



UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH

THÈSE

Présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES-FÈS

Pour l'obtention du **Diplôme de Doctorat National**

Centre d'Etudes Doctorales: **Sciences et Techniques de l'ingénieur**

Formation Doctorale: **Mathématiques**

Option : **Mathématiques Appliquées - Modélisation - Probabilités**

Sous le thème:

**Modélisation, Analyse et Approche Probabiliste des
Structures Micro-économiques: Application aux activités
génératrices de revenus**

Par:

Ghizlane Chaibi

Soutenue : le 22 octobre 2016

Devant le jury:

Pr. SIDKI Omar	FST Fès	Président
Pr. EZZAKI Fatima	FST Fès	Rapporteur
Pr. HADDA Mohammed	ENSAM	Rapporteur
Pr. SEGHIR Driss	FS Meknès	Rapporteur
Pr. BENGUABRIT Youssef	ENSAM	Examineur
Pr. HILALI Abdelmajid	FST Fès	Examineur
Pr. Mohammed El KHOMSSI	FST Fès	Directeur de thèse
Pr. Ahmed EL HILALI ALAOUI	FST Fès	Co-directeur de thèse

Dédicace

A celui qui m'a aidé à découvrir le 'savoir' le trésor inépuisable.

De tous les pères, tu as été le meilleur, tu as su m'entourer d'attention, m'inculquer les valeurs nobles de la vie, m'apprendre le sens du travail, de l'honnêteté et de la responsabilité.

Merci d'avoir été toujours là pour moi, un grand soutien tout au long de mes études.

Tu as été et tu seras toujours un exemple à suivre pour tes qualités humaines, ta persévérance et ton perfectionnisme.

A la plus douce et la plus merveilleuse de toutes les mamans.

A une personne qui m'a tout donné sans compter.

Aucun hommage ne saurait transmettre à sa juste valeur ; l'amour, le dévouement et le respect que je porte pour toi.

A mes frères Mohamed, Youssef, Amine, Anouar.

A mon mari Chref.

A ma petite lala Asmae.

A tous ceux que j'ai cités je dédie cette thèse.

Remerciement

Tout d'abord, je tiens à remercier mon directeur de thèse, Monsieur le Pr. Mohammed El KHOMSSI, pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail doctoral, pour ses conseils et pour toutes les heures qu'il a consacrées à diriger cette recherche. je lui adresse ma gratitude pour ses qualités pédagogiques, scientifiques et humaines .

Je voudrais exprimer mes remerciements à mon co-directeur de thèse Monsieur le Pr. Ahmed EL HILALI ALAOUI , pour ses conseils , ses observations et son soutien moral qui m'ont aidés .

Vivement, je remercie Monsieur le Pr. OMAR Sidki de me faire l'honneur de présider le jury.

J'adresse ma profonde gratitude et remerciements au professeurs Madame Pr. EZZAKI Fatima, Monsieur le Pr. HADDA Mohammed et Monsieur le Pr. SEGHIR Driss qui ont eu l'amabilité de rédiger un rapport de ma thèse et leurs présence au jury ma fait un grand honneur.

Je remercie également les professeurs Monsieur le Pr. BENGUABRIT Youssef et Monsieur le Pr. HILALI Abdelmajid pour leurs présence aux membre de jury.

Enfin, je remercie tous les membres de ma famille, mes collègues et tous ceux qui m'ont apportés de l'aide durant toutes mes études.

Table des matières

Table des figures	viii
Liste des tableaux	ix
Introduction générale	1
I Lorsque les mathématiques aident à passer de l’informel au formel	8
1 Introduction	8
2 L’économie informelle	9
2.1 Dominance du secteur informel	9
2.2 Inconvénients du secteur informel	11
2.3 Soutiens possibles	12
3 Initiative Nationale pour le Développement humain	13
3.1 Les objectifs de l’INDH	13
3.2 Les déficits des AGR au Maroc	14
3.3 Carence des études d’aspect qualitatives/quantitatives des AGR	15
4 Les mathématiques outil de modélisation et de résolution	17
4.1 Les théories de la microéconomie	17
4.2 Les mathématiques et la microéconomie	17
5 Conclusion	18
II Construction d’une Méthode d’Analyse Multicritère Dynamique Multi-Décideurs	20
1 Introduction	20
2 Éléments de base et Méthodes	24

2.1	Concepts fondamentaux de l'analyse multicritère	24
2.2	Méthodes d'analyse multicritère	29
2.2.1	Méthode de la somme pondérée	30
2.2.2	Méthode AHP	30
3	Construction d'une nouvelle méthode d'analyse multicritère	34
3.1	Décomposition de l'objectif	34
3.2	Évaluation et compatibilité des critères	37
3.3	Détermination des poids	39
3.3.1	Les poids des dimensions	39
3.3.2	Les poids relatifs des critères	40
3.3.3	Les poids globaux des critères	41
3.4	Méthode composée (AHP/ Somme Pondérée)	42
3.4.1	Somme pondérée relative	42
3.4.2	Somme pondérée globale	43
3.4.3	Somme pondérée moyenne	44
3.5	Classement des actions potentielles	46
4	Applications	47
5	Conclusion	48

III Sélection des projets micro-économiques sur la base de la rentabilité socio-économique 50

1	Introduction et objectifs	50
2	Problème de ciblage d'aide : limites d'une technique	53
2.1	Une technique proposée avec un simple codage	53
2.2	Amélioration de la technique	54
3	Bilan et Valeur actuelle	56
3.1	L'équation bilan	56
3.2	Valeur actuelle nette moyenne	58
3.3	Analyse de la valeur actuelle moyenne suivant le taux d'actualisation	59
3.4	Analyse de la valeur actuelle moyenne suivant la durée de vie	60
4	Ordonnancement à partir de la valeur actuelle	61
4.1	Construction d'une partition canonique	61
4.2	Critère micro-structure	63
4.3	Algorithme du choix optimal ou admissible des AGR	64
4.4	Critère macro-structure	66

4.5	Construction d'un référentiel d'aide au financement	67
4.6	Classification des éléments de la structure Ω	72
5	Construction d'un indice global	74
5.1	Notion d'un indice global	74
5.2	Classe dominante des AGR	76
5.3	Aspect récurrent de l'indice global	77
6	Conclusion	77
IV	Rentabilité des systèmes de formation dans le cadre micro-économique	79
1	Introduction	79
2	Critères de la rentabilité et cadre d'étude	82
2.1	Critères d'évaluation de la rentabilité	82
2.2	Cadre de l'étude	83
3	Taux interne de la rentabilité d'une formation d'une année	84
3.1	Bilan opérationnel	84
3.2	Formulation mathématique et hypothèses d'étude	85
3.3	Existence et unicité de la racine : TRI	87
3.4	Algorithme de résolution	89
4	Taux interne de rentabilité sur un cycle de formation	90
4.1	Formulation mathématique et hypothèses générales	91
4.2	Existence et unicité de la racine	93
4.3	Algorithme de calcul de la racine	95
4.4	Formation avec période de chômage	96
5	Applications	97
5.1	Justification de l'application	97
5.2	Rentabilité de la formation Licence par rapport au DEUG	98
5.3	Rentabilité de la formation DEUG par rapport au BAC	100
6	Conclusion	101
V	Analyse probabiliste et différentielle des profits des opérateurs d'un projet micro-économique	103
1	Introduction	103
2	Formulation des résultats des opérateurs	105
2.1	Le résultat net du projet	105
2.2	Formulation du revenu des actions	107

2.3	Formulation de revenu du créancier	109
3	Variance des profits et interprétations	110
3.1	Variance du profit des membres de la structure	110
3.2	Variance du profit de l'actionnaire	111
3.3	Variance du profit du créancier	112
3.4	Estimation de la probabilité de non-remboursement	113
3.5	Analyse économique des résultats obtenus	114
4	Analyse d'un échantillon de N projets	115
4.1	Choix de la taille de l'échantillon ou contrôle du fond de garantie	115
4.2	Simulation numérique	117
5	Étude de revenus des opérateurs économiques	119
5.1	Remarques d'aspect économique	119
5.2	Étude du résultat net en fin de la période	119
5.3	Étude de revenu d'actionnaire	122
5.4	Étude de revenu de créancier	126
6	La fonction du gain total	129
6.1	Étude de la fonction du gain total	129
6.2	Utilité de la fonction du gain total	131
7	conclusion	132
	Conclusion générale et perspectives	134
	Références	136
	Annexe du chapitre 2	142
1	Première application : Comparaison Tramway / Bus	142
1.1	Problématique	142
1.2	Identifier les dimensions et les critères	143
1.3	Affecter les poids	145
1.4	Performance des critères	150
2	Deuxième application : Sélection d'une AGR	153
2.1	Dimensions et Critères	153
2.2	Affectation des poids	156
2.3	Evaluation des critères	159

Annexe du chapitre 3	164
3 Problème de ciblage d'aide	164
Annexe du chapitre 4	166

Table des figures

I.1	Emplois informels dans le monde	10
I.2	Incidence de l'emploi informel par région (en % de l'emploi total)	10
I.3	Part d'emploi informel non- agricole dans les pays en développement par région	11
I.4	Bilan des AGR crée entre 2005 et 2016	16
II.1	Indicateur	28
II.2	Indicateur	37
III.1	Cycle de vie d'un investissement	57
IV.1	Le parcours possible pour une formation d'une année	85
IV.2	Le parcours possible pour une formation de N année	91
IV.3	Courbe possible du polynôme P	95
IV.4	Le parcours possible avec une période de chômage	96
IV.5	<i>La courbe de P pour les quatre filières</i>	99
V.1	La courbe de f_0	118
V.2	La courbe de f_1	118
V.3	La courbe de f_{10}	118
V.4	Domaine D_1 de participation de l'actionnaire	126
V.5	Domaine D_2 de participation de l'actionnaire	126

Liste des tableaux

II.1	<i>Exemple de dimensions et critères</i>	27
II.2	<i>Principe des sommes pondérées</i>	30
II.3	<i>L'échelle de valeur Saaty</i>	31
II.4	<i>Calcul de la cohérence de la matrice de comparaison</i>	33
II.5	<i>La cohérence aléatoire</i>	34
II.6	<i>Les données du décideur D_i</i>	39
II.7	<i>Matrice de comparaison des dimensions</i>	39
II.8	<i>Matrice de comparaison des critères</i>	40
II.9	<i>Poids construits</i>	41
II.10	<i>Tableau des données nécessaires pour la résolution</i>	42
II.11	<i>Somme pondérée relative</i>	43
II.12	<i>Evaluation par les sommes pondérées relatives</i>	44
III.1	<i>Situations possibles</i>	54
III.2	<i>Transformation en écriture exponentielle</i>	54
III.3	<i>Normalisation des valeurs</i>	55
III.4	<i>Indice de profitabilité</i>	64
III.5	<i>Valeurs minimales de l'indice de profitabilité</i>	68
III.6	<i>Tableau référentiel</i>	72
IV.1	<i>Les inputs du premier l'algorithme</i>	98
IV.2	<i>Variation de la rentabilité avec l'espérance de vie</i>	100
IV.3	<i>Dépenses et revenus de la formation DEUG</i>	100

IV.4	<i>Dépenses et revenus de la formation Licence</i>	101
V.1	<i>Étude des profits par rapport à la probabilité</i>	128
V.2	<i>Étude des profits par rapport au capital</i>	129
V.3	<i>Étude des profits par rapport à l'action</i>	129
V.4	<i>Étude des profits par rapport à la dette</i>	130
A.1	<i>Identification des dimensions</i>	143
A.2	<i>Critères de la première dimension</i>	145
A.3	<i>Matrice de comparaison des dimensions</i>	146
A.4	<i>Poids des dimensions</i>	146
A.5	<i>Calcul de la cohérence du jugement du D_1</i>	146
A.6	<i>Matrice de comparaison des critères de 1ère dimension</i>	148
A.7	<i>Poids relatifs des critères de 1ère dimension</i>	148
A.8	<i>Poids globaux des critères de 1ère dimension</i>	149
A.9	<i>Poids de deuxième et troisième dimensions</i>	150
A.10	<i>Tableau des performances réelles</i>	151
A.11	<i>Tableau des performances après la transformation</i>	151
A.12	<i>Tableau des performances normalisées</i>	151
A.13	<i>Somme pondérée relative des décideurs D_1, D_2 et D_4.</i>	152
A.14	<i>Somme pondérée relative du décideur D_3.</i>	152
A.15	<i>Somme pondérée globale pour le décideur D_1</i>	152
A.16	<i>Somme pondérée globale pour le décideur D_2</i>	153
A.17	<i>Somme pondérée globale pour les décideurs D_3 et D_4</i>	153
A.18	<i>Dimensions choisies</i>	154
A.19	<i>Critères choisis par le décideur D_1</i>	155
A.20	<i>Critères choisis par le décideur D_2</i>	155
A.21	<i>Critères choisis par le décideur D_3</i>	155
A.22	<i>Poids des dimensions du décideur D_1</i>	156
A.23	<i>Matrice de comparaison des critères de D_1</i>	156
A.24	<i>Poids relatifs des critères de D_1</i>	156
A.25	<i>Poids globaux des critères de D_1</i>	157
A.26	<i>Poids des critères de D_2</i>	157
A.27	<i>Matrice de comparaison des dimensions de D_3</i>	158
A.28	<i>Matrice de comparaison des critères de D_3</i>	158
A.29	<i>Poids relatifs des critères de D_3</i>	158

A.30	<i>Poids globaux des critères de D_3</i>	159
A.31	<i>Evaluation des critères de D_1</i>	159
A.32	<i>Normalisation d'évaluation de D_1</i>	160
A.33	<i>Sommes relatives calculées par le décideur D_1</i>	160
A.34	<i>Sommes globales calculées par le décideur D_1</i>	160
A.35	<i>Evaluation et normalisation des critères de D_2</i>	161
A.36	<i>Somme relative pour D_2</i>	161
A.37	<i>Evaluation des critères de D_3</i>	162
A.38	<i>Normalisation des critères de D_3</i>	162
A.39	<i>Somme relative de D_3</i>	162
A.40	<i>Somme globale de D_3</i>	163

Introduction générale

La présence forte du secteur informel dans le monde entier est devenue une composante importante dans l'anneau du développement durable pour une large population vulnérable pauvre qui n'arrive pas à accéder au secteur formel : c'est un axe parallèle avec ce dernier. Et parfois dans les pays en développement, c'est la composante dominante absorbant le flux continu du chômage et de la migration.

Les facteurs qui nous ont encouragés à orienter notre étude dans ce domaine sont :

- L'absence des lois de protection sociale.
- L'absence de la qualification de certains travailleurs.
- L'irrégularité des revenus entre les travailleurs.
- La carence des études scientifiques qui traitent le secteur.

Les obstacles de la réussite de l'INDH marocaine, qui peut être la plus importante initiative visant un développement socioéconomique du pays, nous ont incités à essayer de comprendre , au moins, le défi et de proposer ainsi quelques modélisations mathématiques aux microprojets, particulièrement en ce qui concerne les méthodes d'aide à la décision au niveau de la sélection des projets proposés, l'étude et l'évaluation d'un projet en partant des données réelles et des hypothèses naturelles reflétant le concret.

L'expérience de l' INDH a montré que la formation est une exigence économique , c'est ce qui nous a poussé à chercher dans ce travail à évaluer la rentabilité d'une formation à partir de ses coûts et de ses bénéfices.

Nous croyons absolument que le cadre théorique mathématique reste un besoin et une nécessité renouvelable pour corriger les carences du développement de notre système socioéconomique, surtout au moment où le secteur souffre de la faiblesse des études faites sur les structures

microéconomiques dues principalement à :

- l'absence des critères d'analyse et de traitement.
- l'absence des stratégies du choix.
- l'absence des spécialistes qualifiés dans le domaine et qui sont capables de suivre et d'orienter ces projets vers le succès.

Organisation du mémoire

Ce travail s'est donné pour but la création de quelques modélisations mathématiques des phénomènes liés au secteur informel, en particulier pour les projets AGR¹.

Il comporte cinq chapitres :

Dans **le premier chapitre**, nous présentons le contexte général du secteur informel. Nous commençons d'abord par une introduction dans laquelle nous définissons la notion de l'emploi informel, ensuite nous présentons la dominance du secteur dans le monde, en précisant à l'aide des diagrammes, les zones les plus concernées et en soulignant les principales complexités du problème. Puis nous présentons un ensemble d'avantages et d'inconvénients accompagné de quelques suggestions que nous jugeons utiles.

L'INDH est un mécanisme aidant à structurer l'informel. De ce point de vue, nous présentons ses objectifs nobles et sa contribution à l'encouragement de la culture des AGR dans tout le Maroc. Mais l'ensemble d'obstacles qui empêchent le succès de ses quelques projets et, surtout ceux qui sont liés aux conditions économiques du pays au niveau de la culture et de la formation des citoyens ciblés et aussi la vulnérabilité des conditions sociales, nous ont motivés à choisir ce sujet.

La nature des projets micro-économiques est collective puisque les associations, les coopératifs, les ONG² et plusieurs ministères interviennent soit au niveau de la sélection des projets ou au niveau de la procédure de financement et de suivi. Il s'agit d'un problème multi-décideurs. Grâce à ce motif, nous pensons dans **le deuxième chapitre**, qu'une méthode d'aide à la décision multicritères multi-décideurs est un moyen d'appui à ce secteur car, au moins, elle offre un outil de sélection, de choix et également d'évaluation de ces projets. Le problème du développement est dynamique car ses critères et ses ressources changent avec le temps, donc nous estimons qu'il faut introduire le facteur du temps dans ce genre de problème afin de suivre tous les changements possibles des données.

1. Une activité génératrice de revenus AGR est une activité de production de biens et de services à des fins de vente.

2. ONG : organisation non gouvernementale

La construction de notre méthode commence par la décomposition de l'objectif qui engendre les dimensions et les critères de chaque décideur, ce qui génère les fonctions de l'évaluation dynamique liées à la nature des critères et des sous critères et non pas au décideur.

Une deuxième étape subjective est la détermination des poids faite par chaque décideur indépendamment des autres. Ici, nous définissons les poids des dimensions et les poids relatifs des critères et nous assemblons les deux poids dans la définition des poids globaux.

La dernière étape est le calcul des différentes sommes pondérées : relatives, globales et moyennes via l'objectif visé par le décideur afin de sélectionner la meilleure action.

Toute méthode construite nécessite des applications mesurant son efficacité. Nous proposons ainsi deux méthodes : la première est de nature macroéconomique tandis que la deuxième a un aspect microéconomique.

Ainsi ce chapitre est consacré à une étude multicritères multi-décideurs dynamique, elle donne une méthode qui peut être élargie en dehors de notre sujet de thèse.

L'étude de ce chapitre a fait l'objet de deux publications :

1. Le premier article est sous le titre :

"Comparative analysis multiple criteria for the choice of a common transport system in Rabat"

publié au journal Euroeconomica à l'Université Danubius de galati. Vol 34, No 2, Janvier 2015. Page 7-19.

2. La généralisation de l'idée de ce premier article a donné le deuxième intitulé :

"The Classification of Alternatives Based a Multi-criteria Analysis Technique and the Combination of AHP and the Weighted Sum"

publié au British Journal of Mathematics & Computer Science. Vol 14, Issue 3. Article no. BJMCS.23247. Février 2016. Page 1-18.

Dans le **troisième chapitre**, nous commençons par une présentation de la procédure de la sélection des AGR de l'INDH au niveau des comités provinciaux du développement humain. Puis nous contribuons à compléter la carence à l'aide de plusieurs critères tels que :

- Une analyse de l'équation bilan selon la valeur actuelle moyenne ou le taux d'actualisation.
- La construction d'une partition canonique de l'ensemble des AGR à partir de la valeur actuelle.

- Le choix de l'AGR optimale à partir de l'indice de profitabilité.
- La comparaison de plusieurs ensembles du même type d'AGR via l'indice de profitabilité macrostructure.
- Une classification de l'ensemble des AGR relativement à l'écart relatif.
- La construction d'un indice global permettant de préciser la classe des AGR dominantes.

Ces outils définis représentent des mécanismes d'évaluation et de choix des AGR relativement à la notion de rentabilité. Ils nous ont aidés à construire un référentiel utile d'aide à la sélection : il regroupe des valeurs de référence de chaque type d'AGR relativement aux conditions de chaque région et de chaque classe sociale ciblée.

L'étude de ce chapitre a fait l'objet de deux publications :

1. Le premier article est sous le titre :

"Tools for the selection of micro-economic projects from socio-economic returns"

publié au journal Euroeconomica à l'Université Danubius de galati. Vol 33, No 1, Juillet 2014. Page 17- 27.

2. Le deuxième article est intitulé :

"Outils pour sélection des projets micro-économique à partir de la rentabilité socio-économique"

les publications du Centre Arabe des Recherches et de l' Étude des Politiques sur "la pauvreté et les pauvres dans le Maghreb", les 26-27-28 Novembre 2015. https://www.youtube.com/watch?v=xTHh_sSyF10

Le quatrième chapitre est un prolongement de la notion de la rentabilité citée dans le chapitre précédent. En effet, nous partons d'une certitude que les ressources humaines sont le vrai capital de développement de tous les pays. Certes, les projets microéconomiques visent les classes sociales fragiles qui ont, dans la plupart des cas, au plus un niveau scolaire faible. Sans doute, les diplômes et les formations sont des axes pour améliorer les compétences de l'individu. Aujourd'hui, les politiques du développement insistent sur les formations scolaires et socioprofessionnelles³ [OFPPT], comme critères essentiels de soutien et d'assistance aux pauvres. Dans ce sens, ce chapitre évalue la rentabilité des systèmes de formation données dans le cadre microéconomique à travers une modélisation mathématique. C'est une façon de

3. L'Office de la Formation Professionnelle et de la Promotion du Travail(OFPPT) a plus de 340 établissements, avec 370000 stagiaires en formation en 2014/2015.

comparer les divers coûts de la formation et les gains attendus de deux individus dont l'un a suivi la formation et l'autre ne l'a pas suivie. Cette modélisation se transforme à la recherche des zéros d'un polynôme de degré élevé sous certaines contraintes. La résolution mathématique fait appel à l'étude analytique des polynômes. La notion de rentabilité exige d'avoir un seul zéro.

La modélisation proposée s'adapte au moins aux trois possibilités :

- formation sur une année
- formation sur plusieurs années
- formation suivie d'une période de chômage.

Cependant, en s'appuyant sur la réalité économique du phénomène étudié, nous introduisons des hypothèses naturelles imposées pour évaluer la rentabilité d'une formation.

Pour un tel modèle, il nous a été possible de trouver mathématiquement le taux de rentabilité interne.

Notons que l'essentiel de ce chapitre a fait l'objet de deux publications :

1. Le premier article est sous le titre :

***" Modélisation et quantification de la rentabilité des systèmes éducatifs :
Formation d'une année "***

publié au Global Journal of Human-Social Science : Economics. Novembre 2014. Volume 14, Issue 7, version 1.0, page 51- 55

2. La généralisation de l'idée nous a permis d'étudier la rentabilité d'une formation qui nécessite plusieurs années. Ce qui nous a donné le deuxième article intitulé :

"Profitability of Education Systems : Training on N Year"

publié au Asian Academic Research, Journal of social & Humanities. Vol 1, Issue 33, page 387- 398. Mars 2015.

La microéconomie de manière générale, le secteur informel et les activités génératrices de revenus en particulier sont fortement risqués. Dire succès et échec fait appel à la notion de la probabilité négligée dans la plupart des études faites dans ce domaine. C'est à travers l'analyse probabiliste qu'on peut mieux comprendre, analyser et protéger un projet non lucratif.

À partir de cette réflexion de base, nous cherchons dans le **dernier chapitre** à introduire la probabilité d'échec d'un projet financé par des dettes et la probabilité de non-remboursement du prêt. Ce chapitre propose alors une étude probabiliste et différentielle des profits des différents opérateurs intervenants au financement des microprojets. Après la présentation des profits

attendus, nous étudions l'espérance mathématique et la variance pour avoir le degré de confiance apporté par les résultats obtenus.

La projection de cette étude sur un N-échantillon nous a permis d'étudier l'impact du niveau de la technologie sur l'amélioration des profits.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous traitons les questions relatives à la maximisation des gains, et nous nous intéressons notamment à l'obtention des contraintes nécessaires ou suffisantes pour maîtriser les revenus prévus.

Nous avons accompli cette étude en proposant une synthèse des résultats obtenus. De plus, nous introduisons la fonction gain comme somme des profits, et elle nous a donné de nouvelles possibilités d'attribution des revenus indépendamment des taux de distributions des dividendes précisés au début de la modélisation.

La première partie de ce chapitre a fait l'objet d'une publication sous le titre :

"Probabilistic Analysis of Micro-Economic Projects"

publié au ARPN Journal of Science and Technology. Juin 2015. Volume 5, No 6, , page 314 - 321.

La deuxième partie est en phase de rédaction pour la soumettre à un journal scientifique lié à la question du financement avec un risque d'échec.

Nos études de recherche ont fait également l'objet de présentation dans des conférences et des rencontres nationales et internationales.

Communications nationales :

- Communication orale à la 3ème rencontre du laboratoire modélisation et calcul scientifique sous le titre

Quantification de rentabilité des systèmes éducatifs

le 06-07 Décembre 2013, Faculté Sciences et Techniques Fès

- Communication orale à la 4 ème rencontre du laboratoire modélisation et calcul scientifique sous le titre

Rentabilité des systèmes éducatifs : Formation sur un cycle d'année

le 27-28 Novembre 2014, Faculté Sciences et Techniques Fès.

- Présentation orale aux Deuxième Édition Du Workshop Sur L'Imagerie, Systèmes Et Applications à la faculté polydisciplinaire de TAZA, sous le titre :

Approche Probabiliste d'Organisation des Pauvres dans des Structures

Micro-économiques type AGR et Conséquences Financières

les 30 ,31 Octobre 2015.

Communications internationales :

- Communication orale au Quatrième Congrès de la SM2A sous le titre
*Classement des actions basé sur une technique d'analyse multicritère à partir de la
combinaison de AHP et Somme pondérée*
à Oujda-Maroc, le 12-14 Février 2015.
- Communication orale au International Conferance on Big Data, Cloud and Applications
sous le titre
*Financial Analysis from the probability of risk of failure and the probability of default of
a loan microeconomic project*
à Tetuan, le 25-26 Mai 2015.
- Présentation orale au Séminaire scientifique international sur "la pauvreté et les pauvres
dans le Maghreb" sous le titre
*Outils pour sélection des projets micro-économique à partir de la rentabilité
socio-économique*
à Tunisie, les 26-27-28 Novembre 2015.

Et pour conclure, nous faisons le bilan des résultats obtenus. Ainsi nous proposons des idées pour améliorer cette étude.

Dans l'annexe, nous trouverons quelques applications des modélisations proposées au deuxième, troisième et quatrième chapitres.

