

THESE

En vue de l'obtention du : **DOCTORAT**

Structure de Recherche : Physique des Hautes Energies- Modélisation et Simulation

Discipline : Physique

Spécialité : Physique Mathématique

Présentée et soutenue le 28/11/2020 par :

Mohammed Nabil EL KINANI

Contribution à l'étude de la brisure de la supersymétrie $N=2$ à deux échelles différentes

Devant le jury :

Abdallah EL KENZ	PES	Faculté des sciences, Université Mohammed V-Rabat	Président
Rachid AHL LAAMARA	PH	Faculté des sciences, Université Mohammed V-Rabat	Directeur de thèse
Lalla Btissam DRISSI	PH	Faculté des sciences, Université Mohammed V-Rabat	Rapporteur / Examineur
Omkaltoume EL FATNI	PH	Faculté des sciences, Université Mohammed V-Rabat	Rapporteur / Examineur
Mostafa MANSOUR	PH	Faculté des sciences, Université Hassan II-Casablanca	Rapporteur / Examineur
Khadija HTOUTOU	PH	Centre Régional des Métiers de l'Education et de la Formation, Fés-Meknès	Examineur
El Hassan SAIDI	PES	Faculté des sciences, Université Mohammed V-Rabat	Examineur

Année Universitaire : 2019/2020

Faculté des Sciences, avenue Ibn Battouta, BP. 1014 RP, Rabat-Maroc.

Tél : 00212(05) 37 77 18 76, Fax : 00212(05) 37 77 42 61, <http://www.fsr.ac.ma>

Remerciement

Ce travail de thèse a été réalisé au sein du Laboratoire de Physique des Hautes Énergies Modélisation et Simulation de l'Université Mohammed V-Rabat, Faculté des Sciences de Rabat, sous la direction du Professeur Rachid AHL LAAMARA Professeur Habilité à la Faculté des Sciences de Rabat.

Je tient à remercier chaleureusement Monsieur Rachid AHL LAAMARA, Professeur Habilité à la Faculté des Sciences de Rabat, de m'avoir fait confiance en acceptant d'encadrer ce travail doctoral et de m'avoir guidé tout au long de mes études. Merci beaucoup cher Professeur pour votre disponibilité, votre encouragement et votre compréhension quotidienne non seulement pour votre aide scientifique, votre rigueur, votre disponibilité et la clarté mais aussi pour vos qualités humaines, votre soutien et les discussions non scientifiques qui m'ont facilité ce parcours doctoral.

Je remercie très chaleureusement Monsieur Abdallah El KENZ, Professeur de l'Enseignement supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, de m'avoir prodigué de nombreux conseils durant mon master, afin de bien débiter mon travail de doctorat dont cette thèse est l'accomplissement. Merci aussi de l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'être président du jury. Qu'il en soit remercié.

Je suis particulièrement reconnaissant à Madame Lalla Btissam DRISSI, Professeur Habilité à la Faculté des Sciences de Rabat, d'avoir accepté de rapporter ce travail et de m'avoir fait profiter de ses expériences durant mes études en cycle de Master. Veuillez recevoir, Madame, l'expression de mes respectueux sentiments.

J'adresse aussi mes remerciements à Monsieur Mostafa MANSOUR, Professeur Habilité à la Faculté des Sciences, Ain Chock, Casablanca, d'avoir accepté de rapporter ce travail de thèse. Je le remercie de l'intérêt qu'il a manifesté à l'égard de cette recherche en s'engageant à être rapporteur, ainsi que pour ses jugements très pertinents sur mon manuscrit.

Mes vifs remerciements vont à Madame Omkaltoum EL FATNI, Professeur Habilité à la Faculté des Sciences Rabat pour le grand honneur qu'elle m'a donné en acceptant d'évaluer ce travail et d'avoir accepté de participer en tant que rapporteur dans le jury de ma soutenance.

Je suis également reconnaissant à Madame Khadija HTOUTOU, Professeur Habilité au Centre Régional des Métiers de l'Éducation et de la Formation, Fès-Meknès, de m'avoir fait l'honneur de participer au jury de cette thèse. Veuillez recevoir, Madame, l'expression de mon respect et de ma profonde gratitude.

Je voudrais aussi exprimer mes sincères remerciements à Monsieur El Hassan SAIDI, Professeur de l'Enseignement Supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, de m'avoir fait l'honneur de participer au jury de cette thèse. Veuillez bien accepter, Professeur, l'expression de ma plus profonde gratitude.

Je voudrais rendre hommage et remercier vivement tous les enseignants qui ont contribué à l'enrichissement de ma formation et tous ceux qui ont permis le bon déroulement de ce travail. Ce dernier n'aurait pu être mené à bien sans la présence et le soutien de ma famille. Je pense plus particulièrement à mes parents, qui ont veillé sur

moi depuis toujours, ceux qui m'ont fait confiance, qui m'ont soutenu sans faille et qui ont accepté mes choix sans même les comprendre, merci.

Mes plus profonds remerciements vont à mes frères Aissamedine et Zakaria ainsi que ma soeur Sara. Tout au long de mon cursus, ils m'ont toujours soutenu, encouragé et aidé. Ils ont su me donner toutes les chances pour réussir. Qu'ils trouvent, dans la réalisation de ce travail, l'aboutissement de leurs efforts ainsi que l'expression de ma plus affectueuse gratitude.

Mes remerciements vont également à tous mes amis et aux membres du Laboratoire de Physique des Hautes Énergies-Modélisation et Simulation.

Afin de n'oublier personne, je veux exprimer ma reconnaissance à tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à ce travail ou qui ont permis sa réalisation. Je vous remercie très sincèrement.

Résumé

.....

L'obstacle de construire une version supersymétrique étendue $\mathcal{N} > 1$ du modèle standard de la physique des particules est due essentiellement à la non-chiralité des théories de la supersymétrie $\mathcal{N} > 1$. Mais grâce à la réalisation de la brisure partielle de la théorie de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$, il est possible de surmonter cet obstacle et construire donc des modèles phénoménologiquement viables à partir de cette théorie. Le sujet de cette présente thèse s'inscrit dans l'étude de la brisure partielle de la supersymétrie globale $\mathcal{N} = 2$. Nous présentons tout d'abord les éléments essentiels du modèle standard de la physique des particules pour mettre en évidence le rôle important de la brisure spontanée de la symétrie électrofaible. Puis, nous étudions les théories supersymétriques et nous donnons aussi trois modèles de la brisure partielle de la supersymétrie globale $\mathcal{N} = 2$. Ensuite, nous étudions la réalisation branaire du modèle de la brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ dans la référence «arXiv :1204.2141» basé sur le couplage de n multiplets vectoriel de secteur de jauge avec un seul hypermultiplet de secteur de la matière. Enfin, nous utilisons la méthode de l'étude effectuée dans la référence «arxiv :1501.07842» pour réaliser un modèle de brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ qui décrit le couplage de n multiplets vectoriels avec n hypermultiplets.

.....

Mots-clefs: supersymétrie étendue, brisure partielle, réalisation branaire, au-delà du modèle standard, identité de Ward.

Author : Mohammed Nabil EL KINANI

Title : Contributions to the Study of Breaking of $\mathcal{N}=2$ Supersymmetry
at two different scales

Abstract

.....

The stumbling block for constructing an extended $\mathcal{N} > 1$ supersymmetric version of the Standard Model of particle physics is mainly due to the non-chirality of the these $\mathcal{N} > 1$ supersymmetry theories. However, thanks to the partial breaking of $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry theory, it is possible to bypass this obstacle and therefore to build phenomenologically viable models from it. The present thesis contributes to the study of the partial breaking of the $\mathcal{N} = 2$ global supersymmetry. We first present the essential ingredients of the Standard Model of particle physics to show the important role of the spontaneous breaking of the electroweak symmetry. Then, we study the supersymmetric theories and we also give three models describing partial breaking of $\mathcal{N} = 2$ global supersymmetry. Next, we study brane realization of the $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry partial breaking model of «arXiv : 1204.2141» which based on n vector multiplets coupled to hypermatter. Finally, we use the method introduced in "arxiv : 1501.07842" to study the $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry partial breaking for n vector multiplets coupled to n hypermultiplets.

.....

Keywords : extended supersymmetry, partial breaking, Ward identity, beyond standard model, brane realisation.

Table des matières

Introduction générale	1
I Modèle standard de la physique des particules	7
I.1 Contenue en champs	7
I.1.1 Champs de la matière : Fermions	8
I.1.2 Champs de jauge et champ scalaire : Bosons	10
I.2 Lagrangien du modèle standard	11
I.2.1 Lagrangien de l'électrodynamique quantique	14
I.2.2 Lagrangien de la chromodynamique quantique	16
I.2.3 Lagrangien électrofaible	17
I.3 Mécanisme de Higgs	19
I.3.1 Brisure spontanée de la symétrie électrofaible	19
I.3.2 Masse des bosons	23
I.3.3 Masse des fermions	25
I.4 Problèmes du modèle standard	26
I.4.1 Problèmes du modèle standard	26
I.4.2 Une solution : la supersymétrie	28
II Représentations des théories Supersymétriques	31
II.1 Algèbre de Poincaré et ses représentations	31
II.1.1 Algèbre de Lorentz et ses représentations	31
II.1.2 Algèbre de Poincaré et ses représentations	40
II.2 Superalgèbre de Poincaré et ses représentations	44
II.2.1 Superalgèbre de Poincaré	44
II.2.2 Représentations de la superalgèbre de Poincaré	47
II.3 Superspace et superchamps	75
II.3.1 Superspace	76
II.3.2 Superchamps	80
III Brisure spontanée de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$	85
III.1 Lagrangien de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$	85
III.1.1 Etude du secteur de la matière	85
III.1.2 Etude du secteur de jauge	87
III.1.3 Lagrangien de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$	89
III.2 Brisure spontanée de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$	91
III.2.1 Brisure spontanée de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$: Modèle O'Rai- feartaigh	92
III.2.2 Brisure spontanée de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$: Modèle de Fayet- Iliopoulos	96

IV Brisure partielle de la supersymétrie globale $\mathcal{N} = 2$	101
IV.1 Brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$: Théorie de jauge pure . .	104
IV.1.1 Etude dans le superspace de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$	105
IV.1.2 Etude dans le superspace de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$	107
IV.1.3 Brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$: Modèle minimal .	110
IV.1.4 Brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$: Modèle général . .	111
IV.2 Brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$: Couplage avec la matière	115
IV.2.1 Dualité tensoriel-chiral de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$	115
IV.2.2 Etude du secteur de jauge	119
IV.2.3 Etude du secteur de la matière	124
IV.2.4 Brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ à deux échelles dif- férentes	129
V Contributions	139
V.1 Contribution I : $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetry Partial Breaking and Tadpole Anomaly	139
V.2 Contribution II : On the partial breaking of $\mathcal{N} = 2$ rigid supersymmetry with complex hypermultiplets	170
Conclusion générale	189
Bibliographie	191

Liste des publications et communications

Au cours de la préparation de cette thèse de doctorat, les contributions suivantes ont été apportées :

- [1] R. Ahl Laamara, M. N. El Kinani, E. H. Saidi and M. Vall, N=2 Supersymmetry Partial Breaking and Tadpole Anomaly, *Nuclear Physics B* **901** (2015) 480–509 [[arXiv:1512.00704](#)].
- [2] M. N. El Kinani and M. Vall, On the partial breaking of $\mathcal{N} = 2$ rigid supersymmetry with a complex hypermultiplet, *Progress of Theoretical and Experimental Physics* **2019** (2019) 123B03 [[arXiv:1911.00858](#)].

Ainsi, des communications orales sur le sujet de la thèse ont été présentées dans les conférences suivantes :

- [1] Journées Doctorales Nationales CPM-2015, du 11 au 13 juin 2015 à l'Institut Scientifique et Faculté des Sciences de Rabat, Rabat, Maroc.
- [2] Journées Doctorales Nationales CPM-2016, du 26 au 28 mai 2016 à l'Institut Scientifique et Faculté des Sciences de Rabat, Rabat, Maroc.
- [3] Journées Nationales des Doctorants et des Jeunes Chercheurs, le 18 et 19 juillet 2017 à l'Ecole Normale Supérieure de L'Enseignement Technique de Rabat, Rabat, Maroc.

Introduction générale

Depuis la fin du XIX^e siècle, les avancées de la physique des particules élémentaires ont été ponctuées grâce au développement des théories confirmées par l'expérience et elles ont profondément changé notre compréhension de la nature. Ainsi, elles ont inspirées la construction de ce qu'on appelle désormais le modèle standard de la physique des particules[1–35]. Ce modèle décrit trois des quatre interactions fondamentales de toute la matière visible de l'univers à partir de deux types de particules. Les particules de matière qui obéissent à la statistique de Fermi-Dirac appelées fermions, et les particules responsables des interactions qui obéissent à la statistique de Bose-Einstein appelés bosons. La description de ces particules est basée sur la symétrie de jauge du modèle standard $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, où l'interaction forte est décrite par la symétrie $SU(3)_c$ et l'interaction électrofaible par la symétrie $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Cette dernière est contrairement à la symétrie $SU(3)_c$ n'est pas une symétrie exacte, puisque à une échelle d'énergie à l'ordre de 100 GeV elle se brise spontanément au groupe $U(1)_{e.m.}$ qui décrit l'interaction électromagnétique. Ce mécanisme de brisure est responsable de la génération des masses des particules du modèle et il nécessite l'introduction d'un boson scalaire appelé boson de Higgs. La construction du modèle standard est basée sur le principe d'invariance de jauge, où chacune des trois interactions doit être décrite par une théorie invariante sous la symétrie de jauge correspondant à chaque interaction. Cette invariance impose l'introduction des bosons vecteurs (appelés aussi bosons de jauge) qui sont responsables des forces qui s'exerce entre les particules chargées sous la symétrie de jauge de chaque interaction, et aussi pour garantir l'invariance sous l'action des transformations locales par les générateurs des symétries continues. Ces théories invariantes permettent la construction de la forme finale du lagrangien total du modèle standard. Cette construction doit aussi respecter la chiralité gauchère des fermions qui permet de protéger leurs masses et de déterminer leurs représentations. La chiralité est une propriété importante aussi pour la construction de la version étendue minimale du modèle standard dans le cadre de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ qui respecte ce principe selon la nature des représentations des superchamps [36–46]. Mais dans le cas de la supersymétrie étendue $\mathcal{N} \geq 2$ la théorie devient non-chirale et les représentations ne décrivent pas les particules du modèle standard. Cependant, on peut rendre la théorie de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ chirale par sa brisure partielle à deux échelles d'énergies différentes à $\mathcal{N} = 1$ et construire des représentation qu'on peut utiliser pour décrire les particules ordinaire [47–51]. Ainsi, on peut construire des modèles étendue au-delà de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$. L'étude de la brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ est l'objectif de cette présente thèse.

Historiquement, la prédiction théorique des particules élémentaires du modèle standard ainsi la confirmation expérimentale de leurs existence a commencé en 1897 lorsque Thomson a prouvé expérimentalement l'existence de l'électron [1, 2], qui a été prédit théoriquement par Stony en 1874 [3]. Le modèle mathématique d'atome de Thomson imagine les électrons se déplacent à l'intérieur d'une mer de charges positives, ce modèle a été infirmé en 1909 par Rutherford qui a montré que l'essentiel de la masse de l'atome

est concentré dans un tout petit volume chargé positivement, le noyau [4]. Le premier modèle qui donne une description auquel l'électron orbite autour du noyau avec lequel il interagit électriquement est le modèle d'atome d'hydrogène proposé par Bohr en 1914 [5]. Ce modèle a laissé penser à l'époque que les autres atomes plus lourds seraient des multiples de l'atome d'hydrogène et leurs noyaux se composent à partir des particules de charge positive appelés proton. Mais ce n'est pas le cas, car par exemple l'atome d'hélium qui se place suivant l'hydrogène dans le tableau périodique à deux électrons, pèse quatre fois plus que l'atome d'hydrogène. L'explication vient avec la découverte d'une particule ayant une masse très proche de celle du proton et une charge électrique nulle par Chadwick en 1932 appelée neutron [6]. Une question demeurerait : quelle force assure la cohésion du noyau formé des protons chargés positivement et des neutrons étant neutres ? La réponse a été proposée par le Japonais Hideki Yukawa en 1934 [7], qui a introduit une nouvelle force appelée force forte, ce nom vient de son intensité qui est supérieure à celle des deux autres forces électromagnétique et gravitationnelle connues à l'époque.

En parallèle avec les découvertes des constituants de la matière, et en 1900 Max Planck a donné la première ouverture vers le monde des quanta par son idée de la quantification de l'énergie associée aux ondes électromagnétiques à partir de ses études sur le rayonnement du corps noir [8], c'est à dire que l'énergie ne peut prendre que des valeurs multiples d'une valeur d'énergie élémentaire appelée quantum. Cette idée a été développée en 1905 par Einstein qui a décrit le photon comme un quantum de lumière qui se comporte comme une particule pour expliquer l'effet photoélectrique [9], dont les prédictions ont été vérifiées par Millikan en 1916 [10]. L'idée que la lumière se comporte aussi comme une particule a été refusée à l'époque au profit de l'idée que la lumière est une onde, mais grâce à l'expérience de diffusion de Compton en 1923 la théorie corpusculaire s'est imposée [11]. Cependant, la description du comportement des particules nécessite alors l'élaboration de la mécanique quantique, cela a été réalisé en 1925 grâce à Erwin Schrödinger qui s'est intéressé à l'étude de l'électron pour développer l'équation qui décrit son évolution dans le temps. Cela a permis à Paul Dirac de rendre compte du caractère relativiste de cette description du comportement des particules par l'unification de la mécanique quantique et la relativité restreinte d'Einstein en une théorie quantique des champs, et en 1927 il a établi l'équation portant son nom et qui décrit le cas d'un électron relativiste [12], c'est à dire animés de vitesses proches de celle de la lumière. Mais Dirac a compris que son équation ne décrit pas que l'électron, car pour chaque valeur de la quantité de mouvement l'équation donne quatre solutions, deux solutions correspondent à un électron d'énergie positif et les deux autres solutions à une particule d'énergie négatif. Cet antiélectron (ou positron) va être découvert en 1932 par Carl Anderson dans les rayons cosmiques [13]. Cela montre une propriété générale, à chaque particule de charge non nulle on peut associer une antiparticule qui ont des charges opposées l'une à l'autre et qui ont la même masse. Mais dans le cas d'une particule de charge nulle comme le photon, particule et antiparticules sont identiques. Cependant l'électron et le positron sont insuffisants pour résoudre une énigme posée à l'époque sur l'énergie manquante durant une désintégration nucléaire β naturelle, où un noyau se transforme en un autre en émettant un électron ou un positron, la solution a été proposée par Pauli en 1930 qui a l'idée qu'une nouvelle particule [14], appelé neutrino (découvert par Cowan et Reines en 1956 [15]) qui se produit au même temps que l'électron durant la désintégration nucléaire. Les années suivantes la théorie de la

désintégration β qui incorpore l'idée de Pauli à été élaboré par Fermi [16], qui a modélisé l'interaction faible par une force de portée nulle. La théorie expliquait beaucoup de choses, mais son comportement à haute énergie n'était pas exact. Les physiciens supposent alors que l'interaction faible devrait se faire par l'échange de bosons massifs. Ce principe de véhiculer une interaction par l'échange de bosons est bien représenté par les diagrammes inventés par Richard Feynman dans les années 1940 pour décrire l'interaction de particules portant une charge électrique pour développer la théorie de l'électrodynamique quantique (QED) [17–19], où la force électromagnétique résulte de l'échange de photons. Entre 1940 et 1950 un grand nombre de particules ont été découvertes expérimentalement, cela impose l'idée de trouver une structure sous-jacente pour mettre en ordre ces particules malgré leurs différences apparentes comme le tableau périodique des éléments de Mendeleïev. En 1963 Murray Gell-Mann a proposé un modèle basé sur un groupe particulier de symétrie sous lequel les particules sont rassemblées dans des sous-ensembles appelés multiplets [20]. A cette époque elle existe aucune description valable des bosons massifs médiateurs de l'interaction faible, juste des modèles qui décrivent des bosons de jauge de masse nulle. Comme le modèle de Jeffrey Goldstone [21–23], qui a été proposé en 1961 et qui décrit des particules non massives nommées boson de Nambu-Goldstone. Mais en 1964, Brout et François Englert [24], d'une part et Peter Higgs d'autre part [25], ont mis en évidence l'importance de la brisure spontanée de symétrie en physique des particules. Peter Higgs a donné l'exemple d'un modèle avec des bosons et le photon sans masse qui interagissent. Cette théorie est basée sur une symétrie apparente qui se brise spontanément et qui contient un boson scalaire supplémentaire de masse non nulle, le boson de Higgs. Le mécanisme de brisure de Englert-Brout-Higgs a eu un rôle crucial dans la construction du modèle standard de la physique des particules, qui décrit trois des quatre interactions fondamentales. L'idée d'unifier ces interactions sous une seule théorie complète et cohérente a été introduite au début par Schwinger en 1957, qui a proposé d'unifier l'interaction faible et électromagnétique, dite électrofaible. Cette unification sera proposée par Glashow en 1960 [26]. La forme moderne de cette théorie a été formulée par l'introduction du mécanisme de Englert-Brout-Higgs, établi indépendamment en 1967 par Steven Weinberg [27], et Abdu Salam [28]. De plus l'interaction électrofaible introduit un boson scalaire massif identique au boson scalaire de Higgs et aussi une particule massive neutre médiatrice de l'interaction électrofaible le boson Z^0 et deux particules massives médiatrices chargées les bosons $W^\pm$. Ces trois bosons vecteurs seront découverts au CERN en 1983 [29–32]. Cela engendra la création du Modèle Standard de la physique des particules. Entre temps, une théorie sur les quarks a été développée par analogie avec l'électrodynamique quantique en 1970 appelée la théorie de la chromodynamique quantique (QCD) dont les médiateurs sont les gluons découverts en 1979 auprès de l'accélérateur PETRA [33]. Puis la chromodynamique quantique a été intégrée au Modèle Standard de la physique des particules. Le Modèle Standard a permis de prédire avec une très grande précision de nombreuses observables de physique des particules jusqu'à des énergies de l'ordre de quelques centaines de GeV. La clé de ce modèle, le boson de Higgs responsable du mécanisme de brisure de la symétrie électrofaible a été mis en évidence le 4 juillet 2012 au Large Hadron Collider (LHC) [34, 35].

Cependant, malgré le fait que le modèle standard n'ait jamais été pris en défaut, plusieurs indices semblent montrer qu'il ne s'agit que d'une théorie effective à basse énergie d'une théorie plus fondamentale que nous devons trouver. Parmi ces indices,

les corrections radiatives à la masse du boson de Higgs qui présentent une divergence quadratique à haute énergie posent un problème de hiérarchie de l'échelle électrofaible et la naturalité de la masse du boson de Higgs vis à vis de l'échelle de Planck. Le modèle standard ne répond pas aussi à certaines questions qui restent ouvertes. Comme indiqué avant, l'interaction gravitationnelle n'est pas décrite dans ce modèle. Ainsi 95% de l'univers est composé de matière invisible (matière noire et énergie noire) qui est nécessairement constituée par des particules non prédites par le modèle standard. Ces problèmes montrent qu'une nouvelle physique doit exister et qui est décrite par une théorie au-delà du modèle standard. Comme on le verra plus en détail par la suite, la supersymétrie permet de résoudre certains de ces problèmes. Il s'agit d'une nouvelle symétrie entre bosons et fermions. En associant à chaque particule bosonique une particule fermionique (dite superpartenaire) et vice versa, on peut supprimer les divergences quadratiques des corrections à la masse du boson de Higgs, et de proposer un candidat naturel à la matière noire et aussi d'avoir la possibilité d'inclure l'interaction gravitationnelle. L'étude des symétries a joué un rôle important dans la construction du modèle standard. Il est par conséquent naturel d'introduire une nouvelle symétrie, de manière à étendre le modèle standard. La théorie de la supersymétrie est apparue à la fin des années 1960, elle a trouvé sa source à partir d'une idée simple qui a des conséquences théoriques et phénoménologiques particulièrement extraordinaires pour la physique des particules. Cette idée est de trouver une extension du groupe de Poincaré à des symétries internes. Il est intéressant de noter qu'en 1967 Coleman et Mandula montrent un argument rigoureux avec leur fameux théorème no-go [36], qui prouve que le groupe de Poincaré est le groupe de symétrie maximal respectant le groupe de Lorentz, et si on cherche à rajouter des symétries continues d'espace-temps, toute théorie devient sans interaction. Ce théorème n'autorise donc a priori que des symétries internes. Alors l'extension du groupe de Poincaré est impossible. Cependant, il est possible de surmonter ce problème en utilisant une algèbre avec des anticommutateurs, appelée algèbre de Lie graduée au lieu de l'algèbre de Poincaré qui n'implique que des relations de commutation. Cela permet de relier des composantes fermioniques (élément impairs) qui anticommutent avec des composante bosonique (élément pairs) qui commutent. Cette algèbre de Lie graduée est l'algèbre de la supersymétrie qui propose une symétrie entre fermions et bosons. Cette superalgèbre est définie par l'introduction de nouveaux générateurs qui anticommutent (avec le caractère fermionique) et qui se transforment comme les représentations du groupe de Lorentz (i.e. spineurs de Weyl), et le fait qu'ils ne portent pas d'indices de Lorentz (i.e. ni vecteurs, ni tenseur) ils ne sont pas alors soumis au théorème no-go de Coleman-Mandula. Cependant, on peut considérer l'algèbre de la supersymétrie comme une extension de l'algèbre de Poincaré. La première description de la supersymétrie a été proposé par Pierre Ramond en 1970 dans le contexte de la théorie des cordes à deux dimensions [37]. En 1971, Yuri Golfand et Evgeny Likhtman étendent l'algèbre de Poincaré à la superalgèbre de Poincaré avec des coordonnées fermioniques pour donner une explication à la violation de la symétrie de la parité dans l'interaction faible [38]. Indépendamment et dans la même année, une première réalisation non linéaire a été proposée par Dmitry Volkov et Vladimir Akulov pour interpréter le neutrino comme une particule de Goldstone associée à la brisure de la symétrie de translation suivant ces coordonnées fermioniques [39]. Mais la supersymétrie n'a connu le succès qu'en 1973 lorsque Julius Wess et Bruno

Zumino réalisent l'extension à quatre dimensions des transformations de jauge supersymétriques développées à deux dimensions en théorie des cordes de Pierre Ramond pour l'objectif de trouver une solution aux divergences quadratiques d'une théorie quantique des champs [40]. Le modèle de Wes-Zumino a permis la construction d'une théorie de la supersymétrie renormalisable, mais avec une prédiction phénoménologique importante, les superpartenaires associées aux particules du modèle standard formant un supermultiplet, avaient la même masse. Or, aucune paire de superpartenaires n'a été observé expérimentalement. La seule explication est que ces superpartenaire ont des masses plus grandes que celle des particules du modèle standard, de la même façon pour expliquer la masse non nulle des bosons de jauge Z^0 et $W^\pm$ par la brisure de la symétrie électrofaible. Alors la supersymétrie est aussi une symétrie brisée à notre échelle d'énergie. Les premiers modèles de brisure de la supersymétrie sont réalisés par Fayet et Iliopoulos en 1974 [41], puis par O'Raifeartaigh en 1975 [42]. Dans la même année, Haag, Lopuszanski et Sohnius [43], montrent qu'il n'était pas indispensable de n'avoir que des commutateurs dans l'algèbre comme proposé par Coleman et Mandula, une algèbre de Lie graduée contenant des commutateurs et des anticommutateurs est tout à fait acceptable. En 1976, Fayet propose d'associer à chaque particule du modèle standard un superpartenaire [44]. Cette extension est appelée modèle standard supersymétrique minimale $\mathcal{N} = 1$. La construction de lagrangiens supersymétriques a été ensuite généralisée par Salam et Strathdee [45]. Parallèlement, Ferrara, Freedman et van Nieuwenhuizen [46], donnent une interprétation locale de la supersymétrie qui nécessite d'introduire une particule de spin $\frac{3}{2}$ pour garder l'invariance de jauge, cette particule est appelée gravitino décrit le superpartenaire du graviton du spin 2 médiateur de l'interaction gravitationnelle. Le graviton acquiert une masse grâce au mécanisme de super-Higgs (extension supersymétrique du mécanisme de Higgs) en absorbant un fermion de Goldstone (goldstino) qui apparaît lors de la brisure de la supersymétrie globale. La supergravité incorpore de manière naturelle l'interaction gravitationnelle, ce qui a permis la construction des modèles de supegravité $\mathcal{N} = 1$ pures incorporent des mécanismes naturels permettant aussi d'obtenir une description de l'énergie noire. De plus la limite rigide de la théorie de jauge pure de la supergravité $\mathcal{N} = 2$ [47], offre la possibilité de construire des modèle supersymétriques $\mathcal{N} = 2$ par la brisure partielle à deux échelles différentes, et résoudre ainsi le problème de la chiralité qu'on a mentionné au début et qui fait l'objet de ce présent travail composé de cinq chapitres.

Chapitre 1 : Modèle standard de la physique des particules

Le premier chapitre est consacré à l'étude du modèle standard de la physique des particules, où des éléments essentiels à la compréhension et à la construction du lagrangien du modèle sont présentés. Nous commençons par le contenu en champs du modèle. Ensuite la construction du lagrangien total. Puis nous allons utiliser le mécanisme de Higgs pour briser spontanément la symétrie électrofaible et générer des masses aux différentes particules. Pour finir, nous discutons les problèmes et les limites du modèle standard, ainsi la solution de ces problèmes.

Chapitre 2 : Représentations des théories Supersymétriques

Dans le deuxième chapitre nous présentons l'étude des théories supersymétriques. Au début nous donnons la définition de l'algèbre de Poincaré et la construction de ses représentations. Ensuite, nous donnons la construction de la superalgèbre de Poincaré et ses différentes représentations. Puis, nous allons étendre l'espace-temps en superspace

pour le cas de la théorie minimale de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$. Ainsi, la construction des superchamps chirale et vectoriel dans le cadre de cette théorie.

Chapitre 3 : Brisure spontanée de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de la brisure spontanée du modèle minimale supersymétrique $\mathcal{N} = 1$. Tout d'abord, nous allons construire le lagrangien de cette théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 1$. Ensuite nous présentons deux modèles de brisure spontanée de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$. Le premier modèle est basé sur le champ auxiliaire du multiplet chirale $\mathcal{N} = 1$, appelé modèle de O'Raifeartaigh, et le second modèle basé sur le champ auxiliaire du multiplet vectoriel $\mathcal{N} = 1$, appelé modèle de Fayet-Iliopoulos.

Chapitre 4 : Brisure partielle de la supersymétrie globale $\mathcal{N} = 2$

Dans le quatrième chapitre nous présentons trois modèles de littérature de la brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$, le premier découvert par Antoniadis, Partouche et Taylor dans la référence [47], présente une théorie de jauge pure basé sur un seul multiplet vectoriel de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$. Le second modèle présente la généralisation du modèle précédent pour le cas de n multiplet vectoriel. Ce modèle est découvert par Andrianopoli, D'Auria, Ferrara et Trigiante dans la référence [48]. Enfin, le troisième modèle présente le couplage du secteur de jauge précédent avec le secteur de la matière, ce dernier est décrit par un seul hypermultiplet de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$. Ce modèle a été découverte par Antoniadis, Derendingen et Jacot dans la référence [49].

Chapitre 5 : Contributions

Au cours de la préparation de cette thèse de doctorat, nous avons publié deux contributions dans des revues scientifiques avec comité de lecture.

Contribution 1 : $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetry Partial Breaking and Tadpole Anomaly

Dans la première contribution [50], nous avons réalisé la version branaire D3 du modèle de Antoniadis, Derendingen et Jacot qu'on va étudier dans le quatrième chapitre. Nous avons considéré l'extension $U(1)^n$ du modèle effectif $U(1)^2$ de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$, ainsi la liaison entre l'anomalie "tadpole" de la théorie des cordes type IIB compactifiée sur une variété de Calabi-Yau de trois dimensions complexes en présence des flux non triviaux des tenseurs H_3^{RR} et H_3^{NS} de force des champs de jauge 3-formes, avec la contrainte de la brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$. Cette étude nous a permis de réaliser la brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ pour le cas spécial d'une théorie de Maxwell avec un seul $U(1)$.

Contribution 2 : On the partial breaking of $\mathcal{N} = 2$ rigid supersymmetry with complex hypermultiplets

Dans la deuxième contribution [51], nous allons réaliser la brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ en se basant sur le modèle de Antoniadis, D'Auria, Ferrara et Trigiante [48], où nous allons décrire le secteur de la matière par des hypermultiplets complexes. Nous dérivons aussi la relation de la transformation symplectique de ce modèle. Nous allons aussi donner la contrainte de la brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ du modèle Antoniadis, Derendingen et Jacot [49] par une réalisation particulière.

Finalement, nous allons terminer avec une conclusion générale et quelques perspectives.

Chapitre I

Modèle standard de la physique des particules

Le modèle standard de la physique des particules [26–32], est le cadre théorique qui permet de décrire trois des quatre interactions fondamentales, l’interaction forte, faible et électromagnétique, ainsi que le comportement des composantes les plus élémentaires de la matière, les quarks et les leptons. Le groupe de jauge du modèle standard est le suivant :

$$G_{MS} = SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y. \quad (\text{I.1})$$

Le premier facteur $SU(3)_c$ est le groupe de jauge des interactions fortes (théorie de la chromodynamique quantique *QCD*) appelé aussi groupe de la couleur, où c désigne la charge de couleur. Le facteur $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ est le groupe qui décrit les interactions électrofaibles (unifications des interactions faibles et électromagnétiques) il contient le groupe $SU(2)_L$ de l’isospin faible, où l’indice L indiquant que seuls les fermions de chiralité gauche se transforment sous ce groupe, et $U(1)_Y$ le groupe de l’hypercharge faible indiquée par le symbole Y . Le groupe de jauge de l’interaction électromagnétique (théorie de l’électrodynamique quantique *QED*) est $U(1)_{e.m.}$ qui est le groupe résiduel après la brisure spontanée du groupe $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ par le mécanisme de Higgs à une échelle d’énergie à l’ordre de 100 GeV .

Ce chapitre a pour but de présenter le formalisme théorique du modèle standard de la physique des particules, tout d’abord nous allons présenter les constituants élémentaires de cette théorie, puis nous allons construire les différentes théories qui ont mené à sa construction : QED, QCD et l’interaction faible, cette dernière sera regroupée avec la QED en une seule interaction (électrofaible), ensuite nous utilisons le mécanisme de brisure pour briser spontanément cette symétrie électrofaible. Pour finir nous allons discuter les problèmes et les limites du modèle standard ainsi que les solutions.

I.1 Contenue en champs

Les constituants élémentaires du modèle standard (particules) ont plusieurs propriétés qui permettent de les regrouper en familles, une première distinction se fait en fonction du spin (moment cinétique intrinsèque) de la particule, si le spin a une valeur entière (dans l’unité atomique) la particule est un boson et si la valeur du spin est demi-entière il s’agit donc d’un fermion. Les fermions respectent le principe d’exclusion de Pauli qui interdit que deux particules fermioniques identiques se trouvent exactement dans le même état quantique, et ce n’est pas le cas pour les particules bosoniques.

Alors les constituants de la matière sont des fermions et les particules échangées lors des interactions (médiateurs) sont des bosons.

I.1.1 Champs de la matière : Fermions

Pour les fermions on distingue deux familles, les leptons et les quarks, les leptons sont insensibles à l'interaction forte, trois leptons sont chargés, l'électron (e), le muon (μ) et le tau (τ), chacun d'eux est associé à un lepton neutre, respectivement le neutrino électronique (ν_e), le neutrino muonique (ν_μ) et le neutrino tauique (ν_τ). On a ensuite les six quarks, sensibles à l'interaction forte, trois de charge électrique $+\frac{2}{3}$, le (u), (c) et (t), appelés up, charm et top et trois quarks de charge $-\frac{1}{3}$, le (d), (s) et (b), appelés down, strange et bottom, les six quarks n'existent que sous la forme d'états liés, trois quarks forment un baryon tel le proton ou le neutron qui sont des fermions, et la combinaison d'un quark et un antiquark forme un méson, tel le pion ou le kaon qui sont des bosons. Les baryons et les mésons sont des particules composites sensibles à l'interaction forte que l'on regroupe sous le terme d'hadron. La découverte du baryon Ω^- composé de trois quarks (s) semblait violer le principe d'exclusion de Pauli que les quarks sont censés respecter, alors pour résoudre cette difficulté, les physiciens ont supposé que les quarks portent une charge quantique associée à l'interaction forte analogue à la charge électrique nommée couleur et qui existe sous trois formes. Un hadron doit être de couleur neutre, ainsi les trois quarks (s) du Ω^- ne sont pas dans le même état, chacun porte une charge de couleur différente. Pour les mésons le quark porte une couleur et l'antiquark porte l'anti-couleur associée, l'antiquark est une antiparticule qui a la même masse que le quark associé mais toutes charges quantiques sont opposées notamment sa charge électrique et sa couleur. Toutes les particules du modèle standard ont une antiparticule associée, dans certains cas la particule et l'antiparticule sont identiques comme le cas du photon. Notons que le neutron qui est électriquement neutre n'est pas sa propre antiparticule, car il est composé de deux quarks (d) et d'un (u) alors que l'antineutron est composé de deux antiquarks ($\bar{d}$) et d'un antiquark ($\bar{u}$).

Ces champs de matière (ou spinoriels) du modèle standard se différencient par leurs interactions, i.e. par l'intensité de leur interaction avec le boson de jauge B_μ du groupe de jauge $U(1)_Y$ caractérisée par l'hypercharge faible Y du fermion, et par l'existence ou l'absence d'un couplage aux gluons de groupe de jauge $SU(3)_C$ ou aux bosons de jauge du groupe de jauge $SU(2)_L$. Les fermions chargés du modèle standard possèdent deux états de chiralité, spineur de chiralité droite ψ_R et spineurs de chiralité gauche ψ_L données comme suit :

$$\psi_L = \begin{cases} L_{aL} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L \\ Q_{aL} = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L \end{cases}, \quad (I.2)$$

$$\psi_R = \begin{cases} Q_{aR} = u_R, d_R, c_R, s_R, t_R, b_R \\ L_{aR} = e_R, \mu_R, \tau_R \end{cases}.$$

Alors pour que les transformations de jauge des différents spineurs ψ_L et ψ_R ne violent pas la parité P dans les interactions entre les fermions et les champs de jauge, il faut caractériser indépendamment ces transformations de jauge pour chaque chiralité ou remplacer les fermions droitiers par leurs conjugués sous CP (dite anti-fermions gauchers) comme suit :

$$\psi_R \longrightarrow (\bar{\psi}_{\dot{\alpha}})_L = \varepsilon_{\dot{\alpha}\beta} (\psi_R^{\dot{\beta}})^* . \quad (I.3)$$

Ainsi nous avons un spectre entièrement composé des fermions gauchers i.e. quarks, antiquarks, leptons et antileptons, ce qui signifie que ce spectre est chiral, cette propriété de chiralité est très importante dans la construction de ce modèle et la construction des modèles au-delà du modèle standard comme nous allons voir dans le chapitre suivant dans l'étude de la supersymétrie. Pour simplifier nous allons noter les fermions gauchers ψ_L par ψ et les anti-fermions gauchers $(\bar{\psi}_{\dot{\alpha}})_L$ par $\bar{\psi}$.

La classification des quarks et les leptons est liée à la représentation du groupe de jauge qu'ils portent, les quarks qui sont sensibles à l'interaction forte appartiennent à la représentation fondamentale 3 (triplet) du groupe de jauge $SU(3)_c$ et les antiquarks à la représentation conjuguée $\bar{3}$, alors un méson formé d'un quark et un antiquark est un singlet (n'interagissent pas fortement) car la partie antisymétrique du produit $3 \times \bar{3} = 1 + 8$ est un singlet, de même pour un baryon formé de trois quarks $3 \times 3 \times 3 = 1 + 8 + 8 + 10$ est un singlet, ce qui signifie que le confinement des couleurs implique que seulement les hadrons qui forment un singlet sous $SU(3)_c$ sont observables dans la nature. Notons que puisque les quarks ont un spin $j = \frac{1}{2}$, le produit de dimension au quel appartient le spin $d \times d = 2 \times 2 = 1 + 3$ (avec, $d = 2j + 1$) implique que le spin des méson peut avoir la valeur 0 (e.g. $\pi^0, \pi^\pm$) ou 1 (e.g. $\rho^0, \rho^\pm$), de même pour les baryon, ils peuvent avoir un spin $\frac{1}{2}$ (e.g. proton, neutron) ou $\frac{3}{2}$ (e.g. $\Delta^{++}, \Delta^0, \Delta^\pm$) car $2 \times 2 \times 2 = 2 + 2 + 4$. Les leptons et leurs antiparticules (antileptons) n'interagissent pas fortement, ils sont invariant sous $SU(3)_c$ (singlet), tous les fermions se transforment sous la représentation 2 (fondamentale) du groupe de jauge $SU(2)_L$ (doublet) et les antifermions gauche forment des singlets de $SU(2)_L$.

Les quarks et les leptons existent en trois générations (familles), leurs nombres quantiques sous le groupe de jauge du modèle standard $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ sont donnés dans le [tableau I.1](#) ci-dessous.¹

Avec $Q^a = \begin{pmatrix} u^a \\ d^a \end{pmatrix}$ et $L^a = \begin{pmatrix} \nu^a \\ e^a \end{pmatrix}$, Où $a = 1, 2, 3$. numérote les trois générations de quarks et leptons. Notons que la masse est croissante de la première à la troisième génération, et notons aussi que la matière ordinaire qui nous entoure est constituée par les particules de la première génération qui sont très stable dans la nature, car dans chaque réaction il y a conservation du nombre baryonique et du nombre leptonique, le nombre baryonique du quark est $1/3$ et $-1/3$ pour un antiquark, alors un baryon (e.g. le proton) a un nombre baryonique égal à 1 et -1 pour son antiparticule, de même pour un lepton qui a un nombre leptonique 1 (e.g. électron) et -1 pour un antilepton (e.g. positron).

1. Les nombres quantiques des fermions de chiralité droite sous le groupe de jauge du modèle standard $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ sont : $u_R^a = \left(3, 1, \frac{4}{3}\right)$, $d_R^a = \left(3, 1, -\frac{2}{3}\right)$ et $e_R^a = (1, 1, -2)$.

	Champs	$SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$
Quarks	$Q^a = \begin{pmatrix} u^a \\ d^a \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} u^a = \{u, c, t\} \\ d^a = \{d, s, b\} \end{matrix}$	$(3, 2, \frac{1}{3})$
	$\bar{u}^a = \{\bar{u}, \bar{c}, \bar{t}\}$	$(\bar{3}, 1, -\frac{4}{3})$
	$\bar{d}^a = \{\bar{d}, \bar{s}, \bar{b}\}$	$(\bar{3}, 1, \frac{2}{3})$
Leptons	$L^a = \begin{pmatrix} \nu^a \\ e^a \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \nu^a = \{\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau\} \\ e^a = \{e^-, \mu^-, \tau^-\} \end{matrix}$	$(1, 2, -1)$
	$\bar{e}^a = \{\bar{e}^+, \bar{\mu}^+, \bar{\tau}^+\}$	$(1, 1, 2)$

TABLEAU I.1 – Spectre fermionique du modèle standard.

I.1.2 Champs de jauge et champ scalaire : Bosons

Bosons vecteurs

Les interactions entre particules de la matière sont véhiculées par les bosons de jauge de spin 1, le nombre de bosons de chaque interaction est égales au nombre des générateurs qui engendrent l'algèbre de Lie de chaque groupe. En effet les groupes du modèle standard est de type $U(N)$ formés par des matrices unitaire $N \times N$ ², et $SU(N)$ qui est le sous-groupe de $U(N)$ des matrices unimodulaires, l'algèbre de lie est obtenue en posant $U = e^{iT}$, alors l'unitarité ($T^\dagger = T$) impose que l'algèbre de Lie de $U(N)$ est engendrée par $d = N^2$ générateurs hermétiques, et l'unimodularité³ ($Tr(T) = 0$) impose que la dimension de $SU(N)$ est $d = N^2 - 1$, et le générateur se définit par $T = \sum_{A=1}^d \omega^A T^A$, où ω^A est un paramètre réel. Les groupes $U(1)$, $SU(2)$ et $SU(3)$ ont donc respectivement 1, 3 et 8 générateurs, et chacun de ces groupes est associé au paramètre ω^A . Le groupe $U(1)$ est représenté par $e^{i\omega T}$ qui sont des phases complexes et leurs transformations agissent sur T qui est un nombre réel appelé charge du champ. Pour le groupe $SU(2)$, les trois générateurs (représentation bi-dimensionnelle) sont des matrices hermétique de trace nulle définit par :

$$T^a = \frac{1}{2} \sigma^a, \quad a = 1, 2, 3. \quad (\text{I.4})$$

où σ^a sont les matrices de Pauli, et T^a vérifient :

$$[T^a, T^b] = i\epsilon^{abc} T^c, \quad (\text{I.5})$$

avec ϵ^{abc} les constantes de structure du $SU(2)$. Enfin pour le groupe $SU(3)$ les huit générateurs sont :

$$T^A = \frac{1}{2} \lambda^A, \quad A = 1, \dots, 8. \quad (\text{I.6})$$

2. $U^\dagger U = U U^\dagger = I$.

3. Qui est une condition supplémentaire (absence de trace).

où λ^A sont les matrices de Gell-Man, et T^A vérifient :

$$[T^A, T^B] = if^{ABC}T^C,$$

avec f^{ABC} les constantes de structure du $SU(3)$. Donc le modèle standard contient 12 bosons de jauge, où G_μ^A sont les huit gluons non massifs médiateurs de l'interaction forte de portée $\sim 10^{-15}$ mètres due aux confinement de la charge de couleur. Les quatre bosons de jauge W_μ^a et B_μ donneront naissance après la brisure de la symétrie électrofaible $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ aux bosons physiques $W^\pm$, Z^0 de l'interaction faible de portée $\sim 10^{-18}$ mètres due à leurs masse non nul, et enfin le photon médiateur de l'interaction électromagnétique de masse nulle et de porté infini.

Boson scalaire

Le boson de Higgs, de spin 0 est la seule particule scalaire du modèle standard et la dernière à avoir été découverte au Grand collisionneur de hadrons (LHC) du CERN [34, 35]. Elle permet au travers de la brisure spontanée de la symétrie électrofaible $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, d'introduire des termes de masse pour les fermions et les bosons de jauge, tout en préservant l'invariance de jauge. Les nombres quantiques du boson scalaire et ceux des bosons vecteurs sous le groupe de jauge du modèle standard $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ sont données dans le tableau suivant :

<i>Champs</i>		$SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$
$SU(3)_c : G_\mu^A$	$A = 1, \dots, 8$	$(8, 1, 0)$
$SU(2)_L : W_\mu^a$	$a = 1, 2, 3$	$(1, 3, 0)$
$U(1)_Y : B_\mu$		$(1, 1, 0)$
<i>Higgs</i>		$(1, 2, 1)$

TABLEAU I.2 – Spectre bosonique du modèle standard.

I.2 Lagrangien du modèle standard

Toutes les théories que nous allons présenter dans cette partie présentent des points communs, elles sont des théories quantiques de champs, où l'étude des symétries se fait dans le cadre de la théorie des groupes. La construction de ces théories est basée sur certaines propriétés de symétrie qui implique la loi de conservation dans un système. De plus, les lois de l'évolution des systèmes conservent aussi l'invariance suivant certaines transformations appelées transformations de jauge locale, qui implique que le fait de trouver la symétrie d'un système est équivalent à la prédiction des lois de son évolution. Avant de rentrer plus en détail dans la paramétrisation théorique du modèle standard, il est commode dans un premier temps d'introduire le formalisme mathématique utilisé. Comme on le verra par la suite, le modèle standard est construit en exploitant les symétries qui existent entre les différentes particules élémentaires, le formalisme le plus adéquat à cette paramétrisation est le formalisme lagrangien.

Formalisme lagrangien

En mécanique classique un système isolé décrit par le lagrangien suivant :

$$L(q, \dot{q}, t) = T - V. \tag{I.7}$$

où q et $\dot{q}$ les coordonnées généralisées et T l'énergie cinétique et V le potentiel, si le système est une particule de masse m qui se déplace suivant une dimension x dans un potentiel $V(x)$, avec $q(t) = x$ et $\dot{q}(t) = v_x$, le lagrangien s'exprime :

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x} - V(x). \quad (\text{I.8})$$

Le principe de Hamilton (principe de moindre action), implique que ce système est en évolution telle sorte que l'action $S = \int L(q, \dot{q}, t) dt$ soit minimale :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) = 0. \quad (\text{I.9})$$

L'intégration par partie de (I.9) sachant que $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ donne l'équation qui décrit l'évolution du système appelé équation d'Euler-Lagrange qui permet d'obtenir les équations du mouvement d'une particule :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (\text{I.10})$$

On peut étendre ce formalisme aux coordonnées continues ; c'est à dire dans le cas des systèmes continus en espace-temps, donc on transforme les coordonnées discrètes en champ ϕ , où le champ est lui-même une fonction du paramètre continu x_μ par :

$$L(q, \dot{q}, t) \longrightarrow \mathcal{L} \left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}, t \right). \quad (\text{I.11})$$

la densité lagrangienne $\mathcal{L}$ (appelée aussi lagrangien pour simplifier) est liée au lagrangien L par la relation suivante :

$$L = \int \mathcal{L} d^3x. \quad (\text{I.12})$$

On remarque que des objets discrets (particules) sont décrits par des objets continus (puisque l'intégration est effectuée sur les variables d'espace), cette contradiction est résolu du fait que les particules ne correspondent pas au champ lui-même mais a des excitations du champ. En appliquant le principe de moindre action pour dériver la dynamique du système de L , avec la minimisation de l'action du système, nous obtenons l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \phi / \partial x_\mu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (\text{I.13})$$

C'est grâce à ce formalisme que nous allons construire le modèle standard. Il reste à construire un lagrangien possédant les bonnes symétries pour décrire les particules en interaction, mais avant la construction du lagrangien de chaque interaction du modèle syandard, nous nous intéressons au symétrie sous laquelle ce lagrangien reste invariant, ces symétrie peuvent êtres externes (découle de la structure d'espace-temps) ou internes (découle de la structure de la théorie de champs), les symétrie externes déterminent la structure de l'espace des états physiques et les types possibles de champs

que l'on peut utiliser pour décrire des particules, ces symétries seront décrites en détails dans le chapitre suivant⁴, les symétries internes permettent de décrire plusieurs types de particules dans un lagrangien, c'est à dire un lagrangien contenant différents champs, on dit qu'un lagrangien L possède une symétrie interne s'il est invariant sous la transformation (dite transformation de jauge) suivante :

$$\phi \longrightarrow \phi' = U\phi. \quad (\text{I.14})$$

où $\phi = (\phi_1 \dots \phi_n)$ et U est une représentation unitaire de dimension n d'un groupe de Lie G , qui peut être exprimé sous la forme $U = gT_a e^{i\alpha^a}$ où T_a sont les générateurs du groupe G et g un réel et le α^a paramètre de la transformation qui ne dépend pas de l'espace-temps, c'est à dire la symétrie est dite globale⁵. Le lagrangien est invariant⁶ si on a :

$$\mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi') = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi).$$

La conséquence physique de l'invariance sous une symétrie a été prédite par le théorème de Noether [52], qui stipule que toute symétrie interne ou externe laissant invariant un lagrangien, correspond à des grandeurs et des quantités conservées. Par exemple dans le cas des symétries internes, l'invariance par translation et l'invariance par rotation impliquent la conservation de l'impulsion et du moment angulaire respectivement, dans le cas des symétries internes où les transformations ne concernent que les différents champs $\phi = (\phi_1 \dots \phi_n)$ l'invariance du lagrangien implique :

$$\partial \mathcal{L}(\phi) = \mathcal{L}(\phi + \partial \phi) - \mathcal{L}(\phi) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial (\partial_\mu \phi). \quad (\text{I.15})$$

On peut monter alors,

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_j)} \right] \partial \phi_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_j)} \partial (\partial_\mu \phi_j) = \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_j)} \partial \phi \right] = 0. \quad (\text{I.16})$$

Avec

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_j)} \delta \phi_j, \quad (\text{I.17})$$

et

$$Q = \int d^3x J_0(x). \quad (\text{I.18})$$

D'où le théorème de Noether implique :

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (\text{I.19})$$

et

$$\frac{dQ}{dt} = 0. \quad (\text{I.20})$$

4. L'étude des symétries externes sera plus utile dans la construction de l'algèbre supersymétrique puisqu'il est évident qu'une théorie de jauge est relativiste.

5. La phase est la même dans tout l'espace-temps.

6. Car les champs et leurs dérivées se transforment de la même façon, en effet $\partial_\mu \psi \longrightarrow e^{i\alpha(x)} \partial_\mu \psi$.

où J^μ le courant conservé et Q la charge conservée. Grâce à ce formalisme mathématique du lagrangien et de la notion de conservation de symétrie, on peut construire le modèle standard. Il suffit d'établir un lagrangien à chaque interaction du modèle dans le cadre d'une théorie de jauge.

I.2.1 Lagrangien de l'électrodynamique quantique

Les trois théories qui forment le modèle standard sont toutes construites selon la notion mathématiques de jauge, la première théorie que nous allons étudier dans cette partie est la théorie de l'électrodynamique quantique QED qui est une théorie de jauge abélienne basée sur le groupe de jauge abélien $U(1)$. Cette interaction décrit toutes les particules qui portent une charge électrique et par conséquent elle est invariante sous la symétrie du jauge $U(1)$. Pour mieux comprendre l'étude de la construction du lagrangien qui décrit ces particules en interaction, nous allons considérer le cas simple d'une particule et son antiparticule sans interaction, toutes les deux de masse m et de spin $1/2$ et qui sont représentées par un spineur à quatre composantes (4 dimensions) :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{I.21})$$

où ψ_1 et ψ_2 sont des spineurs à deux composantes de la particule et de son antiparticule. La dynamique de la particule doit être invariante de Lorentz, le lagrangien qui décrit cette particule libre est appelé lagrangien de Dirac, donné par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \\ &= i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi} \psi. \end{aligned} \quad (\text{I.22})$$

où γ_μ sont les matrices de Dirac données comme suit :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{I.23})$$

définies à partir des matrices σ^i de Pauli suivantes :

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{I.24})$$

et la matrice d'identité :

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{I.25})$$

Le premier terme de la deuxième ligne de l'expression du lagrangien (I.22) décrit la cinétique de la particule, et le second correspond à sa masse. Notons qu'en utilisant l'équation (I.13) on peut déterminer à partir du lagrangien précédent l'équation du mouvement ou l'équation de Dirac comme suit :

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu) \psi = 0. \quad (\text{I.26})$$

Notons aussi qu'on peut vérifier facilement que le lagrangien précédent est invariant de jauge globale sous la symétrie globale suivante :

$$\psi(x) \longrightarrow e^{ieI_4\alpha}\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0 \longrightarrow e^{-ieI_4\alpha}\bar{\psi}(x).$$

Donc les transformations $U(\alpha) \equiv e^{i\alpha}$ forment le groupe de symétrie unitaire abélien $U(1)$, et d'après le théorème de Noether cette invariance conduit à l'équation de conservation du courant électrique j^μ d'où sa charge électrique conservée associée donnée par ⁷ :

$$Q = \int j^0 d^3x. \quad (\text{I.27})$$

Le cas de symétrie globale n'est pas général, car il ne permet pas de décrire l'interaction. Pour cela nous allons généraliser l'étude précédente dans le cas d'une symétrie locale ou le paramètre de la transformation $\alpha(x)$ dépend de l'espace-temps. La transformation de la symétrie locale s'écrit :

$$\psi(x) \longrightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x). \quad (\text{I.28})$$

On remarque que le lagrangien n'est plus invariant sous la transformation locale précédente. Car contrairement au cas de symétrie globale, la dérivée du champ ne se transforme plus comme le champ,

$$\partial_\mu\psi \longrightarrow e^{i\alpha(x)}\partial_\mu\psi + ie^{i\alpha(x)}\psi\partial_\mu\alpha(x). \quad (\text{I.29})$$

Cette invariance est due au terme $\partial_\mu\alpha(x)$ qui apparait dans la transformation (I.29) et qui brise l'invariance de jauge. On peut conserver cette invariance, en introduisant dans la définition du lagrangien une autre dérivée D_μ appelée dérivée covariante et qui est invariante sous la symétrie de jauge comme suit :

$$D_\mu\psi \longrightarrow e^{i\alpha(x)}D_\mu\psi. \quad (\text{I.30})$$

Notons que l'objectif d'introduire cette dérivée est de supprimer le terme $\partial_\mu\alpha(x)$ qui brise la symétrie de jauge dans l'expression (I.29), pour cela il faut introduire un champ vectoriel A_μ appelé champ de jauge qui se couple aux fermions libres et qui se transforme de façon à supprimer le terme $\partial_\mu\alpha(x)$, donc cette dérivée covariante est donnée comme suit :

$$D_\mu \equiv \partial^\mu - ieA_\mu. \quad (\text{I.31})$$

où e une constante de couplage et la transformation du champ vectoriel A_μ est donnée par :

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha. \quad (\text{I.32})$$

7. C'est le générateur du groupe $U(1)$ (l'opérateur de charge), dont les leptons prennent les valeurs propres ± 1 , et les quarks les valeurs $\pm \frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}$.

Alors en remplaçant la dérivée ∂_μ par la dérivée covariante D_μ l'expression du lagrangien invariant sous la symétrie locale s'écrit,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \\ &= \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu,\end{aligned}\tag{I.33}$$

où le premier terme décrit une particule (fermion) libre et le second décrit le couplage de la particule avec le champ A_μ .

À ce stade le lagrangien précédent (I.33) ne décrit plus des fermions libres mais des fermions en interaction avec le champ de jauge A_μ qui correspond au photon médiateur de l'interaction électromagnétique, mais pour interpréter A_μ comme le photon, il est convenable d'ajouter dans le lagrangien un terme invariant de jauge qui décrit son énergie cinétique, le seul candidat doit être construit à partir du tenseur du champ suivant :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.\tag{I.34}$$

Finalement on obtient le lagrangien décrivant l'interaction électromagnétique :

$$\mathcal{L}_{QED} = \underbrace{\bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi}_{\text{Particule libre}} + \underbrace{e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu}_{\text{Interaction}} - \underbrace{\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}_{\text{terme cinétique de } A_\mu}.\tag{I.35}$$

Remarquant que le terme de masse du champ de jauge A_μ de type $\frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu$ est impossible à ajouter au lagrangien, car il brise l'invariance de jauge locale,

$$\frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu \rightarrow \frac{1}{2} m^2 \left(A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha \right) \left(A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha \right) \neq \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu.\tag{I.36}$$

Cela est compatible avec le photon physique qui est de masse nulle. Notons que le champ de jauge A_μ possède quatre degrés de liberté (quatre composantes), l'invariance sous la transformation de jauge (I.32) supprime une composante et la jauge de Lorentz $\partial^\mu A_\mu = 0$ supprime une autre, alors le champ A_μ reste avec deux degrés de liberté correspondent aux deux états de spin ± 1 comme le photon. Nous verrons par la suite que cette invariance va nous permettre de décrire aussi l'interaction faible (dans l'unification électrofaible) et forte.

I.2.2 Lagrangien de la chromodynamique quantique

L'interaction forte est décrite par la théorie de la chromodynamique quantique (QCD) qui explique la dynamique des particules qui portent une charge de couleur c , i.e. les quarks et les gluons (bosons vecteurs de masse nulle). Cette théorie est une théorie de jauge non abélienne gouvernée par le groupe de jauge non abélien $SU(3)_c$. Donc c'est la généralisation du cas abélien qu'on a vu dans la théorie de la QED, cela permet de façon analogue à l'étude précédente de déterminer le lagrangien de cette interaction forte qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{QCD} &= \bar{\psi} (i D_\mu \gamma^\mu - m) \psi - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi} (i \partial_\mu \gamma^\mu - m) \psi + i g_s \bar{\psi} T_a G_\mu^a \gamma^\mu \psi - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}.\end{aligned}\tag{I.37}$$

Le premier terme du lagrangien précédent (I.37) décrit des quarks libres et le second décrit le couplage quark-gluon et le troisième terme décrit des gluons libres. La dérivée covariante associée au groupe de jauge $SU(3)_c$ s'écrit :

$$D_\mu \equiv \partial^\mu - ig_s T_a G_\mu^a. \quad (\text{I.38})$$

où g_s la constante de couplage de l'interaction forte, et G_μ^a ($a = 1, \dots, 8$) représentent les gluons médiateurs de cette interaction, et les T_a générateurs du groupe $SU(3)_c$ donnés par,

$$T_a = \frac{\lambda_a}{2}. \quad (\text{I.39})$$

avec λ_a les matrices de Gell-Man. Le terme cinétique des gluons implique l'expression suivante :

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c. \quad (\text{I.40})$$

où f^{abc} sont les constantes de structure du groupe $SU(3)_c$ définies à partir de la relation suivante :

$$[T^a, T^b] = if^{abc} T^c. \quad (\text{I.41})$$

On remarque que contrairement à la QED, l'expression du champ gluons (I.40) contient un nouveau terme qui provient du caractère non abélien du groupe de jauge $SU(3)_c$, par conséquence les gluons vecteurs de la QCD portent eux même une charge de couleur, ce qui n'est pas le cas pour le photon dans la QED.

I.2.3 Lagrangien électrofaible

L'interaction électrofaible est l'unification de l'interaction électromagnétique et l'interaction faible, cette dernière permet d'expliquer les phénomènes de la radioactivité naturelle β , et elle ne se couple qu'aux particules de chiralité gauche. Cette interaction est gouvernée par le groupe de jauge d'isospin faible $SU(2)_L$, les dérivées covariantes de ce groupe de jauge pour les fermions de chiralité droite et gauche sont respectivement :

$$\begin{aligned} D_\mu^R &= \partial_\mu, \\ D_\mu^L &= \partial_\mu + ig_2 \frac{\sigma_a}{2} W_\mu^a. \end{aligned} \quad (\text{I.42})$$

On remarque dans (I.42) que seulement les fermions de chiralité gauche sont produits par cette interaction. Le lagrangien de l'interaction faible est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Faible} &= \bar{\psi}_R i D_\mu^R \gamma^\mu \psi_R + \bar{\psi}_L i D_\mu^L \gamma^\mu \psi_L - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W_a^{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi}_R (i \partial_\mu \gamma^\mu) \psi_R + \bar{\psi}_L (i \partial_\mu \gamma^\mu) \psi_L + ig_2 \bar{\psi}_L \frac{\tau_a}{2} W_\mu^a \gamma^\mu \psi_L - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W_a^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{I.43})$$

où W_μ^a ($a = 1, 2, 3$) sont les trois bosons de jauge du groupe $SU(2)_L$ et g_2 la constante de couplage et σ_a les générateurs de $SU(2)_L$, le premier et le seconde terme de (I.43) décrivent des fermions libres respectivement de chiralité droite et gauche, le troisième terme est celui du couplage des fermions gauchers avec les bosons de jauge, et le dernier terme décrit des bosons libres.

Notons que cette unification électrofaible est l'unification de la symétrie d'hypercharge avec la symétrie d'isospin faible, alors elle est décrite par le groupe de jauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Le lagrangien de cette interaction est donné comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{EF} = & i\bar{\psi}_L \left(\partial_\mu \gamma^\mu + ig_2 \frac{\sigma_a}{2} W_\mu^a \gamma^\mu + ig_1 \frac{1}{2} Y_L B_\mu \gamma^\mu \right) \psi_L + i\bar{\psi}_R \left(\partial_\mu \gamma^\mu + ig_1 \frac{1}{2} Y_R B_\mu \gamma^\mu \right) \psi_R \\ & - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W_a^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{I.44})$$

où B_μ est le champ de jauge associé au groupe $U(1)_Y$ et g_1 est la constante de couplage de $U(1)_Y$. Notons que dans ce cas les dérivées covariantes pour les fermions gauche et droite s'écrivent :

$$D_\mu^R = \partial_\mu + ig_1 \frac{Y_R}{2} B_\mu, \quad (\text{I.45})$$

$$D_\mu^L = \partial_\mu + ig_2 \frac{\sigma_a}{2} W_\mu^a + ig_1 \frac{Y_L}{2} B_\mu. \quad (\text{I.46})$$

L'invariance sous le groupe de $U(1)_Y$ implique la conservation de l'hypercharge Y qui se relie l'isospin faible T_3 et la charge électrique Q par la relation suivante :

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2}. \quad (\text{I.47})$$

Donc les nombres quantiques Q et T_3 correspondant à tous les fermions du modèle standard sont donnée dans le tableau suivant,

nombres quantiques	Q	T_3
u_L	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
d_L	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$
u_R	$\frac{2}{3}$	0
d_R	$-\frac{1}{3}$	0
ν_{eL}	0	$\frac{1}{2}$
e_L	-1	$-\frac{1}{2}$
e_R	-1	0

TABLEAU I.3 – Valeurs de l'isospin faible T_3 et de la charge électrique Q pour les fermions du modèle standard.

Les quatre bosons de jauge W_μ^a et B_μ ne sont pas les bosons physiques médiateurs des interactions électromagnétique A_μ (photon) et faible ($W^\pm$ et Z). Les bosons physiques sont des combinaisons linéaires des champs de jauge non physique, que nous allons déterminer dans la partie suivante ainsi leurs masses par le mécanisme de Higgs.

Finalement, le lagrangien du modèle standard de la physique des particules qui rassemble l'interaction électrofaible et l'interaction forte est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MS} = & i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + ig_s\bar{\psi}T_aG_\mu^a\gamma^\mu\psi - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^aG_a^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^aW_a^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \\ & + i\bar{\psi}_L\left(\partial_\mu\gamma^\mu + ig_2\frac{\tau_a}{2}W_\mu^a\gamma^\mu + ig_1\frac{1}{2}Y_LB_\mu\gamma^\mu\right)\psi_L + i\bar{\psi}_R\left(\partial_\mu\gamma^\mu + ig_1\frac{1}{2}Y_RB_\mu\gamma^\mu\right)\psi_R. \end{aligned} \quad (\text{I.48})$$

On remarque que le lagrangien (I.48) précédent ne contient pas de terme de masse. Cela est compatible pour la description des gluons et le photon non massifs, comme on a mentionné avant. Mais ce n'est pas le cas pour les fermions et les bosons de jauge $W^\pm$ et Z^0 de l'interaction électrofaible qui sont des particules massives, car le terme qui peuvent rendre massifs les fermions de type $m(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R)$ brise la symétrie de jauge $SU(2)_L$ et cette invariance est due au fait que les fermions gauchers et droitiers ne transforment pas identiquement sous le groupe de jauge $SU(2)_L$ puisque les fermions gauchers sont des doublets sous le groupe $SU(2)_L$ tandis que les fermions droitiers sont des singlets sous le groupe $SU(2)_L$. De même pour les bosons de jauge de l'interaction électrofaible $W^\pm$ et Z^0 les termes qui peuvent les rendre massifs de type $\frac{1}{2}m^2W_\mu W^\mu$ et $\frac{1}{2}m^2Z_\mu Z^\mu$ brise la symétrie électrofaible $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Alors pour résoudre ce problème il faut introduire des termes des masses pour les fermions et les bosons de jauge $W^\pm$ et Z tout en conservant les symétries de jauge du modèle standard, et c'est l'objectif de la partie suivante du mécanisme de Higgs de la brisure spontanée de la symétrie électrofaible.

I.3 Mécanisme de Higgs

Le mécanisme de Englert-Brout-Higgs a eu un rôle crucial dans la construction du modèle standard de la physique des particules, il permet de générer des termes masses invariant sous la symétrie de jauge du modèle pour les fermions et les bosons de jauge de l'interaction électrofaible.

I.3.1 Brisure spontanée de la symétrie électrofaible

Brisure spontanée de la symétrie globale

Considérons un champ scalaire ϕ , tel que $\phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$, où la densité lagrangien qui décrit sa propagation est donnée par,

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi)^\dagger(\partial^\mu\phi) - \mu^2\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2. \quad (\text{I.49})$$

Le lagrangien (I.49) est invariant sous la symétrie de jauge globale $U(1)$ suivante :

$$\phi \longrightarrow \exp(i\alpha)\phi. \quad (\text{I.50})$$

Notons que le terme ϕ^4 est celui de l'interaction du champ scalaire avec lui-même, et par conséquent le couplage λ est strictement positif. Le potentiel scalaire exprimé en

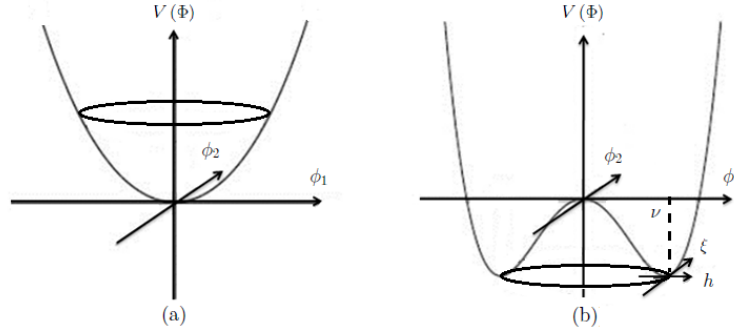


FIGURE I.1 – Potentiel du champ du Higgs avec $\mu^2 > 0$ (courbe (b)) n'induisant pas de brisure et avec $\mu^2 < 0$ (courbe (a) "chapeau mexicain") créant la brisure spontanée de la symétrie.

fonction des champs ϕ_1 et ϕ_2 s'écrit :

$$V(\phi_1, \phi_2) = \frac{\mu^2}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{\lambda}{4} (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2. \quad (\text{I.51})$$

On distingue deux cas (voir **Figure I.1**) :

Si $\mu^2 > 0$, alors le potentiel scalaire $V(\phi_1, \phi_2)$ admet un seul minimum en $\phi = 0$ qui respecte la symétrie du lagrangien $\mathcal{L}$ (I.49), ce dernier décrit alors un champ scalaire de masse μ .

Si $\mu^2 < 0$, le potentiel scalaire $V(\phi_1, \phi_2)$ admet une infinité de minima en $\phi = v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$.

En développant le champ ϕ au minimum du potentiel par un choix arbitraire $\phi_1 = v$ et $\phi_2 = 0$, on a :

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [v + h(x) + i\xi(x)]. \quad (\text{I.52})$$

où h et ξ représentent les oscillations du champ scalaire ϕ au voisinage du minimum du potentiel scalaire $V(\phi_1, \phi_2)$. Cependant, le champ scalaire h oscille sur l'axe radial⁸, et ξ dans la direction du minimum du potentiel scalaire⁹.

Le lagrangien (I.49) s'écrit donc :

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu h)^2 + \mu^2 h^2 + \dots$$

Le premier terme représente l'énergie cinétique du champ ξ non massif ($m_\xi = 0$) appelé boson de Goldstone [21–23], associé à une excitation du champ scalaire ϕ dans la direction plate du potentiel scalaire $V(\phi_1, \phi_2)$, tandis que le second terme représente l'énergie cinétique du champ h , et le troisième a la forme d'un terme de masse $-\frac{1}{2}m_h^2 h^2$ pour le champ h , avec $m_h = \sqrt{-2\mu^2}$, appelé boson de Higgs. Ainsi la brisure spontanée de la symétrie globale $U(1)$ implique un champ scalaire non massif (Goldstone) et engendre un champ scalaire massif (Higgs).

8. La fluctuation quantique le long de la direction radiale.

9. La fluctuation quantique le long de la direction plate du potentiel scalaire $V(\phi_1, \phi_2)$.

Brisure spontanée de la symétrie locale U(1)

Considérons maintenant une symétrie de jauge locale $U(1)$, où les champs scalaires se transforment sous cette symétrie selon la transformation suivante :

$$\phi \longrightarrow \exp[i\alpha(x)] \phi. \quad (\text{I.53})$$

Comme on a vu dans l'étude de la QED l'invariance du lagrangien est assuré par la définition de la dérivée covariante $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$, qui à son tour fait intervenir le champ de jauge A_μ , alors le lagrangien invariant de jauge est donné comme suit :

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu + ieA^\mu) \phi^\dagger (\partial_\mu + ieA_\mu) \phi - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (\text{I.54})$$

où e est la charge électrique conservée de la QED , rappelons que le dernier terme permet au champ de jauge de se propager. Alors si $\mu^2 < 0$, nous avons une théorie de la QED qui décrit une particule scalaire chargée électriquement et de masse μ . de manière analogue à l'étude du cas globale dans la sous-section précédente, le développement du champ scalaire ϕ autour de sa valeur dans le vide, le lagrangien est donné comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = & \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu h)^2 + \mu^2 \lambda h^2 + \frac{1}{2} e^2 v^2 A_\mu A^\mu \\ & - ev A_\mu \partial^\mu \xi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \text{termes d'interactions}. \end{aligned} \quad (\text{I.55})$$

Alors, à partir du lagrangien précédent (I.55) on a un spectre qui se compose d'un boson de Goldstone ξ de masse nulle et un boson de Higgs h de masse non nulle et un bosons vecteur A_μ de masse non nulle,

$$m_\xi = 0, \quad (\text{I.56})$$

$$m_h = \sqrt{2\lambda\mu^2}, \quad (\text{I.57})$$

$$m_{A_\mu} = ev. \quad (\text{I.58})$$

Notons que contrairement au cas du champ A_μ non massif qu'on a vu dans la théorie de la QED , où il a deux degrés de liberté correspondent aux deux états de spin ± 1 du photon usuel¹⁰. Lorsque le champ A_μ devient massif il possède trois degrés de liberté correspondent aux états de spin $-1, 0, 1$, le degré de liberté supplémentaire 0 provient du boson de Goldstone ξ qui a été absorbé par le champ de jauge massif A_μ . Mais pour que le champ physique du boson de Higgs h apparaisse, il est nécessaire de d'écrire les fluctuations quantiques du champ ϕ . Alors dans le cas classique une fluctuation quantique est donnée par :

$$\phi = v + \phi'. \quad (\text{I.59})$$

où ϕ' est un champ scalaire avec une valeur moyenne dans le vide nulle. Donc dans le cas quantique il faut écrire ces fluctuations en fonction des nouvelles variables¹¹, en

10. Qui correspond aux deux polarisations (électrique et magnétique) du photon.

11. En supposant des faibles fluctuations du champ ξ .

utilisant la paramétrisation de Kibble [53] :

$$\phi(x) = \exp \left[i\xi(x) \frac{(v + h(x))}{\sqrt{2}} \right]. \quad (\text{I.60})$$

En éliminant le boson de Goldstone par le choix de la jauge unitaire suivante :

$$U(x) = \exp(-i\xi(x)). \quad (\text{I.61})$$

qui transforme le champ scalaire et vectoriel comme suit :

$$\phi(x) \longrightarrow \frac{v + h(x)}{\sqrt{2}}, \quad (\text{I.62})$$

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu - \frac{1}{ev} \partial_\mu \xi(x). \quad (\text{I.63})$$

Donc le lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L}'' = \frac{1}{2} (\partial_\mu h)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \lambda v^2 h^2 + \frac{1}{2} e^2 v^2 A_\mu A^\mu \quad (\text{I.64})$$

$$- \lambda v h^3 - \frac{1}{4} \lambda h^4 + v e^2 A_\mu A^\mu h + \frac{1}{2} e^2 A_\mu A^\mu h^2. \quad (\text{I.65})$$

le premier terme dans La première ligne du lagrangien précédent (I.65) décrit le terme cinétique du boson de Higgs et le troisième décrit son terme de masse. Les termes d'interaction trilineaire et quadrilineaire sont décrites par le premier et le deuxième terme respectivement dans la deuxième ligne, et enfin les deux derniers termes décrivent l'interaction entre le champ de jauge A_μ et le boson de Higgs h .

