

UNIVERSITÉ MOHAMMED V - AGDAL
FACULTÉ DES SCIENCES
Rabat



N° d'ordre 2683

THÈSE DE DOCTORAT

Présentée par

Mohamed IBRAHIM

Discipline: **Physique**

Spécialité : **Mécanique**

**TITRE : MODELISATION ET CALCUL DES MURS
PORTEURS EN BETON ARME SOUMIS AUX
EFFETS SISMIQUES PAR LA METHODE DES
ELEMENTS FINIS : PLAQUE MULTICOUCHE
MULTICELLULAIRE**

Soutenue le **Mardi 19 Novembre 2013 à 10 H 00**

Devant le jury

Président :

Ali SOUISSI : PES, Faculté des Sciences de Rabat, Maroc

Examineurs :

Abdellah EL HAMMOUMI : PES, Faculté des Sciences de Rabat, Maroc

Kamal GUERAOU : PES, Faculté des sciences de Rabat, Maroc

Abderrahmane EL HARIF : PES, Faculté des Sciences de Rabat, Maroc

Hicham FIGHRI FASSI : PES, Faculté des Sciences Techniques de Settat,
Maroc

A ma mère

A ma mère

A ma mère

A mon père

A ma future épouse

REMERCIEMENTS

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués au sein du Laboratoire de Mécanique, département de physique, à la Faculté des Sciences de Rabat, sous la direction du professeur Abderrahmane EL HARIF.

En premier lieu, je désire témoigner ma profonde reconnaissance à Monsieur Abderrahmane EL HARIF, mon directeur de thèse, professeur de l'enseignement supérieur au département de physique de la Faculté des Sciences de Rabat, qui m'a initié à la recherche et à l'ingénierie. Je tiens à lui exprimer mes sincères remerciements pour m'avoir intégré dans son équipe, m'avoir proposé ce thème de recherche et pour la confiance qu'il a manifesté à mon égard. A travers lui j'ai appris la rigueur scientifique, je le remercie vivement pour son soutien constant tout au long de cette étude et sa contribution à la mise en valeur de cette thèse.

En deuxième lieu, je voudrais remercier Monsieur Ali SOUISSI, professeur de l'enseignement supérieur au département de mathématique de la Faculté des Sciences de Rabat, qui m'a fait l'honneur d'accepter de présider mon jury malgré ses occupations, qu'il trouve ici l'expression de ma profonde et chaleureuse reconnaissance.

Ensuite, je voudrais exprimer ma profonde gratitude à Monsieur Abdellah EL HAMMOUMI, professeur de l'enseignement supérieur au département de physique de la Faculté des Sciences de Rabat, non seulement en sa qualité de directeur du Laboratoire de Mécanique mais également pour m'avoir accueilli à son Laboratoire depuis mon Master. C'est un honneur pour moi qu'il ait accepté de participer au Jury de ma soutenance entant que rapporteur. Je remercie également Monsieur Kamal GUERAOU, professeur de l'enseignement supérieur au département de physique de la Faculté des Sciences de Rabat, pour avoir accepté de faire un rapport objectif de mon travail, aussi pour avoir accepté de faire partie des membres du Jury. Ma reconnaissance va aussi à l'endroit de Monsieur Hicham FIGHRI FASSI, professeur de l'enseignement supérieur au Laboratoire I2MII de la Faculté des Sciences Techniques de Settat, pour m'avoir honoré de sa présence parmi les membres du Jury et aussi pour avoir rapporté mon travail.

Enfin, à notre collaborateur Monsieur Pierino LESTUZZI, chargé des cours à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne de Suisse, qui nous a apporté un soutien technique sans faille. Je lui exprime ici toute ma reconnaissance et mon amitié pour sa disponibilité et son aide. Ce travail lui doit beaucoup.

RESUME

Le cadre général de ce travail concerne la prédiction du comportement des ouvrages en béton armé et/ou métalliques et en particulier les murs porteurs en béton armé soumis à des charges mécaniques sévères. La modélisation de ces structures sous de telles conditions doit être capable de tenir compte de manière fiable et efficace du comportement discontinu local ainsi que de la réponse globale de l'ouvrage. Le modèle de simulation numérique développé dans ce mémoire de thèse est basé sur la formulation de la méthode des forces (méthode de flexibilité). Un élément fini plaque multicouche multicellulaire de type flexible a été développé.

Ce modèle a été validé, dans un premier temps, par un calcul analytique sur des structures métalliques, des structures en béton et en béton armé. Dans un deuxième temps, nous avons simulé les essais cycliques alternés (sous chargement sismiques) réalisés sur des voiles porteurs en béton armé par une table vibrante.

Le modèle élément fini a été couplé par un modèle de comportement élastoplastique pour les armatures et par un modèle d'endommagement pour le béton.

Les résultats issus de la simulation du comportement cyclique alterné de structures en béton armé, dans des conditions proches de celles du projet, montrent la capacité du modèle à prédire le comportement non-linéaire et les performances post élastiques de ces structures.

Mots clés : Eléments finis multicouches multicellulaires, Méthode des forces, Murs porteurs, béton armé, chargement sismique, calcul à la rupture.

ABSTRACT

The general framework of this scientific work is the behavior prediction of reinforced concrete and / or metal and in particular of reinforced concrete bearing walls under severe mechanical loading. The modeling of these structures under such conditions must be able to consider reliably and efficiently the local discontinuous behavior of the overall response of structure. The numerical simulation model developed in this thesis is based on the formulation of the force method (flexibility method). A finite element plate multilayer multicellular flexibly was developed.

This model has been validated in a first step, an analytical calculation of metal structures, concrete and reinforced concrete structures. In a second step, we simulate alternating cyclic tests (under seismic loading) performed on reinforced concrete bearing walls on a vibrating table.

The finite element model was coupled by a model of elastoplastic comportment for reinforcement and a damage model for concrete.

The results of the simulation of cyclical alternating behavior reinforced concrete structures, in conditions similar to those of project, demonstrate the model's ability to predict the non-linear behavior and post-elastic performance of these structures.

KEYWORDS: Finite element multilayer multicellular, Force method, Bearing walls, Reinforced concrete, Seismic loading, Rupture of calculation.

LISTE DES PARAMETRES

q_z , effort distribué suivant la direction z

q_y , effort distribué suivant la direction y

$\{\Sigma(u)\}$, le vecteur des contraintes généralisées

W_{def} , est le travail intérieur de la plaque ou du système des plaques

W_{ext} , est le travail extérieur de la plaque ou du système des plaques

E, est le module d'Young et E_0 est le module d'Young initial

E_s , est le module d'Young des armatures d'aciers

E_c , est le module d'Young du béton

E_T , est la pente de la courbe en cours d'écrouissage des barres d'aciers

ν , le coefficient de Poisson

$\{d(u)\}$, le vecteur des déformations généralisées

k' , le facteur de correction de cisaillement

h_i et ρ_i , sont l'épaisseur et la masse volumique d'une couche « i »

h , est l'épaisseur d'une poutre ou de la plaque

ρ , est la masse volumique de la plaque

D , endommagement du béton

D_t , endommagements dû à la traction

D_c , endommagements dû à la compression

β , est un paramètre pour ajuster le comportement du modèle (Modèle de Mazars) en cisaillement

$A_{t,c}$, $B_{t,c}$ sont des coefficients du modèle de Mazars identifiés à partir des essais en compression et en traction

α_t , est un paramètre (calculé par un essai de traction) du modèle de Mazars

β_t et β_c , sont deux paramètres homogènes à des contraintes(La Borderie)

ε_{eq} , déformation équivalente

ε_{D0} , seuil d'endommagement

ε_{D0t} , seuil d'endommagement en traction

ε_{D0c} , seuil d'endommagement en compression

$\varepsilon_{el} = \varepsilon_0$, est la déformation élastique

ε_{cu} , est la déformation ultime du béton

ε_{sy} , est la déformation ultime des armatures

f_c , la contrainte ultime en compression du béton

f_t , la contrainte ultime en traction du béton

σ^{tol} , est la contrainte de tolérance

σ_y , est la contrainte la limite élastique des armatures

σ_f , est la contrainte de refermeture de fissure du modèle La borderie

s , est le glissement à un moment donné

s_1, s_2, s_3 , sont des glissements seuils pour les différents étapes de détérioration

τ , est la contrainte de cisaillement

τ_1, τ_3 , sont des contraintes de cisaillement seuils pour les différents étapes de détérioration

τ_f , est la contrainte résiduelle ultime par frottement.

τ_f^+, τ_f^- , sont des contraintes résiduelles seuils de frottement

α_1 , est un paramètre de calcul du modèle de liaison acier-béton

$\{F_{ext}^e\}$, est le vecteur force élémentaire nodal extérieur d'un élément fini

$\{\Sigma_I^r\}$, est le vecteur force élémentaire nodal extérieur réduit d'un élément fini

$[R]$, est la matrice de passage du système sans modes rigides de déformation

$\{q\}$, est le vecteur des déformations généralisées

$\{u^e\}$, est le vecteur des déplacements élémentaires dans le repère local

$\{U^e\}$, est le vecteur des déplacements élémentaires dans le repère global

$[P]$, est la matrice de passage géométrique du repère local au global

W_i , est le poids du point de Gauss

J_a , est la Jacobéen de transformation

$F_{flexinf}^c$, est la matrice de flexibilité de la cellule triangulaire inferieure

$F_{flexsup}^c$, est la matrice de flexibilité de la cellule triangulaire supérieure

$[D_{cmf}(\xi, \eta)]$, est la matrice qui représente les fonctions d'interpolation de la membrane & flexion

$[b_{ct}]$, est la matrice qui représente les fonctions d'interpolation de cisaillement

$[H_{cmf}(\xi, \eta)]$, est la matrice raideur de la membrane & flexion

$[H_{ct}(\xi, \eta)]$, est la matrice raideur de cisaillement

$\{d_{cmf}(\xi, \eta)\}$, est le vecteur des déformations de la membrane & flexion

$\{d_{ct}(\xi, \eta)\}$, est le vecteur des déformations de cisaillement

$[F_{flex}^e]$, est la matrice de flexibilité élémentaire

$[IK^e]$, est la matrice de rigidité élémentaire

$[M_{elem}]$, est la matrice de masse élémentaire

A , est la section de la barre d'acier

ω , est appelé facteur de sur-relaxation

$[K_{tan}(U)]$, est la matrice de rigidité globale tangente

$[IK]$, est la matrice de rigidité globale

$\{R_u\}$, est le vecteur global du redu

$\{F_{int}(U)\}$: Le vecteur global des efforts résistants internes,

$\{F_{ext}(U)\}$: Le vecteur global des sollicitations extérieures appliquées

R_* , est le paramètre d'écrouissage fonction de la déformation plastique cumulée κ et vaut initialement R_0 (le seuil de plasticité)

- σ_{eq} , est la contrainte équivalente de Von Mises
- J_2 , est le second invariant du déviateur des contraintes
- E_p , est l'énergie potentielle totale
- P_g , est charge ponctuelle
- M , est un moment de flexion
- χ , est une courbure
- χ_e , est la courbure à l'état élastique
- M_e , est le moment élastique
- M_p , est le moment plastique
- T , effort de cisaillement
- N , effort normal
- L_p , est la longueur d'une zone plastifiée
- α_e , est le coefficient d'équivalence acier / béton
- f , est le facteur de forme
- I , est le moment d'inertie
- ε'_s , est la déformation de l'acier comprimé
- ε_s , est la déformation de l'acier tendu
- ε_c , est la déformation du béton
- f_b , est la contrainte du béton
- f'_s , est la contrainte de l'acier comprimé
- f_s , est la contrainte de l'acier tendu
- f_e , est la contrainte élastique de l'acier métallique
- δ , est un déplacement (flèche)
- F_c , est la force de compression dans le béton
- α_R , est le coefficient du moment résistant
- M_R , est le moment résistant
- q , est un coefficient d du comportement du sol
- a_g , est l'accélération du sol
- μ_Δ , est le coefficient de ductilité en déplacement

N_E , est la charge normale de calcul

V_E , est la force statique équivalente

h_F , est le bras de levier ou hauteur d'application de V_E

M_E , est un moment de flexion

\varnothing_e , est le diamètre nominal des armatures de bord

\varnothing_{wv} , est le diamètre nominal des armatures d'âme

$f_{y,e}$, est la contrainte de plastification des armatures de bord

$f_{y,wv}$, est la contrainte de plastification des armatures d'âme

f_{te} , est la limite élastique des armatures transversales

α_s, β_s, k_s , sont des paramètres de calcul d'ajustement

ρ , est le pourcentage d'armatures verticales concentrées

ρ_0 , est le pourcentage d'armatures verticales uniformément réparties

ρ_t , est pourcentage d'armatures horizontales uniformément réparties

l_w , est la largeur d'un voile

b , est la largeur d'une poutre

L , est la longueur de la poutre ou de la plaque

Δ_{tot} , est le déplacement inélastique total ou maximal de la structure

Δ_y , est le déplacement de la plastification

V_k , est la vitesse du chargement cyclique

F_y , est la force latérale appliquée ou résistance nominale

Δw , est le déplacement latéral

S_e , est l'espacement vertical des aciers transversaux S_h de bords

S_{wv} , est l'espacement vertical des aciers transversaux S_h d'âme

A_{gt} , est la déformation de rupture

$R_{P0.2}$, est la contrainte de plastification,

R_m , est la résistance maximale

Δ_f , déplacement résultant

Table des matières

INTRODUCTION GENERALE	5
INTRODUCTION.....	5
ECHELLE ET NIVEAU DE MODELISATION	7
ORGANISATION DU MEMOIRE	9
CHAPITRE I - ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE : THEORIE DES PLAQUES, COMPORTEMENT MECANIQUE ET MODELISATION NUMERIQUE DU BETON ET DE L'ACIER	11
INTRODUCTION.....	12
I.1 : ELEMENTS DE LA THEORIE DES PLAQUES	12
I.1.1 : Principe des travaux virtuels	14
I.2 : ELEMENT FINI PLAQUE TIMOSHENKO A 3 NŒUDS AVEC FONCTION D'INTERPOLATION D'ORDRE SUPERIEUR.....	15
I.2.1- Prise en compte du cisaillement transverse.....	16
I.2.1.1- La théorie dite de Hencky	16
I.2.1.2- La théorie dite de Reissner (DST et DSQ)	17
I.2.1.3- Equivalence des approches Hencky-Love-Kirchhoff et Reissner	18
I.2.2 : Fonction d'interpolation et matrice élémentaire.....	19
I.2.2.1- Equation d'équilibre	20
I.2.2.2- Blocage par cisaillement.....	21
I.2.2.3- Un élément fini Timoshenko à trois nœuds	22
I.2.3-Efforts internes et efforts extérieurs.....	25
I.3- MATRICE MASSE ELEMENTAIRE	26
I.4-COMPORTEMENT MECANIQUE DU BETON	27
I.4.1-Chargement cyclique de traction – compression.....	27
I.5-MODELISATION NUMERIQUE DE COMPORTEMENT DU BETON	28
I.5.1 : Modèles d'endommagement	28
I.5.1.1- Modèle d'endommagement de Mazars	29

I.5.1.2-Modèle d'endommagement de La borderie	32
I.6-COMPORTEMENT MECANIQUE DE L'ACIER.....	33
I.6.1-Chargement cyclique de traction – compression.....	33
I.7-MODELISATION NUMERIQUE DE COMPORTEMENT DE L'ACIER	34
I.7.1- Modèle élastoplastique simplifié.....	34
I.7.3-Modèle de la liaison Acier-Béton.....	34
CONCLUSION	36
CHAPITRE II- ELEMENT FINI PLAQUE MULTICOUCHE MULTICELLULAIRE	37
INTRODUCTION.....	38
II.1-FORMULATION ELEMENT FINI MULTICOUCHE MULTICELLULAIRE	38
II.1.1-Méthode des flexibilités	39
II.1.1.1- Calcul du travail extérieur d'un élément fini W_{ext}^e	43
II.1.2-Formulation Elément Fini Plaque Multicouche Multicellulaire	50
II.1.3-Matrice de rigidité et de flexibilité élémentaire	54
II.1.4-Matrice de passage du repère local au global	56
II.1.5-Calcul de la Matrice Tangente élémentaire	58
II.1.6-Présentation d'un élément fini multicouche multicellulaire DKT (Discrete Kirchhoff Triangle)	59
II.2- APPROCHE FIBRE D'UN ELEMENT FINI BARRE A 2 NŒUDS AVEC FONCTION D'INTERPOLATION.....	60
II.2.1-Principe des travaux virtuels	63
II.2.2-Elément fini barre Euler-Bernoulli à deux nœuds avec fonctions d'interpolation du premier ordre ..	63
II.2.3-Matrice Masse élémentaire	66
II.3-ANALYSE NON LINEAIRE DE STRUCTURE	67
I.3.1-Introduction.....	67
I.3.1-Généralité sur la méthode de Newton-Raphson.....	68

II.4-METHODE DE CALCUL NON LINEAIRE APPLIQUEE AUX ELEMENTS FINIS PLAQUES MULTICOUCHES MULTICELLULAIRES.....	70
II.4.1-Elément fini plaque multicouche multicellulaire	70
II.4.1.1-Au niveau de la cellule	72
II.4.1.2-Evaluation de l'endommagement	73
II.4.1.3-Critère de "Von Mises"	73
II.4.2-Elément fini barre (armatures).....	74
II.4.2.1-Modèle élastoplastique simplifié.....	74
II.4.2.2-Au niveau de l'élément fini barre.....	74
CONCLUSION	75
CHAPITRE III- ANALYSE PAR ELEMENT FINI PLAQUE DE LA REPONSE D'UNE STRUCTURE SOUS CHARGEMENT STATIQUE MONOTONE CROISSANT A LA RUINE.....	76
INTRODUCTION.....	77
III.1-ETUDE D'UNE PLAQUE HOMOGENE : TEST DE VALIDATION, COMPORTEMENT LINEAIRE D'UN MATERIAU ISOTROPE ET HOMOGENE	78
III.2-ETUDE D'UNE POUTRE METALLIQUE : ROTULE PLASTIQUE.....	83
III.3-ETUDE D'UNE POUTRE EN BETON ARME : PLASTICITE NON LINEAIRE.	87
III.3.1-Flexion simple d'une poutre en béton armé	87
III.3.2-Traction simple d'une poutre en béton armé.....	95
III.4-ETUDE DES VOILES PORTEURS EN BETON ARME SOUS CHARGEMENT CYCLIQUE : QUASI-STATIQUE.....	96
III.4.1-Modélisation éléments finis et algorithmes de resolution.....	103
CONCLUSION	105
CHAPITRE IV- ANALYSE CYCLIQUE DES VOILES EN BETON ARME DE SECTION RECTANGULAIRE SOUS CHARGEMENTS SISMIQUES : CAS DES VOILES PORTEURS ELANCES EN BETON ARME	106
INTRODUCTION.....	107

IV.1- DIMENSIONNEMENT DES MURS PORTEURS EN BETON ARME	109
IV.2-ESSAIS EXPERIMENTAUX	110
IV.3- MODELISATION ET DISCRETISATION DES VOILES EN BETON ARME..	113
IV.4-CARACTERISTIQUES ET COMPORTEMENT DES ARMATURES.....	117
IV.5-MODELISATION DU DECOLLEMENT A LA BASE.....	119
IV.6-APPLICATIONS NUMERIQUES ET INTERPRETATIONS DES RESULTATS	122
IV.6.1-Comportement global force-déplacement latéraux des voiles en béton armé	122
IV.6.2-Comportement semi-local en zone critique	126
IV.6.3-Bilan énergétique	130
CONCLUSION	132
CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES	133
CONCLUSIONS	133
PERSPECTIVES	134
ANNEXE A	135
BIBLIOGRAPHIE	140

INTRODUCTION GENERALE

Introduction

Les risques naturels sont à l'origine des situations socio - économiques coûteuses et quelquefois graves en termes de nombre de victimes et de blessés. Dans la famille des risques naturels, les séismes occupent le premier plan, provoquant assez systématiquement des dégâts dans les ouvrages de génie civil (bâtiments, ponts, centrales nucléaires, barrages...) [AF 02 ; 03 ; 04]. C'est la raison pour laquelle la prévention et la connaissance du comportement aux séismes de ces ouvrages sont indispensables.

Dans le but d'étudier le comportement des murs en béton armé sous sollicitation sismique, plusieurs programmes de recherche ont été réalisés ces dernières années. Le projet CASSBA [BR 94] (Conception et Analyse Sismique des Structures en Béton Armé) a démontré le bon fonctionnement de voiles faiblement armés, simplement posés sur une table vibrante. Le programme CAMUS [CA 01] [CO 00] [BI 02] (Conception et Analyse des Murs sous Séisme) s'inscrivait dans le cadre de la maîtrise du risque sismique pour des voiles en béton armé dimensionnés selon l'Eurocode 8 ou les règles PS92, simplement posés sur une couche de sable ou encastrés sur la table sismique et sollicités dans leur plan. L'objectif scientifique de ces programmes est de progresser dans la connaissance du comportement des ouvrages sous séismes et en particulier sur la prédiction du comportement sismique des structures en Béton Armé.

Dans la protection parasismique des structures, la philosophie de conception sur la base d'un comportement élastique linéaire des structures est maintenant délaissée en faveur d'une approche adoptant un comportement non linéaire et/ou d'endommagement [AB 07] [NG 06.a, b, c] [MA 84 ; 90 ; 05 ; 06]. L'avantage de l'adoption du comportement non linéaire d'une structure est mis en évidence depuis longtemps. Les dommages subis par les éléments structuraux jouent le rôle d'un filtre, limitant le niveau des sollicitations. Cette conception basée sur l'aspect ductile des mécanismes cinématiques exige toutefois une très bonne maîtrise des non-linéarités qui peuvent se développer dans les structures durant un séisme de forte

intensité [KO 00 ; 03 ; 04, 05.a ; 05.b]. L'adoption du comportement d'endommagement permet une modélisation des propriétés mécano-thermiques [MO 07].



Figure 1. 1 : endommagement par fissuration d'un voile porteur



*Figure 1.2 : effondrement d'un pont suite à son mouvement de pendule généré par le séisme
(Séisme de Kobe)*

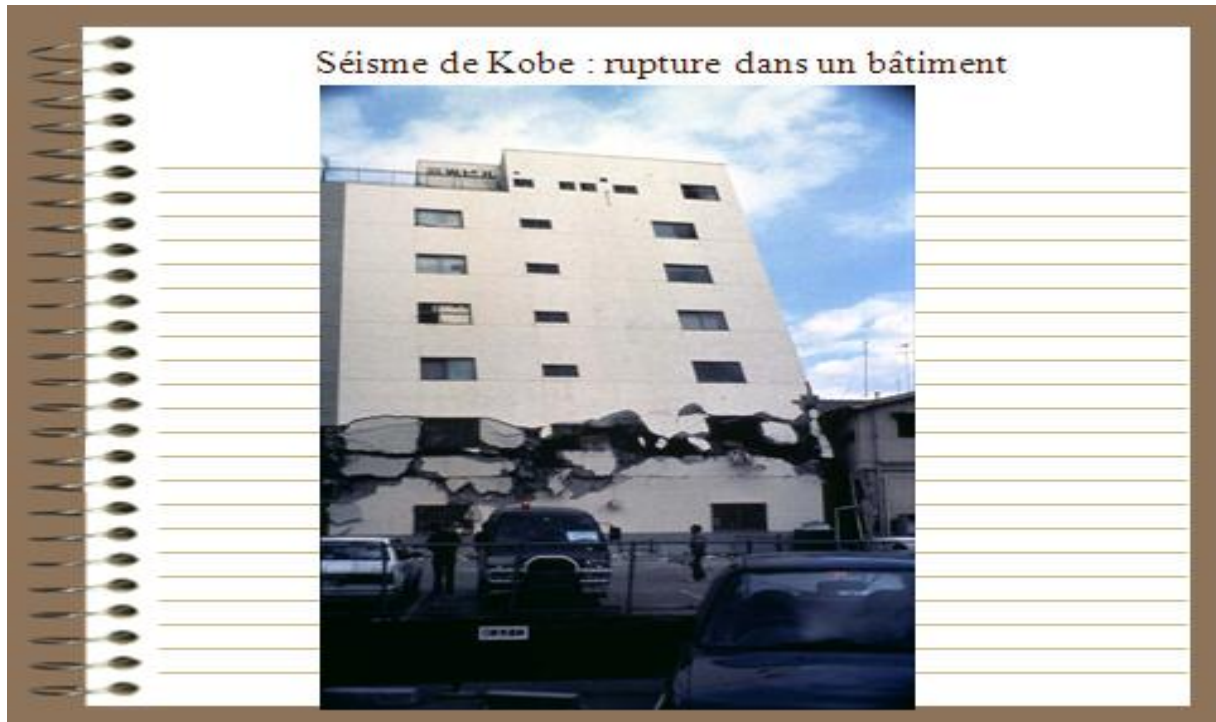


Figure 1.3 : rupture dans un bâtiment (Séisme de Kobe)

Dans cette étude, nous nous intéressons particulièrement aux ouvrages ayant comme principaux éléments de résistance des voiles en béton. Les voiles sont des structures verticales à deux dimensions. Ils présentent généralement une grande résistance et rigidité vis-à-vis des forces horizontales dans leur plan. Ils sont très présents dans les constructions notamment en Génie civil. Ils jouent un rôle très important pour la sécurité sous chargement sismique [DA 85].

Echelle et niveau de modélisation

La modélisation des structures passe d'abord par le choix d'un niveau de modélisation et d'une échelle de discrétisation. Nous pouvons distinguer quatre niveaux de modélisation [ME 95] :

Le niveau géologique : il vise à traiter une structure dans un environnement naturel par référence à des données géologiques. Les principales caractéristiques de l'ouvrage sont prises en compte même si sa géométrie peut être simplifiée. Le but de ce type de modélisation est de déterminer les déformations du sol et celles de l'ouvrage. Ce niveau de modélisation est bien adapté à la simulation des ouvrages géotechniques comme les ouvrages de soutènement et les barrages.

Le niveau global : il vise à traiter une structure dans son ensemble, comme un bâtiment modélisé par des éléments poutres ou plaques et/ou coques par exemple.

Le niveau semi - local : il correspond à l'étude d'un élément de structure. Pour un bâtiment, c'est le comportement des planchers soumis à des charges localisées qui peut être visé par exemple.

Le niveau local : il correspond à l'étude d'une partie détaillée de la structure. Pour un bâtiment, il s'agit des parties dont les dimensions sont faibles comparés aux éléments structuraux principaux (planchers, voiles...).

Trois échelles de discrétisation de structures par éléments finis peuvent dans ce cadre être définies [MI 91] :

L'échelle globale : le comportement inélastique de la section courante, prise dans son ensemble, est défini à partir des lois de chaque matériau, formulé directement en fonction des contraintes généralisées que sont les efforts résultants sur une section (effort normal, moment fléchissant ...).

Différents types de lois existent : lois pour la flexion, pour le cisaillement, pour la traction - compression. Elles conduisent à des relations de type moment - courbure, effort normal - allongement, moment de torsion - rotation [CL 06] [TA 70]. Les interactions entre deux efforts généralisés peuvent également être prises en compte en définissant des surfaces limites dans l'espace des contraintes généralisées et en appliquant la théorie de la plasticité. Cette approche globale permet d'obtenir des temps de calcul réduits mais ne donne pas d'informations sur les comportements locaux (fissurations par exemple). Elle se limite aux structures de type poutre, la généralisation aux plaques et aux coques demeurant très délicate. Le concept de macro - élément fait aussi partie de cette échelle de discrétisation. Le comportement non-linéaire global est alors exprimé en termes de variables globales identifiées à partir d'analyses locales [EL 92] [FL 93] [DA 98] [CR 01.a ; 01.b ; 02] [GR 05].

L'échelle locale : la discrétisation est réalisée avec les éléments de milieu continu, de type bidimensionnels (2D) ou tridimensionnels (3D). La loi de comportement du matériau est une relation de type contrainte - déformation. Cette modélisation, très fine, permet d'obtenir des informations locales sur l'état de fissuration, d'endommagement, de plastification du matériau, car l'état du matériau est pris en compte en chaque point d'intégration de l'élément fini considéré. Cependant, l'analyse est relativement lourde et nécessite des stockages et des temps de calcul très importants [IL 00.a ; 00.b], [SA 03].

L'échelle semi - locale : elle constitue un compromis entre les deux approches précédentes. Le champ des déplacements est décrit par les déplacements et les rotations d'un élément poutre, plaque ou coque,

avec les hypothèses cinématiques classiques. Le comportement des matériaux est traité au niveau local. L'intégration du modèle rhéologique est en général réalisée par une intégration numérique sur la hauteur (en 2D) [OW 80] [DU 97] [GH 98 ; 02] ou dans les deux directions (3D) [GU 94] [SP 96a ; 96b] [PE 99] [KO 00 ; 04 ; 05a] [MA 06].

La simulation du fonctionnement des structures sous chargement sismique conduit généralement à des problèmes de grande taille. L'échelle locale permet d'aborder des problèmes complexes tels que le cisaillement non-linéaire et la réponse d'un ouvrage jusqu'à la ruine. Néanmoins, cette approche est très délicate à mettre en œuvre et demande beaucoup d'expérience de la part de l'utilisateur. C'est la raison pour laquelle les travaux présentés dans ce mémoire de thèse se situent d'abord au niveau global avec une discrétisation semi-globale, puis ensuite une description du niveau local sera présentée. Plus spécifiquement, nous adoptons des éléments finis plaques multicouches multicellulaires dont plusieurs formulations seront présentées en détail par la suite.

Organisation du mémoire

Ce travail de thèse sera développé en quatre chapitres :

- ❖ **Le chapitre 1** débutera par une synthèse bibliographique sur le Comportement Mécanique et Modélisation numérique du béton et de l'acier. Plusieurs modèles numériques seront également présentés.

- ❖ **Le chapitre 2** présentera la théorie permettant de mettre en place les éléments plaques Multicouches Multicellulaires. Après une introduction qui porte sur l'intérêt des méthodes simplifiées, l'échelle de modélisation et de discrétisation, plusieurs éléments finis plaques Multicouches Multicellulaires de cinématique Timoshenko et Euler - Bernoulli seront détaillés. Dans ce cadre, les éléments finis plaques Multicouches Multicellulaires de type Timoshenko (flexibilité-FLX) et de Kirchhoff (Discrete Kirchhoff Triangle-DKT) sont choisis pour le béton ainsi que les éléments finis barre de type Euler-Bernoulli pour les armatures. Des exemples d'applications avec ces types d'éléments seront présentés. Ils concernent la modélisation des essais sur les poutres et les murs en béton armé soumis à des chargements cycliques.

- ❖ **Le chapitre 3** se basera sur une Analyse de la Réponse d'une Structure sous Chargement Statique Monotone Croissant à la Ruine. Ici, nous avons étudié plusieurs structures (poutre en béton armé, poutre métallique, plaque en béton, voiles en béton armé). Nous avons

présenté les résultats d'un calcul analytique par le BAEL 91(**BAEL 91/A.4.5.1**) et l'Eurocode [CP 02] [EU 92. A ; 92.a] [EU 97.a ; 97.b], et les résultats des essais sur les voiles en béton armé [AL 99.a ; 99.b ; 07] [NZ 95] en confrontation avec ceux du modèle numérique. Ces études nous ont permis de valider le modèle numérique.

- ❖ **Le chapitre 4 est** consacré à l'Analyse Cyclique des voiles en béton armé de section rectangulaire en béton armé sous chargement sismique et plus précisément les voiles porteurs élancés en béton armé. On présentera dans ce chapitre une comparaison entre les résultats du modèle numérique et ceux des essais sur des voiles porteurs élancés, en béton armé. En effet, ces voiles sont semblables à ceux utilisés dans le domaine de la construction nucléaire. Ils sont soumis à des efforts dynamiques de cisaillement.

**Chapitre I - ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE : THEORIE DES
PLAQUES, COMPORTEMENT MECANIQUE ET
MODELISATION NUMERIQUE DU BETON
ET DE L'ACIER**

Introduction

Le modèle développé dans cette thèse est basé sur la théorie des plaques. Dans ce premier chapitre, nous présentons, dans un premier temps, à l'échelle globale plusieurs éléments finis de la théorie Hencky-Love-Kirchhoff (DKT, DKTG...) et de la théorie de Reissner (DST, DSQ) tout en mettant en évidence certains problèmes numériques que rencontre les chercheurs notamment celui du blocage par cisaillement. Nous ferons quelques propositions parmi les solutions présentes dans la bibliographie qui permettront de mieux gérer ce problème.

Dans un deuxième temps, nous allons présenter également quelques résultats relatifs au comportement mécanique et modélisation numérique du béton et de l'acier présents dans la littérature [NG 6b]. Après avoir donné la description de certains éléments finis de la théorie des plaques, nous présenterons au cours de ce chapitre plusieurs formulations des éléments finis plaques de cinématique Timoshenko, Kirchhoff et Euler- Bernoulli existantes dans la bibliographie [JE 90.a ; 90.b] [KO 00] [NG 06.c].

I.1 : Eléments de la théorie des plaques

Soit une plaque droite 3D de longueur L et de largeur l orientée selon les directions respectives x et y et soumise à un effort distribué q_z figure 1.4.

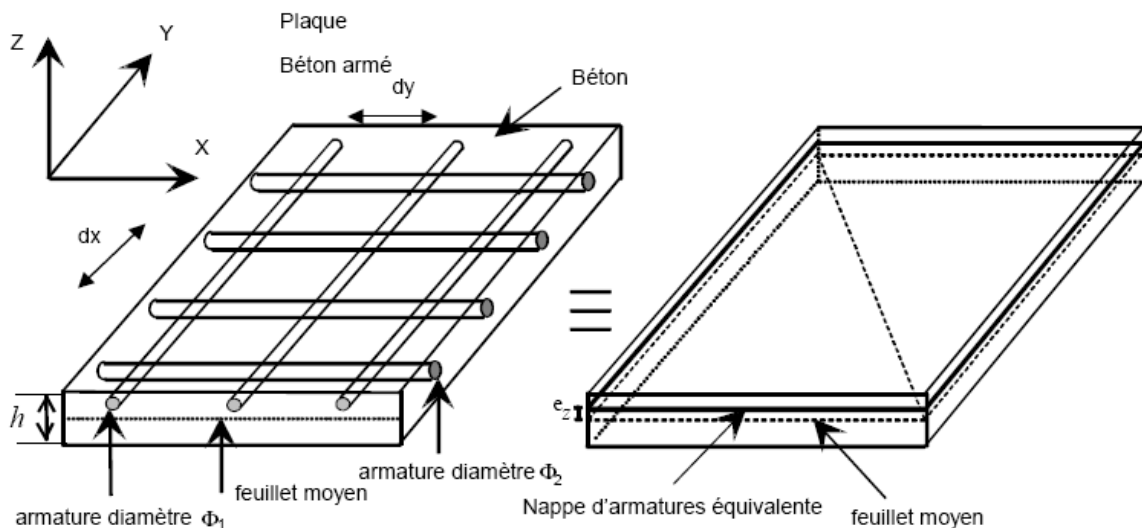


Figure 1.4 : Dalle en béton armé

Les plaques sont des structures tridimensionnelles dont une dimension, l'épaisseur h , est très inférieure aux autres dimensions. L'hypothèse de base est donc que dans cette direction la déformation longitudinale est nulle (la contrainte correspondante est négligée). Cela se traduit commodément par

$\sigma_z \equiv 0$ dans un système d'axe local lié à la plaque. Pour des raisons d'interprétation physique, c'est dans ce système que sont généralement calculés tous les déplacements, déformations et contraintes.

En tout point de cette surface et dans les axes absolus, trois déplacements et les trois rotations usuels sont notés $u_x, u_y, u_z, \beta_x, \beta_y, \beta_z$.

Dans les axes locaux ils deviennent $u, v, w, \beta_x, \beta_y$. La flèche w est une fonction de x et y seulement : $w = w_0(x, y)$ et les rotations sont celles de la normale à la plaque. La rotation locale β_z dans le plan de la plaque est négligée [PH 92].

Par ailleurs, ces éléments reposent sur la théorie des plaques en petits déplacements et petites déformations selon laquelle :

L'hypothèse des poutres selon laquelle les sections droites restent droites après déformation est remplacée pour les plaques par l'hypothèse selon laquelle les points matériels situés sur une normale à la surface moyenne non déformée restent sur une droite dans la configuration déformée. Il résulte de cette approche que les champs de déplacements varient linéairement dans l'épaisseur de la plaque. Si l'on désigne par u, v, w les déplacements d'un point $M(x, y, z)$ suivant x, y, z , on a ainsi la cinématique de Hencky-Mindlin.

$$\begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0(x, y) \\ v_0(x, y) \\ w_0(x, y) \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \theta_y(x, y) \\ -\theta_x(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0(x, y) \\ v_0(x, y) \\ w_0(x, y) \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \beta_x(x, y) \\ \beta_y(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Où u_0, v_0, w_0 sont les déplacements de la surface moyenne et θ_x, θ_y les rotations de cette surface par rapport aux deux axes x et y respectivement. On préfère introduire les deux rotations telles que : $\beta_x(x, y) = \theta_y(x, y)$ et $\beta_y(x, y) = -\theta_x(x, y)$.

Les déformations tridimensionnelles en tout point, avec la cinématique introduite précédemment, sont ainsi données par :

$$\varepsilon_{xx} = e_{xx} + zk_{xx}, \varepsilon_{yy} = e_{yy} + zk_{yy}, \varepsilon_{xy} = e_{xy} + zk_{xy}, \gamma_x = 2\varepsilon_{xz}, \gamma_y = 2\varepsilon_{yz} \quad (2.a)$$

Où e_{xx}, e_{yy} et e_{xy} sont les déformations membranaires de la surface moyenne, γ_x et γ_y les déformations associées aux cisaillements transverses, et k_{xx}, k_{yy}, k_{xy} les déformations de flexion (courbures) de la surface moyenne, qui s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 e_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} & e_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} & \gamma_{xy} &= 2e_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} & \gamma_x &= \beta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 \gamma_y &= \beta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} & k_{xx} &= \frac{\partial \beta_x}{\partial x} & k_{yy} &= \frac{\partial \beta_y}{\partial y} & \chi_{xy} &= 2k_{xy} = \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{2.b}$$

Remarque :

Dans les théories de plaque, l'introduction de β_x et β_y permet de symétriser les formulations des déformations. Nous verrons par la suite les équations d'équilibre. Dans les théories de coque on utilise plutôt θ_x et θ_y les couples associés sont M_x et M_y par rapport à x et y .

I.1.1 : Principe des travaux virtuels

Travail de déformation

L'expression générale du travail de déformation 3D pour une plaque vaut :

$$W_{def} = \int_s \int_{-h/2}^{h/2} (\varepsilon_{xx} \sigma_{xx} + \varepsilon_{yy} \sigma_{yy} + 2\varepsilon_{xy} \sigma_{xy} + \gamma_x \sigma_{xz} + \gamma_y \sigma_{yz}) dS dz \tag{3}$$

Où $dS = dx dy$ l'élément de la surface moyenne et dz la position dans l'épaisseur de la plaque varie entre $-h/2$ et $+h/2$.

En adoptant la cinématique de Hencky-Mindlin, on identifie le travail des efforts intérieurs :

$$W_{def} = \int_s (e_{xx} N_{xx} + e_{yy} N_{yy} + 2e_{xy} N_{xy} + \gamma_x T_x + \gamma_y T_y + k_{xx} M_{xx} + k_{yy} M_{yy} + 2k_{xy} M_{xy}) dS \tag{4}$$

$$\text{Où } N = \begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} dz, \quad M = \begin{pmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} z dz, \quad T = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} dz \tag{5}$$

Avec N_{xx}, N_{yy}, N_{xy} sont les efforts résultants de membrane(en N/m) ; M_{xx}, M_{yy} sont les efforts résultants de flexion ou moments (en N) et M_{xy} est le moment de torsion (en N), T_x, T_y sont les efforts résultants de cisaillement ou efforts tranchants(en N/m).

Travail des forces et couples extérieurs

Le travail des forces et couples s'exerçant sur la plaque s'exprime de la manière suivante :

$$W_{ext} = \int_s \int_{-h/2}^{h/2} f_i u_i dz dx dy + \int_{s_q} g_i u_i dx dy + \int_C \int_{-h/2}^{h/2} g'_i u_i dz dl \tag{6}$$

Où $\{u_i\}^T = \{u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)\}$ et f_i, g_i, g_i' sont les efforts volumiques, surfaciques et du contour s'exerçant sur la plaque, respectivement. S_q est la partie de la surface S où le champ des déplacements u_i est différent de zéro et C est la partie du contour de la plaque sur laquelle les efforts g_i' du contour sont appliqués. Avec $g_i = \sigma_{ij}n_j$ et $g_i' = \sigma'_{ij}n'_j$, n_j et n'_j les normales à la surface (inférieure ou supérieure) et à la facette du contour respectivement (voir le détail du calcul en Annexe A.1). En absence des efforts de volumes, des efforts du contour et dans le cas où la plaque est soumise à un seul effort surfacique distribué q_z , en appliquant la cinématique de Hencky-Mindlin à l'équation 6, on obtient ainsi :

$$W_{ext} = \int_{S_q} w_0(x, y) q_z dx dy = \int_{S_q} w_0(x, y) g_i dx dy \quad (7)$$

Le principe des travaux virtuels peut s'écrire dans ce cas :

$$\int_S (\delta e_{xx} N_{xx} + \delta e_{yy} N_{yy} + 2\delta e_{xy} N_{xy} + \delta \gamma_x T_x + \delta \gamma_y T_y + \delta k_{xx} M_{xx} + \delta k_{yy} M_{yy} + 2\delta k_{xy} M_{xy}) dS = W_{ext} \quad (8)$$

I.2 : Élément fini plaque Timoshenko à 3 nœuds avec fonction d'interpolation d'ordre supérieur

Considérons un élément fini plaque triangulaire Timoshenko 3D à 3 nœuds, repéré dans le plan(x, y), soumis à un effort distribué q_z , h est l'épaisseur de la plaque discrétisée en cellules de coordonnées x_i, y_i et z_i . Nous présentons ici une généralisation où le plan de référence choisi par la plaque est indépendant de toute considération géométrique, inertielle ou mécanique. Chaque nœud a cinq degrés de liberté, trois de translation et deux de rotation stockés dans un champ de déplacements nodaux de dimension 15.

Loi de comportement

La théorie des plaques et les équations d'élasticité (Loi de comportement de contraintes planes) donnent :

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) \quad \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \quad (9.a)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{xy} \quad \sigma_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{xz} \quad \sigma_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{yz} \quad (9.b)$$

La relation entre le vecteur des contraintes généralisées $\{\Sigma(u)\}$ et le vecteur des déformations généralisées $\{d(u)\}$ dans l'épaisseur prend la forme suivant :

$$\{\Sigma(u)\} = [D]\{d(u)\} \quad (10)$$

Où

$$\{d(u)\}^T = \{e_{xx}, e_{yy}, \gamma_{xy}, \gamma_x, \gamma_y, k_{xx}, k_{yy}, \chi_{xy}\} \quad (11)$$

$$\{\Sigma(u)\}^T = \{N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}, T_x, T_y, M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}\} \quad (12)$$

$[D]$ est la matrice de complaisance.

Les éléments d_{ij} de la matrice $[D]$ sont obtenus par l'intégration des contraintes (eqt.5) et en introduisant la loi de comportement (eqt. 9 a-b) :

$$\begin{aligned} d_{11} = d_{22} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(x, y, z)}{1-\nu^2} dz, & d_{12} = d_{21} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\nu E(x, y, z)}{1-\nu^2} dz, & d_{44} = d_{55} &= k' \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(x, y, z)}{4(1+\nu)} dz, \\ d_{66} = d_{77} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{z^2 E(x, y, z)}{1-\nu^2} dz, & d_{67} = d_{76} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\nu z^2 E(x, y, z)}{1-\nu^2} dz, & d_{88} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{z^2 E(x, y, z)}{4(1+\nu)} dz, \\ d_{33} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(x, y, z)}{4(1+\nu)} dz, & d_{17} = d_{71} = d_{26} = d_{62} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\nu z E(x, y, z)}{1-\nu^2} dz, & d_{38} = d_{83} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{z E(x, y, z)}{4(1+\nu)} dz \\ d_{16} = d_{61} = d_{27} = d_{72} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{z E(x, y, z)}{1-\nu^2} dz \end{aligned}$$

I.2.1- Prise en compte du cisaillement transverse

La prise en compte du cisaillement transverse dépend du facteur de correction déterminé à priori par des équivalences énergétiques avec des modèles 3D, de façon à ce que la rigidité en cisaillement transverse du modèle de plaque soit la plus proche possible de celle définie par la théorie de l'élasticité tridimensionnelle. Deux théories incluant la déformation due à l'effort tranchant existent et sont présentées dans [D 92].

I.2.1.1- La théorie dite de Hencky

Cette théorie ainsi que celle de Love-Kirchhoff qui en découle immédiatement repose sur la cinématique présentée au [§I.1]. La relation de comportement est habituelle et le facteur de correction de cisaillement vaut $k' = 1$.

Remarque :

Lorsque l'on ne prend pas en compte les distorsions transverses γ_x et γ_y dans la théorie de Hencky, le modèle obtenu est celui de Love-Kirchhoff "Discrete Kirchhoff" (DKT et DKQ). Les deux rotations de la surface moyenne sont alors liées aux déplacements de la surface moyenne par la relation suivante :

$$\begin{cases} \gamma_x = 0 \Rightarrow \beta_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \gamma_y = 0 \Rightarrow \beta_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \end{cases} \quad (14)$$

La nouvelle loi de comportement s'écrit finalement dans ce cas :

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}), \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}), \sigma_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\varepsilon_{xy} \quad (15)$$

Et la théorie de Mindlin qui ne néglige pas cette dernière hypothèse n'a de réalité physique que pour des plaques épaisses [PH 92].

Contrairement à la plaque Timoshenko, la plaque Euler-Bernoulli néglige aussi les déformations dues au cisaillement. En appliquant le principe des travaux virtuels, nous obtenons finalement :

$$\int_s (\delta e_{xx} N_{xx} + \delta e_{yy} N_{yy} + 2\delta e_{xy} N_{xy} + \delta k_{xx} M_{xx} + \delta k_{yy} M_{yy} + 2\delta k_{xy} M_{xy}) dS = W_{ext} \quad (16)$$

Les efforts tranchants T_x et T_y ne peuvent plus être calculés par intégration des contraintes de cisaillement puisque ces dernières sont négligées. Après, nous présenterons en détail plusieurs éléments finis de plaque multicellulaire existant dans la littérature basés sur la théorie de Timoshenko ou Euler-Bernoulli.

1.2.1.2- La théorie dite de Reissner (DST et DSQ)

La seconde théorie, dite de Reissner, est développée à partir des contraintes. La variation des contraintes de membrane (σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy}) est supposée linéaire dans l'épaisseur comme dans le cas de la théorie de Hencky où cela résulte de la linéarité de la variation des déformations de membrane avec l'épaisseur. Cependant, alors que l'on suppose, dans la théorie de Hencky, la distorsion constante dans l'épaisseur et donc les contraintes de cisaillement, ce qui viole les conditions aux limites $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ sur les faces supérieure et inférieure de la plaque du fait de la loi de comportement énoncée au (§1.2). On utilise dans le cadre de la théorie de Reissner les équations d'équilibre pour en déduire la variation des contraintes de cisaillement dans

l'épaisseur de la plaque, en respectant notamment les conditions d'équilibre sur les faces supérieure et inférieure de la plaque. L'énergie interne du modèle obtenue après résolution des équations d'équilibre en 3D, pour la flexion uniquement, avec la variation des contraintes planes suivant z , fait apparaître, pour un matériau élastique, une relation entre les rotations et la flèche moyenne et les efforts résultants. C'est dans cette relation qu'apparaît le facteur de correction de cisaillement de $k' = 5/6$ au lieu de 1 dans la relation qui lie l'effort tranchant à la distorsion pour une plaque homogène et isotrope. La détermination des facteurs de correction de cisaillement pour des plaques orthotropes ou des plaques stratifiées n'est pas présentée dans ce travail.

I.2.1.3- Equivalence des approches Hencky-Love-Kirchhoff et Reissner

Si l'on assimile les pentes de la surface moyenne β_x, β_y aux moyennes des pentes dans l'épaisseur de la plaque et la flèche w à la flèche moyenne, la seule différence entre la théorie de Hencky et celle de Reissner est le coefficient de correction de cisaillement transverse de $5/6$ au lieu de 1. Cette différence est due au fait que les hypothèses de départ sont de nature différente et surtout que les variables choisies ne sont pas les mêmes. En effet, la flèche sur la surface moyenne n'est pas égale à la moyenne des flèches sur l'épaisseur de la plaque. Il est donc normal que des relations de comportement qui font intervenir des variables différentes ne soient pas identiques.

Le fait de devoir résoudre au niveau éléments finis des problèmes en déplacements plutôt que des problèmes en contraintes par interpolation des déplacements nous amène à utiliser l'approche équivalente en déplacements du problème de Reissner formulé en contraintes.

Remarque :

Dans les faits, les éléments DKT, DKTG, DKQG et DKQ reposent sur la théorie de Hencky-Love-Kirchhoff et les éléments "Discrete Shear"(DST et DSQ) reposent sur la théorie de Reissner. Les formulations "Discrete Shear" ou "Discrete Kirchhoff" de la cinématique, avec ou sans distorsion transverse respectivement, permettent de bons résultats en termes de déplacements et d'analyse modale.

La détermination des facteurs de correction repose sur une autre théorie, celle de Mindlin, sur des équivalences de fréquence propre associée au mode de vibration par cisaillement

transverse. On obtient alors $k' = \pi^2 / 12$, valeur très proche de 5/6 pour les éléments DST et DSQ dans le cas isotrope.

Dans le cadre de la plasticité le problème du choix du coefficient de correction du cisaillement transverse se pose car l'approche équivalente en déplacements du problème de Reissner formulée en contraintes fait intervenir la non-linéarité du comportement. On ne peut donc pas en déduire, comme c'est le cas pour des matériaux élastiques une valeur du coefficient de correction du cisaillement transverse. La plasticité n'est donc pas développée pour ces éléments.

Les éléments DKT, DKTG et DST sont des éléments iso-paramétriques triangulaires. Les éléments DKQ, DKQG et DSQ sont des éléments iso-paramétriques quadrilatéraux. Dans cette thèse, seuls les éléments triangulaires seront traités.

I.2.2 : Fonction d'interpolation et matrice élémentaire

Considérons un champ de déplacements continu en tout point du plan moyen x, y en fonction du champ de déplacements discrétisés.

$$\{U\} = [N]\{u^e\} \quad (17)$$

Où $[N]$ la matrice des fonctions d'interpolation.

$$\{u^e\}^T = \{u_{01}, v_{01}, w_{01}, \beta_{x_1}, \beta_{y_1}, u_{02}, v_{02}, w_{02}, \beta_{x_2}, \beta_{y_2}, u_{03}, v_{03}, w_{03}, \beta_{x_3}, \beta_{y_3}\} \quad (18)$$

$\{u^e\}$ Le vecteur de champ de déplacements nodaux et $\{U\}$ est le vecteur champ de déplacements d'un point situé sur le plan moyen de l'élément fini plaque.

Le choix des fonctions d'interpolation $[N]$ conditionne la performance numérique de l'élément. Le phénomène du *blocage* par cisaillement (apparition de rigidité 'parasite' quand l'élément est élané) est présent dans tous les éléments finis de plaque Timoshenko où les déplacements transversaux et les rotations sont discrétisés séparément [ST 83].

Une abondance de remèdes numériques existe dans la littérature [CR 91]. Afin d'affranchir ce problème, la formulation présentée ci-dessous opte pour une interpolation polynomiale de degré supérieur pour les déplacements transversaux (par exemple cubique) et les rotations (par exemple quadratique) qui ne sont plus indépendants. Ce type d'approche conduit à des éléments finis à plus de trois nœuds (trois nœuds aux extrémités + des nœuds intérieurs), [IB 92] ou à des éléments finis à trois nœuds dont les fonctions d'interpolation dépendent des propriétés des matériaux [DE 89] [FR 93] [KO 00, 04 ; 05a] [MA 06].

I.2.2.1- Equation d'équilibre

Le principe du travail s'écrit de la manière suivante :

$$\delta W_{def} = \delta W_{ext} \quad \text{Pour tous déplacements transversaux et rotations virtuels admissibles.}$$

Cinématique de Hencky

Avec cette cinématique, il en résulte qu'après intégration par parties du travail de déformations les équations d'équilibre statique des plaques s'écrivent de la manière suivante [JE 90.a] [SE 09] [XA 09] :

$$\text{Pour les efforts : } \begin{cases} N_{xx},x + N_{xy},y + f_x = 0 \\ N_{yy},y + N_{xy},x + f_y = 0 \\ T_x,x + T_y,y + f_z = 0 \end{cases} \quad (19)$$

$$\text{Pour les couples : } \begin{cases} M_{xx},x + M_{xy},y - T_x + C_y = 0 \\ M_{yy},y + M_{xy},x - T_y - C_x = 0 \end{cases} \quad (20)$$

Où f_x , f_y et f_z sont les forces surfaciques agissant suivant x , y et z . Et C_x , C_y sont les couples surfaciques agissants autour des axes x et y .

Dans le cas d'une plaque plane où la seule force surfacique considérée est la force q_z distribuée suivant z , les forces f_x , f_y et les couples C_x , C_y sont négligés.

Les équations 19 et 20 s'écrivent finalement :

$$\text{Pour les efforts : } \begin{cases} N_{xx},x + N_{xy},y = 0 \\ N_{yy},y + N_{xy},x = 0 \\ T_x,x + T_y,y = -q_z \end{cases} \quad (21.a)$$

$$\text{Pour les couples : } \begin{cases} M_{xx},x + M_{xy},y - T_x = 0 \\ M_{yy},y + M_{xy},x - T_y = 0 \end{cases} \quad (21.b)$$

L'interprétation physique de ces efforts (N, T, M) à partir des équations précédentes est donné ci-dessous.

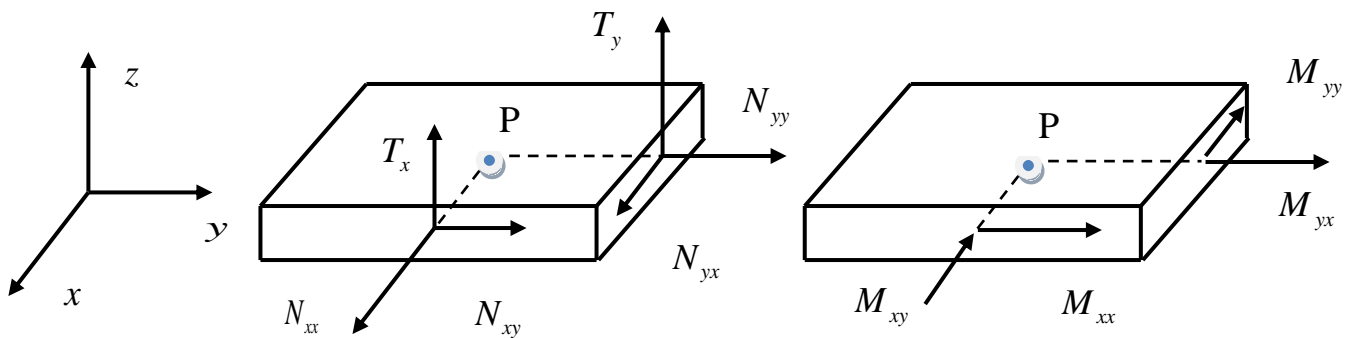


Figure 1.5 : Efforts résultants pour un élément de plaque

Avec N_{xx} , N_{yy} représentent les efforts de traction et N_{xy} l'effort de cisaillement plan. M_{xx} et M_{yy} représentent les couples de flexion et M_{xy} le couple de torsion. T_x et T_y

I.2.2.2- Blocage par cisaillement

Le blocage par cisaillement est un problème numérique qui a beaucoup intéressé les chercheurs ces dernières vingt années et dont une abondance de solutions est présente dans la littérature (CR 91). Dans la suite plusieurs solutions simples et efficaces vont être présentées. La solution qui consiste à utiliser des fonctions de forme d'ordre supérieur va être présentée plus en détail, pour l'échelle globale de l'élément fini, d'une part, et d'autre part, pour l'échelle locale, la solution qui consiste à utiliser des fonctions d'interpolations exactes obtenues directement en écrivant les équations d'équilibre des efforts extérieurs et intérieurs (chapitre II).

Intégration sélective

Une façon d'éviter l'apparition du blocage par cisaillement et de rendre ainsi la solution indépendante de l'élançement (le rapport *Longueur L/épaisseur h*) est de calculer les termes de la matrice de rigidité en intégrant de manière exacte les termes relatifs à la flexion et en sous-intégrant les termes relatifs au cisaillement [ST 83].

Si l'intégration sélective est satisfaisante en élasticité, elle convient moins bien en régime non-linéaire où il est souvent nécessaire de faire le calcul en une série de points de plusieurs sections (plusieurs points d'intégration) [KO 00].

Supposer une déformation de cisaillement constante

L'idée est d'intervenir directement dans la définition de la déformation de cisaillement [DE 89]. Pour un élément à trois nœuds cela revient à introduire des déformations de cisaillement constantes (eqt.14) dans le principe des déplacements virtuels (eqt. 8).

