



Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences et Techniques
Tanger, Maroc.



Université de Perpignan Via Domitia
Faculté des Sciences Exactes et
Expérimentales, Perpignan, France.

UFR : Sciences Physiques de l'Ingénieur (SPI)

Thèse en cotutelle

Présentée pour l'obtention du :

DOCTORAT EN SCIENCES

Par :

Youssef QARAAI

Discipline : Mathématiques Appliquées

Spécialité : Analyse et Contrôle des Systèmes

Intitulée :

**Compensation des perturbations étalables et
contrôle protecteur des zones vulnérables**

Soutenue le **15 Avril 2008** devant le Jury :

Pr. Abdelhaq El Jai	Université de Perpignan, France	<u>Président</u>
Pr. Larbi Afifi	Université Hassan II Aïn Chok, FS Casablanca	<u>Rapporteur</u>
Pr. El Hassan Zerrik	Université Moulay Ismaïl, FS Meknès	<u>Rapporteur</u>
Pr. Samira El Yacoubi	Université de Perpignan, France	<u>Rapporteur</u>
Pr. Mohammed Cherkaoui	Georgia Institute of Technology, USA	<u>Examineur</u>
Pr. Marie Claude Simon	Université de Perpignan, France	<u>Examineur</u>
Pr. Abdes-Samed Bernoussi	Université Abdelmalek Essaâdi, FST Tanger	<u>Co-directeur de thèse</u>

Remerciements

Tout d'abord je remercie le Centre National pour la Recherche Scientifique et Technique (CNRST), qui m'a octroyé une bourse d'excellence, et ce dans le cadre du programme des bourses de recherche initié par le Ministère de l'Education Nationale, de l'Enseignement Supérieur, de la Formation des Cadres et de la Recherche Scientifique.

Je tiens à adresser mes sincères remerciements au Professeur Abdes-Samed Bernoussi qui m'a accordé sa confiance, dès la réalisation de mon mémoire de DESA, pour entamer cette thèse de Doctorat. Cela m'a fait un grand plaisir de connaître le Professeur Abdelhaq El Jai grâce à une convention de co-tutelle de thèse signée entre la Faculté des Sciences et Techniques de Tanger Maroc, et l'Université de Perpignan France. En tant que mes deux directeurs de thèse, leur contribution hautement distinguée dans la réalisation de ce travail me restera à l'esprit. Leur sens d'appréciation scientifique, leur rigueur pour le travail bien fait, leurs suggestions pertinentes dans la recherche et surtout leur disponibilité à me recevoir sans hésitation malgré leurs agendas chargés, ont permis à plusieurs reprises de clarifier mes pensées. Je ne les remercierais jamais assez pour ces différents points.

Je tiens à exprimer ma gratitude au Professeur Abdelhaq El Jai qui a accepté de présider ce Jury. Mes chaleureux remerciements vont aussi aux Professeurs Larbi Afifi, El Hassan Zerrik et Samira El Yacoubi pour l'honneur qu'ils me font par leur participation à ce Jury et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. Je tiens à remercier également les Professeurs Mohammed Cherkaoui et Marie Claude Simon qui ont accepté d'examiner ce travail malgré leurs nombreuses occupations.

Ce travail a été réalisé à l'aide de différents séjours alternés entre les Laboratoires MPPRN, FST Tanger, et LAMPS, Université de Perpignan. Que Messieurs A. Naji, M. Amharref, J. El Abdellaoui, M. Sofonea,..., trouvent l'expression de ma profonde gratitude grâce aux moyens qu'ils ont mis à ma disposition et à nos diverses discussions fructueuses. Je remercie également Monsieur Yves Maurissen pour son aide, et pour ses lourdes tâches lors de la réalisation des différentes figures.

Mes remerciements vont également à tous les membres du réseau Théorie des Systèmes, dont les encouragements et les appréciations ont mené à la bonne réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier tous mes collègues doctorants pour leur soutien moral et pour les moments passés ensemble. Je ne saurais oublier de remercier toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Notations	4
Introduction générale	6
I Systèmes distribués linéaires	14
1 Généralités sur l'analyse régionale	15
1 De l'analyse globale à l'analyse régionale	15
2 Contrôlabilité régionale	16
2- a Définitions - Caractérisations	17
2- b Contrôlabilité régionale et actionneurs	19
2- c Exemples [59]	21
2- d Contrôle optimal	24
3 Observabilité régionale	28
3- a Définitions - Caractérisations	29
3- b Observabilité régionale et capteurs	31
3- c Reconstruction régionale de l'état initial	35
4 Sources et détection de sources inconnues	38
4- a Sources et détection	38
4- b Reconstruction d'une source régionalement détectable	40
2 Etalabilité, vulnérabilité et remédiabilité	46
1 Introduction	46
2 Etalabilité	46
2- a Etalabilité au sens usuel	47
2- b Etalabilité au sens des aires (ou $\mathcal{A}$ -étalabilité)	51
2- c Etalabilité et contrôle	54
3 Vulnérabilité	61
3- a Définition et caractérisation	61

3- b	Indices de vulnérabilité	63
3- c	Exemples	64
4	Remédiabilité régionale	68
4- a	Perturbation étalable et vulnérabilité	69
4- b	Remédiabilité régionale	70
4- c	Actionneurs régionalement efficaces	71
4- d	Remédiabilité régionale à énergie minimale	75
3	Contrôle protecteur	78
1	Introduction - Motivation	78
2	Position du problème - Définition	81
3	Exemple : Transport monodimensionnel	84
4	Approches du problème du contrôle protecteur	87
4- a	Approche par familles de transformations	87
4- b	Approche par remédiabilité	89
5	Contrôle protecteur à énergie minimale	96
6	Application : Transport bidimensionnel	101
II	Extension aux systèmes distribués non linéaires	108
4	Compensation des perturbations étalables pour une classe de systèmes non linéaires	109
1	Introduction - Systèmes considérés	109
2	Position du problème	111
3	Problème de la remédiabilité régionale (P)	114
4	Résolution du problème (P)	121
5	Approche numérique du problème (P)	126
5- a	Algorithme	126
5- b	Exemple	127
5- c	Simulations numériques	131
5	Contrôle protecteur d'une classe de systèmes distribués non linéaires	140
1	Introduction	140
2	Position du problème	141
3	Transformation du problème ($\tilde{P}$)	144
4	Contrôle protecteur	146
4- a	Caractérisation par remédiabilité	146

4- b	Détermination du contrôle protecteur	151
4- c	Stratégie d'implementation du contrôle protecteur	153
4- d	Remarques	155
5	Application à une dynamique de bactéries	157
5- a	Modèle considéré	157
5- b	Simulations	160
Conclusions - Perspectives		165
Bibliographie		171

Notations

Ensembles

$\mathbb{N}$	: Entiers naturels
$\mathbb{R}$	: Nombres réels
$\overline{E}$	: Fermeture de E
$\overset{\circ}{E}$	: Intérieur de E
$E^\perp$	: Orthogonal de E
$\emptyset$	: Ensemble vide
$\text{supp}(g)$	: Support de la fonction g
Ω	: Ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$
$\Gamma = \partial\Omega$	: Frontière de Ω
$I =]0, T[$	: Intervalle de temps avec T est l'instant final
$(\omega_t)_t$	: Sous ensembles de Ω évoluant dans le temps
$\mathcal{U}_{ad}$	: Ensemble des contrôles admissibles.

Notations particulières

DPS	: Système à paramètres distribués
EDO	: Equation différentielle ordinaire
EDP	: Equation aux dérivées partielles
(S)	: Un système
(P)	: Un problème
Z	: Espace d'état
$\mathcal{F}$	: Espace des perturbations
$\mathcal{U}$	: Espace des contrôles
Y	: Espace des observations
A, F	: Dynamiques des systèmes linéaire et non linéaire
$(\lambda_i)_{i=0,\dots,n}$	: Valeurs propres de l'opérateur linéaire A
$(\varphi_i)_{i=0,\dots,n}$	: Vecteurs propres associés à λ_i
$(S(t))_{t \geq 0}$	: Semi groupe engendré par la dynamique linéaire A
B, C	: Opérateurs de contrôle et d'observation
ω	: Support de la perturbation
σ	: Zone fixée dans Ω : Utilisée pour décrire la notion d'analyse régionale
$\chi_\sigma, \chi_\sigma^*$	: Opérateur restriction à la région σ et son adjoint
(S)	: Système distribué linéaire représenté par vecteur d'état : $\dot{z} = Az + Bu, z(0) = z_0.$ Cas non linéaire : remplacer A par F .
(E)	: Sortie : $y = Cz$
$\mathcal{P}$	: Propriété utilisée pour étudier l'étalabilité

Fonctions

$f(\cdot)$	: Fonction $x \mapsto f(x)$
$\frac{\partial f}{\partial \nu}$	: Dérivée normale extérieure de f
∇f	: Gradient de f
Δf	: Laplacien de f
$D^k f$	: Dérivée d'ordre k de f
$\mu(E)$ ou $mes(E)$	: Mesure de Lebesgue de E

Opérateurs linéaires

$\mathcal{D}(H)$	: Domaine de H
$\text{Im}(H)$	: Image de H
$\text{Ker}(H)$	: Noyau de H
$\text{rg}(H)$	: Rang de H
H^*	: Adjoint de H
H^{tr}	: Transposée de H
$H^\dagger$	: Pseudo inverse de H
$\det(M)$	: Determinant de la matrice M
$\text{spec}(A)$	: Spectre de A
$R(A)$	: Ensemble résolvant de A
$P_E x$	: Projection de x sur E
$\langle \cdot, \cdot \rangle_E$	: Produit scalaire sur E

Espaces fonctionnels

$\mathcal{L}(X, Y)$	: Espace des applications linéaires de X dans Y
$\mathcal{L}(X)$	: $\mathcal{L}(X, X)$
X'	: Dual de X
$L^p(0, T, X)$	: Espace des fonctions p -intégrables $f :]0, T[\rightarrow X$ telles que : $t \mapsto \ f(t)\ ^p$ est intégrable
$L^2(\Omega)$	: Espace des fonctions de carré intégrable sur Ω
$C_b(\Omega)$	: Espace des fonctions continues et bornées sur Ω
$C^1(0, T)$	: Espace des fonctions à dérivée continue sur $(0, T)$
$C_c^\infty(\Omega)$	: Espace des fonctions indéfiniment dérivable à support compact
$H^m(\Omega)$	: Espace de Sobolev d'ordre m : $\{f \in L^2(\Omega) : \forall \alpha, \alpha \leq m, \exists g \in L^2(\Omega) \text{ telle que :}$ $\int_\Omega f D^\alpha \varphi = (-1)^{ \alpha } \int_\Omega g \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\}$
$H_0^m(\Omega)$	: $\{f \in H^m(\Omega) : \frac{\partial^k f}{\partial \nu^k} _{\partial\Omega} = 0; \quad 0 \leq k \leq m-1\}$
$H^{-m}(\Omega)$	: Dual de $H_0^m(\Omega)$:

Formules et références

(1.1.3) par exemple	: Désigne la troisième formule ou équation numérotée dans la première section du premier chapitre.
[N]	: Référence numéro N.
[2-6] par exemple	: Dénote les 5 références successives [2], [3], [4], [5] et [6].
■	: Fin d'une démonstration.

Introduction générale

Grâce à sa pluridisciplinarité, la théorie des systèmes a fait l'objet d'une intense activité scientifique issue de nombreuses applications (en physique, chimie, environnement, biologie, etc), et une littérature abondante en témoigne. Cela consiste à développer un ensemble de concepts, de techniques de raisonnement et d'outils mathématiques à l'usage d'un système en vue de mieux comprendre son comportement et son fonctionnement, et par suite de mieux prendre certaines décisions.

L'exploration des systèmes mis en jeu est souvent faite dans trois directions : La première concerne tous les aspects de modélisation, l'autre consiste à explorer certains concepts permettant la compréhension de ces systèmes ; on parle dans ce cas de l'analyse des systèmes, tandis que la troisième s'articule sur les problèmes de contrôles où il s'agit de déterminer des actions convenables pour réaliser certains objectifs bien précisés.

Il existe plusieurs classes de systèmes. Dans cette thèse nous nous intéressons aux systèmes continus, linéaires et non linéaires et qui sont en plus de nature distribuée. Un système est dit distribué s'il évolue dans le temps et l'espace, ainsi, ce dernier est généralement gouverné par des équations aux dérivées partielles. Dans le cas où le système est décrit par une équation différentielle ordinaire en temps seulement, on parle d'un système localisé. De nombreux travaux ont été consacrés au passage du localisé au distribué en tenant compte essentiellement de la dimension finie (système localisé) et infinie (système distribué) de l'espace d'état (voire par exemple [50]).

Pour les systèmes distribués, différents travaux ont été réalisés en se basant sur une formulation mathématique qui tient compte de la géométrie globale du système. A ce stade, citons ceux sur la contrôlabilité, l'observabilité, sources et détection de sources inconnues. En effet, un système est dit globalement contrôlable s'il peut être amené de son état initial vers n'importe quel état désiré au bout d'un certain temps par une action convenable (M. C. Delfour et S. K. Mitter [39], S. Dolecki et D. Russel [41], R.F. Curtain et A.J. Pritchard [36], A. El Jai et A. J. Pritchard [57], J.L. Lions [80–83],...). Mathématiquement parlant, cette définition a été traduite par la surjectivité d'un certain opérateur dit de contrôlabilité. Parfois, on cherche

à approcher autant que possible un état désiré qu'on ne peut pas atteindre exactement à partir de l'état initial, et c'est pour cela qu'a été introduite la notion de faible contrôlabilité. Cette notion de contrôlabilité au sens faible a été caractérisée à son tour par une condition de densité de l'image de l'opérateur de contrôlabilité [36, 37, 48–50, 57].

Une autre notion qui a été introduite d'une façon duale, c'est l'observabilité. Dans le cas où l'état initial du système est inconnu, le principe de l'observabilité (respectivement faible observabilité) consiste à pouvoir reconstruire (respectivement approcher) cet état initial à travers la dynamique du système et l'équation de sortie. En définissant un opérateur dit d'observabilité, la notion d'exacte observabilité a été caractérisée par une condition d'injection d'un tel opérateur, et par densité de son noyau dans le cas de l'observabilité faible [36, 37, 48–50, 57].

En relation avec l'observabilité, un autre concept d'analyse des systèmes distribués a été introduit ; c'est celui de sources et détection de sources inconnues. Au point de vue conceptuel, une source est interprétée comme étant une perturbation affectant l'état du système, et qui est généralement inconnue. Le principe consiste à recueillir des informations sur la nature d'une telle source à partir des observations associées au système, et ceci dans le but de pouvoir la reconstruire [2, 6, 7, 84].

Ainsi, et en vue d'envisager un aspect d'applicabilité de toutes ces notions abstraites, A. El Jai et A. J. Pritchard [57] ont introduit la notion de capteur et actionneur. Un actionneur (respectivement capteur) est dit stratégique, s'il permet d'assurer la faible contrôlabilité (respectivement la faible observabilité) du système qu'il excite (respectivement des observations qu'il recueille). Et en relation avec les sources et détection de sources inconnues, un capteur est dit espion, s'il permet la détection d'une telle source [6]. Différents travaux ont été réalisés sur les capteurs et les actionneurs, à savoir les problèmes de la nature, de la localisation et du nombre de ces paramètres dits d'entrée - sortie, en fonction des divers paramètres des systèmes considérés [2, 5, 11, 20, 30, 31, 43, 57, 60, 109].

Cela relève d'une grande importance au niveau des applications, et aussi met en évidence le rôle important que joue la variable spatiale dans l'analyse et le contrôle des systèmes distribués. De ce fait, la voie a été ouverte vers l'analyse régionale de tels systèmes (E. Zerrik et A. El Jai [11, 58, 59]). En effet ceci est justifié par le fait qu'il existe des systèmes pour lesquels on peut réaliser (i.e. contrôler, observer, détecter, etc) des objectifs régionaux sans les atteindre globalement. La figure suivante nous donne une idée générale sur l'aspect régional des concepts de contrôlabilité, d'observabilité et de sources et détection, et plus précisément, elle met en jeu les différentes situations qui peuvent être utilisées pour les décrire.

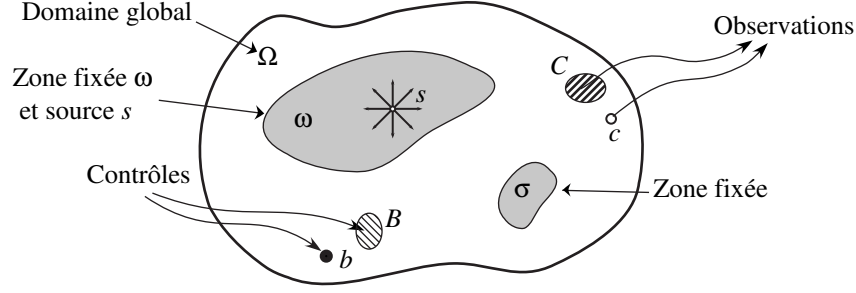


FIG. 0.0.1 – Localisation d'actionneurs (B, b), capteurs (C, c), source (s), et zones fixées (σ, ω) sur le domaine géométrique global (Ω).

En outre, depuis que l'analyse régionale a été introduite, sa capacité de traiter de vrais systèmes complexes est prolongée et devient plus importante. Les applications aux systèmes environnementaux étaient l'une des motivations pour considérer le cas où les propriétés de la région considérée peuvent évoluer dans le temps ; elle peut croître ou décroître dans un sens bien précisé. Le concept d'étabilité, qui décrit ces processus d'expansion a été alors introduit (A. El Jai et K. Kassara [53], A. Bernoussi et A. El Jai [21]). Etant donné un système distribué et une propriété fixée $\mathcal{P}$, le principe consiste à dire que le système est $\mathcal{P}$ -étalable pendant un intervalle de temps, si la famille des ensembles de points possédant cette propriété en chaque instant dans cet intervalle de temps, est croissante au sens de l'inclusion. On parle de l'étabilité au sens usuel [53].

On constate à partir de ce principe, qu'un problème d'étabilité peut donc présenter plus de contraintes (donc de difficultés) en le comparant avec celui d'analyse régionale. Ceci est dû au fait que, pour l'analyse régionale, on s'intéresse à l'analyse ou au contrôle du système pour réaliser un objectif désiré juste sur une région fixée dans le domaine global, tandis que pour l'étabilité, on ne fixe qu'une propriété sur l'état du système, puis on s'intéresse à l'évolution des sous domaines où cette propriété est satisfaite. C'est la raison pour laquelle d'importantes manipulations mathématiques sont nécessaires pour décrire ce concept vu son intérêt et ces difficultés dans les applications. Pour rendre ce concept mieux adapté aux applications, son aspect faible a été étudié par D. Ucinski et A. El Jai [101]. Cela consiste à pouvoir approcher continûment l'état du système sur une famille croissante de sous domaines supposés connus en utilisant ce qu'on appelle des "étalements".

Pour un problème de pollution par exemple, les zones polluées ne sont pas forcément croissantes au sens de l'inclusion, mais peuvent se déplacer alors que leurs surfaces (aires) croient. De ce fait, on constate que le concept d'étabilité dans son sens usuel (i.e l'inclusion) reste un peu restrictif dans la description de certains autres phéno-

mènes. Ce qui a conduit A. Bernoussi et A. El Jai à en donner une extension ; c'est la $\mathcal{A}$ -étalabilité [21, 23]. Cela se traduit par le fait que, si on se donne une propriété fixée, alors la surface occupée par les effets de cette propriété est croissante dans le temps. Là aussi, on constate qu'autant on se rapproche des préoccupations concrètes que la description du problème sera de plus en plus compliquée. Parmi les outils mathématiques utilisés pour caractériser la $\mathcal{A}$ -étalabilité d'un système distribué, c'est celui de familles de transformations dites adaptées à l'évolution du système ; c'est à dire celles qui permettent de décrire l'évolution des sous domaines sur lesquels l'état du système satisfait la propriété $\mathcal{P}$. Par suite ont été étudiées certaines relations entre la $\mathcal{A}$ -étalabilité et la notion du front d'onde [22, 24, 25], et encore entre celle de l'évolution d'interfaces en se basant sur des techniques dites d'ensembles de niveaux introduites par J.A. Sethian [87, 97, 98].

Toujours en relation avec l'étalabilité, une place importante a été consacrée au contrôle dans le sens où, lorsqu'un système distribué est par nature non étalable (pour une propriété donnée), alors il est possible de le rendre étalable par un contrôle convenable (pour la même propriété). C'est le contrôle étaleur [23, 53]. Le problème du contrôle étaleur a été largement étudié en contraignant la manière d'évolution des sous domaines concernés (i.e. sur lesquels la propriété fixée est satisfaite) [28, 29, 45, 46, 54–56, 61, 62, 71–77, 101].

Signalons qu'il existe une autre approche de l'étalabilité basée sur l'utilisation des automates cellulaires (AC) [62, 63]. Cela consiste à subdiviser le domaine géométrique en des cellule c_{ij} formant ce qu'on appelle un treillis, puis à discrétiser l'intervalle de temps I et considérer comme espace d'état un ensemble discret fini. Pour décrire l'évolution du système, il faut se donner ce qu'on appelle des règles de transition qui permettent le passage d'une certaine configuration du système à l'instant t_k , à une nouvelle configuration à l'instant t_{k+1} . C'est une approche qui paraît intéressante pour le traitement de ce type de problèmes.

Grace à un couplage de l'analyse régionale et de l'étalabilité, un autre concept propre aux système distribué a été aussi introduit : C'est la vulnérabilité (A. Bernoussi et M. Amharref [26]). Cela consiste à dire qu'une région fixée σ est vulnérable s'elle est susceptible d'être atteinte par les effets d'un phénomène étalable. Remarquons à partir de ce principe que le concept de la vulnérabilité tient compte des différents paramètres définissant le système qui est supposé étalable (i.e. dynamique, temps, espace, propriété fixée, des éventuelles actions,...), et aussi de la capacité de résistance de la zone σ face à l'étalabilité. Pour mesurer cette capacité, un moyen dit "Indice de vulnérabilité" a été introduit dans le sens où, une zone est plus vulnérable par rapport à une autre si l'indice de vulnérabilité de la première est supérieur à celui

de la seconde. Ainsi, différents exemples et applications ont été étudiés dans [26,27]. Lorsqu'il s'agit d'un phénomène étalable pour lequel une zone donnée σ est vulnérable, n'est-t-il pas possible de :

1. Remédier aux effets de ce phénomène sur σ lorsque elle est atteinte ?
2. Protéger la zone σ avant qu'elle soit atteinte ?

La réponse à ces deux questions constitue l'objectif de cette thèse.

En un premier temps, nous introduisons deux concepts propres aux systèmes distribués linéaires, ensuite nous étudions leur extension à une classe de systèmes distribués non linéaires. Se sont les concepts de la remédiabilité et du contrôle protecteur. Plus précisément, lorsqu'un système distribué est soumis à une perturbation (source) localisée sur une région ω comme cela est indiqué sur la partie gauche de la figure 0.0.2, et si de plus cette perturbation est étalable et qu'une zone fixée σ est non pas seulement vulnérable mais déjà atteinte par les effets de cette perturbation (voir partie droite de la figure 0.0.2), le principe de la remédiabilité régionale consiste en la détermination d'une action permettant au bout d'un certain temps, de compenser ces effets sur σ ; c'est à dire les changements d'effets de la perturbation, de la figure 0.0.2 (à droite) à celle de la figure 0.0.3.

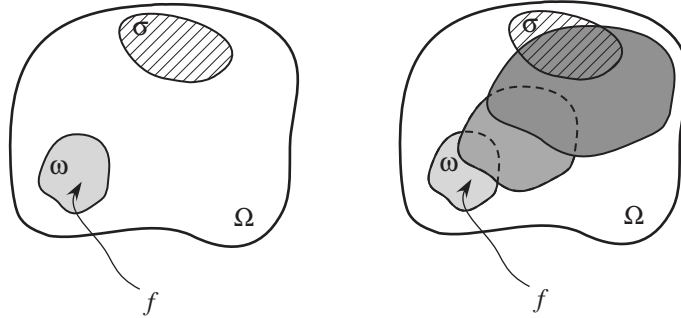


FIG. 0.0.2 – Perturbation initiale sur ω (gauche) et vulnérabilité de σ lorsque la perturbation est étalable (droite).

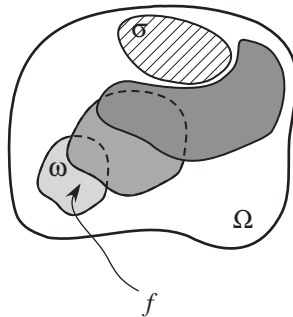


FIG. 0.0.3 – Remédiabilité de la région σ .

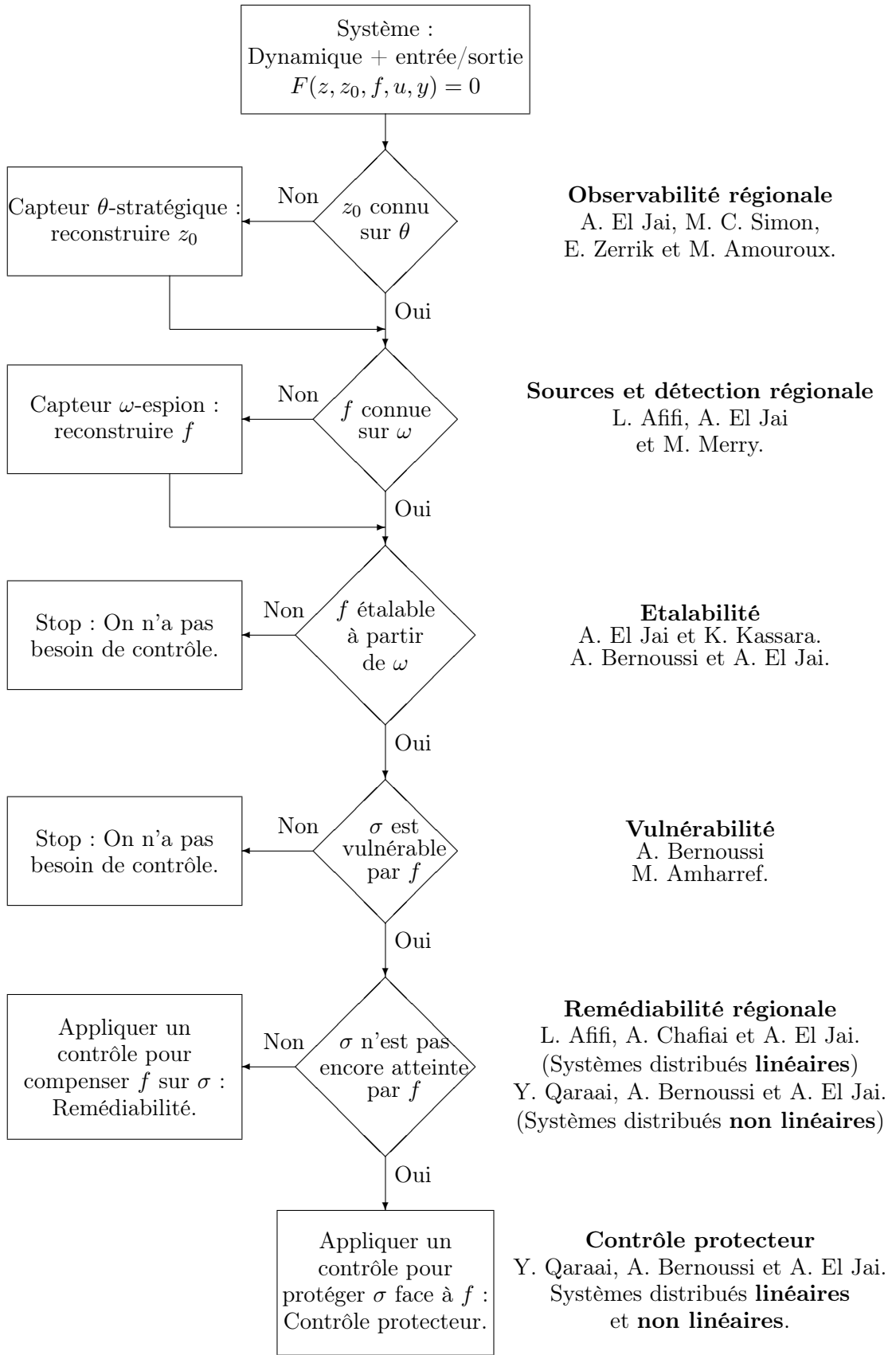
Parfois il arrive qu'on ne peut pas remédier à certaines perturbations sur une zone donnée, comme par exemple le cas d'une épidémie incurable, ou le remède existe mais il est à coût très élevé (dépollution). De se fait il est intéressant de protéger cette zone avant qu'elle soit atteinte. C'est le principe du contrôle protecteur.

L'étude du contrôle protecteur tient compte essentiellement de la trajectoire de la propriété engendrée par la perturbation étalable et aussi du premier instant où une telle propriété commence à atteindre la zone vulnérable. En effet, si on n'agit pas *avant* cet instant, alors la zone sera atteinte, et dans ce cas on ne peut plus parler de sa protection mais plutôt de sa remédiabilité.

Pour cela, et après un rappel sur quelques concepts d'analyse régionale comme ceux de la contrôlabilité, l'observabilité, les sources et détection de sources inconnues, puis sur l'étalabilité et la vulnérabilité, nous commençons par développer celui de la remédiabilité régionale des systèmes linéaires, pour pouvoir introduire le concept du contrôle protecteur pour la même classe de systèmes, en précisant le lien existant entre ces deux concepts. En effet, nous montrons qu'un problème du contrôle protecteur pour un système donné, peut être ramené à celui de la remédiabilité régionale pour un certain système résultant en introduisant un retard sur le système de départ. Ensuite, une extension des deux concepts à une classes de systèmes non linéaires sera donnée en se basant toujours sur les deux principes donnés ci-dessus. Etant donné un système distribué (S) d'état z , évoluant sur un domaine géométrique global Ω , soumis à une perturbation f , excité par un contrôle u et augmenté d'une sortie y , puis θ , ω et σ sont des régions toutes incluses dans Ω , l'organigramme ci-dessous met en évidence l'enchaînement des différents concepts considérés, et aussi la manière avec laquelle ils sont traités dans cette thèse qui s'inscrit dans le cadre de l'analyse et du contrôle des systèmes distribués.

Ceci peut être interprété par le fait qu'au départ, la connaissance de l'état initial z_0 du système est indispensable pour l'étude de tout problème de contrôle. Ensuite, et si de plus le système est soumis à des perturbations, il est utile de les localiser, et donc de les reconstruire, pour connaître leur comportement, ou même pour pouvoir suivre leur évolution, et par conséquent de connaître leur influence sur des zones bien précisées. A ce niveau, le contrôle de telles situations constitue une étape importante. Toujours à propos de cet organigramme, on constate que :

Pour le contrôle étaleur, la propriété destinée à satisfaire sur des sous domaines de plus en plus grands, présente des qualités du système. Dans notre situation, et comme il s'agit de perturbations affectant le système (donc se sont des défauts d'un tel système), alors on n'a pas besoin d'aucun contrôle lorsque la perturbation n'est pas étalable, et donc la zone σ n'est pas vulnérable.



Les différents concepts considérés dans cette thèse.

Ce travail est organisé comme suit. Il comporte une introduction, deux parties, l'une, composée de trois chapitres sur les systèmes linéaires, et l'autre, en deux chapitres sur une extension au cas non linéaire, une partie conclusion menée de quelques perspectives mentionnant certains problèmes ouverts, et une partie bibliographie.

Le chapitre 1 concerne un rappel sur la contrôlabilité, l'observabilité, les sources et détection de sources inconnues dans le cadre de l'analyse régionale des systèmes distribués linéaires. Différentes caractérisations de ces concepts, de leurs relations avec les capteurs et les actionneurs, ainsi que différents exemples sont donnés. Les problèmes du contrôle optimal assurant un transfert régional, de la reconstruction d'un état initial régionalement inconnu, puis celle d'une source régionalement détectable, sont aussi considérés.

Dans le chapitre 2 nous donnons quelques généralités sur l'étalabilité et la vulnérabilité. Ensuite, nous donnons dans le cas des systèmes linéaires perturbés, quelques résultats sur la remédiabilité lorsque la perturbation est étalable et une zone donnée est vulnérable ou même atteinte. Le problème de la remédiabilité régionale à énergie minimale est aussi présenté.

Le chapitre 3 concerne l'introduction du concept du contrôle protecteur dans le cas d'un système linéaire perturbé. Nous caractérisons ce type de contrôle par deux approches différentes : Famille de transformations et remédiabilité d'un certain système à retard. Cela nous permet de donner d'autres propriétés, puis d'étudier le problème du contrôle protecteur à énergie minimale. Une application sur le système de transport est aussi donnée.

Pour le chapitre 4, il est destiné à une extension du concept de la remédiabilité régionale à une classe de systèmes distribués non linéaires perturbés au niveau de la condition initiale. Nous posons le problème de la remédiabilité régionale, et nous considérons une nouvelle formulation de ce problème pour pouvoir s'inspirer des résultats développés au chapitre 2. Ensuite nous montrons comment ce problème peut être résolu, en utilisant les techniques du pseudo inverse et le théorème du point fixe de Banach. Nous donnons un schéma algorithmique et nous illustrons l'approche développée par un exemple monodimensionnel (système de transport non linéaire).

Le but du chapitre 5 est d'étendre le concept du contrôle protecteur à une classe de systèmes distribués non linéaires. Après position et transformation du problème du contrôle protecteur, nous considérons une approche par remédiabilité d'un certain système non linéaire à retard pour caractériser les solutions de ce problème. Quelques remarques importantes sont aussi soulevées. Nous illustrons le concept du contrôle protecteur en considérant une variante de l'équation de Fisher qui peut modéliser un problème de dynamique de bactéries.

Première partie

Systemes distribués linéaires

Chapitre 1

Généralités sur l'analyse régionale

1 De l'analyse globale à l'analyse régionale

Considérons un système distribué linéaire (S) qu'on peut écrire en utilisant une représentation dite par vecteur d'état et qui est donnée sous la forme suivante

$$(S) \begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) & 0 < t < T \\ z(0) = z_0 \in \mathcal{D}(A) \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Le système (1.1.1) est supposé augmenté d'une sortie

$$(E) : \quad y(t) = Cz(t) \quad 0 < t < T \quad (1.1.2)$$

avec z est l'état du système, z_0 son état initial, u un contrôle, A , B et C sont des opérateurs linéaires représentant respectivement la dynamique du système, le paramètre d'entrée et celui de sortie. Un cadre fonctionnel adapté est indispensable pour l'étude (S) et (E) . Ceci concerne l'espace d'état Z qui est de dimension infinie, l'espace des contrôles $\mathcal{U}$ et celui des observations Y .

Cela étant, le système (S) est dit globalement contrôlable si, pour tout état désiré $z_d \in Z$, il existe un contrôle $u \in \mathcal{U}$ permettant d'amener le système de son état initial z_0 vers l'état désiré z_d au bout d'un certain temps T . L'état désiré z_d étant défini sur le domaine géométrique global Ω sur lequel évolue le système.

Or, il existe des systèmes qui sont contrôlables régionalement, sans qu'ils le soient globalement [11, 58, 59], comme par exemple le maintien d'une température juste sur une zone donnée, cela a permis alors le passage de la notion d'analyse globale à celle dite d'analyse régionale.

Par dualité, il est de même pour l'observabilité régionale, qui consiste à pouvoir reconstruire régionalement la condition initiale du système lorsqu'elle est inconnue.

D'autre part, la notion de sources et détection régionale d'une source inconnue a été aussi introduite à partir des techniques de l'observabilité régionale.

2 Contrôlabilité régionale

Dans cette section, nous considérons le problème de l'existence d'un contrôle réalisant un objectif régional donné. Pour cela, soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $I =]0, T[$ un intervalle de temps et σ une zone fixée dans Ω de mesure non nulle. Le système (1.1.1) se réécrit

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) & 0 < t < T \\ z(0) = z_0 \in \mathcal{D}(A) \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Ce système est défini sur l'espace d'état $Z = L^2(\Omega)$ sur lequel l'opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continu $(S(t))_{t \geq 0}$, $u \in L^2(0, T, \mathcal{U})$ et $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, Z)$.

La solution $z(t, u) = z(x, t, z_0, u)$ de (1.2.1) est donnée par

$$z(t, u) = S(t)z_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds = S(t)z_0 + H_t u \quad (1.2.2)$$

avec H_t est l'opérateur dit de contrôlabilité défini par

$$\begin{aligned} H_t : L^2(0, T, \mathcal{U}) &\longrightarrow Z \\ u &\longmapsto \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Considérons aussi les opérateurs restriction à σ et son adjoint définis par :

$$\chi_\sigma : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\sigma) \quad (1.2.4)$$

$$z \longmapsto z|_\sigma$$

$$\chi_\sigma^* : L^2(\sigma) \longrightarrow L^2(\Omega) \text{ avec } (\chi_\sigma^* z)(x) = \begin{cases} z(x) & \text{sur } \sigma \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1.2.5)$$

Nous avons alors à partir de (1.2.2) et (1.2.4)

$$\chi_\sigma z(t, u) = \chi_\sigma S(t)z_0 + \chi_\sigma H_t u \quad (1.2.6)$$

Donc, c'est à travers la zone σ , l'état initial z_0 , la structure de B et les opérateurs H_t et χ_σ , que nous devons étudier la contrôlabilité régionale du système (1.2.1).

2- a Définitions - Caractérisations

Si on note par z_d un état désiré, nous avons les définitions suivantes [59].

Définition 1.1

(i) Le système (1.2.1) est dit exactement régionalement contrôlable (ou σ -contrôlable) si $\forall z_0 \in Z, \forall z_d \in L^2(\sigma) \exists u \in L^2(0, T, \mathcal{U})$ tel que :

$$\chi_\sigma z(T, u) = z_d$$

(ii) Le système (1.2.1) est dit faiblement régionalement contrôlable (ou σ -contrôlable) si, $\forall \varepsilon > 0, \forall z_0 \in Z, \forall z_d \in L^2(\sigma) \exists u \in L^2(0, T, \mathcal{U})$ tel que :

$$\|\chi_\sigma z(T, u) - z_d\|_{L^2(\sigma)} \leq \varepsilon$$

Le premier point de cette définition signifie qu'à partir de l'état initial z_0 , le contrôle u permet d'atteindre exactement l'état désiré z_d sur σ à l'instant final T . Tandis que le point (ii) signifie qu'un tel état désiré est approximativement atteint (avec une certaine tolérance ε fixée) par le contrôle u sur la zone σ à l'instant final T .

Noter que la définition 1.1 est générale, car, d'une part elle englobe celle de la contrôlabilité usuelle (ou globale) où il suffit de prendre $\sigma = \Omega$, d'autre part, il est aussi valable dans le cas où l'état $z(., u)$ est la solution d'un système non linéaire. Sauf que dans ce cas, quelques hypothèses supplémentaires sur l'existence et l'unicité de la solution seront ajoutées. On reviendra sur ce dernier point dans la deuxième partie de cette thèse (cas des systèmes distribués non linéaires).

En considérant le système (1.2.1), signalons encore une remarque concernant l'opérateur B lié à la manière d'excitation de ce système. En effet, lorsqu'il s'agit des actions ponctuelles ou frontières, dans ce cas l'opérateur B n'est plus borné, ainsi un choix convenable du cadre fonctionnel est indispensable.

Maintenant, nous allons donner quelques caractérisations de la contrôlabilité exacte et faible, en se basant toujours sur la définition 1.1 et sur les opérateurs H_t et χ_σ donnés respectivement par (1.2.3) et (1.2.4). Commençons par la proposition suivante [59].

Proposition 1.1

(i) Le système (1.2.1) est exactement σ -contrôlable $\Leftrightarrow \text{Im}(\chi_\sigma H_T) = L^2(\sigma)$

(ii) Le système (1.2.1) est faiblement σ -contrôlable $\Leftrightarrow \overline{\text{Im}(\chi_\sigma H_T)} = L^2(\sigma)$

Preuve : C'est une conséquence immédiate de la définition 1.1. ■

Noter que même si on ne s'intéresse qu'à atteindre des objectifs désirés juste sur σ , nous allons donner une autre caractérisation de la contrôlabilité qui établit cette fois-ci une relation entre les deux opérateurs H_t et χ_σ donnés respectivement par (1.2.3) et (1.2.4), et l'espace d'état $Z = L^2(\Omega)$ relatif au domaine Ω tout entier. Nous avons alors la proposition suivante [59].

Proposition 1.2

(i) Le système (1.2.1) est exactement σ -contrôlable si et seulement si

$$\text{Ker}(\chi_\sigma) + \text{Im}(H_T) = L^2(\Omega) \quad (1.2.7)$$

(ii) Le système (1.2.1) est faiblement σ -contrôlable si et seulement si

$$\text{Ker}(\chi_\sigma) + \overline{\text{Im}(H_T)} = L^2(\Omega) \quad (1.2.8)$$

Preuve :

Il est clair que si la relation (1.2.7) (respectivement (1.2.8)) est satisfaite, alors le système (1.2.1) est exactement σ -contrôlable (respectivement faiblement σ -contrôlable).

Inversement, soit $z \in L^2(\Omega)$. Alors il existent z_1 et z_2 tels que

$$\begin{cases} z = z_1 + z_2 \\ z_1 = 0 & \text{sur } \sigma \\ z_2 = 0 & \text{sur } \Omega \setminus \sigma \end{cases}$$

(i) Le système (1.2.1) est supposé exactement σ -contrôlable, donc d'après le point (i) de la proposition 1.1 on aura $z_2 \in \text{Im}(\chi_\sigma H_T)$. Ceci revient à dire qu'il existe $u \in L^2(0, T, \mathcal{U})$ tel que $z_2 = H_T u$.

(ii) Comme le système (1.2.1) est supposé faiblement σ -contrôlable, alors d'après le point (ii) de la proposition 1.1 on aura $z_2 \in \overline{\text{Im}(\chi_\sigma H_T)}$. Soit encore : $\forall \varepsilon > 0$, il existe $u \in L^2(0, T, \mathcal{U})$ tel que :

$$\|z_2 - \chi_\sigma H_T u\|_{L^2(\sigma)} \leq \varepsilon$$

Ce qui donne $\|z_2 - H_T u\|_{L^2(\sigma)} \leq \varepsilon$. C'est à dire que $z_2 \in \overline{\text{Im}(H_T)}$ ■

Nous allons donner une troisième caractérisation de la contrôlabilité régionale à travers une inégalité utile dans les applications, en considérant l'opérateur linéaire Λ_σ donné par

$$\Lambda_\sigma = \chi_\sigma H_T H_T^* \chi_\sigma^* : L^2(\sigma) \longrightarrow L^2(\sigma) \quad (1.2.9)$$

C'est l'objet de la proposition suivante [59].

Proposition 1.3

(i) *Le système (1.2.1) est exactement σ -contrôlable si et seulement si*

$$\exists \gamma_\sigma > 0 : \quad \|z\|_{L^2(\sigma)} \leq \gamma_\sigma \|B^* S^*(T - \cdot) \chi_\sigma^* z\|_{L^2(0,T,\mathcal{U}^*)} \quad \forall z \in L^2(\sigma) \quad (1.2.10)$$

Ce qui est équivalent à Λ_σ est coercif.

(ii) *Le système (1.2.1) est faiblement σ -contrôlable si et seulement si*

$$\text{Ker}(H_T^* \chi_\sigma^*) = \{0\} \quad (1.2.11)$$

Ou d'une façon équivalente Λ_σ est positif.

Preuve : Voir [59]. ■

On constate que toutes ces caractérisations de la contrôlabilité régionale tiennent compte des opérateurs χ_σ et H_t . Comme H_t fait intervenir plus particulièrement l'opérateur B lié à la manière d'excitation du système, et que ce dernier possède, outre son intensité, un support géométrique donné dans Ω (qu'on notera D), alors il est intéressant de faire un lien entre les deux régions D et σ . C'est l'objet du paragraphe suivant.

2- b Contrôlabilité régionale et actionneurs

Considérons toujours le système (1.2.1). D'un point de vue conceptuel, un actionneur est défini par la localisation et la répartition spatiale de l'opérateur d'excitation B . Dans le cadre de l'analyse (globale ou régionale) des systèmes distribués linéaires, plusieurs travaux ont été consacrés à la notion d'actionneurs [30, 31, 43, 57, 60, 109], et en particulier de leur lien avec la contrôlabilité.

Etant donné un ensemble fermé D dans Ω et une application $g \in L^2(D)$, on a la définition suivante [43].

Définition 1.2

On appelle actionneur zone interne le couple (D, g) où

- D représente le support de l'actionneur.
- g définit la répartition spatiale de l'actionneur.

Dans le cas où $(D, g) = (b, \delta_b)$ avec $b \in \Omega$ et δ_b la distribution de Dirac au point b , alors on parle d'un actionneur ponctuel interne.

De la même manière a été défini un actionneur zone (ou ponctuel) frontière ; ceci est le cas où $D \subset \Gamma = \partial\Omega$.

Pour des entrées multiples, on désigne par $(D_i, g_i)_{i=1,\dots,p}$ la suite des p actionneurs excitant le système.

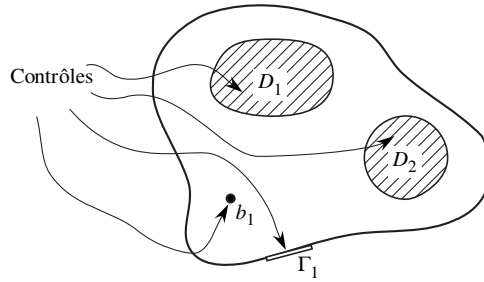


FIG. 1.2.1 – Différents types d'actionneurs

Cas particulier :

Supposons maintenant que l'opérateur linéaire A admet sur l'espace d'état $L^2(\Omega)$, un système orthonormé complet de fonctions propres $(\varphi_{mj})_{m \geq 1, j=1,\dots,r_m}$ associées aux valeurs propres $(\lambda_m)_{m \geq 1}$ avec λ_m étant de multiplicité r_m . Et que le système (1.2.1) est excité par p actionneurs $(D_i, g_i)_{i=1,\dots,p}$, tels que $D_i \cap D_j = \emptyset \forall i \neq j$. Dans ce cas, le système se réécrit sous la forme

$$(S) \begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + \sum_{i=1}^p g_i(x)u_i(t) & 0 < t < T \\ z(0) = z_0 \in \mathcal{D}(A) \end{cases} \quad (1.2.12)$$

Ainsi, les deux concepts de contrôlabilité régionale et actionneur sont liés par la définition suivante

Définition 1.3

Une suite d'actionneurs $(D_i, g_i)_{i=1,\dots,p}$ est dite σ -stratégique si le système qu'ils excitent est faiblement σ -contrôlable

Alors à partir de ce qui précède nous avons le résultat suivant [59].

Proposition 1.4

Supposons que $\sup r_m = r < \infty$, alors la suite d'actionneurs $(D_i, g_i)_{i=1, \dots, p}$ est σ -stratégique si et seulement si

1. $p \geq r$
2. $rg(G_m \psi_m^*) = r_m \quad \forall m \geq 1$.

où $\psi_m^* = (\psi_{ij})$ et G_m est une matrice d'ordre $p \times r_m$ et d'éléments $(G_m)_{i,j}$ tels que :

$$\psi_{ij} = \int_{\sigma} \varphi_i \varphi_j dx \quad \text{et} \quad (G_m)_{i,j} = \begin{cases} \langle \varphi_{mj}, g_i \rangle_{L^2(D_i)} & \text{Pour le cas zone} \\ \varphi_{mj}(b_i) & \text{Pour le cas ponctuel} \end{cases}$$

Ce résultat, appelé **condition du rang**, nous permet de savoir si un tel système est faiblement σ -contrôlable ou pas. Dans le cas où les valeurs propres de l'opérateur A sont simples, alors un seul actionneur est suffisant pour assurer la faible σ -contrôlabilité : C'est celui qui doit vérifier $G_1 \psi_1^* \neq 0$, car $r_m = 1$ et $G_m \psi_m^* \in \mathbb{R} \quad \forall m \geq 1$.

2- c Exemples [59]

Dans ce paragraphe nous donnons deux exemples pour illustrer tout ce précède. Le premier justifie le passage de l'analyse globale vers l'analyse régionale ; c'est à dire qu'il existe des systèmes qui sont régionalement contrôlables sans qu'ils le soient globalement. Le second concerne une application directe du résultat établi entre actionneurs régionalement stratégiques et contrôlabilité régionale.

Exemple 1

Considérons le système de diffusion monodimensionnel linéaire dont l'état vérifie

$$\begin{cases} \dot{z}(x, t) = \Delta z(x, t) + \chi_{[a,b]} u(t) &]0, 1[\times]0, T[\\ z(0, t) = z(1, t) = 0 &]0, T[\\ z(x, 0) = 0 &]0, 1[\end{cases} \quad (1.2.13)$$

Ce système peut se mettre sous la forme (1.2.12) car nous avons

$$A = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}(A) = H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)$$

$$p = 1, \quad g_1 u_1 = \chi_{[a, b]} Id_{]0, 1[} u$$

$D = [a, b] \subset]0, 1[$ désigne le support de l'actionneur excitant le système (1.2.13).
L'opérateur A engendre un semi groupe fortement continu $(S(t))_{t \geq 0}$ défini par

$$S(t)z = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{\lambda_k t} \langle z, \varphi_k \rangle_{L^2(0,1)} \varphi_k$$

avec

$$\varphi_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x) \quad \text{et} \quad \lambda_k = -k^2 \pi^2$$

De plus l'opérateur de contrôlabilité H_t donné en (1.2.3) est défini comme suit

$$H_t^* z = B^* S^*(T - t) z = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{\lambda_k(T-t)} \langle z, \varphi_k \rangle_{L^2(0,1)} \int_a^b \varphi_k(x) dx$$

Considérons la zone $\sigma = [\alpha, \beta]$ dans $]0, 1[$ et supposons que $b - a \in \mathbb{Q}$. Alors :

Le système (1.2.13) n'est pas faiblement globalement contrôlable, car ceci est une conséquence directe de la proposition 1.3 où lorsque $\sigma =]0, 1[$, alors dans ce cas la condition $\text{Ker}(H_T^*) = \{0\}$ n'est pas satisfaite.

Montrons que le système est faiblement σ -contrôlable pour α et β convenablement choisis. En effet, Parmi les fonctions propres φ_k de $L^2(0, 1)$, considérons celles qui forment un système orthogonal de $\text{Ker}(H_T^*)$. Donc nous pouvons écrire

$$\text{Ker}(H_T^*) = \overline{\{(\varphi_k)_{k \in J}\}}$$

où $J = \{k \in \mathbb{N} : k(b - a) = 2m, m \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble non vide car on a supposé que $b - a \in \mathbb{Q}$.

Choisissons donc $\beta = \alpha + (b - a)$, alors pour tout k et $l \in J$ on aura

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx = \begin{cases} \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{b - a}{2} & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

Pour $k_0 \in J$, nous avons $\varphi_{k_0} \in \text{Ker}(H_T^*)$, par conséquent φ_{k_0} n'est pas globalement faiblement atteignable (i.e. sur $]0, 1[$), mais il l'est régionalement sur la région $\sigma = [\alpha, \alpha + (b - a)]$, ce qui veut dire que

$$\chi_{\sigma} \varphi_{k_0} \notin \text{Ker}(H_T^* \chi_{\sigma}^*)$$

car sinon, on aura

$$\begin{aligned}
H_T^* \chi_\sigma^* (\chi_\sigma \varphi_{k_0}) &= \sum_{k=1}^{+\infty} e^{\lambda_k(T-t)} \langle \varphi_{k_0}, \varphi_k \rangle_{L^2(\sigma)} \int_a^b \varphi_k(x) dx \\
&= \sum_{k \notin J} e^{\lambda_k(T-t)} \langle \varphi_{k_0}, \varphi_k \rangle_{L^2(\sigma)} \int_a^b \varphi_k(x) dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

Soit encore

$$\langle \varphi_{k_0}, \varphi_k \rangle_{L^2(\sigma)} = 0, \quad \forall k \notin J$$

D'autre part, pour tout $k_1 \notin J$ vérifiant $k_1(b-a) = 2k+1$, il est facile de voir que

$$\langle \varphi_{k_0}, \varphi_{k_1} \rangle_{L^2(\sigma)} = 0$$

soit encore

$$k_1 \tan(k_0 \pi \alpha) = k_0 \tan(k_1 \pi \alpha)$$

Ce qui n'est pas toujours vrai (à titre d'exemple considérer $\alpha = \frac{1}{4}$, $b-a = \frac{1}{2}$, $k_0 = 4$ et $k_1 = 6$). Donc φ_{k_0} est atteignable sur $\sigma = [\alpha, \beta] = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$.

Exemple 2

Reprenons le même système donné dans l'exemple ci-dessus, sauf que dans ce cas on s'intéresse à une action de type ponctuelle localisée en un point $b \in]0, 1[$. Le système s'écrira alors sous la forme

$$\begin{cases} \dot{z}(x, t) = \Delta z(x, t) + \delta(x-b)u(t) &]0, 1[\times]0, T[\\ z(0, t) = z(1, t) = 0 &]0, T[\\ z(x, 0) = 0 &]0, 1[\end{cases} \quad (1.2.14)$$

Pour une zone $\sigma = [\alpha, \beta] \subset]0, 1[$, nous avons d'après la proposition 1.4 :

Le système (1.2.14) est faiblement σ -contrôlable si et seulement si $\frac{b-\alpha}{\beta-\alpha} \notin \mathbb{Q}$.

Ceci veut dire que sous cette condition, l'actionneur (b, δ_b) est σ -stratégique.

Jusqu'à maintenant, on a caractérisé la contrôlabilité régionale, et on a aussi étudié son lien avec les actionneurs. Qu'on est-t-il du coût du transfert régional ? La réponse à cette question va faire l'objet du paragraphe suivant.

