UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES - FES
Centre d'Etudes Doctorales : Sciences et Techniques de l'Ingénieur

N^o d'ordre 31/2017

THESE DE DOCTORAT

Présentée par

Mr : EL-ATTAR ABDERRAHIM

Spécialité : Mathématiques appliqués

Étude de Quelques Problèmes Non Linéaires Associés au Laplacien Avec Exposant Variable

Thèse présentée et soutenue le 22 juillet 2017 devant le jury composé de

Nom Prénom	Titre	Etablissement	
Pr. EL HILALI ALAOUI Ahmed	**PES**	**Faculté des Sciences et Techniques de Fès**	Président
Pr. BAHAJ Mohamed	**PES**	**Faculté des Sciences et Techniques de Settat**	Rapporteur
Pr. BOUTOULOUT Ali	**PES**	**Faculté des Sciences de Meknès**	Rapporteur
Pr. YOUSSFI Ahmed	**PES**	**Ecole Nationale des Sciences Appliquées de Fès**	Rapporteur
Pr. OUADGHIRI Anisse	**PES**	**Faculté des Sciences et Techniques de Fès**	Examinateur
Pr. SIDKI Omar	**PES**	**Faculté des Sciences et Techniques de Fès**	Directeur de thèse

Laboratoire d'accueil : Laboratoire d'accueil : Laboratoire Algèbre, Analyse Fonctionnelle et Application

Etablissement : Faculté des Sciences et Techniques de Fès.

Centre d'Etudes Doctorales Sciences et Techniques de l'Ingénieur
Faculté des Sciences et Techniques - Fès ; Route d'Immouzer, B.P. 2202 Fès-, Maroc –
Tél. : (212) 5 35 60 80 14 ; Tél. : (212) 5 35 60 29 53 ; Fax : (212) 5 35 60 82 14 ; Site web : www.fst-usmba.ac.ma

Dédicaces

À la mémoire de mon père.

Au quatre femmes de ma vie

Ma mère.

Ma femme ;

Ma fille Kenza.

Et ma fille Yasmine.

Remerciements

Comme le veut la tradition, je vais tenter de satisfaire au difficile exercice de la page des remerciements. La difficulté est dans le fait de n'oublier personne, et surtout de ne pas suffisamment remercier les gens que sans eux ce projet resterais un rêve de jour. C'est pourquoi, je remercie par avance ceux dont le nom n'apparaît pas dans cette page et qui m'ont aidé d'une manière ou d'une autre. Cette thèse n'aurait jamais pu voir le jour sans la confiance, la patience et la générosité de mon directeur de thèse le professeur Omar Sidki que je tiens à remercier vivement. Je voudrais aussi le remercier pour le temps et la patience qu'il m'a accordé tout au long de ces années, d'avoir cru en mes capacités. De plus, les conseils qu'il m'a divulgué en période de projet ont toujours été clairs et succincts, me facilitant grandement la tâche et me permettant d'aboutir à la production de cette thèse. Je tiens à remercier vivement professeur Said El manouni pour ses conseils précieux durant les discussions et la collaboration avec lui soit de Riyad "Imam universty" ou de Berlin qui m'ont toujours été utiles. Ses qualités scientifiques et humaines, son encouragement et ses remarques ont largement contribué à l'aboutissement de cette thèse. Mes remerciement les plus profonds vont aux monsieur Ali Boutoulout, Mohamed Bahaj et Ahmed youssfi de m'avoir fait l'honneur d'être les rapporteurs de cette thèse. J'éprouve un profond respect pour leur travail, ainsi que pour leurs qualités humaines. Je les remercie aussi pour leur participation au jury de thèse. Je leur en suis très reconnaissant de contribuer par leurs nombreuses remarques et suggestions à améliorer la qualité de ce mémoire. Je profite de l'occasion pour remercier monsieur Najib Mahdou le directeur de laboratoire d'algèbre, analyse fonctionnelle et applications pour tout l'aide et le temps qui m'a accordé. Je remercie ma mère Fatima El badaoui ; mes frères et sœurs ; mes beaux frères et mes belles sœurs, mes nièces et neveux, ma belle famille toute entière. Je remercie aussi mes amis bakkari Ahmed, Bakkari chahrazad et Ahmed Alalla pour leurs inconditionnels soutiens. Enfin je remercie ma femme Wafae pour son soutien constant et sa patience tout au long des années de la thèse, je remercie aussi mes filles Kenza et Yasmine pour tous l'espoir et la force qui m'ont donné pour que je ne baisse pas les bras.

Table des matières

Notations

Ω : ouvert de $\mathbb{R}^N$

$\partial\Omega$: frontière topologique de Ω

$p : \Omega \to \mathbb{R}$,

$p^+ = \sup_{x\in\Omega} p(x)$

$p^- = \inf_{x\in\Omega} p(x)$

$p^*(x) = \frac{Np(x)}{N-p(x)}$.

$p^*_- = \frac{Np^-}{N-p^+}$.

$p^*_+ = \frac{Np^+}{N-p^-}$

$\vec{p}(x) = (p_1(x), ..., p_N(x))$

$\vec{p}_+ = (p_1^+, ..., p_N^+)$

$\vec{p}_- = (p_1^-, ..., p_N^-)$,

$p_+^+ = \max\{p_1^+, .., p_N^+\}$

$p_-^+ = \max\{p_1^-, .., p_N^-\}$

$p_-^- = \min\{p_1^-, .., p_N^-\}$

$p_-^* = \frac{N}{\displaystyle\sum_{1=1}^{N} \frac{1}{p_i^-} - 1}$

$p_{-,\infty} = \max\{p_-^+, p_-^*\}$

$W^{1.p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : |\nabla u| \in L^p(\Omega)\}$

$L_\phi(\Omega)$: L'espace d'Orlicz généré par la fonction : $\phi(t)$.

$u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$: L'espace de Sobolev Généralisée.

$W^{1,\vec{p}(\cdot)}(\Omega)$: L'espaces de Sobolev Anisotrope.

$\text{div}(u_1, .., u_N) = \nabla u = (\partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u, ..., \partial_{x_N} u)$

$\partial_{x_i} u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$

$\text{div}(\nabla u) = \displaystyle\sum_{1=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$

$\Delta_p = \text{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$

$\Delta_{p(x)} = \text{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u)$

$\Delta_{p(\vec{x})} = \displaystyle\sum_{1=1}^{N} \partial_{x_i}(|\partial_{x_i} u|^{p_i(x)-2} \partial_{x_i} u)$

Abstract

The purpose in this work is to investigate problems involving three cases of weighted differential operators. In the first part, we study the limit case of some elliptic problems involving nonlinearities having the maximal growth with Dirichlet boundary condition. We apply the new variationnel result by "Ricceri " to prove the existence of multiple nontrivial solutions using Trudinger-Moser estimates. Precisely, we are interested in extending some results to a more general class of elliptic equations and systems. The second part, we extend the result of the last section to general elliptic systems of two second order nonlinear partial differential equations governed essentially by the N-Laplacien operator using the same Ricceri's principle proving the multiplicity of solutions. The third part is devoted to the study of the generalized elliptic both equation and systems governed by the $p(x)$-Laplacien operator. The non homogeneity, the non linearity and the loss of the compactness of the embedding Sobolev in Lebesgue spaces where $\Omega = \mathbb{R}^N$, are the major obstacles in our study. This result is then extended to more generalized systems of two equations. The last part is an application of Ricceri's principle to solve elliptic problem involving an anisotropic operator. When dealing with our problems, in both limiting and generalized case the main difficulty is to prove the compactness of energy functionals. Concerning the Anisotropic case difficulty is mainly due to the nature of the involved norm.
2010 Mathematics Subject Classification. 35J35, 35J60, 35J66.
Key words and phrases. Limiting case ; maximal growth ; Trudinger-Moser's inequality ; $p(x)$-laplacian ; Ricceri's principle.

Résumé :

L'objectif de ce travail est l'étude de divers problèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires du type elliptique faisant intervenir des opérateurs non linéaires du type p-Laplacien avec poids. Nous montrons quelques résultats d'existence et de multiplicité de solutions pour des équations aux dérivées partielles, en adoptant une méthode Récente établie par **Biagio Ricceri** en 2009 Dans [9]. Notre premier travail consiste à montrer des résultats d'existence de multiples solutions d'un problème aux valeurs propres faisant intervenir l'opérateur limite N-Laplacien. Notre contribution est la généralisation des résultats d'existence pour une large classe de problèmes non linéaires avec des croissances exponentielles qui va englober les cas où les croissances est polynomiales. Nous traitons dans la première partie un exemple d'une équation de Laplace avec un poids (i.e $N = 2$), puis nous généralisons ces résultats pour le cas général ($N \geq 2$). Notre deuxième travail traite un système à deux équations limites avec poids, nous donnons un résultat d'existence dans les cas où les croissances sont exponentielles. Notre troisième résultat d'existence concerne un problème faisant intervenir l'opérateur généralisé $p(x)$-Laplacien, où $\Omega = \mathbb{R}^N$, avec des conditions améliorées sur les croissances. Dans le dernier résultat, nous étudions l'existence de multiples solutions pour un problème anisotrope elliptique non linéaire faisant intervenir des opérateurs non linéaires du type $\vec{p}(x)$-Laplacien où la fonction vectorielle $\vec{p}(x) = (p_1(x), ..., p_N(x))$ où les fonctions $p_i(x)$ dépendent de la variable d'espace $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$, représente l'exposant anisotrope.
2010 Mathematics Subject Classification. 35J35, 35J60, 35J66.
Key words and phrases. Limiting case ; maximal growth ; Trudinger-Moser's inequality ; $p(x)$-lplacien ; Ricceri's principle.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les équations aux dérivées partielles nous donnent la possibilité d'aborder d'un point de vue mathématique des phénomènes observés, par exemple elles nous permettent de modéliser des phénomènes de la physique et de la chimie. Historiquement, ces problèmes remontent à l'équation de Laplace, qui est une équation aux dérivées partielles du second ordre, dont le nom est un hommage au physicien mathématicien Pierre-Simon de Laplace. Les besoins de la mécanique newtonienne, étaient derrière l'introduction de l'équation de Laplace, puis elle apparait dans de nombreuses autres branches de la physique théorique, astronomie, électrostatique, mécanique des fluides, propagation de la chaleur, diffusion, mouvement brownien et mécanique quantique.

L'émergence de nouveaux phénomènes physiques et leur modélisation mathématique, tels que les gaz parfaits, rendaient l'équation ordinaire de Laplace incapable de les modéliser. Ces phénomènes physiques qui sont généralement gouvernés par des équations aux dérivées partielles non linéaires, vont orienter les recherches vers des opérateurs tels que l'opérateur p-Laplace où La variable p peut prendre plusieurs valeurs. A leur tour ces opérateurs p-Laplace ne peuvent plus adopter d'autres modèles tels que les modèles des liquides electrorheological introduits par Rajagopal et Růžička [42], [43]. Pour décrire ces liquides (matériels intelligents) qui changent leurs propriétés mécaniques radicalement quand un champ électrique externe est appliqué, le laplacien à exposant variable a été introduit [19], [20], [21]. D'autres formes de liquides plus complexes peuvent être décris par des équations faisant intervenir le $p(\vec{x})$-Laplacien anisotropique.

Les travaux présentés dans notre thèse concernent l'existence de solutions (i.e le triplet $(u, \lambda, \mu) \in X \times \mathbb{R}^2$ où X un espace fonctionnel imposé par la nature de chaque problème) pour les équations aux dérivées partielles non-linéaires suivantes :

Le problème limite :

$$(\mathbf{PL}) : \begin{cases} -\operatorname{div}(m(|\nabla u|^N)|\nabla u|^{N-2}\nabla u) = \lambda f(x,u) + \mu g(x,u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ dont la frontière est assez régulière. Le champ

$m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ satisfait des croissance polynomiale. Les fonctions g et $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont non linéaires ayant une croissance exponentielle par rapport à la variable u.

Le problème généralisé :

$$(\mathbf{PG}) : \begin{cases} -\operatorname{div}(a(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + b(x)|u|^{p(x)-2}u = \lambda f(x,u) + \mu g(x,u) \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0, \end{cases}$$

où la fonction $p : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne telle que :

$$2 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < N$$

les fonctions $a \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $b \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Les fonctions g et $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont non linéaires ayant une croissance polynomiale par rapport à la variable u.

Le problème anisotropique :

$$(\mathbf{PA}) : \begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \partial_{x_i}\Big(a_i(x, \partial_{x_i} u)\Big) = \lambda f(x,u) + \mu g(x,u) \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où les champs $a_i(x,.)$ vérifient des hypothèses de croissance de type polynomiale. Les fonctions g et $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont non linéaires ayant une croissance polynomiale par rapport à la variable u.

Notre principale préoccupation est de donner à nos problèmes ci-dessus un sens dans des espaces fonctionnels appropriés afin de démontrer l'existence de solutions (u, λ, μ) au sens faibles de nos problèmes (**PL**),(**PG**) et (**PA**).

Avant d'illustrer les difficultés qui peuvent apparaître lors de l'étude de nos équations, nous mentionnons que nos problèmes font partie des problèmes aux valeurs propres. Parmi ces problèmes nous citons l'équation dégénérée à une seule valeur propre sous la forme :

$$\Delta_p(u) = f(\lambda, u).$$

Nous trouvons de nombreux travaux dédiés à l'étude théorique de telles équations et systèmes d'équations à valeur propre, nous citons en 1980 M. Ôtani a étudié [53] en une dimension puis par F. de Thèlin [26] en dimension N en montrant l'existence et l'unicité des solutions radiales dans $\mathbb{R}^N$ pour des équations de type $\Delta_p u = f(x,u)$ où la fonction f est contrôlée par des fonctions polynomiales par rapport à u. On peut aussi citer certains travaux de l'analyse des problèmes elliptiques aux valeurs propres comme G. Barles [29] et A. Anane [3], qui ont étudié les équations du type :

$$-\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u,$$

dans un domaine borné. Plus tard en 1993, P. Lindqvist [61] a montré différents résultats sur ce type d'équations qui font suite à l'article de A. Anane [2]. D'autres résultats sur l'unicité qui ont été énoncés par J. I. Dìaz et J. E. Saa [41] en 1987 pour des équations de la forme $\Delta_p u = f(x, u)$ sous la condition que la fonction $r \longrightarrow \frac{f(x,r)}{r^{p-1}}$ soit décroissante. La première valeur propre a été abordée par R. F. Manàsevich et M. A. Del Pino [66]. Plus tard, le cas d'un domaine non borné de ces équations a été abordée, on cite à titre d'exemple P. Dràbek et J. Milota [62], P. Dràbek et A. Elkhalil [8], S. El Manouni et A.Touzani [63].

Généralement, pour montrer ces résultats on utilise les méthodes variationnelles, en considérant le problème équivalent à trouver les points critiques d'une fonctionnelle associée au problème aux valeurs propres original. Pour illustrer ces méthodes et les difficultés principales auxquelles on est confronté lors d'une procédure variationnelle, nous considérerons un simple exemple de problème aux valeurs propres suivant :

$$(P_\lambda) \begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{p-1} u \ x \in \Omega \\ u = 0 \ \ x \in \ \ \Omega, \end{cases}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ est un ouvert borné régulier et $p > 0$ un paramètre donné. On s'intéresse aux solutions faibles non triviales $u \in W = W_0^{1,2}(\Omega)$. i.e des fonctions u telles que :

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-1} \nabla u \nabla v = \int_\Omega |u|^{p-1} uv \ \ \forall v \in W.$$

Ici la fonctionnelle d'énergie naturellement associée au problème (P_λ) est :

$$F(u) = \frac{\lambda}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{p+1} \|u\|_{p+1}^{p+1},$$

où $\| \ \|_q$ pour $q \in [1, \infty]$ désigne la norme usuelle sur l'espace de Lebesgue $L^q(\Omega)$. Nous notons que pour étudier les problèmes aux valeurs propres dégénérés (P_λ) (i.e l'existence des solutions faibles) on peut adopter le théorème de col de la montagne et la condition de "PS " ([1] Ambrosetti et Rabinowitz, 1973). La fonctionnelle F est bien définie et de classe C^1 sur W. De plus, tout point critique de F est une solution faible de (P_λ). Un point critique est un élément $u \in W$ tel que $(F'(u)v = 0 \ \ \forall v \in W)$. Comme le comportement de F va être contrôler par la valeur de $p > 0$, on distingue deux cas de comportement :

(1) La fonctionnelle F possède un minimum global, il correspond à une solution non triviale de (P_λ). Ce qui pour notre exemple correspond au cas où $p \in]0,1[$, c'est un cas où l'existence de solution est évidente i.e.

(2) La fonctionnelle F n'a pas d'extremum global, et nous devons chercher un point critique qui a une caractérisation variationnelle plus complexe. Ce qui pour notre exemple correspond au cas où $p \in]1, \frac{2N}{N-2}]$, c'est le cas où l'existence de solution n'est pas évidente.

L'exemple ci-dessus illustre les trois principales difficultés rencontrées lors d'une approche variationnelle. En premier lieu, la difficulté liée à la géométrie de la fonctionnelle choisie, cette géométrie est contrôlée par l'exposant p dans notre exemple. Notons que dans nos problèmes (**PL**),(**PG**) et (**PA**) la fonctionnelle est contrôlée par les croissance de fonctions f, g, m et a_i. Notons aussi que dans beaucoup de cas il est souhaitable de choisir une formulation variationnelle (i.e. la fonctionnelle F) la plus pratique. En deuxième lieu, la difficulté de prouver l'existence des suites de "Palais-Smale" bornées pour la fonctionnelle à un niveau critique. Finalement, la difficulté de prouver la convergence, dans un sens suffisamment fort de ces suites. Nous notons que pour soulever ces difficultés on fait appel à la propriété d'injection suivante :

$$W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ est continue pour } q \in [1; \frac{2N}{N-2}] \text{ et compacte pour } q \in [1; \frac{2N}{N-2}[.$$

La nature des problèmes traités dans notre thèse, nous a imposé une méthode variationnelle récemment introduite. Elle s'agit d'une méthode abstraite prouvée par B. Ricceri dans [12] en 2000 et sa version établie dans [9], [10] en 2009, qui traitent des équations variationnelles de type $\Phi(u) = \lambda J(u) + \mu\Psi(u)$ avec des conditions Dirichlet Neumann. Cette méthode a été largement appliquée à l'étude de l'existence de multiples solutions non triviales. Le premier à l'utiliser n'était que B. Ricceri, il a montré en 2009 dans [10] un théorème général des points critiques, qui a été appliqué pour une classe d'opérateurs elliptiques avec des croissances polynomiale non linéaires. Ce principe qui va prendre le nom de "Principe de Ricceri" va nous spécifier les conditions sur les fonctions $\Phi, J; \Psi$ pour que l'équation

$$\Phi'(u) = \lambda J'(u) + \mu\Psi'(u),$$

possède au moins trois solutions faibles dont la norme est inférieure à une certaine constante r. Le principe de Ricceri a été adopté par plusieurs auteurs nous citons, parmi d'autres, les articles [27], [28], [71], [70]. Le principe de Ricceri concerne la classe $\mathcal{W}_X$ de fonctions : $\Phi : X \to \mathbb{R}$, admettant la propriété suivante : si $\{u_n\}$ est une suite dans X faiblement convergente vers $u \in X$ et $\liminf_{n\to\infty} \Phi(u_n) \leq \Phi(u)$,

alors $\{u_n\}$ possède une sous-suite qui converge fortement vers u.
Le principe est le suivant :

Théorème 0.1 (2009, [9]). *soit X un espace réel de Banach séparable et réflexif; Φ, J et $\Psi : X \to \mathbb{R}$, vérifient,*

1. *Φ est coércive,*

2. *Φ est faiblement semi-continue inférieurement,*

3. *Φ est C^1 fonction, appartenant à $\mathcal{W}_X$, bornée sur tout borné de X,*

4. *Φ possède une dérivée possédant une fonction inverse continue sur X^*,*

5. *J est une C^1-fonction avec une dérivée compacte,*

6. *La fonction Φ possède un stricte minimum local x_0 avec $\Phi(x_0) = J(x_0) = 0$,*

7. *Les inégalités suivantes sont satisfaites :*

$$\alpha = \max\left\{0, \limsup_{\|x\|\to+\infty} \frac{J(x)}{\Phi(x)}, \limsup_{x\to x_0} \frac{J(x)}{\Phi(x)}\right\}, \beta = \sup_{x\in\Phi^{-1}(]0,+\infty[)} \frac{J(x)}{\Phi(x)},$$

avec $\alpha < \beta$.

***Alors**, pour chaque interval $[a, b] \subset]1/\beta, 1/\alpha[$ (avec les conventions $1/0 = +\infty$, $1/\infty = 0$) il existe une constante $r > 0$ avec la propriété suivante :*
pour chaque $\lambda \in [a, b]$, et tout C^1-fonction Ψ possédant une dérivée compacte.
Il existe une constante $\sigma > 0$ telle que pour chaque $\mu \in [0, \sigma]$, l' équation

$$\Phi'(x) = \lambda J'(x) + \mu\Psi'(x),$$

possède au moins trois solutions faibles dans X dont la norme inférieure à r.

Naturellement nos équations limites (PL), généralisées (PG) et anisotropes (PA) ne se prêtent pas aussi simplement à l'étude variationnelle, mais cependant l' idée est de trouver des solutions en construisant des valeurs critiques pour des opérateurs Φ, J et Ψ sur des espaces appropriés. Nous traitons systématiquement nos problèmes en appliquant le principe de Ricceri avec des opérateurs Φ, J , Ψ et un espace X spécifiques imposés par la nature de chaque problème.

Nous mentionnons que les méthodes "Ricceri", "le théorème de Col de la montagne" et d'autres méthodes des points critiques se basent sur les injections des espaces de Sobolev dans les espaces de Lebesgue. Ces injections sont essentielles dans la démonstration d'existence de solutions faibles, elles sont en général continues et compactes si Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$. Elles sont continues mais non compactes si Ω est un domaine non borné de $\mathbb{R}^N$.

Parmi les motivations de traitement des cas limites (i.e $N = p$), nous mentionnons l'aspect critique caractérisé par la perte des injections de espaces de Sobolev dans l'espace Lebesgue $L^\infty(\Omega)$. Un autre aspect critique limite caractérisé par l'injection des Sobolev dans les espace d'Orlicz. Pour le traitement des cas généralisés nous somme motivés par la confrontation avec la perte de compacité des espaces de Sobolev dans les espaces de Lebesgue dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$. Pour les cas anisotropes la motivation est de surmonter les difficultés qui surviennent lors du passage d'un exposant constant à un exposant variable anisotrope.

Notre thèse, qui est composée de sept chapitres, présente, des rappels préliminaires dans le premier chapitre. Dans le deuxième chapitre nous présentons des résultats d'existence de solutions non triviales pour des problèmes limites, le troisième chapitre est consacré à l'étude d'un système limite, le cas des problèmes généralisés est sujet du quatrième chapitre, des cas de problèmes anisotropes sont étudiées dans le cinquième chapitre. En fin nous donnons une conclusion et quelques perspectives. Nous allons présenter ici d'une manière détaillée le contenu de chacun d'eux.

Le Chapitre 1 est entièrement consacré à l'exposé des définitions et des résultats nécessaires à la suite de ce travail. Nous rappelons tout d'abord quelques résultats de base sur les cadres fonctionnels, qui vont nous spécifier les espaces topologiques dans lesquels on va chercher les solutions faibles de nos problèmes aux limites. Notamment on rappelle quelques résultats de base sur la classe des espaces d'Orlicz, puis les espaces de Lebesgue à exposant variable avec poids, puis les espaces de Sobolev à exposant variable. Nous terminons par une présentation de la classe des espaces anisotropes et ces propriétés topologiques. Nous spécifions aussi toutes les propriétés essentielles telles que les injections continues et compactes, et toutes les inégalités clés dans l'étude des problèmes aux valeurs propres. Aussi dans ce chapitre nous spécifions la méthode adoptée pour la résolution de nos problèmes, notamment la nouvelle méthode celle connue sous le principe de "Ricceri".

Le Chapitre 2 présente la première partie d'un travail publié [5]. Ce chapitre est consacré à l'étude des équations elliptiques faisant intervenir l'opérateur N-Laplacien :

$$(\mathbf{PL}) : \begin{cases} -\operatorname{div}(m(|\nabla u|^N)|\nabla u|^{N-2}\nabla u) = \lambda f(x,u) + \mu g(x,u) \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $g, f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions appartenant à la classe $\mathcal{A}$, une classe de fonction $h(x,t)$ vérifiant les hypothèses suivantes :

($\mathbf{H}_1$) $\forall M > 0, \sup\limits_{|t|\leq M} |h(x,t)| \in L^\infty(\Omega)$

($\mathbf{H}_2$) $\lim\limits_{|u|\to\infty} \sup\limits_{x\in\Omega} \dfrac{|h(x,u)|}{e^{\delta|u|^{\frac{N}{N-1}}}} = 0, \;\; \forall \delta > 0.$

Le champ $m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses suivantes :

(M1) $m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est continue ;

(M2) Il existe des constantes positives $p \in]1,N]$, b_1, b_2, c_1, c_2 telles que :

$$c_1 + b_1 u^{N-p} \leq u^{N-p} m(u^N) \leq c_2 + b_2 u^{N-p} \quad \forall u \in \mathbb{R}^+;$$

(M3) la fonction $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k(u) = m(|u|^N)|u|^{N-2}u$ est strictement croissante et $k(u) \to 0$ quand $u \to 0^+$,

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ dont la frontière $\partial\Omega$ est assez régulière.

La première partie du chapitre 2 sera consacrée à l'étude d'une équation de Laplace (i.e. N=2) de type suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(m(|\nabla u|^2)\nabla u) = \lambda\beta(x)(u^q e^{\frac{\eta u^2}{\ln(|u|+3)}} + \gamma|u|u) + \mu|u|^{s-2}u \quad \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où les constantes $0 < \gamma \leq \eta\ q, s$ sont telles que $q > 1, s > 1$, la fonction $\beta : \Omega \to \mathbb{R}$ est bornée mesurable et $m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses (M1),(M2) et (M3) avec (N=2).

(M1) $m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est continue ;

(M2) Il existe des constantes positives $p \in]1,2]$, b_1, b_2, c_1, c_2 telles que :

$$c_1 + b_1 u^{2-p} \leq u^{2-p} m(u^2) \leq c_2 + b_2 u^{2-p} \quad \forall u \in \mathbb{R}^+;$$

(M3) la fonction $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k(u) = m(|u|^2)u$ est strictement croissante et $k(u) \to 0$ quand $u \to 0^+$.

Notre mission est de montrer l'existence de triplet (u, λ, μ) qui satisfait l'équation (1) au sens faible. Pour positionner notre travail chronologiquement nous mentionnons que l'étude des problèmes de type limite a été initiée dans "conformal geometry" on cite par exemple "N = 2", la "Gaussian curvature equation " est une équation sur un variété M de dimension 2

$$-\Delta u = k(x)e^{2u} + h(x)$$

avec $-\Delta$ est l'opérateur de "Laplace-Beltrami", k est une " Gaussian curvature " et h est une fonction Höldérienne donnée.

Les solutions des problèmes non linéaires à valeur au bord, avec la présence des croissances exponentielles ont été considérées par plusieurs auteurs avec le but la généralisation des résultats classiques de la théorie de point fixe à une classe plus large. Nous citons à titre d'exemple le résultat [15] de Figueiredo, Myiagaki et Ruf qui ont obtenu une solution non triviale pour un problème tel que le notre dans un cas où $\lim_{t\to\infty} \frac{f(x,t)}{e^{\alpha t^2}} = 0 \ \forall \alpha > \alpha_0$ et $\lim_{t\to\infty} \frac{f(x,t)}{e^{\alpha t^2}} = +\infty \ \forall \alpha < \alpha_0$ pour une certaine $\alpha_0 > 0$. Un autre résultat a été prouvé par Marcos Dò dans [14] pour une classe plus générale d'opérateurs non linéaire elliptiques en utilisant l'approche de min-max. Dans ces résultats la difficulté principale consiste à vérifier les conditions qui permettent d'utiliser la théorie de points critiques, telles que, " la condition de Palais Smale ". Un résultat d'existence de solution radiale positive a été obtenue aussi par Adimurthi dans [4] pour un problème semi linéaire de Dirichlet avec une croissance critique dans la boule unité de $\mathbb{R}^2$. En utilisant un argument topologique et variationnel, dans [83], Calanchi, Ruf et Zhang, ont montré l'existence de deux solutions (un négatif et l'autre qui change de signe) pour un problème elliptique semi linéaire dans des domaines bornés de $\mathbb{R}^2$ avec une non-linéarité ayant une croissance exponentielle à $+\infty$ et une croissance linéaire à $-\infty$. Une conclusion plus précise pour le même problème a été atteinte en [16] par Mugnai, qui a prouvé qu'un problème semi linéaire de Dirichlet en présence des non-linéarités exponentielles critiques possède, près de résonance, quatre solutions (une négative et trois autres qui changent de signe).
B. Ricceri dans [13] a montré que le problème à deux valeurs propres

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u) + \mu g(u) \quad dans \ \Omega \subset \mathbb{R}^N \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u = 0 \quad sur \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

sous les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} max\Big\{|f(t)|, |g(t)|\Big\} \leq a\Big(1 + |t|^q\Big) \ \forall t \in \mathbb{R} \\ max\Big\{\Big|\int_0^t f(\eta)d\eta\Big|, \Big|\int_0^t g(\eta)d\eta\Big|\Big\} \leq a\Big(1 + |t|^s\Big) \ \forall t \in \mathbb{R} \\ \limsup_{t\to 0} \frac{\int_0^t f(\eta)d\eta}{|\eta|^\gamma} < \infty \end{cases} \tag{3}$$

Avec $a > 0;\ q < (N+2)/(N-2);$, $s < 2$, et $\gamma > 2$, : il existe une constante $\delta > 0$ telle que pour chaque $\mu \in [-\delta, \delta]$ il existe $\lambda_0 > 0$ telle que le problème (2) possède au moins trois solutions faibles dans $W_0^{1,2}(\Omega)$.
Notre approche dans cette partie de notre travail est :
1- de généraliser le résultat ci-dessus pour une classe de fonctions f, g ayant une

croissance exponentielle plus générale que la croissance polynomiale étudiée par B. Ricceri dans [13].

2- de donner une extension du résultat ci-dessus pour une classe d'opérateurs plus large i.e.

$$-\operatorname{div}\Big(m(|\nabla u|^2)\nabla u\Big).$$

Un exemple type d'application $m(u)$ satisfaisant (M1),(M2) et (M3) est :

$$m(u) = 1 + u^{\frac{p-2}{2}}, p \leq 2$$

Alors l'opérateur $-\operatorname{div}(m(|\nabla u|^2)\nabla u)$ deviendra $-\Delta u - \Delta_p u$, où $\Delta_p \equiv \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ est l'opérateur p-Laplacien. Évidement, le choix d'application $m(u) = 1$ nous donne le cas limite standard [13].

Notre démarche, pour prouver l'existence de solutions faibles, est de considérer le problème équivalent :

$$\Phi'(u) = \lambda J'(u) + \mu \Psi'(u),$$

où les fonctionnelles $\Phi, J, \Psi : W \to \mathbb{R}$ sont définies par :

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(\int_0^{|\nabla u|^2} m(t)\Big)\, dx$$

$$J(u) = \int_\Omega \beta(x)\Big(u^q e^{\frac{\eta u^2}{\ln(|u|+3)}} u + \gamma |u| u^2\Big)\, dx$$

$$\Psi(u) = \int_\Omega |u|^s\, dx,$$

puis appliquer le principe de Ricceri associé aux fonctionnelles Ψ, J et Ψ. Parmi les obstacles majeurs pour obtenir des résultats d'existence des solutions faibles du problème limite, nous mentionnons l'incompatibilité des injections de notre espace fonctionnel dans les espaces de Lebesgue i.e ($W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega),\ s > 1$) avec nos croissances exponentielles. Ces injections sont suffisantes et nécessaires pour les cas où les croissances sont polynomiales, elles sont nécessaires mais pas suffisantes dans les cas où les croissances sont exponentielles. Motivé par l'injection de l'espace fonctionnel $W_0^{1,2}(\Omega)$ dans dl'espace d'Orlicz appropriés compatible avec nos croissances exponentielles, nous surmontons les difficultés générées par la généralisation des croissances polynomiales. D'autres obstacles générés par l'extension de résultats concernant l'opérateur standard de Laplace à une classe d'opérateurs plus large. Notre mission est de surmonter ces obstacles en prouvant que nos fonctionnelles Φ, J, Ψ obéissent aux conditions de principe de Ricceri.

La deuxième partie du chapitre 2 est consacrée à l'étude de problème général où la dimension $N \geq 2$,

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(m(|\nabla u|^N)|\nabla u|^{N-2}\nabla u) = \lambda f(x,u) + \mu g(x,u) \quad \text{dans } \Omega \\ \qquad\qquad u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ avec une frontière assez régulière, les fonctions f, g et m sont supposées satisfaire les hypothèses **(H1)**,**(H2)**,**(M1)(M2)** et **(M3)**. Notons que les cas particuliers où :

$$-\operatorname{div}(m(|\nabla u|^N)|\nabla u|^{N-2}\nabla u) = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{N-2}\nabla u) \tag{5}$$

i.e. ($m(u) = 1$ le cas standard) ont été étudiés par Said El manouni et Francesca Faraci dans [72]. Notre approche dans cette partie est de généraliser le résultat [72] pour une plus large classe d'opérateurs en montrant l'existence de solutions faibles du problème ci-dessus. Notre démarché est d'associer à notre équation limite les fonctionnelles suivantes :

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\int_0^{|\nabla u|^N} m(t)dt)\, dx$$

$$J(u) = \int_\Omega f(x,u)dx$$

$$\Psi(u) = \int_\Omega g(x,u)dx$$

Nous notons que résoudre notre problème au valeurs propres (1.4) revient à résoudre le problème $\Phi'(u) = \lambda J'(u) + \mu\Psi'(u)$.

Parmi les obstacles majeurs, nous mentionnons l'incompatibilité des injections de notre espace $W_0^{1,N}(\Omega)$ dans les espaces de Lebesgue $L^s(\Omega)$ avec les croissances sur f, g (i.e croissances exponentielles). Ces injections sont suffisantes et nécessaires pour les cas où les croissances sont polynomiales, ne peuvent plus adopter les croissances exponentielles. Pour combler la défiance des injections dans les espaces de Lebesgue, nous étions motivés par l'injection de l'espace fonctionnel $W_0^{1,N}(\Omega)$ dans des espace d'Orlicz appropriés. D'autres obstacles générés par l'extension de résultats concernant l'opérateur standard de Laplace à une classe d'opérateurs plus large. Nous surmontons ces difficultés générées par la nature de notre problème, en améliorant certaines hypothèses sur nos croissances exponentielles et sur notre fonction poids $m(t)$ i.e. (les hypothèses **(H1)**,**(H2)**,**(M1)**,**(M2)**,**(M3)**).

Notre défie dans cette partie, est de prouver que nos fonctions Φ, J, Ψ obéissent aux conditions de principe de Ricceri.

Dans le même axe et en utilisant le même principe variationnel, un autre problème est étudié dans le **Chapitre 3**. Ce travail présente la deuxième partie de [5], il s'agit du système d'équations suivantes :

$$\textbf{(SL)}\begin{cases} -\operatorname{div}\left(a(|\nabla u|^N)|\nabla u|^{N-2}\nabla u\right) = \lambda F_u(x,u,v) + \mu G_u(x,u,v) & \text{in } \Omega \\ -\operatorname{div}\left(a(|\nabla v|^N)|\nabla v|^{N-2}\nabla v\right) = \lambda F_v(x,u,v) + \mu G_v(x,u,v) & \text{in } \Omega \\ \qquad u = v = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6}$$

avec la fonction $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est assumée d'être mesurable dans Ω et C^1 dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ satisfaisant :

(F1) Pour tout $M, \sup_{|(t,s)|\leq M}(|F_t(x,t,s)| + |F_s(x,t,s)|) \in L^\infty(\Omega)$,

(F2) La croissance exponentielle sur Ω ; i.e., pour tout $\delta > 0$

$$\lim_{|(t,s)|\to\infty} \frac{|F_t(x,t,s)| + |F_s(x,t,s)|}{e^{\delta(|t|^N+|s|^N)^{1/(N-1)}}} = 0 \quad \text{Uniformément dans } \Omega,$$

avec $F(.,0,0) \in L^1(\Omega)$.