Tous calculs faits, la nouvelle matrice de rigidité est identique à celle obtenue par sous-intégration des termes de cisaillement. Le verrouillage disparaît, les termes de la matrice de rigidité peuvent être intégrés analytiquement et il n'y a plus de restriction au nombre de points d'intégration utilisés.

Enrichir le champ des déplacements

Le champ des déplacements est enrichi de façon à pouvoir reproduire la déformation sous flexion pure.

Utiliser des fonctions de forme d'ordre supérieur

Afin de s'affranchir du problème de verrouillage nous pouvons utiliser une interpolation polynomiale de degré plus élevé pour les variables $w_0(x, y)$, $\beta_x(x, y)$ et $\beta_y(x, y)$ qui ne seront plus indépendantes. Ces approches conduisent à des éléments finis à plus de trois nœuds (trois nœuds aux extrémités, plus des nœuds intérieurs) [IB 92] ou à des éléments finis à trois nœuds dont les fonctions de forme dépendent des propriétés des matériaux. Une telle approche est choisie pour l'élément Timoshenko à trois nœuds.

I.2.2.3- Un élément fini Timoshenko à trois nœuds

La formulation de l'élément fini initialement proposée par Przemieniecki (1968 : dans le cas d'une poutre à deux nœuds) [KO 00] et puis développée par plusieurs auteurs dont Tesler et Dong (1981) reste valable et applicable pour un élément fini plaque à trois nœuds avec prise en compte du cisaillement. Pour une plaque plane les équations d'équilibre en T et M s'écrivent par :

$$\begin{cases} (M_{xx})_{,x} + (M_{xy})_{,y} - T_x = 0 \\ (M_{yy})_{,y} + (M_{xy})_{,x} - T_y = 0 \\ (T_x)_{,x} + (T_y)_{,y} = -q_z \end{cases} \quad (22.a)$$

Si la plaque est homogène les équations 22.a se traduisent par :

$$\begin{cases} \frac{h^2}{6(1-\nu)} \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x^2} + \frac{h^2 \nu}{6(1-\nu)} \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x \partial y} + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^2 \beta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x \partial y} \right) - \left(\beta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{h^2 \nu}{6(1-\nu)} \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x \partial y} + \frac{h^2}{6(1-\nu)} \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial y^2} + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x^2} \right) - \left(\beta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = 0 \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = -q_z \end{cases} \quad (22.b)$$

Les première et deuxième équations, du système d'équations 22.b, sont satisfaites seulement si le polynôme choisi pour le déplacement vertical $w_0(x, y)$ est d'un degré supérieur aux polynômes choisi pour les rotations $\beta_x(x, y)$ et $\beta_y(x, y)$. Les variables $w_0(x, y)$, $\beta_x(x, y)$ et $\beta_y(x, y)$ ne sont plus discrétisées séparément et les nouvelles fonctions de forme satisfont les équations 22.b.

Comme nous l'avons annoncé aux paragraphes précédents et pour simplifier le problème, nous allons discrétiser la plaque par des éléments finis triangles quelconques afin de prendre en compte la variation des déformations au cours du chargement-déchargement.

Les variables $u_0(x, y)$ et $v_0(x, y)$ peuvent être discrétisées séparément, puisqu'elles n'interviennent pas dans les équations d'équilibre 22 .b, par conséquent les polynômes choisis pour ces derniers sont du premier ordre.

Ainsi donc :

$$\begin{cases} u_0(x, y) = a + bx + cy \\ v_0(x, y) = d + ex + fy \\ w_0(x, y) = a_1 + b_1x + c_1y + e_1x^2 + f_1y^2 + g_1x^2y + h_1xy^2 + i_1x^3 + j_1y^3 \\ \beta_x(x, y) = a_2 + b_2x + c_2y + d_2x^2 + e_2xy + f_2y^2 \\ \beta_y(x, y) = a_3 + b_3x + c_3y + d_3x^2 + e_3xy + f_3y^2 \end{cases} \quad (23)$$

Ces interpolations ne seraient valables que pour un élément fini que l'on peut considérer comme homogène dans un état donné. Elles ne sont donc pas valables sur un élément fini constitué de plusieurs couches et /ou cellules (chapitre II). Dans le chapitre II nous développerons une théorie basée sur un élément fini multicouche multicellulaire où l'utilisation de ces interpolations ne sera plus possible.

Le vecteur champ de déplacements nodaux peut prendre, dans le cas du système 23, la forme :

$$\{u^e\} = [X_I] \{A\} \quad (24)$$

Avec

$$\{u^e\}^T = \{u_{01}, u_{02}, u_{03}, v_{01}, v_{02}, v_{03}, w_{01}, w_{02}, w_{03}, \beta_{x_1}, \beta_{x_2}, \beta_{x_3}, \beta_{y_1}, \beta_{y_2}, \beta_{y_3}\} \quad (25.a)$$

$$\{A\}^T = \{a, b, c, d, e, f, a_1, b_1, c_1, e_1, f_1, g_1, h_1, i_1, j_1\} \quad (25.b)$$

Où les coefficients de $\beta_x(x, y)$ et $\beta_y(x, y)$ sont exprimés en fonction des coefficients de $w_0(x, y)$ par équations de liaison du système 22.b (voir Annexe A.2).

Et les éléments $x_{I_{ij}}$ de la matrice $[X_I]$ sont donnés par :

$$x_{I_{11}} = x_{I_{21}} = x_{I_{31}} = x_{I_{44}} = x_{I_{54}} = x_{I_{64}} = x_{I_{77}} = x_{I_{87}} = x_{I_{97}} = 1,$$

$$x_{I_{1,2}} = x_{I_{4,5}} = x_{I_{7,8}} = x_1, x_{I_{2,2}} = x_{I_{5,5}} = x_{I_{8,8}} = x_2, x_{I_{3,2}} = x_{I_{6,5}} = x_{I_{9,8}} = x_3,$$

$$x_{I_{10,8}} = x_{I_{11,8}} = x_{I_{12,8}} = x_{I_{13,9}} = x_{I_{14,9}} = x_{I_{19,9}} = -1$$

$$x_{I_{1,3}} = x_{I_{4,6}} = x_{I_{7,9}} = y_1, x_{I_{2,3}} = x_{I_{5,6}} = x_{I_{8,9}} = y_2, x_{I_{3,3}} = x_{I_{6,6}} = x_{I_{9,9}} = y_3, x_{I_{7,10}} = x_1^2, x_{I_{7,11}} = y_1^2,$$

$$x_{I_{7,12}} = x_1^2 y_1, x_{I_{7,13}} = y_1^2 x_1, x_{I_{7,14}} = x_1^3, x_{I_{7,15}} = y_1^3, x_{I_{8,10}} = x_2^2, x_{I_{8,11}} = y_2^2, x_{I_{8,12}} = x_2^2 y_2, x_{I_{8,13}} = y_2^2 x_2,$$

$$x_{I_{8,14}} = x_2^3, x_{I_{8,15}} = y_2^3, x_{I_{9,10}} = x_3^2, x_{I_{9,11}} = y_3^2, x_{I_{9,12}} = x_3^2 y_3, x_{I_{9,13}} = y_3^2 x_3, x_{I_{9,14}} = x_3^3, x_{I_{9,15}} = y_3^3,$$

$$x_{I_{10,10}} = -2x_1, x_{I_{10,12}} = -2x_1 y_1, x_{I_{11,10}} = -2x_2, x_{I_{11,12}} = -2x_2 y_2, x_{I_{12,10}} = -2x_3, x_{I_{12,12}} = -2x_3 y_3,$$

$$\begin{aligned}
 x_{I_{13,13}} &= -2x_1y_1, & x_{I_{13,11}} &= -2y_1, & x_{I_{14,11}} &= -2y_2, & x_{I_{15,11}} &= -2y_3, & x_{I_{14,13}} &= -2x_2y_2, & x_{I_{15,13}} &= -2x_3y_3, \\
 x_{I_{10,13}} &= -\left(y_1^2 + \frac{h^2}{3(1-\nu)}\right), & x_{I_{10,14}} &= -\left(3x_1^2 + \frac{h^2}{1-\nu}\right), & x_{I_{11,13}} &= -\left(y_2^2 + \frac{h^2}{3(1-\nu)}\right) \\
 , x_{I_{11,14}} &= -\left(3x_2^2 + \frac{h^2}{1-\nu}\right), & x_{I_{12,13}} &= -\left(y_3^2 + \frac{h^2}{3(1-\nu)}\right), & x_{I_{12,14}} &= -\left(3x_3^2 + \frac{h^2}{1-\nu}\right), \\
 x_{I_{13,12}} &= -\left(x_1^2 + \frac{h^2}{3(1-\nu)}\right), & x_{I_{14,12}} &= -\left(x_2^2 + \frac{h^2}{3(1-\nu)}\right), & x_{I_{15,12}} &= -\left(x_3^2 + \frac{h^2}{3(1-\nu)}\right), \\
 x_{I_{13,15}} &= -\left(3y_1^2 + \frac{h^2}{1-\nu}\right), & x_{I_{14,15}} &= -\left(3y_2^2 + \frac{h^2}{1-\nu}\right), & x_{I_{15,15}} &= -\left(3y_3^2 + \frac{h^2}{1-\nu}\right)
 \end{aligned}$$

Le champ de déplacements sur le plan moyen d'un élément fini plaque peut s'écrire :

$$\{U\} = [X]\{A\} \quad (26)$$

Tenant compte de l'équation 24 on peut aussi écrire :

$$\{U\} = [X][X_I]^{-1}\{u^e\} \quad (27)$$

Le vecteur champ de déformations correspondant prend la forme :

$$\{d(u)\} = L[X][X_I]^{-1}\{u^e\} = [B]\{u^e\} \quad (28)$$

$$[B] = L[X][X_I]^{-1} = [B^i][X_I]^{-1} \quad (29)$$

$$[N] = [X][X_I]^{-1} \quad (30)$$

Les éléments x_{ij} de la matrice $[X]$ et les éléments b_{ij}^i de la matrice $[B^i]$ sont donnés

respectivement par :

$$x_{1,1} = x_{2,4} = x_{3,7} = 1, \quad x_{4,8} = x_{5,9} = -1, \quad x_{1,2} = x_{2,5} = x_{3,8} = x, \quad x_{1,3} = x_{2,6} = x_{3,9} = y, \quad x_{3,10} = x^2,$$

$$x_{3,11} = y^2, \quad x_{3,12} = x^2y, \quad x_{3,13} = y^2x, \quad x_{3,14} = x^3, \quad x_{3,15} = y^3, \quad x_{4,10} = -2x, \quad x_{4,12} = -2xy, \quad x_{5,11} = -2y,$$

$$x_{5,13} = -2xy, \quad x_{4,13} = -\left(y^2 + \frac{h^2}{3(1-\nu)}\right), \quad x_{4,14} = -\left(3x^2 + \frac{h^2}{1-\nu}\right), \quad x_{5,12} = -\left(x^2 + \frac{h^2}{3(1-\nu)}\right),$$

$$x_{5,15} = -\left(3y^2 + \frac{h^2}{1-\nu}\right)$$

$$b_{1,2}^i = b_{2,6}^i = b_{3,3}^i = b_{3,5}^i = 1, \quad b_{6,10}^i = b_{7,11}^i = -2, \quad b_{4,13}^i = b_{5,12}^i = -\frac{h^3}{3(1-\nu)}, \quad b_{4,14}^i = b_{5,15}^i = -\frac{h^2}{1-\nu},$$

$$b_{6,12}^i = -2y, \quad b_{6,14}^i = -6x, \quad b_{7,13}^i = -2x, \quad b_{7,15}^i = -6y, \quad b_{8,12}^i = -4x$$

La matrice de rigidité élémentaire est finalement donnée par :

$$[K_{elem}] = \int_s [B]^T [D][B] dxdy \quad (31)$$

Remarque :

Lorsque le comportement du matériau est non linéaire, il est nécessaire d'avoir au moins trois points d'intégration de Gauss le long du contour du triangle afin d'intégrer correctement les contraintes. La matrice de rigidité élémentaire est calculée avec l'équation suivante :

$$[K_{elem}] = \int_s [B]^T [D][B] dxdy = J_a \sum_{i=1}^3 W_i [B(x_i, y_i)]^T [D][B(x_i, y_i)] \quad (32)$$

x_i et y_i sont les coordonnées du point de Gauss i dans l'élément de référence, W_i est le poids du point de Gauss et J_a le Jacobéen.

I.2.3-Efforts internes et efforts extérieurs

Le calcul des forces nodales dues à un état de contraintes donné se fait finalement par l'intégrale suivante :

$$\{F_{int}\} = \int_s [B]^T \{\Sigma(u)\} dxdy \quad (33)$$

Avec $\{\Sigma(u)\}$ le vecteur des forces de l'épaisseur issu de l'intégration des contraintes généralisées dans les éléments.

En tenant compte de l'équation 7 les efforts extérieurs se calculent par :

$$\{F_{ex}\} = \int_s [N]^T \{Q_{ex}\} dxdy \quad (34)$$

Le vecteur $\{Q_{ex}\}$ dépend du chargement extérieur, effort par unité de surface et dans notre cas, il est donné par :

$$\{Q_{ex}\}^T = \{0, 0, q_z, 0, 0\} \quad (35.a)$$

Ainsi :

$$\{F_{ex}\}^T = \frac{1}{6} S q_z \{0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0\} \quad (35.b)$$

Où $S = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)$ est le Jacobien de la transformation (voir Annexe eqt.A.3.b) qui est le double de la surface du triangle IJK ($I \equiv 1, J \equiv 2, K \equiv 3$ figure 2.1, chapitre II)

I.3- Matrice masse élémentaire

Le travail virtuel des efforts d'inertie et la matrice de masse de la surface prennent la forme (eqt.36) [GU 94]. Les termes de la matrice de masse sont obtenus après discrétisation de la formulation vibrationnelle suivante :

$$\begin{aligned}
 W_{inert} &= \int_s \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left\{ \partial u(x, y, z) \frac{d^2 u(x, y, z)}{dt^2} + \partial v(x, y, z) \frac{d^2 v(x, y, z)}{dt^2} + \partial w(x, y, z) \frac{d^2 w(x, y, z)}{dt^2} \right\} dz ds \\
 &= \int_s \left\{ \rho_m (\ddot{u}_0 \delta u_0 + \ddot{v}_0 \delta v_0 + \ddot{w}_0 \delta w_0) + \rho_{mf} (\ddot{u}_0 \delta \beta_x + \ddot{v}_0 \delta \beta_y + \ddot{\beta}_x \delta u_0 + \ddot{\beta}_y \delta v_0) + \rho_f (\ddot{\beta}_x \delta \beta_x) + \ddot{\beta}_y \delta \beta_y \right\} ds \quad (36) \\
 &= \int_s \delta \{U_0\}^T [M_0] \left\{ \ddot{U}_0 \right\} ds
 \end{aligned}$$

Avec ρ_m , ρ_f et ρ_{mf} les matrices de masse de membrane, de flexion et de membrane & flexion respectivement et sont données par :

$$\rho_m = \int_e \rho dz, \quad \rho_f = \int_e \rho z^2 dz \quad \text{et} \quad \rho_{mf} = \int_e \rho z dz \quad (37)$$

Où e peut être l'épaisseur de la plaque ou l'épaisseur de la couche « i » d'un élément fini plaque.

Remarques :

- Si la plaque est homogène ou symétrique par rapport à $z=0$ alors $\rho_{mf} = 0$, $\rho_f = \frac{\rho h^3}{12}$ et $\rho_m = h\rho$. On peut négliger dans l'expression de la matrice de masse élémentaire, dans ce cas, les termes d'inertie de rotation $\int_s \rho_f (\ddot{\beta}_x \delta \beta_x) + \ddot{\beta}_y \delta \beta_y ds$ car ces derniers sont négligeables par rapport aux autres. En effet, le facteur multiplicatif de $\frac{h^2}{12}$ les lie aux autres termes et ils deviennent négligeables pour un rapport de l'épaisseur sur la longueur caractéristique inférieur à 1/20. Signalons qu'au cours du présent travail cette hypothèse ne sera considérée que pour un cas particulier.
- Pour un élément fini plaque constitué de N couches anisotropes en élasticité, les éléments m_{ij} de la matrice $[M_0]$ sont :

$$\rho_m = \sum_{i=1}^N h_i \rho_i, \quad \rho_{mf} = \sum_{i=1}^N h_i \eta_i \rho_i, \quad \rho_f = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N (Z_{i+1}^3 - Z_i^3) \rho_i$$

$h_i = Z_{i+1} - Z_i$ et ρ_i sont l'épaisseur et la masse volumique de la couche « i » respectivement.

$$\eta_i = \frac{1}{2}(Z_{i+1} + Z_i), \quad m_{11} = m_{22} = m_{33} = \rho_m, \quad m_{14} = m_{25} = m_{41} = m_{52} = \rho_{mf},$$

$$m_{44} = m_{55} = \rho_f$$

Ce qui signifie que ρ la masse volumique est une variable en fonction de l'épaisseur h_i .

La matrice de masse de l'élément est finalement donnée par :

$$[M_{elem}] = \int_s [N]^T [M_0] [N] dx dy \quad (38)$$

- Cette expression de la masse est rarement présentée dans la littérature. Dans la plupart des codes éléments finis elle est remplacée par la matrice de masse de type Euler-Bernoulli (ainsi les termes de correction de cisaillement interviennent uniquement dans la matrice de raideur).

I.4-Comportement mécanique du béton

I.4.1-Chargement cyclique de traction – compression

Les essais cycliques de traction - compression (voir par exemple l'essai P.I.E.D - Pour Identifier l'Endommagement Diffus, [MA 90] [RA 90]) permettent de mettre en évidence le caractère unilatéral du comportement du béton.

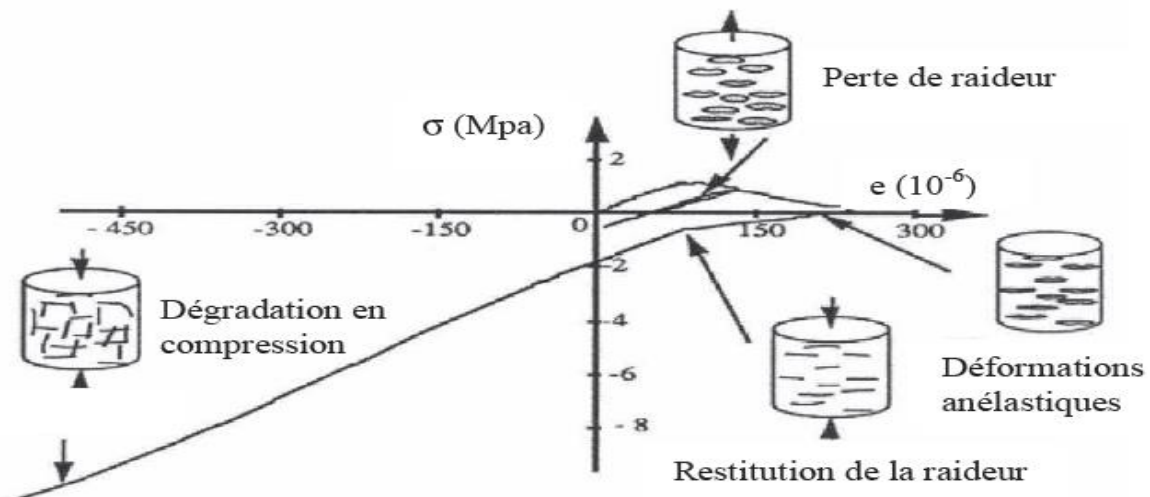


Figure 1.6 -Essai P.I.E.D : Comportement du béton sous chargement cyclique de traction compression [RA 90]

Il consiste en une restauration de la raideur lors du passage d'un chargement en traction, où cette raideur est initialement endommagée du fait de la fissuration, à un chargement en compression. Le béton retrouve sa raideur initiale grâce à la refermeture des fissures.

I.5-Modélisation numérique de comportement du béton

I.5.1 : Modèles d'endommagement

On peut citer dans ce cadre les travaux de Mazars et La Borderie [MA 84 ; 86] [LA 91]. Il s'agit d'une approche qui se base sur la thermodynamique des processus irréversibles. Le potentiel thermodynamique ou énergie libre ψ est une fonction convexe de toutes les variables d'état et, en particulier, de l'endommagement D considéré ci-dessous comme un scalaire: $\psi = \psi(\varepsilon^e, T, D, V_k)$, ε^e est le tenseur de déformation élastique d'ordre 2 et T la température. Le terme V_k désigne les autres variables internes comme les variables d'écrouissage. La variable d'endommagement D est aussi considérée comme une variable d'état interne (car non accessible directement à la mesure).

La spécificité de ce type de modèle est qu'il doit simuler la perte de rigidité du matériau au cours du chargement. Une variable d'endommagement D , scalaire dans le cas isotrope, tensorielle sinon, est définie. Comme en élastoplasticité, nous pouvons faire l'hypothèse du découplage entre les effets d'écrouissage et autres désignés par V_k et les effets d'élasticité associés à l'endommagement [LE 86]. Le potentiel thermodynamique (énergie libre) devient alors : $\psi = \psi_e(\varepsilon^e, T, D) + \psi_p(T, V_k)$

Avec ψ_e le potentiel thermoélastique endommageable et ψ_p est le terme de plasticité.

Dans le cadre de l'isotropie, la relation contraintes-déformations s'écrit comme :

$$\sigma_{ij} = (1 - D)E_{ijkl}\varepsilon_{kl}^e \quad (39.a)$$

Où E_{ijkl} et ε_{kl}^e sont respectivement les composantes du tenseur d'élasticité d'ordre 4 et du tenseur des déformations élastiques. Dans la mécanique de l'endommagement, la notion de contrainte effective σ'_{ij} , introduite par Rabotnov en 1968, est considérée. Elle correspond à une

contrainte du matériau non endommagé : $\sigma'_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{(1 - D)}$

I.5.1.1- Modèle d'endommagement de Mazars

C'est le premier modèle 3D de comportement du béton dans le cadre de la mécanique de l'endommagement [MA 84 ; 86]. Le point particulier de ce modèle est d'utiliser un critère en déformation en introduisant la notion de déformation équivalente ε_{eq} et un scalaire pour la variable de l'endommagement D (comportement isotrope). Le modèle s'appuie sur un couplage élasticité et endommagement, il ne prend donc pas en compte l'irréversibilité des déformations, l'anisotropie et l'effet unilatéral.

L'endommagement agit directement sur la raideur du matériau de la façon suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{(1-D)E}{1+\nu} \left(\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu} Tr(\underline{\underline{\varepsilon}})I \right) \quad (39.b)$$

Où ν est le coefficient de Poisson et I est la matrice unité.

La progression de l'endommagement est guidée par l'évolution de la déformation équivalente ε_{eq} .

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \langle \varepsilon_i \rangle_+^2} \quad , \quad \langle \varepsilon_i \rangle_+ = \varepsilon_i \text{ si } \varepsilon_i \geq 0 \text{ et } \langle \varepsilon_i \rangle_+ = 0 \text{ si } \varepsilon_i < 0$$

ε_{eq} est un indicateur de l'état de tension dans le matériau qui génère l'endommagement. Cette grandeur définit la surface seuil d'endommagement f telle que : $f(\varepsilon, K) = \varepsilon_{eq} - K(D) = 0$

Initialement ($D=0$), $K(D)$ vaut le seuil d'endommagement ε_{D_0} et prend la valeur maximale atteinte par ε_{eq} durant l'histoire du chargement : $K(D) = \max(\varepsilon_{eq}, \varepsilon_{D_0})$

La variable d'endommagement D varie de façon continue entre 0 et 1. Une condition pour respecter le second principe de thermodynamique est que D soit croissant. Pour traiter des cas multiaxiaux, cette variable est considérée comme étant la combinaison d'un endommagement dû à la traction D_t et d'un endommagement dû à la compression D_c . La combinaison linéaire de ces deux endommagements donne l'endommagement global isotrope :

$$D = \alpha_t^\beta D_t + (1 - \alpha_t^\beta) D_c \quad (39.c)$$

β est un paramètre pour ajuster le comportement du modèle en cisaillement (habituellement pris égal à 1.06). Il permet, lorsqu'il est supérieur à 1, d'améliorer la réponse en cisaillement.

Les endommagements de traction et compression sont définis par les équations suivantes dès lors que $\varepsilon_{eq} \geq \varepsilon_{D_0}$:

$$D_{t,c} = 1 - \frac{\varepsilon_{D_0} (1 - A_{t,c})}{\varepsilon_{eq}} - \frac{A_{t,c}}{\exp(B_{t,c} (\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{D_0}))} \quad (\text{borné entre 0 et 1}) \quad (39.d)$$

Les coefficients $A_{t,c}$ et $B_{t,c}$ sont identifiés à partir des essais en compression et en traction sur des éprouvettes cylindriques [MA 84].

Le modèle considère que le seuil d'endommagement ε_{D_0} (en statique) est ainsi égal à la déformation correspondant à la contrainte ultime en traction. Il peut être exprimé à partir de la résistance maximale f_t en traction et du module d'Young initial, qui sont deux paramètres physiques bien connus de l'ingénieur, par : $\varepsilon_{D_0} = f_t / E_0$

Ensuite, la contrainte ultime en traction étant donnée par convention, il s'agit de considérer la déformation correspondant à ce maximum de contrainte. Or on a : $\partial\sigma / \partial\varepsilon = 0$ pour $\varepsilon_{\max} = 1/B_t$. On en déduit : $B_t = 1/\varepsilon_{D_0} = E_0 / f_t$ (voir annexe A.3).

Le paramètre A_t est finalement identifié à partir de la contrainte finale en traction qui est considérée comme nulle lorsque le matériau est complètement endommagé :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \sigma = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} (1 - D_t) E_0 \varepsilon = E_0 \varepsilon_{D_0} (1 - A_t) = 0 \text{ soit } A_t = 0$$

En compression, le paramètre A_c est identifié à partir de la connaissance de la résistance ultime en compression f_c (et obtenue couramment par un essai de compression) en cherchant le maximum de la contrainte en compression $\sigma_c = (1 - D_c) E_0 \varepsilon$. On trouve : $\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon} = 0$ pour

$$(-\varepsilon)_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2\nu} B_c} \text{ soit } (-\sigma)_{\max} = \frac{E_0}{\sqrt{2\nu}} \left(\varepsilon_{D_0} (1 - A_c) + \frac{A_c}{B_c e^{(1-B_c \varepsilon_{D_0})}} \right) \quad (39.e)$$

Par ailleurs, lors du chargement de compression pure, le respect de la condition de dérivabilité de la courbe (σ, ε) à l'initiation de l'endommagement ($\varepsilon_{eq} = \varepsilon_{D_0} = -\sqrt{2\nu} \varepsilon_0$ et $\sigma = E_0 \varepsilon_0$,) impose une relation supplémentaire entre les paramètres [PH 04] soit: $B_c = \frac{A_c - 1}{A_c \varepsilon_{D_0}}$ (39.f)

Il suffit de résoudre ce système de deux équations (39.e et 39.f) à deux inconnues pour évaluer A_c et B_c en fonction de $\sigma_{\max} = f_c$, ε_{D_0} et ν connus.

La détermination de α_t est effectuée en distinguant les extensions dues aux contraintes positives et négatives.

$$\alpha_t = \frac{\sum_{i=1}^3 (\varepsilon_{ti} < \varepsilon_i >_+)}{\varepsilon_{eq}^2} \quad (39.g)$$

\mathcal{E}_{ti} : La déformation créée par les contraintes principales positives soit :

$$\varepsilon_t = \frac{1+\nu}{E} \langle \sigma \rangle_+ - \frac{\nu}{E} tr(\langle \sigma \rangle_+) \quad (39.h)$$

Les différents paramètres du modèle de Mazars sont donnés sur le tableau 1.1. Dans la suite tous nos calculs du modèle numérique seront faits en considérant les paramètres du tableau 1.1.

Paramètres	valeurs
ε_{D0t} (seuil d'endommagement en traction)	$6 \cdot 10^{-4}$ MPa
ε_{D0c} (seuil d'endommagement en compression)	$5.3 \cdot 10^{-2}$ MPa
A_t (paramètre d'endommagement en traction)	0.003 MPa^{-1}
A_c (paramètre d'endommagement en compression)	6 MPa^{-1}
B_t (paramètre pour la traction)	1667
B_c (paramètre pour la compression)	16

Tableau 1.1- des paramètres utilisés par Mazars [MA 05]

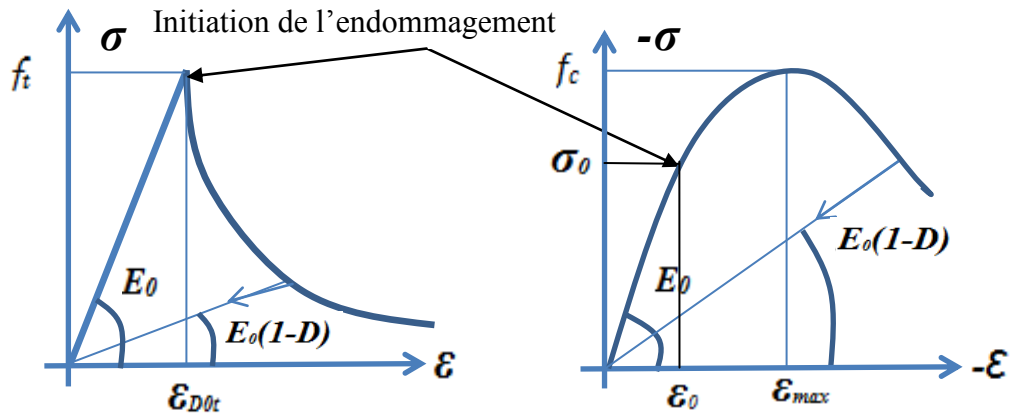


Figure 1.7-Comportement uniaxial du béton en traction et compression-modèle Mazars [Mazars 1984]

I.5.1.2-Modèle d'endommagement de La borderie

Ce modèle est adapté à la description du comportement généré par la création de micro fissures (diminution de la raideur) et du fonctionnement lié à leur refermeture au cours de cycles [LA 91 ; 03]. Les principales caractéristiques du modèle sont:

- utilisation de deux variables d'endommagement (scalaires, l'une en traction D_t et l'autre en compression D_c) ;
- prise en compte des déformations permanentes ε^p liées à l'endommagement ;
- gestion de l'ouverture des fissures et de leur fermeture en introduisant une restauration progressive de la raideur à la fermeture (fonction $f(Tr(\sigma))$).

Une séparation du tenseur des contraintes est introduite où σ^+ et σ^- sont la partie positive et négative du tenseur des contraintes (composés par les termes positifs et négatifs des contraintes principales). L'écriture 3D pour un endommagement fixé (D_t et D_c constants) conduit à la loi de comportement suivante : $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{an}$

$$\varepsilon^e = \frac{\sigma^+}{E_0(1-D_t)} + \frac{\sigma^-}{E_0(1-D_c)} + \frac{\nu}{E_0}(\sigma - Tr(\sigma)I) \quad (40.a)$$

$$\varepsilon^{an} = \frac{\beta_t D_t}{E_0(1-D_t)} f(Tr(\sigma))I + \frac{\beta_c D_c}{E_0(1-D_c)} \quad (40.b)$$

E_0 est le module de Young initial, ν le coefficient de Poisson. La refermeture de fissure est traitée comme de l'élasticité non linéaire et n'entraîne aucune dissipation d'énergie. Les deux paramètres β_t et β_c sont homogènes à des contraintes. Les valeurs des paramètres liés à l'anélasticité pour un béton classique, elles sont données par $\beta_t = 1MPa$, $\beta_c = -40MPa$, $f(Tr(\sigma))$ est une fonction scalaire qui permet de gérer les effets de l'ouverture et de refermeture des fissures avec:

$$f(Tr(\sigma)) = 0 \text{ Si } Tr(\sigma) \in]-\infty, -\sigma_f]$$

$$f(Tr(\sigma)) = Tr(\sigma) \left(1 + \frac{Tr(\sigma)}{2\sigma_f}\right) \text{ Si } Tr(\sigma) \in]-\sigma_f, 0]$$

$$f(Tr(\sigma)) = Tr(\sigma) \text{ Si } Tr(\sigma) \in [0, +\infty [$$

σ_f est un paramètre du modèle représentant la contrainte de refermeture de fissure prise égale à 3.5 MPa :

Lorsque $Tr(\sigma) < -\sigma_f$ les micros-fissures créées en traction sont totalement refermées.

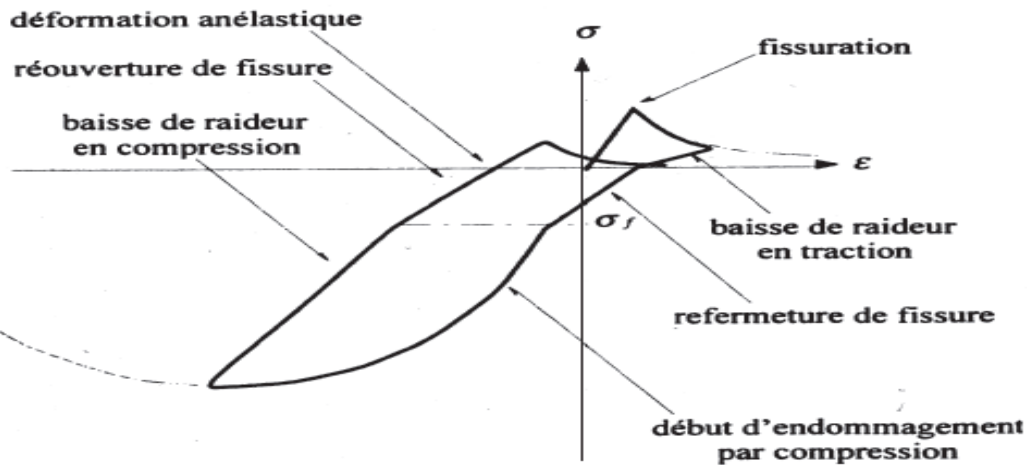


Figure 1.8 : Réponse uniaxiale du modèle La Borderie pour le béton [LA 91]

I.6-Comportement mécanique de l'acier

I.6.1-Chargement cyclique de traction – compression

Lors des sollicitations cycliques de traction - compression, la plupart des aciers voient leurs propriétés varier au cours des cycles. Lorsqu'on soumet une éprouvette à un essai de traction suivi d'un essai de compression on constate que la traction préalable écrouit le matériau dans le sens de traction (augmentation de la limite d'élasticité) mais l'adoucit dans le sens de la compression (effet Bauschinger) [NG 06.c]. La figure 1.9 montre clairement que la limite d'élasticité en compression est plus faible que la limite initiale en compression $|f_{eb}| < |f_e|$. L'effet Bauschinger est présent quel que soit l'amplitude de déformation imposée [LE 86].

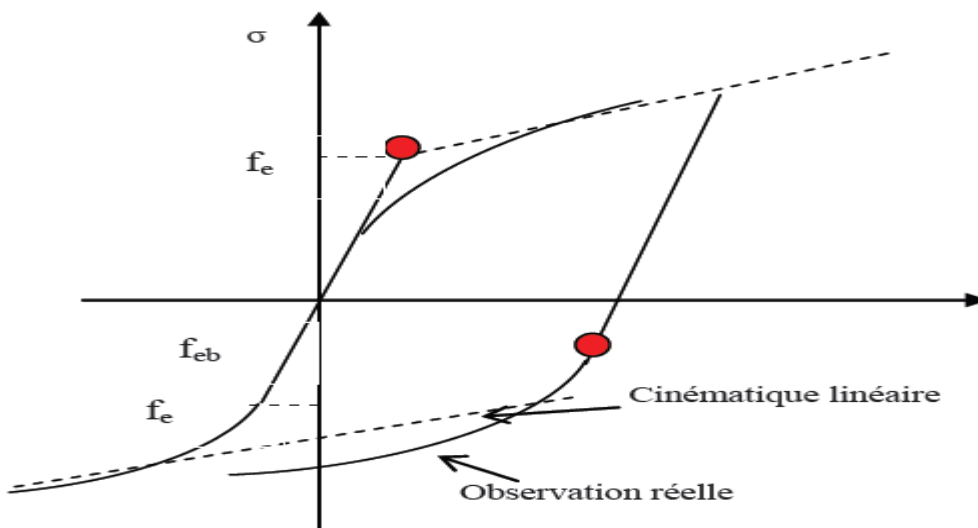


Figure 1.9 : Comportement de l'acier en traction - compression : Effet Bauschinger

I.7-Modélisation numérique de comportement de l'acier

I.7.1- Modèle élastoplastique simplifié

Un premier modèle simple qui peut être utilisé pour la simulation du comportement de l'acier est le modèle uniaxial élastoplastique avec écrouissage cinématique linéaire. La courbe utilisée dans ce modèle est représentée par la figure 1.10 (σ_y est la limite d'élasticité, E est le module d'Young et E_T la pente de la courbe en cours d'écrouissage).

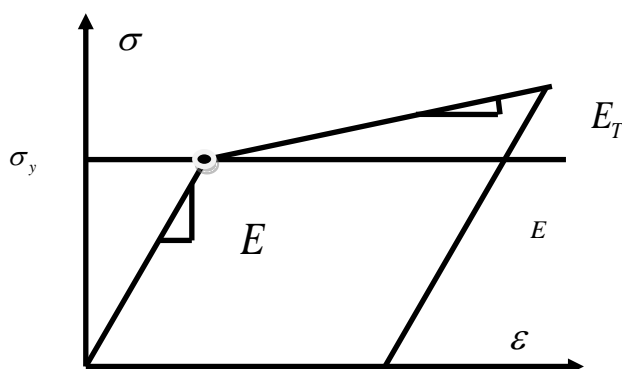


Figure 1.10- Modèle élastoplastique simplifié: Comportement de l'acier sous chargement monotone

I.7.3-Modèle de la liaison Acier-Béton

Les essais expérimentaux effectués par **Eligehausen, popov et Bertero en 1983** ont abouti à la construction d'un modèle local qui lie essentiellement la contrainte de liaison avec le glissement (dès les faibles glissements jusqu'à des larges déplacements) pour des problèmes monotones et cycliques [NO 05]. Le modèle de comportement cyclique de la liaison, implémenté dans le code CASTEM 2000 (Calcul et Analyse des Structures par la Méthode des Eléments finis) par FLEURY [FL 96], est présenté ici en bref (figure 1.11). Ce modèle, compatible avec une formulation biaxiale, est basé sur les mécanismes de résistance et de dégradations de la liaison qui se produisent lors de l'arrachement d'une barre nervurée, noyée dans un bloc de béton. La liaison est représentée donc par un modèle distinct, particulier au volume de béton lieu des dégradations caractéristiques, faisant la transition entre l'acier et le béton homogène. Nous décrivons ici le modèle valable en zone bien confinée, dans laquelle le comportement est symétrique. Une description complète est donnée par FLEURY [FL 96].

La figure 1.11 montre un cycle typique sur lequel nous illustrons les caractéristiques de la loi. La courbe $OABCD$ ou $OA_1B_1C_1D_1$ décrit le chargement monotone, et est entièrement décrite par la donnée de $s_1, s_2, s_3, \tau_1, \tau_3$ et α_1 . Quatre parties composent :

- La branche ascendante est non linéaire, d'équation $\tau = \tau_1 (s / s_1)^{\alpha_1}$
- Elle est suivie d'un plateau pour $s \in [s_1, s_3]$, décrit par $\tau = \tau_1$
- La branche ascendante est linéaire jusqu'au point C, de coordonnées $\{s_3, \tau_3\}$.
- La dernière partie décrit le plateau de friction, donc $\tau = \tau_3$

Une décharge à partir de cette courbe enveloppe se fait élastiquement avec une forte raideur, jusqu'à atteindre la contrainte τ_f^- de frottement (trajet EFG). La diminution du glissement se fait alors à adhérence constante jusqu'à l'intersection avec la courbe OA_1' (trajet GI). Si l'accroissement de glissement se produit dans la direction négative, une courbe adhérence/glissement similaire à celle qui décrit le chargement monotone est suivie, mais avec des valeurs de τ réduites, ainsi que le montre le trajet $IA_1'J$. La courbe $OA_1'B_1C_1D_1$ est appelée enveloppe réduite.

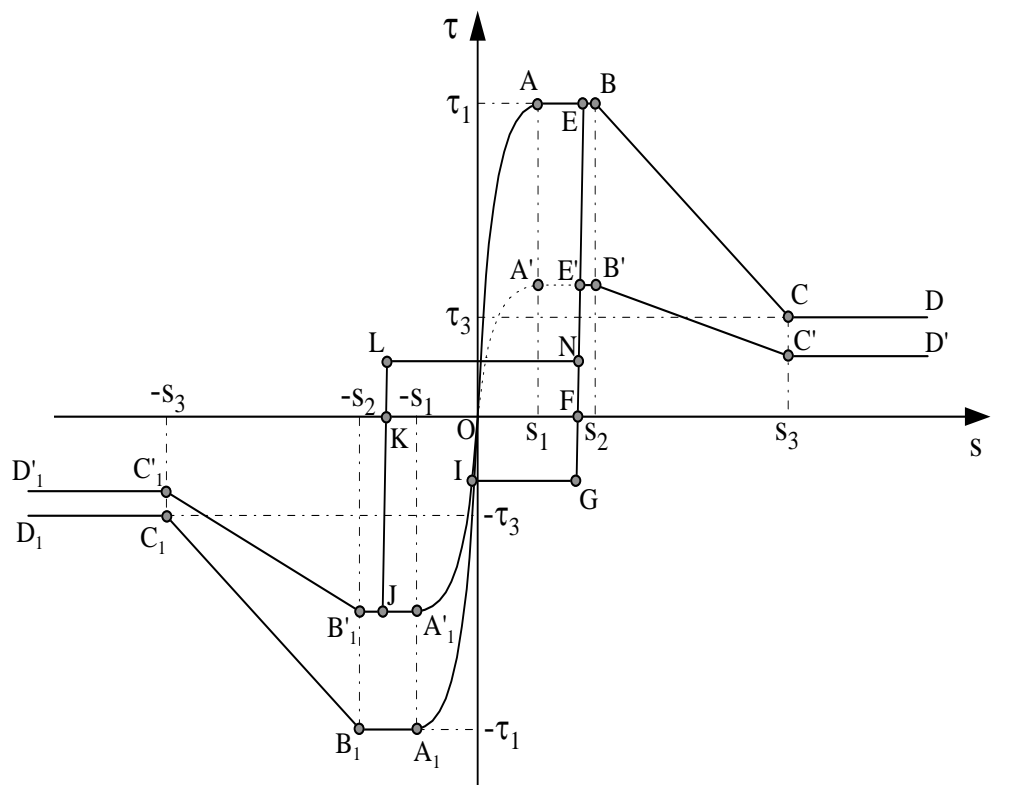


Figure 1.11- Un cycle typique de la loi d'adhérence [FL 96].

La décharge depuis le point J se fait de nouveau de façon élastoplastique parfait avec un seuil de frottement τ_f^+ jusqu'à atteindre la droite de décharge précédente (trajet $JKLN$). Cette droite de décharge est empruntée alors pour la recharge, jusqu'à l'intersection avec la courbe enveloppe réduite de la direction positive : $OA'B'C'D'$ qui est alors suivie (trajet $NE'B'C'D$).

Dans ces expressions, s est le glissement à un moment donné, s_1, s_2, s_2 sont des glissements seuils pour les différents étapes de détérioration, τ est la contrainte de cisaillement et τ_f est la contrainte résiduelle ultime par frottement.

Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une synthèse bibliographique, d'une part, sur le comportement du béton et de l'acier. Des essais en traction, compression sous chargements cycliques sont présentés. Plusieurs modèles numériques ont été aussi présentés. Au cours de ce travail, le modèle d'endommagement de Mazars pour le béton et un modèle basé sur la théorie de la plasticité pour l'acier (le modèle élastoplastique simplifié) vont être utilisés pour la simulation numérique des structures en béton armé soumises à des chargements quasi-statiques ou cycliques.

D'autre part, l'analyse de la théorie présentée et les équations données (§ **I.1 à 3**) tiennent compte de l'élément fini triangulaire dans sa globalité et ne donnent aucune information à l'échelle locale; par conséquent, nous ne pourrions pas présenter l'état de comportement contrainte-déformation local d'un lieu donné. Pour obtenir des informations sur les comportements locaux de l'élément fini (fissurations par exemple), une approche locale multicouche multicellulaire (chapitre II) est nécessaire. Ainsi, la modélisation est faite par une approche multicouche multicellulaire pour un élément fini plaque. Ce type d'élément fini a l'avantage d'intégrer plusieurs couches de natures différentes et de cellules de matériaux différents au sein d'une même couche. Deux types d'éléments finis sont développés, un élément fini triangulaire (de type Timoshenko) à trois nœuds et un élément fini barre (de type Euler-Bernoulli) à deux nœuds et à cinq degrés de liberté par nœud.

**Chapitre II- ELEMENT FINI PLAQUE MULTICOUCHE
MULTICELLULAIRE**

Introduction

Une plaque multicouche multicellulaire est un ensemble d'éléments finis basés sur la théorie des plaques dont chaque élément fini plaque est décomposé en couches suivant son épaisseur h et chaque couche est composée par des cellules suivant son plan (x, y) . A chaque cellule nous pouvons associer une loi de comportement locale en contraintes - déformations et donc différents matériaux. Ce type de description possède les avantages d'hypothèses simplificatrices associées à une cinématique de type plaque Euler - Bernoulli [OW 80] [LA 91] [SP 96a ; 96b] [GH 98 ; 02] [NG 06b] ou Timoshenko [GU 94] [DU 97] [PE 99] [KO 00 ; 04 ; 05a] [SE 09], tout en offrant une solution robuste et rapide pour une analyse non linéaire de structures composites (par exemple en béton armé).

Après avoir donné la description d'un élément de la théorie des plaques, nous présentons dans ce chapitre plusieurs formulations d'éléments finis de plaque multicouche multicellulaire, de type Timoshenko et Kirchhoff pour les éléments finis plaques (béton) et de cinématique Euler- Bernoulli pour les éléments barres (armatures), existantes dans la littérature.

II.1-Formulation Élément Fini Multicouche Multicellulaire

Le modèle élément fini développé est basé sur la formulation de la méthode des forces [ZE] par une interpolation exacte des sollicitations. L'élément fini se décompose en :

- Un **ensemble de Couches et de Cellules** de géométries variables et pouvant être hétérogènes, à distribution non-linéaire dans le sens de son épaisseur (h) à travers ses différentes couches et dans son plan (x, y) par des cellules. La formulation est basée sur la méthode des forces ou (méthode des flexibilités) par une interpolation exacte des efforts. Elle permet de réduire les degrés de liberté du système, d'annuler l'erreur de discrétisation généralement rencontrée dans les éléments finis basés sur la méthode des déplacements [NE 97] et de résoudre les problèmes de localisation et d'instabilité dans les zones critiques fortement non-linéaires et au voisinage de la rupture lorsque les sollicitations varient très peu alors que les déplacements et les déformations augmentent considérablement (formation des rotules plastiques).

II.1.1-Méthode des flexibilités

Dans la méthode des forces, on calcule la matrice de flexibilité élémentaire (15x15) mais pour des raisons d'inversion de matrices on procède à une élimination des modes rigides de déformations appliquées aux équations d'équilibre [NE 97], en adoptant un changement de variable permettant de réduire les degrés de liberté (efforts nodaux réduits).

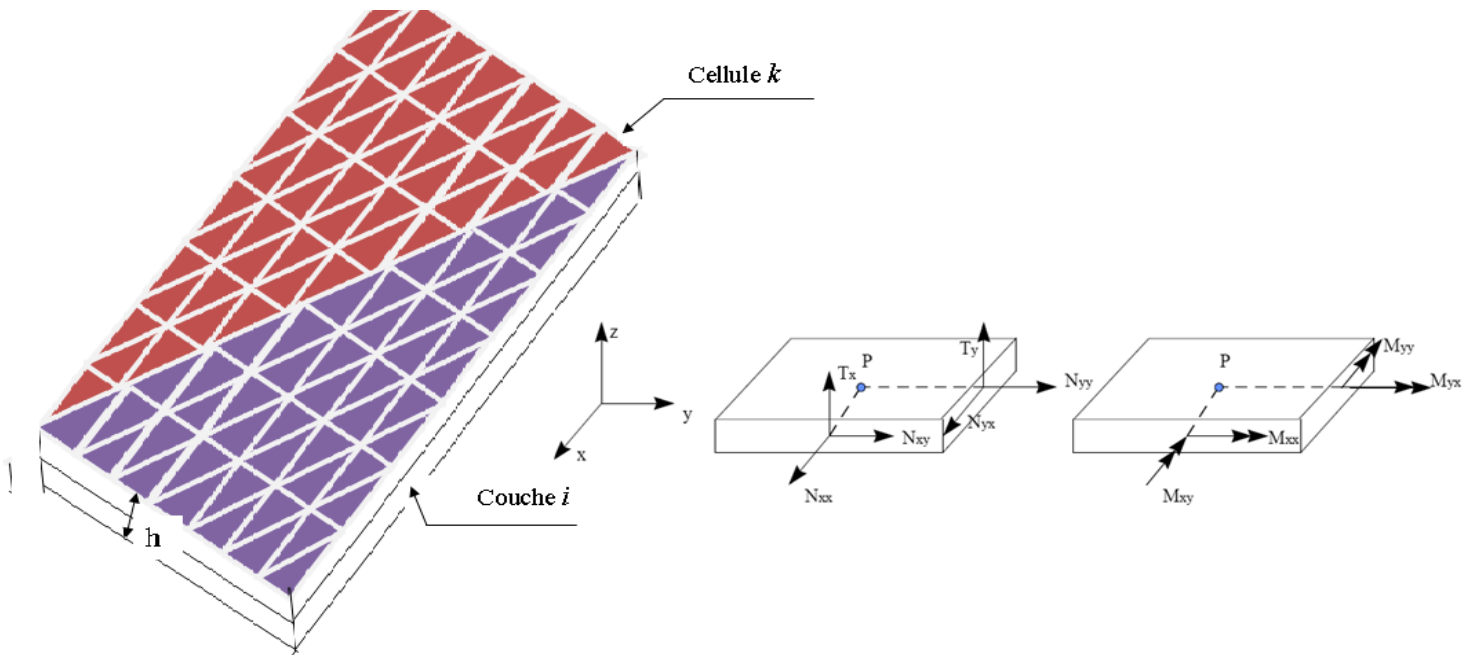


Figure 2.1–Modèle éléments finis plaques multicouches multicellulaires dans le système d'efforts résultants

Les équations d'équilibre des efforts intérieurs qui sont données, dans le paragraphe (§ I.2.2.1) par les équations 21.a-b avec les définitions des différents efforts (figure 1.5) restent respectivement les mêmes que pour les efforts extérieurs de chaque élément fini.

Par la suite, pour déterminer les fonctions d'interpolation exactes, par les équations d'équilibre des efforts extérieurs de l'élément fini (qui ne sont autres que les efforts intérieurs de la plaque), nous supposons que les efforts normaux et de cisaillement sont constants et les moments varient linéairement en fonction de ses variables(x, y) sur n'importe quel point du triangle IJK (figure 2.2).

$$\begin{cases} N_{xx}(x, y) = N_{xx_I} = N_{xx_J} = N_{xx_K} = C_1 = N_1 \\ N_{yy}(x, y) = N_{yy_I} = N_{yy_J} = N_{yy_K} = C_2 = N_2 \\ N_{xy}(x, y) = N_{xy_I} = N_{xy_J} = N_{xy_K} = C_3 = N_3 \\ T_x(x, y) = T_{x_I} = T_{x_J} = T_{x_K} = C_4 = T_1 \\ T_y(x, y) = T_{y_I} = T_{y_J} = T_{y_K} = C_5 = T_2 \end{cases} \quad (2.1)$$

Ainsi, par définition des moments nous en déduisons que :

$$\begin{cases} M_{xx}, x = C_6 \\ M_{xy}, y = C_7 \\ M_{yy}, y = C_8 \\ M_{xy}, x = C_9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_{xx} = C_6 x + f_1(y) \\ M_{xy} = C_7 y + f_2(x) \\ M_{yy} = C_8 y + f_3(x) \\ M_{xy} = C_9 x + f_4(y) \end{cases} \quad (2.2)$$

Les équations d'équilibre (21.a-b) et les équations (2.1-2) donnent :

$$\begin{cases} f_2(x) = (C_5 - C_8)x \\ f_4(y) = (C_4 - C_6)y \end{cases} \quad (2.3)$$

On choisit les fonctions $f_1(y)$ et $f_3(x)$ des fonctions linéaire du 1^{er} ordre telles que :

$$\begin{cases} f_1(y) = ay + b \\ f_3(x) = a_1 x + b_1 \end{cases} \quad (2.4)$$

Les équations 2.2 prennent alors la forme :

$$\begin{cases} M_{xx}(x, y) = C_6 x + ay + b \\ M_{yy}(x, y) = C_8 y + a_1 x + b_1 \\ M_{xy}(x, y) = T_x y + T_y x - C_6 y - C_8 x + C_{10} \end{cases} \quad (2.5)$$

D'où les systèmes suivants :

$$\begin{cases} C_6 x_I + ay_I + b = M_{xx_I} \\ C_6 x_J + ay_J + b = M_{xx_J} \\ C_6 x_K + ay_K + b = M_{xx_K} \end{cases} \quad (2.6.a) \quad \text{et} \quad \begin{cases} C_8 y_I + a_1 x_I + b_1 = M_{yy_I} \\ C_8 y_J + a_1 x_J + b_1 = M_{yy_J} \\ C_8 y_K + a_1 x_K + b_1 = M_{yy_K} \end{cases} \quad (2.6.b)$$

On pose : $S_{IJK} = (x_I - x_J)(y_I - y_K) - (x_I - x_K)(y_I - y_J)$ le double de la surface du triangle IJK ,

et on a :

$$\begin{cases} M_{xx}(x, y) = m_I(x, y)M_{xx_I} + m_J(x, y)M_{xx_J} + m_K(x, y)M_{xx_K} \\ M_{yy}(x, y) = m_I(x, y)M_{yy_I} + m_J(x, y)M_{yy_J} + m_K(x, y)M_{yy_K} \end{cases} \quad (2.7.a)$$

Avec

$$\begin{cases} m_I(x, y) = 1 + \frac{(x - x_I)(y_J - y_K) - (y - y_I)(x_J - x_K)}{S_{IJK}} \\ m_J(x, y) = \frac{(x - x_I)(y_K - y_I) - (y - y_I)(x_K - x_I)}{S_{IJK}} \\ m_K(x, y) = \frac{(x - x_I)(y_I - y_J) - (y - y_I)(x_I - x_J)}{S_{IJK}} \end{cases} \quad (2.7.b)$$

$$\text{et } \begin{cases} C_6 = \frac{y_J - y_K}{S_{IJK}} M_{xx_I} + \frac{y_K - y_I}{S_{IJK}} M_{xx_J} + \frac{y_I - y_J}{S_{IJK}} M_{xx_K} \\ C_8 = \frac{x_K - x_J}{S_{IJK}} M_{yy_I} + \frac{x_I - x_K}{S_{IJK}} M_{yy_J} + \frac{x_J - x_I}{S_{IJK}} M_{yy_K} \end{cases} \quad (2.8)$$

$$M_{xy}(x, y) = T_1 (y - y_I m_I - y_J m_J - y_K m_K) + T_2 (x - x_I m_I - x_J m_J - x_K m_K) + m_I M_{xy_I} + m_J M_{xy_J} + m_K M_{xy_K} \quad (2.9)$$

$$\text{et } \begin{cases} C_6 = \frac{T_1 s_1}{S_{IJK}} - \frac{x_K - x_J}{S_{IJK}} M_{xy_I} - \frac{x_I - x_K}{S_{IJK}} M_{xy_J} - \frac{x_J - x_I}{S_{IJK}} M_{xy_K} \\ C_8 = \frac{T_2 s_1}{S_{IJK}} + \frac{y_K - y_J}{S_{IJK}} M_{xy_I} + \frac{y_I - y_K}{S_{IJK}} M_{xy_J} + \frac{y_J - y_I}{S_{IJK}} M_{xy_K} \end{cases} \quad (2.10)$$

Avec $s_1 = y_I(x_K - x_J) + y_J(x_I - x_K) + y_K(x_J - x_I)$

En égalisant le système d'équation s (2.8) et système d'équations (2.10), on obtient la relation suivante entre les efforts de cisaillement et les moments nodaux:

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{S_1} \{ (y_J - y_K) M_{xx_I} + (y_K - y_I) M_{xx_J} + (y_I - y_J) M_{xx_K} + (x_K - x_J) M_{xy_I} + (x_I - x_K) M_{xy_J} + (x_J - x_I) M_{xy_K} \} \\ T_2 = \frac{1}{S_1} \{ (y_J - y_K) M_{xy_I} + (y_K - y_I) M_{xy_J} + (y_I - y_J) M_{xy_K} + (x_K - x_J) M_{yy_I} + (x_I - x_K) M_{yy_J} + (x_J - x_I) M_{yy_K} \} \end{cases} \quad (2.11)$$

Nous pouvons, par la suite, exprimer une relation entre le vecteur force élémentaire nodal extérieur d'un élément fini $\{F_{ext}^e\}$ (qui n'est autre qu'un vecteur élémentaire intérieur de la plaque) en fonction de son expression réduite $\{\Sigma_I^r\}$. Ainsi, on obtient la matrice de passage du système sans modes rigides de déformation à 5 degrés de liberté.

$$\{F_{ext}^e\} = [R]^T \{\Sigma_I^r\} \quad (2.12)$$

$$\{\Sigma_I^r\}^T = \{N_1, N_2, N_3, M_{xx_I}, M_{yy_I}, M_{xy_I}, M_{xx_J}, M_{yy_J}, M_{xy_J}, M_{xx_K}, M_{yy_K}, M_{xy_K}\} \quad (2.13)$$

$\{F_{ext}^e\}$ est défini dans l'équation (2.15), $\{\Sigma_I^r\}$ est le vecteur force élémentaire nodal réduit.

