

THESE

En vue de l'obtention du : **DOCTORAT**

Structure de Recherche : Physique des Hautes Energies- Modélisation et Simulation

Discipline : Physique

Spécialité : Physique Mathématique

Présentée et soutenue le 11/09/2021 par :

Brahim AMGHAR

Aspects géométriques des corrélations quantiques dans des systèmes multiqudits

JURY

EL Hassan SAIDI	PES, Université Mohammed V de Rabat, Faculté des Sciences.	Président
Rachid AHL LAAMARA	PH, Université Mohammed V de Rabat, Faculté des Sciences.	Rapporteur/Examineur
Lalla Btissam DRISSI	PH, Université Mohammed V de Rabat, Faculté des Sciences.	Rapporteur/Examineur
Mostafa NASSIK	PES, Université Ibn Zohr d'Agadir, Faculté des Sciences.	Rapporteur/Examineur
Abderrahim EL ALLATI	PH, Université Abdelmalek Essaâdi de Tétouan, Faculté des Sciences et Techniques d'Al-Hoceima.	Examineur
Mostafa MANSOUR	PH, Université Hassan II de Casablanca, Faculté des Sciences Aïn Chock.	Examineur
Mohamed BENNAI	PES, Université Hassan II de Casablanca, Faculté des Sciences Ben M'Sik.	Examineur
Mohammed EL FALAKI	PH, Université Chouaïb Doukkali d'El Jadida, Faculté des Sciences.	Examineur
Mohammed DAOUD	PES, Université Ibn Tofail de Kénitra, Faculté des Sciences.	Directeur de thèse

Année Universitaire : 2020/2021

Remerciement

*Les travaux présentés dans ce mémoire de thèse ont été effectués au sein du Laboratoire de Physique des Hautes Énergies-Modélisation et Simulation de l'université Mohammed V-Rabat, Faculté des Sciences, sous la direction et l'encadrement de Monsieur le Professeur **Mohammed DAOUD**, Professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté des Sciences de Kénitra.*

Tout d'abord, nous louons Dieu Tout-Puissant de nous aider à accomplir ce travail béni, car c'est grâce à lui et à son succès que nous avons fait ce travail.

*Je tiens à remercier tout particulièrement mon directeur de thèse, Monsieur le Professeur **Mohammed DAOUD**, qui m'a donné l'opportunité d'explorer la théorie quantique en général et la mécanique quantique géométrique en particulier. Je le remercie très vivement encore pour son aide scientifique, sa disponibilité, sa patience et ses conseils et les discussions pertinentes qui m'ont bien aidé le long de ce parcours doctoral.*

*Je voudrais également remercier grandement Monsieur **El Hassan SAIDI**, Professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, de m'avoir accueilli pour faire ma thèse au sein du laboratoire qu'il dirige, ainsi que pour son acceptation d'être président de cette thèse. Je vous prie d'agréer, Professeur, l'expression de mes salutations distinguées.*

*J'adresse tous mes remerciements à Monsieur **Rachid AHL LAAMARA**, Professeur Habilité à la Faculté des Sciences de Rabat, de m'avoir orienté vers l'équipe de recherche en information quantique. Grand merci Professeur pour vos encouragements, votre disponibilité, votre soutien, ainsi que pour votre acceptation d'être rapporteur de ce travail doctoral. Veuillez bien accepter, Professeur, l'expression de ma plus profonde gratitude.*

*Mes sincères remerciements vont à Madame **Lalla Btissam DRISSI**, Professeur Habilité à la Faculté des Sciences de Rabat, de m'avoir fait l'honneur de participer au jury de ma soutenance en tant que rapporteur de ma thèse de doctorat. Veuillez recevoir, Madame, l'expression de mon respect et de ma profonde gratitude.*

*Je suis également reconnaissant à Monsieur **Mostafa NASSIK**, Professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté des Sciences d'Agadir, pour le grand honneur qu'il m'a accordé en acceptant d'évaluer ce travail doctoral, et d'avoir accepté de participer au jury en tant que rapporteur de ma soutenance. Veuillez accepter, Professeur, l'expression de ma plus profonde gratitude.*

*Mes remerciements s'adressent aussi à Monsieur **Abderrahim EL ALLATI**, Professeur Habilité à la Faculté des Sciences et Techniques d'Al-Hoceima, pour avoir accepté d'être membre de jury de ma soutenance de thèse. Je le remercie de l'intérêt qu'il a manifesté à ce travail de recherche en s'engageant à être examinateur. Veuillez bien accepter, Professeur,*

mes sincères salutations.

*Je tiens à remercier infiniment Monsieur **Mohamed BENNAI**, Professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté des Sciences Ben M'sik de Casablanca, pour l'honneur qui m'a accordé en acceptant de participer au jury de ma soutenance de thèse en tant qu'examineur. Je le remercie aussi pour sa sollicitude à l'égard de ma thèse de doctorat. Veuillez recevoir, Professeur, mes cordiales salutations.*

*J'exprime ma gratitude à Monsieur **Mostafa MANSOUR**, Professeur Habilité à la Faculté des Sciences Aïn Chock Casablanca, d'avoir accepté d'être membre de jury de ma soutenance de thèse. Je le remercie de l'intérêt qu'il a accordé à l'égard de ce travail doctoral et pour son engagement à être examinateur. Je vous prie d'agréer, Professeur, mes salutations respectueuses.*

*Mes chaleureux remerciements s'adressent à Monsieur **Mohammed EL FALAKI**, Professeur Habilité à la Faculté des Sciences d'El Jadida, d'avoir accepté d'être membre de jury de ma soutenance de thèse. Je le remercie de l'intérêt qu'il a accordé à l'égard de ce travail doctoral et pour son engagement à être examinateur. Je vous prie d'agréer, Professeur, l'expression de mes salutations distinguées.*

*Mes vifs remerciements vont aussi à Monsieur **Rachid MESRAR**, Professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté des Sciences d'Agadir, pour son aide précieuse, ses encouragements et son soutien inconditionnel et constant. Veuillez bien accepter, Professeur, mes salutations distinguées.*

*Je remercie également toutes les personnes avec qui j'ai partagé mes études et notamment ces années de thèse. Je remercie en particulier **M. A. Essebani, A. Slaoui, M. Bousder, M. Ragraoui, A. Samris et L. Bakmou** pour leur soutien, leur gentillesse et pour les échanges et les discussions. Ma reconnaissance à tous les doctorants anciens et nouveaux thésards du Laboratoire de Physique des Hautes Énergies-Modélisation et Simulation.*

*Mes sincères remerciements et ma profonde gratitude s'adressent à Mes Parents **Rkia AHBOUCH et Mohamed AMGHAR** pour leur sacrifice, leurs encouragements et leur soutien inconditionnel et constant. Leur présence dans ma vie a fait de moi ce que je suis aujourd'hui. Veuillez bien accepter, Mes Parents, l'expression de ma plus profonde gratitude.*

*Finalement, je remercie très chaleureusement mes chers frères et soeurs **Nezha, Essaadia, M'bark et Fatima** pour leurs encouragements et leur sollicitude indéniable à mes travaux de recherche.*

Résumé

La mécanique quantique est une théorie fondamentale pour décrire la réalité physique du monde microscopique. Après l'invention de la relativité générale, nous sommes convaincus que la géométrie est un outil mathématique crucial pour la formulation mathématique des théories physiques. La formulation géométrique de la mécanique quantique vise à donner une description unifiée des systèmes physiques basée sur ses structures géométriques sous-jacentes. Par exemple, aux états quantiques sont associés des points d'une variété symplectique avec une métrique Riemannienne compatible, les observables sont des fonctions à valeurs réelles sur la variété et l'évolution quantique est régie par un flux symplectique généré par une fonction Hamiltonienne. Les caractéristiques telles que les incertitudes et les réductions des états qui sont spécifiques à la mécanique quantique peuvent être également formulées géométriquement via une structure Riemannienne qui est une structure absente en mécanique classique. Il s'agit donc d'une similitude remarquable avec la formulation symplectique standard de la mécanique classique. Cette thèse de doctorat est intitulée "Aspects géométriques des corrélations quantiques dans des systèmes multiqudits". Elle a pour objectif l'étude de l'espace des états purs d'une collection de qudits (systèmes quantiques à d niveaux) à travers deux approches : la première vise à explorer les différentes structures géométriques de la variété associée à l'espace des états purs, à savoir la forme de Kähler, la métrique de Fubini-Study, la courbure, la connexion de Berry-Simon, la phase géométrique, etc. La deuxième a pour but l'étude de la dynamique du système à travers l'évaluation de la vitesse d'évolution et la distance géodésique qui simplifient énormément la résolution du problème du brachistochrone quantique. Ces deux approches ont été examinées en relation avec l'intrication quantique pour des systèmes bipartites. Les résultats que nous avons examinés et discutés dans ce travail donnent un aperçu très intéressant des structures géométriques des systèmes quantiques et de notre compréhension de la nature géométrique de la théorie de l'information quantique.

Mots-clefs : Mécanique quantique géométrique, Phase géométrique, Variété des états quantiques, Structure de Kähler, Intrication quantique, Dynamique quantique, Problème du brachistochrone quantique.

Abstract

The quantum mechanics is a fundamental theory to describe the physical reality of the microscopic world. After the invention of the general relativity, we are convinced that geometry is a crucial mathematical tool for the mathematical formulation of the physical theories. The geometric formulation of quantum mechanics aims at giving a unified description of physical systems based on its underlying geometric structures. For instance, the quantum states are associated with points of a symplectic manifold with a compatible Riemannian metric, the observables are real-valued functions on this manifold and the quantum evolution is governed by a symplectic flow generated by a Hamiltonian function. The features such as the uncertainties and the state reductions being specific to the quantum mechanics can also be formulated geometrically via a Riemannian structure which is a structure absent in classical mechanics. It is thus a remarkable similarity with the standard symplectic formulation of the classical mechanics. This PhD thesis is entitled “Geometric aspects of quantum correlations in multiqubit systems”. It aims at studying the pure states space of a collection of qudits (d -level quantum systems) through two approaches : the first one aims at exploring the different geometric structures of the manifold associated to the space of pure states, namely, the Kähler form, the Fubini-Study metric, the curvature, the Berry-Simon connection, the geometric phase, etc. The second one aims at studying the dynamics of the system through the evaluation of the evolution speed and the geodesic distance which considerably simplify the solution of the quantum brachistochrone problem. These two approaches have been examined in relation with the quantum entanglement for the bipartite systems. The results examined and discussed in this work give a very interesting insight into the geometric structures of quantum systems and our understanding of the geometric nature of the quantum information theory.

Keywords : Geometric quantum mechanics, Geometrical phase, quantum state manifold, Kähler structure, Quantum entanglement, Quantum dynamics, Quantum brachistochrone problem.

Table des matières

Table des figures	8
Introduction générale	9
I Des espaces de Hilbert aux variétés des états quantiques	15
1 Introduction	15
2 Construction de variété des états quantiques via la théorie de groupes et le formalisme des états cohérents	16
2.1 Structure algébrique de la dynamique d'un système quantique	16
2.2 Degrés de liberté de la dynamique quantique	19
2.3 Construction de la variété des états quantiques	22
2.4 Structures géométriques de la variété des états quantiques	23
3 Construction directe de variété des états quantiques	28
3.1 Espace complexe projectif $\mathbb{C}P^N$	29
3.2 Structures géométriques sur l'espace de Hilbert projectif	30
4 Conclusion	34
II Phases géométriques	35
1 Introduction	35
2 Phase géométrique de Berry	36
2.1 Théorème adiabatique	36
2.2 Dérivation de la phase de Berry	38
2.3 Phase de Berry comme un potentiel de jauge	39
2.4 Phase de Berry dans la géométrie de l'espace des états quantiques	40
2.5 Exemple : particule de spin $-1/2$ dans un champ magnétique rotatif adiabatique	41
3 Phase géométrique de Aharonov-Anandan	43
3.1 Dérivation de la phase de Aharonov-Anandan	44
3.2 Phase de Aharonov-Anandan et potentiel de jauge sur \mathcal{PH}	45
3.3 Exemple : particule de spin $-1/2$ dans un champ magnétique rotatif arbitraire	46
4 Phase géométrique généralisée dans l'évolution de Schrödinger	48
4.1 Phase géométrique non-cyclique et non-adiabatique	48

4.2	Exemples d'illustration	49
5	Phases topologiques fractionnaires	50
5.1	Pour un système à un qudit	50
5.2	Pour un système à deux qudits	51
6	Conclusion	53
III Caractérisation géométrique et dynamique d'une collection de N qudits couplés via une interaction de type Ising		54
1	Introduction	54
2	Évolution, géométrie et topologie d'un système à N qudits	55
2.1	Modèle d'Ising et la structure algébrique correspondante	55
2.2	Géométrie de l'état fondamental quantique	56
2.3	Évolution quantique de l'état fondamental et la géométrie résultante	57
2.4	Topologie de l'espace des états quantiques de N qudits	58
3	Phases géométriques acquises par le système à N qudits	60
3.1	Phase géométrique acquise par l'état fondamental	60
3.2	Phase géométrique acquise par l'état fondamental au cours de son évolution	60
4	Vitesse d'évolution et problème du brachistochrone quantique	62
4.1	Vitesse d'évolution quantique	63
4.2	Résolution du problème du brachistochrone quantique	64
5	Aspects géométriques et dynamiques de l'intrication pour un système à deux qubits	65
5.1	Effet de l'intrication sur la géométrie de l'espace des états	66
5.2	Effet de l'intrication sur la phase géométrique	67
5.3	Effet de l'intrication sur la dynamique du système	67
6	Conclusion	68
IV Géométrie associée à l'espace des états de deux qubits intriqués dans les fibrations de Hopf		69
1	Introduction	69
2	Description géométrique d'un qubit	70
2.1	Première fibration de Hopf	70
2.2	Connexion de Berry-Simon	72
2.3	Métrique de Fubini-Study, phase de Aharonov-Anandan et la forme de Kähler	73
3	Représentation spinorielle des états à deux qubits et géométrisation de l'intrication	74
3.1	Seconde fibration de Hopf	74
3.2	Détermination de l'intrication dans la seconde fibration de Hopf	76
3.3	Tenseur métrique et l'intrication sur la base de Hopf S^4	77
3.4	Champ de jauge non abélien $SO(4)$ et intrication	78
4	Phases quantiques générées par les états intriqués de deux qubits sous les opérations unitaires locales	81

4.1	Décomposition de Schmidt de l'état à deux qubits	81
4.2	Phases géométrique, dynamique et totale sous les opérations unitaires locales	83
5	Conclusion	86
V	Contributions	87
1	Contribution I : Quantum state manifold and geometric, dynamic and topological phases in an interacting two-spin system, B. Amghar and M. Daoud, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys, 17 (2020), 2050030-1284.	87
1.1	Résumé	87
2	Contribution II : Geometrical aspects and quantum brachistochrone problem for a collection of N spin- s system with long-range Ising-type interaction, B. Amghar and M. Daoud, Phys. Lett. A, 384 (2020), 126682.	102
2.1	Résumé	102
	Conclusion générale et perspectives	112
	Bibliographie	116

Table des figures

I.1	Illustration de l'algèbre de lie \mathcal{A} (espace tangent) sur la variété associée au groupe de Lie \mathcal{G} correspondant.	17
II.1	L'espace fibré P pour la phase de Berry où Π est l'application de projection de P vers la base \mathbf{M} (section).	40
II.2	Particule de spin $-1/2$ dans un champ magnétique \mathbf{B} donné par l'équation (II.30).	41
II.3	Espace de paramètres pour le champ magnétique \mathbf{B} donné par l'équation (II.30).	42
II.4	(a) Illustration de l'espace de Hilbert projectif \mathcal{PH} . (b) Évolutions cycliques \hat{C} dans \mathcal{PH} et C dans \mathcal{H}	44
III.1	Rotation $R_{\vartheta, \varphi}$ pour l'état fondamental $ - s \rangle$ associée au i -ième spin $-s$	57
III.2	Comportement de la courbure Gaussienne K en fonction du paramètre ϑ	59
III.3	Comportement de la vitesse d'évolution V_{FS} en fonction du paramètre ϑ avec $J = 1$	64
IV.1	Représentation sur la sphère de Bloch d'un système à un qubit (IV.1).	70
IV.2	Fibration de Hopf de l'espace total S^3 après une projection stéréographique sur \mathbb{R}^3 [139].	71
IV.3	Illustration de la Boule de Bloch B^3 de rayon R_b	78

Introduction générale

La mécanique quantique est découverte au début du 20ème siècle par W. Heisenberg, E. Schrödinger et d'autres dans le but de comprendre des résultats expérimentaux que la mécanique classique échouait à expliquer. Par exemple, l'existence de raies spectrales dont les premières observations remontent à la fin du 18ème siècle [1], l'effet photo-électrique découvert par H. R. Hertz en 1886 [2], le rayonnement du corps noir [3], etc. Ainsi, la mécanique quantique constitue un changement révolutionnaire dans notre compréhension du monde microscopique. Elle nous permet de décrire le comportement et donner les lois d'évolution des constituants microscopiques de la matière. Plus précisément, les phénomènes de l'intrication quantique et de l'interférence lumineuse qui se manifestent pour les objets de petite taille Δq ou de petite impulsion Δp , de sorte que le principe d'incertitude de Heisenberg soit vérifié $\Delta q \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ [4].

Aujourd'hui, la mécanique quantique constitue une partie importante de notre compréhension des phénomènes physiques. Ses conséquences, tant au niveau fondamental qu'au niveau pratique, intriguent les mathématiciens, les physiciens, les chimistes et même les philosophes. Un système quantique est généralement décrit en termes de certains éléments d'espaces vectoriels et d'opérateurs linéaires agissant sur ces espaces. Les espaces vectoriels et leurs opérateurs hermitiens, i. e., observables, représentent les états et les grandeurs physiques mesurables du système quantique. La dynamique d'un système quantique est déterminée par des équations différentielles dynamiques, les équations de Schrödinger ou de Heisenberg, qui impliquent un opérateur linéaire appelé Hamiltonien [5]. L'opérateur Hamiltonien donne les niveaux d'énergie et surtout décrit l'évolution des états du système physique dans le temps. Les manuels standards de mécanique quantique portent presque exclusivement sur les propriétés des systèmes quantiques dont le Hamiltonien ne dépend pas du temps. Dans de nombreuses situations pratiques, cependant, les paramètres physiques qui apparaissent dans l'expression pour le Hamiltonien sont déterminés par des facteurs externes ou environnementaux dépendant du temps [9]. L'étude des Hamiltoniens est donc très importante pour la modélisation de systèmes physiques réels.

L'un des aspects le plus remarquable de la physique moderne, est l'introduction des concepts géométriques décrivant les constituants fondamentaux de la nature et, en particulier, l'apparition de *la mécanique quantique géométrique* qui a vu le jour il y a plus de deux décennies dans les travaux de T. W. B. Kibble [10, 11], qui a montré comment la théorie

quantique pouvait être formulée dans un langage de la dynamique Hamiltonienne de l'espace de phase. Ce fut un développement remarquable dans la mesure où les physiciens croyaient auparavant que la mécanique classique avait une structure d'espace de phase Hamiltonienne naturelle, à laquelle il fallait appliquer une procédure de quantification appropriée pour produire un type de structure très différent, à savoir l'espace complexe de Hilbert de mécanique quantique avec une famille d'opérateurs linéaires, correspondant à des observables physiques [5]. Cependant, avec le développement de la mécanique quantique géométrique, il est devenu difficile de soutenir ce point de vue, et la théorie quantique est devenue davantage reconnue comme une entité autonome. Une tentative notable de formuler la procédure de quantification dans un cadre mathématique rigoureux a été poursuivie dans le programme de quantification géométrique [6, 7, 8]. Cependant, la mécanique quantique géométrique ne s'intéresse pas à la procédure de quantification en tant que telle, mais accepte la théorie quantique comme donnée. En effet, d'un point de vue moderne, la nature du problème s'est en quelque sorte inversée, et l'objectif principal est désormais de mieux comprendre comment le monde classique émerge de la théorie quantique. Ainsi, contrairement au programme de "quantification géométrique" mentionné ci-dessus, ce dont nous avons réellement besoin pourrait être appelé de manière plus appropriée un programme de "classicalisation géométrique".

Dans cette mesure, il est possible d'affirmer que la notion de quantification est superflue. La réflexion actuelle sur ces questions se fonde sur une relation spéciale entre la mécanique classique et la mécanique quantique. Elle est distincte de l'idée de quantification, à savoir que la théorie quantique possède une structure mathématique intrinsèque équivalente à celle de la dynamique Hamiltonienne de l'espace de phase, sauf que l'espace de phase qui lui est associé n'est pas celui de la mécanique classique. En fait, l'espace des états de la mécanique quantique que nous appelons *l'espace des états purs* possède, naturellement, la structure de la variété de Kähler [12, 13]. Cela conduit à une formulation géométrique des postulats de la mécanique quantique ayant une apparence très différente. En particulier, aux états quantiques sont maintenant associés des points d'une variété symplectique (qui possède en plus une métrique Riemannienne compatible), les observables sont représentés par certaines fonctions à valeurs réelles sur cet espace, et l'évolution de Schrödinger est décrite par le flux symplectique généré par une fonction Hamiltonienne [14]. Il existe donc une similitude remarquable avec la formulation symplectique standard de la mécanique classique. Les caractéristiques telles que les incertitudes et les réductions des vecteurs d'état peuvent être également formulées géométriquement.

De nos jours, les approches géométriques de la théorie quantique jouent un rôle important dans l'étude de l'évolution des systèmes quantiques [14, 15, 16]. En effet, la formulation géométrique de la théorie quantique et l'étude de la géométrie de l'espace des états quantiques fournissent des outils utiles pour la compréhension des caractéristiques intéressantes dans le monde quantique et, en particulier, dans le domaine de la science de l'information quantique [17, 18, 19, 20, 21]. Plusieurs travaux ont été consacrés à la géométrie de l'espace des états quantiques qui simplifie considérablement l'exploration des propriétés physiques des systèmes quantiques. À titre d'exemple, la variété associée à l'espace des états quantiques purs peut être identifiée à un espace complexe projectif doté d'une *métrique de Fubini-Study*

[22, 23], et les distances géodésiques entre les points de cette variété peuvent être exprimées en termes de l'incertitude énergétique totale correspondante [24] qui, à son tour, est intimement liée à la vitesse d'évolution [25, 26]. Dans ce contexte, les aspects géométriques associés aux caractéristiques quantiques ont été exploités en relation avec le problème du brachistochrone quantique [27, 28, 29, 30], et pour déterminer le circuit quantique associé à une transformation unitaire [31, 32, 33]. À cet égard, les aspects géométriques associés aux multiqubits se sont révélés d'une importance primordiale dans le domaine de la science de l'information quantique [34, 35, 36] en général et, en particulier, dans l'étude des propriétés d'intrication dans les systèmes quantiques multipartites [37, 38, 39, 40]. Dans ce sens, la variété associée à l'espace de Hilbert d'un système à deux qubits est équipée d'une métrique de Fubini-Study qui s'écrit en termes de la concurrence de Wootters [41, 42, 43]. Ce résultat montre clairement le rapport entre la géométrie et l'intrication. Il illustre aussi que la géométrie de la variété associée à l'espace des états quantiques dépend du degré d'intrication. En outre, la relation entre l'intrication et la courbure Gaussienne pour un système à deux spins $-1/2$ a été exploré [39, 42]. Ainsi, la manipulation des approches géométriques dans la théorie de l'information quantique contribue à la compréhension des caractéristiques physiques des systèmes quantiques.

Un intérêt considérable a été dévoué au concept de *la phase géométrique* accumulée lors de l'évolution des systèmes quantiques. La découverte de cette phase a été faite par Michael Berry dans son article fondateur [44] quand il a étudié les états stationnaires des systèmes microscopiques. Un atome d'hydrogène isolé fournit un exemple d'état quantique stationnaire, puisque l'électron unique de l'atome se déplace dans le champ électrique immuable de son noyau. Dans un tel état étiqueté par un ensemble particulier de nombres quantiques, les mesures de l'atome donneront le même résultat à tout moment, à l'exception d'un décalage sans conséquence dans la phase de la fonction d'onde décrivant le système [45]. Ce déphasage est appelé par la suite *la phase géométrique de Berry*. La dérivation de cette phase quantique repose sur *l'approximation adiabatique quantique* qui n'était pertinente que pour les Hamiltoniens à évolution lente. Par contre, pour un Hamiltonien à vecteurs propres changeants, l'approximation adiabatique de la dynamique d'une évolution cyclique ne peut pas être exacte. Par conséquent, la phase de Berry ne pouvait être qu'une approximation de la véritable phase géométrique quantique. Un peu plus tard, Y. Aharonov et J. Anandan [46] ont suggéré une généralisation importante de la phase de Berry. Ils ont considéré les évolutions cycliques qui ne sont pas limitées par la condition adiabatique. Cela signifie que nous n'avons pas besoin d'un espace de paramètres pour décrire l'évolution cyclique du Hamiltonien, mais seulement de *l'espace de Hilbert projectif* sur lequel le système décrit des courbes fermées. La phase de Berry est donc un cas particulier de cette nouvelle phase appelée *phase géométrique de Aharonov-Anandan*. Cette généralisation est très intéressante, car dans les processus réels, la condition adiabatique n'est jamais exactement remplie. C'est aussi la raison pour laquelle Berry a essayé de supprimer la condition adiabatique en calculant les termes de correction adiabatique [47]. Peu après les travaux de Aharonov et Anandan, plusieurs autres généralisations sont apparues. Par exemple, J. Samuel et R. Bhandari [48] ont écrit la phase géométrique de Aharonov-Anandan comme une intégrale curviligne de *la connexion de Berry-Simon* le long de la géodésique reliant les deux états, mesurée avec la

métrique Fubini-Study [49, 50, 51, 52]. D'ailleurs, N. Mukunda et R. Simon [53] ont également développé une approche cinématique de la théorie des phases géométriques à travers laquelle ils ont libéré cette phase des conditions d'adiabaticité et de cyclicité pour des évolutions plus générales. En outre, A. Z. Khoury et L. E. Oxman [54, 55] ont démontré un autre type de phases appelées phases topologiques fractionnaires qui apparaissent naturellement pour les évolutions cycliques effectués par les opérations unitaires locales.

Une autre question intéressante qui a été analysée d'un point de vue géométrique ces dernières années concerne la relation remarquable entre les propriétés d'intrication d'un état à deux qubits et la phase quantique correspondante acquise naturellement au cours de l'évolution du système considéré [56, 57, 58]. En effet, les phases géométriques, dynamiques et globales ont été examinées en relation avec la I -concurrence pour les systèmes à deux qudits¹ [54, 55]. L'intérêt pour l'étude de la relation entre les corrélations quantiques dans les systèmes multipartites et les phases géométriques est essentiellement dû au fait que la mise en oeuvre des algorithmes quantiques et du calcul quantique universel implique des opérations unitaires [59, 60]. D'autres motivations de ce type d'études sont citées dans les références [61, 62, 63, 64, 65]. Récemment, de nombreuses études sur la phase géométrique ont montré son rôle important dans la théorie de l'information quantique à travers ses applications potentielles telles que la mise en oeuvre de portes unitaires utiles pour le calcul quantique [66]. De surcroît, la démonstration expérimentale d'une porte de phase conditionnelle de Berry a été fournie à l'aide de la résonance magnétique nucléaire [62] ainsi que pour l'implémentation du calcul quantique basée sur la manipulation (laser) d'un ensemble d'ions piégés [67]. De plus, l'origine topologique des phases fractionnaires dans les systèmes de Hall quantiques ouvre des perspectives intéressantes pour un calcul quantique robuste [68], etc...

Les phases géométriques sont d'une importance capitale dans l'étude des systèmes de la matière condensée. L'un des premiers résultats dans ce sens est dû à J. Zak [69] qui a remarqué que certaines phases non intégrables de la fonction d'onde de Bloch pouvaient être identifiées comme une phase géométrique. Ce résultat a ensuite été mis en relation avec la polarisation des isolants cristallins [70] et utilisé pour développer une méthode pratique de calcul des propriétés piézoélectriques et ferromagnétiques [71]. Les phases géométriques des ondes de Bloch peuvent également affecter la dynamique semi-classique des électrons dans les métaux et les semi-conducteurs [72, 73], et ont des applications importantes dans la théorie de l'effet Hall anormal² [74]. Plus spectaculairement, la conductance de Hall quantifiée découverte dans les systèmes électroniques bidimensionnels peut être identifiée comme une manifestation de certaines phases géométriques [75, 76, 77]. Pour d'autres applications de la phase géométrique en physique de la matière condensée, nous citons les références suivantes [78, 79, 80, 81].

Problématique de thèse.

L'objectif essentiel de cette thèse concerne l'étude des aspects géométriques et dynamiques pour des systèmes quantiques multipartites en relation avec l'intrication. Cette

1. Système quantique de d niveaux indépendants.

2. Résulte de la présence simultanée du couplage spin-orbite et d'une polarisation de spin.

étude concerne les caractéristiques physiques des systèmes quantiques en termes des outils géométriques sur l'espace des états correspondant. Ces méthodes simplifient considérablement le traitement de nombreux problèmes dans la théorie de l'information quantique, à savoir les problèmes liés à la dynamique quantique, l'intrication quantique, calculs quantiques, cryptographie quantique, etc...

Ce manuscrit est structuré en cinq chapitres.

Dans le **premier chapitre**, nous présentons deux approches de construction de la variété associée à l'espace des états quantiques pour un système physique intégrable donné : la première concerne la construction de cette variété à l'aide de la théorie des représentations de groupes ainsi que le formalisme des états cohérents. La deuxième porte sur la construction directe à partir de l'espace original de Hilbert. Pour ces deux méthodes, nous introduisons les différentes structures géométriques émergentes ainsi que leurs interprétations physiques dans le but de comprendre les aspects géométriques fondamentaux de la théorie quantique.

Le **second chapitre** est réservé essentiellement au concept de la phase géométrique sur la variété associée à l'espace des états d'un système discuté dans le premier chapitre. Nous commençons par l'introduction de la phase géométrique cyclique adiabatique de Berry puis la phase cyclique de Aharonov-Anandan en passant par l'approche cinématique de Mukunda-Simon et nous terminons par les phases topologiques fractionnaires.

Le **troisième chapitre** concerne une utilisation de tous les outils géométriques définis au premier et au second chapitres pour aborder l'intrication dans un système physique de N qudits. Nous procédons via deux approches : la première vise à explorer les structures géométriques de la variété associée aux états du système multiqubits. La deuxième approche est de caractère dynamique dont l'objectif est de résoudre le problème du brachistchrone quantique. Ces deux approches seront traitées en relation avec l'intrication pour un système à deux qubits.

Le **quatrième chapitre** traite une autre représentation géométrique de l'espace des états de deux qubits. Elle utilise la première et la seconde *fibrations de Hopf*³. Dans ce cadre, nous explorons la relation entre les aspects géométriques issus de ces deux fibrations et le degré d'intrication entre deux qubits. Puis, nous examinerons les différentes phases quantiques acquises sous les opérations unitaires locales en relation avec l'intrication et la géométrie de la base de Hopf S^4 .

Le **cinquième chapitre** est consacré à l'exposition de l'ensemble de nos contributions à ce sujet de recherche. Finalement, nous terminerons le manuscrit par une conclusion générale et des perspectives.

3. Sont des applications topologiques permettant de réduire l'espace de Hilbert de système de qubits à un autre espace de dimension inférieure appelé fibré de Hopf [107].

Liste des publications et communications

Publications

- ▶ B. Amghar and M. Daoud, *Quantum state manifold and geometric, dynamic and topological phases for an interacting two-spin system*, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, **17** (2020), 2050030.
- ▶ B. Amghar and M. Daoud, *Geometrical aspects and quantum brachistochrone problem for a collection of N spin- s system with long-range Ising-type interaction*, *Physics Letters A*, **384** (2020), 126682.

Communications nationales

- ▶ *Journée Nationale des Doctorants et des Jeunes Chercheurs, Phase géométrique fractionnaire pour les qubits intriqués*, juillet 2018, FSR-UM5 18-20.
- ▶ *9-ième Rencontre Nationale des Jeunes Chercheurs en Physique, Phase de Berry pour les qubits intriqués*, Décembre 2018, FS-BEN M'SIK- CASABLANCA 27-29.
- ▶ *1er Congrès National en Physique Fondamentale et ses Applications, Phase de Berry pour les qubits intriqués lors d'une évolution unitaire*, Avril 2019, F. Polydisciplinaire-BENI-MELLAL 19-20.
- ▶ *Rencontre Nationale Information et Cryptographie Quantique, Aspects géométriques de l'espace des états de deux qubits*, juin 2019, FS-KÉNITRA 26-27.
- ▶ *Rencontre Nationale Information et Cryptographie Quantique, Caractérisation géométrique de l'espace des états purs des systèmes quantiques intriqués*, Mars 2021, FSR-UM5 26-27.
- ▶ *Journée Nationale des Doctorants et des Jeunes Chercheurs, Des espaces de Hilbert aux variétés des états quantiques*, juillet 2021, FSR-UM5 15-17.

Communications internationales

- ▶ *Advance in Physics International on Line Conference, Quantum state manifold, geometric phase and total quantum magnetization for an interacting two-spin*, April 2020, ICTP 11-12.

Chapitre I

Des espaces de Hilbert aux variétés des états quantiques

1 Introduction

En mécanique classique les observables dynamiques décrivant un système classique sont des fonctions analytiques différentielles définies sur l'espace de phase classique, qui contient l'ensemble des états physiques du système. Chaque état physique de ce système est repéré par ses degrés de liberté physiques indépendants. Dans ce sens, pour un point initial donné sur l'espace de phase classique, i.e., état physique initial, l'évolution temporelle du système classique est caractérisée par une trajectoire décrite par l'équation de mouvement [82], ce qui reflète l'aspect déterministe de la théorie classique. Par contre, en théorie quantique, les propriétés d'un système intégrable sont décrites par des fonctions d'onde complexes et de carrés sommables d'un espace \mathcal{H} appelé espace de Hilbert [5, 45]. Les observables dynamiques deviennent des opérateurs hermitiens agissant sur les vecteurs d'états physiques accessibles dans l'espace de Hilbert correspondant au système quantique considéré. Cependant, cet espace quantique ne joue pas le même rôle que celui de l'espace de phase classique, parce qu'il s'oppose avec l'interprétation probabiliste de M. Born [83]. En effet, pour un état quantique $\psi(\mathbf{r}, t)$ d'un système physique (particule) de masse m soumis à un potentiel $V(\mathbf{r})$ se déplaçant dans l'espace Euclidien \mathbb{R}^3 , l'évolution de ce système est régie par l'équation de Schrödinger suivante :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{1}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}, t). \quad (\text{I.1})$$

Dans ce schéma, en se plaçant dans le cas d'un état stationnaire, la fonction densité de probabilité s'exprime par [84]

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{\psi^*(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t)}{\int_{\mathbb{R}^3} \psi^*(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}}. \quad (\text{I.2})$$

Ainsi, il est intéressant de constater que la fonction densité de probabilité (I.2) de la particule est indépendante des facteurs de phases multipliés par la fonction d'onde $\psi(\mathbf{r}, t)$. Autrement dit, l'état du système n'est pas donné par $\psi(\mathbf{r}, t)$ lui-même, mais plutôt par une classe

I.2 Construction de variété des états quantiques via la théorie de groupes et le formalisme des états cohérents

d'équivalence modulo la transformation de la forme

$$\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow e^{i\vartheta} \psi(\mathbf{r}, t), \quad \vartheta \in [0, 2\pi]. \quad (\text{I.3})$$

En d'autres termes, les états $\psi(\mathbf{r}, t)$ et $e^{i\vartheta} \psi(\mathbf{r}, t)$ sont deux états différents dans l'espace de Hilbert \mathcal{H} , alors qu'ils décrivent la même réalité physique, ce qui montre l'insuffisance de l'espace de Hilbert dans la description totale de la dynamique du système quantique. De plus, ses dimensions ne peuvent pas être définies directement comme des degrés de liberté physiques, ni peuvent être directement réduites à un espace de phase classique dans la limite classique. D'ailleurs, les fonctions d'onde ne sont pas considérées comme des observables [85]. Ainsi, toutes ces contraintes prouvent que l'espace de Hilbert n'est pas la version quantique équivalente de l'espace de phase classique pour décrire la dynamique des systèmes quantiques. La solution repose sur la géométrisation de la théorie quantique qui vise à remplacer le schéma de l'espace de Hilbert usuel par une variété des états quantiques [21]. Cette dernière constitue *l'espace de phase quantique*¹ pertinent sur lequel la dynamique des systèmes quantiques est bien définie, et munie éventuellement de certaines structures bien particulières qui vont nous permettre de traiter de nombreux problèmes dans la théorie de l'information quantique, à titre d'exemple les problèmes liés à la dynamique quantique [30, 86, 87], l'intrication quantique [88, 89, 90], calculs quantiques [62, 64, 91], cryptographie quantique [92, 93], etc...

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à la construction de la variété d'états quantiques par deux méthodes différentes : la première concerne la construction de la variété des états quantiques à l'aide de la théorie des représentations de groupes ainsi que la théorie des états cohérents. La deuxième porte sur la construction directe de la variété des états quantiques à partir de l'espace original de Hilbert. Pour ces deux méthodes, nous explorons les différentes structures géométriques émergentes ainsi que leurs interprétations physiques dans le but de comprendre les aspects géométriques fondamentaux de la théorie quantique.

2 Construction de variété des états quantiques via la théorie de groupes et le formalisme des états cohérents

2.1 Structure algébrique de la dynamique d'un système quantique

Pour une certaine symétrie physique associée à un système quantique [94, 95, 96, 97], il existe toujours un groupe dynamique \mathcal{G} auquel est associé une algèbre \mathcal{A} dont les générateurs $\{T_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ vérifient la structure de l'algèbre donnée par la relation de commutation suivante

$$[T_i, T_j] = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k T_k, \quad (\text{I.4})$$

1. Il s'agit de l'espace des états quantiques, autre que l'espace de Hilbert usuel, dans lequel la dynamique des systèmes est bien établie. Il est doté de la structure d'une variété de Kähler.

I.2 Construction de variété des états quantiques via la théorie de groupes et le formalisme des états cohérents

où les coefficients C_{ij}^k sont les constantes de structure de l'algèbre \mathcal{A} . Le Hamiltonien H du système et ses opérateurs de transitions A sont exprimés en termes des opérateurs de l'algèbre \mathcal{A} correspondante

$$H = H(T_i), \quad A = A(T_i). \quad (\text{I.5})$$

Souvent, les groupes dynamiques associés à la plupart des systèmes quantiques intégrables sont les groupes de Lie [12, 85]. Plus précisément, si le groupe dynamique \mathcal{G} est un groupe de Lie, alors il est lié à son algèbre de Lie \mathcal{A} correspondante par l'application exponentielle unitaire

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{G}, \\ X &\longrightarrow g = \exp(X) = \exp\left(i \sum_{i=1}^n \alpha_i T_i\right), \quad \alpha_i \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

La condition de l'unitarité stipule le fait que l'évolution temporelle de la fonction d'onde doit être compatible avec l'interprétation probabiliste qui lui est associée [83]. D'un point de vue géométrique, le groupe de Lie muni de la structure d'une variété différentielle, pour laquelle les opérations du groupe de lie \mathcal{G} telle que l'inversion ($\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$) et la multiplication ($\mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$) sont différentiables. Autrement dit, il est possible de voir le groupe de Lie \mathcal{G} comme étant une variété différentielle. Il en découle que l'algèbre de lie \mathcal{A} associée au groupe de lie \mathcal{G} coïncide avec l'espace tangent au voisinage de l'identité notée e (l'élément neutre) (voir la figure (I.1)).

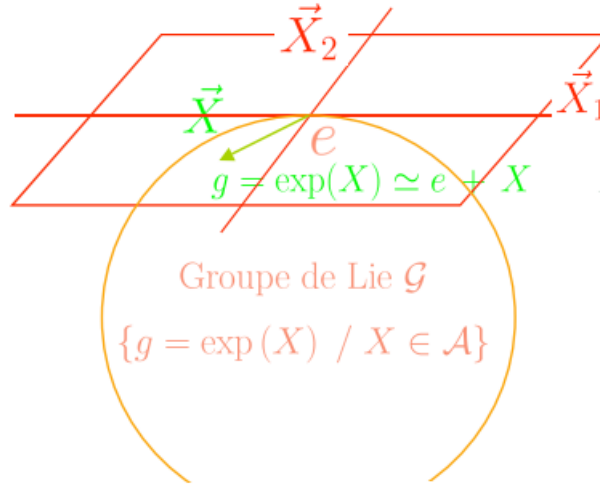


Figure I.1 – Illustration de l'algèbre de lie \mathcal{A} (espace tangent) sur la variété associée au groupe de Lie \mathcal{G} correspondant.

Selon la théorie des représentations de groupes [94, 95], l'espace des états de la mécanique quantique \mathcal{H} correspond à l'espace de représentation de l'algèbre de Lie \mathcal{A} . La théorie des groupes assure que \mathcal{H} est souvent décomposable en somme directe des sous-espaces irréductibles unitaires ξ_Λ de \mathcal{A} tel que

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\Lambda} d_{\Lambda} \xi_{\Lambda}, \quad (\text{I.7})$$

I.2 Construction de variété des états quantiques via la théorie de groupes et le formalisme des états cohérents

où Λ est le vecteur caractérisant une représentation irréductible de \mathcal{A} . Si on suppose que \mathcal{A} est une algèbre de Lie simple, ceci implique que Λ caractérise le poids maximal de cette représentation irréductible et d_Λ indique sa dégénérescence dans \mathcal{H} [98]. Il est intéressant de mentionner que, dans ce qui va suivre, nous restreindrons notre discussion à l'espace irréductible ξ_Λ comme un espace de représentation irréductible de \mathcal{A} . Pour bien illustrer la structure algébrique de la dynamique quantique, nous prenons les deux exemples suivants :

Exemple 1 : oscillateur harmonique

Nous considérons un oscillateur harmonique à une dimension dont la dynamique est décrite par le Hamiltonien de la forme

$$H_{oh} = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2), \quad (I.8)$$

de sorte que $P = -i\hbar\partial/\partial Q$ est l'opérateur moment canonique, et Q désigne la coordonnée canonique correspondante. Dans la représentation du nombre de particules, les opérateurs de création et d'annihilation sont donnés par

$$a^+ = (Q - iP)/\sqrt{2\hbar}, \quad a = (Q + iP)/\sqrt{2\hbar}. \quad (I.9)$$

Il en découle que le Hamiltonien de l'oscillateur harmonique (I.8) se réécrit

$$H_{oh} = \hbar\omega \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right). \quad (I.10)$$

Ainsi, la dynamique du système est alors décrite par l'algèbre de Weyl-Heisenberg $h_4 = \{a^+, a, \hat{n}, I\}$ [94, 95]. La structure de l'algèbre h_4 est donnée par les relations de commutations suivantes

$$[a, a^+] = \mathbb{I}, \quad [a, \hat{n}] = a, \quad [\hat{n}, a^+] = a^+ \quad [a, \mathbb{I}] = 0, \quad [a^+, \mathbb{I}] = 0, \quad [\hat{n}, \mathbb{I}] = 0, \quad (I.11)$$

avec $\hat{n} = a^+ a$ désigne l'opérateur nombre de particule, et \mathbb{I} est l'opérateur identité. L'espace de Hilbert correspondant \mathcal{H}_{oh} est appelé l'espace Fock V^F dont la base $\mathcal{B}_{V^F} = \{|n\rangle, n = 1, 2, \dots\}$ comporte les états propres du spectre de l'oscillateur harmonique.

Exemple 2 : particule de spin-1/2

Prenons un système à deux niveaux modélisé par une particule de spin- $\frac{1}{2}$ dont la dynamique décrite par l'algèbre de Lie $su(2)$ construite par les matrices de Pauli usuelles $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. La structure algébrique correspondante est donnée par les relations de commutations

$$[S_+, S_-] = 2S_0, \quad [S_0, S_-] = -S_-, \quad [S_0, S_+] = S_+, \quad (I.12)$$

avec $\hbar = 1$. Les opérateurs de spin $\{S_\pm = \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm i\sigma_2), S_0 = \frac{1}{2}\sigma_3\}$ constituent la base de Weyl-Cartan de $su(2)$. Si on remplace le spin par le moment angulaire j , les opérateurs de spin seront remplacés aussi par les opérateurs moments angulaires $\mathcal{B}_j = \{J_+, J_-, J_0\}$ agissant sur l'espace de représentation irréductible V^{2j+1} de dimension égale $2j + 1$. Plus

I.2 Construction de variété des états quantiques via la théorie de groupes et le formalisme des états cohérents

rigoureusement, Pour une valeur j fixée, la base de l'espace des états V^{2j+1} , est donnée par $\mathcal{B}_j = \{|j, m\rangle, m = -j, -j + 1, \dots, j\}$. Si le Hamiltonien H_j du système s'écrit dans la base de Cartan \mathcal{B}_j , alors l'obtention du spectre d'énergie ainsi que les états propres dépend de sa diagonalisation dans \mathcal{B}_j . À titre d'exemple, un électron dans un champ magnétique \mathbf{B}_e . Le Hamiltonien décrivant ce système est comme suit :

$$H_e = -\mu \mathbf{B}_e \cdot \mathbf{S}, \quad (\text{I.13})$$

où $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$ est l'opérateur de spin pour l'électron. Si le champ magnétique \mathbf{B}_e est dirigé suivant l'axe z , alors le spectre énergétique se met sous la forme

$$E_m = -\mu B_s m, \quad (\text{I.14})$$

avec $m = -j, -j + 1, \dots, j$ sont les projections du spin suivant l'axe z .

2.2 Degrés de liberté de la dynamique quantique

Nombre de degrés de liberté quantiques

Une fois la structure du groupe dynamique \mathcal{G} est introduite, alors l'espace de Hilbert irréductible ξ_Λ du système doit être spécifié. En mécanique classique l'étude de la dynamique dépend de la détermination des degrés de liberté dans l'espace de phase. Afin d'examiner la dynamique d'un système quantique intégrable, il est indispensable de déterminer les degrés de liberté caractérisant sa dynamique quantique dans l'espace de phase dit *quantique* [12, 35, 85]. La théorie des représentations de groupes nous offre une démarche, parmi plusieurs, de construction d'une base dans ξ_Λ qui sera la plus appropriée pour la détermination du concept de *degrés de liberté quantiques*. Cette méthode de construction se base sur les groupes de Lie et leurs représentations [94, 95]. Le point de départ de cette méthode est de considérer une algèbre de Lie \mathcal{A} du rang l et de dimension n , il existe alors un nombre fini noté λ des chaînes de sous algèbres $\{\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2, \dots, \mathcal{A}^\lambda\}$, tel que

$$\mathcal{A} \supset \begin{cases} \mathcal{A}^1 = (\mathcal{A}_{s^1}^1 \supset \mathcal{A}_{s^1-1}^1 \supset \dots \supset \mathcal{A}_1^1), \\ \mathcal{A}^2 = (\mathcal{A}_{s^2}^2 \supset \mathcal{A}_{s^2-1}^2 \supset \dots \supset \mathcal{A}_1^2), \\ \dots \\ \mathcal{A}^\alpha = (\mathcal{A}_{s^\alpha}^\alpha \supset \mathcal{A}_{s^\alpha-1}^\alpha \supset \dots \supset \mathcal{A}_1^\alpha), \\ \dots \\ \mathcal{A}^\lambda = (\mathcal{A}_{s^\lambda}^\lambda \supset \mathcal{A}_{s^\lambda-1}^\lambda \supset \dots \supset \mathcal{A}_1^\lambda), \end{cases} \quad (\text{I.15})$$

de sorte que pour chaque chaîne des sous algèbres $\mathcal{A}^\alpha \subset \mathcal{A}$, $\alpha = 1, \dots, \lambda$, il existe un ensemble complet d'opérateurs qui commutent (ECOC) constituant l'ensemble S^α défini comme suit

$$S^\alpha = \{Q_i^\alpha; [Q_i^\alpha, Q_j^\alpha] = 0; i, j = 1, \dots, d_\alpha\}, \quad (\text{I.16})$$

où d_α est le nombre total d'opérateurs dans l'ECOC pour la chaîne α . En outre, ces opérateurs spécifient complètement l'espace de représentation irréductible ξ_Λ par un ensemble de nombres quantiques, i. e., valeurs propres, associés à ses vecteurs propres correspondants :

$$Q_i^\alpha |\gamma^\alpha\rangle = \gamma_i^\alpha |\gamma^\alpha\rangle, \quad i = 1, \dots, d_\alpha \quad (\text{I.17})$$

I.2 Construction de variété des états quantiques via la théorie de groupes et le formalisme des états cohérents

La dimension d_α de l'ECOC S^α pour une chaîne de sous algèbres \mathcal{A}^α est donnée par [85]

$$d_\alpha = l + \frac{n-l}{2} = d. \quad (\text{I.18})$$

Il parait clairement que d_α dépend seulement de la dimension n et du rang l de l'algèbre de Lie totale \mathcal{A} . Par conséquent, la dimension de l'ECOC est indépendante des chaînes de sous algèbres \mathcal{A}^α ainsi que de leurs dimensions ($d_\alpha = d$). De façon générale, l'ECOC pour chaque chaîne de sous algèbre \mathcal{A}^α possède deux classes d'opérateurs : la première classe S_T^α comporte un sous ensemble d'opérateurs totalement dégénérés (TD), et qui satisfont

$$Q_i^\alpha |\psi\rangle = b |\psi\rangle, \quad (\text{I.19})$$

où b est une constante pour tous les états $|\psi\rangle \in \xi_\Lambda$. Pour la deuxième classe S_N^α englobe un sous ensemble d'opérateurs non totalement dégénérés (NTD), qui ne vérifient pas l'équation(I.19), de sorte que

$$S^\alpha = S_T^\alpha + S_N^\alpha. \quad (\text{I.20})$$

Ainsi, nous nous intéressons au sous ensemble d'opérateurs S_N^α , parce que ses opérateurs forment la base de l'espace de représentation irréductible ξ_Λ [99]. Dans le cas d'un espace de représentation ξ_Λ non dégénéré, la dimension de S_N^α est donnée par

$$M = d - l = \frac{n-l}{2}. \quad (\text{I.21})$$

En revanche, dans le cas d'un espace de représentation irréductible ξ_Λ dégénéré, la dimension M de l'ensemble S_N devient :

$$M < \frac{n-l}{2}. \quad (\text{I.22})$$

Ainsi, la dimension M de S_N^α est indépendante des chaînes de sous algèbres \mathcal{A}^α ($S_N^\alpha = S_N$). Par contre, il dépend de la dégénérescence de l'espace irréductible ξ_Λ ainsi que la dimension n et le rang l de l'algèbre de Lie totale \mathcal{A} [100]. Il est intéressant de noter que le nombre M d'opérateurs NTD coïncide avec le nombre de *degrés de liberté de la dynamique quantique* (DLDQ). Cela est dû au fait que les opérateurs NTD peuvent déterminer complètement la structure de l'espace irréductible ξ_Λ . Par ailleurs, le nombre de DLDQ est unique pour un système quantique intégrable, ainsi qu'il peut être déterminé par n'importe quelle chaîne de sous algèbres $\mathcal{A}^\alpha \subset \mathcal{A}$. De plus, il n'inclut pas les opérateurs TD parce qu'ils sont équivalents à une constante multiplicative par l'opérateur identité.