Brisure spontanée de la symétrie $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$

Le secteur scalaire du modèle standard est composé d'un doublet¹² de champs scalaires complexes sous le groupe de jauge $SU(2)_L$ dont l'hypercharge Y égale à +1[24, 25, 54], ce doublet est donné comme suit :

$$H = \begin{pmatrix} H^+ \\ H^0 \end{pmatrix} = (1, 2, 1). \quad (\text{I.66})$$

Le lagrangien qui décrit le doublet scalaire précédent (I.66) invariant sous la symétrie de jauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ est donné par :

$$\mathcal{L}_{Higgs} = (D_\mu H)^\dagger (D^\mu H) - V(H). \quad (\text{I.67})$$

où le potentiel scalaire $V(H)$ en fonction du champ scalaire de Higgs H s'écrit :

$$V(H) = \mu^2 |H|^2 - \lambda |H|^4, \quad \lambda > 0. \quad (\text{I.68})$$

12. Un singlet ne peut pas générer des masses aux trois bosons de jauge $W^\pm, Z^0$.

I.3.2 Masse des bosons

Pour générer les masses aux trois bosons de jauge $W^\pm$ et Z^0 , il faut coupler ces derniers avec le champ scalaire H par le couplage minimal suivant :

$$D_\mu H \equiv \partial_\mu H - \frac{i}{2}g_2 W_\mu^a \sigma_a H - \frac{i}{2}g_1 B_\mu H. \quad (\text{I.69})$$

Comme on a mentionné avant, la brisure spontanée de la symétrie apparaît pour le cas $\mu^2 < 0$ avec une valeur moyenne dans le vide non nulle pour la composante neutre H_0 du doublet du champ scalaire (I.66),

$$\langle H \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}. \quad (\text{I.70})$$

Remarquant que la valeur moyenne dans le vide est nulle pour la composante chargée électriquement H^+ du doublet du champ scalaire (I.66) ce qui signifie que la valeur moyenne dans le vide de H (I.70) n'est pas invariante sous le groupe de jauge $SU(2)_L$ et invariante sous $U(1)_{em}$. D'autres part, l'invariance de l'état du vide $\langle H \rangle$ sous une symétrie $\exp(i\alpha_i T^i)$ implique la transformation suivante,

$$\exp(i\alpha_i T^i) \langle H \rangle = \langle H \rangle \implies T^i \langle H \rangle = \langle H \rangle. \quad (\text{I.71})$$

où T^i sont les générateurs et α_i les paramètres de la symétrie $\exp(i\alpha_i T^i)$. Donc sous la symétrie électrofaible $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ les transformations de l'état de vide sont données comme suit :

$$\tau_1 \langle H \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0, \quad (\text{I.72})$$

$$\tau_2 \langle H \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -iv \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0, \quad (\text{I.73})$$

$$\tau_3 \langle H \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -v \end{pmatrix} \neq 0, \quad (\text{I.74})$$

$$Y \langle H \rangle = 1 \langle \phi \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \neq 0. \quad (\text{I.75})$$

avec $\tau_a = \frac{1}{2}\sigma_a$ et σ_a les matrices de Pauli. Donc les générateurs du groupe de la symétrie électrofaible $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ sont brisés, et à partir des relations (I.74) et (I.75) on peut construire le seul générateur non brisé associé à la combinaison (I.47),

$$Q \langle H \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = T_3 + \frac{Y}{2}. \quad (\text{I.76})$$

où Q est l'opérateur de la charge électrique, et ses valeurs propres sont les charges électriques du groupe $U(1)_{em}$ résiduel après brisure spontanée du groupe $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Cependant le générateur non brisé correspond à un boson de jauge non massif (le photon γ), et les trois générateurs non brisés correspondent aux bosons de jauge

massifs $W^\pm$ et Z^0 . D'autre part les fluctuations quantiques du champ scalaire de Higgs H s'écrit :

$$H = \left[\exp(2i \frac{\xi^a \tau_a}{v}) \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (v + h) \right]. \quad (\text{I.77})$$

où ξ^a les trois bosons de Goldstone non massifs qui disparaissent par la jauge unitaire suivante :

$$H \longrightarrow H' = U(\xi) H = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + h). \quad (\text{I.78})$$

avec,

$$U(\xi) = \exp(2i \frac{\xi^a \tau_a}{v}). \quad (\text{I.79})$$

En remplaçant la jauge unitaire (I.78) dans le potentiel de Higgs (I.68) on obtient la masse des bosons de Higgs et celle de Goldstone,

$$m_h = \sqrt{2\lambda} v^2, \quad m_{\xi^a} = 0. \quad (\text{I.80})$$

En remplaçant l'expression de la valeur moyenne dans le vide du champ de Higgs (I.70) dans le terme cinétique $(D_\mu H)^\dagger (D^\mu H)$ de l'expression (I.67), on a :

$$\begin{aligned} (D_\mu \langle H \rangle)^\dagger (D^\mu \langle H \rangle) &= \left(0, \frac{v}{\sqrt{2}} \right) \left| \left(\partial_\mu + \frac{i}{2} g_1 B_\mu + \frac{i}{2} g_2 \sigma_a W_\mu^a \right) \right|^2 \left(\frac{0}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{v^2}{8} \left[(W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu}) + (g_1 B_\mu - g_2 W_\mu^3)^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{I.81})$$

Les expressions des champs de jauge physique (observables) en fonction de ceux non physique sont données par :

$$A_\mu = \cos \theta_W B_\mu + \sin \theta_W W_\mu^3, \quad (\text{I.82})$$

$$Z_\mu^0 = -\sin \theta_W B_\mu + \cos \theta_W W_\mu^3, \quad (\text{I.83})$$

$$W_\mu^+ = (W_\mu^1 - W_\mu^2) / \sqrt{2}, \quad (\text{I.84})$$

$$W_\mu^- = (W_\mu^1 + W_\mu^2) / \sqrt{2}. \quad (\text{I.85})$$

où θ_W est l'angle de mélange de Weinberg qui lie les constantes de couplages des deux interactions électromagnétique et faible comme suit :

$$\sin \theta_W = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad (\text{I.86})$$

$$\cos \theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}. \quad (\text{I.87})$$

Ainsi à partir de (I.81) on peut déterminer les masses des bosons de jauge en utilisant les relations (I.82-I.85),

$$m_{W^\pm} = \frac{g_2}{2}, \quad m_{Z^0} = \frac{1}{2} \sqrt{g_1^2 + g_2^2}, \quad m_{A_\mu} = 0. \quad (\text{I.88})$$

Notons qu'en peut relier les masses des bosons W et Z à l'aide de l'angle de Weinberg

θ_W par la relation :

$$\frac{m_{W^\pm}}{m_{Z^0}} = \cos \theta_W. \quad (\text{I.89})$$

I.3.3 Masse des fermions

A ce stade, seuls les bosons de jauge $W^\pm$ et Z^0 ont acquis une masse grâce au mécanisme de Higgs, tandis que les fermions (leptons et quarks) demeurent des particules de masse nulle, et comme on a déjà mentionné, les termes de masse pour les fermions de type $\sim (\psi\bar{\psi} + h.c.)$ ne sont pas autorisés car ils brisent la symétrie de jauge $SU(2)_L$. Or une caractéristique intéressante du modèle standard est que le doublet de Higgs (I.66) permet de générer aussi des masses aux leptons et quarks tout en gardant l'invariance sous la symétrie de jauge. Cependant on peut construire le terme suivant $\sim (\psi H \bar{\psi} + h.c.)$ qui est invariant sous $SU(2)_L$ et $SU(3)_c$, mais sous le groupe de l'hypercharge $U(1)_Y$ l'invariance est vérifiée seulement par les termes proportionnels au couplage du champ de Higgs avec les quarks de type down et les électrons¹³, tandis que celui des quarks de type up n'est pas invariant¹⁴. Alors on introduit un nouveau doublet de Higgs $\tilde{H}$ tel que son hypercharge est $Y(\tilde{H}) = -1$, et il est donné comme suit :

$$\tilde{H} = i\tau_2 H^* = \begin{pmatrix} H^{0*} \\ -H^- \end{pmatrix}. \quad (\text{I.90})$$

Notons que le doublet de Higgs précédent $\tilde{H}$ (I.90) se transforme de manière identique à H (I.66), de plus il permet le couplage aux quarks de type up. Ce couplage des fermions au champ de Higgs est appelé couplage de Yukawa et il est donné par le lagrangien suivant :

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -(\lambda_e)_{ij} \bar{L}_L^i H e_R^j - (\lambda_d)_{ij} \bar{Q}_L^i H d_R^j - (\lambda_u)_{ij} \bar{Q}_L^i \tilde{H}^j u_R + h.c.. \quad (\text{I.91})$$

où les matrices $(\lambda_{e,d,u})_{ij}$ sont les couplages de Yukawa entre le champ de Higgs et les différents saveurs des fermions. Après la brisure de la symétrie électrofaible $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ et en utilisant la jauge unitaire (I.78), le lagrangien de Yukawa précédent (I.91) devient :

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -(M_e)_{ij} \bar{e}_L^i e_R^j - (M_d)_{ij} \bar{d}_L^i d_R^j - (M_u)_{ij} \bar{u}_L^i u_R^j + \dots \quad (\text{I.92})$$

où $(M_{e,d,u})_{ij}$ sont les matrices de masse. En diagonalisant ces matrices on peut déterminer les expressions des masses des fermions comme suit :

$$m_{e_i} = \frac{v\lambda_{e_i}}{\sqrt{2}}, \quad (\text{I.93})$$

$$m_{u_i} = \frac{v\lambda_{u_i}}{\sqrt{2}}, \quad (\text{I.94})$$

$$m_{d_i} = \frac{v\lambda_{d_i}}{\sqrt{2}}. \quad (\text{I.95})$$

13. $Y(\bar{L}_L^i e_R^j) = +1 - 2 = -1$ et $Y(\bar{Q}_L^i d_R^j) = -1/3 - 2/3 = -1$.

14. $Y(\bar{Q}_L^i d_R^j) = -1/3 + 4/3 = +1$.

Lagrangien total du modèle standard

Finalement le lagrangien total du modèle standard de la physique des particules qui contient les termes de masse en respectant les symétries de jauge s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{MS} = & i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + ig_s\bar{\psi}T_aG_\mu^a\gamma^\mu\psi - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^aG_a^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^aW_a^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \\
 & + i\bar{\psi}_L\left(ig_2\frac{\tau_a}{2}W_\mu^a\gamma^\mu + ig_1\frac{1}{2}Y_LB_\mu\gamma^\mu\right)\psi_L + i\bar{\psi}_R\left(ig_1\frac{1}{2}Y_RB_\mu\gamma^\mu\right)\psi_R \\
 & + \left(\left(\partial_\mu + ig_2\frac{\tau_a}{2}W_\mu^a + ig_1\frac{Y}{2}B_\mu\right)H^\dagger\right)\left(\left(\partial_\mu + ig_2\frac{\tau_a}{2}W_\mu^a + ig_1\frac{Y}{2}B_\mu\right)H\right) \\
 & - \mu^2H^\dagger H - \lambda\left(H^\dagger H\right)^2 - (M_e)_{ij}\bar{e}_L^ie_R^j - (M_d)_{ij}\bar{d}_L^id_R^j - (M_u)_{ij}\bar{u}_L^iu_R^j + h.c..
 \end{aligned}
 \tag{I.96}$$

I.4 Problèmes du modèle standard

Le modèle standard de la physique des particules rencontre un succès remarquable dans la description des phénomènes observés jusqu'à ce jour à l'échelle subatomique, il a donné la prédiction théorique de l'existence de particules avant leurs découvertes expérimentales, et aucune mesure à l'heure actuelle n'a mis ce modèle en défaut. Il résiste jusqu'à présent à tous les tests de précision et constitue un des modèles physiques le plus précis jamais construit. Malgré cela, le modèle comporte un certain nombre de failles, à la fois sur le plan théorique et sur le plan expérimental, et il ne constitue pas une description ultime de la nature, et il y a plusieurs indices montrant que ce modèle n'est qu'une théorie effective à basse énergie ($E \lesssim 1TeV$) dont il faut trouver une extension. Cette section présente les principaux problèmes du modèle standard, ainsi les solutions de ses problèmes par la supersymétrie qui occupe une place de premier plan parmi les différentes théories proposées pour remplacer le modèle standard à plus haute échelle d'énergie.

I.4.1 Problèmes du modèle standard

Les principaux problèmes ou questions non résolues par le modèle standard sont :

- **Interaction gravitationnelle** : L'absence d'une description de l'interaction gravitationnelle, due à la difficulté d'établir une version quantique de la relativité générale, et due au fait que la gravitation est négligeable à l'échelle quantique, à l'inverse des phénomènes quantiques qui n'interviennent pas à l'échelle de l'univers, mais puisque il existe certains domaines où la construction d'une théorie quantique de la gravitation est nécessaire, il s'agit de l'étude des premiers instants de l'Univers et la description des trous noirs.

- **Nombre de paramètres libres** : Le Modèle standard contient un grand nombre de paramètres libres, qui ne sont pas fixés par la théorie mais utilisés comme inputs expérimentaux, en total il y a 19 paramètres libres : les trois constantes de couplages g_1 , g_2 et g_s , les deux paramètres λ et μ^2 du potentiel de Higgs, les neuf couplages de Yukawa y_f , trois angles et une phase pour les quarks dans la matrice CKM et un angle θ associé aux champs de gluons. Dans le modèle standard, la contribution du potentiel du boson de Higgs à la densité du lagrangien est mise "à la main" alors il n'explique

pas le fait que la brisure de la symétrie électrofaible est introduite de façon arbitraire par le choix de la valeur négative de μ^2 .

- **Théorie de grande unification** : La non unification des différentes constantes de couplage des trois symétries de jauge dans le produit direct du modèle standard $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, ne fournit pas la possibilité d'une véritable unification des interactions électrofaibles et fortes, appelé Grand Unified Theory (GUT), qui permet de décrire les trois interactions avec une seule constante de couplage d'un groupe de jauge unique. L'idée de cette unification est la même que celle du modèle standard, puisque à des énergies plus faibles les symétries qui restent sont en fait ce qui reste de la symétrie $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ qui existe vers 100 GeV, alors les symétries du modèle standard sont celles qui restent d'une symétrie plus grande qui aurait été brisée à une énergie plus grande, noté Λ_{GUT} . La première tentative à partir du groupe $SU(5)$ a échoué, notamment dans sa prédiction de la durée de vie du proton. Actuellement les théories de grande unification se basent sur les groupes $SO(10)$ ou E_6 .

- **Matière noire et énergie noire** : Un autre aspect insatisfaisant du modèle standard est qu'il décrit que quelques pour cent de la matière et de l'énergie de l'univers. L'analyse des courbes de rotation des galaxies [55, 56], ainsi des objets massifs (étoiles, nuages de gaz, amas globulaires) a montré un désaccord avec la loi de Kepler. Les vitesses tangentielles des objets situés à la périphérie de la galaxie sont ainsi indépendantes du rayon, au lieu de baisser rapidement comme attendu. Ceci suggère la présence de beaucoup plus de matière dans les galaxies qu'attendu et qu'elle se prolongeant en-dehors de la galaxie, cette matière non lumineuse mise en évidence par des effets gravitationnels (influence gravitationnelle se fait clairement ressentir) est appelée matière noire. L'étude de la densité par effet de lentille gravitationnelle permet d'identifier une structure massive (comprise entre 10 GeV et quelques TeV) et invisible (neutre électriquement) à l'emplacement des galaxies, correspond à une matière interagissant faiblement. D'autre part, les données des mesures des vitesses d'éloignement de supernova de type I-a en fonction de leur distance à partir du décalage de leur spectre lumineux vers le rouge, ont permis de découvrir l'accélération de l'expansion de l'univers [57, 58]. Cela implique l'existence d'une énergie répulsive qui domine les effets gravitationnels, cette énergie est appelée énergie noire. La cartographie du rayonnement du fond diffus cosmologique par le satellite Planck [59], a confirmé que la composition de l'univers dominée par cette énergie noire (74%), pour 21% de matière noire et seulement 5% de matière ordinaire décrite par le modèle standard.

- **Problème de hiérarchie** : Enfin, l'aspect le plus négatif du modèle standard est le problème de hiérarchie¹⁵, On peut se demander par exemple, pourquoi l'intensité de l'interaction électrofaible est très supérieure à celle de l'interaction gravitationnelle, i.e. pourquoi $\Lambda_{Planck} = 10^{19} \text{ GeV} \gg \Lambda_{EF} = 10^2 \text{ GeV}$, ou pourquoi les fermions ont des masses qui varient par près de cinq ordres de grandeur de l'électron au quark top ($m_t/m_e \simeq 3.10^5$). Cette interrogation se traduit par un problème théorique de la naturalité¹⁶ de la masse du boson de Higgs H. Dans le modèle standard les masses des bosons de jauge sont protégées par la symétrie de jauge et celles des fermions par la symétrie chirale contre les divergences quadratiques en $\Lambda_{\text{cut-off}}^2$ (ou $\Lambda_{\text{cut-off}}$ est l'échelle

15. On parle en physique d'un problème de hiérarchie lorsque des théories présentent de grandes différences dans les échelles Λ mises en jeu.

16. Une théorie est dite naturelle si lorsqu'on modifie très peu les paramètres fondamentaux, la physique n'en est pas affectée.

de coupure) des corrections radiatives, car ces corrections quantiques s'annulent et cela empêche d'avoir des masses arbitrairement grandes après la brisure de la symétrie électrofaible. Le boson de Higgs au contraire n'a aucune symétrie pour la protéger, car son terme de masse est invariant de jauge dans le Lagrangien et elle peut diverger. Ainsi si la contribution à l'ordre d'une boucle a la masse du boson de Higgs dans le modèle standard est :

$$\delta m_h^2 \sim \Lambda_{\text{cut-off}}^2 + \dots$$

Cependant si l'échelle $\Lambda_{\text{cut-off}}$ est grande¹⁷ la masse du boson de Higgs m_h diverge à l'échelle de Planck. Cela laisse penser qu'il doit exister une nouvelle physique (i.g. des nouvelles particules) qui contient un mécanisme qui permet de protéger la masse du boson de Higgs comme les autres particules du modèle standard.

L'ensemble de ces problèmes motivent ainsi la recherche à la fois des modèles théoriques permettant d'y apporter des réponses et aussi les signes expérimentaux de physique au-delà du modèle standard qui pourraient jouer un rôle discriminant pour ces différentes hypothèses.

I.4.2 Une solution : la supersymétrie

La supersymétrie est l'une des théories au-delà du modèle standard les plus riches et abouties. En étendant le groupe de Poincaré par des générateurs fermioniques elle permet de lever certains des limites du modèle standard.

- L'interaction gravitationnelle peut être incluse au sein d'une théorie de grande unification (GUT), en effet lorsque la supersymétrie locale (supergravité) est introduite, un champ de spin 2 doit être ajouté, qui correspond au graviton, de plus les théories de champ qui incluent la gravitation sont seulement les modèles de supercordes dans lesquels la supersymétrie est introduite.

- La contribution du potentiel du boson de Higgs à la densité du lagrangien apparaît assez naturelle dans les modèles supersymétriques. En effet à l'échelle de GUT, le champ scalaire du boson de Higgs a une masse carrée μ^2 positive. En évoluant vers les basses énergies, la contribution des corrections radiatives, due en particulier à la masse élevée du quark (t), fait diminuer la valeur μ^2 qui devient négative, alors la brisure de la symétrie électrofaible apparaît, donc cette dernière est une conséquence de la supersymétrie.

- Dans les modèles supersymétriques l'évolution des constantes de couplage électrofaible ainsi que la constante de couplage forte croisent pratiquement au même point. Cette propriété inattendue peut alors montrer la voie vers une théorie de Grande Unification, permettant notamment d'expliquer la structure des groupes de jauge du Modèle Standard à partir d'une symétrie unique de rang supérieur.

- Les modèles supersymétriques prédisent la présence d'un candidat favori pour expliquer la nature de la matière noire, une particule massive (la plus légère), stable et faiblement interactive (sensible à l'interaction faible) [60], appelée neutralino [61]. Notons que dans le cas de la supersymétrie locale (supergravité), le partenaire supersymétrique du graviton, appelé gravitino, peut être un candidat envisageable pour décrire la matière noire.

17. Echelle de Planck dans le cas extrême.

• La supersymétrie ajoute une nouvelle symétrie permettant de protéger la masse de boson de Higgs des divergences quadratiques, en associant à chaque particule du modèle standard une nouvelle particule ayant les mêmes nombres quantiques et masses, mais un spin différent, alors à chaque particule bosonique est associé une particule fermionique (dite superpartenaire) et vice versa. Alors, ils apparaissent de nouveaux diagrammes, des boucles des partenaires supersymétriques des fermions (un champ scalaire complexe) dont les contributions ont un signe opposé par rapport aux boucles de fermions. Si les masses des fermions sont égales à la masse de leur superpartenaire scalaire, les divergences quadratiques rencontrées dans le modèle standard s'annulent exactement $\delta m^2 = \delta m_F^2 - \delta m_S^2 = 0$, et donc on peut justifier le fait que la masse du boson de Higgs est à l'échelle électrofaible. Mais comme l'expérience a montré qu'il n'existe pas de particule scalaire de même masse que l'électron ou le muon par exemple, cela signifie que la supersymétrie n'est pas exacte, c'est à dire que si elle existe, elle doit être nécessairement brisée. Alors dans ce cas où les masses des particules sont différentes de celles de leurs partenaires supersymétriques les corrections quadratiques à la masse du boson de Higgs resurgissent, Mais on peut montrer que la masse de toutes les particules supersymétrique restent inférieures au TeV, la théorie reste valable. Ainsi la plupart des particules supersymétriques doivent être observables dans les collisionneurs actuels ou futurs.

Dans ce chapitre nous avons étudié le modèle standard de la physique des particules. Au début nous avons présenté les constituants élémentaires du modèle. Puis nous avons donné les éléments essentiels pour la construction de son lagrangien . Ensuite nous avons étudié la brisure spontanée de la symétrie électrofaible pour générer les masses à différentes particules élémentaires. La fin de ce chapitre est consacrée à la discussion des problèmes et limites du modèle standard, ainsi la solution de ces problèmes sous le cadre de la supersymétrie qui sera présentée dans les chapitres qui suivent.

Chapitre II

Représentations des théories Supersymétriques

Ce chapitre présente les théories supersymétriques. Nous allons donner au début la définition de l'algèbre de Poincaré ainsi que ses représentations, ensuite nous allons étendre cette algèbre à la superalgèbre de Poincaré et donner ses différentes représentations supersymétriques. Ensuite, nous donnons la définition du superspace et la description des superchamps chiral et vectoriel dans le cadre de la théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 1$. Cela va nous permettre de construire le lagrangien et discuter la brisure spontanée de cette théorie dans le chapitre suivant.

II.1 Algèbre de Poincaré et ses représentations

II.1.1 Algèbre de Lorentz et ses représentations

Dans l'espace-temps (espace de Minkowski) chaque point est décrit par des coordonnées indiquées par le quadrivecteur suivant :

$$(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3). \quad (\text{II.1})$$

Où $x^0 = t$ est la composante du temps et x^1, x^2, x^3 , sont les composantes de l'espace. Ces coordonnées se transforment sous la transformation de Lorentz comme suit [62, 63] :

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu. \quad (\text{II.2})$$

La norme du quadrivecteur est donnée par :

$$x'^2 = x^\mu x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = -\left(x^0\right)^2 + \left(x^i\right)^2, \quad (\text{II.3})$$

qui est aussi invariante de Lorentz comme suit :

$$x'^2 = x'^\mu x'_\mu = \eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho x^\rho \Lambda^\nu_\sigma x^\sigma = \eta_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma. \quad (\text{II.4})$$

Donc la transformation de Lorentz précédente (II.2) doit satisfaire la condition qui laisse le tenseur antisymétrique $\eta_{\mu\nu}$ (appelé métrique Lorentzienne) invariant, cette condition s'écrit sous la forme :

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma = \eta_{\rho\sigma}. \quad (\text{II.5})$$

où l'expression du tenseur antisymétrique $\eta_{\mu\nu}$ est donnée par :

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.6})$$

Notons que le déterminant du produit des matrices est le produit des déterminants des matrices. Cependant, en utilisant le déterminant de la relation (II.5), on obtient :

$$\det(\Lambda)^2 = 1 \implies \det(\Lambda) = \pm 1. \quad (\text{II.7})$$

Alors dans le cas où $\det(\Lambda) = 1$ on obtient les transformations de Lorentz propres et dans le cas où $\det(\Lambda) = -1$ on obtient les transformations de Lorentz impropres. Prenons maintenant la composante 00 de la relation (II.5), i.e. $\mu = 0$ et $\nu = 0$, on a :

$$\eta_{00} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_0 \Lambda^\nu{}_0 = \eta_{00} \Lambda^0{}_0 \Lambda^0{}_0 + \eta_{ii} \Lambda^i{}_0 \Lambda^i{}_0 = (\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_i (\Lambda^i{}_0)^2 = 1. \quad (\text{II.8})$$

alors on obtient,

$$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \sum_i (\Lambda^i{}_0)^2 \geq 1. \quad (\text{II.9})$$

Alors si $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ on obtient les transformations de Lorentz orthochrones et si $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ on obtient les transformations de Lorentz non-orthochrones. En résumé nous avons la classification suivante :

- Groupe de Lorentz complet :

$$L := O(1, 3; \mathbb{R}) = \{\Lambda \in GL(4, \mathbb{R}) \mid \Lambda^\top \eta \Lambda = \eta\}. \quad (\text{II.10})$$

- Transformations de Lorentz propres :

$$L_+ := SO(1, 3; \mathbb{R}) = \{\Lambda \in O(1, 3; \mathbb{R}) \mid \det \Lambda = +1\}. \quad (\text{II.11})$$

où l'algèbre de Lie correspondante à ce groupe de Lie est :

$$\mathfrak{o}(1, 3; \mathbb{R}) = \{\mathfrak{N} \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R}) \mid \mathfrak{N}^\top = -\eta \mathfrak{N} \eta\}. \quad (\text{II.12})$$

- Transformations de Lorentz impropres :

$$L_- := \{\Lambda \in O(1, 3; \mathbb{R}) \mid \det \Lambda = -1\}. \quad (\text{II.13})$$

- Transformations de Lorentz orthochrones :

$$L^\uparrow := \{\Lambda \in O(1, 3; \mathbb{R}) \mid \Lambda^0{}_0 \geq 1\}. \quad (\text{II.14})$$

- Transformations de Lorent non-orthochrones :

$$L^\downarrow := \left\{ \Lambda \in O(1, 3; \mathbb{R}) \mid \Lambda^0_0 \leq -1 \right\} \quad (\text{II.15})$$

Notons que L_+ est un sous-groupe de L contrairement à L_- qui ne contient pas l'identité, notons aussi que ce dernier décrit les symétries discrètes C (conjugaison de charge), et P (parité). Pour simplifier nous allons choisir la notation suivante $L_+^\uparrow$ pour les transformations de Lorentz propres et orthochrones données par,

$$\begin{aligned} L_+^\uparrow &= L^\uparrow \cap L_+ \\ &= \left\{ \Lambda \in O(1, 3; \mathbb{R}) \mid \det \Lambda = +1, \Lambda^0_0 \geq 1 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

Pour une transformation infinitésimale on a l'expression de $\Lambda \in L_+^\uparrow$ suivante :

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu. \quad (\text{II.17})$$

En substituant l'expression (II.17) dans (II.5) on obtient,

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\mu\nu} \delta^\mu{}_\rho \delta^\nu{}_\sigma + \eta_{\mu\nu} \delta^\mu{}_\rho \omega^\nu{}_\sigma + \eta_{\mu\nu} \omega^\mu{}_\rho \delta^\nu{}_\sigma \quad (\text{II.18})$$

$$\begin{aligned} &= \eta_{\rho\sigma} + \omega_{\rho\sigma} + \omega_{\sigma\rho} = \eta_{\rho\sigma}, \\ \implies \quad &\omega_{\rho\sigma} = -\omega_{\sigma\rho}. \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

ce qui signifie que le paramètre infinitésimal $\omega_{\rho\sigma}$ est antisymétrique. D'autres part les transformations de $\Lambda \in L_+^\uparrow$ ont la forme suivante :

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \left[\exp\left(\frac{i}{2} \omega^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma}\right) \right]^\mu{}_\nu. \quad (\text{II.20})$$

où $M_{\rho\sigma}$ sont les générateurs de Lorentz qui constituent la base de l'algèbre de lie correspondante au groupe $L_+^\uparrow$, le facteur i est choisi de telle manière que $M_{\rho\sigma}$ soit hermétique. Cette algèbre de lie est donnée par la relation de commutation suivante :

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i \left(\eta_{\mu\sigma} M_{\rho\nu} + \eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho} \right). \quad (\text{II.21})$$

On définit les générateurs de rotations J_i et de boosts K_i par :

$$J_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M_{jk} \quad , \quad K_i = M_{0i}. \quad (\text{II.22})$$

alors la relation (II.21) s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i \varepsilon_{ijk} J_k, \\ [K_i, K_j] &= -i \varepsilon_{ijk} J_k, \\ [J_i, K_j] &= i \varepsilon_{ijk} K_k. \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

Où la première relation de commutation dans (II.23) qui définit le groupe de rotation $SO(3; \mathbb{R})$ (sous groupe de $L_+^\uparrow$) indique que les générateurs J_i sont fermés, tandis que la seconde relation dans (II.23) indique le contraire pour les générateurs K_i , i.e. pas fermés. Notons que les générateurs J_j sont des matrices hermétiques et les générateurs

K_i sont anti-hermétiques due a la non compactification du groupe de Lorentz. Alors la transformation générale de Lorentz s'écrit en fonction de ces générateurs comme suit :

$$\Lambda = \exp i(\alpha^i J_i + \theta^i K_i). \quad (\text{II.24})$$

Correspondance entre $SO(1, 3)$ et $SU(2) \times SU(2)$

Pour classer les représentations irréductibles de dimension finie du groupe de Lorentz $L_+^\uparrow$, il faut changer les générateurs J_i et K_i de l'algèbre de Lie $so(1, 3)$ par les combinaisons linéaires complexe suivante :

$$\begin{aligned} S_i &= \frac{1}{2} (J_i + iK_i), \\ T_i &= \frac{1}{2} (J_i - iK_i). \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

En utilisant les relations (II.23) on obtient alors,

$$\begin{aligned} [S_i, S_j] &= i\varepsilon_{ijk} S_k, \\ [T_i, T_j] &= i\varepsilon_{ijk} T_k, \\ [T_i, S_j] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

cela signifie que les générateurs S_i et T_i satisfont les relations de commutation de l'algèbre de Lie de $SU(2)$. Notons que les relations de commutations précédentes (II.26) montrent que l'algèbre de Lie complexe $so(1, 3)^\mathbb{C}$ se décompose en deux algèbres de Lie $su(2)$ comme suit [63] :

$$so(1, 3)^\mathbb{C} \cong su(2)^{S_i} \times su(2)^{T_i}. \quad (\text{II.27})$$

Notons aussi que les représentations de chaque copie de $su(2)$ sont caractérisées par un nombre entier n (le spin), et de dimension $2n + 1$. Cependant pour une représentation (n, m) du groupe de Lorentz nous pouvons identifier le spin de la représentation par $n + m$ avec la dimension de l'espace de la représentation $(2n + 1)(2m + 1)$. Les deux générateurs S_i et T_i ne sont pas indépendants puisque ils peuvent êtres échanger par l'opérateur de la parité $\mathcal{P}$, en effet pour J_i et K_i nous avons :

$$\mathcal{P} : J_i \longrightarrow J_i, \quad \mathcal{P} : K_i \longrightarrow -K_i. \quad (\text{II.28})$$

en utilisant les relations (II.26) on obtient,

$$\mathcal{P} : S_i \longleftrightarrow T_i. \quad (\text{II.29})$$

Considérons maintenant les représentations suivantes [62] :

1) Représentation triviale $(0, 0)$: le spin total de cette représentation égale à 0 et sa dimension est $(2 \times 0 + 1)(2 \times 0 + 1) = 1$, où la dimension de chaque $su(2)$ égale à $(2 \times 0 + 1) = 1$, et puisque $S_i = 0$ et $T_i = 0$ nous avons d'après les relations de commutation (II.26) ,

$$e^{T_i} = e^{S_i} = e^0 = 1 \quad (\text{II.30})$$

cette représentation décrit des objets invariants sous la transformation de Lorentz, ces objets sont les scalaires et la représentation est appelée représentation scalaire.

2) Représentation spinoriel gaucher $(\frac{1}{2}, 0)$: le spin total est $\frac{1}{2}$, sa dimension égale à

$1 \times 2 = 2$, où la dimension de $su(2)^{T_i}$ est 1 correspond à la représentation triviale, et $su(2)^{S_i}$ de dimension $(2 \times \frac{1}{2} + 1) = 2$, correspond à la représentation fondamentale, et puisque $T_i = 0$ et $S_i = \frac{\sigma_i}{2}$ on a d'après les relations (II.26),

$$T_i = \frac{1}{2}(J_i - iK_i) = 0 \implies J_i = iK_i, \quad (\text{II.31})$$

$$S_i = \frac{\sigma_i}{2} = \frac{1}{2}(J_i + iK_i) = iK_i \implies \underbrace{K_i = -\frac{i\sigma_i}{2}}_{\text{Rotations}} \text{ et } \underbrace{J_i = \frac{\sigma_i}{2}}_{\text{Boots}}. \quad (\text{II.32})$$

Alors la transformation de Lorentz s'écrit :

$$\Lambda_L = \exp i(\alpha^i J_i + \theta^i K_i) = \exp \frac{i}{2}(\alpha^i - i\theta^i)\sigma_i. \quad (\text{II.33})$$

3) Représentation spinoriel droitier $(0, \frac{1}{2})$: le spin total est $\frac{1}{2}$, sa dimension égale à 2, où la dimension de $su(2)^{T_i}$ est 2 correspond à la représentation fondamentale, et $su(2)^{S_i}$ de dimension 1, correspond à la représentation triviale, et puisque $T_i = \frac{\sigma_i}{2}$ et $S_i = 0$ nous avons d'après (II.26),

$$\underbrace{K_i = -\frac{\sigma_i}{2}}_{\text{Rotations}} \text{ et } \underbrace{J_i = \frac{\sigma_i}{2}}_{\text{Boots}}. \quad (\text{II.34})$$

la transformation de Lorentz s'écrit ,

$$\Lambda_L = \exp i(\alpha^i J_i + \theta^i K_i) = \exp \frac{i}{2}(\alpha^i + i\theta^i)\sigma_i. \quad (\text{II.35})$$

Notons que les représentations $(\frac{1}{2}, 0)$ et $(0, \frac{1}{2})$ sont des matrices complexe 2×2 qui agissent sur des objets à deux composantes appelées spineur de weyl, donc pour la représentation $(\frac{1}{2}, 0)$ nous avons des spineurs de Weyl gaucher et pour la représentation $(0, \frac{1}{2})$ des spineurs de Weyl droitier notés respectivement comme suit :

$$(\Psi_L)_\alpha = \begin{pmatrix} (\Psi_L)_1 \\ (\Psi_L)_2 \end{pmatrix}, \quad (\Psi_R)_\alpha = \begin{pmatrix} (\Psi_R)_1 \\ (\Psi_R)_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.36})$$

Grace à ces deux représentations irréductibles spinoriels on peut construire d'autres représentations par le produit direct (de Kronecker), par exemple :

- Produit de Kronecker d'un spineur gaucher et un spineur droitier donne un spineur à 4 composantes appelé spineur de Dirac $(\frac{1}{2}, 0) \otimes (0, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ de dimension égale à $(2 \times \frac{1}{2} + 1)^2 = 4$, cette représentations se transforment des objets avec des indices spinoriels,

$$v_{\alpha\dot{\beta}} = \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu v_\mu. \quad (\text{II.37})$$

où $\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^{\mu} = (-1, \sigma^i)$ sont les matrices de Pauli et v_{μ} et un quadrivecteur de l'espace de Minkowski.

• Produit de Kronecker de deux spineur gaucher $(\frac{1}{2}, 0) \otimes (\frac{1}{2}, 0) = (0, 0) \oplus (1, 0)$ qui se décompose en une représentation scalaire et une représentation de dimension trois correspond à un tenseur antisymétrique de rang 2 donné par,

$$B_{\mu\nu} = \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} B^{\rho\sigma}. \quad (\text{II.38})$$

et qui vérifie la relation suivante :

$$B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}. \quad (\text{II.39})$$

Correspondance entre $L_+^{\uparrow}$ et $SL(2, \mathbb{C})$

Il y a un lien entre le groupe de Lorentz $L_+^{\uparrow}$ et le groupe linéaire spécial, $SL(2, \mathbb{C}) = \{M \in GL(2, \mathbb{C}) \mid \det M = 1\}$, ce lien se traduit par un homomorphisme de $SL(2, \mathbb{C})$ sur le groupe $L_+^{\uparrow}$ que nous allons construire dans cette partie. Mais tout d'abord nous allons construire une carte à partir de l'espace de Minkowski $\mathbb{M}_4$ des matrices 2×2 hermétiques complexes notées par $\mathbb{H}(2, \mathbb{C})$, cette carte notée par ρ s'écrit [62, 63] :

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{M}_4 &\longrightarrow \mathbb{H}(2, \mathbb{C}) \\ x^{\mu} &\longrightarrow \rho(x^{\mu}). \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

où $x^{\mu} = (x^0, x^i) \in \mathbb{M}_4$ et avec,

$$\rho(x^{\mu}) = x_{\mu} \sigma^{\mu} = \begin{pmatrix} x^0 - x^3 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & x^0 + x^3 \end{pmatrix} = X. \quad (\text{II.41})$$

où $\sigma^{\mu} = (\sigma^0, \sigma^i)$ avec σ^0 la matrice identité 2×2 et σ^i sont les trois matrices de Pauli. Alors d'après la relation (II.41) on a,

$$\det X = x^0 x^0 - \sum x^i x^i = -\|x^{\mu}\|^2. \quad (\text{II.42})$$

Notons que hermiticité de X est évidente puisque les matrices de Pauli sont hermétiques. Considérons maintenant l'action de $SL(2, \mathbb{C})$ sur $\mathbb{H}(2, \mathbb{C})$ qui est la représentation adjoint du groupe $SL(2, \mathbb{C})$ et qui est définie par :

$$\begin{aligned} ad : SL(2, \mathbb{C}) &\longrightarrow Aut(\mathbb{H}(2, \mathbb{C})) \\ M &\longrightarrow ad(M). \end{aligned} \quad (\text{II.43})$$

avec,

$$M' = adM(X) = MXM^{\dagger}. \quad (\text{II.44})$$

où $M' \in SL(2, \mathbb{C})$, et $Aut(\mathbb{H}(2, \mathbb{C}))$ est le groupe d'automorphisme de $\mathbb{H}(2, \mathbb{C})$ qui est isomorphe à $GL(\mathbb{H}(2, \mathbb{C}), \mathbb{C})$. La transformation sous cette représentation s'écrit :

$$X' = MXM^{\dagger}, \quad (\text{II.45})$$

où $X' \in \mathbb{H}(2, \mathbb{C})$ car,

$$(X')^{\dagger} = MX^{\dagger}M^{\dagger} = MXM^{\dagger}. \quad (\text{II.46})$$

En utilisant la relation (II.41), X' s'écrit comme suit :

$$(X')_{\alpha\dot{\alpha}} = x'_\mu (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}, \quad (\text{II.47})$$

où $x'_\mu \in \mathbb{M}_4$. Ainsi le déterminant de X' est obtenu en utilisant la relation (II.45),

$$\det(X') = \det(MXM^\dagger) = \det(M) \det(X) \det(M^\dagger) = \det(X).$$

Cela implique que :

$$x_\mu x^\mu = x'_\mu x'^\mu \implies \|x^\mu\|^2 = \|x'^\mu\|^2. \quad (\text{II.48})$$

Donc à partir d'un 4-vecteur x^μ appartient à l'espace de Minkowski $\mathbb{M}_4$, nous avons construit la matrice X hermitique 2×2 appartient à $\mathbb{H}(2, \mathbb{C})$, le déterminant de X est la norme du 4-vecteur x^μ qui invariant sous $SL(2, \mathbb{C})$. Notons que si en appliquant l'inverse de l'application (II.40), nous obtenons le 4-vecteur $x'^\mu \in \mathbb{M}_4$ en utilisant la relation $\bar{\sigma}^\mu = (-\sigma^0, -\sigma^i)$:

$$\begin{aligned} \rho^{-1}: \mathbb{H}(2, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{M}_4 \\ X &\longrightarrow \rho^{-1}(X) = x^\mu = \frac{1}{2} \text{Tr}[X \bar{\sigma}^\mu]. \end{aligned} \quad (\text{II.49})$$

où on a utilisé la relation suivante :

$$\frac{1}{2} \text{Tr}[X \bar{\sigma}^\mu] = \frac{1}{2} \text{Tr}[x_\nu \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu] = \frac{1}{2} \text{Tr}[\sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu] x_\nu = \frac{1}{2} 2\eta^{\mu\nu} x_\nu = x^\mu. \quad (\text{II.50})$$

D'autre part nous avons,

$$\begin{aligned} x'^\mu &= \frac{1}{2} \text{Tr}[X' \bar{\sigma}^\mu] = \frac{1}{2} \text{Tr}[MXM^\dagger \bar{\sigma}^\mu] = \frac{1}{2} \text{Tr}[M x_\nu \sigma^\nu M^\dagger \bar{\sigma}^\mu] \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}[M \sigma^\nu M^\dagger \bar{\sigma}^\mu] x_\nu = \frac{1}{2} \text{Tr}[\bar{\sigma}^\mu M \sigma_\nu M^\dagger] x^\nu. \end{aligned} \quad (\text{II.51})$$

Alors en comparant avec (II.2), nous obtenons la transformation de Lorentz en fonction de $SL(2, \mathbb{C})$:

$$\Lambda^\mu{}_\nu(M) = \frac{1}{2} \text{Tr}[\bar{\sigma}^\mu M \sigma_\nu M^\dagger]. \quad (\text{II.52})$$

qui est un homomorphisme de $SL(2, \mathbb{C})$ sur le groupe $L_+^\uparrow$,

$$SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow L_+^\uparrow. \quad (\text{II.53})$$

mais la correspondance suivante,

$$\Lambda \longleftrightarrow \pm M.$$

implique que les deux matrices $-M$ et $+M$ conduisent à la même transformation de Lorentz, c'est à dire chaque transformation de Lorentz correspond à deux transformations de $SL(2, \mathbb{C})$, donc on a :

$$L_+^\uparrow \cong SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}. \quad (\text{II.54})$$

qui est un isomorphisme, alors $SL(2, \mathbb{C})$ est le double recouvrement du groupe $L_+^\uparrow$.

Représentations et générateurs du groupe $SL(2, \mathbb{C})$

- Représentation fondamentale :

$$\psi'_\alpha = M_\alpha{}^\beta \psi_\beta. \quad (\text{II.55})$$

où ψ'_α est un spineur de Weyl gaucher noté par $(\frac{1}{2}, 0)$.

- Représentation fondamentale conjuguée :

$$\bar{\chi}'_{\dot{\alpha}} = M_\alpha{}^*{}^{\dot{\beta}} \bar{\chi}_{\dot{\beta}}. \quad (\text{II.56})$$

où $\bar{\chi}'_{\dot{\alpha}}$ est un spineur de Weyl droitier noté par $(0, \frac{1}{2})$. Notons que M est équivalente à M^{-1T} , de même pour leurs conjuguées M^* et M^{*-1T} car,

$$\varepsilon^{\alpha\beta} M_\beta{}^\rho \varepsilon_{\rho\sigma} = (M^{-1T})^\alpha{}_\sigma \quad \text{et} \quad \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} (M^*)_{\dot{\beta}}{}^{\dot{\rho}} \varepsilon_{\dot{\rho}\dot{\sigma}} = (M^{*-1T})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\sigma}}. \quad (\text{II.57})$$

où $\varepsilon^{\alpha\beta}$ est la métrique du groupe $SL(2, \mathbb{C})$ donnée par,

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.58})$$

elle satisfait,

$$\varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{\rho\sigma} = \delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\beta - \delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\beta. \quad (\text{II.59})$$

cette métrique est invariante sous $SL(2, \mathbb{C})$, en effet :

$$\varepsilon^{\alpha\beta} \xrightarrow{SL(2, \mathbb{C})} \varepsilon^{\rho\sigma} M_\rho{}^\alpha M_\sigma{}^\beta = \varepsilon^{\alpha\beta} \det M = \varepsilon^{\alpha\beta}. \quad (\text{II.60})$$

à l'aide de cette métrique on peut élever ou abaisser les indices spinoriels, ce qui donne la représentation anti-fondamentale et la représentation anti-fondamentale conjuguée données par :

$$\psi^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} \psi_\beta, \quad (\text{II.61})$$

$$\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\chi}_{\dot{\beta}}. \quad (\text{II.62})$$

Notons que les représentations fondamentale et anti-fondamentale sont équivalentes et de même pour la représentation fondamentale conjuguée avec la représentation anti-fondamentale conjuguée qu'on a déjà vu dans la relation (II.57), où on a montré que M et Λ sont équivalentes, alors d'après la relation (II.47) on obtient,

$$X_{\alpha\dot{\alpha}} = (x_\mu \sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \longrightarrow M_\alpha{}^\beta (x_\mu \sigma^\mu)_{\beta\dot{\beta}} M_{\dot{\alpha}}^*{}^{\dot{\beta}} = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}. \quad (\text{II.63})$$

et la multiplication de (II.63) par $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu$ donne :

$$(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} = M_\alpha{}^\beta (\sigma^\nu)_{\beta\dot{\beta}} (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu M_{\dot{\alpha}}^*{}^{\dot{\beta}}. \quad (\text{II.64})$$

II.1. Algèbre de Poincaré et ses représentations

En utilisant la relation $Tr(\sigma^\mu \bar{\sigma}_\nu) = 2\delta^\mu_\nu$, où les matrices $\bar{\sigma}$ définies par :

$$(\bar{\sigma}^\mu)^{\alpha\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} (\sigma^\mu)_{\beta\dot{\beta}} = (-1, -\sigma^i).$$

on peut écrire l'inverse de l'application (II.47) et donner x^μ en fonction de X comme suit :

$$Tr(X \bar{\sigma}_\nu) = Tr(x_\mu \sigma^\mu \bar{\sigma}_\nu) \implies x_\mu = \frac{Tr(X \bar{\sigma}_\nu)}{Tr(\sigma^\mu \bar{\sigma}_\nu)} = \frac{1}{2} Tr(\bar{\sigma}_\mu X). \quad (II.65)$$

où le quadrivecteur x_μ sous la transformation de Lorentz Λ vérifie,

$$\begin{aligned} x_\mu \longrightarrow x'_\mu &= \frac{1}{2} Tr(\bar{\sigma}_\mu X') = \frac{1}{2} Tr(\bar{\sigma}_\mu M X M^*) \\ &= \frac{1}{2} Tr(\bar{\sigma}_\mu M x_\nu \sigma^\nu M^*) = \frac{1}{2} Tr(\sigma^\nu M^* \bar{\sigma}_\mu M) x_\nu \\ &= \frac{1}{2} Tr(\bar{\sigma}_\mu M \sigma^\nu M^*) x_\nu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu. \end{aligned} \quad (II.66)$$

d'où on trouve la relation de correspondance entre la transformation de Lorentz et la transformation du groupe $SL(2, \mathbb{C})$ donnée par :

$$\Lambda_\mu{}^\nu = \frac{1}{2} Tr(\bar{\sigma}_\mu M \sigma^\nu M^*). \quad (II.67)$$

À partir du produit antisymétrique des matrices σ et $\bar{\sigma}$ on peut déterminer les générateurs du groupe de $SL(2, \mathbb{C})$ comme suit :

$$\begin{aligned} (\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta &= \frac{i}{4} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)_\alpha{}^\beta, \\ (\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} &= \frac{i}{4} (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}. \end{aligned} \quad (II.68)$$

ces générateurs vérifient l'algèbre de Lorentz suivante :

$$[\sigma^{\mu\nu}, \sigma^{\rho\tau}] = i(\eta^{\nu\rho} \sigma^\mu{}^\tau - \eta^{\mu\tau} \sigma^\nu{}^\rho - \eta^{\nu\tau} \sigma^\mu{}^\rho - \eta^{\mu\rho} \sigma^\nu{}^\tau). \quad (II.69)$$

En fonction de ces générateurs la transformation des spineurs de Weyl est donnée par :

$$\begin{aligned} \psi_\alpha &\longrightarrow \exp\left(\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}\right)_\alpha{}^\beta \psi_\beta, \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} &\longrightarrow \exp\left(\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \bar{\sigma}^{\mu\nu}\right)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \bar{\chi}^{\dot{\beta}}. \end{aligned} \quad (II.70)$$

où ψ_α est le spineur de Weyl gauche et $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$ spineur de Weyl droitier, appartient respectivement à la représentation $(\frac{1}{2}, 0)$ et $(0, \frac{1}{2})$ du groupe $SU(2) \times SU(2)$.

Produit des spineurs de Weyl

Le produit des spineurs de Weyl est défini par le produit scalaire suivant :

$$\chi\psi = \chi^\alpha \psi_\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} \chi_\beta \psi_\alpha = -\varepsilon^{\beta\alpha} \chi_\beta \psi_\alpha = -\chi_\beta \psi^\beta = \psi^\beta \chi_\beta = \psi\chi, \quad (II.71)$$

$$\bar{\chi}\bar{\psi} = \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\chi}^{\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = -\varepsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\chi}^{\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\psi}^{\dot{\beta}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\psi}\bar{\chi}. \quad (\text{II.72})$$

notons que ψ^{α} sont des nombres de Grassmann qui anticommulent, en effet :

$$\psi\psi = \psi^{\alpha}\psi_{\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta}\psi_{\beta}\psi_{\alpha} = \psi_2\psi_1 - \psi_1\psi_2. \quad (\text{II.73})$$

leurs conjugaison hermitique sont donnés par :

$$(\psi_{\alpha})^{\dagger} \equiv (\psi_{\alpha})^* = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}, \quad (\text{II.74})$$

$$\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \psi_{\beta}^* (-\sigma^0)^{\dot{\alpha}\beta}. \quad (\text{II.75})$$

Donc on a,

$$(\chi\psi)^{\dagger} = \bar{\chi}\bar{\psi} = \bar{\psi}\bar{\chi} \quad , \quad \bar{\chi}\bar{\sigma}^{\mu}\psi = -\psi\sigma^{\mu}\bar{\chi} \quad , \quad (\psi\sigma^{\mu}\bar{\chi})^{\dagger} = \chi\sigma^{\mu}\bar{\psi}, \quad (\text{II.76})$$

$$(\chi\psi)^{\dagger} = (\chi^{\alpha}\psi_{\alpha})^{\dagger} = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\psi}\bar{\chi} = \bar{\chi}\bar{\psi}. \quad (\text{II.77})$$

En effet,

$$\begin{aligned} \bar{\chi}\bar{\sigma}^{\mu}\psi &= \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\alpha}\psi_{\alpha} = (\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\chi}^{\dot{\beta}})(\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\alpha}(\varepsilon_{\alpha\beta}\psi^{\beta}) = \bar{\chi}^{\dot{\beta}}(\bar{\sigma}^{\mu})_{\dot{\beta}\beta}\psi^{\beta} \\ &= -\psi^{\beta}(\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\alpha}\bar{\chi}^{\dot{\beta}} = -\psi\sigma^{\mu}\bar{\chi}. \end{aligned} \quad (\text{II.78})$$

$$\begin{aligned} (\psi\sigma^{\mu}\bar{\chi})^{\dagger} &= (\psi^{\alpha}(\bar{\sigma}^{\mu})_{\dot{\alpha}\alpha}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}})^{\dagger} = (\bar{\chi}^{\dot{\alpha}})^{\dagger}(\bar{\sigma}^{\mu})_{\dot{\alpha}\alpha}(\psi^{\alpha})^{\dagger} = \chi^{\alpha}(\bar{\sigma}^{\mu})_{\dot{\alpha}\alpha}\bar{\psi} \\ &= \chi\sigma^{\mu}\bar{\psi}. \end{aligned} \quad (\text{II.79})$$

II.1.2 Algèbre de Poincaré et ses représentations

Le groupe de Poincaré par définition est le groupe de toutes les transformations réel dans l'espace de Minkowski, c'est le produit semi direct du groupe de Lorentz et du groupe de translation. Comme on a vu dans la partie précédente la norme du quadri-vecteur est invariante sous la transformation de Lorentz, de même pour les translations où sa transformation s'écrit [62, 63] :

$$x^{\mu} \longrightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}. \quad (\text{II.80})$$

avec a^{μ} les quatre paramètres infinitésimaux de translation. Donc une transformation de Poincaré est de la forme suivante :

$$x^{\mu} \longrightarrow x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}x^{\nu} + a^{\mu}. \quad (\text{II.81})$$

sa forme générale est donnée par :

$$U = \exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} + ia_{\mu}P^{\mu}\right). \quad (\text{II.82})$$

II.1. Algèbre de Poincaré et ses représentations

où P^μ sont les quatre générateurs de translation (4-vecteur énergie-impulsion), et $M^{\mu\nu}$ les six générateurs de Lorentz. Ces générateurs satisfont les relations de commutation qui définissent l'algèbre de Poincaré, ces relations sont données comme suit :

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i \left(\eta_{\mu\sigma} M_{\rho\nu} + \eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho} \right), \quad (\text{II.83})$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = i \left(\eta_{\nu\rho} P_\mu - \eta_{\mu\rho} P_\nu \right). \quad (\text{II.84})$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \quad (\text{II.85})$$

à partir de ces relations on peut montrer les relations suivantes [63] :

$$[P^\mu, P_\mu P^\mu] = 0, \quad (\text{II.86})$$

$$[M^{\mu\nu}, P_\mu P^\mu] = 0, \quad (\text{II.87})$$

$$[P^\mu, W_\mu W^\mu] = 0, \quad (\text{II.88})$$

$$[M^{\mu\nu}, W_\mu W^\mu] = 0. \quad (\text{II.89})$$

où $P_\mu P^\mu$ et $W_\mu W^\mu$ sont opérateurs de Casimir de l'algèbre de Poincaré, et W^μ le 4-vecteur de Pauli-Lubanski défini par :

$$W_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu M^{\rho\sigma}. \quad (\text{II.90})$$

Les représentations du groupe de Poincaré sont basées sur le concept du petit groupe, car le groupe de Poincaré n'est pas compact, c'est à dire qu'il ne possède pas de représentations unitaires finies non triviales, et ça est dû à la caractérisation des représentations par l'opérateur P_μ . Ce petit groupe est un sous-groupe des transformations de Lorentz qui laissent P_μ invariant [64] :

$$\Lambda_\nu^\mu p_\mu = p_\nu. \quad (\text{II.91})$$

où p_μ est la valeur propre du quadrivecteur P_μ . Alors à partir de la transformation (II.91) et la transformation infinitésimale (II.17) on peut montrer,

$$\omega_{\mu\nu} p^\nu = 0. \quad (\text{II.92})$$

Rappelons que le paramètre infinitésimal de la transformation de Lorentz $\omega_{\mu\nu}$ à six composantes, mais la contrainte (II.92) supprime trois composantes donc il reste avec seulement trois composantes. À partir de cette contrainte on a :

$$\omega_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \vartheta^\rho p^\sigma. \quad (\text{II.93})$$

avec τ^ρ est un quadrivecteur. En utilisant les relations (II.92) et (II.93), la transformation (II.82) devient :

$$U = \exp \left[\frac{i}{2} (\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \tau^\rho p^\sigma) M^{\mu\nu} \right] = \exp (i \tau^\rho W_\rho). \quad (\text{II.94})$$

Notons qu'avec la définition du quadrivecteur de Pauli-lubanski dans l'expression (II.90) on a :

$$W_\mu p^\mu = 0. \quad (\text{II.95})$$

Maintenant nous sommes en mesure de déterminer les représentations massives et non-massives de l'algèbre de Poincaré.

Représentations de l'algèbre de Poincaré

1) Représentations massives :

Le référentiel au repos d'une particule dans ce cas vérifie :

$$p^\mu = (-m, 0, 0, 0). \quad (\text{II.96})$$

Dans ce référentiel on a $p^i = 0$, alors à partir de la relation (II.95) on déduit que la première composante (du temps) de W_μ est nulle,

$$W_0 = 0, \quad (\text{II.97})$$

et la composante de l'espace est non nulle,

$$W_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijkl} p^0 M^{jk} = -m J_i. \quad (\text{II.98})$$

Donc la transformation dans ce référentiel est donnée par :

$$U = \exp(-im\tau^i J_i). \quad (\text{II.99})$$

d'où $SU(2)$ est le petit groupe et les opérateurs de Casimir sont donnés par :

$$W^2 = m^2 J^2, \quad (\text{II.100})$$

$$P^2 = -m^2. \quad (\text{II.101})$$

les valeurs propres de W sont :

$$W^2 = m^2 j(j+1). \quad (\text{II.102})$$

Cette représentation est en fonction de la masse m et le spin j , de plus la troisième composante du spin j_3 peut prendre les valeurs $-j$ à $+j$, donc les représentations irréductibles des particules massives de l'algèbre de Poincaré est caractérisées par :

$$|m, j, p^\mu, j_3\rangle \quad (\text{II.103})$$

2) Représentations non massives :

Dans ce cas le référentiel est donné par :

$$p^\mu = (-m, 0, 0, m). \quad (\text{II.104})$$

les composantes du quadri-vecteur W_μ sont :

$$W_0 = m J_3, \quad (\text{II.105})$$

$$W_1 = m (J_1 + K_2), \quad (\text{II.106})$$

$$W_2 = m (-J_2 - K_1), \quad (\text{II.107})$$

II.1. Algèbre de Poincaré et ses représentations

$$W_3 = -mJ_3. \quad (\text{II.108})$$

En utilisant (II.23) les relations de commutation des composantes (II.105-II.108) sont donnés par :

$$[W_1, W_2] = 0, \quad (\text{II.109})$$

$$[W_3, W_1] = -imW_2, \quad (\text{II.110})$$

$$[W_3, W_2] = imW_1. \quad (\text{II.111})$$

ces relations de commutation sont celles du groupe euclidien à deux dimensions $SO(2) \times \mathbb{R}$, c'est le petit groupe dans ce cas de particules non massives qui n'est pas compacte. Alors pour avoir des représentations unitaires finies non triviales il faut considérer le sous groupe $SO(2)$ ce qui implique que $W_1 = W_2 = 0$. En utilisant les relations (II.95) et (II.102) on obtient :

$$W_\mu = \lambda p_\mu. \quad (\text{II.112})$$

où λ est l'hélicité. En remplaçant l'expression de W_0 dans (II.105) et dans les relations (II.104, II.112) on a :

$$W_0 = mJ_3 = \vec{p} \cdot \vec{J} = \lambda m \implies \lambda = \frac{\vec{p} \cdot \vec{J}}{m} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{J}}{|\vec{p}|} = J_3. \quad (\text{II.113})$$

Donc physiquement l'hélicité λ est la projection du spin suivant la direction du mouvement, et les représentations irréductibles sont caractérisées par :

$$|0, 0, p^\mu, \lambda\rangle := |p^\mu, \lambda\rangle. \quad (\text{II.114})$$

sous la symétrie CPT ces états se transforment comme suit :

$$CPT : |p^\mu, \lambda\rangle \longrightarrow |p^\mu, -\lambda\rangle. \quad (\text{II.115})$$

Notons que le spin est invariant sous la transformation de parité $\mathcal{P} : p^\mu \longrightarrow -p^\mu$, alors pour que les états soient invariante sous CPT il faut qu'on a :

$$\mathcal{P} : \lambda \longrightarrow -\lambda. \quad (\text{II.116})$$

ce qui implique qu'on doit considérer aussi $\lambda = -J_3$, c'est à dire $\lambda = \pm |J_3|$ et la transformation (II.82) dans ce cas donne :

$$U = \exp(2\pi i \lambda). \quad (\text{II.117})$$

d'où les états se transforment comme suit :

$$\exp(2\pi i \lambda) |p^\mu, \lambda\rangle = \pm |p^\mu, -\lambda\rangle. \quad (\text{II.118})$$

Par conséquence λ doit prendre des valeurs entières et demi-entières,

$$\lambda = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots \quad (\text{II.119})$$

Notons que $\lambda = 0$ décrit les bosons scalaires comme le boson de Higgs, et $\lambda = \frac{1}{2}$ décrit les fermions comme les leptons et les quarks, et $\lambda = 1$ des bosons vecteur (de jauge) comme le photon γ les gluons g et les bosons de jauge $W^\pm$, Z^0 , et finalement $\lambda = 2$ pour le graviton.

II.2 Superalgèbre de Poincaré et ses représentations

II.2.1 Superalgèbre de Poincaré

Si on cherche la plus grande structure capable de contenir l'algèbre de Poincaré, c'est à dire une symétrie plus générale susceptible d'englober celles de l'espace-temps, alors il est nécessaire d'unifier cette dernière avec les symétries internes. Cependant la manière la plus triviale d'après le théorème de Colman-Mandula [36] (appelé aussi théorème no-go) est d'utiliser leurs produit direct :

$$[T, P_\mu] = 0, \quad (\text{II.120})$$

$$[T, M_{\mu\nu}] = 0. \quad (\text{II.121})$$

où T est le groupe de la symétrie interne. Ce théorème suppose que la symétrie de l'espace-temps se compose uniquement de générateurs bosoniques. Rappelons que ces opérateurs bosoniques sont sous une algèbre commutative sous laquelle les bosons se transforment en bosons et les fermions en fermion. Alors pour trouver une symétrie qui relie les bosons et les fermions, i.e. transforment les bosons en fermions et vice versa, il faut généraliser le théorème de Colman-Mandula. Cette généralisation est décrite par le théorème de Haag, Lopuszanski et Sohnius [43], qui introduit des opérateurs fermioniques appelés spineurs de Weyl gauchers Q_α^A et leurs complexes conjugués appelés spineurs de Weyl droitiers $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^A$, où l'indice $A \in \{1, \dots, \mathcal{N}\}$ correspond au nombre d'opérateurs fermioniques différents qui satisfaisant les relations suivante :

$$Q_\alpha^A |B\rangle = |F\rangle, \quad (\text{II.122})$$

$$Q_\alpha^A |F\rangle = |B\rangle. \quad (\text{II.123})$$

Notons que si l'indice A est limité à $\mathcal{N} = 4$ les théories décrites est des théories de jauge supersymétriques, et la limite $\mathcal{N} = 8$ décrit les théories de la supergravité. Cette algèbre qui contient des générateurs bosoniques et fermioniques est appelée superalgèbre de Poincaré sous laquelle les opérateurs fermioniques commutent avec les opérateurs bosoniques et anti-commutent avec les opérateurs fermioniques, ce qui signifie que cette superalgèbre est une algèbre de lie $\mathbb{Z}_2$ -graduée où ses opérateurs vérifient la relation suivante :

$$O_a O_b - (-1)^{\eta_a \eta_b} O_b O_a = i C_{ab}^c O_c. \quad (\text{II.124})$$

avec

$$\eta_a = \begin{cases} 0 : O_a \text{ générateurs bosonique.} \\ 1 : O_a \text{ générateurs fermionique.} \end{cases} \quad (\text{II.125})$$

II.2. Superalgèbre de Poincaré et ses représentations

Donc l'identité de Jacobi est donnée par :

$$[B_1, [B_2, B_3]] + [B_2, [B_3, B_1]] + [B_3, [B_1, B_2]] = 0, \quad (\text{II.126})$$

$$[F_1, [B_2, B_3]] + [B_2, [B_3, F_1]] + [B_3, [F_1, B_2]] = 0, \quad (\text{II.127})$$

$$\{F_1, [F_2, B_3]\} - \{F_2, [B_3, F_1]\} + [B_3, \{F_1, F_2\}] = 0, \quad (\text{II.128})$$

$$[F_1, \{F_2, F_3\}] + [F_2, \{F_3, F_1\}] + [F_3, \{F_1, F_2\}] = 0. \quad (\text{II.129})$$

Puisque Q_α^A est un spineur de Weyl gaucher il se transforme sous $SL(2, \mathbb{C})$ comme suit [65] :

$$\begin{aligned} Q_\alpha^{A'} &= \exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)_\alpha^\beta Q_\beta^A \approx \left(\mathbf{1} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} + \mathcal{O}(\omega_{\mu\nu}^2)\right)_\alpha^\beta Q_\beta^A \quad (\text{II.130}) \\ &= Q_\alpha^A + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta^A + \mathcal{O}(\omega_{\mu\nu}^2). \end{aligned}$$

Q_α^A est aussi un opérateur, alors sous le groupe de Lorentz (II.20) sa transformation s'écrit :

$$\begin{aligned} Q_\alpha^{A'} &= U(\Lambda)^\dagger Q_\alpha^A U(\Lambda) \approx \left(\mathbf{1} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right) Q_\alpha^A \left(\mathbf{1} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right) \quad (\text{II.131}) \\ &= Q_\alpha^A + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(Q_\alpha^A M^{\mu\nu} - M^{\mu\nu} Q_\alpha^A) + \mathcal{O}(\omega_{\mu\nu}^2). \end{aligned}$$

L'identification des termes $\mathcal{O}(\omega_{\mu\nu})$ des relations (II.131) et (II.130) donne :

$$Q_\alpha^A + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(Q_\alpha^A M^{\mu\nu} - M^{\mu\nu} Q_\alpha^A) = Q_\alpha^A - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta^A. \quad (\text{II.132})$$

$$\implies [Q_\alpha^A, M^{\mu\nu}] = (\sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta^A. \quad (\text{II.133})$$

Cette relation de commutation montre que les générateurs fermioniques se transforment sous les rotations, ce qui confirme que son spin est $\frac{1}{2}$. À partir de cette relation et l'équation (II.22) on peut montrer que sous les transformations de Lorentz, les générateurs Q_α^A se comportent comme des spineurs :

$$\left[Q_\alpha^A, \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}M^{jk}\right] = [Q_\alpha^A, J_i] = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(\sigma^{jk})_\alpha^\beta Q_\beta^A. \quad (\text{II.134})$$

avec

$$\sigma^{ij} = -\frac{i}{4}(\sigma^i\bar{\sigma}^j - \sigma^j\bar{\sigma}^i) = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\sigma_k, \quad (\text{II.135})$$

alors on a :

$$\implies [Q_\alpha^A, J^k] = \frac{1}{2}(\sigma^k)_\alpha^\beta Q_\beta^A. \quad (\text{II.136})$$

D'autre part le produit de Kronecker de P^μ et Q_α^A donne :

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \times \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right). \quad (\text{II.137})$$

et par conséquence on a :

$$[Q_\alpha^A, P^\mu] = c (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}A}. \quad (\text{II.138})$$

où c est une constante, pour la déterminer on utilise l'identité de Jacobi (II.127), en effet :

$$\begin{aligned} [P^\mu, [P^\nu, Q_\alpha^A]] + [P^\nu, [Q_\alpha^A, P^\mu]] + [Q_\alpha^A, \underbrace{[P^\mu, P^\nu]}_0] &= 0 \\ -c (\sigma^\nu)_{\alpha\dot{\alpha}} [P^\mu, \bar{Q}^{\dot{\alpha}A}] + c (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} [P^\nu, \bar{Q}^{\dot{\alpha}A}] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{II.139})$$

En utilisant le complexe conjugué de la relation (II.138) donné par :

$$[P^\mu, \bar{Q}_\alpha^A] = c^* (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} Q_\beta^A. \quad (\text{II.140})$$

on a :

$$[\bar{Q}^{\dot{\beta}A}, P^\mu] = c^* \varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \varepsilon^{\alpha\beta} Q_\beta^A = -c^* (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\beta}\beta} Q_\beta^A. \quad (\text{II.141})$$

Alors la relation (II.139) devient :

$$\begin{aligned} -cc^* (\sigma^\nu)_{\alpha\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} Q_\beta^A + cc^{**} (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{\alpha}\beta} Q_\beta^A &= 0 \\ |c|^2 \underbrace{\left((\sigma^\nu)_{\alpha\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} - (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{\alpha}\beta} \right)}_{\neq 0} Q_\beta^A &= 0, \end{aligned} \quad (\text{II.142})$$

$$\implies c = 0. \quad (\text{II.143})$$

D'où,

$$[Q_\alpha^A, P^\mu] = [\bar{Q}_{\alpha A}, P^\mu] = 0. \quad (\text{II.144})$$

Les générateurs fermioniques Q_α^A commute avec les générateurs de translation P^μ i.e. que l'invariance par translation est respectée et cela implique que P^μ aussi commute avec les Q_α^A , donc P^μ est un casimir de l'algèbre de super-Poincaré. Mais W^μ ne l'est pas, ce qui implique que les particules et leurs superpartenaire ont des spins différents et des masses identiques ce qui est pas observable dans la nature puisque aucune particules supersymétrique n'a été détectée expérimentalement, c'est à dire que les masses des superpartenaires est plus élevées que les particules ordinaire. par conséquence à notre échelle d'énergie la supersymétrie est brisée. D'autres part en utilisant le produit de Kronecker d'un spineur gaucher Q_α^A avec un spineur droitier $\bar{Q}_{\dot{\alpha}A}$ on a :

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \times \left(0, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \quad (\text{II.145})$$

Ce qui signifie que la composition de deux transformations supersymétrique amènes à une translation dans l'espace-temps¹. Donc on a :

$$\{Q_\alpha^A, \bar{Q}_{\dot{\alpha}B}\} = s\delta_B^A (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} P_\mu. \quad (\text{II.146})$$

1. Le spineur Q appartient à la représentation (j, j') et $\bar{Q}$ appartient à $(j' + j)$, alors $\{\bar{Q}, \bar{Q}\} \in (j + j, j' + j)$, or le seul objet bosonique de ce type est $P_\mu \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, ce qui confirme que $Q \in (\frac{1}{2}, 0)$ et $\bar{Q} \in (0, \frac{1}{2})$.

II.2. Superalgèbre de Poincaré et ses représentations

où la constante s est par convention égale à 2, alors :

$$\{Q_\alpha^A, \bar{Q}_{\dot{\alpha}B}\} = 2\delta_B^A (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} P_\mu. \quad (\text{II.147})$$

Le produit de Kronecker de deux spineurs de Weyl gaucher donne :

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \times \left(\frac{1}{2}, 0\right) = (0, 0) + (1, 0). \quad (\text{II.148})$$

ce qui implique,

$$\{Q_\alpha^A, Q_\alpha^B\} = \varepsilon_{\alpha\beta} Z^{[AB]} + k\delta^{(AB)} (\sigma^\mu)_{\alpha\beta} M_{\mu\nu}. \quad (\text{II.149})$$

où k est une constante et la partie antisymétrique $(0, 0)$ décrit le scalaire Z^{AB} appelé charge centrale qui commute avec tous les générateurs. Notons que $Z^{AB} = 0$ dans la limite $\mathcal{N} = 1$ où il y a un seul générateur Q_α^A , et dans ce cas la relation (II.149) devient :

$$\{Q_\alpha, Q_\alpha\} = k (\sigma^\mu)_{\alpha\beta} M_{\mu\nu}. \quad (\text{II.150})$$

qui permet de déterminer facilement la constante k en utilisant l'identité de Jacobi (II.128) comme suit :

$$\{Q_\alpha, [Q_\beta, P^\mu]\} - \{Q_\beta, [Q_\alpha, P^\mu]\} + [P^\mu, \{Q_\alpha, Q_\beta\}] = 0. \quad (\text{II.151})$$

donc,

$$k (\sigma^\mu)_{\alpha\beta} \underbrace{[P^\mu, M_{\mu\nu}]}_{\neq 0} = 0, \quad (\text{II.152})$$

$$\implies k = 0. \quad (\text{II.153})$$

Pour le cas où $\mathcal{N} = 1$ on a :

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0. \quad (\text{II.154})$$

et finalement pour le cas où $\mathcal{N} > 1$ on a :

$$\{Q_\alpha^A, Q_\beta^B\} = \varepsilon_{\alpha\beta} Z^{AB}. \quad (\text{II.155})$$

Notons que le groupe de l'algèbre précédente (II.155) est le groupe d'automorphisme $U(\mathcal{N})$, notons aussi que les générateurs Q_α^A et Z^{AB} se transforment sous CPT comme suit :

$$Q_\alpha^A \longrightarrow i (Q_\alpha^A)^* = i \bar{Q}_{\dot{\alpha}A}, \quad (\text{II.156})$$

$$Z^{AB} \longrightarrow - (Z^{AB})^* = -\bar{Z}_{AB}. \quad (\text{II.157})$$

II.2.2 Représentations de la superalgèbre de Poincaré

Avant la construction des multiplets supersymétriques (supermultiplets) dans le cas des particules non-massives et dans le cas des particules massives comme on a vu dans le cas des représentations de l'algèbre de Poincaré, il faut noter que chaque multiplet contient le même nombre de degrés de liberté bosoniques et fermioniques. En effet, on

définit l'opérateur du nombre fermionique $(-1)^{N_F} = (-)^{N_F}$ par :

$$(-)^{N_F} |B\rangle = +|B\rangle, \quad (\text{II.158})$$

$$(-)^{N_F} |F\rangle = -|F\rangle. \quad (\text{II.159})$$

ce nouveau opérateur anticommute avec l'opérateur Q_α^A comme suit :

$$\begin{aligned} \left((-1)^{N_F} Q_\alpha^A + Q_\alpha^A (-1)^{N_F} \right) |B\rangle &= (-1)^{N_F} |F\rangle + Q |B\rangle \\ &= -|F\rangle + |F\rangle = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.160})$$

Maintenant nous allons utiliser la relation (II.147) pour faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned} Tr \left((-1)^{N_F} \{Q_\alpha^A, \bar{Q}_{\dot{\alpha}B}\} \right) &= 2\delta_B^A Tr \left((-1)^{N_F} (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} P_\mu \right) \\ &= 2\delta_B^A (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} p_\mu Tr \left((-1)^{N_F} \right). \end{aligned} \quad (\text{II.161})$$

cette formule peut s'écrire aussi comme suit :

$$\begin{aligned} Tr \left((-1)^{N_F} \{Q_\alpha^A, \bar{Q}_{\dot{\alpha}B}\} \right) &= Tr \left((-1)^{N_F} Q_\alpha^A \bar{Q}_{\dot{\alpha}B} + (-1)^{N_F} \bar{Q}_{\dot{\alpha}B} Q_\alpha^A \right) \\ &= Tr \left(-Q_\alpha^A (-1)^{N_F} \bar{Q}_{\dot{\alpha}B} + Q_\alpha^A (-1)^{N_F} \bar{Q}_{\dot{\alpha}B} \right) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{II.162})$$

En identifiant la relation (II.161) avec (II.162) on obtient :

$$Tr \left((-1)^{N_F} \right) = 0. \quad (\text{II.163})$$

ce qui implique :

$$Tr \left((-1)^{N_F} \right) = \sum_B \langle B | (-1)^{N_F} | B \rangle + \sum_F \langle F | (-1)^{N_F} | F \rangle = 0 \quad (\text{II.164})$$

$$\implies \sum_B \langle B | B \rangle = \sum_F \langle F | F \rangle. \quad (\text{II.165})$$

d'où le nombre de bosons égal au nombre des fermions.

Nous allons déterminer maintenant les représentations supersymétriques non-massives et massives, en se basant sur les relations d'anticommution données dans la section précédente.

Représentations non-massives

Pour construire des représentations finies nous allons considérer la partie compacte $SO(2)$ du petit groupe euclidien vu dans la partie précédente, dans le référentiel (II.104) les relations d'anticommution (II.149) et (II.147) prennent la forme suivante [66–72] :

$$\{Q_\alpha^A, \bar{Q}_{\dot{\alpha}B}\} = 2m\delta_B^A \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{II.166})$$

$$\{Q_\alpha^A, Q_\beta^B\} = 0, \quad (\text{II.167})$$

$$\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}A}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}B}\} = 0. \quad (\text{II.168})$$

II.2. Superalgèbre de Poincaré et ses représentations

d'où la relation (II.166) implique :

$$\{Q_2^A, \bar{Q}_{2A}\} = 0 \implies Q_2^A \equiv \bar{Q}_{2A} = 0, \quad (\text{II.169})$$

$$\{Q_1^A, \bar{Q}_{1A}\} = 4m. \quad (\text{II.170})$$

et en utilisant la relation (II.136) on obtient :

$$\begin{aligned} J^3 (Q_1^A |p^\mu, \lambda\rangle) &= (Q_1^A J^3 - [Q_1^A, J]) |p^\mu, \lambda\rangle \\ &= \left(\lambda - \frac{1}{2} (\sigma^3)_1^1\right) (Q_1^A |p^\mu, \lambda\rangle) \\ &= \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) (Q_1^A |p^\mu, \lambda\rangle). \end{aligned} \quad (\text{II.171})$$

on remarque que l'opérateur Q_1^A diminue l'hélicité λ par $\frac{1}{2}$. Alors pour l'opérateur $\bar{Q}_{1A}$ on a :

$$J^3 (\bar{Q}_{1A} |p^\mu, \lambda\rangle) = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) (\bar{Q}_{1A} |p^\mu, \lambda\rangle). \quad (\text{II.172})$$

ce qui signifie que l'opérateur $\bar{Q}_{1A}$ augmente l'hélicité λ par $\frac{1}{2}$. Définissant les combinaisons suivantes :

$$\mathbf{Q}_N = (\mathbf{Q}_N)^* \equiv \begin{cases} \mathbf{Q}_{2A} &= \frac{i}{2\sqrt{N}} (Q_1^A - \bar{Q}_{1A}) \\ \mathbf{Q}_{2A-1} &= \frac{1}{2\sqrt{N}} (Q_1^A + \bar{Q}_{1A}) \end{cases}, \quad N = 1, \dots, \mathcal{N}. \quad (\text{II.173})$$

Alors les relations (II.166), (II.167) et (II.168) deviennent :

$$\{\mathbf{Q}_M, \mathbf{Q}_N\} = 2\delta_{MN}, \quad M, N = 1, \dots, 2\mathcal{N}. \quad (\text{II.174})$$

ce qui décrit l'algèbre de Clifford du groupe d'automorphisme $SO(2\mathcal{N})$, avec la dimension de sa représentation irréductible égale à $2^\mathcal{N}$. Cette représentation se décompose en deux représentations irréductibles qui ne sont pas équivalentes et de dimension $2^{\mathcal{N}-1}$ pour chacune d'elles. Définissant maintenant les $\mathcal{N}$ opérateurs de créations $(a^A)^\dagger$ et d'annihilation a^A de l'algèbre de Clifford comme suit :

$$a^A = \frac{Q_1^A}{2\sqrt{m}}, \quad (\text{II.175})$$

$$(a^A)^\dagger = \frac{\bar{Q}_{1A}}{2\sqrt{m}}. \quad (\text{II.176})$$

Alors les relations (II.166), (II.167) et (II.168) deviennent :

$$\begin{aligned} \{a^A, (a^B)^\dagger\} &= \delta_B^A, \\ \{a^A, a^B\} &= 0, \\ \{(a^A)^\dagger, (a^B)^\dagger\} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{II.177})$$

Pour construire les représentations de cette algèbre il faut commencer par un état de vide $|\Omega\rangle$ (vide de Clifford) d'hélicité la plus basse λ_0 . Par conséquence il doit vérifier la condition suivante :

$$a^A |\Omega\rangle = 0. \quad (\text{II.178})$$

en appliquant les opérateurs de créations $(a^A)^\dagger$ sur l'état $|\Omega\rangle$ on peut construire les états suivantes :

$$|\Omega\rangle^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^{A_n})^\dagger \dots (a^{A_1})^\dagger |\Omega\rangle. \quad (\text{II.179})$$

d'où leurs hélicité égale a $\lambda_0 + \frac{n}{2}$ et de multiplicité $C_n^{\mathcal{N}}$. Comme on a vu dans l'algèbre de Poincaré l'hélicité se transforme sous la symétrie $\mathcal{CPT}$ comme suit :

$$\mathcal{CPT} : \lambda \longrightarrow -\lambda. \quad (\text{II.180})$$

donc pour garder l'invariance sous cette symétrie il faut considérer aussi le vide suivant :

$$|\Omega\rangle = \left| p^\mu, -\frac{\mathcal{N}}{2} - \lambda_0 \right\rangle. \quad (\text{II.181})$$

D'autre part l'état d'hélicité maximal est :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}!}} (a^{A_{\mathcal{N}}})^\dagger \dots (a^{A_1})^\dagger |\Omega\rangle \\ \implies & \lambda_{\max} = \lambda_0 + \frac{\mathcal{N}}{2}. \end{aligned} \quad (\text{II.182})$$

de multiplicité $C_{\mathcal{N}}^{\mathcal{N}} = 1$. En utilisant la relation (II.182) on peut montrer que le nombre maximal de supersymétrie est $\mathcal{N} = 8$, car $\lambda_{\max} \leq 2$, en effet :

$$\mathcal{N} \leq 4 - 2 \times \lambda_0 \leq 4 + 4 = 8 \implies \mathcal{N} \leq 8. \quad (\text{II.183})$$

Donc le nombre d'états (dimension de la représentation) est $\sum_{k=0}^{\mathcal{N}} C_k^{\mathcal{N}} = 2^{\mathcal{N}}$ avec $2^{\mathcal{N}-1}$

bosons et $2^{\mathcal{N}-1}$ fermions. Un multiplet est dite auto-conjugué sous CPT si ses scalaires appartiennent à une représentation réelle du groupe d'automorphisme correspondant et de plus il doit vérifier la relation suivante :

$$\lambda_0 = -\frac{\mathcal{N}}{2} - \lambda_0 \implies \lambda_0 = -\frac{\mathcal{N}}{4}. \quad (\text{II.184})$$

Cela va nous permettre maintenant de déterminer les représentations (supermultiplets) des différentes théories supersymétriques.

Théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 1$:

Dans cette théorie le nombre des générateurs est un, alors on a un seul opérateur de création $(a^1)^\dagger$ qui crée les états suivantes :

II.2. Superalgèbre de Poincaré et ses représentations

Etat	Hélicité	Multiplicité
$ \Omega\rangle$	λ_0	$C_1^1 = 1$
$(a^1)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + \frac{1}{2}$	$C_1^1 = 1$

TABLEAU II.1 – États d'hélicité de la théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 1$.

À partir de ces états précédents (II.1) on peut déterminer le spectre de cette théorie de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ comme suit :

$\lambda_0 \backslash \text{hélicité}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
-2	1	1							
$-\frac{3}{2}$		1	1						
-1			1	1					
$-\frac{1}{2}$				1	1				
0					1	1			
$\frac{1}{2}$						1	1		
1							1	1	
$\frac{3}{2}$								1	1

TABLEAU II.2 – Spectre de la théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 1$.

Alors d'après le spectre dans le tableau précédent (II.2), les multiplets invariants sous la symétrie CPT pour les différents états d'hélicité sont déterminés comme suit :

- Les états d'hélicité $\lambda_0 = -2$ et $\lambda_0 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$ impliquent d'après la relation (II.184) :

$$\begin{aligned} \lambda_0 = -2 &\longrightarrow -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \longrightarrow \left(-2, -\frac{3}{2}\right), \\ \lambda_0 = \frac{3}{2} &\longrightarrow \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \longrightarrow \left(+\frac{3}{2}, +2\right). \end{aligned} \quad (\text{II.185})$$

alors, on a :

$$\left(-2, -\frac{3}{2}\right) \oplus \left(+\frac{3}{2}, +2\right) \equiv \left(\frac{3}{2}, 2\right). \quad (\text{II.186})$$

où le multiplet $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ est appelé *multiplet graviton*².

