, ce qui diminue l'efficacité du transfert de chaleur, provoquant ainsi une surchauffe de la surface chauffante [30].

#### **1.5.4.5 Refroidissement et chauffage des bâtiments**

Divers nanofluides peuvent être employés dans les échangeurs de chaleur utilisés dans les bâtiments. L'utilisation des nanofluides permet de faire des économies de puissance, réduire la taille et le coût des systèmes de chauffage, réduire la consommation d'énergie et limiter les rejets de polluants dans l'environnement [12].

### **1.6 Synthèse bibliographique**

#### **1.6.1 Convection thermosolutale dans une cavité remplie de nanofluide**

Le problème de la convection naturelle thermosolutale dans les cavités remplies de nanofluides a été traité analytiquement et numériquement dans de nombreux travaux.

Esfahani et al [32] se sont intéressés à l'étude de la convection thermosolutale dans une cavité carrée en présence de différents nanofluides. La méthode des volumes finis est utilisée pour la résolution numérique des équations. Les auteurs ont analysé l'influence du type du nanofluide, de la concentration en nanoparticules et du nombre de Lewis et du nombre de Rayleigh sur le transfert de chaleur et de masse. Les résultats montrent que l'augmentation du nombre de Rayleigh et de la fraction volumique des nanoparticules augmentent le transfert de chaleur et diminuent le transfert de masse, et que l'augmentation du nombre de Lewis améliore le transfert de masse et diminue le transfert de la chaleur. En outre, le type du nanofluide est un facteur principal influençant le transfert de chaleur.

La convection double diffusive dans une cavité carrée remplie d'un milieu poreux et saturée d'un nanofluide binaire a été étudiée par Sheremet et al [33]. La résolution numérique des équations gouvernantes ainsi que des conditions aux limites est réalisée en utilisant la méthode des différences finies. L'effet de la variation des nombres de Rayleigh, de Reynolds et de Lewis sur le flux et sur le transfert thermique et de masse a été analysé dans cette étude.

Chen et al [34] ont traité le problème de la génération de l'entropie par convection naturelle double diffusive d'un nanofluide confiné dans une cavité rectangulaire. La méthode de Lattice Boltzmann est utilisée pour résoudre les équations gouvernantes. L'influence de la variation du nombre de Rayleigh, du rapport des forces volumiques, du rapport de forme et de la fraction volumique en nanoparticules sont analysés. Il a été trouvé que le taux de génération de l'entropie augmente davantage en régimes turbulents.

Dastmalchi et al [35] ont étudié numériquement la convection naturelle double diffusive dans une cavité rectangulaire remplie par un milieu poreux qui est saturé par un nanofluide

$Al_2O_3-H_2O$ . Les équations gouvernantes sont discrétisées par la méthode des différences finies. Les transferts de chaleur, de masse et de flux sont analysés.

La convection double diffusive dans une cavité rectangulaire remplie d'un nanofluide à base d'eau et de cuivre a été étudiée par Wang et al [36]. La méthode de Lattice Boltzmann est utilisée pour la résolution numérique des équations. Les résultats montrent que l'augmentation de la fraction volumique en nanoparticules augmente le transfert de chaleur et diminue le transfert de masse, et que les transferts de chaleur et de masse augmentent avec l'augmentation du rapport de forme.

Mahapatra [3] ont étudié le transfert de chaleur et de masse par convection double diffusive MHD au sein d'un trapèze remplie d'un nanofluide, en utilisant la méthode des différences finies pour la résolution numérique. Les résultats indiquent que les transferts de chaleur et de masse augmentent avec l'augmentation du champ magnétique, du rapport de forme et du nombre de Rayleigh, et que le transfert de chaleur diminue avec l'addition des nanoparticules.

He et al [37] ont effectué une étude numérique de la convection thermosolutale d'un nanofluide  $Cu - H_2O$  confiné dans une enceinte rectangulaire soumise à des conditions aux limites sinusoïdales et ayant des cloisons conductrices de la chaleur. Les équations gouvernantes sont résolues en utilisant la méthode de Lattice Boltzmann. L'étude a été réalisée en faisant varier le nombre de Rayleigh, la fraction volumique des nanoparticules, la déviation de phase, et le coefficient de transfert thermique, et ce, pour déterminer les valeurs optimales de ces paramètres qui améliorent le transfert de chaleur et de masse.

Dutta et al [38] ont étudié le transfert de la chaleur et la génération de l'entropie par convection naturelle MHD dans une enceinte inclinée remplie d'un nanofluide  $Cu - H_2O$ , en utilisant la méthode des éléments finis. Les résultats de l'étude montrent que le transfert de la chaleur reste constant avec la variation du champ magnétique pour de faibles valeurs du nombre de Rayleigh, tandis qu'il diminue avec l'augmentation du champ magnétique pour de grandes valeurs du nombre de Rayleigh. Le transfert de la chaleur s'améliore avec l'augmentation de l'angle d'inclinaison de la paroi pour  $R_T = 10^3$  et  $R_T = 10^4$  alors que l'effet est contraire pour  $R_T = 10^5$  et  $R_T = 10^6$ . L'entropie diminue avec le nombre de Hartmann pour toutes les valeurs du nombre de Rayleigh et de l'angle d'inclinaison.

Parveen et al [4] ont analysé le transfert de chaleur et de masse par convection double diffusive MHD d'un nanofluide  $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-H}_2\text{O}$  confiné dans une paroi ondulée. La méthode Bi-CGStab est utilisée pour la résolution numérique du système d'équations. Les transferts de chaleur et de masse augmentent avec l'augmentation du nombre de Rayleigh et de la fraction volumique en nanoparticules, et diminuent avec l'augmentation du nombre de Hartmann et du rapport des forces de volume.

L'étude de la convection double diffusive d'un nanofluide dans une cavité chauffée de la paroi verticale gauche a été réalisée par Hussain et al [39]. Les équations gouvernantes et les conditions aux limites imposées sont résolues par la méthode des éléments finis. Il a été conclu que le transfert de chaleur augmente et le transfert de masse diminue en diminuant le rapport de forme, et ce, en fonction des paramètres étudiés qui sont le nombre de Rayleigh, le nombre de Darcy et le rapport de forme.

Kushawaha et al [1] ont abordé le phénomène de la convection naturelle thermosolutale d'un nanofluide magnétique  $\text{Fe}_3\text{O}_4\text{-H}_2\text{O}$  et d'un nanofluide non magnétique  $\text{Cu - H}_2\text{O}$  dans une cavité soumise à des conditions aux limites thermiques et solutales sinusoïdales, et en présence d'un champ magnétique incliné. La méthode des différences finies est utilisée pour la résolution numérique des équations. Les résultats présentés montrent que les transferts de chaleur et de masse s'améliorent avec l'angle d'inclinaison du champ magnétique et que l'influence du champ magnétique est plus importante pour les nanofluides magnétiques que les nanofluides non magnétiques, et ce, pour de faibles valeurs du nombre de Rayleigh. L'influence du champ magnétique est plus intéressante pour de grandes valeurs du nombre de Rayleigh.

Une étude numérique de la convection naturelle double diffusive d'un nanofluide hybride  $\text{Cu-Al}_2\text{O}_3\text{-H}_2\text{O}$  dans une cavité en forme de H est réalisée par Eshaghi et al [40]. La méthode des éléments finis est appliquée pour résoudre les équations gouvernantes. L'influence des nombres de Rayleigh et de Lewis, du rapport de flottabilité, de l'angle d'inclinaison et du rapport de forme sur le transfert de la chaleur et de la masse et sur la génération de l'entropie est étudiée.

Le transfert de chaleur, de masse, et de flux dans une enceinte ondulée remplie d'un nanofluide  $\text{Cu - H}_2\text{O}$  et en présence des forces de flottabilité thermiques et solutale ont été étudiés par Nag & Molla [41]. Les équations gouvernantes sont résolues numériquement en utilisant la méthode des volumes finis. Les résultats des simulations effectuées indiquent que le

transfert de chaleur diminue et le transfert de masse augmente avec l'augmentation du nombre de Lewis.

Nayak et al [42] ont étudié l'impact de la convection naturelle double diffusive sur l'écoulement du fluide et sur le transfert de chaleur et de masse dans une cavité en forme de  $U$  remplie d'un nanofluide hybride. La méthode des éléments finis est utilisée pour trouver une solution aux équations de base. Les résultats de cette étude montrent que les lignes de courant s'intensifient avec l'augmentation du rapport de flottabilité, des nombres de Rayleigh et de Lewis, tandis qu'elles diminuent avec l'augmentation du nombre d'ondes. Le transfert de chaleur s'améliore avec l'augmentation du nombre de Rayleigh. L'entropie moyenne prend les plus faibles valeurs avec la diminution du nombre de Rayleigh, tandis que le résultat est inverse avec le nombre de Rayleigh élevé.

### **1.6.2 Convection thermosolutale dans une cavité remplie de nanofluide en présence de l'Effet Soret**

La convection naturelle double diffusive d'un nanofluide à travers une plaque verticale et en prenant en compte le mouvement brownien et la thermophorèse est étudiée analytiquement et numériquement par Kuznetsov & Nield [43]. Ces auteurs ont montré que le transfert de chaleur diminue avec le nombre de Dufour. Une extension de cette étude a été réalisée par Nield & Kuznetsov [44]. Ils ont étudié analytiquement le problème de la convection naturelle double diffusive dans un milieu poreux saturé par un nanofluide, avec la prise en compte du mouvement brownien et de la thermophorèse. L'influence des effets de Soret et Dufour ont été pris en compte.

L'influence des effets de Soret et de Dufour sur le phénomène de la convection naturelle dans une enceinte carrée partiellement chauffée et remplie d'un nanofluide  $Al_2O_3-H_2O$  est étudiée numériquement par Parvin et al [45]. Les équations gouvernantes sont résolues par la méthode des éléments finis. L'effet des coefficients de Soret et de Dufour sur l'écoulement du fluide et sur le transfert thermique et massique est analysé. Les résultats trouvés dans cet article indiquent que le transfert de chaleur et de masse s'améliore avec les coefficients de Soret et Dufour.

Oueslati [46] se sont intéressés à la double convection dans une cavité verticale remplie du nanofluide  $Al_2O_3-H_2O$ , en prenant en considération l'effet Soret. Ils ont étudié l'influence de la variation de la viscosité et de la conductivité thermique sur l'amélioration du transfert de flux, de chaleur et de masse.

Kasmani et al [47] ont étudié l'influence de la combinaison des effets Soret et Dufour sur la convection double diffusive d'un nanofluide en présence du phénomène du rayonnement thermique. Le système des équations gouvernantes est résolu numériquement par la méthode de Runge-Kutta-Gill. L'effet des paramètres tels que les nombres de Soret et de Dufour, le rayonnement thermique sont discutés.

Aly [48] ont étudié l'influence des effets de Soret et de Dufour sur la convection MHD dans un anneau carré avec rainures remplie d'un nanofluide en utilisant la méthode ISPH pour la résolution numérique. Les résultats montrent que l'augmentation du nombre de Soret et la diminution du nombre de Dufour améliorent les nombres de Sherwood et de Nusselt, et que la concentration diminue avec l'augmentation du nombre de Lewis et augmente avec l'augmentation du nombre de Dufour et la diminution du nombre de Soret.

### **1.6.3 Convection thermosolutale dans une cavité remplie de nanofluide en présence d'un champ magnétique**

Parmi les travaux mentionnés précédemment, [1,3,4,38,48] ont étudié le problème de la convection naturelle thermosolutale dans un nanofluide sous l'influence d'un champ magnétique.

La convection double diffusive dans une couche horizontale de nanofluide en présence d'un champ magnétique vertical uniforme, avec la prise en compte de l'effet Soret est étudiée par Chand & Rana [49]. Il a été trouvé que l'effet du champ magnétique et des nombres de Rayleigh et de Lewis stabilisent la couche du fluide, tandis que l'effet Soret, le nombre de Lewis, et le rapport de diffusivité déstabilisent la couche du fluide.

Une investigation numérique a été menée par Ali et al [16] pour étudier l'effet du champ magnétique sur l'écoulement par convection naturelle double diffusive à l'intérieur d'une cavité carrée remplie d'un nanofluide  $Cu - H_2O$ . Les équations gouvernantes ont été résolues numériquement par la méthode des éléments finis. Les résultats obtenus indiquent que l'application d'un champ magnétique réduit le mouvement du fluide, et que le transfert de chaleur peut être amélioré avec l'augmentation de la concentration en nanoparticules de Cuivre.

Abidi et al [50] ont étudié numériquement les transferts de chaleur et de masse dans une cavité remplie d'un nanofluide micropolaire  $Al_2O_3 - Eau$  sous l'effet d'un champ magnétique uniforme. Pour résoudre les équations, la méthode des volumes finis est utilisée. Les résultats illustrent que l'augmentation et la diminution des taux de transfert de chaleur et de masse sont

dues à l'augmentation du nombre de Rayleigh et de Hartmann respectivement, et que l'augmentation du paramètre de viscosité réduit les taux de transfert de chaleur et de masse. Les effets combinés du champ magnétique et de la fraction volumique en nanoparticules sur les transferts de chaleur et de masse sont également étudiés.

L'étude de la convection thermosolutale dans une cavité à ailettes contenant un rectangle circulaire et remplie d'un nanofluide *Cu – Eau* a été menée par Aly et al [51]. Les équations gouvernantes sont résolues par la méthode ISPH. Les résultats indiquent que l'augmentation du nombre de Hartmann diminue les distributions des isothermes et des isoconcentrations et du mouvement du nanofluide. Les transferts de chaleur et de masse diminuent avec l'augmentation du nombre de Hartmann. L'augmentation du nombre de Soret et la diminution du nombre de Dufour donnent une réduction de la distribution des isoconcentrations.

L'effet du champ magnétique sur l'écoulement des nanofluides par convection double diffusive dans un canal asymétrique incliné est exploré dans l'étude réalisée par Akram et al [52]. Les équations différentielles sont résolues à l'aide d'une méthode numérique. L'impact des différents paramètres physiques sur l'écoulement est étudié graphiquement.

### **1.7 Conclusion**

Les résultats de cette étude bibliographique ont permis de mettre la lumière sur les travaux de recherche traitant le transfert de chaleur et de masse induits par la convection naturelle thermosolutale dans les cavités remplies de nanofluides, en présence de l'effet Soret, et en présence d'un champ magnétique. Nous constatons que les études concernant la convection naturelle thermosolutale dans un nanofluide avec un fluide de base binaire au sein d'une cavité inclinée avec une température imposée au niveau de la face latérale gauche, et avec la prise en compte des effets combinés du champ magnétique et de l'effet Soret sont très peu nombreux. Ceci nous a incité à travailler sur cette problématique.

*Chapitre 2 : Formulation  
Mathématique du Problème*

## 2 Formulation mathématique du Problème

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons la description du problème et sa modélisation mathématique. Le modèle mathématique est représenté par le système d'équations bidimensionnel composé des équations de continuité, de l'énergie, de la concentration et de la quantité de mouvement ainsi que des conditions aux limites associées, écrites en coordonnées cartésiennes. Nous présentons également l'écriture adimensionnelle de ces équations.

### 2.2 Description du problème

Dans cette thèse, nous allons étudier le phénomène de convection naturelle thermosolutale d'un nanofluide métallique ( $\text{Cu} - \text{H}_2\text{O}$ ) ayant un fluide de base binaire confiné dans une cavité rectangulaire de longueur  $L$  et de hauteur  $h$ , inclinée d'un angle  $\theta$ , comme illustrée dans la figure 1. Le rapport de forme de cette cavité est  $A_r = \frac{L}{h}$ . Nous appliquons une température  $T_C$  au niveau de la face latérale gauche pour  $z \leq \frac{h}{2}$ , tandis que la partie de la face latérale  $z > \frac{h}{2}$  est adiabatique et imperméable. La face latérale droite est aussi adiabatique et imperméable. La base supérieure est maintenue à une température et concentration uniformes  $T_F$  et  $C_{sup}$ , tandis que la base inférieure est maintenue à température et concentration uniformes égales à  $T_C$  et  $C_{inf}$ , avec  $T_C > T_F$  et  $C_{inf} > C_{sup}$ .

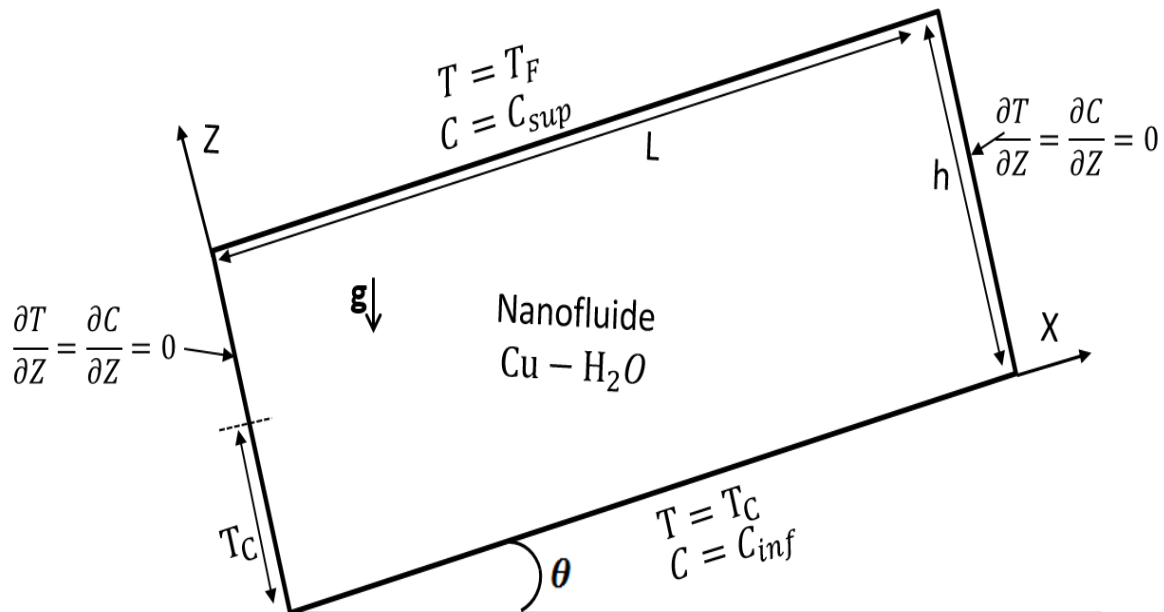


Figure 1: Modèle physique de la configuration étudiée

### 2.2.1 Hypothèses simplificatrices

Les hypothèses simplificatrices que nous avons retenues dans notre étude sont les suivantes :

- La nanofluide est supposé incompressible et son écoulement est laminaire et bidimensionnel suivant les coordonnées cartésiennes  $x$  et  $z$
- Le fluide de base utilisé est considéré comme un fluide newtonien, incompressible et qui satisfait l'approximation de Boussinesq
- Le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable
- La paroi est rigide et imperméable
- L'effet Dufour est supposé négligeable
- L'approximation de Boussinesq est valide. Elle consiste à considérer que les variations de la masse volumique sont négligeables au niveau de tous les termes des équations de quantité de mouvement, sauf au niveau du terme de gravité [5]. La variation de la masse volumique est approximée par un développement de Taylor au premier ordre [53]:

$$\rho = \rho_0(1 - \beta_T \cdot (T - T_0) - \beta_S \cdot (C - C_0))$$

Avec :

$\rho_0$  : Masse volumique à la température et concentration de référence

$T_0, C_0$  : Température et concentration de référence

$\beta_T, \beta_S$  : Coefficients d'expansion thermique et massique exprimés par les relations suivantes :

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{P,C} ; \quad \beta_S = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_{P,T}$$

- Les nanoparticules de cuivre sont supposées avoir une forme sphérique et être en équilibre thermique avec le fluide de base
- La dissipation visqueuse est négligeable

## 2.3 Formulation mathématique

### 2.3.1 Equation de continuité

Dans le cas général, l'équation de continuité ou de conservation de la masse est exprimée par :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

Dans le cas d'un fluide incompressible, nous avons :

$$\text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

Cette équation s'écrit en coordonnées cartésiennes telles que définies dans notre configuration comme suit :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (2-1)$$

Avec  $u$  et  $w$  sont respectivement les composantes de la vitesse selon les directions  $x$  et  $z$

### 2.3.2 Equation de conservation de l'énergie

L'équation de conservation de l'énergie est donnée par l'équation suivante [54] :

$$\rho \frac{de}{dt} = (\bar{\tau} : \vec{\nabla} \vec{v}) - P \vec{\nabla} \cdot \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot \vec{q} + r$$

Où  $e$  est l'énergie interne,  $\vec{q}$  est le vecteur flux de chaleur par conduction,  $r$  est la puissance volumique dissipée sous forme de chaleur.

En utilisant la loi de Fourier :  $\vec{q} = -K \vec{\nabla} T$ , l'équation précédente s'écrit :

$$\rho \frac{de}{dt} = (\bar{\tau} : \vec{\nabla} \vec{v}) - P \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{\nabla} \cdot (K \vec{\nabla} T) + r$$

L'équation de conservation de l'énergie peut s'écrire sous la forme généralement utilisée pour l'étude des problèmes de transfert de chaleur par convection [54] comme suit :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = (\bar{\tau} : \vec{\nabla} \vec{v}) + \beta_T T \frac{dP}{dt} + \vec{\nabla} \cdot (K \vec{\nabla} T) + r$$

Où  $C_p$  est la chaleur spécifique,  $\beta_T$  est le coefficient d'expansion thermique

Dans notre problème de convection naturelle dans la cavité remplie d'un nanofluide qui est supposé incompressible, nous supposons également que  $r$  est négligeable ( $r = 0$ ), et que la dissipation visqueuse est aussi négligeable ( $\bar{\tau} : \vec{\nabla} \vec{v}$ ) devant le terme diffusif ( $\vec{\nabla} \cdot (K \vec{\nabla} T)$ ). L'équation d'énergie peut être réécrite sous la forme :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \vec{\nabla} \cdot (K \vec{\nabla} T)$$

Cette équation s'écrit en coordonnées cartésiennes sous la forme suivante :

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + W \frac{\partial T}{\partial z} = K_e \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (2-2)$$

Avec  $K_e = \frac{K_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}}$  est la diffusivité thermique du nanofluide

La capacité calorifique du nanofluide  $(\rho \cdot C_p)_{nf}$  est donnée par [19]:

$$(\rho \cdot C_p)_{nf} = \varphi(\rho \cdot C_p)_s + (1 - \varphi)(\rho \cdot C_p)_f$$

La conductivité thermique du nanofluide  $K_{nf}$ , qui est basée sur le modèle de [22] s'écrit :

$$K_{nf} = K_f \frac{K_s + 2K_f + 2\varphi(K_s - K_f)}{K_s + 2K_f - \varphi(K_s - K_f)}$$

### 2.3.3 Equation de conservation de la concentration

La variation de la concentration du nanofluide au sein de la paroi est décrite par la loi de diffusion de Fick. En prenant en considération l'effet Soret, l'équation s'écrit :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} C = \vec{\nabla} \cdot (D \vec{\nabla} C + K_{CT} \vec{\nabla} T)$$

Avec

$D$  est la diffusivité massique

$K_{CT}$  est le coefficient de Soret

L'équation de la concentration en coordonnées cartésiennes s'écrit sous la forme suivante :

$$U \frac{\partial C}{\partial x} + W \frac{\partial C}{\partial z} = D \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) + K_{CT} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (2-3)$$

### 2.3.4 Equation de conservation de la quantité de mouvement

L'équation de conservation de la quantité de mouvement est définie par Pritchard [55]. Pour le cas d'un fluide incompressible ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ ), on obtient la forme simplifiée de l'équation de Navier-Stokes que nous utiliserons dans la suite de notre travail :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \cdot \vec{g} - \vec{\nabla} P + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (2-4)$$

### Approximation de Boussinesq :

Nous avons :

$$\rho_{nf} = \rho_f(1 - \varphi) + \rho_s \varphi$$

Selon l'approximation de Boussinesq, la variation de la masse volumique est donnée par :

$$\rho_{nf} = \rho_{0,nf}(1 - \beta_T \cdot (T - T_0) - \beta_S \cdot (C - C_0))(1 - \varphi) + \rho_s \varphi$$

L'équation (2-4) devient alors :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \left( (1 - \beta_T \cdot (T - T_0) - \beta_S \cdot (C - C_0)) (1 - \varphi) + \frac{\rho_s}{\rho_{0,nf}} \varphi \right) \vec{g} - \frac{1}{\rho_{0,nf}} \vec{\nabla} P + \frac{\mu}{\rho_{0,nf}} \nabla^2 \vec{v} \quad (2-5)$$

Dans les écoulements bidimensionnels de convection naturelle, il est préférable d'utiliser la formulation vorticité-fonction de courant pour éliminer la pression de l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Cette formulation consiste à remplacer les termes de pression et de vitesse par la vorticité  $\Omega$  et la fonction de courant  $\psi$ .

### Formulation Vorticité - fonction de courant :

Les composantes U et W de la vitesse sont reliées à la fonction de courant par les relations :

$$U = -\frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad \text{et} \quad W = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Nous avons :

$$\vec{\Omega} = \overrightarrow{rot}(\vec{v})$$

Ce qui donne

$$\Omega = -\left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) \quad (2-6)$$

La vorticité et la fonction de courant sont reliées par l'équation précédente.

Pour éliminer la pression et faire apparaître la vorticité  $\Omega$  dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, nous appliquons l'opérateur rotationnel à l'équation (2-5).

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit donc :

$$\Omega \frac{\partial U}{\partial x} + \Omega \frac{\partial W}{\partial z} - U \frac{\partial \Omega}{\partial x} - W \frac{\partial \Omega}{\partial z} = \beta_T \left( \frac{\partial T}{\partial x} \cos \theta - \frac{\partial T}{\partial z} \sin \theta \right) \cdot g - \beta_S \left( \frac{\partial C}{\partial x} \cos \theta - \frac{\partial C}{\partial z} \sin \theta \right) \cdot g + \nu_{nf} \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} \right) \quad (2-7)$$

### 2.3.5 Equation de conservation de la quantité de mouvement en présence d'un champ magnétique

Nous supposons maintenant que l'écoulement du nanofluide qui est électriquement conducteur, est soumis à un champ magnétique externe uniforme et constant  $\vec{B}$ , orienté arbitrairement dans le plan  $(x, z)$ , comme indiqué dans la figure 2.

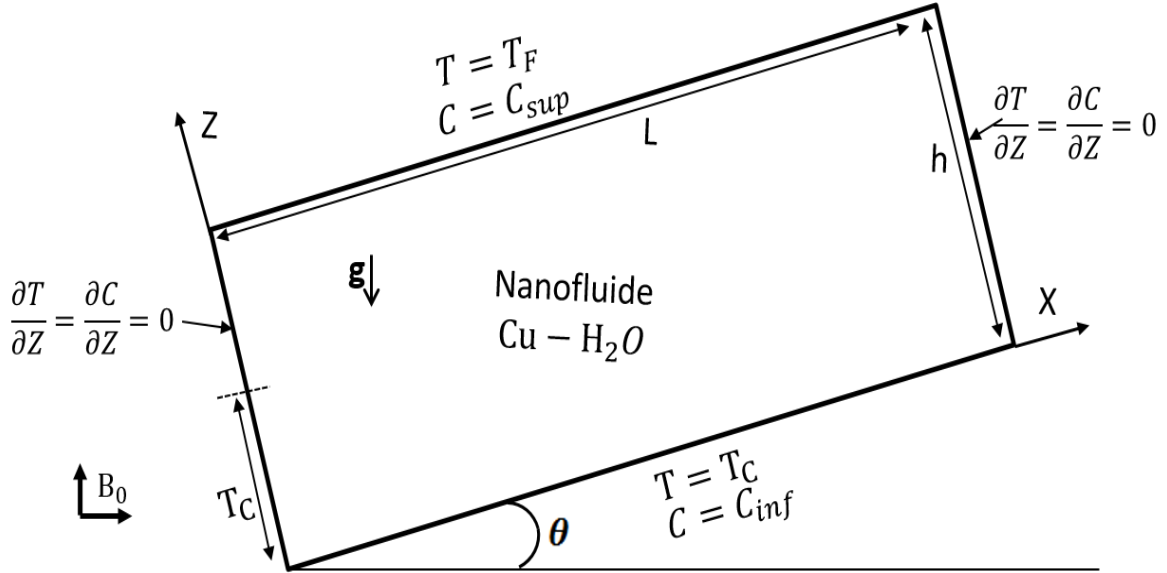


Figure 2: Configuration géométrique en présence d'un champ magnétique

Le mouvement du nanofluide en présence du champ magnétique induit un courant électrique de densité  $\vec{j}$  normal à la vitesse d'écoulement  $\vec{V}$  et au champ magnétique  $\vec{B}$ . Ce courant mène à une force  $\vec{F}$  appelée Force de Lorentz (force électromagnétique), qui est opposée au mouvement.