2- d Contrôle optimal

Dire qu'un système est régionalement contrôlable, n'entraîne pas forcément l'unicité du contrôle assurant ce transfert régional. Pour cela, nous allons ajouter d'autres contraintes sur ce contrôle pour qu'il soit unique. De ce fait, on se propose de résoudre le problème suivant : Parmi tous les contrôles assurant la contrôlabilité régionale sur σ , qu'il est celui de norme minimale ?

Alors pour décrire ceci, reconsidérons le système (1.2.1) avec dans ce cas l'espace d'état Z est tel que $Z \subset L^2(\Omega) \subset Z^*$

$$(S) \begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) & 0 < t < T \\ z(0) = z_0 \in \mathcal{D}(A) \end{cases} \quad (1.2.15)$$

Notons par $z_d \in L^2(\sigma)$ un état désiré et considérons les ensembles suivants

$$G = \{g \in Z : g = 0 \text{ sur } \sigma\}$$

$$U_{ad} = \{u \in L^2(0, T, \mathcal{U}) : z(T, u) - z_d \in G\}$$

Donc le problème de la contrôlabilité régionale à moindre coût est formulé comme suit

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^* \in L^2(0, T, \mathcal{U}) \text{ tel que :} \\ (i) \ z(T, u^*) - z_d \in G \\ (ii) \ \|u^*\|^2 = \inf_{u \in U_{ad}} \|u\|^2 \end{cases} \quad (1.2.16)$$

La résolution du problème (1.2.16) est basée sur une approche inspirée de la méthode HUM (Hilbert Uniqueness Method) développée par J. L. Lions [80–82]. Noter qu'il existe d'autres méthodes comme par exemple celle du pseudo inverse [18, 59].

Considérons l'ensemble G^0 donné par

$$G^0 = \{g \in Z^* : g = 0 \text{ sur } \Omega \setminus \sigma\}$$

Pour $\varphi^0 \in G^0$, considérons le système et l'application donnés respectivement par

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) = -A^*\varphi(t) & 0 < t < T \\ \varphi(T) = \varphi^0 \end{cases} \quad (1.2.17)$$

$$\varphi^0 \mapsto \|\varphi^0\|_{G^0}^2 = \int_0^T \|B^*\varphi(t)\|^2 dt \quad (1.2.18)$$

Puis le système suivant

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = A\psi(t) + BB^*\varphi(t) & 0 < t < T \\ \psi(0) = z_0 \end{cases} \quad (1.2.19)$$

Ceci nous permettra de définir l'opérateur suivant

$$M\varphi^0 = \chi_\sigma^* \chi_\sigma(\psi(T)) \quad (1.2.20)$$

M définit ainsi est un opérateur affine que l'on peut décomposer sous la forme $M\varphi^0 = \chi_\sigma^* \chi_\sigma(\psi_0(T) + \psi_1(T))$ avec ψ_0 et ψ_1 sont respectivement les solutions des deux systèmes suivants

$$\begin{cases} \dot{\psi}_0(t) = A\psi_0(t) & 0 < t < T \\ \psi_0(0) = z_0 \end{cases} \quad (1.2.21)$$

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1(t) = A\psi_1(t) + BB^*\varphi(t) & 0 < t < T \\ \psi_1(0) = 0 \end{cases} \quad (1.2.22)$$

Avec toutes ces considérations, nous définissons l'opérateur Λ liant φ^0 et ψ_1 , par

$$\Lambda\varphi^0 = \chi_\sigma^* \chi_\sigma(\psi_1(T)) \quad (1.2.23)$$

Alors le problème de la contrôlabilité régionale est équivalent à la résolution de l'équation suivante

$$\Lambda\varphi^0 = \chi_\sigma^* z_d - \chi_\sigma^* \chi_\sigma(\psi_0(T)) \quad (1.2.24)$$

De ce fait commençons par le lemme suivant

Lemme 1.1

L'opérateur Λ définie en (1.2.23) est symétrique et borné.

Preuve : Soit $\varphi^0, \bar{\varphi}^0 \in G^0$, nous avons

$$\langle \Lambda \varphi^0, \bar{\varphi}^0 \rangle = \langle \psi_1(T), \bar{\varphi}^0 \rangle = \int_0^T B^* \varphi(t) B^* \bar{\varphi}(t) dt$$

■

La proposition suivante nous donne le résultat de ce paragraphe [59].

Proposition 1.5

Si le système (1.2.15) est faiblement σ -contrôlable, alors l'équation (1.2.23) admet une solution unique $\varphi^0 \in G^0$. De plus, le contrôle donné par

$$u^*(t) = B^* \varphi(t) \quad \forall t \in]0, T[$$

est l'unique solution du problème (1.2.16)

Preuve : La démonstration de ce résultat est faite en trois étapes.

Etape 1 : L'application définie en (1.2.18) est une norme sur G^0 , car on a

$$\|\varphi^0\|_{G^0} = 0 \Leftrightarrow \int_0^T \|B^* \varphi(t)\|^2 dt = 0 \Leftrightarrow B^* \varphi(\cdot) = 0 \Leftrightarrow B^* S^*(T - \cdot) \varphi^0 = 0$$

Comme le système (1.2.15) est supposé faiblement σ -contrôlable, alors d'après (1.2.11) de la proposition 1.3, ceci est équivalent à $\text{Ker}(H_T^* \chi_\sigma^*) = \{0\}$

Or $H_T^* = B^* S^*(T - \cdot)$ et $\varphi^0 \in G^0$, alors ceci est équivalent à $\varphi^0 = 0$.

Notons donc G^0 le complété de G^0 dans Z^* par rapport à cette norme.

Etape 2 : Existence et unicité de la solution de (1.2.23) et admissibilité de u^* .

Pour $\varphi^0 = \chi_\sigma^* \varphi$, si on pose $\|\varphi\|_F = \|\chi_\sigma^* \varphi\|_{G^0}$ alors il existe α et β tels que

$$\|\varphi\|_F \leq \alpha \|\varphi^0\|_{Z^*} \leq \beta \|\varphi\|_{L^2(\sigma)}$$

Donc si F désigne le complété de $L^2(\sigma)$ par rapport à la norme $\|\cdot\|_F$, alors on aura $L^2(\sigma) \subset Z^* \subset F$, et par dualité, nous obtenons $F^* \subset Z \subset L^2(\sigma)$. Donc

$$G^{0*} = \{z \in Z : \chi_\sigma z \in F^*\}$$

Considérons la relation d'équivalence $z \sim \bar{z} \Leftrightarrow \chi_\sigma z = \chi_\sigma \bar{z}$. Ceci définit donc une norme sur les classes d'équivalences dans G^{0*} , elle est notée par $|||z||| = \|\chi_\sigma z\|_{F^*}$

Par conséquent, à partir de (1.2.18), nous obtenons $G^{0*} \subset \text{Im}(H_T)$.

D'autre part, on sait que la solution ψ_1 du système (1.2.22) est donnée par

$$\psi_1(T) = \int_0^T S(T-s)BB^*\varphi(s)ds$$

Donc en utilisant l'opérateur Λ donné en (1.2.23) on aura

$$\begin{aligned} \langle \Lambda\varphi^0, \varphi^0 \rangle_{G^{0*}, G^0} &= \langle \int_0^T S(T-s)BB^*\varphi(s)ds, \varphi^0 \rangle \\ &= \int_0^T \langle B^*\varphi(s), B^*S^*(T-s)\varphi^0 \rangle ds \\ &= \int_0^T \|B^*\varphi(s)\|^2 ds \\ &= \|\varphi^0\|_{G^0}^2 \end{aligned}$$

Alors à partir de l'**Etape 1** on en déduit que l'opérateur $\Lambda : G^0 \longrightarrow G^{0*}$ est un isomorphisme. Donc en utilisant le fait que $U_{ad} \neq \emptyset$, on aura $z_d - \chi_\sigma \psi_0(T) \in F^*$. Donc l'équation (1.2.23) admet une solution unique φ^0 .

En posant $u^*(t) = B^*\varphi(t)$ et en le substituant dans (1.2.15), puis en utilisant (1.2.19) et (1.2.24), on aura bien $\chi_\sigma z(T, u^*) = z_d$. D'où l'admissibilité de u^* (i.e. u^* vérifie la condition (i) du problème (1.2.16)).

Etape 3 : Optimalité de u^* .

Soit $u \in U_{ad}$, alors $z(T, u)$ et $z(T, u^*) \in G$, et donc $\chi_\sigma(z(T, u) - z(T, u^*)) = 0$, par suite on aura pour tout $\varphi^0 \in G^0$

$$\langle z(T, u) - z(T, u^*), \varphi^0 \rangle = 0$$

Ce qui est équivalent à

$$\langle \int_0^T S(T-s)B(u(s) - u^*(s))ds, \varphi^0 \rangle = 0$$

Soit encore

$$\int_0^T \langle u(s) - u^*(s), B^*S^*(T-s)\varphi^0 \rangle ds = 0$$

C'est à dire que

$$\int_0^T \langle u(s) - u^*(s), B^*\varphi(s) \rangle ds = 0$$

Ceci est encore équivalent à

$$\int_0^T \langle u(s) - u^*(s), u^*(s) \rangle ds = 0$$

En notant $J(u) = \|u\|^2$, alors la relation ci-dessus est équivalente à

$$J'(u^*)(u - u^*) = 0 \quad \forall u \in U_{ad}$$

D'où la condition d'optimalité cherchée (i.e. le (ii) du problème (1.2.16)). ■

Tout cela constitue quelques rappels sur la contrôlabilité régionale où on s'est intéressé plus précisément au cas où les actions considérées agissent à l'intérieur du domaine géométrique et sur l'état du système. De nombreux autres travaux ont été consacrés au cas frontière et aussi au cas où les excitations sont appliquées sur le gradient (i.e. dérivée spatiale) de l'état du système, et pour plus de détail voir par exemple [11, 104, 105, 108–110, 112, 113].

Il est aussi intéressant de signaler le rôle important que joue la connaissance de la condition initiale d'un système lors de l'étude de sa contrôlabilité régionale et plus généralement sa connaissance est nécessaire dans tout algorithme de contrôle. De ce fait, on se pose le problème suivant : Lorsque cette condition initiale est inconnue régionalement, comment peut-t-on la reconstruire ?

3 Observabilité régionale

L'observabilité est une notion duale de la contrôlabilité. C'est pour cela que les résultats que nous donnerons dans cette section seront déduits par dualité de ceux de la section précédente.

Etant donné une zone fixée $\sigma \subset \Omega$ de mesure non nulle et un système défini sur $\Omega \times I$ dont l'état initial est supposé inconnu sur σ , le principe de l'observabilité régionale consiste à pouvoir reconstruire cet état initial sur σ à travers la dynamique du système et l'équation de mesure associée à ce système.

Pour décrire ceci considérons le système (1.1.1) dans le cas autonome (i.e. $u = 0$) avec z_0 est supposé inconnu sur σ . Le système est alors donné par

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) & 0 < t < T \\ z(0) = z_0 & \text{inconnu sur } \sigma \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Supposons que (1.3.1) est augmenté d'une équation de mesure telle que

$$y(t) = Cz(t) \quad 0 < t < T \quad (1.3.2)$$

avec $Z = L^2(\Omega)$, $y \in L^2(0, T, Y)$ et $C \in \mathcal{L}(Z, Y)$, où Y est un espace de Hilbert séparable (espace d'observations). Considérons aussi la décomposition suivante

$$z_0 = \begin{cases} z_0^e & \text{sur } \sigma \\ z_0^{ne} & \text{sur } \Omega \setminus \sigma \end{cases}$$

où z_0^e est la partie à reconstruire sur σ , et z_0^{ne} celle qui ne nous intéresse pas. Comme la dynamique A engendre sur Z un s.g.f.c $(S(t))_{t \geq 0}$ nous avons

$$y(t) = CS(t)z_0 = K_t z_0 \quad 0 < t < T \quad (1.3.3)$$

où K_t est l'opérateur dit d'observabilité défini par

$$K_t : Z \longrightarrow Y \quad (1.3.4)$$

$$z \longmapsto CS(t)z$$

dont l'opérateur adjoint K_t^* est donné comme suit

$$K_t^* : Y^* \longrightarrow Z \quad (1.3.5)$$

$$y \longmapsto \int_0^t S^*(s)C^*y(s)ds$$

Comme pour la contrôlabilité, l'étude de l'observabilité régionale doit tenir compte essentiellement des opérateurs χ_σ et K_t^* , de la structure de l'opérateur C lié à la manière d'observation, et de la partie de l'état initial z_0^e destinée à être estimée.

3- a Définitions - Caractérisations

La partie $z_0^e = \chi_\sigma z_0$ de l'état initial $z_0 \in L^2(\Omega)$ étant supposée inconnu sur $L^2(\sigma)$, alors en se basant sur le principe donné ci-dessus nous avons les définitions suivantes [58, 102].

Définition 1.4

(i) Le système (1.3.1)-(1.3.2) est dit exactement régionalement observable (ou σ -observable) si

$$\text{Im}(\chi_\sigma K_T^*) = L^2(\sigma)$$

(ii) Le système (1.3.1)-(1.3.2) est dit faiblement régionalement observable (ou σ -observable) si

$$\overline{\text{Im}(\chi_\sigma K_T^*)} = L^2(\sigma)$$

En fait il s'agit d'une définition et d'une caractérisation de l'observabilité régionale, où le premier point montre que l'inconnu z_0^e est exactement reconstruit sur $L^2(\sigma)$, tandis que sa reconstruction est approximative à une tolérance près pour le second. Ceci va nous permettre d'en déduire d'autres caractérisations de l'observabilité régionale. En effet, considérons l'opérateur Π_σ défini par

$$\Pi_\sigma = \chi_\sigma K_T^* K_T \chi_\sigma^* : L^2(\sigma) \longrightarrow L^2(\sigma) \quad (1.3.6)$$

alors si nous commençons par le cas de l'exacte observabilité, nous avons la proposition suivante [58, 102].

Proposition 1.6

Le système (1.3.1)-(1.3.2) est exactement σ -observable si et seulement si

$$\text{Ker}(\chi_\sigma) + \text{Im}(K_T^*) = L^2(\Omega) \quad (1.3.7)$$

Soit encore

$$\exists \gamma_\sigma > 0 : \quad \|z_0^e\|_{L^2(\sigma)} \leq \gamma_\sigma \|K_T z_0\|_Y \quad (1.3.8)$$

Ou ce qui est équivalent à Π_σ est coercif.

Concernant le cas de l'observabilité faible, nous avons [58, 102].

Proposition 1.7

Le système (1.3.1)-(1.3.2) est faiblement σ -observable si et seulement si

$$\text{Ker}(\chi_\sigma) + \overline{\text{Im}(K_T^*)} = L^2(\Omega) \quad (1.3.9)$$

Ou d'une façon équivalente

$$\text{Ker}(K_T \chi_\sigma^*) = \{0\} \quad (1.3.10)$$

Ou encore Π_σ est positif.

Aussi comme pour la contrôlabilité régionale, on constate que toutes ces caractérisations de l'observabilité régionale tiennent compte des opérateurs χ_σ et K_t . Comme K_t fait intervenir plus particulièrement l'opérateur C lié à la manière d'observer le système, et que cet opérateur possède, outre son intensité, un support géométrique donné dans Ω (qu'on notera D), alors il est intéressant de faire un lien entre les deux sous ensembles σ et D .

3- b Observabilité régionale et capteurs

Considérons le système (1.3.1) augmenté de l'équation de sortie (1.3.2). Ces deux entités sont bien connectées entre elles, où cette connexion peut être exprimée moyennant des paramètres dits de sortie (paramètres de C), et qui définissent ce qu'on appelle un capteur. Dans le cadre de l'analyse (globale ou régionale) des systèmes distribués linéaires, plusieurs travaux ont été consacrés à la notion de capteurs, et en particulier de leur lien avec l'observabilité [11, 48, 58, 102].

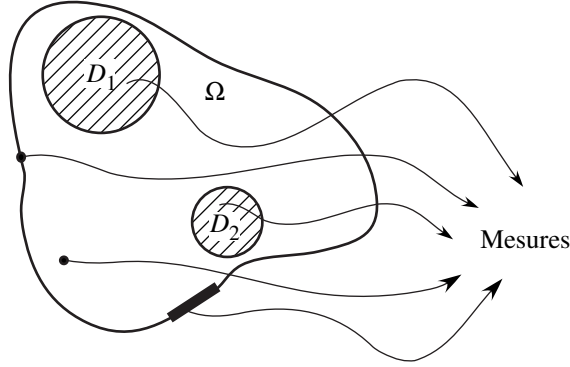


FIG. 1.3.1 – Différents types de capteurs

Comme pour le cas d'un actionneur, on peut définir un capteur par la donnée d'un ensemble fermé D dans Ω et une application $h \in L^2(D)$ [43].

Définition 1.5

On appelle capteur zone interne le couple (D, h) où

- D représente le support du capteur.
- h définit la répartition spatiale du capteur.

Dans le cas où $(D, h) = (c, \delta_c)$ avec $c \in \Omega$ et δ_c la distribution de Dirac au point c , on parle d'un capteur ponctuel interne.

De la même manière a été défini un capteur zone (ou ponctuel) frontière ; ceci est le cas où $D \subset \Gamma = \partial\Omega$.

Cas particulier :

Considérons le système (1.3.2)

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) & 0 < t < T \\ z(0) = z_0 & \text{inconnu sur } \sigma \end{cases} \quad (1.3.11)$$

où l'opérateur linéaire A admet sur l'espace d'état $L^2(\Omega)$, un système orthonormé complet de fonctions propres $(\varphi_{mj})_{m \geq 1, j=1, \dots, r_m}$ associées aux valeurs propres $(\lambda_m)_{m \geq 1}$ avec λ_m étant de multiplicité r_m .

On suppose de plus que la sortie (1.3.2) est donnée par q capteurs $(D_i, h_i)_{i=1, \dots, q}$, tels que $D_i \cap D_j = \emptyset \ \forall i \neq j$. Ceci peut s'exprimer sous la forme

$$y(t) = Cz(t) = \begin{bmatrix} \langle h_1, z(t) \rangle_{L^2(D_1)} \\ \langle h_2, z(t) \rangle_{L^2(D_2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \langle h_q, z(t) \rangle_{L^2(D_q)} \end{bmatrix} \quad \forall t \in]0, T[. \quad (1.3.12)$$

Dans ce cas nous avons $C : L^2(\Omega) \longrightarrow Y = \mathbb{R}^q$ et son adjoint C^* est défini par

$$C^*y(t) = \sum_{i=1}^q y_i(t)h_i \quad \forall y(t) = [y_1(t), \dots, y_q(t)]^{tr} \in \mathbb{R}^q$$

Ainsi, la définition suivante nous donne la relation existant entre l'observabilité régionale et capteur [58, 102].

Définition 1.6

Une suite de capteurs $(D_i, h_i)_{i=1, \dots, q}$ est dite σ -stratégique si, via ces capteurs, le système est faiblement σ -observable.

Alors à partir de ce qui précède nous avons le résultat suivant, dit aussi **condition du rang** [58, 102].

Proposition 1.8

Supposons que $\sup r_m = r < \infty$, alors les capteurs $(D_i, h_i)_{i=1, \dots, p}$ sont σ -stratégiques si et seulement si

1. $p \geq r$
2. $rg(G_m \psi_m^*) = r_m$

où $\psi_m^* = (\psi_{ij})$ et G_m est une matrice d'ordre $q \times r_m$ et d'éléments $(G_m)_{i,j}$ tels que :

$$\psi_{ij} = \int_{\sigma} \varphi_i \varphi_j dx \quad \text{et} \quad (G_m)_{i,j} = \begin{cases} \langle \varphi_{mj}, h_i \rangle_{L^2(D_i)} & \text{Pour le cas zone} \\ \varphi_{mj}(b_i) & \text{Pour le cas ponctuel} \end{cases}$$

Ce résultat a pour but de savoir si la reconstruction approximative de l'état initial sur σ est possible ou pas. Il nous donne une condition sur le nombre minimal de capteurs nécessaires pour assurer une telle reconstruction.

Exemple [58]

L'exemple que nous allons donner ci-dessous à pour but d'illustrer ce qui précède et en même temps de justifier l'aspect régional de la notion d'observabilité.

Considérons alors le système de diffusion monodimensionnel donné par

$$\begin{cases} \dot{z}(x, t) = \Delta z(x, t) &]0, 1[\times]0, T[\\ z(0, t) = z(1, t) = 0 &]0, T[\\ z(x, 0) = z_0(x) & \text{inconnu sur } \sigma \subset]0, 1[\end{cases} \quad (1.3.13)$$

qu'on suppose augmenté d'une sortie à travers un capteur ponctuel localisé en un point $c \in \mathbb{Q} \cap]0, 1[$, c'est à dire sous la forme

$$y(t) = Cz(t) = z(c, t), \quad \forall t \in]0, T[\quad (1.3.14)$$

L'opérateur $A = \Delta$ engendre sur l'espace d'état $Z = L^2(0, 1)$ un semi groupe fortement continu $(S(t))_{t \geq 0}$ défini par

$$S(t)z = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{\lambda_k t} \langle z, \varphi_k \rangle_{L^2(0,1)} \varphi_k$$

avec

$$\varphi_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x) \quad \text{et} \quad \lambda_k = -k^2 \pi^2$$

Alors la mesure y ainsi que l'opérateur d'observabilité K_t sont donnés par

$$y(t) = K_t z_0 = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{\lambda_k t} \langle z_0, \varphi_k \rangle_{L^2(0,1)} \varphi_k(c), \quad \forall t \in]0, T[\quad (1.3.15)$$

Comme l'ordre de multiplicité r des λ_k est égale à 1, et le nombre de capteurs utilisés est $q = 1$, alors d'après la proposition 1.8 avec $\sigma = \Omega$, le capteur (c, δ_c) est Ω -stratégique si et seulement si $\varphi_k(c) \neq 0$, ceci est équivalent à $\sin(k\pi c) \neq 0$ où encore $c \notin \mathbb{Q}$. Ce qui est absurde car c est supposé dans $\mathbb{Q} \cap]0, 1[$. Par conséquent le système (1.3.13) - (1.3.13) n'est pas globalement faiblement observable.

Noter d'après la proposition 1.7, que ceci est équivalent encore à $\text{Ker}(K_T) \neq \{0\}$.

Montrons que ce n'est pas le cas (régionalement) sur une zone $\sigma = [\alpha, \beta]$ convenablement choisie dans $]0, 1[$.

En effet, considérons l'ensemble $J = \{k \in \mathbb{N} : kc = 2m, m \in \mathbb{N}\}$, qui est non vide par hypothèse sur c , et parmi les fonctions propres φ_k de $L^2(0, 1)$, considérons celles qui forme un système orthogonal de $\text{Ker}(K_T)$; c'est à dire

$$\text{Ker}(K_T) = \overline{\{(\varphi_k)_{k \in J}\}}$$

Posons $\beta = \alpha + c$, alors pour tout k et $l \in J$ on aura

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx = \begin{cases} \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{c}{2} & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

Pour $k_0 \in J$, on a $\varphi_{k_0} \in \text{Ker}(K_T)$, par conséquent φ_{k_0} n'est pas globalement faiblement observable (i.e. sur $]0, 1[$), mais il l'est régionalement sur $\sigma = [\alpha, \alpha + c]$, ceci veut dire d'après la proposition 1.7 que

$$\chi_{\sigma} \varphi_{k_0} \notin \text{Ker}(K_T \chi_{\sigma}^*)$$

car sinon, on aura

$$\begin{aligned} K_T \chi_{\sigma}^* (\chi_{\sigma} \varphi_{k_0}) &= \sum_{k=1}^{+\infty} e^{\lambda_k t} \langle \varphi_{k_0}, \varphi_k \rangle_{L^2(\sigma)} \varphi_k(c) \\ &= \sum_{k \notin J} e^{\lambda_k t} \langle \varphi_{k_0}, \varphi_k \rangle_{L^2(\sigma)} \varphi_k(c) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Soit encore

$$\langle \varphi_{k_0}, \varphi_k \rangle_{L^2(\sigma)} = 0, \quad \forall k \notin J$$

et pour tout $k_1 \notin J$ vérifiant $k_1 c = 2k + 1$, il est facile de voir que

$$\langle \varphi_{k_0}, \varphi_{k_1} \rangle_{L^2(\sigma)} = 0$$

soit encore

$$k_1 \tan(k_0 \pi \alpha) = k_0 \tan(k_1 \pi \alpha)$$

Ce qui n'est pas toujours vrai (à titre d'exemple considérer $\alpha = \frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{2}$, $k_0 = 4$ et $k_1 = 6$). Donc si pose

$$z_0(x) = \sqrt{2} \sin(6\pi x)$$

alors, pour cette condition initiale, le système (1.3.13)- (1.3.13) est faiblement observable sur $\sigma = [\alpha, \beta] = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, sans qu'il le soit globalement sur $\Omega = [0, 1]$.

De toutes ces caractérisations de l'observabilité régionale sur σ , il est possible sous certaines conditions, à partir de la donnée de la dynamique A , de la mesure y et de l'opérateur K_T faisant intervenir la structure du capteur (opérateur C), de reconstruire la partie inconnue z_0^e de l'état initial z_0 sur σ .

3- c Reconstruction régionale de l'état initial

Nous allons présenter une méthode dont le principe est analogue à celle donnée lors de la détermination du contrôle réalisant le transfert régional, et qui permet dans ce cas la reconstruction de l'état initial z_0^e sur σ [58].

En effet, considérons le système (1.3.1) augmenté de la fonction de mesure (1.3.2) avec les mêmes hypothèses qui étaient faites, puis désignons par G et $\widehat{G}$ les sous ensembles de $Z = L^2(\Omega)$ définis respectivement par

$$G = \{g \in Z : g = 0 \text{ sur } \Omega \setminus \sigma\} \text{ et } \widehat{G} = \{\widehat{g} \in Z : \widehat{g} = 0 \text{ sur } \sigma\}$$

Remarquons d'abord que pour tout $(g, \widehat{g}) \in (G, \widehat{G})$ nous avons

$$\langle g, \widehat{g} \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} g \widehat{g} dx = \int_{\sigma} g \widehat{g} dx + \int_{\Omega \setminus \sigma} g \widehat{g} dx = 0$$

Maintenant pour tout $\varphi^0 \in G$ on considère le système

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) = A\varphi(t) & 0 < t < T \\ \varphi(0) = \varphi^0 \end{cases} \quad (1.3.16)$$

et l'application définissant sur G la semi norme suivante

$$\varphi^0 \in G \longmapsto \|\varphi^0\|_G^2 = \int_0^T \|C\varphi(t)\|_Y^2 dt \quad (1.3.17)$$

D'autre part, le système régressif en temps défini par

$$\begin{cases} -\dot{\psi}(t) = A^*\psi(t) + C^*C\varphi(t) & 0 < t < T \\ \psi(T) = 0 \end{cases} \quad (1.3.18)$$

est excité par φ solution du système (1.3.16). Donc pour $\varphi^0 \in G$, l'équation (1.3.18) nous permet de déterminer $\psi(0)$.

Alors si on désigne par $P_{\widehat{G}^*}$ l'opérateur de projection sur $\widehat{G}^*$, et si on considère le système

$$\begin{cases} -\dot{\xi}(t) = A^*\xi(t) + C^*y(t) & 0 < t < T \\ \xi(T) = 0 \end{cases} \quad (1.3.19)$$

et aussi l'opérateur Λ défini par

$$\Lambda\varphi^0 = P_{\widehat{G}^*}(\psi(0)) \quad (1.3.20)$$

et si φ^0 est convenablement choisi dans G de telle sorte que $C\varphi(t) = y(t)$, alors le système (1.3.20) est le dual du système observé (1.3.1)-(1.3.2) considéré au départ.

Par conséquent, le problème de l'observabilité régionale sur σ sera équivalent à celui de la détermination de la solution φ^0 de l'équation

$$\Lambda\varphi^0 = P_{\widehat{G}^*}(\xi(0)) \quad (1.3.21)$$

La réponse à cette question est bien affirmative comme le montre le résultat suivant

Proposition 1.9

Si le système (1.3.1)-(1.3.2) est faiblement σ -observable, alors l'équation (1.3.21) admet une solution unique $\varphi^0 \in G$.

De plus, l'état initial inconnu à reconstruire sur σ est donné par

$$z_0^e = \varphi^0$$

Preuve :

Noter d'abord que si le système (1.3.1)-(1.3.2) est faiblement σ -observable, alors il est facile de voir que la semi norme donnée en (1.3.17) se prolonge en une norme sur G . En effet ceci est une conséquence directe du résultat (1.3.10) de la proposition 1.7.

D'autre part pour $\varphi^0 \in G$ et avec $\Lambda : G \longrightarrow \widehat{G}^*$ donné en (1.3.20) nous avons

$$\begin{aligned} \langle \Lambda\varphi^0, \varphi^0 \rangle_{\widehat{G}^*, G} &= \langle P_{\widehat{G}^*}(\psi(0)), \varphi^0 \rangle \\ &= \langle \psi(0), \varphi^0 \rangle \\ &= \int_0^T \langle S^*(T)C^*C\varphi(t), \varphi^0 \rangle dt \\ &= \|\varphi^0\|_G^2 \end{aligned}$$

Comme $\|\varphi^0\|_G$ définit une norme sur G , alors Λ est un isomorphisme. Donc l'équation (1.3.21) admet une solution unique φ^0 qui n'est autre que l'état initial z_0^e à estimer sur σ (d'après (1.3.16)). ■

Exemple [102]

Considérons le système de diffusion monodimensionnel donné par

$$\begin{cases} \dot{z}(x, t) = \Delta z(x, t) & \Omega \times]0, T[\\ z(0, t) = z(1, t) = 0 &]0, T[\\ z(x, 0) = z_0(x) & \Omega \end{cases} \quad (1.3.22)$$

En utilisant un capteur ponctuel (b, δ_b) avec $b \in \Omega$, le système est donc augmenté de l'équation de mesure suivante

$$y(t) = Cz(t) = z(b, t)$$

Soit $\varphi^0 \in G$ et φ la solution du système suivant

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(x, t) = \Delta \varphi(x, t) & \Omega \times]0, T[\\ \varphi(0, t) = \varphi(1, t) = 0 &]0, T[\\ z(x, 0) = \varphi^0(x) & \Omega \end{cases} \quad (1.3.23)$$

tel que

$$\|\varphi^0\|_G^2 = \int_0^T \varphi^2(b, t) dt$$

Considérons maintenant le système excité par φ et qui est donné par

$$\begin{cases} -\dot{\psi}(x, t) = \Delta \psi(x, t) - \varphi(b, t) \delta(x - b) & \Omega \times]0, T[\\ \varphi(0, t) = \varphi(1, t) = 0 &]0, T[\\ \psi(T) = 0 & \Omega \end{cases} \quad (1.3.24)$$

Alors si nous considérons le système (1.3.19) en ξ avec $A^* = \Delta$ et $C^*C\varphi(t) = -y(t)\delta(x - b)$, ainsi que l'opérateur Λ donné en (1.3.20) par

$$\Lambda\varphi^0 = P_{\widehat{G}^*}(\xi(0)) \quad (1.3.25)$$

nous avons le résultat suivant [102].

Proposition 1.10

Si le capteur (b, δ_b) est σ -stratégique, alors l'équation (1.3.25) admet une solution unique $\varphi^0 \in G$ qui n'est autre que l'état initial reconstruit sur σ .

Comme pour le cas de la contrôlabilité régionale, nous n'avons rappelé dans cette section que quelques généralités sur l'observabilité régionale, et pour plus de détails voir par exemple [11, 102, 103, 106, 111, 115–117].

Outre son intérêt majeur qui est la reconstruction régionale de l'état initial supposé inconnu sur une zone donnée, l'observabilité régionale va nous permettre d'étudier la notion de source et détection de sources inconnues.

4 Sources et détection de sources inconnues

Généralement, la modélisation d'un problème réel prend en considération un ensemble de facteurs et paramètres mis en jeu pour décrire ou approcher ce problème, et ceci peut être représenté par un système . Si on se place dans le cas où le système est de nature distribuée, parfois il arrive qu'il subisse d'autres facteurs de nature spatiale ou spatio-temporelle et qui sont souvent inconnus. Ces facteurs peuvent être assimilés à des perturbations externes (ou "sources") affectant le système considéré. Dans cette section, nous rappelons quelques résultats sur les sources, leur détection et la manière de les reconstruire régionalement via la notion de capteurs.

Pour décrire ces notions, considérons un espace de Hilbert V tel que $V \subset L^2(\Omega) \subset V'$ avec V' dénote le dual de V . Sur $\Omega \times I$, on se donne un système (S) dont l'état z dans $L^2(0, T, V)$ est supposé perturbé par une "source" inconnue s . On note $z = z_s$ l'état du système (S) qu'on suppose augmenté d'une sortie (E) .

4- a Sources et détection

Une source peut être considérée comme étant une perturbation connue ou inconnue, dont l'effet est observé à l'aide d'un capteur. Par analogie avec les paramètres d'entrée-sortie (actionneurs - capteurs), une source est caractérisée par sa localisation et son intensité. Par conséquent, différents types de sources ont été introduits en considérant les définitions suivantes [3, 5–7]

Définition 1.7

Une source s est un triplet (E, g, J) tel que :

1. $E(\cdot) : t \in J \longrightarrow E(t) \subset \overline{\Omega}$, définit le support géométrique de la source s à l'instant t .
2. $g(\cdot, \cdot) : x \in E(t) \longrightarrow g(x, t)$, désigne l'intensité de l'excitation au point x à l'instant t .
3. $J = \{t \in I : g(\cdot, t) \neq 0 \text{ sur } E(t)\}$, dénote le support temporel de g .

Définition 1.8

1. La source s est dite interne (respectivement frontière) si $E(t) \subset \Omega$ (respectivement $E(t) \subset \Gamma$) $\forall t \in J$.
2. La source s est dite zone (respectivement ponctuelle) si son support $E(t)$ est une région de mesure non nulle (respectivement un singleton) de $\overline{\Omega}$ $\forall t \in J$.
3. La source s est dite persistante si $\mu(J) > 0$, et elle est dite instantanée si $J \neq \emptyset$ et $\mu(J) = 0$ avec μ désigne la mesure de Lebesgue.

Notons par Ξ l'ensemble des sources. Dans toute la suite de ce travail on se limitera au cas d'une source interne. Ainsi, si on suppose que $g(x, t) \in W$ avec W est un sous espace de $\mathbb{R}^m$ pour $m \in \mathbb{N}^*$, on remarque que toute source $s = (E, g, J) \in \Xi$ peut être identifiée avec g car E et J seront déterminer dès que g est connue. Pour cela nous considérons l'espace Ξ tel que $\Xi \subset \mathcal{Fct}(\Omega \times I, W)$ avec $\mathcal{Fct}(\Omega \times I, W)$ désigne l'espace des fonctions $g : \Omega \times I \longrightarrow W$.

Cela étant, et pour toute zone σ fixée dans Ω et de mesure supposée non nulle considérons l'ensemble Ξ_σ des sources localisées sur σ donné par

$$\Xi_\sigma = \{s_\sigma = (E, g, J) \in \Xi : E(t) \subset \sigma, \forall t \in J\}$$

Notons par z_{s_σ} l'état du système (S) perturbé par une source $s_\sigma \in \Xi_\sigma$, et (E) la sortie associée à (S) .

$$(E) : \quad y_{s_\sigma}(t) = Cz_{s_\sigma}(t)$$

avec $y_{s_\sigma} \in L^2(0, T, Y)$ et $C \in \mathcal{L}(V, Y)$, où Y est un espace de Hilbert séparable (espace d'observations). Nous avons la définition suivante [7]

Définition 1.9

La source s_σ est dite régionalement détectable (ou σ -détectable) si la connaissance de (S) -(E) permet la reconstruction de s_σ .

Autrement dit ; si nous considérons l'opérateur Q_σ défini par

$$Q_\sigma : s_\sigma \in \Xi_\sigma \longmapsto y_{s_\sigma} \in L^2(0, T, Y) \quad (1.4.1)$$

alors s_σ est σ -détectable si l'opérateur Q_σ est injectif.

L'opérateur Q_σ ainsi défini, dépend de celui de l'observation C qui fait intervenir les paramètres du capteur, et c'est pour cela qu'il existe une liaison entre capteur et détection régionale d'une source inconnue, d'où la définition suivante [7]

Définition 1.10

Un capteur est dit σ -espion s'il permet la détection régionale d'une source inconnue $s_\sigma \in \Xi_\sigma$

Il a été montré [7] qu'il existe des systèmes pour lesquels des capteurs utilisés pour accueillir des informations sont σ -espions (régionalement espions) sans qu'ils soient Ω -espions (globalement espions). En effet, ceci revient à ce que l'opérateur Q_σ donné en (1.4.1) est injectif ou pas.

D'autre part, le résultat suivant nous donne le lien existant entre les sources et l'observabilité régionale [7].

Proposition 1.11

Tout capteur σ -stratégique est un capteur σ -espion.

La réciproque est fausse.

4- b Reconstruction d'une source régionalement détectable

Nous avons vu que le principe de la détection régionale d'une source inconnue sur σ consiste à pouvoir reconstruire cette source en exploitant les observations recueillies via une sortie du système perturbé par une telle source. En d'autres termes, cela revient à étudier l'injection de l'opérateur Q_σ donné en (1.4.1).

Maintenant, nous allons donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une source inconnue soit régionalement détectable (et donc pour que le capteur utilisé soit régionalement espion), puis nous montrerons dans le cas où le système (S) est linéaire comment peut-t-on la reconstruire.

Soit donc $\tilde{s}_\sigma = (\tilde{E}, \tilde{g}, \tilde{J}) \in \Xi_\sigma$ une source localisée sur σ , $y_{\tilde{s}_\sigma}$ l'observation associée au système perturbé par $\tilde{s}_\sigma$ et Υ_σ l'application définie par

$$\Upsilon_\sigma : s_\sigma \in \Xi_\sigma \longmapsto \|y_{s_\sigma} - y_{\tilde{s}_\sigma}\|_{L^2(0, T, Y)}^2$$

Alors l'étude du problème de la détection régionale de $\tilde{s}_\sigma$ se ramène à celle du problème d'optimisation suivant

$$\begin{cases} \inf \Upsilon_\sigma(s_\sigma) \\ s_\sigma \in \Xi_\sigma \end{cases}$$

Remarquons que pour $\tilde{s}_\sigma \in \Xi_\sigma$, on a $\Upsilon_\sigma(\tilde{s}_\sigma) = 0$, et donc l'ensemble défini par

$$\begin{aligned} G(\hat{s}_\sigma) &= \{\hat{s}_\sigma \in \Xi_\sigma : \Upsilon_\sigma(\hat{s}_\sigma) = \inf_{s_\sigma \in \Xi_\sigma} \Upsilon_\sigma(s_\sigma)\} \\ &= \{\hat{s}_\sigma \in \Xi_\sigma : Q_\sigma(\hat{s}_\sigma) = Q_\sigma(\tilde{s}_\sigma)\} \end{aligned}$$

est non vide. De ce fait nous avons le résultat suivant [7].

Proposition 1.12

La source $\tilde{s}_\sigma$ est σ -détectable si et seulement si $G(\hat{s}_\sigma) = \{\tilde{s}_\sigma\}$

On se place maintenant dans le cas où le système (S) est linéaire, autonome et perturbé par une source inconnue s_σ .

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + g(t) & 0 < t < T \\ z(0) = z_0 \in \mathcal{D}(A) \end{cases} \quad (1.4.2)$$

avec $g \in L^2(0, T, W)$ désigne l'intensité de la source s_σ , W est un espace de Hilbert tel que $W \subset L^2(\Omega) \subset W'$ et A engendre sur $\mathcal{L}(V, W)$ un semi groupe fortement continu $(S(t))_{t \in I}$. Pour étudier le problème de la reconstruction de la source s_σ , on suppose que le système (1.4.2) est augmenté de la sortie

$$y_{s_\sigma}(t) = Cz_{s_\sigma}(t) \quad (1.4.3)$$

En tenant compte du fait que la source s_σ est localisée sur la zone σ , et en introduisant l'opérateur adjoint χ_σ^* de la restriction à cette zone donné en (1.2.5), la solution du système (1.4.2) s'écrit

$$z_{s_\sigma}(t, u) = S(t)z_0 + \int_0^t S(t-r)g(r)dr = S(t)z_0 + \int_0^t S(t-r)\chi_\sigma^*g(r)dr$$

Donc l'opérateur Q_σ (expression (1.4.1)) est donné dans ce cas par

$$Q_\sigma s_\sigma = CS(t)z_0 + \int_0^t CS(t-r)\chi_\sigma^*g(r)dr$$

Rappelons qu'on est entrain d'étudier la possibilité de la reconstruction de la source s_σ , c'est pour cela qu'il fallait supposer qu'elle est à priori σ -détectable; ce qui revient à supposer que Q_σ est injectif. Cela étant, la semi norme définie par

$$s_\sigma \in \Xi_\sigma \longmapsto \|s_\sigma\|_{F_\sigma} = \|Q_\sigma s_\sigma\|_{L^2(0,T,Y)}$$

se prolonge en une norme. Donc si F_σ désigne le complété de Ξ_σ par rapport à cette norme, alors F_σ est bien un espace de Hilbert muni du produit scalaire suivant

$$\ll s_\sigma, \bar{s}_\sigma \gg_{F_\sigma} = \langle Q_\sigma s_\sigma, Q_\sigma \bar{s}_\sigma \rangle_{L^2(0,T,Y)}$$

Pour $s_\sigma = (E, g, J) \in \Xi_\sigma$, considérons l'opérateur Λ_σ défini par

$$\begin{aligned} \Lambda_\sigma &= Q_\sigma^* Q_\sigma : \Xi_\sigma \longrightarrow \Xi_\sigma \\ s_\sigma &\longmapsto \int_0^T S^*(r - \cdot) C^* C \int_0^r S(r - q) g(q) dq dr \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

L'opérateur Λ_σ admet un prolongement unique en un isomorphisme de F_σ dans son dual F'_σ , et nous avons

$$\begin{cases} \ll \Lambda_\sigma s_\sigma, \bar{s}_\sigma \gg_{\Xi_\sigma} = \ll s_\sigma, \bar{s}_\sigma \gg_{F_\sigma} & \forall s_\sigma, \bar{s}_\sigma \in F_\sigma \\ \|\Lambda_\sigma s_\sigma\|_{F'_\sigma} = \|s_\sigma\|_{F_\sigma} & \forall s_\sigma \in F_\sigma \end{cases}$$

où le produit scalaire $\ll \cdot, \cdot \gg$ est considéré sur l'espace Ξ_σ au sens suivant : Si $s_\sigma = (E, g, J)$ et $\bar{s}_\sigma = (\bar{E}, \bar{g}, \bar{J})$ deux sources dans Ξ_σ , alors nous avons

$$\begin{aligned} \ll s_\sigma, \bar{s}_\sigma \gg_{\Xi_\sigma} &= \int_{(J \cap \bar{J})^z} \int_{(E(t) \cap \bar{E}(t))^z} g(x, t) \bar{g}(x, t) dx dt \\ &+ \int_{(J \cap \bar{J})^z} \sum_{x_i \in (E(t) \cap \bar{E}(t))^p} g(x_i, t) \bar{g}(x_i, t) dt \\ &+ \sum_{t_j \in (J \cap \bar{J})^p} \int_{(E(t) \cap \bar{E}(t))^z} g(x, t_j) \bar{g}(x, t_j) dx \\ &+ \sum_{t_j \in (J \cap \bar{J})^p} \sum_{x_i \in (E(t) \cap \bar{E}(t))^p} g(x_i, t_j) \bar{g}(x_i, t_j) \end{aligned}$$

où, si E est le support de la source, alors les notations E^z et E^p qui paraissent dans les signes somme et intégrale, désignent respectivement les parties zones et ponctuelles du support E . Avec toutes ces considérations, nous avons le résultat suivant [7].

Proposition 1.13

Soit $s_\sigma = (E, g, J) \in \Xi_\sigma$. Si Q_σ est injectif, alors s_σ est reconstruite d'une manière unique à partir de l'observation y_{s_σ} , et nous avons

$$g = Q_\sigma^\dagger y_{s_\sigma}$$

où $Q_\sigma^\dagger = \Lambda_\sigma^{-1} Q_\sigma^*$ est le pseudo inverse de Q_σ

Preuve : Elle découle du fait que Λ_σ est un isomorphisme. ■

Illustrons les résultats de cette section sur les sources et détection régionale à travers l'exemple monodimensionnel suivant [7].

Exemple

Pour $\Omega =]0, 1[$ considérons le système décrit par l'équation d'état suivante

$$\begin{cases} \dot{z}(x, t) = \Delta z(x, t) + g(x, t) & \Omega \times]0, T[\\ z(0, t) = z(1, t) = 0 &]0, T[\\ z(x, 0) = 0 & \Omega \end{cases} \quad (1.4.5)$$

avec g désigne l'intensité de la source inconnue $s_\sigma = (E, g, J) \in \Xi_\sigma$ localisée sur σ , et qui excite le système (1.4.5) ainsi supposé augmenté de la fonction de mesure

$$y_{s_\sigma}(t) = C z_{s_\sigma}(t) = \langle h(\cdot), z_{s_\sigma}(\cdot, t) \rangle_{L^2(D)}$$

avec z_{s_σ} est la solution du système (1.4.5) et (D, h) est un capteur qu'on suppose σ -espion (i.e. la source est σ -détectable).

On sait que l'opérateur linéaire $A = \Delta$ engendre sur $L^2(\Omega)$ un semi groupe fortement continu $(S(t))_{t \in I}$ défini par

$$S(t)z = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{\lambda_k t} \langle z, \varphi_k \rangle_{L^2(0,1)} \varphi_k$$

avec

$$\varphi_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x) \quad \text{et} \quad \lambda_k = -k^2 \pi^2$$

Plaçons nous dans le cas où l'intensité g est stationnaire sur σ ; $g(x, t) \equiv g(x) \forall x \in \sigma$ et $\forall t \in I$. De ce fait elle peut s'écrire sous la forme

$$g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \varphi_k(x), \quad \text{avec} \quad \alpha_k = \langle g, \varphi_k \rangle_{L^2(\sigma)} \quad (1.4.6)$$

Le fait de dire que le capteur (D, h) est σ -espion, revient à dire que la source s_σ est σ -détectable, par conséquent, Q_σ est injectif. Q_σ est défini pour tout $s_\sigma \in \Xi_\sigma$ par

$$(Q_\sigma s_\sigma)(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle h, \varphi_k \rangle_{L^2(D)} \int_0^t e^{\lambda_k(t-r)} \langle g, \varphi_k \rangle_{L^2(\sigma)} dr$$

L'opérateur adjoint de Q_σ s'exprime sous la forme

$$(Q_\sigma^* y_{s_\sigma})(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_t^T e^{\lambda_k(r-t)} y_{s_\sigma}(r) dr \right) \langle h, \varphi_k \rangle_{L^2(D)} \chi_\sigma \varphi_k$$

Alors ceci permet de définir l'opérateur $\Lambda_\sigma = Q_\sigma^* Q_\sigma$ comme suit

$$\begin{aligned} \Lambda_\sigma s_\sigma(t) &= \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=1}^{+\infty} \left(\int_t^T \int_0^r e^{\lambda_j(r-t)} e^{\lambda_k(r-\tau)} \langle g, \varphi_l \rangle_{L^2(\sigma)} d\tau dr \right) \\ &\quad \times \langle \varphi_k, \varphi_l \rangle_{L^2(\sigma)} \langle h, \varphi_j \rangle_{L^2(D)} \langle h, \varphi_k \rangle_{L^2(D)} \chi_\sigma \varphi_j \end{aligned}$$

Donc d'après la proposition 1.13, la source s_σ sera reconstruite de telle sorte que

$$\Lambda_\sigma s_\sigma = Q_\sigma^* y_{s_\sigma}$$

En tenant compte de la formule (1.4.6) et de la linéarité de Λ_σ nous obtenons

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \Lambda_\sigma \chi_\sigma \varphi_k = Q_\sigma^* y_{s_\sigma}$$

En multipliant scalairement les deux membres de cette égalité par φ_l on aura

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \langle \Lambda_\sigma \chi_\sigma \varphi_k, \varphi_l \rangle_{L^2(\sigma)} = \langle Q_\sigma^* y_{s_\sigma}, \varphi_l \rangle_{L^2(\sigma)}$$

Posons

$$\begin{cases} a_{kl} = \langle \Lambda_\sigma \chi_\sigma \varphi_k, \varphi_l \rangle_{L^2(\sigma)} \\ b_k = \langle Q_\sigma^* y_{s_\sigma}, \varphi_l \rangle_{L^2(\sigma)} \end{cases}$$

Alors pour un entier N assez grand, le problème de la reconstruction de la source s_σ à partir de l'observation y_{s_σ} est équivalent à celui de la résolution d'un système linéaire dont les inconnus sont les composantes α_k de l'intensité g dans la base $(\varphi_k)_k$. Ce système est donné par

$$\sum_{l=1}^N a_{kl} \alpha_l \simeq b_k, \quad \forall k = 1, \dots, N \quad (1.4.7)$$

Donc d'après la proposition 1.13, la matrice d'éléments a_{kl} est symétrique définie positive, et par conséquent la reconstruction de la source s_σ sur σ ait lieu en résolvant le système (1.4.7) permettant de déterminer les α_k d'une manière unique.

Par analogie avec les deux sections précédentes, nous n'avons mis l'accent dans cette troisième que sur quelques résultats concernant les notions de source, sa détection régionale et aussi la manière de sa reconstruction lorsque le capteur utilisé pour accueillir des observations est supposé régionalement espion. Nous nous sommes limités au cas où la source est interne, alors qu'il existe plusieurs autres travaux où le cas frontière a été largement étudié, et aussi différents exemples et simulations y ont été considérés [7, 84].

Conclusion :

A partir de tout ce qui précède, on constate que la notion d'analyse régionale des systèmes distribués présente quelques intérêts dans le sens où, en un premier lieu, c'est une notion plus proche des préoccupations concrètes (maintien d'une température juste sur une région, etc.), et lors d'un transfert régional, le coût nécessaire pour atteindre régionalement un objectif donné est réduit.

Dans ce qui suit, nous allons voir comment a été exploitée cette notion pour pouvoir étudier d'autres concepts d'analyse et contrôle des systèmes distribués.

Chapitre 2

Etalabilité, vulnérabilité et remédiabilité

1 Introduction

La notion d'analyse régionale a mis en évidence le rôle important que joue la variable spatiale dans l'analyse et le contrôle des systèmes distribués. Cela a permis d'ouvrir la voie vers l'introduction d'autres concepts tels que : l'étalabilité, la vulnérabilité et la remédiabilité. L'étude de ces concepts tient compte, outre les différents éléments définissant le système considéré, d'une combinaison de différents supports spatiaux qui sont de nature fixe et/ou mobile, et qui sont tous contenus dans le domaine géométrique global sur lequel évolue le système.

Dans le présent chapitre que nous débuterons par un rappel sur les concepts d'étalabilité et de vulnérabilité, nous allons considérer dans le cas des systèmes linéaires, le problème de la remédiabilité régionale à travers la vulnérabilité en essayant de répondre à la question suivante :

Comment compenser sur une région donnée σ l'effet d'une perturbation "étalable" à partir d'une autre zone ω ?

2 Etalabilité

Dans cette section nous rappelons quelques généralités sur l'étalabilité au sens de l'inclusion et au sens des aires, puis nous étudions le problème de contrôle relatif à ces deux types d'étalabilité. Pour illustrer ce concept, différents exemples sont présentés. De ce fait considérons les notations suivantes

- Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
- $I =]t_0 = 0, T[$ un intervalle de temps ; t_0 l'instant initial et T l'instant final.
- $J = \{(s, t) \in I \times I : s \geq t\}$
- (S) un système décrivant un phénomène spatio-temporel.
- $z(x, t)$ l'état du système (S) défini sur $\Omega \times I$.
- $z_0(x)$ son état initial défini sur Ω .
- $\mathcal{P}$ une propriété donnée.

Avec ces notations considérons dans Ω les sous ensembles donnés par

$$\omega_t = \{x \in \Omega : \mathcal{P}z(x, t)\} \quad (2.2.1)$$

ω_t représente l'ensemble des points $x \in \Omega$ où l'état du système (S) satisfait la propriété $\mathcal{P}$ à l'instant $t \in I$.

A propos de la propriété $\mathcal{P}$, elle peut être quantitative ou qualitative, et ceci dépend du phénomène à étudier. A titre d'exemple, si p est un profil désiré sur Ω on peut choisir $\mathcal{P}$ comme suit

$$\mathcal{P}z(x, t) \Leftrightarrow z(x, t) = p(x) \quad (2.2.2)$$

Un autre choix qui sera intéressant dans l'étude mathématique de l'étalabilité est celui où $p = 0$

$$\mathcal{P}z(x, t) \Leftrightarrow z(x, t) = 0 \quad (2.2.3)$$

Et plus généralement si $\mathcal{K}$ dénote l'ensemble des contraintes satisfaites par l'état z alors un troisième choix est tel que

$$\mathcal{P}z(x, t) \Leftrightarrow z(x, t) \in \mathcal{K}, \quad x \in \Omega, t \in I \quad (2.2.4)$$

Dans toute la suite on suppose que le sous domaine initial ω_0 est non vide.

2- a Etalabilité au sens usuel

L'étalabilité au sens de l'inclusion (usuel) concerne la croissance dans le temps des sous domaines définis en (2.2.1). De ce fait nous avons les définitions suivantes [53].

Définition 2.1

(i) On dit que le système (S) est $\mathcal{P}$ -étalable pendant I à partir de ω_0 si la famille $(\omega_t)_{t \in I}$ est croissante au sens de l'inclusion, i.e.

$$\omega_t \subset \omega_s \quad \forall (s, t) \in J$$

- (ii) Si la propriété $\mathcal{P}$ est donnée par (2.2.3), alors (S) est dit nul étalable.
- (iii) Le système (S) est dit $\mathcal{P}$ -résorbable pendant I à partir de ω_0 si la famille $(\omega_t)_{t \in I}$ est décroissante au sens de l'inclusion.