Réalisation des degrés de liberté quantiques

Après avoir déterminé le nombre de degrés de liberté quantiques (I.21), les opérateurs qui leur correspondent sont les opérateurs d'excitations élémentaires [100]. Autrement dit, pour tout état quantique $|\psi\rangle \in \xi_\Lambda$, il est possible de l'obtenir par une action multiple de ces opérateurs sur l'état fondamental noté $|\psi_0\rangle \in \xi_\Lambda$. Ce dernier est défini selon la compacité du groupe dynamique \mathcal{G} , de sorte que, si le groupe dynamique est compact, l'état fondamental peut être de poids minimal ou maximal. Dans le cas contraire où le groupe

I.2 Construction de variété des états quantiques via la théorie de groupes et le formalisme des états cohérents

dynamique est non-compact, l'état fondamental est celui de poids minimal [12, 85]. Dans ce schéma, en appliquant les opérateurs d'excitation élémentaires notés $\{Y_i^+, i = 1, 2, \dots, M\}$ sur l'état fondamental $|\psi_0\rangle$, nous pouvons générer tous les états possibles du système quantique. Nous définissons les opérateurs d'excitations élémentaires $Y_i^+ \in \mathcal{A}$ en fonction de l'état fondamental par

$$Y_i^+ |\psi_0\rangle \neq \begin{cases} 0, \\ |\psi_0\rangle. \end{cases} \quad (\text{I.23})$$

Il s'ensuit que tous les états $|\psi\rangle \in \xi_\Lambda$ d'un système quantique intégrable peuvent être générés comme suit :

$$|\psi\rangle = F(Y_i^+) |\psi_0\rangle, \quad (\text{I.24})$$

où $F(Y_i^+)$ est une fonction des opérateurs d'excitation élémentaires. Pour bien illustrer les degrés de liberté quantiques, prenons les deux exemples physiques suivants :

Exemple 1 : algèbre de Weyl-Heisenberg

L'algèbre dynamique de l'oscillateur harmonique est celle de l'algèbre de Weyl-Heisenberg $h_4 = \{a^+, a, \hat{n}, \mathbb{I}\}$ dont l'espace de représentation irréductible est celui de Fock V^F . Cet espace peut être déterminé par l'ECOC de h_4 contenant les opérateurs de Casimir de la chaîne algébrique suivante :

$$h_4 \supset \underset{C_{h_4}}{u(1)} \otimes \underset{\mathbb{I}}{u(1)} \underset{\hat{n}}{\quad} \quad (\text{I.25})$$

Bien que h_4 soit une algèbre de Lie non semi-simple du rang égale 2, les opérateurs de Casimir des algèbres h_4 et $u(1)$ sont néanmoins proportionnel à l'opérateur identité \mathbb{I} . Par conséquent, il existe seulement une représentation irréductible pour l'algèbre h_4 [94, 95]. À partir de la chaîne algébrique (I.25), la base de l'espace de Fock V^F est alors donnée par les états propres de l'opérateur nombre \hat{n} $\{|n\rangle, n = 1, 2, \dots\}$ tel que :

$$\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle. \quad (\text{I.26})$$

Il est clair que l'opérateur nombre \hat{n} est le seul opérateur non totalement dégénéré de l'ECOC de l'espace de Fock V^F . Ainsi, il existe seulement un degré de liberté quantique. D'autre part, l'espace de représentation de l'oscillateur harmonique est de dimension infinie, Ceci est due au fait que le groupe de Weyl-Heisenberg H_4 est non-compact. En conséquence, il est possible de réaliser le seul degré de liberté de l'oscillateur harmonique par l'opérateur de création a^+ défini précédemment par l'équation (I.9). D'un autre côté, tout état $|\psi\rangle$ de l'oscillateur harmonique est développable dans la base de vecteurs propres de l'opérateur nombre \hat{n} comme suit :

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle. \quad (\text{I.27})$$

Sauf que cet état peut être obtenu par une action multiple de l'opérateur création a^+ sur l'état fondamental $|0\rangle$. Cela se traduit par

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (\text{I.28})$$

I.2 Construction de variété des états quantiques via la théorie de groupes et le formalisme des états cohérents

Exemple 2 : algèbre $su(2)$

Prenons un autre exemple concernant un système de spin $-j$ dont la dynamique est décrite par l'algèbre de Lie $su(2)$, l'espace de représentation irréductible V^{2j+1} correspondant est de dimension $2j + 1$. Il peut être spécifié par l'ECOC de la chaîne d'algébrique suivante

$$su(2) \underset{J^2}{\supset} \underset{J_0}{u(1)}, \quad (\text{I.29})$$

où $J^2 = J_0^2 + \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+)$ est l'opérateur moment angulaire. Le rang de l'algèbre dynamique $su(2)$ est égale à 1, cela veut dire qu'il existe seulement une classe de représentation irréductible déterminée uniquement par le spin total j . En effet, pour une valeur de spin j , la base de l'espace de représentation V^{2j+1} est $\{|j, m\rangle, m = -j, -j + 1, \dots, j\}$. Cette dernière peut être spécifiée par l'opérateur J_0 :

$$\begin{aligned} J^2 |j, m\rangle &= j(j+1) |j, m\rangle, \\ J_0 |j, m\rangle &= m |j, m\rangle. \end{aligned} \quad (\text{I.30})$$

Il s'ensuit que le seul opérateur non totalement dégénéré de l'ECOC est alors J_0 , ce qui signifie que le nombre de degrés de liberté quantiques pour ce système est égale à 1. De surcroît, le groupe dynamique $SU(2)$ est compact, ce qui montre que l'espace de représentation correspondant est fini. Par conséquent, l'état fondamental peut être soit état de poids minimal ou maximal. La réalisation du degré de liberté quantique est l'opérateur J_+ (J_-) pour l'état fondamental de poids minimal (maximal). Par exemple, si l'état fondamental est de poids minimal $|\psi_0\rangle = |j, -j\rangle$, l'opérateur d'excitation élémentaire correspondant est J_+ , nous obtenons

$$|j, m\rangle = \frac{1}{(j+m)!} \binom{2j}{j+m}^{-\frac{1}{2}} (J_+)^{j+m} |j, -j\rangle. \quad (\text{I.31})$$

Il est évident qu'on peut générer tout état $|\psi\rangle = \sum_{m=-j}^j c_m |j, m\rangle \in V^{2j+1}$ par l'action du polynôme

$$\mathcal{F}(J_+) = \frac{1}{(j+m)!} \binom{2j}{j+m}^{-\frac{1}{2}} (J_+)^{j+m}, \quad (\text{I.32})$$

écrit en termes de l'opérateur d'excitation élémentaire J_+ .

2.3 Construction de la variété des états quantiques

Après que les degrés de liberté de la dynamique quantique aient été bien définis, il est maintenant possible de construire la variété associée à l'espace des états quantiques, i. e., espace de phase quantique, l'équivalence de l'espace de phase dans la mécanique classique. Pour ce but, nous définissons l'espace des opérateurs déplacements généralisés comme étant l'espace quotient \mathcal{G}/H_0 où \mathcal{G} est le groupe dynamique du système quantique, et H_0 désigne le sous groupe maximal de \mathcal{G} qui laisse l'état fondamental $|\psi_0\rangle$ invariant. Ainsi, pour un système quantique intégrable $(\mathcal{G}, \mathcal{A}, \xi_\Lambda)$ de M degrés de liberté quantiques,

I.2 Construction de variété des états quantiques via la théorie de groupes et le formalisme des états cohérents

la variété des états quantiques est alors obtenue par une application exponentielle unitaire du sous espace d'opérateurs d'excitation élémentaires et leurs complexes conjugués $\mathcal{K} = \{Y_i^+, Y_i, i = 1, 2, \dots, M\}$ dans l'espace quotient \mathcal{G}/H_0 . Cela se traduit par [85]

$$\begin{aligned} \exp : \mathcal{K} &\longrightarrow \mathcal{G}/H_0, \\ \sum_{i=1}^M (\eta^i Y_i^+ - h.c) &\longrightarrow \Omega = \exp \sum_{i=1}^M (\eta^i Y_i^+ - h.c), \end{aligned} \tag{I.33}$$

où $\eta^i, i = 1, \dots, M$ sont des paramètres complexes et Ω est un opérateur déplacement généralisé, i. e., élément de la variété d'états quantiques \mathcal{G}/H_0 . Il est également possible de manipuler cette variété géométrique en termes des états cohérents généralisés du groupe \mathcal{G} [12, 17]. En effet, il existe une correspondance entre la variété des états quantiques $\Omega \in \mathcal{G}/H_0$ et la variété introduite par les états cohérents généralisés. Autrement dit, en faisant agir un élément unitaire $\Omega \in \mathcal{G}/H_0$ sur l'état fondamental $|\psi_0\rangle$, nous pouvons générer l'état cohérent correspondant

$$\Omega \rightarrow |\Omega\rangle \equiv \Omega |\psi_0\rangle. \tag{I.34}$$

Ainsi, nous disons alors que la variété introduite par les états cohérents est isomorphe à la variété des états quantiques \mathcal{G}/H_0 . Cela nous offre la possibilité de recouvrir l'espace de Hilbert irréductible ξ_Λ par une base continue.

2.4 Structures géométriques de la variété des états quantiques

En exploitant l'isomorphisme entre la variété des états quantiques \mathcal{G}/H_0 et la variété introduite par les états cohérents généralisés, nous explorons les différentes structures géométriques associées, à savoir la structure complexe, la structure Riemannienne et la structure symplectique.

Structure complexe

En partant du fait que la structure complexe est un critère fondamental de la mécanique quantique, nous allons montrer que la variété d'états quantiques \mathcal{G}/H_0 est un espace complexe, i. e., muni d'une structure complexe. Dans ce but, nous commençons par considérer l'algèbre de Lie \mathcal{A} est semi-simple, cela nous permet de l'écrire selon la décomposition canonique de Cartan $\mathcal{A} = \mathcal{E} \oplus \mathcal{K}$ avec \mathcal{E} est le complément orthogonal de \mathcal{A} de sorte que :

$$[\mathcal{E}, \mathcal{E}] \subset \mathcal{E}, \quad [\mathcal{E}, \mathcal{K}] \subset \mathcal{K}, \quad [\mathcal{K}, \mathcal{K}] \subset \mathcal{E}, \tag{I.35}$$

où les dimensions des sous algèbres \mathcal{E} et \mathcal{K} sont respectivement l et m . Dans ce schéma, l'équation (I.33) peut être exprimée matriciellement par [12, 85]

$$\exp \sum_{i=1}^M (\eta^i Y_i^+ - h.c) \rightarrow \exp \begin{bmatrix} 0 & \eta \\ \pm \eta^+ & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{I \mp Y^+ Y} & Y \\ \mp Y^+ & \sqrt{I \mp Y^+ Y} \end{bmatrix}, \tag{I.36}$$

I.2 Construction de variété des états quantiques via la théorie de groupes et le formalisme des états cohérents

avec η et Y sont deux matrices $l \times m$ données selon la compacité du groupe dynamique \mathcal{G} comme suit

$$Y = \begin{cases} \eta \frac{\sin \sqrt{\eta^+ \eta}}{\sqrt{\eta^+ \eta}}, & \text{pour } \mathcal{G} \text{ compact,} \\ \eta \frac{\sinh \sqrt{\eta^+ \eta}}{\sqrt{\eta^+ \eta}} & \text{pour } \mathcal{G} \text{ non-compact,} \end{cases} \quad (\text{I.37})$$

et le signe $+(-)$ correspond au groupe \mathcal{G} non-compact (compact). En se plaçant dans les coordonnées locales² $\mathcal{Z} = Y(1 \pm Y^+ Y)^{-1/2}$ de la variété des états \mathcal{G}/H_0 , toute opération

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{G}, \quad (\text{I.38})$$

agissant sur l'espace des états quantiques \mathcal{G}/H_0 correspond à une transformation holomorphe³ de \mathcal{G}/H_0 dans lui-même. Cela nous permet d'écrire

$$U\Omega = \mathcal{Z}' = (U_{11}\mathcal{Z} + U_{12})(U_{21}\mathcal{Z} + U_{22})^{-1} \in \mathcal{G}/H_0, \quad (\text{I.39})$$

ce qui montre que la variété des états quantiques \mathcal{G}/H_0 est un espace complexe [101].

Structure Riemannienne

Après avoir défini la structure complexe sur \mathcal{G}/H_0 , alors il existe au moins un espace de Hilbert de fonctions de carrés intégrables $L^2(\mathcal{G}/H_0)$ sur \mathcal{G}/H_0 , où les fonctions $\{f_m, m = 1, \dots, n\}$ constitue une base orthonormée de $L^2(\mathcal{G}/H_0)$. À cet égard, le noyau de Bergmann défini au voisinage de chaque point de la variété \mathcal{G}/H_0 par [101, 102]

$$K(\mathcal{Z}, \mathcal{Z}^*) = \sum_n f_n(\mathcal{Z}) f_n^*(\mathcal{Z}^*), \quad (\text{I.40})$$

étant une fonction différentiable réelle exprimée en termes de coordonnées locales. Il est aussi possible de réécrire le noyau de Bergmann en termes des états cohérents. En effet, il existe une simple réalisation de la base orthogonale $\{f_m\}$ donnée par [85]

$$f_m(\mathcal{Z}) = \langle m || \mathcal{Z} \rangle, \quad (\text{I.41})$$

avec $\{|m\rangle\}$ est une base de l'espace de Hilbert ξ_Λ , et $||\mathcal{Z}\rangle$ est la forme non normalisée de l'état cohérent $|\Omega\rangle$, qui sont reliés entre eux par

$$|\Omega\rangle = N^{-1/2}(\mathcal{Z}, \mathcal{Z}^*) \exp\left(\sum_{i=1}^M \mathcal{Z}^i Y_i^+\right) |\psi_0\rangle = N^{-1/2}(\mathcal{Z}, \mathcal{Z}^*) ||\mathcal{Z}\rangle. \quad (\text{I.42})$$

2. Elles correspondent aux projections stéréographiques des coordonnées homogènes dans l'espace de phase quantique.

3. C'est une transformation complexe entre les éléments de l'espace de phase \mathcal{G}/H_0 , ce qui prouve l'existence de la structure complexe dans cet espace.

I.2 Construction de variété des états quantiques via la théorie de groupes et le formalisme des états cohérents

où $N^{-1/2}(\mathcal{Z}, \mathcal{Z}^*)$ est un facteur de normalisation. Il en découle que le noyau de Bergmann $K(\mathcal{Z}, \mathcal{Z}^*)$, caractérisant l'espace des états quantiques \mathcal{G}/H_0 , peut être donné localement par la norme de l'état cohérent non-normalisé correspondant

$$K(\mathcal{Z}, \mathcal{Z}^*) = \langle \mathcal{Z} | | \mathcal{Z} \rangle. \quad (\text{I.43})$$

La détermination du noyau de Bergmann nous permet de définir la structure Riemannienne comme étant un tenseur métrique covariant de type $(0, 2)$ qui quantifie la distance géodésique entre deux points définis sur \mathcal{G}/H_0 . En effet, il est établi que l'élément de longueur entre deux points voisins $(\mathcal{Z}^1, \mathcal{Z}^2, \dots, \mathcal{Z}^k)$ et $(\mathcal{Z}^1 + d\mathcal{Z}^1, \mathcal{Z}^2 + d\mathcal{Z}^2, \dots, \mathcal{Z}^k + d\mathcal{Z}^k)$ prend la forme [12, 50, 85, 103]

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^k g_{ij}(\mathcal{Z}, \mathcal{Z}^*) d\mathcal{Z}^i d\mathcal{Z}^{*j} = \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 \ln K(\mathcal{Z}, \mathcal{Z}^*)}{\partial \mathcal{Z}_i \partial \mathcal{Z}_j^*} d\mathcal{Z}^i d\mathcal{Z}^{*j}. \quad (\text{I.44})$$

Structure symplectique

Selon la théorie de la géométrie différentielle [52], la variété \mathcal{G}/H_0 est dite variété symplectique lorsqu'elle est munie d'une 2-forme différentielle (forme symplectique) fermée ($d\omega = 0$) et non-dégénérée ($\omega^{ij}\omega_{jk} = \delta_k^i$). Elle est définie par

$$\omega = \sum_{i,j=1}^k \omega_{ij}(\mathcal{Z}, \mathcal{Z}^*) d\mathcal{Z}^i \wedge d\mathcal{Z}^{*j} = i\hbar \sum_{i,j=1}^k g_{ij}(\mathcal{Z}, \mathcal{Z}^*) d\mathcal{Z}^i \wedge d\mathcal{Z}^{*j}. \quad (\text{I.45})$$

Le fait que la forme symplectique est une matrice antisymétrique inversible, cela veut dire qu'elle a un nombre paire de lignes et de colonnes, ce qui implique que la variété symplectique \mathcal{G}/H_0 est nécessairement de dimension pair [23]. Dans ce contexte, nous introduisons le théorème de Darboux selon lequel pour toute variété symplectique donnée par le couple $(\mathcal{G}/H_0, \omega)$, il existe un système de coordonnées $x^i, y^i; i = 1, \dots, M$ au voisinage de chaque point de \mathcal{G}/H_0 , tel que la forme canonique de la forme symplectique s'écrit [104]

$$\omega_c = \sum_{i=1}^M dx^i \wedge dy^i. \quad (\text{I.46})$$

D'autre part, la non dégénérescence de la forme symplectique (I.45) implique que la variété symplectique \mathcal{G}/H_0 est dotée d'une *structure de Poisson* via la donnée d'un crochet de Leibniz d'ordre 2. Elle est définie par l'application suivante [105, 106]

$$\begin{aligned} \{, \} : C^\infty(\mathcal{G}/H_0) \times C^\infty(\mathcal{G}/H_0) &\longrightarrow C^\infty(\mathcal{G}/H_0), \\ (f, g) &\longrightarrow \{f, g\}, \end{aligned} \quad (\text{I.47})$$

où f et g sont deux fonctions définies sur \mathcal{G}/H_0 . Il s'ensuit que la structure de Poisson est équivalente à la donnée d'un champ de bi-vecteurs de Poisson $\pi \in \chi^2(\mathcal{G}/H_0)$ qui coïncide avec l'inverse de la forme symplectique (I.45)

$$\pi = \sum_{i,j=1}^k \omega^{ij} \frac{\partial}{\partial \mathcal{Z}_i} \wedge \frac{\partial}{\partial \mathcal{Z}_j^*}, \quad (\text{I.48})$$

I.2 Construction de variété des états quantiques via la théorie de groupes et le formalisme des états cohérents

avec $\omega^{ij} = g^{ij}/i\hbar$. À partir du champ de bi-vecteurs de Poisson (I.48), il est possible de trouver le crochet de Poisson entre deux fonctions f et g définies sur la variété \mathcal{G}/H_0 à travers la formulation suivante [106]

$$\{f, g\} = \pi(df, dg). \quad (\text{I.49})$$

Il en résulte que le crochet de Poisson de ces deux fonctions s'exprime localement au voisinage de chaque point de la variété \mathcal{G}/H_0 par

$$\{f, g\} = \sum_{ij} \omega^{ij} \left(\frac{\partial f}{\partial Z_i} \frac{\partial g}{\partial Z_j^*} - \frac{\partial g}{\partial Z_i} \frac{\partial f}{\partial Z_j^*} \right). \quad (\text{I.50})$$

La structure symplectique est maintenant démontrée. En transformant \mathcal{Z} au paramètre complexe Z de l'équation (I.37), on obtient la forme dite diagonale du crochet de Poisson [12]

$$\{f, g\} = \frac{1}{i\hbar} \sum_{i=1}^M \left(\frac{\partial f}{\partial Z_i} \frac{\partial g}{\partial Z_i^*} - \frac{\partial g}{\partial Z_i} \frac{\partial f}{\partial Z_i^*} \right). \quad (\text{I.51})$$

En introduisant les coordonnées canoniques (p, q) via les transformations

$$Z_i = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(q_i + ip_i), \quad Z_i^* = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(q_i - ip_i), \quad (\text{I.52})$$

nous obtenons alors, comme en mécanique classique, la forme standard de la structure symplectique

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^M \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right), \quad (\text{I.53})$$

étant la structure de l'espace de phase classique familière. Ainsi, nous avons dérivé la structure symplectique associée à une variété correspondante à un système quantique.

Exemple 1 : algèbre de Weyl-Heisenberg

Nous reprenons l'exemple de l'oscillateur harmonique (OH) d'algèbre de Lie non semi-simple $h_4 = \{a^+, a, \hat{n}, \mathbb{I}\}$. Il existe seulement un opérateur d'excitation élémentaire a^+ (l'opérateur de création). Il en découle que l'espace de phase associé à l'oscillateur harmonique peut être construit par l'application exponentielle unitaire suivante

$$\Omega_{oh}(v) = \exp(va^+ - v^*a) \in H_4/U(1) \otimes U(1), \quad v \in \mathbb{C}, \quad (\text{I.54})$$

où $H_4/U(1) \otimes U(1)$ est l'espace de phase quantique de l'OH, et $U(1) \otimes U(1)$ représente le sous groupe maximal de H_4 (groupe de Weyl-Heisenberg) dont les générateurs $\{\hat{n} = a^+a, \mathbb{I}\}$ laissant l'état fondamental $|0\rangle$ stable. Une transformation unitaire $U_{oh} \in H_4$ de la forme $U_{oh} = \exp(\alpha a^+ - \alpha a + i\eta \hat{n} + i\delta \mathbb{I})$ appliquée au point $v \in H_4/U(1) \otimes U(1)$ peut s'exprimer par

$$U_{oh}\Omega_{oh}(v) = \Omega'_{oh}(v')h, \quad v' = ve^{i\eta} + \frac{\alpha}{i\eta}(e^{i\eta} - 1), \quad h \in U(1) \otimes U(1). \quad (\text{I.55})$$

I.2 Construction de variété des états quantiques via la théorie de groupes et le formalisme des états cohérents

Il s'agit d'une *transformation holomorphe*. Cela démontre que l'espace de phase est doté d'une structure complexe. Si nous restreignons $U_{oh} \in H_4/U(1) \otimes U(1)$, l'équation (I.55) devient $v' = v + \alpha$, i. e., une transformation par une quantité α dans l'espace complexe \mathbb{C} . En outre, les structures géométriques de l'espace de phase peuvent être dérivées à partir des états cohérents de H_4 . Ces états sont définis par l'action des éléments $\Omega_{oh}(v) \in H_4/U(1) \otimes U(1)$ sur l'état fondamental

$$|\Omega_{oh}(v)\rangle \equiv |v\rangle = \Omega_{oh}(v)|0\rangle = \exp(va^+ - v^*a)|0\rangle \equiv \exp\left(-\frac{vv^*}{2}\right) ||v\rangle, \quad (\text{I.56})$$

où $||v\rangle$ est l'état cohérent non-normalisé résultant. Le noyau de Bergmann correspondant prend la forme

$$K_{oh}(v, v^*) = \exp(vv^*). \quad (\text{I.57})$$

Il en découle que la structure Riemannienne définie sur l'espace de phase $H_4/U(1) \otimes U(1)$ est alors obtenue en injectant l'équation (I.57) dans (I.44). En effet, nous avons

$$ds_{oh}^2 = dv dv^*. \quad (\text{I.58})$$

Il s'ensuit que l'espace de phase quantique de l'OH est isomorphe au plan complexe \mathbb{C} , i. e., l'identité suivant une dimension complexe. Le crochet de Poisson de deux fonctions f_1 et f_2 définies sur le plan complexe \mathbb{C} , est donné par

$$\{f_1, f_2\} = \frac{1}{i\hbar} \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f_2}{\partial z} \right). \quad (\text{I.59})$$

En introduisant les coordonnées canoniques usuelles

$$z = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(q + ip), \quad z^* = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(q - ip). \quad (\text{I.60})$$

Le crochet de Poisson de l'équation (I.59) prend la forme standard

$$\{f_1, f_2\} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial q} \frac{\partial f_2}{\partial p} - \frac{\partial f_2}{\partial q} \frac{\partial f_1}{\partial p} \right). \quad (\text{I.61})$$

Exemple 2 : algèbre $su(2)$

Reprenons l'exemple du moment cinétique décrit par l'algèbre dynamique $su(2)$ comme étant une algèbre de Lie semi-simple. L'opérateur d'excitation élémentaire agissant sur l'espace de représentation irréductible V^{2j+1} est l'opérateur de création (annihilation) $J_+(J_-)$, i. e., selon le choix de l'état fondamental. L'espace de phase quantique correspondant est obtenu par l'application exponentielle suivante

$$(\beta J_+ - \beta^* J_-) \rightarrow \Omega_{mc} = \exp(\beta J_+ - \beta^* J_-) \in SU(2)/U(1), \quad \beta \in \mathbb{C}. \quad (\text{I.62})$$

L'ensemble des éléments Ω_{mc} produits par cette application forme l'espace de phase quantique $SU(2)/U(1) \simeq \mathbb{C}P$ isomorphe à une sphère S^2 [107]. Dans ce schéma, le paramètre β est lié aux coordonnées sphériques (θ_{mc}, ϕ_{mc}) par [103]

$$\beta = \frac{\theta_{mc}}{2} e^{-i\phi_{mc}}, \quad \theta_{mc} \in [0, \pi], \quad \phi_{mc} \in [0, 2\pi]. \quad (\text{I.63})$$

D'autre part, l'espace de phase $SU(2)/U(1) \simeq S^2$ peut être décrit par les états cohérents du groupe $SU(2)$. Cela peut être fait en écrivant

$$|j, \Omega_{mc}\rangle = \Omega_{mc} |j, -j\rangle = (1 + z_{mc}z_{mc}^*)^{-j} \exp(z_{mc}J_+) |j, -j\rangle = (1 + z_{mc}z_{mc}^*)^{-j} ||j, z_{mc}\rangle, \quad (\text{I.64})$$

où $||j, z_{mc}\rangle$ est l'état cohérent non-normalisé du moment cinétique, et le paramètre $z_{mc} = \tan \frac{\theta_{mc}}{2} e^{-i\phi_{mc}}$ correspond à la projection stéréographique de S^2 dans $\mathbb{C}P$ [103]. Il en découle que le noyau Bergmann défini sur l'espace de phase $SU(2)/U(1)$ est de la forme

$$K_{mc}(z_{mc}, z_{mc}^*) = \langle j, z_{mc} ||j, z_{mc}\rangle = (1 + z_{mc}z_{mc}^*)^{2j}. \quad (\text{I.65})$$

Ainsi, le tenseur métrique défini sur l'espace de phase est alors

$$ds_{mc}^2 = \frac{2j}{(1 + z_{mc}z_{mc}^*)^2} dz_{mc} dz_{mc}^*. \quad (\text{I.66})$$

Également, la structure symplectique est obtenue par la définition de la 2-forme différentielle suivante

$$\omega_{mc} = \frac{2ij}{(1 + z_{mc}z_{mc}^*)^2} dz_{mc} \wedge dz_{mc}^*. \quad (\text{I.67})$$

Le crochet de Poisson de deux fonctions différentiables f'_1 et f'_2 définies sur $SU(2)/U(1)$, est donné par

$$\{f'_1, f'_2\} = \frac{(1 + z_{mc}z_{mc}^*)^2}{2ij\hbar} \left(\frac{\partial f'_1}{\partial z_{mc}} \frac{\partial f'_2}{\partial z_{mc}^*} - \frac{\partial f'_1}{\partial z_{mc}^*} \frac{\partial f'_2}{\partial z_{mc}} \right). \quad (\text{I.68})$$

En introduisant les coordonnées canoniques (q, p)

$$z_{mc} = \frac{1}{\sqrt{4j\hbar}}(q + ip), \quad z_{mc}^* = \frac{1}{\sqrt{4j\hbar}}(q - ip), \quad (\text{I.69})$$

nous obtenons la forme standard du crochet Poisson

$$\{f'_1, f'_2\} = \left(\frac{\partial f'_1}{\partial q} \frac{\partial f'_2}{\partial p} - \frac{\partial f'_1}{\partial p} \frac{\partial f'_2}{\partial q} \right), \quad (\text{I.70})$$

qui montre encore une fois que la dynamique quantique englobe la dynamique classique comme limite.

3 Construction directe de variété des états quantiques

Une autre méthode de construction de la variété des états quantiques découle directement de l'espace de Hilbert. En effet, en partant du fait que l'espace de Hilbert ne décrit pas correctement les états des systèmes quantiques ainsi que leurs évolutions, vu qu'il s'oppose avec l'interprétation probabiliste de Born [83], donc l'espace qui pourrait être approprié pour la description des états quantiques purs doit impérativement avoir ses éléments invariants sous les transformations de jauge $U(1)$. Pour un système quantique de $N + 1$ états indépendants, l'espace de Hilbert peut être identifié à l'espace complexe \mathbb{C}^{N+1} . En utilisant le fait que l'ensemble des états qui sont définis à un facteur de phase près constitue un seul état physique, i. e., classe des états équivalents, Alors l'espace physique accessible pour la description des systèmes quantiques est l'espace complexe projectif $\mathbb{C}P^N$ appelé aussi l'espace de Hilbert projectif.

3.1 Espace complexe projectif $\mathbb{C}P^N$

Afin de bien expliciter la construction de l'espace complexe projectif à partir de l'espace de Hilbert, nous considérons un état pur d'un système quantique de $N+1$ états indépendants développé dans la base $\mathbf{B} = \{|i\rangle, i = 0, \dots, N\}$ par

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^N \tilde{\alpha}_i |i\rangle \in \mathbb{C}^{N+1}, \quad \tilde{\alpha}_i \in \mathbb{C}. \quad (\text{I.71})$$

La condition de normalisation $\sum_{i=0}^N |\tilde{\alpha}_i|^2 = 1$ signifie que $|\psi\rangle \in S^{2N+1}$. De plus, il est bien connu que [107]

$$S^{2N+1} = \mathbb{C}P^N \times U(1). \quad (\text{I.72})$$

Il s'ensuit que l'espace des états invariants sous les transformations de jauge $U(1)$ coïncide avec l'espace complexe projectif

$$\mathbb{C}P^N = S^{2N+1}/U(1) \simeq SU(N+1)/U(N), \quad (\text{I.73})$$

dont les éléments constituent l'ensemble des droites complexes $\mathbb{C}P$ représentant l'ensemble des classes des états équivalents sous la transformation de jauge $U(1)$. La k -ième droite complexe peut être représentée par

$$[|\psi\rangle]_k = [\tilde{z}_0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_{k-1}, \tilde{z}_{k+1}, \dots, \tilde{z}_N] = \{|\psi\rangle e^{i\tilde{\phi}}, 0 \leq \tilde{\phi} \leq 2\pi\}. \quad (\text{I.74})$$

avec $\tilde{z}_i = \tilde{\alpha}_i/\tilde{\alpha}_k$ sont les coordonnées locales. Ainsi, l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^N$, i. e., espace de Hilbert projectif, est alors construit par $N+1$ ouverts, i. e., $N+1$ droites complexes. De point de vue topologique, nous disons qu'il est couvert par $N+1$ cartes $\mathcal{U}_k, k = 0, 1, \dots, N$ tel que

$$\mathcal{U}_k : \mathbb{C}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{C}P^N, \quad (\text{I.75})$$

$$(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_N) \longrightarrow \mathcal{U}_k = [|\psi\rangle]_k = [\tilde{z}_0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_{k-1}, \tilde{z}_{k+1}, \dots, \tilde{z}_N].$$

Selon la théorie des états cohérents [12], la k -ième droite complexe représentée par un état cohérent du groupe dynamique $SU(N+1)$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{K(\tilde{z}, \tilde{z}^*)} (\tilde{z}_0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_{k-1}, \tilde{z}_{k+1}, \dots, \tilde{z}_N)^T, \quad (\text{I.76})$$

où $\tilde{K}(\tilde{z}, \tilde{z}^*) = 1 - |\tilde{z}_k|^2 + \sum_{i=0}^N |\tilde{z}_i|^2$ est le noyau de Bergmann défini sur $\mathbb{C}P^N$. Ainsi, nous arrivons à expliciter la construction de la variété des états quantiques obéissant à l'interprétation probabiliste de Born (I.2), i. e., vérifie l'invariance de jauge $U(1)$. Par conséquent, elle peut être considérée comme l'espace approprié pour décrire la dynamique quantique au lieu de l'espace de Hilbert.

Exemple : spin d'un électron

Pour mieux comprendre le concept de l'espace complexe projectif, prenons comme exemple physique le spin d'un électron dont les états propres sont $|1/2\rangle$ et $|-1/2\rangle$, un état générique de spin de l'électron s'écrit

$$|\psi\rangle = a|1/2\rangle + b|-1/2\rangle, \quad a, b \in \mathbb{C}. \quad (\text{I.77})$$

L'état du système (I.77) est un élément de l'espace complexe \mathbb{C}^2 dont les coordonnées sont (a, b) . Nous savons que la multiplication de $|\psi\rangle$ par un nombre complexe non nul ne change rien, alors on peut introduire la relation d'équivalence suivante

$$(a, b) \sim (ca, cb); \forall c \in \mathbb{C} - \{0\}. \quad (\text{I.78})$$

Donc, on peut associer à l'état (I.77) une classe d'équivalence $[a, b] = [ca, cb]$. D'après l'équation (I.73), l'état de spin d'électron correspond à un point dans l'espace complexe projectif $\mathbb{C}P^1 \equiv SU(2)/U(1)$.

3.2 Structures géométriques sur l'espace de Hilbert projectif

Nous allons maintenant redéfinir les structures géométriques discutées ci-dessus mais, cette fois-ci, sur l'espace de Hilbert projectif en termes des états quantiques de l'espace original de Hilbert.

Structure Riemannienne

Considérons un système quantique décrit par le Hamiltonien $H(\boldsymbol{\lambda})$, dépendant continuellement d'un ensemble de paramètres $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n'}) \in \mathcal{M}$ où \mathcal{M} est l'espace des paramètres de dimension n' . Soient $\|\cdot\|$ et (\cdot, \cdot) sont respectivement la norme et le produit scalaire définis sur l'espace de Hilbert paramétrique correspondant $\mathcal{H}(\boldsymbol{\lambda})$. La distance entre deux états voisins $\psi(\boldsymbol{\lambda})$ et $\psi(\boldsymbol{\lambda} + d\boldsymbol{\lambda})$, est donnée par [22, 23, 108]

$$ds^2 = \|\psi(\boldsymbol{\lambda} + d\boldsymbol{\lambda}) - \psi(\boldsymbol{\lambda})\|^2 = \langle \delta\psi | \delta\psi \rangle = \langle \partial_\mu \psi | \partial_\nu \psi \rangle d\lambda^\mu d\lambda^\nu. \quad (\text{I.79})$$

En écrivant le produit hermitien en termes de ses parties réelle et imaginaire $\langle \partial_\mu \psi | \partial_\nu \psi \rangle = (\gamma_{\mu\nu} + i\omega_{\mu\nu})$, l'équation (I.79) devient

$$ds^2 = (\gamma_{\mu\nu} + i\omega_{\mu\nu}) d\lambda^\mu d\lambda^\nu. \quad (\text{I.80})$$

La symétrie hermitienne de l'espace de Hilbert implique que les tenseurs $\gamma_{\mu\nu}$ et $\omega_{\mu\nu}$ sont respectivement symétrique et antisymétrique. Il en découle que la distance géométrique (I.80) se restreint à

$$ds^2 = \gamma_{\mu\nu} d\lambda^\mu d\lambda^\nu. \quad (\text{I.81})$$

Sauf que ce dernier tenseur métrique ne peut pas être le mieux sur l'espace de Hilbert projectif \mathcal{PH} , puisqu'il n'est pas invariant de jauge $U(1)$ suivante

$$|\psi(\boldsymbol{\lambda})\rangle \rightarrow |\psi(\boldsymbol{\lambda})\rangle' = e^{i\boldsymbol{\alpha}} |\psi(\boldsymbol{\lambda})\rangle, \quad \boldsymbol{\alpha} \in [0, 2\pi]. \quad (\text{I.82})$$

En effet, la transformation de jauge (I.82) du tenseur métrique $\gamma_{\mu\nu}$ donne

$$\gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \tilde{\beta}_\mu \partial_\nu \boldsymbol{\alpha} - \tilde{\beta}_\nu \partial_\mu \boldsymbol{\alpha} + \partial_\mu \boldsymbol{\alpha} \partial_\nu \boldsymbol{\alpha} \neq \gamma_{\mu\nu}, \quad (\text{I.83})$$

où $\tilde{\beta}_\mu(\boldsymbol{\lambda}) = i \langle \psi(\boldsymbol{\lambda}) | \partial_\mu \psi(\boldsymbol{\lambda}) \rangle$ est la connexion de Berry définie sur \mathcal{PH} [103]. Pour maintenir l'invariance de jauge $U(1)$ de la métrique (I.81), il faut que la connexion de Berry $\tilde{\beta}_\mu(\boldsymbol{\lambda})$ se transforme sous la transformation de jauge (I.82) comme suit

$$\tilde{\beta}_\mu \rightarrow \tilde{\beta}'_\mu = \tilde{\beta}_\mu - \partial_\mu \boldsymbol{\alpha}. \quad (\text{I.84})$$

Ainsi, il en résulte que la métrique de Fubini-Study prend la forme

$$ds^2 = g_{\mu\nu} d\lambda^\mu d\lambda^\nu = \left(\gamma_{\mu\nu}(\boldsymbol{\lambda}) - \tilde{\beta}_\mu(\boldsymbol{\lambda}) \tilde{\beta}_\nu(\boldsymbol{\lambda}) \right) d\lambda^\mu d\lambda^\nu. \quad (\text{I.85})$$

En conséquence, la métrique de Fubini-Study est le tenseur géométrique défini sur l'espace de Hilbert projectif \mathcal{PH} . Il définit le concept de *la distance géodésique* entre les états quantiques, i. e., droites complexes. Il s'agit d'une métrique unitaire, symétrique, définie positive d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz [50], et invariante de jauge $U(1)$.

Une autre méthode de construction de la métrique de Fubini-Study sur la variété des états quantiques \mathcal{PH} , peut être réalisée en évaluant la probabilité de transition entre deux états quantiques voisins dans le cadre de la théorie des perturbations [109]. En d'autres termes, cette approche considère la métrique de Fubini-Study comme étant une mesure des fluctuations quantiques au voisinage de chaque point de la variété \mathcal{PH} . En effet, le produit scalaire entre deux états voisins $|\psi(\boldsymbol{\lambda})\rangle$ et $|\psi(\boldsymbol{\lambda} + d\boldsymbol{\lambda})\rangle$ au second ordre en $\boldsymbol{\lambda}$ s'écrit [23]

$$\langle \psi(\boldsymbol{\lambda}) | \psi(\boldsymbol{\lambda} + d\boldsymbol{\lambda}) \rangle \simeq 1 + i\beta_\mu(\boldsymbol{\lambda}) d\lambda^\mu + \frac{1}{2} \langle \psi(\boldsymbol{\lambda}) | \partial_\mu \partial_\nu \psi(\boldsymbol{\lambda}) \rangle d\lambda^\mu d\lambda^\nu. \quad (\text{I.86})$$

En utilisant le fait que les termes $\langle \psi | \partial_\mu \psi \rangle$ et $\langle \partial_\mu \psi | \partial_\nu \psi \rangle + \langle \psi | \partial_\mu \partial_\nu \psi \rangle$ sont deux imaginaires purs. Il s'ensuit que

$$\text{Re} \langle \psi | \partial_\mu \partial_\nu \psi \rangle = -\text{Re} \langle \partial_\mu \psi | \partial_\nu \psi \rangle = -\gamma_{\mu\nu}. \quad (\text{I.87})$$

En exploitant les équations (I.87) et (I.86), nous aboutissons à l'expression explicite de la métrique de Fubini-Study

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(\boldsymbol{\lambda}) d\lambda^\mu d\lambda^\nu = 2 \left(1 - |\langle \psi(\boldsymbol{\lambda}) | \psi(\boldsymbol{\lambda} + d\boldsymbol{\lambda}) \rangle|^2 \right). \quad (\text{I.88})$$

La particularité de cette dernière méthode de construction est qu'elle considère la métrique de Fubini-Study comme mesure des fluctuations quantiques au voisinage de chaque point de la variété des états quantiques \mathcal{PH} . Dans le cas où le système dépend seulement du temps $H(\boldsymbol{\lambda} = t)$, sa dynamique est alors régie par l'équation de Schrödinger suivante

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle. \quad (\text{I.89})$$

En reportant l'équation (I.89) dans (I.88), la métrique de Fubini-Study se réécrit sous la forme

$$ds^2 = 2 \left(1 - |\langle \psi(t) | \psi(t + dt) \rangle|^2 \right) = \frac{(\Delta E(t))^2}{\hbar^2} dt^2, \quad (\text{I.90})$$

où $\Delta E(t)^2 = \langle \psi | H(t)^2 | \psi \rangle - \langle \psi | H(t) | \psi \rangle^2$ est l'incertitude énergétique pour le Hamiltonien $H(t)$. Il en résulte que la vitesse d'évolution quantique peut être dérivée aisément de la métrique de Fubini-Study (I.90). En effet, nous écrivons

$$V = \frac{ds}{dt} = \Delta E(t), \quad (\text{I.91})$$

avec $\hbar = 1$. Ainsi, nous relient la vitesse d'évolution quantique avec l'incertitude énergétique du système, de sorte que plus les fluctuations énergétiques sont importantes plus que l'évolution quantique passe plus vite et vice versa. Ceci fait appel au *théorème de Aharonov-Anandan* [16, 25], selon lequel les fluctuations énergétiques entraînent l'évolution du système quantique. D'autre part, la vitesse d'évolution (I.91) est définie en fonction du Hamiltonien $H(t)$, ce qui fait qu'il est possible de la mesurer expérimentalement. De même, pour le temps d'évolution entre deux états quantiques prédéfinis. Par ailleurs, la connaissance de l'état initial et la forme du Hamiltonien définissent la variété des états quantiques ainsi que la vitesse d'évolution qui sont utiles pour l'étude de nombreux problèmes en théorie de l'information quantique [30, 62, 64, 87, 88, 89].

Structure symplectique

Pour explorer la structure symplectique sur \mathcal{PH} comme étant une structure géométrique importante assurant l'existence de la dynamique classique au sein de la dynamique quantique [14, 85], nous devons d'abord définir une quantité géométrique intéressante appelée tenseur hermitien de Dirac. Ce tenseur induit naturellement un tenseur appelé *tenseur géométrique quantique*. Il est défini localement par [103]

$$Q_{\mu\nu}(\lambda) = \langle D_\mu \psi | D_\nu \psi \rangle, \quad (\text{I.92})$$

avec $D_\mu = \partial_\mu - i\tilde{\beta}_\mu$ est la dérivée covariante sur \mathcal{PH} . Il est intéressant de noter que le tenseur géométrique quantique (I.92) est une quantité complexe invariante de jauge $U(1)$ [23, 108]. Explicitement, il s'écrit en termes de l'état quantique évolué comme suit

$$Q_{\mu\nu}(\lambda) = \langle \partial_\mu \psi(\lambda) | \partial_\nu \psi(\lambda) \rangle - \langle \partial_\mu \psi(\lambda) | \psi(\lambda) \rangle \langle \psi(\lambda) | \partial_\nu \psi(\lambda) \rangle. \quad (\text{I.93})$$

Le tenseur géométrique quantique (I.93) se décompose en deux parties essentielles : la première concerne sa partie réelle qui constitue la métrique de Fubini-Study que nous avons discutée précédemment (I.85). Elle peut être également exprimée en fonction du tenseur géométrique quantique sous la forme

$$g_{\mu\nu} = \text{Re}(Q_{\mu\nu}) = \text{Re}(\langle \partial_\mu \psi(\lambda) | \partial_\nu \psi(\lambda) \rangle - \langle \partial_\mu \psi(\lambda) | \psi(\lambda) \rangle \langle \psi(\lambda) | \partial_\nu \psi(\lambda) \rangle). \quad (\text{I.94})$$

Quant à la partie imaginaire du tenseur géométrique quantique appelée *courbure de Berry*. Elle est définie par [110]

$$F_{\mu\nu} = -2\text{Im}(Q_{\mu\nu}) = \partial_\mu \tilde{\beta}_\nu - \partial_\nu \tilde{\beta}_\mu = -2\text{Im}(\langle \partial_\mu \psi(\lambda) | \partial_\nu \psi(\lambda) \rangle - \langle \partial_\mu \psi(\lambda) | \psi(\lambda) \rangle \langle \psi(\lambda) | \partial_\nu \psi(\lambda) \rangle). \quad (\text{I.95})$$

La courbure de Berry est antisymétrique $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$, et s'identifie avec la connexion de Berry $\tilde{\beta}_\mu$, i. e., une quantité émergente de \mathcal{PH} , introduite naturellement dans la métrique

de Fubini-Study pour assurer l'invariance de jauge $U(1)$. D'autre part, la courbure de Berry peut être liée intimement à la structure symplectique [23]

$$\omega(\boldsymbol{\lambda}) = \omega_{\mu\nu} d\lambda^\mu \wedge d\lambda^\nu = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} d\lambda^\mu \wedge d\lambda^\nu. \quad (\text{I.96})$$

Il s'agit d'une 2-forme différentielle fermée, non-dégénérée et invariante de jauge $U(1)$ (I.45). Il en découle que la structure de Poisson sur \mathcal{PH} est équivalente à la donnée d'un champ de bi-vecteurs de Poisson $\boldsymbol{\pi} \in \chi^2(\mathcal{PH})$ coïncidant avec la forme symplectique suivante [106]

$$\boldsymbol{\pi} = -2 \sum_{\mu, \nu=1}^{n'} F^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \lambda_\mu} \wedge \frac{\partial}{\partial \lambda_\nu}. \quad (\text{I.97})$$

Il s'ensuit que le crochet de Poisson de deux fonctions $f, g \in \mathcal{PH}$ est donné sous la forme

$$\boldsymbol{\pi}(df, dg) = \{f, g\} = \frac{1}{i\hbar} \sum_{\mu, \nu=1}^{n'} F^{\mu\nu} \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda_\mu} \frac{\partial g}{\partial \lambda_\nu} - \frac{\partial g}{\partial \lambda_\mu} \frac{\partial f}{\partial \lambda_\nu} \right). \quad (\text{I.98})$$

Ainsi, la structure symplectique est maintenant démontrée.

Structure complexe

La structure complexe est un caractère fondamental de la théorie quantique, en particulier, dans l'espace des états quantiques [5, 45]. En effet, l'espace de Hilbert est un espace vectoriel défini sur le corps complexe. Il en découle que l'espace de Hilbert projectif \mathcal{PH} est également un espace complexe, il peut être vu comme un espace réel doté d'un tenseur structure complexe J^a_b prenant la forme canonique suivante [84]

$$J^a_b = i\delta^a_b, \quad J^{a^*}_{b^*} = -i\delta^{a^*}_{b^*}, \quad (\text{I.99})$$

et satisfaisant les conditions suivantes

$$J^a_\mu J^\mu_b = -\delta^a_b, \quad J^2 = -1. \quad (\text{I.100})$$

Il en résulte que l'opérateur structure complexe J admet deux valeurs propres possibles qui sont $\pm i$. Autrement dit, l'opérateur structure complexe J agit en chaque point de la variété réelle des états \mathcal{PH} comme une application linéaire complexe qui consiste en la multiplication des champs vecteurs holomorphes⁴ ou anti-holomorphes par $\pm i$. D'un autre côté, la métrique de Fubini-Study (I.85) vérifie la condition d'hermiticité suivante [103]

$$g_{\mu\nu} = J^a_\mu J^b_\nu g_{ab}. \quad (\text{I.101})$$

De même, la structure symplectique (I.96) satisfait, à son tour, les conditions d'hermiticité correspondantes

$$\omega_{\mu\nu} = g_{a\nu} J^a_\mu, \quad \omega_{\mu\nu} = -J_{\mu\nu}. \quad (\text{I.102})$$

4. Ce sont des champs complexes définis sur l'espace tangent de la variété des états quantiques, et qui sont orthogonaux avec la métrique [103].

L'expression globale qui rassemble les trois structures fondamentales de l'espace de Hilbert projectif \mathcal{PH} , est donnée par [14]

$$g(X, Y) = \omega(X, JY), \quad (\text{I.103})$$

où X, Y sont deux champs holomorphes sur \mathcal{PH} . Il en découle que le triplet (J, g, ω) caractérise la structure Kählérienne de l'espace de Hilbert projectif \mathcal{PH} .

4 Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons commencé par montrer l'insuffisance de l'espace de Hilbert dans la description totale de la dynamique des systèmes quantiques intégrables. Ceci est dû au fait qu'il s'oppose avec l'interprétation probabiliste de M. Born [83]. De plus, ses dimensions ne peuvent pas être définies directement comme des degrés de liberté physiques, ni peuvent être directement réduites à un espace de phase classique dans la limite classique. En outre, les fonctions d'onde ne sont pas considérées comme des observables [85]. Récemment, de nombreuses études montrent que la solution repose sur la géométrisation de la théorie quantique qui vise à remplacer le schéma de l'espace de Hilbert usuel par une variété des états quantiques, i. e., l'espace de phase quantique [21, 30, 85, 86, 87, 88]. Dans ce sens, nous avons présenté deux méthodes de construction de la variété des états quantiques pour un système physique intégrable donné : la première concerne la construction de la variété des états quantiques à l'aide de la théorie des représentations de groupes ainsi que le formalisme des états cohérents. La deuxième porte sur la construction directe de la variété des états quantiques à partir de l'espace original de Hilbert. Pour ces deux méthodes, nous avons analysé les différentes structures géométriques émergentes ainsi que leurs interprétations physiques dans le but de comprendre les aspects géométriques fondamentaux de la théorie quantique.

Chapitre II

Phases géométriques

1 Introduction

En 1984, Michael Berry a exposé dans son article fondateur [44], le concept de *la phase géométrique* comme étant une propriété géométrique remarquable lors des évolutions quantiques cycliques. Cette phase aussi connue sous le nom de la phase de Berry. Cette dernière a été établie dans le cadre de *l'approximation adiabatique quantique* qui n'était pertinente que pour les Hamiltoniens à évolution lente¹ [9]. Par contre, pour les Hamiltoniens dont les vecteurs propres changent lors de l'évolution, l'approximation adiabatique de la dynamique d'une évolution cyclique ne peut pas être exacte [111]. Par conséquent, la phase de Berry ne pouvait être qu'une approximation de la véritable phase géométrique quantique. En 1987, Y. Aharonov et J. Anandan [46] ont proposé une généralisation importante de la phase de Berry. Ils considèrent les évolutions cycliques qui ne sont pas limitées par une condition adiabatique, ce qui signifie que nous n'avons pas besoin d'un espace de paramètres pour décrire l'évolution cyclique du Hamiltonien, mais seulement l'espace de Hilbert projectif où le système trace des courbes fermées [84]. La phase de Berry est donc un cas particulier de cette nouvelle phase appelée *phase de Aharonov-Anandan*. Cette généralisation est très importante, car dans les processus réels, la condition adiabatique n'est jamais exactement satisfaite. C'est aussi la raison pour laquelle Berry a essayé d'éliminer la condition adiabatique en calculant les termes de correction adiabatique [47]. Un peu plus tard, d'autres généralisations sont apparues, par exemple, J. Samuel et R. Bhandari [48] ont écrit la phase géométrique de Aharonov-Anandan comme une intégrale curviligne de la connexion de Berry-Simon le long de la géodésique reliant les deux états, telle que mesurée avec la métrique Fubini-Study [49, 50, 51, 52]. D'ailleurs, N. Mukunda et R. Simon [53] ont également développé une approche cinématique de la théorie des phases géométriques à travers laquelle ils ont libéré cette phase des conditions d'adiabaticité et de cyclicité pour des évolutions plus générales. En outre, A. Z. Khoury et L. E. Oxman [54, 55] ont démontré un autre type de phases appelées *phases topologiques fractionnaires* qui apparaissent naturellement pour les évolutions cycliques effectués par les opérations unitaires locales. Récemment, de nombreuses études sur la phase géométrique

1. Le système quantique évolue lentement dans l'espace de paramètres du système, de sorte qu'il demeure dans le même état propre du Hamiltonien le long de son évolution.

ont montré son rôle important dans la théorie de l'information quantique à travers ses applications potentielles telles que la mise en oeuvre de portes unitaires utiles pour le calcul quantique [62, 64, 91]. De surcroît, la démonstration expérimentale d'une porte de phase conditionnelle de Berry a été fournie à la fois en domaine de résonance magnétique nucléaire [62] ainsi que pour l'implémentation du calcul quantique basée sur la manipulation (laser) d'un ensemble d'ions piégés [67]. De plus, l'origine topologique des phases fractionnaires dans les systèmes de Hall quantiques ouvre des perspectives intéressantes pour un calcul quantique robuste [68], etc...