Le vecteur du champ magnétique est défini par l'équation :

$$\vec{B} = B_0 \vec{x} + B_0 \vec{z}$$

Selon la loi d'Ohm, la densité du courant électrique est définie par :

$$\vec{j} = \sigma_{nf} (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B})$$

Avec  $\sigma$  est la conductivité électrique.

$\sigma_{nf} \vec{E}$  peut être ignoré par rapport à  $\vec{V} \wedge \vec{B}$ . Ainsi, nous obtenons :

$$\vec{j} = \sigma_{nf} (\vec{V} \wedge \vec{B})$$

La force de Lorentz est définie par :

$$\vec{F} = (\vec{j} \wedge \vec{B})$$

En présence d'un champ magnétique, l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho((\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{v}) = \rho \cdot \vec{g} - \vec{\nabla} P + \tilde{\mu} \cdot \Delta \vec{v} + \vec{F} \quad (2-8)$$

Nous appliquons l'opérateur rotationnel à l'équation précédente.

Calculons  $\nabla \wedge (\vec{j} \wedge \vec{B})$ . Nous avons :

$$\vec{B} = B_0 \vec{x} + B_0 \vec{z}$$

$$\vec{j} = \sigma_{nf} (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B})$$

$$\vec{V} = U \vec{x} + W \vec{z}$$

Donc :

$$\nabla \wedge (\vec{j} \wedge \vec{B}) = -\sigma_{nf} B_0^2 \Omega \vec{y}$$

L'équation (2-8) s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \Omega \frac{\partial U}{\partial x} + \Omega \frac{\partial W}{\partial z} - U \frac{\partial \Omega}{\partial x} - W \frac{\partial \Omega}{\partial z} = \beta_T \left( \frac{\partial T}{\partial x} \cos \theta - \frac{\partial T}{\partial z} \sin \theta \right) \cdot g - \beta_S \left( \frac{\partial C}{\partial x} \cos \theta - \frac{\partial C}{\partial z} \sin \theta \right) \cdot g + \\ \nu_{nf} \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} \right) - \frac{\sigma_{nf} B_0^2 \Omega}{\rho_{nf}} \end{aligned} \quad (2-9)$$

### 2.3.6 Conditions aux limites

Les équations précédentes sont résolues en prenant en considération des conditions aux limites thermiques, solutales et dynamiques, spécifiques à notre problème.

#### - Conditions aux limites thermiques et solutales

Elles sont données par :

$$Z = h, \quad 0 \leq X \leq L \quad : \quad T = T_F, \quad C = C_{\text{sup}}$$

$$Z = 0, \quad 0 \leq X \leq L \quad : \quad T = T_C, \quad C = C_{\text{inf}}$$

$$z \leq \frac{h}{2}, \quad X = 0 \quad : \quad T = T_C, \quad \frac{\partial C}{\partial z} = 0$$

$$z > \frac{h}{2}, X = 0 \quad : \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial z} = 0$$

$$0 \leq z \leq h, X = L \quad : \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial z} = 0$$

- **Conditions aux limites dynamiques**

Etant donné que les parois sont rigides, le champ des vitesses est nulle aux frontières. Les conditions aux limites associées à la fonction de courant s'écrivent alors comme suit :

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0 \quad \text{pour} \quad Z = 0, Z = h, X = 0, X = L$$

Pour la vorticité, l'équation de fonction de courant s'écrit :

$$\Omega = - \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right)$$

En tenant compte des conditions aux limites sur la fonction de courant ( $\Psi = 0$ ) et sur la vitesse qui est nulle, et en appliquant la méthode de Wood (Zarrit et al [56]), la vorticité aux frontières est donnée par :

$$X = 0, 0 \leq z \leq h \quad \Omega_{(x=0)} = \frac{2}{\Delta x^2} \Psi_{(x=\Delta x)}$$

$$X = L, 0 \leq z \leq h \quad \Omega_{(x=L)} = \frac{2}{\Delta x^2} \Psi_{(x=L-\Delta x)}$$

$$Z = 0, 0 \leq X \leq L \quad \Omega_{(z=0)} = \frac{1}{x} \frac{2}{\Delta z^2} \Psi_{(z=\Delta z)}$$

$$Z = h, 0 \leq X \leq L \quad \Omega_{(z=h)} = \frac{1}{x} \frac{2}{\Delta z^2} \Psi_{(z=h-\Delta z)}$$

## 2.4 Adimensionnalisation

### 2.4.1 Variables adimensionnelles

La formulation adimensionnelle des équations permet de réduire le nombre de paramètres nécessaires pour la résolution du système d'équations et de faire ressortir les paramètres adimensionnels caractéristiques du problème considéré. Les équations dimensionnelles précédentes sont rendues adimensionnelles à l'aide des variables suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{x}{h} & \tilde{z} &= \frac{z}{h} & \tilde{U} &= \frac{h}{\alpha_f} U & \tilde{W} &= \frac{h}{\alpha_f} W \\ \tilde{\Omega} &= \frac{h^2}{\alpha_f} \Omega & \tilde{\Psi} &= \frac{\Psi}{h \alpha_f} & \tilde{T} &= \frac{T-T_F}{T_C-T_F} & \tilde{C} &= \frac{C-C_{sup}}{C_{inf}-C_{sup}} \end{aligned}$$

### 2.4.2 Equations adimensionnelles

En introduisant les variables adimensionnelles précédentes, l'équation de continuité et les équations de conservation de l'énergie, de la concentration et de la quantité de mouvement s'écrivent sous la forme adimensionnelle suivante.

Equation de continuité :

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{z}} = 0 \quad (2-10)$$

Equation de conservation de l'énergie :

$$\tilde{U} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{W} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} = \frac{K_e}{\alpha_f} \left( \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{z}^2} \right) \quad (2-11)$$

Equation de conservation de la concentration :

$$\tilde{U} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{W} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{z}} = \frac{1}{Le} \left( \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial \tilde{z}^2} \right) + \frac{S_r}{Le} \left( \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{z}^2} \right) \quad (2-12)$$

Equation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{z}} - \tilde{U} \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{x}} - \tilde{W} \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{z}} = P_r R_T \left( \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} \cos \theta - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} \sin \theta \right) - N \left( \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}} \cos \theta - \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{z}} \sin \theta \right) \right) + \\ P_r \left( \frac{\partial^2 \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{z}^2} \right) \end{aligned} \quad (2-13)$$

Formulation vorticité - fonction de courant :

$$\tilde{\Omega} = - \left( \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{z}^2} \right) \quad (2-14)$$

Equation de conservation de la quantité de mouvement en présence d'un champ magnétique :

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{z}} - \tilde{U} \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{x}} - \tilde{W} \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{z}} = P_r R_T \left( \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} \cos \theta - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} \sin \theta \right) - N \left( \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}} \cos \theta - \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{z}} \sin \theta \right) \right) + \\ P_r \left( \frac{\partial^2 \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{z}^2} \right) - P_r H_a^2 \tilde{\Omega} \end{aligned} \quad (2-15)$$

La mise sous forme adimensionnelle des équations de conservation fait apparaître des nombres sans dimension caractéristiques du problème, à savoir :

- Nombre de Rayleigh thermique :  $R_T = \frac{g \beta_T \Delta T h^3}{\nu_f \alpha_f}$

- Nombre de Prandtl :  $P_r = \frac{\nu_f}{\alpha_f}$
- Nombre de Lewis :  $L_e = \frac{S_c}{P_r}$
- Nombre de Schmidt :  $S_c = \frac{\nu_f}{D}$
- Nombre de Soret :  $S_r = \frac{K_{CT} \Delta T}{D \Delta C}$
- Rapport des poussées :  $N = \frac{\Delta C \cdot \beta_S}{\Delta T \cdot \beta_T}$
- Nombre de Hartmann :  $H_a = B_0 h \sqrt{\frac{\sigma_{nf}}{\rho_{nf} \nu_f}}$

### 2.4.3 Conditions aux limites adimensionnelles

#### - Conditions aux limites thermiques et solutales

$$\begin{aligned} \tilde{Z} = 1, 0 \leq \tilde{X} \leq 1 & : \quad \tilde{T} = 0, \quad \tilde{C} = 0 \\ \tilde{Z} = 0, 0 \leq \tilde{X} \leq 1 & : \quad \tilde{T} = 1, \quad \tilde{C} = 1 \\ \tilde{Z} \leq \frac{1}{2}, \tilde{X} = 0 & : \quad \tilde{T} = 1, \quad \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{z}} = 0 \\ \tilde{Z} > \frac{1}{2}, \tilde{X} = 0 & : \quad \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{z}} = 0 \\ 0 \leq \tilde{Z} \leq 1, \tilde{X} = 1 & : \quad \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{z}} = 0 \end{aligned}$$

#### - Conditions aux limites dynamiques

Pour la fonction de courant :

$$\tilde{\Psi} = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{z}} = 0 \quad \text{pour} \quad Z = 0, Z = h, X = 0, X = L$$

Pour la vorticité :

$$\begin{aligned} X = 0, 0 \leq z \leq h & : \quad \tilde{\Omega}_{(\tilde{x}=0)} = \frac{2}{\Delta x^2} = \tilde{\Psi}_{(\tilde{x} = \Delta x)} \\ X = L, 0 \leq z \leq h & : \quad \tilde{\Omega}_{(\tilde{x}=1)} = \frac{2}{\Delta x^2} \tilde{\Psi}_{(\tilde{x} = 1 - \Delta x)} \\ Z = 0, 0 \leq X \leq L & : \quad \tilde{\Omega}_{(\tilde{z}=0)} = \frac{1}{\tilde{x}} \frac{2}{\Delta z^2} \tilde{\Psi}_{(\tilde{z} = \Delta z)} \\ Z = h, 0 \leq X \leq L & : \quad \tilde{\Omega}_{(\tilde{z}=1)} = \frac{1}{\tilde{x}} \frac{2}{\Delta z^2} \tilde{\Psi}_{(\tilde{z} = 1 - \Delta z)} \end{aligned}$$

## 2.5 Transfert thermique et massique

L'étude du transfert de la chaleur et de la masse dans la cavité nécessite la détermination des taux de transfert de chaleur et de masse sur les parois actives de la cavité à une position donnée. Pour les problèmes convectifs, les échanges de chaleur et de masse se mesurent respectivement par les nombres de Nusselt ( $Nu$ ) et de Sherwood ( $Sh$ ).

Les nombres de Nusselt et de Sherwood locaux le long des parois horizontales s'expriment respectivement par :

$$Nu = -\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}}\right)_{\text{paroi}} \quad Sh = -\left(\frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{z}}\right)_{\text{paroi}}$$

Le nombre de Nusselt local au niveau des bases inférieure et supérieure est respectivement égal à :

$$Nu_i = -\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}}\right)_{\tilde{z}=0} \quad Nu_s = \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}}\right)_{\tilde{z}=1}$$

Le nombre de Sherwood local au niveau des bases inférieure et supérieure est respectivement égal à :

$$Sh_i = -\left(\frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{z}}\right)_{\tilde{z}=0} \quad Sh_s = \left(\frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{z}}\right)_{\tilde{z}=1}$$

Pour les nombres de Nusselt et de Sherwood moyens, ils sont déterminés en intégrant les nombres de Nusselt et de Sherwood locaux le long des parois horizontales.

$$\overline{Nu} = -\frac{1}{A_r} \int_0^{A_r} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} d\tilde{X} \quad \overline{Sh} = -\frac{1}{A_r} \int_0^{A_r} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{z}} d\tilde{X}$$

## 2.6 Conclusion

Après avoir présenté les équations gouvernantes du problème ainsi que les conditions aux limites associées, nous passerons dans le prochain chapitre à la résolution numérique de ces équations à l'aide de la méthode numérique des volumes finis.

## *Chapitre 3 : Résolution Numérique*

### 3 Résolution numérique

#### 3.1 Introduction

Le problème de la convection naturelle thermosolutale du nanofluide est décrit par un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires avec des variables dépendantes. Il est pratiquement impossible de trouver une solution analytique et exacte à ces équations. Par conséquent, le recours à la résolution numérique s'avère obligatoire. La résolution numérique comporte une étape de maillage qui consiste à diviser le domaine d'étude en petits volumes, et une étape de discrétisation qui transforme le problème continu en un problème discret. Les méthodes numériques de discrétisation les plus utilisées sont la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis, et la méthode des volumes finis. Dans le cadre de ce travail, nous avons choisi d'utiliser la méthode des volumes finis.

#### 3.2 Méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis, développée par Patankar [57], comporte une phase de maillage et une phase de discrétisation.

Le maillage consiste à diviser le domaine d'étude ( $\Omega$ ) en un nombre fini de sous-domaines élémentaires appelés volumes de contrôle, comme montré dans la figure 3.

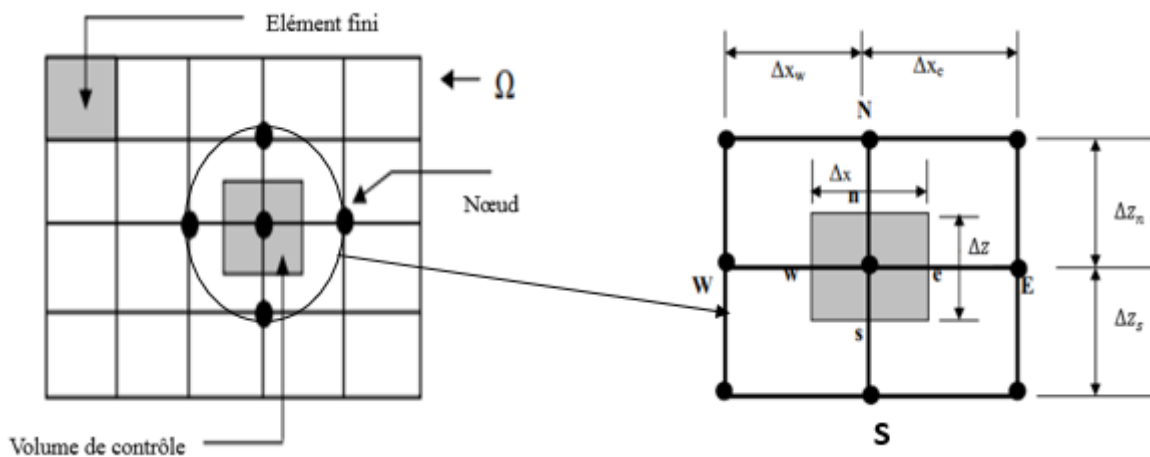


Figure 3: Maillage et description d'un volume de contrôle bidimensionnel

Les grandeurs étudiées (température, concentration, vitesse, vorticité, fonction de courant) seront exprimées sur ces volumes de contrôle. Chaque volume de contrôle contient un nœud principal  $P$ , et chaque nœud est entouré par un volume élémentaire sur lequel les

équations différentielles sont intégrées. Dans le cas bidimensionnel, pour un nœud principal  $P$ , les points  $E$  et  $W$  sont des voisins suivant la direction  $X$ , tandis que les points  $N$  et  $S$  sont des voisins suivant la direction  $Z$ . Chaque volume est délimité par quatre interfaces ( $e, w, s, n$ ).

La méthode des volumes finis consiste à intégrer les équations aux dérivées partielles sur chaque volume de contrôle. Pour calculer l'intégrale dans ce volume élémentaire, l'inconnue est représentée à l'aide d'une fonction d'approximation entre deux nœuds consécutifs. Ensuite, la forme intégrale est discrétisée dans le domaine d'étude.

### 3.3 Discrétisation des équations

La discrétisation consiste à rechercher la valeur des fonctions inconnues en un grand nombre de points. La température, la concentration, la vorticité et la fonction de courant sont les inconnues de notre problème. Pour la vitesse, elle sera déduite de la fonction de courant.

Les équations établies dans le chapitre précédent peuvent être classées en deux types :

- Equations de transport (équations de la température, de la concentration, et de la quantité de mouvement)
- Equation de la fonction de courant.

#### 3.3.1 Discrétisation des équations de transport

Les équations de transport peuvent être écrites sous une forme générale (Sammouda [53]), en coordonnées cartésiennes, comme suit :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial f}{\partial t} = \varepsilon_{px} \frac{\partial(\bar{U}f)}{\partial \bar{x}} + \varepsilon_{pz} \frac{\partial(\bar{W}f)}{\partial \bar{z}} + \varepsilon_{sx} \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x}^2} + \varepsilon_{sz} \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2} + \varepsilon_x \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} + \varepsilon_z \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \varepsilon f + S \quad (3-1)$$

Avec :

$f$  : la fonction à déterminer ( $T, C, \Omega$ )

$\alpha$  : facteur de relaxation nécessaire pour la stabilité de la solution

$S$  : le terme source

Pour chacune des équations de conservation de l'énergie, de la concentration, et de la quantité de mouvement,  $\varepsilon_{px}, \varepsilon_{pz}, \varepsilon_{sx}, \varepsilon_{sz}, \varepsilon_x, \varepsilon_z$  sont définis dans le tableau ci-dessous :

Tableau 1: Expressions de  $\varepsilon$  et de  $S$  pour les différentes équations

Equation	$\varepsilon_{px}$	$\varepsilon_{pz}$	$\varepsilon_{sx}$	$\varepsilon_{sz}$	$\varepsilon_x$	$\varepsilon_z$	$\varepsilon$	$S$
<b>Energie</b>	-1	-1	$\frac{K_e}{\alpha_f}$	$\frac{K_e}{\alpha_f}$	0	0	0	0
<b>Concentration</b>	-1	-1	$\frac{1}{L_e}$	$\frac{1}{L_e}$	0	0	0	$\frac{S_r}{L_e} \left( \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{z}^2} \right)$
<b>Quantité de mouvement</b>	1	1	$P_r$	$P_r$	0	0	0	$-\tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} - \tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{z}} + P_r R_T \left( \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} \cos \theta - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} \sin \theta \right) - N \left( \frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tilde{x}} \cos \theta - \frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tilde{z}} \sin \theta \right) \right)$
<b>Quantité de mouvement en présence du champ magnétique</b>	1	1	$P_r$	$P_r$	0	0	0	$-\tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} - \tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{z}} + P_r R_T \left( \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} \cos \theta - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} \sin \theta \right) - N \left( \frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tilde{x}} \cos \theta - \frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tilde{z}} \sin \theta \right) \right) - P_r H_a^2 \tilde{\Omega}$

La méthode implicite aux directions alternées (A.D.I.) est utilisée pour l'intégration des équations de transport sur le volume de contrôle. Cette méthode consiste à décomposer un pas de temps en deux sous-pas. Dans le premier demi pas, le système est résolu implicitement dans la direction  $x$  et explicitement dans la direction  $z$ . Dans le deuxième demi pas, la procédure est inversée.

- **Forme implicite en  $x$  et explicite en  $z$**

Les dérivées par rapport à  $x$  sont écrites à l'instant  $t + \frac{\Delta t}{2}$ , tandis que les dérivées par rapport à  $z$  sont écrites à l'instant  $t$ . Nous obtenons l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \frac{f_{i,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}} - f_{i,j}^t}{\frac{\Delta t}{2}} &= \varepsilon_{px} \frac{\tilde{U}_{i+1,j}^t f_{i+1,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{U}_{i-1,j}^t f_{i-1,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}}}{2\Delta\tilde{x}} + \varepsilon_{pz} \frac{\tilde{W}_{i,j+1}^t f_{i,j+1}^t - \tilde{W}_{i,j-1}^t f_{i,j-1}^t}{2\Delta\tilde{z}} \\ &+ \varepsilon_{sx} \frac{f_{i+1,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}} - 2f_{i,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}} + f_{i-1,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta\tilde{x}^2} + \varepsilon_{sz} \frac{f_{i,j+1}^t - 2f_{i,j}^t + f_{i,j-1}^t}{\Delta\tilde{z}^2} \\ &+ \varepsilon_x \frac{f_{i+1,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}} - f_{i-1,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}}}{2\Delta\tilde{x}} + \varepsilon_z \frac{f_{i,j+1}^t - f_{i,j-1}^t}{2\Delta\tilde{z}} + \varepsilon f_{i,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}} + S_{i,j}^t \end{aligned}$$

L'étape suivante consiste à regrouper les termes en  $f$  à l'instant  $t + \frac{\Delta t}{2}$  dans un côté et les autres termes à l'instant  $t$  dans l'autre côté. Nous obtenons l'équation :

$$a_i f_{i+1,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}} + b_i f_{i,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}} + c_i f_{i-1,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}} = d_i$$

Avec

$$a_i = -\alpha \frac{\Delta t}{2} \left( \varepsilon_{px} \frac{\tilde{U}_{i+1,j}^t}{2\Delta\tilde{x}} + \varepsilon_{sx} \frac{1}{\Delta\tilde{x}^2} + \varepsilon_x \frac{1}{2\Delta\tilde{x}} \right)$$

$$b_i = \alpha \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{2}{\alpha\Delta t} + \varepsilon_{sx} \frac{2}{\Delta\tilde{x}^2} - \varepsilon \right)$$

$$c_i = \alpha \frac{\Delta t}{2} \left( \varepsilon_{px} \frac{\tilde{U}_{i-1,j}^t}{2\Delta\tilde{x}} - \varepsilon_{sx} \frac{1}{\Delta\tilde{x}^2} + \varepsilon_x \frac{1}{2\Delta\tilde{x}} \right)$$

$$d_i = \alpha \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{2}{\alpha\Delta t} f_{i,j}^t + \varepsilon_{pz} \frac{\tilde{W}_{i,j+1}^t f_{i,j+1}^t - \tilde{W}_{i,j-1}^t f_{i,j-1}^t}{2\Delta\tilde{z}} + \varepsilon_{sz} \frac{f_{i,j+1}^t - 2f_{i,j}^t + f_{i,j-1}^t}{\Delta\tilde{z}^2} + \varepsilon_z \frac{f_{i,j+1}^t - f_{i,j-1}^t}{2\Delta\tilde{z}} + S_{i,j}^t \right)$$

### Equation de l'énergie :

L'équation d'énergie s'écrit :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = -\tilde{U} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} - \tilde{W} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} + \frac{K_e}{\alpha_f} \left( \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{z}^2} \right)$$

Nous avons :

$$\int \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} d\tilde{x} d\tilde{z} dt = \frac{1}{\alpha} \left( \tilde{T}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{T}_P^t \right) \Delta\tilde{x} \Delta\tilde{z}$$

$$\int \tilde{U} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} d\tilde{x} d\tilde{z} dt = \tilde{U}_P^t \left( \left( \tilde{T}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{T}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} \right) - \left( \tilde{T}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{T}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}} \right) \right) \Delta\tilde{z} \frac{\Delta t}{2}$$

### Chapitre 3 : Résolution Numérique

$$\int \tilde{W} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} d\tilde{x} d\tilde{z} dt = \tilde{W}_P^t \left( \left( \tilde{T}_N^t - \tilde{T}_P^t \right) - \left( \tilde{T}_P^t - \tilde{T}_S^t \right) \right) \Delta \tilde{x} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int \frac{K_e}{\alpha_f} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} d\tilde{x} d\tilde{z} dt = \frac{K_e}{\alpha_f} \left( \frac{\tilde{T}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{T}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta \tilde{x}} - \frac{\tilde{T}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{T}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta \tilde{x}} \right) \Delta \tilde{z} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int \frac{K_e}{\alpha_f} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{z}^2} d\tilde{x} d\tilde{z} dt = \frac{K_e}{\alpha_f} \left( \frac{\tilde{T}_N^t - \tilde{T}_P^t}{\Delta \tilde{z}} - \frac{\tilde{T}_P^t - \tilde{T}_S^t}{\Delta \tilde{z}} \right) \Delta \tilde{x} \frac{\Delta t}{2}$$

Nous obtenons :

$$\tilde{T}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} \left( \frac{\tilde{U}_P^t}{\Delta \tilde{x}} - \frac{K_e}{\alpha_f \Delta \tilde{x}^2} \right) + \tilde{T}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} \left( \frac{1}{\alpha} \frac{2}{\Delta t} - 2 \frac{\tilde{U}_P^t}{\Delta \tilde{x}} + 2 \frac{K_e}{\alpha_f \Delta \tilde{x}^2} \right) + \tilde{T}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}} \left( \frac{\tilde{U}_P^t}{\Delta \tilde{x}} - \frac{K_e}{\alpha_f \Delta \tilde{x}^2} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{2}{\Delta t} \frac{2}{\Delta t} -$$

$$\tilde{W}_P^t \frac{(\tilde{T}_N^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_S^t)}{\Delta \tilde{z}} + \frac{K_e}{\alpha_f} \frac{(\tilde{T}_N^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_S^t)}{\Delta \tilde{z}^2}$$

Alors :

$$a_i \tilde{T}_{i+1,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}} + b_i \tilde{T}_{i,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}} + c_i \tilde{T}_{i-1,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}} = d_i$$

Avec :

$$a_i = \left( \frac{\tilde{U}_P^t}{\Delta \tilde{x}} - \frac{K_e}{\alpha_f \Delta \tilde{x}^2} \right) \frac{\Delta t}{2} \alpha$$

$$b_i = \left( \frac{1}{\alpha} \frac{2}{\Delta t} - 2 \frac{\tilde{U}_P^t}{\Delta \tilde{x}} + 2 \frac{K_e}{\alpha_f \Delta \tilde{x}^2} \right) \frac{\Delta t}{2} \alpha$$

$$c_i = \left( \frac{\tilde{U}_P^t}{\Delta \tilde{x}} - \frac{K_e}{\alpha_f \Delta \tilde{x}^2} \right) \frac{\Delta t}{2} \alpha$$

$$d_i = \left( \frac{1}{\alpha} \frac{2}{\Delta t} \tilde{T}_P^t - \tilde{W}_P^t \frac{(\tilde{T}_N^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_S^t)}{\Delta \tilde{z}} \right) + \frac{K_e}{\alpha_f} \left( \frac{(\tilde{T}_N^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_S^t)}{\Delta \tilde{z}^2} \right) \frac{\Delta t}{2} \alpha$$

#### Equation de concentration :

L'équation de concentration s'écrit

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} = - \tilde{U} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}} - \tilde{W} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{z}} + \frac{1}{L_e} \left( \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial \tilde{z}^2} \right) + \frac{S_r}{L_e} \left( \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{z}^2} \right)$$

Nous avons :

$$\int \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} d\tilde{x} d\tilde{z} dt = \frac{1}{\alpha} \left( \tilde{C}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{C}_P^t \right) \Delta \tilde{x} \Delta \tilde{z}$$

### Chapitre 3 : Résolution Numérique

$$\int \tilde{U} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = \tilde{U}_P^t ((\tilde{C}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{C}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}}) - (\tilde{C}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{C}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}})) \Delta \tilde{z} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int \tilde{W} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{z}} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = \tilde{W}_P^t ((\tilde{C}_N^t - \tilde{C}_P^t) - (\tilde{C}_P^t - \tilde{C}_S^t)) \Delta \tilde{x} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int \frac{1}{L_e} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial \tilde{x}^2} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = \frac{1}{L_e} \left( \frac{\tilde{C}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{C}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta \tilde{x}} - \frac{\tilde{C}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{C}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta \tilde{x}} \right) \Delta \tilde{z} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int \frac{1}{L_e} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial \tilde{z}^2} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = \frac{1}{L_e} \left( \frac{\tilde{C}_N^t - \tilde{C}_P^t}{\Delta \tilde{z}} - \frac{\tilde{C}_P^t - \tilde{C}_S^t}{\Delta \tilde{z}} \right) \Delta \tilde{x} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int \frac{S_r}{L_e} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = \frac{S_r}{L_e} \left( \frac{\tilde{T}_E^t - \tilde{T}_P^t}{\Delta \tilde{x}} - \frac{\tilde{T}_P^t - \tilde{T}_W^t}{\Delta \tilde{x}} \right) \Delta \tilde{z} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int \frac{S_r}{L_e} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{z}^2} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = \frac{S_r}{L_e} \left( \frac{\tilde{T}_N^t - \tilde{T}_P^t}{\Delta \tilde{z}} - \frac{\tilde{T}_P^t - \tilde{T}_S^t}{\Delta \tilde{z}} \right) \Delta \tilde{x} \frac{\Delta t}{2}$$

Nous obtenons :

$$\tilde{C}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} \left( \frac{\tilde{U}_P^t}{\Delta \tilde{x}} - \frac{1}{L_e \Delta \tilde{x}^2} \right) + \tilde{C}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} \left( \frac{1}{\alpha \Delta t} - 2 \frac{\tilde{U}_P^t}{\Delta \tilde{x}} + \frac{2}{L_e \Delta \tilde{x}^2} \right) + \tilde{C}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}} \left( \frac{\tilde{U}_P^t}{\Delta \tilde{x}} - \frac{1}{L_e \Delta \tilde{x}^2} \right) = \frac{1}{\alpha \Delta t} \tilde{C}_P^t - \tilde{W}_P^t$$

$$\frac{(\tilde{C}_N^t - 2\tilde{C}_P^t + \tilde{C}_S^t)}{\Delta \tilde{z}} + \frac{1}{L_e} \frac{(\tilde{C}_N^t - 2\tilde{C}_P^t + \tilde{C}_S^t)}{\Delta \tilde{z}^2} + \frac{S_r}{L_e} \frac{(\tilde{T}_E^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_W^t)}{\Delta \tilde{x}^2} + \frac{S_r}{L_e} \frac{(\tilde{T}_N^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_S^t)}{\Delta \tilde{z}^2}$$