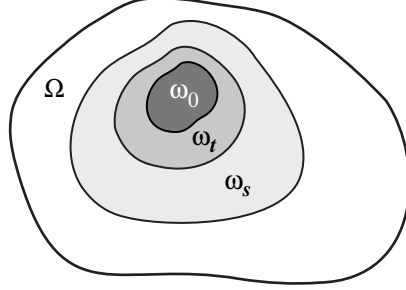


FIG. 2.2.1 – Etalabilité au sens de l'inclusion

L'étalabilité d'un système dépend naturellement de la dynamique du système, des données initiales, des sources pouvant l'exciter, etc. Illustrons cette définition par un exemple. Nous allons voir, d'abord, la dépendance de l'étalabilité avec le choix de la distribution spatiale initiale dans ω_0 lorsque le système est en évolution libre. Posons $t_0 = 0$ et soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0 & x > 0; \quad 0 < t < T \\ z(0, t) = 0 & 0 < t < T \\ z(x, 0) = z_0(x) & x > 0 \end{cases} \quad (2.2.5)$$

L'opérateur linéaire $A = \frac{\partial}{\partial x}$ définissant le système (2.2.5) génère un semi groupe fortement continu $(S(t))_{t \geq 0}$ dans $L^2(0, \infty)$ donné par [38]

$$(S(t)f)(x) = \begin{cases} f(x-t) & \text{si } x \geq t \\ 0 & \text{si } x < t \end{cases} \quad (2.2.6)$$

et la solution du système (2.2.5) est donnée par

$$z(., t) = S(t)z_0 \quad (2.2.7)$$

soit encore

$$z(x, t) = \begin{cases} z_0(x-t) & \text{si } x \geq t \\ 0 & \text{si } x < t \end{cases} \quad (2.2.8)$$

S'intéressant au cas de la nulle étalabilité, nous avons

$$z(x, t) = 0 \iff \begin{cases} z_0(x-t) = 0 & \text{si } x \geq t \\ \text{ou} \\ 0 \leq x < t \end{cases} \quad (2.2.9)$$

ce qui donne

$$\omega_t = \{x \in [0, \infty[\mid z(x, t) = 0\} = [0, t] \cup \{(t + \omega_0) \cap] t, +\infty[\}$$

Ainsi pour $\omega_0 \subset [0, +\infty[$, on a $\omega_t = [0, t] \cup (t + \omega_0)$. On remarque que ω_t dépend de ω_0 . En effet, pour cela distinguons trois cas.

Cas 1 : ω_0 réduit à un point $\neq 0$; $\omega_0 = \{b\}$ où $b > 0$, alors $\omega_t = [0, t] \cup \{b+t\}$. Il est clair que dans ce cas le système (2.2.5) n'est pas étalable à partir de $\omega_0 = \{b\}$ car pour tout $s \geq t$, on a $[0, t] \subset [0, s]$ mais $\{b+t\}$ n'appartient pas nécessairement à ω_s .

Cas 2 : ω_0 réduit à $\{0\}$; $\omega_0 = \{0\}$ ($b = 0$), alors $\omega_t = [0, t]$. Dans ce cas (S) est étalable.

Cas 3 : ω_0 est un intervalle non vide $\omega_0 = [a, b]$, dans ce cas $\omega_t = [0, t] \cup [a + t, b + t]$; le système (2.2.5) n'est donc pas étalable si $0 < a < b$. Si $a = 0 < b$ alors $\omega_t = [0, b + t]$ et le système est étalable.

Remarque 2.1

- (i) Si on prend $\omega_0 = \emptyset$ dans cet exemple, alors on a $\omega_t = [0, t]$, et donc le système est étalable non pas à partir de ω_0 mais à partir de la condition au limite imposée. C'est pour cela que nous considérons l'hypothèse $\omega_0 \neq \emptyset$ pour dire dans la définition 2.1, que l'étalabilité démarre à partir de cet ensemble initial.
- (ii) Si la propriété $\mathcal{P}$ est donnée par (2.2.2) avec $p \neq 0$, alors il est possible par le changement de variable d'état $y = z - p$ de se ramener au cas de la nulle étalabilité.

Le résultat suivant nous permet de caractériser les systèmes nuls étalables [53].

Proposition 2.1

- (S) est nul étalable si et seulement si son état z vérifie l'une des conditions :
- (i) il existe $\eta : \Omega \times J \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$z(x, s) = \eta(x, s, t)z(x, t), \quad \forall x \in \Omega, \forall (s, t) \in J \quad (2.2.10)$$

- (ii) il existe $\xi : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial(\xi z)}{\partial t}(x, t) + z^2(x, t) = 0 & \Omega \times I \\ \xi(x, T)z(x, T) = 0 & \Omega \end{cases} \quad (2.2.11)$$

Preuve :

(i) Si le système (S) est nul étalable, alors il suffit de prendre

$$\eta(x, s, t) = \begin{cases} \frac{z(x, s)}{z(x, t)} & x \notin \omega_t \\ \text{constante} & x \in \omega_t \end{cases}$$

Inversement, si η existe, alors pour $x \in \omega_t$, c'est à dire $z(x, t) = 0$, nous avons $z(x, s) = \eta(x, s, t)z(x, t) = 0$, et donc $x \in \omega_s$. D'où la nulle étalabilité de (S) .

(ii) Si (2.2.11) est vérifiée, alors cela est équivalent à

$$\xi(x, t)z(x, t) = \int_t^T z^2(x, s)ds$$

Par conséquent, si $z(x, t) = 0$, alors $z(x, s) = 0$ pour tout $(s, t) \in J$ (intégrale d'une fonction positive). Ceci veut dire que le système (S) est nul étalable.

Réciproquement, il suffit de considérer la fonction ξ telle que

$$\xi(x, t) = \begin{cases} \frac{\int_t^T z^2(x, s)ds}{z(x, t)} & x \notin \omega_t \\ \text{constante} & x \in \omega_t \end{cases}$$

■

Remarque 2.2

- (i) Dans (2.2.11), on peut remplacer z^2 par toute autre fonction positive en z .
- (ii) L'étalabilité d'un système dépend essentiellement de sa dynamique, de la propriété $\mathcal{P}$ et du domaine initial w_0 .
- (iii) La condition (2.2.11) est une caractérisation de la nulle étalabilité des systèmes linéaires. Ce qui montre la difficulté de l'approche mathématique de l'étalabilité.

Plusieurs exemples sur l'étalabilité au sens usuel ont été donnés dans [53, 55]. Noter aussi que la notion de l'étalabilité faible a été largement étudié; ainsi sont introduites les notions du temps et de la vitesse d'étalement [101].

Le fait de définir l'étalabilité à partir d'une croissance au sens de l'inclusion constitue une limitation au niveau des applications, c'est pour cela que nous allons en considérer une extension.

2- b Etalabilité au sens des aires (ou $\mathcal{A}$ -étalabilité)

Les résultats de ce paragraphe trouvent leurs motivations dans de nombreux problèmes dont l'étalabilité au sens usuel reste un peu restrictive pour les décrire. A titre d'exemple, s'il s'agit d'un problème de dynamique de végétation, il se peut qu'on gagne un certain nombre de domaines boisés, mais aussi on en perd d'autres. Cela sera décrit en s'intéressant aux mesures des sous domaines $(\omega_t)_{t \in I}$ où une certaine propriété donnée est satisfaite. Notons μ la mesure de Lebesgue et $J = \{(s, t) \in I \times I : s \geq t\}$. Nous avons la définition suivante [23].

Définition 2.2

Un système (S) est dit $\mathcal{A}$ -étalable au sens des aires pendant I à partir de ω_0 si

$$\mu(\omega_t \setminus \omega_s) \leq \mu(\omega_s \setminus \omega_t) \quad \forall (s, t) \in J.$$

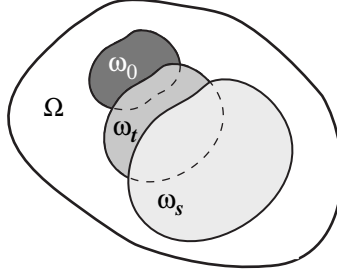


FIG. 2.2.2 – Etalabilité au sens des aires

A partir de cette définition nous avons les remarques suivantes

Remarque 2.3

- (i) La surface "gagnée" est supérieure à celle "perdue" pendant l'intervalle de temps $[t, s]$.
- (ii) Si $\mu(\Omega) < \infty$, alors la définition 2.2 est équivalente à $\mu(\omega_t) \leq \mu(\omega_s) \quad \forall (s, t) \in J$. La réciproque n'est pas vraie [23].
- (iii) L'étalabilité au sens de l'inclusion entraîne celle au sens des aires. La réciproque n'est pas vraie comme le montre l'exemple suivant [23].

Exemple

Pour $\Omega =]0, a[$ avec a suffisamment grand considérons le système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t}(x, t) = b(x, t)z(x, t) & \Omega \times I \\ z(x, 0) = z_0(x) = h(x+1) & \Omega \end{cases} \quad (2.2.12)$$

avec b et h sont définies respectivement par

$$b(x, t) = \begin{cases} \frac{x+1}{(t-x)^2} & 0 < \frac{x+1}{t+1} < 1 \\ 0 & 1 \leq \frac{x+1}{t+1} \leq 2 \\ -\frac{x+1}{(2t-x+1)^2} & \frac{x+1}{t+1} > 2 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-x}\right) & 0 < x < 1 \\ 0 & 1 \leq x \leq 2 \\ \exp\left(\frac{1}{2-x}\right) & x > 2 \end{cases}$$

La solution de (2.2.12) est donnée par

$$z(x, t) = h(g(x, t)), \quad \text{avec } g(x, t) = \frac{x+1}{t+1}$$

soit encore, en utilisant l'expression de h

$$z(x, t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1 - \frac{x+1}{t+1}}\right) & 0 < \frac{x+1}{t+1} < 1 \\ 0 & 1 \leq \frac{x+1}{t+1} \leq 2 \\ \exp\left(\frac{1}{2 - \frac{x+1}{t+1}}\right) & \frac{x+1}{t+1} > 2 \end{cases}$$

Dans le cas de la nulle étalabilité ; $\omega_t = \{x \in]0, a[: z(x, t) = 0\}$, nous avons

$$\omega_t = \{x \in]0, a[: 1 \leq \frac{x+1}{t+1} \leq 2\} = [t, 2t+1] \quad \forall t \leq \frac{a-1}{2}$$

Comme $\mu(\Omega) = a < \infty$ et $\mu(\omega_t) = t + 1$, alors le système (2.2.12) est étalable au sens des aires sans qu'il le soit au sens de l'inclusion (voir figure 2.2.3)

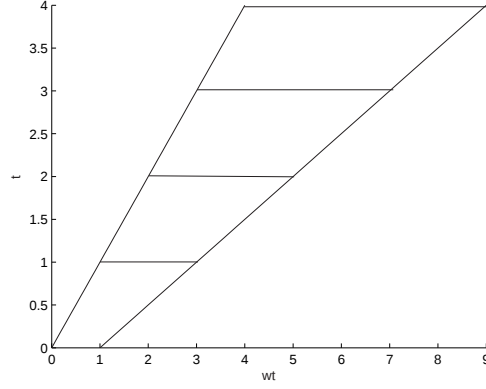


FIG. 2.2.3 – Système $\mathcal{A}$ -étalable sans qu'il le soit au sens de l'inclusion

L'étude de la $\mathcal{A}$ -étalabilité concerne celle de la variation des mesures des $(\omega_t)_{t \in I}$, par conséquent il serait utile de décrire l'évolution géométrique de ces sous domaines. De ce fait, nous allons introduire des familles de transformations permettant de décrire cette évolution, et donc des caractérisations de l'étalabilité seront données. Sans perdre de généralité, considérons le cas de la nulle étalabilité et supposons que $\mu(\Omega) < \infty$. Nous avons alors la définition suivante [23].

Définition 2.3

On dit qu'une famille de transformations $(F(., s, t))_J : \Omega \times J \rightarrow \Omega$ est adaptée à l'évolution du système (S) s'il existe une fonction $\eta : \Omega \times J \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$z(F(x, s, t), s) = \eta(x, s, t)z(x, t), \quad \forall x \in \Omega, \forall (s, t) \in J \quad (2.2.13)$$

Une telle famille vérifie pour tout $(s, t) \in J$, $F(\omega_t, s, t) \subseteq \omega_s$, de plus si cette famille existe alors elle n'est pas unique [23]. Le résultat suivant permet de caractériser la classe de ces familles de transformations [23].

Proposition 2.2

Une famille de transformations $(F(., s, t))_J$ est adaptée à l'évolution du système (S) si et seulement s'il existe $\xi : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$ solution de l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial(\xi z)}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} \int_t^T z^2(F(x, s, t), s) ds = 0 \\ \xi(x, T)z(x, T) = 0 \end{cases} \quad (2.2.14)$$

Pour établir une relation entre l'étabilité au sens des aires et les familles de transformations adaptées, nous rappelons le théorème suivant [23].

Théorème 2.1

Un système (S) est étalable au sens des aires si et seulement s'il existe une famille de transformations $(F(., s, t))_J$ adaptée à (S) et vérifiant

$$\mu(F(\omega_t, s, t)) \leq \mu(\omega_s), \quad \forall (s, t) \in J$$

Si de plus $(F(., s, t))_J$ est une famille de difféomorphismes sur Ω , cela est équivalent à

$$\int_{\omega_t} [|\mathcal{J}F(x, s, t)| - 1] dx \geq 0, \quad \forall (s, t) \in J \quad (2.2.15)$$

ce qui est équivalent, dans le cas où $F(\omega_t, s, t) = \omega_s$, à

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\omega_0} |\mathcal{J}F(x, s, 0)| dx \geq 0, \quad \forall (s, t) \in J \quad (2.2.16)$$

Avec $\mathcal{J}F(x, s, t)$ est le jacobien de $F(x, s, t)$ au point $x \in \Omega$.

Terminons cette partie sur la $\mathcal{A}$ -étalabilité par la remarque suivante

Remarque 2.4

(i) Pour $F(., s, t) = Id_\Omega$ (injection canonique de ω_t dans ω_s), on retrouve le problème de l'étabilité au sens de l'inclusion. Dans ce cas, le système (S) est étalable si et seulement si la famille de transformations (Id_Ω) est lui adaptée. En effet, la condition (2.2.15) (ou (2.2.16)) est vérifiée dans ce cas, car nous avons $|\mathcal{J}F(x, s, t)| = 1$ sur Ω . Ceci montre donc que la détermination de la famille de transformations $F(., s, t)$ est important.

(ii) Vu le rôle important que jouent dans l'étude de l'étabilité, les familles de transformations présentent une difficulté au niveau de leur détermination. Dans certains cas particuliers, on peut décrire l'évolution géométrique des sous domaines $(\omega_t)_{t \in I}$ à travers l'évolution de leurs frontières [24, 25].

2- c Etalabilité et contrôle

Concrètement, il existe des phénomènes dont l'expansion spatiale relève d'une grande importance (couvert végétal par exemple), mais il arrive parfois que ceux-ci sont incapables de satisfaire une telle expansion (étalabilité). De ce fait, on se pose le problème suivant : Peut-on trouver des actions (contrôles) permettant de rendre

ces phénomènes étalables ?

Pour décrire ceci, considérons un système distribué qui est par nature non étalable, et voyons si ce système peut le devenir sous l'effet d'un certain contrôle. Commençons par définir ce type de contrôle [23, 53].

Définition 2.4

Un contrôle est dit étaleur (respectivement $\mathcal{A}$ -étaleur) si le système qu'il excite est étalable au sens usuel (respectivement au sens des aires).

En tenant compte de cette définition et du premier point de la remarque 2.4, nous nous intéresserons à l'étude du contrôle étaleur au sens des aires. Illustrons ce type de contrôle à travers l'exemple suivant [23].

Exemple

Pour $\Omega =]0, a[$ considérons le système décrit par l'équation d'état suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t}(x, t) = b(x, t)z(x, t) + v(x, t) & \Omega \times I \\ z(x, 0) = z_0(x) = h(x + 1) & \Omega \end{cases} \quad (2.2.17)$$

avec b et h sont définies respectivement par

$$b(x, t) = \begin{cases} \frac{x - 2t - 1}{(x - t)^2(t + 1)^2} & 0 < x < t \\ 0 & t \leq x \leq t + \frac{1}{t + 1} \\ -\frac{x - 2t - 1}{[1 - (x - t)(t + 1)]^2} & x > t + \frac{1}{t + 1} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1 - x}\right) & 0 < x < 1 \\ 0 & 1 \leq x \leq 2 \\ \exp\left(\frac{1}{2 - x}\right) & x > 2 \end{cases}$$

Si on note $z(., ., v)$ la solution du système (2.2.17), alors dans le cas autonome (i.e. $v = 0$) cette solution est donnée pour tout $(x, t) \in \Omega \times I$ par

$$z(x, t, 0) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{(x-t)(t+1)}\right) & 0 < x < t \\ 0 & t \leq x \leq t + \frac{1}{t+1} \\ \exp\left(\frac{1}{1-(x-t)(t+1)}\right) & x > t + \frac{1}{t+1} \end{cases}$$

Pour le cas de la nulle étalabilité, nous obtenons

$$\omega_t^0 = \{x \in]0, a[: z(x, t, 0) = 0\} = [t, t + \frac{1}{t+1}]$$

Dans ce cas on a $\mu(\omega_t^0) = \frac{1}{t+1}$ qui est une fonction décroissante en t , donc le système autonome n'est pas $\mathcal{A}$ -étalable. Il est résorbable. (voir figure 2.2.4).

Considérons maintenant le système (2.2.17) excité par le contrôle v tel que

$$v(x, t) = \begin{cases} \left[\frac{2(x+1)}{(2x-t)^2} - \frac{x-2t-1}{(x-t)^2(t+1)^2} \right] \exp\left(\frac{1}{\frac{x-t/2}{1+t/2}}\right) & D_1 \\ 0 & D_2 \\ \left[-\frac{x+1}{2(t-x+1)^2} - \frac{x-2t-1}{(1-(x-t)(t+1))^2} \right] \exp\left(\frac{1}{1-\frac{x-t/2}{1+t/2}}\right) & D_3 \end{cases}$$

où $D_1 =]0, t/2[$, $D_2 = [t/2, t+1]$ et $D_3 =]t+1, a[$. Alors nous avons

$$z(x, t, v) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{\frac{x-t/2}{1+t/2}}\right) & 0 < x < t/2 \\ 0 & t/2 \leq x \leq t+1 \\ \exp\left(\frac{1}{1-\frac{x-t/2}{1+t/2}}\right) & x > t+1 \end{cases}$$

Par conséquent, les sous domaines ainsi obtenus sont de la forme

$$\omega_t^v = \{x \in]0, a[: z(x, t, v) = 0\} = [t/2, t + 1]$$

Donc le système contrôlé (2.2.17) est étalable au sens des aires car $\mu(\omega_t^v) = 1 + t/2$ est croissante en t (figure 2.2.5).

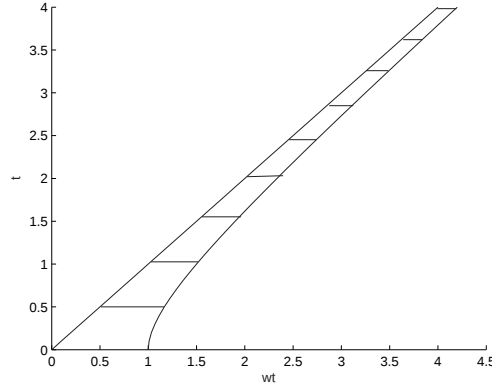


FIG. 2.2.4 – Le système n'est pas par nature $\mathcal{A}$ -étalable

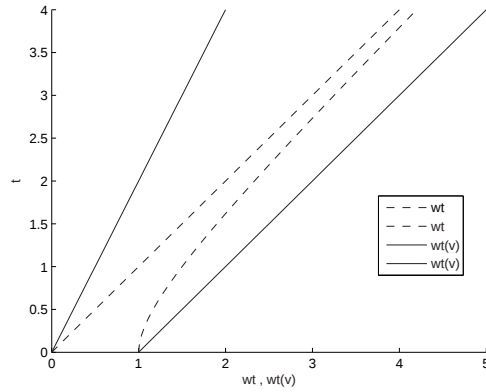


FIG. 2.2.5 – Sous l'effet du contrôle v , le système devient $\mathcal{A}$ -étalable

Cet exemple est une motivation du contrôle étaleur au sens des aires. Pour caractériser les contrôles étaleurs, nous faisons appel aux familles de transformations à travers la définition suivante [23].

Définition 2.5

Une famille de transformations $(F(., s, t))_J$ est dite adaptable au système (S) s'il

existe un contrôle v , tel que la famille F soit adaptée au système (S) excité par v . Dans ce cas on dit que u est associé à F .

Remarquons que si l'on choisit $F(., s, t) = Id_\Omega$, et si le contrôle u est associé à F , alors u est un contrôle étaleur au sens de l'inclusion.

D'autre part, un contrôle étaleur lorsqu'il existe n'est pas unique. Le résultat suivant permet de caractériser la classe des contrôles associés à une famille de transformations adaptable. [23].

Théorème 2.2

Soit $(F(., s, t))_J$ une famille de transformations adaptable à (S) et v un contrôle donné. Alors v est associé à F s'il existe une fonction ξ solution de l'équation

$$(\Theta(\xi, v))(x, t) = \int_t^T z^2(F(x, s, t), s, v) ds - \xi(x, t)z(x, t, v) = 0 \quad (2.2.18)$$

Etant donné une propriété $\mathcal{P}$, un système (S) excité par un contrôle v , dont la solution est notée $z(x, t, v)$, et si on pose

$$\omega_t^v = \{x \in \Omega : \mathcal{P}z(x, t, v)\} \quad (2.2.19)$$

alors le problème du contrôle étaleur au sens des aires est formulé comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver un contrôle } v : \\ z(x, t, v) \text{ solution de } (S) \\ \mu(\omega_t^v) \text{ est croissante} \end{array} \right. \quad (2.2.20)$$

Noter que la résolution de ce problème présente une difficulté dans le sens où on ne connaît pas d'autres informations sur la manière d'évolution des sous domaines $(\omega_t^v)_{t \in I}$, de ce fait un grand nombre de choix est possible. Pour surmonter cette difficulté, nous proposons de procéder en deux étapes :

1. Choisir d'abord une famille de transformations convenable.
2. Déterminer ensuite le contrôle qui lui est associé.

Ceci revient à dire que, si on se donne une famille de transformations F , alors v est une solution du problème (2.2.20) si une telle famille est adaptable au système excité par v . De ce fait, nous commençons d'abord par chercher des conditions pour lesquelles F soit adaptable, ensuite on donnera le contrôle associé.

Considérons alors le système suivant

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bv(t) & 0 < t < T \\ z(0) = z_0 \in \mathcal{D}(A) \end{cases} \quad (2.2.21)$$

où A engendre sur $Z = L^2(\Omega)$ un semi groupe fortement continu $(S(t))_{t \geq 0}$, $v \in \mathcal{V} = L^2(0, T, \mathcal{U})$ et $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, Z)$ supposé borné. La solution de (2.2.21) est donnée par

$$z(x, t, u) = S(t)z_0(x) + \int_0^t S(t-s)Bv(s)ds = S(t)z_0(x) + (Hv)(x, t) \quad (2.2.22)$$

$(F(., s, t))_J$ est adaptable au système (2.2.21) s'il existe (ξ, v) solution de l'équation (2.2.18). Donc le problème de contrôle (2.2.20) est équivalent dans ce cas à la résolution de (2.2.18). Ceci a été ramené à un problème de la recherche d'un point fixe d'un certain opérateur à préciser. Par conséquent les conditions cherchées seront établies par le théorème du point fixe. En effet, posons

$$(H_1v)(x, t) = (Hv)(F(x, t, 0), t) \quad \text{et} \quad z_1(x, t, v) = z(F(x, t, 0), t, v)$$

Pour $v_0 \in \mathcal{V}$ fixé nous avons

$$z_1(x, t, v) = z_1(x, t, v_0) + H_1(v - v_0)(x, t)$$

Si on suppose que $(F(., s, t))_J$ est une famille de difféomorphismes sur Ω telle que

$$F(x, s, 0) = F(x, s, t) \circ F(x, t, 0) \quad \forall x \in \Omega, (s, t) \in J \quad (2.2.23)$$

Alors dans ce cas l'équation (2.2.18) est équivalente à

$$(\Theta_1(\xi, v))(x, t) = \int_t^T z^2(F(x, s, 0), s, v)ds - \xi(x, t)z(F(x, t, 0), t, v) = 0 \quad (2.2.24)$$

Posons $w = v - v_0$ et considérons indifféremment Θ ou Θ_1 . Nous avons donc

$$\Theta(\xi, v) = 0 \Leftrightarrow l(\xi, w) = -(q + c)(\xi, w) \quad (2.2.25)$$

avec q (quadratique), l (linéaire) et c (constante) sont données par

$$\begin{aligned} q(\xi, w) &= \int_t^T (H_1w)^2(x, s)ds - \xi(x, t)(H_1w)(x, s) \\ l(\xi, w) &= 2 \int_t^T z_1(x, s, v_0)(H_1w)(x, s)ds - \xi(x, t)z_1(x, t, v_0) \end{aligned}$$

$$c(\xi, w) = \int_t^T z_1^2(x, s, v_0) ds$$

Donc (2.2.25) est équivalente (sous certaines conditions) à

$$(\xi, w) = G(\xi, w), \quad (\xi, w) \in L^2(\Omega \times I) \times \mathcal{V} \quad (2.2.26)$$

avec G est un opérateur bien précisé. Donc on est amené à chercher sous quelles conditions G admet un point fixe (ξ^*, w^*) .

De ce fait, supposons que G est borné et soit $(\xi, w), (\bar{\xi}, \bar{w}) \in B(0, m) \subset L^2(\Omega \times I) \times \mathcal{V}$.

Alors nous avons

$$\|G(\xi, w) - G(\bar{\xi}, \bar{w})\| \leq 2k\beta m \|(\xi, w) - (\bar{\xi}, \bar{w})\|$$

avec $k = \|G\|$, $\beta = \|q\|$ et m le rayon de la boule $B(0, m)$.

Si de plus on note $\alpha = \|c\|$, alors nous avons le résultat suivant [23].

Proposition 2.3

S'il existe un contrôle $v_0 \in \mathcal{V}$ vérifiant

$$\begin{cases} \|hz_1(v_0)\|^2 + \|H_1^*(2z_1(v_0)r_h)\| \geq \nu \|h\|^2 \\ r_h(x, t) = \int_0^t h(x, s) ds \end{cases} \quad \forall h \in L^2(\Omega \times I) \quad (2.2.27)$$

alors l'opérateur G défini par (2.2.26) existe et est borné.

Et si de plus

$$\gamma = 4k^2\alpha\beta < 1 \quad (2.2.28)$$

alors G admet un point fixe (ξ^, w^*) dans $B(0, m)$ avec $m \in \left] \frac{1 - \sqrt{1 - \gamma}}{2k\beta}, \frac{1}{2k\beta} \right[$.*

Donc à partir de ce qui précède la résolution du problème de contrôle étaleur au sens des aires relatif au système linéaire (2.2.21), est assurée par le résultat suivant [23].

Proposition 2.4

Si le contrôle v_0 vérifie (2.2.27) et (2.2.28) alors :

- (i) *La famille de transformations F vérifiant (2.2.23) est adaptable à (2.2.21).*
- (ii) *Le contrôle $v^* = v_0 + w^*$ est une solution du problème (2.2.20) relatif à (2.2.21).*

On constate que, même si on se place dans le cas d'un système distribué linéaire, un problème de contrôle étaleur n'est pas simple à résoudre, car cela nécessite de se fixer d'abord une famille de transformations convenable, puis déterminer le contrôle qui lui est associé.

Noter que cela est dans le but de rendre un système étalable qui ne l'est pas par nature. Dans ce cas, cette propriété représente naturellement des qualités de ce système. Que seront, sur des zones fixées, les conséquences d'un phénomène de nature étalable pour une propriété représentant des défauts d'un tel phénomène ?

3 Vulnérabilité

Le but de cette section est d'étudier la relation existant entre une région fixée et les sous domaines provenant de l'étalabilité d'un système donné. C'est ce qu'on peut traduire par le concept de la vulnérabilité. Cela apparaît par exemple lors de la diffusion d'un produit polluant qui migre vers une nappe et qui peut l'atteindre à un moment donné.

Après avoir défini et caractérisé ce concept, nous allons donner un moyen permettant de quantifier la capacité de résistance d'une telle zone à la vulnérabilité : C'est l'indice de vulnérabilité.

3- a Définition et caractérisation

Soit (S) un système dynamique supposé $\mathcal{P}$ -étalable avec $\mathcal{P}$ est une propriété donnée. Considérons les sous domaines de Ω donnés par

$$\omega_t = \{x \in \Omega : \mathcal{P}z(x, t)\}$$

et soit σ une région fixée dans Ω telle que

$$\mu(\sigma) \neq 0 \text{ et } \bar{\sigma} \cap \bar{\omega}_0 = \emptyset \quad (2.3.1)$$

la définition d'une zone vulnérable est donnée comme suit [26].

Définition 2.6

On dit que la zone σ est $\mathcal{P}$ -vulnérable s'il existe un instant $t \in I$ tel que

$$\overset{\circ}{\sigma} \cap \omega_t \neq \emptyset \quad (2.3.2)$$

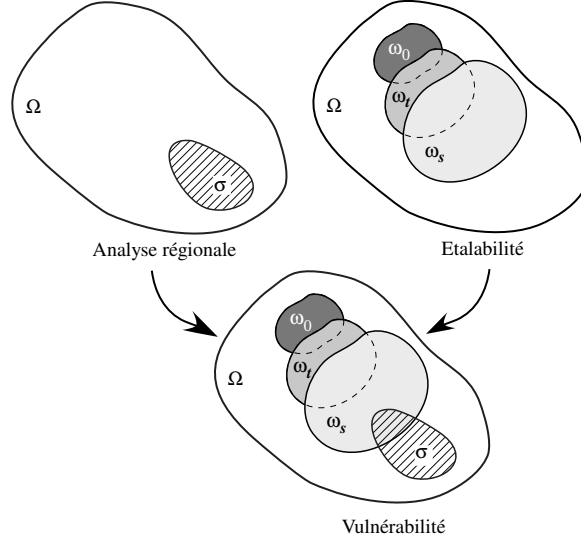


FIG. 2.3.1 – Étalabilité de (S) et vulnérabilité de la zone fixée σ

Remarque 2.5

1. La définition 2.6 signifie qu'il existe un instant t à partir duquel la zone σ serait atteinte par des effets externes (i.e. la propriété $\mathcal{P}$).
2. Le fait de considérer l'intérieur de σ , est due à ce que sa frontière peut être une barrière naturelle pouvant arrêter l'étalabilité.
3. L'hypothèse (2.3.1) faite sur σ et ω_0 signifie qu'au départ ($t_0 = 0$), σ est localisée séparément de la source de l'étalabilité ω_0 , et par suite, elle ne serait jamais atteinte si le phénomène n'est pas étalable.
4. La vulnérabilité peut être vu comme étant un couplage de l'analyse régionale (la zone σ) et de l'étalabilité (sous domaines $(\omega_t)_{t \in I}$).
5. La vulnérabilité est lié aux deux types d'étalabilité car :
 - Pour le cas de l'étalabilité au sens de l'inclusion, la zone σ est $\mathcal{P}$ -vulnérable s'il existe un instant $t_1 \in I$ tel que (2.3.2) est vérifiée pour tout $t \in [t_1, T]$.
 - Pour le cas de l'étalabilité au sens des aires, la zone σ est $\mathcal{P}$ -vulnérable s'il existe $t_1 \in I$ et il se peut qu'il existe $t_2 \in I$ avec $t_1 < t_2$ tels que (2.3.2) est vérifiée seulement pour tout $t \in [t_1, t_2]$.

Donc à partir de cette remarque nous considérons les deux instants suivants

$$t_1 = \inf \left\{ t \in I : \overset{\circ}{\sigma} \cap w_t \neq \emptyset \right\} \quad (2.3.3)$$

$$t_2 = \inf \left\{ t \in [t_1, T] : \bigcup_{s \in [t_1, t]} (\overset{\circ}{\sigma} \cap w_s) = \bigcup_{s \in [t_1, T]} (\overset{\circ}{\sigma} \cap w_s) \right\} \quad (2.3.4)$$

t_1 désigne le premier instant où la propriété $\mathcal{P}$ commence à atteindre σ , tandis que t_2 , il est interprété comme étant le premier instant où une grande partie de σ (ou σ toute entière) est atteinte par $\mathcal{P}$.

Pour caractériser l'évalabilité d'un système, nous avons utilisé des familles de transformations dites adaptées à ce système. Ainsi, pour la vulnérabilité, et en partant de la définition 2.6, nous avons le résultat suivant [26, 27].

Proposition 2.5

(i) La zone σ est $\mathcal{P}$ -vulnérable s'il existe une famille de transformations $(F(., s, t))_J$ adaptée à l'évolution de (S) telle que

$$\overset{\circ}{\sigma} \cap F(\omega_0, t, 0) \neq \emptyset, \quad t \geq t_1$$

(ii) La zone σ est $\mathcal{P}$ -vulnérable si et seulement si

$$\overset{\circ}{\sigma} \cap \mathcal{T}_t \neq \emptyset, \quad t \geq t_1$$

avec $\mathcal{T}_t = \bigcup_{s \in]0, t[} F(\omega_0, s, 0)$ désigne la trajectoire de la propriété $\mathcal{P}$.

Preuve : C'est une conséquence de la définition 2.6, et de celle des familles de transformations adaptées (définition 2.3). ■

On constate donc que la vulnérabilité concerne le suivi de la trajectoire $\mathcal{T}_t$ de la propriété $\mathcal{P}$, qui commence à atteindre σ à l'instant t_1 . Comme pour l'évalabilité, la vulnérabilité dépend de la dynamique du système, de la propriété $\mathcal{P}$ et de la condition initiale, mais en plus de la nature de la zone σ .

3- b Indices de vulnérabilité

Face à un même phénomène évalable, il se peut que deux zones données réagissent de deux manières différentes. Il est alors intéressant de pouvoir comparer le degré de résistance de ces zones à la vulnérabilité. De ce fait, et vue la diversité et la complexité des phénomènes à étudier, nous introduisons trois types d'indices, dits indices de vulnérabilité. Nous avons la définition suivante [27].

Définition 2.7

Sous l'hypothèse (2.3.1) et pour t_1, t_2 donnés en (2.3.3) et (2.3.3), on définit :

- L'indice instantané de vulnérabilité par

$$I_v(\sigma)(t) = \frac{1}{\mu(\sigma)} \frac{d}{dt} (\mu(\sigma \cap \omega_t)) \quad (2.3.5)$$

- *L'indice moyen de vulnérabilité par*

$$I_{v_m}(\sigma) = \frac{1}{t_2 - t_1} \left(\bigcup_{t \in]t_1, t_2[} (\overset{\circ}{\sigma} \cap \omega_t) \right) \quad (2.3.6)$$

- *L'indice global de vulnérabilité par*

$$I_v(\sigma) = \frac{1}{t_1(t_2 - t_1)\mu(\sigma)} \left(\bigcup_{t \in]t_1, t_2[} (\overset{\circ}{\sigma} \cap \omega_t) \right) \quad (2.3.7)$$

Cela traduit le fait que les indices $I_v(\sigma)(t)$ et $I_{v_m}(\sigma)$ désignent respectivement la vitesse instantanée et la vitesse moyenne de l'évalabilité des sous domaines $(\omega_t)_t$. Ce qui permet de quantifier le degré de résistance de la zone σ face à des effets externes. A titre d'exemple, s'il s'agit d'une propagation d'un feu, ces indices seront plus ou moins importants selon l'humidité et la nature de la biomasse occupant la zone σ . Tandis que l'indice $I_v(\sigma)$, il mesure le degré de résistance d'une zone face aux effets externes démarrant de ω_0 en tenant compte du premier instant t_1 où la zone fixée sera atteinte, du premier instant t_2 où le maximum de l'aire de σ est atteint par les $(\omega_t)_t$ et aussi de la mesure de σ . Comme conséquence, on dit qu'une zone σ_1 est plus vulnérable qu'une autre zone σ_2 si $I_v(\sigma_1) \geq I_v(\sigma_2)$.

3- c Exemples

Pour illustrer le concept de la vulnérabilité, nous donnons deux exemples illustrant le lien existant entre ce concept et celui de l'évalabilité. Le premier traite le cas de l'évalabilité au sens usuel, et le second concerne un système évalable au sens des aires.

Exemple 1 : Cas de l'évalabilité au sens usuel

Considérons le système décrit par l'équation d'état suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t}(x, t) = b(x, t)z(x, t) & x > 0, 0 < t < T \\ z(x, 0) = z_0(x) & x > 0 \end{cases} \quad (2.3.8)$$

avec

$$z_0(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-x}\right) & 0 < x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

et

$$b(x, t) = \begin{cases} \frac{(x-1)\dot{c}(t)}{(1+c(t)-x)^2} & 0 < x < 1+c(t) \\ 0 & x \geq 1+c(t) \end{cases}$$

où $c :]0, T[\longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée telle que $c(0) = 0$.

Cela étant, la solution de (2.3.8) s'exprime sous la forme

$$z(x, t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1+c(t)}{1+c(t)-x}\right) & 0 < x < 1+c(t) \\ 0 & x \geq 1+c(t) \end{cases}$$

Considérons le cas où la propriété $\mathcal{P}$ est donnée par $z(x, t) > 0$. C'est à dire

$$\omega_t = \{x > 0 : z(x, t) > 0\}$$

Alors dans ce cas on aura

$$\omega_t =]0, 1+c(t)[$$

Par conséquent, si $\dot{c}(t) > 0$, le système (2.3.8) est étalable au sens de l'inclusion, et toute zone $\sigma \subset \mathbb{R}^+$ est vulnérable.

Sinon ; ($\dot{c}(t) \leq 0$), le système est résorbable ou stationnaire si $\dot{c}(t) = 0$, dans ce cas σ est non vulnérable.

Remarquons que la quantité $v(1, t) = \dot{c}(t)$ n'est autre que la vitesse du déplacement du point $x = 1$ (car on a $\omega_0 =]0, 1[$), de ce fait nous allons donner deux situations selon cette vitesse v .

Cas 1 : Si $v(1, t)$ est une constante qu'on suppose égale à 1, et si on considère les deux zones $\sigma_1 = [a_1, b_1]$ et $\sigma_2 = [a_2, b_2] : 1 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2$, alors σ_1 et σ_2 sont vulnérables. Les indices de vulnérabilité instantané et moyen sont donnés par

$$I_v(\sigma_j)(t) = I_{v_m}(\sigma_j) = 1 \quad j = 1, 2$$

Pour l'indice global, nous avons

$$I_v(\sigma_j) = \frac{1}{(a_j - 1)(b_j - a_j)} \quad j = 1, 2$$

Connaissant donc les valeurs a_j et b_j , nous pouvons déduire laquelle des zones est la plus vulnérable que l'autre. Ceci montre que la vulnérabilité dépend aussi de la localisation de la zone considérée par rapport à ω_0 , et de la mesure d'une telle zone.

Cas 2 : Si $v(1, t) = \dot{c}(t)$ est donnée de telle sorte que

$$c(t) = \begin{cases} 1+t & 0 < t < a_1 - 1 \\ a_1 + \frac{t}{4} & a_1 - 1 < t < 4(b_1 - a_1) \\ 1+t & 4(b_1 - a_1) < t < a_2 - 1 \\ a_2 + \frac{t^2}{2} & a_2 - 1 < t < \sqrt{2(b_2 - a_2)} \\ 1+t & t > \sqrt{2(b_2 - a_2)} \end{cases}$$

Aussi dans ce cas, les zones σ_1 et σ_2 sont vulnérables et nous avons

$$I_v(\sigma_1)(t) = I_{v_m}(\sigma_1) = \frac{1}{4}$$

$$I_v(\sigma_2)(t) = t, \quad \text{et} \quad I_{v_m}(\sigma_2) = \sqrt{\frac{b_2 - a_2}{2}}$$

et pour les indices globaux, nous obtenons

$$I_v(\sigma_1) = \frac{1}{4(a_1 - 1)(b_1 - a_1)} \quad \text{et} \quad I_v(\sigma_2) = \frac{1}{[(a_1 - 1) + 4(b_1 - a_1)]\sqrt{2(b_2 - a_2)}}$$

Dans ce cas on constate aussi la dépendance de la vulnérabilité avec la position et de la nature de la zone considérée et aussi le sous domaine initial ω_0 .

Exemple 2 : Cas de la $\mathcal{A}$ -étalabilité

Considérons le même système donné en (2.3.8), sauf que cette fois-ci la fonction b est donnée par

$$b(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(1+t-x)^2} & t < x < 1+t \\ 0 & x \geq 1+t \end{cases}$$

Alors la solution z du système (2.3.8) s'écrit sous la forme

$$z(x, t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1+t-x}\right) & t < x < 1+t \\ 0 & x \geq 1+t \end{cases}$$

Avec la même propriété $\mathcal{P}$ considérée dans le premier exemple nous avons

$$\omega_t =]t, 1 + t[$$

Il s'agit d'un système étalable au sens des aires, et toute zone $\sigma = [\alpha, \beta]$ est vulnérable pour tout $\alpha > 0$ car nous avons

Cas 1 : Si $0 < \alpha < 1$ alors $[\alpha, 1] \subset (\overset{\circ}{\sigma} \cap \omega_0)$ et donc $\overset{\circ}{\sigma} \cap \omega_0 \neq \emptyset$.

Cas 2 : Si $\alpha > 1$ alors il existe deux instants $t_1 = \alpha - 1$ et $t_2 = \beta - 1$ tels que pour tout $t \in]t_1, t_2[$, on a $\overset{\circ}{\sigma} \cap \omega_t \neq \emptyset$. Ainsi nous obtenons

$$I_v(\sigma) = \frac{1}{(\alpha - 1)(\beta - \alpha)}$$

Ces deux exemples montrent en fait le lien entre les deux concepts d'étalabilité et de vulnérabilité, puis la dépendance de la vulnérabilité d'une zone donnée de la position (ou localisation) de cette zone par rapport au domaine initial à partir duquel commence l'étalabilité.

Parmi l'une des majeures applications de l'indice de vulnérabilité, citons par exemple le problème de transfert d'un polluant vers une nappe souterraine à travers l'interface sol. Dans ce cas l'indice de vulnérabilité a été approché linéairement en fonction de trois paramètres caractérisant ce transfert. Ce sont le temps de transit T , le rapport de la concentration du produit polluant C' à l'arrivée à la nappe par rapport à la concentration initiale C , et celui de la recharge effective R' par rapport à la quantité d'eau disponible à la surface sol. Ce qui traduit le fait qu'une zone est vulnérable s'elle est atteinte en un temps court et avec une concentration élevée. Cet indice est exprimé par

$$I_v = \alpha \frac{1}{T} + \beta \frac{C'}{C} + \gamma \frac{R'}{R} \quad (2.3.9)$$

avec α , β et γ sont des coefficients donnés. Cela constitue le principe de l'approche dite "Approche TCR", et pour plus de détails voir [26, 27].

Cela étant, comment peut-t-on contrôler certaines zones vulnérables face à un phénomène étalable ?

4 Remédiabilité régionale

Le concept de la remédiabilité régionale a été introduit dans le but de pouvoir compenser par un contrôle convenable, sur une région donnée σ et ou bout d'un certain temps T , l'effet d'une perturbation affectant l'état du système considéré. Pour les systèmes linéaires, différentes caractérisations de ce concept, de son lien avec la contrôlabilité régionale et des actionneurs dits régionalement efficaces, ont été données [8–12]. Cela suppose que la perturbation est définie sur le domaine Ω tout entier. Ce que nous aborderons dans cette section concerne le cas d'une perturbation (source) localisée juste sur une région $\omega \subset \Omega$. Donc si σ est une zone fixée (généralement disjointe avec ω), deux situations peuvent se présenter :

1. σ est atteinte par l'effet de la perturbation.
2. σ n'est pas vulnérable.

Il paraît naturel que la première situation est celle qui mérite d'être étudiée, car si une telle zone n'est pas vulnérable, alors on n'a pas besoin d'y remédier.

Pour décrire cela considérons le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{z}(x, t) = Az(x, t) + f(x, t) + Bu(t) & \Omega \times I \\ z(0, x) = z_0(x) & \Omega \end{cases} \quad (2.4.1)$$

où A engendre un semi groupe fortement continu $(S(t))_{t \geq 0}$ sur l'espace d'état $Z = L^2(\Omega)$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; L^2(\Omega))$, $u \in L^2(0, T; \mathcal{U})$, et $f \in L^2(0, T; \mathcal{F})$ une perturbation. Généralement la perturbation f est inconnue, mais ici on la suppose connue car cela est du à ce qui a été rappelé au chapitre 1 sur les sources et capteur espion. En plus on pose $\text{supp}(f) = \omega \subset \Omega$.

Les espaces de Hilbert Z , $\mathcal{U}$ et $\mathcal{F}$ désignent respectivement l'espace des états, des contrôles et des perturbations.

Supposons que σ vérifie l'hypothèse (2.3.1) et que (2.4.1) est augmenté de la sortie

$$y^\sigma(t) = C\chi_\sigma^* \chi_\sigma z(t) \quad (2.4.2)$$

où $C \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), Y)$, Y un espace de Hilbert (espace d'observations), χ_σ est la restriction à σ et χ_σ^* son opérateur adjoint donnés en (1.2.4) et (1.2.5).

La solution de (2.4.1) est donnée par

$$z_{f,u}(t) = S(t)z_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds \quad (2.4.3)$$

ce qui donne

$$z_{f,u}(t) = S(t)z_0 + \tilde{H}_t f + H_t u \quad (2.4.4)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{H}_t : L^2(0, T; \mathcal{F}) &\longrightarrow Z \\ f &\longmapsto \tilde{H}_t f = \int_0^t S(t-s)f(s)ds \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

$$\begin{aligned} H_t : L^2(0, T; \mathcal{U}) &\longrightarrow Z \\ u &\longmapsto H_t u = \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

et par suite

$$y_{f,u}^\sigma(t) = C\chi_\sigma^* \chi_\sigma S(t)z_0 + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{H}_t f + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma H_t u \quad (2.4.7)$$

4- a Perturbation étalable et vulnérabilité

Désignons par $z_{0,0}$ et $z_{f,0}$ les solutions du système autonome non perturbé ($f = 0, u = 0$), respectivement perturbé non contrôlé ($f \neq 0, u = 0$), et considérons la propriété $\mathcal{P}$ définie par :

$$\mathcal{P}z_{f,0}(x, t) \Leftrightarrow z_{f,0}(x, t) \neq z_{0,0}(x, t) \quad \forall (x, t) \in \Omega \times I \quad (2.4.8)$$

puis notons par

$$w_{f,0,t} = \{x \in \Omega : \mathcal{P}z_{f,0}(x, t)\} \quad (2.4.9)$$

Lorsque $f \neq 0$, nous définissons l'étalabilité de f et la vulnérabilité de σ face aux effets de f par [92].

Définition 2.8

1. On dit que la perturbation f est étalable (respectivement $\mathcal{A}$ -étalable) si

$$w_{f,0,t} \subset w_{f,0,s} \quad \forall (s, t) \in J$$

(respectivement

$$\mu(w_{f,0,t}/w_{f,0,s}) \leq \mu(w_{f,0,s}/w_{f,0,t}) \quad \forall (s, t) \in J)$$

2. La zone σ est dite f -vulnérable s'il existe $t \in]0, T]$ tel que : $\overset{\circ}{\sigma} \cap w_{f,0,t} \neq \emptyset$.

A partir de cette définition, nous allons caractériser la f -vulnérabilité de σ à travers la fonction de mesure $y_{f,0}^\sigma$ associée à l'état $z_{f,0}$ du système perturbé non contrôlé. Nous avons le résultat suivant

Proposition 2.6

La zone σ est f -vulnérable si et seulement s'il existe $t \in [0, T]$ tel que :

$$y_{f,0}^\sigma(t) \neq C\chi_\sigma^* \chi_\sigma S(t) z_0$$

Preuve :

Par définition, σ n'est pas f -vulnérable si et seulement si :

$$\overset{\circ}{\sigma} \cap w_{f,0,t} \neq \emptyset \quad \forall t \in [0, T]$$

Ce qui est équivalent à $x \notin w_{f,0,t} \quad \forall t \in [0, T], \forall x \in \overset{\circ}{\sigma}$

D'après (2.4.4), (2.4.8) et (2.4.9), ceci est équivalent encore à :

$$\tilde{H}_t f = 0 \quad \forall t \in [0, T], \forall x \in \overset{\circ}{\sigma}$$

ou encore : $C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{H}_t f = 0 \quad \forall t \in [0, T]$

Ce qui est équivalent à $y_{f,0}^\sigma(t) = C\chi_\sigma^* \chi_\sigma S(t) z_0 \quad \forall t \in [0, T]$.

D'où la preuve de la proposition. ■

Ce résultat nous permet de caractériser les zones vulnérables par l'intermédiaire des capteurs, ce qui correspond en fait à des préoccupations concrètes.

4- b Remédiabilité régionale

Lorsque l'état du système (2.4.1) est l'objet d'une perturbation f étalable à partir de ω et pour laquelle la zone σ est atteinte (ou affectée), alors le problème de la remédiabilité régionale consiste en la détermination d'un contrôle permettant de rendre l'état du système $z_{f,u}$ sur σ et au bout d'un certain temps T à l'état normal $z_{0,0}$; c'est à dire à celui du système autonome non perturbé. De ce fait nous avons la définition suivante.

Définition 2.9

Pour une zone σ , f -vulnérable, on a :

(i) *Le système (2.4.1)-(2.4.2) est dit exactement f - σ -remédiable pendant $[0, T]$ s'il existe un contrôle $u \in L^2(0, T; \mathcal{U})$ tel que :*

$$C\chi_\sigma^* \chi_\sigma H_T u + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{H}_T f = 0 \tag{2.4.10}$$

(ii) Le système (2.4.1)-(2.4.2) sera dit faiblement f - σ -remédiable pendant $[0, T]$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un contrôle $u \in L^2(0, T; \mathcal{U})$:

$$\|C\chi_\sigma^*\chi_\sigma H_T u + C\chi_\sigma^*\chi_\sigma \tilde{H}_T f\| \leq \varepsilon \quad (2.4.11)$$

Remarquons que si σ n'est pas f -vulnérable, alors d'après la proposition 2.6 nous avons $C\chi_\sigma^*\chi_\sigma \tilde{H}_T f = 0$, donc à partir de la définition ci-dessus, nous obtenons $C\chi_\sigma^*\chi_\sigma H_T u = 0$, ce qui veut dire que $u = 0$ est une solution de l'équation (2.4.10), par conséquent, on n'a pas besoin de remédier à l'effet de f sur σ . Ce qui justifie le fait de considérer l'hypothèse σ est f -vulnérable dans la définition 2.9.

Cela étant, nous allons donner quelques caractérisations de la remédiabilité régionale (exacte et faible) en se basant toujours sur la définition 2.9.

Proposition 2.7

Les assertions suivantes sont équivalentes

- (i) Le système (2.4.1)-(2.4.2) est exactement f - σ -remédiable pendant $[0, T]$
- (ii) $\text{Im}(C\chi_\sigma^*\chi_\sigma \tilde{H}_T) \subset \text{Im}(C\chi_\sigma^*\chi_\sigma H_T)$.
- (iii) $\exists \gamma_\sigma > 0$ tel que $\forall \theta \in Y^*$, on a

$$\|z^*\|_{L^2(0, T, Z)} \leq \gamma_\sigma \|B^* z^*\|_{L^2(0, T, \mathcal{U}^*)}$$

avec $z^* = S^*(T - \cdot)\chi_\sigma^*\chi_\sigma C^*\theta$.

À propos de la remédiabilité faible, nous avons la proposition suivante [9].

Proposition 2.8

Sont équivalentes les assertions suivantes

- (i) Le système (2.4.1)-(2.4.2) est faiblement f - σ -remédiable pendant $[0, T]$
- (ii) $\text{Im}(C\chi_\sigma^*\chi_\sigma \tilde{H}_T) \subset \overline{\text{Im}(C\chi_\sigma^*\chi_\sigma H_T)}$.
- (iii) $\text{Ker}(B^* \tilde{H}_T^* \chi_\sigma^* \chi_\sigma C^*) = \text{Ker}(\tilde{H}_T^* \chi_\sigma^* \chi_\sigma C^*)$

4- c Actionneurs régionalement efficaces

Par analogie avec la contrôlabilité régionale qui est liée à la notion d'actionneurs régionalement stratégiques (voir chapitre 1), il existe aussi une relation entre la remédiabilité régionale et les actionneurs. Dans ce cas, et s'ils permettent d'assurer la remédiabilité régionale faible du système qu'ils excitent, on parle d'actionneurs régionalement efficaces. Dans ce paragraphe nous rappelons et caractérisons les actionneurs régionalement efficaces, puis nous montrons leur relation avec les actionneurs régionalement stratégiques. Soit donc $(D_i, g_i)_{i=1, \dots, p}$ une suite de p actionneurs qui excitent le système (2.4.1) augmenté de la sortie (2.4.2), et soit σ une zone supposée f -vulnérable. Nous avons la définition suivante [9, 10].

Définition 2.10

La suite d'actionneurs $(D_i, g_i)_{i=1, \dots, p}$ est dite σ -efficace si le système (2.4.1)-(2.4.2) est faiblement σ -remédiable.

Cas particulier

Supposons que l'opérateur linéaire A admet sur l'espace d'état $Z = L^2(\Omega)$, un système orthonormé complet de fonctions propres $(\varphi_{mj})_{m \geq 1, j=1, \dots, r_m}$ associées aux valeurs propres $(\lambda_m)_{m \geq 1}$ avec λ_m étant de multiplicité r_m .