- Les états d'hélicité $\lambda_0 = -\frac{3}{2}$ et $\lambda_0 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$ impliquent d'après la relation (II.184) :

$$\begin{aligned} \lambda_0 = -\frac{3}{2} &\longrightarrow -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -1 \longrightarrow \left(-\frac{3}{2}, -1\right), \\ \lambda_0 = 1 &\longrightarrow 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \longrightarrow \left(+1, +\frac{3}{2}\right). \end{aligned} \quad (\text{II.187})$$

2. Pour simplifier nous avons noté les états d'hélicité -2 et $+2$ par 2 et les états d'hélicité $-\frac{3}{2}$ et $+\frac{3}{2}$ par $\frac{3}{2}$.

Donc on a :

$$\left(-\frac{3}{2}, -1\right) \oplus \left(+1, +\frac{3}{2}\right) \equiv \left(1, \frac{3}{2}\right). \quad (\text{II.188})$$

où le multiplet $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ est appelé *multiplet de gravitino*.

- Les états d'hélicité $\lambda_0 = -1$ et $\lambda_0 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$ impliquent d'après la relation (II.184) :

$$\begin{aligned} \lambda_0 = -1 &\longrightarrow -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \longrightarrow \left(-1, -\frac{1}{2}\right), \\ \lambda_0 = \frac{1}{2} &\longrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \longrightarrow \left(+\frac{1}{2}, +1\right). \end{aligned} \quad (\text{II.189})$$

Donc on a :

$$\left(-1, -\frac{1}{2}\right) \oplus \left(\frac{1}{2}, 1\right) \equiv \left(\frac{1}{2}, 1\right). \quad (\text{II.190})$$

où le multiplet $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ est appelé *multiplet vectoriel*, et les états d'hélicité $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$ sont noté par $\frac{1}{2}$ et les états d'hélicité -1 et $+1$ sont noté par 1.

- Les états d'hélicité $\lambda_0 = -\frac{1}{2}$ et $\lambda = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ impliquent d'après la relation (II.184) :

$$\begin{aligned} \lambda_0 = -\frac{1}{2} &\longrightarrow -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \longrightarrow \left(-\frac{1}{2}, -0\right), \\ \lambda_0 = 0 &\longrightarrow 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \longrightarrow \left(+0, +\frac{1}{2}\right). \end{aligned} \quad (\text{II.191})$$

Donc on a :

$$\left(-\frac{1}{2}, -0\right) \oplus \left(+0, +\frac{1}{2}\right) \equiv \left(0, \frac{1}{2}\right). \quad (\text{II.192})$$

où le multiplet $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ est appelé *multiplet chiral*.

Finalement le spectre de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ qui représente toutes les particules du modèle standard et leurs partenaires supersymétrique ainsi le graviton et son superpartenaire sont données selon les différents supermultiplets de cette théorie comme suit :

- Multiplet chiral $\left(0, \frac{1}{2}\right)$:

boson (scalaire) $\lambda = 0$	fermion $\lambda = \frac{1}{2}$
squark	quark
slepton	lepton
Higgs	higgsino

TABLEAU II.3 – Spectre du multiplet chiral $\mathcal{N} = 1$.

- Multiplet vectoriel $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$:

II.2. Superalgèbre de Poincaré et ses représentations

fermion (jaugino) $\lambda_0 = \frac{1}{2}$	boson (<i>jauge</i>) $\lambda_0 = 1$
photino	photon
gluino	gluon

TABLEAU II.4 – Spectre du multiplet vectoriel $\mathcal{N} = 1$.

◦ Multiplet graviton $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$:

fermion $\lambda_0 = \frac{3}{2}$	boson $\lambda_0 = 2$
gravitino	graviton

TABLEAU II.5 – Spectre du multiplet graviton $\mathcal{N} = 1$.

Théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 2$:

Dans cette théorie le nombre des générateurs est deux, alors on a deux operateurs de création $(a^A)^\dagger$, $A = 1, 2$ qui créent les états suivantes :

Etat	Hélicité	Multiplicité
$ \Omega\rangle$	λ_0	$C_0^2 = 1$
$(a^1)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + \frac{1}{2}$	$C_1^2 = 2$
$(a^1)^\dagger (a^2)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + 1$	$C_2^2 = 1$

TABLEAU II.6 – États d'hélicité de la théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 2$.

À partir des états précédents (II.6) on peut déterminer le spectre de cette théorie de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ comme suit :

$\lambda_0 \backslash \text{hélicité}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
-2	1	2	1						
$-\frac{3}{2}$		1	2	1					
-1			1	2	1				
$-\frac{1}{2}$				1	2	1			
0					1	2	1		
$\frac{1}{2}$						1	2	1	
1							1	2	1

TABLEAU II.7 – Spectre de la théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 2$.

Alors d'après le spectre dans le tableau précédent (II.7), les multiplets invariants sous la symétrie CPT pour les différents états d'hélicité sont déterminés comme suit :

- Les états d'hélicité $\lambda = -2$ et $\lambda = -1 + 2 = 1$ impliquent d'après la relation (II.184) :

$$\begin{aligned}\lambda = -2 &\longrightarrow \left(-2, \left(-\frac{3}{2}\right)^2, -1\right), \\ \lambda = 1 &\longrightarrow \left(1, \left(\frac{3}{2}\right)^2, 2\right).\end{aligned}\tag{II.193}$$

$$\left(-2, \left(-\frac{3}{2}\right)^2, -1\right) \oplus \left(1, \left(\frac{3}{2}\right)^2, 2\right) \equiv \left(2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, 1\right).\tag{II.194}$$

où le multiplet $\left(2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, 1\right)$ est appelé multiplet graviton.

- Les états d'hélicité $\lambda_0 = -\frac{3}{2}$ et $\lambda_0 = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ impliquent d'après la relation (II.184) :

$$\begin{aligned}\lambda_0 = -\frac{3}{2} &\longrightarrow \left(-\frac{3}{2}, (-1)^2, -\frac{1}{2}\right), \\ \lambda_0 = \frac{1}{2} &\longrightarrow \left(\frac{1}{2}, (1)^2, \frac{3}{2}\right).\end{aligned}\tag{II.195}$$

Donc on a :

$$\left(-\frac{3}{2}, (-1)^2, -\frac{1}{2}\right) \oplus \left(\frac{1}{2}, (1)^2, \frac{3}{2}\right) \equiv \left(\frac{3}{2}, (1)^2, \frac{1}{2}\right).\tag{II.196}$$

où le multiplet $\left(\frac{3}{2}, (1)^2, \frac{1}{2}\right)$ est appelé multiplet gravitino.

- Les états d'hélicité $\lambda_0 = -1$ et $\lambda_0 = -1 + 1 = 0$ impliquent d'après la relation (II.184) :

$$\begin{aligned}\lambda_0 = -1 &\longrightarrow \left(-1, \left(-\frac{1}{2}\right)^2, 0\right), \\ \lambda_0 = 0 &\longrightarrow \left(0, \left(\frac{1}{2}\right)^2, 1\right).\end{aligned}\tag{II.197}$$

Donc on a :

$$\left(-1, \left(-\frac{1}{2}\right)^2, 0\right) \oplus \left(0, \left(\frac{1}{2}\right)^2, 1\right) \equiv \left(1, \left(\frac{1}{2}\right)^2, (0)^2\right)\tag{II.198}$$

où le multiplet $\left(1, \left(\frac{1}{2}\right)^2, (0)^2\right)$ est appelé multiplet vectoriel.

- Les états d'hélicité $\lambda_0 = -\frac{1}{2}$ et $\lambda_0 = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ impliquent d'après la relation (II.184) :

$$\begin{aligned}\lambda_0 = -\frac{1}{2} &\longrightarrow \left(-\frac{1}{2}, (0)^2, \frac{1}{2}\right) \\ \lambda_0 = -\frac{1}{2} &\longrightarrow \left(-\frac{1}{2}, (0)^2, \frac{1}{2}\right)\end{aligned}\tag{II.199}$$

Donc on a :

$$\left(-\frac{1}{2}, (0)^2, \frac{1}{2}\right) \oplus \left(-\frac{1}{2}, (0)^2, \frac{1}{2}\right) \equiv \left((0)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right).\tag{II.200}$$

où le multiplet $\left((0)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$ est appelé *hypermultiplet*.

Théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 3$:

Dans cette théorie le nombre des générateurs est trois, alors on a trois operateurs de création $(a^A)^\dagger$, $A = 1, 2, 3$ qui créent les états suivantes :

Etat	Hélicité	Multiplicité
$ \Omega\rangle$	λ_0	$C_0^3 = 1$
$(a^1)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + \frac{1}{2}$	$C_1^3 = 3$
$(a^1)^\dagger (a^2)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + 1$	$C_2^3 = 3$
$(a^1)^\dagger (a^2)^\dagger (a^3)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + \frac{3}{2}$	$C_3^3 = 1$

TABLEAU II.8 – États d'hélicité de la théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 3$.

À partir de ces états précédents (II.8) on peut déterminer le spectre de cette théorie de la supersymétrie $\mathcal{N} = 3$ comme suit :

$\lambda_0 \backslash \text{hélicité}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
-2	1	3	3	1					
$-\frac{3}{2}$		1	3	3	1				
-1			1	3	3	1			
$-\frac{1}{2}$				1	3	3	1		
0					1	3	3	1	
$\frac{1}{2}$						1	3	3	1

TABLEAU II.9 – Spectre de la théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 3$.

Alors d'après le spectre dans le tableau précédent (II.9), les multiplets invariants sous la symétrie CPT pour les différents états d'hélicité sont déterminés comme suit :

- Les états d'hélicité $\lambda_0 = -2$ et $\lambda_0 = -\frac{3}{2} + 2 = \frac{1}{2}$ impliquent d'après la relation (II.184) :

$$\begin{aligned} \lambda_0 = -2 &\longrightarrow \left(-2, \left(-\frac{3}{2} \right)^3, (-1)^3, -\frac{1}{2} \right), \\ \lambda_0 = \frac{1}{2} &\longrightarrow \left(\frac{1}{2}, (1)^3, \left(\frac{3}{2} \right)^3, 2 \right). \end{aligned} \quad (\text{II.201})$$

$$\left(-2, \left(-\frac{3}{2} \right)^3, (-1)^3, -\frac{1}{2} \right) \oplus \left(\frac{1}{2}, (1)^3, \left(\frac{3}{2} \right)^3, 2 \right) \equiv \left(2, \left(\frac{3}{2} \right)^3, (1)^3, \frac{1}{2} \right). \quad (\text{II.202})$$

où le multiplet $\left(2, \left(\frac{3}{2} \right)^3, (1)^3, \frac{1}{2} \right)$ est appelé multiplet graviton.

- Les états d'hélicité $\lambda_0 = -\frac{3}{2}$ et $\lambda_0 = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$ impliquent d'après la relation

(II.184) :

$$\begin{aligned}\lambda_0 = -\frac{3}{2} &\longrightarrow \left(-\frac{3}{2}, (-1)^3, \left(-\frac{1}{2}\right)^3, 0\right), \\ \lambda_0 = 0 &\longrightarrow \left(0, \left(\frac{1}{2}\right)^3, (1)^3, \frac{3}{2}\right).\end{aligned}\quad (\text{II.203})$$

Donc on a :

$$\left(-\frac{3}{2}, (-1)^3, \left(-\frac{1}{2}\right)^3, 0\right) \oplus \left(0, \left(\frac{1}{2}\right)^3, (1)^3, \frac{3}{2}\right) \equiv \left(\frac{3}{2}, (1)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^3, (0)^2\right). \quad (\text{II.204})$$

où le multiplet $\left(\frac{3}{2}, (1)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^3, (0)^2\right)$ est appelé multiplet gravitino.

• Les états d'hélicité $\lambda_0 = -1$ et $\lambda_0 = -\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$ impliquent d'après la relation (II.184) :

$$\begin{aligned}\lambda_0 = -1 &\longrightarrow \left(-1, \left(-\frac{1}{2}\right)^3, (0)^3, \frac{1}{2}\right), \\ \lambda_0 = -\frac{1}{2} &\longrightarrow \left(-\frac{1}{2}, (0)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^3, 1\right).\end{aligned}\quad (\text{II.205})$$

Donc on a :

$$\left(-1, \left(-\frac{1}{2}\right)^3, (0)^3, \frac{1}{2}\right) \oplus \left(-\frac{1}{2}, (0)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^3, 1\right) \equiv \left(1, \left(\frac{1}{2}\right)^4, (0)^6\right). \quad (\text{II.206})$$

où le multiplet $\left(1, \left(\frac{1}{2}\right)^4, (0)^6\right)$ est appelé multiplet vectoriel.

Théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 4$:

Dans cette théorie le nombre des générateurs est quatre, alors on a quatre operateurs de création $(a^A)^\dagger$, $A = 1, \dots, 4$ qui créent les états suivantes :

Etat	Hélicité	Multiplicité
$ \Omega\rangle$	λ_0	$C_0^4 = 1$
$(a^1)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + \frac{1}{2}$	$C_1^4 = 4$
$(a^1)^\dagger (a^2)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + 1$	$C_2^4 = 6$
$(a^1)^\dagger (a^2)^\dagger (a^3)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + \frac{3}{2}$	$C_3^4 = 4$
$(a^1)^\dagger (a^2)^\dagger (a^3)^\dagger (a^4)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + 2$	$C_4^4 = 1$

TABLEAU II.10 – États d'hélicité de la théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 4$.

À partir de ces états précédents (II.10) on peut déterminer le spectre de cette théorie de la supersymétrie $\mathcal{N} = 4$ comme suit :

II.2. Superalgèbre de Poincaré et ses représentations

$\lambda_0 \backslash \text{hélicité}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
-2	1	4	6	4	1				
$-\frac{3}{2}$		1	4	6	4	1			
-1			1	4	6	4	1		
$-\frac{1}{2}$				1	4	6	4	1	
0					1	4	6	4	1

TABLEAU II.11 – Spectre de la théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 4$.

Alors d'après le spectre dans le tableau précédent (II.11), les multiplets invariants sous la symétrie CPT pour les différents états d'hélicité sont déterminés comme suit :

- Les états d'hélicités $\lambda_0 = -2$ et $\lambda_0 = -2 + 2 = 0$ impliquent d'après la relation (II.184) :

$$\begin{aligned} \lambda_0 = -2 &\longrightarrow \left(-2, \left(-\frac{3}{2} \right)^4, (-1)^6, \left(-\frac{1}{2} \right)^4, 0 \right), \\ \lambda_0 = 0 &\longrightarrow \left(0, \left(\frac{1}{2} \right)^4, (1)^6, \left(\frac{3}{2} \right)^4, 2 \right). \end{aligned} \quad (\text{II.207})$$

$$\begin{aligned} \left(-2, \left(-\frac{3}{2} \right)^4, (-1)^6, \left(-\frac{1}{2} \right)^4, 0 \right) &\oplus \left(0, \left(\frac{1}{2} \right)^4, (1)^6, \left(\frac{3}{2} \right)^4, 2 \right) \\ &\equiv \left(2, \left(\frac{3}{2} \right)^4, (1)^6, \left(\frac{1}{2} \right)^4, (0)^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{II.208})$$

où le multiplet $\left(2, \left(\frac{3}{2} \right)^4, (1)^6, \left(\frac{1}{2} \right)^4, (0)^2 \right)$ est appelé multiplet graviton.

- Les états d'hélicité $\lambda_0 = -\frac{3}{2}$ et $\lambda_0 = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$ impliquent d'après la relation (II.184) :

$$\begin{aligned} \lambda_0 = -\frac{3}{2} &\longrightarrow \left(-\frac{3}{2}, (-1)^4, \left(-\frac{1}{2} \right)^6, (0)^4, \frac{1}{2} \right), \\ \lambda_0 = -\frac{1}{2} &\longrightarrow \left(-\frac{1}{2}, (0)^4, \left(\frac{1}{2} \right)^6, (1)^4, \frac{3}{2} \right). \end{aligned} \quad (\text{II.209})$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} \left(-\frac{3}{2}, (-1)^4, \left(-\frac{1}{2} \right)^6, (0)^4, \frac{1}{2} \right) &\oplus \left(-\frac{1}{2}, (0)^4, \left(\frac{1}{2} \right)^6, (1)^4, \frac{3}{2} \right) \\ &\equiv \left(\frac{3}{2}, (1)^4, \left(\frac{1}{2} \right)^7, (0)^6 \right). \end{aligned} \quad (\text{II.210})$$

où le multiplet $\left(\frac{3}{2}, (1)^4, \left(\frac{1}{2} \right)^7, (0)^6 \right)$ est appelé multiplet gravitino.

- Les états d'hélicité $\lambda_0 = -1$ et $\lambda_0 = -2 + 1 = -1$ impliquent d'après la relation

(II.184) :

$$\begin{aligned}\lambda_0 = -1 &\longrightarrow \left(-1, \left(-\frac{1}{2}\right)^4, (0)^6, \left(\frac{1}{2}\right)^4, 1\right), \\ \lambda_0 = -1 &\longrightarrow \left(-1, \left(-\frac{1}{2}\right)^4, (0)^6, \left(\frac{1}{2}\right)^4, 1\right).\end{aligned}\tag{II.211}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}\left(-1, \left(-\frac{1}{2}\right)^4, (0)^6, \left(\frac{1}{2}\right)^4, 1\right) &\oplus \left(-1, \left(-\frac{1}{2}\right)^4, (0)^6, \left(\frac{1}{2}\right)^4, 1\right) \\ &\equiv \left(1, \left(-\frac{1}{2}\right)^8, (0)^6\right).\end{aligned}\tag{II.212}$$

où le multiplet $\left(1, \left(-\frac{1}{2}\right)^8, (0)^6\right)$ est appelé multiplet vectoriel.

Théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 5$:

Dans cette théorie le nombre des générateurs est cinq, alors on a cinq operateurs de création $(a^A)^\dagger$, $A = 1, \dots, 5$ qui créent les états suivantes :

Etat	Hélicité	Multiplicité
$ \Omega\rangle$	λ_0	$C_0^5 = 1$
$(a^1)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + \frac{1}{2}$	$C_1^5 = 5$
$(a^1)^\dagger (a^2)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + 1$	$C_2^5 = 10$
$(a^1)^\dagger (a^2)^\dagger (a^3)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + \frac{3}{2}$	$C_3^5 = 10$
$(a^1)^\dagger (a^2)^\dagger (a^3)^\dagger (a^4)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + 2$	$C_4^5 = 5$
$(a^1)^\dagger (a^2)^\dagger (a^3)^\dagger (a^4)^\dagger (a^5)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + \frac{5}{2}$	$C_5^5 = 1$

TABLEAU II.12 – États d'hélicité de la théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 5$.

À partir de ces états précédents (II.12) on peut déterminer le spectre de cette théorie de la supersymétrie $\mathcal{N} = 5$ comme suit :

$\lambda_0 \setminus \text{hélicité}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
-2	1	5	10	10	5	1			
$-\frac{3}{2}$		1	5	10	10	5	1		
-1			1	5	10	10	5	1	
$-\frac{1}{2}$				1	25	10	10	5	1

TABLEAU II.13 – Spectre de la théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 5$.

Alors d'après le spectre dans le tableau précédent (II.13), les multiplets invariants sous la symétrie CPT pour les différents états d'hélicité sont déterminés comme suit :

- Les états d'hélicités $\lambda_0 = -2$ et $\lambda_0 = -\frac{5}{2} + 2 = -\frac{1}{2}$ impliquent d'après la relation (II.184) :

$$\begin{aligned}\lambda_0 = -2 &\longrightarrow \left(-2, \left(-\frac{3}{2}\right)^5, (-1)^{10}, \left(-\frac{1}{2}\right)^{10}, (0)^5, \frac{1}{2}\right), \\ \lambda_0 = -\frac{1}{2} &\longrightarrow \left(-\frac{1}{2}, (0)^5, \left(\frac{1}{2}\right)^{10}, (1)^{10}, \left(\frac{3}{2}\right)^5, 2\right).\end{aligned}\tag{II.213}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}\left(-2, \left(-\frac{3}{2}\right)^5, (-1)^{10}, \left(-\frac{1}{2}\right)^{10}, (0)^5, \frac{1}{2}\right) &\oplus \left(-\frac{1}{2}, (0)^5, \left(\frac{1}{2}\right)^{10}, (1)^{10}, \left(\frac{3}{2}\right)^5, 2\right) \\ &\equiv \left(2, \left(\frac{3}{2}\right)^5, (1)^{10}, \left(\frac{1}{2}\right)^{11}, (0)^{10}\right).\end{aligned}\tag{II.214}$$

où le multiplet $\left(2, \left(\frac{3}{2}\right)^5, (1)^{10}, \left(\frac{1}{2}\right)^{11}, (0)^{10}\right)$ est appelé multiplet de graviton.

- Les états d'hélicités $\lambda_0 = -\frac{3}{2}$ et $\lambda_0 = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} = -1$ impliquent d'après la relation (II.184) :

$$\begin{aligned}\lambda_0 = -\frac{3}{2} &\longrightarrow \left(-\frac{3}{2}, (-1)^5, \left(-\frac{1}{2}\right)^{10}, (0)^{10}, \left(\frac{1}{2}\right)^5, 1\right), \\ \lambda_0 = -1 &\longrightarrow \left(-1, \left(-\frac{1}{2}\right)^5, (0)^{10}, \left(\frac{1}{2}\right)^{10}, (1)^5, \frac{3}{2}\right).\end{aligned}\tag{II.215}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}\left(-\frac{3}{2}, (-1)^5, \left(-\frac{1}{2}\right)^{10}, (0)^{10}, \left(\frac{1}{2}\right)^5, 1\right) &\oplus \left(-1, \left(-\frac{1}{2}\right)^5, (0)^{10}, \left(\frac{1}{2}\right)^{10}, (1)^5, \frac{3}{2}\right) \\ &\equiv \left(\frac{3}{2}, (1)^6, \left(\frac{1}{2}\right)^{15}, (0)^{20}\right).\end{aligned}\tag{II.216}$$

où le multiplet $\left(\frac{3}{2}, (1)^6, \left(\frac{1}{2}\right)^{15}, (0)^{20}\right)$ est appelé multiplet de gravitino.

Théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 6$:

Dans cette théorie le nombre des générateurs est six, alors on a six opérateurs de création $(a^A)^\dagger$, $A = 1, \dots, 6$ qui créent les états suivantes :

Etat	Hélicité	Multiplicité
$ \Omega\rangle$	λ_0	$C_0^6 = 1$
$(a^1)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + \frac{1}{2}$	$C_1^6 = 6$
$(a^1)^\dagger (a^2)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + 1$	$C_2^6 = 15$
$(a^1)^\dagger (a^2)^\dagger (a^3)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + \frac{3}{2}$	$C_3^6 = 20$
$(a^1)^\dagger (a^2)^\dagger (a^3)^\dagger (a^4)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + 2$	$C_4^6 = 15$
$(a^1)^\dagger (a^2)^\dagger (a^3)^\dagger (a^4)^\dagger (a^5)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + \frac{5}{2}$	$C_5^6 = 6$
$(a^1)^\dagger (a^2)^\dagger (a^3)^\dagger (a^4)^\dagger (a^5)^\dagger (a^6)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + 3$	$C_6^2 = 1$

TABLEAU II.14 – États d'hélicité de la théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 6$.

À partir de ces états précédents (II.14) on peut déterminer le spectre de cette théorie de la supersymétrie $\mathcal{N} = 6$ comme suit :

$\lambda_0 \backslash \text{hélicité}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
-2	1	6	15	20	15	6	1		
$-\frac{3}{2}$		1	6	15	20	15	6	1	
-1			1	6	15	20	15	6	1

TABLEAU II.15 – Spectre de la théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 6$.

Alors d'après le spectre dans le tableau précédent (II.15), les multiplets invariants sous la symétrie CPT pour les différents états d'hélicité sont déterminés comme suit :

- Les états d'hélicités $\lambda_0 = -2$ et $\lambda_0 = -\frac{6}{2} + 2 = -1$ impliquent d'après la relation (II.184) :

$$\begin{aligned}
 \lambda_0 = -2 &\longrightarrow \left(-2, \left(-\frac{3}{2}\right)^6, (-1)^{15}, \left(-\frac{1}{2}\right)^{20}, (0)^{15}, \left(\frac{1}{2}\right)^6, 1 \right), \\
 \lambda_0 = -1 &\longrightarrow \left(-1, \left(-\frac{1}{2}\right)^6, (0)^{15}, \left(\frac{1}{2}\right)^{20}, (1)^{15}, \left(\frac{3}{2}\right)^6, 2 \right).
 \end{aligned} \tag{II.217}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}
 \left(-2, \left(-\frac{3}{2}\right)^6, (-1)^{15}, \left(-\frac{1}{2}\right)^{20}, (0)^{15}, \left(\frac{1}{2}\right)^6, 1 \right) &\oplus \left(-1, \left(-\frac{1}{2}\right)^6, (0)^{15}, \left(\frac{1}{2}\right)^{20}, (1)^{15}, \left(\frac{3}{2}\right)^6, 2 \right) \\
 &\equiv \left(2, \left(\frac{3}{2}\right)^6, (1)^{16}, \left(\frac{1}{2}\right)^{26}, (0)^{30}, 1 \right).
 \end{aligned} \tag{II.218}$$

où le multiplet $\left(2, \left(\frac{3}{2}\right)^6, (1)^{16}, \left(\frac{1}{2}\right)^{26}, (0)^{30}, 1 \right)$ est appelé multiplet de graviton.

- Les états d'hélicités $\lambda_0 = -\frac{3}{2}$ et $\lambda_0 = -\frac{6}{2} + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$ impliquent d'après la relation

(II.184) :

$$\begin{aligned}\lambda_0 = -\frac{3}{2} &\longrightarrow \left(-\frac{3}{2}, (-1)^6, \left(-\frac{1}{2}\right)^{15}, (0)^{20}, \left(\frac{1}{2}\right)^{15}, (1)^6, \frac{3}{2} \right), \\ \lambda_0 = -\frac{3}{2} &\longrightarrow \left(-\frac{3}{2}, (-1)^6, \left(-\frac{1}{2}\right)^{15}, (0)^{20}, \left(\frac{1}{2}\right)^{15}, (1)^6, \frac{3}{2} \right).\end{aligned}\quad (\text{II.219})$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}\left(-\frac{3}{2}, (-1)^6, \left(-\frac{1}{2}\right)^{15}, (0)^{20}, \left(\frac{1}{2}\right)^{15}, (1)^6, \frac{3}{2} \right) &\oplus \left(-\frac{3}{2}, (-1)^6, \left(-\frac{1}{2}\right)^{15}, (0)^{20}, \left(\frac{1}{2}\right)^{15}, (1)^6, \frac{3}{2} \right) \\ &\equiv \left(\frac{3}{2}, (1)^6, \left(\frac{1}{2}\right)^{15}, (0)^{20} \right).\end{aligned}\quad (\text{II.220})$$

où le multiplet $\left(\frac{3}{2}, (1)^6, \left(\frac{1}{2}\right)^{15}, (0)^{20} \right)$ est appelé multiplet de gravitino.

Théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 7$:

Dans cette théorie le nombre des générateurs est sept, alors on a sept opérateurs de création $(a^A)^\dagger$, $A = 1, \dots, 7$ qui créent les états suivantes :

Etat	Hélicité	Multiplicité
$ \Omega\rangle$	λ_0	$C_0^7 = 1$
$(a^1)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + \frac{1}{2}$	$C_1^7 = 7$
$(a^1)^\dagger (a^2)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + 1$	$C_2^7 = 21$
$(a^1)^\dagger (a^2)^\dagger (a^3)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + \frac{3}{2}$	$C_3^7 = 35$
$(a^1)^\dagger (a^2)^\dagger (a^3)^\dagger (a^4)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + 2$	$C_4^7 = 35$
$(a^1)^\dagger (a^2)^\dagger (a^3)^\dagger (a^4)^\dagger (a^5)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + \frac{5}{2}$	$C_5^7 = 21$
$(a^1)^\dagger (a^2)^\dagger (a^3)^\dagger (a^4)^\dagger (a^5)^\dagger (a^6)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + 3$	$C_6^7 = 7$
$(a^1)^\dagger (a^2)^\dagger (a^3)^\dagger (a^4)^\dagger (a^5)^\dagger (a^6)^\dagger (a^7)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + \frac{7}{2}$	$C_7^7 = 1$

TABLEAU II.16 – États d'hélicité de la théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 7$.

À partir de ces états précédents (II.16) on peut déterminer le spectre de cette théorie de la supersymétrie $\mathcal{N} = 7$ comme suit :

$\lambda_0 \setminus \text{hélicité}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
-2	1	7	21	35	35	21	7	1	
$-\frac{3}{2}$		1	7	21	35	35	21	7	1

TABLEAU II.17 – Spectre de la théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 7$.

Alors d'après le spectre dans le tableau précédent (II.17), les multiplets invariants sous la symétrie CPT pour les différents états d'hélicité sont déterminés comme suit :

- Les états d'hélicités $\lambda_0 = -2$ et $\lambda_0 = -\frac{7}{2} + 2 = -\frac{3}{2}$ impliquent d'après la relation (II.184) :

$$\begin{aligned} \lambda_0 = -2 &\longrightarrow \left(-2, \left(-\frac{3}{2} \right)^7, (-1)^{21}, \left(-\frac{1}{2} \right)^{35}, (0)^{35}, \left(\frac{1}{2} \right)^{21}, (1)^7, \frac{3}{2} \right), \\ \lambda_0 = -\frac{3}{2} &\longrightarrow \left(-\frac{3}{2}, (-1)^7, \left(-\frac{1}{2} \right)^{21}, (0)^{35}, \left(\frac{1}{2} \right)^{35}, (1)^{21}, \left(\frac{3}{2} \right)^7, 2 \right). \end{aligned} \quad (\text{II.221})$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} \left(-2, \left(-\frac{3}{2} \right)^7, (-1)^{21}, \left(-\frac{1}{2} \right)^{35}, (0)^{35}, \left(\frac{1}{2} \right)^{21}, (1)^7, \frac{3}{2} \right) \oplus \left(-\frac{3}{2}, (-1)^7, \left(-\frac{1}{2} \right)^{21}, (0)^{35}, \left(\frac{1}{2} \right)^{35}, (1)^{21}, \left(\frac{3}{2} \right)^7, 2 \right) \\ \equiv \left(2, \left(\frac{3}{2} \right)^8, (1)^{28}, \left(\frac{1}{2} \right)^{56}, (0)^{70} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.222})$$

où le multiplet $\left(2, \left(\frac{3}{2} \right)^8, (1)^{28}, \left(\frac{1}{2} \right)^{56}, (0)^{70} \right)$ est appelé multiplet de graviton.

Théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 8$:

Dans cette théorie le nombre des générateurs est huit, alors on a huit opérateurs de création $(a^A)^\dagger$, $A = 1, \dots, 8$ qui créent les états suivantes :

Etat	Hélicité	Multiplicité
$ \Omega\rangle$	λ_0	$C_0^8 = 1$
$(a^1)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + \frac{1}{2}$	$C_1^8 = 8$
$(a^1)^\dagger (a^2)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + 1$	$C_2^8 = 28$
$(a^1)^\dagger (a^2)^\dagger (a^3)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + \frac{3}{2}$	$C_3^8 = 56$
$(a^1)^\dagger (a^2)^\dagger (a^3)^\dagger (a^4)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + 2$	$C_4^8 = 70$
$(a^1)^\dagger (a^2)^\dagger (a^3)^\dagger (a^4)^\dagger (a^5)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + \frac{5}{2}$	$C_5^8 = 56$
$(a^1)^\dagger (a^2)^\dagger (a^3)^\dagger (a^4)^\dagger (a^5)^\dagger (a^6)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + 3$	$C_6^8 = 28$
$(a^1)^\dagger (a^2)^\dagger (a^3)^\dagger (a^4)^\dagger (a^5)^\dagger (a^6)^\dagger (a^7)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + \frac{7}{2}$	$C_7^8 = 8$
$(a^1)^\dagger (a^2)^\dagger (a^3)^\dagger (a^4)^\dagger (a^5)^\dagger (a^6)^\dagger (a^7)^\dagger (a^8)^\dagger \Omega\rangle$	$\lambda_0 + 4$	$C_8^8 = 1$

TABLEAU II.18 – États d'hélicité de la théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 8$.

À partir de ces états précédents (II.18) on peut déterminer le spectre de cette théorie de la supersymétrie $\mathcal{N} = 8$ comme suit :

$\lambda_0 \backslash \text{hélicité}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
-2	1	8	28	56	70	56	28	8	1

TABLEAU II.19 – Spectre de la théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 8$.

Alors d'après le spectre dans le tableau précédent (II.19), le multiplets invariant sous la symétrie CPT pour les différents états d'hélicité est déterminé comme suit :

- Les états d'hélicités $\lambda_0 = -2$ on a aussi $\lambda_0 = -\frac{8}{2} + 2 = -2$ impliquent :

$$\begin{aligned} & \left(-2, \left(-\frac{3}{2} \right)^8, (-1)^{28}, \left(-\frac{1}{2} \right)^{56}, (0)^{70}, \left(\frac{1}{2} \right)^{56}, (1)^{28}, \left(\frac{3}{2} \right)^8, 2 \right) \quad (\text{II.223}) \\ & \equiv \left(2, \left(\frac{3}{2} \right)^8, (1)^{28}, \left(\frac{1}{2} \right)^{56}, (0)^{70} \right). \end{aligned}$$

où le multiplet $\left(2, \left(\frac{3}{2} \right)^8, (1)^{28}, \left(\frac{1}{2} \right)^{56}, (0)^{70} \right)$ est appelé multiplet de graviton.

Avant de commencer la partie de représentations massives, nous avons les remarques suivantes :

- Le multiplet chirale $\mathcal{N} = 1$ (II.192) appelé aussi multiplet scalaire, où 0^2 un scalaire complexe qui peut être le boson de Higgs du modèle standard et $\frac{1}{2}$ son superpartenaire fermionique, de plus on remarque que $0^2 \equiv 0^+ + i0^-$ où 0^- un scalaire et 0^+ un pseudo-scalaire, alors les fermions gauchers du modèle standard sont représenté dans le multiplet chirale $\left(0^+ + i0^-, +\frac{1}{2} \right)$, et leurs images par CP sont représenté dans le multiplet conjugué complexe $\left(0^+ - i0^-, -\frac{1}{2} \right)$, ce qui vérifie bien la propriété de chiralité.
- Le multiplet vectoriel $\mathcal{N} = 1$ (II.190) ne vérifie pas la propriété de chiralité, ses fermions ne sont pas chiraux et donc ce sont pas les fermions du modèle standard, en effet, les deux hélicités $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$ appartient à la représentation adjointe du groupe de jauge, car $+\frac{1}{2}$ se trouve dans le même multiplet que $+1$ et ce dernier appartient à la représentation adjointe du groupe de jauge. alors ce multiplet décrit des bosons de jauge et leurs superpartenaire.
- L'hypermultiplet $\mathcal{N} = 2$ (II.200) peut être vu comme la somme de deux multiplets chiraux $\mathcal{N} = 1$ (II.192), et puisque $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$ se trouve dans le même multiplet (II.200), alors ce dernier n'est pas chirale, et par conséquence il décrit pas les fermions du modèle standard [73].
- Le multiplet vectoriel $\mathcal{N} = 2$ (II.198) peut être vu comme la somme d'un multiplet chirale $\mathcal{N} = 1$ (II.192) et un multiplet vectoriel $\mathcal{N} = 1$ (II.190), et puisque il contient un champ de jauge cela implique qu'il appartient à la représentations adjointe du groupe de jauge.

Nous allons voir dans le quatrième chapitre, que l'avantage de décrire la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ par deux copies de supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ est très utile pour résoudre le problème de la non chiralité de la théorie supersymétrique globale $\mathcal{N} = 2$, par la réalisation de la brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$.

Représentations massives

Pour construire les représentations définies par les états $|m, j, p^\mu, j_3\rangle$, on va choisir le petit groupe $SU(2)$. Dans le référentiel (II.96) les relations d'anticommutation (II.149) et (II.147) prennent la forme suivante, [66, 67, 72, 74–80] :

$$\{Q_\alpha^A, \bar{Q}_{\dot{\beta}B}\} = 2m\delta_{\alpha\dot{\beta}}\delta_B^A, \quad (\text{II.224})$$

$$\{Q_\alpha^A, Q_\alpha^B\} = \varepsilon_{\alpha\beta}Z^{AB}, \quad (\text{II.225})$$

$$\{Q_A^\alpha, \bar{Q}_B^{\dot{\beta}}\} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}Z_{AB}^*. \quad (\text{II.226})$$

En utilisant la relation (II.136) on obtient :

$$J^3 (Q^{\alpha A} |m, j, p^\mu, j_3\rangle) = (Q^{\alpha A} J^3 - [Q^{\alpha A}, J^3]) |m, j, p^\mu, j_3\rangle \quad (\text{II.227})$$

$$= \left(j_3 \delta_\beta^\alpha - \frac{1}{2} (\sigma^3)_\beta^\alpha \right) (Q^{\beta A} |m, j, p^\mu, j_3\rangle). \quad (\text{II.228})$$

donc Q^{1A} et Q^{2A} diminuent le spin j_3 par $\frac{1}{2}$, de même on a :

$$J^3 (\bar{Q}_A^{\dot{\alpha}} |m, j, p^\mu, j_3\rangle) = \left(j_3 \delta_\beta^\alpha + \frac{1}{2} (\sigma^3)_\beta^\alpha \right) (\bar{Q}_A^{\dot{\beta}} |m, j, p^\mu, j_3\rangle). \quad (\text{II.229})$$

alors $\bar{Q}_A^1$ et $\bar{Q}_A^2$ augmentent le spin par $\frac{1}{2}$.

Notons qu'on peut mélanger les indices pointé et non-pointé, car les représentations 2 et $\bar{2}$ sont équivalentes, alors nous définissons les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_\alpha^r &= \begin{pmatrix} Q^{\alpha A} \\ \bar{Q}_{\alpha A} \end{pmatrix} \\ \bar{\mathbf{Q}}_{\alpha r} &= (\mathbf{Q}^{\alpha r})^\dagger = \begin{pmatrix} \bar{Q}_A^\alpha \\ Q_\alpha^A \end{pmatrix}, \quad r = 1, \dots, 2\mathcal{N}. \end{aligned} \quad (\text{II.230})$$

Pour déterminer le groupe d'automorphisme de la superalgèbre, il faut que les opérateurs $\mathbf{Q}_\alpha^r$ satisfont une condition de réalité, en effet :

$$(\mathbf{Q}^{\alpha r})^\dagger = \begin{pmatrix} Q^{\alpha A} \\ \bar{Q}_{\alpha A} \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} \bar{Q}_A^\alpha \\ Q_\alpha^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{\alpha\beta} \bar{Q}_{\beta A} \\ -\varepsilon^{\alpha\beta} Q_{\beta A} \end{pmatrix} \quad (\text{II.231})$$

$$= \varepsilon^{\alpha\beta} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^{\beta A} \\ \bar{Q}_{\beta A} \end{pmatrix} = \varepsilon^{\alpha\beta} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Q}_\beta^t. \quad (\text{II.232})$$

Avec la matrice symplectique notée comme suit :

$$C^{rt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.233})$$

Donc la condition de réalité s'écrit :

$$(\mathbf{Q}^{\alpha r})^\dagger = \varepsilon^{\alpha\beta} C_r^t \mathbf{Q}_\beta^t. \quad (\text{II.234})$$

Donc nous avons,

$$\mathbf{Q}_\alpha^r \mathbf{Q}_\beta^t = \begin{pmatrix} Q^{\alpha A} Q^{\beta B} & Q^{\alpha A} \bar{Q}_{\beta A} \\ \bar{Q}_{\alpha A} Q^{\beta B} & \bar{Q}_{\alpha A} \bar{Q}_{\beta A} \end{pmatrix}. \quad (\text{II.235})$$

Ce qui donne la relation d'anticommutation des opérateurs $\mathbf{Q}_\alpha^r$:

$$\{\mathbf{Q}_\alpha^r, \mathbf{Q}_\alpha^t\} = -\varepsilon_{\alpha\beta} \begin{pmatrix} Z^{AB} & 2m\delta_B^A \\ -2m\delta_A^B & Z_{BA}^* \end{pmatrix}, \quad (\text{II.236})$$

$$\{\mathbf{Q}_\alpha^r, \mathbf{Q}_\alpha^t\} = -\varepsilon_{\alpha\beta} \Delta^{rt}. \quad (\text{II.237})$$

Nous sommes maintenant en mesure pour construire les représentations massives de la superalgèbre, nous allons commencer avec le cas où les charges centrales sont nulles $Z^{AB} = 0$, et ensuite le cas des charges centrales non nulles $Z^{AB} \neq 0$.

Cas des charges centrales nulles

Dans ce cas nous avons, $Z^{AB} = 0$, et les relations s'écrivent :

$$\{\mathbf{Q}_\alpha^r, \mathbf{Q}_\alpha^t\} = -2m\varepsilon_{\alpha\beta} C^{rt}. \quad (\text{II.238})$$

Le groupe d'automorphisme de cette algèbre est $SU(2) \times USp(2\mathcal{N}, \mathbb{C})$ car il laisse la constante de structure $\varepsilon_{\alpha\beta} C^{rt}$ invariante, en effet la matrice $\varepsilon_{\alpha\beta}$ est invariante sous $SU(2)$, et pour la matrice symplectique C^{rt} elle est invariante de $Sp(2\mathcal{N}, \mathbb{C})$, mais la condition de réalité (II.234) implique l'unitarité du groupe $Sp(2\mathcal{N}, \mathbb{C})$, donc C^{rt} est invariante de $USp(2\mathcal{N}, \mathbb{C})$, mais pour la superalgèbre le groupe d'automorphisme est plus large que $SU(2) \times USp(2\mathcal{N}, \mathbb{C})$, pour le déterminer il faut remplacer les indices α et r par l'indice A avec ($A = 1, \dots, 4\mathcal{N}$), alors les opérateurs supersymétriques deviennent :

$$\mathbf{Q}_A \equiv \mathbf{Q}_\alpha^r. \quad (\text{II.239})$$

et la relation d'anticommutation (II.238) s'écrit :

$$\{\mathbf{Q}_A, \mathbf{Q}_B\} = -2m\mathbf{Q}_{AB}. \quad (\text{II.240})$$

où $\mathbf{Q}_{AB}$ est une matrice $4\mathcal{N} \times 4\mathcal{N}$ symétrique réelle ($\mathbf{Q}_{AB} \equiv \eta_{\alpha\beta}^{rt} = -\varepsilon_{\alpha\beta} C^{rt} \equiv \eta_{\beta\alpha}^{tr} = \mathbf{Q}_{BA}$) alors invariante du groupe $SO(4\mathcal{N})$, ce qui implique que le groupe d'automorphisme de l'algèbre (II.240) est $SO(4\mathcal{N})$, mais puisque $SU(2)$ agit sur les indices $\alpha, \beta, \dots$, et $USp(2\mathcal{N}, \mathbb{C})$ agit sur les indices $r, t, \dots$, donc l'invariance est sous le sous groupe $SU(2) \times USp(2\mathcal{N}, \mathbb{C}) \subset SO(4\mathcal{N})$ qui agit séparément sur les indices α et r .

Pour construire les représentations, on définit les opérateurs de création et d'annihilation suivants :

$$a_\alpha^A = \frac{1}{\sqrt{2m}} Q_\alpha^A, \quad (\text{II.241})$$

$$(a^{\alpha A})^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m}} \bar{Q}_A^{\dot{\alpha}}. \quad (\text{II.242})$$

Alors l'algèbre (II.224-II.226) devient en fonction de ces opérateur comme suit :

$$\{a_\alpha^A, (a_\beta^B)^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta} \delta_B^A, \quad (\text{II.243})$$

$$\{a_\alpha^A, a_\beta^B\} = 0, \quad (\text{II.244})$$

$$\{(a_\alpha^A)^\dagger, (a_\beta^B)^\dagger\} = 0. \quad (\text{II.245})$$

Où il y a $2\mathcal{N}$ opérateurs de création $(a_\alpha^A)^\dagger$ et d'annihilation a_α^A dans cette algèbre de Clifford, cependant à partir d'un vide de Clifford noté $|\Omega\rangle \equiv |m, j_0, j_3\rangle$ on peut construire les représentations de l'algèbre (II.243), ce vide est défini par :

$$a_\alpha^A |\Omega\rangle, \quad \forall \alpha, A. \quad (\text{II.246})$$

Les états sont obtenues en appliquant des opérateurs de créations $(a_\alpha^A)^\dagger$ sur ce vide comme suit :

$$\begin{aligned} & |\Omega\rangle \\ & (a_\alpha^A)^\dagger |\Omega\rangle \\ & (a_\alpha^{A_1})^\dagger (a_\alpha^{A_2})^\dagger |\Omega\rangle \\ & \vdots \\ & (a_\alpha^{A_1})^\dagger \dots (a_\alpha^{A_k})^\dagger |\Omega\rangle \end{aligned}$$

Pour chaque valeur de j_3 il y a $2^{2\mathcal{N}}$ états qui forment la représentation spinorielle de $SO(4\mathcal{N})$ et qui se décompose en deux représentations irréductibles de dimension $2\mathcal{N}-1$ pour chacune d'elles, alors pour déterminer le nombre des états total il faut multiplier $2^{2\mathcal{N}}$ par la multiplicité $2j_0 + 1$ de l'état du vide de Clifford $|m, j_0, j_3\rangle$, ainsi le nombre total des états est :

$$(2j_0 + 1) 2^{2\mathcal{N}}. \quad (\text{II.247})$$

Pour obtenir les états physique, il faut décomposer la représentation spinorielle $2^{2\mathcal{N}}$ à des représentations du groupe $SU(2) \times USp(2\mathcal{N}, \mathbb{C})$, en effet :

$$\begin{aligned} 2^{2\mathcal{N}} \xrightarrow{SU(2) \times USp(2\mathcal{N})} & \left(\frac{\mathcal{N}}{2}, 1\right) + \left(\frac{\mathcal{N}+1}{2}, 2\mathcal{N}\right) + \left(\frac{\mathcal{N}-2}{2}, [2\mathcal{N}]_2\right) + \dots \\ & \dots + \left(\frac{\mathcal{N}-k}{2}, [2\mathcal{N}]_k\right) + \dots + (0, [2\mathcal{N}]_{\mathcal{N}}). \end{aligned} \quad (\text{II.248})$$

où la première partie de chaque couple indique le spin, donc le premier couple a le spin $\mathcal{N}$ et le dernier couple a le spin 0, la seconde partie $[2\mathcal{N}]_k$ indique le k -fois produit des matrices antisymétrique de trace nulle qui correspond au représentations fondamentale de $USp(2\mathcal{N}, \mathbb{C})$:

$$[2\mathcal{N}]_k = \underbrace{(2\mathcal{N}) \wedge (2\mathcal{N}) \wedge \dots \wedge (2\mathcal{N})}_{k\text{-fois}}. \quad (\text{II.249})$$

La représentation de l'état du vide de spin j_0 du groupe $SU(2) \times USp(2\mathcal{N}, \mathbb{C})$ est $(j_0, 1)$, donc le supermultiplet est obtenu à partir produit tensoriel de la représentation $(j_0, 1)$ par (II.248) :

$$(j_0, 1) \times 2^{2\mathcal{N}} = (j_0, 1) \times \left[\left(\frac{\mathcal{N}}{2}, 1\right) + \left(\frac{\mathcal{N}+1}{2}, 2\mathcal{N}\right) + \left(\frac{\mathcal{N}-2}{2}, [2\mathcal{N}]_2\right) + \dots + (0, [2\mathcal{N}]_{\mathcal{N}}) \right]. \quad (\text{II.250})$$

Nous sommes maintenant en mesure de construire les représentations massives supersymétriques avec l'absence de la charge centrale.

Théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 1$:

Dans cette théorie le groupe d'automorphisme correspondant est :

$$SU(2) \times USp(2, \mathbb{C}) \subset SO(4), \quad (\text{II.251})$$

Il contient $2^{2 \times 1} = 2^2 = 4$ états, alors la relation (II.248) donne :

$$2^2 = \left(\frac{1}{2}, 1\right) + (0, 2). \quad (\text{II.252})$$

Donc pour les différentes valeurs de spin nous avons :

- Pour $j_0 = 0$ on a :

$$\left((0)^2, \frac{1}{2}\right). \quad (\text{II.253})$$

ce multiplet est appelé multiplet chiral.

- Pour $j_0 = \frac{1}{2}$ on a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}, 1\right) \times \left[\left(\frac{1}{2}, 1\right) + (0, 2)\right] &= (0 + 1, 1) + \left(\frac{1}{2}, 2\right) \\ &= \left(1, \left(\frac{1}{2}\right)^2, 0\right). \end{aligned} \quad (\text{II.254})$$

ce multiplet est appelé multiplet vectoriel.

- Pour $j_0 = 1$ on a :

$$\begin{aligned} (1, 1) \times \left[\left(\frac{1}{2}, 1\right) + (0, 2)\right] &= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}, 1\right) + (1, 2) \\ &= \left(\frac{3}{2}, (1)^2, \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \quad (\text{II.255})$$

ce multiplet est appelé multiplet de gravitino.

- Pour $j_0 = \frac{3}{2}$ on a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2}, 1\right) \times \left[\left(\frac{1}{2}, 1\right) + (0, 2)\right] &= (1 + 2, 1) + \left(\frac{3}{2}, 2\right) \\ &= \left(2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, 1\right). \end{aligned} \quad (\text{II.256})$$

ce multiplet est appelé multiplet de graviton.

Théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 2$:

Dans cette théorie le groupe d'automorphisme correspondant est :

$$SU(2) \times USp(4, \mathbb{C}) \subset SO(8), \quad (\text{II.257})$$

Il contient $2^{2 \times 2} = 2^4 = 16$ états, alors la relation (II.248) donne :

$$2^4 = (1, 1) + \left(\frac{1}{2}, 4\right) + (0, [4]_2) = (1, 1) + \left(\frac{1}{2}, 4\right) + (0, 5). \quad (\text{II.258})$$

Donc pour les différentes valeurs de spin nous avons :

- Pour $j_0 = 0$ on a :

$$\left(1, \left(\frac{1}{2}\right)^4, (0)^5\right). \quad (\text{II.259})$$

ce multiplet est appelé multiplet vectoriel.

- Pour $j_0 = \frac{1}{2}$ on a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}, 1\right) \times \left[(1, 1) + \left(\frac{1}{2}, 4\right) + (0, 5)\right] &= \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}, 1\right) + (0 + 1, 4) + \left(\frac{1}{2}, 5\right) \\ &= \left(\frac{3}{2}, (1)^4, \left(\frac{1}{2}\right)^6, (0)^4\right). \end{aligned} \quad (\text{II.260})$$

ce multiplet est appelé multiplet de gravitino.

- Pour $j_0 = 1$ on a,

$$\begin{aligned} (1, 1) \times \left[(1, 1) + \left(\frac{1}{2}, 4\right) + (0, 5)\right] &= (0 + 1 + 2, 1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}, 4\right) + (1, 5) \\ &= \left(2, \left(\frac{3}{2}\right)^4, (1)^6, \left(\frac{1}{2}\right)^4, 0\right). \end{aligned} \quad (\text{II.261})$$

ce multiplet est appelé multiplet de graviton.

Théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 3$:

Dans cette théorie le groupe d'automorphisme correspondant est ,

$$SU(2) \times USp(6, \mathbb{C}) \subset SO(12), \quad (\text{II.262})$$

Il contient $2^{2 \times 3} = 2^6 = 64$ états, alors la relation (II.248) donne :

$$\begin{aligned} 2^6 &= \left(\frac{3}{2}, 1\right) + (1, 6) + \left(\frac{1}{2}, [6]_2\right) + (0, [6]_3) \\ &= \left(\frac{3}{2}, 1\right) + \left(\frac{1}{2}, 14\right) + (0, 14'). \end{aligned} \quad (\text{II.263})$$

Donc pour les différentes valeurs de spin nous avons,

- Pour $j_0 = 0$ on a :

$$\left(\frac{3}{2}, (1)^6, \left(\frac{1}{2}\right)^{14}, (0)^{14}\right). \quad (\text{II.264})$$

ce multiplet est appelé multiplet de gravitino.

- Pour $j_0 = \frac{1}{2}$ on a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}, 1\right) \times \left[\left(\frac{3}{2}, 1\right) + (1, 6) + \left(\frac{1}{2}, 14\right) + (0, 14')\right] &= (1 + 2, 1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}, 6\right) \\ &+ (0 + 1, 14) + \left(\frac{1}{2} + 14'\right) \equiv \left(2, \left(\frac{3}{2}\right)^6, (1)^{15}, \left(\frac{1}{2}\right)^{20}, (0)^{14}\right). \end{aligned} \quad (\text{II.265})$$

ce multiplet est appelé multiplet de graviton.

Théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 4$:

Dans cette théorie le groupe d'automorphisme correspondant est ,

$$SU(2) \times USp(8, \mathbb{C}) \subset SO(16), \quad (\text{II.266})$$

Il contient $2^{2 \times 4} = 2^8 = 256$ états, alors la relation (II.248) donne :

$$\begin{aligned} 2^8 &= (2, 1) + \left(\frac{3}{2}, 8\right) + (1, [8]_2) + \left(\frac{1}{2}, [8]_3\right) + (0, [8]_4) \\ &= (2, 1) + \left(\frac{3}{2}, 8\right) + \left(\frac{1}{2}, 48\right) + (0, 42) + (1, 27). \end{aligned} \quad (\text{II.267})$$

ce multiplet est appelé multiplet de graviton.

Remarque :

- Le multiplet vectoriel $\mathcal{N} = 1$ est la somme d'un multiplet vectoriel $\mathcal{N} = 1$ non massif (II.190) et un multiplet chirale $\mathcal{N} = 1$ non massif (II.192), on peut le voir comme la généralisation supersymétrique du mécanisme de Higgs du modèle standard, car un scalaire du multiplet chirale est mangé par le champ vectoriel du multiplet vectoriel non massif, et ce dernier devient massif.

La relation (II.248) permet aussi la construction des multiplets non-massifs d'hélicité suivante[74],

$$\lambda \leq \lambda_{\max} = \frac{\mathcal{N}}{2}. \quad (\text{II.268})$$

Rappelons que le petit groupe dans le cas non-massive est $SO(2) \sim U(1)$ et que $Q_2^A \equiv \bar{Q}_{2A} = 0$, alors ce cas correspond au sous groupe $U(\mathcal{N}) \subset SU(2) \times USp(2\mathcal{N})$, avec $U(\mathcal{N}) = U(1) \times SU(\mathcal{N})$, où l'hélicité λ qui engendre le groupe $U(1)$ est la projection du spin $J = \frac{\mathcal{N} - k}{2}$ du groupe $SU(\mathcal{N})$, ce qui implique que la représentation $U(\mathcal{N})$ est la décomposition de la représentation $2\mathcal{N}$ du groupe $USp(2\mathcal{N})$, cette décomposition est comme suit :

$$2\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N} + \bar{\mathcal{N}}. \quad (\text{II.269})$$

Donc le nombre des multiplets non massifs après la décomposition d'un multiplet massive est :

$$1 + \mathcal{N} + |\mathcal{N}|_2 + \dots + |\mathcal{N}|_{\mathcal{N}} = 2^{\mathcal{N}}. \quad (\text{II.270})$$

et chaque multiplet à une dimension égale à :

$$1 + \bar{\mathcal{N}} + |\bar{\mathcal{N}}|_2 + \dots + |\bar{\mathcal{N}}|_{\mathcal{N}} = 2^{\mathcal{N}}. \quad (\text{II.271})$$

Alors la décomposition est comme suit :

$$2^{2\mathcal{N}} = \left(\frac{\mathcal{N}}{2}, 1\right) + \left(\frac{\mathcal{N}-1}{2}, \mathcal{N}\right) + \left(\frac{\mathcal{N}-2}{2}, |\mathcal{N}|_2\right) + \dots + \left(\frac{\mathcal{N}-k}{2}, |\mathcal{N}|_k\right) + \dots + (0, 1). \quad (\text{II.272})$$

où $\left(\frac{\mathcal{N}-k}{2}, |\mathcal{N}|_k\right)$ sont les multiplets non-massifs, notons que chacun de ces multiplets possède un état d'hélicité maximal $\lambda_{\max}$ (projection de spin maximal) appartenant à

la représentation antisymétrique $|\mathcal{N}|_k$ du groupe $SU(\mathcal{N})$. En effet,

$$\begin{aligned}
 (\lambda_{\max}, |\mathcal{N}|_k) &= (\lambda_{\max}, |\mathcal{N}|_k) + \left(\lambda_{\max} - \frac{1}{2}, |\mathcal{N}|_k \times \bar{\mathcal{N}} \right) + \\
 &+ \left(\lambda_{\max} - 1, |\mathcal{N}|_k \times |\bar{\mathcal{N}}|_2 \right) + \dots + \left(\lambda_{\max} - \frac{1}{2}, |\mathcal{N}|_k \times |\bar{\mathcal{N}}|_l \right) + \\
 &+ \dots + \left(\lambda_{\max} - \frac{\mathcal{N}}{2}, |\mathcal{N}|_k \times 1 \right).
 \end{aligned} \tag{II.273}$$

qui peut être simplifié sous cette forme :

$$\left(\lambda_{\max}, \left(\lambda_{\max} - \frac{1}{2} \right)^{\bar{\mathcal{N}}}, \dots, \left(\lambda_{\max} - \frac{1}{2} \right)^{|\bar{\mathcal{N}}|_l}, \dots, \lambda_{\max} - \frac{\mathcal{N}}{2} \right)^{|\mathcal{N}|_k}.$$

Nous allons maintenant appliquer ces résultats, en utilisant la relation (II.272) pour construire les représentations pour différentes théories supersymétriques,

Théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 1$:

$$2^{2 \times 4} = (2, 1) + \left(\frac{3}{2}, 4 \right).$$

Théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 2$:

$$2^{2 \times 4} = (2, 1) + \left(\frac{3}{2}, 4 \right) + (1, |4|_2).$$

Théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 3$:

$$2^{2 \times 4} = (2, 1) + \left(\frac{3}{2}, 4 \right) + (1, |4|_2) + (1, |4|_3).$$

Théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 4$:

$$2^{2 \times 4} = (2, 1) + \left(\frac{3}{2}, 4 \right) + (1, |4|_2) + (1, |4|_3) + (0, |4|_4).$$

et d'après la relation (II.273) nous avons :

- Pour $(2, 1)$ on a:

$$\begin{aligned}
 (2, 1) &= (2, 1) + \left(\frac{3}{2}, 1 \times \bar{4} \right) + (1, 1 \times |\bar{4}|_2) \\
 &+ \left(\frac{1}{2}, 1 \times |\bar{4}|_3 \right) + (0, 1 \times |\bar{4}|_4).
 \end{aligned}$$

Donc,

$$\left(2, \left(\frac{3}{2} \right)^4, (1)^6, \left(\frac{1}{2} \right)^4, 0 \right).$$

qui identique au multiplet graviton $\mathcal{N} = 4$ non massif (II.208) invariant sous CP.

- Pour $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$ on a:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2}, 4\right) &= \left(\frac{3}{2}, 4 \times 1\right) + \left(1, 4 \times \bar{4}\right) + \left(\frac{1}{2}, 4 \times |\bar{4}|_2\right) \\ &\quad + \left(0, 4 \times |\bar{4}|_3\right) + \left(-\frac{1}{2}, 4 \times |\bar{4}|_4\right). \end{aligned}$$

Donc,

$$\left(\frac{3}{2}, (1)^4, \left(\frac{1}{2}\right)^6, (0)^4, -\frac{1}{2}\right)^4.$$

qui est identique à quatre multiplets gravitino $\mathcal{N} = 4$ non massif (II.210) invariant sous CP.

- Pour $(1, 6)$ on a:

$$\begin{aligned} (1, 6) &= (1, 6 \times 1) + \left(\frac{1}{2}, 6 \times \bar{4}\right) + \left(0, 6 \times |\bar{4}|_2\right) \\ &\quad + \left(-\frac{1}{2}, 6 \times |\bar{4}|_3\right) + \left(-1, 6 \times |\bar{4}|_4\right). \end{aligned}$$

Donc,

$$\left(1, \left(\frac{1}{2}\right)^4, (0)^6, \left(-\frac{1}{2}\right)^4, -1\right)^6.$$

qui est identique à six multiplets vectoriel $\mathcal{N} = 4$ non massif (II.212) invariant sous CP.

- Pour $\left(\frac{1}{2}, \bar{4}\right)$ on a:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}, \bar{4}\right) &= \left(\frac{1}{2}, \bar{4} \times 1\right) + \left(0, \bar{4} \times \bar{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}, \bar{4} \times |\bar{4}|_2\right) \\ &\quad + \left(-1, \bar{4} \times |\bar{4}|_3\right) + \left(-\frac{3}{2}, \bar{4} \times |\bar{4}|_4\right). \end{aligned}$$

Donc,

$$\left(\frac{1}{2}, (0)^4, \left(-\frac{1}{2}\right)^6, (-1)^4, -\frac{3}{2}\right)^4.$$

qui est identique à quatre multiplets gravitino $\mathcal{N} = 4$ non massif (II.210) invariant sous CP.

- Pour $(0, 1)$ on a:

$$\begin{aligned} (0, 1) &= (0, 1 \times 1) + \left(-\frac{1}{2}, 1 \times \bar{4}\right) + \left(-1, 1 \times |\bar{4}|_2\right) \\ &\quad + \left(-\frac{3}{2}, 1 \times |\bar{4}|_3\right) + \left(-2, 1 \times |\bar{4}|_4\right). \end{aligned}$$

Donc,

$$\left(0, \left(-\frac{1}{2}\right)^4, (-1)^6, \left(-\frac{3}{2}\right)^4, -2\right).$$

qui est identique au multiplet graviton $\mathcal{N} = 4$ non massif (II.208) invariant sous CP.

Cas des charges centrales non nulles

Dans ce cas où les charges centrales sont non nulles $Z_{AB} \neq 0$, la superalgèbre (II.224) devient :

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha^A, \bar{Q}_{\dot{\beta}B}\} &= 2m\delta_{\alpha\dot{\beta}}\delta_B^A, \\ \{Q_\alpha^A, Q_\alpha^B\} &= \varepsilon_{\alpha\beta}Z^{AB}, \\ \{Q_{\dot{\alpha}A}, \bar{Q}_{\dot{\beta}B}\} &= \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}Z_{AB}^*. \end{aligned} \quad (\text{II.274})$$

Sous la transformation unitaire $U(\mathcal{N})$ agit sur matrice Z^{AB} comme suit

$$U_C^A U_D^B Z^{CD} \equiv \tilde{Z}^{AB}. \quad (\text{II.275})$$

Z^{AB} peut s'écrire sous la forme suivante (dite forme normale) [81],

$$\tilde{Z}^{AB} = \begin{cases} \begin{pmatrix} z_1\epsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_1\epsilon & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z_{\frac{\mathcal{N}}{2}}\epsilon \end{pmatrix} & \mathcal{N} \text{ paire} \\ \begin{pmatrix} z_1\epsilon & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & z_1\epsilon & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z_{|\frac{\mathcal{N}|}{2}}\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathcal{N} \text{ impaire} \end{cases}, \quad z_i \in \mathbb{R}_+. \quad (\text{II.276})$$

En utilisons la notation suivante pour simplifier, on a :

$$D = \begin{pmatrix} z_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & z_{\frac{\mathcal{N}}{2}} \end{pmatrix}, \quad (\text{II.277})$$

Donc,

– Pour $\mathcal{N}$ paire :

$$\tilde{Z}^{AB} = \epsilon \otimes D = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.278})$$

– Pour $\mathcal{N}$ impaire :

$$\tilde{Z}^{AB} = \begin{pmatrix} \epsilon \otimes D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut déterminer les éléments de $\tilde{Z}^{AB}$ dans la forme normale pour trouver la superalgèbre dans le cas paire $\mathcal{N} = 2n$, en remplaçant l'indice A par le paire d'indices (a, m) avec $a, b = 1, 2$ et $m, n = 1, \dots, \frac{\mathcal{N}}{2}$ et en utilisant les transformations unitaire sur les

II.2. Superalgèbre de Poincaré et ses représentations

Q_α^A suivantes :

$$\tilde{Q}_\alpha^A = U_C^A Q_\alpha^C. \quad (\text{II.279})$$

Donc la forme normale des element de $\tilde{Z}^{AB}$ est donnée par :

$$\tilde{Z}^{AB} = \epsilon \otimes D = \epsilon^{ab} \delta^{mn} z_n. \quad (\text{II.280})$$

Ainsi la superalgèbre (II.274) s'écrit dans ce cas comme suit :

$$\left\{ \tilde{Q}_\alpha^{an}, (\bar{Q}_\beta^{bn})^\dagger \right\} = 2m \delta_{\alpha\beta} \delta_B^A \delta_n^m, \quad (\text{II.281})$$

$$\left\{ \tilde{Q}_\alpha^{an}, \tilde{Q}_\alpha^{bn} \right\} = \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon^{ab} \delta_n^m z_n, \quad (\text{II.282})$$

$$\left\{ (\bar{Q}_\alpha^{an})^\dagger, (\bar{Q}_\beta^{bn})^\dagger \right\} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \epsilon_{ab} \delta_{mn} z_n. \quad (\text{II.283})$$

Considérons maintenant les operateurs donnés par :

$$a_\alpha^m = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\tilde{Q}_\alpha^{1n} + \epsilon_{\alpha\tau} (\bar{Q}_\tau^{2m})^\dagger \right], \quad (\text{II.284})$$

$$b_\alpha^m = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\tilde{Q}_\alpha^{1n} - \epsilon_{\alpha\tau} (\bar{Q}_\tau^{2m})^\dagger \right]. \quad (\text{II.285})$$

où $m = 1, \dots, \frac{\mathcal{N}}{2}$. Ces operateurs vérifient les relations d'anticommutation suivantes :

$$\left\{ a_\alpha^m, (a_\beta^n)^\dagger \right\} = \delta_{\alpha\beta} \delta^{mn} (2m + z_n), \quad (\text{II.286})$$

$$\left\{ b_\alpha^m, (b_\beta^n)^\dagger \right\} = \delta_{\alpha\beta} \delta^{mn} (2m + z_n), \quad (\text{II.287})$$

$$\left\{ a_\alpha^m, a_\beta^n \right\} = \left\{ b_\alpha^m, b_\beta^n \right\} = \left\{ a_\alpha^m, b_\beta^n \right\} = 0. \quad (\text{II.288})$$

Avec $(a_\alpha^m)^\dagger$ et $(b_\alpha^m)^\dagger$ sont les complexes conjugués des operateurs précédents. On peut montrer pour un état $|M, z\rangle$ on a :

$$\begin{aligned} \left\langle M, z \left| (b_\beta^n)^\dagger b_\alpha^m \right| M, z \right\rangle + \left\langle M, z \left| b_\alpha^m (b_\beta^n)^\dagger \right| M, z \right\rangle &= \|(b_\alpha^m | M, z\rangle)\|^2 + \left\| \left((b_\beta^n)^\dagger | M, z\rangle \right) \right\|^2 \\ &= (2M - z_n). \end{aligned} \quad (\text{II.289})$$

ce qui implique que :

$$2M \geq |z_m|, \quad m = 1, \dots, \frac{\mathcal{N}}{2}. \quad (\text{II.290})$$

Car la norme de l'espace de Hilbert est définie positive. Par conséquence la relation (II.290) indique dans le cas non massif ($M = 0$) la charge centrale est aussi nulle ($Z^{AB} = 0$), car pour toute valeur de m on a $z_m = 0$. Par contre dans le cas massif on a les deux cas suivants :

1) Dans le cas où $2M > |z_m|$ on a $2M - z_m > 0$ et les générateurs sont définis par :

$$\tilde{a}_\alpha^m = \frac{1}{\sqrt{2M + z_n}} a_\alpha^m, \quad (\text{II.291})$$

$$\tilde{b}_\alpha^m = \frac{1}{\sqrt{2M - z_n}} b_\alpha^m. \quad (\text{II.292})$$

Les relations d'anticommuation précédentes (II.286-II.288) deviennent :

$$\left\{ \tilde{a}_\alpha^m, (\tilde{a}_\beta^n)^\dagger \right\} = \delta_{\alpha\beta} \delta^{mn}, \quad (\text{II.293})$$

$$\left\{ \tilde{b}_\alpha^m, (\tilde{b}_\beta^n)^\dagger \right\} = \delta_{\alpha\beta} \delta^{mn}, \quad (\text{II.294})$$

$$\left\{ \tilde{a}_\alpha^m, \tilde{a}_\beta^n \right\} = \left\{ \tilde{b}_\alpha^m, \tilde{b}_\beta^n \right\} = \left\{ \tilde{a}_\alpha^m, \tilde{b}_\beta^n \right\} = 0. \quad (\text{II.295})$$

Ces relation définis une algèbre de Clifford de $2\mathcal{N}$ opérateurs de création $\left((a_\beta^m)^\dagger, (b_\beta^m)^\dagger \right)$ et d'annihilation (a_α^m, b_β^m) , qu'on peut aussi déterminer leurs expressions en effectuant deux transformations sur les Q_α^r par le groupe $USp(2\mathcal{N})$ à partir de la relation (II.237), [74]. Notons que le groupe d'automorphisme est toujours $SU(2) \times USp(2\mathcal{N})$, ce qui permet de construire les états $|M, z_m\rangle$ qui sont caractérisés par les charges centrales dans ce cas massif avec charge centrale $z_m \neq 0$ de la même façon qu'on a vue dans le cas massif avec charge centrale nulle $z_m = 0$. Notons aussi que d'après les relations (II.156), (II.157), l'invariance sous la symétrie $CPT : z_m \rightarrow -z_m$ implique que dans ce cas où $z_m \neq 0$ et $M > |z_m|$ le nombre d'états est deux fois supérieur à celui avec une charge centrale nulle $z_m = 0$. Notons que pour le cas avec $z_m = 0$ ces multiplet sont appelés multiplets longs.

2) Dans le cas où $z_i = 2M$ avec $i = 1, \dots, r \leq \frac{\mathcal{N}}{2}$, on a une algèbre de Clifford décrite par le groupe d'automorphisme $SO(4\mathcal{N} - 4r)$ avec $2r$ opérateurs b_α^i nulles. Les états dans ce cas sont classifiés par le groupe $SU(2) \times USp(2\mathcal{N} - 2r)$ qui coïncident avec ceux de la supersymétrie $(\mathcal{N} - r)$ avec charge centrales nulles, leurs nombre est deux fois supérieur que ceux de la supersymétrie $(\mathcal{N} - r)$ pour garantir l'invariance sous la symétrie CPT . Ces multiplets notés $\frac{r}{\mathcal{N}} - BPS$ sont appelés multiplets courts. Dans le cas où $r = \frac{\mathcal{N}}{2}$ l'algèbre de Clifford est décrite par le groupe d'automorphisme $SO(2\mathcal{N})$ identique à celui du cas non massif.

Pour finir nous allons prendre l'exemple du cas de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ avec une seule charge centrale $z_m \equiv z$. La multiplicité des représentations des multiplets longs est la même que celle du cas massif avec charge centrale nulle. Mais dans le cas où $z = 2M$ qui correspond aux états $\frac{1}{2} - BPS$ les opérateurs $b_\alpha^\dagger$ sont nulles et un seul opérateur de création $a_\alpha^\dagger$ reste, ce qui coïncide avec le cas de la supersymétrie massive avec charge centrale nulle qu'on doit multiplier leurs nombre par deux pour garder l'invariance sous la symétrie CPT , donc on a :

Etat	$ \Omega\rangle$	$a_\alpha^\dagger \Omega\rangle_j$	$a_\beta^\dagger a_\alpha^\dagger \Omega\rangle_j$
Spin	j	$j - \frac{1}{2}$ (si $j \geq \frac{1}{2}$) et $j + \frac{1}{2}$	j
Multiplicité	1	1 et 1	1

TABLEAU II.20 – États de spin de la théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 2$.

- Pour $j = 0$ on a :

$$2 \times \left(0, \frac{1}{2}, 0\right) \equiv \left((0)^2, \frac{1}{2}\right)^2. \quad (\text{II.296})$$

Ce terme est le doublet de multiplet chiral massif $\mathcal{N} = 1 \left((0)^2, \frac{1}{2}\right)$, il contient quatre degrés de libertés fermioniques et quatre degrés de libertés bosoniques, sont nombres de degrés de libertés est identique à celui du l'hypermultiplet $\mathcal{N} = 2$ non-massif $\left((0)^4, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$.

- Pour $j = \frac{1}{2}$ on a :

$$2 \times \left(\frac{1}{2}, 0 + 1, \frac{1}{2}\right) \equiv \left(1, \left(\frac{1}{2}\right)^2, 0\right)^2. \quad (\text{II.297})$$

Ce terme est le doublet de multiplet vectoriel massif $\mathcal{N} = 1 \left(1, \left(\frac{1}{2}\right)^2, 0\right)$, il contient huit degrés de libertés fermioniques et huit degrés de libertés bosoniques, sont nombres de degrés de libertés est identique à celui du vectoriel massif $\mathcal{N} = 2$.

- Pour $j = 1$ on a :

$$2 \times \left(1, \frac{1}{2} + \frac{3}{2}, 1\right) \equiv \left(\frac{3}{2}, (1)^2, \frac{1}{2}\right)^2. \quad (\text{II.298})$$

Ce terme est le doublet de multiplet de gravitino massif $\mathcal{N} = 1 \left(\frac{3}{2}, (1)^2, \frac{1}{2}\right)$, il contient huit degrés de libertés fermioniques et huit degrés de libertés bosoniques, sont nombres de degrés de libertés est identique à celui du gravitino massif $\mathcal{N} = 2$.

- Pour $j = \frac{3}{2}$ on a :

$$2 \times \left(\frac{3}{2}, 1 + 2, \frac{3}{2}\right) \equiv \left(2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, 1\right)^2. \quad (\text{II.299})$$

Ce terme est le doublet de multiplet de graviton massif $\mathcal{N} = 1 \left(2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, 1\right)$, il contient huit degrés de libertés fermioniques et huit degrés de libertés bosoniques, sont nombres de degrés de libertés est identique à celui du multiplet de graviton massif $\mathcal{N} = 2$.

II.3 Superspace et superchamps

Dans la partie précédente nous avons mis en évidence une possible symétrie reliant les bosons et le fermions. Cette symétrie conduit à la construction d'un nouveau espace qui est l'extension supersymétrique de l'espace-temps de Minkowski appelé superspace, et qui dépend des coordonnées bosoniques usuelles x^μ et fermioniques $(\theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$ (noté par $(\theta^{\alpha A}, \bar{\theta}_{\dot{\alpha} A})$ dans le cas d'une théorie de la supersymétrie étendue) [45, 71, 82, 83]. L'objectif de cette partie est de présenter les notions essentielles pour la compréhension du superspace, et de définir ensuite les champs supersymétrique (dite superchamps) comme étant des fonctions $\mathcal{S}(x^\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}})$ sur le superspace qui regroupe le contenu des multiplets supersymétriques.

II.3.1 Superspace

Comme on a déjà mentionné ci-dessus, les coordonnées du superspace de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ sont $(x^\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}})$, la variable x^μ étant réelle, les nouvelles coordonnées θ_α et $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ doivent aussi être réelles, ce qui implique qu'elles satisfont la condition propre aux fermions de Majorana $(\theta_\alpha)^\dagger = \bar{\theta}_\alpha$, leurs relation d'anti-commutation suivantes :

$$\{\theta_\alpha, \theta_\beta\} = 0, \quad (\text{II.300})$$

$$\{\theta_\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\} = 0, \quad (\text{II.301})$$

$$\{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\} = 0. \quad (\text{II.302})$$

Sont assimilées à des variables de Grassman. Alors une fonction arbitraire f qui dépend de ces variables θ , peut être décomposé après expansion de Taylor comme suit :

$$f(\theta) = f_0 + f_1\theta + f_2\theta^2 + \dots, \quad (\text{II.303})$$

et puisque $(\theta_\alpha)^3 = 0$, la fonction peut s'écrire sous la forme suivante :

$$f(\theta_1) = f_0 + \theta_1 \left. \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right|_{\theta_1=0}. \quad (\text{II.304})$$

avec $f_1 = \left. \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right|_{\theta_1=0}$. Les intégrations sont définies par :

$$\int d\theta \frac{df}{d\theta} = 0 \implies \int d\theta = \int d\bar{\theta} = \int d\theta \bar{\theta} = \int d\bar{\theta} \theta = 0, \quad (\text{II.305})$$

$$\int d\theta \theta = \int d\bar{\theta} \bar{\theta} = \int d^2\theta \theta^2 = \int d^2\bar{\theta} \bar{\theta}^2 = 1 \implies \delta(\theta) = \theta. \quad (\text{II.306})$$

et les dérivations par :

$$\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}, \quad \partial^\alpha = -\varepsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta, \quad (\text{II.307})$$

$$\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}, \quad \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} = -\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\partial}_{\dot{\beta}}. \quad (\text{II.308})$$

et à partir de la relation (II.304), on peut montrer l'équivalence entre la dérivation et l'intégration, en effet :

$$\int d\theta_1 f(\theta_1) = \underbrace{\int d\theta f_0}_0 + \underbrace{\int d\theta_1 \theta_1}_1 \left. \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right|_{\theta_1=0} = \left. \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right|_{\theta_1=0}. \quad (\text{II.309})$$

Maintenant nous allons définir le groupe qui représente le superspace de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ à quatre dimensions, nous savons déjà que l'espace de Minkowski $M_{1,3}$ peut être représenté par le quotient du groupe de Poincaré $IS(1,3)$ avec le groupe de Lorentz $SO(1,3)$ [84, 85], i.e. :

$$M_{1,3} = ISO(1,3) / SO(1,3). \quad (\text{II.310})$$

En utilisant les relations des éléments³ du groupe de Poincaré (II.82) et de groupe de Lorentz (II.20), on trouve l'espace quotient :

$$\{g\} / \{g'\} = \exp(i\sigma_\mu P^\mu). \quad (\text{II.311})$$

où g et g' sont respectivement les éléments du groupe de Poincaré et de Lorentz. Donc de façon analogue le superspace de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ à quatre dimensions est défini par le quotient du groupe de superPoincaré $Os(4 | 1)$ avec celui de Lorentz $SO(1, 3)$, i.e.,

$$M_{4|1} = Os(4 | 1) / SO(1, 3). \quad (\text{II.312})$$

Notons qu'un élément du groupe de superPoincaré est défini par :

$$G(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) = \exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} + i\sigma_\mu P^\mu + i\theta^\alpha Q_\alpha + i\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}}\right). \quad (\text{II.313})$$

et puisque les variables de Grassman vérifient les relations de commutations suivantes :

$$[\theta^\alpha, \theta^\beta] = 0, \quad (\text{II.314})$$

$$[\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}] = 0, \quad (\text{II.315})$$

$$[\theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}] = 0. \quad (\text{II.316})$$

La relation de l'algèbre (II.147) de superPoincaré se réécrit comme suit :

$$[\theta^\alpha Q_\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\bar{Q}_{\dot{\beta}}] = 2\theta^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} P_\mu. \quad (\text{II.317})$$

Les opérateurs Q^α et $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ doivent être définis comme des représentations différentielles, cela va permettre de déterminer les transformations supersymétriques des champs. Pour y arriver, considérons tout d'abord le cas d'un champ $\varphi(x^\mu)$ dans l'espace de Minkowski et sa translation suivante :

$$\varphi(x^\mu) \longrightarrow \exp(-ia_\mu P^\mu) \varphi \exp(ia_\mu P^\mu). \quad (\text{II.318})$$

Le développement de Taylor de $\varphi(x^\mu)$ donne :

$$\varphi(x^\mu) \longrightarrow \exp(-ia_\mu \mathcal{P}^\mu) \varphi(x^\mu) =: \varphi(x^\mu - a^\mu) \implies = -\mathcal{P}_\mu = -i\partial_\mu. \quad (\text{II.319})$$

où P^μ est la représentation différentielle du générateur de la translation $\mathcal{P}_\mu$, et a^μ est paramètre infinitésimal. L'identification des deux relations (II.318) et (II.319) au premier ordre de a^μ donne :

$$\begin{aligned} \exp(-ia_\mu P^\mu) \varphi \exp(ia_\mu P^\mu) &= \exp(-ia_\mu \mathcal{P}^\mu) \varphi(x^\mu) \\ \implies i[\varphi, a_\mu P^\mu] &= -ia^\mu \mathcal{P}_\mu \varphi = -a^\mu \partial_\mu \varphi. \end{aligned} \quad (\text{II.320})$$

3. $g = \exp(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} + i\sigma_\mu P^\mu)$, $g' = \exp(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu})$.