$[R]$ est la matrice de passage du système sans modes rigides de déformation obtenue en utilisant le théorème de **CASTIGLIANO** :

Théorème de CASTIGLIANO

En général une structure soumise à un système S de forces et de couples se déforme pendant le chargement et les points d'application des forces se trouvent déplacer et les sections d'application des couples ont tourné => le système S a donc produit un certain travail qui est emmagasiné par la structure sous forme d'énergie potentielle, celle-ci est le potentiel interne acquis $W(S)$.

- Le théorème s'énonce comme suit : la dérivée partielle du potentiel interne acquis par rapport à l'une des forces appliquées F_i est égale à la projection du déplacement du point d'application de la force suivant le support de cette force telle que :

$$\frac{\partial W(S)}{\partial F_i} = \lambda_i$$

De même la dérivée partielle de ce potentiel par rapport à l'un des couples appliqués est égale à la rotation de la section d'application du couple telle que : $\frac{\partial W(S)}{\partial C_i} = \varphi_i$

Par conséquent on peut écrire dans le cas de la plaque étudiée sous l'action d'un système de

$$\text{force } \{\Sigma_I^r\} : \frac{\partial W_{ext}^e(F)}{\partial \Sigma_I^r} = q \quad (2.14)$$

De la relation 2.14 nous pouvons écrire (voir §II.1.1.1) que :

$$W_{ext}^e = \sum_i q_i \Sigma_I^r = q^T \Sigma_I^r = (F_{ext}^e)^T u^e = (F_{ext}^e)^T P U^e = \{u^e\}^T [K_R^e] \{u^e\} \quad (2.15)$$

Où
$$[K_R^e] = [R]^T [K^e] [R]$$

II.1.1.1- Calcul du travail extérieur d'un élément fini W_{ext}^e

Soit un élément fini plaque à trois nœuds IJK de forme triangulaire de normales \vec{n}_1 , \vec{n}_2 et \vec{n}_3 sur les facettes respectives IJ , JK et KI (figure 2.2).

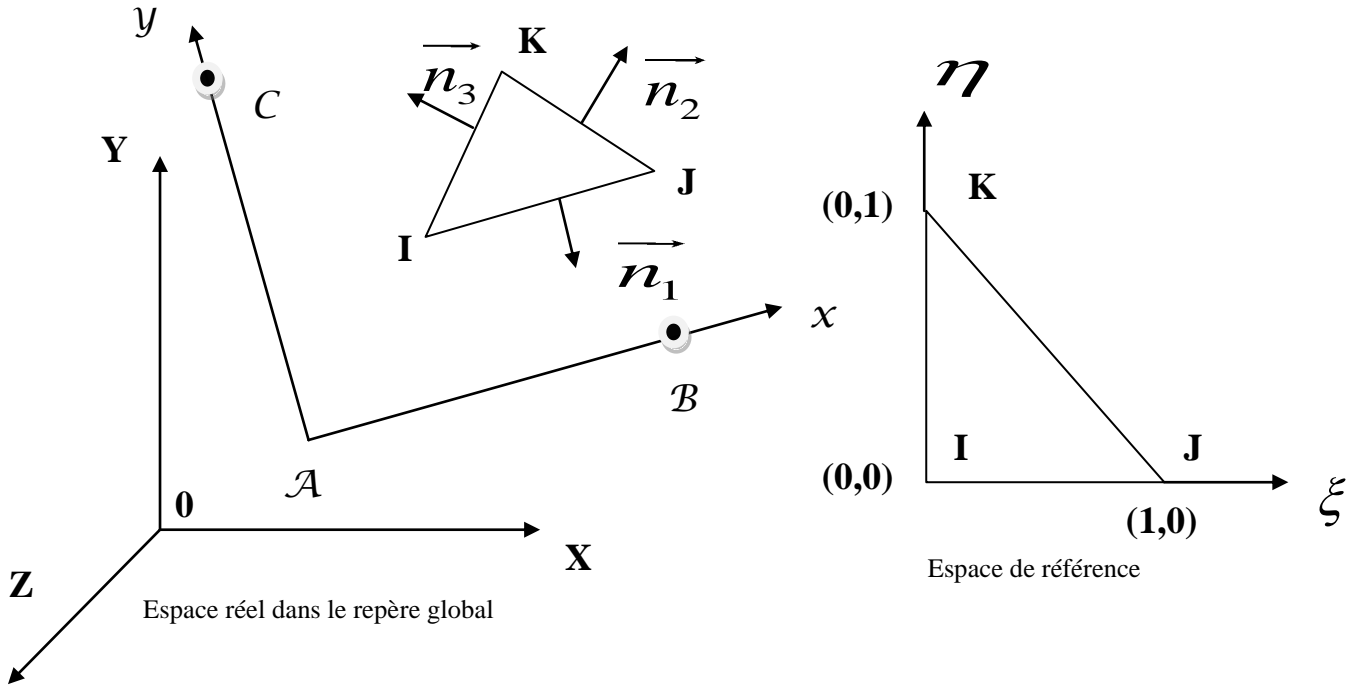


Figure 2.2: système d'une base locale dans la base globale

Les fonctions d'interpolation dans l'espace parent sont naturellement données par :

$$N_I(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta, \quad N_J(\xi, \eta) = \xi \quad \text{et} \quad N_K(\xi, \eta) = \eta$$

$$\begin{cases} x = N_I(\xi, \eta)x_I + N_J(\xi, \eta)x_J + N_K(\xi, \eta)x_K \\ y = N_I(\xi, \eta)y_I + N_J(\xi, \eta)y_J + N_K(\xi, \eta)y_K \end{cases} \quad (2.16)$$

Par l'application du théorème de la divergence, le travail des efforts de surfaces s'obtient par :

$$\int_{s_q} \sigma_{ij} n_j u_i ds \quad (2.17)$$

Où s_q la partie de surface de la plaque où le déplacement u_i n'est pas nul.

❖ Sur la facette IJ

$$\eta = 0 \Rightarrow N_I = 1 - \xi \quad \text{et} \quad N_J = \xi$$

Le système d'équations (2.16) s'écrit :

$$\begin{cases} x = (1 - \xi)x_I + \xi x_J \\ y = (1 - \xi)y_I + \xi y_J \end{cases} \quad (2.18.a) \quad \text{et} \quad \int_{x_I}^{x_J} dl = L_{IJ} \int_0^1 d\xi \quad (2.18.b)$$

Puisque $dl^2 = dx^2 + dy^2 \Rightarrow dl = L_{IJ}d\xi$ avec $L_{IJ} = \sqrt{(x_J - x_I)^2 + (y_J - y_I)^2}$

Les paramètres m_I, m_J et m_K sont des variables fonctions de x et y uniquement, nous pourrions les exprimer sur cette facette(IJ), en utilisant les équations du système (2.18.a), en fonction de ξ uniquement.

$$m_I(\xi) = 1 - \xi, \quad m_J(\xi) = \xi \quad \text{et} \quad m_K(\xi) = 0$$

\vec{n}_1 étant le vecteur normal extérieur à la facette IJ , ce qui donne :

$$\vec{n}_1 = \vec{z} \wedge \frac{\overline{JI}}{L_{IJ}}$$

Dans le repère local $(0, x, y, z)$ on a : $\frac{\overline{JI}}{L_{IJ}} = x_{ji} \vec{x} + y_{ji} \vec{y}$

$$\text{Avec } x_{ji} = \frac{x_I - x_J}{L_{IJ}} \quad \text{et} \quad y_{ji} = \frac{y_I - y_J}{L_{IJ}}$$

Ce qui permet d'enduire que :

$$\vec{n}_1 = n_{x_1} \vec{x} + n_{y_1} \vec{y} \quad \text{avec} \quad n_{x_1} = \frac{y_J - y_I}{L_{IJ}} \quad ; \quad n_{y_1} = \frac{x_I - x_J}{L_{IJ}} \quad \text{et} \quad n_{z_1} = 0$$

$$W_{IJ} = \int_{s_q} (\sigma_{xx} n_{x_1} + \sigma_{xy} n_{y_1} + \sigma_{xz} n_{z_1}) u_x dldz + \int_{s_q} (\sigma_{yx} n_{x_1} + \sigma_{yy} n_{y_1} + \sigma_{yz} n_{z_1}) u_y dldz + \int_{s_q} (\sigma_{zx} n_{x_1} + \sigma_{zy} n_{y_1} + \sigma_{zz} n_{z_1}) u_z dldz \quad (2.19)$$

$$\text{Où} \quad \begin{pmatrix} u_x(x, y, z) \\ u_y(x, y, z) \\ u_z(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0(x, y) \\ v_0(x, y) \\ w_0(x, y) \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \beta_x(x, y) \\ \beta_y(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

On peut faire une distribution simple sur les différentes facettes du triangle IJK en interpolant u_0, v_0, w_0, β_x et β_y par une interpolation du premier ordre sous la forme :

$$\phi = \sum_{i=1}^n N_i \phi_i \quad (2.21)$$

($\phi \equiv u_0, v_0, w_0, \beta_x, \beta_y$) et n le nombre de nœuds de l'élément fini triangulaire(IJK)

On calcule terme par terme les expressions de la relation (2.19):

❖ Pour σ_{xx} , on pose :

$$I_{xx_{IJ}} = \int_{s_q} \sigma_{xx} n_{x_1} (u_0 + z\beta_x) dldz = \int N_{xx} n_{x_1} u_0 dl + \int M_{xx}(x, y) n_{x_1} \beta_x dl$$

L'intégration de chaque terme de l'expression $I_{xx_{IJ}}$ aboutie à l'expression suivante :

$$I_{xx_{IJ}} = \frac{1}{2} N_1 n_{x_1} L_{IJ} (u_{0_i} + u_{0_j}) + \frac{1}{6} n_{x_1} L_{IJ} \left\{ M_{xx_i} (2\beta_{x_i} + \beta_{x_j}) + M_{xx_j} (\beta_{x_i} + 2\beta_{x_j}) \right\} \quad (2.22)$$

❖ Pour σ_{yy} on a :

$$I_{yy_{IJ}} = \frac{1}{2} N_2 n_{y_1} L_{IJ} (v_{0_i} + v_{0_j}) + \frac{1}{6} n_{y_1} L_{IJ} \left\{ M_{yy_i} (2\beta_{y_i} + \beta_{y_j}) + M_{yy_j} (\beta_{y_i} + 2\beta_{y_j}) \right\} \quad (2.23)$$

❖ Pour σ_{xy} et σ_{yx} on a $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$:

$$I_{xy_{IJ}} = \frac{1}{2} N_3 L_{IJ} (n_{x_1} v_{0_i} + n_{y_1} u_{0_i} + n_{x_1} v_{0_j} + n_{y_1} u_{0_j}) + \frac{1}{6} L_{IJ} \left\{ (n_{x_1} \beta_{y_i} + n_{y_1} \beta_{x_i}) (2M_{xy_i} + M_{xy_j}) + (n_{x_1} \beta_{y_j} + n_{y_1} \beta_{x_j}) (M_{xy_i} + 2M_{xy_j}) \right\} \quad (2.24)$$

❖ Pour σ_{xz} , σ_{zx} et σ_{yz} , σ_{zy} on a $n_{z_1} = 0$

$$\begin{cases} I_{xz_{IJ}} = \frac{1}{2} T_1 n_{x_1} L_{IJ} (w_{0_i} + w_{0_j}) \\ I_{yz_{IJ}} = \frac{1}{2} T_2 n_{y_1} L_{IJ} (w_{0_i} + w_{0_j}) \end{cases} \quad (2.25)$$

❖ **Sur la facette JK**

$$\xi + \eta = 1 \Rightarrow N_i = 0, \quad N_j = \xi \text{ et } N_k = 1 - \xi$$

Le système d'équations (2.16) s'écrit :

$$\begin{cases} x = \xi x_j + (1 - \xi) x_k \\ y = \xi y_j + (1 - \xi) y_k \end{cases} \quad (2.26.a) \text{ et } \int_{x_j}^{x_k} dl = L_{JK} \int_0^1 d\xi \quad (2.26.b)$$

$$\text{Avec } L_{JK} = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}$$

Les paramètres m_i, m_j et m_k peuvent s'écrire finalement sur cette facette (JK), en utilisant les expressions de la relation (2.26.a), en fonction de ξ uniquement.

$$m_i(\xi) = 0, \quad m_j(\xi) = \xi \text{ et } m_k(\xi) = 1 - \xi$$

\vec{n}_2 étant le vecteur normal extérieur sur la facette JK, ce qui donne : $\vec{n}_2 = \vec{z} \wedge \frac{\overline{KJ}}{L_{KJ}}$

Dans le repère local (0, x, y, z) on a : $\frac{\overline{KJ}}{L_{KJ}} = x_{kj} \vec{x} + y_{kj} \vec{y}$

$$\text{Avec } x_{kj} = \frac{x_j - x_k}{L_{KJ}} \text{ et } y_{kj} = \frac{y_j - y_k}{L_{KJ}}$$

Ce qui permet d'induire que :

$$\vec{n}_2 = n_{x_2} \vec{x} + n_{y_2} \vec{y} \text{ avec } n_{x_2} = \frac{y_k - y_j}{L_{KJ}} ; \quad n_{y_2} = \frac{x_j - x_k}{L_{KJ}} \text{ et } n_{z_1} = 0$$

❖ Pour σ_{xx}

$$I_{xxJK} = \frac{1}{2} N_1 n_{x_2} L_{JK} (u_{0J} + u_{0K}) + \frac{1}{6} n_{x_2} L_{JK} \left\{ M_{xxJ} (2\beta_{xJ} + \beta_{xK}) + M_{xxK} (\beta_{xJ} + 2\beta_{xK}) \right\} \quad (2.27)$$

❖ Pour σ_{yy} on a :

$$I_{yyJK} = \frac{1}{2} N_2 n_{y_2} L_{JK} (v_{0J} + v_{0K}) + \frac{1}{6} n_{y_2} L_{JK} \left\{ M_{yyJ} (2\beta_{yJ} + \beta_{yK}) + M_{yyK} (\beta_{yJ} + 2\beta_{yK}) \right\} \quad (2.28)$$

❖ Pour σ_{xy} et σ_{yx} on a $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$:

$$I_{xyJK} = \frac{1}{2} N_3 L_{JK} (n_{x_2} v_{0J} + n_{y_2} u_{0J} + n_{x_2} v_{0K} + n_{y_2} u_{0K}) \quad (2.29)$$

$$+ \frac{1}{6} L_{JK} \left\{ (n_{x_2} \beta_{yJ} + n_{y_2} \beta_{xJ}) (2M_{xyJ} + M_{xyK}) + (n_{x_2} \beta_{yK} + n_{y_2} \beta_{xK}) (M_{xyJ} + 2M_{xyK}) \right\}$$

❖ Pour σ_{xz} , σ_{zx} et σ_{yz} , σ_{zy} on a $n_{z_1} = 0$

$$\begin{cases} I_{xzJK} = \frac{1}{2} T_1 n_{x_2} L_{JK} (w_{0J} + w_{0K}) \\ I_{yzJK} = \frac{1}{2} T_2 n_{y_2} L_{JK} (w_{0J} + w_{0K}) \end{cases} \quad (2.30)$$

❖ **Sur la facette KI**

$$\xi = 0 \Rightarrow N_I = 1 - \eta \text{ et } N_K = \eta$$

Le système d'équations (2.16) s'écrit :

$$\begin{cases} x = (1 - \eta)x_I + \eta x_K \\ y = (1 - \eta)y_I + \eta y_K \end{cases} \quad (2.31.a) \quad \text{et} \quad \int_{y_K}^{y_I} dl = L_{KI} \int_0^1 d\eta \quad (2.31.b)$$

$$\text{Avec } L_{KI} = \sqrt{(x_I - x_K)^2 + (y_I - y_K)^2}$$

Les paramètres m_I, m_J et m_K peuvent s'écrire finalement sur cette facette(KI), en utilisant les expressions de la relation (2.31.a), en fonction de η uniquement.

$$m_I(\eta) = 1 - \eta, \quad m_J(\eta) = 0 \text{ et } m_K(\eta) = \eta$$

\vec{n}_3 étant le vecteur normal extérieur sur la facette KI , ce qui donne :

$$\vec{n}_3 = \vec{z} \wedge \frac{\overrightarrow{IK}}{L_{IK}}$$

Dans le repère local $(0, x, y, z)$ on a :

$$\frac{\overrightarrow{IK}}{L_{IK}} = x_{ik} \vec{x} + y_{ik} \vec{y} \quad \text{et} \quad L_{IK} = \sqrt{(x_K - x_I)^2 + (y_K - y_I)^2}$$

$$\text{Avec } x_{ik} = \frac{x_K - x_I}{L_{IK}} \text{ et } y_{ik} = \frac{y_K - y_I}{L_{IK}}$$

Ce qui permet d'enduire que :

$$\vec{n}_3 = n_{x_3} \vec{x} + n_{y_3} \vec{y} \text{ avec } n_{x_3} = \frac{y_I - y_K}{L_{IK}} ; n_{y_3} = \frac{x_K - x_I}{L_{IK}} \text{ et } n_{z_3} = 0$$

❖ Pour σ_{xx}

$$I_{xx_{KI}} = \frac{1}{2} N_1 n_{x_3} L_{KI} (u_{0_K} + u_{0_I}) + \frac{1}{6} n_{x_3} L_{KI} \left\{ M_{xx_I} (\beta_{x_K} + 2\beta_{x_I}) + M_{xx_K} (2\beta_{x_K} + \beta_{x_I}) \right\} \quad (2.32)$$

❖ Pour σ_{yy} on a :

$$I_{yy_{KI}} = \frac{1}{2} N_2 n_{y_3} L_{KI} (v_{0_K} + v_{0_I}) + \frac{1}{6} n_{y_3} L_{KI} \left\{ M_{yy_I} (\beta_{y_K} + 2\beta_{y_I}) + M_{yy_K} (2\beta_{y_K} + \beta_{y_I}) \right\} \quad (2.33)$$

❖ Pour σ_{xy} et σ_{yx} on a $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$:

$$I_{xy_{KI}} = \frac{1}{2} N_3 L_{KI} (n_{x_3} v_{0_K} + n_{y_3} u_{0_K} + n_{x_3} v_{0_I} + n_{y_3} u_{0_I}) + \frac{1}{6} L_{KI} \left\{ (n_{x_3} \beta_{y_K} + n_{y_3} \beta_{x_K}) (2M_{xy_K} + M_{xy_I}) + (n_{x_3} \beta_{y_I} + n_{y_3} \beta_{x_I}) (M_{xy_K} + 2M_{xy_I}) \right\} \quad (2.34)$$

❖ Pour σ_{xz} , σ_{zx} et σ_{yz} , σ_{zy} on a $n_{z_1} = 0$

$$\begin{cases} I_{xz_{KI}} = \frac{1}{2} T_1 n_{x_3} L_{KI} (w_{0_I} + w_{0_K}) \\ I_{yz_{KI}} = \frac{1}{2} T_2 n_{y_3} L_{KI} (w_{0_I} + w_{0_K}) \end{cases} \quad (2.35)$$

Le travail de la facette IJ est finalement obtenu en sommant les différentes expressions obtenues par intégration de la facette considérée, ce qui nous permet d'écrire :

$$W_{IJ} = I_{xx_{IJ}} + I_{yy_{IJ}} + I_{xy_{IJ}} + I_{xz_{IJ}} + I_{yz_{IJ}} \quad (2.36)$$

Et par la suite le travail total du triangle est simplement la somme des travaux des faces IJ , JK et KI du triangle IJK .

$$W_{ext}^e (F^e) = W_{IJ} + W_{JK} + W_{KI} \quad (2.37)$$

$$q_1 = \frac{\partial W_{ext}^e}{\partial N_1}, q_2 = \frac{\partial W_{ext}^e}{\partial N_2}, q_3 = \frac{\partial W_{ext}^e}{\partial N_3}, q_4 = \frac{\partial W_{ext}^e}{\partial M_{xx_I}}, q_5 = \frac{\partial W_{ext}^e}{\partial M_{yy_I}}, q_6 = \frac{\partial W_{ext}^e}{\partial M_{xy_I}}, q_7 = \frac{\partial W_{ext}^e}{\partial M_{xx_J}},$$

$$q_8 = \frac{\partial W_{ext}^e}{\partial M_{yy_J}}, q_9 = \frac{\partial W_{ext}^e}{\partial M_{xy_J}}, q_{10} = \frac{\partial W_{ext}^e}{\partial M_{xx_K}}, q_{11} = \frac{\partial W_{ext}^e}{\partial M_{yy_K}}, q_{12} = \frac{\partial W_{ext}^e}{\partial M_{xy_K}}$$

$$\{q\} = [R]\{u^e\} \quad (2.38)$$

$$\text{Avec } \{u^e\}^T = \{u_{0_i}, v_{0_i}, w_{0_i}, \beta_{x_i}, \beta_{y_i}, u_{0_j}, v_{0_j}, w_{0_j}, \beta_{x_j}, \beta_{y_j}, u_{0_k}, v_{0_k}, w_{0_k}, \beta_{x_k}, \beta_{y_k}\}$$

En remplaçant $\{q\}$ par son expression (éq.2.38) dans l'équation 2.15 on retrouve l'expression de l'équation 2.12.

$$\{q\}^T = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12}\}$$

$$q_1 = \frac{1}{2} \left\{ (n_{x_1} L_{IJ} + n_{x_3} L_{KI}) u_{0_i} + (n_{x_1} L_{IJ} + n_{x_2} L_{JK}) u_{0_j} + (n_{x_2} L_{JK} + n_{x_3} L_{KI}) u_{0_k} \right\} \quad (2.39.a)$$

$$q_2 = \frac{1}{2} \left\{ (n_{y_1} L_{IJ} + n_{y_3} L_{KI}) v_{0_i} + (n_{y_1} L_{IJ} + n_{y_2} L_{JK}) v_{0_j} + (n_{y_2} L_{JK} + n_{y_3} L_{KI}) v_{0_k} \right\} \quad (2.39.b)$$

$$q_3 = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &(n_{y_1} L_{IJ} + n_{y_3} L_{KI}) u_{0_i} + (n_{y_1} L_{IJ} + n_{y_2} L_{JK}) u_{0_j} + (n_{y_2} L_{JK} + n_{y_3} L_{KI}) u_{0_k} \\ &+ (n_{x_1} L_{IJ} + n_{x_3} L_{KI}) v_{0_i} + (n_{x_1} L_{IJ} + n_{x_2} L_{JK}) v_{0_j} + (n_{x_2} L_{JK} + n_{x_3} L_{KI}) v_{0_k} \end{aligned} \right\} \quad (2.39.c)$$

$$q_4 = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &r_{y_{jk}} \left[(n_{x_1} L_{IJ} + n_{x_3} L_{KI}) w_{0_i} + (n_{x_1} L_{IJ} + n_{x_2} L_{JK}) w_{0_j} + (n_{x_2} L_{JK} + n_{x_3} L_{KI}) w_{0_k} \right] \\ &+ \frac{1}{3} \left[2(n_{x_1} L_{IJ} + n_{x_3} L_{KI}) \beta_{x_i} + n_{x_1} L_{IJ} \beta_{x_j} + n_{x_3} L_{KI} \beta_{x_k} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.39.d)$$

$$q_5 = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &r_{x_{kj}} \left[(n_{y_1} L_{IJ} + n_{y_3} L_{KI}) w_{0_i} + (n_{y_1} L_{IJ} + n_{y_2} L_{JK}) w_{0_j} + (n_{y_2} L_{JK} + n_{y_3} L_{KI}) w_{0_k} \right] \\ &+ \frac{1}{3} \left[2(n_{y_1} L_{IJ} + n_{y_3} L_{KI}) \beta_{y_i} + n_{y_1} L_{IJ} \beta_{y_j} + n_{y_3} L_{KI} \beta_{y_k} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.39.e)$$

$$q_6 = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &\left[r_{x_{kj}} (n_{x_1} L_{IJ} + n_{x_3} L_{KI}) + r_{y_{jk}} (n_{y_1} L_{IJ} + n_{y_3} L_{KI}) \right] w_{0_i} + \left[r_{x_{kj}} (n_{x_1} L_{IJ} + n_{x_2} L_{JK}) + r_{y_{jk}} (n_{y_2} L_{JK} + n_{y_1} L_{IJ}) \right] w_{0_j} \\ &+ \left[r_{x_{kj}} (n_{x_2} L_{JK} + n_{x_3} L_{KI}) + r_{y_{jk}} (n_{y_2} L_{JK} + n_{y_3} L_{KI}) \right] w_{0_k} + \frac{1}{3} \left[2(n_{y_1} L_{IJ} + n_{y_3} L_{KI}) \beta_{x_i} + n_{y_1} L_{IJ} \beta_{x_j} \right] \\ &+ \frac{1}{3} \left[n_{y_3} L_{KI} \beta_{x_k} + 2(n_{x_1} L_{IJ} + n_{x_3} L_{KI}) \beta_{y_i} + n_{x_1} L_{IJ} \beta_{y_j} + n_{x_3} L_{KI} \beta_{y_k} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.39.f)$$

$$q_7 = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &r_{y_{ki}} \left[(n_{x_1} L_{IJ} + n_{x_3} L_{KI}) w_{0_i} + (n_{x_1} L_{IJ} + n_{x_2} L_{JK}) w_{0_j} + (n_{x_2} L_{JK} + n_{x_3} L_{KI}) w_{0_k} \right] \\ &+ \frac{1}{3} \left[n_{x_1} L_{IJ} \beta_{x_i} + 2(n_{x_1} L_{IJ} + n_{x_2} L_{JK}) \beta_{x_j} + n_{x_2} L_{JK} \beta_{x_k} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.39.g)$$

$$q_8 = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &r_{x_{ik}} \left[(n_{y_1} L_{IJ} + n_{y_3} L_{KI}) w_{0_i} + (n_{y_1} L_{IJ} + n_{y_2} L_{JK}) w_{0_j} + (n_{y_2} L_{JK} + n_{y_3} L_{KI}) w_{0_k} \right] \\ &+ \frac{1}{3} \left[n_{y_1} L_{IJ} \beta_{y_i} + 2(n_{y_1} L_{IJ} + n_{y_2} L_{JK}) \beta_{y_j} + n_{y_2} L_{JK} \beta_{y_k} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.39.h)$$

$$q_9 = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \left[r_{x_{ik}} (n_{x_1} L_{IJ} + n_{x_3} L_{KI}) + r_{y_{ki}} (n_{y_1} L_{IJ} + n_{y_3} L_{KI}) \right] w_{0_i} + \left[r_{x_{ik}} (n_{x_1} L_{IJ} + n_{x_2} L_{JK}) + r_{y_{ki}} (n_{y_2} L_{JK} + n_{y_1} L_{IJ}) \right] w_{0_j} \\ & + \left[r_{x_{ik}} (n_{x_2} L_{JK} + n_{x_3} L_{KI}) + r_{y_{ki}} (n_{y_2} L_{JK} + n_{y_3} L_{KI}) \right] w_{0_k} + \frac{1}{3} \left[n_{y_1} L_{IJ} \beta_{x_i} + 2(n_{y_1} L_{IJ} + n_{y_2} L_{JK}) \beta_{x_j} \right] \\ & + \frac{1}{3} \left[n_{y_2} L_{JK} \beta_{x_k} + n_{x_1} L_{IJ} \beta_{y_i} + 2(n_{x_1} L_{IJ} + n_{x_2} L_{JK}) \beta_{y_j} + n_{x_2} L_{JK} \beta_{y_k} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.39.i)$$

$$q_{10} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \left[r_{y_{ij}} \left[(n_{x_1} L_{IJ} + n_{x_3} L_{KI}) w_{0_i} + (n_{x_1} L_{IJ} + n_{x_2} L_{JK}) w_{0_j} + (n_{x_2} L_{JK} + n_{x_3} L_{KI}) w_{0_k} \right] \right] \\ & + \frac{1}{3} \left[n_{x_3} L_{KI} \beta_{x_i} + n_{x_2} L_{JK} \beta_{x_j} + 2(n_{x_2} L_{JK} + n_{x_3} L_{KI}) \beta_{x_k} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.39.j)$$

$$q_{11} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \left[r_{x_{ji}} \left[(n_{y_1} L_{IJ} + n_{y_3} L_{KI}) w_{0_i} + (n_{y_1} L_{IJ} + n_{y_2} L_{JK}) w_{0_j} + (n_{y_2} L_{JK} + n_{y_3} L_{KI}) w_{0_k} \right] \right] \\ & + \frac{1}{3} \left[n_{y_3} L_{KI} \beta_{y_i} + n_{y_2} L_{JK} \beta_{y_j} + 2(n_{y_2} L_{JK} + n_{y_3} L_{KI}) \beta_{y_k} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.39.k)$$

$$q_{12} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \left[r_{x_{ji}} \left[(n_{x_1} L_{IJ} + n_{x_3} L_{KI}) + r_{y_{ij}} (n_{y_1} L_{IJ} + n_{y_3} L_{KI}) \right] w_{0_i} + \left[r_{x_{ji}} (n_{x_1} L_{IJ} + n_{x_2} L_{JK}) + r_{y_{ij}} (n_{y_2} L_{JK} + n_{y_1} L_{IJ}) \right] w_{0_j} \right. \\ & \left. + \left[r_{x_{ji}} (n_{x_2} L_{JK} + n_{x_3} L_{KI}) + r_{y_{ij}} (n_{y_2} L_{JK} + n_{y_3} L_{KI}) \right] w_{0_k} + \frac{1}{3} \left[n_{y_3} L_{KI} \beta_{x_i} + n_{y_2} L_{JK} \beta_{x_j} + 2(n_{y_3} L_{KI} + n_{y_2} L_{JK}) \beta_{x_k} \right] \right\} \\ & \left. + \frac{1}{3} \left[n_{x_3} L_{KI} \beta_{y_i} + n_{x_2} L_{JK} \beta_{y_j} + 2(n_{x_3} L_{KI} + n_{x_2} L_{JK}) \beta_{y_k} \right] \right\} \quad (2.39.l)$$

Avec

$$r_{y_{jk}} = \frac{y_j - y_k}{S_1}, \quad r_{x_{kj}} = \frac{(x_k - x_j)}{s_1}, \quad r_{y_{ki}} = \frac{y_k - y_l}{S_1}, \quad r_{x_{ik}} = \frac{x_l - x_k}{S_1}, \quad r_{y_{ij}} = \frac{y_l - y_j}{S_1}, \quad r_{x_{ji}} = \frac{x_j - x_l}{S_1}$$

$$[R] = \begin{pmatrix} r_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{111} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{27} & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{212} & 0 & 0 & 0 \\ r_{31} & r_{32} & 0 & 0 & 0 & r_{36} & r_{37} & 0 & 0 & 0 & r_{311} & r_{312} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{43} & r_{44} & 0 & 0 & 0 & r_{48} & r_{49} & 0 & 0 & 0 & r_{413} & r_{414} & 0 \\ 0 & 0 & r_{53} & 0 & r_{55} & 0 & 0 & r_{58} & 0 & r_{510} & 0 & 0 & r_{513} & 0 & r_{515} \\ 0 & 0 & r_{63} & r_{64} & r_{65} & 0 & 0 & r_{68} & r_{69} & r_{610} & 0 & 0 & r_{613} & r_{614} & r_{615} \\ 0 & 0 & r_{73} & r_{74} & 0 & 0 & 0 & r_{78} & r_{79} & 0 & 0 & 0 & r_{713} & r_{714} & 0 \\ 0 & 0 & r_{83} & 0 & r_{85} & 0 & 0 & r_{88} & 0 & r_{810} & 0 & 0 & r_{813} & 0 & r_{815} \\ 0 & 0 & r_{93} & r_{94} & r_{95} & 0 & 0 & r_{98} & r_{99} & r_{910} & 0 & 0 & r_{913} & r_{914} & r_{915} \\ 0 & 0 & r_{103} & r_{104} & 0 & 0 & 0 & r_{108} & r_{109} & 0 & 0 & 0 & r_{1013} & r_{1014} & 0 \\ 0 & 0 & r_{113} & 0 & r_{115} & 0 & 0 & r_{118} & 0 & r_{1110} & 0 & 0 & r_{1113} & 0 & r_{1115} \\ 0 & 0 & r_{123} & r_{124} & r_{125} & 0 & 0 & r_{128} & r_{129} & r_{1210} & 0 & 0 & r_{1213} & r_{1214} & r_{1215} \end{pmatrix}$$

Où les éléments de la matrice $[R]$ (r_{11} à r_{1215}) sont les coefficients de pondération qui lient les déplacements q_1 à q_{12} aux déplacements et aux rotations nodaux respectivement (eqt.2.38).

II.1.2-Formulation Élément Fini Plaque Multicouche Multicellulaire

Les expressions des relations 5 peuvent prendre la forme suivante :

$$N = H_m e + H_{mf} k \quad , \quad M = H_{mf} e + H_f k \quad \text{et} \quad T = H_{ct} \gamma \quad (2.40.a)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ 2e_{xy} \end{pmatrix} + \frac{Ez}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ 2k_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.40.b)$$

Avec

$$H_m = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} Edz = \int_{-h/2}^{h/2} Hz dz \quad , \quad H_{mf} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} Ez dz = \int_{-h/2}^{h/2} Hz dz$$

$$H_f = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} Ez^2 dz = \int_{-h/2}^{h/2} Hz^2 dz \quad , \quad H_{ct} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} \frac{k'(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{k'(1-\nu)}{2} \end{pmatrix} Edz = \int_{-h/2}^{h/2} H_\gamma dz$$

$$\text{Et } \{e\}^T = \{e_{xx}, e_{yy}, 2e_{xy}\} \quad , \quad \{k\}^T = \{k_{xx}, k_{yy}, 2k_{xy}\} \quad \text{et} \quad \{\gamma\}^T = \{\gamma_x, \gamma_y\}$$

H_m , H_f et H_{ct} sont les matrices de rigidité en membrane, flexion et cisaillement transverse, respectivement, k' est le facteur de correction de cisaillement. H_{mf} est la matrice de rigidité de la membrane-flexion.

Pour un comportement élastique homogène isotrope de plaque ces matrices ont pour expression :

$$H_m = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \quad , \quad H_f = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \quad , \quad H_{ct} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} \frac{k'(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{k'(1-\nu)}{2} \end{pmatrix}$$

et $H_{mf} = 0$ car il y a symétrie matérielle par rapport au plan $z = 0$

Et l'énergie interne de déformation élastique de la plaque s'exprime plus habituellement pour ce genre de géométrie de la façon suivante :

$$\phi_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_s [e(H_m e + H_{mf} k) + k(H_{mf} e + H_f k) + \gamma H_{ct} \gamma] ds$$

Les équations d'équilibre en tout point de l'élément fini plaque multicouche multicellulaire en absence des charges réparties, se traduisent par:

$$\begin{cases} N_{xx}, x + N_{xy}, y = 0 \\ N_{yy}, y + N_{xy}, x = 0 \\ T_x, x + T_y, y = 0 \\ M_{xx}, x + M_{xy}, y - T_x = 0 \\ M_{yy}, y + M_{xy}, x - T_y = 0 \end{cases} \quad (2.41)$$

Les expressions de différents efforts du système d'équations 2.41 sont données dans les systèmes d'équations 2.1 et 2.11

$$\{N\} = \{N_1, N_1, N_3\}^T = [b_m] \{\Sigma_I^r\} \quad (2.42)$$

$$[b_m] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{T\} = \{T_1, T_2\}^T = [b_{ct}] \{\Sigma_I^r\} \quad (2.43)$$

$$[b_{ct}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & b_2 & b_3 & 0 & b_4 & b_5 & 0 & b_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & b_1 & 0 & b_4 & b_3 & 0 & b_6 & b_5 \end{pmatrix}$$

$$b_1 = \frac{y_J - y_K}{S_1}, b_2 = \frac{x_K - x_J}{S_1}, b_3 = \frac{y_K - y_I}{S_1}, b_4 = \frac{x_I - x_K}{S_1}, b_5 = \frac{y_I - y_J}{S_1} \text{ et } b_6 = \frac{x_J - x_I}{S_1}$$

$$\{M\} = \{M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}\}^T = [b_f(\xi, \eta)] \{\Sigma_I^r\} \quad (2.44)$$

Où les expressions des moments M_{xx}, M_{yy} et M_{xy} sont données dans les équations (2.7.a) et (2.9).

En remplaçant x et y par leurs expressions (système 2.16) dans le système d'équations (2.7.b), les variables m_I, m_J et m_K peuvent s'écrire uniquement en fonction de ξ et η .

$$m_I(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta, m_J(\xi, \eta) = \xi, m_K(\xi, \eta) = \eta$$

Et par la suite les équations (2.7.a) et (2.9) s'écrivent finalement :

$$\begin{cases} M_{xx}(\xi, \eta) = m_I(\xi, \eta)M_{xx_I} + m_J(\xi, \eta)M_{xx_J} + m_K(\xi, \eta)M_{xx_K} \\ M_{yy}(\xi, \eta) = m_I(\xi, \eta)M_{yy_I} + m_J(\xi, \eta)M_{yy_J} + m_K(\xi, \eta)M_{yy_K} \\ M_{xy}(\xi, \eta) = m_I(\xi, \eta)M_{xy_I} + m_J(\xi, \eta)M_{xy_J} + m_K(\xi, \eta)M_{xy_K} \end{cases}$$

Ainsi donc, la matrice $b_f(\xi, \eta)$ est finalement donnée par :

$$[b_f(\xi, \eta)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & m_l & 0 & 0 & m_j & 0 & 0 & m_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_l & 0 & 0 & m_j & 0 & 0 & m_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_l & 0 & 0 & m_j & 0 & 0 & m_k \end{pmatrix}$$

Les matrices $[b_m]$, $[b_{ct}]$ et $[b_f(\xi, \eta)]$ représentent les fonctions d'interpolation exactes des efforts de la membrane, cisaillement et de la flexion en absence des charges réparties. Dans le cas de charges réparties, il est possible de les transformer en charges nodales produisant les mêmes réactions aux nœuds.

Par conséquent nous pouvons donner la matrice qui lie les efforts de la membrane & flexion sur n'importe quel point avec les efforts réduits:

$$\{\Sigma_{mf}\} = \{N, M\}^T = \{N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}, M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}\}^T = [D_{cmf}(\xi, \eta)] \{\Sigma_I^r\} \quad (2.45)$$

$$[D_{cmf}(\xi, \eta)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_l & 0 & 0 & m_j & 0 & 0 & m_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_l & 0 & 0 & m_j & 0 & 0 & m_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_l & 0 & 0 & m_j & 0 & 0 & m_k \end{pmatrix}$$

En tenant compte des relations 4, 2.42 et 2.44 nous pouvons réécrire les travaux de déformation de différents efforts par les expressions suivantes:

$$W_{def}^e (cmf) = \{\Sigma_I^r\}^T S_{IJK} \left(\int_0^1 \int_0^{1-\xi} [D_{cmf}]^T [H_{cmf}]^{-1} [D_{cmf}] d\xi d\eta \right) \{\Sigma_I^r\} \quad (2.46.a)$$

$$W_{def}^e (cisail) = \{\Sigma_I^r\}^T S_{IJK} \left(\int_0^1 \int_0^{1-\xi} [b_{ct}]^T [H_{ct}]^{-1} [b_{ct}] d\xi d\eta \right) \{\Sigma_I^r\} \quad (2.46.b)$$

$$W_{def}^e = W_{def}^e (cisail) + W_{def}^e (cmf) = \{\Sigma_I^r\}^T [F_{flex}^e] \{\Sigma_I^r\} = \{q\}^T \{\Sigma_I^r\} \quad (2.46.c)$$

La discrétisation permet de découper un élément fini plaque en un certain nombre de triangles de dimensions x et y variables, appelés cellules localisées par x_i et y_i indiquant la position de leurs centroïdes par rapport à la fibre moyenne et au centre desquels sont définies les matrices de flexibilités H_{cmf}^{-1} , H_{ct}^{-1} et par conséquent toutes les surfaces droites comprises dans une cellule donnée, d'une couche donnée d'épaisseur h_i , auront les mêmes propriétés géométriques, mécaniques et cinématiques. Ainsi, chaque cellule est supposée comme un constituant d'un

même matériau et l'état de contraintes et de déformations au milieu de chacune est pris comme représentatif de la cellule entièrement.

Les matrices H_m, H_f, H_{mf} et H_{ct} sont les matrices de rigidités de membrane, de flexion, de couplage entre la membrane & la flexion et le cisaillement transverse, respectivement.

Les relations liant H_m, H_f, H_{mf} à H et H_{ct} à H_γ sont valides quelle que soit la loi de comportement élastique, avec déformations anélastiques (thermo-élasticité, plasticité, ...).

Pour un élément fini composé par N couches élastiques, les matrices H_m, H_f, H_{mf} et H_{ct} s'écrivent [JE 90.b]:

$$H_m = \sum_{i=1}^N h_i H_i, \quad H_{mf} = \sum_{i=1}^N h_i \eta_i H_i, \quad H_f = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N (z_{i+1}^3 - z_i^3) H_i \quad \text{et} \quad H_{ct} = \sum_{i=1}^N h_i H_{\gamma_i} \quad (2.47)$$

Où $h_i = z_{i+1} - z_i$, $\eta_i = \frac{1}{2}(z_{i+1} + z_i)$ et H_i, H_{γ_i} représentent les matrices H et H_γ de la couche i .

$$H_i = \frac{E_i}{1-\nu_i^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu_i & 0 \\ \nu_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_i}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H_{\gamma_i} = \frac{E_i}{1-\nu_i^2} \begin{pmatrix} \frac{k'(1-\nu_i)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{k'(1-\nu_i)}{2} \end{pmatrix}$$

Avec E_i le module d'Young moyen d'une couche anisotrope, h_i est l'épaisseur de la couche et ν_i est le coefficient de Poisson de la couche i .

Les expressions des relations 2.40.a et 2.40.b permettent de donner la matrice somme membrane, flexion et de la membrane & flexion par :

$$[H_{cmf}(\xi_K, \eta_K)] = \begin{bmatrix} H_m & H_{mf} \\ H_{mf}^T & H_f \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Les efforts en tout point de l'élément fini plaque s'écrivent dans ce cas sous forme matricielle en fonction des déformations identiquement à l'équation 10 :

$$\{\Sigma_{mf}(\xi, \eta)\} = [H_{cmf}(\xi, \eta)] \{d_{cmf}(\xi, \eta)\} \quad (2.49)$$

$$\{T(\xi, \eta)\} = [H_{ct}(\xi, \eta)] \{d_{ct}(\xi, \eta)\} \quad (2.50)$$

Où $\{d_{cmf}(\xi, \eta)\} = \{e_{xx}, e_{yy}, \gamma_{xy}, k_{xx}, k_{yy}, \chi_{xy}\}$ et $\{d_{ct}(\xi, \eta)\} = \{\gamma_x, \gamma_y\}$

II.1.3-Matrice de flexibilité et de rigidité élémentaires

L'assemblage direct des éléments finis présentés ci-dessus permet d'obtenir la matrice de rigidité élémentaire dans le repère global exprimée par l'inversion de la sommation des différentes matrices de flexibilités relatives tel que :

$$[K^e] = [F_{flex}^e]^{-1} = \left([F_{flex}^e (cmf)] + [F_{flex}^e (cisail)] \right)^{-1} \quad (2.51)$$

Pour un élément fini plaque de référence triangulaire à m divisions suivant les axes ξ et η (figure 2.2), le nombre de cellules anisotropes en élasticité qui compose l'élément fini est donc m^2 . Ainsi, une deuxième transformation du système de base (ξ, η) lié à l'élément fini plaque de référence vers un système de base (r, s) lié à la cellule est nécessaire, et les nouvelles fonctions m_I, m_J et m_K sont uniquement exprimées en fonction de r et s .

➤ Pour le triangle inférieur (cellule inférieure : figure 2.3)

$$\xi = \frac{1}{m}(I+r-1), \eta = \frac{1}{m}(J+s-1) \text{ pour } I \text{ variant de } 1 \text{ à } m+1-J \text{ et } J \text{ variant de } 1 \text{ à } m$$

$$m_I(r, s) = 1 - \frac{1}{m}(I+J+r+s-2), m_J(r, s) = \frac{1}{m}(I+r-1), m_K(r, s) = \frac{1}{m}(j+s-1)$$

➤ Pour le triangle supérieur (cellule supérieure : figure 2.3)

$$\xi = \frac{1}{m}(I-r), \eta = \frac{1}{m}(J-s) \text{ pour } I \text{ variant de } 1 \text{ à } m+1-J \text{ et } J \text{ variant de } 1 \text{ à } m$$

$$m_I(r, s) = 1 - \frac{1}{m}(I+J-r-s), m_J(r, s) = \frac{1}{m}(I-r), m_K(r, s) = \frac{1}{m}(J-s)$$

Et par conséquent, les différentes matrices de flexibilités sont données, en utilisant les formules de « Hammer », par :

$$\begin{aligned} [F_{flex}^e (cmf)] &= S_{IJK} \sum_{k=1}^{m^2} \iint_{\Delta} [D_{cmf}(\xi, \eta)]^T [H_{cmf}(\xi_K, \eta_K)]^{-1} [D_{cmf}(\xi, \eta)] d\xi d\eta \\ &= S_{IJK} \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^{m^2} \sum_{i=1}^{npi} W_i [D_{cmf}(r_i, s_i)]^T [H_{cmf}(r_K, s_K)]^{-1} [D_{cmf}(r_i, s_i)] \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} [F_{flex}^e (cisail)] &= S_{IJK} \sum_{k=1}^{m^2} \iint_{\Delta} [b_{ct}]^T [H_{ct}(\xi_K, \eta_K)]^{-1} [b_{ct}] d\xi d\eta \\ &= S_{IJK} \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^{m^2} \sum_{i=1}^{npi} W_i [b_{ct}(r_i, s_i)]^T [H_{ct}(r_K, s_K)]^{-1} [b_{ct}(r_i, s_i)] \end{aligned} \quad (2.53)$$

Où npi est le nombre de points d'intégration et S_{IJK} le Jacobien de la transformation de $dxdy$ à $d\xi d\eta$ et $\frac{1}{m^2}$ le Jacobien de transformation de ce dernier à $drds$.

La matrice élémentaire globale peut s'écrire finalement : $[IK^e] = [P]^T [R]^T [K^e][R][P]$

Où : $\{u^e\} = [P]\{U^e\}$

Avec :

$[P]$, la matrice de passage géométrique du repère local au global telle que :

$\{u^e\}$, le vecteur des déplacements élémentaires dans le repère local ($A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$: figure 2.2)

$\{U^e\}$, le vecteur des déplacements élémentaires dans le repère global ($0, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$: figure 2.2)

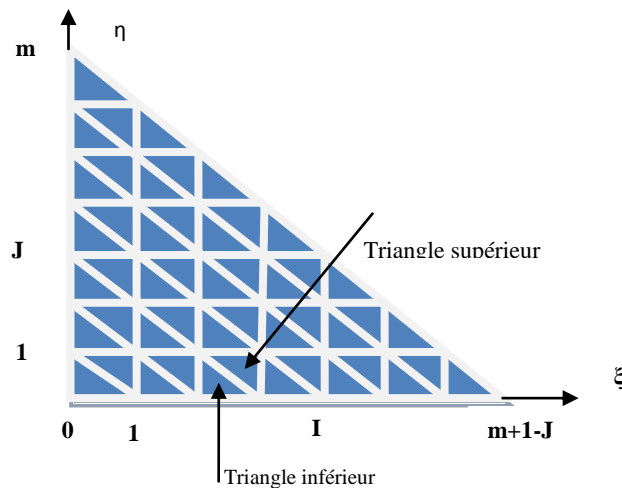
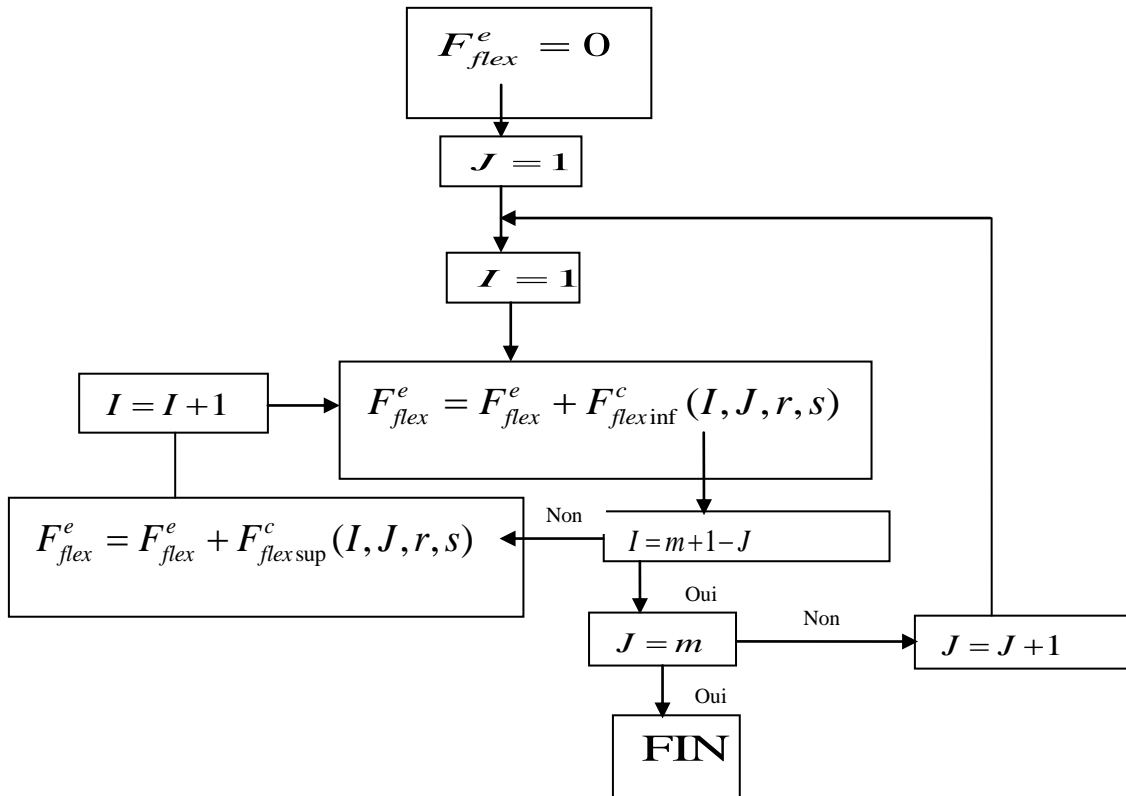


Figure 2.3- élément fini plaque multicellulaire multicouche

Algorithme de calcul de la matrice de flexibilité d'un élément triangulaire à m^2 cellules:



Où $F_{flex\ inf}^c$ la matrice de flexibilité de la cellule triangulaire inferieure et $F_{flex\ sup}^c$ la matrice de flexibilité de la cellule triangulaire supérieure.

II.1.4-Matrice de passage du repère local au global

Soit $(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère plan orthogonal local lié à une plaque donnée et $\{u^e\}$ son vecteur champ des déplacements locaux élémentaire. $(0, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ est le repère global du système et $\{U^e\}$ le vecteur champ de déplacements globaux (figure 2.2). On peut choisir un point B et un point C sur la plaque de telle manière que le vecteur \vec{AB} et le vecteur \vec{AC} soient colinéaires aux vecteurs \vec{x} et \vec{y} respectivement :

$$\vec{x} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}, \quad \vec{y} = \frac{\vec{AC}}{\|\vec{AC}\|} \quad \text{et} \quad \vec{z} = \vec{y} \wedge \vec{x}$$

On pose : $X_{ji} = X_j - X_i$, $L_{AB} = \|\vec{AB}\| = \sqrt{X_{BA}^2 + Y_{BA}^2 + Z_{BA}^2}$

$$\text{et} \quad \begin{cases} \vec{x} = x_1 \vec{X} + x_2 \vec{Y} + x_3 \vec{Z} \\ \vec{y} = y_1 \vec{X} + y_2 \vec{Y} + y_3 \vec{Z} \\ \vec{z} = z_1 \vec{X} + z_2 \vec{Y} + z_3 \vec{Z} \end{cases} \quad (2.54)$$

$$\text{Avec} \quad x_1 = \frac{X_{BA}}{L_{AB}}, \quad x_2 = \frac{Y_{BA}}{L_{AB}}, \quad x_3 = \frac{Z_{BA}}{L_{AB}}, \quad y_1 = \frac{X_{CA}}{L_{AC}}, \quad y_2 = \frac{Y_{CA}}{L_{AC}}, \quad y_3 = \frac{Z_{CA}}{L_{AC}}, \quad z_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2,$$

$$z_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3, \quad z_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1 \quad (2.55)$$

Le champ des déplacements d'un point M de la plaque peut s'écrire sur les deux bases :

$$u_p(M) = u\vec{x} + v\vec{y} + w\vec{z} = U\vec{X} + V\vec{Y} + W\vec{Z} \quad (2.56)$$

Le vecteur champ des déplacements élémentaires $\{u^e\}$ dans le repère local est lié au vecteur champ des déplacements élémentaires $\{U^e\}$ dans le repère global par :

$$\{u^e\} = [P]\{U^e\} \quad (2.57)$$

$$\{U^e\}^T = \{U_{0_i}, V_{0_i}, W_{0_i}, \beta_{x_i}, \beta_{y_i}, \beta_{z_i}, U_{0_j}, V_{0_j}, W_{0_j}, \beta_{x_j}, \beta_{y_j}, \beta_{z_j}, U_{0_k}, V_{0_k}, W_{0_k}, \beta_{x_k}, \beta_{y_k}, \beta_{z_k}\}$$

La rotation β_z négligée dans les axes locaux (§.I.1) apparait dans les axes globaux et devient β_z . En effet, dans les axes locaux, le repère relatif à une plaque donnée, la rotation β_z autour de l'axe z qui est la direction de l'épaisseur h, peut être considérée nulle. Ceci n'est pas vrais dans les axes globaux, repère global du système étudié, et la rotation globale n'est plus

considérée nulle et est exprimée sous la forme d'une combinaison linéaire de β_x et β_y les rotations locales (équation 2.58). Le développement des calculs permet de vérifier cette théorie. Le développement de l'équation (2.56) permet d'écrire :

$$\begin{cases} U = x_1 u_0 + y_1 v_0 + z_1 w_0 + z(x_1 \beta_x + y_1 \beta_y) = U_0 + z \beta_x \\ V = x_2 u_0 + y_2 v_0 + z_2 w_0 + z(x_2 \beta_x + y_2 \beta_y) = V_0 + z \beta_y \\ W = x_3 u_0 + y_3 v_0 + z_3 w_0 + z(x_3 \beta_x + y_3 \beta_y) = W_0 + z \beta_z \end{cases} \quad (2.58)$$

La relation entre le champ de déplacement élémentaire local et le champ de déplacement élémentaire global doit satisfaire l'équation 2.57 et d'après le système d'équations 2.58, la matrice de passage associée sera d'ordres n et m . Pour des raisons d'inversion de matrice, la matrice de passage doit être une matrice carré d'ordre n ($n = m$) et par conséquent l'expression de la rotation autour de l'axe Z $\beta_z = x_3 \beta_x + y_3 \beta_y$ ne sera pas prise en considération dans la matrice de passage. Toutefois, cette expression servira à calculer la rotation β_z .