Le semi groupe engendré par A est donné par

$$S(t)z = \sum_{m \geq 1} e^{\lambda_m t} \sum_{j=1}^{r_m} \langle z, \varphi_{mj} \rangle_{L^2(\Omega)} \varphi_{mj}$$

Soit G_m la matrice d'ordre $(p \times r_m)$ donnée par

$$G_m = (\langle g_i, \varphi_{mj} \rangle)_{i=1, \dots, p}^{j=1, \dots, r_m}$$

et ϕ_m^σ l'application définie comme suit

$$\phi_m^\sigma : Y^* \longrightarrow \mathbb{R}^{r_m}$$

$$\theta \longmapsto \phi_m^\sigma(\theta) = (\langle C^* \theta, \varphi_{m1} \rangle_\sigma, \dots, \langle C^* \theta, \varphi_{mr_m} \rangle_\sigma)^{tr}$$

Rappelons que dans le cas où le système (2.4.1) est excité par p actionneurs $(D_i, g_i)_{i=1, \dots, p}$, alors l'opérateur B est défini par

$$B : \mathbb{R}^p \longrightarrow Z$$

$$u(t) \longmapsto Bu(t) = \sum_{i=1}^p g_i u_i(t)$$

Alors avec ces considérations, nous avons la première caractérisation suivante [9].

Proposition 2.9

La suite d'actionneurs $(D_i, g_i)_{i=1, \dots, p}$ est σ -efficace si et seulement si

$$\text{Ker}(\chi_\sigma C^*) = \bigcap_{m \geq 1} \text{Ker}(G_m \phi_m^\sigma)$$

Preuve :

Pour $\theta \in Y^*$ nous avons

$$\tilde{H}_T^* \chi_\sigma^* \chi_\sigma C^* \theta = \sum_{m \geq 1} e^{\lambda_m(T-\cdot)} \sum_{j=1}^{r_m} \langle \chi_\sigma^* \chi_\sigma C^* \theta, \varphi_{mj} \rangle_{L^2(\Omega)} \varphi_{mj}$$

Donc on aura

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_T^* \chi_\sigma^* \chi_\sigma C^* \theta = 0 &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{r_m} \langle \chi_\sigma^* \chi_\sigma C^* \theta, \varphi_{mj} \rangle_{L^2(\Omega)} \varphi_{mj} = 0 \quad \forall m \geq 1 \\
&\Leftrightarrow \langle C^* \theta, \varphi_{mj} \rangle_{L^2(\sigma)} = 0 \\
&\Leftrightarrow \chi_\sigma C^* \theta = 0
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\text{Ker}(\chi_\sigma C^*) = \text{Ker}(\tilde{H}_T^* \chi_\sigma^* \chi_\sigma C^*) \quad (2.4.12)$$

D'autre part, et comme

$$\begin{aligned}
B^* \tilde{H}_T^* \chi_\sigma^* \chi_\sigma C^* \theta = \\
\left(\sum_{m \geq 1} e^{\lambda_m(T-)} \sum_{j=1}^{r_m} \langle g_i, \varphi_{mj} \rangle \langle \chi_\sigma^* \chi_\sigma C^* \theta, \varphi_{mj} \rangle_{L^2(\Omega)} \varphi_{mj} \right)_{i=1, \dots, p}^{tr}
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
B^* \tilde{H}_T^* \chi_\sigma^* \chi_\sigma C^* \theta &= 0 \\
\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{r_m} \langle g_i, \varphi_{mj} \rangle \langle C^* \theta, \varphi_{mj} \rangle_{L^2(\sigma)} &= 0 \quad \forall m \geq 1, \quad i = 1, \dots, p \\
\Leftrightarrow G_m \phi_m^\sigma(\theta) &= 0 \quad \forall m \geq 1
\end{aligned}$$

Donc

$$\bigcap_{m \geq 1} \text{Ker}(G_m \phi_m^\sigma) = \text{Ker}(B^* \tilde{H}_T^* \chi_\sigma^* \chi_\sigma C^*) \quad (2.4.13)$$

Et d'après la proposition 2.8, et les expressions (2.4.12) et (2.4.13), on en déduit directement le résultat cherché. ■

Cela étant et si de plus la sortie (2.4.2) est donnée par l'intermédiaire de q capteurs zones $(C_l, h_l)_{l=1, \dots, q}$ avec $\mu(C_l \cap \sigma) > 0$, alors une deuxième caractérisation des actionneurs σ -efficaces est donnée par le résultat suivant [9].

Proposition 2.10

La suite d'actionneurs $(D_i, g_i)_{i=1, \dots, p}$ est σ -efficace si et seulement si

$$\bigcap_{m \geq 1} \text{Ker}(G_m M_{m, \sigma}^{tr}) = \{0\}$$

avec $M_{m,\sigma}$ est la matrice d'ordre $(q \times r_m)$ définie par

$$M_{m,\sigma} = (< h_l, \varphi_{mj} >)_{l=1,\dots,q}^{j=1,\dots,r_m}$$

Preuve : Analogue à celle de la proposition 2.9. ■

De ces deux résultats de caractérisations des actionneurs σ -efficaces, on en déduit un troisième qui sera utile dans les applications [9].

Proposition 2.11

La suite d'actionneurs $(D_i, g_i)_{i=1,\dots,p}$ est σ -efficace si l'une des conditions suivantes est vérifiées

- (i) Il existe $m_0 \geq 1$ tel que $rg(G_{m_0} M_{m_0,\sigma}^{tr}) = q$
- (ii) Il existe $m_0 \geq 1$ tel que $rg(G_{m_0}) = r_{m_0}$ et $rg(M_{m_0,\sigma}^{tr}) = q$

Preuve : Conséquence directe des deux propositions 2.9 et 2.10 ■

Remarque 2.6 [9]

1. Si le système (2.4.1) est exactement (faiblement) σ -contrôlable, alors (2.4.1)-(2.4.2) est exactement (faiblement) σ -remédiable. Par conséquent, tout actionneur σ -stratégique est σ -efficace.

La réciproque n'est pas toujours vraie (voir exemple ci-dessous).

2. La condition $p \geq \sup_{m \geq 1} r_m$ est nécessaire pour qu'un actionneur soit σ -stratégique, mais elle ne l'est pas pour qu'il soit σ -efficace.

Exemple

Considérons le système décrit par l'équation d'état suivante

$$\begin{cases} \dot{z}(x, t) = \Delta z(x, t) + f(x, t) + \chi_{D_1} g(x) u(t) &]0, 1[\times]0, T[\\ z(0, t) = z(1, t) = 0 &]0, T[\\ z(x, 0) = 0 &]0, 1[\end{cases} \quad (2.4.14)$$

avec $D_1 \subset]0, 1[$ est le support de l'actionneur d'intensité g . On suppose aussi que la sortie (2.4.2) est donnée via un capteur (D_2, h) où $D_2 \subset]0, 1[$.

On sait que pour tout $m \geq 1$ nous avons

$$\varphi_m(x) = \sqrt{2} \sin(m\pi x) \quad \text{et} \quad \lambda_m = -m^2 \pi^2$$

Pour $h \neq 0$, il existe m_0 tel que $< h, \varphi_{m_0} > \neq 0$. Donc l'actionneur (D_1, g) est Ω -efficace si $< g, \varphi_{m_0} > \neq 0$, ou d'après la proposition 2.11, ceci est équivalent à

$$\int_{D_1} g(x) \sin(m_0 \pi x) dx \neq 0$$

- Pour $\sigma = \Omega$ et $g = \varphi_{m_0}$, l'actionneur (D_1, g) est Ω -efficace mais n'est pas Ω -stratégique car la relation suivante n'est pas satisfaite $\forall m \neq m_0$

$$\int_{D_1} g(x) \sin(m \pi x) dx \neq 0$$

- Pour $\sigma =]0, \frac{1}{2}[$, $h = \varphi_1$ et $g = \varphi_2$, l'actionneur (D_1, g) n'est pas Ω -efficace, mais il est σ -efficace car

$$\langle g, \varphi_m \rangle \langle h, \varphi_m \rangle = 0 \quad \forall m \geq 1$$

et pour $m_0 = 2$ nous avons

$$\langle g, \varphi_2 \rangle \langle h, \varphi_2 \rangle_\sigma = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_\sigma \neq 0$$

4- d Remédiabilité régionale à énergie minimale

Dans cette partie nous considérons le problème de la détermination d'un contrôle permettant de compenser la perturbation étalable f sur la zone vulnérable σ , et dont le coût nécessaire pour cette compensation soit minimal. Si on considère toujours le système (2.4.1) d'état $z_{f,u}$, augmenté de la sortie (2.4.2), et si on pose

$$\mathcal{U}_{ad} = \{u \in L^2(0, T; \mathcal{U}) : C\chi_\sigma^* \chi_\sigma H_T u + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{H}_T f = 0\}$$

alors un tel problème peut être formulé comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in L^2(0, T; \mathcal{U}) : \\ \bullet u \in \mathcal{U}_{ad} \\ \bullet \|u\| = \min\{\|v\|_{L^2(0, T; \mathcal{U})} : v \in \mathcal{U}_{ad}\} \end{array} \right. \quad (2.4.15)$$

Considérons le sous espace $Y_0 = \overline{\text{Im}(C\chi_\sigma^* \chi_\sigma H_T)}$ de l'espace des observations Y , et la semi norme définie sur Y par :

$$\|\theta\|_{Y_1} = \|H_T^* \chi_\sigma^* \chi_\sigma C^* \theta\|_{L^2(0, T; \mathcal{U}^*)} \quad (2.4.16)$$

dont le produit scalaire associé s'écrit :

$$\langle \theta_1, \theta_2 \rangle_{Y_1} = \langle H_T^* \chi_\sigma^* \chi_\sigma C^* \theta_1, H_T^* \chi_\sigma^* \chi_\sigma C^* \theta_2 \rangle_{L^2(0, T; \mathcal{U}^*)} \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in Y \quad (2.4.17)$$

puis posons

$$\Lambda_\sigma = C\chi_\sigma^*\chi_\sigma H_T H_T^* \chi_\sigma^* C^* : Y \longrightarrow Y$$

alors nous avons le résultat suivant [9].

Lemme 2.1

Si le système (2.4.1)-(2.4.2) est faiblement σ -remédiable, alors :

- (i) $\|\cdot\|_{Y_1}$ est une norme sur l'espace Y_0 .
- (ii) $\Lambda_\sigma(Y) \subset Y_0$ avec injection continue.
- (iii) Λ se prolonge par continuité d'une manière unique en un isomorphisme de Y_1 vers son dual Y_1' , avec Y_1 est le complété de Y_0 pour la norme $\|\cdot\|_{Y_1}$.

Cela étant, le résultat suivant nous permet de résoudre le problème de la remédialité régionale à énergie minimale.

Théorème 2.3

Si la zone σ est f -vulnérable avec $C\chi_\sigma^\chi_\sigma \tilde{H}_T f \in Y_1'$, alors le problème (2.4.15) admet une solution unique donnée par :*

$$u_* = H_T^* \chi_\sigma^* \chi_\sigma C^* \theta$$

avec θ est l'unique solution de l'équation :

$$\Lambda_\sigma \theta = -C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{H}_T f$$

Preuve :

(i) $u_* \in \mathcal{U}_{ad}$

En effet, par hypothèse sur f nous avons en utilisant le lemme 2.1 :

$$C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{H}_T f \in Y_1' \Leftrightarrow \exists! \theta \in Y_1 : \Lambda_\sigma \theta = -C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{H}_T f$$

En utilisant l'expression de Λ_σ on aura :

$$C\chi_\sigma^* \chi_\sigma H_T H_T^* \chi_\sigma^* \chi_\sigma C^* \theta = -C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{H}_T f$$

C'est à dire que :

$$C\chi_\sigma^* \chi_\sigma H_T u_* = -C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{H}_T f$$

Soit encore :

$$C\chi_\sigma^* \chi_\sigma H_T u_* + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{H}_T f = 0$$

Donc $u_* \in \mathcal{U}_{ad}$.

(ii) Optimalité de u_*

L'ensemble $\mathcal{U}_{ad} = \{u \in L^2(0, T; \mathcal{U}) : C\chi_\sigma^* \chi_\sigma H_T u + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{H}_T f = 0\}$ est un convexe fermé de $L^2(0, T; \mathcal{U})$, et il est en plus non vide car $u_* \in \mathcal{U}_{ad}$.

Alors, pour $v \in \mathcal{U}_{ad}$ nous avons :

$$C\chi_\sigma^* \chi_\sigma H_T v + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{H}_T f = C\chi_\sigma^* \chi_\sigma H_T u_* + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{H}_T f$$

$$\text{Ce qui donne : } C\chi_\sigma^* \chi_\sigma H_T (v - u_*) = 0$$

$$\text{Donc } \langle C\chi_\sigma^* \chi_\sigma H_T (v - u_*), \theta \rangle_{Y_1} = 0 \quad \forall \theta \in Y_1$$

$$\text{Par conséquent : } \langle v - u_*, H_T^* \chi_\sigma^* \chi_\sigma C^* \theta \rangle_{L^2(0, T; \mathcal{U})} = 0 \quad \forall \theta \in Y_1$$

$$\text{D'où : } \langle v - u_*, u_* \rangle_{L^2(0, T; \mathcal{U})} = 0$$

Alors en appliquant le théorème de projection [15, 32, 35] sur le convexe fermé non vide $\mathcal{U}_{ad}$, on en déduit que :

$$\|u_*\|_{L^2(0, T; \mathcal{U})} \leq \|v\|_{L^2(0, T; \mathcal{U})} \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$$

(iii) Unicité de u_*

Si u_{*1} et u_{*2} sont deux solutions optimales alors :

$$\langle v - u_{*1}, u_{*1} \rangle_{L^2(0, T; \mathcal{U})} = \langle v - u_{*2}, u_{*2} \rangle_{L^2(0, T; \mathcal{U})} \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$$

$$\text{Ce qui donne : } \|u_{*1} - u_{*2}\|_{L^2(0, T; \mathcal{U})}^2 = 0. \text{ Donc } u_{*1} = u_{*2}. \quad \blacksquare$$

Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons rappelé quelques résultats sur l'étalabilité, la vulnérabilité et la remédiabilité. Pour les systèmes linéaires subissant une perturbation, nous avons lié la remédiabilité régionale à l'étalabilité à travers le concept de la vulnérabilité en considérant ce qu'on a appelé "perturbation étalable". Dans ce cas, nous nous sommes intéressés au problème de la compensation régionale des effets de la perturbations affectant une zone donnée. En se plaçant toujours dans la même situation (i.e. la zone considérée est vulnérable par ces effets), il serait intéressant de pouvoir pousser plus loin la manière de contrôler cette perturbation.

Chapitre 3

Contrôle protecteur

1 Introduction - Motivation

Pour les systèmes linéaires, nous avons étudié dans le chapitre 2, le problème de la compensation régionale d'une perturbation supposée étalable et pour laquelle une zone donnée est non pas seulement vulnérable, mais déjà atteinte. Or parfois, il arrive qu'on ne peut pas remédier à certaines perturbations, ou un tel remède existe mais il est à coût très élevé.

Dans ce chapitre nous considérons le problème du contrôle protecteur qui consiste à protéger une zone donnée avant qu'elle soit atteinte par les effets d'une perturbation affectant l'état d'un système linéaire. Nous caractérisons les solutions de ce problème en utilisant deux approches différentes ; telle que la première fait intervenir des familles de transformations, tandis que la seconde consiste à introduire un retard sur le système de départ pour se ramener à un problème de la remédiabilité régionale d'un certain système à retard résultant. Ce qui va nous permettre de donner d'autres caractérisations, puis d'étudier le problème du contrôle protecteur à énergie minimale. Quelques exemples seront donnés pour illustrer ce concept.

Exemple

Considérons le système décrit par l'équation d'état suivante

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial z}{\partial t}(x, t) = b(x, t)z(x, t) & x > 0, 0 < t < T \\ z(x, 0) = z_0(x) & x > 0 \end{array} \right. \quad (3.1.1)$$

avec

$$z_0(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-x}\right) & 0 < x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

et

$$b(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(1+t-x)^2} & t < x < 1+t \\ 0 & x \geq 1+t \end{cases}$$

Alors la solution z du système (3.3.1) s'écrit sous la forme

$$z(x, t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1+t-x}\right) & t < x < 1+t \\ 0 & x \geq 1+t \end{cases}$$

Considérons le cas où la propriété $\mathcal{P}$ est donnée par $z(x, t) \neq 0$ et notons par

$$\omega_t = \{x > 0 : z(x, t) \neq 0\}$$

Alors dans ce cas on aura

$$\omega_t =]t, 1+t[$$

Il s'agit d'un système étalable au sens des aires, et toute zone $\sigma = [\alpha, \beta]$ est vulnérable pour tout $\alpha > 0$ (figure 3.1.1), car nous avons

Cas 1 : Si $0 < \alpha < 1$ alors $[\alpha, 1] \subset \overset{\circ}{\sigma} \cap \omega_0$ et donc $\overset{\circ}{\sigma} \cap \omega_0 \neq \emptyset$.

Cas 2 : Si $\alpha > 1$ alors il existe un instant $t_1 = \alpha - 1$ tel que pour tout $t \in]t_1, T[$, on a $\overset{\circ}{\sigma} \cap \omega_t \neq \emptyset$.

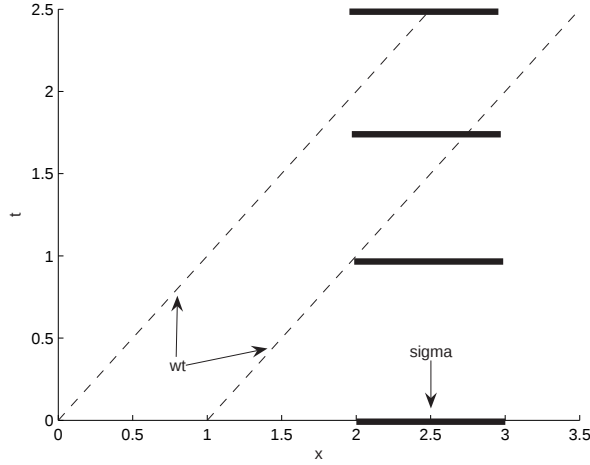


FIG. 3.1.1 – Vulnérabilité de la zone $\sigma =]2, 3[$

Système contrôlé :

Excitons le système (3.3.1) par un contrôle v ; c'est à dire

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t}(x, t) = b(x, t)z(x, t) + v(x, t) & x > 0, 0 < t < T \\ z(x, 0) = z_0(x) & x > 0 \end{cases} \quad (3.1.2)$$

avec

$$v(x, t) = -\frac{\dot{c}(t)a(t) - \dot{a}(t)(x - c(t))}{a^2(t)} z_0\left(\frac{x - c(t)}{a(t)}\right) - b(x, t)z_0\left(\frac{x - c(t)}{a(t)}\right)$$

où $a(t)$ et $c(t)$ sont deux fonctions réelles définies sur $[0, T]$ par

$$\begin{cases} a(t) = 1 - \frac{t^2}{2\alpha(\alpha - 1)} \\ c(t) = t - \frac{t^2}{2\alpha} \end{cases}$$

puis notons par $z(x, t, v)$ la solution de (3.6.1), et

$$\omega_t^v = \{x > 0 : z(x, t, v) \neq 0\}$$

Nous obtenons alors

$$\omega_t^v =]c(t), c(t) + a(t)[$$

Comme $c(t) < \alpha$ et $c(t) + a(t) < \alpha$ pour tout $\alpha > 1$ et $t \in [0, T]$, alors la zone $\sigma = [\alpha, \beta]$ n'est plus vulnérable (figure 3.1.2), et dans ce cas nous avons $I_v(\sigma) = 0$.

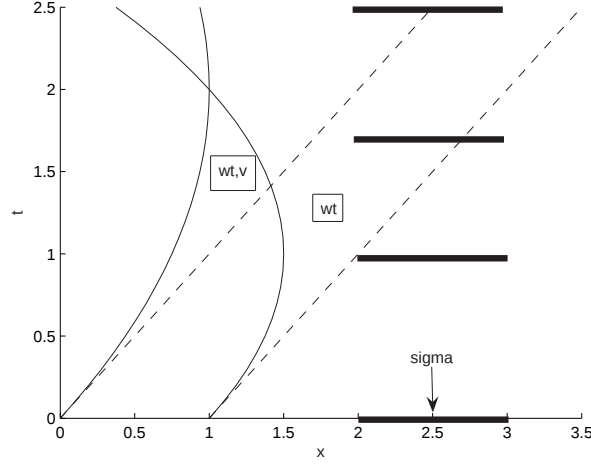


FIG. 3.1.2 – La zone $\sigma =]2, 3[$ est protectable

Nous constatons que sous l'effet du contrôle v , la zone σ est devenue non vulnérable pendant tout l'intervalle de temps I par l'effet de la propriété étalable $\mathcal{P}$. Un tel contrôle sera dit "protecteur"; c'est à dire celui qui permet de protéger la zone σ face à l'effet de l'étalabilité pendant tout l'intervalle de temps sur lequel évolue le système considéré.

Cet exemple constitue une motivation du présent chapitre où nous allons expliciter dans la suite le concept du contrôle protecteur pour les systèmes linéaires.

2 Position du problème - Définition

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $I =]0, T[$ un intervalle de temps. Considérons le système linéaire dont l'état est décrit sur $\Omega \times I$ par l'équation suivante

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + f(t) + Bu(t) & 0 < t < T \\ z(0) = z_0 \end{cases} \quad (3.2.1)$$

avec A engendre un semi groupe fortement continu $(S(t))_{t \geq 0}$ sur l'espace d'état $Z = L^2(\Omega)$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; L^2(\Omega))$, $u \in L^2(0, T; \mathcal{U})$, et $f \in L^2(0, T; \mathcal{F})$ une perturbation donnée sur une zone $\omega \subset \Omega$, i.e. $\text{supp}(f) = \omega$.

Là aussi, on suppose connue la perturbation f . Car sinon, on peut considérer le

problème de sa reconstruction à l'aide d'un capteur ω -espion (voir chapitre 1).

Les espaces Z , $\mathcal{U}$ et $\mathcal{F}$ désignent respectivement celui des états, des contrôles et des perturbations.

Le système (3.2.1) est supposé augmenté d'une fonction de mesure

$$y^\sigma(t) = C\chi_\sigma^*\chi_\sigma z(t) \quad (3.2.2)$$

où $C \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), Y)$, Y un espace de Hilbert (espace d'observations), σ une région fixée dans Ω satisfaisant l'hypothèse (2.3.1), χ_σ la restriction à σ et χ_σ^* l'opérateur adjoint de χ_σ définis en (1.2.5).

La solution de (3.2.1) est donnée par

$$z_{f,u}(t) = S(t)z_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds \quad (3.2.3)$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$z_{f,u}(t) = S(t)z_0 + \tilde{H}_t f + H_t u \quad (3.2.4)$$

où

$$\tilde{H}_t f = \int_0^t S(t-s)f(s)ds \quad \text{et} \quad H_t u = \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds \quad (3.2.5)$$

et donc la sortie (3.2.2) s'exprime par

$$y_{f,u}^\sigma(t) = C\chi_\sigma^*\chi_\sigma S(t)z_0 + C\chi_\sigma^*\chi_\sigma \tilde{H}_t f + C\chi_\sigma^*\chi_\sigma H_t u \quad (3.2.6)$$

D'autre part, notons par $z_{0,0}$ et $z_{f,0}$ les solutions du système autonome non perturbé ($f = 0, u = 0$), respectivement perturbé non contrôlé ($f \neq 0, u = 0$), et considérons la propriété $\mathcal{P}$ définie par :

$$\mathcal{P}z_{f,0}(x, t) \Leftrightarrow z_{f,0}(x, t) \neq z_{0,0}(x, t) \quad \forall (x, t) \in \Omega \times I \quad (3.2.7)$$

puis considérons les sous ensembles suivants

$$w_{f,0,t} = \{x \in \Omega : \mathcal{P}z_{f,0}(x, t)\}$$

Alors dans le cas où $u = 0$ et $f \neq 0$, la zone σ pourrait être atteinte par l'effet de la perturbation f qu'on suppose étalable, et par suite on se pose le problème suivant : Comment protéger σ avant qu'elle soit atteinte ?

Cela nous amène à considérer le problème suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver un contrôle } u \in L^2(0, T; \mathcal{U}) : \\ C\chi_\sigma^* \chi_\sigma H_t u + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{H}_t f = 0 \end{cases} \quad (3.2.8)$$

La formulation (3.2.8) fait intervenir la zone fixée σ , la perturbation f , le contrôle u et la condition $\forall t \in [0, T]$. Le fait de considérer $C\chi_\sigma^* \chi_\sigma H_t u + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{H}_t f = 0 \forall t \in [0, T]$, signifie qu'on est amené à protéger la zone σ avant qu'elle soit atteinte par l'effet de f pendant tout l'intervalle de temps I par un contrôle convenable u .

Rappelons qu'une zone est dite f -vulnérable, s'elle est susceptible d'être atteinte par les effets de la perturbation étalable f . Alors à partir de tout cela, nous avons la définition suivante.

Définition 3.1

Pour une zone σ supposée f -vulnérable, on a :

1. σ est dite f -protectable si

$$\exists u \in L^2(0, T; \mathcal{U}) : C\chi_\sigma^* \chi_\sigma H_t u + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{H}_t f = 0 \quad \forall t \in I$$

Dans ce cas u est dit un contrôle f - σ -protecteur.

2. σ sera dite faiblement f -protectable si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists u \in L^2(0, T; \mathcal{U}) : \|C\chi_\sigma^* \chi_\sigma H_t u + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{H}_t f\|_Y \leq \varepsilon \quad \forall t \in I$$

On dit que le contrôle u est faiblement f - σ -protecteur.

Remarque 3.1

1. Si la zone σ n'est pas f -vulnérable, on n'a pas besoin de la protéger. Ceci provient du fait que les $(w_{f,0,t})_{t \in I}$ n'atteignent jamais σ et donc $C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{H}_t f = 0 \forall t \in I$, par conséquent le contrôle $u = 0$ est une solution du problème (3.2.8).

2. Si σ est f -vulnérable et s'elle est atteinte par l'effet de f , alors dans ce cas il est impossible de protéger σ face à f . Et c'est à ce niveau qu'il fallait penser à remédier à l'effet de f sur une telle zone.

3. Tout contrôle σ -protecteur est un contrôle σ -remédiable. La réciproque est fausse.

4. Le problème du contrôle σ -protecteur (3.2.8) n'est pas un simple problème du "routage régional" où il fallait faire suivre régionalement l'état du système selon une trajectoire désirée, mais c'est un problème qui consiste à "router la propriété $\mathcal{P}$ " engendrée par f . En effet, la notion du routage régional introduite par M. Rachik [96], consiste en la détermination d'un contrôle permettant non pas seulement d'atteindre régionalement un état désiré à l'instant final T (i.e contrôlabilité régionale vue au chapitre 1), mais de faire diriger l'état du système selon une trajectoire désirée à

partir de l'état initial. Ainsi le contrôle σ -protecteur à pour but de faire suivre la propriété $\mathcal{P}$ selon une trajectoire ne passant pas par σ (dévier une telle propriété pour qu'elle n'atteigne jamais σ).

A partir de ces remarques, on constate que le contrôle protecteur d'une zone donnée est un concept dont l'aspect est purement régional, dont on ne peut parler sauf s'il s'agit d'une zone vulnérable mais qui n'est pas encore atteinte. Pour illustrer ce qui précède considérons l'exemple suivant.

3 Exemple : Transport monodimensionnel

Soit Ω un ouvert borné dans $]0, +\infty[$ et $I =]0, T[$ un intervalle de temps donné. Sur $\Omega \times I$, considérons le système linéaire dont l'état satisfait l'équation de transport suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t}(x, t) = -c \frac{\partial z}{\partial x}(x, t) + \delta(x - a)f(t) & \Omega \times]0, T[\\ z(x, 0) = z_0(x) = 0 & \Omega \\ z(0, t) = 0 &]0, T[\end{cases} \quad (3.3.1)$$

avec $a, c > 0$, $\delta(\cdot)$ est la mesure de Dirac et f une perturbation supposée connue. Le système (3.3.1) s'écrit sous la forme de (3.2.1) avec

$$A = -c \frac{\partial}{\partial x} \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega))$$

$$f(x, t) \equiv \delta(x - a)f(t) \text{ avec } \text{supp}(f) = \omega = \{a\}$$

L'opérateur A engendre sur $H_0^1(\Omega)$ un semi groupe fortement continu donné par [38]

$$(S(t)g)(x) = \begin{cases} g(x - ct) & x \geq ct \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $\sigma = [\alpha, \beta]$ une zone fixée dans Ω , telle que $\beta > \alpha$ et $a \notin \sigma$ (i.e. $\mu(\sigma) \neq 0$ et $\bar{\sigma} \cap \bar{\omega} = \emptyset$)

Si on suppose que l'instant final T est choisi de telle sorte que $T \leq \frac{a}{c}$, alors le système (3.3.1) admet comme solution

$$z_{f,0}(x,t) = \begin{cases} f\left(\frac{a-x}{c} + t\right) & a \leq x \leq a+ct \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc, pour $f \neq 0$, les sous domaines

$$w_{0,f,t} = \{x \in \Omega : z_{0,f}(x,t) \neq z_{0,0}(x,t)\} = \{x \in \Omega : z_{0,f}(x,t) \neq 0\}$$

sont donnés dans ce cas par

$$w_{0,f,t} = [a, a+ct]$$

Par conséquent, la perturbation f est étalable au sens de l'inclusion car

$$\forall t, s \in [0, T], \text{ on a } : t \leq s \Rightarrow w_{f,0,t} \subset w_{f,0,s}$$

Nous avons donc les deux situations suivantes :

1. $\beta < a$, dans ce cas on n'a pas besoin de protéger ni de remédier à f sur σ car cette zone n'est pas f -vulnérable.
2. $\beta > a$ et $\alpha < a+cT$, soit par exemple

$$\alpha = 4, \beta = 6, T = 6; c = \frac{1}{2} \text{ et } a = 3$$

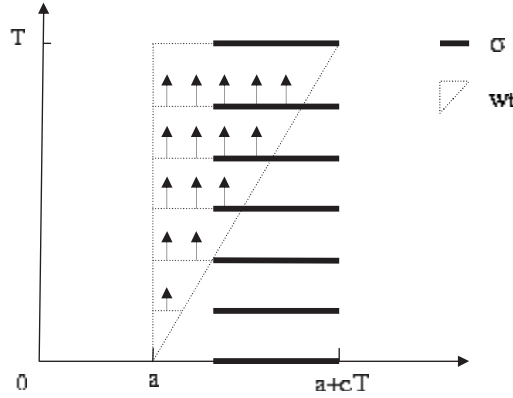


FIG. 3.3.1 – La zone σ est f -vulnérable

dans ce cas σ est f -vulnérable (figure 3.3.1) de plus elle sera atteinte par f , et c'est à ce niveau qu'il fallait appliquer un contrôle pour la protéger avant qu'elle ne soit pas atteinte.

Excitons le système (3.3.1) par un actionneur ponctuel localisé en un point b , ce qui donne

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t}(x, t) = -c \frac{\partial z}{\partial x}(x, t) + \delta(x - a)f(t) + \delta(x - b)u(t) \\ z(x, 0) = z_0(x) = 0 \\ z(0, t) = 0 \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Supposons que : $a < b < a + cT$. Dans ce cas, il existe $t^* \in]0, T[$ tel que : $b = a + ct^*$. Donc la solution de (3.3.2) est donnée par

$$z_{f,u}(x, t) = \begin{cases} f\left(\frac{a-x}{c} + t\right) & [a, a + ct], \ t \leq t^* \\ f\left(\frac{a-x}{c} + t\right) + u\left(\frac{b-x}{c} + t\right) & [b, a + ct], \ t \geq t^* \\ u\left(\frac{b-x}{c} + t\right) & [a + ct, b + ct], \ t \geq t^* \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Cela étant, le choix de la localisation du point b est très important. En effet :

1. Pour $b = 4$, donc $t^* = 2$, le contrôle donné par

$$u(t) = \begin{cases} -f(t - 2) & t \in]2, 6] \\ 0 & t \in]0, 2] \end{cases}$$

est f - σ -protecteur, et par conséquent il est aussi f - σ -remédiable (figure 3.3.2 à gauche).

2. Pour $b = 5$, donc $t^* = 4$, il n'existe aucun contrôle de type ponctuel localisé en ce point et qui rend la zone σ non vulnérable ou qui remédie à l'effet de f sur une telle zone, car le point d'excitation est situé à l'intérieur de cette zone pour laquelle la région $[4, 5]$ est atteinte par la perturbation f (figure 3.3.2 à droite).

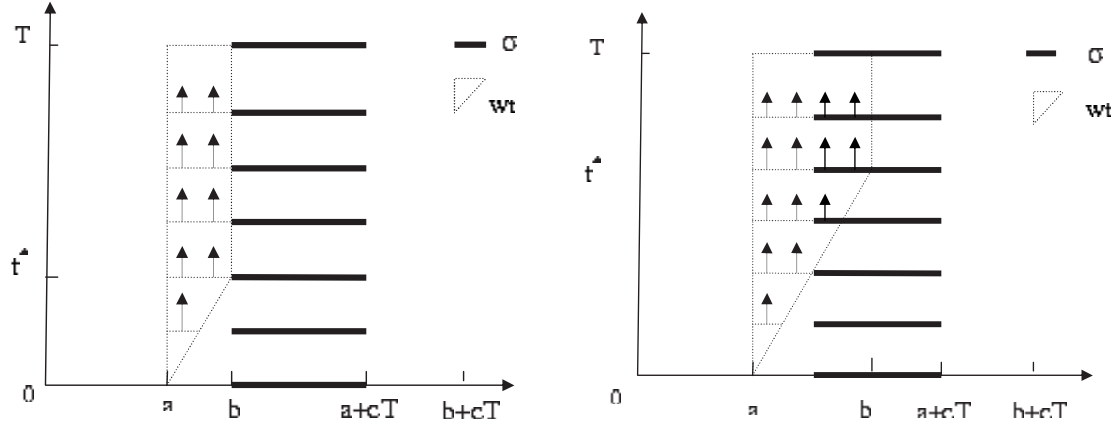


FIG. 3.3.2 – La zone σ est f -protectable (à gauche) et elle n'est ni f -protectable ni f -remédiable (à droite)

Cet exemple constitue une illustration du concept du contrôle protecteur ainsi que son lien avec la remédiabilité lorsqu'il s'agit d'une perturbation étalable pour laquelle la zone fixée est vulnérable.

4 Approches du problème du contrôle protecteur

Dans cette section nous proposons deux approches différentes pour caractériser les solutions du problème de contrôle protecteur (3.2.8). La première approche est basée sur les familles de transformations adaptables à l'évolution du système, et qui sont utilisées pour caractériser l'étalabilité, tandis que la deuxième consiste à transformer un tel problème en un problème de remédiabilité régionale d'un certain système à retard résultant en introduisant un retard sur le système de départ.

4- a Approche par familles de transformations

Dans la deuxième partie du chapitre 2, nous avons donné une caractérisation de l'étalabilité d'un système pour une propriété donnée, en utilisant des familles de transformations dites adaptées à l'évolution du système (définition 2.3). Aussi, celles dites adaptables à l'évolution du système sont utilisées pour lier le contrôle à l'étalabilité (définition 2.5).

Pour le système (3.2.1) d'état $z_{f,u}$, considérons la propriété $\mathcal{P}$ donnée en (3.2.7) et aussi les sous domaines de Ω donnés par

$$w_{f,0,t} = \{x \in \Omega : \mathcal{P}z_{f,0}(x, t)\} \quad \text{et} \quad w_{f,u,t} = \{x \in \Omega : \mathcal{P}z_{f,u}(x, t)\}$$

Dans le cas où la perturbation f est étalable, alors il existe une famille de transformations $(F(\cdot, s, t))_{(s,t) \in J}$ adaptée à (3.2.1) avec $u = 0$, telle que la trajectoire de la propriété $\mathcal{P}$ est définie par

$$\mathcal{T}_t = \bigcup_{s \in]0, t[} F(\omega_{f,0,0}, s, 0)$$

Par conséquent la zone fixée σ est f -vulnérable s'il existe $t \in]0, T[$ tel que

$$\overset{\circ}{\sigma} \cap \mathcal{T}_t \neq \emptyset$$

Lorsque $u \neq 0$ la trajectoire de f devient

$$\mathcal{T}_t^u = \bigcup_{s \in]0, t[} F(\omega_{f,u,0}, s, 0)$$

Donc en utilisant la définition 3.1 d'une zone protectable, nous avons la caractérisation suivante

Théorème 3.1

u est un contrôle f - σ -protecteur si et seulement s'il est associé à une famille de transformations adaptable au système (3.2.1) telle que

$$\overset{\circ}{\sigma} \cap \mathcal{T}_t^u = \emptyset \quad \forall t \in]0, T[\quad (3.4.1)$$

Preuve :

Par définition, u est un contrôle $f - \sigma$ - protecteur

$$\Leftrightarrow C\chi_\sigma^* \chi_\sigma H_t u + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{H}_t f = 0 \quad \forall t \in I$$

$$\Leftrightarrow H_t u + \tilde{H}_t f = 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{\sigma} \quad \forall t \in I$$

$$\Leftrightarrow z_{f,u}(x, t) = z_{0,0}(x, t) \quad \forall x \in \overset{\circ}{\sigma} \quad \forall t \in I$$

$$\Leftrightarrow x \notin w_{f,u,t} \quad \forall x \in \overset{\circ}{\sigma} \quad \forall t \in I$$

$$\Leftrightarrow x \notin F(w_{f,u,0}, t, 0) \quad \forall x \in \overset{\circ}{\sigma} \quad \forall t \in I$$

$$\Leftrightarrow x \notin \bigcup_{s \in]0, t[} F(w_{f,u,0}, s, 0) \quad \forall x \in \overset{\circ}{\sigma} \quad \forall t \in I$$

$$\Leftrightarrow \overset{\circ}{\sigma} \cap \mathcal{T}_t^u = \emptyset \quad \forall t \in]0, T[$$

D'où la relation (3.4.1). ■

L'intérêt de ce résultat s'articule sur le fait que l'effet d'un tel contrôle est de faire suivre la propriété $\mathcal{P}$ selon une trajectoire ne passant pas par $\overset{\circ}{\sigma}$ (routage régional de $\mathcal{P}$). Par conséquent on en déduit les deux situations suivantes : ou bien la propriété $\mathcal{P}$ n'atteint jamais $\bar{\sigma}$, ou bien $\mathcal{P}$ atteint juste la frontière de σ . Cela peut nous amener à caractériser le contrôle protecteur à travers la vitesse d'étalabilité de

$\mathcal{P}$. En effet, si la connaissance de la famille de transformations vérifiant la relation (3.4.1) permet de déterminer la vitesse de la propriété $\mathcal{P}$, et en particulier sa vitesse normale $v(x, t, \vec{n})$ où $\vec{n}$ est la normale intérieure à la frontière Γ_σ de la zone σ , alors nous avons le résultat suivant :

u est un contrôle f - σ -protecteur $\Leftrightarrow v(x, t, \vec{n}) = 0 \quad \forall x \in \Gamma_\sigma \quad \forall t \in I$.

Remarque 3.2

Pour déterminer un contrôle f - σ -protecteur, nous pouvons suivre les mêmes démarches que celles données au chapitre 2 pour la détermination d'un contrôle étaleur ; à savoir :

1. Choisir une famille de transformations vérifiant cette fois-ci la relation (3.4.1).
2. Trouver un contrôle qui lui est associé.

Comme il a été déjà signalé (chapitre 2), le choix d'une telle famille de transformations n'est pas toujours simple [23]. C'est pour cela que nous proposons une deuxième approche pour caractériser les contrôles f - σ -protecteur sans passer par les familles de transformations adaptables.

4- b Approche par remédiabilité

Principe - Caractérisations

Le principe de cette approche consiste à transformer le problème du contrôle f - σ -protecteur (3.2.8) en un problème de type remédiabilité régionale d'un certain système à préciser et ceci en introduisant un retard sur le système de départ. Noter que ceci est dû au fait que la résolution d'un tel problème n'est pas évidente vu la condition $\forall t \in I$ qui intervient lors de sa formulation. De ce fait, et pour décrire cette approche, un cadre fonctionnel convenablement choisi sera utilisé. En effet, reconsidérons le système (3.2.1) avec les mêmes hypothèses qui étaient déjà faites.

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + f(t) + Bu(t) & 0 < t < T \\ z(0) = z_0 \end{cases} \quad (3.4.2)$$

augmenté de la fonction de mesure (3.2.2)

$$y^\sigma(t) = C\chi_\sigma^* \chi_\sigma z(t) \quad (3.4.3)$$

Reprenons aussi le problème du contrôle f - σ -protecteur (3.2.8)

$$\begin{cases} \text{Trouver un contrôle } u \in L^2(0, T; \mathcal{U}) : \\ C\chi_\sigma^* \chi_\sigma H_t u + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{H}_t f = 0 \end{cases} \quad (3.4.4)$$

Alors, pour procéder par la notion du retard, considérons l'espace de Hilbert $V = L^2(-T, 0; L^2(\Omega))$, sur lequel on définit, pour tout $t \in I$, le semi groupe fortement continu $(R(t))_{t \geq 0}$ donné par

$$(R(t)g)(r) = \begin{cases} g(t+r) & r \in [-T, -t] \\ 0 & r \in]-t, 0] \end{cases} \quad (3.4.5)$$

L'opérateur linéaire $D = \frac{d}{ds}$ est le générateur infinitésimal de $(R(t))_{t \geq 0}$ sur V .

Définissons aussi l'application linéaire $\tilde{F}$ par

$$\begin{aligned} \tilde{F} : L^2(\Omega) &\longrightarrow V \\ a(t) &\longmapsto \tilde{F}a(t) \\ (\tilde{F}a(t))(r) &= a(t) \quad \forall a(t) \in L^2(\Omega), \quad \forall r \in [-T; 0] \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

Désignons toujours par $z_{f,u}(t)$ la solution du système (3.4.2) et posons

$$\tilde{z}_{f,u}(t) = R(t)(\tilde{F}z_0) - D \int_0^t R(t-s) \tilde{F}z_{f,u}(s) ds \quad (3.4.7)$$

Donc la fonction de mesure associée à la nouvelle variable d'état $\tilde{z}_{f,u}$ s'écrit

$$\tilde{y}_{f,u}(t) = C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{z}_{f,u}(t) \in L^2(-T, 0; Y) \quad (3.4.8)$$

Rappelons le résultat suivant [68].

Lemme 3.1

Nous avons :

$$(\tilde{y}_{f,u}(T))(r) = y_{f,u}(T+r) \quad \forall r \in [-T; 0]. \quad (3.4.9)$$

Preuve : Elle découle des expressions (3.4.5), (3.4.6) et (3.4.8). ■

D'autre part, la manière avec laquelle le contrôle u et la perturbation f apparaissent dans (3.4.7) nous conduit à introduire une nouvelle équation d'état sur l'espace produit $\tilde{W} = L^2(\Omega) \times V$ de la façon suivante

$$\tilde{w}_{f,u}(t) = U(t)\tilde{w}_0 + \int_0^t U(t-s)Lu(s)ds + \int_0^t U(t-s)Kf(s)ds \quad (3.4.10)$$

où

$$\tilde{w}_{f,u}(t) = (z_{f,u}(t), \tilde{z}_{f,u}(t))^{tr}, \quad \tilde{w}_0 = (z_0, \tilde{F}z_0)^{tr}, \quad L = (B, 0)^{tr}, \quad K = (\chi_\omega, 0)^{tr}$$

et $(U(t))_{t \geq 0}$ est le semi groupe fortement continu sur $\widetilde{W}$ qui s'exprime par

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_0(t) & 0 \\ U_1(t) & U_2(t) \end{pmatrix} \quad (3.4.11)$$

avec

$$U_0(t) = S(t), \quad U_2(t) = R(t), \quad U_1(t) = -D \int_0^t R(t-s)\tilde{F}S(s)ds \quad (3.4.12)$$

Si on note par $\tilde{A}$ le générateur infinitesimal du semi groupe $(U(t))_{t \geq 0}$ sur l'espace de Hilbert $\widetilde{W}$, alors le système associé à l'équation (3.4.10) est donné par

$$\begin{cases} \dot{\tilde{w}}(t) = \tilde{A}\tilde{w}(t) + Kf(t) + Lu(t) & 0 < t < T \\ \tilde{w}(0) = \tilde{w}_0 \end{cases} \quad (3.4.13)$$

et la fonction de mesure associée est donné par

$$\hat{y}^\sigma(t) = \mathcal{C}\chi_\sigma^*\chi_\sigma\tilde{w}(t) \quad \text{avec} \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad (3.4.14)$$

Remarquons que :

$$\hat{y}^\sigma(t) = (y_{f,u}^\sigma(t), \tilde{y}_{f,u}^\sigma(t))^{tr} \in Y \times L^2(-T, 0; Y) \quad (3.4.15)$$

A propos de (3.4.13), il s'agit en fait d'une équation d'état faisant intervenir un système à retard d'une manière implicite sachant que ce dernier étant défini sur l'espace de Hilbert V . Pour clarifier ceci considérons les opérateurs suivants

$$\begin{aligned} H_{1,T} : L^2(0, T; \mathcal{U}) &\longrightarrow V = L^2(-T, 0; L^2(\Omega)) \\ u &\longmapsto p_2 \int_0^T U(T-s)Lu(s)ds \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

et

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_{1, T} : L^2(0, T; \mathcal{F}) &\longrightarrow V = L^2(-T, 0; L^2(\Omega)) \\ f &\longmapsto p_2 \int_0^T U(T-s)Kf(s)ds \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

où p_2 désigne l'opérateur de projection défini par

$$\begin{aligned} p_2 : \widetilde{W} &\longrightarrow V \\ (z, \widetilde{z}) &\longmapsto \widetilde{z} \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

Donc en utilisant les deux expressions (3.4.10) et (3.4.11) on obtient

$$H_{1, T}u = \int_0^T U_1(T-s)Bu(s)ds \quad \text{et} \quad \widetilde{H}_{1, T}f = \int_0^T U_1(T-s)f(s)ds \quad (3.4.19)$$

avec $U_1(t)$ est le semi groupe donné en (3.4.12).

Cela étant, considérons le problème suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver un contrôle } u \in L^2(0, T; \mathcal{U}) : \\ C\chi_\sigma^* \chi_\sigma H_{1, T}u + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \widetilde{H}_{1, T}f = 0 \end{cases} \quad (3.4.20)$$

Le problème ainsi formulé fait intervenir la zone σ , la perturbation f , le contrôle u et aussi les deux nouveaux opérateurs $H_{1, T}$ et $\widetilde{H}_{1, T}$. Il s'agit d'un problème de type remédiabilité régionale, qui consiste à compenser l'effet de f sur la zone σ . Noter aussi que la condition $\forall t \in I$ n'y intervienne pas. Ceci donc nous permet de donner la caractérisation suivante.

Théorème 3.2

u est un contrôle f - σ -protecteur si et seulement si u est une solution de (3.4.20).

Preuve : Il s'agit de montrer que les deux problèmes (3.4.4) et (3.4.20) sont équivalents. Soit $u \in L^2(0, T; \mathcal{U})$ un contrôle donné.

Alors u est une solution du problème (3.4.20)

$$\Leftrightarrow C\chi_\sigma^*\chi_\sigma H_{1, T}u + C\chi_\sigma^*\chi_\sigma \tilde{H}_{1, T}f = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^T C\chi_\sigma^*\chi_\sigma U_1(T-s)Bu(s)ds + \int_0^T C\chi_\sigma^*\chi_\sigma U_1(T-s)f(s)ds = 0$$

$$\Leftrightarrow p_2[\tilde{y}^\sigma(T) - C\chi_\sigma^*\chi_\sigma U(T)\tilde{w}_0] = 0 \quad \text{d'après (3.4.15) et (3.4.18)}$$

$$\Leftrightarrow \tilde{y}_{f,u}^\sigma(T) - C\chi_\sigma^*\chi_\sigma U_1(T)z_0 - C\chi_\sigma^*\chi_\sigma R(T)\tilde{F}z_0 = 0 \quad (\text{en utilisant (3.4.11)})$$

$$\Leftrightarrow (\tilde{y}_{f,u}^\sigma(T))(r) = (C\chi_\sigma^*\chi_\sigma U_1(T)z_0)(r) + (C\chi_\sigma^*\chi_\sigma R(T)\tilde{F}z_0)(r) \quad \forall r \in [-T, 0]$$

Comme

$$\begin{aligned} (U_1(T)z_0)(r) &= (-D \int_0^T R(T-s)\tilde{F}S(s)z_0 ds)(r) \\ &= (-D \int_0^T R(T-s)\tilde{F}z_{0,0}(s)ds)(r) \\ &= -(R(T)\tilde{F}z_0)(r) + z_{0,0}(T+r) \end{aligned}$$

Donc

$$C\chi_\sigma^*\chi_\sigma H_{1, T}u + C\chi_\sigma^*\chi_\sigma \tilde{H}_{1, T}f = 0$$

$$\Leftrightarrow (\tilde{y}_{f,u}^\sigma(T))(r) = y_{0,0}^\sigma(T+r) \quad \forall r \in [-T, 0]$$

$$\Leftrightarrow y_{f,u}^\sigma(T+r) = y_{0,0}^\sigma(T+r) \quad \forall r \in [-T, 0] \quad \text{d'après le lemme 3.1}$$

Si on pose $t = T + r$, alors nous avons $r \in [-T, 0] \Leftrightarrow t \in [0, T]$.

Ce qui donne finalement l'équivalence suivante

$$C\chi_\sigma^*\chi_\sigma H_{1, T}u + C\chi_\sigma^*\chi_\sigma \tilde{H}_{1, T}f = 0$$

$$\Leftrightarrow y_{f,u}^\sigma(t) = y_{0,0}^\sigma(t) = C\chi_\sigma^*\chi_\sigma S(t)z_0 \quad \forall t \in [0, T]$$

$$\Leftrightarrow C\chi_\sigma^*\chi_\sigma H_t u + C\chi_\sigma^*\chi_\sigma \tilde{H}_t f = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{d'après (3.2.6).}$$

$$\Leftrightarrow u \text{ est un contrôle } f - \sigma - \text{protecteur}$$

■

Remarque 3.3

Soit $\varepsilon > 0$. Si on désigne par $(P)_\varepsilon$ (respectivement $(P1)_\varepsilon$) le problème au sens faible avec la tolérance ε , de (3.4.4) (respectivement (3.4.20)), alors on montre que

$$(P)_\varepsilon \Leftrightarrow (P1)_\varepsilon$$

En effet, cela est possible avec un même raisonnement que celui de la preuve du théorème 3.2 en passant aux normes puis en majorant par ε .

Cette approche présente un grand avantage car, nous avons montré à travers son principe que les deux problèmes (3.4.4) et (3.4.20) sont équivalents. Ce qui nous permettra de ramener la résolution du problème du contrôle protecteur qui est défini pour tout instant t dans I , à celle du problème de la remédiabilité régionale considéré pour un temps T fixé.

Propriétés

Maintenant nous allons donner quelques propriétés du contrôle f - σ -protecteur exacte et faible, en considérant le problème (3.4.20) et la définition 3.1. Pour cela considérons les opérateurs $H_{1, T}$ et $\tilde{H}_{1, T}$ définis en (3.4.19) par

$$H_{1, T}u = \int_0^T U_1(T-s)Bu(s)ds \quad \text{et} \quad \tilde{H}_{1, T}f = \int_0^T U_1(T-s)f(s)ds$$

et soit $H_{1, T}^*$ l'opérateur adjoint de $H_{1, T}$ qu'on peut écrire sous la forme

$$H_{1, T}^* = B^*U_1^*(T - \cdot)$$

ou encore en utilisant l'expression de $(U_1(t))_{t \in I}$ donnée en (3.4.12)

$$\begin{aligned} H_{1, T}^* : V = L^2(-T, 0; L^2(\Omega)) &\longrightarrow L^2(0, T; \mathcal{U}) \\ z &\longmapsto B^* \int_{-T}^0 (R^*(T - \cdot + r)z)(r)dr \end{aligned} \tag{3.4.21}$$

Commençons par un résultat qui est une conséquence immédiate du théorème 3.2.

Proposition 3.1

(i) la zone σ est f -protectable si et seulement si :

$$\exists u \in L^2(0, T; \mathcal{U}) : C\chi_\sigma^* \chi_\sigma H_{1, T}u + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{H}_{1, T}f = 0$$

(ii) la zone σ est faiblement f -protectable si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists u \in L^2(0, T; \mathcal{U}) : \|C\chi_\sigma^* \chi_\sigma H_{1, T} u + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{H}_{1, T} f\|_{L^2(-T, 0; Y)} \leq \varepsilon$$

Cela étant, nous avons le second résultat de caractérisation suivant.

Proposition 3.2

Les assertions suivantes sont équivalentes

(i) *La zone σ est f -protectable.*

(ii) $C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{H}_{1, T} f \in \text{Im}(C\chi_\sigma^* \chi_\sigma H_{1, T})$

(iii) $\exists c_\sigma > 0$ tel que $\forall g \in L^2(-T, 0; Y^*)$ on a :

$$\|U_1^*(T - \cdot) \chi_\sigma^* \chi_\sigma C^* g\|_{L^2(0, T; \mathcal{F}^*)} \leq c_\sigma \|B^* U_1^*(T - \cdot) \chi_\sigma^* \chi_\sigma C^* g\|_{L^2(0, T; \mathcal{U}^*)}$$

Pour établir cela, nous rappelons d'abord le résultat suivant [48, 57].

Lemme 3.2

Soient E_1, E_2 et E_3 des espaces de Banach réflexifs.

Si $\Phi \in \mathcal{L}(E_1, E_3)$ et $\Psi \in \mathcal{L}(E_2, E_3)$ alors

$$\text{Im}(\Psi) \subset \text{Im}(\Phi) \Leftrightarrow \exists c > 0 : \|\Phi^* g\|_{E_1^*} \leq c \|\Psi^* g\|_{E_2^*} \quad \forall g \in E_3^*$$

Preuve de la proposition :

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) provient directement de la proposition 3.1.