Chapitre I

Lorsque les mathématiques aident à passer de l'informel au formel

1 Introduction

Le secteur informel peut être défini comme étant toutes les activités économiques entreprises en dehors des exigences légales et qui échappent aux mécanismes de contrôle de l'État. Il est constitué non seulement de l'artisanat, du petit commerce, des petites et moyennes entreprises non formellement identifiées par l'État, mais aussi des opérateurs économiques qui se livrent à des activités lucratives échappant à l'imposition, qui est très élevée.

Le secteur informel au Maroc occupe une place importante et évolue rapidement : il est de plus en plus alimenté par les jeunes, les femmes, les diplômés, les petits fonctionnaires, les chômeurs et les migrants qui exercent des travaux instables non salariés et non déclarés, ce qui crée une solide stratification sociale. Pour eux, c'est un moyen de lutte contre la pauvreté, et souvent même de lutte pour la survie. Surtout au moment où l'offre d'emplois formels sur le marché du travail marocain ne peut plus absorber toute la demande avec une main-d'œuvre non qualifiée, et des formations acquises en dehors du système scolaire.

Pour cette population vulnérable, le secteur informel permet la création d'emplois avec de petits des capitaux de départ résultant de l'autofinancement ou de financement familial, ce qui génère de petits projets avec des propriétés familiales en général, et qui utilisent des ressources locales. Et pour d'autres qui n'ont aucune source de financement, il permet au moins l'acquisition des emplois. En conséquence, ces petites activités représentent une composante durable et structurelle de l'économie marocaine. Or dans le secteur informel, il existe également un tissu d'unité productrice exerçant pratiquement dans la clandestinité et disposant de matériel et d'installations dignes d'une entreprise moderne.

2 L'économie informelle

2.1 Dominance du secteur informel

Au Maroc, la croissance économique des années 2000 ne semble pas être suffisante pour répondre respectivement à la croissance démographique et la croissance de la population active. Le pays s'est trouvé alors confronté au principal défi de créer suffisamment d'emplois pour le nombre de personnes entrant dans le marché du travail chaque année[?] [[Kanté](#)] [[Walther 2006](#)]. À Casablanca, Fès, Meknès, Marrakech, Tanger, Agadir, et Oujda à titre d'exemple, on ne peut qu'être frappé par le nombre élevé de petits métiers qui se multiplient. Transporteurs, artisans, maçons, menuisiers, marchands ambulants... grouillent et s'agitent dans les rues et avenues des villes. Ils représentent une composante durable de l'économie marocaine [[Salahdine 2013](#)].

L'économie informelle est caractérisée par :

- La facilité d'accès.
- La création d'emploi.
- L'acquisition des emplois.
- L'utilisation des ressources locales ou de récupération.
- La distribution des revenus et les modes de produire et de consommer.
- Le rôle important dans le fonctionnement économique et aussi dans la régulation sociale du pays.
- Un échappatoire important des effets de l'exode rurale en absorbant une bonne partie de la main d'oeuvre à la recherche d'emploi.
- Une réserve de qualification par le secteur moderne.
- Un marché très ouvert à la concurrence.
- Le secteur informel est un sous-traitant du secteur formel.

Ces caractéristiques ont contribué à la diffusion d'emplois informels non seulement au Maroc, mais dans le monde entier. Aujourd'hui, ce secteur non structuré constitue un axe central de lutte contre la pauvreté pour la population fragile, au moment où 1.3 milliard d'habitants vivent toujours sous le seuil d'extrême pauvreté, soit près du quart des habitants de la planète [[Mondiale 2001](#)] [[Kim 2013](#)][[Lachaud 2000a](#)][[Lachaud 2000b](#)]. Mais malheureusement, la position du secteur informel n'est pas bien comprise, elle est marginalisée et mal exploitée. La figure [I.1](#) donne le pourcentage de ce secteur.

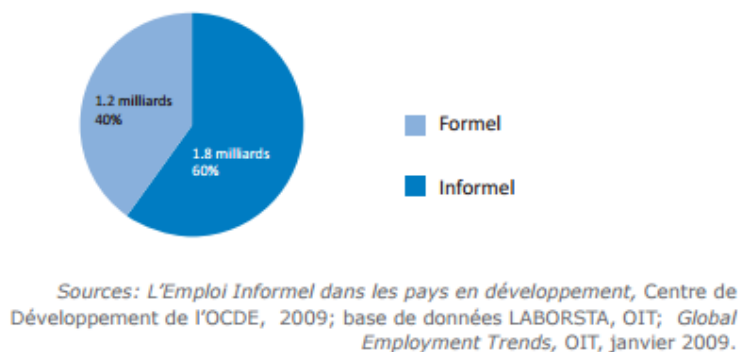


Figure I.1 – Emplois informels dans le monde

Le secteur informel représente 60% devant le secteur formel. Ces résultats reflètent la dominance du premier non structuré dans le monde, et par suite la nécessité d'organiser ces composantes. Ces chiffres rendent la tâche difficile théoriquement et pratiquement.

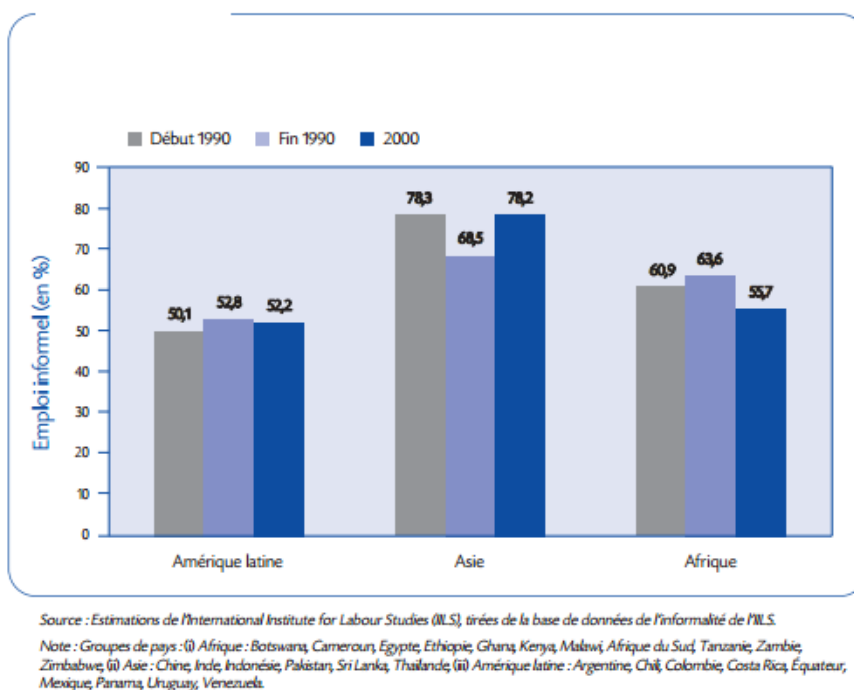


Figure I.2 – Incidence de l'emploi informel par région
(en % de l'emploi total)

La figure I.2 donne le pourcentage de l'emploi informel par rapport à l'emploi total. C'est une comparaison du progrès de ce phénomène entre le continent Asiatique, qui se classe le

premier, puis le continent Africain et l'Amérique latine.

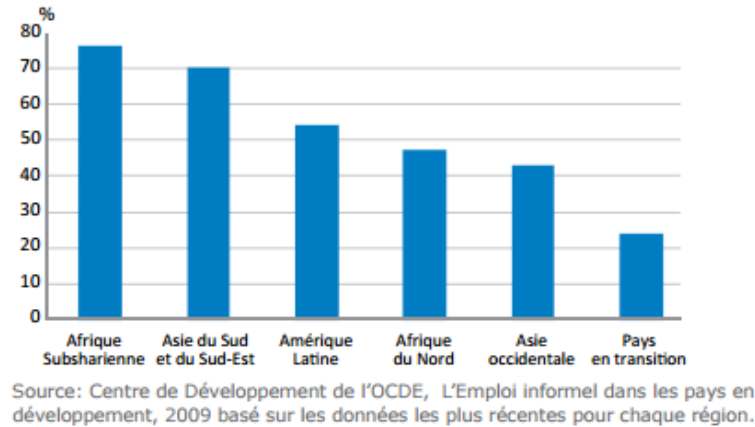


Figure I.3 – Part d'emploi informel non- agricole dans les pays en développement par région

Une comparaison plus fine est donnée par la figure I.3 qui exprime la répartition ordonnée du secteur informel dans les zones les plus concernées.

2.2 Inconvénients du secteur informel

Dans les pays qui n'ont pas de système de protection sociale élémentaire, de nombreux travailleurs y restent pendant de longues périodes et finissent soit par le chômage ou le retrait du marché sans garantir les conditions élémentaires d'une vie décente. Pour ces pauvres travailleurs la probabilité de rester toujours dans l'informel est très grande, surtout avec de petits capitaux qui ne permettent pas de changer ou au moins d'améliorer leurs statuts socio-économiques. Ainsi, ils sont cernés par la vulnérabilité et la marginalisation. À ceci s'ajoute d'autres inconvénients comme :

- Une quasi absence de qualification, car celle acquise est en dehors du système officiel de formation du pays. Il s'agit des compétences individuelles non qualifiées ne permettant pas d'avoir un diplôme reconnu.
- L'absence des lois du marché du travail dans le secteur informel, comme la loi du paiement des impôts, la loi des cotisations sociales de réglementation des conditions de travail et de la sécurité.
- La fragilité du capital et le manque de ressources financières extérieures disponibles avec un recours au crédit bancaire faible dû principalement à la méfiance, et à la rigidité des formalités.

- L'irrégularité des revenus dans ce secteur dû au fait que la plupart de ses activités se déroulent dans le non déclaré " noir ".

Ces inconvénients parmi d'autres représentent des handicaps importants devant chaque initiative de développement. Cette raison a imposé au Maroc comme à plusieurs pays du monde l'intégration de la problématique du secteur informel dans ses politiques nationales de développement [Projet Eloise 2009].

Même si ces petites activités sont une composante durable et structurelle de l'économie marocaine, le Maroc souffre d'une segmentation aigüe du marché du travail. Cette connaissance reflète une complexité importante face à toute étude, et des implications fortes qui empêchent l'orientation d'un secteur mal connu, informel, non structuré vers le secteur formel. De plus, au niveau social, les populations travaillant dans l'informel ne sont pas déclarées à la sécurité sociale, elles sont donc sans couverture sociale.

2.3 Soutiens possibles

En 2050, le Maroc comptera plus de 24,1 millions de jeunes en âge de travailler contre 21 millions actuellement. Il ne peut pas assurer le travail pour tous ces jeunes, mais il est obligé de revitaliser son système économique à travers des réseaux de solidarité qui encouragent l'auto-emploi dans des statuts économiques connus, un peu structurés comme les activités génératrices des revenus et les petites ou les moyennes entreprises afin d'éviter des unités de production et des services de petites dimensions négligées et méconnues, empêchant ainsi le développement du pays.

Que peut-on faire pour diminuer la taille des activités du secteur informel et introduire un certain niveau acceptable de technologie utilisée au moment où le niveau d'éducation moyen de la force de travail est assez bas dans notre pays? Cette fracture supprime, pour un large segment de la communauté, toute possibilité d'accès au secteur formel. Dans tous les cas, il faut adopter des politiques assurant :

- Un soutien dans tous les secteurs(formation, financement, suivi..) aux travailleurs pour qu'ils sortent du secteur informel.
- Une protection sociale de base pour ceux qui restent dans le secteur informel.
- Une politique d'aide à la commercialisation pour un marché dépassant le territoire national.
- Un marché compatible avec la nature du secteur informel et intelligent pour absorber les produits et les services proposés.

Toutefois, de telles politiques ne permettent pas de toucher tous les travailleurs informels [Andrews *et al.* 2011] [Aynaoui 1997] [J.Jutting *et al.* 2008]. Aussi il faut renforcer les mécanismes permettant de soutenir ceux qui restent dans l'économie informelle, en assurant au moins une protection sociale de base, de manière à limiter la vulnérabilité sur ce marché et à améliorer le fonctionnement du marché du travail informel.

Notons que l'introduction du statut de l'auto-entrepreneur au Maroc, particulièrement les efforts déployés dans le cadre de l'INDH, est une très bonne initiative car elle offre un régime formel au secteur informel désorganisé.

3 Initiative Nationale pour le Développement humain

"...promouvoir les activités génératrices de revenus stables et d'emplois, tout en adoptant une action plus imaginative et plus résolue en direction du secteur informel."

"L'Initiative nationale pour le développement humain n'est ni un projet ponctuel, ni un programme conjoncturel de circonstance. C'est un chantier de règne, ouvert en permanence."

Extrait du Discours Fondateur de l'INDH de Sa Majesté le roi MOHAMMED VI à Rabat le mercredi 18 mai 2005.

3.1 Les objectifs de l'INDH

L'Initiative Nationale pour le Développement Humain, lancée par SM le Roi Mohammed VI en 18 mai 2005, s'inscrit dans le cadre des efforts en faveur du développement social. Elle prend solennellement à bras le corps la lutte contre la pauvreté, l'exclusion et la précarité dans les mondes urbains et ruraux. Les populations défavorisées en milieu urbain travaillent principalement dans les services et la construction, lorsqu'il ne s'agit pas d'auto emploi informel. En milieu rural, on observe une pluriactivité informelle peu productive dont l'agriculture. L'objectif de L'INDH est de lutter contre l'exclusion sociale et économique et d'améliorer les conditions et la qualité de vie des pauvres et des groupes les plus vulnérables. Les actions réalisées ou prévues à cet effet peuvent être regroupées sous quatre volets :

- Services sociales de base.
- Infrastructures de base.
- Inclusion économique et activités génératrices de revenus.
- Soutien à la gouvernance locale

Chapitre I. Lorsque les mathématiques aident à passer de l'informel au formel

L'INDH avait pour objectif de fournir l'accès aux services de développement des affaires aux jeunes hommes et femmes défavorisés se trouvant en dehors du marché du travail ou dans le secteur informel, et à leur apporter l'aide nécessaire pour démarrer et développer leur micro-entreprise.

Elle se présente comme une approche globale et intégrée où l'intervention de l'État comme garant ou opérateur financier occupe une place considérable, elle ajoute des potentialités importantes de succès. La participation de l'État peut permettre aux pauvres :

- D'augmenter leurs revenus et d'améliorer leurs conditions de vie.
- D'accroître leur productivité et leur efficacité.
- De développer des micro-entreprises/AGR.
- D'améliorer la gestion de leurs revenus.
- De réduire les risques auxquels ils sont exposés.
- D'équilibrer la consommation de leur ménage.

Le Maroc à travers l'INDH a accordé, dès son lancement, un intérêt particulier à la promotion des AGR en soutenant les activités assurant l'inclusion socioéconomique des personnes pauvres, permettant de participer à la vie active et par là de se prendre en charge.

La puissance des AGR c'est qu'elles proposent une solution économique pour un problème social via ses structures. Les pauvres sont intégrés définitivement dans la société et protégés de l'exclusion sociale et de la marginalisation, qui représentent deux portes de la fracture sociale ainsi qu'une chaîne de problèmes de nature cause/effet.

3.2 Les déficits des AGR au Maroc

"Selon le rapport d'audit publié en juin 2010 par l'Inspection Générale de l'Administration Territoriale (IGAT) et l'Inspection Générale des Finances (IGF), le total des crédits engagés dans cette catégorie d'actions en 2009 ne dépasse guère 9% du budget alloué à l'INDH. A ce jour, plus de 3.400 AGR ont été créées, générant 40.000 emplois. Mais les besoins restent criants. Plusieurs facteurs expliquent le faible recours au fonds INDH pour financer les AGR. Les initiatives visant à définir des axes porteurs en matière d'activités génératrices de revenus sont quasi-absentes au niveau local..."

Les grands obstacles de L'INDH se résument en l'inadéquation entre les outils de financement prévus pour les AGR et les contraintes locales telles que :

- * L'analphabétisme.

- * La faible capacité de gestion des projets.
- * Le manque de culture entrepreneuriale.
- * La défaillance du suivi de ces activités à la fois de la part des comités locaux et des structures territoriales de gestion.
- * Le faible niveau de technicité des acteurs dans ce domaine.
- * Problème de commercialisation en raison de l'absence de circuits de distribution.

Cette carte illustre la distribution des AGR en nombre dans toutes les régions du Maroc entre les années 2005 et 2012[l'INDH 2013], en précisant les montants financés en millions de DHS.

Les AGR sont un mécanisme d'insertion socioprofessionnelle, mais on ne peut pas demander à l'INDH de pallier, toute seule, à l'ensemble des carences du Maroc en termes de développement humain. C'est pour cela qu'il faut encourager la culture des AGR même en dehors de l'INDH.

3.3 Carence des études d'aspect qualitatives/quantitatives des AGR

Au Maroc, il n'existe pas beaucoup d'études quantitatives systématiques touchant l'ensemble du secteur informel sauf celles de la Direction des Statistiques du Ministère du Plan. Sur le plan empirique comme sur le plan théorique, la recherche dans l'économie informelle se fait en sciences sociales et en économie comportementale.

Il y a cependant peu d'études empiriques analysant le lien de causalité possible entre informalité et commerce. De nombreux travaux dans ce domaine s'appuient sur des déductions indirectes et ont été effectués à un niveau très agrégé. On sait peu de choses sur la microéconomie de l'activité informelle et la dynamique de l'emploi, la création d'entreprises et la croissance. La théorie microéconomique a pour objet l'étude des comportements économiques individuels et de leurs interactions dans les économies du marché.

Pour ce qui concerne la modélisation mathématique, il y a un manque considérable pour trois raisons :

- La faible motivation d'utiliser les mathématiques dans le secteur informel.
- La rareté des documents de base et de bibliographies liés directement à ce genre de questions et de problèmes.
- La nature du sujet exige un travail de carrefour entre la modélisation, les probabilités, les EDP. Et évidemment les outils de l'analyse numérique et informatique font partie de la question.

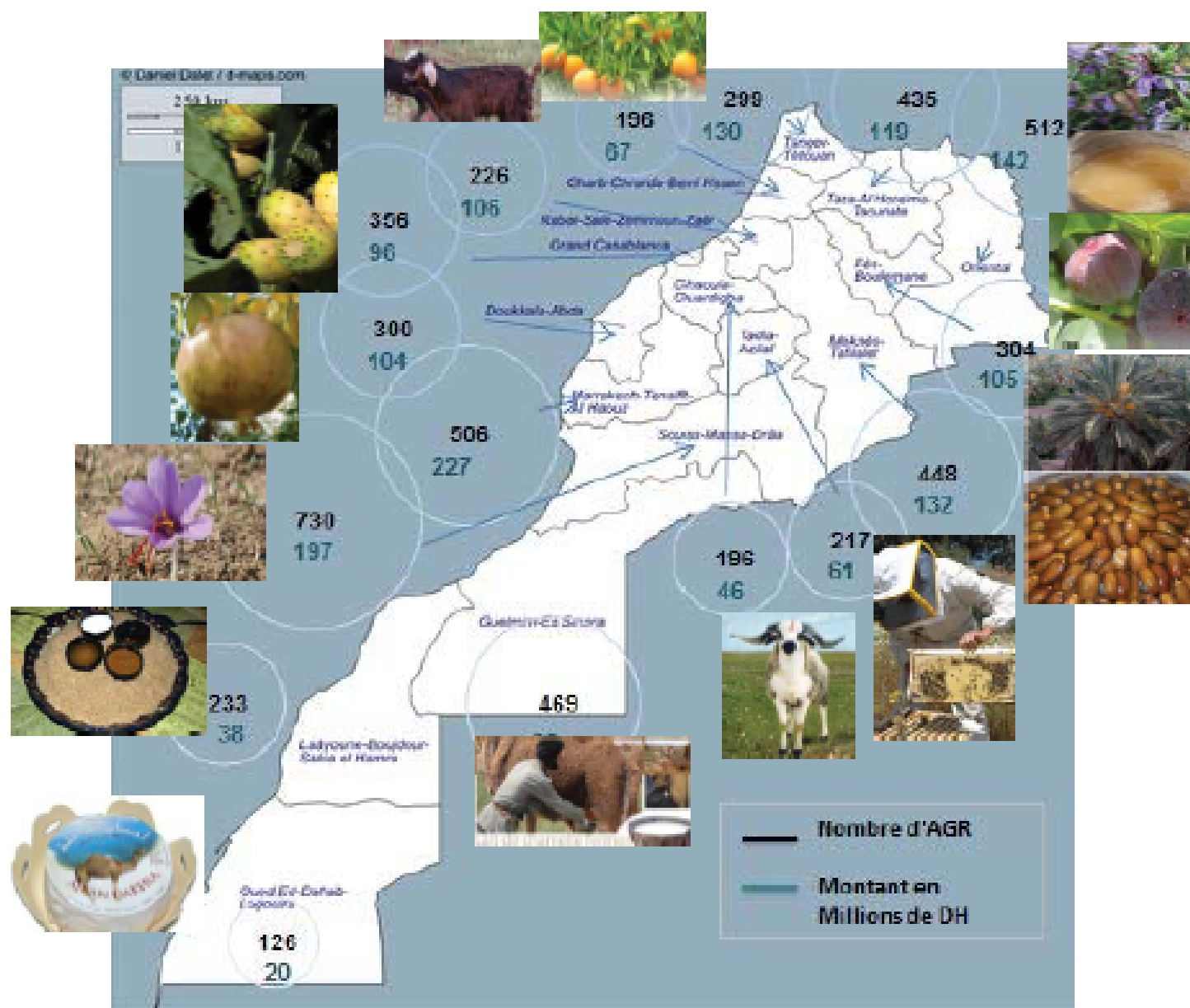


Figure I.4 – Bilan des AGR crée entre 2005 et 2016

4 Les mathématiques outil de modélisation et de résolution

4.1 Les théories de la microéconomie

Le fait que les sciences économiques reposent dans leurs analyses et leurs approches, sur des théories mathématiques, a contribué à élaborer ses lois et ses règles afin d'être bien organisées et bien structurées. Pourtant la microéconomie n'est pas bien structurée au niveau de la modélisation mathématique, surtout qu'il s'agit d'un domaine caractérisé par le changement rapide et la diversité de ses formes relativement à chaque pays, et par le manque de données précises et fiables.

Elle s'organise autour de quatre volets :

1. La théorie du consommateur, qui étudie le comportement des ménages ***devant*** effectuer des choix de consommation de biens sous contraintes budgétaires.
2. La théorie du producteur, qui étudie le comportement des entreprises qui veulent maximiser leur profit sous des contraintes technologiques.
3. La théorie de l'échange sur des marchés. Ces marchés pouvant être concurrentiels ou non concurrentiels.
4. La théorie de l'optimum économique, qui mobilise le concept d'optimum de Pareto pour juger l'efficacité économique collective des interactions entre agents à travers des échanges.

Mais ces théories n'arrivent pas à encadrer toutes les formes de la microéconomie, principalement les phénomènes du secteur informel, qui nécessite d'autres approches et d'autres modèles d'où une obligation de faire appel à des moyens formels (logiques, mathématiques) et des transformations délicates, sans négliger les modèles voisins existants.

4.2 Les mathématiques et la microéconomie

Les activités du secteur informel ou même les activités génératrices de revenus au Maroc sont malheureusement étudiées sur la base des enquêtes pratiques avec des données discutables incertaines avec un caractère souvent monographique (la dominance des sciences de la géographie). Ces enquêtes ont élaboré des analyses incapables d'être généralisées puisqu'il s'agit des expériences individuelles. Il également existe des études comportementales sociales à ces activités, préoccupées par l'individu. Elles discutent leurs intérêts et leurs besoins psychologiques,

Chapitre I. Lorsque les mathématiques aident à passer de l'informel au formel

sociales et économiques loin du langage des chiffres dominant aux sciences économiques et loin aussi des complexités des formules et des équations mathématiques.

Bien que la microéconomie ait bénéficié de la modélisation mathématique, il reste beaucoup à faire. Les mathématiciens ont constaté que la modélisation des phénomènes microéconomiques faites par les économistes en général, suit les normes suivantes :

- Elle décrit la réalité en fonction des formules et des équations mathématiques qui sont souvent complexes au niveau de l'écriture et la résolution.
- Les économistes font appel classiquement à la linéarisation afin de négliger les termes non linéaires qui augmentent le degré de difficulté de la résolution. La négligence de ces termes non linéaires nous éloigne de la réalité et donne des résultats approchés, mais à quel degré d'approximation ?

La modélisation mathématique de la microéconomie offre des études, des alternatives avec des concepts et des raisonnements logiques. D'ailleurs, la notion de convexité d'une courbe est une hypothèse mathématique qui correspond à une réalité économique "que les coûts croissent de plus en plus avec la quantité produite". C'est la même chose pour les choix de consommation. On suppose que les préférences du consommateur entre les biens 1 et 2 sont convexes. Ces deux exemples nous montrent deux choses :

- * L'utilité du calcul différentiel pour expliquer les choix.
- * Le fait que les maths permettent de comprendre dans quelle mesure notre explication est dépendante d'hypothèses.

Pour ce genre de projet, le risque est fortement présent, ce qui exige aux études mathématiques de tenir compte de l'aspect probabiliste. Nous constatons également l'aspect logistique qui peut apporter des réponses à des questions d'intérêt socioéconomique certain, et construire des solutions pertinentes pour optimiser le gain et minimiser le risque. Ces outils mathématiques aident à la décision surtout avec le nombre des opérateurs intervenants, des stratégies à choisir et des décisions à prendre. Le but est de préciser sur quels critères et de quelle manière peut-on financer une AGR.

5 Conclusion

La propagation rapide du secteur informel dans le monde l'a rendu un axe essentiel dans les programmes des politiques du développement durable. La classe large de la population concernée par ce secteur, la désorganisation de ses structures, l'irrégularité et l'importance

des revenus de ses activités sont des catalyseurs, parmi d'autres, pour créer des études et des approches scientifiques bien structurées, modélisant les activités de l'informel. Les AGR sont l'une de ces composantes en développement aidant les pauvres à améliorer leurs situations socio-économiques. Elles relancent la croissance économique, améliorent les conditions de vie, renforcent le capital humain, et assurent enfin un développement durable.

Les mathématiques contribuent à transformer l'informel en une économie formelle, au moins par quatre voies complémentaires :

- Modéliser la question de l'économie liée au secteur informel que nous cherchons à reformuler.
- Proposer des techniques d'aide à la décision dans un secteur multicritères multi-projets multi-opérateurs (réalité sociale, taille des personnes intervenantes...).
- Chercher l'optimum au sens du choix ou de la fonction objective.
- Intégrer le risque d'échec des projets étudiés dans l'analyse financière de la micro-économie.

Ce mémoire répond en partie à ces questions.

Chapitre II

Construction d'une Méthode d'Analyse Multicritère Dynamique Multi-Décideurs

1 Introduction

D'après les données du ministère de l'Intérieur du Maroc en septembre 2013, le bilan du programme de la mise à niveau territoriale réalisé par l'INDH depuis son lancement en 2011, se présente comme suit [[l'INDH 2013](#)] :

- Routes, pistes et ouvrages de franchissement :
 - Aménagement de 684 km de routes et pistes.
 - Construction de 17 ouvrages de franchissement.
- Éducation (logements de fonction) :
 - Construction de 470 logements pour enseignants.
- Alimentation en eau potable :
 - Adduction de 127 douars en eau potable.
 - Réalisation de 252 projets de points d'eau.
- Santé :
 - Construction de 61 logements pour le personnel médical.
 - Mise en service de 27 centres de santé.
 - Acquisition de 31 ambulances.
- Électrification rurale :
 - Électrification de 1000 douars.

