



Université Sultan Moulay Slimane  
Faculté des Sciences et Techniques  
Béni-Mellal

CED : Sciences et Techniques  
FD : Mathématiques et Physique Appliquées



# THÈSE DE DOCTORAT NATIONAL

Présentée par

**BIHICHE Khadija**

*Spécialité : Mécanique & Energétique*  
*Option : Mécanique des Fluides et Transfert de Chaleur*

---

## **Convection Naturelle Induite par Double Diffusion ou Effet Soret d'un Fluide Non Newtonien Confiné dans une Cavité Rectangulaire Horizontale**

---

Soutenue publiquement le 20 Novembre 2021 devant le jury composé de :

- |   |                    |
|---|--------------------|
| Pr. Hammou Ait RIMOUCH, Faculté des Sciences et Techniques, Université Sultan Moulay Slimane, Béni Mellal     | Président          |
| Pr. Abderrahim BEN-RICHOUS, Faculté des Sciences et Techniques, Université Sultan Moulay Slimane, Béni Mellal | Rapporteur         |
| Pr. Mohammed SRITI, Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers, Université Moulay Ismaïl, Meknès          | Rapporteur         |
| Pr. Rachid EL AYACHI, Faculté des Sciences et Techniques, Université Sultan Moulay Slimane, Béni Mellal       | Rapporteur         |
| Pr. Mohamed DRIOUICH, Faculté Polydisciplinaire, Université Sultan Moulay Slimane, Béni-Mellal                | Examineur          |
| Pr. Mohamed LAMSAADI, Faculté Polydisciplinaire, Université Sultan Moulay Slimane, Béni-Mellal                | Directeur de thèse |

---

---

## REMERCIEMENTS

---

---

*Premièrement et avant tout, louange à dieu Allah le tout puissant, qui m'a accordé l'énergie et la volonté pour l'accomplissement de ce travail.*

*Mes remerciements les plus chaleureux, vont plus particulièrement à mon Directeur de thèse, **Mohamed LAMSAADI**, Professeur à la faculté poly-disciplinaire de Béni-Mellal, pour m'avoir suivi avec patience et intérêt dans mon projet, et pour la confiance qu'il a placé en moi tout au long de ce travail. Ses conseils précieux et ses encouragements, m'ont été d'une aide très importante dans la réalisation de ce projet.*

*Que Dieu ait pitié du défunt Mr. **Mohamed NAÏMI** qui a accepté de m'accueillir dans son labo et n'a pas épargné un effort pour m'aider. Il était aussi codirecteur de cette thèse au cours des années universitaires (2016-2018) avant son décès en 2019. Que Dieu ait pitié de son âme! Amin!*

*Que Monsieur **H. EL HARFI**, chercheur au même laboratoire et Professeur à la Faculté Polydisciplinaire de Béni Mellal, trouve ici l'expression de mes hauts respects et considérations pour les échanges scientifiques fructueux que j'ai eu avec lui.*

*Messieurs **Rachid EL AYACHI** et **Abderrahim BEN-RICHOU** Professeurs à la Faculté des Sciences et Techniques de Béni Mellal, et **Mohammed SRITI**, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers, Université Moulay Ismaïl, Meknès, ont rapporté sur ce travail et siégé parmi les membres du jury, malgré leurs préoccupations, qu'ils daignent trouver l'expression de ma considération et mes remerciements les plus sincères.*

*Je remercie également le Professeur **Hammou Ait RIMOUCH** de la Faculté des Sciences et Techniques de Béni Mellal qui a eu l'amabilité de bien vouloir présider le jury d'examen de cette thèse.*

*Mes remerciements les plus chaleureux vont également à Monsieur **Mohamed DRIOUICH**, Professeur à la Faculté Polydisciplinaire de Béni Mellal, d'avoir accepté de faire partie du jury en tant qu'examineur et pour ses conseils encourageants.*

*Je tiens enfin à remercier mes chers parents et mes frères pour leur aide et leur soutien indéfectible dans tous les aspects de ma vie et, surtout, j'aimerais témoigner à mon mari mon infinie reconnaissance, pour tous ses sacrifices, sa patience, son aide, et ses encouragements tout le long de ces années de doctorat. Je lui dédie ce travail ainsi qu'à mes parents, mes frères et ma petite fille Sara née au milieu de l'aventure.*

---

---

## AVANT PROPOS

---

---

- Prénom et Nom de l'auteur de la thèse : Khadija BIHICHE
- Intitulé de la thèse : Convection naturelle induite par double diffusion ou effet Soret d'un fluide non Newtonien confiné dans une cavité rectangulaire horizontale.
- Prénom et Nom du directeur de la thèse : Mohamed LAMSAADI (Professeur à la Faculté poly-disciplinaire Béni-Mellal)
- Lieu de réalisation du travail : Laboratoire de Modélisation des Ecoulements et des Transferts (LAMET), à la Faculté des Sciences et Techniques de Béni-Mellal.
- Date de commencement de la thèse : Janvier 2016.

## PUBLICATIONS

- [1] **K. BIHICHE**, M. LAMSAADI, M. NAÏMI, H.ELHARFI, M. KADDIRI, A. LOUARAYCHI, Natural thermosolutal bifurcation phenomena in a rectangular enclosure filled with non-Newtonian fluids, *Revue de l'Entrepreneuriat et de l'Innovation*, Vol. 2 No 6, 2018.
- [2] **K. Bihiche**, M. Lamsaadi et M. Hasnaoui, Multiple steady state solutions for double-diffusive convection in a shallow horizontal rectangular cavity uniformly heated and salted from the side and filled with non-Newtonian power-law fluids, *Journal of Non-Newtonian fluid Mechanics*, Vol. 283, 2020.
- [3] **K. Bihiche**, M. Lamsaadi et M. Hasnaoui, Double-diffusive and Soret-induced convection in a shallow horizontal cavity filled with non-Newtonian power-law fluids, soumis pour publication, (2021).
- [4] **K. Bihiche**, M. Lamsaadi et M. Hasnaoui, Double-diffusive convection in a shallow horizontal rectangular cavity uniformly heated and salted from below and filled with a non-Newtonian binary fluid, soumis pour publication, (2021).

- [5] **K. Bihiche**, M. Lamsaadi et M. Hasnaoui, Soret-induced convection in a shallow horizontal rectangular cavity uniformly heated and salted from below and filled with a non-Newtonian binary fluid, soumis pour publication, (2021).

## COMMUNICATIONS

- [1] **K. Bihiche**, M. Lamsaadi, M. Naïmi et H. El Harfi, M. Kaddiri, Effet des conditions aux limites hydrodynamiques sur la double diffusion au sein d'une cavité rectangulaire chauffée et salée latéralement, *4<sup>ème</sup> édition du Congrès International de Thermique, AMT 2016, Meknès (Maroc)*, Vol. 2, Avril 2016.
- [2] **K. Bihiche**, M. Lamsaadi, M. Naïmi et H. El Harfi, M. Kaddiri, A. Louaraychi, Double-diffusive and Soret-induced convection in a shallow horizontal layer filled with non-Newtonian power-law fluids, *13<sup>ème</sup> Congrès de Mécanique, CMM 2017, Meknès (Maroc)*, Avril 2017.
- [3] **K. Bihiche**, M. Lamsaadi, M. Naïmi et H. El Harfi, M. Kaddiri, Double-diffusive convection induced by opposing buoyancy forces in a horizontal cavity filled with non-Newtonian power-law fluids with Soret effect, *International Congress of Environment Engineering and Renewable Energy ICEERE 2017, El-jadida (Maroc)*, Mai 2017.
- [4] **K. Bihiche**, M. Lamsaadi, M. Naïmi et H. El Harfi, M. Kaddiri, A. Louaraychi, Thermosolutal bifurcation phenomena in a rectangular enclosure filled with non-Newtonian fluids, *la 1<sup>ère</sup> Rencontre sur la Recherche et l'Innovation, R2I 2018, Béni-Mellal (Maroc)*, Mai 2018.
- [5] **K. Bihiche**, M. Lamsaadi, M. Naïmi et H. El Harfi, M. Kaddiri, A. Louaraychi, Comparaison entre la convection coopérante et la convection opposée pour les fluides non-Newtoniens avec et sans effet de Soret : cas des forces de volumes d'égales intensités, *14<sup>ème</sup> Congrès de Mécanique, CMM 2019, Rabat (Maroc)*, Avril 2019.

## **FORMATIONS**

- [1] Formation sur **l'efficacité énergétique dans l'industrie** : Université de printemps sur l'efficacité énergétique dans l'industrie, organisée par le Réseau Universitaire pour la Promotion des Energies Renouvelables et de l'Efficacité Energétique (REUNET) et l'Université Sultan Moulay Slimane (USMS), Béni Mellal, 11-15 Avril 2016.
  
- [2] Formation sur **le Solaire Thermique à Concentration (CSP)** : Université de printemps sur l'efficacité énergétique dans l'industrie, organisée par le Réseau Universitaire pour la Promotion des Energies Renouvelables et de l'Efficacité Energétique (REUNET) et la Faculté Polydisciplinaire de Ouarzazate, Béni Mellal, 24-27 Avril 2017.

---

---

## RÉSUMÉ

---

---

Dans ce travail, nous proposons une étude analytique et numérique du phénomène de la convection naturelle au sein d'une cavité rectangulaire horizontale remplie d'un fluide non-Newtonien. Les écoulements convectifs sont induits par des conditions aux limites soient thermiques ou thermiques et solutales de type Neumann (flux constants de chaleur et de masse) imposées sur les parois actives de la cavité. Un code de calcul numérique, basé sur la méthode des volumes finis, a été adopté pour résoudre l'ensemble des équations gouvernant le système et un modèle analytique, développé sur la base de l'hypothèse d'écoulement parallèle, a été dérivé dans le cas d'une couche infinie ( $A \gg 1$ ). L'influence du nombre de Rayleigh thermique  $Ra_T$ , de l'indice de loi en puissance  $n$ , du rapport des forces de volume  $N$ , du rapport d'aspect  $A$ , du nombre de Lewis  $Le$  et du paramètre  $M$  définissant la convection par double diffusion ( $M = 0$ ) ou par effet Soret ( $M = 1$ ) sur la structure de l'écoulement et les mécanismes de transfert de chaleur et de masse a été étudiée. Les résultats exprimés en termes de lignes de courant, d'isothermes, d'iso-concentrations, de la fonction de courant centrale et des nombres moyens de Nusselt et de Sherwood sont obtenus et discutés pour une large gamme des paramètres de contrôle.

Dans le cas d'une cavité dont les parois verticales sont actives : Un flux de chaleur uniforme est appliqué aux parois verticales tandis que celles horizontales sont imperméables et adiabatiques. Les forces de flottabilité solutales sont supposées être induites soit par l'imposition de flux de masse uniforme sur les parois verticales (convection de double diffusion,  $M = 0$ ) ou par gradients de température (convection induite par effet Soret,  $M = 1$ ). Pour le cas de la convection double diffusive, les résultats obtenus ont montré que pour le cas de forces de flottabilité thermiques et solutales opposées ( $N < 0$ ), de multiples solutions, dans le sens horaire et antihoraire, existent lorsque  $Ra_T$  atteint une valeur critique et la valeur de  $N$  est choisie à l'intérieur d'une gamme spécifique, qui dépend de  $n$ . À l'inverse, lorsque ( $N \geq 0$ ), l'écoulement est unicellulaire et antihoraire. De plus, il a été trouvé que, pour les grands nombres de Rayleigh thermiques, le régime de la couche limite se développe pour les écoulements antihoraires. Les évolutions de la fonction de courant  $\psi_c$  et du nombre de Nusselt  $\overline{Nu}$ , pour la convection induite par effet de Soret et celle de double diffusion, sont qualitativement similaire. Ce n'est pas le cas pour le nombre de Sherwood  $\overline{Sh}$  qui est considérablement différent dans le cas de  $M = 1$  ; l'effet Soret impose une inversion du gradient de concentration.

Dans le cas d'une cavité dont les parois horizontales sont actives: Un flux de chaleur uniforme est appliqué aux parois horizontales alors que celles verticales sont imperméables et adiabatiques. Les forces de flottabilité solutales sont supposées être induites soit par l'imposition de flux de masse uniforme sur les parois horizontales (convection de double diffusion,  $M = 0$ ) ou par gradients de température (convection induite par effet Soret,  $M = 1$ ).

L'effet du taux de flottabilité sur le début et le développement de la convection est discuté. Il a été démontré que la naissance des mouvements convectifs, sous-critiques et supercritiques, dépend fortement des valeurs de  $n$  et  $N$ . Aussi, pour le cas de  $N < 0$ , de multiples solutions sont possibles pour une plage de paramètres directeurs.

***Mots clés :*** Convection naturelle, Fluide non Newtonien, Rapport des forces de volume, Effet Soret, Méthode des volumes finis, Approximation de l'écoulement parallèle.

---

---

## ABSTRACT

---

---

In the present work, we study analytically and numerically the phenomenon of natural convection within a horizontal rectangular cavity filled with a non-Newtonian fluid. The convective flows are induced by thermal and solutal boundary conditions of the Neumann type (constant flows of heat and concentration) imposed on the active walls of the cavity. A numerical calculation code, based on the finite volume method, was adopted to solve the set of equations governing the system and an analytical model, developed on the basis of the parallel flow hypothesis, was derived in the case of an infinite layer ( $A \gg 1$ ). The study focus on the impact of different governing parameters, namely, the cavity aspect ratio  $A$ , the buoyancy ratio  $N$ , the Lewis number  $Le$ , the power-law behavior index  $n$ , the thermal Rayleigh number  $Ra_T$ , and parameter  $M$  defining double-diffusive convection ( $M = 0$ ) or Soret-induced convection ( $M = 1$ ). Representative results for the central stream function, Nusselt and Sherwood numbers as well as streamlines, isotherms and isoconcentrations are depicted as functions of the main parameters mentioned above.

In the case of a cavity with active vertical walls: A uniform heat flux is applied to the vertical walls while the horizontal ones are impermeable and adiabatic. The solutal buoyancy forces are assumed to be induced either by the imposition of constant fluxes of mass on the horizontal walls (double-diffusive convection,  $M = 0$ ) or by temperature gradients (Soret induced convection,  $M = 1$ ). For the case of double diffusive convection, the results obtained have shown that for the case of opposite thermal and solutal buoyancy forces ( $N < 0$ ), multiple steady-state solutions leading to counter-clockwise and clockwise flow circulations are found to exist when  $Ra_T$  reaches a critical value and the value of  $N$  is chosen inside a specific range, which depends on  $n$ . Such a behavior is not observed in the case of aiding thermal and solutal buoyancy forces ( $N \geq 0$ ), where the flow is unicellular and counter-clockwise. In addition, it was found that, for large thermal Rayleigh numbers, the boundary layer regime develops for counterclockwise flows. For Soret induced convection, it was demonstrated that the evolutions of  $\psi_c$  and  $\overline{Nu}$  with  $Ra_T$  are found to exhibit the same behavior as those obtained for double diffusive convection ( $M = 0$ ). However the Sherwood number  $\overline{Sh}$  is observed to be considerably different and present significant changes; the Soret effect imposes a reversal of concentration gradient.

In the case of a cavity with active horizontal walls: A uniform heat flux is applied to the horizontal walls while the vertical ones are impermeable and adiabatic. The solutal buoyancy forces are assumed to be induced either by the imposition of constant fluxes of mass on the horizontal walls (double-diffusive convection,  $M = 0$ ) or by temperature gradients (Soret induced convection,  $M = 1$ ).

The effect of the buoyancy ratio on the onset and development of convection discussed for a large range of the governing parameters. It has been shown that the onset of subcritical and supercritical convection, depends considerably on the values of  $n$  and  $N$ . Also, for the case of  $N < 0$ , multiple solutions are possible for a range of  $Ra_T$ , which depends on the other governing parameters and on the type of convection.

***Key words:*** Natural convection, Non Newtonien fluid, Buoyancy ratio, Soret effect, Finite volume method, Parallel flow approximation.

---

---

## SOMMAIRE

---

---

<b>Introduction générale</b> .....	1
<b>Chapitre 1 : Synthèse bibliographique</b> .....	4
1.1 Introduction.....	4
1.2 Convection naturelle doublement diffusive.....	4
1.3 Convection induite par effet Soret.....	4
1.4 Rhéologie des fluides.....	4
1.4.1 Notion de contrainte.....	4
1.4.2 Définition d'un fluide.....	5
1.4.3 Fluides Newtoniens.....	5
1.4.4 Fluides non-Newtoniens.....	6
1.5 Convection naturelle doublement diffusive en milieux Newtoniens confinés.....	7
1.6 Convection naturelle doublement diffusive en milieux non-Newtoniens confinés.....	14
1.7 Conclusion.....	15
<b>Chapitre 2 : Modélisation mathématique du problème et méthodes de résolution</b> .....	16
2.1 Introduction.....	16
2.2. Description du problème et géométrie considérée.....	16
2.3 Hypothèses simplificatrices.....	17
2.4 Formulation mathématique.....	17
2.4.1 Formulation en variables primitives.....	17
2.4.2 Formulation en variables adimensionnelles.....	19
2.5 Transfert thermique et massique.....	20
2.5.1 Cavité dont les parois verticales sont actives.....	20
2.5.2 Cavité dont les parois horizontales sont actives.....	20
2.6 Résolution par approche numérique.....	20
2.6.1 Méthode des volumes finis.....	21
2.6.2. Discrétisation des équations.....	21
2.6.3 Traitement des conditions aux limites.....	25

2.6.4	Résolution des équations.....	26
2.6.4.1	<i>Equations de la correction de pression et de la correction des vitesses</i> .....	26
2.6.4.2	<i>Procédure de calcul : Algorithmes SIMPLE et SIMPLER</i> .....	28
2.6.5	Validation du code numérique.....	28
2.7	Méthode de résolution analytique.....	29
2.7.1	Introduction.....	29
2.7.2	Concept de l'écoulement parallèle.....	30
2.7.3	Applications aux équations de base.....	30
2.7.4	Résolution des équations approximées.....	31
2.7.5	Détermination des gradients $C_T$ et $C_S$ .....	33
2.7.6	Transfert de chaleur et de masse.....	34
<b>Chapitre 3 : Convection doublement diffusive d'un fluide non-Newtonien dans une cavité rectangulaire horizontale chauffée et salée latéralement.....</b>		
<b>36</b>		
3.1	Introduction.....	36
3.2	Effet du maillage.....	36
3.3	Influence du rapport d'aspect de la cavité.....	38
3.4	Effet du nombre de Prandtl.....	39
3.5	Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations.....	39
3.6	Régime de la couche limite.....	39
3.7	Effets du nombre de Rayleigh et de l'indice de comportement .....	39
3.7.1	Cas des forces de flottabilité coopérantes ( $N > 0$ ).....	39
3.7.2	Cas des forces de flottabilité opposées ( $N < 0$ ).....	40
3.8	Effet du rapport des forces de volume sur l'intensité d'écoulement.....	46
3.9	Conclusion.....	48
<b>Chapitre 4 : Convection naturelle induite par effet Soret d'un fluide non-Newtonien dans une cavité rectangulaire horizontale chauffée latéralement.....</b>		
<b>66</b>		
4.1	Introduction.....	66
4.2	Effet du maillage.....	66

<b>4.3 Validation de l'approche de l'écoulement parallèle.....</b>	<b>67</b>
<b>4.4 Profils de vitesse, de température et de concentration.....</b>	<b>68</b>
<b>4.5 Effets du nombre de Rayleigh et de l'indice de la loi en puissance.....</b>	<b>68</b>
<b>4.5.1 Cas des forces de flottabilité coopérantes.....</b>	<b>68</b>
<b>4.5.2 Cas des forces de flottabilité opposées (<math>N &lt; 0</math>).....</b>	<b>69</b>
<b>4.6 Effet du rapport des forces de volume.....</b>	<b>71</b>
<b>4.7 Effet du nombre de Lewis.....</b>	<b>72</b>
<b>4.8 Conclusion.....</b>	<b>73</b>
<b>Chapitre 5 : Convection naturelle induite par double diffusion ou effet Soret d'un fluide non-Newtonien dans une cavité rectangulaire horizontale chauffée ou chauffée et salée par le bas.....</b>	<b>91</b>
<b>5.1 Introduction.....</b>	<b>91</b>
<b>5.2 Validation de l'approche de l'écoulement parallèle.....</b>	<b>91</b>
<b>5.3 Effets du nombre de Rayleigh et de l'indice de la loi en puissance.....</b>	<b>92</b>
<b>5.3.1 Cas des forces de flottabilité coopérantes (<math>N &gt; 0</math>).....</b>	<b>92</b>
<b>5.3.2 Cas des forces de flottabilité opposées (<math>N &lt; 0</math>).....</b>	<b>93</b>
<b>5.4 Effets du rapport des forces de volume et de l'indice de la loi en puissance.....</b>	<b>95</b>
<b>5.5 Effet du nombre de Lewis.....</b>	<b>96</b>
<b>5.6 Conclusion.....</b>	<b>97</b>
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>115</b>
<b>Références bibliographiques.....</b>	<b>118</b>

---



---

## LISTE DES FIGURES

---



---

<b>Figure 1.1 :</b>	Contrainte appliquée sur une surface d'un fluide .....	<b>5</b>
<b>Figure 1.2 :</b>	Ecoulement de Couette.....	<b>6</b>
<b>Figure 1.3 :</b>	Diagramme de classification des fluides non-Newtoniens visqueux.....	<b>7</b>
<b>Figure 2.1 :</b>	Schématisation du problème.....	<b>17</b>
<b>Figure 2.2 :</b>	Discrétisation en volumes finis.....	<b>21</b>
<b>Figure 3.1 :</b>	Evolutions de $\overline{Sh}$ en fonction du rapport de forme de la cavité A, pour $Le = 10$ , $N = 10$ , $Ra_T = 10^4$ et différentes valeurs de n.....	<b>49</b>
<b>Figure 3.2:</b>	Lignes de courant (à gauche), isothermes (au centre) et iso-concentrations (à droite) pour $A = 24$ , $Pr = 100$ , $Le = 10$ , $N = 10$ et différentes valeurs de n et $Ra_T$ : (a) $Ra_T = 10^3$ , (b) $Ra_T = 10^4$ and (c) $Ra_T = 10^5$ .....	<b>50</b>
<b>Figure 3.3 :</b>	Effet de $Ra_T$ en $\psi_c$ (a), $\overline{Nu}$ (b) and $\overline{Sh}$ (c) for $Le = 10$ , $N = 10$ et différentes valeurs de n .....	<b>51</b>
<b>Figure 3.4 :</b>	Diagrammes de bifurcation pour $Le = 10$ et différentes valeurs de N et n.....	<b>52</b>
<b>Figure 3.5 :</b>	Lignes de courant (à gauche), isothermes (au centre) et iso-concentrations (à droite) pour $Ra_T = 200$ , $Le = 10$ , $N = -0.99$ et différentes valeurs de n .....	<b>53</b>
<b>Figure 3.6 :</b>	Profil de la vitesse pour $Ra_T = 200$ , $Le = 10$ , $N = -0.99$ et différentes valeurs de n..	<b>54</b>
<b>Figure 3.7 :</b>	Diagrammes de bifurcation pour $Le = 10$ , $N = -1$ et différentes valeurs de n.....	<b>55</b>
<b>Figure 3.8 :</b>	Effet de $Ra_T$ en $\overline{Nu}$ for $Le = 10$ , $N = -1$ et différentes valeurs de n .....	<b>56</b>
<b>Figure 3.9 :</b>	Effet de $Ra_T$ en $\overline{Sh}$ for $Le = 10$ , $N = -1$ et différentes valeurs de n .....	<b>57</b>
<b>Figure 3.10 :</b>	Lignes de courant (à gauche), isothermes (au centre) et iso-concentrations (à droite) pour $Ra_T = 200$ , $Le = 10$ , $N = -1$ et différentes valeurs de n.....	<b>58</b>
<b>Figure 3.11 :</b>	Diagrammes de bifurcation pour $Le = 10$ , $N = -2$ et différentes valeurs de n.....	<b>59</b>
<b>Figure 3.12 :</b>	Variations de $Ra_{TC}^{Sub}$ en fonction de $N \leq -1$ pour $Le = 10$ et différentes valeurs de n..	<b>60</b>
<b>Figure 3.13 :</b>	Lignes de courant (à gauche), isothermes (au centre) et iso-concentrations (à droite) correspondants aux écoulements antihoraire (a) et horaire (b) pour $N = -2$ , $Le = 10$ et différentes valeurs de (n, $Ra_T$ ) .....	<b>60</b>
<b>Figure 3.14 :</b>	Profils de vitesse le long de y au centre de la cavité pour $N = -2$ , $Le = 10$ et différentes valeurs de (n, $Ra_T$ ) .....	<b>61</b>

<b>Figure 3.15 :</b>	Régime de la couche limite: ( $Le = 5, N = 5$ ); ( $Le = 10, N = -2$ ) et différentes valeurs de $n$ .....	<b>62</b>
<b>Figure 3.16 :</b>	Effet de $Ra_T$ en $\frac{\overline{Sh}}{Nu}$ pour différentes valeurs de $N, Le$ et $n$ .....	<b>63</b>
<b>Figure 3.17 :</b>	Effet de $N$ en $\psi_c$ pour $Le = 10$ et différentes valeurs de $Ra_T$ et $n$ .....	<b>64</b>
<b>Figure 3.18 :</b>	Variations de $N_c^1$ (a) et $N_c^2$ (b) avec $Ra_T$ pour $Le = 10$ et différentes valeurs de $n$ .....	<b>65</b>
<b>Figure 4.1 :</b>	Lignes de courant (à gauche), isothermes (au centre) et iso-concentrations (à droite) pour $Ra_T = 10^4, Le = 5, N = 2$ et différentes valeurs de $n$ et $M$ : (a) $M = 0$ and (b) $M = 1$ .....	<b>74</b>
<b>Figure 4.2 :</b>	Profils de vitesse horizontale (a), de température (b) et de concentration (c) au centre de la cavité le long de la coordonnée verticale pour $N = 2, Ra_T = 10^4, M = 0$ et différentes valeurs de $n$ .....	<b>75</b>
<b>Figure 4.3 :</b>	Profils de vitesse horizontale (a), de température (b) et de concentration (c) au centre de la cavité le long de la coordonnée verticale pour $N = 2, Ra_T = 10^4, M = 1$ et différentes valeurs de $n$ .....	<b>76</b>
<b>Figure 4.4 :</b>	Effet de $Ra_T$ sur $\psi_c$ pour $Le = 5, N = 2, M = 0$ et $1$ et différentes valeurs de $n$ ....	<b>77</b>
<b>Figure 4.5 :</b>	Effet de $Ra_T$ sur $\overline{Nu}$ pour $Le = 5, N = 2, M = 0$ et $1$ et différentes valeurs de $n$ .....	<b>77</b>
<b>Figure 4.6 :</b>	Effet de $Ra_T$ sur $\overline{Sh}$ pour $Le = 5, N = 2, M = 0$ et $1$ et différentes valeurs de $n$ .....	<b>78</b>
<b>Figure 4.7 :</b>	Lignes de courant (à gauche), isothermes (au centre) et iso-concentrations (à droite) pour $A = 24, Pr = 100, Le = 5, N = 2$ et (a) $Ra_T = 109$ , (b) $Ra = 115.821$ et (c) $Ra_T = 120$ .....	<b>79</b>
<b>Figure 4.8 :</b>	Lignes de courant (à gauche), isothermes (au centre) et iso-concentrations (à droite) pour $A = 24, Pr = 100, Le = 5, N = 2$ et (a) $Ra_T = 317$ , (b) $Ra_T = 323.279$ et (c) $Ra_T = 328$ .....	<b>79</b>
<b>Figure 4.9 :</b>	Lignes de courant (à gauche), isothermes (au centre) et iso-concentrations (à droite) pour $A = 24, Pr = 100, Le = 5, N = 2$ and (a) $Ra_T = 877$ , (b) $Ra_T = 883.549$ et (c) $Ra_T = 888$ .....	<b>79</b>
<b>Figure 4.10 :</b>	Diagrammes de bifurcation pour $Le = 10, M = 1$ et différentes valeurs de $N$ et $n$ ....	<b>80</b>
<b>Figure 4.11 :</b>	Effet de $Ra_T$ sur $\overline{Nu}$ pour $Le = 10, N = -1$ et différentes valeurs de $n$ .....	<b>81</b>
<b>Figure 4.12 :</b>	Effet de $Ra_T$ sur $\overline{Sh}$ pour $Le = 10, N = -1, M = 1$ et différentes valeurs de $n$ .....	<b>82</b>
<b>Figure 4.13 :</b>	Effet de $N$ sur $\psi_c$ pour $Le = 5, M = 1$ et différentes valeurs de $n$ et $Ra_T$ .....	<b>83</b>

<b>Figure 4.14 :</b>	Profils de la vitesse le long de $y$ au centre de la cavité pour $N = -1.99$ , $Le = 5$ , $M = 1$ et différentes valeurs de $(n, Ra_T)$ .....	<b>84</b>
<b>Figure 4.15 :</b>	Effet de $Le$ sur $\psi_c$ pour $N = 2$ , $Ra_T = 10^3$ , $M = 0$ et $1$ et différentes valeurs de $n$ ...	<b>85</b>
<b>Figure 4.16 :</b>	Effet de $Le$ sur $\overline{Nu}$ pour $N = 2$ , $Ra_T = 10^3$ , $M = 0$ et $1$ et différentes valeurs de $n$ ...	<b>86</b>
<b>Figure 4.17 :</b>	Effet de $Le$ sur $\overline{Sh}$ pour $N = 2$ , $Ra_T = 10^3$ , $M = 0$ et $1$ et différentes valeurs de $n$ ...	<b>87</b>
<b>Figure 4.18 :</b>	Effet de $Le$ sur $\psi_c$ pour $N = -0.5$ , $Ra_T = 10^3$ , $M = 0$ et $1$ et différentes valeurs de $n$ .....	<b>88</b>
<b>Figure 4.19 :</b>	Effet de $Le$ sur $\overline{Nu}$ pour $N = -0.5$ , $Ra_T = 10^3$ , $M = 0$ et $1$ et différentes valeurs de $n$ .....	<b>89</b>
<b>Figure 4.20 :</b>	Effet de $Le$ sur $\overline{Sh}$ pour $N = -0.5$ , $Ra_T = 10^3$ , $M = 0$ et $1$ et différentes valeurs de $n$ .....	<b>90</b>
<b>Figure 5.1 :</b>	Lignes de courant (à gauche), isothermes (au centre) et iso-concentrations (à droite) pour $A = 24$ , $Pr = 100$ , $Ra_T = 10^3$ , $Le = 2$ , $N = 0.5$ et différentes valeurs de $n$ et $M$ : (a) $M = 0$ and (b) $M = 1$ .....	<b>98</b>
<b>Figure 5.2 :</b>	Diagrammes de bifurcation en terme de $\psi_c$ en fonction de $Ra_T$ pour $M = 0$ et $1$ , $Le = 2$ , $N = 0.5$ et différentes valeurs de $n$ .....	<b>99</b>
<b>Figure 5.3 :</b>	Diagrammes de bifurcation en terme de $\overline{Nu}$ en fonction de $Ra_T$ pour $M = 0$ et $1$ , $Le = 2$ , $N = 0.5$ et différentes valeurs de $n$ .....	<b>100</b>
<b>Figure 5.4 :</b>	Diagrammes de bifurcation en terme de $\overline{Sh}$ en fonction de $Ra_T$ pour $M = 0$ et $1$ , $Le = 2$ , $N = 0.5$ et différentes valeurs de $n$ ....	<b>101</b>
<b>Figure 5.5 :</b>	Diagrammes de bifurcation en terme de $\psi_c$ en fonction de $Ra_T$ pour $M = 0$ , $Le = 2$ et différentes valeurs de $n$ et $N$ .....	<b>102</b>
<b>Figure 5.6 :</b>	Diagrammes de bifurcation en terme de $\psi_c$ en fonction de $Ra_T$ pour $M = 1$ , $Le = 2$ et différentes valeurs de $n$ et $N$ .....	<b>103</b>
<b>Figure 5.7 :</b>	Diagrammes de bifurcation en terme de $\overline{Nu}$ en fonction de $Ra_T$ pour $M = 0$ et $1$ , $Le = 2$ , $N = -0.5$ et différentes valeurs de $n$ et $N$ .....	<b>104</b>
<b>Figure 5.8 :</b>	Diagrammes de bifurcation en terme de $\overline{Sh}$ en fonction de $Ra_T$ pour $M = 0$ et $1$ , $Le = 2$ , $N = -0.5$ et différentes valeurs de $n$ .....	<b>105</b>
<b>Figure 5.9 :</b>	Effet de $N$ sur le profil de la vitesse horizontale pour $Le = 2$ , $M = 1$ et différentes valeurs de $n$ et $Ra_T$ .....	<b>106</b>
<b>Figure 5.10 :</b>	Effet de $N$ sur $\psi_c$ pour $Le = 2$ , $M = 0$ et différentes valeurs de $Ra_T$ et $n$ .....	<b>107</b>

<b>Figure 5.11 :</b>	Effet de $N$ sur $\psi_c$ pour $Le = 2$ , $M = 1$ et différentes valeurs de $Ra_T$ et $n$ . .....	<b>108</b>
<b>Figure 5.12 :</b>	Effet de $Le$ sur $\psi_c$ pour $N = 0.5$ , $Ra_T = 10^3$ , $M = 0$ et $1$ et différentes valeurs de $n$ .....	<b>109</b>
<b>Figure 5.13 :</b>	Effet de $Le$ sur $\overline{Nu}$ pour $N = 0.5$ , $Ra_T = 10^3$ , $M = 0$ et $1$ et différentes valeurs de $n$ .....	<b>110</b>
<b>Figure 5.14 :</b>	Effet de $Le$ sur $\overline{Sh}$ pour $N = 0.5$ , $Ra_T = 10^3$ , $M = 0$ et $1$ et différentes valeurs de $n$ .....	<b>111</b>
<b>Figure 5.15 :</b>	Effet de $Le$ sur $\psi_c$ pour $N = -0.5$ , $Ra_T = 10^3$ , $M = 0$ et $1$ et différentes valeurs de $n$ .....	<b>112</b>
<b>Figure 5.16 :</b>	Effet de $Le$ sur $\overline{Nu}$ pour $N = -0.5$ , $Ra_T = 10^3$ , $M = 0$ et $1$ et différentes valeurs de $n$ .....	<b>113</b>
<b>Figure 5.17 :</b>	Effet de $Le$ sur $\overline{Sh}$ pour $N = -0.5$ , $Ra_T = 10^3$ , $M = 0$ et $1$ et différentes valeurs de $n$ .....	<b>114</b>

## LISTE DES TABLEAUX

<b>Tableau 2.1 :</b>	Expressions de la fonction $\Phi$ , $J_x$ , $J_y$ et $S_\Phi$ .....	<b>22</b>
<b>Tableau 2.2 :</b>	Expressions des coefficients $D_i$ .....	<b>25</b>
<b>Tableau 2.3 :</b>	Comparaison des résultats numériques obtenus par la présente étude avec ceux obtenus par Makayssi et al. (2008) pour $A = 24$ , $Le = 10$ , $N = 1$ , $Ra_T = 10^5$ et différentes valeurs de $n$ .....	<b>29</b>
<b>Tableau 2.4 :</b>	Comparaison des résultats numériques obtenus par la présente étude avec ceux obtenus par Alloui et al. (2010) pour $A = 6$ , $Le = 2$ , $N = 0.05$ , $Ra_T = 10^3$ et différentes valeurs de $n$ .....	<b>29</b>
<b>Tableau 2.5 :</b>	Dépendance de $y_0$ , $A_n$ , $B_n$ et $D_n$ avec $n$ .....	<b>34</b>
<b>Tableau 3.1 :</b>	Effet du maillage sur la précision des valeurs de $\psi_c$ , $\overline{Nu}$ et $\overline{Sh}$ pour $A = 24$ , $Pr = 100$ , $Le = 10$ , $Ra_T = 10^4$ , $n = 0.6$ et différentes valeurs de $N$ .....	<b>37</b>
<b>Tableau 3.2 :</b>	Effet du maillage sur la précision des valeurs de $\psi_c$ , $\overline{Nu}$ et $\overline{Sh}$ pour $A = 24$ , $Pr = 100$ , $Le = 10$ , $Ra_T = 10^4$ , $n = 1.0$ et différentes valeurs de $N$ .....	<b>37</b>
<b>Tableau 3.3 :</b>	Effet du maillage sur la précision des valeurs de $\psi_c$ , $\overline{Nu}$ et $\overline{Sh}$ pour $A = 24$ , $Pr = 100$ , $Le = 10$ , $Ra_T = 10^4$ , $n = 1.4$ et différentes valeurs de $N$ .....	<b>38</b>
<b>Tableau 3.4 :</b>	Dépendance de $Ra_{TC}^{Sub}$ de $n$ pour $N = -1$ et $Le = 10$ .....	<b>42</b>
<b>Tableau 4.1 :</b>	Effet du maillage sur la précision des valeurs de $\psi_c$ , $\overline{Nu}$ et $\overline{Sh}$ pour $A = 24$ , $Pr = 100$ , $Le = 5$ , $Ra_T = 10^4$ , $n = 0.6$ , $M = 1$ et différentes valeurs de $N$ .....	<b>67</b>
<b>Tableau 4.2 :</b>	Effet du maillage sur la précision des valeurs de $\psi_c$ , $\overline{Nu}$ et $\overline{Sh}$ pour $A = 24$ , $Pr = 100$ , $Le = 5$ , $Ra_T = 10^4$ , $n = 1.0$ , $M = 1$ et différentes valeurs de $N$ .....	<b>67</b>
<b>Tableau 4.3 :</b>	Effet du maillage sur la précision des valeurs de $\psi_c$ , $\overline{Nu}$ et $\overline{Sh}$ pour $A = 24$ , $Pr = 100$ , $Le = 5$ , $Ra_T = 10^4$ , $n = 1.4$ , $M = 1$ et différentes valeurs de $N$ .....	<b>67</b>
<b>Tableau 4.4 :</b>	Valeurs de $Ra_{TC}^{Sub}$ pour $N = -1$ , $Le = 10$ et $M = 0$ et $1$ .....	<b>70</b>

---

---

## NOMENCLATURE

---

---

A	rapport d'aspect de la cavité, équation (2.18)
a	nombre entier, $a = 0$ ou $a = 1$
b	nombre entier, $b = 0$ ou $b = 1$
c	nombre entier, $c = 0$ ou $c = 1$
d	nombre entier, $d = 0$ ou $d = 1$
$C_T$	gradient de température horizontal adimensionnel
$C_S$	gradient de concentration horizontal adimensionnel
D	coefficient de diffusivité massique du fluide ( $m^2/s$ )
$D_T^*$	coefficient de l'effet Soret ( $m^2/s K$ )
d	nombre entier, $d = 0$ ou $d = 1$
g	accélération de la pesanteur ( $m/s^2$ )
$H'$	hauteur de la cavité (m)
$j'$	flux de masse constant ( $kg/m^2s$ )
k	indice de consistance pour un fluide d'Ostwalde-De Waele ( $Pa s^n$ )
Le	nombre de Lewis, équation (2.18)
$L'$	longueur de la cavité (m)
M	nombre entier, $M = 0$ ou $M = 1$
N	rapport des forces de volume, équation (2.18)
n	indice de comportement pour un fluide d'Ostwalde-De Waele
$\overline{Nu}$	nombre de Nusselt moyen
Pr	nombre de Prandtl généralisé, équation (2.18)
$q'$	flux de chaleur constant ( $W/m^2$ )
$Ra_T$	Nombre de Rayleigh thermique, équation (2.18)
S	fonction de répartition de la concentration, $[= (S' - S'_0)/\Delta S^*]$
$S'$	fraction massique du composant de référence
$S'_0$	fraction massique initiale du composant de référence
$\overline{Sh}$	nombre de Sherwood moyen
T	température adimensionnelle, $[= (T' - T'_0)/\Delta T^*]$

- $T'_0$  température de référence (K)  
 $\Delta T^*$  différence caractéristique de température  
 $\Delta S^*$  différence caractéristique de concentration  
 $(u, v)$  composantes de vitesse adimensionnelles,  $[= (u', v')/(\alpha/H')]$   
 $(x, y)$  coordonnées adimensionnelles,  $[= (x', y')/H']$

### *Lettres grecques*

- $\alpha$  diffusivité thermique du fluide ( $m^2/s$ )  
 $\beta_T$  coefficient d'expansion thermique ( $1/K$ )  
 $\beta_S$  coefficient d'expansion massique ( $m^3/kg$ )  
 $\lambda$  conductivité thermique du fluide ( $Wm^{-1}K^{-1}$ )  
 $\mu$  viscosité dynamique Newtonienne ( $Pa \cdot s$ )  
 $\mu_a$  viscosité apparente adimensionnelle du fluide  
 $\rho$  densité du fluide ( $kg/m^3$ )  
 $\psi$  fonction de courant adimensionnelle,  $[= \psi'/\alpha]$

### Exposants

' variables dimensionnelles

### Indices

- c valeur relative au centre de la cavité  $(x, y) = (A/2, 1/2)$   
\* variable caractéristique

---

---

# Introduction générale

---

---

La convection de double diffusion est un processus de mélange entraîné par l'interaction de deux composants fluides qui se diffusent suite à l'imposition de deux gradients de densité différents ayant des taux de diffusion différents. Ce phénomène a des ramifications importantes en océanographie et dans de nombreux autres domaines, de la croissance cristalline aux chambres magmatiques et aux intérieurs stellaires. Néanmoins, plusieurs aspects de la convection de double diffusion restent encore flous et controversés.

L'étude de ce phénomène, dans un mélange binaire Newtonien, jouit d'une grande importance auprès des communautés scientifiques et industrielles. Les investigations dans ce domaine ont été continuées et le nombre des travaux sur le sujet est étonnant. Cependant, dans de nombreuses applications techniques, les fluides de travail présentent plutôt un comportement non-Newtonien. Malgré ce fait, les études de convection naturelle de double diffusion de cette catégorie de fluides sont peu nombreuses par rapport à celles qui se concentrent sur les fluides Newtoniens classiques. De nombreuses applications industrielles actuelles traitent des écoulements de fluides non-Newtoniens (les peintures, les vernis et les colles, les écoulements de métaux en fusion, les lubrifiants, les produits entrant en jeu dans les industries chimiques, le pétrole et ses dérivés, les industries alimentaires, l'industrie de la verrerie, l'industrie pharmaceutique...etc). Par conséquent, le manque de travaux concernant ce type de fluide n'est pas dû au manque d'applications pratiques mais une telle situation peut s'expliquer par la difficulté à appréhender physiquement les mouvements convectifs et à les modéliser mathématiquement. En effet, dans beaucoup d'applications industrielles où les fluides sont chauffés et mis en mouvement, il est difficile de séparer l'influence des effets purement thermiques de celle des effets rhéologiques autrement dit il faut chercher une loi rhéologique fonction du taux de contrainte et de température, ce qui est difficile à l'obtenir. Pour faire face à ces problèmes, des efforts considérables ont été consacrés à l'analyse de divers processus de convection dans les fluides non-Newtoniens quoique les résultats obtenus soient encore peu nombreux. Ainsi, les chercheurs intéressés par ce sujet se trouvent dans l'obligation de déployer

d'avantages d'efforts pour pouvoir analyser les processus de convection dans les fluides non-Newtoniens.

Lorsqu'un flux massique est généré par un gradient thermique imposé dans un mélange initialement homogène, le phénomène est appelé thermodiffusion ou effet Soret (1980). C'est l'un des principaux moteurs de divers phénomènes convectifs se produisant dans des médias thermiques. Ce type de transport convectif suscite l'intérêt des chercheurs depuis plusieurs décennies en raison de son importance dans de nombreuses applications naturelles et industrielles. Dans la nature, on peut citer à titre non-exhaustif les mouvements convectifs rencontrés dans les océans et l'opération d'étangs solaires. Les applications les plus récurrentes de ce phénomène dans l'industrie comprennent les procédés d'extraction des fluides dans les gisements de pétrole et de gaz naturel, les procédés de séparation en industrie chimique, la diffusion souterraine des déchets nucléaires et d'autres contaminants, la fusion et la solidification des alliages binaires, les opérations de dessalement de l'eau, la croissance des cristaux, ... etc.

D'après tout ce qui précède, nous avons choisi de travailler sur les fluides non-Newtoniens confinés en tenant compte de l'effet Soret. Le présent travail porte sur une étude numérique et analytique de la convection naturelle au sein d'une cavité rectangulaire remplie d'un fluide non Newtonien. Les mouvements convectifs considérés dans cette investigation sont induits par des conditions aux limites thermiques et solutales de type Neumann, imposées sur les parois actives de la cavité, ainsi que par l'effet Soret. La cavité considérée est soit soumise à des flux de chaleur ou à des flux de chaleur et de masse, latéralement ou verticalement. Nous souhaitons étudier l'influence des paramètres de contrôle du problème tels que le nombre de Rayleigh, le rapport des forces de volume, le nombre de Lewis, le paramètre définissant la convection induite par double diffusion ou par effet Soret et l'indice de la loi en puissance sur la structure de l'écoulement et sur les mécanismes du transfert de chaleur et de masse. Pour mener à bien cette investigation, en parallèle du code de calcul numérique retenu pour la résolution du système d'équations gouvernant la convection, nous développons une approche analytique de type écoulement parallèle valable pour les cavités allongées.

Le manuscrit de cette thèse est organisé en cinq chapitres de la manière suivante :

Dans le premier chapitre une synthèse bibliographique des travaux de recherche antérieurs, ayant traité la convection de double diffusion et celle induite par effet Soret en milieu

fluide et poreux et pour les fluides Newtoniens et non-Newtoniens, est présentée afin d'en tenir compte pour situer notre recherche par rapport aux travaux antérieurs et de l'orienter vers des aspects non encore évoqués par la littérature.

Nous présentons dans le deuxième chapitre la configuration géométrique étudiée, le modèle mathématique régissant le phénomène de la convection naturelle thermosolutale, ainsi que les hypothèses adoptées. Les deux méthodes adoptées pour la résolution du système, à savoir, la méthode analytique basée sur l'approximation de l'écoulement parallèle et celle numérique adoptant la méthode des volumes finis, sont décrites de façon détaillée.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de la multiplicité de solutions de la convection double diffusive d'un fluide non-Newtonien dans une cavité rectangulaire horizontale chauffée et salée latéralement. Les parois verticales de la cavité sont soumises à des flux de chaleur et de masse uniformes alors que celles horizontales sont imperméables et adiabatiques. Nous allons montrer dans ce chapitre l'effet des forces de volumes sur les écoulements et les transferts de chaleur et de masse.

Le quatrième chapitre portera sur l'étude analytique et numérique de la convection induite par effet Soret dans la configuration précédente. Nous allons étudier l'effet de tous les paramètres de contrôle, sur les écoulements et les transferts de chaleur et de masse, à savoir, le rapport des forces de volumes, le nombre de Lewis, l'indice de la loi en puissance, les nombres généralisés de Prandtl et de Rayleigh thermique et le paramètre définissant la convection induite par double diffusion ou par effet Soret.

Le cinquième chapitre de ce travail rassemble à la fois les résultats de la convection doublement-diffusive et celle induite par effet Soret dans une cavité rectangulaire chauffée ou chauffée et salée par le bas. Le déclenchement des mouvements convectifs, ainsi que leurs développements seront étudiés. Les effets des paramètres de base seront examinés pour les deux cas.

On termine par une conclusion générale qui rassemble les différents points majeurs de ce travail, ainsi que les perspectives qui peuvent faire l'objet de recherche futur.

# Chapitre 1

## Synthèse bibliographique

### 1.1 Introduction

Dans ce premier chapitre, nous commençons par un rappel de quelques notions fondamentales portant sur la convection doublement diffusive, l'effet Soret ainsi que la rhéologie des fluides non-Newtoniens. Nous présentons par la suite une revue des travaux antérieurs relatifs à la convection naturelle, induite par double diffusion et des travaux portant sur la prise en compte de l'effet Soret. Nous ferons ressortir les différents résultats obtenus dans ces travaux.

### 1.2 Convection naturelle doublement diffusive

Lorsqu'on applique un gradient de température à un fluide placé dans le champ de pesanteur, il en résulte un mouvement du fluide appelé convection naturelle. En effet, ce gradient cause une distribution non uniforme de la densité du fluide qui provoque à son tour un mouvement convectif, dans le sens des températures décroissantes, sous l'effet de la gravité.

La convection doublement diffusive, quant à elle, résulte lorsqu'on applique à la fois un gradient de température et de concentration à un mélange binaire. Dans le cas d'un fluide multi-constituants, la convection est dite thermosolutale.

### 1.3 Convection induite par effet Soret

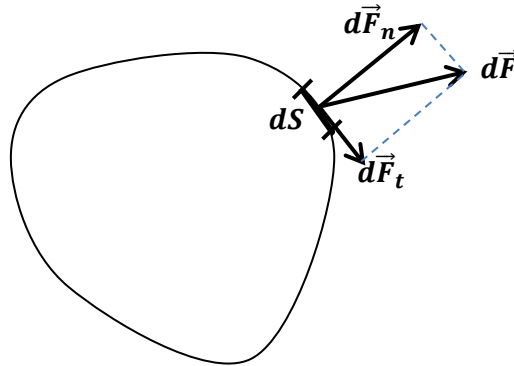
L'effet Soret, connu aussi sous le nom de thermo-diffusion, décrit le couplage des gradients de température et des flux massiques qui en résultent. En 1879, le chercheur Charles Soret a conduit des expériences avec des sels dans des tubes soumis à des températures différentes le long de leurs bords, il a constaté que le sel s'accumule plus près des parois froides. Il a ainsi conclu qu'un gradient de température engendre un gradient de concentration. Cet effet, fut décrit 20 ans plutôt par l'Allemand Ludwig, n'a été connu et modélisé qu'avec Soret qui a publié des travaux dans ce contexte et qui porte depuis son nom.

### 1.4 Rhéologie des fluides

#### 1.4.1 Notion de contrainte

Prenons le schéma à deux dimensions ci-dessous dans lequel est représenté un élément de surface  $dS$  d'un fluide. Cet élément est soumis à une force  $d\vec{F}$  qui peut être décomposée en une force normale  $d\vec{F}_n$  et une force tangentielle  $d\vec{F}_t$  (figure 1.1). Soit :

$$\vec{dF} = d\vec{F}_t + d\vec{F}_n \quad (1.1)$$



**Figure 1.1 :** Contrainte appliquée sur une surface d'un fluide

La contrainte représente la force par unité de surface, elle peut être décomposée en une contrainte normale  $\sigma$ , et une contrainte tangentielle (ou de cisaillement)  $\tau$ . Elles sont définies respectivement par :

$$\sigma = \frac{dF_n}{dS} \quad (1.2)$$

$$\tau = \frac{dF_t}{dS} \quad (1.3)$$

C'est la réponse d'un fluide à cette dernière contrainte qui permet de le classer comme fluide Newtonien ou non-Newtonien.

#### 1.4.2 Définition d'un fluide

Un fluide est défini comme une substance qui se déforme continuellement sous l'action d'une quelconque contrainte de cisaillement quelle que soit son amplitude.

#### 1.4.3 Fluides Newtoniens

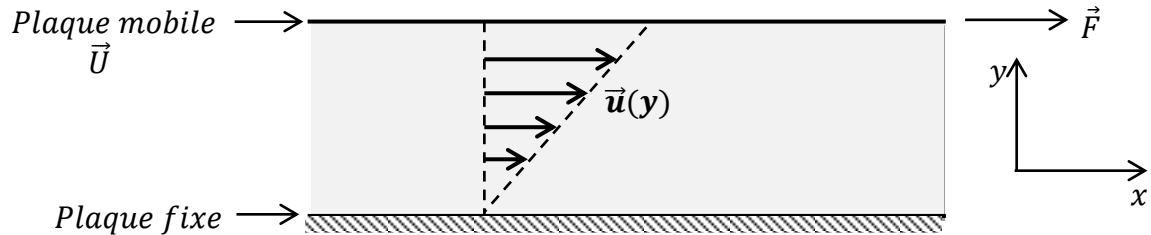
D'après l'expérience de Couette, on peut qualifier un fluide Newtonien ou non selon est ce que celui-ci vérifie la loi phénoménologique de Newton :

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad (1.4)$$

où  $\tau$ ,  $\dot{\gamma}$  et  $\mu$  sont respectivement la contrainte de cisaillement, le taux de cisaillement et la viscosité dynamique. Si  $\mu = cte$ , on dit que le fluide est Newtonien, et par suite la contrainte de cisaillement varie linéairement avec le taux de cisaillement.

L'expérience de l'écoulement plan de Couette d'un fluide incompressible consiste à insérer le fluide à étudier entre deux plaques, l'une d'elles est fixe et l'autre en mouvement de

translation à une vitesse  $\vec{U}$  sous l'effet d'une force  $\vec{F}$ . L'aire de la plaque est notée A. Tout se passe comme si on applique des contraintes de cisaillement par la plaque sur le fluide. L'expérience montre que le fluide se met en écoulement comme le montre la figure 1.2. Ce phénomène est dû à la viscosité du fluide.



**Figure 1.2 :** Ecoulement de Couette

Pour cette situation, le taux de cisaillement peut être exprimé comme étant le gradient de vitesse dans la direction perpendiculaire à la force de cisaillement et la loi de Newton s'écrit :

$$\tau = \mu \left( -\frac{du}{dy} \right) = \mu \dot{\gamma} \quad (1.5)$$

#### 1.4.4 Fluides non-Newtoniens

Ces fluides ont une viscosité qui dépend du taux de cisaillement et par suite, la relation entre le coefficient de cisaillement  $\tau$  et  $\dot{\gamma}$  n'est plus linéaire. Selon la façon avec laquelle la viscosité varie avec le taux de cisaillement, on distingue trois grandes catégories de fluides non-Newtoniens :

- Pseudo-plastiques (rhéo-fluidifiants), pour lesquels la viscosité décroît lorsque la contrainte croît.
- Dilatants (rhéo-épaississants), pour lesquels la viscosité croît lorsque la contrainte de cisaillement croît.

Le modèle d'Ostwald-De Waele représente assez correctement ces deux types de fluides. Il est donné par:

$$\tau = \mu_{app} \dot{\gamma} \quad (1.6)$$

où

$$\mu_{app} = K \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1} \quad (1.7)$$

$\mu_{app}$ , K et n sont respectivement la viscosité apparente, l'indice de consistance et l'indice de comportement du fluide. Pour  $n = 1$ , on retrouve l'équation rhéologique du fluide Newtonien de viscosité K, pour un fluide pseudo-plastique,  $0 < n < 1$  et pour un fluide dilatant  $n > 1$ .

- viscoplastiques, présentent une rhéologie particulière et se caractérisent par une contrainte limite de cisaillement. En effet, ils se comportent comme des solides sous faibles contraintes et s'écoulent au-delà d'une contrainte seuil. Le modèle de Bingham est d'emploi courant pour modéliser certains fluides viscoplastiques, il est donné par :

$$\tau = \tau_0 + \mu_p \dot{\gamma} \quad (1.8)$$

$\tau_0$  correspond à la contrainte seuil et  $\mu_p$  représente la viscosité plastique.