Ecrivons l'équation 2.56 sous la forme :

$$\vec{u}_p(M) = \vec{u}_0(G) + \vec{\Omega} \Lambda \vec{G} \vec{P} = U_0 \vec{X} + V_0 \vec{Y} + W_0 \vec{Z} + z(\beta_x \vec{X} + \beta_y \vec{Y} + \beta_z \vec{Z}) \quad (2.59)$$

Avec $\vec{G} \vec{P} = z \vec{z} = z(z_1 \vec{X} + z_2 \vec{Y} + z_3 \vec{Z})$ et $\vec{\Omega} = \beta_x \vec{x} + \beta_y \vec{y} = \Omega_x \vec{X} + \Omega_y \vec{Y} + \Omega_z \vec{Z}$

Ainsi

$$\vec{\Omega} \Lambda \vec{G} \vec{P} = (z_3 \Omega_y - z_2 \Omega_z) \vec{X} + (z_1 \Omega_z - z_3 \Omega_x) \vec{Y} + (z_2 \Omega_x - z_1 \Omega_y) \vec{Z} \quad (2.60)$$

Des équations 2.58, 2.59 et 2.60, on en déduit que :

$$\begin{cases} \beta_x x_1 + \beta_y y_1 = z_3 \Omega_y - z_2 \Omega_z \\ \beta_x x_2 + \beta_y y_2 = z_1 \Omega_z - z_3 \Omega_x \\ \beta_x x_3 + \beta_y y_3 = z_2 \Omega_x - z_1 \Omega_y \end{cases} \quad (2.61)$$

On obtient donc (système 2.61) un système à trois équations et à deux inconnues β_x et β_y dont la résolution aboutie à trois solutions possibles selon le cas de figure :

Si $d_1 = x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0$

$$\begin{bmatrix} S_2^{-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{d_1} \begin{bmatrix} y_1 z_3 & y_2 z_3 & -(y_1 z_1 + y_2 z_2) \\ -x_1 z_3 & -x_2 z_3 & x_2 z_2 + x_1 z_1 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Si $d_2 = x_1 y_3 - x_3 y_1 \neq 0$

$$[S_2^{-1}] = \frac{1}{d_2} \begin{bmatrix} -y_1 z_2 & y_3 z_3 + y_1 z_1 & -y_3 z_2 \\ x_1 z_2 & -(x_1 z_1 + z_3 x_3) & x_3 z_3 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Si $d_3 = x_2 y_3 - x_3 y_2 \neq 0$

$$[S_2^{-1}] = \frac{1}{d_3} \begin{bmatrix} -(y_3 z_3 + y_2 z_2) & y_2 z_1 & y_3 z_1 \\ x_2 z_2 + x_3 z_3 & -x_2 z_1 & -x_3 z_1 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Et

$$[S_1^{-1}] = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.65)$$

$$[P] = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix} \text{ avec } [S] = \begin{bmatrix} S_1^{-1} & 0 \\ 0 & S_2^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

II.1.5-Calcul de la Matrice Tangente élémentaire

Comme l'objectif principal d'un modèle global est de proposer une approche simplifiée à la modélisation d'un matériau complexe, tel que le béton armé, il est essentiel que sa performance numérique soit optimale. Ainsi, pour rendre le modèle adapté aux calculs avec des schémas implicites en temps, soit en quasi-statique soit en dynamique transitoire, le calcul de la matrice tangente cohérente devient indispensable pour avoir une convergence quadratique et robuste du processus itératif global de Newton.

L'essentiel du calcul du modèle s'effectue dans le repère des vecteurs propres du tenseur de la déformation (et de la contrainte), la matrice tangente étant donc elle aussi exprimée dans le même repère.

Pour les problèmes linéaires, $[IK^e]$ et $\{F_{ext}^e\}$ sont indépendants de U_n . Par contre pour les problèmes non linéaires $[IK^e]$ dépend de U_n mais peut être décomposée en la somme d'une matrice constante $[IK_l^e]$ (linéaire) et d'une matrice $[IK_{nl}^e]$ (non-linéaire) qui est fonction de U_n .

$$[IK^e(U_n)] = [IK_l^e] + [IK_{nl}^e(U_n)] \quad (2.67)$$

Par conséquent la matrice $[H]$ de l'équation 2.48 peut être calculée comme la somme de deux contributions, celle qui correspond à une non-évolution de l'endommagement et celle qui est

due à l'évolution de l'endommagement. Ces contributions peuvent être nommées : *contribution élastique* et *contribution dissipative* :

$$[H] = \begin{bmatrix} H_m^e & 0 \\ 0 & H_f^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_m^d & H_{mf}^d \\ H_{mf}^d & H_f^d \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

Où les termes en H^e de l'équation 2.68 représentent la contribution élastique ou linéaire, et les termes en H^d dépendant de U_n représentent la contribution dissipative qui suit l'évolution de l'endommagement du matériau, donc non-linéaire.

On voit dans l'équation 2.68, que le couplage moment/extension et effort de membrane/courbure n'est introduit qu'à travers la partie dissipative. Ce couplage a une justification physique, puisque toute fissuration perpendiculaire au feuillet moyen de la plaque affecte aussi bien le comportement en membrane qu'en flexion.

II.1.6-Présentation d'un élément fini multicouche multicellulaire DKT (Discrete Kirchhoff Triangle)

L'élément DKT tel qu'il est défini dans [JE 90.a] est un élément fini à 3 nœuds et à 3 degrés de liberté par nœud. Il est considéré, dans cette thèse, comme un élément fini à 3 nœuds et à 5 degrés de liberté par nœud.

Les rotations β_x et β_y sont interpolées d'une manière parabolique et les déplacements transversaux u_0 , v_0 et w_0 sont interpolés de manière linéaire par [JE 90.a] :

$$\beta_x = \sum_{i=1}^n N_i \beta_{x_i} + \sum_{k=n+1}^{2n} P_{x_k} \alpha_k \quad \text{et} \quad \beta_y = \sum_{i=1}^n N_i \beta_{y_i} + \sum_{k=n+1}^{2n} P_{y_k} \alpha_k, \quad P_{x_k} = P_k C_k \quad \text{et} \quad P_{y_k} = P_k S_k$$

$$u_0 = \sum_{i=1}^n N_i u_{0_i}, \quad v_0 = \sum_{i=1}^n N_i v_{0_i} \quad \text{et} \quad w_0 = \sum_{i=1}^n N_i w_{0_i}$$

Où C_k, S_k sont les cosinus directeurs, k milieu des cotés respectifs du triangle, et sont donnés sur le côté ij par : $C_k = (x_j - x_i)/L_k$, $S_k = (y_j - y_i)/L_k$ et $L_k = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$

Avec n le nombre de nœuds de l'élément fini, dans le cas d'un élément triangulaire $n=3$, les fonctions N_i et P_k sont données par :

$$N_1 = \lambda = 1 - \xi - \eta, \quad N_2 = \xi, \quad N_3 = \eta, \quad P_4 = 4\xi\lambda, \quad P_5 = 4\xi\eta \quad \text{et} \quad P_6 = 4\eta\lambda$$

L'expression de α_k en fonction des variables nodales des nœuds i et j est:

$$\alpha_k = \frac{3}{2L_k}(w_i - w_j) - \frac{3}{4}(C_k\beta_{x_i} + S_k\beta_{y_i} + C_k\beta_{x_j} + S_k\beta_{y_j}) \quad (2.69)$$

Ainsi
$$\begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} N_{i1}^x & N_{i2}^x & N_{i3}^x \\ N_{i1}^y & N_{i2}^y & N_{i3}^y \end{pmatrix} \{u_n\} \quad (2.70)$$

$$N_{i1}^x = \frac{3}{2L_k}P_kC_k - \frac{3}{2L_m}P_mC_m, \quad N_{i2}^x = N_i - \frac{3}{4}P_kC_k^2 - \frac{3}{4}P_mC_m^2, \quad N_{i3}^x = -\frac{3}{4}P_kC_kS_k - \frac{3}{4}P_mC_mS_m$$

$$N_{i1}^y = \frac{3}{2L_k}P_kS_k - \frac{3}{2L_m}P_mS_m, \quad N_{i2}^y = N_{i3}^x, \quad N_{i3}^y = N_i - \frac{3}{4}P_kS_k^2 - \frac{3}{4}P_mS_m^2 \quad \text{pour } i=1, \dots, n$$

II.2- Approche fibre d'un élément fini barre à 2 nœuds avec fonction d'interpolation

On considère dans un repère $R(A, x, y, z)$ local d'un élément plaque multicouche multicellulaire un élément barre droite 3D de longueur L orientée selon une direction x' et soumise à des efforts distribués q_y, q_z .

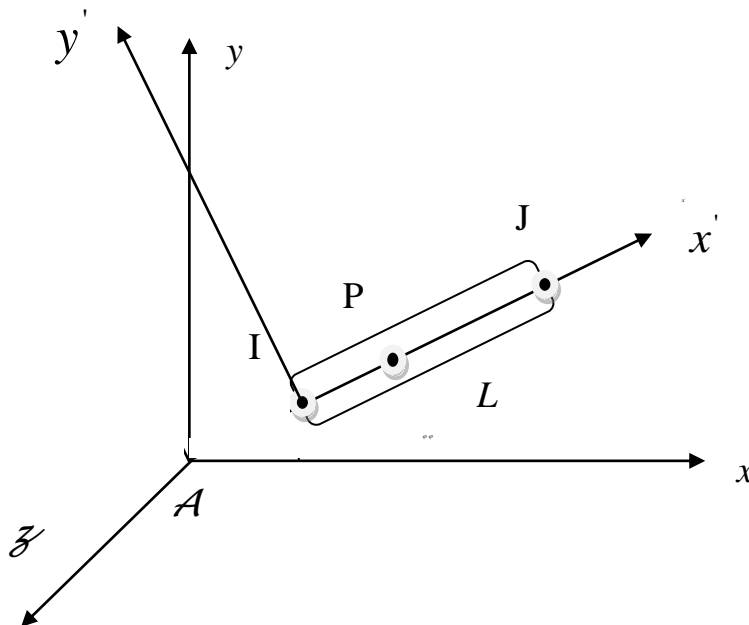


Figure 2.4 : élément barre 3D à deux nœuds dans un repère local $R(A, x, y, z)$ d'un élément plaque

On a :

$$\vec{x} = \frac{\vec{IJ}}{L_{IJ}}, \quad \vec{y} = \vec{x} \wedge \vec{z} \quad \text{et} \quad \vec{z} = \vec{y} \wedge \vec{x}$$

Les vecteurs $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ sont exprimés dans le repère local $R(A, x, y, z)$ par :

$$\begin{cases} \vec{x} = \alpha_1' \vec{x} + \alpha_2' \vec{y} + \alpha_3' \vec{z} \\ \vec{y} = \beta_1' \vec{x} + \beta_2' \vec{y} + \beta_3' \vec{z} \\ \vec{z} = \gamma_1' \vec{x} + \gamma_2' \vec{y} + \gamma_3' \vec{z} \end{cases} \quad (2.71)$$

Par conséquent la matrice de passage du repère local $R'(I, x', y', z')$ lié à la barre au repère local $R(A, x, y, z)$ lié à la plaque est donnée par :

$$[P] = \begin{bmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' \\ \beta_1' & \beta_2' & \beta_3' \\ \gamma_1' & \gamma_2' & \gamma_3' \end{bmatrix}$$

Dans le repère $R(A, x, y, z)$ les points I et J sont lus dans le plan (x, y) on a donc: $I(x_I, y_I, 0)$ et $J(x_J, y_J, 0)$.

Ce qui donne alors : $\alpha_1' = \frac{x_J - x_I}{L_{IJ}} = -\beta_2', \alpha_2' = \frac{y_J - y_I}{L_{IJ}} = \beta_1', \alpha_3' = \beta_3' = \gamma_1' = \gamma_2' = 0$ et

$$\gamma_3' = \alpha_1'^2 + \alpha_2'^2 \quad \text{et} \quad L_{IJ} = \sqrt{(x_J - x_I)^2 + (y_J - y_I)^2}$$

De même, on peut exprimer dans le repère $R'(I, x', y', z')$

$$\begin{cases} \vec{x} = \alpha_1 \vec{x}' + \alpha_2 \vec{y}' + \alpha_3 \vec{z}' \\ \vec{y} = \beta_1 \vec{x}' + \beta_2 \vec{y}' + \beta_3 \vec{z}' \\ \vec{z} = \gamma_1 \vec{x}' + \gamma_2 \vec{y}' + \gamma_3 \vec{z}' \end{cases} \quad (2.72)$$

Avec : $\alpha_1 = P^{-1}(1,1), \alpha_2 = P^{-1}(1,2), \alpha_3 = P^{-1}(1,3), \beta_1 = P^{-1}(2,1), \beta_2 = P^{-1}(2,2), \beta_3 = P^{-1}(2,3),$

$$\gamma_1 = P^{-1}(3,1), \gamma_2 = P^{-1}(3,2), \gamma_3 = P^{-1}(3,3)$$

Le champ des déplacements d'un point P qui se trouve dans l'élément barre est exprimé dans les deux repères par :

$$\vec{u}(P) = u\vec{x} + v\vec{y} + w\vec{z} = u'\vec{x}' + v'\vec{y}' + w'\vec{z}' \quad (2.73)$$

Rappelons le champ des déplacements local d'un élément plaque dans un repère local $R(A, x, y, z)$.

$$\begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0(x, y) \\ v_0(x, y) \\ w_0(x, y) \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \theta_y(x, y) \\ -\theta_x(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0(x, y) \\ v_0(x, y) \\ w_0(x, y) \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \beta_x(x, y) \\ \beta_y(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

Les équations 2.72 à 2.73 permettent d'exprimer le champ des déplacements u', v', w' en fonction de u_0, v_0, w_0, β_x et β_y par :

$$\begin{cases} u'(x, y, z) = \alpha_1 (u_0(x, y) + z\beta_x(x, y)) + \beta_1 (v_0(x, y) + z\beta_y(x, y)) + \gamma_1 w_0(x, y) \\ v'(x, y, z) = \alpha_2 (u_0(x, y) + z\beta_x(x, y)) + \beta_2 (v_0(x, y) + z\beta_y(x, y)) + \gamma_2 w_0(x, y) \\ w'(x, y, z) = \alpha_3 (u_0(x, y) + z\beta_x(x, y)) + \beta_3 (v_0(x, y) + z\beta_y(x, y)) + \gamma_3 w_0(x, y) \end{cases} \quad (2.75)$$

L'hypothèse des sections planes (théorie Euler-Bernoulli) néglige les déformations dues au cisaillement $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = 0$ et par conséquent on peut exprimer le travail des déformations en fonction de la déformation axiale ε_{xx} uniquement.

En effet, la barre est supposée se déplacer uniquement selon la direction x' ce qui nous permet en premier lieu de négliger les complantes v' et w' suivant y' et z' dans les équations 2.73 et 2.75. En plus nous faisons l'hypothèse d'un déplacement linéaire dans la direction x' en fonction de x' , ainsi le champ de déplacement $u'(x', y', z') = u_0'(x')$ est fonction de x' uniquement. Par la suite c'est uniquement le champ de déplacement $u_0'(x')$ qui sera considéré dans le développement des équations.

On a alors : $u_0'(x') = u'(x, y, z)$ puisque x' peut être exprimé en fonction de x, y, z (eqt. 2.71)

Le champ des déformations prend alors la forme suivante :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0'(x')}{\partial x'} = \frac{\partial u'(x, y, z)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial u'(x, y, z)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial u'(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x'} \quad (2.76)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \alpha_1^2 e_{xx} + \beta_1^2 e_{yy} + \alpha_1 \beta_1 \gamma_{xy}' + \alpha_1 \gamma_1 \gamma_x + \beta_1 \gamma_1 \gamma_y + \alpha_1^2 z k_{xx} + \beta_1^2 z k_{yy} + \alpha_1 \beta_1 z \chi_{xy} \\ \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = 0 \end{cases} \quad (2.77)$$

$$\text{Où } e_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad e_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} \quad \gamma_{xy}' = 2e_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \quad \gamma_x = \beta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$\gamma_y = \beta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad k_{xx} = \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \quad k_{yy} = \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \quad \chi_{xy} = 2k_{xy} = \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x}$$

Le vecteur des déformations généralisées uni-axiales que subi la section d'abscisse x' est donné par :

$$\{d(x')\}^T = \{e_{xx}(x'), e_{yy}(x'), \gamma'_{xy}(x'), \gamma_x(x'), \gamma_y(x'), k_{xx}(x'), k_{yy}(x'), \chi_{xy}(x')\} \quad (2.78)$$

II.2.1-Principe des travaux virtuels

Travail de déformation

Le travail élémentaire de déformation de l'élément fini est donné par :

$$W_{\text{int}}^e = W_{\text{déf}}^e = \int_{V_0} \varepsilon_{x'x'} \sigma_{x'x'} dx' dy' dz' = \int_0^L \iint_{A(x')} \varepsilon_{x'x'} \sigma_{x'x'} dA(x') dx' \quad (2.79)$$

Loi de comportement

La théorie des barres et les équations d'élasticité dans le cas de la théorie d'Euler-Bernoulli donnent :

$$\sigma_{x'x'} = E \varepsilon_{x'x'} \text{ et } \sigma_{x'y'} = \sigma_{x'z'} = \sigma_{y'y'} = \sigma_{z'z'} = 0 \quad (2.80)$$

Avec E' le module d'Young de la section de la barre.

II.2.2-Elément fini barre Euler-Bernoulli à deux nœuds avec fonctions d'interpolation du premier ordre

Prenons une barre Euler-Bernoulli 3D à deux nœuds, de longueur L , soumise à des efforts distribués q_y et q_z figure 2.4.

Dans le cadre de la théorie d'Euler-Bernoulli (les sections planes restent planes et perpendiculaires à l'axe neutre) les déformations dues aux efforts de cisaillement sont négligées, ce qui permet de conclure que le phénomène du blocage par cisaillement (apparition de rigidité « parasite ») n'est pas présent dans tous les éléments finis barre Euler-Bernoulli. Ainsi, le choix des fonctions d'interpolation peut être simple et ne conditionne pas la performance numérique de l'élément. Les déplacements transversaux et les rotations peuvent donc être discrétisés séparément, ce qui nous permet de choisir, en particulier, des fonctions d'interpolation de premier ordre.

Ici, nous présentons une généralisation où l'axe de référence choisi pour la barre est indépendant de toute considération géométrique, inertielle ou mécanique. Chaque nœud

possède 5 degrés de liberté, trois de translations et deux de rotation stockés dans un vecteur de déplacements de dimension 10 structuré de la manière suivante :

$$\{u^e\}^T = \{u_{0i}, v_{0i}, w_{0i}, \beta_{xi}, \beta_{yi}, u_{0j}, v_{0j}, w_{0j}, \beta_{xj}, \beta_{yj}\} \quad (2.81)$$

Fonctions d'interpolation

Nous considérons le champ de déplacements continu en tout point de la ligne moyenne x' en fonction du champ de déplacements discrétisé :

$$\{u_o\} = [N_i \quad N_j] \{u_{o_i} \quad u_{o_j}\}^T = [N] \{u^e\} \quad (2.82)$$

Parmi les techniques de calcul au niveau élémentaire figure, en particulier, l'utilisation de coordonnées intrinsèques pour la détermination des fonctions d'interpolation, la formulation iso-paramétrique et les méthodes d'intégration numérique [JF].

L'expression d'une fonction ϕ est donnée en fonction des fonctions d'interpolation par :

$$\phi = \sum_{i=1}^n N_i \phi_i \quad (2.83)$$

Où N_i est la fonction d'interpolation au nœud « i », n le nombre de nœuds par élément et ϕ_i peut être la coordonnée ou le déplacement nodal au point « i ».

$$[N] = [N_i \quad N_j] [P_{ij}] \quad (2.84)$$

$$N_i(x') = 1 - \frac{x'}{L}, \quad N_j(x') = \frac{x'}{L}$$

En utilisant les équations 2.76, 2.79 et 2.80, le travail des déformations peut encore être calculé par :

$$W_{def}^e = \int_0^L \frac{\partial u_o}{\partial x'} EA \frac{\partial u_o}{\partial x'} dx' \quad (2.85)$$

Avec E , A sont respectivement le module d'Young, la section de la barre d'acier.

La déformation axiale généralisée est calculée par :

$$\varepsilon_{x'x'} = \frac{\partial u_o}{\partial x'} = [B_{ij}] \{u_{o_i} \quad u_{o_j}\}^T = [B_{ij}] [P_{ij}] \{u^e\} = [B] \{u^e\} \quad (2.86)$$

En tous points I et J , de l'élément fini barre, on peut exprimer le vecteur des déplacements nodaux lié au repère local de la barre en fonction de ses coordonnées nodaux et /ou en fonction du vecteur des déplacements nodaux lié au repère local de la plaque par:

$$\begin{cases} \dot{u}_{0_i} = \alpha_1 (u_{0_i} + z_i \beta_{x_i}) + \beta_1 (v_{0_i} + z_i \beta_{y_i}) + \gamma_1 w_{0_i} \\ \dot{u}_{0_j} = \alpha_1 (u_{0_j} + z_j \beta_{x_j}) + \beta_1 (v_{0_j} + z_j \beta_{y_j}) + \gamma_1 w_{0_j} \end{cases} \quad (2.87)$$

Les relations 2.86 et 2.87 donnent :

$$[P_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \alpha_1 z_i & \beta_1 z_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \alpha_1 z_j & \beta_1 z_j \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

Où $[P_{ij}]$ la matrice de passage de la base locale $B'(x', y', z')$ liée à la barre à la base locale $B(x, y, z)$ liée à la plaque.

$$[B_{ij}] = \frac{1}{L} [-1 \quad 1] \quad (2.89)$$

$$[B] = \frac{1}{L} [-\alpha_1 \quad -\beta_1 \quad -\gamma_1 \quad -\alpha_1 z_i \quad -\beta_1 z_i \quad \alpha_1 \quad \beta_1 \quad \gamma_1 \quad \alpha_1 z_j \quad \beta_1 z_j] \quad (2.90)$$

$$[N] = [\alpha_1(1-\xi') \quad \beta_1(1-\xi') \quad \gamma_1(1-\xi') \quad \alpha_1 z_i(1-\xi') \quad \beta_1 z_i(1-\xi') \quad \alpha_1 \xi' \quad \beta_1 \xi' \quad \gamma_1 \xi' \quad \alpha_1 z_j \xi' \quad \beta_1 z_j \xi']$$

Où $\xi' = \frac{x'}{L}$

En remplaçant ε_{xx} par son expression (eqt 2.86) dans l'équation 2.85, la matrice de rigidité élément dans la base locale $B(x, y, z)$ liée à la plaque est donnée par :

$$[K_{elem}] = \int_0^L [B]^T EA [B] dx' \quad (2.91)$$

Remarque : Lorsque le comportement du matériau est non-linéaire, il est nécessaire d'avoir au moins deux points d'intégration de Gauss le long de la barre afin d'intégrer correctement les contraintes. La matrice de rigidité est calculée avec l'équation suivante :

$$[K_{elem}] = \int_0^L [B]^T EA [B] dx' = J_a \sum_{i=1}^2 W_i [B(\xi'_i)]^T EA [B(\xi'_i)] \quad (2.92)$$

x'_i est la portion du point de Gauss i dans un élément de référence de longueur L , W_i est le poids du point de Gauss et J_a est la Jacobéen.

La matrice élémentaire de la barre peut être exprimé dans la base globale $B(X, Y, Z)$ par :

$$[IK^e] = [P]^T [K_{elem}] [P], \quad [P] = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

Où $[S]$ la matrice donnée par [eqt.2.66] et $[P]$ la matrice de passage de la base locale $B(x, y, z)$ liée à la plaque à la base globale $B(X, Y, Z)$.

II.2.3-Matrice Masse élémentaire

Le travail virtuel des efforts d'inertie et de la matrice masse de la section peut être exprimé, en tenant compte des hypothèses simplificatrices précédentes ($u'(x', y', z') = u'_0(x')$), par :

$$W_{\text{int}}^e = \int_0^L \int_{A(x')} \rho \left\{ \partial u'_0(x') \frac{d^2 u'_0(x')}{dt^2} \right\} dA(x') dx' = \int_0^L \partial \{u'_0\}^T M_0 \{ \ddot{u}'_0 \} dx' \quad (2.94)$$

Où $M_0 = \int_{A(x')} \rho dA(x') = \rho A(x')$

La matrice élémentaire est finalement donnée par :

$$[M_{elem}] = [P]^T \int_0^L [N]^T M_0 [N] dx' [P] = [P]^T J_a \sum_{i=1}^2 W_i [N(\xi'_i)]^T \rho A [N(\xi'_i)] [P] \quad (2.95)$$

Avec $A(x')$ la section de la barre.

Remarque :

Le calcul des fonctions d'interpolation pourrait se faire en considérant le champ des déplacements locaux composé par les déplacements transversaux u_0, v_0, w_0 et les rotations β_x, β_y du vecteur champ global $\{U\}$ en utilisant la relation générale de [eqt. 2.83]. Bien sûr l'inconvénient de ce choix de calcul est que, du fait de la nature géométrique de l'élément fini (barre), les variations sont supposées uni-axiales selon la direction x ou y , les fonctions d'interpolation ne doivent dépendre qu'une seule variable et en l'occurrence x . Compte tenu du champ des déformations $\{d_f(x')\}$, la deuxième ligne de la matrice $[B]$ sera nulle ce qui aboutit à un calcul impossible de la matrice de rigidité élémentaire.

II.3-Analyse Non linéaire de Structure

I.3.1-Introduction

L'analyse statique consiste à la mise en équation d'un système d'équation linéaire de la forme $F = KU$ lorsque les paramètres physiques exprimés par la matrice de rigidité K sont indépendants du déplacement U pendant l'application du chargement F .

Dans le cas contraire où les paramètres physiques deviennent dépendant de U (plastification, fissuration, dégradation, ...etc.), l'analyse statique revient à résoudre un système d'équation non linéaire de la forme $F^* = K(U)U$, et on parle de non-linéarité de comportement, puisque les effets du second ordre sont négligés. L'objectif est de construire une suite d'estimation de la solution exacte $\{U_0\}, \{U_1\}, \{U_2\}, \dots, \{U_i\}$. La solution $\{U_i\}$ étant calculée à partir de la solution précédente $\{U_{i-1}\}$ en résolvant le système d'équations linéaires: $[K(U_{i-1})]\{U_{i-1}\} = \{F\} - \{R(U_{i-1})\}$, où $\{R(U_{i-1})\}$ est le résidu à l'itération $(i-1)$.

La méthode de Newton-Raphson consiste à découper le chargement total en portions d'égales d'intensité, définissant des « pas » de charge ('steps'). L'analyse prend l'allure d'une succession de problèmes linéaires par « pas » de charge et le problème sera dépendant de la taille des « pas » de charge qui conditionne largement la finesse des résultats.

Or la solution initiale à chaque « pas » de charge joue un rôle important dans le déroulement des itérations, la méthode risque de diverger ou converger vers des solutions inacceptables dans le calcul sismique où le chargement est cyclique (succession de chargement-déchargement) accompagné par des changements brusques des rigidités suite à des fissurations, refermeture des fissures, plastifications, glissements, ...etc.

Dans le cadre d'une modélisation de type élément fini multicouche multicellulaire, il y a deux «niveaux» d'intégration. Il y a la modélisation dite «plane» qui sera représentée par des cellules (de support géométrique plan avec trois points de Hammer sur la surface) et une modélisation suivant l'épaisseur (perpendiculaire au support géométrique, discrétisée en couches).

L'élément fini est implémenté dans le code élément fini RE_FLEX en intégrant la loi de comportement d'endommagement de Mazars pour le béton et la loi élastoplastique pour les armatures d'acier.

Ainsi, on définit un événement de structure (respectivement élémentaire), en l'occurrence un chargement significatif dans la matrice de rigidité globale de la structure (respectivement élémentaire). Au niveau de la structure, le calcul non linéaire se déroule à l'intérieur d'un « pas » de charge donné, en vérifiant l'équilibre et la stabilité de la structure.

I.3.1-Généralité sur la méthode de Newton-Raphson

La méthode des éléments finis conduit à une formulation discrétisée des problèmes non-linéaires à n degrés de libertés sous la forme :

$$W = \sum_{ass}^e W^e = \langle \delta U \rangle ([K(U_n)] \{U_n\} - \{F_{ext}^e\}) = 0 \quad (2.96)$$

Avec

$[K(U_n)]$: La matrice de rigidité globale de la structure

$\{U_n\}$: Le vecteur des déplacements nodaux globaux

$\{F_{ext}^e\}$: Le vecteur chargement statique extérieur résultant appliqué aux nœuds dus aux charges concentrées, réparties et /ou volumiques.

Résoudre le système non-linéaire consiste à chercher le vecteur de solution qui rend le

résidu R_u nul où :
$$W = \sum_{ass}^e W^e = \langle \delta U \rangle (-\{R_u(U)\}) = 0$$

Soit la structure à un état donné défini par son vecteur des déplacements nodaux $\{U_{i-1}\}$ et par sa rigidité tangente en ce point $[K_t(U_{i-1})]$ (itération $(i-1)$).

Si on suppose qu'à cette étape, l'approximation du vecteur des déplacements résultants $\{U_{i-1}\}$, de la solution exacte est telle que le résidu R_u ne soit pas nul.

$$W(U_{i-1}) = \sum_{ass}^e W^e(U_{i-1}^e) = \langle \delta U \rangle (-\{R_u(U_{i-1})\}) \neq 0$$

$$W(U_{i-1}) = \sum_{ass}^e W^e(U_{i-1}^e) = \langle \delta U \rangle ([K(U_{i-1})] \{U_{i-1}\} - \{F\}) \neq 0 \quad (2.97)$$

A l'itération (i) , on devra chercher une nouvelle approximation de la solution exacte de telle sorte que le résidu tende vers zéro : $W(U^i) \approx 0 \Rightarrow \{R_u(U_i)\} = \{R_u(U_{i-1} + \Delta U_i)\} \approx 0$

L'algorithme est obtenu en développant W en série de Taylor au voisinage de U_{i-1} , en négligeant les termes d'ordres supérieurs à 1 :

$$W(U_i) = W(U_{i-1} + \Delta U_i) = W(U_{i-1}) + \left(\frac{\partial W}{\partial U} \right)_{U=U_{i-1}} \{\Delta U_i\} + \dots = 0$$

$$\text{Soit } \langle \delta U \rangle \left(- \left[\frac{\partial R_u(U)}{\partial U} \right]_{U=U_{i-1}} \{\Delta U_i\} \right) = \langle \delta U \rangle (\{R_u(U_{i-1})\})$$

$$\text{Ou encore : } \langle \delta U \rangle \left(\left(\frac{\partial [K(U)]}{\partial U} \{U\} + [K(U)] \right)_{U=U_{i-1}} \{\Delta U_i\} \right) = \langle \delta U \rangle (\{R_u(U_{i-1})\})$$

On note : $[K_{\text{tan}}(U_{i-1})] = \left(\frac{\partial [K(U)]}{\partial U} \{U\} + [K(U)] \right)_{U=U_{i-1}}$, la matrice de rigidité tangente de la

structure en U_{i-1} et $\{U_i\} = \{U_{i-1}\} + \{\Delta U_i\}$

Pour une structure de rigidité donnée, soumise à un chargement donné, le but est de calculer la portion de cette charge qui provoque un événement au niveau de la structure, autrement dit un changement significatif de sa rigidité, conséquence d'un cumul de changements dans un sens favorable ou défavorable au niveau des éléments formant la structure.

Pour schématiser l'idée, considérons le système d'équation à résoudre tel que :

$$\left(\frac{\partial [K(U)]}{\partial U} \{U\} + [K(U)] \right) \{\Delta U\} = \{\Delta F\} + \{R_u(U)\} = \{\Delta F\} + (\{F\} - [K(U)]\{U\}) \quad (2.98)$$

Où $\frac{\partial [K(U)]}{\partial U}$ exprime la variation des propriétés physiques par rapport au déplacement $\{U\}$ et $\{\Delta F\}$ le pas de charge appliqué.

Si on arrive à trouver une série d'incrément de charges consécutifs à appliquer à la structure dans lesquels la matrice de rigidité exacte du modèle adopté $[K(U)]$ peut être assimilée à une constante à chaque intervalle, c'est-à-dire en terme physique, qu'elle varie très peu, ceci revient à procéder par des tangentes parfaites dans la tolérance spécifiée donc si on réduit $\{\Delta F\}$ progressivement pour atteindre cet objectif par le biais d'un facteur multiplicateur inférieur ou égal à 1, ceci permet souvent d'améliorer la vitesse de convergence, on aura :

$$\left(\frac{\partial [K(U)]}{\partial U} \{U\} + [K(U)] \right) \omega \{\Delta U\} = \omega \{\Delta F\} + \omega (\{F\} - [K(U)]\{U\}) \quad (2.99)$$

Dans l'intervalle correspondant à un incrément de charge $\omega \{\Delta F\}$ on peut supposer que :

$$\left(\frac{\partial [K(U)]}{\partial U} \right) \rightarrow 0 \text{ et } [K(U)] \rightarrow K = Cte \text{ d'où } [K_{\tan}(U)] \rightarrow K = Cte$$

$$\text{Le résidu } \omega(\{F\} - [K(U)]\{U\}) = \omega\{R_u(U)\} \rightarrow 0$$

Et on résout dans chaque « pas », à chaque itération l'équation :

$$\omega\{\Delta U\} = [K_{\tan}(U)]^{-1} \omega[\Delta F] + [K_{\tan}(U)]^{-1} \omega\{R_u\} = \{\Delta U^F\} + \{\Delta U^R\}$$

Le facteur ω est appelé facteur de sur-relaxation de la structure et est noté : ω^{struct} dans l'intervalle de charge $\omega\{\Delta F\}$, la rigidité tangente peut être représentative du comportement courant de la structure avec suffisamment de précision et les comportements élémentaires y seront donc considérés comme linéaires dans les tolérances imposées par l'utilisateur. L'expression du résidu $\{R_u(U)\}$ global est obtenue par assemblage des résidus élémentaires :

$$\{R_u(U)\} = \sum_{ass}^e r^e(U^e) = \{F_{ext}(U)\} - \{F_{int}(U)\} \quad (2.100)$$

Avec :

$\{F_{int}(U)\}$: Le vecteur global des efforts résistants internes,

$\{F_{ext}(U)\}$: Le vecteur global des sollicitations extérieures appliquées

$$\{r^e(U^e)\} = \{F_{ext}^e\} - [P]^T [R]^T [K^e(U^e)]\{q\} = \{F_{ext}^e(U)\} - [P]^T [R]^T \{Q(q)\} = \{F_{ext}^e\} - \{F_{int}^e\} \quad \text{est}$$

le résidu élémentaire.

$$\text{D'où } \{F_{int}^e\} = [P]^T [R]^T [K^e][R]\{u^e\} = [P]^T [R]^T [K^e][R][P]\{U^e\} \quad (2.101)$$

II.4-Méthode de calcul non-linéaire appliquée aux éléments finis plaques

Multicouches Multicellulaires

II.4.1-Elément fini plaque multicouche multicellulaire

Dans le cas d'un élément fini multicouche multicellulaire, on cherche à mettre en évidence si le matériau est plastifié ou endommagé.

Soit un élément fini ayant une configuration C^{i-1} à la fin de l'itération ($i-1$) définie par un état de contraintes et de déformations de ses cellules.

Dans l'étape suivante du calcul non-linéaire (itération i), la résolution d'un système d'équations non-linéaires fournit l'incrément des déplacements globaux appliqués aux nœuds de la structure $\{\Delta U\}_i$ dont on extrait ceux de l'élément fini étudié $\{\Delta U^e\}_i$.

On en déduit ensuite le vecteur des déformations sans mode rigide de l'élément tel que : $\{\Delta q\}_i = [R][P]\{U^e\}_i$ à partir duquel on en déduit $\{\Delta d(u)\}_i = \{\Delta d_{cmf}(u), \Delta d_{ct}(u)\}_i$ par l'intermédiaire des équations 2.45, 2.49, 2.50 et $\{\Sigma_i^r\} = [K^e]\{\Delta q\}$, ainsi :

$$\{d_{cmf}(x, y)\} = [H_{cmf}(x, y)]^{-1} [D_{cmf}(x, y)] [K^e] [R][P]\{U^e\} \quad (2.102)$$

$$\{d_{ct}(x, y)\} = [H_{ct}(x, y)]^{-1} [b_{ct}(x, y)] [K^e] [R][P]\{U^e\} \quad (2.103)$$

La mise en évidence du comportement non-linéaire (plasticité et ou endommagement) débute par la donnée de l'incrément des sollicitations appliquées à une surface donnée(x, y) d'un élément fini telle que :

$$\{\Delta \Sigma(x, y)\}^i = \begin{pmatrix} \Delta N_{xx}(x, y) \\ \Delta N_{yy}(x, y) \\ \Delta N_{xy}(x, y) \\ \Delta T_x(x, y) \\ \Delta T_y(x, y) \\ \Delta M_{xx}(x, y) \\ \Delta M_{yy}(x, y) \\ \Delta M_{xy}(x, y) \end{pmatrix}^i = \int_{z_i}^{z_{i+1}} \begin{pmatrix} \Delta \sigma_{xx}(x, y) \\ \Delta \sigma_{yy}(x, y) \\ \Delta \sigma_{xy}(x, y) \\ \Delta \sigma_{xz}(x, y) \\ \Delta \sigma_{yz}(x, y) \\ \Delta \sigma_{xx}(x, y) \cdot z \\ \Delta \sigma_{yy}(x, y) \cdot z \\ \Delta \sigma_{xy}(x, y) \cdot z \end{pmatrix}^i dz \quad (2.104)$$

L'application d'un incrément de sollicitations en un point(x, y) équivaut à l'application d'un incrément de contraintes en chaque point de la surface ou portion du matériau modélisé par une cellule d'épaisseur h_j .

Ou encore en discrétisant la couche d'épaisseur h_j en cellules on aura :

$$\{\Delta \Sigma(x, y)\}_j^i = \sum_{k=1}^{ncellules} \begin{pmatrix} \Delta \sigma_{xx}^{ki}(x, y) h_j \\ \Delta \sigma_{yy}^{ki}(x, y) h_j \\ \Delta \sigma_{xy}^{ki}(x, y) h_j \\ \Delta \sigma_{xz}^{ki}(x, y) h_j \\ \Delta \sigma_{yz}^{ki}(x, y) h_j \\ \Delta \sigma_{xx}^{ki}(x, y) h_j \eta_j \\ \Delta \sigma_{yy}^{ki}(x, y) h_j \eta_j \\ \Delta \sigma_{xy}^{ki}(x, y) h_j \eta_j \end{pmatrix} \quad (2.105)$$

II.4.1.1-Au niveau de la cellule

Soit la cellule courante de dimensions (x_k, y_k) , l'état de la cellule est définie à l'itération précédente $(i-1)$ par $(\underline{\underline{\sigma}}^{k(i-1)}(x, y), \underline{\underline{\varepsilon}}^{k(i-1)}(x, y), \underline{\underline{E}}^{k(i-1)}(x, y))$. Si la couche est soumise à un incrément de sollicitations $\{\Delta\Sigma(x, y)\}^i$ à l'itération i , alors les cellules au niveau de la couche, seront soumises à l'incrément de contraintes-déformations $\{\Delta\underline{\underline{\sigma}}^i, \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}^i\}_k(x, y)$ et elles présentent, à l'initialisation de l'endommagement, l'un des deux cas de figures suivantes :

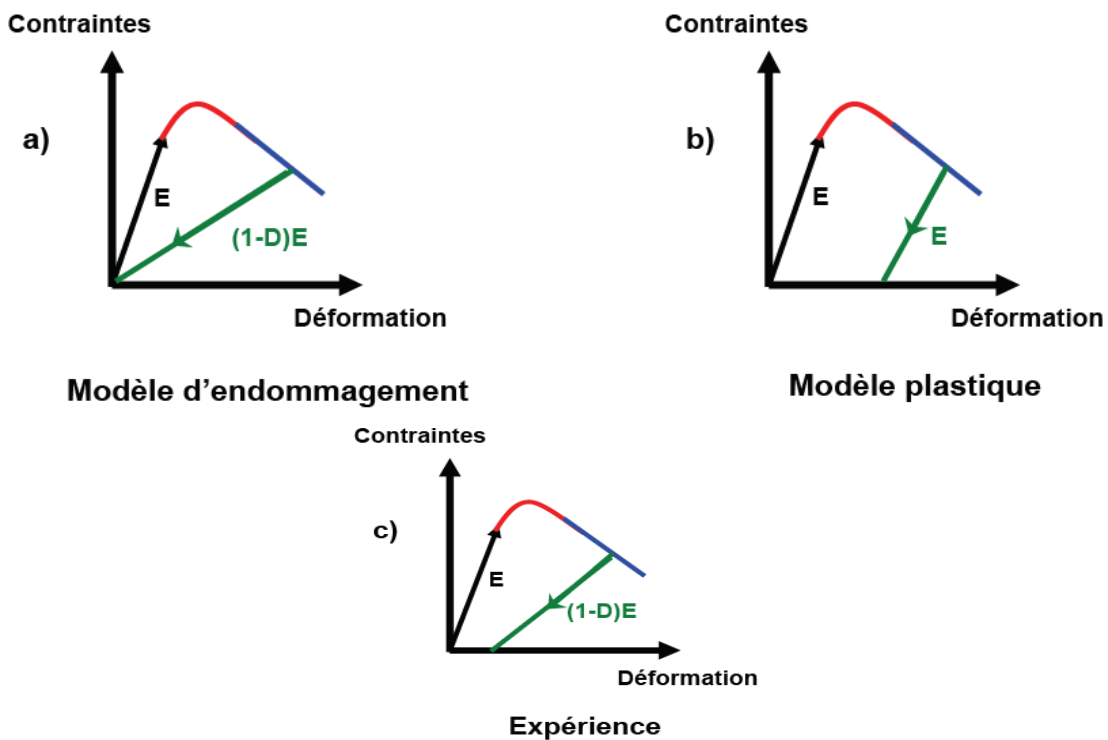


Figure 2.5–Pente de décharge dans le cas uniaxial.

Figure 2.5.a-b : soit la cellule s'endommage(a), soit elle se plastifie(b) après avoir dépassé sa limite d'élasticité plus la tolérance $f_t + \sigma^{tol}$ (contrainte limite en traction) : deux situations peuvent être présentées :

- Dans le cas (a) et(b) si $0 \leq \underline{\underline{\sigma}}^{ki} \leq f_t + \sigma^{tol}$ et $0 \leq \underline{\underline{\varepsilon}}^{ki} \leq (f_t + \sigma^{tol})/E$: on dit que le matériau est dans son état élastique, comportement linéaire.
- Cas (a) si $0 \leq \underline{\underline{\sigma}}^{ki} \leq f_t + \sigma^{tol}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}^{ki} \geq (f_t + \sigma^{tol})/E$: on dit que le matériau est endommagé.
- Cas (b) si $0 \leq \underline{\underline{\sigma}}^{ki} \leq f_t + \sigma^{tol}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}^{ki} \geq (f_t + \sigma^{tol})/E$: on dit que le matériau est plastifié.

II.4.1.2-Evaluation de l'endommagement

La procédure d'obtention de l'endommagement est simple. Les étapes sont les suivantes :

- calcul des déformations élastiques
- calcul de la déformation équivalente
- calcul de α_t , D_c et D_t pour cet état de déformation
- calcul de $D^{test} = \alpha_t^\beta D_t + (1 - \alpha_t^\beta) D_c$
- si $D^{test} \leq 0$, alors le critère n'est pas atteint et $D^+ = 0$
- si $D^{test} > 0$, alors le critère est atteint et $D^+ = D^{test}$
- si $D^{test} = 1$, alors le matériau est totalement endommagé et $D^+ = 1$ (en fait $1 - \varepsilon$ pour éviter les problèmes numériques).

II.4.1.3-Critère de "Von Mises"

Le critère de Von Mises, est l'une des fonctions seuils les plus simples à mettre en œuvre numériquement, s'applique bien aux aciers de construction. La surface seuil de plasticité associée s'écrit [AB 07] : $F = \sigma_{eq} - R_* - R_0$

Où R_* est le paramètre d'écrouissage fonction de la déformation plastique cumulée κ et vaut initialement R_0 (le seuil de plasticité) et σ_{eq} est la contrainte équivalente de Von Mises, définie en fonction du second invariant des contraintes par: $\sigma_{eq} = \sqrt{2J_2} / \sqrt{3}$

Où J_2 est le second invariant du déviateur des contraintes défini par [JE 90.a] :

$$J_2 = \frac{1}{6} \left((\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2) \right) \quad (2.106)$$

Dans notre étude ($\sigma_{zz} = 0$) cette expression donne :

$$J_2 = \frac{1}{3} \left(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2) \right) \quad (2.107)$$

Ce modèle présente la particularité de proposer une solution analytique pour l'opérateur tangent cohérent lié au calcul de la dérivée des contraintes par rapport aux déformations.

II.4.2-Elément fini barre (armatures)

II.4.2.1-Modèle élastoplastique simplifié

Un premier modèle simple qui peut être utilisé pour la simulation du comportement de l'acier est le modèle uniaxial élastoplastique avec écrouissage cinématique linéaire. La courbe utilisée dans ce modèle est représentée par la figure 2.6 (σ_y est la limite d'élasticité, E est le module d'Young et E_T la pente de la courbe en cours d'écrouissage).

II.4.2.2-Au niveau de l'élément fini barre

Soit l'élément courant de dimension (x'), l'état de chaque section composant de l'élément fini est défini à l'itération précédente ($i-1$) par $(\sigma^{k(i-1)}(x'), \varepsilon^{k(i-1)}(x'), E^{k(i-1)}(x'))$. Si l'élément fini est soumis à un incrément de sollicitations $\{\Delta\Sigma(x')\}^i$ à l'itération i , alors les sections seront soumises à l'incrément de contraintes-déformations $\{\Delta\sigma^{ki}, \Delta\varepsilon^{ki}\}(x')$ et elles présentent l'un des deux cas de figures (qui est la figure 1.9) suivantes :

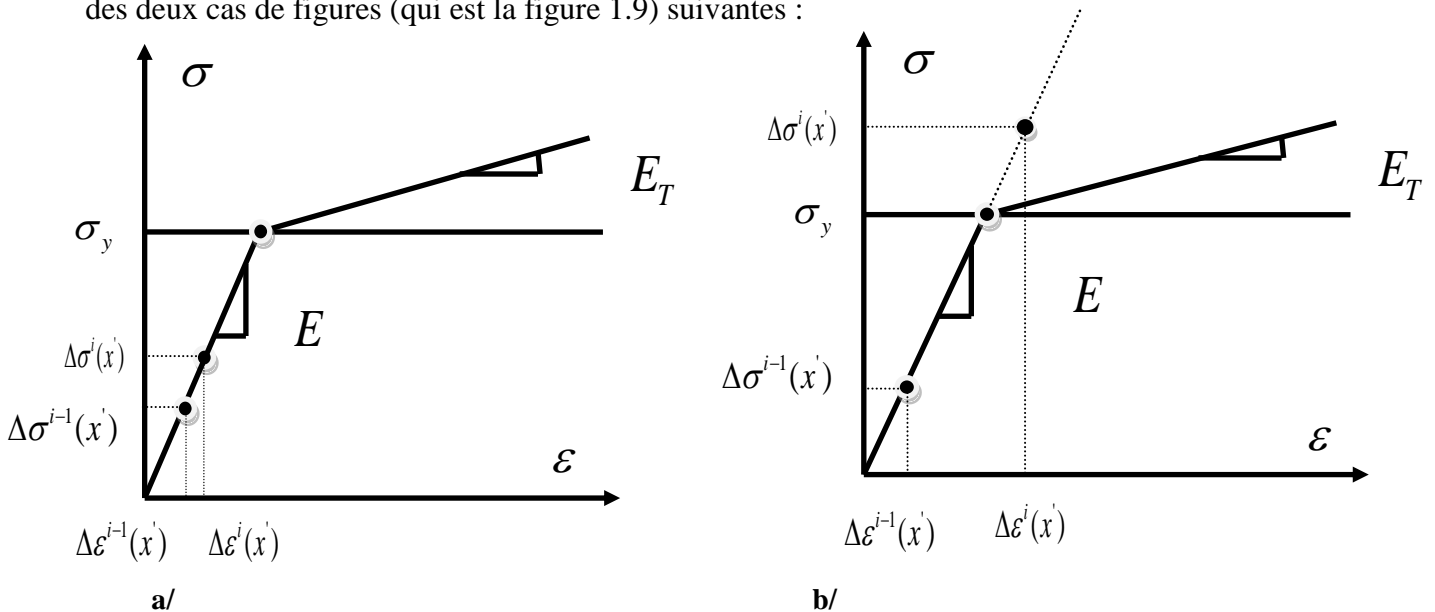


Figure 2.6- Modèle élastoplastique simplifié: Comportement de l'acier sous chargement monotone

- **Figure 2.6.a :** la contrainte $\Delta\sigma^i \leq \sigma_y$, l'élément courant n'a pas dépassé sa limite d'élasticité, comportement linéaire : on dit qu'il n'y a pas d'événement en termes de comportement au niveau de l'élément étudié ;

- **Figure 2.7.b** : la contrainte $\Delta\sigma^i \geq \sigma_y$, la fibre de la barre a dépassé sa limite d'élasticité, le matériau est écrouît : on dit alors qu'un événement est survenu pour l'élément étudié.

Conclusion

S'appuyant sur une approche de méthodes simplifiées, la théorie et l'implémentation numérique de plusieurs types d'éléments finis plaques multicouches multicellulaires ont été présentées en détail, plus particulièrement, la performance de l'élément fini plaque multicouche multicellulaire de cinématique Timoshenko et d'Euler- Bernoulli existants. Dans le cadre des chapitres III et IV, nous allons faire des applications numériques de validation du modèle sur des structures sous chargements statiques monotones croissants à la ruine et sur des structures soumis à des chargements cycliques.

**Chapitre III- ANALYSE PAR ELEMENT FINI PLAQUE DE LA
REPOSE D'UNE STRUCTURE SOUS CHARGEMENT
STATIQUE MONOTONE CROISSANT A LA RUINE**

Introduction

Dans le but de valider le modèle numérique élément fini multicouche multicellulaire présenté dans le chapitre II, on aborde, dans ce chapitre, une analyse de plusieurs structures par la modélisation éléments finis multicouches multicellulaires. Des tests de référence sur des éléments finis multicouches et multicellulaires hétérogènes et homogènes à géométrie variable ont été réalisés. L'élément fini multicouche multicellulaire permet de modéliser des cellules de géométries et de dispositions de matériaux différents au sein d'un même élément fini. Il permet aussi d'étudier le comportement non-linéaire des structures soumises à la flexion sous chargement statique monotone croissant jusqu'à la ruine.

Dans un premier temps, nous exposerons le cadre général de l'implantation de lois de comportement au sein d'un code de calcul éléments finis en déplacement en confrontation avec le calcul analytique en mettant en évidence les modes de rupture réglementaires conformément au **BAEL 91/A.4.5.1** par épuisement des armatures tendues ou par écrasement du béton comprimé.

Dans un deuxième temps, nous présenterons des tests de référence menés par la modélisation de voiles en béton armé dimensionnés en capacité vis-à-vis des secousses sismiques. Le but de ce chapitre est, d'une part, d'introduire les choix effectués par la suite dans l'implantation de notre modèle particulier et, d'autre part, de poser les problèmes généraux liés à l'intégration des lois constitutives.

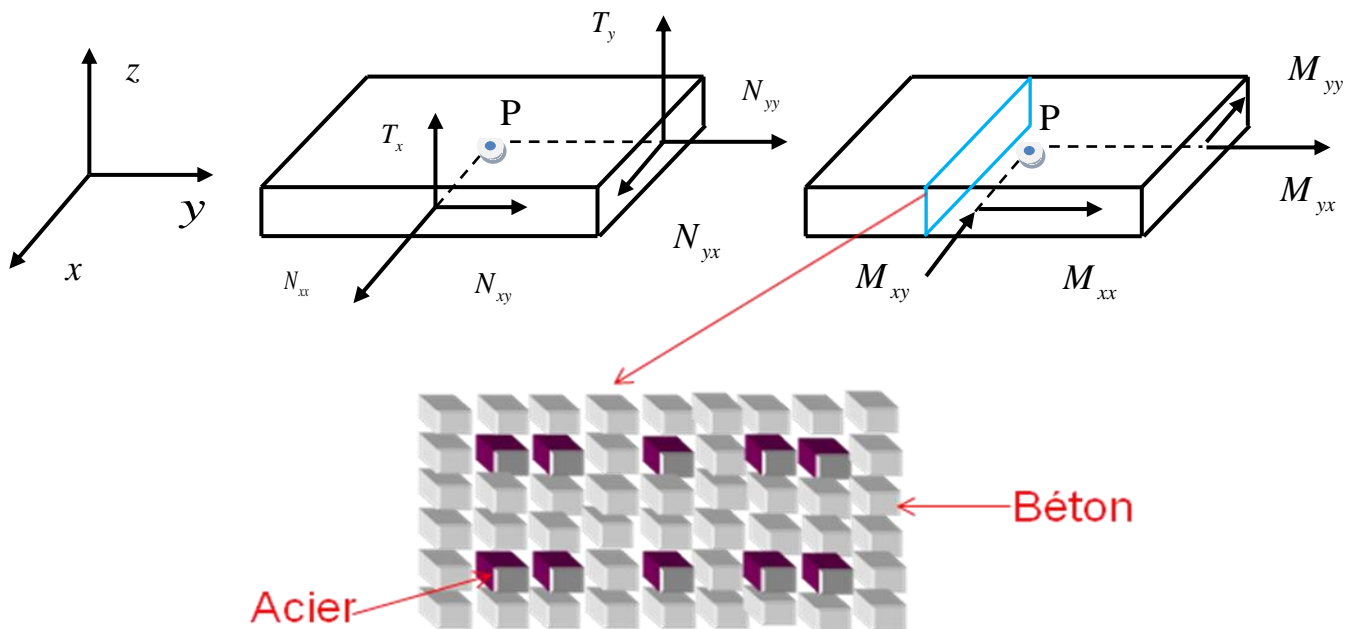


Figure 3.1-Modèle section rectangulaire multicouche multicellulaire en béton armé

$N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}, T_x, T_y$ et M_{xx}, M_{yy}, M_{xy} sont les efforts et moments définis dans le chapitre I (§ I.2.2.1).

III.1-Etude d'une plaque homogène : test de validation, comportement linéaire d'un matériau isotrope et homogène

Pour valider notre modèle, nous considérons un matériau homogène, isotrope, élastique, et continu à une échelle d'observation suffisamment grande. La structure étudiée est soumise soit à une charge concentrée au centre soit à une charge répartie sur la surface. La confrontation entre les résultats obtenus par notre modèle (élément fini plaque multicouche multicellulaire de type Flexible « FLX ») et ceux des autres éléments (Discrete Sher Triangle « DST » et Discrete Kirchhoff Triangle « DKT ») obtenus par J.L. Batoz [JE 90.a] nous permet de mettre en évidence la performance de l'élément fini plaque multicouche multicellulaire. Ainsi, nous présentons dans cette étude une comparaison des résultats des différents éléments (FLX-DST, FLX-DKT) extraits de I. Mohamed et A. El Harif [IB 12].

Dans un premier temps la figure 3.2 nous présente les résultats obtenus avec **FLX** lorsque l'on analyse une plaque carrée et homogène, en flexion simple, soumise à une charge uniforme encastree ou simplement supportée sur le contour, pour les différents élancement L/h (de 5 à 1000). La plaque est maillée avec 128 (N=8) éléments finis triangles isocèles rectangles. Des résultats pratiquement identiques avec ceux obtenus avec les éléments **DST** et **Q4 γ** [JE 90.a] pour la plaque encastree (figure 3.2.a). Pour la plaque simplement appuyée il y a apparition d'une erreur de l'ordre de -0.5% (figure.3.2.b). Dans ces figures nous avons donné le digramme du rapport entre la flèche maximale calculée au centre de la plaque carrée W_c et la valeur analytique W_K (W_c / W_K) en fonction des différents élancement L/h (Longueur de la plaque L / épaisseur h). où $E = 0.347 \times 10^{11}$ est le module d'Young de la plaque et ν son coefficient du Poisson.