Ce qui exige l'intervention de plusieurs ministères : Ministère de l'Économie et des Finances, Ministère de l'Habitat et de la Politique de la ville, Ministère de l'Équipement, du Transport et de la Logistique, Ministère de l'Artisanat, de l'Économie sociale et solidaire, Ministère de

l'Emploi et des Affaires sociales, Ministère de l'Énergie, des mines, de l'Eau et de l'Environnement, Ministère de la Solidarité, de la Femme, de la Famille et du Développement social...

Cela confirme que le développement est une action collective et conjointe. Même au niveau du financement, il s'agit d'un mécanisme financier spécifique et d'un assouplissement efficient des procédures. L'INDH a créé un Compte d'Affectation Spéciale (CAS INDH) avec 10 milliards de dirhams pour la phase I (2006-2010) et 17 milliards de dirhams pour la phase II (2011-2015). Le Chef du Gouvernement est l'ordonnateur du CAS INDH. Le ministre de l'Intérieur, les Walis et les Gouverneurs des provinces et des préfectures du Royaume sont sous-ordonnateurs de ce CAS. Ce dernier est alimenté par le Budget Général de l'État, les collectivités locales et la Coopération Internationale.

Les projets programmés dans le cadre de l'INDH sont des structures complexes aux niveaux social et économique. Il s'agit du problème multi décideurs (les différents ministères intervenants et les différents ordonnateurs du CAS) multicritères puisque la rentabilité d'un projet est conditionnée par sa contribution à :

- L'amélioration des revenus de la population ciblée.
- La création d'emplois et la promotion de la culture de l'auto-emploi.
- Le renforcement de la dynamique associative et coopérative.
- L'intégration dans le tissu économique des populations démunies dont, notamment, les femmes et les jeunes.

En raison de ce qui précède, nous croyons absolument qu'une modélisation mathématique est un moyen efficace pour maîtriser ces projets micro-économiques. Cette réflexion scientifique nous a permis de construire une nouvelle méthode d'analyse multicritère dynamique multi-décideurs que nous présentons dans ce chapitre, et que nous appliquons pour un exemple micro-économique (Aide au choix d'un meilleur projet proposé) et un exemple macro-économique (Tramway Rabat Salé). Ce dernier a pour but de montrer que notre méthode est applicable au-delà de la micro-économie.

Ainsi, dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la présentation d'une méthode d'aide à la décision multicritère, dans le cadre de la théorie de la décision, qui est une approche scientifique élément de base de nombreuses applications de l'intelligence artificielle.

Nous proposons une présentation des concepts fondamentaux des méthodes multicritères multi-décideurs où nous donnons des définitions et des exemples pour approcher les notions nécessaires pour les méthode de cette théorie. Puis nous présentons de deux méthodes connues de l'analyse multicritère : la méthode AHP et la méthode des sommes pondérées afin de présenter notre approche qui repose sur trois étapes principales.

Étape 1 : Décomposition de l'objectif

C'est une façon de hiérarchiser les idées dues au fait qu'avoir plusieurs décideurs diversifie l'ensemble des objectifs possibles pour un même problème, de plus un même décideur peut avoir plusieurs objectifs. Chaque objectif peut donner lieu à plusieurs critères, et par la suite à la naissance de plusieurs mesures d'évaluations. À ce niveau, nous introduisons la notion du temps qui rend le problème dynamique, et au lieu que la fonction d'évaluation d'un critère dépend seulement de l'action, nous la définissons d'une manière qui garantit une information correcte à un instant t .

À ce stade, nous utilisons diverses notations aux différents ensembles construits, conséquence naturelle de la décomposition de l'objectif qui nécessite plusieurs dimensions, ainsi que les critères issus de ces dimensions, qui sont une caractéristique de la nature de chaque problème à étudier.

Étape 2 : Détermination des poids

Les différentes méthodes de l'analyse multicritère demandent une information subjective : les poids. Dans notre méthode, nous utilisons le principe de la méthode AHP [[Melvin 2012](#)] pour affecter trois types de poids ; le poids de la dimension, le poids relatif du critère, ainsi que son poids global.

Étape 3 : Calcul des sommes pondérées

Nous injectons la procédure de calcul des sommes pondérées dans chaque dimension, et nous utilisons les poids relatifs des critères avec les évaluations instantanées des critères pour chercher la meilleure action relativement à la dimension. Lorsque nous cherchons l'action optimale relativement à l'objectif global, nous utilisons ses sommes obtenues pour définir les sommes pondérées globales.

Dans de nombreuses situations, la nature des actions ne nous permet pas d'avoir à chaque instant des évaluations des critères, c'est la raison pour laquelle nous introduisons ce que nous appelons les sommes pondérées moyennes.

Nous calculons ces sommes afin de trouver la bonne solution, et elles donnent également des stratégies d'ordonnancement des actions en jeu.

Étape 4 : Applications

Nous clôturons ce chapitre par deux applications : l'une est une application macro-économique basée sur les données de la société de Tramway de Rabat- Salé. L'autre est une application micro-économique permettant de choisir le meilleur projet AGR parmi ceux qui sont présentés aux différents décideurs pour les encourager à participer au financement.

2 Éléments de base et Méthodes

2.1 Concepts fondamentaux de l'analyse multicritère

D'après ROY [B.Roy 1985] " l'aide à la décision est l'activité de celui qui, prenant appui sur des modèles clairement explicités mais non nécessairement complètement formalisés, aide à obtenir des éléments de réponses aux questions que se pose un intervenant dans le processus de décision, éléments concourant à éclairer la décision et normalement à prescrire, ou simplement à favoriser un comportement de nature à accroître la cohérence entre l'évolution du processus d'une part, les objectifs et le système de valeurs au service desquels cet intervenant se trouve placé d'autre part". De ce point de vue l'aide à la décision est un processus qui utilise un ensemble d'informations disponibles à un instant donné, afin de formuler un problème et d'aboutir à une décision sur un objet précis.

Les méthodes mathématiques d'analyse multicritère ont permis d'orienter un choix sur la base de plusieurs critères communs. Elles ont éclairci la compréhension d'un problème d'aide à la décision multicritère et sa résolution.

Après avoir identifié et défini le problème qui, par nature, comporte plusieurs objectifs, souvent contradictoires ou hétérogènes, l'analyse multicritère vise à expliciter une famille cohérente de critères pour permettre de concevoir, justifier et transformer les préférences au sein d'un processus de décision afin d'aboutir à une ou plusieurs solutions optimales, au sens de Pareto¹ via une procédure de sélection.

La difficulté des méthodes d'aide à la décision est qu'elles cherchent des solutions optimales pour des problèmes complexes en général et de nature multicritères, or le concept de l'optimalité n'a pas de sens dans un contexte multicritère. L'optimisation multi-objectif cherche à optimiser plusieurs composantes d'un vecteur fonction coût. La solution d'un problème multi-objectif (PMO) n'est pas une solution unique, mais un ensemble de solutions Pareto optimales (PO). Toute solution de cet ensemble est optimale dans le sens qu'aucune amélioration ne peut être faite sur une composante du vecteur sans dégradation d'au moins une autre composante du vecteur [Talbi 1999].

L'analyse multicritère, également nommée " Aide multicritère à la décision ", connaît un développement très important depuis la deuxième moitié des années 1970 et peut être désormais considérée comme un outil scientifique à part entière. C'est un outil d'aide à la décision

1. Un état optimal au sens de Pareto est un état réalisable à partir duquel il n'est plus possible d'augmenter l'utilité d'un individu sans diminuer celle d'un autre.

développé pour résoudre des problèmes multicritère complexes, incluant des aspects qualitatifs et/ou quantitatifs dans un processus décisionnel. Elle permet :

- D’effectuer, en groupe, un choix, en fonction des critères préalablement définis : choisir un sujet, une solution, une action, un problème à traiter..., lorsque le nombre de possibilités est important.
- De hiérarchiser les idées ou les solutions [Poitou-Charentes 2005].

Une situation qui implique de nombreux critères peut être source de confusion dans l’absence d’un processus de décision logique et bien structuré, c’est pour cette raison qu’un outil d’aide à la décision est nécessaire.

Ces méthodes sont issues principalement des travaux de Thomas L.Saaty et du chercheur Bernard Roy, créateur du LAMSADE (Laboratoire d’analyse et modélisation de systèmes pour l’aide à la décision).

Pour Roy [Roy 2006], les problèmes réels peuvent être formulés à l’aide des méthodes d’analyse multicritère, selon trois formulations de base : problématique de choix² notée P_α , problématique de tri ou d’affectation³ notée P_β et problématique de rangement⁴ noté P_γ .

a- Décideur

Les méthodes d’Aide Multicritère supposent l’existence d’une personne ou d’un groupe qui prend la décision qu’on appellera décideur.

Le décideur est l’entité intervenant dans le processus de décision que les modèles mis en oeuvre cherchent à éclairer, c’est l’entité pour le nom de qui, ou au compte de qui, l’aide à la décision s’exerce. Le décideur n’est pas nécessairement un individu en particulier. Il peut être dans certains cas un individu mais il peut être aussi un groupe d’individus pas nécessairement bien identifié (le gouvernement par exemple)[Henreit 2000].

Le choix d’une solution par rapport à une autre nécessite la connaissance du problème et de nombreux facteurs liés à celui-ci. Ainsi, une solution choisie par le décideur peut ne pas être acceptable pour un autre ; il est donc utile d’avoir plusieurs alternatives dans le choix d’une solution Pareto optimale (PO)[Berkoune *et al.* 2005].

Un problème multi-décideur multicritère (MDMC) peut être considéré comme un ensemble de sous problèmes mono-décideur multicritère(SDMC)[Ginting & Dou]. Les critères dans chaque sous problème mono-décideur multicritère ne sont pas nécessairement les mêmes. Autrement dit, chaque décideur a la possibilité de choisir un ensemble de critères. La force de l’analyse

2. Choix d’une solution (la meilleure) ou d’un ensemble de (meilleures) solutions.

3. Tri résultant de l’affectation de chaque alternative à une catégorie parmi n.

4. Ordonner l’ensemble des alternatives.

Chapitre II. Construction d'une Méthode d'Analyse Multicritère Dynamique Multi-Décideurs

multicritère est qu'elle permet de résoudre la difficulté de rechercher un consensus général à l'intérieur d'une équipe pluridisciplinaire, puisque cela peut s'avérer difficile à atteindre lors de la prise de décision. En utilisant cette analyse, les membres de l'équipe n'ont pas besoin de s'accorder sur l'importance relative des critères ou sur le classement des alternatives. Chaque membre décideur donne son propre jugement à partir de son ensemble de critères choisis et contribue de manière distincte et identifiable à la recherche d'une conclusion conjointe.

b- Action

Face à une situation donnée, un décideur considère plusieurs options possibles ; plusieurs décisions envisageables, des objets, projets, investissements, décisions, solutions, plans, variantes, candidats... qui auront chacune un impact sur l'état du système et modifieront l'ensemble de ses caractéristiques. B. Roy nomme action potentielle ou alternative une action réalisable, c'est-à-dire une action dont la mise en oeuvre en pratique est envisageable. L'ensemble des options possibles (aussi appelées actions potentielles ou alternatives) constitue l'ensemble noté A , ces actions peuvent être une à une exclusives, ou au contraire, compatibles.

Après avoir déterminé l'ensemble des actions A ainsi que ce que le décideur veut en faire (traitement), ce dernier cherche à construire le modèle sur lequel il va se baser pour répondre au problème identifié et construire sa recommandation afin d'explicitier et de formaliser les modèles d'évaluation, il a besoin de construire les dimensions permettant de caractériser l'ensemble A , les critères permettant d'évaluer A , et les méthodes ou les procédures permettant d'effectuer le traitement souhaité sur l'ensemble A afin de porter un jugement comparatif entre les actions de l'ensemble A .

c- Dimension

Il s'agit d'une vérité ou d'une loi fondamentale sur laquelle s'appuie un raisonnement ou une action. La notion de durabilité est pluridimensionnelle, elle englobe à la fois, des objectifs écologiques, sociaux et économiques... Et entre ces différents éléments, il existe une interdépendance, par conséquent, les critères peuvent être répartis dans des classes représentant des macros objectifs ou des macros critères que nous nommons dimensions.

Les dimensions⁵ permettent de caractériser l'ensemble des actions. Et pour approcher cette notion, nous présentons le tableau suivant qui donne un exemple de critères ainsi que leurs

5. Dans la littérature il n'y a pas un nom classique ou standard pour cette vérité ou cette loi fondamentale (dimension ou principe ou objectif ou macro-critère), et puisqu'il n'existe pas une confusion mathématique algébrique, nous choisissons le nom dimension.

dimensions :

Dimension	Exemple de critères
Social	Sécurité
	santé
Economique	coûts de livraisons
	coût de stockage
Politique	utilisation des ressources
	pollution/ Effet de serre
Technique	Fiabilité
	Flexibilité
	proximité

Tableau II.1 – *Exemple de dimensions et critères*

d- Critère

Le mot critère désigne ce qui sert de base à un jugement [B.Roy 1985]. Dans le sens de Roy, un critère est une échelle servant à représenter un point de vue qui importe aux yeux du décideur. Il permet la comparaison de deux actions selon le point de vue qu'il représente. Les critères découlent des conséquences des actions sur lesquelles va porter la décision. Plus explicitement un critère est une fonction définie sur l'ensemble des actions représentant les préférences de l'utilisateur selon son point de vue.

e- Indicateur

Un indicateur de performance est une donnée quantifiée, qui mesure l'efficacité et/ou l'efficacité de la totalité ou d'une partie d'un processus ou système (réel ou simulé) par rapport à une norme, un plan ou un objectif déterminé et accepté dans le cadre d'une stratégie d'entreprise [Mammeri 2013].

L'organisation d'un système de critères peut être traitée à différents niveaux de détail. Au niveau d'abstraction le plus élevé, chaque critère C_i est associé à un objectif O_i , ce dernier peut être décomposé en un ensemble d'objectifs $\{O_{i1}, O_{i2}, \dots, O_{in}\}$, chaque sous objectif donne lieu à un indicateur, autrement dit, chaque critère regroupe des indicateurs dont les objectifs sont issus de la décomposition d'objectif du critère [C.Vincent 2004].

Le terme " élément de décision " désigne les différents éléments à analyser pour pouvoir prendre des décisions complexes, ils peuvent être mesurables ou qualitatifs. Dans le cadre de

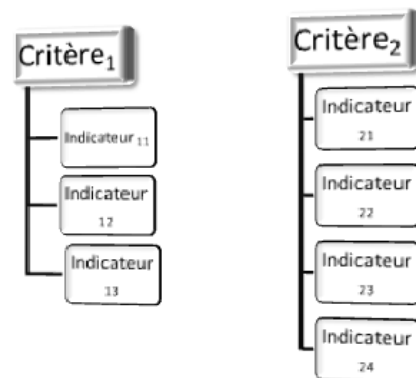


Figure II.1 – Indicateur

l'analyse des critères et des indicateurs il peut s'agir des dimensions, des critères ou des indicateurs.

f- Poids

Le poids mesure l'importance d'un critère par rapport aux autres critères du point de vue du décideur via une comparaison par paires permettant de transformer un problème de décision complexe sur les dimensions et les critères en séries de jugements simples concernant la signification de chacun des critères relativement à la dimension à laquelle il se rapporte afin de déterminer son importance relative. Chaque critère est comparé successivement avec les autres critères de cette même dimension (comparaison deux à deux), ce qui donne son poids dans la dimension.

g- Relation de sur-classement

Le classement est une méthodologie simple de l'analyse multicritère qui peut être utilisée pour l'évaluation des critères et des indicateurs. Il consiste à attribuer un rang à chaque élément de décision en rapport avec son degré d'importance dans la décision à prendre. Les éléments de décision peuvent alors, être classés les uns par rapport aux autres (le premier, le deuxième, etc.).

Pour Roy, on dit qu'une alternative (action) a_j surclasse une alternative a_l et on note $a_j Sa_l$ si, étant donné ce que l'on sait des préférences du décideur, de la qualité des évaluations et de la nature du problème, il y a suffisamment d'arguments pour admettre que a_j est au moins aussi bien que a_l et qu'il n'y a pas d'arguments importants prétendant le contraire.

h- Performance

Il s'agit ensuite d'appréhender la performance de l'évalué sur les différents critères. Cela peut se faire, par le biais de collecte d'informations, grâce à des observations, des résultats de mesures physiques ou autre.

Dans la pratique, une action a plusieurs conséquences, ainsi la conséquence d'une action selon un critère donné est évaluée par une fonction notée g (à valeurs réelles) définies sur l'ensemble des actions potentielles A de telle sorte qu'il soit possible de raisonner ou de décrire le résultat de la comparaison de deux actions a_j et a_l relativement à partir des nombres $g(a_j)$ et $g(a_l)$ [NAFI 2010]. Plus précisément nous avons la définition suivante :

Définition 2.1 *Soient A l'ensemble des actions potentielles et S une relation de sur-classement sur A , un critère est une fonction $g : A \rightarrow X \subseteq R$ qui permet, relativement à un point de vue donné et pour un acteur identifié, de comparer deux actions quelconque a_j et a_l :*

$$g(a_l) \geq g(a_j) \Rightarrow a_l S a_j$$

où S : "est au moins aussi bon que "(ici g est un critère à maximiser.)

l'ensemble des concepts définis précédemment permet de dérouler les premières étapes suivantes de chaque méthode d'analyse multicritère :

- Établir le contexte de la problématique
- Préciser le comité de décideurs
- Identifier les actions à étudier
- Identifier les dimensions et des critères pour l'évaluation
- Pondérer les critères
- Attribuer les évaluations pour les différents critères

2.2 Méthodes d'analyse multicritère

On peut définir les méthodes d'analyse multicritère comme l'ensemble des outils permettant d'effectuer les traitements souhaités sur l'ensemble A afin de fournir une solution au modèle. Il existe de nombreuses méthodes mathématiques d'analyse multicritère, qui peuvent être regroupées en deux approches :

- Agrégation a priori de critères en un critère unique.
- Approche fondée sur le surclassement.

Dans ce travail, nous nous intéressons aux méthodes permettant d'agglomérer les différents critères en un seul critère. Particulièrement, nous rappelons le principe de la méthode des

sommes pondérées et la méthode AHP.

2.2.1 Méthode de la somme pondérée

Cette méthode [Peter 1967][Borgers & Timmermans 1986] consiste à se fixer un ensemble de critères et à les classer en affectant à chacun d'eux un poids à condition d'avoir des données chiffrées sur les performances des actions. Les étapes qui la constituent se présentent comme suit :

- Identifier les critères C_i pertinents à la problématique .
- Affecter des poids P_i aux critères listés, traduisant l'importance relative des critères.
- Évaluer chaque action sur chacun des critères.
- Calculer le score global (weighted ratings) pour chaque action.

Le tableau suivant résume l'idée de cette méthode :

Critère	C_1	$\dots$	C_i	$\dots$	C_k	Somme pondérée
Poids	P_1	$\dots$	P_i	$\dots$	P_k	
Action a_1	$g_1(a_1)$	$\dots$	$g_i(a_1)$	$\dots$	$g_k(a_1)$	
Action a_2	$g_1(a_2)$	$\dots$	$g_i(a_2)$	$\dots$	$g_k(a_2)$	
Action a_3	$g_1(a_3)$	$\dots$	$g_i(a_3)$	$\dots$	$g_k(a_3)$	

Tableau II.2 – *Principe des sommes pondérées*

$$S(a_j) = \sum_{i=1}^k P_i \times g_i(a_j) \quad (\text{II.1})$$

avec g_i la fonction d'évaluation du critère C_i . Notons qu'il faut normaliser tous les $g_i(a_j)$ afin de conserver la proportionnalité entre les valeurs, et normaliser également les poids (la somme des poids = 1).

2.2.2 Méthode AHP

Thomas.L Saaty a introduit la méthode AHP (Analytic Hierarchy Process) entre 1977 et 1994. Elle consiste à structurer le problème d'aide à la décision de manière hiérarchique (chaque critère peut être décomposé en sous critères). Elle permet de décomposer un problème selon l'arborescence des différents critères et sous-critères de décision associés à ce problème et de comparer ces critères entre eux, deux à deux, à l'aide d'une échelle de pondération afin de trouver la solution qui répond le mieux aux critères de décision.

Pour appliquer cette méthode il faut :

- Identifier l’objectif à atteindre.
- Élaborer différents scénarios potentiels qui puissent répondre à l’objectif recherché.
- Identifier les dimensions et les critères qui influencent la décision.
- Déterminer les poids des alternatives, des critères ou des sous critères à l’aide d’une échelle de valeur. La méthode AHP est donc subjective puisqu’elle fait appel au jugement des individus qui l’appliquent.
- Déterminer le résultat pour chaque action.
- Déterminer les indicateurs de cohérence

Dans la suite de ce travail, nous utilisons l’échelle de valeur Saaty [Saaty 1884] présentée dans le tableau II.3

Degrés d’importance	Définitions	Explications
1	importance égale des deux éléments	Les deux éléments contribuent autant à la propriété
3	un élément est un peu plus important que l’autre	L’expérience et l’appréciation personnelle favorisent légèrement un élément par rapport à un autre
5	un élément est plus important que l’autre	L’expérience et l’appréciation personnelle favorisent fortement un élément par rapport à un autre
7	un élément est beaucoup plus important que l’autre	Un élément est fortement favorisé et sa dominance est attestée dans la pratique
9	un élément est absolument plus important que l’autre	Les preuves favorisant un élément par rapport à un autre sont aussi convaincantes que possible

Tableau II.3 – *L’échelle de valeur Saaty*

A partir de cette échelle d’importance, le décideur propose la matrice de comparaison binaire (e_{ij}) avec laquelle il détermine le poids (importance relative) de chacune des dimensions ou chacun des critères de la manière suivante :

1. Il compare les critères(resp les dimensions), en précisant l’importance du C_i avec C_j (resp la dimension d_i avec d_j)
 - Les coefficients $e_{ii} = 1$ car il s’agit de comparer le critère C_i avec lui-même.

Chapitre II. Construction d'une Méthode d'Analyse Multicritère Dynamique Multi-Décideurs

- Pour $i \neq j$, si C_i est e_{ij} fois plus important que C_j alors C_j est $\frac{1}{e_{ij}}$ fois plus important que C_i . Par suite les coefficients de la matrice de comparaison vérifient la relation $e_{ji} = \frac{1}{e_{ij}}$.

$$\begin{matrix} & C_1 & C_2 & \cdots & C_k \\ \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_k \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & e_{12} & \cdots & e_{1k} \\ \frac{1}{e_{12}} & 1 & \cdots & e_{2k} \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots \\ \frac{1}{e_{1k}} & \frac{1}{e_{2k}} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Il s'agit de la comparaison de l'élément de la colonne de gauche par rapport à celui de la ligne du haut. Ainsi C_1 est e_{12} fois plus important que C_2 , et C_2 est $\frac{1}{e_{12}}$ fois plus important que C_1 .

2. Le poids associé au critère de la performance i est défini par

$$P_i = \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^k \frac{e_{ij}}{\sum_{l=1}^k e_{lj}} \right)$$

Lecture de P_i : il s'agit d'effectuer trois calculs :

- $\sum_{l=1}^k e_{lj}$: Additionner les termes de la $j^{ième}$ colonnes de la matrice.
- $\frac{e_{ij}}{\sum_{l=1}^k e_{lj}}$: Normaliser la matrice ; chaque entrée de la matrice est divisée par le total de la colonne .
- $\frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^k \frac{e_{ij}}{\sum_{l=1}^k e_{lj}} \right)$: Calculer la moyenne des lignes : tous les éléments d'une même ligne de la matrice normalisée sont additionnés et ensuite divisés par le nombre d'entrées qu'elle comporte.

P_i est il bien défini ?

le poids P_i est bien défini car $P_i \in]0, 1[$ et $\sum_{i=1}^k P_i = 1$, en effet à partir de l'échelle de Saaty $e_{ij} \neq 0$ or

$$\frac{e_{ij}}{\sum_{l=1}^k e_{lj}} = \frac{e_{ij}}{\sum_{l=1, l \neq i}^k e_{lj} + e_{ij}} < 1$$

donc

$$\sum_{j=1}^k \frac{e_{ij}}{\sum_{l=1}^k e_{lj}} < k$$

d'où $P_i < 1$.

de plus

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \frac{1}{k} \left(\frac{e_{11}}{\sum_{l=1}^k e_{l1}} + \frac{e_{12}}{\sum_{l=1}^k e_{l2}} + \dots + \frac{e_{1k}}{\sum_{l=1}^k e_{lk}} \right) \\
 P_2 &= \frac{1}{k} \left(\frac{e_{21}}{\sum_{l=1}^k e_{l1}} + \frac{e_{22}}{\sum_{l=1}^k e_{l2}} + \dots + \frac{e_{2k}}{\sum_{l=1}^k e_{lk}} \right) \\
 &\vdots \\
 P_k &= \frac{1}{k} \left(\frac{e_{k1}}{\sum_{l=1}^k e_{l1}} + \frac{e_{k2}}{\sum_{l=1}^k e_{l2}} + \dots + \frac{e_{kk}}{\sum_{l=1}^k e_{lk}} \right)
 \end{aligned}$$

si nous sommions les deux membres nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^k P_i = \frac{1}{k} \left(\frac{e_{11} + e_{21} + \dots + e_{k1}}{\sum_{l=1}^k e_{l1}} + \frac{e_{12} + e_{22} + \dots + e_{k2}}{\sum_{l=1}^k e_{l2}} + \dots + \frac{e_{1k} + e_{2k} + \dots + e_{kk}}{\sum_{l=1}^k e_{lk}} \right) = 1$$

Après la détermination des poids des critères(ou dimensions...), il faut évaluer la cohérence des jugements ; On multiplie chaque colonne de la matrice de comparaison non normalisée par le poids du critère associé.

Critère	C_1	C_2	$\dots$	C_k	Cohérence
C_1	$1 * P_1$	$e_{12} * P_2$		$e_{1k} * P_k$	$coh_1 = \text{Somme ligne1}/P_1$
C_2	$\frac{1}{e_{12}} * P_1$	$1 * P_2$		$e_{2k} * P_k$	$coh_2 = \text{Somme ligne2}/P_2$
$\vdots$			$1 * P_i$		$coh_i = \text{Somme lignei}/P_i$
C_k	$\frac{1}{e_{1k}} * P_1$	$\frac{1}{e_{2k}} * P_2$		$1 * P_k$	$coh_k = \text{Somme lignek}/P_k$

Tableau II.4 – Calcul de la cohérence de la matrice de comparaison

Pour obtenir la cohérence moyenne, on multiplie chaque colonne de la matrice de comparaison non normalisée par le poids du critère associé, ainsi la cohérence moyenne notée Co_m est :

$$Co_m = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k coh_i \quad (II.2)$$

L'indice de cohérence noté I_{co} est donné par :

$$I_{co} = \frac{Co_m - N_e}{N_e - 1} \quad (II.3)$$

avec N_e est le nombre d'éléments, finalement le ratio de cohérence noté R_{co} se calcule de la

manière suivante :

$$R_{co} = \frac{I_{co}}{C_{o_a}} \quad (\text{II.4})$$

avec C_{o_a} est la cohérence aléatoire qui est donnée par le tableau suivant :

Nombre de critères	2	3	4	5	6	7	8	9
Cohérence aléatoire	0.00	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45

Tableau II.5 – *La cohérence aléatoire*

Si le ratio de cohérence $< 10\%$, alors la cohérence est bonne et la matrice de comparaison est acceptable, si non on doit recommencer la comparaison.