La figure 1.3 récapitule les relations typiques entre la contrainte de cisaillement  $\tau$  et le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ , pour différents types de fluides visqueux. L'axe horizontal correspond à un fluide non visqueux et celui vertical présente un solide élastique. Le fluide Newtonien est représenté par une droite linéaire.

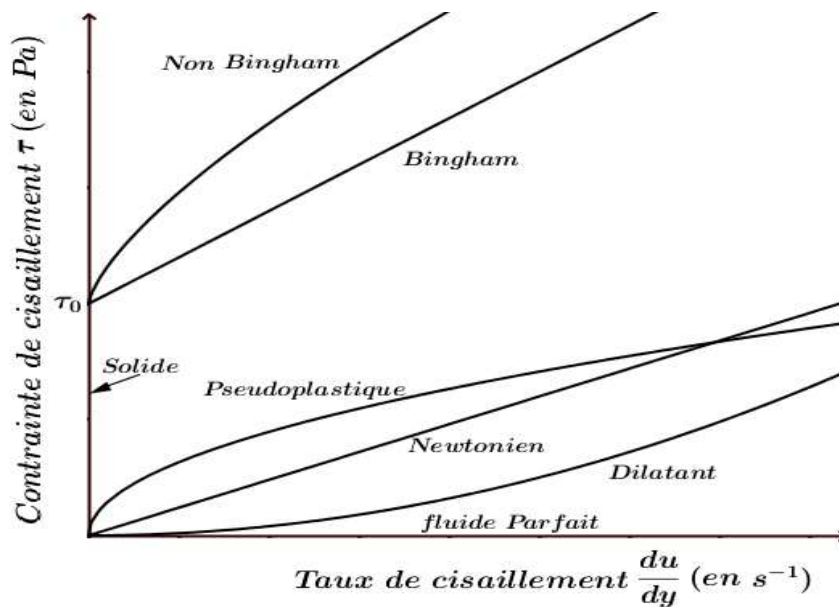


Figure 1.3 : Diagramme de classification des fluides non-Newtoniens visqueux.

## 1.5 Convection naturelle doublement diffusive en milieux Newtoniens confinés

### ➤ Sans effet Soret

Les études disponibles sur la convection naturelle à double diffusion dans les milieux confinés Newtoniens se sont principalement intéressées aux cavités rectangulaires poreuses soumises à différentes conditions aux limites.

Parmi les premières études portant sur ce sujet, nous pouvons citer le travail de Nield (1968) relatif au problème d'apparition de la convection dans une couche horizontale poreuse soumise à des gradients verticaux de température et de concentration. En utilisant l'analyse de

perturbation linéaire, des critères d'apparition du mouvement ont été dérivés pour différentes conditions aux limites.

Similairement, Amahmid et al (1999) ont étudié analytiquement et numériquement le même problème en utilisant le modèle de Darcy - Brinkman. Le nombre critique de Rayleigh pour le déclenchement du flux parallèle dans ce système a été déterminé analytiquement en fonction des paramètres de base du problème. En outre, ils ont identifié cinq régions de convection correspondantes à différents comportements.

Mamou et Vasseur (2000) ont, de leur côté, utilisé le modèle de Darcy pour étudier la convection doublement diffusive dans une cavité rectangulaire poreuse soumise à des conditions aux limites, de type Neumann ou Dirichlet, le long de ses parois horizontales. Deux types de bifurcation ont été déterminés par les modèles analogiques non linéaires proposés dans la présente étude : une bifurcation sous critique qui se produit uniquement dans le cas des forces de flottabilité opposées et une autre supercritique qui se présente soit pour le cas des forces de même sens ou de sens opposés. L'existence de solutions multiples, pour un ensemble de paramètres gouvernants, a été démontrée numériquement pour le cas de flux opposés.

La convection thermosolutale dans les milieux fluides purs n'a reçu qu'une attention limitée, bien qu'elle ait des applications d'ingénierie intéressantes. De ce fait, Mamou et al. (2001) ont reconsidéré par la suite le même problème dans un milieu purement fluide. L'analyse de la stabilité linéaire a indiqué que les écoulements sous critiques sont possibles et les seuils de différentes modes de convection sont déterminés en fonction des paramètres de contrôle. Alors que la solution non linéaire a prévu l'existence d'écoulements oscillatoires, périodiques et apériodiques.

Mahidjiba et al (2000) ont mené une étude numérique sur l'apparition de la convection thermosolutale dans une cavité horizontale poreuse soumise à des conditions aux limites mixtes pour la chaleur et la concentration appliquées le long de ses parois horizontales (conditions thermiques de type Dirichlet et celles solutales de type Neumann ou l'inverse).

Dans la même configuration, chauffée et salée par le bas, avec des parois verticales exposées à un flux thermique constant, Kalla et al (2001) ont montré que ce flux thermique perturbateur latéral modifie le comportement du flux. Lorsque les contributions solutales et thermiques sont déstabilisants, les résultats montrent que pour la convection supercritique, le

problème peut avoir jusqu'à trois solutions pour un ensemble donné de paramètres gouvernants. Alors que, pour la convection sous-critique qui se produit lorsque les deux forces de flottabilité sont opposées, le problème peut avoir jusqu'à cinq solutions différentes.

Dans l'étude numérique menée par Zhao et al. (2008), la convection, dans une enceinte poreuse horizontale saturée par un fluide binaire, est entraînée par des différences de températures et de concentrations imposées sur les parois horizontales de la cavité en présence simultanée de sources discrètes de chaleurs et de contaminants. Leurs résultats montrent que le potentiel de transfert de chaleur et de masse dépend fortement de la perméabilité du milieu poreux et aussi des nombres de Rayleigh solutaux et thermiques.

Dans le cas de gradients horizontaux, une étude a été menée récemment par Lamsaadi et al. (2018) pour examiner l'effet des conditions aux limites hydrodynamiques sur la convection naturelle doublement diffusive dans une enceinte rectangulaire horizontale confinant un fluide Newtonien et soumise à des flux uniformes de chaleur et de masse sur ses parois verticales. Ils ont constaté que, la convection est favorisée lorsque les frontières horizontales sont de type libre-libre et défavorisée pour celles de type rigide-rigide.

#### ➤ **Avec effet Soret**

Bourich et al. (2002) ont mené une étude analytique et numérique de la convection induite par effet Soret dans une cavité horizontale poreuse uniformément chauffée par le bas. Sur la base de l'approximation de l'écoulement parallèle, ces auteurs ont déterminé les seuils de la convection sous-critique et stationnaire. Par la suite, ces mêmes auteurs (2004) ont reconsidéré une autre étude similaire dans laquelle ils ont comparé le comportement d'écoulement pour deux situations différentes : dans une cavité soit remplie d'une matrice poreuse qui obéit au modèle de Hazen-Darcy, soit d'un fluide binaire pur. Il a été trouvé que le comportement de l'écoulement dans les deux cas est qualitativement similaire. Les nombres de Rayleigh critiques pour le début de la convection sous-critique, oscillatoire et stationnaire sont déterminés explicitement en tant que fonctions des paramètres régissant les couches infinies et finies. L'étude de l'effet Soret sur la convection thermosolutale a été reconsidérée par Bourich et al. (2004) pour le cas d'une cavité poreuse chauffée et salée par le bas. Ils ont étudié la double diffusion sans et avec effet Soret. Les seuils d'apparition de la convection supercritique et sous-critique sont prédits explicitement en fonction des paramètres directeurs. La présente investigation a montré l'existence de différentes régions dans le plan  $(N, Le)$  qui correspondent à différents régimes d'écoulements

parallèles, où  $N$  et  $Le$  représentent respectivement le rapport de flottabilité et le nombre de Lewis. Le nombre et les emplacements de ces régions dépendent du paramètre  $M$  caractérisant l'effet Soret.

La convection induite par effet Soret a été rapportée par Bahloul et al. (2003) en considérant la même configuration et les mêmes conditions aux limites. En s'appuyant sur la théorie de la stabilité linéaire, ces auteurs ont prédit l'état marginal d'instabilité par convection stationnaire. De plus, ils ont déterminé les nombres de Rayleigh critiques pour le déclenchement de la convection sous critique et supercritique en se basant sur l'approximation d'écoulement parallèle pour la convection d'amplitude finie. Le cas de la convection doublement diffusive déjà rapporté par Mamou et Vasseur (1999) est aussi présenté dans son travail pour fin de comparaison.

Pour le cas d'une cavité soumise à des flux de chaleur et de masse croisés, Bennacer et al. (2003) ont investigué la convection naturelle en tenant compte de l'effet Soret. Les parois verticales de l'enceinte sont chauffées et refroidies par des flux thermiques uniformes tandis que celles horizontales sont soumises à des flux uniformes de masse. Dans le cas d'un gradient solutal vertical déstabilisant, le modèle d'écoulement est caractérisé par l'existence d'une convection à la fois naturelle et anti-naturelle. Lorsque ce gradient se stabilise, plusieurs solutions stationnaires sont possibles dans une plage de rapport de flottabilité,  $N$ , qui dépend fortement du coefficient de Soret,  $N_s$ .

Une étude similaire a été rapportée par Mansour et al. (2007) pour examiner l'instabilité de la double diffusion dans une cavité chauffée et salée par le bas. Ils ont focalisé leur étude sur la situation où le flux thermique perturbateur latéral appliqué au système est équilibré par le flux massique de Soret induit horizontalement. Leurs résultats montrent que le paramètre du chauffage latéral affecte considérablement l'écoulement et le transfert de chaleur mais son effet sur le transfert de masse est négligeable.

Elhajjar et al. (2008) ont focalisé leur étude sur l'amélioration de l'efficacité de la séparation des espèces d'un mélange binaire saturant une couche poreuse horizontale, en présence de l'effet Soret. Les parois horizontales de la cavité sont imperméables et maintenues à des températures constantes et différentes. Ces auteurs ont rapporté que le nombre de Rayleigh critique, associé à la transition entre flux monocellulaire et celui multicellulaire, est supérieur au

nombre de Rayleigh optimal conduisant à une séparation maximale des espèces. Les résultats ainsi obtenus montrent qu'il est possible d'obtenir une séparation optimale avant que le flux monocellulaire perd sa stabilité. Etant donné que les vibrations peuvent être utilisées pour retarder la perte de stabilité du flux monocellulaire permettant ainsi une séparation à un nombre de Rayleigh plus élevé. Elhajjar et al. (2009) ont étudié l'influence des vibrations verticales sur le processus de séparation dans la même configuration et les mêmes conditions aux limites. En s'appuyant sur l'analyse de stabilité de la solution obtenue sous l'effet de vibrations verticales, il a été observé que les vibrations verticales à haute fréquence ont un effet stabilisant sur l'écoulement convectif. Il a été constaté par ces auteurs que les vibrations peuvent être utilisées pour diminuer la valeur du rapport de séparation au-delà duquel le flux au début de la convection devenait monocellulaire, permettant la séparation des composants dans la cellule horizontale pour une large gamme de mélanges binaires à rapport de séparation positif. Il a été observé aussi que les vibrations ont un effet stabilisateur conduisant à une augmentation de la valeur critique du nombre de Rayleigh correspondant à la transition entre le flux monocellulaire et celui multicellulaire. Ainsi, les vibrations verticales permettent la séparation des espèces sur une gamme plus large de nombres de Rayleigh. Elhajjar et al. (2010) ont considéré ensuite une cavité inclinée, en appliquant les mêmes conditions aux limites. Ils ont étudié l'effet de l'inclinaison du système sur le phénomène de la séparation. Il a été démontré que la séparation peut être significativement augmentée pour une valeur optimale de l'angle d'inclinaison.

Yacine et al. (2016) ont, de leur côté, focalisé leur étude sur la détermination des combinaisons optimales des paramètres de base du problème conduisant à la séparation des espèces sous l'effet de la thermo-diffusion. Ils ont étudié la convection induite par effet de Soret dans une couche poreuse horizontale saturée par un fluide binaire et soumise à des flux de chaleur croisés et uniformes. Dans cette configuration, le procédé de séparation de Soret a été amélioré par deux paramètres de contrôle : la densité de flux thermique imposé sur les parois horizontales et le rapport de densité de flux thermique,  $a$ , exprimant le rapport de densité de flux thermique imposé sur les parois verticales à celle imposée sur les parois horizontales. De nombreuses simulations numériques ont été réalisées afin de valider les résultats analytiques et d'étendre les transferts de chaleur et de masse à un domaine non couvert par l'étude analytique. Un bon accord est trouvé entre les résultats analytiques et numériques concernant la séparation des espèces obtenue pour un écoulement unicellulaire.

Dans le même contexte, Rtibi et al. (2014) ont étudié le phénomène de la séparation dans une cavité poreuse inclinée et soumise à un flux de chaleur vertical constant. Ils ont montré l'existence de plages spécifiques de différents paramètres gouvernant le problème, y compris l'angle d'inclinaison de la cavité, les nombres de Rayleigh et de Darcy et le paramètre de Soret, pour lesquelles la séparation des espèces atteint son maximum.

Dans le cas d'un milieu fluide, on peut citer les travaux de Ouriemi et al. (2005) qui ont étudié la convection doublement-diffusive et celle induite par effet Soret dans une cavité légèrement inclinée par rapport au plan horizontal et peu profonde, remplie d'un fluide binaire. Les conditions aux limites de type Neumann pour la température étaient appliquées aux parois latérales longues de l'enceinte, tandis que les deux parois courtes étaient supposées imperméables et isolées. Les forces de flottabilité solutales étaient induites soit par l'imposition des flux constants de concentration sur les parois (convection de double diffusion), ou par des gradients de température (effets Soret). Les nombres de Rayleigh critiques pour le début de la convection supercritique et sous-critique ont été prédits. Également, il a été démontré que, pour des inclinaisons suffisamment petites, plusieurs états stables existent, dont certains sont instables.

Ouriemi et al. (2006) ont également étudié la convection doublement diffusive et celle induite par effet Soret, dans une cavité chauffée et salée latéralement. Ils ont considéré le cas où les forces de volumes sont d'égales intensité et de sens opposés ( $N = -1$ ). Pour cette situation, le nombre de Rayleigh critique pour le déclenchement de la convection supercritique a été prédit par la théorie de stabilité linéaire, alors que l'approximation du flux parallèle prévoit le nombre de Rayleigh sous critique.

Toujours dans le cas d'un milieu fluide, Alloui et al. (2010) ont présenté une étude analytique et numérique des effets combinés de la double diffusion et celle de Soret dans une cavité remplie d'un mélange binaire et soumise à des flux verticaux de chaleur et de masse. En s'appuyant sur l'analyse de la stabilité linéaire de la solution de l'écoulement parallèle, il a été démontré que l'écoulement perd sa stabilité via une bifurcation de Hopf. Les seuils d'apparition de la convection supercritique et sous-critique ont été déterminés en fonction des paramètres gouvernant le problème.

L'étude de la convection induite par effet Soret, générée en imposant des températures différentes au niveau des parois horizontales d'une cavité rectangulaire horizontale poreuse

confinant un fluide binaire, a été conduite numériquement et analytiquement par Charrier-Mojtabi et al. (2007). Ces auteurs ont montré que la stabilité de la solution d'équilibre mécanique dépend de la porosité normalisée du milieu et du rapport de séparation caractérisant l'effet Soret.

Kim et Choi (2007) ont également examiné la convection induite par effet Soret d'un fluide binaire dans une couche de fluide horizontale chauffée par le haut à l'aide d'une température constante. Les limites de stabilité qui sont liées au temps d'apparition des instabilités ont été présentées en fonction des nombres de Rayleigh et de Lewis et du rapport de séparation.

Wang et al. (2014) ont développé un modèle numérique de convection thermosolutale avec effets Soret et Dufour dans une cavité horizontale soumise à différentes températures et concentrations uniformes le long de ses parois horizontales. Leurs résultats montrent que la structure du flux passe de l'état de conduction dominante à l'état de convection dominante pour évoluer finalement en convection oscillatoire périodique suite à l'augmentation du rapport de flottabilité et du nombre de Rayleigh. Pour mieux comprendre la convection de flottabilité thermosolutale, Wang et al. (2015) ont étudié les effets de couplage diffusif sur l'écoulement, transfert de chaleur et de masse, dans la même cavité, pour différents paramètres gouvernants. Leur étude paramétrique montre que le nombre de Rayleigh et le rapport de flottabilité améliorent le transfert de chaleur et de masse.

Er-raki et al. (2011) ont étudié l'effet Soret sur la convection sous critique dans une cavité rectangulaire poreuse horizontale chauffée différentiellement par les côtés latéraux. ils ont identifié les bifurcations sous critiques résultantes dans le cas particulier où le rapport de flottabilité est lié au paramètre Soret par la relation  $N = 1/(1 - S_p)$ . Pour cette situation, seule la convection sous critique a été trouvée possible pour la structure d'écoulement parallèle et le nombre de Rayleigh critique correspondant a été déterminé en fonction des paramètres gouvernants.

Récemment, certains auteurs ont abordé les effets combinés de Soret et Dufour sur le problème de la convection thermosolutale. Dans ce contexte, on peut citer l'étude réalisée par Lagra et al. (2018) portant sur la convection naturelle d'un fluide binaire à l'intérieur d'une cavité horizontale soumise à des flux verticaux de température et de masse, engendrés par des conditions aux limites thermiques et massiques de type Neumann. Les seuils des convections stationnaires et sous-critiques ont été dérivés analytiquement en fonction des paramètres de base

du problème. La présente étude a montré aussi que le plan ( $N - Du$ ) peut être divisé jusqu'à six régions correspondant à différents comportements, où  $N$  et  $Du$  représentent, respectivement, le rapport de flottabilité et le paramètre de Dufour.

Une étude similaire a été portée par Filahi et al. (2020) dans une couche poreuse de Brinkman remplie d'un fluide binaire. La paroi inférieure a été supposée rigide alors que celle supérieure a été prise libre. La solution analytique prouve l'existence de différentes régions dans le plan rapport des forces de volume-paramètre de Dufour ( $N - Du$ ) correspondantes à différents comportements.

Récemment, Li et al. (2021) ont abordé le phénomène de la bifurcation thermosolutale résultant de la perte de symétrie d'écoulement dans une cavité horizontale avec une source interne. Les quatre parois internes de la cavité sont maintenues à des températures et des concentrations basses et constantes alors que les parois externes de la source étaient soumises à des températures et des concentrations élevées et constantes. En tenant compte des effets Soret et Dufour, ces auteurs visait à déterminer les nombres de Rayleigh et les rapports de flottabilité critiques pour le début de la rupture de symétrie à travers les diagrammes de bifurcation. Il a été démontré que l'augmentation du rapport de flottabilité fait augmenter le nombre de Rayleigh critique et le rapport de flottabilité de la rupture de symétrie.

## **1.6 Convection naturelle doublement diffusive en milieux non-Newtoniens confinés**

Si les mécanismes de la convection naturelle doublement diffusive semblent actuellement relativement bien maîtrisés dans le cas des fluides Newtoniens. Par contre, une attention moindre a été accordée à la convection dans les fluides confinés ayant un comportement rhéologique non-Newtonien, bien que ceux-ci soient rencontrés au centre de pas mal d'applications industrielles.

La première étude numérique et analytique portant sur la convection naturelle thermosolutale d'un fluide non-Newtonien dans une couche horizontale poreuse remplie semble être due à Getachew et al. (1998). Les parois horizontales sont parfaitement isolées alors que des différences de températures et de concentrations sont appliquées sur ceux verticaux. Il a été démontré que les prédictions de l'ordre de grandeur pour les taux de transfert de chaleur et de masse globaux sont en bon accord avec les résultats numériques obtenus en résolvant les équations directrices complètes.

Par la suite, Benhadji et al. (2001) ont étudié le même problème sous les conditions des flux de chaleur et de masse uniformes imposés soit latéralement ou verticalement. Les résultats obtenus, pour les deux situations, montrent que par comparaison au cas Newtonien, le comportement pseudo-plastique améliore les intensités d'écoulement et de transfert de chaleur et de masse alors que celui dilatant conduit à des effets opposés.

Dans un milieu purement fluide, Makayssi et al. (2008) ont repris le même problème dans une cavité chauffée et salée latéralement. De leur côté, ils ont constaté que les caractéristiques d'écoulement du fluide et du transfert de chaleur et de masse semblent être assez sensibles à l'indice du comportement d'écoulement,  $n$ .

En tenant compte de l'effet Soret, Ben Khelifa et al. (2012) ont mené une étude analytique et numérique de la convection naturelle d'un fluide binaire non-Newtonien au sein d'une couche poreuse chauffée et salée par le bas. Le modèle analytique proposé a permis la prédiction des nombres de Rayleigh sous-critiques et supercritiques marquant la naissance des mouvements convectifs pour la convection doublement diffusive et celle induite par effet Soret.

Ben khelifa et al. (2012), ont reconsidéré le même problème dans une couche poreuse verticale. Guidée par une analyse dimensionnelle, des corrélations approximées pour les régimes d'écoulements thermiques et solutaux de type couche limite ont été proposées. Les résultats montrent que l'indice de la loi en puissance,  $n$ , affecte à la fois l'intensité de l'écoulement, le transfert de chaleur et de masse et le processus de séparation.

## **1.7 Conclusion**

Jusqu'à présent et en se basant sur la revue bibliographique susmentionnée, il n'existe pas de travail traitant la convection induite par effet Soret des fluides non-Newtoniens en milieu fluide confinés dans une cavité rectangulaire. Pour cela nous avons choisi de faire l'effort de contribuer à la compréhension du problème de convection induite par effet Soret dans une cavité horizontale rectangulaire soumise à des conditions aux limites de type Neumann. Une partie de ce travail vise à reconsidérer le problème de Makayssi et al. (2008). Ces auteurs ont étudié le problème de la double diffusion dans une couche rectangulaire horizontale chauffée et salée latéralement. Pour leurs études, ils ont traité uniquement le cas simple de  $N > 0$ . Dans ce travail, nous abordons le cas de  $N < 0$ , pour laquelle le modèle d'écoulement résultant est plus compliqué et se caractérise par de nombreux phénomènes n'ayant pas cours dans le cas de  $N > 0$ . L'étude comporte aussi des aspects non évoqués dans cette dernière référence pour  $N > 0$ .

# Chapitre 2

---

---

## Modélisation mathématique du problème et méthodes de résolution

---

---

### 2.1 Introduction

La modélisation est le processus par lequel nous traduisons un système ou un phénomène physique sous forme mathématique, de façon à le rendre prévisible et facile à appréhender. Ainsi nous développons dans ce chapitre le modèle mathématique, en introduisant les équations gouvernant le processus de convection, obtenues à partir des lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie et de la concentration. Ces équations sont très compliquées et généralement difficiles à résoudre. Néanmoins, en adoptant un ensemble d'hypothèses généralement utilisées dans les problèmes de la convection naturelle doublement diffusive, le système se ramène ainsi à un ensemble d'équations simplifiées. La géométrie physique considérée et les différentes conditions appliquées à leurs frontières seront décrites dans ce chapitre.

Pour chercher la solution du système d'équations modélisant notre problème, une procédure numérique peut être employée. Ainsi, les équations gouvernantes sont discrétisées avec la méthode des volumes finis, dans un système de grille uniforme décalée, et l'algorithme de résolution est basé sur le coupleur des équations de pression SIMPLER. La solution est obtenue en utilisant une méthode itérative moyennant l'algorithme de matrice tridiagonale (TDMA). Parfois, la nature de l'écoulement engendré autorise un ensemble d'hypothèses, telles que, l'écoulement presque parallèle, permettant ainsi la simplification du système d'équations et conduit à une solution analytique. Ainsi, une approche analytique est proposée dans ce chapitre, reposant sur le concept de l'écoulement parallèle, valide pour le cas d'une cavité horizontale infinie.

### 2.2. Description du problème et géométrie considérée

Dans ce travail de thèse, nous allons étudier la convection doublement diffusive et celle induite par effet Soret, dans un fluide binaire non-Newtonien, de type Ostwalde-De Waele, confiné. La configuration géométrique de l'écoulement est illustrée sur la figure 2.1. Il s'agit

d'une cavité horizontale rectangulaire soumise au niveau de ses bords à des densités surfaciques uniformes de flux de chaleur et de masse. Deux cas ont été examinés : une cavité dont les parois verticales sont actives ( $a = c = 1$ ,  $M = 0$  ou  $1$  et  $b = d - M = 0$ ) et une autre dont les parois horizontales sont actives ( $b = d = 1$ ,  $M = 0$  ou  $1$  et  $a = c - M = 0$ ).

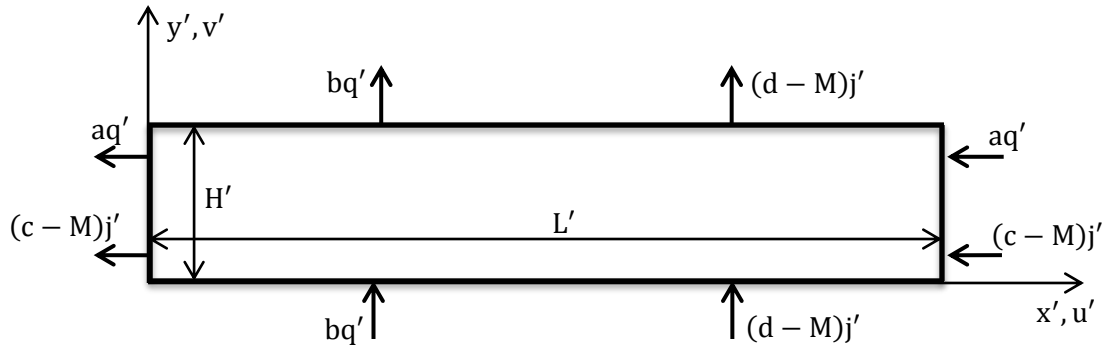


Figure 2.1 : Schématisation du problème.

## 2.3 Hypothèses simplificatrices

- L'écoulement engendré est supposé bidimensionnel, laminaire et incompressible.
- Le travail des forces visqueuses et de pression ainsi que les échanges thermiques par rayonnement sont négligeables.
- Il n'y a ni réaction chimique ni source de chaleur ou de masse.
- Le gradient de température induit par le gradient de concentration, connu sous le nom d'effet Dufour, est supposé négligeable.
- Les propriétés thermo-physiques sont supposées indépendantes de la température et de la concentration. Cependant la masse volumique varie linéairement avec la température et la concentration. Elle correspond ainsi à l'approximation de Boussinesq (Gray et Giorgini (1976)).

## 2.4 Formulation mathématique

### 2.4.1 Formulation en variables primitives

En considérant les hypothèses simplificatrices énoncées auparavant, les équations de base régissant l'écoulement et les transferts de chaleur et de masse au sein de la cavité considérée, sont données par :

➤ Equation de continuité:

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \quad (2.1)$$

➤ Equation de conservation de la quantité de mouvement:

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{\rho} \left[ \mu'_a \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right) + 2 \frac{\partial \mu'_a}{\partial x'} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial \mu'_a}{\partial y'} \left( \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) \right] \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t'} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{\rho} \left[ \mu'_a \left( \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right) + 2 \frac{\partial \mu'_a}{\partial y'} \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial \mu'_a}{\partial x'} \left( \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) \right] + g\beta_T(T' - T'_0) + g\beta_S(S' - S'_0) \quad (2.3)$$

➤ Equation de conservation de l'énergie:

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} + u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + v' \frac{\partial T'}{\partial y'} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2} \right) \quad (2.4)$$

➤ Equation de conservation de la masse:

$$\frac{\partial S'}{\partial t'} + u' \frac{\partial S'}{\partial x'} + v' \frac{\partial S'}{\partial y'} = D \left( \frac{\partial^2 S'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 S'}{\partial y'^2} \right) + MD_T^* S_0 (1 - S_0) \left( \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2} \right) \quad (2.5)$$

L'expression de la viscosité apparente  $\mu'_a$  dans un système de coordonnées cartésiennes est donnée par :

$$\mu'_a = k \left[ 2 \left[ \left( \frac{\partial u'}{\partial x'} \right)^2 + \left( \frac{\partial v'}{\partial y'} \right)^2 \right] + \left[ \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right]^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \quad (2.6)$$

les deux paramètres empiriques  $n$  et  $k$ ,  $y$  apparaissant, sont, respectivement, l'indice de comportement et l'indice de consistance du fluide.

La résolution du système d'équations (2.1)-(2.5), nécessite un certain nombre de conditions aux limites définies comme suit :

- Cas de la cavité dont les parois verticales sont actives

$$u' = v' = 0, \lambda \frac{\partial T'}{\partial x'} = q' \text{ et } \rho D \frac{\partial S'}{\partial x'} = (1 - M)j' - M\rho D_T^* S'_0 (1 - S'_0) \frac{\partial T'}{\partial x'} \text{ pour } x' = 0, L' \quad (2.7)$$

$$u' = v' = 0, \frac{\partial T'}{\partial y'} = 0 \text{ et } \frac{\partial S'}{\partial y'} = 0 \text{ pour } y' = 0, H' \quad (2.8)$$

- Cas de la cavité dont les parois horizontales sont actives

$$u' = v' = 0, \frac{\partial T'}{\partial x'} = 0 \text{ et } \frac{\partial S'}{\partial x'} = 0 \text{ for } x' = 0, L' \quad (2.9)$$

$$u' = v' = 0, \lambda \frac{\partial T'}{\partial y'} = -q', \rho D \frac{\partial S'}{\partial y'} = -(1 - M)j' - M\rho D_T^* S'_0 (1 - S'_0) \frac{\partial T'}{\partial y'} \text{ pour } y' = 0, H' \quad (2.10)$$

## 2.4.2 Formulation en variables adimensionnelles

Pour mettre les équations (2.1) à (2.5) et les conditions aux limites associées (2.7) à (2.10) sous forme adimensionnelle, nous introduisons les variables adimensionnelles suivantes :

$$\begin{aligned} (x, y) &= \left( \frac{x'}{H'}, \frac{y'}{H'} \right), & (u, v) &= \left( \frac{u'}{\frac{\alpha}{H'}}, \frac{v'}{\frac{\alpha}{H'}} \right), & t &= \frac{t'}{\left( \frac{H'^2}{\alpha} \right)}, & P &= \frac{P'}{\rho} \left( \frac{\alpha}{H'^2} \right) \\ T &= \frac{(T' - T'_0)}{\Delta T^*}, & S &= \frac{(S' - S'_0)}{\Delta S^*} \end{aligned} \quad (2.11)$$

où  $\Delta T^* = q'H'/\lambda$  et  $\Delta S^* = [(1 - M)j'H'/\rho D] + [MS'_0(S'_0 - 1)D_T^*\Delta T^*/D]$  ne sont autres que les différences caractéristiques de température et de concentration respectivement.

Les équations adimensionnelles régissant le problème s'écrivent alors :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \text{Pr} \left[ \mu_a \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial \mu_a}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \mu_a}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \text{Pr} \left[ \mu_a \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial \mu_a}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \mu_a}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\ &+ \text{Ra}_T \text{Pr} (T + NS) \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{1}{\text{Le}} \left[ \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right) - M \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \right] \quad (2.16)$$

où  $\mu_a$  désigne la viscosité apparente adimensionnelle, et a pour expression :

$$\mu_a = \left[ 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \quad (2.17)$$

Cinq paramètres de contrôle adimensionnels émergent dans le système d'équations ci-dessus, à savoir, le rapport d'aspect A, le nombre de Lewis Le, le rapport des forces de volume N, le nombre de Prandtl Pr et le nombre de Rayleigh thermique  $\text{Ra}_T$ .

$$A = \frac{L'}{H'}, \text{Le} = \frac{\alpha}{D}, N = \frac{\beta_S \Delta S^*}{\beta_T \Delta T^*}, \text{Pr} = \frac{(k/\rho)H'^{2-2n}}{\alpha^{2-n}} \text{ et } \text{Ra}_T = \frac{g\beta_T H'^{2n+2} q'}{(k/\rho)\alpha^n \lambda} \quad (2.18)$$

Tous les paramètres de contrôle énoncés ci-dessus sont positifs, excepté le rapport des forces de volume N, qui peut être positif ou négatif selon le signe du coefficient  $\beta_S$ . Lorsque

$\beta_S > 0$ , les effets thermiques et solutales coopèrent et la convection est dite coopérante. Alors que si  $\beta_S < 0$ , ces effets s'opposent pour générer une convection dite opposée.

La forme adimensionnelle des conditions aux limites s'écrit :

- Cas de la cavité dont les parois verticales sont actives :

$$u = v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial S}{\partial x} - M \frac{\partial T}{\partial x} = 1 - M \text{ pour } x = 0 \text{ et } A \quad (2.19)$$

$$u = v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial y} = 0 \text{ for } y = 0 \text{ et } 1 \quad (2.20)$$

- Cas de la cavité dont les parois horizontales sont actives :

$$u = v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ et } A \quad (2.21)$$

$$u = v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial S}{\partial y} - M \frac{\partial T}{\partial y} = M - 1 \text{ pour } y = 0 \text{ et } 1 \quad (2.22)$$

## 2.5 Transfert thermique et massique

Les transferts de chaleur et de masse à travers la cavité sont caractérisés, respectivement, par les nombres moyens de Nusselt et Sherwood selon la nature des parois de la cavité.

### 2.5.1 Cavité dont les parois verticales sont actives

$$\overline{Nu} = \int_0^1 \frac{1}{(\partial T / \partial x)_{x=A/2}} dy \text{ et } \overline{Sh} = \int_0^1 \frac{1}{(\partial S / \partial x)_{x=A/2}} dy \quad (2.23)$$

### 2.5.2 Cavité dont les parois horizontales sont actives

$$\overline{Nu} = \frac{1}{A} \int_0^A \frac{1}{\Delta T(x)} dx \text{ et } \overline{Sh} = \frac{1}{A} \int_0^A \frac{1}{\Delta S(x)} dx \quad (2.24)$$

où  $\Delta T(x) = T(x, 0) - T(x, 1)$  et  $\Delta S(x) = S(x, 0) - S(x, 1)$  ne sont autres que les différences de température et de concentration adimensionnelles locales entre les deux parois horizontales d'équations  $y = 0$  et  $y = 1$ .

## 2.6 Résolution par approche numérique

Les équations régissant les phénomènes de convection sont généralement non linéaires et fortement couplées. La résolution analytique d'un tel système demeure extrêmement complexe sauf dans des cas très simplifiés (approche de l'écoulement parallèle qu'on verra par la suite). C'est pourquoi on fait recours aux méthodes numériques qui permettent de trouver des solutions approchées de ces équations avec une précision étonnante. Plusieurs méthodes numériques ont

été développées dans ce contexte. La méthode adoptée dans le cadre de cette thèse est celle des volumes finis.

### 2.6.1 Méthode des volumes finis

Pour résoudre les équations aux dérivées partielles formulées ci-dessus, la méthode des volumes finis décrite par Patankar (1980) a été utilisée. Elle a été parmi les premières à atteindre un stade de développement avancé pour les calculs d'écoulements stationnaires et instationnaires. La méthode consiste à diviser le domaine d'étude en volumes élémentaires, choisis de façon à ce que chaque volume entoure un point de maillage P, sur lesquels on intègre les lois de conservation, qui se trouvent naturellement satisfaites dans chaque volume, pour déterminer les différentes variables associées au problème sur chaque point. Dans le cas bidimensionnel, chaque volume est délimité par quatre interfaces e, w, s et n. Chaque nœud principal P est limité par des nœuds voisins : E, W, S et N (figure 2.2). Pour calculer l'intégrale dans ce volume élémentaire, l'inconnu est présenté à l'aide d'une fonction d'approximation linéaire entre deux nœuds consécutifs. L'intégration de l'équation différentielle conduit à l'équation discrétisée.

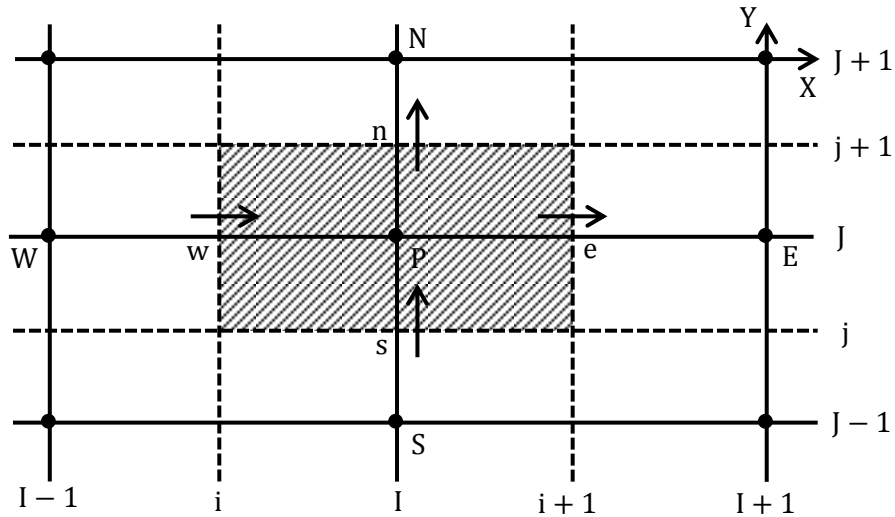


Figure 2.2 : Discrétisation en volumes finis.

### 2.6.2. Discrétisation des équations

Les équations (2.12) à (2.16) peuvent être écrites sous la forme généralisée suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = S_\phi \quad (2.25)$$

où la fonction recherchée  $\phi$ , les expressions de  $J_x$ ,  $J_y$  et du terme source  $S_\phi$  sont définis dans le tableau 2.1.

**Tableau 2.1** : Expressions de la fonction  $\Phi$ ,  $J_x$ ,  $J_y$  et  $S_\Phi$ .

$\Phi$	$J_x$	$J_y$	$S_\Phi$
u	$uu - \varepsilon_1 \Gamma \frac{\partial u}{\partial x}$	$uv - \Gamma \frac{\partial u}{\partial y}$	$-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \frac{\partial v}{\partial x} \right)$
v	$uv - \Gamma \frac{\partial v}{\partial x}$	$vv - \varepsilon_2 \Gamma \frac{\partial v}{\partial y}$	$-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial u}{\partial y} \right)$
T	$uT - \frac{\partial T}{\partial x}$	$vT - \frac{\partial T}{\partial y}$	0
S	$uS - \Gamma_1 \frac{\partial S}{\partial x}$	$vS - \Gamma_1 \frac{\partial S}{\partial y}$	$-M\Gamma_1 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$

avec :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2, \Gamma = \text{Pr}\mu_a \quad \text{et} \quad \Gamma_1 = \frac{1}{L_e} \quad (2.26)$$

- Equation du mouvement suivant x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = S_u \quad (2.27)$$

L'intégration de l'équation (2.27) sur le volume de contrôle (fig. 2.2) donne :

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial u}{\partial t} dx dy + \int_s^n \int_w^e \frac{\partial J_x}{\partial x} dx dy + \int_s^n \int_w^e \frac{\partial J_y}{\partial y} dx dy = \int_s^n \int_w^e S_u dx dy \quad (2.28)$$

Soient  $J_e, J_w, J_s$  et  $J_n$  les valeurs respectives, à l'instant t, du flux total sur les faces est (e), ouest (w), sud (s) et nord (n) du volume de contrôle. Désignons, respectivement, par  $u_p$  et  $u_p^0$  les valeurs de u au point P aux instants actuel t et précédent t- $\Delta t$ . Si on suppose qu'à l'instant t, u est constante à travers le volume de contrôle, l'équation (2.28) devient :

$$\frac{u_p}{\Delta t} \Delta x \Delta y + (J_{xe} - J_{xw}) \Delta y + (J_{yn} - J_{ys}) \Delta x = \bar{S}_u \quad (2.29)$$

avec

$$\bar{S}_u = u_p^0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} - (P_e - P_w) \Delta y + \mu \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_s^n \Delta x \quad (2.30)$$

Remplaçons  $J_x$  et  $J_y$  par leurs expressions, on obtient :

$$\begin{aligned} & u_p \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + \left( u_e^0 u_e - \varepsilon_1 \Gamma_e \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_e \right) \Delta y - \left( u_w^0 u_w - \varepsilon_1 \Gamma_w \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_w \right) \Delta y + \left( u_n v_n^0 - \Gamma_n \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_n \right) \Delta x \\ & - \left( u_s v_s^0 - \Gamma_s \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_s \right) \Delta x = \bar{S}_u \end{aligned} \quad (2.31)$$

En évaluant les dérivées de  $u$  par rapport à  $x$  et  $y$  aux points  $e, w, n$  et  $s$  par :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_e = \frac{u_E - u_P}{\Delta x}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_w = \frac{u_P - u_W}{\Delta x}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_n = \frac{u_N - u_P}{\Delta y}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_s = \frac{u_P - u_S}{\Delta y} \quad (2.32)$$

L'équation (2.31) devient :

$$\begin{aligned} & u_P \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + \left( u_e^0 u_e - \varepsilon_1 \Gamma_e \frac{u_E - u_P}{\Delta x} \right) \Delta y - \left( u_w^0 u_w - \varepsilon_1 \Gamma_w \frac{u_P - u_W}{\Delta x} \right) \Delta y \\ & + \left( u_n v_n^0 - \Gamma_n \frac{u_N - u_P}{\Delta y} \right) \Delta x - \left( u_s v_s^0 - \Gamma_s \frac{u_P - u_S}{\Delta y} \right) \Delta x = \bar{S}_u \end{aligned} \quad (2.33)$$

En approximant les vitesses  $u_e, u_w, u_n$  et  $u_s$  par les relations :

$$u_e = \frac{u_E + u_P}{2}, \quad u_w = \frac{u_W + u_P}{2}, \quad u_n = \frac{u_N + u_P}{2}, \quad u_s = \frac{u_S + u_P}{2} \quad (2.34)$$

L'équation (2.33) devient:

$$\begin{aligned} & u_P \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + \left( u_e^0 \left( \frac{u_E + u_P}{2} \right) - \varepsilon_1 \Gamma_e \frac{u_E - u_P}{\Delta x} \right) \Delta y - \left( u_w^0 \left( \frac{u_W + u_P}{2} \right) - \varepsilon_1 \Gamma_w \frac{u_P - u_W}{\Delta x} \right) \Delta y \\ & + \left( v_n^0 \left( \frac{u_N + u_P}{2} \right) - \Gamma_n \frac{u_N - u_P}{\Delta y} \right) \Delta x - \left( v_s^0 \left( \frac{u_S + u_P}{2} \right) - \Gamma_s \frac{u_P - u_S}{\Delta y} \right) \Delta x = \bar{S}_u \end{aligned} \quad (2.35)$$

L'intégration de l'équation de la continuité conduit à :

$$(u_e - u_w) \Delta y + (v_n - v_s) \Delta x = 0 \quad (2.36)$$

L'équation (2.35) devient alors:

$$\begin{aligned} & u_P \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + \left[ \left( \frac{u_e^0}{2} - \frac{\varepsilon_1 \Gamma_e}{\Delta x} \right) (u_E - u_P) \right] \Delta y - \left[ \left( \frac{u_w^0}{2} - \frac{\varepsilon_1 \Gamma_w}{\Delta x} \right) (u_W - u_P) \right] \Delta y \\ & + \left[ \left( \frac{v_n^0}{2} - \frac{\Gamma_n}{\Delta y} \right) (u_N - u_P) \right] \Delta x - \left[ \left( \frac{v_s^0}{2} - \frac{\Gamma_s}{\Delta y} \right) (u_S - u_P) \right] \Delta x = \bar{S}_u \end{aligned} \quad (2.37)$$

En appliquant les mêmes étapes que précédemment on trouve :

- Equation du mouvement suivant  $y$

$$\begin{aligned} & v_P \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + \left[ \left( \frac{u_e}{2} - \frac{\Gamma_e}{\Delta x} \right) (v_E - v_P) \right] \Delta y - \left[ \left( \frac{u_w}{2} - \frac{\Gamma_w}{\Delta x} \right) (v_W - v_P) \right] \Delta y \\ & + \left[ \left( \frac{v_n^0}{2} - \frac{\varepsilon_2 \Gamma_n}{\Delta y} \right) (v_N - v_P) \right] \Delta x - \left[ \left( \frac{v_s^0}{2} - \frac{\varepsilon_2 \Gamma_s}{\Delta y} \right) (v_S - v_P) \right] \Delta x = \bar{S}_v \end{aligned} \quad (2.38)$$

avec

$$\bar{S}_v = v_P^0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} - (P_n - P_s) \Delta x + \Gamma \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_w^e \Delta y + R_a P_r (T_p + N S_p) \Delta x \Delta y \quad (2.39)$$

- Equation de l'énergie

$$T_p \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + \left[ \left( \frac{u_e}{2} - \frac{1}{\Delta x} \right) (T_E - T_p) \right] \Delta y - \left[ \left( \frac{u_w}{2} - \frac{1}{\Delta x} \right) (T_W - T_p) \right] \Delta y$$

$$+ \left[ \left( \frac{v_n}{2} - \frac{1}{\Delta y} \right) (T_N - T_p) \right] \Delta x - \left[ \left( \frac{v_s}{2} - \frac{1}{\Delta y} \right) (T_S - T_p) \right] \Delta x = 0 \quad (2.40)$$

- Equation de la concentration

$$S_p \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + \left[ \left( \frac{u_e}{2} - \frac{\Gamma_{1e}}{\Delta x} \right) (S_E - S_p) \right] \Delta y - \left[ \left( \frac{u_w}{2} - \frac{\Gamma_{1w}}{\Delta x} \right) (S_W - S_p) \right] \Delta y$$

$$+ \left[ \left( \frac{v_n}{2} - \frac{\Gamma_{1n}}{\Delta y} \right) (S_N - S_p) \right] \Delta x - \left[ \left( \frac{v_s}{2} - \frac{\Gamma_{1s}}{\Delta y} \right) (S_S - S_p) \right] \Delta x = \bar{S}_s \quad (2.41)$$

avec

$$\bar{S}_s = M \Gamma_1 \left[ \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_w^e \Delta y + \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_s^n \Delta x \right] \quad (2.42)$$

Les équations (2.37), (2.38), (2.40) et (2.41) deviennent alors

$$a_p \phi_p = a_e \phi_e + a_w \phi_w + a_n \phi_n + a_s \phi_s + \bar{S}_\phi \quad (2.43)$$

Les coefficients de discrétisation  $a_i$  ( $i = e, w, n, s$ ) doivent être tous positifs, d'après la deuxième règle de Patankar (1980) pour la méthode des volumes finis. Cependant, l'équation (2.43) peut violer une telle règle en créant des coefficients négatifs. Pour surmonter ceci, les coefficients  $a_i$  ( $i = e, w, n, s$ ) sont exprimés en fonction du nombre de Peclet  $Pe$ . Soient :

$$a_e = D_e A (|Pe_e|) + \max(-F_e, 0), \quad a_w = D_w A (|Pe_w|) + \max(+F_w, 0),$$

$$a_n = D_n A (|Pe_n|) + \max(-F_n, 0), \quad a_s = D_s A (|Pe_s|) + \max(+F_s, 0)$$

$$a_p = a_e + a_w + a_n + a_s \quad (2.44)$$

avec

$$F_e = u_e \Delta y, \quad F_w = u_w \Delta y, \quad F_s = v_s \Delta x \quad \text{et} \quad F_n = v_n \Delta x \quad (2.45)$$

Les expressions de  $D_i$  ( $i = e, w, n, s$ ) sont définies dans le tableau 2.2.

$Pe_i$  est appelé nombre de Peclet de maille, il est défini comme suit :

$$Pe_i = \frac{F_i}{D_i} \quad (2.46)$$

Pour ce qui est de la fonction  $A(|Pe_i|)$ , nous avons opté pour le schéma numérique en loi de puissance. Le choix est justifié par le fait que ce schéma, utilisé fréquemment par la communauté scientifique, garantit une bonne stabilité et jouit d'une meilleure précision, comparativement aux autres schémas. Soit :

$$A(|Pe_i|) = \sup(0,1 - 0.1|Pe_i|^5) \quad (2.47)$$

**Tableau 2.2** : expressions des coefficients  $D_i$ .

$\Phi$	$D_e$	$D_w$	$D_n$	$D_s$
u	$\frac{\varepsilon_1 \Gamma_e}{\Delta x} \Delta y$	$\frac{\varepsilon_1 \Gamma_w}{\Delta x} \Delta y$	$\frac{\Gamma_n}{\Delta y} \Delta x$	$\frac{\Gamma_s}{\Delta y} \Delta x$
v	$\frac{\Gamma_e}{\Delta x} \Delta y$	$\frac{\Gamma_w}{\Delta x} \Delta y$	$\frac{\varepsilon_2 \Gamma_n}{\Delta y} \Delta x$	$\frac{\varepsilon_2 \Gamma_s}{\Delta y} \Delta x$
T	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	$\frac{\Delta x}{\Delta y}$	$\frac{\Delta x}{\Delta y}$
S	$\frac{\Gamma_{1e}}{\Delta x} \Delta y$	$\frac{\Gamma_{1w}}{\Delta x} \Delta y$	$\frac{\Gamma_{1s}}{\Delta y} \Delta x$	$\frac{\Gamma_{1n}}{\Delta y} \Delta x$

### 2.6.3 Traitement des conditions aux limites

Les conditions aux limites de notre problème peuvent être écrites sous la forme suivante :

- Pour un flux de température imposé :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_1 = a \quad \text{ou} \quad \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_1 = c \quad \text{soit} \quad \frac{T_E - T_P}{\Delta x} = a \quad \text{ou} \quad \frac{T_P - T_S}{\Delta y} = c \quad (2.48)$$

Il en résulte:

$$a_P = 1, a_E = 1, a_W = a_N = a_S = 0 \text{ et } \bar{S} = -a\Delta x \text{ ou } a_P = 1, a_S = 1, a_W = a_N = a_E = 0 \text{ et } \bar{S} = c\Delta y.$$

- Pour un flux de masse imposé :

$$\left. \frac{\partial S}{\partial x} \right|_1 = b \quad \text{ou} \quad \left. \frac{\partial S}{\partial y} \right|_1 = d \quad \text{soit} \quad \frac{S_E - S_P}{\Delta x} = b \quad \text{ou} \quad \frac{S_P - S_S}{\Delta y} = d \quad (2.49)$$

Il en résulte:

$$a_P = 1, a_E = 1, a_W = a_N = a_S = 0 \text{ et } \bar{S} = -b\Delta x \text{ ou } a_P = 1, a_S = 1, a_W = a_N = a_E = 0 \text{ et } \bar{S} = d\Delta y.$$

## 2.6.4 Résolution des équations

Le système discret obtenu, pour chaque volume de contrôle, consiste en un ensemble d'équations algébriques linéaires, qui sont ensuite facilement résolues au moyen de la technique ligne par ligne basée sur l'algorithme de matrice tridiagonale (TDMA).

Pour résoudre les équations discrétisées, une équation de pression est clairement nécessaire, car il s'agit d'une inconnue dans les équations de la quantité de mouvement qui nécessite l'utilisation de l'algorithme de la méthode semi-implicite pour l'équation liée à la pression (SIMPLE), dans laquelle l'équation de continuité est transformée en équation de pression. Pour éviter la distribution de la vitesse et de la pression en damier, un maillage principal est utilisé pour les grandeurs scalaires, comme la pression et la température et un maillage décalé pour les grandeurs vectorielles, comme la vitesse ; vers la droite pour la composante  $u$  et vers le haut pour la composante  $v$ .

### 2.6.4.1 Equations de la correction de pression et de la correction des vitesses

Les équations de mouvement suivant les deux directions,  $x$  et  $y$ , ne peuvent être résolues que lorsque le champ de pression soit donné ou estimé. A cette fin, les composantes de la vitesse horizontale aux points  $e$ ,  $w$  et de la vitesse verticale aux points  $n$  et  $s$  sont :

$$\begin{aligned} a_e u_e &= \sum a_I u_I + (p_p - p_E) D_e + b_e \quad \text{et} \quad a_n v_n = \sum a_I v_I + (p_p - p_N) D_n + b_n \\ a_w u_w &= \sum a_I u_I + (p_w - p_P) D_w + b_w \quad \text{et} \quad a_s v_s = \sum a_I v_I + (p_s - p_P) D_s + b_s \end{aligned} \quad (2.50)$$

avec

$$D_e = D_w = \Delta y, \quad D_n = D_s = \Delta x \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} b_e &= u_e^0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + \Gamma \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{s1}^{n1} \Delta x, \quad b_n = v_n \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + R_a P_r (T_n^0 + N S_n^0) \Delta x \Delta y + \Gamma \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{n2}^{n1} \Delta x, \\ b_w &= u_w^0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + \Gamma \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{s2}^{n2} \Delta x, \quad b_s = v_s \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + R_a P_r (T_s^0 + N S_s^0) \Delta x \Delta y + \Gamma \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{s2}^{s1} \Delta x \end{aligned} \quad (2.52)$$

Patankar et Spalding (1972) ont proposé l'algorithme SIMPLE (Semi Implicit-Method for Pressure-Linked Equations) qui consiste à estimer un champ de pression  $p^*$  qui permet de déterminer un champ de vitesse ( $u^*$ ,  $v^*$ ) ne vérifiant pas, en général, l'équation de continuité. D'où la nécessité de corriger la pression itérativement jusqu'à satisfaction de cette équation.

Soient  $p^*$ ,  $T^*$  et  $S^*$  les champs initiaux de pression, de température et de concentration, et  $(u^*, v^*)$  les champs de vitesse résultants des équations de la quantité de mouvement suivantes :

$$\begin{aligned} a_e u_e^* &= \sum a_I u_I^* + (p_p^* - p_E^*) A_e + b_{e^*} \quad \text{et} \quad a_n v_n^* = \sum a_I v_I^* + (p_p^* - p_N^*) A_n + b_{n^*} \\ a_w u_w^* &= \sum a_I u_I^* + (p_W^* - p_P^*) A_e + b_{w^*} \quad \text{et} \quad a_s v_s^* = \sum a_I v_I^* + (p_S^* - p_P^*) A_n + b_{s^*} \end{aligned} \quad (2.53)$$

Les champs de vitesse  $(u^*, v^*)$  peuvent ne pas vérifier l'équation de continuité. On a intérêt dans ce cas à corriger la pression et par conséquent corriger les vitesses.

On pose :

$$\begin{aligned} p &= p^* + p', \\ \text{et } u &= u^* + u', \quad v = v^* + v' \end{aligned} \quad (2.54)$$

où  $p'$ ,  $u'$  et  $v'$  sont la correction de la pression et les corrections des vitesses.