Concernant la fonction $G(.,s,t)$, elle doit être une fonction mesurable C^1-fonction et satisfaisant

(G) $\sup_{|(t,s)|\leq k}(|G_t(x,t,s)| + |G_s(x,t,s)|) \leq h_k(x)$,
pour tout $k > 0$ et certaine $h_k \in L^1(\Omega)$ avec $G(.,0,0) \in L^1(\Omega)$.

Finalement on suppose que la fonction a satisfait :

(a1) $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est continue ;

(a2) il existe des constantes positives $p \in]1,N]$, b_1, b_2, c_1, c_2 telles que

$$c_1 + b_1 u^{N-p} \leq u^{N-p} a(u^N) \leq c_2 + b_2 u^{N-p} \quad \forall u \in \mathbb{R}^+;$$

(a3) la fonction $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k(u) = a(|u|^N)|u|^{N-2}u$ est strictement croissante et $k(u) \to 0$ si $u \to 0^+$.

Le but est de chercher des solutions faibles de (6) dans l'espace $W = W_0^{1,N}(\Omega) \times W_0^{1,N}(\Omega)$ qui est menu de la norme :

$$\|U\|_W^N = \int_\Omega |\nabla U|^N \, dx = \int_\Omega (|\nabla u|^N + |\nabla v|^N) \, dx,$$

où $U = (u,v) \in W$. Motivée par le résultat de Trudinger et Moser (cf. [59]) dans le cas $N \geq 2$, on remarque que l'espace W est injecté d'une manière continue dans des espaces d'Orlicz :

$$L_\phi = \left\{ U : \Omega \to \mathbb{R}^2, \text{ mesurable} : \int_\Omega \phi(U) < \infty \right\},$$

où $\phi(s,t) = \exp\left(s^{\frac{N}{N-1}} + t^{\frac{N}{N-1}}\right)$. De plus, il existe une constante C_N qui dépend de N et de la mesure de Ω telle que

$$\sup_{\|(u,v)\|_W \leq 1} \int_\Omega \exp\left(\delta(|u|^{\frac{N}{N-1}} + |v|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \leq C_N \quad \text{pour tout } 0 < \delta \leq \alpha_N,$$

où $\alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$, est la mesure de ω_{N-1} la surface de la sphère unité de $\mathbb{R}^{N-1}$. Ces systèmes présentent quelques nouveaux phénomènes intéressants. Nous rappelons que l'opérateur considéré ici a été étudié par Hirano [58] avec des non-linéarités ayant une croissance polynomiale. Nous rappelons aussi que F. de. Thelin a montré que le problème :

$$\begin{gathered} -\Delta_N u = \lambda |u|^{\alpha-1} u |v|^{\beta+1} \quad \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^N, \\ -\Delta_N v = \lambda |u|^{\alpha+1} |v|^{\beta-1} v \quad \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^N, \\ u = v = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{gathered}$$

possède une plus petite valeur propre λ_1 [25], et

$$\begin{gathered} \lambda_1 = \inf\Big\{ \frac{\alpha+1}{N} \int_\Omega |\nabla u|^N \, dx + \frac{\beta+1}{N} \int_\Omega |\nabla v|^N \, dx : \\ (u,v) \in W, \int_\Omega |u|^{\alpha+1} |v|^{\beta+1} \, dx = 1 \Big\}, \end{gathered}$$

où $\alpha + \beta = N - 2$ et $\alpha, \beta > -1$. Nous rappelons aussi que El manouni et A.Touzani [73] ont montré en utilisant la méthode de "la condition de Palais -smale " que le problème de type :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\left(a(|\nabla u|^N)|\nabla u|^{N-2}\nabla u\right) &= \lambda F_u(x,u,v) \quad \text{dans } \Omega, \\ -\operatorname{div}\left(a(|\nabla v|^N)|\nabla v|^{N-2}\nabla v\right) &= \lambda F_v(x,u,v) \quad \text{dans } \Omega, \end{aligned}$$

possède une solution faible si :

$$\limsup_{|U|\to 0} \frac{pF(x,U)}{u^{\alpha+1} v^{\beta+1}} < C_{N,p} \lambda_1,$$

où $F(x,U) = F(x,u,v) = \int_0^u F_s(x,s,v) ds + \int_0^v F_s(x,u,s) ds$ Notre approche dans ce chapitre est de généraliser le travail de S.Mamouni et A.Touzani [73] pour des problèmes à deux valeurs propres tout en utilisant la méthode de principe de Ricceri. La nature de notre système **(SL)** nous à imposer l'espace produit de Sobolev W comme cadre fonctionnel. Nous à imposer aussi les fonctionnelles "énergies" Φ, J et Ψ données par :

$$\Phi(u,v) = \frac{1}{N}\Big(\int_\Omega A(|\nabla u|^N) + A(|\nabla v|^N) \, dx \Big),$$

$$\Phi(U) = J(u,v) = \int_\Omega F(x,u,v)\,dx,$$

$$\Psi(U) = \Psi(u,v) = \int_\Omega G(x,u,v)\,dx,$$

avec $A(s) = \int_0^s a(t)dt$ et $F(x,u,v) = \int_0^u F_s(x,s,v)ds + \int_0^v F_s(x,u,s)ds$
et $G(x,u,v) = \int_0^u G_s(x,s,v)ds + \int_0^v G_s(x,u,s)ds$.

Notre mission est d'appliquer le principe de Ricceri associée aux fonctionnelles ci-dessus.

L'objet du **Chapitre 4** est de présenter le travail [6]. Il s'agit d'un résultat d'existence de solutions pour un problème faisant intervenir l'opérateur :

$$-\operatorname{div}(a(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u),$$

Plus précisément nous nous intéressons à l'étude d'existence de multiples solutions faibles non triviales du problème elliptique non linéaire suivant :

$$\textbf{(PG)}\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + b(x)|u|^{p(x)-2}u = \lambda f(x,u) + \mu g(x,u) \quad \text{dans } \mathbb{R}^N, \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

où la fonction $p : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ est Lipschitzienne continue vérifiant la condition $2 \leq p^- \leq p(x) \leq p^+ < N$, la dimension $N \geq 3$. Les constantes λ et μ sont des paramètres positifs, et $a(x)$ est une fonction mesurable telle que $a(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^n} a(x) > 0$. Les deux fonctions f et g vérifient les conditions de croissance suivantes :

(H_f) $|f(x,t)| \leq m(x)|t|^\gamma \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}$,

où $m(x)$ est une fonction positive telle que :

$$m \in L^{\frac{p_-^*}{p_-^*-1}}(\mathbb{R}^N) \cap L^{\frac{\nu}{\nu-1}(\frac{p_-^*}{p_-^*-(\gamma+1)})}(\mathbb{R}^N),$$

où

$$p^+ < \gamma + 1 < \nu < p_-^*,$$

où p_-^* est l'exposant de Sobolev, i.e., $p_-^* = \dfrac{Np^-}{N-p^+}$.

(H_g) Il existe une fonction positive $h(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, satisfaisant

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^*} \frac{|g(x,t)|}{h(x)|t|^{p_-^*}} < +\infty,$$

la fonction b est telle que :

$$b \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N) \text{ et } b(x) \geq b_0 > 0,$$

Le cadre fonctionnel naturel pour nos équations généralisées est l'espace :

$$E = W_0^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N),$$

défini comme la complétude d'espace des fonctions $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ par rapport à la norme $\|u\|_{1,p(x),b(x)} = \|u\|_{p(x),b(x)} + \|\nabla u\|_{a(x),p(x)}$ dans l'espace $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. L'étude de nos problèmes, en général est confrontée à la non-homogénéité et la non-linéarité des opérateurs $p(x)-$Laplacien. Nous nous intéressons aux solutions non triviales de l'équation (7), c'est à dire au triplet $(\lambda, \mu, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$ qui satisfont (7) au sens faible.
Dans le cas général, un domaine non borné rend les méthodes variationnelles difficiles à implanter, certes l'une des principales difficultés est générée par le fait que notre domaine est $\mathbb{R}^N$. Cela va entraîner la perte de la compacité de l'injection des espaces de Sobolev $W^{1;p(x)}(\Omega)$ dans $L^{p^*}(\Omega)$ où $p^* = \frac{pN}{N-p}$ est l'exposant critique de Sobolev. On note que cette compacité, est parmi les piliers indispensables pour la résolution variationnelle pour des équations tel que (7) dans le cas où le domaine Ω est borné.

Notre approche pour combler la perte de la compacité de l'injection des Sobolev dans des Lebesgue, est d'imposer aux fonctions f, g les croissances $(H_f); (H_g)$ qui vont contrôler les procédures des convergences.

Nombreux travaux ont été dédiés aux questions d'existence de solutions faibles pour ce type de problèmes à exposant variable, due en grande partie à la modélisation des fluides "electrorheological" [54] citons par exemple les travaux de L. Diening et M. Rŭžička [44] sur les solutions fortes pour une généralisation des fluides non newtoniens, et les travaux de P. Harjulehto et P. Hasto [64], 2004 sur les capacités dans les espaces de Sobolev avec exposant variable et les travaux de M. Mihăilescu et V. Radulescu [51], 2006 concernant la multiplicité de solutions des problèmes découlants de la théorie des fluides électroréologiques et O. Kováčik and J.Rákosník [60],1991 sur les espaces $L^{p(x)}$ et $W^{1,p(x)}$.

Nous rappelons que le cas où l'exposant est une constante, Said El manouni a montré en 2011 que le problème

$$-\operatorname{div}(a(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda f(x,u) + \mu g(x,u)$$

dans $\mathbb{R}^N$ avec $p < N$ possède au moins trois solutions faibles en utilisant le principe de Ricceri. Maria Boureanu Mar 2006 a étudié l'existence de solution faible d'un problème comme (7) mais à une seule valeur propre, Sous les hypothèses $|f(x,u)| \leq c_1|u|^{p^+} + c_2|u|^s \ \forall u \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ avec $s \in [p^+ - 1, p^{-*}]$ en adoptant le célèbre théorème" le col de la montagne [1]". On note que les défies majeurs sont les preuves de certaines propretés de compacité de certaines fonctionnelles.

Notre approche dans ce chapitre est de généraliser le travail de S. El manouni pour un exposant variable et d'élargir ce travail pour le cas d'un système à deux équations

$$-\operatorname{div}\left(a(x)\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) + b(x)|u|^{p(x)-2}u = \lambda f_u(x,u,v) + \mu g_u(x,u,v) \quad \text{in } \mathbb{R}^N,$$

$$-\operatorname{div}\left(a'(x)|\nabla v|^{q(x)-2}\nabla v\right) + b'(x)|u|^{q(x)-2}u = \lambda f_v(x,u,v) + \mu g_v(x,u,v) \quad \text{in } \mathbb{R}^N,$$

Notre démarche pour montrer que le problème (1.7) possède au moins trois solutions non triviales, nous avons besoin de définir les fonctionnelles suivantes $\Phi, J, \Psi : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Ces fonctionnelles sont choisies de telle façon que leurs dérivées au sens faible vérifient $\Phi'(u) = \lambda J'(u) + \mu \Psi'(u)$. Puis nous montrons que ces fonctions vont satisfaire les conditions de théorème de Ricceri (1.31).

$$\Phi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)}(|\nabla u|^{p(x)} + b(x)|u|^{p(x)})dx,$$

et

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)\,dx,$$

et

$$\Psi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)\,dx,$$

avec

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,t)dt, \ \ et \ \ G(x,u) = \int_0^u g(x,t)dt,$$

Le dernier problème, présenté au **Chapitre 5**, concerne les équations anisotropes de type suivant :

$$\textbf{(PA)} \begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \partial_{x_i}\Big(a_i(x, \partial_{x_i} u)\Big) = \lambda f(x,u) + \mu g(x,u), & \text{pour } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 \quad sur \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{8}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ est un domaine borné avec une frontière assez régulière. Ce genre de problème prend comme cadre fonctionnel l'espace Sobolev anisotrope à exposant variable $W_0^{1,\vec{p}(x)}(\Omega)$, où le fonction $\vec{p}(x) = (p_1(x), ..., p_N(x))$ avec :

$$2 \leq p_i^- \leq p_i(x) \leq p_i^+ < N, \text{ où } p_i^- = \inf_{x\in\Omega} p_i(x) \text{ et } p_i^+ = \sup_{x\in\Omega} p_i(x,)$$

Le cadre fonctionnel :

$$W = W_0^{1,p(\vec{x})}(\Omega),$$

défini comme la complétude d'espace des fonctions $C_0^\infty(\Omega)$ par rapport à la norme

$$\|u\|_{W_0^{1,\vec{p}(\cdot)}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{N} \|\partial_{x_i} u\|_{L^{p_i(\cdot)}(\Omega)}.$$

Pour l'étude de nos équations anisotropiques **(PA)**, nous introduisons les notations suivantes :

$$\vec{p}_+ = (p_1^+, ..., p_N^+), \;\; \vec{p}_- = (p_1^-, ..., p_N^-),$$

$$p_+^+ = \max\left\{p_1^+, .., p_N^+\right\}, p_-^+ = \max\left\{p_1^-, .., p_N^-\right\}, p_-^- = \min\left\{p_1^-, .., p_N^-\right\},$$

On supposera que :

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i^-} > 1,$$

On définit aussi p_-^* et $p_{-,\infty}$ par :

$$p_-^* = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i^-} - 1}, \;\; , p_{-,\infty} = max\left\{p_+^+, p_-^*\right\}$$

Les fonctions $a_i(x,s)$ vérifient les hypothèses suivantes :

(A1) Il existe une constante positive $\bar{c}_i$ telle que la fonction a_i satisfait,

$$c'_i |s|^{p_i(x)-1} \leq |a_i(x,s)| \leq c_i \left(d_i(x) + |s|^{p_i(x)-1}\right),$$

pour tout $x \in \Omega$ et tout $s \in \mathbb{R}$, où $d_i \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p_i(x)} + \frac{1}{p_i'(x)} = 1$.

(A3) La condition de monotonie :

$$[a_i(x,s) - a_i(x,t)](s-t) \geq [s^{p_i(x)-2}s - t^{p_i(x)-2}t](s-t),$$

est vraie pour tout $x \in \Omega$ et tout $s, t \in \mathbb{R}$ avec $s \neq t$.

(A3) $A_i(x,0) = 0$ pour tout $x \in \Omega$, $A_i(x,u) = \int_0^u a_i(x,s)ds$ et $A_i(x,.)$ est continue convexe.

Les deux fonctions $f, g \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont supposées satisfaire les hypothèses suivantes :

(FG) les fonctions $f, g \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$|f(x,t)|, |g(x,t)| \leq C|t|^{\rho(x)-1} \forall (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$$

avec C est une constante positive, $\rho : \Omega \to (1, \infty)$ est une fonction continue telle que :

$$p_+^+ < \rho^- \leq \rho^+ < p_\infty^-,$$

On mentionne que les suppositions qui vont être imposées aux fonctions a_i nous permettent de prendre :

$$a_i(x,s) = |s|^{p_i(x)-2}s \quad \text{pour tout} i \in \Big\{1, \ldots, N\Big\},$$

en particulier notre opérateur $\sum_{i=1}^{N} \partial_{x_i} a_i \left(x, \partial_{x_i} u\right)$ devient l'opérateur $\vec{p}(\cdot)$ - Laplacien :

$$\Delta_{\vec{p}(x)}(u) = \sum_{i=1}^{N} \partial_{x_i} \Big(|\partial_{x_i} u|^{p_i(x)-2} \partial_{x_i} u\Big).$$

Pour positionner ces opérateurs dans l'ordre chronologique, on peut citer les opérateurs homogènes p-Laplacien et isotrope [55], [56]. Dans de nombreuses applications il est naturel de considérer l'opérateur anisotrope suivant :

$$-\sum_{i=1}^{N} \partial_{x_i} |\partial_{x_i} u|^{p_i-2} \partial_{x_i} u,$$

et de travailler dans des espaces de Sobolev anisotrope voir [60], [55], avec chaque dérivée partielle est faiblement intégrable avec un exposant
($p_i > 1$) propre à elle. Il existe beaucoup de travaux d'existence de solutions faibles voir [79]. Ensuite ces opérateurs homogènes anisotropes vont être généralisés pour des opérateurs non-homogènes généralisés

$$-\sum_{i=1}^{N} \partial_{x_i} \Big(|\partial_{x_i} u|^{p_i(x)-2}\Big) \partial_{x_i} u,$$

Pour définir l'opérateur non homogène anisotrope à exposant variable, Mihăilescu et al ont exploité dans [55] la notion des espaces de Lebesgue à exposant variable $L^{p(x)}(\Omega)$ développée par O. Kováčik et J. Rákosník dans [35] (voir aussi [39], [55]), On note que ces opérateurs ont été utilisés pour la modélisation de plusieurs phénomènes physiques tels que les fluides intelligents voir [55].
Nous rappelons qu'un problème tel que le nôtre à une seule valeur propre, a été étudié par M.Boureau en utilisant la condition de " la condition de Palais

smale". Nous rappelons aussi qu'un problème tel que le nôtre a été étudié par Denisa Stancu-Dumitru [17] pour l'opérateur anisotrope standard $\Delta_{\vec{p}(x)}$.

Notre approche dans ce chapitre est de généraliser le travail de M. Boureanu [50] en utilisant le principe de Ricceri et d'élargir le travail [17] pour une classe d'opérateurs plus large.
Pour montrer que le problème anisotropique (8) l'idée est d'appliquer le principe variationnel de "Ricceri" [9], associé aux fonctionnelles suivantes $\Phi, J, \Psi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$\Phi(u) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} A_i(x, \partial_{x_i} u)\, dx,$$

et

$$J(u) = \int_\Omega F(x, u)\, dx,$$

et

$$\Psi(u) = \int_\Omega G(x, u)\, dx,$$

avec $F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds$, $f(x,u) = \int_0^u g(x,s)ds$ et $A_i(x,u) = \int_0^u a_i(x,s)ds$,

Cependant d'autre cas limites de l'opérateur p-Laplace sont encore ouverts qui seront spécifiés dans **le chapitre 6**. Nous n'avons touché qu'un seul cas où l'exposant est égale à la dimension, le cas où l'exposant peut être variable dans $[1.\infty[$ reste ouvert. En revanche le cas où l'exposant peut atteindre la dimension i.e $p^+ \leq N$ nous avons pu enregistrer une injection des Sobolev dans des espaces de Orlicz–Musielak. Ces espaces "Orlicz–Musielak" seront sans doute le champs de bataille des cas où la fonction exposant $p(x)$ peut se permettre d'atteindre la dimension N.

Chapitre 1

Rappels et notations générales

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats utilisés tout au long de ce travail. Le chapitre est organisé comme suit : en premier lieu, nous rappelons quelques définitions et résultats sur Les espaces d'Orlicz et les espaces de Lebesgue-Sobolev généralisés. La Section 2 a pour objet d'examiner et de présenter quelques résultats sur les opérateurs quasi linéaires, qui jouent un rôle essentiel dans les démonstrations de nos résultats. Dans la Section 3, nous donnons le théorème de Minty-Browder. Enfin nous présentons la théorie et les méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles notamment la méthode connue sous le nom de "Principe de Ricceri".

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espaces d'Orlicz

Dans cette partie, nous présentons une généralisation des espaces de Lebesgue classiques, notamment les espaces d'Orlicz qui sont caractérisés par des fonctions dites "N-fonction" $\phi(t)$.

Définition 1.1. *[69]*
Soit $\phi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction : ayant les propriétés suivantes :
i) $\phi(0) = 0, \phi(t) > 0, \lim_{t\longrightarrow+\infty} \phi(t) = +\infty$.
ii) $\phi(t)$ est une fonction croissante sur $[0, +\infty[$.
iii) $\phi(t)$ est une fonction continue à droite sur $[0, +\infty[$.
Alors une telle fonction est dite N-fonction.

Définition 1.2. *[69] Soit $\phi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une N- fonction et Omega un domaine de $\mathbb{R}^N$ on définit, pour la mesure μ, la classe des espaces d'Orlicz* *par :*

$$K_\Phi(\Omega,\mu)=\Big\{u:\Omega\longrightarrow\mathbb{R},\ \ mesurable\ et,\int_\Omega \Phi(|u(x)|)d\mu<+\infty\Big\}$$

Définition 1.3. *[69] Soit $\phi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une N- fonction, on définit l'espace d'Orlicz généralisé par :*

$$L^\Phi(\Omega.\mu)=\Big\{u:\Omega\longrightarrow\mathbb{R},\ \ mesurable$$

$$telle\ que\ il\ existe\ \delta>0\ ,\int_\Omega \Phi\Big(\delta|u(x)|\Big)d\mu<+\infty\Big\}$$

L'espace $L^\phi(\Omega.\mu)$ est un espace de Banach menue de la norme appelée norme de Luxembourg suivante :

$$\|u\|_\phi=inf\Big\{\nu>0,\int_\Omega \Phi\Big(\frac{|u(x)|}{\nu}\Big)d\mu<1\Big\}$$

1.1.2 Espaces de Lebesgue à exposant variable

On note que les espaces de Lebesgue classique $L^p(\Omega)$ sont un cas d'espaces d'Orlicz associés à la N-fonction $\phi(t)=t^p$. Les espaces de Lebesgue généralisés à exposant variable $L^{p(x)}(\Omega)$ sont des espaces d'Orlizc associés à la N-fonction :

$$\phi(t)=t^{p(x)}$$

Avant de définir les espaces de Lebesgue à exposant variable, on définit $\mathbf{S}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions mesurables sur (Ω) à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.4. *[69] on définit l'ensemble $C_+(\overline{\Omega})$ par :*

$$C_+(\overline{\Omega})=\Big\{h:h\in C(\overline{\Omega}),h(x)>1\ pour\ tout\ x\in\overline{\Omega}\Big\},\ avec,$$
$$h^-:=\min_{\overline{\Omega}}h(x),\quad h^+:=\max_{\overline{\Omega}}h(x)\quad pour\ tout\ h\in C_+(\overline{\Omega}).$$

Définition 1.5. *[69] On définit pour chaque fonction $p(x)\in C_+(\overline{\Omega})$ l'espace de Lebesgue à exposant variable par :*

$$L^{p(x)}(\Omega)=\Big\{u\in\mathbf{S}(\Omega):\int_\Omega |u(x)|^{p(x)}\,dx<+\infty\ avec\ p\in C_+(\overline{\Omega})\Big\},$$

menu de la norme dite "de Luxembourg" :

$$|u|_{L^{p(x)}(\Omega)}=|u|_{p(x)}=\inf\Big\{\lambda>0:\int_\Omega |\frac{u(x)}{\lambda}|^{p(x)}\,dx\leq 1\Big\},$$

Proposition 1.6. *[60] Les espaces $L^{p(x)}(\Omega)$ sont séparables, réflexifs et espaces de Banach si $1<p^-\leq p^+<\infty$.*

Proposition 1.7 ([60]). *Soit* $\rho(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}\,dx$. *Pour tout* $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, *alors*

(1) *pour* $u \neq 0$, $|u|_{p(x)} = \lambda$ *si et seulement si* $\rho(\frac{u}{\lambda}) = 1$ *;*

(2) $|u|_{p(x)} < 1 \quad (= 1; > 1) \ \Leftrightarrow \ \rho(u) < 1 \ (= 1; > 1)$ *;*

(3) *si* $|u|_{p(x)} > 1$, *alors* $|u|^{p^-}_{p(x)} \leq \rho(u) \leq |u|^{p^+}_{p(x)}$ *;*

(4) *si* $|u|_{p(x)} < 1$, *alors* $|u|^{p^+}_{p(x)} \leq \rho(u) \leq |u|^{p^-}_{p(x)}$ *;*

(5) $\lim_{k\to+\infty} |u_k|_{p(x)} = 0 \ \Leftrightarrow \ \lim_{k\to+\infty} \rho(u_k) = 0$ *;*

(6) $\lim_{k\to+\infty} |u_k|_{p(x)} = +\infty \ \Leftrightarrow \ \lim_{k\to+\infty} \rho(u_k) = +\infty$.

Proposition 1.8 ([60]). *L'espace conjugué de* $L^{p(x)}(\Omega)$ *est* $L^{q(x)}(\Omega)$, *avec* $\frac{1}{q(x)} + \frac{1}{p(x)} = 1$ *presque par tout dans* Ω. *Pour tout* $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ *et* $v \in L^{q(x)}(\Omega)$, *nous avons l'inégalité de Hölder*

$$\Big| \int_\Omega uv\,dx \Big| \leq \Big(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-} \Big) |u|_{p(x)} |v|_{q(x)}.$$

Remarque 1.9. *Les fonctions continues sont denses dans* $L^{p(x)}(\Omega)$ *si la condition* $p^+ < \infty$ *est satisfaite([60] Théorème 2.8).*

1.1.3 Espaces de Lebesgue généralisés avec poids

Nous allons introduire, pour une fonction poids $b : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, les espaces de Lebesgue généralisés avec poids suivants.

Définition 1.10.

$$L^{p(x)}_{b(x)}(\mathbb{R}^N) = \Big\{ u \ mesurable \ , \int_{\mathbb{R}^N} b(x) |u(x)|^{p(x)} dx < +\infty \Big\}$$

avec $b(x)$ *désigne le poids, ces espaces sont menus de la norme de Luxembourg suivante :*

$$\|u\|_{p(x),b(x)} = inf \Big\{ \nu > 0, \int_{\mathbb{R}^N} b(x) |\frac{u(x)}{\nu}|^{p(x)} dx < 1 \Big\}$$

Définition 1.11. *[60] Pour chaque fonction* $b(x)$ *on définit* $\rho(x)$ *la fonction modular par :*

$\rho_{p(x),b(x)} : L^{p(x)}_{b(x)}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *avec :*

$$\rho_{p(x),b(x)}(u) = \int_\Omega b(x) |u|^{p(x)} dx$$

Proposition 1.12. *[60] Les espaces* $L^{p(x)}_{b(x)}(\Omega)$ *sont séparables, réflexifs et espaces de Banach. Avec les inégalités suivantes :*

(1) *pour* $u \neq 0$, $|u|_{p(x),b(x)} = \lambda$ *si et seulement si* $\rho(b(x)\frac{u}{\lambda}) = 1$ *;*

(2) $|u|_{p(x),b(x)} < 1$, $(= 1; > 1) \Leftrightarrow \rho(u) < 1$, $(= 1; > 1)$ *;*

(3) *si* $|u|_{p(x),b(x)} > 1$, *alors* $|u|^{p^-}_{p(x),b(x)} \leq \rho(u) \leq |u|^{p^+}_{p(x),b(x)}$;
(4) *si* $|u|_{p(x)} < 1$, *alors* $|u|^{p^+}_{p(x),b(x)} \leq \rho(u) \leq |u|^{p^-}_{p(x),b(x)}$;
(5) $\lim\limits_{k\to+\infty} |u_k|_{p(x)} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to+\infty} \rho(u_k) = 0$;
(6) $\lim\limits_{k\to+\infty} |u_k|_{p(x)} = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to+\infty} \rho(u_k) = +\infty$.
les inégalité suivantes tiennent pour tout $u \in W^{1,p(x),b(x)}(\mathbb{R}^N)$:

$$\|u\|_{1,p(x),b(x)} > 1 \Longrightarrow \|u\|^{p^-}_{1,p(x),b(x)} \leq \rho_{p(x)}(u) \leq \|u\|^{p^+}_{1,p(x),b(x)}$$

$$\|u\|_{1,p(x),b(x)} < 1 \Longrightarrow |\|u\|^{p^+}_{1,p(x),b(x)} \leq \rho_{p(x)}(u) \leq \|u\|^{p^-}_{1,p(x),b(x)}$$

1.1.4 Espaces de Sobolev généralisés avec poids

Le choix de cadre fonctionnel est imposé par la nature de problème à étudier i.e. par l'opérateur en question. Notre opérateur intervient des dérives partielles, va nous imposé les espaces de Sobolev Lebesgue à Exposant variables définis par :

$$W^{1,p(x),b(x)}(\mathbb{R}^N) = \left\{u \in L^{p(x)}_{b(x)}(\mathbb{R}^N), |\nabla u| \in L^{p(x)}_{a(x)}(\mathbb{R}^N)\right\}$$

équipés avec la norme :

$$\|u\|_{1,p(x),b(x)} = \|u\|_{p(x),b(x)} + \|\nabla u\|_{a(x),p(x)}$$

Les espaces $L^{p(x)}$ et $W^{1,p(x)}$ font partie du cadre fonctionnel de nos équations généralisées. Ces espaces sont apparues pour la première fois en 1931 dans un article d'Orlicz [78]. Dans cet article, Orlicz a considéré les (p_i) avec $p_i > 1$ et (x_i) telles que $\sum x_i p_i$ est convergente. La question était quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes sur y_i pour que $\sum x_i y_i$ converge. Il se trouvait que la réponse était que $\sum (\lambda y_i)^{p'_i}$ converge pour une certaine $\lambda > 0$ et $p'_i = \frac{p_i}{p_i - 1}$ [36]. Les espaces Lebesgue à exposant variable sur $\mathbb{R}$ ont été indépendamment développés par des chercheurs russes, notamment par Tsenov à partir de 1961 [31]. Brièvement abordé par Portnov [76]. La question soulevée par Tsenov est résolue4 par Sharapudinov [32] était la minimisation de la fonction :

$$\int_{[a,b]} |u(x) - v(x)|^{p(x)} dx,$$

où $u(x)$ est une fonction fixe et $v(x)$ varie dans un sous-espace de dimension finie de $L^{p(x)}([a;b])$. Dans [32] Sharapudinov a également introduit la norme de "Luxembourg" pour les espace de Lebesgue à exposant variable, il a aussi montré aussi que ces espaces sont réflexifs si l'exposant satisfait $1 < p^- <$

$p^+ < \infty$. L'étape suivante dans l'investigation d' espaces à exposants variables était le papier de Kovácik et Rákosnk dans les années 1990 [60]. Dans ce papier un grand nombre de propriétés de base des espaces de Lebesgue et de Sobolev dans $\mathbb{R}^N$ a été établi. Le nouveau millénaire a été le début d'une période d'étude intense et systématique des espaces à exposants variables, une connexion a été établie entre les espaces à exposants variables et les méthodes variationnelles avec des conditions de croissance et de coercivité (par exemple, [19], [77]).
Nombreux travaux ont été dédiés aux questions d'existence de solutions faibles pour ce type de problèmes à exposant variable, due en grande partie à la modélisation des fluides "electrorheological" [54] citons par exemple les travaux de L. Diening et M. Ruzicka [44] sur les solutions fortes pour une généralisation des fluides non Newtoniens, les travaux de P. Harjulehto et P. Hast [64], 2004 sur les capacités dans les espaces de Sobolev avec exposant variable et les travaux de M. Mihăilescu et V. Radulescu [51], 2006 concernant la multiplicité de solutions des Problèmes découlant de la théorie des fluides électroréologiques et O. Kovacik and J. Rakosnık [60],1991 sur les espaces $L^{p(x)}$ et $W^{1,p(x)}$.
Ces espaces de Sobolev Lebesgue à Exposant variables ressemblent aux espaces Sobolev Lebesgue classiques dans beaucoup de propriétés.
Proposition 1.13. *[[60] Théorème 1.3] Les espaces de Sobolev Lebesgue à exposant variables $W^{1,p(x),b(x)}(\mathbb{R}^N)$ sont des espaces de Banach, réflexifs si seulement si $1 < p^- < p^+ < \infty$ et l'ensemble des fonctions continues $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{1,p(x),b(x)}(\mathbb{R}^N)$ si $p^+ < \infty$.*
On note E est l'espace défini comme la complétude de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ avec respect à la norme $\|u\|_{1,p(x),b(x)}$. M.Boureau a montré dans [49], que La condition ($b \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et $b(x) \geq b_0 > 0$) sur la fonction $b(x)$ implique que $E \subset W_0^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Aussi dans [49] M.Boureau a montré que cette condition assure que la norme $\|u\|_{1,p(x),b(x)}$ est équivalente à la norme

$$\|u\| = inf\ \Big\{\nu > 0, \int_{\mathbb{R}^n} a(x)\Big|\frac{\nabla u(x)}{\nu}\Big|^{p(x)}dx + b(x)\Big|\frac{u(x)}{\nu}\Big|^{p(x)}dx < 1\Big\}. \quad (1.1)$$

Définition 1.14. *[60] Pour chaque fonction $b(x)$ on définit $I(u)$ la fonction modular par :*

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|\nabla u(x)|^{p(x)}dx + b(x)|u(x)|^{p(x)}dx$$

Proposition 1.15. *[60] Pour tout $u \in E$*

$$\|u\| > 1 \implies \|u\|^{p^-} \leq I(u) \leq \|u\|^{p^+} \quad (1.2)$$

$$\|u\| < 1 \implies \|u\|^{p^+} \leq I(u) \leq \|u\|^{p^-} \tag{1.3}$$

Nous rappelons quelques résultats concernant les injections de Lebesgue-Sobolev avec exposant variable.

Proposition 1.16. *[[80] le théorème 1.1)] Si $p(x)$ est Lipschitzienne continue et $p^+ < N$, Alors pour toute fonction $q(x)$ satisfaisant*

$$p(x) \leq q(x) < \frac{Np(x)}{N - p(x)},$$

L'injection de $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{q(x)}(\mathbb{R}^N)$ est continue.
Aussi, nous avons l'inégalité Sobolev suivante :

$$\|u\|_{L^{q(x)}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|. \ \forall u \in E$$

avec une constante $C > 0$.
On note que cette injection n'est pas compacte en général, elle est compacte que si Ω est un domaine borné.

1.1.5 Espaces de Sobolev : cas Limite

Le cas où la dimension $N = p^- = p^+ < \infty$, on cite le théorème de Trudinger ou l'inégalité Trudinger nommé d'après Neil Trudinger et Jürgen Moser (parfois appelée l'inégalité Moser - Trudinger) concernant le résultat d'injection des espaces de Sobolev $W^{1.N}(\Omega)$. Ce théorème nous fournit une inégalité entre la norme gradient d' espace de Sobolev et la norme dans l'espace d'Orlicz.

Proposition 1.17. *[38] L'espace de Sobolev $W^{1.N}(\Omega)$ menu de la norme gradient $\|u\| = \Big(\int_\Omega |\nabla u|^N \, dx\Big)^{1/N}$ s'injecte d'une manière continue dans l'espace d'Orlicz généré par la fonction :*

$$\phi(t) = \exp\big(t^{\frac{N}{N-1}}\big) - 1$$

i.e.

$$L_\phi(\Omega) = \Big\{u : \Omega \to \mathbb{R}, \ \textit{mesurable} : \int_\Omega |\phi(u)| \, dx < \infty\Big\},$$

menu de la norme :

$$\|u\|_\phi = \inf\Big\{\lambda > 0 : \int_\Omega \phi\Big(\frac{u(x)}{\lambda}\Big) dx \leq 1\Big\}.$$

De plus,

$$\exp\big(\delta|u|^{\frac{N}{N-1}}\big) \in L^1(\Omega), \quad \forall u \in W_0^{1.N}(\Omega), \ \forall \delta > 0,$$

$$\sup_{\|u\| \leq 1} \int_\Omega \exp\big(\delta|u|^{\frac{N}{N-1}}\big) \, dx \leq C \quad \textit{if } \delta \leq \alpha_N,$$

où $\alpha_N = N\omega_1$ avec ω_1 est la surface du disque unité de dimension $(N-1)$ dans $\mathbb{R}^N$.

Le cas $p^+ \leq N$.