Il faut effectuer toutes ces opérations pour l'ensemble des dimensions et l'ensemble des critères. Si les jugements de cohérence sont corrects, on peut passer à l'étape suivante.

3 Construction d'une nouvelle méthode d'analyse multicritère

L'originalité de notre travail est que nous proposons une modélisation d'un problème multicritère multi-décideur développée sur la base de la théorie d'utilité⁶ fondée sur la complémentarité de la méthode AHP pour déterminer les différentes pondérations et la méthode des sommes pondérées qui permet d'associer les critères en un seul critère. Notre but par la suite est d'aboutir, pour chaque décideur, à un classement des actions via son propre ensemble de critères indépendamment des autres décideurs [Chaibi & Khomssi 2016].

3.1 Décomposition de l'objectif

Lorsque n décideurs cherchent la meilleure solution pour un problème ou une situation donnée, ils sont obligés d'identifier l'objectif [Henreit 2000] à atteindre noté O , et un ensemble d'actions noté A tel que :

$$A = \{a_j : j = 1, 2, \dots, m\}$$

6. Utilité économique : Qualité d'un bien ou d'un service qui le rend apte à assurer une certaine fonction et de ce fait le rend désirable pour ses acquéreurs potentiels [Tézenas 1972]

II.3 Construction d'une nouvelle méthode d'analyse multicritère

cet ensemble peut être discret ou continu, de plus, il est identique pour tous les décideurs⁷.

Il s'agit d'un ensemble de m actions, qui représentent l'objet de la décision, dont le but est d'identifier un sous-ensemble d'actions offrant un meilleur compromis parmi l'ensemble de départ. A cet effet, nous introduisons la notion d'optimalité[D. Berkoune & Rabenasolo 2008][Talbi 1999][M.I. d'une action à travers la définition suivante.

Définition 3.1 Une action "optimale" est toute action préférée par le décideur sur la base d'information externe au modèle mathématique à priori.

La solution du problème de décision revient à la recherche d'une partition de l'ensemble des actions possibles en un sous-ensemble d'actions "optimales" et un sous-ensemble d'actions "non-optimales".

Notons D l'ensemble de décideurs, il s'écrit sous la forme :

$$D = \{D_i : i = 1, 2, \dots, n\}$$

chaque décideur D_i traite l'objectif O via l_i dimensions indépendantes (économique, sociale, politique...) caractérisant l'ensemble A notées $d_{i,k}$, par conséquent l'ensemble de dimensions choisies par le décideur D_i est :

$$\tilde{D}_i = \{d_{i,k} : k = 1, 2, \dots, l_i\}$$

avec l_i est le nombre des dimensions choisies par le décideur D_i qui peut être différent d'un décideur à l'autre. Le cas où le nombre des dimensions l_i est le même ne signifie pas nécessairement que nous avons les mêmes dimensions pour tous les décideurs, mais juste une égalité au niveau des nombres des dimensions choisies.

Le décideur précise les dimensions représentant les axes forts et importants de son point de vue pour sa modélisation, ainsi l'objectif O est considéré comme un ensemble décomposable en des sous objectifs indépendants notés $O_{i,k}$ (la restriction de l'objectif O sur la dimension $d_{i,k}$). Les sous objectifs sont indépendants du fait que les dimensions choisies sont indépendantes, de plus ils forment une partition disjointe de l'objectif global de l'étude à traiter, et nous avons pour tout décideur D_i :

$$O = \bigcup_{k=1}^{l_i} O_{i,k} \quad (\text{II.5})$$

L'objectif $O_{i,k}$ lié à la dimension $d_{i,k}$ est réalisé à travers la maximisation ou la minimisation de

7. L'ensemble A est défini via la nature du problème étudié, donc il est le même pour tous les décideurs.

Chapitre II. Construction d'une Méthode d'Analyse Multicritère Dynamique Multi-Décideurs

certaines critères, donc le décideur est obligé de déterminer un ensemble de critères noté $C_{i,k}$, qui mesure l'efficacité des actions. Cet ensemble s'écrit comme :

$$C_{i,k} = \{C_{i,k,p} : p = 1, 2, \dots, p_{ik}\}$$

avec $C_{i,k,p}$ est un critère choisi par le décideur i , $i = 1, 2, \dots, n$, relativement à la dimension k . Le nombre $p_{ik} = \text{card}(C_{i,k})$ peut varier d'un décideur à un autre et d'une dimension à une autre.

la réunion $C_i = \bigcup_{k=1}^{l_i} C_{i,k}$ est l'ensemble⁸ de tous les critères considérés par le décideur i , $i = 1, 2, \dots, n$.

la maximisation ou la minimisation de $C_{i,k,p}$ est un sous objectif $O_{i,k,p}$, par conséquent :

$$O_{i,k} = \bigcup_{p=1}^{p_{ik}} O_{i,k,p} \quad (\text{II.6})$$

ce qui donne :

$$O = \bigcup_{k=1}^{l_i} \bigcup_{p=1}^{p_{ik}} O_{i,k,p} \quad (\text{II.7})$$

Ainsi nous construisons un recouvrement par partition de l'objectif global⁹.

Définition 3.2 Soit O un objectif, $(O_k)_{k=1\dots n}$ une suite finie des objectifs constituant une partition de O . Chaque objectif O_k est lié à une dimension d_k de poids P_k . Une dimension d_{k_0} est dite négligeable si et seulement si P_{k_0} tend¹⁰ vers 0, autrement dit

$$\sum_{k \neq k_0}^n P_k \cong 1 \quad (\text{II.8})$$

Dans une telle modélisation, il se peut que le décideur i choisisse un ensemble de sous objectifs $(O_{i,k})_{k=1,\dots,l_i}$ essentiels et représentatifs pour sa modélisation, sans recouvrir l'objectif global de l'étude, c'est-à-dire

$$O = \bigcup_{k=1}^{l_i} O_{i,k} \bigcup \tilde{O}_i \quad (\text{II.9})$$

sa modélisation est acceptable si et seulement si la dimension $\tilde{d}_i$ d'objectif $\tilde{O}_i$, est négligeable

8. Cette réunion est disjointe par construction.

9. Les objectifs $O_{i,k,p}$ peuvent être regroupés en deux classes, une contenant les objectifs réalisés en parallèle, l'autre contenant les objectifs réalisés en série.

10. Dire que $P_{i_0} \cong 0$ est lié fortement au contexte du sujet et les préférences du décideur qui précisent le voisinage du zéro considéré dans l'étude. Autrement dit, chaque étude a un seuil à partir de quel, on parle d'une dimension négligeable.

au sens défini précédemment.

La figure 1 traduit cette idée de décomposition de l'objectif.

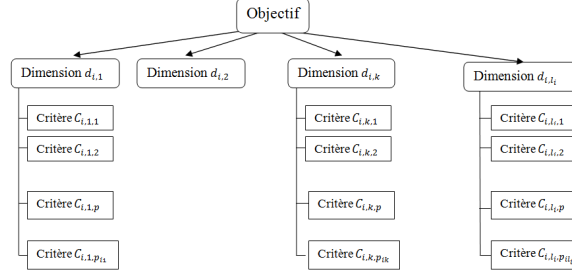


Figure II.2 – Indicateur

3.2 Évaluation et compatibilité des critères

La notion du temps rend le problème dynamique, au lieu que la fonction d'évaluation d'un critère dépend seulement de l'action, nous la définissons d'une manière qui garantit une information correcte à un instant t .

Pour cette raison, soit T l'ensemble du temps, nous avons deux possibilités ;

- soit un temps discret et T s'écrit sous la forme¹¹

$$T = \{\alpha h : \alpha \in \mathbb{Z}, h > 0 \text{ une constante fixée}\}$$

- Soit un temps continue donc $T = \mathbb{R}$ ou $T = \mathbb{R}^+$

Ainsi nous définissons les fonctions d'évaluations comme suit.

Définition 3.3 Pour chaque critère $C_{i,k,p}$, nous définissons la fonction d'évaluation¹² g_{ikp} comme suit :

$$g_{ikp} : T \times A \rightarrow \mathbb{R} \tag{II.10}$$

$$g_{ikp}(t, a_j) = e_{i,kpj}(t)$$

A partir de ces fonctions, le décideur D_i , $i = 1, 2, \dots, n$ construit un ensemble d'évaluation à l'instant t noté $E_i(t)$:

$$E_i(t) = \{e_{i,kpj}(t) : j = 1, 2, \dots, m \quad p = 1, 2, \dots, p_{ik} \quad k = 1, 2, \dots, l_i\}$$

11. Le paramètre h est le pas de discrétisation du temps, et le paramètre α change de signe pour modéliser le problème dans le passé ainsi que dans le présent.

12. Les propriétés de la fonction g_{ikp} dépendent du contexte du problème, ce dernier impose la forme des espaces T et A (continue ou discret)...voire même la nature des critères.

Remarque 1 la fonction d'évaluation g_{ikp} est liée au critère $C_{i,k,p}$, c'est-à-dire le critère p choisi dans la dimension k par le décideur i , par conséquent cette fonction s'écrit relativement au critère et non pas au décideur. L'indice i est juste pour dire qu'il s'agit d'un critère choisi par le décideur D_i .

Comme exemple, lorsqu'il s'agit d'une analyse multicritère comparative des systèmes de transports dans une région précise, pour un décideur D_i , la vitesse peut être considérée comme un critère de dimension performance notée $C_{i,k,p}$. Pour un autre décideur $D_{i'}$, elle peut être considérée comme un critère de dimension niveau de la technologie, elle sera notée $C_{i',k',p'}$ et forcément nous aurons $e_{i,kpj}(t) = e_{i',k'p'j}(t)$ pour toute action j .

Nous avons vu que la réalisation des sous-objectifs liés aux différentes dimensions est conditionnée par la maximisation ou la minimisation des critères associés. Dans cette approche, nous voulons utiliser des sommes pondérées. Pour avoir une cohérence dans notre étude, il est nécessaire de ne considérer que des critères à maximiser. Toutefois, des critères à minimiser existent (les critères liés au coût sont des critères à minimiser). Une transformation de ces données s'impose alors afin d'obtenir des critères à maximiser. La transformation adéquate est la suivante [Guitouni & Martel 1998] :

$$e'_{i,kpj}(t) = \max_{j'} e_{i,kpj'}(t) - e_{i,kpj}(t) \quad (\text{II.11})$$

pour tout critère p et dimension k .

La valeur $\max_j e_{i,kpj}(t)$ représente une valeur de référence pour le critère $C_{i,k,p}$. Sa minimisation se traduit par la diminution de la valeur $e_{i,kpj}(t)$, ce qui est équivalent à la maximisation de $e'_{i,kpj}(t)$.

Dans ce qui suit, nous supposons qu'il n'existe que des critères à maximiser, car il est toujours possible de transformer l'objectif de minimisation en un objectif de maximisation à travers notre écriture II.11. Ainsi pour chaque décideur, nous récapitulons ses données dans le tableau suivant :

II.3 Construction d'une nouvelle méthode d'analyse multicritère

Dimensions		$d_{i,1}$			$\dots$	$d_{i,k}$			$\dots$	d_{i,l_i}		
Critères		$C_{i,1,1}$	$\dots$	$C_{i,1,p_{i1}}$	$\dots$	$C_{i,k,1}$	$\dots$	$C_{i,k,p_{ik}}$	$\dots$	$C_{i,l_i,1}$	$\dots$	$C_{i,l_i,p_{il_i}}$
Action	a_1	$e_{i,111}(t)$	$\dots$	$e_{i,1p_{i1}1}(t)$	$\dots$	$e_{i,k11}(t)$	$\dots$	$e_{i,kp_{ik}1}(t)$	$\dots$	$e_{i,l_i11}(t)$	$\dots$	$e_{i,l_ip_{il_i}1}(t)$
	a_2	$e_{i,112}(t)$	$\dots$	$e_{i,1p_{i1}2}(t)$	$\dots$	$e_{i,k12}(t)$	$\dots$	$e_{i,kp_{ik}2}(t)$	$\dots$	$e_{i,l_i12}(t)$	$\dots$	$e_{i,l_ip_{il_i}2}(t)$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	a_j	$e_{i,11j}(t)$	$\dots$	$e_{i,1p_{i1}j}(t)$	$\dots$	$e_{i,k1j}(t)$	$\dots$	$e_{i,kp_{ik}j}(t)$	$\dots$	$e_{i,l_i1j}(t)$	$\dots$	$e_{i,l_ip_{il_i}j}(t)$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	a_m	$e_{i,11m}(t)$	$\dots$	$e_{i,1p_{i1}m}(t)$	$\dots$	$e_{i,k1m}(t)$	$\dots$	$e_{i,kp_{ik}m}(t)$	$\dots$	$e_{i,l_i1m}(t)$	$\dots$	$e_{i,l_ip_{il_i}m}(t)$

Tableau II.6 – Les données du décideur D_i

Avoir plusieurs décideurs diversifie l'ensemble des objectifs possibles pour un même problème, et un même décideur peut avoir plusieurs objectifs. Chaque objectif peut donner lieu à plusieurs critères, et par la suite la naissance de plusieurs mesures d'évaluations. Ce sont les "inputs" de chaque décideur. Le tableau proposé rassemble ces entrées pour faciliter la procédure du traitement et de décision.

3.3 Détermination des poids

3.3.1 Les poids des dimensions

La transcription de la méthode AHP introduite par Sa [Saaty 1884], nous permet de construire les poids des dimensions, en effet, le décideur compare ces dimensions entre elles, deux à deux, à l'aide de l'échelle de pondération donnée dans le tableau II.3.

A partir de cette échelle d'importance, le décideur proposera la matrice suivante de comparaison entre ces dimensions $d_{i,k}$ et $d_{i,\tilde{k}}$:

$\tilde{D}_i$	$d_{i,1}$	$d_{i,2}$	$\dots$	$d_{i,k}$	$\dots$	d_{i,l_i-1}	d_{i,l_i}
$d_{i,1}$	1	$v_{i,12}$		$v_{i,1k}$		$v_{i,1l_i-1}$	$v_{i,1l_i}$
$d_{i,2}$	$\frac{1}{v_{i,12}}$	1		$v_{i,2k}$		$v_{i,2l_i-1}$	$v_{i,2l_i}$
$\vdots$							
$d_{i,k}$	$\frac{1}{v_{i,1k}}$	$\frac{1}{v_{i,2k}}$		1		v_{i,kl_i-1}	v_{i,kl_i}
$\vdots$							
d_{i,l_i-1}	$\frac{1}{v_{i,1l_i-1}}$	$\frac{1}{v_{i,2l_i-1}}$		$\frac{1}{v_{i,kl_i-1}}$		1	v_{i,l_i-1,l_i}
d_{i,l_i}	$\frac{1}{v_{i,1l_i}}$	$\frac{1}{v_{i,2l_i}}$		$\frac{1}{v_{i,kl_i}}$		$\frac{1}{v_{i,l_i-1,l_i}}$	1

Tableau II.7 – Matrice de comparaison des dimensions

C'est une matrice carrée $(v_{i,k\tilde{k}})_{k,\tilde{k}=1,\dots,l_i}$ où :

- les coefficients $v_{i,kk} = 1$ car il s'agit de comparer la dimension $d_{i,k}$ avec elle-même.
- Pour $k \neq \tilde{k}$, si $d_{i,k}$ est $v_{i,k\tilde{k}}$ fois plus important que $d_{i,\tilde{k}}$ alors $d_{i,\tilde{k}}$ est $\frac{1}{v_{i,k\tilde{k}}}$ fois plus important que $d_{i,k}$ par suite les coefficients de la matrice de comparaison vérifient la relation $v_{i,\tilde{k}k} = \frac{1}{v_{i,k\tilde{k}}}$.

Avec cette matrice, le décideur calcule $P_{i,k}$ associé à la dimension $d_{i,k}$ comme suit :

$$P_{i,k} = \frac{1}{l_i} \left(\sum_{m=1}^{l_i} \frac{v_{i,km}}{\sum_{j=1}^{l_i} v_{i,jm}} \right) \quad (\text{II.12})$$

3.3.2 Les poids relatifs des critères

Après le calcul des poids des dimensions $d_{i,k}$ $i = 1, \dots, l_i$, le décideur doit introduire une matrice carrée d'ordre p_{ik} définie de la manière citée au paragraphe précédent où il compare les critères d'une dimension entre eux en précisant l'importance du $C_{i,k,p}$ avec $C_{i,k,p'}$. La matrice suivante illustre cette comparaison :

$C_{i,k}$	$C_{i,k,1}$	$C_{i,k,2}$	$\dots$	$C_{i,k,p}$	$\dots$	$C_{i,k,p_{ik}}$
$C_{i,k,1}$	1	$\tilde{v}_{ik,12}$		$\tilde{v}_{ik,1p}$		$\tilde{v}_{ik,1p_{ik}}$
$C_{i,k,2}$	$\frac{1}{\tilde{v}_{ik,12}}$	1		$\tilde{v}_{ik,2p}$		$\tilde{v}_{ik,2p_{ik}}$
$\vdots$						
$C_{i,k,p}$	$\frac{1}{\tilde{v}_{ik,1p}}$	$\frac{1}{\tilde{v}_{ik,2p}}$		1		$\tilde{v}_{ik,pp_{ik}}$
$\vdots$						
$C_{i,k,p_{ik}}$	$\frac{1}{\tilde{v}_{ik,1p_{ik}}}$	$\frac{1}{\tilde{v}_{ik,2p_{ik}}}$		$\frac{1}{\tilde{v}_{ik,pp_{ik}}}$		1

Tableau II.8 – Matrice de comparaison des critères

Le poids relatif $P_{i,k,p}$ associé au critère $C_{i,k,p}$ est défini par :

$$P_{i,k,p} = \frac{1}{p_{ik}} \left(\sum_{j=1}^{p_{ik}} \frac{\tilde{v}_{ik,pj}}{\sum_{l=1}^{p_{ik}} \tilde{v}_{ik,lj}} \right) \quad (\text{II.13})$$

II.3 Construction d'une nouvelle méthode d'analyse multicritère

La méthode AHP garantie le fait que :

$$\sum_{p=1}^{p_{ik}} P_{i,k,p} = 1 \quad (\text{II.14})$$

Nous pouvons calculer le ratio de cohérence pour chaque matrice de comparaison en utilisant l'égalité II.4, soit celle de la comparaison des dimensions ou celle de la comparaison des critères dans la dimension qui les englobe. Si les ratios sont inférieurs à 10%, nous acceptons les matrices trouvées, si non, nous referons la comparaison binaire.

3.3.3 Les poids globaux des critères

Après la construction des poids $P_{i,k}$ des dimensions $d_{i,k}$ et les poids relatifs $P_{i,k,p}$ des critères $C_{i,k,p}$, nous définissons les poids globaux notés $w_{i,k,p}$ des critères $C_{i,k,p}$ comme suit :

Définition 3.4 *Pour chaque critère $C_{i,k,p}$ relativement à la dimension $d_{i,k}$, le poids global est défini par :*

$$w_{i,k,p} = P_{i,k} P_{i,k,p} \quad (\text{II.15})$$

Ce poids est dit global car il représente l'importance du critère $C_{i,k,p}$ par rapport à tous les critères de la structure. De plus, le poids de la dimension est la somme des poids globaux de tous ces critères, en effet :

$$\sum_{p=1}^{p_{ik}} w_{i,k,p} = \sum_{p=1}^{p_{ik}} P_{i,k} P_{i,k,p} = P_{i,k} \sum_{p=1}^{p_{ik}} P_{i,k,p} = P_{i,k}$$

Ce qui est naturel, puisque le poids d'un groupe est défini par la somme des poids des éléments formant ce groupe.

Le tableau suivant illustre les différents poids construits par D_i relativement à la dimension $d_{i,k}$:

Dimension $d_{i,k}$							
Poids	$P_{i,k}$						
Critères	$C_{i,k,1}$	$C_{i,k,2}$	$\dots$	$C_{i,k,p}$	$\dots$	$C_{i,k,p_{ik}}$	Somme
Poids relatifs	$P_{i,k,1}$	$P_{i,k,2}$		$P_{i,k,p}$		$P_{i,k,p_{ik}}$	$\sum P_{i,k,p} = 1$
Poids globaux	$w_{i,k,1}$	$w_{i,k,2}$		$w_{i,k,p}$		$w_{i,k,p_{ik}}$	$\sum w_{i,k,p} = P_{i,k}$

Tableau II.9 – *Poids construits*

Chapitre II. Construction d'une Méthode d'Analyse Multicritère Dynamique Multi-Décideurs

À ce niveau, nous avons décomposé l'objectif en différentes dimensions, elles-mêmes sont décomposées en un ensemble de critères qui sont mesurés avec leurs fonctions d'évaluations. Nous avons également calculé les différents poids. Le tableau suivant regroupe les différentes informations du décideur D_i :

Dimensions		$d_{i,1}$			...	$d_{i,k}$			...	d_{i,l_i}		
Poids		$P_{i,1}$			...	$P_{i,k}$			...	P_{i,l_i}		
Critères		$C_{i,1,1}$	...	$C_{i,1,p_{i1}}$	...	$C_{i,k,1}$	...	$C_{i,k,p_{ik}}$	...	$C_{i,l_i,1}$	...	$C_{i,l_i,p_{il_i}}$
Poids relatifs		$P_{i,1,1}$	...	$P_{i,1,p_{i1}}$	...	$P_{i,k,1}$	...	$P_{i,k,p_{ik}}$	...	$P_{i,l_i,1}$	...	$P_{i,l_i,p_{il_i}}$
Poids globaux		$w_{i,1,1}$	...	$w_{i,1,p_{i1}}$	...	$w_{i,k,1}$	...	$w_{i,k,p_{ik}}$	...	$w_{i,l_i,1}$	...	$w_{i,l_i,p_{il_i}}$
Action	a_1	$e_{i,111}(t)$	...	$e_{i,1p_{i1}1}(t)$	...	$e_{i,k11}(t)$	...	$e_{i,kp_{ik}1}(t)$	...	$e_{i,l_i11}(t)$	...	$e_{i,l_ip_{il_i}1}(t)$
	a_2	$e_{i,112}(t)$	...	$e_{i,1p_{i1}2}(t)$	...	$e_{i,k12}(t)$	...	$e_{i,kp_{ik}2}(t)$	...	$e_{i,l_i12}(t)$	...	$e_{i,l_ip_{il_i}2}(t)$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	a_j	$e_{i,11j}(t)$	...	$e_{i,1p_{i1}j}(t)$	...	$e_{i,k1j}(t)$	...	$e_{i,kp_{ik}j}(t)$	...	$e_{i,l_i1j}(t)$	...	$e_{i,l_ip_{il_i}j}(t)$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	a_m	$e_{i,11m}(t)$	...	$e_{i,1p_{i1}m}(t)$	...	$e_{i,k1m}(t)$	...	$e_{i,kp_{ik}m}(t)$	...	$e_{i,l_i1m}(t)$	...	$e_{i,l_ip_{il_i}m}(t)$

Tableau II.10 – Tableau des données nécessaires pour la résolution

3.4 Méthode composée (AHP/ Somme Pondérée)

Après l'affectation des poids aux critères listés, et l'évaluation des critères pour chaque action, nous calculons le score global (weighted ratings) de l'action à l'aide de la méthode de la somme pondérée.

Si le décideur D_i cherche l'action optimale, il a au moins deux possibilités à envisager que nous citons dans les paragraphes suivants.

3.4.1 Somme pondérée relative

Si le décideur D_i s'intéresse à une dimension précise $d_{i,k}$, il peut calculer à l'instant t la somme pondérée relative notée $S_{i,k}$ pour toute action, en ne considérant que des critères à maximiser, à l'aide des critères $C_{i,k,p}$ et leurs poids relatifs $P_{i,k,p}$, il transforme le problème en un seul critère pour tous les actions comme suit :

$$S_{i,k}(t, a_j) = \sum_{p=1}^{p_{ik}} P_{i,k,p} g_{ikp}(t, a_j) \quad (\text{II.16})$$

II.3 Construction d'une nouvelle méthode d'analyse multicritère

ou encore :

$$S_{i,k}(t, a_j) = \sum_{p=1}^{p_{ik}} P_{i,k,p} e_{i,kpj}(t) \quad (\text{II.17})$$

Ce qui permet d'obtenir un tableau de résultats de la manière suivante :

Dimension $d_{i,k}$								
Critères		$C_{i,k,1}$	$C_{i,k,2}$	$\cdots$	$C_{i,k,p}$	$\cdots$	$C_{i,k,p_{ik}}$	Somme
Poids relatifs		$P_{i,k,1}$	$P_{i,k,2}$		$P_{i,k,p}$		$P_{i,k,p_{ik}}$	$\sum P_{i,k,p} = 1$
Actions	a_1	$e_{i,k11}(t)$	$e_{i,k21}(t)$		$e_{i,kp1}(t)$		$e_{i,kp_{ik}1}(t)$	$S_{i,k}(t, a_1)$
	a_2	$e_{i,k12}(t)$	$e_{i,k22}(t)$		$e_{i,kp2}(t)$		$e_{i,kp_{ik}2}(t)$	$S_{i,k}(t, a_2)$
	$\vdots$							
	a_j	$e_{i,k1j}(t)$	$e_{i,k2j}(t)$		$e_{i,kpj}(t)$		$e_{i,kp_{ik}j}(t)$	$S_{i,k}(t, a_j)$
	$\vdots$							
	a_m	$e_{i,k1m}(t)$	$e_{i,k2m}(t)$		$e_{i,kpm}(t)$		$e_{i,kp_{ik}m}(t)$	$S_{i,k}(t, a_m)$

Tableau II.11 – Somme pondérée relative

L'action optimale a_{j_0} cherchée à l'instant t est celle qui vérifie :

$$S_{i,k}(t, a_{j_0}) = \max_j S_{i,k}(t, a_j) \quad (\text{II.18})$$

3.4.2 Somme pondérée globale

Si le décideur D_i cherche à l'instant t une action optimale pour réaliser l'objectif global, il doit considérer toutes les dimensions, et leurs critères définis à partir des sommes pondérées relatives. Il doit considérer les données du tableau suivant :

À partir de ces données, nous définissons la somme pondérée globale comme suit :

Définition 3.5 Pour chaque décideur D_i et toute action a_j à chaque instant t nous définissons la somme pondérée globale notée $S_i(t, a_j)$ comme suit

$$S_i(t, a_j) = \sum_{k=1}^{l_i} P_{i,k} S_{i,k}(t, a_j) \quad (\text{II.19})$$

Dimensions			$d_{i,1}$	$d_{i,2}$	$\dots$	$d_{i,k}$	$\dots$	d_{i,l_i}
Poids			$P_{i,1}$	$P_{i,2}$	$\dots$	$P_{i,k}$	$\dots$	P_{i,l_i}
Actions	a_1	Sommes pondérées relatives	$S_{i,1}(t, a_1)$	$S_{i,2}(t, a_1)$	$\dots$	$S_{i,k}(t, a_1)$		$S_{i,l_i}(t, a_1)$
	a_2		$S_{i,1}(t, a_2)$	$S_{i,2}(t, a_2)$		$S_{i,k}(t, a_2)$		$S_{i,l_i}(t, a_2)$
	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$				
	a_j		$S_{i,1}(t, a_j)$	$S_{i,2}(t, a_j)$		$S_{i,k}(t, a_j)$		$S_{i,l_i}(t, a_j)$
	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$				
	a_m		$S_{i,1}(t, a_m)$	$S_{i,2}(t, a_m)$		$S_{i,k}(t, a_m)$		$S_{i,l_i}(t, a_m)$

Tableau II.12 – *Evaluation par les sommes pondérées relatives*

A l'aide de cette définition, l'action optimale $a_{\bar{j}}$ est celle qui vérifie

$$S_i(t, a_{\bar{j}}) = \max_j S_i(t, a_j) \quad (\text{II.20})$$

Si nous remplaçons l'écriture II.16 dans l'équation II.19 nous obtenons :

$$S_i(t, a_j) = \sum_{k=1}^{l_i} P_{i,k} \sum_{p=1}^{p_{ik}} P_{i,k,p} \cdot g_{ikp}(t, a_j) = \sum_{k=1}^{l_i} \sum_{p=1}^{p_{ik}} P_{i,k} P_{i,k,p} \cdot g_{ikp}(t, a_j) = \sum_{k=1}^{l_i} \sum_{p=1}^{p_{ik}} w_{i,k,p} \cdot g_{ikp}(t, a_j)$$

Par suite

$$S_i(t, a_j) = \sum_{k=1}^{l_i} \sum_{p=1}^{p_{ik}} w_{i,k,p} \cdot e_{i,kpj}(t) \quad (\text{II.21})$$

Cette formule montre que la somme pondérée globale est la somme des produits des poids de tous les critères relativement à la structure et les évaluations de ces derniers, donc nous avons obtenu la formule classique de la somme pondérée II.1, ce qui renforce notre modélisation dans le sens où elle est plus générale.