Dans le présent chapitre, nous présentons essentiellement les différents formalismes de la phase géométrique en commençant par l'approche de Berry puis celle de Aharonov-Anandan en passant par l'approche cinématique de Mukunda-Simon et nous terminons par les phases topologiques fractionnaires.

2 Phase géométrique de Berry

Comme nous l'avons déjà mentionné, la phase de Berry est une propriété géométrique remarquable dans les processus d'évolutions quantiques adiabatiques. Pour bien discuter l'approche de Berry, nous devons d'abord expliciter le théorème adiabatique.

2.1 Théorème adiabatique

Le théorème adiabatique est l'un des fondements de la mécanique quantique moderne. Il a été mentionné pour la première fois par P. Ehrenfest [112] dans l'étude des processus adiabatiques en mécanique classique et les débuts de mécanique quantique. Quelques années après, il a été prouvé par M. Born et V. Fock [113]. Ce théorème stipule que sous une évolution temporelle suffisamment lente du Hamiltonien d'un système quantique, i.e., évoluant lentement dans l'espace de paramètres du système, l'état du système restera inchangé [44, 111]. Autrement dit, si le système commence dans un état propre du Hamiltonien initial, alors il terminera dans l'état propre correspondant du Hamiltonien final. Pour clarifier ce résultat, nous exposons la démonstration du théorème adiabatique présentée dans le livre de D. J. Griffiths et D. F. Schroeter [114].

Supposons que la partie dépendante du temps du Hamiltonien peut être écrite comme le produit d'un opérateur V et d'une fonction réelle $f(t)$

$$H_{tot}(t) = H_0 + Vf(t), \tag{II.1}$$

où la fonction $f(t)$ est croissante dans l'intervalle $t \in [0, T]$ de sorte que $f(0) = 0$ et $f(t = T) = 1$. Nous supposons également que la particule est initialement dans le n -ième état propre du Hamiltonien H_0

$$\Psi(0) = \psi_n^i, \tag{II.2}$$

et évolue vers un état quelconque $\Psi(t)$. En utilisant la théorie des perturbations indépendantes du temps au premier ordre, l'état propre final ψ_m^f est donné par

$$\psi_m^f \approx \psi_m + \sum_{k \neq m} \frac{V_{km}}{E_m - E_k} \psi_k, \quad V_{km} = \langle \psi_k | V | \psi_m \rangle, \quad (\text{II.3})$$

où nous avons retiré l'exposant i sur les états propres et les valeurs propres du Hamiltonien initial pour simplifier les notations dans ce qui va suivre. D'autre part, l'état du système $\Psi(t)$ peut être déterminé en utilisant le développement au premier ordre de la théorie des perturbations dépendantes du temps. En effet, il est donné comme une combinaison linéaire dans la base des états propres du système [45]

$$\Psi(t) = \sum_l c_l(t) \psi_l e^{-iE_l t/\hbar}, \quad (\text{II.4})$$

avec

$$c_l(t) \approx -\frac{V_{ln}}{E_l - E_n} (f(t) e^{i(E_l - E_n)t/\hbar} - \int_0^t \frac{df}{dt'} e^{i(E_l - E_n)t'/\hbar} dt'), \quad l \neq n. \quad (\text{II.5})$$

Ici, nous utilisons l'approximation adiabatique pour laquelle la quantité df/dt est extrêmement petite de sorte que [111]

$$\frac{df}{dt} \ll \frac{|E_l - E_n|}{\hbar} f, \quad (\text{II.6})$$

ce qui signifie que le dernier terme de l'équation (II.5) apporte une contribution négligeable dans $c_l(t)$. Il en résulte que

$$\Psi(T) \approx \left[\left(1 - i \frac{V_{nn} A_f}{\hbar}\right) \psi_n - \sum_{l \neq n} \frac{V_{ln}}{E_l - E_n} \psi_l \right] e^{-iE_n T/\hbar}, \quad (\text{II.7})$$

où A_f représente la surface sous le graphe de $f(t)$ entre 0 et T . Ainsi, en tenant compte les équations (II.3) et (II.7), et comme les états propres initiaux sont orthonormés, nous obtenons

$$\langle \Psi(T) | \psi_m^f \rangle = \begin{cases} [1 + i \frac{V_{nn} A_f}{\hbar}] e^{iE_n T/\hbar}, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

Il s'ensuit que

$$|\langle \Psi(T) | \psi_m^f \rangle|^2 = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

Ainsi, en se plaçant dans l'approximation adiabatique (II.6), les probabilités de transitions de l'état propre initial ψ_n^i vers les autres états propres ψ_m^f ($m \neq n$) du Hamiltonien (II.1) sont interdites. Autrement dit, si le système est préparé à l'instant initial $t = 0$ dans l'état propre ψ_n^i , alors il reste dans le même état propre à chaque instant t ultérieur. Dans ce cas, nous avons

$$|\Psi(t)\rangle = \left[1 + i \frac{V_{nn} A_f}{\hbar} \right] e^{iE_n t/\hbar} |\psi_n\rangle, \quad t \in [0, T]. \quad (\text{II.10})$$

2.2 Dérivation de la phase de Berry

Nous exploitons maintenant le théorème adiabatique ci-dessus pour dériver la phase géométrique de Berry en poursuivant la dérivation originale de Berry [44]. Pour cela, on considère un système quantique décrit par le Hamiltonien \tilde{H} , qui dépend d'un paramètre réel multidimensionnel $\mathbf{Q}(t)$ paramétrant l'environnement du système. L'évolution temporelle du système est régie par l'équation de Schrödinger suivante

$$\tilde{H}(\mathbf{Q}(t))|\psi(t)\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle. \quad (\text{II.11})$$

Pour chaque instant t , nous choisissons une base des états propres $|n(\mathbf{Q}(t))\rangle$ pour le Hamiltonien satisfaisant l'équation aux valeurs propres

$$\tilde{H}(\mathbf{Q}(t))|n(\mathbf{Q}(t))\rangle = E_n(\mathbf{Q}(t))|n(\mathbf{Q}(t))\rangle. \quad (\text{II.12})$$

Nous supposons que le spectre d'énergie de \tilde{H} est discret, les valeurs propres ne sont pas dégénérées et qu'aucune transition entre les niveaux d'énergies ne se produit au cours de l'évolution, i. e., le système est placé dans l'approximation adiabatique. Cela signifie que les changements se produisent lentement dans le temps par rapport à l'échelle de temps caractéristique du système. Prenons le système initialement dans le n -ième état propre d'énergie

$$|\psi(0)\rangle = |n(\mathbf{Q}(0))\rangle. \quad (\text{II.13})$$

L'approximation adiabatique affirme que le système demeure dans le n -ième état propre le long du processus d'évolution. Néanmoins, il est possible que cet état gagne un certain facteur de phase qui n'affecte pas l'état physique du système. Dans ce schéma, l'état à l'instant t peut alors s'écrire comme

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\phi_n}|n(\mathbf{Q}(t))\rangle, \quad \phi_n \in [0, 2\pi]. \quad (\text{II.14})$$

Le facteur de phase ϕ_n est identique au facteur de phase dynamique θ_n , qui est l'intégrale sur les valeurs propres de l'énergie

$$\theta_n(t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt'. \quad (\text{II.15})$$

Toutefois, l'approximation adiabatique et l'équation de Schrödinger (II.11) n'interdisent pas l'ajout d'un autre terme γ_n appelé la phase de Berry

$$\phi_n(t) = \theta_n(t) + \gamma_n(t). \quad (\text{II.16})$$

Pour déterminer cette phase, nous injectons les équations (II.14) et (II.16) dans l'équation Schrödinger (II.11), nous obtenons

$$\frac{d}{dt}\gamma_n(t) = i\langle n(\mathbf{Q})|\frac{\partial}{\partial t}|n(\mathbf{Q})\rangle = i\langle n(\mathbf{Q})|\nabla_{\mathbf{Q}}n(\mathbf{Q})\rangle\frac{d\mathbf{Q}}{dt}, \quad (\text{II.17})$$

où nous mettons $\mathbf{Q} \equiv \mathbf{Q}(t)$ pour simplifier les notations. Il en découle alors que

$$\gamma_n(t) = i \int_{\mathbf{Q}_i}^{\mathbf{Q}_f} \langle n(\mathbf{Q}) | \nabla_{\mathbf{Q}} n(\mathbf{Q}) \rangle d\mathbf{Q}. \quad (\text{II.18})$$

De plus, en tenant compte des évolutions cycliques autour d'un chemin fermé \mathbf{C}_n au cours d'une période τ de sorte que $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{Q}(\tau)$, nous aboutissons à l'expression originale de la phase géométrique de Berry

$$\gamma_n(\mathbf{C}_n) = i \oint_{\mathbf{C}_n} \langle n(\mathbf{Q}) | \nabla_{\mathbf{Q}} n(\mathbf{Q}) \rangle d\mathbf{Q}. \quad (\text{II.19})$$

Ainsi, il est intéressant de constater que la phase de Berry ne dépend que du chemin parcouru \mathbf{C}_n , et non du temps qu'il faut pour parcourir ce chemin. Ceci est en contraste direct avec le facteur de phase dynamique (II.15), qui dépend de manière critique du temps écoulé. En outre, nous notons que la normalisation de l'état propre $|n(\mathbf{Q})\rangle$ implique que $\langle n(\mathbf{Q}) | \nabla_{\mathbf{Q}} n(\mathbf{Q}) \rangle$ est imaginaire, ce qui signifie que la phase de Berry $\gamma_n(\mathbf{C}_n)$ est une quantité réelle.

2.3 Phase de Berry comme un potentiel de jauge

À partir de l'équation (II.19), nous remarquons que la phase de Berry n'est rien d'autre que l'*holonomie*² $U(1)$, acquise par l'état propre du système $|n(\mathbf{Q})\rangle$ lors d'un transport parallèle définie par la connexion de Berry donnée par [115]

$$A_n(\mathbf{Q}) = i \langle n(\mathbf{Q}) | \nabla_{\mathbf{Q}} |n(\mathbf{Q})\rangle. \quad (\text{II.20})$$

D'autre part, les états propres $|n(\mathbf{Q})\rangle$ se transforment sous les transformations de jauge $U(1)$ comme

$$|n(\mathbf{Q})\rangle \rightarrow |n(\mathbf{Q})\rangle' = e^{i\zeta_n(\mathbf{Q})} |n(\mathbf{Q})\rangle. \quad (\text{II.21})$$

où $\zeta_n(\mathbf{Q})$ est une phase réelle arbitraire à valeur unique. Cependant, les états propres transformés $|n(\mathbf{Q})\rangle'$ constituent également une base des états propres du Hamiltonien \tilde{H} . Ainsi, il s'ensuit que le potentiel de jauge (II.20) se transforme à travers la transformation de jauge (II.21) par [111]

$$A_n(\mathbf{Q}) \rightarrow A_n'(\mathbf{Q}) = A_n(\mathbf{Q}) - \nabla_{\mathbf{Q}} \zeta_n(\mathbf{Q}). \quad (\text{II.22})$$

Ceci n'entraîne aucun changement dans la phase de Berry

$$\gamma_n(\mathbf{Q}) \rightarrow \gamma_n'(\mathbf{Q}) = \gamma_n(\mathbf{Q}). \quad (\text{II.23})$$

Nous concluons alors que la phase de Berry est invariante sous la transformation de jauge (II.21), ce qui confirme qu'il n'est pas possible de l'éliminer par un certain choix de base des états propres. De surcroît, l'addition de la phase de Berry au facteur de phase dynamique ne contredit pas le théorème adiabatique ni l'équation aux valeurs propres. Tous ces avantages montrent le rôle important de la phase de Berry dans les derniers développements dans les différentes branches de la physique théorique [62, 64, 67, 68].

2. L'holonomie d'une connexion sur une variété des états quantiques est une mesure de la manière dont le transport parallèle le long des chemins fermés modifie les informations géométriques transportées. Ceci est dû à la courbure définie sur cette variété.

2.4 Phase de Berry dans la géométrie de l'espace des états quantiques

Immédiatement après l'introduction de la phase de Berry, Barry Simon [115, 116] a montré que l'espace des états quantiques correspondant à cette phase géométrique (II.19) est l'espace fibré P qui s'exprime localement comme le produit entre l'espace de paramètres $\{\mathbf{Q}\} \equiv \mathbf{M}$ (l'espace de base) et le groupe unitaire $U(1)$ (la fibre). Ainsi, l'état propre $|n(\mathbf{Q})\rangle$ sera complètement caractérisé par le couple $(\mathbf{Q}, e^{i\zeta})$. En d'autres termes, le choix d'une section, i.e., vecteur d'état du système, sur l'espace fibré P spécifie la phase de l'état propre ainsi que l'état physique correspondant. Lors de l'évolution du système $\tilde{H}(\mathbf{Q})$, le transport de l'état propre est alors représentée par une courbe dans l'espace fibré P ou, plus précisément, dans l'espace de base \mathbf{M} (voir la figure (II.1)).

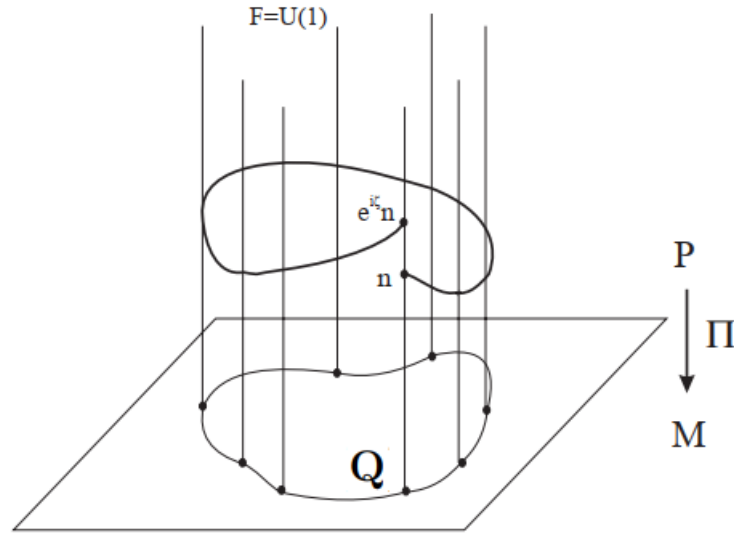


Figure II.1 – L'espace fibré P pour la phase de Berry où Π est l'application de projection de P vers la base \mathbf{M} (section).

La connexion locale sur P , est donnée par le potentiel de jauge de Yang-Mills $\tilde{\mathcal{A}}$ (connexion adiabatique) défini par [107]

$$\tilde{\mathcal{A}} = \sum_a \tilde{A}^a T^a, \quad (\text{II.24})$$

où $\{T^a\}$ sont les générateurs de l'algèbre de Lie $u(1)$. Il est donc possible d'identifier le potentiel de jauge $\mathbf{A}_n(\mathbf{Q})$ de l'équation (II.20) avec le potentiel \tilde{A}_a , ce qui donne

$$\tilde{A}^a \equiv \tilde{A} = \mathbf{A}_n(\mathbf{Q})d\mathbf{Q} = i \langle n(\mathbf{Q}) | d | n(\mathbf{Q}) \rangle, \quad (\text{II.25})$$

où d désigne le dérivé extérieur dans la base \mathbf{M} . Explicitement, la connexion adiabatique, i. e., la connexion définissant le transport parallèle sur P , est donnée par

$$\tilde{\mathcal{A}} = \tilde{A}^a T^a = i\tilde{A} = - \langle n(\mathbf{Q}) | d | n(\mathbf{Q}) \rangle. \quad (\text{II.26})$$

Par ailleurs, nous définissons la transformation du point de fibre $|n(\mathbf{Q})\rangle$ à l'autre point $|n'(\mathbf{Q})\rangle$ en multipliant à gauche par un élément $\mathbf{g} = e^{i\zeta} \in U(1)$ comme

$$|n(\mathbf{Q})'\rangle = \mathbf{g} \cdot |n(\mathbf{Q})\rangle = e^{i\zeta}|n(\mathbf{Q})\rangle, \quad (\text{II.27})$$

correspondant à la transformation de jauge (II.21), ce qui provoque d'une manière automatique la transformation du potentiel de jauge $\tilde{\mathcal{A}}$ [103, 111]

$$\tilde{\mathcal{A}}' = \tilde{\mathcal{A}} - id\zeta, \quad (\text{II.28})$$

qui est la loi de transformation de jauge de la connexion adiabatique sur P . En outre, les éléments du groupe d'holonomie $\{e^{ih}\}$ sont donnés par l'intégration de la connexion adiabatique (II.26) le long d'une courbe fermée \mathbf{C}_n

$$h = \oint_{\mathbf{C}_n} \tilde{\mathcal{A}} = i \oint_{\mathbf{C}_n} \tilde{A} = i\gamma(\mathbf{C}_n). \quad (\text{II.29})$$

Ainsi, nous constatons que la phase Berry possède une interprétation naturelle comme une holonomie dans l'espace fibré P .

2.5 Exemple : particule de spin-1/2 dans un champ magnétique rotatif adiabatique

Pour concrétiser les résultats ci-dessus, prenons un système physique composé d'une particule de spin-1/2 se déplaçant dans un champ magnétique externe \mathbf{B} qui tourne adiabatiquement (lentement) sous un angle θ autour de l'axe z (voir la figure (II.2)). Le champ magnétique est exprimé dans l'espace Euclidien \mathbb{R}^3 par

$$\mathbf{B}(t) = B_0 \begin{pmatrix} \sin \theta \cos(\omega t) \\ \sin \theta \sin(\omega t) \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{II.30})$$

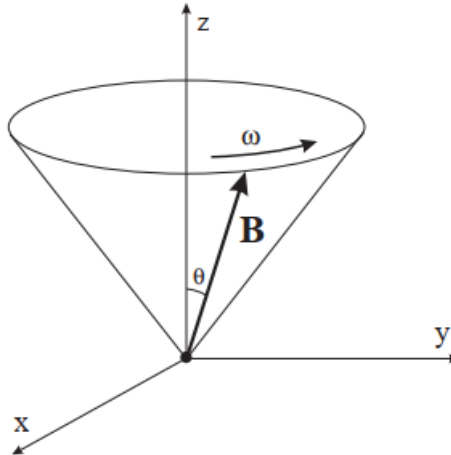


Figure II.2 – Particule de spin-1/2 dans un champ magnétique \mathbf{B} donné par l'équation (II.30).

où ω est la fréquence angulaire de la rotation, et $B_0 = \|\mathbf{B}(t)\|$. Lorsque le champ magnétique \mathbf{B} tourne lentement, alors le spin de la particule suivra la direction du champ magnétique, un état propre du Hamiltonien initial reste toujours un état propre de cet Hamiltonien après un instant t donné. Le Hamiltonien décrivant le système est donné, dans le cadre de l'approximation adiabatique, par [111]

$$\hat{H}(t) = \mu\mathbf{B}(t)\cdot\boldsymbol{\sigma} = \mu B_0 \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\omega t} \sin\theta \\ e^{i\omega t} \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad (\text{II.31})$$

où $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ est un vecteur dont les composantes sont les matrices de Pauli usuelles, et la constante $\mu = e/2m\hbar$. Le Hamiltonien (II.31) vérifie l'équation aux valeurs propres (II.12) dont la solution donnée par les états propres normalisés suivants

$$|n_+(t)\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\omega t} \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad |n_-(t)\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\omega t} \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (\text{II.32})$$

correspondant aux valeurs propres $E_{\pm} = \pm\mu B_0$. D'ailleurs, le Hamiltonien (II.31) dépendant du champ magnétique \mathbf{B} qui est à son tour dépendant des paramètres $\theta, \phi(t) = \omega t$ et $r = B_0$. Cela signifie que l'espace de paramètres est identique aux valeurs autorisées de $\mathbf{B}(t)$ qui forme une sphère S^2 . En tenant compte du processus cyclique adiabatique du système, le champ magnétique $\mathbf{B}(t)$ trace une courbe C visualisée dans la figure (II.3). De plus, le gradient

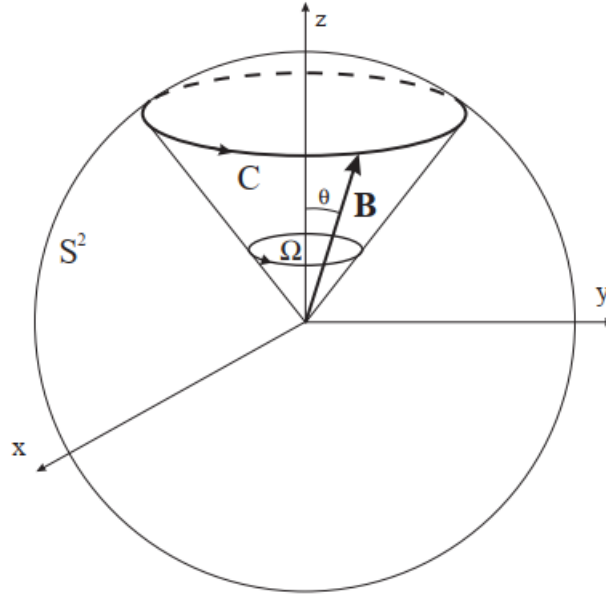


Figure II.3 – Espace de paramètres pour le champ magnétique \mathbf{B} donné par l'équation (II.30).

des états propres (II.32) défini sur l'espace de paramètres $\mathbf{B}(\theta, \phi, r)$, qui est de symétrie sphérique, est alors

$$\nabla |n_{\pm}(t)\rangle = \frac{\partial}{\partial r} |n_{\pm}(t)\rangle \hat{k} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} |n_{\pm}(t)\rangle \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} |n_{\pm}(t)\rangle \hat{\phi}, \quad (\text{II.33})$$

où les vecteurs $\{\hat{k}, \hat{\theta}, \hat{\phi}\}$ forment une base orthonormée sphérique sur \mathbf{B} . En exploitant les équations (II.32) et (II.33), nous déduisons les produits scalaires suivants

$$\langle n_+ | \nabla | n_+ \rangle = i \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{r \sin \theta} \hat{\phi}, \quad \langle n_- | \nabla | n_- \rangle = i \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{r \sin \theta} \hat{\phi}. \quad (\text{II.34})$$

En faisant l'intégration le long de la courbe fermée C , en prenant le paramètre ϕ variant dans l'intervalle $\in [0, 2\pi]$, et les deux autres paramètres r, θ constants, nous trouvons

$$\oint_C \langle n_{\pm} | \nabla | n_{\pm} \rangle r \sin \theta d\phi = i\pi (1 \mp \cos \theta). \quad (\text{II.35})$$

D'où, la phase géométrique de Berry acquise par l'état propre $|n_{\pm}\rangle$ prend la forme

$$\gamma_{\pm}(C) = -\pi(1 \mp \cos \theta) = \mp \frac{1}{2} \Omega(C). \quad (\text{II.36})$$

où $\Omega(C) = 2\pi(1 - \cos \theta)$ est l'angle solide sphérique usuel. D'un autre côté, la phase dynamique $\theta_{d\pm}(\tau)$ pour une rotation de période $\tau = 2\pi/\omega$, est donnée par

$$\theta_{d\pm}(\tau) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^{\tau} E_{\pm}(t) dt = \mp \frac{\mu}{\hbar} B_0 \tau. \quad (\text{II.37})$$

Nous remarquons que la phase dynamique dépend seulement de la période τ au moment où la phase géométrique de Berry ne dépend que de l'angle d'ouverture θ du cône délimité par le champ magnétique \mathbf{B} , i. e., dépend seulement de la géométrie spéciale, (voir la figure (II.3)). Il s'ensuit que l'état total après une rotation, où $\mathbf{B}(\tau) = \mathbf{B}(0)$, est alors

$$|n_{\pm}(\tau)\rangle = e^{-i\pi(1 \mp \cos \theta)} e^{\mp i \frac{\mu}{\hbar} B_0 \tau} |n_{\pm}(0)\rangle. \quad (\text{II.38})$$

D'autre part, nous pouvons également exprimer la connexion définie sur l'espace fibré correspondant. En effet, d'après l'équation (II.26), nous obtenons

$$\tilde{\mathcal{A}}_{\pm} = -\langle n_{\pm} | d | n_{\pm} \rangle = -\frac{i}{2} (1 \mp \cos \theta) d\phi, \quad (\text{II.39})$$

et donc l'holonomie résultante s'exprime par

$$h = \oint_C \mathcal{A}_{\pm} = -i\pi(1 \mp \cos \theta) = i\gamma_{\pm}(C), \quad (\text{II.40})$$

qui récupère exactement le résultat de la phase Berry (II.36).

3 Phase géométrique de Aharonov-Anandan

En 1987, les physiciens théoriciens Y. Aharonov et J. Anandan [46] ont suggéré une généralisation importante de la phase de Berry. Cette généralisation considère les évolutions cycliques qui ne sont pas contraintes par la condition adiabatique. Cela signifie que nous n'avons pas besoin d'un espace de paramètres pour décrire l'évolution cyclique du Hamiltonien, mais seulement de l'espace de Hilbert projectif dans lequel le système trace des courbes fermées. La phase de Berry est donc un cas particulier de cette nouvelle phase appelée phase de Aharonov-Anandan. Cette généralisation est très importante, car dans les processus réels, la condition adiabatique n'est jamais exactement remplie. Dans ce qui va suivre, nous abordons la procédure de dérivation de la phase géométrique de Aharonov-Anandan.

3.1 Dérivation de la phase de Aharonov-Anandan

Comme nous avons précédemment énoncé, l'espace de Hilbert projectif \mathcal{PH} est construit par l'ensemble des classes d'équivalence de tous les vecteurs d'états de l'espace original de Hilbert \mathcal{H} . Il est défini par l'application de projection $\hat{\Pi}$ suivante

$$\begin{aligned} \hat{\Pi} : \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{PH}, \\ |\psi\rangle &\rightarrow \hat{\Pi}(|\psi\rangle) = \{|\psi'\rangle : |\psi'\rangle = \hat{c}|\psi\rangle, \hat{c} \in \mathbb{C}\}. \end{aligned} \quad (\text{II.41})$$

Cela signifie que toutes les droites complexes de \mathcal{H} qui représentent tous les vecteurs des états quantiques possibles sont projeté en une représentation (un point) dans \mathcal{PH} (voir la figure (II.4)(a)). De cette façon, toute courbe cyclique C dans \mathcal{H} est une courbe fermée \hat{C} dans \mathcal{PH} (voir la figure (II.4)(b)). Afin de visualiser l'approche de Aharonov-Anandan pour la construction de la phase géométrique, nous commençons par

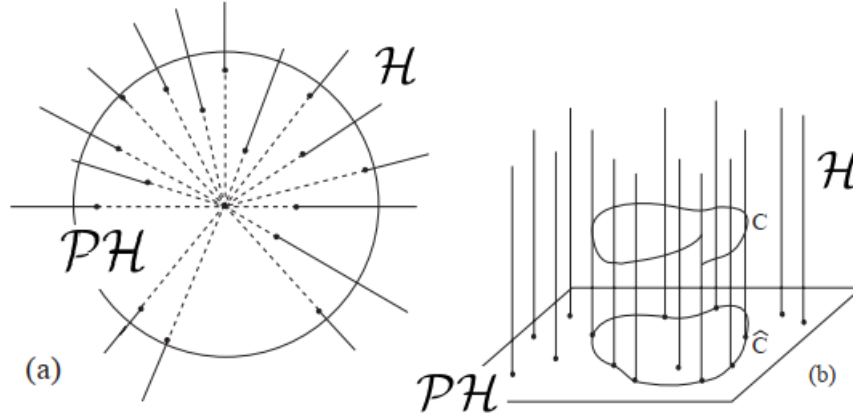


Figure II.4 – (a) Illustration de l'espace de Hilbert projectif \mathcal{PH} . (b) Évolutions cycliques \hat{C} dans \mathcal{PH} et C dans \mathcal{H} .

considérer une évolution cyclique d'un vecteur d'état $|\psi(t)\rangle \in \mathcal{H}$, alors après une période τ , l'état final ne diffère de l'état initial que par un facteur de phase

$$|\psi(\tau)\rangle = e^{i\Phi}|\psi(0)\rangle. \quad (\text{II.42})$$

Le vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ évolue selon l'équation de Schrödinger (II.11) qui donne en général une courbe ouverte C dans \mathcal{H} . Dans l'espace de Hilbert projectif \mathcal{PH} , nous introduisons le vecteur d'état $|\hat{\xi}(t)\rangle$ (section de Aharonov-Anandan) qui forme la courbe $\hat{C} = \hat{\Pi}(C)$, et qui est à valeur unique $|\hat{\xi}(\tau)\rangle = |\hat{\xi}(0)\rangle$ [46]. Les vecteurs d'états dans \mathcal{H} sont obtenus par une multiplication avec un facteur complexe approprié $f(t)$ [46, 117]

$$|\psi(t)\rangle = e^{if(t)}|\hat{\xi}(t)\rangle, \quad (\text{II.43})$$

qui doit remplir la relation suivante $f(\tau) - f(0) = \Phi$. Ensuite, la transformation unitaire $e^{-if(t)}$ ne néglige pas l'information de phase du vecteur d'état. En reportant l'équation (II.43) dans

l'équation Schrödinger (II.11), nous établissons l'équation d'évolution de $f(t)$ de la forme

$$-\frac{d}{dt}f(t) = \frac{1}{\hbar}\langle\psi(t)|\tilde{H}|\psi(t)\rangle - \langle\hat{\xi}(t)|\tilde{H}|\hat{\xi}(t)\rangle. \quad (\text{II.44})$$

L'intégration de l'équation (II.44) de 0 à τ donne

$$\int_0^\tau \frac{d}{dt}f(t)dt = \Phi = \Phi_{dyn} + \Phi_{geo}. \quad (\text{II.45})$$

Ainsi, la phase totale acquise par le vecteur d'état $|\psi(t)\rangle \in \mathcal{H}$ (ou bien $|\hat{\xi}(t)\rangle \in \mathcal{PH}$) au cours d'une évolution cyclique contient deux parties essentielles : la première concerne la phase dynamique

$$\Phi_{dyn} = -\frac{1}{\hbar} \int_0^\tau \langle\hat{\xi}(t)|\tilde{H}|\hat{\xi}(t)\rangle dt = -\frac{1}{\hbar} \int_0^\tau \langle\psi(t)|\tilde{H}|\psi(t)\rangle dt, \quad (\text{II.46})$$

tandis que la deuxième partie concerne la phase géométrique, dite phase de Aharonov-Anandan, donnée explicitement par

$$\Phi_{geo} = i \oint_{\hat{C}} \langle\hat{\xi}(t)|\frac{\partial}{\partial t}|\hat{\xi}(t)\rangle dt. \quad (\text{II.47})$$

Ainsi, nous obtenons la phase géométrique de Aharonov-Anandan sans avoir besoin de la condition adiabatique. C'est la raison pour laquelle Berry a essayé d'éliminer la condition adiabatique en calculant les termes de correction adiabatique [47]. Un autre avantage est que l'état initial n'a pas besoin d'être un état propre du Hamiltonien \tilde{H} , et donc la phase de Aharonov-Anandan peut être calculée même pour les vecteurs d'états arbitraires. Dans la limite adiabatique, la phase Aharonov-Anandan coïncide avec celle de Berry. De plus, elle ne dépend que de la courbe \hat{C} et de la géométrie de l'espace de Hilbert projectif \mathcal{PH} contrairement à la phase de Berry qui dépend de la géométrie de l'espace de paramètres.

3.2 Phase de Aharonov-Anandan et potentiel de jauge sur \mathcal{PH}

D'après les travaux de B. Simon, J. Samuel et R. Bhandari [48], il est possible de définir un potentiel de jauge $\tilde{\mathbf{A}}$ pour la phase géométrique de Aharonov-Anandan (II.47). Il est de la forme

$$\tilde{\mathbf{A}} = i\langle\hat{\xi}(t)|d|\hat{\xi}(t)\rangle, \quad (\text{II.48})$$

qui est aussi connu sous le nom de la connexion de Berry-Simon [46, 118]. Il s'ensuit que la connexion de Aharonov-Anandan définissant l'holonomie sur \mathcal{PH} , est donnée par

$$\tilde{\mathcal{A}} = i\tilde{\mathbf{A}} = -\langle\hat{\xi}(t)|d|\hat{\xi}(t)\rangle. \quad (\text{II.49})$$

Sous une opération du groupe de jauge $U(1)$, le vecteur d'état, i.e., la section de Aharonov-Anandan $|\hat{\xi}(t)\rangle \in \mathcal{PH}$, se transforme comme $|\hat{\xi}(t)\rangle \rightarrow |\hat{\xi}(t)\rangle' = e^{i\hat{c}}|\hat{\xi}(t)\rangle$. Il s'ensuit que la connexion de Aharonov-Anandan $\tilde{\mathcal{A}}$ se transforme comme

$$\tilde{\mathcal{A}}' = \tilde{\mathcal{A}} - id\hat{c}. \quad (\text{II.50})$$

Ceci n'entraîne aucun changement dans la phase de Aharonov-Anandan (II.47)

$$\Phi_{geo} \rightarrow \Phi'_{geo} = \Phi_{geo}, \quad (\text{II.51})$$

ce qui montre l'invariance de jauge $U(1)$ de cette phase. D'autre part, l'holonomie, produite lors du transport parallèle du vecteur d'état $|\hat{\xi}(t)\rangle$ sur une courbe $\hat{C} \subset \mathcal{PH}$, est donnée par

$$\mathbf{h} = \oint_{\hat{C}} \tilde{\mathcal{A}} = i \oint_{\hat{C}} \tilde{\mathcal{A}} = i\Phi_{geo}(\hat{C}). \quad (\text{II.52})$$

Nous concluons alors que la phase de Aharonov-Anandan coïncide avec l'holonomie acquise par le vecteur d'état lors d'un processus cyclique \hat{C} sur \mathcal{PH} [46, 118].

3.3 Exemple : particule de spin $-1/2$ dans un champ magnétique rotatif arbitraire

Nous reprenons l'exemple d'une particule de spin $-1/2$ dans un champ magnétique tournant mais, cette fois-ci, nous n'avons pas besoin de supposer une restriction adiabatique sur la fréquence angulaire ω . Cela signifie que le champ magnétique (II.30) autorise toutes les fréquences angulaires possibles. Dans ce schéma, le Hamiltonien décrivant la dynamique, non-adiabatique, du système est celui de l'équation (II.31). Considérons d'abord une évolution générale d'un état arbitraire du système $|\psi\rangle$ décrite par l'équation de Schrödinger suivante

$$\hat{H}(t)|\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle. \quad (\text{II.53})$$

Pour résoudre cette équation, nous adoptons la transformation suivante³ [119]

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z t} |\tilde{\psi}(t)\rangle, \quad (\text{II.54})$$

avec la condition initiale $|\psi(0)\rangle = |\tilde{\psi}(0)\rangle$, de sorte que l'état $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ vérifie sa propre équation de Schrödinger

$$\hat{H}'|\tilde{\psi}(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\tilde{\psi}(t)\rangle, \quad (\text{II.55})$$

où \hat{H}' est le Hamiltonien⁴ indépendant du temps se mettant de la forme

$$\hat{H}' = \hat{H}'(\omega) = \hat{H}(t=0) - \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z = \begin{pmatrix} \mu B_0 \cos \theta - \frac{\hbar\omega}{2} & \mu B_0 \sin \theta \\ \mu B_0 \sin \theta & -\mu B_0 \cos \theta - \frac{\hbar\omega}{2} \end{pmatrix}. \quad (\text{II.56})$$

Il est à noter que le Hamiltonien d'interaction (II.56) s'écrit sous sa forme canonique avec un nouveau champ magnétique \mathbf{B}' [111]

$$\hat{H}' = \mu \mathbf{B}' \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \mathbf{B}' = B'_0 (\sin \theta', 0, \cos \theta')^T. \quad (\text{II.57})$$

3. Il s'agit d'une transformation en système du corps fixe [119].

4. Le Hamiltonien du corps fixe indépendant du temps.

D'autre part, en utilisant le fait que \hat{H}' est indépendant du temps, la résolution de l'équation (II.55) donne

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}'t}|\psi(0)\rangle. \quad (\text{II.58})$$

Ainsi, en reportant ce dernier résultat dans l'équation (II.54), nous aboutissons à la solution de l'équation de Schrödinger (II.53) donnée par

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z t} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}'t}|\psi(0)\rangle. \quad (\text{II.59})$$

Si nous nous restreignons à une évolution cyclique de période $\tau = 2\pi/\omega$, il est possible de calculer la phase dynamique et la phase géométrique acquises par le vecteur d'état (II.59). Pour simplifier d'avantage, nous choisissons l'état initial $|\psi(0)\rangle = |\tilde{\psi}_{\pm}\rangle$ comme étant un état propre du Hamiltonien indépendant du temps \hat{H}' , qui vérifie les équations aux valeurs propres suivantes

$$\hat{H}'|\tilde{\psi}_{\pm}\rangle = E_{\pm}|\tilde{\psi}_{\pm}\rangle, \quad \sigma_z|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle, \quad |\tilde{\psi}_{\pm}\rangle = e^{-i\theta'\frac{\sigma_y}{2}}|\pm\rangle. \quad (\text{II.60})$$

D'après l'équation (II.59), nous avons $|\psi(\tau)\rangle = e^{\mp i\pi} e^{-iE_{\pm}\tau}|\tilde{\psi}_{\pm}\rangle$, ce qui signifie que la phase totale acquise lors de l'évolution cyclique de période τ est alors

$$\Phi_{tot}(\tau) = -E_{\pm}\tau \mp \pi. \quad (\text{II.61})$$

De plus, la phase totale (II.61) englobe deux parties essentielles : la première porte sur la phase dynamique donnée par

$$\Phi_{dyn}(\tau) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^{\tau} \langle\psi(t)|\hat{H}(t)|\psi(t)\rangle dt = -\frac{1}{\hbar} \int_0^{\tau} \left(\langle\tilde{\psi}_{\pm}|\hat{H}'|\tilde{\psi}_{\pm}\rangle dt + \frac{\hbar\omega}{2} \langle\tilde{\psi}_{\pm}|\sigma_z|\tilde{\psi}_{\pm}\rangle \right) dt. \quad (\text{II.62})$$

Explicitement, elle prend la forme

$$\Phi_{dyn}(\tau) = -\frac{1}{\hbar} E_{\pm}\tau \mp \pi \cos \theta'. \quad (\text{II.63})$$

La deuxième partie concerne la phase géométrique qui s'exprime par la différence entre la phase totale (II.61) et la phase dynamique (II.62) comme suit

$$\Phi_{geo}(\tau) = \Phi_{tot}(\tau) - \Phi_{dyn}(\tau) = \mp \pi(1 - \cos \theta'). \quad (\text{II.64})$$

qui n'est rien d'autre que la phase géométrique de Aharonov-Anandan dont la formule ressemble beaucoup à celle de la phase de Berry (II.36). La seule différence entre elles, est que la phase de Aharonov-Anandan définie par un autre angle $\theta' \neq \theta$, que dans la limite adiabatique, où $\omega \ll \mu B_0$, les deux angles θ et θ' sont identiques, ce qui fait que les deux phases coïncident [111]. D'autre part, la connexion de Aharonov-Anandan correspondante s'écrit

$$\tilde{\mathcal{A}}_{\pm} = -\frac{i}{2}(1 \mp \cos \theta')d\phi. \quad (\text{II.65})$$

Par conséquent, l'holonomie associée prend la forme

$$\mathbf{h} = \oint_{\hat{\mathcal{C}}} \tilde{\mathcal{A}}_{\pm} = -i\pi(1 \mp \cos \theta') = i\Phi_{geo\pm}(\hat{\mathcal{C}}). \quad (\text{II.66})$$

4 Phase géométrique généralisée dans l'évolution de Schrödinger

4.1 Phase géométrique non-cyclique et non-adiabatique

En 1993, N. Mukunda et R. Simon [53] ont développé une version plus généralisée de la phase géométrique indépendante des conditions d'adiabaticité et de cyclicité. Pour expliciter cette version généralisée de la phase géométrique, nous considérons une évolution unitaire arbitraire d'un système quantique traçant un chemin ouvert $\hat{\Gamma}$ dans l'espace de Hilbert projectif \mathcal{PH} , de sorte que l'état physique du système $|\psi(t)\rangle \in \mathcal{H}$ évolue selon l'équation de Schrödinger (II.53). Dans le cas d'une évolution non-cyclique, nous ne pouvons pas, en général, déduire la phase totale du vecteur d'état initial, i.e., $|\psi(t)\rangle \neq \exp(i\Phi_{tot})|\psi(0)\rangle$, au cours d'une évolution de $t = 0$ à $t > 0$, ce qui signifie que la distance entre les points $\hat{\Pi}(|\psi(0)\rangle)$ et $\hat{\Pi}(|\psi(t)\rangle)$ est non nulle [118]. En 1956, S. Pancharatnam [120] a trouvé une idée brillante, simple et physiquement motivée dans ses travaux portant sur l'interférence lumineuse, selon laquelle si le système évolue d'un état initial $|\psi_0\rangle = |\psi(0)\rangle$ à un état final $|\psi\rangle = |\psi(t)\rangle$, la différence de phase relative entre eux, est donnée par

$$e^{i\Phi_P} = e^{i[\Phi_{tot}]_0^t} = \frac{\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle}{|\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|}, \quad (\text{II.67})$$

où $\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle$ est la connexion de Pancharatnam. Si cette connexion est réel et positive, le système quantique n'acquiert aucune phase le long de l'évolution de $t = 0$ à $t > 0$. Il faut souligner que cette différence de phase relative (II.67) est correcte, i. e., expérimentalement vérifiée, et indépendante de la fermeture des points initiaux et finaux. Plus précisément, elle coïncide avec la phase totale acquise par le système quantique au cours du processus d'évolution [117, 120]. Elle s'exprime également par

$$[\Phi_{tot}]_0^t = \Phi_P = \arg \langle \psi(0) | \psi(t) \rangle = \arctan \left(\frac{\text{Im} \langle \psi(0) | \psi(t) \rangle}{\text{Re} \langle \psi(0) | \psi(t) \rangle} \right). \quad (\text{II.68})$$

Ainsi, la phase totale (II.68) est insensible à toute modification du module de la connexion de Pancharatnam. En outre, la phase géométrique résultante peut être évaluée en faisant la différence entre la phase totale (II.68) et la phase dynamique familiale [53]

$$[\Phi_{geo}]_0^t = \arg \langle \psi(0) | \psi(t) \rangle + (1/\hbar) \int_0^t \langle \psi(t') | \tilde{H}(t') | \psi(t') \rangle dt'. \quad (\text{II.69})$$

Il peut aussi être réécrite sous la forme

$$[\Phi_{geo}]_0^t = \arg \langle \psi(0) | \psi(t) \rangle + i \int_0^t \langle \psi(t') | \dot{\psi}(t') \rangle dt'. \quad (\text{II.70})$$

D'autre part, il est encore possible de définir cette phase géométrique arbitraire sur \mathcal{PH} en généralisant l'expression de la phase de Aharonov-Anandan (II.47) pour une évolution non-cyclique [46, 118]

$$\Phi_{geo} = i \int_{\hat{\Gamma}} \langle \hat{\xi}(t) | \frac{\partial}{\partial t} | \hat{\xi}(t) \rangle dt, \quad (\text{II.71})$$

où $|\hat{\xi}(t)\rangle$ est la section de Aharonov-Anandan définie en termes d'états initial et final lors d'une évolution non-cyclique par [118]

$$|\hat{\xi}(t)\rangle = \frac{\langle\psi(t)|\psi(0)\rangle}{|\langle\psi(t)|\psi(0)\rangle|} |\psi(t)\rangle. \quad (\text{II.72})$$

Il est intéressant de noter que les expressions (II.70) et (II.71) de la phase géométrique sont égaux.

4.2 Exemples d'illustration

Atome à deux niveaux

Prenons l'exemple d'un atome à deux niveaux, équivalent à une particule de spin $-1/2$ interagissant avec le champ magnétique, l'espace de Hilbert correspondant et son espace projectif sont respectivement $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ et $\mathcal{PH} = \mathbb{C}P^1 \simeq S^2$. Le vecteur d'état du système à tout moment t est donné par

$$|\psi(t)\rangle = \sin(\theta_a/2) \exp(i\phi_a) \exp(-i\omega_a t) |+\rangle + \cos(\theta_a/2) \exp(i\omega_a t) |-\rangle, \quad (\text{II.73})$$

où θ_a et ϕ_a sont liés aux paramètres physiques du système, et les vecteurs $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ constituent la base de \mathcal{H} . Lors d'une évolution non-cyclique, le vecteur d'état (II.73) trace un arc sur un cône d'angle polaire θ_a et d'un angle azimutal $\varphi_a = 2\omega_a t$ qui ne varie qu'avec le temps. À cet égard, la section de Aharonov-Anandan (II.72) s'écrit

$$|\hat{\xi}(t)\rangle = e^{-i \tan^{-1}(\tan \omega_a t \cos \theta_a)} [\sin(\theta_a/2) e^{i\phi_a} e^{-i\omega_a t} |+\rangle + \cos(\theta_a/2) e^{i\omega_a t} |-\rangle]. \quad (\text{II.74})$$

D'après l'équation (II.71), la phase géométrique non-cyclique acquise par le système prend la forme

$$[\Phi_{geo}]_0^t = \tan^{-1}(\tan \omega_a t \cos \theta_a) - \omega_a t \cos \theta_a, \quad (\text{II.75})$$

qui varie de manière non-linéaire dans le temps contrairement à la phase dynamique, qui varie de façon linéaire. En outre, si nous nous restreignons à une évolution cyclique, la phase géométrique (II.75) se réduit à $[\Phi_{geo}(\hat{C})]_0^T = \pi(1 - \cos \theta_a)$, qui n'est rien d'autre que la phase de Aharonov-Anandan pour un système quantique à deux niveaux. Dans ce contexte, la mesure expérimentale concernant les phases géométriques non-cycliques pour les particules de spin $-1/2$ (neutrons) a été réalisée par A.G Wagh et V. C. Rakhecha [121].

Oscillateur harmonique unidimensionnel

Nous reconsidérons l'exemple de l'oscillateur harmonique unidimensionnel (OH) dont le Hamiltonien correspondant est de la forme [85]

$$H_{oh} = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} \mathbf{k} X^2 \quad (\text{II.76})$$

où X, P sont respectivement les opérateurs position et impulsion, et m et \mathbf{k} sont des paramètres physiques du système. Le vecteur d'état de l'OH appartient à un espace de Hilbert de dimension infinie, et donc il s'écrit à tout instant $t > 0$ comme [5, 45]

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-i\omega_{oh}t(n+1/2)} \mathbf{c}_n |n\rangle, \quad (\text{II.77})$$

où $\mathbf{c}_n, \omega_{oh}$ sont respectivement le coefficient d'expansion et la pulsation. Si nous choisissons l'état initial $|\psi(0)\rangle$ est un état cohérent, alors l'état évolué $|\psi(t)\rangle$ est comme suit [12]

$$|\psi(t)\rangle = e^{-|z|^2/2} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega_{oh}t(n+1/2)} |n\rangle, \quad (\text{II.78})$$

où z est un nombre complexe (coordonnée locale) (I.54). La section de Aharonov-Anandan (II.72) est définie explicitement par

$$|\hat{\xi}(t)\rangle = \exp \left[-|z|^2/2 + i \tan^{-1} \left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty} [(zz^*)^n/n!] \sin(n + \frac{1}{2})\omega_{oh}t}{\sum_{n=0}^{\infty} [(zz^*)^n/n!] \cos(n + \frac{1}{2})\omega_{oh}t} \right) \right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega_{oh}t(n+1/2)} |n\rangle. \quad (\text{II.79})$$

Il s'ensuit que la phase géométrique non-cyclique s'exprime par

$$[\Phi_{geo}]_0^t = \tan^{-1} \left[-\frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zz^*)^n}{n!} \sin(n + \frac{1}{2})\omega_{oh}t}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zz^*)^n}{n!} \cos(n + \frac{1}{2})\omega_{oh}t} \right] + \omega_{oh}t \left(zz^* + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{II.80})$$

Pour les évolutions cycliques, nous avons le résultat bien connu de la phase géométrique, qui est donné par

$$[\Phi_{geo}(\hat{\mathbf{C}})]_0^{\tau} = 2\pi zz^*, \quad (\text{II.81})$$

qui coïncide avec la surface de la courbe fermée $\hat{\mathbf{C}}$ dans l'espace de phase de l'OH $H_4/U(1) \otimes U(1)$ [103].

5 Phases topologiques fractionnaires

Les phases topologiques fractionnaires [54, 55, 122, 123] sont des phases géométriques particulières acquises pour les systèmes de qudits, i.e., système composé d'un ou plusieurs qudits, lorsqu'ils subissent des processus d'évolution cycliques effectués par des opérations unitaires locales. Pour illustrer ce type de phases, nous étudions deux systèmes quantiques : le premier est un système à un seul qudit, et le deuxième concerne un système bipartite de deux qudits.