Pour traiter ces cas limites nous introduisons l'espace de Orlicz–Musielak suivants :

Définition 1.18. *[47] Soit la fonction :*

$$F_p^*(t) = \sum_{j=1}^{[\frac{p^*}{N'}]-1} \frac{1}{j}|t|^{jN'} + \frac{1}{[\frac{p^*}{N'}]!}|t|^{p^*},$$

l'espace Orlicz–Musielak $L_*^{p(.)}(\Omega)$ est l'espace d'Orlicz associé à la fonction $F_p^*(t)$, menu de la norme

$$\|u\|_{L_*^{p(.)}(\Omega)}$$

où $[\frac{p^*}{N'}]$ est la partie entière de $\left(\frac{\frac{Np(x)}{N-p(x)}}{N'}\right)$ et $N' = \frac{N-1}{N}$.

Proposition 1.19. *[47] Si Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et $p(x) \in P^{\log}(\Omega)$ avec :*

$$P^{\log}(\Omega) := \left\{ p \text{ mesurable sur } \Omega \text{ telle que } \frac{1}{p} \text{ est globalement } \log\text{-Hölder continue} \right\}.$$

Alors :

$$W^{1.p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L_*^{p(.)}(\Omega)$$

et

$$\|u\|_{L_*^{p(.)}(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{p(.)}$$

pour tout $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ et la constante C dépend uniquement de la dimension N et $p(x)$ et le diamètre de Ω.

le cas $N \leq p^- < p^+ < \infty$ Concernant le cas où $N \leq p^- \leq p^+ < \infty$, nous citons le résultat de Harjulehto et Hästö dans lequel une simple condition est suffisante pour que l' injection $W^{1,p(.)}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ tient où Ω un domaine assez régulier [[64], Théorème 4.6]. Nous citons un résultat dans le cas où Ω est une boule.

Proposition 1.20. *[[47],théorème 8.6.1] Supposons que B est une boule. Si $p(.)$ est mesurable bornée de telle sorte que*

$$p(x) \leq n + (n-1+\varepsilon)\frac{\log\log(\frac{c}{dist(x,\partial B)})}{\log(\frac{c}{dist(x,\partial B)})}$$

pour certain $\varepsilon > 0$ et une constante suffisamment grande $c > 0$ fixée, alors $W^{1,p(.)}(B) \hookrightarrow L^\infty(B)$.

1.1.6 Espaces de Sobolev : cas anisotrope

Pour étudier le cas anisotrope, nous considérons $\vec{p} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ une fonction vectorielle

$$\vec{p}(x) = (p_1(x), \ldots, p_N(x))$$

avec $p_i \in C_+(\overline{\Omega})$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$
L'espace anisotrope avec exposant variable $W_0^{1,\vec{p}(\cdot)}(\Omega)$ est la complétude de $C_0^\infty(\Omega)$ pour la norme :

$$\|u\|_{W_0^{1,\vec{p}(\cdot)}(\Omega)} = \sum_{i=1}^N \|\partial_{x_i} u\|_{L^{p_i(\cdot)}(\Omega)}.$$

Dans le cas où $p_i(.) \in C_+(\bar{\Omega})$ sont des constantes fonctions pour chaque $i \in \{1, ..., N\}$ l'espace anisotrope noté $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$ dont la théorie a été développé dans [[30], [74], [33], [34], [57], [46]].

L'espace $\left(W^{1,\vec{p}(\cdot)}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,\vec{p}(\cdot)}(\Omega)}\right)$ est un espace de Banach, réflexif (voir [52]). Pour la manipulation de ces espaces on introduit les notations suivantes :

$$p_i^+ = \sup_{x\in\Omega} p_i(x), \text{ et } p_i^- = \inf_{x\in\Omega} p_i(x)$$

et $\vec{p}_+$ $\vec{p}_-$ tels que :

$$\vec{p}_+ = (p_1^+, ..., p_N^+), \quad \vec{p}_- = (p_1^-, ..., p_N^-),$$

et p_+^+ , p_-^+ , p_-^- $\in \mathbb{R}^N$ tels que :

$$p_+^+ = max\left\{p_1^+, .., p_N^+\right\} , p_-^+ = max\left\{p_1^-, .., p_N^-\right\} , p_-^- = min\left\{p_1^-, .., p_N^-\right\}$$

On supposera que :

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i^-} > 1$$

On défini aussi p_-^* et $p_{-,\infty}$ par

$$p_-^* = \frac{N}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i^-} - 1}, \quad , p_{-,\infty} = max\left\{p_+^+, p_-^*\right\}$$

Proposition 1.21. *([52], théorème 1) Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $(3 \leq N)$ est un domaine borné avec $\partial\Omega$ assez régulière. L'espace $\left(W^{1,\vec{p}(\cdot)}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,\vec{p}(\cdot)}(\Omega)}\right)$ est un espace de Banach, réflexif. Pour chaque $q(x) \in C(\bar{\Omega})$ vérifiant*

$$1 < q(x) < p_{-,\infty} \ , \forall x \in \Omega,$$

Alors l'injection

$$W_0^{1,\vec{p}(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(.)}(\Omega)$$

est compacte

1.2 Les opérateurs monotones quasi-linéaires

Définition 1.22. *[9] La classe $\mathcal{W}_X$ est définie par la classe des fonctions : $\Phi : X \to \mathbb{R}$, admettant la propriété suivante : si $\{u_n\}$ est une suite dans X faiblement convergente vers $u \in X$ et $\liminf_{n\to\infty} \Phi(u_n) \leq \Phi(u)$, alors $\{u_n\}$ possède une sous-suite qui converge fortement vers u.*

Définition 1.23. *[18] Une fonction f définie sur un espace normé X à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est dite coércive sur une partie non bornée P de X si*

$$\lim_{\substack{\|x\|\to+\infty \\ x\in P}} f(x) = +\infty$$

Définition 1.24. *[18] On dit que f est une fonction faiblement semi-continue inférieurement au point x_0 si pour toute suite $(x_n)_n$ avec $(x_n)_n$ tend faiblement vers x_0 et $(f(x_n))_n$ tend vers l nous avons : $l \leq f(x_0)$*

Définition 1.25. *[18] Soit l'opérateur $A : X \longrightarrow X^*$ sur un espace réel de Banach X.*

• *A est demi-continue si :*

$$u_n \to u \Rightarrow A(u_n) \rightharpoonup A(u)$$

• *A est hemi-continue si la fonction réelle :*

$$t \to \langle A(u + tv), w\rangle,$$

est continue sur $[0, 1]$ pour tout $u, v, w \in X$

• *A est fortement continue si :*

$$u_n \rightharpoonup u \Rightarrow A(u_n) \to A(u)$$

• *A est un opérateur borné si A est borné sur tout borné.*

• *A est un opérateur monotone si :*

$$\langle A(u) - A(v), u - v\rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in X$$

• *A est un opérateur strictement monotone si l'inégalité ci-dessus est stricte lorsque $u \neq v$.*

• *A est un opérateur fortement monotone de module $\alpha > 0$ si :*

$$\langle A(u) - A(v), u - v\rangle \geqslant \alpha\|u - v\|^2, \quad \forall u, v \in X$$

• *A est uniformément monotone si :*

$$\langle A(u) - A(v), u - v\rangle \geqslant \alpha(\|u - v\|)\|u - v\|, \quad \forall u, v \in X$$

avec la fonction $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est continue monotone croissante, avec $\alpha(0) = 0$ et $\alpha(t) \to \infty$ quand $t \to \infty$.

Proposition 1.26. *[18](proposition 26.2). Soit $A : X \to Y$ un opérateur où X et Y sont deux espaces réels réflexifs de Banach, nous avons :*
(a) *A est fortement continue implique que A est compact.*
(b) *A est linéaire et compact implique que A est fortement continue.*
Théorème 1.27. *[18](Minty-Browder (1963)). Soit $A : X \to X^*$ un opérateur monotone, coércive, et hemi-continue sur un espace réel séparable réflexif de Banach X. Alors nous avons :*
(a) *Si A est strictement monotone, alors l'opérateur inverse $A^{-1} : X^* \to X$ existe et il est strictement monotone, demi-continue, et borné.*
(b) *Si A est uniformément monotone, alors A^{-1} est continue.*
(c) *Si A est fortement monotone, alors A^{-1} est Lipschitzienne continue.*

1.3 Méthodes de résolution des E.D.P non linéaires par la théorie des points critiques

En général, l'étude des E.D.P non linéaires se fait par méthodes variationnelles ou par méthodes topologiques. L'approche variationnelle des équations aux dérivées partielles non linéaires est lié à la notion des solutions faibles qui sont associées à chaque problème. Ces solutions sont en fait des points critiques des fonctionnelles associées au problème. Historiquement, ceci commence par le problème brachistochrone, exposé par J. Je. Bernoulli dans "Acta Euditorum" en juin 1696 et résolu par G. Leibnitz, J. Bernoulli, G. de L'Hôpital et I. Newton dans 1697. Le concept de trouver les points d'extremum de fonctionnelles a été développé par L. Euler en 1744.
La théorie de point critique moderne a commencé avec les œuvres de M. Morse et L. Ljusternik et L.Schnirelmann en 1934 (la technique de déformation), on peut aussi citer La technique de Principe du Min-Max. Puis R. Palais (1963) [67] et R. Palais et S. Smale (1964) [68] ont présenté la célèbre condition (Palais Smale "PS"), une condition qui a était parmi les principales bases pour le développement moderne de théorie de point critique. A. Ambrosetti et P. H. Rabinowitz dans [1] ont formulé le célèbre théorème de col de montagne et l'ont appliqué à la solubilité de problèmes elliptiques non-linéaires. Le concept a été intensivement développé par L. Nirenberg, H. Brezis, je. Ekeland, J. Mawhin, M. Willem.
Récemment l'apparition du résultat abstrait prouvé par Ricceri dans [12] et sa version revisitée établie dans [10] traitant des équations variationnelles avec Dirichlet Neumann condition, a largement été appliqué dans l'étude de l'exis-

tence de multiples solutions non triviales . Ces dernières années beaucoup de papiers ont été apparus dans le cas scalaire et les cas systèmes d'équations elliptiques. Nous pouvons citer, parmi d'autres, les articles [27, 28, 70, 71].
Une nouvelle méthode émerge, introduite par B.Ricceri Dans [9], en montrant un général théorème de points critique, qui a été appliquée à une classe d'opérateurs elliptiques avec des croissances non linéaires. Avant d'énoncer le théorème générale de de "Ricceri" connu sous le nom de Principe de Ricceri, on va citer quelques résultats concernant les opérateurs monotones et quelques théorèmes de minimisation.

Définition 1.28. *[1] Une C^1-fonction $f : X \to R$ satisfait la condition de Palais-Smale (PS), si pour chaque suite $(x_j)_j$ dans X tel que $f(x_j)$ est borné et $\lim_{j\longrightarrow\infty} \|f'(x_j)\|_{X^*} = 0$, $(x_j)_j$ possède une sous-suite convergente.*

Théorème 1.29. *(Mountain Pass Theorem, Ambrosetti Rabinowitz, 1973 [1]). Soit X un réel Banach espace et $f \in C^1(X, \mathbb{R})$: Supposons que f satisfait la condition (PS), $f(0) = 0$ et*

(i) *Il existe une constante $\rho > 0$ et $\alpha > 0$ tel que $f(x) \geq \alpha$ si $\|x\| = \rho$;*

(ii) *Il existe une fonction $e \in X, \|e\| > \rho$, tel que $f(e) \leq 0$;*

Alors f possède une valeur critique $c \geq \alpha$ caractérisée par l'existence de $\bar{x} \in X$ tel que $f(\bar{x}) = c$ et $f'(\bar{x}) = 0$.

Théorème 1.30. *(Ricceri 2000 [10]) Soit X un espace de Banach séparable et réflexif, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $g : X \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue satisfaisant les conditions suivantes ;*

(i) *Pour chaque $x \in X$ la fonction $g(x, .)$ est concave ;*

(ii) *Pour chaque $\lambda \in I$, la fonction $g(., \lambda)$ est faiblement semi continue inférieurement, coércive, continûment Gâteaux différentiable satisfaisant la condition (PS) ;*

(iii) *Il existe une fonction concave continue $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$\sup_{\lambda\in I} \inf_{x\in X} \Big(g(x, \lambda) + h(\lambda)\Big) < \inf_{x\in X} \sup_{\lambda\in I} \Big(g(x, \lambda) + h(\lambda)\Big)$$

Alors, il existe un interval ouvert $\Lambda \subset I$ et un nombre réel positif $\sigma > 0$ de telle sorte que pour chaque $\lambda \in \Lambda$ l' équation $g'_x(x, \lambda) = 0$ possède au moins trois solutions dans X dont les normes sont inférieures à σ.

Nous introduisons le Principe de "Ricceri" qui sera fondamental pour la résolution de nos problèmes aux valeurs propres.

Théorème 1.31. *[2009, [9]] soit X un espace réel de Banach séparable et réflexif ; $\Phi : X \to \mathbb{R}$, satisfait,*

(Ric1) *Φ est coércive.*

(Ric2) *Φ est faiblement semi-continue inférieurement*

*(**Ric3**)* Φ *est* C^1 *fonction, appartenant à* $\mathcal{W}_X$*, bornée sur tout borné de* X*.*
*(**Ric4**)* Φ *possède une dérivée possédant une fonction inverse continue sur* X^* *;*
*(**Ric5**)* $J : X \to \mathbb{R}$ *est une* C^1*-fonction avec une dérivée compacte.*
*(**Ric6**) La fonction* Φ *possède un stricte minimum local* x_0 *avec* $\Phi(x_0) = J(x_0) = 0$*.*
*(**Ric7**) Les inégalités suivantes sont satisfaites :*

$$\alpha = \max\left\{0, \limsup_{\|x\|\to+\infty} \frac{J(x)}{\Phi(x)}, \limsup_{x\to x_0} \frac{J(x)}{\Phi(x)}\right\}, \beta = \sup_{x\in\Phi^{-1}(]0,+\infty[)} \frac{J(x)}{\Phi(x)},$$

avec $\alpha < \beta$*.*
***Alors**, pour chaque interval* $[a,b] \subset]1/\beta, 1/\alpha[$ *(avec les conventions* $1/0 = +\infty$*,* $1/\infty = 0$*) il existe une constante* $r > 0$ *avec la propriété suivante : pour chaque* $\lambda \in [a,b]$*, et tout* C^1*-fonction* $\Psi : X \to \mathbb{R}$ *vérifiant*
*(**Ric8**)* $\Psi : X \to \mathbb{R}$ *possède une dérivée compacte.*
Il existe une constante $\sigma > 0$ *telle que pour chaque* $\mu \in [0,\sigma]$*, l' équation*

$$\Phi'(x) = \lambda J'(x) + \mu\Psi'(x)$$

possède au moins trois solutions in X *dont la norme inférieure à* r*.*
Le principe de Ricceri (1.31), Le théorème A. Ambrosetti, P. Rabinowitz de "col de La montagne" (1.29) et beaucoup d'autres méthodes variationnelles de résolution des équations aux dérivées partielles, ont les mêmes objectifs mais des finalités différentes. L'objectif principal est de montrer qu'une fonctionnelle F possède des extremums qui ne sont que les solutions faibles de problème aux dérivées partielles. Le cas le plus immédiat c'est le cas où la fonctionnelle F est bornée inférieurement et $\lim_{\|u\|\to\infty} = \infty$ dans ce cas l'extremum est global. Le cas où la fonctionnelle F n'est plus bornée inférieurement ni supérieurement est moins évident, par suite F n'a pas d'extremum global, et nous devons chercher un point critique qui a une caractérisation variationnelle plus complexe. La méthode de col de La montagne a besoin de vérifier qu'il existe une constante $\rho > 0$ et $\alpha > 0$ telles que $F(x) \geq \alpha$ si $\|x\| = \rho$; et il existe une fonction $e \in X, \|e\| > \rho$, telle que $f(e) \leq 0$. Comme conséquence F possède une valeur critique $c \geq \alpha$ caractérisée par l'existence de $\bar{x} \in X$ tel que $f(\bar{x}) = c$ et $f'(\bar{x}) = 0$, à condition que F satisfait la condition de Palais-Smale (PS), dans ce cas on dit que la fonctionnelle F a une géométrie de col et La valeur c est appelée le niveau du col.
Le défie commun le plus visible pour les deux méthodes de Ricceri et de Coll

de La montagne, est la confrontation avec les résultats de compacités. Les deux méthodes doivent montrer la compacité d'une ou deux fonctionnelles. dans la méthode Coll de La montagne c'est la vérification de la condition de palais small (PS) et dans le principe de Ricceri sont les conditions Ric5 et Ric8 de théorème de Ricceri. La condition Ric7 peut être comparer aux conditions i) et ii) de théorème de coll de la montagne, la condition $F(0) = 0$ est commun aux deux méthodes. Certes les finalités sont différentes, Pour la méthode de Ricceri c'est l'existence au moins de trois solutions faibles dont la norme inférieure à une certaine constante r, alors que c'est l'existence d'une solution faible. Certes aussi que pour le principe de Ricceri nous vérifions huit conditions, alors que nous devons que trois conditions pour la méthode de col de la montagne. Enfin les deux méthodes ont le même objectif, les mêmes obstacles, des stratégies et finalités différentes.

Chapitre 2

Étude d'un problème non linéaire faisant intervenir l'opérateur N-Laplacien

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude des équations elliptiques faisant intervenir un opérateur N-Laplacien du type :

$$-\operatorname{div}(m(|\nabla u|^N)|\nabla u|^{N-2}\nabla u) = \lambda f(x,u) + \mu g(x,u)$$

Où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ dont la frontière $\partial\Omega$ est assez régulière, les fonctions $g, f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ appartiennent à la classe $\mathcal{A}$ de fonction $h(x,t)$ vérifiant les hypothèses suivantes :

($\mathbf{H}_1$) $\forall M > 0, \sup\limits_{|t|\leq M} |h(x,t)| \in L^\infty(\Omega)$

($\mathbf{H}_2$) $\lim\limits_{|u|\to\infty} \sup\limits_{x\in\Omega} \dfrac{|h(x,u)|}{e^{\delta|u|^{\frac{N}{N-1}}}} = 0, \ \forall \delta > 0.$

Le champ $m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses suivantes :

(M1) $m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est continue ;

(M2) Il existe une constante positive $p \in]1, N]$, b_1, b_2, c_1, c_2 telle que :

$$c_1 + b_1 u^{N-p} \leq u^{N-p} m(u^N) \leq c_2 + b_2 u^{N-p} \quad \forall u \in \mathbb{R}^+;$$

(M3) la fonction $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k(u) = m(|u|^N)|u|^{N-2}u$ est strictement croissante et $k(u) \to 0$ quand $u \to 0^+$.

Le but est de mener une investigation sur des cas limites pour un opérateur avec poids tel que l'opérateur ci-dessus, en considérant des croissances exponentielles non linéaires.

Notre démarche consiste à prouver l'existence de multiples solutions non triviales de nos problèmes au dessus, en utilisant le principe de B. Ricceri [9]. Plus précisément, notre approche est de montrer que les fonctionnelles "énergies" ϕ, J et Ψ imposées par la nature de notre problème, ont un sens dans Le cadre fonctionnel qu'est imposé aussi par la nature du problème étudié. Et que ces fonctionnelles ϕ, J et Ψ obéissent aux conditions de théorème de "Ricceri" (1.31).

2.2 Étude d'une équation de Laplace avec poids

Nous consacrons cette section à l'étude du problème elliptique de Dirichlet suivant ;

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(m(|\nabla u|^2)\nabla u) = \lambda\beta(x)(u^q e^{\frac{\eta u^2}{\ln(|u|+3)}} + \gamma|u|u) + \mu|u|^{s-2}u \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière $\partial\Omega$ est assez régulière. λ, μ sont des paramètres positifs et la fonction $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Les constantes $0 < \gamma \leq \eta$ et q, s sont telles que $q > 1$, $s > 1$, la fonction $\beta : \Omega \to \mathbb{R}$ est bornée mesurable et le champ $m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est une fonction continue satisfaisant les hypothèses (M1),(M2) et (M3) avec (N=2) i.e.

(M1) $m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est continue ;

(M2) Il existe des constantes positives $p \in]1, 2]$, b_1, b_2, c_1, c_2 telles que :

$$c_1 + b_1 u^{2-p} \leq u^{2-p} m(u^2) \leq c_2 + b_2 u^{2-p} \quad \forall u \in \mathbb{R}^+;$$

(M3) la fonction $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k(u) = m(|u|^2)u$ est strictement croissante et $k(u) \to 0$ quand $u \to 0^+$.

Remarque 2.1. ***(1)*** *la fonction* $f(x,t) = t^q e^{\frac{\eta t^2}{\ln(|t|+3)}} + \gamma|t|t$, *avec* $q > 1$, $0 < \gamma \leq \eta$, *et la fonction* $g(x,t) = |t|^{s-2}t$ *avec* $s > 1$ *appartiennent à la classe* $\mathcal{A}$.

(2) *l'opérateur considéré ici a était étudier par Hirano [58] avec des non-linéarités ayant une croissance polynomiale.*

(3) *si* $m(u) = 1+u^{\frac{p-2}{2}}$, $p \leq 2$, *alors les hypothèses (**M1,M2,M3**) tiennent et* $-\operatorname{div}(m(|\nabla u|^2)\nabla u)$ *dans* (2.1) *devient* $-\Delta u - \Delta_p u$, *où* $\Delta_p \equiv \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ *est l'opérateur p-Laplacien .*

Le résultat principal de cette section est le suivant : l'existence des solutions faibles dans l'espace de Sobolev $W = W_0^{1,2}(\Omega)$ menu de la norme gradient $\|u\| = \Big(\int_\Omega |\nabla u|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$.

Théorème 2.2. *Sous les hypothèses suivantes :*

(1) *le champs $m(.)$ vérifie les hypothèses (M1),(M2) et (M3).*

(2) *Il existe une constante $C' > 0$ telle que $\big(\int_\Omega e^{\delta u^2}\, dx\big)^{1/2} \leq C'\|u\|$ pour tout $u \in W$ et toute $\delta > 0$.*

(3) *Il existe $u_0 \in W$ tel que*

$$\int_\Omega \beta(x) \int_0^{u_0(x)} (\xi^q e^{\frac{\eta\xi^2}{\ln(|\xi|+3)}} + \gamma|\xi|\xi)\, d\xi\, dx > 0.$$

Si on pose

$$\begin{aligned} \omega = \frac{1}{2} \inf \Big\{ & \frac{\int_\Omega M(|\nabla u|^2)\, dx}{\int_\Omega \beta(x) \int_0^u (\xi^q e^{\frac{\eta\xi^2}{\ln(|\xi|+3)}} + \gamma|\xi|\xi)\, d\xi\, dx}, \\ & u \in W, \int_\Omega \beta(x) \int_0^u (\xi^q e^{\frac{\eta\xi^2}{\ln(|\xi|+3)}} + \gamma|\xi|\xi)\, d\xi\, dx > 0 \Big\}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

où $M(\xi) = \int_0^\xi m(t)\, dt$,

Alors pour chaque interval compact $[a, b] \subset]\omega, +\infty[$, il existe $r > 0$ avec la propriété suivante :

pour chaque $\lambda \in [a, b]$, il existe $\sigma > 0$ telle que pour chaque $\mu \in [0, \sigma]$, le problème (2.1) *possède au moins trois solutions faibles dans W ayant des normes inférieures à r.*

La preuve de ce résultat sera une adoption de principe de Ricceri. Dans l'étape suivant, nous présentons l'approche variationnel.

2.2.1 Approche variationnelle

L'approche variationnel nécessite la spécification d'un espace fonctionnel dans lequel nous cherchons les solutions faibles de nos problèmes. L'approche variationnel nécessite aussi la spécification des fonctionnelles "énergies" Pour lesquelles nos solutions seront des points critiques.

La nature du problème (2.1) nous oriente à considérer l'espace fonctionnel $W = W_0^{1,2}(\Omega)$ donné dans la proposition (1.17) du chapitre 1. W est un espace limite de Sobolev défini par la complétude de $C_0^\infty(\Omega)$ pour la norme

$$\|u\| = \Big(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\Big)^{1/2}$$

i.e.
$$W = W_0^{1,2}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|}$$
Le théorème (proposition(1.17) chap 1) de "Trudinger-Moser" [38] assure que L'espace W est continûment injecté dans la classe d'espaces Orlicz :
$$L_\phi(\Omega) \text{ généré par la fonction } \phi(t) = \exp\left(t^2\right) - 1$$
i.e.
$$L_\phi(\Omega) = \Big\{u : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ mesurable} : \int_\Omega |\phi(u)|\,dx < \infty\Big\},$$
équipé de la norme
$$\|u\|_\phi = \inf\Big\{\lambda > 0 : \int_\Omega \phi(\frac{u(x)}{\lambda})dx \leq 1\Big\}.$$
De plus, l'inégalité de "Trudinger-Moser" [38]
$$\exp\left(\delta|u|^2\right) \in L^1(\Omega), \quad \forall u \in W, \forall \delta > 0,$$
$$\sup_{\|u\|\leq 1} \int_\Omega \exp\left(\delta|u|^2\right) dx \leq C \quad \text{if } \delta \leq \alpha_2,$$
où $\alpha_2 = 2\pi$.
La nature du problème (3.1) nous oriente aussi à considérer des fonctionnelles ϕ, J et Ψ telles que l'équation
$$\Phi'(u) = \lambda J'(u) + \mu\Psi'(u)$$
n'est que notre équation (2.1). Nous concéderons donc les fonctionnelles suivantes : $\Phi : W \to \mathbb{R}$:
$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega M(|\nabla u|^2)\,dx, \text{ avec}, \; M(u) = \int_0^u m(t)dt$$
et la fonctionnelle $J : W \to \mathbb{R}$:
$$J(u) = \int_\Omega \beta(x)\Big(u^q e^{\frac{\eta u^2}{\ln(|u|+3)}} u + \gamma|u|u^2\Big)\,dx$$
et la fonctionnelle $\Psi : W \to \mathbb{R}$:
$$\Psi(u) = \int_\Omega |u|^s$$
Remarque 2.3. *L'inégalité de Trudinger-Moser [38] implique que* $\exp(\delta|u|^2) \in L^1(\Omega)$ *pour toute* $u \in W$ *et toute* $\delta > 0$, *aussi* $\left(\int_\Omega e^{\delta u^2}\,dx\right)^{1/2} \leq C'\|u\|$ *a bien un sens parce que* $\int_\Omega e^{\delta u^2}\,dx$ *dépend de* u.

Définition 2.4. *Nous définissons une solution faible du problème* (2.1) *toute fonction $u \in W$ satisfaisant :*

$$\int_\Omega m(|\nabla u|^2)\nabla u \nabla v\, dx = \int_\Omega \Big(\lambda\beta(x)(u^q e^{\frac{\eta u^2}{\ln(|u|+3)}} + \gamma|u|u) + \mu|u|^{s-2}u\Big) v\, dx \quad \forall v \in W.$$

Remarque 2.5. .

(1) *La croissance exponentielle **(H1)** va nous garantir que les intégrales données à droite sont bien définis.*

(2) *La croissance exponentielle dans l'hypothèse **(H1)** recouvre une classe plus générale des fonctions, en particulier les fonctions polynomiales.*

2.2.2 Résultats de compacités.

Le lemme suivant va nous garantir les premières conditions de théorème de Ricceri.

Lemme 2.6. *Si une fonction $h \in \mathcal{A}$, alors la fonctionnelle $N : W \to \mathbb{R}$: $N(u) = \int_\Omega H(x, u(x))\, dx$, où $H(x,\xi) = \int_0^\xi h(x,t)\, dt$, est continûment différentiable avec une dérivée compacte.*

Démonstration. Dans un premier temps nous montrons que $N(u)$ est bien définie sur W, puis nous montrons La Gâteaux différentiabilité de $N(u)$.

La fonction $N(u)$ est bien définie sur W :

En effet, nous considérons une fonction h appartenant à $\mathcal{A}$. Puisque $h \in \mathcal{A}$, alors pour $\delta > 0$, il existe une constante positive $C_1 > 0$ telle que :

$$|h(x,u)| \le C_1 e^{\delta|u|^2}, \quad \forall (x,u) \in \Omega \times \mathbb{R} :$$

l'intégration par partie nous assure :

$$|H(x,u)| = \int_0^u h(x,t)\, dt$$

$$|H(x,u)| \le \int_0^u C_1 \exp\Big(\delta|t|^2\Big)\, dt$$

$$|H(x,u)| \le \ C_2\Big[|t| \exp\Big(\delta|t|^2\Big)\Big]_0^u - \int_0^u 2t^2 \exp\Big(\delta|t|^2\Big)$$

$$|H(x,u)| \le \ C_2|u| \exp\Big(\delta|u|^2\Big)$$

$$\int_\Omega \Big|H(x,u)\Big| \le \ C_2 \int_\Omega |u| \exp\Big(\delta|u|^2\Big)$$

$$\int_\Omega \Big|H(x,u)\Big| \le \ C_2\|u\|_{L^2(\Omega)}\Big(\int_\Omega (\exp(\delta|u|^2))^2\, dt\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_\Omega \Big|H(x,u)\Big| \leq \ C_2\|u\|_{L^2(\Omega)}\|\Big(\exp(\delta|u|^2)\Big)^2\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\int_\Omega \Big|H(x,u)\Big| \leq \ C_2\|u\|_{L^2(\Omega)}\|\Big(\exp(\delta|u|^2)\Big)\|^2_{L^1(\Omega)}$$

L'inégalité de Trudinger-Moser (proposition(1.17)) [38] nous assure que, $\exp(\delta|u|^2) \in L^1(\Omega)$. De plus du fait que W s'injecte dans $L^2(\Omega)$ nous avons $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u\|$.

$$\int_\Omega |H(x,u)| < \infty$$

Par conséquence la fonction $N(u)$ est bien définie sur W.
La fonction $N(u)$ est Gâteaux différentiable.
en effet, pour montrer la Gâteaux différentiabilité de $N(u)$, nous considérons :

$$N'(u)v = \lim_{t\to 0^+} \frac{N(u+tv) - N(u)}{t} = \int_\Omega h(x,u(x))v(x)\,dx.$$

le Théorème de Lebesgue [45] va nous garantir que $N(u)$ est Gâteaux différentiable dont la dérivée est donnée par :

$$N'(u)v = \int_\Omega h(x,u)v\,dx$$

pour tout $u, v \in W$.

La fonction N' est continue de W vers son dual W^*.
Pour montrer que N' est continue de W vers son dual W^*, nous considérons une suite $\{u_k\}$ qui converge vers u dans W et nous prouvons que $N'(u_k)$ converge vers $N'(u)$ dans W^*. Ceci revient à prouver que

$$H_k = \int_\Omega \Big(h(x,u_k) - h(x,u)\Big)v\,dx$$

converge vers 0 quand $k \to \infty$ pour toute $v \in W$
En effet, l'inégalité de Hölder, nous donne :

$$H_k = \int_\Omega \Big(h(x,u_k) - h(x,u)\Big)v\,dx \leq \Big[\int_\Omega |h(x,u_k) - h(x,u)|^{p_1}\,dx\Big]^{1/p_1}\Big[\int_\Omega |v|^{p'_1}\,dx\Big]^{1/p'_1},$$

avec p'_1 est le conjugué de $p_1 > 1$.
Nous remarquons que si nous arrivons à montrer que :

(1) Le terme $\int_\Omega |v|^{p'_1}\,dx$ est borné.
(2) Le terme $\int_\Omega |h(x,u_k) - h(x,u)|^{p_1}\,dx$ tend vers 0.

le terme H_k va tendre vers 0 et par suite la preuve de la continuité de la fonction $N'(u)$ sera achevée.

D'une part, le théorème de Rellich Kondrachov [23], qui nous assure :

$$\textbf{(R.K)}\begin{cases} W_0^{1,N}(\Omega) \text{ s'injecte d'une manière compacte dans } L^{p_1}(\Omega)\ ,\forall p_1 > 1, \\ \qquad \text{de plus on a l'inégalité } \|v\|_{p_1} \leq C\|v\|,\ \forall v \in W_0^{1,N}(\Omega) \end{cases}$$

Nous avons donc l'espace W s'injecte d'une manière compacte dans $L^{p_1}(\Omega)$. Nous avons, $\forall v \in W, \|v\|_{p_1} \leq C\|v\|$ alors $v \in L^{p_1}(\Omega)$ ceci nous assure **(1)**.

D'autre part, d'après Le théorème de Rellich Kondrachov [23], nous avons, l'existence d'une sous-suite, notée aussi $\{u_k\}$ telle que :

$$u_k \to u \quad \text{fortement dans } L^{p_1}(\Omega),$$

quand $k \to \infty$ pour tout $p_1 > 1$, ceci nous donne $u_k \to u$ presque par tout dans Ω.

Pour montrer **(2)** i.e

$$\int_\Omega |h(x,u_k) - h(x,u)|^{p_1}\,dx \to 0.$$

Nous allons utiliser le théorème de Vitali [24], ceci veut dire que nous avons besoin de montrer :

(V_1) $\sup_k \int_\Omega |h(x,u_k)|^{p_1}\,dx \leq C.$

(V_2) $\int_\Omega |h(x,u)|^{p_1}\,dx \leq C.$

(V_3) $|h(x,u)|^{p_1}$ est uniformément intégrable.

En effet, nous avons

$$\begin{aligned}\int_\Omega |h(x,u_k)|^{p_1}\,dx &\leq C_3 \int_\Omega \exp(p_1\delta|u_k|^2)\,dx \\ &\leq C_3 \int_\Omega \exp\Big(p_1\delta\|u_k\|^2\Big(\frac{|u_k|}{\|u_k\|}\Big)^2\Big)\,dx,\end{aligned}$$

pour une certaine constante $C_3 > 0$.

Puisque $\{u_k\}$ est une suite bornée, nous pouvons choisir δ suffisamment petite telle que $p_1\delta\|u_k\|^2 < \alpha_2$. D'après (proposition(1.17))de "Trudinger-Moser" [38], Nous avons :

$$\sup_k \int_\Omega |h(x,u_k)|^{p_1}\,dx \leq C_4,$$

pour une certaine constante $C_4 > 0$.

D'une manière similaire il existe une certaine constante $C_5 > 0$ telle que :

$$\int_\Omega |h(x,u)|^{p_1}\,dx \leq C_5.$$

Nous allons montrer que $|h(x,u)|^{p_1}$ est uniformément intégrable. En effet, soit E un sous ensemble mesurable de Ω et soit $\varepsilon > 0$, nous avons :

$$\begin{aligned}\int_E |h(x,u_k) - h(x,u)|^{p_1}\,dx &\leq \big(\operatorname{meas}(E)\big)^{1/\zeta'}\big(\int_E |h(x,u_k) - h(x,u)|^{p_1\zeta}\,dx\big)^{1/\zeta}\\ &\leq K\big(\operatorname{meas}(E)\big)^{1/\zeta'},\end{aligned}$$

où K est une constante positive qui est indépendante de k et $\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta'} = 1$. Alors, pour $\operatorname{meas}(E) < \frac{\varepsilon}{K}$ suffisamment petite, on obtient :

$$\int_E |h(x,u_k) - h(x,u)|^{p_1}\,dx \leq c\varepsilon$$

Ceci nous donne que $|h(x,u_k)-h(x,u)|^{p_1}$ est uniformément intégrable. Puisque $u_k \to u$ presque partout dans Ω, nous avons $h(x,u_k) \to h(x,u)$ presque par tout dans Ω. Alors le théorème de Vitali [24] nous donne :

$$h(x,u_k) \to h(x,u) \quad \text{in } L^{p_1}(\Omega).$$

Ceci nous montre **(2)** et par conséquence N' est continue.

D'une manière similaire, nous pouvons montrer que N' est compacte de W vers son dual W^*. □

2.2.3 Preuve du théorème 3.2.

La preuve du théorème est une adoption de principe de Ricceri associée aux fonctionnelles Φ, J et Ψ, en montrant qu'elles vérifient les conditions du théorème de Ricceri.

Proposition 2.7. *La fonctionnelle $\Phi : W \to \mathbb{R}$ donnée par :*

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega M(|\nabla u|^2)\,dx$$

est bien définie, $\Phi \in \mathcal{W}_W$, coércive, faiblement semi-continue inférieurement. Gâteaux différentiable appartenant à $C^1(W,\mathbb{R})$. De plus Φ est bornée sur tout borné de W, et la fonctionnelle Φ' est continue possédant une fonctionnelle inverse sur W^*.