Alors :

$$a_i \tilde{C}_{i+1,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}} + b_i \tilde{C}_{i,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}} + c_i \tilde{C}_{i-1,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}} = d_i$$

Avec :

$$a_i = \left( \frac{\tilde{U}_P^t}{\Delta \tilde{x}} - \frac{1}{L_e \Delta \tilde{x}^2} \right) \frac{\Delta t}{2} \alpha$$

$$b_i = \left( \frac{1}{\alpha \Delta t} - 2 \frac{\tilde{U}_P^t}{\Delta \tilde{x}} + \frac{2}{L_e \Delta \tilde{x}^2} \right) \frac{\Delta t}{2} \alpha$$

$$c_i = \left( \frac{\tilde{U}_P^t}{\Delta \tilde{x}} - \frac{1}{L_e \Delta \tilde{x}^2} \right) \frac{\Delta t}{2} \alpha$$

$$d_i = \left( \frac{1}{\alpha \Delta t} \tilde{C}_P^t - \tilde{W}_P^t \frac{(\tilde{C}_N^t - 2\tilde{C}_P^t + \tilde{C}_S^t)}{\Delta \tilde{z}} + \frac{1}{L_e} \frac{(\tilde{C}_N^t - 2\tilde{C}_P^t + \tilde{C}_S^t)}{\Delta \tilde{z}^2} + \frac{S_r}{L_e} \frac{(\tilde{T}_E^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_W^t)}{\Delta \tilde{x}^2} + \frac{S_r}{L_e} \frac{(\tilde{T}_N^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_S^t)}{\Delta \tilde{z}^2} \right) \frac{\Delta t}{2} \alpha$$

**Equation de conservation de la quantité de mouvement :**

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial t} = -\tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} - \tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{z}} + \tilde{U} \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{W} \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{z}} + P_r R_T \left[ \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} \cos \theta - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} \sin \theta \right) - N \left( \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}} \cos \theta - \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{z}} \sin \theta \right) \right] + P_r \left( \frac{\partial^2 \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{z}^2} \right)$$

Nous avons :

$$\int \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial t} d\tilde{x} d\tilde{z} dt = \frac{1}{\alpha} \left( \tilde{\Omega}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{\Omega}_P^t \right) \Delta \tilde{x} \Delta \tilde{z}$$

$$\int \tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} d\tilde{x} d\tilde{z} dt = \tilde{\Omega}_P^t \left( (\tilde{U}_E^t - \tilde{U}_P^t) - (\tilde{U}_P^t - \tilde{U}_W^t) \right) \Delta \tilde{z} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int \tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{z}} d\tilde{x} d\tilde{z} dt = \tilde{\Omega}_P^t \left( (\tilde{W}_N^t - \tilde{W}_P^t) - (\tilde{W}_P^t - \tilde{W}_S^t) \right) \Delta \tilde{x} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int \tilde{U} \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{x}} d\tilde{x} d\tilde{z} dt = \tilde{U}_P^t \left( (\tilde{\Omega}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{\Omega}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}}) - (\tilde{\Omega}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{\Omega}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}}) \right) \Delta \tilde{z} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int \tilde{W} \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{z}} d\tilde{x} d\tilde{z} dt = \tilde{W}_P^t \left( (\tilde{\Omega}_N^t - \tilde{\Omega}_P^t) - (\tilde{\Omega}_P^t - \tilde{\Omega}_S^t) \right) \Delta \tilde{x} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int P_r R_T \cos \theta \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} d\tilde{x} d\tilde{z} dt = P_r R_T \cos \theta \left( \tilde{T}_E^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_W^t \right) \Delta \tilde{z} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int P_r R_T \sin \theta \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} d\tilde{x} d\tilde{z} dt = P_r R_T \sin \theta \left( \tilde{T}_N^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_S^t \right) \Delta \tilde{x} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int P_r R_T N \cos \theta \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}} d\tilde{x} d\tilde{z} dt = P_r R_T N \cos \theta \left( \tilde{C}_E^t - 2\tilde{C}_P^t + \tilde{C}_W^t \right) \Delta \tilde{z} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int P_r R_T N \sin \theta \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{z}} d\tilde{x} d\tilde{z} dt = P_r R_T N \sin \theta \left( \tilde{C}_N^t - 2\tilde{C}_P^t + \tilde{C}_S^t \right) \Delta \tilde{x} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int P_r \frac{\partial^2 \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{x}^2} d\tilde{x} d\tilde{z} dt = P_r \left( \frac{\tilde{\Omega}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{\Omega}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta \tilde{x}} - \frac{\tilde{\Omega}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{\Omega}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta \tilde{x}} \right) \Delta \tilde{z} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int P_r \frac{\partial^2 \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{z}^2} d\tilde{x} d\tilde{z} dt = P_r \left( \frac{\tilde{\Omega}_N^t - \tilde{\Omega}_P^t}{\Delta \tilde{z}} - \frac{\tilde{\Omega}_P^t - \tilde{\Omega}_S^t}{\Delta \tilde{z}} \right) \Delta \tilde{x} \frac{\Delta t}{2}$$

Nous obtenons :

$$\tilde{\Omega}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} \left( -\frac{\tilde{U}_P^t}{\Delta \tilde{x}} - \frac{P_r}{\Delta \tilde{x}^2} \right) + \tilde{\Omega}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} \left( \frac{1}{\alpha} \frac{2}{\Delta t} + 2 \frac{\tilde{U}_P^t}{\Delta \tilde{x}} + 2 \frac{P_r}{\Delta \tilde{x}^2} \right) + \tilde{\Omega}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}} \left( -\frac{\tilde{U}_P^t}{\Delta \tilde{x}} - \frac{P_r}{\Delta \tilde{x}^2} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{2}{\Delta t} \tilde{\Omega}_P^t - \tilde{\Omega}_P^t \frac{(\tilde{U}_E^t - 2\tilde{U}_P^t + \tilde{U}_W^t)}{\Delta \tilde{x}} - \tilde{\Omega}_P^t \frac{(\tilde{W}_N^t - 2\tilde{W}_P^t + \tilde{W}_S^t)}{\Delta \tilde{z}} + \tilde{W}_P^t \frac{(\tilde{\Omega}_N^t - 2\tilde{\Omega}_P^t + \tilde{\Omega}_S^t)}{\Delta \tilde{z}} +$$

$$P_r R_T \cos\theta \frac{(\tilde{T}_E^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_W^t)}{\Delta\tilde{x}} - P_r R_T \sin\theta \frac{(\tilde{T}_N^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_S^t)}{\Delta\tilde{z}} - P_r R_T N \cos\theta \frac{(\tilde{C}_E^t - 2\tilde{C}_P^t + \tilde{C}_W^t)}{\Delta\tilde{x}} + P_r R_T N \sin\theta \frac{(\tilde{C}_N^t - 2\tilde{C}_P^t + \tilde{C}_S^t)}{\Delta\tilde{z}} + P_r \frac{(\tilde{\Omega}_N^t - 2\tilde{\Omega}_P^t + \tilde{\Omega}_S^t)}{\Delta\tilde{z}^2}$$

Alors :

$$a_i \tilde{\Omega}_{i+1,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}} + b_i \tilde{\Omega}_{i,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}} + c_i \tilde{\Omega}_{i-1,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}} = d_i$$

Avec :

$$a_i = \left(-\frac{\tilde{U}_P^t}{\Delta\tilde{x}} - \frac{P_r}{\Delta\tilde{x}^2}\right) \frac{\Delta t}{2} \alpha$$

$$b_i = \left(\frac{1}{\alpha} \frac{2}{\Delta t} + 2\frac{\tilde{U}_P^t}{\Delta\tilde{x}} + 2\frac{P_r}{\Delta\tilde{x}^2}\right) \frac{\Delta t}{2} \alpha$$

$$c_i = \left(-\frac{\tilde{U}_P^t}{\Delta\tilde{x}} - \frac{P_r}{\Delta\tilde{x}^2}\right) \frac{\Delta t}{2} \alpha$$

$$d_i = \frac{1}{\alpha} \frac{2}{\Delta t} \tilde{\Omega}_P^t - \tilde{\Omega}_P^t \frac{(\tilde{U}_E^t - 2\tilde{U}_P^t + \tilde{U}_W^t)}{\Delta\tilde{x}} - \tilde{\Omega}_P^t \frac{(\tilde{W}_N^t - 2\tilde{W}_P^t + \tilde{W}_S^t)}{\Delta\tilde{z}} + \tilde{W}_P^t \frac{(\tilde{\Omega}_N^t - 2\tilde{\Omega}_P^t + \tilde{\Omega}_S^t)}{\Delta\tilde{z}} + P_r R_T \cos\theta \frac{(\tilde{T}_E^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_W^t)}{\Delta\tilde{x}} - P_r R_T \sin\theta \frac{(\tilde{T}_N^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_S^t)}{\Delta\tilde{z}} - P_r R_T N \cos\theta \frac{(\tilde{C}_E^t - 2\tilde{C}_P^t + \tilde{C}_W^t)}{\Delta\tilde{x}} + P_r R_T N \sin\theta \frac{(\tilde{C}_N^t - 2\tilde{C}_P^t + \tilde{C}_S^t)}{\Delta\tilde{z}} + P_r \frac{(\tilde{\Omega}_N^t - 2\tilde{\Omega}_P^t + \tilde{\Omega}_S^t)}{\Delta\tilde{z}^2} \frac{\Delta t}{2} \alpha$$

**Equation de conservation de la quantité de mouvement en présence du champ magnétique :**

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial t} = -\tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} - \tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{z}} + \tilde{U} \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{W} \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{z}} + P_r R_T \left[ \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} \cos\theta - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} \sin\theta \right) - N \left( \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}} \cos\theta - \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{z}} \sin\theta \right) \right] + P_r \left( \frac{\partial^2 \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{z}^2} \right) - P_r H_a^2 \tilde{\Omega}$$

Nous avons :

$$\int \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial t} d\tilde{x} d\tilde{z} dt = \frac{1}{\alpha} \left( \tilde{\Omega}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{\Omega}_P^t \right) \Delta\tilde{x} \Delta\tilde{z}$$

$$\int \tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} d\tilde{x} d\tilde{z} dt = \tilde{\Omega}_P^t \left( (\tilde{U}_E^t - \tilde{U}_P^t) - (\tilde{U}_P^t - \tilde{U}_W^t) \right) \Delta\tilde{z} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int \tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{z}} d\tilde{x} d\tilde{z} dt = \tilde{\Omega}_P^t \left( (\tilde{W}_N^t - \tilde{W}_P^t) - (\tilde{W}_P^t - \tilde{W}_S^t) \right) \Delta\tilde{x} \frac{\Delta t}{2}$$

Chapitre 3 : Résolution Numérique

$$\int \tilde{U} \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{x}} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = \tilde{U}_P^t ((\tilde{\Omega}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{\Omega}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}}) - (\tilde{\Omega}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{\Omega}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}})) \Delta \tilde{z} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int \tilde{W} \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{z}} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = \tilde{W}_P^t ((\tilde{\Omega}_N^t - \tilde{\Omega}_P^t) - (\tilde{\Omega}_P^t - \tilde{\Omega}_S^t)) \Delta \tilde{x} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int P_r R_T \cos \theta \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = P_r R_T \cos \theta (\tilde{T}_E^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_W^t) \Delta \tilde{z} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int P_r R_T \sin \theta \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = P_r R_T \sin \theta (\tilde{T}_N^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_S^t) \Delta \tilde{x} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int P_r R_T N \cos \theta \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = P_r R_T N \cos \theta (\tilde{C}_E^t - 2\tilde{C}_P^t + \tilde{C}_W^t) \Delta \tilde{z} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int P_r R_T N \sin \theta \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{z}} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = P_r R_T N \sin \theta (\tilde{C}_N^t - 2\tilde{C}_P^t + \tilde{C}_S^t) \Delta \tilde{x} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int P_r \frac{\partial^2 \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{x}^2} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = P_r \left( \frac{\tilde{\Omega}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{\Omega}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta \tilde{x}} - \frac{\tilde{\Omega}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{\Omega}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta \tilde{x}} \right) \Delta \tilde{z} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int P_r \frac{\partial^2 \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{z}^2} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = P_r \left( \frac{\tilde{\Omega}_N^t - \tilde{\Omega}_P^t}{\Delta \tilde{z}} - \frac{\tilde{\Omega}_P^t - \tilde{\Omega}_S^t}{\Delta \tilde{z}} \right) \Delta \tilde{x} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int P_r H_a^2 \tilde{\Omega} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = P_r H_a^2 \tilde{\Omega}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} \Delta \tilde{x} \Delta \tilde{z} \frac{\Delta t}{2}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \tilde{\Omega}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} \left( -\frac{\tilde{U}_P^t}{\Delta \tilde{x}} - \frac{P_r}{\Delta \tilde{x}^2} \right) + \tilde{\Omega}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} \left( \frac{1}{\alpha} \frac{2}{\Delta t} + 2 \frac{\tilde{U}_P^t}{\Delta \tilde{x}} + 2 \frac{P_r}{\Delta \tilde{x}^2} + P_r H_a^2 \right) + \tilde{\Omega}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}} \left( -\frac{\tilde{U}_P^t}{\Delta \tilde{x}} - \frac{P_r}{\Delta \tilde{x}^2} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{2}{\Delta t} \\ & \tilde{\Omega}_P^t - \tilde{\Omega}_P^t \frac{(\tilde{U}_E^t - 2\tilde{U}_P^t + \tilde{U}_W^t)}{\Delta \tilde{x}} - \tilde{\Omega}_P^t \frac{(\tilde{W}_N^t - 2\tilde{W}_P^t + \tilde{W}_S^t)}{\Delta \tilde{z}} + \tilde{W}_P^t \frac{(\tilde{\Omega}_N^t - 2\tilde{\Omega}_P^t + \tilde{\Omega}_S^t)}{\Delta \tilde{z}} + \\ & P_r R_T \cos \theta \frac{(\tilde{T}_E^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_W^t)}{\Delta \tilde{x}} - P_r R_T \sin \theta \frac{(\tilde{T}_N^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_S^t)}{\Delta \tilde{z}} - P_r R_T N \cos \theta \frac{(\tilde{C}_E^t - 2\tilde{C}_P^t + \tilde{C}_W^t)}{\Delta \tilde{x}} \\ & + P_r R_T N \sin \theta \frac{(\tilde{C}_N^t - 2\tilde{C}_P^t + \tilde{C}_S^t)}{\Delta \tilde{z}} + P_r \frac{(\tilde{\Omega}_N^t - 2\tilde{\Omega}_P^t + \tilde{\Omega}_S^t)}{\Delta \tilde{z}^2} \end{aligned}$$

Alors :

$$a_i \tilde{\Omega}_{i+1,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}} + b_i \tilde{\Omega}_{i,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}} + c_i \tilde{\Omega}_{i-1,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}} = d_i$$

Avec

$$a_i = \left( -\frac{\tilde{U}_P^t}{\Delta \tilde{x}} - \frac{P_r}{\Delta \tilde{x}^2} \right) \frac{\Delta t}{2} \alpha$$

$$b_i = \left( \frac{1}{\alpha} \frac{2}{\Delta t} + 2 \frac{\tilde{U}_P^t}{\Delta \tilde{x}} + 2 \frac{P_r}{\Delta \tilde{x}^2} + P_r H_a^2 \right) \frac{\Delta t}{2} \alpha$$

$$c_i = \left(-\frac{\tilde{U}_P^t}{\Delta\tilde{x}} - \frac{P_r}{\Delta\tilde{x}^2}\right)\frac{\Delta t}{2}\alpha$$

$$d_i = \frac{1}{\alpha}\frac{2}{\Delta t}\tilde{\Omega}_P^t - \tilde{\Omega}_P^t \frac{(\tilde{U}_E^t - 2\tilde{U}_P^t + \tilde{U}_W^t)}{\Delta\tilde{x}} - \tilde{\Omega}_P^t \frac{(\tilde{W}_N^t - 2\tilde{W}_P^t + \tilde{W}_S^t)}{\Delta\tilde{z}} + \tilde{W}_P^t \frac{(\tilde{\Omega}_N^t - 2\tilde{\Omega}_P^t + \tilde{\Omega}_S^t)}{\Delta\tilde{z}} +$$

$$P_r R_T \cos\theta \frac{(\tilde{T}_E^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_W^t)}{\Delta\tilde{x}} - P_r R_T \sin\theta \frac{(\tilde{T}_N^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_S^t)}{\Delta\tilde{z}} - P_r R_T N \cos\theta \frac{(\tilde{C}_E^t - 2\tilde{C}_P^t + \tilde{C}_W^t)}{\Delta\tilde{x}}$$

$$+ P_r R_T N \sin\theta \frac{(\tilde{C}_N^t - 2\tilde{C}_P^t + \tilde{C}_S^t)}{\Delta\tilde{z}} + P_r \frac{(\tilde{\Omega}_N^t - 2\tilde{\Omega}_P^t + \tilde{\Omega}_S^t)}{\Delta\tilde{z}^2})\frac{\Delta t}{2}\alpha$$

- **Forme implicite en z et explicite en x**

Dans le deuxième balayage, nous utilisons une discrétisation implicite suivant z et explicite suivant x. Les dérivées par rapport à x sont écrites à l'instant  $t + \frac{\Delta t}{2}$ , tandis que les dérivées par rapport à z sont écrites à l'instant  $t + \Delta t$ . Nous obtenons l'équation suivante :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{f_{i,j}^{t+\Delta t} - f_{i,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}}}{\frac{\Delta t}{2}} = \varepsilon_{px} \frac{\tilde{U}_{i+1,j}^t f_{i+1,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{U}_{i-1,j}^t f_{i-1,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}}}{2\Delta\tilde{x}} + \varepsilon_{pz} \frac{\tilde{W}_{i,j+1}^t f_{i,j+1}^{t+\Delta t} - \tilde{W}_{i,j-1}^t f_{i,j-1}^{t+\Delta t}}{2\Delta\tilde{z}} + \varepsilon_{sx}$$

$$\frac{f_{i+1,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}} - 2f_{i,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}} + f_{i-1,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta\tilde{x}^2} + \varepsilon_{sz} \frac{f_{i,j+1}^{t+\Delta t} - 2f_{i,j}^{t+\Delta t} + f_{i,j-1}^{t+\Delta t}}{\Delta\tilde{z}^2} + \varepsilon_x \frac{f_{i+1,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}} - f_{i-1,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}}}{2\Delta\tilde{x}} + \varepsilon_z \frac{f_{i,j+1}^{t+\Delta t} - f_{i,j-1}^{t+\Delta t}}{2\Delta\tilde{z}} + \varepsilon f_{i,j}^{t+\Delta t} + S_{i,j}^t$$

En regroupant les termes à l'instant  $t + \Delta t$  dans un côté et les autres termes à l'instant  $t + \frac{\Delta t}{2}$  dans l'autre côté, nous obtenons la forme discrète implicite en z et explicite en x sous la forme matricielle suivante :

$$a_i f_{i+1,j}^{t+\Delta t} + b_i f_{i,j}^{t+\Delta t} + c_i f_{i-1,j}^{t+\Delta t} = d_i$$

Avec

$$a_i = -\alpha \frac{\Delta t}{2} \left( \varepsilon_{pz} \frac{\tilde{W}_{i+1,j}^t}{2\Delta\tilde{z}} + \varepsilon_{sz} \frac{1}{\Delta\tilde{z}^2} + \varepsilon_z \frac{1}{2\Delta\tilde{z}} \right)$$

$$b_i = \alpha \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{2}{\alpha\Delta t} + \varepsilon_{sz} \frac{2}{\Delta\tilde{z}^2} - \varepsilon \right)$$

$$c_i = \alpha \frac{\Delta t}{2} \left( \varepsilon_{pz} \frac{\tilde{W}_{i-1,j}^t}{2\Delta\tilde{z}} - \varepsilon_{sz} \frac{1}{\Delta\tilde{z}^2} + \varepsilon_z \frac{1}{2\Delta\tilde{z}} \right)$$

$$d_i = \alpha \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{2}{\alpha\Delta t} f_{i,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}} + \varepsilon_{px} \frac{\tilde{U}_{i+1,j}^t f_{i+1,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{U}_{i-1,j}^t f_{i-1,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}}}{2\Delta\tilde{x}} + \varepsilon_{sx} \frac{f_{i+1,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}} - 2f_{i,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}} + f_{i-1,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta\tilde{x}^2} + \varepsilon_x \frac{f_{i+1,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}} - f_{i-1,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}}}{2\Delta\tilde{x}} + S_{i,j}^t \right)$$

**Equation de l'énergie :**

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = -\tilde{U} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} - \tilde{W} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} + \frac{K_e}{\alpha_f} \left( \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{z}^2} \right)$$

Nous avons :

$$\int \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = \frac{1}{\alpha} \left( \tilde{T}_P^{t+\Delta t} - \tilde{T}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} \right) \Delta\tilde{x} \Delta\tilde{z} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int \tilde{U} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = \tilde{U}_P^t \left( \left( \tilde{T}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{T}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} \right) - \left( \tilde{T}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{T}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}} \right) \right) \Delta\tilde{z} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int \tilde{W} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = \tilde{W}_P^t \left( \left( \tilde{T}_N^{t+\Delta t} - \tilde{T}_P^{t+\Delta t} \right) - \left( \tilde{T}_P^{t+\Delta t} - \tilde{T}_S^{t+\Delta t} \right) \right) \Delta\tilde{x} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int \frac{K_e}{\alpha_f} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = \frac{K_e}{\alpha_f} \left( \frac{\tilde{T}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{T}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta\tilde{x}} - \frac{\tilde{T}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{T}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta\tilde{x}} \right) \Delta\tilde{z} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int \frac{K_e}{\alpha_f} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{z}^2} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = \frac{K_e}{\alpha_f} \left( \frac{\tilde{T}_N^{t+\Delta t} - \tilde{T}_P^{t+\Delta t}}{\Delta\tilde{z}} - \frac{\tilde{T}_P^{t+\Delta t} - \tilde{T}_S^{t+\Delta t}}{\Delta\tilde{z}} \right) \Delta\tilde{x} \frac{\Delta t}{2}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \tilde{T}_N^{t+\Delta t} \left( \frac{\tilde{W}_P^t}{\Delta\tilde{z}} - \frac{K_e}{\alpha_f \Delta\tilde{z}^2} \right) + \tilde{T}_P^{t+\Delta t} \left( \frac{1}{\alpha} \frac{2}{\Delta t} - 2 \frac{\tilde{W}_P^t}{\Delta\tilde{z}} + 2 \frac{K_e}{\alpha_f \Delta\tilde{z}^2} \right) + \tilde{T}_S^{t+\Delta t} \left( \frac{\tilde{W}_P^t}{\Delta\tilde{z}} - \frac{K_e}{\alpha_f \Delta\tilde{z}^2} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{2}{\Delta t} \tilde{T}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} \\ & - \tilde{U}_P^t \frac{\left( \tilde{T}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} - 2\tilde{T}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} + \tilde{T}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}} \right)}{\Delta\tilde{x}} + \frac{K_e}{\alpha_f} \frac{\left( \tilde{T}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} - 2\tilde{T}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} + \tilde{T}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}} \right)}{\Delta\tilde{x}^2} \end{aligned}$$

Alors :

$$a_i \tilde{T}_{i,j+1}^{t+\Delta t} + b_i \tilde{T}_{i,j}^{t+\Delta t} + c_i \tilde{T}_{i,j-1}^{t+\Delta t} = d_i$$

Avec

$$a_i = \left( \frac{\tilde{W}_P^t}{\Delta\tilde{z}} - \frac{K_e}{\alpha_f \Delta\tilde{z}^2} \right) \frac{\Delta t}{2} \alpha$$

$$b_i = \left( \frac{1}{\alpha} \frac{2}{\Delta t} - 2 \frac{\tilde{W}_P^t}{\Delta\tilde{z}} + 2 \frac{K_e}{\alpha_f \Delta\tilde{z}^2} \right) \frac{\Delta t}{2} \alpha$$

$$c_i = \left( \frac{\tilde{W}_P^t}{\Delta\tilde{z}} - \frac{K_e}{\alpha_f \Delta\tilde{z}^2} \right) \frac{\Delta t}{2} \alpha$$

$$d_i = \left( \frac{1}{\alpha} \frac{2}{\Delta t} \tilde{T}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{U}_P^t \frac{\left( \tilde{T}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} - 2\tilde{T}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} + \tilde{T}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}} \right)}{\Delta\tilde{x}} + \frac{K_e}{\alpha_f} \frac{\left( \tilde{T}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} - 2\tilde{T}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} + \tilde{T}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}} \right)}{\Delta\tilde{x}^2} \right) \frac{\Delta t}{2} \alpha$$

**Equation de concentration :**

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} = -\tilde{U} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}} - \tilde{W} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{z}} + \frac{1}{L_e} \left( \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial \tilde{z}^2} \right) + \frac{S_r}{L_e} \left( \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{z}^2} \right)$$

Nous avons :

$$\int \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = \frac{1}{\alpha} \left( \tilde{C}_P^{t+\Delta t} - \tilde{C}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} \right) \Delta\tilde{x} \Delta\tilde{z}$$

$$\int \tilde{U} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = \tilde{U}_P^t \left( \left( \tilde{C}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{C}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} \right) - \left( \tilde{C}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{C}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}} \right) \right) \Delta\tilde{z} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int \tilde{W} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{z}} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = \tilde{W}_P^t \left( \left( \tilde{C}_N^{t+\Delta t} - \tilde{C}_P^{t+\Delta t} \right) - \left( \tilde{C}_P^{t+\Delta t} - \tilde{C}_S^{t+\Delta t} \right) \right) \Delta\tilde{x} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int \frac{1}{L_e} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial \tilde{x}^2} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = \frac{1}{L_e} \left( \frac{\tilde{C}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{C}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta\tilde{x}} - \frac{\tilde{C}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{C}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta\tilde{x}} \right) \Delta\tilde{z} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int \frac{1}{L_e} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial \tilde{z}^2} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = \frac{1}{L_e} \left( \frac{\tilde{C}_N^{t+\Delta t} - \tilde{C}_P^{t+\Delta t}}{\Delta\tilde{z}} - \frac{\tilde{C}_P^{t+\Delta t} - \tilde{C}_S^{t+\Delta t}}{\Delta\tilde{z}} \right) \Delta\tilde{x} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int \frac{S_r}{L_e} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = \frac{S_r}{L_e} \left( \frac{\tilde{T}_E^t - \tilde{T}_P^t}{\Delta\tilde{x}} - \frac{\tilde{T}_P^t - \tilde{T}_W^t}{\Delta\tilde{x}} \right) \Delta\tilde{z} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int \frac{S_r}{L_e} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{z}^2} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = \frac{S_r}{L_e} \left( \frac{\tilde{T}_N^t - \tilde{T}_P^t}{\Delta\tilde{z}} - \frac{\tilde{T}_P^t - \tilde{T}_S^t}{\Delta\tilde{z}} \right) \Delta\tilde{x} \frac{\Delta t}{2}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \tilde{C}_N^{t+\Delta t} \left( \frac{\tilde{W}_P^t}{\Delta\tilde{z}} - \frac{1}{L_e \Delta\tilde{z}^2} \right) + \tilde{C}_P^{t+\Delta t} \left( \frac{1}{\alpha \Delta t} - 2 \frac{\tilde{W}_P^t}{\Delta\tilde{z}} + \frac{2}{L_e \Delta\tilde{z}^2} \right) + \tilde{C}_S^{t+\Delta t} \left( \frac{\tilde{W}_P^t}{\Delta\tilde{z}} - \frac{1}{L_e \Delta\tilde{z}^2} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{2}{\Delta t} \tilde{C}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} \\ & - \tilde{U}_P^t \frac{\left( \tilde{C}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} - 2\tilde{C}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} + \tilde{C}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}} \right)}{\Delta\tilde{x}} + \frac{1}{L_e} \frac{\left( \tilde{C}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} - 2\tilde{C}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} + \tilde{C}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}} \right)}{\Delta\tilde{x}^2} + \frac{S_r}{L_e} \frac{\left( \tilde{T}_E^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_W^t \right)}{\Delta\tilde{x}^2} \\ & + \frac{S_r}{L_e} \frac{\left( \tilde{T}_N^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_S^t \right)}{\Delta\tilde{z}^2} \end{aligned}$$