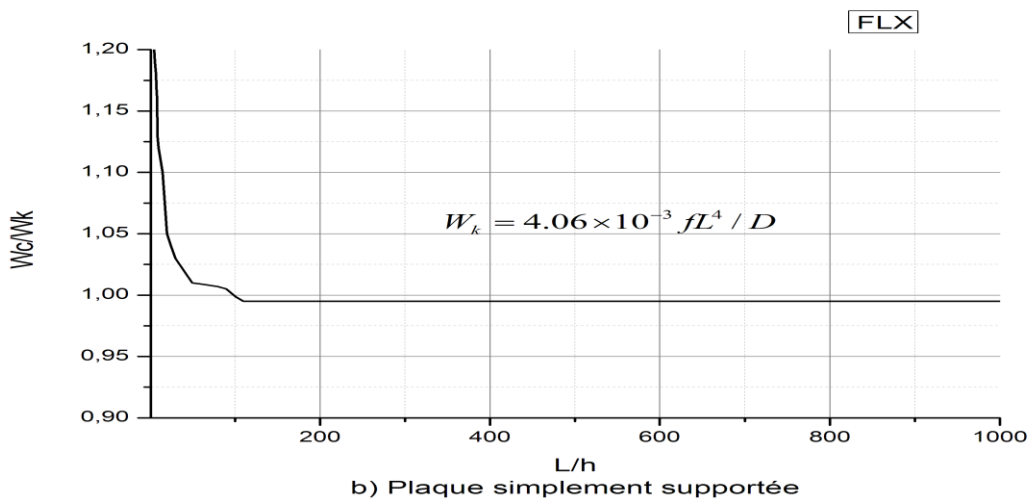
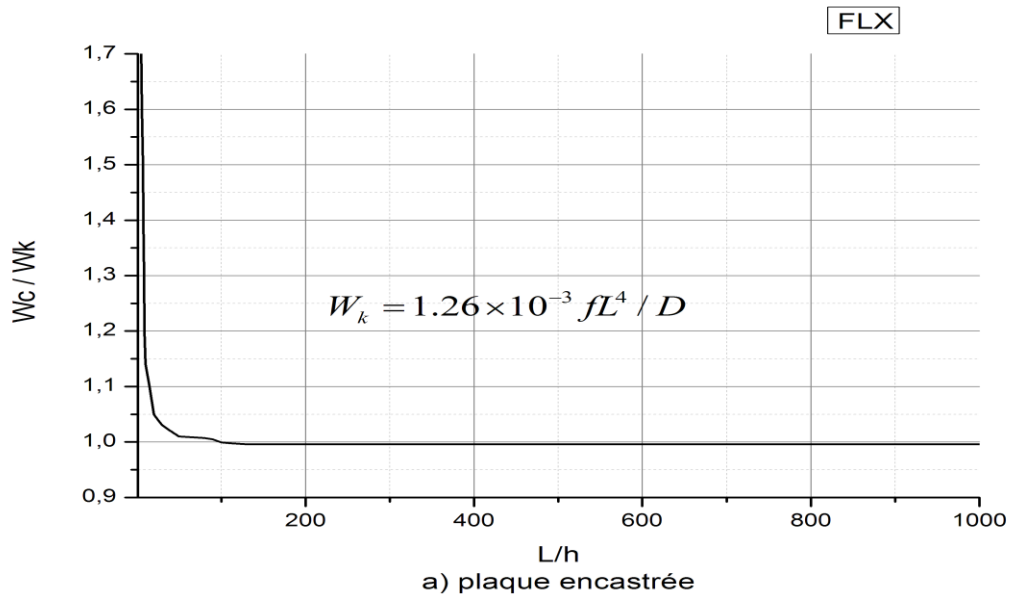
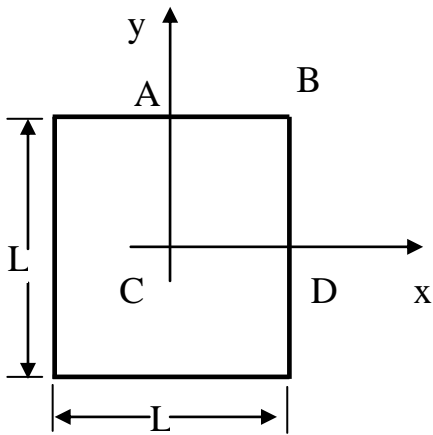


Figure 3.2—plaque carrée homogène avec charge uniforme. Erreur de flèche au centre en fonction de L/h ($D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$, $\nu = 0.3$, $k' = 5/6$)

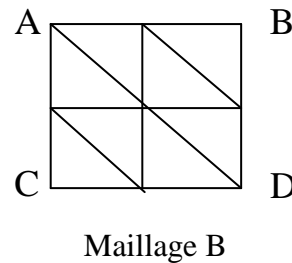
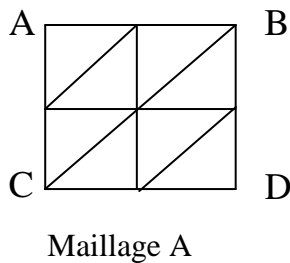
Dans un deuxième temps nous présentons, figures 3.3 à 3.5, quelques résultats [JE 90.a] relatifs à l'analyse d'une plaque homogène carrée, en flexion simple, soumise à une charge concentrée au centre, encastree ou simplement supportee sur le contour. Un quart de la plaque est maillé avec 2, 8, 32, 128 ($N = 1, 2, 4, 8$) éléments finis triangles isocèles rectangles DKT et FLX (figure 3.3). Ces éléments ont 5 degrés de liberté par nœud et sont de type Kirchhoff (pas d'énergie de cisaillement transversal, les résultats obtenus sont indépendants de L/h) pour les éléments DKT et des éléments finis flexibles tenant compte du cisaillement transversal (FLX) pour $L/h = 24$.



- Conditions de symétrie :
 $\beta_x = 0$ Sur CA ; sur CD $\beta_y = 0$
- Conditions aux limites :
 - Encastrement : $w = \beta_x = \beta_y = 0$ sur ABD
 - Appui simple : $w = \beta_x = 0$ sur AB et $w = \beta_y = 0$ sur BD

- Maillages considérés : N = 1, 2, 4, 8

Cas N = 2



- Solution de Kirchhoff pour une charge concentrée P_g :

$$(D = Eh^3 / 12 * (1 - \nu^2); \nu = 0.3)$$

- Encastrement : $w_c = 5.6 \times 10^{-3} P_g L^2 / D$ et $|M_{x_D}| = 0.1257 * P_g$
- Appui Simple : $w_c = 11.6 \times 10^{-3} P_g L^2 / D$ et $R = |2M_{xy}|_B = 0.1219 * P_g$

Figure 3.3 – plaque carrée sous charge concentrée. **Données**

Sur la figure 3.4, nous donnons le pourcentage d'erreur sur la flèche au centre en fonction du nombre de divisions N par demi coté. On observe une convergence monotone avec le modèle FLX (FLX étant un modèle des déplacements compatibles, l'énergie potentielle totale $E_{PEF} > E_{P_{exact}}$ et comme $E_P = -\frac{1}{2} w_c * P_g$, donc on voit bien que $(w_c)_{EF} < (w_c)_{exact}$). De même, on observe que le modèle DKT surestime w_c . Cependant la convergence monotone du modèle DKT ne peut être démontrée. On observe également une forte influence de l'orientation du maillage avec les éléments finis triangulaires du type DKT et FLX.

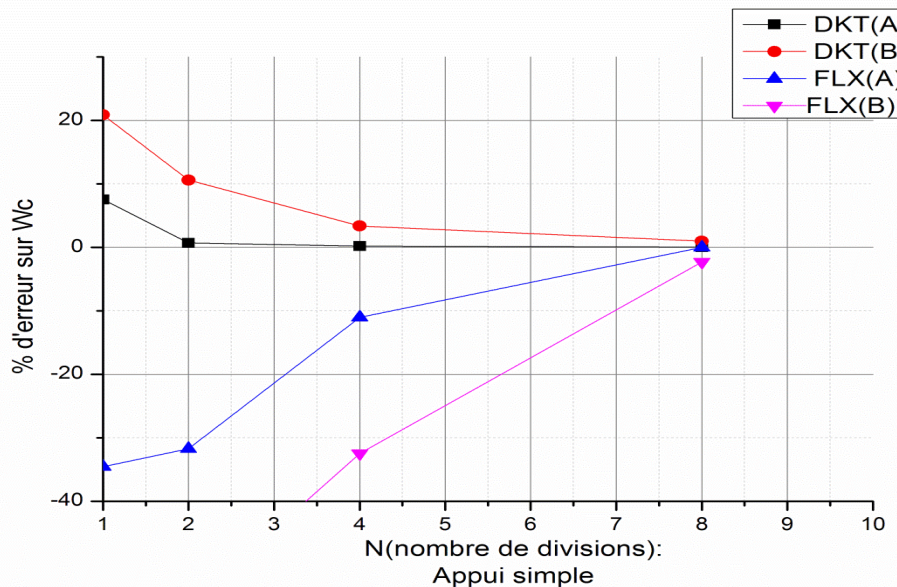
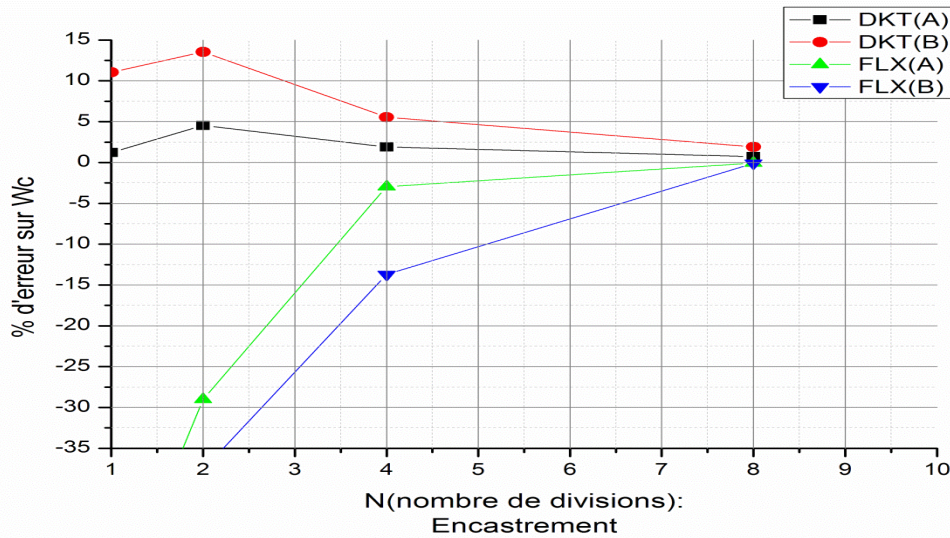


Figure 3.4 –plaques carrées avec charge concentrée au centre, encastree et simplement appuyee. Erreur sur w_c pour DKT et FLX

Les convergences du moment de flexion M_x au milieu du coté encastree et de la réaction concentrée au coin ($=|2M_{xy}|_B$) dans le cas de la plaque simplement supportee sont présentees sur la figure 3.5 pour les deux types de maillages et pour DKT et FLX (les calculs des efforts ont été effectués directement aux nœuds sommets suivis d'une moyenne si le nœud est partagé par deux éléments finis). On observe une convergence assez rapide, une influence des modèles et de l'orientation du maillage où M_{xy_B} est le moment de torsion au point B.

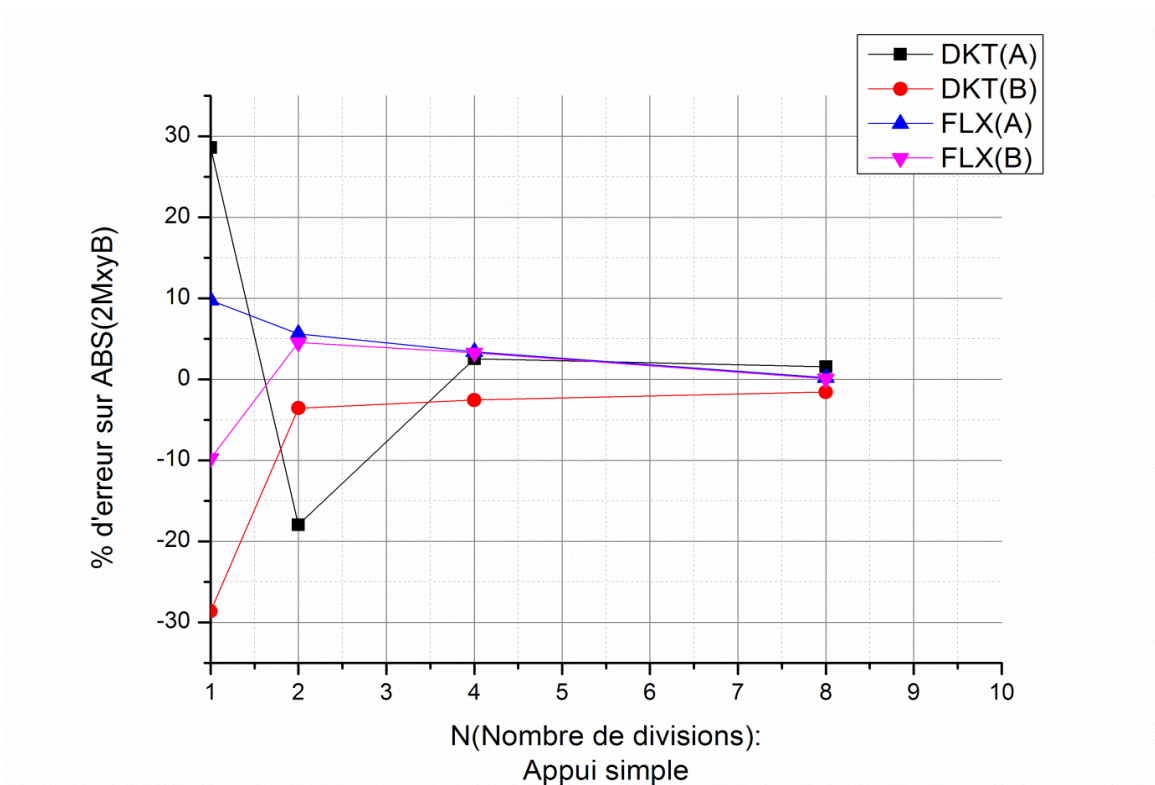
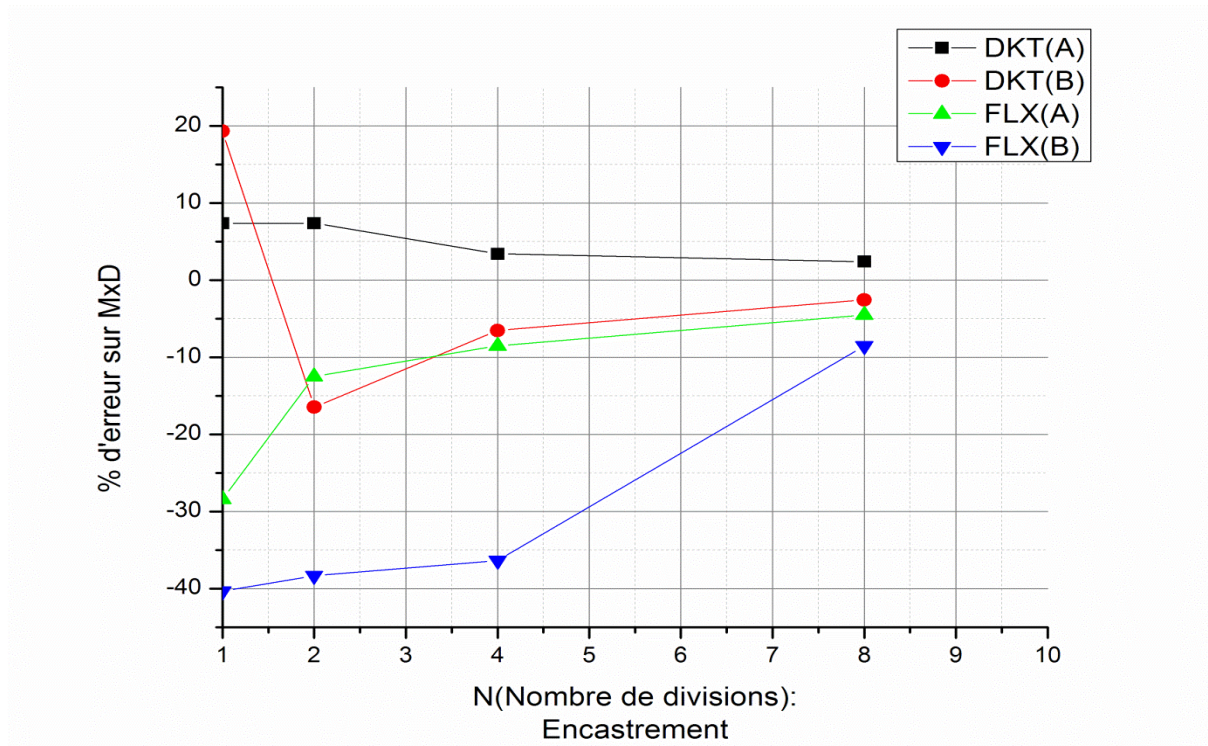


Figure 3.5—plaques carrées avec charge concentrée au centre, encastree et simplement appuyée. Erreur sur un moment et une réaction au coin pour DKT et FLX

Ici, $ABS(2M_{xyB})$ designe la valeur absolue de la valeur de $2M_{xy}$ au point B.

III.2-Etude d'une poutre métallique : Rotule plastique

On se propose dans ce paragraphe d'étudier le comportement d'une poutre métallique simplement appuyée sur ses deux extrémités et soumise à une charge concentrée P_g à mi-travée, progressive croissante allant de zéro jusqu'à atteindre la limite élastique. Puis progressivement de l'état limite élastique jusqu'à la ruine (limite à la rupture).

La poutre, de section rectangulaire, est modélisée par 24 éléments finis triangles rectangles (figure 3.7) composés de 6 couches chacun et chaque couche est décomposée en 6 cellules. Notons que la poutre étudiée est constituée par un matériau homogène de module d'élasticité $E_s = 0.215 \times 10^{12} \text{ N/m}^2 = 2.15 \times 10^5 \text{ MPa}$ et de coefficient de Poisson $\nu = 0.3$, ses caractéristiques géométriques sont mentionnées sur la figure 3.6.

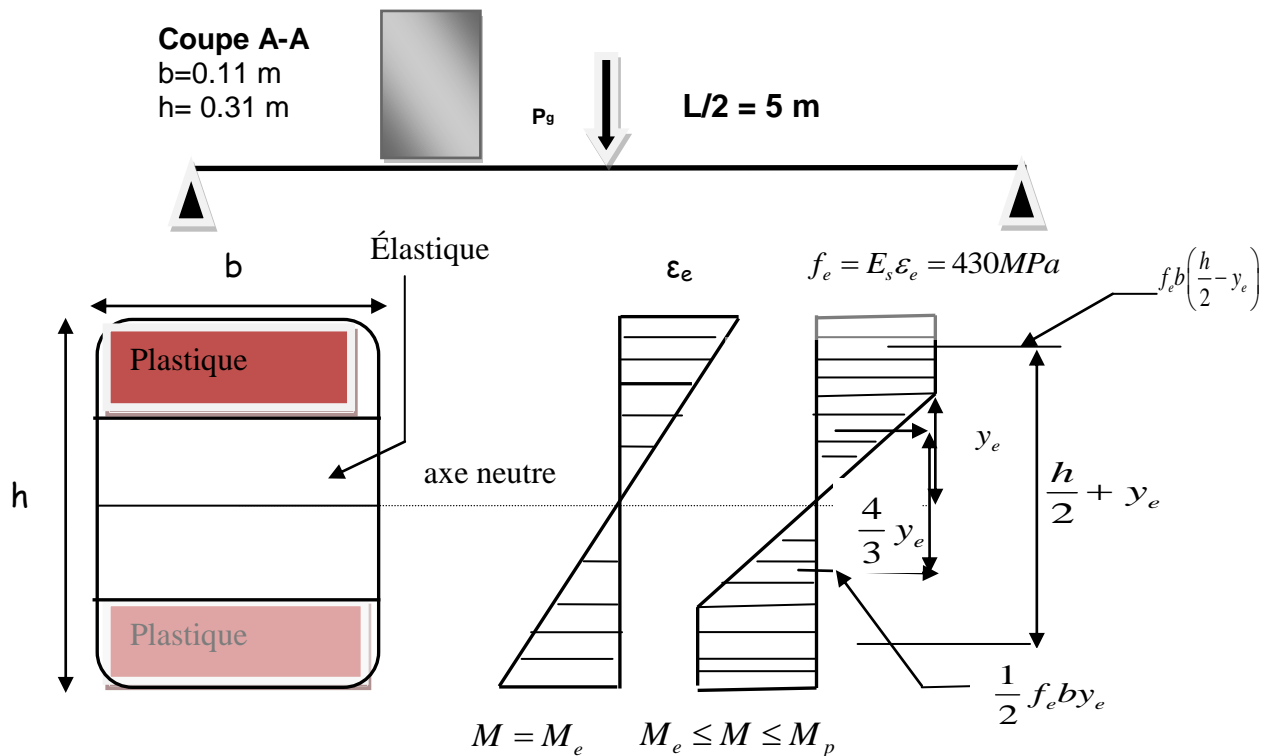


Figure 3.6- Evolution des contraintes dans une section rectangulaire

Le moment élastoplastique est donné par :

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma(x, z) * b(z) * z * dz = 2b \int_0^{h/2} \sigma(x, z) * z * dz \quad (3.1)$$

Le moment élastoplastique peut être calculé aisément par calcul des résultantes et bras de levier (figure 3.6). Et par la suite, l'intégration de l'équation du moment (3.1) aboutie à :

$$M = f_e b \left(\frac{h}{2} - y_e \right) \left(\frac{h}{2} + y_e \right) + \frac{1}{2} f_e b y_e \frac{4}{3} y_e = f_e \frac{bh^2}{4} \left(1 - \frac{4}{3} \left(\frac{y_e}{h} \right)^2 \right) \quad (3.2)$$

L'état limite élastique est atteint lorsque $\sigma_s = \sigma_{el} = f_e$ et $y_e = h/2$: $M_e = f_e \frac{bh^2}{6}$ et l'état plastique

total est atteint pour $\sigma_s = f_e$ et $y_e = 0$: $M_p = f_e \frac{bh^2}{4}$ où y_e est la distance entre l'axe neutre et la

première couche plastifiée et $M = M_p \left(1 - \frac{4}{3} \left(\frac{y_e}{h} \right)^2 \right)$.

$y_e = \frac{\varepsilon_e}{\chi}$, on a alors : $M = M_e$ si $\chi_e = 2\varepsilon_e / h$ et $M = M_p$ quand $\chi \rightarrow +\infty$

Ainsi, il est possible d'établir le diagramme moment-courbure sur n'importe quelle section le long de la poutre et en particulier dans la section médiane (figure 3.8).

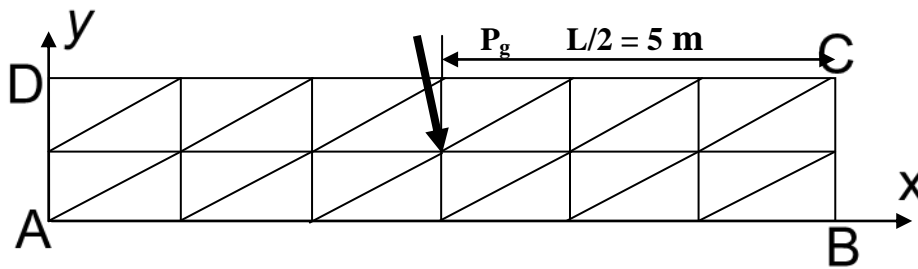


Figure 3.7-Maillage en éléments finis de la poutre métallique

- Appui simple sur AD et sur BC : $w = v_0 = \beta_y = 0$

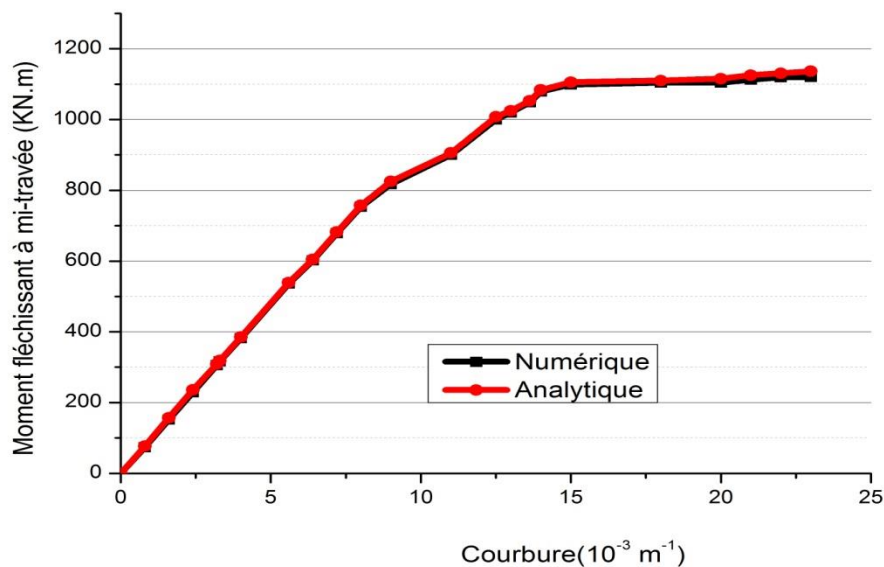


Figure 3.8-Diagramme moment-courbure (M, χ) à mi-travée

En divisant l'équation 3.2 par le moment élastique M_e on a : $\frac{M}{M_e} = \frac{M_p}{M_e} \left(1 - \frac{4}{3} \left(\frac{y_e}{h} \right)^2 \right)$, or à l'état

plastique $y_e \rightarrow 0$, donc $\frac{M}{M_e} \rightarrow \frac{M_p}{M_e} = f$, f est appelé facteur de forme défini comme étant le rapport entre le moment plastique et le moment élastique maximal de la section. Il est donc une valeur adimensionnelle.

Etat élastoplastique

Or, à l'état élastique (Bernoulli) : $y_e = \frac{\varepsilon_e}{\chi} \Rightarrow \varepsilon_e = \frac{1}{2} h \chi_e$, donc $y_e = \frac{\chi_e}{\chi} \frac{h}{2}$

Et par la suite le rapport entre le moment élastoplastique et le moment élastique s'écrit par :

$$\frac{M}{M_e} = \frac{M_p}{M_e} \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\chi_e}{\chi} \right)^2 \right) \quad (3.3)$$

Notion de rotule plastique

– courbe moment-courbure

- la poutre a un comportement élastique parfaitement plastique : elle reste élastique jusqu'à l'instant où le moment plastique M_p est atteint, puis elle fléchit plastiquement à moment constant.

– pas de plastification due à T ou à N

– localisation des déformations (de la courbure)

Il est aussi possible de suivre l'étendue de la zone plastifiée notée $L_p = L(1-1/f)$ et la propagation de la plastification dans la structure : c'est ce qu'on appelle la formation de la rotule plastique par propagation de la plastification. La figure 3.9 représente la distribution des courbures dans la zone plastifiée à partir de la longueur L_p où L est la longueur de la poutre. La longueur de la zone plastifiée est égale théoriquement à $L_p^{analytique} = 3.33m$ et $L_p^{numérique} = 3.23m$. Le moment sollicitant le long de la poutre est donné par :

➤ Pour $x \leq L/2$ $M(x) = P_g \cdot x/2$ (3.4)

➤ Pour $x \geq L/2$ $M(x) = P_g (L-x)/2$ (3.5)

L'égalisation des équations 3.2 et 3.4 permet d'établir deux équations du profil de la zone plastifiée dans la structure.

$$\chi(x) = \sqrt{\frac{4bh^2 f_e \varepsilon_e^2}{3(bh^2 f_e - 2P_g \cdot x)}} \quad (3.6)$$

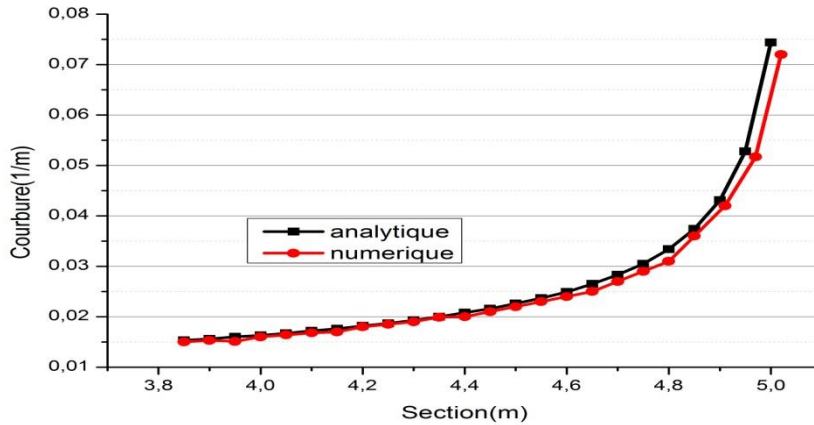


Figure 3.9-Distribution des courbures χ dans la zone plastifiée à $P_g = 450 \text{ KN}$

La figure 3.9 est une courbe représentative de la distribution des courbures dans la demi- zone de la plastification. La courbe représentative de l'autre demi- zone plastifiée est donc symétrique à la courbe de la figure 3.9 par rapport à la droite d'équation $x = 5m$ par rapport au repère lié à l'origine de la poutre.

$$y_e(x) = \sqrt{\frac{3}{4}h^2 - \frac{3P_g \cdot x}{2bf_e}} \quad (3.7)$$

La figure 3.10 représente la distribution des épaisseurs dans la zone plastifiée de la demi- épaisseur entre $(0, h/2)$. La demi-moitié de l'épaisseur entre $(-h/2, 0)$ est représentée par une courbe symétrique par rapport à l'axe des abscisses (la droite d'équation $y_e = 0$).

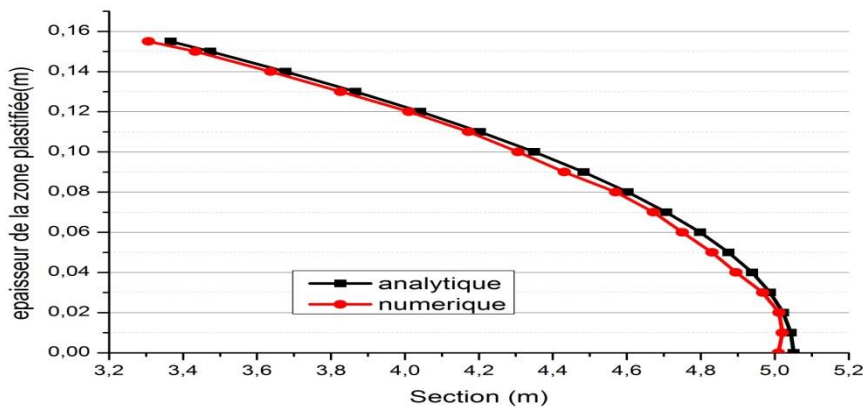


Figure 3.10-Distribution des épaisseurs y_e dans la zone plastifiée à $P_g = 450 \text{ KN}$

III.3-Etude d'une poutre en béton armé : plasticité non-linéaire

III.3.1-Flexion simple d'une poutre en béton armé

La connaissance théorique du comportement structurel des éléments poutres sollicités en flexion simple est nécessaire. On se propose d'étudier le comportement d'une poutre en béton armé simplement appuyée sur ses deux extrémités et soumise à une charge concentrée P_g à mi-travée, progressive croissante allant de zéro jusqu'à atteindre la limite élastique. Puis progressivement de l'état limite élastique jusqu'à la ruine (limite à la rupture).

Le béton armé est un matériau hétérogène, il a en particulier une faible résistance à la traction et un bon comportement sous contrainte normale de compression [TI 75].

La poutre de section rectangulaire, simplement appuyée sur ses deux extrémités, soumise à mi-travée à une charge P concentrée, est modélisée par vingt-quatre (24) éléments finis triangles rectangles composés par dix(10) couches chacun (deux(2) couches mixtes armatures-béton et huit (8) couches de béton) et de cent(100) cellules par couche. La couche mixte est décomposée en cellules d'armatures et en cellules de béton (figure 3.12). On constate que le comportement de la poutre passe par les deux étapes suivantes : P_g

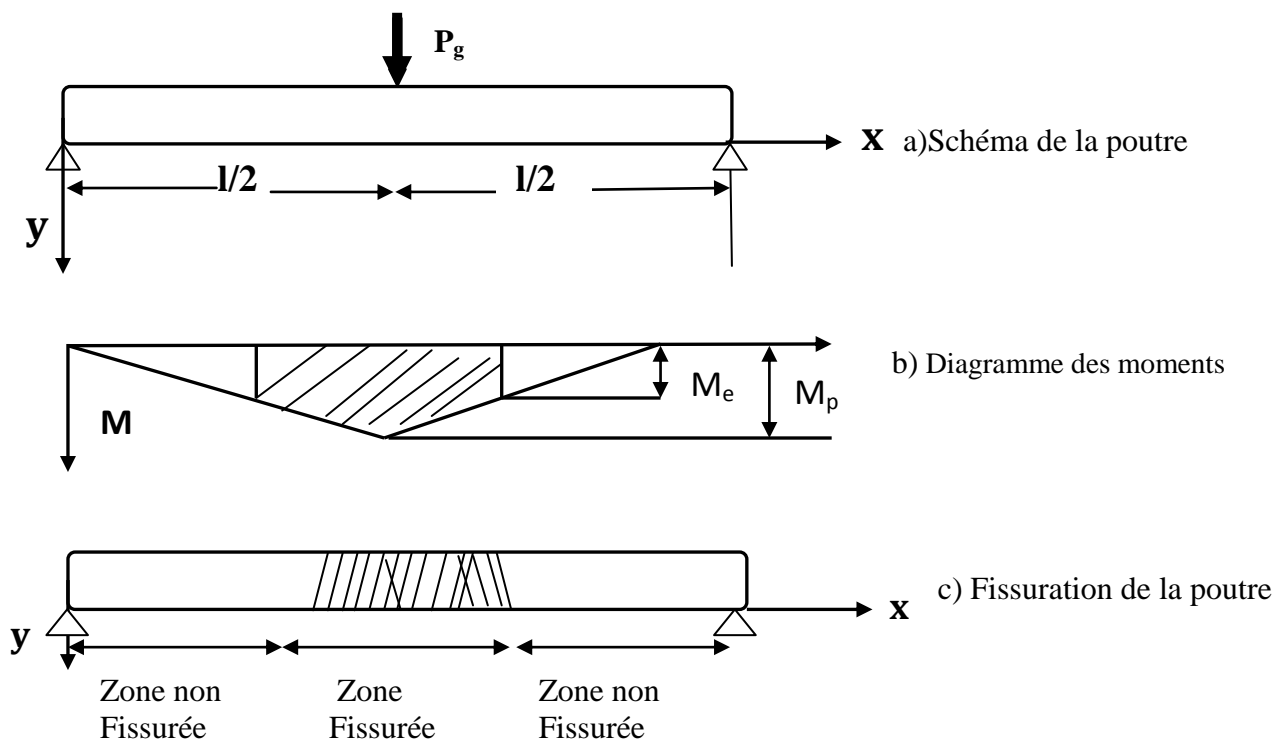


Figure : 3.11-Comportement d'une poutre en béton armé sous charge croissante

1^{ère} Etape

Les petites valeurs de P_g , n'entraînent pas de fissuration dans le béton tendu, dans cette étape toutes les sections de la poutre se comportent élastiquement.

Les déformations répondent sensiblement aux lois de la résistance des matériaux, étant donné que la rigidité K est constante sur la longueur de la poutre, la courbure de la déformée est directement proportionnelle au moment fléchissant [BO 09]

$$\chi(x) = M(x) / E_c I \quad (3.8)$$

M : Moment fléchissant de la poutre, E_c : Module d'élasticité du béton et I : Moment d'inertie de la section totale rendue homogène.

2^{ème} Etape

Dans la seconde étape, les valeurs de P_g entraînent la fissuration du béton tendu dans les sections les plus sollicitées, mais on peut encore considérer que la poutre se comporte élastiquement jusqu'à une certaine charge (P_{ge}). Quand la charge appliquée dépasse la valeur de la charge (P_{ge}), la rigidité chute brusquement au fur et à mesure de l'apparition de fissures, cependant il est difficile d'attribuer une valeur au facteur de rigidité $[IK]$.

En effet, le module d'élasticité E_c varie avec le temps (phénomène de fluage) et le moment d'inertie est, lui, très approximatif [TI 75] car :

- Le long de la poutre toutes les sections ne sont pas fissurées et notamment vers les appuis où le moment fléchissant tend vers zéro ;
- Dans les parties fissurées, le béton compris entre deux fissures successives est plus ou moins pris en compte et la profondeur des fissures varie d'une section à une autre ;
- Le coefficient d'équivalence acier / béton « $\alpha_e = E_s / E_c$ » est supposé constant alors que sa valeur varie du fait que E_c varie dans le temps ;
- Enfin, l'armature n'a pas la même section tout le long de la poutre.

Dans ce mode de sollicitation, l'ouvrage est à la limite de la rupture, il doit résister aux charges mais il subit des déformations irréversibles et en ressort endommagé (Etat Limite Ultime). Pour cet état, il est inutile de rester dans le domaine de comportement élastique des matériaux, on utilise alors des « modèles de plasticité non-linéaires » qui se rapprochent du comportement réel des matériaux. On utilise aussi les « modèles de calcul de stabilité de forme » qui concernent le flambement et le voilement des éléments comprimés (poteaux, voiles ou coques) ainsi que le déversement des éléments fléchis élancés.

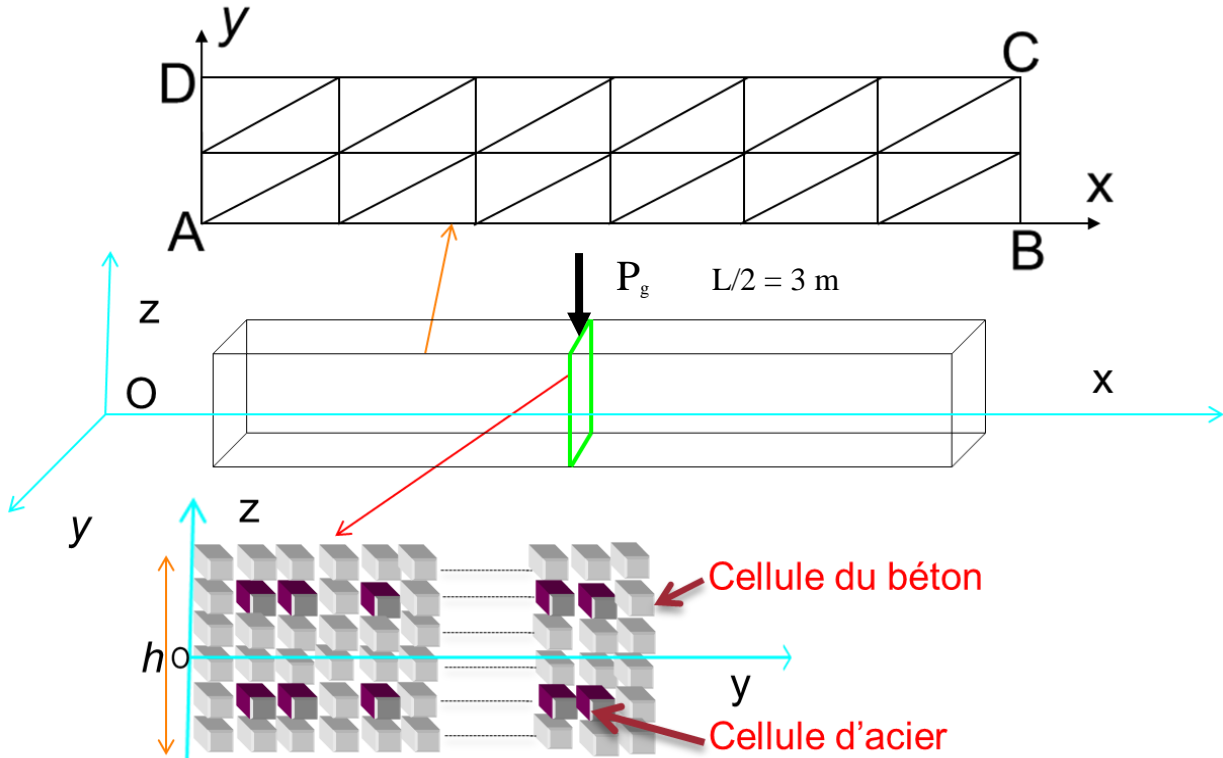


Figure : 3.12-Maillage éléments finis multicouches multicellulaires de la poutre en béton armé

- Appui simple sur AD et sur BC : $w = v_0 = \beta_y = 0$

Section fissurée: c'est le cas classique de la théorie de l'élasticité pour le béton armé. Cette théorie est importante pour le calcul des épaisseurs fissurées.

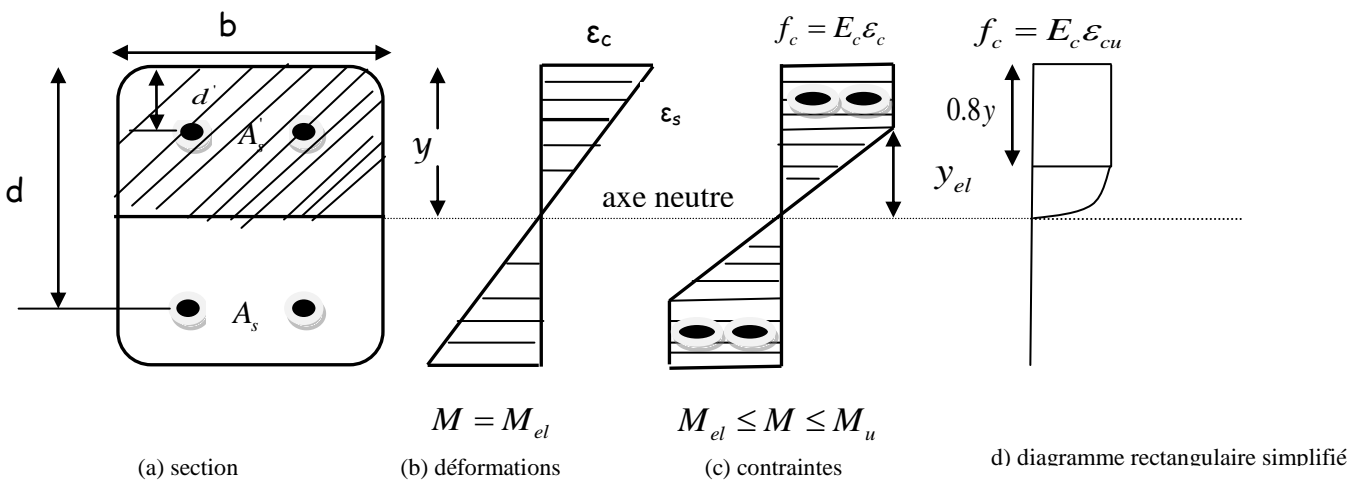


Figure : 3.13-Distribution des déformations et des contraintes pour une section fissurée

La figure (3.13.a) montre une section rectangulaire sujette à un moment de flexion et les suppositions simplificatrices suivantes sont faites:

- Les sections planes avant déformation demeurent planes après déformation, en d'autres termes, la distribution des déformations relatives est linéaire ;
- Les contraintes dans les armatures et dans le béton sont proportionnelles aux déformations relatives ;
- Le béton est fissuré jusqu'à l'axe neutre et il n'y a pas de contrainte de traction dans le béton au-dessous de l'axe neutre.

A partir de la première supposition, les déformations peuvent être exprimées par:

$$\varepsilon'_s = \frac{y-d'}{y} \varepsilon_c \quad , \quad \varepsilon_s = \frac{d-y}{y} \varepsilon_c \quad (3.9)$$

Où ε'_s et ε_s représentent les déformations comprimée et tendue de l'acier respectivement et ε_c celle du béton élastique prise égale à 2.10^{-2}

A partir de la deuxième supposition, on peut écrire que:

$$f_b = E_c \varepsilon_c \quad , \quad f_s = E_s \varepsilon_s = \alpha_e E_c \varepsilon_s \quad \text{et} \quad f'_s = E_s \varepsilon'_s = \alpha_e E_c \varepsilon'_s \quad (3.10)$$

E_s et E_c sont respectivement, le module d'élasticité des armatures et celui du béton.

La condition d'équilibre on peut écrire:

$$\frac{1}{2} A_c f_b + A'_s f'_s = A_s f_s \quad (3.11)$$

Où A_c la section du béton comprimé, A'_s la section des armatures comprimées et A_s la section des armatures tendues.

Cette condition d'équilibre permet de déterminer la section des armatures comprimées A'_s en supposant que la section du béton comprimé reste la même que celle à l'état initial du béton.

Si la charge continue à augmenter, l'armature s'allonge et le béton continue à se raccourcir. Les fibres comprimées de la section la plus sollicitée se plastifient et leur raccourcissement continue à augmenter jusqu'à une valeur limite égale à ε_{cu} au niveau de cette section critique. Lorsque sa contrainte de rupture est atteinte, le béton équilibre encore la composante de compression du couple de flexion et comme l'armature tendue n'a pas atteint un allongement de rupture et peut équilibrer la composante de traction, le moment extérieur de flexion est équilibré dans cette section où la rotation est très importante, on dit qu'il y a eu formation d'une rotule plastique.

Au cours du chargement, la poutre présente une courbure permanente et la section est considérée comme fragile vis-à-vis des chargements répétés et surtout alternés [TI 75]. En effet, sous des

actions réversibles et répétées (actions cycliques), il y a un affaiblissement de la rigidité qui provient en particulier de la chute de la contrainte d'adhérence consécutive à la détérioration du béton. La figure (3.15) représente les trois étapes par un diagramme moment-courbure $\{M, \chi\}$, le diagramme charge-déplacement $\{P_g, \delta\}$ est représenté quant à lui sur la figure (3.14).

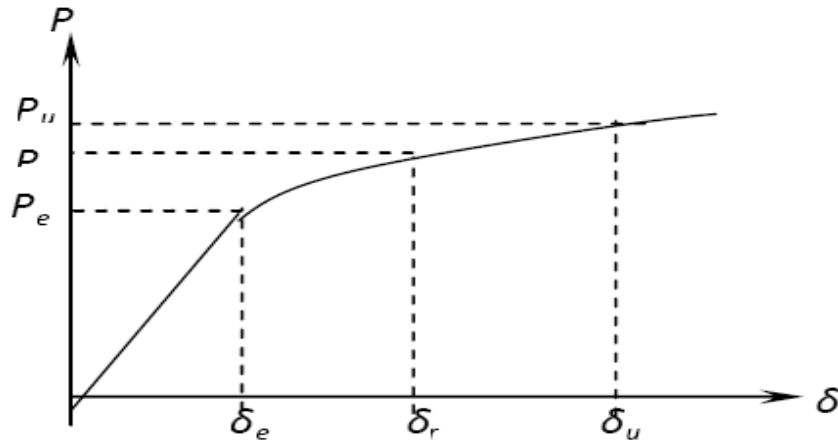


Figure : 3.14- Diagramme charge-déplacement

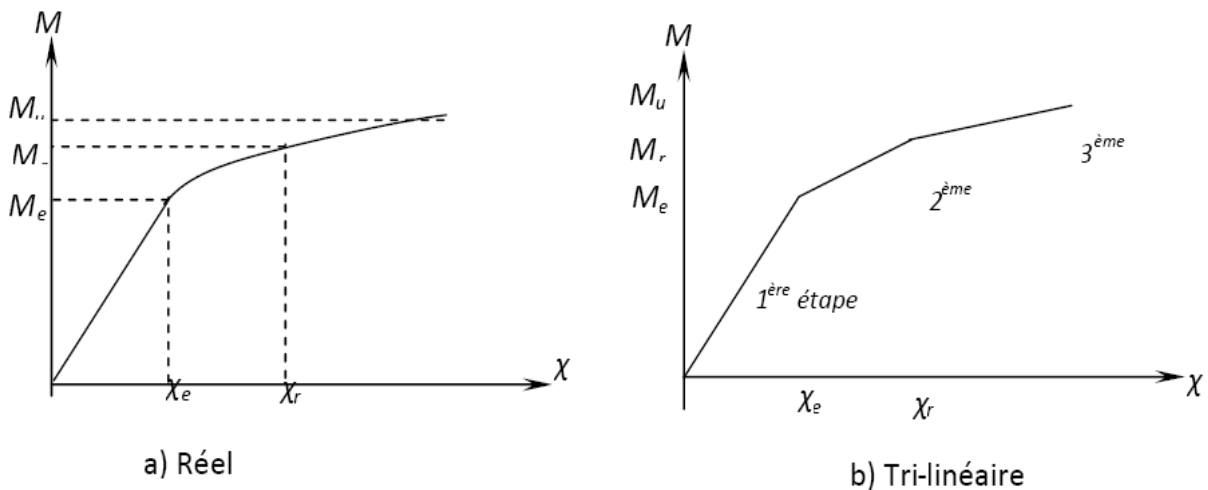


Figure : 3.15- Diagramme moment-courbure pour une poutre en béton armé

La théorie de flexion pour le béton armé suppose que le béton se fissure dans les régions des contraintes de traction et que, après fissuration, toutes les contraintes de traction sont reprises par les armatures. On suppose également que les sections droites d'une pièce demeurent droites après déformation, de sorte qu'à travers la section, la distribution des déformations passe par l'état limite élastique. L'état limite à la ruine est obtenu quand la déformation relative dans le béton ε_c à la fibre la plus comprimée atteint une valeur spécifique ε_{cu} (les principaux codes la prennent égale à $0,35 \cdot 10^{-2}$ [CP 02] [EU 92.a]). A la rupture (image instantanée de la ruine), la distribution

des contraintes de compression dans le béton est définie par un bloc parabolique-rectangulaire. Elle représente la distribution à la rupture quand les déformations compressives sont dans la marge plastique et elle est associée à la conception pour l'état limite ultime.

Le moment de flexion en chaque section est donné en général par :

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma(x, z) * b(z) * z * dz = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_c(x, z) * b(z) * z * dz + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_s(x, z) * b(z) * z * dz \quad (3.12)$$

Où σ_c et σ_s sont les contraintes du béton et de l'acier respectivement

$$M = M_i + M_s \quad (3.13)$$

Le moment élastique M_e du béton d'une section en flexion simple est déterminé par l'équilibre des moments par rapport aux armatures tendues [BO 09] :

$$M_i = M_e = F_c \left(d - \frac{1}{3} y \right) \quad (3.14)$$

Où $F_c = \frac{1}{2} A_c f_c$ est la force de compression dans le béton à la limite élastique, avec $f_c = \frac{1,25}{3} f_{ck}$

, $E_c = 30,5 \text{KN} / \text{mm}^2$ pour $f_{ck} = 25 \text{N} / \text{mm}^2$, $E_c = 32 \text{KN} / \text{mm}^2$ pour $f_{ck} = 30 \text{N} / \text{mm}^2$,

$E_c = 35 \text{KN} / \text{mm}^2$ pour $f_{ck} = 40 \text{N} / \text{mm}^2$ et $\varepsilon_c = f_c / E_c$

Toujours dans le cas de la flexion simple, la section n'est pas entièrement comprimée, il est donc possible d'utiliser le diagramme rectangulaire simplifié au lieu du diagramme parabole-rectangle.

Le moment plastique M_p équilibré par le béton, calculé par rapport à la section des armatures tendues, à partir du diagramme rectangulaire simplifié est donné par :

$$M_i = M_p = 0.8 y b (d - 0.4 y) f_c \quad (3.15)$$

Moment résistant

Lorsque l'allongement des armatures tendues est égal à l'allongement élastique $\varepsilon_e = 2 \times 10^{-3}$ qui correspond à la contrainte élastique de calcul f_e / γ_s , l'axe neutre est déterminé par la valeur

$\alpha_R = \frac{3.5}{3.5 + 10^{+3} \varepsilon_e}$ du coefficient $\alpha = 0.259$ et le moment résistant M_R de la section est donné

par :

$$M_i = M_R = 0.8 \alpha_R (1 - 0.4 \alpha_R) b d^2 f_c \quad (3.16)$$

Le bras de levier des forces intérieures est égal à $z_R = d(1 - 0.4 * \alpha_R)$ et $\mu_{b,R} = \frac{M_{b,R}}{bd^2 f_c}$, on vérifie

que $\mu_b < 0.186$

Si $\mu = 0.8 * \alpha(1 - 0.4 * \alpha) > \mu_R$, en général, il est nécessaire de prévoir une section d'armature comprimée, calculée de la façon suivante :

- Le choix du diagramme des déformations est arbitraire. On prend en général le diagramme qui correspond à l'allongement ε_e de l'armature tendue. En absence d'armature comprimée, la section équilibre un moment égal au moment résistant M_R avec un bras de levier égal à z_R ;
- L'effort de compression dans le béton est égal à M_R / z_R .

Le raccourcissement de l'armature comprimée a pour valeur :

$$\varepsilon'_s = \left(\frac{3.5}{1000} + \varepsilon_e \right) \frac{d - d'}{d} - \varepsilon_e \quad (3.17)$$

La contrainte $f'_s = E_s \varepsilon'_s$ correspondante est donnée par le diagramme déformations-contraintes de l'acier.

Ainsi, l'expression du moment résultant, équation 3.13, peut s'écrire :

$$M = M_i + M_s = M_i + A'_s f'_s (d - d') \quad (3.18)$$

Le raccourcissement unitaire du béton est limité à :

$\varepsilon_c = 3.5 \times 10^{-3}$, flexion simple, $\varepsilon_c = 2 \times 10^{-3}$ compression simple.

$\varepsilon_s = 10 \times 10^{-3}$, la limite maximale de l'allongement de l'acier

Il est donc possible d'établir analytiquement le diagramme moment-courbure $\{M, \chi\}$ de la poutre en béton armé en tout section et en particulière dans la section médiane (figure 3.16).

Les caractéristiques géométriques et mécaniques de la poutre sont données dans le tableau 3.1

L(m)	h(m)	b(m)	A_s (m ²)	A'_s (m ²)	E_c (N/m ²)	E_s (N/m ²)	ν_c	ν_s
6	0.55	0.20	3.75×10^{-3}	2.485×10^{-5}	0.305×10^{11}	0.2×10^{12}	0.28	0.3

Tableau 3.1 Caractéristiques de la poutre en béton armé

Où ν_c et ν_s sont les coefficients du Poisson respectifs du béton et de l'armature.

Le diagramme en figure 3.16 illustre le caractère trilineaire de la relation moment-courbure de la section médiane de la poutre en béton armé. Ce caractère est décrit par trois étapes principales :

- 1) Il s'agit de déterminer en premier lieu le point le long de la courbe moment-courbure réelle correspondant au début de la plastification des premiers aciers d'armatures ("First yield"). Pour les éléments de construction soumis à un effort normal important comme les colonnes, ce point correspond soit au début de la plastification de l'acier dont l'allongement atteint la limite d'écoulement soit au début de la plastification du béton dont la déformation spécifique atteinte est de 0.2%. Le premier atteint est déterminant. Le moment du béton correspondant est donné par l'équation 3.14.
- 2) Le point de plastification du diagramme moment-courbure réelle se situe entre le premier point (à la limite d'élasticité) et le point à la limite de rupture. Ce point est atteint pour des déformations spécifiques de $\varepsilon_c = 0.002$ pour le béton et $\varepsilon_s = 0.002$ pour les armatures tendues. Le moment du béton correspondant est donné par l'équation 3.15 ;
- 3) En dernier lieu, il s'agit de déterminer le point où est atteinte respectivement soit la déformation spécifique de l'acier $\varepsilon_s = \varepsilon_{s,max}$, soit celle du béton $\varepsilon_c = \varepsilon_{c,max} = \varepsilon_{cu}$. Le premier atteint est déterminant. $\varepsilon_{s,max}$ et $\varepsilon_{c,max}$ représentent les valeurs maximales admissibles des déformations spécifiques des matériaux. A ce point correspond la rupture de l'élément de construction ("Ultimate limit state"), soit la courbure ultime et le moment de rupture. Le moment du béton correspondant est donné par l'équation 3.16. Les déformations $\varepsilon_{s,max}$ et $\varepsilon_{c,max}$ peuvent être plus grandes ou égales respectivement à $\varepsilon_{s,max} \geq 0.002$ et $\varepsilon_{c,max} \geq 0.0035$.

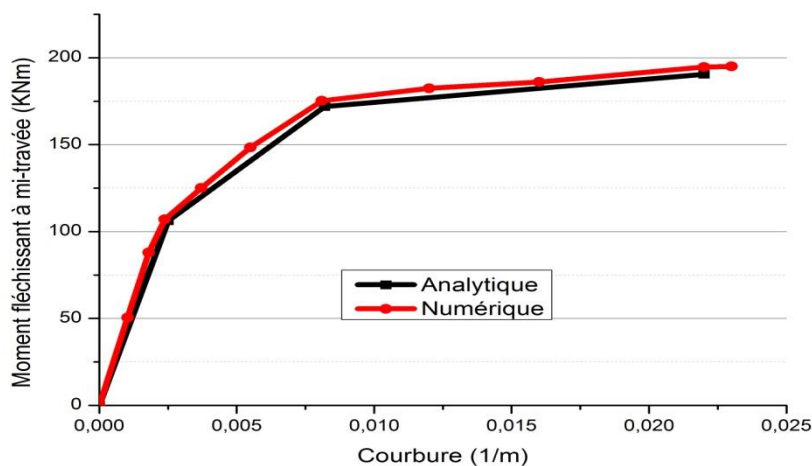


Figure 3.16 : Diagramme moment-courbure (M, χ) à mi-travée

A la rupture (image instantanée de la ruine), la distribution des contraintes de compression dans le béton qui est définie par un bloc parabolique-rectangulaire, représente la distribution des contraintes à la rupture quand les déformations compressives sont dans la marge plastique et elle est associée à la conception pour l'état limite ultime. Il y a alors une compatibilité des déformations entre l'armature et le béton adjacent, les déformations d'acier en traction, ε_s et en compression, ε_s' peuvent être déterminées à partir du diagramme de déformations. La figure 3.17 représente la distribution des courbures dans la zone plastifiée jusqu'à la rupture (le long de la zone plastifiée, la longueur représentative est L_p , (voir § III.2).