Démonstration. En intégrant l'inégalité (M2) nous avons pour tout $u \in W$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}M(|u|^2) &\geq \frac{b_1}{2}|u|^2 + \frac{c_1}{p}|u|^p\\ \frac{1}{2}M(|u|^2) &\leq \frac{b_2}{2}|u|^2 + \frac{c_2}{p}|u|^p,\end{aligned}$$

avec $p > 1$. De plus la fonction $h(u) = M(|u|^2)$ est strictement convexe. Par conséquence, la fonctionnelle $\Phi : W \to \mathbb{R}$:

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega M(|\nabla u|^2)\, dx$$

est bien définie, coércive, faiblement semi-continue inférieurement. Gâteaux différentiable appartenant à $C^1(W, \mathbb{R})$. De plus Φ est bornée sur tout borné de W.

Nous déduisons du théorème ([(1.27) chap 1] [18]), que Φ' est possède une fonctionnelle inverse continue sur W^*, puisque l'opérateur $I : W \to W^*$ défini par :

$$I(u)v = \int_\Omega m(|\nabla u|^2) \nabla u \nabla v\, dx$$

est uniformément monotone.

Ceci nous affirme que Φ est bien définie, $\Phi \in \mathcal{W}_W(1.22)$, coércive, faiblement semi-continue inférieurement, Gâteaux différentiable appartenant à $C^1(W, \mathbb{R})$. De plus Φ est bornée sur tout borné de W, et la fonction Φ' est continue possédant une fonction inverse sur W^*. $\square$

Proposition 2.8. *Sous tous les hypothèses de théorème* (2.2)*, nous avons :*

$$\limsup_{\|u\| \to 0} \frac{J(u)}{\Phi(u)} = 0.$$

Démonstration. Du fait que :

$$F(x, u) = \beta(x) \int_0^u (t^q e^{\frac{\eta t^2}{\ln(|t|+3)}} + \gamma |t| t)\, dt.$$

nous déduisons :

$$\begin{aligned} F(x, u) &\leq \beta(x)(|u|^{q+1} e^{\frac{\eta u^2}{\ln(|u|+3)}} + \gamma \frac{|u|^3}{3}) \\ &\leq \beta(x)(|u|^{q+1} e^{\eta u^2} + \gamma \frac{|u|^3}{3}) \end{aligned}$$

Pour tout $(x, u) \in \Omega \times W$. Alors puisque La fonctionnelle J est définie par :

$$J(u) = \int_\Omega F(x, u)\, dx$$

nous avons, pour tout $u \in W$, il existe des constantes positives C_6 et C_7, telles que :

$$\begin{aligned} \frac{J(u)}{\Phi(u)} &\leq C_6 \sup_{x \in \Omega} \beta(x) \frac{\int_\Omega \left(|u|^{q+1} e^{\eta u^2} + \gamma \frac{|u|^3}{3}\right) dx}{C_7 \int_\Omega |\nabla u|^2 + |\nabla u|^p\, dx}, \\ &\leq C_6 \sup_{x \in \Omega} \beta(x) \frac{\left(\int_\Omega e^{z' \|u\|^2 \eta (\frac{|u|}{\|u\|})^2}\right)^{1/z'} \left(\int_\Omega |u|^{z(q+1)}\, dx\right)^{1/z} + \int_\Omega \gamma \frac{|u|^3}{3}\, dx}{C_7 \int_\Omega (|\nabla u|^2 + |\nabla u|^p)\, dx}, \end{aligned}$$

avec $\frac{1}{z}+\frac{1}{z'}=1$. Alors, l'inégalité de Trudinger-Moser et puisque W est continûment injecté dans $L^{z(q+1)}(\Omega)$, il existe une constante $C_8>0$ telle que

$$\frac{J(u)}{\Phi(u)} \leq C_8 \sup_{x\in\Omega} \beta(x) \frac{\|u\|^{q+1}+\|u\|^3}{\|u\|^2}, \tag{2.3}$$

pour $\|u\|\leq\varepsilon$ assez petite tel que $z'\|u\|^2\eta<4\pi$.

Puisque nous avons, $q>1$, (2.3) implique que

$$\limsup_{u\to 0} \frac{J(u)}{\Phi(u)} \leq \varepsilon \quad, \forall\varepsilon. \tag{2.4}$$

ce qui termine la preuve de la proposition (4.6). □

Proposition 2.9. *Sous tous les hypothèses de théorème* (2.2)*, nous avons :*

$$\limsup_{\|u\|\to\infty} \frac{J(u)}{\Phi(u)} \leq 0.$$

Démonstration. D'une part, Puisque $f\in\mathcal{A}$ nous avons pour tout $\delta>0$,

$$\limsup_{|t|\to\infty} \frac{\sup_{x\in\Omega} F(x,t)}{e^{\delta t^2}} = 0,$$

et pour toute $\varepsilon>0$, il existe une constante positive ρ telle que : pour tout $x\in\Omega$ et $|t|>\rho$,

$$F(x,t)\leq \varepsilon e^{\delta t^2}.$$

d'autre part, puisque $f\in\mathcal{A}$ nous pouvons affirmer que pour chaque $M>0$, $\sup_{|t|\leq M}|f(x,t)|\in L^\infty(\Omega)$. Alors, il existe une constante positive $C_9>0$ telle que, pour chaque $x\in\Omega$,

$$\sup_{|t|\leq\rho}|f(x,t)|\leq C_9.$$

alors, pour chaque $x\in\Omega$ et $t\in\mathbb{R}$,

$$F(x,t)\leq C_9\rho+\varepsilon e^{\delta t^2}$$

nous avons donc

$$J(u)\leq C_9\rho\,\mathrm{meas}(\Omega)+\varepsilon\int_\Omega e^{\delta u^2}dx.$$

puisque $\left(\int_\Omega e^{\delta u^2}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\leq C'\|u\|$ pour tout $\delta>0$ et tout $u\in W$, nous obtenons :

$$\frac{J(u)}{\Phi(u)}\leq 2\frac{C_9\rho\,\mathrm{meas}(\Omega)}{\|u\|^2}+2\varepsilon\frac{C'^2\|u\|^2}{\|u\|^2}.$$

Et par conséquent,

$$\limsup_{\|u\|\to+\infty} \frac{J(u)}{\Phi(u)} \leq 2\varepsilon C'^2. \tag{2.5}$$

Finalement, puisque ε est arbitraire la proposition(4.8) se découle. □

Les deux propositions (4.7) et (4.8) nous affirment la proposition suivante :

Proposition 2.10. *Sous tous les hypothèses de théorème* (2.2)*, nous avons :*

$$\max\left\{\limsup_{\|x\|\to+\infty} \frac{J(x)}{\Phi(x)}, \limsup_{x\to 0} \frac{J(x)}{\Phi(x)}\right\} \leq 0.$$

Proposition 2.11. *Sous tous les hypothèses de théorème* (2.2)*, la fonction* $J(u) = \int_\Omega F(x,u)\,dx$ *est bien définie et continûment Gâteaux différentiable, avec une dérivée compacte,*

$$J'(u)v = \int_\Omega f(x,u)v\,dx$$

pour tout $u, v \in W$

Démonstration. Nous utilisons une autre fois le fait que :

$$F(x,u) \leq \beta(x)(|u|^{q+1}e^{\eta u^2} + \gamma\frac{u^3}{3})$$

pour tout $(x,u) \in \Omega \times W$. Alors, nous appliquons encore l'inégalité de Trudinger-Moser et par le même argument utilisé dans la preuve de lemme(2.6), on déduit que :

$$J(u) = \int_\Omega F(x,u)\,dx$$

est bien définie et continûment Gâteaux différentiable, avec une dérivée compacte,

$$J'(u)v = \int_\Omega f(x,u)v\,dx$$

pour tout $u, v \in W$.

Nous notons que puisque $f \in \mathcal{A}$, le lemme (2.6) nous assure la compacité de J'. □

Proposition 2.12. *Sous tous les hypothèses de théorème* (2.2)*, la fonctionnelle* Ψ *donnée par :*

$$\Psi(u) = \frac{1}{s}\|u\|^s_{L^s(\Omega)}$$

est continûment Gâteaux différentiable sur W, avec une dérivée compacte.

Démonstration. Du fait que la fonction $g(x,u) \in \mathcal{A}$ la proposition est une application de lemme (2.6). □

Pour finir la preuve de théorème (2.2), nous remarquons que les conditions **Ric1**, **Ric2**, **Ric3**, et **Ric4** sont assurées par la proposition (1.7). La condition **Ric5** est assurée par la proposition(2.8), la condition **Ric7** est assurée par la proposition (2.10), la condition **Ric8** est assurée par la proposition (2.12). En fin la condition **Ric6** est facile à vérifier que les fonctionnelles Φ et J possèdent un minimum en 0 (avec $\Phi(0) = J(0) = 0$). Ce qui complète la preuve du théorème (2.2).

2.3 Étude d'un problème associé au N-Laplacien avec poids

Dans cette section nous considérons le problème général suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(m(|\nabla u|^N)|\nabla u|^{N-2}\nabla u) = \lambda f(x,u) + \mu g(x,u) \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.6}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière assez régulière. λ, μ sont des paramètres positifs et la fonction $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$, les fonctions f et $g \in \mathcal{A}$, la classe $\mathcal{A}$ est définie par l'ensemble de fonction $h : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ayant la croissance exponentielle suivante sur Ω :

$$\lim_{|u|\to\infty} \sup_{x\in\Omega} \frac{|h(x,u)|}{e^{\delta |u|^{\frac{N}{N-1}}}} = 0. \tag{2.7}$$

avec $N \geq 2$ et :

$$\forall K > 0, \ \sup_{|t|\leq K} |h(x,t)| \in L^\infty(\Omega)., \tag{2.8}$$

La fonction $m(.)$ est supposée satisfaire les conditions suivantes :

(M1) $m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est continue ;

(M2) Il existe des constantes positives $p \in]1, N]$, b_1, b_2, c_1, c_2 telles que :

$$c_1 + b_1 u^{N-p} \leq u^{N-p} m(u^N) \leq c_2 + b_2 u^{N-p} \quad \forall u \in \mathbb{R}^+;$$

(M3) la fonction $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k(u) = m(|u|^N)|u|^{N-2}u$ est strictement croissante et $k(u) \to 0$ quand $u \to 0^+$.

Notre approche dans cette partie de ce travail est :

1- de donner une généralisation du résultat de B. Ricceri dans [13] qui concerne que la classe de fonctions f, g ayant une croissance polynomiale classique, sous la forme ;

$$|f(x,s)|, |g(x,s)| \leq c(1 + |s|^q), \ \ q > 0.$$

Nous notons que nos croissances exponentielle vont englober ces croissances polynomiales.
2- de étendre le résultat ci-dessus pour une classe d'opérateurs plus large i.e

$$-\operatorname{div}(m(|\nabla u|^2)\nabla u).$$

Pour illustrer cette extension vers une classe d'opérateurs plus large, nous citons à titre d'exemple le type d'application $m(u)$ satisfaisant (M1),(M2) et (M3) :

$$m(u) = 1 + u^{\frac{p-N}{N}}, p \leq N$$

Alors l'opérateur $-\operatorname{div}(m(|\nabla u|^N)\nabla u)$ deviendra :

$$-\Delta_N u - \Delta_p u,$$

où $\Delta_p \equiv \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ est l'opérateur p-Laplacien. Évidement, le choix d'application $m(u) = 1$ nous donne le cas limite standard [13].
Notre procédure pour prouver notre résultat est de définir un cadre fonctionnel (i :e espace et fonctions) imposé par la nature de notre problème. Puis nous montrons que les conditions principe de Ricceri "théorème (1.31) chap 1" sont satisfaites. Nous considérons l'espace fonctionnel $W_0^{1,N}(\Omega)$. Avant de donner notre résultat principal dans cette section est le suivant, nous mentionnons qu'une solution faible de notre problème ci-dessus (2.6) est toute fonction $u \in W$ qui vérifie :

$$\int_\Omega m(|\nabla u|^N)|\nabla u|^{N-2}\nabla v\, dx = \int_\Omega \lambda f(x,u)v dx + \int_\Omega \mu g(x,u)v dx$$

pour toute $v \in W$.

Théorème 2.13. *Soient $f, g \in \mathcal{A}$ telles que :*

$$\max\Big\{\limsup_{t\to 0} \frac{\sup_{x\in\Omega} F(x,t)}{|t|^N}, \limsup_{t\to\infty} \frac{\sup_{x\in\Omega} F(x,t)}{|t|^N}\Big\} \leq 0, \tag{2.9}$$

et

$$\sup_{u\in W_0^{1.N}(\Omega)} \int_\Omega F(x,u(x))dx > 0, \tag{2.10}$$

avec $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds$. Si on pose

$$\omega = \frac{1}{N}\inf\Big\{\frac{\int_\Omega M(|\nabla u|^N)\, dx}{\int_\Omega F(x,u(x))\, dx}, \quad u \in W_0^{1.N}(\Omega), \int_\Omega F(x,u(x))\, dx > 0\Big\}, \tag{2.11}$$

où $M(t) = \int_0^t m(s)ds$. Alors, pour chaque interval compact $[a,b] \subset]\omega, +\infty[$, il existe $r > 0$ avec la propriété suivante :
pour chaque $\lambda \in [a,b]$, il existe $\sigma > 0$ telle que pour chaque $\mu \in [0,\sigma]$, le problème (2.6) possède au moins trois solutions faibles dans W ayant des normes inférieures à r.

2.3.1 Approche variationnelle.

L'approche variationnelle nécessite la spécification d'un espace fonctionnel dans lequel nous cherchons les solutions faibles de nos problèmes. Le cadre fonctionnel associé au problème (2.6) est l'espace de Sobolev limite $W = W_0^{1,N}(\Omega)$ menu de la norme :

$$\|u\| = \Big(\int_\Omega |\nabla u|^N dx\Big)^{\frac{1}{N}}$$

Le théorème de Rellich Kondrachov [23] nous affirme que $W_0^{1,N}(\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^s(\Omega)$ pour tout $s \geq 1$, ce qui nous donne l'existence d'une constante C_s telle que :

$$\|u\| \geq C_s\Big(\int_\Omega |u|^s dx\Big)^{\frac{1}{s}} = C_s\|u\|_s$$

De plus, l'espace $W_0^{1,N}(\Omega)$ d'après la proposition ((1.17)) [59] s'injecte continûment dans $L_{\phi^*}(\Omega)$ l'espace d'Orlicz généré par la fonction $\phi(t) = \exp(|t|^{\frac{N}{N-1}}) - 1$ de plus :

$$\forall u \in W_0^{1,N}(\Omega); \forall \delta > 0$$

nous avons :

$$\exp\left(\delta|u(.)|^{\frac{N}{N-1}}\right) \in L^1(\Omega) \tag{2.12}$$

et il existe une constante C'_N qui dépend de N et de la mesure de Ω telle que, pour chaque $0 < \delta < \alpha_N$ Où $\alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$ avec ω_{N-1} est la mesure de $(N-1)$-sphère unité de $\mathbb{R}^N$:

$$\sup_{\|u\|\leq 1} \int_\Omega \exp\left(\delta|u(.)|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \leq C'_N \tag{2.13}$$

L'approche variationnelle nécessite aussi la spécification des fonctionnelles "énergies" pour lesquelles nos solutions sont des points critiques de ces fonctionnelles. Nos fonctionnelles "énergies" seront imposées par la nature du problème (2.6) comme suite :

$$\Phi(u) = \frac{1}{N}\int_\Omega M(|\nabla u|^N)\,dx, \quad M(t) = \int_0^t m(s)ds.$$

et

$$J(u) = \int_\Omega F(x, u(x))\,dx,, \quad F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds.$$

et

$$\Psi(u) = \int_\Omega G(x, u(x))\,dx, \quad G(x,t) = \int_0^t g(x,s)ds.$$

L'idée est de vérifier que sous les hypothèses du théorème (2.13), que ces fonctionnelles Φ, J et Ψ obéissent au principe de Ricceri.

2.3.2 Résultats de compacité

Dans cette section, nous énonçons un résultat, de compacité, vital pour la prouve de notre théorème.

Lemme 2.14. *Si une fonction $h \in \mathcal{A}$, alors la fonctionnelle $N : W_0^{1,N}(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par : $N(u) = \int_\Omega H(x, u(x))\, dx$, òu $H(x, \xi) = \int_0^\xi h(x, t)\, dt$, est continûment différentiable avec une dérivée compacte, et*

$$N'(u)v = \int_\Omega h(x, u(x))v(x)\, dx.$$

Démonstration. Puisque h appartient à $\mathcal{A}$, pour $\delta > 0$, il existe $C_1 > 0$ telle que :

$$|h(x, u)| \leq C_1 e^{\delta |u|^{\frac{N}{N-1}}}, \quad \forall (x, u) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

alors, pour chaque $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$, et presque tout $x \in \Omega$, en utilisant l'intégration par partie nous avons :

$$|H(x, u(x))| \leq C_2 |u(x)| \exp(\delta |u(x)|^{\frac{N}{N-1}}).$$

donc, l'inégalité de Trudinger-Moser ((1.17) chap 1) [38] et Hölder inégalité, entrainent que la fonction $N(u)$ est bien définie sur W.
Pour montrer que la fonction N est Gâteaux dérivable dont la dérivée est donnée par :

$$N'(u)v = \int_\Omega h(x, u)v\, dx$$

Le Théorème de Lebesgue "convergence dominée ", ceci nous assure que :

$$N'(u)v = \lim_{t \to 0^+} \frac{N(u + tv) - N(u)}{t} = \int_\Omega h(x, u(x))v(x)\, dx.$$

pour tout $u, v \in W_0^{1,N}(\Omega)$.
Pour montrer que N' est continue de W vers son dual W^*, nous considérons une suite $\{u_k\}$ qui converge vers u dans W et nous prouvons que $N'(u_k)$ converge vers $N'(u)$ dans W^*. Ceci revient à prouver que

$$\int_\Omega \Big(h(x, u_k) - h(x, u)\Big) v\, dx$$

converge vers 0 quand $k \to \infty$ pour toute $v \in W$
En effet, l'inégalité de Hölder, nous donne :

$$\int_\Omega \Big(h(x, u_k) - h(x, u)\Big) v\, dx \leq \Big[\int_\Omega |h(x, u_k) - h(x, u)|^q\, dx\Big]^{1/q} \Big[\int_\Omega |v|^{q'}\, dx\Big]^{1/q'},$$

avec q' est le conjugué de $q > 1$.
Nous remarquons que si nous arrivons à montrer que les conditions suivantes sont satisfaites :

(1) Le terme $\int_\Omega |v|^{q'}\, dx$ est borné.
(2) Le terme $\int_\Omega |h(x,u_k) - h(x,u)|^q\, dx$ tend vers 0.
alors, la continuité de la fonction $N'(u)$ sera achevée.
La condition **(1)** se déduit du fait que $W_0^{1,N}(\Omega)$ s'injecte d'une manière continue dans $L^{q'}(\Omega)$
Pour montrer que la condition **(2)** est satisfaite, L'idée est d'appliquer le théorème de Vitali [24].
Nous devons montrer que $|h(x,u_k)|^q$ est uniformément intégrable de plus pour toute $\{u_k\}$ suite bornée dans $W_0^{1,N}(\Omega)$

$$\sup_k \int_\Omega |h(x,u_k)|^q\, dx < \infty, \tag{2.14}$$

pour $q > 0$.
En effet, soit $M > 0$ tel que $\|u_k\| \leq M, \forall k \in \mathbb{N}$. Nous choisissons δ assez petite telle que :

$$|h(x,u_k)| \leq Ce^{\delta |u_k|^{\frac{N}{N-1}}},$$

et

$$\int_\Omega |h(x,u_k)|^q \leq C^q \int_\Omega e^{q\delta |u_k|^{\frac{N}{N-1}}},$$

$$\int_\Omega |h(x,u_k)|^q \leq C^q \int_\Omega e^{\delta q M^{\frac{N}{N-1}} (\frac{|u_k|}{\|u_k\|})^{\frac{N}{N-1}}},$$

$$\int_\Omega |h(x,u_k)|^q \leq C^q C_N$$

pour une certaine $0 < \delta \leq \frac{N}{qM^{\frac{N}{N-1}}}$, ce qui montre (2.14).
D'autre part, nous montrons que $|h(x,u_k)|^q$ est uniformément intégrable.
En effet puisque (u_k) est bornée dans X, il existe $u \in X$ telle que une sous suite notée aussi (u_k) qui converge vers u presque partout dans Ω.

Nous avons $h(.,u_k(.)) \to h(.,u(.))$ presque par tout dans Ω. De plus de (2.14) nous déduisons que pour chaque $p_1 > 1$ il existe une constante c_1 telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ nous avons :

$$\int_\Omega |h(x,u_k)|^{p_1 q}\, dx \leq c_1 \tag{2.15}$$

Soit E un sous ensemble mesurable de Ω et soit $\varepsilon > 0$, nous avons :

$$\begin{aligned}\int_E |h(x,u_k)|^q\,dx &\leq \big(\operatorname{meas}(E)\big)^{1/p_1'}\big(\int_\Omega |h(x,u_k)|^{p_1 q}\,dx\big)^{\frac{1}{p_1}}\\ &\leq c_1^{\frac{1}{p_1}}\big(\operatorname{meas}(E)\big)^{\frac{1}{p_1'}},\end{aligned}$$

où c_1 est une constante positive qui est indépendante de k et $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_1'}=1$. Donc, pour meas$(E)$ suffisamment petite, on obtient :

$$\int_E |h(x,u_k)|^q\,dx \leq \varepsilon \tag{2.16}$$

l'application de théorème de Vitali [24] nous assure que pour chaque $q > 0$ nous avons :

$$h(.,u_k(.)) \to h(x,u(.)) \ \text{ dans } L^q(\Omega) \tag{2.17}$$

Nous remarquons que notre condition **(2)** est donnée par (2.17).
Maintenant nous pouvons montrer que $N'(u)$ est continue, compacte en prenant $q = N$ à titre d'exemple. En effet, soit u_k une suite qui converge vers u dans X, alors il existe une sous suite $u_k \to u$ presque par tout dans Ω. Nous avons pour chaque $v \in W$ avec $\|v\| \leq 1$,

$$\begin{aligned}&\Big|\Big(N'(u_k)-N'(u)\Big)(v)\Big| = \int_\Omega \Big(h(x,u_k)-h(x,u)\Big)v\,dx\\ &\leq \Big[\int_\Omega \Big|h(x,u_k)-h(x,u)\Big|^{\frac{N}{N-1}}\,dx\Big]^{\frac{N-1}{N}}\Big[\int_\Omega |v|^N\,dx\Big]^{1/N},\\ &\leq C_N\Big(\Big[\int_\Omega \Big|h(x,u_k)-h(x,u)\Big|^{\frac{N}{N-1}}\,dx\Big]^{\frac{N-1}{N}}\Big)\end{aligned}$$

nous avons utiliser le fait que $W_0^{1,N}$ s'injecte d'une manière continue dans $L^N(\Omega)$. De (2.17) nous pouvons affirmer que la partie droite tend vers 0 lorsque $k \to \infty$, il s'ensuit

$$N'(u_k) \to N'(u) \ \ dans \ \ W^*.$$

D'une manière similaire, on montre que N' est compacte de $W_0^{1,N}$ vers son dual $\Big(W_0^{1,N}\Big)^*$. Ceci termine la démonstration de lemme. □

2.3.3 Preuve du résultat principal théorème 2.13

La preuve du théorème sera une application du principe de Ricceri associé aux fonctionnelles suivantes :

$$\Phi(u) = \frac{1}{N}\int_\Omega M(|\nabla u|^N)\,dx$$

et

$$J(u) = \int_\Omega F(x, u(x))\, dx$$

et

$$\Psi(u) = \int_\Omega G(x, u(x))\, dx$$

Proposition 2.15. *Sous les hypothèses du théorème* (2.13)*, La fonction* $\Phi : W \to \mathbb{R}$ *:*

$$\Phi(u) = \frac{1}{N} \int_\Omega M(|\nabla u|^N)\, dx$$

est bien définie, $\Phi \in \mathcal{W}_W$*, coércive, faiblement semi-continue inférieurement. Gâteaux différentiable appartenant à* $C^1(W, \mathbb{R})$*. De plus* Φ *est bornée sur tout borné de* W*, et la fonction* Φ' *:*

$$\Phi'(u)v = \int_\Omega m(|\nabla u|^N)|\nabla u|^{N-2}\nabla v\, dx$$

possède une fonction inverse continue sur W^* *.*

Démonstration. De l'inégalité (M2) nous avons pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{N}M(|u|^N) \geq \frac{b_1}{N}|u|^N + \frac{c_1}{p}|u|^p$$
$$\frac{1}{N}M(|u|^N) \leq \frac{b_2}{N}|u|^N + \frac{c_2}{p}|u|^p,$$

avec $p > 1$. De plus la fonction $h(u) = M(|u|^N)$ est strictement convexe. Par conséquence, la fonction $\Phi : W_0^{1,N} \to \mathbb{R}$ donnée par :

$$\Phi(u) = \frac{1}{N} \int_\Omega M(|\nabla u|^N)\, dx$$

est bien définie, coércive, faiblement semi-continue inférieurement. Gâteaux différentiable appartenant à $C^1(W, \mathbb{R})$. De plus Φ est bornée sur tout borné de W. On déduit du théorème ([(1.27) chap 1] [18]), que Φ' possède une fonction inverse continue sur W^*, puisque l'opérateur $I : W \to W^*$ défini par :

$$I(u)v = \int_\Omega m(|\nabla u|^N)|\nabla u|^{N-1}\nabla v dx$$

est uniformément monotone. $\square$

Proposition 2.16. *Sous les hypothèses du théorème* (2.13)*. Les fonctionnelles :*

$$J(u) = \int_\Omega F(x, u)\, dx \ \ et\ \Psi(u) = \int_\Omega G(x, u)\, dx$$

sont bien définies et continûment Gâteaux différentiables, avec des dérivées compactes,

$$J'(u)v = \int_\Omega f(x,u)v\,dx$$

et

$$\Psi'(u)v = \int_\Omega g(x,u)v\,dx$$

pour tout $u, v \in W$.

Démonstration. De lemme (2.14) et le fait que $f, g \in \mathcal{A}$, on peut affirmer que J, Ψ sont bien définies continûment gâteaux différentielles avec des dérivées compactes J' et $\Psi'(u)$ définies par :

$$J'(u)(v) = \int_\Omega f(x,u(x))v(x)\,dx$$

$$\Psi'(u)(v) = \int_\Omega g(x,u)v\,dx$$

pour tout $u, v \in W$

□

Proposition 2.17. *Sous les hypothèses du théorème* (2.13). *Les fonctionneles Φ et J vérifient la propriété suivante :*

$$\limsup_{\|u\|\to 0} \frac{J(u)}{\Phi(u)} = 0. \tag{2.18}$$

Démonstration. De l'hypothèse (2.9) nous avons :

$$\limsup_{t\to 0} \frac{\sup_{x\in\Omega} F(x,t)}{|t|^N} \leq 0$$

d'où pour chaque ε il existe une constante ρ telle que, pour tout $x \in \Omega$ et $|t| < \rho$ nous avons :

$$F(x,t) < \varepsilon |t|^N$$

et comme $f \in \mathcal{A}$, pour $\eta > 0$ et $q > N$ il existe $c > 0$ telle que, pour chaque $x \in \Omega$ et $|t| \geq \rho$ nous avons :

$$F(x,t) \leq c|t|^q \exp\left(\eta |t|^{\frac{N}{N-1}}\right)$$

d'où

$$F(x,t) < \varepsilon |t|^N + c|t|^q \exp\left(\eta |t|^{\frac{N}{N-1}}\right)$$

Nous choisissons $p > 1$, l'application de Hölder inégalité nous donne :

$$\int_\Omega \exp\Big(\eta|u(x)|^{\frac{N}{N-1}}\Big)|u(x)|^q \tag{2.19}$$

$$\leq \Big[\int_\Omega \exp\Big(p\eta\|u(x)\|^{\frac{N}{N-1}}\Big(\frac{|u(x)|}{\|u\|}\Big)^{\frac{N}{N-1}}\Big)dx\Big]^{\frac{1}{p}}\Big[\int_\Omega |u|^{p'q}dx\Big]^{\frac{1}{p'}} \tag{2.20}$$

le fait que $W_0^{1,N}$ s'injecte d'une manière continue dans $L^s(\Omega)$ pour $s \geq 1$, pour $\|u\| \leq (\frac{N}{p\eta})^{\frac{N}{N-1}}$ nous aurons :

$$J(u) \leq \varepsilon C\|u\|^N + C'\|u\|^q$$

donc

$$\frac{J(u)}{\Phi(u)} \leq C_N\varepsilon + C'_N\|u\|^{q-N}$$

du fait que $p > N$ nous pouvons déduire la proposition. □

Proposition 2.18. *Sous les hypothèses du théorème* (2.13)*. Les fonctionnelles* Φ *et* J *vérifient la propriété suivante :*

$$\limsup_{\|u\|\to\infty} \frac{J(u)}{\Phi(u)} = 0. \tag{2.21}$$

Démonstration. De l'hypothèse (2.9) nous avons :

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\sup_{x\in\Omega} F(x,t)}{|t|^N} \leq 0$$

d'où pour chaque ε il existe une constante ρ telle que, pour tout $x \in \Omega$ et $|t| > \rho$ nous avons :

$$F(x,t) < \varepsilon|t|^N$$

la condition (2.7) nous donne l'existence d'une constante c telle que, pour tout $x \in \Omega$

$$F(x,t) \leq c\rho + \varepsilon|u|^N$$

ce qui nous donne

$$J(u) \leq Cmeas(\Omega) + \varepsilon\int_\Omega |u(x)|^N dx$$

et comme W s'injecte d'une manière continue dans $L^N(\Omega)$ alors :

$$\frac{J(u)}{\Phi(u)} \leq N\frac{C\rho\ meas()\Omega}{\|u\|^N} + \varepsilon NC'_N$$

le fait que le ε est arbitraire, termine la preuve de la proposition. □

Les deux propositions ci-dessus nous donnent la proposition suivante.

Proposition 2.19. (2.13)*Sous les hypothèses du théorème. Les fonctionnelles* Φ *et* J *vérifient la propriété suivante :*

$$\max\left\{\limsup_{\|x\|\to+\infty}\frac{J(x)}{\Phi(x)}, \limsup_{x\to 0}\frac{J(x)}{\Phi(x)}\right\}\leq 0.$$

Pour achever la preuve du théorème, nous remarquons que les conditions : **Ric1**, **Ric2**, **Ric3**, et **Ric4** sont assurées par la proposition (2.15). La condition **Ric5** et la condition **Ric8** sont assurées par la proposition (2.16), la condition **Ric7** est assurée par la proposition (2.19). La condition **Ric6** est facile à vérifier que Φ et J possèdent un minimum en 0 (avec $\Phi(0) = J(0) = 0$).

Ce qui complète la preuve du théorème.

2.3.4 Quelques exemples

Proposition 2.20. *Pour tout* $p \in]0, N[$*, il existe une constante positive* ω *telle que pour tout interval compact* $[a, b] \subset]\omega, +\infty[$*, il existe* $r > 0$ *avec la propriété suivante, pour tout* $\lambda \in [a, b]$*, et tout* $q \in]0, \frac{N}{N-1}[$*, il existe* $\sigma > 0$ *telle que pour tout* $\mu \in [0, \sigma]$*, le problème* $(p_{\lambda,\mu})$

$$(p_{\lambda,\mu})\begin{cases} -\Delta_N u - \Delta_p u = \lambda\dfrac{|u|^{p+N-2}u\Big(p|u|^N + p + N\Big)}{\Big(1+|u|^N\Big)^2} + \mu\exp\Big(|u|^q\Big) \quad \textit{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.22}$$

possède au moins trois solutions faibles dans $W_0^{1,N}(\Omega)$ *dont les normes sont inférieures à la constante* r.

Démonstration. Pour prouver cette proposition, il suffit de remarquer que cette proposition est une application du théorème (2.13), avec la fonction poids $m(u) = 1 + u^{\frac{p-N}{N}}$.

Dans un premier temps, nous vérifions que :

$$f(x, u) = \frac{|u|^{p+N-2}u(p|u|^N + p + N)}{(1 + |u|^N)^2}$$

satisfait les hypothèses $(\mathbf{H}_1)$ et $(\mathbf{H}_2)$

$(\mathbf{H}_1)$ $\forall M > 0, \sup_{|t|\leq M}\left|\frac{|t|^{p+N-2}t(p|t|^N+p+N)}{(1+|t|^N)^2}\right| \in L^\infty(\Omega)$

$(\mathbf{H}_2)$ $\lim_{|u|\to\infty}\sup_{x\in\Omega}\frac{\left|\frac{|u|^{p+N-2}u(p|u|^N+p+N)}{(1+|u|^N)^2}\right|}{e^{\delta|u|^N}} = 0, \ \forall\delta > 0.$

Du fait que les fonctions exponentielles dominent les fonctions polynomiales à l'infini, ceci nous assure $(\mathbf{H}_2)$, la condition $(\mathbf{H}_1)$ est immédiate.

Le champ $m(u) = 1 + u^{\frac{p-N}{N}}$ vérifiant les hypothèses suivantes :

(M1) $m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est continue ;

(M2) Il existe une constante positive $p \in]1, N]$, b_1, b_2, c_1, c_2 telle que :

$$c_1 + b_1 u^{N-p} \leq u^{N-p} m(u^N) \leq c_2 + b_2 u^{N-p} \quad \forall u \in \mathbb{R}^+;$$

(M3) la fonction $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k(u) = m(|u|^N)|u|^{N-2}u$ est strictement croissante et $k(u) \to 0$ quand $u \to 0^+$.