Pour montrer que (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) il suffit de poser

$$E_1 = L^2(0, T; \mathcal{F}), \quad E_2 = L^2(0, T; \mathcal{U}), \quad E_3 = L^2(-T, 0; Y)$$

et

$$\Phi = C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{H}_{1, T}, \quad \Psi = C\chi_\sigma^* \chi_\sigma H_{1, T}$$

alors en appliquant le lemme 3.2 avec $c = c_\sigma$ on a l'équivalence cherchée. ■

Concernant le cas du contrôle faiblement f - σ -protecteur nous avons

Proposition 3.3

Les assertions suivantes sont équivalentes

(i) *La zone σ est faiblement f -protectable.*

$$(ii) \ C\chi_\sigma^*\chi_\sigma\tilde{H}_{1, Tf} \in \overline{\text{Im}(C\chi_\sigma^*\chi_\sigma H_{1, T})}$$

$$(iii) \ \text{Ker}(H_{1, T}^*\chi_\sigma^*\chi_\sigma C^*) = \{0\}.$$

Preuve :

Pour (i) $\Leftrightarrow$ (ii), elle découle de la proposition 3.1.

Montrons que (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). En effet, par orthogonalité nous avons

$$\overline{\text{Im}(C\chi_\sigma^*\chi_\sigma H_{1, T})} = [\text{Ker}(H_{1, T}^*\chi_\sigma^*\chi_\sigma C^*)]^\perp$$

Donc

$$(ii) \Leftrightarrow \langle C\chi_\sigma^*\chi_\sigma\tilde{H}_{1, Tf}, g \rangle_{L^2(-T, 0; Y)} = 0 \quad \forall g \in \text{Ker}(H_{1, T}^*\chi_\sigma^*\chi_\sigma C^*)$$

Comme $C\chi_\sigma^*\chi_\sigma\tilde{H}_{1, Tf}$ est une constante non nulle sur $L^2(-T, 0; Y)$, alors $g = 0$.
C'est à dire que

$$(ii) \Leftrightarrow \text{Ker}(H_{1, T}^*\chi_\sigma^*\chi_\sigma C^*) = \{0\}$$

■

Ces différentes caractérisations vont nous permettre d'étudier le problème du contrôle protecteur à énergie minimale.

5 Contrôle protecteur à énergie minimale

Dans cette partie on s'intéresse à la résolution du problème du contrôle f - σ protecteur à énergie minimale. Autrement dit on va déterminer un contrôle u permettant d'empêcher la propriété engendrée par f d'atteindre σ , et dont le coût nécessaire pour protéger une telle zone est minimal.

Considérons le critère (ou Fonctionnelle coût) J donné par

$$J(u) = \|C\chi_\sigma^*\chi_\sigma H_t u + C\chi_\sigma^*\chi_\sigma \tilde{H}_t f\|_Y + \|u\|_{L^2(0, T; \mathcal{U})}^2$$

et notons

$$\mathcal{U}_{ad} = \{u \in L^2(0, T; \mathcal{U}) : C\chi_\sigma^*\chi_\sigma H_t u + C\chi_\sigma^*\chi_\sigma \tilde{H}_t f = 0, \quad t \in I\}$$

alors le problème que nous considérons peut être formulé comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in L^2(0, T; \mathcal{U}) : \\ u \in \mathcal{U}_{ad} \\ J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v) \end{array} \right. \quad (3.5.1)$$

Dire que $u \in \mathcal{U}_{ad}$ revient à dire que u est une solution du problème du contrôle f - σ protecteur (3.4.4). Ce qui revient encore à dire d'après le théorème 3.2 que le contrôle u est une solution du problème de la remédiabilité régionale (3.4.20). Ce qui nous permet d'écrire

$$\mathcal{U}_{ad} = \{u \in L^2(0, T; \mathcal{U}) : C\chi_\sigma^* \chi_\sigma H_{1, T} u + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{H}_{1, T} f = 0\}$$

Noter que si $u \in \mathcal{U}_{ad}$, alors dans ce cas on aura $J(u) = \|u\|_{L^2(0, T; \mathcal{U})}^2$.

Pour étudier le problème (3.5.1), nous considérons le sous espace Y_0 de l'espace de Hilbert $L^2(-T, 0; Y)$ défini par

$$Y_0 = \overline{\text{Im}(C\chi_\sigma^* \chi_\sigma H_{1, T})}$$

puis on définit la semi norme $\|\cdot\|_{Y_1}$ sur $L^2(-T, 0; Y)$ par

$$\|g\|_{Y_1} = \|H_{1, T}^* \chi_\sigma^* \chi_\sigma C^* g\|_{L^2(0, T; \mathcal{U}^*)} \quad (3.5.2)$$

Le produit scalaire associé à $\|\cdot\|_{Y_1}$ est donné sur $L^2(-T, 0; Y)$ par

$$\langle g_1, g_2 \rangle_{Y_1} = \langle H_{1, T}^* \chi_\sigma^* \chi_\sigma C^* g_1, H_{1, T}^* \chi_\sigma^* \chi_\sigma C^* g_2 \rangle_{L^2(0, T; \mathcal{U}^*)} \quad g_1, g_2 \in L^2(-T, 0; Y) \quad (3.5.3)$$

ensuite, considérons l'opérateur Λ tel que

$$\Lambda : L^2(-T, 0; Y) \longrightarrow L^2(-T, 0; Y)$$

$$y \longmapsto C\chi_\sigma^* \chi_\sigma H_{1, T} H_{1, T}^* \chi_\sigma^* \chi_\sigma C^* y$$

Donc avec toutes ces considérations, nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.3

Si la zone σ est faiblement f -protectable alors

(i) $\|\cdot\|_{Y_1}$ est une norme sur l'espace Y_0 .

(ii) $\Lambda(L^2(-T, 0; Y)) \subset Y_0$ avec injection continue.

Preuve :

(i) Soit $g \in Y_0$ telle que $\|g\|_{Y_1} = 0$.

D'après la formule (3.5.2) nous avons

$$\|g\|_{Y_1} = \left(\int_0^T \|B^*U_1^*(T-s)\chi_\sigma^*\chi_\sigma C^*g\|_{\mathcal{U}^*}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

Comme l'application

$$s \in [0, T] \longmapsto \|B^*U_1^*(T-s)\chi_\sigma^*\chi_\sigma C^*g\|_{\mathcal{U}^*}^2$$

est continue et positive, alors on aura

$$\|B^*U_1^*(T-s)\chi_\sigma^*\chi_\sigma C^*g\|_{\mathcal{U}^*}^2 = 0 \quad \forall s \in [0, T]$$

Ce qui donne

$$B^*U_1^*(T-s)\chi_\sigma^*\chi_\sigma C^*g = 0$$

C'est à dire que

$$g \in \text{Ker}(H_{1, T}^*\chi_\sigma^*\chi_\sigma C^*)$$

Or la zone σ est supposée faiblement f -protectable, alors d'après le point (iii) de la proposition 3.3 on aura $g = 0$.

Donc $\|\cdot\|_{Y_1}$ se prolonge en une norme sur l'espace Y_0 .

(ii) Soit maintenant $g \in L^2(-T, 0; Y)$. Nous avons

$$\begin{aligned} \langle \Lambda g, g \rangle_{Y_1} &= \langle C\chi_\sigma^*\chi_\sigma H_{1, T}^*H_{1, T}^*\chi_\sigma^*\chi_\sigma C^*g, g \rangle_{L^2(0, T, \mathcal{U}^*)} \\ &= \langle H_{1, T}^*\chi_\sigma^*\chi_\sigma C^*g, H_{1, T}^*\chi_\sigma^*\chi_\sigma C^*g \rangle_{L^2(0, T, \mathcal{U}^*)} \\ &= \|g\|_{Y_1}^2 \\ &= \int_0^T \|B^*U_1^*(T-s)\chi_\sigma^*\chi_\sigma C^*g\|_{\mathcal{U}^*}^2 ds \\ &\leq \int_0^T \|B^*U_1^*(T-s)\chi_\sigma^*\chi_\sigma C^*g\|_{\mathcal{U}^*}^2 ds \|g\|_{L^2(-T, 0; Y)}^2 \\ &\leq b_\sigma \|g\|_{L^2(-T, 0; Y)}^2 \end{aligned}$$

avec b_σ est une constante donnée par $b_\sigma = \int_0^T \|B^*U_1^*(T-s)\chi_\sigma^*\chi_\sigma C^*\|_{\mathcal{U}^*}^2 ds$

D'où l'injection continue de $\Lambda(L^2(-T, 0; Y))$ dans Y_0 . ■

Notons alors Y_1 le complété de Y_0 pour la norme $\|\cdot\|_{Y_1}$.

Avec les mêmes hypothèses du lemme 3.3, nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.4

L'opérateur linéaire Λ se prolonge par continuité d'une manière unique en un isomorphisme de Y_1 vers son dual Y_1'

Preuve :

Soit $g_1 \in Y_1$. Considérons l'application linéaire

$$\Lambda g_1 : L^2(-T, 0; Y) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g_2 \longmapsto \langle \Lambda g_1, g_2 \rangle_{L^2(-T, 0; Y)}$$

alors

$$\begin{aligned} |(\Lambda g_1)(g_2)| &= |\langle \Lambda g_1, g_2 \rangle_{L^2(-T, 0; Y)}| \\ &= |\langle g_1, g_2 \rangle_{Y_1}| \\ &\leq \|g_1\|_{Y_1} \|g_2\|_{Y_1} \end{aligned}$$

Donc Λg_1 est continu sur $L^2(-T, 0; Y)$ pour la topologie de Y_1 .

Par conséquent, Λ est prolongeable par continuité dans Y_1 (ce prolongement est noté aussi Λ) ; c'est à dire $\Lambda g_1 \in Y_1'$.

D'autre part nous avons :

$$\langle \Lambda g_1, g_2 \rangle_{L^2(-T, 0; Y)} = \langle g_1, g_2 \rangle_{Y_1} \quad \forall g_2 \in L^2(-T, 0; Y)$$

ce qui entraîne que

$$\|\Lambda g_1\|_{Y_1'} = \|g_1\|_{Y_1}$$

Alors d'après le théorème de Riesz [32], on en déduit que $\Lambda : Y_1 \rightarrow Y_1'$ est linéaire et surjectif. Comme Λ est aussi injectif, car :

Si $g_1 \in Y_1$ tel que $\Lambda g_1 = 0$, alors $\langle \Lambda g_1, g_2 \rangle_{L^2(-T, 0; Y)} = 0 \quad \forall g_2 \in Y_1$

C'est à dire que $\langle g_1, g_2 \rangle_{Y_1} = 0 \quad \forall g_2 \in Y_1$

Donc $\|g_1\|_{Y_1}^2 = 0$

et puisque $\|\cdot\|_{Y_1}$ est une norme sur Y_0 (d'après le point (i) du lemme 3.3) et Y_1 est le complété de Y_0 pour cette norme, alors $g_1 = 0$.

On en déduit alors que $\Lambda : Y_1 \rightarrow Y_1'$ est un isomorphisme. ■

A partir de ce qui précède nous allons établir le résultat qui répond à la question de ce paragraphe.

Théorème 3.3

Si $C\chi_\sigma^\chi_\sigma\tilde{H}_{1, Tf} \in Y_1'$ et que la zone σ est faiblement f -protectable, alors le problème (3.5.1), admet une solution unique donnée par*

$$u_* = H_{1, T}^*\chi_\sigma^*\chi_\sigma C^*g$$

Avec g est l'unique solution de l'équation

$$\Lambda g = -C\chi_\sigma^*\chi_\sigma\tilde{H}_{1, Tf}$$

Preuve :

Par hypothèses sur f et σ , nous avons d'après le lemme 3.4

$$C\chi_\sigma^*\chi_\sigma\tilde{H}_{1, Tf} \in Y_1' \Leftrightarrow \exists! g \in Y_1 : \Lambda g = -C\chi_\sigma^*\chi_\sigma\tilde{H}_{1, Tf}$$

En utilisant l'expression de Λ on aura

$$C\chi_\sigma^*\chi_\sigma H_{1, T} H_{1, T}^* \chi_\sigma^* \chi_\sigma C^*g = -C\chi_\sigma^*\chi_\sigma\tilde{H}_{1, Tf}$$

C'est à dire que

$$C\chi_\sigma^*\chi_\sigma H_{1, T} u_* = -C i_\sigma p_\sigma \tilde{H}_{1, Tf}$$

Soit encore

$$C\chi_\sigma^*\chi_\sigma H_{1, T} u_* + C\chi_\sigma^*\chi_\sigma\tilde{H}_{1, Tf} = 0$$

Donc $u_* \in \mathcal{U}_{ad}$.

D'autre part, l'ensemble $\mathcal{U}_{ad}$ est un convexe fermé de $L^2(0, T; \mathcal{U})$, il est en plus non vide car $u_* \in \mathcal{U}_{ad}$. Alors pour tout $v \in \mathcal{U}_{ad}$ nous avons

$$C\chi_\sigma^*\chi_\sigma H_{1, T} v + C\chi_\sigma^*\chi_\sigma\tilde{H}_{1, Tf} = C\chi_\sigma^*\chi_\sigma H_{1, T} u_* + C\chi_\sigma^*\chi_\sigma\tilde{H}_{1, Tf}$$

Ce qui donne

$$C\chi_\sigma^*\chi_\sigma H_{1, T} (v - u_*) = 0$$

Donc

$$\langle C\chi_\sigma^* \chi_\sigma H_{1,T}(v - u_*), g \rangle_{Y_1} = 0 \quad \forall g \in Y_1$$

Par conséquent

$$\langle v - u_*, H_{1,T}^* \chi_\sigma^* \chi_\sigma C^* g \rangle_{L^2(0,T;\mathcal{U})} = 0 \quad \forall g \in Y_1$$

D'où

$$\langle v - u_*, u_* \rangle_{L^2(0,T;\mathcal{U})} = 0$$

Alors en appliquant le théorème de projection sur le convexe fermé non vide $\mathcal{U}_{ad}$, on en déduit que

$$J(u_*) \leq J(v) \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$$

De plus le contrôle u_* est unique, car, si u_{*1} et u_{*2} sont deux solutions optimales alors

$$\langle v - u_{*1}, u_{*1} \rangle_{L^2(0,T;\mathcal{U})} = \langle v - u_{*2}, u_{*2} \rangle_{L^2(0,T;\mathcal{U})} \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$$

Ce qui donne

$$\|u_{*1} - u_{*2}\|_{L^2(0,T;\mathcal{U})}^2 = 0$$

Donc $u_{*1} = u_{*2}$. Ce qui achève la démonstration du théorème. ■

6 Application : Transport bidimensionnel

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}_+^2$ sur lequel est défini le système de transport, subissant une perturbation ponctuelle à partir d'un point $a = (a_1, a_2)$, par

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t}(x, y, t) = -c_1 \frac{\partial z}{\partial x}(x, y, t) - c_2 \frac{\partial z}{\partial y}(x, y, t) + \delta(x - a_1, y - a_2)f(t) \\ z(x, y, 0) = z_0(x, y) = 0 \\ z(0, 0, t) = 0 \end{cases} \quad (3.6.1)$$

où a_1, a_2, c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}_{+*}$

C'est aussi un système qu'on peut écrire sous la forme de (3.2.1) avec

$$A = -c_1 \frac{\partial}{\partial x} - c_2 \frac{\partial}{\partial y}$$

$$f(x, y, t) \equiv \delta(x - a_1, y - a_2)f(t), \text{ avec } \text{supp}(f) = \omega = \{a\}$$

L'opérateur A engendre sur $H_0^1(\Omega)$ un semi groupe fortement continu défini par

$$(S(t)g)(x, y) = \begin{cases} g(x - c_1 t, y - c_2 t) & x \geq c_1 t \text{ et } y \geq c_2 t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc la solution de (3.6.1) est donnée par :

$$z_{f,0}(x, y, t) = \int_0^t S(t-s)\delta(x - a_1, y - a_2)f(s)ds$$

Supposons que (a_1, a_2) vérifie $T \leq \inf\left(\frac{a_1}{c_1}, \frac{a_2}{c_2}\right)$. Alors

$$z_{f,0}(x, y, t) = \begin{cases} f\left(\frac{a_1 - x}{c_1} + t, \frac{a_2 - y}{c_2} + t\right) & [a_1, a_1 + c_1 t] \times [a_2, a_2 + c_2 t] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors les sous domaines $w_{f,0,t} = \{(x, y) \in \Omega : z_{f,0}(x, y, t) \neq 0\}$ sont donnés par

$$w_{f,0,t} = [a_1, a_1 + c_1 t] \times [a_2, a_2 + c_2 t]$$

Il s'agit en fait d'une perturbation étalable au sens de l'inclusion car :

$$\forall t, s \in [0, T], \text{ on a : } t \leq s \Rightarrow w_{0,f,t} \subset w_{0,f,s}$$

1. Approche par familles de transformations :

D'après l'expression des $(w_{f,0,t})_{t \in I}$, la famille de transformations F_0 définie par :

$$F_0(x, y; s, t) = (x + c_1(s - t), y + c_2(s - t)), \quad (x, y) \in w_{f,0,t} \text{ et } t \leq s \quad (3.6.2)$$

est adaptée à l'évolution du système perturbé. Dans ce cas la trajectoire de la perturbation f est donnée par :

$$\mathcal{T}_t = \bigcup_{s \in]0, t[} F_0(w_{f,0,s}) = w_{f,0,t}$$

Pour une zone σ fixée dans Ω , nous avons deux cas :

1. $\sigma \cap \mathcal{T}_t = \emptyset \forall t \in I$. Dans ce cas on a pas besoin de protéger σ ni de remédier aux

effets de f sur une telle zone, car σ n'est pas f -vulnérable.

2. $\exists t \in]0, T]$ tel que la perturbation f atteint $\mathring{\sigma}$ (ie. σ est f -vulnérable).

Plaçons-nous dans la deuxième situation, et excitons le système (3.6.1) par un actionneur ponctuel localisé en un point $b = (b_1, b_2)$. Le système contrôlé s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial t}(x, y, t) = -c_1 \frac{\partial z}{\partial x}(x, y, t) - c_2 \frac{\partial z}{\partial y}(x, y, t) \\ \quad + \delta(x - a_1, y - a_2)f(t) + \delta(x - b_1, y - b_2)u(t) \\ z(x, y, 0) = z_0(x, y) = 0 \\ z(0, 0, t) = 0 \end{array} \right. \quad (3.6.3)$$

Supposons que le point d'action b vérifie $a_j < b_j < a_j + c_j t$ pour $j = 1, 2$. Dans ce cas il existe deux instants $t_j \in]0, T]$ tels que $b_j = a_j + c_j t_j$, $j = 1, 2$.

Donc si on pose $t^* = \sup(t_1, t_2)$, alors la solution de (3.6.3) est donnée par

$$z_{f,u}(x, y, t) = \left\{ \begin{array}{ll} f\left(\frac{a_1 - x}{c_1} + t, \frac{a_2 - y}{c_2} + t\right) & D1 \\ f\left(\frac{a_1 - x}{c_1} + t, \frac{a_2 - y}{c_2} + t\right) + u\left(\frac{b_1 - x}{c_1} + t, \frac{b_2 - y}{c_2} + t\right) & D2 \\ u\left(\frac{b_1 - x}{c_1} + t, \frac{b_2 - y}{c_2} + t\right) & D3 \\ 0 & D4 \end{array} \right. \quad (3.6.4)$$

avec

$$D1 = [a_1, a_1 + c_1 t] \times [a_2, b_2] \cup [a_1, b_1] \times [a_2, a_2 + c_2 t], t \leq t^*$$

$$D2 = [b_1, a_1 + c_1 t] \times [b_2, a_2 + c_2 t], t \geq t^*$$

$$D3 = [b_1, b_1 + c_1 t] \times [a_2 + c_2 t, b_2 + c_2 t] \cup [a_1 + c_1 t, b_1 + c_1 t] \times [b_2, b_2 + c_2 t], t \geq t^*$$

$$D4 = (D1 \cup D2 \cup D3)^c$$

A titre d'exemple considérons

$$\sigma = [6, 7] \times [4, 5], \quad T = 10, \quad c_1 = \frac{3}{10}, \quad c_2 = \frac{1}{5}, \quad a_1 = 4 \text{ et } a_2 = 3$$

La trajectoire de f est donnée par : $\mathcal{T}_T = [4, 7] \times [3, 5]$, donc $\sigma \cap \mathcal{T}_T = [6, 7] \times [4, 5]$; c'est à dire que σ est f -vulnérable (Figure 3.6.1).

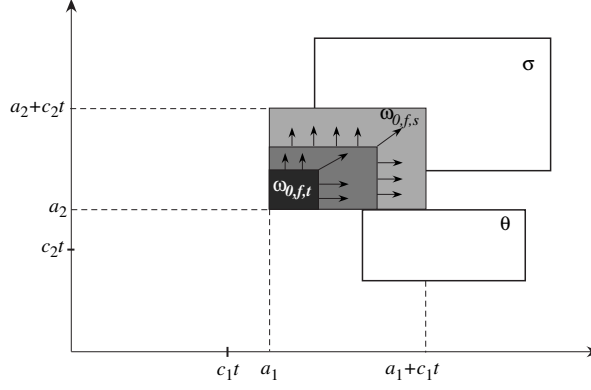


FIG. 3.6.1 – La zone σ est f -vulnérable, mais θ ne l'est pas

Comme le principe du contrôle f - σ -protecteur consiste à dévier la trajectoire de f pour qu'elle ne passe pas par σ , considérons la famille de transformations F_u définie comme suit

$$F_u(x, y; s, t) = \begin{cases} F_0(x, y; s, t) & D1 \\ F_1(x, y; s, t) & D3 \end{cases}$$

Avec F_0 est donnée par (3.6.2), et F_1 est définie par

$$F_1(x, y; s, t) = \begin{cases} (x + c_1(s - t), y) & x > b_1 \text{ et } y > a_2 + c_2s \\ (x, y + c_2(s - t)) & x > a_1 + c_1s \text{ et } y > b_2 \end{cases}$$

D'après l'expression de la solution $z_{f,u}$, on ne peut agir que sur la zone $[b_1, b_1 + c_1T] \times [b_2, b_2 + c_2T]$, alors cela va dépendre bien de la localisation du point b , en effet :

1. Pour $b = (6, 4)$, donc $t^* = \frac{20}{3}$, la famille de transformations F_u est adaptable à l'évolution du système (3.6.1), et donc le contrôle qui lui est associé est donné par

$$u(t) = -f\left(t - \frac{20}{3}\right) \quad \text{sur} \quad \left]\frac{20}{3}, 10\right] \quad (3.6.5)$$

Dans ce cas la trajectoire de f est sous la forme

$$\mathcal{T}_T^u = [4, 7] \times [3, 4] \cup [4, 6] \times [3, 5] \cup [6, 9] \times [5, 6] \cup [7, 9] \times [4, 6]$$

Comme $\dot{\sigma} \cap \mathcal{T}_T^u = \emptyset$, alors un tel contrôle est f - σ -protecteur, par conséquent il est aussi f - σ -remédiable (Figure 3.6.2).

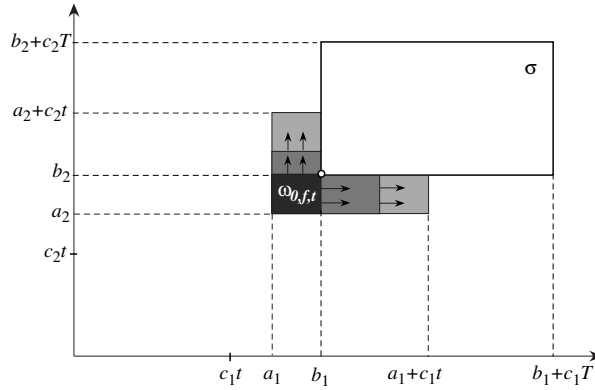


FIG. 3.6.2 – La zone σ est f -protectable

Remarque 3.4

Le contrôle ainsi obtenu n'est pas unique ; car il peut prendre n'importe quelle valeur pour tout $t \in]0, \frac{20}{3}[$ (voir **3. Contrôle optimal** ci-dessous).

2. Pour $b = (\frac{13}{2}, \frac{9}{2})$, il n'existe aucun contrôle de type ponctuel localisé en ce point qui rend la zone σ non vulnérable (i.e la protéger) ou qui remédie une telle zone face à l'effet de f ; car le point d'excitation est situé à l'intérieur de cette zone, et en plus on ne peut agir que sur la partie σ_3 et non pas sur $\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_4$ avec

$$\sigma_1 = [6, 6.5] \times [4, 4.5], \sigma_2 = [6.5, 7] \times [4, 4.5], \sigma_3 = [6.5, 7] \times [4.5, 5], \text{ et } \sigma_4 = [6, 6.5] \times [4.5, 5]$$

Donc $\sigma = \cup_{j=1}^4 \sigma_j$ n'est pas f -protectable (Figure 3.6.3).

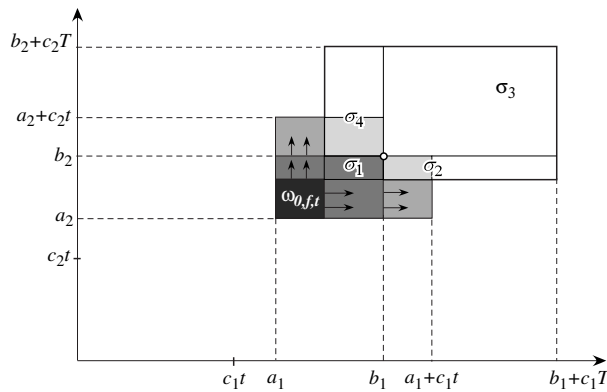


FIG. 3.6.3 – La zone σ n'est pas f -protectable

2. Remédiabilité et retard :

Dans ce cas il suffit de remarquer que les opérateurs $H_{1, T}$ et $\tilde{H}_{1, T}$ donnés en (3.4.19) s'expriment par

$$(H_{1, T}u)(r) = \int_0^{T+r} S(t)\delta(x - b_1, y - b_2)u(T + r - t)dt \quad r \in [-T, 0]$$

$$(\tilde{H}_{1, T}f)(r) = \int_0^{T+r} S(t)\delta(x - a_1, y - a_2)f(T + r - t)dt \quad r \in [-T, 0]$$

Alors on vérifie facilement que le contrôle donné par (3.6.5) est une solution de l'équation

$$(\chi_\sigma H_{1, T} + \chi_\sigma \tilde{H}_{1, T})(r) = 0, \quad r \in [-T, 0]$$

Ce qui donne les mêmes résultats trouvés ci-dessus (approche par familles de transformations).

3. Contrôle optimal :

Dans ce cas nous allons déterminer le contrôle optimal à énergie minimale. A partir de (3.6.5) et de la remarque 3.4, les contrôles f - σ -protecteurs sont donnés par

$$u(t) = \begin{cases} -f(t - t^*) &]t^*, 10] \\ g(t) & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Avec g est une fonction quelconque. A titre d'exemple considérons le cas où $b = (5, 3.5)$ et $\sigma = \sigma_3$, alors le contrôle f - σ_3 -protecteur u peut prendre n'importe qu'elle valeur sur $]0, t^*]$ (Figure 3.6.4).

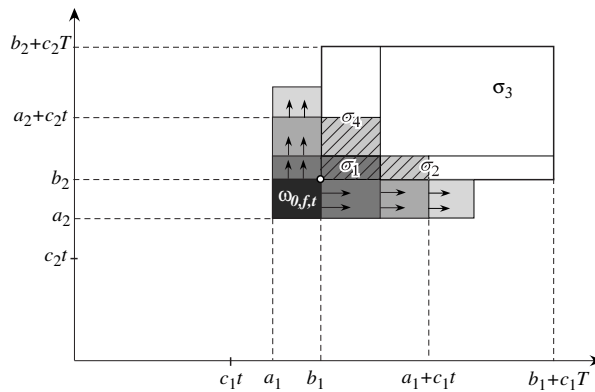


FIG. 3.6.4 – Seule la zone σ_3 qui est f -protectable par ce contrôle

Dans ce cas la solution optimale est donnée par

$$u(t) = \begin{cases} -f(t - t^*) &]t^*, 10] \\ 0 &]0, t^*] \end{cases} \quad (3.6.6)$$

En effet, pour $u \in L^2(0, T)$, nous avons

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \int_0^T |u(t)|^2 dt \\ &= \int_0^{t^*} |u(t)|^2 dt + \int_{t^*}^T |u(t)|^2 dt = \|f\|^2 + \|g\|^2 \end{aligned}$$

Donc u est optimal lorsque $g = 0$. Ce qui correspond bien à la solution (3.6.6).

Conclusion :

Pour caractériser les solutions du problème du contrôle protecteur pour les systèmes linéaires, nous avons utilisé deux approches différentes : L'une fait appel aux familles de transformations adaptables à l'évolution du système, et l'autre est basée sur la rémédiabilité régionale d'un certain système à retard. Ces deux approches présentent un aspect en commun dans le sens où il est question d'un routage régional de la propriété $\mathcal{P}$ de telle sorte qu'elle ne passe pas par σ . Aussi le problème du contrôle protecteur à énergie minimale a été étudié.

Comme la plupart des phénomènes qui nous ont motivé à étudier ce genre de problème ne sont pas modélisés par des systèmes linéaires, mais plutôt par des systèmes non linéaires, il serait utile dans la suite, de considérer la possibilité d'étendre ces résultats au cas non linéaire.

Deuxième partie

Extension aux systèmes distribués non linéaires

Chapitre 4

Compensation des perturbations étalables pour une classe de systèmes non linéaires

1 Introduction - Systèmes considérés

Etant donné un système distribué non linéaire, évoluant sur un domaine spatial Ω , et subissant une perturbation supposée étalable à partir d'une région ω pour laquelle une certaine zone fixée σ est vulnérable, notre objectif consiste à compenser sur σ , l'effet de cette perturbation au bout d'un certain temps. Il s'agit d'un problème de compensation spatiale (remédiabilité régionale) pour les systèmes non linéaires.

Plusieurs autres travaux dans ce sens (systèmes non linéaires particuliers) ont été consacrés à l'étude de la contrôlabilité et aussi à la compensation des perturbations. Par exemple, pour le cas des systèmes paraboliques non linéaires, sous certaines hypothèses sur la dynamique du système et le terme des nonlinéarités, le problème de la contrôlabilité a été étudié en utilisant des estimations globales de Carleman, la régularité parabolique et le théorème du point fixe lorsque le terme non linéaire est exprimé en fonction de la variable d'état et de son gradient [42]. D'autre part, l'étude du problème de la compensation des perturbations est faite par une approche basée sur une discrétisation spatiale directe [34]. Dans notre situation, le problème considéré est différent dans le sens où, il s'agit d'une extension du concept de la remédiabilité régionale à une classe des systèmes distribués non linéaires lorsque le système est l'objet d'une perturbation initiale. Pour étudier ce problème, nous commençons par le transformer en un problème équivalent. Ensuite, nous montrons, sous certaines hypothèses, l'existence d'un contrôle permettant de neutraliser régionalement les effets de la perturbation étalable, en utilisant les techniques du pseudo

inverse et le théorème du point fixe. Enfin, nous illustrons l'approche développée par un exemple monodimensionnel.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $I =]0, T[$ un intervalle de temps. Considérons le système suivant, dont l'état $\tilde{z}(x, t)$ satisfait une équation non linéaire sur $\Omega \times I$, et l'état initial $\tilde{z}(x, 0) = z_0(x)$ est l'objet d'une perturbation spatiale f .

$$(\tilde{S}) \begin{cases} \dot{\tilde{z}}(t) = F\tilde{z}(t) + Bu(t) & 0 < t < T \\ \tilde{z}(0) = (z_0 + f) \in \mathcal{D}(F) \end{cases} \quad (4.1.1)$$

avec $\tilde{z} \in L^p(0, T; Z)$ pour $p \in]1, +\infty[$, $u \in L^2(0, T; \mathcal{U})$, $f \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; Z)$ et $F : X = \mathcal{D}(F) \rightarrow Z$ un opérateur non linéaire défini sur un espace de Banach X qui est dense dans Z , et satisfaisant les hypothèses suivantes

1. $F(0) = 0$
2. $F \in C^1$ au point f , pour $f \in \mathcal{D}(F)$

L'espace d'état Z , des contrôles $\mathcal{U}$ et des perturbations $\mathcal{F}$, sont supposés des espaces de Hilbert, et $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}(F)$.

Soit σ une région fixée dans Ω et de mesure non nulle. Notons toujours par χ_σ la restriction à σ et considérons l'espace des restrictions à σ donné par

$$Z_\sigma = \{\chi_\sigma z(t) = z(t)|_\sigma : z(t) \in Z\} \quad \forall t \in I. \quad (4.1.2)$$

Il est clair que Z_σ est un sous espace de l'espace d'état Z . A titre d'exemple, un cas fréquemment utilisé c'est celui où $Z = L^2(\Omega)$, et donc $Z_\sigma = L^2(\sigma)$.

L'opérateur adjoint de χ_σ est défini par

$$\chi_\sigma^* : Z_\sigma \rightarrow Z \text{ tel que } (\chi_\sigma^* z)(x) = \begin{cases} z(x) & \text{sur } \sigma \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.1.3)$$

Le système (4.1.1) est supposé augmenté d'une fonction de mesure

$$(\tilde{E}) \quad \tilde{y}^\sigma(t) = C\chi_\sigma^*\chi_\sigma\tilde{z}(t)$$

avec $C \in \mathcal{L}(Z; Y)$ où Y est un espace de Hilbert, et qui désigne l'espace des observations.

Soit ω une zone fixée dans Ω , ne vérifiant pas nécessairement $\sigma \cap \omega \neq \emptyset$. Supposons que la perturbation spatiale f est étalable à partir de ω , et que la zone σ est vulnérable. Nous avons la remarque suivante.

Remarque 4.1

Dans (4.1.1), la fonction de perturbation f a un support spatial qui peut être dans des applications une partie ω du domaine Ω . Il peut également s'écrire sous la forme $f = \chi_\omega g$ où g est défini dans Ω , ainsi la perturbation f peut être considérée comme étant définie sur tout Ω , en supposant qu'elle disparaisse sur $\Omega \setminus \omega$. Ceci justifie que l'état initial dans sa forme (4.1.1) est plus commode pour la description de l'étalabilité. Dans les deux cas le domaine entier Ω sera affecté par l'effet de la perturbation f .

2 Position du problème

Dans cette section nous explorons la possibilité de la détermination d'un contrôle u permettant de compenser régionalement la perturbation spatiale f ou bout d'un certain temps T , dans le sens où, le rôle d'un tel contrôle est de rendre l'état du système perturbé à son état normal au temps T . Sous l'effet de la perturbation f affectant l'état initial, le système perturbé ($f \neq 0$ et $u = 0$) devient $\mathcal{P}$ -étalable, avec $\mathcal{P}$ est une propriété engendrée par la perturbation f . Par conséquent la zone fixée σ peut être $\mathcal{P}$ -vulnérable. Alors, comment peut-t-on déterminer une action permettant de neutraliser l'étalabilité du système perturbé sur σ à l'instant final final T ? Ceci qui constitue le principe de la remédiabilité régionale.

Pour pouvoir formuler ce problème, supposons que le système $(\tilde{S})$ admet une solution unique (sous certaines hypothèses à préciser ultérieurement) et considérons les notations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\tilde{S}) - (\tilde{E}) & \text{le système } (\tilde{S}) \text{ augmenté de la sortie } (\tilde{E}) \\ \tilde{z}_{f, u} & \text{la solution de } (\tilde{S}) \\ \tilde{z}_{f, 0} & \text{la solution de } (\tilde{S}) \text{ quand } u = 0 \text{ et } f \neq 0 \\ \tilde{z}_{0, 0} & \text{la solution de } (\tilde{S}) \text{ quand } u = 0 \text{ et } f = 0 \\ \tilde{y}_{f, u}^\sigma & \text{la sortie } (\tilde{E}) \\ \tilde{y}_{f, 0}^\sigma & \text{la sortie } (\tilde{E}) \text{ quand } u = 0 \text{ et } f \neq 0 \\ \tilde{y}_{0, 0}^\sigma & \text{la sortie } (\tilde{E}) \text{ quand } u = 0 \text{ et } f = 0 \end{array} \right. \quad (4.2.1)$$

Ici $\tilde{z}_{f, 0}$ désigne la solution du système autonome perturbé et $\tilde{y}_{f, 0}^\sigma$ dénote la sortie associée. Etant donné une propriété $\mathcal{P}$, considérons les sous ensembles suivants

$$w_{f,0,t} = \{x \in \Omega : \mathcal{P}\tilde{z}_{f,0}(x, t)\} \quad (4.2.2)$$

Dans le cas où

$$\mathcal{P}\tilde{z}_{f,0}(x, t) \Leftrightarrow \tilde{z}_{f,0}(x, t) \neq \tilde{z}_{0,0}(x, t)$$

alors on parle de perturbation étalable à partir de $\omega = w_{f,0,0}$, si on a croissance dans le temps des sous domaines $(w_{f,0,t})_{t \in I}$ ou de leurs mesures (voir chapitre 2, définition 2.8). Et donc σ est f -vulnérable s'il existe $t \in [0, T]$ tel que

$$\overset{\circ}{\sigma} \cap w_{f,0,t} \neq \emptyset$$

Avec toutes ces considérations, nous formulons le problème de la remédiabilité régionale de $(\tilde{S}) - (\tilde{E})$ comme suit

$$(\tilde{P}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in L^2(0, T; \mathcal{U}) \text{ tel que :} \\ \tilde{y}_{f, u}^\sigma(T) = \tilde{y}_{0, 0}^\sigma(T) \end{array} \right.$$

où les notations utilisées sont données en (4.2.1).

Tout contrôle u solution de $(\tilde{P})$ sera dit contrôle f - σ -remédiable.

Résoudre $(\tilde{P})$ est équivalent à déterminer un contrôle u permettant de **rendre** le système $(\tilde{S}) - (\tilde{E})$ à son état normal sur σ

$$\tilde{y}_{0, 0}^\sigma = C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{z}_{0, 0}$$

avec $\tilde{z}_{0, 0}$ désigne la solution du système autonome non perturbé donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{z}}(t) = F\tilde{z}(t) \quad 0 < t < T \\ \tilde{z}(0) = z_0 \end{array} \right. \quad (4.2.3)$$

Noter que le problème $(\tilde{P})$ comme il a été formulé ci-dessus n'est pas assez simple à résoudre. En effet, la solution $\tilde{z}_{f, u}$ du système $(\tilde{S})$ ne fait pas apparaître d'une manière explicite les termes de contrôle en u et de perturbations en f pour pouvoir appliquer les résultats développés dans le chapitre 2 pour le cas de la remédiabilité régionale des systèmes linéaires. Pour surmonter cette difficulté, nous allons procéder par une linéarisation au voisinage de la perturbation f , du système $(\tilde{S})$ et de la sortie $(\tilde{E})$, pour les transformer en un système (S) et une sortie (E) équivalents, puis nous considérerons le problème de la remédiabilité régionale (P) pour $(S)-(E)$. De ce fait, considérons le changement de variable d'état suivant

$$z(x, t) = \tilde{z}(x, t) - f(x)$$

Donc le système (4.1.1) devient

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = F(z(t) + f) + Bu(t) & 0 < t < T \\ z(0) = z_0 \end{cases} \quad (4.2.4)$$

Ensuite, par l'hypothèse 2 sur F , nous avons en linéarisant F au voisinage de f

$$F(z(t) + f) = Ff + F'(f)z(t) + N_f z(t) \quad (4.2.5)$$

Ce qui donne

$$(S) \begin{cases} \dot{z}(t) = A_f z(t) + N_f z(t) + Ff + Bu(t) & 0 < t < T \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

avec $A_f = F'(f) \in \mathcal{L}(Z)$ est la partie linéaire de la dynamique F , de domaine $\mathcal{D}(A_f)$ dense dans l'espace d'état Z , et $N_f : z(t) \in X \mapsto N_f z(t) \in Z$ désigne la partie non linéaire définie sur l'espace de Banach X ($X \subset Z$) et à valeurs dans Z . Noter que lorsque $N_f = 0$ alors $F = A_f$ et $X = Z$.

A propos de la sortie $(\tilde{E})$, nous avons

$$\tilde{y}^\sigma(t) = C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{z}(t) = C\chi_\sigma^* \chi_\sigma (z(t) + f)$$

En posant $y^\sigma(t) = \tilde{y}^\sigma(t) - C\chi_\sigma^* \chi_\sigma f$, et en tenant compte de la linéarité de l'opérateur $C\chi_\sigma^* \chi_\sigma$, nous avons

$$(E) \quad y^\sigma(t) = C\chi_\sigma^* \chi_\sigma z(t)$$

Finalement, nous obtenons au voisinage de f , la nouvelle formulation du problème de la remédiabilité régionale du système $(S) - (E)$.

$$(P) \begin{cases} \text{Trouver } u \in L^2(0, T; \mathcal{U}) \text{ tel que :} \\ y_{f, u}^\sigma(T) = y_{0, 0}^\sigma(T) - C\chi_\sigma^* \chi_\sigma f \end{cases}$$

Remarque 4.2

1. Partant d'un système de dynamique F et d'état initial z_0 supposé perturbé par f , nous obtenons ainsi un autre système équivalent mais cette fois-ci c'est la dynamique du nouveau système qui est perturbée, c'est pour cela qu'on a noté $F_f = (A_f, N_f)$.
2. Au voisinage de f , les problèmes $(\tilde{P})$ et (P) sont équivalents.
3. Dans le cas où le système (4.1.1) évolue sur un intervalle de temps $[0, T^*]$ avec $T^* > T$, et puisque l'effet de la perturbation est neutralisée en T , alors le système

doit évoluer normalement sur $]T, T^*[$ car un tel effet s'est annulé.

4. Noter que dans le cas où $\sigma = \Omega$, on parle du problème de la remédiabilité globale. Ceci consiste à compenser la perturbation f sur tout le domaine Ω car celui-ci est nécessairement f -vulnérable.

5. Dans le cas où la zone σ n'est pas f -vulnérable alors on n'a pas besoin d'y remédier à l'effet de f .

6. Comme le système $(\tilde{S})$ est non linéaire, alors l'existence d'une solution $\tilde{z}_{f,u}$ (et donc d'une observation $\tilde{y}_{f,u}^\sigma$), dépend entre autres de la perturbation f et du temps T . C'est la raison pour laquelle nous avons considéré le terme f - σ -remédiable pour un contrôle solution de $(\tilde{P})$, contrairement au cas linéaire où on peut considérer σ -remédiable pour tout f . En effet, si le système est linéaire, et f est fixée dans $\mathcal{F}$, alors le système est dit f - σ -remédiable s'il existe un contrôle u satisfaisant $(\tilde{P})$. Par conséquent, si $\forall f \in \mathcal{F}, \exists u$ vérifiant ce problème, on dit dans ce cas que le système est σ -remédiable (même chose pour le cas faible).

La résolution du problème (P) nécessite une formulation explicite en f , u et $z_{f,u}$. Ainsi une approche par semi groupes [37, 38, 88] sera utilisée pour explorer l'étude d'un tel problème. C'est ce que nous allons développer dans la section suivante.

3 Problème de la remédiabilité régionale (P)

Dans tout ce qui suit on note par $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p(0,T;X)}$ pour $p \in]1, +\infty[$.

Supposons que l'opérateur linéaire A_f est fermé, à domaine dense et engendre un semi groupe fortement continu $(S_f(t))_{t \geq 0}$ vérifiant l'hypothèse suivante

$$(H1) \quad \exists g_1 \in L^q(0, T) \text{ avec } \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 : \|S_f(t)\|_{\mathcal{L}(Z)} \leq g_1(t) \quad \forall t \in [0, T]$$

De plus, supposons que l'opérateur non linéaire $N_f : X \rightarrow Z$ est bien défini et vérifie l'hypothèse suivante

$$(H2) \quad \begin{cases} 1. N_f(0) = 0 \\ 2. \|N_f z_1(t) - N_f z_2(t)\|_Z \leq K (\|z_1\|_p; \|z_2\|_p) \|z_1(t) - z_2(t)\|_X \\ \forall z_1, z_2 \in L^p(0, T; X); K : \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+ : \lim_{(\theta_1; \theta_2) \rightarrow (0,0)} K(\theta_1; \theta_2) = 0. \end{cases}$$

Pour un certain $a \in]0, 1[$ posons

$$k = \sup_{\theta < a} K(\theta; 0), \quad K = \sup_{\|(\theta_1; \theta_2)\|_{\mathbb{R}_+^2} < a} K(\theta_1; \theta_2) \quad \text{et} \quad K^* = \max(k, K) \quad (4.3.1)$$

Avec ces hypothèses et sous certaines d'autres qui seront précisées ci-dessous, nous montrons que l'unique solution du système (S) est donnée par

$$z_{f, u}(t) = S_f(t)z_0 + \int_0^t S_f(t-s)N_f z_{f, u}(s)ds + \int_0^t S_f(t-s)Ff ds + \int_0^t S_f(t-s)Bu(s)ds \quad (4.3.2)$$

Ceci peut s'écrire encore sous la forme

$$z_{f, u}(t) = S_f(t)z_0 + \widehat{H}_{f, t} z_{f, u} + \widetilde{H}_{f, t} f + H_{f, t} u \quad (4.3.3)$$

où les trois opérateurs $\widehat{H}_{f, t}$, $\widetilde{H}_{f, t}$ et $H_{f, t}$ sont donnés par

$$\begin{aligned} \widehat{H}_{f, t} : L^p(0, T; X) &\longrightarrow Z \\ z &\longmapsto \int_0^t S_f(t-s)N_f z(s)ds \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_{f, t} : \mathcal{F} &\longrightarrow Z \\ f &\longmapsto \int_0^t S_f(t-s)Ff ds \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

$$\begin{aligned} H_{f, t} : L^2(0, T; \mathcal{U}) &\longrightarrow Z \\ u &\longmapsto \int_0^t S_f(t-s)Bu(s)ds \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

De plus si on considère l'application $\psi(., f, u) : z \in L^p(0, T; X) \longmapsto \psi(z, f, u) \in L^p(0, T; X)$ définie par

$$\begin{aligned} \psi(z, f, u) : [0, T] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \psi(z, f, u)(t) = S_f(t)z_0 + \widehat{H}_{f, t} z + \widetilde{H}_{f, t} f + H_{f, t} u \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Alors pour montrer que (4.3.2) ait un sens, nous allons montrer qu'il existe $d > 0$ tel que l'application $\psi(., f, u)$ admet un unique point fixe $z_{f, u}$ dans la boule $B(0, d)$ de $L^p(0, T; X)$. Pour cela, supposons aussi que

$$(H3) \quad \begin{cases} \exists \alpha > 0 & : \|S_f(t)z_0\|_X \leq \alpha \|z_0\|_X & \forall t \in [0, T] \\ \exists \beta > 0 & : \|H_{f, t} u\|_X \leq \beta \|u\|_{L^2(0, T; \mathcal{U})} & \forall t \in [0, T] \\ \exists \gamma > 0 & : \|\widetilde{H}_{f, t} f\|_X \leq \gamma \|f\|_{\mathcal{F}} & \forall t \in [0, T] \end{cases}$$

$$(H4) \quad T < \frac{1}{(K^* \|g_1\|_q)^p}$$

$$(\mathbf{H5}) \quad \exists \lambda \in]0, 1[: \alpha \|z_0\|_X + \gamma \|f\|_{\mathcal{F}} \in \left[0, \frac{\lambda \left(1 - T^{\frac{1}{p}} k \|g_1\|_q \right)}{T^{\frac{1}{p}}} \right]$$

Avant d'énoncer le résultat principal de cette section, interprétons les diverses hypothèses considérées ci-dessus. Nous avons la remarque suivante

Remarque 4.3

1. L'hypothèse **(H1)** est satisfaite pour tout semi groupe fortement continu $(S_f(t))_{t \in I}$ tel que $\|S_f(t)\|_{\mathcal{L}(Z)} \leq M e^{wt}$ pour certaines constantes M et w [36, 88].

2. Pour l'hypothèse **(H2)**, l'opérateur non linéaire N_f est supposé globalement lipschitzien sur l'espace de Banach X .

3. Les constantes positives α , β et γ intervenant dans l'hypothèses **(H3)** sont données respectivement par $\alpha = \max_{t \in [0, T]} g_1(t)$, $\beta = \|g_1\|_q \|B\|$ et $\gamma = T \|g_1\|_q \|F\|$.

4. Les hypothèses **(H4)** et **(H5)** sont des conditions sur l'instant final T , la donnée initiale z_0 et la perturbation f pour lesquels l'état $z_{f,u}$ donné en (4.3.2) est bien défini pour un certain contrôle u . Ce qui justifie le point 6. de la remarque 4.2.

Cela étant nous avons le résultat suivant.

Théorème 4.1

Si les hypothèses **(H1)**-**(H5)** sont vérifiées alors :

(a) Il existe $d > 0$ et $m = m(d) > 0$ tels que pour tout u dans la boule $B(0, m)$ de $L^2(0, T; \mathcal{U})$, l'application $\psi(\cdot, f, u)$ admet un unique point fixe $z_{f,u}$ solution du système (S) dans la boule $B(0, d)$ de $L^p(0, T; X)$.

(b) L'application $h_1 : B(0, m) \rightarrow B(0, d)$ définie par : $h_1(u) = z_{f,u}$ est lipschitzienne.

Preuve

(a) La condition 2. de l'hypothèse **(H2)**

$$\lim_{(\theta_1; \theta_2) \rightarrow (0,0)} K(\theta_1; \theta_2) = 0$$

implique que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists d \in]0, 1[: \sup_{\|(\theta_1; \theta_2)\| < d} K(\theta_1; \theta_2) < \varepsilon$$

où $\|(\cdot; \cdot)\|$ est une norme sur $\mathbb{R}_+^2$. Pour $\varepsilon = \frac{1}{T^{\frac{1}{p}} \|g_1\|_q}$ avec g_1 est donnée par l'hypothèse **(H1)**, on aura en considérant la constante K donnée en (4.3.1)

$$c_1 = T^{\frac{1}{p}} \|g_1\|_q K \in]0, 1[\tag{4.3.8}$$

Remarque 4.4

Noter que le choix de la constante positive ε n'est pas arbitraire, mais plutôt, c'est une conséquence directe de l'hypothèse **(H4)** où il en résulte que $c_1 \in]0, 1[$.

Montrons maintenant que $\psi(B(0, d), f, u) \subset B(0, d)$ pour certains $f \in \mathcal{F}$ et $u \in L^2(0, T; \mathcal{U})$. En effet, pour $z \in B(0, d)$ nous avons $\forall t \in I$

$$\begin{aligned}
\|\psi(z, f, u)(t)\|_X &= \|\psi(z, f, u)(t) - \psi(0, f, u)(t) + \psi(0, f, u)(t)\|_X \\
&= \left\| \widehat{H}_{f, t} z - \widehat{H}_{f, t}(0) + \psi(0, f, u)(t) \right\|_X \\
&\leq \left\| \widehat{H}_{f, t} z - \widehat{H}_{f, t}(0) \right\|_X + \|\psi(0, f, u)(t)\|_X \\
&\leq \int_0^t \|S_f(t-s)[N_f z(s) - N_f(0)(s)]\|_X ds + \|\psi(0, f, u)(t)\|_X \\
&\leq \int_0^t g_1(t-s) \| [N_f z(s) - N_f(0)(s)] \|_X ds + \|\psi(0, f, u)(t)\|_X
\end{aligned}$$

avec g_1 est donnée par l'hypothèse **(H1)**. Si on considère la fonction g définie par

$$\begin{aligned}
g : [0, t] &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\
s &\longmapsto g(s) = g_1(t-s)
\end{aligned}$$

alors, il est clair que $g \in L^q(0, T)$ et $\|g\|_q = \|g_1\|_q$. Par conséquent en utilisant l'inégalité de Holder et les hypothèses **(H2)** et **(H3)** on aura

$$\|\psi(z, f, u)(t)\|_X \leq \alpha \|z_0\|_X + \beta \|u\|_{L^2(0, T; \mathcal{U})} + \gamma \|f\|_{\mathcal{F}} + \|g_1\|_q K(\|z\|_p; 0) \|z\|_p$$

C'est à dire que

$$\int_0^T \|\psi(z, f, u)(t)\|_X^p dt \leq T (\alpha \|z_0\|_X + \beta \|u\|_{L^2(0, T; \mathcal{U})} + \gamma \|f\|_{\mathcal{F}} + \|g_1\|_q K(\|z\|_p; 0) \|z\|_p)^p$$

Ce qui donne en introduisant la norme $\|\cdot\|_p$

$$\|\psi(z, f, u)\|_p \leq T^{\frac{1}{p}} (\alpha \|z_0\|_X + \beta \|u\|_{L^2(0, T; \mathcal{U})} + \gamma \|f\|_{\mathcal{F}} + \|g_1\|_q K(\|z\|_p; 0) \|z\|_p)$$

Alors la condition

$$z \in B(0, d) \Rightarrow \psi(z, f, u) \in B(0, d)$$

est vérifiée (en utilisant la constante k donnée en (4.3.1)) lorsque

$$T^{\frac{1}{p}}(\alpha\|z_0\|_X + \beta\|u\|_{L^2(0,T;\mathcal{U})} + \gamma\|f\|_{\mathcal{F}} + k\|g_1\|_q d) \leq d$$

ce qui revient à dire que

$$\|u\|_{L^2(0,T;\mathcal{U})} \leq \frac{1}{\beta} \left[\frac{d \left(1 - T^{\frac{1}{p}} k \|g_1\|_q \right)}{T^{\frac{1}{p}}} - \alpha\|z_0\|_X - \gamma\|f\|_{\mathcal{F}} \right]$$

Finalement nous obtenons

$$\|u\|_{L^2(0,T;\mathcal{U})} \leq m$$

avec

$$m = \frac{1}{\beta} \left[\frac{d \left(1 - T^{\frac{1}{p}} k \|g_1\|_q \right)}{T^{\frac{1}{p}}} - \alpha\|z_0\|_X - \gamma\|f\|_{\mathcal{F}} \right] \quad (4.3.9)$$

Comme l'hypothèse **(H4)** implique que $1 - T^{\frac{1}{p}} k \|g_1\|_q > 0$, alors on en déduit, en utilisant l'hypothèse **(H5)** avec $\lambda = d \in]0, 1[$ que, $m > 0$.