Alors :

$$a_i \tilde{C}_{i,j+1}^{t+\Delta t} + b_i \tilde{C}_{i,j}^{t+\Delta t} + c_i \tilde{C}_{i,j-1}^{t+\Delta t} = d_i$$

Avec

$$a_i = \left( \frac{\tilde{W}_P^t}{\Delta\tilde{z}} - \frac{1}{L_e \Delta\tilde{z}^2} \right) \frac{\Delta t}{2} \alpha$$

$$b_i = \left( \frac{1}{\alpha} \frac{2}{\Delta t} - 2 \frac{\bar{W}_P^t}{\Delta \bar{z}} + \frac{2}{L_e \Delta \bar{z}^2} \right) \frac{\Delta t}{2} \alpha$$

$$c_i = \left( \frac{\bar{W}_P^t}{\Delta \bar{z}} - \frac{1}{L_e \Delta \bar{z}^2} \right) \frac{\Delta t}{2} \alpha$$

$$d_i = \left( \frac{1}{\alpha} \frac{2}{\Delta t} \tilde{C}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{U}_P^t \frac{(\tilde{C}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} - 2\tilde{C}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} + \tilde{C}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}})}{\Delta \bar{x}} \right) + \frac{1}{L_e} \frac{(\tilde{C}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} - 2\tilde{C}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} + \tilde{C}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}})}{\Delta \bar{x}^2} + \frac{S_r}{L_e} \frac{(\tilde{T}_E^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_W^t)}{\Delta \bar{x}^2} + \frac{S_r}{L_e} \frac{(\tilde{T}_N^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_S^t)}{\Delta \bar{z}^2} \right) \frac{\Delta t}{2} \alpha$$

**Equation de conservation de la quantité de mouvement :**

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial t} = -\bar{\Omega} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} - \bar{\Omega} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{z}} + \bar{U} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{x}} + \bar{W} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{z}} + P_r R_T \left[ \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{x}} \cos \theta - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{z}} \sin \theta \right) - N \left( \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \bar{x}} \cos \theta - \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \bar{z}} \sin \theta \right) \right] + P_r \left( \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \bar{z}^2} \right)$$

Nous avons :

$$\int \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial t} d\bar{x}d\bar{z}dt = \frac{1}{\alpha} \left( \bar{\Omega}_P^{t+\Delta t} - \bar{\Omega}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} \right) \Delta \bar{x} \Delta \bar{z}$$

$$\int \bar{\Omega} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} d\bar{x}d\bar{z}dt = \bar{\Omega}_P^t \left( (\bar{U}_E^t - \bar{U}_P^t) - (\bar{U}_P^t - \bar{U}_W^t) \right) \Delta \bar{z} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int \bar{\Omega} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{z}} d\bar{x}d\bar{z}dt = \bar{\Omega}_P^t \left( (\bar{W}_N^t - \bar{W}_P^t) - (\bar{W}_P^t - \bar{W}_S^t) \right) \Delta \bar{x} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int \bar{U} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{x}} d\bar{x}d\bar{z}dt = \bar{U}_P^t \left( (\bar{\Omega}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \bar{\Omega}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}}) - (\bar{\Omega}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \bar{\Omega}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}}) \right) \Delta \bar{z} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int \bar{W} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{z}} d\bar{x}d\bar{z}dt = \bar{W}_P^t \left( (\bar{\Omega}_N^{t+\Delta t} - \bar{\Omega}_P^{t+\Delta t}) - (\bar{\Omega}_P^{t+\Delta t} - \bar{\Omega}_S^{t+\Delta t}) \right) \Delta \bar{x} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int P_r R_T \cos \theta \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{x}} d\bar{x}d\bar{z}dt = P_r R_T \cos \theta \left( \tilde{T}_E^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_W^t \right) \Delta \bar{z} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int P_r R_T \sin \theta \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{z}} d\bar{x}d\bar{z}dt = P_r R_T \sin \theta \left( \tilde{T}_N^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_S^t \right) \Delta \bar{x} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int P_r R_T N \cos \theta \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \bar{x}} d\bar{x}d\bar{z}dt = P_r R_T N \cos \theta \left( \tilde{C}_E^t - 2\tilde{C}_P^t + \tilde{C}_W^t \right) \Delta \bar{z} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int P_r R_T N \sin \theta \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \bar{z}} d\bar{x}d\bar{z}dt = P_r R_T N \sin \theta \left( \tilde{C}_N^t - 2\tilde{C}_P^t + \tilde{C}_S^t \right) \Delta \bar{x} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int P_r \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \bar{x}^2} d\bar{x}d\bar{z}dt = P_r \left( \frac{\bar{\Omega}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \bar{\Omega}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta \bar{x}} - \frac{\bar{\Omega}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \bar{\Omega}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta \bar{x}} \right) \Delta \bar{z} \frac{\Delta t}{2}$$

### Chapitre 3 : Résolution Numérique

$$\int P_r \frac{\partial^2 \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{z}^2} d\tilde{x} d\tilde{z} dt = P_r \left( \frac{\tilde{\Omega}_N^{t+\Delta t} - \tilde{\Omega}_P^{t+\Delta t}}{\Delta \tilde{z}} - \frac{\tilde{\Omega}_P^{t+\Delta t} - \tilde{\Omega}_S^{t+\Delta t}}{\Delta \tilde{z}} \right) \Delta \tilde{x} \frac{\Delta t}{2}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \tilde{\Omega}_N^{t+\Delta t} \left( -\frac{\tilde{W}_P^t}{\Delta \tilde{z}} - \frac{P_r}{\Delta \tilde{z}^2} \right) + \tilde{\Omega}_P^{t+\Delta t} \left( \frac{1}{\alpha} \frac{2}{\Delta t} + 2 \frac{\tilde{W}_P^t}{\Delta \tilde{z}} + 2 \frac{P_r}{\Delta \tilde{z}^2} \right) + \tilde{\Omega}_S^{t+\Delta t} \left( -\frac{\tilde{W}_P^t}{\Delta \tilde{z}} - \frac{P_r}{\Delta \tilde{z}^2} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{2}{\Delta t} \tilde{\Omega}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \\ & \tilde{\Omega}_P^t \frac{(\tilde{U}_E^t - 2\tilde{U}_P^t + \tilde{U}_W^t)}{\Delta \tilde{x}} - \tilde{\Omega}_P^t \frac{(\tilde{W}_N^t - 2\tilde{W}_P^t + \tilde{W}_S^t)}{\Delta \tilde{z}} + \tilde{U}_P^t \frac{(\tilde{\Omega}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} - 2\tilde{\Omega}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} + \tilde{\Omega}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}})}{\Delta \tilde{x}} + \\ & P_r R_T \cos\theta \frac{(\tilde{T}_E^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_W^t)}{\Delta \tilde{x}} - P_r R_T \sin\theta \frac{(\tilde{T}_N^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_S^t)}{\Delta \tilde{z}} - P_r R_T N \cos\theta \frac{(\tilde{C}_E^t - 2\tilde{C}_P^t + \tilde{C}_W^t)}{\Delta \tilde{x}} \\ & + P_r R_T N \sin\theta \frac{(\tilde{C}_N^t - 2\tilde{C}_P^t + \tilde{C}_S^t)}{\Delta \tilde{z}} + P_r \left( \frac{\tilde{\Omega}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} - 2\tilde{\Omega}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} + \tilde{\Omega}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta \tilde{x}^2} \right) \end{aligned}$$

Alors :

$$a_i \tilde{\Omega}_{i,j+1}^{t+\Delta t} + b_i \tilde{\Omega}_{i,j}^{t+\Delta t} + c_i \tilde{\Omega}_{i,j-1}^{t+\Delta t} = d_i$$

Avec :

$$a_i = \left( -\frac{\tilde{W}_P^t}{\Delta \tilde{z}} - \frac{P_r}{\Delta \tilde{z}^2} \right) \frac{\Delta t}{2} \alpha$$

$$b_i = \left( \frac{1}{\alpha} \frac{2}{\Delta t} + 2 \frac{\tilde{W}_P^t}{\Delta \tilde{z}} + 2 \frac{P_r}{\Delta \tilde{z}^2} \right) \frac{\Delta t}{2} \alpha$$

$$c_i = \left( -\frac{\tilde{W}_P^t}{\Delta \tilde{z}} - \frac{P_r}{\Delta \tilde{z}^2} \right) \frac{\Delta t}{2} \alpha$$

$$\begin{aligned} d_i = & \left[ \frac{1}{\alpha} \frac{2}{\Delta t} \tilde{\Omega}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{\Omega}_P^t \frac{(\tilde{U}_E^t - 2\tilde{U}_P^t + \tilde{U}_W^t)}{\Delta \tilde{x}} - \tilde{\Omega}_P^t \frac{(\tilde{W}_N^t - 2\tilde{W}_P^t + \tilde{W}_S^t)}{\Delta \tilde{z}} + \right. \\ & \tilde{U}_P^t \frac{(\tilde{\Omega}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} - 2\tilde{\Omega}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} + \tilde{\Omega}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}})}{\Delta \tilde{x}} + P_r R_T \cos\theta \frac{(\tilde{T}_E^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_W^t)}{\Delta \tilde{x}} - \\ & P_r R_T \sin\theta \frac{(\tilde{T}_N^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_S^t)}{\Delta \tilde{z}} - P_r R_T N \cos\theta \frac{(\tilde{C}_E^t - 2\tilde{C}_P^t + \tilde{C}_W^t)}{\Delta \tilde{x}} + P_r R_T N \sin\theta \\ & \left. \frac{(\tilde{C}_N^t - 2\tilde{C}_P^t + \tilde{C}_S^t)}{\Delta \tilde{z}} + P_r \left( \frac{\tilde{\Omega}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} - 2\tilde{\Omega}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} + \tilde{\Omega}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta \tilde{x}^2} \right) \right] \frac{\Delta t}{2} \alpha \end{aligned}$$

**Equation de conservation de la quantité de mouvement en présence du champ magnétique :**

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial t} = -\tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} - \tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{z}} + \tilde{U} \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{W} \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{z}} + P_r R_T [(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} \cos \theta - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} \sin \theta) - N (\frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}} \cos \theta - \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{z}} \sin \theta)] + P_r (\frac{\partial^2 \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{z}^2}) - P_r H_a^2 \tilde{\Omega}$$

Nous avons :

$$\int \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial t} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = \frac{1}{\alpha} (\tilde{\Omega}_P^{t+\Delta t} - \tilde{\Omega}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}}) \Delta\tilde{x} \Delta\tilde{z}$$

$$\int \tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = \tilde{\Omega}_P^t ((\tilde{U}_E^t - \tilde{U}_P^t) - (\tilde{U}_P^t - \tilde{U}_W^t)) \Delta\tilde{z} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int \tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{z}} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = \tilde{\Omega}_P^t ((\tilde{W}_N^t - \tilde{W}_P^t) - (\tilde{W}_P^t - \tilde{W}_S^t)) \Delta\tilde{x} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int \tilde{U} \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{x}} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = \tilde{U}_P^t ((\tilde{\Omega}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{\Omega}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}}) - (\tilde{\Omega}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{\Omega}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}})) \Delta\tilde{z} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int \tilde{W} \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{z}} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = \tilde{W}_P^t ((\tilde{\Omega}_N^{t+\Delta t} - \tilde{\Omega}_P^{t+\Delta t}) - (\tilde{\Omega}_P^{t+\Delta t} - \tilde{\Omega}_S^{t+\Delta t})) \Delta\tilde{x} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int P_r R_T \cos \theta \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = P_r R_T \cos \theta (\tilde{T}_E^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_W^t) \Delta\tilde{z} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int P_r R_T \sin \theta \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = P_r R_T \sin \theta (\tilde{T}_N^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_S^t) \Delta\tilde{x} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int P_r R_T N \cos \theta \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = P_r R_T N \cos \theta (\tilde{C}_E^t - 2\tilde{C}_P^t + \tilde{C}_W^t) \Delta\tilde{z} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int P_r R_T N \sin \theta \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{z}} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = P_r R_T N \sin \theta (\tilde{C}_N^t - 2\tilde{C}_P^t + \tilde{C}_S^t) \Delta\tilde{x} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int P_r \frac{\partial^2 \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{x}^2} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = P_r (\frac{\tilde{\Omega}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{\Omega}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta\tilde{x}} - \frac{\tilde{\Omega}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{\Omega}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta\tilde{x}}) \Delta\tilde{z} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int P_r \frac{\partial^2 \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{z}^2} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = P_r (\frac{\tilde{\Omega}_N^{t+\Delta t} - \tilde{\Omega}_P^{t+\Delta t}}{\Delta\tilde{z}} - \frac{\tilde{\Omega}_P^{t+\Delta t} - \tilde{\Omega}_S^{t+\Delta t}}{\Delta\tilde{z}}) \Delta\tilde{x} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int P_r H_a^2 \tilde{\Omega} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = P_r H_a^2 \tilde{\Omega}_P^{t+\Delta t} \Delta\tilde{x} \Delta\tilde{z} \frac{\Delta t}{2}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \tilde{\Omega}_N^{t+\Delta t} \left( -\frac{\tilde{W}_P^t}{\Delta \tilde{z}} - \frac{P_r}{\Delta \tilde{z}^2} \right) + \tilde{\Omega}_P^{t+\Delta t} \left( \frac{1}{\alpha} \frac{2}{\Delta t} + 2 \frac{\tilde{W}_P^t}{\Delta \tilde{z}} + 2 \frac{P_r}{\Delta \tilde{z}^2} + P_r H_a^2 \right) + \tilde{\Omega}_S^{t+\Delta t} \left( -\frac{\tilde{W}_P^t}{\Delta \tilde{z}} - \frac{P_r}{\Delta \tilde{z}^2} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{2}{\Delta t} \\ & \tilde{\Omega}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{\Omega}_P^t \frac{(\tilde{U}_E^t - 2\tilde{U}_P^t + \tilde{U}_W^t)}{\Delta \tilde{x}} - \tilde{\Omega}_P^t \frac{(\tilde{W}_N^t - 2\tilde{W}_P^t + \tilde{W}_S^t)}{\Delta \tilde{z}} + \\ & \tilde{U}_P^t \frac{(\tilde{\Omega}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} - 2\tilde{\Omega}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} + \tilde{\Omega}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}})}{\Delta \tilde{x}} + P_r R_T \cos\theta \frac{(\tilde{T}_E^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_W^t)}{\Delta \tilde{x}} - \\ & P_r R_T \sin\theta \frac{(\tilde{T}_N^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_S^t)}{\Delta \tilde{z}} - P_r R_T N \cos\theta \frac{(\tilde{C}_E^t - 2\tilde{C}_P^t + \tilde{C}_W^t)}{\Delta \tilde{x}} + P_r R_T N \sin\theta \\ & \frac{(\tilde{C}_N^t - 2\tilde{C}_P^t + \tilde{C}_S^t)}{\Delta \tilde{z}} + P_r \frac{(\tilde{\Omega}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} - 2\tilde{\Omega}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} + \tilde{\Omega}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}})}{\Delta \tilde{x}^2} \end{aligned}$$

Alors :

$$a_i \tilde{\Omega}_{i,j+1}^{t+\Delta t} + b_i \tilde{\Omega}_{i,j}^{t+\Delta t} + c_i \tilde{\Omega}_{i,j-1}^{t+\Delta t} = d_i$$

Avec :

$$a_i = \left( -\frac{\tilde{W}_P^t}{\Delta \tilde{z}} - \frac{P_r}{\Delta \tilde{z}^2} \right) \frac{\Delta t}{2} \alpha$$

$$b_i = \left( \frac{1}{\alpha} \frac{2}{\Delta t} + 2 \frac{\tilde{W}_P^t}{\Delta \tilde{z}} + 2 \frac{P_r}{\Delta \tilde{z}^2} + P_r H_a^2 \right) \frac{\Delta t}{2} \alpha$$

$$c_i = \left( -\frac{\tilde{W}_P^t}{\Delta \tilde{z}} - \frac{P_r}{\Delta \tilde{z}^2} \right) \frac{\Delta t}{2} \alpha$$

$$\begin{aligned} d_i = & \left[ \frac{1}{\alpha} \frac{2}{\Delta t} \tilde{\Omega}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \tilde{\Omega}_P^t \frac{(\tilde{U}_E^t - 2\tilde{U}_P^t + \tilde{U}_W^t)}{\Delta \tilde{x}} - \tilde{\Omega}_P^t \frac{(\tilde{W}_N^t - 2\tilde{W}_P^t + \tilde{W}_S^t)}{\Delta \tilde{z}} + \right. \\ & \tilde{U}_P^t \frac{(\tilde{\Omega}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} - 2\tilde{\Omega}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} + \tilde{\Omega}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}})}{\Delta \tilde{x}} + P_r R_T \cos\theta \frac{(\tilde{T}_E^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_W^t)}{\Delta \tilde{x}} - \\ & P_r R_T \sin\theta \frac{(\tilde{T}_N^t - 2\tilde{T}_P^t + \tilde{T}_S^t)}{\Delta \tilde{z}} - P_r R_T N \cos\theta \frac{(\tilde{C}_E^t - 2\tilde{C}_P^t + \tilde{C}_W^t)}{\Delta \tilde{x}} + P_r R_T N \sin\theta \\ & \left. \frac{(\tilde{C}_N^t - 2\tilde{C}_P^t + \tilde{C}_S^t)}{\Delta \tilde{z}} + P_r \frac{(\tilde{\Omega}_E^{t+\frac{\Delta t}{2}} - 2\tilde{\Omega}_P^{t+\frac{\Delta t}{2}} + \tilde{\Omega}_W^{t+\frac{\Delta t}{2}})}{\Delta \tilde{x}^2} \right] \frac{\Delta t}{2} \alpha \end{aligned}$$

### 3.3.2 Discrétisation de l'équation de la fonction de courant

L'équation de la fonction de courant est différente des autres équations de transport. Ainsi, nous utilisons une autre méthode qui est la méthode de la sur-relaxation successive (S.O.R.) proposée par Renwick [58] pour la discrétisation de cette équation.

### Chapitre 3 : Résolution Numérique

L'équation de la fonction de courant s'écrit :

$$\tilde{\Omega} = - \left( \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{z}^2} \right)$$

On discrétise chaque terme de l'équation :

Nous avons :

$$\int \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{x}^2} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = \left( \frac{\tilde{\Psi}_E^{t+\Delta t} - \tilde{\Psi}_P^{t+\Delta t}}{\Delta \tilde{x}} - \frac{\tilde{\Psi}_P^{t+\Delta t} - \tilde{\Psi}_W^{t+\Delta t}}{\Delta \tilde{x}} \right) \Delta \tilde{z} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{z}^2} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = \left( \frac{\tilde{\Psi}_N^{t+\Delta t} - \tilde{\Psi}_P^{t+\Delta t}}{\Delta \tilde{z}} - \frac{\tilde{\Psi}_P^{t+\Delta t} - \tilde{\Psi}_S^{t+\Delta t}}{\Delta \tilde{z}} \right) \Delta \tilde{x} \frac{\Delta t}{2}$$

$$\int \tilde{\Omega} d\tilde{x}d\tilde{z}dt = \tilde{\Omega}_P^{t+\Delta t} \Delta \tilde{x} \Delta \tilde{z} \Delta t$$

Donc :

$$\tilde{\Omega}_P^{t+\Delta t} = - \left( \frac{\tilde{\Psi}_E^{t+\Delta t} - 2\tilde{\Psi}_P^{t+\Delta t} + \tilde{\Psi}_W^{t+\Delta t}}{\Delta \tilde{x}^2} \right) - \left( \frac{\tilde{\Psi}_N^{t+\Delta t} - 2\tilde{\Psi}_P^{t+\Delta t} + \tilde{\Psi}_S^{t+\Delta t}}{\Delta \tilde{z}^2} \right)$$

Elle peut être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{i,j}^{t+\Delta t} &= \tilde{\Psi}_{i+1,j}^{t+\Delta t} \left( \frac{1}{2 \Delta \tilde{x}^2} \frac{1}{\left( \frac{1}{\Delta \tilde{x}^2} + \frac{1}{\Delta \tilde{z}^2} \right)} \right) + \tilde{\Psi}_{i-1,j}^{t+\Delta t} \left( \frac{1}{2 \Delta \tilde{z}^2} \frac{1}{\left( \frac{1}{\Delta \tilde{x}^2} + \frac{1}{\Delta \tilde{z}^2} \right)} \right) + \tilde{\Psi}_{i,j+1}^{t+\Delta t} \\ &\left( \frac{1}{2 \Delta \tilde{z}^2} \frac{1}{\left( \frac{1}{\Delta \tilde{x}^2} + \frac{1}{\Delta \tilde{z}^2} \right)} \right) + \tilde{\Psi}_{i,j-1}^{t+\Delta t} \left( \frac{1}{2 \Delta \tilde{x}^2} \frac{1}{\left( \frac{1}{\Delta \tilde{x}^2} + \frac{1}{\Delta \tilde{z}^2} \right)} \right) + \tilde{\Omega}_{i,j}^{t+\Delta t} \left( \frac{1}{2 \left( \frac{1}{\Delta \tilde{x}^2} + \frac{1}{\Delta \tilde{z}^2} \right)} \right) \end{aligned}$$

L'équation précédente peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{i,j}^{t+\Delta t} &= (\tilde{\Psi}_{i+1,j}^{t+\Delta t} + \tilde{\Psi}_{i-1,j}^{t+\Delta t}) \left( \frac{\Delta \tilde{z}^2}{2(\Delta \tilde{x}^2 + \Delta \tilde{z}^2)} \right) + (\tilde{\Psi}_{i,j+1} + \tilde{\Psi}_{i,j-1}) \left( \frac{\Delta \tilde{x}^2}{2(\Delta \tilde{x}^2 + \Delta \tilde{z}^2)} \right) + \\ &\tilde{\Omega}_{i,j}^{t+\Delta t} \left( \frac{\Delta \tilde{x}^2 \Delta \tilde{z}^2}{\Delta \tilde{x}^2 + \Delta \tilde{z}^2} \right) \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\tilde{\Psi}_{i,j}^{t+\Delta t} = A_1 (\tilde{\Psi}_{i+1,j}^{t+\Delta t} + \tilde{\Psi}_{i-1,j}^{t+\Delta t}) + A_2 (\tilde{\Psi}_{i,j+1} + \tilde{\Psi}_{i,j-1}) + A_3 \tilde{\Omega}_{i,j}^{t+\Delta t}$$

Avec :

$$A_1 = \frac{\Delta \tilde{z}^2}{2(\Delta \tilde{x}^2 + \Delta \tilde{z}^2)}$$

$$A_2 = \frac{\Delta \tilde{x}^2}{2(\Delta \tilde{x}^2 + \Delta \tilde{z}^2)}$$

$$A_3 = \frac{\Delta \tilde{x}^2 \Delta \tilde{z}^2}{\Delta \tilde{x}^2 + \Delta \tilde{z}^2}$$

La méthode S.O.R. par point donne la valeur de la fonction de courant à l'instant  $(t + \Delta t)$  au nœud considéré par la relation de pondération suivante :

$$\tilde{\Psi}_{i,j}^{t+\Delta t} = (1-\omega) \tilde{\Psi}_{i,j}^t + \omega \bar{\Psi}_{i,j}^{t+\Delta t}$$

Avec  $\omega$  est le facteur optimal de sur-relaxation successive (S.O.R) qui est défini comme suit :

$$\omega = \frac{2}{1 + 3,015/N_d}$$

$N_d$  est le nombre de nœuds du domaine d'étude.

Pour les vitesses U et W, elles sont évaluées à partir de la fonction de courant.

$$\tilde{U}_{i,j}^{t+\Delta t} = - \frac{\tilde{\Psi}_{i,j+1}^{t+\Delta t} - 2\tilde{\Psi}_{i,j}^{t+\Delta t} + \tilde{\Psi}_{i,j-1}^{t+\Delta t}}{\Delta \tilde{z}}$$

$$\tilde{W}_{i,j}^{t+\Delta t} = \frac{\tilde{\Psi}_{i+1,j}^{t+\Delta t} - 2\tilde{\Psi}_{i,j}^{t+\Delta t} + \tilde{\Psi}_{i-1,j}^{t+\Delta t}}{\Delta \tilde{x}}$$

### 3.3.3 Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont discrétisées comme suit :

#### - Conditions aux limites thermiques

Pour les faces latérales du rectangle :

A  $X = 0$ , nous avons :

$$\tilde{T}_{1,j} = 1 \quad \text{pour} \quad 1 \leq j < \frac{j_{max}}{2}$$

Et

$$\tilde{T}_{1,j} = 1 - \tilde{z} \quad \text{pour} \quad \frac{j_{max}}{2} < j \leq j_{max}$$

A  $X = 1$ , nous avons :

$$\tilde{T}_{i_{max},j} = \tilde{T}_{i_{max}-1,j} \quad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq j_{max}$$

Pour les bases du rectangle :

$$\tilde{T}_{i,1} = 1 \text{ et } \tilde{T}_{i,j_{max}} = 0 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq i_{max}$$

- **Conditions aux limites solutales**

Pour les faces latérales du rectangle :

$$A X = 1 : \quad \tilde{C}_{imax,j} = \tilde{C}_{imax-1,j} \quad \text{pour } 1 \leq j \leq j_{max}$$

$$A X = 0 : \quad \tilde{C}_{1,j} = \tilde{C}_{2,j} \quad \text{pour } 1 \leq j \leq j_{max}$$

Pour les bases du rectangle :

$$\tilde{C}_{i,1} = 1 \text{ et } \tilde{C}_{i,j_{max}} = 0 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq i_{max}$$

- **Conditions aux limites dynamiques**

Pour la fonction de courant :

$$\tilde{\Psi}_{1,j} = \tilde{\Psi}_{imax,j} = 0 \quad \text{pour } 1 \leq j \leq j_{max}$$

$$\tilde{\Psi}_{i,1} = \tilde{\Psi}_{i,j_{max}} = 0 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq i_{max}$$

Pour la vorticité :

$$\tilde{\Omega}_{imax,j} = \frac{2}{\Delta x} \tilde{\Psi}_{imax-1,j} ; \quad \text{pour } 1 \leq j \leq j_{max}$$

$$\tilde{\Omega}_{i,1} = \frac{1}{\tilde{x}} \frac{2}{\Delta z^2} \tilde{\Psi}_{i,2} ; \quad \text{pour } 2 \leq i \leq i_{max}$$

$$\tilde{\Omega}_{i,j_{max}} = \frac{1}{\tilde{x}} \frac{2}{\Delta z^2} \tilde{\Psi}_{i,j_{max}-1} ; \quad \text{pour } 2 \leq i \leq i_{max}$$

### 3.4 Processus de résolution

La résolution du système d'équations qui gouvernent notre problème ainsi que les conditions aux limites associ es, se fait selon l'organigramme suivant :

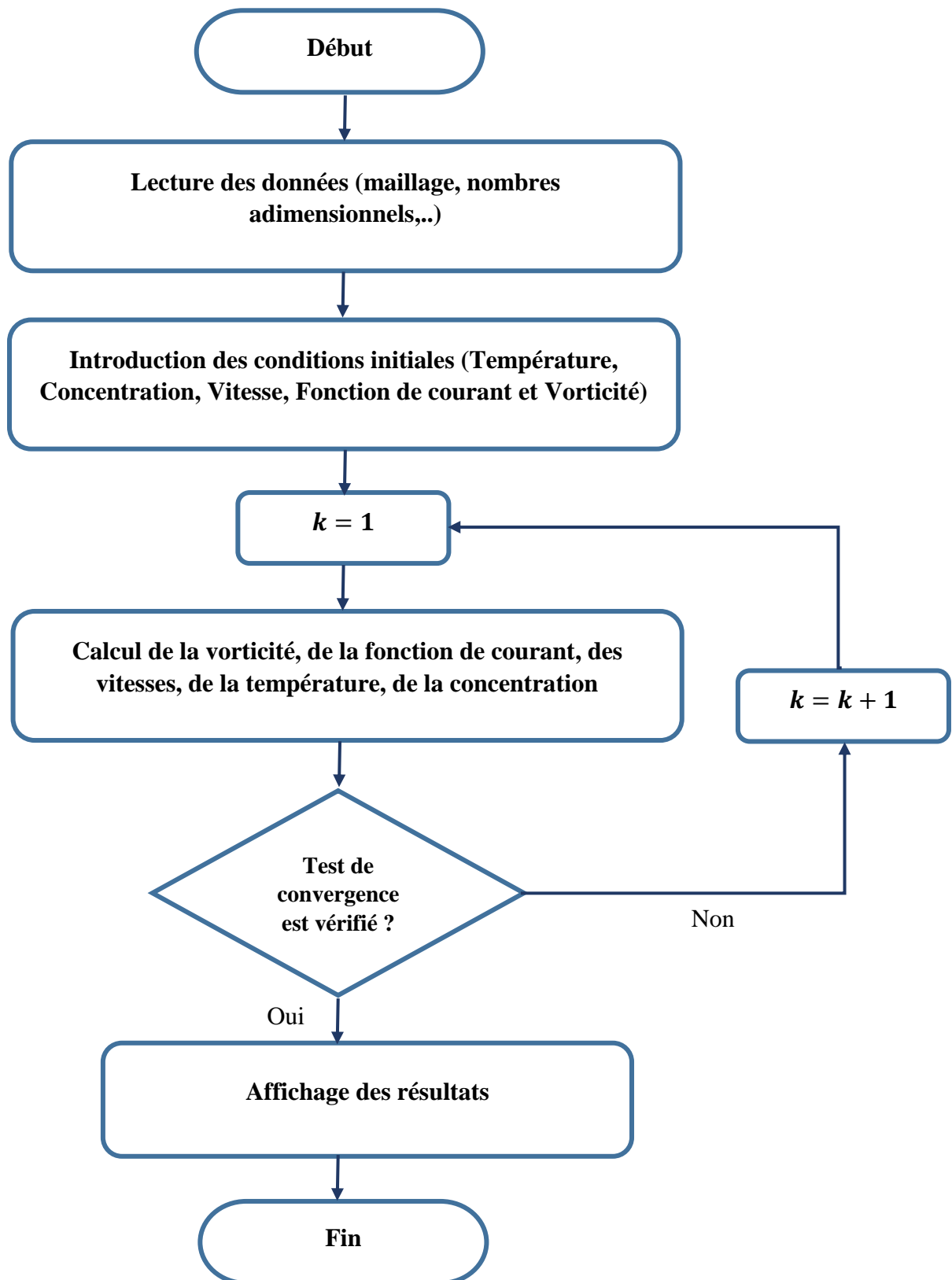


Figure 4 : Organigramme de calcul

La boucle de temps est terminée quand le critère de convergence suivant est vérifié :

$$\frac{\sum_i \sum_j |f_{i,j}^{t+\Delta t} - f_{i,j}^t|}{\sum_i \sum_j |f_{i,j}^{t+\Delta t}|} \leq 10^{-5}$$

### 3.5 Profil initial

La résolution des équations qui est basée sur une technique pseudo-transitoire, nécessite un champ d'initiation. Ce champ initial est choisi arbitrairement, mais à condition qu'il vérifie les conditions aux limites imposées. Nous avons choisi un champ dynamique initial nul. Pour la température et la concentration, le champ initial choisi est comme suit :

$$\tilde{T}, \tilde{C} = \left(1 - \frac{\tilde{z}}{A_r}\right) \left[1 - v \left(\cos \frac{3\pi}{2} \tilde{z}\right)^2 \sin\left(\pi \frac{\tilde{z}}{A_r}\right)\right]$$

Avec  $v$  : un coefficient numérique

### 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons résolu les équations de conservation de l'énergie, de la concentration et de la quantité de mouvement gouvernant notre problème. L'étape suivante consiste à implémenter ces équations algébriques dans un langage informatique.