La vérification de **(M1)** et **(M3)** c'est immédiate. Pour vérifier **(M2)** il suffit de remarquer :

$$m(u) = 1 + u^{\frac{p-N}{N}}$$

$$m(|u|^N) = 1 + (|u|^N)^{\frac{p-N}{N}}$$

$$m(|u|^N) = 1 + |u|^{p-N}$$

$$|u|^{N-p} m(|u|^N) = |u|^{N-p}(1 + |u|^{p-N})$$

$$|u|^{N-p} m(|u|^N) = |u|^{N-p} + |u|^{N-p}|u|^{p-N} = |u|^{N-p} + 1$$

Ceci nous prouve que **(M2)** est satisfaite. Pour terminer la preuve de la proposition il nous reste à montrer que notre fonction f, vérifie les conditions de (2.9) du théorème (2.13) i.e

$$max\left\{ \limsup_{t\to 0} \frac{\sup_{x\in\Omega} F(x,t)}{|t|^N}, \limsup_{t\to\infty} \frac{\sup_{x\in\Omega} F(x,t)}{|t|^N} \right\} \leq 0$$

$F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds$. En effet, vérifiant dans un premier temps que :

$$\limsup_{t\to 0} \frac{\sup_{x\in\Omega} F(x,t)}{|t|^N}$$

Puisque nous somme au voisinage de 0, $|u| \leq 1$, alors $|u|^p \leq 1$:

$$f(x,u) = \frac{|u|^{p+N-2}u(p|u|^N + p + N)}{(1 + |u|^N)^2}$$

$$f(x,u) = |u|^p \frac{|u|^{N-2}u(p|u|^N + p + N)}{(1 + |u|^N)^2}$$

$$f(x,u) \leq \frac{|u|^{N-2}u(p|u|^N + p + N)}{(1 + |u|^N)^2}$$

le fait $p < N$ donne $p + N < 2N$, cela va nous donner :

$$f(x,u) \leq \frac{|u|^{N-2}u(N|u|^N + 2N)}{(1+|u|^N)^2}$$

ceci nous donne :

$$f(x,s) \leq \frac{|s|^{N-2}s(N|s|^N + 2N)}{(1+|s|^N)^2}$$

$$f(x,s) \leq \frac{N|s|^{2N-1} + 2N|s|^{N-1}}{(1+|s|^N)^2}$$

$$f(x,s) \leq \frac{2N|s|^{2N-1} + 2N|s|^{N-1}}{(1+|s|^N)^2}$$

Nous remarquons que le terme à droite n'est que :

$$\frac{2N|s|^{2N-1} + 2N|s|^{N-1}}{(1+|s|^N)^2} = (ln((1+|s|^N)^2)'$$

nous avons :

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds$$

$$F(x,u) \leq \int_0^u (ln((1+|s|^N)^2)'ds$$

ceci nous donne :

$$F(x,u) \leq [ln((1+|s|^N)^2)]_0^u$$

enfin ceci nous prouvera :

$$\limsup_{t\to 0} \frac{\sup_{x\in\Omega} F(x,t)}{|t|^N} = 0$$

Pour l'autre inégalité (2.9) au voisinage de ∞, remarquons que pour $s \leq |u|$ nous avons :

$$s^p \leq |u|^p$$

$$f(x,s) = |s|^p \frac{|s|^{N-2}s(p|s|^N + p + N)}{(1+|s|^N)^2}$$

$$f(x,s) \leq |u|^p \frac{|s|^{N-2}s(p|s|^N + p + N)}{(1+|s|^N)^2}$$

avec les mêmes arguments nous trouvons :

$$f(x,s) \leq |u|^p \Big(ln((1+|s|^N)^2\Big)'ds$$

$$F(x,u) \leq |u|^p \Big[ln((1+|s|^N)^2)\Big]_0^u$$

Ceci va nous donner la deuxième inégalité (2.9)

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\sup_{x\in\Omega} F(x,t)}{|t|^N}$$

pour terminer la preuve de la proposition nous remarquons que la fonction $g(x,s) = \exp(|u|^q)$ est bien dans la classe $\mathcal{A}$ parce que $q \in]0, \frac{N}{N-1}[$. Ceci termine la preuve de la proposition. $\square$

Proposition 2.21. *Pour tout $p \in]0,N[$, il existe une constante positive ω telle que pour tout intervalle compact $[a,b] \subset]\omega, +\infty[$, il existe $r > 0$ avec la propriété suivante, pour tout $\lambda \in [a,b]$, et tout $q \in]0, \frac{N}{N-1}[$, il existe $\sigma > 0$ telle que pour tout $\mu \in [0,\sigma]$, le problème $(p_{\lambda,\mu})$*

$$(p_{\lambda,\mu}) \begin{cases} -\Delta_N u = \lambda \dfrac{|u|^{p+N-2}u(p|u|^N + p + N)}{(1+|u|^N)^2} + \mu \exp(|u|^q) \quad \textit{dans } \Omega \\ \qquad\qquad u = 0 \quad \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.23}$$

possède au moins trois solutions faibles dans $W_0^{1,N}(\Omega)$ dont les normes sont inférieurs à la constante r.

Démonstration. Il suffit de remarquer la proposition est un cas particulier lorsque le poids $m(u) = 1$, l'opérateur est :

$$-\operatorname{div}(m(|\nabla u|^N)\nabla u) = -\operatorname{div}((|\nabla u|^{N-2})\nabla u)$$

$\square$

Chapitre 3

Étude d'un système faisant intervenir l'opérateur le N-Laplacien.

3.1 Introduction

Dans cette section nous étudions le problème faisant intervenir deux équations suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(a(|\nabla u|^N)|\nabla u|^{N-2}\nabla u\right) = \lambda F_u(x,u,v) + \mu G_u(x,u,v) \quad \text{in } \Omega \\ -\operatorname{div}\left(a(|\nabla v|^N)|\nabla v|^{N-2}\nabla v\right) = \lambda F_v(x,u,v) + \mu G_v(x,u,v) \quad \text{in } \Omega \\ u = v = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, avec $n \geq 2$, un domaine borné avec $\partial\Omega$ assez régulière. Plus précisément nous nous intéressons à l' existence des solutions faibles du problème (4.1). Les fonctions $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont supposées d'être mesurables dans Ω et C^1 dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ satisfaisant :

(H1) Pour tout $M, \sup_{|(t,s)|\leq M}(|F_t(x,t,s)| + |F_s(x,t,s)|) \in L^\infty(\Omega)$,

(H2) La croissance exponentielle sur Ω ; i.e., pour tout $\delta > 0$

$$\lim_{|(t,s)|\to\infty} \frac{|F_t(x,t,s)| + |F_s(x,t,s)|}{e^{\delta(|t|^N+|s|^N)^{1/(N-1)}}} = 0 \quad \text{Uniformément dans } \Omega,$$

avec $F(.,0,0) \in L^1(\Omega)$.

Concernant la fonction $G(.,t)$, doit être une fonction mesurable et $G(.,.)$ est C^1-fonction et satisfaisant :

(G1) pour tout $k > 0$ et certaine $h_k \in L^1(\Omega)$

$$\sup_{|(t,s)|\leq k} (|G_t(x,t,s)| + |G_s(x,t,s)|) \leq h_k(x),$$

avec $G(.,0,0) \in L^1(\Omega)$.

Finalement on suppose que la fonction $a(.)$.

(A1) $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est continue ;

(A2) il existe des constantes positives$p \in]1, N]$, b_1, b_2, c_1, c_2 telles que

$$c_1 + b_1 u^{N-p} \leq u^{N-p} a(u^N) \leq c_2 + b_2 u^{N-p} \quad \forall u \in \mathbb{R}^+;$$

(A3) la fonction $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k(u) = a(|u|^N)|u|^{N-2}u$ est strictement croissante et $k(u) \to 0$ quand $u \to 0^+$.

le but est de montrer l'existence des solutions faibles de(3.1) dans l'espace produit de Sobolev $W = W_0^{1,N}(\Omega) \times W_0^{1,N}(\Omega)$ qui est menu de la norme

$$\|U\|_W^N = \int_\Omega |\nabla U|^N \, dx = \int_\Omega (|\nabla u|^N + |\nabla v|^N) \, dx$$

où $U = (u, v) \in W$. Motivé par le résultat de Trudinger-Moser (cf. [59]) dans le cas $n \geq 2$, on remarque que l'espace W est injecté d'une manière continue dans la classe des espaces d'Orlicz

$$L_\phi = \Big\{ U : \Omega \to \mathbb{R}^2, \text{ mesurable} : \int_\Omega \phi(U) < \infty \Big\},$$

où $\phi(s,t) = \exp\left(s^{\frac{N}{N-1}} + t^{\frac{N}{N-1}}\right)$. de plus, il existe une constante C_N qui dépend de N et de la mesure de Ω telle que

$$\sup_{\|(u,v)\|_W \leq 1} \int_\Omega \exp\left(\delta(|u|^{\frac{N}{N-1}} + |v|^{\frac{N}{N-1}})\right) dx \leq C_N \quad \text{pour tout } 0 < \delta \leq \alpha_N,$$

où $\alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$, est la mesure de ω_{N-1} la surface de la sphère unité de dimension $(N-1)$.

Remarque 3.1. ***(1)*** *l'opérateur considéré ici a été étudier par Hirano [58] avec des non linéarités ayant une croissance polynomiale.*

(2) *Soit λ_1 la plus petite valeur propre [25] pour le problème*

$$\begin{aligned} -\Delta_N u &= \lambda |u|^{\alpha-1} u |v|^{\beta+1} \quad \textit{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^N \\ -\Delta_N v &= \lambda |u|^{\alpha+1} |v|^{\beta-1} v \quad \textit{dans}\Omega \subset \mathbb{R}^N \\ u &= v = 0 \quad \textit{sur } \partial\Omega; \end{aligned}$$

i.e.,

$$\lambda_1 = \inf \Big\{ \frac{\alpha+1}{N} \int_\Omega |\nabla u|^N \, dx + \frac{\beta+1}{N} \int_\Omega |\nabla v|^N \, dx : \\ (u,v) \in W, \int_\Omega |u|^{\alpha+1} |v|^{\beta+1} \, dx = 1 \Big\}$$

où $\alpha + \beta = N - 2$ et $\alpha, \beta > -1$.

Remarque 3.2. *Puisque* $\alpha+\beta = N-2$ *implique* $\frac{\alpha+1}{N}+\frac{\beta+1}{N}=1$, *nous avons pour tout* $(u,v)\in W\backslash\{(0,0)\}$

$$\lambda_1 \leq \frac{\alpha+1}{N}\int_\Omega |\nabla u_1|^N\,dx + \frac{\beta+1}{N}\int_\Omega |\nabla v_1|^N\,dx \quad et \quad \int_\Omega |u_1|^{\alpha+1}|v_1|^{\beta+1}\,dx = 1$$

avec

$$u_1 = \frac{u}{(\int_\Omega |u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}\,dx)^{1/N}}, \quad v_1 = \frac{v}{(\int_\Omega |u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}\,dx)^{1/N}}.$$

nous avons donc :

$$\lambda_1\int_\Omega |u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}\,dx \leq \frac{\alpha+1}{N}\int_\Omega |\nabla u|^N\,dx + \frac{\beta+1}{N}\int_\Omega |\nabla v|^N\,dx$$

pour $(u,v)\in W\backslash\{(0,0)\}$.

Définition 3.3. *On dit que la paire* $(u,v)\in W$ *est une solution faible de* (3.1) *si pour tout* $(\varphi,\psi)\in W$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega a(|\nabla u|^N)|\nabla u|^{N-2}\nabla u\nabla\varphi\,dx &= \int_\Omega (\lambda F_u(x,u,v)+\mu G_u(x,u,v))\varphi\,dx \\ \int_\Omega a(|\nabla v|^N)|\nabla v|^{N-2}\nabla v\nabla\psi\,dx &= \int_\Omega (\lambda F_v(x,u,v)+\mu G_v(x,u,v))\psi\,dx \end{aligned} \tag{3.2}$$

Nous donnons notre principal résultat de ce chapitre où

$$F(x,U) = F(x,u,v) = \int_\Omega \Big(\int_0^u F_t(x,t,v)dt + \int_0^v F_s(x,u,s)dt\Big)\,dx$$

et

$$G(x,U) = G(x,u,v) = \int_\Omega \Big(\int_0^u G_t(x,t,v)dt + \int_0^v G_s(x,u,s)dt\Big)\,dx$$

Théorème 3.4. *Nous supposons que* F_u *et* F_v *sont des fonctions continues qui vont satisfaire les hypothèses (H1)-(H2) et que la fonction* $a(.)$ *satisfait (A1)-(A3). De plus, nous supposons que :*

$$\lim_{|U|\to 0}\sup \frac{pF(x,U)}{|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}} < \lambda_1, \tag{3.3}$$

$$\limsup_{|U|\to\infty} \frac{\sup_{x\in\Omega} F(x,U)}{|U|^N} \leq 0, \tag{3.4}$$

uniformément sur $x\in\Omega$, *et*

$$\sup_{U\in W}\int_\Omega F(x,U)\,dx > 0,$$

avec $U = (u, v)$. Alors, si on suppose

$$\theta = \frac{1}{N} \inf \left\{ \frac{\int_\Omega A(|\nabla u|^N) + A(|\nabla v|^N)\, dx}{\int_\Omega F(x, u(x), v(x))\, dx} : (u, v) \in W, \int_\Omega F(x, u(x), v(x))\, dx > 0 \right\}, \quad (3.5)$$

avec $A(t) = \int_0^t a(\tau)\, d\tau$, pour chaque interval compact $[a, b] \subset]\theta, +\infty[$, il existe $r > 0$ avec la propriété suivante : pour chaque $\lambda \in [a, b]$ et pour toute fonction G satisfaisant (G1) il existe $\sigma > 0$ telle que pour chaque $\mu \in [0, \sigma]$, le problème (3.1) possède au moins trois solutions faibles dans W dont les normes sont inférieures à r.

Remarque 3.5. *Si $a(u) = 1 + u^{\frac{p-N}{N}}$ et les conditions (A2)–(A3) tiennent, alors le problème (3.1) peut être reformuler comme suite :*

$$\begin{aligned} -\Delta_N u - \Delta_p u &= \lambda F_u(x, u, v) + \mu G_u(x, u, v) \\ -\Delta_N v - \Delta_p v &= \lambda F_v(x, u, v) + \mu G_v(x, u, v), \end{aligned}$$

avec $\Delta_p \equiv \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ est le p-Laplacien opérateur.

3.2 Approche variationnelle.

La nature de notre système (3.1) nous à imposer l'espace produit de Sobolev W. Nous à imposer aussi les fonctionnelles "énergies" Φ, J et Ψ données par :

$$\Phi(u, v) = \frac{1}{N}\left(\int_\Omega A(|\nabla u|^N) + A(|\nabla v|^N),\, dx\right)$$

$$J(U) = J(u, v) = \int_\Omega F(x, u, v),\, dx$$

$$\Psi(U) = \Psi(u, v) = \int_\Omega G(x, u, v);\, dx$$

La croissance maximale de $F_u(x, u, v)$ et $F_v(x, u, v)$ va nous aider à étudier (3.1) dans l'espace produits W. Cette croissance exponentielle est motivée par l'inégalité de Trudinger-Moser inégalité [38, 59].
Les suppositions sur la fonction $a(.)$ nous donne que pour chaque $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} A(|t|^N) &\geq \frac{b_1}{N} |t|^N + \frac{c_1}{p} |t|^p \\ \frac{1}{N} A(|t|^N) &\leq \frac{b_2}{N} |t|^N + \frac{c_2}{p} |t|^p, \end{aligned}$$

où $A(t) = \int_0^t a(\tau)\, d\tau$. De plus, la fonction $l(t) = A(|t|^N)$ est strictement convexe. par conséquence, la fonction $\Phi : W \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(u,v) = \frac{1}{N} \int_\Omega A(|\nabla u|^N) + A(|\nabla v|^N)\, dx$$

est bien définie, faiblement semi continue inférieurement, frêchet différentiable et appartenant $C^1(W, \mathbb{R})$.

Proposition 3.6. *Sous les hypothèses de théorème* (3.4)*. Nous avons l'opérateur* $I : W \to W^*$ *définie par :*

$$I(u,v)(\varphi,\psi) = \int_\Omega a(|\nabla u|^N)|\nabla u|^{N-2}\nabla u \nabla \varphi + a(|\nabla v|^N)|\nabla v|^{N-2}\nabla v \nabla \psi\, dx$$

pour tout $(u,v), (\varphi,\psi) \in W$ *possède une fonction inverse continue sur* W^**.*

Démonstration. Nous nottons par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit dans $\mathbb{R}^N$, pour $\kappa \geq 2$ il existe une constante positive c_κ telle que l'inégalité suivante (voir [37])

$$\langle |x|^{\kappa-2}x - |y|^{\kappa-2}y, x - y \rangle \geq c_\kappa |x-y|^\kappa$$

est vraie pour pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$. Nous combinons cette dernière inégalité avec (A2), nous avons

$$\langle I(u_1,v_1) - I(u_2,v_2), (u_1 - u_2, v_1 - v_2) \rangle \geq c_n(\|u_1 - u_2\|_1^N + \|v_1 - v_2\|_2^N),$$

pour tout (u_1, v_1) et (u_2, v_2) appartement à W. Cela signifie que I est un opérateur uniformément monotone dans W. De plus I est coércive, semi continue dans W. Par conséquence, la proposition se déduit de [18, Théorème 2.28 chap 1].

De plus, Φ est coércive, faiblement semi continue inférieurement, bornée sur tout borné de W et appartenant à $\mathcal{W}_W$. □

3.3 Lemme de compacité

Lemme 3.7. *Si F satisfait (H1)–(H2), alors la fonctionnelle* $J : W \to \mathbb{R}$ *donnée par :*

$$J(u,v) = \int_\Omega F(x,u,v)\, dx$$

est différentiable et sa dérivée est compacte.

Démonstration. D'une part, les fonctions F_u et F_v sont continues ayant une croissance exponentielle, et il existe une positive constante C_{10} tel que

$$|F_u(x,u,v)| + |F_v(x,u,v)| \leq C_{10} \exp\left(\delta(|u|^{\frac{N}{N-1}} + |v|^{\frac{N}{N-1}})\right), \tag{3.6}$$

pour tout $(x,u,v) \in \Omega \times \mathbb{R}^2$. Par conséquence la fonctionnelle $J : W \to \mathbb{R}$ définie par

$$J(u,v) = \int_\Omega F(x,u,v)\, dx$$

est bien définie.
Et d'autre part, comme dans le Lemme (3.2), nous concluions que J est continûment Gâteau différentiable avec :

$$J'(u,v)(\varphi,\psi) = \int_\Omega F_u(x,u,v)\varphi + F_v(x,u,v)\psi\, dx$$

pour tout $(u,v),(\psi,\varphi) \in W$.
Montrons que J' est continue de W vers son dual W^*.
En effet, soit $\{(u_k,v_k)\})$ une suite convergente vers une limite $\{(u,v)\}$ dans W. Alors, il existe une sous suite, notée aussi $\{(u_k,v_k)\}$ telle que :

$$\begin{aligned} u_k &\to u \quad \text{in } L^{q_1}(\Omega), \\ v_k &\to v \quad \text{in } L^{q_2}(\Omega), \end{aligned}$$

quand $k \to \infty$ et pour tout $q_1, q_2 > 1$.
D'une part, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_\Omega |F_u(x,u_k,v_k)|^{q_1}\, dx &\leq C_{11} \int_\Omega \exp\left(q_1\delta(|u_k|^{\frac{N}{N-1}} + |v_k|^{\frac{N}{N-1}})\right) dx \\ &\leq C_{11}\Big(\int_\Omega \exp(\zeta q_1 \delta |u_k|^{\frac{N}{N-1}})\Big)^{\frac{1}{\zeta}} \Big(\int_\Omega \exp(\zeta' q_1 \delta |v_k|^{\frac{N}{N-1}})\Big)^{\frac{1}{\zeta'}} \\ &\leq C_{11}\Big(\int_\Omega \exp(\zeta q_1 \delta \|u_k\|^{\frac{N}{N-1}}_{W_0^{1,N}(\Omega)} (\frac{|u_k|}{\|u_k\|_{W_0^{1,N}(\Omega)}})^{\frac{N}{N-1}})\Big)^{1/\zeta} \\ &\quad \times \Big(\int_\Omega \exp(\zeta' q_1 \delta \|v_k\|^{\frac{N}{N-1}}_{W_0^{1,N}(\Omega)} (\frac{|v_k|}{\|v_k\|_{W_0^{1,N}(\Omega)}})^{\frac{N}{N-1}})\Big)^{1/\zeta'}, \end{aligned}$$

pour une certaine constante C_{11} et $\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta'} = 1$. puisque $\{(u_k,v_k)\}$ est une suite bornée, on peut choisir δ suffisamment petite telle que :

$$\zeta q_1 \delta \|u_k\|^{\frac{N}{N-1}}_{W_0^{1,N}(\Omega)} < \alpha_N \quad \text{et} \quad \zeta' q_1 \delta \|v_k\|^{\frac{N}{N-1}}_{W_0^{1,N}(\Omega)} < \alpha_N.$$

alors

$$\int_\Omega |F_u(x,u_k,v_k)|^{q_1}\, dx \leq C_{12}$$

pour k assez grand et une constante $C_{12} > 0$. avec le même argument, nous avons aussi

$$\int_\Omega |F_v(x, u_k, v_k)|^{q_2}\, dx \leq C_{13}$$

pour k assez grand et une constante $C_{13} > 0$. La preuve se complète de la même manière comme dans le Lemme(2.14). $\square$

3.4 Preuve du théorème 4.4.

Nous rappelons que les fonctionnelles Φ et J sont définies sur W comme suite :

$$\Phi(u, v) = \frac{1}{N} \int_\Omega A(|\nabla u|^N) + A(|\nabla v|^N)\, dx, \quad \text{et} \quad J(u, v) = \int_\Omega F(x, u, v)\, dx,$$

pour tout $(u, v) \in W$.

Le but est d'appliquer le Théorème de Ricceri pour les fonctions Φ et J pour obtenir l'existence de multiples solutions faibles de (3.1). Il est établi dans la section précédente que Φ est coércive, faiblement semi-continue inférieurement, bornée sur tout borné de W et appartenant à $\mathcal{W}_W$. De plus Φ est continûment Gâteaux différentiable dans X une dérivée

$$\Phi'(u, v)(\varphi, \psi) = \int_\Omega a(|\nabla u|^N)|\nabla u|^{N-2}\nabla u \nabla \varphi + a(|\nabla v|^N)|\nabla v|^{N-2}\nabla v \nabla \psi\, dx$$

pour tout $(u, v), (\varphi, \psi) \in W$. Aussi dans la section précédente nous avons établi que Φ' possède une fonction inverse continue sur W^* (voir [18, Théorème (1.27) chap 1]). le Lemme (3.7) assure que, J est bien définie et continûment Gâteaux différentiable avec dérivée compact J' donnée par

$$J'(u, v)(\varphi, \psi) = \int_\Omega F_u(x, u, v)\varphi + F_v(x, u, v)\psi\, dx$$

pour tout $(u, v), (\varphi, \psi) \in W$.

Proposition 3.8. *Sous les conditions du théorème* (3.4)*, les fonctions* $\Phi(u, v), J(u, v)$ *vérifient la condition suivante ;*

$$\limsup_{(u,v)\to(0,0)} \frac{J(u, v)}{\Phi(u, v)} \leq 0. \tag{3.7}$$

Démonstration. L'hypothèse (3.3),

$$\limsup_{|(t,s)|\to(0,0)} \frac{\sup_{x\in\Omega} pF(x, t, s)}{|t|^{\alpha+1}|s|^{\beta+1}} \leq \lambda_1,$$

et pour tout $\varepsilon>0$ il existe une constante positive ρ telle que, pour chaque $x\in\Omega$ et $|(u,v)|<\rho$,

$$F(x,u,v)<\frac{\varepsilon}{p}\lambda_1|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}.$$

avec (H2), pour un $\delta>0$ et $z>N$ il existe $C_{14}>0$ telle que, pour chaque $x\in\Omega$ et $|(u,v)|\geq\rho$

$$F(x,u,v)\leq C_{14}\Big(|u|^z|v|^z e^{\delta(|u|^{\frac{N}{N-1}}+|v|^{\frac{N}{N-1}})}\Big).$$

Alors, pour chaque $x\in\Omega$ et $(u,v)\in W$, nous avons

$$F(x,u,v)\leq\frac{\varepsilon}{p}\lambda_1|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}+C_{14}\Big(|u|^z|v|^z e^{\delta(|u|^{\frac{N}{N-1}}+|v|^{\frac{N}{N-1}})}\Big).$$

soient $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4>1$ avec $\sum_{i=1}^4\frac{1}{\theta_i}=1$. Alors de la remarque (4.15) et l' application de l'inégalité de Hölder, nous obtenons :

$$\begin{aligned}J(u,v)\leq C_{15}\varepsilon\|(u,v)\|^N&+C_{14}\Big[\int_\Omega e^{\left(\theta_1\delta\|u\|^{\frac{N}{N-1}}(\frac{|u|}{\|u\|})^{\frac{n}{n-1}}\right)}dx\Big]^{1/\theta_1}\Big(\int_\Omega|u|^{\theta_2 z}\,dx\Big)^{1/\theta_2}\\&\times\Big[\int_\Omega e^{\left(\theta_3\delta\|v\|^{\frac{n}{n-1}}(\frac{|v|}{\|v\|})^{\frac{N}{N-1}}\right)}dx\Big]^{1/\theta_3}\Big(\int_\Omega|v|^{\theta_4 z}\,dx\Big)^{1/\theta_4},\end{aligned}$$

pour une constante positive $C_{15}>0$. Avec le choix d'une δ assez petite telle que :

$$\theta_1\delta\|u\|^{\frac{N}{N-1}}_{W_0^{1,N}(\Omega)}<\alpha_N\quad\text{et}\quad\theta_3\delta\|v\|^{\frac{N}{N-1}}_{W_0^{1,N}(\Omega)}<\alpha_N,$$

Avec le fait que $W_0^{1,N}(\Omega)$ est injectée d'une manière continue dans $L^\zeta(\Omega)$ pour chaque $\zeta\geq1$, nous avons

$$J(u,v)\leq C_{16}(\varepsilon\|(u,v)\|^N+\|(u,v)\|^{2z}),$$

pour une certaine constante positive $C_{16}>0$. Par conséquent, avec (A2), on obtient

$$\frac{J(u,v)}{\Phi(u,v)}\leq C_{16}\frac{\varepsilon\|(u,v)\|^N+\|(u,v)\|^{2z}}{\|(u,v\|^N}.$$

puisque $z>N$, la proposition s'ensuit immédiatement.

Proposition 3.9. *Sous les conditions du théorème* (3.4)*, les fonctions* $\Phi(u,v)$, $J(u,v)$ *vérifient la condition suivante ;*

$$\limsup_{\|(u,v)\|\to\infty}\frac{J(u,v)}{\Phi(u,v)}\leq0. \tag{3.8}$$

Démonstration. L'inégalité (3.4) nous donne :

$$\limsup_{|(t,s)|\to\infty}\sup_{x\in\Omega}\frac{F(x,t,s)}{|t|^N+|s|^N}\leq0,$$

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante positive ρ telle que, pour chaque $x \in \Omega$ et $|(t,s)| > \rho$,

$$F(x,t,s) \leq \varepsilon(|t|^N + |s|^N).$$

la condition (H1), nous affirme l'existence d'une certaine constanet $C_{17} > 0$ telle que, pour chaque $x \in \Omega$,

$$\sup_{|(t,s)| \leq \rho} (|F_u(x,t,s)|, |F_v(x,t,s)|) \leq C_{17}.$$

alors, pour chaque $x \in \Omega$ et $t, s \in \mathbb{R}$,

$$F(x,t,s) \leq C_{17}\rho + \varepsilon(|t|^N + |s|^N)$$

ceci nous donne

$$J(u,v) \leq C_{17}\rho \operatorname{meas}(\Omega) + \varepsilon(\int_\Omega |u|^N + |v|^N \, dx).$$

Du fait que $W_0^{1,N}(\Omega)$ s'injecte d'une manière continue dans $L^N(\Omega)$, on obtient :

$$\frac{J(u,v)}{\Phi(u,v)} \leq N \frac{C_{17}\rho \operatorname{meas}(\Omega)}{\|u\|^N} + \varepsilon N C_{18},$$

pour une constante positive $C_{18} > 0$. Du fait que ε est arbitraire l'inégalité (3.8) se déduit.

Proposition 3.10. *Sous les conditions du théorème* (3.4)*, les fonctionnelles J et Φ vérifient l'inégalité suivante :*

$$\max\left\{ \limsup_{\|(u,v)\| \to +\infty} \frac{J(u,v)}{\Phi(u,v)}, \limsup_{(u,v) \to (0,0)} \frac{J(u,v)}{\Phi(u,v)} \right\} \leq 0.$$

Démonstration. La proposition se déduit de les inégalités (3.8) et (3.7). □

Pour achever la démonstration du théorème (3.4) il faut s'assurer que toutes les conditions du Théorème de Ricceri sont satisfaites avec $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{1}{\theta}$, où θ est définie dans (3.5) tel que $[a,b] \subseteq]\theta, +\infty[$. Finalement, puisque la fonction $G : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une mesurable dans Ω et C^1 dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ satisfaisant la condition (G1), alors le Lemme (3.7) donne que la fonction $\Psi(u,v) = \int_\Omega G(x,u,v)\, dx$ est bien définie et continue Gâteaux différentiable dans W, avec une dérivée compacte, nous aurons donc,

$$\Psi'(u,v)(\varphi,\psi) = \int_\Omega G_u(x,u,v)\varphi + G_v(x,u,v)\psi \, dx$$

pour tout $(u,v),(\varphi,\psi)\in W$.
Par conséquence, le théorème de Ricceri va nous garantir l'existante d'une constante positive $r>0$ telle que pour tout $\lambda\in[a,b]$, il existe une constante $\sigma>0$ qui vérifie la condition suivante : Pour chaque $\mu\in[0,\sigma]$, la fonction $\Phi-\lambda J-\mu\Psi$ à au moins trois points critiques, qui sont précisément les solutions faibles du problème (3.1) dont les normes sont inférieures a r. □

3.5 Exemples

Proposition 3.11. *Pour toute constante $\lambda\leq\lambda_1$, le problème aux valeurs propres suivant :*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{N-2}\nabla u\right)=\lambda F_u(x,u,v)+\mu G_u(x,u,v) \quad \textit{dans } \Omega\\ -\operatorname{div}\left(|\nabla v|^{N-2}\nabla v\right)=\lambda F_v(x,u,v)+\mu G_v(x,u,v) \quad \textit{dans } \Omega\\ u=v=0 \quad \textit{on } \partial\Omega,\end{cases} \tag{3.9}$$

$$F_u(x,u,v)=\frac{d\Big(\frac{1}{p}|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}+(1-\chi(u,v))\exp\left(\frac{(|u|^N+|v|^N)^{\frac{1}{N-1}}}{Log(|u|+|v|+2)}\right)\Big)}{du}$$

et

$$F_v(x,u,v)=\frac{d\Big(\frac{1}{p}|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}+(1-\chi(u,v))\exp\left(\frac{(|u|^N+|v|^N)^{\frac{1}{N-1}}}{Log(|u|+|v|+2)}\right)\Big)}{dv}$$

avec $\chi\in C^1(\mathbb{R}^2,[0,1]),\chi\equiv 1$ sur une boule $B(0,r)\subset\mathbb{R}^2$ avec $r>0$, et $\chi\equiv 0$ sur $\mathbb{R}^2\backslash B(0,r+1)$. De plus $G_u(x,u,v)=|u|^p$ et $G_v(x,u,v)=|v|^p$.
Le problème (3.9) *possède au moins trois solutions faibles non triviales.*

Démonstration. Nous remarquons que :

$$F(x,u,v)=\int_0^u F_u(x,s,v)ds \ +\int_0^v F_v(x,u,t)dt$$

$$F(x,u,v)=\frac{\lambda}{p}|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}+(1-\chi(u,v))\exp\left(\frac{(|u|^N+|v|^N)^{\frac{1}{N-1}}}{Log(|u|+|v|+2)}\right)$$

Les hypothèses suivantes :
(H1) Pour tout $M,\sup_{|(t,s)|\leq M}(|F_t(x,t,s)|+|F_s(x,t,s)|)\in L^\infty(\Omega)$,
(A.) Le champs dans ce cas $a(.)=1$ donc il satisfait les conditions (A1),..,(A4).
(H2) La croissance exponentielle sur Ω ; i.e., pour tout $\delta>0$

$$\lim_{|(t,s)|\to\infty}\frac{|F_t(x,t,s)|+|F_s(x,t,s)|}{e^{\delta(|t|^N+|s|^N)^{1/(N-1)}}}=0 \quad \text{Uniformément dans } \Omega,$$

avec $F(.,0,0)\in L^1(\Omega)$.

nous assurent, que les hypothèses du théorème (3.4) (H1), (H2), (3.3), (3.4) sont satisfaites pour $\lambda \leq \lambda_1$. Alors le problème (3.9) possède au moins trois solutions faibles non triviales. $\square$

Proposition 3.12. *Pour toute constante $\lambda \leq \lambda_1$, le problème aux valeurs propres suivant :*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(a(|\nabla u|^N)|\nabla u|^{N-2}\nabla u\right) = \lambda F_u(x,u,v) + \mu G_u(x,u,v) \quad dans\ \Omega \\ -\operatorname{div}\left(a(|\nabla v|^N)|\nabla v|^{N-2}\nabla v\right) = \lambda F_v(x,u,v) + \mu G_v(x,u,v) \quad dans\ \Omega \\ \qquad u = v = 0 \quad on\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.10}$$

$$F_u(x,u,v) = \frac{d\left(\frac{1}{p}|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1} + (1-\chi(u,v))\exp\left(\frac{(|u|^n+|v|^N)^{\frac{1}{N-1}}}{Log(|u|+|v|+2)}\right)\right)}{du}$$

avec $\chi \in C^1(\mathbb{R}^2,[0,1]), \chi \equiv 1$ sur une boule $B(0,r) \subset \mathbb{R}^2$ avec $r > 0$, et $\chi \equiv 0$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash B(0,r+1)$.
avec le champ a(.) satisfait les conditions (A1)-(A4) et la fonction $\chi \in C^1(\mathbb{R}^2,[0,1]), \chi \equiv 1$ sur une boule $B(0,r) \subset \mathbb{R}^2$ avec $r > 0$, et $\chi \equiv 0$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash B(0,r+1)$. De plus $G_u(x,u,v) = |u|^p$ et $G_v(x,u,v) = |v|^p$. Alors Le problème (3.10) possède au moins trois solutions faibles non triviales.

Démonstration. La preuve du proposition est une application du théorème (3.4) en remarquons que les hypothèses (H1),(H2), (A1),(A2)(A3) et (A4) sont satisfaites. Alors le problème (3.10) possède au moins trois solutions faibles non triviales. $\square$

Proposition 3.13. *Pour toute constante $\lambda \leq \lambda_1$, le problème aux valeurs propres suivant*

$$\begin{cases} -\Delta_N u - \Delta_p u = \lambda F_u(x,u,v) + \mu G_u(x,u,v) \quad dans\ \Omega \\ -\Delta_N v - \Delta_p v = \lambda F_v(x,u,v) + \mu G_v(x,u,v) \quad dans\ \Omega \\ \qquad u = v = 0 \quad on\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.11}$$

$$F_u(x,u,v) = \frac{d\left(\frac{1}{p}|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1} + (1-\chi(u,v))\exp\left(\frac{(|u|^n+|v|^N)^{\frac{1}{N-1}}}{Log(|u|+|v|+2)}\right)\right)}{du}$$

et

$$F_v(x,u,v) = \frac{d\left(\frac{1}{p}|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1} + (1-\chi(u,v))\exp\left(\frac{(|u|^N+|v|^N)^{\frac{1}{N-1}}}{Log(|u|+|v|+2)}\right)\right)}{dv}$$

avec $\chi \in C^1(\mathbb{R}^2,[0,1]), \chi \equiv 1$ sur une boule $B(0,r) \subset \mathbb{R}^2$ avec $r > 0$, et $\chi \equiv 0$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash B(0,r+1)$. De plus $G_u(x,u,v) = |u|^p$ et $G_v(x,u,v) = |v|^p$.
Le problème (3.10) possède au moins trois solutions faibles non triviales.

Démonstration. La preuve est une application du théorème (3.4), avec le champ

$$a(u) = 1 + u^{\frac{p-N}{N}}$$

ceci donnera le fait que l'opérateur

$$-\Delta_N u - \Delta_p u$$

n'est que l'opérateur

$$-\operatorname{div}\left(a(|\nabla u|^N)|\nabla u|^{N-2}\nabla u\right)$$

. $\square$

Chapitre 4

Étude d'un problème faisant intervenir l'opérateur généralisé de Laplace

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous somme intéressés à étudier l'existence de multiples solutions faibles non triviales du problème elliptique non linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\,\nabla u) + b(x)|u|^{p(x)-2}u = \lambda\, f(x,u) + \mu\, g(x,u) \quad \text{in } \mathbb{R}^N \\ \lim\limits_{\|x\|\to+\infty} u(x) = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

et nous généralisons ce résultat à un système d'équations suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(a(x)\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) + b(x)|u|^{p(x)-2}u = \lambda f_u(x,u,v) + \mu g_u(x,u,v) \quad \text{in } \mathbb{R}^N \\ -\operatorname{div}\left(a'(x)|\nabla v|^{q(x)-2}\nabla v\right) + b'(x)|u|^{q(x)-2}u = \lambda f_v(x,u,v) + \mu g_v(x,u,v) \quad \text{in } \mathbb{R}^N \\ \lim\limits_{\|x\|\to+\infty} u(x) = 0, \ \lim\limits_{\|x\|\to+\infty} v(x) = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Concernant le problème (4.1), nous supposons que La dimension $N \geq 3$, la fonction $p : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction Lipschitzienne continue avec :

$$2 \leq p^- \leq p(x) \leq p^+ < N,$$

Les constantes λ et μ sont des paramètres positifs, et $a(x)$ est une fonction mesurable telle que $a(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ avec $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^N} a(x) > 0$. Les deux fonctions $f(x,t)$ et $g(x,t)$ vérifient certaines conditions de croissance pour la variable t, plus précisément, nous supposons que f satisfait la condition suivante :

$$|f(x,t)| \leq m(x)|t|^\gamma \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{4.3}$$

Avec $m(x)$ est une fonction positive telle que :

$$m \in L^{\frac{p_-^*}{p_-^*-1}}(\mathbb{R}^N) \cap L^{\frac{\nu}{\nu-1}\left(\frac{p_-^*}{p_-^*-(\gamma+1)}\right)}(\mathbb{R}^N),$$

où

$$p^+ < \gamma + 1 < \nu < p_-^*,$$

où p_-^* est le Sobolev exposant, i.e., $p_-^* = \dfrac{Np^-}{N - p^+}$.
La fonction $g = g(., t)$, doit d'être mesurable pour tout t in $\mathbb{R}$, la fonction $g = g(x, .)$, doit être continue pour presque tout x in $\mathbb{R}^N$: telle que $g(x, 0) = 0$, et il existe une fonction positive $h(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, satisfaisant

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^*} \frac{|g(x,t)|}{h(x)|t|^{p_-^*}} < +\infty \tag{4.4}$$

Concernant la fonction $b(x)$ doit satisfaire la condition suivante :

$$b \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N) \text{ et } b(x) > b_0 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^N \tag{4.5}$$

Pour notre problème, le cadre fonctionnel naturel est l'espace E donné comme la complétude de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ avec respect à la norme

$$\|u\| = \|u\|_{1,p(x),b(x)} = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|\nabla u|^{p(x)} + \int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u|^{p(x)}dx\Big)^{\frac{1}{p(x)}}$$

D'après la proposition (1.13) du chapitre 2 , E est un espace de Banach, réflexif, puisque $1 < p^- < p^+ < \infty$ et l'ensemble des fonctions continues $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{1,p(x),b(x)}(\mathbb{R}^N)$.