Notons que l'action donnée par II.18 n'est pas forcément celle donnée par II.20, il s'agit d'une autre manière d'ordonnancement de l'ensemble des actions.

Avoir différents poids (poids des dimensions, poids relatifs ou globaux des critères) nous a permis de définir différentes sommes. Le but est d'avoir le problème de décision et le choix de l'action optimale à travers une étude pluridimensionnelle, soit d'un point de vue partiel (étude d'une seule dimension) soit d'un point de vue global (étude de la structure entière).

3.4.3 Somme pondérée moyenne

Pratiquement, chercher l'action optimale à un instant t peut rendre la décision plus difficile, surtout si cette action optimale change sur des petits intervalles lorsqu'il s'agit d'un temps

II.3 Construction d'une nouvelle méthode d'analyse multicritère

continu ou d'un instant t_i à t_{i+1} pour un temps discret. Pour cette raison, nous introduisons la notion de moyenne qui donne une vision plus large à la notion du temps dans les deux cas (temps continu ou discret), et nous parlons des sommes pondérées moyennes.

Définition 3.6 *Pour le décideur D_i et l'action a_j , nous définissons la somme pondérée moyenne relativement à la dimension $d_{i,k}$ notée $S_{i,k}^m(a_j)$ comme suit :*

– Avec un temps continu

$$S_{i,k}^m(a_j) = \frac{1}{t_f - t_i} \sum_{p=1}^{p_{ik}} P_{i,k,p} \int_{t_i}^{t_f} g_{ikp}(t, a_j) dt \quad t_f \neq t_i \quad (\text{II.22})$$

– Avec un temps discret

$$S_{i,k}^m(a_j) = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^{p_{ik}} P_{i,k,p} \sum_{t=t_i}^{t_f} g_{ikp}(t, a_j) \quad (\text{II.23})$$

N est le nombre des pas.

l'action optimale a_{J_0} cherchée entre t_i et t_f est celle qui vérifie

$$S_{i,k}^m(a_{J_0}) = \max_j S_{i,k}^m(a_j) \quad (\text{II.24})$$

Définition 3.7 *Pour le décideur D_i et l'action a_j , nous définissons la somme pondérée moyenne globale notée $S_i^m(a_j)$ comme suit*

$$S_i^m(a_j) = \sum_{k=1}^{l_i} P_{i,k} S_{i,k}^m(a_j) \quad (\text{II.25})$$

L'action optimale a_{J_1} cherchée entre t_i et t_f est celle qui vérifie

$$S_i^m(a_{J_1}) = \max_j S_i^m(a_j) \quad (\text{II.26})$$

Nous pouvons résumer l'idée principale de cette modélisation et dire qu'elle permet de répondre d'une manière globale ou sélective à la recherche d'une action optimale suivant ce qu'on cherche à maximiser.

3.5 Classement des actions potentielles

Dans ce paragraphe, nous travaillons avec les sommes pondérées moyennes, sachant qu'il est possible de refaire la même démarche présentée ci-dessous pour une étude instantanée.

Ordre relatif à la dimension $d_{i,k}$

Posons $A_1 = A$, Si le but du décideur D_i est d'ordonner les actions potentielles dans une dimension précise $d_{i,k}$, d'une manière triviale, la solution optimale est la première action notée a_{j_1} qui vérifie

$$S_{i,k}^m(a_{j_1}) = \max_{a_j \in A_1} S_{i,k}^m(a_j) \quad (\text{II.27})$$

Posons $A_2 = A_1 \setminus \{a_{j_1}\}$, la deuxième action notée a_{j_2} est celle qui vérifie

$$S_{i,k}^m(a_{j_2}) = \max_{a_j \in A_2} S_{i,k}^m(a_j) \quad (\text{II.28})$$

D'une manière générale la $l^{\text{ième}}$ action notée a_{j_l} est celle qui vérifie

$$S_{i,k}^m(a_{j_l}) = \max_{a_j \in A_l} S_{i,k}^m(a_j) \quad (\text{II.29})$$

avec $A_{l+1} = A_l \setminus \{a_{j_l}\}$ pour $1 \leq l \leq m-1$ et $A_m = \{a_{j_m}\}$ Par conséquent

$$A = \bigcup_{l=1}^m \{a_{j_l}\} \quad (\text{II.30})$$

C'est une partition canonique ordonnée de l'ensemble des actions potentielles A dans la dimension d_k .

Ordre global des actions

Si le but du décideur D_i est d'ordonner l'ensemble des actions potentielles relativement à l'objectif global, il suffit de refaire le même algorithme du paragraphe précédent, en remplaçant les sommes pondérées moyennes relatives $S_{i,k}^m(a_j)$ par les sommes pondérées moyennes globales $S_i^m(a_j)$ afin d'obtenir une partition canonique ordonnée de l'ensemble des actions potentielles A par rapport à l'objectif étudié.

4 Applications

Une modélisation est dite efficace, si elle est apte de représenter le nombre maximal des problèmes concrets, avec leurs ensembles des contraintes imposées qui sont souvent de nature contradictoire. Elle est solide tant qu'elle offre un moyen scientifique caractérisé par la cohérence et la logique, inventant une procédure de solution visant à déterminer l'ensemble des solutions optimales.

Dans ce travail, nous avons proposé une méthode d'aide à la décision multicritères multi-décideurs, en se basant sur une décomposition de l'objectif, qui génère l'ensemble des dimensions et des critères. Absolument, nous avons fait un choix entre les méthodes existant dans la littérature****, pour évaluer les poids et les scores de chaque action, afin d'avoir une nouvelle procédure de sélection et de choix. Ce qui permet d'être en mesure d'offrir un moyen optimal lors de la décision.

Toutefois, cette méthode est donnée dans un cadre théorique. Il serait préférable de la compléter par des applications réelles, évaluant sa capacité de représenter, mathématiquement, les problèmes vécus et de trouver les solutions. Dans ce contexte, nous avons choisi deux applications[Annexe du chapitre 2] :

- La première est dans le cadre macroéconomique. Elle compare le Tramway et le bus, avec les données réelles de la société du Tramway de Rabat-Salé. Nous supposons qu'il existe quatre décideurs. Ceci est un choix admissible car en réalité le problème du transport accorde l'intention de plusieurs ministères, les associations concernées par l'environnement, les associations de développement humain, les communes locales, les municipalités locales... Ce qui augmente la taille de l'ensemble de décideurs.
Pour appliquer notre méthode, nous avons choisi un ensemble de critères avec leurs évaluations réelles afin de prouver le choix de l'action optimale.
- Une deuxième application est dans le cadre de la microéconomie. En effet, nous considérons trois décideurs : un représentant du pouvoir public, une banque et une organisation non gouvernementale. Ces décideurs doivent choisir un projet AGR parmi les trois proposés via leurs points de vue. Chacun d'eux précise l'ensemble de ses critères à étudier, puis il les évalue à partir d'une échelle d'importance.
Notre modélisation aide les décideurs à sélectionner le projet optimal qui répond à leurs besoins.

5 Conclusion

Le fait de transformer les problèmes multicritères multi-décideurs en des problèmes multicritères mono-décideur, nous a permis de choisir des solutions optimales pour tous les décideurs en groupe mais indépendamment, en fonction des dimensions et des critères considérés simultanément.

Dans ce chapitre, nous avons proposé une modélisation mathématique pour des situations qui impliquent de nombreux critères dans le cadre des méthodes d'aide multicritères multi-décideurs avec un processus décisionnel, permettant la décomposition de l'objectif en k dimensions indépendantes et exhaustives décomposables en un ensemble de critères afin que les décideurs choisissent les solutions les plus adéquates suivant leurs orientations d'une façon indépendante, en tenant compte de l'objectif du problème. Après avoir identifié l'objectif et déterminé l'ensemble des actions, nous avons construit un modèle bien structuré sur lequel chaque décideur va se baser pour choisir l'action optimale.

Devant un système de critères à différents niveaux, nous avons utilisé le principe de la méthode AHP qui donne une écriture scientifique à la notion de pondération afin de calculer les différents poids liés à notre décomposition (poids de dimensions, poids relatifs et globaux des critères). Également la méthode des sommes pondérées nous a aidés à transformer le problème multicritère à un seul critère sous forme d'un résultat numérique, et d'obtenir une expression mathématique d'évaluation des actions sur laquelle chaque décideur va se baser pour choisir l'action optimale, donnant naissance à un algorithme programmable d'ordonnancement de l'ensemble des actions potentielles. En conséquence, nous avons obtenu un ordre partiel des actions potentielles sur chaque dimension, et un ordre global examinant tous les critères du système étudié. Ce qui a permis de juger mathématiquement le choix d'une action au lieu d'une autre. Notre proposition est une modélisation mathématique, pour résoudre la question d'aide à la décision, applicable pour une large classe de problèmes de décision, de plus le fait d'introduire le facteur du temps permet d'étudier même des problèmes d'aspect dynamique.

Dans ce travail, nous avons appliqué cette méthode dans deux domaines ; le premier est le problème de transport dans le domaine macro-économique, le deuxième est dans le contexte de la micro-économie, qui ont une nature complexe et composée pour de trois raisons :

- * Le nombre des décideurs intervenant pour financer et encadrer ces structures.
- * La complexité de la question de la pauvreté.
- * L'aspect économique des structures AGR varie entre l'informel et le formel.

Ces trois raisons et d'autres nous ont poussés à construire cette méthode , bien adaptée aux problèmes des structures micro-économiques sur la base d'une analyse multicritères dynamiques multi-décideurs.

Chapitre III

Sélection des projets micro-économiques sur la base de la rentabilité socio-économique

1 Introduction et objectifs

Pour l'INDH, une activité génératrice de revenus AGR est une activité de production de biens et de services à des fins de vente. Dans l'appui aux activités génératrices de revenus, l'INDH a visé deux grands objectifs :

- ★ Favoriser l'insertion des populations pauvres et vulnérables dans le tissu économique et social.
- ★ Contribuer à la promotion des produits de terroir.

Elle a mis en œuvre la promotion des AGR à travers deux approches : programmes rural et urbain, et programme transversal à travers l'appel à projet. L'ensemble des projets générateurs des revenus a ciblé des classes sociales fragiles économiquement [l'INDH] :

- Les jeunes au chômage, qui sont à la recherche d'emploi ou d'auto-emploi en situation précaire.
- Les femmes en situation de précarité et de marginalisation.
- Les personnes handicapées sans ressources.
- Les personnes détentrices de savoir faire et ayant de bonnes initiatives en matière de développement des produits de terroir.
- Les personnes nécessiteuses ayant des projets susceptibles d'être intégrés dans une chaîne de valeur d'une filière porteuse.

Des grands et nobles objectifs pour des populations vulnérables en besoin d'aide avec un énorme capital (27 milliards de Dirhams(plus que 2747.5 10⁶\$)) en mesure de financier des ateliers de réformes importantes capables de diminuer le cercle de la pauvreté.

* Mais comment les Comités Provinciaux de Développement Humain ont choisi ces projets ?

* et comment ces projets ont été distribués à la population ciblée ?

L'opération a suivi un processus d'élaboration de quatre étapes [l'INDH] :

- Dépôt des demandes de financement : Les porteurs de projets AGR (coopératives, associations, sociétés de personnes,...) soumettent leurs propositions en répondant aux appels à projets lancés par le CPDH. Ils préparent un fichier de six documents :
 - Demande de financement AGR
 - Étude technique AGR : faisabilité technico-économique, étude du marché, plan de financement, compte de résultats, plan de trésorerie
 - Liste des secteurs et typologie du projet AGR
 - Indicateurs de résultats AGR
 - Fiche viabilité AGR
- Présélection des projets : Une présélection est opérée par la commission technique, appuyée par la DAS, sur la base des fiches simplifiées reçues et, puis les porteurs de projets présélectionnés sont invités à déposer le dossier de demande de financement appuyés par une structure d'accompagnement.
- Sélection des AGR : Le CPDH sélectionne les AGR sur la base du rapport de la commission technique.
- Exécution, audit financier et technique systématique de tous les projets financés.

Les décideurs doivent s'assurer que le porteur de projet a le savoir faire et/ou les compétences suffisantes pour exercer l'activité, puis ils apportent l'assistance et l'appui technique nécessaires dans la gestion, comptabilité, dans la production, la transformation et la commercialisation du produit ou du service durant les phases pré et post mise en œuvre.

Le projet Initiative Nationale pour le Développement Humain (INDH) est peut-être le plus grand projet marocain de lutte contre la pauvreté. Certes, les mécanismes administratifs étaient basés sur la bonne gouvernance et la démocratie participative, mais l'optimalité et la rentabilité sont une question d'aspect technique.

Nous sommes fortement convaincus qu'une étude scientifique est nécessaire pour toute commission de décision. Elle permet de sélectionner les AGR sur la base des outils scientifiques et de les classer en fonction de leur rentabilité. Ce travail de nature mathématique et économique vient pour compléter cette carence.

Dans le cadre d'une approche holistique et dans l'hypothèse où nous avons des ressources financières (soit par l'état ou les organisations non gouvernementales (ONG), voire secteur privé), un problème majeur se pose, nous le traduisons par les questions suivantes :

Chapitre III. Sélection des projets micro-économiques sur la base de la rentabilité socio-économique

- Selon quels critères peut-on aider un micro-projet (l'AGR est un cas particulier) afin d'aider les pauvres de manière durable ? [Fikri *et al.* 2011]
- Peut-on réaliser, en même, temps une rentabilité économique et sociale ?

Le concept clé de ce chapitre est de répondre à ces deux questions, et de proposer un outil de sélection des projets microéconomiques pour les comités de décisions dans l'espoir d'investir l'argent public de manière équitable et raisonnable à l'intérêt des classes nécessiteuses.

En ce qui concerne l'aspect mathématique, nous construisons un nouveau algorithme intégrant la valeur actuelle comme critère de sélection des projets, et des indices macro et microéconomiques d'aspect social permettant d'ordonner l'ensemble des projets ou l'ensemble des structures des projets afin de combiner le qualitatif avec le quantitatif.

2 Problème de ciblage d'aide : limites d'une technique

L'un des problèmes que rencontre un décideur¹ pour choisir de financer entièrement ou partiellement une classe d'AGR² est de justifier économiquement son choix. Pour cela, nous considérons des outils mathématiques basés sur la performance, la rentabilité et l'impact sur la population, en particulier les membres actifs de l'AGR, des outils qui sont un moyen efficace pour donner un sens à la notion du développement durable car l'objectif principal est de sauver les membres de l'AGR de la pauvreté, en les aidant à développer des projets rentables économiquement, et par conséquent de choisir parmi les projets ceux qui ont la possibilité de réaliser un gain et de les intégrer dans une société de production/consommation, au lieu d'aide/consommation. Cette dernière situation devient lourde, voir insupportable, par les finances publiques et privées, tenant compte de la conjoncture mondiale économique actuelle [Sen 1993][Sen 2000].

Notre objectif dans cette partie est de construire un outil de mesure de la rentabilité qui permet de choisir dans l'ensemble des AGR possible, celle qui caractérise mieux cette notion.

2.1 Une technique proposée avec un simple codage

Pour approcher le problème du ciblage d'aide, nous donnons une proposition d'aide au financement pour visualiser de près la difficulté.

Un décideur peut se trouver devant trois décisions à prendre, concernant une situation sociale des membres d'AGR, en effet, il peut améliorer leurs situations sociales ou rester neutre devant cette situation, c'est-à-dire qu'il ne change rien, voir même il peut la détériorer. De même, il y a trois choix possibles concernant l'objectif économique : les aider à réaliser un gain économique, rester neutre, ou détériorer leur situations économiques.

L'objectif est d'améliorer les situations sociales et économiques des pauvres. Pour cela, nous donnons les valeurs 1, 0, -1 à ces objectifs selon la situation réalisée :

- la valeur 1 représente la situation : " réaliser l'objectif ".
- la valeur 0 représente la situation : " rester neutre devant l'objectif ".
- la valeur -1 représente la situation : " sacrifier l'objectif ".

1. Nous considérons un décideur toute personne morale ou physique qui a le statut juridique de financer ce type de structure micro-économique.

2. Dans ce papier nous désignons une activité génératrice de revenus par : AGR.

Chapitre III. Sélection des projets micro-économiques sur la base de la rentabilité socio-économique

Les différentes possibilités à prendre par le décideur se résument dans le tableau suivant :

		<i>amélioration économique</i>		
		-1	0	1
a. sociale	-1	(-1,-1)	(-1,0)	(-1,1)
	0	(0,-1)	(0,0)	(0,1)
	1	(1,-1)	(1,0)	(1,1)

Tableau III.1 – *Situations possibles*

- La situation $(-1, -1)$ est la mauvaise car elle approfondit le problème social et économique.
- La situation $(0, 0)$ est une neutralité.
- la situation $(1, 1)$ est la bonne puisqu'elle correspond au cas d'amélioration de l'état social et économique.
- Les situations $(0, -1)$ et $(-1, 0)$ représentent une perte sociale ou économique, mais quelle est la mauvaise ?
- Les situations $(0, 1)$ et $(1, 0)$ représentent un gain social ou économique.
- Les autres situations sont incomparables, de plus, elles ne reflètent pas une formation claire à interpréter.

Le problème est qu'avec ce tableau nous n'arrivons pas à mesurer l'écart entre la bonne situation et importe quelle autre situation, nous n'arrivons pas également à les ordonner toutes. L'objectif du paragraphe suivant est de résoudre ce problème.

2.2 Amélioration de la technique

Notre but par la suite est de transformer le tableau afin d'introduire une règle quantifiable permettant de comparer toutes les situations.

Si nous choisissons deux réels α et β non nuls à condition que $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq -\beta$, $\alpha \neq 2\beta$, $\alpha \neq -2\beta$, $\alpha \neq \frac{1}{2}\beta$ et $\alpha \neq -\frac{1}{2}\beta$ alors le tableau III.1 se transforme d'une manière bijective au tableau suivant :

$e^{-\alpha-\beta}$	$e^{-\alpha}$	$e^{-\alpha+\beta}$
$e^{-\beta}$	1	e^{β}
$e^{\alpha-\beta}$	e^{α}	$e^{\alpha+\beta}$

Tableau III.2 – *Transformation en écriture exponentielle*

III.2 Problème de ciblage d'aide : limites d'une technique

De plus, posons :

$$a = \frac{1}{e^{\alpha+\beta} - e^{-\alpha-\beta}} \quad b = -\frac{e^{-\alpha-\beta}}{e^{\alpha+\beta} - e^{-\alpha-\beta}}$$

a et b sont bien définis, car $e^{\alpha+\beta} - e^{-\alpha-\beta} \neq 0$ du fait que α et β sont non nuls et que $\alpha \neq -\beta$. considérons la fonction χ définie par :

$$\begin{aligned} \chi : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \chi(x) = ax + b \end{aligned}$$

Nous calculons les images des valeurs du tableau III.2, en utilisant la fonction χ . Ce qui nous amène au tableau des valeurs normalisées suivant :

0	$\frac{e^{-\alpha} - e^{-\alpha-\beta}}{e^{\alpha+\beta} - e^{-\alpha-\beta}}$	$\frac{e^{-\alpha+\beta} - e^{-\alpha-\beta}}{e^{\alpha+\beta} - e^{-\alpha-\beta}}$
$\frac{e^{-\beta} - e^{-\alpha-\beta}}{e^{\alpha+\beta} - e^{-\alpha-\beta}}$	$\frac{1 - e^{-\alpha-\beta}}{e^{\alpha+\beta} - e^{-\alpha-\beta}}$	$\frac{e^{\beta} - e^{-\alpha-\beta}}{e^{\alpha+\beta} - e^{-\alpha-\beta}}$
$\frac{e^{\alpha-\beta} - e^{-\alpha-\beta}}{e^{\alpha+\beta} - e^{-\alpha-\beta}}$	$\frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha-\beta}}{e^{\alpha+\beta} - e^{-\alpha-\beta}}$	1

Tableau III.3 – Normalisation des valeurs

finalement, nous arrivons à représenter la mauvaise situation par 0 et la bonne par 1. Les autres valeurs sont comparables dès le choix des paramètres α et β .

En effet, le passage de $\mathbb{R}^2$, qui n'est pas ordonné à $\mathbb{R}$ qui est totalement ordonné, offre un moyen d'aide à la décision au décideur. S'il choisit d'améliorer la situation économique, il prendra une valeur α inférieure à β , par contre, s'il choisit d'améliorer la situation sociale, il prendra une valeur α supérieure à β . Des exemples au choix des paramètres α et β sont donnés à l'annexe du chapitre 3.

En fin de compte, nous arrivons à comparer les différentes situations selon l'objectif précisé (social ou économique). L'inconvénient c'est qu'avec un tableau, nous ne pouvons pas mettre plus que deux paramètres (social et économique). De plus, la bonne situation 1 représente le cas d'un projet réalisant un gain socio-économique, d'une part elle ne reflète aucune information sur le degré de rentabilité de ce projet, d'autre part il existe plusieurs projets réalisant un gain socio-économique, alors comment peut-on les classer ?

Notons que le 0 ne mesure même pas l'écart entre cette situation et l'objectif visé.

Notre objectif par la suite est de trouver une procédure d'aide à la décision contribuant à l'amélioration au développement durable social et économique tout en évitant la carence des

deux techniques précédentes.

3 Bilan et Valeur actuelle

3.1 L'équation bilan

La décision d'aide au financement de structures micro-économiques légales³ quelconque se base principalement sur l'évaluation de son intérêt économique, et par conséquent, du calcul de sa rentabilité, cette dernière dépend des coûts qu'engendre le projet et des gains qu'il procure. Si la somme des gains est supérieure aux divers coûts, en particulier, de l'investissement, il est naturel de dire que celui-ci est rentable.

Un investissement génère chaque année des cash-flow⁴, sa valeur actualisée⁵ est définie d'une manière générale par :

$$V_A = \sum (cash - flow) \quad (III.1)$$

Le cash-flow se calcule directement⁶ via l'écriture suivante :

$$\sum cash - flow = R - D \quad (III.2)$$

avec

- R : Le revenu d'exploitation.
- D : La charge d'exploitation.

Une étape d'actualisation⁷ est nécessaire car elle est la méthode permettant de comparer un flux monétaire présent à un flux monétaire à venir en les ramenant au même référentiel temporel. Ce qui permet de déduire que la valeur nette actualisée d'un investissement V_{AN} est la différence entre les gains actualisés et les coûts actualisés nets. Dans la suite de ce travail

3. Il existe plusieurs cadres juridiques et statuts sociales pour définir une AGR, l'exemple modèle au Maroc est la coopérative ou l'association sociale à but non lucratif.

4. Le cash flow représente l'ensemble des flux de liquidités générés par les activités d'une société. Pour les analystes et les créanciers, il constitue un bon moyen d'appréhender la solvabilité et la pérennité d'une entreprise. C'est également un indicateur permettant de connaître l'aptitude de l'entreprise à financer ses investissements à partir de son exploitation ou encore sa capacité à distribuer des dividendes à ses actionnaires

5. La valeur actuelle nette désigne un flux de trésorerie actualisé qui représente l'enrichissement supplémentaire d'un investissement en comparaison avec ce qui avait été exigé comme étant le minimum à réaliser pour les investisseurs.

6. Les amortissements ne sont pas déduits car ils ne correspondent pas à une sortie d'argent.

7. L'actualisation consiste à déterminer le pouvoir d'achat que procurera la valeur d'un bien dans le futur. Elle se calcule en tenant compte de l'inflation. Actualiser un montant signifie déterminer ce que l'on sera en mesure d'acquérir avec cette somme, à la date à laquelle elle sera encaissée.

nous travaillons avec V_{AN} mais nous la notons simplement V_A .