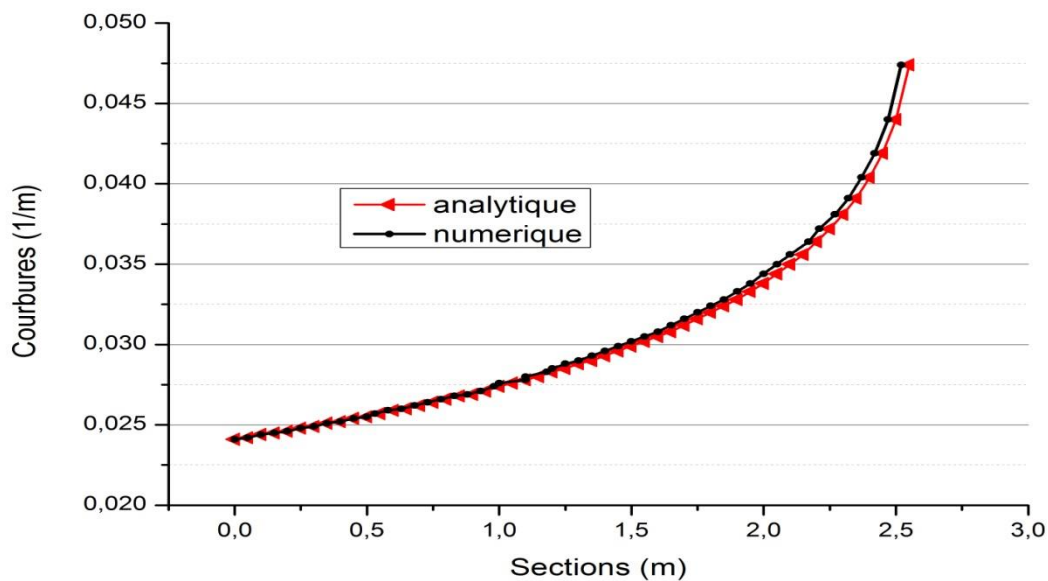


Figure 3.17- Distribution de la courbure χ le long de la poutre jusqu'à mi-travée

III.3.2-Traction simple d'une poutre en béton armé

La réponse contrainte déformation d'un essai de traction selon x est tracée sur la figure 3.18.

La contrainte atteint une valeur constante proche de zéro à partir d'une valeur de déformation égale à $3, 3 \times 10^{-3}$. A ce niveau de chargement, la surface limite de plasticité est atteinte pour une valeur de la contrainte minimale de $\sigma_{xx} = 0,0285 \text{ MPa}$. La réponse effective devient plastique parfaite et la structure est totalement endommagée.

Le résultat présente bien le comportement élastique au début, puis endommageable avec la phase adoucissante et la rupture reflétée par un palier à contrainte presque nulle (figure 3.18)

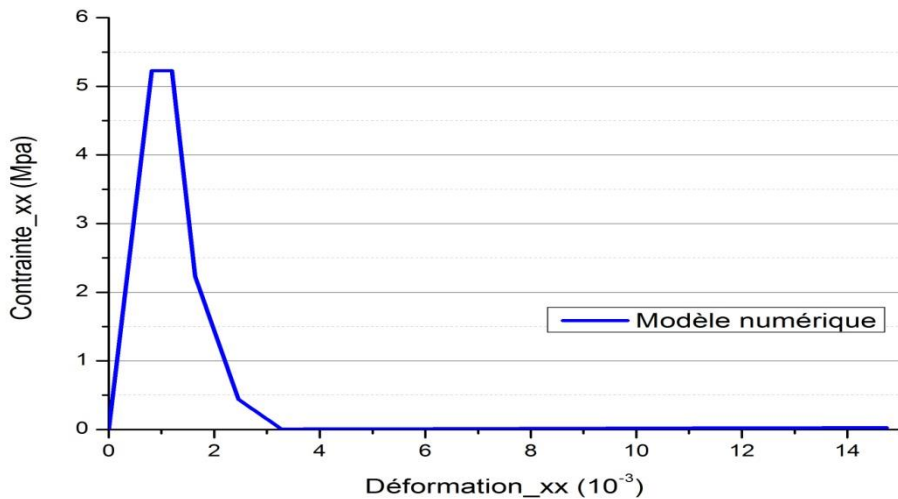


Figure 3.18- Diagramme Contrainte-Déformation

III.4-Etude des Voiles porteurs en béton armé sous chargement cyclique : quasi-statique

L'étude a été effectuée à l'aide de la table vibrante de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Zurich (EPFZ), Suisse. Ces essais ont été réalisés dans le cadre du projet de recherche « Structures porteuses en béton armé soumises à des sollicitations cycliques, dynamiques et statiques » à l'Institut de Statique et Structures (IBK). Dans ce paragraphe, seule une étude comparative du comportement semi-local sous chargement statique monotone croissant jusqu'à la ruine des voiles porteurs en béton armé est traitée. Six parois à voiles porteurs en béton armé stabilisant un bâtiment de référence de 20.40 m de hauteur, de 6 étages (figure 3.19), modélisant à l'échelle 1/2 la moitié inférieure des parois du bâtiment (figure 3.20) ont été étudiées [AL 99.a].

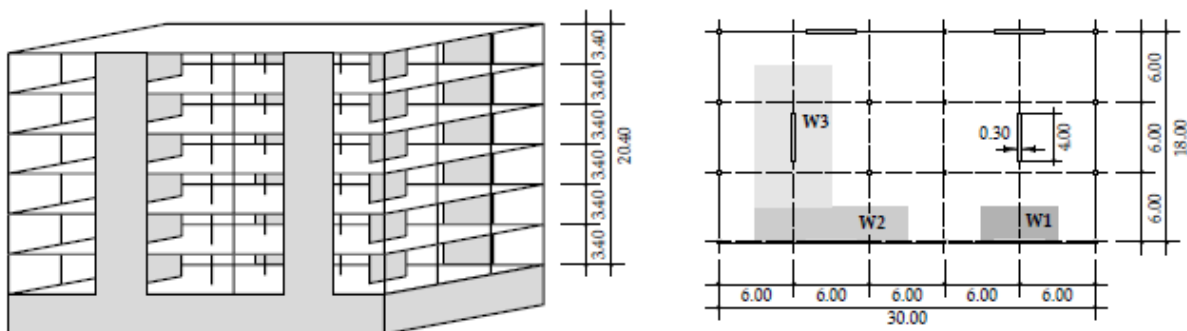


Figure 3.19-Bâtiment de référence : élévation (à gauche), coupe transversale d'un plancher (à droite).

Les voiles sont de section rectangulaire de (2m x 0.15 m) et de 4.56 m de hauteur. Ils sont notés par WSH1, WSH2, WSH3, WSH4, WSH5 et WSH6 dimensionnés en capacité vis-à-vis des tremblements de terre [AL 99.b] conformément aux normes néo-zélandaises NZS3101 [NZ 95] en considérant différentes classes de ductilité définies dans l'Eurocode 8 [EU 97.b] à l'exception de la paroi WSH4 dimensionnée conformément à l'Eurocode 2[EU 92.a], sous les conditions du tableau 3.2.

Les forces de coupe M_E , V_E et N_E , générées dans les voiles porteurs et qui sont dues aux effets de tremblement de terre, sont déterminées en utilisant la méthode de la force équivalente des spectres de conception définie dans l'Eurocode 8 et aucun effet de torsion n'a été pris en compte. Les hypothèses retenues en ce qui concerne le type de charge surfacique du mur, le type de sol q , et l'accélération a_g du sol sont résumées dans le tableau 3.2.

Paroi	Surcharge G (KN/ m ²)	a_g (g)	Type de sol	q	μ_Δ	N_E (KN)	V_E (KN)
WSH1	10.0	0.16	Compact	3	3	690	746
WSH2	10.0	0.16	Compact	3	3	690	746
WSH3	10.0	0.20	Lâche	4	5	690	980
WSH4	10.0	0.10	Lâche	2	2	690	980
WSH5	12.5	0.16	Compact	4	5	1500	1001
WSH6	12.5	0.16	Semi- Compact	4	5	1500	1310

Tableau 3.2 : Caractéristiques du dimensionnement des parois en béton armé vis-à-vis aux séismes

Où a_g l'accélération maximale du sol, q coefficient du comportement, μ_Δ coefficient de ductilité en déplacement N_E la charge normale de calcul(KN), V_E force statique équivalente pour le dimensionnement parasismique réglementaire(KN) tel que $M_E = V_E h_F$, h_F bras de levier ou hauteur d'application de V_E , M_E le moment de flexion.

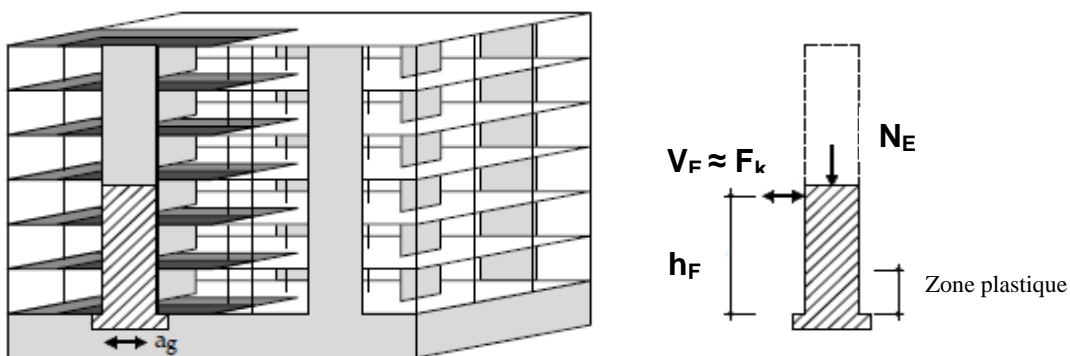


Figure 3.20-Bâtiment de référence avec un aperçu du voile porteur étudié

Le dimensionnement a été effectué pour une contrainte maximale moyenne du béton de $f_c = 45\text{MPa}$ avec un diagramme rectangle équivalent au diagramme parabole-rectangle (figure 3.21) tels que pour les parois WSH1, WSH2, WSH3, WSH5 et WSH6: $\alpha_s = \beta_s = 0.85$, $k_s = 1.0$ et $\varepsilon_{cu} = 0.035$ en élasticité parfaitement plastique pour f_y donnée dans [tableau 3.3], $\alpha_s = \beta_s = 0.85$, $k_s = 1.0$ et $\varepsilon_{cu} = 0.04$ en élasticité parfaitement plastique pour $f_y = f_t$ [tableau 3.3]. Pour la paroi WSH4 $\alpha_s = \beta_s = 0.80$, $k_s = 1.0$ et $\varepsilon_{cu} = 0.035$ [EC 2].

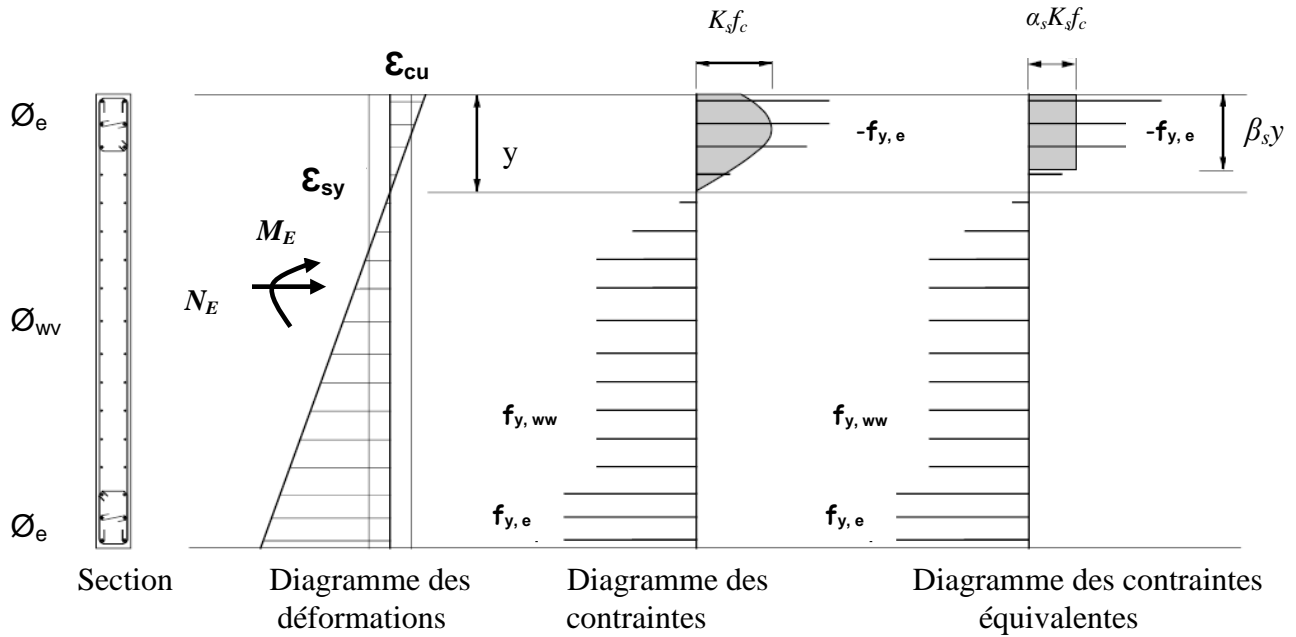


Figure 3.21- section type-diagramme des déformations-diagramme des contraintes

\varnothing_e et \varnothing_{wv} sont respectivement les diamètres nominaux des armatures de bord et d'âme.

ε_{cu} , ε_{sy} et f_c sont respectivement la déformation ultime de la fibre la plus comprimée du béton, la déformation des armatures et la résistance maximale moyenne(MPa), y est la hauteur de la zone comprimée par rapport à l'axe neutre. $f_{y,e}$ et $f_{y,wv}$ sont respectivement les contraintes de plastification des armatures de bord et d'âme pour un comportement élastique parfaitement plastique(MPa)(tableau 3.3).

Le tableau 3.3 donne les différentes contraintes utilisées pour les différentes parois.

Paroi	$f_{y,\varnothing 12}$	$f_{y,\varnothing 10}$	$f_{y,\varnothing 8}$	$f_{y,\varnothing 6}$	$f_{te,\varnothing 12}$	$f_{te,\varnothing 10}$	$f_{te,\varnothing 8}$	$f_{te,\varnothing 6}$
WSH1	-	549	-	584	-	620	-	602
WSH2	-	578	-	486	-	750	-	540
WSH3	578	-	578	486	750	-	750	-
WSH4	583	-	525	486	-	-	-	-
WSH5	-	-	525	486	-	-	683	540
WSH6	530	-	546	486	660	-	705	-

Tableau 3.3 : Contraintes limites élastiques des armatures longitudinaux et transversaux (f_{te} la limite élastique des armatures transversales en MPa)

Le ferrailage des sections des six(6) voiles porteurs en béton armé est suivant :

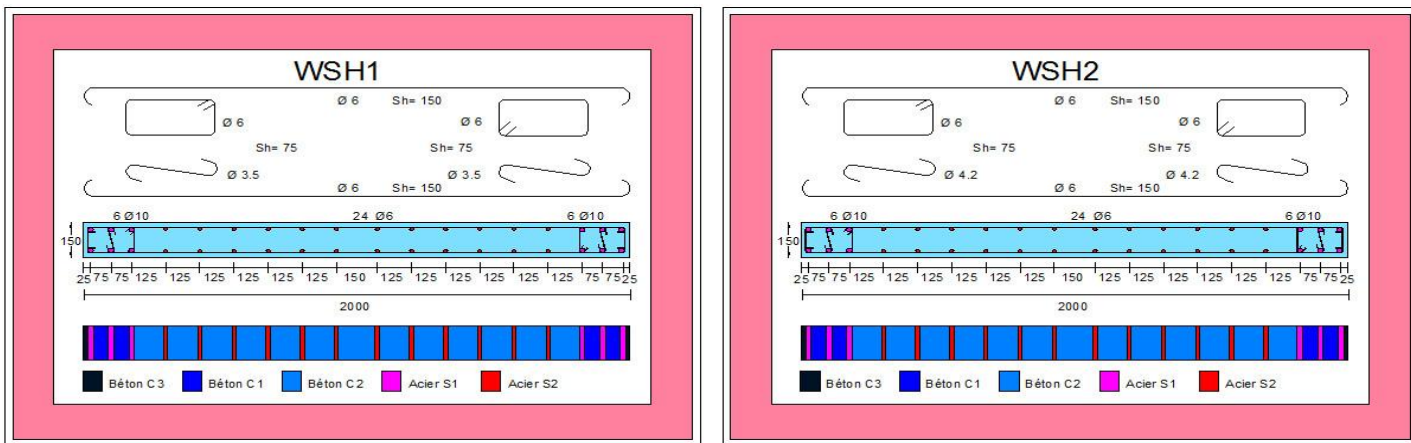


Figure 3.22- Ferrailage des parois WSH1 et WSH2 : discrétisation multicouche dimensions en mm

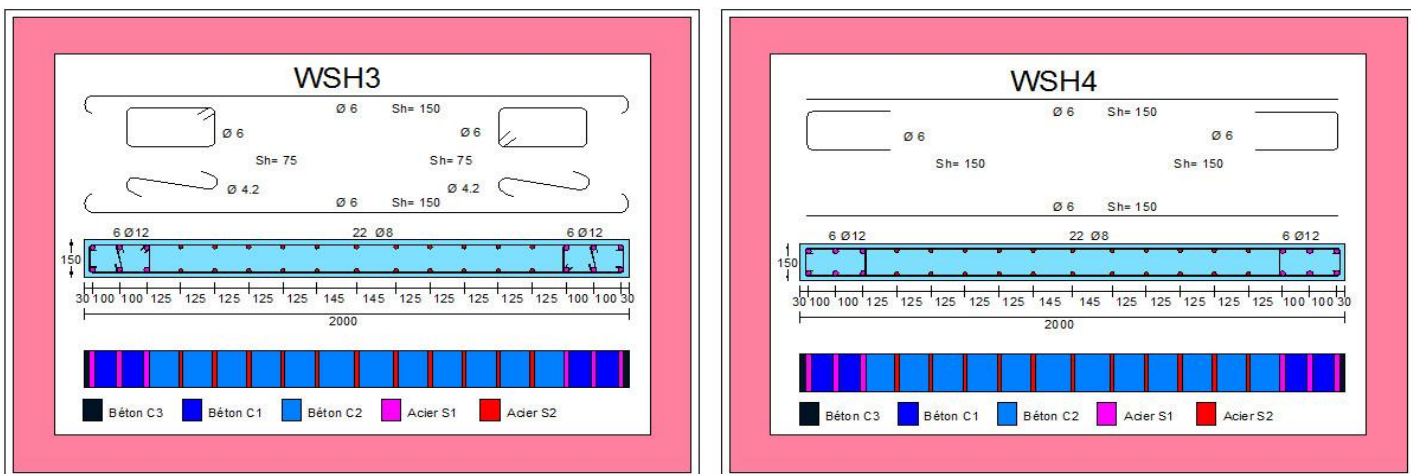


Figure 3.23- Ferrailage des parois WSH3 et WSH4 : discrétisation multicouche dimensions en mm

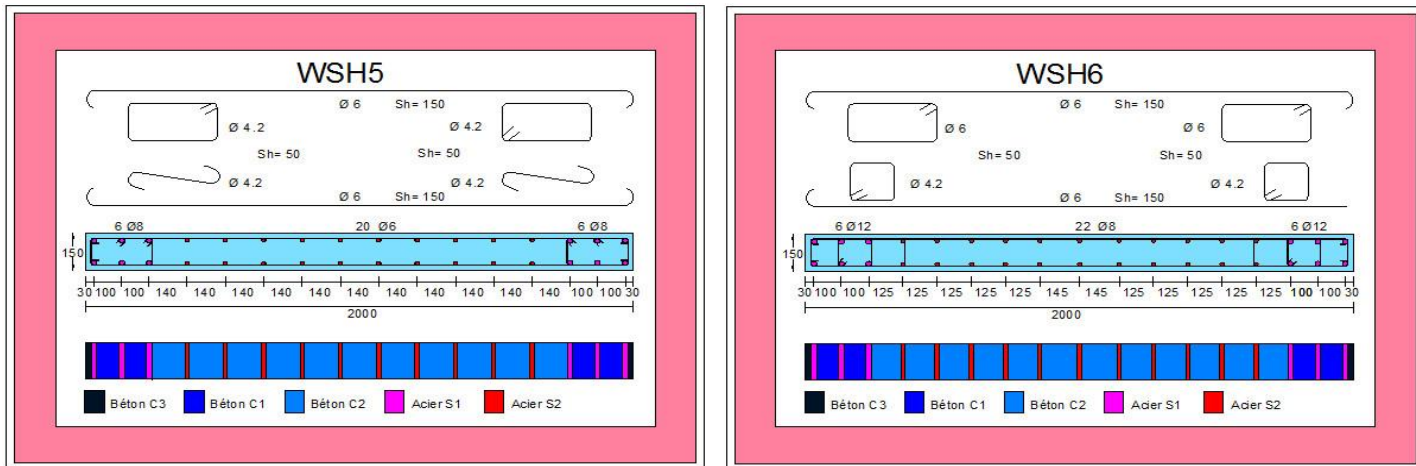


Figure 3.24- Ferrailage des parois WSH5 et WSH6 : discrétisation multicouche dimensions en mm

Le modèle prototype le plus simple d'un voile est celui d'une console parfaitement encasté à sa base. La figure 3.25 montre l'exemple d'un élément de section rectangulaire ou en I, soumis à une charge verticale N_E et une charge horizontale V_E en tête. Le voile est sollicité par un effort normal N_E et un effort tranchant V_E constant sur toute la hauteur et un moment fléchissant qui est maximal dans d'encastrement. Le ferrailage classique du voile en béton armé est composé d'armatures verticales concentrées aux deux extrémités du voile ou dans les ailes (pourcentage ρ_0), d'armatures verticales uniformément réparties (pourcentage ρ) et d'armatures horizontales (pourcentage ρ_t), elles aussi uniformément réparties. Les armatures verticales extrêmes sont soumises à d'importantes forces de traction/compression créant ainsi un couple capable d'équilibrer le moment appliqué. A la base du voile en béton armé, sur une hauteur critique, des cadres sont disposés autour de ces armatures afin d'organiser la ductilité de ces zones. Enfin, les armatures de l'âme horizontale et verticale ont le rôle d'assurer la résistance à l'effort tranchant.

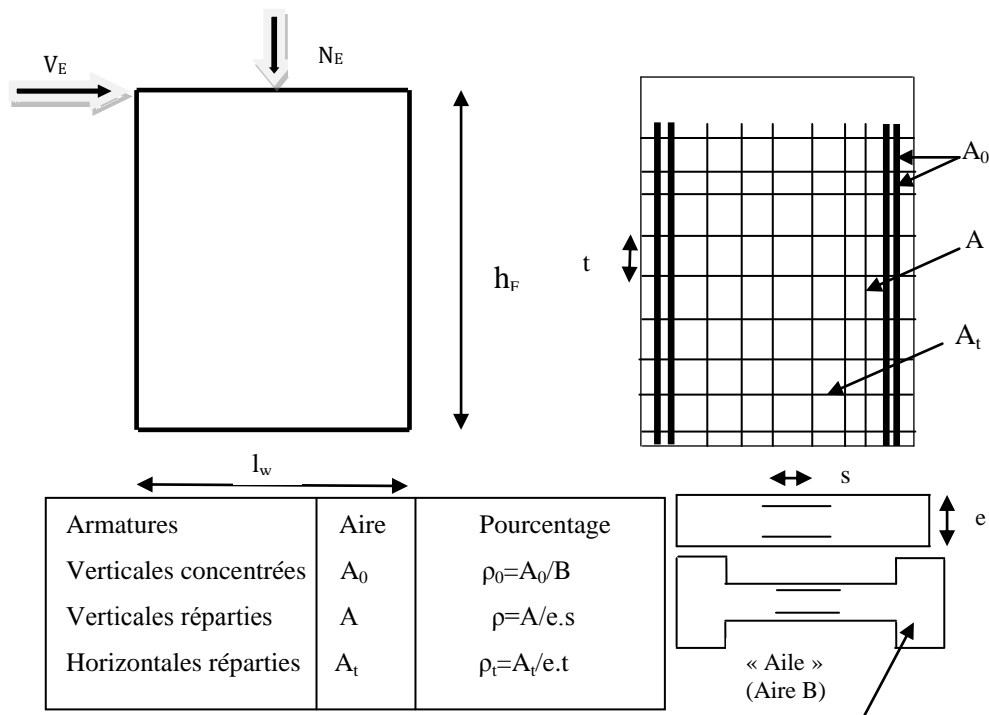


Figure 3.25-Schéma d'un voile plein et position du ferrailage

Le terme de voile en béton armé regroupe des éléments de structures au comportement mécanique très divers. Cependant, on peut considérer que les principaux paramètres ayant une influence prépondérante sur le comportement d'un voile en béton armé sont les suivants :

- L'élancement, défini comme le rapport de la hauteur du voile, h_F/l_w ;
- La disposition et le pourcentage des armatures ;
- L'intensité de l'effort normal.

Du point de vue de leur fonctionnement, il convient de faire la distinction entre les voiles élancés ($h_F/l_w > 2$) et les voiles courts ($h_F/l_w < 2$). Ceci, permet de mettre en évidence deux grandes familles de modes de rupture : modes de rupture des voiles élancés et modes de rupture des voiles courts [FO 85], [PA 92] et [EU 97.a].

L'approche des modèles globaux permet une modélisation du comportement d'un élément de structure soumise à des chargement mécanique de type cyclique : à ce niveau de modélisation le comportement du composite béton armé est décrit en variables généralisées ($N_E - \varepsilon, V_E - \gamma, M - \chi$).

La formulation peut s'appuyer sur des observations phénoménologiques (lois uniaxiales découplées) ou bien peut être basée sur les théories classiques de la plasticité avec l'introduction de surfaces de plasticité seuils de type $f(N, V, M) = 0$, ou de la mécanique de l'endommagement par l'introduction d'une variable interne représentative de l'état de détérioration du matériau.

Dans notre cas présent, une surface de rupture est définie pour le domaine des compressions (figure 3.26). Le modèle distingue entre les zones de béton confiné est les zones de béton non confiné. La résistance à la traction du béton est négligée.

Le modèle élément fini multicouche multicellulaire est utilisé tel que le comportement des couches du béton comprimé tient compte implicitement de l'effet d'écroutissage par l'adoption du modèle analytique pour les sections rectangulaires SAATCIOGLO et RAVZI [SA 95]avec déchargement, une résistance maximale moyenne du béton non confiné égale à $f_{c0} = 45MPa$. Le modèle de comportement des armatures est une loi de comportement élastique parfaitement plastique selon les valeurs théoriques utilisées dans le dimensionnement en capacité voiles (tableau 3.3).

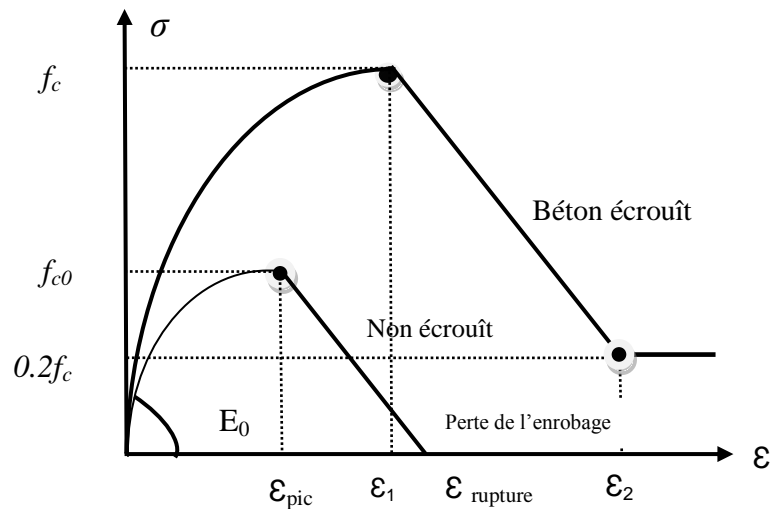


Figure 3.26-Modèle analytique du béton comprimé écrouté ($\sigma - \varepsilon$) [SA 95]

Dans cette étude nous avons un élancement $h_F / l_w = 2.28 > 2$, donc nous sommes face au cas des modes de rupture des voiles en béton armé élancés. Une étude comparative est conduite par confrontation des résultats obtenus par l'élément fini multicouche multicellulaire aux résultats obtenus par A.DAZIO pour les six voiles en béton armé. Nous avons donc suivi l'évolution de certaines variables généralisées notamment le moment fléchissant à la base des voiles, ce qui nous a permis de faire cette comparaison pour les six voiles en béton armé.

Ainsi, nous présentons dans le tableau 3.4 les valeurs du moment fléchissant maximal atteint pour l'élément fini multicouche multicellulaire pour les six voiles en béton armé et les valeurs de M_m obtenues par A.DAZIO. Les figures 3.28 et 3.29 présentent les diagrammes moment fléchissant maximal-courbure à la base des voiles obtenus respectivement par A.DAZIO et par l'élément fini multicouche multicellulaire pour les six voiles en béton armé.

III.4.1-Modélisation éléments finis et algorithmes de resolution

Dans toutes les applications décrites dans ce chapitre ainsi que dans le chapitre suivant (chapitre IV), nous avons utilisé principalement un élément fini flexible implémenté dans le code RE_FLEX. Les éléments finis utilisés ainsi que les stratégies numériques employées sont basés par la méthode des forces telle qu'elle est décrite dans le chapitre II. Les voiles ont été modélisés de façon à mailler avec un plus grand nombre d'éléments finis au niveau de leurs bases.

En ce qui concerne l'**approche 2-D plaque**, nous avons utilisé des éléments finis de plaque flexible(**FLX**) auxquels nous associons une technique d'intégration dans l'épaisseur z (aspect multicouche) et une technique de maillage dans le plan x,y (approche multicellulaire) permettant de suivre l'évolution du comportement non linéaire dans le volume du voile(plaque). Au niveau de chaque cellule , un état plan de contraintes est considéré et par conséquent toutes les relations de comportement en contraintes planes peuvent être affectées. Pour modéliser le ferrailage du voile nous avons opté pour l'utilisation d'un modèle fibre. Ainsi, à chaque cellule d'acier, représentée par un élément fini de poutre de Timoshenko, est rattachée à une autre cellule du maillage de l'élément fini (figures 3.1 et 3.27). Dans cette modélisation, chaque cellule d'acier est représentée par un triangle d'aire égale à l'aire de la cellule d'armature correspondante.

Dans tous les calculs effectués, le schéma itératif d'équilibre statique utilisé est celui de la méthode de Newton-Raphson telle qu'elle est décrite dans le chapitre II(§ II.3).

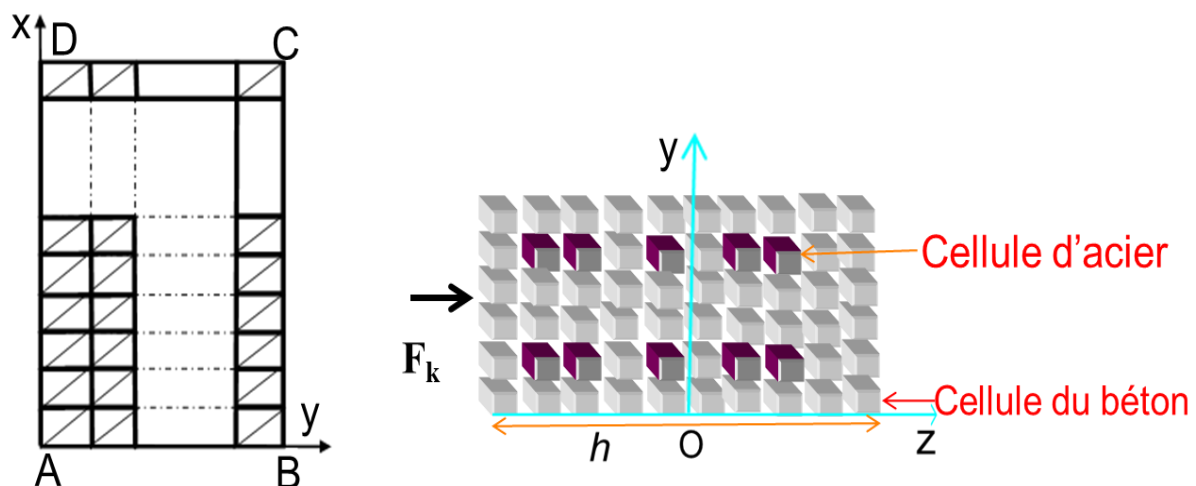


Figure 3.27-Maillage éléments finis multicouches multicellulaires des voiles en béton armé

Les voiles en béton armé ont été maillés avec au moins $N_x = 23$ divisions suivant leurs longueurs(hauteurs) et $N_y = 3$ divisions suivant leurs épaisseurs(considérées au niveau du maillage comme les largeurs des voiles), soit un minimum de 138 éléments finis ($= 2 * N_y * N_x$), chaque élément fini est composé par au moins 33 couches afin de satisfaire la disposition du ferrailage au niveau de chaque paroi suivant sa largeur l_w . Pour un très grand nombre d'éléments finis, une grande variation de nombre de cellules n'engendre pas une variation importante des résultats.

- Conditions aux limites : encastrement à la base des voiles en béton armé
 - $u_0(x, y) = v_0(x, y) = w_0(x, y) = \beta_x(x, y) = \beta_y(x, y) = 0$ Sur AB
 - où N_E , une charge uniformément répartie sur DC

Paroi	Numérique élément fini multicellulaire multicouche M_m (KN.m)	Numérique A. DAZIO M_m (KN.m)
WSH1	1580 ($\delta e = 3.2\%$)	1531
WSH2	1585 ($\delta e = 0.69\%$)	1574
WSH3	2054 ($\delta e = 0.68\%$)	2040
WSH4	1892 ($\delta e = 0.64\%$)	1880
WSH5	1872 ($\delta e = -0.32\%$)	1878
WSH6	2533 ($\delta e = -0.67\%$)	2550

Tableau 3.4 : Comparaison des Moments fléchissants maximums à la base des six voiles (δe écart relatif)

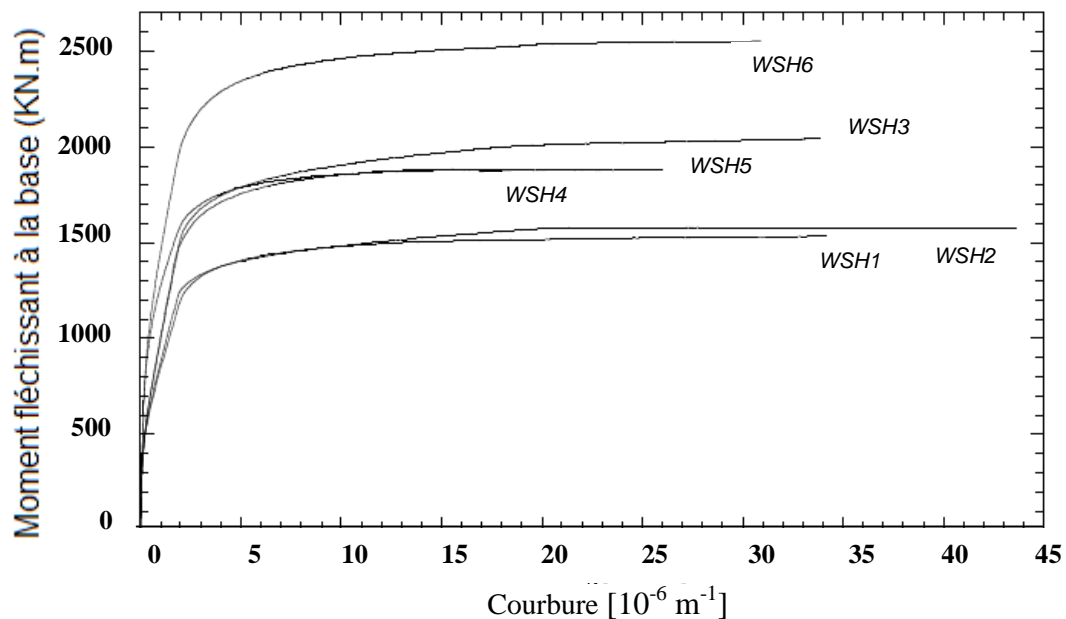


Figure 3.28- Diagramme moment-courbure à la base des voiles(M_m moment maximal déterminé en tenant compte de la force normale de WSH1 à WSH6) [AL 99.a].

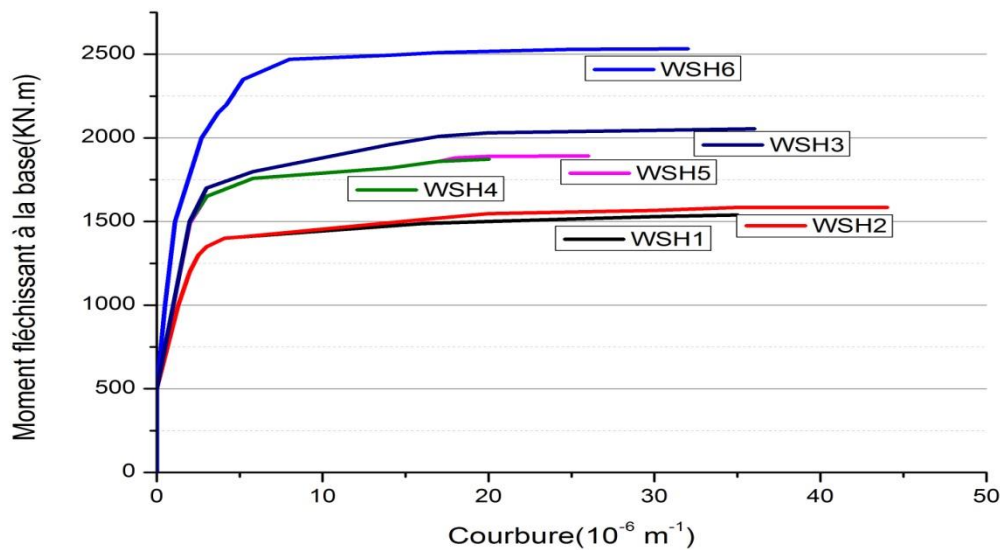


Figure 3.29-Diagramme moment-courbure à la base des voiles (M_m moment maximal atteint en tenant compte de la force normale de WSH1 à WSH6)

Conclusion

Nous avons présenté les résultats de plusieurs études (poutre en béton armé, poutre métallique, plaque en béton, simulation des voiles en béton armé) de calcul numérique pour le modèle élément fini flexible multicouche multicellulaire. Ceux-ci nous ont permis de valider notre modèle vis-à-vis à des chargements statiques monotones croissants jusqu'à la ruine des structures étudiées. Ces résultats sont très satisfaisant pour simuler le comportement non-linéaire à la ruine ainsi que les distributions des non-linéarités constitutives dans le sens transversal (diagrammes contraintes-déformations, évolution de l'axe neutre, diagrammes moment-courbure) et longitudinal (distribution des courbures) en tenant compte des dispositions constructives dans les structures en béton armé ainsi que des lois de comportement des matériaux (béton et acier).

Ce modèle est conçu de manière à être valable et applicable non seulement dans la conception et le dimensionnement des structures sous chargement statique monotone croissant, mais également pour le contrôle et la vérification des structures aux états limites ultimes. Sur ce, une étude complète sur le comportement non-linéaire des distorsions et du glissement d'adhérence sera présentée dans le chapitre suivant.

**Chapitre IV- ANALYSE CYCLIQUE DES VOILES EN BETON
ARME DE SECTION RECTANGULAIRE SOUS CHARGEMENTS
SISMIQUES : CAS DES VOILES PORTEURS ELANCES EN
BETON ARME**

Introduction

Beaucoup d'immeubles privés ou de bureaux dans le monde sont construits en utilisant des voiles comme éléments principaux de résistance. Les voiles ou murs de contreventement peuvent être généralement définis comme des éléments verticaux à deux dimensions dont la raideur hors plan est négligeable. Dans leur plan, ils présentent une grande résistance et une grande rigidité des forces horizontales. Par contre dans la direction perpendiculaire à leur plan, ils offrent très peu de résistance des forces horizontales et ils doivent être contreventés par d'autres murs ou par des portiques. Tout en étant conscient de la grande variété des constructions à murs porteurs, nous ne pouvons fournir qu'une classification assez générale. On distingue donc trois catégories de structures :

1) Structures « mixtes » avec des murs porteurs associés à des portiques : Le rôle porteur vis-à-vis des charges verticales est assuré par des poteaux et des poutres, tandis que les voiles assurent la résistance aux forces horizontales. Un exemple de ce système constructif est présenté dans la figure 4.1.

2) Structures à noyau central : Un noyau central formé de deux murs couplés à chaque étage par des poutres assure majoritairement la résistance aux forces horizontales. Une certaine résistance supplémentaire peut être apportée par les portiques extérieurs, comme le montre la figure 4.2.

3) Structures uniquement à murs porteurs : Les voiles assurent en même temps le rôle porteurs vis-à-vis des charges verticales et le rôle de résistance aux forces horizontales. L'exemple montré dans la figure 4.3 fait apparaître ce système constitutif.

L'intérêt de la considération de ce type de choix, voiles de section rectangulaire en béton armé, est motivé par la disponibilité de données expérimentales complètes nécessaires pour la validation du modèle élément fini. Dans ce chapitre nous allons présenter une version complète des résultats des essais expérimentaux en confrontation aux résultats du modèle élément fini multicouche multicellulaire.

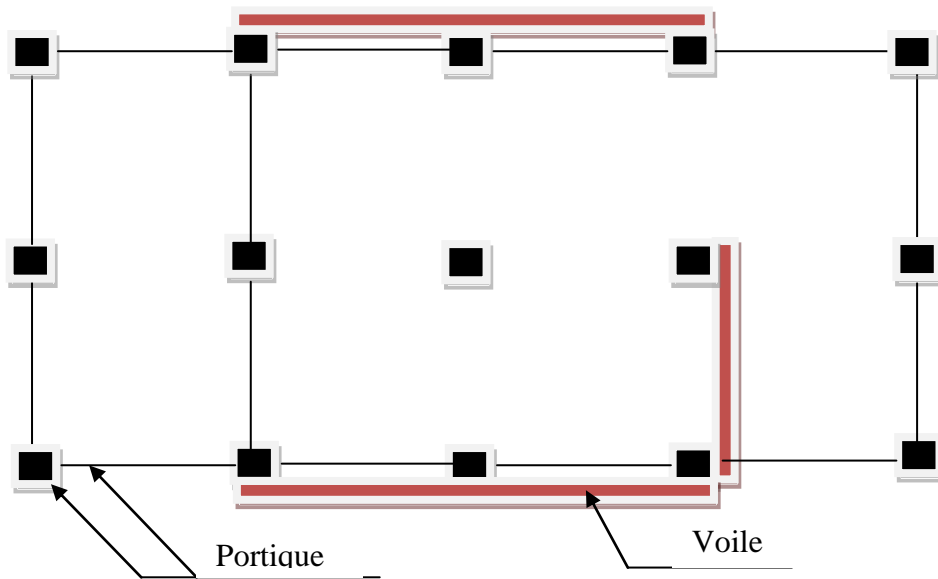


Figure 4.1-Structures « mixtes » avec des murs porteurs couplés à des portiques

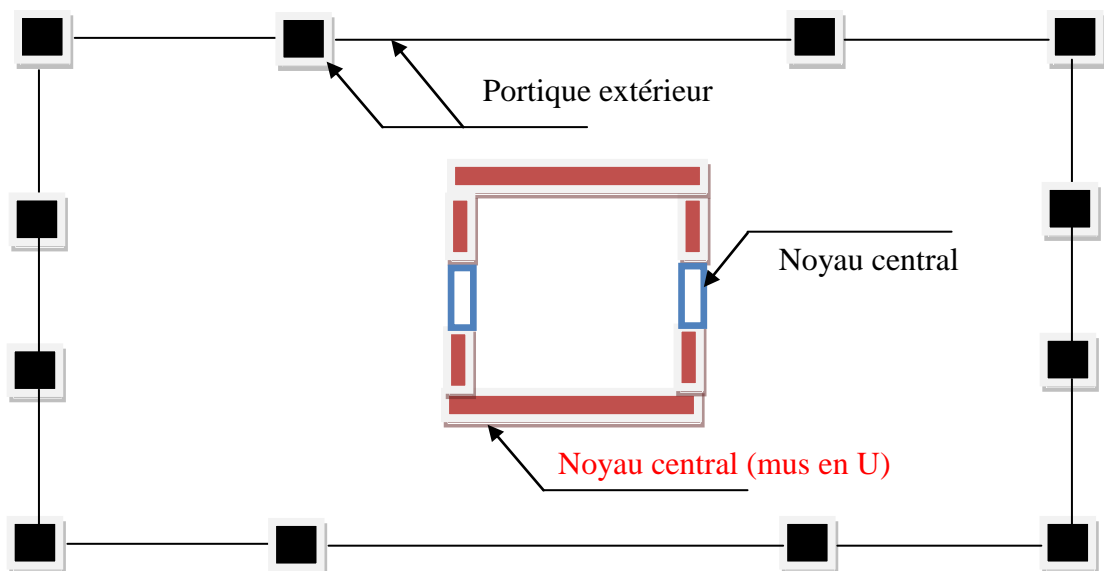


Figure 4.2-Structures à noyau central

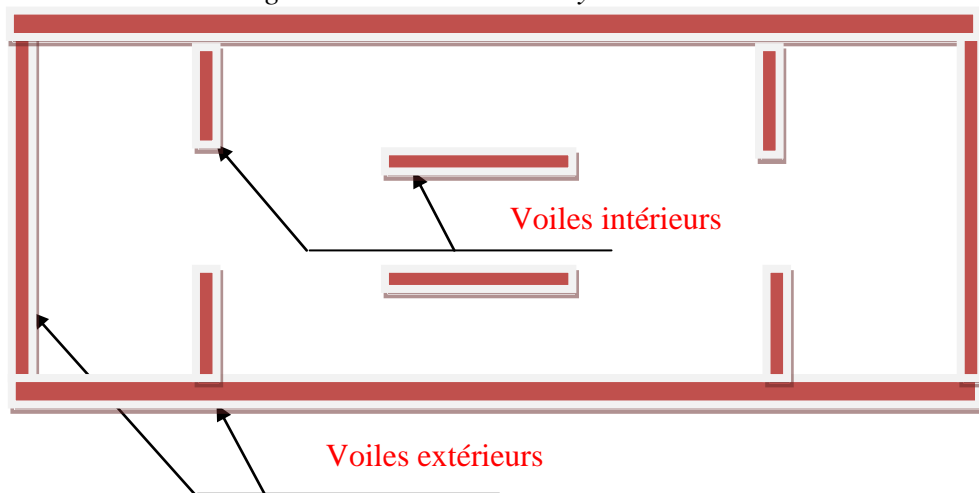


Figure 4.3-Structures uniquement à murs porteurs

IV.1- Dimensionnement des Murs Porteurs en Béton Armé

Les voiles fortement armés faiblement élancés constituent un pourcentage important du bâti existant dans le domaine de la construction nucléaire. La nécessité d'évaluer la sécurité des différentes parties des ouvrages et installations a conduit les organismes responsables à réaliser des essais ou des modélisations. C'est le cas par exemple des effets dynamiques qui se produisent lorsque des voiles en béton armé semblables à ceux qui sont utilisés dans le domaine nucléaire (assez fortement ferrailés), sont soumis à des effets dynamiques de cisaillement dus à un séisme.

Le cas des voiles en béton faiblement armé a été pratiquement très peu étudié. Cependant, les bâtiments à murs faiblement armés, représentent un type de construction largement employé dans le monde pour les bâtiments ordinaires à cause des coûts. Les exigences fonctionnelles acoustiques, thermiques et d'étanchéité à la pluie font que ce type de bâtiment est constitué de nombreux murs, souvent surabondants dans une même direction. Les contraintes restent donc modestes dans ce type de construction, ce qui permet d'envisager des murs faiblement armés-chainés. Sous l'action sismique, ces murs devraient avoir un fonctionnement multi-fusible, résultant d'une ductilité répartie et d'une fissuration distribuée sur la hauteur du voile, générée par la limitation et l'optimisation des ferrailages.

Les principaux objectifs de l'action de recherche autour de ces essais ont été les suivants :

- Préciser les marges inhérentes à la pratique de dimensionnement sismique des voiles de contreventement,
- S'intéresser aux effets dynamiques qui se produisent lorsque la fréquence d'excitation est voisine de la fréquence propre de la structure ou supérieure et étudier la variation de la fréquence propre avec l'endommagement,
- Mieux décrire et quantifier la phase de début d'endommagement correspondant à l'apparition des premières fissures et au début de plastification des armatures,
- Tester les différents modèles de comportement de béton armé disponibles, et les différents codes de calcul les mettant en œuvre.

La plupart des codes de constructions essaient de dimensionner des bâtiments au séisme de façon que l'énergie sismique apportée puisse être absorbée et dissipée par les déformations inélastiques de la structure. Ces déformations sont bien supérieures à celles qui sont généralement admises

sous d'autres chargements, mais en contrepartie les efforts sismiques sont plus faibles que ceux qui seraient calculés en supposant un comportement parfaitement élastique.

Le concept en vigueur dans la plupart des codes dont l'**Eurocode 8** et celui de « Capacity design » qui prévoit la formation d'un mode de rupture par création d'une rotule plastique à la partie inférieure d'un voile supposé encastré à sa base. Une grande capacité de déformation ductile est organisée dans cette région (zone critique) tout en assurant un comportement élastique au-dessus de la zone critique. Pour atteindre une grande capacité d'absorption et de dissipation d'énergie, les sources potentielles de rupture fragile par effort tranchant doivent être éliminées en s'assurant que la plastification de la zone critique intervient en premier. L'augmentation de la ductilité dans une section passe par la présence des cadres disposés autour des armatures verticales dans les zones confinées.

S'agissant des structures de type voiles, les **règles français PS 92** [RE 92] adoptent un principe de conception différent : le fonctionnement d'un voile doit permettre de mobiliser à la fois une dissipation d'énergie par endommagement du béton et plastification des aciers et une transformation d'énergie par soulèvement des masses. On admet ainsi que la fissuration et la plastification de l'acier peuvent se produire sur une hauteur plus grande que la zone critique. Dans cette dernière, le béton n'est pas confiné, mais en contrepartie les contraintes dans le béton doivent rester limitées. Des dispositions sont également prises pour éviter une rupture fragile par effort tranchant. Cette méthode alternative permet alors de concevoir des voiles faiblement armés. Sous l'action sismique, ces voiles devraient avoir un fonctionnement « multi-fusible », résistant d'une ductilité répartie et d'une fissuration distribuée sur la hauteur de voile.

IV.2-Essais Expérimentaux

Six voiles, cinq ayant le même élancement (*WSH1* à *WSH5*, $h_F/l_w = 2.28$) et ($h_F/l_w = 2.26$, pour *WSH6*), ont été testés en cisaillement au mur de réaction du laboratoire de IBK. Ces murs représentent des murs porteurs stabilisant un bâtiment prototype de trois étages. Les voiles ont la même largeur (2.00) et la même hauteur (4.56 m et 4.52 m pour *WSH6*) et la même épaisseur (0.15 m). Le bâtiment prototype est un système à murs structurels typiques, composés de dalles à petites colonnes conçues pour les charges gravitationnelles seulement et quelques murs porteurs relativement minces de sections rectangulaires.

Les essais expérimentaux sur les voiles, considérés comme isolés, qui ont été menés durant ces dernières années dans le monde ont étudié l'influence des paramètres suivants :

- Un élancement compris entre 0.25 et 3.40,
- Du point de vue géométrique, la plupart des essais, les voiles ont des sections rectangulaires, certains se comportent des raidisseurs,
- Le pourcentage des armatures verticales et horizontales réparties est généralement compris entre 0% et 3%, tandis que le pourcentage des aciers concentrés est supérieur à 1%,
- Un effort horizontal variable est généralement appliqué en tête du voile et est accompagné, à un certain nombre d'essais, par un effort normal constant.

Les parois expérimentales étudiées sont testées sous chargement statique cyclique alterné au laboratoire de l'Institut de Statique et Structures (IBK) de l'EPFZ, suisse (figure 4.5) [AL 99.a]. Le sommet des parois est sollicité horizontalement de façon alternative dans le plan des parois par un système de vérin hydraulique situé à la hauteur de 4,56 m (4,52 pour WSH6) au-dessus du socle.

Le chargement cyclique est conduit sous contrôle de charge pour les deux premiers cycles ($\mu_{\Delta} = 3/4$) suivis d'une série de séquences de deux cycles sous contrôle de déplacement à partir d'un coefficient de ductilité $\mu_{\Delta} = 2$ en l'augmentant d'une unité jusqu'à la rupture (figure 4.4). La ductilité globale en déplacement μ_{Δ} est définie par le rapport du déplacement inélastique total ou maximal de la structure Δ_{tot} au déplacement de la plastification Δ_y ($\mu_{\Delta} = \Delta_{tot} / \Delta_y$) [AL 99.a] [LE 06]. Une charge normale, N_E poids propre, est appliquée aux parois et maintenue constante durant le chargement par un dispositif de précontrainte. Le chargement cyclique est conduit aussi par une vitesse V_k variable cyclique (figure 4.4).

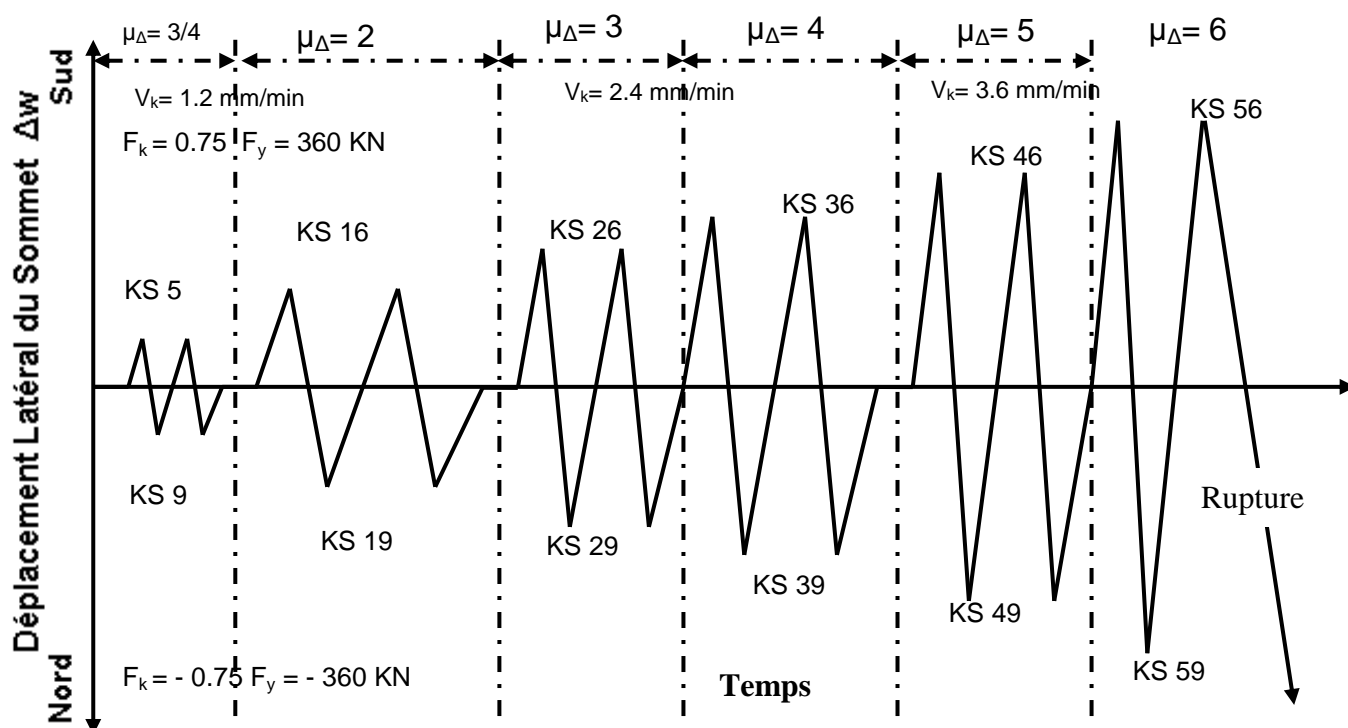


Figure 4.4-Courbe représentative du chargement cyclique alterné par **A. DAZIO**

Où F_y la force latérale appliquée ou résistance nominale avec (F_y, Δ_y) le couple représentant le point de plastification nominale [AL 99.a].

Chaque séquence comprend deux cycles complets, le second cycle fait partie des programmes usuels des essais cycliques car il permet de tenir compte de l'endommagement des éléments en béton armé qui est très important afin d'approcher la situation réelle.

L'interprétation des essais est basée sur ce deuxième cycle car un niveau de ductilité est accordé à une paroi si et seulement si elle supporte les deux cycles, sinon on admet qu'une telle paroi ne pourra pas subir des séismes réels avec cette ductilité.