La condition (4.5) sur la fonction $b(x)$ affirme que $E \subset W_0^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$.

4.2 Étude d'une équation faisant intervenir l'opérateur généralisé de Laplace

Le cas où la fonction exposant est constante i.e. ($2 \leq p(x) = p < N$) le problème tel que (4.1) sans le terme $b(x)|u|^{p(x)-2}u$, a été étudié par S. Manouni dans [70] 2011 en adoptant le principe de "Ricceri". Nous mentionnons que M.Boureanu Mar 2006 a étudié l'existence de solution faible d'un problème comme (4.1) Sous les hypothèses $|f(x,u)| \leq c_1|u|^{p^+} + c_2|u|^s \ \forall u \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ avec $s \in [p^+ - 1, p^{-*}]$ en adoptant le célèbre théorème" the mountain pass theorem (1.29) du chaitre 1 ([1]) ". Dans cette section, nous montrons l'existence des solutions faibles du problème (4.1). Le plan est le suivant : Nous énonçons notre principale résultat, puis nous spécifions le cadre fonctionnel et la méthode variationnelle. Nous donnerons des lemmes de compacité qui seront des lemmes clés dans la preuve de notre résultat qui est le suivant.

Théorème 4.1. *Nous supposons* (4.3) *et qu'il existe une constante* τ *et une fonction positive* $\alpha(x)$ *telle que :,* $1 < \tau < p^-$ *et* $\alpha(x) \in L^{(\frac{p^*_-}{\tau})'}(\mathbb{R}^n)$ *satisfaisant :*

$$\limsup_{|u|\to+\infty} \frac{F(x,u)}{\alpha(x)|u|^\tau} \leq M < +\infty \quad \textit{uniformément} \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{4.6}$$

et

$$\sup_{u\in E}\left\{\int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx\right\} > 0$$

où $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\,ds$
si on pose

$$\omega = \frac{1}{p^+}\inf\left\{\frac{\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\nabla u|^{p(x)} + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^{p(x)}dx}{\int_{\mathbb{R}^n} F(x,u)\,dx} : u \in E, \int_{\mathbb{R}^n} F(x,u)\,dx > 0\right\}$$

Alors pour chaque interval $[a,b] \subset]\omega,+\infty[$*, il existe* $r_1 > 0$ *avec la propreté suivante : Pour chaque* $\lambda \in [a,b]$*, et chaque fonction* $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mesurable sur* Ω*, continue dans* $\mathbb{R}$ *satisfaisant* (4.4)*, il existe* $\delta > 0$ *telle que pour chaque* $\mu \in [0,\delta]$*, le problème* (4.1) *possède au moins trois solutions faibles dans* E *dont les normes sont inférieures à* r*.*

4.3 Cadre variationnel

Définition 4.2. *On définit une solution faible de problème (5.1) toute fonction* $u \in E$ *vérifiant :*

$$\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla v + \int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u|^{p(x)-2}uv = \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\lambda f(x,u) + \mu g(x,u)\Big)v\,dx,\ \forall v \in E$$

Remarque 4.3. *Pour montrer ce résultat nous avons besoin de définir les fonctionnelles suivantes* $\Phi, J, \Psi : E \longrightarrow \mathbb{R}$*. Ces fonctionnelles sont choisies de telle façon que leurs dérivées au sens faible vérifient* $\Phi'(u) = \lambda J'(u) + \mu\Psi'(u)$*. Puis nous montrons que ces fonctions vont satisfaire les conditions de théorème de Ricceri* (1.31)*.*

$$\Phi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)}\Big(|\nabla u|^{p(x)} + b(x)|u|^{p(x)}\Big)dx$$

et

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)\,dx$$

et

$$\Psi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)\,dx$$

avec

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,t)dt, \;\; et \;\; G(x,u) = \int_0^u g(x,t)dt$$

Proposition 4.4. *Sous les hypothèses du théorème* (4.1)*, la fonction* $\Phi(u)$ *satisfait les inégalités suivantes :*

$$\frac{\|u\|^{p^-}}{p^+} \leq \Phi(u) \leq \frac{\|u\|^{p^+}}{p^-} \;\; pour \;\; \|u\| \geq 1 \tag{4.7}$$

$$\frac{\|u\|^{p^+}}{p^+} \leq \Phi(u) \leq \frac{\|u\|^{p^-}}{p^-} \;\; pour \;\; \|u\| \leq 1 \tag{4.8}$$

Démonstration. La preuve est une application de proposition (1.15)chap 1. En effet soit $\|u\|$ la norme de u dans E, nous remarquons que l'inégalité suivante :

$$\frac{\|u\|^{p(x)}}{p^+} \leq \Phi(u) \leq \frac{\|u\|^{p(x)}}{p^-} \tag{4.9}$$

nous assure Les inégalités suivantes :

$$\|u\|^{p-} \leq \|u\|^{p(x)} \leq \|u\|^{p+} \; si \;\; \|u\| \geq 1$$

$$\|u\|^{p+} \leq \|u\|^{p(x)} \leq \|u\|^{p-} \; si \; \|u\| \leq 1$$

□

4.4 Compacité des fonctionnelles associées au principe de Ricceri

Lemme 4.5. *Sous les hypothèses du théorème* (4.1)*, pour tout* $u, v \in E$ *la fonction* $\Phi(u) \in \mathcal{W}_E$ *est coércive, faiblement semi-continue inférieurement, bornée sur tout borné de* E*, différentiable avec*

$$\Phi^{'}(u)v = \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v + \int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u|^{p(x)-2} uv \, dx$$

Démonstration. Pour que la fonction $\Phi(u)$ soit dans la classe $\mathcal{W}_E$ il faut que : $\Phi : X \to \mathbb{R}$ possède la propriété suivante : si $\{u_n\}$ est une suite dans E qui converge faiblement vers $u \in E$ et $\liminf_{n\to\infty} \Phi(u_n) \leq \Phi(u)$, alors $\{u_n\}$ possède une sous-suite qui converge fortement vers u. Le fait que la fonction $\Phi(u)$ satisfait (4.7) et (4.8) nous assure le fait que la fonction $\Phi(u)$ est bien dans la classe $\mathcal{W}_E$.
Grasse au convexité uniforme et l'inégalité algébrique de la fonction $l(x) = |x|^{p(x)}, 2 \leq p^-, \; x \in \mathbb{R}^n$, nous déduisons que Φ est un opérateur uniformément monotone dans E, de plus le résultat classique (Théorème 26. A(1.27) chap 1) [18] sur les opérateurs uniformément convexes assure que $\Phi^{'}$ possède une inverse continue sur $(E)^*$. □

Lemme 4.6. *Sous les hypothèses du théorème* (4.1)*, la fonctionnelle J est bien définie et continue Gâteaux différentiable avec*

$$J^{'}(u)v = \int_{\mathbb{R}^n} f(x,u)v\,dx$$

et la fonctionnelle $J'(.)$ est compacte de E vers $(E)^*$.

Démonstration. Nous remarquons que grasse à l'inégalité (4.3) nous avons :

$$|F(x,u)| \leq \frac{1}{\gamma+1} m(x)|u|^{\gamma+1} \tag{4.10}$$

de cette inégalité nous pouvons affirmer que pour tout $(x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, la fonction $F(x,u)$ est $C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$,.
Montrons que l'opérateur $J'(.)$ est compact :
Soit $\{u_k\}$ une suite dans E qui converge faiblement vers u, le but est de montrer que $J'(u_k)$ converge fortement dans $(E)^*$. Autrement dit nous devons montrer :

$$J'(u_k)v \to J'(u)v \ \ pourtout \ \ v \in E$$

D'une part, de l' inégalité de Hölder et l'inégalité de Sobolev, nous obtenons pour tout $0 \leq R \leq +\infty$,

$$\int_{|x|\geq R} f(x,u)v\,dx \leq \left(\int_{|x|\geq R} |m|^{p_1}\,dx\right)^{\frac{1}{p_1}} (C_1\|u\|)^{\gamma}\|v\|,$$

pour tout $u,v \in E$, et $p_1 = \frac{p_-^*}{p_-^*-(\gamma+1)} \in \left[\frac{p_-^*}{p_-^*-1}, \frac{\nu}{\nu-1}(\frac{p_-^*}{p_-^*-(\gamma+1)})\right]$.
du fait que la fonction $m \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$, nous avons $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{|x|\geq R} |m|^{p_1}\,dx = 0$.
Cela implique avec le fait que $\{u_k\}$ est une suite bornée, pour tout ε, il existe $R_\varepsilon > 0$ telle que

$$\int_{|x|\geq R_\varepsilon} f(x,u_k)v\,dx \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_{|x|\geq R_\varepsilon} f(x,u)v\,dx \leq \varepsilon \tag{4.11}$$

pour tout k.
D'autre part, l'application de l'inégalité de Young, et le fait que $\gamma+1 < \nu$ donnent :

$$\begin{aligned} f^{\frac{\nu}{\nu-1}}(x,t) &\leq m(x)^{\frac{\nu}{\nu-1}} t^{\frac{\gamma\nu}{\nu-1}} \\ &\leq \frac{p_-^*-(\gamma+1)}{p_-^*} m(x)^{\frac{\nu}{\nu-1}(\frac{p_-^*}{p_-^*(\gamma+1)})} + \frac{\gamma+1}{p_-^*} t^{\frac{\gamma\nu}{\nu-1}\frac{p_-^*}{\gamma+1}}, \end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et presque pour tout $x \in B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < R_\varepsilon\}$.
nous remarquons que :

$$\frac{\gamma\nu}{\nu-1}\frac{p_-^*}{\gamma+1} < p_-^*,$$

Puisque l'opérateur de Nemytskii $N_{f^{\frac{\nu}{\nu-1}}}$ associée à $f^{\frac{\nu}{\nu-1}}$ est continue de $L^{\frac{\gamma\nu}{\nu-1}\frac{p_-^*}{\gamma+1}}(B_\varepsilon)$ vers $L^1(B_\varepsilon)$, nous concluions que :

$$\int_{|x|<R_\varepsilon} f(x,u_k)^{\frac{\nu}{\nu-1}}\,dx \to \int_{|x|<R_\varepsilon} f(x,u)^{\frac{\nu}{\nu-1}}\,dx,$$

ceci implique que $f(x,u_k)$ converge vers $f(x,u)$ dans $L^{\frac{\nu}{\nu-1}}(B_\varepsilon)$. Puisque $L^{p_-^*}(B_\varepsilon) \subset L^\nu(B_\varepsilon)$, nous avons $f(x,u_k)v$ converge vers $f(x,u)v$ dans $L^1(B_\varepsilon)$, i.e.

$$\int_{|x|<R_\varepsilon} \Big(f(x,u_k) - f(x,u)\Big)v\,dx \to 0, \tag{4.12}$$

Pour tout $v \in L^\nu(B_\varepsilon)$.
Finalement, les inégalités (4.11) et (4.12), nous donnent

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x,u_k)v\,dx \to \int_{\mathbb{R}^n} f(x,u)v\,dx.$$

ceci complète la preuve de Lemme et par conséquent $J^{'}$ est opérateur compact. □

Lemme 4.7. *Sous les hypothèses du théorème* (4.1)*, la fonction* $\Psi(u) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x,u)\,dx$ *est bien définie et Gâteaux différentiable sur* E*, avec une dérivée compacte.*

Démonstration. La fonction $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable dans $\mathbb{R}^n$ et C^1 dans $\mathbb{R}$ telle que g satisfait (4.4),

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^*} \frac{|g(x,t)|}{h(x)|t|^{p_-^*}} < +\infty$$

nous donne ;

$$|g(x,t)| \le h(x)|t|^{p_-^*}$$

nous intégrons ;

$$|G(x,u)| \le \frac{1}{p_-^*+1} h(x)|u|^{p_-^*+1}$$

donc du fait que $g(x,t)$ satisfait l'hypothèse (4.4), nous pouvons affirmer que la fonction,

$$\Psi^{'}(u)v = \int_{\mathbb{R}^n} g(x,u)v\,dx$$

est bien définie et Gâteaux différentiable sur W, avec une dérivée compacte.

4.5 Preuve du théorème 4.1

Remarque 4.8. *Pour pouvoir implémenter le principe de Ricceri, il nous reste à prouver les propositions suivantes.*

Proposition 4.9. *Sous les hypothèses du théorème (4.1), pour tout $u \in E$ telle que $\|u\| \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon \geq 0$ nous avons l'inégalité suivante :*

$$\frac{J(u)}{\Phi(u)} \leq \frac{p^+}{\gamma+1} {C_1}^{\gamma+1} \|m\|_{L^{p_1}} \varepsilon. \tag{4.13}$$

Démonstration. Avec l'aide de Hölder inégalité et inégalité de Sobolev, en utilisant (4.10), nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(x,u)\, dx \leq \frac{1}{\gamma+1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |m|^{p_1}\, dx \right)^{\frac{1}{p_1}} (C_1 \|u\|)^{\gamma+1}$$

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x,u)\, dx \leq \frac{C_1^{\gamma+1}}{\gamma+1} \|m\|_{L^{p_1}} \|u\|^{\gamma+1}$$

$\forall (x,u) \in \mathbb{R}^n \times E$ avec $p_1 = \frac{p^*_-}{p^*_- - (\gamma+1)}$.

donc de (4.8) on obtient :

$$\frac{1}{\Phi(u)} \leq \frac{p^+}{\|u\|^{p^+}}$$

ceci nous donne :

$$\frac{J(u)}{\Phi(u)} \leq \frac{p^+}{\gamma+1} C_1^{\gamma+1} \|m\|_{L^{p_1}} \frac{\|u\|^{\gamma+1}}{\|u\|^{p^+}}, \quad \|u\| \leq \varepsilon \leq 1$$

pour tout $u \in E$. Puisque $< p^+ < \gamma+1$ nous aurons pour toute $\varepsilon > 0$ assez petite

$$\limsup_{u \to 0} \frac{J(u)}{\Phi(u)} \leq \frac{p^+}{\gamma+1} {C_1}^{\gamma+1} \|m\|_{L^{p_1}} \varepsilon. \tag{4.14}$$

□

Proposition 4.10. *Sous les hypothèses du théorème (4.1), pour tout $u \in E$ tel que $\|u\| > A$, A une constante assez grande, il existe ε telle que :*

$$\frac{J(u)}{\Phi(u)} \leq p^+ C_1^{\tau} \left(M \|\alpha\|_{L^{(\frac{p^*_-}{\tau})'}} + \frac{p^+ A^{\gamma+1-\tau}}{\gamma+1} \|m\|_{L^{\frac{p^*_-}{p^*_- - \tau}}} \right) \varepsilon \tag{4.15}$$

Démonstration. En utilisant L'inégalité de Hölder et l'inégalité de Young et l'inégalité de Sobolev, on obtient pour tout $u \in E \backslash \{0\}$ pour $\|u\| > 1$:

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x,u)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n(|u|>A)} F(x,u)\, dx + \int_{\mathbb{R}^n(|u|\leq A)} F(x,u)\, dx$$

de plus

$$\frac{1}{\Phi(u)} \leq \frac{p^+}{\|u\|^{p^-}} mbox, pourtour\ \|u\| \geq A \geq 1,$$

nous aurons donc avec l'hypothèse du théorème (4.1) et l'inégalité (4.7)

$$\begin{aligned}
\frac{J(u)}{\Phi(u)} &\leq \frac{p^+ \int_{\mathbb{R}^n(|u|>A)} F(x,u)\,dx}{\|u\|^{p^-}} + \frac{p^+ \int_{\mathbb{R}^n(|u|\leq A)} F(x,u)\,dx}{\|u\|^{p^-}} \\
&\leq \frac{p^+ M \int_{\mathbb{R}^n(|u|>A)} \alpha(x)|u|^\tau\,dx}{\|u\|^{p^-}} + \frac{p^+}{\gamma+1} \frac{\int_{\mathbb{R}^n(|u|\leq A)} m(x)|u|^{\gamma+1} dx}{\|u\|^{p^-}} \\
&\leq \frac{pMC_1^\tau \|\alpha\|_{L^{(\frac{p^*_-}{\tau})'}} \|u\|^\tau}{\|u\|^{p^-}} + \frac{p^+ A^{\gamma+1-\tau}}{\gamma+1} \frac{\int_{\mathbb{R}^n(|u|\leq A)} m(x)|u|^\tau dx}{\|u\|^{p^-}}
\end{aligned}$$

On utilise le fait que $m \in L^{\frac{p^*_-}{p^*_- - \tau}}(\mathbb{R}^n)$ puisque $\frac{p^*_-}{p^*_- - \tau} \in [\frac{p^*_-}{p^*_- - 1}, \frac{p^*_-}{p^*_- - (\gamma+1)}]$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{J(u)}{\Phi(u)} &\leq \frac{p^+ MC_1^\tau \|\alpha\|_{L^{(\frac{p^*_-}{\tau})'}}}{\|u\|^{p^- - \tau}} + \frac{p^+ A^{\gamma+1-\tau} C_1^\tau}{\gamma+1} \frac{\|m\|_{L^{\frac{p^*_-}{p^*_- - \tau}}} \|u\|^\tau}{\|u\|^{p^-}} \\
&\leq \frac{p^+ MC_1^\tau \|\alpha\|_{L^{(\frac{p^*_-}{\tau})'}}}{\|u\|^{p^- - \tau}} + \frac{p^+ A^{\gamma+1-\tau} C_1^\tau}{\gamma+1} \frac{\|m\|_{L^{\frac{p^*_-}{p^*_- - \tau}}}}{\|u\|^{p^- - \tau}}
\end{aligned}$$

Finalement puisque $\tau < p^-$ nous aurons $\frac{1}{\|u\|^{p^- - \tau}} \leq \varepsilon$ pour un A assez grande, ceci va nous donner :

$$\frac{J(u)}{\Phi(u)} \leq p^+ C_1^\tau \left(M\|\alpha\|_{L^{(\frac{p^*_-}{\tau})'}} + \frac{p^+ A^{\gamma+1-\tau}}{\gamma+1} \|m\|_{L^{\frac{p^*_-}{p^*_- - \tau}}} \right) \varepsilon \tag{4.16}$$

pour $\|u\| > A$, alors on obtient :

$$\limsup_{\|u\|\to+\infty} \frac{J(u)}{\Phi(u)} \leq p^+ C_1^\tau \left(M\|\alpha\|_{L^{(\frac{p^*_-}{\tau})'}} + \frac{p^+ A^{\gamma+1-\tau}}{\gamma+1} \|m\|_{L^{\frac{p^*_-}{p^*_- - \tau}}} \right) \varepsilon \tag{4.17}$$

□

Remarque 4.11. *Finalement, pour arbitraire ε et l'inégalité* (4.14) *et* (5.15), *on obtient*

$$\max \left\{ \limsup_{\|u\|\to+\infty} \frac{J(u)}{\Phi(u)}, \limsup_{u\to 0} \frac{J(u)}{\Phi(u)} \right\} \leq 0$$

Toutes les conditions de Théorème de "Ricceri" sont satisfaites (avec $x_0 = 0$). En effet Les conditions (Ric1), (Ric2), (Ric3)et (Ric4) sont assurées par le lemme (4.5). La condition (Ric5) est assurée par le lemme (4.6), la condition (Ric8) assurée par le lemme (4.7). Les inégalités (Ric7) sont assurées par la remarque (4.11). La condition (Ric6) est facile à vérifier en effet : la fonctionnelle $\Phi(u)$ possède un stricte minimum local u_0 avec $\Phi(u_0) = J(u_0) = 0, \ \ u_0 = 0$.

nous pouvons maintenant affirmer que le problème (4.1) possède au moins trois solutions faibles, ces solutions faibles qui ne sont que les points critiques de la fonction $\Phi - \lambda J - \mu\Psi$.

4.6 Exemple d'une équation généralisée

Nous allons considérer une constante τ telle que :

$$\frac{\gamma+1}{2} < \tau < p^-,$$

et ε assez petite

$$0 < \varepsilon < \min(1, \tau - \frac{\gamma+1}{2})$$

et pour la fonction $F(x,t) = \int_0^u f(x,t)dt$, nous pouvons choisir

$$F(x,u) = \frac{1}{\tau-\varepsilon} m(x)|u|^{\tau-\varepsilon} \ln|u| \ \ si \ \ u \neq 0, \ \ F(x,0) = 0$$

Proposition 4.12. *Pour une fonction exposant $p(x)$ qui Lipschitzienne et $2 \leq p^- \leq p(x) \leq p^+ < N$. Il existe une constante positive ω telle que pour tout intervalle compact $[a,b] \subset]\omega, +\infty[$, il existe $r > 0$ avec la propriété suivante, pour tout $\lambda \in [a,b]$, il existe $\sigma > 0$ telle que pour tout $\mu \in [0,\sigma]$, le problème $(P_{\lambda,\mu})$:*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x)|\nabla u|^{p(x)}\nabla u) + b(x)|u|^{p(x)}u = \lambda f(x,u) + \mu g(x,u) \quad in \ \mathbb{R}^5 \\ \qquad u \in W_0^{p(x)}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{4.18}$$

possède au moins trois solutions faibles dans $W_0^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ dont les normes sont inférieures à la constante r.

Démonstration. La condition (4.3) est satisfaite puisque $\ln|u| + \frac{1}{\tau-\varepsilon} < |u|^{\gamma-\tau+1+\varepsilon}$, et ce n'est pas difficile de voir que toutes les hypothèses de Théorème (4.1) sont satisfaites $\square$

Remarque 4.13. *Nous pouvons considérer à titre d'exemple de fonction exposant $p(x) = cos(|x|) + 3,001$ avec la dimension $N = 5$ Noua aurons :*

$$p(x) = 3.001 + cos(|x|); p^- = 2,001; p^+ = 4,001; p^*_- > 10,$$

la fonction $p(x)$ satisfait les conditions de théorème 5.1 pour γ et ν telles que :

$$4,001 < \gamma + 1 < \nu < 10 < p^*_-$$

et

$$m \in L^{\frac{3,001}{2,001}}(\mathbb{R}^5) \cap L^{\frac{\nu}{\nu-1}(\frac{3,001}{4,001-\gamma+1})}(\mathbb{R}^5).$$

4.7 Étude d'un système faisant intervenir l'opérateur non linéaire généralisé de p-Laplacien.

Dans cette section nous considérons le système à deux -équations non-linéaire qui fait intervenir $(p(x), q(x))$-Laplacien suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(a(x)\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) + b(x)|u|^{p(x)-2}u = \lambda f_u(x,u,v) + \mu g_u(x,u,v) \quad \textit{dans } \mathbb{R}^N \\ -\operatorname{div}\left(a'(x)|\nabla v|^{q(x)-2}\nabla v\right) + b'(x)|u|^{q(x)-2}u = \lambda f_v(x,u,v) + \mu g_v(x,u,v) \quad \textit{dans } \mathbb{R}^N \\ u \in W_0^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N), v \in W_0^{1,q(x)}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{4.19}$$

où

$$2 < p^- < p(x) < p^+ < N,$$
$$2 < q^- < q(x) < q^+ < N$$

et $\lambda, \mu > 0$ sont des paramètres, $f(x,t,t')$ et $g(x,t,t')$ sont deux fonctions ayant une critique croissance en t, t'. Les fonctions $a(x), a'(x), b(x), b'(x)$ sont mesurables telles que $a, a' \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $b, b' \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ avec $\inf_{x\in\mathbb{R}^N} a'(x)$, $\inf_{x\in\mathbb{R}^N} a(x) > 0$, $\inf_{x\in\mathbb{R}^N} b'(x)$, $\inf_{x\in\mathbb{R}^N} b(x) > b_0 > 0$. Plus précisément, nous supposons que f satisfait les conditions suivantes :

$$|f(x,t,t')| \leq m(x)(|t|^\gamma + |t'|^\gamma) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \textit{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{4.20}$$

où $m(x)$ est une fonction positive telle que

$$m \in L^{\frac{s^-}{s^- - 1}}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\frac{\nu}{\nu-1}(\frac{s^-}{s^- - (\gamma+1)})}(\mathbb{R}^n),$$

avec

$$s^+ < \gamma + 1 < \nu < s^*_-$$

où

$$s^+ = max(p^+, q^+), \quad s^- = min(p^-, q^-), \quad s^*_- = min(p^*_-, q^*_-)$$

avec

$$p_-^* = \frac{np^-}{n-p^+}, q_-^* = \frac{nq^-}{n-q^+}.$$

$$\sup_{(x,t,t')\in\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}-\{0\})^2} \frac{|g(x,,t,t')|}{h(x)(|t|^{p_-^*}+|t'|^{p_-^*})} < +\infty, \tag{4.21}$$

pour une fonction $h(x)$ telle que :

$$h \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ et } g(x,0,0) = 0.$$

Nous cherchons à montrer l'existence des solutions faibles de (4.2) *dans l'espace produit $W_0^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \times W_0^{1,q(x)}(\mathbb{R}^N)$ menu de la norme Cartésien :*

$$\|(u,v)\| = \|u\|_{W_0^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)} + \|v\|_{W_0^{1,q(x)}(\mathbb{R}^N)}$$

Nous notons :

$$E = W_0^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \quad E' = W_0^{1,q(x)}(\mathbb{R}^N)$$

et pour $U = (u,v) \in E \times E$:

$$f(x,U) = f_u(x,u,v) + f_v(x,u,v),$$

$$g(x,U) = g_u(x,u,v) + g_v(x,u,v),$$

et

$$F(x,u,v) = F_u(x,u,v) + F_v(x,u,v) = \int_0^u f_u(x,s,v)\,ds + \int_0^v f_v(x,u,s)\,ds$$

Notre résultat principal concernant le système de deux équations (5.2) est suivant :

Théorème 4.14. *Supposons* (4.20) *et que pour $1 < \tau < s^-$ et une fonction positive $\alpha(x) \in L^{(\frac{s_-^*}{\tau})'}(\mathbb{R}^n)$ telles que*

$$\limsup_{|U|\to+\infty} \frac{F(x,U)}{\alpha(x)|U|^\tau} \leq M < +\infty \quad \textit{uniformément} \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{4.22}$$

et

$$\sup_{U\in E\times E'} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} F(x,U)dx \right\} > 0$$

Si on pose

$$\omega = \frac{1}{s^+} \inf \left\{ \frac{\Phi_1(u) + \Phi_2(v)}{\int_{\mathbb{R}^n} F(x,U)dx} : (u,v) \in W \right\} \tag{4.23}$$

où

$$W = \left\{ U \in E \times E', \int_{\mathbb{R}^n} F(x,U)\,dx > 0 \right\}$$

$$\Phi_1(u) = \int_{\mathbb{R}^n} (a(x)|\nabla u|^{p(x)} + b(x)|u|^{p(x)})dx$$

$$\Phi_2(v) = \int_{\mathbb{R}^n} (a'(x)|\nabla v|^{q(x)} + b'(x)|v|^{q(x)})dx$$

Alors pour chaque interval compact $[a, b] \subset]\omega, +\infty[$*, il existe* $r_1 > 0$ *avec la propreté : Pour chaque* $\lambda \in [a, b]$*, et chaque fonction* $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *qui est mesurable in* Ω *et continue dans* $\mathbb{R}$ *satisfaisant* (4.21)*, il existe* $\delta > 0$ *telle que pour chaque* $\mu \in [0, \delta]$*, l'équation système* (4.2) *possède au moins trois solutions faibles, dont les normes inférieures à* r_1

Définition 4.15. *Nous définissons une solution faible de problème (5.2) tout couple de fonctions* $(u, v) \in E \times E'$ *vérifiant :*

$$\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla w + \int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u|^{p(x)-2}uw = \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda f_u(x, u, v) + \mu g_u(x, u, v))v\, dx, \ \forall w \in E$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} a'(x)|\nabla v|^{q(x)-2}\nabla v \nabla z + \int_{\mathbb{R}^n} b'(x)|v|^{q(x)-2}vz = \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda f_v(x, u, v) + \mu g_v(x, u, v))z\, dx, \ \forall z \in E'$$

Remarque 4.16. *Pour prouver notre théorème nous avons besoin de définir les fonctionnelles suivantes :*
$\Phi, J, \Psi : E \times E' \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\Phi(U) = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\frac{1}{p(x)}(|\nabla u|^{p(x)} + b(x)|u|^{p(x)}) + \frac{1}{q(x)}(|\nabla v|^{q(x)} + b'(x)|v|^{q(x)})\Big)dx$$

et

$$J(U) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x, U)\, dx$$

et

$$\Psi(U) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x, U)\, dx$$

Lemme 4.17. *Sous le hypothèses du théorème* (4.14)*, pour tout* $U \in E \times E'$ *la fonctionnelle* $\Phi \in \mathcal{W}_{E\times E'}$ *est coércive, faiblement semi-continue inférieurement, bornée sur tout borné de* $E \times E'$*, différentiable avec*

$$\Phi'(U)(w, z) = \Phi_1'(u)(w) + \Phi_2'(v)(z), \ \ \forall (w, z) \in E \times E',$$

avec

$$\Phi_1'(u)(w) \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla w + \int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u|^{p(x)-2}uw\, dx$$

et

$$\Phi_2'(v)(z) \int_{\mathbb{R}^n} a'(x)|\nabla v|^{q(x)-2}\nabla v \nabla z + \int_{\mathbb{R}^n} b'(x)|u|^{q(x)-2}vz\, dx$$

Démonstration. Nous avons :

$$\|u\|_E^{s^-} + \|v\|_{E'}^{s^-} \geq 2\Big(\frac{\|u\|_E + \|v\|_{E'}}{2}\Big)^{s^-} = \frac{\|U\|^{s^-}}{2^{s^- -1}}$$

$$\|u\|_E^{p(x)} + \|v\|_{E'}^{q(x)} \geq \|u\|_E^{s^-} + \|v\|_{E'}^{s^-} - ({}_u\|u\|_E^{s^+} +_v \|u\|_E^{s^+})$$

avec ${}_t = 1 si \|t\| < 1$

$$\|u\|_E^{p(x)} + \|v\|_{E'}^{q(x)} \geq \frac{\|U\|^{s^-}}{2^{s^- -1}} - 2\ \forall U \ \ avec\ \|U\| > 1$$

cei nous donne ;

$$\Phi(U) \geq C\frac{\|U\|^{s^-}}{2^{s^- -1}} - 2,\ \forall U \ \ avec\ \|U\| > 1$$

ce nous donne la coercivité de Φ.
La fonctionnelle Φ est convexe, parce que la fonction $h : [0, \infty[\to \mathbb{R};\ h(t) = t^s$ avec $s > 2$ est convexe.
La proposition (1.12) du chapitre 1, nous affirme que Φ est bornée sur tous borné de E'. Le fait que :

$$\langle \Phi'(U), U = \|u\|_E^{p(x)} + \|v\|_{E'}^{q(x)}$$

$$\langle \Phi'(U), U\rangle \geq \frac{\|U\|^{s^-}}{2^{s^- -1}} - 2\ \forall\ U\ avec\ \|U\| > 1$$

Ceci nous affirme que Φ' est coércive.
Montrons que Φ' est uniformément monotone. De L'inégalité algébrique

$$(|a|^{t-2}a - |b|^{t-2}b)(a-b) \geq 2^{-t}|a-b|^t\ \forall a, b \in \mathbb{R}^N$$

qui est vraie $\forall t \geq 2$. Nous déduisons Φ' est uniformément monotone. Enfin nous déduisons de la proposition (1.27) du chapitre 1, que Φ' possède une fonction inverse continue dans X^*. Φ est faiblement semi continue inférieurement C^1 fonction, appartement à $\mathcal{W}_{E\times E'}$ du fait que $\Phi(U)$ n'est que la somme de $\Phi_1(u) + \Phi_2(v)$.

□

Lemme 4.18. *Sous le hypothèses du théorème 5.14, la fonctionnele J est bien définie et continue Gâteaux différentiable avec*

$$J'(U)(w, z) = \int_{\mathbb{R}^n} f_u(x, u, v)w\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} f_v(x, u, v)z\, dx$$

avec

$$J_1(u) = \int_{\mathbb{R}^n} F_u(x, u, v)\, dx \ \ et\ \ J_2(u) = \int_{\mathbb{R}^n} F_v(x, u, v)\, dx$$

De plus, la fonctionnelle $J'(.)$ est compacte de $E \times E'$ vers $(E \times E')^*$.

Démonstration. La fonctionnelle $J(U)$ n'est que la somme de $J_1(u) + J_2(v)$ donc J va avoir les mêmes propriétés topologiques que J_1 et J_2 i.e $J'(.)$ est compacte de $E \times E'$ vers $(E \times E')^*$. $\square$

Lemme 4.19. *Sous le hypothèses du théorème 4.14, la fonctionnelle* $\Psi(U) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x,U)\,dx$ *avec* $G(x,U) = \int_0^u g_u(x,t,v)dt + \int_0^v g_v(x,u,s)ds$ *est bien définie et Gâteaux différentiable sur* $(E \times E')$, *avec une dérivée compacte.*

Démonstration. La fonctionnelle Ψ n'est que la somme $\Psi(U) = \Psi_1(u) + \Psi_2(v)$ avec $\Psi_1(u) = \int_{\mathbb{R}^n} G_u(x,u,v)\,dx$ et $\Psi_2(u) = \int_{\mathbb{R}^n} G_v(x,u,v)\,dx$. Alors $\Psi(U)$ est bien définie et Gâteaux différentiable sur $E \times E'$, avec une dérivée compacte.