Pour toute analyse de la rentabilité des investissements, nous sommes obligés d'évaluer les cash-flows sur une période donnée. Pour cela, supposons que l'investissement génère des flux de rentrées (les recettes) notés R_i et des flux de sorties (les dépenses) notés D_i au cours des années $i \in \{1, 2, \dots, T\}$ avec T est la durée de vie estimée de l'équipement ou ce que nous appelons le cycle de vie, qui est la période nécessaire pour avoir une succession d'étapes de vie d'un produit décomposé en : Lancement, Croissance, Maturité et Déclin. Ainsi, nous représentons le déroulement du cycle de vie dans le diagramme ci-après :

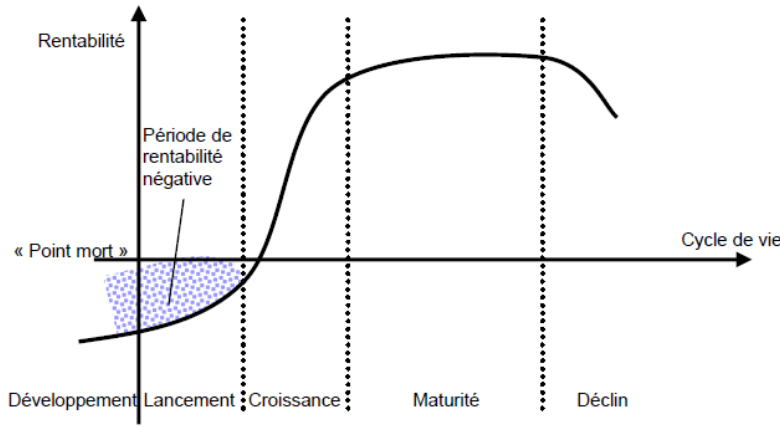


Figure III.1 – Cycle de vie d'un investissement

Soient k le taux d'actualisation ($0 \leq k \leq 1$) et $S(T)$ la valeur de l'équipement (la valeur résiduelle)⁸ au bout de la période T , alors

$$R = \sum_{i=1}^T \frac{R_i}{(1+k)^i} + \frac{S(T)}{(1+k)^T} \quad \text{et} \quad D = \sum_{i=1}^T \frac{D_i}{(1+k)^i}$$

ainsi nous pouvons écrire [III.2](#) sous la forme :

$$V_A = \sum_{i=1}^T \frac{R_i - D_i}{(1+k)^i} + \frac{S(T)}{(1+k)^T} \quad (\text{III.3})$$

8. En économie, la valeur résiduelle détermine la valeur d'un bien à l'expiration de sa durée d'utilisation ou de location.

Valeur résiduelle = prix d'achat - montant des amortissements.

Pour notre modélisation S est une fonction de T dans $[0, +\infty[$.

Chapitre III. Sélection des projets micro-économiques sur la base de la rentabilité socio-économique

On investit dans un projet lorsque cette somme est positive. Dans ce cas, on dit qu'il y a une prévision de surplus monétaire, si non le projet sera rejeté. Pour cette raison, une question naturelle se pose " sous quelles conditions V_A est toujours positive ?"

Si nous arrivons à répondre à cette question, nous obtenons une condition suffisante pour avoir la réussite du projet étudié.

- Un cas évident est lorsque les cash-flows sont positifs chaque année, autrement dit

$$R_i - D_i \geq 0 \text{ pour tout } i \in \{1, 2, \dots, T\}$$

dans ce cas, $V_A \geq 0$ car $S(T) \geq 0$. Nous pouvons vérifier facilement que V_A est décroissante par rapport au taux d'actualisation et qu'elle est majorée :

$$V_A < \sum_{i=1}^T R_i - D_i + S(T)$$

- Si non, s'il apparaît par exemple un indice $i_0 \in \{1, 2, \dots, T\}$ tel que $R_{i_0} - D_{i_0} < 0$, que peut-on dire sur le signe de V_A ? L'étude de la valeur actuelle, dans le cadre général, n'est pas évidente. Il sera nécessaire de savoir plus d'informations sur les différentes valeurs utilisées dans l'écriture de V_A . Néanmoins, dans ce qui suit, nous allons traiter le cas particulier suivant.

3.2 Valeur actuelle nette moyenne

Soit $\tilde{R}$ la fonction représentant les bénéfices de l'investissement et $\tilde{D}$ la fonction représentant ses dépenses. $\tilde{R}$ et $\tilde{D}$ sont deux variables aléatoires définies comme suit :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{R} : \{1, 2, \dots, T\} & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ i & \mapsto & R_i \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \tilde{D} : \{1, 2, \dots, T\} & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ i & \mapsto & D_i \end{array}$$

R_i se réalise à l'instant i avec une probabilité p_i tel que

$$\sum_{i=1}^T p_i = 1$$

et D_i se réalise à l'instant i avec une probabilité q_i tel que

$$\sum_{i=1}^T q_i = 1$$

posons

$$A_m = \mathbb{E}(\tilde{R} - \tilde{D}) = \sum_{i=1}^T (p_i R_i - q_i D_i)$$

A_m est la moyenne⁹ des cash-flow annuels obtenus.

ainsi la valeur actuelle devient :

$$V_A^m(k, T) = \sum_{i=1}^T \frac{A_m}{(1+k)^i} + \frac{S(T)}{(1+k)^T}$$

donc :

$$V_A^m(k, T) = \frac{A_m}{k} [1 - (1+k)^{-T}] + \frac{S(T)}{(1+k)^T}$$

La fonction $V_A^m(k, T)$ est une fonction non linéaire par rapport à k et T , par la suite, il sera intéressant d'étudier la variation de cette dernière en fonction du taux d'actualisation k et la durée de vie d'un projet T .

Si nous supposons que k et T sont des variables continues, et que S est de classe C^1 alors V_A^m sera une fonction de $C^1([0, 1[\times]0, T_{max}[)$.

3.3 Analyse de la valeur actuelle moyenne suivant le taux d'actualisation

Supposons que la valeur moyenne A_m est non nulle et dérivons $V_A^m(k, T)$ par rapport à k , nous obtenons :

$$\frac{\partial V_A^m}{\partial k}(k, T) = \frac{A_m}{k^2(1+k)^{T+1}} [kT + (k+1) - (1+k)^{T+1}] - \frac{TS(T)}{(1+k)^{T+1}}$$

La valeur $S(T)$ est positive, étudions le signe de $f(T) = kT + (k+1) - (1+k)^{T+1}$.

Nous avons $f(1) = -k^2 < 0$, $f(2) = -3k^2 - k^3 < 0$. Par récurrence, nous supposons que $f(T) < 0$, donc nous avons

$$f(T+1) = k(T+1) + (k+1) - (1+k)^{T+2} = kT + (k+1) - (1+k)^{T+1} + k - k(1+k)^{T+1} < 0$$

D'après le principe de récurrence $f(T) < 0$ pour tout $T \geq 1$. Finalement nous déduisons que

9. Nous obtenons le cas le plus simple si $\tilde{R}$ et $\tilde{D}$ suivent la loi uniforme, dans ce cas nous obtenons :

$$A_m = \frac{\sum_{i=1}^T (R_i - D_i)}{T}$$

Chapitre III. Sélection des projets micro-économiques sur la base de la rentabilité socio-économique

$\frac{\partial V_A^m}{\partial k}(k, T)$ est négative sous la condition $A_m > 0$.

Dans ce cas particulier, nous arrivons à montrer que V_A^m est décroissante par rapport à k . De plus :

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k(1+k)^T} = \frac{T + \sum_{j=2}^T C_T^j k^{j-1}}{(1+k)^T}$$

Donc :

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} V_A^m(k, T) = TA_m + S(T)$$

Par conséquent :

$$A_m(1 - \frac{1}{2^T}) + \frac{S(T)}{2^T} < V_A^m(k, T) < TA_m + S(T) \quad (\text{III.4})$$

Cette inégalité montre clairement que V_A^m est positive. Ainsi, nous répondons à la question posée. Nous concluons qu'il suffit d'avoir une moyenne des cash-flows strictement positive pour que la valeur actuelle nette soit positive.

3.4 Analyse de la valeur actuelle moyenne suivant la durée de vie

Rappelons que :

$$V_A^m(k, T) = \frac{A_m}{k} [1 - (1+k)^{-T}] + \frac{S(T)}{(1+k)^T}$$

S'il existe des valeurs critiques, elles annullent les dérivées partielles de V_A^m , et la fonction $\frac{\partial V_A^m}{\partial T}(k, T)$ dépend de T et $S(T)$ à la fois, alors il y'aura un problème de la régularisation de $S(T)$, et pour le résoudre, nous supposons que T est une variable réelle et que S est de classe C^1 par rapport à T .

Sous ces conditions, nous obtenons :

$$\frac{\partial V_A^m}{\partial T}(k, T) = \frac{1}{(1+k)^T} \left[\frac{A_m}{k} \ln(1+k) + S'(T) - S(T) \ln(1+k) \right]$$

Notons qu'il existe une classe large de projets dont la valeur de l'équipement diminue avec le temps, comme les instruments électroniques. Pour ces projets, $S'(T) \leq 0$. Cependant, il existe des projets dont la valeur de l'équipement augmente avec le temps comme les objets de l'antiquité dont leur valeur culturelle augmente leur valeur monétaire. Dans ce cas $S'(T) \geq 0$.

Or, il existe d'autres projets dont la valeur de l'équipement n'est pas monotone, donc nous ne pouvons pas discuter le signe de $S'(T)$ avant de préciser le projet étudié avec ses données.

Remarquons que la fonction $S(T)$ solution de l'équation :

$$S'(T) = S(T) \ln(1+k) - \frac{A_m}{k} \ln(1+k)$$

annule la dérivée, c'est-à-dire elle vérifie :

$$\frac{\partial V_A^m}{\partial T}(k, T) = 0$$

C'est une équation différentielle de premier ordre, sa solution est :

$$S_c(T) = \alpha(1+k)^T + \frac{A_m}{k}$$

où α est une constante liée aux conditions initiales. Sachant que à $T = 1$ nous avons $\alpha = S(1)$ la valeur de l'équipement au début de l'investissement, notons que $S(1) \geq C$ (C est le capital initial). Ce qui permet d'écrire :

$$S_c(T) = [S(1) - \frac{A_m}{k}](1+k)^T + \frac{A_m}{k} \quad (\text{III.5})$$

Calculons la valeur actuelle moyenne critique notée $V_{AC}^m(k, T)$ qui se réalise avec la fonction $S_c(T)$ définie par III.5. Nous obtenons :

$$V_{AC}^m(k, T) = S(1)$$

4 Ordonnancement à partir de la valeur actuelle

4.1 Construction d'une partition canonique

Si la valeur actuelle V_A est négative, l'investissement n'est pas rentable, donc nécessairement, nous devons avoir une valeur actuelle nette positive, et c'était notre but dans le paragraphe précédent. Avec ce raisonnement simple, nous pouvons dire que si $V_A > 0$, alors le projet peut être entrepris, il s'agit d'une condition non suffisante. Il est obligatoire de saisir les meilleurs projets dont V_A est positive. Or, pour les économistes, la valeur actuelle nette ne permet de comparer des projets que si l'investissement initial est le même. Pour cette, raison nous cherchons maintenant à construire d'autres critères d'ordonnancement des AGR.

Posons Ω l'ensemble des AGR possibles ou alternatives, A_j l'AGR j et $V_{A,j}$ sa valeur nette actualisée. Les structures microéconomiques des AGR ciblent en premier lieu les pauvres qui

Chapitre III. Sélection des projets micro-économiques sur la base de la rentabilité socio-économique

ont un savoir-faire, et lorsqu'on parle de l'ensemble des projets proposés, nous parlons en fait des pauvres qui sont affectés à ces projets. Le but de toute analyse de la valeur actuelle est de sélectionner ceux qui sont capables d'améliorer le niveau social et économique de ces pauvres. Naturellement, le décideur doit choisir l'AGR la plus rentable dans l'ensemble Ω , donc il choisira l'AGR A_{J_1} qui réalise :

$$V_{A,J_1} = \sup_{A_j \in \Omega} V_{A,j} \quad (\text{III.6})$$

Ce choix est possible du fait que cette valeur est la borne supérieure d'un ensemble fini.

D'une manière itérative, nous posons $\Omega_1 = \Omega$ et $\Omega_2 = \Omega_1 - \{A_{J_1}\}$ et nous choisissons l'AGR A_{J_2} qui réalise :

$$V_{A,J_2} = \sup_{A_j \in \Omega_2} V_{A,j}$$

Nous continuons de la même manière jusqu'à la dernière AGR du fait que :

$$\Omega_{l+1} = \Omega_l - \{A_{J_l}\} \neq \emptyset \text{ et } \sup_{A_j \in \Omega_l} V_{A,j} \text{ est atteint pour } 1 \leq l \leq N-1$$

avec $N = \text{card } \Omega$, sachant que : $\Omega_1 = \Omega$ et $\Omega_N = \{A_{J_N}\}$.

Ainsi, nous avons construit le premier critère pour ordonner Ω , ce dernier permet de choisir l'AGR qui réalise V_{A,J_1} , et de passer de A_{J_l} à $A_{J_{l+1}}$ en suite ordonner toute la structure.

Finalement nous obtenons la partition suivante :

$$\Omega = \cup_{l=1}^N \Omega_l$$

avec $(\Omega_l)_{1 \leq l \leq N}$ une suite d'ensembles décroissante vérifiant :

$$\Omega_{l+1} \subset \Omega_l \text{ et } \Omega_l - \Omega_{l+1} = \{A_{J_l}\}$$

et $\{A_{J_l}\}$ le singleton défini par :

$$\{A_{J_l}\} = \{AGR / V_{A,J_l} = \sup_{A_j \in \Omega_l} V_{A,j}\}$$

à l'aide de ce critère, l'ensemble de tous les AGR s'écrit sous la forme :

$$\Omega = \dot{\cup}_{l=1}^N \{A_{J_l}\}$$

cette écriture représente une partition canonique ordonnée de Ω basée sur la valeur actuelle

nette des AGR [Khomssi & Chaibi 2014b].

Un exemple et une application de cette partition peuvent être comme suit : Ordonner l'ensemble des projets AGR via leurs valeurs actuelles qui illustrent les revenus et les coûts, permet de sélectionner les projets les plus rentables économiquement.

Dans le cadre de l'INDH marocaine, l'une des responsabilités des divisions d'action sociale est de vérifier le contenu du dossier du projet porté et sa conformité avec les exigences. Cette partition ordonnée est un moyen de présélection de ces projets auxquels il faut apporter l'assistance et l'appui nécessaire selon les besoins et les spécificités sectorielles du projet AGR.

4.2 Critère micro-structure

Il est possible de faire un autre choix pour aider au financement les AGR de l'ensemble Ω . Pour cela prenant une valeur de référence 1 de la manière suivante :

Soit C_j le capital de l'AGR A_j , donc C le capital globale investi est la somme de tous les C_j .

Posons :

$$I_j = \frac{V_{A,j}}{C_j}$$

par définition, I_j permet d'évaluer la rentabilité de l'AGR j .

Définition 4.1 (Indice de profitabilité d'une AGR) *On appelle indice de profitabilité micro-structure le rapport entre la valeur actuelle des cash-flows futurs et le capital investi :*

$$I_{p,j} = \frac{V_{A,j} + C_j}{C_j} = I_j + 1 \quad (\text{III.7})$$

Évidement, cette quantité a pour valeur de référence la valeur 1, en effet, I_j change de signe et nous avons trois cas possibles :

- $I_{p,j} < 1$: ($I_j < 0$) Il s'agit d'une perte économique, mais cette AGR peut être acceptée lorsqu'elle réalise un gain social (intégration de la population...), but de toutes les structures micro-économiques.
- $I_{p,j} = 1$: ($I_j = 0$) Il y a une perte de la valeur actuelle du capital estimé ou coûts de non emplacement, ainsi que le coût de l'inflation, mais c'est une situation meilleure que la première.
- $I_{p,j} > 1$: ($I_j > 0$) L'AGR réalise un gain économique.

Nous résumons le lien entre la valeur de $I_{p,j}$ et la notion du gain économique dans le tableau suivant :

	V_A	Gain économique
$I_{p,j} < 1$	négative	non réalisable
$I_{p,j} = 1$	nul	situation neutre
$I_{p,j} > 1$	positive	réalisable

Tableau III.4 – *Indice de profitabilité*

Pour le gain social, toutes les situations restent ouvertes dans les trois cas. Par la suite, notre objectif est d'exploiter l'indice de profitabilité pour construire une autre partition de la structure Ω .

4.3 Algorithme du choix optimal ou admissible des AGR

Toutes les AGR telle que $I_{p,j} > 1$ sont rentables et génèrent des revenus admissibles, mais si nous arrivons à définir un ordre de priorité entre les AGR réalisant toutes $I_{p,j} > 1$, nous offrons un choix meilleur au décideur de l'AGR pour entreprendre avec le plus grand revenu possible.

À partir de la définition de l'indice de profitabilité, nous avons une partition de Ω de la manière suivante :

$$\Omega = \Omega_{<1} \dot{\cup} \Omega_{=1} \dot{\cup} \Omega_{>1}$$

avec :

$$\Omega_{<1} = \{l'ensemble des A_j réalisant : I_{p,j} < 1\}$$

$$\Omega_{=1} = \{l'ensemble des A_j réalisant : I_{p,j} = 1\}$$

$$\Omega_{>1} = \{l'ensemble des A_j réalisant : I_{p,j} > 1\}$$

L'indice de profitabilité permet de construire une partition de Ω et de distinguer les AGR qui sont rentables au sens économique, c'est-à-dire $I_{p,j} > 1$.

Ainsi, nous avons construit un deuxième critère de partition de Ω en se basant sur le calcul de l'indice de profitabilité $I_{p,j}$.

Il est évident que si nous appliquons le premier critère et le deuxième, nous obtenons un classement fortement intéressant entre les AGR réalisant une meilleure actualisation avec un indice de profitabilité supérieur à 1, c'est-à-dire, si nous couplons les deux critères, nous obtenons

III.4 Ordonnement à partir de la valeur actuelle

l'AGR A_{J^*} vérifiant les deux conditions suivantes à la fois :

$$V_{A,J^*} = \sup_{A_j \in \Omega} V_{A,j} \text{ et } I_{p,J^*} = \sup_{A_l \in \Omega_{>1}} I_{p,l} \quad (\text{III.8})$$

Le premier critère nous aide à choisir l'AGR réalisant la meilleure valeur d'actualisation, le deuxième nous aide à choisir l'AGR réalisant le meilleur indice de profitabilité. De cette façon, nous obtenons une classification plus fine car l'indice de profitabilité aide à regrouper les meilleurs AGR dans $\Omega_{>1}$ et elles sont toutes rentables économiquement, et le fait d'introduire $\sup_{A_j \in \Omega} V_{A,j}$ permet de les classer dans $\Omega_{>1}$.

Également nous remarquons que :

$$\sup_{A_j \in \Omega} V_{A,j} = \sup_{A_j \in \Omega_{>1}} V_{A,j}$$

du fait que :

$$I_{p,j} = \frac{V_{A,j} + C_j}{C_j} \text{ et } \Omega_{>1} = \{l'ensemble des A_j réalisant : I_{p,j} > 1\}$$

Cela signifie que la sélection des AGR par le premier critère se fait dans la structure $\Omega_{>1}$, par conséquent, s'il existe A_{J^*} , qui sera un choix optimal, nous obtenons :

$$A_{J^*} = A_{J_1}$$

mais évidemment, il se peut que A_{J^*} n'existe pas. Dans ce, cas nous travaillons dans la classe $\Omega_{>1}$. Et suivant le choix du décideur (choix admissible), nous cherchons l'AGR réalisant :

$$\sup_{A_j \in \Omega_{>1}} V_{A,j} \text{ ou } \sup_{A_l \in \Omega_{>1}} I_{p,j}$$

Nous pouvons chercher l'AGR réalisant la meilleure valeur d'actualisation ou l'AGR réalisant le meilleur indice de profitabilité à l'aide d'un langage de programmation.

Si nous utilisons Matlab par exemple, la fonction 'sort' permet de trier les éléments d'un vecteur de la manière suivante :

Algorithme de sélection de l'AGR optimale ou admissible

- » $V = [\]$ la saisie des valeurs actuelles
- » $I = [\]$ la saisie des indices de profitabilité
- » $[OV, PV] = \text{sort}(V)$

» $[OI, PI] = sort(I)$

avec :

OV : contient les éléments triés du vecteur V .

OI : contient les éléments triés du vecteur I .

PV : contient les positions des éléments du vecteur OV dans le vecteur V .

PI : contient les positions des éléments du vecteur OI dans le vecteur I .

si $OV(1) = OI(1)$ alors $J^* = OV(1)$ et nous avons une solution optimale. Si non, l'AGR $OV(1)$ réalise la meilleure valeur d'actualisation et l'AGR $OI(1)$ réalise le meilleur indice de profitabilité.

4.4 Critère macro-structure

Les projets AGR ciblent les classes fragiles et vulnérables, l'État encourage ces projets dans un cadre non lucratif. L'objectif principal est d'intégrer les pauvres dans le tissu économique et d'aboutir à un développement social durable. L'étude précédente, faite avec la valeur actuelle ou avec l'indice de profitabilité d'une AGR, est une approche proposée pour mesurer la satisfaction à travers le revenu de l'AGR. C'est une analyse partielle de financement : l'écriture dépend de l'indice j , c'est-à-dire elle est liée à l'AGR. Néanmoins, dans le cadre de la coopération, la solidarité et la fraternité, l'État peut financer un ensemble d'AGR rentables générant un profit au financier, et également un ensemble d'AGR non rentable économiquement mais avec un gain social, surtout des projets qui améliorent les indices de développement humain du pays à condition d'avoir une compensation entre ces projets.

Pour cette raison, notre objectif maintenant est de construire un indice macro-structure c'est-à-dire celui qui caractérise¹⁰ Ω . En effet, nous pouvons construire à partir des $I_{p,j}$ un indice de toute la structure Ω d'où la définition suivante :

Définition 4.2 (Indice de profitabilité d'une classe d'AGR) *On appelle indice de profitabilité macro-structure d'une classe d'AGR Ω_l l'indice défini de la manière suivante :*

$$I_{p,\Omega_l} = \frac{\sum_{j=1}^N V_{A,j}}{\sum_{j=1}^N C_j} + 1$$

Dans une structure micro-économique, il est probable d'avoir des AGR telle que $I_{p,j} \leq 0$, ce qui traduit l'existence des AGR non rentables au sens monétaire, et au même temps l'indice

10. La justification du critère macro-structure est dû au fait qu'il caractérise Ω , sans traiter ses éléments un par un. C'est un moyen pour comparer la rentabilité une structure AGR avec une autre (une structure AGR agronomique et une autre structure AGR artisanale par exemple).

de profitabilité de la structure I_{p,Ω_l} est positif par effet de compensation entre les AGR, car il y en a ceux qui corrigent la perte des autres, c'est le caractère intégré des projets. C'est une situation admissible à entreprendre tant qu'elle réalise un gain social et aide les pauvres à être réactifs et créatifs.

Remarque 2 *L'un des intérêts de cet indice est de comparer de manière globale différentes structures économiques. En effet, pour comparer la rentabilité de la structure Ω_l avec celle de la structure $\Omega_{l'}$, nous considérons la différence :*

$$I_{p,\Omega_l} - I_{p,\Omega_{l'}}$$

le signe de cette quantité permet de préciser celle qui est globalement rentable. Autrement dit, cette différence permet de dire que dans une région, les AGR de type Agronomie valent mieux que celles d'Artisanat ou l'inverse par exemple¹¹.

Proposition 4.3 *Pour chaque structure d'AGR Ω , il existe deux valeurs critiques I_1 et I_N tel que :*

$$I_{p,\Omega_l} \in [I_N, I_1]$$

Ce résultat est simple, puisqu'il suffit de prendre :

$$I_1 = \frac{NV_{A,J_1}}{C} + 1 \quad \text{et} \quad I_N = \frac{NV_{A,J_N}}{C} + 1 \quad (\text{III.9})$$

avec

$$V_{A,J_1} = \sup_{A_j \in \Omega_1} V_{A,j} \quad \text{et} \quad V_{A,J_N} = \min_{A_j \in \Omega_1} V_{A,j}$$

4.5 Construction d'un référentiel d'aide au financement

Pour un même type de projet, avec le même capital et dans les mêmes conditions de réalisation, le revenu varie d'un bénéficiaire à un autre parce qu'il est conditionné par les compétences de chaque individu, son savoir, ses connaissances, sa capacité, son savoir-faire... et par les exigences du marché. Les conditions de la réalisation du projet sont fortement liées au capital naturel et au capital physique de la région où le projet se réalise. Pour cela, nous pensons que tout outil de sélection des projets AGR, destiné aux pauvres, doit prendre en considération, au

11. Si nous appliquons ces indices sur les régions du Maroc, il est clair que la région de Sous- Massa-Darâa encourage le financement des AGR d'Agronomie (Arganiers, Amande...), alors que la région de Marrakech-Tensift-Al Haouz encourage le financement des AGR d'Artisanat (cuivre, céramique...).

Chapitre III. Sélection des projets micro-économiques sur la base de la rentabilité socio-économique

moins, deux facteurs importants ; les classes ciblées et la région de la réalisation du projet. Dans ce cadre, notre objectif est de construire un référentiel d'aide au financement sur lequel les divisions d'actions sociales peuvent se baser afin de sélectionner les meilleurs projets adaptés qui ont un impact social et capable d'améliorer les conditions économiques et sociales des bénéficiaires.

En effet, pour chaque type de structures AGR, les experts peuvent imposer un seuil minimal de l'indice de profitabilité de la classe absolument supérieur à 1 pour garantir qu'il s'agit des classes d'AGR vérifiant $\sum_{j=1}^N V_{A,j} > 0$ estimé via des données statistiques et leurs prévisions. Ceci donne naissance à un référentiel efficace lors de la sélection des projets AGR à investir illustré dans le tableau suivant :

Type de la structure	Notations	Valeur minimale de I_{p,Ω_l}
Agronomie	t_1	I_{min,t_1}
Artisanat	t_2	I_{min,t_2}
Services	t_3	I_{min,t_3}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tableau III.5 – Valeurs minimales de l'indice de profitabilité

Pour estimer la valeur I_{min,t_i} pour un type donné t_i des classes des AGR, nous pouvons par exemple considérer les résultats des investissements précédents, ce qui donne, pour chaque classe Ω_l , une valeur minimale I_{N_l} définie par III.9. Le seuil minimal de l'indice de profitabilité, pour ce type de classe, peut être une moyenne de différentes valeurs obtenues, donc il va s'écrire sous la forme

$$I_{min,t_i} = \sum_l \alpha_l I_{N_l} \quad (\text{III.10})$$

les valeurs α_l sont des pondérations possibles à valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$.

Les décideurs discuteront la liste des classes des AGR proposées à l'aide de ce tableau de référence, et ils accepteront celles qui ont un indice de profitabilité $I_{p,\Omega_l} \geq I_{min,t_i}$.

Notons que Ω_l est une classe d'AGR de type t_i .

Nous voulons, par la suite, généraliser cette idée du tableau de référence afin de construire un autre plus global qui regroupe les indices de profitabilité de références de tous les types de

III.4 Ordonnement à partir de la valeur actuelle

structures micro-économiques particulièrement les AGR existant dans le pays tout entier.

Premièrement nous fixons, pour chaque type de structure t_i , une valeur de référence de l'indice de profitabilité notée I_{R,t_i} qui peut être :

- une valeur définie au tableau III.5.
- une valeur réelle de l'indice de profitabilité I_{p,Ω_l} d'une structure Ω_l de type t_i obtenue dans les conditions usuelles de création et de progression de la structure.
- une valeur théorique calculée par les experts du domaine.