L'introduction de (2.54) dans (2.53), en tenant compte de (2.50), conduit à :

$$\begin{aligned} a_e u_e' &= \sum a_I u_I' + (p_p' - p_E') A_e \quad \text{et} \quad a_n v_n' = \sum a_I v_I' + (p_p' - p_N') A_n \\ a_w u_w' &= \sum a_I u_I' + (p_W' - p_P') A_w \quad \text{et} \quad a_s v_s' = \sum a_I v_I' + (p_S' - p_P') A_s \end{aligned} \quad (2.55)$$

Selon Patankar (1980), les termes  $\sum a_I u_I'$  et  $\sum a_I v_I'$  sont négligeables. Cette approximation est choisie afin d'éviter la construction d'une matrice pleine pour l'équation de la correction de pression difficile à résoudre numériquement. L'élimination de ces termes dans l'équation (2.55) mène à :

$$\begin{aligned} u_e' &= d_e (p_p' - p_E') A_e \quad \text{et} \quad v_n' = d_n (p_p' - p_N') A_e \\ u_w' &= d_w (p_W' - p_P') A_w \quad \text{et} \quad v_s' = d_s (p_S' - p_P') A_s \end{aligned} \quad (2.56)$$

Les vitesses corrigées deviennent alors:

$$\begin{aligned} u_e &= u_e^* + d_e (p_p' - p_E') \quad \text{et} \quad v_n = v_n^* + d_n (p_p' - p_N') \\ u_w &= u_w^* + d_w (p_W' - p_P') \quad \text{et} \quad v_s = v_s^* + d_s (p_S' - p_P') \end{aligned} \quad (2.57)$$

L'introduction de l'équation (2.57) dans l'équation de continuité (2.36) intégrée dans le volume de contrôle conduit à l'équation de correction de pression suivante :

$$a_p p_p' = a_E p_E' + a_W p_W' + a_N p_N' + a_S p_S' + b_{p'} \quad (2.58)$$

où

$$\begin{aligned} a_E &= d_e \Delta y, \quad a_W = d_w \Delta y, \quad a_N = d_n \Delta x, \quad a_S = d_s \Delta x, \\ a_p &= a_E + a_W + a_N + a_S, \quad b_{p'} = (u_w^* - u_e^*) \Delta y + (v_s^* - v_n^*) \Delta x \end{aligned} \quad (2.59)$$

#### 2.6.4.2 Procédure de calcul : Algorithmes SIMPLE et SIMPLER

L'algorithme de calcul des champs de vitesse, de température, de concentration et de pression est l'algorithme SIMPLE. La séquence des opérations essentielles constituant cet algorithme est la suivante:

1. Préciser des champs initiaux de pression  $p^*$ , de température  $T^*$  et de concentration  $S^*$ .
2. Calculer les coefficients des vitesses ( $u^*, v^*$ ) à partir de l'équation (2.53).
3. Résoudre l'équation de correction de pression (2.58) pour obtenir  $p'$ .
4. Utiliser les relations (2.54) pour avoir  $p$  ;
5. A partir du champs de pression obtenu,  $p$ , résoudre l'équation (2.43) terme de  $u$  et  $v$  pour obtenir les champs de vitesse ( $u, v$ ).
6. Résoudre l'équation (2.43) pour obtenir les champs de température  $T$  et de concentration  $S$ .
7. Utiliser  $p$ , remplacer  $T^*$  par  $T$  et  $S^*$  par  $S$  et retourner à l'étape (2).

Répéter les calculs jusqu'à la convergence de toutes les variables.

Tant que le critère de convergence n'est pas atteint, on retourne à la deuxième étape. Il est à noter que la convergence est considérée comme atteinte lorsque  $\sum_{i,j} |\Phi_{i,j}^{k+1} - \Phi_{i,j}^k| < 10^{-5} \sum_{i,j} |\Phi_{i,j}^{k+1}|$  où  $\Phi_{i,j}^k$  représente la valeur de  $\Phi$  au  $k^{\text{ème}}$  niveau d'itération et à l'emplacement de la grille  $(i, j)$  dans le plan  $(x, y)$ .

Une variante modifiée de cet algorithme est l'algorithme SIMPLER (SIMPLE Revised), qui a été introduit par Patankar en 1979. Son efficacité réside dans le fait que la déduction de l'équation de la pression (2.58) ne fait intervenir aucune simplification. Autrement dit, les termes  $\sum a_1 u'_i$  et  $\sum a_1 v'_i$  ne sont plus négligeables. Par conséquent, le champ de pression de SIMPLER est plus proche de la réalité que celui de SIMPLE puisqu'en général l'estimation d'un champ de vitesse initial est plus facile que celui d'un champ de pression. C'est pour cette raison, nous avons opté pour l'algorithme SIMPLER dans cette thèse.

#### 2.6.5 Validation du code numérique

Pour valider le code numérique élaboré dans le cadre de cette thèse, nous allons comparer les résultats fournis par notre programme avec certains publiés dans la littérature. Les résultats de Makayssi et al. (2008) obtenus pour le cas d'une cavité rectangulaire chauffé et salée latéralement et remplie d'un fluide non-Newtonien, ont été utilisés comme référence pour tester le code numérique dans le cas de la double diffusion ( $M = 0$ ). Pour le cas de la convection induite par effet Soret ( $M = 1$ ), le code a été validé à l'aide des résultats de Alloui et al. (2010)

pour une cavité rectangulaire horizontale remplie par un fluide Newtonien, chauffée par le bas. (La convection induite purement par effet Soret peut être retrouvée en remplaçant  $j = 0$  dans la référence de Alloui et al. (2010). Dans ce cas, les résultats obtenus par notre code sont portés aux mêmes conditions tenues par la référence).

Les résultats numériques obtenus par ces auteurs ainsi que nos résultats sont regroupés dans les tableaux 2.3 et 2.4. La comparaison entre ces résultats montre que l'erreur maximale est à l'ordre de 4 %. Par ailleurs, la solution analytique développée dans la section suivante a également permis de valider le code numérique.

**Tableau 2.3:** Comparaison des résultats numériques obtenus par la présente étude avec ceux obtenus par Makayssi et al. (2008) pour  $A = 24$ ,  $Le = 10$ ,  $N = 1$ ,  $Ra_T = 10^5$  et différentes valeurs de  $n$ .

n	Makayssi et al. (2008)			Présente étude		
	$\psi_c$	$\overline{Nu}$	$\overline{Sh}$	$\psi_c$	$\overline{Nu}$	$\overline{Sh}$
0.6	19.1	140.3	13500.4	18.9	140.33	13431.23
1	8.51	30.549	2850	8.55	30.72	2875.97
1.4	4.57	9.652	863.99	4.65	9.75	876.08

**Tableau 2.4:** Comparaison des résultats numériques obtenus par la présente étude avec ceux obtenus par Alloui et al. (2010) pour  $A = 6$ ,  $Le = 2$ ,  $N = 0.05$ ,  $Ra_T = 10^3$  et  $n = 1$ .

Alloui et al. (2010)			Présente étude		
$\psi_{max}$	$\overline{Nu}$	$\overline{Sh}$	$\psi_{max}$	$\overline{Nu}$	$\overline{Sh}$
1.29	1.29	3.20	1.24	1.284	3.197

## 2.7 Méthode de résolution analytique

### 2.7.1 Introduction

En mécanique des fluides, le modèle mathématique permettant la représentation du problème physique utilise très souvent des systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires et fortement couplées. Trouver leurs solutions est ainsi un problème courant, généralement difficile ou impossible à résoudre de façon analytique. Le problème peut être résolu numériquement comme nous l'avons indiqué plus haut. Dans certains cas, il s'agit de la seule alternative. Dans d'autres cas, la nature de l'écoulement engendré autorise un ensemble d'hypothèses, telles que, l'écoulement presque parallèle, permettant ainsi la simplification du système d'équations et conduit à une solution analytique. L'approche expérimentale peut s'avérer très coûteuse et il peut être difficile de mesurer les différents paramètres de contrôle, ce qui la rend moins suivie surtout dans l'analyse des écoulements et des transferts.

### 2.7.2 Concept de l'écoulement parallèle

Lorsque le rapport d'aspect de la couche est suffisamment élevé, c'est-à-dire dans la limite d'une cavité longue et peu profonde, l'écoulement résultant est parallèle relativement aux parois longitudinales de la cavité dans la partie centrale de la cellule. Ceci permettra de négliger la composante de vitesse perpendiculaire à ces parois. Cette approche, utilisée dans le passé par plusieurs auteurs (Cormak et al. (1974), Vasseur et al. (1989) et Mamou et al (1996)), fournit ainsi des équations approximées dont la résolution peut s'effectuer analytiquement. Une explication plus détaillée, et plus argumentée d'une telle résolution sera apportée ci-dessous.

- **Fonction de courant**

La fonction de courant au centre de la cavité est liée aux composantes de la vitesse via les relations suivantes :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ et } v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\psi = 0 \text{ pour toute les extrémités}) \quad (2.60)$$

Dans la région centrale, loin des parois latérales, l'écoulement est essentiellement parallèle à l'axe des  $x$ , c'est-à-dire que la fonction de courant  $\psi$  dépend de la coordonnée  $y$  seulement. On peut écrire alors :

$$u(x, y) = u(y), v(x, y) = 0, \psi(x, y) = \psi(y) \quad (2.61)$$

- **Fonction de répartition de la température et de la concentration**

Les champs de la température et de la concentration peuvent être divisés en la somme d'un terme qui dépend linéairement de la variable  $x$  et d'une fonction inconnue donnant la distribution transversale suivant  $y$ . Ainsi, les champs de la température et de la concentration sont donnés par :

$$T(x, y) = C_T(x - A/2) + \theta_T(y) \text{ et } S(x, y) = C_S(x - A/2) + \theta_S(y) \quad (2.62)$$

où  $C_T$  et  $C_S$  sont respectivement les gradients longitudinaux de température et de concentration. Ils sont introduits afin de prendre en considération l'influence des bords de la cavité sur le reste de l'écoulement.

### 2.7.3 Applications aux équations de base

Sur la base des simplifications ci-dessus, les équations directrices adimensionnelles (2.12)-(2.16) sont réduites à :

$$\frac{d^2}{dy^2} \left[ \left| \frac{du(y)}{dy} \right|^{n-1} \frac{du(y)}{dy} \right] = (C_T + NC_S) Ra_T \quad (2.63)$$

$$\frac{d^2 \theta_T(y)}{dy^2} = C_T u(y) \quad \text{et} \quad \frac{d^2 \theta_S(y)}{dy^2} = (LeC_S + MC_T) u(y) \quad (2.64)$$

Les conditions aux limites associées aux équations (2.63) et (2.64) sont alors:

- Cavité dont les parois verticales sont actives

$$u = \frac{d\theta_T}{dy} = \frac{d\theta_S}{dy} - M \frac{d\theta_T}{dy} = 0 \quad \text{pour } y = 0 \quad \text{et} \quad 1 \quad (2.65)$$

- Cavité dont les parois horizontales sont actives

$$u = 0, \quad \frac{d\theta_T}{dy} = -1, \quad \frac{d\theta_S}{dy} - M \frac{d\theta_T}{dy} = -1 + M \quad \text{pour } y = 0 \quad \text{et} \quad 1 \quad (2.66)$$

auxquelles s'ajoutent les conditions de l'écoulement de retour, de la température et de la concentration moyennes (voir Ouriemi et al. (2006), Makayssi et al. (2008) et Lamsaadi et al. (2018):

$$\int_0^1 u(y) dy = 0, \quad \int_0^1 \theta_T(y) dy = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \theta_S(y) dy = 0 \quad (2.67)$$

#### 2.7.4 Résolution des équations approximées

Le gradient de vitesse ( $du/dy$ ) change de signe à cause de l'écoulement de retour. On ne peut plus alors intégrer directement le système d'équations (2.63)-(2.64). En effet, comme discuté par Lamsaadi et al. (2014), la condition  $(du/dy) = 0$  se produit à la position  $y_0$  et  $y_1 = 1 - y_0$  (centro-symétrie du flux central). Ces deux coordonnées ont été obtenues numériquement à partir de l'Eq. (2.67) en utilisant une combinaison de la méthode d'intégration de Gauss-Legendre (Sibony et Mardon, (1982)) et de la méthode d'itération de Regula-Falsi (Gourdin et Boumahrat, (1989)). Naturellement, les expressions de la vitesse seront différentes selon que  $0 \leq y \leq y_0$ ,  $y_0 \leq y \leq y_1$  ou  $y_1 \leq y \leq 1$ . Ainsi, pour simplifier les expressions de la vitesse, de la température et de la concentration, on définit ainsi la fonction  $f(y) = (y^2 - y + y_0 y_1)/2$ . On a alors:

$$u(y) = Ra_T^{1/n} (C_T + NC_S)^{1/n} F(y) \quad (2.68)$$

$$\theta_T(y) = C_T Ra_T^{1/n} (C_T + NC_S)^{1/n} \left[ G(y) - \int_0^1 G(y) dy \right] - b \left[ y - \frac{1}{2} \right] \quad (2.69)$$

$$\theta_S(y) = \frac{LeC_S + MC_T}{C_T} \theta_T(y) + \left[ \frac{b(LeC_S + MC_T)}{C_T} - d \right] \left[ y - \frac{1}{2} \right] \quad (2.70)$$

Les expressions de  $F(y)$  et  $G(y)$  sont telles que pour :

$$- 0 \leq y \leq y_0$$

$$F(y) = \int_0^y [f(y)]^{1/n} dy \quad (2.71)$$

$$G(y) = \int_0^y \left[ \int_0^y \left[ \int_0^y [f(y)]^{1/n} dy \right] dy \right] dy \quad (2.72)$$

$$- y_0 \leq y \leq y_1$$

$$F(y) = \int_0^{y_0} [f(y)]^{1/n} dy + \int_y^{y_0} [-f(y)]^{1/n} dy \quad (2.73)$$

$$G(y) = \frac{(y - y_0)^2}{2} \int_0^{y_0} [f(y)]^{1/n} dy + \int_{y_0}^y \left[ \int_{y_0}^y \left[ \int_y^{y_0} [-f(y)]^{1/n} dy \right] dy \right] dy \\ + (y - y_0) \int_0^y \left[ \int_0^y [f(y)]^{1/n} dy \right] dy + \int_0^{y_0} \left[ \int_0^y \left[ \int_0^y [f(y)]^{1/n} dy \right] dy \right] dy \quad (2.74)$$

$$- y_1 \leq y \leq 1$$

$$F(y) = \int_0^{y_0} [f(y)]^{1/n} dy + \int_{y_1}^{y_0} [-f(y)]^{1/n} dy + \int_{y_1}^y [f(y)]^{1/n} dy \quad (2.75)$$

$$G(y) = \frac{1}{2} (y - y_1)(y + y_1 - 2) \left[ \int_0^{y_0} [f(y)]^{1/n} dy + \int_{y_1}^{y_0} [-f(y)]^{1/n} dy \right] \\ + \int_{y_1}^y \left[ \int_1^y \left[ \int_{y_1}^y [f(y)]^{1/n} dy \right] dy \right] dy + \frac{1}{2} (y_1 - y_0)^2 \int_0^{y_0} [f(y)]^{1/n} dy + (y_1 - y_0) \int_0^y \left[ \int_0^y [f(y)]^{1/n} dy \right] dy \\ + \int_{y_0}^{y_1} \left[ \int_{y_0}^y \left[ \int_y^{y_0} [-f(y)]^{1/n} dy \right] dy \right] dy + \int_0^{y_0} \left[ \int_0^y \left[ \int_0^y [f(y)]^{1/n} dy \right] dy \right] dy \quad (2.76)$$

A ce stade, il convient d'introduire la fonction de courant au centre de la cavité pour pouvoir mesurer l'intensité du courant de convection. Son expression peut être déduite simplement en intégrant l'Eq. (2.60) et en tenant compte des conditions aux limites associées. On obtient alors :

$$\psi_c = \psi \left( y = \frac{1}{2} \right) = \frac{Ra_T^{1/n} (C_T + NC_S)^{1/n}}{D_n} \quad (2.77)$$

avec :

$$D_n = \left[ \left( \frac{1}{2} - y_0 \right) \int_0^{y_0} [f(y)]^{1/n} dy + \int_0^{y_0} \left( \int_0^y [f(y)]^{1/n} dy \right) dy + \int_{y_0}^{1/2} \left( \int_y^{y_0} [-f(y)]^{1/n} dy \right) dy \right]^{-1} \quad (2.78)$$

Par conséquent, en tenant compte de l'équation (2.77),  $u(y)$ ,  $\theta_T(y)$  et  $\theta_S(y)$  s'écrivent :

$$u(y) = D_n \psi_c F(y) \quad (2.79)$$

$$\theta_T(y) = C_T D_n \psi_c \left[ G(y) - \int_0^1 G(y) dy \right] - b \left[ y - \frac{1}{2} \right] \quad (2.80)$$

$$\theta_S(y) = \frac{Le C_S + M C_T}{C_T} \theta_T(y) + \left[ \frac{b(Le C_S + M C_T)}{C_T} - d \right] \left[ y - \frac{1}{2} \right] \quad (2.81)$$

### 2.7.5 Détermination des gradients $C_T$ et $C_S$

Rappelons que l'approximation d'écoulement parallèle n'est valable qu'au cœur de la cavité; c'est-à-dire loin de l'effet des régions d'extrémités. Pour cette raison, les conditions aux limites thermiques et solutales dans la direction  $x$ , exprimées par les équations (2.19)-(2.22), ne peuvent pas être reproduit exactement avec cette approximation. Il convient alors, pour calculer les gradients  $C_T$  et  $C_S$ , de faire des bilan d'énergie et de masse sur un volume de contrôle raccordant la région de l'écoulement parallèle à un bord de la cavité (voir Bejan A. (1983)). On a alors :

$$\int_0^1 u T dy = \int_0^1 \frac{\partial T}{\partial x} dy - \int_0^1 \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0 \text{ or } A} dy \quad (2.82)$$

$$\int_0^1 u S dy = \int_0^1 \frac{\partial S}{\partial x} dy - \int_0^1 \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)_{x=0 \text{ or } A} dy + M \int_0^1 \frac{\partial T}{\partial x} dy - M \int_0^1 \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0 \text{ or } A} dy \quad (2.83)$$

et qui devient, en appliquant les conditions aux limites :

$$\int_0^1 u \theta_T dy = C_T - a \quad \text{et} \quad Le \int_0^1 u \theta_S dy = C_S - M C_T + aM - c \quad (2.84)$$

En remplaçant  $u(y)$ ,  $\theta_T(y)$  et  $\theta_S(y)$  par leurs expressions dans les équations (2.84), on obtient :

$$C_T = \frac{a + b B_n D_n \psi_c}{1 - A_n (D_n \psi_c)^2} \quad \text{et} \quad C_S = \frac{(a + b B_n D_n \psi_c)(M + Le M A_n (D_n \psi_c)^2)}{(1 - A_n (D_n \psi_c)^2)(1 - A_n (Le D_n \psi_c)^2)} +$$

$$\frac{[1 - A_n(D_n\psi_c)^2][a(1 - M) + bB_nD_n\psi_c(2LeM + Le)]}{(1 - A_n(D_n\psi_c)^2)(1 - A_n(LeD_n\psi_c)^2)} \quad (2.85)$$

avec

$$A_n = \int_0^1 F(y)G(y)dy \quad \text{et} \quad B_n = - \int_0^1 yF(y)dy \quad (2.86)$$

En remplaçant ces expressions dans l'équation (2.77), on obtient l'équation transcendante suivante :

$$\begin{aligned} & [A_n^2Le^2D_n^4\psi_c^4 - A_n(Le^2 + 1)D_n^2\psi_c^2 + 1]D_n^n\psi_c^n \\ & + Ra_T[A_nB_n(bLe^2 - LeMNd + LeNd)D_n^3\psi_c^3 + Ra_TA_n(aLe^2 - NcLeM + Nc - NcM)D_n^2\psi_c^2 \\ & - B_n(b + MNd + NdLe)D_n\psi_c] - Ra_T(a + Nc) = 0 \end{aligned} \quad (2.87)$$

Selon les équations (2.78) et (2.86), les coefficients  $A_n$ ,  $B_n$  et  $D_n$  ne dépendent que de  $n$ . Ils sont calculés avec la méthode d'intégration de Gauss-Legendre. Les valeurs de ces coefficients sont présentées avec celles de  $y_0$  dans le tableau 2.5. A partir de ce tableau, on peut noter que  $y_0$  est une fonction croissante de  $n$ , ce qui signifie que la vitesse maximale est décalée de la paroi inférieure en augmentant  $n$ .

**Tableau 2.5:** Dépendence de  $y_0$ ,  $A_n$ ,  $B_n$  et  $D_n$  avec  $n$ .

$n$	$y_0$	$D_n$	$A_n$	$B_n$
0.6	0.19915	2904.6982	$-0.4849 \times 10^{-7}$	$0.1860 \times 10^{-3}$
0.8	0.20608	824.6777	$-0.5998 \times 10^{-6}$	$0.6507 \times 10^{-3}$
1.0	0.21132	383.9999	$-0.2756 \times 10^{-5}$	$0.1389 \times 10^{-2}$
1.2	0.21544	229.6020	$-0.7679 \times 10^{-5}$	$0.2310 \times 10^{-2}$
1.4	0.21877	158.5755	$-0.1604 \times 10^{-4}$	$0.3330 \times 10^{-2}$

### 2.7.6 Transfert de chaleur et de masse

En tenant compte de la nature centro-symétrique du problème aussi des équations (2.62), les expressions des nombres de Nusselt et de Sherwood définis précédemment deviennent :

- **Cavité dont les parois verticales sont actives**

$$\overline{Nu} = \frac{1}{C_T} = 1 - A_n(D_n\psi_c)^2 \quad \text{et} \quad \overline{Sh} = \frac{1}{C_S} = 1 - A_n(LeD_n\psi_c)^2 \quad (2.88)$$

- **Cavité dont les parois horizontales sont actives**

$$\overline{Nu} = \frac{1}{2\theta_T(0)} \quad \text{et} \quad \overline{Sh} = \frac{1}{2\theta_S(0)} \quad (2.89)$$

$\theta_T(0)$  peut être obtenue en exploitant la symétrie centrale de l'écoulement, il vient alors :

$$\begin{aligned} \theta_T(0) &= \frac{b}{2} - C_T Ra_T^{\frac{1}{n}} (C_T + NC_S)^{\frac{1}{n}} \\ &\left[ \frac{(y-y_0)^2}{2} \int_0^{y_0} [f(y)]^{\frac{1}{n}} dy + \int_{y_0}^y \left[ \int_{y_0}^y \left[ \int_Y^{y_0} [-f(y)]^{\frac{1}{n}} dy \right] dy \right] dy + (y-y_0) \int_0^{y_0} \left[ \int_0^y [f(y)]^{\frac{1}{n}} dy \right] dy \right. \\ &\left. + \int_0^{y_0} \left[ \int_0^y \left[ \int_0^y [f(y)]^{\frac{1}{n}} dy \right] dy \right] dy \right] \end{aligned} \quad (2.90)$$

A partir de l'équation (2.70),  $\theta_S(0)$  se déduit de celle donnant  $\theta_T(0)$  par:

$$\theta_S(0) = \frac{LeC_S + MC_T}{C_T} \theta_T(0) - \frac{1}{2} \left[ \frac{b(LeC_S + MC_T)}{C_T} - d \right] \quad (2.91)$$

# Chapitre 3

---

---

## Convection doublement diffusive d'un fluide non-Newtonien dans une cavité rectangulaire horizontale chauffée et salée latéralement

---

---

### 3.1 Introduction

Ce chapitre porte sur une étude analytique et numérique de la convection naturelle induite par double diffusion dans une couche horizontale d'un fluide binaire non-Newtonien. La cavité étudiée est soumise à des flux de chaleur et de masse horizontaux sur ses faces verticales alors que celles horizontales étant supposées adiabatiques et imperméables  $a = c = 1$  et  $b = d = M = 0$ .

L'objectif principal de cette étude est de prédire l'effet du rapport des forces de volume  $N$  sur l'apparition de l'intensité des mouvements convectifs et des transferts de chaleur et de masse résultants. Le problème de la double diffusion dans une couche rectangulaire horizontale chauffée et salée latéralement a été déjà étudié par Makayssi et al. (2008). Néanmoins, les résultats rapportés par ces auteurs ont été limités au cas simple de  $N > 0$ , pour lequel les forces de volume thermiques et solutales coopèrent pour engendrer un flux unicellulaire et anti-horaire. Dans cette étude nous abordons le cas de  $N < 0$ , pour lequel le modèle d'écoulement résultant est plus compliqué et se caractérise par de nombreux phénomènes n'ayant pas cours dans le cas de  $N > 0$ . L'étude comporte aussi des aspects non évoqués dans cette dernière référence pour  $N > 0$ , comme par exemple le régime de la couche limite.

### 3.2 Effet du maillage

Les calculs numériques dépendent fortement du maillage choisi, il est nécessaire alors de faire des tests sur l'effet du maillage. La taille du maillage est choisie de manière à trouver le meilleur compromis entre le temps d'exécution et la précision souhaitée des résultats. La procédure est basée sur le raffinement de la grille jusqu'à ce que la solution numérique concorde, avec une précision raisonnable, avec celle du flux parallèle analytique, développée dans le chapitre précédent. Ainsi, dans la limite des valeurs retenues pour  $A$ ,  $Le$ ,  $N$ ,  $n$ ,  $Pr$  et  $Ra_T$ , les tableaux 3.1 à 3.3 montrent qu'une grille uniforme de  $381 \times 121$  est jugée suffisante pour modéliser avec précision les champs du débit, de la température et de la concentration au sein

d'une cavité allongée ayant un rapport d'aspect  $A = 24$ . Les valeurs des tailles du pas du temps utilisées pour les simulations ont été choisies entre  $10^{-5}$  et  $10^{-3}$ , en fonction des paramètres régissant et des conditions initiales, qui étaient soit l'état de repos, soit une solution obtenue à partir d'une exécution précédente du code numérique. Les résultats illustrés sur les tableaux 3.1 à 3.3, montrent l'effet du maillage sur la précision des valeurs de la fonction de courant, du nombre de Nusselt moyen et du nombre de Sherwood moyen.

**Tableau 3.1 :** Effet du maillage sur la précision des valeurs de  $\psi_c$ ,  $\overline{Nu}$  et  $\overline{Sh}$  pour  $A = 24$ ,  $Pr = 100$ ,  $Le = 10$ ,  $Ra_T = 10^4$ ,  $n = 0.6$  et différentes valeurs de  $N$ .

N		Solution numérique					Solution analytique
		Grilles (181×61)	(281×81)	(381×121)	(421×121)	(581×281)	
0	$\psi_c$	7.5914	7.6153	7.6151	7.6151	7.6150	7.6149
	$\overline{Nu}$	24.8272	24.7563	24.7391	24.7391	24.7279	24.7252
	$\overline{Sh}$	2444.968	2477.023	2483.193	2484.480	2483.851	2473.523
5	$\psi_c$	7.7296	7.7486	7.7454	7.7447	7.7456	7.7434
	$\overline{Nu}$	25.7211	25.6095	25.5750	25.5711	25.5927	25.5528
	$\overline{Sh}$	2567.666	2621.744	2646.312	2652.978	2648.735	2662.164
10	$\psi_c$	7.8578	7.8689	7.8599	7.857	7.8601	7.8525
	$\overline{Nu}$	26.5693	26.3996	26.330	26.317	26.3495	26.2775
	$\overline{Sh}$	2686.727	2761.716	2808.368	2822.951	2810.633	2852.010

**Table 3.2 :** Effet du maillage sur la précision des valeurs de  $\psi_c$ ,  $\overline{Nu}$  et  $\overline{Sh}$  pour  $A = 24$ ,  $Pr = 100$ ,  $Le = 10$ ,  $Ra_T = 10^4$ ,  $n = 1.0$  et différentes valeurs de  $N$ .

N		Solution numérique					Solution analytique
		Grilles (181×61)	(281×81)	(381×121)	(421×121)	(581×281)	
0	$\psi_c$	3.7974	3.7972	3.7970	3.7970	3.7970	3.7970
	$\overline{Nu}$	6.8696	6.8647	6.8612	6.8612	6.8589	6.8584
	$\overline{Sh}$	592.1739	589.866	588.672	588.450	587.656	586.846
5	$\psi_c$	3.8765	3.8766	3.8766	3.8766	3.8767	3.8768
	$\overline{Nu}$	7.1170	7.1126	7.1093	7.1094	7.1073	7.1074
	$\overline{Sh}$	617.197	614.929	613.737	613.517	612.720	611.743
10	$\psi_c$	3.9518	3.9520	3.9520	3.9521	3.9522	3.9528
	$\overline{Nu}$	7.3568	7.3527	7.3496	7.3498	7.3479	7.3493
	$\overline{Sh}$	641.611	639.417	638.234	638.018	637.217	635.936

**Tableau 3.3 :** Effet du maillage sur la précision des valeurs de  $\psi_c$ ,  $\overline{Nu}$  et  $\overline{Sh}$  pour  $A = 24$ ,  $Pr = 100$ ,  $Le = 10$ ,  $Ra_T = 10^4$ ,  $n = 1.4$  et différentes valeurs de  $N$ .

N		Solution numérique					Solution analytique
		Grilles (181×61)	(281×81)	(381×121)	(421×121)	(581×281)	
0	$\psi_c$	2.1461	2.1454	2.1450	2.1450	2.1448	2.1448
	$\overline{Nu}$	2.8609	2.8585	2.8568	2.8568	2.8558	2.8557
	$\overline{Sh}$	189.0381	187.805	187.197	187.085	186.7104	186.571
5	$\psi_c$	2.2036	2.2031	2.2030	2.2030	2.2029	2.2029
	$\overline{Nu}$	2.9619	2.9599	2.9584	2.9585	2.9576	2.9575
	$\overline{Sh}$	199.215	197.998	197.394	197.283	196.908	196.759
10	$\psi_c$	2.2566	2.2563	2.2563	2.2563	2.2563	2.2563
	$\overline{Nu}$	3.0573	3.0557	3.0543	3.0544	3.0536	3.0537
	$\overline{Sh}$	208.823	207.616	207.014	206.904	206.528	206.370

### 3.3 Influence du rapport d'aspect de la cavité

Nous avons cité dans le chapitre précédent que le concept de l'écoulement parallèle n'est valable que pour le cas d'une couche infinie ( $A \gg 1$ ). Pour vérifier le bien-fondé de cette approche, nous réalisons une étude de l'effet du rapport d'aspect de la cavité sur la structure de l'écoulement afin de déterminer le rapport de forme à partir duquel l'écoulement peut être considéré comme parallèle. Nous présentons des résultats numériques typiques du nombre de Sherwood moyen  $\overline{Sh}$  en fonction du rapport d'aspect  $A$ , sur la figure 3.1, pour  $Le = 10$ ,  $N = 10$ ,  $Ra_T = 10^4$  et différentes valeurs de  $n$ . On voit que le nombre de Sherwood  $\overline{Sh}$  devient indépendant du rapport de forme lorsque  $A \geq 24$ .

En effet, plus on augmente la valeur de  $A$ , les résultats de la solution numérique convergent asymptotiquement vers la solution prédite par la théorie de l'écoulement parallèle, qui est indépendante du rapport de forme de la cavité. Un bon accord est observé à partir de  $A = 24$ , pour cette raison les résultats numériques dans le présent travail, sont obtenus pour un facteur de forme  $A = 24$ . Il est à remarquer que, dans le cas de la convection thermique pure, Lamsaadi et al. (2006) ont trouvé que cette limite se réduit à 8, ce qui montre à l'évidence le rôle retardateur du gradient solutal vis-à-vis du régime asymptotique. Selon Mamou et al. (1996), un tel résultat peut être généralisé pour une large gamme de valeurs de  $Le$  et  $N$ . De plus, comme on peut le voir à partir des tableaux 3.1-3.3 et de la figure 3.1, les résultats analytiques concordent bien avec ceux numériques, ce qui valide la valeur asymptotique de  $A$  dans les plages considérées des paramètres de contrôle.

### 3.4 Effet du nombre de Prandtl

Il a été rapporté par plusieurs auteurs (Ozoe et Churchill (1972), Makayssi et al. (2008), Lamsaadi et al. (2006)) que la convection est insensible aux variations du nombre de Prandtl  $Pr$ , à condition que ce paramètre soit suffisamment grand. C'est le cas pour les fluides non-Newtoniens et pour une large catégorie de fluides ayant un comportement Newtonien. Par conséquent,  $Pr$  n'est pas considéré comme un paramètre d'influence dans ce travail. Les simulations numériques ont été réalisées avec une valeur fixe de ce nombre  $Pr = 100$ .

### 3.5 Lignes de courant, isothermes et iso-concentrations

Les résultats numériques, illustrés par la figure 3.2, obtenus pour  $A = 24$ ,  $Pr = 100$ ,  $Le = 10$ ,  $N = 10$  et différentes valeurs de  $n$  et  $Ra_T$  : (a)  $Ra_T = 10^3$ , (b)  $Ra_T = 10^4$  et (c)  $Ra_T = 10^5$ , illustrent les lignes de courant, les isothermes et les iso-concentrations. La figure montre que l'écoulement dans la partie centrale de la cavité est parallèle suivant la direction  $x$ . De plus, la température et la concentration, dans le cœur de la cavité, sont stratifiées d'une façon linéaire dans la direction horizontale, ce qui prouve la validité de l'approximation parallèle utilisé dans cette étude.

### 3.6 Régime de la couche limite

Dans la présente étude, il est à noter que, le régime de la couche limite peut être atteint pour les grands nombres de Rayleigh thermiques (situation pour laquelle la force du flux convectif est suffisamment grande) et les équations (2.73) et (2.84) peuvent être facilement réduites à :

$$\psi_c = \frac{1}{D_n} \left(-\frac{1}{A_n}\right)^{\frac{1}{2+n}} \left(1 + \frac{N}{Le^2}\right)^{\frac{1}{2+n}} Ra_T^{\frac{1}{2+n}} \quad (3.1)$$

$$\overline{Nu} = (-A_n)^{\frac{n}{2+n}} \left(1 + \frac{N}{Le^2}\right)^{\frac{2}{2+n}} Ra_T^{\frac{2}{2+n}} \quad (3.2)$$

$$\overline{Sh} = Le^2 (-A_n)^{\frac{n}{2+n}} \left(1 + \frac{N}{Le^2}\right)^{\frac{2}{2+n}} Ra_T^{\frac{2}{2+n}} \quad (3.3)$$

### 3.7 Effets du nombre de Rayleigh et de l'indice de comportement

#### 3.7.1 Cas des forces de flottabilité coopérantes ( $N > 0$ )

Dans ce cas, on observe l'apparition d'une cellule convective tournant dans le sens antihoraire en raison de l'aspect coopérant des effets thermiques et solutaux, qui agissent ensemble de droite à gauche. Ceci est confirmé par le signe de  $\psi_c$  qui est constamment positif

comme le montre la figure 3.3, illustrant les évolutions de  $\psi_c$ ,  $\overline{Nu}$  et  $\overline{Sh}$  en fonction de  $Ra_T$ , pour  $N = 10$ ,  $Le = 10$  et différentes valeurs de  $n$ . Cette figure montre également que, par comparaison au cas Newtonien ( $n = 1$ ), le comportement rhéo-fludifiant ( $0 < n < 1$ ), améliore le flux et les intensités du transfert de chaleur et de masse tandis que celui rhéo-épaississant ( $n > 1$ ) conduit à l'effet inverse. Pour plus de détails sur les effets combinés de  $n$ ,  $N$  et  $Ra_T$  sur l'écoulement du fluide et les caractéristiques du transfert de chaleur et de masse pour ( $N > 0$ ), le lecteur est renvoyé à l'article de Makayssi et al. (2008). Dans la présente étude, nous abordons les aspects non évoqués dans cette dernière référence pour  $N > 0$ , comme par exemple le régime de la couche limite. Ce dernier est atteint aux grands nombres de Rayleigh thermiques et il est caractérisé sur la figure 3.3 par augmentation monotone des quantités  $\psi_c$ ,  $\overline{Nu}$  et  $\overline{Sh}$  en raison de la contribution évidente des effets de flottabilité dans la promotion du régime de convection. En d'autres termes, selon la figure 3.2, une couche limite se développe près des parois verticales, tandis que le fluide central est immobile. On observe que les lignes de courant sont rapprochées, c'est-à-dire encombrées près des parois solides, et les isothermes et les iso-concentrations ont tendance à être plus resserrées au niveau des parois verticales, exprimant de forts gradients de température et de concentration près de ces frontières et soutiennent le développement de deux couches limites. Ce comportement est bien corroboré par les variations de  $\psi_c$ ,  $\overline{Nu}$  et  $\overline{Sh}$  de la figure 3.3, qui ont tendance à être des droites lorsque  $Ra_T$  est suffisamment grand (en utilisant l'échelle logarithmique), indiquant l'existence d'une couche limite pour les grands  $Ra_T$ . Ce comportement est confirmé sur la figure 3.3 où on peut voir que les résultats du régime de la couche limite (Eqs. (3.1)-(3.3)), illustrés en pointillés, concordent bien à la fois avec la solution d'écoulement parallèle (traits pleins) et les résultats numériques (symboles) lorsque  $Ra_T$  est suffisamment grand pour toutes les valeurs sélectionnées de  $n$  et  $N$ . Il est à noter aussi que des observations analogues ont été rapportées dans le cas de la convection thermique pure ( $N = 0$ ) pour lequel les forces de flottabilité solutales sont absentes.

### 3.7.2 Cas des forces de flottabilité opposées ( $N < 0$ )

- $-1 \leq N < 0$

Dans la gamme de  $-1 \leq N < 0$ , les forces de flottabilité thermiques et solutales agissent dans des directions opposées mais les forces de flottabilité thermiques imposent la rotation antihoraire de l'écoulement quelles que soient les valeurs de  $n$  et  $N$  dans la gamme choisie. Les variations de  $\psi_c$  en fonction de  $Ra_T$ , illustrées sur la figure 3.4, montrent que le signe de  $\psi_c$  est toujours positif

et ses variations sont caractérisées par des changements importants dans les tendances, en fonction de la valeur du coefficient de flottabilité dans cette plage. Cette figure illustre le diagramme de bifurcation obtenu à la fois par l'approximation du flux parallèle et la solution numérique (pour les branches stables) pour  $Le = 10$  et différentes valeurs de  $N$  et  $n$ . D'après cette figure, le problème a une multiplicité de solutions pour  $N < N^*$ , avec  $N^* = -0.7187, -0.8918$  et  $-0.9696$  pour  $n = 0.6, 1$  et  $1.4$ , respectivement. Pour de faibles valeurs de  $Ra_T$ , on observe que pour  $N < N^*$  avec  $N \neq -1$ , l'effet de la convection est faible et peut être vu comme une dégénérescence de la solution conductrice obtenue pour  $N = -1$  comme on peut le démontrer ci-après. Ce type d'écoulement est maintenu jusqu'à un nombre de Rayleigh critique  $Ra_{TC}^{Sub1}$  où se produit un premier nœud de bifurcation. La branche instable (représentée par une ligne pointillée) est connectée à un autre nœud de bifurcation se produisant à un nombre de Rayleigh critique  $Ra_{TC}^{Sub2}$ . Ensuite, en augmentant  $Ra_T$ , les résultats obtenus pour  $-1 < N < 0$  et  $N = -1$  deviennent approximativement identiques à partir d'une valeur seuil de  $Ra_T$ . Sur la figure 3.4, la zone de bifurcation est agrandie pour mieux apprécier les détails. Ainsi, nous pouvons observer que  $Ra_{TC}^{Sub2}$  augmente à la fois avec  $n$  et  $|N|$  tandis que  $Ra_{TC}^{Sub1}$  augmente/diminue en augmentant  $|N|/n$ . En revanche, dans la gamme  $Ra_{TC}^{Sub2} \leq Ra_T \leq Ra_{TC}^{Sub1}$ , trois solutions sont possibles pour un  $Ra_T$  donné : deux stables (lignes solides) et une instable (branche en pointillés) qui disparaît pour  $N \geq N^*$ . Il est à noter que le nombre de Rayleigh thermique sous-critique,  $Ra_{TC}^{Sub}$ , au-dessus duquel le flux convectif résultant est déclenché pour  $N = -1$  (forces de flottabilité opposées et d'égales intensités) est tel que,  $Ra_{TC}^{Sub2} < Ra_{TC}^{Sub} < Ra_{TC}^{Sub1}$ . D'après la figure 3.4,  $Ra_{TC}^{Sub2} \rightarrow Ra_{TC}^{Sub}$  et  $Ra_{TC}^{Sub1} \rightarrow \infty$  lorsque  $N$  tend vers  $-1$  et que le premier nœud de bifurcation vers le régime conducteur. Un zoom de la zone de début de convection est inclus dans cette figure pour illustrer une telle tendance.

Pour  $-1 < N < 0$ , l'existence de la multiplicité de solutions dans l'intervalle  $Ra_{TC}^{Sub2} \leq Ra_T \leq Ra_{TC}^{Sub1}$  a été démontrée numériquement et illustrée ici pour  $Ra_T = 200$ ,  $Le = 10$ ,  $N = -0.99$  et différentes valeurs de  $n$ . Par conséquent, la figure 3.5-a montre les résultats obtenus en commençant le code numérique avec le flux convectif obtenu par exemple à  $Ra_T = 200$  et  $N = 0$ . Sur cette figure, le champ de concentration apparaît plus sensible à l'effet de convection que le champ de température mais cette sensibilité est progressivement atténuée en augmentant le paramètre  $n$ . En effet, en augmentant ce paramètre,  $\psi_c$  subit une baisse importante de 1.122 (pour le fluide pseudo-plastique) à 0.187 (pour le fluide dilatant) en passant par 0.423

(pour le cas Newtonien). La deuxième solution, représentée sur la figure 3.5-b, a été obtenue en utilisant l'état de repos comme condition initiale pour le code numérique. Par comparaison avec la solution de la figure 3.5-a, la force de la circulation d'écoulement est considérablement plus faible et les champs de température et de concentration sont presque ceux du régime purement diffusif. La figure 3.6 illustre les profils de la vitesse horizontale le long du plan médian vertical correspondant à ces deux solutions. La faiblesse de la vitesse pour la deuxième solution (solution (b)) est évidente par rapport à la première (solution (a)). Cette figure montre également l'excellent accord entre l'écoulement parallèle et les solutions numériques. Pour cette combinaison des paramètres directeurs, une troisième solution (lignes pointillées sur la figure 3.6 est également prédite par l'approximation du flux parallèle; elle correspond à une branche instable qui n'a pas pu être vérifiée numériquement.

- **N = -1**

Pour  $N = -1$  et  $Le \neq 1$ ,  $Ra_{TC}^{Sub}$  a été prédit en utilisant la théorie des écoulements parallèles décrite dans le chapitre 2. Ensuite, selon l'équation (2.87), la valeur de  $\psi_c$  peut être évaluée à partir de l'expression suivante :

$$\psi_c^n [A_n^2 Le^2 D_n^4 \psi_c^4 - A_n (Le^2 + 1) D_n^2 \psi_c^2 + Ra_T A_n (Le^2 - 1) D_n^{2-n} \psi_c^{2-n} + 1] = 0 \quad (3.4)$$

D'où  $Ra_{TC}^{Sub}$  est donné par :

$$Ra_{TC}^{Sub} = \frac{A_n^2 Le^2 D_n^4 \psi_{cc}^4 - A_n (Le^2 + 1) D_n^2 \psi_{cc}^2 + 1}{A_n (1 - Le^2) D_n^{2-n} \psi_{cc}^{2-n}} \quad (3.5)$$

avec

$$\psi_{cc} = \left[ \frac{n(Le^2 + 1) - [n^2(Le^2 - 1)^2 + 16Le^2]^{\frac{1}{2}}}{2(2 + n)A_n Le^2 D_n^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.6)$$

Les valeurs de  $Ra_{TC}^{Sub}$  sont indiquées sur la zone agrandie de la figure 3.4 et leurs valeurs sont données dans le tableau 3.4 pour  $Le = 10$  et diverses valeurs de  $n$ . Comme on peut le voir sur ce tableau,  $Ra_{TC}^{Sub}$  est une fonction croissante de  $n$  en raison de l'augmentation de la viscosité apparente avec ce paramètre.

**Tableau 3.4 :** Dépendance de  $Ra_{TC}^{Sub}$  de  $n$  pour  $N = -1$  et  $Le = 10$

$n$	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
$Ra_{TC}^{Sub}$	74.7294	98.1153	122.8898	147.3386	168.9767

Selon l'éq. (3.4), trois racines sont théoriquement possibles lorsque  $Ra_T \geq Ra_{TC}^{Sub}$  pour des valeurs données de  $Ra_T$ ,  $n$  et  $Le$ . Ainsi, un état de repos instable, caractérisé par  $\psi_c = 0$ , est une solution au problème. Il est à noter que cette solution n'est possible numériquement que lorsque  $Ra_T$  est inférieur à une valeur critique  $Ra_{TC}^{Sup}$ , où  $Ra_{TC}^{Sup} = 2.5 \times 10^6$ , 738.3 et 346.7 pour  $n = 0.6$ , 1 et 1.4, respectivement (figure 3.7). Les deux autres solutions sont convectives ( $\psi_c \neq 0$ ). La solution correspondant au mode convectif supérieur (représentée par une ligne continue sur la figure 3.7), s'est avérée numériquement stable et le flux unicellulaire correspondant tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Cependant, il n'a pas été possible d'obtenir des résultats numériques pour la branche instable inférieure (ligne pointillée). D'autre part, en démarrant le code numérique avec un état conducteur ou un état de convection d'amplitude finie comme conditions initiales, en augmentant ou en diminuant  $Ra_T$ , la solution résultante suit une boucle d'hystérésis. Ce phénomène est représentée par des flèches sur la figure 3.7 où sont présentés les résultats de la situation particulière  $N = -1$ . Sur les figures 3.8 et 3.9, sont représentés les résultats analytiques et numériques, des transferts thermiques et massiques, en terme de Nusselt et Sherwood, obtenus pour  $Le = 10$ ,  $N = -1$  et différentes valeurs de  $n$ . Ainsi, on observe que les nombres de Nusselt et Sherwood présentent des variations similaires à celles de la fonction de courant,  $\psi_c$ , et un bon accord a été observé entre les prédictions analytiques et les simulations numériques.

Pour le cas de  $N = -1$ , l'existence de la multiplicité des solutions pour  $Ra_T \geq Ra_{TC}^{Sub}$  a été démontrée numériquement et illustrée pour  $Ra_T = 200$ ,  $Le = 10$  et différentes valeurs de  $n$ . Ainsi, la figure 3.10-a montre les résultats correspondant au mode convectif supérieur, obtenu en commençant le code numérique par le flux convectif obtenu par exemple à  $Ra_T = 300$  et  $N = 0$ , ( $\psi_c = 1.502$ , 0.627 et 0.302 pour  $n = 0.6$ , 1 et 1.4, respectivement), tandis que la figure 3.10-b correspond à la solution obtenue en utilisant le régime conducteur pour initialiser le code numérique. De plus, le cas de  $N = -1$  et  $Le = 1$ , correspond à un régime purement diffusif qui reste stable indépendamment de  $Ra_T$  et  $n$ . Deux facteurs sont à l'origine de ce comportement caractérisé par les effets opposés des forces thermiques et solutales et l'égalité des diffusivités thermique et celles des espèces. Notez que pour ce cas particulier, l'Eq. (3.4) admet  $\psi_c = 0$  comme solution unique.

- **$N < -1$**

Le cas de  $N < -1$  diffère de celui de  $N = -1$  par le fait que le régime conducteur n'est plus une solution stable. Une faible valeur de  $Ra_T$  engendre une circulation horaire du fluide. En effet,

les forces de flottabilité thermiques et solutales s'opposent avec des intensités différentes. La force de flottabilité solutale prévaut et impose la rotation de la cellule dans le sens horaire. Pour ce cas, trois racines sont théoriquement possibles lorsque  $Ra_T \geq Ra_{TC}^{Sub}$  comme le montre la figure 3.11, illustrant l'évolution de  $\psi_c$  en fonction de  $Ra_T$  pour  $N = -2$ ,  $Le = 10$  et différentes valeurs de  $n$ . A partir de cette figure, les courbes à une seule branche correspondent au débit horaire ( $\psi_c < 0$ ) et les valeurs numériques correspondantes sont représentées par des carrés pleins. Les courbes à deux branches sur la figure sont liées à l'écoulement dans le sens antihoraire ( $\psi_c > 0$ ). Ces courbes apparaissent au-delà d'un nombre de Rayleigh thermique critique  $Ra_{TC}^{Sub}$ , qui dépend de  $N$  et  $n$ , et les valeurs numériques correspondantes sont indiquées par des cercles pleins. Pour ce type d'écoulement, les portions de courbes indiquées en pointillés n'ont pas été obtenues numériquement pour toutes les valeurs explorées de  $N$ ,  $n$ , et  $Ra_T$ , et ce, malgré les nombreux tests menés pour différentes conditions initiales. Dans toutes les études précédentes utilisant l'approximation des flux parallèles (Ouriemi et al. (2006), Alloui et al. (2010) et de nombreux autres auteurs), il n'a pas été possible de confirmer numériquement les résultats des branches instables. Ces solutions ne sont pas probablement physiques.

Les courbes en traits pleins correspondant aux flux horaire et antihoraire sont validées numériquement (carrés et ronds pleins) pour des  $Ra_T$  variant respectivement dans les plages  $0 \leq Ra_T < Ra_{TC}^2$  et  $Ra_{TC}^1 < Ra_T \leq 5 \times 10^6$ . Les valeurs de  $Ra_{TC}^1$  et  $Ra_{TC}^2$ , issues de l'étude numérique, sont repérées par les traits pointillés verticaux.

Il convient de souligner que, pour  $N < -1$ ,  $Ra_{TC}^1$  et  $Ra_{TC}^2$  qui sont prédits numériquement, augmentent en augmentant  $n$  pour une valeur donnée de  $N$ . Cela signifie que la transition numérique du flux horaire et celui antihoraire (en augmentant  $Ra_T$  sur la branche stable inférieure) et la transition inverse du flux antihoraire vers celui horaire (en diminuant  $Ra_T$  sur la branche supérieure) sont toutes retardés par les effets visqueux apparents. Quant aux nombres de Rayleigh sous-critiques  $Ra_{TC}^{Sub}$ , leurs expressions ont été prédites analytiquement à partir de l'Eq. (2.87) et leurs variations en fonction de  $N$  sont illustrées sur la figure 3.12 pour  $Le = 10$  et diverses valeurs de  $n$ . On peut voir sur cette figure que  $|N|$  et  $n$  ont des effets similaires sur  $Ra_{TC}^{Sub}$ . En fait, pour un  $|N|/n$  donné, une augmentation de  $n/|N|$  engendre une augmentation de  $Ra_{TC}^{Sub}$ , exprimant par ce fait la contribution significative des effets solutaux sur la convection, imposant en conséquence, la rotation dans le sens horaire de la cellule.

De plus, pour  $N < -1$ , la solution numérique résultante, présentée sur la figure 3.11 montre une boucle d'hystérésis indiquée par des flèches, qui dépend des conditions initiales

utilisées pour démarrer le code numérique. Plus précisément, en commençant les calculs à partir de  $Ra_T = 0$  ( $Ra_T = Ra_{TC}^2$ ), une augmentation/(diminution) graduelle de  $Ra_T$  combinée à l'utilisation d'une solution précédente comme estimation initiale pour la valeur suivante de ce paramètre, montre que la solution d'écoulement horaire/(antihoraire) persiste jusqu'à ce que  $Ra_T$  atteigne une valeur seuil  $Ra_{TC}^2/(Ra_{TC}^1)$ , puis une transition se produit vers l'écoulement antihoraire/(horaire).  $Ra_{TC}^2$  et  $Ra_{TC}^1$  dépendent tous les deux de  $n$ . Les transitions sont telles que, pour  $Ra_T \geq Ra_{TC}^2$  ( $Ra_T \leq Ra_{TC}^1$ ), la multiplicité des solutions disparaît numériquement, du fait de l'importance des forces de flottabilité thermique/(solutale), et seulement le mode antihoraire/(horaire) subsiste dans l'enceinte. L'existence de solutions multiples dans l'intervalle  $Ra_{TC}^1 \leq Ra_T \leq Ra_{TC}^2$  a été démontrée numériquement et illustrée sur la figure 3.13 dans le cas de  $N = -2$  pour  $Le = 10$  et différentes valeurs du couple  $(n, Ra_T)$ . Ainsi, avec les mêmes valeurs des paramètres directeurs, deux solutions sont numériquement possibles, correspondant à des flux dans le sens antihoraire (Fig. 3.13-a) et horaire (Fig. (3.13-b)). Les résultats de la figure 3.13-a ont été obtenus en commençant le code numérique avec un flux convectif correspondant à  $Ra_T > Ra_{TC}^2$ , tandis que les résultats de la figure 3.13-b ont été obtenus en utilisant l'état de repos comme condition initiale. Le flux dans le sens antihoraire est visiblement plus intense que dans le sens horaire. En conséquence, les champs de température et de concentration sont plus affectés dans le cas d'un écoulement antihoraire. Ces observations sont cohérentes avec les profils des vitesses horizontaux le long du plan médian vertical correspondant à ces deux solutions et illustrés sur la figure 3.14. Sur cette figure, les amplitudes atteintes par les vitesses du sens antihoraire sont largement supérieures à celles correspondant à l'écoulement du sens horaire. Ces solutions analytiques correspondant aux branches stables sont validées numériquement avec un excellent accord. Le troisième profil de vitesse analytique, correspondant à la branche instable, n'a pas pu être obtenu numériquement.

Comme il a été discuté précédemment, pour toutes les valeurs de  $N$  explorées dans cette étude, le régime de la couche limite est finalement atteint aux grands nombres de Rayleigh thermiques ( $Ra_T \rightarrow \infty$ ), lorsque le schéma d'écoulement résultant est dans le sens antihoraire. Pour cette situation, on peut facilement déduire que :

$$\psi_c^* = \frac{\psi_c}{\left(1 + \frac{N}{Le^2}\right)^{\frac{1}{2+n}}} = \frac{(-A_n)^{-\frac{1}{2+n}}}{D_n} Ra_T^{\frac{1}{2+n}} \quad (3.7)$$

$$\overline{Nu}^* = \frac{\overline{Nu}}{\left(1 + \frac{N}{Le^2}\right)^{\frac{1}{2+n}}} = (-A_n)^{\frac{n}{2+n}} Ra_T^{\frac{2}{2+n}} \quad (3.8)$$

$$\overline{Sh}^* = \frac{\overline{Sh}}{Le^2 \left(1 + \frac{N}{Le^2}\right)^{\frac{1}{2+n}}} = (-A_n)^{\frac{n}{2+n}} Ra_T^{\frac{2}{2+n}} \quad (3.9)$$

Les forces normalisées de convection,  $\psi_c^*$ , du transfert de chaleur,  $\overline{Nu}^*$ , et de masse  $\overline{Sh}^*$ , données par les équations (3.7)-(3-9), dépendent de l'indice de la loi en puissance  $n$ , mais ils sont indépendants à la fois de  $Le$  et de  $N$ . Les résultats obtenus avec ces équations sont présentés sur la figure 3.15 par des traits pleins et ils sont en bon accord avec les résultats numériques (représentés par des symboles) obtenus pour diverses combinaisons des paramètres déterminants. Par conséquent, le rapport du nombre moyen de Sherwood par rapport au nombre moyen de Nusselt tend vers une valeur asymptotique qui est  $Le^2$  indépendamment de  $N$  et de l'indice de la loi de puissance  $n$  (voir figure 3.16). Ceci est confirmé par les équations. (3.2) et (3.3), correspondant au régime de la couche limite.