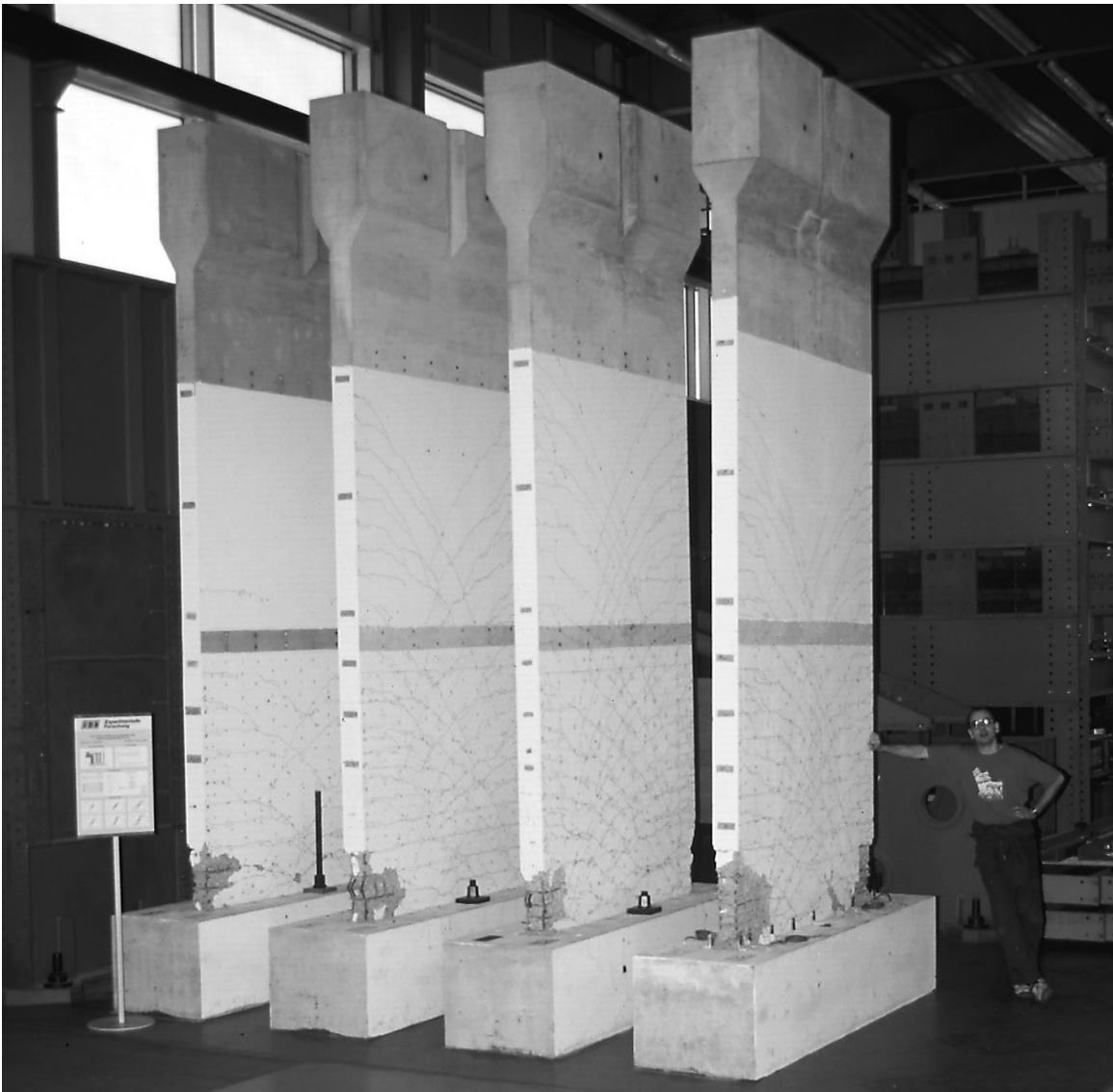


Figure 4.5-Aperçu des parois des murs porteurs en béton armé testées au Laboratoire IBK(EPFZ)

[AL 99.a]

IV.3- MODELISATION ET DISCRETISATION DES VOILES EN BETON ARME

La discrétisation spatiale est faite avec le RE_FLEX en utilisant des éléments de type plaque multicouche multicellulaire flexible(FLX). Etant donné que la structure est élancée, les modes de ruptures qui seront considérés seront ceux du chapitre 3 (§ 4.1). La paroi considérée pour la validation du modèle élément fini multicouche multicellulaire est une structure uniquement à murs porteurs (section rectangulaire, figure 4.3). Rappelons ici que le modèle le plus simple d'un voile est celui qui fonctionne en console parfaitement encastree à sa base. C'est donc ce modèle qui est adopté dans cette étude.

Les calculs sismiques concernent le comportement de la structure sous chargement, entre autres, horizontal croissant. Ils nécessitent le choix d'une répartition de l'effort sur la hauteur de la structure. Trois répartitions sont possibles :

- ❖ Chargement appliqué en tête de la structure (S1).
- ❖ Chargement appliqué en 2/3 de la hauteur de structure (S2).
- ❖ Chargement distribué tout au long de la hauteur de la structure selon les règles PS92 - avec un multiplicateur $h^{3/2}$ (S3).

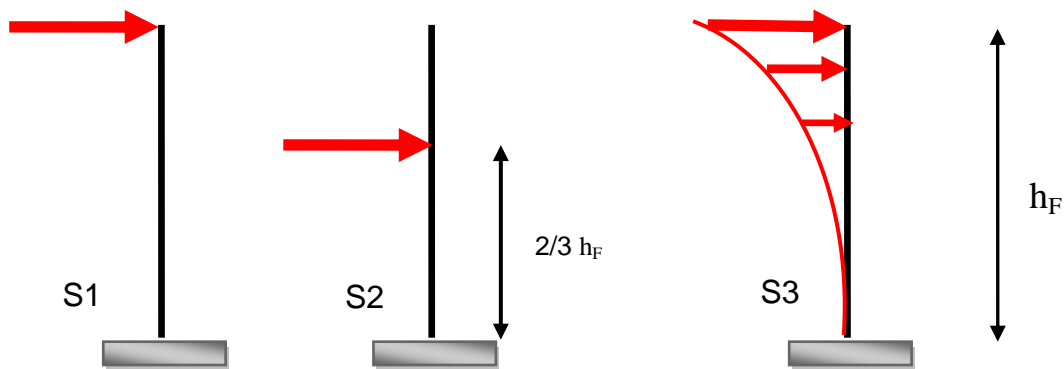


Figure 4.6-courbe représentative des différents types de chargement

La représentation graphique, des trois répartitions de la charge horizontale, sur l'évolution du moment de flexion à la base avec le déplacement en tête, donne des résultats similaires ayant la même valeur maximale du moment de flexion proche à la valeur de dimensionnement (figure 4.7) [NG 06 .a]. Nous présentons donc dans la suite les calculs correspondants seulement à la répartition S1 (figure 4.8).

Un plus grand nombre d'éléments finis est utilisé pour la discrétisation et en particulière à la base. La discrétisation de la structure est disposée en trois (3) groupes d'éléments et d'un élément de contact à la jonction paroi-socle. L'élément de contact est adopté pour la modélisation du décollement sous forme de rotation en bloc (Fixed End Rotation) due au glissement des armatures à la base (figure 4.8). La charge normale **P** est de **1420 KN** pour WSH6 et **630 KN** pour les autres voiles (WSH1, WSH2, WSH3, WSH4, et WSH5).

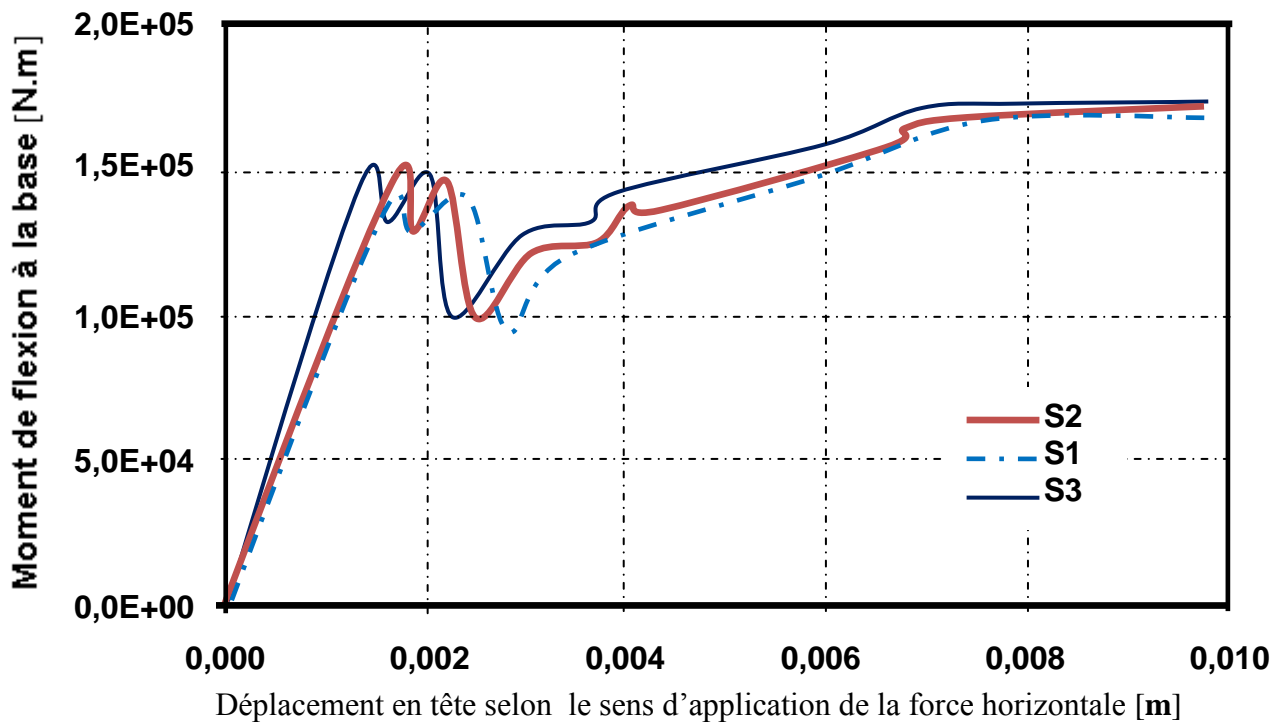


Figure 4.7- Maquette ECOLEADER : Courbe moment à la base d'un mur - déplacement en tête [NG 06.a]

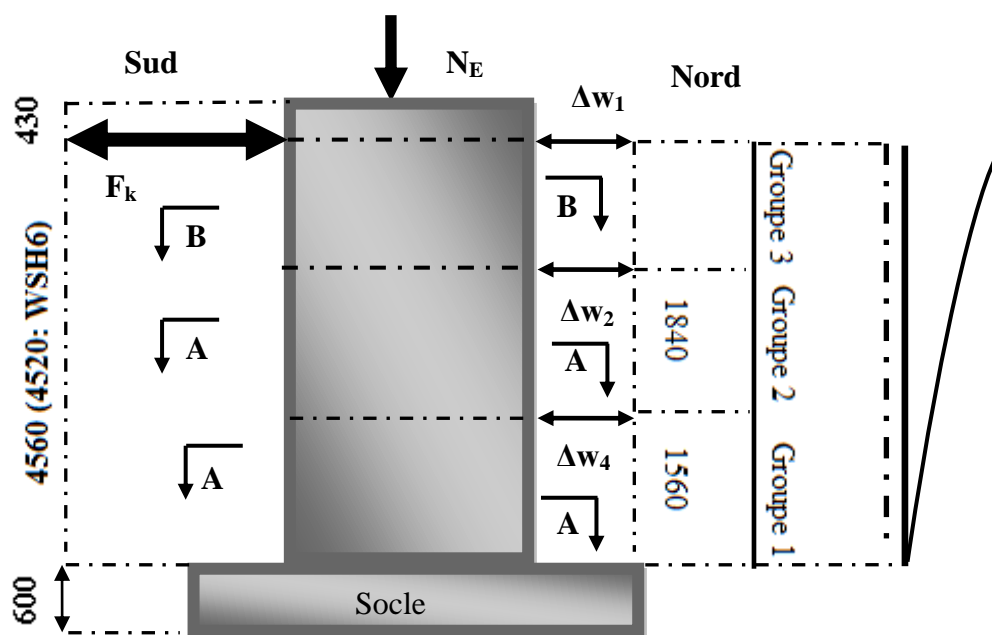


Figure 4.8-Modèle élément fini de la structure : dimensions (mm), charges et maillage

La figure 4.9 représente un schéma équivalent du dispositif expérimental de la figure 4.8, où Δw est le déplacement latéral et N_E la charge normale qui est une constante.

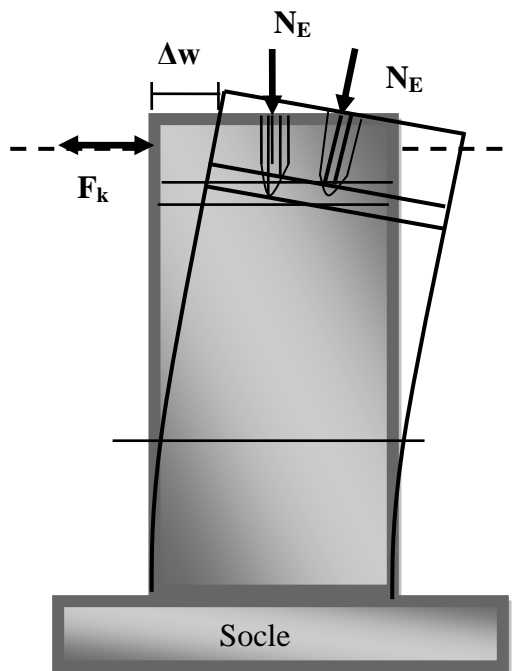


Figure 4.9-Schéma équivalent du dispositif expérimental

Nous présentons, par exemple, la discrétisation des voiles WSH2, WSH3 et WSH6 (figures 4.10 à 4.12). Les autres parois sont discrétisées de la même manière.

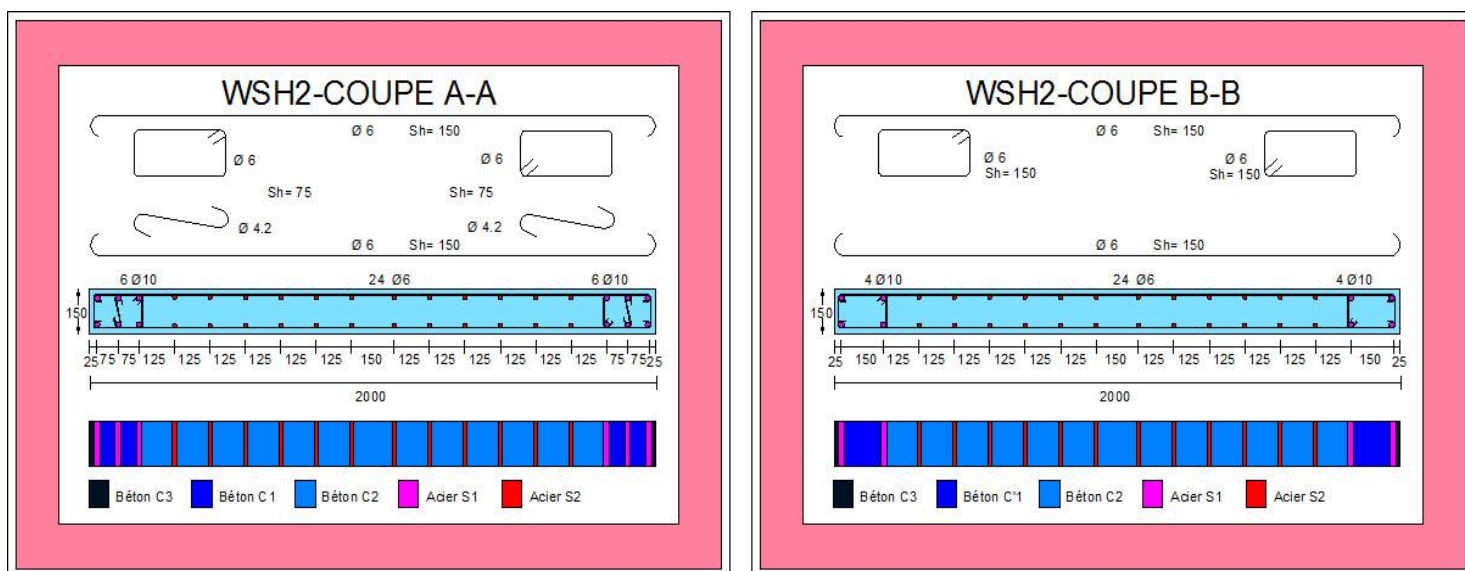


Figure 4.10-Ferrailage et modélisation multicouche de la section en béton armé, dimensions (mm) :

WSH2, Coupe A-A et B-B

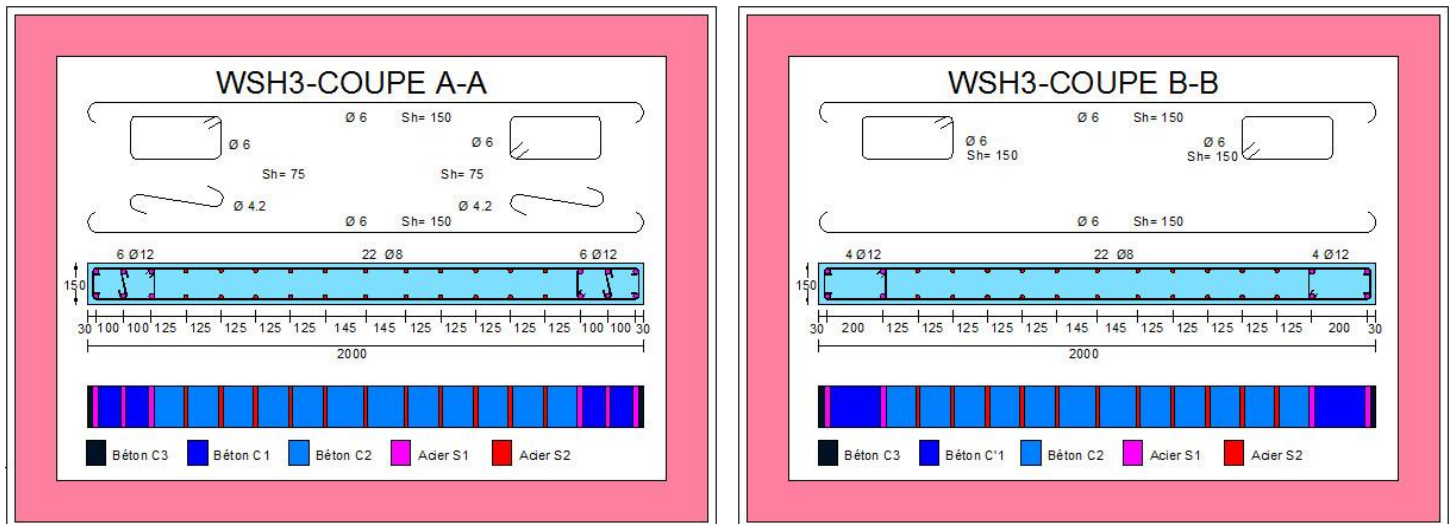


Figure 4.11-Ferrailage et modélisation multicouche de la section en béton armé, dimensions (mm) : WSH3, Coupe A-A et B-B

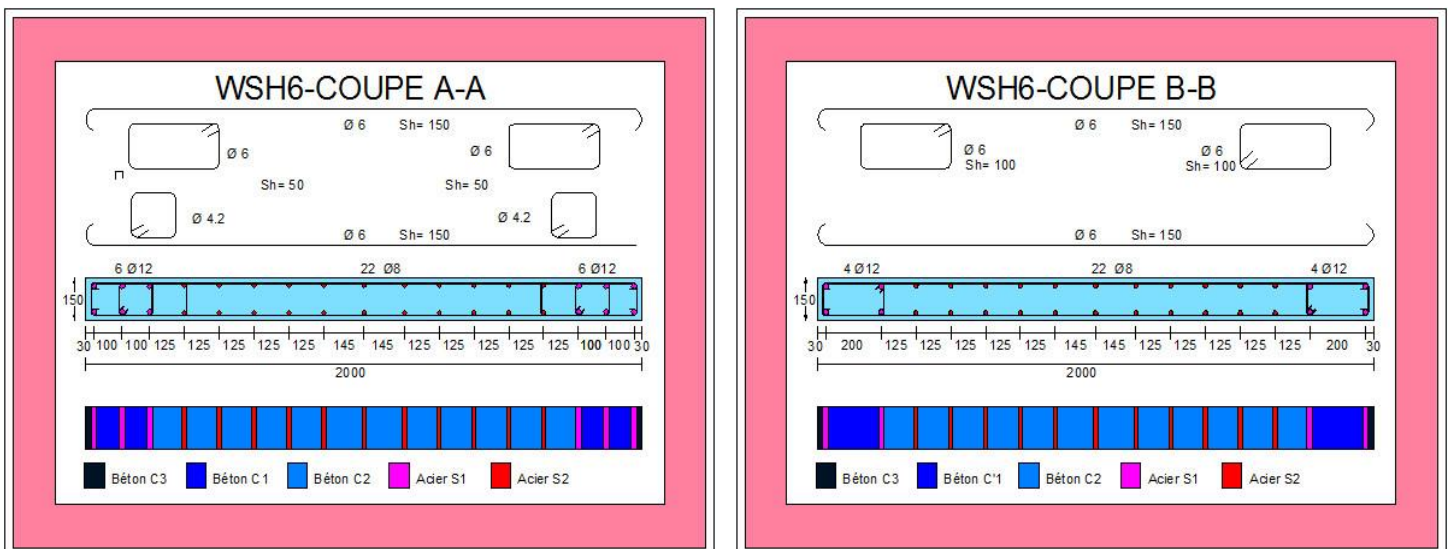


Figure 4.12-Ferrailage et modélisation multicouche de la section en béton armé, dimensions (mm) : WSH6, Coupe A-A et B-B

IV.4- Caractéristiques et Comportement des armatures

La modélisation des armatures verticales de bords et d'âme ainsi que les modèles de comportements (σ - ϵ) associés aux couches sont basés sur des données expérimentales en adoptant directement pour les lois (σ - ϵ) les mesures des essais de traction menés sur les barres d'aciers (figure 4.13) [AL 99.a].

Le tableau 4.1 donne les caractéristiques géométriques et mécaniques utilisées pour les six parois. Les parois WSH4, WSH5 et WSH1, WSH2 ont les mêmes caractéristiques, nous donnerons uniquement les données d'une seule paroi entre (WSH4 et WSH5) et (WSH1 et WSH2).

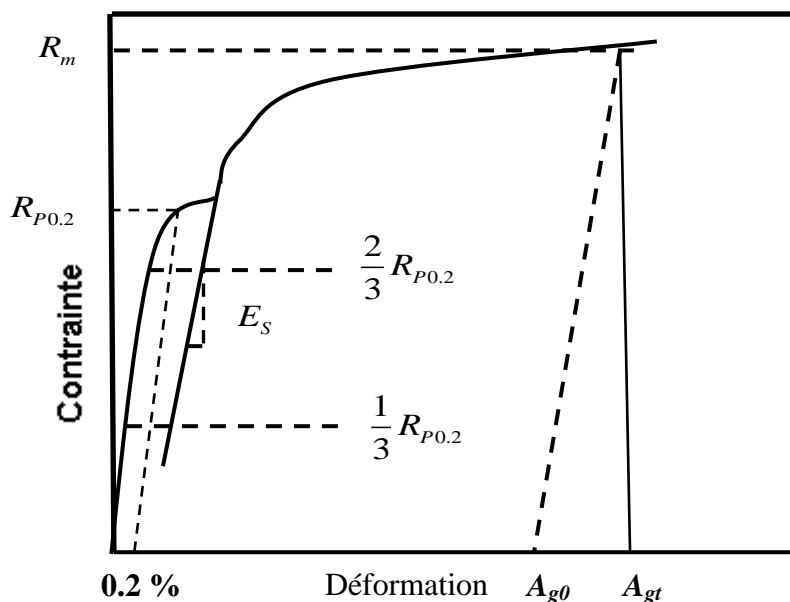


Figure 4.13-Modélisation du comportement des armatures d'acier

Paroi	ϕ_e, ϕ_{wv} [mm]	S_e, S_{wv} (mm)	$R_{p0.2}$ [MPa]	R_m [MPa]	$R_m / R_{p0.2}$	ρ_t [%]	A_{gt} [%]	E_s [GPa]
WSH2	10 ; 6	75 ; 150	580.0 ; 494.1	743.2 ; 543.2	1.28 ; 1.10	0.54	6.85 ; 5.19	191.7 ; 220.0
WSH3	12 ; 8	75 ; 150	577.8 ; 519.0	715.8 ; 680.8	1.24 ; 1.31	0.82	7.06 ; 7.85	187.5 ; 192.3
WSH4	12 ; 8	150 ; 150	579.1 ; 574.1	673.8 ; 705.7	1.16 ; 1.23	0.82	6.59 ; 6.92	203.5 ; 208.7
WSH6	12 ; 8	50 ; 150	579.1 ; 574.1	673.8 ; 705.7	1.16 ; 1.23	0.82	6.59 ; 6.92	203.5 ; 208.7

Tableau 4.1-Caractéristiques des armatures longitudinales moyennées par des écarts types

ϕ_e, ϕ_{wv} sont respectivement les diamètres des barres verticales de bord et d'âme des parois ; S_e, S_{wv} sont respectivement les espacements verticaux des aciers transversaux S_h de bords et d'âme, ρ_t le taux de ferrailage total. A_{gt} est la déformation de rupture, $R_{p0.2}$ est la contrainte de plastification, R_m est la résistance maximale, E_s est le module d'élasticité, $R_m / R_{p0.2}$ est le taux d'écrouissage.

IV.5-Modélisation du décollement à la base

Le glissement d'adhérence des armatures à la jonction paroi-socle de la paroi est obtenu par la mesure du déplacement relatif entre le béton et les armatures à l'aide des jauges mesurant le déplacement vertical de la paroi placées aux extrémités Nord et Sud. Ce procédé, mesure l'effet global du glissement d'adhérence sur le comportement de la structure par une flexibilité additionnelle due à la perte d'adhérence des armatures à la base, cet effet est appelé décollement. L'essai ne fournit donc pas une mesure du glissement effectif des armatures localement.

Par conséquent, on sera amené à modéliser le glissement d'adhérence par un élément fini de contact multicouche à la base dont le comportement des couches qui le constitue ne reflète pas le glissement local effectif des armatures à la base. Le comportement des couches de contact est déduit par des mesures globales. Le modèle permettant l'isolation du décollement w à partir des jauges est schématisé dans la figure 4.14.

Le calcul de w en fonction du chargement cyclique F_k appliqué au sommet de la paroi, nous permet d'obtenir le comportement global de l'effet du glissement d'adhérence isolé sous la forme d'une courbe donnant le moment à la base M en fonction de la rotation en bloc de la paroi(Fixed End Rotation) θ_H . Avec $w = (W_{eg} - V_1 - Nord) - (W_{eg} - V_1 - Sud)$

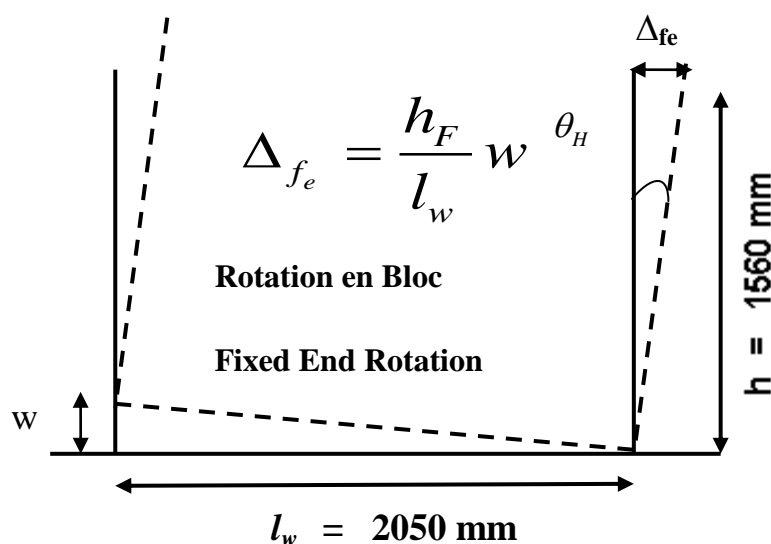


Figure 4.14-Modèle d'isolation du décollement w du voile et du déplacement résultant Δ_{fe}

Les distorsions que subit la paroi au cours du changement cyclique alterné sont mesurées par deux jauges de traction-compression, croisées, de longueur initiale L , et placée à la surface de la paroi au premier et au second niveau. Ces jauges mesurent des allongements et des raccourcissements alternativement ΔL_1 et ΔL_2 . Ce procédé, mesure l'effet global du comportement vis-à-vis du cisaillement par la mesure des distorsions globales dans la structure. L'essai ne fournit donc pas une mesure locale du cisaillement dans les matériaux acier et béton.

La courbe 4.15 représente le modèle permettant l'isolation du comportement global vis-à-vis du cisaillement.

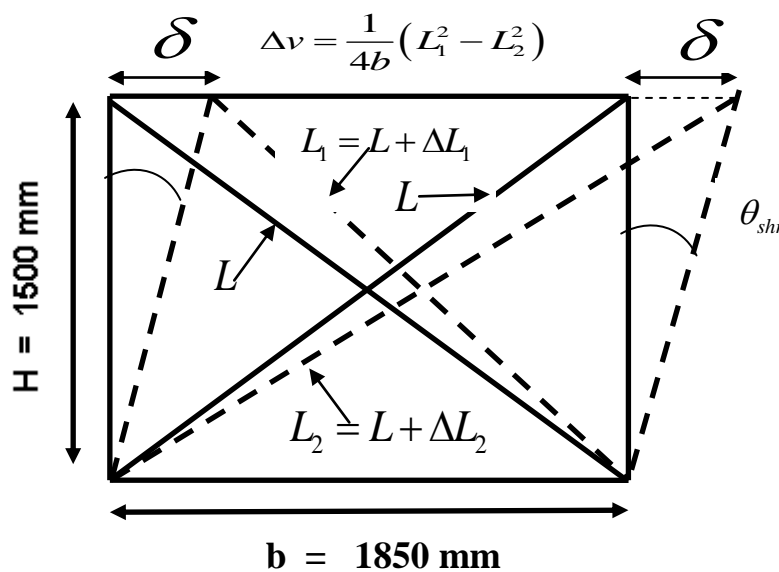


Figure 4.15-Modèle d'isolation des distorsions au premier niveau de la paroi (zone critique)

Le déplacement latéral δ de la paroi dû à l'effet du cisaillement est obtenu à partir des deux expressions suivantes :

$$L_1^2 = H^2 + (b - \delta)^2, L_2^2 = H^2 + (b + \delta)^2 \text{ et } \Delta L_1 = \text{Weg-Nord/Sud}, \Delta L_2 = \text{Weg-Sud/Nord}$$

L'emplacement des jauges croisées sur la face cachée de la paroi, conduit à multiplier la valeur de δ par un signe(-)

L'interprétation des valeurs maximales des déplacements latéraux globaux Δw_1 , de distorsion δ et du glissement à la base Δ_{fe} en fonction de la ductilité en déplacement obtenues dans la zone critique, montre que :

- D'une part les déformations de l'effort tranchant représentent, par rapport au déplacement Δw_1 , une contribution de l'ordre de 20% pour les valeurs positives et 27% pour les valeurs négatives durant les deux premiers cycles jusqu'à atteindre 35% pour les valeurs positives et 38% en valeurs négatives durant les derniers cycles ;
- D'autre part la contribution du glissement ne dépasse pas 15%, par conséquent la rupture survient suivant le mode de rupture en flexion par plastification en traction des armatures verticales prépondérantes avec une contribution effective de l'effort tranchant. Ceci étant essentiellement lié à l'élançement de la paroi ainsi qu'à la charge normale appliquée.

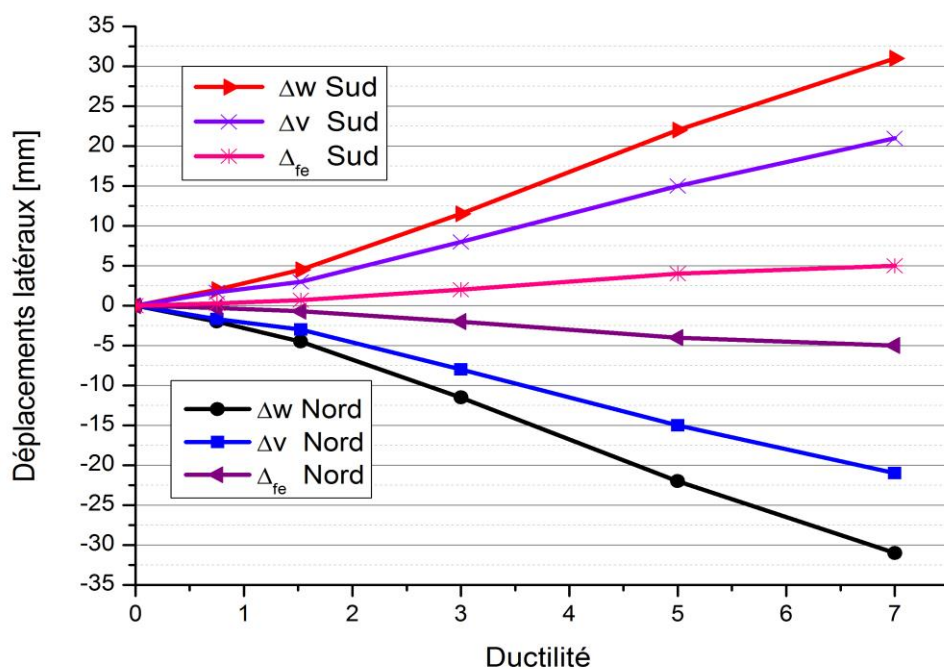


Figure 4.16-Valeurs maximales des déplacements latéraux en fonction de la ductilité dans la zone critique à 1,56 m de la base du voile WSH6

IV.6-Applications Numériques et Interprétations des Résultats

IV.6.1-Comportement global force-déplacement latéraux des voiles en béton armé

Le calcul exact du comportement force-déplacement non-linéaire est compliqué, mais le calcul reste toujours nécessaire pour la validation du modèle numérique. La confrontation des résultats expérimentaux aux résultats du calcul numérique est satisfaisante pour la prédiction du comportement non-linéaire des structures en béton armé. L'élément fini multicouche multicellulaire choisi et le modèle adopté ont montré une bonne capacité à modéliser des structures dans des conditions proches de celles des structures réelles présentant différents types de non-linéarités combinées.

Les figures 4.17 à 4.24 illustrent le comportement réel et l'approximation numérique des six (6) voiles en béton armé étudiés.

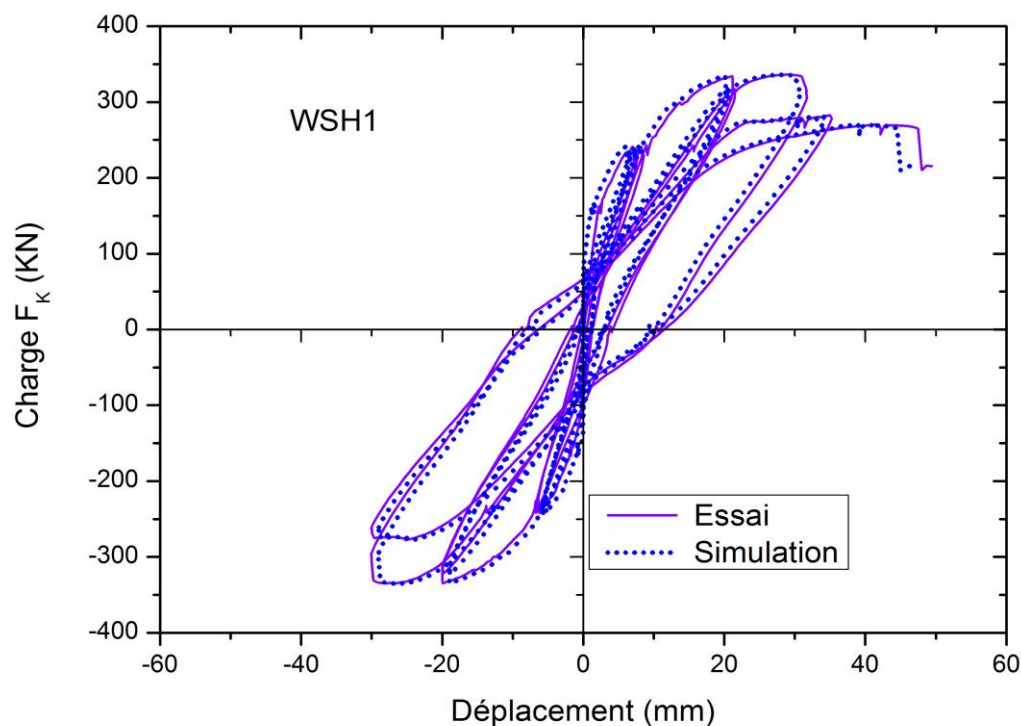


Figure 4.17-Courbe charge-déplacement latéral du sommet de la paroi WSH1 ($F_k - \Delta w_1$)

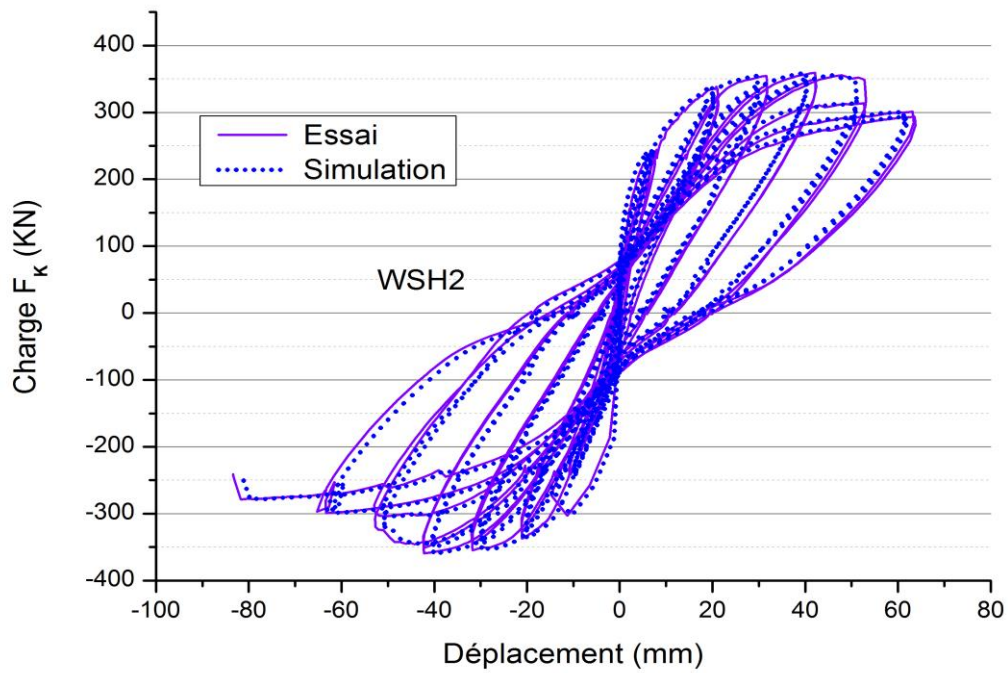


Figure 4.18-Courbe charge-déplacement latéral du sommet de la paroi WSH2 ($F_k - \Delta w_1$)

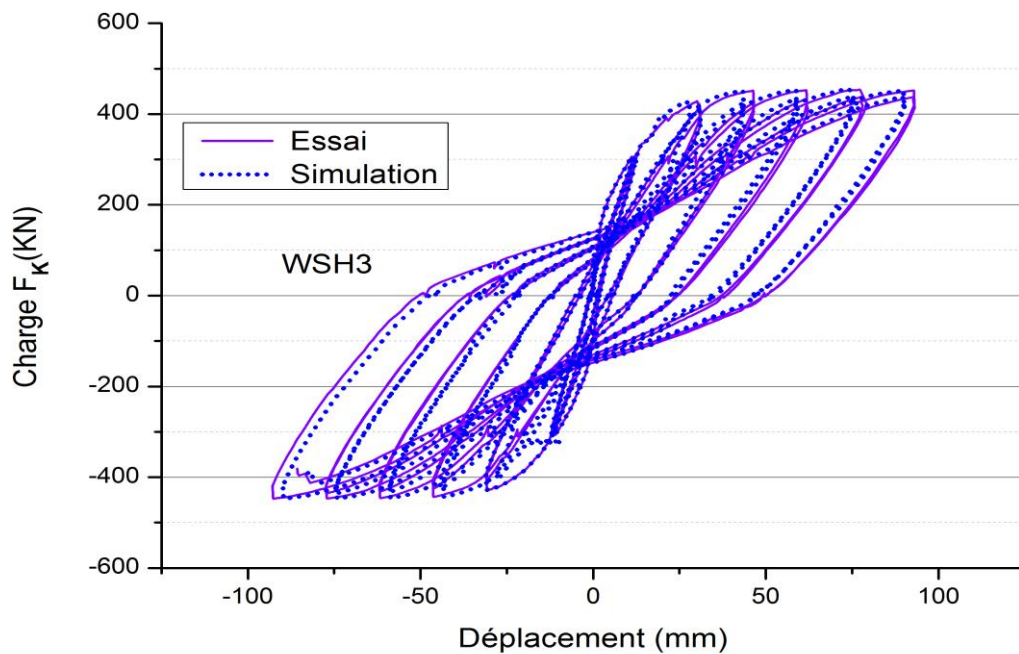


Figure 4.19-Courbe charge-déplacement latéral du sommet de la paroi WSH3 ($F_k - \Delta w_1$)

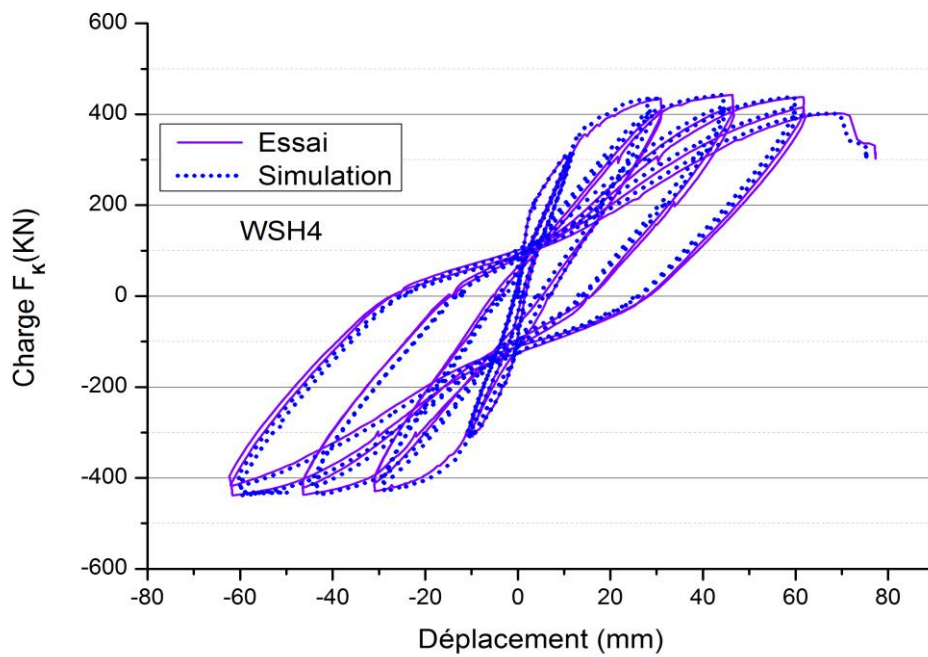


Figure 4.20-Courbe charge-déplacement latéral du sommet de la paroi WSH4 ($F_k - \Delta w_1$)

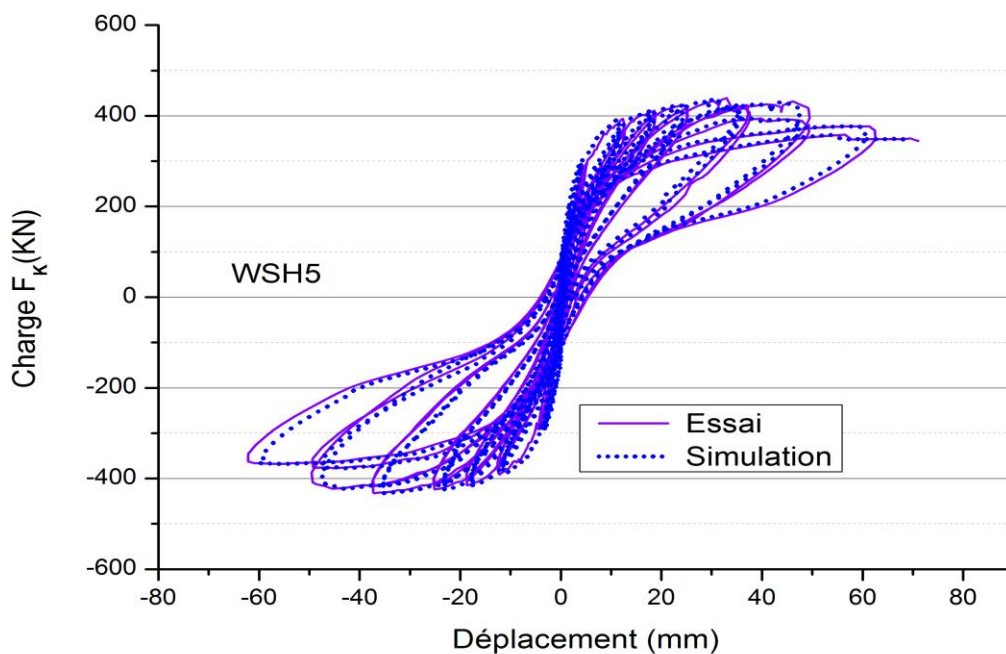


Figure 4.21-Courbe charge-déplacement latéral du sommet de la paroi WSH5 ($F_k - \Delta w_1$)

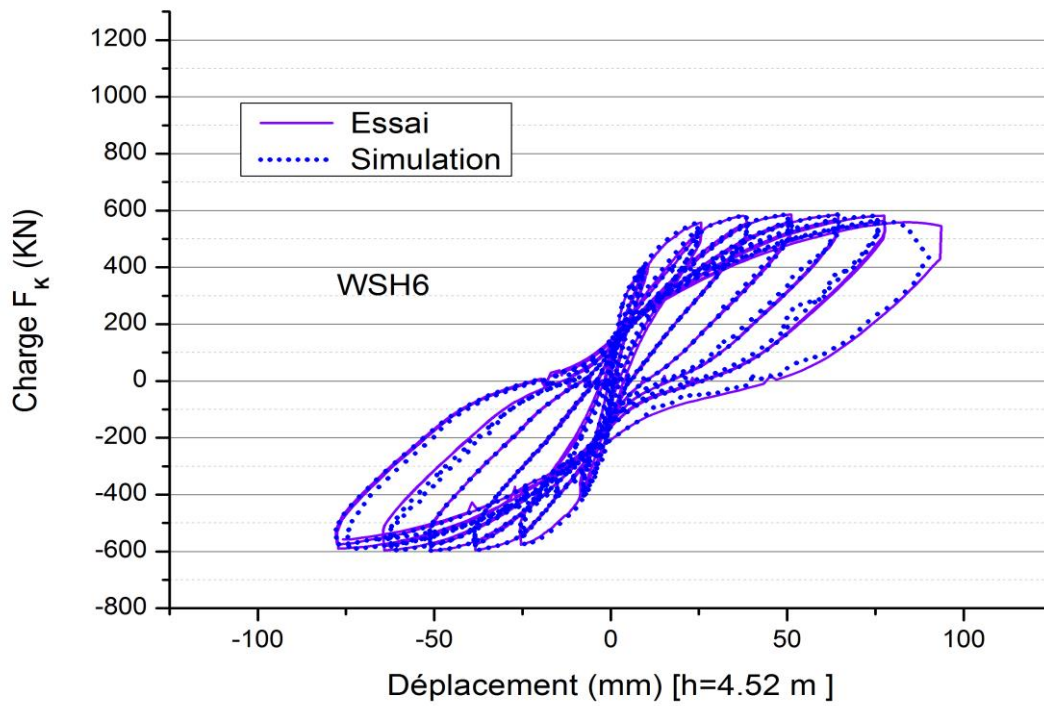


Figure 4.22-Courbe charge-déplacement latéral du sommet de la paroi WSH6 ($F_k - \Delta w_1$)

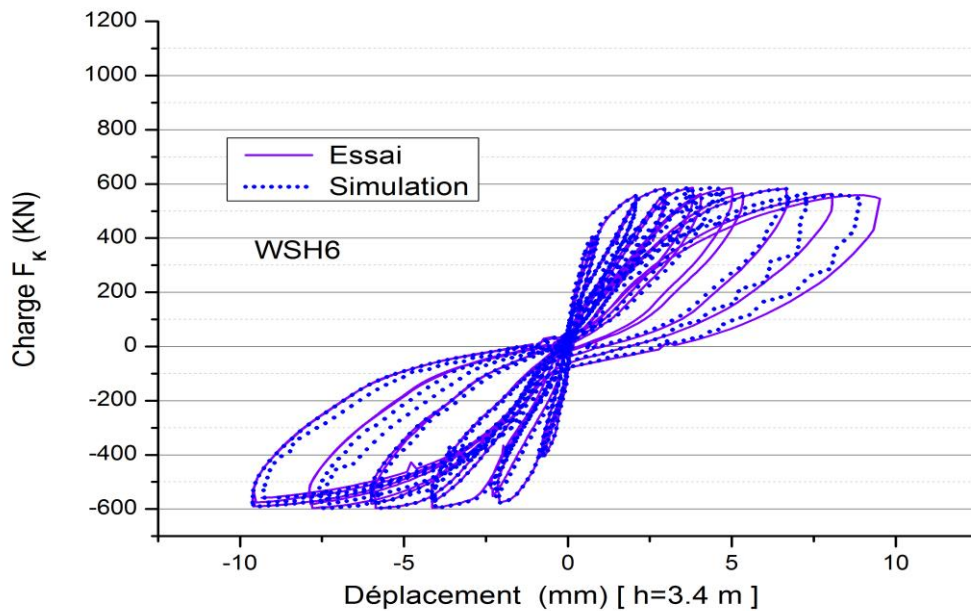


Figure 4.23-Courbe charge-déplacement latéral au niveau de 3,40 m de la paroi WSH6 ($F_k - \Delta w_2$)

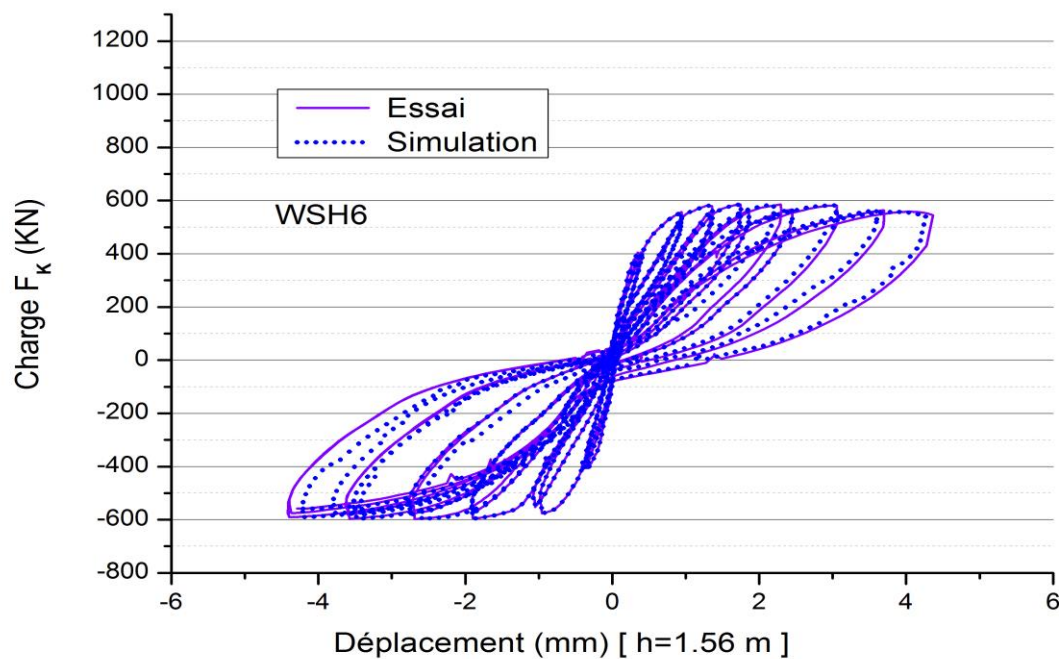


Figure 4.24-Courbe charge-déplacement latéral au niveau de 1,56 m de la paroi WSH6 ($F_k - \Delta w_4$)

IV.6.2-Comportement semi-local en zone critique

Nous représentons, figures 4.25 à 4.30, l'évolution de la courbure le long du voile WSH2 pour une hauteur de 3,50 m en fin de chaque cycle de chargement. Le modèle numérique multicouche multicellulaire permet d'obtenir les courbures qui représentent un moyen d'analyse au dimensionnement en reliant les paramètres locaux aux paramètres globaux. Ceci permet de mettre en évidence le phénomène de localisation des non-linéarités et la formation de la rotule plastique à la base du voile.