5.1 Pour un système à un qudit

L'état quantique initial $\rho(0) = |\psi(0)\rangle\langle\psi(0)|$ d'un qudit peut être développé selon la représentation de Bloch par [54, 55]

$$\rho_0 = \frac{\mathbb{I}}{d} + q \sqrt{\frac{d-1}{d}} \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{T}, \quad (\text{II.82})$$

où $\mathbf{T} = \{T_{\mathbf{r};\mathbf{r}=1,\dots,d^2-1}\}$ sont les générateurs hermitiens du groupe $SU(d)$ vérifiant la condition de normalisation $Tr[T_{\mathbf{r}}, T_{\mathbf{s}}] = \delta_{\mathbf{rs}}$, et $\mathbf{q} = q\hat{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{d^2-1}$ est le vecteur pureté dont la norme $0 \leq q \leq 1$. La phase géométrique (II.70) acquise par l'état évolué $\rho(t)$, est donnée par

$$\Phi_{geo} = \arg\{Tr[\rho_0 U(t)]\} + i \int_0^t dt Tr[\rho_0 U^+(t) \dot{U}(t)], \quad (\text{II.83})$$

où $U(t)$ est un élément du groupe unitaire $U(d)$. Par ailleurs, en utilisant le fait que $U(d) = U(1) \times SU(d)$ [107], nous pouvons écrire $U(t) = e^{i\varphi} \bar{U}(t)$ où $\bar{U}(t) \in SU(d)$ avec les conditions initiales $\varphi(0) = 0$ et $\bar{U}(0) = \mathbb{I}$. Il est simple de vérifier que la phase géométrique (II.83) peut être également écrite seulement en termes du secteur $SU(d)$, i. e., la phase explicite $\varphi(t)$ n'a aucune contribution à cette phase. En effet, nous avons

$$\Phi_{geo} = \arg\{Tr[\rho_0 \bar{U}(t)]\} + i \int_0^t dt Tr[\rho_0 \bar{U}^+(t) \dot{\bar{U}}(t)], \quad (\text{II.84})$$

où l'évolution $\bar{U}(t)$ est fermée dans le secteur $SU(d)$ [54]. D'autre part, en utilisant la relation générale d'une matrice inversible \mathbb{A} [124]

$$\frac{d(\det \mathbb{A})}{dt} = (\det \mathbb{A}) Tr \left[\mathbb{A}^{-1} \frac{d\mathbb{A}}{dt} \right], \quad (\text{II.85})$$

on en déduit aisément que $Tr[\bar{U}^+(t) \dot{\bar{U}}(t)] = 0$ car le terme $\bar{U}^+(t) \dot{\bar{U}}(t)$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des générateurs de $SU(d)$. De plus, cette combinaison linéaire ne doit faire intervenir que des coefficients purement imaginaires, puisque $d(\bar{U}^+(t) \bar{U}(t))/dt = 0 \Rightarrow \bar{U}^+(t) \dot{\bar{U}}(t) = -(\bar{U}^+(t) \dot{\bar{U}}(t))^+$. Ainsi, il est possible d'introduire un vecteur vitesse $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{d^2-1}$ tel que $\bar{U}^+(t) \dot{\bar{U}}(t) = i\mathbf{u} \cdot \mathbf{T}$, de sorte que la phase géométrique (II.84) s'exprime en termes de vecteur pureté et celui de vitesse comme suit [55]

$$\Phi_{geo} = \arg\{Tr[\rho_0 \bar{U}(t)]\} - q \sqrt{\frac{d-1}{d}} \int_0^t \hat{\mathbf{q}} \cdot d\mathbf{x}, \quad (\text{II.86})$$

où $d\mathbf{x} \equiv \mathbf{u} dt$ est une connexion. Prenons maintenant le cas cyclique pour lequel nous avons $Tr[\rho_0 U(\boldsymbol{\tau})] = e^{i\phi_{tot}(\boldsymbol{\tau})}$. Il en découle que pour les états totalement mixtes ($q = 0$), nous trouvons que $Tr[U(T)] = de^{i\phi_{tot}(\boldsymbol{\tau})}$. Ceci implique que $U(\boldsymbol{\tau}) = e^{i\phi_{tot}(\boldsymbol{\tau})} \mathbb{I}$, et donc $\bar{U}(\boldsymbol{\tau}) = e^{i\phi_{tot}(\boldsymbol{\tau})} \mathbb{I}$. Par conséquent, l'expression de la phase géométrique (II.86), pour un état complètement mixte, se réduit à

$$\Phi_{geo}(\boldsymbol{\tau}) = \tilde{\phi}_{tot}(\boldsymbol{\tau}) = \frac{2n\pi}{d}. \quad (n \in \mathbb{Z}). \quad (\text{II.87})$$

Ainsi, nous constatons que pour $d = 2$, i. e., cas d'un qubit, la phase géométrique correspond aux deux valeurs non-fractionnaires $0, \pi$. Par contre, pour $d > 2$, nous obtenons des valeurs de phase géométrique fractionnaires par pas de $2\pi/d$.

5.2 Pour un système à deux qudits

Considérons maintenant un système bipartite composé de deux qudits (A et B). De façon générale, l'état quantique du système total s'écrit comme suit

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j=1}^d \mathbf{E}_{ij} |ij\rangle, \quad \mathbf{E}_{ij} \in \mathbb{C}. \quad (\text{II.88})$$

Il est également possible de représenter cet état par une matrice $d \times d$ de la forme $\mathbf{E} = \sum_{i,j=1}^d \mathbf{E}_{ij} |i\rangle\langle j|$ où \mathbf{E}_{ij} représentent ses éléments. D'ailleurs, l'espace de Hilbert correspondant $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^{d^2}$ muni du produit scalaire et la norme entre ses vecteurs d'états, i. e., $\langle \psi | \psi \rangle = \text{Tr}(\mathbf{E}^+ \mathbf{E}) = 1$ [54]. Dans ce qui va suivre, nous nous intéressons à l'évolution de la phase géométrique acquise par l'état $|\psi\rangle$ sous les opérations unitaires locales $U(d) \otimes U(d)$. Pour cela, prenons deux matrices unitaires $U_A, U_B \in U(d)$ qui représentent les opérations effectuées séparément sur chaque sous-système (qudit). Dans ce schéma, la matrice d'état évoluera comme

$$\mathbf{E}(t) = U_A(t) \mathbf{E}(0) U_B^\dagger(t). \quad (\text{II.89})$$

Afin de caractériser l'espace des états \mathcal{H} , nous notons que toute matrice inversible, i.e., état quantique dans \mathcal{H} , admet une décomposition polaire $\mathbf{E} = QS$, où $Q = \sqrt[4]{|\det[\mathbf{E}]|} e^{\mathbf{M}}$ est une matrice hermitienne définie positive, \mathbf{M} est une matrice hermitienne de trace nulle, et $S = e^{i\phi_q} \bar{S} \in U(d)$ avec $\bar{S} \in SU(d)$. À cet égard, l'état (II.89) après l'évolution peut être factorisé sous la forme

$$\mathbf{E}(t) = \sqrt[4]{|\det[\mathbf{E}]|} e^{i\phi_q(t)} e^{\mathbf{M}(t)} \bar{S}(t), \quad (\text{II.90})$$

tel que

$$\phi_q(t) = \phi_q(0) + \phi_A(t) + \phi_B(t), \quad \mathbf{M}(t) = \bar{U}_A(t) \mathbf{M}(0) \bar{U}_A(t)^\dagger, \quad \bar{S}(t) = \bar{U}_A(t) \bar{S}(0) \bar{U}_B^\dagger(t), \quad (\text{II.91})$$

avec $\bar{U}_A, \bar{U}_B \in SU(d)$. Ainsi, nous identifions l'évolution de l'état à deux qudits en trois secteurs : une évolution de phase explicite $\phi_q(t)$, une évolution fermée dans l'espace des matrices hermitiennes de trace nulle $\mathbf{M}(t)$, et l'évolution $\bar{S}(t)$ fermée dans $SU(d)$. Donc, pour étudier la nature des phases topologiques résultantes lors de l'évolution quantique de l'état $\mathbf{E}(t)$, nous utilisons l'expression de la phase géométrique (II.70) réécrite sous la forme suivante

$$\Phi_{geo} = \arg\{\text{Tr}[\mathbf{E}^+(0) \mathbf{E}(t)]\} + i \int_0^t \text{Tr}[\mathbf{E}^+(t') \dot{\mathbf{E}}(t')] dt', \quad (\text{II.92})$$

étant donnée par la différence entre la phase totale et la phase dynamique. De plus, nous exploitons la décomposition polaire (II.90), en étudiant la contribution provenant de chaque secteur de la matrice d'état $\mathbf{E}(t)$. En effet, dans le cas d'une évolution cyclique de période τ , i. e., en se plaçant dans la condition $\mathbf{E}(\tau) = e^{i\phi'(\tau)} \mathbf{E}(0)$, nous identifions l'évolution de phase triviale $\phi(\tau) = \phi(0) + \Delta\phi$. D'autre part, aucune contribution de phase ne peut être provenue du secteur hermitien positif [54, 55], en revanche, dans le secteur $SU(d)$ nous avons $\bar{S}(\tau) = e^{i\theta_s} \bar{S}(0)$, ce qui entraîne

$$\theta_s = \frac{2\tilde{n}\pi}{d}, \quad \tilde{n} = 0, 1, 2, \dots, d-1. \quad (\text{II.93})$$

Par conséquent, les valeurs de phase fractionnaire ne peuvent provenir que du secteur $SU(d)$, et donc la phase totale acquise dans une évolution cyclique est alors

$$\phi'(\tau) = \Delta\phi + \frac{2n\pi}{d}. \quad (\text{II.94})$$

Bien que $SU(d)$ est simplement connecté, la nature topologique de ces phases fractionnaires repose sur la variété multi-connectée, i.e., implique l'existence des représentations multi-valeurs, qui représente l'ensemble des matrices \bar{S} dans $SU(d)$ avec l'identification $e^{i\theta_s} \bar{S} \equiv \bar{S}$

[54]. D'un autre côté, il est aussi tout à fait possible d'investir la phase dynamique dans le cadre de la décomposition polaire. À cette fin, il est intéressant d'établir la dérivée temporelle de l'état (II.90) donnée par

$$\dot{\mathbf{E}}(t) = i\dot{\phi}(t)\mathbf{E}(t) + e^{i\phi(t)}[\dot{Q}(t)S(t) + Q(t)\dot{S}(t)]. \quad (\text{II.95})$$

Ensuite, en reportant l'équation (II.95) dans l'intégrale de la phase dynamique de l'équation (II.92), il est intéressant de constater que le premier terme de l'équation (II.95) annulera la phase totale triviale $\Delta\phi$, i. e., elle ne contribue pas à la phase géométrique. Il s'ensuit que la phase géométrique prend sa forme finale

$$\Phi_{geo} = \frac{2\tilde{n}\pi}{d} + i \int_0^\tau \text{Tr}[Q^2(t)\dot{S}(t)S^+(t)]dt, \quad (\text{II.96})$$

où $\rho_A = \mathbf{E}\mathbf{E}^+ = (S^+Q^2S)^\text{T}$, $\rho_B = \mathbf{E}^\text{T}\mathbf{E}^* = Q^2$ sont les matrices densité réduites associées aux qudits A et B . Ainsi, la phase géométrique est toujours écrite comme la phase totale moins la phase dynamique. Pour considérer une phase fractionnaire comme topologique, elle doit être construite uniquement comme une partie de la phase géométrique qui ne reçoit aucune contribution dynamique. Cela entraîne la condition suivante

$$\int_0^\tau \text{Tr} \left[\rho_B(0)\bar{U}_A^+(t)\dot{U}_A(t) + \rho_A^\text{T}(0)\dot{U}_B^\text{T}(t)\bar{U}_B^*(t) \right] = 0, \quad (\text{II.97})$$

qui est satisfaite par les états maximalelement intriqués⁵ [54].

6 Conclusion

Dans ce deuxième chapitre, nous avons exposé essentiellement les différents formalismes de la phase géométrique sur la variété des états quantiques construite dans le premier chapitre. Nous avons commencé par l'approche relative à la dérivation de la phase géométrique cyclique de M. Berry dans le cadre de l'approximation adiabatique [111]. Dans ce cas, l'espace des états correspondant coïncide avec l'espace de paramètres du système quantique concerné. Puis, nous avons examiné la phase géométrique cyclique de Aharonov-Anandan qui généralise, en quelque sorte, la phase géométrique de Berry dans l'espace de Hilbert projectif. Ils considèrent les évolutions unitaires cycliques qui ne sont pas limitées par la condition adiabatique, qui n'est jamais exactement satisfaite pour les processus réels. Ensuite, nous avons discuté l'approche cinématique de Mukunda-Simon qui généralise le concept de la phase géométrique pour des évolutions unitaires arbitraires. Ils ont écrit la phase géométrique comme la différence entre la phase totale établie expérimentalement par S. Pancharatnam [120] et la phase dynamique habituelle. Finalement, nous avons étudié les phases topologiques fractionnaires acquises par l'état d'un système de qudits lorsqu'il subit des transformations unitaires locales.

5. Sont les états dont la I -concurrence est maximale [54].

Chapitre III

Caractérisation géométrique et dynamique d'une collection de N qubits couplés via une interaction de type Ising

1 Introduction

Les approches géométriques sont d'une importance primordiale en mécanique quantique. En utilisant les outils géométriques associés à la mécanique quantique, les caractéristiques physiques d'un système quantique en évolution peuvent être représentées par des caractéristiques géométriques spécifiques qui sont identifiées dans la variété des états correspondante [108, 110, 84]. Récemment, de nombreuses études ont montré que les outils géométriques simplifient considérablement l'exploration des propriétés physiques des systèmes quantiques. Parmi ces propriétés, nous citons celles liées à la dynamique quantique [30, 86, 87]. Par exemple, la distance parcourue par un système au cours de son évolution le long d'une courbe sur la variété d'états est liée à l'intégrale de l'incertitude énergétique [24] qui est, à son tour, liée à la vitesse d'évolution [25, 26]. En outre, les méthodes géométriques permettent d'obtenir la solution du problème du brachistochrone quantique, qui consiste à trouver le Hamiltonien permettant l'évolution optimale dans le temps entre deux états, i. e., états initiaux et finaux [27, 28, 29, 30]. Une autre problématique importante qui a été résolue de manière similaire concerne le problème de la construction du circuit quantique d'opérations unitaires qui confère *l'évolution optimale*¹ pour les systèmes de qubits [31, 33, 125] et de qutrits [126]. D'autres applications des outils géométriques en théorie quantique sont reportés dans les références suivantes [30, 62, 64, 86, 87, 91].

L'intrication quantique est largement reconnue comme une ressource physique pertinente

1. Une évolution quantique optimale entre deux points sur une variété des états quantiques est caractérisée par une vitesse d'évolution maximale et une distance géodésique minimale, de sorte que le temps d'évolution soit le petit possible.

quantifiant les corrélations quantiques entre deux (ou plusieurs) sous-systèmes quantiques distincts. Elle a acquis un grand intérêt dans les développements actuels dans le domaine de la science de l'information quantique pour l'amélioration des tâches des protocoles quantiques [127, 128, 129]. De nos jours, l'intrication a été étudiée en termes de perspectives géométriques sur l'espace de Hilbert projectif associé aux systèmes de qubits [56, 57, 58, 39]. En effet, la métrique de Fubini-Study² peut être exprimée en relation avec la concurrence de Wootters [40, 41, 42, 43]. Cela montre la sensibilité de la géométrie prise par la variété d'états au degré d'intrication du système. De plus, le lien entre l'intrication et *la courbure Gaussienne*³ a été investi pour les systèmes de qubits [39, 42]. D'ailleurs, l'intrication est également bien étudiée en termes des phases géométriques acquises naturellement au cours des processus d'évolution quantiques [56, 57]. De surcroît, les phases géométriques, dynamiques et totales sont examinées en relation avec la I -concurrence pour les systèmes de qudits [122, 123]. La même étude a été réalisée pour les phases fractionnaires émergeant naturellement des systèmes de qudits lorsqu'ils subissent des transformations unitaires locales [54, 55].

Dans ce chapitre, nous examinons deux approches de description pour un système physique composé de N qudits : la première approche est de caractère géométrique et vise à explorer les structures géométriques associées à la variété d'états correspondante. La deuxième approche est de caractère dynamique dont l'objectif est de résoudre *le problème du brachistochrone quantique*⁴. Ces deux approches seront traitées en relation avec l'intrication pour un système à deux qubits.

2 Évolution, géométrie et topologie d'un système à N qudits

2.1 Modèle d'Ising et la structure algébrique correspondante

Considérons un système physique de N qudits⁵ en interaction (avec $d = 2s + 1$) composé de N particules interagissant via une interaction à longue distance décrite par le modèle d'Ising [39, 130]. Le Hamiltonien caractérisant l'interaction entre les N qudits, est donné par

$$H_{im} = 2J \sum_{1 \leq i < j \leq N} S_i^z S_j^z, \quad (\text{III.1})$$

où J est la constante de couplage, N est le nombre de spins (qudits), et S_i^z est la composante z de l'opérateur de spin $\mathbf{S}_i = (S_i^x, S_i^y, S_i^z)$ associé au i -ième spin- s qui satisfait l'équation aux

2. Connue par la structure Riemannienne sur l'espace complexe projectif CP^N , il s'agit d'un tenseur covariant, symétrique et défini positif permettant d'évaluer la distance géodésique entre les états quantiques.

3. Est l'un des outils permettant de quantifier la courbure sur la variété des états quantiques, il s'agit d'une fonction qui affecte à chaque point de cette variété une simple valeur réelle portant une information sur la courbure intrinsèque correspondante.

4. Est l'un des problèmes de la dynamique quantique qui concerne la recherche d'un Hamiltonien décrivant l'évolution optimale du système quantique considéré [27].

5. Système quantique de d niveaux indépendants.

valeurs propres suivante

$$S_i^z |m_i\rangle = m_i |m_i\rangle, \quad \hbar = 1, \quad (\text{III.2})$$

avec $m_i = -s, -s + 1, \dots, s$ sont les valeurs de projection du i -ième spin $-s$ suivant l'axe z , et $|m_i\rangle$ sont les états propres correspondants. Il est intéressant de noter que les composantes des opérateurs de spin S_i^x, S_i^y et S_i^z satisfont l'algèbre $su(2)$

$$\left[S_i^\alpha, S_j^\beta \right] = i\delta_{ij} \sum_{\gamma=x,y,z} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} S_i^\gamma, \quad (\text{III.3})$$

où $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}$ est le symbole de Levi-Civita et δ_{ij} représente le symbole de Kronecker. Les opérateurs S_i^x et S_i^y agissent sur l'espace d'états propres $|m_i\rangle$ de S_i^z comme suit

$$\begin{aligned} S_i^x |m_i\rangle &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{s(s+1) - m_i(m_i+1)} |m_i+1\rangle + \sqrt{s(s+1) - m_i(m_i-1)} |m_i-1\rangle \right), \\ S_i^y |m_i\rangle &= \frac{1}{2i} \left(\sqrt{s(s+1) - m_i(m_i+1)} |m_i+1\rangle - \sqrt{s(s+1) - m_i(m_i-1)} |m_i-1\rangle \right). \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

Dans la base de Cartan, nous définissons les opérateurs d'échelle S_i^+ et S_i^- associés à chaque i -ième spin par

$$S_i^x = 1/2(S_i^+ + S_i^-), \quad S_i^y = 1/(2i)(S_i^+ - S_i^-). \quad (\text{III.5})$$

Ainsi, les états propres du Hamiltonien (III.1) sont en général des superpositions de tous les états propres $|m_i\rangle$ de S_i^z . Il en résulte qu'un état arbitraire du système à N qudits peut être décomposé comme une combinaison linéaire de ces états propres

$$|\psi\rangle = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_N} a_{m_1, m_2, \dots, m_N} \otimes_{i=1}^N |m_i\rangle, \quad (\text{III.6})$$

obéissant à la condition de normalisation $\sum_{m_1, m_2, \dots, m_N} |a_{m_1, m_2, \dots, m_N}|^2 = 1$.

2.2 Géométrie de l'état fondamental quantique

Supposons que le système est dans un état cohérent. Cet état est obtenu par une rotation de l'état fondamental $|-s, -s, \dots, -s\rangle$ (état de poids minimal) d'un angle ϑ autour de l'axe $\mathbf{n} = (\sin \varphi, -\cos \varphi, 0)$ (voir la figure (III.1)). Il est donné par

$$|\psi_i\rangle = e^{-i\vartheta \sum_{i=1}^N \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{n}} |-s, -s, \dots, -s\rangle = e^{\sum_{i=1}^N (\kappa S_i^+ - \kappa^* S_i^-)} |-s, -s, \dots, -s\rangle, \quad (\text{III.7})$$

où $\kappa = \frac{\vartheta}{2} e^{-i\varphi}$ avec $\vartheta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$ sont les angles polaire et azimutal, respectivement. L'état (III.7) peut être mis explicitement sous la forme [12, 131]

$$|\psi_i\rangle = (1 + \mathbf{z}\mathbf{z}^*)^{-Ns} \|\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N\rangle, \quad (\text{III.8})$$

où

$$\|\mathbf{z}_i\rangle = \sum_{m_i=-s}^s \mathbf{z}^{s+m_i} \sqrt{\frac{(2s)!}{(s+m_i)!(s-m_i)!}} |m_i\rangle \quad (\text{III.9})$$

désigne la forme non normalisée de l'état cohérent associé au groupe $SU(2)$ pour le i -ième spin avec la variable complexe z donnée par

$$z = \tan \frac{\vartheta}{2} e^{-i\varphi}, \quad (\text{III.10})$$

correspondant à la projection stéréographique de la sphère de Bloch S^2 sur le plan complexe $\mathbb{C}P$ [103]. Afin de spécifier la géométrie de la variété des états quantiques, i. e., espace de phase quantique, l'ensemble des points atteints lors de la rotation de l'état fondamental (III.8), nous utilisons la métrique de Fubini-Study (I.44) donnée en coordonnées locales par [85]

$$dS_{FS}^2 = 4 \frac{\partial^2 \ln K(z, z^*)}{\partial z \partial z^*} dz dz^*, \quad (\text{III.11})$$

avec

$$K(z, z^*) = \langle z_1, z_2, \dots, z_N \parallel z_1, z_2, \dots, z_N \rangle = (1 + zz^*)^{Ns} \quad (\text{III.12})$$

est le noyau de Bergmann associé à N spins qui tournent de la même manière. Il en résulte que la métrique de Fubini-Study (III.11) se réécrit

$$dS_{FS}^2 = 2Ns(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2). \quad (\text{III.13})$$

Par conséquent, la géométrie de l'espace des états qui correspond à la rotation de l'état fondamental (III.8) coïncide avec une sphère S^2 de rayon $\sqrt{2Ns}$.

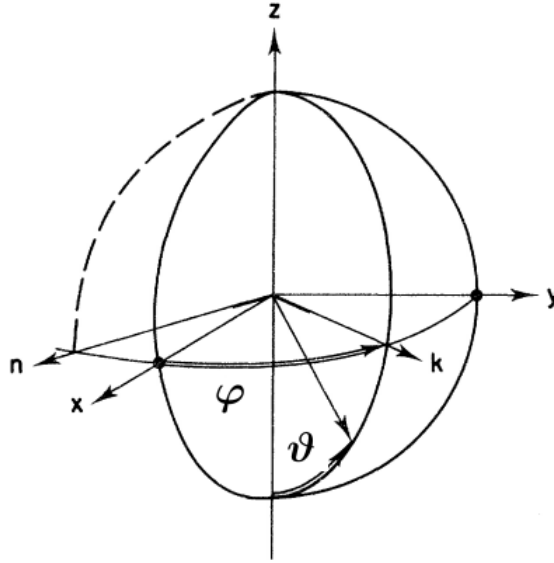


Figure III.1 – Rotation $R_{\vartheta, \varphi}$ pour l'état fondamental $| -s \rangle$ associée au i -ième spin $-s$.

2.3 Évolution quantique de l'état fondamental et la géométrie résultante

Après avoir examiné l'état fondamental (III.8), nous allons maintenant faire évoluer cet état dans le temps en appliquant l'opérateur d'évolution unitaire $U(t) = e^{-iH_{im}t}$ avec ($\hbar = 1$).

Il en découle que l'état évolué à l'instant t s'exprime par

$$|\psi(\hat{\eta})\rangle = (1 + \mathbf{z}\mathbf{z}^*)^{-Ns} \sum_{m_1, m_2, \dots, m_N = -s}^s e^{-i2\hat{\eta} \sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j} \left(\prod_{\lambda=1}^N \mathbf{z}^{s+m_\lambda} \sqrt{\binom{2s}{s+m_\lambda}} \right) |m_1, m_2, \dots, m_N\rangle, \quad (\text{III.14})$$

où $\hat{\eta} = Jt$. L'état évolué de N qudits vérifie la condition de périodicité suivante

$$|\psi(\hat{\eta} + \hat{\eta}_{max})\rangle = |\psi(\hat{\eta})\rangle, \quad \Rightarrow \quad \hat{\eta} \in [0, \hat{\eta}_{max}], \quad (\text{III.15})$$

avec $\hat{\eta}_{max} = \pi$ pour s entier et $\hat{\eta}_{max} = 2\pi$ pour s demi-entier. Dans le but d'explorer la nouvelle géométrie introduite par l'évolution temporelle, nous utilisons la métrique de Fubini-Study (I.85). Explicitement, elle est donnée par [42, 130]

$$d\mathbf{S}_{\mathbf{FS}}^2 = dS_{FS}^2 + 2N(N-1)s^2 \sin^2 \vartheta (1 + (4s(N-1) - 1) \cos^2 \vartheta) d\hat{\eta}^2 - 4N(N-1)s^2 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta d\varphi d\hat{\eta}, \quad (\text{III.16})$$

où dS_{FS}^2 est le tenseur métrique caractérisant l'état fondamental (III.13). Nous constatons qu'à chaque instant t fixé, la variété d'états du système à N qudits se réduit à la sphère S^2 (III.13), i. e., variété générée par la rotation de l'état fondamental. Étant donné que les composantes du tenseur métrique (III.16) sont indépendantes de l'angle azimutal φ , les variétés des états quantiques avec un angle azimutal prédéfini possèdent la même géométrie. Pour cette raison, nous nous restreignons à une variété bidimensionnelle paramétrée par ϑ et $\hat{\eta}$ avec un angle azimutal prédéfini. Dans ce schéma, la métrique de Fubini-Study correspondante devient

$$d\mathbf{S}_{\mathbf{FS}}^2 = 2Ns d\vartheta^2 + 2N(N-1)s^2 \sin^2 \vartheta (1 + (4s(N-1) - 1) \cos^2 \vartheta) d\hat{\eta}^2. \quad (\text{III.17})$$

2.4 Topologie de l'espace des états quantiques de N qudits

Dans ce qui suit nous explorons la topologie des variétés des états quantiques (III.17) associées au système de N qudits. Nous devons d'abord évaluer la courbure Gaussienne K correspondante à la variété d'états (III.17). Cette courbure s'écrit [110]

$$K = \frac{1}{(g_{\vartheta\vartheta} g_{\hat{\eta}\hat{\eta}})^{1/2}} \left[\frac{\partial}{\partial \hat{\eta}} \left(\left(\frac{g_{\hat{\eta}\hat{\eta}}}{g_{\vartheta\vartheta}} \right)^{1/2} \Gamma_{\vartheta\vartheta}^{\hat{\eta}} \right) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\left(\frac{g_{\hat{\eta}\hat{\eta}}}{g_{\vartheta\vartheta}} \right)^{1/2} \Gamma_{\vartheta\hat{\eta}}^{\hat{\eta}} \right) \right], \quad (\text{III.18})$$

où les symboles de Christoffel $\Gamma_{\vartheta\vartheta}^{\hat{\eta}}$ et $\Gamma_{\vartheta\hat{\eta}}^{\hat{\eta}}$ sont donnés par

$$\Gamma_{\vartheta\vartheta}^{\hat{\eta}} = -\frac{1}{2g_{\hat{\eta}\hat{\eta}}} \left(\frac{\partial g_{\vartheta\vartheta}}{\partial \hat{\eta}} \right), \quad \Gamma_{\vartheta\hat{\eta}}^{\hat{\eta}} = \frac{1}{2g_{\hat{\eta}\hat{\eta}}} \left(\frac{\partial g_{\hat{\eta}\hat{\eta}}}{\partial \vartheta} \right). \quad (\text{III.19})$$

Explicitement, la courbure Gaussienne (III.18) s'exprime par

$$K = \frac{4}{Ns} \left(2 - \frac{(4s(N-1) - 1) \cos^2 \vartheta + 2s(N-1) + 1}{((4s(N-1) - 1) \cos^2 \vartheta + 1)^2} \right). \quad (\text{III.20})$$

Étant donné que la composante $g_{\hat{\eta}\hat{\eta}}$ de la métrique (III.17) s'annule aux points $\vartheta = 0$ et π , la courbure Gaussienne (III.18) présente une singularité dans ces deux points. En revanche, elle est bien définie dans tous les autres points de la variété. En outre, la courbure Gaussienne dépend du paramètre de rotation ϑ , le nombre de particules N et la valeur de spin s . Par contre, elle

est indépendante de l'évolution temporelle t , ce qui indique que cette quantité géométrique est indépendante de la dynamique du système.

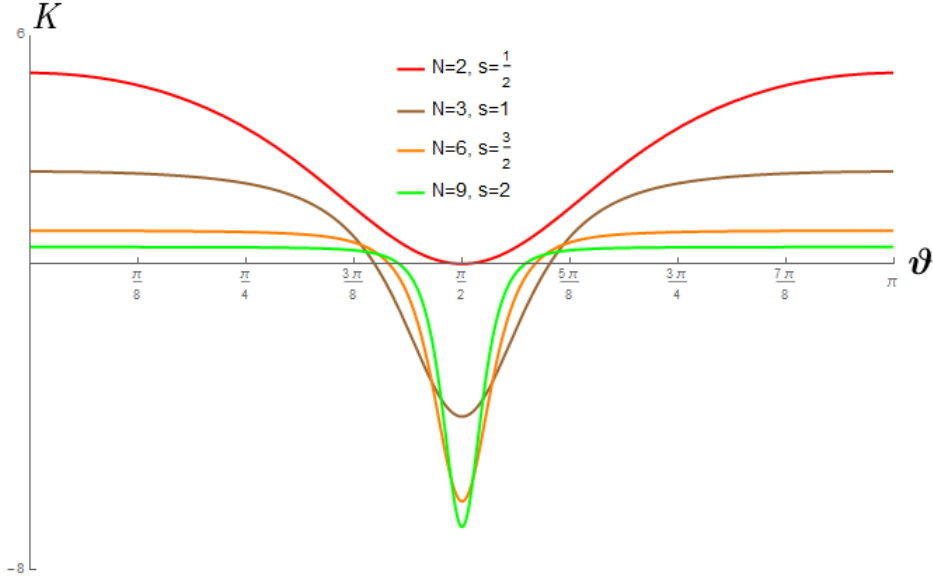


Figure III.2 – Comportement de la courbure Gaussienne K en fonction du paramètre ϑ .

D'autre part, l'analyse de la figure (III.2) montre clairement que pour $N > 2$ et $s \geq \frac{1}{2}$, la courbure Gaussienne prend des valeurs négatives. Ainsi, en utilisant ce résultat et le fait que la courbure présente une singularité aux points $\vartheta = 0$ et π , nous déduisons que la variété d'états de N qudits présente des défauts coniques à proximité de ces deux points [110, 130]. Sous ces considérations nous allons spécifier la topologie de cette variété d'états. Autrement dit, nous devons calculer la caractéristique d'Euler⁶ χ associée. Pour cela, nous faisons appel au *théorème de Gauss-Bonnet*⁷ pour le tenseur métrique (III.17). Dans notre cas, on a [110]

$$\frac{1}{2\pi} \left[\int_0^\pi \int_0^{\hat{\eta}_{\max}} K(g_{\vartheta\vartheta}g_{\hat{\eta}\hat{\eta}})^{1/2} d\vartheta d\hat{\eta} + \Delta \right] = \chi, \quad (\text{III.21})$$

où Δ est l'intégrale d'Euler de bord contenant la contribution des défauts coniques. En injectant les composantes de la métrique (III.17) ainsi que la courbure Gaussienne (III.20) dans l'expression (III.21), nous obtenons

$$4s\hat{\eta}_{\max}(N-1) + \Delta = 2\pi\chi. \quad (\text{III.22})$$

Ainsi, la détermination de la caractéristique d'Euler χ repose sur l'évaluation de l'intégrale d'Euler de bord Δ . Dans ce but, en tenant compte des défauts coniques au voisinage des deux singularités situés aux points $\vartheta = 0$ et π . La métrique de Fubini-Study (III.17) se réécrit au voisinage de ces deux points comme

$$dS_{\text{FS}}^2 = \frac{Ns}{2} d\vartheta^2 + 2N(N-1)^2 s^3 \vartheta^2 d\hat{\eta}^2. \quad (\text{III.23})$$

6. Est un nombre entier défini dans le théorème de Gauss-Bonnet décrivant l'aspect topologique de la variété des états quantiques résultante.

7. S'appliquant sur les variétés des états quantiques, et qui relie la géométrie (courbure Gaussienne) et la topologie (caractéristique d'Euler) correspondantes dans une formule [110].

De plus, la définition de l'angle solide d'un cône est donnée par $\tilde{\Omega} = 2\pi - 2\pi \cos \vartheta$ qui correspond à un cône de révolution d'angle au sommet 2ϑ . Le deuxième terme à droite dans cette définition est l'angle solide défini par le système autour du sommet du cône au cours de l'évolution. En outre, en admettant que les défauts angulaires soient très proches aux points de singularité $\vartheta = 0$ et π , nous pouvons écrire [42, 130]

$$\Delta = 2 \left(2\pi - \frac{\sqrt{g_{\hat{\eta}\hat{\eta}}}\hat{\eta}_{max}}{\sqrt{g_{\vartheta\vartheta}}\vartheta} \right) = 2(2\pi - 2s\hat{\eta}_{max}(N-1)). \quad (\text{III.24})$$

En substituant ce dernier résultat dans la formule de Gauss-Bonnet (III.22), nous parvenons à la caractéristique d'Euler $\chi = 2$, ce qui signifie que la variété d'états (III.17) du système à N qudits est de topologie sphérique. De plus, cette variété possède une partie concave avec un axe de symétrie en $\vartheta/2$, ce qui montre clairement que la variété de N qudits a *une structure de forme d'haltère*.

3 Phases géométriques acquises par le système à N qudits

3.1 Phase géométrique acquise par l'état fondamental

Nous commençons tout d'abord par calculer la phase géométrique acquise par l'état fondamental (III.8) lors de son évolution sur la sphère d'états associée (III.13). Dans ce but, la connexion de Berry-Simon assurant le transport parallèle sur cette variété d'états est donnée par [85, 103]

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{2i} \left(\frac{\partial \ln K(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*)}{\partial \mathbf{z}} d\mathbf{z} - \frac{\partial \ln K(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*)}{\partial \mathbf{z}^*} d\mathbf{z}^* \right). \quad (\text{III.25})$$

En utilisant l'expression du noyau de Bergmann (III.12) dans l'expression (III.25), nous obtenons l'expression explicite de la connexion de Berry-Simon

$$\mathbf{A} = \frac{Ns}{2} (1 - \cos \vartheta) d\varphi. \quad (\text{III.26})$$

Il s'ensuit que la phase géométrique de Aharonov-Anandan acquise par l'état fondamental au cours d'un processus cyclique \hat{C} s'écrit

$$\Phi_{geo} = \oint_{\hat{C}} \mathbf{A} = 2\pi Ns (1 - \cos \vartheta) = Ns\tilde{\Omega}(\hat{C}), \quad (\text{III.27})$$

où $\tilde{\Omega}(\hat{C})$ est l'angle solide habituel délimité par le chemin fermé \hat{C} sur la sphère S^2 . Ainsi, la phase géométrique acquise par l'état fondamental de N qudits est proportionnelle à l'angle solide sphérique habituel. De plus, elle est invariante pour toute déformation du chemin d'évolution préservant cet angle solide. Également, la phase géométrique n'est pas affectée par la dynamique du système (taux d'évolution) et ceci explique son caractère purement géométrique.

3.2 Phase géométrique acquise par l'état fondamental au cours de son évolution

Après avoir précisé la topologie sphérique de la variété des états quantiques (III.17), nous examinons la phase géométrique apparaissant au cours de deux processus d'évolution arbitraire et cyclique.

Cas d'une évolution arbitraire

Nous commençons par considérer le système à N qudits évoluant arbitrairement. i. e., évolution non-cyclique, sur la variété des états quantiques (III.17). Dans ce cas, la phase géométrique acquise par l'état évolué (III.14) peut s'écrire [53]

$$\Phi_{geo}(t) = \arg\langle\psi_i|\psi(t)\rangle - \text{Im} \int_0^t \langle\psi(t')|\frac{\partial}{\partial t'}|\psi(t')\rangle dt', \quad (\text{III.28})$$

correspondant à la différence entre la phase totale et la phase dynamique. Dans un premier temps nous évaluons la phase totale acquise par le système. Pour cela, l'amplitude de probabilité entre l'état initial (III.8) et l'état évolué (III.14), est donnée par

$$\langle\psi_i|\psi(t)\rangle = (1 + \tan^2 \frac{\vartheta}{2})^{-2Ns} \sum_{m_1, m_2, \dots, m_N = -s}^s e^{-i2\hat{\eta} \sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j} \left(\prod_{\lambda=1}^N (\tan \frac{\vartheta}{2})^{2(s+m_\lambda)} \binom{2s}{s+m_\lambda} \right). \quad (\text{III.29})$$

En insérant la formule (III.29) dans le premier terme à droite de l'équation (III.28), la phase totale prend la forme

$$\Phi_{tot} = -\arctan \left(\frac{\sum_{m_1, m_2, \dots, m_N = -s}^s \sin \left(2\hat{\eta} \sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j \right) \left(\prod_{\lambda=1}^N (\tan \frac{\vartheta}{2})^{2(s+m_\lambda)} \frac{(2s)!}{(s+m_\lambda)!(s-m_\lambda)!} \right)}{\sum_{m_1, m_2, \dots, m_N = -s}^s \cos \left(2\hat{\eta} \sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j \right) \left(\prod_{\lambda=1}^N (\tan \frac{\vartheta}{2})^{2(s+m_\lambda)} \frac{(2s)!}{(s+m_\lambda)!(s-m_\lambda)!} \right)} \right). \quad (\text{III.30})$$

Il est intéressant de remarquer que la phase totale inclut deux parties essentielles : la première partie est de type géométrique, i. e., phase géométrique, qui se manifeste par le fait que la phase totale dépend des paramètres ϑ et $\hat{\eta}$ définissant le chemin d'évolution sur l'espace des états (III.17), tandis que la deuxième partie est de type dynamique, i. e., phase dynamique, qui se comprend par le fait que la phase totale dépend de l'intégrale temporelle de la valeur moyenne du Hamiltonien (III.1) du système. En outre, la phase totale est définie modulo 2π et qu'elle satisfait la condition de périodicité suivante

$$\Phi_{tot}(\hat{\eta} + 2\pi) = \Phi_{tot}(\hat{\eta}). \quad (\text{III.31})$$

Quant à la phase dynamique, elle peut être exprimée explicitement en reportant l'état évolué (III.14) dans le deuxième terme à droite dans l'équation (III.28). En effet, on trouve

$$\Phi_{dyn} = -\hat{\eta} s^2 N(N-1) \cos^2 \vartheta. \quad (\text{III.32})$$

Ainsi, la différence entre les phases totale et dynamique confère la forme explicite de la phase géométrique [42]

$$\Phi_{geo} = -\arctan \left(\frac{\sum_{m_1, m_2, \dots, m_N = -s}^s \sin \left(2\hat{\eta} \sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j \right) \left(\prod_{\lambda=1}^N (\tan \frac{\vartheta}{2})^{2(s+m_\lambda)} \frac{(2s)!}{(s+m_\lambda)!(s-m_\lambda)!} \right)}{\sum_{m_1, m_2, \dots, m_N = -s}^s \cos \left(2\hat{\eta} \sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j \right) \left(\prod_{\lambda=1}^N (\tan \frac{\vartheta}{2})^{2(s+m_\lambda)} \frac{(2s)!}{(s+m_\lambda)!(s-m_\lambda)!} \right)} \right) + \hat{\eta} N(N-1) s^2 \cos^2 \vartheta, \quad (\text{III.33})$$

qui présente une dépendance non linéaire dans le temps contrairement à la phase dynamique qui évolue linéairement. Également, la phase géométrique dépend des paramètres d'évolution ϑ et $\hat{\eta}$, ce

qui signifie qu'elle dépend de la forme du chemin d'évolution du système. Par contre, sa dépendance du nombre de particules (qudits) N et de la valeur du spin s peut être interprétée par le fait que la phase géométrique dépend de la géométrie de l'espace d'évolution (III.17). Par ailleurs, il est possible d'examiner un cas spécial où la phase géométrique émerge d'une évolution temporelle infinitésimale de l'état initial (III.8). À cet égard, en développant le facteur exponentiel (III.29) jusqu'au second ordre en $\hat{\eta}$, nous écrivons

$$\langle \psi_i | \psi(t) \rangle \simeq 1 - \frac{\hat{\eta}^2 s^2 N(N-1)}{4} [s(N-1)(2sN \cos^4 \vartheta + \sin^2 2\vartheta) + \sin^4 \vartheta] - i\hat{\eta} s^2 N(N-1) \cos^2 \vartheta. \quad (\text{III.34})$$

Dans ce cadre, la phase géométrique (III.33) se réécrit comme

$$\Phi_{geo} \simeq -\arctan \left(\frac{4\hat{\eta} s^2 N(N-1) \cos^2 \vartheta}{4 - \hat{\eta}^2 s^2 N(N-1)(s(N-1)(2sN \cos^4 \vartheta + \sin^2 2\vartheta) + \sin^4 \vartheta)} \right) + \hat{\eta} s^2 N(N-1) \cos^2 \vartheta, \quad (\text{III.35})$$

qui s'annule pour $\hat{\eta} = 0$, cela revient au fait que l'état évolué (III.14) coïncide avec l'état initial (I.86). De plus, il est important de voir qu'à la limite thermodynamique ($N \rightarrow \infty$), la phase totale s'annule. Cela signifie qu'en chaque point du chemin d'évolution, la phase géométrique coïncide avec la phase dynamique. Dans ce sens, la phase géométrique peut être mesurée expérimentalement puisqu'elle est donnée en fonction du Hamiltonien (III.1) du système [121]. Le même résultat peut être obtenu pour les particules avec des valeurs de spin plus élevées.

Cas d'une évolution cyclique

Nous discutons maintenant le cas d'une évolution cyclique dans lequel l'état (III.14) satisfait la condition cyclique $|\psi(\tau)\rangle = e^{i\Phi_{tot}} |\psi(0)\rangle$. La phase géométrique, acquise par le système au cours d'une évolution cyclique, est donnée par [46, 118]

$$[\Phi_{geo}]_0^\tau = \int_0^\tau d\Phi_{tot} + i \int_0^\tau \langle \psi(t) | \frac{\partial}{\partial t} | \psi(t) \rangle dt. \quad (\text{III.36})$$

En reportant les équations (III.30) et (III.32) dans (III.36), la phase géométrique cyclique prend la forme

$$[\Phi_{geo}]_0^{\hat{\eta}_{\max}} = \hat{\eta}_{\max} N(N-1) s^2 \cos^2 \vartheta. \quad (\text{III.37})$$

Nous constatons que l'intégrale de la phase totale acquise par le système à N qudits au cours de toute évolution cyclique est nulle ($\Phi_{tot} = 0$). Par conséquent, la phase géométrique coïncide avec l'intégrale cyclique de la valeur moyenne du Hamiltonien (III.1), ce qui nous offre la possibilité de la mesurer expérimentalement.

4 Vitesse d'évolution et problème du brachistochrone quantique

Le problème du brachistochrone quantique concerne essentiellement la détermination du temps minimal nécessaire pour parcourir le chemin le plus court reliant l'état initial (III.8) et l'état évolué (III.14). En d'autres termes, l'objectif principal est de trouver le chemin optimal en maximisant la *vitesse d'évolution* et en minimisant le temps d'évolution. Pour cela, nous commençons d'abord par examiner la vitesse d'évolution quantique.

4.1 Vitesse d'évolution quantique

Comme nous sommes principalement concernés par la dépendance temporelle, nous supposons que les variables angulaires ϑ et φ sont des constantes. Dans ce contexte, la métrique de Fubini-Study (III.17) se réduit à

$$d\mathbf{S}_{\mathbf{FS}}^2 = \frac{1}{2}N(N-1)s^2\sin^2\vartheta(1+(4s(N-1)-1)\cos^2\vartheta)d\hat{\eta}^2, \quad (\text{III.38})$$

qui montre que l'évolution du système à N qudits se produit sur un cercle de rayon $\sqrt{g_{\hat{\eta}\hat{\eta}}}$ pour s demi-entier et $\sqrt{g_{\hat{\eta}\hat{\eta}}}/2$ pour s entier. Il en découle que la vitesse d'évolution du système définie par [25]

$$V_{FS} = \frac{d\mathbf{S}_{\mathbf{FS}}}{dt} = \frac{2}{\hbar}\Delta E, \quad (\text{III.39})$$

où ΔE est l'incertitude énergétique pour le Hamiltonien (III.1). D'après l'équation (III.39), il est évident de voir que si l'incertitude énergétique prend des valeurs importantes, l'évolution est réalisée dans un temps plus court et vice versa. En reportant l'équation (III.38) dans (III.39), la vitesse d'évolution s'écrit explicitement comme

$$V_{FS} = |J|s\sqrt{\frac{N(N-1)\sin^2\vartheta(1+(4s(N-1)-1)\cos^2\vartheta)}{2}}. \quad (\text{III.40})$$

D'après la figure (III.3), la vitesse d'évolution présente un minima local en $\vartheta = \pi/2$ donné par

$$V_{FS\pi/2} = |J|s\sqrt{\frac{N(N-1)}{2}}. \quad (\text{III.41})$$

Comme elle a également deux maxima symétriques égaux qui sont obtenus en utilisant la condition $dV_{FS}/d\vartheta = 0$, qui donne

$$\sin^2\vartheta_{\max} = \frac{s(N-1)}{2s(N-1)-1/2}. \quad (\text{III.42})$$

Il s'ensuit que la vitesse d'évolution maximale correspondante prend la forme

$$V_{FS\max} = |J|s^2(N-1)\sqrt{\frac{2N(N-1)}{4s(N-1)-1}}. \quad (\text{III.43})$$

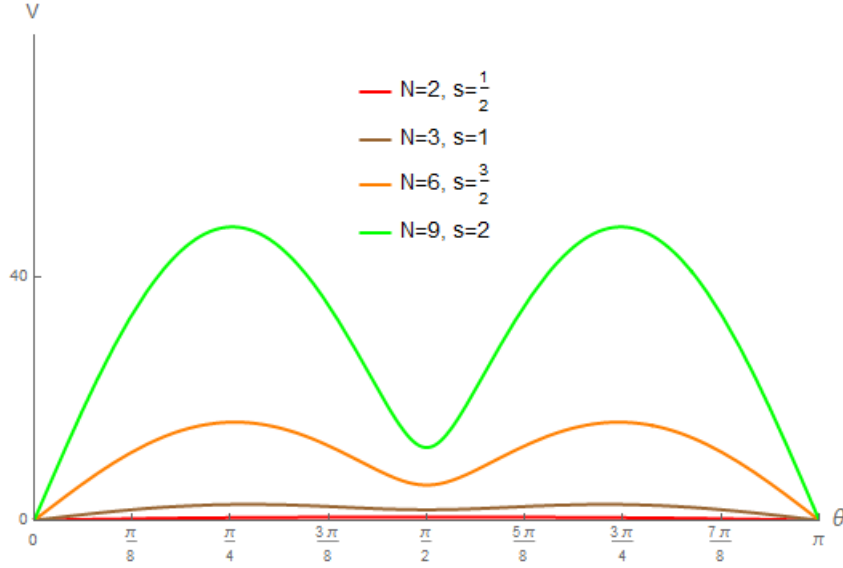


Figure III.3 – Comportement de la vitesse d'évolution V_{FS} en fonction du paramètre ϑ avec $J = 1$.

En partant du fait que la vitesse d'évolution (III.40) et la courbure Gaussienne (III.20) dépendent du même paramètre ϑ , nous exprimons la courbure Gaussienne K en fonction de la vitesse d'évolution V_{FS} comme suit [130]

$$K = \frac{4}{Ns} \left[2 - \frac{2 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{V_{FS}}{V_{FS\max}}\right)^2}}{2(N-1)s \left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{V_{FS}}{V_{FS\max}}\right)^2}\right)^2} \right]. \quad (\text{III.44})$$

Cela signifie que la courbure Gaussienne de la variété du système à N qudits peut être mesurée expérimentalement car la vitesse d'évolution est définie par l'incertitude énergétique (III.39)[50, 132].

4.2 Résolution du problème du brachistochrone quantique

Après avoir déterminé la valeur maximale de la vitesse d'évolution, nous devons également évaluer la *distance géodésique* entre l'état initial (III.8) et l'état évolué (III.14). Pour cela, l'équation (III.39) donne

$$\mathbf{S}_{\mathbf{FS}} = \hat{\eta}s \sqrt{\frac{N(N-1)\sin^2\vartheta (1 + (4s(N-1) - 1)\cos^2\vartheta)}{2}}. \quad (\text{III.45})$$

Étant donné que la vitesse d'évolution (III.40) est indépendante du temps, la distance géodésique (III.45) évolue linéairement avec le temps t . Ensuite, la distance géodésique (III.45) a un minimum local de la forme

$$\mathbf{S}_{\mathbf{FS}\min} = \eta s \sqrt{\frac{N(N-1)}{2}}. \quad (\text{III.46})$$

III.5 Aspects géométriques et dynamiques de l'intrication pour un système à deux qubits

Ainsi, le temps optimal nécessaire pour réaliser l'évolution temporelle optimale du système à N qudits, est donné par [30]

$$\tau_{\text{op}} = \frac{\mathbf{S}_{\text{FSmin}}}{V_{\text{max}}} = \frac{\hat{\eta}}{2Js(N-1)} \sqrt{(4s(N-1)-1)}. \quad (\text{III.47})$$

Cette condition correspond à l'évolution temporelle optimale du système à N qudits se produisant sur le cercle d'états (III.38). D'ailleurs, l'état quantique qui réalise cette évolution optimale peut être généré par la transformation unitaire suivante

$$|\psi_i\rangle \rightarrow |\psi(\tau_{\text{op}}, \vartheta = \pi/2)\rangle = e^{-iH\tau_{\text{op}}} |\psi_i(\vartheta = \pi/2)\rangle. \quad (\text{III.48})$$

Par ailleurs, l'équation (III.47) peut également être ré-exprimée comme suit

$$\tau_{\text{op}} = \frac{1}{2s(N-1)} \sqrt{(4s(N-1)-1)t}. \quad (\text{III.49})$$

Ce résultat montre que le temps optimal τ_{op} est proportionnel à l'évolution du temps t . Plus précisément, une augmentation du temps d'évolution ordinaire entraîne une augmentation du temps d'évolution optimal et vice versa. Dans le cas de deux qubits, i. e., $N = 2$ et $s = 1/2$, le temps optimal coïncide avec le temps ordinaire $\tau_{\text{op}} = t$. Par contre, pour $N \geq 2$ et $s > 1/2$, le temps optimal est strictement inférieur au temps ordinaire ($\tau_{\text{op}} < t$). Il est intéressant de noter qu'à la limite thermodynamique ($N \rightarrow \infty$), le temps d'évolution optimal tend vers zéro ($\tau_{\text{op}} \rightarrow 0$). À cet égard, la variété d'états, i. e., le cercle d'états défini par le tenseur métrique (III.38), prend la forme d'une ligne droite puisque le rayon du cercle d'état devient infini. Les mêmes résultats peuvent être obtenus pour les grandes valeurs de spin s [130].

5 Aspects géométriques et dynamiques de l'intrication pour un système à deux qubits

Une implication directe du principe de superposition dans la théorie quantique est le concept d'*intrication quantique* qui a été introduit pour la première fois par E. Schrödinger dans son papier fondateur [133]. Ce concept a inclut également la notion des *corrélations quantiques* qui peuvent être conceptualisées comme des connexions virtuelles non locales partagées entre deux (ou plusieurs) sous-systèmes quantiques dont les états dépendent l'un de l'autre quelle que soit la distance qui les sépare [127]. Aujourd'hui, l'intrication joue un rôle central dans les développements récents de l'information quantique [39, 127, 130]. Sur le plan pratique, le défi majeur est de créer, stocker et traiter l'intrication multi-partite de manière contrôlée. Cela a créé un immense intérêt pour comprendre les propriétés des états quantiques intriqués et la dynamique de l'intrication dans un scénario multi-particule [128, 129]. D'ailleurs, l'intrication des systèmes quantiques a été largement étudiée d'un point de vue géométrique [39, 42, 43]. En effet, la correspondance entre la notion d'intrication et la géométrie de l'espace des états quantiques a été démontré dans le cadre de la fibration de Hopf [40, 134]. Par ailleurs, l'intrication entre les qubits peut être considérée comme un outil mathématique utile pour la réduction de la variété des états quantiques [42, 43]. Également, la relation entre l'intrication et la courbure scalaire de la variété d'états correspondante a été récemment établie [39, 42]. Pour d'autres études sur les propriétés géométriques de l'intrication, nous pouvons trouver plus de détails dans les références [50, 62, 64, 91].