Dans le cas des mélanges Newtoniens, la relation:

$$\psi_c^* = 0.19 Ra_T^{\frac{1}{3}} \quad (3.10)$$

Cette relation a été déjà obtenue par Ouriemi et al. (2006) et Lamsaadi et al. (2018) aux grands nombres de Rayleigh thermiques, tout en étudiant analytiquement et numériquement la convection naturelle dans des cavités horizontales peu profondes remplies de fluides binaires dans le cas de frontières horizontales rigides-rigides.

### 3.8 Effet du rapport des forces de volume sur l'intensité d'écoulement

L'effet du rapport de flottabilité  $N$  sur l'intensité de l'écoulement est illustré numériquement et analytiquement sur la figure 3.17 en termes de variations de  $\psi_c$  en fonction de  $N$  pour  $Le = 10$  et diverses valeurs de  $n$  et  $Ra_T$ . Le rapport de flottabilité  $N$  est varié dans la gamme -10 à 10 pour couvrir l'écoulement solutal dominant dans le cas opposant ( $N = -10$ ) et aidant ( $N = 10$ ) des effets de flottabilité, en passant par le cas d'écoulement purement thermique ( $N = 0$ ). En l'absence d'effets solutales ( $N = 0$ ), l'écoulement est induit uniquement par les gradients de température imposés et le schéma d'écoulement résultant est une circulation unicellulaire antihoraire pour laquelle la valeur de  $\psi_c$  est positive. En augmentant le taux de flottabilité de 0 à 10 pour un couple donné ( $n, Ra_T$ ), l'écoulement devient progressivement

dominé par les forces de flottabilité thermosolutales. Pour  $N < -1$ , les forces de flottabilité thermiques et solutales agissent dans des directions opposées et l'écoulement est de plus en plus dominé par les espèces de masse lorsque  $|N|$  augmente ou  $Ra_T / (n)$  diminue/(augmente). Cependant, la circulation du flux est horaire et  $\psi_c$  est négatif. En diminuant  $|N|$ , cette situation se maintient jusqu'à  $N = -1$  pour laquelle les forces de flottabilité induites par les effets thermiques et solutales sont opposées et d'égales intensités. Dans la gamme  $-1 < N < 0$ , les forces de flottabilité thermiques prévalent, imposant le signe de  $\psi_c$  positif quels que soient  $n$  et  $Ra_T$ .

D'après la figure 3.17, la multiplicité des solutions est observée pour  $Ra_T > Ra_T^*$ , où  $Ra_T^* = 61.8594, 106.0865$  et  $154.2407$  pour  $n = 0.6, 1$  et  $1.4$ , respectivement. Ainsi, avec les mêmes valeurs des paramètres directeurs, on observe que trois solutions de  $\psi_c$  sont théoriquement possibles ; un négatif et deux positifs (indiqués par des lignes pleines et pointillées) pour  $N_c^2 < N < N_c^1$  ( $N_c^2 < 0$  et  $N_c^1 < 0$ ). Un zoom des courbes de bifurcation est inclus dans cette figure pour afficher plus clairement les valeurs de  $N_c^1$  et  $N_c^2$  qui sont identifiées par des flèches verticales. Les valeurs de  $N_c^1$  et  $N_c^2$  sont prédites analytiquement à partir de l'équation (2.87) dans le cas de  $Ra_T > Ra_T^*$  et leurs variations en fonction de  $Ra_T$  sont illustrées sur la figure 3.18 pour  $Le = 10$  et différentes valeurs de  $n$ . Cette figure montre que  $|N_c^2|$  est une fonction croissante/(décroissante) de  $Ra_T/(n)$  tandis que  $|N_c^1|$  augmente à la fois avec  $Ra_T$  et  $n$ . Lorsque  $Ra_T \rightarrow Ra_T^*$ ,  $|N_c^1| = |N_c^2| \rightarrow |N^*|$ , tandis que lorsque  $Ra_T \rightarrow \infty$ ,  $|N_c^1| \rightarrow 1$  et  $|N_c^2| \rightarrow Le^2$  (i.e.  $|N^*| < |N_c^2| \leq Le^2$  et  $|N^*| < |N_c^1| \leq 1$ ) où les valeurs de  $N^*$  sont données dans la section 3.7 pour  $-1 < N < 0$ .

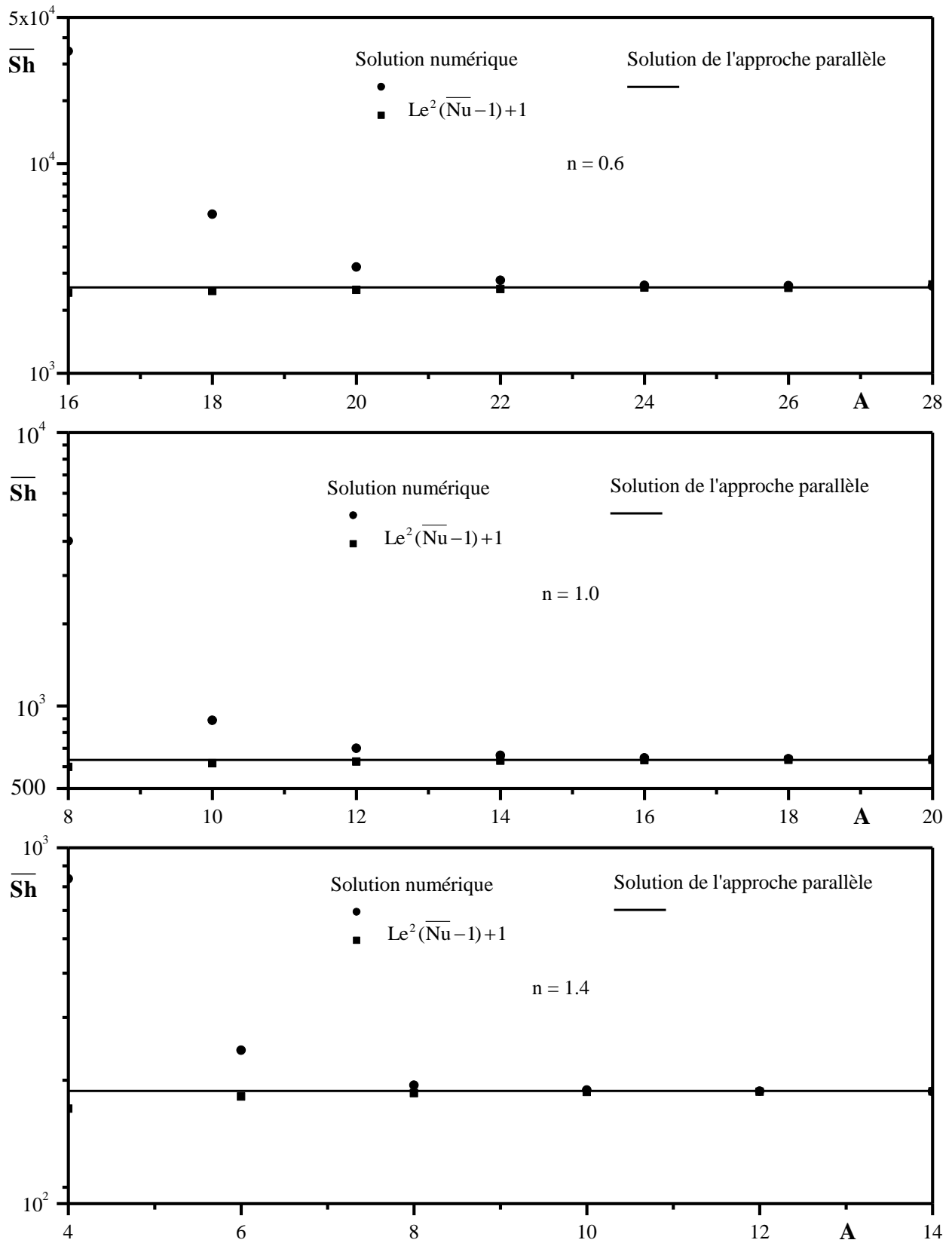
En revanche, dans la plage  $N_c^2 < N < N_c^1$ , deux solutions sont numériquement possibles pour les mêmes valeurs des paramètres directeurs, correspondant à des flux au sens antihoraire ( $\psi_c > 0$ ) et horaire ( $\psi_c < 0$ ) (représentés par des cercles pleins) pour  $Ra_T > Ra_T^*$ . De plus, des transitions mutuelles entre les branches d'écoulement antihoraire et horaire sont observées. Puisque la température et la concentration imposées sur la paroi verticale droite sont plus élevées que celles imposées sur la paroi gauche, la direction d'écoulement résultant engendré par les forces de poussée thermique est dans le sens antihoraire. En revanche, la direction d'écoulement imposée par les forces de flottabilité solutales peut être soit dans le sens antihoraire (cas de  $N > 0$ ) soit dans le sens horaire (cas de  $N < 0$ ). En effet, pour  $Ra_T > Ra_T^*$ , en commençant les calculs à partir de  $N = 0$  et en procédant à une diminution progressive de ce paramètre, on constate que la solution anti-horaire persiste jusqu'à ce que  $N$  atteigne une valeur seuil,  $N_{cr}$  ( $N_c^2 < N_{cr} < -1$ ), qui dépend à la fois de  $n$  et de  $Ra_T$ . Ensuite, une transition se produit vers

l'écoulement dans le sens horaire lorsque les forces de flottabilité solutales prévalent. La valeur absolue de  $N_{cr}$  augmente en augmentant/(diminuant)  $Ra_T/(n)$ . En effet, l'augmentation de  $Ra_T$ , favorable au flux antihoraire, retarde naturellement sa disparition. L'augmentation de la viscosité apparente, caractérisée par l'augmentation de  $n$ , conduit également à un comportement similaire qui nécessite une augmentation substantielle de  $|N|$  pour observer le décalage vers le sens horaire.

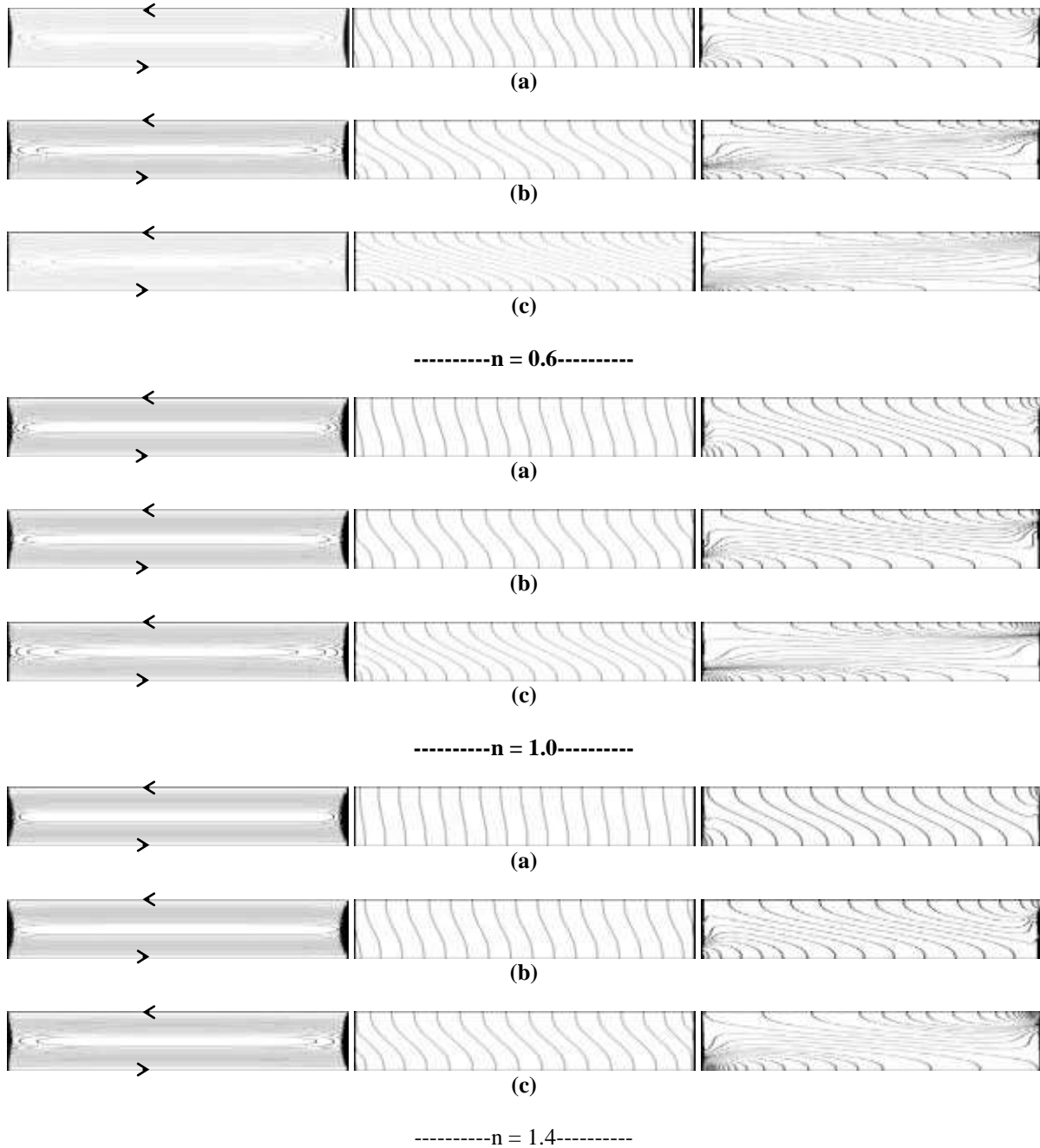
### 3.9 Conclusion

Dans ce chapitre, le problème de la convection naturelle d'un fluide non-Newtonien de type loi en puissance a été étudié numériquement et analytiquement. Il s'agit d'une cavité horizontale soumise à des gradients horizontaux de température et de concentration. L'influence du nombre de Rayleigh  $Ra_T$ , du rapport des forces de volume,  $N$ , et de l'indice de la loi en puissance  $n$  sur l'intensité de l'écoulement et les transferts de chaleur et de masse, a été étudié. Les résultats obtenus ont montré que la solution analytique approximative, développée sur la base de l'hypothèse d'écoulement parallèle dans la région centrale de la cavité, s'avère être en excellent accord avec la solution numérique, obtenue en résolvant les équations gouvernantes complètes avec une méthode des volumes finis. Il a été démontré aussi que  $Ra_T$  et  $n$  ont des effets opposés sur l'écoulement du fluide et les caractéristiques des transferts de chaleur et de masse. Cependant, la convection s'avère plus sensible au changement de  $Ra_T$  pour les fluides pseudo-plastiques que pour ceux ayant un comportement dilatant.

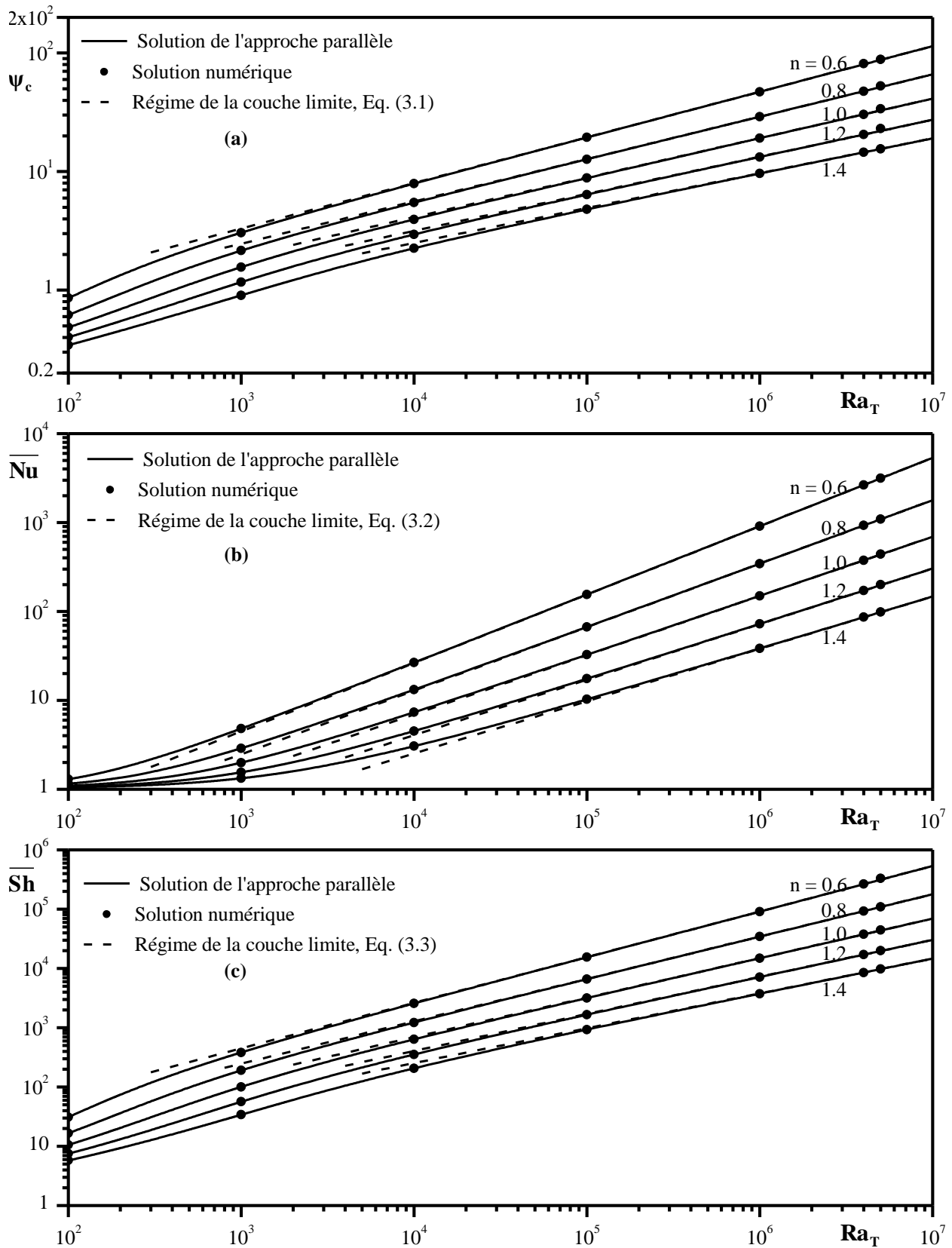
Pour le cas de forces de flottabilité thermiques et solutales opposées ( $N < 0$ ), il a été trouvé qu'une multiplicité de solutions, conduisant à des circulations d'écoulement dans le sens antihoraire et horaire, existent lorsque  $Ra_T$  atteint une valeur critique et la valeur de  $N$  est choisie à l'intérieur d'une gamme spécifique, qui dépend de  $n$ . Un tel comportement n'est pas observé dans le cas où les forces de flottabilité thermiques et solutales sont coopérantes ( $N \geq 0$ ), l'écoulement dans ce cas est unicellulaire et anti-horaire. Pour  $N = -1$ , une solution d'état stationnaire instable, correspondant à un régime purement diffusif, a été prédite. Un régime de couche limite a été finalement atteint pour les grands nombres de Rayleigh thermiques lorsque le schéma d'écoulement résultant est antihoraire.



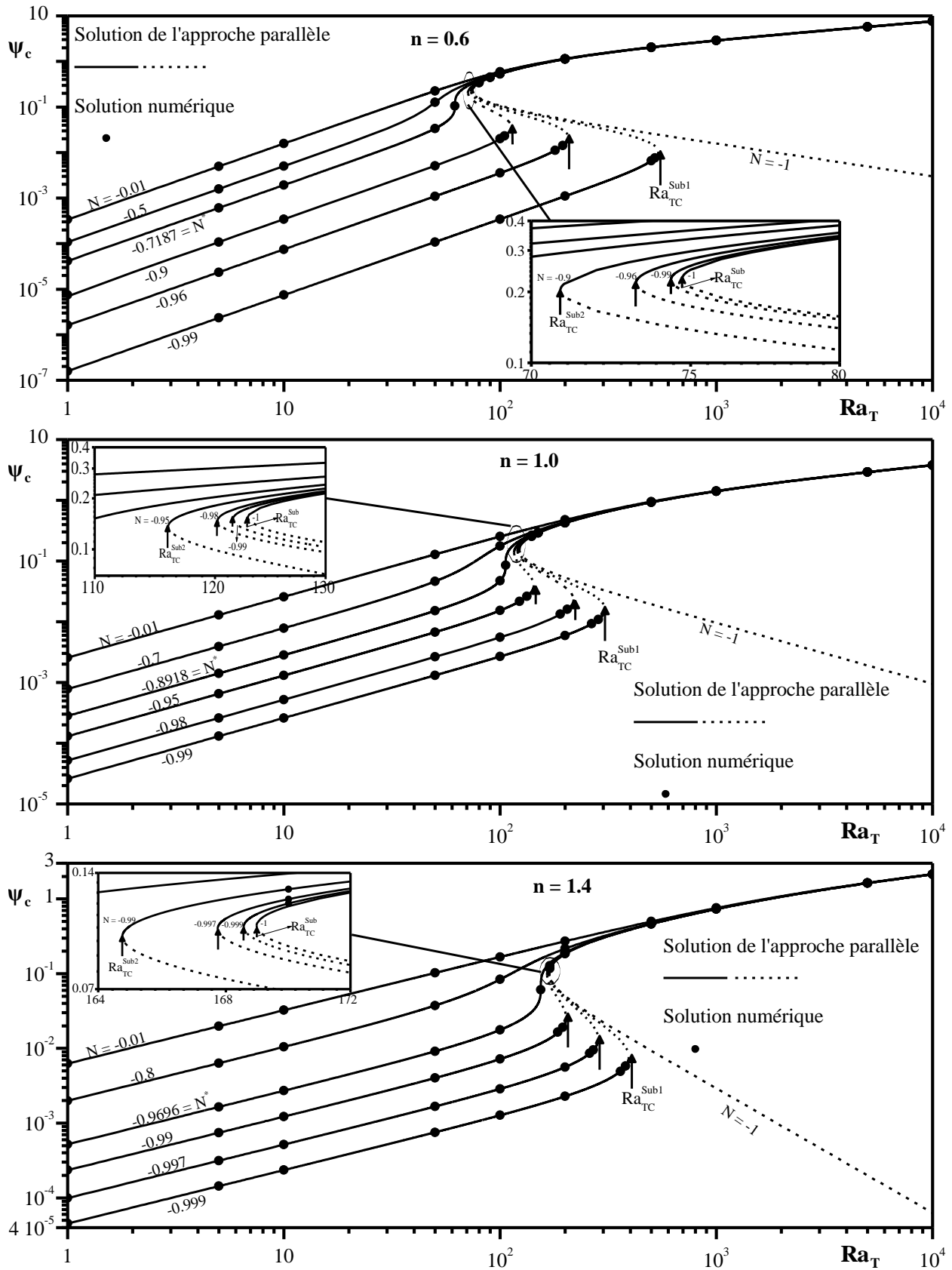
**Figure 3.1 :** Evolutions de  $\overline{Sh}$  en fonction du rapport de forme de la cavité  $A$ , pour  $Le = 10$ ,  $N = 10$ ,  $Ra_T = 10^4$  et différentes valeurs de  $n$ .



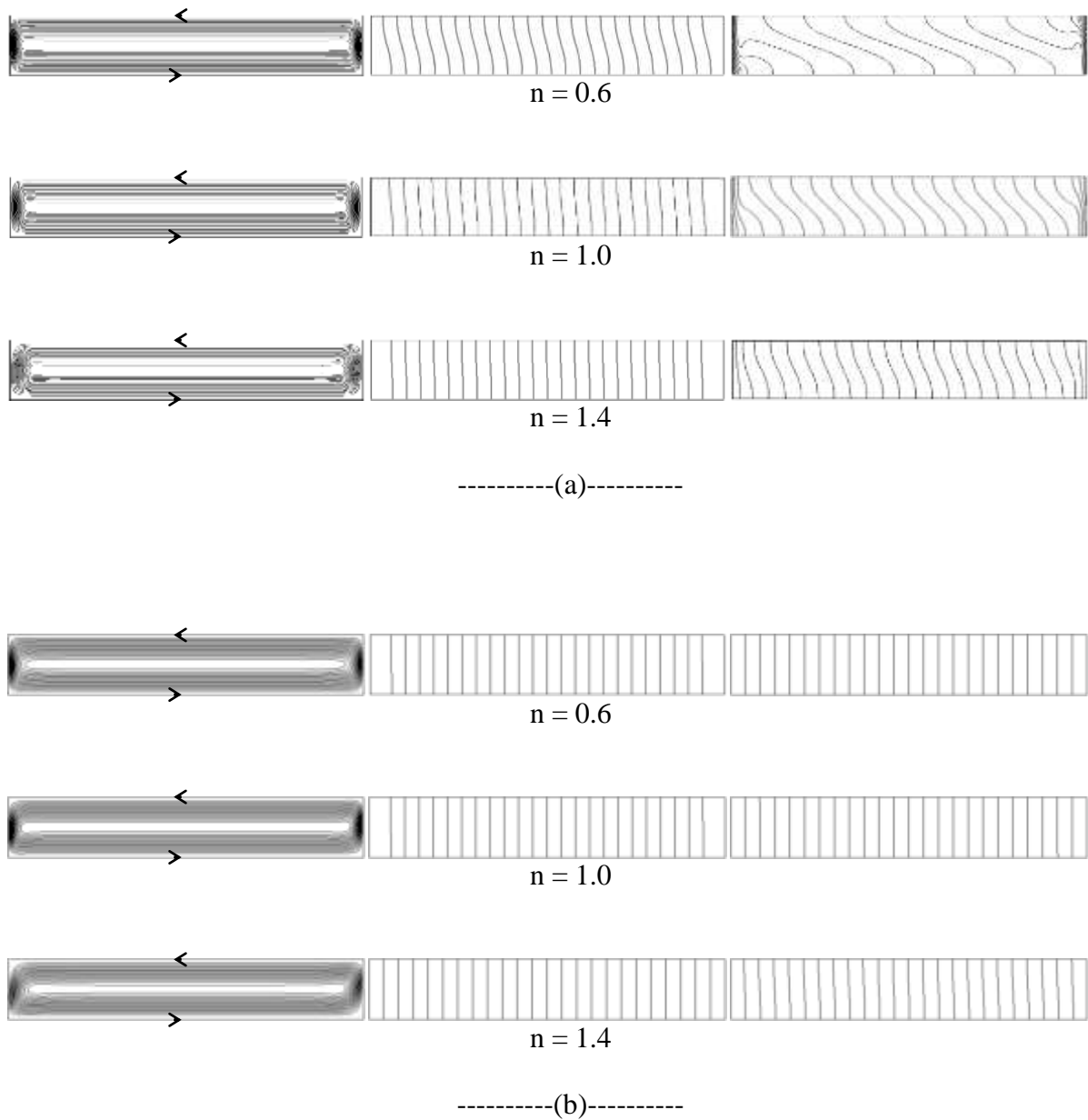
**Figure 3.2 :** Lignes de courant (à gauche), isothermes (au centre) et iso-concentrations (à droite) pour  $A = 24$ ,  $Pr = 100$ ,  $Le = 10$ ,  $N = 10$  et différentes valeurs de  $n$  et  $Ra_T$  : (a)  $Ra_T = 10^3$ , (b)  $Ra_T = 10^4$  et (c)  $Ra_T = 10^5$ .



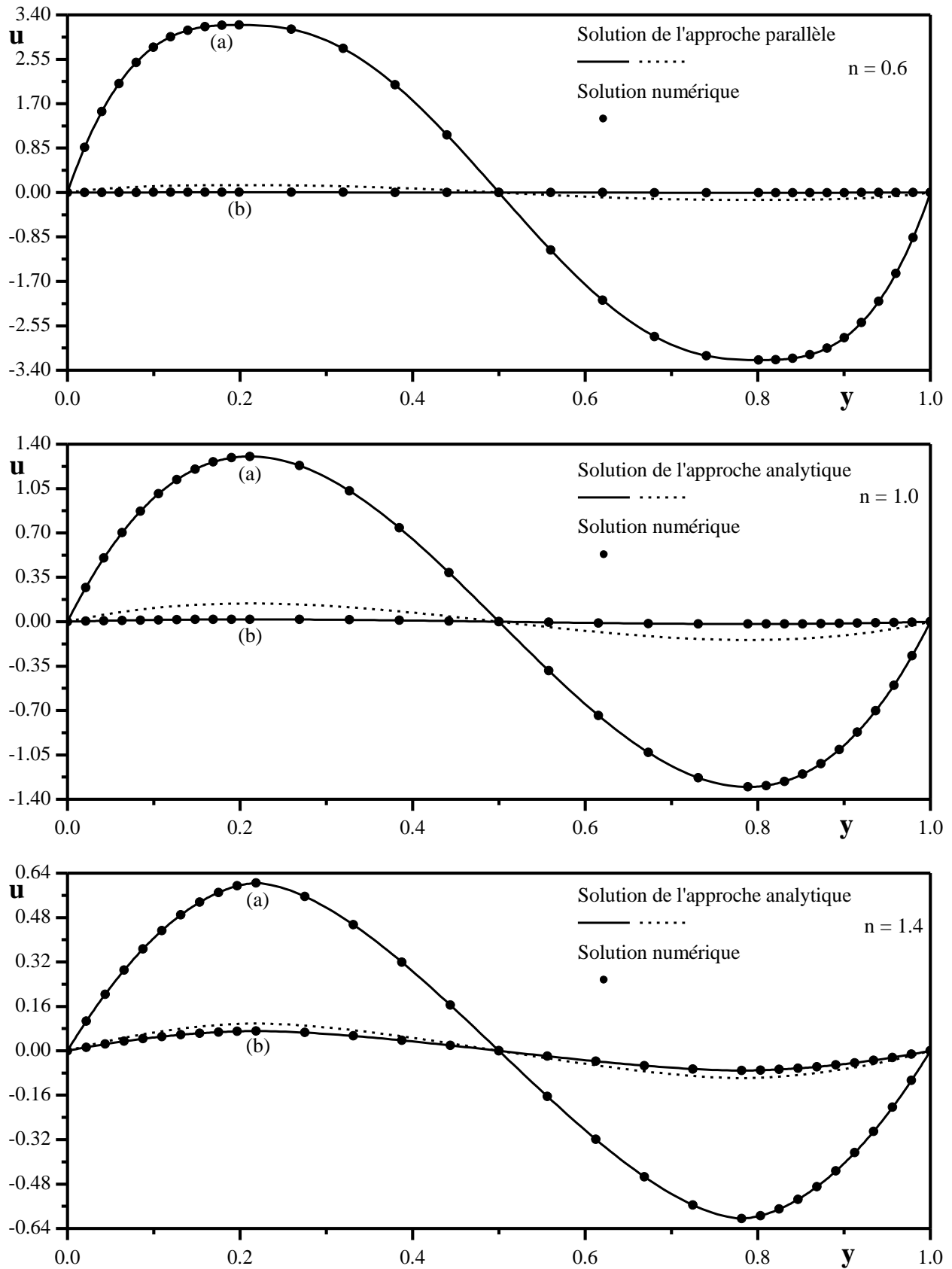
**Figure 3.3 :** Effet de  $Ra_T$  en  $\Psi_c$  (a),  $\overline{Nu}$  (b) et  $\overline{Sh}$  (c) for  $Le = 10$ ,  $N = 10$  et différentes valeurs de  $n$ .



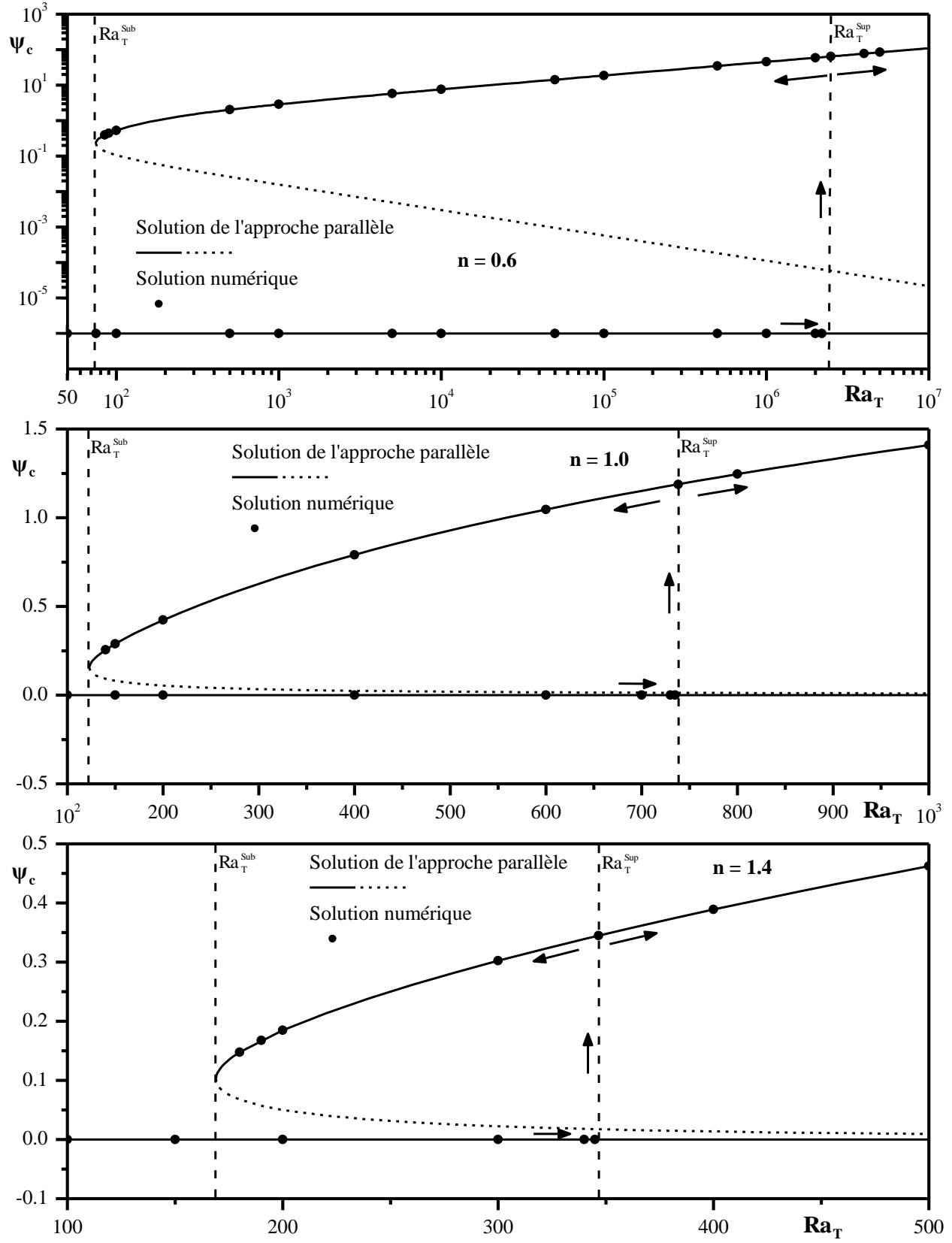
**Figure 3.4 :** Diagrammes de bifurcation pour  $Le = 10$  et différentes valeurs de  $N$  et  $n$ .



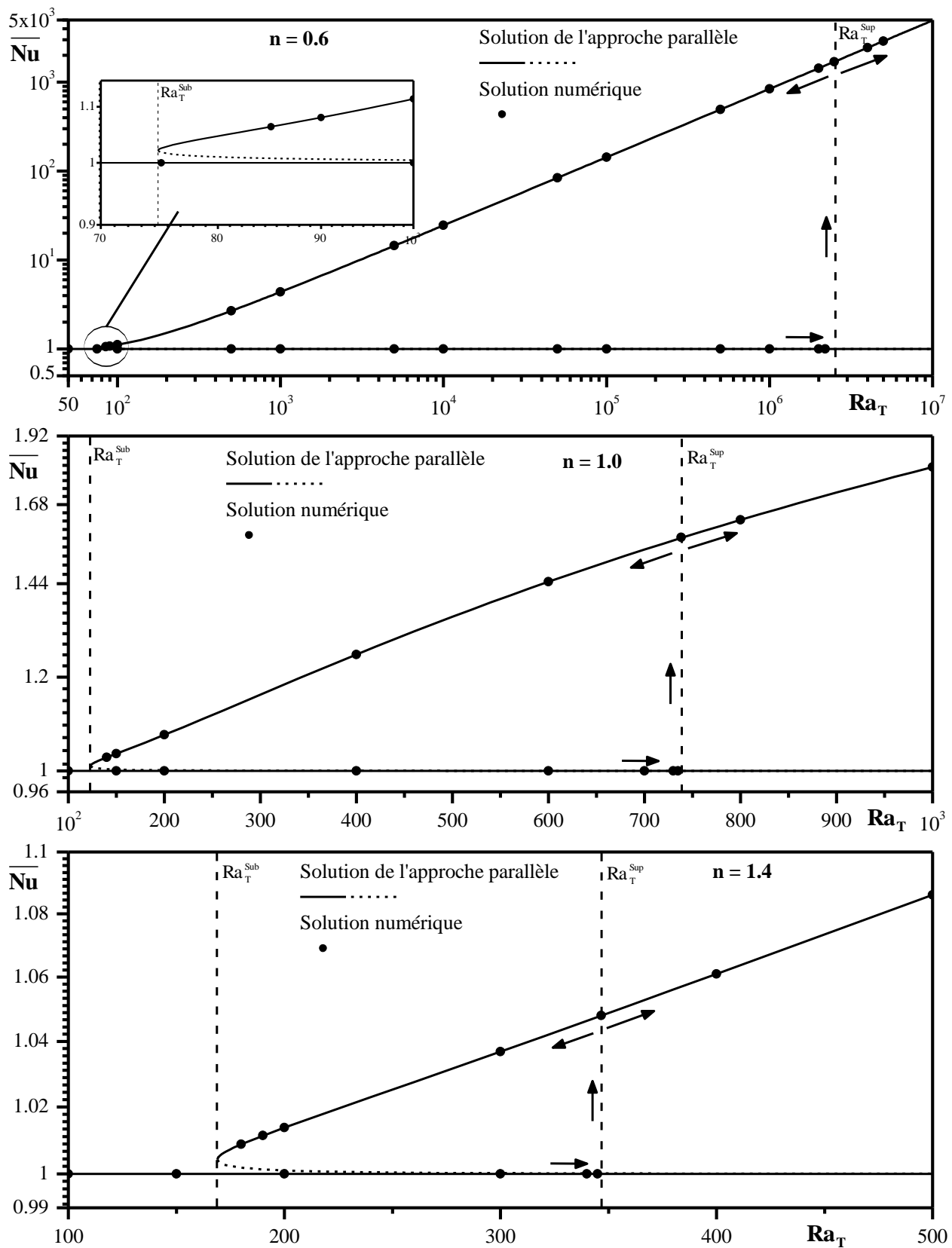
**Figure 3.5 :** Lignes de courant (à gauche), isothermes (au centre) et iso-concentrations (à droite) pour  $Ra_T = 200$ ,  $Le = 10$ ,  $N = -0.99$  et différentes valeurs de  $n$ .



**Figure 3.6 :** Profil de la vitesse pour  $Ra_T = 200$ ,  $Le = 10$ ,  $N = -0.99$  et différentes valeurs de  $n$ .



**Figure 3.7 :** Diagrammes de bifurcation pour  $Le = 10$ ,  $N = -1$  et différentes valeurs de  $n$ .



**Figure 3.8 :** Effet de  $Ra_T$  en  $\overline{Nu}$  for  $Le = 10$ ,  $N = -1$  et différentes valeurs de  $n$ .

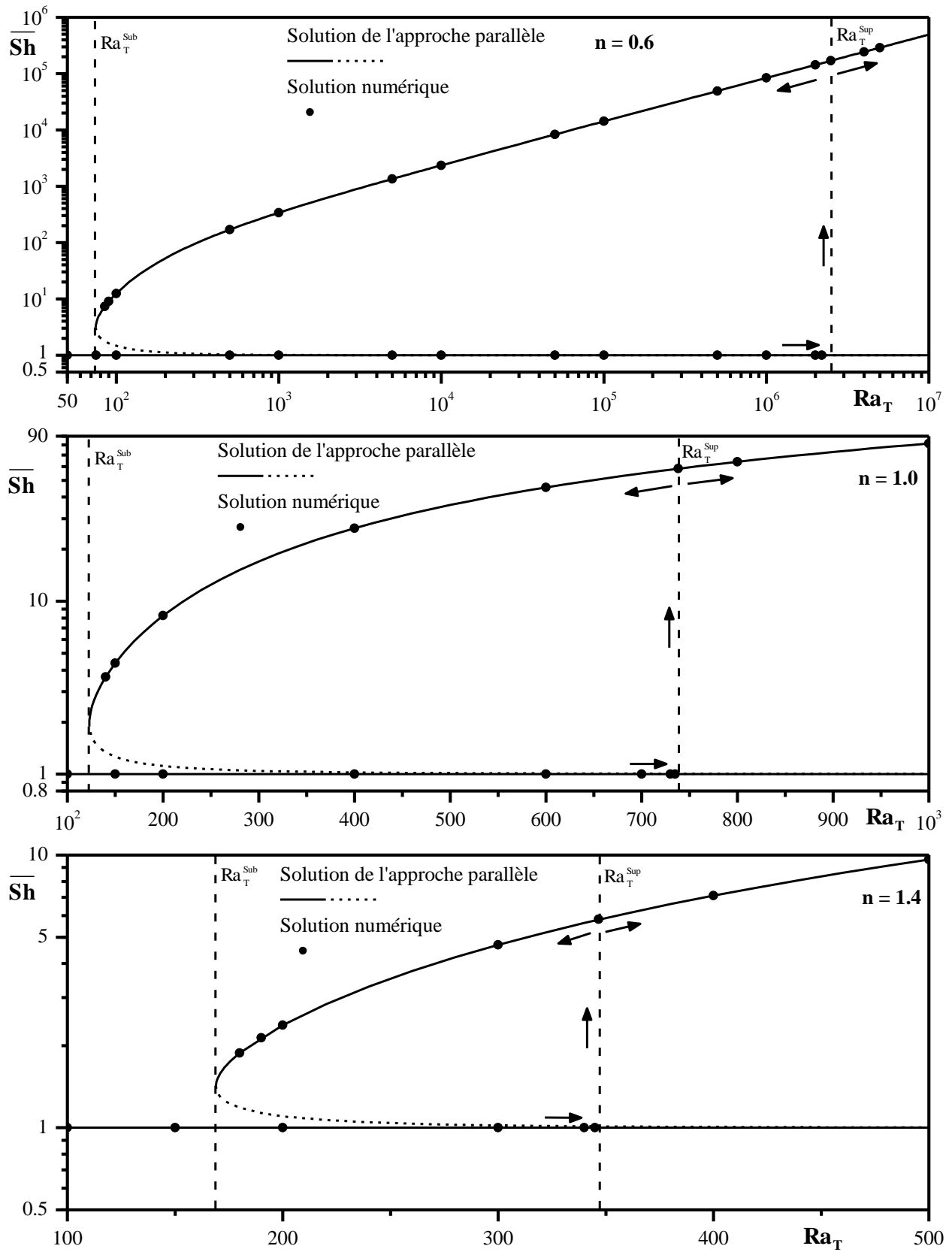
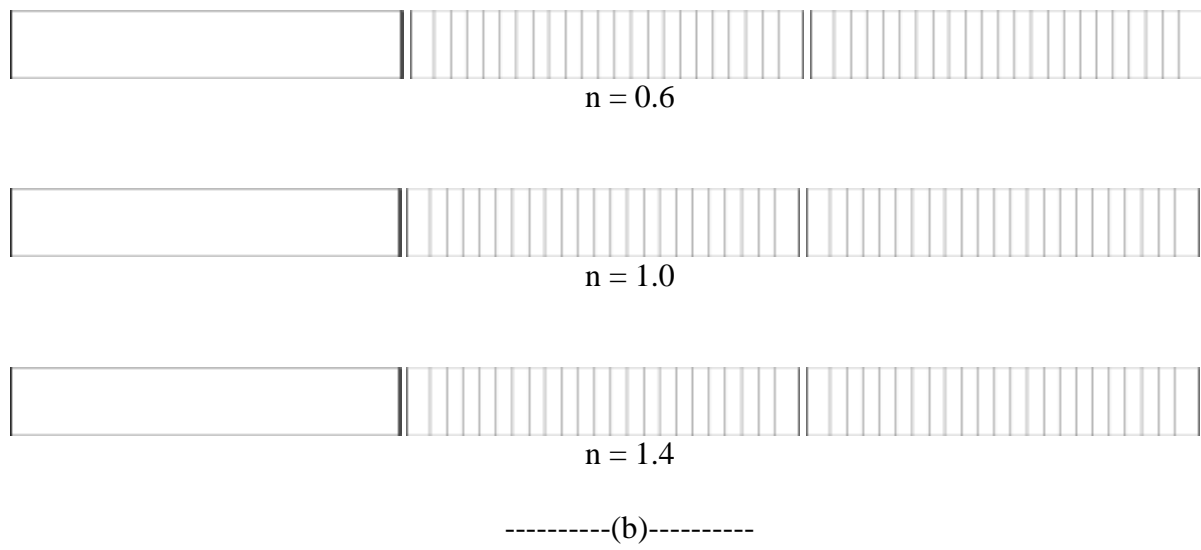
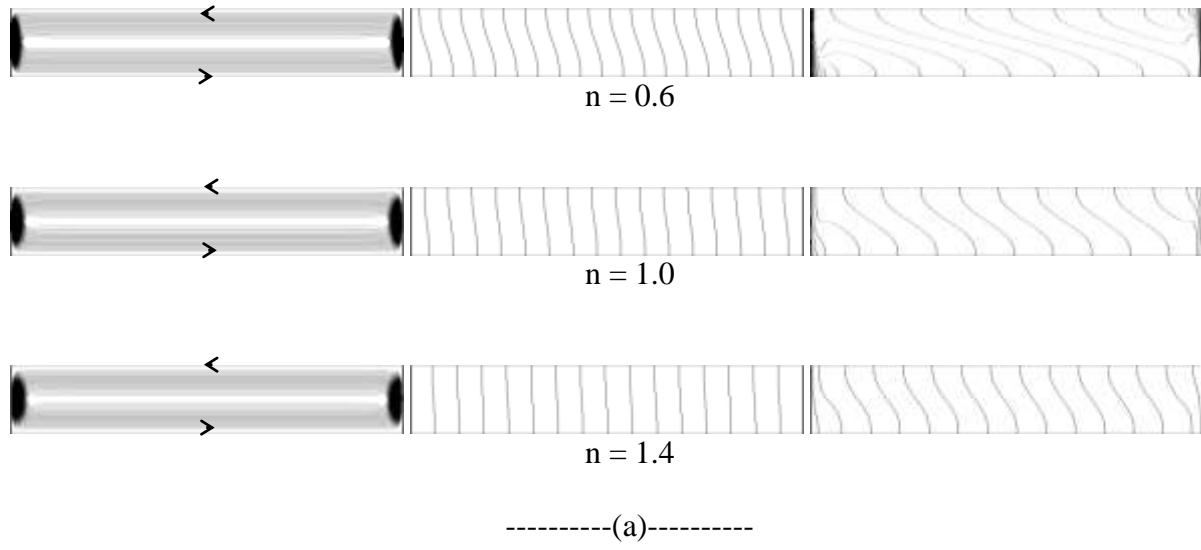


Figure 3.9 : Effet de  $Ra_T$  en  $\overline{Sh}$  for  $Le = 10$ ,  $N = -1$  et différentes valeurs de  $n$ .



**Figure 3.10 :** Lignes de courant (à gauche), isothermes (au centre) et iso-concentrations (à droite) pour  $Ra_T = 200$ ,  $Le = 10$ ,  $N = -1$  et différentes valeurs de  $n$ .

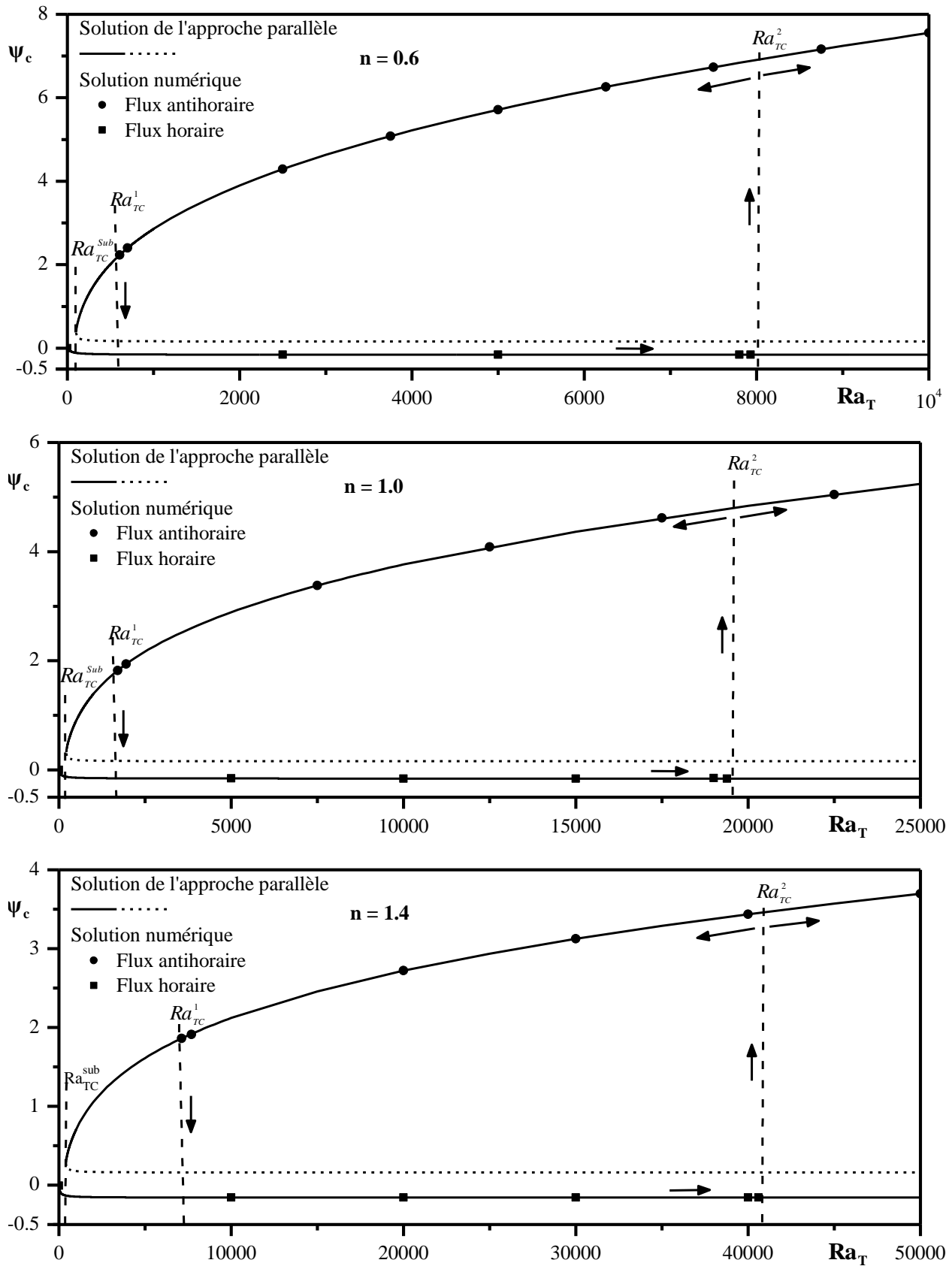
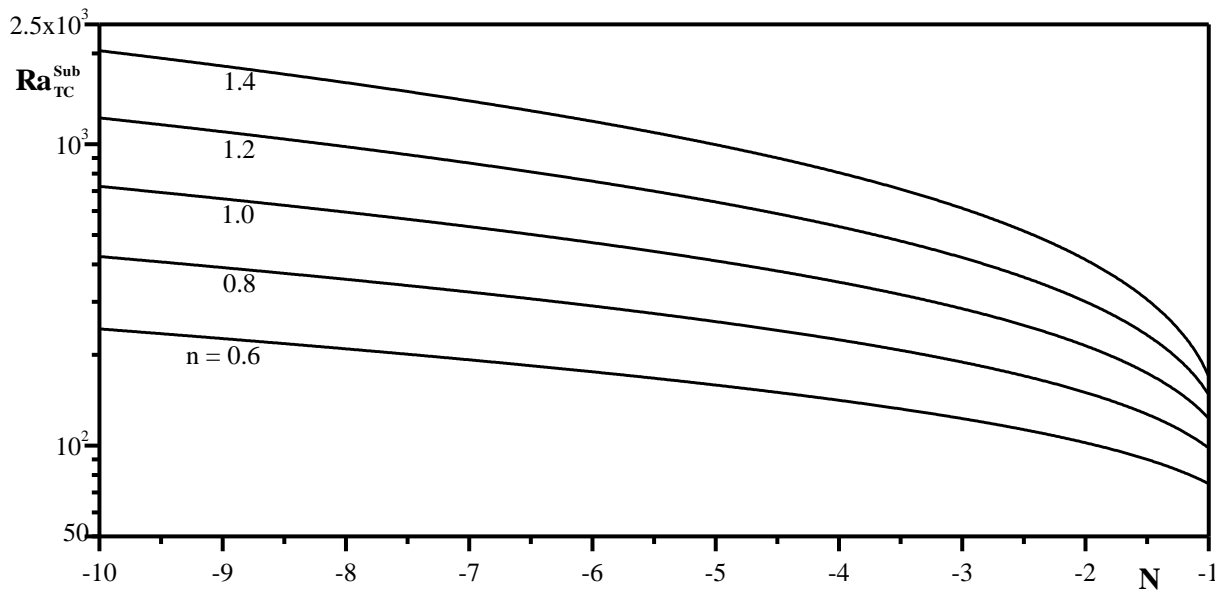
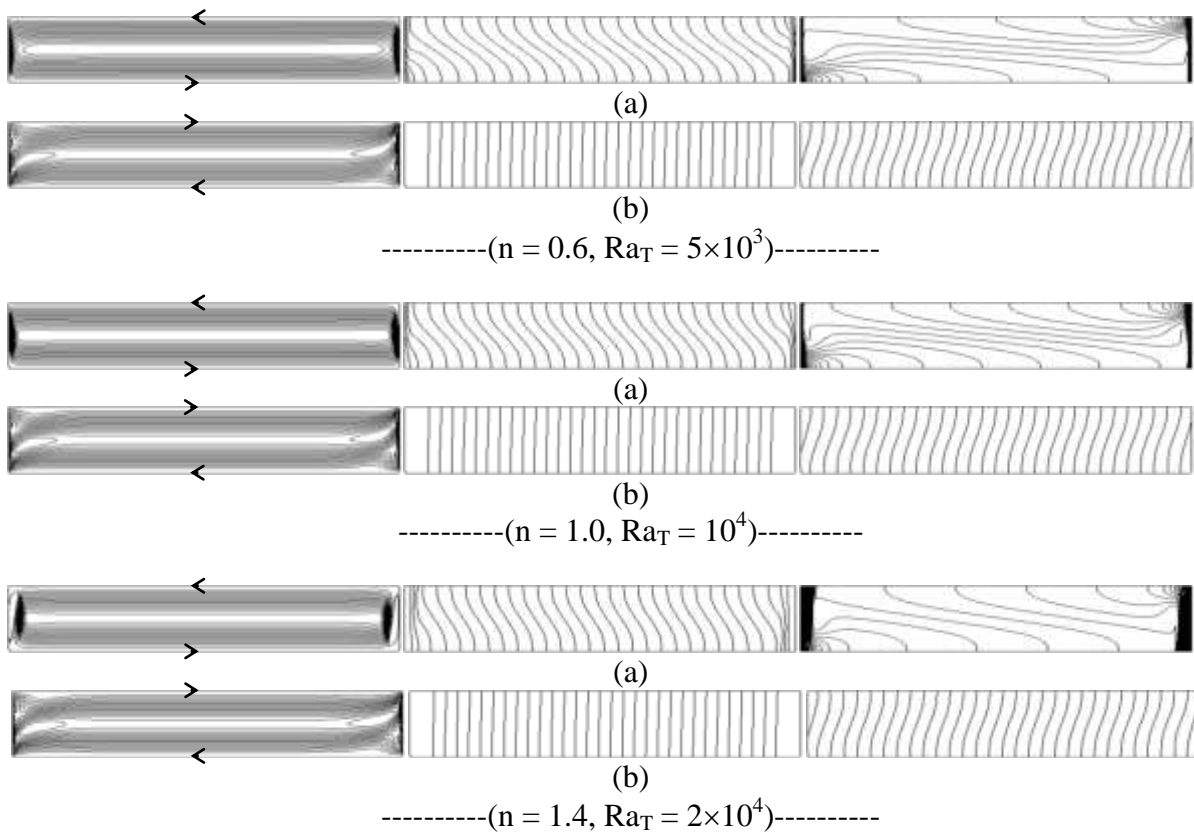


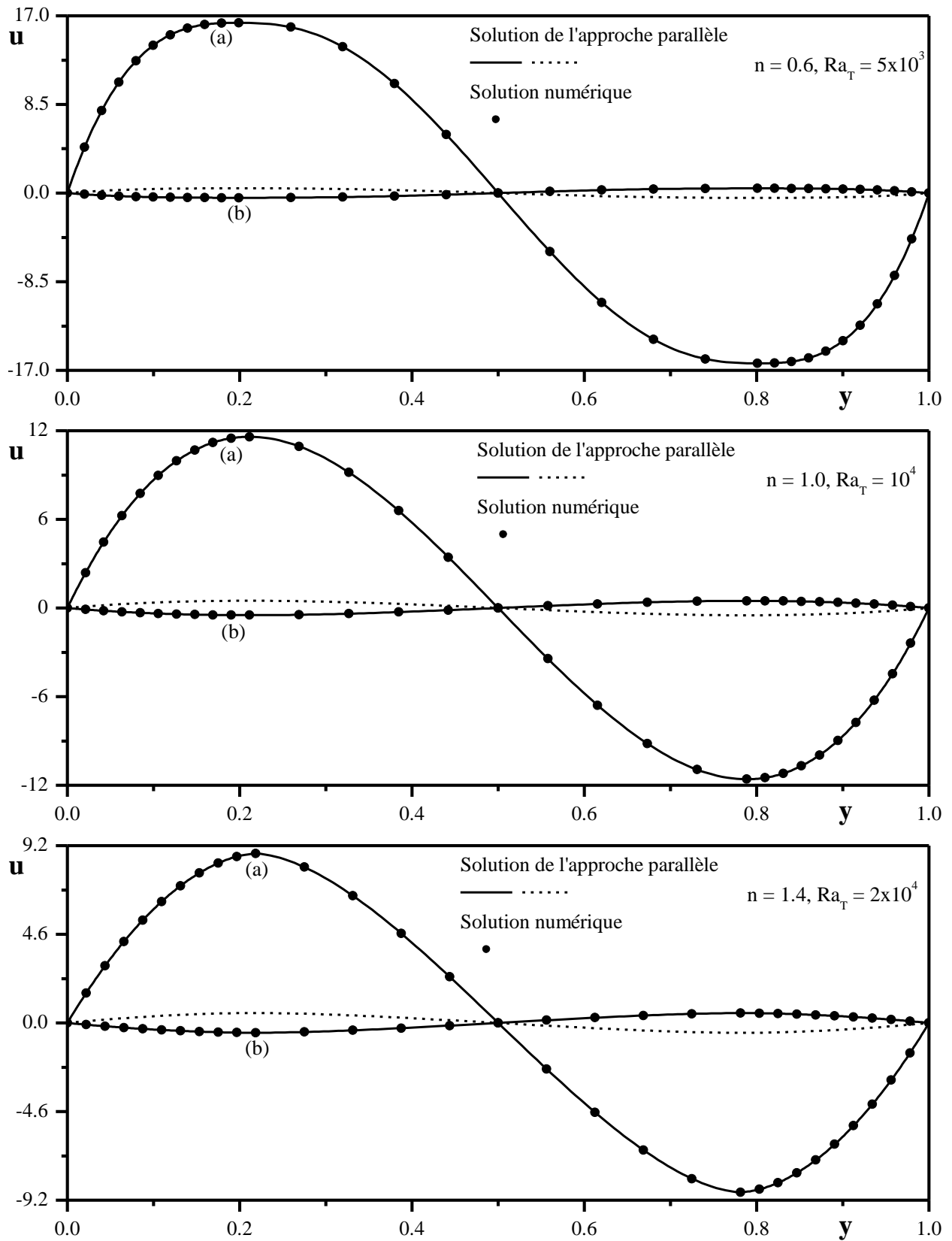
Figure 3.11 : Diagrammes de bifurcation pour  $Le = 10$ ,  $N = -2$  et différentes valeurs de  $n$ .