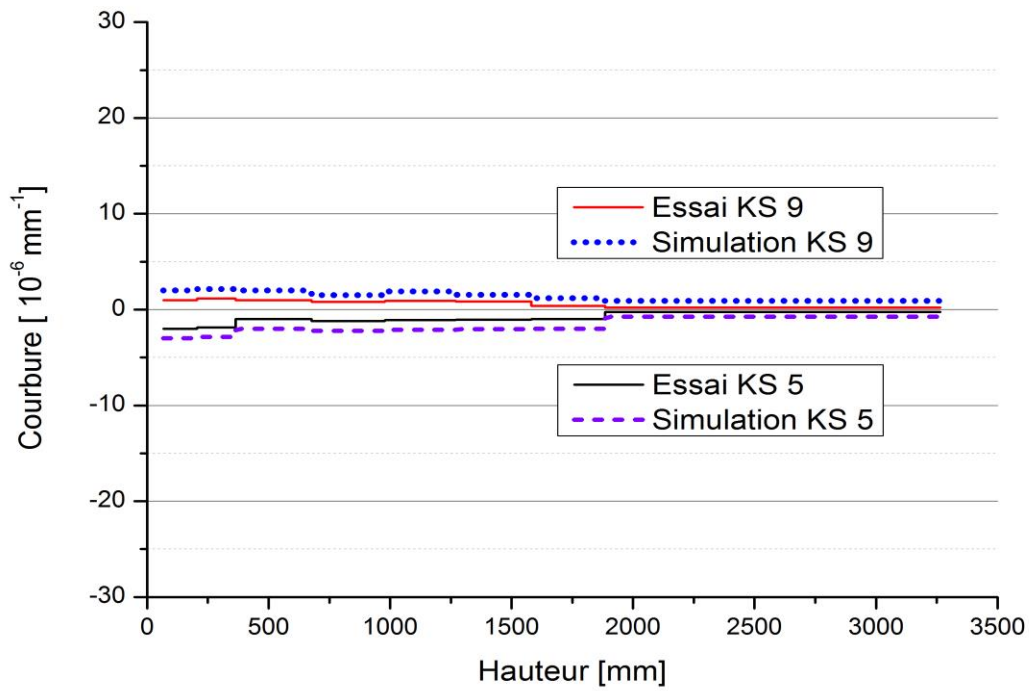


Figure 4.25 Courbures à l'instant KS 5 et KS 9 dans le voile WSH2 ($\mu_{\Delta} = 3/4$)

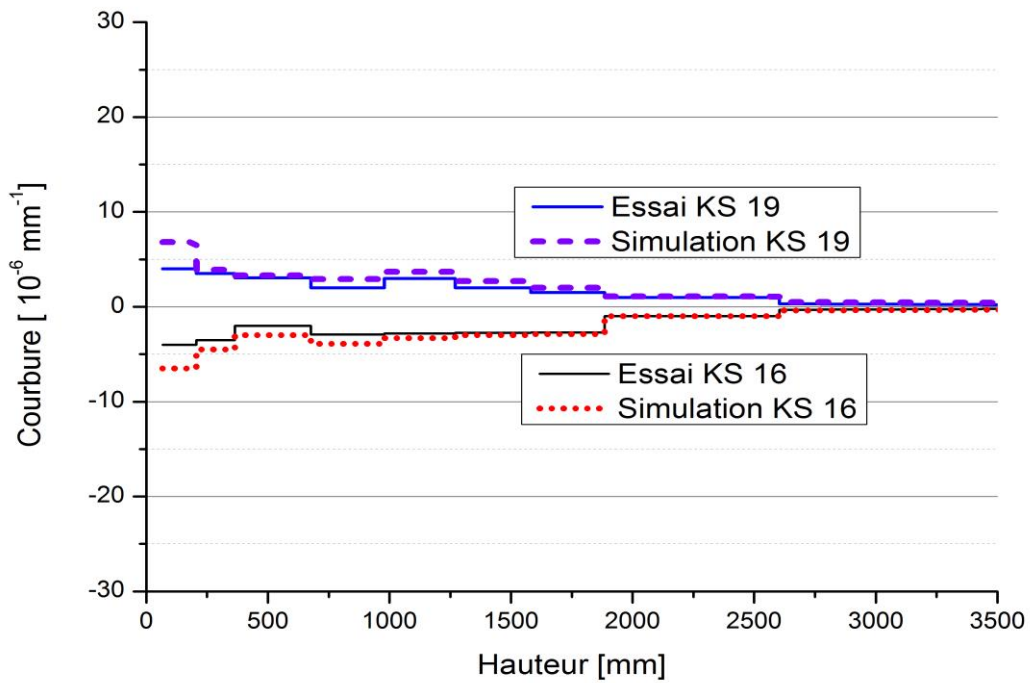


Figure 4.26 Courbures à l'instant KS 16 et KS 19 dans le voile WSH2 ($\mu_{\Delta} = 2$)

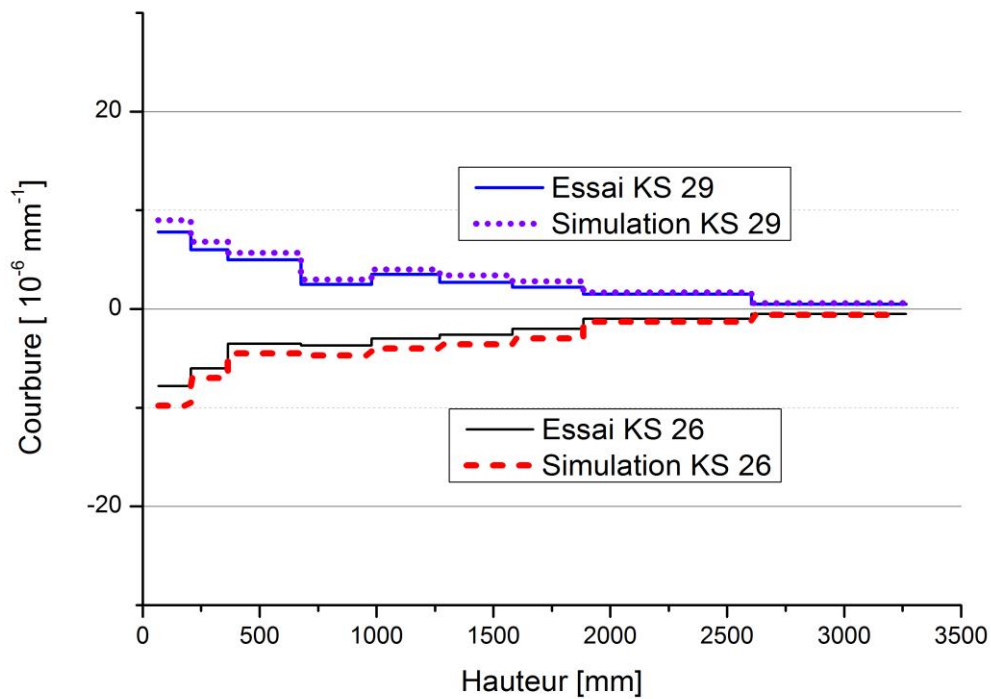


Figure 4.27- Courbures à l'instant KS 26 et KS 29 dans le voile WSH2 ($\mu_{\Delta} = 3$)

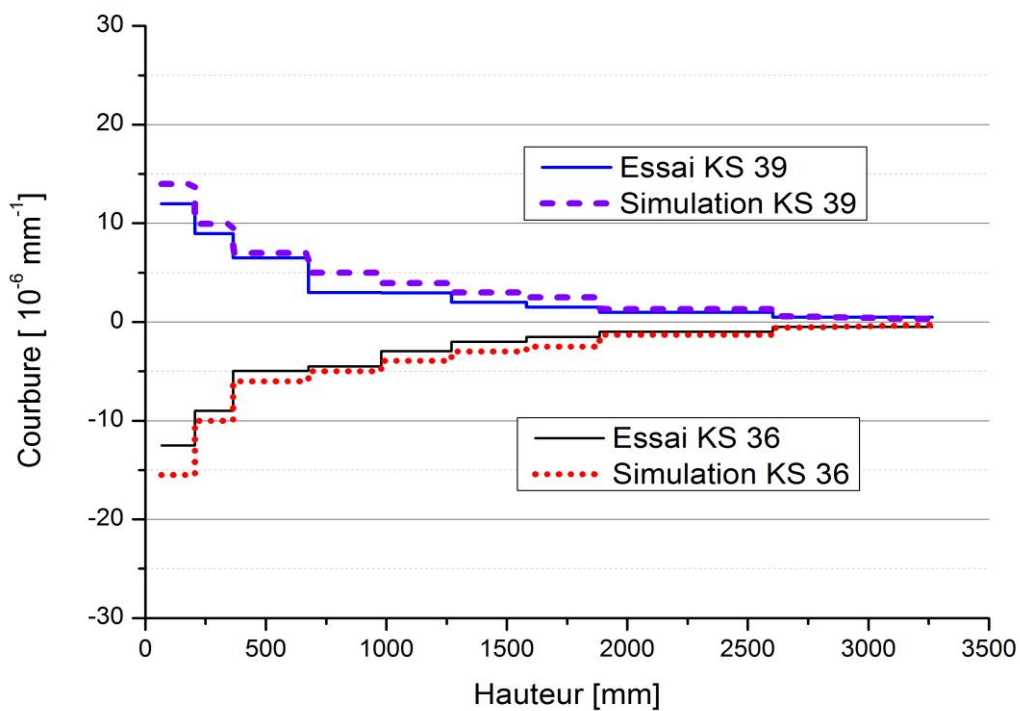


Figure 4.28- Courbures à l'instant KS 36 et KS 39 dans le voile WSH2 ($\mu_{\Delta} = 4$)

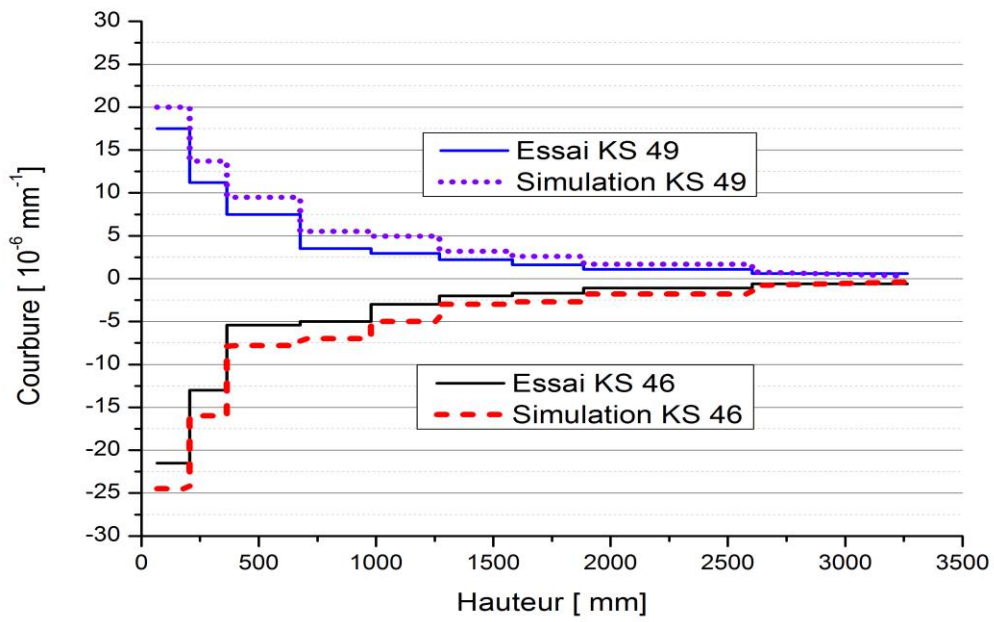


Figure 4.29- Courbures à l'instant KS 46 et KS 49 dans le voile WSH2 ($\mu_{\Delta} = 5$)

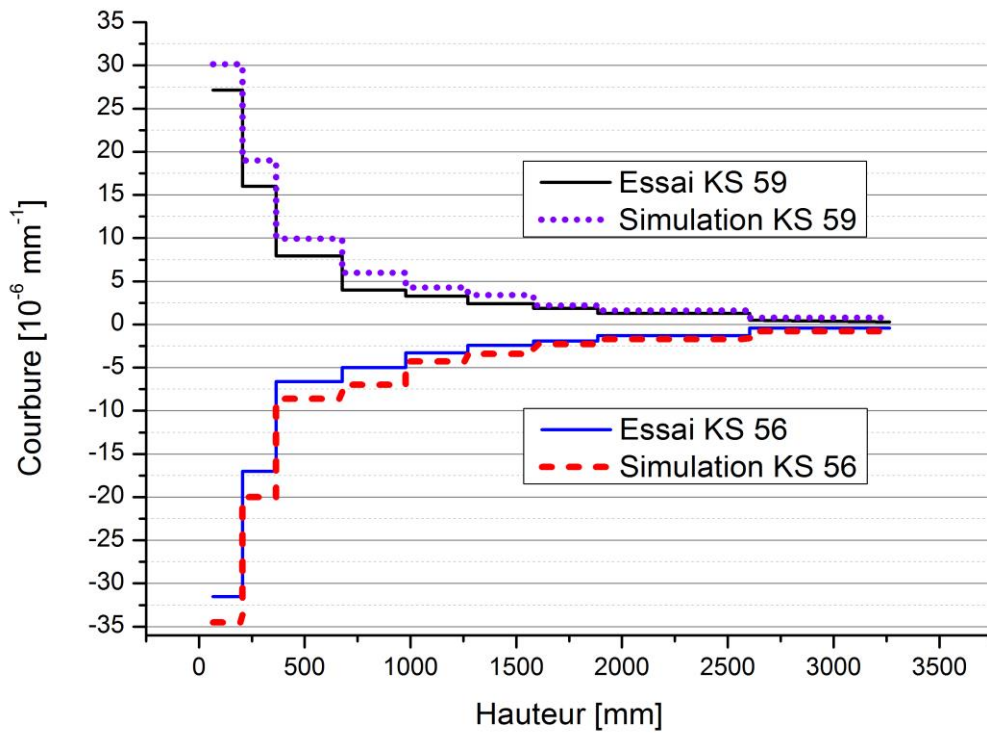


Figure 4.30 Courbures à l'instant KS 56 et KS 59 dans le voile WSH2 ($\mu_{\Delta} = 6$)

IV.6.3-Bilan énergétique

L'énergie dissipée est calculée en intégrant la force du vérin l'incrément du déplacement relatif [LE 06]. Cette intégration est remplacée par la somme de l'énergie incrémentale $\sum \Delta E_i$ afin de calculer l'énergie numériquement. L' 'énergie incrémentale $\sum \Delta E_i$ est le produit d'une force F_i avec le déplacement relatif correspondant à l'incrément. Après chaque cycle, lors du retour hystérétique, une partie de l'énergie emmagasinée est redonnée au système (par l'intermédiaire du vérin) à cause de la décharge élastique ; ce qui aboutit à une forme en vagues successives (figure 4.31). A la fin du test, toute l'énergie introduite a été dissipée par déformation plastique (correspond à la hauteur finale de la courbe). Le rapport de l'énergie dissipée à l'énergie injectée caractérise la capacité de dissipation d'énergie du voile qui est égal approximativement à 68%.

Le modèle permet de calculer l'énergie dissipée par déplacement en chaque zone de la structure et en particulier dans la zone critique (figures 4.32 et 4.33).

Zone 1 ($0 \leq h \leq 1,56m$), Zone 2 ($1,56m \leq h \leq 3,40m$), Zone 3 ($3,40m \leq h \leq 4,56m$)

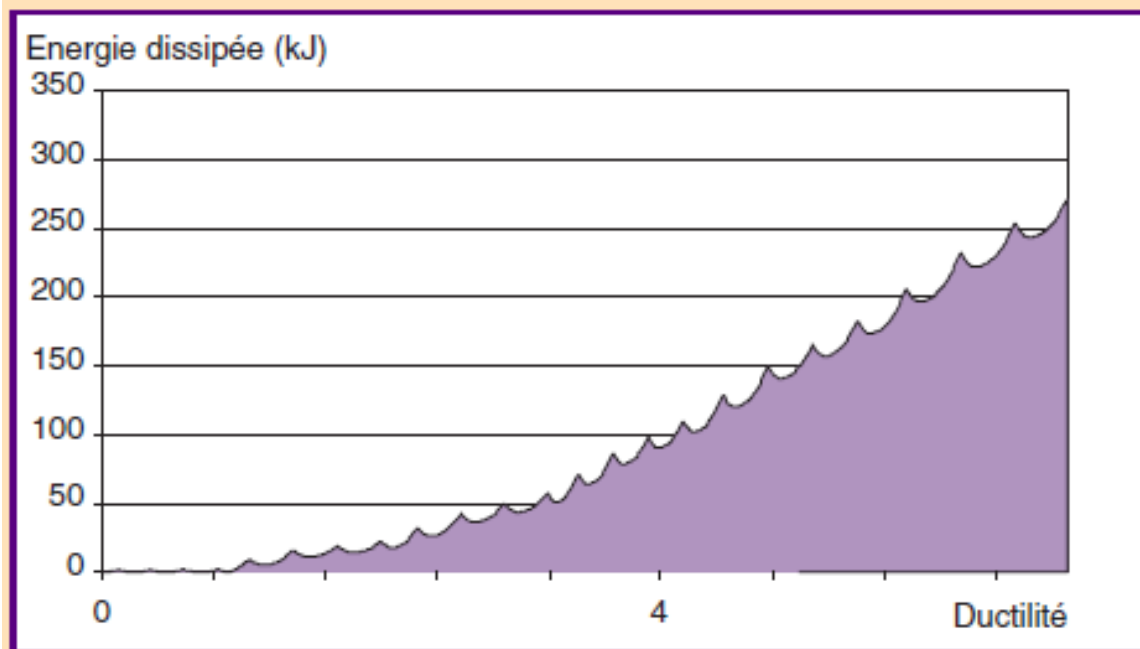
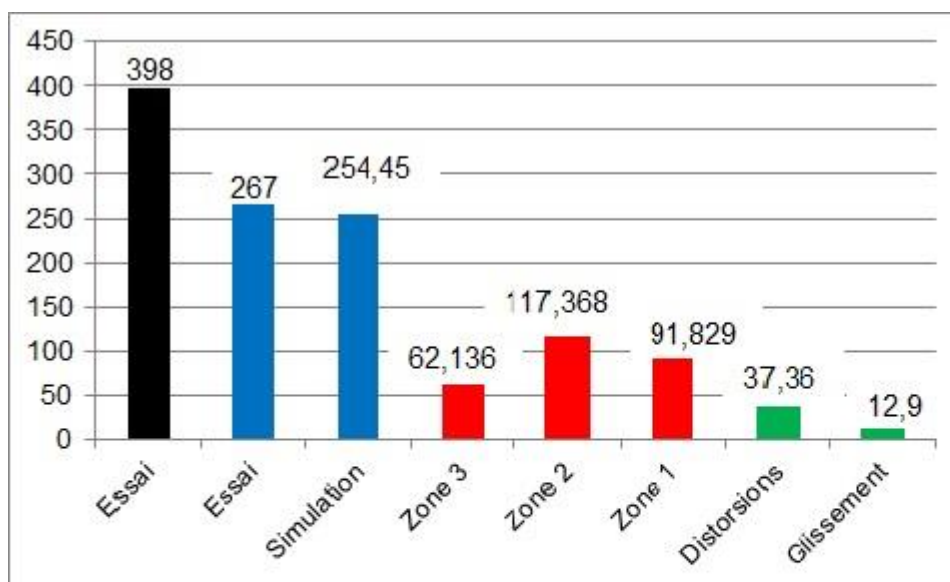
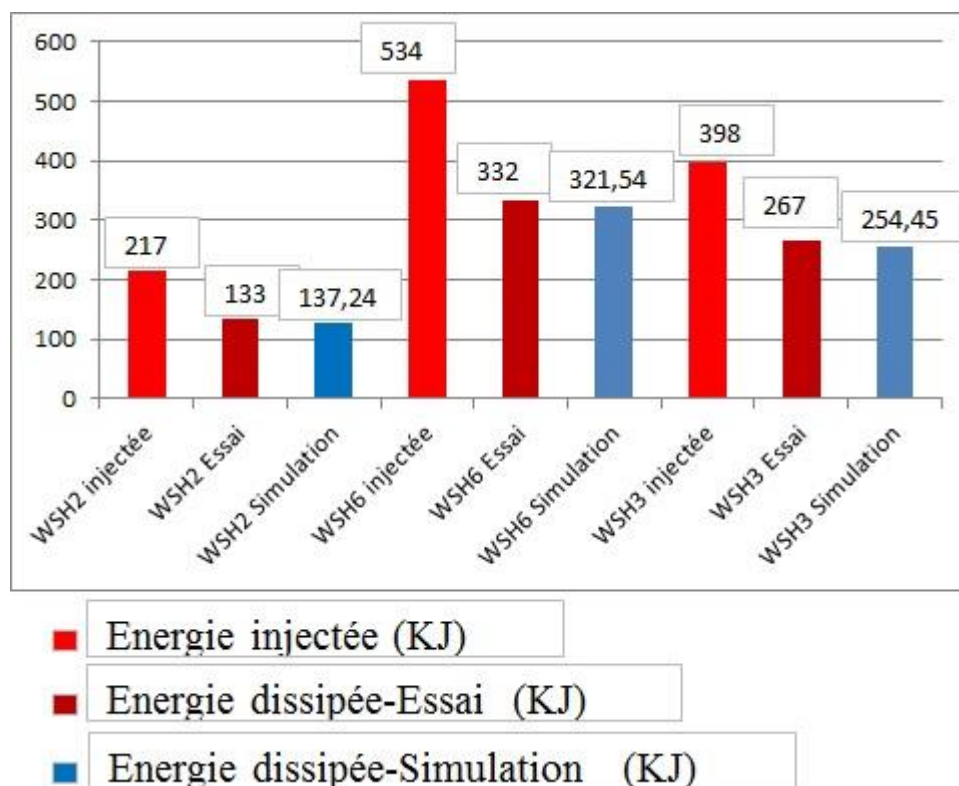


Figure 4.31-évolution de l'énergie totale en fonction de la ductilité d'ensemble en déplacement μ_{Δ}



- Energie totale injectée (KJ)
- Energies totales dissipées (KJ)
- Energies dissipées par zone de structure (KJ)
- Energies dissipées en zone critique (1) par mécanisme (KJ)

Figure 4.32-Energies mises en œuvre dans la structure WSH3 à la fin de la simulation et de l'essai



- Energie injectée (KJ)
- Energie dissipée-Essai (KJ)
- Energie dissipée-Simulation (KJ)

Figure 4.33-Energie injectée et les énergies dissipées durant le chargement cyclique dans les parois en béton armé

Conclusion

Les résultats numériques et expérimentaux obtenus nous ont permis, dans un premier temps de mettre en évidence les mécanismes de résistance et de rupture des murs avec une section rectangulaire, conçus selon les règles de l'Eurocode 8. Les murs testés sur la table sismique d'IBK ruinent toujours en flexion, par rupture des aciers, le béton étant très peu sollicité en compression. Ce mode de comportement peut être favorisé par une faible valeur de l'effort normal appliqué ainsi que les mauvaises qualités de ductilité des aciers utilisés. Il peut être rendu plus ductile et dissipatif en utilisant des aciers à haute qualité de ductilité. *Ceci confirme encore une fois le bienfondé des règles de l'Eurocode 8 concernant les hautes qualités de ductilité requises pour les aciers à prévoir dans les zones critiques.* Les murs testés sous chargement cyclique alterné sur le mur de réaction ont eu un comportement différent. Au cours du chargement cyclique, ces murs ont été capables d'atteindre une ductilité structurale d'environ 6, d'une manière stable.

Dans un deuxième temps, les principales caractéristiques du comportement hystérétique des voiles sont prises en compte tels que la dégradation de la rigidité et de la résistance, les mécanismes de déformations associés à la flexion, à la détérioration de l'adhérence acier-béton et à l'effort tranchant. On établit aussi un calcul des énergies de déformations de la structure. Le modèle est capable de simuler les effets non linéaires de flexion et de cisaillement dans les jonctions.

Les résultats issus de la simulation du comportement cyclique alterné de structures en béton armé, dans des conditions proches de celles du projet, montrent la capacité du modèle à prédire le comportement non-linéaire et les performances post élastiques de ces structures.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

CONCLUSIONS

Au cours de ce travail, nous nous sommes intéressés à la modélisation du comportement structurel du béton sous sollicitations mécaniques, statiques croissant jusqu'à la ruine et sismique. Dans la première partie de ce mémoire, aux niveaux des chapitre I et chapitre II, nous avons donné une analyse bibliographique sur le comportement mécanique du béton et de l'acier avant de présenter une contribution à la modélisation par éléments finis semi-locaux. Un modèle élément fini basé sur la formulation de la méthode des forces est proposé. Il est constitué d'un élément fini plaque multicouche multicellulaire. Pour modéliser le ferrailage au niveau de la couche concernée, nous avons opté pour l'utilisation d'un modèle fibre. Ainsi, à chaque élément d'acier, représenté par un élément fini de poutre de Timoshenko, est rattaché au maillage de la cellule dans la couche concernée. Dans cette modélisation, chaque fibre d'acier est représentée par un triangle d'aire égale à l'aire de la cellule d'armature correspondante. Le triangle a été choisi, car au niveau d'une couche d'armatures les cellules représentatives peuvent être de matériaux différents (éventuellement du béton et de l'acier dans le cas du béton armé), afin de satisfaire le modèle éléments finis multicouches multicellulaires.

L'analyse non-linéaire a été faite par un couplage de la modélisation éléments finis multicouches multicellulaires et un modèle d'endommagement pour le béton et un modèle de comportement élastoplastique pour les armatures. Ces modèles (endommagement et élastoplastique) permettent la considération des principales caractéristiques du comportement non-linéaire des structures en béton armé sous chargement cyclique alterné tel que : la fissuration et la dégradation progressive du béton, la dissymétrie de comportement du béton en traction et en compression...etc.

Dans la deuxième partie de ce mémoire, du chapitre III au chapitre IV, nous avons effectué des calculs pour la validation du modèle numérique en confrontation avec le calcul analytique et les essais expérimentaux. Les résultats obtenus par l'élément fini multicouche multicellulaire sous chargement monotone croissant sont très satisfaisants pour la simulation du comportement non-linéaire en état de ruine des structures en comparaisons avec le calcul analytique. Le modèle a permis la simulation des distributions des non-linéarités constitutives dans le sens transversal (diagrammes moment-courbure) et dans le sens longitudinal

(distribution des courbures). Quatre études sont faites au niveau du chapitre III : une étude d'une plaque homogène (comportement linéaire d'une plaque homogène) ; une étude d'une poutre métallique; une étude d'une poutre en béton armé ; et enfin une modélisation statique des voiles porteurs en béton armé. L'étude des structures en béton armé a permis de mettre en évidence la bonne adaptation de la modélisation éléments finis multicouches et multicellulaires par la considération des différents matériaux (cellule en béton et fibre en acier) au niveau d'une même couche. L'utilisateur a la possibilité d'associer dans chaque cellule (béton ou acier) une loi de comportement pour la simulation du comportement non-linéaire du béton ou de l'acier.

En simulant des voiles porteurs en béton sous chargement sismique, le modèle numérique a permis de prédire correctement les aspects essentiels du comportement expérimental observé. Les principales caractéristiques du comportement hystérétique des structures étudiées sont prises en compte tels que la dégradation de la rigidité et de la résistance, les mécanismes de déformations associés à la flexion à la détérioration de l'adhérence acier-béton et au cisaillement transverse. L'élément fini ainsi développé peut donc être utilisé dans l'analyse non-linéaire des structures pour l'étude, le dimensionnement, la prévision du comportement des structures sous chargement statique monotone croissant et cyclique alterné jusqu'à la ruine complète de la structure. Il convient alors d'hypothétiser les perspectives à venir à court et à moyen terme pour un développement approfondi du modèle.

PERSPECTIVES

Le modèle représente une plate-forme flexible pour le développement de modèles plus complexes du point de vue formulation éléments finis aussi bien que celui des lois de comportements. Les premiers résultats permettent déjà de montrer l'intérêt d'utiliser les modèles phénoménologiques d'endommagement en construction de murs porteurs en béton armé, dans le cas du dimensionnement parasismique. Plusieurs pistes de réflexion se dégagent pour améliorer la modélisation, tout en conservant une relative aisance dans l'utilisation et dans l'analyse des résultats :

- Validation du modèle élément finis flexible plaque multicouche multicellulaire en simulant des dalles en béton armé, afin de satisfaire l'hypothèse des plaques (petites épaisseurs).

- Validation du modèle élément finis en dynamique non-linéaire avec confrontation des résultats de la simulation aux résultats expérimentaux de structures testées sur table vibrante, l'étude des répliques et de précurseurs des séismes ;

- Application du modèle élément fini dans la modélisation non-linéaire de structures plus complexes comme les structures multi-étages et pour les différents types de contreventements (contreventement par portiques, contreventement par refends ou voiles, contreventement mixte) ;

- Développement d'un élément fini coque multicouche multicellulaire non-linéaire formulé sur la base de la méthode des forces. Le modèle élément fini sera conçu pour la simulation des structures en trois dimensions en béton armé ou métalliques ;

- Amélioration de l'expression du champ de déplacement pour la prise en compte des effets de second ordre (grands déplacements et grandes rotations). Des lois de comportements des matériaux en grandes déformations doivent être prises en compte ;

ANNEXE A

A.1-Calcul des efforts et couples extérieurs

Les hypothèses faites dans les équations 7 et 8 (En absence des efforts de volumes, des efforts de contour et dans le cas où la plaque est soumise à un seul effort surfacique distribué q_z) ne sont plus valables dans le cas de la théorie d'une plaque multicellulaires. En effet, les interpolations faites aux équations 2.1 et 2.2 des efforts et des moments respectivement aboutissent à un q_z égal à zéro, pour calculer les efforts extérieurs, on considère donc le système à son état standard et on calcul les efforts de différentes natures s'exerçant sur l'élément fini plaque.

Le travail des forces et couples (eqt.A.1) s'exerçant sur une plaque constituée par N couches peut s'exprimer de la manière suivante :

$$W_{ext} = \sum_{i=1}^N \left(\int_s \int_{z_i}^{z_{i+1}} f_i u_i dz dx dy + \int_s g_i u_i dx dy + \int_C \int_{z_i}^{z_{i+1}} g'_i u_i dz dl \right) \quad (\text{eqt.A.1})$$

Calcul des efforts volumiques

$$\int_s \int_{z_i}^{z_{i+1}} f_i u_i dz dx dy = \int_s \int_{z_i}^{z_{i+1}} (f_x (u_0 + z\beta_x) + f_y (v_0 + z\beta_y) + f_z w_0) dz dx dy \quad (\text{eqt.A.2})$$

Les variables $u_0, v_0, w_0, \beta_x, \beta_y$ sont fonctions de x, y et peuvent être interpolées linéairement de la manière suivante :

Quel que soit ϕ la variable, elle peut être interpolée dans le plan de référence de l'élément fini triangulaire (figure 2.1):

$$\phi(\xi, \eta) = N_I(\xi, \eta)\phi_I + N_J(\xi, \eta)\phi_J + N_K(\xi, \eta)\phi_K \quad (\text{eqt.A.3.a})$$

Avec $N_I(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$, $N_J(\xi, \eta) = \xi$, $N_K(\xi, \eta) = \eta$

$$\begin{cases} x = N_I(\xi, \eta)x_I + N_J(\xi, \eta)x_J + N_K(\xi, \eta)x_K & \text{et } dx dy = \det(J_a) d\xi d\eta \\ y = N_I(\xi, \eta)y_I + N_J(\xi, \eta)y_J + N_K(\xi, \eta)y_K \end{cases}$$

$$\det(J_a) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = (x_J - x_I)(y_K - y_I) - (y_J - y_I)(x_K - x_I) \quad (\text{eqt.A.3.b})$$

$$I_{u_0} = \int_s \int_{z_i}^{z_{i+1}} f_x u_0(x, y) dz dx dy = h_i f_{x_i} \det(J_a) \int_0^1 \int_0^{1-\xi} u_0(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

Où $f_{x_i}, h_i = z_{i+1} - z_i$ sont l'effort volumique et l'épaisseur de la couche « i » respectivement

Ainsi :

$$\begin{aligned}
I_{u_0} &= \frac{1}{6} h_i f_{x_i} \det(J_a)(u_{0_i} + u_{0_j} + u_{0_k}), \quad I_{v_0} = \frac{1}{6} h_i f_{y_i} \det(J_a)(v_{0_i} + v_{0_j} + v_{0_k}) \\
I_{w_0} &= \frac{1}{6} h_i f_{z_i} \det(J_a)(w_{0_i} + w_{0_j} + w_{0_k}), \quad I_{\beta_x} = \frac{1}{6} h_i \eta_i f_{x_i} \det(J_a)(\beta_{x_i} + \beta_{x_j} + \beta_{x_k}) \\
I_{\beta_y} &= \frac{1}{6} h_i \eta_i f_{y_i} \det(J_a)(\beta_{y_i} + \beta_{y_j} + \beta_{y_k}) \text{ avec } \eta_i = \frac{1}{2}(z_{i+1} + z_i) \\
W_{ext}^V &= \sum_{i=1}^N f_i^{eT} u^e = F^{eT} U^e \text{ avec } F^{eT} = \sum_{i=1}^N f_i^{eT} P
\end{aligned} \tag{eqt.A.4}$$

Où P la matrice de passage de la base locale à la base globale, U^e le vecteur de déplacements nodaux globaux.

$$\begin{aligned}
f_i^{eT} &= \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\} \\
f_1 &= \frac{1}{6} h_i f_{x_i} \det(J_a), \quad f_2 = \frac{1}{6} h_i f_{y_i} \det(J_a), \quad f_3 = \frac{1}{6} h_i f_{z_i} \det(J_a), \quad f_4 = \frac{1}{6} h_i \eta_i f_{x_i} \det(J_a), \\
f_5 &= \frac{1}{6} h_i \eta_i f_{y_i} \det(J_a)
\end{aligned}$$

Calcul des efforts de surfaciques

Tout pour le même calcul, sauf que :

$$W_{ext}^s = \sum_{i=1}^N \int_{s_q} g_i u_i dx dy \tag{eqt.A.5}$$

$$W_{ext}^{s_e} = \sum_{i=1}^N g_i^{eT} u^e = G^{eT} U^e \text{ avec } G^{eT} = \sum_{i=1}^N g_i^{eT} P \tag{eqt.A.6}$$

$$\begin{aligned}
g_i^{eT} &= \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\} \\
g_1 &= \frac{1}{6} g_{x_i} \det(J_a), \quad g_2 = \frac{1}{6} g_{y_i} \det(J_a), \quad g_3 = \frac{1}{6} g_{z_i} \det(J_a), \quad g_4 = \frac{1}{6} m_{x_i} \det(J_a), \quad g_5 = \frac{1}{6} m_{y_i} \det(J_a)
\end{aligned}$$

Où $m_{x_i} = g_{x_i} z$ et $m_{y_i} = g_{y_i} z$ moments par unité de surface.

Calcul des efforts linéaires

$$W_{ext}^c = \sum_{i=1}^N \int_c \int_{z_i}^{z_{i+1}} g_i' u_i dz dl = \sum_{i=1}^N h_i g_i' \int_c u_i dl \tag{eqt.A.7}$$

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = L d\xi \text{ avec } L \text{ la longueur de la facette.}$$

En effectuant un calcul semblable de celui du paragraphe (§ II.1.1.1) sur les différentes facettes on aboutit à :

$$W_{ext}^{ce} = \sum_{i=1}^N g_i'^{eT} u^e = G'^{eT} U^e \text{ avec } G'^{eT} = \sum_{i=1}^N g_i'^{eT} P \tag{eqt.A.8}$$

$$g_i^{eT} = \left\{ g_1', g_2', g_3', g_4', g_5', g_6', g_7', g_8', g_9', g_{10}', g_{11}', g_{12}', g_{13}', g_{14}', g_{15}' \right\}$$

$$g_1' = \frac{1}{2} h_i g_{x_i} (L_{IJ} + L_{KI}), g_2' = \frac{1}{2} h_i g_{y_i} (L_{IJ} + L_{KI}), g_3' = \frac{1}{2} h_i g_{z_i} (L_{IJ} + L_{KI}), g_4' = \frac{1}{2} h_i \eta_i g_{x_i} (L_{IJ} + L_{KI}),$$

$$g_5' = \frac{1}{2} h_i \eta_i g_{y_i} (L_{IJ} + L_{KI}), g_6' = \frac{1}{2} h_i g_{x_i} (L_{IJ} + L_{KJ}), g_7' = \frac{1}{2} h_i g_{y_i} (L_{IJ} + L_{KJ}), g_8' = \frac{1}{2} h_i g_{z_i} (L_{IJ} + L_{KJ}),$$

$$g_9' = \frac{1}{2} h_i \eta_i g_{x_i} (L_{IJ} + L_{KJ}), g_{10}' = \frac{1}{2} h_i \eta_i g_{y_i} (L_{IJ} + L_{KJ}), g_{11}' = \frac{1}{2} h_i g_{x_i} (L_{KI} + L_{KJ}),$$

$$g_{12}' = \frac{1}{2} h_i g_{y_i} (L_{KI} + L_{KJ}), g_{13}' = \frac{1}{2} h_i g_{z_i} (L_{KI} + L_{KJ}), g_{14}' = \frac{1}{2} h_i \eta_i g_{x_i} (L_{KI} + L_{KJ}),$$

$$g_{15}' = \frac{1}{2} h_i \eta_i g_{y_i} (L_{KI} + L_{KJ})$$

Le vecteur forces élémentaire est finalement donné par :

$$F_{ext}^e = F^{eT} + G^{eT} + G'^{eT} = \sum_{i=1}^N (f_i^{eT} + g_i^{eT} + g_i'^{eT}) P \quad (\text{eqt.A.9})$$

A.2-Les coefficients de $\beta_x(x, y)$ et $\beta_y(x, y)$ en fonction des coefficients de $w_0(x, y)$

❖ Les coefficients de $\beta_x(x, y)$

$$a_2 = - \left\{ b_1 + \frac{h^2}{3(1-\nu)} (h_1 + 3i_1) \right\}, b_2 = -2e_1, c_2 = 0, d_2 = -3i_1, e_2 = -2g_1, f_2 = -h_1$$

❖ Les coefficients de $\beta_y(x, y)$

$$a_3 = - \left\{ c_1 + \frac{h^2}{3(1-\nu)} (g_1 + 3j_1) \right\}, b_3 = 0, c_3 = -2f_1, d_3 = -g_1, e_3 = -2h_1, f_3 = -3j_1$$

A.3-Identification des paramètres du modèle de Mazars

La loi de comportement en traction ou en compression est donnée par :

$$\sigma = (1-D)E_0 \varepsilon \quad (\text{eqt.A.10})$$

En traction pure on a :

$$\sigma_t = (1-D_t)E_0 \varepsilon \quad \text{et} \quad D_t = 1 - \frac{\varepsilon_{D_0}(1-A_t)}{\varepsilon} - \frac{A_t}{e^{B_t(\varepsilon-\varepsilon_{D_0})}} \quad \text{puisque} \quad \varepsilon_{eq} = \varepsilon$$

$$\frac{\partial \sigma_t}{\partial \varepsilon} = (1-D_t)E_0 - E_0 \varepsilon \frac{\partial D_t}{\partial \varepsilon} = (1-D_t)E_0 - E_0 \varepsilon \left(\frac{\varepsilon_{D_0}(1-A_t)}{\varepsilon^2} + \frac{A_t B_t}{e^{B_t(\varepsilon-\varepsilon_{D_0})}} \right) = 0 \quad (\text{eqt.A.11})$$

$$\text{Ainsi : } A_t E_0 (1 - B_t \varepsilon) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{\max} = 1/B_t$$

Et quand $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_{D_0}$, $\sigma_{\max} = f_t$ et $D_t = 0 \Rightarrow B_t = 1/\varepsilon_{D_0} = E_0/f_t$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \sigma = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} (1 - D_t) E_0 \varepsilon = E_0 \varepsilon_{D_0} (1 - A_t) = 0 \text{ donne } A_t = 0$$

En compression pure on a :

En cas de compression simple (par exemple dans la direction 1), c'est donc l'effet Poisson qui va jouer (avec dans ce cas des extensions dans les directions 2 et 3 :

$$\varepsilon_2 = -\nu_0 \varepsilon_1 \text{ et } \varepsilon_3 = -\nu_0 \varepsilon_1 \Rightarrow \varepsilon_{eq} = \sqrt{\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2} = \sqrt{2\nu^2 \varepsilon_1^2} = \sqrt{2\nu^2 \varepsilon^2} = -\sqrt{2\nu} \varepsilon \quad (\text{eqt.A.12})$$

En revanche, en cas de compression hydrostatique, la déformation équivalente reste nulle : ce type de modèle ne permet pas de prendre en compte l'évolution de l'endommagement dans ce cas.

$$\sigma_c = (1 - D_c) E_0 \varepsilon \text{ et } D_c = 1 - \frac{\varepsilon_{D_0} (1 - A_c)}{\sqrt{2\nu} \varepsilon} - \frac{A_c}{e^{B_c (\sqrt{2\nu} \varepsilon - \varepsilon_{D_0})}} \quad (\text{eqt.A.13})$$

$$\frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon} = (1 - D_c) E_0 - E_0 \varepsilon \frac{\partial D_c}{\partial \varepsilon} = (1 - D_c) E_0 - E_0 \varepsilon \left(\frac{\varepsilon_{D_0} (1 - A_c)}{\sqrt{2\nu} \varepsilon^2} + \frac{\sqrt{2\nu} A_c B_c}{e^{B_c (\sqrt{2\nu} \varepsilon - \varepsilon_{D_0})}} \right) = 0 \quad (\text{eqt.A.14})$$

$$\text{Ainsi : } A_c E_0 (\sqrt{2\nu} B_c \varepsilon - 1) = 0 \Rightarrow (-\varepsilon)_{\max} = 1/\sqrt{2\nu} B_c$$

$$(-\sigma)_{\max} = (1 - D_c) E_0 \varepsilon_{\max} = \frac{E_0}{\sqrt{2\nu}} \left(\varepsilon_{D_0} (1 - A_c) + \frac{A_c}{B_c e^{(1 - B_c \varepsilon_{D_0})}} \right) \quad (\text{eqt.A.15})$$

La continuité de la dérivée à gauche $\sigma_c = E_0 \varepsilon$ et à droite $\sigma_c = (1 - D_c) E_0 \varepsilon$ de la contrainte de compression à $\varepsilon_{eq} = \varepsilon_{D_0}$ donne : $E_0 = E_0 + E_0 (1 - A_c + A_c B_c \varepsilon_{D_0}) \Rightarrow B_c = \frac{A_c - 1}{A_c \varepsilon_{D_0}}$

BIBLIOGRAPHIE

- [AB 07] ABBAS KRAYANI, Thèse de DOCTORAT « Contribution à la Modélisation non Linéaire du Comportement Mécanique du Béton Armé Précontraint », le 11 décembre 2007 à l'Ecole Centrale de Nantes.
- [AF 02] AFPS, 2002, “Le séisme de Molise (Italie) du 31 octobre 2002”. Rapport de mission de l'Association Française du génie parasismique.
- [AF 03] AFPS, 2003, “Le séisme de Bam (Iran) du 26 décembre 2003”. Rapport de mission de l'Association Française du génie parasismique.
- [AF 04] AFPS, 2004, “Le séisme des Saintes (Guadeloupe) du 21 novembre 2004”. Rapport de mission de l'Association Française du génie parasismique.
- [AL 99.a] Alessandro Dazio, Thomas Wenk, Hugo Bachmann”Versuche an Stahlbetontragwänden unter zyklisch-statischer Einwirkung », Institut für Baustatik und Konstruktion Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, 1999
- [AL 99.b] Alessandro Dazio et al. 1999” Dazio A., Wenk Th., Bachmann H.: *Versuche an Stahlbetontragwänden unter zyklischstatischer Einwirkung*. Institut für Baustatik und Konstruktion (IBK), ETH Zürich. Bericht No. 239, ISBN 3-7643-6149-2. Birkhäuser Verlag, Basel 1999”.
- [AL 07] Alessandro Dazio « Capacité portante des constructions en béton », à l'Institut de Statique et Structures (IBK), 2007, traduit par Xavier Mittaz, SD Ingénierie Dénériaz & Pralong Sion SA, Sion Christian Greifenhagen, ENAC-IS-IMAC, EPFL
- [BI 02] BISCH P, COIN A, “The CAMUS 2000”, 2002, Research, 12th European conference on Earthquake Engineering, Paper reference 123, London.
- [BO 09]BOUCHAABOUB Moussa « Effet du facteur de forme sur la performance plastique d'éléments structuraux en béton armé » Thèse de Doctorat soutenue à l'Université Mentouri, Constantine Faculté des Sciences de L'Ingénieur, Algérie en Avril 2009
- [BR 94] BRACHET R, COIN A, GANTENBEIN F et al. 1994, “Opération CASSBA Conception et analyse sismique des structures en béton armé », Annales de l'Institut technique de bâtiment et des travaux publics, No 523, Série : Technique générale de la construction 150, 91p.

- [CA 01] CAFEEL-ECOEST/ICONS, 2001, Thematic report N.5. Shear Walls Structures. Editors, J.M. Reynouard, M.N. Fardis, gen. eds R. T. Severn and R. Bairrão (LNEC, ISBN 972-49-1891-2) September, 2001.
- [CO 00] COIN A, “ Recherche CAMUS, 2000, Rapport final, Présentation générale, Conclusions et perspective », Ministère Français de l'Équipement (Plan Génie Civil) Convention 9670011, 22p
- [CL 06] Clough R.W., 1966, “Effects of stiffness degradation on earthquake ductility requirements”. Report No. 6614, Struct. and Mat. Res., University of California, Berkeley.
- [CP 02] CP110, 1972, " Code of practice for the structural use of concrete". Part 2. Design EDITIONS BSI British standards institution. Londres. Grande-Bretagne.
- [CR 01.a] Crémer C., 2001. “Modélisation du comportement non linéaire des fondations superficielles sous séisme”. Thèse de doctorat, ENS Cachan.
- [CR 01.b] Crémer C., Pecker A., Davenne L., 2001, “Cyclic macro element of soil structure interaction: material and geometrical non-linearities”. *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 25, september, pp. 1257-1284.
- [CR 02] Crémer C., Pecker A., Davenne L., 2002. “Modelling of non linear dynamic behaviour of a shallow strip with macro element”. *Journal of Earthquake Engineering*, vol 6, n°2, pp.175-211.
- [CR 91] Crisfield M.A., 1991. “Nonlinear Finite Element analysis of solids and structures”. Vol I, John Wiley, Chichester.
- [DA 98] Davenne L., Brenet C, 1998. “Macro élément de poutre en béton armé”. Rapport interne LMT Cachan, N°210, juin.
- [DA 85] Davidovici V., 1985. “Génie parasismique”. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées.
- [D 92] D. Bui, "Le cisaillement dans les plaques et les coques : modélisation et calcul", Note HI-71/7784, 1992.
- [DE 89] De Ville de Goyet V., 1989. “L'analyse statique non linéaire par la méthode des éléments finis des structures spatiales formées de poutres à section non symétrique”. Thèse de doctorat, Université de Liège.
- [DU 97] Dubé J.F., 1997, “Modélisation multicouche des voiles en béton armé”. *Revue Française de Génie Civil*, vol.1, numéro 2, pp. 285 -307, juin.
- [EU 92.a] Eurocode 2, 1992, "Calcul des structures en béton" et document d'application nationale. Partie 1-1 : règles générales et règles pour les bâtiments. EDITIONS AFNOR. Paris. France.

- [EU 92.b] Eurocode 2 « Planung von Stahlbeton und Spannbetontragwerken. SIA V 162.001 (Europäische Vornorm ENV 1992-1-1). Schweiz. Ingenieur-und Architekten-Verein. Zurich, 1992 »
- [EU 97.a] Eurocode 8 “ Auslegung Von Bauwerken gegen Erdbeben, Sammelband Gebäude. SIA V 160.801 (Europäische Vornorm ENV 1998-1-1 to 3). Schweiz. Ingenieur-und Architekten-Verein. Zurich, 1997 »
- [EU 97.b] Eurocode 8 « Structures in seismic regions, Design, Part 1, General and Building », *Report EUR 12266 EN, Bruxelles: Office for official publications of the european communities, 1988, 327p*
- [EL 92] Elachachi., 1992, “Sur l’élaboration d’une méthode simplifiée d’analyse des structures de génie civil par macro élément”. Thèse de doctorat, Université Paris VI.
- [FL 93] Fléjou J.CL, 1993, “Comportement dynamique des structures de génie civil avec liaison demi -rigide”. Thèse de doctorat, Université Paris VI.
- [FL 96] FLEURY.F, « prédiction du comportement des structures en béton armé sous sollicitation sismiques : Proposition d’un modèle global de nœud d’ossature intégrant le comportement de la liaison Acier/béton », Thèse de Doctorat, INSA de Lyon 1996.
- [FO 85] FOURE. B. « Prise en compte du comportement du béton-cas particulier des voiles plans en béton armé », en génie parasismique, Presses de l’ENPC, 1985, pp.605-616
- [FR 07] François MARTIN « Apport des lois d’endommagement des comportements des ouvrages souterrains et la hiérarchisation des comportements rocheux » thèse de Doctorat Soutenue le 24 septembre 2007 à Cachan
- [FR 99] Frédéric RAGUENEAU « Fonctionnement Dynamique des Structures en Béton- Influence des comportements Hystérétiques locaux » thèse de Doctorat Soutenue le 7 janvier 1999 à l’école Normale Supérieure de Cachan
- [FR 93] Friedman Z., Kosmatka J.B., 1993, “An improved two-node Timoshenko beam finite element”. *Computers and Structures*, vol 47, no 3, pp. 473-481.
- [GH 02] Ghavamian S., Davenne L., Gatuingt F., 2002, “Elément de poutre multifibre (droite)”. Fascicule R3.08 - Document Code Aster.
- [GH 98] Ghavamian S., Mazars J., 1998, “Stratégie de calculs simplifiés pour l’analyse du comportement des structures en BA : le code EFICOS”. *Revue Française de Génie Civil*, vol.2, numéro 1, pp. 61-90, janvier.
- [GO 84] GOURI Dhatt et GILBERT TOUZOT « Une présentation de la méthode des éléments finis », Deuxième Edition, 1984 Maloine S.A. Éditeur 75006 Paris.

- [GR 05] Grange S., Mazars J., Kotronis P., 2005, "Soil-Structure interaction under seismic loading: a simplified approach". ALERT Workshop, Aussois, Org. ALERTGeomaterials (communication without proceedings), 10-12 Oct.
- [GU 94] Guedes J., Pégon P., Pinto A., 1994, "A fibre Timoshenko beam element in CASTEM 2000". Special publication Nr. I.94.31, J.R.C., I-21020, Ispra, Italy.
- [HE 03] Hentz. S. « Modélisation d'une structure en béton armé soumise à un choc par la méthode des éléments discrets », Thèse de doctorat, Université Josph Fourier, Grenoble, France, 2003.
- [IB 92] Ibrahimbegovic N., Frey F., 1992, "Finite element analysis of linear and non linear deformations of elastic initially curved beams". LSC internal report 92/02, January, Lausanne.
- [IB 12] Ibrahim.M & A. El Harif" Multicellular Multilayer Plate Model: Numerical Approach and Phenomenon Related To Blockade by Shear » *International Journal of Engineering Inventions, Volume 1, Issue 4 (September2012) PP: 47-57*
- [IL 00.a] Ile N., 2000, "Contribution à la compréhension du fonctionnement des voiles en béton armé sous sollicitation sismique : apport de l'expérimentation et de la modélisation à la conception". Thèse de doctorat, INSA de Lyon.
- [IL 00.b] Ile N., Reynouard J.M., 2000, "Non linear analysis of reinforced concrete shear wall under earthquake loading". *Journal of earthquake Engineering*, Vol.4, N° 2, pp. 183-213.
- [JE 90.a] Jean-Louis Batoz & GOURI Dhatt « Modélisation des structures par éléments finis Volume 2 Poutres et Plaques, Hermès, Paris, 1990
- [JE 90.b] Jean-Louis Batoz & GOURI Dhatt « Modélisation des structures par éléments finis Volume 1, Volume 2, Volume 3 » Editions HERMES 34, rue Eugène Flachet 75017 PARIS.
- [JF] J-F.IMBERT, 3^e édition partie I, 111, rue Nicolas-Vauquelin 31100 TOULOUSE « Analyse des structures par éléments finis »
- [KH 02] Khalil Haidar « Modélisation de l'endommagement des structures en Béton-Approche numérique et effet de la microstructure sur les propriétés de rupture » thèse de Doctorat Soutenue le 06/12/2002 à l'Ecole Centrale de Nantes
- [KO 00] Kotronis P., 2000, "Cisaillement dynamique de murs en béton armé. Modèles simplifiés 2D et 3D". Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- [KO 03] Kotronis P., Mazars J., Davenne L., 2003, "The equivalent reinforced concrete model for simulating the behaviour of shear walls under dynamic loading". *Engineering Fracture Mechanics*, issues 7-8, pp. 1085-1097.

- [KO 04] Kotronis P., Davenne L., Mazars J., 2004, “Poutre 3D multifibre Timoshenko pour la modélisation des structures en béton armé soumises à des chargements sévères”. *Revue Française de Génie Civil*, vol. 8, issues 2-3, pp. 329-343.
- [KO 05.a] Kotronis P., Mazars J., 2005a, “Simplified modeling strategies to simulate the dynamic behavior of R/C walls”. *Journal of Earthquake Engineering*, vol. 9, issue 2, pp. 285-306.
- [KO 05.b] Kotronis P., Mazars J., Nguyen X.H., Ile N., Reynouard J.M., 2005b, “The seismic behavior of reinforced concrete structural walls: Experiments and modeling”. 250th anniversary of the 1755 Lisbon earthquake-Proceedings, Lisbon Portugal, pp. 441-445, cd paper no 86, 1-4 november.
- [LA 91] La Borderie C., 1991, “Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable : modélisation et application à l’analyse des structures en béton”. Thèse de doctorat, Université Paris 6.
- [LA 03] La Borderie C., « Stratégies et Modèles de Calculs pour les Structures en Béton », Thèse d’habilitation, Université de Pau et des Pays de l’Adour France, Décembre 2003.
- [LE 86] Lemaitre J., Chaboche J.L., 1986, “Mécanique des matériaux solides”. 2e édition, Dunod.
- [LE 88] Lemaitre J. et Chaboche J.L. 1988, Mécanique des matériaux solides. Ed. Dunod.
- [LE 06] Lestuzzi P., Hugo Bachmann. “Displacement ductility and energy assessment from shaking table tests on RC structural walls », Available online 1 November 2006.
- [LJ 04] L. JASON : Relation endomangement-perméabilité pour les bétons : application au calcul de structures, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, 2004.
- [MA 06] Mazars J., Kotronis P., Ragueneau F., Casaux G., 2006, “Using multifiber beams to account for shear and torsion. Applications to concrete structural elements”. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (available online 10 November 2005)
- [MA 05] Mazars. J « Etude sur le fonctionnement Sismique des Structures à Murs à Cellules Contreventées », Rapport final du Novembre 2005, Contrat DRAST/Mission Génie Civil N° 04 MGC 5 07
- [MA 84] Mazars J. 1984, Application de la mécanique de l’endommagement au comportement non Linéaire et à la rupture du béton de structure. Thèse de doctorat d’état de l’Université Paris VI.
- [MA 90] Mazars J., Berthaud Y., Ratami S., 1990, “The unilateral behavior of damage concrete”, *Journal of Engineering Fracture Mechanics*”. Vol. 35, 4-5, pp. 629-635.

- [ME 73] Menegotto M., Pinto P.E., 1973, "Method of analysis for cyclically loaded reinforced concrete plane frames including changes in geometry and non elastic behavior of elements under combined normal force and bending". IABSE symp. On resistance and ultimate deformability of structures acted on by well-defined repeated loads, Final Report, Lisbon.
- [ME 95] Mestat P., Prat M. et al., 1995, "La modélisation des ouvrages". Hermès publications, Paris.
- [MI 91] Millard A. et al., 1991, "Comportement cyclique et dynamique des structures en béton armé". GREGO Géomatériaux, Rapport scientifique, Reynouard J.M (ed) pp. 413-452.
- [MO 07] Mohsen Roosefid1, « Modélisation de l'endommagement de bétons réfractaires dans une structure-modèle constituée d'un disque de béton muni d'un ancrage » 18ème Congrès Français de Mécanique Grenoble, 27-31 août 2007
- [MO 92] Monti G., Nutti C., 1992, "Nonlinear cyclic behaviour of reinforcing bars including buckling". Journal of Structural Engineering, Vol. 118, no 12, Dec, pp. 3268-3284.
- [NE 97] Neuenhofer A., Fillippou F.C. « Evaluation of Non-linear Frame Finite-Element Models », Journal of Structural Engineering, Vol.123 No.7, P.958-966, July 1997
- [NG 06.a] Nguyen X.H., Mazars J., Kotronis P., Ile N., Reynouard J.M., 2006a, "Some aspects of local and global behaviour of RC structures submitted to earthquake - Experiments and modelling". EURO-C 2006 Computational Modelling of Concrete Structures edited by G. Meschke, R. de Borst, H. Mang, N. Bicanic, 27th-30th March, Mayrhofen, Tyrol, Austria pp. 757-766, 2006- Austria, 27-30 March.
- [NG 06.b] Nguyen X.H., Mazars J., Kotronis P., 2006b, "Modélisation simplifiée 3D du comportement dynamique de structures en béton armé". *Revue Européenne de Génie Civil*, vol. 10, N° 3, pp. 361-373.
- [NG 06.c] Nguyen X.H 2006 « Vulnérabilité des structures en béton armé à voiles porteurs: expérimentation et modélisation », thèse de Doctorat soutenue le 12 Juin 2006 à Institut National Polytechnique de Grenoble.
- [NO 05] Norberto D. R. «Etude de la liaison Acier-Béton : De la Modélisation du Phénomène à la Formulation d'un Elément fini Enrichi (Béton Armé) », thèse de Doctorat soutenue à Cachan le 1^{er} juillet 2005.
- [NZ 95] NZS 95, New Zealand Standard: Concrete Structures. Part1: the design concrete structures, Part2: Commentary, Standards New Zealand, Wellington, 1995
- [OT 79] Ottosen N.S., 1979, "Constitutive model for short time loading of concrete". Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol 105, pp. 127-141.

- [OW 80] Owen D.R.J., Hilton E., 1980, “*Finite element in plasticity: Theory and practice*”. Pineridge Press Ltd, Swansea, England.
- [PA 08] Panagiotis Kotronis « Stratégies de Modélisation de Structures en Béton Soumises a des Chargements Sévères » Mémoire Soutenue le 20 novembre 2008 à UNIVERSITE JOSEPH FOURIER
- [PA 92] Paulay,T., Priestley, M.J.N. « Seismic design of reinforced concrete and masonry building”, New York: Willey & Sons, 1992, 744p.
- [PE 99] Petrangeli M., Pinto P.E., Ciampi V., 1999, “Fiber element for cyclic bending and shear of RC structures. I: Theory”. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 125, pp. 994-1001, No. 9, September.
- [PH 92] Philippe T. « Mécanique des structures : par la méthode des éléments finis statique et dynamique », Paris Milan Barcelone Bonn 1992.
- [PH 04] Philippe B.R. « Structures rigides soumises aux avalanches et chutes de blocs : modélisation du comportement mécanique et caractérisation de l'interaction "phénomène-ouvrage" », thèse de doctorat soutenue le 12 Juillet 2004 à l'UNIVERSITE GRENOBLE 1 – JOSEPH FOURIER SCIENCES & GEOGRAPHIE
- [RA 90] Ramtani S., 1990, “Contribution à la modélisation du comportement multiaxial du béton endommagé avec description du caractère unilatéral”. Thèse de doctorat, Université Paris 6.
- [RE 92] REGLES PS 92 « Règles de construction parasismique, Règles PS applicables aux bâtiments, dites PS 92 », norme française, AFNOR 1995, 217p.
- [SA 03] Saanouni K., 2003, “Numerical Modelling in Damage Mechanics (Innovative Technology Series)”. Lavoisier ed.
- [SA 95] Saatcioglu M., Salamat A.H., Ravzi S.R. « Confined columns under eccentric loading », *Journal of Structural Engineering*, Vol.121 N°.11,p.1555, November 1995.
- [SE 09] Sébastien F., Code_Aster et al. 2009 Loi de comportement de plaques en béton armé GLRC_DM
- [SP 96.a] Spacone E., Filippou F.C., Taucer F.F., 1996a, “Fiber Beam-Column Model for Nonlinear Analysis of R/C Frames. I: Formulation”. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol 25, issue 7, pp. 711-725.
- [SP 96.b] Spacone E., Filippou F.C., Taucer F.F., 1996b, “Fiber Beam-Column Model for Nonlinear Analysis of R/C Frames. II: Applications”. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol 25, issue 7, pp. 727-742.

- [ST 83] Stolarski H., Belyschko., 1983, "Shear and membrane locking in C^0 elements". *Computers and methods in applied mechanics and engineering*, vol. 41, Issue 3, December, pp. 279-296.
- [TA 70] Takeda T., Sozen M.A., Nielsen N.N., 1970, "Reinforced concrete response to simulated earthquake". *Journal of Eng.Div., ASCE*, vol. 96, N°ST12, pp. 2557 - 2573.
- [TI 75] Tichy M, Rakosnik J. 1975, "*Calcul plastique des ossatures en béton armé*". EDITIONS EYROLES. Paris. France.
- [WE 08] Wen Jie SHIU « Impact de missiles rigides sur structures en béton armé : analyse par la méthode des éléments discrets », Thèse de Doctorat soutenue à GRENOBLE 1, le 2 octobre 2008
- [XA 09] Xavier D., Code_Aster, Éléments de plaque : modélisations DKT, DST, DKTG et Q4g, du 06/05/2009
- [ZE] Zeris, C.A., Mahin S.A. « Behavior of reinforced concrete structures subjected to uniaxial excitation », *Journal of structural Engineering, ASCE*, 117(ST9), 2657-2673