III.5 Aspects géométriques et dynamiques de l'intrication pour un système à deux qubits

Dans ce qui va suivre, nous nous restreignons à un système de deux qubits, i. e., système à deux spins $-1/2$. Nous quantifions le degré d'intrication en utilisant la concurrence de Wootters [41]. Nous étudions aussi l'effet de l'intrication sur les différents aspects géométriques et dynamiques définis sur la variété d'états de deux qubits.

5.1 Effet de l'intrication sur la géométrie de l'espace des états

Le système considéré est composé de deux qubits, i. e., deux spins $-1/2$ couplés via l'interaction d'Ising. Ainsi, l'état initial (III.8) s'écrit

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{(1 + \mathbf{z}\mathbf{z}^*)} (| -1/2, -1/2\rangle + \mathbf{z} (| -1/2, 1/2\rangle + |1/2, -1/2\rangle) + \mathbf{z}^2 |1/2, 1/2\rangle), \quad (\text{III.50})$$

Il s'ensuit que l'état évolué (III.14) devient

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{(1 + \mathbf{z}\mathbf{z}^*)} \left(e^{-\frac{i\hat{\eta}}{2}} | -1/2, -1/2\rangle + \mathbf{z} e^{\frac{i\hat{\eta}}{2}} (| -1/2, 1/2\rangle + |1/2, -1/2\rangle) + \mathbf{z}^2 e^{-\frac{i\hat{\eta}}{2}} |1/2, 1/2\rangle \right). \quad (\text{III.51})$$

Dans ce cas, la métrique de Fubini-Study (III.17) se réduit à

$$d\mathbf{S}_{\text{FS}}^2 = \frac{1}{2} d\vartheta^2 + \frac{1}{4} \sin^2\vartheta (1 + \cos^2\vartheta) d\hat{\eta}^2. \quad (\text{III.52})$$

Le degré d'intrication entre les deux qubits dans l'état évolué (III.51) est quantifié par la concurrence de Wootters [41]. Il est donné par

$$\mathcal{C} = \sin^2\vartheta |\sin \hat{\eta}|. \quad (\text{III.53})$$

Il est clair que l'intrication entre les deux qubits est affectée par la dynamique du système. En conséquence, chaque point sur la variété d'états (III.52) correspond à un degré particulier d'intrication prédéfini par les paramètres du système (ϑ et $\hat{\eta}$). De plus, la concurrence oscille périodiquement par rapport à ces deux paramètres avec la même période π . En limitant $\hat{\eta}$ à varier dans l'intervalle $[0, \pi]$, la concurrence (III.53) se réécrit simplement

$$\mathcal{C} = \sin^2\vartheta \sin \hat{\eta}. \quad (\text{III.54})$$

En exploitant les équations (III.54) et (III.52), la métrique de Fubini-Study peut être exprimée en termes de la concurrence réduite [42]

$$d\mathbf{S}_{\text{FS}}^2 = \frac{1}{8\mathcal{C}'(1 - \mathcal{C}')} d\mathcal{C}'^2 + \frac{1}{4} \mathcal{C}' (2 - \mathcal{C}') d\hat{\eta}^2, \quad (\text{III.55})$$

où $\mathcal{C}' = \mathcal{C}/\sin \eta$ est la concurrence réduite. Cela permet de paramétrer la variété des états quantiques en termes du degré d'intrication et du temps d'évolution. En partant de la métrique du tenseur (III.55), nous voyons que pour toute valeur donnée de la concurrence réduite \mathcal{C}' , l'évolution du système à deux qubits se produit sur une variété unidimensionnelle définie par

$$d\mathbf{S}_{\text{FS}}^2 = \frac{1}{4} \mathcal{C}' (2 - \mathcal{C}') d\hat{\eta}^2. \quad (\text{III.56})$$

Nous déduisons que les courbes de même intrication réduite ($\mathcal{C}' = \text{cte}$) sont des cercles de rayon $R = \sqrt{\mathcal{C}'(2 - \mathcal{C}')}/4$. En outre, les zones de même intrication ($\mathcal{C} = \text{cte}$) sont des points sur une

III.5 Aspects géométriques et dynamiques de l'intrication pour un système à deux qubits

variété unidimensionnelle donnée par $d\mathbf{S}_{\mathbf{FS}}^2 = \hat{\chi}(\mathcal{C}, \hat{\eta})d\hat{\eta}^2$ avec $\hat{\chi}(\mathcal{C}, \hat{\eta})$ est une fonction de \mathcal{C} et $\hat{\eta}$. Cela montre clairement l'importance de l'intrication dans la réduction de l'espace des états (III.55). En d'autre part, en reportant le degré d'intrication (III.54) dans l'équation (III.20), nous exprimons la courbure Gaussienne en termes de l'intrication

$$K = 4 \left(2 - \frac{\sin \hat{\eta} (3 \sin \hat{\eta} - \mathcal{C})}{(2 \sin \hat{\eta} - \mathcal{C})^2} \right). \quad (\text{III.57})$$

Nous constatons que la courbure Gaussienne diminue lorsque la concurrence augmente. En d'autres termes, nous remarquons que pour $\mathcal{C} = 0$ (les états séparables), la courbure prend la valeur maximale $K_{\max} = 5$, alors que pour $\mathcal{C} = 1$ (les états maximalelement intriqués), elle prend la valeur minimale donnée par

$$K_{\min} = 4 \left(2 - \frac{\sin \hat{\eta} (3 \sin \hat{\eta} - 1)}{(2 \sin \hat{\eta} - 1)^2} \right). \quad (\text{III.58})$$

Ce résultat peut être interprété par le fait que les états séparables sont situés dans les zones de courbure maximale, alors que les états maximalelement intriqués sont situés dans les zones de courbure minimale. Nous concluons que la quantité de corrélations quantiques existant entre les deux qubits affecte la géométrie de la variété des états quantiques (III.55). Nous obtenons une relation intéressante et remarquable entre le degré d'intrication et la courbure de la variété d'états de deux qubits [39, 42].

5.2 Effet de l'intrication sur la phase géométrique

Pour comprendre l'effet de l'intrication sur la phase géométrique, nous devons exprimer l'une en fonction de l'autre. Pour cela, on reporte l'équation (III.54) dans (III.33). On trouve alors

$$\Phi_{geo} = -\arctan \left(\frac{2 \cos^2 \frac{\hat{\eta}}{2}}{(\sin \hat{\eta} - \mathcal{C})} \right) + \frac{\hat{\eta}}{2} \left(1 - \frac{\mathcal{C}}{\sin \hat{\eta}} \right). \quad (\text{III.59})$$

Nous notons que la phase géométrique (III.59) diminue lorsque la concurrence augmente et vice versa, ce qui signifie que l'existence des corrélations quantiques entraîne une diminution de la phase géométrique acquise par le système. Cela peut être justifié par le fait que la géométrie de la variété des états quantiques (III.55) est affectée par le degré d'intrication, i. e., la courbure Gaussienne de la variété d'état est affecté par l'intrication. D'autre part, pour le point critique $\hat{\eta} = \pi$, la phase totale, i. e., le premier terme à droite dans l'équation (III.59), s'annule. Ce qui fait que la phase géométrique coïncide avec la phase dynamique ($\Phi_{geo} = \Phi_{dyn}$). Dans ce cas, la phase géométrique présente un comportement linéaire qui s'explique formellement par le fait que la phase dynamique, i. e., le deuxième terme à droite dans l'équation (III.59), est une fonction linéaire par rapport à la concurrence \mathcal{C} . Ce comportement peut également être observé pour les évolutions cycliques dans lesquelles les phases géométrique et dynamique coïncident.

5.3 Effet de l'intrication sur la dynamique du système

Dans le but de discuter l'effet de l'intrication sur la dynamique du système à deux qubits, nous devons exprimer la vitesse d'évolution en termes de la concurrence. Pour ce faire, en injectant l'équation (III.54) dans (III.40), nous aboutissons à

$$V_{FS} = \frac{J}{2} \sqrt{\frac{\mathcal{C}}{\sin \hat{\eta}} \left(2 - \frac{\mathcal{C}}{\sin \hat{\eta}} \right)}. \quad (\text{III.60})$$

Il s'ensuit que la distance géodésique entre l'état initial séparable (III.50) et l'état intriqué (III.51), est donnée par

$$\mathbf{S}_{\mathbf{FS}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hat{\eta}^2 \mathcal{C}}{\sin \hat{\eta}} \left(2 - \frac{\mathcal{C}}{\sin \hat{\eta}} \right)}. \quad (\text{III.61})$$

Ainsi, nous exprimons la vitesse d'évolution et la distance géodésique en termes de la concurrence. En d'autres termes, nous établissons un lien entre la dynamique du système à deux qubits et la quantité de corrélations quantiques partagée entre eux. D'après l'équation (III.60), nous déduisons que plus les deux qubits sont intriqués, plus la vitesse d'évolution augmente rapidement et vice versa. Le même comportement est obtenu en analysant la distance géodésique (III.61). D'un autre côté, il est également possible de discuter le temps optimal associé à l'évolution du système en relation avec le degré d'intrication. Pour ce faire, nous devons maximiser la vitesse d'évolution (III.60) par rapport à la concurrence \mathcal{C} , i. e., nous résolvons l'équation $dV_{FS}/d\mathcal{C} = 0$ pour tout $\mathcal{C} \in [0, 1]$, la vitesse d'évolution maximale prend la valeur $V_{FS\max} = J/2$, qui ne dépend que de la constante de couplage J entre les deux spins (qubits). Il en résulte que le temps optimal est donné par

$$\tau'_{\text{op}} = \frac{\mathbf{S}_{\mathbf{FS}}}{V_{FS\max}} = \frac{1}{J} \sqrt{\frac{\hat{\eta}^2 \mathcal{C}}{\sin \hat{\eta}} \left(2 - \frac{\mathcal{C}}{\sin \hat{\eta}} \right)}. \quad (\text{III.62})$$

Nous constatons que pour $\mathcal{C} = 0$, le temps optimal s'annule ($\tau'_{\text{op}} = 0$). Cela est dû au fait que l'état évolué (III.51) coïncide avec l'état initial séparable (III.50). De plus, pour la valeur critique $\mathcal{C} = \sin \hat{\eta}$, le temps optimal atteint sa valeur maximale pour laquelle l'évolution optimale se restreint à l'évolution ordinaire ($\tau'_{\text{op}} = t$). De point de vue géométrique, le temps optimal (III.62) peut être écrit en termes de composante temporelle $g_{\hat{\eta}\hat{\eta}}$ de la métrique (III.55) comme $\tau'_{\text{op}} = 2t\sqrt{g_{\hat{\eta}\hat{\eta}}}$. Cela signifie que le temps optimal requis pour que le système atteigne le degré maximal d'intrication dépend de la géométrie de la variété d'états (III.55). En effet, une expansion de la variété d'états (III.55) le long de la composante temporelle $g_{\hat{\eta}\hat{\eta}}$ induit une augmentation du temps optimal et vice versa. En conséquence, nous concluons que le temps optimal de deux qubits, modélisés par deux spins couplés via l'interaction d'Ising, est affecté à la fois par le degré d'intrication et par la géométrie de la variété d'états correspondante [42].

6 Conclusion

Dans le présent chapitre, nous avons adopté une application directe de toutes les structures géométriques et dynamiques définies au premier et au second chapitres pour des systèmes physiques de N qudits modélisés par des systèmes de N particules interagissant via une interaction à longue distance décrite par le modèle d'Ising. Nous avons examiné la dynamique correspondante, déterminé la variété des états quantiques associée et donné la métrique de Fubini-Study spécifiant la géométrie correspondante. Nous avons montré que la dynamique du système se produit sur une variété bidimensionnelle de topologie sphérique. Dans ce contexte, nous avons examiné la phase géométrique acquise par le système sous des évolutions arbitraires et cycliques. De plus, nous avons étudié le problème du brachistochrone quantique concernant la détermination du plus petit temps possible pour réaliser une évolution optimale dans le temps. En restreignant notre étude à un système de deux qubits, une analyse détaillée est effectuée pour la métrique de Fubini-Study, la courbure Gaussienne, la phase géométrique et le temps optimal en relation avec l'intrication de deux qubits.

Chapitre IV

Géométrie associée à l'espace des états de deux qubits intriqués dans les fibrations de Hopf

1 Introduction

La géométrisation de la théorie quantique consiste à remplacer l'espace d'états quantiques usuel, i. e., l'espace de Hilbert, par la variété d'états correspondante [21, 84]. Cette reformulation géométrique offre les outils nécessaires pour la compréhension de certains aspects dans le domaine de l'information quantique [18, 35, 39]. En effet, de nombreux travaux ont été consacrés à la géométrie des variétés des états quantiques, qui simplifient énormément l'exploration des propriétés physiques des systèmes quantiques intégrables [88, 130, 135]. Parmi les plus éminentes de ces propriétés, nous citons, à titre d'exemple, celles liées à la dynamique quantique, l'intrication quantique, calculs quantiques, cryptographie quantique, etc...

De nos jours, une autre méthode de géométrisation de l'espace des états quantiques a été établie, afin d'aborder les caractéristiques physiques des systèmes de qubits, il s'agit de la première, la seconde et la troisième fibrations de Hopf [40, 107, 134, 136]. Elles représentent des applications topologiques permettant de réduire l'espace de Hilbert total à un autre espace de dimension inférieure appelé fibré de Hopf. La première fibration de Hopf concerne l'espace de Hilbert à un qubit S^3 qui le décompose en une base S^2 et une fibre S^1 . La seconde fibration de Hopf traite l'espace de Hilbert à deux qubits S^7 pour le décomposer en une base S^4 et une fibre S^3 . Cette dernière fibration est formulée sur l'espace quaternionique projectif \mathbf{HP}^1 [40]. La troisième fibration de Hopf s'applique à l'espace de Hilbert à trois qubits S^{15} pour le décomposer en une base S^8 et une fibre S^7 mais, cette fois-ci, dans l'espace des octonions \mathbb{O} [137].

Dans ce chapitre, à l'aide de la première et la seconde fibration de Hopf, nous présentons une autre description analytique et géométrique d'un système à deux qubits. Dans ce sens, nous étudions le lien entre les aspects géométriques issus de ces deux fibrations et le degré d'intrication. Finalement, nous examinons les différentes phases quantiques acquises sous les opérations unitaires locales en relation avec l'intrication et la géométrie de la base de Hopf S^4 .

2 Description géométrique d'un qubit

2.1 Première fibration de Hopf

L'état pur général d'un système à un qubit, i. e., système à deux niveaux, peut être représenté dans les états de la base $B = \{|0\rangle, |1\rangle\}$ comme suit

$$|\Psi\rangle = e_1 |0\rangle + e_2 |1\rangle, \quad e_1, e_2 \in \mathbb{C}. \quad (\text{IV.1})$$

D'après la condition de normalisation $|e_1|^2 + |e_2|^2 = 1$, l'espace de Hilbert d'un qubit peut être alors identifié avec l'hypersphère $S^3 \subset \mathbb{R}^4$. La première fibration de Hopf consiste à décomposer cet espace (S^3) en un espace de base S^2 , i. e., sphère de Bloch (IV.1), et une fibre S^1 . Cette fibration est réalisée par l'application suivante [107]

$$\pi_{pf} : S^3 \xrightarrow{S^1} S^2. \quad (\text{IV.2})$$

Ainsi, l'espace total S^3 est doté de la structure d'un espace fibré. En effet, il est construit localement par le produit entre la base et la fibre $S^3 = S^2 \times S^1$ [107]. Étant donné que $S^1 \simeq U(1)$, nous déduisons que l'hypersphère S^3 est localement isomorphe à $S^2 \times U(1)$. Cela signifie que l'espace d'un qubit est la fibration d'une phase totale sur la sphère de Bloch S^2 . En d'autres termes, l'ensemble d'états $e^{i\Phi_{tot}} |\Psi\rangle$ ($\Phi_{tot} \in [0, 2\pi]$) est transformé en un point sur la sphère $S^2 \simeq \mathbb{C}P$. Pour discuter la réalisation analytique de cette fibration, nous rappelons d'abord sa structure algébrique. En effet, la base S^2 peut être représentée par l'espace quotient suivant [138]

$$S^2 \simeq SO(3)/SO(2). \quad (\text{IV.3})$$

En utilisant le fait que $SO(3) \simeq SU(2)$, alors les générateurs du groupe $SO(3)$ sont obtenus par la relation de commutation suivante

$$\tilde{\Sigma}_{ab} = -\frac{i}{4} [\sigma_a, \sigma_b] = \frac{1}{2} \epsilon_{abc} \sigma_c \quad a, b, c = 1, 2, 3 \quad (\text{IV.4})$$

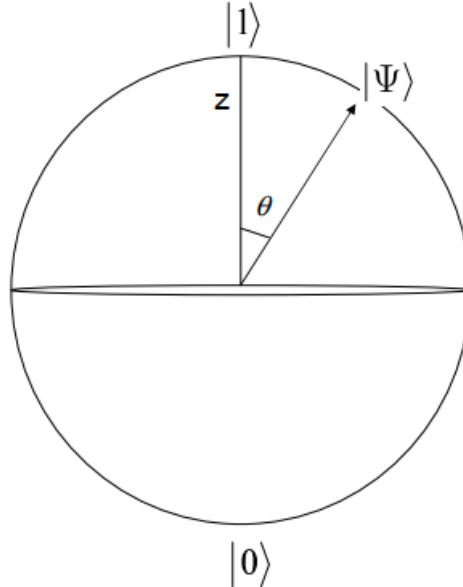


Figure IV.1 – Représentation sur la sphère de Bloch d'un système à un qubit (IV.1).

où les matrices de Pauli σ_a satisfont également l'algèbre de Clifford donnée par la relation d'anti-commutation $\{\sigma_a, \sigma_b\} = 2\delta_{ab}$. Explicitement, les matrices de Pauli σ_a sont données par

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.5})$$

La première fibration de Hopf appliquée à l'espace de Hilbert d'un qubit S^3 peut être réalisée en introduisant un spineur normalisé $SO(3)$ de la forme

$$\Phi_s = \begin{pmatrix} \Phi_{s1} \\ \Phi_{s2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.6})$$

qui s'identifie par un élément de \mathbb{C}^2 paramétrant l'état du qubit (IV.1) sur S^3 . Ce spineur vérifie la contrainte de normalisation $\Phi_s^\dagger \Phi_s = 1$. La fibration de l'espace d'un qubit S^3 sur la sphère de Bloch S^2 (IV.2), i. e., la base, est réalisée par [107]

$$\pi_{pf} : \Phi_s \longrightarrow \mathbf{x}_a = \Phi_s^\dagger \sigma_a \Phi_s = \langle \Psi | \sigma_a | \Psi \rangle. \quad (\text{IV.7})$$

Ainsi, les matrices de Pauli fournissent un moyen facile pour réaliser la première fibration de Hopf. En fait, il s'agit d'une carte topologique définissant une transformation bijective du spineur $SO(3)$, représentant un point dans l'espace de Hilbert d'un qubit S^3 , dans les coordonnées cartésiennes \mathbf{x}_a , spécifiant le point correspondant dans la base S^2 . Elles sont données par

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= 2\text{Re}(\Phi_{s1}^* \Phi_{s2}), \\ \mathbf{x}_2 &= 2\text{Im}(\Phi_{s1}^* \Phi_{s2}), \\ \mathbf{x}_3 &= |\Phi_{s1}|^2 - |\Phi_{s2}|^2. \end{aligned} \quad (\text{IV.8})$$

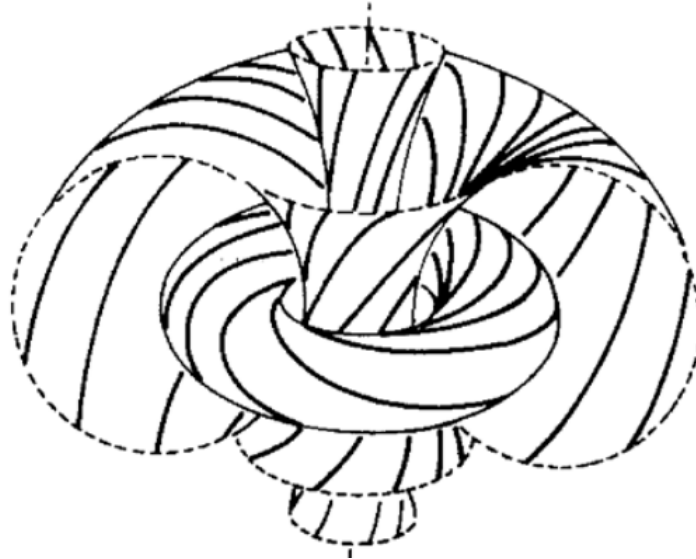


Figure IV.2 – Fibration de Hopf de l'espace total S^3 après une projection stéréographique sur \mathbb{R}^3 [139].

L'invariance de jauge $U(1)$ de la fibration de Hopf (IV.7) assure que la base de Hopf S^2 coïncide avec l'espace complexe projectif $\mathbb{C}P$. Par ailleurs, la normalisation du spineur $SO(3)$ assure la condition de normalisation vérifiée par les coordonnées cartésiennes \mathbf{x}_a

$$\sum_{a=1}^3 \mathbf{x}_a \mathbf{x}_a = (\Phi_s^+ \Phi_s)^2 = 1. \quad (\text{IV.9})$$

Une solution explicite de la première fibration de Hopf, hormis le pôle sud ($x_3 = -1$), est le spineur $SO(3)$ donné en relation avec les coordonnées x_a sous la forme analytique suivante [107]

$$\Phi_s = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \mathbf{x}_3)}} \begin{pmatrix} 1 + \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_1 + i\mathbf{x}_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.10})$$

2.2 Connexion de Berry-Simon

Après avoir réalisé la première fibration de Hopf, nous discutons maintenant le champ de jauge abélien $SO(2) \simeq U(1)$ émergeant de la connexion sur la base de Hopf S^2 , qui assure le transport parallèle du spineur $SO(3)$ sur l'espace total S^3 . En effet, il existe une connexion géométrique naturelle exprimée localement par la connexion de Berry-Simon, il s'agit d'une-forme différentielle $\mathcal{A} = \mathcal{A}_a d\mathbf{x}^a$ dont les composantes sont [40, 107]

$$\mathcal{A}_a = -i\langle \Psi | \partial_a \Psi \rangle, \quad \partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_a}, \quad a = 1, 2, 3. \quad (\text{IV.11})$$

La connexion de Berry-Simon peut être également exprimée en termes du spineur $SO(3)$

$$\mathcal{A} = -i\Phi_s^+ d\Phi_s, \quad (\text{IV.12})$$

dont les composantes sont

$$\mathcal{A}_1 = -\frac{\mathbf{x}_2}{2(1 + \mathbf{x}_3)}, \quad \mathcal{A}_2 = \frac{\mathbf{x}_1}{2(1 + \mathbf{x}_3)}, \quad \mathcal{A}_3 = 0, \quad (\text{IV.13})$$

de sorte que la connexion de Berry-Simon définie sur la base de Hopf S^2 soit de la forme

$$\mathcal{A} = \frac{\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_1}{2(1 + \mathbf{x}_3)}. \quad (\text{IV.14})$$

Cette connexion est fondamentale pour le calcul de la phase géométrique de Aharonov-Anandan sur l'espace de Hilbert projectif $\mathbb{C}P$ [46, 118]. Il en découle que le champ de jauge associé à la connexion de Berry-Simon s'exprime par [107, 110]

$$F_{ab} = \partial_a \mathcal{A}_b - \partial_b \mathcal{A}_a = \frac{1}{2} \epsilon_{abc} \mathbf{x}_c, \quad (\text{IV.15})$$

qui correspond à la force du champ du monopôle de Dirac à charge minimale, i. e., le premier nombre de Chern $C_1 = 1$ [140, 141].

2.3 Métrique de Fubini-Study, phase de Aharonov-Anandan et la forme de Kähler

Pour examiner les structures géométriques émergeant de la première fibration de Hopf, nous préparons l'état de spin d'une particule sous la forme suivante

$$|\Psi_i\rangle = \sin \frac{\tilde{\vartheta}}{2} e^{i\tilde{\varphi}} |+\rangle + \cos \frac{\tilde{\vartheta}}{2} |-\rangle, \quad (\text{IV.16})$$

où $\tilde{\vartheta}$ et $\tilde{\varphi}$ sont deux paramètres physiques du système. Ce dernier est soumis à un champ magnétique extérieur dirigé suivant l'axe z , sa dynamique est régie par le Hamiltonien $\hat{H} = \hbar\tilde{\omega}\sigma_3/2$ décrivant l'interaction entre le spin-1/2 de la particule et le champ magnétique appliqué. L'état du système à tout moment t ultérieur s'écrit

$$|\Psi(t)\rangle = \sin \frac{\tilde{\vartheta}}{2} e^{i(\tilde{\varphi} - \tilde{\omega}t)} |+\rangle + \cos \frac{\tilde{\vartheta}}{2} e^{i\frac{\tilde{\omega}t}{2}} |-\rangle, \quad (\text{IV.17})$$

où $\tilde{\omega}$ est la fréquence du champ appliqué et les états $|\pm\rangle$ sont les états propres habituels de l'opérateur Pauli σ_3 . Les états du système peuvent être identifiés avec la sphère S^3 qui s'exprime localement $S^3 \simeq \mathbb{C}P \times S^1$. À cet égard, l'état de la particule (IV.17) est donné en coordonnées locales sous la forme d'un état cohérent $SU(2)$ [103, 85]

$$|\hat{\xi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathbf{Z}\mathbf{Z}^*}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}P, \quad (\text{IV.18})$$

où la coordonnée complexe \mathbf{Z} est explicitement donnée par

$$\mathbf{Z} = e^{i(\tilde{\varphi} - \tilde{\omega}t)} \tan \frac{\tilde{\vartheta}}{2}. \quad (\text{IV.19})$$

En utilisant l'expression du tenseur métrique (I.44), la métrique de Fubini-Study correspondante s'écrit

$$dS_{FS}^2 = d\tilde{\vartheta}^2 + \sin^2 \tilde{\vartheta} d\hat{\chi}^2, \quad (\text{IV.20})$$

où $\hat{\chi} = \tilde{\varphi} - \tilde{\omega}t$. L'évolution du système se produit sur la sphère de Bloch $S^2 \simeq \mathbb{C}P \subset \mathbb{R}^3$, dont les angles polaire et azimutal sont respectivement $\tilde{\vartheta}$ et $\hat{\chi}$. Elle coïncide effectivement avec la base spatiale produite par la première fibration de Hopf (IV.2). La solution de cette fibration est donnée par les coordonnées cartésiennes suivantes

$$\mathbf{x}_1 = \sin \tilde{\vartheta} \cos \hat{\chi}, \quad \mathbf{x}_2 = -\sin \tilde{\vartheta} \sin \hat{\chi}, \quad \mathbf{x}_3 = -\cos \tilde{\vartheta}. \quad (\text{IV.21})$$

Dans cette paramétrisation, la connexion de Berry-Simon (IV.14) s'écrit

$$\mathcal{A} = -\cos^2 \frac{\tilde{\vartheta}}{2} d\hat{\chi} = -\frac{1}{2}(1 + \cos \tilde{\vartheta}) d\hat{\chi}, \quad (\text{IV.22})$$

et constitue une structure géométrique supplémentaire définie sur la base S^2 étroitement liée à d'autres objets géométriques tels que la phase géométrique de Aharonov-Anandan associée à toute évolution cyclique \hat{C} du système [46, 118]. Elle est donnée à l'aide du théorème de Stokes par [110]

$$[\Phi_{geo}]_0^{2\pi} = \oint_{\hat{C}} \mathcal{A}_a dx^a = \int_S F_{ab} d\mathbf{S}_{ab}, \quad (\text{IV.23})$$

IV.3 Représentation spinorielle des états à deux qubits et géométrisation de l'intrication

où dS_{ab} est l'élément de surface, et F_{ab} le champ de Berry associé à la connexion de Berry-Simon. Il en résulte que la phase géométrique de Aharonov-Anandan acquise par la particule (IV.17) se met de la forme

$$[\Phi_{geo}]_0^{2\pi} = \frac{\Omega(\hat{C})}{2} + \pi \cos \tilde{\vartheta}, \quad (\text{IV.24})$$

où $\Omega(\hat{C}) = 2\pi(1 - \cos \tilde{\vartheta})$ est l'angle solide sous-tendu par la courbe fermée \hat{C} par rapport au centre de la sphère S^2 . Dans ce schéma, la phase géométrique de Aharonov-Anandan peut être interprétée comme le flux du potentiel de jauge (IV.22) passant par la courbe fermée \hat{C} transportée par l'état de la particule (IV.17) sur la base S^2 . Un autre ingrédient géométrique lié à la connexion de Berry-Simon est la forme Kähler qui décrit la structure symplectique sur la base de Hopf S^2 . Elle est donnée par [85, 103]

$$\omega = \frac{1}{2}d\mathcal{A} = \frac{1}{4} \sin \tilde{\vartheta} d\tilde{\vartheta} \wedge d\hat{\chi}, \quad (\text{IV.25})$$

étant reconnue comme la forme volumique de la sphère S^2 . Cette structure inhérente indique que la dynamique quantique associée au système de spin $-1/2$ englobe sa dynamique classique comme limite. En effet, la base de Hopf S^2 est isomorphe à l'espace quotient $SU(2)/U(1)$ qui est déjà défini comme une variété bidimensionnelle symplectique [12, 85, 100]. D'ailleurs, le théorème de Darboux (I.46) stipule qu'au voisinage de chaque point de cette variété symplectique, on définit un espace Euclidien \mathbb{R}^2 correspondant à l'espace de phase classique, i. e., doté d'une structure de Poisson, de telle sorte que la base de Hopf $S^2 \simeq SU(2)/U(1)$ soit l'espace de phase quantique correspondant.

3 Représentation spinorielle des états à deux qubits et géométrisation de l'intrication

3.1 Seconde fibration de Hopf

L'état pur arbitraire d'un système à deux qubits s'écrit généralement comme suit

$$|\Psi\rangle = e_{00}|00\rangle + e_{01}|01\rangle + e_{10}|10\rangle + e_{11}|11\rangle, \quad e_{00}, e_{01}, e_{10}, e_{11} \in \mathbb{C}. \quad (\text{IV.26})$$

D'après la condition de normalisation $|e_{00}|^2 + |e_{01}|^2 + |e_{10}|^2 + |e_{11}|^2 = 1$, l'espace de Hilbert de ces deux qubits s'identifie à une hypersphère $S^7 \subset \mathbb{R}^8$. La seconde fibration de Hopf consiste à décomposer l'espace de Hilbert total S^7 en une sphère S^4 (la base), et une sphère S^3 (la fibre). Cette fibration est réalisée selon l'application suivante [107]

$$\pi_{df} : S^7 \xrightarrow{S^3} S^4. \quad (\text{IV.27})$$

Dans ce schéma, l'espace total S^7 est alors doté de la structure d'un espace fibré, il est construit localement par le produit entre la base et la fibre $S^7 = S^4 \times S^3$. Autrement dit, la seconde fibration de Hopf associe à chaque point de la base S^4 une fibre S^3 , i. e., une sorte de compactification de l'espace total S^7 . Pour examiner la réalisation de la seconde fibration de Hopf, nous rappelons à priori sa structure algébrique. En effet, la base S^4 peut être représentée par l'espace quotient suivant [138]

$$S^4 \simeq SO(5)/SO(4). \quad (\text{IV.28})$$

Les générateurs du groupe $SO(5)$ sont donnés par

$$\Sigma_{\mu\nu} = -\frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \quad \mu, \nu = 1, 2, \dots, 5 \quad (\text{IV.29})$$

IV.3 Représentation spinorielle des états à deux qubits et géométrisation de l'intrication

en termes des générateurs de Clifford γ_μ agissant sur un espace de représentation quadri-dimensionnel et satisfaisant la relation d'anti-commutation suivante

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}. \quad (\text{IV.30})$$

Une représentation explicite des matrices gamma du groupe $SO(5)$, est donnée par

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_1 \\ -i\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_3 &= \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_3 \\ -i\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{IV.31})$$

en termes des matrices de Pauli usuelles. La seconde fibration de Hopf peut être introduite à travers la représentation spinorielle du groupe $SO(5)$ suivante

$$\Psi_s = (\Psi_{s1}, \psi_{s2}, \Psi_{s3}, \Psi_{s4})^T, \quad (\text{IV.32})$$

obéissant à la condition de normalisation $Tr(\Psi_s \Psi_s^\dagger) = \Psi_s^\dagger \Psi_s = 1$. La fibration de l'espace de Hilbert de deux qubits S^7 est réalisée par [40, 107]

$$\Psi_s \longrightarrow \mathbf{x}_\mu = \Psi_s^\dagger \gamma_\mu \Psi_s. \quad (\text{IV.33})$$

Par conséquent, la seconde fibration de Hopf est une transformation du spineur $SO(5)$ spécifiant un point dans S^7 dans les coordonnées cartésiennes \mathbf{x}_μ définissant le point correspondant dans la base de Hopf S^4 . Explicitement, les coordonnées cartésiennes \mathbf{x}_μ paramétrant tout point sur $S^4 \subset \mathbb{R}^5$ sont données par

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= 2\text{Im}(\Psi_{s1}\Psi_{s4}^* - \Psi_{s2}^*\Psi_{s3}), \\ \mathbf{x}_2 &= 2\text{Re}(\Psi_{s1}\Psi_{s4}^* - \Psi_{s2}^*\Psi_{s3}), \\ \mathbf{x}_3 &= 2\text{Im}(\Psi_{s1}\Psi_{s3}^* + \Psi_{s2}^*\Psi_{s4}), \\ \mathbf{x}_4 &= 2\text{Re}(\Psi_{s1}\Psi_{s3}^* + \Psi_{s2}^*\Psi_{s4}), \\ \mathbf{x}_5 &= |\Psi_{s1}|^2 + |\Psi_{s2}|^2 - |\Psi_{s3}|^2 - |\Psi_{s4}|^2. \end{aligned} \quad (\text{IV.34})$$

La normalisation du spineur $SO(5)$ entraîne la condition de normalisation vérifiée par les coordonnées \mathbf{x}_μ

$$\sum_{\mu=1}^5 \mathbf{x}_\mu \mathbf{x}_\mu = (\Psi_s^\dagger \gamma_\mu \Psi_s)^2 = 1, \quad (\text{IV.35})$$

ce qui confirme que la base de la seconde fibration de Hopf est l'hypersphère unitaire S^4 . Une solution explicite de la seconde fibration de Hopf, hormis le pôle sud, est donnée analytiquement en termes de coordonnées \mathbf{x}_μ par [107]

$$\Psi_s = \frac{1}{\sqrt{2(1+\mathbf{x}_5)}} \begin{pmatrix} (1+\mathbf{x}_5)\Phi_s \\ (\mathbf{x}_4 - i\sigma_a \mathbf{x}_a)\Phi_s \end{pmatrix}, \quad a = 1, 2, 3 \quad (\text{IV.36})$$

où Φ_s est le spineur $SO(3)$ de la première fibration (IV.6) représentant la fibre S^3 dans la seconde fibration de Hopf. Cela signifie que la première et la seconde fibrations de Hopf sont étroitement

IV.3 Représentation spinorielle des états à deux qubits et géométrisation de l'intrication

liées et présentent *une structure hiérarchique*. Dans ce qui va suivre, par souci de commodité, nous allons adopter le changement de notation suivant $\Psi_{s2} \rightarrow \bar{\Psi}_{s2}$ et $\Psi_{s4} \rightarrow \bar{\Psi}_{s4}$. Dans ce schéma, le spineur $SO(5)$ (IV.36) peut être explicitement écrit

$$\Psi_s = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \bar{\Psi}_{s2} \\ \Psi_{s3} \\ \bar{\Psi}_{s4} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2(1+x_5)}} \begin{pmatrix} (1+x_5)\Phi_{s1} \\ (1+x_5)\Phi_{s2} \\ (\mathbf{x}_4 - i\mathbf{x}_3)\Phi_{s1} - (\mathbf{x}_2 + i\mathbf{x}_1)\Phi_{s2} \\ (\mathbf{x}_2 - i\mathbf{x}_1)\Phi_{s1} + (\mathbf{x}_4 + i\mathbf{x}_3)\Phi_{s2} \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.37})$$

Correspondant à l'état (IV.26), nous introduisons la matrice 2×2 définie par

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} e_{00} & e_{01} \\ e_{10} & e_{11} \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.38})$$

En identifiant les composantes du spineur (IV.37) avec les coefficients complexes de l'état (IV.26), la représentation matricielle de l'état à deux qubits (IV.38) s'écrit

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\sqrt{2(1+x_5)}} \begin{pmatrix} (1+x_5)\Phi_{s1} & (1+x_5)\Phi_{s2} \\ (\mathbf{x}_4 - i\mathbf{x}_3)\Phi_{s1} - (\mathbf{x}_2 + i\mathbf{x}_1)\Phi_{s2} & (\mathbf{x}_2 - i\mathbf{x}_1)\Phi_{s1} + (\mathbf{x}_4 + i\mathbf{x}_3)\Phi_{s2} \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.39})$$

Prenons le cas particulier pour lequel le spineur Φ_s , i. e., le spineur de la première fibration de Hopf, obéit à la contrainte $\mathbf{x}_3 = |\Phi_{s1}|^2 - |\Phi_{s2}|^2 = -1$, la matrice densité réduite associée au premier qubit est donnée par

$$\rho_1 = \mathcal{L}\mathcal{L}^+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+x_5 & \mathbf{x}_4 - i\mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_4 + i\mathbf{x}_3 & 1-x_5 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.40})$$

Il s'agit d'une paramétrisation spécifique de tout système quantique à deux niveaux décrivant la sphère de Bloch usuelle [136].

3.2 Détermination de l'intrication dans la seconde fibration de Hopf

Après avoir déterminé la matrice densité réduite pour le premier qubit dans le cadre de la seconde fibration de Hopf (IV.40), maintenant, nous pouvons facilement évaluer le degré d'intrication entre les deux qubits en calculant *la concurrence de Wootters*¹ donnée par [41]

$$\mathcal{C} = \sqrt{2(1 - \text{Tr}(\rho_1^2))}. \quad (\text{IV.41})$$

Il s'ensuit que l'expression explicite de la concurrence est comme suit

$$\mathcal{C} = \sqrt{\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2} = 2|e_{00}e_{11} - e_{01}e_{10}|, \quad (\text{IV.42})$$

Le degré d'intrication entre les deux qubits est alors exprimé dans le contexte de la seconde fibration de Hopf. D'ailleurs, les deux coordonnées cartésiennes \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 sont directement liées à la concurrence, ce qui montre que l'intrication entre les deux qubits est stockée dans la base de Hopf S^4 . Ainsi, la géométrie de la variété d'états S^4 dépend du degré d'intrication du système. En effet, il est possible de définir tout point sur la base S^4 en termes de la concurrence par l'équation sphérique suivante

$$\mathbf{x}_3^2 + \mathbf{x}_4^2 + \mathbf{x}_5^2 = 1 - \mathcal{C}^2, \quad (\text{IV.43})$$

1. Est un quantificateur des corrélations quantiques pour les systèmes à deux qubits [41].

IV.3 Représentation spinorielle des états à deux qubits et géométrisation de l'intrication

Dans le cas où les deux qubits sont séparables $\mathcal{C} = 0$, nous avons $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = 0$. Cela signifie que la sphère S^4 se réduit à la sphère de Bloch S^2 . Dans le cas où les deux qubits sont maximale-ment intriqués $\mathcal{C} = 1$ correspond à $\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2 = 1$. Cela montre que la sphère S^4 se réduit à un cercle dans le plan $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ qui est l'équateur de la sphère S^3 [40]. Un autre cas intéressant lorsque les qubits sont intriqués, la concurrence \mathcal{C} varie dans l'intervalle $]0, 1[$, la base de Hopf S^4 se réduit à la boule de Bloch B^3 décrite par l'équation (IV.43). Il vient alors que la fibration de la sphère S^7 sur la base S^4 est sensible au degré d'intrication entre les deux qubits.

3.3 Tenseur métrique et l'intrication sur la base de Hopf S^4

Une autre façon de comprendre le rapport entre la géométrie et l'intrication est de calculer le tenseur métrique sur la base de la seconde fibration de Hopf S^4 . Pour ce faire, nous définissons la métrique Euclidienne sur la sphère $S^4 \in \mathbb{R}^5$ en termes de coordonnées cartésiennes \mathbf{x}_μ par

$$dS_E^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 + dx_5^2. \quad (\text{IV.44})$$

D'après l'équation (IV.42), il est possible de reparamétriser l'intrication en utilisant la notation du plan complexe \mathbb{C} . En fait, chaque point de ce plan peut être exprimé par $w = \mathcal{C} e^{i \arg w} = \mathcal{C} e^{in}$ avec $n \in [0, 2\pi]$. Cela conduit à écrire le tenseur métrique $dS_{\mathcal{C}}^2 = dx_1^2 + dx_2^2 = d\mathcal{C}^2 + \mathcal{C}^2 dn^2$. Le reste de la métrique Euclidienne $dS_E^2 - dS_{\mathcal{C}}^2 = dx_3^2 + dx_4^2 + dx_5^2$ décrit une boule unité B^3 paramétrée par les coordonnées sphériques (R_b, θ_b, ϕ_b) avec $R_b^2 = 1 - \mathcal{C}^2 = \mathbf{x}_3^2 + \mathbf{x}_4^2 + \mathbf{x}_5^2$. Dans ce schéma, la métrique sur la boule unité B^3 s'écrit

$$dS_{B^3}^2 = dS_E^2 - dS_{\mathcal{C}}^2 = dR_b^2 + R_b^2 d\Theta^2, \quad (\text{IV.45})$$

où $d\Theta^2 = d\theta_b^2 + \sin^2 \theta_b d\phi_b^2$ représente le tenseur métrique sur la sphère unité $S^2 = \partial B^3$. Il s'ensuit que le tenseur métrique sur S^4 s'écrit en termes de la concurrence comme suit [40]

$$dS_E^2 = dS_{\mathcal{C}}^2 + dS_{B^3}^2 = \frac{d\mathcal{C}^2}{1 - \mathcal{C}^2} + \mathcal{C}^2 dn^2 + (1 - \mathcal{C}^2) d\Theta^2. \quad (\text{IV.46})$$

Il est intéressant de noter que pour les états séparables $\mathcal{C} = 0$, la base S^4 se réduit à la sphère Bloch S^2 . Cela implique que ce type d'états est situé sur la sphère de Bloch ($R_b = 1$). Pour les états maximale-ment intriqués $\mathcal{C} = 1$, le tenseur métrique (IV.46) se réduit à un cercle unité $dS_E^2 = dn^2$. En outre, le rayon de la boule de Bloch s'annule ($R_b = 0$), ce qui signifie que le cercle d'états maximale-ment intriqués est situé au centre de la sphère de Bloch. Pour les états intriqué $0 < \mathcal{C} < 1$, i. e., les états d'intrication intermédiaire, la base S^4 est décrit par le tenseur métrique (IV.46). Il s'agit de la fibration du cercle sur la boule de Bloch, de sorte que le rayon de la boule de Bloch $0 < R_b < 1$, ce qui fait que les états intriqués sont placés entre le centre et le bord de la boule de Bloch B^3 . Les états ayant le même degré d'intrication sont situés dans les mêmes coquilles sphériques concentriques de rayon lié directement à l'intrication (voir la figure (IV.3)). Ce rayon est donné par

$$R_b = \sqrt{1 - \mathcal{C}^2}. \quad (\text{IV.47})$$

Ce résultat montre clairement l'importance de l'intrication pour la réduction de la géométrie associée à la variété des états quantiques.

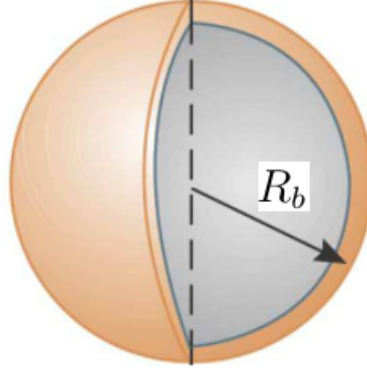


Figure IV.3 – Illustration de la Boule de Bloch B^3 de rayon R_b .

3.4 Champ de jauge non abélien $SO(4)$ et intrication

Nous examinons dans ce qui suit l'effet de l'intrication sur le champ de jauge non abélien $SO(4)$ dans la base de Hopf S^4 . La connexion sur le fibré de Hopf S^7 est donnée par [107]

$$\mathcal{A} = -i\Psi_s^+ d\Psi_s \equiv -i\langle\Psi| d\Psi\rangle. \quad (\text{IV.48})$$

Cette connexion peut être également écrite comme :

$$\mathcal{A} = \Phi_s^+ \mathcal{A}_\mu dx^\mu \Phi_s - i\Phi_s^+ d\Phi_s. \quad (\text{IV.49})$$

La connexion sur le fibré de Hopf S^7 se compose de deux parties : la première est le terme $-i\Phi_s^+ d\Phi_s$ qui correspond à la connexion $U(1)$ définie sur la fibre S^3 que nous avons discutée ci-dessus. La seconde partie, qui nous intéresse dans ce qui va suivre, concerne le terme $\Phi_s^+ \mathcal{A}_\mu dx^\mu \Phi_s$ représentant le champ de jauge non abélien $SO(4)$ résultant de la connexion définie sur la base S^4 . Les composantes \mathcal{A}_μ sont données explicitement par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \frac{-1}{2(1+x_5)} (\mathbf{x}_4\sigma_1 - \mathbf{x}_3\sigma_2 + \mathbf{x}_2\sigma_3), \\ \mathcal{A}_2 &= \frac{-1}{2(1+x_5)} (\mathbf{x}_3\sigma_1 + \mathbf{x}_4\sigma_2 - \mathbf{x}_1\sigma_3), \\ \mathcal{A}_3 &= \frac{-1}{2(1+x_5)} (-\mathbf{x}_2\sigma_1 + \mathbf{x}_1\sigma_2 + \mathbf{x}_4\sigma_3), \\ \mathcal{A}_4 &= \frac{-1}{2(1+x_5)} (-\mathbf{x}_1\sigma_1 - \mathbf{x}_2\sigma_2 - \mathbf{x}_3\sigma_3), \\ \mathcal{A}_5 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.50})$$

Elles constituent le champ de jauge non abélien $SU(2)$ équivalent à l'instanton standard $SU(2)$ de Yang-Mills avec une courbure auto-duale, et un second nombre de Chern $C_2 = 1$ [140, 141]. Il apparaît comme une généralisation directe du champ de jauge $U(1)$ résultant de la première fibration de Hopf. En outre, il est intéressant de noter que la forme différentielle $\mathcal{A}_\mu dx^\mu$ peut être également réécrite comme suit

$$i\mathcal{A}_\mu dx^\mu = \frac{1}{2(1+x_5)} \left(X^+ dX - \sum_{i=1}^4 \mathbf{x}_i d\mathbf{x}_i \right), \quad (\text{IV.51})$$

IV.3 Représentation spinorielle des états à deux qubits et géométrisation de l'intrication

où \mathbf{X} est une matrice 2×2 exprimée en termes de coordonnées cartésiennes (IV.33) sous la forme suivante

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_4 - i\mathbf{x}_3 & -\mathbf{x}_2 - i\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 - i\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_4 + i\mathbf{x}_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.52})$$

Il est possible également d'écrire

$$i\mathcal{A}_\mu dx^\mu = \frac{1}{4(1 + \mathbf{x}_5)} (\mathbf{X}^+ d\mathbf{X} - d\mathbf{X}^+ \mathbf{X}). \quad (\text{IV.53})$$

Ainsi, afin de relier le champ de jauge non abélien $SU(2)$ en termes de la concurrence du système (IV.42), il est utile d'adopter la paramétrisation complexe suivante de la matrice \mathbf{X}

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{J}} & -i\bar{w} \\ iw & \mathbf{J} \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.54})$$

où $w = \mathbf{x}_1 + i\mathbf{x}_2$ et $\mathbf{J} = \mathbf{x}_4 + i\mathbf{x}_3$. Il en découle que la concurrence est liée à ce paramétrage par la formule $4|w|^2 = \mathcal{C}^2$. Il s'ensuit que le champ de jauge non abélien $SU(2)$ défini sur la base S^4 , prend la forme suivante

$$\mathcal{A} = \frac{\text{Im}(\mathbf{J}d\bar{\mathbf{J}} + \bar{w}dw)}{2 \left(1 \pm \sqrt{1 - |w|^2 - |\mathbf{J}|^2} \right)}. \quad (\text{IV.55})$$

avec les signes $+$ et $-$ correspondent respectivement aux pôles nord et sud [40]. Ainsi, le champ de jauge non abélien $SO(4)$ est maintenant établi sur la base de Hopf S^4 . Il est formulé par un mélange de coordonnées complexes w et \mathbf{J} , et il est donc relié au degré d'intrication du système à deux qubits. Par ailleurs, en utilisant le fait que la seconde fibration de Hopf (IV.33) est invariante sous la transformation de jauge $SU(2)$, et le fait que le transport d'un vecteur d'état sur S^4 est uniquement défini par la connexion (IV.55), i. e., les points sur S^4 se différencient les uns des autres par les transformations $SU(2)$. Nous pouvons dire que la différence entre deux points quelconques $p_1, p_2 \in S^4$ coïncide avec l'holonomie non abélienne $SU(2)$ acquise par le spineur $SO(5)$ (IV.36) lors de son transport parallèle entre les images réciproques de ces deux points sur S^7 [142].

Cas de deux qubits séparables

Prenons le cas particulier pour lequel $w = 0$. Cette situation correspond aux états séparables ($\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathcal{C} = 0$) et la base S^4 se réduit à la sous-variété $S^2 \subset S^4$, i. e., sphère de Bloch. Le champ de jauge non abélien $SU(2)$ (IV.55) prend la forme

$$\mathcal{A} = \frac{\text{Im}(\mathbf{J}d\bar{\mathbf{J}})}{2 \left(1 \pm \sqrt{1 - |\mathbf{J}|^2} \right)} = \frac{\mathbf{x}_3 d\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_4 d\mathbf{x}_3}{2(1 + \mathbf{x}_5)}. \quad (\text{IV.56})$$

Il est intéressant de noter que la connexion résultante définie sur la sous-variété d'états séparables S^2 coïncide avec la connexion de Berry-Simon (IV.14) et on obtient exactement le potentiel de jauge $U(1)$ pour une charge magnétique $\mathbf{g} = 1/2$ située au centre de la sous-variété d'états séparables S^2 [103]. En utilisant le paramétrage sphérique usuel

$$\mathbf{x}_3 = \sin \tilde{\Theta} \cos \tilde{\Phi}, \quad \mathbf{x}_4 = \sin \tilde{\Theta} \sin \tilde{\Phi}, \quad \mathbf{x}_5 = \cos \tilde{\Theta}, \quad (\text{IV.57})$$

IV.3 Représentation spinorielle des états à deux qubits et géométrisation de l'intrication

où $\tilde{\Theta}$ et $\tilde{\Phi}$ sont les angles polaires paramétrant la sous-variété S^2 . La connexion de Berry-Simon (IV.56) se réécrit

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \tilde{\Theta} \right) d\tilde{\Phi} = \frac{\tilde{\Omega}(\hat{C})}{4\pi} d\tilde{\Phi}, \quad (\text{IV.58})$$

avec $\tilde{\Omega}(\hat{C}) = 2\pi(1 - \cos \tilde{\Theta})$ est l'angle solide sous-tendu par le chemin fermé \hat{C} par rapport au centre de la sous-variété S^2 . Ainsi, nous constatons que l'holonomie associée à la connexion définie sur la sous-variété des états séparables est abélienne. Cela peut s'expliquer par le fait que les courbes générant l'holonomie non abélienne sont éliminées dans la sous-variété d'états séparables. La relation entre la base (premier qubit) et la fibre (deuxième qubit) peut également être caractérisée par l'émergence d'un facteur d'holonomie $U(1)$ résultant du transport parallèle d'un état séparable donné sur S^2 . En effet, en utilisant le théorème de Stokes (IV.23) dans le cadre de la seconde fibration de Hopf, la phase géométrique de Aharonov-Anandan acquise par les états séparables est donnée par

$$\left[\tilde{\Phi}_{geo} \right]_0^{2\pi} = \oint_{\hat{C}} \mathcal{A}_\mu dx^\mu = \int_S F_{\mu\nu} dS_{\mu\nu} = \frac{\tilde{\Omega}(\hat{C})}{2}. \quad (\text{IV.59})$$

Il en résulte que la phase géométrique de Aharonov-Anandan est égale au flux du champ de Berry traversant la courbe fermée \hat{C} réalisée par l'un des deux qubits sur la sphère d'états séparables S^2 . Elle coïncide avec la moitié de l'angle solide d'un cône de révolution avec un angle au sommet $2\tilde{\Theta}$. Par conséquent, la phase géométrique est invariante pour toute déformation de la trajectoire d'évolution préservant l'angle solide $\tilde{\Omega}(\hat{C})$. En outre, elle n'est pas affectée par la dynamique du système. Le champ de Berry $F_{\mu\nu}$ décrivant la courbure de Berry sur la sous-variété d'états séparables S^2 satisfait le théorème de Chern [110]

$$\oint_{S^2} F_{\mu\nu} dS_{\mu\nu} = 2\pi C_1, \quad (\text{IV.60})$$

où C_1 est le premier nombre de Chern associé à la première fibration de Hopf. Pour le calculer, nous utilisons la correspondance entre les équations (IV.59) et (IV.60). En effet, on obtient

$$C_1 = \frac{\tilde{\Omega}(S^2)}{4\pi} \quad (\text{IV.61})$$

et comme l'angle solide pour la sphère de Bloch $\tilde{\Omega}(S^2) = 4\pi$, on trouve le premier nombre de Chern $C_1 = 1$. Il correspond aux lignes de flux provenant d'une charge magnétique effective située à l'intérieur de la sous-variété d'états séparables S^2 [141].