**Figure 3.12 :** Variations de  $Ra_{TC}^{Sub}$  en fonction de  $N \leq -1$  pour  $Le = 10$  et différentes valeurs de  $n$ .



**Figure 3.13 :** Lignes de courant (à gauche), isothermes (au centre) et iso-concentrations (à droite) correspondants aux écoulements antihoraire (a) et horaire (b) pour  $N = -2$ ,  $Le = 10$  et différentes valeurs de  $(n, Ra_T)$ .



**Figure 3.14 :** Profils de vitesse le long de  $y$  au centre de la cavité pour  $N = -2$ ,  $Le = 10$  et différentes valeurs de  $(n, Ra_T)$ .

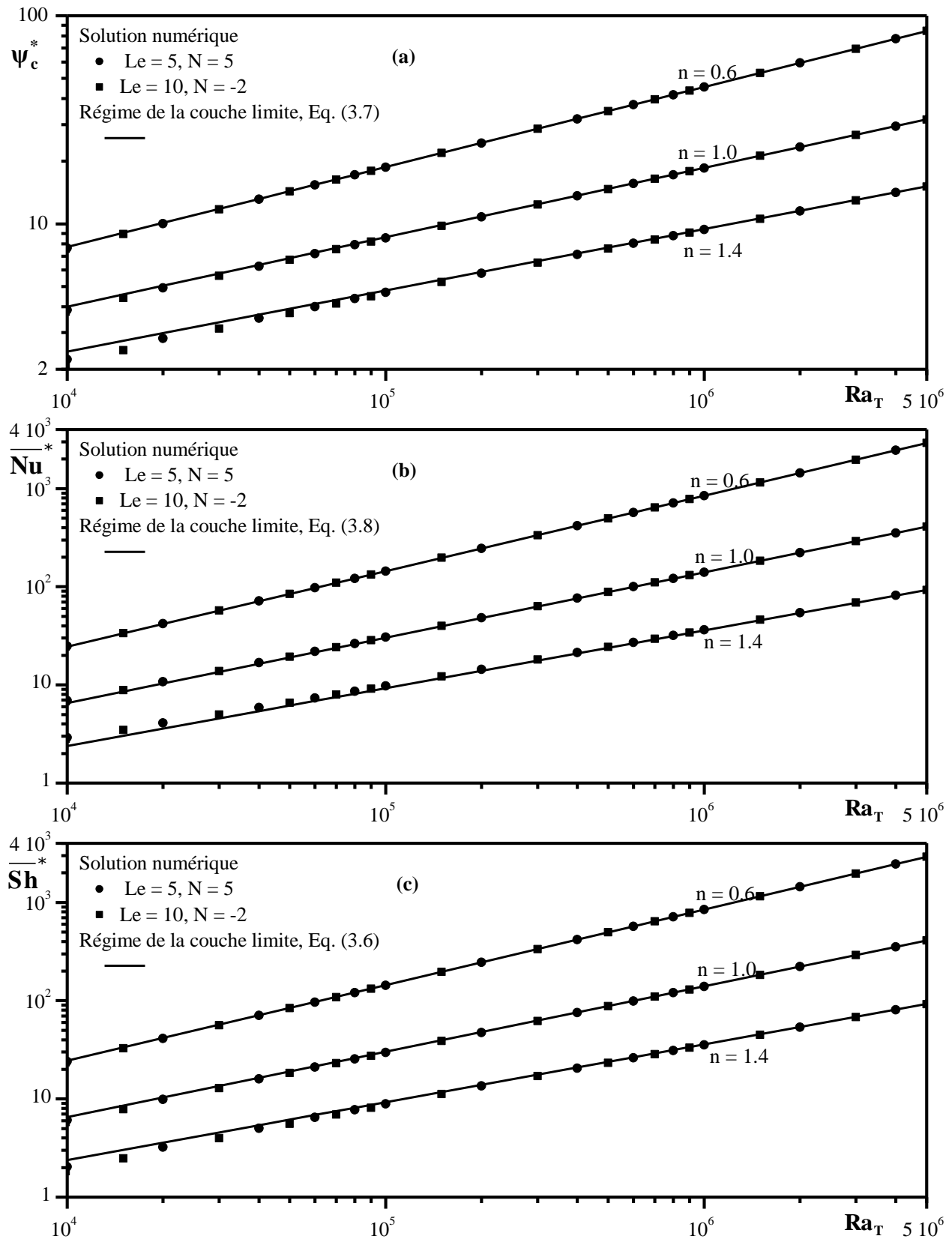
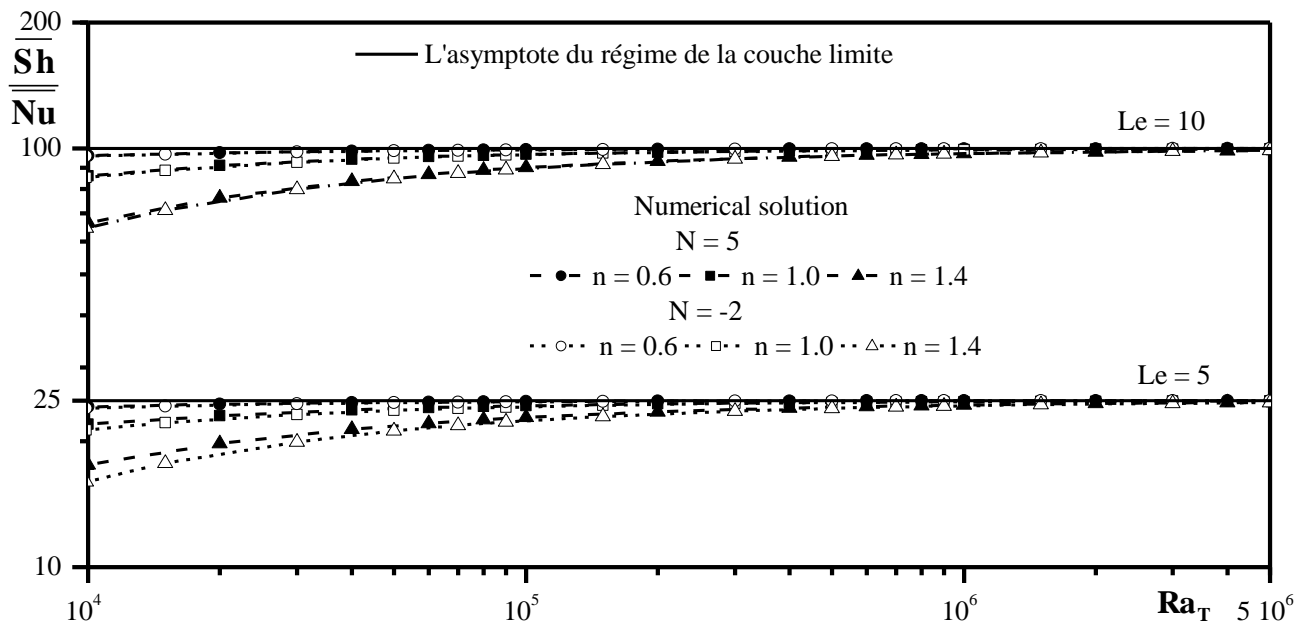
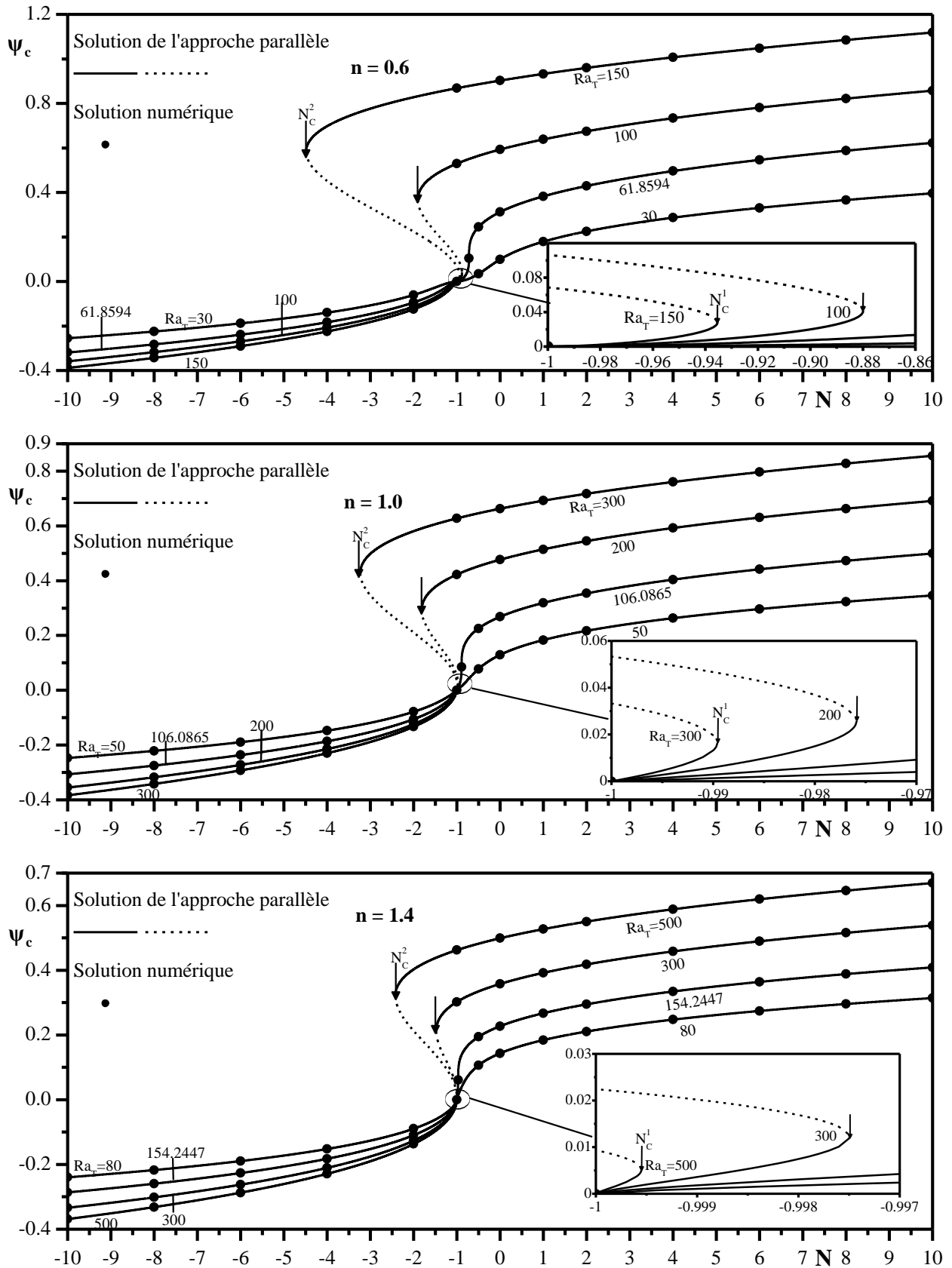


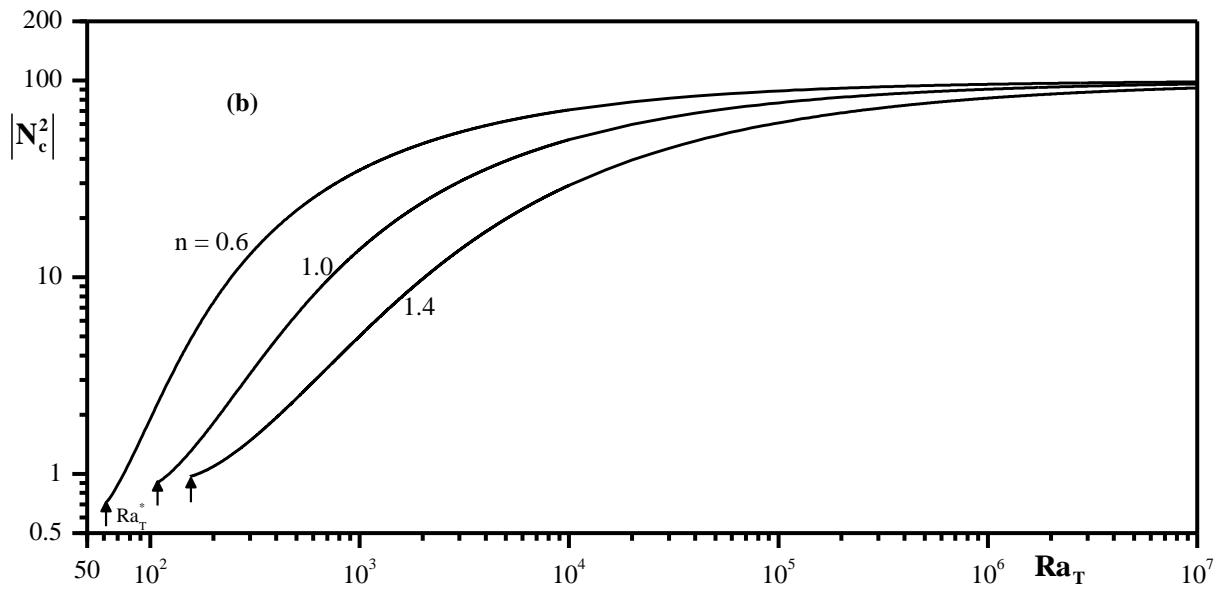
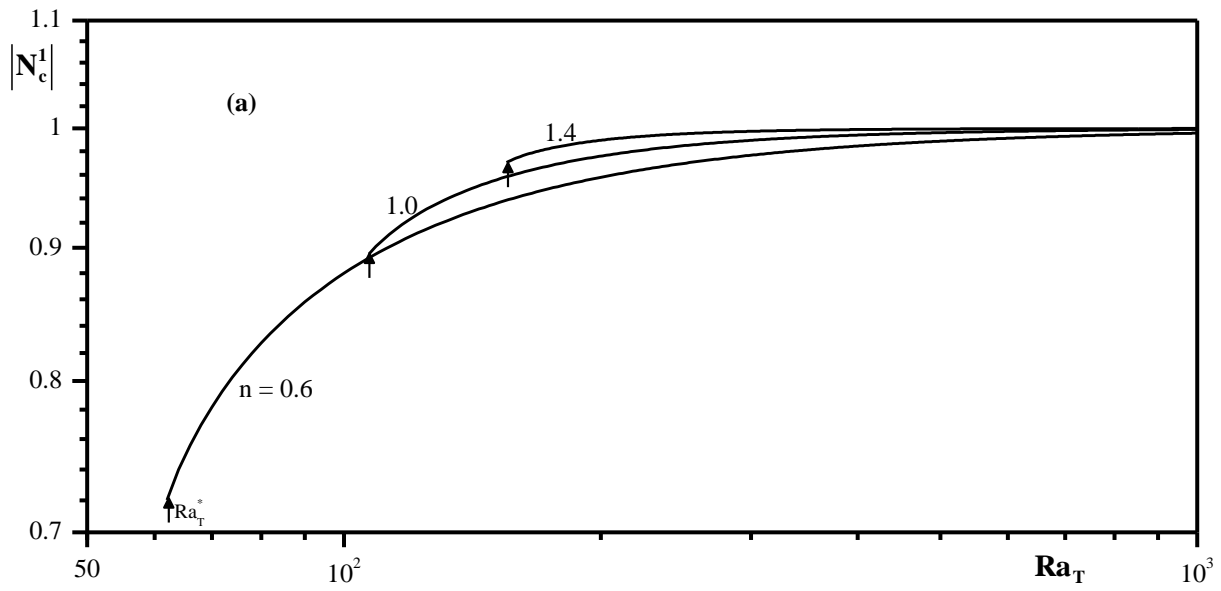
Figure 3.15 : Régime de la couche limite: ( $Le = 5, N = 5$ ); ( $Le = 10, N = -2$ ) et différentes valeurs de  $n$ .



**Figure 3.16 :** Effet de  $Ra_T$  en  $\frac{\overline{Sh}}{Nu}$  pour différentes valeurs de  $N$ ,  $Le$  et  $n$ .



**Figure 3.17 :** Effet de  $N$  en  $\psi_c$  pour  $Le = 10$  et différentes valeurs de  $Ra_T$  et  $n$ .



**Figure 3.18 :** Variations de  $N_c^1$  (a) et  $N_c^2$  (b) avec  $Ra_T$  for  $Le = 10$  et différentes valeurs de  $n$ .

# Chapitre 4

---

---

## Convection induite par effet Soret d'un fluide non-Newtonien dans une cavité rectangulaire horizontale chauffée latéralement

---

---

### 4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation des résultats analytiques et numériques, de la convection naturelle induite par effet Soret, comparés à ceux obtenus pour la convection de double diffusion, dans une cavité horizontale remplie d'un fluide binaire non-Newtonien, et soumise à des conditions au frontières de type Neumann sur ses parois verticales  $a = c = M = 1$  et  $b = d = 0$ .

L'étude se concentre sur l'impact de différents paramètres directeurs, à savoir le rapport de flottabilité  $N$ , le nombre de Lewis  $Le$ , l'indice de comportement  $n$ , le nombre de Rayleigh thermique  $Ra_T$  et le paramètre  $M$  définissant la convection induite par double diffusion ( $M = 0$ ) ou par effet Soret ( $M = 1$ ), sur l'écoulement et sur les mécanismes de transferts de chaleur et de masse. Il est à noter que le cas  $M = 0$  (convection de double diffusion), a été étudié en détail dans le chapitre précédent. Ainsi, les résultats rapportés ici, pour cette situation, ne sont utilisés qu'à des fins de comparaison avec ceux de la convection induite par effet Soret.

### 4.2 Effet du maillage

Une étude détaillée de l'effet du maillage est effectuée à nouveau pour s'assurer de l'indépendance de la solution numérique du maillage. Les résultats illustrés sur les tableaux 4.1 à 4.3, montrent l'effet du maillage sur la précision des valeurs de la fonction de courant, des nombres moyens de Nusselt et de Sherwood.

On peut constater que le nombre de mailles qui forment la grille de calcul n'influence que peu ces résultats, et on peut conclure qu'à partir d'un maillage de  $381 \times 121$ , l'influence du maillage devient négligeable pour la cavité considérée.

**Tableau 4.1 :** Effet du maillage sur la précision des valeurs de la fonction de courant et des nombres de Nusset et Sherwood moyens pour  $A = 24$ ,  $Pr = 100$ ,  $Le = 5$ ,  $Ra_T = 10^4$ ,  $n = 0.6$ ,  $M = 1$  et différentes valeurs de  $N$ .

N		Solution numérique					Solution analytique
		Grilles (181×61)	(281×81)	(381×121)	(421×121)	(581×281)	
2	$\psi_c$	6.2363	6.2397	6.2361	6.2360	6.2351	6.2332
	$\overline{Nu}$	17.0125	16.9496	16.9239	16.9201	16.9089	16.8966
	$\overline{Sh}$	-87.041	-86.399	-86.123	-86.066	-85.912	-85.775
-1	$\psi_c$	8.1484	8.1790	8.1795	8.1797	8.1793	8.1800
	$\overline{Nu}$	28.4814	28.4032	28.3882	28.3994	28.3751	28.3796
	$\overline{Sh}$	-144.615	-143.803	-143.498	-143.494	-143.294	-143.316

**Tableau 4.2 :** Effet du maillage sur la précision des valeurs de la fonction de courant et des nombres de Nusset et Sherwood moyens pour  $A = 24$ ,  $Pr = 100$ ,  $Le = 5$ ,  $Ra_T = 10^4$ ,  $n = 1.0$ ,  $M = 1$  et différentes valeurs de  $N$ .

N		Solution numérique					Solution analytique
		Grilles (181×61)	(281×81)	(381×121)	(421×121)	(581×281)	
2	$\psi_c$	3.1872	3.1823	3.1798	3.1795	3.1786	3.1785
	$\overline{Nu}$	5.1349	5.1189	5.1111	5.1098	5.1058	5.1054
	$\overline{Sh}$	-27.561	-27.296	-27.158	-27.153	-27.098	-27.096
-1	$\psi_c$	4.0488	4.0499	4.0504	4.0505	4.0508	4.0509
	$\overline{Nu}$	7.6726	7.6713	7.6693	7.6698	7.6684	7.6682
	$\overline{Sh}$	-40.208	-39.981	-39.853	-39.850	-39.785	-39.764

**Tableau 4.3 :** Effet du maillage sur la précision des valeurs de la fonction de courant et des nombres de Nusset et Sherwood moyens pour  $A = 24$ ,  $Pr = 100$ ,  $Le = 5$ ,  $Ra_T = 10^4$ ,  $n = 1.4$ ,  $M = 1$  et différentes valeurs de  $N$ .

N		Solution numérique					Solution analytique
		Grids (181×61)	(281×81)	(381×121)	(421×121)	(581×281)	
2	$\psi_c$	1.8447	1.8410	1.8401	1.8401	1.8403	1.8398
	$\overline{Nu}$	2.3749	2.3685	2.3664	2.3664	2.3663	2.3655
	$\overline{Sh}$	-14.464	-14.3031	-14.266	-14.266	-14.266	-14.263
-1	$\psi_c$	2.277	2.2774	2.2774	2.2775	2.2773	2.2773
	$\overline{Nu}$	3.0949	3.0942	3.0931	3.0931	3.0920	3.0920
	$\overline{Sh}$	-17.651	-17.496	-17.437	-17.428	-17.421	-17.421

### 4.3 Validation de l'approche de l'écoulement parallèle

Les résultats numériques, illustrés sur la figure 4.1, obtenus pour  $A = 24$ ,  $Pr = 100$ ,  $Le = 5$ ,  $N = 2$ ,  $Ra_T = 10^4$  et différentes valeurs de  $n$  et  $M$  : (a)  $M = 0$ , (b)  $M = 1$ , illustrent les profils de la fonction de courant, des isothermes et des iso-concentrations. Les figures montrent que l'écoulement dans la partie centrale de la cavité est parallèle suivant la direction  $x'$ . De plus, la

température et la concentration, dans le cœur de la cavité, sont stratifiées d'une façon linéaire dans la direction horizontale, ce qui prouve la validité de l'approximation parallèle utilisée dans cette étude.

#### **4.4 Profils de vitesse, de température et de concentration**

Les figures 4.2 et 4.3 illustrent les profils de la vitesse horizontale  $u$  au centre de la cavité, de la température  $T$  et de la concentration  $S$  au plan vertical pour  $N = 2$ ,  $Ra_T = 10^4$  et différentes valeurs de  $n$ , pour la convection double diffusive (figure 4.2) et l'effet Soret (figure 4.3). Les résultats obtenus numériquement sont comparés avec ceux obtenus analytiquement et un bon accord a été observé entre les deux solutions. Il est observé à partir des résultats qu'en augmentant l'indice de la loi en puissance  $n$ , on remarque la diminution de la vitesse et ceci indépendamment du type de la convection. En revanche, les isothermes et les iso-concentrations correspondantes paraissent beaucoup plus affectées par la rhéologie dans la mesure où celles-ci deviennent de moins en moins inclinées dans la direction horizontale en augmentant  $n$ , ce qui vient confirmer la diminution de l'intensité de l'écoulement avec ce paramètre. Par comparaison au cas Newtonien, l'intensité des mouvements convectifs et les taux de transfert de chaleur et de masse sont plus importants pour les fluides pseudoplastiques ( $0 < n < 1$ ) que pour les fluides dilatants ( $n > 1$ ). D'après l'équation (1.7), une augmentation de  $n$  provoque une augmentation de la viscosité apparente dont le rôle principal est de ralentir le mouvement du fluide et affaiblir ainsi la convection thermique.

#### **4.5 Effets du nombre de Rayleigh et de l'indice de la loi en puissance**

##### **4.5.1 Cas des forces de flottabilité coopérants**

Les figures 4.4-4.5 illustrent l'effet du nombre de Rayleigh thermique sur l'intensité du flux et le taux de transfert de chaleur respectivement pour le cas  $N = 2$ ,  $Le = 5$ ,  $M = 0$  et  $1$  et différentes valeurs de  $n$ . Notons que, pour la convection induite par Soret ( $M = 1$ ), les évolutions de  $\psi_c$  et  $\overline{Nu}$  en fonction de  $Ra_T$  présentent le même comportement que celles obtenues pour la convection de double diffusion ( $M = 0$ ). Cependant, le nombre de Sherwood  $\overline{Sh}$  (figure 4.6) s'avère significativement différent et présente des changements significatifs. D'après les figures 4.4 et 4.5, les valeurs de  $\psi_c$  sont positives et l'écoulement tourne dans le sens antihoraire. Il est clair que les effets thermiques et solutales agissent ensemble de droite à gauche et accélèrent ainsi le flux dans le sens antihoraire. Aussi les résultats indiquent que  $\psi_c$  croît en augmentant le rapport  $(Ra_T/n)$  ce qui signifie, ainsi, une accélération de la circulation du fluide dans cette

situation. Le graphique indique que lorsque  $Ra_T$  est suffisamment petit, les transferts de chaleur et de masse sont essentiellement régis par la pseudo-diffusion. En augmentant le nombre de Rayleigh,  $\psi_c$  augmente et la convection est favorisée tandis que le nombre de Nusselt  $\overline{Nu}$  ne connaît pas de réel augmentation que lorsque  $Ra_T \geq 10^2$ . Les résultats obtenus pour le nombre de Sherwood  $\overline{Sh}$  sont présentés dans la figure 4.6. On note que pour  $M = 0$ ,  $\overline{Sh}$  représente le transfert de masse à travers la couche fluide résultant de l'imposition d'un flux constant appliqué sur les parois verticales de l'enceinte. Dans ce cas, comme prévu,  $\overline{Sh}$  augmente en augmentant  $Ra_T$ . Pour la convection induite par effet Soret ( $M = 1$ ), les limites de la couche sont imperméables, alors  $\overline{Sh}$  n'a plus la même signification, il est plutôt lié à la distribution de concentration induite par l'effet Soret.

On observe d'après la figure 4.6 que, pour  $M = 1$ , lorsque  $Ra_T < Ra_{TC}$  où  $Ra_{TC} = 115.321, 323.279$  et  $883.549$  pour  $n = 0.6, 1$  et  $1.4$ , respectivement, le nombre de Sherwood correspondant est positif. Lorsque  $Ra_T = Ra_{TC}$ ,  $\Delta S = 0$  et  $\overline{Sh} \rightarrow \infty$  pour devenir après négatif. Les figures 4.7(a-c) à 4.9(a-c) illustrent ce comportement en termes de lignes de courant, d'isothermes et d'iso-concentrations pour  $Le = 10, M = 1, N = 2$  et diverses valeurs de  $n$  et  $Ra_T$ . On démontre que la valeur de  $Ra_{TC}$  à laquelle  $\overline{Sh} \rightarrow \infty$  est donnée par :

$$Ra_{TC} = \left( -\frac{1}{LeAn} \right)^{\frac{n}{2}} \frac{(Le + 1)}{Le} \quad (4.1)$$

#### 4.5.2 Cas des forces de flottabilité opposées ( $N < 0$ )

Le cas des flux opposés ( $N < 0$ ) est maintenant discuté. La figure 4.10 montre les évolutions de  $\psi_c$ , en fonction de  $Ra_T$  en variant  $N$  entre zéro et  $-1$ , pour  $Le = 10$  et  $M = 1$ . On peut voir sur cette figure que le flux résultant se déroule dans le sens antihoraire quelle que soit la valeur de  $n$  et  $N$ . Le comportement des flux de convection dans la plage  $-1 \leq N < 0$  est beaucoup plus compliqué que dans le cas de ( $N > 0$ ). Il est clair que le rapport de flottabilité modifie fortement le schéma d'écoulement. D'après la figure 4.10, le problème présente une multiplicité de solutions pour les mêmes paramètres de contrôle pour  $N < N^*$ , où  $N^* = -0.6969, -0.8812$  et  $-0.9578$  pour  $n = 0.6, 1$  et  $1.4$ , respectivement. Dans ce cas, le problème a deux nœuds de bifurcation se produisant aux nombres de Rayleigh critiques  $Ra_{TC}^{Sub1}$  et  $Ra_{TC}^{Sub2}$ . Un zoom des courbes de bifurcation est ajouté sur ces figures pour voir plus clairement les valeurs de  $Ra_{TC}^{Sub2}$  qui sont identifiées par des flèches verticales. On peut observer que  $Ra_{TC}^{Sub2}$  augmente à la fois avec  $n$  et  $|N|$  tandis que  $Ra_{TC}^{Sub1}$  augmente/diminue en augmentant  $|N|/n$ . Il est

à noter ici que le nombre de Rayleigh thermique sous-critique  $Ra_{TC}^{Sub}$  au-dessus duquel le flux convectif résultant est déclenché pour  $N = -1$  est tel que,  $Ra_{TC}^{Sub2} < Ra_{TC}^{Sub} < Ra_{TC}^{Sub1}$ . D'après la figure 4.10,  $Ra_{TC}^{Sub2} \rightarrow Ra_{TC}^{Sub}$  et  $Ra_{TC}^{Sub1} \rightarrow \infty$  lorsque  $N$  tends vers  $-1$  et le premier nœud de bifurcation tend vers le régime conducteur. Il faut préciser que, pour le cas particulier  $N = -1$  et  $Le \neq 1$ , la valeur de  $\psi_c$  peut être évaluée à partir de l'expression suivante :

$$\psi_c^n [A_n^2 Le^2 D_n^4 \psi_c^4 - A_n (Le^2 + 1) D_n^2 \psi_c^2 + Ra_T A_n (Le^2 + M(Le + 1) - 1) D_n^{2-n} \psi_c^{2-n} + 1] = 0 \quad (4.2)$$

D'où, on peut voir que le début du mouvement, se produit à un nombre de Rayleigh thermique sous-critique donné par :

$$Ra_{TC}^{Sub} = \frac{A_n^2 Le^2 D_n^4 \psi_{cc}^4 - A_n (Le^2 + 1) D_n^2 \psi_{cc}^2 + 1}{A_n (1 - Le^2 - M(Le + 1)) D_n^{2-n} \psi_{cc}^{2-n}} \quad (4.3)$$

avec

$$\psi_{cc} = \left[ \frac{n(Le^2 + 1) - [n^2(Le^2 - 1)^2 + 16Le^2]^{\frac{1}{2}}}{2(2 + n)A_n Le^2 D_n^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.4)$$

Les valeurs de  $Ra_{TC}^{Sub}$  sont indiquées par des flèches sur le zoom de la figure 4.10 et leurs valeurs sont données dans le tableau 4.4 pour  $Le = 10$ ,  $N = -1$ ,  $M = 0$  et  $1$  et diverses valeurs de  $n$ . Comme on peut le voir sur ce tableau,  $Ra_{TC}^{Sub}$  correspondant à la convection induite par effet de Soret ( $M = 1$ ) est inférieur à celui de la double diffusion ( $M = 0$ ). De plus  $Ra_{TC}^{Sub}$  est une fonction croissante de  $n$  en raison de l'augmentation de la viscosité apparente avec ce paramètre.

**Tableau 4.4 :** Valeurs de  $Ra_{TC}^{Sub}$  pour  $N = -1$ ,  $Le = 10$  et  $M = 0$  et  $1$ .

	$Ra_{TC}^{Sub}$				
$n$	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
$M = 0$	74.7294	98.1153	122.8898	147.3386	168.9767
$M = 1$	67.2565	88.3037	110.6008	132.6048	152.0790

D'autre part, il n'a pas été possible d'obtenir des résultats numériques pour la branche instable inférieure (lignes en pointillées) malgré les multiples essais effectués en utilisant différentes conditions initiales. L'évolution du nombre de Nusselt moyen, correspondant à ce cas particulier ( $N = -1$ ), est illustré sur la figure 4.11 pour  $Le = 10$ ,  $M = 0$  et  $1$  et diverses valeurs de  $n$ . On constate que l'évolution du nombre de Nusselt présente qualitativement le même comportement que celui de la fonction de courant. Il est aussi observé à partir de la même figure

que  $\overline{Nu}$  est plus grand dans le cas de la convection induite par effet Soret ( $M = 1$ ). Les variations de  $\overline{Sh}$  avec  $Ra_T$  sont présentées sur la figure 4.12 pour  $Le = 10$ ,  $N = -1$   $M = 0$  et  $1$  et diverses valeurs de  $n$ . Il est clair que la force motrice thermique affecte fortement la migration du soluté et donc le signe de  $\overline{Sh}$ . En effet, pour  $Ra_T = Ra_{TC} = 115.821, 323.279$  et  $883.549$  pour  $n = 0.6, 1$  et  $1.4$ , respectivement, la concentration devient la même sur les limites verticales à cause de la diffusion thermique. Le signe du nombre de Sherwood moyen dépend de la valeur de  $Ra_T$  lorsqu'elle est supérieure ou inférieure à  $Ra_{TC}$ ; il est dans le sens antihoraire pour  $Ra_T < Ra_{TC}$  et dans le sens horaire pour  $Ra_T > Ra_{TC}$ .

#### 4.6 Effet du rapport des forces de volume

Une autre vue des effets des forces de volume sur l'intensité de la convection  $\psi_c$  est présenté sur la figure 4.13, pour  $Le = 5$ ,  $M = 1$  et différentes valeurs de  $n$  et  $Ra_T$ . Le taux de flottabilité  $N$  est varié entre  $-20$  et  $20$  pour couvrir l'écoulement solutal dominant dans le cas opposé ( $N < 0$ ) et coopérant ( $N > 0$ ), en passant par le cas d'écoulement purement thermique ( $N = 0$ ). Un bon accord est observé entre l'approximation de l'écoulement parallèle et les solutions numériques. On observe d'après la figure 4.13 que lorsque  $Ra_T \leq Ra_T^*$ , où  $Ra_T^* = 83.1706, 190.1481$  et  $347.6738$  pour  $n = 0.6, 1$  et  $1.4$ , respectivement,  $\psi_c$  augmente en augmentant  $N$ . Pour  $Ra_T^* < Ra_T < Ra_{TC}$ , où  $Ra_{TC} = 115.821, 323.279$  et  $883.549$  pour  $n = 0.6, 1$  et  $1.4$ , respectivement,  $\psi_c$  augmente également quand  $N$  augmente mais le système présente une multiplicité de solutions pour  $N_c^2 < N < N_c^1$ . Les résultats correspondants obtenus pour le cas de  $Ra_T = Ra_{TC}$  sont aussi rapportés sur la même figure. Dans ce cas,  $\psi_c$  varie légèrement avec  $N$  jusqu'à une certaine valeur de  $N$ , qui dépend de  $n$ , où  $\psi_c$  tend asymptotiquement vers  $\psi_c = \infty$ , en augmentant  $N$  en dessus de ces valeurs,  $\psi_c$  présente toujours une variation légère avec  $N$ .

Pour  $Ra_T^* < Ra_T < Ra_{TC}$ , dans la gamme de  $N_c^2 < N < N_c^1$ , deux solutions sont numériquement possibles pour les mêmes valeurs des paramètres directeurs, correspondant à des écoulements qui peuvent être antihoraire ( $\psi_c > 0$ ) ou horaire ( $\psi_c < 0$ ). Ces observations sont cohérentes avec les profils de vitesse horizontaux le long du plan médian vertical correspondant à ces deux solutions illustrés sur la figure 4.14. Sur cette figure, les amplitudes atteintes par les vitesses dans le sens antihoraire sont largement supérieures à celles correspondantes aux circulations horaires. Comme le montre la figure, les solutions analytiques correspondant aux branches stables sont en bon accord avec les résultats numériques représentés par des cercles

pleins. Le troisième profil de vitesse analytique, correspondant à la branche instable, n'a pas pu être obtenu numériquement.

#### 4.7 Effet du nombre de Lewis

Les figures 4.15 et 4.16 illustrent l'effet du nombre de Lewis sur l'intensité du flux et le nombre de Nusselt pour le cas  $N = 2$ ,  $Ra_T = 10^3$ ,  $M = 0$  et 1 et différentes valeurs de  $n$ . Ainsi, on observe d'après ces figures que, pour les faibles valeurs de Lewis ( $Le < 10^{-1}$  pour  $n = 1.0$  et 1.4 et  $Le < 10^{-2}$  pour  $n = 0.6$ ), la fonction de courant  $\psi_c$  et le nombre de Nusselt  $\overline{Nu}$  sont indépendants de ce paramètre. Pour des valeurs élevées de Lewis ( $Le > 100$ ),  $\psi_c$  et  $\overline{Nu}$  deviennent aussi indépendants de ces valeurs et les résultats de la double diffusion et de l'effet Soret deviennent identiques. Pour les valeurs intermédiaires de  $Le$ , il y a une transition douce de la courbe pour  $\psi_c$  et  $\overline{Nu}$  entre les valeurs obtenues pour  $Le \rightarrow 0$  et  $Le \rightarrow \infty$ . Quant au nombre de Sherwood (figure 4.17), il se caractérise par un comportement considérablement différent. Comme prévu, lorsque  $Le \rightarrow 0$ , le transfert de masse est régi par diffusion pour la convection de double diffusion ( $\overline{Sh} \rightarrow 1$ ). Lorsque le nombre de Lewis atteint la valeur 1,  $\overline{Sh}$  augmente d'une manière faible jusqu'à une valeur donnée de  $Le$  ou la montée de Sherwood devient importante ce qui traduit un transfert solutal prédominant. Ce n'est pas le cas pour la convection induite par effet Soret et lorsque le nombre de Lewis est faible,  $\overline{Sh} = cte$  (qui dépend de la valeur de  $n$ ). Lorsque  $Le \leq 0.291$  pour  $n = 0.6$ ,  $Le \leq 1.209$  pour  $n = 1$  et  $Le \leq 4.338$  pour  $n = 1.4$ , le nombre de Sherwood correspondant est positif. Son comportement est similaire à celui de la double diffusion dans cette gamme de Lewis. Lorsque  $Le = Le_c = 0.292, 1.210$  et  $4.339$  pour  $n = 0.6, 1$  et  $1.4$ , respectivement,  $\Delta S = 0$  et  $\overline{Sh} \rightarrow \infty$ . Pour des valeurs plus élevées de  $Le$ ,  $Le > Le_c$ , la figure 4.17 montre que  $\overline{Sh}$  correspondant est maintenant négatif.

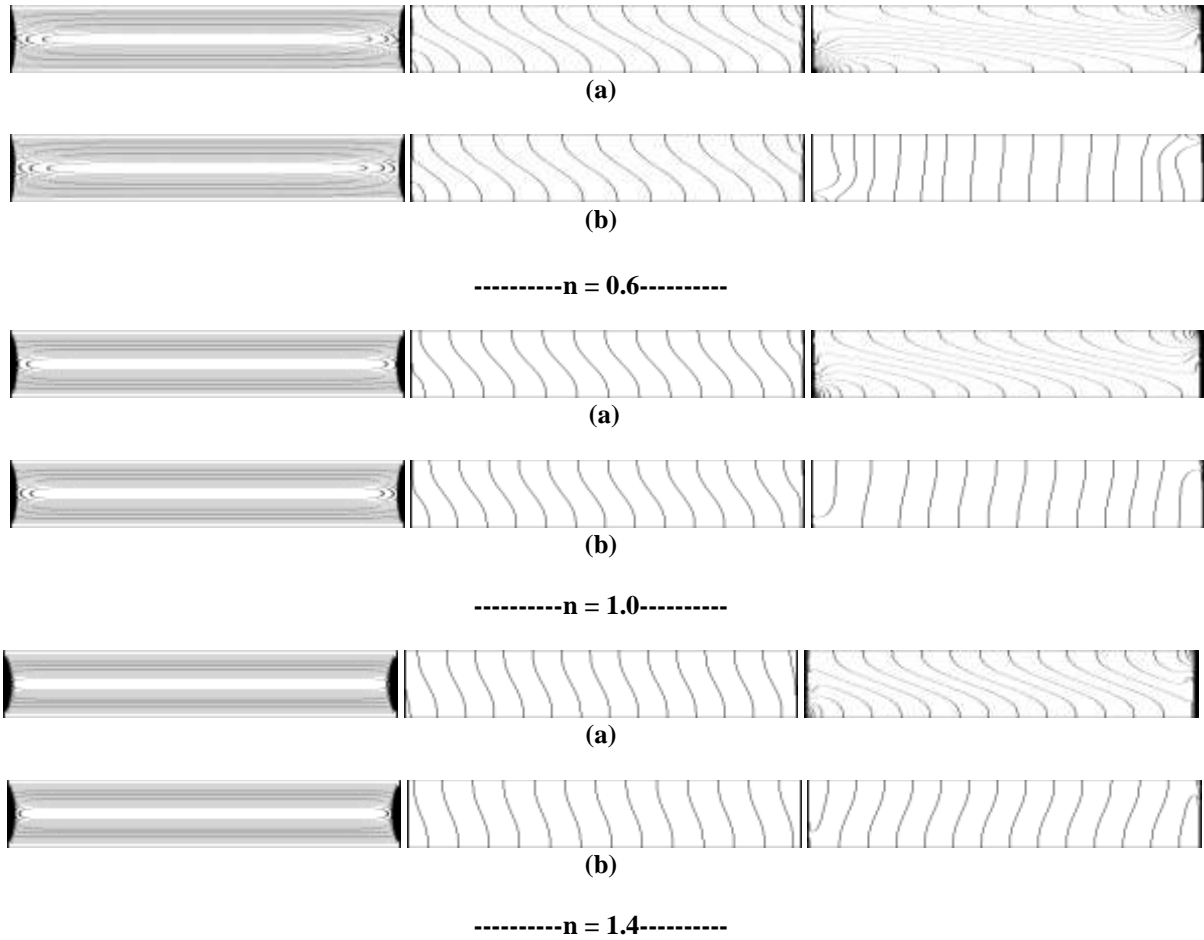
Les figures 4.18 à 4.20 illustrent l'effet du nombre de Lewis sur  $\psi_c$ ,  $\overline{Nu}$  et  $\overline{Sh}$  pour un rapport des forces de flottabilité négatif. Les mêmes paramètres de contrôle ont été considérés que précédemment sauf la valeur de  $N = 2$  remplacé par  $N = -0.5$ . De même ici, la fonction de courant  $\psi_c$  et le nombre de Nusselt  $\overline{Nu}$  se caractérisent par deux paliers, inférieur et supérieur, obtenues pour les faibles et grandes valeurs de  $Le$  et liés entre eux par une transition correspondant aux valeurs intermédiaires de Lewis.  $\overline{Sh}$  présente des variations qualitativement similaires à celles obtenues pour  $N$  positif.

## 4.8 Conclusion

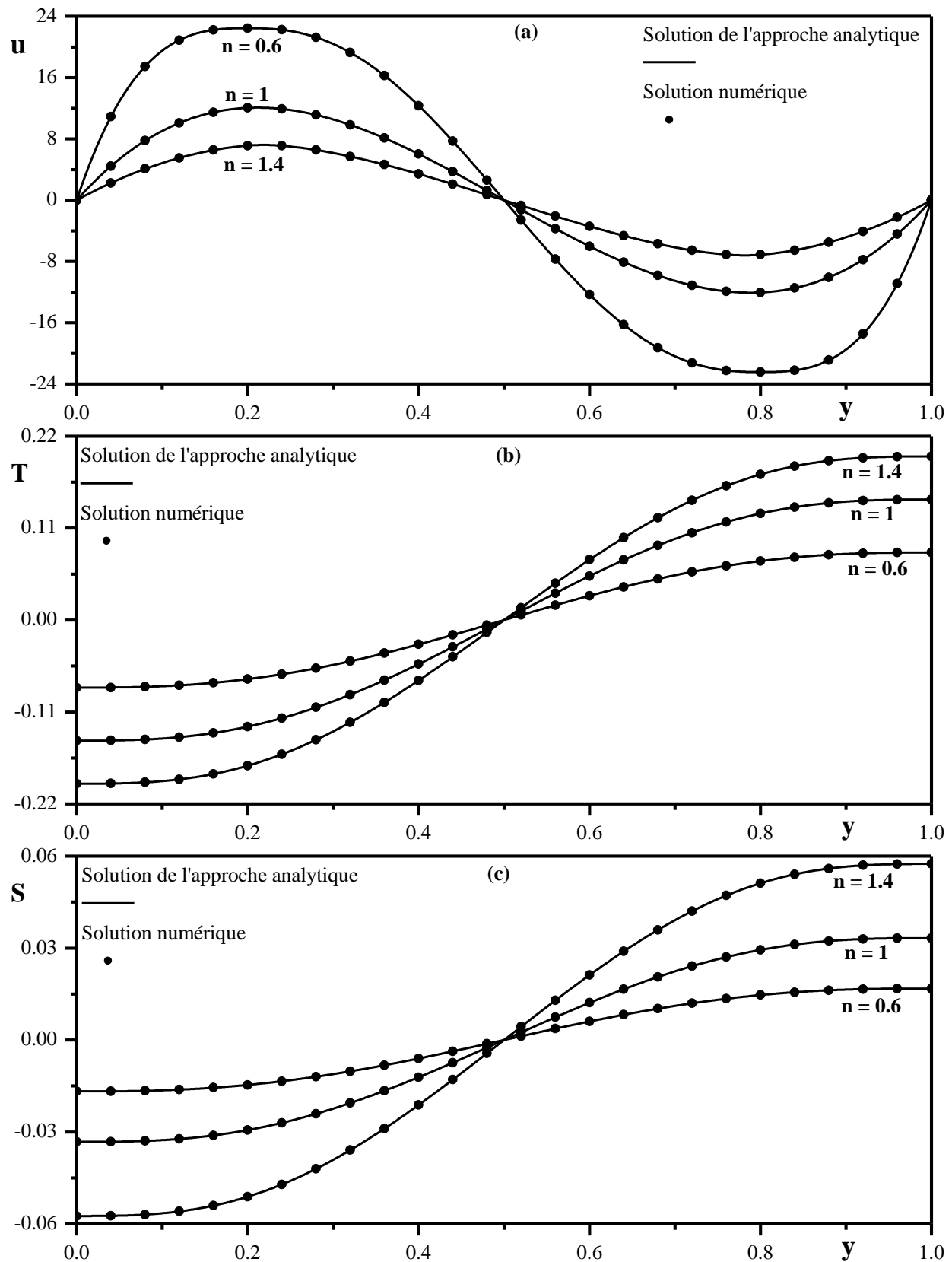
Une étude analytique et numérique de la convection de double diffusion et celle induite par effet Soret, au sein d'une cavité rectangulaire horizontale soumise aux conditions de type Neumann sur ses parois verticales, a été présentée dans ce chapitre. L'effet de l'indice de la loi en puissance  $n$ , du nombre de Rayleigh  $Ra_T$ , du nombre de Lewis  $Le$ , du rapport des forces de volumes  $N$  et du paramètre  $M$  sur les écoulements et les transferts de chaleur et de masse ont été présentés pour une large gamme des paramètres régissant le problème. Il a été démontré que les évolutions de  $\psi_c$  et  $\overline{Nu}$  avec  $Ra_T$ , pour le cas de la convection induite par effet de Soret ( $M = 1$ ), présentent le même comportement que celles obtenues pour la convection de double diffusion ( $M = 0$ ). Cependant, le nombre de Sherwood  $\overline{Sh}$  est considérablement différent et présente des changements significatifs; l'effet Soret impose une inversion du gradient de concentration. L'approximation de l'écoulement parallèle a permis la prédiction du nombre de Rayleigh critique pour lequel  $\overline{Sh}$  change de signe.

Par comparaison au cas de convection double diffusive, il a été trouvé que le transfert de chaleur est favorisé dans le cas de la convection induite par effet Soret pour  $N < 0$  et défavorisé pour  $N > 0$ .