## *Chapitre 4 : Résultats et Discussion*

## 4 Résultats et discussion

### 4.1 Introduction

Après avoir validé le programme développé en Fortran, nous présentons dans ce chapitre les résultats obtenus de l'étude numérique du problème de la convection naturelle thermosolutale dans une paroi inclinée remplie d'un nanofluide. La première partie a pour objectif de déterminer l'influence de certains paramètres sur le transfert de chaleur et de masse par convection naturelle thermosolutale d'un nanofluide avec la prise en compte de l'effet Soret. Ces paramètres concernent les nombres de Soret, de Lewis, de Prandtl, de Rayleigh thermique, ainsi que la fraction volumique des nanoparticules, l'angle d'inclinaison et le rapport de forme de la cavité. Dans la deuxième partie, nous analysons l'effet d'appliquer un champ magnétique externe et uniforme sur la même problématique précédente, et ce, en faisant varier le nombre de Hartmann, le nombre de Rayleigh thermique, le rapport des forces de poussées thermique et solutale, et l'angle d'inclinaison de la cavité.

### 4.2 Convection naturelle thermosolutale en présence de l'effet Soret

L'objectif de cette partie est de déterminer l'influence de certains paramètres de contrôle tels que les nombres de Soret ( $0 \leq S_r \leq 1.1$ ), de Lewis ( $1 \leq L_e \leq 100$ ), de Prandtl ( $0.6 \leq P_r \leq 6.2$ ), de Rayleigh thermique ( $10^4 \leq R_T \leq 10^8$ ), l'angle d'inclinaison de la cavité ( $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ), la fraction volumique des nanoparticules ( $0 \leq \varphi \leq 0.2$ ) et le rapport de forme de la cavité ( $1 \leq A_r \leq 5$ ) sur les transferts de chaleur et de masse par convection naturelle thermosolutale, traduits par les nombres de Nusselt et de Sherwood moyens [59]. Le rapport des forces de poussées thermique et solutale est pris constant ( $N = 1$ ) dans cette partie. Nous avons également évalué les distributions de la concentration, de la température et de la vorticité sur la face latérale du rectangle, et examiné les isothermes et les iso-concentrations.

#### 4.2.1 Effet du nombre de Lewis ( $L_e$ )

Le nombre de Lewis est défini comme le rapport entre la diffusivité thermique et la diffusivité de masse. Il est utilisé pour caractériser l'écoulement des fluides en cas de transfert simultané de chaleur et de masse. Les figures 4 et 5 illustrent l'influence du nombre de Lewis sur les nombres de Nusselt et de Sherwood moyens au niveau de la paroi active du rectangle pour différentes valeurs du nombre de Soret égales à 0.5, 1 et 1.1, et pour  $\theta = 30^\circ$ ,  $R_T = 10^4$ ,  $P_r = 6.2$  et  $\varphi = 5\%$ .

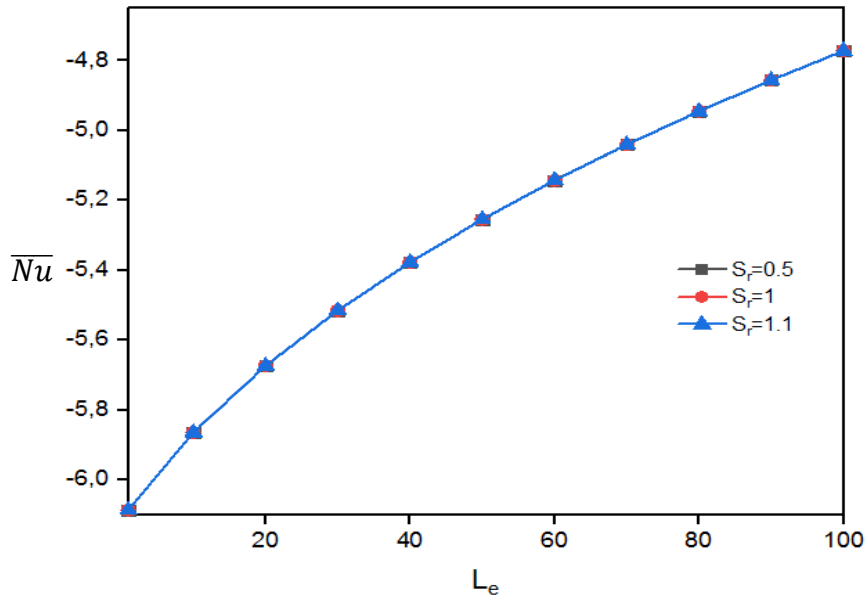


Figure 5: Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de  $L_e$  pour  $\theta = 30^\circ$ ,  $R_T = 10^4$ ,  $P_r = 6.2$  et  $\varphi = 5\%$

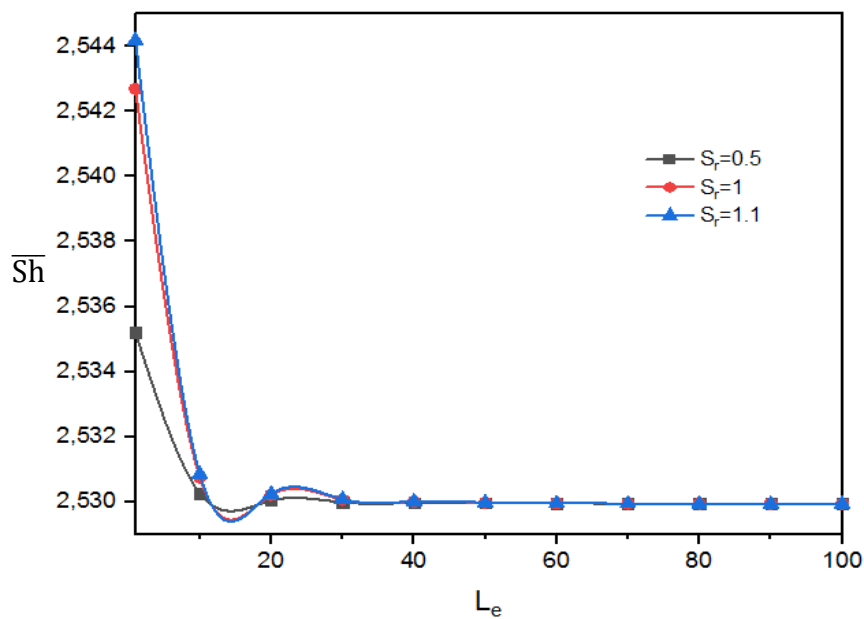
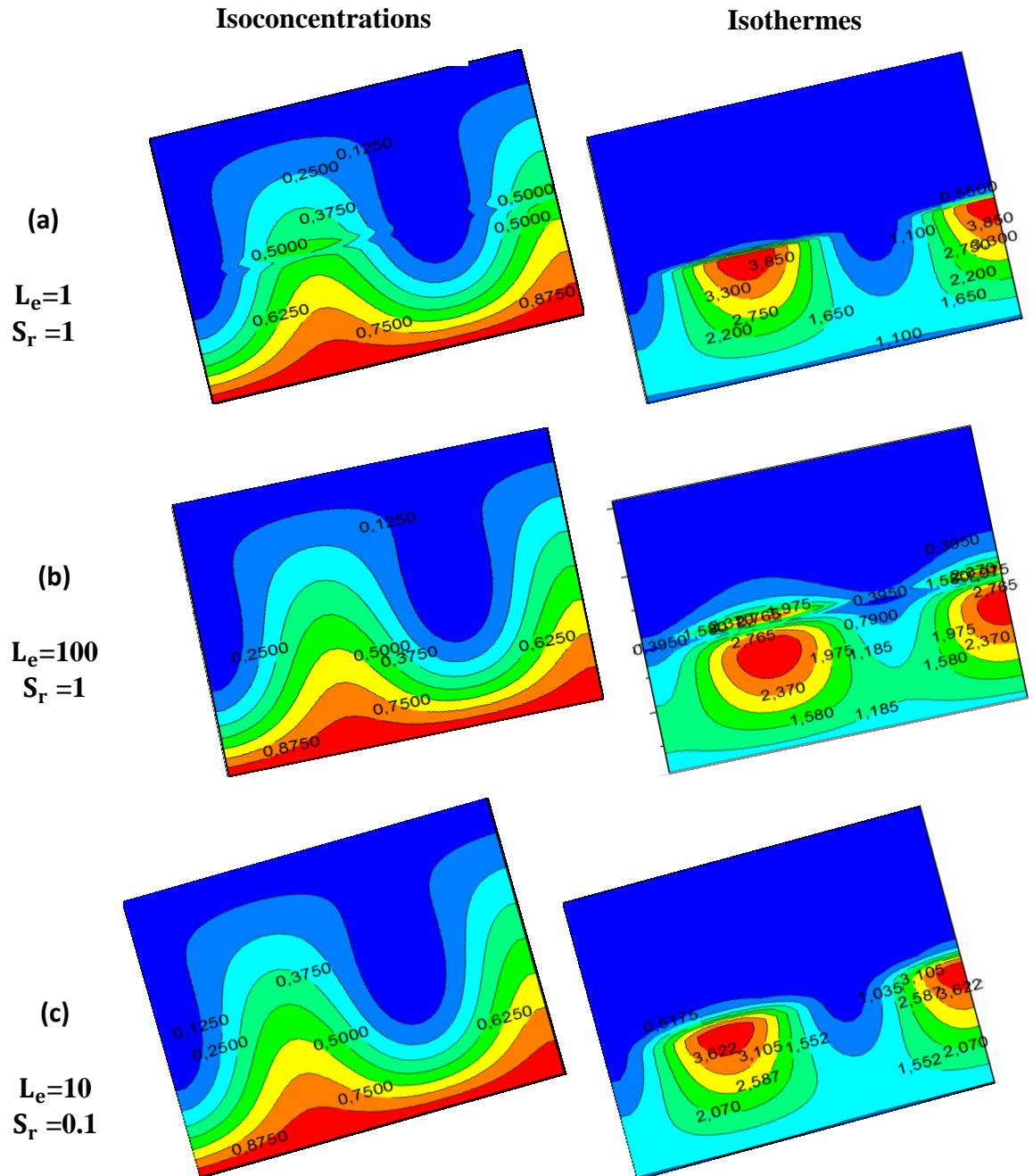


Figure 6: Variation du nombre de Sherwood moyen en fonction de  $L_e$  pour  $\theta = 30^\circ$ ,  $R_T = 10^4$ ,  $P_r = 6.2$  et  $\varphi = 5\%$

Pour des valeurs de  $S_r$  égales à 0.5, 1 et 1.1, nous constatons dans la figure 4 que les courbes sont identiques et superposables. Ainsi, nous pouvons dire que l'influence de l'effet Soret dans ce cas est négligeable. L'impact de la variation du nombre de Lewis entre la valeur 1 et la valeur 100 est nettement considérable sur l'écart des lignes isothermiques. Les isothermes représentées dans la figure 6.(a) et 6.(b) illustrent ce résultat. Ceci s'explique par le fait que, avec l'augmentation du nombre de Lewis, la diffusivité thermique du milieu s'améliore, ce qui

implique l'amélioration de la conductivité thermique du nanofluide, et par conséquent, le transfert thermique qui est traduit par le nombre de Nusselt augmente.



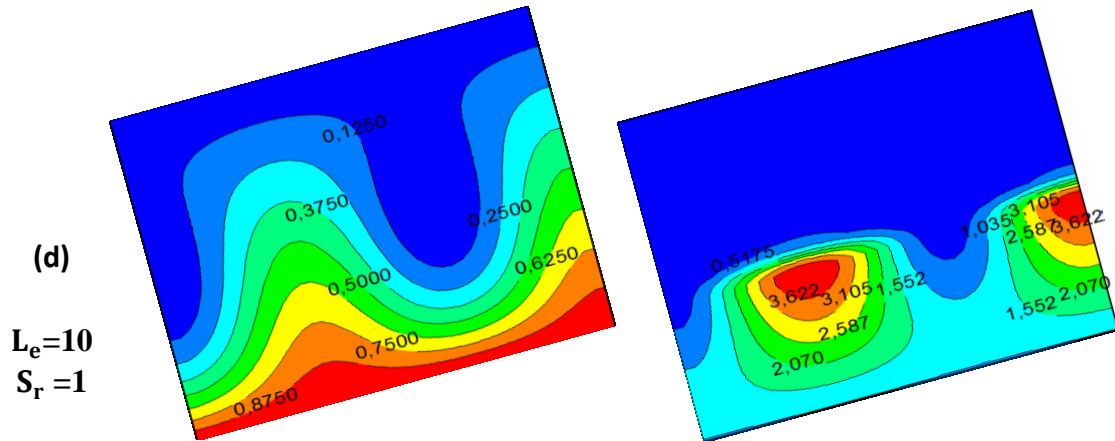


Figure 7: Effet de  $S_r$  et  $L_e$  sur les Isoconcentrations et les Isothermes pour  $\theta = 30^\circ$ ,

$$R_T = 10^4, P_r = 6.2 \text{ et } \varphi = 5\%$$

La figure 5 montre l'influence du nombre de Lewis sur le nombre de Sherwood moyen pour différentes valeurs du nombre de Soret (0.5, 1, 1.1). Nous constatons que le nombre  $\overline{Sh}$  diminue pour des valeurs de  $L_e$  comprises entre 1 et 10. Pour  $L_e$  entre 10 et 30, le taux de transfert de masse subi une légère diminution suivie d'une augmentation pour se stabiliser à une valeur égale à 2.53 pour  $L_e > 30$ , et ce, indépendamment des valeurs du nombre de Soret. De plus, faire varier le nombre de Lewis de 1 à 100 influence significativement l'écart des lignes des iso-concentrations, comme représenté dans la figure 6.(a) et (b). Ces résultats, qui sont similaires à ceux trouvés par Kushawaha et al [1], s'expliquent par le fait que l'augmentation du nombre de Lewis implique la diminution de la diffusivité massique en faveur de la diffusivité thermique, et par conséquent une diminution du transfert de masse qui est traduit par le nombre de Sherwood moyen.

#### 4.2.2 Effet du nombre de Soret ( $S_r$ )

Les variations des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens en fonction du nombre de Soret pour  $\theta = 30^\circ$ ,  $R_T=10^4$ ,  $P_r = 6.2$  et  $\varphi = 5\%$  et pour  $L_e = 1$  et  $L_e = 10$  sont illustrées par les courbes données dans les figures 7 et 8. Nous pouvons constater dans la figure 7 que l'effet du nombre de Soret sur le transfert de chaleur caractérisé par  $\overline{Nu}$  est faible. Les isothermes représentées dans les figures 6.(c) et 6.(d) illustrent cette constatation. Ceci est dû aux raisons précitées dans le paragraphe précédent. Quant au transfert de masse, d'après la figure 8, nous remarquons que  $\overline{Sh}$  croît d'une façon monotone en fonction du nombre de Soret. Ceci est similaire aux résultats trouvés par Kefayati [60]. Cette variation est très prononcée pour  $L_e = 1$  que pour  $L_e = 10$ , comme le montre les iso-concentrations données dans les figures 4.(a) et

4.(c) pour  $S_r = 0.1$  et  $S_r = 1$ . Ce résultat est dû à la diminution de l'écart de concentration par rapport à l'écart de la température. Ainsi, nous pouvons conclure que le nombre de Soret joue un rôle important sur l'amélioration du transfert de masse par convection thermosolutale, et il est sans effet sur le taux de transfert de chaleur.

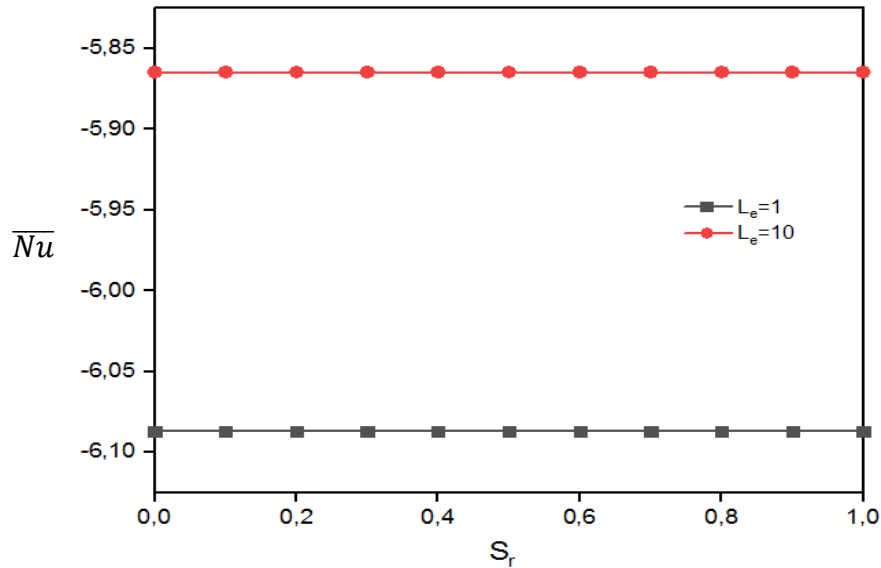


Figure 8: Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de  $S_r$  pour  $\theta = 30^\circ, R_T = 10^4, P_r = 6.2$  et  $\varphi = 5\%$

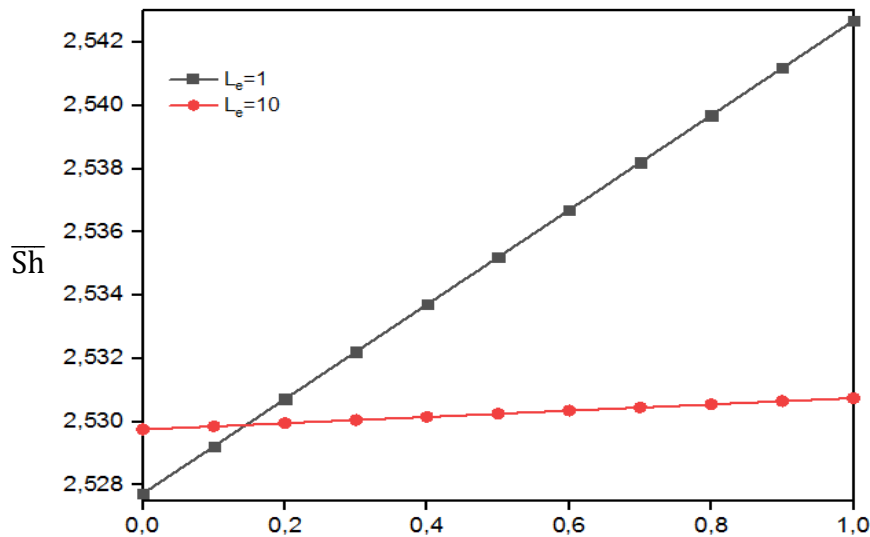


Figure 9: Variation du nombre de Sherwood moyen en fonction de  $S_r$  pour  $\theta = 30^\circ, R_T = 10^4, P_r = 6.2$  et  $\varphi = 5\%$

### 4.2.3 Effet du nombre de Prandtl ( $P_r$ )

La figure 9 montre l'effet de la variation du nombre de Prandtl ( $P_r$ ) sur le transfert de chaleur pour  $X = 0.073, \theta = 30^\circ, L_e = 10, S_r = 1$  et  $\varphi = 5\%$ , et pour  $R_T=10$  et  $R_T=10^8$ . Le nombre

de Nusselt moyen est constant pour le cas de  $R_T=10$ , alors qu'il croît en fonction du nombre  $P_r$  d'un taux de  $1,4 \cdot 10^{-5}$  pour  $R_T=10^8$ . Cette variation est une conséquence de l'augmentation des forces de volume d'origine thermique, en raison de l'augmentation du nombre de Prandtl. Nous pouvons conclure que le transfert de chaleur augmente avec l'augmentation du nombre  $P_r$  pour des valeurs élevées du nombre de Rayleigh thermique. Cette conclusion est justifiée par le travail de Kushawaha et al [1].

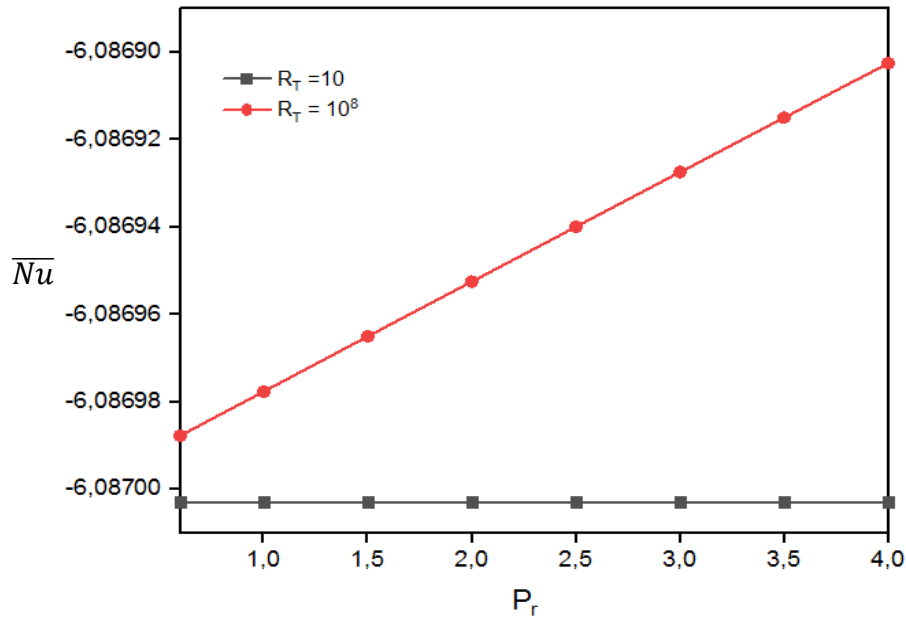


Figure 10: Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de  $P_r$  pour  $\theta = 30^\circ$ ,  $L_e = 10$ ,  $S_r = 1$  et  $\varphi = 5\%$

#### 4.2.4 Effet de l'angle d'inclinaison ( $\theta$ )

La figure 10 présente la variation du nombre de Nusselt moyen avec l'angle d'inclinaison de la cavité, pour  $S_r = 1$ ,  $L_e = 10$ ,  $P_r = 6.2$  et  $\varphi = 5\%$  et pour des valeurs du nombre de Rayleigh thermique égales à  $10^4$  et  $10^6$ . Pour  $R_T=10^4$ , la diminution de  $\overline{Nu}$  est très faible pour  $\theta$  entre  $0^\circ$  et  $180^\circ$ , à cause de la faible intensité de la convection. Dans le cas de  $R_T=10^6$  où l'intensité de la convection est plus importante, le nombre  $\overline{Nu}$  augmente d'un taux de  $7,5 \cdot 10^{-7}$  pour  $\theta$  entre  $0^\circ$  et  $20^\circ$ , et diminue de  $1,6 \cdot 10^{-6}$  pour  $\theta$  entre  $20^\circ$  et  $80^\circ$ . Il augmente ensuite d'un taux de  $1,7 \cdot 10^{-6}$  pour  $\theta$  entre  $80^\circ$  et  $140^\circ$ , et finit par diminuer de  $1,5 \cdot 10^{-6}$ . Ainsi, nous pouvons conclure que la variation de l'angle d'inclinaison de la cavité influence le transfert de chaleur pour de grandes valeurs du nombre de Rayleigh thermique. Pour des valeurs faibles de Rayleigh, l'influence est négligeable.

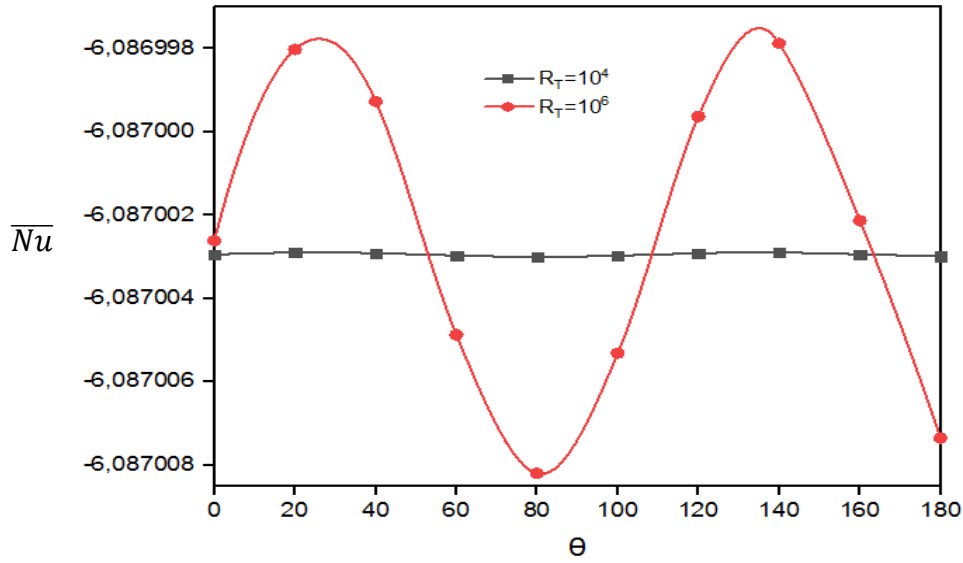


Figure 11: Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de  $\theta$  pour  $S_r = 1, L_e = 10, P_r = 6.2$  et  $\varphi = 5\%$

#### 4.2.5 Effet du rapport de forme de la cavité ( $A_r$ )

La figure 11 présente la variation des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens avec le rapport de forme de la cavité de 1 à 5. Nous constatons que  $\overline{Sh}$  augmente d'un taux de 4.1 et  $\overline{Nu}$  diminue d'un taux de 4 avec l'augmentation de  $A_r$ . Ces variations sont le résultat de l'augmentation des forces volumiques solutales d'une part, et d'autre part, de la diminution des forces volumiques thermiques, avec l'augmentation de  $A_r$ .