On déduit que la translation du champ ordinaire φ de paramètre infinitesimal a^μ , induit une translation dans l'espace-temps,

$$\delta_a \varphi = i a^\mu P_\mu \varphi. \quad (\text{II.321})$$

De façon similaire, pour un superchamp $\mathcal{S}(x^\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}) \equiv \mathcal{S}(x, \theta, \bar{\theta})$ définit par :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(x, \theta, \bar{\theta}) = & s(x) + \theta \phi(x) + \bar{\theta} \bar{\chi}(x) + \theta \theta m(x) + \bar{\theta} \bar{\theta} n(x) + \theta \sigma^\mu \bar{\theta} A_\mu(x) \\ & + \theta \theta \bar{\theta} \bar{\lambda}(x) + \bar{\theta} \bar{\theta} \theta \psi(x) + \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} d(x). \end{aligned} \quad (\text{II.322})$$

La transformation supersymétrique (translation dans le superspace) est :

$$\mathcal{S}(x + \delta x, \theta + \delta \theta, \bar{\theta} + \delta \bar{\theta}) = \exp[-i(\epsilon Q + \bar{\epsilon} \bar{Q})] \mathcal{S}(x, \theta, \bar{\theta}) \exp[i(\epsilon Q + \bar{\epsilon} \bar{Q})]. \quad (\text{II.323})$$

où ϵ_α et $\bar{\epsilon}_{\dot{\alpha}}$ sont les paramètres spinoriels, alors on a :

$$\delta_{(\epsilon, \bar{\epsilon})} \mathcal{S}(x, \theta, \bar{\theta}) = \mathcal{S}(x + \delta x, \theta + \delta \theta, \bar{\theta} + \delta \bar{\theta}) - \mathcal{S}(x, \theta, \bar{\theta}). \quad (\text{II.324})$$

D'autre par, en utilisant la formule de Backer-Campbell-Hausdorff suivante :

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots}. \quad (\text{II.325})$$

Le superchamp $\mathcal{S}(x, \theta, \bar{\theta})$ s'écrit :

$$\mathcal{S}(x, \theta, \bar{\theta}) = \exp[-i(x\mathcal{P} + \theta Q + \bar{\theta} \bar{Q})] \mathcal{S}(0, 0, 0) \exp[i(x\mathcal{P} + \theta Q + \bar{\theta} \bar{Q})]. \quad (\text{II.326})$$

En substituant la relation (II.326) dans (II.323), et pour simplifier on va calculer la partie suivante :

$$\begin{aligned} \exp[i(x\mathcal{P} + \theta Q + \bar{\theta} \bar{Q})] \exp[i(\epsilon Q + \bar{\epsilon} \bar{Q})] &= \exp\left\{ix\mathcal{P} + i(\theta + \epsilon)Q + i(\bar{\theta} + \bar{\epsilon})\bar{Q} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}[\theta Q, \bar{\epsilon} \bar{Q}] - \frac{1}{2}[\bar{\theta} \bar{Q}, \epsilon Q]\right\} \\ &= \exp\left\{i\left[x^\mu + i(\theta \sigma^\mu \bar{\epsilon} - \epsilon \sigma^\mu \bar{\theta})\right] \mathcal{P} \right. \\ &\quad \left. + i(\theta + \epsilon)Q + i(\bar{\theta} + \bar{\epsilon})\bar{Q}\right\}. \end{aligned} \quad (\text{II.327})$$

cela permet de déterminer les expressions explicites de δx , $\delta \theta$ et $\delta \bar{\theta}$ comme suit :

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= i(\theta \sigma^\mu \bar{\epsilon} - \epsilon \sigma^\mu \bar{\theta}), \\ \delta \theta^\alpha &= \epsilon^\alpha, \\ \delta \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} &= \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}}. \end{aligned} \quad (\text{II.328})$$

on déduit alors qu'une transformation supersymétrique (translation suivant les variables spinoriels ϵ^α et $\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}}$) induit une translation dans l'espace temps, cela est vérifié dans la relation (II.317)⁴. En utilisant les relations (II.328) on peut déterminer les représentations différentielles des opérateurs Q_α et $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ similaire à la relation (II.320),

4. $\{Q, \bar{Q}\} \sim \mathcal{P}_\mu$.

alors à partir du développement (II.324) on a

$$\begin{aligned}
\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \mathcal{S}(x, \theta, \bar{\theta}) &= \mathcal{S}(x, \theta, \bar{\theta}) + i(\theta \sigma^\mu \bar{\epsilon} - \epsilon \sigma^\mu \bar{\theta}) \partial_\mu \mathcal{S}(x, \theta, \bar{\theta}) \\
&\quad + \epsilon^\alpha \partial_\alpha \mathcal{S}(x, \theta, \bar{\theta}) + \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \mathcal{S}(x, \theta, \bar{\theta}) + \dots - \mathcal{S}(x, \theta, \bar{\theta}) \\
&= [i(\theta \sigma^\mu \bar{\epsilon} - \epsilon \sigma^\mu \bar{\theta}) \partial_\mu + \epsilon^\alpha \partial_\alpha + \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_{\dot{\alpha}}] \mathcal{S}(x, \theta, \bar{\theta}) \\
&= [\epsilon^\alpha (\partial_\alpha - i(\sigma^\mu \bar{\theta})_\alpha \partial_\mu) + \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}} (\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - i(\theta \sigma^\mu)_{\dot{\alpha}} \partial_\mu) + \dots] \mathcal{S}(x, \theta, \bar{\theta})
\end{aligned}$$

et avec la transformation supersymétrique (II.323), on a :

$$\begin{aligned}
\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \mathcal{S}(x, \theta, \bar{\theta}) &= (1 - (\epsilon Q + \bar{\epsilon} \bar{Q}) + \dots) \mathcal{S}(x, \theta, \bar{\theta}) (1 - (\epsilon Q + \bar{\epsilon} \bar{Q}) + \dots) \\
&= -i\epsilon^\alpha [Q_\alpha, \mathcal{S}(x, \theta, \bar{\theta})] + i\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}} [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \mathcal{S}(x, \theta, \bar{\theta})] + \dots
\end{aligned} \tag{II.330}$$

et par analogie avec la relation (II.320), nous avons :

$$\begin{aligned}
[\mathcal{S}, Q_\alpha] &\equiv iQ_\alpha \mathcal{S}, \\
[\mathcal{S}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] &\equiv i\bar{Q}_{\dot{\alpha}} \mathcal{S}.
\end{aligned} \tag{II.331}$$

Notons que les générateurs fermioniques Q_α et $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ dans les commutateurs (II.331) sont vu comme les opérateurs de translation P_μ dans l'espace temps, par contre ceux à droite des relations (II.331) sont vu comme les opérateurs différentielles $\mathcal{P}_\mu$.

Donc les relations (II.329), (II.330) et (II.331) donnent :

$$\begin{aligned}
-i\epsilon^\alpha (Q_\alpha \mathcal{S}) &= -i\epsilon^\alpha (\partial_\alpha - i(\sigma^\mu \bar{\theta})_\alpha \partial_\mu) \mathcal{S}, \\
i\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}} (-\bar{Q}_{\dot{\alpha}} \mathcal{S}) &= i\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}} (\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - i(\theta \sigma^\mu)_{\dot{\alpha}} \partial_\mu) \mathcal{S}.
\end{aligned} \tag{II.332}$$

à partir des relations (II.332), nous avons la forme différentielle des opérateurs :

$$Q_\alpha = \partial_\alpha - i(\sigma^\mu \bar{\theta})_\alpha \partial_\mu, \tag{II.333}$$

$$\bar{Q}_{\dot{\alpha}} = -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + i(\theta \sigma^\mu)_{\dot{\alpha}} \partial_\mu. \tag{II.334}$$

alors les dérivées spinorielles sont définies par [66] :

$$D_\alpha = \partial_\alpha - i(\sigma^\mu \bar{\theta})_\alpha \partial_\mu, \tag{II.335}$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + i(\theta \sigma^\mu)_{\dot{\alpha}} \partial_\mu.$$

qui vérifient les relations d'anticommutations suivantes :

$$\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\} = 2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu, \tag{II.336}$$

$$\{D_\alpha, D_\beta\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = 0. \tag{II.337}$$

où la relation d'anticommutation (II.337) implique :

$$D^n = \bar{D}^n = 0, \quad \text{pour } n \geq 3. \tag{II.338}$$

et finalement les relations d'anticommutation des dérivées spinorielles avec Q_α et $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ sont de la forme suivante :

$$\{D_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, Q_\beta\} = \{D_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0. \quad (\text{II.339})$$

II.3.2 Superchamps

Comme déjà mentionné ci-dessus, un superchamp général de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ est de la forme suivante [68, 82, 83, 86] :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) = & s(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta\theta m(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}n(x) \\ & + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\psi(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}d(x). \end{aligned} \quad (\text{II.340})$$

où $s(x)$, $m(x)$, $n(x)$ et $d(x)$ sont les champs scalaires, et $\phi(x)$ et $\psi(x)$ les spineurs de Weyl gauchers $\bar{\chi}(x)$ et $\bar{\lambda}(x)$ les spineurs de Weyl droitiers, et $A_\mu(x)$ un champ vectoriel. Le superchamp $\mathcal{S}(x^\mu, \theta, \bar{\theta})$ n'est pas une représentation irréductible de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$, car on a vu dans la partie consacrée à la construction des multiplets non-massives que le degré de liberté bosonique et fermionique égale à $2^{\mathcal{N}-1}$ pour chacun d'eux, et dans le cas de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ nous avons $2^{1-1} = 1$ boson et fermion, alors pour réduire le nombre de degré de liberté il faut imposer des contraintes sur $\mathcal{S}(x^\mu, \theta, \bar{\theta})$, pour donner les représentations irréductibles.

Superchamp chiral

Le superchamp chiral tire son nom de la nature chirale des fermions du modèle standard. Alors il contient deux degrés de liberté fermioniques pour décrire les composantes gauchers (ou droitiers) d'un fermion du modèle standard, c'est à dire ceux qui satisfont la contrainte imposée sur un superchamp général Φ , cette contrainte est définie par [66, 68, 82] :

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0. \quad (\text{II.341})$$

où $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ est la dérivée spinorielle (II.335). Donc Φ n'est pas en fonction de $\bar{\theta}$. Notons que la contrainte de la représentation antichirale du superchamp $\bar{\Phi}$ est donnée par :

$$D_\alpha\bar{\Phi} = 0. \quad (\text{II.342})$$

Alors le développement de ce superchamp chiral est :

$$\Phi(x, \theta) = \varphi(x) + \sqrt{2}\theta^\alpha\psi_\alpha(x) + \theta^2 F(x). \quad (\text{II.343})$$

où $\psi(x)$ est un champ fermionique de dimension de masse $[\psi_\alpha(x)] = \frac{3}{2}$, ce fermion peut décrire un lepton ou un quark ou un Higgsino (superpartenaire de Higgs), et $\varphi(x)$ est un champ scalaire de dimension de masse $[\varphi(x)] = 1$ qui décrit les superpartenaires du champ $\psi(x)$, comme slepton ou les squarks et aussi il peut décrire le scalaire de Higgs, le champ scalaire $F(x)$ à la dimension de masse égale à $[F(x)] = 2$ appelé champ auxiliaire, car il ne se propage pas (non dynamique), il permet l'égalité de degré de liberté entre les deux types de particules hors et sur couche de masse (off-shell et on-shell), il est supprimé dans le cas on-shell à partir de son équation de mouvement.

Considérons maintenant le changement des variables suivant :

$$y^\mu(x, \bar{\theta}) = x^\mu + f^\mu(\bar{\theta}, \theta). \quad (\text{II.344})$$

où y^μ sont des coordonnées bosoniques satisfaisant $\bar{D}_{\dot{\alpha}} y^\mu = 0$. et $f^\mu(\bar{\theta}, \theta)$ une fonction que nous allons déterminer sa forme en utilisant la contrainte (II.341), en effet :

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} \Phi(y, \theta) = 0 \quad (\text{II.345})$$

$$\implies \partial_\alpha \Phi(y, \theta) = i(\theta \sigma^\mu)_{\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Phi(y, \theta) = -i(\theta \sigma^\mu)_{\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \Phi(y, \theta)$$

$$\implies \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} y^\mu \frac{\partial \Phi(y, \theta)}{\partial y^\mu} = -i(\theta \sigma^\mu)_{\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \Phi(y, \theta)$$

$$\implies f^\mu = i(\theta \sigma^\mu \bar{\theta}). \quad (\text{II.346})$$

ce qui implique que le superchamp chiral depend de $\bar{\theta}$ par $y^\mu = x^\mu + i(\theta \sigma^\mu \bar{\theta})$, et cette dernière conduit au développement en composantes du superchamp chiral donné par :

$$\begin{aligned} \Phi(y^\mu, \theta) &= \varphi(x) + \sqrt{2} \theta^\beta \psi_\beta(x) + i \theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \varphi(x) + \theta^2 F(x) \\ &\quad - \frac{i}{\sqrt{2}} \theta^2 \partial_\mu \psi^\alpha(x) \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} - \frac{1}{4} \theta^2 \bar{\theta}^2 \partial^\mu \partial_\mu \varphi(x). \end{aligned} \quad (\text{II.347})$$

Donc les dérivées spinorielles (II.335) se réécrit dans ce cas comme suit :

$$D_\alpha = \partial_\alpha + 2i(\sigma^\mu \bar{\theta})_\alpha \partial_\mu, \quad (\text{II.348})$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}. \quad (\text{II.349})$$

La transformation infinitésimale supersymétrique du superchamp chiral est :

$$\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \Phi(y^\mu, \theta) = (\epsilon^\alpha Q_\alpha + \bar{\epsilon}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}}) \Phi(y^\mu, \theta). \quad (\text{II.350})$$

où ϵ_α et $\bar{\epsilon}_{\dot{\alpha}}$ sont les paramètres, alors les transformations des composantes du superchamp chiral sont :

$$\delta \varphi = \sqrt{2} \epsilon^\alpha \psi_\alpha, \quad (\text{II.351})$$

$$\delta \psi_\alpha = \sqrt{2} \epsilon^\alpha F + i \sqrt{2} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \varphi, \quad (\text{II.352})$$

$$\delta F = -i \sqrt{2} \partial_\mu \psi^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}}. \quad (\text{II.353})$$

la transformation (II.353) montre que la variation du champ auxiliaire F est une dérivée totale.

Par ailleurs, on peut montrer que le produit des superchamps chiraux est aussi un superchamp chiral, en particulier en s'intéresse aux composantes invariantes sous la transformation supersymétrique, i.e. les composantes $\theta\theta$.

$$\Phi_i \Phi_j \mid_{\theta\theta} = \varphi_i F_j + \varphi_j F_i - \psi_i \psi_j, \quad (\text{II.354})$$

$$\Phi_i \Phi_j \Phi_k \mid_{\theta\theta} = \varphi_i \varphi_j F_k + \varphi_k \varphi_i F_j + \varphi_j \varphi_k F_i - \psi_i \psi_j \varphi_k - \psi_k \psi_i \varphi_j - \psi_j \psi_k \varphi_i \quad (\text{II.355})$$

la somme d'un superchamp chiral est un superchamp antichiral est un superchamp réel (vectoriel) :

$$\begin{aligned} \Phi + \bar{\Phi} = & 2Re\varphi + \sqrt{2}(\theta\psi + \bar{\theta}\bar{\psi}) - 2\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu(Im(\varphi)) + \theta^2 F + \bar{\theta}^2 \bar{F} \quad (\text{II.356}) \\ & - \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta^2\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\theta} + \bar{\theta}^2\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}) - \frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2\Box Re(\varphi). \end{aligned}$$

ce superchamp (II.356) va être utile dans ce qui suit pour la généralisation supersymétrique de la transformation de jauge, car dans (II.356) la composante proportionnelle à $\theta\bar{\theta}$ associée au vecteur se transforme comme une dérivée totale. D'autre part leurs produit qui est donné par :

$$\begin{aligned} \Phi\bar{\Phi} = & \bar{\varphi}\varphi + \sqrt{2}\bar{\varphi}(\theta\psi) + \sqrt{2}(\bar{\theta}\bar{\psi})\varphi + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}(\bar{\varphi}\partial_\mu\varphi - \varphi\partial_\mu\bar{\varphi}) + 2(\bar{\theta}\bar{\psi})(\theta\psi) \quad (\text{II.357}) \\ & + \theta^2\left[\bar{\varphi}F + \sqrt{2}(\bar{\theta}\bar{\psi})F + \frac{i}{\sqrt{2}}(\psi\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\bar{\varphi} - \bar{\varphi}\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\theta})\right] \\ & + \bar{\theta}^2\left[\bar{F}\varphi + \sqrt{2}\bar{F}(\theta\psi) + \frac{i}{\sqrt{2}}(\varphi\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi} - \theta\sigma^\mu\bar{\psi}\partial_\mu\varphi)\right] \\ & + \theta^2\bar{\theta}^2\left[\frac{1}{4}\Box\bar{\varphi}\varphi + \frac{1}{4}\bar{\varphi}\Box\varphi - \frac{1}{2}\partial_\mu\bar{\varphi}\partial^\mu\varphi + \frac{i}{2}(\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\psi} - \psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}) + F\bar{F}\right]. \end{aligned}$$

possède une caractéristique intéressante, sa composantes proportionnelles à $\theta^2\bar{\theta}^2$, contient les termes cinétiques des champs φ et ψ , et sous les transformations supersymétriques il se transforme comme une dérivée totale, donc il est invariant sous ces transformations, ce terme est :

$$\begin{aligned} \Phi\bar{\Phi}\big|_{\theta^2\bar{\theta}^2} = & \frac{1}{4}\Box\bar{\varphi}\varphi + \frac{1}{4}\bar{\varphi}\Box\varphi - \frac{1}{2}\partial_\mu\bar{\varphi}\partial^\mu\varphi + \frac{i}{2}(\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\psi} - \psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}) + F\bar{F} \quad (\text{II.358}) \\ = & -\partial_\mu\bar{\varphi}\partial^\mu\varphi - i\psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi} + F\bar{F}. \end{aligned}$$

ce terme va permettre dans ce qui suit à la construction le terme cinétique du multiplet chiral.

Superchamp Vectoriel

Ce multiplet correspond à la représentation vectorielle d'un superchamp générale $V(x, \theta, \bar{\theta})$, qui est contraint par la condition de réalité (auto-conjugaison) suivante :

$$V = \bar{V}. \quad (\text{II.359})$$

appelée condition de réalité car elle permet de garder le champ de jauge réel $A_\mu(x)$ (puisque il appartient à la représentation adjointe du groupe de jauge), et elle permet de décrire les bosons de jauge du modèle standard et leurs superpartenaires. Donc la contrainte implique sa forme générale comme suit :

$$\begin{aligned} V(x, \theta, \bar{\theta}) = & C(x) + i\theta\chi(x) - i\bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \frac{i}{2}\theta\bar{\theta}(M(x) + iN(x)) - \frac{i}{2}\bar{\theta}\theta(M(x) - iN(x)) \quad (\text{II.360}) \\ & - \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(x) + i\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\left(\lambda(x) + \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}(x)\right) \\ & + \frac{1}{2}\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\theta}\left(D(x) + \frac{1}{2}\Box C(x)\right). \end{aligned}$$

où $C(x)$, $M(x)$, et $N(x)$ sont des champs scalaires réels qui contiennent un seul degré de liberté pour chacun d'eux, et $D(x)$ un champ auxiliaire réel à un degré de liberté aussi, plus les quatre degrés de liberté du champ de jauge $A_\mu(x)$. Alors, le superchamp vectoriel contient huit degré de liberté bosoniques, et aussi huit degré de liberté fermionique correspond aux fermions de Majorana $\chi(x)$ et $\lambda(x)$. En comparant ce nombre de degré de liberté avec celui du multiplet vectoriel de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ non massive (II.190), il est commode de supprimer les degrés de liberté non physique, c'est à dire réduire (II.360), et pour y arriver il faut définir la version supersymétrique de la transformation de jauge usuel des théories quantiques des champs qui permet de réduire le nombre de degré de liberté d'un champ de jauge⁵, cette transformation de jauge supersymétrique est de la forme suivante :

$$V \longrightarrow V + (\Phi + \bar{\Phi}) . \quad (\text{II.361})$$

Rappelons que $(\Phi + \bar{\Phi})$ est un superchamp vectoriel. En utilisant son expression (II.356) et celle du superchamp vectoriel (II.360) dans la transformation de jauge supersymétrique (II.361), on obtient les transformations de jauge supersymétrique de ses composantes :

$$C \longrightarrow C + 2\text{Re}(\varphi) , \quad (\text{II.362})$$

$$\chi \longrightarrow \chi - 2\text{Re}(F) , \quad (\text{II.363})$$

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + 2\partial_\mu(\text{Im}(\varphi)) , \quad (\text{II.364})$$

$$M \longrightarrow M - 2\text{Im}(F) , \quad (\text{II.365})$$

$$N \longrightarrow N - 2\text{Re}(F) , \quad (\text{II.366})$$

$$\lambda \longrightarrow \lambda , \quad (\text{II.367})$$

$$D \longrightarrow D . \quad (\text{II.368})$$

On remarque que les champs D et L sont invariants de jauge, et que A_μ se transforme comme dans le cas non-supersymétrique. Notons qu'on peut éliminer les composantes C , χ , M et N par l'ajustement du superchamp chiral non physique Φ , en choisissant une généralisation de la jauge unitaire usuelle qu'on a vu dans le premier chapitre, cette jauge est appelée la jauge de Wess-Zumino, alors selon ce choix on a :

$$C = -2\text{Re}(\varphi) , \quad (\text{II.369})$$

$$\chi = -2\text{Re}(F) , \quad (\text{II.370})$$

$$M = -2\text{Im}(F) , \quad (\text{II.371})$$

$$N = 2\text{Re}(F) . \quad (\text{II.372})$$

Donc le superchamp vectoriel (II.360) devient :

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = -\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) - \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x). \quad (\text{II.373})$$

5. pour que A_μ écrit un photon aux deux polarisations, ses 4 ddl doivent être réduites à 2 ddl par la transformation de jauge $A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu\Lambda(x)$ et la jauge de Lorentz $\partial^\mu A_\mu = 0$.

Ce superchamp contient un champ de jauge A_μ , un jaugino⁶ λ et un champ auxiliaire D . La transformation infinitésimale supersymétrique du superchamp vectoriel est :

$$\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} V(x, \theta, \bar{\theta}) = (\epsilon^\alpha Q_\alpha + \bar{\epsilon}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}}) V(x, \theta, \bar{\theta}). \quad (\text{II.374})$$

ce qui donne les transformations de ses composantes :

$$\delta A^\mu = i(\epsilon \sigma^\mu \bar{\lambda} - \bar{\epsilon} \bar{\sigma}^\mu \lambda), \quad (\text{II.375})$$

$$\delta \lambda = (\sigma^{\mu\nu})_\epsilon F_{\mu\nu} + i\epsilon D, \quad (\text{II.376})$$

$$\delta \bar{\lambda} = \bar{\epsilon} (\bar{\sigma}^{\mu\nu}) F_{\mu\nu} - i\bar{\epsilon} D, \quad (\text{II.377})$$

$$\delta D = \bar{\epsilon} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda - \epsilon \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda}. \quad (\text{II.378})$$

la transformation (II.378) montre que la variation du champ auxiliaire D est une dérivée totale. On peut vérifier que la seule composante non nulle de V^2 est :

$$V^2 = \theta \sigma^\mu \bar{\theta} A_\mu \theta \sigma^\mu \bar{\theta} A_\mu = -\frac{1}{2} \theta^2 \bar{\theta}^2 A_\mu A^\mu. \quad (\text{II.379})$$

ceci implique :

$$V^n = 0, \quad n \geq 3. \quad (\text{II.380})$$

Dans ce chapitre nous avons présenté la description de l'algèbre de Poincaré et la superalgèbre de Poincaré pour la construction de leurs représentations. Ensuite, nous avons donné la description du formalisme superspace et la définition des superchamps chirale et vectoriel de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$. Cela va nous permettre dans le troisième chapitre, la construction du lagrangien total de la théorie supersymétrique minimale $\mathcal{N} = 1$, ainsi la réalisation de sa brisure spontanée.

6. Superpartenaire du champ de jauge.

Chapitre III

Brisure spontanée de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$

Dans ce chapitre, nous allons construire le lagrangien qui décrit la théorie supersymétrique minimale $\mathcal{N} = 1$. Puis, nous allons présenter la réalisation de la brisure spontanée de cette théorie minimale par les termes F et D associés respectivement aux multiplets chiral et vectoriel de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$.

III.1 Lagrangien de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$

III.1.1 Etude du secteur de la matière

Pour décrire ce lagrangien, nous allons utiliser les superchamps chiraux et anti-chiraux dans le formalisme de superspace, par le remplacement de l'intégration sur $d^2\theta$, $d^2\bar{\theta}$ et $d^4\theta$ pour la sélection des termes F , $\bar{F}$ et D respectivement. Ce lagrangien est constitué de deux parties, la première est appelée potentiel de kähler $\mathcal{K}(\Phi, \bar{\Phi})$ qui décrit le terme cinétique, et la seconde décrit les termes de masse et les interactions est appelée superpotentiel $W(\Phi)$.

Potentiel de kähler

Un potentiel de kähler en fonction de plusieurs superchamps chiraux Φ^i est anti-chiraux $\bar{\Phi}^i$ s'écrit :

$$\mathcal{K}(\Phi_i, \bar{\Phi}_i) = g_{ij} \Phi^i \bar{\Phi}^j. \quad (\text{III.1})$$

où $g_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial \Phi^i \partial \bar{\Phi}^j}$ est la métrique de kählienne, alors pour que la théorie soit renormalisable, il est commode de rendre g_{ij} égale à l'identité en redéfinissant les champs¹, ainsi le potentiel de kähler canonique² est :

$$\mathcal{K}(\Phi_i, \bar{\Phi}_i) = \Phi_i \bar{\Phi}_i. \quad (\text{III.2})$$

Alors le lagrangien cinétique est de la forme :

$$\mathcal{L}_{Kah} \equiv \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \mathcal{K}(\bar{\Phi}, \Phi) = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \Phi \bar{\Phi} \quad (\text{III.3})$$

$$= -\partial_\mu \bar{\varphi} \partial^\mu \varphi - i\psi \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi} + F \bar{F}. \quad (\text{III.4})$$

1. Sommation sur l'indice i.

2. En générale, si la métrique est plat on parle de potentiel de kähler canonique, et non-canonique dans le cas contraire.

Superpotentiel

le superpotentiel $W(\Phi)$ qui décrit le terme d'interaction de ce multiplet est une fonction holomorphe de Φ , i.e. qu'il ne dépend pas de son complexe conjugué, cette propriété est très importante, car dans le cas contraire le superpotentiel perd la notion de chiralité, par conséquence il vérifie la condition de chiralité suivante :

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} W(\Phi) = \frac{\partial^2 W}{\partial \Phi} \bar{D}_{\dot{\alpha}} \Phi = 0. \quad (\text{III.5})$$

un développement de ce superpotentiel est donné par :

$$W(\Phi) = W(\varphi) + \sqrt{2} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \Big|_{\Phi=\varphi} \theta^\alpha \psi_\alpha + \theta^2 \left(F \frac{\partial W}{\partial \varphi} \Big|_{\Phi=\varphi} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi \partial \varphi} \Big|_{\Phi=\varphi} \psi \psi \right). \quad (\text{III.6})$$

on remarque qu'il s'agit bien d'un superchamp chiral, dont la composante proportionnelle à θ^2 est :

$$W(\Phi)|_{\theta^2} = F \frac{\partial W}{\partial \varphi} \Big|_{\Phi=\varphi} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi \partial \varphi} \Big|_{\Phi=\varphi} \psi \psi. \quad (\text{III.7})$$

où le deuxième terme de (III.7) est le terme de masse des fermions qui s'écrit, ψ ,

$$M_F = \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{\varphi} \partial \bar{\varphi}}. \quad (\text{III.8})$$

Le terme d'interaction est donné par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{pot} &\equiv \int d^2 \theta W(\Phi) + \int d^2 \bar{\theta} \bar{W}(\bar{\Phi}) \\ &\equiv \int d^2 \theta W(\Phi) + h.c.. \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

la substitution de (III.7) dans (III.9) donne :

$$\mathcal{L}_{pot} \equiv \int d^2 \theta W(\Phi) + h.c = F \frac{\partial W}{\partial \varphi} \Big|_{\Phi=\varphi} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi \partial \varphi} \Big|_{\Phi=\varphi} \psi \psi + h.c.. \quad (\text{III.10})$$

de façon similaire au potentiel de kähler, pour avoir une théorie renormalisable le superpotentiel doit avoir la forme suivante :

$$W(\Phi_i) = \lambda_i \Phi_i + \frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3} g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k. \quad (\text{III.11})$$

Alors à partir de (III.3) et (III.10) le lagrangien total s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\equiv \mathcal{L}_{Kah} + \mathcal{L}_{pot} = \int d^2 \theta d^2 \bar{\theta} \Phi \bar{\Phi} + \int d^2 \theta W(\Phi) + \int d^2 \bar{\theta} \bar{W}(\bar{\Phi}) \\ &= -\partial_\mu \bar{\varphi} \partial^\mu \varphi - i \psi \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi} + F \bar{F} + F \frac{\partial W}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi \partial \varphi} \psi \psi + \bar{F} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\varphi}} - \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{\varphi} \partial \bar{\varphi}} \bar{\psi} \bar{\psi}. \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

En remplaçant les champs auxiliaires F et $\bar{F}$ dans (III.12), par leurs équations de mouvement³ données par :

$$F = -\frac{\partial W}{\partial \varphi}, \quad (III.13)$$

$$\bar{F} = -\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\varphi}}. \quad (III.14)$$

on obtient :

$$\mathcal{L} \equiv -\partial_\mu \bar{\varphi} \partial^\mu \varphi - i\psi \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi \partial \varphi} \psi \psi - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{\varphi} \partial \bar{\varphi}} \bar{\psi} \bar{\psi} - \frac{\partial W}{\partial \varphi} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\varphi}}.$$

où le dernier terme dans ce lagrangien correspond au potentiel scalaire,

$$V_F = \frac{\partial W}{\partial \varphi} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\varphi}} = F \bar{F}. \quad (III.15)$$

On remarque que V_F est toujours positif, notons que la dérivée seconde de V_F donne la masse des scalaires suivante⁴ :

$$M_{scal} = \frac{\partial^2 V_F}{\partial \bar{\varphi} \partial \varphi} + h.c.. \quad (III.16)$$

III.1.2 Etude du secteur de jauge

Pour décrire le terme cinétique du vectoriel (abélien), il faut construire le tenseur de force du superchamp analogue au tenseur de force du champ $F_{\mu\nu}$ ⁵,

$$W_\alpha = -\frac{1}{4} \bar{D}^2 D_\alpha V \quad (III.17)$$

$$= -i\lambda_\alpha(y) + \theta_\alpha D(y) - i(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta \theta_\beta F_{\mu\nu} + \theta^2 \left(\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda}(y) \right)_\alpha. \quad (III.18)$$

En comparant les dimensions des champs $F_{\mu\nu}$, λ et D dans (II.373), on voit que W_α correspond à un superchamp chirale, et avec la propriété (II.338) on peut le montrer comme suit :

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} W_\alpha = -\frac{1}{4} \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{D}^2 D_\alpha V = 0. \quad (III.19)$$

de même on définit le conjugué $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$ par :

$$\bar{W}_{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{4} D^2 \bar{D}_{\dot{\alpha}} V. \quad (III.20)$$

qui vérifie la contrainte d'un superchamp antichiral suivante :

$$D_\alpha \bar{W}_{\dot{\alpha}} = 0. \quad (III.21)$$

3. Les champs auxiliaires F et $\bar{F}$ ne se propageant pas, leurs équations de mouvement permettent de les éliminer.

4. Comme dans toutes les théories des champs.

5. $F_{\mu\nu} = \partial_{[\mu} A_{\nu]}$.

Ces champs vérifient deux autres propriétés importantes en plus à celle de la chiralité, la première est l'invariance sous la transformation de jauge supersymétrique (II.361) :

$$\begin{aligned}
 \delta W_\alpha &= -\frac{1}{4}\bar{D}_{\dot{\alpha}}\bar{D}^{\dot{\alpha}}D_\alpha\delta V = -\frac{1}{4}\bar{D}_{\dot{\alpha}}\bar{D}^{\dot{\alpha}}D_\alpha(\Lambda + \bar{\Lambda}) = +\frac{1}{4}\bar{D}^{\dot{\alpha}}\bar{D}_{\dot{\alpha}}D_\alpha(\Lambda + \bar{\Lambda}) \\
 &= \frac{1}{4}\bar{D}^{\dot{\alpha}}\bar{D}_{\dot{\alpha}}D_\alpha\Lambda + \frac{1}{4}\bar{D}^{\dot{\alpha}}\bar{D}_{\dot{\alpha}}\underbrace{D_\alpha\bar{\Lambda}}_0 = \frac{1}{4}\bar{D}^{\dot{\alpha}}\{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, D_\alpha\}\Lambda - \frac{1}{4}\bar{D}^{\dot{\alpha}}D_\alpha\underbrace{\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Lambda}_0 \\
 &\stackrel{(II.336)}{=} \frac{1}{4}\bar{D}^{\dot{\alpha}}(-2i\sigma^\mu\partial_\mu)\Lambda = -\frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu(\underbrace{\bar{D}^{\dot{\alpha}}\Lambda}_0) = 0.
 \end{aligned} \tag{III.22}$$

avec Λ un superchamp chiral. La deuxième propriété est l'identité de Bianchi :

$$\left. \begin{aligned} D^\alpha W_\alpha &= -\frac{1}{4}D^\alpha\bar{D}^2D_\alpha V = -\frac{1}{4}\bar{D}^2D^2V \\ \bar{D}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}} &= -\frac{1}{4}\bar{D}_{\dot{\alpha}}D^2\bar{D}^{\dot{\alpha}}V = -\frac{1}{4}\bar{D}^2D^2V \end{aligned} \right\} \implies DW = \bar{D}\bar{W}. \tag{III.23}$$

Pour déterminer les composantes de W_α , ainsi sa forme explicite, nous allons utiliser les coordonnées $y^\mu = x^\mu + i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})$ pour le superchamp vectoriel (II.373),

$$V(y, \theta, \bar{\theta}) = -\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(y^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}) + i\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(y^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}) \tag{III.24}$$

$$\begin{aligned}
 &-i\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\theta}\lambda(y^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}) + \frac{1}{2}\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\theta}D(y^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}) \\
 &= -\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(y) - \theta\sigma^\mu\bar{\theta}(i\theta\sigma^\nu\bar{\theta})\partial^\mu A_\mu(y)
 \end{aligned} \tag{III.25}$$

$$\begin{aligned}
 &+i\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\lambda}(y) - \bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\theta}\lambda(y) + \frac{1}{2}\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\theta}D(y) \\
 &= -\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(y) + i\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\lambda}(y) - \bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\theta}\lambda(y) + \frac{1}{2}\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\theta}[D(y) - i\partial^\mu A_\mu(y)]
 \end{aligned} \tag{III.26}$$

Alors en utilisant la relation (III.19) et la forme simple des dérivées spinorielles (II.348) et (II.349), W_α s'exprime en fonction des coordonnées chiraux par :

$$\begin{aligned}
 W_\alpha &= -\frac{1}{4}\bar{D}^2D_\alpha V(y, \theta, \bar{\theta}) = -\frac{1}{4}\partial_{\dot{\alpha}}\bar{\partial}^{\dot{\alpha}}D_\alpha V(y, \theta, \bar{\theta}) \\
 &= -i\lambda(y) + \theta_\alpha D(y) - i(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta \theta_\beta F_{\mu\nu} + \theta^2(\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda})_\alpha.
 \end{aligned} \tag{III.27}$$

On remarque qu'il s'agit bien d'un superchamp chiral, proportionnel au jaugino λ qui appartient à la représentation adjointe, puisque il se trouve dans le même multiplet que le champ de jauge A_μ , et puisque le terme cinétique de ce dernier est quadratique en $F_{\mu\nu}$, alors le seul invariant qui pourrait être le terme cinétique est :

$$\begin{aligned}
 W^\alpha W_\alpha &= \varepsilon^{\alpha\beta} \left[-i\lambda_\beta + \theta_\beta D - i(\sigma^{\mu\nu})_\beta^\gamma \theta_\gamma F_{\mu\nu} + \theta^2(\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda})_\beta \right] \\
 &\quad \left[-i\lambda_\alpha + \theta_\alpha D - i(\sigma^{\rho\tau})_\alpha^\delta \theta_\delta F_{\rho\tau} + \theta^2(\sigma^\nu\partial_\nu\bar{\lambda})_\alpha \right] \\
 &= -\lambda^2 - 2i\theta\lambda^\alpha\theta_\alpha(\sigma^{\rho\tau})_\alpha^\delta F_{\rho\tau} \\
 &\quad + \theta^2 \left[-2i\theta\lambda^\sigma\partial_\sigma\bar{\lambda} + D^2 - \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\tau}F_{\mu\nu}F_{\rho\tau} \right].
 \end{aligned} \tag{III.28}$$

Le lagrangien cinétique de jauge proportionnel à ce terme est,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{jauge} &= \frac{1}{4} \int d^2\theta W^\alpha W_\alpha + h.c. \\ &= \frac{1}{4} \left[-2i\lambda\sigma^\nu\partial_\nu\bar{\lambda} + -2i\partial_\nu\lambda\sigma^\nu\bar{\lambda} + 2D^2 - F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\tau}F_{\mu\nu}F_{\rho\tau} + \frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\tau}F_{\mu\nu}F_{\rho\tau} \right] \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - i\lambda\sigma^\nu\partial_\nu\bar{\lambda} + \frac{1}{2}D^2.\end{aligned}\tag{III.29}$$

donc il contient les terme cinétique pour λ , $F_{\mu\nu}$ et D , et invariant sous les transformations supersymétrique (II.375-II.378).

III.1.3 Lagrangien de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$

Pour construire le lagrangien total d'une théorie renormalisable, il faut coupler le superchamp chiral (II.190) et le superchamp vectoriel abélien (II.192), pour cela il faut que la partie qui décrit la matière (i.e. $\mathcal{L}_{Kah}$ et $\mathcal{L}_{pot}$) soit invariante sous la transformation de jauge abélienne suivante :

$$\Phi_i \longrightarrow \exp(-iq_i\Lambda)\Phi^i,\tag{III.30}$$

où Φ^i un superchamp chiral, et Λ un paramètre qui aussi doit être chiral, sinon Φ_i perd sa propriété de chiralité, en effet :

$$\begin{aligned}\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi_i &\longrightarrow \exp(-iq_i\Lambda)\underbrace{\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi^i}_0 + \bar{D}_{\dot{\alpha}}[\exp(-iq_i\Lambda)]\Phi^i \\ &= -iq_i(\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Lambda)\exp(-iq_i\Lambda)\Phi^i \neq 0.\end{aligned}\tag{III.31}$$

Donc,

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Lambda = 0.\tag{III.32}$$

Pour le lagrangien cinétique $\mathcal{L}_{Kah}$ (III.3), la forme du potentiel de kähler (III.2) n'est pas invariante sous la transformation de jauge supersymétrique abélien (III.30), en effet :

$$\mathcal{K} \longrightarrow \exp\left[-iq_i(\Lambda - \bar{\Lambda})\right]\mathcal{K} \neq \mathcal{K}.\tag{III.33}$$

Alors le lagrangien $\mathcal{L}_{Kah}$ correspondant n'est pas aussi invariant. Or nous avons vu dans la partie de l'étude du superchamp vectoriel que la somme $(\Phi + \bar{\Phi})$ est une transformation de jauge généralisée (II.361). Donc en introduisant un superchamp vectoriel V dans le potentiel de kähler (III.2) et qui est invariant sous la transformation (III.30). Cependant, la forme du lagrangien cinétique (III.3) devient :

$$\mathcal{L}_{Kah} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \bar{\Phi}_i \exp(-iq_i V) \Phi^i.\tag{III.34}$$

avec,

$$\mathcal{K} = \bar{\Phi}_i \exp(-iq_i V) \Phi^i.\tag{III.35}$$

En utilisant la jauge de Wess-Zumino (II.369-II.372) (où $V^3 = 0$), le lagrangien cinétique s'écrit :

$$\mathcal{L}_{Kah} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \left[\bar{\Phi}_i \Phi^i + q_i \bar{\Phi}_i V \Phi^i + \frac{1}{2} (q_i)^2 \bar{\Phi}_i V^2 \Phi^i \right]. \quad (\text{III.36})$$

En calculant le deuxième terme et le troisième terme de ce lagrangien comme suit :

$$\bar{\Phi}_i V \Phi^i = \frac{1}{2} D \bar{\varphi}_i \varphi^i + \frac{i}{2} \bar{\varphi}_i (\psi^i \lambda) - \frac{i}{2} (\bar{\psi}_i \bar{\lambda}) \quad (\text{III.37})$$

$$+ \frac{i}{2} A_\mu (\bar{\varphi}_i \partial_\mu \varphi^i - \varphi^i \partial_\mu \bar{\varphi}_i) - \frac{1}{2} \psi^i \sigma^\mu \bar{\psi}_i A_\mu, \\ \bar{\Phi}_i V^2 \Phi^i = \frac{1}{2} \bar{\varphi}_i \varphi^i A_\mu A^\mu. \quad (\text{III.38})$$

où on a utilisé (III.4), donc le lagrangien cinétique devient :

$$\mathcal{L}_{Kah} = -\partial_\mu \bar{\varphi}_i \partial^\mu \varphi^i - i \psi^i \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}_i + \bar{F}_i F^i + \frac{i}{2} q_i [\bar{\varphi}_i (\psi^i \lambda) - \varphi^i (\bar{\psi}_i \bar{\lambda})] \quad (\text{III.39}) \\ + \frac{i}{2} q_i A^\mu (\bar{\varphi}_i \partial_\mu \varphi^i - \varphi^i \partial_\mu \bar{\varphi}_i) - \frac{1}{2} q_i \psi^i \sigma^\mu \bar{\psi}_i A_\mu + \frac{1}{2} \left[q_i D - \frac{1}{2} (q_i)^2 A_\mu A^\mu \right] \bar{\varphi}_i \varphi^i.$$

Pour le lagrangien d'interaction $\mathcal{L}_{pot}$ (III.10), l'invariance (III.22) du superpotentiel (III.11) implique que :

$$\begin{aligned} a_i &= 0 & si & & q_i &\neq 0, \\ m_{ij} &= 0 & si & & q_i + q_j &\neq 0, \\ g_{ijk} &= 0 & si & & q_i + q_j + q_k &\neq 0. \end{aligned} \quad (\text{III.40})$$

Le lagrangien totale invariant sous la transformation de jauge est alors,

$$\mathcal{L}_{total} = \mathcal{L}_{jauge} + \mathcal{L}_{pot} + \mathcal{L}_{Kah} = \int d^2\theta W^\alpha W_\alpha + \int d^2\bar{\theta} \bar{W}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}} \quad (\text{III.41})$$

$$+ \left[\int d^2\theta (m_{ij} \Phi^i \Phi^j + g_{ijk} \Phi^i \Phi^j \Phi^k) + h.c. \right] + \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \bar{\Phi}_i \exp(-iq_i V) \Phi^i \\ = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - i \lambda \sigma^\nu \partial_\nu \bar{\lambda} + \frac{1}{2} D^2 + F \frac{\partial W}{\partial \varphi} \Big|_{\Phi=\varphi} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi \partial \varphi} \Big|_{\Phi=\varphi} \psi \psi + h.c. \quad (\text{III.42}) \\ + -\partial_\mu \bar{\varphi}_i \partial^\mu \varphi^i - i \psi^i \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}_i + \bar{F}_i F^i + \frac{i}{2} q_i [\bar{\varphi}_i (\psi^i \lambda) - \varphi^i (\bar{\psi}_i \bar{\lambda})] \\ + \frac{i}{2} q_i A^\mu (\bar{\varphi}_i \partial_\mu \varphi^i - \varphi^i \partial_\mu \bar{\varphi}_i) - \frac{1}{2} q_i \psi^i \sigma^\mu \bar{\psi}_i A_\mu + \frac{1}{2} \left[q_i D - \frac{1}{2} (q_i)^2 A_\mu A^\mu \right] \bar{\varphi}_i \varphi^i.$$

on peut montrer que la partie de ce lagrangien qui contient le champ auxiliaire D est :

$$\mathcal{L}_{tot}^D = \frac{1}{2} D^2 + \frac{1}{2} D \sum_i q_i |\varphi^i|^2. \quad (\text{III.43})$$

l'équation du mouvement du champ D donne :

$$D = -\frac{1}{2} \sum_i q_i |\varphi^i|^2 \quad (\text{III.44})$$

en remplaçant (III.44) dans (III.43), on obtient ce dernier proportionnel au champ scalaire φ comme suit :

$$\mathcal{L}_{tot}^D = -\frac{1}{8} \left(\sum_i q_i |\varphi^i|^2 \right)^2. \quad (\text{III.45})$$

d'où nous avons le potentiel scalaire résultant du champ auxiliaire D :

$$\begin{aligned} V_D &= \frac{1}{8} \left(\sum_i q_i |\varphi^i|^2 \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} D^2. \end{aligned} \quad (\text{III.46})$$

qui est aussi positif comme la contribution (III.15). Notons que le potentiel scalaire de la théorie supersymétrique est la somme de (III.15) et (III.46), qui sera important pour la réalisation de la brisure spontanée de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$.

III.2 Brisure spontanée de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$

Les composantes d'un même multiplet supersymétrique ont la même masse, ce qui n'est jamais été observé expérimentalement, donc la supersymétrie doit être nécessairement brisée. Comme l'on a déjà mentionné avant, le potentiel scalaire supersymétrique se décompose en deux parties distinctes, celle résultante du champ auxiliaire F , appelée terme F , et la seconde partie provient du champ auxiliaire D appelée terme D . Lorsque l'un de ces deux champs auxiliaires développe une valeur moyenne dans le vide⁶, alors on a une brisure spontanée de la supersymétrie, si la brisure provient du champ auxiliaire F on parle de mécanisme de O'Raifeartaigh, et si il provient du champ auxiliaire D on parle de mécanisme de Fayet-Ilioupoulos. La charge conservée Q dans ces deux modèles est fermionique, donc la particule qui provient de la brisure spontanée de la supersymétrie correspond à un fermion de Goldstone, appelé Goldstino.

La transformation infinitésimale des champs scalaires ϕ_i sous un groupe de Lie est la suivante [65] :

$$\phi_i \longrightarrow \phi'_i = (\exp(i\alpha_a T^a))_i^j \phi_j = \phi_i + i\alpha_a (T^a)_i^j \phi_j. \quad (\text{III.47})$$

où α_a des paramètres et T^a les générateurs de l'algèbre du groupe de Lie, si la valeur moyenne dans le vide des champs φ_i , ($\langle 0 | \varphi_i | 0 \rangle \equiv \langle \varphi_i \rangle$) n'est pas invariante sous la symétrie de jauge (III.47), alors cette symétrie est brisée,

$$\langle \phi_i \rangle \longrightarrow \langle \phi'_i \rangle + i\alpha_a (T^a)_i^j \langle \phi_j \rangle \neq \langle \phi_i \rangle \iff (T^a)_i^j \langle \phi_j \rangle \neq 0.$$

Prenons maintenant le cas simple d'un seul scalaire ϕ qui se transforme sous le groupe $U(1)$, alors d'après (III.47) on a :

$$\phi \longrightarrow \phi' = (\exp(i\alpha T))_i^j \phi = \phi + i\alpha (T)_i^j \phi. \quad (\text{III.48})$$

6. C'est à dire que les équations $F_i = 0$ et $D^a = 0$ ne doivent pas être satisfaites simultanément.

où $(T)_i^j = \delta_i^j$ le seul générateur du groupe $U(1)$, et puisque le champ scalaire φ peut s'écrire en fonction des coordonnées polaires (ρ, ϑ) sous la forme suivante :

$$\phi = \rho \exp(i\vartheta). \quad (\text{III.49})$$

alors la transformation (III.48) devient :

$$\phi \longrightarrow \phi' = \exp(i\alpha) [\rho \exp(i\vartheta)] = \rho \exp[i(\alpha + \vartheta)]. \quad (\text{III.50})$$

On remarque que :

$$\delta\rho = 0, \quad (\text{III.51})$$

$$\delta\vartheta = \alpha. \quad (\text{III.52})$$

où la particule scalaire D correspond au boson de Goldstone. Alors de la même façon pour la théorie supersymétrique, la brisure de la supersymétrie est réalisé lorsque l'état du vide n'est pas invariante par le générateur de la supersymétrie,

$$Q_\alpha |0\rangle \neq 0. \quad (\text{III.53})$$

En plus de ça, on a vu dans la partie précédente que le potentiel scalaire est toujours positif ou nul, ceci peut être montré à partir de la structure de l'algèbre de superPoincaré. En effet, considérons un état arbitraire $|\varphi\rangle$ dans l'espace de Hilbert mené d'une métrique positive on a :

$$\begin{aligned} \langle \phi | (\bar{\sigma}^\nu)^{\alpha\dot{\alpha}} \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} | \phi \rangle &= (\bar{\sigma}^\nu)^{\alpha\dot{\alpha}} \left[(\langle \phi | Q_\alpha) (\bar{Q}_{\dot{\alpha}} | \phi) + (\langle \phi | \bar{Q}_{\dot{\alpha}}) (Q_\alpha | \phi) \right] \\ &= (\bar{\sigma}^\nu)^{\alpha\dot{\alpha}} \left[\|\bar{Q}_{\dot{\alpha}} | \phi\rangle\|^2 + \|Q_\alpha | \phi\rangle\|^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.54})$$

Avec la relation d'anticommutation (II.147), et l'identité $(\bar{\sigma}^\nu)^{\alpha\dot{\alpha}} (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} = \text{Tr}(\bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu) = -2\eta^{\mu\nu}$, on a :

$$\begin{aligned} \langle \phi | (\bar{\sigma}^\nu)^{\alpha\dot{\alpha}} \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} | \phi \rangle &= 2 \langle \phi | (\bar{\sigma}^\nu)^{\alpha\dot{\alpha}} (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} P_\mu | \phi \rangle \\ &= -4 \langle \phi | P^\nu | \phi \rangle. \end{aligned} \quad (\text{III.55})$$

En considérant le cas particulier $\nu = 0$, (avec $\bar{\sigma}^0 = \sigma^0 = 1$ et $P^0 = E$), et en identifiant la relation (III.54) avec (III.55), on a,

$$\delta^{\alpha\dot{\alpha}} \left[\|\bar{Q}_{\dot{\alpha}} | \phi\rangle\|^2 + \|Q_\alpha | \phi\rangle\|^2 \right] = 4 \langle \phi | E | \phi \rangle \geq 0 \implies E \geq 0. \quad (\text{III.56})$$

Alors l'énergie du vide est toujours défini positif et avec (III.53) elle est strictement positif ($E > 0$), d'où la supersymétrie est toujours brisée dans ce cas.

III.2.1 Brisure spontanée de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$: Modèle O'Raifeartaigh

La supersymétrie est toujours brisée dans ce cas si l'état du vide est non nul de l'une des transformations supersymétriques des champs φ , ψ_α et F (II.351-II.353) qui

composent le superchamp chiral Φ (II.343). Mais pour conserver l'invariance de Lorentz il faut que $\langle 0 | \psi_\alpha | 0 \rangle = \langle 0 | \partial_\mu \varphi | 0 \rangle = 0$ ⁷, donc si $\delta\varphi \neq 0$ ou $\delta F \neq 0$ alors $\langle 0 | \psi_\alpha | 0 \rangle \neq 0$, et si $\delta\psi_\alpha \neq 0$ alors $\langle 0 | \partial_\mu \varphi | 0 \rangle \neq 0$. Donc le groupe de Lorentz est brisé, ce qui implique qu'il nous reste que le seul choix suivant :

$$\langle 0 | \delta\psi_\alpha | 0 \rangle = \sqrt{2}\epsilon_\alpha \langle 0 | F | 0 \rangle. \quad (\text{III.57})$$

où le fermion ψ_α est le goldstino⁸. Donc la supersymétrie est toujours brisée en gardant l'invariance de Lorentz, lorsque le champ auxiliaire à une valeur moyenne non nulle dans le vide, i.e. :

$$SUSY \Leftrightarrow \langle 0 | F | 0 \rangle \neq 0. \quad (\text{III.58})$$

Le potentiel scalaire V_F proportionnel au champ auxiliaire F d'un superchamp chiral Φ dans le lagrangien, s'écrit sous la forme générale (plusieurs superchamps chiraux Φ^i) comme suit :

$$V_F = g^{i\bar{j}} \frac{\partial W}{\partial \Phi^i} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\Phi}^{\bar{j}}}, \quad (\text{III.59})$$

indique que sa valeur minimale strictement positive est équivalente à la brisure de la supersymétrie,

$$SUSY \text{ brisée} \Leftrightarrow \langle 0 | F | 0 \rangle > 0. \quad (\text{III.60})$$

Modèle O'Raifeartaigh

Le modèle de O'Raifeartaigh est constitué de trois superchamps chiraux Φ^i , $i = 1, 2, 3$ associés aux potentiel de kähler et le superpotentiel suivants [42, 65, 87] :

$$\mathcal{K}(\Phi + \bar{\Phi}) = \bar{\Phi}_i \Phi^i, \quad (\text{III.61})$$

$$W(\Phi) = g\Phi^1((\Phi^3)^2 - m^2) + M\Phi^2\Phi^3, \quad M \gg m. \quad (\text{III.62})$$

En utilisant la relation (III.13) on obtient les équations du mouvement des champs auxiliaires,

$$-\bar{F}_1 = \frac{\partial W}{\partial \varphi^1} = g((\varphi^3)^2 - m^2), \quad (\text{III.63})$$

$$-\bar{F}_2 = \frac{\partial W}{\partial \varphi^2} = M\varphi^3, \quad (\text{III.64})$$

$$-\bar{F}_3 = \frac{\partial W}{\partial \varphi^3} = 2g\varphi^1\varphi^3 + M\varphi^2. \quad (\text{III.65})$$

Il est impossible d'avoir $\bar{F}^1 = 0$, $\bar{F}^2 = 0$ et $\bar{F}^3 = 0$ simultanément. En effet si $\langle F_2 \rangle = 0$ la relation (III.64) implique une valeur nulle pour $\langle \varphi^3 \rangle$, d'où la relation (III.63) donne :

$$\langle F_1 \rangle = gm^2 \neq 0. \quad (\text{III.66})$$

7. Car, ψ_α est un spineur de Weyl gauche du groupe $SU(2) \times SU(2) \sim SO(1,3)$, et $\partial_\mu \varphi$ est dans la représentation vectorielle du groupe $SO(1,3)$.

8. Ce n'est pas le superpartenaire de boson de Goldstone, c'est une particule de Goldstone fermionique.

et la relation (III.65) donne :

$$\langle F_3 \rangle = 0 \implies \langle \varphi^1 \rangle = 0. \quad (\text{III.67})$$

Puisque il existe un terme F non nul, alors la supersymétrie doit être brisée. D'après les relations (III.59, III.63-III.65) le potentiel scalaire de ce modèle est :

$$V_F = \sum_i \left| \frac{\partial W}{\partial \Phi^i} \right|^2 = g^2 \left| ((\varphi^3)^2 - m^2) \right|^2 + M^2 |\varphi^3|^2 + |2g\varphi^1\varphi^3 + M\varphi^2|^2. \quad (\text{III.68})$$

Afin de déterminer les vides possibles (les états les plus stable), il faut minimiser le potentiel scalaire (III.68), deux cas se présentent alors. Notons qu'aucune contrainte n'est posé sur la valeur de $\langle \varphi^2 \rangle$ ce qui nous laisse choisir une valeur qui annule le troisième terme du potentiel scalaire (III.68), donc la minimisation doit être effectuée juste dans la partie suivante :

$$\begin{aligned} V_{F,\varphi^3} = & \frac{1}{4}g^2 \left((\varphi_R^3)^2 + (\varphi_I^3)^2 \right)^2 + \frac{1}{2} (M^2 - 2g^2m^2) (\varphi_R^3)^2 \\ & + \frac{1}{2} (M^2 + 2g^2m^2) (\varphi_I^3)^2 + g^2m^4. \end{aligned} \quad (\text{III.69})$$

Avec $\varphi^3 = \sqrt{\frac{1}{2}} \left((\varphi_R^3)^2 + i(\varphi_I^3)^2 \right)$.

D'après la relation (III.69) nous avons deux cas suivants :

- **1.** $M^2 < 2g^2m^2$: Dans ce cas le coefficient de $(\varphi_R^3)^2$ dans (III.69) est négatif et ceux qui sont proportionnels à $(\varphi_I^3)^2$ et $(\varphi_I^3)^4$ restent positifs. Alors on peut choisir $\langle \varphi_I^3 \rangle = 0$, ainsi le potentiel scalaire devient :

$$V_{F,\varphi_R^3} = \frac{1}{4}g^2 (\varphi_R^3)^4 + \frac{1}{2} (M^2 - 2g^2m^2) (\varphi_R^3)^2 + g^2m^4. \quad (\text{III.70})$$

La minimisation de (III.70) donne :

$$\frac{\partial V_{F,\varphi^3}}{\partial \varphi_R^3} = 0 \implies \langle \varphi_R^3 \rangle = 0, \quad (\text{III.71})$$

$$(\langle \varphi_R^3 \rangle)^2 = - \left(\frac{M^2}{g^2} - 2m^2 \right). \quad (\text{III.72})$$

Alors V_{F,φ_R^3} admet un seul point minimum qui correspond à la seule solution qui vérifie $\frac{\partial V_{F,\varphi^3}}{\partial \varphi_R^3 \partial \varphi_R^3} > 0$. Donc le troisième terme du potentiel scalaire (III.68) est annulé par la valeur de $\langle \varphi^2 \rangle$ suivante :

$$\langle \varphi^2 \rangle = -\frac{2g}{M} \langle \varphi^1 \rangle \left(-\frac{m^2}{\lambda^2} + 2\mu^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{III.73})$$

Donc le minimum du potentiel (III.70) sur ce point minimum est :

$$V_{\min} = -\frac{1}{4}g^2 \left(2m^2 - \frac{M^2}{g^2} \right) + g^2 m^4. \quad (\text{III.74})$$

• **2.** $M^2 > 2g^2 m^2$: Dans ce cas, le minimum du potentiel scalaire (III.69) correspond à $\langle \varphi^3 \rangle = \langle \varphi^2 \rangle = 0$, et le troisième de (III.68) s'annule pour $\langle \varphi^2 \rangle = 0$, et puisque on a aucune contrainte sur $\langle \varphi^1 \rangle$, le champ φ^1 représente alors la direction plate du potentiel scalaire, alors le minimum du potentiel est :

$$V_{\min} = g^2 m^4. \quad (\text{III.75})$$

Pour déterminer les masses des champs nous allons considérer le deuxième cas pour simplifier, où le champ φ^1 décrit la direction plate du potentiel scalaire et donc de masse nulle $m_{\varphi^1} = 0$. Ensuite on pose $\langle \varphi^1 \rangle = 0$ et à partir des relations (III.63-III.65) on obtient :

$$\left\langle \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^3 \partial \varphi^2} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2 \partial \varphi^3} \right\rangle = M, \quad (\text{III.76})$$

où les autres dérivées sont nulles,

$$\left\langle \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^1 \partial \varphi^k} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^k \partial \varphi^1} \right\rangle = 0, \quad k = 2, 3. \quad (\text{III.77})$$

Alors la matrice de masse des fermions (III.8) correspondante est :

$$\langle M_F \rangle_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^i \partial \varphi^j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M \\ 0 & M & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{III.78})$$

La diagonalisation de cette matrice donne :

$$m_{\psi^1} = 0, \quad (\text{III.79})$$

$$m_{\psi^2} = m_{\psi^3} = M, \quad (\text{III.80})$$

où le goldstino associé à la brisure de la supersymétrie est décrit par le fermion non massif ψ^1 . Pour déterminer la matrice de masse des scalaires (III.16) on doit dériver le potentiel scalaire par rapport aux différents champs scalaires, et à partir du terme quadratique du potentiel scalaire (III.68) suivant :

$$V_{quad} = -g^2 m^2 \left((\varphi^3)^2 + (\bar{\varphi}^3)^2 \right)^2 + M^2 |\varphi^3|^2 + M^2 |\varphi^2|^2. \quad (\text{III.81})$$

On obtient,

$$m_{\varphi^1} = 0, \quad (\text{III.82})$$

$$m_{\varphi^3} = M. \quad (\text{III.83})$$

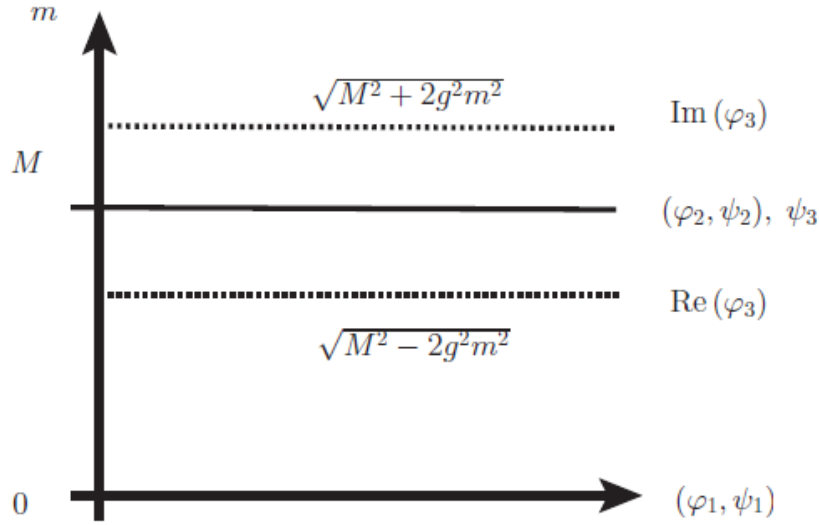


FIGURE III.1 – Spectre de masse du modèle de O’Raifeartaigh.

On se limite sur la partie quadratique en φ^3 dans (III.81) et en posant $\varphi^3 = a + ib$, cette partie devient :

$$V_{quad, \varphi^3} = (M^2 - g^2 m^2) a^2 + (M^2 + g^2 m^2) b^2. \quad (\text{III.84})$$

Alors on a :

$$m_a = M^2 - g^2 m^2, \quad (\text{III.85})$$

$$m_b = M^2 + g^2 m^2. \quad (\text{III.86})$$

En résumé le spectre de masse de ce modèle est donné dans la figure suivante :

III.2.2 Brisure spontanée de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$: Modèle de Fayet-Iliopoulos

D’une manière similaire à l’étude précédente la supersymétrie est toujours brisée si l’état du vide est non nul de l’une des transformations supersymétriques des champs A_μ , λ et D (II.375-II.378) qui composent le superchamp chiral V (II.373), alors pour garder l’invariance de Lorentz la seule valeur moyenne non nulle dans le vide est celle de la transformation suivante :

$$\langle 0 | \delta \lambda_\alpha | 0 \rangle = i \epsilon_\alpha \langle 0 | D | 0 \rangle. \quad (\text{III.87})$$

où λ_α est le goldstino. Donc la supersymétrie est toujours brisée en gardant l’invariance de Lorentz lorsque le champ auxiliaire D acquiert une valeur moyenne non nulle dans le vide, c’est à dire que :

$$SUSY \text{ brisée} \iff \langle 0 | D | 0 \rangle \neq 0. \quad (\text{III.88})$$

Notons que le champ auxiliaire D est à la fois invariant de jauge⁹ (II.368) et par supersymétrie (II.378) alors il est possible de l'ajouter au lagrangien total. Ce terme est appelé terme de Fayet-Iliopoulos :

$$\mathcal{L}_{FI} = \xi \int d^2\theta d^2\bar{\theta} V = \frac{1}{2}\xi D. \quad (\text{III.89})$$

où ξ est un paramètre réel. Alors pour montrer le rôle de ce terme (III.89), considérons un seul superchamp chiral Φ de charge g qui se transforme sous la transformation supersymétrique de jauge abélienne $U(1)$ (III.30) comme suit :

$$\Phi \longrightarrow \exp(ig\Lambda)\Phi. \quad (\text{III.90})$$

où Λ est un paramètre chiral identique à celui de (III.30). Sous les conditions ??conditionW) le superpotentiel devient nul, alors les équations du mouvement pour les champs auxiliaires (III.44, III.13 et III.14) sont données comme suit :

$$D = -\frac{1}{2}g|\varphi|^2 - \frac{1}{2}\xi, \quad (\text{III.91})$$

$$F = 0. \quad (\text{III.92})$$

le potentiel scalaire similaire à (III.46) vaut :

$$V_D = \frac{1}{2}D^2 = \frac{1}{8}(g|\varphi|^2 + \xi)^2 \quad (\text{III.93})$$

Deux cas se présentent pour la minimisation de ce potentiel scalaire (III.93) :

- Premier cas : $\xi > 0$: dans ce cas le potentiel scalaire ne s'annule jamais et admet un minimum pour $\langle\varphi\rangle = 0$ comme suit :

$$V_{\min} = \frac{1}{8}\xi^2 > 0. \quad (\text{III.94})$$

donc la supersymétrie est brisée, mais pas la symétrie de jauge, ainsi la valeur moyenne dans le vide du jaugino n'est plus invariante,

$$\langle\delta\lambda_\alpha\rangle = i\epsilon_\alpha\langle D\rangle = i\epsilon_\alpha g\xi. \quad (\text{III.95})$$

qui correspond donc au goldstino.

- Deuxième cas : $\xi < 0$: dans ce cas la supersymétrie n'est pas brisée car pour $|\varphi|^2 = -\frac{\xi}{g}$ on a $D = 0$ et donc :

$$V_D = 0. \quad (\text{III.96})$$

et puisque $\langle\varphi\rangle \neq 0$ ¹⁰ la symétrie de jauge est brisée.

9. Dans le cas d'un groupe non abélien, le terme de Fayet-Iliopoulos n'est pas invariant sous la transformation de jauge.

10. correspond au $V_{\min}$.

Modèle de Fayet-Iliopoulos

Le modèle de Fayet-Iliopoulos est constitué de deux superchamps chiraux $\Phi^\pm$ de charges respectives $\pm e$, avec le superpotentiel de la forme ¹¹ suivante [41, 65, 87, 88] :

$$W = m\Phi^+\Phi^-. \quad (\text{III.97})$$

Alors les équations du mouvement des champs auxiliaires est :

$$F^\pm = \frac{\partial W}{\partial \varphi^\pm} = -m\varphi^\pm, \quad (\text{III.98})$$

$$D = -\frac{1}{2} \left(e|\varphi^+|^2 - e|\varphi^-|^2 \right) - \frac{1}{2}\xi. \quad (\text{III.99})$$

Le potentiel scalaire de ce modèle est donné par :

$$\begin{aligned} V &= V_F + V_D = m^2 \left(|\varphi^+|^2 + |\varphi^-|^2 \right) + \frac{1}{8} \left(e|\varphi^+|^2 - e|\varphi^-|^2 - \xi \right)^2 \\ &= \left(m^2 - \frac{1}{4}e\xi \right) |\varphi^+|^2 + \left(m^2 + \frac{1}{4}e\xi \right) |\varphi^-|^2 + \frac{1}{8}e^2 \left(|\varphi^+|^2 - |\varphi^-|^2 \right) + \frac{1}{8}\xi^2. \end{aligned} \quad (\text{III.100})$$

La supersymétrie est toujours brisée, car les trois champs auxiliaires ne peuvent être simultanément nuls, en effet :

$$\langle F^\pm \rangle = 0 \implies \langle \varphi^\mp \rangle = 0 \implies \langle D \rangle = -\frac{1}{2}\xi^2 \implies \frac{1}{8}\xi^2 \neq 0. \quad (\text{III.101})$$

Le minimum du potentiel scalaire (III.100) est donné par :

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi^+} = \left(m^2 - \frac{1}{4}e\xi \right) \varphi^+ + \frac{1}{4}e^2 \left(|\varphi^+|^2 - |\varphi^-|^2 \right) \varphi^+ = 0, \quad (\text{III.102})$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi^-} = \left(m^2 + \frac{1}{4}e\xi \right) \varphi^- - \frac{1}{4}e^2 \left(|\varphi^+|^2 - |\varphi^-|^2 \right) \varphi^- = 0. \quad (\text{III.103})$$

En multipliant l'équation (III.102) par φ^- et l'équation (III.103) par φ^+ , et en les ajoutant, on obtient l'équation suivante :

$$2m^2\varphi^-\varphi^+ = 0, \quad (\text{III.104})$$

qui admet trois solutions, données comme suit :

$$\varphi^- = 0, \varphi^+ \neq 0, \quad (\text{III.105})$$

$$\varphi^- \neq 0, \varphi^+ \neq 0, \quad (\text{III.106})$$

$$\varphi^- = \varphi^+ = 0. \quad (\text{III.107})$$

Prenons $\varphi^- = 0$, alors l'équation (III.102) devient :

$$\left[\left(m^2 + \frac{1}{4}e\xi \right)^2 + \frac{1}{4}e^2 |\varphi^+|^2 \right] \varphi^+ = 0. \quad (\text{III.108})$$

11. Car $e - e = 0$.

qui admet une seule solution $\varphi^+ = 0$ car $|\varphi^+|^2 \geq 0$. Donc selon les valeurs respectives de m^2 et $\frac{1}{4}e\xi$ on distingue deux cas :

- Premier cas : $m^2 > \frac{1}{4}e\xi$.
- Deuxième cas : $m^2 < \frac{1}{4}e\xi$.

Nous allons se limiter au cas $m^2 > \frac{1}{4}e\xi$, et puisque $\varphi^+ = 0$ la minimisation du potentiel scalaire est :

$$V_{\min} = \frac{1}{8}\xi^2. \quad (\text{III.109})$$

où la supersymétrie est brisée, et la symétrie de jauge est conservée. En utilisant le superpotentiel (III.97), on a :

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi^- \partial \varphi^+} = m. \quad (\text{III.110})$$

la matrice de masse fermionique est donc,

$$M_F = \begin{pmatrix} 0 & m \\ m & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{III.111})$$

sa diagonalisation donne les masses des fermions :

$$m_{\psi^+} = m, \quad (\text{III.112})$$

$$m_{\psi^-} = m. \quad (\text{III.113})$$

les masses des champs scalaire sont obtenus à partir de la partie quadratique du potentiel scalaire (III.100) :

$$V_{quad} = (m^2 - \frac{1}{4}e\xi) |\varphi^+|^2 + (m^2 + \frac{1}{4}e\xi) |\varphi^-|^2. \quad (\text{III.114})$$

donc on a :

$$m_{\varphi^+} = m^2 - \frac{1}{4}e\xi, \quad (\text{III.115})$$

$$m_{\varphi^-} = m^2 + \frac{1}{4}e\xi. \quad (\text{III.116})$$

Le spineur de Majorana λ et le champ de jauge A_μ restent non massifs. Notons que λ est le goldstino associé à la brisure de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$.

Dans ce chapitre, nous avons construit le lagrangien total de la théorie supersymétrique minimale $\mathcal{N} = 1$. Après nous avons présenté deux modèles (O’Raifeartaigh et Fayet-Iliopoulos) de la brisure spontanée de la supersymétrie minimale $\mathcal{N} = 1$. Cela va être utile pour étendre notre étude vers la réalisation de la brisure de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$, et qui sera présentée dans les deux chapitres suivants.

Chapitre IV

Brisure partielle de la supersymétrie globale $\mathcal{N} = 2$

La brisure de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ peut être réalisée en se basant sur deux propriétés importantes rencontrées dans le chapitre précédent. La première propriété indique que la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ peut être décomposée en deux combinaisons (copies) de $\mathcal{N} = 1$, et la seconde stipule que pour briser la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ il suffit que la valeur moyenne dans le vide de l'un de ses champs auxiliaires F et D soit non nulle. Donc la brisure de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ peut être générée par deux façons différentes. Si les deux copies $\mathcal{N} = 1$ sont brisées, alors la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ est brisée complètement ($\mathcal{N} = 2 \rightarrow \mathcal{N} = 0$), et si une seule copie de $\mathcal{N} = 1$ est brisée et l'autre reste intacte, la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ est brisée partiellement ($\mathcal{N} = 2 \rightarrow \mathcal{N} = 1$). La brisure complète est facile à réaliser, car il suffit comme on a déjà mentionné de donner une valeur moyenne non nulle dans le vide aux champs auxiliaires des deux copies $\mathcal{N} = 1$. Par contre la brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ n'est pas facile à générer, car la superalgèbre de la supersymétrie est décrite par les supercharges Q_α^A et la norme (énergie) est définie positive. Pour mieux comprendre cela, on suppose un état arbitraire $|\phi\rangle$ on a alors :

$$\begin{aligned} \langle \phi | (\bar{\sigma}^\mu)^{\alpha\dot{\alpha}} \{Q_\alpha^A, \bar{Q}_{\dot{\alpha}B}\} | \phi \rangle &= (\bar{\sigma}^\mu)^{\alpha\dot{\alpha}} \left(\langle \phi | Q_\alpha^A \rangle \langle \bar{Q}_{\dot{\alpha}B} | \phi \rangle + \langle \phi | \bar{Q}_{\dot{\alpha}B} \rangle \langle Q_\alpha^A | \phi \rangle \right) \\ &= (\bar{\sigma}^\mu)^{\alpha\dot{\alpha}} \left(\|Q_\alpha^A | \phi \rangle\|^2 + \|\bar{Q}_{\dot{\alpha}B} | \phi \rangle\|^2 \right). \end{aligned} \quad \text{IV.1}$$

De plus, en utilisant¹ la relation (II.147) on a :

$$\begin{aligned} \langle \phi | (\bar{\sigma}^\mu)^{\alpha\dot{\alpha}} \{Q_\alpha^A, \bar{Q}_{\dot{\alpha}B}\} | \phi \rangle &= 2\delta_B^A \langle \phi | (\bar{\sigma}^\mu)^{\alpha\dot{\alpha}} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\nu P_\nu | \phi \rangle \\ &= -4\delta_B^A \langle \phi | P^\mu | \phi \rangle, \end{aligned} \quad \text{IV.2}$$

où l'identification de (IV.1) et (IV.2) implique² :

$$\delta^{\alpha\dot{\alpha}} \|Q_\alpha^A | \phi \rangle\|^2 + \|\bar{Q}_{\dot{\alpha}B} | \phi \rangle\|^2 = 4\delta_B^A \langle \phi | E | \phi \rangle \geq 0 \implies E \geq 0. \quad \text{IV.3}$$

donc la norme est définie positive, ce qui est le cas pour l'espace de Hilbert.

D'autre part la relation d'anticommuation de la superalgèbre supersymétrique $\mathcal{N} = 2$

1. On a utilisé l'identité : $(\bar{\sigma}^\mu)^{\alpha\dot{\alpha}} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\nu = \text{Tr}(\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu) = -2\eta^{\mu\nu}$.

2. Pour $\mu = 0$, on a $\bar{\sigma}^0 = \sigma^0 = -1$ et $P^0 = E$.

obtenue à partir de la relation (II.147) et qui s'écrit comme suit [89] :

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = \{\tilde{Q}_\alpha, \bar{\tilde{Q}}_{\dot{\alpha}}\} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} P_\mu. \quad (\text{IV.4})$$

où les générateurs Q_α et $\tilde{Q}_\alpha$ des deux supersymétries forment un doublet $(Q_\alpha, \tilde{Q}_\alpha) \equiv Q^A$ du groupe d'automorphisme $SU(2)_R$, et si dans le cas où l'une des deux supersymétries $\mathcal{N} = 1$ est brisée, par exemple :

$$Q_\alpha |0\rangle = 0. \quad (\text{IV.5})$$

et d'après la relation (IV.3), le hamiltonien H annihile l'état du vide,

$$H |0\rangle = 0. \quad (\text{IV.6})$$

de plus la superalgèbre $\mathcal{N} = 2$ (IV.4) implique :

$$(\tilde{Q}_\alpha \bar{\tilde{Q}}_{\dot{\alpha}} + \bar{\tilde{Q}}_{\dot{\alpha}} \tilde{Q}_\alpha) |0\rangle = 0. \quad (\text{IV.7})$$

Alors pour l'espace de Hilbert où la norme est définie positive on a :

$$\tilde{Q}_\alpha |0\rangle = \bar{\tilde{Q}}_{\dot{\alpha}} |0\rangle = 0. \quad (\text{IV.8})$$

D'où la seconde supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ est aussi brisée et donc la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ est brisée complètement, alors on ne peut pas la briser partiellement de $\mathcal{N} = 2$ à $\mathcal{N} = 1$. Ce problème est un théorème [90] et pour le surmonter il faut procéder de la même façon qu'on a vu dans le chapitre précédent pour le théorème no-go de Coleman-Mandula, et puisque le problème vient du fait que la superalgèbre est décrite par les supercharges Q_α^A et la norme est définie positive, il faut juste éviter l'une de ces deux problèmes, c'est à dire soit ne pas décrire la superalgèbre par les supercharges, ou une norme qui n'est pas définie positive.