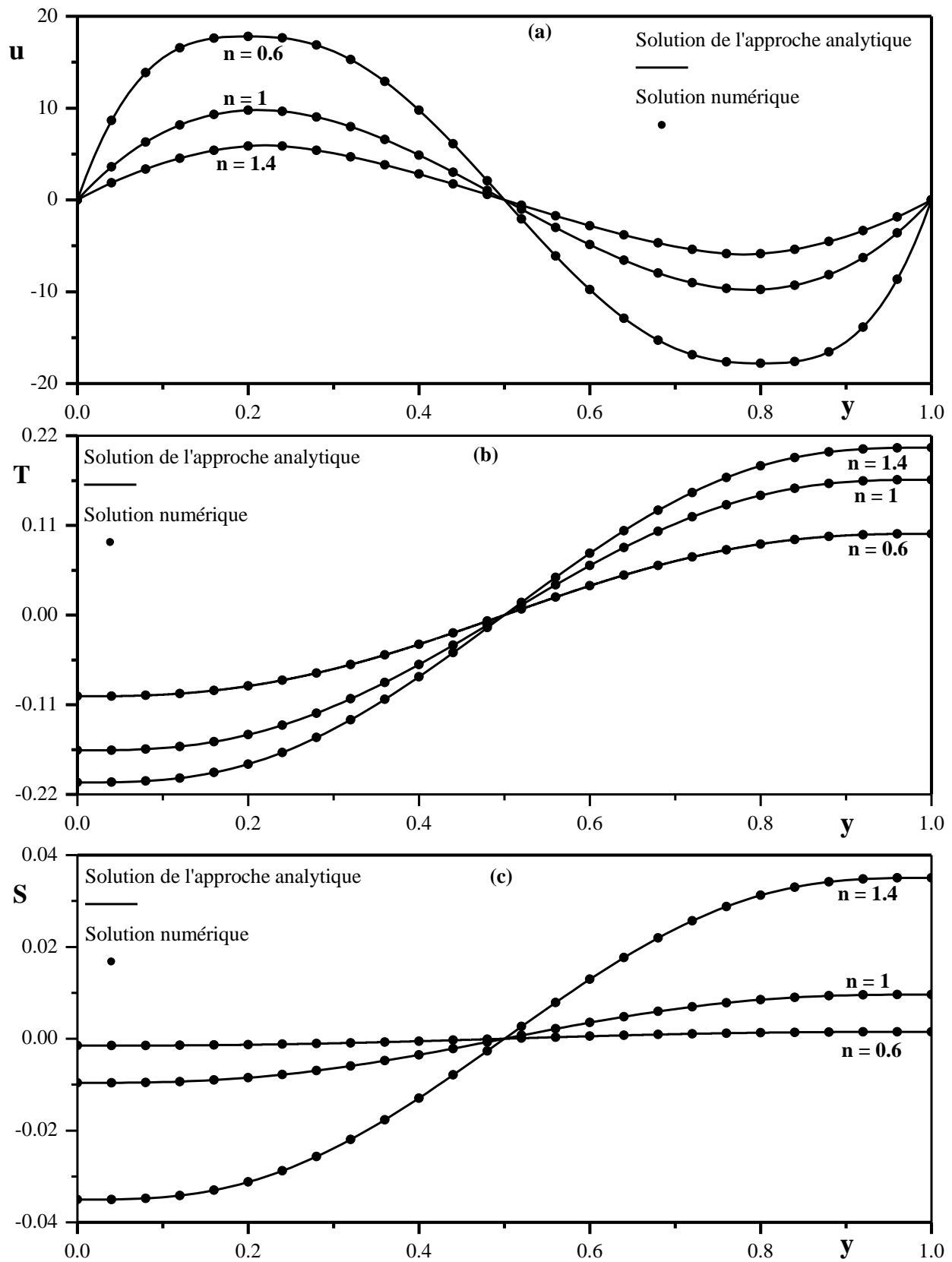
Pour le cas particulier  $N = -1$ , le nombre de Rayleigh sous-critique, pour le début du mouvement a été prédit analytiquement, en fonction de la loi en puissance  $n$ .



**Figure 4.1 :** Lignes de courant (à gauche), isothermes (au centre) et iso-concentrations (à droite) pour  $Ra_T = 10^4$ ,  $Le = 5$ ,  $N = 2$  et différentes valeurs de  $n$  et  $M$  : (a)  $M = 0$  et (b)  $M = 1$ .



**Figure 4.2 :** Profils de vitesse horizontale (a), de température (b) et de concentration (c) au centre de la cavité le long de la coordonnée verticale pour  $N = 2$ ,  $Ra_T = 10^4$ ,  $M = 0$  et différentes valeurs de  $n$ .



**Figure 4.3 :** Profils de vitesse horizontale (a), de température (b) et de concentration (c) au centre de la cavité le long de la coordonnée verticale pour  $N = 2$ ,  $Ra_T = 10^4$ ,  $M = 1$  et différentes valeurs de  $n$ .

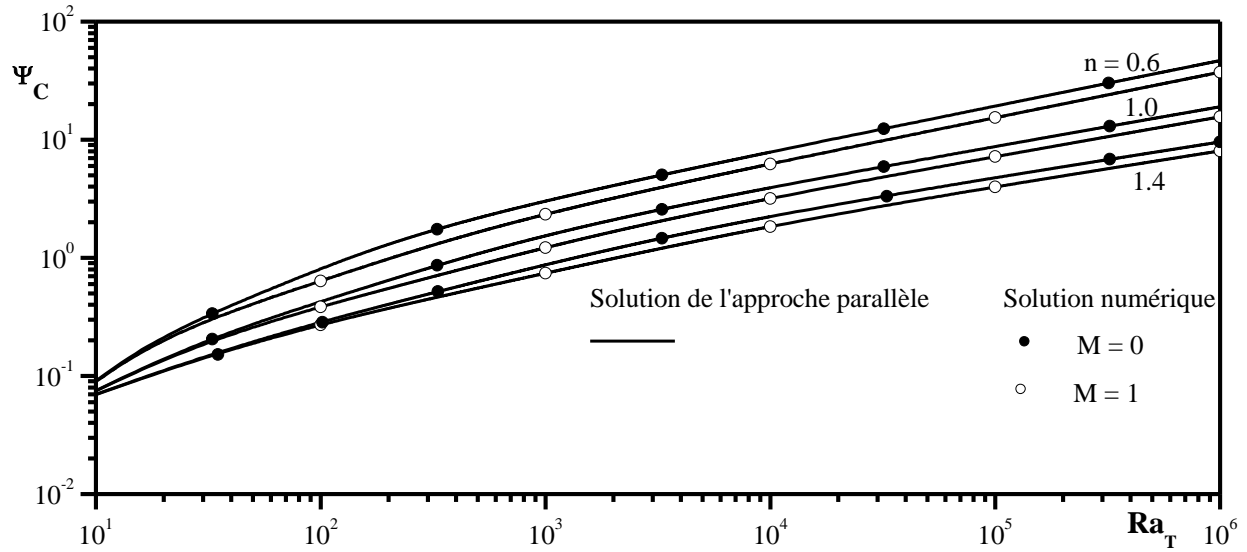


Figure 4.4 : Effet de  $Ra_T$  sur  $\psi_c$  pour  $Le = 5$ ,  $N = 2$ ,  $M = 0$  et  $1$  et différentes valeurs de  $n$ .

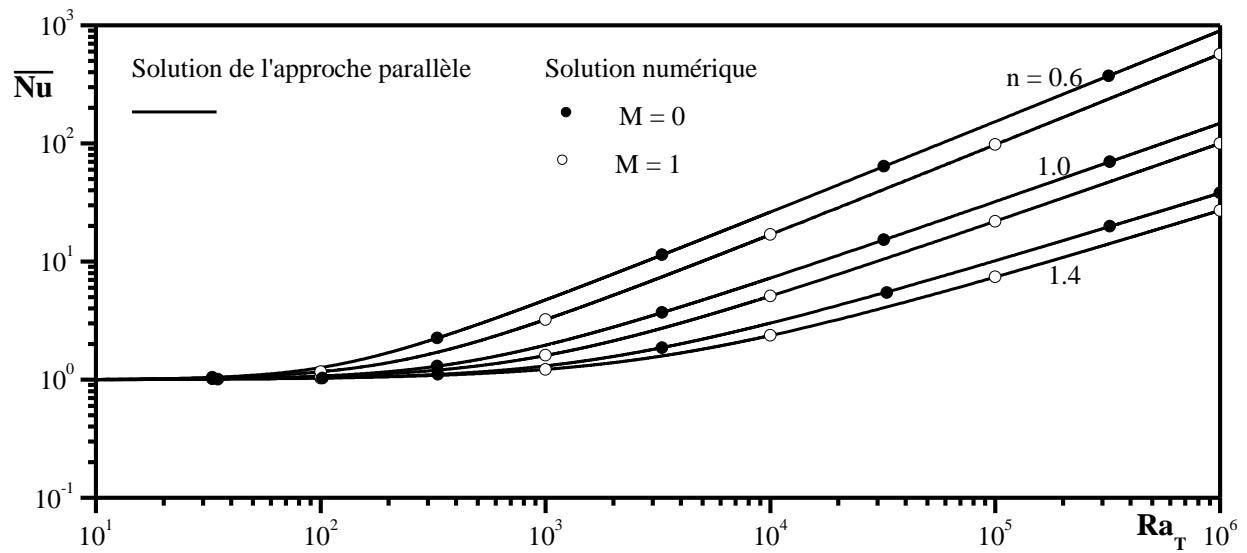


Figure 4.5 : Effet de  $Ra_T$  sur  $\overline{Nu}$  pour  $Le = 5$ ,  $N = 2$ ,  $M = 0$  et  $1$  et différentes valeurs de  $n$ .

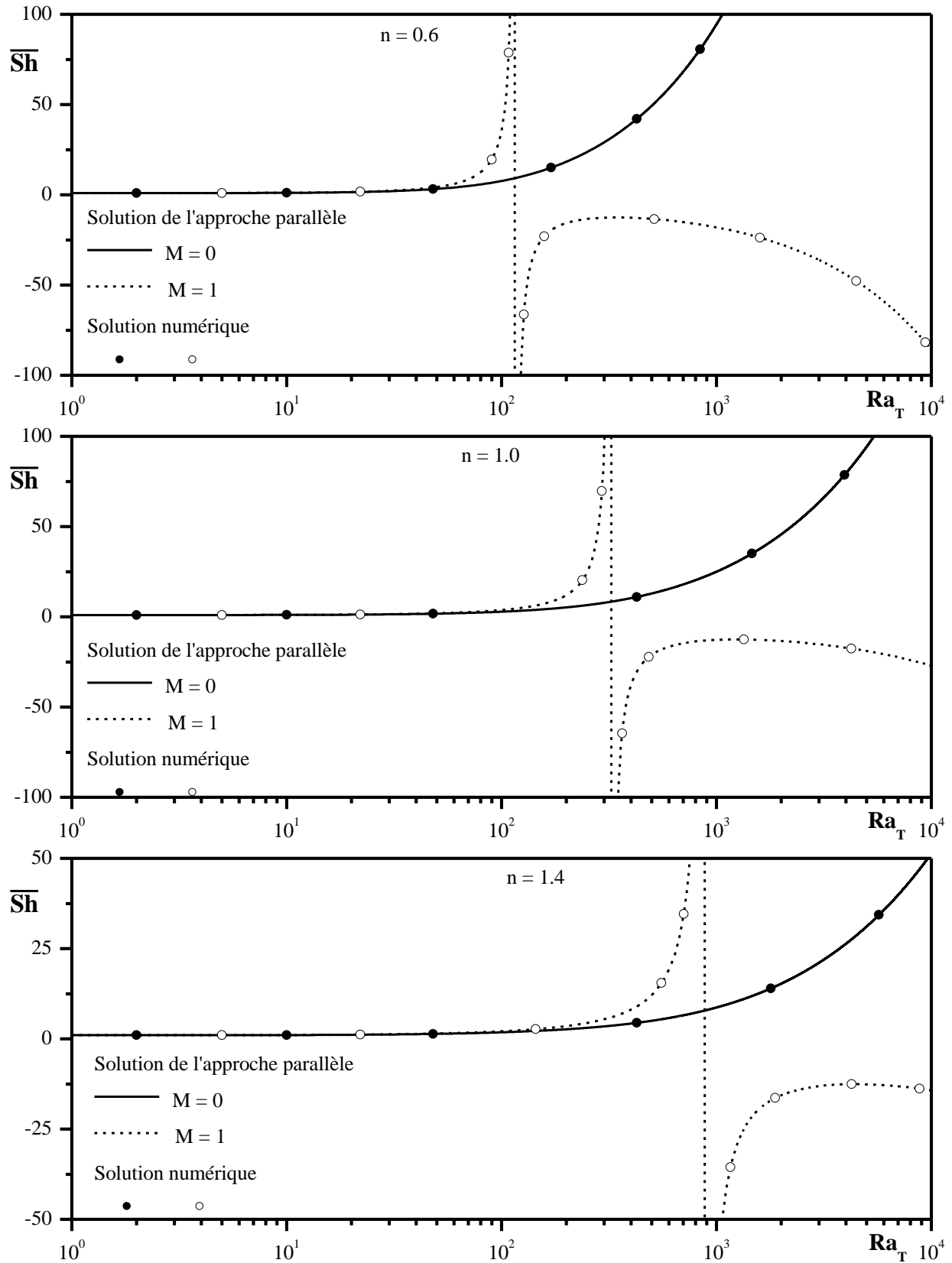
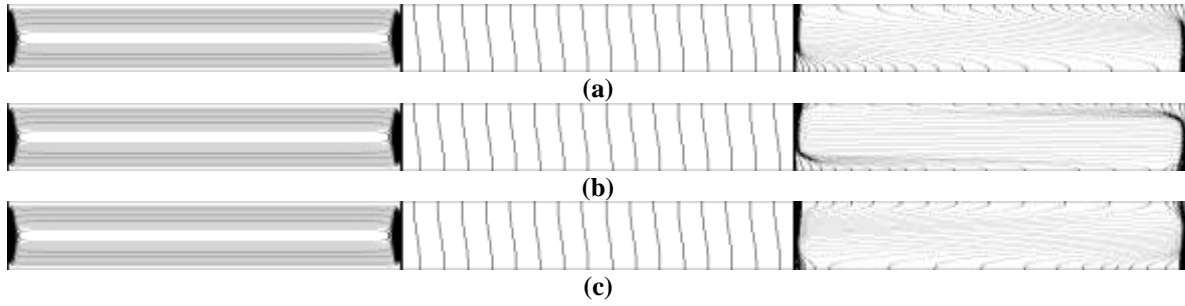
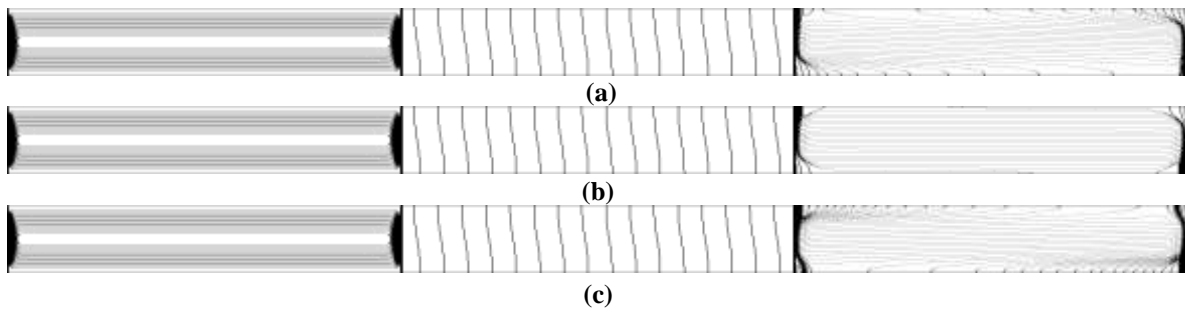


Figure 4.6 : Effet de  $Ra_T$  sur  $\overline{Sh}$  pour  $Le = 5$ ,  $N = 2$ ,  $M = 0$  et  $1$  et différentes valeurs de  $n$ .



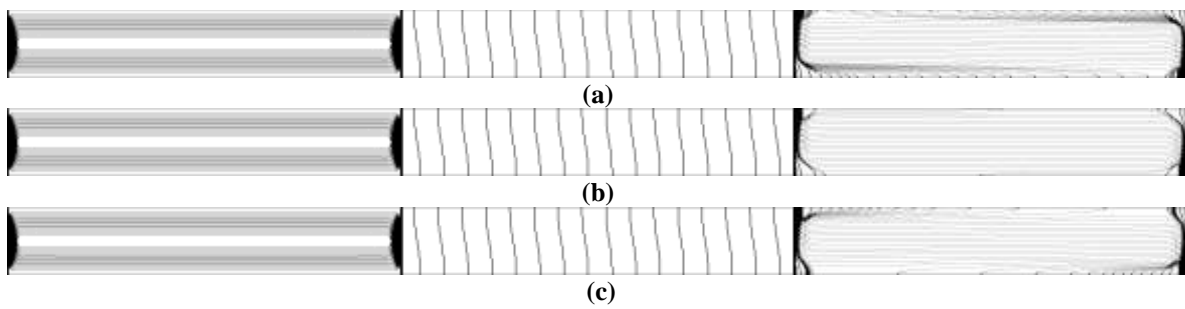
-----n = 0.6-----

**Figure 4.7 :** Lignes de courant (à gauche), isothermes (au centre) et iso-concentrations (à droite) pour  $A = 24$ ,  $Pr = 100$ ,  $Le = 5$ ,  $N = 2$  et (a)  $Ra_T = 109$ , (b)  $Ra = 115.821$  et (c)  $Ra_T = 120$ .



-----n = 1.0-----

**Figure 4.8 :** Lignes de courant (à gauche), isothermes (au centre) et iso-concentrations (à droite) pour  $A = 24$ ,  $Pr = 100$ ,  $Le = 5$ ,  $N = 2$  et (a)  $Ra_T = 317$ , (b)  $Ra_T = 323.279$  et (c)  $Ra_T = 328$ .



-----n = 1.4-----

**Figure 4.9 :** Lignes de courant (à gauche), isothermes (au centre) et iso-concentrations (à droite) pour  $A = 24$ ,  $Pr = 100$ ,  $Le = 5$ ,  $N = 2$  et (a)  $Ra_T = 877$ , (b)  $Ra_T = 883.549$  et (c)  $Ra_T = 888$ .

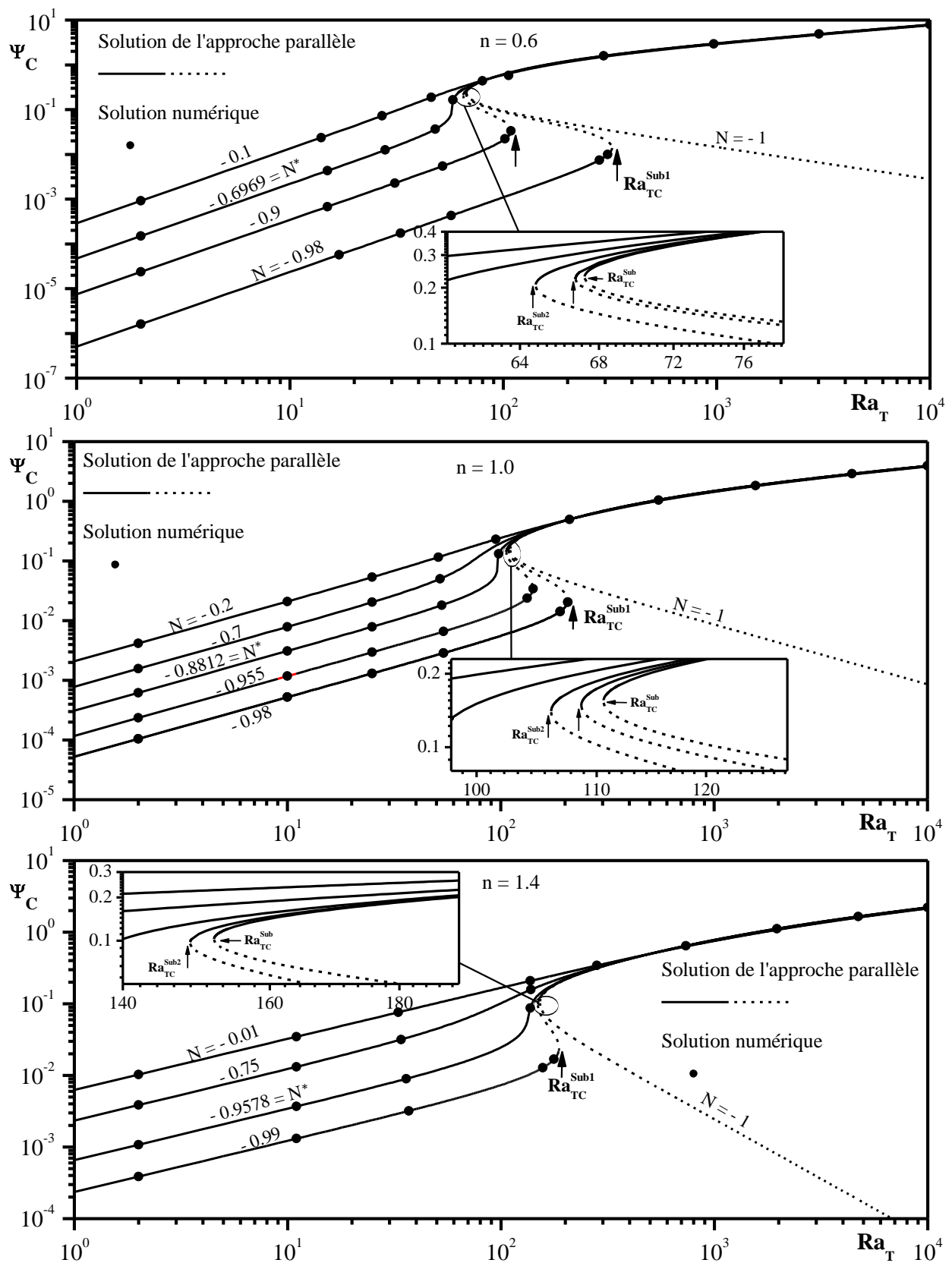


Figure 4.10 : Diagrammes de bifurcation pour  $Le = 10$ ,  $M = 1$  et différentes valeurs de  $N$  et  $n$ .

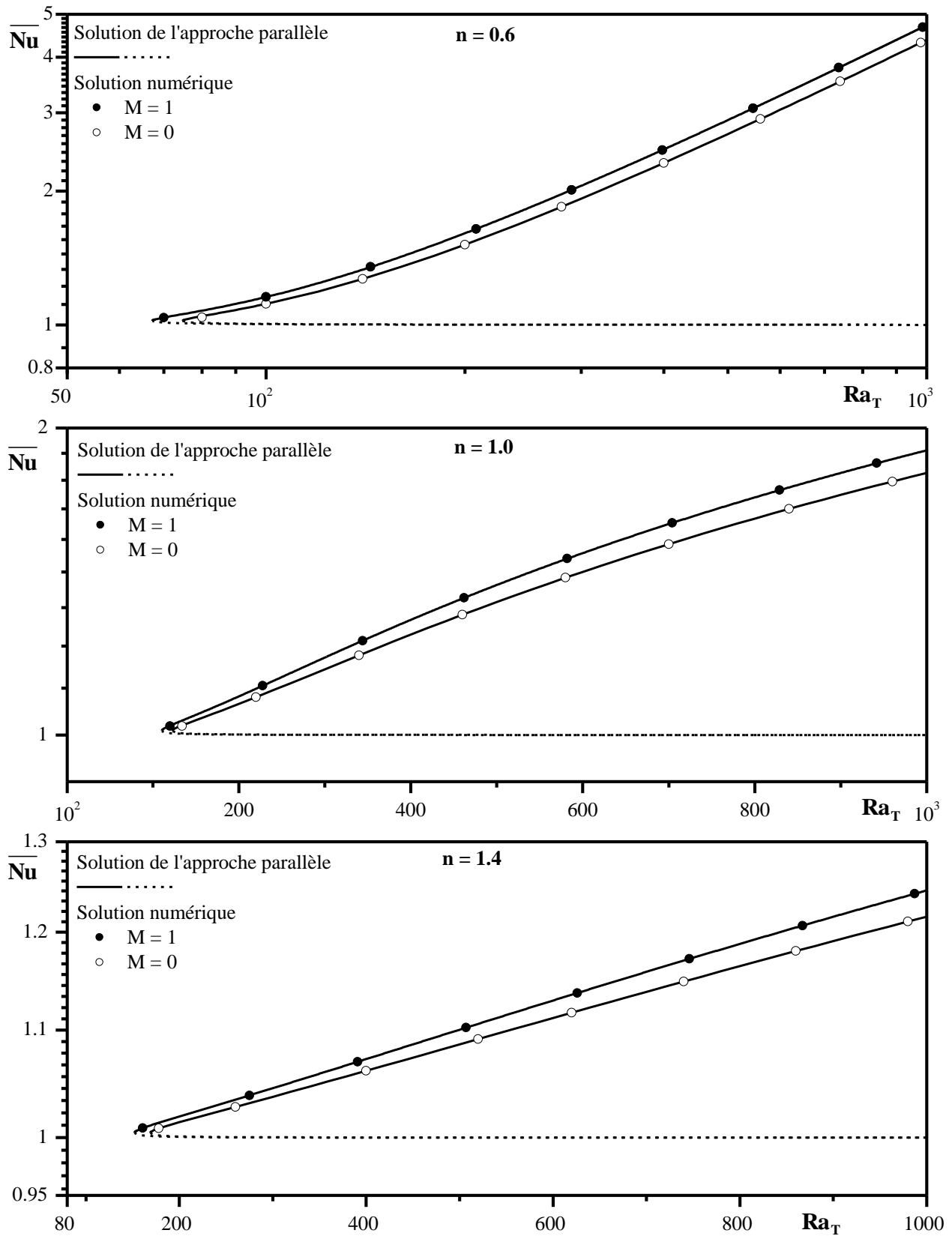


Figure 4.11 : Effet de  $Ra_T$  sur  $\overline{Nu}$  pour  $Le = 10$ ,  $N = -1$ ,  $M = 0$  et  $1$  et différentes valeurs de  $n$ .

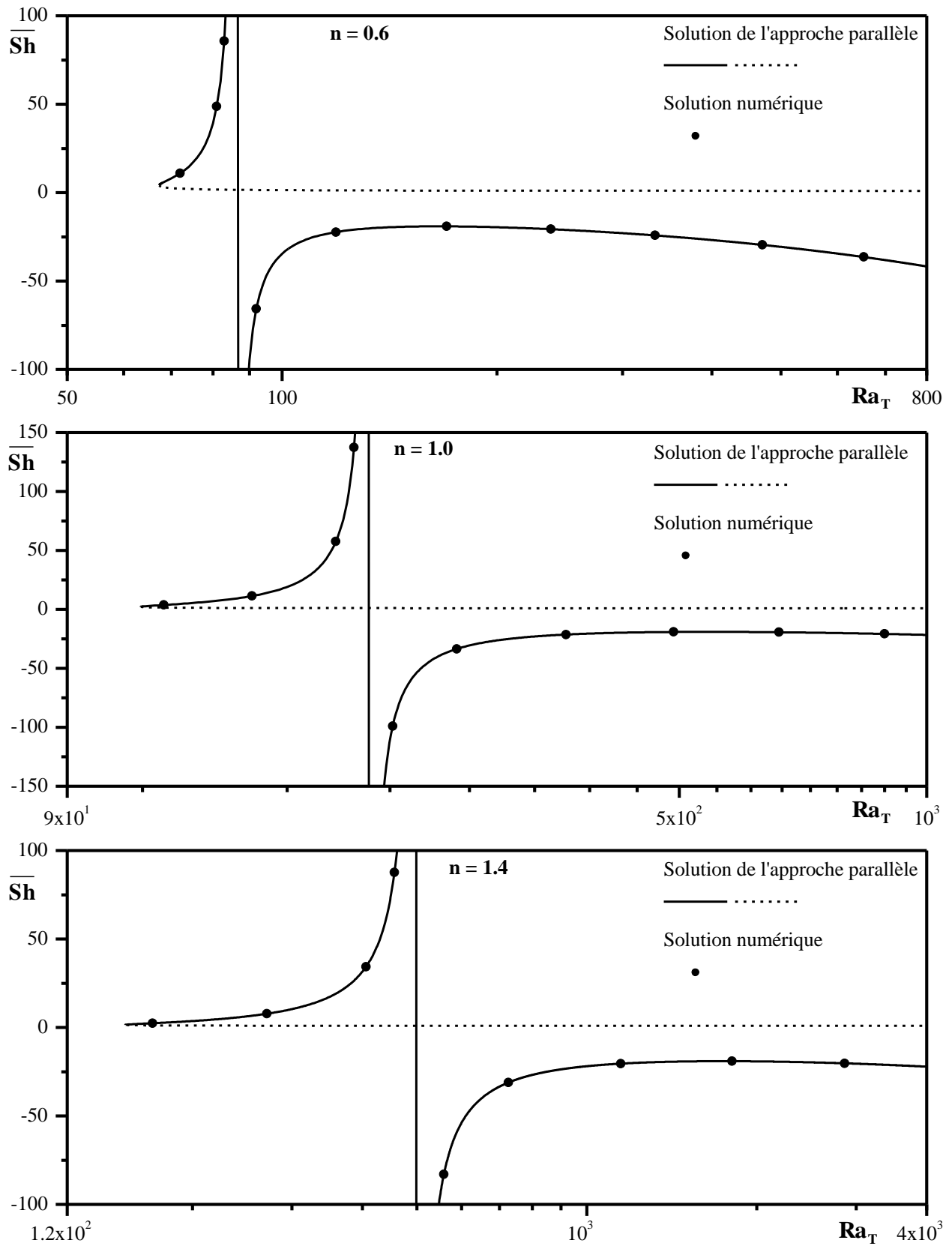


Figure 4.12 : Effet de  $Ra_T$  sur  $\overline{Sh}$  pour  $Le = 10$ ,  $N = -1$ ,  $M = 1$  et différentes valeurs de  $n$ .

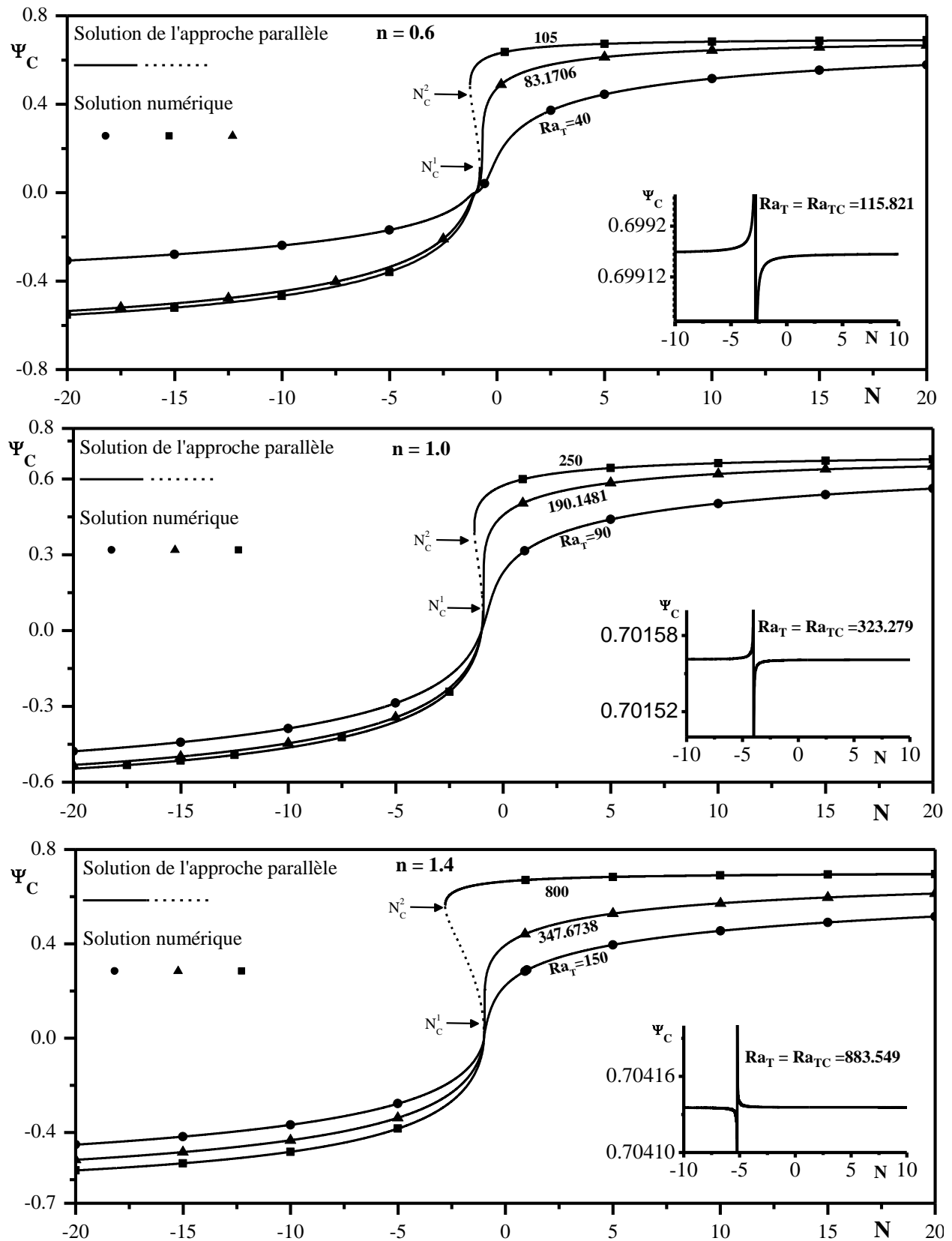
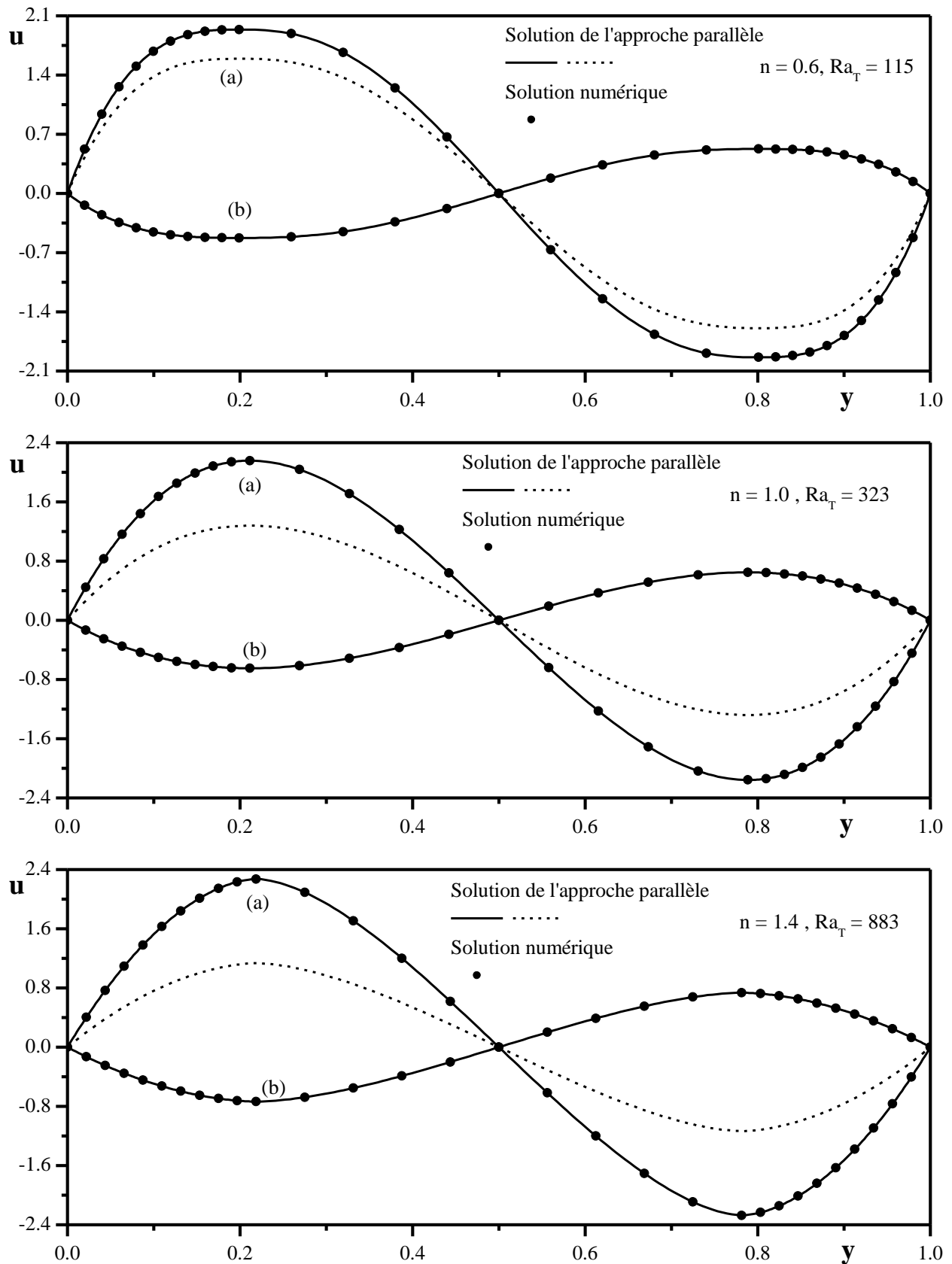


Figure 4.13 : Effet de  $N$  sur  $\psi_c$  pour  $Le = 5$ ,  $M = 1$  et différentes valeurs de  $n$  et  $Ra_T$ .



**Figure 4.14 :** Profils de la vitesse le long de  $y$  au centre de la cavité pour  $N = -1, Le = 5, M = 1$  et différentes valeurs de  $(n, Ra_T)$ .

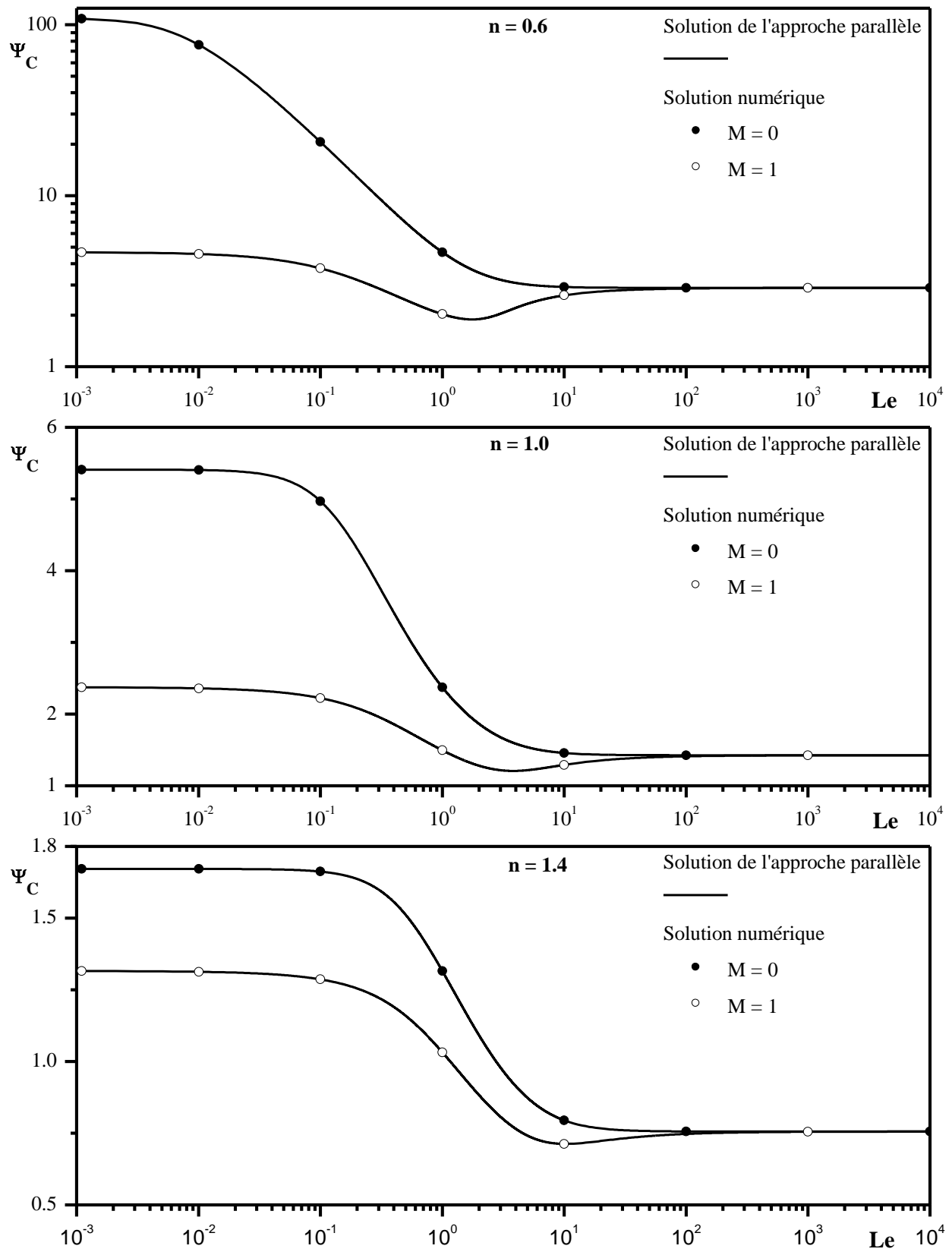
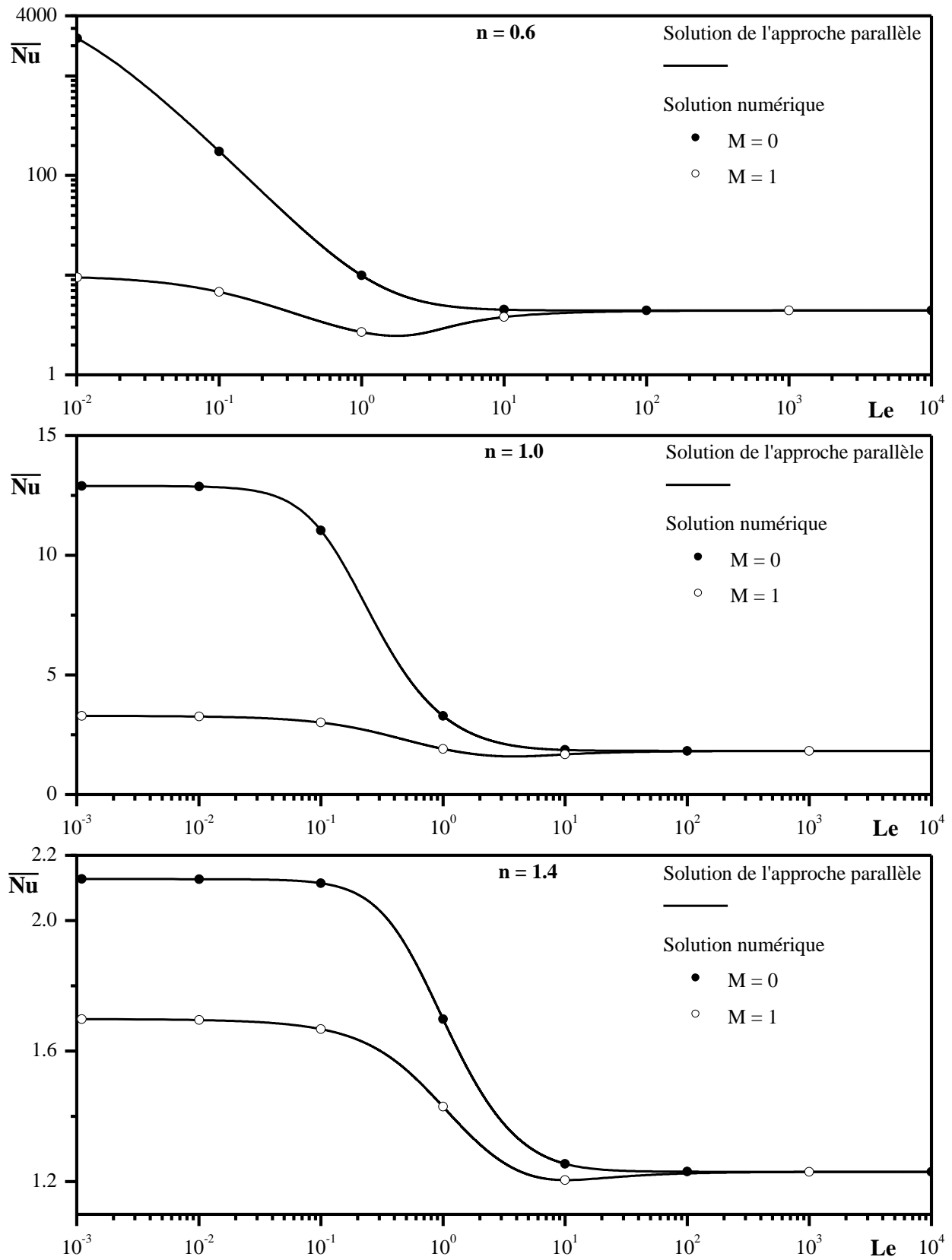
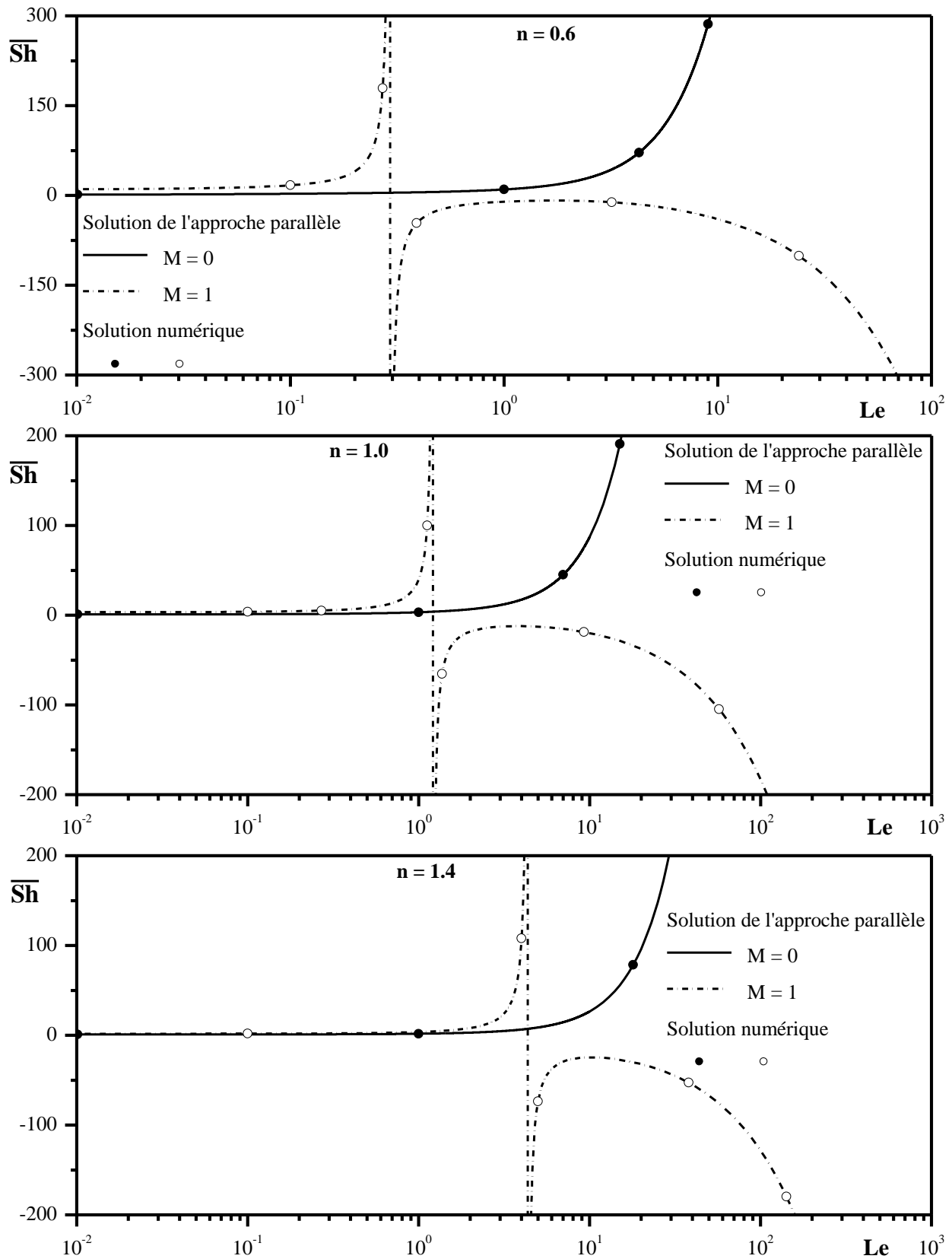


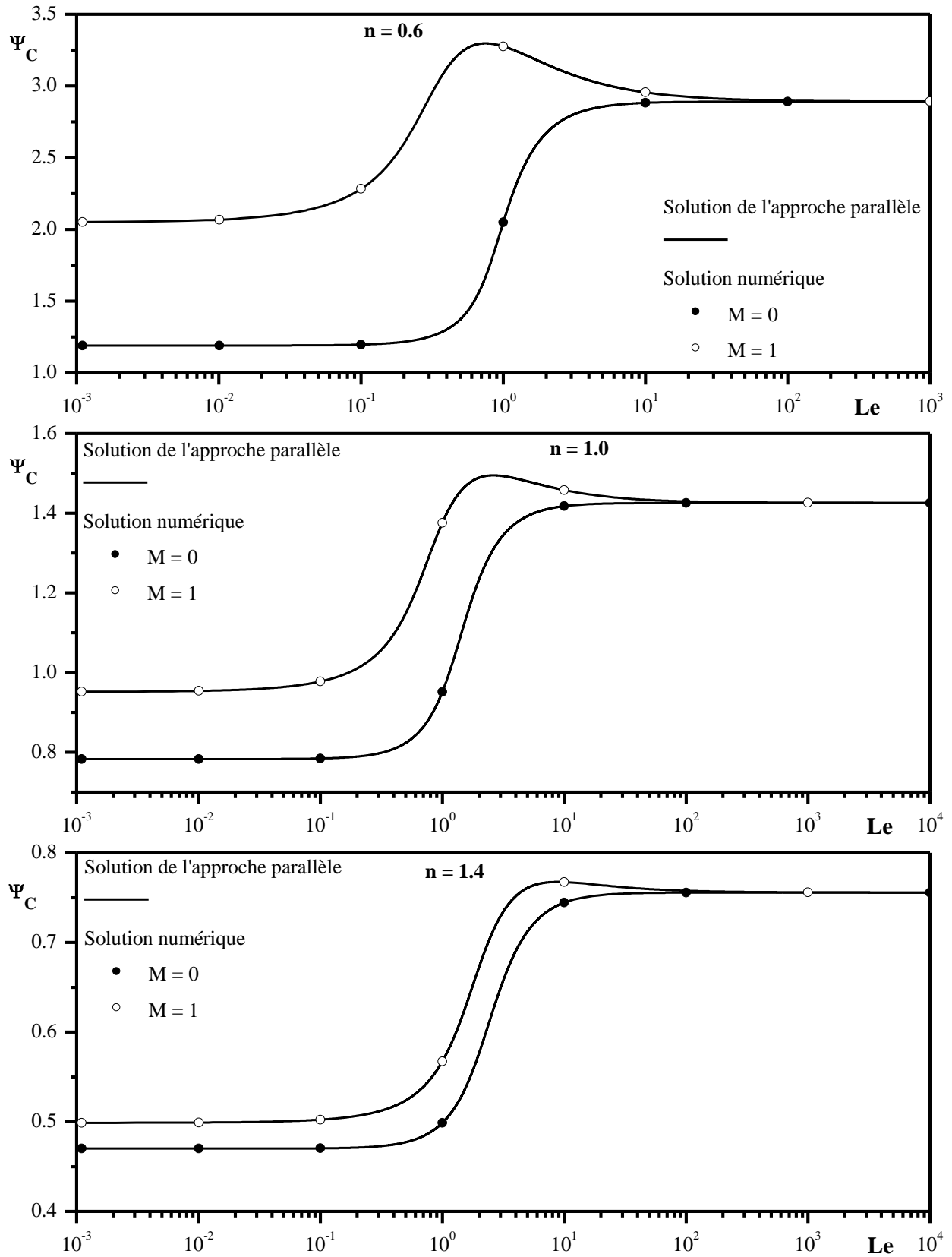
Figure 4.15 : Effet de  $Le$  sur  $\psi_c$  pour  $N = 2$ ,  $Ra_T = 10^3$ ,  $M = 0$  et  $1$  et différentes valeurs de  $n$ .



**Figure 4.16 :** Effet de  $Le$  sur  $\overline{Nu}$  pour  $N = 2$ ,  $Ra_T = 10^3$ ,  $M = 0$  et  $1$  et différentes valeurs de  $n$ .



**Figure 4.17 :** Effet de  $Le$  sur  $\overline{Sh}$  pour  $N = 2$ ,  $Ra_T = 10^3$ ,  $M = 0$  et 1 et différentes valeurs de  $n$ .



**Figure 4.18 :** Effet de  $Le$  sur  $\psi_c$  pour  $N = -0.5$ ,  $Ra_T = 10^3$ ,  $M = 0$  et  $1$  et différentes valeurs de  $n$ .