Proposition 4.20. *Sous le hypothèses du théorème 4.14, Les fonctions* $\Phi(U)$ *et* $J(U)$ *vérifient l'inégalité suivante ;*

$$\max\left\{\limsup_{\|U\|\to+\infty} \frac{J(U)}{\Phi(U)}, \limsup_{U\to 0} \frac{J(U)}{\Phi(U)}\right\} \leq 0$$

Démonstration. Nous remarquons que Φ satisfait :

$$\frac{\|u\|_E^{p(x)}}{p^+} + \frac{\|v\|_{E'}^{q(x)}}{q^+} \leq \Phi(U) \leq \frac{\|u\|_E^{p(x)}}{p^-} + \frac{\|v\|_{E'}^{q(x)}}{q^-}$$

alors pour $\|u\|_E \leq 1$ *et* $\|v\|_{E'} \leq 1$ nous aurons :

$$\frac{\|u\|_E^{p^+} + \|v\|_{E'}^{q^+}}{s^+} \leq \Phi(U) \leq \frac{\|u\|_E^{p^-} + \|v\|_{E'}^{q^-}}{s^-}$$

donc pour des très petites valeurs de $\|u\|_E$, *et*, $\|v\|_{E'}$ nous aurons :

$$C_1 \frac{(\|u\|_E + \|v\|_{E'})^{s^+}}{s^+} \leq \Phi(U) \leq C_2 \frac{(\|u\|_E + \|v\|_{E'})^{s^-}}{s^-}$$

$$C_1 \frac{(\|U\|_{E\times E'})^{s^+}}{s^+} \leq \Phi(U) \leq C_2 \frac{(\|U\|_{E\times E'})^{s^-}}{s^-} \tag{4.24}$$

aussi pour des grandes valeurs $\|u\|_E$, *et*, $\|v\|_{E'}$ nous aurons à distinguer deux cas :
Le premier cas Si $\|u\|_E \geq 1$, *et*, $\|v\|_{E'} \geq 1$.

$$\frac{(\|u\|_E + \|v\|_{E'})^{s^-}}{s^+} \leq \Phi(U) \leq \frac{(\|u\|_E + \|v\|_{E'})^{s^+}}{s^-}$$

Ceci nous donne ;

$$C_1 \frac{(\|U\|_{E\times E'})^{s^-}}{s^+} \leq \Phi(U) \leq C_2 \frac{(\|U\|_{E\times E'})^{s^+}}{s^-} \tag{4.25}$$

Le deuxième cas Si $\|u\|_E \leq 1$, *ou*, $\|v\|_{E'} \geq 1$;

$$C_1' + C_1 \frac{(\|U\|_{E\times E'})^{s^-}}{s^+} \leq \Phi(U) \leq C_2' + C_2 \frac{(\|U\|_{E\times E'})^{s^+}}{s^-}$$

Ces inégalités (4.24), (4.25) vont jouer un rôle (similaire à celui (4.7) et (4.8) dans section 2.) dans la preuve de proposition. □

Toutes les conditions de Théorème de "Ricceri" sont satisfaites (avec $U_0 = (0,0)$). En effet Les conditions (Ric1), (Ric2), (Ric3) et (Ric4) sont assurées par le lemme (4.17). La condition (Ric5) est assurée par le lemme (4.18), la condition (Ric8) assurée par le lemme (4.19). Les inégalités (Ric7) sont assurées par la proposition (4.20). La condition (Ric6) est facile à vérifier en effet : la fonctionnelle $\Phi(U)$ possède un stricte minimum local U_0 avec $\Phi(U_0) = J(U_0) = 0,\ \ U_0 = (0,0)$.

4.8 Exemples

Nous allons considérer une constante τ telle que :

$$\frac{\gamma+1}{2} < \tau < s_-^*,$$

et ε pour assez petite

$$0 < \varepsilon < \min(1, \tau - \frac{\gamma+1}{2})$$

et pour la fonction $F(x,t,s) = \int_0^u F_u(x,t,s)dt + \int_0^v F(x,t,s)ds$, on peut choisir

$$F(x,u,v) = \frac{1}{\tau-\varepsilon} m(x)|u|^{\tau-\varepsilon} \ln|u| + \frac{1}{\tau-\varepsilon} m(x)|v|^{\tau-\varepsilon} \ln|v|$$

avec $F(x,0,0) = 0$.

Proposition 4.21. *Pour une fonction exposant $p(x), q(x)$ qui Lipschitzienne et $2 \leq p^- \leq p(x) \leq p^+ < N,\ \ 2 \leq q^- \leq q(x) \leq q^+ < N$. Il existe une constante positive ω telle que pour tout intervalle compact $[a,b] \subset]\omega, +\infty[$, il existe $r > 0$ avec la propriété suivante, pour tout $\lambda \in [a,b]$, il existe $\sigma > 0$ telle que pour tout $\mu \in [0,\sigma]$, le problème système $(p_{\lambda,\mu})$*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(a(x)\nabla u|^{p(x)}\nabla u\right) + b(x)|u|^{p(x)}u = \lambda f_u(x,u,v) + \mu g_u(x,u,v) \\ -\operatorname{div}\left(a'(x)|\nabla v|^{q(x)}\nabla v\right) + b'(x)|u|^{q(x)}u = \lambda f_v(x,u,v) + \mu g_v(x,u,v) \quad (4.26) \\ u \in W_0^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N), v \in W_0^{1,q(x)}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

possède au moins trois solutions faibles dans $W_0^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \times W_0^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ dont les normes sont inférieures à la constante r.

Démonstration. La condition (4.3) est satisfaite puisque $\ln|u| + \frac{1}{\tau-\varepsilon} < |u|^{\gamma-\tau+1+\varepsilon}$, et ce n'est pas difficile de voir que tout les hypothèses de Théorème 4.1 sont satisfaites □

Remarque 4.22. *Nous pouvons considérer à titre d'exemple de fonction exposant* $p(x) = cos(|x|) + 3,001$ *avec la dimension* $N = 5$ *Noua aurons*

$$p(x) = 3.001 + cos(|x|); p^- = 2,001; p^+ = 4,001; p^*_- > 10,$$

$$q(x) = 3.001 + sin(|x|); q^- = 2,001; q^+ = 4,001; q^*_- > 10,$$

les fonctions $p(x),\ q(x)$ *vérifient les conditions de théorème 5.2.*
Pour γ *et* ν *tel que*

$$4,001 < \gamma + 1 < \nu < 10 < s^*_-$$

et

$$m \in L^{\frac{3,001}{2,001}}(\mathbb{R}^5) \cap L^{\frac{\nu}{\nu-1}(\frac{3,001}{4,001-\gamma+1})}(\mathbb{R}^5)$$

.

Chapitre 5

Étude d'un problème faisant intervenir l'opérateur de Laplace anisotropique

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier les problèmes non linéaires avec la condition de Dirichlet au bord suivant :

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \partial_{x_i}\Big(a_i(x, \partial_{x_i} u)\Big) = \lambda f(x,u) + \mu g(x,u), \quad \text{pour } x \in \Omega \\ u(x) = 0 \quad sur \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{5.1}$$

et

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \partial_{x_i}\Big(a_i(x, \partial_{x_i} u)\Big) = \lambda f_u(x,u,v) + \mu g_u(x,u,v), \quad \text{for } x \in \Omega \\ -\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \partial_{x_i}\Big(b_i(x, \partial_{x_i} u)\Big) = \lambda f_v(x,u,v) + \mu g_v(x,u,v), \quad \text{for } x \in \Omega \\ u(x) = 0, v(x) = 0 \quad on \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.2}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ est un domaine borné avec une frontière assez régulière, les fonctions $f, g \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont deux fonctions données satisfaisant certaines propriétés, les fonctions $a_i(x, s)$ sont continues vérifiant certaines conditions qui seront spécifiées dans la Section 2.
Les fonctions $p_i(x)$ doivent satisfaire la condition $2 \leq p_i(x) < N$ pour tout $x \in \Omega$ et chaque $i \in \{1, 2, ..., N\}$.
Les constantes λ, μ sont des paramètres positifs. Dans ce chapitre notre opérateur

différentiel a pour cadre fonctionnel le sous espace noté $W_0^{1,\vec{p}(x)}(\Omega)$ de l'espace anisotrope de Sobolev.

5.2 Étude d'une équation Anisotropique de Laplace

Le problème considéré dans cette section est une extension des problèmes " dans l'espace classique de Sobolev"de chapitre 5, cette extension sera vers des problèmes anisotrope. L'intérêt de transposer l'étude vers les problèmes avec des exposants variables est Liée à une grande partie aux applications faisant intervenir des matériaux non-homogènes. Il a été établi que pour un traitement approprié de ces matériaux non-homogènes, les espaces classiques de Sobolev sont plus valables, ceci va pousser les chercheurs à permettre à l'exposant de varier selon chaque direction. Nous pouvons citer les Fluides électro rhéologiques ou les fluides thermo-rhéologiques qui jouent un rôle très important dans les embrayages hydrauliques, freins, amortisseurs, Robotique, technologie spatiale, écrans tactiles, etc. (Voir par exemple [75], [82], [7] et [65]).

Dernièrement, une nouvelle théorie a été développe en raison de la préoccupation pour certaines matériaux non homogènes qui se comportent différemment sur plusieurs directions d'espace, et comme conséquence, les espaces anisotropes à exposants variables ont été introduits, voir [81], [30] et [48].

Il n'est pas étonnant que, lors du passage d'un exposant variable à un exposant variable Anisotrope, de nouvelles difficultés surviennent. Pour surmonter ces difficultés, nous combinons les techniques classiques avec Les techniques récentes associées aux traitement des problèmes anisotropes avec des exposants variables. Néanmoins, le problème traité ici est plus compliqué. C'est parce que, d'une part, nous travaillons l'espace de Sobolev anisotrope avec exposant variable des fonctions qui sont nulles Sur la frontière $W_0^{1,\vec{p}(x)}(\Omega)$, au lieu de l'espace Sobolev non anisotrope Avec un exposant variable des fonctions qui sont nulles sur la frontière $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Et d'une autre part, Nous utilisons des opérateurs plus générales que l'opérateur Laplacien anisotrope standard $\Delta_{\vec{p}(x)}(u) = -\sum_{i=1}^{N} \partial_{x_i}(|\partial_{x_i} u|^{p_i(x)} \partial_{x_i} u)$.

Remarque 5.1. *Nous mentionnons que les suppositions qui vont être imposer aux fonctions a_i nous permit de prendre*

$$a_i(x,s) = |s|^{p_i(x)-2}s \quad \textit{pour tout} i \in \{1,\dots,N\},$$

en particulier notre opérateur $\sum_{i=1}^{N} \partial_{x_i} a_i\left(x, \partial_{x_i} u\right)$ *devient le* $\vec{p}(\cdot)$*-Laplacien qui a été étudié dans [49].*

$$\Delta_{\vec{p}(x)}(u) = \sum_{i=1}^{N} \partial_{x_i}\Big(|\partial_{x_i} u|^{p_i(x)-2}\partial_{x_i} u\Big).$$

Nous considérons le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{N} \partial_{x_i}\Big(a_i(x,\partial_{x_i} u)\Big) = \lambda f(x,u) + \mu g(x,u), \quad \text{pour } x \in \Omega \\ u(x) = 0 \quad sur \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{5.3}$$

Où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ avec une frontière assez régulière $\partial\Omega$, concernant la fonction vectorielle $\vec{p}(x)$ avec $p_i^+ = \sup_{x\in\Omega} p_i(x)$ et $p_i^- = \inf_{x\in\Omega} p_i(x)$, nous introduisons les notations suivantes $\vec{p}_+$ $\vec{p}_-$,

$$\vec{p}_+ = (p_1^+, ..., p_N^+), \;\; \vec{p}_- = (p_1^-, ..., p_N^-),$$

et p_+^+ , p_-^+ , p_-^- $\in \mathbb{R}^N$ avec

$$p_+^+ = max\Big\{p_1^+, .., p_N^+\Big\} \;, p_-^+ = max\Big\{p_1^-, .., p_N^-\Big\} \;, p_-^- = min\Big\{p_1^-, .., p_N^-\Big\}$$

nous supposons que :

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i^-} > 1$$

nous définissons les constantes suivantes p_-^* et $p_{-,\infty}$ par :

$$p_-^* = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i^-} - 1}, \quad , p_{-,\infty} = max\Big\{p_-^+, p_-^*\Big\}$$

Concernant les fonctions $a_i(x,s), f(x,t), g(x,t)$, nous définissons ,

$$A_i(x,s) = \int_0^s a_i(x,t)\,dt, \quad F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\,dt, \quad G(x,s) = \int_0^s g(x,t)\,dt.$$

Ces fonctions doivent satisfaire les hypothèses suivantes pour tout $i \in \Big\{1,\dots,N\Big\}$:

(A1) Il existe une constante positive c_i, c'_i telle que la fonction a_i hemi-continue satisfait,

$$c'_i|s|^{p_i(x)-1} \leq |a_i(x,s)| \leq c_i\left(d_i(x) + |s|^{p_i(x)-1}\right),$$

pour tout $x \in \Omega$ et tout $s \in \mathbb{R}$, où $d_i \in L^{p'(.)}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p_i(x)} + \frac{1}{p'_i(x)} = 1$.

(A3) La condition de monotonie :

$$\left[a_i(x,s) - a_i(x,t)\right](s-t) \geq \left[s^{p_i(x)-2}s - t^{p_i(x)-2}t\right](s-t)$$

est vraie pour tout $x \in \Omega$ et tout $s, t \in \mathbb{R}$ avec $s \neq t$.

(A3) $A_i(x,0) = 0$ pour tout $x \in \Omega$, et $A_i(x,.)$ est continue convexe.

(FG) les fonctions $f, g \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$|f(x,t)|, |g(x,t)| \leq C|t|^{\rho(x)-1} \forall (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$$

avec C est une constante positive, $\rho : \Omega \to (1,\infty)$ une fonction continue telle que :

$$1 < \rho^- \leq \rho^+ < p_\infty^-$$

Définition 5.2. *On définit la solution faible de problème* (5.1) *comme une fonction* $u \in W_0^{1,\vec{p}(x)}(\Omega)$ *qui satisfait :*

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^N a_i(x, \partial_{x_i} u)\partial_{x_i} v\, dx = \lambda \int_\Omega f(x,u)v\, dx \ + \int_\Omega \mu g(x,u) v\, dx, = 0,$$

pour tout $v \in W_0^{1,\vec{p}(x)}(\Omega)$.

D'apres la proposition (1.21) du chapitre 1, l'espace $\left(W^{1,\vec{p}(\cdot)}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,\vec{p}(\cdot)}(\Omega)}\right)$ est un espace de Banach, réflexif. Nous définissons :

$$\theta = inf\left\{\frac{\sum_{i=1}^N \int_\Omega A_i(x,u)dx}{\int_\Omega F(x,t)dx} : \ u \in W_0^{1,p(\vec{x})}(\Omega), \ \int_\Omega F(x,t)dx > 0\right\}$$

Notre résultat concernant l'équation anisotrope (5.1) est le suivant :

Théorème 5.3. *Nous supposons que* $2 < p_-^- \leq p_+^+ < N$ *et* $(A1), (A2), (A3), (A4)$ *et* (FG)*. De plus nous supposons que :*

$$\max\left\{\limsup_{t\to 0} \frac{\sup_{x\in\Omega} F(x,t)}{|t|^{p_+^+}}, \limsup_{t\to\infty} \frac{\sup_{x\in\Omega} F(x,t)}{|t|^{p_-^-}}\right\} \leq 0 \tag{5.4}$$

et

$$\sup_{u \in W_0^{1,p(\vec{x})}(\Omega)} \int_\Omega F(x,t)dx > 0.$$

Alors pour chaque interval compact $[a,b] \subset]\theta, +\infty[$*, il existe* $r > 0$ *avec la propriété suivant : pour chaque* $\lambda \in [a,b]$ *et pour toute fonction* G *satisfaisant (FG) il existe* $\sigma > 0$ *telle que pour chaque* $\mu \in [0,\sigma]$*, le problème* (5.1) *possède au moins trois solutions faibles dans* $W_0^{1,\vec{p}(x)}(\Omega)$ *dont les normes sont inférieures à* r.

L'idée est d'appliquer le principe variationnel de "Théorème de Ricceri" [9], en prouvant que les fonctionnelles suivantes $\Phi, J, \Psi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$\Phi(u) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} A_i(x, \partial_{x_i} u)\, dx$$

et

$$J(u) = \int_\Omega F(x, u)\, dx$$

et

$$\Psi(u) = \int_\Omega G(x, u)\, dx$$

vérifient les conditions Ric1, Ric2, Ric3, Ric4, Ric5, Ric6, Ric7 et Ric8 du théorème de principe de Ricceri.

5.2.1 Lemme de compacité

Pour simplifier les notations nous notons : $E = W_0^{1,\vec{p}(x)}(\Omega)$.

Lemme 5.4. $\Phi(u)$ *une fonction est bien définie, coércive, bornée sur tout borné* Ω *de* E. $\Phi'(u) : E \longrightarrow E^*$ *est bien définie, coércive, hemi-continue, monotone.*

Démonstration. Dans un premier temps nous montrons que Φ est bien définie sur E, bornée sur tout borné de E et $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ avec la dérivée donnée par :

$$\langle \Phi'(u), u \rangle = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i(x, \partial_{x_i} u) \partial_{x_i} u \; dx$$

Remarque 5.5. *L'une des complications qui émerge lorsque nous travaillons dans les anisotropes, est que la norme* $\|u\|_E = \sum_{i=1}^{N} \|\partial_{x_i} u\|_{L^{p_i(x)}}$ *peut tendre vers* $+\infty$ *sans que toutes* $\|\partial_{x_i} u\|_{L^{p_i(x)}}$ *tendent vers* $+\infty$. *Autrement dit pour que* $\|u\|_E$ *tend vers* $+\infty$ *il suffit qu'elle tend vers* $+\infty$ *dans une direction (i.e)* $\|\partial_{x_{i_0}} u\|_{L^{p_{i_0}(x)}} \to +\infty$ *pour un certain* $1 \leq i_0 \leq N$.
Pour surmonter cette difficulté nous allons définir pour chaque $u \in E$ *tel que* $\|u\|_{p(\vec{x})} > 1$, *la notation suivante :*

$$\delta_i = \begin{cases} p_+^+ \ si & |\partial_{x_i} u|_{p_i(.)} < 1 \\ p_-^- \ si & |\partial_{x_i} u|_{p_i(.)} > 1 \end{cases}$$

Remarque 5.6. *L'inégalité suivante :*

$$\sum_{i=1}^{N} |\partial_{x_i} u|_{p_i(.)}^{p_-^-} \geq N \Big(\frac{\sum_{i=1}^{N} |\partial_{x_i} u|_{p_i(.)}}{N} \Big)^{p_-^-} = \frac{\|\partial_{x_i} u\|_{\vec{p}(.)}^{p_-^-}}{N^{p_-^- - 1}}$$

tient pour tout $u \in E$.

Remarque 5.7. *Pour tout* $\|u\|_{\vec{p(.)}} > 1$ *nous avons :*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \int_\Omega |\partial_{x_i}u|^{p_i(x)}dx &\geq \sum_{i=1}^N |\partial_{x_i}u|_{p_i(.)}^{\delta_i} \\ &= \sum_{i,\delta_i=p_+^+} |\partial_{x_i}u|_{p_i(.)}^{p_+^+} + \sum_{i,\delta_i=p_-^-} |\partial_{x_i}u|_{p_i(.)}^{p_-^-} \\ &\geq \sum_{i=1}^N |\partial_{x_i}u|_{p_i(.)}^{p_-^-} - \sum_{i,\delta_i=p_+^+} |\partial_{x_i}u|_{p_i(.)}^{p_+^+}\end{aligned}$$

la remarque(5.5) précédente nous affirme :

$$\sum_{i=1}^N |\partial_{x_i}u|_{p_i(.)}^{p_-^-} \geq N\Big(\frac{\sum_{i=1}^N |\partial_{x_i}u|_{p_i(.)}}{N}\Big)^{p_-^-} = \frac{\|\partial_{x_i}u\|_{\vec{p}(.)}^{p_-^-}}{N^{p_-^- -1}}$$

de plus puisque $|\partial_{x_i}u|_{p_i(.)}^{p_+^+} \geq 1$ nous aurons $\sum_{i,\delta_i=p_+^+} |\partial_{x_i}u|_{p_i(.)}^{p_+^+} \geq N$, en combinant ces deux faits nous avons :

$$(I1) \quad \sum_{i=1}^N \int_\Omega |\partial_{x_i}u|^{p_i(x)}dx \geq \frac{\|u\|_{\vec{p}(.)}^{p_-^-}}{N^{p_-^- -1}} - N$$

et

$$(I2) \quad \sum_{i=1}^N \int_\Omega |\partial_{x_i}u|^{p_i(x)}dx \leq \|u\|_{\vec{p}(.)}^{p_+^+} + N$$

Montrons que Φ est bien définie, en effet de l'hypothèse (A1) nous avons ;

$$c'_i|s|^{p_i(x)-1} \leq a_i(x,s) \leq c_i\left(d_i(x) + |s|^{p_i(x)-1}\right),$$

$$c'_i\int_0^u |s|^{p_i(x)-1}ds \leq \int_0^u a_i(x,s)ds \leq c_i\int_0^u \left(d_i(x) + |s|^{p_i(x)-1}ds\right),$$

$$c'_i\frac{1}{p_i(x)}|u|^{p_i(x)} \leq A_i(x,s) \leq c_i\left(d_i(x)u + \frac{1}{p_i(x)}|u|^{p_i(x)}\right),$$

$$c'_i\int_\Omega \frac{1}{p_i(x)}|u|^{p_i(x)}dx \leq \int_\Omega A_i(x,s)dx \leq c_i\int_\Omega \left(d_i(x)u + \frac{1}{p_i(x)}|u|^{p_i(x)}\right)dx,$$

$$\sum_1^N c'_i\int_\Omega \frac{1}{p_i(x)}|u|^{p_i(x)}dx \leq \sum_1^N\int_\Omega A_i(x,s)dx \leq \sum_1^N c_i\int_\Omega \left(d_i(x)u + \frac{1}{p_i(x)}|u|^{p_i(x)}\right)dx,$$

ceci nous donne :

$$\sum_1^N c'_i\int_\Omega \frac{1}{p_i(x)}|\partial_{x_i}u|^{p_i(x)}dx \leq \sum_1^N\int_\Omega A_i(x,\partial_{x_i}u)dx \leq \sum_1^N c_i\int_\Omega \left(d_i(x)\partial_{x_i}u + \frac{1}{p_i(x)}|\partial_{x_i}u|^{p_i(x)}\right)dx,$$

$$\sum_1^N c'_i\int_\Omega \frac{1}{p_i(x)}|\partial_{x_i}u|^{p_i(x)}dx \leq \Phi(u) \leq \sum_1^N c_i\int_\Omega d_i(x)\partial_{x_i}u + \sum_1^N c_i\int_\Omega \frac{1}{p_i(x)}|\partial_{x_i}u|^{p_i(x)}$$

$$C'\sum_{1}^{N}\int_{\Omega}\frac{1}{p_i(x)}|\partial_{x_i}u|^{p_i(x)}dx \leq \Phi(u) \leq C\big(\sum_{1}^{N}\|d_i(x)\|_{p_i'(.)}\|\partial_{x_i}u\|_{p_i(.)}+\sum_{1}^{N}\int_{\Omega}\frac{1}{p_i(x)}|\partial_{x_i}u|^{p_i(x)}\big)$$

d'après les inégalités (I1) et(I2) et le fait E s'injecte dans $L^{p_i(.)}$ nous avons avec l'inégalité de Hölder (1.8)

$$(I3)\ \ C'\frac{\|u\|_{\vec{p}(.)}^{p_-^-}}{N^{p_-^- -1}} - N \leq \Phi(u) \leq C\big(\|u\|_{\vec{p}(.)}^{p_+^+} + N + \|u\|\vec{p}(.)\big) \tag{5.5}$$

Donc Φ est bien définie.

Dans un deuxième temps, nous montrons que la fonction $\Phi(u)$ est coércive i.e. $\Phi(u)$ doit tendre vers $+\infty$ lorsque $\|u\|_{p(\vec{x})}$ tend vers ∞.

Pour montrer que $\Phi(u)$ est coércive, il suffit de la minorer avec une quantité qui va tendre vers $+\infty$.

En effet l'inégalité (I3) nous assure que Φ est coércive, puisque le terme à droite tend $\to +\infty$ nous affirme que $\Phi \to +\infty$ (i.e) Φ est coércive.

La deuxième étape est de montrer que Φ' est coércive.

En effet l'hypothèse (A1) nous donne :

$$\langle \Phi'(u), u\rangle = \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}|a_i(x,\partial_{x_i}u)|\partial_{x_i}udx \geq \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}c_i|\partial_{x_i}(u)|^{p_i(x)}\ dx$$

Alors :

$$\langle \Phi'(u), u\rangle \geq C'\frac{\|u\|_{\vec{p}(.)}^{p_-^-}}{N^{p_-^- -1}} - C$$

tient pour tout $u \in E$ avec $\|u\|_{\vec{p}(.)} > 1$, alors Φ' est coércive.

Dans un troisième temps, nous montrons que Φ' uniformément monotone.

De l'hypothese (A2) nou avons :

$$[a_i(x,s) - a_i(x,t)](s-t) \geq [s^{p_i(x)-2}s - t^{p_i(x)-2}t](s-t)$$

$$[\Phi'(x,u) - \Phi'(x,v)](u-v) \geq \sum_{1}^{N}|\partial_{x_i}u|^{p_i(x)-2}\partial_{x_i}u - |\partial_{x_i}v|^{p_i(x)-2}\partial_{x_i}v](\partial_{x_i}u - \partial_{x_i}v)$$

d'après l'inégalité

$$[s^{p-2}s - t^{p-2}t](s-t) \geq 2^{-1}|s-t|^p$$

qui tient pour tout $p \geq 2$, nous avons ;

$$[\Phi'(x,u) - \Phi'(x,v)](u-v) \geq \frac{1}{p_+^+} \sum_1^N \int_\Omega |\partial_{x_i}(u-v)|^{p_i(x)} dx$$

nous posons la fonction $\alpha[0,\infty[\rightarrow [0,\infty[$;

$$\alpha(s) = \frac{s^{p_+^+ - 1}}{2^{p_+^+}} \;\; si \;\; s \leq 1$$

$$\alpha(s) = \frac{s^{p_-^- - 1}}{2^{p_+^+}} \;\; si \;\; s \geq 1$$

avec $\alpha(0) = 0$ et $\lim_{s\rightarrow\infty}) = \infty$ et par conséquence :

$$[\Phi'(x,u) - \Phi'(x,v)](u-v) \geq \alpha(\|u-v\|_{\vec{p}(.)})\|u-v\|_{\vec{p}(.)}$$

enfin cela nous montre l'uniforme monotonie de $\Phi'(x,u)$[[18], Théorème 2.28 chap 1].

5.2.2 Preuve du résultat principal théorème 6.3.

De la proposition 6.1 nous déduisons que Φ est coércive, semi faiblement continue inférieurement du fait Φ est convexe, une fonction appartiennent à $\mathcal{W}_E$ et bornée sur tout borné de E. Aussi de la proposition 6.1, le fait que Φ' est coércive, hemi-continue et uniformément monotone sur E, nous déduisons en utilisant [[18], Théorème 2.27 chap 1] que la fonction inverse de Φ' est continue.

□

Proposition 5.8. *Si on suppose toutes les conditions de théorème 5.1, nous aurons :*

$$max\Big\{ \limsup_{\|u\|_{\vec{p}(.)}\rightarrow 0} \frac{J(u)}{\Phi(u)}, \limsup_{\|u\|_{\vec{p}(.)}\rightarrow \infty} \frac{J(u)}{\Phi(u)} \Big\} \leq 0$$

Démonstration. Pour une $\varepsilon > 0$ arbitraire, de la condition (5.4) nous déduisons qu'elles existent des constantes positivesr_1, r_2 avec $0 < r_1 < 1 < r_2$ telles que :

$$\begin{aligned} F(x,t) &\leq \varepsilon|t|^{p_+^+}, \quad \forall (x,t) \in \Omega \times [-r_1, r_1] \\ F(x,t) &\leq \varepsilon|t|^{p_-^-}, \quad \forall (x,t) \in \Omega \times (\mathbb{R} - [-r_2, r_2]). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Ainsi, nous avons $F(x,t) \leq \varepsilon|t|^{p_+^+}$ pour tout $(x,t) \in \Omega \times (\mathbb{R} - ([-r_2, -r_1] \cup [r_1, r_2]))$. Le fait que F est bornée sur tout borné de $\Omega \times \mathbb{R}$, nous pouvons choisir une constante $C_\varepsilon > 0$ et s avec $p_+^+ < s < p_{-,\infty}$, telles que :

$$F(x,t) \leq \varepsilon|t|^{p_+^+} + C_\varepsilon|t|^s, \;\; \forall, \;\; (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{5.7}$$

Dans une première étape nous montrons que

$$\limsup_{\|u\|_{\vec{p}(.)}\to 0} \frac{J(u)}{\Phi(u)} = 0$$

En effet nous avons pour tout $u \in E$ dont la norme $\|u\|_{\vec{p}(.)} < 1$, on obtient d'une part :

$$\begin{aligned}
\frac{\|u\|_{\vec{p}(.)}^{p_+^+}}{N^{p_+^+-1}} &= N\Big(\frac{\sum_{i=1}^{N}|\partial_{x_i}u|_{p_i(.)}}{N}\Big)^{p_+^+} \\
&\leq \sum_{i=1}^{N}|\partial_{x_i}u|_{p_+^+}^{p_i(.)} \\
&\leq \sum_{i=1}^{N}|\partial_{x_i}u|_{p_i^+}^{p_i(.)} \qquad\qquad \leq K\Phi(u)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}|\partial_{x_i}u|_{p_i^+}^{p_i(.)} &\leq \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega |\partial_{x_i}u|^{p_i(x)} \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} p_i(x)A_i(x,\partial_{x_i}u) = p_+^+\Phi(u)
\end{aligned}$$

nous aurons ;

$$\Phi(u) \geq \frac{\|u\|_{\vec{p}_i(.)}^{p_+^+}}{K}, \ \ \forall u, \ \ \|u\|_{\vec{p}_i(.)} < 1. \tag{5.8}$$

De plus le théorème ((1.21) chap1) d'injection de l'espace E dans $L^{p_+^+}(\Omega)$ et dans $L^S(\Omega)$ avec la relation (5.7) nous assurent l' existence de deux constantes C_1, C_2 telles que :

$$\begin{aligned}
J(u) = \int_\Omega F(x,u)dx \ \ &\leq \int_\Omega \Big(\varepsilon|u|^{p_+^+} + C_\varepsilon|u|^s\Big)dx \\
&\leq \varepsilon\|u\|_{p_+^+}^{p_+^+} + C_\varepsilon\|u\|_s^s \\
&\leq \varepsilon\|u\|_E^{p_+^+} + C_\varepsilon\|u\|_E^s
\end{aligned}$$

nous aurons donc

$$J(u) \leq C_1\|u\|_E^{p_+^+}\varepsilon + C_2\|u\|_E^s C_\varepsilon \tag{5.9}$$

la relation (5.8) et le fait que $p_+^+ < s$ nous donnent :

$$\limsup_{u\to 0} \frac{J(u)}{\Phi(u)} \leq K'\varepsilon.$$

et comme ε est arbitraire nous avons :

$$\limsup_{u\to 0} \frac{J(u)}{\Phi(u)} = 0 \tag{5.10}$$

Dans une deuxième étape nous montrons que :

$$\limsup_{\|u\|_{\vec{p}_i(.)}\to\infty} \frac{J(u)}{\Phi(u)} = 0$$

Comme $\|u\|_{\vec{p}_i(.)} \to \infty$ nous pouvons prendre $\|u\|_{\vec{p}(.)} > N$. les relations (5.6) et (5.5), pour $u \in E$ avec $\|u\|_{\vec{p}(.)} > N$ nous avons :

$$\frac{J(u)}{\Phi(u)} \leq p_+^+ N^{p_-^- -1}\Big(\frac{\int_{\Omega\cap\{|u|\leq r_2\}} F(x,u)dx}{\|u\|_{\vec{p}_i(.)}^{p_-^-} - N^{p_-^-}} + \frac{\int_{\Omega\cap\{|u|> r_2\}} F(x,u)dx}{\|u\|_{\vec{p}_i(.)}^{p_-^-} - N^{p_-^-}}\Big)$$

Alors le théorème d'injection de E dans l'espace de Lebesgue $L^{p_-^-}(\Omega)$ nous donne :

$$\frac{J(u)}{\Phi(u)} \leq C_3 p_+^+ N^{p_-^- -1}\varepsilon.$$

avec C_3 est une constante positive . Et comme ε est arbitraire on aura :

$$\limsup_{\|u\|_{\vec{p}(.)}\to\infty} \frac{J(u)}{\Phi(u)} = 0 \tag{5.11}$$

notre proposition se déduit du relations (6.10) et (6.11) (i.e)

$$max\Big\{ \limsup_{\|u\|_{\vec{p}(.)}\to 0} \frac{J(u)}{\Phi(u)}, \limsup_{\|u\|_{\vec{p}(.)}\to\infty} \frac{J(u)}{\Phi(u)} \Big\} \leq 0$$

Donc α donnée dans le théorème de Riccei est nulle i.e. ($\alpha = 0$). Pour terminer la preuve de notre théorème ; il faut juste s'assurer que J' et ψ' sont compactes. La condition **(FG)** et le fait que E s'injecte d'une manière compacte dans $L^{\rho(x)}(\Omega)$ (D'apres la proposition (1.21) du chapitre 1) nous donnent que J' et ψ' sont compactes. Nous mentionnons que les fonctions Φ possèdent un minimum en $u = 0$ avec $\Phi(0) = J(0) = 0$.

□

5.3 Système anisotropique

Dans cette section on considère le problème à deux-équations non linéaire qui intervient le $(\vec{p}(x), \vec{q}(x))$-Laplacien :

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \partial_{x_i}\Big(a_i(x, \partial_{x_i} u)\Big) = \lambda\, f_u(x,u,v) + \mu\, g_u(x,u,v) \quad \text{in } \Omega \\ \\ -\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \partial_{x_i}\Big(b_i(x, \partial_{x_i} u)\Big) = \lambda\, f_v(x,u,v) + \mu\, g_v(x,u,v) \quad \text{in } \Omega \\ \\ \qquad\qquad u \in W_0^{1,\vec{p(x)}},\ v \in W_0^{1,\vec{q(x)}} \end{cases} \tag{5.12}$$

Avec $2 < p^- < p(x) < p^+ < N, 2 < q^- < q(x) < q^+ < N$. $\lambda, \mu > 0$ sont des paramètres positifs. Les fonctions $a_i(x,s)$, $b_i(x,s)$ vont satisfaire pour chaque $i \in \{1, \dots, N\}$, les hypothèses suivantes :

(B1) Il existe une constante positive c_i telle que la fonction b_i satisfait,

$$c'_i |s|^{q_i(x)-1} \leq |b_i(x,s)| \leq c_i \Big(d_i(x) + |s|^{q_i(x)-1} \Big),$$

pour tout $x \in \Omega$ et tout $s \in \mathbb{R}$, où $d_i \in L^{q'(.)}(\Omega)$ avec $\frac{1}{q_i(x)} + \frac{1}{q'_i(x)} = 1$.

(B3) La condition de monotonie :

$$\Big[b_i(x,s) - b_i(x,t) \Big] \Big(s - t \Big) \geq \Big[s^{q_i(x)-2} s - t^{q_i(x)-2} t \Big] \Big(s - t \Big)$$

est vraie pour tout $x \in \Omega$ et tout $s, t \in \mathbb{R}$ avec $s \neq t$.

(B3) $B_i(x,0) = 0$ pour tout $x \in \partial\Omega$, et $B_i(x,.)$ est continue convexe.