Pour éviter le premier problème du théorème no-go, on peut utiliser la superalgèbre des supercourants conservés au lieu de la superalgèbre des supercharges (IV.4), ces supercourants conservés $\mathcal{J}_{\mu\alpha}^A, \bar{\mathcal{J}}_{\mu\dot{\alpha}A}$ sont associés à l'invariance sous la translation suivant les coordonnées fermioniques, respectivement θ_α^A et $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}A}$, et de façon analogue à celle du théorème de Noether qui stipule qu'à chaque symétrie continue il y a un courant conservé, par exemple le tenseur énergie-impulsion $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ qui est le courant associé à l'invariance sous la translation suivant les coordonnées bosoniques x^μ à 4 dimension et qui vérifie :

$$\partial^\mu \mathcal{T}_{\mu\nu}(x) = 0, \quad (\text{IV.9})$$

Alors dans le cas de la supersymétrie ces supercourants conservés vérifient la relation suivante :

$$\begin{aligned} \partial^\mu \mathcal{J}_{\mu\alpha}^A(x) &= 0, \\ \partial^\mu \bar{\mathcal{J}}_{\mu\dot{\alpha}A}(x) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

et puisque la charge associée au courant (IV.9) est le 4-vecteur énergie impulsion P_ν vérifie :

$$P_\nu = \int d^3x \mathcal{T}_{\nu\mu}(x), \quad (\text{IV.11})$$

alors dans le cas de la supersymétrie, les supercharges associées au supercourants conservés $\mathcal{J}_{\mu\alpha}^A$, $\bar{\mathcal{J}}_{\mu\dot{\alpha}A}$, sont respectivement générateurs de la supersymétrie Q_α^A , $\bar{Q}_{\dot{\alpha}A}$, on a donc :

$$Q_\alpha^A = \int d^3x \mathcal{J}_{0\alpha}^A(x), \quad (\text{IV.12})$$

$$\bar{Q}_{\dot{\alpha}A} = \int d^3x \bar{\mathcal{J}}_{0\dot{\alpha}A}(x), \quad (\text{IV.13})$$

on utilise les relations (IV.11), (IV.12) la superalgèbre des supercourant (II.147) devient :

$$\int d^3y \{ \mathcal{J}_{\nu\alpha}^A(x), \bar{\mathcal{J}}_{\mu\dot{\alpha}B}(y) \} = 2\delta_B^A (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \mathcal{T}_{\nu\mu}(x), \quad (\text{IV.14})$$

d'où on a une description de la superalgèbre de la supersymétrie par des supercourants conservés : Pour que la relation (IV.14) soit utile pour éviter le premier problème, il faut ajouter une déformation qui ne change pas les représentations de la supersymétrie et l'identité de Jacobi, c'est à dire qui permet de retourner à la superalgèbre des supercharges (II.147), alors ce terme de déformation doit être constant, donc la relation (IV.14) devient [91–95] :

$$\int d^3y \{ \mathcal{J}_{\nu\alpha}^A, \bar{\mathcal{J}}_{0\dot{\alpha}B} \} = 2\delta_B^A (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \mathcal{T}_{\nu\mu}(x) + \underbrace{(\sigma_\nu)_{\alpha\dot{\alpha}} C_B^A}_{\text{déformation}}, \quad (\text{IV.15})$$

où C_B^A est une matrice constante de valeurs propres appartenant à la représentation adjointe du groupe $SU(2)_R$, i.e. hermitienne et de trace nulle. Ainsi pour retourner à la superalgèbre des supercharges (II.147), il faut intégrer sur d^3x la relation (IV.15), et puisque le terme de déformation donne une contribution infinie,

$$\int d^3x (\sigma_\nu)_{\alpha\dot{\alpha}} C_B^A = \infty. \quad (\text{IV.16})$$

Alors la possibilité de retourner à la superalgèbre des supercharges est seulement si $C_B^A = 0$, alors il est impossible dans le cas où $C_B^A \neq 0$.

Afin d'éviter le second problème de théorème no-go, c'est à dire considérer une théorie avec une norme qui n'est pas définie positive, nous utilisons une théorie supersymétrique rigide $\mathcal{N} = 2$, qui vérifie aussi l'existence du terme constant C_B^A par la déformation du potentiel scalaire rigide $\mathcal{V}^{\mathcal{N}=2}$, appelé aussi identité de Ward rigide et qui est défini comme suit :

$$\mathcal{G}_{z\bar{z}}(W^z)_C^A (\bar{W}^{\bar{z}})^C_B = \delta_B^A \mathcal{V}^{\mathcal{N}=2}, \quad (\text{IV.17})$$

où $(W^z)_B^A$, sont les matrices des transformations supersymétriques des champs fermioniques des multiplets vectoriels.

D'autres part, les champs scalaires des multiplets supersymétriques peuvent être vu comme des applications de la variété d'espace-temps à une autre variété appelée espace-cible, similaire aux modèles sigma en théorie quantique des champs, dans laquelle les

champs scalaire représentent des coordonnées dans une variété riemannienne qui est l'espace cible et qui constituent ensemble une application depuis l'espace sur lequel ils existent (e.g. espace de Minkowski), et puisque la nature de l'espace cible dépend de celle de ces champs scalaires, alors en théorie supersymétrique la nature des variété scalaire dans lesquelles ces champs scalaires représentent des coordonnées, dépend en plus de la dimension d'espace-temps de la nature de la supersymétrie ainsi le nombre des supercharges.

Pour la théorie supersymétrique minimale $\mathcal{N} = 1$ globale à quatre dimensions de l'espace-temps, les champs scalaires (0^2) du multiplet chiral $((0)^2, 1/2)$ représentent les coordonnées z d'une variété appelé variété kählérienne [96–98], qui décrit le secteur de jauge par un fibré $U(1)$ globale qui n'affecte pas les champs fermioniques [99, 100]. Rappelons que le groupe structural d'un fibré défini sur la variété de l'espace-temps est une symétrie interne, dont les champs de la matière (i.e. quarks, leptons et les champs scalaires et les bosons de jauges sont respectivement, ses sections et ses connexions [99, 100]. Pour le cas de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$, les champs scalaire (0^2) du multiplet vectoriel $(1, (1/2)^2, 0^2)$ paramètrent les coordonnées d'une variété appelée variété spéciale de type rigide (i.e. globale), dont la dimension est égale au nombre de multiplets vectoriels. Cette variété est muni d'un fibré linéaire plat (du groupe $U(1)$) qui décrit le champ de jauge, et munis d'une transformation (fibré vectoriel) du groupe structural $SP(2n_v, \mathbb{R})$ sur le champ vectoriel (1) introduite afin de compenser l'action des transformation des coordonnées générale (i.e. difféomorphisme), car contrairement au champs scalaires (invariant sous les transformations de difféomorphisme) le champ vectoriel ne représente pas des coordonnées. Pour le hypermultiplet $(0^4, 1/2)$ qui représente le secteur de la matière pour la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$, la structure géométrique des variétés scalaires dans lesquelles ces champs scalaires (0^4) représentent les coordonnées est appelée variété hyperkähliérienne de dimension égale au quadruple du nombre d'hypermultiplet et dont laquelle le fibré qui joue le rôle du fibré $U(1)$ dans le secteur de jauge précédent est le sous-groupe $SU(2)$ du groupe d'automorphisme $U(2)$, qui doit correspondre à une courbure nulle (i.e. fibré $SU(2)$ plat) [101–112].

L'objectif de ce chapitre est de présenter trois modèles de la littérature qui évitent les deux problèmes du théorème no-go discuté ci-avant. Nous allons commencer par le cas d'une théorie supersymétrique globale, composée par un seul multiplet vectoriel de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$, c'est à dire une théorie de jauge pure, ce modèle a été découvert la première fois en 1996 par *Antoniadis, Partouche et Taylor* [47]. Ensuite nous allons donner sa récente version découverte en 2015 par *Andrianopoli, D'Auria, Ferrara et Trigiante* [48], composée de n multiplets vectoriel de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ et qui est basée sur la déformation du potentiel scalaire rigide (IV.17) par le terme C_B^A . Enfin nous allons terminer avec le modèle de *Antoniadis, Derendinger et Jacot* [49], qui présente le couplage du modèle de *Antoniadis, Partouche et Taylor* avec un hypermultiplet de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ qui décrit le secteur de la matière.

IV.1 Brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$: Théorie de jauge pure

Nous allons présenter dans cette section la brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ du modèle de *Antoniadis, Partouche et Taylor* [47] qui est construit à partir

IV.1. Brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$: Théorie de jauge pure

d'un seul multiplet vectoriel de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$. Ensuite nous allons présenter la généralisation de ce modèle qui utilise l'identité de Ward rigide introduite par *Andrianopoli, D'Auria, Ferrara et Trigiante* [48] et qui construit à partir de n multiplets vectoriels de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$.

IV.1.1 Etude dans le superspace de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$

Comme nous avons vu dans le deuxième chapitre, le multiplet vectoriel $\mathcal{W}^{\mathcal{N}=2}$ de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ dans l'expression (II.198) est la somme des multiplets vectoriel $\mathcal{N} = 1$ $[V^{\mathcal{N}=1}]$ (II.192), et chiral $\mathcal{N} = 1$ $[X^{\mathcal{N}=1}]$ (II.190) :

$$\mathcal{W}^{\mathcal{N}=2} = [V^{\mathcal{N}=1} \equiv (A_\mu, \lambda, D)] \oplus [X^{\mathcal{N}=1} \equiv (z, \psi, F)]. \quad (\text{IV.18})$$

Comme on l'a déjà mentionné dans la discussion du début de ce chapitre, Le champ scalaire z du multiplet vectoriel $\mathcal{W}^{\mathcal{N}=2}$ est les coordonnées d'une variété kählérienne spéciale de type rigide muni d'un fibré linéaire plat $\mathcal{L} \rightarrow M_{SK}$ et un fibré vectoriel holomorphe plat $\mathcal{SV} \rightarrow M_{SK}$ de rang $2n$ et de groupe structural $SP(2n, \mathbb{R})$. Le lagrangien dans le superspace $\mathcal{N} = 1$ est donné par :

$$\mathcal{L}_0 = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} K(X, \bar{X}) + \frac{1}{4} f(X) W^\alpha W_\alpha + h.c.. \quad (\text{IV.19})$$

d'où le potentiel de kähler $K(X, \bar{X})$ donné comme suit :

$$K(X, \bar{X}) = \frac{i}{2} (X \bar{\mathcal{F}}'(\bar{X}) - \bar{X} \mathcal{F}'(X)), \quad (\text{IV.20})$$

et $f(X) = -i\mathcal{F}''(X)$, et W^α la force du superchamp vectoriel de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ dans la jauge de Wess-zumino (II.369-II.372).

En utilisant la relation (III.28) on obtient :

$$\frac{1}{4} \int d^2\theta f(X) W^\alpha W_\alpha + h.c. \supset \frac{1}{4} \text{Re}[f(X)|_{X=z}] \left(-\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) + h.c. \quad (\text{IV.21})$$

$$= -\frac{1}{4} \text{Im}(\mathcal{F}''(z)) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (\text{IV.22})$$

avec $\mathcal{F}''(z) = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z^2}$, notons que la fonction cinétique de jauge dans (IV.22) égale à la métrique de kähler $\mathcal{G}_{z\bar{z}}$ dans (IV.17), car on a :

$$\mathcal{G}_{z\bar{z}} = \text{Im}(\mathcal{F}''(z)). \quad (\text{IV.23})$$

On peut ajouter au lagrangien précédent $\mathcal{L}_0$ (IV.19) deux autres termes, un terme de Fayet-Iliopoulos (III.89) :

$$\mathcal{L}_D = \sqrt{2}\xi D. \quad (\text{IV.24})$$

avec ξ est une constante réelle, et un second terme du superpotentiel (III.9) donné comme suit :

$$\mathcal{L}_W = \int d^2\theta W + h.c.. \quad (\text{IV.25})$$

Donc le lagrangien total est :

$$\mathcal{L}_{total} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_W. \quad (\text{IV.26})$$

On peut montrer pour le terme du superpotentiel $\mathcal{L}_W$ s'écrit :

$$\int d^2\theta W + h.c. = FW' - \frac{1}{2}W''\psi\psi + h.c.. \quad (\text{IV.27})$$

de même pour les deux termes de $\mathcal{L}_0$:

$$\int d^2\theta d^2\bar{\theta} K = Im\mathcal{F}''F\bar{F} + \frac{i}{4}\mathcal{F}''' \bar{F}\psi\psi - \bar{\mathcal{F}}''' F\bar{\psi}\bar{\psi}, \quad (\text{IV.28})$$

et

$$\begin{aligned} \int d^2\theta f(X) W^\alpha W_\alpha &= \frac{1}{2}Im\mathcal{F}''D^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathcal{F}'''D(\psi\lambda) + \frac{i}{4}\mathcal{F}'''F\lambda^2 \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{2}}\bar{\mathcal{F}}'''D(\bar{\lambda}\bar{\psi}) - \frac{i}{4}\bar{\mathcal{F}}''' \bar{F}\bar{\lambda}^2 + \end{aligned} \quad (\text{IV.29})$$

Ainsi la partie qui contient le champ auxiliaire F dans le lagrangien total $\mathcal{L}_{total}$ est :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F &= Im\mathcal{F}''F\bar{F} - \frac{i}{4}\bar{\mathcal{F}}''' \bar{\psi}\bar{\psi} + FW' + \frac{i}{4}\mathcal{F}'''F\lambda^2 \\ &+ \frac{i}{4}\mathcal{F}'' \bar{F}\psi\psi + \bar{F}\bar{W} - \frac{i}{4}\bar{\mathcal{F}}''' \bar{F}\bar{\lambda}^2. \end{aligned} \quad (\text{IV.30})$$

d'où on peut déterminer l'équation du mouvement pour le champ auxiliaire F :

$$\bar{F} = \frac{1}{Im\mathcal{F}''} \left(-W' - \frac{i}{4}\mathcal{F}''' \lambda^2 + \frac{i}{4}\bar{\mathcal{F}}' \bar{\psi}\bar{\psi} \right). \quad (\text{IV.31})$$

En remplaçant (IV.31) dans (IV.30) et en ne laissant que les termes quadratiques ou indépendants en champs ψ et λ , on obtient :

$$\mathcal{L}_{F,quad} = -\frac{1}{Im\mathcal{F}''} |W'|^2 - \frac{i}{4} \frac{\mathcal{F}'''}{Im\mathcal{F}''} W' \psi\psi - \frac{i}{4} \frac{1}{\mathcal{F}''} Im\mathcal{F}'' \bar{W}' \lambda^2. \quad (\text{IV.32})$$

En appliquant les mêmes étapes pour le champ auxiliaire D , on obtient :

$$\mathcal{L}_{D,quad} = -\frac{1}{Im\mathcal{F}''} \xi^2 - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{F}'''}{Im\mathcal{F}''} \xi \psi \lambda. \quad (\text{IV.33})$$

Alors en utilisant les relations (IV.32, IV.33) on obtient les masse pour les champs ψ et λ :

$$M_\psi = W'' + \frac{i}{2} \frac{\mathcal{F}'''}{Im\mathcal{F}''} W', \quad (\text{IV.34})$$

$$M_\lambda = \frac{i}{2} \frac{\mathcal{F}'''}{Im\mathcal{F}''} \bar{W}'''. \quad (\text{IV.35})$$

IV.1. Brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$: Théorie de jauge pure

Donc le potentiel scalaire est donné par :

$$\mathcal{V}_{\mathcal{N}=1} = \frac{1}{\text{Im}\mathcal{F}''} |W'|^2 + \frac{1}{\text{Im}\mathcal{F}''} \xi^2. \quad (\text{IV.36})$$

Notons que les deux spineurs $(\psi, \lambda) \equiv \lambda^A$ forment un doublet sous le groupe d'automorphisme $SU(2)_R$, et sous lequel le lagrangien total (IV.26) doit être invariant selon la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$, et puisque le superpotentiel le plus général doit être invariant sous la permutation des spineurs $(\psi \longleftrightarrow \lambda)$, alors les termes de masse de ψ (IV.34) et λ (IV.35) doivent être égaux,

$$W'' + \frac{i}{2} \frac{\mathcal{F}'''}{\text{Im}\mathcal{F}''} W' = \frac{i}{2} \frac{\mathcal{F}'''}{\text{Im}\mathcal{F}''} \bar{W}. \quad (\text{IV.37})$$

La solution la plus générale de l'équation (IV.37) est :

$$W = eX + m\mathcal{F}'. \quad (\text{IV.38})$$

avec e et m sont des constantes réelles. On peut montrer que³ :

$$W' = e + m\mathcal{F}'', \quad W'' = m\mathcal{F}'''. \quad (\text{IV.39})$$

Notons que si $m = 0$ et $e = \xi$ le superpotentiel (IV.38) devient semblable au terme de Fayet-Iliopoulos de la relation (IV.24).

Alors à partir du superpotentiel (IV.38) on peut déterminer la matrice de masse des spineurs $\lambda^A \equiv (\psi, \lambda)$ suivante :

$$\mathcal{M}_{AB} = \frac{i}{2} \mathcal{F}''' \begin{pmatrix} (e + m\mathcal{F}''') & i\xi \\ i\xi & (e + m\mathcal{F}''') \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.40})$$

donc le potentiel scalaire (IV.36) s'écrit dans ce cas, comme suit :

$$\mathcal{V}_{\mathcal{N}=1} = \frac{1}{\text{Im}\mathcal{F}''} |e + m\mathcal{F}''|^2 + \frac{1}{\text{Im}\mathcal{F}''} \xi^2. \quad (\text{IV.41})$$

Afin d'avoir l'invariance du lagrangien total (IV.26) sous la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$, il faut utiliser le superspace de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$. C'est le but de la partie suivante.

IV.1.2 Etude dans le superspace de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$

Un multiplet vectoriel de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ peut être décrit par un superchamp chirale de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ qui vérifie la contrainte suivante :

$$\left(\varepsilon_{AB} D^A \sigma_{\mu\nu} D^B \right)^2 \mathcal{W} = -96 \square \mathcal{W}^*. \quad (\text{IV.42})$$

3. En remplaçant W' et W'' de (IV.39) dans l'équation (IV.37) on peut montrer qu'elle est satisfaisante.

Le lagrangien $\mathcal{L}_0$ (IV.19) dans ce cas s'écrit en utilisant le multiplet vectoriel de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ précédent comme suit :

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{i}{2} \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \mathcal{F}(\mathcal{W}) + h.c.. \quad (\text{IV.43})$$

et on peut le réécrire sous la forme équivalente suivante :

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{i}{2} \int d^2\theta d^2\bar{\theta} [\mathcal{F}(\mathcal{W}) - \mathcal{W}_D \mathcal{W}] + h.c.. \quad (\text{IV.44})$$

où $\mathcal{W}_D$ un superchamp vectoriel de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$, alors satisfait la contrainte (IV.42), et qui a le rôle d'un multiplicateur de Lagrange. Donc si on dérive le lagrangien (IV.44) par rapport au superchamp $\mathcal{W}_D$ on peut revenir au lagrangien (IV.43) à condition que la contrainte (IV.42) doit être imposé sur le superchamp $\mathcal{W}$. Alors que si on dérive le lagrangien (IV.44) par rapport au superchamp $\mathcal{W}$, on a :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathcal{W}} = \mathcal{W}_D. \quad (\text{IV.45})$$

Ce qui montre que $\mathcal{W}_D$ est le superchamp magnétique dual au superchamp $\mathcal{W}$ [113]. De la même manière qu'on a fait dans le cas de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$, on peut ajouter un terme de Fayet-Iliopoulos au lagrangien (IV.44), qui a une forme linéaire en fonction des champs auxiliaires de superchamp $\mathcal{W}$, ces champs auxiliaires forme un triplet Y^a ($a = 1, 2, 3$) sous le groupe $SU(2)_R$ de la symétrie-R pour la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$. Comme nous l'avons déjà mentionné le multiplet vectoriel de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ qui contraint par la condition de réalité, ce qui implique que les champs auxiliaire Y^a sont réels, alors on peut les écrire en fonction des champs auxiliaire F et D de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ comme suit :

$$Y^1 = -2\text{Im}F, \quad (\text{IV.46})$$

$$Y^2 = 2\text{Re}F, \quad (\text{IV.47})$$

$$Y^3 = \sqrt{2}D. \quad (\text{IV.48})$$

Alors le terme de Fayet-Iliopoulos est donné par :

$$\mathcal{L}_D = \frac{1}{2} E^a Y_a + h.c.. \quad (\text{IV.49})$$

avec E^a sont des paramètres qui contribuent dans $\mathcal{L}_D$ qu'avec leurs parties réelles, car les champs auxiliaires Y_a sont réels. On remarque qu'on peut retrouver le terme de Fayet-Iliopoulos (IV.24) à partir du lagrangien $\mathcal{L}_D$, en agissant par une transformation sous le groupe $SU(2)_R$ sur les composantes de E^a par le choix suivant :

$$E^a = \begin{pmatrix} E^1 & E^2 & E^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \xi \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.50})$$

On remarque aussi qu'on peut retrouver le superpotentiel (IV.38) à partir de (IV.49) par le choix suivant :

$$E^a = \begin{pmatrix} E^1 & E^2 & E^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad m = 0. \quad (\text{IV.51})$$

IV.1. Brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$: Théorie de jauge pure

De la même façon pour le superchamp vectoriel $\mathcal{W}_D$ on ajoute un terme de Fayet-Iliopoulos pour ses champs auxiliaires Y_D^a au lagrangien (IV.44) analogue à (IV.49) et qui est donné comme suit :

$$\mathcal{L}_D^{dual} = \frac{1}{2} M^a (Y_D)_a + h.c.. \quad (IV.52)$$

où M^a sont des paramètres réels. Notons que ce lagrangien décrit le champ de jauge $\tilde{A}_\mu$ dual au champ de jauge A_μ du groupe $U(1)$

Le lagrangien total alors s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{total} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_D^{dual} \\ &= -\frac{i}{2} \int d^2\theta d^2\bar{\theta} [\hat{\mathcal{F}}(\mathcal{W}) - \mathcal{W}_D \mathcal{W}] + \frac{1}{2} (E^a Y_a + M^a (Y_D)_a) + h.c.. \end{aligned} \quad (IV.53)$$

Les équations du mouvement des champs auxiliaire à partir du lagrangien total (IV.53) sont données par :

$$Y^a = -\frac{2}{Im\hat{\mathcal{F}}''} (ReE^a + Re\hat{\mathcal{F}}'' M^a) + 2iM^a. \quad (IV.54)$$

Pour retrouver le lagrangien de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ (IV.26) à partir du lagrangien total (IV.53), il suffit d'éliminer les champs auxiliaires en utilisant le groupe $SU(2)_R$ de la symétrie-R sur les paramètres M^a et E^a pour avoir le choix suivant :

$$\begin{aligned} M^a &= (0 \quad m \quad 0), \\ ReE^a &= (0 \quad e \quad \xi). \end{aligned} \quad (IV.55)$$

Donc le potentiel scalaire de ce modèle est donné comme suit :

$$\mathcal{V}_{APT} = \frac{1}{Im\hat{\mathcal{F}}''} |ReE^a + \hat{\mathcal{F}}'' M^a|^2 + 2M^a ImE^a \quad (IV.56)$$

$$= \frac{1}{Im\hat{\mathcal{F}}''} (|e + \hat{\mathcal{F}}'' m|^2 + \xi^2) + 2m ImE_2. \quad (IV.57)$$

où le premier terme de (IV.57) coïncide avec le potentiel scalaire $\mathcal{V}_{\mathcal{N}=1}$. Alors on a :

$$\mathcal{V}_{APT} = \mathcal{V}_{\mathcal{N}=1} + 2m ImE_2. \quad (IV.58)$$

En minimisant le potentiel scalaire (IV.56) par rapport à $Re\hat{\mathcal{F}}''$ et $Im\hat{\mathcal{F}}''$ et avec $m \neq 0$ on a,

$$Re\hat{\mathcal{F}}'' = -\frac{e}{m}, \quad (IV.59)$$

$$Im\hat{\mathcal{F}}'' = \left| \frac{\xi}{m} \right|. \quad (IV.60)$$

D'où la valeur minimale du potentiel scalaire est donnée par :

$$\begin{aligned} V_{\min} &= \frac{m}{\xi} \left(m^2 \frac{\xi^2}{m^2} + \xi^2 \right) + 2m ImE_2 \\ &= 2m (\xi + ImE_2). \end{aligned} \quad (IV.61)$$

ce dernier va être utile pour discuter la brisure de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ dans la sous-section suivante.

IV.1.3 Brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$: Modèle minimal

Afin de réaliser la brisure de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$, il faut montrer que les variations dans le vide des champs fermioniques sous la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ sont non nulles, ces variations sont données comme suit :

$$\delta\lambda^A = Y_B^A \epsilon^B. \quad (\text{IV.62})$$

où ϵ^B sont les paramètres des transformations de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$, et avec Y_B^A donné par la relation suivante :

$$Y_B^A = \frac{i}{\sqrt{2}} (\sigma^a)^A_B Y_a. \quad (\text{IV.63})$$

On peut aussi relier Y_{AB} avec les champs auxiliaires Y^a par la relation suivantes :

$$Y_{AB} = \varepsilon_{AC} Y_B^C = \varepsilon_{AC} \left(\frac{i}{\sqrt{2}} (\sigma^a)^C_B Y_a \right) = \begin{pmatrix} \frac{Y^2 - iY^1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} Y^3 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} Y^3 & \frac{Y^2 + iY^1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.64})$$

où σ^a sont les matrices de Pauli. En utilisant les relations (IV.46), (IV.47) et (IV.48), on peut relier Y avec les champs auxiliaires de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ comme suit :

$$Y_{AB} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} F & \frac{i}{\sqrt{2}} D \\ \frac{i}{\sqrt{2}} D & F \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.65})$$

D'autre part, les transformations supersymétriques $\mathcal{N} = 2$ des champs fermioniques en composantes, s'écrit :

$$\delta\bar{\lambda}_1 = Y_{1A} \bar{\epsilon}^A = Y_{11} \bar{\epsilon} + Y_{12} \bar{\tilde{\epsilon}}, \quad (\text{IV.66})$$

$$\delta\bar{\lambda}_2 = Y_{2A} \bar{\epsilon}^A = Y_{21} \bar{\epsilon} + Y_{22} \bar{\tilde{\epsilon}}. \quad (\text{IV.67})$$

Alors on a :

$$\delta \left(\frac{\bar{\lambda}_1 \pm \bar{\lambda}_2}{\sqrt{2}} \right) = Y_{1A} \bar{\epsilon}^A = \left(\frac{Y_{11} \pm Y_{12}}{\sqrt{2}} \right) \bar{\epsilon} + \left(\frac{Y_{21} \pm Y_{22}}{\sqrt{2}} \right) \bar{\tilde{\epsilon}}. \quad (\text{IV.68})$$

Les valeurs des champs auxiliaires (IV.54) dans le vide qui est défini par les relations (IV.59), (IV.60) et (IV.61) sont donné par :

$$Y^a = 2im\delta^{a2} - 2m\delta^{a3}. \quad (\text{IV.69})$$

IV.1. Brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$: Théorie de jauge pure

ce qui donne :

$$Y_{11} = Y_{22} = -Y_{21} = -Y_{12} = -i\sqrt{2}m. \quad (\text{IV.70})$$

Donc nous avons les transformations suivantes :

$$\delta \left(\frac{\bar{\lambda}_1 \pm \bar{\lambda}_2}{\sqrt{2}} \right) = \left(\frac{Y_{11} \pm Y_{11}}{\sqrt{2}} \right) \bar{\epsilon} + \left(\frac{Y_{11} \pm Y_{11}}{\sqrt{2}} \right) \bar{\tilde{\epsilon}}, \quad (\text{IV.71})$$

donc,

$$\delta \left(\frac{\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2}Y_{11} (\bar{\epsilon} - \bar{\tilde{\epsilon}}) = 2im (\bar{\epsilon} - \bar{\tilde{\epsilon}}), \quad (\text{IV.72})$$

$$\delta \left(\frac{\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2}{\sqrt{2}} \right) = 0. \quad (\text{IV.73})$$

Ce qui signifie que dans le vide, la supersymétrie n'est pas brisée lorsque elle correspond à la combinaison des supercharges de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ $\frac{Q - \tilde{Q}}{\sqrt{2}}$. Par contre si la supersymétrie correspond à la combinaison des supercharges $\frac{Q + \tilde{Q}}{\sqrt{2}}$ elle est brisée spontanément. Notons que ces différents scenarios de la brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ dépend du choix (IV.55) des composantes des charges électrique et magnétique de Fayet-Iliopoulos et dépend aussi du rangement de l'une de deux supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ par rapport à l'autre.

IV.1.4 Brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$: Modèle général

Dans le modèle que nous allons voir de Andrianopoli, D'Auria, Ferrara et Trigiante [48], le mécanisme de brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ précédent est réalisée d'une façon indépendante du choix particulier (IV.55) des composantes de charges de Fayet-Iliopoulos, et il permet aussi de trouver les différents scenarios de la brisure partielle mais de façons indépendante du rangement de l'une des deux supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ à l'autre. Ce modèle reproduit le modèle précédent en utilisant la déformation de l'identité de Ward rigide (potentiel scalaire rigide) associée à la variété kählérienne spéciale de type rigide, cette déformation C_B^A est un terme antisymétrique provenant des termes de Fayet-Iliopoulos magnétiques non nuls et qui peut être écrit comme :

$$C_B^A = \xi^a (\sigma^a)_B^A. \quad (\text{IV.74})$$

avec ξ^a est un vecteur de $SO(3) \sim SU(2)$, invariant sous les transformations symplectique suivante :

$$\xi^a \sim \varepsilon^{abc} \mathcal{P}_M^a \mathcal{P}_N^b C^{MN}. \quad (\text{IV.75})$$

où $\mathcal{P}_M^a$ est un triplet des vecteurs symplectique du groupe $SP(2n)$ et M est l'indice de la représentation fondamentale du groupe $SP(2n)$, et C^{MN} est la métrique de $SP(2n)$. Nous allons voir que les différents scenarios de la brisure de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ seront déterminer selon la norme du vecteur ξ^a , mais avons cela nous allons montrer

que cette brisure est réalisable dans ce modèle en déterminant les équations du mouvement des champs auxiliaires analogue à la relation (IV.54) du modèle précédent.

L'identité de Ward d'une théorie de supersymétrie rigide $N > 1$ est donnée comme suit :

$$\mathcal{V}\delta_B^A = \sum_i \alpha_i \delta\chi^{iA} \delta\bar{\chi}_{iB}, \quad (\text{IV.76})$$

cette identité décrit la sommation sur la transformation de toutes les particules fermionique, avec α_i sont des constante positives pour les fermions de spin $\frac{1}{2}$ et négatives pour le gravitino (spin $\frac{3}{2}$). On peut l'écrire sous forme modifié en la déformant avec le terme (IV.74) comme suit :

$$\mathcal{V}\delta_B^A + C_B^A = \sum_i \alpha_i \delta\chi^{iA} \delta\bar{\chi}_{iB}. \quad (\text{IV.77})$$

Pour une théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 2$ de jauge pure avec n multiplet vectoriel, les transformations des jauginos sont données comme suit :

$$\delta\lambda^{iA} = (W^i)_B^A \epsilon^B. \quad (\text{IV.78})$$

avec,

$$(W^i)_B^A = -i (\sigma^a)_B^A \mathcal{P}_M^a \mathcal{G}^{i\bar{k}} \bar{U}_k^M. \quad (\text{IV.79})$$

où les éléments du triplet $\mathcal{P}_M^a$ des vecteurs symplectiques de $SP(2n)$ sont les charges électrique e_I^a et magnétique m^{Ia} de Fayet-Iliopoulos :

$$\mathcal{P}_M^a = \sqrt{2} \begin{pmatrix} -e_I^a \\ m^{Ia} \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.80})$$

$$\mathcal{P}^{Ma} = \mathcal{C}^{MN} \mathcal{P}_N^a = \sqrt{2} \begin{pmatrix} m^{Ia} \\ e_I^a \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.81})$$

et $\mathcal{G}^{i\bar{k}}$ est l'inverse de la métrique de la variété kählérienne spéciale de type rigide $\mathcal{G}_{i\bar{k}}$ donnée par :

$$\mathcal{G}_{i\bar{k}} = -i U_i^M \mathcal{C}_{MN} \bar{U}_k^N. \quad (\text{IV.82})$$

et $\bar{U}_k^M$ le complexe conjugué du gradient U_i^M ,

$$U_i^M = \partial_i \Omega^M. \quad (\text{IV.83})$$

avec $\partial_i = \frac{\partial}{\partial z^i}$, Ω^M est la section holomorphe défini par l'expression suivante,

$$\Omega^M = \begin{pmatrix} X^i \\ \mathcal{F}_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{IV.84})$$

donc (IV.83) s'écrit :

$$U_i^M = \frac{\partial}{\partial z^i} \begin{pmatrix} X^k \\ \mathcal{F}_k \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.85})$$

IV.1. Brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$: Théorie de jauge pure

De façon analogue avec (IV.63) on écrit la relation (IV.79) comme suit :

$$(W^i)_B^A = -i(\sigma^a)_B^A Y^{ia}. \quad (\text{IV.86})$$

En comparant la relation (IV.86) avec la relation (IV.79) on peut déterminer l'expression des champs auxiliaire Y^{ia} :

$$Y^{ia} = \mathcal{P}_M^a \mathcal{G}^{i\bar{k}} \bar{U}_k^M. \quad (\text{IV.87})$$

En remplaçant la métrique kählérienne par la forme (IV.23) et en utilisant les coordonnées spéciales (champs scalaire) $z^i = X^I$, l'expression du complexe conjugué du gradient $\bar{U}_k^M$ devient :

$$\bar{U}_i^M = \begin{pmatrix} \delta_i^k \\ \bar{\mathcal{F}}_{ik} \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.88})$$

alors on obtient l'expression des champs auxiliaires :

$$\begin{aligned} Y^{ia} &= \sqrt{2} \mathcal{G}^{i\bar{k}} (m^{ja} \bar{\mathcal{F}}_{kj} - e_j^a \delta_k^j) = \sqrt{2} \mathcal{G}^{i\bar{k}} [m^{ja} (Re \mathcal{F}_{kj} - i \mathcal{G}_{\bar{k}j}) - e_k^a] \\ &= \sqrt{2} [-\mathcal{G}^{i\bar{k}} (e_k^a - m^{ja} Re \mathcal{F}_{kj}) - i m^{ia}]. \end{aligned} \quad (\text{IV.89})$$

On remarque que cette expression est pareille à la relation (IV.54) du modèle précédent, ce qui permet de réaliser une brisure partielle pour une charge de Fayet-Iliopoulos non nul ($m \neq 0$). Donc la transformation supersymétrique des jauginos (IV.78) s'écrit :

$$\delta \lambda^{iA} = i\sqrt{2} (\sigma^a)_B^A [\mathcal{G}^{i\bar{k}} (e_k^a - m^{ja} Re \bar{\mathcal{F}}_{kj}) - i m^{ia}] \epsilon^B. \quad (\text{IV.90})$$

Pour étudier les différents cas de la brisure de la supersymétrie, il faut déterminer l'expression du potentiel scalaire du modèle, en calculant le terme du produit dans (IV.17) qu'on a vu dans l'introduction de ce chapitre. En effet,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{i\bar{j}} (W^i)_C^A (\bar{W}^{\bar{j}})_B^C &= [(\sigma^a)_B^A (\sigma^a)]_B^A \mathcal{P}_M^a \mathcal{P}_N^b \bar{U}_k^M \mathcal{G}^{k\bar{k}} U_k^N \\ &= \delta^{ab} \delta_B^A \mathcal{P}_M^a \mathcal{P}_N^b \bar{U}_k^M \mathcal{G}^{k\bar{k}} U_k^N + i \varepsilon^{abc} (\sigma_c)_B^A \mathcal{P}_M^a \mathcal{P}_N^b \bar{U}_k^M \mathcal{G}^{k\bar{k}} U_k^N \end{aligned} \quad (\text{IV.91})$$

En utilisant l'expression de la métrique (IV.82), on peut montrer :

$$\mathcal{G}^{i\bar{j}} U_i^M \bar{U}_{\bar{j}}^N = \frac{1}{2} \mathcal{M}^{MN} - \frac{i}{2} \mathcal{C}^{MN}. \quad (\text{IV.92})$$

d'où l'équation (IV.91) devient :

$$\mathcal{G}_{i\bar{j}} (W^i)_C^A (\bar{W}^{\bar{j}})_B^C = \frac{1}{2} \delta_B^A \mathcal{M}^{MN} \mathcal{P}_M^a \mathcal{P}_N^b + \frac{1}{2} \mathcal{C}^{MN} \mathcal{P}_M^a \mathcal{P}_N^b \varepsilon^{abc} (\sigma_c)_B^A. \quad (\text{IV.93})$$

avec,

$$\mathcal{M}_{MN} = \begin{pmatrix} (Im \mathcal{F})_{i\bar{j}} + (Re \mathcal{F})_{ik} (Im \mathcal{F}^{-1})^{kl} (Re \mathcal{F})_{l\bar{j}} & (Re \mathcal{F})_{ik} (Im \mathcal{F}^{-1})^{k\bar{j}} \\ (Im \mathcal{F}^{-1})^{i\bar{k}} (Re \mathcal{F})_{k\bar{j}} & (Im \mathcal{F}^{-1})^{i\bar{j}} \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.94})$$

En comparant l'équation (IV.93) avec le potentiel scalaire déformé (IV.77) on remarque que :

$$\begin{cases} \mathcal{V}_{\mathcal{N}=2} &= \frac{1}{2} \mathcal{M}^{MN} \mathcal{P}_M^a \mathcal{P}_N^b, \\ C_B^A &= \frac{1}{2} C^{MN} \mathcal{P}_M^a \mathcal{P}_N^b \varepsilon^{abc} (\sigma_c)_B^A. \end{cases} \quad (\text{IV.95})$$

d'où l'expression de C_B^A peut se réécrire comme suit :

$$\begin{aligned} C_B^A &= \varepsilon^{abc} \left(-e_i^a m^{ib} - m^{ia} e_i^b \right) (\sigma_c)_B^A \\ &= 2 \left(\vec{m}^i \times \vec{e}_i \right)^c (\sigma_c)_B^A. \end{aligned} \quad (\text{IV.96})$$

avec $\vec{m}^i = (m^{ia})$ et $\vec{e}_i = (e_i^a)$. D'autre part la transformation symplectique (IV.75) sous laquelle le vecteur ξ^a de $SO(3) \sim SU(2)$ est défini, peut s'écrire maintenant comme suit :

$$\begin{aligned} \xi^a &= \varepsilon^{abc} \mathcal{P}_M^a \mathcal{P}_N^b C^{MN} \\ &= 2 \left(\vec{m}^i \times \vec{e}_i \right)^c. \end{aligned} \quad (\text{IV.97})$$

Ce qui permet d'écrire le terme antisymétrique C_B^A de la relation (IV.93) en fonction du vecteur ξ^a , en utilisant (IV.96) :

$$C_B^A = \xi^a (\sigma^a)_B^A. \quad (\text{IV.98})$$

Alors, le produit des matrices des transformations supersymétrique devient (IV.93) :

$$\mathcal{G}_{i\bar{j}} \left(W^i \right)_C^A \left(\bar{W}^{\bar{j}} \right)_B^C = \mathcal{V}_{\mathcal{N}=2} \delta_B^A + \xi^a (\sigma^a)_B^A \quad (\text{IV.99})$$

$$= \begin{pmatrix} \mathcal{V}_{\mathcal{N}=2} + \xi^3 & \xi^1 - i\xi^2 \\ \xi^1 + i\xi^2 & \mathcal{V}_{\mathcal{N}=2} - \xi^3 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.100})$$

En diagonalisant la matrice (IV.100) on obtient :

$$\mathcal{G}_{i\bar{j}} \left(W^i \right)_C^A \left(\bar{W}^{\bar{j}} \right)_B^C = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_{\mathcal{N}=2} + \sqrt{|\xi|^2} & 0 \\ 0 & \mathcal{V}_{\mathcal{N}=2} - \sqrt{|\xi|^2} \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.101})$$

avec,

$$\begin{aligned} |\xi|^2 &= \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{abc} \mathcal{P}_M^a \mathcal{P}_N^b C^{MN} \right)^2 \\ &= 4 \left(\vec{m}^i \times \vec{e}_i \right) \left(\vec{m}^j \times \vec{e}_j \right). \end{aligned} \quad (\text{IV.102})$$

En utilisant l'identité de Lagrange suivante :

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot (\vec{x} \times \vec{y}) = (\vec{v} \cdot \vec{x})(\vec{w} \cdot \vec{y}) - (\vec{v} \cdot \vec{y})(\vec{w} \cdot \vec{x}). \quad (\text{IV.103})$$

on obtient :

$$|\xi|^2 = 4 \left[\left(\vec{m}^i \cdot \vec{m}^j \right) \left(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \right) - \left(\vec{m}^i \cdot \vec{e}_j \right) \left(\vec{e}_i \cdot \vec{m}^j \right) \right]. \quad (\text{IV.104})$$

D'où on a les deux cas suivants :

► $|\xi|^2 = 0$, dans ce cas les termes électriques $\vec{e}_i$ et magnétique $\vec{e}_i$ de Fayet-Iliopoulos sont parallèles (car, $\vec{m}^i \times \vec{e}_i = 0$), et si on a $\mathcal{V}_{\mathcal{N}=2} \neq 0$ la matrice (IV.101) à deux valeurs propres identiques non nulles, donc la supersymétrie est complètement brisée de $\mathcal{N} = 2$ à $\mathcal{N} = 1$.

► $|\xi|^2 \neq 0$, dans ce cas on a les deux possibilités suivantes :

- si $\mathcal{V}_{\mathcal{N}=2} > \sqrt{|\xi|^2}$, dans ce cas la matrice (IV.101) à deux valeurs propres indépendantes et non nulles, alors la supersymétrie est brisée complètement de $\mathcal{N} = 2$ à $\mathcal{N} = 0$ et à deux échelles d'énergie différentes.

- si $\mathcal{V}_{\mathcal{N}=2} = \sqrt{|\xi|^2}$, dans ce cas la matrice (IV.101) à une seule valeur propre non nulle, donc la supersymétrie est brisée de $\mathcal{N} = 2$ à $\mathcal{N} = 1$.

IV.2 Brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$: Couplage avec la matière

Nous allons présenter dans cette section le couplage du multiplet vectoriel qu'on a vu dans la section précédente avec la matière. Dans ce modèle qui est basé sur le papier de *Antoniadis, Derendinger et Jacot* [49], le secteur de la matière est décrit par deux formulations, la première est construite par un hypermultiplet de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ composé de deux multiplet chiraux de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ de charges opposées sous le groupe de jauge $U(1)^n$, et la seconde formulation est construite par un multiplet tensoriel (ou linéaire) L de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ et un multiplet chiral Φ de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ regroupés dans un superchamp chiral $\mathcal{T}$ de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$, et qui sont dual l'un à l'autre. Pour clarifier cette dualité qui est nécessaire pour la seconde formulation pour la décrire le secteur de la matière, nous allons donner dans la première partie de cette section l'expression du superchamp tensoriel L , ainsi la transformation de Legendre qui décrit la dualité qui consiste à remplacer le superchamp tensoriel L par un superchamp chiral Φ et son conjugué complexe $\bar{\Phi}$, puis nous allons étudier le secteur de jauge de ce modèle, ensuite le secteur de la matière par les deux formulations qu'on a mentionné, et finalement nous allons construire le potentiel scalaire du modèle, qui va nous permettre de discuter les conditions de la brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$.

IV.2.1 Dualité tensoriel-chiral de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$

Multiplet tensoriel de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$

Pour déterminer l'expression du superchamp tensoriel $L^{\mathcal{N}=1}$ de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$, nous utilisons l'expression du superchamp vectoriel général (II.360) qu'on a vu dans le chapitre précédent, où nous allons changer les signes des termes $\partial_\mu \chi$ et $\partial_\mu \bar{\chi}$ pour éliminer les termes qui contiennent les champs $\chi(x)$ et $\bar{\chi}(x)$, alors l'expression (II.360)

devient :

$$\begin{aligned} V(x, \theta, \bar{\theta}) = & C(x) + i\theta\chi(x) - i\bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \frac{i}{2}\theta\theta(M(x) + iN(x)) - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}(M(x) - iN(x)) \\ & - \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\left(\bar{\lambda}(x) + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi(x)\right) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\left(\lambda(x) + \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}(x)\right) \\ & + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left(D(x) + \frac{1}{2}\square C(x)\right). \end{aligned} \quad (\text{IV.105})$$

la dérivée seconde covariante supersymétrique du superchamp vectoriel $V(x, \theta, \bar{\theta})$ précédent est donnée par :

$$\begin{aligned} \bar{D}\bar{D}V = & 2i(M - iN) + 4i(\theta\lambda) - 2\theta\sigma^\mu\bar{\theta}(\partial_\mu M - i\partial_\mu N) \\ & - 2\theta^2(D + \square C - i\theta^\mu A_\mu) + 2\theta^2\partial_\mu\lambda\sigma^\mu\bar{\theta} + \frac{i}{2}\theta^2\bar{\theta}^2(\square M - i\square N). \end{aligned} \quad (\text{IV.106})$$

où,

$$\tilde{D}_\alpha = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^\alpha} - i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu. \quad (\text{IV.107})$$

On remarque que les termes qui contiennent le champ $\bar{\chi}(x)$ (respectivement pour $\chi(x)$) sont éliminés dans $\bar{D}\bar{D}V$ (respectivement pour DDV). D'autre part et par définition le superchamp tensoriel $L^{\mathcal{N}=1}$ est un superchamp réel qui satisfait la contrainte suivante [68, 114–116] :

$$DDL = \bar{D}\bar{D}L = 0. \quad (\text{IV.108})$$

La relation (IV.106) implique après la contrainte (IV.108) les équations suivantes :

$$\lambda = 0, \quad N = 0, \quad M = 0, \quad (\text{IV.109})$$

$$D + \square C - i\partial^\mu v_\mu = 0. \quad (\text{IV.110})$$

et d'après la dernière relation (IV.110) on a :

$$D = -\square C, \quad (\text{IV.111})$$

$$\partial^\mu A_\mu = 0. \quad (\text{IV.112})$$

Alors l'expression du superchamp tensoriel est :

$$L(x, \theta, \bar{\theta}) = C + i\theta\chi - i\bar{\theta}\bar{\chi} - \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\sigma^\mu\partial_\mu\chi - \frac{1}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi} - \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\square C. \quad (\text{IV.113})$$

Notons que le superchamp tensoriel $L(x, \theta, \bar{\theta})$ ne contient pas de champ auxiliaire comme les superchamps chirale et vectoriel de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$. Notons aussi que le superchamp tensoriel $L(x, \theta, \bar{\theta})$ contient quatre degrés de liberté bosonique et quatre degrés de liberté fermionique off-shell, car le scalaire réel C à un degrés de liberté, et le spineur de Majorana χ à quatre degrés de liberté, et le champ vecteur A_μ à trois degrés de liberté où sa quatrième composante est éliminée par la contrainte

(IV.112) ce qui indique qu'on peut écrire A_μ comme suit :

$$A_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu b^{\rho\sigma}. \quad (\text{IV.114})$$

avec $b^{\rho\sigma}$ un tenseur antisymétrique. Cette relation (IV.114) qui définit l'expression du champ vecteur A_μ est invariante sous la transformation de jauge suivante :

$$b^{\rho\sigma} \longrightarrow b^{\rho\sigma} + 4\partial^{[\rho} \Lambda^{\sigma]}. \quad (\text{IV.115})$$

où Λ^σ est un paramètre qui contient trois degrés de liberté, car le champ $b^{\rho\sigma}$ est un tenseur antisymétrique, ce qui implique que si on fixe l'indice de Lorentz ρ par une seule valeur dans la transformation de jauge (IV.115), l'indice σ prends trois composantes non nulles et par conséquent le tenseur $b^{\rho\sigma}$ à trois degrés de liberté égales au nombre de degré de liberté du champ vecteur A_μ .

Dualité entre les multiplets tensoriel $L^{\mathcal{N}=1}$ et chiral $\Phi^{\mathcal{N}=1}$

Le superchamp tensoriel $L \equiv (C, b_{\mu\nu}, \chi)$ est dual à un superchamp chiral $\Phi \equiv (C, \varphi, \chi) \equiv \left((0)^2, \frac{1}{2}\right)$ de façon similaire qu'un champ scalaire φ (0-forme) dual à un tenseur antisymétrique $b_{\mu\nu}$ (2-forme) à 4 dimensions, car en général à D dimensions une p-forme est dual à une D-2-p-forme, alors pour la dualité entre φ et $b_{\mu\nu}$ on a :

$$h^{\mu\nu\rho} = \frac{1}{\sqrt{3}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\sigma \varphi. \quad (\text{IV.116})$$

où $h^{\mu\nu\rho} = 3\partial^{[\mu} b^{\nu\rho]}$ est le tenseur de force du champ antisymétrique $b^{\mu\nu}$. Donc pour déterminer la dualité entre L et Φ nous utilisons le lagrangien général qui décrit un multiplet tensoriel suivant :

$$\mathcal{L}_{ten} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} H(L). \quad (\text{IV.117})$$

avec $H(L)$ est une fonction qui décrit le terme cinétique du multiplet tensoriel L. L'expression du lagrangien précédent (IV.117) peut être écrit aussi sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}_{ten} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \left\{ H(L) + \sqrt{2} \left[DDX + \bar{D}\bar{D}\bar{X} \right] L \right\}. \quad (\text{IV.118})$$

où on peut revenir à la première expression (IV.118) en utilisant l'équation du mouvement du superchamp arbitraire X de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$, qui joue aussi le rôle d'un multiplicateur de Lagrange. Par contre l'équation du mouvement du superchamp tensoriel L donne la relation suivante,

$$\frac{\partial H(L)}{\partial L} = -\sqrt{2} (DDX - \bar{D}\bar{D}\bar{X}) \equiv -\sqrt{2} (\Phi + \bar{\Phi}). \quad (\text{IV.119})$$

où $\bar{\Phi}$ est un superchamp antichiral de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$. D'après l'équation du mouvement (IV.119), le superchamp tensoriel L est une fonctionnelle de $\Phi + \bar{\Phi}$ comme suit :

$$L \equiv G(\Phi + \bar{\Phi}). \quad (\text{IV.120})$$

où G est une fonction de $(\Phi + \bar{\Phi})$. En remplaçant la relation (IV.120) dans le lagrangien (IV.118), on a :

$$\mathcal{L}_{ten} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \left[H(G) + \sqrt{2}G (\Phi + \bar{\Phi}) \right]. \quad (\text{IV.121})$$

Ce lagrangien décrit l'auto-interaction d'un multiplet chiral, où le potentiel de kähler est donné comme suit :

$$K (\Phi + \bar{\Phi}) = H(G) + \sqrt{2}G (\Phi + \bar{\Phi}). \quad (\text{IV.122})$$

Donc ce potentiel de kähler (IV.122) est une transformation de Legendre entre $K (\Phi + \bar{\Phi})$ et $H (L, \Phi + \bar{\Phi})$ qui consiste à remplacer le superchamp tensoriel L par le superchamp chiral Φ et antichiral $\bar{\Phi}$. Notons qu'en effectuant le choix suivant :

$$H(G) = -G^2, \quad G (\Phi + \bar{\Phi}) = \frac{1}{2} (\Phi + \bar{\Phi}). \quad (\text{IV.123})$$

on obtient la forme du potentiel de kähler canonique⁴ :

$$K = \Phi \bar{\Phi}. \quad (\text{IV.124})$$

Notons aussi que le potentiel de kähler (IV.122) est invariant sous la transformation du superchamp H par une constante imaginaire, puisque il dépend seulement de $\Phi + \bar{\Phi}$, ces transformations sont données comme suit :

$$\Phi \longrightarrow \Phi + ia, \quad (\text{IV.125})$$

$$\bar{\Phi} \longrightarrow \bar{\Phi} - i\bar{a}. \quad (\text{IV.126})$$

La solution de la contrainte (IV.108) est donnée par [117, 118] :

$$L = D^\alpha \Psi_\alpha - \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{\Psi}^{\dot{\alpha}}. \quad (\text{IV.127})$$

où Ψ_α est un superchamp spinoriel chiral de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$:

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha = & -\frac{1}{4}\lambda'_\alpha - \frac{1}{2}\theta_\alpha (C(x) + iD'(x)) - \frac{1}{2}(\sigma^{\mu\nu})^\alpha_\beta \theta_\beta b_{\mu\nu} \\ & - \frac{1}{4}\theta^2 \left(\chi_\alpha(x) - \frac{i}{4}\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_\mu \lambda'^{\dot{\alpha}}(x) \right). \end{aligned} \quad (\text{IV.128})$$

Le superchamp tensoriel L dans la solution (IV.127) est invariant sous la transformation du superchamp spinoriel chiral Ψ_α suivante :

$$\Psi_\alpha \longrightarrow \Psi_\alpha + \frac{i}{4}\bar{D}^2 D_\alpha \Delta. \quad (\text{IV.129})$$

où le paramètre de transformation qui contient le superchamp réel générale Δ est identique au vecteur de la force du superchamp abélien W_α dans la relation (III.17), donc sous la jauge de Wess-Zumino où le vecteur de la force du champ W_α est donnée

4. car le terme $(\Phi^2 + \bar{\Phi}^2)|_{\theta^2\bar{\theta}^2}$ est un terme de surface.

par la relation (III.18), le paramètre de la transformation (IV.129) devient :

$$\frac{i}{4}\bar{D}^2 D_\alpha \Delta = -\lambda_\alpha - i\theta_\alpha D - (\sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta \theta_\beta F_{\mu\nu} - i\theta^2 (\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda})_\alpha. \quad (\text{IV.130})$$

Pour éliminer les champs λ' et D' dans l'expression du superchamp spinoriel Ψ_α (IV.128), nous allons choisir la jauge suivante :

$$\lambda_\alpha = -\frac{1}{4}\lambda'_\alpha, \quad (\text{IV.131})$$

$$D = -\frac{1}{4}D'. \quad (\text{IV.132})$$

donc l'expression du superchamp spinoriel T devient :

$$\Psi_\alpha = -\frac{1}{4}\theta_\alpha C(x) - \frac{1}{2}(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta \theta_\beta b_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\theta^2 \chi_\alpha(x). \quad (\text{IV.133})$$

Notons que cette expression est vérifiée à condition que le tenseur antisymétrique $b_{\mu\nu}$ soit invariant sous la transformation suivante :

$$\delta b_{\mu\nu} = 2F_{\mu\nu} = 4\partial_{[\mu} A_{\nu]}. \quad (\text{IV.134})$$

Notons aussi que la transformation (IV.129) est la version étendue supersymétrique de la transformation de jauge (IV.115).

IV.2.2 Etude du secteur de jauge

Un multiplet chiral général de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ dans le superspace $\mathcal{N} = 2$, est donné sous la forme suivante :

$$\mathcal{A}(y, \theta, \tilde{\theta}) = A(y, \theta) + \sqrt{2}\tilde{\theta}^\alpha B_\alpha(y, \theta) + \tilde{\theta}^2 F(y, \theta). \quad (\text{IV.135})$$

où y^μ sont les coordonnées chirales du superspace de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ donnée comme suit :

$$y^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta} + i\tilde{\theta}\sigma^\mu\bar{\tilde{\theta}}. \quad (\text{IV.136})$$

et $A(y, \theta)$ et $F(y, \theta)$ sont deux superchamps chiraux de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ et $B_\alpha(y, \theta)$ un superchamp spinoriel de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$.

Comme dans (IV.43) le lagrangien du multiplet vectoriel de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ est donné en fonction d'un prepotentiel $\mathcal{F}$ comme suit [47, 49, 119] :

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{i}{2} \int d^2\theta d^2\tilde{\theta} \mathcal{F}(\mathcal{W}) + h.c. \quad (\text{IV.137})$$

où $\mathcal{W}$ un superchamp chiral de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ donné par la forme générale suivante :

$$\mathcal{W}(y, \theta, \tilde{\theta}) = Z(y, \theta) + \sqrt{2}\tilde{\theta}^\alpha \omega_\alpha(y, \theta) + \tilde{\theta}^2 \Phi(y, \theta). \quad (\text{IV.138})$$

Afin de déterminer les expressions de ce superchamp nous allons réduire la forme générale (IV.138) en comparant le lagrangien précédent (IV.137) avec le lagrangien de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ dans le superspace $\mathcal{N} = 1$ du modèle de *Antoniadis, Partouche*

et Taylor (IV.19). Pour cela on développe le prepotential $\mathcal{F}(\mathcal{W})$ comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{W}(y, \theta, \tilde{\theta})) &= \mathcal{F}(Z(y, \theta)) + \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathcal{W}} \right|_{\mathcal{A}=Z} \left[\sqrt{2} \tilde{\theta}^\alpha \omega_\alpha(y, \theta) + \tilde{\theta}^2 \Phi(y, \theta) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mathcal{W}^2} \right|_{\mathcal{A}=Z} \left[\sqrt{2} \tilde{\theta}^\alpha \omega_\alpha(y, \theta) + \tilde{\theta}^2 \Phi(y, \theta) \right]^2. \end{aligned} \quad (\text{IV.139})$$

alors on a :

$$\mathcal{F}(\mathcal{W}(y, \theta, \tilde{\theta})) \Big|_{\tilde{\theta}^2} = \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathcal{W}} \right|_{\mathcal{A}=Z} \Phi(y, \theta) - \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mathcal{W}^2} \right|_{\mathcal{A}=Z} \omega^\alpha \omega_\alpha. \quad (\text{IV.140})$$

Donc le lagrangien $\mathcal{L}_0$ (IV.137) devient :

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{i}{2} \int d^2\theta \left[\left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathcal{W}} \right|_{\mathcal{A}=Z} \Phi(y, \theta) - \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mathcal{W}^2} \right|_{\mathcal{A}=Z} \omega^\alpha \omega_\alpha \right] + h.c. \quad (\text{IV.141})$$

d'où la comparaison de ce lagrangien précédent (IV.141) avec le lagrangien du premier modèle dans ce chapitre (IV.19) donne les deux équations suivantes :

$$\left. \frac{i}{4} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mathcal{W}^2} \right|_{\mathcal{A}=Z} \omega^\alpha \omega_\alpha = \left. \frac{i}{4} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mathcal{W}^2} \right|_{\mathcal{A}=Z} W^\alpha W_\alpha, \quad (\text{IV.142})$$

$$-\frac{i}{2} \left[\left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathcal{W}} \right|_{\mathcal{A}=Z} \Phi(y, \theta) - \left. \frac{\partial \bar{\mathcal{F}}}{\partial \bar{\mathcal{W}}} \right|_{\mathcal{A}=Z} \bar{\Phi}(y, \bar{\theta}) \right] = -\frac{1}{2} \int d^2\theta \left[X \frac{\partial \bar{\mathcal{F}}}{\partial \bar{X}} - \bar{X} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X} \right] \quad (\text{IV.143})$$

à partir de la première équation nous avons :

$$\begin{cases} Z = X, \\ \omega_\alpha = i W_\alpha \end{cases}. \quad (\text{IV.144})$$

et la seconde équation donne :

$$\Phi(y, \theta) = -\frac{1}{4} \bar{D}^2 \bar{X}. \quad (\text{IV.145})$$

où nous avons utilisé la relation suivante :

$$\int d^2\bar{\theta} = -\frac{1}{4} \bar{D}^2. \quad (\text{IV.146})$$

Alors finalement le superchamp $\mathcal{W}$ s'écrit comme suit :

$$\mathcal{W}(y, \theta, \tilde{\theta}) = X(y, \theta) + i\sqrt{2} \tilde{\theta}^\alpha W_\alpha(y, \theta) + \tilde{\theta}^2 \left(-\frac{1}{4} \bar{D}^2 \bar{X} \right). \quad (\text{IV.147})$$

Notons que la force du superchamp vectoriel de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ $W_\alpha(y, \theta)$ satisfait à l'identité de Bianchi (III.23) dans le superspace $\mathcal{N} = 1$, ce qui implique que le superchamp vectoriel $\mathcal{N} = 2$ $\mathcal{W}(y, \theta, \tilde{\theta})$ doit satisfaire la version étendue dans le superspace $\mathcal{N} = 2$ de l'identité de Bianchi (III.23), au lieu de satisfaire la contrainte (IV.42). Donc, on a :

$$D^\alpha \tilde{D}_\alpha \mathcal{W} + \bar{D}_{\dot{\alpha}} \tilde{\bar{D}}^{\dot{\alpha}} \bar{\mathcal{W}} = 0. \quad (\text{IV.148})$$

Cette contrainte implique un premier terme trivial, car :

$$\begin{cases} \tilde{D}_\alpha X = 0, \\ \bar{\tilde{D}}^{\dot{\alpha}} \bar{X} = 0. \end{cases} \quad (\text{IV.149})$$

et un second terme identique à l'identité de Bianchi (III.23) dans le super espace de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$, car :

$$\begin{aligned} D^\alpha \tilde{D}_\alpha \left(i\sqrt{2}\tilde{\theta}^\alpha W_\alpha \right) + \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{\tilde{D}}^{\dot{\alpha}} \left(-i\sqrt{2}\bar{\tilde{\theta}}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}} \right) &= 0 \\ \implies D^\alpha W_\alpha = \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}}. \end{aligned} \quad (\text{IV.150})$$

et finalement un troisième terme donné par :

$$D^\alpha \tilde{D}_\alpha \left(-\frac{1}{4}\tilde{\theta}^2 \bar{D}^2 \bar{X} \right) + \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{\tilde{D}}^{\dot{\alpha}} \left(-\frac{1}{4}\bar{\tilde{\theta}}^2 D^2 X \right) = 0 \quad (\text{IV.151})$$

$$\implies -\frac{1}{2} \left(\tilde{\theta}^\alpha D_\alpha \bar{D}^2 \bar{X} - \bar{\tilde{\theta}}^{\dot{\alpha}} \bar{D}_{\dot{\alpha}} D^2 X \right) = 0. \quad (\text{IV.152})$$

la relation (IV.152) précédente, implique que les termes proportionnels à $\tilde{\theta}$ et $\bar{\tilde{\theta}}$ sont nuls séparément, alors on a :

$$\begin{cases} D_\alpha \bar{D}^2 \bar{X} = 0, \\ \bar{D}_{\dot{\alpha}} D^2 X = 0. \end{cases} \quad (\text{IV.153})$$

ce qui implique que le superchamp X est proportionnel à la seconde dérivée covariante supersymétrique d'un superchamp vectoriel V' de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$, comme suit :

$$X = \frac{1}{2} \bar{D}^2 V'. \quad (\text{IV.154})$$

Pour déterminer l'expression du superchamp X dans les coordonnées chirales, il suffit de multiplier la relation (IV.106) par $1/2$, et éliminer les champs C et χ en imposant l'invariance du superchamp X dans l'expression précédente (IV.154) sous la transformation de jauge suivante :

$$X \longrightarrow X + L. \quad (\text{IV.155})$$

où L est le superchamp tensoriel de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ dans l'expression (IV.113), et finalement il faut imposer sur le champ vectoriel A_μ l'invariance sous la transformation de jauge dans la relation (IV.114), ce qui indique que A_μ s'écrit comme suit :

$$A_\mu = \frac{1}{3!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} A^{\nu\rho\sigma}. \quad (\text{IV.156})$$

où,

$$\delta_{jauge} A^{\mu\nu\rho} = 3! \partial^\mu b^{\nu\rho}. \quad (\text{IV.157})$$

Alors la forme chirale du superchamp X dans les coordonnées chirales est la suivante :

$$X = z + \sqrt{2}\theta\lambda - \theta^2 (D - i\partial^\mu v_\mu). \quad (\text{IV.158})$$

Pour ne pas confondre la notation des champs A_μ et λ dans le superchamp X avec celle du superchamp vectoriel, nous allons changer les notations comme suit :

$$\begin{cases} A_\mu \longrightarrow v_\mu, \\ \lambda \longrightarrow \psi^x. \end{cases} \quad (\text{IV.159})$$

alors les expressions (IV.156) et (IV.158) deviennent respectivement :

$$v_\mu = \frac{1}{3!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} A^{\nu\rho\sigma}, \quad (\text{IV.160})$$

$$X = z + \sqrt{2}\theta\psi^x + \theta^2 F^x. \quad (\text{IV.161})$$

Donc l'expression du superchamp vectoriel $\mathcal{N} = 2$ $\mathcal{W}$ (IV.147) devient,

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(y, \theta, \tilde{\theta}) &= \sqrt{2}\theta\psi^x + \sqrt{2}\tilde{\theta}\lambda + \theta^2 F^x + i\sqrt{2}\tilde{\theta}\theta D + \tilde{\theta}^2 \bar{F}^{\bar{x}} + \dots \\ &= \sqrt{2}\theta^A \lambda_A + \frac{1}{\sqrt{2}} \theta^A \theta^B Y_{AB} \dots \end{aligned} \quad (\text{IV.162})$$

où $\theta^A = (\theta, \tilde{\theta})$, $\lambda^A \equiv (\psi^x, \lambda)$ et Y_{AB} les éléments de la matrice donnée comme suit :

$$Y = (Y_{AB}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}F^x & iD \\ iD & \sqrt{2}\bar{F}^{\bar{x}} \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.163})$$

Notons que le terme $\bar{D}^2 D^2 V'$ est réel et par conséquent la relation (IV.154) implique que les champs auxiliaires du superchamp vectoriel $\mathcal{W}$ sont aussi réels, cela permet la réalisation de la brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ à $\mathcal{N} = 1$, en déformant le superchamp $\mathcal{W}$ par un terme constant imaginaire.

Puisque le superchamp vectoriel $\mathcal{N} = 2$ $\mathcal{W}$ est un superchamp chirale dans la seconde supersymétrie $\mathcal{N} = 1$, on peut déterminer ses lois de transformation sous cette seconde supersymétrie en effectuant le changement suivant dans les lois de transformations du multiplet chirale de la supersymétrie qu'on a vu dans le chapitre précédent (II.351-II.353),

$$\begin{cases} \varphi \longrightarrow X \\ \psi_\alpha \longrightarrow iW_\alpha \\ F \longrightarrow -\frac{1}{4}\bar{D}^2 \bar{X}^2 \end{cases}. \quad (\text{IV.164})$$

D'où les lois de transformation du superchamp $\mathcal{W}$:

$$\tilde{\delta}X = i\sqrt{2}\tilde{\epsilon}W, \quad (\text{IV.165})$$

$$\tilde{\delta}W_\alpha = \frac{i}{2\sqrt{2}}\tilde{\epsilon}_\alpha \bar{D}^2 \bar{X} + \sqrt{2}(\sigma^\mu \tilde{\epsilon})_\alpha \partial_\mu X. \quad (\text{IV.166})$$

avec $\tilde{\epsilon}_\alpha$ un paramètre de la seconde supersymétrie.

On peut ajouter au lagrangien (IV.137) un terme de Fayet-Iliopoulos de façon analogue à ce qu'on a fait dans la section précédente dans le superspace de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ ce terme est donné comme suit :

$$\mathcal{L}_{FI} = \int d^2\theta d^2\tilde{\theta} \left(\frac{i\xi}{2\sqrt{2}} \theta\tilde{\theta} - \frac{e}{4} \tilde{\theta}^2 \right) \mathcal{W} + h.c.. \quad (\text{IV.167})$$

où ξ est un paramètre réel similaire à celui dans la relation (IV.24) et e un paramètre complexe. En utilisant la relation (IV.147) on peut montrer,

$$\int d^2\theta d^2\tilde{\theta} \left(\frac{e}{4} \tilde{\theta}^2 \right) \mathcal{W} + h.c. = \int d^2\theta \left(\frac{e}{4} X \right) + h.c..$$

Notons que seulement la partie réel du paramètre complexe e qui contribue l'action du lagrangien de Fayet-Iliopoulos, car la partie imaginaire du superchamp X est une dérivée totale dans l'expression (IV.161). Ainsi pour le second terme dans (IV.167) en utilisant les relations (IV.147) et (III.17) on a :

$$\int d^2\theta d^2\tilde{\theta} \left(\frac{i\xi}{2\sqrt{2}} \theta\tilde{\theta} \right) \mathcal{W} + h.c. = \int d^2\theta d^2\tilde{\theta} \left(\frac{i\xi}{2\sqrt{2}} \theta\tilde{\theta} \right) (\sqrt{2}i\tilde{\theta}W) + h.c. \quad (\text{IV.168})$$

$$\begin{aligned} &= - \int d^2\theta \frac{1}{2} \xi \theta W + h.c. = - \int d^2\theta \frac{1}{2} \xi \theta W + h.c. \\ &= - \int d^2\theta \frac{1}{2} \xi \theta \left(-\frac{1}{4} \bar{D}^2 DV \right) + h.c. \\ &= \frac{1}{8} \int d^2\theta \xi \theta \bar{D}^2 DV + h.c. \\ &= \frac{1}{8} \int d^4\theta \xi \theta (\bar{D}^2 \tilde{\theta}^2) DV + h.c. \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4\theta \xi \theta DV + h.c. = -\frac{1}{2} \int d^4\theta \xi (D\theta) V + h.c. \\ &= \frac{1}{2} \int d^4\theta \xi V + h.c. = \int d^4\theta \xi V. \end{aligned} \quad (\text{IV.169})$$

d'où l'expression du terme de Fayet-Iliopoulos s'écrit :

$$\mathcal{L}_{FI} = \int d^2\theta d^2\tilde{\theta} (\xi V) - \int d^2\theta \left(\frac{e}{4} X \right) + h.c.. \quad (\text{IV.170})$$

Pour introduire le terme de Fayet Iliopolous magnétique dual similaire à la relation (IV.52), il suffit de déformer le superchamp vectoriel $\mathcal{W}$ comme suit :

$$\mathcal{W}(y, \theta, \tilde{\theta}) \longrightarrow \mathcal{W}(y, \theta, \tilde{\theta}) + M \tilde{\theta}^2 \equiv \mathcal{W}(y, \theta, \tilde{\theta}) + \frac{1}{2\kappa} \tilde{\theta}^2. \quad (\text{IV.171})$$

Cette déformation n'affecte que la loi de transformation sous la seconde supersymétrie du jaugino λ d'après l'expression de $\mathcal{W}$ (IV.162) et les lois de transformations sous la seconde supersymétrie de X (IV.165) et W_α (IV.166), les lois de transformation de jaugino sont données par :

$$\tilde{\delta}\lambda_\alpha = \sqrt{2}\tilde{\epsilon}_\alpha \bar{F}^{\bar{x}} + \sqrt{2}(\sigma^\mu \tilde{\epsilon})_\alpha \partial_\mu z + \frac{1}{\sqrt{2\kappa}} \tilde{\epsilon}_\alpha. \quad (\text{IV.172})$$

Ce qui indique que la réalisation de la seconde supersymétrie est non linéaire, qui n'est pas le cas pour la première supersymétrie réalisée de façon linéaire, dans ce cas les lois de transformations X (IV.165) et W_α (IV.166) se changent comme suit :

$$\tilde{\delta}X = i\sqrt{2}\tilde{\epsilon}W, \quad (\text{IV.173})$$

$$\tilde{\delta}W_\alpha = \frac{i}{2\sqrt{2}}\tilde{\epsilon}_\alpha\bar{D}^2\bar{X} + \sqrt{2}(\sigma^\mu\tilde{\epsilon})_\alpha\partial_\mu X - \frac{i}{\sqrt{2}\kappa}\tilde{\epsilon}_\alpha. \quad (\text{IV.174})$$

D'où la matrice (IV.163) change aussi sa forme comme suit :

$$Y = (Y_{AB}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}F^x & iD \\ iD & \sqrt{2}\bar{F}^{\bar{x}} + \frac{1}{\sqrt{2}\kappa} \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.175})$$

Dans le cas de n multiplets vectoriel, le lagrangien de jauge s'écrit :

$$\mathcal{L}_{\text{jauge}} = \int d^2\theta d^2\tilde{\theta} \left[-\frac{i}{2}\mathcal{F}\left(\mathcal{W}^I + \frac{1}{2\kappa_I}\tilde{\theta}^2\right) + \left(\frac{i\xi_I}{2\sqrt{2}}\theta\tilde{\theta} - \frac{e_I}{4}\tilde{\theta}^2\right)\mathcal{W}^I \right] + h.c.. \quad (\text{IV.176})$$

avec $I = 1, \dots, n$. En utilisant le développement du prepotentiel suivant :

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{W}^I + \frac{1}{\sqrt{2}\kappa_I}\tilde{\theta}^2\right) = \mathcal{F}(\mathcal{W}^I) + \frac{1}{2\kappa_I}\frac{\partial\mathcal{F}(\mathcal{W}^I)}{\partial\mathcal{W}}\tilde{\theta}^2. \quad (\text{IV.177})$$

On remarque que le terme $\mathcal{F}(\mathcal{W}^I)$ dans ce développement, donne dans le lagrangien (IV.176) le lagrangien $\mathcal{L}_0$ (IV.43), alors on a :

$$\mathcal{L}_{\text{jauge}} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{FI}. \quad (\text{IV.178})$$

où les expressions des lagrangiens $\mathcal{L}_{FI}$ et $\mathcal{L}_0$ sont données comme suit :

$$\mathcal{L}_{FI} = \int d^2\theta d^2\tilde{\theta} [\xi_I V^I] - \int d^2\theta \left[\frac{e_I}{4}X^I + \frac{i}{4\kappa_I}\mathcal{F}_I(X^I) \right] + h.c., \quad (\text{IV.179})$$

$$\mathcal{L}_0 = \int d^2\theta d^2\tilde{\theta} K + \frac{1}{4} \int d^2 [f_{IJ} (W^\alpha)^I (W_\alpha)^J] + h.c.. \quad (\text{IV.180})$$

avec K le potentiel de kähler (IV.20) et f_{IJ} la fonction cinétique de jauge (IV.18),

$$K = \frac{i}{2} [X^I \bar{\mathcal{F}}_I(\bar{X}^J) - \bar{X}^I \mathcal{F}_I(X^J)], \quad (\text{IV.181})$$

$$f_{IJ} = -i\mathcal{F}_{IJ}(X^c). \quad (\text{IV.182})$$

IV.2.3 Etude du secteur de la matière

Pour donner une description du secteur de la matière dans une théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 2$, on peut utiliser la formulation basée sur un hypermultiplet (Q^1, Q^2) (II.200) qui est construit par les deux superchamps chiraux Q^1 et Q^2 de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ (II.192), ou utiliser la formulation basée sur le couple (Φ, L) , où Φ est un superchamp chiral et L un superchamp tensoriel de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$, et qu'on a discuté leur dualité dans la première partie de cette section.

Multiplet tensoriel de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$

La seconde formulation va être décrite par un superchamp chirale $\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2}$ de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ (appelé aussi superchamp tensoriel $\mathcal{N} = 2$), qui regroupe le couple des superchamps (Φ, L) de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ comme suit [49, 118] :

$$\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2}(y, \theta, \tilde{\theta}) = \mathbf{Y}(y, \theta) + \sqrt{2}\tilde{\theta}^\alpha \Psi_\alpha(y, \theta) - \tilde{\theta}^2 \left[\frac{i}{2} \Phi(y, \theta) + \frac{1}{4} \bar{D}^2 \bar{\mathbf{Y}}(y, \theta) \right]. \quad (\text{IV.183})$$

où $\mathbf{Y}(y, \theta)$ est un superchamp chirale auxiliaire de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$, introduit pour la fermeture de l'algèbre de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$, et qui est donné comme suit :

$$\mathbf{Y}(y, \theta) = \mathbf{y}(y) + \sqrt{2}\bar{\theta}\psi^y(y) + \theta^2 F^y(y). \quad (\text{IV.184})$$

et $\Psi_\alpha(y, \theta)$ est un superchamp spinoriel chirale de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ qu'on a vu dans l'expression (IV.127) qui décrit la solution de la contrainte (IV.108) vérifiée par le superchamp tensoriel L , et $y^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta} + i\tilde{\theta}\sigma^\mu\bar{\tilde{\theta}}$ sont les coordonnées chirales du superspace de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$. De façon similaire à la transformation de jauge (IV.129), on peut donner la version étendue supersymétrique $\mathcal{N} = 2$ de cette transformation pour le superchamp $\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2}(y, \theta, \tilde{\theta})$ comme suit :

$$\delta_{\text{jauge}} \mathcal{T}^{\mathcal{N}=2} = -\mathcal{W}'. \quad (\text{IV.185})$$

avec $\mathcal{W}'$ le superchamp vectoriel de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ (IV.147), qu'on a vu dans la sous-section précédente, où nous avons changé la notation des champs X à X' et W_α à W'_α . En utilisant la transformation de jauge (IV.185) du superchamp $\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2}$ on peut déterminer les transformations de jauge de ses superchamps $\mathbf{Y}$, Ψ_α et Φ comme suit :

$$\delta_{\text{jauge}} \mathbf{Y} = X' = \frac{1}{2} \bar{D}^2 \Delta', \quad (\text{IV.186})$$

$$\delta_{\text{jauge}} \Psi_\alpha = W'_\alpha = \frac{i}{4} \bar{D}^2 D_\alpha \Delta, \quad (\text{IV.187})$$

$$\delta_{\text{jauge}} \Phi = 0. \quad (\text{IV.188})$$

avec Δ et Δ' sont deux superchamps vectoriels de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$. On remarque que la transformation de jauge (IV.186) élimine le superchamp auxiliaire $\mathbf{Y}$ si on effectue le choix de la jauge des composantes de champs z' , $\psi^{x'}$ et $F^{x'}$ du superchamp X' (IV.161) suivant :

$$\begin{cases} z' &= -\mathbf{y}, \\ \psi^{x'} &= -\psi^y, \\ F^{x'} &= -F^y. \end{cases} \quad (\text{IV.189})$$

Alors pour que l'algèbre de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ reste fermée dans ce cas où $\mathbf{Y}$ est éliminé, on peut utiliser la transformation de jauge du superchamp spinoriel Ψ_α (IV.187). Cependant, et pour des raisons que nous allons voir dans ce qui suit de cette section, on peut garder la partie imaginaire du champ auxiliaire F^y de superchamp $\mathbf{Y}$ et éliminer toutes ses autres composantes par le choix la jauge suivante :

$$z' = -\mathbf{y}, \quad (\text{IV.190})$$

$$\psi^{x'} = -\psi^y, \quad (\text{IV.191})$$

$$ReF^{x'} = -ReF^y, \quad (IV.192)$$

$$ImF^{x'} = -2ImF^y. \quad (IV.193)$$

d'où nous avons l'expression suivante de $\mathbf{Y}$ jaugé :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^{jaugé} &= ImF^y + ImF^{x'} = -ImF^{x'} \\ &= \frac{i}{3!} \theta^2 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\mu A^{\nu\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (IV.194)$$

avec l'expression du tenseur $F^{\mu\nu\rho\sigma}$ de force du champ $A^{\nu\rho\sigma}$ suivante :

$$F^{\mu\nu\rho\sigma} = 4\partial^\mu A^{\nu\rho\sigma}. \quad (IV.195)$$

on a :

$$\mathbf{Y}^{jaugé} = \frac{i}{4!} \theta^2 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (IV.196)$$

D'autre part, les superchamps tensoriel $\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2}(\mathbf{Y}, \Psi, \Phi)$ (IV.183) et vectoriel $\mathcal{W}^{\mathcal{N}=2}$ (IV.147) ont la même forme d'écriture, alors on peut déterminer les lois de transformation du superchamp $\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2}$ sous la seconde supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ de façon similaire à ceux du superchamp $\mathcal{W}^{\mathcal{N}=2}$ dans les relations (IV.166), donc on a :

$$\tilde{\delta}\mathbf{Y} = \sqrt{2}\tilde{\epsilon}\Psi, \quad (IV.197)$$

$$\tilde{\delta}\Psi = -\frac{i}{\sqrt{2}}\tilde{\epsilon}\Phi - \frac{1}{2\sqrt{2}}\tilde{\epsilon}\bar{D}^2\bar{\mathbf{Y}} + i\sqrt{2}(\sigma^\mu\tilde{\epsilon})\partial_\mu\mathbf{Y}, \quad (IV.198)$$

$$\tilde{\delta}\Phi = 2\sqrt{2}\partial_\mu\Psi\tilde{\epsilon} + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{D}^2\bar{\Psi}\tilde{\epsilon}. \quad (IV.199)$$

En utilisant la relation (IV.127) entre les superchamps Ψ et L , on peut déterminer les lois de transformation sous la seconde supersymétrie pour le formalisme (Φ, L) comme suit :

$$\tilde{\delta}L = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\tilde{\epsilon}D\Phi - \tilde{\epsilon}\bar{D}\bar{\Phi}), \quad (IV.200)$$

$$\tilde{\delta}\Phi = -i\sqrt{2}\tilde{\epsilon}\bar{D}L. \quad (IV.201)$$

Donc le lagrangien cinétique tensoriel invariant sous la transformation supersymétrique précédente est donné par :

$$\mathcal{L}_{tens} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} H(L, \Phi, \bar{\Phi}), \quad (IV.202)$$

où H une fonction réelle qui vérifie l'équation de Laplace suivante :

$$H_{LL} + 2H_{\Phi\Phi} = 0. \quad (IV.203)$$

Couplage entre les multiplets tensoriel $\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2}$ et vectoriel $\mathcal{W}^{\mathcal{N}=2}$

A ce stade, et après avoir déterminé $\mathcal{L}_{tens}$ du multiplet tensoriel $\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2}$ qui décrit le formalisme (Φ, L) ainsi $\mathcal{L}_{jaugé}$ du multiplet vectoriel $\mathcal{W}^{\mathcal{N}=2}$ dans la sous-section précédente qui est invariant sous la transformation de jauge (IV.185), et puisque les

multipléts tensoriel et vectoriel contiennent des champs 2-forme $F_{\mu\nu}$ et $b_{\mu\nu}$ respectivement, il est possible de décrire leurs couplage en utilisant l'interaction de Chern-Simons suivante :

$$b \wedge F = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^a{}^{\mu\nu} b^{\rho\sigma}. \quad (\text{IV.204})$$

Ce couplage est décrit dans le superspace de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ par le lagrangien de Chern-Simons invariant sous la transformation de jauge (IV.185), comme suit [49] :

$$\mathcal{L}_{CS} = -i2g_I \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \mathcal{T}^{\mathcal{N}=2} \left(\mathcal{W}^I + \frac{1}{2\kappa_I} \tilde{\theta}^2 \right) + h.c. \quad (\text{IV.205})$$

$$= -g_I \int d^2\theta \left(\Phi X^I + 2\Psi W^I \frac{i}{\kappa_I} \mathbf{Y} \right) + h.c. \quad (\text{IV.206})$$

$$= 2g_I \int d^2\theta d^2\bar{\theta} LV^I - g_I \int d^2\theta \left(\Phi X^I + 2\Psi W^I + \frac{i}{\kappa_I} \mathbf{Y} \right) + h.c. \quad (\text{IV.207})$$

$$= -\frac{1}{2} g_I \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^I{}^{\mu\nu} b_{\rho\sigma} + \dots \quad (\text{IV.208})$$

avec $I = 1, \dots, n$ et g_I les constantes de couplage du groupe $U(1)^n$. On remarque que le superchamp auxiliaire $\mathbf{Y}$ dans la lagrangien de Chern-Simons précédent contribue grâce à la déformation $1/\kappa$ sur le superchamp vectoriel de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$. Cela implique comme nous allons voir dans la prochaine section, d'imposer une contrainte sur le nombre minimal possible des superchamps vectoriel $\mathcal{W}^I$ pour réaliser la brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ en couplage avec le secteur de la matière.