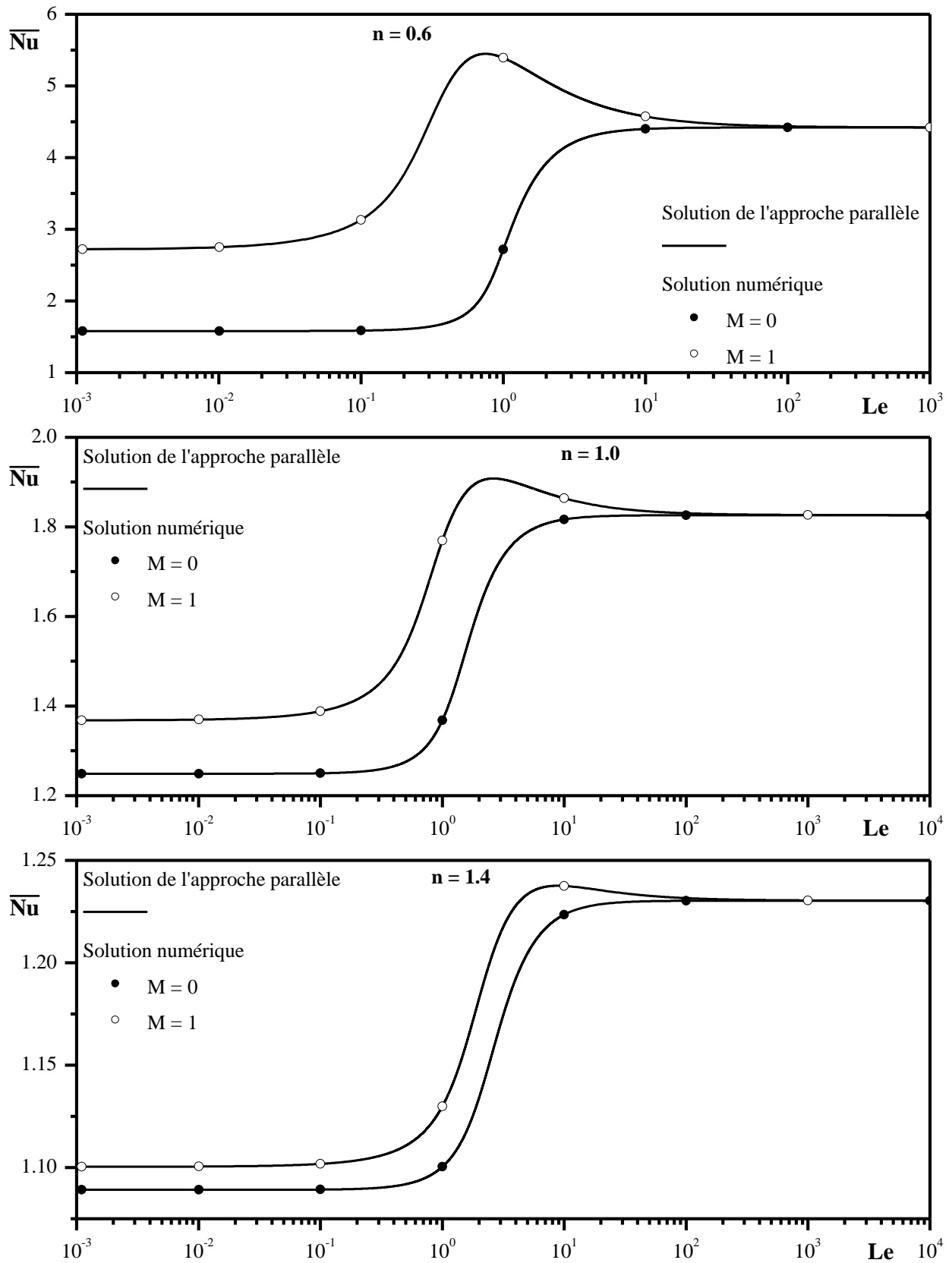
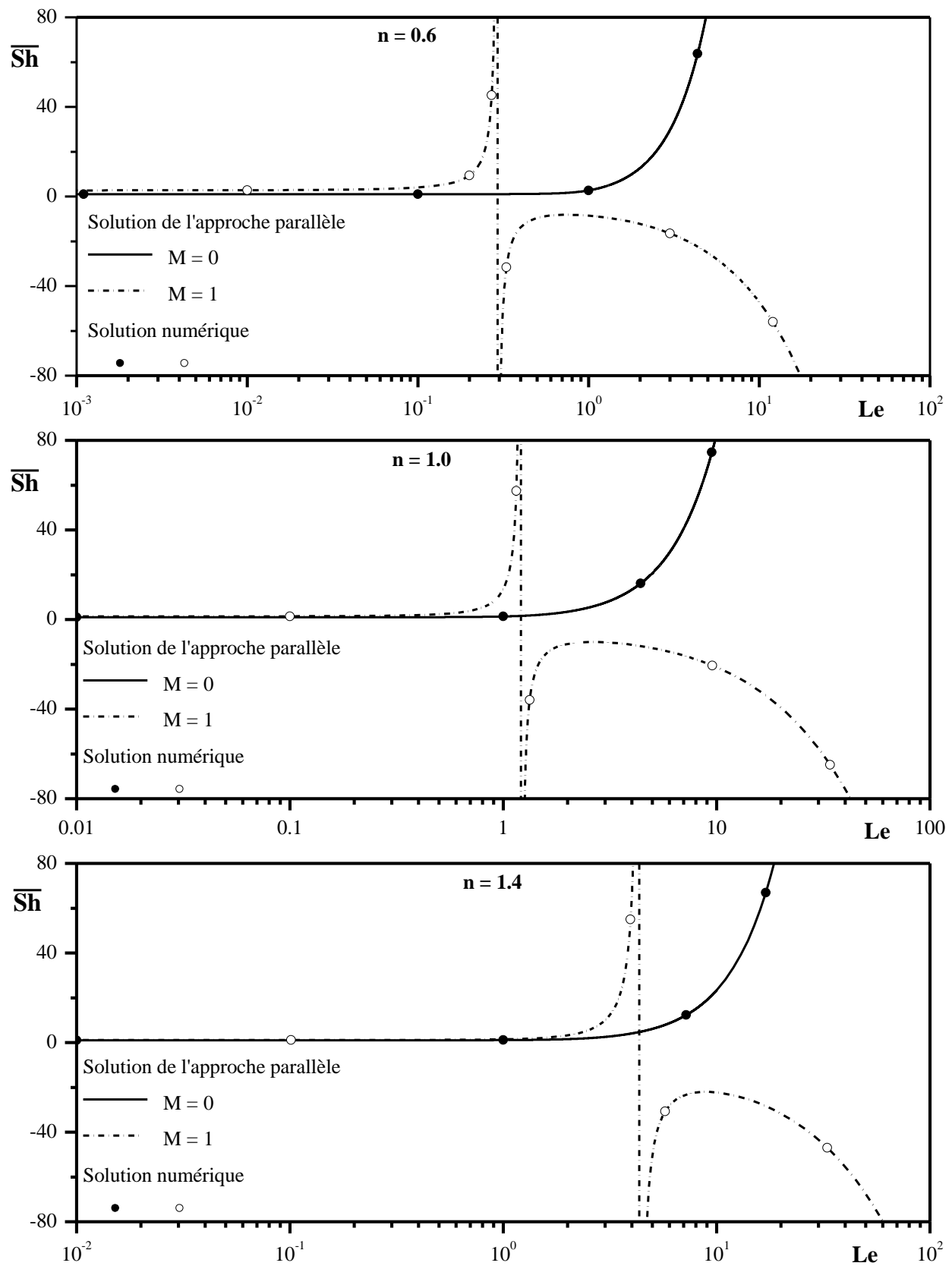


Figure 4.19 : Effet de  $Le$  sur  $\overline{Nu}$  pour  $N = -0.5$ ,  $Ra_T = 10^3$ ,  $M = 0$  et  $1$  et différentes valeurs de  $n$ .



**Figure 4.20 :** Effet de  $Le$  sur  $\overline{Sh}$  pour  $N = -0.5$ ,  $Ra_T = 10^3$ ,  $M = 0$  et 1 et différentes valeurs de  $n$ .

# Chapitre 5

---

---

## Convection induite par double diffusion ou effet Soret d'un fluide non-Newtonien dans une cavité rectangulaire horizontale chauffée ou chauffée et salée par le bas

---

---

### 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, la cavité précédemment considérée est, cette fois-ci, chauffée ou chauffée et salée transversalement. Un flux de chaleur uniforme est appliqué aux parois horizontales tandis que les parois verticales sont imperméables et adiabatiques ( $a = c - M = 0$ ). Les forces de flottabilité solutales sont supposées être induites soit par l'imposition d'un flux de masse sur les parois horizontales (convection double diffusion,  $b = d = 1$  et  $M = 0$ ) ou par gradients de température (effet Soret,  $b = d = 1$  et  $M = 1$ ).

Une solution analytique basée sur le concept de l'écoulement parallèle, valable pour le cas d'une couche poreuse infinie  $A \gg 1$ , sera envisagée. Les paramètres régissant le problème sont le nombre de Rayleigh thermique  $Ra_T$ , le nombre de Lewis  $Le$ , l'indice de la loi en puissance  $n$ , le rapport des forces de volume  $N$  et le paramètre  $M$  définissant la convection induite par double diffusion ( $M = 0$ ) ou par effet Soret ( $M = 1$ ). Les résultats numériques présentés dans ce chapitre ont été obtenus pour  $A = 24$ , à partir de laquelle l'écoulement devient parallèle, et pour un maillage de  $381 \times 121$  qui a été jugé suffisant pour modéliser convenablement la convection au sein de cette cavité.

### 5.2 Validation de l'approche de l'écoulement parallèle

Sur le graphique 5.1, les lignes de courant, les isothermes et les iso-concentrations sont présentées de gauche à droite pour  $A = 24$ ,  $Pr = 100$ ,  $Le = 2$ ,  $N = 0.5$ ,  $Ra_T = 10^3$  et différentes valeurs de  $n$  et  $M$ : (a)  $M = 0$  et (b)  $M = 1$ . Les résultats indiquent clairement que l'écoulement dans le noyau de l'enceinte est essentiellement parallèle aux parois horizontales de la cavité alors que la température et la concentration sont linéairement stratifiées selon la direction  $x$  et par conséquent l'hypothèse de l'écoulement parallèle reste valable pour ce cas.

### 5.3 Effets du nombre de Rayleigh et de l'indice de la loi en puissance

#### 5.3.1 Cas des forces de flottabilité coopérantes ( $N > 0$ )

Pour  $N > 0$ , c'est-à-dire lorsque les gradients de température et de masse coopèrent, la figure 5.2 illustre l'évolution de  $\psi_c$  en fonction de  $Ra_T$ , pour  $M = 0$  et  $1$ ,  $N = 0.5$ ,  $Le = 2$  et différentes valeurs de  $n$ . La situation de la convection thermique pure ( $N = 0$  et  $M = 0$ ) est également présentée dans les graphiques pour fin de comparaison. Les résultats indiquent que le début du mouvement est considérablement affecté par la valeur de  $n$ . Par conséquent, pour un fluide dilatant ( $n > 1$ ), contrairement au cas d'un fluide Newtonien, le phénomène de convection se produit pour toute valeur de  $Ra_T$  supérieure à zéro, c'est-à-dire que le nombre de Rayleigh supercritique pour le début du mouvement est  $Ra_{TC}^{Sup} = 0$ , comme le montre la figure 5.2 et particulièrement sur le zoom des résultats pour  $0 \leq Ra_T \leq 0.02$ . Pour cette situation, des courbes de bifurcation en fourche sont obtenues à la fois pour la convection double diffusive ( $M = 0$ ) et celle induite par effet de Soret ( $M = 1$ ). D'autre part, l'intensité du flux augmente en augmentant/(diminuant)  $Ra_T/(n)$ . Pour le cas des fluides Newtoniens ( $n = 1$ ), comme on peut le voir sur la figure 5.2, la convection se produit, via la bifurcation en fourche, uniquement à un nombre de Rayleigh supercritique  $Ra_{TC}^{Sup} = 360.009$  pour  $M = 0$  et  $Ra_{TC}^{Sup} = 288.009$  pour  $M = 1$ . Les mêmes valeurs ont déjà été prédites par de nombreux chercheurs (Ouriemi et al. (2005), Ouriemi et al. (2006), Alloui et al. (2010)). Pour cette situation particulière, c'est-à-dire pour  $n = 1$ , il peut être facilement démontré que le nombre de Rayleigh supercritique pour le début de la convection est donné par :

$$Ra_{TC}^{Sup} = \frac{720}{1 + N(M + Le)} \quad (5.1)$$

Cependant, pour le cas d'un fluide pseudoplastique ( $n < 1$ ), la situation est assez différente de celle rapportée pour les fluides Newtoniens et dilatants et le début de la convection est régi par un nombre de Rayleigh sous-critique  $Ra_{TC}^{Sub}$ . Ainsi, comme on peut le voir sur la figure 5.2, la convection n'a lieu que si  $Ra_T$  est au-dessus d'un nombre de Rayleigh sous-critique  $Ra_{TC}^{Sub} = 180.4$  pour  $M = 0$  et  $Ra_{TC}^{Sub} = 155.13$  pour  $M = 1$ . Comme le nombre de Rayleigh est augmenté au-dessus de ces valeurs critiques, les courbes de bifurcation résultantes sont similaires à celles rapportées dans la littérature par Ben khelifa et al. (2012). Pour une courbe donnée, la coexistence du type convectif supérieur (traits pleins) et du type convectif inférieur (traits pointillés) est observée pour une valeur donnée de  $Ra_T$ . Le premier mode est trouvé numériquement stable alors qu'il n'a pas été possible d'obtenir des résultats numériques pour le

second mode communément appelé branche instable. Les figures 5.3 et 5.4 illustrent les effets de  $Ra_T$  et  $n$  sur les transferts de chaleur et de masse. Comme observé à partir des graphiques, les nombres de Nusselt et de Sherwood présentent des variations similaires à celles de la fonction de courant. On remarque que le nombre de Nusselt augmente en augmentant  $Ra_T$  pour la convection induite soit par la double diffusion ou par l'effet Soret. Il convient de noter que, par rapport à la convection entraînée par Soret,  $\overline{Nu}$  est plus élevé pour la convection de double diffusion. Quant au nombre de Sherwood (Figure 5.4), il augmente au début en augmentant  $Ra_T$  et tend par la suite vers une valeur constante dans le cas de la convection double-diffusive. Pour la convection induite par effet Soret, le nombre de Sherwood est plus important et augmente considérablement au début avec  $Ra_T$  jusqu'à ce qu'il atteigne un maximum, pour une valeur donnée de  $Ra_T$ , puis décroît pour rejoindre la courbe de la double diffusion. D'autre part, le nombre de Sherwood  $\overline{Sh}$  est considérablement plus élevé pour la convection induite par effet Soret. Cependant, il est à noter que la signification de  $\overline{Sh}$  pour ces deux cas est différente. Pour  $M = 0$ ,  $\overline{Sh}$  a sa signification habituelle, il correspond au taux de transfert de masse à travers les parois longues de la cavité. Ce n'est pas le cas pour  $M = 1$ , pour lequel les limites de l'enceinte sont imperméables. En d'autres termes,  $\overline{Sh}$  est plutôt attribué à la distribution de concentration induite par la diffusion thermique (effet Soret).

### 5.3.2 Cas des forces de flottabilité opposées ( $N < 0$ )

La figure 5.5 montre les valeurs de  $\psi_c$  en fonction de  $Ra_T$  pour  $-0.5 \leq N < 0$ ,  $Le = 2$ ,  $M = 0$  et différentes valeurs de  $n$ . Dans cette gamme, l'influence thermique déstabilisante entre en compétition avec celle solutale stabilisante. Les résultats sont obtenus à la fois pour la convection de double diffusion et celle induite par effet Soret. Le comportement de  $\psi_c$  dépend fortement des valeurs de  $N$  et  $n$  et présente des changements significatifs comme le montre la figure 5.5.

Le cas du fluide Newtonien sera discuté en premier. Comme le montre la figure 5.5, pour  $N \geq N^*$  où  $N^* = -0.1256$ , les résultats sont qualitativement similaires à ceux décrits ci-dessus. De même ici, une courbe de bifurcation en fourche est obtenue à un nombre de Rayleigh supercritique  $Ra_{TC}^{sup} = 961.5369$  et  $734.6978$  pour  $N = -0.1256$  et  $N = -0.01$ , respectivement. Pour  $N < N^*$ , la convection devient sous-critique et se produit avec une convection d'amplitude finie. Ainsi, le problème présente une multiplicité de solutions dans une certaine gamme de  $Ra_T$  pour les mêmes valeurs des paramètres directeurs. Par conséquent, le nombre de Rayleigh

critique correspondant est maintenant  $Ra_{TC}^{Sub} = 1438.448$  et  $2160.02$  pour  $N = -0.3$  et  $N = -0.5$ , respectivement. Pour ce cas particulier, c'est-à-dire pour  $n = 1$ , il peut être facilement démontré que le nombre de Rayleigh sous-critique pour le début du mouvement est donné par :

$$Ra_{TC}^{Sub} = \frac{A_n^2 Le^2 D_n^4 \psi_{cc}^4 - A_n (Le^2 + 1) D_n^2 \psi_{cc}^2 + 1}{B_n (1 + NM + NLe) - A_n B_n (Le^2 - NMLe + NLe) D_n^2 \psi_{cc}^2} \quad (5.2)$$

avec

$$\psi_{cc} = \left[ \frac{Le(1 + NM + NLe) - [C_1]^{\frac{1}{2}}}{(Le^2 - NMLe + NLe) A_n Le^2 D_n^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.3)$$

où

$$C_1 = Le^2(1 + NM + NLe)^2 + (Le^2 - NMLe + NLe)^2 - (Le^2 + 1)(Le^2 - NMLe + NLe)(1 + NM + NLe) \quad (5.4)$$

la condition  $N < N^*$  doit être satisfaite pour l'existence d'une convection sous-critique. Les résultats correspondants obtenus pour le cas d'un fluide dilatant sont aussi rapportés sur la figure 5.5. On remarque ici, lorsque  $N \geq N_1^*$ , la convection est possible pour tout nombre de Rayleigh supérieur à zéro ( $Ra_{TC}^{Sup} = 0$ ), où  $N_1^* = -0.3786$ . Par contre, lorsque  $N_2^* < N < N_1^*$ , où  $N_2^* = -0.56$ ,  $Ra_{TC}^{Sup}$  est toujours nul mais le problème présente maintenant trois solutions pour une certaine gamme de  $Ra_T$  donné. Pour  $N \leq N_2^*$ , la convection devient sous-critique. Il est également montré que le nombre de solutions multiples est réduit à deux au lieu de trois pour un nombre de Rayleigh  $Ra_T$  donné. Cependant, pour un fluide pseudoplastique, contrairement au cas des fluides Newtoniens et dilatants,  $\psi_c$  présente le même comportement quelle que soit la valeur de  $N$ . En effet, comme on peut le voir sur la figure 5.5, la convection s'effectue par une bifurcation sous-critique pour toutes les valeurs de  $N$  présentées sur la courbe. Il convient de souligner que, pour tous les graphiques de cette étude, la solution analytique représentée par les lignes solides (solution stable) concorde étroitement avec les prédictions numériques représentées par des symboles noircis, alors qu'il n'a pas été possible d'obtenir des résultats numériques pour la branche instable inférieure (ligne pointillée). La figure 5.6 illustre les résultats obtenus pour les mêmes paramètres de contrôle que précédemment (figure 5.5) sauf la valeur de  $M = 0$  remplacé par  $M = 1$  (convection entraînée par effet Soret). Les profils des courbes sont qualitativement similaires à ceux de  $M = 0$ . Les figures 5.7 et 5.8 illustrent les nombres de Nusselt et Sherwood correspondants  $\overline{Nu}$  et  $\overline{Sh}$ , en fonction de  $Ra_T$ , pour  $Le = 2$ ,

$N = -0.5$ ,  $M = 0$  et  $1$  et différentes valeurs de  $n$ . Là encore, les prédictions analytiques concordent bien avec les simulations numériques. Les résultats qui correspondent à  $M = 1$  sont qualitativement similaires à ceux de  $M = 0$  et le nombre de Nusselt correspondant à la convection induite par effet Soret est supérieur à celui obtenu pour la convection double diffusive.

Le profil de la vitesse horizontale au centre de la cavité est montré sur la figure 5.9. On remarque que les simulations numériques s'accordent bien avec leurs homologues analytiques. Il est noté aussi à partir de la figure 5.9, pour les paramètres considérés ici, que l'état de repos n'est atteint que pour le cas du fluide Newtonien et il n'est jamais atteint pour un fluide dilatant et pseudo-plastique, ce qui est en accord avec les résultats obtenus ci-dessus. En fait, pour les paramètres considérés ici, à savoir  $Le = 2$ ,  $Ra_T = 901.125$ ,  $M = 1$  et différentes valeurs de  $N$  telles que  $0 < N \leq -0.5$ . Le rapport de flottabilité correspondant pour le début du mouvement est  $N = -0,067$  comme prédit par l'équation (5.1). Ainsi, le début du mouvement est conditionné par  $N < -0.067$ .

#### 5.4 Effets du rapport des forces de volume et de l'indice de la loi en puissance

L'effet du rapport de flottabilité,  $N$ , sur la valeur de la fonction du flux est représenté numériquement et analytiquement sur les figures 5.10 et 5.11 en termes de variations de  $\psi_c$  en fonction de  $N$  pour  $Le = 2$ ,  $M = 0$  et  $1$  respectivement et différentes valeurs de  $n$  et  $Ra_T$ . Pour le cas de la convection thermique pure ( $N = 0$ ), le flux qui s'ensuit, entraîné uniquement par les gradients de température imposés, se déroule dans le sens antihoraire. Pour ce cas, selon l'équation (2.87), la valeur de  $\psi_c$  est la même pour  $M = 0$  et  $M = 1$  pour un  $n$  donné. Pour  $n = 0.6$ , les résultats présentés par les figures 5.10 et 5.11 sont obtenus pour  $Ra_T = 500$ . D'après ces figures, la convection n'est possible qu'à partir d'un certain taux de flottabilité sous-critique  $N_C^{Sub} = -0.3648$  et  $-0.4326$  pour  $M = 0$  et  $1$  respectivement. Au-dessus de ces valeurs critiques, la force de l'intensité d'écoulement est augmentée par une augmentation de  $N$ . Pour le cas du fluide Newtonien, le comportement de  $\psi_c$  dépend fortement de la valeur de  $Ra_T$ . En effet, comme le montre les figures 5.10 et 5.11, lorsque  $Ra_T \leq Ra_T^*$ , la convection est supercritique et les taux de flottabilité supercritiques correspondants sont  $N_C^{Sup} = -0.1256$  et  $-0.067$  pour  $Ra_T = Ra_T^* = 961.5368$  et  $901.125$  et  $N_C^{Sup} = 0.7026$  et  $0.267$  pour  $Ra_T = 300$  et  $400$  pour  $M = 0$  et  $1$  respectivement. Pour  $Ra_T > Ra_T^*$ , le début de la convection correspond à une bifurcation sous-critique se produisant à  $N_C^{Sub} = -0.4615$  et  $-0.493$  pour  $Ra_T = 2000$  pour  $M = 0$  et  $1$  respectivement. De même ici, au-dessus de ces valeurs critiques, la force de l'intensité

de l'écoulement est renforcée par une augmentation de  $N$ . Les résultats correspondants obtenus pour le cas d'un fluide dilatant ( $n = 1.4$ ) sont maintenant considérés. Comme observé sur les figures 5.10 et 5.11, la convection est supercritique pour toute valeur de  $Ra_T$  et la multiplicité des solutions est observée pour  $Ra_T > Ra_T^*$  où  $Ra_T^* = 4679.746$  et  $3793.835$  pour  $M = 0$  et  $1$  respectivement. Ainsi, avec les mêmes valeurs des paramètres directeurs, trois solutions de  $\psi_c$  sont théoriquement possibles (indiquées par des lignes pleines et pointillées) pour  $N_c^2 < N < N_c^1$  tandis que les résultats numériques (représentés par des symboles noircis) présentaient seulement deux solutions pour les mêmes valeurs des paramètres directeurs.

### 5.5 Effets du nombre de Lewis

L'effet du nombre de Lewis  $Le$  sur l'intensité de convection  $\psi_c$  et sur le nombre de Nusselt moyen  $\overline{Nu}$  est présenté sur les figures 5.12 et 5.13 respectivement, pour  $Ra_T = 10^3$ ,  $N = 0.5$ ,  $M = 0$  et  $1$  et différentes valeurs de  $n$ . On remarque que cet effet est plus important pour le cas de double diffusion ( $M = 0$ ), que pour les cas de l'effet Soret ( $M = 1$ ). Pour les faibles valeurs de Lewis ( $Le < 10^{-2}$ ), la fonction de courant  $\psi_c$  et le nombre  $\overline{Nu}$  sont indépendants de ce paramètre et puisque les forces de flottabilité thermiques et solutales sont coopérantes ( $N > 0$ ), la fonction de courant augmente lorsque le nombre de Lewis s'accroît, en passant par un maximum à  $Le = 0.22, 0.96$  et  $3.22$  pour  $n = 0.6, 1$  et  $1.4$  respectivement, ensuite diminue et tend vers une valeur constante dépendant de  $n$ . Pour des valeurs élevées de Lewis (valeurs supérieures à  $Le \approx 10^2, 10^3, 10^4$  pour  $n = 0.6, 1$  et  $1.4$  respectivement), l'intensité de l'écoulement devient indépendante de ces valeurs et les résultats de la double diffusion et de l'effet Soret deviennent identiques. La figure 5.14 illustre l'effet de  $Le$  et  $n$  sur le nombre de Sherwood. Comme observé à partir du graphique, pour le cas de la convection induite par effet Soret,  $\overline{Sh}$  présente des variations qualitativement similaires à celles de la fonction de courant. Pour la convection de double diffusion,  $\overline{Sh}$  présente deux paliers inférieur et supérieur et une montée directe de plus en plus rapide en augmentant  $n$ . Il est à noter que, pour la convection induite par effet Soret,  $\overline{Sh}$  est plus important et augmente considérablement au début avec  $Le$  jusqu'à ce qu'il atteigne un maximum puis décroît pour rejoindre la courbe de la double diffusion.

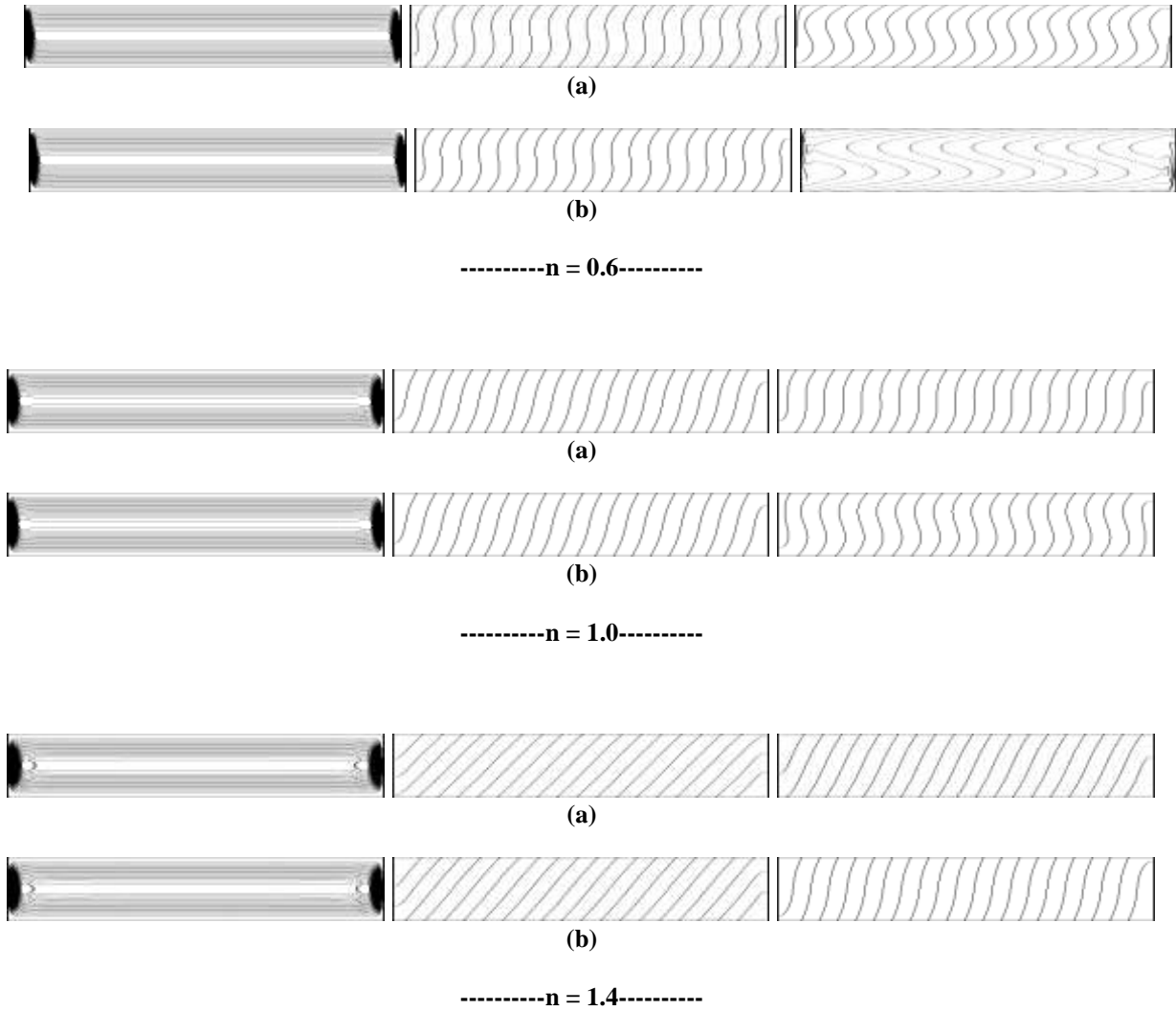
Les figures 5.15 à 5.17 illustrent l'effet du nombre de Lewis sur  $\psi_c$ ,  $\overline{Nu}$  et  $\overline{Sh}$  pour un rapport des forces de flottabilité négatif. Les mêmes paramètres de contrôle ont été considérés que précédemment sauf la valeur de  $N = 0.5$  remplacé par  $N = -0.5$ . De même ici, la fonction de courant  $\psi_c$  et le nombre de Nusselt  $\overline{Nu}$  se caractérisent par deux paliers, inférieur et supérieur,

obtenues pour les faibles et grandes valeurs de  $Le$ . Pour cette situation, la fonction de courant et le nombre de Nusselt présentent un minimum au lieu d'un maximum lors du passage entre les deux paliers.  $\overline{Sh}$  présente des variations qualitativement similaires à celles obtenues pour  $N$  positif.

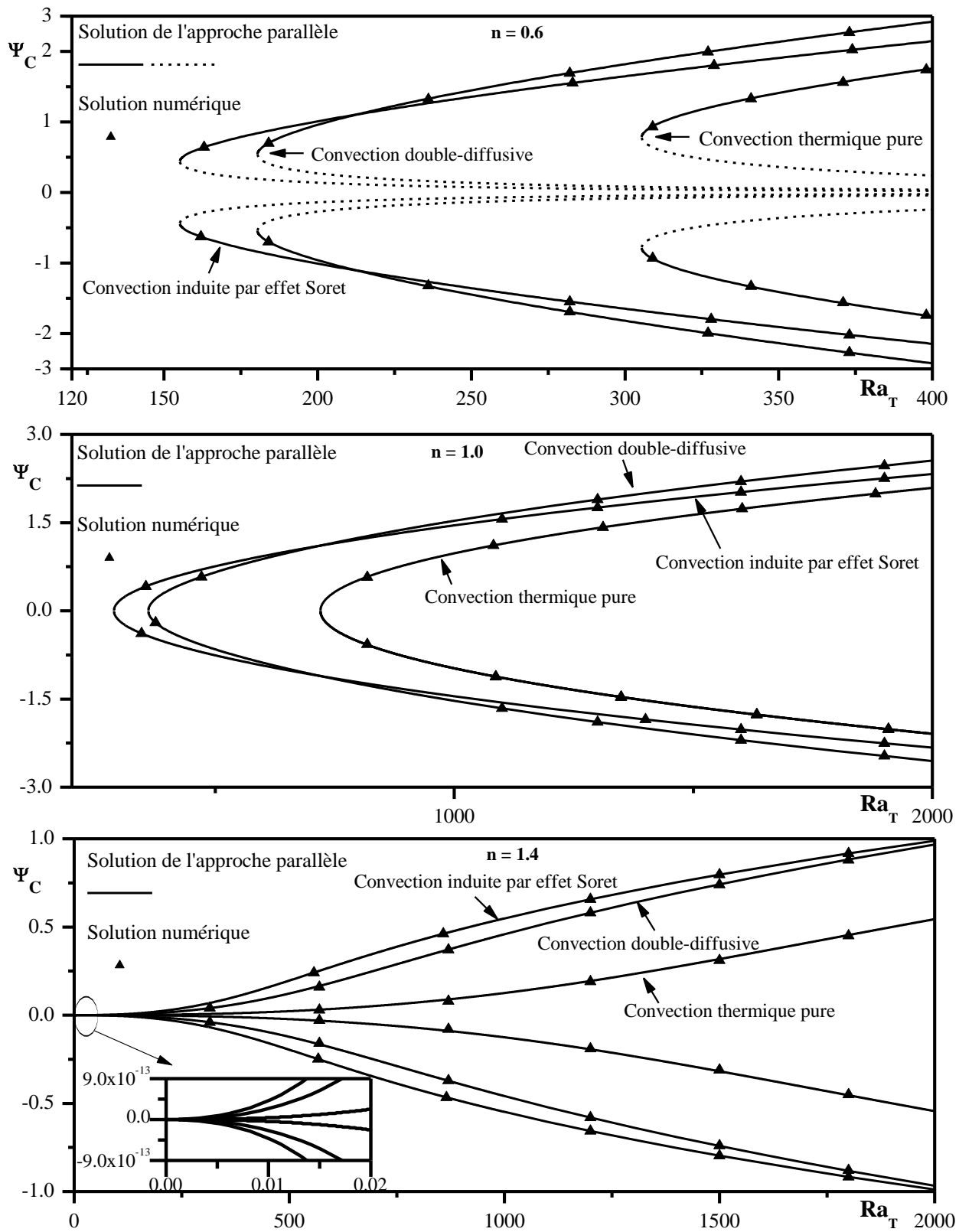
## 5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, la convection de double diffusion a été comparée à celle induite par effet Soret, d'un fluide binaire non Newtonien. Il s'agit d'une cavité rectangulaire horizontale, soumise le long de ses parois horizontales, soit à des gradients de température (convection par effet Soret) ou à des gradients de températures et de concentration à la fois (convection de double diffusion). L'influence du nombre de Rayleigh  $Ra_T$ , du rapport des forces de volume  $N$ , de l'indice de la loi en puissance  $n$ , du nombre de Lewis  $Le$  et du paramètre  $M$  (convection doublement diffusive ( $M = 0$ ) ou par effet Soret ( $M = 1$ )) sur l'intensité de transfert de chaleur et de masse a été discutée. Une solution analytique basée sur le concept de l'écoulement parallèle a été dérivée pour le cas d'une couche poreuse infinie  $A \gg 1$ .

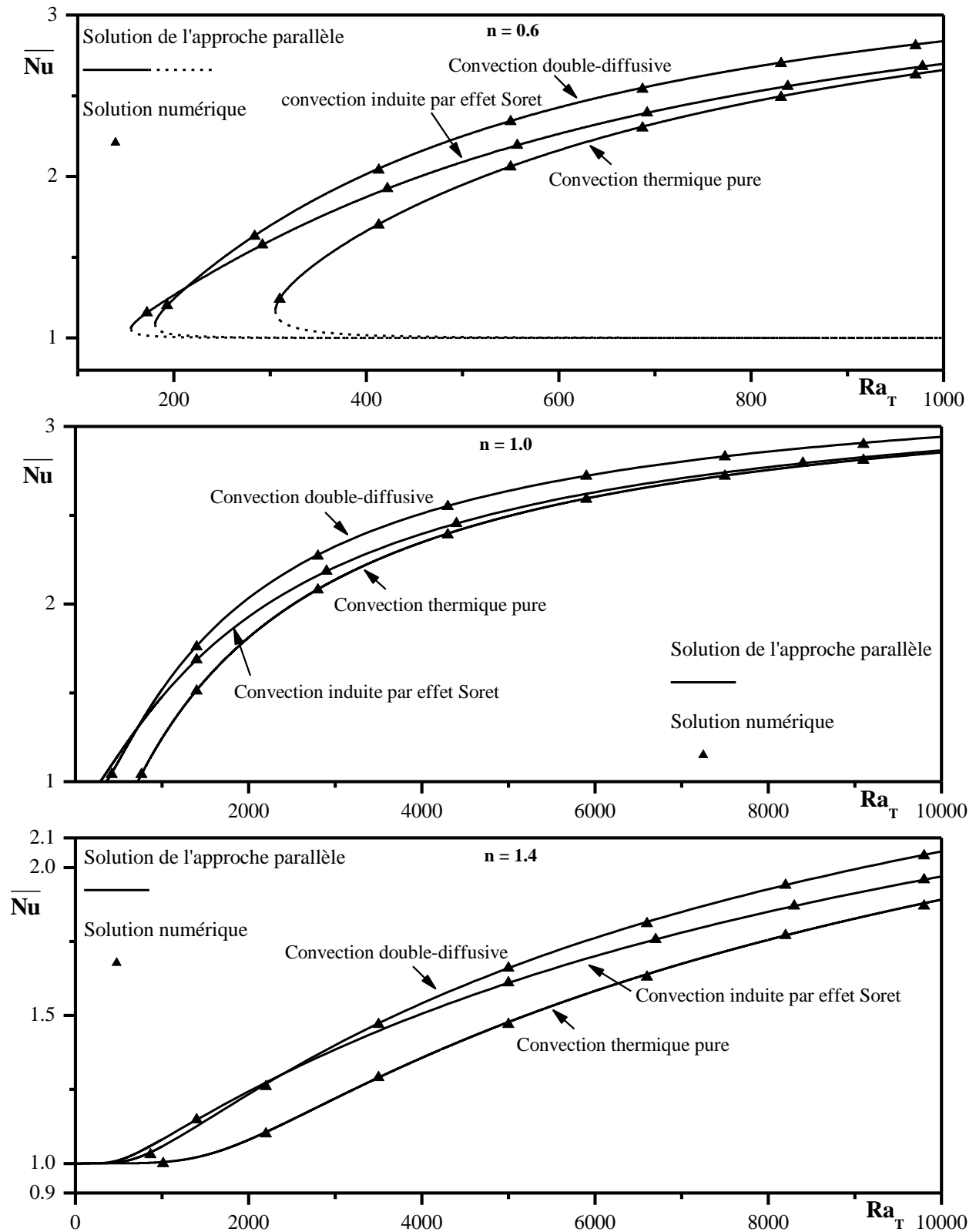
Le présent modèle analytique a permis la prédiction des nombres de Rayleigh sous-critiques et supercritiques marquant la naissance des mouvements convectifs dans le cas d'un fluide Newtonien. Il a été démontré que le comportement de l'écoulement du fluide s'est avéré fortement dépendant des valeurs de  $N$  et  $n$ ; pour un fluide dilatant ( $n > 1$ ), l'apparition de la convection peut être supercritique ( $Ra_{TC}^{Sup} = 0$ ) ou sous-critique selon la valeur de  $N$ . Pour un fluide Newtonien ( $n = 1$ ), la convection peut être aussi supercritique ( $Ra_{TC}^{Sup} \neq 0$ ) ou sous-critique selon la valeur de  $N$ . Cependant, le début de la convection est régi par un nombre de Rayleigh sous-critique  $Ra_{TC}^{Sub}$  pour le cas d'un fluide pseudo-plastique ( $n < 1$ ) indépendamment du signe de  $N$ .



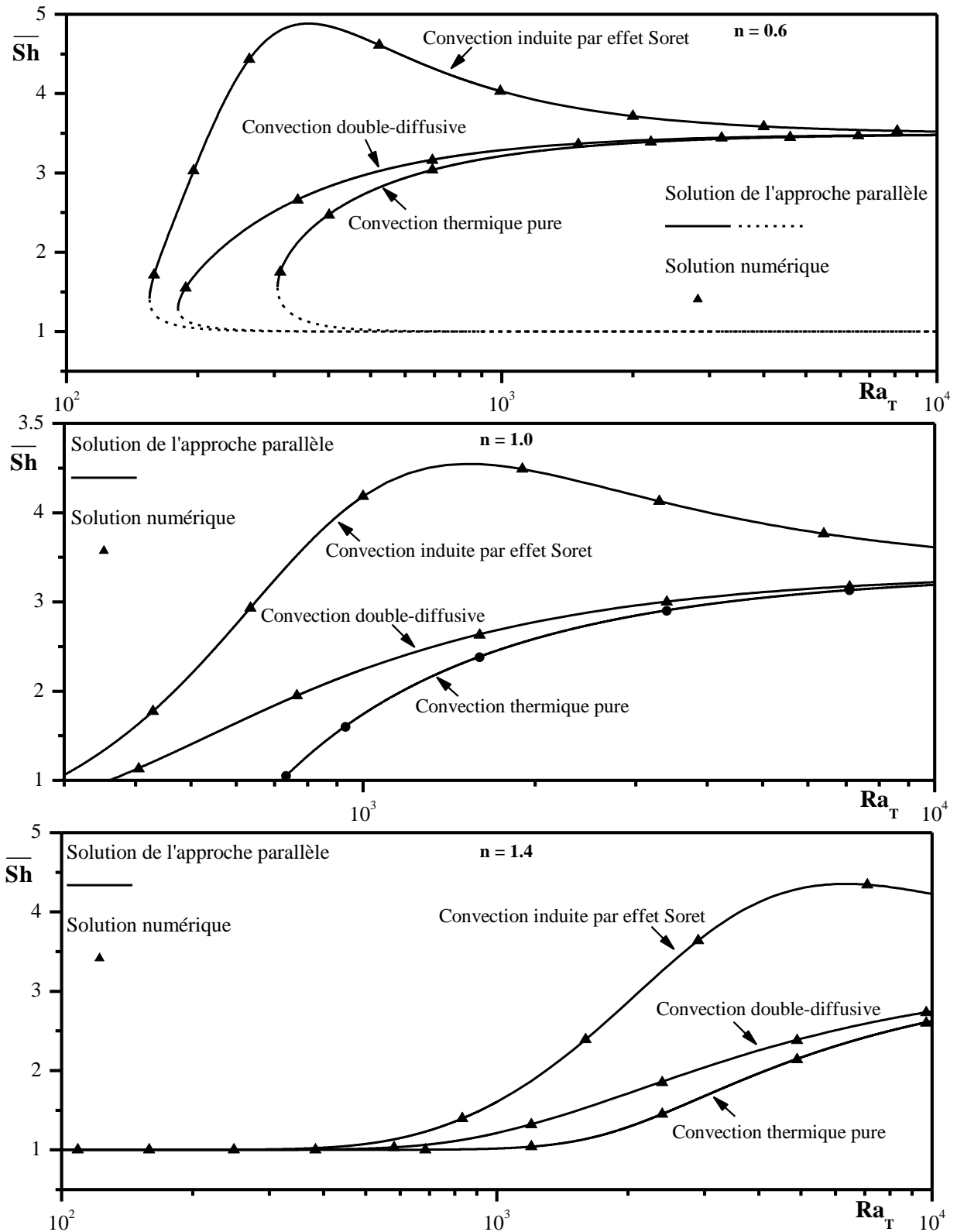
**Figure 5.1** : Lignes de courant (à gauche), isothermes (au centre) et iso-concentrations (à droite) pour  $A = 24$ ,  $Pr = 100$ ,  $Ra_T = 10^3$ ,  $Le = 2$ ,  $N = 0.5$  et différentes valeurs de  $n$  et  $M$  : (a)  $M = 0$  et (b)  $M = 1$ .



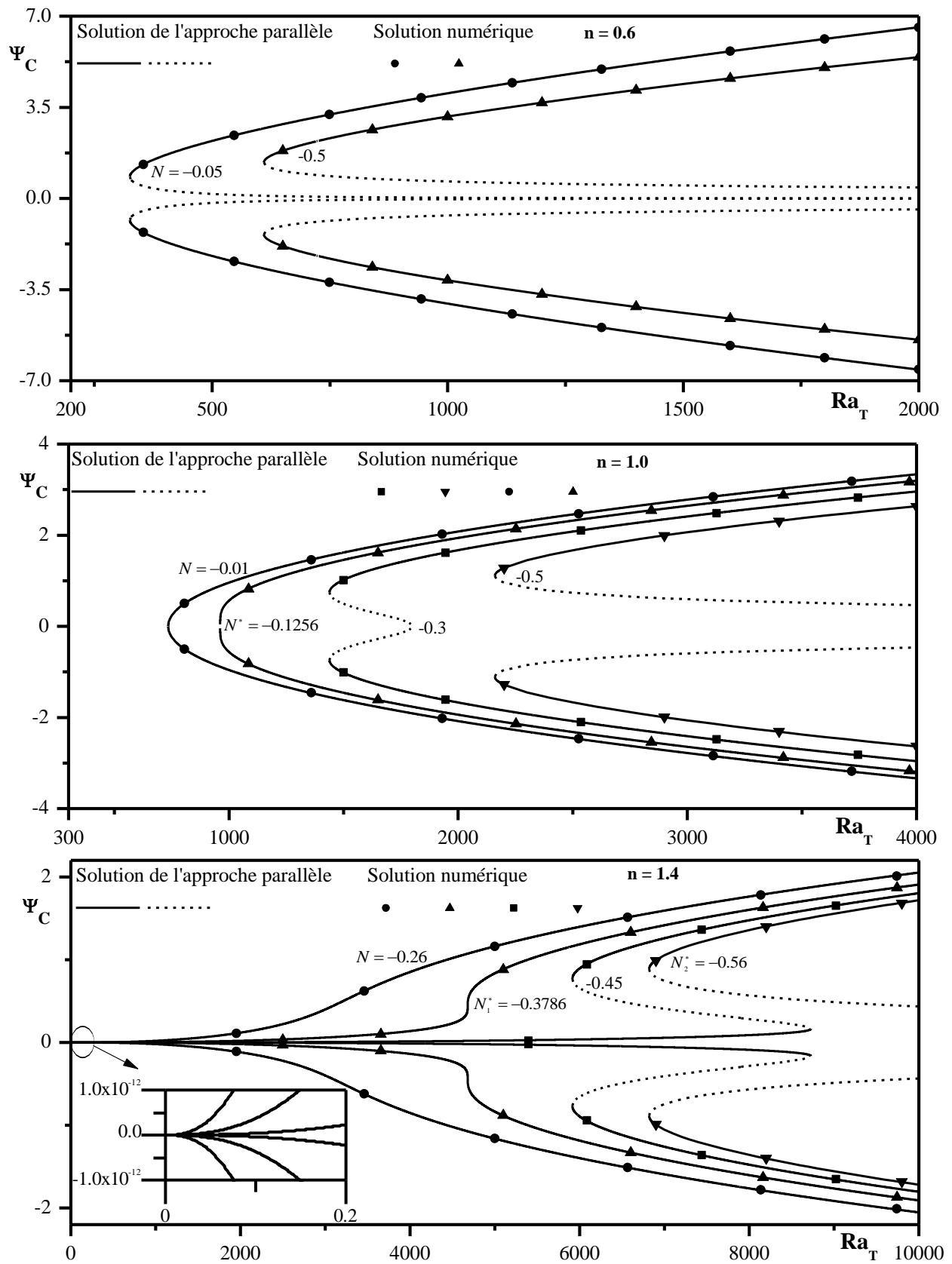
**Figure 5.2 :** Diagrammes de bifurcation en terme de  $\psi_C$  en fonction de  $Ra_T$  pour  $M = 0$  et  $1$ ,  $Le = 2$ ,  $N = 0.5$  et différentes valeurs de  $n$ .



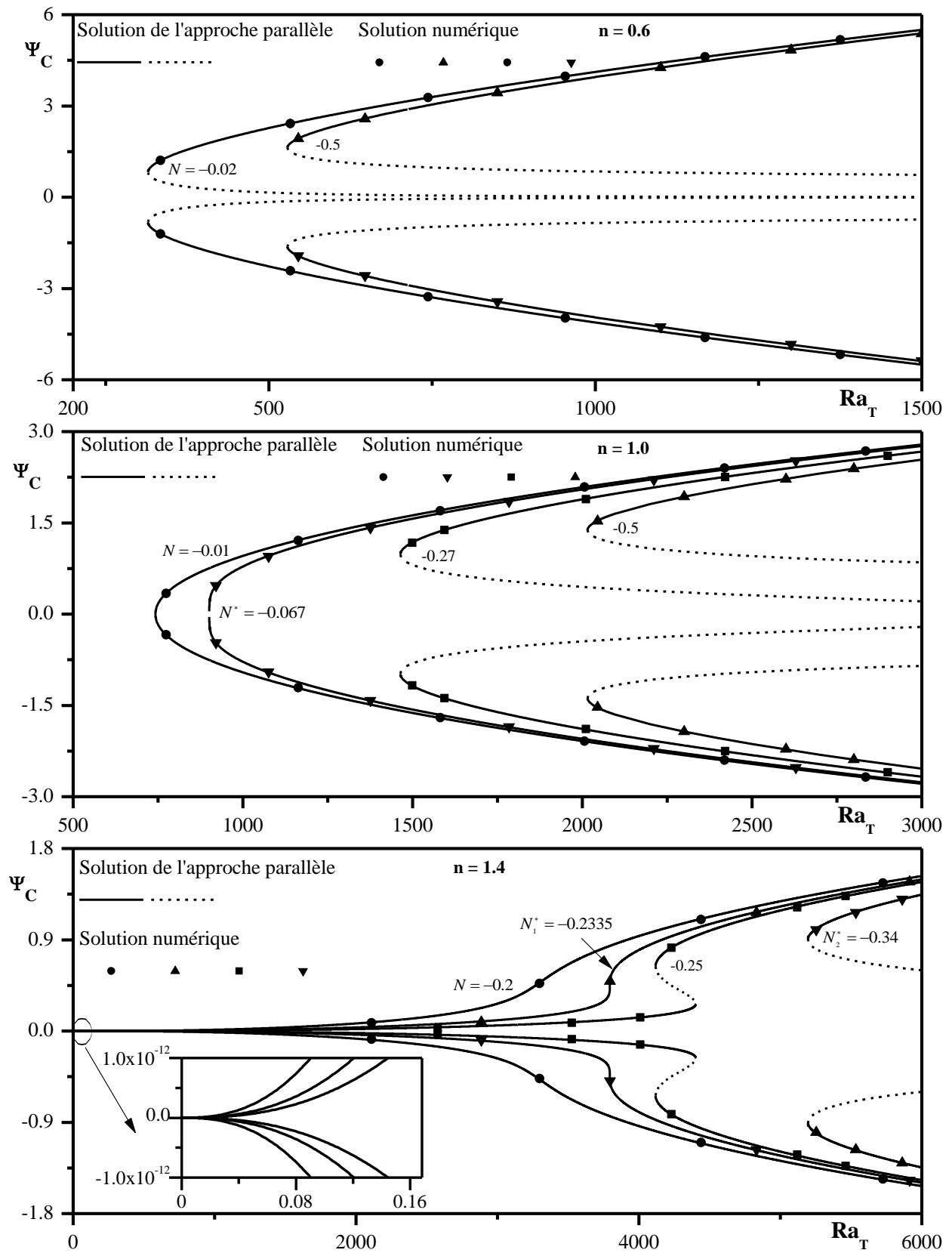
**Figure 5.3 :** Diagrammes de bifurcation en terme de  $\overline{Nu}$  en fonction de  $Ra_T$  pour  $M = 0$  et  $1$ ,  $Le = 2$ ,  $N = 0.5$  et différentes valeurs de  $n$ .



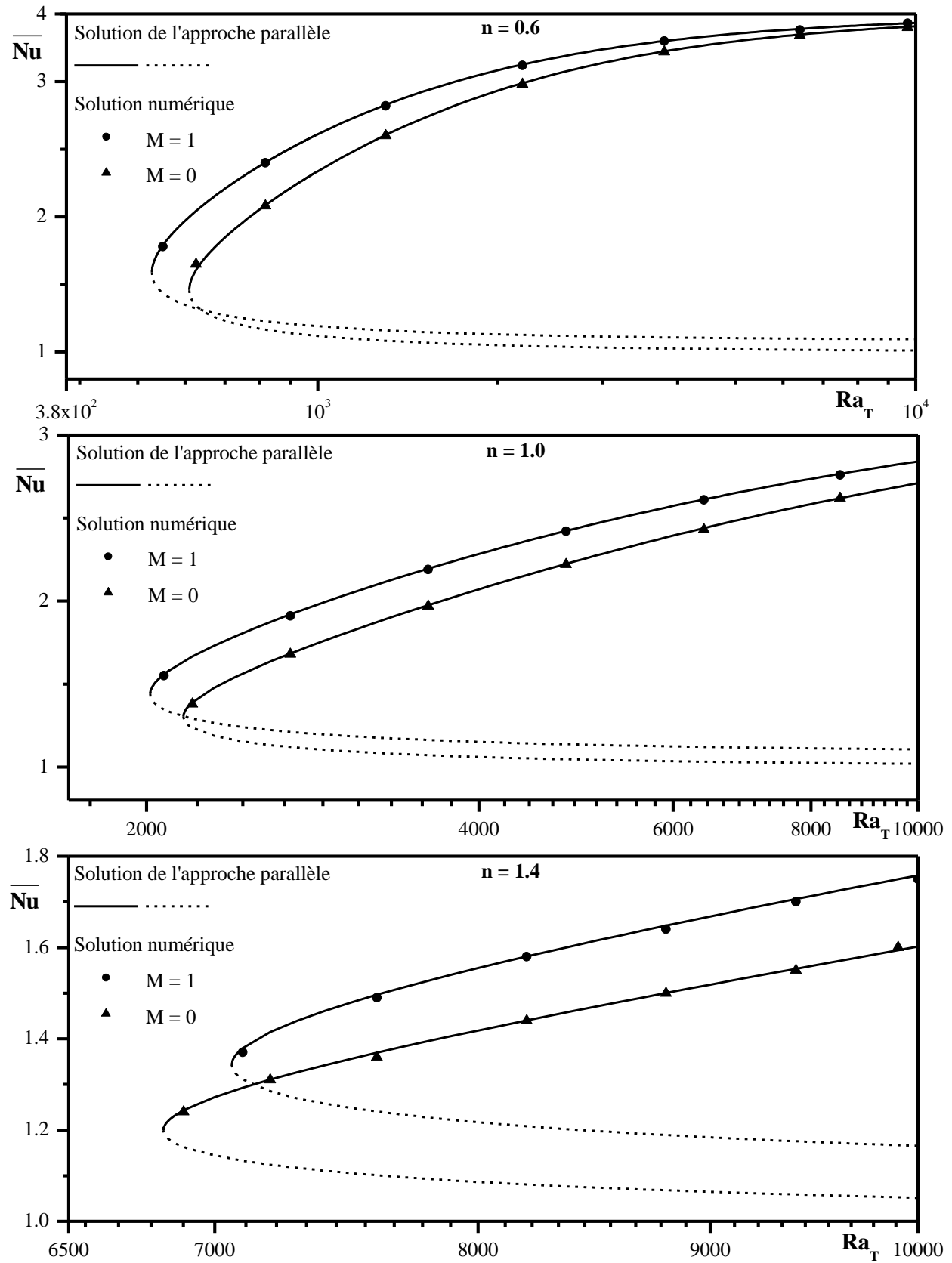
**Figure 5.4 :** Diagrammes de bifurcation en terme de  $\overline{Sh}$  en fonction de  $Ra_T$  pour  $M = 0$  et  $1$ ,  $Le = 2$ ,  $N = 0.5$  et différentes valeurs de  $n$ .



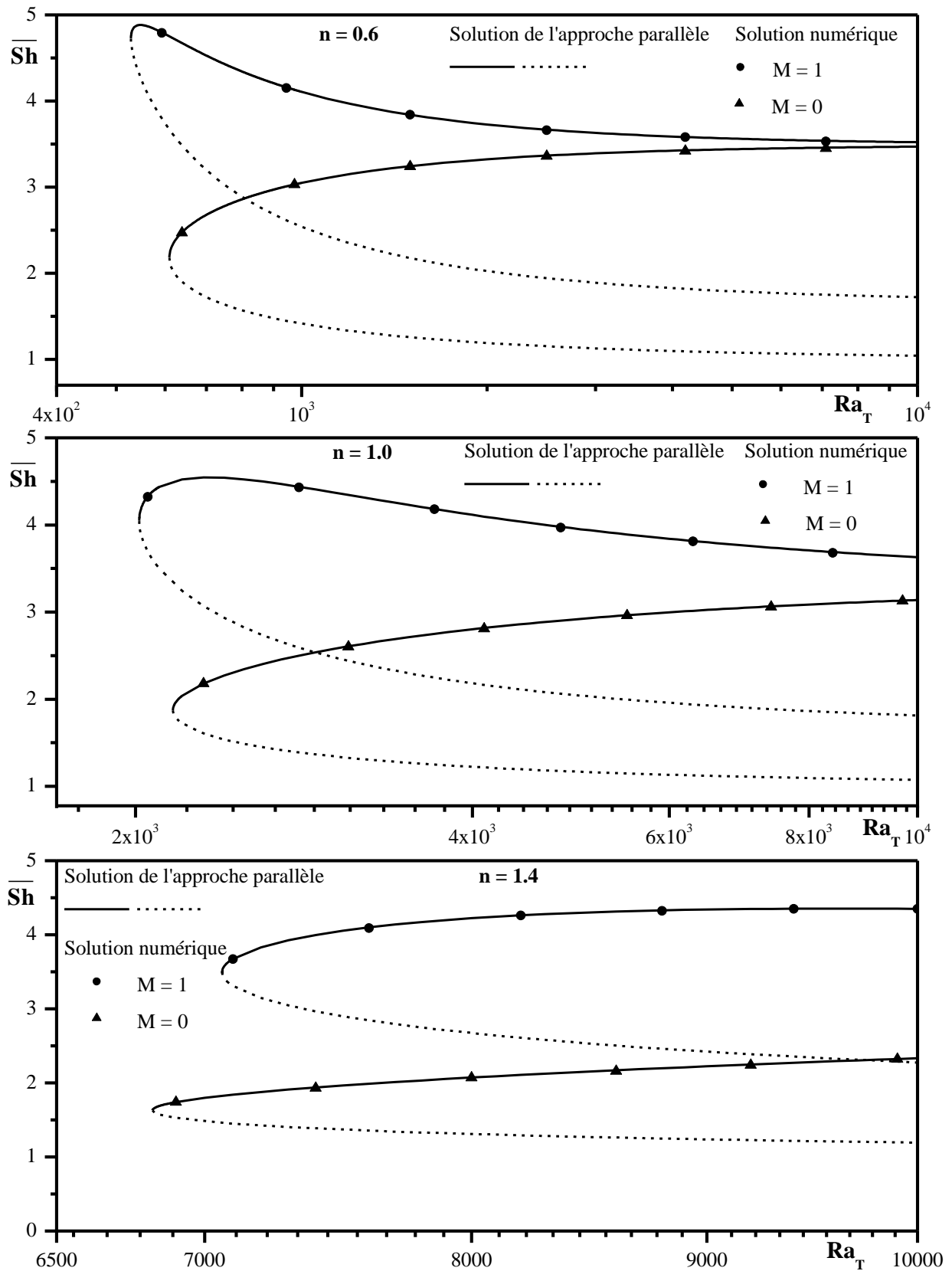
**Figure 5.5 :** Diagrammes de bifurcation en terme de  $\psi_C$  en fonction de  $Ra_T$  pour  $M = 0$ ,  $Le = 2$  et différentes valeurs de  $n$  et  $N$ .