De nombreuses études focalisées sur les pays développés mettent en exergue les caractéristiques socioéconomiques de l'individu, le climat des affaires et la politique gouvernementale comme principaux déterminants de l'auto-emploi (Millàn et al 2010). Pour cette raison, nous introduisons un autre paramètre noté Δ_{k,j,t_i} caractérisant la région notée r_k où l'AGR se réalise et la classe des pauvres de cette région ciblée notée c_{kj} par le projet.

Étape1 :

Introduire la notion de la région r_k permet de prendre en considération les diverses régions avec leurs propres caractéristiques comme :

- Abondance de matières premières
- Disponibilité des ressources en eau
- Raccordement au réseau d'électricité
- Disponibilité du réseau routier
- Diversité des moyens de transport

il permet également de différencier entre un milieu urbain, périurbain et un milieu rural et de choisir ainsi les projets visant la valorisation des potentialités locales.

Contrairement au milieu rural, un meilleur accès aux infrastructures stimule la production urbaine ainsi capable de générer de meilleurs revenus. [les déterminants du secteur informel de burkina faso]

Mathématiquement, pour introduire les caractéristiques des régions, il suffit d'affecter une fonction caractérisant chaque région notée $f(r_k)$ défini à partir d'un ensemble de critères (voir exemple II.1)

Étape2 :

Les projets des activités génératrices de revenu au niveau mondial ont rencontré un grand succès lorsqu'ils ont ciblé les femmes, et l'expérience a confirmé qu'ils étaient faiblement risqués. De là, l'approche genre doit être prise en compte, l'âge également devrait être inclus en tant que mesure de classification, la situation familiale, le nombre des enfants...

Chapitre III. Sélection des projets micro-économiques sur la base de la rentabilité socio-économique

- Âge : Il faut définir les classes d'âge via la répartition des catégories capables de pénétrer dans le marché du travail.
 1. $[20 - 30[$
 2. $[30 - 40[$
 3. $[40 - 50[$

- Situation familiale :

1. Divorcé(e)
2. Veuf(ve)
3. Marié(e)
4. Célibataire

- Genre : féminin ou masculin

Si l'âge et le statut matrimonial ne sont pas deux variables significatives, le genre affecte les revenus espérés. En fait, être un homme relativement à être une femme dans les pays en voie de développement augmente les gains espérés, la cause c'est que ces derniers sont une fonction croissante du niveau d'éducation. Or, les femmes dans les pays en développement ont un niveau d'éducation faible par rapport aux hommes. De ce fait, elles ont tendance à percevoir les revenus les plus précaires. De plus, les femmes sont majoritairement confinées dans les activités très peu productives, tandis que les hommes travaillent dans les branches à haute valeur ajoutée.

- Nombre d'enfants n_f et leurs âges :

- ◇ $n_f \leq 2$
- ◇ $3 \leq n_f \leq 5$
- ◇ $n_f \geq 5$

Pourquoi faut-il inclure le nombre des enfants ainsi que leur âge ?

Avoir beaucoup d'enfants dans une famille pauvre, aggrave parfois sa pauvreté surtout lorsqu'il s'agit d'enfants non actifs, comme par exemple le cas des petits enfants qui empêchent leurs mamans à travailler. Cela ne signifie pas qu'il ne faut pas aider ces familles, mais juste qu'il faut prendre en considération ces empêchements lors des prévisions des risques du projet proposé.

Parfois, avoir beaucoup d'enfants est une contrainte positive relativement à la possibilité du succès du projet, c'est l'exemple des filles qui aident leurs mères travailleuses aux métiers de l'artisanat, elles contribuent à diminuer le cycle de production et d'augmenter la

III.4 Ordonnement à partir de la valeur actuelle

quantité produite, de même pour les familles qui intègrent leurs enfants dans les domaines d'agriculture. Donc à un âge précis, le nombre d'enfants, surtout ceux qui ne suivent pas leurs études, peut être un gain (la Chine et l'Inde comme modèles).

La nature des AGR ainsi que leurs buts imposent ces contraintes afin d'aboutir à une approche globale au contexte de réalisation du projet. Ces critères, comme d'autres existants, changent selon les régions, le pouvoir et l'autorité de chaque famille, donc la notion des classes ciblées est fortement liée à la culture de chaque région (ses coutumes et ses traditions). Par exemple ; dans le nord du Maroc, il y a des régions où la femme est une force économique, par contre il y a des régions où son travail est interdit. Par conséquent, il ne suffit pas de caractériser les AGR par des classes généralisées, mais il faut définir des classes relatives à chaque région. Ensuite il faut définir une fonction g_k relative à la région r_k pour toutes les classes $c_{k,j}$ de la région à partir de l'ensemble des critères qui apparaissent importants pour les experts.

Étape3 :

le paramètre Δ_{k,j,t_i} s'écrit sous la forme

$$\Delta_{k,j,t_i} = a_{t_i}f(r_k) + b_{t_i}g_k(c_{k,j})$$

Les coefficients a_{t_i} et b_{t_i} expriment l'étendue de compatibilité et la proportionnalité du type avec la région et la classe ciblées. Ils sont des valeurs d'échelle positives ou négatives selon les besoins et les spécificités sectorielles du type des AGR, tandis que la somme des deux termes reflète le fait de tenir compte de tous les facteurs.

Ce paramètre construit permet de mesurer l'écart entre la valeur d'indice de profitabilité de référence d'un type de structure donnée et la valeur admissible pour ce genre de structure dans une région et pour une classe précises.

C'est une méthode proposée pour écrire le paramètre Δ_{k,j,t_i} qui peut être positif ou négatif. Ainsi, nous obtenons un seuil plus adapté sous la forme

$$I_{R,t_i} + \Delta_{k,j,t_i}$$

Le tableau ci-après offre un moyen de décision au niveau du choix des structures à entreprendre. De plus, il aidera d'une manière efficace à savoir les zones prioritaires pour chaque type des

Type d'AGR	Valeur de référence	Région	Classe ciblée	L'écart admissible
t_i	I_{R,t_i}	r_1	c_{11}	Δ_{11,t_i}
			c_{12}	Δ_{12,t_i}
			$\vdots$	$\vdots$
			c_{1j_1}	Δ_{1j_1,t_i}
			$\vdots$	$\vdots$
			$\vdots$	$\vdots$
		r_m	c_{m1}	Δ_{m1,t_i}
			c_{m2}	Δ_{m2,t_i}
			$\vdots$	$\vdots$
			c_{mj_m}	Δ_{mj_m,t_i}

Tableau III.6 – *Tableau référentiel*

AGR et de préciser la classe de préférence donnant le meilleur gain économique et social.

4.6 Classification des éléments de la structure Ω

Notre objectif, dans cette partie, est de classer l'ensemble des activités génératrices de revenus constituant la classe Ω à partir de leurs valeurs actuelles nettes. Pour atteindre ce but, nous introduisons les deux définitions suivantes :

Définition 4.4 (Ecart absolue) *Pour chaque Ω , nous définissons la valeur δ comme écart absolu de profitabilité par :*

$$\delta = I_1 - I_N$$

δ est positif par construction, cet écart nous informe sur Ω de la manière suivante :

Si δ tend vers 0, nous déduisons que la valeur actuelle nette de l'AGR est presque constante pour tous les éléments de Ω . Par contre, si δ est très grand par rapport à 0 ($\delta \gg 0$), cela signifie qu'il y a des AGR dans Ω plus rentables que d'autres d'où l'intérêt de cet écart.

Au sens économique, dire que δ tend vers 0 ou δ est très grand par rapport à 0 est un peu vague. Et pour plus de précision, nous introduisons l'écart relatif définie par :

Définition 4.5 (Ecart relatif) *Pour chaque Ω , nous définissons la valeur*

δ_r comme écart relatif de profitabilité par :

$$\delta_r = \frac{\delta}{I_1} = 1 - \frac{I_N}{I_1}$$

Evidemment, à partir de cette définition de δ_r , nous avons $\delta_r \in [0, 1]$.

a- Classification des classes AGR à l'aide de l'écart relatif

Pour une classe d'AGR Ω , si δ_r tend vers 0, nous concluons que la valeur actuelle nette est presque constante pour tous les AGR de la structure Ω . Par contre, si δ_r est proche de 1, il y a une forte variation entre les différentes AGR, c'est-à-dire, il y a celles qui sont plus rentables que d'autres. Dans ce cas, nous avons, aux moins, deux possibilités : soit nous comparons I_{p,Ω_l} avec I_{R,t_i} et la différence décide d'accepter ou de rejeter la structure, soit nous calculons les valeurs des indices de profitabilités $I_{p,j}$ pour éliminer les AGR produisant cette variation.

Si nous avons une suite finie des classes d'AGR $(\Omega_i)_{i=1,..,M}$, posons $\Lambda = \cup_{i=1}^M (\Omega_i)$, et notons écart relatif de chaque Ω_i par $\delta_{r,i}$, nous avons :

$$\forall i = 1, .., M \quad \delta_{r,i} \in [0, 1]$$

Pratiquement, nous pouvons introduire un paramètre ϵ avec $0 < \epsilon < 1$, pour décomposer l'intervalle $[0,1]$ sous la forme :

$$[0, 1] = [0, \epsilon] \cup]\epsilon, 1 - \epsilon[\cup [1 - \epsilon, 1]$$

Par conséquence, nous regroupons les Ω_i en sous classes de la manière suivante :

$$\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3$$

avec

$$\Lambda_1 = \cup_{\delta_{r,i} \leq \epsilon} (\Omega_i) \quad \Lambda_2 = \cup_{\delta_{r,i} \in]\epsilon, 1 - \epsilon[} (\Omega_i) \quad \Lambda_3 = \cup_{\delta_{r,i} \geq 1 - \epsilon} (\Omega_i)$$

A l'aide de cette combinaison, nous avons classifié l'ensemble des classe d'AGR Λ via la notion d'écart relatif en sous ensembles, et nous pouvons dire que :

- Les AGR de chaque structure de Λ_1 ont presque la même valeur actuelle nette.
- Les AGR de chaque structure de Λ_3 ont une forte variation de la valeur actuelle nette.
- Pour les AGR des structures de Λ_2 , l'expert peut estimer leurs variations.

b- Généralisation de la subdivision

Pour avoir plus de précision, l'expert peut considérer d'autres subdivisions de $[0,1]$, il peut travailler avec une subdivision régulière. Dans ce cas, nous avons :

$$[0, 1] = \cup_{i=0}^{M-1} [\frac{i}{M}, \frac{i+1}{M}]$$

Comme il peut prendre une subdivision non régulière, c'est-à-dire :

$$[0, 1] = \cup_{j=1}^M [\epsilon_j, \epsilon_{j+1}]$$

Avec $0 < \epsilon_j < 1$ et $\epsilon_j < \epsilon_{j+1}$ pour tout $j = 2, \dots, M-1$ et $\epsilon_1 = 0$ $\epsilon_M = 1$.

Dans ce cas, nous avons :

$$\Lambda = \cup_{j=1}^M \Lambda_j \text{ avec } \Lambda_j = \cup_{\delta_{r,i} \in [\epsilon_j, \epsilon_{j+1}]} (\Omega_i)$$

- * Les AGR des structures de Λ_1 ont presque la même valeur actuelle nette.
- * Les AGR des structures de Λ_{M-1} ont une forte variation de la valeur actuelle nette.
- * Pour les AGR des structures de Λ_j avec $2 \leq j \leq M-2$, l'expert peut estimer leurs variations.

5 Construction d'un indice global

5.1 Notion d'un indice global

Selon la définition de l'indice de profitabilité $I_{p,j}$, les projets dont $I_{p,1} = 1$ sont des projets qui assurent seulement la même valeur initiale du capital, c'est-à-dire, la valeur des cash-flows actualisée. Donc, la valeur 1 est un seuil pour les projets à financer et ceux à rejeter si nous tenons compte uniquement de l'objectif économique. Sachant que les A_j appartenant à $\Omega_{<1} \dot{\cup} \Omega_{=1}$ sont des AGR qui peuvent vérifier un gain social et non un gain économique.

La dispersion autour de 1 est une donnée importante pour analyser l'information sur la nature des AGR. Si nous inspirons des techniques statistiques [3] [12], une transcription de l'idée de l'erreur au sens des moindres carrées nous aide à définir l'indice global de la manière suivante :

Définition 5.1 *On appelle indice global I_G d'une structure d'AGR, l'indice défini par :*

$$I_G = \frac{\sum_{j=1}^N (I_{p,j} - 1)^2}{N}$$

Cette quantité permet d'évaluer la variance des indices de profitabilité de tous les projets AGR par rapport au seuil 1, elle mesure la dispersion et l'accumulation autour de 1, d'où l'intérêt de cet indice au sens suivant :

Il est indépendant de toutes les AGR. De plus, il mesure l'écart entre la valeur moyenne afin de donner une information sur la décision de coupler un gain social et un gain économique.

À partir de l'écriture (III.7), I_G s'écrit également sous la forme :

$$I_G = \frac{\sum_{j=1}^N (I_j)^2}{N}$$

Rappelons que

$$V_{N,J_1} = \sup_{A_j \in \Omega_1} V_{N,j} \quad \text{et} \quad V_{N,J_N} = \min_{A_j \in \Omega_1} V_{N,j}$$

Et posons

$$C_{\min} = \min_{j=1}^N C_j \quad C_{\max} = \max_{j=1}^N C_j$$

$$\underline{I}_G = \frac{\min(V_{N,J_1}^2, V_{N,J_N}^2)}{C_{\max}} \quad \overline{I}_G = \frac{\max(V_{N,J_1}^2, V_{N,J_N}^2)}{C_{\min}}$$

Proposition 5.2 *Soit I_G l'indice global d'une structure d'AGR*

- *Si V_{N,J_1} et V_{N,J_N} ont le même signe alors :*

$$\underline{I}_G \leq I_G \leq \overline{I}_G$$

- *Si V_{N,J_1} et V_{N,J_N} ont des signes différents alors :*

$$0 \leq I_G \leq \frac{C_{\max}}{C_{\min}} \underline{I}_G$$

Preuve 1 *Selon les signes de V_{N,J_1} et V_{N,J_N} nous avons l'encadrement suivant :*

- *Si $V_{N,J_N} \geq 0$ alors*

$$\left(\frac{V_{N,J_N}}{C_{\max}}\right)^2 \leq I_G \leq \left(\frac{V_{N,J_1}}{C_{\min}}\right)^2$$

- *Si $V_{N,J_1} \leq 0$ alors*

$$\left(\frac{V_{N,J_1}}{C_{\max}}\right)^2 \leq I_G \leq \left(\frac{V_{N,J_N}}{C_{\min}}\right)^2$$

- *Si V_{N,J_1} et V_{N,J_N} ont des signes contraires alors*

$$0 \leq I_G \leq \min\left(\left(\frac{V_{N,J_N}}{C_{\min}}\right)^2, \left(\frac{V_{N,J_1}}{C_{\min}}\right)^2\right)$$

5.2 Classe dominante des AGR

L'objectif de ce paragraphe est de proposer une technique pour sélectionner la classe dominante des AGR. Pour cela, rappelons que Ω s'écrit sous la forme suivante :

$$\Omega = \Omega_{<1} \dot{\cup} \Omega_{=1} \dot{\cup} \Omega_{>1}$$

Ce qui permet d'obtenir :

$$I_G = \frac{\sum_{\Omega_{<1}} (I_{p,j} - 1)^2}{N} + \frac{\sum_{\Omega_{=1}} (I_{p,j} - 1)^2}{N} + \frac{\sum_{\Omega_{>1}} (I_{p,j} - 1)^2}{N}$$

La classe $\Omega_{=1}$ n'a pas de poids dans cette écriture donc :

$$I_G = \frac{\sum_{\Omega_{<1}} (I_{p,j} - 1)^2}{N} + \frac{\sum_{\Omega_{>1}} (I_{p,j} - 1)^2}{N} = I_G^{\Omega_{<1}} + I_G^{\Omega_{>1}}$$

posons ρ le rapport défini par :

$$\rho = \frac{I_G^{\Omega_{>1}}}{I_G}$$

Nous obtenons :

$$1 = \frac{I_G^{\Omega_{<1}}}{I_G} + \frac{I_G^{\Omega_{>1}}}{I_G} = (1 - \rho) + \rho$$

Si ρ est voisine de 1, nous pouvons dire que la classe $\Omega_{>1}$ est dominante, dans le sens suivant :

$$I_G^{\Omega_{>1}} \simeq I_G \text{ et } I_G^{\Omega_{<1}} \simeq 0$$

Or $I_G^{\Omega_{<1}} \simeq 0$ revient à dire que pour tous les A_j de $\Omega_{<1}$, $I_{p,j}$ tend vers 1, ce qui donne :

$$V_{A,j} \simeq C_j$$

D'une manière, analogue nous pouvons analyser le cas où ρ est voisine de 0. Selon la valeur de cette dernière, nous avons :

$$\Omega = \Omega_{Do} \dot{\cup} \Omega_{Ne} \dot{\cup} \Omega_{=1}$$

Avec Ω_{Do} la classe des AGR dominante au sens précisé avant, et Ω_{Ne} la classe des AGR caractérisée par le fait que $V_{A,j} = R - D \simeq C_j$.

Par conséquent, nous avons une valeur quantifiée pour connaître la sous-classe dominante

de la classe AGR. De plus, à partir des deux conditions :

$$V_{A,J^*} = \sup_{A_j \in \Omega_{>1}} V_{A,j} \text{ et } I_{p,J^*} = \sup_{A_l \in \Omega_{>1}} I_{p,l}$$

nous obtenons un moyen pour prendre la décision stratégique d'aider telle ou telle nature AGR.

5.3 Aspect récurrent de l'indice global

Soit S_0 une structure de N AGR de même type t , si nous posons $S_1 = S_0 \cup \{A_{N+1}\}$, $S_2 = S_1 \cup \{A_{N+2}\}, \dots, S_k = S_{k-1} \cup \{A_k\}$, tel que $A_{N+1}, A_{N+2}, \dots, A_k$ des AGR de type t . L'une des questions évidentes, qui s'impose, est la suivante : Est ce que nous devons refaire les calculs pour contrôler les nouvelles structures, ou bien y a-t-il une façon de le faire à l'aide des informations de S_0 ? Plus précisément, quel est le lien entre les indices globaux de S_j pour $j = 1, \dots, k$ et celui de S_0 ? La proposition suivante répond à la question.

Proposition 5.3 *Soient I_{G_0} l'indice global de S et I_{G_j} l'indice global de S_j pour $j = 1, \dots, k$, nous avons*

$$I_{G_j} = \frac{1}{N+j}((N+j-1)I_{G_{j-1}} + (I_{p,N+j} - 1)^2)$$

$$I_{G_j} = \frac{1}{N+j}(NI_{G_0} + \sum_{l=1}^j (I_{p,N+l} - 1)^2)$$

Remarque 3 *Si nous pensons à refaire le tableau III.6 avec l'indice global au lieu de l'indice de rentabilité, cette proposition permet de passer des structures référentielles de taille N aux structures de taille plus grande.*

6 Conclusion

Dans ce chapitre, notre but était la recherche des outils mathématiques permettant de mesurer la rentabilité des microprojets, et de faire une sélection dans un ensemble de projets afin d'aider ceux qui sont rentables économiquement et socialement.

Nous avons commencé par une étude de la valeur actuelle nette moyenne par rapport au taux d'actualisation, ensuite, nous avons proposé une partition canonique ordonnée des AGR à partir de cette valeur d'actualisation nette.

L'une des difficultés des décideurs ou opérateurs financiers est de trouver un cadre logique permettant de prendre une décision concernant le développement de l'économie sociale et d'établir

Chapitre III. Sélection des projets micro-économiques sur la base de la rentabilité socio-économique

une stratégie de financement de ces microprojets (AGR). Pour cette raison, nous avons proposé un ensemble de critères macro et microstructure sur la base de l'indice de profitabilité, ce qui nous a permis d'obtenir un algorithme de sélection de l'AGR optimale. Enfin, nous avons construit un référentiel utile pour l'aide à la décision, un argument quantifié afin que le décideur se base sur des décisions pragmatiques et optimales pour aider à réaliser un ensemble d'activités génératrices de revenus selon la stratégie qu'il choisit et non d'une manière subjective, voire politicienne.

Chapitre IV

Rentabilité des systèmes de formation dans le cadre micro-économique

1 Introduction

Le capital humain, qui correspond aux connaissances accumulées par les individus est mobilisable pour leur servir (apprentissage, formation d'ingénieur, expérience, etc.). Le capital immatériel, terme développé par l'économie du savoir, correspond à la valeur accumulée par une entreprise sous forme d'organisation, de savoir-faire accumulé, ou d'images de marque. L'économie des pays développés dépend de plus en plus du capital immatériel [Temple]. Les experts estiment que le capital immatériel représente entre 60% et 70% de la valeur des entreprises. Certains mettent la connotation de ce quatrième facteur dans le concept Management.

On parle aussi du capital social, et culturel, comme variables explicatives de l'amélioration de la productivité résultant des autres facteurs [wikipedia 2015].

L'analyse économique, confère, aujourd'hui une très grande importance aux ressources humaines [Becker 1993] et à l'orientation prioritaire des politiques publiques. Le développement humain postule que le bien être humain est la seule et vraie finalité qui devrait être celle de toute politique de développement. Les autres considérations n'ont trait qu'aux moyens de parvenir à cet objectif. Dans cette perspective, plusieurs stratégies et programmes sont mis en œuvre visant à relancer la croissance économique, à améliorer les conditions de vie, à renforcer le capital humain, et finalement à assurer un développement durable. A l'issue de cette vision mondiale, l'INDH est créée et cultivée avec 32 889 projets [l'INDH 2013] programmés dont 5 553 activités génératrices de revenus¹ tout en imposant quatre critères aux projets éligibles :

1. Activités d'élevage (apiculture, cuniculture, et élevage des bovins, ovins, camelins), actions de préservation

Chapitre IV. Rentabilité des systèmes de formation dans le cadre micro-économique

- bénéficier les personnes en situation de pauvreté, d'exclusion et de précarité.
- disposer d'un savoir-faire, d'une expérience et/ou d'une formation adéquate dans le domaine d'activité proposée.
- avoir sur une étude succincte (selon le genre et la catégorie des bénéficiaires) qui met en évidence la viabilité du projet.
- attester de la participation financière des bénéficiaires.

Mais les femmes à qui ont proposé des projets d'élevage (des projets apicoles, des projets de reproduction de lapins...) ou les travailleuses dans les métiers de l'artisanat, et même celles qui travaillent à l'agriculture dans les villages ont un savoir-faire qui repose sur leur travail quotidien, c'est un héritage sans aucune formation scientifique ou technique. Il s'agit de l'auto-emploi informel non volontaire exigé par l'inégalité d'accès aux services sociaux de base. En plus, l'existence de services financiers et de protection sociale discriminatoires oblige les pauvres à se lancer dans l'informalité et à y demeurer.

Heureusement, l'INDH s'inscrit dans un grand chantier où l'élément humain est placé au centre des politiques nationales qui visent un développement national durable. Grâce à l'INDH, une partie des pauvres ciblés a reçu une formation pratique dans une courte période afin qu'elle apprenne les premières notions de leurs métiers. Certains ont eu des conseils, des orientations et des suivis, d'autres se sont appuyés sur leurs compétences et leurs capacités et ont essayé de les développer d'une façon autonome. Les résultats obtenus par ces bénéficiaires ont montré clairement que la rentabilité augmente en introduisant le facteur de la formation, et celui de la technologie pour les moyens utilisés.

Dans ce contexte, nous nous demandons comment les décideurs peuvent mesurer la rentabilité des formations données à ces pauvres qui peuvent investir eux-mêmes pour devenir plus productifs de façon permanente toute leur vie. Ces formations nécessitent d'autres coûts en plus des coûts de financement des projets [Perraton & Creed 2000] afin d'améliorer le niveau du savoir faire des bénéficiaires et de passer d'un journalier à un ouvrier puis d'un ouvrier qualifié, à un technicien ou un technicien spécialisé. Or, elles demandent des formateurs et des lieux de formation, ce qui influence la rentabilité positivement parfois et négativement d'autres fois.

Nous sommes conscients que les gains sont forcément liés à plusieurs critères comme l'expérience et la compétence, ce qui donne la qualité aux produits, ainsi la manière de commercialisation

et de promotion des métiers de l'artisanat, actions de mise à niveau de la pêche artisanale, actions de valorisation de certains produits de terroir (cactus, arganier...)...

dans un marché limité avec une grande concurrence est un autre critère qui détermine les gains. De ce point de vue, la formation est une nécessité pour améliorer ces critères.

L'éducation et la formation sont deux fondements pour réussir le développement durable. L'objectif de l'INDH est d'intégrer les trois piliers : social, environnemental et économique dans les systèmes de formations à travers une vision globale et interdisciplinaire.

L'éducation par exemple est une composante essentielle de toute stratégie de développement pour l'avenir puisqu'elle joue un rôle énorme dans l'amélioration des conditions de vie des populations.

La formation aide à accroître le revenu du travail des individus, tout en dépendant de la filière choisie, le diplôme obtenu... et les exigences du marché du travail.

Dans des études axées sur le marché du travail des pays développés, deux tendances se dégagent à propos du rôle de l'éducation : la première affirme qu'un niveau d'éducation élevé favorise l'auto-emploi [Millan *et al.* 2010], tandis que la seconde suggère qu'un niveau d'éducation élevé accroît la probabilité de choisir un emploi salarié moins risqué procurant de meilleures conditions du travail.

Notre travail est inclus dans le cadre des structures micro-économiques, donc il s'agit de petits projets ciblant les pauvres. La majorité de ces pauvres ont, au plus, acquis un niveau d'éducation primaire ou secondaire, alors ils sont incapables d'accéder au secteur structuré qui favorise les individus les mieux qualifiés [Kuepie *et al.* 2009].

Notre objectif dans cette étude est d'analyser l'impact de la formation à partir du taux de rentabilité interne [Khoi 1964]. Nous proposons une modélisation mathématique sous certaines contraintes, tout en transformant la recherche du taux de rentabilité interne à la recherche des racines d'un polynôme de degré très élevé (lié à l'espérance de vie). Nous clôturons par la suite ce travail par une application numérique évaluant notre étude.

2 Critères de la rentabilité et cadre d'étude

2.1 Critères d'évaluation de la rentabilité

L'éducation et la formation sont un investissement auquel il est possible d'associer une rentabilité, mais la mesure de cette dernière est difficile car les coûts et les bénéfices ne sont pas toujours mesurés dans la même unité et n'interviennent pas simultanément, ce qui exige d'introduire le taux d'actualisation noté k , qui est le taux de rentabilité minimum exigé par l'entreprise. Théoriquement, ce taux représente le coût des capitaux utilisés par l'entreprise. Évaluer un projet d'investissement conduit à comparer le capital investi à l'ensemble des cash-flows liés à ce projet, mais il est nécessaire d'actualiser les flux générés à la date du début de l'investissement.