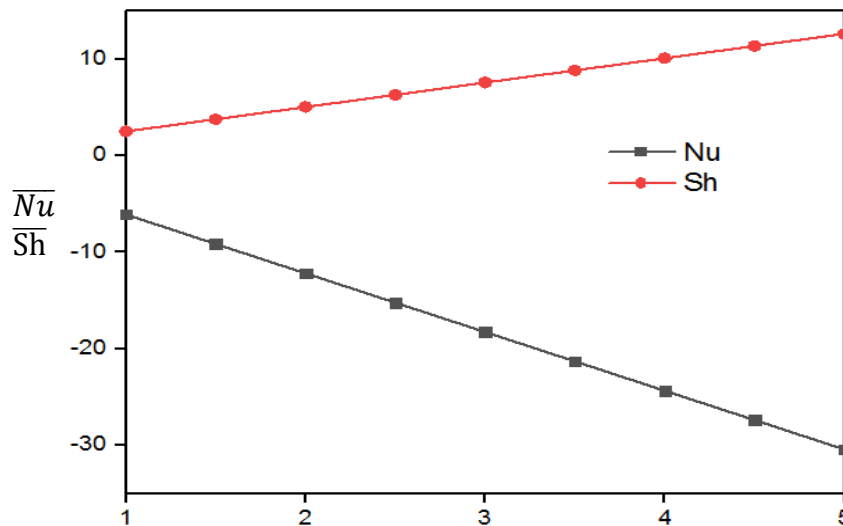


Figure 12: Variation des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens en fonction de  $A_r$  pour  $S_r = 1, L_e = 10, R_r = 10^4, P_r = 6.2$  et  $\varphi = 5\%$

#### 4.2.6 Profils de concentration, température et vorticité

Les profils de la concentration et de la température près de la face latérale gauche à  $X = 0.073$  et pour  $S_r = 1, L_e = 10, \theta = 30^\circ, R_T = 10^4, P_r = 6.2, \varphi = 5\%$  sont illustrées par les courbes des figures 12 et 13. Nous constatons dans la figure 12 que la concentration diminue de 1 à 0 avec la hauteur  $Z$  de la cavité. Cette diminution est significative pour  $Z$  comprise entre 0 et 0.4. Quant à la température, nous remarquons dans la figure 13 qu'elle est constante à une valeur égale à 1 pour  $Z$  entre 0 et 0.26. Ensuite, elle diminue de 1 à 0.04 pour  $Z$  comprise entre 0.26 et 0.49. Ceci est dû à la température  $T_c$  imposée sur la face latérale gauche du rectangle pour  $z \leq \frac{h}{2}$ . Au-delà de  $Z = 0.5$ , la variation de la température est faible. La variation de la vorticité en fonction de la hauteur de la cavité  $Z$  est illustrée dans la figure 14. Pour  $Z$  entre 0 et 0.43,  $\Omega$  augmente de 0 à  $1,3 \cdot 10^{-2}$ , puis diminue pour atteindre la valeur  $-0,003$  à  $Z = 0,41$ . Pour  $Z$  entre 0,43 et 0,51,  $\Omega$  croît jusqu'à la valeur 1,56, ensuite diminue jusqu'à  $-1,5$ , puis augmente jusqu'à  $-0,0025$ . Comme nous le constatons dans cette même figure, pour  $Z$  entre 0,51 et 1,  $\Omega$  augmente pour se stabiliser après à 0.

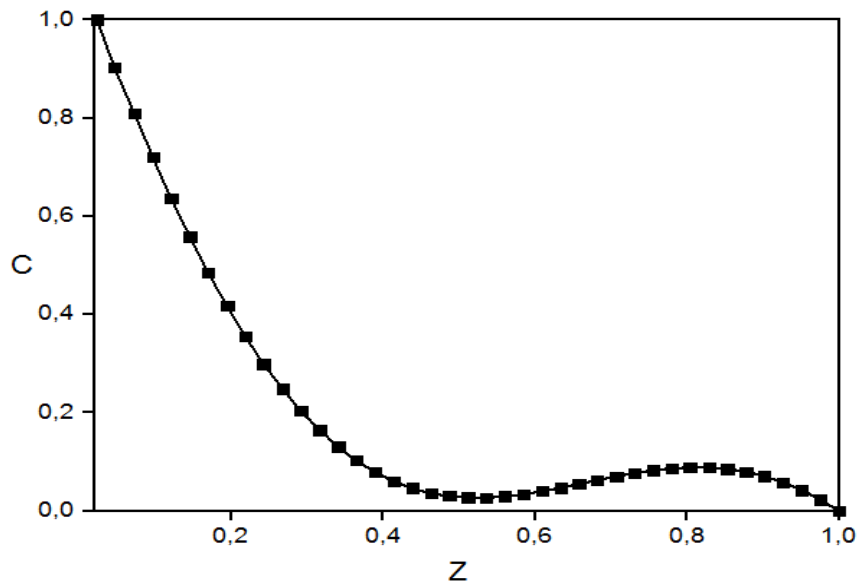


Figure 13: Variation de la concentration à  $X = 0.073$  et pour  $S_r = 1, L_e = 10, \theta = 30^\circ, R_T = 10^4, P_r = 6.2$  et  $\varphi = 5\%$

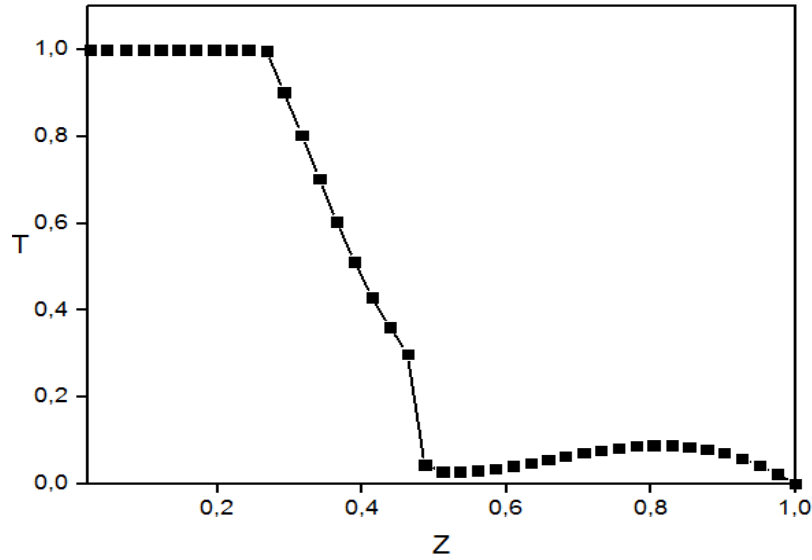


Figure 14: Variation de la température à  $X = 0.073$  et pour  $S_r = 1, L_e = 10, \theta = 30^\circ, R_T = 10^4, P_r = 6.2$  et  $\varphi = 5\%$

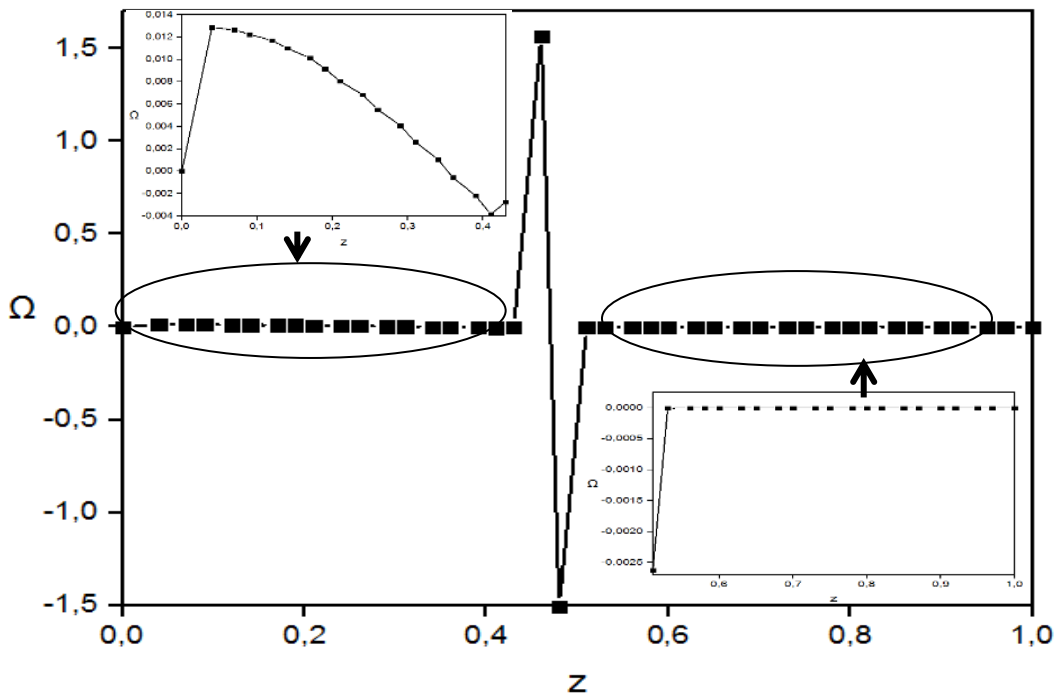


Figure 15: Variation de la vorticité avec Z pour  $X = \frac{1}{2}, S_r = 1, L_e = 10, \theta = 30^\circ, R_T = 10^4, P_r = 6.2$  et  $\varphi = 5\%$

#### 4.2.7 Effet de la fraction volumique en nanoparticules ( $\varphi$ )

La variation du nombre de Nusselt moyen  $\overline{Nu}$  avec la fraction volumique des nanoparticules  $\varphi$  variant entre 0 et 20% pour les deux valeurs de l'angle d'inclinaison de la cavité égales à  $30^\circ$  et  $60^\circ$ , et pour  $S_r = 1, L_e = 10, P_r = 6.2$  est illustrée dans la Figure 15. Pour les deux cas, nous

constatons que  $\overline{Nu}$  augmente avec  $\varphi$ . Ceci est dû à l'augmentation de la conductivité thermique qui augmente avec l'augmentation de la concentration du mélange en nanoparticules. Nous pouvons donc conclure que la fraction volumique des nanoparticules améliore le transfert thermique.

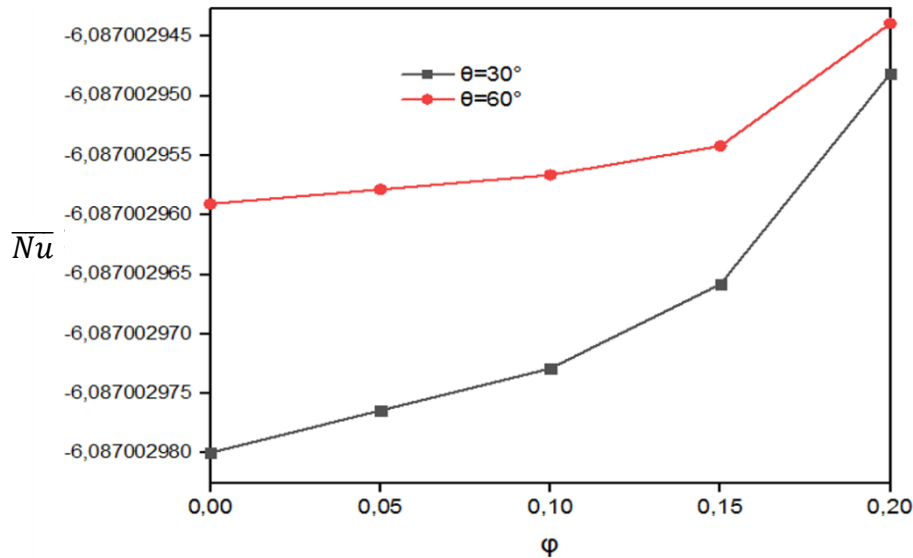


Figure 16: Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de  $\varphi$  pour  $S_r = 1, L_e = 10, P_r = 6.2$

#### 4.3 Convection naturelle thermosolutale en présence de l'effet Soret et d'un champ magnétique

L'objectif de cette deuxième partie est d'analyser l'effet d'appliquer un champ magnétique externe et uniforme sur le transfert de chaleur et de masse par convection naturelle thermosolutale du nanofluide  $\text{Cu} - \text{H}_2\text{O}$  considéré comme un mélange binaire et électriquement conducteur, confiné dans une cavité rectangulaire inclinée, avec la prise en compte de l'effet Soret [61]. La simulation est réalisée en faisant varier le nombre de Hartmann ( $0 \leq H_a \leq 100$ ), le nombre de Rayleigh thermique ( $10^4 \leq R_T \leq 10^6$ ), le rapport des forces de poussées thermique et solutale ( $1 \leq N \leq 10$ ), et l'angle d'inclinaison de la cavité ( $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ ). Les nombres de Prandtl, de Lewis, de Soret et la fraction volumique des nanoparticules sont pris constants ( $P_r = 6.2, L_e = 10, S_r = 1$  et  $\varphi = 5\%$ ). Les résultats en termes de variation des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens et locaux, de la température, de la concentration, de la vitesse, de la vorticité et de la fonction de courant sont exposés et discutés.

### 4.3.1 Effet du nombre de Hartmann ( $H_a$ )

#### 4.3.1.1 Transfert de chaleur et de masse

La figure 16 montre la variation du nombre de Nusselt local  $Nu$  suivant l'axe  $X$  en faisant varier le nombre  $H_a$ , avec  $R_T = 10^6$ ,  $N = 1$  et  $\theta = 30^\circ$ .  $Nu$  varie d'une manière sinusoïdale suivant  $X$  et atteint le maximum à  $X = 0.68$ , pour les trois valeurs de  $H_a$  égales à 0, 50, 100. Nous constatons une faible variation entre les trois courbes, de sorte que  $Nu$  augmente avec l'augmentation de  $H_a$ .

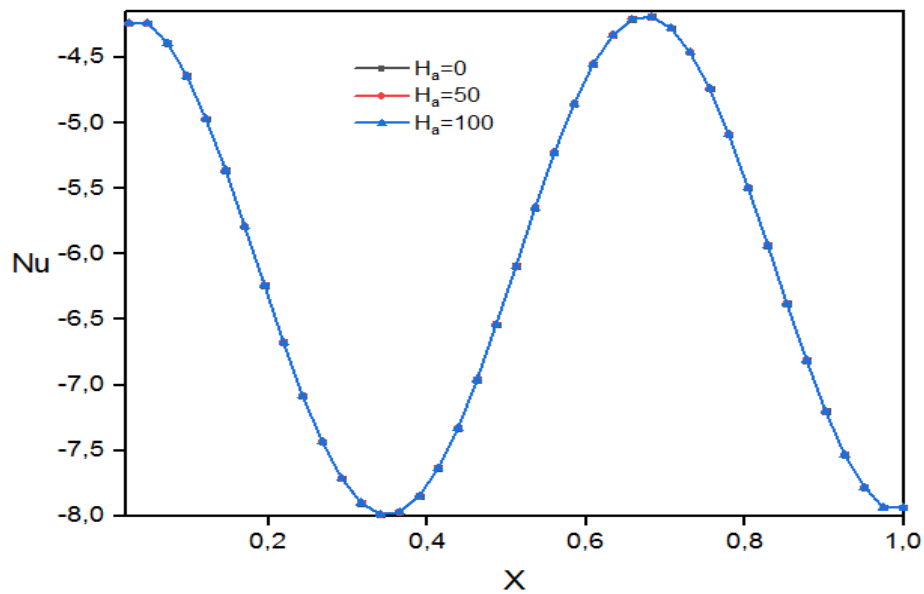


Figure 17: Variation du nombre de Nusselt local pour différentes valeurs de  $H_a$ , et

$$\text{pour } Z = \frac{1}{2}, R_T = 10^6, N = 1 \text{ et } \theta = 30^\circ$$

Comme illustré dans la figure 17, la variation du nombre de Sherwood local  $Sh$  suivant l'axe  $X$  pour les trois valeurs de  $H_a = 0, 50, 100$ , avec  $R_T = 10^6$ ,  $N = 1$  et  $\theta = 30^\circ$  est similaire à celle de la variation du nombre de Nusselt local. Le nombre  $Sh$  évolue de façon sinusoïdale suivant l'axe  $X$  pour toutes les valeurs de  $H_a$ . Les trois courbes sont presque identiques, variant à une différence de l'ordre de  $10^{-7}$ . L'influence de  $H_a$  sur le nombre de Sherwood local peut être donc considéré négligeable.

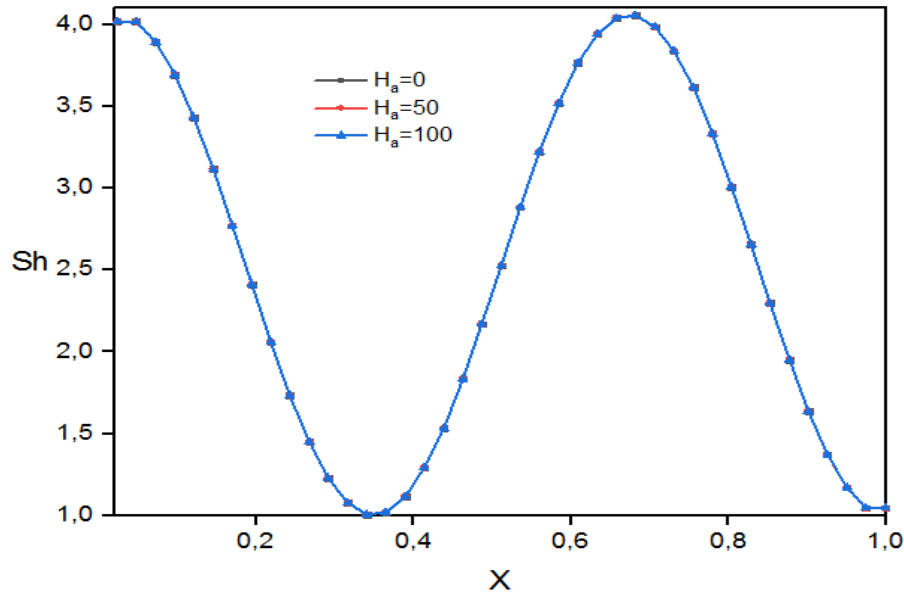


Figure 18: Variation du nombre de Sherwood local pour différentes valeurs de  $H_a$ , et

$$\text{pour } Z = \frac{1}{2}, R_T = 10^6, N = 1 \text{ et } \theta = 30^\circ$$

#### 4.3.1.2 Distribution de la température et de la concentration

Les distributions de la température et de la concentration en faisant varier le nombre de Hartmann à  $X = \frac{1}{2}$  et  $Z = \frac{1}{2}$ , et pour le nombre de Rayleigh thermique égale à  $10^4$  et  $10^6$ ,  $N = 1$  et  $\theta = 30^\circ$ , sont présentées dans les figures 18 et 19. Dans la figure 18, la température diminue en réduisant le nombre de Hartmann de 0 à 100 pour  $R_T = 10^4$  et  $10^6$ . Le taux de cette diminution est de  $6,008 \cdot 10^{-6}$  pour  $R_T = 10^4$ , et de  $6,04 \cdot 10^{-4}$  pour  $R_T = 10^6$ . Ce résultat est également justifié par les valeurs négatives de la variation relative de la température pour  $H_a$  allant de 0 à 100 (voir la figure 20 et le tableau 2). Pour la concentration, nous pouvons observer dans la figure 19 qu'elle diminue avec  $H_a$ . Ceci est également expliqué par les valeurs négatives de la variation relative de la concentration dans la Figure 21 et dans le tableau 2. Le taux de cette diminution est de  $5,16 \cdot 10^{-7}$  pour  $R_T = 10^4$  et de  $5,05 \cdot 10^{-5}$  pour  $R_T = 10^6$ . Ainsi, nous pouvons conclure que la température et la concentration diminuent avec le nombre de  $H_a$ . Ceci est similaire aux résultats trouvés par Kushawaha et al [1].

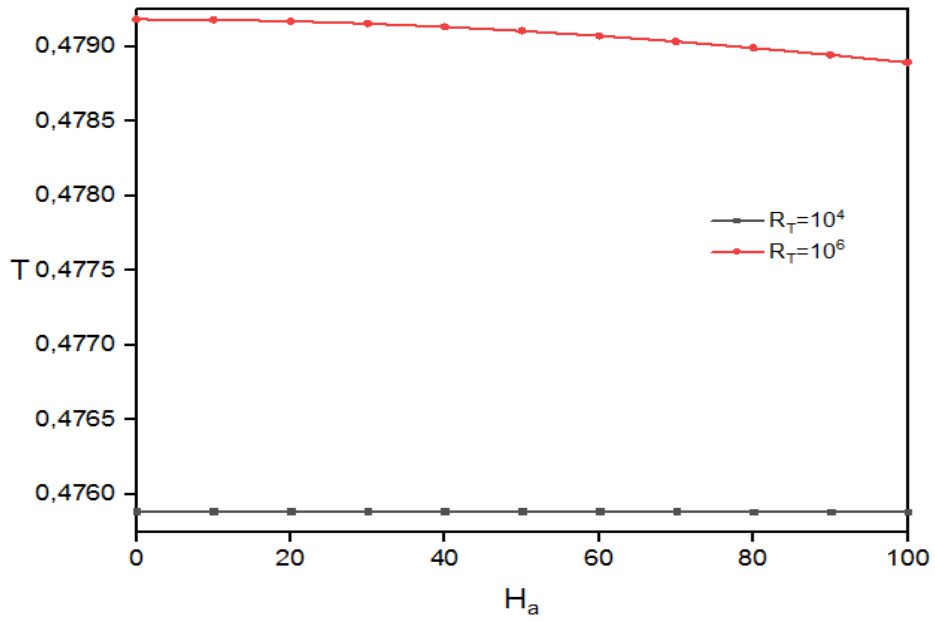


Figure 19: Variation de la température en fonction de  $H_a$  pour  $N = 1$ ,  $\theta = 30^\circ$ ,  $X = \frac{1}{2}$   
 et  $Z = \frac{1}{2}$

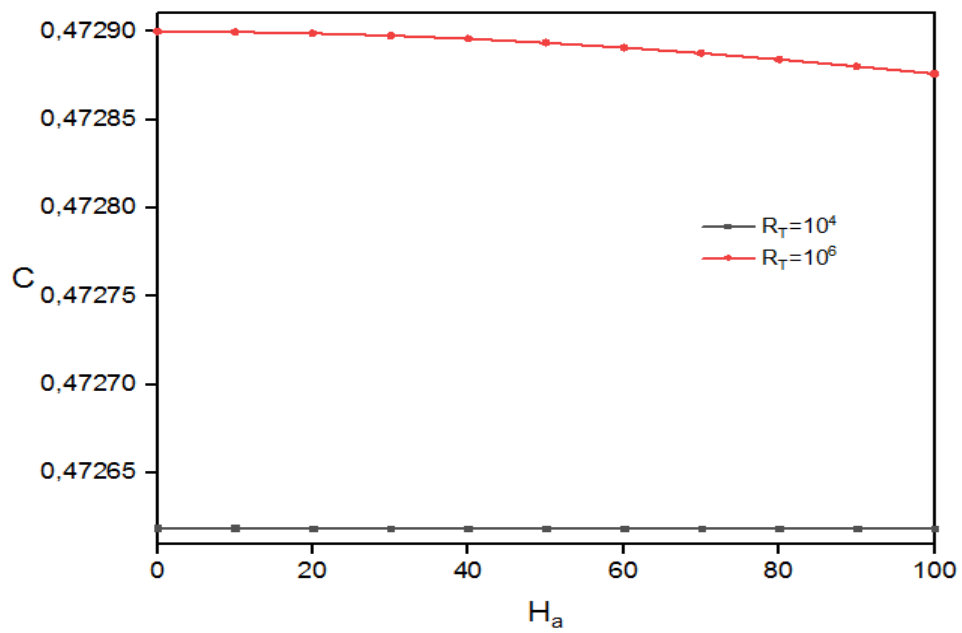


Figure 20: Variation de la concentration en fonction de  $H_a$  pour  $N = 1$ ,  $\theta = 30^\circ$ ,  $X = \frac{1}{2}$  et  $Z = \frac{1}{2}$

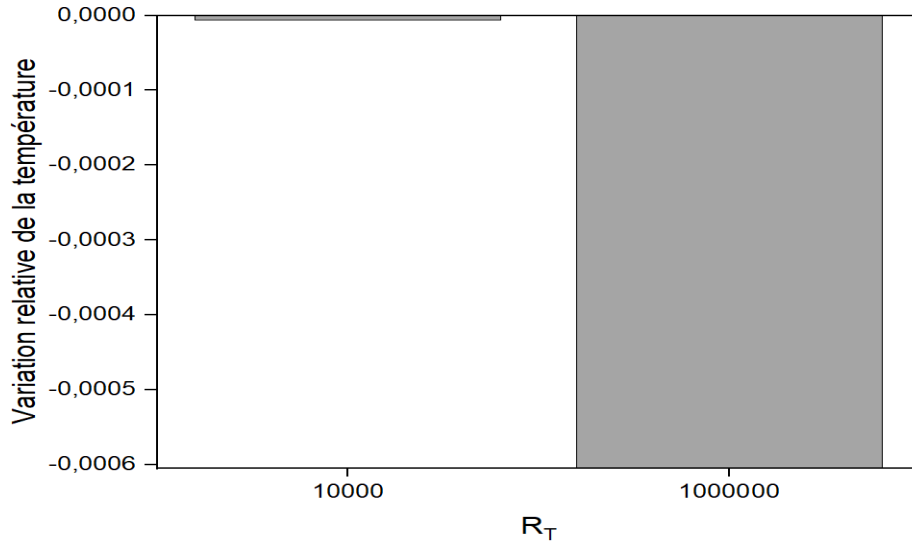


Figure 21: Variation relative de la température pour  $H_a$  entre 0 et 100, et pour  $N = 1$   
 et  $\theta = 30^\circ$

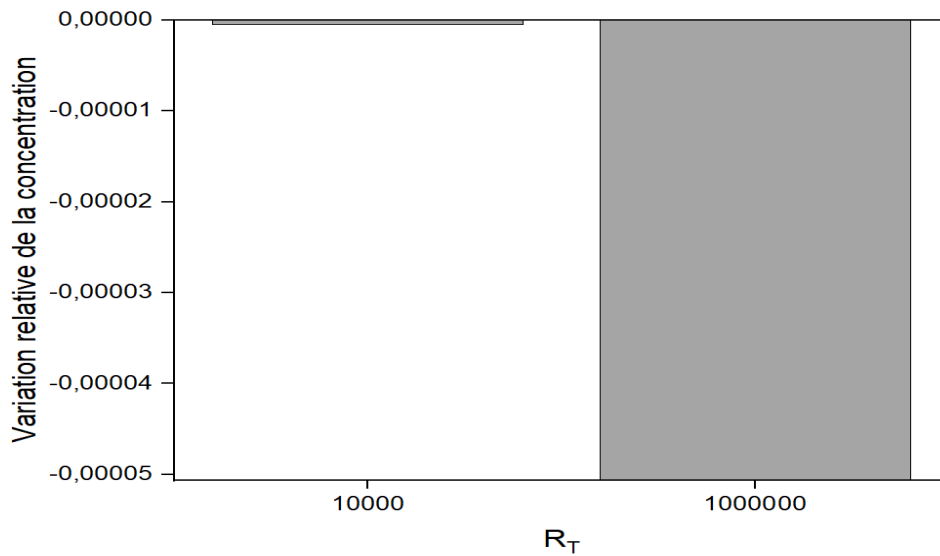


Figure 22: Variation relative de la concentration pour  $H_a$  entre 0 et 100, et pour  $N = 1$   
 et  $\theta = 30^\circ$

Tableau 2: Variation relative de la température et de la concentration pour  $H_a$  entre 0 et 100, et pour  $N = 1$  et  $\theta = 30^\circ$

Nombre de Rayleigh thermique	$10^4$	$10^6$
Variation relative de $T_{H_a=0}$ à $T_{H_a=100}$	$- 6,008. 10^{-6}$	$- 6,041. 10^{-4}$
Variation relative de $C_{H_a=0}$ à $C_{H_a=100}$	$- 5,16. 10^{-7}$	$- 5,053. 10^{-5}$

### 4.3.1.3 Distribution des vitesses, de la vorticité et de la fonction de courant

- Suivant l'axe X

Les distributions des vitesses  $U$  et  $W$ , de la vorticité et de la fonction de courant suivant l'axe  $X$  à  $Z = 0.5$ , et pour les trois valeurs du nombre de Hartmann égales à 0, 50 et 100 sont présentées dans les figures 22, 23, 24 et 25.