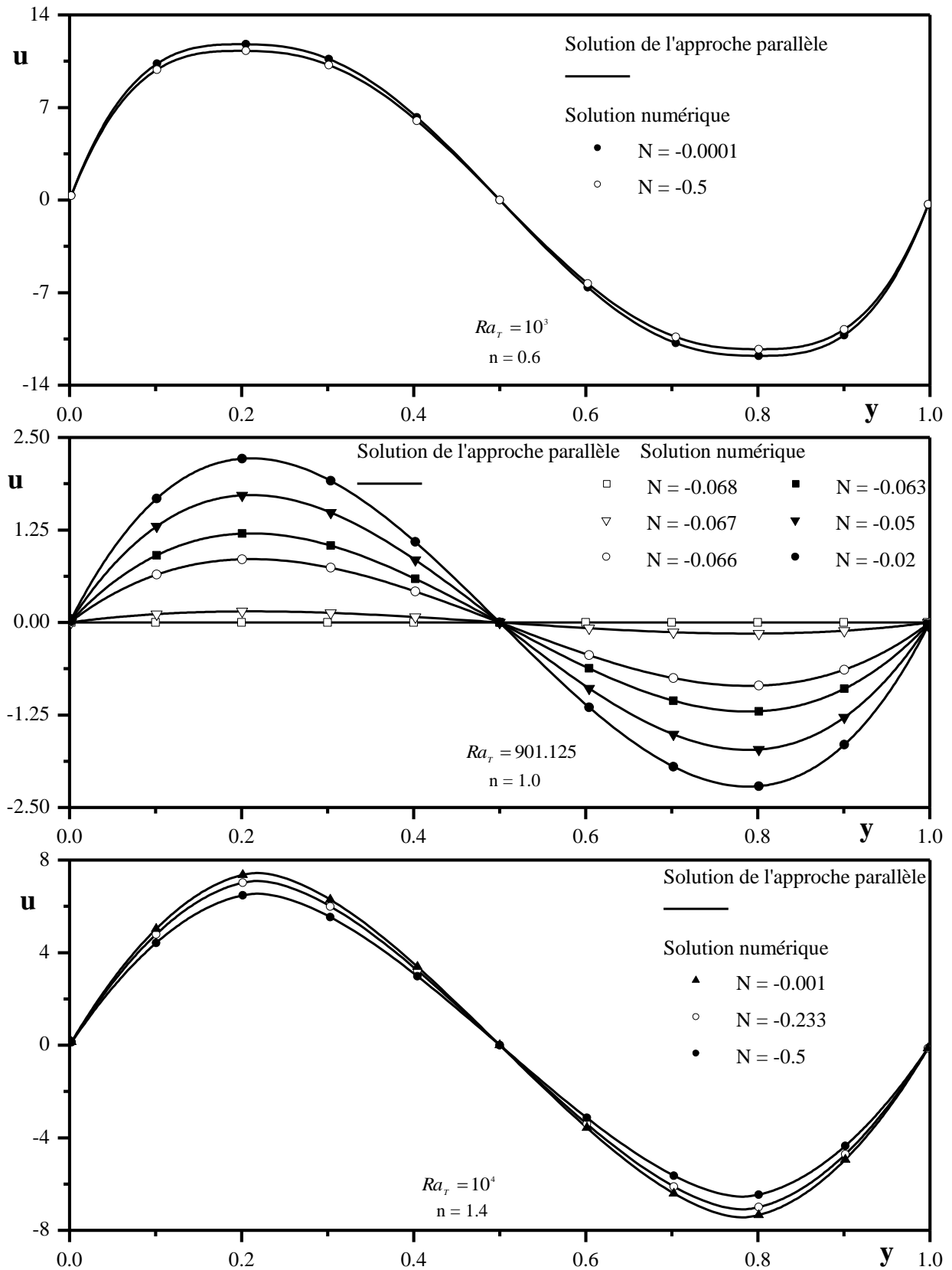
**Figure 5.6 :** Diagrammes de bifurcation en terme de  $\psi_C$  en fonction de  $Ra_T$  pour  $M = 1$ ,  $Le = 2$  et différentes valeurs de  $n$  et  $N$ .



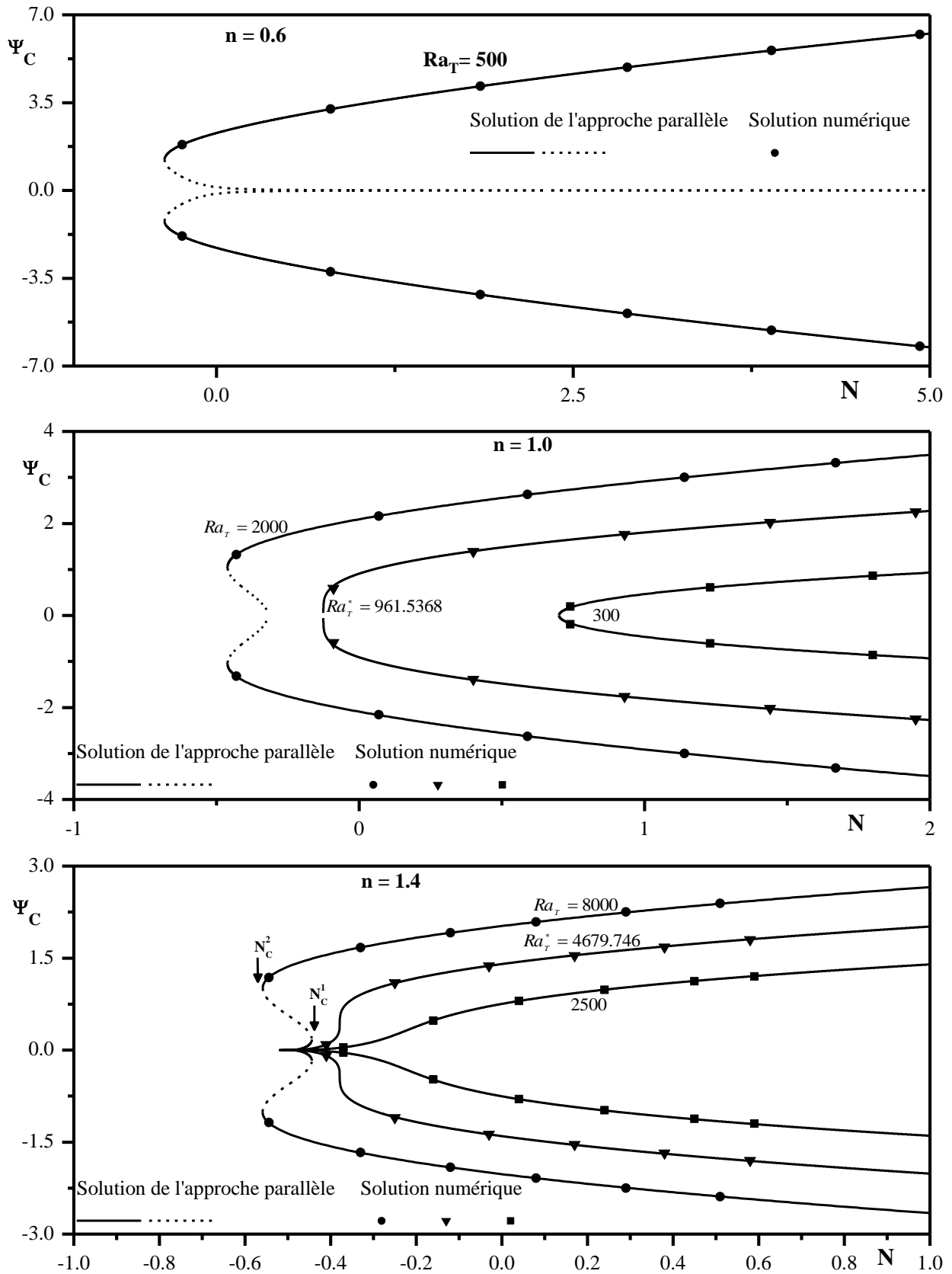
**Figure 5.7 :** Diagrammes de bifurcation en terme de  $\overline{Nu}$  en fonction de  $Ra_T$  pour  $M = 0$  et  $1$ ,  $Le = 2$ ,  $N = -0.5$  et différentes valeurs de  $n$  et  $N$ .



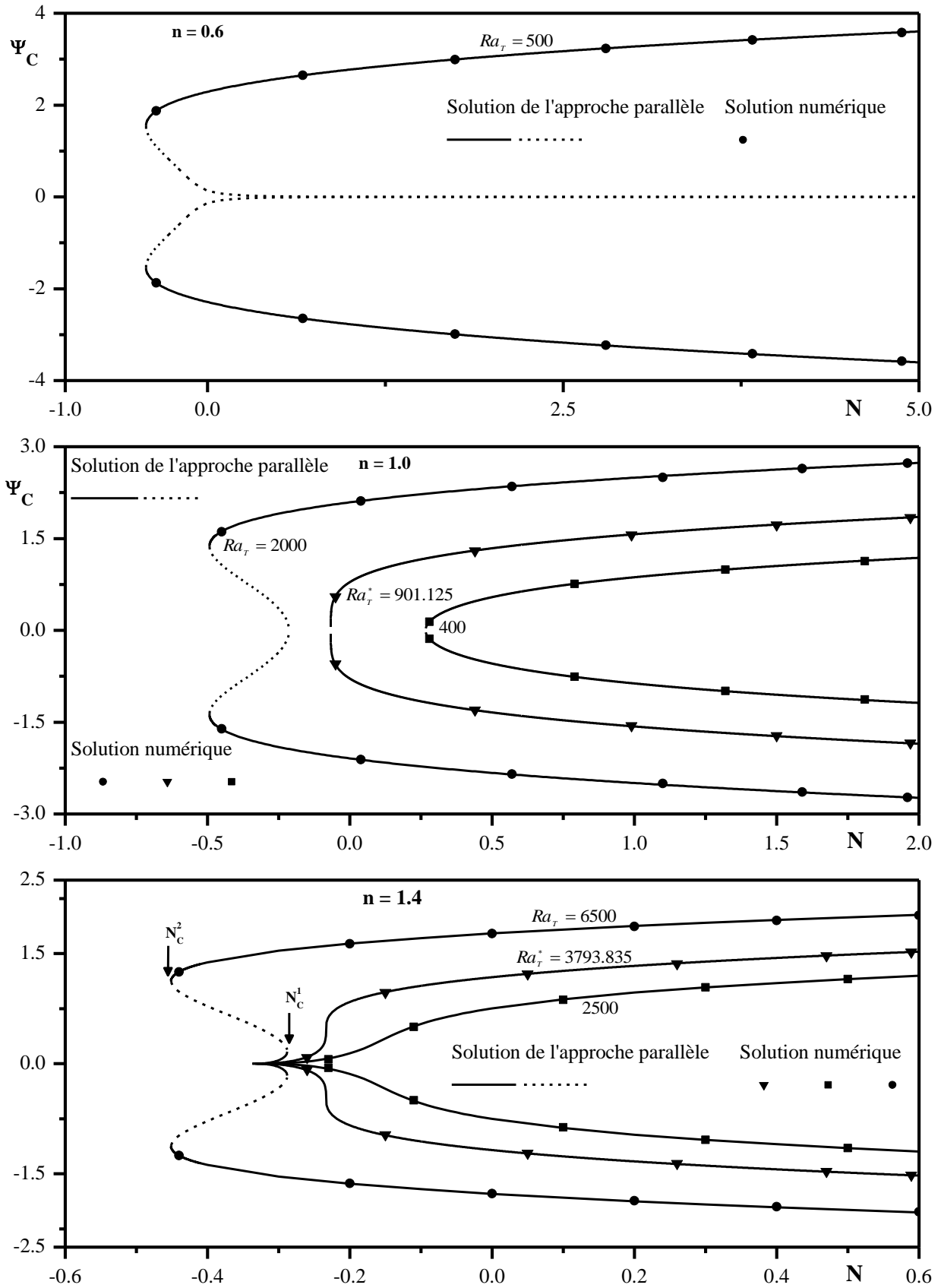
**Figure 5.8 :** Diagrammes de bifurcation en terme de  $\overline{Sh}$  en fonction de  $Ra_T$  pour  $M = 0$  et  $1$ ,  $Le = 2$ ,  $N = -0.5$  et différentes valeurs de  $n$ .



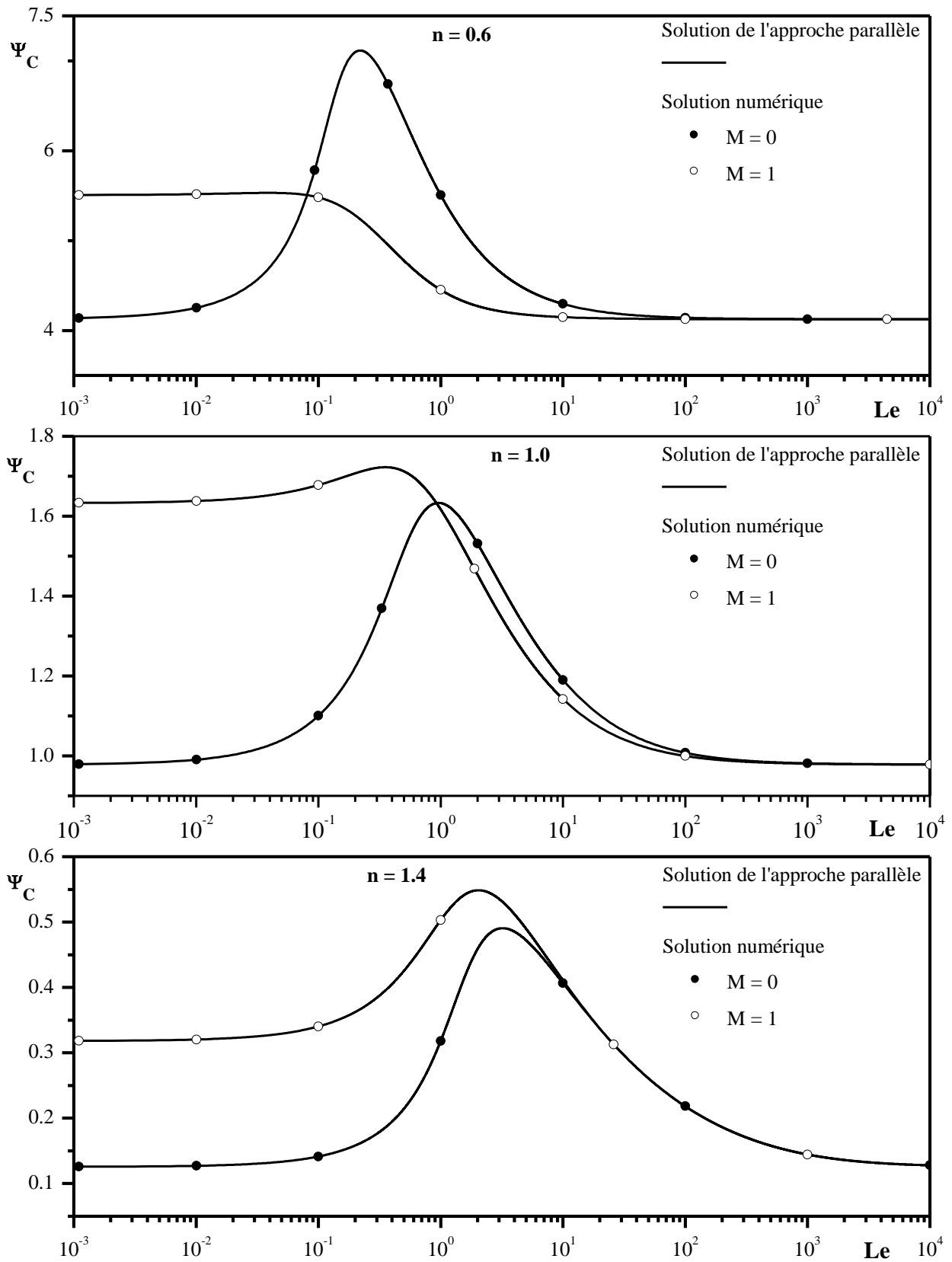
**Figure 5.9 :** Effet de  $N$  sur le profil de la vitesse horizontale pour  $Le = 2$ ,  $M = 1$  et différentes valeurs de  $n$  et  $Ra_T$ .



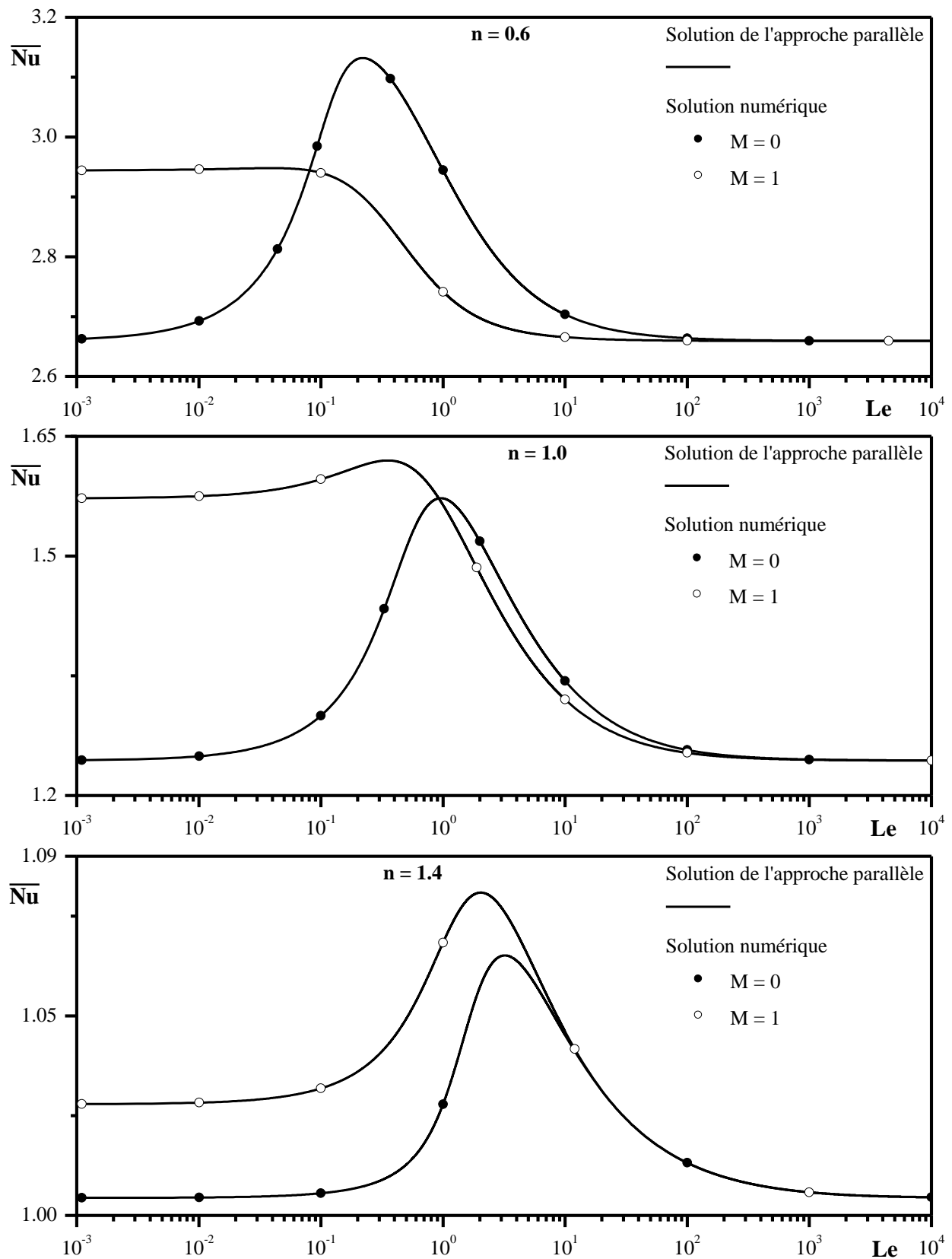
**Figure 5.10 :** Effet de  $N$  sur  $\psi_C$  pour  $Le = 2$ ,  $M = 0$  et différentes valeurs de  $Ra_\tau$  et  $n$ .



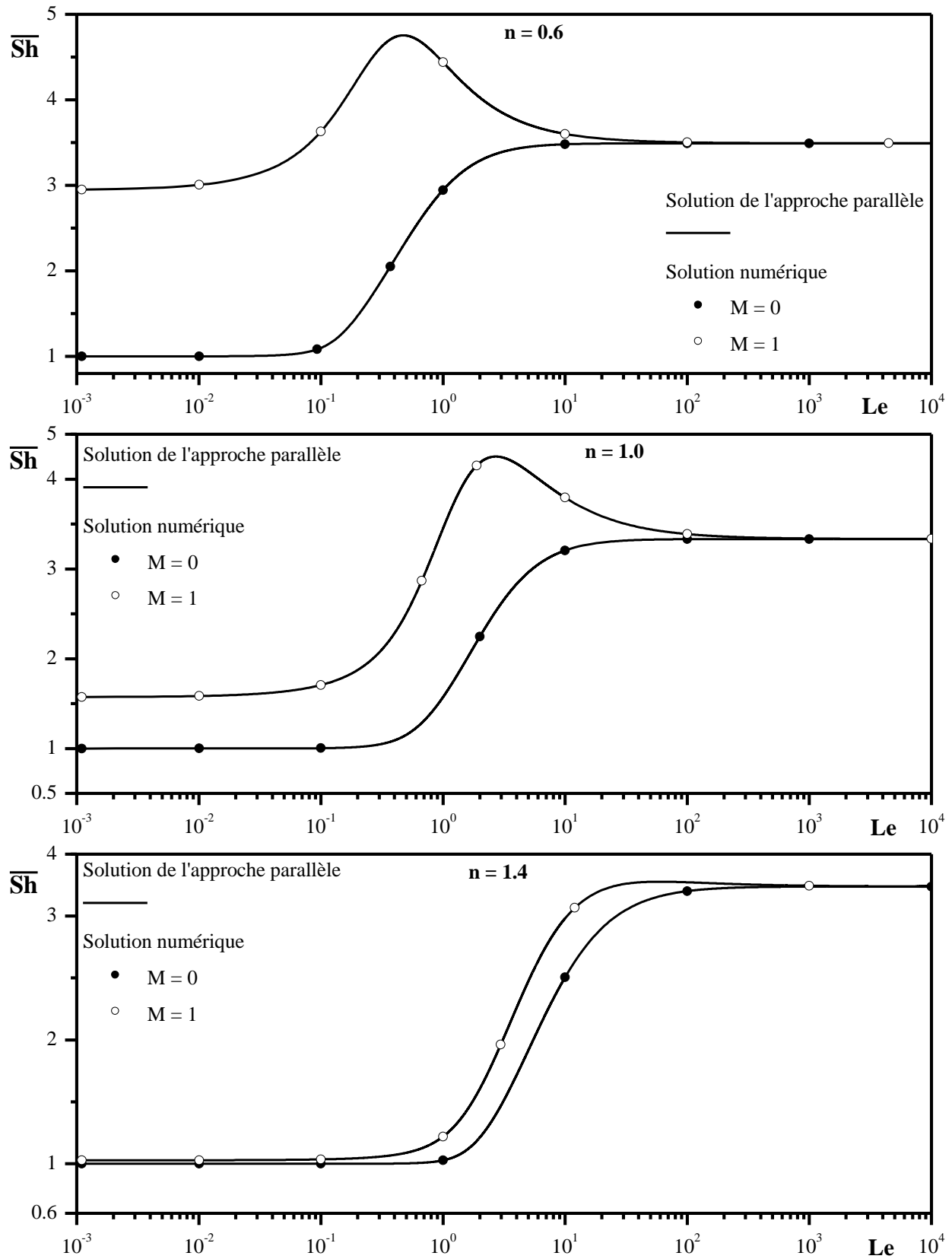
**Figure 5.11 :** Effet de  $N$  sur  $\psi_C$  pour  $Le = 2$ ,  $M = 1$  et différentes valeurs de  $Ra_\tau$  et  $n$ .



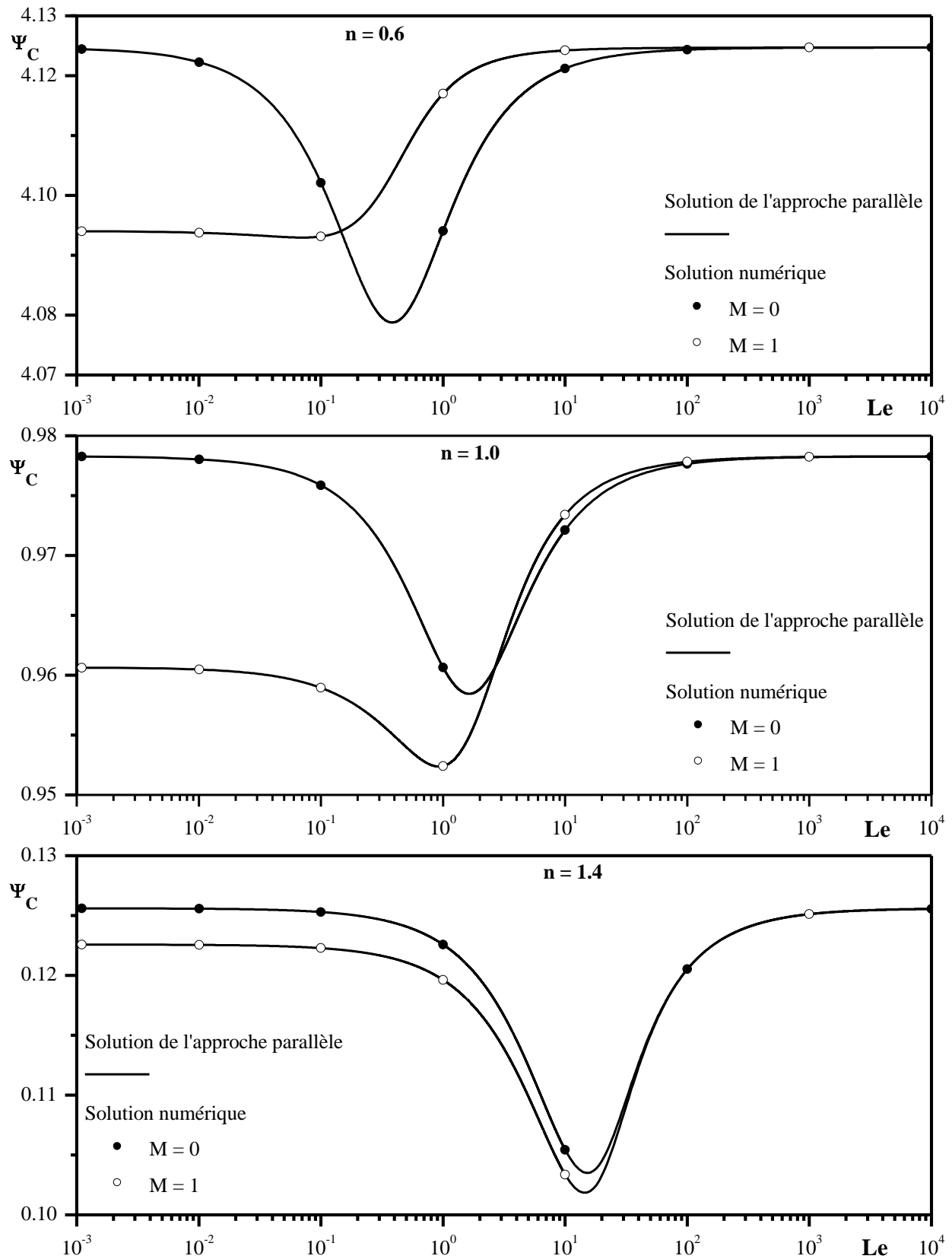
**Figure 5.12 :** Effet de  $Le$  sur  $\psi_C$  pour  $N = 0.5$ ,  $Ra_T = 10^3$ ,  $M = 0$  et  $1$  et différentes valeurs de  $n$ .



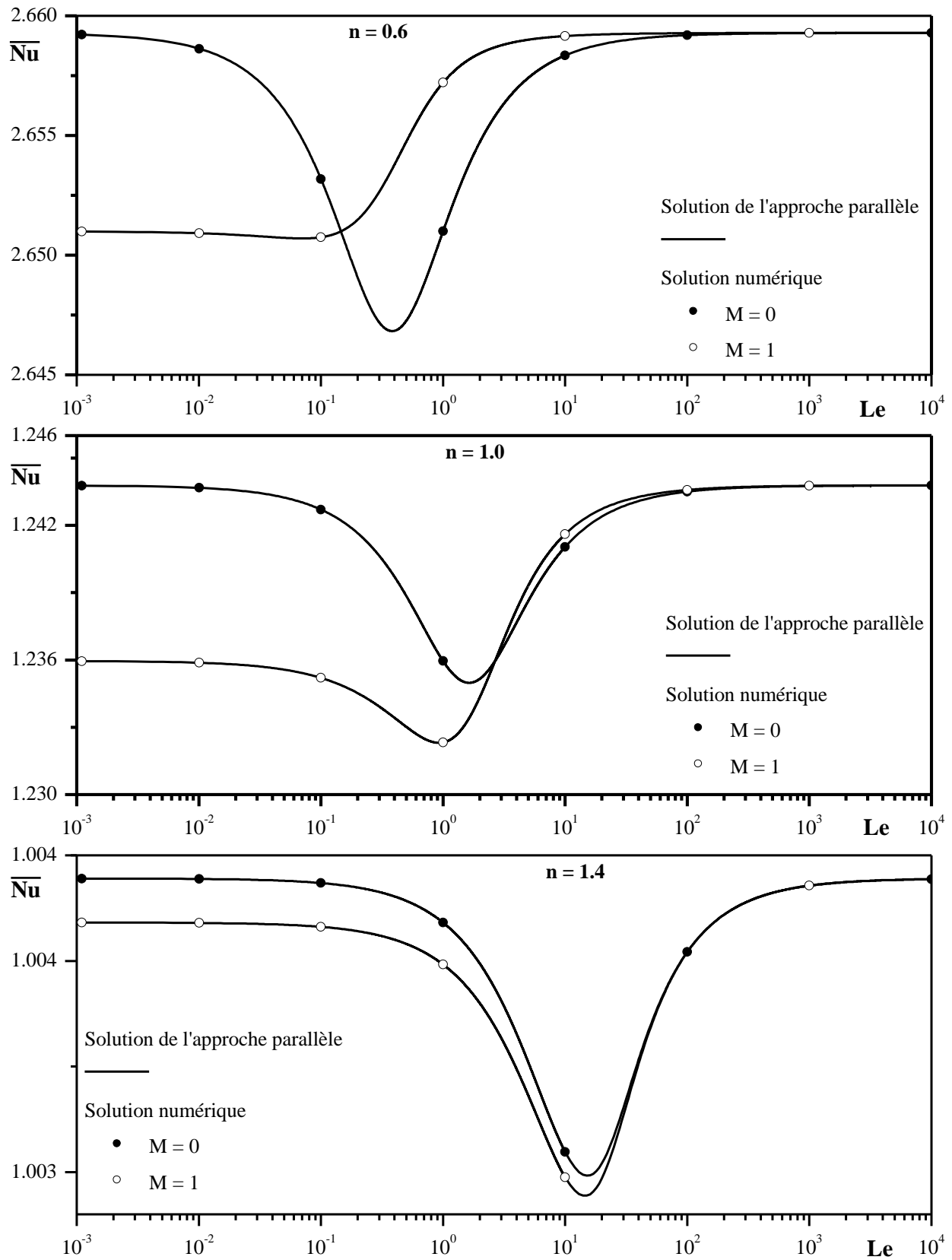
**Figure 5.13 :** Effet de  $Le$  sur  $\overline{Nu}$  pour  $N = 0.5$ ,  $Ra_T = 10^3$ ,  $M = 0$  et  $1$  et différentes valeurs de  $n$ .



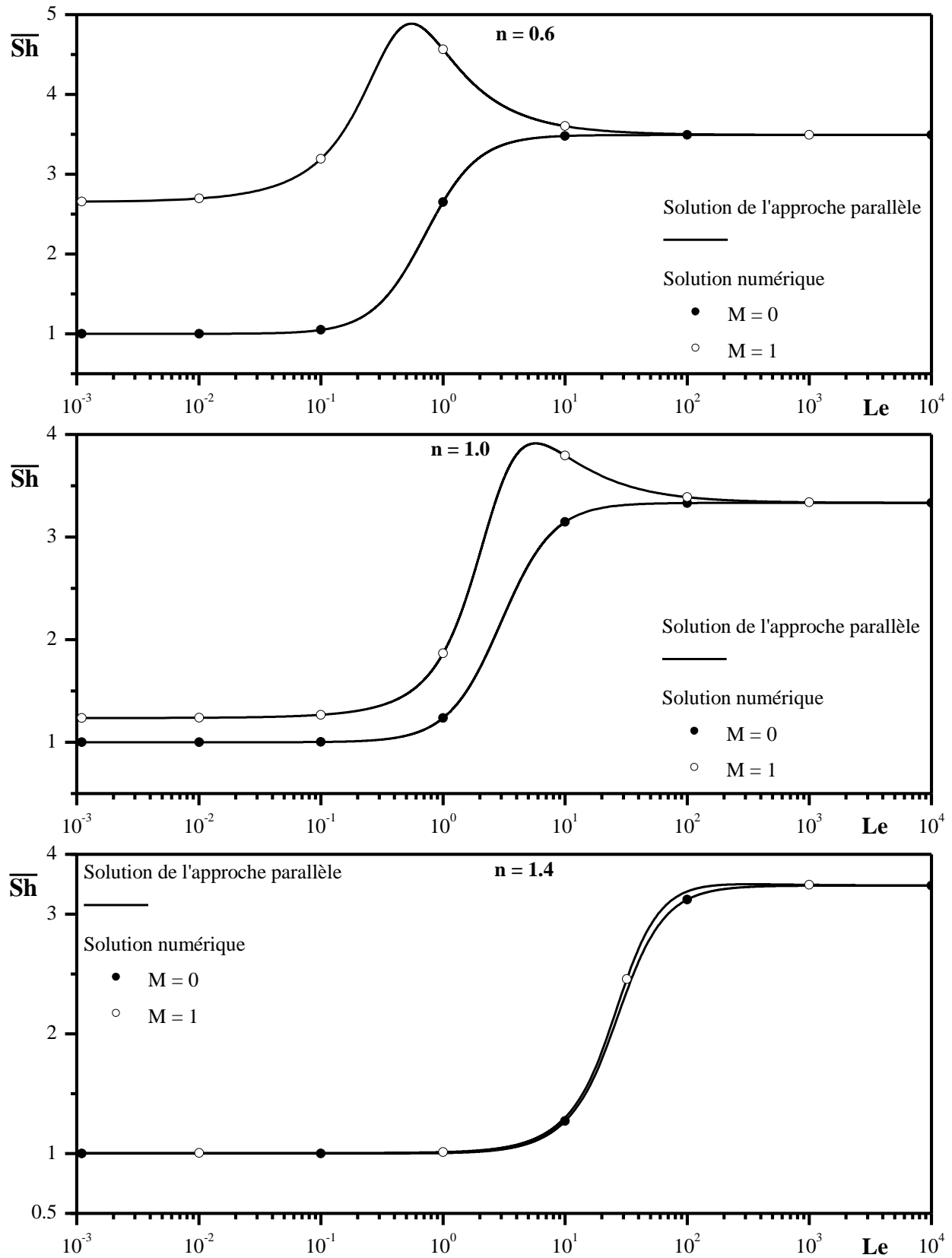
**Figure 5.14 :** Effet de  $Le$  sur  $\overline{Sh}$  pour  $N = 0.5$ ,  $Ra_T = 10^3$ ,  $M = 0$  et 1 et différentes valeurs de  $n$ .



**Figure 5.15 :** Effet de  $Le$  sur  $\psi_c$  pour  $N = -0.01$ ,  $Ra_T = 10^3$ ,  $M = 0$  et  $1$  et différentes valeurs de  $n$ .



**Figure 5.16 :** Effet de  $Le$  sur  $\overline{Nu}$  pour  $N = -0.01, Ra_T = 10^3, M = 0$  et  $1$  et différentes valeurs de  $n$ .



**Figure 5.17 :** Effet de  $Le$  sur  $\overline{Sh}$  pour  $N = -0.01, Ra_T = 10^3, M = 0$  et  $1$  et différentes valeurs de  $n$ .

---

---

## Conclusion générale

---

---

Dans ce mémoire, nous avons mené une étude analytique et numérique de la convection naturelle dans une cavité peu profonde remplie d'un fluide non-Newtonien. Il s'agit d'une configuration rectangulaire horizontale soumise à des flux de chaleur sur ses parois horizontales ou verticales. Les forces de flottabilité solutales sont supposées être induites soit par l'imposition des flux constants de masse sur les parois actives (convection de double diffusion,  $M = 0$ ) ou par des gradients de température (effets Soret,  $M = 1$ ).

Les mouvements de la convection naturelle ont été modélisés en adoptant le modèle rhéologique d'Ostwald-De Waele et en utilisant l'approximation de Boussinesq. La méthode des volumes finis a été utilisée pour résoudre numériquement les équations gouvernant le problème. La structure de l'écoulement et les transferts de chaleur et de masse sont analysés en fonction des valeurs des paramètres de contrôle du problème, à savoir : le nombre de Rayleigh  $Ra_T$ , le rapport de forme de la cavité  $A$ , le rapport des forces de volume  $N$ , le nombre de Lewis  $Le$ , l'indice de la loi en puissance  $n$ , le nombre de Prandtl généralisé  $Pr$  et le type de convection (double diffusion ou effet Soret). Dans la limite d'une cavité allongée ( $A \gg 1$ ), une solution analytique approximative, développée sur la base de l'hypothèse d'écoulement parallèle dans la région centrale de la cavité, s'avère être en excellent accord avec la solution numérique.

Les principales conclusions de la présente étude sont les suivantes:

1. Pour la convection doublement diffusive dans une cavité dont les parois verticales sont actives :
  - Le nombre de Rayleigh thermique  $Ra_T$  et l'indice de loi en puissance  $n$  ont des effets opposés sur l'écoulement du fluide et les caractéristiques des transferts de chaleur et de masse. En effet, une augmentation de  $n$  affaiblit la convection alors qu'une augmentation de  $Ra_T$  conduit à l'effet inverse.
  - Pour le cas de forces de flottabilité thermiques et solutales opposées ( $N < 0$ ), de multiples solutions conduisant à des circulations d'écoulement dans le sens antihoraire et horaire, existent lorsque  $Ra_T$  atteint une valeur critique et la valeur de

$N$  est choisie à l'intérieur d'une gamme spécifique, qui dépend de  $n$ . Un tel comportement n'est pas observé dans le cas où les forces de flottabilité thermiques et solutales sont coopérantes ( $N \geq 0$ ), l'écoulement dans ce cas est unicellulaire et antihoraire.

- Pour  $N = -1$ , une solution d'état stationnaire instable, correspondant à un régime purement diffusif, a été prédite.
  - Un régime de couche limite a été finalement atteint pour les grands nombres de Rayleigh thermiques lorsque le schéma d'écoulement résultant est antihoraire.
2. Pour la convection induite par effet Soret dans une cavité dont les parois verticales sont actives :
- Les évolutions de  $\psi_c$  et  $\overline{Nu}$  avec  $Ra_T$ , pour le cas de la convection induite par effet de Soret ( $M = 1$ ), présentent le même comportement que celles obtenues pour la convection de double diffusion ( $M = 0$ ). Cependant, le nombre de Sherwood  $\overline{Sh}$  est considérablement différent et présente des changements significatifs; l'effet Soret impose une inversion du gradient de concentration. L'approximation de l'écoulement parallèle a permis la prédiction du nombre de Rayleigh critique pour lequel  $\overline{Sh}$  change de signe.
  - Pour le cas particulier  $N = -1$ , le nombre de Rayleigh sous-critique, pour le début du mouvement a été prédit analytiquement, en fonction de l'indice de comportement  $n$ .
  - Par comparaison au cas de convection double diffusive, le transfert de chaleur est favorisé dans le cas de la convection induite par effet Soret pour  $N < 0$  et défavorisé pour  $N > 0$ .
3. Pour la convection induite par double diffusion et celle induite par effet Soret dans une cavité dont les parois horizontales sont actives : Le comportement de l'écoulement du fluide s'est avéré fortement dépendant des valeurs de  $N$  et  $n$ . Il a été prouvé que pour un :
- fluide dilatant ( $n > 1$ ) : pour  $N > 0$ , la convection est possible pour toute valeur de  $Ra_T$  supérieure à zéro ( $Ra_{TC}^{Sup} = 0$ ). Cependant, pour  $N < 0$ , l'apparition de la convection peut être supercritique ( $Ra_{TC}^{Sup} = 0$ ) ou sous-critique selon la valeur de  $N$ .
  - fluide Newtonien ( $n = 1$ ) : pour  $N > 0$ , la convection est supercritique ( $Ra_{TC}^{Sup} \neq 0$ ). Pour  $N < 0$ , l'apparition de la convection peut être supercritique ( $Ra_{TC}^{Sup} \neq 0$ ) ou sous-critique selon la valeur de  $N$ .

- fluide pseudoplastique ( $n < 1$ ) : la mise en mouvement se fait par une bifurcation sous-critique indépendamment du signe de  $N$ .

De nombreuses perspectives liées à ce travail restent encore à envisager :

- Réaliser une étude exhaustive du problème en configuration 3D pourrait prolonger ce travail de thèse.
- Considérer des configurations géométriques autres que la cavité rectangulaire. Il serait aussi intéressant de prendre en compte l'effet d'inclinaison de la cavité.
- Faire l'extension de la présente étude à des configurations multicouches pour s'approcher d'avantage des systèmes rencontrés dans la pratique.
- Valider les résultats analytiques et numériques présentés dans ce mémoire par voie expérimentale.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

**Alloui, I., Benmoussa, H. and Vasseur, P. (2010)**, Soret and thermosolutal effects on natural convection in a shallow cavity filled with a binary mixture, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 31, pp. 191–200.

**Alloui, Z., Guet, J., Vasseur P. and Reggio, M. (2012)**, Natural convection of Nanofluids in a shallow rectangular enclosure heated from the side, *The Canadian J. chem. Eng.*, Vol. 90 No. 1, pp. 69-78.

**Amahmid, A., Hasnaoui, M., Mamou, M. and Vasseur, P. (1999)**, Double-diffusive parallel flow induced in a horizontal Brinkman porous layer subjected to constant heat and mass fluxes: analytical and numerical studies, *Heat and Mass Transfer*, Vol. 35, pp. 409-421.

**Bahloul, A., Boutana, N. and Vasseur, P. (2003)**, Double-diffusive and Soret-induced convection in a shallow horizontal porous layer, *J. Fluid Mech.* Vol. 491, pp. 325–352.

**Bejan, A. (1983)**, The boundary layer regime in a porous layer with uniform heat flux from the side, *Int. J. Heat Mass Trans.*, Vol. 26, pp. 1339–1346.

**Benhadji, K. and Vasseur, P. (2001)**, Double diffusive convection in a shallow porous cavity filled with a non Newtonian fluid, *Int. Comm. Heat Mass Trans.*, Vol 28, No. 6, pp. 763-772.

**Ben Khelifa, N., Alloui, Z., Beji, H. and Vasseur, P. (2012)**, Natural convection in a horizontal porous cavity filled with a non-Newtonian binary fluid of power-law type, *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, Vol. 169–170, pp. 15–25.

**Bennacer, R., Beji, H. and Mohamad, A.A. (2003)**, Double diffusive convection in a vertical enclosure inserted with two saturated porous layers confining a fluid layer, *Int. J. Therm. Sci.* Vol 42, pp. 141–151.

**Bennacer, R., Mahidjiba, A., Vasseur, P., Beji, H. and Duval, R. (2003)**, The Soret effect on convection in a horizontal porous domain under cross temperature and concentration gradients, *Int. J. Num. Meth for Heat & Fluid Flow.* Vol 13 No 2, pp. 199-215.

**Bourich, M., Hasnaoui, M. and Amahmid, A. (2002)**, Soret driven thermosolutal convection in a shallow porous enclosure, *Int. Comm. Heat Mass transfer.*, Vol. 29, No. 5, pp. 717-728.

**Bourich, M., Hasnaoui, M., Mamou, M. and Amahmid, A. (2004)**, Soret effect inducing subcritical and Hopf bifurcations in a shallow enclosure filled with a clear binary fluid or a saturated porous medium: a comparative study, *Physics of Fluids*, Vol. 16, No. 3, pp. 551–568.

**Bourich, M., Hasnaoui, M., Amahmid, A. and Mamou, M. (2004)**, Soret convection in a shallow porous cavity submitted to uniform fluxes of heat and mass, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol. 31, No. 6, pp. 773–782.

**Charrier-Mojtabi, M. C., Elhajjar, B. and Mojtabi, A. (2007)**, Analytical and numerical stability analysis of Soret-driven convection in a horizontal porous layer, *Phy. of fluids*. Vol. 19 No. 124104, pp. 1-14.

**Cormack, D.E., Leal, L.G. and Imberger, J. (1974)**, Natural Convection in a Shallow Cavity with Differentially Heated End Walls, Part 1 : Asymptotic Theory. *J. Fluid Mechanics*, Vol. 65, pp. 209-230.

**Elhajjar, B., Charrier-Mojtabi, M.C. and Mojtabi, A. (2008)**, Separation of a binary fluid mixture in a porous horizontal cavity, *Physical. Review. E* 77, 026310.

**Elhajjar, B., Mojtabi, A. and Charrier-Mojtabi, M.C. (2009)**, Influence of vertical vibrations on the separation of a binary mixture in a horizontal porous layer heated from below, *Int. J. Heat Mass Transf.*, Vol 52, PP. 165–172.

**Elhajjar, B., Mojtabi, A., Costesèque, P. and Charrier-Mojtabi M.C. (2010)**, Separation in an inclined porous thermogravitational cell. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 53, pp. 4844–4851.

**Er-Raki, M., Hasnaoui, M., Amahmid, A. and Bourich M. (2011)**, Subcritical convection in the presence of Soret effect within a horizontal porous enclosure heated and salted from the short sides, *Int. J. of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, Vol. 21 No. 2, pp. 150-167.

**Filahi, I., Bourich, M., Hasnaoui M. and Amahmid, A. (2020)**, Analytical and Numerical Study of Soret and Dufour Effects on Thermosolutal Convection in a Horizontal Brinkman Porous Layer with a Stress-Free Upper Boundary. *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2020, pp. 1–17.

**Getachew, D., Poulikakos, D. and Minkowycz, W. J. (1998)**, Double Diffusion in a Porous Cavity Saturated with Non-Newtonian Fluid, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 12 No. 3, pp. 437-446.

**Gourdin, A. and Boumahrat, M. (1989)**, *Applied numerical methods, Technique and Documentation-Lavoisier*, Paris.

**Gray, D. D. and Giorgini, A. (1976)**, The Validity of the Boussinesq Approximation for Liquids and Gases, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 19, pp. 545-551.

**Kalla, L., Mamou, M., Vasseur, P. and Robillard, L. (2001)**, Multiple solutions for double diffusive convection in a shallow porous cavity of vertical fluxes of heat and mass, *Int. J. Heat Mass Trans.*, Vol. 44, pp. 4493-4504.

**Kefayati Gh.R. (2015)**, FDLBM simulation of entropy generation in double diffusive natural convection of power-law fluids in an enclosure with Soret and Dufour effects, *Int. J. Heat Mass Trans.* Vol. 89, pp. 267–290.

**Kim, M.C. and Choi, C.K. (2007)**, Analysis of onset of soret –driven convection by the energy method" *phys.Rev,E* 76, pp.363021-363026.

**Lagra, A., Bourich, M., Hasnaoui, M., Amahmid, A. and Er-Raki, M. (2018)**, Analytical and Numerical Study of Soret and Dufour Effects on Double Diffusive Convection in a Shallow Horizontal Binary Fluid Layer Submitted to Uniform Fluxes of Heat and Mass, *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2018, pp. 1-12.

**Lamsaadi, M., Naïmi, M., Hasnaoui, M. (2006)**, Natural convection heat transfer in shallow horizontal rectangular enclosures uniformly heated from the side and filled with non-Newtonian power law fluids, *Ener. Conv. Manag.*, Vol. 47, pp. 2535–2551.

**Lamasaadi, M., Naïmi, M., Kaddiri, M., El Harfi, H., El Amraoui R. and Hasnaoui, M. (2018)**, Analytical and numerical study of hydrodynamical boundary conditions effect on natural double-diffusive convection in a shallow horizontal rectangular cavity uniformly heated and salted from the sides, *J. Mater. Environ. Sci.* Vol. 9, pp. 741-753.

- Li, Y., Yang, M. and Zhang, Y. (2021)**, Bifurcation analysis of coupling thermosolutal convection induced by a thermal and solutal source in a horizontal cavity, *Int. Comm. Heat and Mass Transfer*, Vol. 126, 105455.
- Mahidjiba, A., Mamou, M. and Vasseur, P. (2000)**, Onset of double-diffusive convection in a rectangular porous cavity subject to mixed boundary conditions, *Int. J. Heat Mass Trans.* Vol. 43, pp. 1505-1522.
- Makayssi, T., Lamsaadi, M., Naïmi, M., Hasnaoui, M., Raji A. and Bahlaoui A. (2008)**, Natural double-diffusive convection in a shallow horizontal rectangular cavity uniformly heated and salted from the side and filled with non-Newtonian power-law fluids: The cooperating case, *Ener. Conv. Manag.* Vol 49, pp. 2016–2025.
- Mamou, M., Vasseur, P. and Bilgen, E. (1996)**, Analytical and numerical study of double diffusive convection in a vertical enclosure, *Heat Mass Trans.*, Vol 32, pp. 115-125.
- Mamou, M. and Vasseur, P. (1999)**, Thermosolutal bifurcation phenomena in porous enclosures subject to vertical temperature and concentration gradients, *J. Fluid Mech.*, Vol 395, pp. 61-87.
- Mamou, M., Vasseur, P. and Hasnaoui, M. (2001)**, On numerical stability analysis of double-diffusive convection in confined enclosures, *J. Fluid Mech.*, Vol. 433, pp. 209-250.
- Mansour, A., Amahmid, A. and Hasnaoui, M. (2008)**, Soret effect on thermosolutal convection developed in a horizontal shallow porous layer salted from below and subject to cross fluxes of heat, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 29, pp. 306–314.
- Nield, D.A. and Kuznetsov, A.V. (2011)**, The onset of double-diffusive convection in a nanofluid layer, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 32 No. 4, pp. 771–776.
- Ouriemi, M., Vasseur, P. and Bahloul, A. (2005)**, Natural Convection of a Binary Fluid in a Slightly Inclined Shallow Cavity, *Num. Heat Trans. Part A: Applications*, Vol. 48 No. 6, pp. 545–567.
- Ouriemi, M., Vasseur, P., Bahloul, A. and Robillard, L. (2006)**, Natural convection in a horizontal layer of a binary mixture, *Int. J. Therm. Sci.*, Vol. 45, pp. 752–759.

**Ozoe, H. and Churchill, S.W. (1972)**, Hydrodynamic stability and natural convection in Ostwald-De Waele and Ellis fluids: the development of a numerical solution, *AICHE J.* Vol. 18, pp. 1196-1207.

**Patankar, S.V. (1980)**, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere, Washington, DC, USA.

**Ren, Q. and Chan C. (2016)**, Numerical study of double-diffusive convection in a vertical cavity with Soret and Dufour effects by lattice Boltzmann method on GPU, *Int. J. Heat Mass Trans.*, Vol. 93, pp. 538–553.

**Rhie, C.M. and Chow, W.L. (1983)**, Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. *AIAA Journal*, Vol. 21, No. 11, pp. 1525-1532.

**Rtibi, A., Hasnaoui, and A. Amahmid**, “Analytico-numerical study of optimal separation of species in an inclined Darcy-Brinkman porous cavity saturated with a binary mixture, *Acta Astronautica*, vol. 98, No. 1, pp. 71–85, 2014.

**Sibony, M., J-Cl. Mardon (1982)**, *Numerical Analysis II, Approximation and differential equations*, Hermann, Paris.

**Vasseur, P., Wang C.H., Mihir Sen, (1989)** The Brinkman model for natural convection in a shallow porous cavity with uniform heat flux, *Numerical Heat Mass Transfer, Part A*, Vol. 15, pp.221-242.

**Wang, J., Yang, M. and Zhang, Y. (2014)**, Onset of double-diffusive convection in horizontal cavity with Soret and Dufour effects. *Int. J. Heat and Mass Trans.*, Vol. 78, pp. 1023–1031.

**Wang, J., Yang, M., Zhang, Y.W. (2015)**, Coupling–Diffusive Effects on thermosolutal Buoyancy Convection in a Horizontal Cavity, *Num. Heat Trans. Part A.*, Vol. 68, No. 6, pp. 583-597.

**Yacine, L., Mojtabi, A., Bennacer, R. and Khouzam, A. (2016)**, Soret-driven convection and separation of binary mixtures in a horizontal porous cavity submitted to cross heat fluxes. *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 104, pp. 29–38.

**Zhao, F.Y., Liu, D., Tang, G.F. (2008)**, Natural convection in an enclosure with localized heating and salting from below, *Int. J. Heat Mass Trans.* Vol. 51, pp. 2889–2904.