(FG) les fonctions $f, g \in C(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\Big| f_t(x,t,t') + f_{t'}(x,t,t')| \leq C(|t| + |t'|)^{\rho(x)-1}, \ \forall (x,t,t') \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \tag{5.13}$$

$$|g_{t'}(x,t,t') + g_{t'}(x,t,t')| \leq C(|t| + |t'|)^{\rho(x)-1}, \ \forall (x,t,t') \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \tag{5.14}$$

avec C est une constante positive, $\rho : \Omega \to (1, \infty)$ est une fonction continue et

$$1 < \rho^- \leq \rho^+ < S_\infty^-$$

avec

$$S_\infty^- = min(p_\infty^-, Q_\infty^-)$$

et

$$S_-^- = min(p_-^-, Q_-^-)$$

Nous notons par : $E = W_0^{1,\vec{p}(x)}(\Omega)$, et $E' = W_0^{1,\vec{q}(x)}(\Omega)$, $U = (u,v)$,
Nous cherchons l'existence de solutions faibles de problème (5.12) dans l'espace $E \times E'$ qui va être menu de la norme cartésien :

$$\|(u,v)\| = \|u\|_E + \|v\|_{E'}$$

nous notons aussi :

$$f(x,U) = f_u(x,u,v) + f_v(x,u,v), \ \ g(x,U) = g_u(x,u,v) + g_v(x,u,v)$$
$$F(x,u,v) = \int_0^u f_u(x,s,v)\,ds + \int_0^v f_v(x,u,s)\,ds$$

et

$$C_i(x,U) = A_i(x,u) + B_i(x,v)$$

notre principal résultat dans cette section est le théorème suivant :

Théorème 5.9. *Supposons* $2 < p_i(x),\ q_i(x) < N$ *et*
$(A1), (A2), (A3), (B1), (B2), (B3)$*, les fonctions* f *et* g *satisfaisant* (5.13) *et* (5.14)*.*
De plus on suppose que :

$$\max\left\{\limsup_{|t|+|t'|\to 0}\frac{\sup_{x\in\Omega}F(x,t,t')}{(|t|+|t'|)^{S_+^+}},\limsup_{|U|\to\infty}\frac{\sup_{x\in\Omega}F(x,U)}{(U)^{S_-^-}}\right\}\leq 0 \qquad (5.15)$$

et

$$\sup_{U\in E\times E'}\left(\int_{\mathbb{R}^N}F(x,U)dx\right)>0$$

si on pose :

$$\omega = inf\left\{\frac{\sum_{i=1}^N\int_\Omega C_i(x,U)dx}{\int_\Omega F(x,U)dx}\ :\ U\in E\times E',\ \int_\Omega F(x,U)dx>0\right\}$$

Alors pour chaque interval compact $[a,b]\subset\,]\omega,+\infty[$*, il existe* $r_1>0$ *avec la propriété suivante : pour chaque* $\lambda\in[a,b]$*, et chaque fonction* $g:\Omega\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *satisfaisant* (5.14)*, il existe* $\delta>0$ *telle que pour chaque* $\mu\in[0,\delta]$*, le système à deux-équations* (5.12) *possède au moins trois solutions faibles dans* E *dont les normes sont inférieures à* r*.*

Pour prouver ce théorème nous avons besoin de définir les fonctions suivantes : $\Phi, J, \Psi : E\times E'\longrightarrow\mathbb{R}$

$$\Phi(U)=\Phi(u)+\Phi(v)=\sum_{i=1}^N\int_\Omega C_i(x,U)dx$$

et

$$J(U)=J(u)+J(v)=\int_{\mathbb{R}^n}F(x,U)\,dx$$

et

$$\Psi(U)=\Psi(u)+\Psi(v)=\int_{\mathbb{R}^n}G(x,U)\,dx$$

les fonctions $\Phi(U),\ J(U)\ ,\Psi(U)$ doivent satisfaire les conditions du théorème de Ricceri, d'une part nous avons :

$$\Phi(u)\geq\frac{\|u\|_E^{p_+^+}}{p_+^+N^{p_+^+-1}},\ \ \forall,\ \ \|u\|_E<1.$$

et

$$\Phi(v)\geq\frac{\|v\|_{E'}^{Q_+^+}}{Q_+^+N^{Q_+^+-1}},\ \ \forall,\ \ \|v\|_{E'}<1.$$

alors

$$\Phi(U)=\Phi(u)+\Phi(v)\geq\frac{\|u\|_E^{p_+^+}}{p_+^+N^{p_+^+-1}}+\frac{\|v\|_{E'}^{Q_+^+}}{Q_+^+N^{Q_+^+-1}}\ \forall\ \|u\|_E<1\ et\ \|v\|_{E'}<1.$$

$$\Phi(U) \geq K\Big(\|u\|_E^{S_+^+} + \|v\|_{E'}^{S_+^+}\Big)$$

alors pour des petites valeurs de $\|u\|_E$, et, $\|v\|_{E'}$ nous avons :

$$\Phi(U) \geq K\Big(\|u\|_E + \|v\|_{E'}\Big)^{S_+^+}$$

$$\Phi(U) \geq K\Big(\|U\|_{E\times E'}\Big)^{S_+^+} \tag{5.16}$$

et d'autre part pour des grandes valeurs de $\|u\|_E$, et, $\|v\|_{E'}$ nous avons :

$$\Phi(u) = \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega A_i(x,u)dx \geq \frac{k^+}{p_+^+}\Big(\frac{\|u\|_E^{p_-^-}}{N^{p_-^- -1}} - N\Big)$$

et

$$\Phi(v) = \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega A_i(x,v)dx \geq \frac{k^+}{Q_+^+}\Big(\frac{\|v\|_{E'}^{Q_-^-}}{N^{Q_-^- -1}} - N\Big)$$

Alors

$$\Phi(U) = \Phi(u) + \Phi(v) \geq \frac{k^+}{p_+^+}\Big(\frac{\|u\|_E^{p_-^-}}{N^{p_-^- -1}} - N\Big) + \frac{k^+}{Q_+^+}\Big(\frac{\|v\|_{E'}^{Q_-^-}}{N^{Q_-^- -1}} - N\Big)$$

alors

$$\Phi(U) \geq C\Big(\|u\|_E^{p_-^-} + \|v\|_{E'}^{Q_-^-} - 2N\Big)$$

$$\Phi(U) \geq C\Big((\|u\|_E + \|v\|_{E'})^{S_-^-} - 2N\Big)$$

$$\Phi(U) \geq C\Big(\|U\|_{E\times E'})^{S_-^-} - 2N\Big) \tag{5.17}$$

La relation (6.17) va jouer le rôle des relations (6.5) dans le cas d'une équation, et avec les mêmes techniques nous montrons les résultats suivantes :

$$\max\Big\{\limsup_{\|U\|\to+\infty}\frac{J(U)}{\Phi(U)}, \limsup_{\|U\|\to 0}\frac{J(U)}{\Phi(U)}\Big\} = 0, \tag{5.18}$$

Les lemmes suivants vont assurer les conditions du théorème de Ricceri.

Lemme 5.10. *Pour tout $U \in E\times E'$ la fonction $\Phi(U) \in \mathcal{W}_{E\times E'}$ est coércive, faiblement semi-continue inférieurement, bornée sur tout borné de $E\times E'$, différentiable avec*

$$\Phi'(U)(w,z) = \Phi_1'(u)(w) + \Phi_2'(v)(z), \ \ \forall (w,z) \in E\times E',$$

Démonstration. Du fait que $\Phi(U)$ n'est que la somme de $\Phi(u)+\Phi(v)$ l'opérateur $\Phi(U)$ va avoir les mêmes propriétés topologiques que $\Phi(u)$ i.e coércive, faiblement semi continue inférieurement C^1 fonction, appartement à $\mathcal{W}_{E\times E'}$, bornée sur tout borné de $E\times E'$, et sa dérivée possède une fonction inverse continue dans X^*. □

Lemme 5.11. *L'opérateur $J(U)$ est bien définie et continue Gâteaux différentiable avec*

$$J^{'}(U)(w,z) = \int_{\mathbb{R}^n} f_u(x,u,v)w\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} f_v(x,u,v)z\,dx$$

avec

$$J_1(u) = \int_{\mathbb{R}^n} F_u(x,u,v)\,dx \ \ et \ \ J_2(u) = \int_{\mathbb{R}^n} F_v(x,u,v)\,dx$$

De plus, l'opérateur $J'(.)$ est compact de $E \times E'$ vers $(E \times E')^*$.

Démonstration. Du fait que l'opérateur $J(U)$ n'est que la somme de $J_1(u)+J_2(v)$, $J(U)$ va avoir les mêmes propriétés topologiques que $J(u)$ i.e $J'(.)$ est compact de $E \times E'$ vers $(E \times E')^*$. $\square$

Lemme 5.12. *La fonction $\Psi(U) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x,U)\,dx$ avec $G(x,U) = \int_0^u g_u(x,t,v)dt + \int_0^v g_v(x,u,s)ds$ est bien définie et Gâteaux différentiable sur $(E \times E')$, avec une dérivée compacte.*

Démonstration. La fonction $\Psi(U)$ n'est que la somme $\Psi(U) = \Psi_1(u) + \Psi_2(v)$ avec $\Psi_1(u) = \int_{\mathbb{R}^n} G_u(x,u,v)\,dx$ et $\Psi_2(u) = \int_{\mathbb{R}^n} G_v(x,u,v)\,dx$. Alors $\Psi(U)$ est bien définie et Gâteaux différentiable sur $E \times E'$, avec une dérivée compacte. $\square$

Toutes les conditions de Théorème de "Ricceri" sont satisfaites (avec $U_0 = (0,0)$). En effet Les conditions (**Ric1**), (**Ric2**), (**Ric3**)et (**Ric4**) sont assurées par le lemme (5.10). La condition (**Ric5**) est assurée par le lemme (5.10), la condition (**Ric8**) assurée par le lemme (5.11). Les inégalités (**Ric7**) sont assurées par la proposition (5.8). La condition (**Ric6**) est facile à vérifier en effet : la fonction $\Phi(U)$ possède un stricte minimum local U_0 avec $\Phi(U_0) = J(U_0) = 0, \ U_0 = (0,0)$.

5.4 Exemple d'une équation anisotropique

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné avec une frontière assez régulière, $p_i(.)$ des fonctions continues sur Ω et $2 \leq p_i(x) \leq N \ \forall \ x \in \Omega$ et pour tout $i \in \{1, 2, ..., N\}$, $\lambda, \ \mu$ deux nombres réels, C_1, C_2 deux constantes positives, $a, b, c, d, h : \Omega \to \mathbb{R}$ des fonctions continues telles que ;

$$a(x) > 0 \ pour \ \ tout \ x \in \Omega, \tag{5.19}$$

$$b(x) = p_+^+ + \varepsilon\Big(|cos(|x|)| + 1\Big) \ et \ d(x) = p_{-,\infty} - \varepsilon\Big(|cos(|x|)| - 1\Big) \tag{5.20}$$

et

$$c(x) = p_+^+ + \varepsilon\Big(|sin(|x|)| + 1\Big) \ et \ h(x) = p_{-,\infty} - \varepsilon\Big(|sin(|x|)| - 1\Big) \tag{5.21}$$

pour tout $x \in \Omega$.
Nous définissons la fonction suivante ;

$$g(x,t) = \begin{cases} (|t|)^{\left(p_+^+ + \varepsilon(|sin(|x|)|+1)-2\right)} t \ \ pour \ \ |t| \leq 1 \\ (|t|)^{\left(p_{-,\infty} - \varepsilon(|sin(|x|)|-1)-2\right)} t \ \ pour \ \ |t| \geq 1 \end{cases} \tag{5.22}$$

Proposition 5.13. *Soit*

$$\gamma = \inf \left\{ \frac{\sum_1^N \int_\Omega \frac{|\partial_i u|^{p_i(x)}}{p_i(x)} dx}{\int_\Omega a(x) \left(\frac{C_1 |u|^{(p_+^+ + \varepsilon(|cos(|x|)|+1))}}{(p_+^+ + \varepsilon(|cos(|x|)|+1))} - \frac{C_2 |u|^{(p_{-,\infty} - \varepsilon(|cos(|x|)|-1))}}{(p_{-,\infty} - \varepsilon(|cos(|x|)|-1))} \right) dx} ; u \in E \right\}$$

avec $E = W_0^{1,\vec{p}(.)}(\Omega)$*, alors, pour chaque interval* $[a,b] \subset [\gamma, \infty[$*, il existe une constante* $r > 0$ *avec la propriété suivante : pour tout* $\lambda \in [a,b]$ *et chaque fonction* $g : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *donnée par (5.19).*
alors il existe δ *strictement positive telle que pour tout* $\mu \in [0, \delta]$*, le problème suivant,*

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^N \partial_{x_i}(|\partial_{x_i}|u|^{p_i(x)-2}\partial_{x_i}u) = \lambda\, a(x)(C_1|u|^{(b(x)-2}u - C_2|u|^{d(x)-2}u) + \mu\, g(x,u)\, dans\ \Omega \\ u \in W_0^{1,p(\vec{x})}(\Omega) \end{cases} \tag{5.23}$$

possède ou moins trois solutions dont la norme est inférieure à r

Démonstration. Nous considérons la fonction $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x,t) = a(x)\Big(C_1|t|^{(p_+^+ + \varepsilon(|cos(|x|)|+1))-2}t - C_2|t|^{(p_{-,\infty} - \varepsilon(|cos(|x|)|-1))-2}t\Big) \ \forall (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$$

Il est clair que $f et g$ vérifient la condition (FG) du théorème (5.3), en effet :

$$b^+ = p_+^+ + 2\varepsilon, \quad b^- = p_+^+ + \varepsilon, \quad d^+ = p_{-,\infty} - \varepsilon, \quad d^- = p_{-,\infty} - 2\varepsilon$$

nous avons donc :

$$p_+^+ < b^- \leq b^+ \leq d^- \leq d^+ < p_{-,\infty}$$

d'où l'hypothèse (FG) du théorème (5.3)
Finalement nous allons montrer que fonction F vérifie les conditions (5.4)du théorème (5.3).
La fonction $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds$ est

$$F(x,t) = a(x)\Big(\frac{C_1|t|^{p_+^+ + \varepsilon(|cos(|x|)|+1)}}{p_+^+ + \varepsilon(|cos(|x|)|+1)} - \frac{C_2|t|^{p_{-,\infty} - \varepsilon(|cos(|x|)|-1)}}{p_{-,\infty} - \varepsilon(|cos(|x|)|-1)}\Big)$$

Pour chaque $t > 0$, il existe $x_t \in \Omega$ qui dépends de t telle que :

$$\sup_{x\in\Omega} F(x,t) = F(x_t,t).$$

Nous aurons donc :

$$\begin{aligned}\frac{\sup_{x\in\Omega} F(x,t)}{|t|^{p_+^+}} &= \frac{F(x_t,t)}{|t|^{p_+^+}} \\ &= a(x_t)\Big(\frac{C_1|t|^{b(x_t)-p_+^+}}{b(x_t)} - \frac{C_2|t|^{d(x_t)-p_+^+}}{d(x_t)}\Big) \\ &\leq a(x_t)|t|^{b(x_t)-p_+^+}\Big(\frac{C_1}{b^-} - \frac{|t|^{d(x_t)-b(x_t)}}{d^+}\Big)\end{aligned} \tag{5.24}$$

L'hypothèse (5.19) et (5.20) pour t assez petite nous donne :

$$\limsup_{t\to 0} \frac{\sup_{x\in\Omega} F(x,t)}{|t|^{p_+^+}} = 0 \tag{5.25}$$

nous aurons aussi,

$$\begin{aligned}\frac{\sup_{x\in\Omega} F(x,t)}{|t|^{p_-^-}} &= \frac{F(x_t,t)}{|t|^{p_-^-}} \\ &= a(x_t)\Big(\frac{C_1|t|^{b(x_t)-p_-^-}}{b(x_t)} - \frac{C_2|t|^{d(x_t)-p_-^-}}{d(x_t)}\Big) \\ &\leq a(x_t)|t|^{b(x_t)-p_-^-}\Big(\frac{C_1}{b^-} - \frac{|t|^{d(x_t)-b(x_t)}}{d^+}\Big)\end{aligned} \tag{5.26}$$

l'hypothèse (5.19) et (5.20) pour t assez grande nous donne :

$$a(x_t)|t|^{b(x_t)-p_-^-}\Big(\frac{C_1}{b^-} - \frac{|t|^{d(x_t)-b(x_t)}}{d^+}\Big) \leq 0$$

ce qui nous donne :

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\sup_{x\in\Omega} F(x,t)}{|t|^{p_-^-}} \leq 0 \tag{5.27}$$

les relations (5.25) et (5.27) assurent la condition (4.6) du théorème (5.3) ce qui nous permet de prouver la proposition (5.13).

Chapitre 6

Conclusion et Perspectives

6.1 Conclusion

Dans notre thèse, nous avons utilisé une méthode variationnelle pour montrer de nombreux résultats concernant l'existence des solutions faibles des $p(x)-Laplace$ généralisée, N-Laplace limite et $\vec{p}(x) - Laplace$. Aussi dans ces travaux, nous avons essayé de répondre à des questions d' existence de solutions pour des problèmes de type elliptique faisant intervenir des opérateurs limites. Nous avons généralisé des résultats d'existence d'une classe à exposant p fixe à une autre classe plus large celle où l'exposent est une fonction $p(x)$. Et comme suite logique nous avons élargit cette classe où l'exposant est une fonction réelle à la classe des anisotropes où l'exposant est une fonction vectorielle. Comme cheval de bataille "méthode" nous avons adopté le récent principe de Ricceri, derrière ce choix était la nature des problèmes considérés.
Dans ces résultats les difficultés principales consistent à vérifier les conditions qui permettent d' utiliser le principe de "Ricceri". Nous étions motivés par le caractère critique de ces équations qui nous renvoie aux inclusions de Sobolev, par perte de compacité et l'aspect hautement non-linéaire de l'opérateur p(x)-Laplacien, l'aspect limite de N-Laplacien et l'aspect anisotrope de $(x) - Laplacien$. Tout cela rend l'étude techniquement plus difficile que l'étude du cas p-Laplacien usuel. Pour obtenir de tels résultats il fallait beaucoup investir dans des techniques plus compliquées d'intégration, aussi il fallait avoir une bonne maîtrise d'outils d'analyse fonctionnelle.
Cependant nous sommes loin de résoudre tous le cas limites de l'opérateur p-Laplace. Nous avons touché qu'un seul cas où l'exposant est égale à la dimension, le cas où l'exposant peut être variable dans $[1.\infty[$ reste ouvert. En revanche le cas où l'exposant atteint la dimension i.e $p^+ \leq N$ nous avons pu enregistrer

une injection des Sobolev dans les espaces de Orlicz–Musielak. Ces espaces "Orlicz–Musielak" seront sans doute le champs de bataille des cas où la fonction exposant $p(x)$ peut se permettre d'atteindre la dimension N.

6.2 Perspectives

6.2.1 Cas limite

Les résultats obtenus jusqu'à présent ont porté principalement avec le cas $p^+ < N$, et dans une certaine mesure avec $p^- > N$. De toute évidence, il serait intéressant d'avoir un résultat qui traite avec tous les cas, quelle que soit la position de p par rapport à la dimension N. Dans cette section, nous considérons les résultats qui sont un peu plus près de cas général, dans lesquels on permet à la valeur (la dimension) critique N d'être atteinte par la fonction exposant $p(x)$. Dans le cas où $N \leq p^- \leq p^+$, Harjulehto et Hästö ont donné une simple, condition suffisante pour que $W^{1.p(x)}(\Omega)$ s'injecte dans $L^\infty(\Omega)$ [[47], Théorème 4.6].

Proposition 6.1 ([47],théorème 8.6.1)**.** *Supposons que B est une boule. Si $p \in P(B)$ est bornée de telle sorte que*

$$p(x) \leq n + (n-1+\varepsilon)\frac{\log\log(\frac{c}{dist(x,\partial B)})}{log(\frac{c}{dist(x,\partial B)})}$$

pour une certaine $\varepsilon > 0$ et une constante suffisamment grande $c > 0$ fixée, alors $W^{1,p(.)}(B) \longrightarrow L^\infty(B)$.

Pour traiter les cas où $1 \leq p^- \leq p^+ \leq N$ nous avons besoin de définir l'espace de Orlicz–Musielak suivant.

Définition 6.2. *[47] Soit la fonction $F_p^*(t) = \sum_{j=1}^{[\frac{p^*}{N'}]-1} \frac{1}{j}|t|^{jN'} + \frac{1}{[\frac{p^*}{N'}]!}|t|^{p^*}$ on définit l'espace Orlicz–Musielak $L_*^{p(.)}(\Omega)$ associé à la fonction $F_p^*(t)$, menu de la norme*

$$\|u\|_{L_*^{p(.)}(\Omega)}$$

où $[\frac{p^*}{N'}]$ est la partie entière de $\left(\frac{\frac{Np(x)}{N-p(x)}}{N'}\right)$ et $N' = \frac{N-1}{N}$.

Proposition 6.3. *[47] Si Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et $p(x) \in P^{\log}(\Omega)$ avec $1 \leq p^- \leq p^+ \leq N$. Alors $W^{1.p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L_*^{p(.)}(\Omega)$ et*

$$\|u\|_{L_*^{p(.)}(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{p(.)}$$

pour tout $u \in W_0^{1.p(x)}(\Omega)$ et la constante C dépend uniquement de la dimension N et $p(x)$ et le diamètre de (Ω).

6.2.2 Cas limite avec Ω non borné

Dans le problème généralisé noua avons travaillé avec $\Omega = \mathbb{R}^N$ mais pas dans les cas limites et anisotropes où nous avons considéré Ω borné de frontière assez régulière. Donc il serait intéressant de traiter les cas limites dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$, cela semble difficile dans l'absence d'un résultat d'injection, cependant cela reste possible avec l'aide de l'inégalité suivante qui ressemble à l'inégalité de Trudinger-Moser [59].

Proposition 6.4. *[14] Si $N \geq 2, \alpha > 0$ et $u \in W^{1.N}(\mathbb{R}^N)$ Alors*

$$\int_{\mathbb{R}}[\exp(\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}}) - S_{N-2}(\alpha,u)] < \infty$$

De plus si $\|\nabla u\|_{L^N}^N \leq 1$ et $\|u\|_{L^N} \leq M < \infty$ et $\alpha < \alpha_N N \omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$
Alors il existe une constante $C = C(N,M,\alpha)$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}}[\exp(\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}}) - S_{N-2}(\alpha,u)] \leq C(N,M,\alpha)$$

avec

$$S_{N-2}(\alpha,u) = \sum_{k=0}^{N-2} \frac{\alpha^k}{k!}|u|^{\frac{N}{N-1}k}$$

Il est donc légitime avec l'aide de proposition 7.3, de considérer les problèmes :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\,\nabla u) + b(x)|u|^{p(x)-2}u = \lambda\, f(x,u) + \mu\, g(x,u) \quad \text{in } \mathbb{R}^N \\ u \in W_0^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{6.1}$$

avec la fonction $p(x)$ peut atteindre la dimension N, voir même la dépasser.
Il est aussi légitime avec l'aide de proposition 7.4, de considérer les problèmes :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(m(|\nabla u|^N)|\nabla|^{N-2}\nabla u) = \lambda f(x,u) + \mu g(x,u) \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \\ u \in W_0^{1,N}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{6.2}$$

et d'essayer de les résoudre en se basant sur la proposition 7.4 et la proposition 7.3.

Bibliographie

[1] A. Ambrosetti and P. H. Rabinowitz ; Dual variational methods in critical point theory ; *J.Funct. Anal. 14* (1973) ; 349-381.

[2] A. Anane, Simplicité et isolation de première valeur propre du p-Laplacien avec poids. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 305, Série 1 (1987), p. 725-728.

[3] A. Anane and O. Chakrone, Sur un théorème de point critique et application à un problème de non-résonance entre deux valeurs propres de p-Laplacien, Annales de la faculté des sciences de Toulouze Vol IX, No 1(2000) pp 5-30.

[4] Adimurthi : Positive solutions of the semilinear Dirichlet problem with critical growth in the unit disc in R2, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci., 99 (1989), 49-73.

[5] A. Elattar, S. El Manouni, O. Sidki : Nonlinear Elliptic Problem Involving The N-laplacian with Maximal Growth : EJDE, (2015), No. 197, pp. 1-15.

[6] A. Elattar, O. Sidki : Nonlinear Elliptic Problem Involving The $(p(x), q(x))$-laplacian in $\mathbb{R}^N$:BJMCS, 21945 (2016) 13(2) :1-11

[7] A. J. Simmonds ; Electro-rheological valves in a hydraulic circuit, IEE Proceedings-D 138 (1991) 400-404.

[8] A. El Khalil, S. El Manouni and M. Ouanan. On some nonlinear elliptic problems for p-Laplacian in $\mathbb{R}^n$. *Nonlinear differ. equ. appl.*, 15 : (2008) 295–307.

[9] B. Ricceri ; A further three critical points theorem. *Nonlinear Anal.*, 71, 9 : (2009), 4151-4157.

[10] B. Ricceri ; A three critical points theorem revisited. *Nonlinear Anal.*, 70, 9 : (2009) 3084-3089.

[11] B. Ricceri ; A note on the Neumann problem. *Complex Var. Elliptic Equ.*, 55, 5-6 :(2010) 593–599.

[12] B. Ricceri ; On a three critical points theorem. *Arch. Math. (Basel)*, 75 : (2000) 220–226.

[13] B. Ricceri ; Existence of Three Solutions for a Class of Elliptic Eigenvalue Problems Mathematical and Computer Modelling 32 (2000) 1485-1494.

[14] Do Ó J.M. : N-Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$ with critical growth. Abstr. Appl. Anal. 2, (1997) 301–315.

[15] D. G. de Figueiredo, O. H. Miyagaki and B. Ruf, Elliptic equations in R^2 with nonlinearities in the critical growth range, Calc. Var. Partial Differential Equations, 3 (1995), 139-153.

[16] D. Mugnai, Four nontrivial solutions for subcritical exponential equations, Calc. Var. Partial Differential Equations, 32 (2008), 481-497.

[17] Denisa Stancu-Dumitru : Tow Nontrivial Solutionsfor Anisotropic variable Exponant problems : Taiwanaise Journal of Mathematic, Vol. 16 No 4 ; August (2012) pp. 1205-1219

[18] E. Zeidler ; Nonlinear functional analysis and its applications. *Vol. II/B. Berlin, Heidelberg, New York*, (1978).

[19] E. Acerbi and G. Mingione. Regularity results for a class of functionals with nonstandard growth. Arch. Ration. Mech. Anal, 156 : (2001) 121–140.

[20] E. Acerbi and G. Mingione. Regularity results for electrorheological fluids : the stationary case. C. R. Acad. Sci. Paris, 334 : (2002)817–822.

[21] E. Acerbi and G. Mingione. Regularity results for stationary electrorheological fluids. Arch. Ration. Mech. Anal., 164 :(2002) 213–259.

[22] E. Acerbi and G. Mingione. Gradient estimates for the $p(x)$- Laplacian system. J. Reine Angew. Math 584 : (2005) 117–148.

[23] Evans, Lawrence C. (2010). Partial Differential Equations (2nd ed.). American Mathematical Society Sobolev-Poincaré-type inequalities, Nonlinear Anal. 8 (11), (1984), 1255-1270.

[24] E. Hewitt, K.R. Stromberg, "Real and abstract analysis", Springer (1965)

[25] F. De Thelin ; Première valeur propre d'un syst'eme elliptique non lineaire. C. R. Acad. Sci. Paris, 311, Série 1 , (1990) : 603–606.

[26] F. de Thélin, Quelques résultats d'existence et de nonexistence pour une EDP elliptique nonlinéaire, C. R. Acad. Sci. Paris. 229 Série I, 18 : (1984) ; 839-844.

[27] G. Anello, G. Cordaro ; An existence theorem for the Neumann problem involving the p-Laplacian. *J. Convex. Anal.*, (10)1 : (2003) 185–198.

[28] G. Anello G. Cordaro ; Existence of solutions of the Neumann problem involving the p-Laplacian via variational principle of Ricceri. *Arch. Math. (Basel)*, 79 : (2002) 274–287.

[29] G. Barles, Remarks on uniqueness result of the first eigenvalue of the p-laplacian. Annales Faculté des Sciences de Toulouse. Vol. IX, No 1(1988).

[30] I. Fragala, F. Gazzola, B. Kawohl ; Existence and nonexistence results for anisotropic quasilinear equations, Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse Non Linéaire, 21 (2004), 715-734.

[31] I. Tsenov. Generalization of the problem of best approximation of a function in the space ls. Uch. Zap. Dagestan Gos. Univ. 7 :(1961) 25–37.

[32] I. Sharapudinov. On the topology of the space $L^{p(t)}([0;1])$. Math. Notes, 26(3–4) :(1979) 796– 806.

[33] J.Rákosník, Some remarks to anisotropic Sobolev spaces I, Beitrage Anal., 13 (1979), 55-68.

[34] J.Rákosník, Some remarks to anisotropic Sobolev spaces II, Beitrage Anal., 15 (1981), 127-140.

[35] J. P.Garcia ; Azorero and Peral Alonso : Existence and nonuniquenness for the p-laplaien : nonlinear eigenvalues. Comm. Partial Differential Equations ;(1987) ;1389-1430

[36] J. Musielak and W. Orlicz. On modular spaces. Studia Math , (1959) ; 18 :49–65.

[37] J. Simon ; Régularité de la solution d'une equation non linéaire dans $\mathbb{R}^N$. LMN 665, P. Benilan, Berlin-Heidelberg-New York, (1978) ;205-227

[38] J. Moser, A sharp form of an inequality by N.Trudinger, Indiana Univ. Math. J. 20 (1971) 1077-1092

[39] Jan Haskovec and christian Schmeiser. A note on the anisotropic generalization of the Sobolev and Morrey embedding theorems ; Monatsh Math ; 158(1) ; (2009) ; 71-79

[40] J. M. do O : Quasilinear elliptic equations with exponential nonlinearities, Comm. Appl. Nonlinear Anal., 2 (1995), 63-72.

[41] J.I.Diaz et J.E.Saa, Existence et unicité de solutions positives pour certaines équations elliptiques quasi linéaires, C. R. Acad.Sci. Paris Ser. I. Math., 305 (1987), 521-524.

[42] K. Rajagopal and M. Rŭžička. On the modeling of electrorheological materials. Mech. Research Comm., 23 : (1996) 401–407.

[43] K. Rajagopal and M.Rŭžička. Mathematical modeling of electrorheological materials. Cont. Mech. and Thermodynamics, 13 : (2001) 59–78.

[44] L. Diening and M. Ruzicka. Strong solutions for generalized Newtonian fluids. J. Math. Fluid Mech. 7 : (2005) ; 413–450.

[45] Lebesgue measure. Wiley Classics Library. New York : John Wiley Sons Inc. xii+179.

[46] L. Ventuan, On embedding theorems for spaces of functions with partial derivatives of various degree of summability, Vestnik Leningrad. Univ., 16 (1961), 23-37.

[47] Lars Diening, Petteri Harjulehto Peter Hasto, Michael Rŭžička : Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents, Lecture Notes in Mathematics Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2011) :276-281

[48] M. Mihăilescu, P. Pucci, V. Rụlescu ; Eigenvalue problems for anisotropic quasilinear elliptic equations with variable exponent, J. Math. Anal. Appl., 340 (2008), 687-698.

[49] Maria-Magadalina Boureanu, Existence of solutions for an elliptic equation involving the p(x)-laplace operator *EJDE, Vol. (2006)*, No. 97, pp. 1–10.

[50] Maria-Magadalina Boureanu ; Anisotrpic problem with variable exponents and constant dirichlet conditions ; EJDE, (2013), No. 220, pp. 1-13

[51] M. Mihăilescu and V. Radulescu. A multiplicity result for a nonlinear degenerate problem arising in the theory of electrorheological fluids. Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., 462(2073) : (2006) ; 2625–2641.

[52] M. Mihăilescu, P. Pucci and V. Rădulescu, Eigenvalue problems for anisotropic quasilinear elliptic equations with variable exponent, J. Math. Anal. Appl., 340 (2008), 687- 698.

[53] M. Otani, On certain second order ordinary differential equations associated with Sobolev-Poincaré-type inequalities, Nonlinear Anal. 8 (11), (1984), 1255-1270.

[54] M.Rủžička. Flow of shear dependent electrorheological fluids : unsteady space periodic case. In A. Sequeira, editor, Applied nonlinear analysis. Kluwer Plenum, New York, (1999) :pages 485–504.

[55] M. Mihăilescu. Patrizia .pucci and Vicentiu Rădulescu ; Eigenvalue problems for anisotropic quasilinear elliptic equations with variable expenet ; j.math anal appl (2010) ; 687-689

[56] Mihai Mihăilescu and Vicentin Rădulescu : Spectrum in unbounded interval for a class of non homogenoues differentiel equation : Bull. lond.math soc :(2008) :973-98.

[57] M. Troisi, Teoremi di inclusione per spazi di Sobolev non isotropi, Ricerche Mat., 18 (1969), 3-24.

[58] N. Hirano ; Multiple solutions for quasilinear elliptic equations. *Nonlinear Anal. 15, (1990) 625–638.*

[59] N. S. Trudinger, On imbeddings into Orlicz spaces and some applications, J. Math. Mech. 17 (1967), 473-483.

[60] O. O. Kovačik and J.Rákosník, On spaces Lp(x) and W1,p(x), *Czechoslovak Math. J.* 41 (1991) 592-618

[61] P. Lindqvist, Note on a nonlinear eigenvalue problem, Rocky Mountain J. Math. 23 (1993), no. 1, 281-288.

[62] P. Drábek. Nonlinear Eigenvalue for p-Laplacian in $\mathbb{R}^n$. *Math. Nach.*, 173 :(1995) 131–139.

[63] P. Drábek, S. El Manouni and A. Touzani, Existence and regularity of solutions for nonlinear elliptic systems in $\mathbb{R}^n$. *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, L : (2002) 161–172.

[64] P. Harjulehto and P. Hasto. A capacity approach to Poincare inequalities and Sobolev imbedding in variable exponent Sobolev spaces. Rev. Mat. Complut. (2004) ; 17 :129–146.

[65] R. Stanway, J. L. Sproston, A. K. El-Wahed ; Applications of electrorheological uids in vibration control : a survey, Smart Mater. Struct. 5 (1996) 464-482.

[66] R. F. Manásevich and M. A. Del Pino, Global Birfurcation from the eigenvalues of the p-Laplacian. J. D.Equ., 92 (2), (1991) 226-251

[67] R. Palais, Morse theory on Hilbert manifolds, Topology 2 (1963), 299–340.

[68] R. Palais and S. Smale, A generalized Morse theory, Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964), 165–17

[69] Robert A. Adams : Sobolev spaces, Academic Press Newyork-London (1975) Pure and Applied mathematic volume 65.

[70] S. El Manouni, M. Kbiri Alaoui ; A result on elliptic systems with Neumann conditions via Ricceri's three critical points theorem. *Nonlinear Anal.* 71, No. 5-6 : (2009) 2343–2348.

[71] S. El Manouni ; A study of nonlinear problems for the p-Laplacian in $\mathbb{R}^n$ via Ricceri's principle. *Nonlinear Anal.* 74, No. 5-6 :(2011) 4496–4502.

[72] S. El manouni F.Faraci : Multipliciy results for some elleptic problems of n-laplace : Taiwanaise Journal of Mathematic, vol :16 No 3 ; June (2012) pp 901-911.

[73] S. El manouni A.Touzani : Nonlinear elliptic systems with exponential nonlinearities. EJDE, Conference 09, (2002), pp 139–147.

[74] S. M. Nikol'skii, On imbedding, continuation and approximation theorems for differentiable functions of several variables, Russian Math. Surveys, 16 (1961), 55-104.

[75] S. N. Antontsev, J. F. Rodrigues ; On stationary thermorheological viscous ows, Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat., 52 (2006), 19-36.

[76] V. Portnov. Certain properties of the Orlicz spaces generated by the functions M(x,w). Dokl. Akad. Nauk SSSR, 170 : (1991) 1269–1272.

[77] V. Zhikov. On Lavrentievs phenomen. Rus. J. Math. Phys., 3 : (1995) ;249–269.

[78] W. Orlicz. Uber konjugierte Exponentenfolgen. Studia Math., 3 : (1931) ; 200–211,

[79] Xianling Fan and Dun Zhao ; On the spaces $L^{p(x)}, W^{m,p(x)}$ j.math anal Appl ; 263(2) (2001) ; 424-446.

[80] X. Fan, J. Shen and D. Zhao, Sobolev Embedding Theorems for Spaces $W^{k,p(x)}(\Omega)$, J. Math. *Anal. Appl. 262* (2001), 749-760.

[81] X. Fan ; Anisotropic variable exponent Sobolev spaces and $p(x)$-Laplacian equations, Complex Variables and Elliptic Equations, 55 (2010), 1-20.

[82] Y. Liu, R. Davidson, P. Taylor ; Investigation of the tuch sensitivity of fluid based tactile display, Proceedings of SPIE, Smart Structures and Materials : Smart Structures and Integrated Systems, 5764 (2005), 92-99.

[83] Z. Zhang, M. Calanchi and B. Ruf, Elliptic equations in R^2 with one-sided exponential growth, Commun. Contemp. Math., 6 (2004), 947-971.