Cas de deux qubits maximalelement intriqués

Un autre cas spécial intéressant concerne les états maximalelement intriqués $\mathcal{C} = 1$, correspondant à $|w|^2 = \mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2 = 1$, et $\mathbf{x}_3 = 0$ ($|J|^2 = 0$). Cela signifie que la base de Hopf S^4 se réduit à un cercle unité S^1 dans le plan $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, l'équateur de la sphère $S^3 \subset S^4$. Ainsi, en incluant ces considérations dans l'équation (IV.55), la connexion naturelle définie sur la sous-variété des états maximalelement intriqués $S^1 \subset S^4$ prend la forme suivante

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} dn. \quad (\text{IV.62})$$

Les états maximalelement intriqués sont paramétrés par les points de ce cercle. Par ailleurs, l'holonomie résultante du transport parallèle défini par ce type de connexion est également abélienne.

IV.4 Phases quantiques générées par les états intriqués de deux qubits sous les opérations unitaires locales

Ceci est dû au fait que les courbes générées par l'holonomie non abélienne sont éliminées dans la sous-variété S^1 . De plus, le facteur d'holonomie $e^{-i\oint A}$ émergeant du transport parallèle le long de ce cercle est égal à -1 ou 1 , selon le nombre d'enroulements² est respectivement pair ou impair [40].

4 Phases quantiques générées par les états intriqués de deux qubits sous les opérations unitaires locales

Dans ce paragraphe, nous étudions les différentes phases quantiques acquises par l'état de deux qubits (IV.26) sous les opérations unitaires locales $U(2) \times U(2)$. Pour ceci, nous commençons par décomposer cet état sous la forme de la décomposition de Schmidt pour établir le lien entre les phases quantiques dérivées et le degré d'intrication entre ces deux qubits.

4.1 Décomposition de Schmidt de l'état à deux qubits

La décomposition de Schmidt nous offre une base appropriée dans laquelle l'état à deux qubits s'écrit comme la somme de deux termes bi-orthonormés à coefficients réels et positifs [40, 143]. Pour réaliser cette décomposition, nous considérons la représentation matricielle de l'état à deux qubits donnée par l'équation (IV.38). De plus, pour introduire la concurrence correspondante, nous introduisons les paramètres complexes suivants

$$\mathbf{J} = e_{00}^* e_{10} + e_{01}^* e_{11}, \quad w = e_{00} e_{11} - e_{01} e_{10}, \quad \tilde{\zeta} = e_{00}^* e_{01} + e_{10}^* e_{11}. \quad (\text{IV.63})$$

Dans cette paramétrisation, les matrices densité réduites $\rho_{1,2}$ associées au premier et au deuxième qubits sont données par

$$\rho_1 = \mathcal{L}\mathcal{L}^+ = \begin{pmatrix} |e_{00}|^2 + |e_{01}|^2 & \mathbf{J}^* \\ \mathbf{J} & |e_{10}|^2 + |e_{11}|^2 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \mathcal{L}^T \mathcal{L}^* = \begin{pmatrix} |e_{00}|^2 + |e_{10}|^2 & \tilde{\zeta}^* \\ \tilde{\zeta} & |e_{01}|^2 + |e_{11}|^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.64})$$

La condition de normalisation $\langle \Psi | \Psi \rangle = \text{Tr}(\mathcal{L}^+ \mathcal{L}) = 1$, implique que $\text{Tr}(\rho_{1,2}) = 1$. Les matrices densité réduites sont liées à la concurrence par la relation suivante

$$\det \rho_{1,2} = |\det \mathcal{L}|^2 = |w|^2 = \mathcal{C}^2/4. \quad (\text{IV.65})$$

La décomposition de Bloch de ces matrices densité réduites peut être exprimée comme suit [54, 55]

$$\rho_{1,2} = \mathbb{I}/2 + \sqrt{1 - \mathcal{C}^2} \hat{\mathbf{q}}_{1,2} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (\text{IV.66})$$

où $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ est un vecteur dont les composantes sont les matrices de Pauli usuelles et $\hat{\mathbf{q}}_{1,2} = \sqrt{1 - \mathcal{C}^2} \hat{\mathbf{q}}_{1,2} \in \mathbb{R}^2$ est le vecteur de Bloch, i. e., *vecteur pureté*, dont la norme varie dans l'intervalle $[0, 1]$. Nous notons que pour les états maximalement intriqués ($\mathcal{C} = 1$), on trouve $\rho_1 = \rho_2 = \mathbb{I}/2$ et $|\det 2\mathcal{L}| = 1$, cela implique que $2\mathcal{L} \in U(2) \simeq SU(2) \times U(1)$, et la norme du vecteur de Bloch s'annule $\hat{\mathbf{q}}_{1,2}/\hat{\mathbf{q}}_{1,2} = 0$. Cela signifie que ces états maximalement intriqués sont assimilés aux états maximalement mixtes d'un qubit $\rho_{1,2}$ situés au centre de la boule de Bloch.

2. Le nombre d'enroulements pour un chemin fermé autour d'un point donné est un entier désignant le nombre de fois que le chemin se déplace en sens antihoraire autour de ce point [40].

IV.4 Phases quantiques générées par les  tats intriqués de deux qubits sous les opérations unitaires locales

Cela peut s'expliquer par la relation connue entre la trace partielle sur les  tats purs de deux qubits et les  tats mixtes d'un seul qubit [136]. Pour les  tats séparables ($\mathcal{C} = 0$), les deux qubits sont maintenant séparables. Ainsi, la matrice densité du système total $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ vérifie la condition de factorisation $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$, et la norme du vecteur de Bloch $\mathbf{q}_{1,2}/\hat{\mathbf{q}}_{1,2} = 1$. Cela montre que les  tats séparables coïncident avec les  tats purs $\rho_{1,2}$ situés sur le bord de la boule de Bloch ∂B^3 , i. e., sphère de Bloch. Pour les  tats d'intrication intermédiaire $0 < \mathcal{C} < 1$, les deux qubits sont intriqués $\rho \neq \rho_1 \otimes \rho_2$, et la norme du vecteur de Bloch $0 < \mathbf{q}_{1,2}/\hat{\mathbf{q}}_{1,2} < 1$. Par conséquent, les  tats intriqués de deux qubits sont assimilés aux  tats mixtes d'un qubit $\rho_{1,2}$ situé entre le centre et le bord de la boule de Bloch correspondante. D'autre part, en se basant sur l'équation (IV.40) et le fait que $[\mathcal{L}^*, \mathcal{L}^T] = \rho_1^T - \rho_2$, nous déduisons que les matrices densité réduites $\rho_{1,2}$ sont également profondément liées à la seconde fibration de Hopf. En effet, il existe une relation intéressante entre la seconde fibration de Hopf et la décomposition de Schmidt [40, 136]. Cette dernière peut être établie à l'aide des deux valeurs propres communes des matrices densité réduites $\rho_{1,2}$ données par

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \mathcal{C}^2} \right), \quad (\text{IV.67})$$

de sorte que $Tr(\rho_{1,2}) = \lambda_+ + \lambda_- = 1$. De plus, les racines carrées de ces valeurs propres $\sqrt{\lambda_{\pm}}$ représentent les poids de Schmidt. L' tat à deux qubits (IV.26) peut s'écrire dans ce type de décomposition comme

$$|\Psi\rangle = \sqrt{\lambda_+} |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 + \sqrt{\lambda_-} |1\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 \quad (\text{IV.68})$$

avec $\mathbf{B} = \{|i\rangle_{1,2}, i = 0, 1\}$ représente la base d' tats orthogonaux de Schmidt. En utilisant les transformations unitaires locales $U(2) \times U(2)$ agissant indépendamment sur les deux qubits, il est possible de préparer l'état de deux qubits (IV.26)   un instant initial t_i sous la forme de Schmidt suivante [40]

$$\mathcal{L}(t_i) = V_1 D V_2^T, \quad V_1^+ V_1 = V_2^+ V_2 = \mathbb{I}_{2 \times 2}, \quad D = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_+} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_-} \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.69})$$

La concurrence s'écrit dans le cadre de la décomposition de Schmidt comme $\mathcal{C} = 2\sqrt{\lambda_+ \lambda_-}$ et donc invariante sous ces opérations unitaires locales. D'autre part, les matrices unitaires $V_1, V_2 \in U(2)$ ont la possibilité de diagonaliser les matrices densité réduites telles que

$$\rho_1 = V_1 D^2 V_1^+, \quad \rho_2 = V_2 D^2 V_2^+. \quad (\text{IV.70})$$

De cette façon, les colonnes des matrices V_1 et V_2 sont données par les équations aux valeurs propres suivantes

$$\begin{aligned} \rho_1 |u^+\rangle &= \lambda_+ |u^+\rangle, \\ \rho_2 |u^-\rangle &= \lambda_- |u^-\rangle. \end{aligned} \quad (\text{IV.71})$$

Les vecteurs propres de $\rho_{1,2}$ correspondants aux valeurs propres λ_{\pm} sont donnés par

$$\begin{aligned} |u_1^+\rangle &= \cos \frac{\hat{\sigma}_1}{2} e^{-\frac{i\varphi_1}{2}} |0\rangle_1 + \sin \frac{\hat{\sigma}_1}{2} e^{\frac{i\varphi_1}{2}} |1\rangle_1, & |u_2^+\rangle &= \cos \frac{\hat{\tau}_2}{2} e^{-\frac{i\chi_2}{2}} |0\rangle_2 + \sin \frac{\hat{\tau}_2}{2} e^{\frac{i\chi_2}{2}} |1\rangle_2, \\ |u_1^-\rangle &= -\sin \frac{\hat{\sigma}_1}{2} e^{-\frac{i\varphi_1}{2}} |0\rangle_1 + \cos \frac{\hat{\sigma}_1}{2} e^{\frac{i\varphi_1}{2}} |1\rangle_1, & |u_2^-\rangle &= -\sin \frac{\hat{\tau}_2}{2} e^{-\frac{i\chi_2}{2}} |0\rangle_2 + \cos \frac{\hat{\tau}_2}{2} e^{\frac{i\chi_2}{2}} |1\rangle_2, \end{aligned} \quad (\text{IV.72})$$

avec

$$\begin{aligned} \cos \hat{\sigma}_1 &= \pm \sqrt{1 - \frac{4|\mathbf{J}|^2}{4 - \mathcal{C}^2}}, & \sin \hat{\sigma}_1 &= \pm \sqrt{\frac{4|\mathbf{J}|^2}{4 - \mathcal{C}^2}}, & \varphi_1 &= \arg \mathbf{J}, \\ \cos \hat{\tau}_2 &= \pm \sqrt{1 - \frac{4|\tilde{\zeta}|^2}{4 - \mathcal{C}^2}}, & \sin \hat{\tau}_2 &= \pm \sqrt{\frac{4|\tilde{\zeta}|^2}{4 - \mathcal{C}^2}}, & \chi_2 &= \arg \tilde{\zeta}. \end{aligned} \quad (\text{IV.73})$$

IV.4 Phases quantiques générées par les états intriqués de deux qubits sous les opérations unitaires locales

Ainsi, nous établissons *les états de Schmidt* issus de la diagonalisation des matrices densité réduites. Ils sont donnés sous forme des combinaisons linéaires dans la base B de Schmidt en fonction des paramètres de la seconde fibration de Hopf. Les états de Schmidt sont les états séparables les plus proches possibles obtenus en minimisant la distance géodésique entre l'état intriqué (IV.26) et les états séparables (IV.72) [40]. Cela peut être réalisé en maximisant l'expression de la distance $\cos^2 \frac{S_m^n}{2} = |\langle \Psi | u_m^n \rangle|^2$, $m = 1, 2$ et $n = +, -$ par rapport aux paramètres $\hat{\sigma}_1, \hat{\tau}_2, \varphi_1$ et χ_1 spécifiés dans l'équation (IV.73). Étant donné que les deux matrices unitaires V_1 et V_2 diagonalisent les matrices densité réduites $\rho_{1,2}$, alors elles prennent la forme suivante

$$V_1 = \begin{pmatrix} \cos \frac{\hat{\sigma}_1}{2} e^{-i\frac{\varphi_1}{2}} & -\sin \frac{\hat{\sigma}_1}{2} e^{-i\frac{\varphi_1}{2}} \\ \sin \frac{\hat{\sigma}_1}{2} e^{i\frac{\varphi_1}{2}} & \cos \frac{\hat{\sigma}_1}{2} e^{i\frac{\varphi_1}{2}} \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} \cos \frac{\hat{\tau}_2}{2} e^{-i\frac{\chi_2}{2}} & -\sin \frac{\hat{\tau}_2}{2} e^{-i\frac{\chi_2}{2}} \\ \sin \frac{\hat{\tau}_2}{2} e^{i\frac{\chi_2}{2}} & \cos \frac{\hat{\tau}_2}{2} e^{i\frac{\chi_2}{2}} \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.74})$$

dont la possibilité de la décomposition en valeurs singulières³. Ainsi, nous réalisons la décomposition de Schmidt pour le système à deux qubits (IV.26) dans le contexte de la seconde fibration de Hopf.

4.2 Phases géométrique, dynamique et totale sous les opérations unitaires locales

A l'aide de l'expression de l'état de deux qubits dans la décomposition de Schmidt (IV.69), nous nous intéressons à l'évolution des phases quantiques acquises par cet état sous les opérations unitaires locales $U(2) \times U(2)$. Ces opérations sont données par deux autres matrices unitaires $U_1, U_2 \in U(2)$ représentant les transformations effectuées sur chaque qubit séparément. Dans ce schéma, l'état à deux qubits (IV.69) évolue comme suit

$$\mathcal{L}(t) = (U_1(t)V_1) D (U_2(t)V_2)^T, \quad (\text{IV.75})$$

où $t > t_i$. En partant du fait que $U(2) \simeq U(1) \times SU(2)$, il est possible d'écrire $U_m(t) = e^{i\beta_m(t)} \bar{U}_m(t)$ avec $\bar{U}_m \in SU(2)$. Cela montre que nous avons deux quantités invariantes sous ces transformations unitaires locales données par $Tr(\rho_m^{\mathbf{p}}(t))$, $\mathbf{p} = 1, 2$ qui sont indépendantes de l'indice m . La première est pour $\mathbf{p} = 1$ qui correspond à $Tr(\rho_m(t)) = Tr(\mathcal{L}(t)\mathcal{L}^+(t)) = 1$ qui est juste la norme de l'état à deux qubits. La seconde est pour $\mathbf{p} = 2$ qui est intimement liée à la concurrence de Wootters $\mathcal{C} = \sqrt{2(1 - Tr(\rho_m^2(t)))}$ [41], ce qui prouve encore une fois l'invariance de l'intrication sous les opérations unitaires locales. D'un autre côté, nous définissons l'évolution cyclique du système à deux qubits effectuée par ces opérations unitaires locales comme

$$(\bar{U}_1(\boldsymbol{\tau})V_1) D (\bar{U}_2(\boldsymbol{\tau})V_2)^T = e^{i\Delta\Phi(\boldsymbol{\tau})} U D V^T, \quad (\text{IV.76})$$

où l'on fixe $t_i = 0$. En prenant en considération que les deux qubits sont intriqués ($\det(\mathcal{L}) \neq 0$) et en calculant le déterminant de chaque membre de l'équation (IV.76), nous obtenons $e^{2i\Delta\Phi(\boldsymbol{\tau})} = 1$. Il s'ensuit que les phases possibles issues du secteur $SU(2)$ de cette évolution cyclique sont $\Delta\Phi(\boldsymbol{\tau}) = 0, \pi$. Par conséquent, la phase totale générée par ce type d'évolution est comme suit

$$\Phi_{tot}(\boldsymbol{\tau}) = \beta_1(\boldsymbol{\tau}) + \beta_2(\boldsymbol{\tau}) + \Delta\Phi(\boldsymbol{\tau}). \quad (\text{IV.77})$$

Dans le cas d'un système composé de deux qudits avec $d > 2$, les phases possibles émergent du secteur $SU(d)$ de cette évolution cyclique sont fractionnaires et données par pas de $2\pi k/d$ avec

3. Est une méthode importante de factorisation des matrices réelles ou complexes [130].

IV.4 Phases quantiques générées par les états intriqués de deux qubits sous les opérations unitaires locales

$\hat{k} = 0, 1, 2, \dots, d - 1$. Cela nous permet d'écrire les matrices unitaires locales du secteur $SU(d)$ sous la forme $\bar{U}_m(\boldsymbol{\tau}) = e^{i2\pi\hat{k}_m/d}\bar{U}_m(0)$. Ainsi, la phase totale acquise par le système à deux qudits au cours d'une évolution cyclique s'écrit

$$\Phi_{tot}(\boldsymbol{\tau}) = \beta_1(\boldsymbol{\tau}) + \beta_2(\boldsymbol{\tau}) + 2\pi\hat{k}/d \quad (\text{IV.78})$$

avec $\hat{k} = \hat{k}_1 + \hat{k}_2$. Ainsi, nous montrons l'apparition naturelle des phases fractionnaires dans le secteur $SU(d)$ d'une évolution cyclique. Ces phases sont liées topologiquement aux classes d'homotopie⁴ possibles associées aux chemins fermés dans l'espace d'états du système à deux qudits [54, 55].

Cas d'une évolution arbitraire

Nous considérons maintenant le cas où l'état à deux qubits (IV.75) est dans une évolution arbitraire. La phase géométrique (II.92) se réécrit, pour cet état, comme

$$\Phi_{geo}(t) = \arg \left\{ \text{Tr} \left(\mathcal{L}^+(0)\mathcal{L}(t) \right) \right\} - \text{Im} \int_0^t \text{Tr} \left(\mathcal{L}^+(t')\dot{\mathcal{L}}(t') \right) dt', \quad (\text{IV.79})$$

la différence entre les phases totale et dynamique. En reportant l'expression de l'état à deux qubits (IV.75) dans l'équation (IV.79), la phase géométrique s'exprime dans le cadre de la décomposition de Schmidt sous la forme

$$\begin{aligned} \Phi_{geo}(t) = & \arg \left\{ \text{Tr} \left((V_1^+ U_1(t) V_1) D (V_2^+ U_2(t) V_2)^T D \right) \right\} - \text{Im} \int_0^t \text{Tr} \left(U_1^+(t') \dot{U}_1(t') V_1 D^2 V_1^+ \right) dt' - \\ & \text{Im} \int_0^t \text{Tr} \left(U_2^+(t') \dot{U}_2(t') V_2 D^2 V_2^+ \right) dt'. \end{aligned} \quad (\text{IV.80})$$

Pour discuter le lien entre la phase géométrique et l'intrication émergeant de la seconde fibration de Hopf, nous supposons que le système à deux qubits est un système à deux spin $-1/2$. Chacun de ces deux spins est soumis à un champ magnétique externe h_m^z dirigé suivant l'axe z . La dynamique de chaque spin $-1/2$ est alors régie par le Hamiltonien correspondant $H_m = h_m^z \sigma_3 / 2$. Ainsi, l'opération unitaire locale assurant l'évolution de chaque spin (séparément) est donnée par

$$U_m(t) = e^{ih_m^z t \sigma_3 / 2}. \quad (\text{IV.81})$$

Afin d'évaluer la phase géométrique acquise par l'état à deux spins $-1/2$ (IV.75) sous les évolutions effectuées par les opérations unitaires locales (IV.81), il faut d'abord calculer la phase totale acquise par cet état. En effet, en reportant les équations (IV.74) et (IV.81) dans le premier terme à droite de l'équation (IV.80), nous obtenons la phase totale suivante

$$\Phi_{tot} = \arctan \left[\frac{\sqrt{1 - \mathcal{C}^2} (\cos \hat{\sigma}_1 \sin \theta_1(t) \cos \theta_2(t) + \cos \hat{\tau}_2 \sin \theta_2(t) \cos \theta_1(t))}{\cos \theta_1(t) \cos \theta_2(t) - \sin \theta_1(t) \sin \theta_2(t) (\cos \hat{\sigma}_1 \cos \hat{\tau}_2 + \mathcal{C} \sin \hat{\sigma}_1 \sin \hat{\tau}_2)} \right], \quad (\text{IV.82})$$

où $\theta_m(t) = h_m^z t / 2$. Nous remarquons que la phase totale est la combinaison de deux termes : le premier est de nature géométrique, i. e., phase géométrique, qui se manifeste par la dépendance de la phase totale aux paramètres de la seconde fibration de Hopf $\mathcal{C}, \hat{\sigma}_1$ et $\hat{\tau}_2$ spécifiant la géométrie de la variété des états quantiques, i. e., la base de Hopf S^4 . En outre, cette phase dépend des

4. Il constitue un groupe d'homotopie dont les éléments sont les chemins fermés transportés par le système de qudits dans le secteur $SU(d)$, de sorte que chacun entre eux est associé une valeur spécifiée de la phase fractionnaire correspondante [54].

IV.4 Phases quantiques générées par les états intriqués de deux qubits sous les opérations unitaires locales

paramètres d'évolution $\theta_m(t)$ définissant le chemin d'évolution suivi par l'état évolué (IV.75). Le second terme est de nature dynamique, i. e., phase dynamique, qui se justifie par la dépendance temporelle de la phase totale. Son caractère dynamique peut également être décrit par le spectre de l'opérateur d'évolution totale $U(t) = e^{iH_{tot}t}$ avec $H_{tot} = h_1^z \sigma_3 \otimes \mathbb{I}_{2 \times 2} + h_2^z \mathbb{I}_{2 \times 2} \otimes \sigma_3$ correspond au Hamiltonien total gouvernant l'effet de rotation produit par les champs magnétiques externes appliqués h_m^z . Il est intéressant de noter que l'état à deux spins (IV.75) et la phase totale (IV.82) satisfont la condition de périodicité suivante

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\theta_m(t) + 2\pi) &= \mathcal{L}(\theta_m(t)), \\ \Phi_{tot}(\theta_m(t) + 2\pi) &= \Phi_{tot}(\theta_m(t)).\end{aligned}\tag{IV.83}$$

Cela signifie que les paramètres d'évolution $\theta_m(t)$ appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi]$. Nous pouvons également donner explicitement la phase dynamique acquise par le système à deux spins $-1/2$ (IV.75). En effet, en insérant les équations (IV.74) et (IV.81) dans le deuxième et le troisième termes de la partie droite de l'équation (IV.80), on obtient

$$\Phi_{dyn} = \sqrt{1 - \mathcal{C}^2} [\theta_1(t) \cos \hat{\sigma}_1 + \theta_2(t) \cos \hat{\tau}_2].\tag{IV.84}$$

Il en résulte que la phase géométrique prise par l'état d'un système à deux spins au cours d'une évolution arbitraire prend la forme

$$\begin{aligned}\Phi_g &= \arctan \left[\frac{\sqrt{1 - \mathcal{C}^2} (\cos \hat{\sigma}_1 \sin \theta_1(t) \cos \theta_2(t) + \cos \hat{\tau}_2 \sin \theta_2(t) \cos \theta_1(t))}{\cos \theta_1(t) \cos \theta_2(t) - \sin \theta_1(t) \sin \theta_2(t) (\cos \hat{\sigma}_1 \cos \hat{\tau}_2 + \mathcal{C} \sin \hat{\sigma}_1 \sin \hat{\tau}_2)} \right] \\ &\quad - \sqrt{1 - \mathcal{C}^2} [\theta_1(t) \cos \hat{\sigma}_1 + \theta_2(t) \cos \hat{\tau}_2].\end{aligned}\tag{IV.85}$$

La phase géométrique (IV.85) présente une évolution temporelle non linéaire contrairement à la phase dynamique qui varie linéairement dans le temps. De plus, elle dépend des paramètres de la seconde fibration de Hopf, ce qui signifie qu'elle est affectée par la géométrie prise par la variété des états quantiques, i. e., la base de Hopf S^4 . Par ailleurs, la phase géométrique dépend également des paramètres d'évolution $\theta_m(t)$ qui montrent sa dépendance à la forme du chemin d'évolution transporté par l'état évolué (IV.75). De point de vue de intrication, nous constatons que la phase géométrique dépend du degré d'intrication de l'état initial, i. e., état préparé (IV.69). Par exemple, les états maximalelement intriqués ($\mathcal{C} = 1$) ne peuvent jamais acquérir ni une phase géométrique ni une phase dynamique ceci, parce que leur espace est réduit à un point (IV.46), alors que dans le cas des états séparables ($\mathcal{C} = 0$), ces phases ne sont pas annulées ceci, parce que leur espace possède une certaine géométrie qui s'identifie par la sphère de Bloch (IV.46). De surcroît, les phases géométriques et dynamiques ne sont pas invariantes sous les opérations unitaires locales, mais elles sont déterminées en fonction des phases $\theta_m(t)$. En effet, en l'absence de ces opérations ($\theta_m(t) = 0$), nous ne pourrions jamais avoir une phase géométrique ou dynamique. Par conséquent, nous concluons que les opérations unitaires locales $U(2) \times U(2)$ introduisent une certaine géométrie sur laquelle l'état évolué (IV.75) peut acquérir les phases géométriques et dynamiques.

Cas d'une évolution cyclique

Nous pouvons également étudier la phase géométrique de Aharonov-Anandan acquise sous les opérations unitaires locales. Pour cela, revenons au cas d'une évolution cyclique pour laquelle l'état évolué (IV.75) obéit à la condition cyclique $\mathcal{L}(\tau) = e^{i\Phi_{tot}} \mathcal{L}(0)$ avec τ est le temps requis pour une

évolution cyclique. La phase géométrique de Aharonov-Anandan (III.36) se réécrit, pour cet état, comme suit [46, 118]

$$[\Phi_{geo}]_0^\tau = \int_0^\tau d\Phi_{tot} + i \int_0^\tau Tr \left(\mathcal{L}^+(t) \dot{\mathcal{L}}(t) \right) dt. \quad (\text{IV.86})$$

Comme nous nous intéressons uniquement à l'évolution temporelle, nous supposons que les champs magnétiques appliqués aux deux spins sont égaux et constants, de sorte que $\theta_1(t) = \theta_2(t) = h^z t/2 \in [0, 2\pi]$. À cet égard, la phase de Aharonov-Anandan se met de la forme

$$[\Phi_{geo}]_0^{\tau=4\pi/h^z} = -2\pi\sqrt{1 - \mathcal{C}^2} [\cos \hat{\sigma}_1 + \cos \hat{\tau}_2]. \quad (\text{IV.87})$$

La phase géométrique (IV.87) coïncide avec la phase dynamique, i. e., la phase totale cyclique est annulée, accumulée le long de toute évolution cyclique. Ce qui fait que la détermination de la phase géométrique de Aharonov-Anandan dépend principalement de la connaissance du Hamiltonien du système, ce qui nous offre la possibilité de l'évaluer expérimentalement [121]. D'autre part, nous pouvons également ré-exprimer la phase de Aharonov-Anandan (IV.87) en termes d'angles solides sous-tendus par les courbes fermées $\hat{C}_b, b = \hat{\sigma}_1, \hat{\tau}_2$ tracées sur l'espace total S^7 . Elle est donnée par

$$[\Phi_{geo}]_0^{\tau=4\pi/h^z} = -\sqrt{1 - \mathcal{C}^2} \left[\pm \sqrt{4\pi^2 - \pi\Omega_{\hat{\sigma}_1}} \left(\hat{C}_{\hat{\sigma}_1} \right) \pm \sqrt{4\pi^2 - \pi\Omega_{\hat{\tau}_2}} \left(\hat{C}_{\hat{\tau}_2} \right) \right], \quad (\text{IV.88})$$

où $\Omega_b(\hat{C}_b) = 2\pi(1 - \cos 2b)$. Ainsi, nous établissons la phase géométrique de Aharonov-Anandan sous les opérations unitaires locales en relation avec les angles solides usuels tracés par chaque spin (qubit) séparément sur sa sphère de Bloch correspondante [40, 136].

5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons discuté la géométrie associée à l'espace de deux qubits intriqués dans le cadre des fibrations de Hopf. Dans un premier temps, nous avons étudié la géométrie de l'espace de Hilbert d'un seul qubit en utilisant la première fibration de Hopf, et nous avons dérivé les aspects géométriques associés. Ensuite, nous avons exploré la géométrie de l'espace de deux qubits à l'aide de la seconde fibration de Hopf. À cet égard, nous avons dérivé les différentes structures géométriques issues de cette fibration. De plus, nous avons étudié le degré d'intrications existant entre ces deux qubits en termes de ces aspects géométriques. Finalement, nous avons analysé les différentes phases quantiques prises par l'état de deux qubits lorsqu'il subit des transformations unitaires locales en fonction de l'intrication et la géométrie de la base de Hopf S^4 .

Chapitre V

Contributions

- 1 **Contribution I : Quantum state manifold and geometric, dynamic and topological phases in an interacting two-spin system, B. Amghar and M. Daoud, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys, 17 (2020), 2050030-1284.**

1.1 Résumé

Nous étudions un système à deux spins $-1/2$ soumis à un champ magnétique externe dans le modèle de Heisenberg de type XXX . En utilisant la géométrie de l'espace complexe projectif $\mathbb{C}P^3$ associée, nous examinons la dynamique du système. Nous donnons explicitement la métrique Fubini-Study correspondante. Nous montrons que pour des états initiaux purs arbitraires, la dynamique se produit sur un tore. Nous calculons la phase géométrique, la phase dynamique et la phase topologique. Nous explorons le rapport entre la géométrie du tore et l'intrication des deux spins. À cet égard, nous fournissons une analyse détaillée de la phase géométrique, la vitesse dynamique et la distance géodésique mesurée par la métrique Fubini-Study en termes de degré d'intrication entre les deux spins.

Accepted Manuscript

International Journal of Geometric Methods in Modern Physics

Article Title: Quantum state manifold and geometric, dynamic and topological phases for an interacting two-spin system

Author(s): B. Amghar, M. Daoud

DOI: 10.1142/S0219887820500309

Received: 29 July 2019

Accepted: 12 December 2019

To be cited as: B. Amghar, M. Daoud, Quantum state manifold and geometric, dynamic and topological phases for an interacting two-spin system, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, doi: 10.1142/S0219887820500309

Link to final version: <https://doi.org/10.1142/S0219887820500309>

This is an unedited version of the accepted manuscript scheduled for publication. It has been uploaded in advance for the benefit of our customers. The manuscript will be copyedited, typeset and proofread before it is released in the final form. As a result, the published copy may differ from the unedited version. Readers should obtain the final version from the above link when it is published. The authors are responsible for the content of this Accepted Article.

Quantum state manifold and geometric, dynamic and topological phases in an interacting two-spin system

B. Amghar¹ and M. Daoud²

¹*LPHE-Modeling and Simulation, Faculty of Sciences, University Mohammed V, Rabat, Morocco*

²*Department of Physics, Faculty of Sciences, University Ibn Tofail, Kenitra, Morocco*

Abstract

We consider a two-spin system of XXX Heisenberg type submitted to an external magnetic field. Using the associated CP^3 geometry, we investigate the dynamics of the system. We explicitly give the corresponding Fubini-Study metric. We show that for pure initial states arbitrary, the dynamics occurs on a torus. We compute the geometric phase and we show that it depends on both the torus geometry and the coupling between the two spins. We also compute the topological phase as a part of the geometric phase without dynamic phase contribution. We investigate the interplay between the torus geometry and the entanglement of the two spins. In this respect, we provide a detailed analysis of the geometric phase, the dynamics velocity, the geodesic distance measured by the Fubini-Study metric in terms of the degree of entanglement between the two spins.

Keywords Quantum state manifold. Fubini Study metric. Geometric phase. Concurrence. Evolution velocity. Geodesic distance

¹email: b.brahim.amghar@gmail.com

²email: m_daoud@hotmail.com

1 Introduction

The geometric methods are of paramount importance in quantum mechanics [1, 2, 3]. Indeed, the geometrical tools simplify considerably the investigation of the properties of any given quantum system, in particular when this system evolving under external interaction [4, 5]. Recently, the geometry of quantum states has been shown very useful to understand the quantum correlations properties in multipartite systems. For instance, for a two qubit (two-level quantum system) systems, the entanglement can be geometrically described by using of the 2nd Hopf-fibration [6, 7]. More precisely, the whole two-qubit system can be represented by a S^7 sphere. When the entire system is subjected to an external interaction, the evolution of the first qubit is described by the base space S^4 and the dynamics of the second qubit occurs in the fiber space S^3 . During the evolution of the state through a trajectory which is a geodesic line on the quantum state manifold endowed with the unitary-invariant geometry of Fubini and Study. M. V. Berry [10] has discovered a remarkable property of quantum phase evolutions, related to holonomies in the parameter space characterizing the quantum state vectors. This is so-called geometric phase. P. Milman and R. Mosseri [11, 12] investigated the geometric phase and the topological structure associated with cyclic evolutions of arbitrary two-qubit pure states. The role of entanglement in the phase evolution of qubits was investigated in refs [13, 14]. One can find more about geometric phase in the papers [15, 16, 17, 18, 19].

This paper is organized as follows. In section 2, we investigate evolution of a physical system of a two-qubit represented by two-spin interacting described by the XXX Heisenberg model under the effect of an external magnetic field directed along the z -axis. In Section 3, we give the Fubini-Study metric on complex projective space $\mathbb{C}P^3$ in order to know the geometry of such manifold. In Section 4, we shall calculate the expression of the geometric phase acquired by the state of the two-spin system during its evolution on the resulting manifold. In section 5, we shall investigate the degree of entanglement of the states which belong to the corresponding quantum state manifold. In section 6, we establish the explicit expression of the evolution velocity of two-spin system. In the last section we shall apply the different results obtained in the previous sections on a disentangled initial state, then we shall present a graphical and geometric analysis of behaviors of the main results established in terms of the concurrence, the geometry taken by the evolution manifold and the external magnetic field. We end up the paper with summary.

2 Quantum evolution of a two-spin system

We consider a two-spins system interacting described by the XXX Heisenberg model under the effect of an external magnetic field directed along the z -axis. The Hamiltonian of the system is given by

$$H = H_{\text{int}} + H_{mf}, \quad (1)$$

with

$$H_{\text{int}} = J(\mathbb{I} + \sum_{i=1}^3 \sigma_i \otimes \sigma_i), \quad H_{mf} = h_z(\sigma_3 \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \sigma_3), \quad (2)$$

where σ_i , $i = 1, 2, 3$ are the Pauli matrices and \mathbb{I} is the identity matrix, J is the coupling constant between the two spins. The two spins are subjected to the external magnetic field h_z . In the computational basis $\mathcal{B} = \{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$. The eigenstates of H are given by

$$|v_1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle, \quad |v_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle), \quad |v_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle), \quad |v_4\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle, \quad (3)$$

and the corresponding eigenvalues write

$$E_1 = 2(J + h_z), \quad E_2 = 2J, \quad E_3 = -2J, \quad E_4 = 2(J - h_z). \quad (4)$$

The evolution operator $U(t) = \exp(-iHt)$ takes the following form in the computational basis

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^{-2i(h_z+J)t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2Jt) & -i \sin(2Jt) & 0 \\ 0 & -i \sin(2Jt) & \cos(2Jt) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2i(h_z-J)t} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

For an initial normalized state $|\psi_i\rangle$ given by

$$|\psi_i\rangle = a_i |\uparrow\uparrow\rangle + b_i |\uparrow\downarrow\rangle + c_i |\downarrow\uparrow\rangle + d_i |\downarrow\downarrow\rangle. \quad (6)$$

The evolved state under the evolution operator $U(t)$ on the state (6), writes

$$\begin{aligned} |\psi(\theta, \phi)\rangle &= a_i e^{-i(\phi+\theta)} |\uparrow\uparrow\rangle + (b_i \cos \theta - i c_i \sin \theta) |\uparrow\downarrow\rangle \\ &+ (-i b_i \sin \theta + c_i \cos \theta) |\downarrow\uparrow\rangle + d_i e^{i(\phi-\theta)} |\downarrow\downarrow\rangle, \end{aligned} \quad (7)$$

where

$$\theta = 2Jt, \quad \phi = 2h_z t.$$

It is interesting to note that:

$$|\psi(\theta + \pi, \phi)\rangle = -|\psi(\theta, \phi)\rangle, \quad |\psi(\theta, \phi + 2\pi)\rangle = |\psi(\theta, \phi)\rangle. \quad (8)$$

The periodicity of the state $|\psi(\theta, \phi)\rangle$ implies that the parameters θ and ϕ are such that $\theta \in [0, \pi]$ and $\phi \in [0, 2\pi]$. In the following section, we attempt to specify the geometry of the evolution space which contains the set of states achieved during the evolution of two spins by calculating the Fubini-Study metric on the complex projective space $\mathbb{C}P^3$.

3 Fubini-Study metric of the complex projective space $\mathbb{C}P^3$

The states of the two spins system can be identified with the sphere S^7 which can be expressed locally as [7]

$$S^7 \simeq \mathbb{C}P^3 \times S^1. \quad (9)$$

The state of two spin can be also expressed in terms of local coordinates on $\mathbb{C}P^3$ as the $SU(4)$ coherent state

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + z_1 z_1^* + z_2 z_2^* + z_3 z_3^*}} \begin{pmatrix} 1 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \quad z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}. \quad (10)$$

A simple identification with (7) gives

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{e^{i(\theta+\phi)}}{a_i} (b_i \cos \theta - i c_i \sin \theta), \\ z_2 &= \frac{e^{i(\theta+\phi)}}{a_i} (-i b_i \sin \theta + c_i \cos \theta), \\ z_3 &= \frac{d_i}{a_i} e^{2i\phi}. \end{aligned} \quad (11)$$

These correspondences elucidate the relation between the local coordinates and the parameters θ and ϕ as well as those of the initial state of the two-spin system. The Fubini-Study metric of $\mathbb{C}P^3$ is defined by [8]

$$dS_{FS}^2 = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 \ln K(z, z^*)}{\partial z^i \partial z^{*j}} dz^i dz^{*j}, \quad (12)$$

where $K(z, z^*) = 1 + z_1 z_1^* + z_2 z_2^* + z_3 z_3^*$, is the Bergmann kernel. The metric is then becomes

$$dS_{FS}^2 = \sum_{i,j=1}^3 \left[\frac{\delta_{ij}}{1 + \mathbf{z}\mathbf{z}^*} - \frac{z_i^* z_j}{(1 + \mathbf{z}\mathbf{z}^*)^2} \right] dz^i dz^{*j}, \quad (13)$$

where $\mathbf{z}\mathbf{z}^* = z_1 z_1^* + z_2 z_2^* + z_3 z_3^*$. Using the equations in (10), the Bergmann kernel is simply given by

$$K(z, z^*) = \frac{1}{|a_i|^2}. \quad (14)$$

Substituting the equations (10) and (14) into (12), the Fubini-Study metric rewrites

$$dS_{FS}^2 = B(2 - B)d\theta^2 + (A - D^2)d\phi^2 + 2BDd\theta d\phi, \quad (15)$$

where

$$A = |a_i|^2 + |d_i|^2, \quad B = |b_i - c_i|^2, \quad D = |a_i|^2 - |d_i|^2. \quad (16)$$

The fact that the components of the metric tensor do not depend on the parameters θ and ϕ means that expression (15) defines the metric of a flat manifold. Using this fact and the fact that parameters θ and ϕ are periodicals of periods π and 2π respectively, we conclude that this manifold is a torus. In addition, we notice that the geometry of this manifold depends on the parameters which determine the initial state. In the next section, we shall define and calculate the geometric phase acquired by the state of the two-spin system during the evolution on the quantum manifold defined by the metric tensor calculated above that is a torus.

4 Geometric phase acquired by the state of the two-spin system

We consider the evolution of a two-spins system described by the state $|\psi(\theta, \phi)\rangle$. The associated quantum manifold is parametrized by the variables θ and ϕ . The geometric phase [15, 16, 17] is defined as the total phase minus the dynamical phase. It is given by

$$\phi_g(\theta, \phi) = \arg \langle \psi(0, 0) | \psi(\theta, \phi) \rangle - \int_0^\theta A_\theta(\theta', \phi') d\theta' - \int_0^\phi A_\phi(\theta', \phi') d\phi', \quad (17)$$

where the total phase is defined as

$$\phi_{tot}(\theta, \phi) = \arg \langle \psi(0, 0) | \psi(\theta, \phi) \rangle = \arg \langle \psi_i | \psi(\theta, \phi) \rangle. \quad (18)$$

The dynamical phase is defined as

$$\phi_{dyn}(\theta, \phi) = \int_0^\theta A_\theta(\theta', \phi') d\theta' + \int_0^\phi A_\phi(\theta', \phi') d\phi' \quad (19)$$

where

$$A_\theta(\theta', \phi') = -i \langle \psi(\theta', \phi') | \frac{\partial}{\partial \theta'} | \psi(\theta', \phi') \rangle \quad (20)$$

and

$$A_\phi(\theta', \phi') = -i \langle \psi(\theta', \phi') | \frac{\partial}{\partial \phi'} | \psi(\theta', \phi') \rangle \quad (21)$$

are the connections associated with the parameters θ and ϕ , respectively, which are defined on the lines bundle over the parameter space $M(= \mathbb{C}P^3)$ of system [15]. Also, it is easy to show that from (20) and (21), that connections A_θ and A_ϕ are real.

Let us calculate the different phases acquired by the state (7) of a two-spin system during the path of

evolution on the corresponding quantum manifold defined in (15). From (6) and (7) the transition probability amplitude from the initial state $|\psi_i\rangle$ to the state $|\psi(\theta, \phi)\rangle$ can be written as

$$\begin{aligned} \langle \psi_i | \psi(\theta, \phi) \rangle &= |a_i|^2 \cos(\phi + \theta) + |d_i|^2 \cos(\phi - \theta) + (1 - A) \cos \theta \\ &\quad - i \left(|a_i|^2 \sin(\phi + \theta) - |d_i|^2 \sin(\phi - \theta) + 2G \sin \theta \right), \end{aligned} \quad (22)$$

where

$$G = \mathcal{R}(b_i^* c_i), \quad A = |a_i|^2 + |d_i|^2.$$

Equivalently, we can express the total phase as

$$\phi_{tot}(\theta, \phi) = \arctan \left(\frac{-|a_i|^2 \sin(\phi + \theta) + |d_i|^2 \sin(\phi - \theta) - 2G \sin \theta}{|a_i|^2 \cos(\phi + \theta) + |d_i|^2 \cos(\phi - \theta) + (1 - A) \cos \theta} \right). \quad (23)$$

Note that the geometrical phase depends both on the evolution parameters of the two-spin system as well as the parameters of the initial state. This can be explained geometrically by the fact that this phase depends on the path followed by the two-spin system during its evolution and the intrinsic geometry taken by the evolution space. This agrees with the fact that the total phase is a sum of a dynamic phase that occurs during the dynamics of the system and a geometric phase that occurs from the geometric nature of the variety (torus) on which the evolution path is defined.

In order to determine the dynamical phase, we first compute the connections A_θ and A_ϕ . Using the definition (20) and (21), it is simple to verify that

$$A_\theta(\theta', \phi') = -[1 - B], \quad A_\phi(\theta', \phi') = -D, \quad (24)$$

where B and D are given by (16). It follows that the dynamical phase can be expressed as

$$\phi_{dyn}(\theta, \phi) = -(1 - B)\theta - D\phi. \quad (25)$$

The dynamical phase consists of two parts: the first one contains the parameter θ related to the dynamic contribution whose origin comes from the interaction between the two spins, while the second one involves the parameter ϕ associated with the dynamic contribution originating from the action of the external magnetic field directed along the z . Consequently, the dynamic phase depend on the path followed by the state (7) on the quantum manifold. In addition, it depends on the initial parameters which define the geometry of the torus. The geometric phase is defined as the difference between the total phase (23) and the dynamic phase (25). It is given by

$$\begin{aligned} \phi_g(\theta, \phi) &= \arctan \left(\frac{-|a_i|^2 \sin(\phi + \theta) + |d_i|^2 \sin(\phi - \theta) - 2G \sin \theta}{|a_i|^2 \cos(\phi + \theta) + |d_i|^2 \cos(\phi - \theta) + (1 - A) \cos \theta} \right) \\ &\quad + (1 - B)\theta + D\phi. \end{aligned} \quad (26)$$

Thus, the geometric phase depends on the path of evolution as well as the parameters which define the initial state of the two-spin system. Having determined the geometric and dynamical phases, we shall now discuss the notion of the topological phase [18, 19]. For the two- qubit system under consideration, the topological phase acquired by the the system does not have any relevant contribution from the dynamical phase. This means that

$$[1 - B]\theta + D\phi = 0, \quad (27)$$

for any value of $\theta \in [0, \pi]$ and $\phi \in [0, 2\pi]$. This implies

$$[1 - B] = 0, \quad D = 0. \quad (28)$$

In this case the topological phase ϕ_{top} we coincides with the total phase ϕ_{tot} . It is easy to see that similarly to the total phase, the topological phase depends only on the path followed by the two-spin system. This confirms as mentioned before that it only depends on a given class of paths which agrees with the fact that it can be considered as part of the geometric phase. We shall show later that the condition (27) is satisfied by the maximally entangled states.

5 Entanglement on the quantum manifold

In this section we shall investigate the degree of entanglement of the states evolving under the Hamiltonian (1), from a geometrical point of view by considering the metric (15). We reparametrize this Fubini-Study metric in terms of the concurrence [23, 24]. This will help us to understand and interpret geometrically the entanglement dynamics during the evolution of two-spins [13, 14]. For the state (6), the concurrence is given by

$$\mathcal{C}_i = 2 |a_i d_i - b_i c_i|, \quad (29)$$

and the concurrence of state (7) writes

$$\mathcal{C} = 2 \left| a_i d_i e^{-i2\theta} - \left(b_i c_i \cos 2\theta - \frac{i}{2} (b_i^2 + c_i^2) \sin 2\theta \right) \right|. \quad (30)$$

It is clear that entanglement of the two-spin system depends only on the interaction between the two spins and not on the action of the external magnetic field. This is because the action of the external magnetic field is given by unitary operators that define the evolution of each spin separately (act locally) and do not change the entanglement of the spin system. The interaction between spins is defined by the unitary operator which describes the evolution of the two spins together (act globally) which leads to a change in the entanglement of the two spins. For the initial state disentangled ($\mathcal{C}_i = 0$), the expression of entanglement (30) takes the following form

$$\mathcal{C} = B \sin 2\theta, \quad \theta \in [0, \pi/2], \quad (31)$$

where the parameter B is defined in (16). The concurrence $\mathcal{C}(\theta)$ is maximum for $\theta = \pi/4$. For instance, for $b_i = 1$ and $c_i = 0$, which corresponds to the initial state $|\uparrow\downarrow\rangle$, we obtain the maximally entangled state with ($\mathcal{C} = 1$). We notice that for $b_i = c_i$, the initial state $|\psi_i\rangle$ has the form $|\psi_i\rangle = a_i |\uparrow\uparrow\rangle + b_i (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) + d_i |\downarrow\downarrow\rangle$ and the evolved state $|\psi(\theta, \phi)\rangle$ cannot be an entangled state.

Now, let us reformulate the Fubini Study metric (15) in terms of the concurrence. To realize this, considering the expression of entanglement (31) associated with the initially separated state of evolved state (7) (state with $\mathcal{C}_i = 0$). Using

$$d\mathcal{C} = 2B \cos 2\theta d\theta, \quad (32)$$

one gets

$$d\theta^2 = \frac{1}{4(B^2 - \mathcal{C}^2)} d\mathcal{C}^2. \quad (33)$$

Reporting (33) into (15), the Fubini Study metric (15) rewrites

$$dS_{FS}^2 = \frac{B(2-B)}{4(B^2 - \mathcal{C}^2)} d\mathcal{C}^2 + (A - D^2) d\phi^2 + \frac{BD}{\sqrt{B^2 - \mathcal{C}^2}} d\mathcal{C} d\phi. \quad (34)$$

Using the following variables change

$$\phi' = \phi + \delta\mathcal{C}, \quad \mathcal{C}' = \mathcal{C}, \quad , \quad (35)$$

with

$$\delta = \frac{BD}{2(A - D^2)\sqrt{B^2 - \mathcal{C}^2}}, \quad (36)$$

one gets the diagonal form of Fubini-Study metric

$$dS_{FS}^2 = \frac{B(2A - 2D^2 - AB)}{4(B^2 - C^2)(A - D^2)} dC^2 + (A - D^2) d\phi'^2, \quad (37)$$

Thus, the Fubini Study metric is now written in terms of the dynamical variables, namely, the concurrence \mathcal{C} and the external magnetic field h_z . It is important to see that the components of the metric tensor (37) are non-negative. Indeed, reporting the expressions (16) into (37), one verifies

$$\begin{aligned} 2A - 2D^2 - AB &= (|a_i|^2 + |d_i|^2) |b_i + c_i|^2 + 8|a_i|^2 |d_i|^2 \geq 0, \\ A - D^2 &= |a_i|^2 (1 - |a_i|^2) + |d_i|^2 (1 - |d_i|^2) + 2|a_i|^2 |d_i|^2 \geq 0, \\ B^2 - C^2 &= B^2 \cos^2 2\theta' \geq 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Therefore, the metric tensor (37) defines an Euclidean metric with a positive definite signature $(2, 0)$. In addition, for a particular value of concurrence \mathcal{C} , we can select the curves on the corresponding Euclidean manifold with a constant entanglement. From the equation (34) or (37), we obtain that these curves are circles with radius depending on the parameters of the initial states as follows

$$\gamma = \sqrt{A - D^2}, \quad (39)$$

where A and D are defined by (16).