Donc le lagrangien totale de ce modèle invariant sous les transformations supersymétriques (IV.197-IV.201), et (IV.173), (IV.174), est la somme de $\mathcal{L}_{\text{jauge}}$ (IV.178), $\mathcal{L}_{\text{tens}}$ (IV.202) et $\mathcal{L}_{CS}$ (IV.205) :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{jauge}} + \mathcal{L}_{\text{tens}} + \mathcal{L}_{CS}. \quad (\text{IV.209})$$

Comme on a vu dans la première partie de cette section, la dualité entre le superchamp tensoriel L et un superchamp chirale Φ' , qui donne la possibilité de remplacer L par Φ' et $\bar{\Phi}'$ permet aussi de passer le lagrangien précédent qui décrit le formalisme (Φ, L) au formalisme qui utilise un hypermultiplet où on peut utiliser la transformation de Legendre analogue à celle dans l'équation (IV.122) [120, 121] :

$$K(\Phi' + \bar{\Phi}', \Phi', \bar{\Phi}') = H(G, \Phi, \bar{\Phi}) - G(\Phi' + \bar{\Phi}'). \quad (\text{IV.210})$$

avec K le potentiel de kähler qui décrit la partie cinétique de l'hypermultiplet, et H est la fonction dans le lagrangien $\mathcal{L}_{\text{tens}}$ (IV.202) qui décrit la partie cinétique du superchamp tensoriel $\mathcal{N} = 2$, et G est une fonction de $(\Phi' + \bar{\Phi}')$ similaire au second terme dans l'expression (IV.122). Alors l'équation du mouvement analogue à celle dans l'expression (IV.119) est donnée par :

$$\frac{\partial H}{\partial G} = \Phi' + \bar{\Phi}' - 2g_I V^I. \quad (\text{IV.211})$$

où nous avons un nouveau terme due au couplage du multiplet tensoriel $\mathcal{N} = 2$ et le multiplet vectoriel $\mathcal{N} = 2$ via l'interaction de Chern-Simons (IV.207), qui indique que le terme cinétique de cette théorie est décrit par un potentiel de kähler identique à

celui qu'on a vu dans l'expression (III.35).

Hypermultiplet de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$

Maintenant nous allons décrire le secteur de la matière de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ par un hypermultiplet (Q^1, Q^2) qui peut être vu comme deux copies de multiplets chiraux Q^1 et Q^2 de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$, le terme cinétique de ce hypermultiplet est décrit par un potentiel de kähler canonique donné par :

$$K(Q^u, Q^{\bar{u}}) = \bar{Q}^1 Q^1 + \bar{Q}^2 Q^2. \quad (\text{IV.212})$$

où l'expression des superchamps chiraux de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ est :

$$Q^u \equiv q^u + \sqrt{2}\chi^{q^u} + \theta^2 F^{q^u}, \quad u = 1, 2. \quad (\text{IV.213})$$

Le lagrangien cinétique de l'hypermultiplet qui dépends du potentiel de kähler (IV.212) précédent est donné par :

$$\mathcal{L}_{hyper} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \left[\bar{Q}^1 \exp(-2g_I V^I) Q^1 + \bar{Q}^2 \exp(2g_I V^I) Q^2 \right] + m \int d^2\theta Q^1 Q^2. \quad (\text{IV.214})$$

où le second terme quadratique du lagrangien est le terme de masse (superpotentiel), et m un paramètre de masse. Cependant l'interaction de Chern-Simons qui décrit le couplage du secteur de jauge par le multiplet vectoriel de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ avec l'hypermultiplet du secteur de la matière est donnée par :

$$\mathcal{L}'_{CS} = g_I \int d^2\theta \left[i\sqrt{2}X^I Q^1 Q^2 - \frac{i}{\kappa_I} \mathbf{Y} \right] + h.c.. \quad (\text{IV.215})$$

Notons que la dualité ne touche pas le secteur de jauge $\mathcal{L}_{jauge}$ (IV.178) dans les deux formalismes, alors le lagrangien total dual à celui basé sur le multiplet tensoriel (IV.209) est donné par :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{jauge} + \mathcal{L}_{hyper} + \mathcal{L}'_{CS}. \quad (\text{IV.216})$$

ce lagrangien doit être invariant sous les lois de transformation supersymétrique (IV.197-IV.201), et (IV.173), (IV.174) Pour cela on doit changer Q par le changement de variable [122] :

$$\begin{cases} Q^1 = \sqrt{\frac{\Phi}{\sqrt{2}}} e^{-\Phi'}, \\ Q^2 = -\sqrt{\frac{\Phi}{\sqrt{2}}} e^{\Phi'}. \end{cases} \quad (\text{IV.217})$$

Ensuite introduire le multiplet tensoriel L de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ par la fonction suivante :

$$H(L, \Phi, \bar{\Phi}) = \sqrt{L^2 + 2\Phi\bar{\Phi}} - L \ln \left(L + \sqrt{L^2 + 2\Phi\bar{\Phi}} \right). \quad (\text{IV.218})$$

qui est invariante sous les transformations supersymétrique $\mathcal{N} = 2$, car elle vérifie l'équation de Laplace (IV.203). De plus le terme de masse $\frac{im}{\sqrt{2}}\Phi$ qui provient du superpotentiel est aussi invariant sous les transformations de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$, ce qui indique que le lagrangien total (IV.216) de ce formalisme dual est invariant sous

les transformations supersymétrique (IV.197-IV.201), et (IV.173), (IV.174).

La contribution du superchamp auxiliaire $\mathbf{Y}$ dans le lagrangien total (IV.216) est donnée par :

$$\mathcal{L}_{\mathbf{Y}} = g_I \int d^2\theta \left(-\frac{i}{\kappa_I} \mathbf{Y} \right) + h.c. = \frac{2}{4!} \frac{g_I}{\kappa_I} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (\text{IV.219})$$

d'où l'équation du mouvement du champ $F^{\mu\nu\rho\sigma}$ donne la contrainte suivante :

$$\frac{g_I}{\kappa_I} = 0, \quad (\text{IV.220})$$

qui devient pour le cas d'un superchamp vectoriel décrit par un seul groupe $U(1)$ de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ comme suit :

$$\frac{g}{\kappa} = 0. \quad (\text{IV.221})$$

Alors si $g = 0$, dans ce cas il n'existe pas de couplage entre le secteur de jauge et le secteur de la matière, donc l'absence de l'interaction de Chern-Simons entre le multiplet vectoriel et l'hypermultiplet, ce qui décrit le modèle de jauge pure du papier de *Antoniadis, Partouche et Taylor* qu'on a vu dans la première section de ce chapitre. Dans le cas où $1/\kappa = 0$, le terme de Fayet-Iliopolous magnétique est nul et par conséquent la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ est brisée complètement à $\mathcal{N} = 0$.

Donc pour avoir un couplage et un terme de Fayet-iliopoulos magnétique, il faut utiliser au minimum deux superchamps vectoriels décrits par le groupe de jauge $U(1) \times U(1)$, et c'est ce que nous allons faire dans la prochaine sous-section où nous allons étudier la brisure de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ du modèle minimale $U(1) \times U(1)$ du couplage de deux superchamps vectoriels à un seul hypermultiplet. Notons que l'objectif de la première contribution dans le quatrième chapitre est de surmonter le problème du choix d'un seul superchamp vectoriel qu'on a vu dans cette partie.

IV.2.4 Brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ à deux échelles différentes

Pour la réalisation de la brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ dans ce modèle, il est nécessaire de déterminer le potentiel scalaire, mais avant cela, nous allons déterminer l'expression de la valeur moyenne dans le vide du Goldstino pour le cas de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$, qui s'écrit en fonction du potentiel scalaire, et qui sera utile dans ce qui suit pour le cas des deux Goldstinos (goldstini) de ce modèle minimale $U(1) \times U(1)$.

Goldstino

Comme on a déjà vu dans le premier chapitre pour le cas de la brisure de la symétrie de jauge, on peut choisir la paramétrisation non-linéaire, appelée transformation de Kibble suivante :

$$\exp \left(i \frac{\xi}{\langle \varphi \rangle} \right) (\langle \varphi \rangle + \dots) = \langle \varphi \rangle + i\xi. \quad (\text{IV.222})$$

où le champ ξ est le Goldstone qui correspond à la fluctuation du potentiel scalaire de Higgs dans la direction plate, et φ un scalaire avec une valeur moyenne dans le vide non nul, ce qui permet de déviser le terme dans l'exponentiel par $\langle \varphi \rangle$ pour avoir une dimension nulle. De façon similaire pour le cas de la brisure de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$

où les champs auxiliaires F et D ont une valeur moyenne non nulle dans le vide comme pour $\langle\varphi\rangle$, la paramétrisation non linéaire s'écrit dans ce cas :

$$\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2N}}\eta^\alpha Q_\alpha\right)(\theta^2 F) = \sqrt{2}\frac{1}{N}\eta^\alpha\theta_\alpha F + \dots, \quad (\text{IV.223})$$

$$\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2N}}\eta^\alpha Q_\alpha\right)(\theta_\alpha D) = \sqrt{2}\frac{1}{N}\eta_\alpha D + \dots \quad (\text{IV.224})$$

avec η^α le Goldstino et N la constante de normalisation où on a divisé le terme d'exponentielle dans les relations (IV.223, IV.223) par N pour le rendre sans dimension de façon similaire pour $\langle\varphi\rangle$ dans (IV.222), cette constante de normalisation est donnée par :

$$N = \sqrt{\langle\mathcal{V}_{scal}\rangle} = \sqrt{F\bar{F} + \frac{1}{2}D^2}. \quad (\text{IV.225})$$

D'autre part, la comparaison de la relation (IV.223) avec l'expression du superchamp chiral (II.343) de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ donne :

$$\frac{1}{N}\eta_\alpha F = \psi_\alpha. \quad (\text{IV.226})$$

et la comparaison de (IV.224) avec l'expression du superchamp vectoriel (II.373) de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ donne :

$$\frac{1}{\sqrt{2N}}\eta_\alpha D = i\lambda_\alpha. \quad (\text{IV.227})$$

Donc l'expression du Goldstino est déterminé en faisant la sommation des relations (IV.226) et (IV.227) après la multiplication de (IV.226) par $\bar{F}$ et (IV.227) par $\frac{D}{\sqrt{2}}$ comme suit :

$$\eta_\alpha = \frac{1}{N}\left(\bar{F}\psi_\alpha + \frac{i}{\sqrt{2}}D\lambda_\alpha\right), \quad (\text{IV.228})$$

d'où la transformation supersymétrique du Goldstino a une valeur moyenne dans le vide égale à la valeur moyenne dans le vide du potentiel scalaire :

$$\langle\delta\eta_\alpha\rangle = \langle\mathcal{V}_{scal}\rangle = F\bar{F} + \frac{1}{2}D^2. \quad (\text{IV.229})$$

nous allons voir que la relation (IV.229) sera utile pour la réalisation de la brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ en effectuant la même analyse pour la paramétrisation non-linéaire des deux supersymétries du modèle, à condition que la matrice des Goldstini est du rang un.

Potentiel scalaire de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$

Pour déterminer le potentiel scalaire de ce modèle qui est donné en fonction des champs auxiliaires du multiplet vectoriel $\mathcal{N} = 2$ et l'hypermultiplet $\mathcal{N} = 2$ par l'expression suivante :

$$\mathcal{V}_S = \bar{F}^{q^1} F^{q^1} + \bar{F}^{q^2} F^{q^2} + h^{IJ}\bar{F}^{x^I} F^{x^J} + \frac{1}{2}h^{IJ}D_I D_J, \quad (\text{IV.230})$$

il faut déterminer les expressions des champs auxiliaires précédents à partir de leurs équations du mouvement, en utilisant le lagrangien total (IV.216) qui est donné par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \int d^4\theta \left(\bar{Q}^1 e^{-2g_I V^{Ia}} Q^1 + \bar{Q}^2 e^{2g_I V^I} Q^2 \right) + \int d^4\theta \xi_I V^I \\ & + \frac{i}{2} \int d^4\theta \left[\bar{\mathcal{F}}_I \left(\bar{X}^J \right) X^I - \mathcal{F}_I \left(X^J \right) \bar{X}^I \right] \\ & + \int d^2\theta \left(m + \sqrt{2}ig_I X^I \right) Q^1 Q^2 + h.c. - \frac{i}{4} \int d^2\theta \mathcal{F}_{IJ} \left(X^K \right) W^I W^J + h.c. \\ & - \int d^2\theta \left(\frac{e}{4} X^I + \frac{i}{4k_I} \mathcal{F}_I \left(X^J \right) \right) + h.c.. \end{aligned} \quad (IV.231)$$

à partir de l'expression du lagrangien précédent, nous allons déterminer les expressions des champs $\bar{F}^{\bar{q}^1}$ et F^{q^1} en effectuant le calcul suivant :

$$\begin{aligned} & \int d^4\theta \left(\bar{Q}^1 e^{-2g_I V^I} Q^1 \right) + \int d^2\theta \left(m + \sqrt{2}ig_I x^I \right) Q^1 Q^2 + h.c. \quad (IV.232) \\ = & \int d^4\theta \left[\bar{Q}^1 \left(1 - 2g_I V^I + \dots \right) Q^1 \right] + \int d^2\theta \left(m + \sqrt{2}ig_I x^I \right) Q^1 Q^2 + h.c. \\ \supset & \int d^4\theta \left[\left(\bar{\theta}^2 \bar{F}^{\bar{q}^1} \right) (1) \left(\theta^2 F^{q^1} \right) \right] + \int d^2\theta \left(m + \sqrt{2}ig_I x^I \right) \left(\theta^2 F^{q^1} \right) q^2 + h.c. \quad (IV.233) \\ = & \bar{F}^{\bar{q}^1} F^{q^1} + \left(m + \sqrt{2}ig_I x^I \right) F^{q^1} q^2 + h.c.. \quad (IV.234) \end{aligned}$$

d'où l'équation du mouvement de $\bar{F}^{\bar{q}^1}$:

$$\bar{F}^{\bar{q}^1} + \left(m + \sqrt{2}ig_I x^I \right) q^2 = 0 \quad (IV.235)$$

$$\Rightarrow \bar{F}^{\bar{q}^1} = - \left(m + \sqrt{2}ig_I x^I \right) q^2 = -m_{eff} q^2. \quad (IV.236)$$

Alors pour F^{q^1} on a :

$$F^{q^1} = -\bar{m}_{eff} \bar{q}^2. \quad (IV.237)$$

avec $m_{eff} = m + i\sqrt{2}g_I x^I$. De façon analogue au calcul précédent, on peut déterminer l'équation du mouvement de $\bar{F}^{\bar{q}^2}$, donc on a,

$$\bar{F}^{\bar{q}^2} + \left(m + \sqrt{2}ig_I x^I \right) q^1 = 0, \quad (IV.238)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{F}^{\bar{q}^2} &= - \left(m + \sqrt{2}ig_I x^I \right) q^1 \\ &= -m_{eff} q^1. \end{aligned} \quad (IV.239)$$

et pour F^{q^2} on a :

$$F^{q^2} = -\bar{m}_{eff} \bar{q}^1. \quad (IV.240)$$

Déterminons maintenant l'expression de $\bar{F}^{\bar{x}^I}$ et F^{x^I} , à partir du calcul suivant :

$$\frac{i}{2} \int d^4\theta \left(\bar{\mathcal{F}}_I \left(\bar{X}^J \right) X^I - \mathcal{F}_I \left(X^J \right) \bar{X}^I \right) + \int d^2\theta \left(-\frac{e_I}{4} \right) X^I \quad (IV.241)$$

$$\begin{aligned}
& + \int d^2\theta \left(\sqrt{2}ig_I \right) X^I Q^1 Q^2 + \int d^2\theta \left(-\frac{i}{4\kappa_I} \right) \mathcal{F}_I + h.c. \\
\supset & \frac{i}{2} \left[\bar{\mathcal{F}}_{JI} \bar{F}^{\bar{x}^J} F^{x^I} - \mathcal{F}_{JI} F^{x^J} \bar{F}^{\bar{x}^I} \right] - \frac{e_I}{4} F^{x^I} \\
& + \sqrt{2}ig_I F^{x^I} q^1 q^2 + h.c - \frac{i}{4\kappa_K} \mathcal{F}_{IK} F^{x^I} + h.c. \\
= & \frac{i}{2} \left[\bar{\mathcal{F}}_{JI} \bar{F}^{\bar{x}^J} F^{x^I} - \mathcal{F}_{IJ} F^{x^I} \bar{F}^{\bar{x}^J} \right] - \frac{e_a}{4} F^{x^a} + \sqrt{2}ig_I F^{x^I} q^1 q^2 + h.c \quad (\text{IV.242}) \\
& - \frac{i}{4\kappa_K} \mathcal{F}_{IJ} F^{x^I} + h.c..
\end{aligned}$$

d'où l'équation du mouvement de $\bar{F}^{\bar{x}^I}$ est :

$$\begin{aligned}
& \frac{i}{2} \left[\bar{\mathcal{F}}_{JI} \bar{F}^{\bar{x}^J} - \mathcal{F}_{IJ} \bar{F}^{\bar{x}^J} \right] - \frac{e_I}{4} + \sqrt{2}ig_I q^1 q^2 - \frac{i}{4\kappa_K} F_{ac} = 0 \\
\Rightarrow & \frac{i}{2} \left[\bar{\mathcal{F}}_{JI} - \mathcal{F}_{IJ} \right] \bar{F}^{\bar{x}^J} = \frac{e_I}{4} - \sqrt{2}ig_I q^1 q^2 + \frac{i}{4\kappa_K} \mathcal{F}_{IK} \\
\Rightarrow & h_{IJ} \bar{F}^{\bar{x}^J} = \frac{e_I}{4} - \sqrt{2}ig_I q^1 q^2 + \frac{i}{4\kappa_K} \mathcal{F}_{IK}.
\end{aligned} \quad (\text{IV.243})$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow & \bar{F}^{\bar{x}^a} = h^{IJ} \left[\frac{e_J}{4} - \sqrt{2}ig_J q^1 q^2 + \frac{i}{4\kappa_J} \mathcal{F}_{JK} \right] \\
= & h^{IJ} \left[\frac{e_J}{4} - \sqrt{2}ig_J q^1 q^2 + \frac{i}{4\kappa_K} (\text{Re} \mathcal{F}_{JK}) \right] - \frac{1}{4\kappa_I}.
\end{aligned} \quad (\text{IV.244})$$

avec $h_{IJ} = \frac{i}{2} [\bar{\mathcal{F}}_{JI} - \mathcal{F}_{IJ}] = \text{Im} F_{IJ}$, alors l'expression de F^{x^I} est :

$$F^{x^I} = h^{IJ} \left(\frac{\bar{e}_J}{4} + i\sqrt{2}g_I \bar{q}^{\bar{1}} \bar{q}^{\bar{2}} - i \frac{\text{Re} \mathcal{F}_{IK}}{4\kappa_K} \right) - \frac{1}{4\kappa_I}. \quad (\text{IV.245})$$

Finalement pour les expressions des champs auxiliaires D^I , on peut montrer que sa partie dans le lagrangien est décrite par le terme suivant :

$$\mathcal{L}_{D\text{-term}} = \frac{1}{2} h_{ab} D^a D^b + \left[\frac{\xi_a}{2} + g_I \left(|q^2|^2 - |q^1|^2 \right) \right] D^a. \quad (\text{IV.246})$$

d'où son équation du mouvement est donnée par :

$$h_{IJ} D^J + \left[\frac{\xi_I}{2} + g_I \left(|q^2|^2 - |q^1|^2 \right) \right] = 0, \quad (\text{IV.247})$$

et l'expression de D^I est :

$$D^a = -h^{IJ} \left[\frac{\xi_J}{2} + g_J \left(|q^2|^2 - |q^1|^2 \right) \right]. \quad (\text{IV.248})$$

Alors l'expression du potentiel scalaire de ce modèle est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_S = & |m_{eff}|^2 \left(|q^1|^2 - |q^2|^2 \right) + h^{IJ} \left(i\sqrt{2}g_I q^1 q^2 + \frac{e_I}{4} - i\frac{Re\mathcal{F}_{IK}}{4\kappa_K} \right) \left(i\sqrt{2}g_I \bar{q}^1 \bar{q}^2 + \frac{\bar{e}_J}{4} - i\frac{Re\bar{\mathcal{F}}_{IL}}{4\kappa_L} \right) \\ & + \frac{1}{8} h^{IJ} \left[-2g_I \left(|q^1|^2 - |q^2|^2 \right) + \xi_I \right] \left[-2g_J \left(|q^1|^2 - |q^2|^2 \right) + \xi_J \right]. \end{aligned} \quad (\text{IV.249})$$

Brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$

En minimisant le potentiel scalaire précédent par rapport au scalaire q^1 , q^2 et x^I , on a :

$$\frac{\partial \mathcal{V}_S}{\partial q^1} = |m_{eff}|^2 \bar{q}^1 - i\sqrt{2}g_I F^{x^I} q^2 + g_I D^I \bar{q}^1 = 0, \quad (\text{IV.250})$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}_S}{\partial q^2} = |m_{eff}|^2 \bar{q}^2 - i\sqrt{2}g_I F^{x^I} q^1 + g_I D^I \bar{q}^2 = 0, \quad (\text{IV.251})$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}_S}{\partial x^I} = \frac{i}{2} \mathcal{F}_{IJK} \left[F^{x^I} \left(\bar{F}^{\bar{x}^K} + \frac{1}{2\kappa_K} \right) + \frac{1}{2} D^I D^K \right] - i\sqrt{2}g_I \left(F^{q^1} q^2 + F^{q^2} q^1 \right) = 0. \quad (\text{IV.252})$$

Notons que la valeur moyenne des scalaire q^I est nulle ($\langle q^I \rangle = 0$) car le secteur de jauge décrit par le groupe $U(1) \times U(1)$ reste intacte, ce qui implique que les deux équations (IV.250) et (IV.251) sont vérifiées et que le second terme de l'équation (IV.252) est nul, d'où on peut l'écrire sous la forme réduite suivante :

$$\mathcal{F}_{IJK} \left[F^{x^I} \left(\bar{F}^{\bar{x}^K} + \frac{1}{2\kappa_K} \right) + \frac{1}{2} D^I D^K \right] = 0. \quad (\text{IV.253})$$

À partir des lois de transformations (II.351-II.353) et (II.375-II.378), on peut déterminer les lois de transformation sous la première supersymétrie des champs fermionique qui décrivent le secteur de la matière de ce modèle, comme suit :

$$\delta \psi^{x^I} = \sqrt{2}\epsilon F^{x^I}, \quad (\text{IV.254})$$

$$\delta \lambda^I = i\epsilon D^I. \quad (\text{IV.255})$$

et en utilisant les lois de transformation (IV.165), (IV.166), les lois de transformation sous la seconde supersymétrie des champs fermionique sont données par :

$$\tilde{\delta} \psi^{x^I} = i\tilde{\epsilon} D^I, \quad (\text{IV.256})$$

$$\tilde{\delta} \lambda^I = \left(\sqrt{2}\bar{F}^{\bar{x}^K} + \frac{1}{\sqrt{2\kappa_I}} \right) \tilde{\epsilon}. \quad (\text{IV.257})$$

On peut écrire les transformations précédentes (IV.254-IV.257) et de façon identique à loi de transformation (IV.62) comme suit :

$$\delta \lambda_A = Y_{AB} \epsilon^B. \quad (\text{IV.258})$$

avec Y_{AB} est donnée dans l'expression (IV.171). De façon similaire à l'analyse qu'on a fait pour les relations (IV.223), (IV.224) pour paramétrisation non-linéaire de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$, nous allons tout d'abord déterminer dans ce modèle la paramétrisation

non-linéaire de la première supersymétrie, qui est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} & \exp \left(\frac{1}{\sqrt{2}N_1} \eta_1^\alpha Q_\alpha \right) \left[\theta^2 F^{x^I} + i\sqrt{2}\tilde{\theta}\theta D^I + \tilde{\theta}^2 \bar{F}^{\bar{x}^I} \right] \\ &= \sqrt{2} \frac{1}{N_1} \eta_1^\alpha \theta_\alpha F^{x^I} + \frac{i}{N_1} \eta_1^\alpha \tilde{\theta}_\alpha D^I + \dots, \end{aligned} \quad (\text{IV.259})$$

$$\exp \left(\frac{1}{\sqrt{2}N_1} \eta_1^\alpha Q_\alpha \right) \left[\theta^2 F^{q^u} \right] = \sqrt{2} \frac{1}{N_1} \eta_1^\alpha \theta_\alpha F^{q^u} + \dots \quad (\text{IV.260})$$

où la constante de normalisation N_1 est donnée par :

$$N_1 = \sqrt{g_{u\bar{v}} F^{q^u} \bar{F}^{\bar{q}^{\bar{v}}} + h_{IJ} \bar{F}^{\bar{x}^I} F^{x^J} + \frac{1}{2} h_{IJ} D^I D^J}. \quad (\text{IV.261})$$

En comparant l'expression de N_1 (IV.261) avec l'expression du multiplet vectoriel $\mathcal{N} = 2$ (IV.162) et chiral $\mathcal{N} = 1$ (IV.213), on a les relations suivantes :

$$\frac{1}{N_1} \eta_1^\alpha F^{x^I} = \psi_\alpha^{x^I}, \quad (\text{IV.262})$$

$$\frac{i}{N_1} \eta_1^\alpha D^J = \sqrt{2} \lambda_\alpha^J, \quad (\text{IV.263})$$

$$\frac{1}{N_1} \eta_1^\alpha F^{q^u} = \chi_\alpha^u. \quad (\text{IV.264})$$

Donc l'expression du Goldstino de la première supersymétrie est déterminée en faisant la sommation des relations (IV.262), (IV.263) et (IV.264) après la multiplication de (IV.262) par $h_{IJ} \bar{F}^{\bar{x}^I}$ et (IV.263) par $-\frac{i}{2} h_{IJ} D^J$ et (IV.264) par $g_{u\bar{v}} \bar{F}^{\bar{q}^{\bar{v}}}$,

$$\eta_1^\alpha = \frac{1}{N_1} \left(h_{IJ} \bar{F}^{\bar{x}^I} \psi_\alpha^{x^J} - \frac{i}{\sqrt{2}} h_{IJ} D^J \lambda_\alpha^J + g_{u\bar{v}} \bar{F}^{\bar{q}^{\bar{v}}} \chi_\alpha^u \right). \quad (\text{IV.265})$$

Pour déterminer l'expression du seconde Goldstino η_2^α , nous allons utiliser la paramétrisation non-linéaire de la seconde supersymétrie suivante :

$$\begin{aligned} & \exp \left(\frac{1}{\sqrt{2}N_2} \eta_2^\alpha \tilde{Q}_\alpha \right) \left[\theta^2 F^{x^I} + i\sqrt{2}\tilde{\theta}\theta D^I + \tilde{\theta}^2 \left(\bar{F}^{\bar{x}^I} + \frac{1}{2\kappa_I} \right) \right] \\ &= \sqrt{2} \frac{1}{N_2} \eta_2^\alpha \tilde{\theta}_\alpha \left(\bar{F}^{\bar{x}^I} + \frac{1}{2\kappa_I} \right) + \frac{i}{N_2} \eta_2^\alpha \tilde{\theta}_\alpha D^I + \dots, \end{aligned} \quad (\text{IV.266})$$

$$\exp \left(\frac{1}{\sqrt{2}N_2} \eta_2^\alpha \tilde{Q}_\alpha \right) \left[-\Omega_v^{\bar{u}} \tilde{\theta}^2 \tilde{F}^{q^u} \right] = -\sqrt{2} \Omega_v^{\bar{u}} \frac{1}{N_2} \eta_2^\alpha \tilde{\theta}_\alpha \tilde{F}^{q^u} + \dots \quad (\text{IV.267})$$

où $\tilde{F}^{q^u} = -i \left(m - \sqrt{2} g_I \bar{x}^I \right) k^u$ et $k^u = i \left(-q^1, q^2 \right)$. Notons que les lois de transformation de l'hypermultiplet (Q^1, Q^2) sous la seconde supersymétrie est donné par [49] :

$$\tilde{\delta} Q^u = -\frac{1}{2} \bar{\Omega}^{uv} \bar{D}^2 \left[\left(\bar{Q}_v + 2i g_I \bar{k}_v V^I \right) \tilde{\epsilon} \tilde{\theta} \right] - 2i m k^u \tilde{\epsilon} \tilde{\theta}. \quad (\text{IV.268})$$

et en fonction des composantes des champs, les lois de transformation de la seconde supersymétrie sont données par :

$$\tilde{\delta} q^u = -\sqrt{2}\bar{\Omega}_v^u \bar{\epsilon} \bar{\chi}^{\bar{q}^v}, \quad (\text{IV.269})$$

$$\tilde{\delta} \chi^{q^u} = \sqrt{2}\tilde{F}^{Q^U} + i\sqrt{2}\bar{\Omega}_v^u \sigma^\mu D_\mu \bar{q}^{\bar{v}} \bar{\epsilon}. \quad (\text{IV.270})$$

avec $\Omega_{uv} = \varepsilon_{uv}$ est un champ 2-forme définit par la variété hyperkählérienne [122, 123], et la dérivée covariante D_μ est donné comme suit :

$$D_\mu \bar{q}^{\bar{v}} = \partial_\mu \bar{q}^{\bar{v}} + g_I A_\mu^I \bar{k}^{\bar{v}}. \quad (\text{IV.271})$$

Alors l'expression de l'hypermultiplet invariante sous les lois de transformation précédente est donnée par :

$$\bar{H}^{\bar{u}} = \bar{Q}^{\bar{u}} - \tilde{\theta}^\alpha \Omega_v^{\bar{u}} D_\alpha Q^{q^v} - \tilde{\theta}^2 \Omega_v^{\bar{u}} \left[-i \left(m - \sqrt{2} g_I \bar{X}^I \right) k^v \right]. \quad (\text{IV.272})$$

avec $X^I = \frac{1}{2} D^2 V^I$. Notons que l'expression précédente (IV.272) nous indique qu'on peut écrire les lois de transformation sous la seconde supersymétrie comme suit :

$$\tilde{\delta} Q^u = -\bar{\Omega}_v^u \bar{\epsilon}_{\dot{\alpha}} \bar{D}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\bar{q}^v}, \quad (\text{IV.273})$$

$$\tilde{\delta} \bar{Q}^{\bar{u}} = -\Omega_v^{\bar{u}} \bar{\epsilon} D Q^{q^v}, \quad (\text{IV.274})$$

$$\tilde{\delta} D_\alpha Q^{q^v} = 2\bar{\epsilon}_\alpha \left[-i \left(m - \sqrt{2} g_I \bar{X}^I \right) k^v \right] + i 2 \Omega_v^u \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}} D_\mu \bar{Q}^{\bar{u}}, \quad (\text{IV.275})$$

$$\tilde{\delta} \bar{D}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\bar{q}^v} = 2\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}} \left[i \left(m - \sqrt{2} g_I X^I \right) \bar{k}^{\bar{v}} - i 2 \bar{\Omega}_v^{\bar{u}} \bar{\sigma}^{\mu\alpha\dot{\alpha}} \bar{\epsilon}_\alpha D_\mu Q^{\bar{u}} \right]. \quad (\text{IV.276})$$

En comparant l'expression de l'hypermultiplet (IV.272) et celle du multiplet vectoriel (IV.162) de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$, on a :

$$\frac{1}{N_2} \eta_{2\alpha} \left(\bar{F}^{\bar{x}^J} + \frac{1}{2\kappa_J} \right) = \lambda_\alpha^{x^J}, \quad (\text{IV.277})$$

$$\frac{i}{N_2} \eta_{2\alpha} D^J = \sqrt{2} \psi_\alpha^{x^J}, \quad (\text{IV.278})$$

$$\frac{1}{N_2} \eta_{2\alpha} \tilde{F}^{q^u} = \chi_\alpha^{q^u}. \quad (\text{IV.279})$$

où l'expression du superchamp spinoriel chirale χ_α est donnée dans la relation (IV.133), et N_2 est la constante de normalisation donnée par la relation suivante :

$$N_2 = \sqrt{g_{u\bar{v}} \tilde{F}^{q^u} \bar{\tilde{F}}^{\bar{q}^v} + h_{IJ} \left(\bar{F}^{\bar{x}^I} + \frac{1}{2\kappa_I} \right) \left(F^{x^J} + \frac{1}{2\kappa_J} \right) + \frac{1}{2} h_{IJ} D^I D^J} \quad (\text{IV.280})$$

$$= \sqrt{(N_1)^2 + E}. \quad (\text{IV.281})$$

où

$$E = \frac{1}{8\kappa_I} (e_I + \bar{e}_I) \quad (\text{IV.282})$$

$$= \frac{1}{2\kappa_I} \left(F^{x^I} + \bar{F}^{\bar{x}^I} \right) + \left(\frac{1}{2\kappa_I} \right)^2.$$

Donc l'expression du goldstino de la seconde supersymétrie est déterminée en faisant la sommation des relations (IV.277), (IV.278) et (IV.279) après la multiplication de (IV.277) par $h_{IJ} \left(F^{x^I} + \frac{1}{2\kappa_I} \right)$ et (IV.278) par $-\frac{i}{2}h_{IJ}D^I$ et (IV.279) par $g_{u\bar{v}}\bar{F}^{\bar{q}^{\bar{v}}}$,

$$\eta_2^\alpha = \frac{1}{N_2} \left(h_{IJ} \left(F^{x^I} + \frac{1}{2\kappa_I} \right) \lambda_\alpha^{x^J} - \frac{i}{\sqrt{2}} h_{IJ} D^I \psi_\alpha^{x^J} + g_{u\bar{v}} \bar{F}^{\bar{q}^{\bar{v}}} \chi_\alpha^{q^u} \right). \quad (\text{IV.283})$$

Alors, à partir des deux expressions des Goldstini qu'on vient de déterminer, la matrice des Goldstini dans le vide est donnée comme suit :

$$\delta\eta = (\delta_i\eta_j) = \begin{pmatrix} \delta\eta_1 & \tilde{\delta}\eta_2 \\ \tilde{\delta}\eta_1 & \delta\eta_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.284})$$

où les expressions des éléments de cette matrice (IV.284) est donnés par :

$$\delta\eta_1 = \sqrt{2}N_1, \quad (\text{IV.285})$$

$$\delta\eta_2 = \frac{N_1}{N_2} \tilde{\delta}\eta_1, \quad (\text{IV.286})$$

$$\tilde{\delta}\eta_1 = -\frac{i}{2N_1} h_{IJ} \frac{1}{\kappa_I} D^J, \quad (\text{IV.287})$$

$$\tilde{\delta}\eta_2 = \sqrt{2}N_2. \quad (\text{IV.288})$$

Notons que dans le cas où le terme de déformation $\frac{1}{\kappa_I}$ est nul, alors E devient aussi nul, et par conséquence la matrice de Goldstini (IV.284) devient la matrice identité. Ceci implique qu'on ne peut pas réaliser une brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$. Notons aussi que les conséquences de $\frac{1}{\kappa_I} = 0$ sont les mêmes qu'on a vu pour le potentiel (IV.76) lorsque le terme antisymétrique C_B^A devient nul,

$$C_B^A \sim (\sigma)_B^A (-Im(e^I), 0, 0) \times \left(\frac{1}{\kappa_I}, 0, 0 \right) = 0. \quad (\text{IV.289})$$

En diagonalisant la matrice (IV.284) nous avons les deux valeurs propres suivantes :

$$\left(\Lambda_{SUSY}^{1,2} \right)^2 = \frac{N_1 + \sqrt{N_1^2 + E}}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{2} \sqrt{2 \left(N_1 - \sqrt{N_1^2 + E} \right)^2 + \frac{\left(h_{IJ} \frac{1}{\kappa_I} D^J \right)^2}{N_1 \sqrt{N_1^2 + E}}}. \quad (\text{IV.290})$$

On remarque que dans le cas $\frac{1}{\kappa_I} = 0$ les deux valeurs propres précédentes ont la même valeur, et par conséquence les deux supersymétries sont brisées spontanément et la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ est brisée complètement à $\mathcal{N} = 0$. Alors que si $\frac{1}{\kappa_I} \neq 0$ la brisure partielle de la supersymétrie est réalisé à condition que les D et E ne doivent pas être simultanément nuls. En effet, si $D = 0$ (direction plate du terme D , i.e. $\xi = 0$) comme premier choix, les deux valeurs propres (IV.290) deviennent :

$$\Lambda_{SUSY}^1 = \sqrt{2}N_1, \quad (\text{IV.291})$$

$$\Lambda_{SUSY}^2 = \sqrt{2(N_1^2 + E)}. \quad (\text{IV.292})$$

Ce qui indique si $E = 0$ les deux valeurs propres $\Lambda_{SUSY}^{1,2}$ se coïncident, et par conséquence la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ est brisée complètement. Alors pour avoir une brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ il faut que $E \neq 0$ (i.e., $Ree_I \neq 0$). Si le premier choix est le cas où $E = 0$, alors e_I sont des nombres imaginaires purs et les deux valeurs propres (IV.290) deviennent :

$$(\Lambda_{SUSY}^{1,2})^2 = \frac{\sqrt{2}}{N_1} \left(g_{u\bar{v}} \tilde{F}^{q^u} \tilde{\bar{F}}^{\bar{q}^v} + h_{IJ} \text{Im} F^{x^I} \text{Im} F^{x^J} + h_{IJ} \left(\frac{1}{4\kappa_I} \pm \frac{D^I}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1}{4\kappa_J} \pm \frac{D^J}{\sqrt{2}} \right) \right). \quad (\text{IV.293})$$

Ce qui indique que si $D = 0$ les deux valeurs propres $\Lambda_{SUSY}^{1,2}$ se coïncident, et par conséquence la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ est brisée complètement, et pour avoir une brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ il faut dans ce cas que $D \neq 0$.

Finalement les valeurs moyennes dans le vide des champs auxiliaires qui brise partiellement la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ sont données à partir de l'expression (IV.293) comme suit :

$$\langle F^{x^I} \rangle = -\frac{1}{4\kappa_I}, \quad (\text{IV.294})$$

$$\langle D^I \rangle = \mp \frac{1}{2\sqrt{2}\kappa_I}, \quad (\text{IV.295})$$

$$\langle F^{q^u} \rangle = \langle \tilde{F}^{q^u} \rangle = 0. \quad (\text{IV.296})$$

Notons que les expressions précédentes sont une solution pour l'équation (IV.253).

Dans ce chapitre nous avons présenté trois modèles de littérature de la brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$, le premier est sous le cadre d'une théorie de jauge pure basée sur un seul multiplet vectoriel de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$, ce modèle est découvert par Antoniadis, Partouche et Taylor. le second modèle découvert par Andrianopoli, D'Auria, Ferrara et Trigiante présente la généralisation du modèle précédent. A la fin de ce chapitre nous avons présenté le modèle de Antoniadis, Derendinger et Jacot qui couple le secteur de jauge avec celui de la matière et qui brise à deux échelles différentes la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$.

Chapitre V

Contributions

V.1 Contribution I : $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetry Partial Breaking and Tadpole Anomaly

Résumé :

Nous considérons l'extension $U(1)^n$ du modèle effectif $U(1) \times U(1)$ de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ introduit dans arXiv :1204.2141 ; nous étudions la relation entre la contrainte de la brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ et l'anomalie "tadpole" de la théorie des cordes type IIB compactifiée sur une variété de Calabi-Yau de trois dimensions complexes en présence des flux de H^{RR} et H^{NS} . Nous discutons aussi la brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ dans le cas particulier d'une théorie de Maxwell avec un seul $U(1)$. Ainsi, nous donnons l'interprétation de la brisure partielle dans ce modèle comme conséquence de l'anomalie tadpole d'une source de flux externe.

$\mathcal{N} = 2$ supersymmetry partial breaking and tadpole anomaly

R. Ahl Laamara^{a,b}, M.N. El Kinani^a, E.H. Saidi^{a,b,*}, M. Vall^{a,b}

^a *Lab of High Energy Physics, Modeling and Simulations, Faculty of Sciences, Rabat, Morocco*

^b *Centre of Physics and Mathematics, CPM, Morocco*

Received 12 April 2015; received in revised form 29 October 2015; accepted 29 October 2015

Available online 5 November 2015

Editor: Stephan Stieberger

Abstract

We consider the $U(1)^n$ extension of the effective $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric $U(1) \times U(1)$ model of arXiv:1204.2141; and study the explicit relationship between partial breaking of $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry constraint and D3 brane tadpole anomaly of type IIB string on Calabi–Yau threefolds in presence of H^{RR} and H^{NS} fluxes. We also comment on supersymmetry breaking in the particular $\mathcal{N} = 2U(1)$ Maxwell theory; and study its interpretation in connection with the tadpole anomaly with extra localised flux sources. © 2015 The Authors. Published by Elsevier B.V. This is an open access article under the CC BY license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>). Funded by SCOAP³.

1. Introduction

Breaking $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric quantum field theories in 4d space time at two different mass scales has been subject of interest for many years [1–19]; and references therein. This scenario is possible in 4d $\mathcal{N} = 2$ supergravity theory; but not with $\mathcal{N} = 2$ global supersymmetry suspected to live at lower energies below Planck scale. If gravity is neglected, superalgebra relations require that once one of the two *global* supercharges $Q_{\alpha}^{\pm} = (Q_{\alpha}, \tilde{Q}_{\alpha})$ is broken; say Q_{α}^{-} , the second Q_{α}^{+} has to be broken too. However this constraint can be bypassed in the presence of magnetic Fayet–Iliopoulos (FI) terms induced by non-perturbative BPS states such as D-branes of type II

* Corresponding author.

E-mail address: h-saidi@fsr.ac.ma (E.H. Saidi).

strings. With non zero magnetic FI couplings, the supercurrent algebra develops a constant term that violates the $SU_R(2)$ R-symmetry of the supercharges [6], offering as a consequence a way to break $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry partially via gauginos instead of gravitinos [4,20–23]. This idea has been approached in past by using non-linear realisation of half of the eight supersymmetric charges [24–30]; but further developed recently in [31–33] by using $\mathcal{N} = 1$ superspace QFT₄ method where a simple, but instructive, effective $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric abelian $U(1)^2$ model, with two breaking scales Λ_1 and Λ_2 , has been engineered.

In this paper, we consider the partial breaking of $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry in the effective 4d $U(1) \times U(1)$ model of [31,32], to which we refer from now on as ADJ effective gauge theory; and study explicitly its relationship with D3 brane tadpole anomaly of type IIB string compactified on local Calabi–Yau threefolds (CY3). To deal with brane realisation of the ADJ construction, we first relax the rank of the abelian group symmetry by considering the effective $U(1)^2$ model as the leading prototype in the family of 4d $\mathcal{N} = 2$ $U(1)^n$ gauge models indexed by $n \geq 2$; and then think of this set of abelian gauge models in terms of an effective low energy theory following from D3 branes wrapping 3-cycles in type IIB string on local CY3 with an n -dimensional symplectic homology basis of 3-cycles (A^a, B_a) , $a = 1, \dots, n$. In this D3 brane realisation of 4d $\mathcal{N} = 2$ $U(1)^n$ gauge theory, partial breaking of global $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry is induced by H_3^{RR} and H_3^{NS} fluxes; and the ADJ condition $\sum_a \frac{g_a}{\kappa_a} = 0$ supporting the partial breakings is interpreted in terms of conservation of the total 3-forms flux Φ_{flux} in the Calabi–Yau threefolds; that is $\Phi_{flux} = \int_{CY3} H_3^{NS} \wedge H_3^{RR} = 0$. We also study the missing $n = 1$ term in the sequence of 4d $\mathcal{N} = 2$ $U(1)^n$ gauge models with $n \geq 2$; this particular model, which corresponds type IIB string on conifold geometry, is anomalous in agreement with known results in literature; this anomaly may be directly learnt from the naive extension of ADJ condition which is given by the singular equation $\frac{g}{\kappa} = 0$ requiring the vanishing of the gauge coupling constant $g = 0$ for finite magnetic FI coupling κ . By trying to engineer a 4d $\mathcal{N} = 2$ $U(1)$ model going beyond ADJ constraint by deforming the singularity like $v + \frac{g}{\kappa} = 0$, we end with an explicit breaking of $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry down to $\mathcal{N} = 1$. The brane interpretation of this deformation in terms of presence of D7 branes or O3 planes is also studied by using a result from [34].

The presentation is as follows: In section 2, we review the basis of the effective 4d $\mathcal{N} = 2$ $U(1)^2$ model; and derive the $\mathcal{N} = 2$ ADJ constraint equation and its $\mathcal{N} = 1$ deformation. In section 3, we give the main lines of the $\mathcal{N} = 1$ superfield formulation of the 4d $\mathcal{N} = 2$ $U(1)^n$ gauge theory describing the gauge dynamics of n $\mathcal{N} = 2$ gauge multiplets coupled to a single tensor multiplet. In section 4, we study the realisation of ADJ model in type IIB string on CY3 with non-trivial fluxes of the 3-form field strengths H_3^{NS} and H_3^{RR} .

In Section 5, we give conclusion and make some comments. In Section 6 we give two appendices; in the first appendix we collect some useful tools on type IIB string compactification to 4d space time; and in the second we describe the gauge and supersymmetric transformations of single-tensor and Maxwell multiplets in superspace.

2. $\mathcal{N} = 2$ $U(1)^n$ theory and ADJ constraints

In this section, we review the main lines of the model of [31,32]; and study particular aspects of ADJ constraint equation supporting the partial supersymmetry breaking in this theory. Following [31–33], the ADJ model is a 4d $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric effective gauge theory where gravity is decoupled; but global $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry is broken at two different scales. The simplest version of the model realising the two partial breaking is given by the interacting dynamics of an $\mathcal{N} = 2$ single tensor multiplet $\mathcal{T}^{(\mathcal{N}=2)}$ with two abelian $\mathcal{N} = 2$ gauge supermultiplets $\mathcal{V}_1^{(\mathcal{N}=2)}$

and $\mathcal{V}_2^{(\mathcal{N}=2)}$. Besides special Kahler geometry of the gauge background, the model has a Chern–Simons type interaction between $\mathcal{T}^{(\mathcal{N}=2)}$ and the linear combination $g_1 V_1^{(\mathcal{N}=2)} + g_2 V_2^{(\mathcal{N}=2)}$.

2.1. ADJ theory in $\mathcal{N} = 1$ superspace

Because of lack of a simple formulation of 4d supersymmetric gauge theories with 8 supercharges in $\mathcal{N} = 2$ superspace, one is limited to use the standard $\mathcal{N} = 1$ superspace method with the price that only half of supersymmetries is manifestly exhibited; the other half is hidden; but can be linearly realised in absence of magnetic FI couplings.

2.1.1. Fibered $\mathcal{N} = 2$ chiral superspace

A way to deal with the 4 hidden supersymmetric charges is to use $\mathcal{N} = 2$ chiral superspace and think about it in terms of fibration of two copies of $\mathcal{N} = 1$ chiral superspaces; an $\mathcal{N}_{fiber} = 1'$ chiral superspace, with odd coordinates $\tilde{\theta}^\alpha$, fibered on an $\mathcal{N}_{base} = 1$ chiral superspace base with odd coordinates θ^α . Schematically, this fibration may be represented like

$$\begin{array}{c} \mathcal{N}_{fiber} = 1' \rightarrow \mathcal{N} = 2 \\ \downarrow \\ \mathcal{N}_{base} = 1 \end{array} \quad (2.1)$$

In this chiral superspace fibration, typical $\mathcal{N} = 2$ chiral superfields have the structure $\Phi^{\mathcal{N}=2} = \Phi(z, \theta, \tilde{\theta})$ with space time coordinate z^μ related to the real x^μ by two pure imaginary shifts $i\nu^\mu + i\tilde{\nu}^\mu$, one from $\mathcal{N}_{fiber} = 1'$ fiber and the other from the $\mathcal{N}_{base} = 1$ base as shown on the relation $z = y - i\tilde{\theta}\sigma\tilde{\theta}$ with $y = x - i\theta\sigma\bar{\theta}$. Viewed from fiber, $\Phi^{\mathcal{N}=2}$ can be expanded in a finite series of $\tilde{\theta}$ as follows

$$\Phi^{\mathcal{N}=2} = \Phi^{\mathcal{N}=1} + \sqrt{2} \tilde{\theta}^\alpha \Psi_\alpha^{\mathcal{N}=1} + \tilde{\theta}^2 F^{\mathcal{N}=1} + \dots \quad (2.2)$$

with expansion modes given by $\mathcal{N}_{base} = 1$ superfields: $\Phi^{\mathcal{N}=1} = \Phi(y, \theta)$ and similarly for $\Psi_\alpha^{\mathcal{N}=1}$ and $F^{\mathcal{N}=1}$. The extra dots stand for additional terms involving space time derivatives generated by $-i\tilde{\theta}\sigma^\mu\tilde{\theta}\partial_\mu = -i\tilde{\nu}^\mu\partial_\mu$. The expansion modes in (2.2) describe $\mathcal{N} = 1$ chiral superfields in the base; and are related amongst others by those $\mathcal{N}_{fiber} = 1'$ supersymmetric transformations in the fiber; for example

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}\Phi^{\mathcal{N}=1} &= \sqrt{2}\tilde{\varepsilon}^\alpha \Psi_\alpha^{\mathcal{N}=1} \\ \tilde{\delta}\Psi_\alpha^{\mathcal{N}=1} &= \sqrt{2}\tilde{\varepsilon}^\alpha F^{\mathcal{N}=1} - \frac{i\sqrt{2}}{2}\sigma^\mu\tilde{\varepsilon}\tilde{\partial}_\mu \Phi^{\mathcal{N}=1} \\ \tilde{\delta}F^{\mathcal{N}=1} &= -\frac{i\sqrt{2}}{2}\partial_\mu \Psi_\alpha^{\mathcal{N}=1}\sigma^\mu\tilde{\varepsilon} \end{aligned} \quad (2.3)$$

By imposing appropriate constraint relations on $\Phi^{\mathcal{N}=2}$, one obtains the desired $\mathcal{N}_{base} = 1$ superfields to describe supersymmetric matter or radiation with 8 supercharges. In this way of doing, $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric gauge multiplet is then approached by using superfield strength $\mathcal{W}^{\mathcal{N}=2}$ with expansion as in (2.2); but satisfying moreover $D^\alpha \tilde{D}_\alpha \mathcal{W}^{\mathcal{N}=2} + hc = 0$. As this constraint involves both the chiral $\mathcal{W}^{\mathcal{N}=2}$ and its adjoint conjugate, one ends with a $\tilde{\theta}$ -expansion involving both $\mathcal{N} = 1$ chiral X and $\bar{D}^2 \bar{X}$ as follows

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{\mathcal{N}=2} &= X + i\sqrt{2} \tilde{\theta}^\alpha W_\alpha - \tilde{\theta}^2 \left(\frac{1}{4} \bar{D}^2 \bar{X} \right) \\ \tilde{\mathcal{W}}^{\mathcal{N}=2} &= \mathcal{W}^{\mathcal{N}=2} + \tilde{\theta}^2 \frac{1}{2\kappa} \end{aligned} \quad (2.4)$$

where the role of the extra constant coefficient $\frac{1}{2\kappa}$ will be discussed later on; it scales as $mass^2$ seen that $[\mathcal{W}^{\mathcal{N}=2}] = [X] = mass^1$ and the $\mathcal{N}_{base} = 1$ chiral gauge superfield strength spinor $[W_\alpha] = mass^{3/2}$; it may be generated by the particular and *asymmetric* shift of the $\tilde{\theta}^2$ component

$$\left. \frac{1}{4} \bar{D}^2 \bar{X} \right|_{\theta=0} = \bar{F} \bar{X} \quad \rightarrow \quad \bar{F} \bar{X} - \frac{1}{2\kappa} \quad (2.5)$$

By asymmetric we mean eq. (2.5) but without modifying the X superfield in (2.4). This property may be roughly interpreted as giving a non-zero VEV to the $\tilde{\theta}^2$ -component field of expansion of (2.4) as

$$\left\langle \frac{1}{4} \bar{D}^2 \bar{X} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle A + iB \rangle = -\frac{1}{2\kappa} \quad (2.6)$$

breaking thus the $\mathcal{N}_{fiber} = 1'$ supersymmetry in fiber. For a stringy interpretation of the coupling constant $\frac{1}{\kappa}$ in terms of 3-form flux through non compact 3-cycles in local CY3; see eq. (4.30).

A quite similar expansion is valid for the $\mathcal{N} = 2$ tensor multiplet $\mathcal{T}^{(\mathcal{N}=2)}$ which is described as well by a constrained $\mathcal{N} = 2$ chiral superfield [31–33], see also Appendix A.2; it is given by

$$\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2} = Y + \sqrt{2} \tilde{\theta}^\alpha \chi_\alpha - \tilde{\theta}^2 \left(\frac{i}{2} \Phi + \frac{1}{4} \bar{D}^2 \bar{Y} \right) \quad (2.7)$$

with $\mathcal{N}_{fiber} = 1'$ supersymmetric transformations in fiber as

$$\begin{aligned} \tilde{\delta} Y &= +\sqrt{2} \tilde{\epsilon}^\alpha \chi_\alpha \\ \tilde{\delta} \chi_\alpha &= \sqrt{2} \tilde{\epsilon}_\alpha \mathcal{E} - \frac{i}{\sqrt{2}} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \tilde{\epsilon}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu Y \\ \tilde{\delta} \mathcal{E} &= \frac{\sqrt{2}}{2i} \partial_\mu \chi_\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \tilde{\epsilon}^{\dot{\alpha}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

where we have set

$$\mathcal{E} = -\frac{i}{2} \Phi - \frac{1}{4} \bar{D}^2 \bar{Y} \quad (2.9)$$

With these tools at hand, we turn to describe useful features on superfield spectrum of $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric ADJ model. For later use, we will give both the $\mathcal{N} = 2$ chiral superfields spectrum and their splitting in terms of $\mathcal{N}_{base} = 1$ superfields.

More on matter sector The matter sector of ADJ model is quite simple; it involves one 4d $\mathcal{N} = 2$ matter multiplet having two dual realisations as given by eq. (2.11).

In the realisation we will be using in present study, $\mathcal{N} = 2$ matter is described by an $\mathcal{N} = 2$ chiral superfield $\mathcal{T}^{(\mathcal{N}=2)}$ with expansion along fiber direction as in (2.7). From the $\mathcal{N}_{base} = 1$ base view, this expansion has four chiral superfields: two bosonic Y, Φ ; and a fermionic superfield doublet $\chi_\alpha = (\chi_1, \chi_2)$; altogether they capture $16 + 16$ off shell degrees of freedom. This number may be reduced down to $8 + 8$ by thinking about Y as an exotic auxiliary superfield playing the role of a Lagrange superfield parameter capturing the constraint on partial breaking of second supersymmetry; and about χ_α as a superfield prepotential of a hermitian linear multiplet L given by the relation

$$L = D^\alpha \chi_\alpha + \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \quad (2.10)$$

Observe that L is invariant under the change $\chi'_\alpha = \chi_\alpha + \frac{i}{4} \bar{D}^2 D_\alpha \Omega$ with Ω an arbitrary real superfield; this symmetry together with footnote 1 allows to reduce the $16 + 16$ degrees of freedom down to $8 + 8$; for details see Appendix A.2; other features can be found in [31–33].

For completeness, notice that using a result on hypermultiplet duality on superfield representations of $\mathcal{N} = 2$ matter multiplet [35–39], we can show that $\mathcal{N} = 2$ superfield $\mathcal{T}^{(\mathcal{N}=2)}$ has two dual representations in terms of $\mathcal{N}_{base} = 1$ superfields; the (Φ, L) we will be using in this paper; and a second realisation based on two chiral superfields Q_1, Q_2 ;

$$\begin{aligned} a) : \mathcal{T}^{(\mathcal{N}=2)} &\equiv \Phi, L \quad ; Y \\ b) : \mathcal{T}^{(\mathcal{N}=2)} &\equiv Q_1, Q_2 \quad ; Y \end{aligned} \quad (2.11)$$

ADJ constraint First notice that in above (2.11), it looks like if we have three $\mathcal{N}_{base} = 1$ superfields to describe $\mathcal{N} = 2$ matter; this is not exact since Y is some how a “spurious superfield” carrying no physical degrees of freedom; it is a topological object exhibiting very special properties as shown by eqs. (2.19)–(2.21); this is our reason behind putting Y aside in eq. (2.11); it breaks $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry partially and is one of the nice observations in [32]; there it appears as a Lagrange superfield parameter capturing a constraint relation $f(g_a, \kappa_a) = 0$ of the model, which to fix ideas may be thought of as

$$f(g_a, \kappa_a) = \sum_{a=1}^n \frac{g_a}{\kappa_a} = 0 \quad , \quad n \geq 2 \quad (2.12)$$

giving a relationship between the coupling constants g_a and the magnetic FI couplings $1/\kappa_a$ of the ADJ model; see also eq. (3.5) given below for explicit details. In the limit

$$\frac{1}{\kappa_a} \rightarrow 0 \quad (2.13)$$

the above constraint is trivially solved and then Y has no role to play in this $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric limit.

Notice also that the sum on integer n in eq. (2.12) rules out the particular case $n = 1$; since the corresponding condition reads as

$$\frac{g_1}{\kappa_1} = 0 \quad (2.14)$$

leading to $g_1 = 0$ for finite $1/\kappa_1$; and then no ADJ theory with one $U(1)$ gauge factor [29–33]. By trying to overcome the constraint $\frac{g_1}{\kappa_1} = 0$ by adding an extra term like

$$v + \frac{g_1}{\kappa_1} = 0 \quad (2.15)$$

with v a real parameter having same scaling mass dimension as $\frac{g_a}{\kappa_a}$; one breaks *explicitly* $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry down to $\mathcal{N} = 1$.

2.1.2. $\mathcal{N} = 1$ superfields in $U(1)^2$ ADJ model

In our superspace description of $U(1) \times U(1)$ ADJ model, we will use a particular set of $\mathcal{N} = 1$ superfields; these are the chiral Φ and hermitian L for representing $\mathcal{T}^{(\mathcal{N}=2)}$; and 2 gauge superfields (V_1, V_2) , 2 chiral (X_1, X_2) for representing $\mathcal{V}_1^{(\mathcal{N}=2)} \oplus \mathcal{V}_2^{(\mathcal{N}=2)}$. Let us comment this system of superfields.

• $\mathcal{T}^{(\mathcal{N}=2)}$ sector

In the $\mathcal{N} = 1$ superfield realisation given by the first relation of eq. (2.11), the dynamics of $\mathcal{T}^{(\mathcal{N}=2)}$ is described by two basic superfields and an auxiliary one; these are:

- (i) the chiral superfield Φ with the usual θ -expansion namely a leading scalar component ϕ ; a Weyl fermions ψ_α and auxiliary field F_ϕ ;
- (ii) the standard hermitian linear multiplet L satisfying the superspace constraint relations $D^2 L = \bar{D}^2 L = 0$ following from (2.10); this is a particular superfield with θ -expansion in component fields as follows

$$L = C + i\theta.\eta - i\bar{\theta}.\bar{\eta} + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu B^{\rho\sigma} + \frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta - \frac{1}{2}\bar{\theta}^2\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\eta} - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box C \quad (2.16)$$

involving the propagating real field C and the field strength of the antisymmetric tensor field $B^{\rho\sigma}$; but no auxiliary field. The superfields Φ and L are related under fiber $\mathcal{N}_{fiber} = 1'$ supersymmetric variations as follows

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_\epsilon L &= \frac{\sqrt{2}}{2i} \left(\tilde{\epsilon}^\alpha D_\alpha \Phi - \tilde{\epsilon}_{\dot{\alpha}} \bar{D}^{\dot{\alpha}} \bar{\Phi} \right) \\ \tilde{\delta}_\epsilon \Phi &= -i\sqrt{2}\tilde{\epsilon}_{\dot{\alpha}} \bar{D}^{\dot{\alpha}} L \end{aligned} \quad (2.17)$$

with

$$\left[\tilde{\delta}_{\epsilon'}, \tilde{\delta}_\epsilon \right] \Psi = -2i \left(\tilde{\epsilon}\sigma^\mu\tilde{\epsilon}' - \tilde{\epsilon}'\sigma^\mu\tilde{\epsilon} \right) \partial_\mu \Psi \quad (2.18)$$

with Ψ standing for L and Φ .

- (iii) an extra auxiliary superfield Y capturing information on non linear realisation of the $\mathcal{N}_{fiber} = 1'$ hidden supersymmetry; it is not needed for the closure of transformations (2.17); but will be used to approach partial supersymmetry breaking. Properties of this superfield have been explored in [31,32] where, using gauge fixing¹ method, it has been shown to have the following remarkable θ -expansion

$$Y^{gauged} = \frac{i}{4!} \theta^2 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} C_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (2.19)$$

for details see Appendix A.2. This relation shows that Y encodes data on the constant anti-symmetric tensor $C_{\mu\nu\rho\sigma} = 4!\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Delta$. Because of its special dependence in θ , Y has no physical degrees of freedom

$$\delta_\epsilon Y^{gauged} = 0 \quad (2.20)$$

and obeys moreover a nilpotency property

$$Y^\dagger Y = \theta^4 \Delta^2, \quad YY = 0 = Y^\dagger Y^\dagger \quad (2.21)$$

In the $\mathcal{N} = 1$ superfield realisation given by the second relation of eq. (2.11), the role of Φ and L gets played by the two chiral superfields Q_1 and Q_2 capturing opposite charge under a $U(1)$ gauge symmetry. The duality transformations between the two matter multiplet realisations are given by Legendre transform in superspace [35–39]; they may be written as follows

¹ Following analysis of appendix 8.2, the reduction of the $16 + 16$ degrees of $\mathcal{N} = 2$ chiral superfield $\mathcal{T}^{N=2}$ down to $8 + 8$ is achieved into two steps: a first reduction from $16 + 16$ down to $12 + 12$ ensured by gauge symmetry under $\chi'_\alpha = \chi_\alpha + \frac{i}{4}\bar{D}^2 D_\alpha \Omega$ (A.23); a second reduction from $12 + 12$ down to $8 + 8$ given by requiring symmetry under gauge transformation $Y \rightarrow Y - \frac{1}{2}\bar{D}^2 \Upsilon$ with Υ a real superfield. Gauge fixing of this symmetry leads precisely to eq. (2.19); for more details see also [31].

$$\begin{aligned} Q_1 &= 2^{\frac{-1}{4}} \sqrt{\Phi} e^{+\Phi'} \\ Q_2 &= 2^{\frac{-1}{4}} \sqrt{\Phi} e^{-\Phi'} \end{aligned} \quad (2.22)$$

with Φ as in the first relation of eq. (2.11) and where Φ' is another chiral superfield. We will not need this realisation in this paper; but to fix ideas we give some comments on their dynamics in §3.2; see eq. (3.18).

• $\mathcal{V}_a^{(\mathcal{N}=2)}$ gauge sector

The gauge sector of ADJ supersymmetric $U(1)^2$ model involves two $\mathcal{N}=2$ abelian Maxwell type multiplets described by the hermitian superfields $V_1^{(\mathcal{N}=2)}$ and $V_2^{(\mathcal{N}=2)}$ with superfields strength θ -expansions along fiber direction as in eq. (2.2). Following [31,32], the solution of constraint equations lead to the $\mathcal{N}=1$ superfields spectrum

$$\begin{aligned} V_1^{(\mathcal{N}=2)} &\equiv V_1, X_1, \kappa_1 \\ V_2^{(\mathcal{N}=2)} &\equiv V_2, X_2, \kappa_2 \end{aligned} \quad (2.23)$$

where the hermitian V_1, V_2 are the usual $\mathcal{N}_{base}=1$ gauge superfield potentials; and where X_1, X_2 are two chiral superfields. So the gauge symmetry of the model is $U_1(1) \times U_2(1)$. The extra κ_1, κ_2 are constants and are as in (2.4); they may be put in correspondence with the auxiliary chiral superfield Y as it may be viewed by comparing (2.7) with (2.4); that is:

$$\sum \frac{g_a}{\kappa_a} \leftrightarrow Y \quad (2.24)$$

The general form of the superspace lagrangian density $\mathcal{L}_{gauge}$ of the gauge superfields depending on the prepotential $\mathcal{F}(X_1, X_2)$ reads as follows

$$\mathcal{L}_{gauge} = \mathcal{L}_{U_1(1) \times U_2(1)} + \mathcal{L}_{FI} \quad (2.25)$$

with gauge lagrangian density in $\mathcal{N}_{base}=1$ superspace given by

$$\mathcal{L}_{U_1(1) \times U_2(1)} = \int d^4\theta \frac{i}{2} \left(\bar{\mathcal{F}}_a X^a - \mathcal{F}_a \bar{X}^a \right) + \int d^2\theta \left(-\frac{i}{4} \mathcal{F}_{ab} W^a \cdot W^b \right) + hc \quad (2.26)$$

and Fayet–Iliopoulos part as

$$\mathcal{L}_{FI} = \int d^4\theta \xi_a V^a - \int d^2\theta \frac{e_a}{4} X^a - \int d^2\theta \frac{i}{4\kappa_a} \mathcal{F}_a + hc \quad (2.27)$$

where the real ξ_a and complex (pure imaginary) e_a are constants and where the holomorphic $\mathcal{F}_a = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X^a}$ and $\mathcal{F}_{ab} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial X^a \partial X^b}$.

2.2. ADJ constraint and $\mathcal{N}=1$ deformation

Here we use the $\mathcal{N}=1$ superfield spectrum of ADJ model to study the derivation of the constraint eq. (2.12) and its $\mathcal{N}=1$ deformation (2.15).

2.2.1. Superfield Y

Viewed from $\mathcal{N}=2$ chiral superspace, the $U(1) \times U(1)$ ADJ supersymmetric model involves the $\mathcal{N}=2$ chiral superfields $\mathcal{W}_a^{\mathcal{N}=2}$ given by (2.4); and the $\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2}$ of (2.7). These $\mathcal{N}=2$ chiral superfields are remarkable; they have the same scaling mass dimension and quite similar $\tilde{\theta}$ -expansions which make them to share some general features. Indeed, though physically different objects, the resemblance between their $\tilde{\theta}$ -expansions could serve as a guide to have more

insight into the ADJ construction. This formal property has been used in [31,25] to study the interaction between an $\mathcal{N} = 2$ Maxwell multiplet $\mathcal{W}^{\mathcal{N}=2}$ and a tensor $\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2}$. There, the formal similarity between the two chiral superfields $\mathcal{W}^{\mathcal{N}=2}$ and $\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2}$; in particular their scaling mass dimension and θ -expansions, has been used to build the linear combination of these $\mathcal{N} = 2$ chiral superfield

$$\mathcal{W}^{\mathcal{N}=2} + 2g\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2} \quad (2.28)$$

to reach the gauge invariant quantity

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^{Max} - gB_{\mu\nu} \quad (2.29)$$

that plays a central role in the $\mathcal{N} = 2$ Dirac–Born–Infeld $U_{\max}(1)$ theory; and also in studying electric–magnetic duality in $\mathcal{N} = 2$ chiral superspace in presence of Chern–Simons coupling. In this relation, $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{Max}$ is the usual field strength of the Maxwell gauge field potential; and $B_{\mu\nu}$ the antisymmetric gauge potential appearing in the tensor multiplet.

By exhibiting this formal similarity between $\mathcal{W}^{\mathcal{N}=2}$ and $\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2}$; one finds that there exist a correspondence between their $\mathcal{N} = 1$ superfields contents; by comparing the $\tilde{\theta}$ -expansions (2.4) and (2.7); as well as topological relations reported in Appendix A (A.19) and (A.24), one ends with

Gauge multiplet $\tilde{\mathcal{W}}^{\mathcal{N}=2}$	Tensor multiplet $\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2}$
X	Y
iW_α	χ_α
$\frac{-1}{2\kappa}$	$\frac{i}{2}\Phi$
$\bar{D}^2\bar{X}$	$\bar{D}^2\bar{Y}$

(2.30)

where Y occupies a place in $\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2}$ that is similar to the place occupied by X in $\tilde{\mathcal{W}}^{\mathcal{N}=2}$. Obviously the superfields in left and right of table (2.30) have different meanings and carry different degrees of freedom; but as far as fibration of $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry is concerned; this correspondence may be used as an indication to get more insight into the general form of constraint equation captured by Y .

2.2.2. Deriving ADJ condition

The ADJ constraint equation is obtained by from $\mathcal{N} = 2$ Chern–Simons couplings between the linear combination of the gauge superfield strengths ($\sum_a g_a \tilde{\mathcal{W}}_a^{\mathcal{N}=2}$) and the tensor multiplet $\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2}$. In $\mathcal{N} = 2$ chiral superspace where $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry is manifest, this CS coupling reads in terms of $\tilde{\mathcal{W}}_a^{\mathcal{N}=2}$ and $\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2}$ as follows

$$\mathcal{L}_{CS} = -2i \int d^2\theta d^2\tilde{\theta} \left(\sum_{a=1}^n g_a \tilde{\mathcal{W}}_a^{\mathcal{N}=2} \right) \mathcal{T}^{\mathcal{N}=2} \quad (2.31)$$

where $n = 2$ for the case of $U(1)^2$ model; but can generally take any value $n \geq 2$ as the case of $U(1)^n$ models with n gauge $\tilde{\mathcal{W}}_a^{\mathcal{N}=2}$ coupled to $\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2}$. By using (2.4) and (2.7) and performing integration with respect to $\tilde{\theta}$; one brings above CS coupling to the form

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{CS} = & +2 \int d^4\theta \left(\sum_{a=1}^n g_a V^a \right) L - \int d^2\theta \left(\sum_{a=1}^n g_a X^a \right) \Phi \\ & - i \int d^2\theta \left(\sum_{a=1}^n \frac{g_a}{\kappa^a} \right) Y\end{aligned}\quad (2.32)$$

where $\mathcal{N} = 1$ supersymmetry in the base of fibration is manifest and the fibered $\mathcal{N} = 1'$ one becomes hidden. Because of linear dependence, the superfield equation of Y leads to the constraint

$$\sum_{a=1}^n \frac{g_a}{\kappa^a} = 0 \quad , \quad n \geq 2 \quad (2.33)$$

Notice that the deformation of the CS coupling (2.32) by adding the term $v \int d^2\theta Y$ like

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_{CS} = & +2 \int d^4\theta \left(\sum_{a=1}^n g_a V^a \right) L - \int d^2\theta \left(\sum_{a=1}^n g_a X^a \right) \Phi \\ & - i \int d^2\theta \left(v + \sum_{a=1}^n \frac{g_a}{\kappa^a} \right) Y\end{aligned}\quad (2.34)$$

preserves gauge symmetry as shown by (A.41) of Appendix A; but breaks explicitly $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry down to $\mathcal{N} = 1$. Under this deformation, the ADJ constraint becomes

$$v + \sum_{a=1}^n \frac{g_a}{\kappa^a} = 0 \quad (2.35)$$

3. Superspace lagrangian

The $\mathcal{N} = 1$ superspace expression of the lagrangian density $\mathcal{L}$ describing the interacting dynamics of the above $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric system $\left\{ \mathcal{W}_a^{(\mathcal{N}=2)}, \mathcal{T}^{(\mathcal{N}=2)} \right\}$ can be approached in two manners depending on the $\mathcal{N} = 1$ superfield realisation used to represent the $\mathcal{T}^{(\mathcal{N}=2)}$ single tensor multiplet.

3.1. Using $\mathcal{N} = 1$ multiplets (L, Φ)

With the realisation of the tensor multiplet $\mathcal{T}^{(\mathcal{N}=2)}$ in terms of the superfields the chiral Φ , the hermitian L as well as the Lagrange chiral superfield Y carrying the ADJ constraint; and following [32], the superspace lagrangian density of the $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric $U(1)^2$ model describing coupled dynamics of $\mathcal{W}_a^{(\mathcal{N}=2)}$ and $\mathcal{T}^{(\mathcal{N}=2)}$ reads in $\mathcal{N} = 1$ superspace as follows

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{ST} + \mathcal{L}_{CS} \quad (3.1)$$

with $\mathcal{L}_{gauge}$ as in eq. (2.26) and

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ST} + \mathcal{L}_{CS} = & \int d^4\theta \sqrt{L^2 + 2\bar{\Phi}\Phi} - L \ln \left(L + \sqrt{L^2 + 2\bar{\Phi}\Phi} \right) \\ & + 2 \int d^4\theta g_a V^a L - \int d^2\theta (m + g_a X^a) \Phi \\ & - i \int d^2\theta \left(\frac{g_1}{\kappa_1} + \frac{g_2}{\kappa_2} \right) Y + hc\end{aligned}\quad (3.2)$$

In what follows, we first make few comments useful for our later analysis; then we study scalar potential of the gauge model.

3.1.1. Properties of (3.2)

From the above expression of the superspace lagrangian density (3.2), we learn a set of special properties on the superfield realisation of matter using single tensor multiplet; in particular the following:

First, the mass constant m in (3.2) can be absorbed by shifting the linear combination $g_a X^a$; it will be dropped out in what follows.

Second, the superfields Φ and L are gauge invariant and scale as $mass^2$; their coupling to the gauge multiplet is of Chern–Simons type

$$2 \int d^4\theta (g_1 V_1 + g_2 V_2) L - \int d^2\theta (g_1 X_1 + g_2 X_2) \Phi \quad (3.3)$$

they involve the remarkable linear combinations $g_1 V_1 + g_2 V_2$ and $g_1 X_1 + g_2 X_2$. Moreover, the contribution of the superfield Y in the full superspace lagrangian density (3.2) appears linearly as follows

$$i \int d^2\theta \left(\frac{g_1}{\kappa_1} + \frac{g_2}{\kappa_2} \right) Y + hc \quad (3.4)$$

together with the particular linear combination $\frac{g_1}{\kappa_1} + \frac{g_2}{\kappa_2}$. So the auxiliary superfield Y in ADJ theory plays the role of a Lagrange superfield capturing the constraint relation

$$\frac{g_1}{\kappa_1} + \frac{g_2}{\kappa_2} = 0 \quad (3.5)$$

showing that the ratio $\frac{g_1}{g_2}$ of the two gauge couplings is fixed by the ratio $\frac{\kappa_1}{\kappa_2}$ of the magnetic FI coupling constants.

Third, the kinetic energy density of Φ and L involves non-polynomial expressions, a square root term $\sqrt{L^2 + 2\bar{\Phi}\Phi}$ and a logarithm one namely $L \ln \left(L + \sqrt{L^2 + 2\bar{\Phi}\Phi} \right)$; this non-linearity may be understood as due to the antisymmetric field $B_{\mu\nu}$. Self interactions of (Φ, L) are also non-polynomial and are generally characterised by an arbitrary hermitian prepotential $H(\Phi, \bar{\Phi}; L)$ with superspace lagrangian density as [35–37]

$$\mathcal{L}_{ST}^{(H)} = \int d^4\theta H(\Phi, \bar{\Phi}; L) \quad (3.6)$$

3.1.2. Scalar potential

The scalar potential of the ADJ model (3.1)–(3.2) has two contributions as follows

$$\mathcal{V}_{sca} = \mathcal{V}_{gauge} + \mathcal{V}_{tens} \quad (3.7)$$

a contribution $\mathcal{V}_{gauge}$ coming from the auxiliary fields F^{X^a} and D^a of the gauge multiplets; and another contribution $\mathcal{V}_{tens}$ coming from the auxiliary field Φ ; seen that L has no auxiliary field. The $\mathcal{V}_{gauge}$ contribution reads explicitly as

$$\mathcal{V}_{gauge} = H_{ab} \left(F^{X^a} \bar{F}^{\bar{X}^b} + \frac{1}{2} D^a D^b \right) \quad (3.8)$$

where $H_{ab} = \text{Im } \mathcal{F}_{ab}$ is the metric of the special-Kähler manifold with inverse H^{ab} . For the $\mathcal{V}_{tens}$ contribution, we have

$$\mathcal{V}_{tens} = F^\phi G_{\phi\bar{\phi}} \bar{F}^{\bar{\phi}} \quad (3.9)$$

where $G_{\phi\bar{\phi}}$ is the analogue of metric H_{ab} for the matter sector.

Substituting the various auxiliary fields by their field equations, we obtain the explicit expression of the full scalar potential of the model. For the contribution $\mathcal{V}_{gauge}$, we have

$$\mathcal{V}_{gauge} = H^{ab} \left(\frac{1}{2} r_a r_b + w_a \bar{w}_b \right) \quad (3.10)$$

with real r_a and complex w_a as follows

$$\begin{aligned} r_a &= g_a C + \frac{\xi_a}{2} \\ w_a &= g_a \phi + \frac{1}{4} e_a + \frac{i}{4\kappa_c} \mathcal{F}_{ac} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Besides FI coupling constants, they depend on the degrees of freedom of the tensor multiplet namely C and ϕ . The other contribution is given by

$$\mathcal{V}_{tensor} = 2\varrho^2 |gX|^2 \quad (3.12)$$

where we have set

$$\varrho^2 = \sqrt{C^2 + 2|\phi|^2} \quad , \quad gX = g_1 X_1 + g_2 X_2 \quad (3.13)$$

So the total scalar potential reads as

$$\mathcal{V}_{sca} = H^{ab} \left(\frac{1}{2} r_a r_b + w_a \bar{w}_b \right) + 2|gX|^2 \varrho^2 \quad (3.14)$$

Observe the two following features: first for $\varrho^2 = 0$ and $w_a = 0$, the scalar potential $\mathcal{V}_{sca}$ has a non-zero value due to the non-vanishing ξ and hence $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry breaks down. For $\varrho^2 = 0$ and $\xi_a = e_a = 0$, the scalar potential $\mathcal{V}_{sca}$ has as well a non-zero value proportional to the magnetic FI coupling as shown on the following expression

$$\mathcal{V}_{sca} = \sum \frac{1}{16\kappa_c \kappa_d} \mathcal{F}_{ca} H^{ab} \bar{\mathcal{F}}_{bd} \quad (3.15)$$

The stationarity condition of the scalar potential with respect to the various fields namely

$$\frac{\partial \mathcal{V}_{sca}}{\partial X} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{V}_{sca}}{\partial \phi} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{V}_{sca}}{\partial C} = 0 \quad (3.16)$$

leads, for the case $\langle C^2 + 2|\phi|^2 \rangle = 0$, to the following equation

$$\mathcal{F}_{abc} \left[F^{xb} \left(\bar{F}^{\bar{x}c} + \frac{1}{2\kappa_c} \right) + \frac{1}{2} D^b D^c \right] = 0 \quad (3.17)$$

leading to broken supersymmetric phase for the case where $\mathcal{F}_{abc} \neq 0$.