Donc pour $u \in B(0, m)$ nous obtenons $\psi(B(0, d), f, u) \subset B(0, d)$.

D'autre part, montrons que $\psi(\cdot, f, u)$ est une contraction sur $B(0, d)$. Soit $z_1, z_2 \in B(0, d)$, alors $\forall t \in I$ nous avons

$$\begin{aligned} \|\psi(z_1, f, u)(t) - \psi(z_2, f, u)(t)\|_X &= \left\| \widehat{H}_{f, t} z_1 - \widehat{H}_{f, t} z_2 \right\|_X \\ &= \left\| \int_0^t S_f(t-s) [N_f z_1(s) - N_f z_2(s)] ds \right\|_X \end{aligned}$$

avec $\psi(z, f, u)$ et $\widehat{H}_{f, t}$ sont données respectivement par (4.3.7) et (4.3.4).

A partir des hypothèses **(H1)** et **(H2)** et de l'inégalité de Holder nous obtenons

$$\|\psi(z_1, f, u)(t) - \psi(z_2, f, u)(t)\|_X \leq \|g_1\|_q K(\|z_1\|_p; \|z_2\|_p) \times \|z_1 - z_2\|_p$$

Ce qui revient à dire que

$$\int_0^T \|\psi(z_1, f, u)(t) - \psi(z_2, f, u)(t)\|_X^p dt \leq T (\|g_1\|_q K (\|z_1\|_p; \|z_2\|_p) \|z_1 - z_2\|_p)^p$$

Alors en introduisant la norme $\|\cdot\|_p$ et la constante c_1 donnée en (4.3.8) on obtient

$$\|\psi(z_1, f, u) - \psi(z_2, f, u)\|_p \leq c_1 \|z_1 - z_2\|_p$$

Comme $c_1 \in [0, 1[$, alors $\psi(\cdot, f, u)$ est une contraction sur $B(0, d)$.

Par conséquent, si $u \in B(0, m) \subset L^2(0, T; \mathcal{U})$, l'application $\psi(\cdot, f, u)$ admet un unique point fixe $z_{f,u}$ dans la boule $B(0, d)$ de $L^p(0, T; X)$, qui est l'unique solution du système (S).

(b) Soit u, v dans $B(0, m)$, alors en utilisant les expressions des applications $\psi(\cdot, f, u)$ et h_1 et avec l'hypothèse **(H3)** on aura

$$\begin{aligned} \|h_1(u) - h_1(v)\|_p &= \|\psi(h_1(u), f, u) - \psi(h_1(v), f, v)\|_p \\ &\leq \|\psi(h_1(u), f, u) - \psi(h_1(v), f, u)\|_p \\ &\quad + \|\psi(h_1(v), f, u) - \psi(h_1(v), f, v)\|_p \\ &\leq c_1 \|h_1(u) - h_1(v)\|_p + T^{\frac{1}{p}} \beta \|u - v\|_{L^2(0, T; \mathcal{U})} \\ &\leq \frac{T^{\frac{1}{p}} \beta}{1 - c_1} \|u - v\|_{L^2(0, T; \mathcal{U})} \end{aligned}$$

Ce qui montre que l'application h_1 est lipschitzienne. ■

Pour résumer tout cela, nous avons la proposition suivante

Proposition 4.1

Avec les hypothèses **(H1)** – **(H5)**, le système (S) admet une solution faible unique donnée par (4.3.2).

Remarque 4.5

Lorsque l'opérateur linéaire A_f est analytique [16, 66, 88], les résultats du théorème 4.1 restent valables si nous tenons compte des considérations suivantes :

Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{Re}(\operatorname{spec}(aI + A_f)) > \delta > 0$, où $\operatorname{spec}(aI + A_f)$ désigne le spectre de l'opérateur linéaire $aI + A_f$. Pour $\alpha \in [0, 1[$, l'espace $Z^\alpha = D((aI + A_f)^\alpha)$ est un espace de Banach dense dans Z et muni de la norme du graphe $\|\cdot\|_{Z^\alpha} = \|(aI + A_f)^\alpha(\cdot)\|_Z$. Rappelons le résultat suivant [66] :

$$\exists c > 0 : \|S_f(t)\|_{\mathcal{L}(Z^\alpha, Z)} \leq c t^{-\alpha} e^{(a-\delta)t} = \bar{g}_1(t) \quad \forall t \in I \quad (4.3.10)$$

Alors pour $p \in]1, +\infty[$, l'hypothèse **(H1)** peut être remplacée par

$$\overline{\textbf{(H1)}} \quad \exists q \in]1, +\infty[, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad q\alpha < 1 \text{ tel que (4.3.10) est satisfaite.}$$

Noter que la condition $q\alpha < 1$ implique que $\bar{g}_1 \in L^q(0, T)$. D'autre part, le domaine X de l'opérateur non linéaire N_f est remplacé par Z^α . Il a été montré dans [33] que si l'hypothèse **(H2)** est satisfaite sur Z^α alors elle reste vraie sur Z^ν pour tout $\nu \in [\alpha, 1[$.

Dans toute la suite de ce travail, nous ne nous intéresserons qu'au cas où A_f est le générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continu.

Maintenant étant donnée l'expression de la solution de (S) au voisinage de f

$$z_{f, u}(t) = S_f(t)z_0 + \hat{H}_{f, t} z_{f, u} + \tilde{H}_{f, t} f + H_{f, t} u \quad (4.3.11)$$

nous pouvons écrire la sortie (E) comme suit

$$(E) \quad y_{f, u}^\sigma(t) = C\chi_\sigma^* \chi_\sigma S_f(t)z_0 + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \hat{H}_{f, t} z_{f, u} + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{H}_{f, t} f + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma H_{f, t} u$$

Dans le cas où $f = 0$ et $u = 0$, nous avons

$$z_{0, 0}(t) = S_0(t)z_0 + \hat{H}_{0, t} z_{0, 0} \quad (4.3.12)$$

et la sortie associée dans ce cas sera donnée par

$$y_{0, 0}^\sigma(t) = C\chi_\sigma^* \chi_\sigma S_0(t)z_0 + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \hat{H}_{0, t} z_{0, 0} \quad (4.3.13)$$

Finalement, le problème (P) se réécrit en faisant apparaître les trois quantités $z_{f, u}$, f et u , sous la forme

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in L^2(0, T; \mathcal{U}) \text{ tel que :} \\ C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \hat{H}_{f, T} z_{f, u} + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{H}_{f, T} f + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma f + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma H_{f, T} u \\ + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma S_f(T)z_0 - C\chi_\sigma^* \chi_\sigma S_0(T)z_0 - C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \hat{H}_{0, T} z_{0, 0} = 0 \end{array} \right.$$

Remarque 4.6

1. Si $f = 0$, alors le contrôle $u = 0$ est une solution de (P) ; i.e. en l'absence de la perturbation, on n'a pas besoin de remédier ni sur σ ni sur Ω .
2. Dans le cas où le terme non linéaire $N_f = 0$; i.e. $\widehat{H}_{f, T} = 0$, on retrouve la formulation du problème de la remédiabilité régionale des systèmes distribués linéaires (voir chapitre 2).
3. Les résultats établis ci-dessus sont d'un caractère local. En effet, ceci est une conséquence de la linéarisation de F au voisinage de f .

4 Résolution du problème (P)

La résolution du problème (P) consiste en la détermination d'un contrôle u permettant de compenser sur σ , l'effet de la perturbation étalable f à l'instant final T . Ceci peut se faire sous certaines hypothèses en utilisant les techniques du pseudo inverse [18] et aussi le théorème du point fixe [13, 19]. Par conséquent, un algorithme permettant de générer une suite de contrôles qui converge vers la solution de (P) , sera donné.

Alors le contrôle u est une solution de (P) s'il vérifie

$$\begin{aligned} & C\chi_\sigma^* \chi_\sigma H_{f, T} u + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \widehat{H}_{f, T} z_{f, u} + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \widetilde{H}_{f, T} f + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma f + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma S_f(T) z_0 \\ & - C\chi_\sigma^* \chi_\sigma S_0(T) z_0 - C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \widehat{H}_{0, T} z_{0, 0} = 0 \end{aligned}$$

Pour étudier cette équation, considérons le sous espace V de l'espace de Hilbert Y

$$V = \text{Im}(C\chi_\sigma^* \chi_\sigma H_{f, T})$$

puis notons par

$$y_f^\sigma = C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \widehat{H}_{0, T} z_{0, 0} + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma S_0(T) z_0 - C\chi_\sigma^* \chi_\sigma S_f(T) z_0 - C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \widetilde{H}_{f, T} f - C\chi_\sigma^* \chi_\sigma f \quad (4.4.1)$$

Donc on cherche un contrôle u tel que

$$C\chi_\sigma^* \chi_\sigma H_{f, T} u + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \widehat{H}_{f, T} z_{f, u} = y_f^\sigma$$

où on a supposé que $y_f^\sigma \in V$. Notez que si le terme non linéaire $N_f = 0$, i.e. $C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \widehat{H}_{f, T} z_{f, u} = 0$, alors l'ensemble

$$\{u : C\chi_\sigma^* \chi_\sigma H_{f, T} u = y_f^\sigma\}$$

est un convexe fermé non vide de $L^2(0, T; \mathcal{U})$, donc il existe un unique contrôle u^* de norme minimale satisfaisant

$$C\chi_\sigma^*\chi_\sigma H_{f, T} u^* = y_f^\sigma$$

Soit encore $u^* = Ly_f^\sigma$.

Ceci définit un opérateur linéaire L appliquant V dans $L^2(0, T; \mathcal{U})$. C'est le pseudo inverse de $C\chi_\sigma^*\chi_\sigma H_{f, T}$, il est donné par

$$L = (C\chi_\sigma^*\chi_\sigma H_{f, T})^\dagger = H_{f, T}^* \chi_\sigma^* \chi_\sigma C^* [C\chi_\sigma^*\chi_\sigma H_{f, T} H_{f, T}^* \chi_\sigma^* \chi_\sigma C^*]^{-1} \quad (4.4.2)$$

avec $H_{f, T}^*$ et C^* désignent respectivement les opérateurs adjoints de $H_{f, T}$ et C .

Donc l'espace V peut être muni de la norme

$$\|(\cdot)\|_V = \|L(\cdot)\|_{L^2(0, T; \mathcal{U})} \quad (4.4.3)$$

Et c'est sur l'espace de Banach $(V, \|\cdot\|_V)$ que nous allons étudier le problème (P) .

Alors pour $y_f^\sigma \in V$, et en utilisant le théorème 4.1, nous cherchons un contrôle $u \in B(0, m)$ tel que

$$C\chi_\sigma^*\chi_\sigma H_{f, T} u + C\chi_\sigma^*\chi_\sigma \widehat{H}_{f, T} h_1(u) = y_f^\sigma$$

avec $h_1(u) = z_{f, u}$, et la constante positive m est donnée par l'expression (4.3.9).

Ceci donc est équivalent à la détermination de $u \in B(0, m)$:

$$C\chi_\sigma^*\chi_\sigma H_{f, T} u = y_f^\sigma - C\chi_\sigma^*\chi_\sigma \widehat{H}_{f, T} h_1(u)$$

Remarque 4.7

Nous avons $C\chi_\sigma^*\chi_\sigma \widehat{H}_{f, T} h_1(u) \in V$ lorsque $C\chi_\sigma^*\chi_\sigma S_f(t) \in \mathcal{L}(Z, V)$.

en se basant sur cette remarque, et pour $y_f^\sigma \in V$, nous aurons, u est une solution de (P) s'il vérifie

$$u = L \left(y_f^\sigma - C\chi_\sigma^*\chi_\sigma \widehat{H}_{f, T} h_1(u) \right) \quad (4.4.4)$$

De ce fait, pour $y_f^\sigma \in V$ considérons l'application $\varphi(y_f^\sigma, \cdot)$ définie par

$$\begin{aligned} \varphi(y_f^\sigma, \cdot) : L^2(0, T; \mathcal{U}) &\longrightarrow L^2(0, T; \mathcal{U}) \\ u &\longmapsto \varphi(y_f^\sigma, u) = L \left(y_f^\sigma - C\chi_\sigma^*\chi_\sigma \widehat{H}_{f, T} h_1(u) \right) \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Alors, montrer que le problème (P) admet une solution, est équivalent, sous certaines hypothèses, à ce que l'application $\varphi(y_f^\sigma, \cdot)$ admet un unique point fixe u^* dans la boule $B(0, m)$ de $L^2(0, T; \mathcal{U})$. Pour cela, et en plus des hypothèses **(H1) – (H5)** supposons que

$$\textbf{(H6)} \quad \exists g_2 \in L^q(0, T) : \quad \|C\chi_\sigma^* \chi_\sigma S_f(t)\|_{\mathcal{L}(Z, V)} \leq g_2(t) \quad \forall t \in [0, T].$$

$$\textbf{(H7)} \quad T < \frac{1}{(K^* \|g_1\|_q + \beta K^* \|g_2\|_q)^p}$$

$$\textbf{(H8)} \quad \exists \lambda' \in]0, 1[: \quad \alpha \|z_0\|_X + \gamma \|f\|_{\mathcal{F}} \in \left[0, \frac{\lambda' \left(1 - T^{\frac{1}{p}} (k \|g_1\|_q + \beta k \|g_2\|_q) \right)}{T^{\frac{1}{p}}} \right]$$

Ainsi le théorème suivant nous permet de conclure.

Théorème 4.2

Si toutes les hypothèses **(H1) – (H8)** sont satisfaites, alors, il existe $d, \rho = \rho(d) > 0$ tel que pour tout $y_f^\sigma \in B(0, \rho)$, où y_f^σ est donné en (4.4.1), l'application $\varphi(y_f^\sigma, \cdot)$ admet un unique point fixe u^* dans $B(0, m)$.

Preuve.

Nous avons $\lim_{(\theta_1; \theta_2) \rightarrow (0,0)} K(\theta_1; \theta_2) = 0$ entraîne que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists d \in]0, 1[: \quad \sup_{\|(\theta_1; \theta_2)\| < d} K(\theta_1; \theta_2) < \varepsilon$$

Pour $\varepsilon = \frac{1}{T^{\frac{1}{p}} (\|g_1\|_q + \beta \|g_2\|_q)}$ et à partir de l'hypothèse **(H7)** on a

$$c_2 = T^{\frac{1}{p}} (\|g_1\|_q + \beta \|g_2\|_q) K \in]0, 1[\quad (4.4.6)$$

Nous allons montrer que $\varphi(y_f^\sigma, B(0, m)) \subset B(0, m)$ pour $y_f^\sigma \in V$, avec m et y_f^σ sont donnés respectivement par (4.3.9) et (4.4.1). En effet, pour $u \in B(0, m)$ on a

$$\begin{aligned} \|\varphi(y_f^\sigma, u)\|_{L^2(0, T; \mathcal{U})} &= \|y_f^\sigma - C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \widehat{H}_{f, T} h_1(u)\|_V \\ &\leq \|y_f^\sigma\|_V + \|C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \widehat{H}_{f, T} h_1(u)\|_V \end{aligned}$$

alors avec les hypothèses **(H2)** et **(H6)** on aura

$$\|\varphi(y_f^\sigma, u)\|_{L^2(0, T; \mathcal{U})} \leq \|y_f^\sigma\|_V + \|g_2\|_q K(\|h_1(u)\|_p; 0) \|h_1(u)\|_p$$

Avec (4.3.1) et le fait que $u \in B(0, m)$ implique que $h_1(u) \in B(0, d)$, nous obtenons

$$\|\varphi(y_f^\sigma, u)\|_{L^2(0, T; \mathcal{U})} \leq \|y_f^\sigma\|_V + k \|g_2\|_q d$$

Alors la condition

$$u \in B(0, m) \Rightarrow \varphi(y_f^\sigma, u) \in B(0, m)$$

est satisfaite si

$$\|y_f^\sigma\|_V \leq m - k\|g_2\|_q d$$

et donc à partir de l'expression de m (4.3.9) nous avons $\|y_f^\sigma\|_V \leq \rho$ avec

$$\rho = \frac{1}{\beta} \left[\frac{d \left(1 - T^{\frac{1}{p}}(k\|g_1\|_q + \beta k\|g_2\|_q) \right)}{T^{\frac{1}{p}}} - \alpha\|z_0\|_X - \gamma\|f\|_{\mathcal{F}} \right] \quad (4.4.7)$$

Comme conséquence de l'hypothèse **(H7)** nous avons $1 - T^{\frac{1}{p}}(k\|g_1\|_q + \beta k\|g_2\|_q) > 0$. En plus d'après l'hypothèse **(H8)** avec $\lambda' = d$ on obtient $\rho > 0$. Donc si $y_f^\sigma \in B(0, \rho)$, alors $\varphi(y_f^\sigma, B(0, m)) \subset B(0, m)$.

D'autre part, pour $y_f^\sigma \in B(0, \rho)$ l'application $\varphi(y_f^\sigma, \cdot)$ est une contraction sur $B(0, m)$. En effet pour $u, v \in B(0, m)$ nous avons

$$\varphi(y_f^\sigma, u) - \varphi(y_f^\sigma, v) = L \left(C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \widehat{H}_{f, Th_1 u} - C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \widehat{H}_{f, Th_1 v} \right)$$

En passant aux normes et en considérant la norme (4.4.3) on aura

$$\begin{aligned} \|\varphi(y_f^\sigma, u) - \varphi(y_f^\sigma, v)\|_{L^2(0, T; \mathcal{U})} &= \left\| C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \widehat{H}_{f, Th_1 u} - C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \widehat{H}_{f, Th_1 v} \right\|_V \\ &= \left\| \int_0^T C\chi_\sigma^* \chi_\sigma S_f(T-s) [N_f h_1(u)(s) - N_f h_1(v)(s)] ds \right\|_V \end{aligned}$$

en utilisant les hypothèses **(H2)** et **(H6)** et l'inégalité de Holder, on obtient

$$\|\varphi(y_f^\sigma, u) - \varphi(y_f^\sigma, v)\|_{L^2(0, T; \mathcal{U})} \leq \|g_2\|_q K \|h_1(u) - h_1(v)\|_p$$

Comme l'application h_1 est lipschitzienne de rapport $\frac{T^{\frac{1}{p}}\beta}{1-c_1}$ (voir le point **(b)** du théorème 4.1) alors nous avons

$$\|\varphi(y_f^\sigma, u) - \varphi(y_f^\sigma, v)\|_{L^2(0, T; \mathcal{U})} \leq c_3 \|u - v\|_{L^2(0, T; \mathcal{U})}$$

avec

$$c_3 = \frac{T^{\frac{1}{p}}\beta\|g_2\|_q K}{1-c_1} \quad (4.4.8)$$

ce qui entraîne que l'application $\varphi(y_f^\sigma, \cdot)$ est contractante sur $B(0, m)$ car $c_3 \in]0, 1[$. En effet, à partir des expressions des constantes c_1 , c_2 et c_3 données respectivement par (4.3.8), (4.4.6) et (4.4.8) nous obtenons

$$\begin{aligned} 1 - c_3 &= \frac{1 - c_1 - T^{\frac{1}{p}} \beta \|g_2\|_q K}{1 - c_1} \\ &= \frac{1 - c_2}{1 - c_1} \end{aligned}$$

or $c_1, c_2 \in]0, 1[$ et $c_1 < c_2$, alors $0 < c_3 < 1$.

Alors pour $y_f^\sigma \in B(0, \rho)$ l'application $\varphi(y_f^\sigma, \cdot)$ admet un unique point fixe u^* dans $B(0, m)$, qui est une solution du problème (P). ■

Maintenant nous allons exploiter ce théorème pour en donner un résultat assurant la convergence vers u^* solution du problème (P), d'une suite de contrôles associés à l'expression (4.4.5). C'est l'objet de la proposition suivante

Proposition 4.2

Si toutes les hypothèses du théorème 4.2 sont vérifiées, et si $y_f^\sigma \in V$ tel que $\|y_f^\sigma\|_V \leq \rho$, alors la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \varphi(y_f^\sigma, u_n) = L \left(y_f^\sigma - C \chi_\sigma^* \chi_\sigma \widehat{H}_{f, T} h_1(u_n) \right) \end{cases} \quad (4.4.9)$$

converge vers u^ dans $L^2(0, T, \mathcal{U})$ et satisfait*

$$\|u_{n+1} - u_n\|_{L^2(0, T, \mathcal{U})} \leq c_3^n \|u_1\|.$$

Preuve.

Elle est déduite du théorème 4.2 et des propriétés du point fixe. ■

Donc si on considère pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$z_{f, u_n}^n = h_1(u_n), \quad y_{f, u_n}^{\sigma, n}(T) = C \chi_\sigma^* \chi_\sigma z_{f, u_n}^n(T) \quad \text{et} \quad r_{n+1} = y_f^\sigma - C \chi_\sigma^* \chi_\sigma \widehat{H}_{f, T} z_{f, u_n}^n$$

alors en utilisant la sortie (E) et les expressions (4.3.12) et (4.4.1) on aura

$$\begin{aligned}
y_{f, u_n}^{\sigma, n}(T) &= C\chi_\sigma^*\chi_\sigma S_f(T)z_0 + C\chi_\sigma^*\chi_\sigma \widehat{H}_{f, T} z_{f, u_n}^n + C\chi_\sigma^*\chi_\sigma \widetilde{H}_{f, T} f + C\chi_\sigma^*\chi_\sigma H_{f, T} u_n \\
&= y_f^\sigma + C\chi_\sigma^*\chi_\sigma S_f(T)z_0 + C\chi_\sigma^*\chi_\sigma \widehat{H}_{f, T} z_{f, u_n}^n + C\chi_\sigma^*\chi_\sigma \widetilde{H}_{f, T} f \\
&\quad + C\chi_\sigma^*\chi_\sigma H_{f, T} u_n - y_f^\sigma \\
&= y_{0,0}^\sigma(T) - C\chi_\sigma^*\chi_\sigma f - r_{n+1} + r_n
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$r_{n+1} = r_n + y_{0,0}^\sigma(T) - y_{f, u_n}^{\sigma, n}(T) - C\chi_\sigma^*\chi_\sigma f \quad (4.4.10)$$

D'autre part, on montre que

$$\|y_{f, u_n}^{\sigma, n}(T) - y_{0,0}^\sigma(T) - C\chi_\sigma^*\chi_\sigma f\|_V \leq c_3^n \|u_1\| \quad (4.4.11)$$

5 Approche numérique du problème (P)

L'objet de cette section est de développer une approche numérique pour calculer le contrôle u solution du problème (P) , et donc de l'état $z_{f,u}$ du système perturbé contrôlé (S) associé à u . Ce qui permettra de retrouver l'état $\widetilde{z}_{f,u}$ du système de départ $(\widetilde{S})$. Ensuite, une illustration à travers un exemple sera donnée en utilisant deux choix du capteur C et de l'actionneur B , et aussi le cas particulier où la zone σ est égale au domaine Ω tout entier (i.e. remédiabilité globale). Différentes simulations numériques seront aussi présentées.

5- a Algorithme

Rappelons d'abord que le problème (P) s'écrit sous la forme

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in L^2(0, T; \mathcal{U}) \text{ tel que :} \\ y_{f, u}^\sigma(T) = y_{0,0}^\sigma(T) - C\chi_\sigma^*\chi_\sigma f \end{array} \right.$$

et la sortie (E) est donnée par

$$(E) \quad y_{f, u}^\sigma(t) = C\chi_\sigma^*\chi_\sigma S_f(t)z_0 + C\chi_\sigma^*\chi_\sigma \widehat{H}_{f, t} z_{f, u} + C\chi_\sigma^*\chi_\sigma \widetilde{H}_{f, t} f + C\chi_\sigma^*\chi_\sigma H_{f, t} u$$

Donc à partir de la proposition 4.2 et de ce qui précède, l'algorithme suivant permet de générer une suite de contrôle qui converge vers le contrôle u^* solution du problème (P).

Algorithme 4.1

1. *Données : $\Omega, \sigma, T, z_0, \omega, f, A, N, B, C, \varepsilon$.*
2. *Calculer $y_{0,0}^\sigma$: la sortie (E) lorsque $f = 0$ et $u = 0$ (cas autonome non perturbé).*
3. *Calculer $y_{f,0}^\sigma$: la sortie (E) quand $f \neq 0$ et $u = 0$ (cas autonome perturbé)*
4. *Poser $r_0 = 0$ et $r_1 = y_{0,0}^\sigma(T) - y_{f,0}^\sigma(T) - C\chi_\sigma^*\chi_\sigma f$*
5. *Calculer $u_n = Lr_n$, avec L est donné en (4.4.2)*
6. *Calculer $y_{f,u_n}^{\sigma, n}$: la sortie (E)*
7. *Si $\|u_n - u_{n-1}\|_{L^2(0,T;\mathcal{U})} \leq \varepsilon$, stop*
Sinon faire : $r_{n+1} = r_n + y_{0,0}^\sigma(T) - y_{f,u_n}^{\sigma, n}(T) - C\chi_\sigma^\chi_\sigma f$ et aller en 5.*

avec la suite $(r_n)_n$ est donnée par (4.4.10). Noter que la quantité r_n peut être assimilée à un résidu qu'il faudrait faire diminuer en passant d'une itération à une autre en appliquant le contrôle u_n , car, au départ r_1 mesure l'écart entre les deux observations associées respectivement au système normal, et au système perturbé non contrôlé. D'autre part, le pseudo inverse L de l'opérateur linéaire $C\chi_\sigma^*\chi_\sigma CH_{f,T}$ peut être calculé en utilisant (4.3.6) et (4.4.2) par

$$(Lr)(t) = \left[\int_0^T C\chi_\sigma^*\chi_\sigma S_f(\tau)BB^*S_f^*(\tau)\chi_\sigma^*\chi_\sigma C^* d\tau \right]^{-1} B^*S_f^*(T-t)\chi_\sigma^*\chi_\sigma C^* r \quad (4.5.1)$$

Au point de vue numérique, l'algorithme 4.1 présente une difficulté au niveau du calcul du pseudo inverse L et aussi de la résolution du système différentiel provenant de l'étape 6.

Comme une application de cet algorithme, nous allons considérer un exemple pour illustrer les différentes démarches suivies dans ce travail.

5- b Exemple

Soit $\Omega =]0, \pi/4[$ et $I =]0, T[$ avec $T = 2$. Considérons le système distribué dont l'état initial z_0 subit une perturbation f et l'état $\tilde{z}(x, t)$ satisfait sur $\Omega \times I$ l'équation non linéaire suivante.

$$\begin{cases} \dot{\tilde{z}}(x, t) = -c \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} + \tilde{z}^2(x, t) + Bu(t) & 0 < x < \pi/4, 0 < t < 2 \\ \tilde{z}(x, 0) = z_0(x) + f(x) & 0 < x < \pi/4 \end{cases} \quad (4.5.2)$$

avec $\tilde{z} \in L^2(0, T, Z)$, $Z = L^2(\Omega)$ et $c > 0$, par exemple $c = 3\pi/32$ dans ce qui suit. Soit $\omega =]0, \pi/16[\subset \Omega$ le support géométrique de la perturbation f , avec f ainsi que la condition initiale z_0 sont données par

$$z_0(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

$$f(x) = \begin{cases} -\cos(x) & x \in \omega \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Pour une zone σ fixée dans Ω ne vérifiant pas nécessairement $\sigma \cap \omega \neq \emptyset$, soit $(\tilde{E})$ la fonction de mesure associée au système (4.5.2)

$$(\tilde{E}) \quad \tilde{y}^\sigma(t) = C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{z}(t)$$

Le problème de la remédiabilité associé à cet exemple sera traité en considérant différents choix du capteur C , d'actionneur B et aussi de la zone σ .

Cas 1 : $\sigma = [3\pi/16, 7\pi/32] \subset \Omega$: Remédiabilité régionale.

Considérons $Bu(t) = g(x)u(t)$ et $C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{z}(t) = \int_{3\pi/16}^{7\pi/32} h(x)\tilde{z}(x, t)dx$ avec

$$g(x) = \begin{cases} \exp(-x^2) & 3\pi/16 \leq x \leq 7\pi/32 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} \exp(x) & 3\pi/16 \leq x \leq 7\pi/32 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Noter que le système (4.5.2) est un cas particulier de (4.1.1) avec

$$F\tilde{z} = -c \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} + \tilde{z}^2 \quad \text{et} \quad Bu(t) = g(x)u(t)$$

Les hypothèses faites sur l'opérateur non linéaire F sont bien satisfaites car nous avons $F(0) = 0$ et F est de classe C^1 .

Posons $z(x, t) = \tilde{z}(x, t) - f(x)$. Donc le système (4.5.2) devient par rapport à z

$$\begin{cases} \dot{z}(x, t) = -c \left(\frac{\partial z}{\partial x}(x, t) + \frac{\partial f}{\partial x} \right) + (z(x, t) + f(x))^2 + g(x)u(t) \\ z(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (4.5.3)$$

En linéarisant F au voisinage de f , le système (4.5.3) s'écrira sous la forme

$$\begin{cases} \dot{z}(x, t) = \left(-c \frac{\partial}{\partial x} + 2f(x)\right) z(x, t) + z^2(x, t) + \left(f^2(x) - c \frac{\partial f}{\partial x}(x)\right) + g(x)u(t) \\ z(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (4.5.4)$$

Considérons l'opérateur linéaire $A_f = -c \frac{\partial}{\partial x} + 2f : \mathcal{D}(A_f) \longrightarrow Z$ de domaine

$$\mathcal{D}(A_f) = \left\{ z \in Z : -c \frac{\partial z}{\partial x} + 2fz \in Z \right\}$$

dense dans Z . A_f engendre sur Z un semi groupe fortement continu donné par

$$(S_f(t)z)(x) = \begin{cases} \exp[2f(x)t]z(x - ct) & x > ct \\ 0 & 0 < x \leq ct \end{cases}$$

qui satisfait l'hypothèse **(H1)** avec

$$g_1(t) = \exp(-2 \cos(\pi/16)t); \quad g_1 \in L^2(0, 2)$$

L'opérateur non linéaire $N_f : z \in X = L^4(\Omega) \longmapsto z^2 \in Z = L^2(\Omega)$ est bien défini sur l'espace de Banach X et vérifie à son tour l'hypothèse **(H2)** car $N(0) = 0$, et par l'inégalité de Holder on aura $\forall t \in [0, 2]$

$$\begin{aligned} \|N_f z_1(t) - N_f z_2(t)\|_{L^2(\Omega)} &= \|z_1^2(t) - z_2^2(t)\|_{L^2(\Omega)} = \|(z_1 + z_2)(t)(z_1 - z_2)(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (\|z_1(t)\|_X + \|z_2(t)\|_X) \|z_1(t) - z_2(t)\|_X \\ &\leq \sqrt{2} [\|z_1(t)\|_X^2 + \|z_2(t)\|_X^2]^{\frac{1}{2}} \|z_1(t) - z_2(t)\|_X \\ &\leq K (\|z_1\|_2; \|z_2\|_2) \|z_1(t) - z_2(t)\|_X \end{aligned}$$

avec $K(\|z_1\|_2; \|z_2\|_2) = \max_t [\|z_1(t)\|_X^2 + \|z_2(t)\|_X^2]^{\frac{1}{2}}$.

Il est claire que $K : \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+ : \lim_{\|(\theta_1; \theta_2)\|_{\mathbb{R}_+^2} \rightarrow 0} K(\theta_1; \theta_2) = 0$.

Pour $d = 0.8$, notons par

$$T_1 = \frac{1}{(K^* \|g_1\|_2)^2}; \quad f_1 = \alpha \|z_0\|_X + \gamma \|f\|_X \text{ et } \lambda_1 = \frac{d \left(1 - T^{\frac{1}{2}} k \|g_1\|_2\right)}{T^{\frac{1}{2}}}$$

et avec un calcul numérique nous avons le tableau suivant

α	β	γ	T_1	f_1	λ_1	m	c_1
1	0.1053	0.4453	6.9772	0.2945	0.3285	0.3229	0.5354

TAB. 4.1 – Les différentes constantes intervenant dans le théorème 4.1

Ceci montre que les trois hypothèses **(H3)** – **(H5)** sont vérifiées car, les constantes α, β, γ sont strictement positives, ainsi que les conditions $T = 2 < T_1$ et $f_1 < \lambda_1$ ont lieu. De plus les constantes c_1 et m données en (4.3.8) et (4.3.9) satisfont $c_1 \in]0, 1[$ et $m > 0$. Alors à partir du théorème 4.1 on en déduit que le système (4.5.4) admet une solution unique donnée pour tout $t \in [0, 2]$ par

$$z_{f,u}(t) = \int_0^t S_f(t-s) z_{f,u}^2(s) ds + \int_0^t S_f(t-s) (f^2 - c \frac{\partial f}{\partial x}) ds + \int_0^t S_f(t-s) g u(s) ds$$

Pour la résolution du problème (P) associé à cet exemple, nous considérons le système perturbé contrôlé (4.5.4) augmenté de la sortie (E) donnée par

$$(E) \quad y^\sigma(t) = C \chi_\sigma^* \chi_\sigma z(t) = \int_{3\pi/16}^{7\pi/32} h(x) z(x, t) dx$$

Ainsi, nous sommes amenés à déterminer un contrôle u tel que

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \int_{3\pi/16}^{7\pi/32} h(x) S_f(2-s) g(x) u(s) dx ds + \int_0^2 \int_{3\pi/16}^{7\pi/32} h(x) S_f(2-s) z_{f,u}^2(x, s) dx ds \\ & + \int_0^2 \int_{3\pi/16}^{7\pi/32} h(x) S_f(2-s) (f^2 - c \frac{\partial f}{\partial x})(x) dx ds + \int_{3\pi/16}^{7\pi/32} h(x) f(x) dx \\ & - \int_0^2 \int_{3\pi/16}^{7\pi/32} h(x) S_0(2-s) z_{0,0}^2(x, s) dx ds = 0 \end{aligned} \tag{4.5.5}$$

Il est claire que l'hypothèse **(H6)** est satisfaite avec

$$g_2(t) = \|h\|_{L^2(\sigma)} \exp(-2 \cos(\pi/16) t) \quad \forall t \in]0, 2[$$

Et par analogie avec ce qui précède, on note par

$$T_2 = \frac{1}{(K^* \|g_1\|_2 + \beta K^* \|g_2\|_2)^2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{d \left(1 - T^{\frac{1}{2}} (k \|g_1\|_2 + \beta k \|g_2\|_2) \right)}{T^{\frac{1}{2}}}$$

Par un calcul numérique, nous obtenons le tableau suivant

T_2	f_1	λ_2	ρ	c_2	c_3
6.1804	0.2945	0.3049	0.0981	0.5689	0.0720

TAB. 4.2 – Les différentes constantes intervenant dans le théorème 4.2

A partir de ce tableau, on en déduit que les deux hypothèses **(H7)** et **(H8)** sont aussi satisfaites car nous avons $T < T_2$ et $f_1 < \lambda_2$. Aussi les constantes c_2 , ρ et c_3 données respectivement en (4.4.6), (4.4.7) et (4.4.8) vérifient $\rho > 0$ et $c_2, c_3 \in]0, 1[$. Alors d’après le théorème 4.2, le problème (4.5.5) admet une solution unique u .

5- c Simulations numériques

Lorsque le système (4.5.2) est autonome ($u = 0$) non perturbé ($f = 0$), la solution $z_{0,0}$ est donnée explicitement par

$$z_{0,0}(x, t) = 0 \quad , \quad (x, t) \in]0, \pi/4[\times]0, 2[$$

Et si de plus le système subit la perturbation spatiale f à l’instant initial $t_0 = 0$, la solution $z_{f,0}$ sera donnée dans ce cas par

$$z_{f,0}(x, t) = \begin{cases} \frac{-\cos(x - ct)}{1 + t \cos(x - ct)} + \cos(x - ct) & ct < x < ct + \pi/16 \\ 0 & 0 < x \leq ct \end{cases}$$

En considérant la solution du système du départ (4.5.2) donné par $\tilde{z}_{f,u}(x, t) = z_{f,u}(x, t) + f(x)$, les deux figures suivantes représentent les états $\tilde{z}_{0,0}$ et $\tilde{z}_{f,0}$.

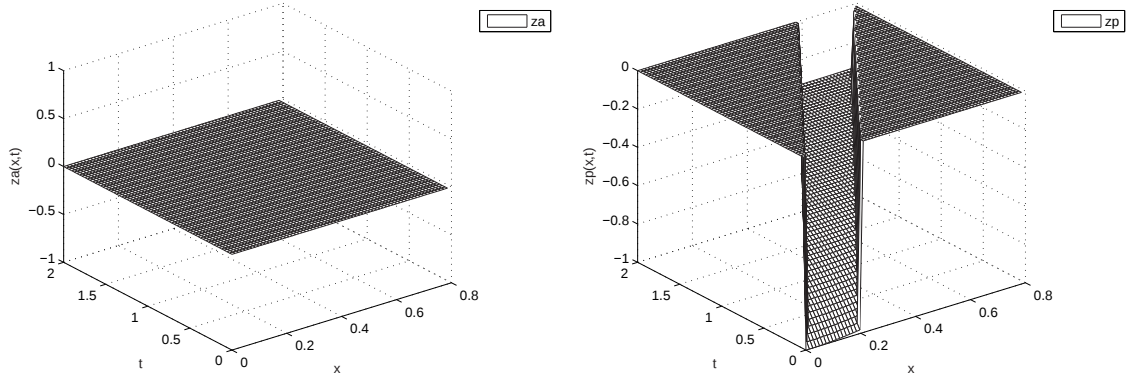


FIG. 4.5.1 – L'état du système autonome non perturbé (à gauche) et celui dans le cas autonome perturbé (à droite)

Sur la figure 4.5.1, nous constatons le changement de l'état normal du système (à gauche) lorsque celui-ci est soumis à la perturbation f (à droite).

Considérons maintenant la propriété $\mathcal{P}$ et les sous domaines $(w_{f,0,t})_t$ données respectivement par

$$\mathcal{P}\tilde{z}_{f,0}(x, t) \Leftrightarrow \tilde{z}_{f,0}(x, t) \neq \tilde{z}_{0,0}(x, t) \text{ et } w_{f,0,t} = \{x \in \Omega : \mathcal{P}\tilde{z}_{f,0}(x, t)\}.$$

Comme $\tilde{z}_{0,0}(x, t) = 0$ pour tout $(x, t) \in \Omega \times I$, et $\tilde{z}_{f,0}(x, t) \neq 0$ pour tout $x \in]ct, ct + \pi/16[$, $t \neq 0$, alors on aura

$$w_{f,0,t} =]ct, ct + \pi/16[$$

Par conséquent nous avons le résultat suivant (figure 4.5.2)

Résultat : La perturbation spatiale f est étalable et la zone fixée σ est f -vulnérable.

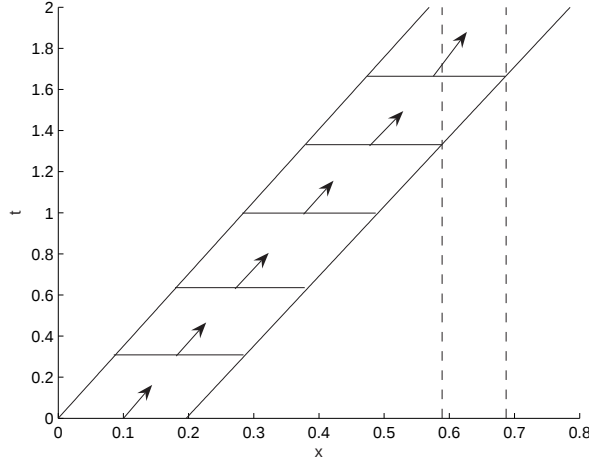


FIG. 4.5.2 – *Etalabilité de f et vulnérabilité de $\sigma \simeq [0.59, 0.69]$*

Soit t_1 et t_2 les deux instants donnés par (voir chapitre 2 sur la vulnérabilité)

$$t_1 = \inf\{t \in I : \overset{\circ}{\sigma} \cap w_{f,0,t} \neq \emptyset\}$$

$$t_2 = \inf\{t \in [t_1, T] : \bigcup_{s \in [t_1, t_2]} (\overset{\circ}{\sigma} \cap w_{f,0,s}) = \bigcup_{s \in [t_1, T]} (\overset{\circ}{\sigma} \cap w_{f,0,s})\}$$

Ces deux instants désignent respectivement le premier instant où l'effet de f commence à atteindre σ , et le premier instant où le maximum de σ (qui peut être σ toute entière) est atteint par de tels effets.

Dans ce cas (voir figure 4.5.2), et par les expressions de c , $w_{f,0,t}$ et σ , nous avons

$$t_1 = \frac{4}{3} \text{ et } t_2 = \frac{5}{3}$$

Donc la perturbation étalable f commence à atteindre σ en t_1 , celle-ci est entièrement atteinte à l'instant t_2 et elle l'est encore durant l'intervalle de temps $[t_2, T]$. Par conséquent, la solution du problème (4.5.5) nous donnera le contrôle qui permet de compenser sur σ l'effet d'une telle perturbation.

De ce fait, en appliquant l'algorithme 4.1 avec un pas de discrétisation spatiale $\Delta x = 0.01$, et celui de discrétisation temporelle $\Delta t = 0.03$, et pour une tolérance $\varepsilon = 10^{-4}$, nous obtenons les figures suivantes.

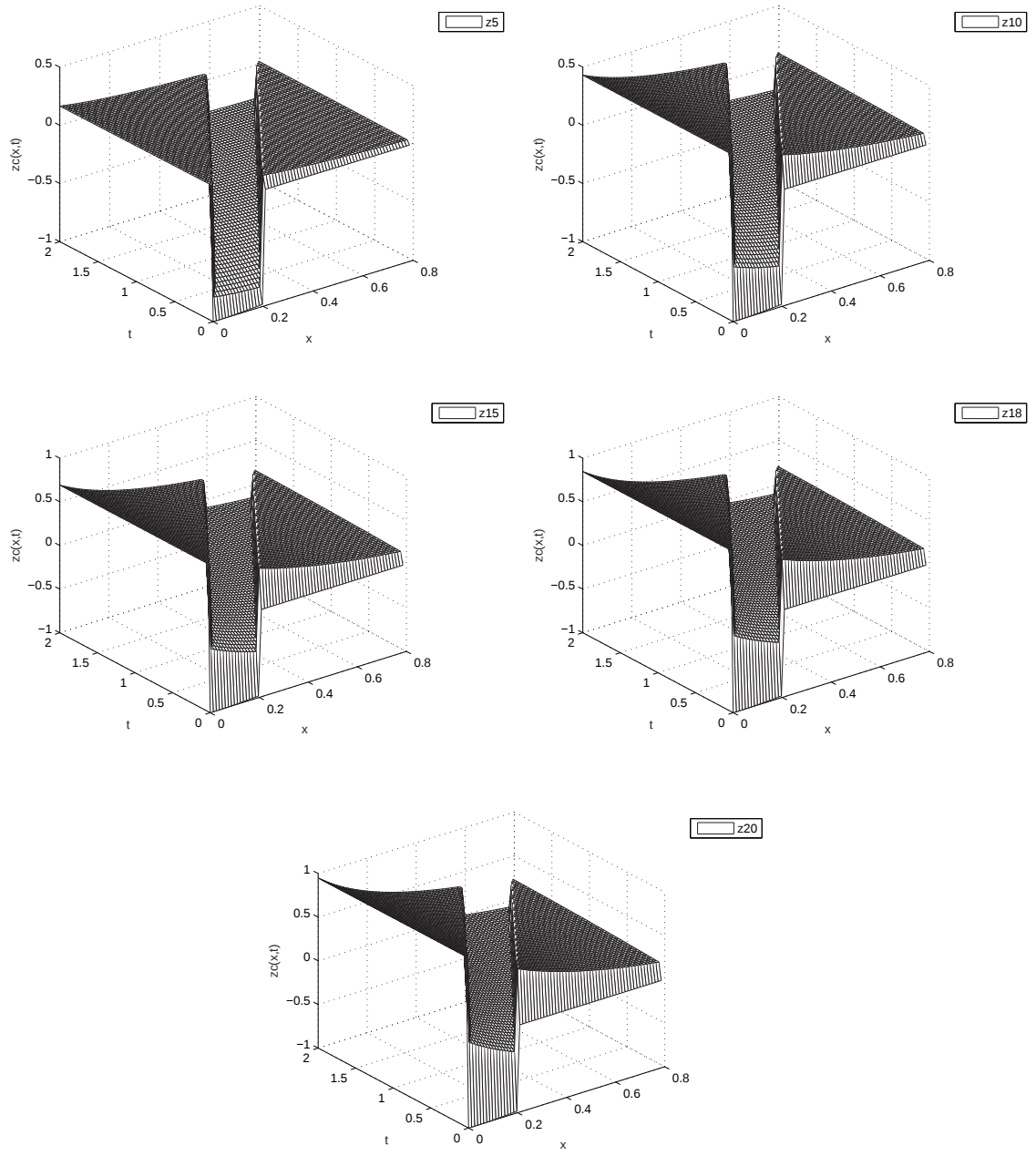


FIG. 4.5.3 – Cas perturbé contrôlé : Les états contrôlés pour $n = 5, 10, 15, 18$ et 20

Sur la figure 4.5.3, nous avons représenté les états $\tilde{z}_{f,u}$ du système perturbé contrôlé, ce qui veut dire que sur la zone σ , de tels états s'approchent de plus en plus à l'instant $T = 2$ vers celui du système normal $\tilde{z}_{0,0}$, et ceci quand le nombre d'itérations n augmente.

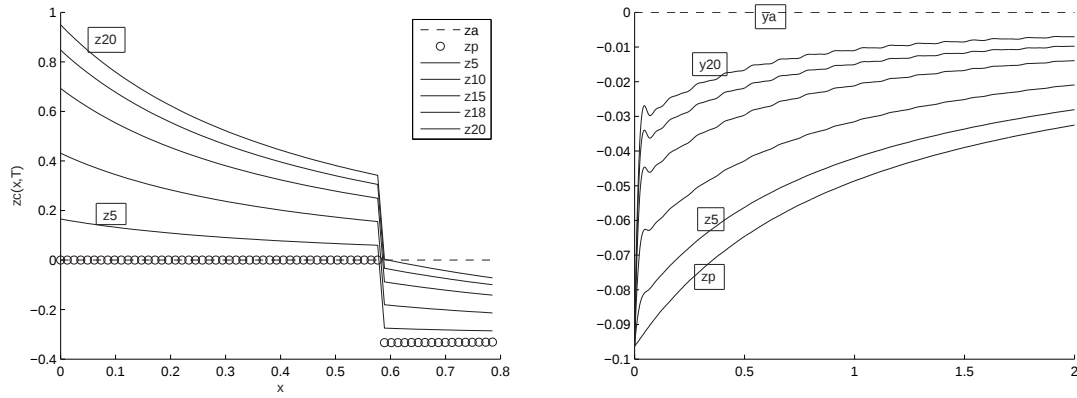


FIG. 4.5.4 – Les états dans le cas autonome, perturbé et aussi contrôlé à l'instant final $T = 2$ (à gauche) et les observations associées à ces trois cas (à droite) pour $n = 5, 10, 15, 18$ et 20 .

Cela (figure 4.5.4) montre encore que les états contrôlés $\tilde{z}_{f,u}(\cdot, T)$ et les mesures associées $\tilde{y}_{f,u}$ sont autant plus proches à l'instant final $T = 2$ de ceux du cas autonome $\tilde{z}_{0,0}(\cdot, T)$ et $\tilde{y}_{0,0}$ que n est grand.

Par conséquent, le contrôle u solution du problème de la remédiabilité (4.5.5), est régionalement efficace, car il a permis de neutraliser faiblement l'effet de la perturbation étalable f sur la zone fixée σ .

Remarquons aussi que la manière d'évolution sur σ des états (respectivement des mesures associées) dans le cas contrôlé et due à celle de la distribution spatiale de l'actionneur g (respectivement du capteur h) qui sont représentées sur la figure 4.5.5

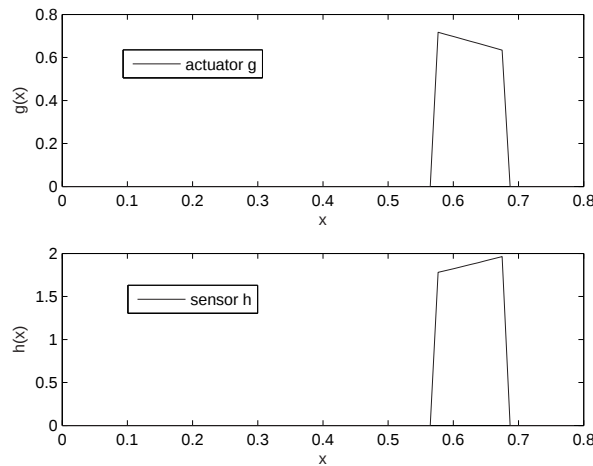


FIG. 4.5.5 – Les distributions spatiales de l'actionneur g (en haut) et du capteur h (en bas)

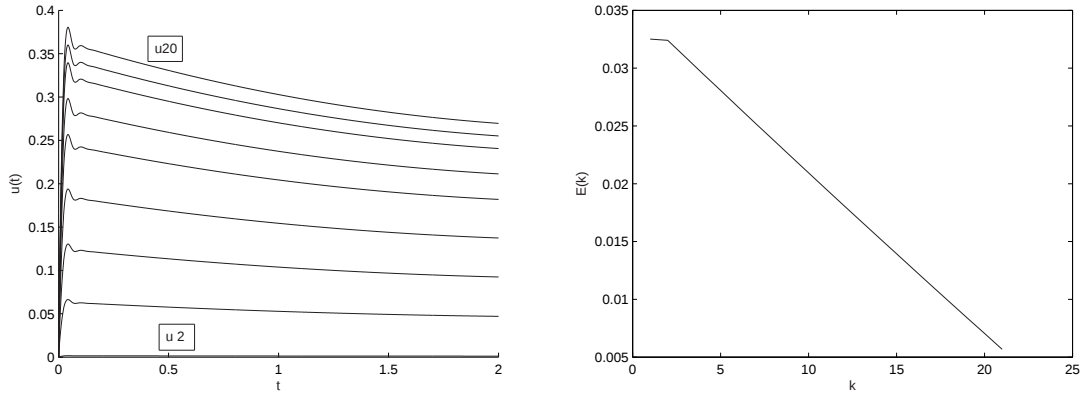


FIG. 4.5.6 – La suite des contrôles (à gauche) et l'erreur entre les mesures $y_{0,0}(T)$ et $y_{f,u}(T)$ (à droite)

A partir de la figure 4.5.6 on constate que la suite des contrôles converge vers la solution u du problème (4.5.5), et aussi la manière de son évolution est interprétée par le fait que l'état du système perturbé (et donc la mesure associée) est situé au dessous de celui du système normal. De plus, sur la même figure à droite, nous avons représenté l'erreur $E(n)$ entre les mesures $y_{0,0}(T)$ et $y_{f,u}(T)$ en fonction du nombre des itérations n . Comme $E(n)$ décroît vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$, alors ceci montre la convergence d'un tel algorithme, et dans ce cas, nous avons calculé la constante de Lipschitz $c_3 = 0.0720$. Aussi, le coût nécessaire pour compenser f sur σ est $\|u\|_{L^2(0,T)} = 0.2992$.

Remarque 4.8

Comme il a été mentionné ci-dessus, la vitesse de transport c strictement positive ($c > 0$), par conséquent la perturbation f est étalable dans ce cas. Dans le cas où $c \leq 0$, f est résorbable (ou stationnaire pour $c = 0$), alors la zone considérée σ n'est pas f -vulnérable, et on n'a pas besoin d'y remédier.

Une situation intéressante pour le cas où $c = 0$ est celle où $\sigma = \Omega$. Donc dès l'instant initial $t = 0$ le support géométrique de f devient Ω tout entier et donc on a la f -vulnérabilité de σ .

Cas 2 : $\sigma = \Omega =]0, \pi/4[$: Remédiabilité globale.

On choisit $\omega = \Omega$, $B = I$ et $C = I$. Dans ce cas, on vérifie de la même manière que toutes les hypothèses du théorème 4.2 sont satisfaites, et donc nous sommes amenés à chercher un contrôle u solution de l'équation suivante

$$\begin{aligned}
& \int_0^2 \int_0^{\pi/4} e^{2f(x)(2-s)} u(s) dx ds + \int_0^2 \int_0^{\pi/4} e^{2f(x)(2-s)} z_{f,u}^2(x, s) dx ds \\
& + \int_0^2 \int_0^{\pi/4} e^{2f(x)(2-s)} f^2(x) dx ds + \int_0^{\pi/4} f(x) dx - \int_0^2 \int_0^{\pi/4} z_{0,0}^2(x, s) dx ds = 0
\end{aligned} \tag{4.5.6}$$

Alors par application du même algorithme, nous obtenons les évolutions représentées sur les figures suivantes.