6 Quantum evolution velocity of two-spins system

We shall assume in what follows the external magnetic field h_z is constant. The state of two spins (7) can be expressed as

$$\begin{aligned} |\psi(\theta)\rangle &= a_i e^{-i(1+k)\theta} |\uparrow\uparrow\rangle + (b_i \cos \theta - ic_i \sin \theta) |\uparrow\downarrow\rangle \\ &+ (-ib_i \sin \theta + c_i \cos \theta) |\downarrow\uparrow\rangle + d_i e^{i(k-1)\theta} |\downarrow\downarrow\rangle, \end{aligned} \quad (40)$$

where $k = \frac{h_z}{J}$ is assumed to be constant. We show that this two-spin state satisfies the following periodical condition

$$|\psi(\theta + \pi)\rangle = -|\psi(\theta)\rangle, \quad (41)$$

which means that $\theta \in [0, \pi]$. The velocity of the quantum evolution of state $|\psi(\theta)\rangle$ follows from the Schrödinger equation. It was derived by Anandan and Aharonov [1] as

$$V_{FS} = \frac{dS_{FS}}{dt} = \frac{2}{\hbar} \sqrt{\langle \psi(t) | (\Delta H)^2 | \psi(t) \rangle}, \quad (42)$$

where $\Delta H = H - \langle H \rangle$ is the energetic uncertainty for the Hamiltonian (1). We notice that the quantum evolution velocity is related to the quantum uncertainty of the Hamiltonian governing the dynamics of the two spins system [22]. Using the assumption according to which k is constant, the metric Fubini Study (15) writes

$$dS_{FS}^2 = [B(2 - B) + k^2(A - D^2) + 2kBD] d\theta^2. \quad (43)$$

We conclude that the evolution of the two-spin system occurs on the one-dimensional manifold which is a half-circle of radius

$$\gamma = \sqrt{B(2 - B) + k^2(A - D^2) + 2kBD}. \quad (44)$$

In the following we shall employ the metric tensor (43) to investigate the quantum evolution velocity of two-spins system governed by the Hamiltonian H . In particular, we shall examine this quantum evolution in connection with the evolution of the entanglement of system. The evolution velocity is then given by

$$V_{FS} = \frac{dS_{FS}}{dt} = 2\sqrt{J^2 B(2 - B) + h_z^2(A - D^2) + 2Jh_z BD}. \quad (45)$$

Thus, the Fubini Study distance between the initial state $|\psi(t_i)\rangle$ to the final state $|\psi(t_f)\rangle$ along a given curve on the half-circle in $\mathbb{C}P^3$ write

$$S_{FS} = 2\sqrt{J^2B(2-B) + h_z^2(A-D^2) + 2Jh_zBD}\Delta t. \quad (46)$$

where $\Delta t = t_f - t_i$. It is a geometric quantity is analogous to the geometric phase. In addition, since the quantum evolution velocity (45) is independent of the t , the Fubini Study distance depends only on the time interval Δt . Since the Fubini Study metric writes in term of the concurrence between the two spins as

$$dS_{FS}^2 = \left[\frac{J^2B(2-B) + h_z^2(A-D^2) + 2JBD}{4J^2(B^2 - C^2)} \right] dC^2, \quad (47)$$

the evolution velocity can expressed as

$$V_{FS} = \frac{dS_{FS}}{dC} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{J^2B(2-B) + h_z^2(A-D^2) + 2JBD}{J^2(B^2 - C^2)}}. \quad (48)$$

It follows that the Fubini Study distance to transport the state between two different degrees of entanglement \mathcal{C}_i and \mathcal{C}_f along a given curve on the half-circle in $\mathbb{C}P^3$ is given by

$$S_{FS} = \eta \left[\arcsin\left(\frac{\mathcal{C}_f}{B}\right) - \arcsin\left(\frac{\mathcal{C}_i}{B}\right) \right], \quad (49)$$

where

$$\eta = \sqrt{\frac{J^2B(2-B) + h_z^2(A-D^2) + 2JBD}{4J^2}}.$$

It is interesting to note that the evolution velocity and the geodesic distance measured by the Fubini Study metric can be affected by the entanglement state of the two-spin system as they are also affected by the radius of the evolution half-circle. We can say that quantum velocity and geodesic distance are purely intrinsic characteristics of quantum theory itself and which are independent of the models used [26].

7 Special case: the quantum evolution of a two-qubit separable state

As illustration of the results presented in the previous sections, we shall consider the special situation where the initial two-qubit state is separable of the form

$$|\psi_i\rangle = |+-\rangle, \quad (50)$$

where

$$|+\rangle = \left(\cos \frac{\chi}{2}, \sin \frac{\chi}{2} e^{i\gamma} \right)^t, \quad |-\rangle = \left(-\sin \frac{\chi}{2}, \cos \frac{\chi}{2} e^{i\gamma} \right)^t \quad (51)$$

are the eigenstates of the operator of the projection of spin- $\frac{1}{2}$ on the direction by the unit vector \mathbf{n} . The vector \mathbf{n} is represented by the spherical coordinates as follows $\mathbf{n} = (\sin \chi \cos \gamma, \sin \chi \sin \gamma, \cos \chi)$, where $\chi \in [0, \pi]$ and $\gamma \in [0, 2\pi]$ are spherical angles specifying the direction of magnetic field. The explicit form the state (50) in the computational basis is

$$|\psi_i\rangle = -\frac{1}{2} \sin \chi |\uparrow\uparrow\rangle + \cos^2 \frac{\chi}{2} e^{i\gamma} |\uparrow\downarrow\rangle - \sin^2 \frac{\chi}{2} e^{i\gamma} |\downarrow\uparrow\rangle + \frac{1}{2} \sin \chi e^{i2\gamma} |\downarrow\downarrow\rangle, \quad (52)$$

Reporting the parameters of the initial separable state (52) into the state (40), the corresponding evolved state writes

$$\begin{aligned} |\psi(\theta)\rangle = & \frac{1}{2} \sin \chi e^{-i(1+k)\theta} |\uparrow\downarrow\rangle + e^{i\gamma} \left(\cos^2 \frac{\chi}{2} \cos \theta + i \sin^2 \frac{\chi}{2} \sin \theta \right) |\uparrow\uparrow\rangle \\ & + e^{i(\gamma+\pi)} \left(i \cos^2 \frac{\chi}{2} \sin \theta + \sin^2 \frac{\chi}{2} \cos \theta \right) |\downarrow\uparrow\rangle + \frac{1}{2} \sin \chi e^{i(2\gamma+(k-1)\theta)} |\downarrow\downarrow\rangle. \end{aligned} \quad (53)$$

Using the expression (43), the Fubini Study metric associated with the initial state (50), writes

$$dS_{FS}^2 = \left[1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \chi \right] d\theta^2. \quad (54)$$

Using the equation (44), the radius of the evolution half circle takes the form

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin^2 \chi}. \quad (55)$$

From the Fubini Study metric (54), It is clear that the radius of half-circle described during the evolution of the separable initial state (50) under the action of the Hamiltonian (1) increases when $\chi \in [0, \pi/2]$ and decreases when $\chi \in [\pi/2, \pi]$. It is also easy to verify that the geometric phase (26) writes in this particular case as

$$\phi_g = \arctan \left(\frac{(1 - \cos(k\theta)) \tan \theta \sin^2 \chi}{2 + (\cos(k\theta) - 1) \sin^2 \chi} \right). \quad (56)$$

It is easy to see that the geometric phase encompasses two interesting terms: the first contains the parameter θ related to the the entanglement of the system while the second contains the parameter χ of initial state related to the radius of the evolution half-circle associated with the dynamics of the system. Moreover, the dynamic phase is obtained equal to zero ($\phi_{dyn} = 0$) at each point of the evolution path whatever the state of entanglement of the system. This fact means that at each point of the evolution path, the total phase equal to the geometrical phase which is nothing other than the topological phase acquired during the dynamic of system, then we can write

$$\phi_g = \phi_{tot} = \phi_{top}. \quad (57)$$

Using the expression (31), the concurrence of two-spins system takes the following form

$$\mathcal{C} = \sin 2\theta, \quad (58)$$

where $\theta = \pi/4$ satisfies the maximally entangled states. On the other hand, using the expression (47) the Fubini Study metric writes

$$dS_{FS}^2 = \left[\frac{2J^2 + h_z^2 \sin^2 \chi}{8J^2(1 - \mathcal{C}^2)} \right] d\mathcal{C}^2. \quad (59)$$

It is obvious to see if the state of two spins is maximally entangled ($\mathcal{C} = 1$), the state (7) takes the form

$$\begin{aligned} |\psi(\mathcal{C} = 1)\rangle &= -\frac{1}{2} \sin \chi e^{-i(1+k)\frac{\pi}{4}} |\uparrow\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos^2 \frac{\chi}{2} + i \sin^2 \frac{\chi}{2} \right) e^{i\gamma} |\uparrow\downarrow\rangle \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(i \cos^2 \frac{\chi}{2} + \sin^2 \frac{\chi}{2} \right) e^{i(\gamma+\pi)} |\downarrow\uparrow\rangle + \frac{1}{2} \sin \chi e^{i2\gamma} e^{i(k-1)\frac{\pi}{4}} |\downarrow\downarrow\rangle. \end{aligned} \quad (60)$$

For $\theta = \pi/4$, the required time for the initial state (52) to evolve to the maximally entangled state (60) is

$$\Delta t = \frac{\pi}{8J}. \quad (61)$$

It is clear that the required time for achieving the maximally entangled states depends only on the coupling constant between spins, but does not depend on either the external magnetic field or the geometry taken by the the manifold defined in (54). If the parameter of the initial state $\chi = 0$, which modulo a global phase corresponds to the case of initial state $|\uparrow\downarrow\rangle$, we obtain the following final state

$$|\psi(\mathcal{C} = 1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\downarrow\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}} |\downarrow\uparrow\rangle. \quad (62)$$

In this situation, the metric tensor (54) becomes

$$dS_{FS}^2 = \frac{1}{4(1 - \mathcal{C}^2)} d\mathcal{C}^2. \quad (63)$$

The evolution velocity derived from the Fubini Study metric (15) can be obtained from (45). One gets

$$V_{FS} = 2\sqrt{J^2 + \frac{h_z^2}{2} \sin^2 \chi}. \quad (64)$$

Hence, the Fubini-Study distance connecting the initial state (52) and the maximally entangled state (60) has the form

$$S_{FS} = V_{FS} \Delta t = \frac{\pi}{4} \sqrt{1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \chi}. \quad (65)$$

On the other hand, the evolution velocity with respect to the concurrence of system is derived from metric tensor (34). Indeed, using the equation (48), we have

$$V_{FS} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{1-C^2} \left(1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \chi \right)}, \quad (66)$$

and the Fubini Study distance between the initial state (52) and the entangled state (40) takes the form

$$S_{FS} = \frac{1}{2} \arcsin(C) \sqrt{1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \chi}. \quad (67)$$

At the end of this section, we shall analyze graphically and geometrically the behaviors of the main results established above. For this, substituting (58) into (56), the geometric phase associated with the evolution of the initial separable state the equation (52) can be written in terms of the concurrence as

$$\phi_g = \arctan \left(\frac{\left(\tan \left(\frac{\arcsin(C)}{2} \right) - \sin \left(\frac{\arcsin(C)}{2} \right) \right) \sin^2 \chi}{2 + \left(\cos \left(\frac{\arcsin(C)}{2} \right) - 1 \right) \sin^2 \chi} \right), \quad (68)$$

where we chose $k = 1$. The variations of the geometrical phase in terms of the concurrence for different values taken by the radius γ given in (55) are reported in the figure (1). We notice that the geometric phase acquired by the the evolved state (53) may exhibit an exponential behavior between the separable initial state ($C = 0$) (52) and the maximally entangled state ($C = 1$) (60). We note that the increase in entanglement of the state

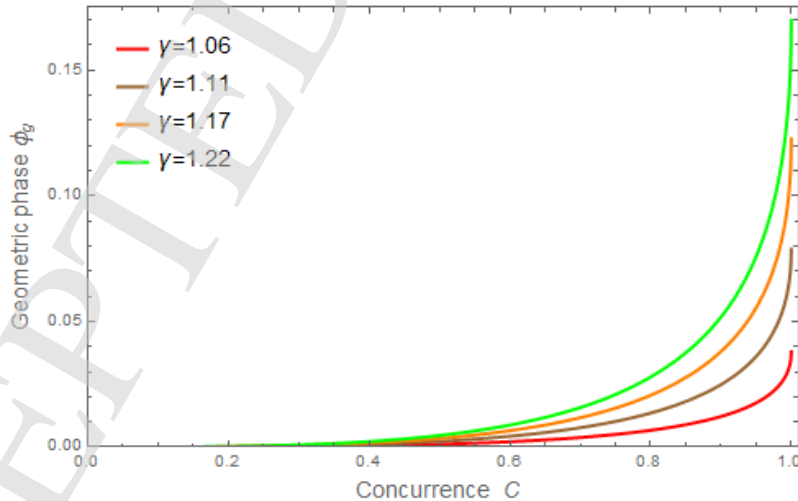


Figure 1: The dependence of geometric phase on the concurrence for different rays γ of evolution half-circle by setting $k = 1$.

of two spin during its evolution leads to an increase in the geometric phase. From the equation (68), if the

parameter is zero ($\chi = 0$), the geometric phase is not affected by the entanglement of the system and it remains equal to zero during the evolution. This can be explained by the fact that the cancellation of the geometry coming from the parameter χ of the initial separable state (52) leads automatically to the cancellation of the entanglement contained in the geometric phase. Besides, the geometric phase is affected by the values taken by the radius γ (55) of the evolution half circle. We note also that the expansion of the radius γ results in an increase of the geometrical phase and vice versa. Hence, the concurrence of the two spins system and the radius γ are two parameters that can affect the geometrical phase during the evolution of the two-spin system. The behavior of the evolution velocity (66) and that of the geodesic distance (67) are displayed in the figure (2). In the left panel of the figure (2), we see that the evolution velocity depends on the parameter χ or rather

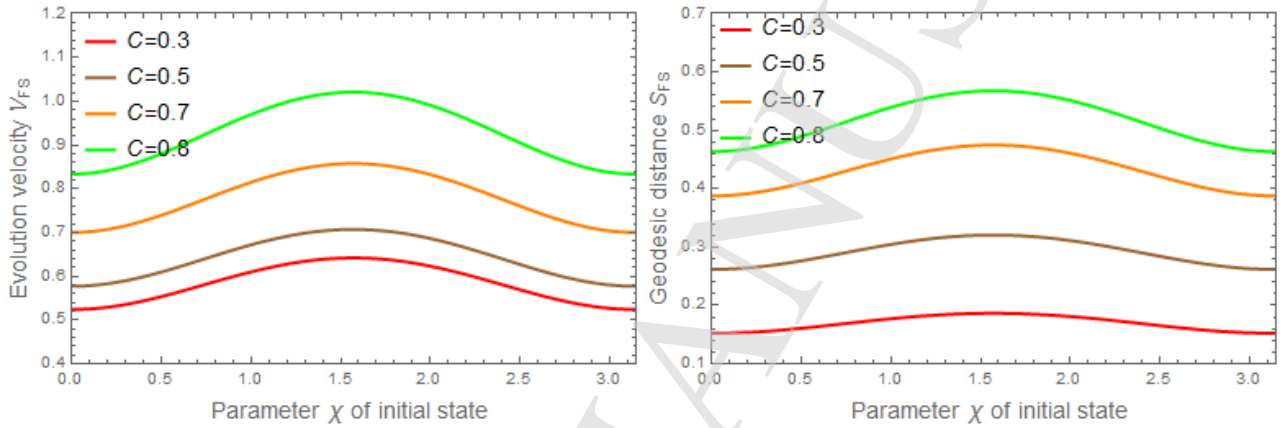


Figure 2: The dependence of evolution velocity and geodesic distance on the parameter χ of the initial separable state (52) for different values of the concurrence by setting $k = 1$.

the radius γ (see equation (55)), when $\chi \in [0, \pi/2]$ where we have an expansion of the radius γ , the evolution velocity may exhibit an increasing behavior, while when $\chi \in [\pi/2, \pi]$ where one gets a contraction of the radius γ , the evolution velocity may exhibit a decreasing behavior. Moreover, the evolution velocity is also affected by the degree of entanglement. Indeed, more the two spins is maximally entangled more the system evolves rapidly and vice versa. This means that the existence of quantum correlations between spins increases the dynamics of the two-spins system. The same behavior have been seen for the geodesic distance (67) in the right panel of the figure (2). Hence, the evolution velocity and the geodesic distance are affected by both the expansion or contraction of the radius γ of the evolution half-circle and the degree of entanglement of the system. In order to understanding the the effect of the external magnetic field on the evolution velocity (64), The left panel of the figure (3), represents its behavior in terms of the parameter χ or rather the radius γ (see the equation (55)) of the half-circle of evolution for different values of the the external magnetic field. In the absence of the external magnetic field, the evolution of system is then slow and uniform since the contribution of the evolution velocity coming from the radius γ is canceled. This behavior change in the presence of the external magnetic field where the evolution velocity takes the form of the bell shapes. For $\chi = 0$ or $\chi = \pi$, the system falls in the case of the absence of the external magnetic field previously discussed. The same behavior have been seen for the geodesic distance (65) in the right panel of the figure (3). As the degree of entanglement, the external magnetic field also increases the evolution velocity and the geodesic distance between the separable initial state (52) and the maximally entangled state (60).

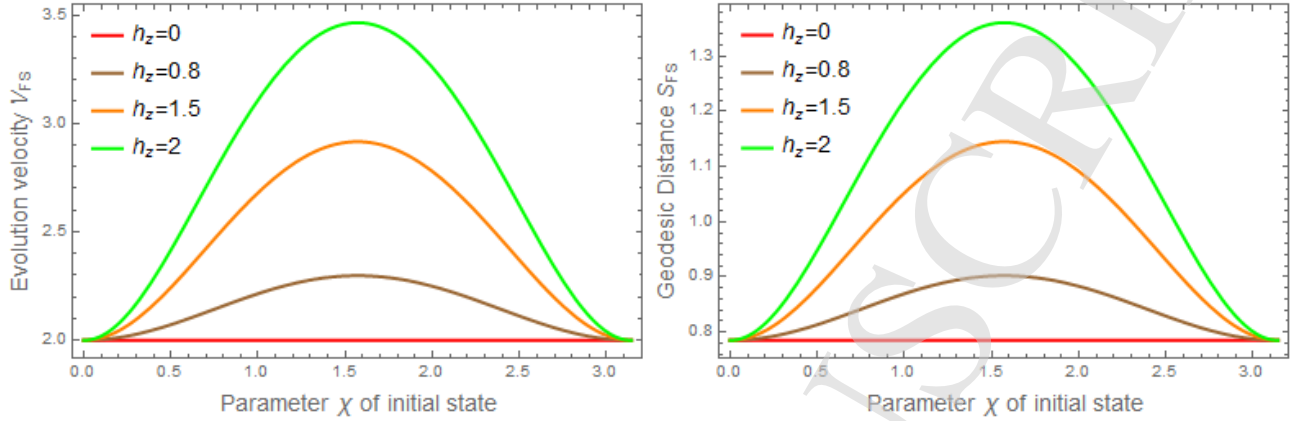


Figure 3: The dependence of the evolution velocity and geodesic distance on the parameter χ of the initial separable state (52) for different values of external magnetic field with an interaction coupling $J = 1$.

8 Summary

In this paper, we studied a physical system of two-qubit represented by two-spin interacting described by the XXX Heisenberg Model under the effect of an external magnetic field directed along the z -axis. The evolution of such system depends on the two parameters $(\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2$, namely, the parameter θ related to the interaction between spins and the parameter ϕ related to the external magnetic field. This means that the system evolves on a two-dimensional manifold. Based on the periodicity condition (8) as well as the Fubini-Study metric (15), we concluded that the manifold on which the two-spin system evolves is a torus. We also computed the geometric phase acquired during the evolution as the difference between the total phase and the dynamic phase. We found that the geometric phase depends on both the geometry taken by the manifold (torus) and the evolution path conveyed by the state of two-spins. In addition, we defined the topological phase as a part of the geometric phase that receives no dynamic contribution and we have shown that it depends only on the path followed by the state. By investigating the degree of entanglement of system, we derived the Fubini-Study metric in terms of concurrence. The resulting metric tensor is an Euclidean metric (34) with a positive definite signature $(2, 0)$. The curves of constant entanglement are circles. By fixing the external magnetic field, we have established that the evolution of two-spins system is restricted on a half-circle. We calculated the corresponding evolution velocity and the geodesic distance conveyed by the system. The influence of the entanglement on the geometric phase, the evolution velocity and geodesic distance has been studied with respect to the expansion and the contraction of the evolution half-circle radius. We finally studied the effect of the external magnetic field on the evolution of the system to attain a maximal amount of entanglement.

References

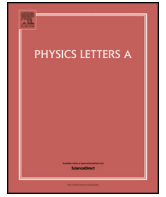
- [1] J. Anandan and Y. Aharonov, *Phys. Rev. Lett.* **65** (1990) 1697.
- [2] S. Abe, *Phy. Rev. A.* **48** (1993) 4102.
- [3] A. N. Grigorenko, *Phys. Rev. A.* **46** (1992) 7292.
- [4] I. Bengtsson and K. Życzkowski, *Geometry of Quantum States*, Cambridge University Press, Cambridge, (2006).

- [5] V. M. Tkachuk, *Fundamental problems of quantum mechanic (Ivan Franko National University of Lviv, Lviv (2011)). [in Ukrainian]*.
- [6] P. A. Pinilla and J. R. Luthra, arXiv: 0904.4925 (2009).
- [7] K. Hasebe, SIGMA, **6** (2010) 071.
- [8] W. M. Zhang, Phys. Rep, **252** (1995) 1-100.
- [9] D. C. Brody and D. W. Hook, J. Phys. A, **39** (2006) L167.
- [10] M. V. Berry, Proc. Roy. Soc. Lond. A, **392** (1984) 45-57.
- [11] P. Milman and R. Mosseri, Phys. Rev. Lett, **90** (2003) 230403.
- [12] P. Milman, Phys. Rev. A, **73** (2006) 062118.
- [13] E. Sjöqvist, Phys. Rev. A, **62** (2000) 022109.
- [14] B. Hessmo and E. Sjöqvist, Phys. Rev. A, **62** (2000) 062301.
- [15] A. Botero, J. Math. Phys, **44** (2003) 5279.
- [16] N. Mukunda and R. Simon, Ann. Phys, **228** (1993) 205.
- [17] N. Mukunda and R. Simon, Ann. Phys, **228** (1993) 269.
- [18] L. E Oxman and A. Z. Khoury, Phys. rev. lett, **106** (2011) 240503.
- [19] A. Z. Khoury and L. E. Oxman, Phys. Rev. A, **89** (2014) 032106.
- [20] D. N. Page. Phys. Rev. A, **46** (1987) 1667.
- [21] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry* vol 2 (1969).
- [22] J. Anandan, Found. Phys. **21** (1991) 1265.
- [23] W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett, **80** (1998) 2245 .
- [24] S. Hill and W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **78** (1997) 5022 .
- [25] S. Abe, phys. Rev. A, **46** (1992) 1667.
- [26] R. Cheng, arXiv preprint arXiv:1012.1337 (2010).

2 Contribution II : Geometrical aspects and quantum brachistochrone problem for a collection of N spin- s system with long-range Ising-type interaction, B. Amghar and M. Daoud, Phys. Lett. A, 384 (2020), 126682.

2.1 Résumé

Nous considérons un système physique de N qudits en interaction composé de N particules de spin- s couplées via l'interaction à longue portée de type Ising. Nous étudions la dynamique correspondante, définissons la variété des états quantiques associée et donnons la métrique de Fubini-Study correspondante. Nous dérivons la courbure Gaussienne et, à l'aide du théorème de Gauss-Bonnet, nous montrons que la dynamique se produit sur une variété bidimensionnelle de topologie sphérique. Nous examinons la phase géométrique acquise par le système sous des évolutions arbitraires et cycliques. De plus, nous étudions le problème du brachistochrone quantique concernant la détermination le plus petit temps possible pour réaliser une évolution optimale dans le temps. En restreignant notre étude à un système à deux qubits sous l'interaction d'Ising, une analyse détaillée est effectuée pour la métrique de Fubini-Study, la courbure Gaussienne, la phase géométrique et le temps optimal en relation avec l'intrication des deux qubits.



Geometrical aspects and quantum brachistochrone problem for a collection of N spin- s system with long-range Ising-type interaction



B. Amghar ^{a,*}, M. Daoud ^b

^a LPHE-Modeling and Simulation, Faculty of Sciences, University Mohammed V, Rabat, Morocco

^b Department of Physics, Faculty of Sciences, University Ibn Tofail, Kenitra, Morocco

ARTICLE INFO

Article history:

Received 12 May 2020

Received in revised form 7 June 2020

Accepted 15 June 2020

Available online 23 June 2020

Communicated by M.G.A. Paris

Keywords:

Fubini-Study metric

Quantum state manifold

Gaussian curvature

Geometrical phase

Quantum brachistochrone problem

Entanglement

ABSTRACT

We consider a physical system of N interacting qudits consisting of N spin- s particles coupled via the long-range interaction of Ising-type. We investigate the corresponding dynamics, define the associated quantum state manifold and we give the related Fubini-Study metric. We derive the Gaussian curvature and using the Gauss-Bonnet theorem, we show that the dynamics happen on a two-parametric manifold of spherical topology. We examine the geometrical phase acquired by the system under arbitrary and cyclic evolutions. Further, we study the quantum brachistochrone problem concerning the determination of the smallest possible time to realize a time-optimal evolution. By restricting our study to a two-qubit system under the Ising interaction, a detailed analysis is performed for the Fubini-Study metric, the Gaussian curvature, the geometrical phase and the optimal time in relation with the entanglement of the two qubits.

© 2020 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

The geometrical structures in quantum theory play an important role in the study of the evolution of quantum systems [1–3]. Indeed, it is argued that the geometrical formulation of quantum theory and the investigation of the geometry of quantum state space provide useful tools in the understanding of the most important features of the quantum world and, in particular, in the field of quantum information science [4–8]. Several works were devoted to the geometry of quantum state manifold which simplifies considerably the exploration of the physical properties of quantum systems. Among the most prominent of these properties, one may quote those related to the quantum dynamics [9–11]. It is shown that the geodesic distance measured by the Fubini-Study metric between two points in the space of pure states can be related to the energy uncertainty which in turn is related to the evolution velocity [12]. In addition, the geometrical tools are helpful in the study of the quantum brachistochrone problem which concerns the time-optimal path between two given quantum states and therefore the reconstruction of the Hamiltonian describing the optimal evolution on the state manifold of the quantum system under study [13–16]. Also, the manipulation of the geometrical methods in quantum theory simplifies the investigation of the problem related to finding the quantum circuit associated with unitary operations for the qubit systems [17–19] and the qutrit systems [20]. For other studies on the dynamical properties explored by using the geometrical features, the interested reader can find more details in the references [21–24].

Currently, the entanglement of quantum systems which has a pivotal role in the recent developments of quantum information theory has been extensively studied in relation with the geometrical features of state manifold associated with the multi-qubit system [25–27]. It has been proven that the degree of entanglement can be quantified by the length of the shortest geodesic between an entangled state and the nearest disentangled state by making use of the Mannoury-Fubini-Study metric [28]. Moreover, the geodesic distance between two entangled mixed states is related to the Bures distance between the two corresponding reduced density matrices [29]. Another interesting application of the quantum geometrical tools is the explanation of the entanglement in the framework of the Hopf-fibration [30–36], which clearly shows how the entanglement degree of quantum systems can be related to the geometry of the quantum state manifolds.

* Corresponding author.

E-mail addresses: b.brahim.amghar@gmail.com (B. Amghar), m_daoud@hotmail.com (M. Daoud).

An interesting geometrical quantity that appears in the evolution of quantum systems is the geometrical phase [37–39] which depends on the trajectory realized by the quantum system under the action of an evolution operator. There exists a relation between the geometrical phase and the geometrical properties characterizing the space of quantum states. Indeed, the geometrical phase can be demonstrated as a line integral of the Berry-Simon connection along the geodesic distance measured by the Fubini-Study metric between two different states [40]. Such phase appears in the famous Aharonov-Bohm effect [41]. Nowadays the geometrical phase can be made as a potential tool in quantum information theory, especially in realizing the quantum logic gates to perform the universal quantum computation [42]. In this context, one mentions that the experimental demonstration which concerns the conditional phase gate was achieved for the nuclear magnetic resonance [43] and trapped ions [44]. Further, the role of the entanglement on the topological nature of geometrical phases has been discussed both theoretically [26,27] and experimentally [45,46] in two-qubit systems.

In this paper we study some geometrical aspects as well as the quantum brachistochrone problem for a collection of N spin- s particles (N interacting qudits) coupled via the long-range interaction of Ising type. The ideas developed in this work are mainly motivated by the results obtained by Kuzmak and Tkachuk [10,13,47–50]. Indeed, we derive the Fubini-Study metric, the Gaussian curvature, the geometrical phase and the optimal time required to realize the optimal evolution for the N qudits system under consideration of this paper. To understand the interplay between the quantum correlations and the results obtained, we provide a detailed description of the Fubini-Study metric, the Gaussian curvature, the geometrical phase and the optimal time in terms of the entanglement for the special case of the two-qubit system ($N = 2, s = 1/2$).

The plan of the paper is as follows. In section 2, we study the quantum evolution of N interacting qudits consisting of N spin- s particles described by the Ising model. We derive the Fubini-Study metric specifying the corresponding quantum state manifold. Further, by investigating the Gaussian curvature in the framework of the Gauss-Bonnet theorem, we explore its topology. In section 3, we examine the geometrical phase acquired by the N spin- s system for the arbitrary and cyclic evolutions. In Section 4, we investigate the quantum brachistochrone problem to find the smallest possible time (optimal time) required to achieve the optimal evolution for the N spin- s system. In section 5, by restricting our study to a two-qubit system (a two spin-1/2 system) coupled via an interaction of Ising type, we discuss the obtained results such as the Fubini-Study metric, the Gaussian curvature, the geometrical phase and the optimal time in terms of the entanglement degree between the two qubits. Summary of the paper is presented in section 6.

2. Quantum evolution and geometry of N spin- s system

We consider a physical system of N interacting qudits (with $d = 2s + 1$) consisting of N spin- s particles with the long-range interaction described by the Ising model. The Hamiltonian characterizing the interaction between the N qudits is given by

$$H = 2J \sum_{1 \leq i < j \leq N} S_i^z S_j^z, \quad (1)$$

where J is the coupling constant and S_i^z is the z -component of the i th spin- s operator $\mathbf{S}_i = (S_i^x, S_i^y, S_i^z)$ associated with the i th spin- s . Also, we denote by $|m_i\rangle$ ($m_i = -s, -s + 1, \dots, s$) the corresponding eigenstates which verify the following eigenvalues equation

$$S_i^z |m_i\rangle = m_i |m_i\rangle. \quad (2)$$

It is interesting to notice that the components of spin- s operator S_i^x , S_i^y and S_i^z for each i th spin- s satisfy the $su(2)$ algebra

$$[S_i^\alpha, S_j^\beta] = i\delta_{ij} \sum_{\gamma=x,y,z} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} S_i^\gamma, \quad (3)$$

where $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}$ is the Levi-Civita symbol and δ_{ij} stands for the Kronecker symbol. We assume that the system is initially prepared in a coherent state obtained by a rotation of the ground state $| -s, -s, \dots, -s \rangle$ through an angle θ about the axis $\mathbf{n} = (\sin\varphi, -\cos\varphi, 0)$. It is given by

$$|\psi_i\rangle = e^{-i\theta \sum_{i=1}^N \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{n}} | -s, -s, \dots, -s \rangle = e^{i \sum_{i=1}^N (\xi S_i^+ - \xi^* S_i^-)} | -s, -s, \dots, -s \rangle, \quad (4)$$

where $\xi = \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi}$ with $\theta \in [0, \pi]$ and $\varphi \in [0, 2\pi]$ are the polar and azimuthal angles, respectively. The state (4) is explicitly given by [51,52]

$$|\psi_i\rangle = (1 + zz^*)^{-Ns} \|z_1, z_2, \dots, z_N\rangle, \quad (5)$$

with

$$\|z_i\rangle = \sum_{m_i=-s}^s z^{s+m_i} \sqrt{\frac{(2s)!}{(s+m_i)!(s-m_i)!}} |m_i\rangle \quad (6)$$

is the unnormalized form of the $SU(2)$ coherent state for the i th spin- s with the complex variable z is given by $z = \tan \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi}$. The geometry of the manifold generated by the rotation of the ground state can be specified by the Fubini-Study metric given by [53]

$$dS_{FS}^2 = \frac{\partial^2 \ln k(z, z^*)}{\partial z \partial z^*} dz dz^*, \quad (7)$$

with

$$k(z, z^*) = \langle z_1, z_2, \dots, z_N \| z_1, z_2, \dots, z_N \rangle = (1 + zz^*)^{Ns} \quad (8)$$

is the Bergmann kernel. The Fubini-Study metric (7) rewrites also as

$$dS_{FS}^2 = \frac{Ns}{2}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{9}$$

Thus, the space of states reached during the rotation is a sphere with the radius $\sqrt{Ns/2}$. The action of the evolution operator $U(t) = e^{-iHt}$ on the initial state (5) gives

$$|\psi(t)\rangle = (1 + zz^*)^{-Ns} \sum_{m_1, m_2, \dots, m_N = -s}^s e^{-i2\eta \sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j} \left(\prod_{\lambda=1}^N z^{s+m_\lambda} \sqrt{\frac{(2s)!}{(s+m_\lambda)!(s-m_\lambda)!}} \right) |m_1, m_2, \dots, m_N\rangle, \tag{10}$$

where $\eta = Jt$. It is simple to verify that the evolved state (10) satisfies the periodic condition with respect to parameter $\eta \in [0, \eta_{max}]$, where $\eta_{max} = \pi$ for s integer and $\eta_{max} = 2\pi$ for s half-integer. To identify the geometry associated with the time evolution required so that the initial state (5) reaches the final state (10), we use the definition of the Fubini-Study metric given by [54–56]

$$dS_{FS}^2 = g_{\mu\nu} d\zeta^\mu d\zeta^\nu, \tag{11}$$

where ζ^μ are the real parameters θ, φ and η which parametrize the evolved state (10) and $g_{\mu\nu}$ are the components of the metric tensor given by

$$g_{\mu\nu} = \text{Re}(\langle \psi_\mu | \psi_\nu \rangle - \langle \psi_\mu | \psi \rangle \langle \psi | \psi_\nu \rangle). \tag{12}$$

The Fubini-Study metric (11) writes as

$$dS_{FS}^2 = dS_{FS}^2 + \frac{1}{2}N(N-1)s^2 \sin^2\theta (1 + (4s(N-1) - 1)\cos^2\theta) d\eta^2 - N(N-1)s^2 \cos\theta \sin^2\theta d\varphi d\eta \tag{13}$$

where dS_{FS}^2 is the metric tensor (9). It is clear that in the situation where η is constant, the line element (13) reduces to the expression (9). Furthermore, we remark that the components of the Fubini-Study metric (13) are φ -independent. This means that the quantum state manifolds with a predefined azimuthal angle have the same geometry. Hence, the quantum state manifold associated with N qudits system under consideration is a two-parametric manifold (parametrized by θ and η) with a predefined azimuthal angle. It is described by the metric tensor given by

$$dS_{FS}^2 = \frac{Ns}{2}d\theta^2 + \frac{1}{2}N(N-1)s^2 \sin^2\theta (1 + (4s(N-1) - 1)\cos^2\theta) d\eta^2. \tag{14}$$

So, in order to specify the topology of the quantum state manifold (14), we need firstly to compute the Gaussian curvature of this quantum state manifold. It writes in terms of the components of the tensor (14) as follows [57]

$$K = \frac{1}{(g_{\theta\theta}g_{\eta\eta})^{1/2}} \left[\frac{\partial}{\partial\eta} \left(\left(\frac{g_{\eta\eta}}{g_{\theta\theta}} \right)^{1/2} \Gamma_{\theta\theta}^\eta \right) - \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\left(\frac{g_{\eta\eta}}{g_{\theta\theta}} \right)^{1/2} \Gamma_{\theta\eta}^\eta \right) \right] \tag{15}$$

where the Christoffel symbols $\Gamma_{\theta\theta}^\eta$ and $\Gamma_{\theta\eta}^\eta$ are given by

$$\Gamma_{\theta\theta}^\eta = -\frac{1}{2g_{\eta\eta}} \left(\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial\eta} \right), \quad \Gamma_{\theta\eta}^\eta = \frac{1}{2g_{\eta\eta}} \left(\frac{\partial g_{\eta\eta}}{\partial\theta} \right). \tag{16}$$

We can see that at the points $\theta = 0$ or $\theta = \pi$, the component $g_{\eta\eta}$ of the tensor metric (14) vanishes ($g_{\eta\eta} = 0$). Therefore, the curvature (15) exhibits a singularity in these points. Except these two points, the curvature is well defined in every point of the manifold. Substituting the components of the tensor metric (14) into (15), the Gaussian curvature writes

$$K = \frac{4}{Ns} \left(2 - \frac{(4s(N-1) - 1)\cos^2\theta + 2s(N-1) + 1}{((4s(N-1) - 1)\cos^2\theta + 1)^2} \right). \tag{17}$$

We note that the Gaussian curvature (17) of the state manifold (14) depends on the rotation parameter θ , the number of qudits N and the value of particles spin s , while it is time-independent. In addition, it is simple to verify that for $N > 2$ and $s \geq \frac{1}{2}$, the curvature of the manifold can take negative values. This agrees with the results reported in [48,49]. Using this fact and the fact that the curvature (15) of the state manifold has a singularity near to the points $\theta = 0$ and π , we deduce that this state manifold has conical defects near to these points. Now to specify the topology of this manifold, we compute the integer Euler characteristic χ by using the Gauss-Bonnet theorem. It is given in terms of the components of the metric tensor (14) by [57]

$$\int_0^\pi \int_0^{\eta_{max}} K(g_{\theta\theta}g_{\eta\eta})^{1/2} d\theta d\eta + \Delta = 2\pi \chi, \tag{18}$$

where Δ is the boundary Euler integral which contains the contribution of conical defects. Introducing the expressions of the components of the tensor metric (14) and the Gaussian curvature (17) into the equation (18), we get

$$4s\eta_{max}(N-1) + \Delta = 2\pi \chi. \tag{19}$$

From this equation, one can determine the Euler characteristic χ describing the topology of the state manifold (14). This requires the evaluation of the boundary Euler integral Δ and this is achieved by taking into account that the angular defects are situated very close to the singular points $\theta = 0$ and π . Thus, near to the singularity points one rewrites the Fubini-Study metric (14) up to the second order in the parameter θ as

$$d\mathbf{S}_{\text{FS}}^2 = \frac{Ns}{2}d\theta^2 + 2N(N-1)^2s^3\theta^2d\eta^2. \quad (20)$$

On the other hand, the definition of the solid angle of a cone is given by $\Omega = 2\pi - 2\pi \cos\theta$ which corresponds to a revolution cone of angle at the apex 2θ . One notices that the second term on the right-hand side in this definition is the solid angle defined by the system around the cone apex during the evolution. The fact that the angular defects are close to the singular points $\theta = 0$ and π , we can write

$$2\pi \cos\theta \approx \frac{\mathbf{S}_{\text{FS}}(\eta_{\text{max}})}{R} = \frac{\sqrt{g_{\eta\eta}\eta_{\text{max}}}}{\sqrt{g_{\theta\theta}\theta}}, \quad (21)$$

where $\mathbf{S}_{\text{FS}}(\eta_{\text{max}})$ is the distance traveled by the system during one period ($t = \eta_{\text{max}}/J$) around the singular point and R is the distance between the system path and the singular point. Hence, the angular defects can be written

$$\Delta = 2 \left(2\pi - \frac{\sqrt{g_{\eta\eta}\eta_{\text{max}}}}{\sqrt{g_{\theta\theta}\theta}} \right), \quad (22)$$

where we multiplied by a factor 2 to take into account the fact that we have two singularity points. Reporting the components of the tensor metric (20) into the equation (22), we obtain

$$\Delta = 2(2\pi - 2s\eta_{\text{max}}(N-1)). \quad (23)$$

Inserting this result in the Gauss-Bonnet formula (18), we find the Euler characteristic $\chi = 2$. Hence, the quantum state manifold (14) associated with the set of states of the N spin- s system is of spherical topology. In the next section, we shall study the geometrical phase acquired by the N spin- s state (10) in the quantum state manifold defined by the metric tensor (14).

3. Geometrical phase acquired by the N spin- s system

After specifying the spherical topology of the quantum state manifold defined by the tensor metric (14). Now, we study the geometrical phase that is an interesting geometrical quantity which appears in the evolution of the quantum system under consideration. So, we start by considering the N spin- s system that is evolving on this quantum state manifold. In this case, the geometrical phase acquired by the evolved state (10) can be written as [58]

$$\Phi_g(t) = \arg\langle\psi_i|\psi(t)\rangle - \text{Im} \int_0^t \langle\psi(t')|\frac{\partial}{\partial t'}|\psi(t')\rangle dt', \quad (24)$$

being the difference between the total phase and the dynamical phase. We first compute the total phase acquired by the system. Then, the overlap between the initial state (5) and the evolved state (10) is given by

$$\langle\psi_i|\psi(t)\rangle = \left(1 + \tan^2\frac{\theta}{2}\right)^{-2Ns} \sum_{m_1, m_2, \dots, m_N = -s}^s e^{-i2\eta \sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j} \left(\prod_{\lambda=1}^N \left(\tan\frac{\theta}{2} \right)^{2(s+m_\lambda)} \frac{(2s)!}{(s+m_\lambda)!(s-m_\lambda)!} \right). \quad (25)$$

Introducing the expression (25) into the first term on the right-hand side of the equation (24), the total phase takes the form

$$\Phi_{\text{tot}} = -\arctan \left(\frac{\sum_{m_1, m_2, \dots, m_N = -s}^s \sin \left(2\eta \sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j \right) \left(\prod_{\lambda=1}^N \left(\tan\frac{\theta}{2} \right)^{2(s+m_\lambda)} \frac{(2s)!}{(s+m_\lambda)!(s-m_\lambda)!} \right)}{\sum_{m_1, m_2, \dots, m_N = -s}^s \cos \left(2\eta \sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j \right) \left(\prod_{\lambda=1}^N \left(\tan\frac{\theta}{2} \right)^{2(s+m_\lambda)} \frac{(2s)!}{(s+m_\lambda)!(s-m_\lambda)!} \right)} \right). \quad (26)$$

It appears that the total phase includes two essential parts: the first part is of geometrical type (geometrical phase) which can be noticed by the fact that the total phase depends on the parameters θ and η defining the evolution path on the space of states (14), whereas the second part is of dynamical type (dynamical phase) which can be noticed by the fact that the total phase depends on the time integral of the expectation value of the Hamiltonian (1) of the N spin- s system. Also, it is easy to verify that the total phase is defined modulo 2π and satisfies the periodicity relation

$$\Phi_{\text{tot}}(\eta + 2\pi) = \Phi_{\text{tot}}(\eta). \quad (27)$$

The explicit expression of the dynamical phase is obtained by reporting the evolved state (10) in the second term on right-hand side in the equation (24). Thus, one has

$$\Phi_{\text{dyn}} = -\eta s^2 N(N-1) \cos^2\theta. \quad (28)$$

Therefore, the difference between the total and dynamical phases gives the explicit form of geometrical phase acquired by the N spin- s state (10) during an arbitrary quantum evolution. One finds

$$\Phi_g = -\arctan \left(\frac{\sum_{m_1, m_2, \dots, m_N = -s}^s \sin \left(2\eta \sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j \right) \left(\prod_{\lambda=1}^N \left(\tan \frac{\theta}{2} \right)^{2(s+m_\lambda)} \frac{(2s)!}{(s+m_\lambda)!(s-m_\lambda)!} \right)}{\sum_{m_1, m_2, \dots, m_N = -s}^s \cos \left(2\eta \sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j \right) \left(\prod_{\lambda=1}^N \left(\tan \frac{\theta}{2} \right)^{2(s+m_\lambda)} \frac{(2s)!}{(s+m_\lambda)!(s-m_\lambda)!} \right)} \right) + \eta N(N-1)s^2 \cos^2 \theta. \quad (29)$$

Note that the geometrical phase is non-linear with respect to the time in contrast to the dynamical phase which evolves linearly with the time. Such phase depends on the evolution parameters θ and η , which means that it depends on the shape of the evolution path of the system, while the dependence on the number of particles (qudits) N and the value of spin s can be interpreted by the fact that the geometrical phase depends on the geometry of evolution space (14). Now, we consider a special situation where we examine the geometrical phase emerging from the evolution of the initial state (5) during a very short period of time. In this regard, expanding the exponential factor in (25) up to the second order in η , one can write

$$\langle \psi_i | \psi(t) \rangle \simeq 1 - \frac{\eta^2 s^2 N(N-1)}{4} \left[s(N-1) (2sN \cos^4 \theta + \sin^2 2\theta) + \sin^4 \theta \right] - i \eta s^2 N(N-1) \cos^2 \theta. \quad (30)$$

In this situation, the geometrical phase (29) rewrites as

$$\Phi_g \simeq -\arctan \left(\frac{4\eta s^2 N(N-1) \cos^2 \theta}{4 - \eta^2 s^2 N(N-1) (s(N-1)(2sN \cos^4 \theta + \sin^2 2\theta) + \sin^4 \theta)} \right) + \eta s^2 N(N-1) \cos^2 \theta, \quad (31)$$

which vanishes for $\eta = 0$ as the evolved state (10) coincides with the initial state (5). Besides, it is easy to see that in thermodynamic limit ($N \rightarrow \infty$) the total phase vanishes. This means that at each point of the evolution path, the geometrical phase coincides with the dynamical phase. In this sense, the geometrical phase can be measured experimentally since it is given in terms of the Hamiltonian (1) of the system. The same result can be obtained for the particles with higher values of spin. Considering now the case of the cyclic evolution such that the evolved state (10) satisfies the cyclic condition $|\psi(T)\rangle = e^{i\Phi_{tot}} |\psi(0)\rangle$. The geometrical phase acquired by the system during a cyclic quantum evolution is given by [59,60]

$$[\Phi_g]_0^T = i \int_0^T \langle \tilde{\psi}(t) | \frac{\partial}{\partial t} | \tilde{\psi}(t) \rangle dt, \quad (32)$$

where the section $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ is defined as $|\tilde{\psi}(t)\rangle = e^{-if(t)} |\psi(t)\rangle$ with $f(t)$ any smooth function satisfying $f(T) - f(0) = \Phi_{tot}$. Accordingly, the geometrical phase (32) rewrites

$$[\Phi_g]_0^T = \int_0^T d\Phi_{tot} + i \int_0^T \langle \psi(t) | \frac{\partial}{\partial t} | \psi(t) \rangle dt. \quad (33)$$

Reporting (26) and (28) into the equation (33), the geometrical phase acquired by the evolving state (10) for any cyclic quantum evolution on the quantum state manifold (14) takes the following form

$$[\Phi_g]_0^{\eta_{max}} = \eta_{max} N(N-1)s^2 \cos^2 \theta. \quad (34)$$

We find that the integral of the total phase acquired by the N spin- s system during any cyclic quantum evolution is zero ($\Phi_{tot} = 0$). Hence, the geometrical phase acquired for any cyclic quantum evolution during the interval $[0, \eta_{max}]$ is nothing but the cyclic integral of the expectation value of the Hamiltonian (1). In other words, during the transport of the N spin- s state around a closed curve on the state manifold, the acquired geometrical phase coincides with the dynamical phase. The fact that the calculation of the geometrical phase in the case of cyclic evolution requires the knowledge of the Hamiltonian means that this phase can be measured experimentally. This can be also related to the time-optimal evolution for the quantum system from an initial state to another one. This issue is the so-called quantum brachistochrone problem that we shall discuss in the following section.

4. Quantum brachistochrone problem of N spin- s system

The quantum brachistochrone problem concerns essentially the determination of the minimal time required to go over the shortest path joining the initial state (5) and the evolved state (10). In other words, the main purpose is to find the time-optimal path by maximizing the evolution velocity and minimizing the evolution time. As we are mainly concerned with time dependence, we shall assume that the angular variables θ and φ are constants. In this picture, the Fubini-Study metric (14) rewrites

$$dS_{FS}^2 = \frac{1}{2} N(N-1)s^2 \sin^2 \theta \left(1 + (4s(N-1) - 1) \cos^2 \theta \right) d\eta^2, \quad (35)$$

which shows that the evolution of the N spin- s system occurs on a circle of the radius $\sqrt{g_{\eta\eta}}$ for half-integer s and $\sqrt{g_{\eta\eta}}/2$ for integer s . The evolution velocity of the N spin- s system is defined by [12]

$$V = \frac{dS_{FS}}{dt} = \frac{2}{\hbar} \Delta E, \quad (36)$$

where ΔE is the energy uncertainty for the interaction Hamiltonian (1) in the evolving state (10). From the equation (36), it is obvious to see that if the energy uncertainty takes large values, the evolution is achieved in a short time and vice versa. Reporting the equation (35) into (36), the evolution velocity of N spin- s system is found as

$$V = Js \sqrt{\frac{N(N-1)\sin^2\theta (1 + (4s(N-1) - 1)\cos^2\theta)}{2}}. \quad (37)$$

Note that the evolution velocity depends of the coupling constant J between the spins as well as the number and the value of spins (N and s). Thus, for the higher values of these physical parameters, the evolution velocity in turn takes the higher values, except for $\theta = 0$ or $\theta = \pi$, where the evolution velocity (37) vanishes ($V = 0$) regardless of the values of these physical parameters. This because the evolved state (10) is not defined in these singular points. Now to evaluate the smallest possible time needed to achieve the time-optimal evolution, we begin by maximizing the evolution velocity (37) using the condition $dV/d\theta = 0$. As result, one gets the following equation

$$\sin 2\theta (2s(N-1) - (4s(N-1) - 1)\sin^2\theta) = 0, \quad (38)$$

which gives

$$\theta_{\max} = \arcsin \left(\sqrt{\frac{2s(N-1)}{4s(N-1) - 1}} \right). \quad (39)$$

The corresponding maximal evolution velocity is then given by

$$V_{\max} = Js^2(N-1) \sqrt{\frac{2N(N-1)}{4s(N-1) - 1}}. \quad (40)$$

Having determined the maximum value of the evolution velocity, we need also to evaluate the geodesic distance measured by the Fubini-Study metric (35) between the initial state (5) and the evolved state (10). For this, using the equation (36), we easily obtain

$$S_{\text{FS}} = \eta s \sqrt{\frac{N(N-1)\sin^2\theta (1 + (4s(N-1) - 1)\cos^2\theta)}{2}}. \quad (41)$$

Since the evolution velocity (37) is time-independent, the geodesic distance (41) evolves linearly with the time t . On the other hand, we see that for $\theta = 0$ or π , the geodesic distance (41) vanishes ($S_{\text{FS}} = 0$), because the state manifold exhibits a singularity in these points. In addition, for $\theta = \pi/2$, the geodesic distance (41) has a local minimum of the form

$$S_{\text{FSmin}} = \eta s \sqrt{\frac{N(N-1)}{2}}. \quad (42)$$

Hence, the optimal time needed to realize the time-optimal evolution of the N spin- s system is given by

$$\tau = \frac{S_{\text{FSmin}}}{V_{\max}} = \frac{\eta}{2Js(N-1)} \sqrt{4s(N-1) - 1}. \quad (43)$$

This condition corresponds to the time-optimal evolution of the N spin- s system that happens on the state manifold given by the circle (35). Such evolution is characterized by the maximal velocity and the minimal distance between the points corresponding to the initial and final quantum states. The quantum state which achieves this kind of time-optimal evolution can be generated by the unitary transformation $|\psi_i\rangle \rightarrow |\psi(\tau, \theta = \pi/2)\rangle = e^{-iH\tau} |\psi_i(\theta = \pi/2)\rangle$. The equation (43) can be also re-expressed as

$$\tau = \frac{1}{2s(N-1)} \sqrt{4s(N-1) - 1} t. \quad (44)$$

This shows that the optimal time τ is proportional to the time evolution t . Besides, it is easy to see that an increase in ordinary evolution time is accompanied by a increase in optimal evolution time and vice versa. For the case of $N = 2$ and $s = 1/2$ (two-spin system), the optimal time coincides with the ordinary time ($\tau = t$), while in the case of $N \geq 2$ and $s > 1/2$ (N spin- s system), the optimal time is strictly less than the ordinary time ($\tau < t$). It is interesting to note that in thermodynamic limit ($N \rightarrow \infty$), the optimal evolution time tends to zero ($\tau \rightarrow 0$). In this respect, the state manifold (the circle defined by the metric tensor (35)) takes the form of a straight line since the radius of the state circle becomes infinite. It is simple to check that the same results are obtained for the large values of spin s . To close this section, we notice that it is important to connect the results obtained above with the geometrical and dynamical characterization of entanglement by restricting our study to a two-qubit system with a coupling of Ising type. This is investigated in the next section.