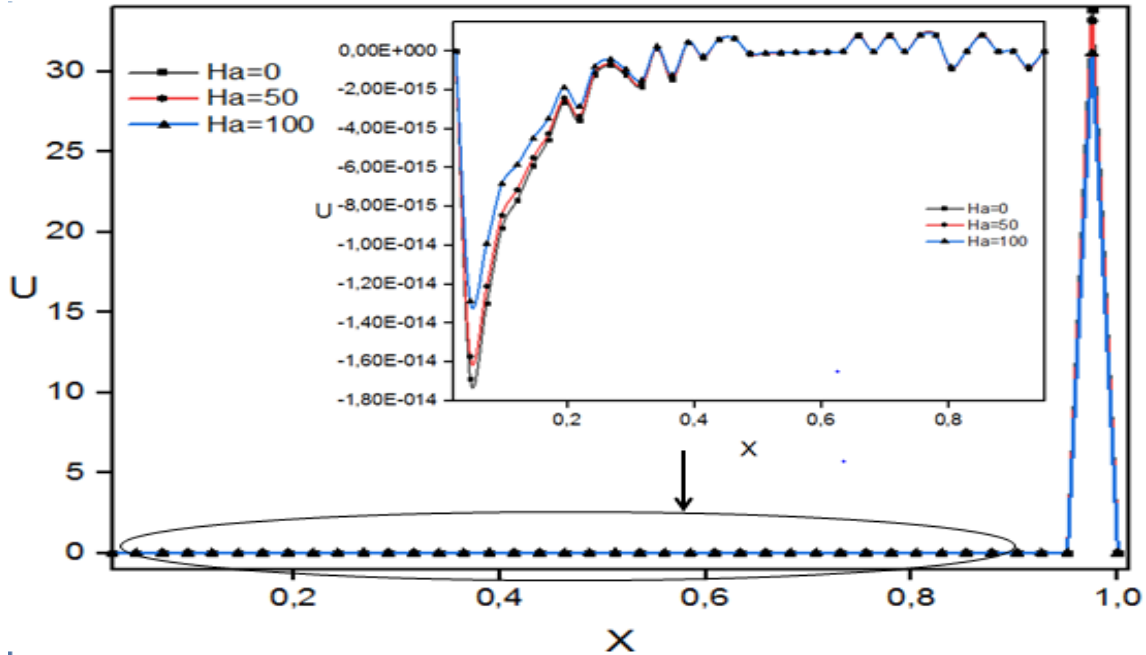


Figure 23: Distribution de la vitesse  $U$  suivant l'axe  $X$  à  $Z = 0.5$ , et pour  $R_T = 10^6$ ,  $N = 1$  et  $\theta = 30^\circ$

D'après la figure 22, la vitesse  $U$  augmente avec l'augmentation du nombre  $H_a$  pour  $X$  entre 0 et 0.4. Au-delà du seuil  $X = 0.4$ , la vitesse devient presque constante pour se rapprocher de la valeur 0 indépendamment des valeurs de  $H_a$ . Les trois courbes représentatives de la vitesse  $U$  sont presque identiques sauf à  $X = 0.975$  où la vitesse prend les valeurs 33.94, 33.20 et 33.15 pour les valeurs de  $H_a$  égales à 0, 50 et 100 respectivement. Pour la vitesse  $W$ , comme indiqué dans la figure 23, sa variation suivant l'axe  $X$  est presque constante et égale à 0 pour  $X \in [0, 0.9]$ . Au-delà de la valeur 0.9, la vitesse diminue de 0 à -0.53, -0.5, et -0.44 pour les valeurs de  $H_a$  égales à 0, 50, et 100 respectivement. Puis, elle croît jusqu'à 1.05, 1 et 0.88 pour des valeurs de  $H_a$  égales à 0, 50 et 100 respectivement et revient à 0. D'autre part, nous constatons que la variation de la vitesse  $W$  selon l'axe  $X$  diminue avec l'augmentation de  $H_a$ , pour  $X$  entre 0 et 1. Ceci est dû à la diminution du phénomène de la convection thermosolutale en raison de

l'augmentation de la force de Lorentz qui est induite par l'augmentation de l'intensité du champ magnétique

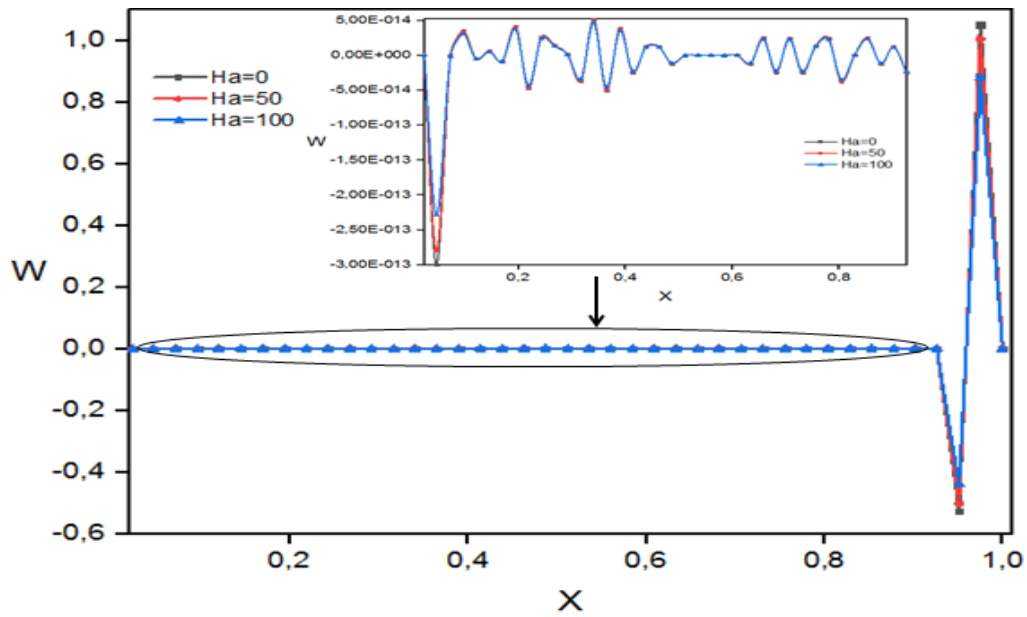


Figure 24: Distribution de la vitesse  $W$  suivant l'axe  $X$  à  $Z = 0.5$ , et pour  $R_T = 10^6$ ,  
 $N = 1$  et  $\theta = 30^\circ$

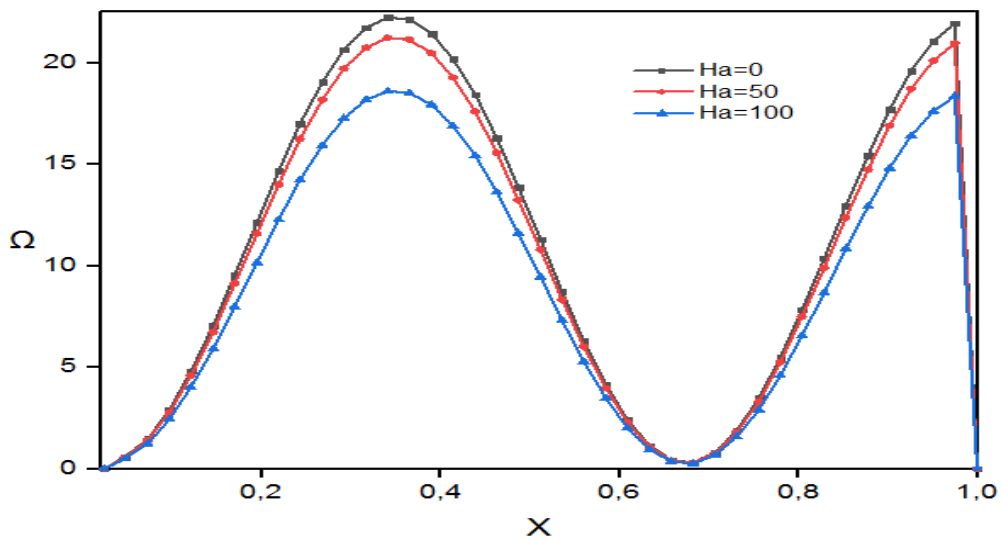


Figure 25: Distribution de la vorticité suivant l'axe  $X$  à  $Z = 0.5$ , et pour  $R_T = 10^6$ ,  
 $N = 1$  et  $\theta = 30^\circ$

Comme illustré dans la figure 24, la vorticité varie de manière sinusoidale le long de l'axe  $X$  avec une période de 0,64, atteignant les valeurs les plus élevées à  $X = 0.34$  et  $X = 0.97$ . Nous observons également une diminution de la vorticité avec l'augmentation du nombre de

Hartmann de 0 à 100, à cause de l'augmentation de la force de Lorentz qui augmente avec l'augmentation de l'intensité du champ magnétique.

D'après la figure 25, la variation de la fonction de courant  $\Psi$  pour  $X \in [0,0.9]$  est presque constante et égale à 0 pour toutes les valeurs de  $H_a$ . Au-delà du seuil  $X = 0.9$ ,  $\Psi$  diminue pour se rapprocher de la valeur -0,01 puis revient à 0. Nous remarquons également que la fonction de courant diminue avec  $H_a$  pour  $X$  entre 0 et 1.

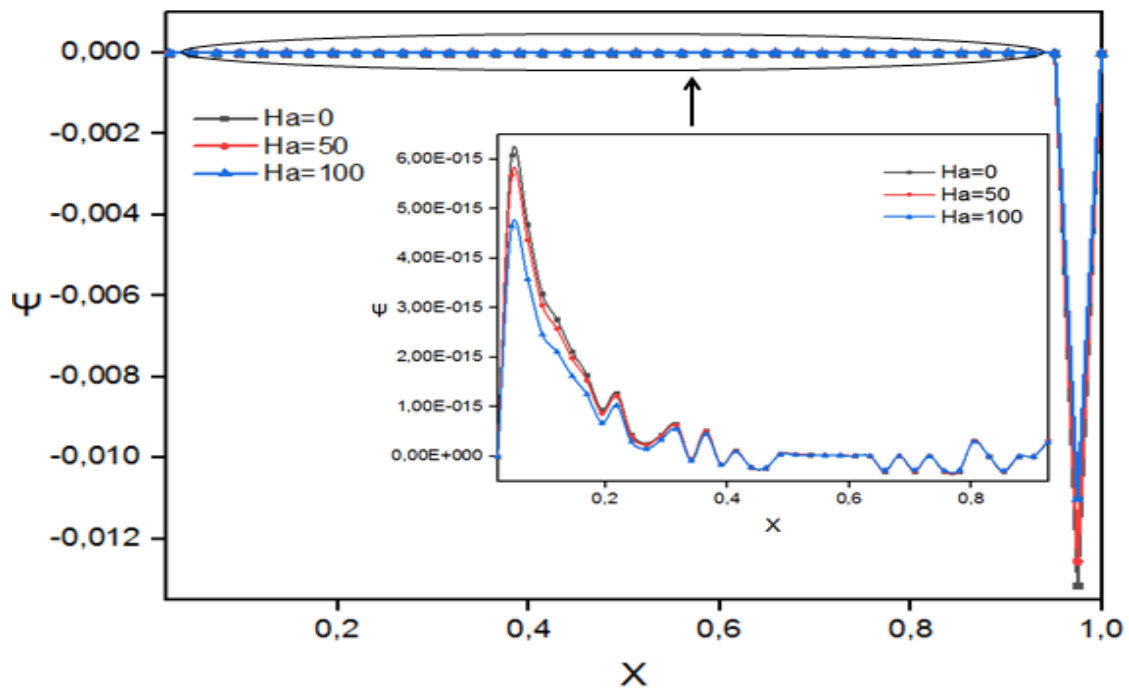


Figure 26: Distribution de la fonction de courant  $\Psi$  suivant l'axe  $X$  à  $Z = 0.5$ , et pour  $R_T = 10^6$ ,  $N = 1$  et  $\theta = 30^\circ$

#### - Suivant l'axe $Z$

Les distributions des vitesses, de la vorticité et de la fonction de courant suivant l'axe  $Z$  à  $X = 0.5$  sont présentées dans les figures 26, 27, 28 et 29.

Dans la figure 26, la vitesse  $U$  diminue de 0 à -0,082, -0,08, -0,075 pour  $Z = 0.047$ , puis augmente jusqu'aux valeurs 0,041, 0,04, 0,037 pour  $Z = 0.073$ , pour ensuite s'approcher de la valeur 0 à  $Z = 0.1$ , pour les valeurs de  $H_a$  égales à 0, 50 et 100 respectivement. Dans l'intervalle  $[0,1,1]$ , la vitesse est constante pour toutes les valeurs de  $H_a$ . Les trois courbes sont presque identiques, de sorte que la vitesse augmente avec l'augmentation de  $H_a$ .

Pour la vitesse  $W$  (voir la figure 27), elle diminue de 0 à  $9,65 \cdot 10^{-4}$ ,  $9,42 \cdot 10^{-4}$  et  $8,81 \cdot 10^{-4}$  pour  $Z = 0.047$ , puis augmente pour s'approcher de 0 à  $Z = 0.1$ . Au-delà de la valeur 0,1, la vitesse est quasiment constante dans les trois cas, et les courbes de vitesse sont pratiquement identiques. Dans ce cas, l'effet du champ magnétique sur la vitesse peut être considéré comme négligeable.

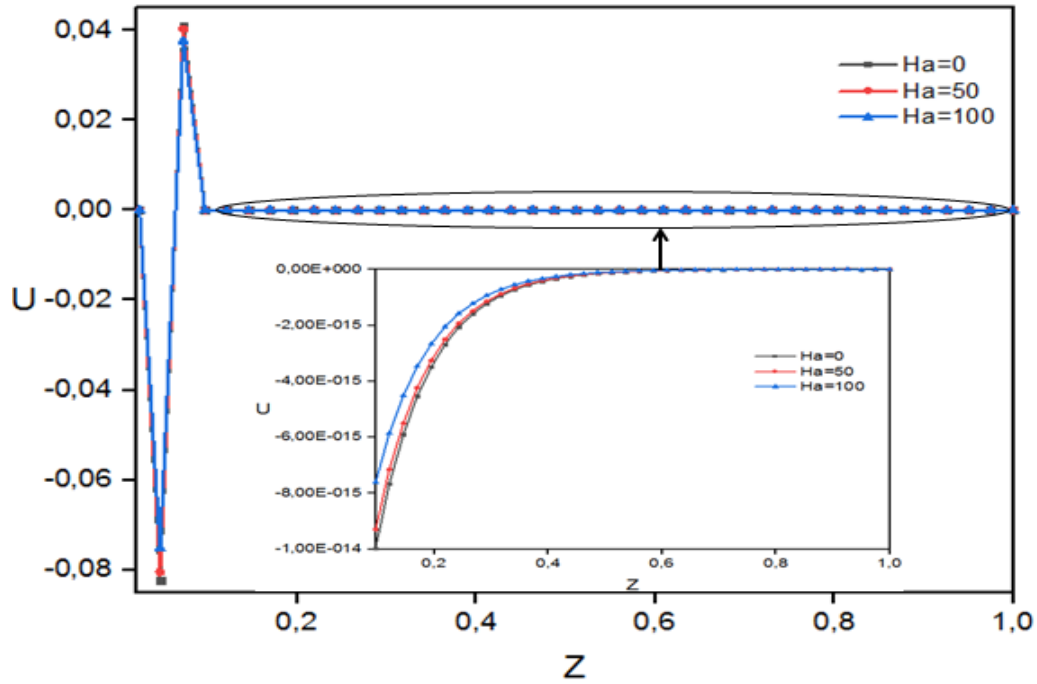


Figure 27: Distribution de la vitesse  $U$  suivant l'axe  $Z$  à  $X = 0.5$ , et pour  $R_T = 10^6$ ,  
 $N = 1$  et  $\theta = 30^\circ$

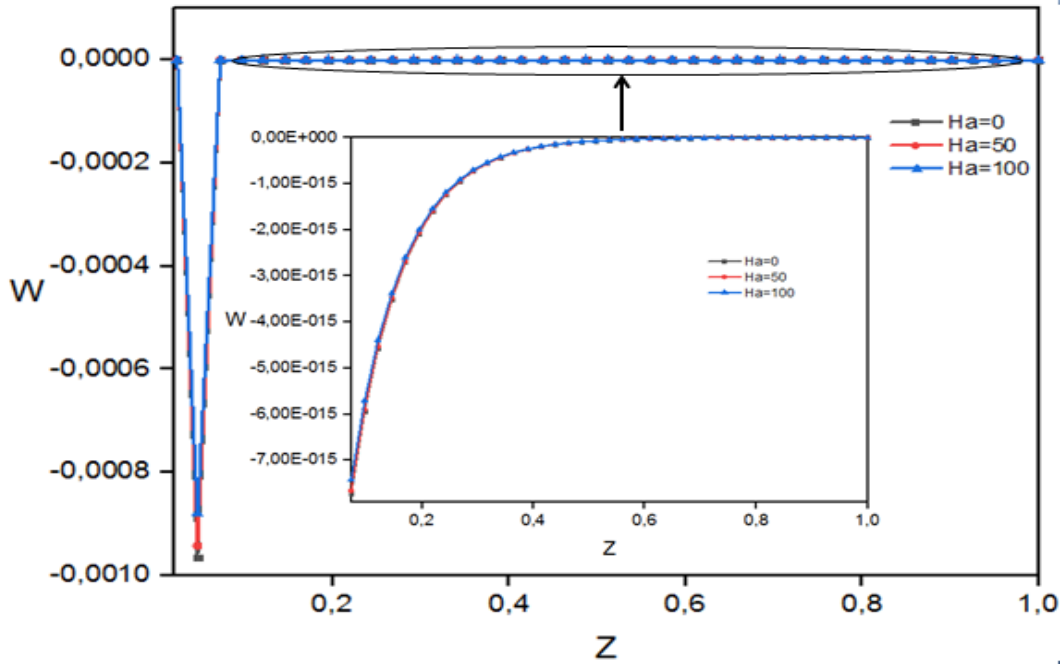


Figure 28: Distribution de la vitesse  $W$  suivant l'axe  $Z$  à  $X = 0.5$ , et pour  $R_T = 10^6$ ,  $N = 1$  et  $\theta = 30^\circ$

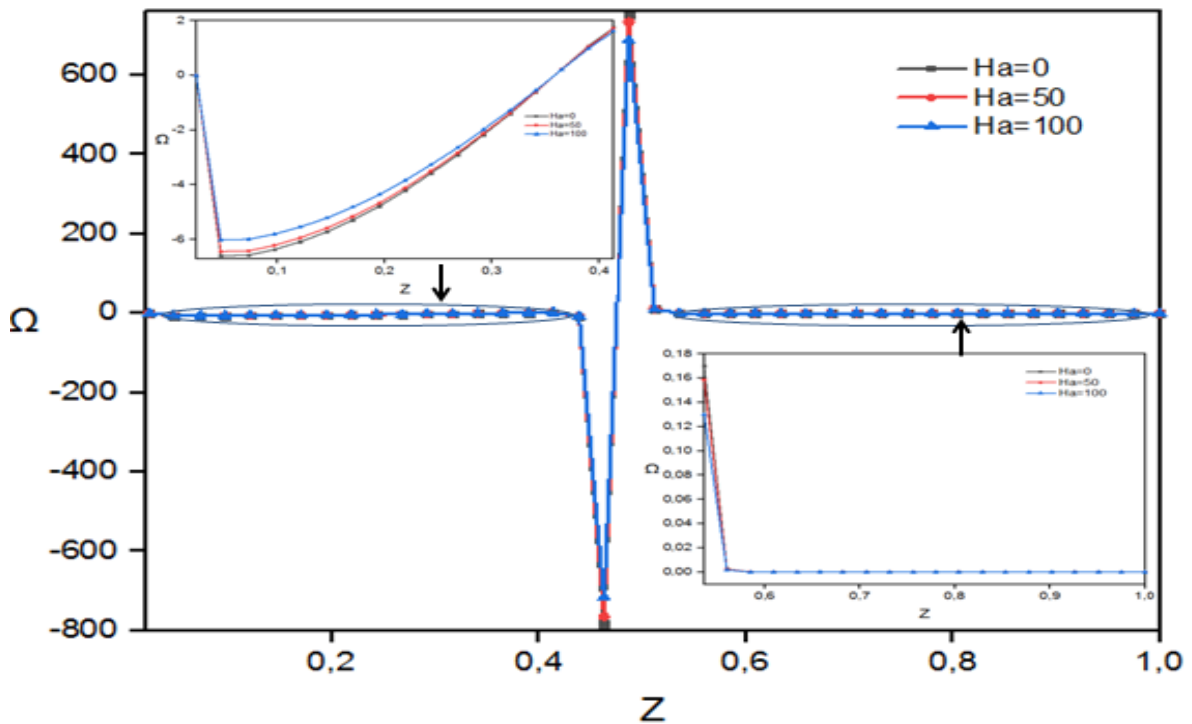


Figure 29: Distribution de la vorticité  $\Omega$  suivant l'axe  $Z$  à  $X = 0.5$ , et pour  $R_T = 10^6$ ,  $N = 1$  et  $\theta = 30^\circ$

D'après la figure 28, la vorticité  $\Omega$  est quasiment constante et égale à 0 dans les trois cas, pour  $Z$  entre 0 et 0,414. Elle prend les valeurs -783,46, -765,72, -717,02 à  $Z = 0,463$ , et les valeurs 751,49, 734,49, 687,83 à  $Z = 0,487$  pour  $H_a$  égale à 0, 50, 100 respectivement. Pour  $Z$  entre 0.5 et 1, la variation de la vorticité est négligeable. Elle prend la valeur 0 pour les trois cas de  $H_a$ . De plus, nous remarquons que  $\Omega$  prend les plus grandes valeurs lorsque  $H_a$  augmente pour  $Z \in [0,0.463]$ , alors qu'elle diminue lorsque le nombre  $H_a$  augmente dans le reste de l'intervalle.

La distribution de la fonction de courant  $\Psi$  est donnée dans la figure 29. Nous pouvons voir qu'elle diminue de 0 à -0,001 à  $Z = 0,047$ , puis elle augmente pour se rapprocher de 0 à  $Z = 0,073$ . Dans l'intervalle  $Z \in [0,097,1]$ ,  $\Psi$  diminue en augmentant  $H_a$ .

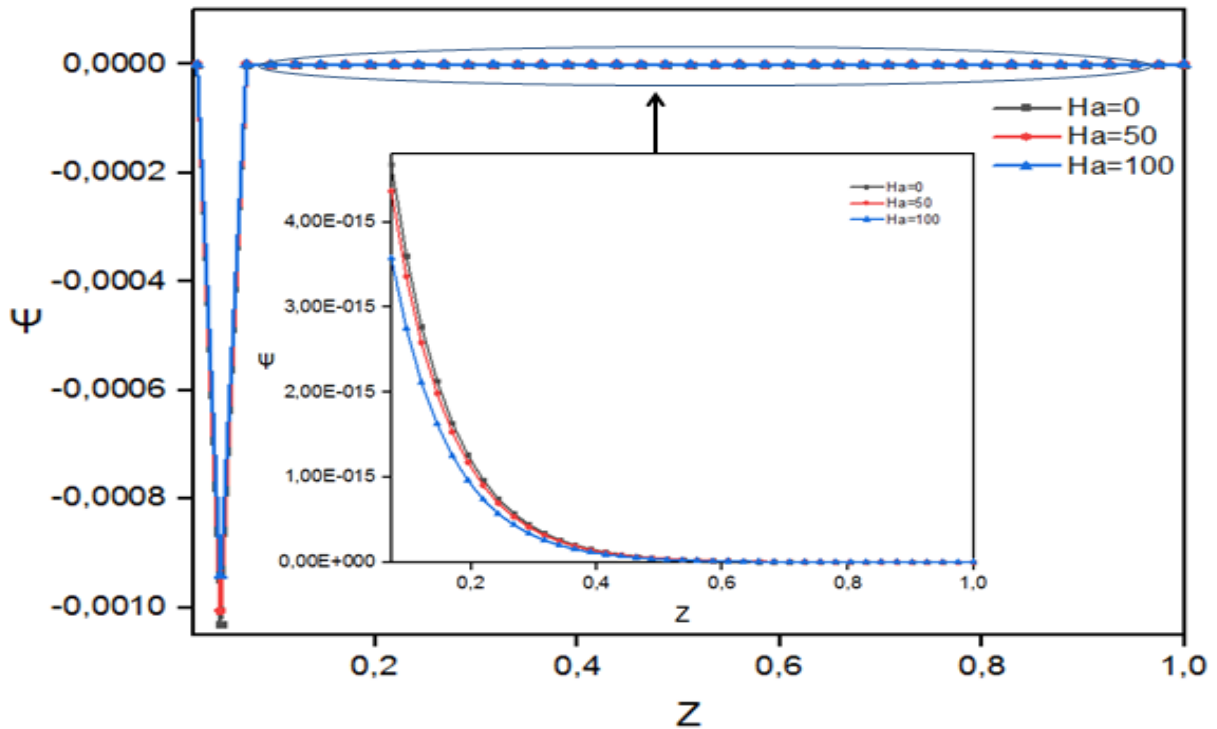


Figure 30: Distribution de la fonction de courant suivant l'axe  $Z$  à  $X = 0.5$ , et pour

$$R_T = 10^6, N = 1 \text{ et } \theta = 30^\circ$$

### 4.3.2 Effet du nombre de Rayleigh thermique ( $R_T$ )

#### 4.3.2.1 Transfert de chaleur

L'effet de la variation du nombre de Hartmann sur le nombre de Nusselt moyen, en faisant varier l'angle de la cavité ( $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ ) et le nombre de Rayleigh thermique ( $R_T =$

$10^4, 10^6$ ), pour  $N = 1$  est présenté dans la figure 30. D'après cette figure, nous remarquons que  $\overline{Nu}$  croit avec l'augmentation du nombre de Rayleigh thermique de  $10^4$  à  $10^6$ . Ceci est une conséquence de l'augmentation des forces volumiques thermiques avec l'augmentation de  $R_T$ .

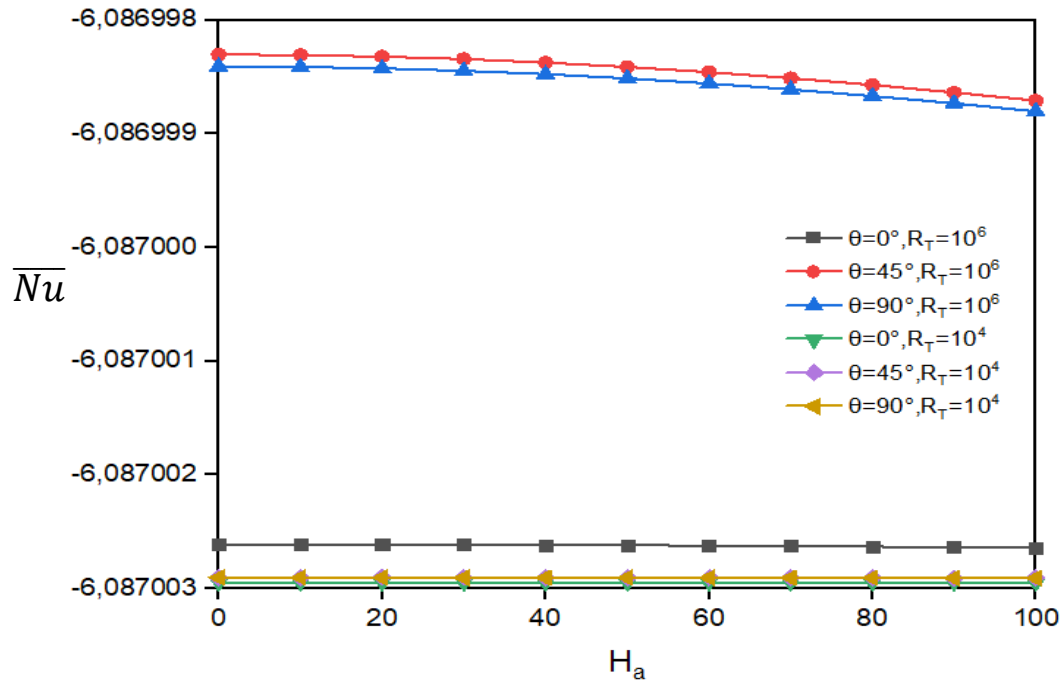


Figure 31: Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de  $H_a$ , pour différentes valeurs de  $R_T$  et de  $\theta$ , et pour  $N = 1$

#### 4.3.2.2 Distribution de la température et de la concentration

D'après la figure 18, nous remarquons que la température augmente avec l'augmentation du nombre de Rayleigh thermique  $R_T$ . Nous remarquons également que la concentration augmente avec l'augmentation du nombre  $R_T$  comme montré dans la figure 19.

#### 4.3.3 Effet du rapport des forces de poussées thermique et solutale ( $N$ )

L'influence de la variation du nombre de Hartmann de 0 à 100 sur le transfert de chaleur pour  $R_T = 10^4$ ,  $\theta = 30^\circ$ , et pour les trois valeurs du rapport des forces de poussées thermique et solutale  $N(1, 5, 10)$  est illustrée dans la figure 31. D'après cette figure, le nombre de Nusselt moyen  $\overline{Nu}$  diminue avec l'augmentation de  $H_a$  pour toutes les valeurs de  $N$ . Les valeurs négatives de la variation relative de  $\overline{Nu}$  présentées dans la figure 32 et dans le tableau 3 confirment ce résultat. Le nombre  $\overline{Nu}$  est amélioré avec l'augmentation de  $N$ , car l'augmentation du rapport des forces de poussées thermique dans l'enceinte augmente la valeur de  $\overline{Nu}$ .