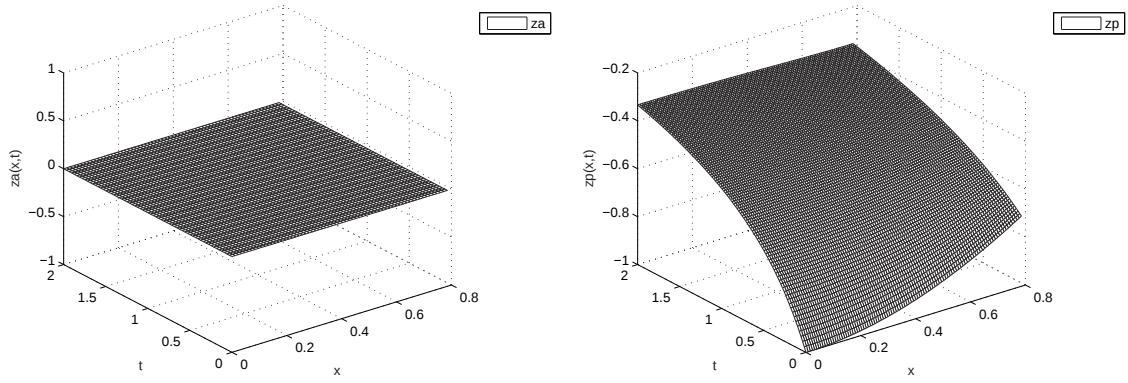
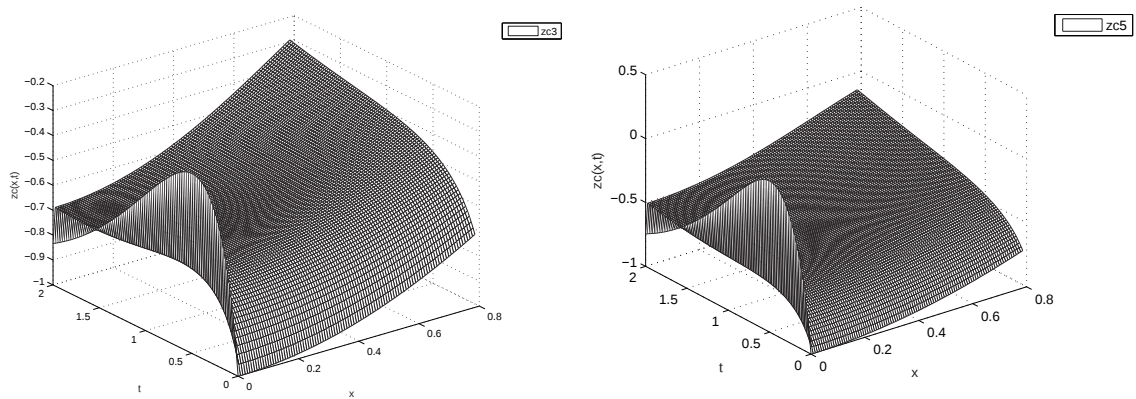


FIG. 4.5.7 – L'état du système autonome non perturbé (à gauche) et celui dans le cas autonome perturbé (à droite)

Sur la figure 4.5.7, nous donnons l'état normal $\tilde{z}_{0,0}$ (à gauche) et perturbé $\tilde{z}_{f,0}$ (à droite). Dans ce cas, la zone $\sigma = \Omega$ est nécessairement atteinte par les effets de f .



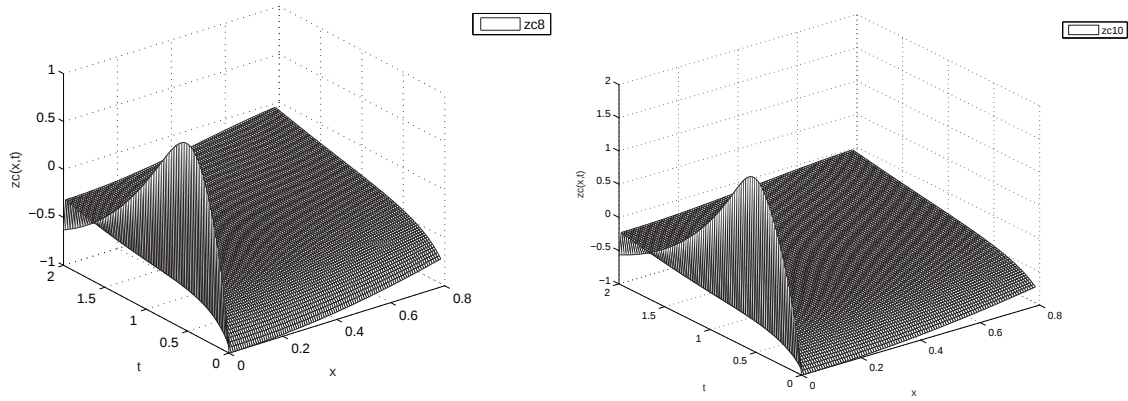


FIG. 4.5.8 – Cas contrôlé : les états pour $n = 3, 5, 8, 10$

Dans ce cas (figure 4.5.8), on constate que l'état contrôlé $\tilde{z}_{f,u}$ sur tout le domaine Ω et à l'instant final T sera de plus en plus similaire à l'état normal $\tilde{z}_{0,0}$ quand n croît.

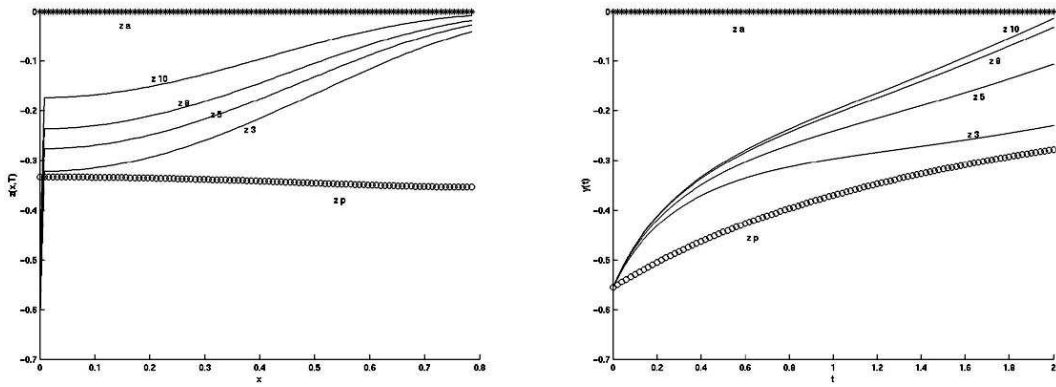


FIG. 4.5.9 – Les états dans le cas autonome, perturbé et aussi contrôlé à l'instant final $T = 2$ (à gauche) et les observations associées à ces trois cas (à droite) pour $n = 3, 5, 8$ and 10 .

Aussi sur la figure 4.5.9 nous remarquons que les états contrôlés $\tilde{z}_{f,u}(\cdot, T)$ et les mesures associées $\tilde{y}_{f,u}$ sont respectivement graduellement proches de $\tilde{z}_{0,0}(\cdot, T)$ et de $\tilde{y}_{0,0}$ associés au cas autonome (normal) sur Ω et à l'instant final $T = 2$.

Sur la figure 4.5.10 à gauche, est représentée la suite des contrôles, qui apparaît convergente vers le contrôle u solution du problème de la remédiabilité globale (4.5.6). Ce qui montre aussi qu'un tel contrôle est efficace car la neutralisation faible des effets de la perturbation f sur le domaine Ω , a eu lieu à l'instant final T .

Comme pour le cas régional (**Cas 1**), la manière d'évolution de la suite de contrôles qui converge vers u , est due d'une part, à ce que l'allure des mesures recueillies dans

le cas perturbé, est localisée au dessous de celle des mesures normales (c'est à dire ils sont négatives, et nulles dans le cas normal), d'autre part, cela est due à l'effet de la condition au limite imposée au point $x = 0$.

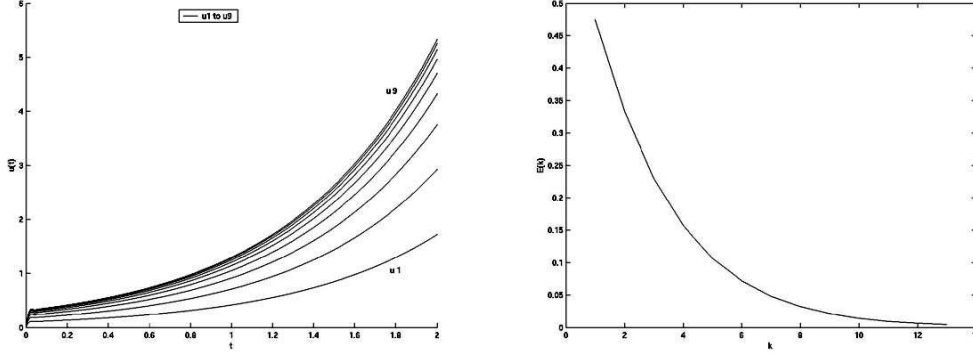


FIG. 4.5.10 – La suite des contrôles pour $n = 2, \dots, 10$ (à gauche) et l'erreur entre les observations $y_{0,0}(T)$ et $y_{f,u}(T)$

Et sur la même figure (à droite) nous avons représenté l'erreur entre $\tilde{y}_{f,u}(T)$ et $\tilde{y}_{0,0}(T)$ en fonction du nombre des itérations. Notez aussi que dans ce cas, l'algorithme considéré est convergent, car $E(k)$ décroît vers 0 lorsque $k \rightarrow \infty$.

Le coût assurant la compensation globale de la perturbation spatiale f est $\|u\|_{L^2(0,T)} = 5.7303$.

Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons étudié le problème de la remédiabilité pour une classe de système distribués non linéaires perturbés au niveau de la condition initiale. Ce problème a été résolu en utilisant les techniques du pseudo inverse et aussi le théorème du point fixe. Pour une illustrer toutes les démarches suivies, un exemple détaillé a été considéré. Le fait de considérer la transformation du système au voisinage de la perturbation qui l'affecte, relève d'une grande importance. D'une part, elle nous a permis de résoudre le problème de la remédiabilité, d'autre part, de faire une connection entre les deux concepts d'étalabilité et de remédiabilité à travers celui de la vulnérabilité.

En se basant sur cette approche, nous étudierons dans le chapitre suivant, le problème du contrôle protecteur pour la même classe de systèmes.

Chapitre 5

Contrôle protecteur d'une classe de systèmes distribués non linéaires

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous focalisons notre étude sur les systèmes non linéaires, à "vitesse de propagation finie" et qui subissent une perturbation au niveau de la condition initiale. Nous montrons comment protéger certaines zones vulnérables aux effets d'une telle perturbation. C'est une extension du concept du contrôle protecteur à cette classe de systèmes. En effet, dans la modélisation environnementale, différentes études ont montré que les modèles décrivant plusieurs phénomènes naturels sont des systèmes de transport [17, 40]. Avec une condition initiale donnée, et en ce qui concerne des conditions aux limites imposées, diverses situations ont été étudiées pour ces modèles de transport [38]. Généralement, cela concerne le champ de vitesse et une partie de la frontière ou toute la frontière du domaine géométrique sur lequel évolue le système considéré.

Après la position du problème du contrôle protecteur, nous considérons dans la section 3 quelques résultats mathématiques permettant une nouvelle formulation du problème. Les solutions de ce problème sont caractérisées en utilisant une approche par remédiabilité d'un certain système non linéaire à retard, et par conséquent un algorithme sera donné pour résumer les différentes démarches suivies, c'est l'objet de la section 4. Dans la dernière section, nous illustrons le concept du contrôle protecteur en considérant une variante de l'équation de Fisher [65] qui peut modéliser plusieurs phénomènes tel que celui de la dynamique de bactéries.

2 Position du problème

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $I =]0, T[$ un intervalle de temps, σ une région fixée dans Ω et ω le support géométrique d'une perturbation spatiale f qui affecte la condition initiale d'un système non linéaire à vitesse de propagation finie. Supposons que $\overline{\omega} \cap \overline{\sigma} = \emptyset$ et que la perturbation f est étalable à partir de ω . Alors il se peut que la zone σ soit f -vulnérable. Notre objectif consiste à protéger une telle zone avant qu'elle soit atteinte par les effets de f pendant tout l'intervalle de temps I .

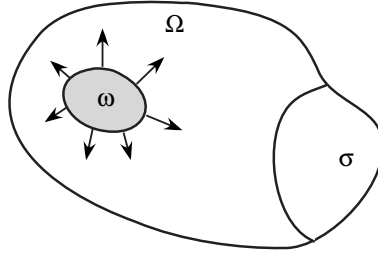


FIG. 5.2.1 – Localisation de ω et σ

Nous considérons le système non linéaire gouverné par l'équation d'état suivante.

$$(\tilde{S}) \begin{cases} \dot{\tilde{z}}(t) = F\tilde{z}(t) + Bu(t) & 0 < t < T \\ \tilde{z}(0) = (z_0 + f) \in \mathcal{D}(F) \end{cases} \quad (5.2.1)$$

avec $\tilde{z} \in L^p(0, T; Z)$, $p > 1$, $u \in L^2(0, T; \mathcal{U})$, $f \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; Z)$ et $F : Z \longrightarrow Z$ un opérateur non linéaire satisfaisant les hypothèses suivantes :

1. $F(0) = 0$
2. F est continûment différentiable au point f , où $f \in \mathcal{D}(F)$.

Les espaces des états Z , des contrôles $\mathcal{U}$ et des perturbations $\mathcal{F}$, sont supposés des espaces de Hilbert séparables. On suppose de plus que $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}(F)$ et $Z = Z^*$.

Soit χ_σ la restriction à σ , et χ_σ^* l'opérateur adjoint de χ_σ défini par

$$\chi_\sigma^* : Z_\sigma \longrightarrow Z \text{ avec } (\chi_\sigma^* z)(x) = \begin{cases} z(x) & \text{sur } \sigma \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (5.2.2)$$

où Z_σ est un sous espace de Z , et qui désigne l'ensemble des états restreints à σ :

$$Z_\sigma = \{\chi_\sigma z = z|_\sigma : z \in Z\} \quad (5.2.3)$$

Le système (5.2.1) est supposé augmenté d'une fonction de mesure :

$$(\tilde{E}) \quad \tilde{y}^\sigma(t) = C\chi_\sigma^*\chi_\sigma\tilde{z}(t) \quad (5.2.4)$$

avec $\tilde{y}^\sigma \in L^p(0, T; Y)$, $C \in \mathcal{L}(Z; Y)$, Y est l'espace d'observation.

Remarque 5.1

1. Si $\bar{\omega} \cap \bar{\sigma} \neq \emptyset$ alors σ est atteinte par les effets de f , et dans ce cas on ne peut plus parler de sa protection mais plutôt de sa remédiabilité.
2. La dynamique F est à vitesse de propagation v finie. Sinon, il se peut que l'effet de la perturbation atteigne σ dès le premier instant (point 1. ci-dessus).
3. Si on note $\Gamma_v = \{x \in \Omega : v \cdot n(x) < 0\}$ où n est la normale extérieure à $\Gamma = \partial\Omega$, alors la condition aux limites associée au système (5.2.1) est donnée par

$$z|_{\Gamma_v}(t) = 0, \quad t \in I. \quad (5.2.5)$$

Cela veut dire que cette condition au limite est de nature absorbante sur Γ_v .

4. L'actionneur B et le capteur C sont supposés bornés (i.e. de types zones). Dans le cas ponctuel, ces deux opérateurs pourraient avoir leurs images respectivement dans des espaces Z_1 et Y_1 tels que $Z \subset Z_1 \subset Z^*$ et $Y \subset Y_1 \subset Y^*$.

A titre d'exemple, nous illustrons ces remarques par la figure suivante.

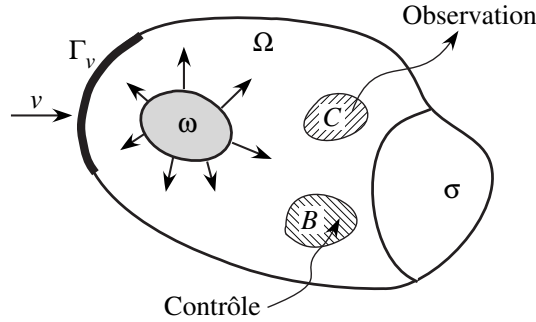


FIG. 5.2.2 – Localisation de ω , σ , l'actionneur (B), capteur (C) et Γ_v

Supposons que le système $(\tilde{S})$ admet une solution unique qu'on notera par $\tilde{z}_{f,u}$.
Considérons les notations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{z}_{f,u} & \text{la solution de } (\tilde{S}) \\ \tilde{z}_{f,0} & \text{la solution de } (\tilde{S}) \text{ lorsque } f \neq 0 \text{ et } u = 0 \\ \tilde{z}_{0,0} & \text{la solution de } (\tilde{S}) \text{ lorsque } f = 0 \text{ et } u = 0 \\ \tilde{y}_{f,u}^\sigma & \text{la sortie } (\tilde{E}) \\ \tilde{y}_{f,0}^\sigma & \text{la sortie } (\tilde{E}) \text{ lorsque } f \neq 0 \text{ et } u = 0 \\ \tilde{y}_{0,0}^\sigma & \text{la sortie } (\tilde{E}) \text{ lorsque } f = 0 \text{ et } u = 0 \end{array} \right. \quad (5.2.6)$$

puis la propriété $\mathcal{P}$ définie par

$$\mathcal{P}\tilde{z}_{f,0}(x,t) \Leftrightarrow \tilde{z}_{f,0}(x,t) \neq \tilde{z}_{0,0}(x,t) \quad (5.2.7)$$

et aussi les sous ensembles de Ω suivants

$$w_{f,0,t} = \{x \in \Omega : \mathcal{P}\tilde{z}_{f,0}(x,t)\} \quad (5.2.8)$$

$w_{f,0,t}$ désigne l'ensemble des points x de Ω , où l'état du système perturbé $z_{f,0}$ satisfait la propriété $\mathcal{P}$ à l'instant t (c.à.d. les points où l'état $z_{f,0}$ est affecté par l'effet de f).
De ce fait, nous rappelons

A partir de la définition d'une perturbation étalable, et d'une zone vulnérable (chapitre 2, définition 2.8), et avec les notations (5.2.6), nous considérons le problème du contrôle protecteur suivant.

$$(\tilde{P}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in L^2(0,T;\mathcal{U}) : \\ \tilde{y}_{f,u}^\sigma(t) = \tilde{y}_{0,0}^\sigma(t) \end{array} \right.$$

Dans ce cas, on dit que u est un contrôle f - σ -protecteur.

Le problème $(\tilde{P})$ tient compte de la zone σ , de l'évolution normale du système (cas autonome $\tilde{y}_{0,0}^\sigma$), de son évolution lorsqu'il est perturbé contrôlé ($\tilde{y}_{f,u}^\sigma$) et aussi de la condition $\forall t \in [0,T]$. Cela veut dire qu'à partir de l'instant $t = 0$ où le système subit une perturbation f , il faut *garder* le système dans son évolution normale sur la zone σ pendant tout l'intervalle de temps $[0,T]$ par l'intermédiaire d'un contrôle adéquat u , en recueillant des observations à l'aide du capteur C .

3 Transformation du problème ($\tilde{P}$)

Comme pour la remédiabilité des systèmes non linéaires (chapitre 4), nous allons réécrire le problème ($\tilde{P}$) d'une manière explicite en termes de contrôle u et de perturbation f et aussi des nonlinéarités, pour qu'on puisse s'inspirer des résultats développés dans le cas d'un système linéaire (chapitre 3). Pour cela, commençons par transformer le système (5.2.1) en un système (S) équivalent autour de f .

En effet, soit $\tilde{z}$ la solution du système (5.2.1). Avec le changement de variable d'état

$$z(t) = \tilde{z}(t) - f \quad (5.3.1)$$

le système devient :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = F(z(t) + f) + Bu(t) & 0 < t < T \\ z(0) = z_0 \end{cases} \quad (5.3.2)$$

D'après l'hypothèse 2. sur F , nous avons, en linéarisant autour de f ,

$$F(z(t) + f) = Ff + F'(f)z(t) + N_f z(t) \quad (5.3.3)$$

Ce qui nous permet d'écrire le système semi linéaire sous la forme :

$$(S) \begin{cases} \dot{z}(t) = A_f z(t) + N_f z(t) + Ff + Bu(t) & 0 < t < T \\ z(0) = z_0 \end{cases} \quad (5.3.4)$$

avec $A_f = F'(f) \in \mathcal{L}(Z)$ et $N_f : Z \longrightarrow Z$ désigne le terme des nonlinéarités.

D'autre part, la fonction de mesure ($\tilde{E}$) s'exprime au voisinage de f par :

$$\tilde{y}^\sigma(t) = C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{z}(t) = C\chi_\sigma^* \chi_\sigma (z(t) + f)$$

Si on pose $y^\sigma(t) = \tilde{y}^\sigma(t) - C\chi_\sigma^* \chi_\sigma f$, alors grâce à la linéarité de $C\chi_\sigma^* \chi_\sigma$, la fonction de mesure transformée sera :

$$(E) \quad y^\sigma(t) = C\chi_\sigma^* \chi_\sigma z(t)$$

Donc au voisinage de f , on considère le problème suivant :

$$(P) \begin{cases} \text{Trouver } u \in L^2(0, T; \mathcal{U}) : \\ y_{f, u}^\sigma(t) = y_{0, 0}^\sigma(t) - C\chi_\sigma^* \chi_\sigma f \end{cases}$$

Il est clair que les deux problèmes $(\tilde{P})$ et (P) sont équivalents au voisinage de f . Pour pouvoir traiter le problème (P) , nous allons le réécrire sous une forme explicite pour faire apparaître les termes de contrôle en u , de perturbation en f , et aussi ceux des nonlinéarités.

Si l'opérateur linéaire A_f est fermé, à domaine dense dans Z et engendre un semi-groupe fortement continu $(S_f(t))_{t \geq 0}$, nous avons montré au chapitre 4, théorème 4.1, que si les hypothèses **(H1)** – **(H5)** sont vérifiées alors le système (S) admet une solution unique $z_{f,u}$ donnée par

$$z_{f,u}(t) = S_f(t)z_0 + \int_0^t S_f(t-s)N_f z_{f,u}(s)ds + \int_0^t S_f(t-s)Ff ds + \int_0^t S_f(t-s)Bu(s)ds \quad (5.3.5)$$

Qu'on peut écrire aussi sous la forme

$$z_{f,u}(t) = S_f(t)z_0 + \hat{H}_{f,t} z_{f,u} + \tilde{H}_{f,t} f + H_{f,t} u \quad (5.3.6)$$

où les trois opérateurs $\hat{H}_{f,t}$, $\tilde{H}_{f,t}$ et $H_{f,t}$, sont définis respectivement par

$$\hat{H}_{f,t} : z \in L^p(0, T; Z) \longmapsto \hat{H}_{f,t} z = \int_0^t S_f(t-s)N_f z(s)ds \in Z \quad (5.3.7)$$

$$\tilde{H}_{f,t} : f \in \mathcal{F} \longmapsto \tilde{H}_{f,t} f = \int_0^t S_f(t-s)Ff ds \in Z \quad (5.3.8)$$

$$H_{f,t} : u \in L^2(0, T; \mathcal{U}) \longmapsto H_{f,t} u = \int_0^t S_f(t-s)Bu(s)ds \in Z \quad (5.3.9)$$

Alors la fonction de mesure (E) sera :

$$(E) \quad y_{f,u}^\sigma(t) = C\chi_\sigma^* \chi_\sigma S_f(t)z_0 + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \hat{H}_{f,t} z_{f,u} + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{H}_{f,t} f + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma H_{f,t} u$$

Dans le cas où $f = 0$ et $u = 0$, nous avons :

$$z_{0,0}(t) = S_0(t)z_0 + \hat{H}_{0,t} z_{0,0} \quad (5.3.10)$$

Donc la fonction de mesure associée est :

$$y_{0,0}^\sigma(t) = C\chi_\sigma^* \chi_\sigma S_0(t)z_0 + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \hat{H}_{0,t} z_{0,0} \quad (5.3.11)$$

Alors le problème (P) se réécrit comme suit :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in L^2(0, T; \mathcal{U}) : \\ C\chi_\sigma^* \chi_\sigma H_{f, t} u + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \widehat{H}_{f, t} z_{f, u} + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \widetilde{H}_{f, t} f + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma f \\ + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma (S_f(t) - S_0(t)) z_0 - C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \widehat{H}_{0, t} z_{0, 0} = 0 \end{array} \right.$$

Remarquons que, même si le problème (P) fait intervenir des termes de contrôles en u , de perturbations en f et aussi des états en $z_{f, u}$, sa résolution reste encore délicate vue la présence de la condition $\forall t \in [0, T]$. Pour surmonter cette difficulté, nous allons introduire un système à retard associé au système (5.3.4) pour ramener la résolution du problème (P) à celle d'un problème de type remédiabilité où la condition $\forall t \in [0, T]$ n'intervient pas (Il y aura juste une dépendance en T), en procédant comme suit.

1. Introduction d'un système à retard convenable à partir du système (S).
2. Formulation du problème de la remédiabilité pour le système à retard résultant.
3. Résolution du problème obtenu.

En détaillant ces étapes, on montre, et c'est en fait l'objectif de notre travail, que le contrôle provenant de l'étape 3. n'est autre que le contrôle protecteur solution du problème (P).

4 Contrôle protecteur

4- a Caractérisation par remédiabilité

Dans cette section, nous allons introduire un système non linéaire à retard, dont l'état est défini en fonction de celui du système (5.3.4), et ceci en travaillant sur des espaces fonctionnels convenablement choisis. De ce fait, considérons l'espace de Banach $L^p(-T, 0; Z)$ sur lequel on définit, pour tout $t \in [0, T]$, le semi groupe fortement continu $(R(t))_{t \geq 0}$

$$(R(t)b)(r) = \begin{cases} b(t+r) & r \in [-T, -t] \\ 0 & r \in]-t, 0] \end{cases} \quad (5.4.1)$$

L'opérateur $D = \frac{d}{ds}$ est le générateur infinitésimal de $(R(t))_{t \geq 0}$ sur $L^p(-T, 0; Z)$. Définissons aussi l'application $G \in \mathcal{L}(Z, L^p(-T, 0; Z))$ comme suit

$$(Ga(t))(r) = a(t) \quad \forall a(t) \in Z, \quad \forall r \in [-T; 0]. \quad (5.4.2)$$

Puis considérons l'opérateur Λ défini par

$$\begin{aligned} \Lambda : Z &\longrightarrow L^p(-T, 0; Z) \\ z_{f,u}(t) &\longmapsto \Lambda z_{f,u}(t) = \bar{z}_{f,u}(t) = R(t)(Gz_0) - D \int_0^t R(t-s)Gz_{f,u}(s)ds \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

avec $z_{f,u}$ désigne la solution du système (5.3.4).

Par conséquent, la fonction de mesure associée est donnée sur $L^p(-T, 0; Y)$ par :

$$(\bar{E}) : \quad \bar{y}_{f,u}^\sigma(t) = C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \bar{z}_{f,u}(t) \quad (5.4.4)$$

Signalons d'abord un résultat qui sera utile dans la suite [68].

Lemme 5.1

$$(\bar{y}_{f,u}^\sigma(T))(r) = y_{f,u}^\sigma(T+r) \quad \forall r \in [-T; 0]. \quad (5.4.5)$$

La preuve est basée sur les expressions (5.4.1), (5.4.2), (5.4.3) et (5.4.4). ■

D'autre part, la manière avec laquelle le contrôle u et la perturbation f apparaissent dans (5.4.3) nous conduit à introduire une nouvelle équation d'état sur l'espace produit $\bar{W} = Z \times L^p(-T, 0; Z)$ de la façon suivante :

$$\bar{w}_{f,u}(t) = U_f(t)\bar{w}_0 + \int_0^t U_f(t-s)\mathcal{N}_f\bar{w}_{f,u}(s)ds + \int_0^t U_f(t-s)\mathcal{G}f ds + \int_0^t U_f(t-s)\mathcal{B}u(s)ds \quad (5.4.6)$$

avec

$$\bar{w}_{f,u} = (z_{f,u}, \bar{z}_{f,u})^{tr}, \quad \bar{w}_0 = (z_0, Gz_0)^{tr}, \quad \mathcal{N}_f = (N_f, 0)^{tr}, \quad \mathcal{G} = (F, 0)^{tr}, \quad \mathcal{B} = (B, 0)^{tr}$$

et $(U_f(t))_{t \geq 0}$ est le semi groupe fortement continu sur $\bar{W}$ qui s'exprime par

$$U_f(t) = \begin{pmatrix} U_{0,f}(t) & 0 \\ U_{1,f}(t) & U_{2,f}(t) \end{pmatrix} \quad (5.4.7)$$

où

$$U_{0,f}(t) = S_f(t), \quad U_{2,f}(t) = R(t), \quad U_{1,f}(t) = -D \int_0^t R(t-s)GS_f(s)ds \quad (5.4.8)$$

Si on désigne par $\bar{A}_f$ le générateur infinitesimal du semi groupe $(U_f(t))_{t \geq 0}$ sur l'espace $\bar{W}$, alors le système associé à l'équation (5.4.6) est donné par :

$$\begin{cases} \dot{\bar{w}}_{f,u}(t) = \bar{A}_f \bar{w}_{f,u}(t) + \mathcal{N}_f \bar{w}_{f,u}(t) + \mathcal{G}f + \mathcal{B}u(t) & 0 < t < T \\ \bar{w}(0) = \bar{w}_0 \end{cases} \quad (5.4.9)$$

qui est augmenté de la fonction de mesure :

$$(\bar{\bar{E}}) \quad \bar{\bar{y}}_{f,u}^\sigma(t) = \bar{\bar{C}} \chi_\sigma^* \chi_\sigma \bar{w}_{f,u}(t) \quad \text{avec} \quad \bar{\bar{C}} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad (5.4.10)$$

Remarquons que :

$$\bar{\bar{y}}_{f,u}^\sigma(t) = (y_{f,u}^\sigma(t), \bar{y}_{f,u}^\sigma(t))^{tr} \in Y \times L^p(-T, 0; Y) \quad (5.4.11)$$

Concernant (5.4.9), il s'agit d'une équation d'état faisant intervenir un système à retard. Pour cela définissons (formellement) à partir de la formule (5.4.3), l'opérateur suivant

$$\Pi : \bar{z}_{f,u}(t) \in L^p(-T, 0; Z) \longmapsto z_{f,u}(t) \in Z \quad (5.4.12)$$

Alors ceci nous permettra d'introduire des nouveaux opérateurs relativement à l'état $\bar{z}_{f,u}(T)$, à la perturbation f et au contrôle u , soit donc

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_{f,T} : L^p(-T, 0; Z) &\longrightarrow L^p(-T, 0; Z) \\ \bar{z}_{f,u}(T) &\longmapsto p_2 \int_0^T U_f(T-s) \mathcal{N}_f \Pi \bar{z}_{f,u}(s) ds \\ \tilde{\mathcal{H}}_{f,T} : \mathcal{F} &\longrightarrow L^p(-T, 0; Z) \\ f &\longmapsto p_2 \int_0^T U_f(T-s) \mathcal{G} f ds \\ \mathcal{H}_{f,T} : L^2(0, T; \mathcal{U}) &\longrightarrow L^p(-T, 0; Z) \\ u &\longmapsto p_2 \int_0^T U_f(T-s) \mathcal{B} u(s) ds \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} p_2 : \quad \bar{W} &\longrightarrow L^p(-T, 0; Z) \\ (z_{f,u}(t), \bar{z}_{f,u}(t)) &\longmapsto \bar{z}_{f,u}(t) \end{aligned} \quad (5.4.13)$$

En utilisant les expressions (5.4.6), (5.4.7) et (5.4.13) on trouve que :

$$\widehat{\mathcal{H}}_{f,T}\bar{z}_{f,u}(T) = \int_0^T U_{1,f}(T-s)N_f\Pi\bar{z}_{f,u}(s)ds \quad (5.4.14)$$

$$\widetilde{\mathcal{H}}_{f,T}f = \int_0^T U_{1,f}(T-s)Ff ds \quad (5.4.15)$$

$$\mathcal{H}_{f,T}u = \int_0^T U_{1,f}(T-s)Bu(s)ds \quad (5.4.16)$$

avec $(U_{1,f}(t))_{t \geq 0}$ est donné par (5.4.8).

Remarque 5.2

La détermination de l'opérateur Π donné en (5.4.12) n'est pas nécessaire. Il est introduit juste pour avoir la dépendance explicitée en (5.4.14). On reviendra sur ce point dans l'avant dernière section de ce travail.

Nous avons défini ci-dessus trois opérateurs qui dépendent respectivement de $\bar{z}_{f,u}(T)$, f , u et de l'instant final T . Ceci nous permettra de considérer le problème suivant :

$$(\overline{P}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in L^2(0, T; \mathcal{U}) : \\ C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \mathcal{H}_{f,T}u + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \widehat{\mathcal{H}}_{f,T}\bar{z}_{f,u}(T) + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \widetilde{\mathcal{H}}_{f,T}f + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma GS_f(T)z_0 \\ + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma D \int_0^T R(T-s)Gf ds - C\chi_\sigma^* \chi_\sigma GS_0(T)z_0 - C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \widehat{\mathcal{H}}_{0,T}\bar{z}_{0,0} = 0 \end{array} \right.$$

A partir de cette formulation et de la définition ?? d'un contrôle f - σ -protecteur d'une zone σ supposée f -vulnérable, nous avons la caractérisation suivante

Théorème 5.1

Si σ est f -vulnérable, alors u est un contrôle f - σ -protecteur si et seulement si u est une solution de $(\overline{P})$.

Preuve :

Il s'agit de montrer que les problèmes $(\overline{P})$ et (P) sont équivalents. En effet, soit $u \in L^2(0, T; \mathcal{U})$ et $f \in \mathcal{F}$ fixée. A partir de (5.4.3) nous avons

$$\bar{z}_{f,u}(T) = R(T)(Gz_0) - D \int_0^T R(T-s)Gz_{f,u}(s)ds$$

En remplaçant $z_{f,u}$ par son expression (5.3.5), on obtient

$$\begin{aligned}\bar{z}_{f,u}(T) = & R(T)(Gz_0) - D \int_0^T R(T-s)G \left[S_f(s)z_0 + \int_0^s S_f(s-q)N_f z_{f,u}(q)dq \right. \\ & \left. + \int_0^s S_f(s-q)Ff \, dq + \int_0^s S_f(s-q)Bu(s)dq \right] ds\end{aligned}$$

Et à partir des expressions du semi groupe $(U_{1,f}(t))_{t \geq 0}$, de l'opérateur Π et des trois nouveaux opérateurs de type $\mathcal{H}_{f,T}$, données respectivement par (5.4.8), (5.4.12), (5.4.14), (5.4.15) et (5.4.16), on aura

$$\bar{z}_{f,u}(T) = GS_f(T)z_0 + \hat{\mathcal{H}}_{f,T}\bar{z}_{f,u}(T) + \tilde{\mathcal{H}}_{f,T}f + \mathcal{H}_{f,T}u$$

Donc la sortie $(\bar{E})$ donnée en (5.4.4) devient

$$(\bar{E}) : \quad \bar{y}_{f,u}^\sigma(T) = C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \left(GS_f(T)z_0 + \hat{\mathcal{H}}_{f,T}\bar{z}_{f,u}(T) + \tilde{\mathcal{H}}_{f,T}f + \mathcal{H}_{f,T}u \right)$$

Et dans le cas ou $f = 0$ et $u = 0$, nous avons

$$\bar{y}_{0,0}^\sigma(T) = C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \left(GS_0(T)z_0 + \hat{\mathcal{H}}_{0,T}\bar{z}_{0,0}(T) \right)$$

Donc le contrôle u est une solution de $(\bar{P})$ si et seulement si u vérifie

$$\begin{aligned}& C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \mathcal{H}_{f,T}u + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \hat{\mathcal{H}}_{f,T}\bar{z}_{f,u}(T) + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{\mathcal{H}}_{f,T}f + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma GS_f(T)z_0 \\ & + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma D \int_0^T R(T-s)Gf ds - C\chi_\sigma^* \chi_\sigma GS_0(T)z_0 - C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \hat{\mathcal{H}}_{0,T}\bar{z}_{0,0}(T) = 0\end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à

$$\bar{y}_{f,u}^\sigma(T) = \bar{y}_{0,0}^\sigma(T) - C\chi_\sigma^* \chi_\sigma D \int_0^T R(T-s)Gf ds$$

Ceci est aussi équivalent à dire que

$$(\bar{y}_{f,u}^\sigma(T))(r) = (\bar{y}_{0,0}^\sigma(T))(r) - \left(C\chi_\sigma^* \chi_\sigma D \int_0^T R(T-s)Gf ds \right)(r), \quad \forall r \in [-T; 0].$$

D'une part, nous avons d'après (5.4.1) et (5.4.2)

$$\left(C\chi_\sigma^* \chi_\sigma D \int_0^T R(T-s)Gf ds \right)(r) = C\chi_\sigma^* \chi_\sigma f, \quad \forall r \in [-T; 0].$$

D'autre part, nous obtenons d'après le lemme 5.1

$$(\bar{y}_{f,u}^\sigma(T))(r) = y_{0,0}^\sigma(T+r) \quad \forall r \in [-T; 0].$$

Donc u est une solution de $(\bar{P})$ si et seulement si

$$y_{f,u}^\sigma(T+r) = y_{0,0}^\sigma(T+r) - C\chi_\sigma^* \chi_\sigma f \quad \forall r \in [-T; 0].$$

En posant $t = T + r \in [0, T]$ on aura bien

$$y_{f,u}^\sigma(t) = y_{0,0}^\sigma(t) - C\chi_\sigma^* \chi_\sigma f \quad \forall t \in [0, T].$$

Ceci est équivalent au fait que u est une solution du problème (P) . ■

L'objet du théorème 5.1 est de ramener la résolution du problème du contrôle protecteur (P) défini pour tout instant $t \in I$ à celle du problème de la remédiabilité $(\bar{P})$ où on considère l'instant final T . De ce fait, on s'intéressera dans la suite à la résolution de $(\bar{P})$ en se basant sur les résultats développés dans le chapitre 4, sauf que dans ce cas, les opérateurs et le cadre fonctionnel sont associés au système à retard.

4- b Détermination du contrôle protecteur

Par utilisation des techniques du pseudo-inverse, le problème de la détermination du contrôle souhaité peut être ramener à celui d'un point fixe d'une certaine application bien précisée. Ainsi, et sous certaines hypothèses, une suite de contrôles sera générée à l'aide d'un algorithme assurant sa convergence vers la solution désirée.

En effet, le contrôle u est une solution de $(\bar{P})$ s'il vérifie

$$\begin{aligned} & C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \mathcal{H}_{f, T} u + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \hat{\mathcal{H}}_{f, T\bar{z}_{f, u}}(T) + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{\mathcal{H}}_{f, T} f + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma G S_f(T) z_0 \\ & + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma D \int_0^T R(T-s) G f ds - C\chi_\sigma^* \chi_\sigma G S_0(T) z_0 - C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \hat{\mathcal{H}}_{0, T\bar{z}_{0, 0}}(T) = 0 \end{aligned}$$

Considérons le sous espace $V = \text{Im}(C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \mathcal{H}_{f, T})$ de $L^p(-T, 0, Y)$ et Posons :

$$\begin{aligned} \bar{y}_f^\sigma(T) &= C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \hat{\mathcal{H}}_{0, T\bar{z}_{0, 0}}(T) + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma G S_0(T) z_0 - C\chi_\sigma^* \chi_\sigma G S_f(T) z_0 \\ &\quad - C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{\mathcal{H}}_{f, T} f - C\chi_\sigma^* \chi_\sigma D \int_0^T R(T-s) G f ds \end{aligned} \tag{5.4.17}$$

Alors on cherche un contrôle u tel que

$$C\chi_\sigma^*\chi_\sigma\mathcal{H}_{f,T}u + C\chi_\sigma^*\chi_\sigma\widehat{\mathcal{H}}_{f,T}\bar{z}_{f,u}(T) = \bar{y}_f^\sigma(T)$$

En utilisant (5.4.14), on aura

$$C\chi_\sigma^*\chi_\sigma\mathcal{H}_{f,T}u = \bar{y}_f^\sigma(T) - \int_0^T C\chi_\sigma^*\chi_\sigma U_{1,f}(T-s)N\Pi\bar{z}_{f,u}(s)ds$$

Comme $\Pi\bar{z}_{f,u}(t) = h_1u(t)$ (d'après (5.4.12) et le point **(b)** du théorème 4.1), alors on cherche un contrôle $u \in B(0, m)$ tel que

$$C\chi_\sigma^*\chi_\sigma\mathcal{H}_{f,T}u = \bar{y}_f^\sigma(T) - \int_0^T C\chi_\sigma^*\chi_\sigma U_{1,f}(T-s)N_f h_1u(s)ds$$

Supposons que $\bar{y}_f^\sigma(T) \in V$. Nous allons d'abord définir une topologie sur l'espace V . En effet, dans le cas où le terme non linéaire est nul $N_f = 0$, l'ensemble

$$\{u : C\chi_\sigma^*\chi_\sigma\mathcal{H}_{f,T}u = \bar{y}_f^\sigma(T)\}$$

est une partie non vide, fermée et convexe de $L^2(0, T; \mathcal{U})$ qui est un espace de Banach reflexif et strictement convexe, il existe donc un unique contrôle u^* de norme minimum vérifiant

$$C\chi_\sigma^*\chi_\sigma\mathcal{H}_{f,T}u^* = \bar{y}_f^\sigma(T) \quad (5.4.18)$$

Cela nous permettra de poser $u^* = L\bar{y}_f^\sigma(T)$. Ainsi, l'opérateur linéaire L appliquant V dans $L^2(0, T; \mathcal{U})$ est le pseudo-inverse de $C\chi_\sigma^*\chi_\sigma\mathcal{H}_{f,T}$. Il est donné par :

$$L = \mathcal{H}_{f,T}^* \chi_\sigma^* \chi_\sigma C^* [C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \mathcal{H}_{f,T} \mathcal{H}_{f,T}^* \chi_\sigma^* \chi_\sigma C^*]^{-1} \quad (5.4.19)$$

Alors on peut munir l'espace V de la norme :

$$\|(\cdot)\|_V = \|L(\cdot)\|_{L^2(0,T;\mathcal{U})} \quad (5.4.20)$$

C'est sur l'espace de Banach $(V, \|\cdot\|_V)$ que nous allons étudier le problème $(\bar{P})$.

D'autre part nous avons

$$\int_0^T C\chi_\sigma^*\chi_\sigma U_{1,f}(T-s)N_f h_1u(s)ds \in V$$

car $C\chi_\sigma^*\chi_\sigma U_{1,f}(t) \in \mathcal{L}(Z, V)$. Donc nous cherchons un contrôle $u \in B(0, m)$ tel que :

$$u = L \left(\bar{y}_f^\sigma(T) - \int_0^T C\chi_\sigma^*\chi_\sigma U_{1,f}(T-s)N_f h_1u(s)ds \right) \quad (5.4.21)$$

pour $y_f^\sigma \in V$ considérons l'application $\varphi(y_f^\sigma, \cdot)$ définie par

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{y}_f^\sigma(T), \cdot) : L^2(0, T; \mathcal{U}) &\longrightarrow L^2(0, T; \mathcal{U}) \\ u &\longmapsto L \left(\bar{y}_f^\sigma(T) - \int_0^T C \chi_\sigma^* \chi_\sigma U_{1,f}(T-s) N_f h_1 u(s) ds \right) \end{aligned} \quad (5.4.22)$$

Alors montrer que (P) admet une solution est équivalent, sous certaines hypothèses, à ce que l'application $\varphi(y_f^\sigma, \cdot)$ admet un unique point fixe u^* dans la boule $B(0, m)$ de $L^2(0, T; \mathcal{U})$. Nous avons alors le résultat suivant

Théorème 5.2

Avec les mêmes hypothèses du théorème 4.2 où l'hypothèse **(H6)** est remplacée par

$$\overline{\mathbf{(H6)}} \exists g_3 \in L^q(0, T) : \|C \chi_\sigma^* \chi_\sigma U_{1,f}(t)\|_{\mathcal{L}(Z, V)} \leq g_3(t), \forall t \in I$$

Alors il existe $d, \rho = \rho(d) > 0$ tels que pour tout $\bar{y}_f^\sigma(T) \in B(0, \rho)$, l'application $\varphi(\bar{y}_f^\sigma(T), \cdot)$ admet un point fixe u^* dans $B(0, m)$.

Preuve : Analogue à celle du théorème 4.2. ■

4- c Stratégie d'implémentation du contrôle protecteur

A partir de ce qui précède nous allons donner un algorithme permettant de générer une suite de contrôles qui converge vers la solution u^* du problème $(\bar{P})$. En se basant sur le théorème 5.2, nous avons la proposition suivante.

Proposition 5.1

Si les hypothèses du théorème 5.2 sont vérifiées et si $\bar{y}_f^\sigma(T) \in V$ tel que $\|\bar{y}_f^\sigma(T)\|_V \leq \rho$, alors la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \varphi(\bar{y}_f^\sigma(T), u_n) = L \left(\bar{y}_f^\sigma(T) - \int_0^T C \chi_\sigma^* \chi_\sigma U_{1,f}(T-s) N_f h_1 u_n(s) ds \right) \end{cases} \quad (5.4.23)$$

converge vers la solution u^* de $(\bar{P})$ dans $L^2(0, T, \mathcal{U})$ et vérifie :

$$\|u_{n+1} - u_n\|_{L^2(0, T; \mathcal{U})} \leq c_3^n \|u_1\|.$$

La démonstration de cette proposition, découle immédiatement du théorème 5.2 et des propriétés du point fixe. ■

Donc si on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\bar{y}_{f, u_n}^{\sigma, n}(T) = C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \bar{z}_{f, u_n}^n(T) \quad \text{et} \quad \bar{r}_{n+1} = \bar{y}_f^\sigma(T) - C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \hat{\mathcal{H}}_{f, T} \bar{z}_{f, u_n}^n(T), \text{ alors}$$

$$\bar{y}_{f, u_n}^{\sigma, n}(T) = \bar{y}_f^\sigma(T) + C\chi_\sigma^* \chi_\sigma \left[GS_f(T)z_0 + \hat{\mathcal{H}}_{f, T} \bar{z}_{f, u_n}^n(T) + \tilde{\mathcal{H}}_{f, T} f + \mathcal{H}_{f, T} u_n \right] - \bar{y}_f^\sigma(T)$$

En utilisant l'expression explicite de $\bar{y}_f^\sigma(T)$ donnée par (5.4.17) on aura

$$\bar{y}_{f, u_n}^{\sigma, n}(T) = \bar{y}_{0,0}^\sigma(T) - C\chi_\sigma^* \chi_\sigma D \int_0^T R(T-s)Gf ds + \bar{r}_n - \bar{r}_{n+1}$$

Donc :

$$\bar{r}_{n+1} = \bar{r}_n + \bar{y}_{0,0}^\sigma(T) - \bar{y}_{f, u_n}^{\sigma, n}(T) - C\chi_\sigma^* \chi_\sigma D \int_0^T R(T-s)Gf ds \quad (5.4.24)$$

D'autre part, il est facile de voir que :

$$\|\bar{y}_{0,0}^\sigma(T) - \bar{y}_{f, u_n}^{\sigma, n}(T) - C\chi_\sigma^* \chi_\sigma D \int_0^T R(T-s)Gf ds\|_V \leq c_3^n \|u_1\| \quad (5.4.25)$$

D'où l'algorithme suivant :

Algorithme 5.1

1. *Données* : $\Omega, \sigma, T, A, N, z_0, f, B, C, \varepsilon$.
2. *Cas autonome non perturbé* : déterminer $\bar{y}_{0,0}^\sigma(T)$
3. *Cas perturbé non contrôlé* : déterminer $\bar{y}_{f, 0}^\sigma(T)$
4. Poser $\bar{r}_0 = 0$ et considérer $\bar{r}_1$: formule (5.4.24) avec $n = 0$
5. Déterminer : $u_n = L\bar{r}_n$ (L est donné par (5.4.19)).
6. *Cas perturbé contrôlé* : déterminer $\bar{y}_{f, u_n}^{\sigma, n}(T)$
7. Si $\|u_n - u_{n-1}\|_V \leq \varepsilon$ stop, sinon considérer $\bar{r}_{n+1}$ ((5.4.24)) et aller en 5.

En partant de l'observation associée au système autonome non perturbé, le résidu $\bar{r}_0 = 0$ représente l'écart entre cette observation et elle même. Lorsque le système subit une perturbation, $\bar{r}_1$ mesure la différence entre l'observation associée et celle du cas autonome. Par conséquent, le rôle du contrôle u_1 est de réduire la quantité $\bar{r}_1$ jusqu'à ce que la condition donnée au point 7. de l'algorithme 5.1 est satisfaite,

sinon, on recommence la procédure en considérant $\bar{r}_{n+1}$ pour $n \geq 1$. Cela donc nous permet de calculer une solution u du problème $(\bar{P})$. Par conséquent, en injectant cette solution dans (5.3.5), nous pouvons déterminer directement l'état $z_{f,u}$ (et donc la mesure associée $y_{f,u}^\sigma$) du système sans retard (5.3.4). De plus, l'état $\tilde{z}_{f,u}$ du système de départ (5.2.1) sera obtenu grace au changement de variable d'état effectué en (5.3.1).

Noter que c'est là l'objet de la remarque 5.2, où on a pu faire un retour au système de départ (sans retard), sans passer par le calcul de l'opérateur Π donné en (5.4.12).

4- d Remarques

A partir de l'algorithme 5.1, on constate que la détermination du contrôle protecteur u solution du problème $(\tilde{P})$ est basée essentiellement sur le calcul du pseudo inverse L donné par (5.4.19). Un tel calcul n'est pas simple à effectuer vu la dépendance de l'opérateur L des différents opérateurs liés au système à retard gouverné par l'équation d'état (5.4.3). Ce que nous proposons c'est d'exploiter le concept de la remédiabilité régionale autrement. En effet, pour pouvoir protéger la zone σ , nous allons remédier aux effets de la perturbation f sur une autre zone D et au bout d'un certain temps τ convenablement choisis et ceci avant que σ soit atteinte par la perturbation étalable f . Cela peut être illustré en considérant les figures suivantes : cas monodimensionnel (figure 5.4.1) et multidimensionnel (figure 5.4.2).

Dans le premier cas (figure 5.4.1), on constate que le support de la perturbation peut être positionné à gauche (ω_1) ou à droite (ω_2) par rapport à σ , ainsi, lorsque celle-ci est étalable et que la zone σ est vulnérable, le premier instant t_1 où l'effet de cette perturbation commence à atteindre la zone fixée σ peut être calculé. Par conséquent la protection de σ peut se faire en remédiant sur une zone D_1 et/ou D_2 localisée sur la trajectoire de la perturbation étalable et cela avant l'instant t_1 . Généralement, les zones D_1 et/ou D_2 sont déjà atteintes par l'effet de la perturbation étalable qui démarre de ω_1 et/ou ω_2 , mais la zone σ ne l'est pas, ce qui justifie la combinaison des deux principes de la remédiabilité et du contrôle protecteur et en plus comment cela est lié à la notion du retard.

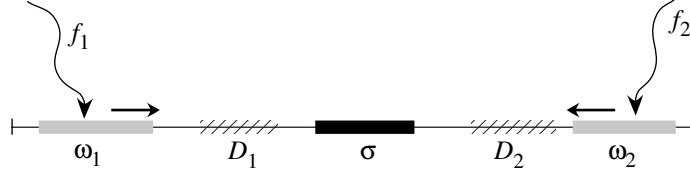


FIG. 5.4.1 – Localisation spatiale des perturbations (ω_1 et ω_2) par rapport à σ et choix des zones D_1 et D_2 pour protéger σ .

Concernant le deuxième cas (figure 5.4.2) c'est une généralisation du premier, où nous avons essayé d'illustrer les différentes situations de la localisation des zones D_k selon la nature des phénomènes étalables ; à savoir, on peut même considérer le cas où $D = \cup_k D_k$ tel que $\sigma \subset D$.

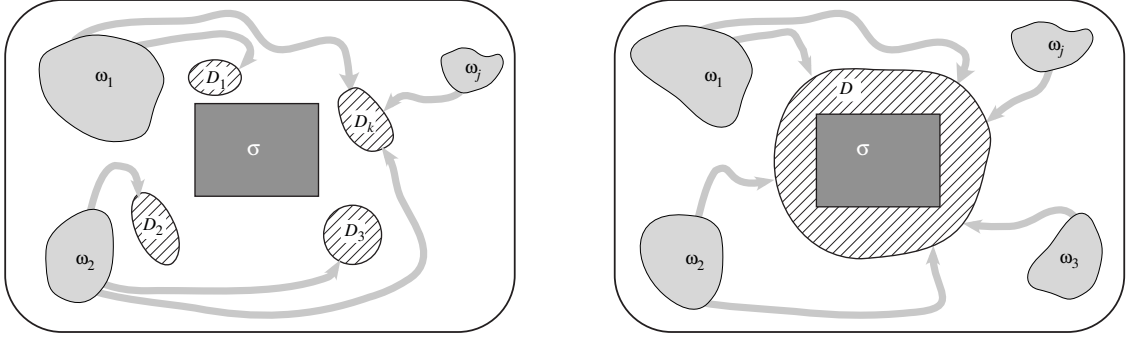


FIG. 5.4.2 – Localisation spatiale des perturbations (ω_j) par rapport à σ et choix des zones D_k pour protéger σ .

Cela étant, soit ω le support géométrique de la perturbation spatiale f affectant le système à l'instant initial ($t = 0$), σ une zone fixée telle que $\bar{\omega} \cap \bar{\sigma} = \emptyset$ et D une zone localisée sur la trajectoire de f comme le montrent les figures 5.4.1 et 5.4.2. Noter que l'hypothèse σ est f -vulnérable et non pas encore atteinte est valable vu le fait que le système considéré est supposé à vitesse de propagation finie. Par conséquent le premier instant où les effets de f commencent à atteindre σ peut être calculé. Donc pour pouvoir protéger σ nous proposons le résultat suivant.

Proposition 5.2

Supposons que f est étalable, σ serait f -vulnérable à partir d'un instant t_1 et D est atteinte. S'il existe un instant $\tau \in]0, t_1[$ tel que D est f -remédiable pendant $[0, \tau]$, alors σ est f -protectable.