3.2. Using $(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$ hypermultiplet

Using duality transformations (2.22), one can also express the $\mathcal{N} = 2$ tensor multiplet $\mathcal{T}^{(\mathcal{N}=2)}$ as a hypermultiplet described by two $\mathcal{N} = 1$ chiral superfields $\mathcal{Q}_1$ and $\mathcal{Q}_2$. In this realisation of $\mathcal{T}^{(\mathcal{N}=2)}$, the previous superspace density (3.2) gets mapped to the equivalent expression

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{hyp} = & \int d^4\theta \left(\bar{\mathbf{Q}}_1 e^{g_1 V_1 + g_2 V_2} \mathbf{Q}_1 + \bar{\mathbf{Q}}_2 e^{-g_1 V_1 - g_2 V_2} \mathbf{Q}_2 \right) \\
& + \int d^2\theta \left(m + i\sqrt{2}g_1 X_1 + i\sqrt{2}g_2 X_2 \right) \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \\
& - i \int d^2\theta \left(\frac{g_1}{\kappa_1} + \frac{g_2}{\kappa_2} \right) \mathbf{Y} + hc
\end{aligned} \tag{3.18}$$

where the superfields $\mathbf{Q}_1$ and $\mathbf{Q}_2$ carry opposite charges under the $U_1(1) \times U_2(1)$ gauge symmetry; but $\mathbf{Y}$ playing the same role.

The scalar potential of this superfield realisation of the gauge theory is given by

$$\mathcal{V}'_{sca} = H_{ab} \left[F^{x^a} \bar{F}^{\bar{x}^b} + \frac{1}{2} D^a D^b \right] + G_{u\bar{v}} F^{q^u} \bar{F}^{\bar{q}^{\bar{v}}} \tag{3.19}$$

It has the same form as (3.14)

$$\mathcal{V}'_{sca} = \frac{1}{2} r'_a H^{ab} r'_b + w'_a H^{ab} \bar{w}'_b + \varrho'^2 \left| m + \sqrt{2} i g_a x^a \right|^2 \tag{3.20}$$

but now with the dual expressions

$$\begin{aligned}
r'_a &= -g_a \left(|q^1|^2 - |q^2|^2 \right) + \frac{\xi_a}{2} \\
w'_a &= \frac{\sqrt{2} g_a}{i} q^1 q^2 + \frac{1}{4} e_a + \frac{i}{4\kappa_c} \mathcal{F}_{ac}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

and

$$\varrho'^2 = |q^1|^2 + |q^2|^2 \tag{3.22}$$

The properties of the scalar potential (3.20), including the description of the two scale breakings of $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry, have been explicitly studied in [32].

4. ADJ model and tadpole anomaly

In this section, we study a D3 brane realisation of ADJ theory and the interpretation of partial supersymmetric breaking in terms of 3-forms fluxes through 3-cycles in CY3. This brane realisation has been succinctly presented in the introduction section; here we use results on type IIB string on local CY3s to describe the underlying geometry and the nature of H_3^{RR} , H_3^{NS} fluxes behind $\mathcal{N} = 2$ ADJ model. To reach this goal, we first examine the geometric property the linear combinations of abelian gauge superfields; then we study the geometric derivation of the $\mathcal{N} = 2$ ADJ condition and its $\mathcal{N} = 1$ deformation given by (2.35); and after we give the explicit relationship between ADJ condition and D3 tadpole cancellation anomaly in type IIB.

4.1. $\mathcal{N} = 2$ ADJ model and 3-cycles in CY3

In the effective $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric $U(1) \times U(1)$ gauge model, the superspace lagrangian density $\mathcal{L}_{U(1)^2}^{\mathcal{N}=2}$ depends, in addition to the single tensor multiplet $\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2} = (\mathbf{L}, \mathbf{\Phi}, \mathbf{Y})$, on two $\mathcal{N} = 2$ abelian gauge multiplets $\mathcal{W}_{1,2}^{\mathcal{N}=2} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{V}_1), (\mathbf{X}_2, \mathbf{V}_2)$.

4.1.1. Linear combinations

By an inspection of the superspace density (3.1), one notices that $\mathcal{L}_{U(1)^2}^{\mathcal{N}=2}$ depends on the following superfield linear combinations

$$\begin{aligned} V &= g_1 V_1 + g_2 V_2 \\ V' &= \xi_1 V_1 + \xi_2 V_2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

and

$$\begin{aligned} X &= g_1 X_1 + g_2 X_2 \\ X' &= e_1 X_1 + e_2 X_2 \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X} &= \frac{1}{\kappa_1} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X_1} + \frac{1}{\kappa_2} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X_2} \end{aligned} \quad (4.2)$$

These superfield combinations may a priori be extended to any number n of $\mathcal{N} = 2$ gauge multiplets $\mathcal{W}_a^{\mathcal{N}=2} = (X_a, V_a)$ as follows

$$V = \sum_{a=1}^n g_a V_a \quad (4.3)$$

$$X = \sum_{a=1}^n g_a X_a \quad (4.4)$$

where the g_a 's are gauge coupling constants associated with each abelian $U_a(1)$ gauge multiplet (X_a, V_a) . Similar relations can be written down for V' , X' and $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X}$. However, because of ADJ constraint relation; the generalisation of the condition (3.5) to arbitrary $U(1)^n$ gauge symmetry is valid provided $n \geq 2$ as in (2.12). The restriction to the particular $n = 1$ case leads to singular relation

$$\frac{g_1}{\kappa_1} = 0$$

requiring $g = 0$ for $\kappa \neq 0$. To overcome this difficulty; one may resolve the $\frac{g_1}{\kappa_1} = 0$ singularity by deforming it like $\nu + \frac{g}{\kappa} = 0$; this leads to $g = -\kappa \nu$; however remembering the property of eqs. (2.34)–(2.35), one learns that the deformation by ν breaks explicitly $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry down to $\mathcal{N} = 1$.

To see the meaning of the linear combinations (4.1)–(4.4) as well as the interpretation of the deformation

$$\nu + \sum_{a=1}^n \frac{g_a}{\kappa_a} = 0 \quad (4.5)$$

we need to go beyond 4d space time by thinking of:

- the $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric $U(1)^n$ gauge model as a part of an effective theory following from type IIB string compactified on a local CY3; and
- the constraint relation (4.5) as corresponding to the D3 tadpole anomaly [34]

$$\frac{1}{2\kappa_{10}^2 T_3} \int_{CY3} \hat{H}_3^{RR} \wedge \hat{H}_3^{NS} + N_{D3} = 0 \quad (4.6)$$

where the 3-form gauge field strengths $\hat{H}_3^{RR}$, $\hat{H}_3^{NS}$; and the numbers T_3 and N_{D3} will be introduced later on.

To be explicit, we study in what follows the derivation of the linear combinations $\sum_a \xi_a V^a$ and $\sum_a g_a V^a$ from type IIB string compactification on a Calabi–Yau threefold $\mathcal{Z}_3$ with Kähler 2-form J_2 and complex holomorphic 3-form Ω_3 . Then, we turn to the derivation of the linear combinations $\sum_a e_a X^a$ and $\sum_a \frac{1}{\kappa_a} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X^a}$ concerning the chiral superfields.

4.1.2. Kahler sector

To derive the two linear combinations involving the gauge multiplet namely the $V = \sum_a \xi_a V^a$, depending on FI coupling constants ξ_a , and the $V' = \sum_a g_a V^a$ involving gauge coupling constants g_a , it is interesting to start by describing the θ -expansions of these combinations. Focusing on the 4-vector v_μ^a field components of the linear sum of gauge superfields V^a which expands in θ -series as

$$V = \theta \sigma^\mu \bar{\theta} (v_\mu) + \theta^2 \bar{\theta}^2 \left(\sum_{a=1}^n \chi_a D^a \right) + \frac{i}{\sqrt{2}} \theta^2 \bar{\theta} \left(\sum_{a=1}^n \chi_a \bar{\lambda}^a \right) - \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\theta}^2 \theta \left(\sum_{a=1}^n \chi_a \lambda^a \right) \quad (4.7)$$

with

$$v_\mu = \sum_{a=1}^n \chi_a v_\mu^a, \quad \chi_a = \xi_a, \quad g_a \quad (4.8)$$

Obviously for the case $\chi_a = \xi_a$, the contribution to ADJ model is given by the D-term $\theta^2 \bar{\theta}^2 (\sum_{a=1}^n \xi_a D^a)$; and the interpretation of ξ_a 's may be obtained by computing the field equations of the auxiliary D^a fields. However, we can reach the same result by looking for the derivation of this quantity from superstring compactification.

i) FI coupling constants

As a first step toward the $\xi_a V^a$'s, we use the 4d space time language of 1-form gauge field potentials $V_1^a = v_\mu^a dx^\mu$ to rewrite the gauge component field linear combination $\sum \xi_a v_\mu^a$ as follows

$$\left(\sum_{a=1}^n \xi_a v_\mu^a \right) dx^\mu = \sum_{a=1}^n \xi_a V_1^a \equiv V_1 \quad (4.9)$$

So $\xi_a v_\mu^a$ can be also viewed in terms of a linear combination of the 1-form gauge field potentials V_1^a . The next step is to transform above (4.9) into an integral over full dimensions of the Calabi–Yau threefolds; this is achieved by thinking about the 1-form gauge field V_1^a in 4d space time as due to a 4-form gauge potential $\hat{C}_4$ of a D3 brane living in 10d space time

$$\hat{C}_4 = \frac{1}{4!} C_{MNPQ} d\hat{x}^M \wedge d\hat{x}^N \wedge d\hat{x}^P \wedge d\hat{x}^Q \quad (4.10)$$

but with three directions wrapping the compact 3-cycles $[A_a]$ of the local CY3 as follows

$$V_1^a = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{CY3} \hat{C}_4 \wedge \beta^a \quad (4.11)$$

with harmonic 3-form β^a belonging to $H^{(2,1)}(CY3, R) \oplus H^{(1,2)}(CY3, R)$. Putting this relation back into (4.9), we end with

$$\sum_{a=1}^n \xi_a V_1^a = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{CY3} \hat{C}_4 \wedge dJ_2 \quad (4.12)$$

with dJ_2 standing for 3-form obtained by complex deformation of Kähler 2-form J_2 of the CY3 [40–43]

$$dJ_2 = \sum_{a=1}^n \xi_a \beta^a, \quad \xi_a = \frac{1}{2} \left(\int_{[B^a]} dJ_2 + hc \right) \quad (4.13)$$

where 3-cycle $[B^a]$ is the dual of $[A_a]$ in the CY3. Recall that the pair $[A_a]$ and $[B^a]$ form a symplectic basis of 3-cycles in the homology group of the CY3; they are in 1:1 correspondence with the 3-form harmonic basis (α_a, β^a) of the cohomology group.

ii) Gauge coupling constants

To derive the linear combination $\sum_{a=1}^n g_a v_\mu^a$ and the expression of the gauge coupling constants g_a , we use the 4d Chern–Simons interaction $\mathcal{L}_{CS}^{4d}$ between the gauge potentials v_μ^a and the antisymmetric field strength $H_{\nu\rho\sigma}$,

$$\mathcal{L}_{CS}^{4d} = \frac{1}{3!} \left(\sum_{a=1}^n g_a v_\mu^a H_{\nu\rho\sigma} \right) \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (4.14)$$

that we rewrite, by using wedge product $V_1^a \wedge H_3$ of 4d space time 1- and 3-forms like

$$\mathcal{S}_{CS}^{4d} = \int_{M^4} \left(\sum_{a=1}^n g_a V_1^a \right) \wedge H_3 \quad (4.15)$$

But seen that in type IIB string, we have two kinds of 3-forms H_3^{RR} and $\hat{H}_3^{NS}$; then we can think of the 4d Chern–Simons action $\mathcal{S}_{CS}^{4d}$ as resulting from the following 10d expression

$$\mathcal{S}_{CS}^{10d} = \int_{M^{10}} \hat{C}_4 \wedge \hat{H}_3^{NS} \wedge \hat{H}_3^{RR} \quad (4.16)$$

This relation leads in general to two kinds of 4d space time contributions; one involving 4d space time 3-form H_3^{RR} and the other the 4d 3-form H_3^{NS} as follows

$$\int_{M^4} \left(\int_{CY3} \hat{C}_4 \wedge \hat{H}_3^{NS} \right) \wedge H_3^{RR} - \int_{M^4} \left(\int_{CY3} \hat{C}_4 \wedge \hat{H}_3^{RR} \right) \wedge H_3^{NS} \quad (4.17)$$

If we restrict to first contribution and comparing with (4.11), we end with the following expression for the gauge coupling constants

$$g_a = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{CY3} \alpha_a \wedge H_3^{NS} \quad (4.18)$$

that reads also as follows

$$g_a = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{B^a}^{\Lambda_0} H_3^{NS} \quad (4.19)$$

with α' the string constant and where Λ_0 is a cut off playing the role of running scale of the well known renormalisation group equation.

To conclude, the linear combinations of the $\mathcal{N} = 2$ gauge multiplets used in ADJ model have the following geometric interpretation in type IIB string on local CY3

$$\sum_{a=1}^n \xi_a V_1^a = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{CY3} \hat{C}_4 \wedge dJ_2 \quad (4.20)$$

$$\sum_{a \geq 1} g_a V_1^a = \frac{1}{4\pi^2\alpha'^2} \int_{CY3} \hat{C}_4 \wedge H_3^{NS} \quad (4.21)$$

4.1.3. Chiral sector

The X^a 's are chiral superfields with θ -components given by complex scalar fields $X^a|_{\theta=0} = X^a$; Weyl spinors $D_\alpha X^a|_{\theta=0} = \psi_\alpha^a$ and auxiliary fields $\frac{1}{2} D^\alpha D_\alpha X^a|_{\theta=0} = F^a$. The linear combination $\sum e_a X^a$ is a chiral superfield

$$\sum_{a \geq 1} e_a X^a = X + \theta \cdot \left(\sum_{a \geq 1} e_a \psi^a \right) + \theta^2 \left(\sum_{a \geq 1} e_a F^a \right) \quad (4.22)$$

with leading θ -component given by a similar relation to the superfield one namely

$$X = \sum_{a \geq 1} e_a X^a \quad (4.23)$$

A similar relation is valid for the magnetic FI combination

$$\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X} = \sum_{a \geq 1} \frac{1}{\kappa_a} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X^a} \quad (4.24)$$

In the embedding of ADJ model into 10d type IIB string compactification on CY3, the complex scalars X^a and $\mathcal{F}_a$ describe the expansion modes of the holomorphic 3-form Ω_3 over the 3-form harmonic basis (α_a, β^a) of the local CY3

$$\Omega_3 = X^a \alpha_a - \mathcal{F}_a \beta^a \quad (4.25)$$

with

$$X^a = \int_{CY3} \Omega_3 \wedge \beta^a, \quad \mathcal{F}_a = \int_{CY3} \Omega_3 \wedge \alpha_a \quad (4.26)$$

The electric FI e_a and magnetic $\frac{1}{\kappa_a}$ coupling constants are obtained by equating the superpotential

$$W(X) = e_a X^a - \frac{1}{\kappa_a} \mathcal{F}_a \quad (4.27)$$

with the expression of $W(X)$, build out of $G_3 = H_3^{RR} - \tau H_3^{NS}$ and the complex holomorphic 3-form namely [46,34],

$$W(X) \sim \int_{CY3} \Omega_3 \wedge G_3 \quad (4.28)$$

We obtain

$$G_3 = e_a \beta^a - \frac{1}{\kappa_a} \alpha_a \quad (4.29)$$

So, we have

$$e_a = \int_{CY3} \alpha_a \wedge G_3 \quad , \quad \frac{1}{\kappa_a} = \int_{CY3} G_3 \wedge \beta^a \quad (4.30)$$

4.2. Deriving ADJ constraint from type IIB string

In ADJ model, the condition (2.12) is intimately related with the real 4-form C_4 with anti-symmetric gauge potential field $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ as in (2.19) and directions filling the 4d space time dimensions

$$\begin{aligned} C_4 &= C_{\mu\nu\rho\sigma} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma \\ F_5 &= 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

This 4-form gauge field potential cannot have field strength $F_5 = dC_4$ in 4d space time; and thus it should be treated as an auxiliary field as done by ADJ theory. Notice that this is a constant field that may be ignored by setting it to zero; but this corresponds to a particular solution since in general it reads like

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu\rho\sigma} &= \Delta \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \quad , \quad \Delta = cst \\ d\Delta &= 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

and captures a constraint relation that we study below. Observe that Δ scales as mass^2 ; and so the scaling mass dimension of C_4 is mass^{-2} .

4.2.1. Tadpole anomaly

To get more insight into the meaning of the $\mathcal{N} = 2$ ADJ condition $\sum_a \frac{g_a}{\kappa_a} = 0$ and its $\mathcal{N} = 1$ deformation $\nu + \sum_a \frac{g_a}{\kappa_a} = 0$, one has to go beyond 4d space time where the gauge potential C_4 is no longer constant

$$F_5|_{4d} = dC_4|_{4d} = 0 \quad , \quad \hat{F}_5|_{10d} = d\hat{C}_4|_{10d} \neq 0 \quad (4.33)$$

In a higher dimension D space time compactified on real $(D - 4)$ manifold, $M^D = M^{1,3} \times M^{(D-4)}$, some of the directions of the extended 4-form field $\hat{C}_4$ can wrap dimensions in the internal space allowing as consequence Chern–Simons couplings between $\hat{C}_4$ and other p_i -forms $\hat{F}_{p_i}$ living in M^D ; for example $\mathcal{S}_{CS}^D \sim \int_{M^D} \hat{C}_4 \wedge \hat{F}_{D-4}$. This is exactly what happens in the case of type IIB strings compactified on Calabi–Yau threefolds where the 4-form gauge potential $\hat{C}_4$, sourced by D3 brane, appears naturally and where couplings with other p-form gauge field potentials are possible. In 10d type IIB theory, the Chern–Simons coupling reads as follows

$$\mathcal{S}_{CS}^{10d} \sim \int_{M^{1,9}} \hat{C}_4 \wedge \hat{H}_3^{RR} \wedge \hat{H}_3^{NS} \quad (4.34)$$

where the 3-forms $\hat{H}_3^{NS}$ and $\hat{H}_3^{RR}$ are the gauge field strengths of the antisymmetric $\hat{B}_{\mu\nu}^{NS}$ and $\hat{B}_{\mu\nu}^{RR}$ gauge potentials of type IIB strings. The field equation of the 5-form field strength $\hat{F}_5$ of the $\hat{C}_4$ gauge potential is given by

$$dF_5 = \hat{H}_3^{NS} \wedge \hat{H}_3^{RR} + 2\kappa_{10}^2 T_3 \mathcal{Q}_3^{loc} \quad (4.35)$$

with $T_3 = \frac{1}{(2\pi)^3 \alpha'^2}$ the D3-brane tension, $2\kappa_{10}^2 = (2\pi)^7 \alpha'^4$; and where ϱ_3^{loc} -form stands for the D3 charge density due to localised sources including D7-branes or O3 planes and also of mobile D3-branes [34]; see also [44,45]

$$\int_{CY3} \varrho_3^{loc} = N_{D3} \quad (4.36)$$

From 4d space time view, the integration of the Chern–Simons coupling (4.34) on the internal coordinates

$$\mathcal{S}_{CS}^{4d} = \int_{M^{1,3}} \left(\int_{CY3} \hat{C}_4 \wedge \hat{H}_3^{RR} \wedge \hat{H}_3^{NS} \right) \quad (4.37)$$

leads to various terms that can be organised into three block terms

$$\mathcal{S}_{CS}^{4d} = \int_{M^{1,3}} \left(\mathcal{L}_0^{4d} + \mathcal{L}_1^{4d} + \mathcal{L}_2^{4d} \right) \quad (4.38)$$

with

$$\mathcal{L}_0^{4d} \sim \left(\int_{CY3} \hat{H}_3^{RR} \wedge \hat{H}_3^{NS} \right) \wedge C_4 \quad (4.39)$$

$$\mathcal{L}_1^{4d} \sim \left(\int_{CY3} \hat{C}_4 \wedge \hat{H}_3^{RR} \right) \wedge H_3^{NS} \quad (4.40)$$

$$\mathcal{L}_2^{4d} \sim - \left(\int_{CY3} \hat{C}_4 \wedge \hat{H}_3^{NS} \right) \wedge H_3^{RR} \quad (4.41)$$

where un-hatted fields refer to 4d space time fields. Notice that the two last terms are precisely the ones given by eq. (4.17), they contribute to Chern–Simons couplings in 4d space time.

The remaining term (4.39), involving the integral of $\hat{H}_3^{RR} \wedge \hat{H}_3^{NS}$ through full CY3; is a topological term describing the flux Φ_{flux} of the 6-form $\hat{H}_3^{RR} \wedge \hat{H}_3^{NS}$ through the CY3

$$\Phi_{flux} \sim \int_{CY3} \hat{H}_3^{RR} \wedge \hat{H}_3^{NS} \quad (4.42)$$

For compact CY3, this flux has no where to go and so has to vanish; but as we will see in a moment it may be compensated by D3-brane charges coming from local sources. So the contribution of this term to 4d space time lagrangian density reads as

$$\frac{\Phi_{flux}}{24} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} C_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\Phi_{flux}}{24} \Delta \quad (4.43)$$

where we have used (4.32). This term appears linearly in the ADJ lagrangian density; so it captures a constraint equation requiring the flux Φ_{flux} to vanish as noticed above. This constraint can be then interpreted as nothing but the vanishing condition given by the integral of (4.35) on CY3 for the particular case $\varrho_3^{loc} = 0$. For a non-zero ϱ_3^{loc} density of D3-brane charges as in eq. (4.36), the tadpole vanishing condition reads as

$$\frac{1}{2\kappa_{10}^2 T_3} \int_{CY3} \hat{H}_3^{RR} \wedge \hat{H}_3^{NS} + N_{D3} = 0 \quad (4.44)$$

and the contribution to the 4d space time lagrangian density gets modified like

$$\mathcal{L}_0^{4d} = \frac{\Delta}{24} (\Phi_{flux} + N_{D3}) \quad (4.45)$$

The presence of the N_{D3} flux breaks explicitly $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry down to $\mathcal{N} = 1$; N_{D3} flux plays the same role as the parameter ν in the deformed constraint eq. (4.5).

4.2.2. Revisiting $\mathcal{N} = 2$ ADJ condition and its deformation

Here, we give the general expression of the condition of tadpole cancellation in terms of the H_3^{RR} and H_3^{NS} fluxes. If assuming that the CY3 is compact, then we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{CY3} H_3^{RR} \wedge \beta^a &= p_a \\ \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{CY3} \alpha_a \wedge H_3^{RR} &= p_{n+a} \end{aligned} \quad (4.46)$$

and

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{CY3} H_3^{NS} \wedge \beta^a &= q_a \\ \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{CY3} \alpha_a \wedge H_3^{NS} &= q_{n+a} \end{aligned} \quad (4.47)$$

From these relations, we learn

$$\frac{1}{4\pi^2\alpha'^2} \int_{CY3} \hat{H}_3^{NS} \wedge \hat{H}_3^{RR} = q_A \Omega^{AB} p_B \quad (4.48)$$

where the quantised vectors are as

$$p_A = \begin{pmatrix} p_a \\ p_{a+n} \end{pmatrix}, \quad q_A = \begin{pmatrix} q_b \\ q_{b+n} \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

and where Ω^{AB} is the usual $2n \times 2n$ symplectic matrix

$$\Omega^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & I_{n \times n} \\ -I_{n \times n} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

Putting back into (4.44), the tadpole condition becomes

$$\nu + 4\pi^2\alpha'^2 q_A \Omega^{AB} p_B = 0 \quad (4.51)$$

with

$$\nu = 2\kappa_{10}^2 T_3 N_{D3} = (2\pi)^4 \alpha'^2 N_{D3} \quad (4.52)$$

The $\mathcal{N} = 2$ ADJ constraint (2.12) may be recovered by requiring $N_{D3} = 0$; and choosing the vectors p_A and q_A like

$$\frac{1}{\kappa_a} = 2\pi\alpha'^2 q_a, \quad g_a = 2\pi p_{a+n} \quad (4.53)$$

the other p_a and q_{a+n} are set to zero.

5. Conclusion and comments

In this paper, we have studied a D3 brane realisation of partial breaking of $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry in ADJ model of Ref. [32]. This is a particular 4d $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric $U(1) \times U(1)$ gauge model describing the coupling of the $\mathcal{N} = 2$ gauge multiplets $\mathcal{W}_1^{(\mathcal{N}=2)}$, $\mathcal{W}_2^{(\mathcal{N}=2)}$ with a single tensor $\mathcal{T}^{(\mathcal{N}=2)}$; it is also the leading model in the family of effective 4d $\mathcal{N} = 2$ $U(1)^n$ gauge theory describing the dynamics of the multiplet $\mathcal{T}^{(\mathcal{N}=2)}$ coupled to n $\mathcal{N} = 2$ Maxwell gauge superfield strengths $\mathcal{W}_1^{(\mathcal{N}=2)}, \dots, \mathcal{W}_n^{(\mathcal{N}=2)}$ with $n \geq 2$. The coupling between gauge and matter superfields is of Chern–Simons type; it reads in $\mathcal{N} = 2$ chiral superspace as follows

$$\mathcal{L}_{CS} = \int d^8\theta \mathcal{T}^{(\mathcal{N}=2)} \left(\sum_{a=1}^n g_a \mathcal{W}_a^{(\mathcal{N}=2)} \right) \quad (5.1)$$

One of the basic constraint equations in this 4d effective $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric $U(1)^n$ gauge theory, formulated in $\mathcal{N} = 1$ superspace with lagrangian density $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{ST} + \mathcal{L}_{CS}$, is the one given by $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta Y} = 0$; the superfield equation of the auxiliary Y whose full contribution comes from the $\mathcal{L}_{CS}$ term namely

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{CS}}{\delta Y} = 0 \quad (5.2)$$

Because of linear dependence of $\mathcal{L}_{CS}$ into the superfield Y , the above superfield equation turns into the constraint $\sum_{a=1}^n \frac{g_a}{\kappa_a} = 0$. This condition relates the gauge coupling constants g_a to magnetic FI couplings $\frac{1}{\kappa_a}$; and, upon computing energy of the ground state of the model, one also obtains links between partial supersymmetry breaking scales and the g_a, κ_a constant parameters as done in [32].

In our brane realisation, the ADJ model is represented by D3 branes wrapping 3-cycles in type IIB on local CY3 in presence of non-trivial fluxes of the 3-forms gauge field strengths H_3^{RR} and H_3^{NS} . In this picture, the Chern–Simons coupling (5.1) is associated with a particular term in the Calabi–Yau compactification of 10-dim field action

$$\mathcal{S}_{CS}^{10d} \sim \int_{M^{1,9}} \hat{C}_4 \wedge \hat{H}_3^{RR} \wedge \hat{H}_3^{NS} \quad (5.3)$$

down to 4d space time; for details see eqs. (4.34)–(4.41). In this brane representation of ADJ theory, the constraint relation $\sum_{a=1}^n \frac{g_a}{\kappa_a} = 0$ is a particular realisation of the total flux conservation condition $\Phi_{flux} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2 T_3} \int_{CY3} \hat{H}_3^{NS} \wedge \hat{H}_3^{RR} = 0$ which, by using the n -dimensional symplectic homology basis of 3-cycles (A^a, B_a) of the CY3, reads in general like $\Phi_{flux} = q_A \Omega^{AB} p_B$ with p_A and q_B as in eqs. (4.46)–(4.48).

$$\Phi_{flux} = (q_a, q_{a+n}) \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ab} \\ -\delta_{ab} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_b \\ p_{b+n} \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

By expanding the above relation as $\Phi_{flux} = q_a p_{a+n} - q_{a+n} p_a$; it follows that the condition $\sum_{a=1}^n \frac{g_a}{\kappa_a} = 0$ is indeed a particular solution of vanishing $\Phi_{flux} = 0$ given the choice of fluxes as in eq. (4.53). This flux choice corresponds to expanding gauge field strengths H_3 on the basis (α_a, β^a) of 3-forms, dual to 3-cycles basis, like $H_3^{NS} = q^a \alpha_a$ and $H_3^{RR} = p_{a+n} \beta^a$. Geometrically, these values correspond to the local Calabi–Yau picture where the 3-cycles B_a are taken

in the non-compact space approximation. In the case $n = 1$; describing the special $\mathcal{N} = 2$ $U(1)$ gauge model, the CY3 is the T^*S^3 conifold with compact A given by the 3-sphere S^3 and non compact $B \simeq \mathbb{R}^3$; and the above expression of the Φ_{flux} flux reduces to

$$(q_1, 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ p_2 \end{pmatrix} = q_1 p_2 \quad (5.5)$$

The relationship between ADJ constraint and the flux $q_A \Omega^{AB} p_B$ shows that $\sum_{a=1}^n \frac{g_a}{\kappa_a} = 0$ is nothing but the vanishing condition of the D3 tadpole anomaly in absence of D7 branes or O3 planes; the particular $n = 1$ case is therefore anomalous.

By taking into account D3 charge density due to localised sources D7-branes or O3 planes; and by using a result from the study of [34], the previous total flux conservation condition gets promoted to the following relation

$$\tilde{\Phi}_{flux} = \Phi_{flux} + N_{D3} = 0 \quad (5.6)$$

with N_{D3} as in (4.36). In this picture, the tadpole anomaly can be lifted; but with the price of breaking explicitly $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry in the underlying effective field theory down to $\mathcal{N} = 1$. In this situation, the ADJ constraint $\sum_a \frac{g_a}{\kappa_a} = 0$ becomes deformed like $v + \sum_a \frac{g_a}{\kappa_a} = 0$ as shown by eq. (4.45).

Acknowledgements

This work is supported by URAC 09/CNRST; Saidi thanks ICTP-Trieste, Italie; where a part of this work has been done.

Saidi would like to thank the ICTP-Senior Associate programme for supporting his stay at the International Centre for Theoretical Physics, Trieste Italy; where this work has been revised.

Appendix A

Here we give two appendices; in Appendix A.1, we collect useful tools on type IIB on CY3; and in Appendix A.2, we study properties shared by supersymmetric and gauge transformations of the $\mathcal{N} = 2$ gauge superfield $\mathcal{W}^{\mathcal{N}=2}$ and the $\mathcal{N} = 2$ tensor multiplet $\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2}$ used in this paper.

A.1. Useful tools on type IIB on CY3

Effective $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric QFT models in 4d space-time can be embedded in string compactifications; they are constructed in various manners; in particular by compactifying type II strings on CY3s or heterotic string on $K3 \times \mathbb{T}^2$. These compactifications to 4d $\mathcal{N} = 2$ low energy theories are related by duality symmetries. By decoupling massive modes which are of order compactification scale, one can build the structure of the effective $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric theory with decoupled gravity. The massless states following from the CY3 compactification can be organised into $\mathcal{N} = 2$ multiplets as follows:

(1) vectors $V^{\mathcal{N}=2}$; each contains a complex scalar, a vector and two Weyl fermions.

(2) hypermultiplets $H^{\mathcal{N}=2}$; each contains four real scalars and two Weyl fermions.

(3) two other kinds of non-standard $\mathcal{N} = 2$ multiplets having an antisymmetric tensor $B_{\mu\nu}$; these are: (a) the tensor multiplet $T^{\mathcal{N}=2}$ having: 3 scalars, $B_{\mu\nu}$ and 2 Weyl fermions; and (b) the vector-tensor $R^{\mathcal{N}=2}$ containing: a scalar, a vector, $B_{\mu\nu}$ and 2 Weyl fermions.

Type IIB in 10d The 10d type IIB supergravity multiplet has $128 + 128$ on shell degrees of freedom with bosonic sector as follows

$$\begin{aligned} \text{NS-NS} &: \hat{\phi}, \hat{G}_{MN}, \hat{B}_{MN} \\ \text{RR} &: \hat{C}_0, \hat{C}_{MN}, \hat{C}_{MNPQ} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

In addition to the metric $\hat{G}_{MN}$, we have a real axion $\hat{C}_0$ and the dilation $\hat{\phi} = \ln g_{IIB}$ with g_{IIB} the string coupling. We also have p-forms namely the NS–NS $\hat{B}_2$ and the RR p-form gauge field potentials $\hat{C}_p$ together with the corresponding gauge invariant field strengths

$$\begin{aligned} \hat{F}_{p+1} &= d\hat{C}_p \\ \hat{H}_3 &= d\hat{B}_2 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

This theory has an S-duality symmetry that allows to combine these fields into $SL(2, Z)$ representations; in particular as

$$\begin{aligned} \tau &= \hat{C}_0 - ie^{-\hat{\phi}} \\ \hat{G}_3 &= \hat{F}_3 - \tau \hat{H}_3 \\ \tilde{F}_5 &= \hat{F}_5 - \frac{1}{2} \hat{C}_2 \wedge \hat{H}_3 + \frac{1}{2} \hat{B}_2 \wedge \hat{F}_3 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

where τ may be interpreted as the complex structure of 2-torus as in the embedding of type IIB in F-theory. The 5-form $\tilde{F}_5$ gauge field strength span in 5 of the 10d space time dimensions; it is a self dual form $*\tilde{F}_5 = \tilde{F}_5$ with $*$ defined as

$$*\hat{F}^{M_0 M_1 \dots M_n} = \frac{1}{n!} \varepsilon^{M_0 M_1 \dots M_n M_{n+1} \dots M_8 M_9} \hat{F}_{M_{n+1} \dots M_9} \quad (\text{A.4})$$

To avoid confusion between p-form of same rank and also their descendent after compactification, we shall use the notations $\hat{B}_2 = \hat{B}_2^{NS}$ for NS 2-form gauge potential sourced by the elementary string F1; and $\hat{C}_2 = \hat{B}_2^{RR}$ for the RR 2-form gauge potential sourced by the solitonic D1 string.

Type IIB on CY3 To descend to 4d space time, we have to factorise the 10d fields as products of parts; one depending on 4d space time and the other on the internal coordinates. This is achieved by decomposing the 2- and 4-forms on a harmonic basis of form of the local CY3 as follows

$$\begin{aligned} \hat{B}_2^{NS} &= B_2^{NS} + b_{NS}^I \omega_I \\ \hat{B}_2^{RR} &= B_2^{RR} + b_{RR}^I \omega_I \\ \hat{C}_4 &= C_4 + A_2^I \wedge \omega_I + V_1^a \wedge \alpha_a - U_{1a} \beta^a + \varrho_I \wedge \tilde{\omega}^I \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Here the set $\omega_I, \alpha_a, \beta^a, \tilde{\omega}^I$ stand for a real harmonic basis of p-forms generating the cohomology of the CY3 obeying amongst others the following useful relations

$$\int_{CY3} \omega_I \wedge \tilde{\omega}^J = \delta_I^J, \quad \int_{CY3} \alpha_a \wedge \beta^b = \delta_a^b \quad (\text{A.6})$$

Notice that the 10d self duality condition of $\hat{F}_5 = d\hat{C}_4$ implies that the 2-form $A_2^I = \frac{1}{2!} A_{\mu\nu}^I dx^\mu \wedge dx^\nu$ and the scalars ϱ_I in eq. (A.5) are related as $dA_2^I = *\varrho_I$; and so only one of them should be kept; for our concern we have kept A_2^I . The same feature holds for the 1-form gauge field

potentials V_1^a and U_{1a} ; in other words the decomposition of $\hat{C}_4$ capturing the right number of degrees of freedom is reduced to

$$\hat{C}_4 = C_4 + A_2^I \wedge \omega_I + V_1^a \wedge \alpha_a \quad (\text{A.7})$$

Combining altogether, we learn from above decomposition that the 4d space time spectrum that we obtain, after compactification on CY3, the following multiplets where only bosonic fields are reported

Multiplets	Type IIB/ $\mathcal{Z}_3$	Number
Gravity	$(\mathcal{G}_{\mu\nu}, V_\mu^0)$	1
Vector	$(V_\mu^a, X^a, \bar{X}_a)$	$h^{2,1}$
Tensor	$(A_{\mu\nu}^I, b_{RR}^I, t^I, \bar{t}^I)$	$h^{1,1}$
Bi-tensor	$(B_{\mu\nu}^{NS}, B_{\mu\nu}^{RR}, \xi, S)$	1

(A.8)

and where the 4d scalars ξ and S stand respectively the 4d space time dilaton and 4d axion.

To embed the effective ADJ theory in type IIB string on local CY3, we have to think about the degrees of freedom of ADJ model to belong to a subsector of type IIB/CY3 namely

$$\begin{aligned} \text{vector} &: (V_\mu^a, X^a, \bar{X}_a) \\ \text{tensor} &: (B_{\mu\nu}^{NS}, B_{\mu\nu}^{RR}, \xi, S) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

with $V_1^a = V_\mu^a dx^\mu$ standing for 1-form gauge potential in 4d space time. The fields of (A.9) are obtained by inverting eq. (A.5) by using properties of the harmonic basis of the homology cycles of the CY3; they are given by

$$\begin{aligned} V_1^a &= \int_{\text{CY3}} \hat{C}_4 \wedge \beta^a \\ X^a &= \int_{\text{CY3}} \Omega_3 \wedge \beta^a \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

A.2. More on $\mathcal{W}^{\mathcal{N}=2}$ and $\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2}$ multiplets

In this appendix, we shed light on those features behind formal similarities between Maxwell $\mathcal{W}^{\mathcal{N}=2}$ and single tensor $\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2}$ superfields; this is done by studying their behaviour under the second supersymmetric charge in the fibration (2.1); as well as their link through gauge symmetry.

A.2.1. Realising $\mathcal{N} = 2$ by two $\mathcal{N} = 1$ gauge superfields

There are different ways to deal with off shell representations of $\mathcal{N} = 2$ gauge and tensor multiplets; here we want to focus on those aspects shared by their formulation in terms of the $\mathcal{N} = 2$ chiral superfields $\mathcal{W}^{\mathcal{N}=2}$ and $\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2}$ introduced in section 2. These superfields carry $8_B + 8_F$ degrees of freedom; they may be obtained by first considering two $\mathcal{N} = 1$ superfields having $16_B + 16_F$ degrees of freedom; and then reducing this number down to $8_B + 8_F$ degrees by imposing appropriate constraints. The study of the reduction

$$16_B + 16_F \quad \rightarrow \quad 8_B + 8_F \quad (\text{A.11})$$

for both gauge $\mathcal{W}^{\mathcal{N}=2}$ and tensor $\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2}$ multiplets is interesting in the sense it allows to get more information on: (i) the link between the second supersymmetry and gauge symmetry; and (ii) the feature behind similarities between $\mathcal{W}^{\mathcal{N}=2}$ and $\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2}$. Explicitly, we proceed as follows:

First, we use $\mathcal{N} = 1$ formalism, where the first supersymmetry is manifest; to study a simple realisation of $\mathcal{W}^{\mathcal{N}=2}$ and $\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2}$ engineered from two $\mathcal{N} = 1$ hermitian gauge superfields V_1 and V_2 ; but handled in different manners.

After that, we draw the line on how this construction extends to the $\mathcal{N} = 2$ chiral superspace; this extension is also important for $\mathcal{W}^{\mathcal{N}=2}$ and $\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2}$ because it constitutes the starting point for studying electric–magnetic duality in $\mathcal{N} = 2$ superspace in presence of the Chern–Simons term given by the coupling

$$L_{CS}^{\mathcal{N}=2} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \, ig \mathcal{W}^{\mathcal{N}=2} \mathcal{T}^{\mathcal{N}=2} + hc \quad (\text{A.12})$$

Actually, this duality gives another facet on the relationship between $\mathcal{W}^{\mathcal{N}=2}$ and $\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2}$ as shown by eq. (2.28); it will not be developed here; but for details see [31] and references therein.

$\mathcal{N} = 2$ supersymmetry in $\mathcal{N} = 1$ superspace

In $\mathcal{N} = 1$ superspace, the hermitian gauge superfields V_1 and V_2 describe two representations of $\mathcal{N} = 1$ supersymmetry; and roughly speaking a $\mathcal{N} = 2$ multiplet. Altogether, V_1 and V_2 carry $16_B + 16_F$ off shell degrees of freedom; half of them coming from V_1 and the other half from V_2 . With these two superfields, the second supersymmetry is generated by the transformations

$$\begin{aligned} \tilde{\delta} V_1 &= \frac{-i}{\sqrt{2}} (\epsilon D + \bar{\epsilon} \bar{D}) V_2 \\ \tilde{\delta} V_2 &= i\sqrt{2} (\epsilon D + \bar{\epsilon} \bar{D}) V_1 \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

with supersymmetric parameter $\epsilon = \delta\tilde{\theta}$. These $16_B + 16_F$ degrees can be reduced down to $8_B + 8_F$ by imposing constraint equations on V_1 and V_2 ; it happens that this can be done in two different manners; one leading to (X, W_α) , the $\mathcal{N} = 1$ superfields representation of $\mathcal{W}^{\mathcal{N}=2}$; and the other to the (Φ, L) realisation of $\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2}$; or up to a gauge symmetry, to (Y, χ_α, Φ) with $L = D^\alpha \chi_\alpha + \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$ and Y as in (2.19).

From (V_1, V_2) to $\mathcal{W}^{\mathcal{N}=2}$

In this realisation, the $\mathcal{N} = 1$ hermitian superfields V_1 and V_2 are interpreted as gauge superfield potentials obeying the following $U(1)$ gauge transformations

$$\begin{aligned} V'_1 &\equiv V_1 + \Lambda_l \\ V'_2 &\equiv V_2 + (\Lambda_c + \bar{\Lambda}_c) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

They involve two $\mathcal{N} = 1$ superfield gauge parameters; the hermitian $\Lambda_l = \bar{\Lambda}_l$ and the chiral Λ_c solving the superspace conditions

$$\begin{aligned} D^2 \Lambda_l &= 0 = \bar{D}^2 \Lambda_l \\ \bar{D}_{\dot{\alpha}} \Lambda_c &= 0 = D_\alpha \bar{\Lambda}_c \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Each one of these superparameters reduces by 4 the number of degrees of freedom in the corresponding gauge superfield. The $\mathcal{N} = 2$ Maxwell chiral superfield strength $\mathcal{W}^{\mathcal{N}=2} \equiv (X, W_\alpha)$ is related to (V_1, V_2) through the following gauge invariant quantities

$$X = \frac{1}{2} \bar{D}^2 V_1 \quad , \quad W_\alpha = -\frac{1}{4} \bar{D}^2 D_\alpha V_2 \quad (\text{A.16})$$

they can be combined into an $\mathcal{N} = 2$ chiral superfield strength as in (2.4) namely

$$\mathcal{W}^{\mathcal{N}=2} = X + i\sqrt{2}\tilde{\theta}^\alpha W_\alpha - \tilde{\theta}^2 \left(\frac{1}{4} \bar{D}^2 \bar{X} \right)$$

which by substituting can be also expressed like $\mathcal{W}^{\mathcal{N}=2} = \frac{1}{4} \bar{D}^2 \Gamma$ with

$$\Gamma = 2V_1 - i\sqrt{2}\tilde{\theta}^\alpha (D_\alpha V_2) - \tilde{\theta}^2 (D^2 V_1) \quad (\text{A.17})$$

Notice that in analogy with the Wess–Zumino gauge commonly used for V_2 , the vector superfield V_1 in (A.16) has also a Wess–Zumino like expansion leading, after substituting in $X = \frac{1}{2} \bar{D}^2 V_1$, to the following θ -expansion

$$X = X + \sqrt{2}\theta\psi_1 + \theta^2\bar{\theta}^2 F_X \quad (\text{A.18})$$

with X standing for the complex scalar of the $\mathcal{N} = 2$ gauge multiplet and $\psi_{\alpha 1}$ for one of the two gauginos; the other gaugino $\psi_{\alpha 2}$ comes from W_α . However, the non-propagating complex auxiliary field F_X is realised here as $F_X = -d_1 - i\partial_\mu \nu_1^\mu$ with imaginary part $\text{Im } F_X$ given by the topological quantity

$$\partial_\mu \nu_1^\mu = \frac{i}{4!} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{F}_{[\mu\nu\rho\sigma]} \quad (\text{A.19})$$

with $\mathcal{F}_{[\mu\nu\rho\sigma]}$ interpreted as the field strength of a 3-form gauge potential $\mathcal{A}_{[\nu\rho\sigma]}$ describing a non-propagating component field. Being completely antisymmetric, this 4-tensor $\mathcal{F}_{[\mu\nu\rho\sigma]}$ can be realised like $\frac{1}{\kappa} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ where $\frac{1}{\kappa}$ is precisely the deformation term appearing in the second line of (2.4).

A.2.2. From (V_1, V_2) to tensor multiplet $\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2}$

First recall that in this paper, we have considered two kinds of realisations of the tensor multiplet $\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2}$: (i) a short representation where $\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2} \equiv (\mathbf{L}, \Phi)$ having $8_B + 8_F$ degrees of freedom; and (ii) a long representation $\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2} \equiv (\mathbf{Y}, \chi_\alpha, \Phi)$ involving $16_B + 16_F$ degrees of freedom obeying the symmetry (A.23). The first one is obtained from the second by gauging away half of the degrees of freedom as in eq. (A.11). In fact both short and long representation of $\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2}$ may be imagined as solutions of the following linear constraint relations

$$\begin{aligned} \bar{D}^2 U_1 &= D^2 U_1 = 0 \\ \bar{D}^2 D_\alpha U_2 &= D^2 \bar{D}_{\dot{\alpha}} U_2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

where we have used the notation (U_1, U_2) to avoid confusion with the hermitian multiplets (V_1, V_2) used in eq. (A.16). Notice that eq. (A.20) may thought of as the complement of eq. (A.16) in the space parameterised by (V_1, V_2) .

A first type of solution of these constraint relations is easily identified by remembering that the $\mathcal{N} = 1$ linear multiplet $\mathbf{L}$ satisfies also the conditions $D^2 \mathbf{L} = \bar{D}^2 \mathbf{L} = 0$ exactly as U_1 . Moreover because of the chirality properties $\bar{D}_{\dot{\alpha}} \Phi = D_\alpha \Phi = 0$ as well as the relations $[D_\alpha, \partial_\mu] = [\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \partial_\mu] = 0$; it follows that (U_1, U_2) are nothing but

$$\begin{aligned} U_1 &= \mathbf{L} \\ U_2 &= \Phi + \bar{\Phi} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

where we have dropped out the spurious superfield $\mathbf{Y}$.

The second type of solution of (A.20) is given by $\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2} \equiv (Y, \chi_\alpha, \Phi)$; it is convenient for the use of the $\mathcal{N} = 2$ chiral superspace and reads, roughly speaking, in terms of the four $\mathcal{N} = 1$ chiral superfields as follows

$$\begin{aligned} U_1 &= D^\alpha \chi_\alpha + \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \\ U_2 &= (\Phi + \bar{\Phi}) + \frac{i}{2} (D^2 Y - \bar{D}^2 \bar{Y}) \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

with the gauge symmetry property

$$\begin{aligned} \chi'_\alpha &= \chi_\alpha + \frac{i}{4} \bar{D}^2 D_\alpha \Omega \\ Y' &= Y - \frac{1}{2} \bar{D}^2 \Upsilon \\ \Phi' &= \Phi \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

where Ω and Υ are two $\mathcal{N} = 1$ hermitian gauge superfield parameters. Notice that the implementation of the superfield Y is required by off shell closure of $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry as in eq. (2.8). Notice also the three following features:

(i) first in the gauge where $Y' = 0$, the chiral superfield Y is given by $\frac{1}{2} \bar{D}^2 \Upsilon$; by comparing this expression with the first relation of (A.16), one learns that Y has same form as the chiral superfield $X = \frac{1}{2} \bar{D}^2 V_1$. Obviously X and Y are different things; the first one carries propagating physical degrees of freedom; while the second is a pure auxiliary superfield with no physical field.

(ii) Second alike for the relations (A.18)–(A.19) satisfied by the X superfield and allowing adjunction of a topological term to the lagrangian density implemented in superspace formulation by the $\frac{\partial^2}{2\kappa}$ deformation in the second line of (2.4), one has as well a quite similar feature for the superfield Y . Indeed, following [31], there is a gauge where Y reads as

$$Y = \frac{i}{4!} \theta^2 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} C_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (\text{A.24})$$

with $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ a 4-form field with no propagating degree of freedom.

(iii) Third if denoting by

$$\begin{aligned} \hat{w}_\alpha &= -\frac{1}{4} \bar{D}^2 D_\alpha \Omega \\ \hat{x} &= \frac{1}{2} \bar{D}^2 \Upsilon \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

then the gauge transformations (A.23) read as

$$\begin{aligned} \chi'_\alpha &= \chi_\alpha - i \hat{w}_\alpha \\ Y' &= Y - \hat{x} \\ \Phi' &= \Phi \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Putting this change into

$$\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2} = Y + \sqrt{2} \tilde{\theta}^\alpha \chi_\alpha - \tilde{\theta}^2 \left(\frac{i}{2} \Phi + \frac{1}{4} \bar{D}^2 \bar{Y} \right)$$

we find that it transforms like

$$\mathcal{T}'^{\mathcal{N}=2} = \mathcal{T}^{\mathcal{N}=2} - \hat{w} \quad (\text{A.27})$$

with $\mathcal{N} = 2$ superfield gauge parameter

$$\hat{w} = \hat{x} + i\sqrt{2}\tilde{\theta}^\alpha \hat{w}_\alpha - \frac{1}{4}\tilde{\theta}^2 \bar{D}^2 \bar{\hat{x}} \quad (\text{A.28})$$

having the same structure as the Maxwell superfield $\mathcal{W}^{\mathcal{N}=2}$. From this view, it follows that a single-tensor superfield $\mathcal{T}^{\mathcal{N}=2}$ is a chiral superfield

$$\mathcal{Z} = Z(y, \theta) + \sqrt{2}\tilde{\theta}^\alpha \Upsilon_\alpha(y, \theta) - \tilde{\theta}^2 F(y, \theta) \left[\frac{i}{2}\Phi_Z(y, \theta) + \frac{1}{4}\bar{D}^2 \bar{Z}(y, \theta) \right] \quad (\text{A.29})$$

obeying the gauge symmetry (A.27) with superfield parameter as in (A.28).

A.2.3. Comment on gauge symmetry

Here we comment on the gauge symmetry of the field action term $\mathcal{S}(Y) = \int d^4x \mathcal{L}(Y)$ with lagrangian density $\mathcal{L}(Y) \equiv \mathcal{L}$ given by

$$\mathcal{L} = \eta \int d^2\theta \mathbf{Y} + hc \quad (\text{A.30})$$

and coupling constant a pure imaginary number $\eta = i\nu$. This field action $\mathcal{S}(Y)$ is an extra term that has been used in this paper to induce a deformation of the ADJ constraint $\sum_a \frac{g_a}{\kappa_a} = 0$ into $\nu + \sum_a \frac{g_a}{\kappa_a} = 0$; it lifts the singularity of the particular equation $\frac{g_1}{\kappa_1} = 0$; but breaks $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry explicitly.

Gauge invariance of $\mathcal{S}(Y)$ can be studied either directly by using the superspace method taking into account that the superfield $\mathbf{Y}$ is a chiral multiplet; or more explicitly by working with component fields. In the first way, the gauge transformation of $\mathbf{Y}$ can be learnt from (A.23); it reads as $\mathbf{Y}' = \mathbf{Y} + \delta_{\text{gauge}} \mathbf{Y}$ with $\delta_{\text{gauge}} \mathbf{Y} = -\frac{1}{2}\bar{D}^2 \Upsilon$; where Υ is an arbitrary $\mathcal{N} = 1$ real superfield. To shed light on this gauge transformation and its effect on the action $\mathcal{S}(Y)$; we will use the component field language to first build the explicit θ -expansions of Υ and $\bar{D}^2 \Upsilon$; then turn back to study gauge symmetry of (A.30).

• Component field analysis

We begin by describing the θ -expansion of the superfield Y which can be expressed into two manners: (i) either by using the complex chiral superspace coordinate basis $Z_c = (x - i\theta\sigma\bar{\theta}, \theta)$ where Y is expanded as $y + \sqrt{2}\theta\Psi + \theta^2 F$; or (ii) by working in the real superspace coordinate basis $Z_R = (x^\mu, \theta^a, \bar{\theta}_{\dot{a}})$ where the superfield Y has also an explicit $\bar{\theta}$ dependence as shown below²

$$Y = y - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu y + \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box y + \sqrt{2}\theta\Psi + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^2\partial_\mu\Psi\sigma^\mu\bar{\theta} + \theta^2 F_Y \quad (\text{A.31})$$

From this expansion, we learn

$$\mathcal{L} = i\nu(F_Y - \bar{F}_Y) \quad (\text{A.32})$$

In the gauge transformation $\delta_{\text{gauge}} \mathbf{Y} = -\frac{1}{2}\bar{D}^2 \Upsilon$, the real superfield parameter Υ has a θ -expansion involving as usual several component field parameters which, for later use can be expressed like

$$\Upsilon = \gamma - \frac{1}{2}\theta^2\bar{M} - \frac{1}{2}\bar{\theta}^2 M - \theta\sigma^\mu\bar{\theta}w_\mu + \theta^2\bar{\theta}^2 \left(d_\Upsilon + \frac{1}{4}\Box\gamma \right) + \text{fermionic} \quad (\text{A.33})$$

² Our notations are as in Wess–Bagger's book: supersymmetry and supergravity [47].

where “fermionic” stands for those monomials with odd powers in Grassman variables involving fermionic fields. The components γ , d_γ are real scalar components; the complex scalars M , $\bar{M}$ are related by complex conjugation; and the real 4-vector w_μ is parameterised like $w_\mu = \frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}A^{[\nu\rho\sigma]}$ with $A^{[\nu\rho\sigma]}$ a completely antisymmetric real rank 3-tensor. This dual parametrisation of w_μ is dictated by an underlying arbitrariness in dealing with the superfield Υ ; by shifting the real superparameter Υ by a hermitian superfield Γ like $\Upsilon' = \Upsilon + \Gamma$, the quantity $\bar{D}^2\Upsilon$ remains invariant provided Γ satisfying the constraints

$$\bar{D}^2\Gamma = D^2\Gamma = 0 \quad , \quad \Gamma^\dagger = \Gamma \quad (\text{A.34})$$

But these conditions are same as the ones defining linear multiplet L introduced in Section 2 and which we recall here for comparison $\bar{D}^2L = D^2L = 0$ with $L^\dagger = L$; the real superfield Γ has therefore a similar θ -expansion as eq. (2.16); and so it can be expressed like

$$\Gamma = \gamma + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu\omega^{[\rho\sigma]} - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box\gamma + \text{fermionic} \quad (\text{A.35})$$

showing that the term $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu\omega^{\rho\sigma}$ is nothing but a gauge transformation of $w_\mu = \frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}A^{[\nu\rho\sigma]}$ with gauge parameter given by the rank 2-antisymmetric $\omega^{\rho\sigma} = -\omega^{\sigma\rho}$. Taking advantage of the arbitrariness (A.34), one can make convenient choices; in particular we can put the real superfield Υ into the following form; see also [31],

$$\Upsilon = -\frac{1}{2}\theta^2\bar{M} - \frac{1}{2}\bar{\theta}^2M - \theta\sigma^\mu\bar{\theta}w_\mu + \frac{1}{\sqrt{2}}\theta^2\bar{\theta}\bar{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\theta}^2\theta\lambda + \frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2d_\gamma \quad (\text{A.36})$$

With this choice; the initial gauge symmetry (A.23) gets now reduced to gauge symmetry of the 4-vector $w_\mu = \frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}A^{[\nu\rho\sigma]}$ namely

$$w_\mu \rightarrow w_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu\omega^{\rho\sigma} \quad (\text{A.37})$$

• *More on gauge invariance*

From the gauge fixed expression (A.36), we can make two useful computations namely the explicit expressions of $\frac{1}{2}\bar{D}^2\Upsilon$ and the integral over Grassman variables $i\nu\int d^2\theta\Upsilon + hc$. For the θ -expansion of $\frac{1}{2}\bar{D}^2\Upsilon$; we find

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\bar{D}^2\Upsilon &= M + \sqrt{2}\theta\lambda - \theta^2[d_\gamma + i\partial_\mu w^\mu] + i\theta\sigma^\nu\bar{\theta}\partial_\nu M \\ &\quad - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^2\partial_\nu\lambda\sigma^\nu\bar{\theta} + \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box M \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

where

$$\begin{aligned} \partial_\mu w^\mu &= \frac{1}{3!}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu A_{[\nu\rho\sigma]} \\ &= \frac{1}{4!}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{[\mu\nu\rho\sigma]} \equiv \Delta \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

has an interpretation in term of rank 4-antisymmetric field strength $F_{[\mu\nu\rho\sigma]}$ of the 3-form potential field $A_{[\nu\rho\sigma]}$. Under the residual gauge (A.37), the term $\partial_\mu w^\mu$ is therefore manifestly gauge invariant; this property can be explicitly checked on the transformation

$$\partial_\mu w^\mu \rightarrow \partial_\mu w^\mu + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu\partial_\nu\omega_{\rho\sigma} \quad (\text{A.40})$$

where the extra term $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu\partial_\nu\omega_{\rho\sigma}$ vanishes identically due to a tensor calculus feature.

Comparing (A.31) and (A.38), one remarks, that by using a Wess–Zumino-like gauge, Υ can be expressed as $\Upsilon_{\text{gauge}} = i\theta^2\partial_\mu w^\mu$. Moreover, using this gauge fixed expression, the field action $S = \int d^4x\mathcal{L}$ with the lagrangian density $\mathcal{L}$ as in eq. (A.30) reads therefore like,

$$\mathcal{S} = -2\nu \int d^4x \partial_\mu w^\mu \quad (\text{A.41})$$

and, because of (A.40), is manifestly gauge invariant $\delta_{\text{gauge}} \mathcal{S} = 0$.

In the end of this comment, we would like to add that even if thinking of the scalar $\partial^\mu w_\mu = \Delta$ as the dual of a generic rank 4-tensor gauge potential like $\Delta = \frac{1}{4!} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_{[\mu\nu\rho\sigma]}$ where the completely antisymmetric $A_{[\mu\nu\rho\sigma]}$ obeys the gauge transformation $\delta A_{[\mu\nu\rho\sigma]} = \partial_{[\mu} \Lambda_{\nu\rho\sigma]}$, the variation of the quantity $\frac{1}{4!} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_{[\mu\nu\rho\sigma]}$ behaves as a divergence term $\frac{1}{3!} \partial_\mu (\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Lambda_{\nu\rho\sigma})$; and, up on ignoring boundary effects, this variation does not contribute at the level of the action $\mathcal{S} = -2\nu \int d^4x \frac{1}{4!} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_{[\mu\nu\rho\sigma]}$. However, in this way of doing, the field strength $F_{[\mu\nu\rho\sigma\tau]} \equiv F_{(5)}$, associated to the potential field $A_{[\mu\nu\rho\sigma]} \equiv A_{(4)}$, would be a rank 5-antisymmetric tensor field which is invariant under the gauge transformation $A_{(4)} \rightarrow A_{(4)} + d\Lambda_{(3)}$; but because of space time dimension constraint, the rank 5-tensor should be equal to zero, $F_{(5)} = dA_{(4)} = 0$; this means that the 4-form $A_{(4)}$ is a pure gauge potential without curvature which may be thought of as $A_{(4)} = dA_{(3)}$; and then the gauge parameter $\Lambda_{(3)}$ as just a shift of the origin of $A_{(3)}$.

References

- [1] E. Cremmer, et al., Nucl. Phys. B 250 (1985) 385.
- [2] S. Ferrara, P. van Nieuwenhuizen, Phys. Lett. B 127 (1983) 70.
- [3] Yu.M. Zinoviev, Yad. Fiz. 46 (1987) 1240.
- [4] Ignatios Antoniadis, H. Partouche, T.R. Taylor, Phys. Lett. B 372 (1996) 83–87.
- [5] S. Ferrara, L. Girardello, M. Porrati, Phys. Lett. B 366 (1996) 155, arXiv:hep-th/9510074.
- [6] S. Ferrara, L. Girardello, M. Porrati, Phys. Lett. B 376 (1996) 275–281.
- [7] S. Cecotti, L. Girardello, M. Porrati, Nucl. Phys. B 268 (1986) 295.
- [8] E. Cremmer, C. Kounnas, Antoine Van Proeyen, J.P. Derendinger, S. Ferrara, B. de Wit, L. Girardello, Nucl. Phys. B 250 (1985) 385.
- [9] Hiroshi Itoyama, Kazunobu Maruyoshi, Makoto Sakaguchi, Nucl. Phys. B 794 (2008) 216–230, e-Print: arXiv:0709.3166.
- [10] M. De Roo, P. Wagemans, Phys. Lett. B 177 (1986) 352–356.
- [11] E. Kiritsis, C. Kounnas, Nucl. Phys. B 503 (1997) 117–156, arXiv:hep-th/9703059.
- [12] Tomasz R. Taylor, Cumrun Vafa, Phys. Lett. B 474 (2000) 130–137.
- [13] B. de Wit, P.G. Lauwers, A. Van Proeyen, Nucl. Phys. B 255 (1985) 569.
- [14] J. Bagger, J. Wess, Phys. Lett. B 138 (1984) 105.
- [15] A. El Hassouni, E.G. Oudrhiri-Safiani, E.H. Saidi, J. Math. Phys. 28 (1987) 2457.
- [16] J. Hughes, J. Liu, J. Polchinski, Supermembranes, Phys. Lett. B 180 (1986) 370.
- [17] H. Partouche, B. Pioline, Nucl. Phys. B, Proc. Suppl. 56 (1997) 322, arXiv:hep-th/9702115.
- [18] P. Fayet, Fermi–Bose supersymmetry, Nucl. Phys. B 113 (1976) 135.
- [19] P. Fre, L. Girardello, I. Pesando, M. Trigiante, Nucl. Phys. B 493 (1997) 231, arXiv:hep-th/9607032.
- [20] Hans Peter Nilles, The strings connection, in: Supersymmetry After the Higgs Discovery, I. Antoniadis, D. Ghilencea (Eds.), Eur. Phys. J. C 74 (2014) 2712.
- [21] H. Itoyama, Nobuhito Maru, Int. J. Mod. Phys. A 27 (2012) 1250159, arXiv:1109.2276 [hep-ph].
- [22] Benoit Légeret, Claudio A. Scrucca, Paul Smyth, Phys. Lett. B 722 (2013) 372–377, arXiv:1211.7364 [hep-th].
- [23] I. Antoniadis, E. Dudas, D.M. Ghilencea, P. Tziveloglou, Nucl. Phys. B 841 (2010) 157–177, arXiv:1006.1662 [hep-ph].
- [24] J.-C. Jacot, C.A. Scrucca, Nucl. Phys. B 840 (2010) 67, arXiv:1005.2523.
- [25] I. Antoniadis, J.-P. Derendinger, T. Maillard, Nucl. Phys. B 808 (2009) 53, arXiv:0804.1738 [hep-th].
- [26] J. Bagger, A. Galperin, Phys. Lett. B 336 (1994) 25.
- [27] J. Bagger, A. Galperin, Phys. Rev. D 55 (1997) 1091, arXiv:hep-th/9608177.
- [28] Jonathan Bagger, Chi Xiong, $N = 2$ nonlinear sigma models in $\mathcal{N} = 1$ superspace: four and five dimensions, e-Print, arXiv:hep-th/0601165.
- [29] E.A. Ivanov, B.M. Zupnik, Modified $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry and Fayet–Iliopoulos terms, Phys. At. Nucl. 62 (1999) 1043–1055, arXiv:hep-th/9710236.

- [30] H. Partouche, B. Pioline, Partial spontaneous breaking of global supersymmetry, Nucl. Phys. B, Proc. Suppl. 56 (1997) 322–327.
- [31] N. Ambrosetti, I. Antoniadis, J.-P. Derendinger, P. Tziveloglou, Nucl. Phys. B 835 (2010) 75–109, arXiv:0911.5212.
- [32] I. Antoniadis, J.-P. Derendinger, J.-C. Jacot, Nucl. Phys. B 863 (2012) 471, arXiv:1204.2141.
- [33] I. Antoniadis, M. Buican, Goldstinos, supercurrents and metastable SUSY breaking in $N = 2$ supersymmetric gauge theories, J. High Energy Phys. 1104 (2011) 101, arXiv:1005.3012.
- [34] Steven B. Giddings, Shamit Kachru, Joseph Polchinski, arXiv:hep-th/0105097.
- [35] U. Lindstrom, M. Rocek, Nucl. Phys. B 222 (1983) 285.
- [36] N.J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindstrom, M. Rocek, Commun. Math. Phys. 108 (1987) 535.
- [37] M. Grana, J. Louis, D. Waldram, J. High Energy Phys. 0601 (2006) 008, arXiv:hep-th/0505264.
- [38] A. Galperin, E. Ivanov, S. Kalitsyn, V. Ogievetsky, E. Sokatchev, Class. Quantum Gravity 1 (1984) 469.
- [39] El Hassan Saidi, Nucl. Phys. B 803 (2008) 323–362, arXiv:0806.3207.
- [40] P. Candelas, X. de la Ossa, Moduli space of Calabi–Yau manifolds, Nucl. Phys. B 355 (1991) 455.
- [41] Malika Ait Benhaddou, El Hassan Saidi, Phys. Lett. B 575 (2003) 100–110, arXiv:hep-th/0307103.
- [42] M. Ait Ben Haddou, A. Belhaj, E.H. Saidi, Nucl. Phys. B 674 (2003) 593–614, arXiv:hep-th/0307244.
- [43] R. Ahl Laamara, M. Ait Ben Haddou, A. Belhaj, L.B. Drissi, E.H. Saidi, Nucl. Phys. B 702 (2004) 163–188, arXiv:hep-th/0405222.
- [44] G. Aldazabal, D. Badagnani, L.E. Ibanez, A.M. Uranga, J. High Energy Phys. 9906 (1999) 031, arXiv:hep-th/9904071.
- [45] A.M. Uranga, Nucl. Phys. B 598 (2001) 225–246, arXiv:hep-th/0011048.
- [46] S. Gukov, C. Vafa, E. Witten, Nucl. Phys. B 584 (2000) 69, arXiv:hep-th/9906070;
S. Gukov, C. Vafa, E. Witten, Nucl. Phys. B 608 (2001) 477 (Erratum);
H. Partouche, B. Pioline, arXiv:hep-th/9702115.
- [47] J. Wess, J. Bagger, Supersymmetry and Supergravity, Princeton University Press, Princeton, 1983.

V.2 Contribution II : On the partial breaking of $\mathcal{N} = 2$ rigid supersymmetry with complex hypermultiplets

Résumé :

Nous étudions la brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ dans la théorie de jauge effective couplée à des hypermultiplets complexe en utilisant la méthode de L. Andrianopoli et al., Phys. Lett. B 744, 116 (2015), que nous appelons la méthode ADFT. Nous dérivons la généralisation de la relation ADFT invariante symplectique $\zeta_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}(\mathcal{P}^{bM}\mathcal{C}_{MN}\mathcal{P}^{cN})$, qui contient les information de la brisure partielle. Notre extension de cette anomalie s'exprime par $d_a = \varepsilon_{abc}\mathbb{P}^{bM}\mathbb{C}_{MN}\mathbb{P}^{cN} + \mathcal{J}_a$. Les cartes du moment généralisés $\mathcal{P}^{bM}$ contiennent $\mathbb{P}^{bM}$ et dépendent également du couplage des charges électrique /magnétique $G^M = (\eta^f, g_f)$; Les $\mathcal{J}_a$ sont des contributions supplémentaire induites par les isométries du vecteur de killing dans le secteur complexe des hypermultiplets. En utilisant la symétrie symplectique $SP(2n, \mathbb{R})$ nous donnons aussi la contrainte de la brisure partielle $\mathcal{N} = 2$ dérivée du modèle de I. Antoniadis et al., Nucl. Phys. B 863, 471 (2012) dans une réalisation particulière par l'anomalie d_a .

On the partial breaking of $\mathcal{N} = 2$ rigid supersymmetry with a complex hypermultiplet

M. N. El Kinani and M. Vall*

High Energy Physics Laboratory, Modeling and Simulations, Faculty of Sciences, Rabat, Morocco

*E-mail: mohamedvall.ma@gmail.com

Received April 23, 2019; Accepted October 23, 2019; Published December 17, 2019

.....
We study partial supersymmetry breaking in effective $\mathcal{N} = 2$ $U(1)^n$ gauge theory coupled to complex hypermultiplets by using the method of L. Andrianopoli et al., Phys. Lett. B **744**, 116 (2015), which we refer to as the ADFT method. We derive the generalization of the symplectic invariant ADFT formula $\zeta_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}(\mathcal{P}^{bM}C_{MN}\mathcal{P}^{cN})$, capturing information on partial breaking. Our extension of this anomaly is expressed as $d_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\mathbb{P}^{bM}C_{MN}\mathbb{P}^{cN} + \mathcal{J}_a$. The generalized moment maps $\mathbb{P}^{aM}$ contain $\mathcal{P}^{aM}$ and also depend on electric/magnetic coupling charges $G^M = (\eta^i, g_i)$; the $\mathcal{J}_a$ is an extra contribution induced by Killing isometries in the complex hypermatter sector. Using $SP(2n, \mathbb{R})$ symplectic symmetry, we also give the $\mathcal{N} = 2$ partial breaking condition and derive the model of I. Antoniadis et al., Nucl. Phys. B **863**, 471 (2012) by a particular realization of the d_a anomaly.
.....

Subject Index B10, B12, B16

1. Introduction

The partial breaking of rigid $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric field theory has been widely studied in the literature [1–8]. To our knowledge, the first model realizing the $\mathcal{N} = 2$ partial breaking was introduced by Antoniadis, Partouche, and Taylor (APT) in Ref. [1], where the partial breaking, for an $\mathcal{N} = 2$ effective pure Abelian gauge theory, was interpreted as resulting from the presence of magnetic Fayet–Ilioupoulos (FI) charges beside the electric ones. The presence of these FI charges allows evasion of the no-go theorem which forbids such a phenomenon [9,10]. Recently, an interpretation of the APT model in terms of triplets of symplectic hyper-Kähler moment maps $\mathcal{P}^a)^M \equiv \mathcal{P}^{aM}$ was given by Andrianopoli, D’Auria, Ferrara, and Trigiante (ADFT) in Ref. [7]. There, the authors showed that the partial breaking is induced by a non-vanishing symplectic invariant isotriplet $C_B^A = \zeta_c (\tau^c)_B^A$ deforming the $SU(2)_R$ invariant APT scalar potential $\delta_B^A \mathcal{V}_{\text{APT}}$ in the rigid Ward identity. This $SU(2)_R$ triplet ζ_c reads in terms of the $\mathcal{P}^{aM}$ as follows:

$$\zeta_c = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\mathcal{P}^{aM}C_{MN}\mathcal{P}^{bN}, \quad (1.1)$$

where τ^c stands for the three Pauli matrices, ε_{abc} the completely antisymmetric tensor in three dimensions, and the $2n \times 2n$ matrix

$$C_{MN} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

is the $SP(2n, \mathbb{R})$ symplectic metric of the scalar manifold of the Coulomb branch of the $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric $U(1)^n$ effective gauge theory. The $\mathcal{P}^{aM}$ moment maps are obtained from the gauging

of Killing vectors of the hypermultiplet scalar manifold $SO(1, 4)/SO(4)$ in the rigid limit of gauged $\mathcal{N} = 2$ supergravity [8,11]. In this rigid limit, the observable sector contains only the $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric $U(1)^n$ vector multiplets, while gravitation and hypermultiplet are in the hidden sector; then, the study of the coupling of the APT model to observable hypermatter by using the ADFT method [7] is still missing.

The aim of the present paper is to fill this gap in the literature by studying the extension of the $\mathcal{N} = 2$ ADFT method to include gauge-invariant couplings with observable complex hypermatter. Here, we use the $\mathcal{N} = 1$ language to deal with $\mathcal{N} = 2$ supermultiplets; the complex scalars q^1, q^2 of a hypermultiplet carry opposite gauge charges under $U(1)^n$ and are thought of as scalars of two $\mathcal{N} = 1$ multiplets $\mathcal{Q}^u = \{q^u, \chi^u\}$ with complex χ^u standing for the fermionic partners of the q^u in the complex hypermultiplet. The Weyl fermions χ^1, χ^2 carry opposite gauge charge under $U(1)^n$, the same charges as for q^1, q^2 . By exhibiting the $SP(2n, \mathbb{R})$ symplectic structure of the extended model, and following the ADFT method, we show in this study that the partial breaking of effective $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric $U(1)^n$ theory coupled to a complex hypermultiplet is due to the generalized moment maps $\mathbb{P}^{aM}$ extending the $\mathcal{P}^{aM}$ of ADFT appearing in Eq. (1.1) and having the form $\mathbb{P}^{aM} = \mathcal{P}^{aM} + \delta\mathcal{P}^{aM}$. The moment map deformation $\delta\mathcal{P}^{aM}$ is induced by the coupling of APT theory to the complex hypermultiplet and so depends on the symplectic gauge coupling constants (g_i, η^i) and also on $\langle q^A \rangle$, the vacuum expectation values (VEVs) of the complex fields. The above ADFT deformation ζ_c extends, in the presence of observable complex hypermatter, as

$$d_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\mathbb{P}^{bM}C_{MN}\mathbb{P}^{cN} + \frac{1}{2}\Omega_{uv}\mathcal{N}^u\tau_a\bar{\mathcal{N}}^v, \quad (1.3)$$

and is given by the sum of four contributions like $d_a = \zeta_a + \alpha_a + \beta_a + \mathcal{J}_a$, where ζ_a is as in Eq. (1.1) and the others coming from hypermatter and its couplings with gauge degrees of freedom. In this relation, the first three contributions $\zeta_a + \alpha_a + \beta_a$ are proportional to the $SP(2n, \mathbb{R})$ metric C_{MN} of the Coulomb branch, while $\mathcal{J}_a$ is proportional to the symplectic Ω_{uv} in the hypermatter sector. After giving the $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry partial breaking condition in terms of above abstract isovector d_a , we show that the Antoniadis, Derendinger, and Jacot (ADJ) scalar potential $\mathcal{V}_{\text{ADJ}}$ and the partial supersymmetry breaking condition obtained in Ref. [6] can be recovered by making a particular choice of the components of $\mathbb{P}^{aM}$ and $\mathcal{N}_A^u$.

The organization of this paper is as follows: In Sect. 2 we give a short review of the ADFT method by focusing on key points, in particular on the derivation of Eq. (1.1). In Sect. 3 we couple the APT model to a complex hypermultiplet by using the ADFT method and develop the study of the rigid Ward identity as well as its implications on the structure of the induced scalar potential and the isovector anomaly. In Sect. 4 we first give the condition for $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry partial breaking to occur; then we re-derive the ADJ model of Ref. [6] by choosing particular values of the components of the moment maps $\mathbb{P}^{aM}$. Section 5 is devoted to the conclusion.

2. Rigid Ward identity in the ADFT method

In this section we give the main lines of the derivation of the scalar potential $\mathcal{V}_{\text{APT}}^{\mathcal{N}=2}$ and the 2×2 matrix anomaly C_B^A in the rigid limit of $\mathcal{N} = 2$ supergravity coupled to n Abelian vector multiplets and one real hypermultiplet with $SO(4, 1)/SO(4)$ quaternionic Kähler geometry by following the ADFT method. In gauged $\mathcal{N} = 2$ supergravity theory, the induced scalar potential $\mathcal{V}_{\text{sugra}}$ is related

to the supersymmetric transformations $\delta\psi^{\tau A}$ of the fermions via the following Ward identity [7]:

$$\delta_B^A \mathcal{V}_{\text{sugra}} = \sum_{\tau} \alpha_{\tau} \delta_C \psi^{\tau A} \bar{\delta}^C \bar{\psi}_B^{\tau}. \quad (2.1)$$

Here, the summation is taken over all the $\psi^{\tau A}$ fermions in the gauged $\mathcal{N} = 2$ supergravity theory; it includes the two gravitini, the gaugini, and the hyperini. The α_{τ} constants are positive for the spin- $\frac{1}{2}$ fermions and negative for the gravitini.

In the rigid limit considered in Refs. [8,11], the supergravity Ward identity in Eq. (2.1) becomes

$$\mathcal{G}_{\bar{i}\bar{j}}(W^i)_C^A (\bar{W}^{\bar{j}})^C_B = \delta_B^A \mathcal{V}_{\text{APT}}^{\mathcal{N}=2} + \mathbf{C}_B^A, \quad (2.2)$$

where $\mathcal{V}_{\text{APT}}^{\mathcal{N}=2}$ is the APT potential and $\mathbf{C}_B^A = \boldsymbol{\zeta}_c (\tau^c)_B^A$ is an anomalous term which has been shown to have an interpretation in terms of symplectic hyper-Kähler moment maps $\mathcal{P}^{aM}$, as in Eq. (1.1). The other quantities involved in this identity are briefly described below.