Ainsi, nous pouvons déduire que l'augmentation du rapport des forces de poussées thermique et solutale améliore le transfert de chaleur (résultat validé par Teamah [62]), et que l'augmentation du nombre de Hartmann diminue le transfert de chaleur principalement pour de faibles valeurs de  $N$ .

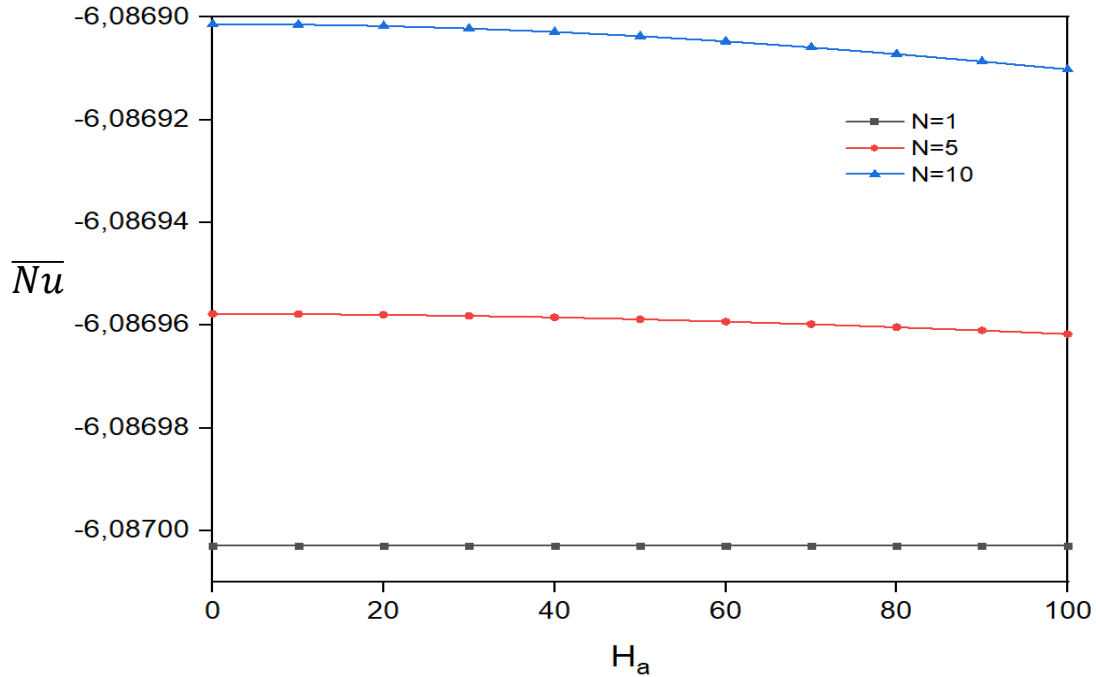


Figure 32: Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de  $H_a$ , pour différentes valeurs de  $N$  et pour  $R_T = 10^4$  et  $\theta = 30^\circ$

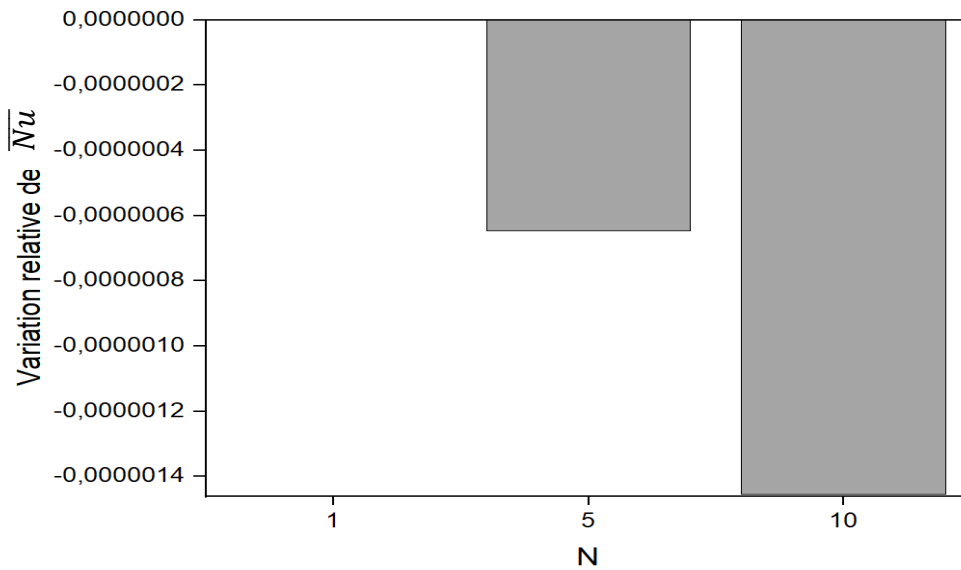


Figure 33: Variation relative de  $\overline{Nu}$  pour  $H_a = 0$  à  $100$ ,  $R_T = 10^4$  et  $\theta = 30^\circ$

Tableau 3: Variation relative de  $\overline{Nu}$  pour  $H_a$  entre 0 et 100,  $R_T = 10^4$  et  $\theta = 30^\circ$ 

Rapport des poussées ( $N$ )	1	5	10
Variation relative de $\overline{Nu}_{H_a=0}$ à $\overline{Nu}_{H_a=100}$	- 2,22. $10^{-10}$	- 6,47. $10^{-7}$	- 1,46. $10^{-6}$

#### 4.3.4 Effet de l'angle d'inclinaison ( $\theta$ )

Nous pouvons voir sur la figure 30 que le nombre de Nusselt moyen prend les plus grandes valeurs à  $\theta = 45^\circ$ . L'angle d'inclinaison optimal de la cavité pour un meilleur transfert de chaleur est donc  $\theta = 45^\circ$ .

#### 4.4 Conclusion

Dans ce dernier chapitre, nous avons présenté et discuté les résultats obtenus de l'étude numérique de la convection naturelle thermosolutale dans une cavité remplie d'un nanofluide. Dans un premier temps, nous avons étudié l'influence des nombres de Soret, de Lewis, de Prandtl, de Rayleigh thermique, de l'angle d'inclinaison, du rapport de forme de la cavité et de la fraction volumique en nanoparticules sur le transfert de chaleur et de masse par convection naturelle thermosolutale avec la prise en compte de l'effet Soret. Dans un deuxième temps, nous avons étudié l'influence d'appliquer un champ magnétique sur le problème de la convection naturelle thermosolutale, à travers la variation des nombres de Hartmann et de Rayleigh thermique, du rapport des forces de poussées thermique et solutale, et de l'angle d'inclinaison de la cavité.

# *Conclusion Générale et Perspectives*

Le contenu de cette thèse porte sur l'étude numérique de la convection naturelle thermosolutale dans une paroi rectangulaire inclinée remplie d'un nanofluide métallique ( $\text{Cu} - \text{H}_2\text{O}$ ) de propriétés thermophysiques constantes, et en présence de l'effet Soret.

Une recherche bibliographique sélective réalisée dans le premier chapitre a justifiée l'intérêt de la présente étude. Dans le deuxième chapitre, les équations gouvernant notre problème sont formulées. Dans le troisième chapitre, le système d'équations est résolu numériquement à l'aide de la méthode des volumes finis. Dans ce sens, la méthode implicite aux directions alternées est utilisée pour la discrétisation des équations de conservation de l'énergie, de la concentration et de la quantité de mouvement, alors que l'équation de la fonction de courant a été discrétisée par la méthode de la sur-relaxation successive. Dans le quatrième chapitre, nous avons étudié l'effet de certains paramètres sur le transfert de la chaleur et de la masse.

Sur la base des résultats obtenus dans la première partie consacrée à l'étude de la convection naturelle double diffusive avec l'influence de l'effet Soret, nous pouvons conclure que le transfert de chaleur augmente de manière significative avec le nombre de Lewis, alors que le transfert de masse diminue légèrement pour  $L_e$  entre 1 et 30. Au-delà de cette valeur, le transfert de masse se stabilise autour de la valeur 2,53. Nous avons pu conclure également que l'effet Soret joue un rôle important sur l'amélioration du transfert de la masse, tandis que son influence sur le transfert de la chaleur est faible. La forme des isothermes et des isoconcentrations varie avec les nombres de Soret et de Lewis. Pour l'angle d'inclinaison de la cavité, sa variation influence le transfert de chaleur pour de grandes valeurs du nombre de Rayleigh thermique. Pour des faibles valeurs de Rayleigh thermique, son influence est négligeable. De plus, nous avons pu constater que l'augmentation du transfert de la chaleur avec le nombre de Prandtl est conditionnée par les valeurs du nombre de Rayleigh thermique. Cette augmentation est importante pour de grandes valeurs de  $R_T$ . L'influence du rapport de forme de la cavité est très considérable sur l'augmentation du transfert de masse et sur la diminution du transfert de la chaleur. Concernant la vorticité, sa variation suivant l'axe Z est significative.

Dans la deuxième partie de l'étude qui concerne la convection naturelle thermosolutale sous l'influence du champ magnétique, l'analyse des résultats nous a permis de conclure que l'augmentation du champ magnétique diminue le transfert de la chaleur pour de grandes valeurs du nombre de Rayleigh thermique, tandis qu'il reste presque constant pour de faibles valeurs

## Conclusion Générale et Perspectives

du nombre de Rayleigh, et que la vitesse de l'écoulement suivant l'axe  $Z$  augmente avec l'accroissement du nombre de Hartmann, tandis que la fonction de courant diminue. Sur le même axe, la vorticité augmente avec l'augmentation de  $H_a$  pour  $Z \in [0, 0.463]$ , et diminue dans le reste de l'intervalle de  $]0.463, 1]$ . En présence du champ magnétique, la diminution du nombre de Rayleigh thermique réduit le transfert de la chaleur. En ce qui concerne l'angle d'inclinaison, le transfert de chaleur prend les valeurs les plus élevées à  $\theta = 45^\circ$ . Une légère influence du rapport des forces de poussées thermique et solutale sur l'amélioration du transfert de la chaleur a été observée.

## Perspectives

Dans le présent travail, nous avons  etudi e le phénomène de la convection naturelle thermosolutale dans une cavité rectangulaire dont les bases du rectangle sont soumises à des concentrations et températures constantes. Il serait intéressant d'aborder cette même problématique avec des conditions aux limites sinusoïdales. Il serait intéressant aussi d'étudier la combinaison des effets de Soret et de Dufour sur la convection naturelle thermosolutale. Reprendre cette étude en prenant un champ magnétique non uniforme serait également intéressant.

# *Références Bibliographiques*

- [1] Kushawaha, D., Yadav, S., & Singh, D. K. (2021), "International Journal of Mechanical Sciences Magnetic field effect on double-diffusion with magnetic and non-magnetic nanofluids", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 191, pp. 106085.
- [2] Moolya, S., & Satheesh, A. (2020), "Role of magnetic field and cavity inclination on double diffusive mixed convection in rectangular enclosed domain", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol 118, pp. 104814.
- [3] Mahapatra, T. R., Saha, B. C., & Pal, D. (2018), "Magnetohydrodynamic double-diffusive natural convection for nanofluid within a trapezoidal enclosure", *Computational and Applied Mathematics*, Vol. 37 N°5, pp. 6132–6151.
- [4] Parveen, R., & Mahapatra, T. R. (2019), "Numerical simulation of MHD double diffusive natural convection and entropy generation in a wavy enclosure filled with nanofluid with discrete heating", *Heliyon*, Vol. 5 N°9, pp. e02496.
- [5] Essma, B. (2018), "Etude numérique des transferts thermiques convectifs avec nano-fluides", *Thèse de doctorat*, Université des Frères Mentouri – Constantite.
- [6] Köhler, W., & Morozov, K. I. (2016), "The Soret Effect in Liquid Mixtures - A Review", *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, Vol. 41 N°3, pp. 151–197.
- [7] Cyrine, C. (2018), "*Convection magnétohydrodynamique dans un fluide non-newtonien saturant un milieu poreux*", *Thèse de Doctorat*, 'Université de Picardie Jules Verne.
- [8] Giwa, S. O., Sharifpur, M., Ahmadi, M. H., & Meyer, J. P. (2021), "A review of magnetic field influence on natural convection heat transfer performance of nanofluids in square cavities", *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, Vol. 145, Issue 5, Springer
- [9] Choi, S. U. S. (1995), "Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles",

## Références Bibliographiques

- American Society of Mechanical Engineers, Fluids Engineering Division FED*, Vol. 231, pp. 99–105.
- [10] Ali, A. R. I., & Salam, B. (2020), "A review on nanofluid: preparation, stability, thermophysical properties, heat transfer characteristics and application", *SN Applied Sciences*, Vol. 2 N°10, pp. 1–17.
- [11] Awais, M., Ullah, N., Ahmad, J., Sikandar, F., Ehsan, M. M., Salehin, S., & Bhuiyan, A. A. (2021), "Heat transfer and pressure drop performance of Nanofluid: A state-of- the-art review", *International Journal of Thermofluids*, Vol. 9, pp. 100065.
- [12] Saidur, R., Leong, K. Y., & Mohammed, H. A. (2011), "A review on applications and challenges of nanofluids", *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, Vol 15 N°3, pp. 1646–1668.
- [13] Chakraborty, S., & Panigrahi, P. K. (2020), "Stability of nanofluid: A review", *Applied Thermal Engineering*, Vol. 174.
- [14] Sofiah, A. G. N., Samykan, M., Pandey, A. K., Kadirgama, K., Sharma, K., & Saidur, R. (2021), "Immense impact from small particles: Review on stability and thermophysical properties of nanofluids", *Sustainable Energy Technologies and Assessments*, Vol. 48 N°5, pp. 101635.
- [15] Arora, N., & Gupta, M. (2021), "Stability evaluation and enhancement methods in nanofluids: A review", *AIP Conference Proceedings*.
- [16] Ali, M. M., Alim, M. A., & Nasrin, R. (2018), "Effect of magnetic field on double diffusive natural convection flow in a closed chamber using nanofluid", *AIP Conference Proceedings*.
- [17] Porgar, S., Vafajoo, L., Nikkam, N., & Vakili-Nezhaad, G. (2021), "A comprehensive

## Références Bibliographiques

- investigation in determination of nanofluids thermophysical properties", *Journal of the Indian Chemical Society*, Vol. 98 N°3, pp. 100037.
- [18] Sezer, N., Atieh, M. A., & Koç, M. (2019), "A comprehensive review on synthesis, stability, thermophysical properties, and characterization of nanofluids", *Powder Technology*, Vol. 344, pp. 404–431.
- [19] Bock Choon Pak, Y. I. C. (1998), "Hydrodynamic and Heat Transfer Study of Dispersed Fluids With Submicron Metallic Oxide", *Experimental Heat Transfer : A Journal of , Thermal Energy Transport , Storage , and Conversion*, pp. 37–41.
- [20] Khanafer, K., & Vafai, K. (2011), "A critical synthesis of thermophysical characteristics of nanofluids", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 54 N°19–20, pp. 4410–4428.
- [21] Xuan, Y., & Roetzel, W. (2000). Conceptions for heat transfer correlation of nanofluids. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 43(19), 3701–3707.  
[https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(99\)00369-5](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(99)00369-5)
- [22] Maxwell, J.C. (1873), "A Treatise on Electricity and Magnetism", Vol 1, Clarendon Press Series, Oxford
- [23] Hamilton, R. L. (1962), "Thermal conductivity of heterogeneous two-component systems", *Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals*, Vol 1 N°3, pp. 187–191.
- [24] Yu, W., & Choi, S. U. S. (2003), "The role of interfacial layers in the enhanced thermal conductivity of nanofluids: A renovated Maxwell model", *Journal of Nanoparticle Research*, Vol. 5 N°1–2, pp. 167–171.
- [25] Xuan, Y., Li, Q., & Hu, W. (2003), "Aggregation structure and thermal conductivity of nanofluids", *AIChE Journal*, Vol. 49 N°4, pp. 1038–1043.

## Références Bibliographiques

- [26] Wasp, E. J. , Kenny J. P. , Gandhi R. L. (1977), "Solid–liquid flow: slurry pipeline transportation", vol 1 N°4.
- [27] Einstein, A. (1905), "A new determination of molecular dimensions", *Annalen der Physik*, Vol.2, pp. 289-306
- [28] Brinkman, H. C. (1952), "The viscosity of concentrated suspensions and solutions", *The Journal of Chemical Physics*, Vol. 20 N°4, p. 571.
- [29] Batchelor, G. (1977), "The effect of Brownian motion on the bulk stress in a suspension of spherical particles", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 83 N°1, pp. 97-117
- [30] Uddin, M. J., Rahman, M. M., & Alam, S. (2016), "Fundamentals of Nanofluids : Evolution , Applications and New Theory", *International Journal of Biomathematics and Systems Biology*, Vol. 2 N°1, pp. 1–31.
- [31] Jama, M., Singh, T., Gamaleldin, S. M., Koc, M., Samara, A., Isaifan, R. J., & Atieh, M. A. (2016), "Critical Review on Nanofluids: Preparation, Characterization, and Applications", *Journal of Nanomaterials*, Vol. 2016.
- [32] Esfahani, J. A., & Bordbar, V. (2011), "Double diffusive natural convection heat transfer enhancement in a square enclosure using nanofluids", *Journal of Nanotechnology in Engineering and Medicine*, Vol. 2 N°2, pp. 1–9.
- [33] Sheremet, M. A., Pop, I., & Ishak, A. (2015), "Double-Diffusive Mixed Convection in a Porous Open Cavity Filled with a Nanofluid Using Buongiorno’s Model", *Transport in Porous Media*, Vol. 109 N°1, pp 131–145.
- [34] Chen, S., Yang, B., Xiao, X., & Zheng, C. (2015), "Analysis of entropy generation in double-diffusive natural convection of nanofluid", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 87, pp. 447–463.

## Références Bibliographiques

- [35] Dastmalchi, M., Sheikhzadeh, G. A., & Abbasian Arani, A. A. (2015), "Double-diffusive natural convective in a porous square enclosure filled with nanofluid", *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 95, pp. 88–98.
- [36] Wang, L., Chai, Z., & Shi, B. (2016), "Regularized lattice Boltzmann simulation of double-diffusive convection of power-law nanofluids in rectangular enclosures", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 102, pp 381–395.
- [37] He, B., Lu, S., Gao, D., Chen, W., & Li, X. (2019), "Lattice Boltzmann simulation of double diffusive natural convection of nanofluids in an enclosure with heat conducting partitions and sinusoidal boundary conditions", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 161–162, pp. 105003.
- [38] Dutta, S., Goswami, N., Biswas, A. K., & Pati, S. (2019), "Numerical investigation of magnetohydrodynamic natural convection heat transfer and entropy generation in a rhombic enclosure filled with Cu-water nanofluid", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 136, pp. 777–798.
- [39] Hussain, S., Öztop, H. F., Qureshi, M. A., & Abu-Hamdeh, N. (2020), "Double diffusive buoyancy induced convection in stepwise open porous cavities filled nanofluid", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 119, pp. 104949.
- [40] Eshaghi, S., Izadpanah, F., Dogonchi, A. S., Chamkha, A. J., Ben Hamida, M. B., & Alhumade, H. (2021), "The optimum double diffusive natural convection heat transfer in H-Shaped cavity with a baffle inside and a corrugated wall", *Case Studies in Thermal Engineering*, Vol. 28, pp. 101541.
- [41] Nag, P., & Molla, M. M. (2021), "Double-diffusive natural convection of non-Newtonian nanofluid considering thermal dispersion of nanoparticles in a vertical wavy enclosure",

*AIP Advances*, Vol 11 N°9.

- [42] Nayak, M. K., Karimi, N., Chamkha, A. J., Sattar Dogonchi, A., El-Sapa, S., & Galal, A. M. (2022), "Efficacy of diverse structures of wavy baffles on heat transfer amplification of double-diffusive natural convection inside a C-shaped enclosure filled with hybrid nanofluid", *Sustainable Energy Technologies and Assessments*, Vol 52, pp. 102180.
- [43] Kuznetsov, A. V., & Nield, D. A. (2011), "Double-diffusive natural convective boundary-layer flow of a nanofluid past a vertical plate", *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 50 N°5, pp. 712–717.
- [44] Nield, D. A., & Kuznetsov, A. V. (2011), "The Cheng-Minkowycz problem for the double-diffusive natural convective boundary layer flow in a porous medium saturated by a nanofluid", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol 54 N°1–3, pp. 374–378.
- [45] Parvin, S., Nasrin, R., Alim, M. A., & Hossain, N. F. (2013), "Double diffusive natural convective flow characteristics in a cavity", *Procedia Engineering*, Vol. 56, pp. 480–488.
- [46] Oueslati, F. S., Bennacer, R., El Ganaoui, M., & El Cafsi, A. (2017), "Competition between the lid driven and the natural convection of nanofluids taking into consideration the Soret effect", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 114, pp. 1341–1349.
- [47] Md Kasmani, R., Sivasankaran, S., Bhuvaneshwari, M., Alshomrani, A. S., & Siri, Z. (2019), "Soret and Dufour effects on doubly diffusive convection of nanofluid over a wedge in the presence of thermal radiation and suction", *Scientia Iranica*, Vol. 26 N°5 B, pp. 2817–2826.
- [48] Aly, A. M. (2020), "ISPH method for MHD convective flow from grooves inside a nanofluid-filled cavity under the effects of Soret and Dufour numbers", *Physica A:*

*Statistical Mechanics and Its Applications*, Vol. 546, pp. 124087.

- [49] Chand, R., & Rana, G. C. (2015), "Magneto convection in a layer of nanofluid with soRET effect", *Acta Mechanica et Automatica*, Vol.9 N°2, pp.63–69.
- [50] Abidi, A., Raizah, Z., & Madiouli, J. (2018), "Magnetic field effect on the double diffusive natural convection in three-dimensional cavity filled with micropolar nanofluid", *Applied Sciences (Switzerland)*, Vol. 8 N°12.
- [51] Aly, A. M., Mohamed, E. M., & Alsedais, N. (2021), "Double-diffusive convection from a rotating rectangle in a finned cavity filled by a nanofluid and affected by a magnetic field", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 126, pp. 105363.
- [52] Akram, S., Athar, M., Khalid Saeed, & Umair, M. Y. (2022), "Nanomaterials effects on induced magnetic field and double-diffusivity convection on peristaltic transport of Prandtl nanofluids in inclined asymmetric channel", *Nanomaterials and Nanotechnology*, Vol. 12, pp. 1-10.
- [53] SAMMOUDA, M. (2012), "*Modélisation Théorique et Numérique du Phénomène de la Convection Naturelle et Thermosolutale dans les Milieux poreux à Porosité Variable*", Thèse de Doctorat, Université Mohammed 5 de Rabat
- [54] Bachir, G. (2010), *Thèse de doctorat : "Contribution à l'étude de la convection naturelle dans les nanofluides en configuration de Rayleigh-Bénard"*, Thèse de doctorat, Université Toulouse III- Paul Sabatier
- [55] PRITCHARD, P. J. (2011), "Fox and McDonald's Introduction to Fluid mechanics", 8th edition, 2011, John Wiley & Sons, Inc.
- [56] Zarrit, R., Boumaza, M., Kherrou, S., & Dadda, B. (2016), "Convection naturelle dans une cavité rectangulaire inclinée de différents rapports de forme", *Revue Des Energies*

*Renouvelables*, vol 19, pp. 1–97.

- [57] Patankar, S. (1980), "Numerical heat transfer and fluid flow: Computational methods in mechanics and thermal science", *Hemisphere Publication Corporation, Washington, DC* pp. 1–197.
- [58] Renwick, W. (1950), "*Convergence Rates of Iterative Treatments of Partial Differential Equations*". pp 65–75.
- [59] Bernatchou, M., Rtibi, A., Gueraoui, K., El Hamma, M., Cherraj, M., 'STUDY OF THERMOSOLUTAL NATURAL CONVECTION OF CU-WATER NANOFLUID IN AN INCLINED CAVITY' (2022) *JP Journal of Heat and Mass Transfer*, pp. 37-56
- [60] Kefayati, G. H. R. (2016), "Simulation of double diffusive MHD (magnetohydrodynamic) natural convection and entropy generation in an open cavity filled with power-law fluids in the presence of Soret and Dufour effects (Part I: Study of fluid flow, heat and mass transfer)", *Energy*, Vol. 107, pp. 889–916.
- [61] Bernatchou, M., Gueraoui, K., Rtibi, A., Cherraj, M., El Hamma, M., 'EFFECT OF MAGNETIC FIELD ON DOUBLE DIFFUSIVE NATURAL CONVECTION IN AN INCLINED CAVITY FILLED WITH NANOFLUID CONSIDERING THE SORET EFFECT', (2022) *JP Journal of Heat and Mass Transfer*, 25, pp. 1-25.
- [62] Teamah, M. A. (2008), "Numerical simulation of double diffusive natural convection in rectangular enclosure in the presences of magnetic field and heat source", *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 47 N°3, pp. 237–248.

## Résumé

Dans le présent travail, nous présentons une étude numérique de la convection naturelle thermosolutale d'un nanofluides métallique composé de nanoparticules de cuivre et d'un fluide de base binaire, dans une cavité rectangulaire inclinée, avec la prise en compte de l'effet Soret et sous l'influence d'un champ magnétique externe. Les faces latérales de la paroi sont adiabatiques et imperméables, sauf au niveau de la partie inférieure gauche, nous appliquons une température constante. Les bases du rectangle sont maintenues à des températures et concentrations uniformes. La méthode des volumes finis a été utilisée pour résoudre les équations gouvernantes.

La première partie de cette thèse a porté sur l'étude du transfert de chaleur et de masse par convection thermosolutale du nanofluides ( $\text{Cu} - \text{H}_2\text{O}$ ) en prenant en compte l'influence de l'effet Soret, et ce, à travers la variation des nombres de Soret, de Lewis, de Prandtl, de Rayleigh, ainsi que l'angle d'inclinaison de la cavité, le rapport de forme de la cavité et la fraction volumique des nanoparticules. Les résultats montrent que le transfert de chaleur s'améliore avec l'augmentation des nombres de Lewis et de Prandtl, et avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules. Il diminue avec le rapport de forme de la cavité. Quant au transfert de la masse, il augmente avec l'augmentation du nombre de Soret et du rapport de forme de la cavité, et diminue avec l'augmentation du nombre de Lewis.

La seconde partie a porté sur l'analyse de l'effet d'appliquer un champ magnétique uniforme et externe sur le transfert de chaleur et de masse par convection naturelle thermosolutale du même nanofluides, en faisant varier le nombre de Hartmann, le nombre de Rayleigh, le rapport des forces de poussées, et l'angle d'inclinaison de la cavité. Les résultats indiquent que le transfert de chaleur diminue avec l'augmentation du nombre de Hartmann et avec la diminution du nombre de Rayleigh thermique. Pour le transfert de masse, il diminue avec l'augmentation du nombre de Hartmann.

**Mots clés :** Convection naturelle thermosolutale, Nanofluides, Cavité inclinée, Effet Soret, Champ magnétique, Méthode des volumes finis

## Abstract

In this work, we present a numerical study of double diffusive convection in an inclined rectangular cavity filled with a metallic nanofluid containing Copper nanoparticles suspended in a binary base fluid in the presence of an external uniform magnetic field and considering the Soret effect. The longer walls of the cavity are maintained at uniform temperatures and concentrations while the short ones are adiabatic and impermeable except in the left lower region, a constant temperature is applied. The finite volume method is used to solve the system of equations.

The first part of this thesis focused on studying the thermosolutal convection heat and mass transfer of a nanofluid ( $\text{Cu} - \text{H}_2\text{O}$ ), taking into consideration the Soret effect, and this through the variation of the Soret number, Lewis number, Prandtl number, Rayleigh number, inclination angle of the cavity, nanoparticle volume fraction and aspect ratio of the cavity. Results show that the heat transfer increases by increasing the nanoparticles volume fraction, Lewis number and Prandtl number. It decreases by increasing the cavity aspect ratio. For the mass transfer, it increases by increasing Soret number and the cavity aspect ratio, and decreases with increasing Lewis number.

The second part focused on analyzing the effect of applying an external uniform magnetic field on the thermosolutal natural convection heat and mass transfer of the same nanofluid, by varying the Hartmann number, Thermal Rayleigh number, Buoyancy ratio, and cavity inclination angle. The obtained results indicated that the heat transfer decreases by increasing Hartmann number and decreasing Rayleigh number. For the mass transfer, it decreases by increasing Hartmann number

**Keywords:** Thermosolutal natural convection, Nanofluid, Inclined cavity, Soret effect, Magnetic field, Finite volume method