Preuve :

Puisque f est supposée étalable et que σ serait vulnérable, alors une partie de sa

trajectoire ou sa trajectoire toute entière évolue dans une direction où σ serait atteinte à partir de l'instant t_1 en passant par la zone affectée D . Comme la zone D est supposée f -remédiable pendant $[0, \tau]$, alors il existe un contrôle u permettant de compenser f sur D pendant $[0, \tau]$. Cela veut dire que le système retrouve son évolution normale (cas autonome non perturbé) à partir de l'instant τ . Ce qui veut dire encore que σ ne serait plus vulnérable $\forall t \in [\tau, T]$. En tenant compte des hypothèses faites sur τ et t_1 , la zone σ ne serait plus vulnérable sur tout l'intervalle de temps $[0, T]$. Par conséquent elle est f -protectable. ■

Le choix de l'instant τ et de la zone D sur laquelle on remédie aux effets de la perturbation pendant $[0, \tau]$, dépend plus particulièrement de la vitesse d'étalabilité de la perturbation f et aussi de sa trajectoire qui démarre à partir de ω . Une autre situation importante à signaler en relation avec ce choix c'est que σ peut être faiblement f -protectable et ceci en remédiant sur la zone atteinte D , en effet cela dépend des moyens disponibles pour pouvoir contrôler de telle situation.

Alors à partir de ce qui précède, pour protéger la zone σ ; c'est à dire déterminer une solution du problème $(\tilde{P})$, nous sommes amenés à résoudre le problème de la remédiabilité régionale sur la zone D et pendant $[0, \tau]$ formulé comme suit

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in L^2(0, T; \mathcal{U}) : \\ \tilde{y}_{f,u}^D(\tau) = \tilde{y}_{0,0}^D(\tau) \end{cases} \quad (5.4.26)$$

avec $\tilde{y}_{f,u}^D$ désigne l'observation sur la zone D .

5 Application à une dynamique de bactéries

5- a Modèle considéré

Dans cette section nous considérons une variante de l'équation de Fisher où le terme logistique est exprimé sous forme d'une nonlinéarité quadratique avec un taux de croissance ρ (différence entre le taux de natalité et celui de mortalité) et un paramètre d'environnement μ (capacité de charge du milieu), voir [65,78] et les références cités dedans. De plus, nous nous intéressons au cas où le composant diffusif du mouvement est négligé par rapport à une contrepartie convective. Ceci peut paraître dans des situations de quelques problèmes de la dynamique de population, où le transport peut conduire une telle population dans une direction, et donc les effets de convection accablent ceux de diffusion.

Lorsqu'il s'agit par exemple d'un problème de dynamique de bactéries, qui peut être

modélisé par une telle équation, il a été montré qu'en pratique, et pour favoriser le nombre des individus vu leurs intérêts médicaux, un masque mobile est employé pour "protéger" les bactéries dynamiquement contre la lumière Ultraviolet (UV) qui les tue dans des régions en dehors du masque [65, 78].

Dans notre cas, nous allons montrer à travers un modèle convectif, comment peut-on protéger une certaine zone fixée face à l'effet d'une perturbation en utilisant un actionneur fixe, et ceci à travers une sortie (observation) du système. La perturbation est considérée comme étant la densité de population atteinte sur une région à cause des rayonnements UV. Noter qu'on désigne par zone, une subregion contenant une certaine densité de population, et par actionneur fixe, un actionneur dont le support ne dépend pas du temps [43].

Pour décrire ceci, considérons le domaine spatio-temporel $\Omega =]0, \pi/4[$ et $I =]0, T[$ où $T = 2$, et désignons par :

- $\tilde{z}(x, t)$: la densité de population infectée en $(x, t) \in \Omega \times I$.
- $\tilde{z}(x, 0)$: la densité initiale de la population infectée.
- $\rho(x, t)$: le taux de croissance de la population.
- $\mu(x, t)$: la capacité de charge du milieu.
- $f(x)$: la densité de population infectée en $t = 0$ dans ω à cause de lumière Ultraviolet (perturbation)
- $Bu(t)$: un masque (terme de contrôle).
- σ : une zone donnée dans Ω , contenant une population saine.

Au départ (à $t = 0$), et en absence des rayonnements UV ; donc pas de perturbation ($f = 0$), le domaine Ω contient un certain nombre d'individus tous sains. Par suite la densité initiale de la population infectée est maintenue nulle ($\tilde{z}(x, 0) = 0$). Toujours à l'instant $t = 0$, s'il y a cette fois-ci une émission de la lumière UV sur la région ω , alors, il y aura une infection de la population sur une telle zone. De ce fait, si on désigne par f la densité de population infectée sur ω , qui peut être assimilée à une perturbation sur le système, et si de plus cette perturbation est étalable, alors la population saine devient de plus en plus infectée (augmentation du taux de croissance ρ). Noter qu'une telle infection peut se faire par un changement de l'ADN des individus sains. Par conséquent, il se peut que la zone σ soit vulnérable par les effets de f . Notre objectif est la détermination d'un terme de contrôle Bu (ce qu'on peut assimilé à un masque en pratique) permettant de protéger la zone σ face aux effets de f .

Supposons que les quantités ρ et μ sont des constantes en espace et en temps, et

que la densité infectée est maintenue nulle au point $x = 0$. Sur $\Omega \times I$, considérons l'équation de convection non linéaire de Fisher dont l'état (densité de population atteinte) vérifie

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{\tilde{z}}(x, t) = -c \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x}(x, t) + \tilde{z}(x, t)[\rho - \mu \tilde{z}(x, t)] + Bu(t) &]0, \pi/4[\times]0, 2[\\ \tilde{z}(0, t) = 0 & 0 < t < 2 \\ \tilde{z}(x, 0) = z_0(x) + f(x) & 0 < x < \pi/4 \end{array} \right. \quad (5.5.1)$$

avec $\tilde{z} \in L^2(0, T; Z)$, $Z = L^2(\Omega)$, $c > 0$, $\rho > 0$ et $\mu > 0$, soit par exemple $c = 3\pi/32$, $\rho = 0.5$ et $\mu = 0.5$. La donnée initiale z_0 et la perturbation f sont données par

$$z_0(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & x \in \omega \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

où $\omega =]0, \pi/16[$ désigne le support géométrique de la perturbation f .

Soit σ une zone fixée dans Ω telle que $\bar{\sigma} \cap \bar{\omega} = \emptyset$, par exemple $\sigma = [3\pi/16, \pi/4]$.

Le système (5.5.1) est supposé augmenté d'une fonction de mesure (ou observation)

$$(\tilde{E}) \quad \tilde{y}^\sigma(t) = C \chi_\sigma^* \chi_\sigma \tilde{z}(t) = \int_0^{\pi/4} \chi_\sigma \tilde{z}(x, t) dx$$

Considérons aussi le terme de contrôle $Bu(t) = g(x)u(t)$ avec

$$g(x) = \begin{cases} 1 + \exp(x^2) & 3\pi/32 \leq x \leq 5\pi/32 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Le système (5.5.1) est un cas particulier de (5.2.1) avec

$$F\tilde{z} = -c \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} + \tilde{z}(\rho - \mu \tilde{z}) \quad \text{et} \quad Bu(t) = g(x)u(t)$$

Les hypothèses sur F sont satisfaites car on a $F(0) = 0$ et F est de classe C^1 sur Z . Pour tout $(x, t) \in \Omega \times I$, posons : $z(x, t) = \tilde{z}(x, t) - f(x)$. Donc en linéarisant F au voisinage de f , le système (5.5.1) devient

$$\begin{cases} \dot{z}(x, t) = (-c \frac{\partial}{\partial x} + \rho - 2\mu f)z - \mu z^2 + (\rho f - \mu f^2 - c \frac{\partial f}{\partial x}) + g(x)u(t) \\ z(0, t) = 0 \\ z(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (5.5.2)$$

L'opérateur linéaire $A_f = -c \frac{\partial}{\partial x} + \rho - 2\mu f$ engendre sur Z un semi groupe fortement continu donné par

$$(S_f(t)z)(x) = \begin{cases} \exp [(\rho - 2\mu f)t] z(x - ct) & x \geq ct \\ 0 & 0 < x < ct \end{cases} \quad (5.5.3)$$

La solution $z_{f,u}$ du système (5.5.2) est donnée dans ce cas par

$$\begin{aligned} z_{f,u}(x, t) = & -\mu \int_0^t S_f(t-s) z_{f,u}^2(x, s) ds + \int_0^t S_f(t-s) (\rho f - \mu f^2 - c \frac{\partial f}{\partial x})(x) ds \\ & + \int_0^t S_f(t-s) g(x) u(s) ds \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

De plus, la sortie associée à (5.5.2) s'exprime par

$$(E) \quad y^\sigma(t) = C \chi_\sigma^* \chi_\sigma z(t) = \int_{3\pi/16}^{\pi/4} z(x, t) dx$$

5- b Simulations

Avant d'exciter le système (5.5.1) (i.e. pour $u = 0$) nous commençons par représenter les états dans le cas autonome non perturbé ($f = 0$) et autonome perturbé ($f \neq 0$) et ceci en tenant compte de (5.5.4) et du changement de variable d'état $z_{f,u}(x, t) = \tilde{z}_{f,u}(x, t) - f(x)$ effectué ci-dessus. Nous obtenons alors les deux figures suivantes.

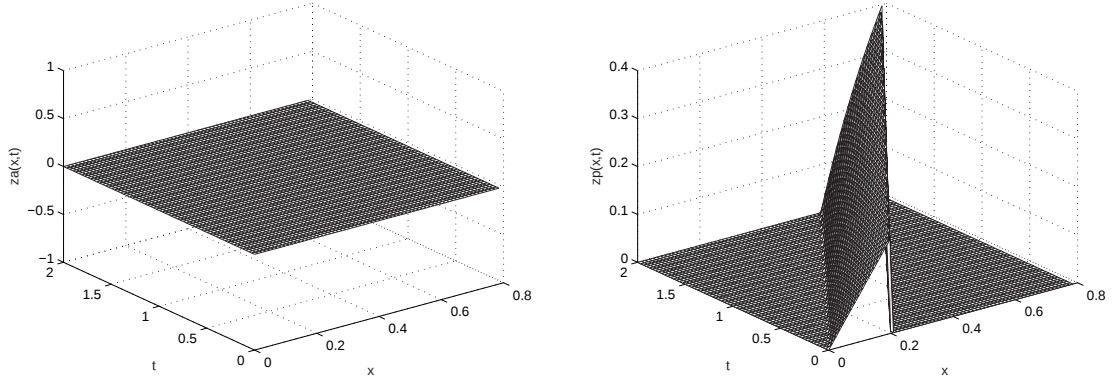


FIG. 5.5.1 – Solution du système autonome non perturbé (gauche) et perturbé (droite)

Sur la figure 5.5.1 nous avons représenté l'état $\tilde{z}_{0,0}$ du système autonome non perturbé (à gauche) et l'état $\tilde{z}_{f,0}$ du système perturbé non contrôlé (à droite). Ceci veut dire que la densité de population atteinte qui a été maintenue nulle en $t = 0$ (dans ce cas tous les individus sont sains) augmente de plus en plus au cours du temps sous l'exposition aux rayonnements UV.

Considérons maintenant la propriété $\mathcal{P}$ engendrée par la perturbation f , donnée par

$$\mathcal{P}\tilde{z}_{f,0}(x, t) \Leftrightarrow \tilde{z}_{f,0}(x, t) \neq \tilde{z}_{0,0}(x, t)$$

puis les sous ensembles $(w_{f,0,t})_t$ et la trajectoire $\mathcal{T}_t$ de $\mathcal{P}$ définis respectivement par

$$w_{f,0,t} = \{x \in \Omega : \mathcal{P}\tilde{z}_{f,0}(x, t)\} \text{ et } \mathcal{T}_t = \bigcup_{s \leq t} w_{f,0,s}$$

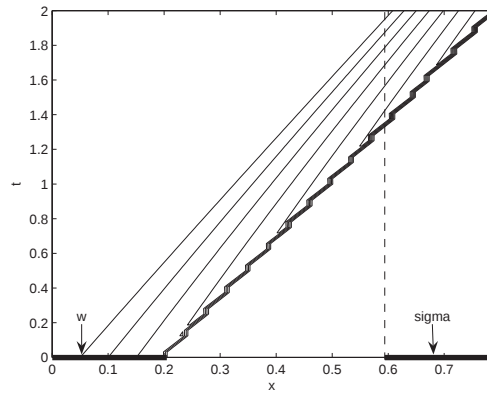


FIG. 5.5.2 – Trajectoire $\mathcal{T}_t$ de la perturbation f en absence du contrôle, et vulnérabilité de la zone $\sigma = [3\pi/16, \pi/4] \simeq [0.59, 0.78]$

alors on constate que la perturbation f est étalable et que la zone σ est f -vulnérable. Ainsi, l'instant t_1 où f commence à atteindre σ est tel que $t_1 = \frac{4}{3}$ (figure 5.5.2). Dés que σ n'est pas encore atteinte, nous allons voir comment peut-t-on la protéger à l'aide d'un contrôle convenable u et ceci en appliquant le résultat de la proposition 5.2. De ce fait pour pouvoir protéger σ , nous remédions à l'effet de f sur une zone D localisée sur la trajectoire $\mathcal{T}_t$ avant que celle-ci ne passe pas par σ . Cela n'est pas en contradiction avec le fait de procéder par la notion de retard. En effet, du moment où la perturbation f s'étale à partir de ω et que la zone σ soit vulnérable, nous avons calculé le premier instant t_1 où σ serait atteinte. Donc, en se fixant une zone D localisée sur $\mathcal{T}_t$ et que cette trajectoire n'atteigne pas encore σ , le problème du contrôle σ -protecteur se ramène ainsi à celui de la remédiabilité régionale sur D au bout d'un certain temps τ fixé (remédiabilité pendant $]0, \tau[$) avec $\tau < t_1$. Par suite nous sommes amènes à résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in L^2(0, T; \mathcal{U}) : \\ y_{f,u}^D(\tau) = y_{0,0}^D(\tau) - C\chi_D^* \chi_D f \end{cases} \quad (5.5.5)$$

avec $y_{f,u}^D$ désigne l'observation sur la zone D et qui est donnée par

$$y_{f,u}^D(t) = C\chi_D^* \chi_D z_{f,u}(t) = \int_D z_{f,u}(x, t) dx$$

Comme $y_{0,0}^D(t) = 0 \forall t \in I$, alors cela revient à déterminer un contrôle u tel que

$$\begin{aligned} & -\mu \int_D \int_0^\tau S_f(\tau - s) z_{f,u}^2(x, s) ds dx + \int_D \int_0^\tau S_f(\tau - s) g(x) u(s) ds dx \\ & + \int_D \int_0^\tau S_f(\tau - s) (\rho f - \mu f^2 - c \frac{\partial f}{\partial x})(x) ds dx = 0 \end{aligned} \quad (5.5.6)$$

Considérons la zone $D = [3\pi/32, 5\pi/32]$ comme il est montré sur la figure 5.5.3 ci-dessous, et donc l'instant τ correspondant est $\tau = 1$; c'est l'instant où la zone D est entièrement atteinte par les effets de f (voir figure 5.5.2).

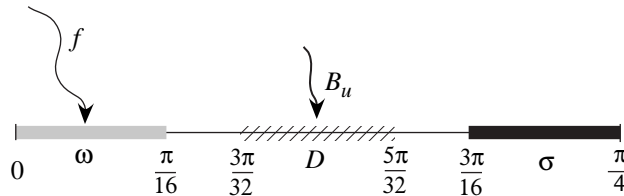


FIG. 5.5.3 – Différentes zones considérées

Le problème (5.5.6) peut être résolu en appliquant l'algorithme 4.1 pour la détermination d'un contrôle permettant de compenser régionalement, les effets d'une perturbation étalable (voir chapitre 4). Ainsi nous obtenons les figures suivantes.

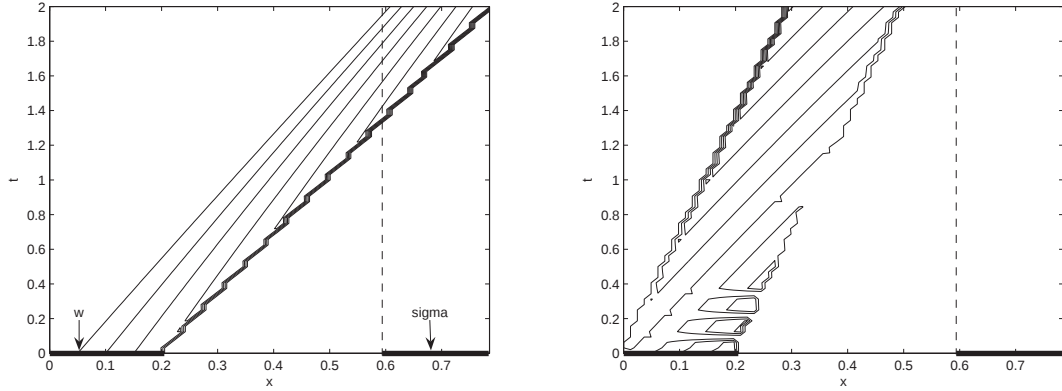


FIG. 5.5.4 – Les deux trajectoires de la perturbation f en absence (à gauche) et en présence (à droite) du contrôle u . Sous l'effet de u , $\sigma = [3\pi/16, \pi/4] \simeq [0.59, 0.78]$ est f -protectable

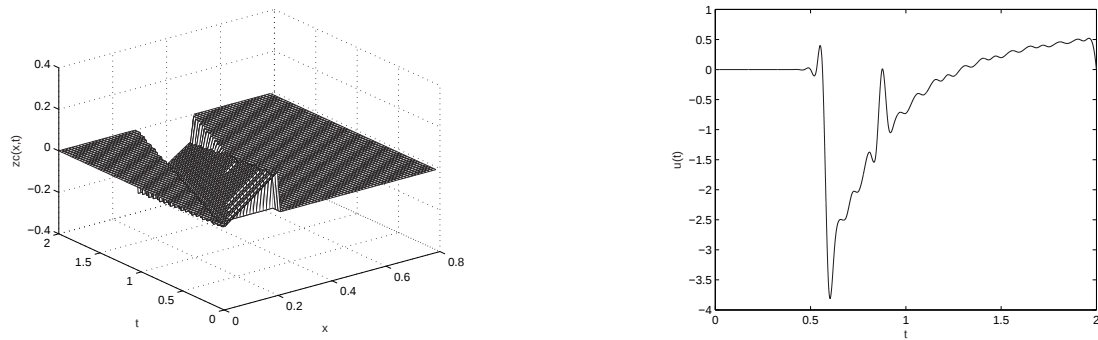


FIG. 5.5.5 – L'état du système perturbé contrôlé (5.5.1) (à gauche) et le contrôle protecteur de σ (à droite) à l'itération $n = 20$.

Par conséquent, en remédiant à l'effet de f pendant l'intervalle de temps $J =]0, \tau[$ sur la zone D qui est déjà affectée par un tel effet, on a représenté sur la figure 5.5.4 à droite, la trajectoire de la propriété $\mathcal{P}$ associée au système perturbé contrôlé. On en déduit que le contrôle u donné sur la figure 5.5.5 à droite, qui a compensé f sur D , a permis d'arrêter l'étalabilité de f à partir de l'instant τ vers la zone σ , et donc c'est un contrôle protecteur pour σ . Finalement, nous avons représenté sur la figure 5.5.5 à gauche l'état du système (5.5.1) associé à ce contrôle, cela montre que sur σ , l'état perturbé contrôlé représentant la densité de la population infectée, coïncide

avec celui du système autonome non perturbé qui a été maintenu nul ($\tilde{z}_{0,0} = 0$), donc tous les individus occupant la zone σ sont protégés pendant tout l'intervalle de temps $I = [0, T]$ face aux effets de ceux infectés à cause des rayonnements UV.

Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons donné une extension du contrôle protecteur à une classe de systèmes distribués non linéaires. Pour caractériser les contrôles protecteurs, une approche par remédiabilité d'un certain système non linéaire à retard a été utilisée. Ainsi, en se basant sur les techniques du pseudo inverse, nous avons résolu ce problème, en mettant en oeuvre un algorithme pour le calcul du contrôle souhaité. Comme nous l'avons signalé, une difficulté est survenue lors de l'application directe d'un tel algorithme, c'est ce qui nous a amené à exploiter cette approche autrement. En effet, étant donnée une perturbation étalable, nous avons montré qu'il est possible de protéger une zone vulnérable en remédiant sur une autre région atteinte localisée sur la trajectoire de la perturbation en agissant avant le premier instant où la perturbation commence à atteindre la zone destinée à protéger. Ceci est illustré en considérant une variante de l'équation non linéaire de Fisher modélisant un problème de dynamique de bactéries.

Conclusions - Perspectives

Dans ce travail, nous avons considéré quelques concepts d'analyse régionale des systèmes distribués. Cela concerne essentiellement l'étude des problèmes de la compensation régionale des perturbations étalables (remédiabilité régionale) et la protection des zones vulnérables (contrôle protecteur). Les résultats obtenus pour les systèmes distribués linéaires perturbés, ont été aussi étendus à une certaine classe de systèmes distribués non linéaires perturbés au niveau de la condition initiale.

En se basant sur le principe de la remédiabilité régionale, nous avons pu mettre une connexion entre les deux concepts de la remédiabilité et de l'étalabilité à travers celui de la vulnérabilité, en considérant ce qu'on a appelé "perturbation étalable" et zone vulnérable. Nous nous sommes intéressés au cas où la perturbation affectant l'état d'un système linéaire, est définie sur une région ω , étalable à partir de cette région et pour laquelle une zone fixée σ (avec $\bar{\sigma} \cap \bar{\omega} = \emptyset$) est vulnérable. Par conséquent, nous avons formulé et résolu le problème de la neutralisation des effets d'une telle perturbation qui affectent la zone σ .

D'autre part, et vu le fait qu'il existe des phénomènes non remédiables sur des zones atteintes, ou leurs remèdes existent mais ils sont à coûts très élevés, il a paru intéressant de pouvoir considérer le problème de la protection de ces zones avant qu'elles soient affectées. Nous avons caractérisé les solutions d'un tel problème par deux approches différentes : La première fait appel à des familles de transformations dites adaptables à l'évolution du système, tandis que la deuxième est basée sur la remédiabilité régionale d'un certain système linéaire à retard bien précisé. L'aspect commun de ces deux approches est de faire dévier la trajectoire de la perturbation étalable pour qu'elle ne puisse pas passer par la zone σ . Différentes autres caractérisations du contrôle protecteur ont été données, et aussi le problème du contrôle protecteur à énergie minimale a été étudié. Comme application, nous avons considéré le système de transport linéaire bidimensionnel.

Cela étant, et pour pouvoir répondre à de nombreuses situations concrètes (pollution, épidémies, dynamique de population, etc) qui sont généralement modélisées par des systèmes non linéaires, nous avons pu faire une extension des deux concepts

de la remédiabilité régionale et du contrôle protecteur, à une certaine classe de systèmes distribués non linéaires perturbés au niveau de la condition initiale.

A l'aide de certaines transformations convenables, et plus précisément d'une linéarisation du système au voisinage de la perturbation, nous avons établi en un premier lieu un résultat d'existence et d'unicité de la solution du système considéré. Cela est possible, sous certaines hypothèses, en appliquant le théorème du point fixe de Banach. L'intérêt de la transformation du système autour de la perturbation est de comprendre la manière d'évolution de la trajectoire de la perturbation étalable, définie à partir de l'état du système perturbé, et par suite, pour pouvoir contrôler une telle trajectoire. Ensuite, nous avons étudié le problème de la remédiabilité régionale en utilisant les techniques du pseudo inverse. Ce qui nous a permis de donner un algorithme pour le calcul du contrôle assurant la compensation régionale de la perturbation.

Concernant le problème du contrôle protecteur, nous avons considéré une classe de systèmes non linéaires à vitesse de propagation finie, et comme pour le cas linéaire, nous avons utilisé une approche par remédiabilité d'un système non linéaire à retard pour caractériser les solutions d'un tel problème. Sous certaines hypothèses, nous avons étudié ce problème en s'inspirant des techniques utilisées pour l'étude de la remédiabilité. A ce niveau, une difficulté est rencontrée lors du traitement numérique d'un tel problème vu la présence des nonlinéarités et du retard. Ceci nous a conduit à exploiter ce concept autrement. Il s'agit de compenser les effets de la perturbation étalable sur une zone atteinte D localisée sur la trajectoire de la perturbation avant que celle-ci atteigne la zone vulnérable σ , comme le problème de la dynamique de bactéries a été donnée en considérant une variante de l'équation convective non linéaire de Fisher.

Bien que ce travail ait été réalisé par une analyse théorique munie de quelques simulations numériques portant essentiellement sur les systèmes de transport, nous pensons que les outils nécessaires pour le décrire peuvent être utiles dans l'étude de nombreux autres problèmes. Nous citons quelques problèmes que nous comptons étudier dans la suite, et des potentielles applications. Pour cela, précisons les notations suivantes

$\Omega \times]0, T[$	Domaine spatio-temporel.
Γ, Γ_i	Frontière ou parties de la frontière de Ω .
z, z_i	Etats du système.
F, F_i	Dynamiques non linéaires.
g, g_i	Conditions aux limites.
h, h_i	Conditions initiales.
f, f_i	Perturbations spatiales ou spatio-temporelles.

Cela étant, les problèmes que nous comptons considérer par la suite concernent les classes des systèmes mis en jeu, la localisation et le nombre des actionneurs et capteurs, et aussi le choix de certaines zones particulières :

1. L'étude faite dans ce travail repose sur la remédiabilité et le contrôle protecteur des systèmes non linéaires perturbés au niveau de la condition initiale. Qu'on est-il de ces problèmes dans le cas où le système est l'objet, en plus de la perturbation initiale, d'une autre perturbation frontière ?

Le système à prendre en considération peut être représenté sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{z}(x, t) = Fz(x, t) & \Omega \times]0, T[\\ z(\xi, t) = g(\xi, t) + f_1(\xi, t) & \Gamma \times]0, T[\\ z(x, 0) = h(x) + f_2(x) & \Omega \end{array} \right. \quad (5.5.7)$$

Dans ce cas, l'étalabilité peut provenir de la perturbation f_1 et/ou f_2 , et par suite différentes situations pour la contrôler sont possibles : Il s'agit d'appliquer des actions à l'intérieur et/ou à la frontière du domaine.

Pour pouvoir décrire ce problème en s'inspirant des techniques utilisées dans ce travail, il est utile de faire certaines transformations du système (qui ne sont pas assez faciles) : Choisir convenablement des profils autour desquels ces transformations seront manipulables pour aboutir à une nouvelle formulation permettant de faciliter l'analyse et le contrôle de telles situations. Remarquons que dans le cas où la dynamique F est linéaire, et que $f_2 = 0$, une transformation à l'aide de l'opérateur de Green pourrait suffire pour répondre à ce problème et ceci en considérant un contrôle frontière.

2. Un autre problème qui paraît intéressant à étudier est celui où la dynamique non linéaire F ne vérifie pas nécessairement les hypothèses qui étaient faites. C'est le cas

par exemple d'un système couplé avec au moins deux dynamiques F_1 et F_2 telles que $F \neq (F_1, F_2)$. Dans ce cas, nous pourrions considérer la représentation suivante

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{z}_1(x, t) = F_1(z_1, z_2)(x, t) & \Omega \times]0, T[\\ \dot{z}_2(x, t) = F_2(z_1, z_2)(x, t) & \Omega \times]0, T[\\ z_1(\xi, t) = g_1(\xi, t) + f_{11}(\xi, t) & \Gamma_i \times]0, T[\\ z_2(\xi, t) = g_2(\xi, t) + f_{21}(\xi, t) & \Gamma_j \times]0, T[\\ z_1(x, 0) = h_1(x) + f_{12}(x) & \Omega \\ z_2(x, 0) = h_2(x) + f_{22}(x) & \Omega \end{array} \right. \quad (5.5.8)$$

Pour pouvoir contrôler l'évalabilité engendrée par l'une au moins de ces 4 perturbations (i.e. remédier ou protéger certaines zones), une analyse mathématique est tout à fait nécessaire. Cela consiste à réarranger les différentes équations pour pouvoir comprendre le comportement de ces perturbations, et donc, pour spécifier l'endroit où les actions seront réparties.

3. Dans le chapitre 5 nous avons utilisé une approche basée sur la remédiabilité d'un certain système à retard, pour caractériser les solutions du problème du contrôle protecteur d'une zone vulnérable σ face aux effets d'une perturbation évalable à partir d'une région ω . Cela consiste à remédier sur une autre zone D localisée sur la trajectoire de la perturbation évalable avant que celle-ci atteigne la zone σ . Un troisième problème qui devrait être déduit est celui du choix de la zone D à y remédier au bout d'un certain temps τ . Il s'agit d'un problème d'optimisation dont l'étude nécessite la détermination d'autres critères comme par exemple la distance entre la source ω de la perturbation et la zone vulnérable σ et la vitesse de l'évalabilité. Ainsi, se posent les problèmes de la localisation des actionneurs et du contrôle optimal assurant la protection de la zone σ .

L'objectif de ces perspectives est de poursuivre nos travaux motivés essentiellement par des problèmes environnementaux et plus particulièrement celui de la pollution des eaux souterraines ou de surface.

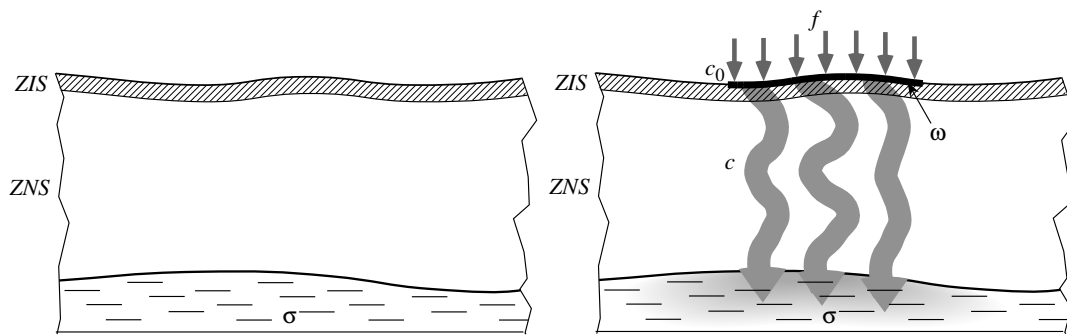
Industrielles, agricoles, ou même domestiques, la pollution n'a cessé de dégrader la qualité de l'eau. Ces atteintes entraînent de graves déséquilibres environnementaux au sein des écosystèmes et constituent une menace directe pour la santé publique.

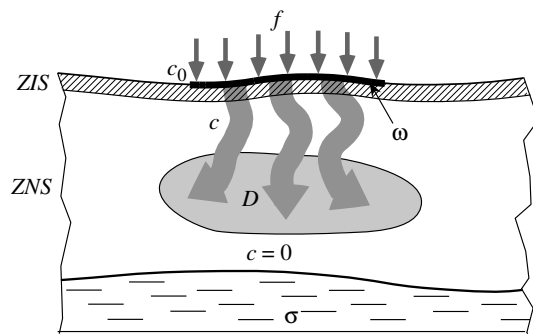
Les pollutions d'origine agricole sont majoritairement dues à l'application de fertilisants et de pesticides en surface sol, qui, une fois infiltrés, ils se retrouvent dans la zone non saturée et migrent vers les nappes (voire figure ci-dessous).

Les modèles de pollution sont des descriptions mathématiques du transport, de la diffusion et des réactions chimiques des produits polluants. Ils sont gouvernés par des équations aux dérivées partielles, où les inconnues sont généralement la concentration de polluants, la charge hydraulique, etc.

Lorsqu'il s'agit d'une convection pure qui est due à la dispersion des polluants, ou d'une diffusion pure où les particules chimiques polluantes ont tendance à aller des zones de haute concentration vers des zones de faible concentration, on retrouve généralement des modèles de type (5.5.7). Sinon il s'agit d'une modélisation sous la forme d'un système couplé de type (5.5.8).

La zone non saturée (ZNS) joue un rôle important dans l'étude de ces systèmes car, c'est dans cette interface que les échanges d'eau, polluants et microorganismes, se produisent vers la nappe. Généralement, les écoulements peuvent être verticaux ou horizontaux dans la ZNS, ainsi, il est nécessaire de comprendre le fonctionnement hydrodynamique de la zone non saturée afin d'étudier le lessivage des polluants. En effet, la vitesse d'infiltration de ces polluants et la perméabilité de la ZNS, etc, sont des indicateurs capitaux pour estimer l'instant où les polluants commencent à atteindre la nappe, et par suite se pose le problème de sa protection. Pour pouvoir étudier ce problème, nous proposons d'appliquer le principe de l'approche donnée ci-dessus (problème **3**) et ceci en remédiant sur une région convenablement choisie dans la zone non saturé (voir figures ci-dessous).





ZIS : Zone interface sol

ZNS : Zone non saturée

σ : Une nappe souterraine

f : Un ensemble de polluants

ω : Support de *f*

c_0 : concentration initiale de *f*

c : sa concentration après infiltration

D : Une zone de traitement.

Bibliographie

Bibliographie

- [1] R. Adams, 1975. Sobolev spaces. Academic Press.
- [2] L. Afifi, 1994. Analyse régionale : Systèmes discrets, sources et détection. Thèse d'état, Kénitra, Maroc.
- [3] L. Afifi and A. El Jai, 1994. Strategic sensors and spay sensors. International Journal of Applied Mathematics and Computer Science. Vol. 4, N 4.
- [4] L. Afifi and A. El Jai, 1994. Observabilité des systèmes distribués dans un tube. Morrocan Journal of Control, Computer Science and Signal Processing, Vol. II, N 4, pp 1-45, Mai 1994.
- [5] L. Afifi and A. El Jai, 1995. Spy sensors and detection. International Journal of Systems Science, Vol. 26, N 8, pp 1447-1463.
- [6] L. Afifi, A. El Jai and M. Merry, 2000. Detection and sources reconstruction in a tube. International Journal of Systems Science, Vol. 31, N 2, pp 149-159.
- [7] L. Afifi, A. El Jai and M. Merry, 2001. Regional detection and reconstruction of unknown internal or boundary sources. International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, Vol. 11, N 2, pp 319-348.
- [8] L. Afifi, A. Chafiai and A. El Jai , 2001. Spatial compensation of boundary disturbances by boundary actuators. International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, Vol. 11, N 4, pp 9-20.
- [9] L. Afifi, A. Chafiai and A. El Jai , 2002. Regionally efficient and strategic actuators. International Journal of Systems Science, Vol. 33, N 4, pp 1-12.
- [10] L. Afifi, A. Chafiai and A. Bel Fekih, 2002. Enlarged exact compensation in distributed systems. International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, Vol. 12, N 4.
- [11] L. Afifi, A. El Jai and E. Zerrik. Analyse régionale des systèmes linéaires à paramètres distribués. Presses Universitaires de Perpignan. In press.
- [12] L. Afifi, M. Bahadi and A. El Jai. Regional asymptotic compensation in distributed systems. To appear.

- [13] A. G. Aksoy and M.A. Khamsi, 1990. Nonstandard Methods in Fixed Point Theory. Springer-Verlag.
- [14] M. Amharref, S. Assine and A. Bernoussi, 2002. Cartographie de la vulnérabilité à la pollution des eaux souterraines : Application à la pleine du Gharb (Maroc), Proceeding du Cong. Int. JANO7, Tanger, 17-19 avril 2002.
- [15] A.V. Balakrishnan, 1976. Applied functional analysis. Springer Verlag.
- [16] V. Barbu, 1976. Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces. Roumanie.
- [17] E. Beltrami, 1987. Mathematics for Dynamic Modelling (Academic Press).
- [18] A. Ben Israel and T.N.E Greville, 1973. Generalized inverses theory and application. J. Wiley.
- [19] M. Berger, 1977. Nonlinearity and Functional Analysis, Academic Press.
- [20] A. Bernoussi, 1993. Approche fréquentielle des systèmes distribués : Relation avec les capteurs et les actionneurs. Thèse de Doctorat, Université de Perpignan, 08 Juin 1993.
- [21] A. Bernoussi et A. El Jai, 1998. Nouvelle approche de l'étalabilité : $\mathcal{A}$ -étalabilité. JANO5, Kenitra, Maroc, Avril 28-30.
- [22] A. Bernoussi et A. El Jai, 1999. Distributed Parameters Systems Spreadability and evolving interfaces, MTNS 2000, 19-23 June. Perpignan, France (2000).
- [23] A. Bernoussi and A. El Jai, 2000. New approach of spreadability. Journal of Mathematical and Computer Modelling. Vol. 31, N. 13, pp 93-109.
- [24] A. Bernoussi, A. El Jai and A. J. Pritchard, 2001. Spreadability and evolving interfaces. Int. J. of Systems Science. Vol. 32, number 10, pp 1217-1232.
- [25] A. Bernoussi, 2001. Vers un nouveau concept dans les systèmes distribués : L'étalabilité. HDR, Université de Perpignan.
- [26] A. Bernoussi et M. Amharref, 2003. Etalabilité - vulnérabilité. Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser. Volume 30, 2003, pp 53-62. ISSN 1223-6934.
- [27] A. Bernoussi, 2007. Spreadability and vulnerability of distributed parameter systems. Int. J. of Systems Science, Vol. 38, N. 4, April 2007, 305-317.
- [28] Ah. Bernoussi and D. Ucinski, 1998. Weak spray control. Second Workshop on Analysis and Optimization of complex environmental systems. Zielona Gora, Poland. Novembre 17-23.
- [29] Ah. Bernoussi, 1999. Etalabilité et contrôle étaleur. Thèse de Doctorat, Université de Perpignan, France.

- [30] L. Berrahmoune, 1984. Localisation d'actionneurs pour la contrôlabilité des systèmes paraboliques et hyperboliques. Application par dualité à la localisation des capteurs. Thèse de Doctorat, Faculté des Sciences de Rabat, Maroc.
- [31] L. Berrahmoune, 1990. Actionneurs et capteurs dans la contrôlabilité et la stabilité des systèmes distribués flexibles. Thèse de Doctorat d'Etat, Faculté des Sciences de Rabat, Maroc.
- [32] H. Brezis, 1992. Analyse fonctionnelle : Théorie et applications. N 3, Masson.
- [33] J. W. Cholewa and T. Dłotko, 2000. Global Attractors in Abstract Parabolic Problems. Cambridge University Press, Mathematics, 250 pages, ISBN 0-521-7942-2. London Mathematical Society.
- [34] P. D. Christofides, 2001. Nonlinear and Robust Control of Pde Systems : Methods and Applications to Transport-reaction Processes. Technology and Industrial Arts, 248 pages ISBN 0817641564, Berkhäuser, Springer.
- [35] R. F. Curtain and A.J. Pritchard, 1978. Functional analysis in modern applied mathematics, Academic press, London.
- [36] R. F. Curtain and A.J. Pritchard, 1978. Infinite Dimensional Linear Systems Theory. Lectures notes in Control and information science. No 8, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, New York.
- [37] R. F. Curtain and H. Zwart, 1995. An Introduction to Infinite Dimensional Linear Systems Theory. Texts in Applied Mathematics, volume 21.
- [38] R. F. Dautray and J. L. Lions, 1984. Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Série Scientifique, tome 3, Masson.
- [39] M. C. Delfour, S. K. Mitter, 1972. Controllability and observability for infinite dimensional systems. SIAM J. Control. 10, pp 329-333.
- [40] J. I. Diaz and J .L. Lions, 1993. Mathematics Climate and Environment. Research in Applied Mathematics RMA 27 (Masson).
- [41] S. Dolecki and D. Russel, 1977. A general theory of observation and control. SIAM J. Control. 15, pp 185-220.
- [42] A. Doubova, E. Fernández-Cara, M. González-Burgos and E. Zuazua, 2006. On the controllability of parabolic systems with a nonlinear term involving the state and the gradient. SIAM J. Control Optim., 45(4) : 1399-1446 (electronic), 2006.
- [43] A. El Jai, 1991. Distributed systems analysis via sensors and actuators. International Journal on Sensors and Actuators. A. 29, pp. 1-11.
- [44] A. El Jai, 1997. Nouvelle approche pour les systèmes en expansion spatiale : Dynamique de végétation. Tendances nouvelles en modélisation pour l'environnement. Elsevier, pp. 439-445.

- [45] A. El Jai, 2002. Analyse régionale des systèmes distribués. Control Optimization and Calculus of Variations (COCV), 8, pp. 663-692.
- [46] A. El Jai, 2003. Quelques problèmes de contrôle propres aux systèmes distribués. Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser. Volume 30, 2003, pp 137-153. ISSN 1223-6934.
- [47] A. El Jai, 2003. Eléments d'analyse numérique. Editions PUP. Nov. 2003. ISBN 2-914518-45-5.
- [48] A. El Jai, 2004. Eléments d'analyse et contrôle des systèmes. Editions PUP. Nov. 2004. ISBN 2-914518-60-9.
- [49] A. El Jai, 2006. Eléments de Contrôlabilité. Editions PUP. Nov. 2003. ISBN 2-914518-90-0.
- [50] A. El Jai et M. Amouroux, 1990. Automatique des systèmes distribués. Traités des Nouvelles Technologies. Série Automatique. Hermès.
- [51] A. El Jai et A. Bel Fekih, 1990. Exacte contrôlabilité et contrôle optimal des systèmes paraboliques. Revue APII. Control/Systems Analysis. N. 24, pp. 357-376.
- [52] A. El Jai, A. Bel Fekih and J. Bouyaghroumni, 1991. Regional observability and sensors structure. International Journal of Sensors and Actuators, Vol. 22, N. 7, pp 1255-1265.
- [53] A. El Jai and K. Kassara, 1994. Spreadable distributed systems. Mathematical and Computer Modelling, vol. 20, N. 1, pp. 47-64.
- [54] A. El Jai, M. Fournier, K. Kassara and B. Noumar, 1995. Vegetation dynamics : a deterministic modelling approach using the concept of spreadability. Theoretical and Applied Climatology Journal. Vol. 52, pp 241-249.
- [55] A. El Jai and K. Kassara, 1996. Spreadability of transport systems. International Journal of Systems Science 27 (7), 681-688.
- [56] A. El Jai, K. Kassara, and O. Cabrera, 1997. Spray control. International Journal of control. Vol. 68, N. 4, pp. 709-730.
- [57] A. El Jai et A. J. Pritchard, 1986. Capteurs et actionneurs dans l'analyse des systems distribués. Masson RMA 3, Paris.
- [58] A. El Jai, M.C. Simon, E. Zerrik and M. Amouroux, 1995. Regional observability of a thermal process. IEEE Transactions on Automatic and Control, Vol. 40, N. 3, March.
- [59] A. El Jai, M.C. Simon, E. Zerrik, A.J. Pritchard, 1995. Regional controllability of distributed systems. Int. J. of Control, Vol. 62, N6, pp. 1351-1365.

- [60] A. El Jai and S. El Yacoubi, 1993. On the numbers of actuators in distributed systems. *Int. J. of Applied Mathematics and Computer Science*. Vol. 3, N. 4.
- [61] A. El Jai and S. El Yacoubi, 1996. Automates cellulaires et étalabilité. Report, University of Perpignan, France.
- [62] A. El Jai, S. El Yacoubi and J. Karakchou, 1998. Spreadability and spray actuators. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*. Vol. 2, N. 6.
- [63] S. El Yacoubi and A. El Jai, 2002. Cellular automata modelling and spreadability. *Journal of Mathematical and Computer Modelling*, 36, pp 1059-1074.
- [64] S. El Yacoubi, A. El Jai and N. Ammor, 2002. Regional controllability with cellular automata models. *Lecture Notes in Computer Sciences*, Springer, LNCS2493, pp 367-375.
- [65] L. Giuggioli, V. M. Kenkre, 2003. Analytic solutions of a nonlinear convective equation in population dynamics. *Physica D* 183 (2003) 245-259.
- [66] Dan Henry, 1981. Geometric theory of semilinear parabolic systems. *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 840.
- [67] D. Hinrichsen and A.J. Pritchard, 2005. *Mathematical Systems Theory I, Modelling, State space analysis, stability and robustness*. Springer.
- [68] A. Ichikawa, 1982. Quadratic control of evolution equations with delays in control. *SIAM Journal Cont.* vol. 20, 5, 1982.
- [69] K. Kassara, 1983. Commandabilité et observabilité d'une classe de systèmes non linéaires distribués. Approche théorique et algorithmes. Thèse. Faculté des sciences de Rabat.
- [70] K. Kassara and A. El Jai , 1983. Algorithmes pour la commande d'une classe de systèmes à paramètres répartis non linéaires. *Revue Marocaine d'Automatique, d'Informatique et de Traitement de signal*. Vol. 1, No 1, pp 3-24.
- [71] K. Kassara, 2000. Feedback Spreading Control for Semilinear Parabolic Systems, *Journal of Computational and Applied Mathematics* (Jacksonville, FL, 1998), 114, pp. 41-53.
- [72] K. Kassara, 2001. Congestion Control as a Constrained State Regulation Problem, *Dynamics and Control*, 11, pp. 297-295.
- [73] K. Kassara, 2002. Feedback Spreading Control under Speed Constraints, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 41, pp. 1281-1294.
- [74] K. Kassara, 2005. Feedback Spreading Control Applied to Immunotherapy, *Mathematical Population Studies*, 12, pp. 211-221.

- [75] K. Kassara, 2006. Spreading Control Applied to Target Problem, *Journal of Convex Analysis*, 13, pp. 363-372.
- [76] K. Kassara, 2006. Target Control by Using Feedback Spreading Control with Application to Immunotherapy, *Int. J. of Control*, 79, pp. 813-821.
- [77] K. Kassara, 2006. A Set-valued Approach to Control Immunotherapy, *Mathematical and Computer Modelling*, 44, pp. 1114-1125.
- [78] V. M. Kenkre, 2004. Results from variants of the Fisher equation in the study of epidemics and bacteria. *Physica A* 342 (2003) 242-248
- [79] Y. Kuang, 1993. *Delay Differential Equations With Applications in Population Dynamics*. Academic Press, Inc.
- [80] J. L. Lions, 1968. *Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Dunod, Paris.
- [81] J. L. Lions, 1988. *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation des systèmes distribués. Tome 1 : Contrôlabilité exacte*, RMA 8, Masson, Paris.
- [82] J. L. Lions, 1988. *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation des systèmes distribués. Tome 2 : Perturbations*, RMA 9, Masson, Paris.
- [83] J. L. Lions, 1988. *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation des systèmes distribués. Tome 3 : Stabilisation*, RMA 8, Masson, Paris.
- [84] M. Merry, 2000. *Detection et reconstruction des sources inconnues dans les systèmes distribués*. Thèse de Doctorat, Faculté des Sciences Ain Chok, Casablanca Maroc, Octobre 2000.
- [85] J. D. Murray, 1989. *Mathematical Biology*, Springer-Verlag.
- [86] A. Namir, 1993. *Contribution à l'analyse et au contrôle des systèmes distribués et à retard*. Thèse d'Etat, EMI, Rabat, Décembre.
- [87] S. Osher and J.A. Sethian, 2003. *Level set methods and dynamical implicit surfaces*. Springer.
- [88] A. Pazy, 1983. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York.
- [89] **Y. Qaraai**, A. Bernoussi et A. El Jai, 2005. Remédiabilité et contrôle protecteur des systèmes distribués. 9ème Journée de la Recherche Scientifique, 22 décembre 2005, F.S Tétouan - Maroc.
- [90] **Y. Qaraai**, A. Bernoussi et A. El Jai, 2006. Contrôle protecteur et vulnérabilité. 3èmes Journées d'Analyse et Contrôle des Systèmes. 10 et 11 Novembre 2006, Faculté des Sciences Ben M'Sik, Casablanca Maroc.

- [91] **Y. Qaraai**, A. Bernoussi et A. El Jai, 2006. Contrôle protecteur et remédiabilité. Proceeding pp 108-114, Third International Congress on Scientific Advances in Civil and Industrial Engineering, 15-17 Novembre 2006, Algeciras - Spain.
- [92] **Y. Qaraai**, A. Bernoussi and A. El Jai. Protector control of distributed parameter systems. International Journal of Systems Science. Submitted.
- [93] **Y. Qaraai**, A. Bernoussi and A. El Jai, 2008. How to compensate a spreading disturbance for a class of nonlinear systems. International Journal of Applied Mathematics and Computer Science. Accepted.
- [94] **Y. Qaraai**, A. Bernoussi and A. El Jai. Remédiabilité des systèmes non linéaires. Premier Congrès de la SM2A, ENIM Rabat, 6-8 Février 2008.
- [95] **Y. Qaraai**, A. Bernoussi and A. El Jai. Extension of protector control to a class of nonlinear distributed systems. Proposed.
- [96] M. Rachik, 1995. Quelques éléments sur l'Analyse et le Contrôle des Systèmes Distribués. EMI, Université Mohammed V, Rabat, Maroc.
- [97] J.A. Sethian, 1996. Level set methods. Cambridge monographs on applied and Computational Mathematics.
- [98] J.A. Sethian, 1999. Level set methods and fast marching methods. Evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials sciences. Cambridge University Press.
- [99] J. Sokolowski and J.P. Zolesio, 1992. Introduction to shape optimization, shape sensitivity analysis. Springer series in Computational Mathematics, 16. Springer-Verlag.
- [100] E.D. Sontag, 1990. Mathematical Control Theory : Deterministic Finite Dimensional Systems, Springer-Verlag .
- [101] D. Ucinski, A. El Jai, 1997. On weak spreadability of DPS and its achievement via LQ Control Techniques. IMA Journal on Control and Information Science. Vol. 14, pp 1-22.
- [102] E. Zerrik, 1993. Regional analysis of distributed parameter systems. PHD thesis, University of Sciences Rabat, Morocco.
- [103] E. Zerrik, L. Badraoui and A. El Jai, 1999. Sensors and regional boundary observability of parabolic systems. International Journal of Sensors and Actuators. 75, pp 102-117.
- [104] E. Zerrik, A. Boutoulout and A. Kamal, 1999. Regional gradient controllability of parabolic systems. Applied Mathematics and Computer Sciences. Vol. 9, N. 4, pp 767-787.

- [105] E. Zerrik, A. Boutoulout and A. El Jai, 2000. Actuators and regional boundary controllability of parabolic systems. *International Journal of Systems Sciences*. Vol. 31, N. 1, 73-82.
- [106] E. Zerrik and L. Badraoui, 2000. Sensors characterization for regional boundary observability. *Journal of Applied Mathematics and Computer Sciences*. Vol. 10, N. 2, pp 345-356.
- [107] E. Zerrik and R. Laghrissi, 2001. Regional target control of the wave equation. *International Journal of Systems Sciences*. Vol. 32, N. 10, pp 1233-1242.
- [108] E. Zerrik, A. Kamal and A. Boutoulout, 2001. Regional gradient controllability and actuators. *International Journal of Systems Sciences*. Vol. 33, N. 4, pp 239-246.
- [109] E. Zerrik, A. Boutoulout and H. Bourray, 2001. Boundary strategic actuators. *International Journal of Sensors and Actuators*. 94, pp 197-203.
- [110] E. Zerrik and R. Laghrissi, 2002. Regional boundary controllability for hyperbolic systems, Numerical approach. *Journal of Dynamical and Control Systems*. Vol 8, Issue 3, pp 293-311.
- [111] E. Zerrik, H. Bourray and A. Boutoulout, 2002. Regional boundary observability : Numerical approach. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Sciences*. Vol. 12, N. 2, pp 101-109.
- [112] E. Zerrik, A. Boutoulout and A. Kamal, 2002. Flux target for diffusion process. *IEEE - Proceeding-D, Control Theory and applications*. Vol 149, N 4, pp 349-356.
- [113] E. Zerrik and F. Ghafrani, 2002. Minimum energy control subject to output constraints. Numerical approach. *IEEE - Proceeding-D, Control Theory and applications*. Vol 149, N 1, pp 105-110.
- [114] E. Zerrik and M. Ouzahra, 2003. Regional stabilization for infinite dimensional systems. *International Journal of Control*. Vol. 76, N 1, pp 73-81.
- [115] E. Zerrik and H. Bourray, 2003. Regional gradient observability for diffusion systems. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Sciences*. Vol. 13, N. 2.
- [116] E. Zerrik, H. Bourray and A. El Jai, 2003. Regional flux reconstruction for parabolic systems. *International Journal of Systems Sciences*. Vol. 34, N. 12-13, pp 641-650.
- [117] E. Zerrik and H. Bourray, 2004. Regional observability for semi-linear parabolic systems. Vol 10, N 3, July.

Résumé : Cette thèse concerne l'étude de quelques concepts introduits dans le cadre de l'analyse régionale des Systèmes à Paramètres Distribués. En particulier, les problèmes de compensation des perturbations étalables et protection des zones vulnérables y sont traités. Lorsqu'un système distribué subit une perturbation étalable, certaines zones données (vulnérables) peuvent être atteintes par les effets de cette perturbation. Pour de telles zones nous montrons, en un premier temps, comment remédier à ces effets lorsque celles-ci sont atteintes. Ensuite, nous considérons le problème du contrôle protecteur qui consiste à pouvoir protéger de telles zones avant qu'elles soient atteintes. Plusieurs caractérisations de ces deux types de contrôles (remédiable et protecteur) sont données. Les résultats obtenus pour les systèmes linéaires, sont étendus à une certaine classe de systèmes distribués non linéaires. Pour illustrer ces concepts, quelques exemples et applications sont considérés.

Mots clés : Système distribué, Analyse régionale, Perturbation, Etalabilité, Vulnérabilité, Remédiabilité, Contrôle protecteur.

Abstract : This thesis is related to the study of some concepts introduced in the regional analysis of distributed parameters systems. Particularly, problems of compensation of the spreadable disturbances and protection of the vulnerable areas are considered. When a distributed system undergoes a spreadable disturbance, some given zones (vulnerable) can be reached by the disturbance effect. For such a zones, we show in the first time, how to remedy at this effect when these zones are reached. Moreover, we consider the problem of protector control which consists in being able to protect such a zones before that they will be reached. Several characterizations of these two controls (remediable and protector) are given. The obtained results for the linear systems, are extended to a class of nonlinear systems. To illustrate these concepts, some examples and applications are considered.

Key words : Distributed system, Regional analysis, Disturbance, Spreadability, Vulnerability, Remediability, Protector control.