First, $\mathcal{G}_{\bar{i}\bar{j}}$ is the metric of the rigid special Kähler manifold of the Coulomb branch and is given by $\text{Im } \mathcal{F}_{\bar{i}\bar{j}}$, which is the imaginary part of the second derivative of the holomorphic prepotential $\mathcal{F}$ of the effective $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric $U(1)^n$ gauge theory [6]. The n quantities $(W^i)_B^A$ are 2×2 matrices involved in the supersymmetric transformations of the n gaugini doublets λ^{iA} ; they are given by

$$\delta_B \lambda^{iA} = (W^i)_B^A, \quad (2.3)$$

where the $(W^i)_B^A$ matrices read explicitly as follows:

$$(W^j)_B^A = \begin{pmatrix} iD^j & -\sqrt{2}F^j \\ \sqrt{2}F^j + \frac{1}{2}\sqrt{2}m^j & -iD^j \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

where $\frac{1}{\sqrt{2}}m^j$ has an interpretation in terms of *magnetic* FI charges [6]. By substituting the auxiliary fields $(F^j, \bar{F}^j, D^j)$ by their explicit expressions derived from the effective field action of the $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric gauge theory, we can bring the above matrices into the following form:

$$(W^i)_B^A = i\mathcal{G}^{\bar{i}\bar{j}} (\tau_a)_B^A W^{ai}, \quad W^{ai} = \mathcal{P}_M^a \bar{U}_{\bar{j}}^M, \quad (2.5)$$

where the $\mathcal{P}_M^a$ are the moment maps of the four-dimensional hyper-Kähler geometry in the hidden sector of the rigid limit of $\mathcal{N} = 2$ gauged supergravity [8,11]. An explicit expression of these $\mathcal{P}_M^a$ is given by the values of the APT model; it reads, in terms of $\mathcal{N} = 2$ electric e_i^a and magnetic m^{ai} Fayet–Iliopoulos charges, as follows:

$$\mathcal{P}^{aM} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} m^{ai} \\ e_i^a \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

In this formulation, the electric e_i^a and magnetic m^{ai} are thought of as real isotriplets, so the moment maps are also real isotriplets carrying, moreover, a symplectic quantum number. The complex quantity U_i^M is the gradient of the holomorphic $\text{SP}(2n, \mathbb{R})$ symplectic section V^M of the rigid special Kähler geometry. In the local coordinate frame where the homogeneous (X^0, X^I) are taken as $(1, \delta_i^I z^i)$, the expressions of V^M and U_i^M read like

$$V^M = \begin{pmatrix} z^i \\ \mathcal{F}_i \end{pmatrix}, \quad U_i^M = \frac{\partial}{\partial z^i} V^M. \quad (2.7)$$

The complex z^i are the n scalar fields belonging to the $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric $U(1)^n$ vector supermultiplets and $\mathcal{F}_i$ are the symplectic dual of z^i ; they are given by the gradient of the holomorphic prepotential $\mathcal{F}(z)$ of the effective theory. Putting Eq. (2.5) back into Eq. (2.2), we can obtain explicit expressions of the APT potential $\mathcal{V}_{\text{APT}}^{\mathcal{N}=2}$ and the rigid anomaly $\mathcal{C}_B^A$ in terms of the following quantities: (i) the symplectic isotriplet moment maps $\mathcal{P}_M^a$ of the $SO(4, 1)/SO(4)$ quaternionic Kähler manifold; (ii) the metric $\mathcal{G}_{ij}$ of the special Kähler manifold; and (iii) the holomorphic sections U_i^M ; they read as follows:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{\text{APT}}^{\mathcal{N}=2} &= \frac{1}{2} \mathcal{P}_M^a \mathcal{M}^{MN} \mathcal{P}_N^a, \\ \mathcal{C}_B^A &= \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} (\mathcal{P}_M^a \mathcal{C}^{MN} \mathcal{P}_N^b) (\tau^c)^A_B,\end{aligned}\quad (2.8)$$

where $\mathcal{C}^{MN}$ is the invariant symplectic metric of $SP(2n, \mathbb{R})$ and the symplectic coupling matrix $\mathcal{M}^{MN}$ is given by

$$\mathcal{M}^{MN} = 2U_i^M \mathcal{G}^{ij} \bar{U}_j^N + i\mathcal{C}^{MN}. \quad (2.9)$$

It is related to the prepotential $\mathcal{F}$ as follows [7, 12]:

$$\mathcal{M}_{MN} = \begin{pmatrix} \text{Im } \mathcal{F} + \text{Re } \mathcal{F} (\text{Im } \mathcal{F})^{-1} \text{Re } \mathcal{F} & -\text{Re } \mathcal{F} (\text{Im } \mathcal{F})^{-1} \\ -(\text{Im } \mathcal{F})^{-1} \text{Re } \mathcal{F} & (\text{Im } \mathcal{F})^{-1} \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Notice that on the left-hand side of the rigid Ward identity in Eq. (2.2) there is only a contribution coming from the gauge sector of the theory. In the next section we study the generalization of this Ward identity by implementing the contribution coming from the hypermatter sector. This requires extending the APT model by implementing gauge-invariant couplings to complex hypermatter.

3. Coupling the APT model to hypermatter

In this section we use the ADFT method introduced above to study the extension of the APT model by implementing gauge-invariant couplings between the n vector multiplets and n_H complex hypermultiplets. Here, we will assume that the complex scalar fields of the hypermultiplets parameterize the flat complex hyper-Kähler manifold $\mathbb{C}^{2n_H}$.

3.1. The rigid Ward identity in extended ADFT

The rigid Ward identity of the ADFT method coupled to complex hypermatter has two main contributions: a gauge contribution coming from the pure ADFT sector and a matter one coming from complex hypermatter. Before studying these contributions it is interesting to introduce the bosonic and fermionic degrees of freedom of a complex on-shell hypermultiplet $\mathbf{H}$. The usual four real bosonic degrees are described here by two complex fields q_1, q_2 carrying opposite gauge charges under the $U(1)^n$ gauge symmetry group of the APT theory. They will be collectively denoted as q^u , with $u = 1, 2$. The fermionic degrees of the complex hypermultiplet are given by a pair of complex Weyl ψ and ξ carrying opposite $U(1)$ gauge charges, and are collectively denoted by $\chi^u = (\psi, \xi)$. Bosonic and fermionic degrees form two chiral supermultiplets $\{q^u, \chi^u\}$ and can be described by $\mathcal{N} = 1$ chiral superfields Q^u carrying opposite gauge charges. In the case where there are n_H complex hypermultiplets $\mathbf{H}^I$, the bosonic and fermionic degrees of freedom are described by adding the extra index $I = 1, \dots, n_H$ [13, 14]. For convenience, we shall restrict our analysis below to one complex hypermultiplet by dropping the I index; the generalization for the particular $\mathbb{C}^{2n_H}$ hyper-Kähler

geometry is straightforward and omitted. In the case $n_H = 1$, the rigid fermionic transformation generalizing Eq. (2.3) is given by [6]

$$\begin{aligned}\delta\lambda^{iA} &= (\mathcal{W}^i)_B^A \epsilon^B, \\ \delta\chi^u &= 2(\mathcal{N}_A^u) \epsilon^A,\end{aligned}\quad (3.1)$$

where the λ^{iA} are the n gaugini doublets of Sect. 2 and the χ^u refer to the two hyperini of hypermatter. The scalar matrices $\mathcal{W}^i$ and $\mathcal{N}_A^u$ are given by

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_A^u &= K_A^u G_M \bar{V}^M, \\ (\mathcal{W}^i)_B^A &= i\mathcal{G}^{i\bar{j}} (\tau_a)_B^A (\mathbb{P}_M^a \bar{U}_j^M),\end{aligned}\quad (3.2)$$

with $\bar{V}^M$ the antiholomorphic section of the rigid special geometry given by Eq. (2.7). G_M and K^{Au} stand respectively for the electric/magnetic gauge charges and Killings

$$\begin{aligned}G^M &= \begin{pmatrix} \eta^i \\ g_i \end{pmatrix}, & G_M &= \begin{pmatrix} -g_i \\ \eta^i \end{pmatrix}, \\ K^{Au} &= \begin{pmatrix} k^u \\ \bar{k}_u \end{pmatrix}, & K_A^u &= \begin{pmatrix} -\bar{k}_u \\ k^u \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (3.3)$$

with k^u the Killing vectors of the complex hypermultiplet manifold explicitly given by

$$k^u = -i \begin{pmatrix} q^1 \\ -q^2 \end{pmatrix}, \quad \bar{k}_u = i \begin{pmatrix} \bar{q}_1 \\ -\bar{q}_2 \end{pmatrix}.\quad (3.4)$$

In the second relation of the system of equations in Eq. (3.2), the $\mathcal{G}^{i\bar{j}}$ and $\bar{U}_j^M$ are as in Eq. (2.5), but the $\mathbb{P}_M^a$ are generalized moment maps. Recall that the real scalars (φ, ϕ^a) parameterize the real hyper-Kähler manifold $\frac{\text{SO}(4,1)}{\text{SO}(4)}$, which lives in the hidden sector of the rigid limit of $\mathcal{N} = 2$ gauged supergravity [8,11], while the complex scalars $q^u = (q^1, q^2)$ are coordinates of the hyper-Kähler manifold $\mathbb{C}^2$. Thus, one can expect that the $\mathbb{P}_M^a$ has two main contributions: the previous $\mathcal{P}_M^a$ coming from the $\frac{\text{SO}(4,1)}{\text{SO}(4)}$ factor of the hidden sector, and an extra $\mathcal{R}_M^a$ descending from the complex hypermultiplet parameterizing $\mathbb{C}^2$. So, we can define $\mathbb{P}_M^a$ as follows:

$$\mathbb{P}_M^a = \mathcal{P}_M^a + \mathcal{R}_M^a, \quad \mathbb{P}^{aM}|_{\text{ADFT}} = \mathcal{P}^{aM},\quad (3.5)$$

with

$$\mathcal{P}^{aM} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} m^{ai} \\ e_i^a \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}^{aM} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \mathcal{M}^{ai} \\ \mathcal{E}_i^a \end{pmatrix},\quad (3.6)$$

where $\mathcal{R}^{aM}$ is due to hypermatter. The splitting in Eq. (3.5) implies that $(\mathcal{W}^i)_B^A$ also splits as the sum of two terms:

$$(\mathcal{W}^i)_B^A = (W^i)_B^A + (Y^i)_B^A,\quad (3.7)$$

with $(W^i)_B^A$ given by Eq. (2.5) of the ADFT and

$$(Y^i)_B^A = i\mathcal{G}^{i\bar{j}} (\tau_a)_B^A (\mathcal{R}_M^a \bar{U}_j^M).\quad (3.8)$$

Moreover, because of the presence of complex hypermatter, the rigid Ward identity in Eq. (2.2) extends as

$$\mathcal{G}_{ij}(\mathcal{W}^i)_C^A (\bar{\mathcal{W}}^j)_B^C + 2 (\mathcal{N}_B^u) (\bar{\mathcal{N}}_u^A) = \delta_B^A \mathcal{V}_{\text{scal}}^{\mathcal{N}=2} + \mathbf{D}_B^A, \quad (3.9)$$

where now $\mathcal{V}_{\text{scal}}^{\mathcal{N}=2}$ is the scalar potential of the deformed APT model, which will be shown later to lead to the ADJ potential $\mathcal{V}_{\text{ADJ}}^{\mathcal{N}=2}$ and a variant of it involving dyonic gauge couplings. The $\mathbf{D}_B^A$ is an anomalous term that will also be determined later. The $\mathcal{V}_{\text{scal}}^{\mathcal{N}=2}$ and $\mathbf{D}_B^A$ quantities are functions of the degrees of freedom of the complex hypermultiplets, in particular of the fields (q^1, q^2) ; they reduce to $\mathcal{V}_{\text{APT}}^{\mathcal{N}=2}$ and $\mathbf{C}_B^A$ of the ADFT if the couplings to the complex hypermultiplet are turned off. The left-hand side of the rigid Ward identity in Eq. (3.9) now has two blocks, $\mathbf{G}_B^A$ and $\mathbf{M}_B^A$, given by

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_B^A &= \mathcal{G}_{ij}(\mathcal{W}^i)_C^A (\bar{\mathcal{W}}^j)_B^C, \\ \mathbf{M}_B^A &= 2 (\mathcal{N}_B^u) (\bar{\mathcal{N}}_u^A), \end{aligned} \quad (3.10)$$

with fermionic field shifts $(\mathcal{W}^i)_B^A$ and $\mathcal{N}_A^u$ as in Eq. (3.2). In the next subsection we compute the above $\mathbf{G}_B^A$ and $\mathbf{M}_B^A$ in terms of the moment maps in Eq. (3.5) and compare the obtained expressions with the ones given by ADFT method.

3.2. Computing Eq. (3.2)

First, we calculate the gauge sector contribution to the rigid Ward identity given by $\mathbf{G}_B^A$, and then turn to the contribution $\mathbf{M}_B^A$ coming from complex hypermatter.

3.2.1. APT sector

The explicit expression of for the gauge sector contribution $\mathbf{G}_B^A = \mathcal{G}_{ij}(\mathcal{W}^i)_C^A (\bar{\mathcal{W}}^j)_B^C$ to the rigid Ward identity in Eq. (3.9) is obtained by substituting $(\mathcal{W}^i)_C^A$ by its expression in Eq. (3.2). We find, after rearranging terms, the following expression:

$$\mathbf{G}_B^A = \frac{1}{2} \delta_B^A \mathbb{P}_M^a \mathcal{M}^{MN} \mathbb{P}_N^a + \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} (\mathbb{P}_M^a \mathcal{C}^{MN} \mathbb{P}_N^b) (\tau^c)_B^A. \quad (3.11)$$

This 2×2 matrix has four terms that can be viewed as the sum of two $\text{SU}(2)_R$ blocks like $\delta_B^A \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_B^A$ with $\text{Tr} \mathcal{S}_B^A = 0$. These two blocks are precisely the contributions to the scalar potential $\mathcal{V}_{\text{scal}}^{\mathcal{N}=2}$ and the $\mathbf{D}_B^A$ anomaly coming from the transformations of gaugini.

The diagonal $\mathcal{S}_0$ term: The isosinglet $\mathcal{S}_0$ is given by $\frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{G}_B^A)$; it reads in terms of the generalized moment maps $\mathbb{P}_M^a$ as follows:

$$\mathcal{S}_0 = \frac{1}{2} \mathbb{P}_M^a \mathcal{M}^{MN} \mathbb{P}_N^a, \quad (3.12)$$

where $\mathcal{M}^{MN}$ is the inverse of Eq. (2.10) and the generalized moment maps $\mathbb{P}_M^a$ are given by Eq. (3.5); it has an extra $\mathcal{R}_M^a$ contribution coming from the gauge-invariant complex hypermatter couplings. By substituting $\mathbb{P}_M^a$ in Eq. (3.12) by $\mathcal{P}_M^a + \mathcal{R}_M^a$, the above $\mathcal{S}_0$ splits as the sum of three terms:

$$\mathcal{S}_0 = \frac{1}{2} \mathcal{P}_M^a \mathcal{M}^{MN} \mathcal{P}_N^a + \frac{1}{2} \mathcal{R}_M^a \mathcal{M}^{MN} \mathcal{R}_N^a + \mathcal{P}_M^a \mathcal{M}^{MN} \mathcal{R}_N^a, \quad (3.13)$$

where the two first terms depend on $\mathcal{P}_M^a$, but the last contribution is independent of the FI charges. So, for the limit where the complex hypermatter couplings to the gauge sector are turned off; i.e. the limit $\mathcal{R}_M^a \rightarrow 0$, the isosinglet $\mathcal{S}_0$ reduces to the ADFT relation and so the scalar potential coincides with that of the APT model, which in the ADFT method is nothing but a particular field realization of the following:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_0^{(\text{ADFT})} &= \frac{1}{2} \mathcal{P}_M^a \mathcal{M}^{MN} \mathcal{P}_N^a \\ &= \mathcal{G}^{\bar{i}j} [e_i^a - \mu^{ka} \mathcal{F}_{ki}] [\overline{e_j^a - \mu^{ka} \mathcal{F}_{kj}}],\end{aligned}\quad (3.14)$$

expressed in terms of the electric e_i^a and magnetic μ^{ka} FI charges. In the limit $\mathcal{P}_M^a \rightarrow 0$, describing the case where the electric and magnetic FI charges are turned off, we have

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_0|_{\mathcal{P}_M^a \rightarrow 0} &= \frac{1}{2} \mathcal{R}_M^a \mathcal{M}^{MN} \mathcal{R}_N^a \\ &= \mathcal{G}^{\bar{i}j} [\mathcal{E}_i^a - \mathcal{M}^{ka} (\mathcal{F})_{ki}] [\overline{\mathcal{E}_j^a - \mathcal{M}^{ka} (\mathcal{F})_{kj}}],\end{aligned}\quad (3.15)$$

where the the electric $\mathcal{E}_i^a$ and magnetic $\mathcal{M}^{ka}$ are field-dependent couplings. They are functions of the complex matter scalars q_u and the electric g_i and magnetic η^i gauge coupling charges. If using the particular realization given by Eq. (4.11), namely

$$\mathcal{E}_i^a = g_i F^a, \quad \mathcal{M}^{ia} = \eta^i F^a, \quad (3.16)$$

these two factorized relations can be combined into a symplectic object as

$$\mathcal{R}_M^a = G_M F^a, \quad (3.17)$$

where $\mathcal{R}_M^a$ is as in Eq. (3.3). So, we have

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_0|_{\mathcal{P}_M^a \rightarrow 0} &= \frac{1}{2} G_M \mathcal{M}^{MN} G_N \times |F^a|^2 \\ &= \mathcal{G}^{\bar{i}j} [g_i - \eta^l \mathcal{F}_{li}] [\overline{g_j - \eta^l \mathcal{F}_{lj}}] \times |F^a|^2.\end{aligned}\quad (3.18)$$

By using Eq. (3.17), the third cross term in Eq. (3.13) reads as follows:

$$\mathcal{P}_M^a \mathcal{M}^{MN} \mathcal{R}_N^a = G_M \mathcal{M}^{MN} \mathcal{P}_N^a F^a; \quad (3.19)$$

it depends on the product of the $\mathcal{P}_N^a$ Fayet–Iliopoulos and the G_M gauge electric/magnetic coupling charges. The general expression of $\mathcal{S}_0$ with non-vanishing $\mathcal{P}_M^a$ and $\mathcal{R}_M^a$ gives the contribution to the scalar potential $\mathcal{V}_{\text{ADJ}}^{\mathcal{N}=2}$ in Eq. (3.9) coming from the gaugino sector.

The anomalous term $\mathcal{S}_B^A$: The traceless matrix $\mathcal{S}_B^A$ contributes to the $\mathbf{D}_B^A$ anomaly in Eq. (3.9); it can be presented as an isotriplet that reads as

$$\mathcal{S}_B^A = \sum_{c=1}^3 \xi_c (\tau^c)_B^A \quad (3.20)$$

with

$$\xi_c = \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} \mathbb{P}_M^a \mathcal{C}^{MN} \mathbb{P}_N^b, \quad (3.21)$$

where $\mathcal{C}^{MN}$ is the $\text{SP}(2n, \mathbb{R})$ symplectic metric. A non-vanishing value of ξ_c partially breaks $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry; it is then interesting to study when the norm $\|\xi\|$ is different from zero. By substituting $\mathbb{P}_M^a = \mathcal{P}_M^a + \mathcal{R}_M^a$ in Eq. (3.21), we learn that the isovector ξ_c splits like the sum of three isovectors as

$$\xi_c = \zeta_c + \alpha_c + \beta_c, \quad (3.22)$$

with ζ_c the same isotriplet as in the ADFT; the two extra α_c and β_c are new isotriplets induced by the presence of complex hypermatter. These three isotriplets are given by

$$\begin{aligned} \zeta_c &= \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} \mathcal{P}_M^a \mathcal{C}^{MN} \mathcal{P}_N^b, \\ \beta_c &= \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} \mathcal{R}_M^a \mathcal{C}^{MN} \mathcal{R}_N^b, \\ \alpha_c &= \varepsilon_{abc} \mathcal{P}_M^a \mathcal{C}^{MN} \mathcal{R}_N^b. \end{aligned} \quad (3.23)$$

The real isovector ζ_c is due to the electric e_i^a and the magnetic m^{ai} Fayet–Iliopoulos charges given by Eq. (2.6). It reads explicitly as follows:

$$\zeta_c = \varepsilon_{abc} (m^{ai} e_i^b - e_i^a m^{bi}) = 2\varepsilon_{abc} m^{ai} e_i^b. \quad (3.24)$$

Non-vanishing of the above ζ_c , which read in three-dimensional vector notation like $\vec{e}_i \wedge \vec{m}^i$, requires at least the non-vanishing of some of the e_i^a components and some of the m^{ai} . However, in the absence of magnetic m^{ai} FI, the isotriplet ζ_c vanishes identically. The term β_c is different from ζ_c as it is induced from another source, it is due to the electric g_i and magnetic η^i gauge coupling constants. Using Eq. (3.6), we first have

$$\beta_c = \varepsilon_{abc} (\mathcal{M}^{ai} \mathcal{E}_i^b - \mathcal{E}_i^a \mathcal{M}^{bi}) = 2\varepsilon_{abc} \mathcal{M}^{ai} \mathcal{E}_i^b. \quad (3.25)$$

By following the analysis on dyonic gauge coupling to complex hypermatter reported in the appendix, we find that the electric $\mathcal{E}_i^a$ and magnetic $\mathcal{M}^{ai}$ terms factorize:

$$\mathcal{E}_i^a = g_i \mathcal{E}^a, \quad \mathcal{M}^{ai} = \eta^i \mathcal{M}^a, \quad (3.26)$$

where the $\mathcal{E}^a$ and $\mathcal{M}^a$ are triplets with components depending on the scalar fields of the complex matter hypermultiplet. So, the above β_c anomaly becomes

$$\beta_c = 2(g_i \eta^i) \varepsilon_{abc} \mathcal{M}^a \mathcal{E}^b. \quad (3.27)$$

Then, non-vanishing β_c requires non-vanishing $g_i \eta^i$ and non-vanishing $\vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{\mathcal{M}}$. However, from the particular realization in Eq. (4.11) we learn that $\mathcal{E}^a = \mathcal{M}^a = F^a$; then β_c vanishes identically:

$$\beta_c = 0. \quad (3.28)$$

Concerning the anomaly α_c , it is due to both the (e_i^a, m^{ai}) electric/magnetic FI and the (g_i, η^i) electric/magnetic gauge charges. By using Eqs. (3.6) and (3.26), and setting

$$g_i m^{ai} = \kappa^a, \quad \eta^i e_i^a = \pi^a, \quad (3.29)$$

we can put the α_c triplet into the form

$$\alpha_c = \varepsilon_{abc}[\kappa^a \mathcal{E}^b - \pi^a \mathcal{M}^b]. \quad (3.30)$$

Substituting $\mathcal{E}^a = \mathcal{M}^a = F^a$, we end with

$$\alpha_c = \varepsilon_{abc} (\kappa^a - \pi^a) F^b. \quad (3.31)$$

3.2.2. More on scalar potential and the anomaly $\mathbf{D}_B^A$

The contribution $\mathbf{M}_B^A = 2\mathcal{N}_B^u \tilde{\mathcal{N}}_u^A$ of the hypermatter sector to the rigid Ward identity in Eq. (3.9) comes from the coupling between the n vector $V_i^{\mathcal{N}=2}$ multiplets and the matter hypermultiplet $\mathbf{H}^{\mathcal{N}=2}$. Expanding this matrix $\mathbf{M}_B^A$ on a Pauli matrices basis like $\mathcal{J}_0 \delta_B^A + \mathcal{J}_a (\tau^a)_B^A$ and equating with $2\mathcal{N}_B^u \tilde{\mathcal{N}}_u^A$, it follows that

$$\mathcal{J}_0 = \mathcal{N}_A^u \tilde{\mathcal{N}}_u^A, \quad \mathcal{J}_a = \mathcal{N}_B^u (\tau_a)_A^B \tilde{\mathcal{N}}_u^A, \quad (3.32)$$

which also read like

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0 &= \frac{1}{2} \varepsilon_{AB} \Omega_{uv} \mathcal{N}^{Au} \tilde{\mathcal{N}}^{Bv}, \\ \mathcal{J}_a &= \frac{1}{2} \Omega_{uv} \mathcal{N}^u \tau_a \tilde{\mathcal{N}}^v. \end{aligned} \quad (3.33)$$

By substituting $\mathcal{N}_A^u$ by its expression in terms of the degrees of freedom of the complex hypermultiplet, namely

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_A^u &= (\eta^i \bar{\mathcal{F}}_i - g_i \bar{z}^i) K_A^u, \\ \tilde{\mathcal{N}}_u^A &= (\eta^i \mathcal{F}_i - g_i z^i) \bar{K}_u^A, \end{aligned} \quad (3.34)$$

with K_A^u given by Eq. (3.3),

$$K_A^u = \begin{pmatrix} -\bar{k}_u \\ k^u \end{pmatrix}, \quad \bar{K}_u^A = \begin{pmatrix} -k^u \\ \bar{k}_u \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

we can write down the explicit expression for $\mathbf{M}_B^A$ as

$$\mathbf{M}_B^A = M^2 (K_A^u \bar{K}_u^B), \quad (3.36)$$

with

$$M^2 = 2 |\eta^i \mathcal{F}_i - g_i z^i|^2 \quad (3.37)$$

and

$$K_A^u \bar{K}_u^B = \frac{1}{2} (K_A^u \bar{K}_u^A) \delta_B^A + \frac{1}{2} (K^u \tau_a \bar{K}_u) (\tau^a)_B^A \quad (3.38)$$

reading explicitly like

$$K_A^u \bar{K}_u^B = \begin{pmatrix} k^u \bar{k}_u & -(\bar{k}_u)^2 \\ -(k^u)^2 & k^u \bar{k}_u \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Then, using Eq. (3.4), we can determine the expression for $K_A^u \bar{K}_u^B$ in terms of the complex scalars. We find that

$$\begin{aligned} +\bar{k}_u k^u &= |q_1|^2 + |q_2|^2, \\ -(k^u)^2 &= (q_1)^2 + (q_2)^2, \\ -(\bar{k}_u)^2 &= (\bar{q}_1)^2 + (\bar{q}_2)^2. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Adding the obtained M_B^A and the G_B^A contribution in Eq. (3.11) coming from the gauge sector, we can compute the contribution to the D_B^A anomaly and the $\mathcal{V}_{\text{ADJ}}^{\mathcal{N}=2}$ scalar potential by using the rigid Ward identity in Eq. (3.9), which we rewrite as

$$G_B^A + M_B^A = D_B^A + \delta_B^A \mathcal{V}_{\text{scal}}^{\mathcal{N}=2}. \quad (3.41)$$

The contribution of M_B^A reads explicitly as $M_B^A = \mathcal{J}_0 \delta_B^A + \mathcal{J}_a (\tau^a)_B^A$ with

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0 &= \frac{M^2}{2} (K^u \bar{K}_u), \\ \mathcal{J}_a &= \frac{M^2}{2} (K^u \tau_a \bar{K}_u), \end{aligned} \quad (3.42)$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0 &= M^2 (|q_1|^2 + |q_2|^2), \\ \mathcal{J}_a \tau^a &= M^2 \begin{pmatrix} 0 & (\bar{q}_1)^2 + (\bar{q}_2)^2 \\ (q_1)^2 + (q_2)^2 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

where the effective mass M^2 is given by Eq. (3.36). We also have

$$\mathcal{J}_a = M^2 \begin{pmatrix} \text{Re}[(q_1)^2 + (q_2)^2] \\ \text{Im}[(q_1)^2 + (q_2)^2] \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Notice, moreover, that the $\eta^i \mathcal{F}_i$ term in the expression of M^2 generalizes the hypermultiplet mass parameter in the ADJ model [6]. This hypermultiplet mass term can be viewed as $M^2 = |Z|^2$ describing a BPS saturation condition [15] with complex Z standing for the central charge of the $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry theory given by

$$Z = \sqrt{2} (g_i z^i - \eta^i \mathcal{F}_i) = \sqrt{2} G_M V^M, \quad (3.45)$$

where the g_i are the electric charges and the η^i their magnetic partners. Notice as well that using Eq. (3.3) and $M^2 = |Z|^2$, we can express $\mathcal{J}_0$ and $\mathcal{J}_a$ in terms of the symplectic gauge coupling constants G_M , the holomorphic section V^M , and its complex conjugate $\bar{V}^N$ as

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0 &= G_M G_N (K^u \bar{K}_u) V^M \bar{V}^N, \\ \mathcal{J}_a &= G_M G_N (K^u \tau_a \bar{K}_u) V^M \bar{V}^N, \end{aligned} \quad (3.46)$$

showing that they are proportional to $(G_M)^2$, the square of the symplectic gauge coupling constants with coefficients like $g_i g_j$, $g_i \eta^j$, and $\eta^i \eta^j$. From the rigid Ward identity in Eq. (3.9), we obtain the following scalar potential:

$$\mathcal{V}_{\text{scal}}^{\mathcal{N}=2} = \mathcal{S}_0 + \mathcal{J}_0, \quad (3.47)$$

where $\mathcal{S}_0$ is as in Eq. (3.13). We also obtain the matrix anomaly $\mathbf{D}_B^A$, which reads as follows:

$$\mathbf{D}_B^A = \mathcal{S}_B^A + \mathcal{J}_B^A, \quad (3.48)$$

with $\mathcal{S}_B^A$ given by Eqs. (3.20)–(3.23). Moreover, being traceless, this $\mathbf{D}_B^A$ matrix can be also expressed as

$$\mathbf{D}_B^A = \sum d_a (\tau^a)_B^A \quad (3.49)$$

with

$$d_a = \zeta_a + \alpha_a + \beta_a + \mathcal{J}_a. \quad (3.50)$$

A non-vanishing norm of the isotriplet d_a can partially break supersymmetry, as discussed in the next section.

4. Partial breaking and the ADJ model

In this section we study the partial breaking of $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry in the generalized APT model constructed in Sect. 3. This generalized APT model also contains the model of ADJ as a particular choice of the dyonic FI charges and couplings.

4.1. Partial breaking

As in the ADFT method, the partial breaking of extended supersymmetry can occur whenever the $\mathbf{D}_B^A$ matrix deformation given by Eq. (3.48) has a non-vanishing VEV. This condition can be stated as

$$\langle \mathbf{D}_B^A \rangle \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle \zeta_a \rangle + \langle \alpha_a \rangle + \langle \beta_a \rangle + \langle \mathcal{J}_a \rangle \neq 0, \quad (4.1)$$

and it is fulfilled if one of the four isotriplets $\langle \zeta_a \rangle$, $\langle \alpha_a \rangle$, $\langle \beta_a \rangle$, and $\langle \mathcal{J}_a \rangle$ is different from zero. If two of these VEVs or more are different from zero, one has to ensure that their sum is non-zero. This feature can be established by starting from the rigid Ward identity in Eq. (3.9) that we rewrite as

$$\mathbf{G}_B^A + \mathbf{M}_B^A = \delta_B^A \mathcal{V}_{\text{scal}}^{\mathcal{N}=2} + \mathbf{D}_B^A, \quad (4.2)$$

with the scalar potential $\mathcal{V}_{\text{scal}}^{\mathcal{N}=2}$ given by Eq. (3.47). By performing a similarity transformation on Eq. (4.2) by multiplying its members on the right by the matrix transformation $\mathbb{U}$ and on the left by its inverse $\mathbb{U}^{-1}$, we can diagonalize the traceless matrix anomaly $\mathbf{D}_B^A$ like

$$\tilde{\mathbf{D}}_B^A = \begin{pmatrix} |d| & 0 \\ 0 & -|d| \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{D}} = \mathbb{U}^{-1} \mathbf{D} \mathbb{U}, \quad (4.3)$$

where $|d|$ stands for the norm of the isovector d^a in Eq. (3.49). Under this transformation, the rigid Ward identity becomes

$$\tilde{\mathbf{G}}_B^A + \tilde{\mathbf{M}}_B^A = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_{\text{scal}}^{\mathcal{N}=2} + |d| & 0 \\ 0 & \mathcal{V}_{\text{scal}}^{\mathcal{N}=2} - |d| \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

So, the partial breaking occurs when

$$\mathcal{V}_{\text{scal}}^{\mathcal{N}=2} = \pm |d|, \quad d \neq 0. \quad (4.5)$$

In what follows, we give an illustration of this condition and its solution by first showing how the ADJ model can be recovered from this construction, and how Eq. (4.5) is realized in terms of the electric and magnetic FI charges.

4.2. Deriving the ADJ model

To recover the ADJ model, we give particular values to the moment maps in Eq. (3.6). This is obtained by making appropriate choices of the charges, namely: (i) the values of the (e_i^a, m^{ia}) electric/magnetic FI charges, and (ii) the values of the (g_i, η^i) gauge coupling charges. The electric e_i^a and magnetic m^{ia} FI charges can be written as [6]

$$\mathcal{L}_{\text{FI}}^{\text{elec}} = e_i^a Y^{ai}, \quad (4.6)$$

where

$$e_i^a = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -\text{Im } e_i \\ \text{Re } e_i \\ \sqrt{2}\xi_i \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

are the electric FI charge vectors, and the $\text{SU}(2)_R$ triplets Y^{ai} are the $\mathcal{N} = 2$ auxiliary fields,

$$Y^{ai} = \begin{pmatrix} -2 \text{Im } F^i \\ -2 \text{Re } F^i \\ \sqrt{2} D^i \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Using the above $\text{SO}(3) \sim \text{SU}(2)_R$ vector Y^{ai} , we can write the magnetic FI term of Ref. [6] as

$$\mathcal{L}_{\text{FI}}^{\text{mag}} = \text{Im } \mathcal{F}_{ij} m^{ia} Y^{aj},$$

where the electric FI charges vector m^{ia} reads explicitly as

$$m^{ia} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} m^i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Moreover, as was shown in Ref. [6], the complex hypermultiplet contributions modify the above electric FI charges as follows:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{hyp}} + \mathcal{L}_{\text{int}} &\supset \int d^4\theta [Q_1 e^{-2gV} \bar{Q}_1 + Q_2 e^{2gV} \bar{Q}_2] + \int d^2\theta \left[i\sqrt{2} \left(\sum_{l=1}^n g_l X^l \right) Q_1 Q_2 \right] + h.c. \\ &= \mathcal{E}_i^a Y^{ia} + \dots, \end{aligned}$$

with Y^{ia} the auxiliary field vectors of Eq. (4.8) and

$$\mathcal{E}_i^a = g_i F^a, \quad (4.10)$$

where

$$F^a = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \text{Im}(iq_1q_2) \\ \text{Re}(i\bar{q}_1\bar{q}_2) \\ -\frac{1}{2}[|q_1|^2 - |q_2|^2] \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Thus, from the above discussion we conclude that the ADJ model is obtained by choosing the FI and coupling charges e_i^a , m^{ia} , and $\mathcal{E}_i^a$ in Eq. (3.6) as respectively in Eqs. (4.7), (4.9), and (4.10) while setting $\mathcal{M}^{ia} = \mathbf{0}$.

We note that, thanks to the magnetic coupling in the appendix, one can have the following magnetic term:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{CS}} &\supset \int d^2\theta \sum_{l=1}^n \eta^i \mathcal{F}_l (i\sqrt{2}Q_1Q_2) + h.c. \\ &= \text{Im} \mathcal{F}_{ij} \mathcal{M}^{ia} Y^{aj}, \end{aligned}$$

with $\mathcal{M}^{ia}$ the following magnetic coupling charge vectors:

$$\mathcal{M}^{ai} = \eta^i \mathcal{M}^a = \eta^i \begin{pmatrix} \sqrt{2} \text{Im}(iq_1q_2) \\ \sqrt{2} \text{Re}(i\bar{q}_1\bar{q}_2) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

By substituting the above choices back into Eq. (3.47), the effective scalar potential $\mathcal{V}_{\text{scal}} = \mathcal{S}_0 + \mathcal{J}_0$ is given by

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\text{scal}} &= 2|\eta^i \mathcal{F}_i - g_i z^i|^2|_{\eta=0} (|q_1|^2 + |q_2|^2) \\ &\quad + \frac{1}{16} \mathcal{G}^{i\bar{j}} (e_i + im^k \mathcal{F}_{ik} - 4i\sqrt{2}g_i)(e_{\bar{j}} - im^l \bar{\mathcal{F}}_{\bar{j}l} + 4i\sqrt{2}g_{\bar{j}}\bar{q}_1\bar{q}_2) \\ &\quad + \frac{1}{8} \mathcal{G}^{i\bar{j}} [\xi_i - 2g_i(|q_1|^2 - |q_2|^2)][\xi_{\bar{j}} - 2g_{\bar{j}}(|q_1|^2 - |q_2|^2)]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Comparing this expression with the ADJ model, we learn that $\mathcal{V}_{\text{scal}}$ is precisely the scalar potential $\mathcal{V}_{\text{ADJ}}^{\mathcal{N}=2}$ given by Eq. (3.1) of Ref. [6], where the scalar field z_k is shifted by a constant like

$$z_k \rightarrow z_k - \frac{im}{\sqrt{2}} \frac{g_k}{g^2}, \quad g^2 = \sum_{i=1}^2 g_i. \quad (4.14)$$

These shifts of z_k correspond to replacing the electric central charge $Z = i\sqrt{2}(\eta^i \mathcal{F}_i - g_i z^i)|_{\eta=0}$ of our construction by

$$Z = m + ig_i z^i \sqrt{2}. \quad (4.15)$$

Notice that the VEV of $\mathcal{V}_{\text{scal}}$ depends on the coupling constants and the VEVs of the scalar fields of the theory, namely the complex doublet (q_1, q_2) and the symplectic $(z^i, \mathcal{F}_i)$. If, for instance, the condition $\frac{\partial \mathcal{V}_{\text{scal}}}{\partial q^u} = 0$ is solved by $\langle q_u \rangle = 0$, we have

$$\langle \mathcal{V}_{\text{scal}} \rangle = \frac{1}{16} \mathcal{G}^{i\bar{j}} (e_i + im^k \langle \mathcal{F}_{ik} \rangle) (e_{\bar{j}} - im^l \langle \bar{\mathcal{F}}_{\bar{j}l} \rangle) + \frac{1}{8} \mathcal{G}^{i\bar{j}} \xi_i \xi_{\bar{j}} \geq 0, \quad (4.16)$$

with $\langle \mathcal{F}_{ik} \rangle = \mathcal{F}_{ik}[\langle z \rangle]$, where the $\langle z^i \rangle$ solve the condition $\frac{\partial \mathcal{V}_{\text{scal}}}{\partial z^i} = 0$. For these values the anomaly vector in Eq. (3.50) reads as

$$\langle d_c \rangle = 2\varepsilon_{abc} m^{ai} e_i^b = 2(\vec{m}^i \wedge \vec{e}_i)_c, \quad (4.17)$$

where e_i^a and m^{bi} are the electric and magnetic charges of Eqs. (4.7) and (4.9). Thus, the norm $\langle |d| \rangle$ characterizing the partial breaking of $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry reads as

$$\langle |d| \rangle = \frac{1}{8} [m^i m^j (\text{Re } e_i \text{Re } e_j + 2\xi_i \xi_j)]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.18)$$

If we further choose the complex electric FI charges e_i to be pure imaginary, the VEVs of the scalar potential in Eq. (4.16) and the norm in Eq. (4.18) become

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{V}_{\text{scal}} \rangle &= \frac{1}{16} \mathcal{G}^{\bar{i}j} (\text{Im } e_i + m^k \mathcal{F}_{ik}) (\text{Im } e_j + m^l \bar{\mathcal{F}}_{jl}) + \frac{1}{8} \mathcal{G}^{\bar{i}j} \xi_i \xi_j, \\ \langle |d| \rangle &= \frac{1}{4\sqrt{2}} m^i \xi_i. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Hence, the partial breaking condition in Eq. (4.5) becomes

$$\mathcal{G}^{\bar{i}j} (\text{Im } e_i + m^k \mathcal{F}_{ik}) (\text{Im } e_j + m^l \bar{\mathcal{F}}_{jl}) + 2\mathcal{G}^{\bar{i}j} \xi_i \xi_j = \pm 2\sqrt{2} m^i \xi_i, \quad (4.20)$$

which can be rewritten as

$$(\text{Im } e_j + m^k \text{Re } \mathcal{F}_{kj})^2 + (\mathcal{G}_{\bar{i}j} m^{\bar{i}} \mp \sqrt{2} \xi_i)^2 = 0 \quad (4.21)$$

and so has the solutions

$$\xi_i = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{G}_{\bar{i}j} m^{\bar{i}}, \quad \text{Im } e_j = -m^k \text{Re } \mathcal{F}_{kj}, \quad (4.22)$$

which coincides with the partial breaking condition given in Eq. (4.9) of the ADJ model [6].

5. Conclusion

In this paper we have studied the partial breaking of rigid $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric gauge theory of n vector multiplets coupled to complex hypermultiplets by using the ADFT method given in Ref. [7]. To do so we have first reviewed the ADFT method where partial breaking of rigid supersymmetry is induced by an anomalous isotriplet vector ζ_a originating from the hidden sector in the rigid limit of gauged $\mathcal{N} = 2$ supergravity. This isovector has the form $\zeta_a \sim \varepsilon_{abc} m^a e^b$ with the isotriplet e^a and m^a standing for the electric and magnetic Fayet–Iliopoulos terms. In our construction, which may be viewed as a generalization of the ADFT method by adding complex hypermatter coupled to gauge degrees of freedom, we showed that the anomaly ζ_a gets three extra contributions given by Eq. (4.1), namely $\langle d_a \rangle = \langle \zeta_a \rangle + \langle \alpha_a \rangle + \langle \beta_a \rangle + \langle \mathcal{J}_a \rangle$. The ζ_a is as in the ADFT method, and the three other contributions, $\langle \alpha_a \rangle$, $\langle \beta_a \rangle$, and $\langle \mathcal{J}_a \rangle$, are induced by the presence of complex hypermatter. The $\langle \alpha_a \rangle$ is induced by the coupling between the FI constant and the electric/magnetic coupling charges. The $\langle \beta_a \rangle$ is due to the coupling between electric and magnetic charges, and $\langle \mathcal{J}_a \rangle$ to local dyonic mass. Non-zero contributions from these anomalies are dependent on non-zero VEVs of the hypermatter fields $\langle q^u \rangle$ determined by minimizing the scalar potential. Their expressions have been explicitly studied in Sect. 3.2.

In the extension of the ADFT method developed in this paper, we also gave the rigid Ward identity and the induced scalar potential as well as the general condition for partial breaking. By choosing particular values of the components of our generalized moment maps, we also derived the scalar potential of the ADJ model and their partial breaking condition. It would be interesting to obtain the extended APT method, studied in the present paper, as an observable sector in the rigid limit of $\mathcal{N} = 2$ gauged supergravity coupled to complex hypermatter. Progress in this direction will be reported on a future occasion.

Funding

Open Access funding: SCOAP³.

Appendix A. Dyonic couplings

First, we recall that in $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry one can distinguish two multiplets:

- Vector multiplet, which has the following $\tilde{\theta}$ expansion:

$$\mathcal{W}(x, \theta, \tilde{\theta}) = X(x, \theta) + i\sqrt{2}\tilde{\theta}W(x, \theta) + \tilde{\theta}^2\left(-\frac{1}{4}\bar{D}^2\bar{X}^i\right), \quad (\text{A.1})$$

where $X(x, \theta)$ and $W(x, \theta)$ are $\mathcal{N} = 1$ chiral superfields where the fermionic $W(x, \theta)$ are precisely the $\mathcal{N} = 1$ superfield strengths living inside the $\mathcal{N} = 2$ ones.

- Hypermultiplet, which can be described by two $\mathcal{N} = 1$ chiral superfields $Q^u = (Q^1, Q^2)$ having opposite gauge charges and θ expansions as follows:

$$Q^u = q^u + \sqrt{2}\theta\chi^u + \theta\theta G^u, \quad (\text{A.2})$$

where the G^u are auxiliary fields.

The aim of this appendix is to give the extension of ADJ model by allowing dyonic gauge couplings. We are therefore interested only in the non-kinetic terms of the action, namely the quadratic complex mass term [6]

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = m \int d^2\theta Q_1 Q_2 + h.c., \quad (\text{A.3})$$

where Q_1 and Q_2 are the two $\mathcal{N} = 1$ chiral superfields constituting the $\mathcal{N} = 2$ hypermultiplet, and the couplings to the gauge to the X^i chiral superfields of the $\mathcal{N} = 2$ vector multiplet are given by the following tri-superfield interactions:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \int d^2\theta \left[i\sqrt{2} \left(\sum_{l=1}^n g_l X^l \right) Q_1 Q_2 \right] + h.c., \quad (\text{A.4})$$

where X^l , with $l = 1, \dots, n_v$ are the first components of the $\mathcal{N} = 2$ vector superfields $\mathcal{W}^l$.

We will start from the Lagrangian density of Eq. (A.4) and show that it has an interpretation in terms of $\mathcal{N} = 2$ Chern–Simons interaction using the dual tensorial description of the hypermultiplet (Q_1, Q_2) . Then, we turn to study the $\mathcal{N} = 2$ dyonic gauge-invariant couplings.

A.1. $\mathcal{N} = 2$ Chern–Simons action

In this description, $\mathcal{L}_{\text{int}}$ can be derived by starting from the $\mathcal{N} = 2$ chiral superspace action

$$\mathcal{L}_{\text{CS}} = -2i \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \left(\sum_{l=1}^n g_l \mathcal{W}^l \right) \mathcal{T}^{N=2} + h.c., \quad (\text{A.5})$$

where $\mathcal{T}^{N=2}$ is the $\mathcal{N} = 2$ tensor superfield with expansion

$$\mathcal{T}^{N=2} = Y(x, \theta) + \sqrt{2}\tilde{\theta}\Upsilon(x, \theta) - \tilde{\theta}^2 \left(\frac{i}{2}\Phi + \frac{1}{4}\bar{D}^2\bar{Y} \right). \quad (\text{A.6})$$

In this expansion, $Y(x, \theta)$ and Φ are bosonic $\mathcal{N} = 1$ chiral superfields while Υ_α is a spinor $\mathcal{N} = 1$ chiral superfield related to the $\mathcal{N} = 1$ linear superfield L like

$$L = D\Upsilon + \bar{D}\bar{\Upsilon}, \quad DDL = \bar{D}\bar{D}L = 0. \quad (\text{A.7})$$

The degrees of freedom are carried by the superfields Φ and L as the Y can be gauged out. Indeed, notice that in the above $\tilde{\theta}$ expansion of $\mathcal{T}^{N=2}$, the spinor superfield Υ_α is defined up to the following gauge transformation:

$$\delta_{\text{gauge}} \Upsilon_\alpha = -iW'_\alpha, \quad W'_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha \Delta', \quad (\text{A.8})$$

where Δ' is a general $\mathcal{N} = 1$ real superfield and W'_α is its field strength. The $\mathcal{N} = 2$ superspace version of Eq. (A.8) is given by

$$\delta_{\text{gauge}} \mathcal{T}^{N=2} = -\mathcal{W}', \quad (\text{A.9})$$

where $\mathcal{W}'$ is a $\mathcal{N} = 2$ vector superfield strength. By $\tilde{\theta}$ expansion of both sides of this transformation, we obtain

$$\begin{aligned} \delta_{\text{gauge}} Y &= \frac{1}{2}\bar{D}\bar{D}\Delta', \\ \delta_{\text{gauge}} \Upsilon_\alpha &= -iW'_\alpha, \\ \delta_{\text{gauge}} \Phi &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Notice that the gauge transformation in Eq. (A.9) is just the $\mathcal{N} = 2$ superspace version of the gauge transformation $\delta_{\text{gauge}} b^{\rho\sigma} = \partial^\rho \Lambda^\sigma$, where $b^{\rho\sigma}$ is a two-form field whose field strength three-form is unchanged under this gauge transformation [17]. The gauge transformation in Eq. (A.9) allows us to eliminate the superfield Y , but one can instead choose a gauge in which it only has a non-vanishing imaginary part of the auxiliary field,

$$Y^{\text{gauged}} = \frac{i}{4!} \theta^2 \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (\text{A.11})$$

where $F^{\mu\nu\rho\sigma}$ is a four-form. Substituting Eqs. (A.1) and (A.6) back into Eq. (A.5), we obtain the CS Lagrangian density

$$\mathcal{L}_{\text{CS}} = - \int d^2\theta \left[\sum_{l=1}^n g_l (X^l \Phi) + \sum_{l=1}^n g_l (W^l_\alpha \Upsilon^\alpha) + i \sum_{l=1}^n g_l (m^l Y) \right] + h.c. \quad (\text{A.12})$$

Comparing this action with Eqs. (A.3) and (A.4), we learn that the gauge-invariant Φ can be realized as the product of two chiral superchamps:

$$\Phi = i\sqrt{2}Q_1Q_2. \quad (\text{A.13})$$

The mass term mQ_1Q_2 can be generated by using the gauge-invariant shift $X^l \rightarrow X^l - \frac{i}{\sqrt{2}}\mu^l$ and setting $m = \sum_{l=1}^n g_l\mu^l$.

A.2. $\mathcal{N} = 2$ dyonic gauge couplings

Here, we want to comment on a property of the $\mathcal{N} = 2$ superfield Lagrangian density in Eq. (A.5). This superdensity has a remarkable dependence on the $\mathcal{N} = 2$ prepotentials, namely on the quantity

$$\Theta = \left(\sum_{l=1}^n g_l \mathcal{W}^l \right) \mathcal{T}^{N=2}, \quad (\text{A.14})$$

which leads, after integration with respect to $\tilde{\theta}$, to

$$\int d^2\tilde{\theta} \Theta = \sum_{l=1}^n (g_l X^l) \Phi + \sum_{l=1}^n (g_l \mathcal{W}_\alpha^l) \Upsilon^\alpha. \quad (\text{A.15})$$

As the $\mathcal{N} = 1$ chiral superfield combination $gX = \sum_{l=1}^n g_l X^l$ is just a half part of a symplectic invariant $\mathcal{N} = 1$ chiral superfield, namely

$$\sum_{l=1}^n \left(g_l X^l - i\eta^l \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X^l} \right) = G^M C_{MN} V^M \quad (\text{A.16})$$

with

$$G^M = \begin{pmatrix} i\eta^l \\ g_l \end{pmatrix}, \quad V^M = \begin{pmatrix} X^l \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X^l} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.17})$$

where η^l are real parameters. One may think about Eq. (A.14) as just a part of the following symplectic invariant quantity:

$$\Xi = \left(\sum_{l=1}^n g_l \mathcal{W}^l - i\eta^l \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathcal{W}^l} \right) \mathcal{T}^{N=2}. \quad (\text{A.18})$$

These relations suggest that the $\mathcal{N} = 2$ Chern–Simons action in Eq. (A.5) can be made symplectic invariant as follows:

$$\mathcal{L}_{\text{CS}} = \int d^2\theta d^2\tilde{\theta} \sum_{l=1}^n (g_l \mathcal{W}^l - i\eta^l \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathcal{W}^l}) \mathcal{T}^{N=2} + h.c., \quad (\text{A.19})$$

which, by integration with respect to $\tilde{\theta}$, leads to

$$\mathcal{L}_{\text{CS}} = \int d^2\theta \sum_{l=1}^n (g_l X^l - i\eta^l \mathcal{F}_l) \Phi + \sum_{l=1}^n (g_l - i\eta^j \mathcal{F}_{jl}) \mathcal{W}_\alpha^l \Upsilon^\alpha \quad (\text{A.20})$$

with

$$\mathcal{F}_i = \frac{\partial \mathcal{F}(X)}{\partial X^i}, \quad \mathcal{F}_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(X)}{\partial X^i \partial X^j}. \quad (\text{A.21})$$

References

- [1] I. Antoniadis, H. Partouche, and T. R. Taylor, Phys. Lett. B **372**, 83 (1996) [[arXiv:hep-th/9512006](#)] [[Search INSPIRE](#)].
- [2] S. Ferrara, L. Girardello, and M. Porrati, Phys. Lett. B **376**, 275 (1996) [[arXiv:hep-th/9512180](#)] [[Search INSPIRE](#)].
- [3] E. A. Ivanov and B. M. Zupnik, Phys. Atom. Nucl. **62**, 1043 (1997) [[arXiv:hep-th/9710236](#)] [[Search INSPIRE](#)].
- [4] J. R. David, E. Gava, and K. S. Narain, J. High Energy Phys. **0406**, 041 (2004) [[arXiv:hep-th/0311086](#)] [[Search INSPIRE](#)].
- [5] K. Fujiwara, H. Itoyama, and M. Sakaguchi, Nucl. Phys. B **723**, 33 (2005) [[arXiv:hep-th/0410132](#)] [[Search INSPIRE](#)].
- [6] I. Antoniadis, J.-P. Derendinger, and J.-C. Jacot, Nucl. Phys. B **863**, 471 (2012) [[arXiv:1204.2141](#) [hep-th]] [[Search INSPIRE](#)].
- [7] L. Andrianopoli, R. D’Auria, S. Ferrara, and M. Trigiante, Phys. Lett. B **744**, 116 (2015) [[arXiv:1501.07842](#) [hep-th]] [[Search INSPIRE](#)].
- [8] L. Andrianopoli, P. Concha, R. D’Auria, E. Rodriguez, and M. Trigiante, J. High Energy Phys. **1511**, 061 (2015) [[arXiv:1508.01474](#) [hep-th]] [[Search INSPIRE](#)].
- [9] S. Cecotti, L. Girardello, and M. Porrati, Phys. Lett. B **145**, 61 (1984).
- [10] S. Cecotti, L. Girardello, and M. Porrati, Proc. Johns Hopkins Workshop on Current Problems in Particle Theory 9: New Trends in Particle Theory Florence, Italy, June 5–7 (1985).
- [11] R. Ahl Laamara, E. H. Saidi, and M. Vall, Prog. Theor. Exp. Phys. **2017**, 113B04 (2017) [[arXiv:1704.05686](#) [hep-th]] [[Search INSPIRE](#)].
- [12] L. Andrianopoli, R. D’Auria, S. Ferrara, and M. Trigiante, Lect. Notes Phys. **737**, 661 (2008) [[arXiv:hep-th/0611345](#)] [[Search INSPIRE](#)].
- [13] E. H. Saidi, Nucl. Phys. B **803**, 323 (2008) [[arXiv:0806.3207](#) [hep-th]] [[Search INSPIRE](#)].
- [14] E. Sahraoui and E. H. Saidi, Class. Quantum Grav. **16**, 1605 (1999).
- [15] N. Seiberg and E. Witten, Nucl. Phys. B **426**, 19 (1994); **430**, 485 (1994) [erratum] [[arXiv:hep-th/9407087](#)] [[Search INSPIRE](#)].
- [16] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity* (Princeton University Press, Princeton, 1992).
- [17] N. Ambrosetti, I. Antoniadis, J.-P. Derendinger, and P. Tziveloglou, Nucl. Phys. B **835**, 75 (2010) [[arXiv:0911.5212](#) [hep-th]] [[Search INSPIRE](#)].

Conclusion générale

La nature non-chirale des théorie supersymétriques $\mathcal{N} > 1$ ne permet pas de construire une version supersymétrique étendue du modèle standard de la physique des particules, cette difficulté est due au théorème no-go qui rend impossible une telle réalisation. Cependant, dans le cas de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ il est possible d'éviter ce théorème par la réalisation de la brisure partielle de $\mathcal{N} = 2$ à $\mathcal{N} = 1$. Dans cette thèse nous avons contribué à la réalisation de la brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$.

Dans le premier chapitre nous avons présenté le modèle standard de la physique des particules, où des éléments essentiels à la compréhension et à la construction du lagrangien du modèle sont présentés. Nous avons donné au début de ce chapitre le contenu en champs du modèle standard. Ensuite, nous avons présenté la construction de son lagrangien total, on a aussi utilisé le mécanisme de Higgs pour briser la symétrie électrofaible pour générer les masses aux différentes particules. Puis, nous avons discuté les problèmes et les limites du modèle standard pour motiver l'extension supersymétrique comme solution.

Le deuxième chapitre a été consacré à l'étude des théories supersymétriques. Nous avons donné la définition de l'algèbre de Poincaré et la description de ses représentations. Ensuite, nous avons présenté l'extension supersymétrique de cette algèbre au cas de la superalgèbre de Poincaré. Puis nous avons présenté les différentes représentations massives et non massives de l'algèbre de la supersymétrie. Ensuite, nous avons donné la description du superspace dans le cas de la théorie supersymétrique globale minimale $\mathcal{N} = 1$ et nous avons donné aussi le formalisme superchamps pour construire les expressions des superchamps chiraux et vectoriel de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$.

Le troisième chapitre a été réservé à l'étude de la brisure spontanée du modèle minimale supersymétrique $\mathcal{N} = 1$. Nous avons présenté au début de ce chapitre la construction du lagrangien de cette théorie. Ensuite nous avons présenté deux modèles de la brisure spontanée de la supersymétrie globale $\mathcal{N} = 1$, à savoir le modèle de Fayet–Iliopoulos basé sur le champ auxiliaire du superchamp vectoriel (terme D) et le modèle de O'Raifeartaigh basé sur le champ auxiliaire du superchamp chiral (terme F).

Le quatrième chapitre est dédié à la brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$. Nous avons discuté au début de ce chapitre la difficulté de réaliser cette brisure partielle. Ensuite, nous avons présenté trois modèles qui surmontent cette difficulté, le premier modèle de *Antoniadis*, *Partouche* et *Taylor* décrit une théorie de jauge pure constituée par un seul multiplet vectoriel de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$, la brisure partielle dans ce cas implique l'introduction des nouveaux termes de Fayet–Iliopoulos en plus des termes de Fayet–Iliopoulos ordinaire qu'on a vu dans le chapitre précédent. Le deuxième modèle découvert par *Andrianopoli*, *D'Auria*, *Ferrara* et *Trigiantee* est constitué de n multiplet vectoriels de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ ce modèle présente la généralisation du modèle précédent, on a vu que les différents cas de brisure sont donnés à partir de la norme du vecteur ξ^a qui est proportionnel à la déformation du potentiel scalaire rigide. Le troisième modèle de *Antoniadis*, *Derendinger* et *Jacot* décrit le couplage de secteur

jauge constitué de n multiplets vectoriels de la supersymétrie au secteur de la matière qui est décrit par deux formulations, la description par un hypermultiplet composé de deux superchamps chiraux de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ ou la description par des multiplets tensoriel et chirale de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$, on a vu que pour avoir une algèbre fermée il est nécessaire d'introduire le champ auxiliaire Y de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ qui implique à partir de son équation de mouvement la contrainte $\sum_{I=1}^n \frac{g_I}{\kappa_I} = 0$ qui implique à son tour que le modèle minimale qu'on peut avoir de ce couplage de n multiplets vectoriels avec un seul hypermultiplet est $U(1)^2$.

Dans la première contribution, nous avons réalisé la version branaire D3 du modèle de *Antoniadis, Derendinger et Jacot* qu'on a introduit dans le quatrième chapitre. Nous avons donné la description du modèle de *Antoniadis, Derendinger et Jacot* par des branes D3 enroulant des 3-cycles dans la théorie des cordes de type IIB sur une variété de Calabi-Yau à 3 dimensions complexes à la présence des flux non triviaux des tenseurs de force des champs de jauge 3-formes. Nous avons montré que la contrainte $\sum_{I=1}^n \frac{g_I}{\kappa_I} = 0$ est un cas particulier la condition de conservation du flux total Φ_{flux} qui provient du terme d'interaction de Chern-Simons du couplage du secteur de la matière avec les multiplets vectoriels de la supersymétrie $\mathcal{N}=2$, cela implique la possibilité de déformé la contrainte du modèle de *Antoniadis, Derendinger et Jacot* comme suit :

$$\sum_{I=1}^n \frac{g_I}{\kappa_I} + \nu = 0.$$

Ce qui permet d'avoir un modèle minimale de la brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ en présence de la matière avec un seul groupe de jauge $U(1)$ et par conséquence la généralisation du modèle de *Antoniadis, Derendinger et Jacot*.

Dans la deuxième contribution, nous avons réalisé la brisure partielle de la supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ en se basant sur le modèle de *Antoniadis, D'Auria, Ferrara et Trigiante*, où nous allons décrire le secteur de la matière par des hypermultiplets complexes pour avoir le couplage de n multiplets vectoriels avec n hypermultiplets. Dans notre construction qui peut être vue comme la généralisation du modèle *Antoniadis, D'Auria, Ferrara et Trigiante* la brisure partielle est induite par la version généralisée du vecteur ξ^a qui provient de la déformation du potentiel scalaire rigide généralisé. Ensuite nous avons dérivé la contrainte de la brisure partielle du modèle *Antoniadis, Derendinger et Jacot* par le choix des composantes de ce vecteur généralisé.

En perspective, il est important de chercher une construction des modèle supersymétrique $\mathcal{N} > 2$ pour donner une description de l'extension maximal du modèle standard de la physique des particules.

Bibliographie

- [1] J. J. Thomson, Conductivity of a gas through which cathode rays are passing, Phil. Mag 44 (1897) : 298.
- [2] J. J. Thomson, On the theory of the conduction of electricity through gases by charged ions, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science 47.286 (1899) : 253-268.
- [3] G. J. Stony, LII. On the physical units of nature. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science 11.69 (1881) : 381-390.
- [4] E. Rutherford, The scattering of alpha and beta particles by matter and the structure of the atom, Philosophical Magazine and Journal of Science 21.125 (1911) : 669-688.
- [5] N. Bohr, On the constitution of atoms and molecules, Phil. Mag. 23 (1913) : p-875.
- [6] J. Chadwick, Possible existence of a neutron, Nature 129 3252 (1932) : 312-312.
- [7] H. Yukawa, On the interaction of elementary particles, Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series 17 (1935) : 48-57.
- [8] M. Planck, Über das gesetz der energieverteilung im normalspektrum, Annalen Der Physik, 4 (1901) : 553.
- [9] A. Einstein, Über einen die erzeugung und verwandlung des liches betreffenden heuristischen gesichtspunkt [AdP 17, 132 (1905)]. Annalen der Physik 14.S1 1 (2005) : 164-181.
- [10] R. Millikan, Einstein's photoelectric equation and contact electromotive force, Physical review 7 (1916) : 18.
- [11] A. Compton, A quantum theory of the scattering of x-rays light elements, Physical review 21.5 (1923) : 483.
- [12] P. Dirac, Theory of electrons and positrons, Nobel lecture 12 (1933) : 320-325.
- [13] C. D. Anderson, The positive electrons, Physical Review 43.6 (1933) : 491.
- [14] W. Pauli, Dear radioactive ladies and gentlemen, Phys. Today 31.9 (1978) : 27.
- [15] F. Reines et C. Cowan, The neutrino, Nature 178.4531 (1956) : 446-449.
- [16] E. Fermi, an attempt of a theory of beta radiation. 1, Z. phys 88.161 (1934) : 19.

- [17] R. Feynman, A relativistic cut-off classical electrodynamics, *Physical Review* **74.8** (1948) : 939.
- [18] R. Feynman, The theory of positrons, *Physical Review* **76.6** (1949) : 749.
- [19] R. Feynman, Mathematical formulation of the quantum theory of electromagnetic interaction, *Physical Review* **80.3** (1950) : 440.
- [20] Gell-Mann, M. (1961). Report CTSL 20, unpublished. *Physical Review* **125** (1962) : 1067.
- [21] Y. Nambu, Quasi-Particles and Gauge Invariance in the Theory of Superconductivity, *Physical Review* **117** (1960) 648–663.
- [22] J. Goldstone, Field theories with superconductor solutions, *Il Nuovo Cimento* **19** (1961) 154–164.
- [23] J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg, Broken symmetries, *Physical Review* **127** (1962) 965–970.
- [24] F. Englert and R. Brout, Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons, *Physical Review Letters* **13** (1964) 321–323.
- [25] P. W. Higgs, Broken symmetries and the masses of gauge bosons, *Physical Review Letters* **13** (1964) 508–509.
- [26] S. L. Glashow, Partial-symmetries of weak interactions, *Nuclear Physics* **22** (1961) 579–588.
- [27] S. Weinberg, A Model of Leptons, *Physical Review Letters* **19** (1967) 1264–1266.
- [28] A. Salam, Weak and electromagnetic interactions, *Conf. Proc.* **C680519** (1968) 367–377.
- [29] G. Arnison *et al.*, Experimental observation of lepton pairs of invariant mass around 95 GeV/c² at the CERN SPS collider, *Physics Letters B* **126** (1983) 398–410.
- [30] G. Arnison *et al.*, Experimental observation of isolated large transverse energy electrons with associated missing energy at $\sqrt{s} = 540$ GeV, *Physics Letters B* **122** (1983) 103–116.
- [31] M. Banner *et al.*, Observation of single isolated electrons of high transverse momentum in events with missing transverse energy at the CERN p collider, *Physics Letters B* **122** (1983) 476–485.
- [32] P. Bagnaia *et al.*, Evidence for $Z^0 \rightarrow e^+e^-$ at the CERN pp collider, *Physics Letters B* **129** (1983) 130–140.
- [33] D. P. Barber *et al.*, Discovery of three-jet events and a test of quantum chromodynamic at petra, *Phys. Rev. Lett* **43.179** (1979) : 830), <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.43.830>.

- [34] The ATLAS Collaboration, Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC, *Physics Letters B* **716** (2012) 1–29 [arXiv:1207.7214].
- [35] The CMS Collaboration, Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC, *Physics Letters B* **716** (2012) 30–61 [arXiv:1207.7235].
- [36] S. Coleman and J. Mandula, All possible symmetries of the S matrix, *Physical Review* **159** (1967) 1251–1256.
- [37] P. Ramond, Dual Theory for Free Fermions, *Physical Review D* **3** (1971) 2415–2418.
- [38] Y. A. Golfand and E. P. Likhtman, On extensions of the algebra of generators of the Poincare group by bispinor generators, in *The Many Faces of the Superworld*, pp. 44–53. World Scientific, 2000.
- [39] D. Volkov and V. Akulov, Is the neutrino a goldstone particle?, *Physics Letters B* **46** (1973) 109–110.
- [40] J. Wess and B. Zumino, Supergauge transformations in four dimensions, *Nuclear Physics B* **70** (1974) 39–50.
- [41] P. Fayet and J. Iliopoulos, Spontaneously broken supergauge symmetries and goldstone spinors, *Physics Letters B* **51** (1974) 461–464.
- [42] L. O’Raifeartaigh, Spontaneous symmetry breaking for chirals scalar superfields, *Nuclear Physics B* **96** (1975) 331–352.
- [43] R. Haag, J.T. Lopuszanski, and M.Sohnius, All Possible Generators of Supersymmetrie of the s Matrix, *Nucl. Phys. B* **88** (1975) 257.
- [44] P. Fayet, Fermi-Bose hypersymmetry, *Nuclear Physics B* **113.1** (1976) : 135-155.
- [45] A. Salam and J. Strathdee, Super-gauge transformations, *Nuclear Physics B* **76** (1974) 477–482.
- [46] S. Ferrara, P. van Nieuwenhuizen, Noether coupling of massive gravitinos to N= 1 supergravity, *Physics Letters B* **127.1-2** (1983) : 70-74.
- [47] I. Antoniadis, H. Partouche and T. R. Taylor, Spontaneous breaking of $\mathcal{N} = 2$ global supersymmetry, *Physics Letters B* **372** (1996) 83–87 [hep-th/9512006].
- [48] L. Andrianopoli, R. D’Auria, S. Ferrara and M. Trigiante, Observations on the partial breaking of $\mathcal{N} = 2$ rigid supersymmetry, *Physics Letters B* **744** (2015) 116–119 [arXiv:1501.07842].
- [49] I. Antoniadis, J. P. Derendinger and J. C. Jacot, $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry breaking at two different scales, *Nuclear Physics B* **863** (2012) 471–494 [arXiv:1204.2141].
- [50] R. Ahl Laamara, M. N. El Kinani, E. H.Saidi, M. Vall, (2015). $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry partial breaking and tadpole anomaly. *Nuclear Physics B*, **901**, 480-509..

- [51] M. N. El Kinani, M. Vall, On the partial breaking of $\mathcal{N} = 2$ rigid supersymmetry with a complex hypermultiplet. Progress of Theoretical and Experimental Physics, 2019 (2019), 123B03..
- [52] E. Noether, Invariante variationsprobleme, Kgl. Ges. Wiss. Nachr. Math.-phys. (1918) : 235-257.
- [53] T. W. B. Kibble, Symmetry Breaking in Non-Abelian Gauge Theories, *Physical Review* **155** (1967) 1554–1561.
- [54] G. S. Guralnik, C. R. Hagen and T. W. B. Kibble, Global conservation laws and massless particles, *Physical Review Letters* **13** (1964) 585–587.
- [55] J. Oort, The force exerted by the stellar system in the direction perpendicular to the galactic plane and some related problems, *Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands*, vol. 6, p. 249, 1932.
- [56] F. Zwicky, Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln, *Helvetica Physica Acta*, vol. 6, p. 110–127, 1933.
- [57] A. Riess et al., Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant , *Astronomical Journal*, vol. 116, p. 1009–1038, 1998.
- [58] S. Perlmutter et al., easurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae , *Astrophysical Journal*, vol. 517, p. 565–586, 1998.
- [59] P. Ade et al., Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters, 2013. arXiv :astroph/ 1303.5076.
- [60] G. Bertone, D. Hooper et J. Silk, Particle dark matter : Evidence, candidates and constraints, *Physics Report*, vol. 405, p. 279–390, 2005.
- [61] H. Goldberg, Constraint on the photino mass from cosmology, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 50, p. 1419, 1983.
- [62] P. Ramond, *Field theory : a modern primer*. Westview Press, 1997.
- [63] H. J. W. Müller-Kirsten and A. Wiedemann, *Introduction to Supersymmetry. 2nd ed.* World Scientific, 2010.
- [64] E. Wigner, On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group, *The Annals of Mathematics* **40** (1939) 149–204.
- [65] F. Quevedo, S. Krippendorff and O. Schlotterer, Cambridge Lectures on Supersymmetry and Extra Dimensions, [arXiv:1011.1491](https://arxiv.org/abs/1011.1491).
- [66] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and supergravity*. Princeton University Press, 1992.
- [67] L. Andrianopoli, R. D’Auria, S. Ferrara and M. A. Lledó, On the super-Higgs effect in extended supergravity, *Nuclear Physics B* **640** (2002) 46–62 [[hep-th/0202116](https://arxiv.org/abs/hep-th/0202116)].

- [68] P. Binetruy, *Supersymmetry : Theory, Experiment, and Cosmology*. Oxford University Press, 2006.
- [69] A. Bilal, Introduction to Supersymmetry, [arXiv:hep-th/0101055](#).
- [70] J. D. Lykken, Introduction to Supersymmetry, *Fields, strings and duality. Proceedings, Summer School, Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics, TASI'96, Boulder, USA, June 2-28, 1996* (1996) 42 [[hep-th/9612114](#)].
- [71] P. Fayet and S. Ferrara, Supersymmetry, *Physics Reports* **32** (1977) 249–334.
- [72] M. F. Sohnius, Introducing supersymmetry, *Physics Reports* **128** (1985) 39–204.
- [73] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Vol. 3 : Supersymmetry*. Cambridge University Press, 2000.
- [74] S. Ferrara, C. A. Savoy and B. Zumino, General massive multiplets in extended supersymmetry, *Physics Letters B* **100** (1981) 393–398.
- [75] S. Ferrara, Aspects of Supergravity Theories, in *9th Intern. Conf. on General relativity and gravitation (Jena, GDR, July 1980)*. 1980.
- [76] S. Ferrara and C. A. Savoy, Representations Of Extended Supersymmetry On One And Two Particle States, in *First School on Supergravity Trieste, Italy, 22 April - 6 May*, p. 0047. 1981.
- [77] W. Nahm, Supersymmetries and their representations, *Nuclear Physics B* **135** (1978) 149–166.
- [78] J. Strathdee, Extended Poincaré Supersymmetry, *International Journal of Modern Physics A* **02** (1987) 273–300.
- [79] L. Alvarez-Gaumé and S. Hassan, Introduction to S duality in $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric gauge theories : A Pedagogical review of the work of Seiberg and Witten, *Fortschritte der Physik* **45** (1997) 159–236 [[hep-th/9701069](#)].
- [80] J. Terning, *Modern Supersymmetry: Dynamics and Duality*. Oxford University Press, 2007.
- [81] B. Zumino, Normal forms of complex matrices, *Journal of Mathematical Physics* **3** (1962) 1055–1057.
- [82] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1996.
- [83] H. Nilles, Supersymmetry, supergravity and particle physics, *Physics Reports* **110** (1984) 1–162.
- [84] I. L. Buchbinder and S. M. Kuzenko, *Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity, or a Walk Through Superspace*. IOP Publishing, 1998.
- [85] M. Bertolini, Lectures on Supersymmetry, SISSA, 2016.

- [86] P. Srivastava, *Supersymmetry, Superfields and Supergravity : An Introduction*. Adam Hilger, 1986.
- [87] H. Baer and X. Tata, *Weak scale supersymmetry : from superfields to scattering events*. Cambridge University Press, 2011.
- [88] P. Nath, *Supersymmetry, supergravity, and unification*. Cambridge University Press, 2016.
- [89] R. Altendorfer and J. Bagger, Dual Supersymmetry Algebras from Partial Supersymmetry Breaking, *Physics Letters B* **460** (1999) 127–134 [[hep-th/9904213](#)].
- [90] E. Witten, Dynamical breaking of supersymmetry, *Nuclear Physics B* **188** (1981) 513–554.
- [91] S. Ferrara, L. Girardello and M. Porrati, Spontaneous Breaking of $\mathcal{N} = 2$ to $\mathcal{N} = 1$ in Rigid and Local Supersymmetric Theories, *Physics Letters B* **376** (1996) 275–281 [[hep-th/9512180](#)].
- [92] J. Hughes and J. Polchinski, Partially broken global supersymmetry and the superstring, *Nuclear Physics B* **278** (1986) 147–169.
- [93] H. Partouche and B. Pioline, Partial spontaneous breaking of global supersymmetry, *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements* **56** (1997) 322–327 [[hep-th/9702115](#)].
- [94] S. Ferrara and A. Sagnotti, Some Pathways in non-Linear Supersymmetry : Special Geometry Born-Infeld’s, Cosmology and dualities, [arXiv:1506.05730](#).
- [95] S. Ferrara, A. Marrani and A. Yeranyan, Majorana Fermions, Supersymmetry Breaking, and Born-Infeld Theory, [arXiv:1510.01658](#).
- [96] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*. Taylor & Francis, 2003.
- [97] G. T. Horowitz, What is a Calabi-Yau Space?, in *Workshop on Unified String Theories Santa Barbara, California, July 29-August 16, 1985*, pp. 635–653. 1985.
- [98] D. Huybrechts, *Complex Geometry: an introduction*. Universitext. Springer-Verlag, 2005.
- [99] T. Eguchi, P. B. Gilkey and A. J. Hanson, Gravitation, gauge theories and differential geometry, *Physics Reports* **66** (1980) 213–393.
- [100] M. J. Hamilton, *Mathematical Gauge Theory: with applications to the standard model of particle physics*. Universitext. Springer International Publishing, 2017.
- [101] L. Andrianopoli, P. Concha, R. D’Auria, E. Rodriguez and M. Trigiante, Observations on BI from $\mathcal{N} = 2$ supergravity and the general Ward identity, *Journal of High Energy Physics* **2015** (2015) 61 [[arXiv:1508.01474](#)].
- [102] P. Fré and P. Soriani, *The $\mathcal{N} = 2$ wonderland: From Calabi-Yau manifolds to topological field theories*. World Scientific, 1995.

- [103] P. Fré, Lectures on Special Kähler geometry and electric-magnetic duality rotations, *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements* **45** (1996) 59–114 [[hep-th/9512043](#)].
- [104] A. Strominger, Special geometry, *Communications in Mathematical Physics* **133** (1990) 163–180.
- [105] R. D’Auria, S. Ferrara and P. Fré, Special and quaternionic isometries : General couplings in $\mathcal{N} = 2$ supergravity and the scalar potential, *Nuclear Physics B* **359** (1991) 705–740.
- [106] B. de Wit and A. Van Proeyen, Isometries of special manifolds, [arXiv:hep-th/9505097](#).
- [107] A. Ceresole, R. D’Auria, S. Ferrara and A. Van Proeyen, Duality transformations in supersymmetric Yang-Mills theories coupled to supergravity, *Nuclear Physics B* **444** (1995) 92–124.
- [108] L. Andrianopoli, M. Bertolini, A. Ceresole, R. D’Auria, S. Ferrara, P. Fré and T. Magri, $\mathcal{N} = 2$ supergravity and $\mathcal{N} = 2$ super Yang-Mills theory on general scalar manifolds : Symplectic covariance gaugings and the momentum map, *Journal of Geometry and Physics* **23** (1997) 111–189 [[hep-th/9605032](#)].
- [109] B. Craps, F. Roose, W. Troost and A. Van Proeyen, What is special Kähler geometry ?, *Nuclear Physics B* **503** (1997) 565–613 [[hep-th/9703082](#)].
- [110] K. Maruyoshi, Gauged $\mathcal{N} = 2$ Supergravity and Partial Breaking of Extended Supersymmetry, [arXiv:hep-th/0607047](#).
- [111] D. Z. Freedman and A. Van Proeyen, *Supergravity*. Cambridge University Press, 2012.
- [112] M. Trigiante, Gauged supergravities, *Physics Reports* **680** (2017) 1–175 [[arXiv:1609.09745](#)].
- [113] N. Seiberg and E. Witten, Electric-magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric Yang-Mills theory, *Nuclear Physics B* **426** (1994) 19–52 [[hep-th/9407087](#)].
- [114] J.-P. Derendinger, F. Quevedo and M. Quirós, The linear multiplet and quantum four-dimensional string effective actions, *Nuclear Physics B* **428** (1994) 282–330 [[hep-th/9402007](#)].
- [115] A. Galperin, E. Ivanov, V. I. Ogievetsky and E. S. Sokatchev, *Harmonic Superspace*. Cambridge University Press, 2001.
- [116] U. Lindström and M. Roček, Scalar tensor duality and $\mathcal{N} = 1,2$ non-linear σ -models, *Nuclear Physics B* **B222** (1983) 285–308.
- [117] W. Siegel, Gauge spinor superfield as scalar multiplet, *Physics Letters B* **85** (1979) 333–334.

- [118] N. Ambrosetti, I. Antoniadis, J.-P. Derendinger and P. Tziveloglou, Nonlinear supersymmetry, brane-bulk interactions and super-Higgs without gravity, *Nuclear Physics B* **835** (2010) 75–109 [[arXiv:0911.5212](#)].
- [119] E. Ivanov and B. Zupnik, Modified $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry and Fayet-Iliopoulos terms, *Physics of Atomic Nuclei* **62** (1997) 1043–1055 [[hep-th/9710236](#)].
- [120] J. Bagger and E. Witten, Matter couplings in $\mathcal{N} = 2$ supergravity, *Nuclear Physics B* **222** (1983) 1–10.
- [121] L. Alvarez-Gaumé and D. Z. Freedman, Geometrical structure and ultraviolet finiteness in the supersymmetric σ -model, *Communications in Mathematical Physics* **80** (1981) 443–451.
- [122] J. Bagger and C. Xiong, $\mathcal{N} = 2$ Nonlinear Sigma Models in $\mathcal{N} = 1$ Superspace : Four and Five Dimensions, [arXiv:hep-th/0601165](#).
- [123] C. Hull, A. Karlhede, U. Lindström and M. Roček, Nonlinear σ -models and their gauging in and out of superspace, *Nuclear Physics B* **266** (1986) 1–44.

Résumé

L'obstacle de construire une version supersymétrique étendue $N > 1$ du modèle standard de la physique des particules est due essentiellement à la non-chiralité des théories de la supersymétrie $N > 1$. Mais grâce à la réalisation de la brisure partielle de la théorie de la supersymétrie $N=2$, il est possible de surmonter cet obstacle et construire donc des modèles phénoménologiquement viables à partir de cette théorie. Le sujet de cette présente thèse s'inscrit dans l'étude de la brisure partielle de la supersymétrie globale $N=2$. Nous présentons tout d'abord les éléments essentiels du modèle standard de la physique des particules pour mettre en évidence le rôle important de la brisure spontanée de la symétrie électrofaible. Puis, nous étudions les théories supersymétrique et nous donnons aussi trois modèles de la brisure partielle de la supersymétrie globale $N=2$. Ensuite, nous étudions la réalisation branaire du modèle de la brisure partielle de la supersymétrie $N=2$ basé sur le couplage de n multiplets vectoriel de secteur de jauge avec un seul hypermultiplet de secteur de la matière. Enfin, nous utilisons la méthode de l'étude effectuée dans la référence «arxiv :1501.07842» pour réaliser un modèle de brisure partielle de la supersymétrie $N=2$ qui décrit le couplage de n multiplets vectoriels avec n hypermultiplets.

Mots-clefs: supersymétrie étendue, brisure partielle, identité de Ward, au-delà du modèle standard , identité de Ward, réalisation branaire.

Abstract

This thesis provides The stumbling block for constructing an extended $N > 1$ supersymmetric version of the Standard Model of particle physics is mainly due to the non-chirality of the these $N > 1$ supersymmetry theories. However, thanks to the partial breaking of $N=2$ supersymmetry theory, it is possible to bypass this obstacle and therefore to build phenomenologically viable models from it. The present thesis contributes to the study of the partial breaking of the $N=2$ global supersymmetry. We first present the essential ingredients of the Standard Model of particle physics to show the important role of the spontaneous breaking of the electroweak symmetry. Then, we study the supersymmetric theories and we also give three models describing partial breaking of $N=2$ global supersymmetry. Next, we study brane realization of the $N=2$ supersymmetry partial breaking model of «arXiv: 1204.2141» which based on n vector multiplets coupled to hypermatter. Finally, we use the method introduced in "arxiv: 1501.07842" to study the $N=2$ supersymmetry partial breaking for n vector multiplets coupled to n hypermultiplets.

Keywords : extended supersymmetry, partial breaking, ward identity, beyond standard model, brane realisation.