5. Geometrical and dynamical characterization of the entanglement for a two spin-1/2 system ($N = 2, s = 1/2$)

In this section, we study the interplay between the entanglement and the results discussed in previous sections, such as the geometrical aspects and the quantum brachistochrone problem. For this purpose, we consider the simplest quantum system of a two spin-1/2 particles with a coupling of Ising type. The initial state (5) rewrites for a two spin-1/2 system as

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{(1 + zz^*)} \left(|-1/2, -1/2\rangle + z |-1/2, 1/2\rangle + |1/2, -1/2\rangle + z^2 |1/2, 1/2\rangle \right), \quad (45)$$

and the evolved state (10) becomes

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{(1 + zz^*)} \left(e^{-\frac{i\eta}{2}} | -1/2, -1/2 \rangle + ze^{\frac{i\eta}{2}} (| -1/2, 1/2 \rangle + | 1/2, -1/2 \rangle) + z^2 e^{-\frac{i\eta}{2}} | 1/2, 1/2 \rangle \right). \tag{46}$$

In this case, the Fubini-Study metric (14) reduces to

$$dS_{FS}^2 = \frac{1}{2} d\theta^2 + \frac{1}{4} \sin^2 \theta (1 + \cos^2 \theta) d\eta^2. \tag{47}$$

The degree of entanglement between the two spins in the evolving state (46) is defined by the Wootters concurrence [61]. It is given by

$$C = \sin^2 \theta |\sin \eta|. \tag{48}$$

It is clear that the entanglement between the two spins is affected by the dynamics of system. As a consequence, each point on state manifold (47) corresponds to a particular degree of entanglement predefined by the parameters of the system (θ and η). Also, we see that the point $\theta = \pi/2$ and $\eta = \pi/2$, corresponds to a maximally entangled state ($C = 1$). It must be noticed that by evolving the state $|\psi_i\rangle = | -1/2, -1/2 \rangle$, the evolved state will remain separable. This corresponds to the situation where $\theta = 0$ or π and this is due to the fact that the state $| -1/2, -1/2 \rangle$ is an eigenstate of the coupling Hamiltonian. However, for a generic value of the variable θ (e.g. $\theta \in]0, \pi[$), the concurrence oscillates periodically with respect to the parameters θ and η with the same period π . Thus, we restrict η to range in the interval $[0, \pi]$ such that the concurrence (48) writes simply as

$$C = \sin^2 \theta \sin \eta. \tag{49}$$

Thus, using the equation (49), the metric tensor (47) can be expressed in terms of the reduced concurrence as

$$dS_{FS}^2 = \frac{1}{8C'(1 - C')} dC'^2 + \frac{1}{4} C' (2 - C') d\eta^2, \tag{50}$$

where $C' = C/\sin \eta$ is the reduced concurrence which is ranging in the interval $[0, 1]$. This provides a parametrization of the quantum state manifold in terms of the entanglement degree and the evolution time. From the tensor metric (50), we see that for any given value of the reduced concurrence C' , the evolution of the two-spin system occurs on a one-dimensional manifold defined by

$$dS_{FS}^2 = \frac{1}{4} C' (2 - C') d\eta^2. \tag{51}$$

Hence, we deduce that the curves with equal reduced entanglement (C' constant) on the state manifold (50) are circles with the radius $R = \sqrt{C'(2 - C')}/4$. Furthermore, it is simple to verify that the areas of constant entanglement (C constant) are points on a one-dimensional manifold given by $dS_{FS}^2 = \chi(C, \eta) d\eta^2$ with $\chi(C, \eta)$ is a function of C and η . This clearly shows the importance of the entanglement in the reduction of the space of states (50). On the other hand, using the entanglement degree (49) together with the equation (17), we express the Gaussian curvature of the state manifold (50) as follows

$$K = 4 \left(2 - \frac{\sin \eta (3 \sin \eta - C)}{(2 \sin \eta - C)^2} \right). \tag{52}$$

From this expression, we find that the Gaussian curvature decreases as the concurrence increases. Indeed, remark that for $C = 0$ (the separable states), the curvature takes the maximal value $K_{\max} = 5$, while for $C = 1$ (the maximally entangled states). It takes the minimal value given by

$$K_{\min} = 4 \left(2 - \frac{\sin \eta (3 \sin \eta - 1)}{(2 \sin \eta - 1)^2} \right). \tag{53}$$

This can be interpreted by the fact that the separable states are situated on the areas of maximal curvature, whereas the maximally entangled states are situated on the areas of minimal curvature. One concludes that the amount of quantum correlations existing between the two spins affects the geometry of the quantum state manifold (50). This provides a nice relation between the degree of entanglement and the curvature of the manifold associated with the space of quantum states. To understand the interplay between the geometrical phase and the entanglement, we relate the geometrical phase acquired by the two spin-1/2 system with the concurrence. Indeed, using the equations (29) and (49), we have

$$\Phi_g = -\arctan \left(\frac{2 \cos^2 \frac{\eta}{2}}{(\sin \eta - C)} \right) + \frac{\eta}{2} \left(1 - \frac{C}{\sin \eta} \right). \tag{54}$$

Similarly to the Gaussian curvature (52), it is easy to verify that the geometrical phase (54) decreases as the concurrence increases which means that the existence of quantum correlations leads to a decrease of the geometrical phase acquired by the system. This can be justified by the fact that the geometry of quantum state manifold (50) is affected by the degree of entanglement (Gaussian curvature (53)). As we can see that for $\eta = \pi$, the total phase (the first term on the right-hand side in (54)) acquired by the system vanishes. Therefore, the geometrical phase coincides with the dynamical phase ($\Phi_g = \Phi_{dyn}$). In this case, the geometrical phase acquired by the evolved state (46) exhibits a linear behavior. This behavior is formally explained by the fact that the second term on the right-hand side in the equation (54) (dynamical phase) is a linear function with respect to the concurrence C . Such behavior can also be seen for the cyclic evolution

since in this case the geometrical and dynamical phases coincide. To close this section, we discuss the dynamical characterization of the entanglement for the two spin-1/2 system. For this, using the equations (37) and (49), the evolution velocity rewrites

$$V = \frac{J}{2} \sqrt{\frac{C}{\sin \eta} \left(2 - \frac{C}{\sin \eta} \right)}. \quad (55)$$

Using the equation (49) into (41), the geodesic distance between the points corresponding to the separable initial state (45) and the entangled state (46) is given by

$$S_{\text{FS}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\eta^2 C}{\sin \eta} \left(2 - \frac{C}{\sin \eta} \right)}. \quad (56)$$

These results give the evolution velocity and the geodesic distance in terms of the concurrence. This establishes a link between the dynamics of the two spin-1/2 system and the evolution of the amount of quantum correlations. From the analysis of equation (55), we find that more the two interacting spins are entangled more the evolution velocity increases rapidly and vice versa. The same behavior is obtained from the analysis of the geodesic distance (56). Now to discuss the optimal time associated with the optimal-time evolution of the two spin-1/2 system in relation with the entanglement degree, we need to maximize the evolution velocity (55) with respect to the concurrence C . By solving the equation $dV/dC = 0$ for all $C \in [0, 1]$, the maximum evolution velocity takes the value $V_{\text{max}} = J/2$, which only depends on the coupling constant J between the two spins. Thus, using the geodesic distance (56), the optimal time is given by

$$\tau' = \frac{S_{\text{FS}}}{V_{\text{max}}} = \frac{1}{J} \sqrt{\frac{\eta^2 C}{\sin \eta} \left(2 - \frac{C}{\sin \eta} \right)}. \quad (57)$$

Notice that for $C = 0$, the optimal time vanishes ($\tau' = 0$). This happens because the evolved state (46) coincides with the separable initial state (45). Also, for $C = \sin \eta$, the optimal time reaches its maximum value for which the optimal evolution of two spin-1/2 system is restricted to the ordinary evolution ($\tau' = t$). Geometrically, the optimal time (57) can be written in terms of the time component $g_{\eta\eta}$ of the metric tensor (50) as $\tau' = 2t \sqrt{g_{\eta\eta}}$. This means that the optimal time required by the two spin-1/2 system to attain the maximal amount of entanglement depends on the geometry of the state manifold (50). Indeed, we can see that the expansion of the state manifold (50) along the time component $g_{\eta\eta}$ induces an increase of the optimal time and vice versa. Accordingly, we conclude that the optimal time required by the two-qubit system under the Ising interaction is affected by both the entanglement degree and the geometry of the corresponding quantum state manifold.

6. Summary

In this paper, we have considered a physical system of N interacting qudits (with $d = 2s + 1$) consisting of N spin- s particles with long-range interaction modeled by the Ising-type Hamiltonian. We have assumed that the initial state is a tensorial product of N $SU(2)$ coherent states. The evolved state is parametrized by the spherical angles (θ, φ) and the evolution time (t) . To explore the geometrical and dynamical properties of the system under study, we have computed the Fubini-Study metric to characterize the quantum state manifold. The fact that the components of this metric are φ -independent means that the state manifolds with a predefined azimuthal angle (φ) have the same geometry. In this respect, we have focused our attention on the geometry of two-parametric manifold (14) with a predefined azimuthal angle. By evaluating the Gaussian curvature and using the Gauss-Bonnet theorem, we have demonstrated that the state manifold (14) associated with the N spin- s system has the topology of a sphere. We have calculated the geometrical phase acquired by the system under the arbitrary and cyclic evolutions. This is done by evaluating the difference between the total and dynamical phases. We have found that in the case of an arbitrary evolution the geometrical phase varies non-linearly with the time in contrast to the case of cyclic evolution and we have showed that it depends on both the geometry of the state manifold and the shape of the evolution path. Furthermore, we have investigated the quantum brachistochrone problem for the N spin- s system. We have established the optimal time (43) which in turn expressed in relation with the ordinary evolution time (44). We have found that for $N = 2$ and $s = 1/2$ (two spin-1/2 system), the optimal time coincides with the ordinary time, while in the case of $N \geq 2$ and $s > 1/2$ (N spin- s system), the optimal time is strictly less than the ordinary time. Also, in the thermodynamic limit ($N \rightarrow \infty$), the optimal evolution time tends to zero ($\tau \rightarrow 0$). In this respect, the quantum state manifold (a circle) defined by the metric tensor (35) takes the form of a straight line since the radius of the state circle becomes infinite. The same results are obtained for large spin values s . In order to illustrate the interplay between the entanglement, the geometrical aspects and the dynamics in this multipartite system, we have considered the special case of two spin-1/2 system under the Ising interaction. We derived the Fubini-Study metric in terms of the concurrence and we showed the importance of the entanglement in the reduction of the dimension of the state manifold. As result, we have concluded that in the quantum state manifold (50) the separable states are situated on the areas of maximal curvature, whereas the maximally entangled states are situated on the areas of minimal curvature. Besides, the existence of quantum correlations leads to a decrease of the geometrical phase acquired by the system. Finally, we have explored the dynamical characterization of the entanglement between the two interacting spins. Indeed, we have determined the evolution velocity and the geodesic distance measured by the Fubini-Study metric (50) in terms of the concurrence. This establishes a link between the dynamics of the two spins under the Ising interaction and the evolution of the amount of quantum correlations. We have concluded that more the two spins are entangled more the evolution velocity evolves rapidly and vice versa. We have discussed the optimal time associated with the optimal-time evolution in relation with the entanglement. For this, we maximized the evolution velocity with respect to the concurrence and we obtained the optimal time in terms of the entanglement (57). We have found that for the critical value of concurrence $C = \sin \eta$, the optimal time coincides with the ordinary time. In addition, we showed that the optimal time is also proportional to the time component $g_{\eta\eta}$ of the metric tensor (50). Accordingly, we conclude that the optimal evolution between the separable initial state and the entangled state is affected by both the entanglement degree and the geometry of the corresponding quantum state manifold.

Declaration of competing interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

References

- [1] T.W. Kibble, Geometrization of quantum mechanics, *Commun. Math. Phys.* 65 (1979) 189–201.
- [2] A. Ashtekar, T.A. Schilling, *Geometrical Formulation of Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, NY, 1999, pp. 23–65.
- [3] D.C. Brody, L.P. Hughston, Geometric quantum mechanics, *J. Geom. Phys.* 38 (2001) 19–53.
- [4] J.P. Provost, G. Vallee, Riemannian structure on manifolds of quantum states, *Commun. Math. Phys.* 76 (1980) 289–301.
- [5] M.N. Bera, R. Prabhu, A.K. Pati, A.S. De, U. Sen, Limit on time-energy uncertainty with multipartite entanglement, arXiv preprint arXiv:1303.0706, 2013.
- [6] W.K. Wootters, Statistical distance and Hilbert space, *Phys. Rev. D* 23 (1981) 357.
- [7] A.K. Pati, Relation between phases and distance in quantum evolution, *Phys. Lett. A* 159 (1991) 105–112.
- [8] R. Cheng, Quantum geometric tensor (Fubini-Study metric) in simple quantum system: a pedagogical introduction, arXiv preprint arXiv:1012.1337, 2010.
- [9] U. Boscain, P. Mason, Time minimal trajectories for a spin 1/2 particle in a magnetic field, *J. Math. Phys.* 47 (2006) 062101.
- [10] A.M. Frydryszak, V.M. Tkachuk, Quantum brachistochrone problem for a spin-1 system in a magnetic field, *Phys. Rev. A* 77 (2008) 014103.
- [11] B. Russell, S. Stepney, Zermelo navigation in the quantum brachistochrone, *J. Phys. A, Math. Theor.* 48 (2015) 115303.
- [12] J. Anandan, Y. Aharonov, Geometry of quantum evolution, *Phys. Rev. Lett.* 65 (1990) 1697.
- [13] A.R. Kuzmak, V.M. Tkachuk, The quantum brachistochrone problem for an arbitrary spin in a magnetic field, *Phys. Lett. A* 379 (2015) 1233–1239.
- [14] A. Carlini, A. Hosoya, T. Koike, Y. Okudaira, Quantum brachistochrone, arXiv preprint arXiv:quant-ph/0511039, 2005.
- [15] C.M. Bender, D.C. Brody, H.F. Jones, B.K. Meister, Faster than Hermitian quantum mechanics, *Phys. Rev. Lett.* 98 (2007) 040403.
- [16] D.C. Brody, D.W. Hook, On optimum Hamiltonians for state transformations, *J. Phys. A, Math. Gen.* 39 (2006) L167.
- [17] M.A. Nielsen, M.R. Dowling, M. Gu, A.C. Doherty, Optimal control, geometry, and quantum computing, *Phys. Rev. A* 73 (2006) 062323.
- [18] M.R. Dowling, M.A. Nielsen, The geometry of quantum computation, *Quantum Inf. Comput.* 8 (2008) 861–899.
- [19] M.A. Nielsen, M.R. Dowling, M. Gu, A.C. Doherty, Quantum computation as geometry, *Science* 311 (2006) 1133–1135.
- [20] B. Li, Z.H. Yu, S.M. Fei, Geometry of quantum computation with qutrits, *Sci. Rep.* 3 (2013) 2594.
- [21] H.P. Laba, V.M. Tkachuk, Geometric characteristics of quantum evolution: curvature and torsion, arXiv preprint arXiv:1006.4447, 2010.
- [22] A.R. Kuzmak, Geometry of quantum state manifolds generated by the Lie algebra operators, *J. Geom. Phys.* 126 (2018) 1–6.
- [23] A.M. Frydryszak, M. Gieysztor, A. Kuzmak, Probing the geometry of two-qubit state space by evolution, *Quantum Inf. Process.* 18 (2019) 84.
- [24] B. Amghar, M. Daoud, Quantum state manifold and geometric, dynamic and topological phases for an interacting two-spin system, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* 17 (2020) 2050030–1284.
- [25] W. LiMing, Z.L. Tang, C.J. Liao, Representation of the $SO(3)$ group by a maximally entangled state, *Phys. Rev. A* 69 (2004) 064301.
- [26] P. Milman, Phase dynamics of entangled qubits, *Phys. Rev. A* 73 (2006) 062118.
- [27] P. Milman, R. Mosseri, Topological phase for entangled two-qubit states, *Phys. Rev. Lett.* 90 (2003) 230403.
- [28] P. Levay, The geometry of entanglement: metrics, connections and the geometric phase, *J. Phys. A, Math. Gen.* 37 (2004) 1821.
- [29] D. Bures, An extension of Kakutani's theorem on infinite product measures to the tensor product of semifinite w^* -algebras, *Trans. Am. Math. Soc.* 135 (1969) 199–212.
- [30] B.A. Bernevig, H.D. Chen, Geometry of the three-qubit state, entanglement and division algebras, *J. Phys. A, Math. Gen.* 36 (2003) 8325.
- [31] K. Hasebe, Hopf maps, lowest Landau level, and fuzzy spheres, *Symmetry Integr. Geom.* 6 (2010) 071.
- [32] P.A. Pinilla, J.R. Luthra, Hopf fibration and quantum entanglement in qubit systems, arXiv preprint arXiv:0904.4925, 2009.
- [33] R. Mosseri, R. Dandoloff, Geometry of entangled states, Bloch spheres and Hopf fibrations, *J. Phys. A, Math. Gen.* 34 (2001) 10243.
- [34] I. Bengtsson, J. Brännlund, K. Życzkowski, C^P^n , or, entanglement illustrated, *Int. J. Mod. Phys. A* 17 (2002) 4675–4695.
- [35] M. Kuś, K. Życzkowski, Geometry of entangled states, *Phys. Rev. A* 63 (2001) 032307.
- [36] D. Chruściński, Geometric aspects of quantum mechanics and quantum entanglement, *J. Phys. Conf. Ser.* 30 (2006) 9.
- [37] M.V. Berry, Quantal phase factors accompanying adiabatic changes, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A, Math. Phys.* 392 (1984) 45–57.
- [38] K. Durstberger, *Geometric Phases in Quantum Theory*, 2002.
- [39] C. Nash, S. Sen, *Topology and Geometry for Physicists*, Academic Press, 1983.
- [40] J. Samuel, R. Bhandari, General setting for Berry's phase, *Phys. Rev. Lett.* 60 (1988) 2339.
- [41] C. Philippidis, D. Bohm, R.D. Kaye, The Aharonov-Bohm effect and the quantum potential, *Nuovo Cimento B* 71 (1982) 75.
- [42] X. Wang, A. Sørensen, K. Mølmer, Multibit gates for quantum computing, *Phys. Rev. Lett.* 86 (2001) 3907.
- [43] J.A. Jones, V. Vedral, A. Ekert, G. Castagnoli, Geometric quantum computation using nuclear magnetic resonance, *Nature* 403 (2000) 869–871.
- [44] L.M. Duan, J.I. Cirac, P. Zoller, Geometric manipulation of trapped ions for quantum computation, *Science* 292 (2001) 1695–1697.
- [45] C.E.R. Souza, J.A.O. Huguenin, P. Milman, A.Z. Khoury, Topological phase for spin-orbit transformations on a laser beam, *Phys. Rev. Lett.* 99 (2007) 160401.
- [46] J. Du, J. Zhu, M. Shi, X. Peng, D. Suter, Experimental observation of a topological phase in the maximally entangled state of a pair of qubits, *Phys. Rev. A* 76 (2007) 042121.
- [47] A.R. Kuzmak, V.M. Tkachuk, Geometry of a two-spin quantum state in evolution, *J. Phys. Rev.* 49 (2015) 045301.
- [48] A.R. Kuzmak, Entanglement and quantum state geometry of a spin system with all-range Ising-type interaction, *J. Phys. A, Math. Theor.* 51 (2018) 175305.
- [49] Y.S. Krynytskyi, A.R. Kuzmak, Geometry and speed of evolution for a spin-s system with long-range zz-type Ising interaction, *Ann. Phys.* 405 (2019) 38–53.
- [50] A.R. Kuzmak, Quantum state geometry and entanglement of two spins with anisotropic interaction in evolution, *J. Geom. Phys.* 116 (2017) 81–89.
- [51] F.T. Arecchi, E. Courtens, R. Gilmore, H. Thomas, Atomic coherent states in quantum optics, *Phys. Rev. A* 6 (1972) 2211.
- [52] W.M. Zhang, R. Gilmore, Coherent states: theory and some applications, *Rev. Mod. Phys.* 62 (1990) 867.
- [53] W.M. Zhang, Quantum nonintegrability in finite systems, *Phys. Rep.* 252 (1995) 1–100.
- [54] I. Bengtsson, K. Życzkowski, *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [55] D.N. Page, Geometrical description of Berry's phase, *Phys. Rev. A* 36 (1987) 3479.
- [56] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, vol. 2, Wiley, New York, 1969.
- [57] M. Kolodrubetz, V. Gritsev, A. Polkovnikov, Classifying and measuring geometry of a quantum ground state manifold, *Phys. Rev. B* 88 (2013) 064304.
- [58] N. Mukunda, R. Simon, Quantum kinematic approach to the geometric phase. I. General formalism, *Ann. Phys.* 228 (1993) 205–268.
- [59] Y. Aharonov, J. Anandan, Phase change during a cyclic quantum evolution, *Phys. Rev. Lett.* 58 (1987) 1593.
- [60] A.K. Pati, Geometric aspects of noncyclic quantum evolutions, *Phys. Rev. A* 52 (1995) 2576.
- [61] W.K. Wootters, Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits, *Phys. Rev. Lett.* 80 (1998) 2245.

Conclusion générale et perspectives

La caractéristique la plus remarquable de la physique moderne, est l'introduction des concepts géométriques décrivant les constituants fondamentaux de la nature, en particulier, l'apparition de la mécanique quantique géométrique qui constitue une généralisation de la théorie quantique dans un espace autre que l'espace de Hilbert usuel, il s'agit de l'espace de Hilbert projectif, i. e., variété des états quantiques purs. En d'autres termes, l'idée principale de cette approche est de construire un espace de phase quantique, équivalent à l'espace de phase classique, sur lequel la dynamique des systèmes quantiques est bien établie. De nombreuses études montrent la grande importance de la géométrisation de la mécanique quantique dans plusieurs domaines de recherches, à savoir la théorie de l'information quantique, la physique de matière condensée, la procédure de la deuxième quantification, le rôle des états cohérents dans les considérations semi-classiques et l'approximation WBK, etc...

Dans cette thèse, nous avons contribué à l'étude de quelques aspects géométriques et dynamiques pour des systèmes quantiques multipartites, à savoir la métrique de Fubini-Study, la connexion de Berry-Simon, la phase géométrique, la courbure Gaussienne, la vitesse d'évolution et la distance géodésique. En restreignant notre étude à des systèmes bipartites, nous avons paramétré la variété d'états résultante par la concurrence de Wootters ainsi que toutes les autres structures géométriques, ce qui simplifie considérablement l'investigation des liens existant entre eux. D'ailleurs, nous avons étudié l'effet des corrélations quantiques sur la dynamique des systèmes bipartites et la résolution du problème du brachistochrone quantique de point de vue de l'intrication.

Le premier chapitre s'intéresse par la construction de la variété des états quantiques, i. e. espace de phase quantiques, avec deux méthodes différentes : la première concerne la construction de la variété des états quantiques à l'aide de la théorie des représentations de groupes ainsi que le formalisme des états cohérents. La deuxième porte sur la construction directe de la variété des états quantiques à partir de l'espace original de Hilbert. Pour ces deux méthodes, nous avons exploré les différentes structures géométriques émergentes ainsi que leurs interprétations physiques dans le but de comprendre les aspects géométriques fondamentaux de la théorie quantique.

Le second chapitre est consacré essentiellement à la présentation des différents formalismes de la phase géométrique sur la variété des états quantiques construite dans le premier chapitre. Nous avons commencé par l'approche relative à la dérivation de la phase géométrique présentée par M. Berry pour une évolution cyclique adiabatique. Puis, nous avons explicité la méthode de dérivation de la phase cyclique de Aharonov-Anandan. Ensuite, nous avons examiné l'approche cinématique de Mukunda-Simon pour une évolution quantique plus générale, et nous avons discuté les phases topologiques fractionnaires effectuées par les opérations unitaires locales.

Le troisième chapitre présente une application de tous les outils géométriques définis au premier et au second chapitres pour un système physiques de N qudits. Nous avons examiné la dynamique correspondante, déterminé la variété des états quantiques associée et donné la métrique de Fubini-Study associée. Nous avons montré que la dynamique du système se produit sur une variété bidimensionnelle de topologie sphérique. Nous avons examiné la phase géométrique acquise par le système sous des évolutions arbitraires et cycliques. De plus, nous avons étudié le problème du brachistochrone quantique concernant la détermination du plus petit temps possible pour réaliser une évolution optimale dans le temps. En restreignant notre étude à un système de deux qubits, une analyse détaillée est effectuée pour la métrique de Fubini-Study, la courbure Gaussienne, la phase géométrique et le temps optimal en relation avec l'intrication de deux qubits.

Dans le quatrième chapitre, à l'aide de la première fibration de Hopf, nous avons réalisé la seconde fibration de Hopf qui nous a conféré une représentation géométrique pertinente de l'espace d'états de deux qubits. À cet égard, nous avons analysé les structures géométriques émergeant de ces fibrations de Hopf. De plus, en calculant la concurrence de Wootters sur le fibré de Hopf associé, nous avons étudié le tenseur métrique et le champ de jauge non-abélien $SO(4)$ défini sur la base de Hopf S^4 en termes d'intrication. Enfin, en transformant un état à deux qubits intriqués sous la forme de Schmidt, nous examinons les différentes phases quantiques acquises par cet état sous des opérations unitaires locales $U(2) \times U(2)$ en relation avec l'intrication ainsi que la géométrie de la base de Hopf S^4 .

Le travail développé dans cette thèse a donné lieu à deux publications.

La première publication porte sur l'étude d'un système physique à deux qubits représentés par deux spins en interaction et soumis à l'effet d'un champ magnétique externe dirigé suivant l'axe z , de sorte que le système total est décrit par le modèle de Heisenberg de type XXX . La dynamique du système est caractérisée par deux paramètres physiques, à savoir l'interaction entre les spins et le champ magnétique externe. Nous avons montré que l'évolution du système se produit sur un tore. Nous avons également calculé la phase géométrique en évaluant la différence entre la phase totale et la phase dynamique. Nous avons trouvé que la phase géométrique dépend à la fois de la géométrie prise par le tore et du chemin d'évolution transporté par l'état de deux spins. De plus, nous avons déduit la phase topologique comme une partie de la phase géométrique qui ne reçoit aucune contribution dynamique et nous avons montré qu'elle dépend uniquement du chemin suivi par l'état. En utilisant la concurrence de Wootters comme quantificateur des corrélations quantiques entre les deux spins, nous avons montré la métrique de Fubini-Study en termes de degré d'intrication. Le tenseur métrique résultant est une métrique Euclidienne avec une signature définie positive $(2, 0)$. Les courbes d'intrication constante sont des cercles. En fixant le champ magnétique externe, nous avons établi que l'évolution du système à deux spins est limitée à un cercle. Nous avons calculé la vitesse d'évolution correspondante et la distance géodésique parcourue par le système en termes de la concurrence. L'influence de l'intrication sur la phase géométrique, la vitesse d'évolution et la distance géodésique est étudiée en fonction du rayon du cercle d'états. Nous avons enfin discuté, d'un point de vue géométrique, l'effet du champ magnétique externe sur l'évolution du système pour atteindre la quantité maximale d'intrication.

Dans **la deuxième publication**, nous avons étudié un système physique composé de N spin- s avec une interaction à longue portée modélisée par le Hamiltonien de type Ising. Pour explorer les propriétés géométriques et dynamiques du système étudié, nous avons calculé la métrique de

Fubini-Study correspondante. En évaluant la courbure Gaussienne et en utilisant le théorème de Gauss-Bonnet, nous avons démontré que la variété d'états associée au système de N spin- s a la topologie d'une sphère. Nous avons examiné la phase géométrique lors de processus d'évolution arbitraires et cycliques. Nous avons constaté que dans le cas d'une évolution arbitraire, la phase géométrique varie de façon non linéaire avec le temps, contrairement au cas d'une évolution cyclique, et nous avons montré qu'elle dépend à la fois de la géométrie de la variété d'états et de la forme du chemin d'évolution. De plus, nous avons étudié le problème du brachistochrone quantique où nous avons établi le temps optimal qui est à son tour exprimé en fonction du temps d'évolution ordinaire. Nous avons montré que pour système à deux spins $-1/2$, le temps optimal coïncide avec le temps ordinaire, alors que dans le cas où $N \geq 2$ et $s > 1/2$, le temps optimal est strictement inférieur au temps ordinaire. De plus, à la limite thermodynamique ($N \rightarrow \infty$), le temps d'évolution optimal s'annule. À cet égard, la variété des états quantiques prend la forme d'une ligne droite, puisque le rayon du cercle d'état devient infini. Les mêmes résultats sont obtenus pour les grandes valeurs de spin s . Afin d'illustrer le lien entre l'intrication, les aspects géométriques et la dynamique dans ce système multipartite, nous avons considéré le cas particulier d'un système à deux spin- $1/2$ sous l'interaction de type Ising. Nous avons dérivé la métrique de Fubini-Study en termes de la concurrence de Wootters, et nous avons montré l'importance de l'intrication dans la réduction de dimension de la variété d'états. En conséquence, nous avons conclu que les états séparables sont situés sur les zones de courbure maximale, tandis que les états maximalement intriqués sont situés sur les zones de courbure minimale. Par ailleurs, l'existence des corrélations quantiques entraîne une diminution de la phase géométrique acquise par le système. Finalement, nous avons exploré la caractérisation dynamique de l'intrication entre les deux spins. En effet, nous avons déterminé la vitesse d'évolution et la distance géodésique en termes de la concurrence. Ceci établit un lien entre la dynamique du système et l'évolution de la quantité de corrélations quantiques. Nous avons conclu que plus les deux spins sont intriqués plus la vitesse d'évolution évolue rapidement et vice versa. Nous avons discuté le temps optimal associé à l'évolution optimal en fonction de l'intrication. Pour cela, nous avons maximisé la vitesse d'évolution par rapport à la concurrence et nous avons obtenu le temps optimal en termes d'intrication. Nous avons montré que pour une valeur critique de la concurrence, le temps optimal coïncide avec le temps ordinaire. De plus, nous avons montré que le temps optimal est également proportionnel à la composante temporelle de la métrique de Fubini-Study. Par conséquent, nous concluons que l'évolution optimale entre l'état initial séparable et l'état intriqué est affectée à la fois par le degré d'intrication et par la géométrie de la variété des états quantiques correspondante.

En guise de perspective, il est intéressant d'explorer le lien entre les corrélations quantiques et les structures géométriques sur l'espace de Hilbert, plutôt que sur l'ensemble convexe des états de densité en tenant compte des procédures de purification des états quantiques [144, 145]. De cette manière, l'avantage de traiter les amplitudes de probabilité plutôt que les densités de probabilité [146] peut être généralisé du régime des états purs aux états mixtes. Outre les avantages de calcul possibles liés à la purification des états de densité, nous faisons remarquer que les motivations physiques pour considérer les états purs plutôt mixtes résident dans leurs applications potentielles dans divers domaines de l'information quantique [30, 62, 86, 88, 90, 91, 92, 147]. Ainsi, en vertu de ce dernier point de vue, on peut en général mettre la géométrie de l'espace de Hilbert projectif à la première place, même s'il s'agit du régime généralisé des états mixtes.

Nous sommes également convaincus que la formulation géométrique de la théorie quantique aidera à approfondir notre compréhension de la nature des corrélations dans des systèmes quantiques

multipartites. Nous espérons que ce travail pourra aider le lecteur à s'intéresser à ce domaine de recherche passionnant.

Bibliographie

- [1] T. Melvill, Observations on light and colours, *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada*, **8** (1914), 231.
- [2] H. Hertz, Ueber einen Einfluss des ultravioletten Lichtes auf die elektrische Entladung, *Annalen der Physik*, **33** (1887), 983.
- [3] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light*, Cambridge University Press, (2000).
- [4] Y. Meyer, *Uncertainty principle Hilbert bases and operator algebras*, Prin. Univ. Press, (1985).
- [5] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloë, *Quantum mechanics*, EDP Sciences (2021).
- [6] V. Aldaya and J. A. de Azcarraga, *J. Math. Phys*, **23** (1982), 1297-1305.
- [7] A. Echeverria-Enriquez, M. C. Munoz-Lecanda, N. Román-Roy and C. Victoria-Monge, arXiv preprint math-ph/9904008, (1999).
- [8] J. R. Klauder, arXiv preprint quant-ph/9510008, (1995).
- [9] A. Bohm, A. Mostafazadeh, H. Koizumi, Q. Niu and J. Zwanziger, Springer Science and Business Media (2013).
- [10] T. W. B. Kibble, *Commun. Math. Phys*, **64** (1978), 73-82.
- [11] T. W. B. Kibble, *Commun. Math. Phys*, **65** (1979), 189-201.
- [12] W. M. Zhang and R. Gilmore, *Rev. Mod. Phys*, **62** (1990), 867.
- [13] K. Życzkowski and I. Bengtsson, *An introduction to quantum entanglement : a geometric approach*, arXiv preprint quant-ph/0606228, (2006).
- [14] A. Ashtekar and T. A. Schilling, Springer, New York, NY, (1999), 23-65.
- [15] T. A. Schilling, *Geometry of quantum mechanics*, Diss. Pennsylvania State University, (1996).
- [16] J. Anandan, *Found. Phys*, **21** (1991), 1265-1284.
- [17] J. P. Provost and G. Vallee, *Commun. Math. Phys*, **76** (1980), 289-301.
- [18] M. N. Bera, R. Prabhu, A. K. Pati, A. S. De and U. Sen, arXiv preprint arXiv :1303.0706, (2013).
- [19] W. K. Wootters, *Phys. Rev. D*, **23** (1981), 357.
- [20] A. K. Pati, *Phys. Lett. A*, **159** (1991), 105-112.
- [21] P. Aniello, J. Clemente-Gallardo, G. Marmo and G. F. Volkert, préimpression arXiv arXiv : 1101.0625, (2011).
- [22] A. Dey, S. Paul, P. Roy and T. Sarkar, arXiv preprint arXiv :1605.01358, (2016).
- [23] R. Cheng, arXiv preprint arXiv :1012.1337, (2010).

-
- [24] S. Abe, Phys. Rev. A, **48** (1993), 4102.
- [25] J. Anandan and Y. Aharonov, Phys. Rev. Lett, **65** (1990), 1697.
- [26] S. Abe, Phys. Rev. A, **46** (1992), 1667.
- [27] C. M. Bender, D. C. Brody, H. F. Jones and B. K. Meister, Phys. Rev. Lett, **98** (2007), 040403.
- [28] D. C. Brody and D. W. Hook, J. Phys. A : Math. Gen, **39** (2006), L167.
- [29] A. Carlini, A. Hosoya, T. Koike and Y. Okudaira, Phys. Rev. Lett, **96** (2006), 060503.
- [30] A. R. Kuzmak and V. M. Tkachuk, Phys. Lett. A, **379** (2015), 1233-1239.
- [31] M. A. Nielsen, M. R. Dowling, M. Gu and A. C. Doherty, Phys. Rev. A, **73** (2006), 062323.
- [32] D. P. Divincenzo, Proc. Math. Phys. Eng. Sci, **454** (1998), 261-276.
- [33] M. A. Nielsen, M. R. Dowling, M. Gu and A. C. Doherty, Science, **311** (2006), 1133-1135.
- [34] F. M. Mele, arXiv preprint arXiv :1703.06415, (2017).
- [35] H. Heydari, arXiv preprint arXiv :1503.00238, (2015).
- [36] J. Grabowski, M. Kuś and G. Marmo, J. Phys. A : Math. Gen, **38** (2005), 10217.
- [37] D. Chruscinski, J. Phys : Conf. Ser, **30** (2006), 9.
- [38] J. M. Leinaas, J. Myrheim and E. Ovrum, Phys. Rev. A, **74** (2006), 012313.
- [39] A. R. Kuzmak, J. Phys A : Math. Theor, **51** (2018), 175305.
- [40] P. Levay, J. Phys. A : Math. Gen, **37** (2004), 1821.
- [41] W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett, **80** (1998), 2245.
- [42] B. Amghar and M. Daoud, Phys. Lett. A, **384** (2020), 126682.
- [43] B. Amghar and M. Daoud, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys, **17** (2020), 2050030-1284.
- [44] M. V. Berry, Proc. Roy. Soc. Lond. A, **392** (1984), 45-57.
- [45] A. Messiah, Quantum mechanics, Hermann, (1962).
- [46] Y. Aharonov and J. Anandan, Phys. Rev. Lett, **58** (1987), 1593.
- [47] M. V. Berry, Proc. R. Soc. Lond. A, **414** (1987) 31-46.
- [48] J. Samuel and R. Bhandari, Phys. Rev. Lett, **60** (1988), 2339.
- [49] V. M. Tkachuk, Lviv : Ivan Franko National University of Lviv [in Ukrainian], 2011.
- [50] I. Bengtsson and K. Życzkowski, Geometry of Quantum States (Cambridge : Cambridge University Press), (2006).
- [51] D. N. Page, Phys. Rev. A, **36** (1987), 3479.
- [52] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry (New York : Wiley), (1969).
- [53] N. Mukunda and R. Simon, Ann. Phys, **228** (1993), 205-268.
- [54] L. E. Oxman and A. Z. Khoury, Phys. Rev. Lett, **106** (2011), 240503.
- [55] A. Z. Khoury and L. E. Oxman, Phys. Rev. A, **89** (2014), 032106.
- [56] P. Milman, Phys. Rev. A, **73** (2006), 062118.
- [57] P. Milman and R. Mosseri, Phys. Rev. Lett, **90** (2003), 230403.
- [58] W. LiMing, Z. L. Tang and C. J. Liao, Phys. Rev. A, **69** (2004), 064301.
- [59] S. S. Bullock, D. P. O'Leary and G. K. Brennen, Phys. Rev. Lett, **94** (2005), 230502.

- [60] R. Ionicioiu, T. P. Spiller and W. J. Munro, *Phys. Rev. A*, **80** (2009), 012312.
- [61] W. Xiang-Bin and M. Keiji, *Phys. Rev. Lett*, **87** (2001), 097901.
- [62] J. A. Jones, V. Vedral, A. Ekert and G. Castagnoli, *Nature*, **403** (2000), 869-871.
- [63] E. Sjöqvist, A. K. Pati, A. Ekert, J. S. Anandan, M. Ericsson, D. K. Oi and V. Vedral, *Phys. Rev. Lett*, **85** (2000), 2845.
- [64] S. L. Zhu and Z. D. Wang, *Phys. Rev. Lett*, **89** (2002), 097902.
- [65] A. Ekert, M. Ericsson, P. Hayden, H. Inamori, J. A. Jones, D. K. Oi and V. Vedral, *J. Mod. Opt*, **47** (2000), 2501-2513.
- [66] X. Wang, A. Sørensen and K. Mølmer, *Phys. Rev. Lett*, **86** (2001), 3907.
- [67] L. M. Duan, J. I. Cirac and P. Zoller, *Science*, **292** (2001), 1695-1697.
- [68] A. Y. Kitaev, *Ann. Phys*, **303** (2003), 2-30.
- [69] J. Zak, *Phys. Rev*, **134** (1964), A1602.
- [70] R. D. King-Smith and D. Vanderbilt, *Phys. Rev. B*, **47** (1993), 1651.
- [71] R. Resta, *Rev. Mod. Phys*, **66** (1994), 899.
- [72] H. Koizumi and Y. Takada, *Phys. Rev. B*, **65** (2002), 153104.
- [73] G. Sundaram and Q. Niu, *Phys. Rev. B*, **59** (1999), 14915.
- [74] T. Jungwirth, Q. Niu and A. H. MacDonald, *Phys. Rev. Lett*, **88** (2002), 207208.
- [75] J. E. Avron and R. Seiler, *Phys. Rev. Lett*, **54** (1985), 259.
- [76] Q. Niu, D. J. Thouless and Y. S. Wu, *Phys. Rev. B*, **31** (1985), 3372.
- [77] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale and M. den Nijs, *Phys. Rev. Lett*, **49** (1982), 405.
- [78] D. Arovas, J. R. Schrieffer and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett*, **53** (1984), 11.
- [79] Q. Niu, X. Wang, L. Kleinman, W. M. Liu, D. M. C. Nicholson and G. M. Stocks, *Phys. Rev. Lett*, **83** (1999), 207.
- [80] Q. Niu and L. Kleinman, *Phys. Rev. Lett*, **80** (1998), 2205.
- [81] D. J. Thouless, P. Ao and Q. Niu, *Phys. Rev. Lett*, **76** (1996), 3758.
- [82] J. R. Taylor, T. Becherrawy and A. Boudier-Cusset, *Classical mechanics*, De Boeck, (2012).
- [83] B. Falkenburg and P. Mittelstaedt, Springer, Berlin, Heidelberg, *Probabilistic Interpretation of Quantum Mechanics*, (2009), 485-491.
- [84] D. C. Brody and L. P. Hughston, *J. Geom. Phys*, **38** (2001), 19-53.
- [85] W. M. Zhang, *Phys. Rep*, **252** (1995), 1-100.
- [86] D. C. Brody, G. W. Gibbons and D. M. Meier, *New J. Phys*, **17** (2015), 033048.
- [87] A. M. Frydryszak and V. M. Tkachuk, *Phys. Rev. A*, **77** (2008), 014103.
- [88] A. R. Kuzmak, *J. Geom. Phys*, **116** (2017), 81-89.
- [89] H. A. Carteret and A. Sudbery, *J. Phys. A : Math. Gene*, **33** (2000), 4981.
- [90] M. Kuś and K. Życzkowski, *Phys. Rev. A*, **63** (2001), 032307.
- [91] S. L. Zhu and Z. D. Wang, *Phys. Rev. Lett*, **91** (2003), 187902.
- [92] S. N. Molotkov and K. A. Balygin, *Laser Phys*, **30** (2020), 065201.
- [93] L. Gyongyosi and S. Imre, *Information Sciences*, **285** (2014), 1-23.

-
- [94] H. Weyl, Courier Corporation, The theory of groups and quantum mechanics, (1950).
- [95] D. Martin, Proc. Edinburgh Math. Soc, **12** (1960), 67.
- [96] J. von Neumann, Mathematical Foundations of Quantum Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, (1932).
- [97] A. Böhm, Quantum mechanics : foundations and applications, Springer Science and Business Media, (2013).
- [98] B. G. Wybourne, Classical groups for physicists, John Wiley and Sons, Inc., New York, (1974).
- [99] J. Q. Chen, Group Representation Theory for Physicists, World Scientific, (1989).
- [100] W. M. Zhang and J. M. Yuan, Phys. Rev. A, **42** (1990), 7125.
- [101] L. Hua, Harmonic analysis of functions of several complex variables in the classical domains, American Math. Soc, (1963).
- [102] S. Bergmann, Kernel Function and Conformal Mapping, American Math. Society, New York, (1950).
- [103] A. Botero, J. Math. Phys, **44** (2003), 5279-5295.
- [104] O. Ben-Bassat, C. Brav, V. Bussi and D. Joyce, Geom. Topol, **19** (2015), 1287-1359.
- [105] A. Weinstein, Differ. Geom. Appl, **9** (1998), 213-238.
- [106] M. Boucetta, Introduction to Poisson Geometry, School of Geometry and Dynamic Systems, Houari Boumediène University of Science and Technology, Algiers, (2007).
- [107] K. Hasebe, Symmetry, Integrability and Geometry : Methods and Applications, **6** (2010), 071.
- [108] P. Zanardi, P. Giorda and M. Cozzini, Phys. Rev. Lett, **99** (2007), 100603.
- [109] F. M. Fernández, Introduction to perturbation theory in quantum mechanics, CRC press, (2000).
- [110] M. Kolodrubetz, V. Gritsev and A. Polkovnikov, Phys. Rev. B, **88** (2013), 064304.
- [111] K. Durstberger, Geometric phases in quantum theory, na, (2002).
- [112] P. Ehrenfest, Annalen der Physik, **356** (1916), 327-352.
- [113] M. Born and V. Fock, Zeitschrift für Physik, **51** (1928), 165-180.
- [114] D. J. Griffiths and D. F. Schroeter, Introduction to quantum mechanics, Cambridge University Press, (2018).
- [115] B. Simon, Phys. Rev. Lett, **51** (1983), 2167.
- [116] J. Anandan and L. Stodolsky, Phys. Rev. D, **35** (1987), 2597.
- [117] A. K. Pati, Phys. Lett. A, **202** (1995), 40-45.
- [118] A. K. Pati, Phys. Rev. A, **52** (1995), 2576.
- [119] P. Fiziev and H. Kleinert, arXiv preprint hep-th/9503075, (1995).
- [120] S. Pancharatnam, Proceedings of the Indian Academy of Sciences-Section A, Springer India, **44** (1956), 398-417.
- [121] A. G. Wagh and V. C. Rakhecha, Phys. Lett. A, **197** (1995), 107-115.
- [122] A. Z. Khoury, L. E. Oxman, B. Marques, A. Matoso and S. Pádua, Phys. Rev. A, **87** (2013), 042113.
- [123] L. E. Oxman, A. Z. Khoury, F. C. Lombardo and P. I. Villar, Ann. Phys, **390** (2018), 159-179.

- [124] K. B. Petersen and M. S. Pedersen, The matrix cookbook, Imm. Dtu. dk/pubdb/p. Php, **3274** (2012), 14.
- [125] M. R. Dowling and M. A. Nielsen, Quant. Inform. Comput, **8** (2008), 861-899.
- [126] B. Li, Z. H. Yu and S. M. Fei, Sci. Rep, **3** (2013), 2594.
- [127] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki and K. Horodecki, Rev. Mod. Phys, **81** (2009), 865.
- [128] M. Lewenstein, A. Sanpera, V. Ahufinger, B. Damski, A. Sen and U. Sen, Adv. Phys, **56** (2007), 243-379.
- [129] L. Amico, R. Fazio, A. Osterloh and V. Vedral, Rev. Mod. Phys, **80** (2008), 517.
- [130] Y. S. Krynyskyi and A. R. Kuzmak, Ann. Phys, **405** (2019), 38-53.
- [131] F. T. Arecchi, E. Courtens, R. Gilmore and H. Thomas, Phys. Rev. A, **6** (1972), 2211.
- [132] H. P. Laba and V. M. Tkachuk, arXiv preprint arXiv :1006.4447, (2010).
- [133] E. Schrödinger. Naturwissenschaften, **23** (1935), 807.
- [134] P. A. Pinilla and J. R. Luthra, arXiv preprint arXiv :0904.4925, (2009).
- [135] A. R. Kuzmak and V. M. Tkachuk, J. Phys. A : Math. Theor, **49** (2015), 045301.
- [136] R. Mosseri and R. Dandoloff, J. Phys. A : Math. Gen, **34** (2001), 10243.
- [137] J. Baez, Bull. Am. Math. Soc, **39** (2002), 145-205.
- [138] Ü. H. Coşkun, S. Kürkçüoğlu and G. C. Toga, Phys. Rev. D, **95** (2017), 065021.
- [139] R. Mosseri, Two-qubit and three-qubit geometry and Hopf fibrations, Topology in Condensed Matter, (2006), 187-203.
- [140] M. Nakahara, Geometry, topology and physics, CRC press, (2003).
- [141] W. Xi and W. Ku, Phys. Rev. B, **100** (2019), 121201.
- [142] E. Demler and S. C. Zhang, Ann. Phys, **271** (1999), 83-119.
- [143] A. Ekert and P. L. Knight, Am. J. Phys, **63** (1995), 415-423.
- [144] V. I. Man'ko, G. Marmo, E. C. G. Sudarshan and F. Zaccaria, J. Phys. A : Math. Gen, **35** (2002), 7137.
- [145] V. I. Man'ko, G. Marmo, E. C. G. Sudarshan and F. Zaccaria, Phys. Lett. A, **273** (2000), 31-36.
- [146] P. Facchi, R. Kulkarni, V. I. Man'ko, G. Marmo, E. C. G. Sudarshan and F. Ventriglia, Phys. Lett. A, **374** (2010), 4801-4803.
- [147] R. Penrose, The Road to Reality. A Complete Guide to the Laws of the Universe, Joanthan Cape, Random House, Londres, (2004).

Résumé

La mécanique quantique est une théorie fondamentale pour décrire la réalité physique du monde microscopique. La formulation géométrique de la mécanique quantique vise à donner une description unifiée des systèmes physiques basée sur ses structures géométriques sous-jacentes. Cette thèse de doctorat est intitulée “Aspects géométriques des corrélations quantiques dans des systèmes multiqubits”. Elle a pour objectif l'étude de l'espace des états purs d'une collection de qubits à travers deux approches : la première vise à explorer les différentes structures géométriques de la variété associée à l'espace des états purs, à savoir la forme de Kähler, la métrique de Fubini-Study, la courbure, la connexion de Berry-Simon, la phase géométrique, etc. La deuxième a pour but l'étude de la dynamique du système à travers le calcul de la vitesse d'évolution et la distance géodésique qui simplifient énormément la résolution du problème du brachistochrone quantique. Ces deux approches ont été examinées en relation avec l'intrication quantique pour des systèmes bipartites. Les résultats que nous avons examinés et discutés dans ce travail donnent un aperçu très intéressant des structures géométriques des systèmes quantiques et de notre compréhension de la nature géométrique de la théorie de l'information quantique.

Mots-clefs : Mécanique quantique géométrique, Phase géométrique, Variété des états quantiques, Intrication quantique, Dynamique quantique, Problème du brachistochrone quantique.

Abstract

The quantum mechanics is a fundamental theory to describe the physical reality of the microscopic world. The geometric formulation of quantum mechanics aims at giving a unified description of physical systems based on its underlying geometric structures. This PhD thesis is entitled “Geometric aspects of quantum correlations in multiqubit systems”. It aims at studying the pure states space of a collection of qubits through two approaches: the first one aims at exploring the different geometric structures of the manifold associated to the space of pure states, namely, the Kähler form, the Fubini-Study metric, the curvature, the Berry-Simon connection, the geometric phase, etc. The second one aims at studying the dynamics of the system through the evaluation of the evolution speed and the geodesic distance which considerably simplify the solution of the quantum brachistochrone problem. These two approaches have been examined in relation with the quantum entanglement for the bipartite systems. The results examined and discussed in this work give a very interesting insight into the geometric structures of quantum systems and our understanding of the geometric nature of the quantum information theory.

Keywords: Geometric quantum mechanics, Geometric phase, quantum state manifold, Quantum entanglement, Quantum dynamics, Quantum brachistochrone problem.