Il existe quatre critères principaux d'évaluation[Gardès 2006] :

- la valeur actuelle nette
- le taux de rentabilité interne
- l'indice de profitabilité
- le délai de récupération du capital

Dans ce travail, nous utiliserons les deux premières critères :

- La valeur actuelle nette notée (VAN), se calcule en faisant la somme de tous les flux générés par le projet, chaque flux étant ramené à sa valeur actuelle à l'année 0 :

$$VAN = -capital + \sum_n \frac{flux}{(1+k)^n} \quad (IV.1)$$

Quand les dépenses d'investissement s'étalent sur plusieurs périodes, la valeur actuelle nette devient :

$$VAN = -\sum_m \frac{dépenses}{(1+k)^m} + \sum_n \frac{flux}{(1+k)^n} \quad (IV.2)$$

Un projet ne doit être retenu que si sa VAN est positive. Cette valeur actuelle nette permet ainsi de définir si un investissement va s'avérer rentable ou non, et surtout s'il va pouvoir répondre aux attentes de rendement fixées par les apporteurs des capitaux. Lorsqu'on doit choisir entre plusieurs projets, il faut retenir celui dont la VAN est la plus élevée.

Néanmoins, le cas d'un projet avec VAN=0 peut être retenu si le but de l'investissement est social et non pas lucratif.

- Le taux de rentabilité interne (TRI) qui peut être interprété comme le taux de rendement de l'investissement initial est la valeur du taux d'actualisation qui annule la VAN, donc il vérifie l'égalité suivante :

$$\sum_m \frac{dépenses}{(1+k)^m} = \sum_n \frac{flux}{(1+k)^n} \quad (IV.3)$$

Le (TRI) est utilisé comme critère d'élimination puisqu'on doit rejeter immédiatement tout projet dont le TRI est inférieur au taux d'actualisation k , car sa VAN est négative. De plus, c'est un critère de comparaison entre les projets de même nature [Reverdy 1997]. Mais cette racine est rarement facile à calculer puisque le degré de ce polynôme est très élevé et il est très difficile d'exprimer ses zéros à partir de ses coefficients.

Le TRI est un critère de sélection des projets, mais il a une limite d'application du fait que l'équation IV.3 peut avoir une infinité de solution ou aucune solution, ce qui diminue le champ d'application de ce critère. Le point fort de notre travail, c'est que nous utiliserons ce critère pour notre modélisation, et nous prouverons l'existence et l'unicité de la solution.

2.2 Cadre de l'étude

Après un certain niveau de compétence et de savoir-faire qui consiste en acquis initiaux des bénéficiaires au moment du dépôt du projet, nous avons deux possibilités : soit un savoir-faire appris à travers les exercices quotidiens, soit une attestation de suivi de la formation au sein d'un centre comme l'Office de la Formation Professionnelle et de la Promotion du Travail. Les décideurs doivent faire un choix entre la mise en disposition des projets aux pauvres sans les former ou la mise de la formation à disposition de ces pauvres via la nature des projets et leurs critères de réalisation et de succès.

Avant toute décision, il faut compter, dans le premier cas, des coûts associés à la formation et les revenus que ces bénéficiaires gagneront dans le deuxième cas [Griliches 1997b][Griliches 1997a]. Par suite le choix de former ces pauvres est rentable financièrement et non pas socialement si les gains accumulés au cours de la vie professionnelle sont supérieurs à l'ensemble des coûts demandés. C'est une approche coût/ bénéfice qui impose d'assurer une valeur actuelle nette positive, même supérieur à une valeur imposée par les apporteurs de capitaux , ou un TRI strictement supérieur au taux d'actualisation.

3 Taux interne de la rentabilité d'une formation d'une année

3.1 Bilan opérationnel

Soit $t = 0$ la date de présélection des projets AGR apportés par les habitants ciblés. À cette date, chaque bénéficiaire a un niveau de formation donné. Supposons que les programmes d'aide mis par les dirigeants visent à renforcer les capacités et à améliorer le savoir faire de ces bénéficiaires à travers des formations professionnelles, notre but est de comparer la rentabilité des deux bénéficiaires qui ont le même niveau de formation à la date $t = 0$, l'un s'intègre dans le milieu professionnel directement, l'autre passe à un niveau de formation supérieur [GRAVOT 2007]. Sans perdre la généralité, nous supposons que cette formation demande une année.

Le premier obtiendra un flux de revenus évalué à A_0 la première année, A_1 la deuxième année,..., A_{n-1} la $n^{ième}$ année.

Le deuxième, s'il continue ses formations une année supplémentaire, il subira pendant cette année des coûts directs² et indirects³ D_0 et des coûts d'opportunité⁴, s'il arrête ses formations à ce niveau, et si nous supposons que l'accès au travail est garanti dès la fin des formations⁵, il gagnera des revenus évalués à B_1 pour la deuxième année, B_2 pour la troisième année,..., B_{n-1} pour la $n^{ième}$ année.

Les gains nets correspondant à l'investissement de celui qui a eu une formation une année de plus seront donc :

$B_1 - A_1$ pour sa première année du travail, $B_2 - A_2$ pour sa deuxième année, ..., $B_n - A_n$ pour sa $n^{ième}$ année.

Soit C_0 la somme des divers coûts dépensés pendant cette année de formation nous expliquons le parcours possible à l'aide de la figure suivante :

2. Les coûts directs sont des coûts liés directement à la formation, à savoir les droits d'inscriptions (pour l'accès aux différents ateliers, les activités pratiques...).

3. Les coûts indirects sont des dépenses spécifiques liées à la formation (achat de photocopies, le transport...).

4. Le coût d'opportunité de la formation c'est le profil de revenus auxquels peut prétendre l'étudiant qui arrête les formations au niveau de référence.

5. le chômage est une réalité sociale à ne pas oublier, que nous introduisant par la suite, mais dans notre cadre d'étude, nous formons ces gens pour les préparer à gérer leurs projets immédiatement après la fin des formations, donc le chômage pour notre étude est un ajout souhaitable.

IV.3 Taux interne de la rentabilité d'une formation d'une année

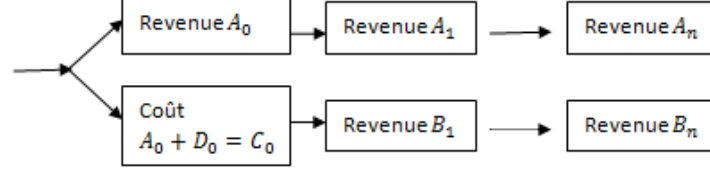


Figure IV.1 – Le parcours possible pour une formation d'une année

Tenant compte de IV.1, le bilan opérationnel d'une année de formation à l'aide de l'égalité IV.3 nous permet de formuler le taux de rentabilité interne que nous notons simplement t_r comme suit :

$$\frac{(B_1 - A_1)}{(1 + t_r)} + \frac{(B_2 - A_2)}{(1 + t_r)^2} + \dots + \frac{(B_T - A_T)}{(1 + t_r)^T} = C_0 \quad (\text{IV.4})$$

avec T L'espérance de vie relativement à un pays⁶ donné.

Remarque 4 Si la formation demande moins d'une année, six mois ou trois mois par exemple, le formé aura des revenus au cours de l'année juste après la fin de la formation notés B_0 , le bilan opérationnel devient comme suit :

$$(B_0 - A_0) + \frac{(B_1 - A_1)}{(1 + t_r)} + \frac{(B_2 - A_2)}{(1 + t_r)^2} + \dots + \frac{(B_T - A_T)}{(1 + t_r)^T} = C_0 \quad (\text{IV.5})$$

Notons que si nous posons $C'_0 = C_0 - (B_0 - A_0)$, nous retrouvons l'équation IV.4 avec une constante près. Par la suite, nous continuons notre étude en supposant que la formation demande une année sans perdre ce cas.

3.2 Formulation mathématique et hypothèses d'étude

Précédemment, nous avons défini le taux de rentabilité d'un investissement sur une année de formation. C'est la rentabilité t_r vérifiant la relation :

$$\sum_{i=1}^T \frac{(B_i - A_i)}{(1 + t_r)^i} = C_0 \quad (\text{IV.6})$$

- Rappelons que l'intérêt de toute formation est d'améliorer les compétences des bénéficiaires afin d'assurer un emploi permanent et structuré avec une bonne rentabilité. Il n'y a donc aucune raison à ajouter une année de formation sans avoir un impact économique

6. Pour le cas du Maroc l'espérance de vie est 72

(sauf cause culturelle qui n'est pas notre objectif dans ce travail). Par suite le bon sens de la modélisation impose que :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, T\} \quad B_i > A_i$$

Dans ce contexte, nous croyons que l'éducation est un canal favorable pour acquérir des compétences managériales requises pour se lancer dans l'entrepreneuriat, et elle offre des revenus plus élevés. Autrement dit, nous joignons l'approche selon laquelle les revenus sont une fonction croissante relativement aux variables d'éducation et de formation.

- Une deuxième condition naturelle est qu'il n'existe aucun système de formation qui puisse amortir les coûts en une année, d'où :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, T\} \quad B_i - A_i < C_0$$

Ainsi, notre problème se modélise de la manière suivante :

Chercher le taux de rentabilité t_r solution de l'équation bilan

$$\sum_{i=1}^T \frac{(B_i - A_i)}{(1 + t_r)^i} = C_0$$

sous les hypothèses suivantes

H1 : Justification de la poursuite des études

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, T\} \quad B_i > A_i \tag{IV.7}$$

H2 : L'impossibilité de recouvrir les coûts en une année

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, T\} \quad B_i - A_i < C_0 \tag{IV.8}$$

Avant de résoudre notre problème [Khomssi & Chaibi 2014a], le lemme suivant transforme l'équation IV.6.

Lemme 3.1 *Le taux de rentabilité d'un investissement sur une année d'étude est lié à un zéro d'un polynôme P défini par :*

$$P(x) = x^T - \sum_{k=0}^{T-1} a_k x^k \quad \text{avec } x \in]1, 2[\quad a_k \in]0, 1[\quad \forall k < T. \tag{IV.9}$$

Preuve 2 *Tenant compte du changement de variable trivial : $x = 1 + t_r$ et si nous posons $a_m = \frac{B_{T-m} - A_{T-m}}{C_0}$, l'équation IV.6 devient sous la forme :*

$$x^T - \sum_{m=0}^{T-1} a_m x^m = 0 \quad (\text{IV.10})$$

De plus, à partir de (H1) et (H2), il est facile de remarquer que $a_m \in]0, 1[$, d'où le lemme.

Remarque 5 *Nous pouvons étudier les zéros d'un polynôme selon deux points de vue bien différents. Le premier est celui de l'Algèbre, il consiste à rechercher les propriétés de nature arithmétiques des zéros, connaissant celles des coefficients ; c'est la théorie de Galois. Le second point de vue consiste à rechercher les positions des zéros dans le plan complexe à l'aide des propriétés analytiques du polynôme ; c'est la théorie Analytique des fonctions holomorphes. Pour notre modélisation, le degré du polynôme lié à la rentabilité comme étant l'espérance de vie d'un être humain est très élevé⁷ ($T > 32$), pour cette raison, il est très difficile, d'exprimer ses zéros à partir de ses coefficients. Par conséquent, nous étudions le polynôme comme une fonction analytique.*

3.3 Existence et unicité de la racine : TRI

La recherche du taux de rentabilité via le lemme se traduit par l'existence et l'unicité de zéro du polynôme P .

Proposition 3.2 *Le polynôme P défini par :*

$$P(x) = x^T - \sum_{k=0}^{T-1} a_k x^k \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_k \in]0, 1[\quad \forall k < T \\ x > 0 \end{cases} \quad (\text{IV.11})$$

admet une seule racine simple.

Preuve 3 *posons*

$$\Psi(x) = \frac{P(x)}{x^T} = 1 - \sum_{k=0}^{T-1} a_k x^{k-T} \quad \text{pour } x > 0$$

Ψ est une fonction assez régulière pour $x > 0$, donc

$$\Psi'(x) = \sum_{k=0}^{T-1} (T - k) a_k x^{k-T-1} \quad x > 0$$

7. La plus petite espérance de vie est 32 de Swaziland

Chapitre IV. Rentabilité des systèmes de formation dans le cadre micro-économique

ce qui permet de conclure que la fonction Ψ est continue strictement croissante de $]0, +\infty[$, de plus

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Psi(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \Psi(x) = 1$$

Donc P admet une seule racine, mais est-elle simple ?

Soit R la racine de P . Pour montrer que cette racine est simple, il faut et il suffit de montrer que P' ne s'annule pas en R .

Supposons que R est une racine de $P'(x)$ c'est-à-dire :

$$R^T = \sum_{k=1}^{T-1} \frac{k a_k}{T} R^k$$

Or, R racine de P , donc elle vérifie : $R^T = \sum_{k=0}^{T-1} a_k R^k$, ce qui donne :

$$a_0 + \sum_{k=1}^{T-1} a_k \left(1 - \frac{k}{T}\right) R^k = 0$$

ceci est impossible car la somme des termes positifs non nuls ne peut pas être égale à zéro, par conséquent, la racine est simple.

Ainsi, nous obtenons l'existence d'une racine simple unique $x > 0$ réalisant l'équation bilan. Il reste à montrer qu'elle appartient à l'intervalle $]1, 2[$ puisque la rentabilité $t_r \in]0, 1[$. Pour cela, nous montrons la proposition suivante :

Proposition 3.3 *Considérons le polynôme P défini par :*

$$P(x) = x^T - \sum_{k=0}^{T-1} a_k x^k \quad \text{avec} \quad a_k \in]0, 1[\quad \forall k < T \quad (\text{IV.12})$$

tout zéro x de P est tel que

$$1 < x < 1 + \max_{m=0}^{T-1} a_m \quad (\text{IV.13})$$

Preuve 4 La preuve de la proposition est une conséquence de l'application du théorème de Lagrange (voir l'annexe 1), en effet le théorème postule qu'il existe $a_n > 0$ ce qui est le cas pour $a_T = 1$ les autres coefficients sont tous négatifs si nous écrivons

$$P(x) = x^T + \sum_{k=0}^{T-1} \tilde{a}_k x^k \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_T = 1 \\ \tilde{a}_k \in]-1, 0[\quad \forall k < T \end{cases} \quad (\text{IV.14})$$

IV.3 Taux interne de la rentabilité d'une formation d'une année

et si nous appliquons le théorème avec ($n = T, k = T - 1$ et $A = \max_{m=0}^{T-1} a_m$) alors le zéro x vérifié

$$x < 1 + \max_{m=0}^{T-1} a_m < 2 \quad (\text{IV.15})$$

Pour démontrer l'autre inégalité, nous avons

$$P(1) = 1 - \sum_{m=0}^{T-1} a_m = 1 - \sum_{m=0}^{T-1} \frac{B_{T-m} - A_{T-m}}{C_0}$$

Or, d'après l'équation IV.4, nous avons

$$\sum_{m=0}^{T-1} \frac{B_{T-m} - A_{T-m}}{(1 + t_r)^{T-m}} = C_0$$

ce qui permet de conclure que $\sum_{m=0}^{T-1} B_{T-m} - A_{T-m} > C_0$ donc $P(1) < 0$ or $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$ d'où :

$$x \in]1, +\infty[\quad (\text{IV.16})$$

la proposition découle de IV.15 et IV.16.

Ainsi nous obtenons l'existence et l'unicité de la solution.

3.4 Algorithme de résolution

Notre travail transforme la recherche de la rentabilité de la formation d'une année à la recherche des zéros d'un polynôme défini à partir de la différence des revenus et l'espérance de vie. Nous avons montré théoriquement l'existence d'un seul zéro simple pour ce polynôme dans l'intervalle $]1, 2[$, ce qui permet, pratiquement, de choisir un algorithme convergeant vers ce zéro. Nous proposons l'algorithme de Newton adapté à notre problème, ce choix est possible car le zéro est simple. Ainsi nous avons l'algorithme suivant :

$$x_{n+1} = \frac{x_n P'(x_n) - P(x_n)}{P'(x_n)} \text{ avec } x_0 \text{ donnée}$$

Si nous remplaçons les données par leurs expressions, nous obtenons :

$$x_{n+1} = \frac{(T-1)x_n^T + \sum_{k=1}^{T-1} (x_n a_k - k a_k) x_n^{k-1} + a_0}{T x_n^{T-1} - \sum_{k=1}^{T-1} k a_k x_n^{k-1}}$$

le test d'arrêt est simple, il suffit d'avoir : $e_n = |x_{n+1} - x_n| < \epsilon$ donnée.

Une fois le zéro x est déterminé, nous obtenons le taux de rentabilité sachant que $t_r = x - 1$.

Économiquement, toute formation a une certaine valeur de rentabilité. Notre modélisation a permis de quantifier cette rentabilité comme un objet mathématique : racine d'un polynôme. Il fallait prouver l'existence et l'unicité de cette racine, sinon, la modélisation n'aura aucun sens. À la fin, nous avons cherché cette valeur de rentabilité par un algorithme bien adapté. Savoir la valeur de cette rentabilité aide les décideurs à choisir entre donner les projets aux bénéficiaires ou les former avant. Évidemment, la formation sera rentable tant que le taux de la rentabilité est important.

Également, cette modélisation peut être appliquée à l'ensemble des formations possibles, ce qui donne un critère de sélection et de choix via la notion de TRI afin de faciliter la prise de décision par les dirigeants. Il s'agit d'une analyse coût/ bénéfice. Un individu (décideur ou bénéficiaire) s'intègre dans la formation si le bénéfice net tiré du secteur choisi excède celui d'un autre. Notons que cette analyse nécessite la disponibilité d'informations parfaites (les dépenses et les revenus des deux secteurs).

4 Taux interne de rentabilité sur un cycle de formation

Dans cette partie, nous supposons que la formation exige deux ou trois années d'études. Dans ce cas, elle nécessite d'autres frais, ce qui augmente les coûts. Notre but est de reformuler la modélisation précédente pour une formation de N années tout en gardant le cas particulier précédent [Chaibi & Khomssi 2015].

Parlons d'un bénéficiaire d'une activité génératrice de revenus qui interrompt ses formations à un niveau donné (niveau de référence à $t = 0$) pour s'intégrer dans le milieu professionnel, et d'un autre qui investit dans plusieurs années de formation à partir de ce niveau, alors le premier obtiendra un flux de revenus évalué à A_1 à la première année, A_2 à la deuxième année,..., A_n à la $n^{ième}$ année. Tandis que le deuxième continue ses formations N années supplémentaires⁸, et s'il arrête ses études à ce niveau, il gagnera des revenus évalués à B_1 pour la $N + 1$ année, B_2 pour la $N + 2$ année,...

Les gains nets, correspondant à l'investissement de celui qui a étudié N année de plus, seront donc :

$$B_{N+1} - A_{N+1} \text{ pour la } N + 1 \text{ année}$$

8. Pratiquement ce genre de formation dure deux ou trois ans, mais mathématiquement nous travaillons d'une manière générale sans préciser le nombre d'années N de la formation

IV.4 Taux interne de rentabilité sur un cycle de formation

$B_{N+2} - A_{N+2}$ pour la $N + 2$ année

$\vdots$

$B_T - A_T$ pour la T année

Nous expliquons le parcours possible à l'aide de la figure suivante :

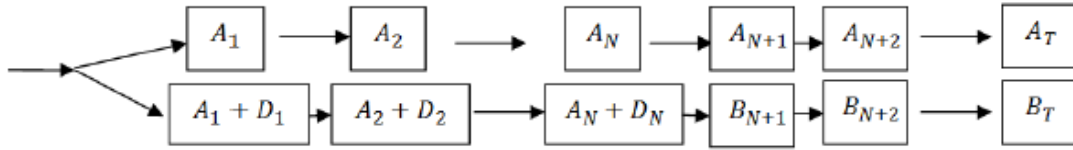


Figure IV.2 – Le parcours possible pour une formation de N année

Tenant compte de l'équation IV.2, le taux de rentabilité t_r pour ces N années d'investissement sera solution de l'équation bilan :

$$\sum_{i=N+1}^T \frac{(B_i - A_i)}{(1 + t_r)^i} = \sum_{i=1}^N \frac{(D_i + A_i)}{(1 + t_r)^i} \quad (\text{IV.17})$$

avec :

- T l'espérance de vie.
- $(B_i - A_i)$, $i = k + 1, \dots, T$: les revenus nets attendus.
- D_i , $i = 1, \dots, N$: les dépenses et A_i $i = 1, \dots, N$: les coûts d'opportunité.

4.1 Formulation mathématique et hypothèses générales

Nous avons défini le taux de rentabilité t_r d'un investissement sur un cycle de formation, sans avoir une période de chômage, comme un taux t_r vérifiant la relation :

$$VAN(t_r) = 0$$

Autrement dit

$$\sum_{i=N+1}^T \frac{(B_i - A_i)}{(1 + t_r)^i} - \sum_{i=1}^N \frac{(D_i + A_i)}{(1 + t_r)^i} = 0$$

Avant de résoudre cette équation, nous définissons un système non rentable via une simple comparaison coût/ bénéfice. C'est la définition suivante.

Définition 4.1 *Un système éducatif tel que*

$$\sum_{i=N+1}^T (B_i - A_i) \leq \sum_{i=1}^N (D_i + A_i) \quad (\text{IV.18})$$

est appelé système non rentable.

- Le terme $\sum_{i=N+1}^T (B_i - A_i)$ représente les recettes accumulées après cette formation sans actualisation.
- Le terme $\sum_{i=1}^N (D_i + A_i)$ représente les dépenses nécessaires pour suivre cette formation sans actualisation.

L'égalité IV.18 montre l'insuffisance des gains même pour recouvrir les coûts demandés.

Économiquement, ce système ou cette formation est non rentable, mais l'État peut financer des formations professionnelles loin des calculs monétaires si les gains attendus sont d'aspect social afin d'améliorer le niveau professionnel des pauvres citoyens et d'ancrer une culture de l'apprentissage et de la formation.

Dans ce travail, nous cherchons à évaluer la rentabilité des formations, donc nous postulons qu'une formation est rentable si, au moins, elle recouvre ses coûts.

Avant de résoudre le problème et de prouver mathématiquement l'existence et l'unicité de la rentabilité, nous le transformons en une écriture polynomiale à l'aide des paramètres définis comme suit :

$\delta_i = B_i - A_i$, $\alpha_i = A_i + D_i$ et $y = \frac{1}{1+t_r}$, avec ces notations, le problème IV.17 devient :

$$\sum_{i=N+1}^T \delta_i y^i - \sum_{i=1}^N \alpha_i y^i = 0 \quad (\text{IV.19})$$

- α_i représente les coûts nécessaires pour l'année i.
- δ_i représente la différence des revenus entre celui qui a arrêté ses études avant et celui qui a continué ses études N années de plus.

Pour compléter cette modélisation, nous définissons trois contraintes :

Ainsi, notre problème se transforme en la recherche de la solution du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } x \in]\frac{1}{2}, 1[\text{ tel que :} \\ \sum_{i=N+1}^T \delta_i x^i - \sum_{i=1}^N \alpha_i x^i = 0 \\ \text{sous :} \\ H1 : \delta_i \geq 0 \quad \forall i = N+1, \dots, T \\ H2 : \delta_i \leq \alpha_i \quad \forall i = 1, \dots, N \quad \forall j = N+1, \dots, T \\ H3 : \sum_{i=N+1}^T \delta_i > \sum_{i=1}^N \alpha_i \end{array} \right. \quad (\text{IV.20})$$

Lemme 4.2 *Le taux de rentabilité d'un investissement sur N années de formations est lié à un zéro d'un polynôme P de degré T défini par :*

$$P(x) = \sum_{i=N+1}^T \delta_i x^i - \sum_{i=1}^N \alpha_i x^i \quad (\text{IV.21})$$

avec $x \in]\frac{1}{2}, 1[$

Remarque 6 *Pour notre modélisation, le degré du polynôme lié à la rentabilité comme étant l'espérance de vie ou le temps de retraite est très élevé, ce qui rend la recherche des zéros à partir des propriétés arithmétiques des coefficients très difficile, donc nous considérons ce polynôme comme une fonction analytique et nous cherchons les positions des zéros dans le plan complexe.*

4.2 Existence et unicité de la racine

Soit $P(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$ un polynôme de degré n à coefficients réels. Pour $0 \leq i \leq n$, on pose : $\epsilon_i = \text{sgn}(a_i)$ où $\text{sgn}(x) = -1, 0$ ou 1 selon que x est strictement négatif, nul ou strictement positif.

On dit qu'il y a changement de signe dans la suite $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$, s'il existe i et j tels que :

$$\epsilon_i = -\epsilon_{i+j} \quad \text{et} \quad \epsilon_{i+1} = \dots = \epsilon_{i+j-1}$$

on note $\sigma(P)$ le nombre de changement de signe dans la suite $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ et $r(P)$ le nombre de racines strictement positives de P (comptées avec leur multiplicité).

Théorème 4.3 *Sous $H1$, $H2$ et $H3$, le polynôme P défini par $P(x) = \sum_{i=N+1}^T \delta_i x^i - \sum_{i=1}^N \alpha_i x^i$ admet une seule racine simple dans $]\frac{1}{2}, 1[$.*

Preuve 5 *Nous avons*

$$P(1) = \sum_{i=N+1}^T \delta_i - \sum_{i=1}^N \alpha_i$$

d'après (H3) nous obtenons :

$$P(1) > 0$$

or

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{i=N+1}^T \frac{\delta_i}{2^i} - \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{2^i}$$

posons $\delta^* = \max_{i=N+1}^T \delta_i$ et $\alpha_* = \min_{i=1}^N \alpha_i$, d'après (H2) nous obtenons $\delta^* < \alpha_*$ donc

$$P\left(\frac{1}{2}\right) < \alpha_* \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} - 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^T \right] < 0$$

ce qui prouve que P admet une racine dans $]\frac{1}{2}, 1[$ noté x_0 . Montrons que x_0 est l'unique racine simple dans $]0, +\infty[$. Pour cela, nous montrons par récurrence sur T que $r(P) \leq \sigma(P)$.

- Si $T = 1$ nous avons $P(y) = -\alpha_1 y$, donc $r(P) \leq \sigma(P) = 0$
- Supposons que le résultat est acquis jusqu'au degré $T - 1$. D'après le théorème de Rolle, le polynôme dérivé P' admet au moins $r(P) - 1$ racines strictement positives (comptées avec leur multiplicité) on a

$$r(P) - 1 \leq r(P') \tag{IV.22}$$

Notre polynôme

$$P(x) = \sum_{i=N+1}^T \delta_i x^i - \sum_{i=1}^N \alpha_i x^i$$

vérifie

$$\sigma(P') = \sigma(P) \tag{IV.23}$$

Soit x_1 la plus petite racine strictement positive de P , puisque $P(0) = 0$ et $P'(0) = -\alpha_1$ alors P' s'annule sur l'intervalle $]0; x_1[$ (voir le schéma en dessous) et l'équation IV.22 devient

$$r(P) \leq r(P') \tag{IV.24}$$

D'après l'hypothèse de récurrence

$$r(P') \leq \sigma(P') \tag{IV.25}$$

finalement, à partir des équations IV.23, IV.24, IV.25 nous obtenons

$$r(P) \leq r(P') \leq \sigma(P') = \sigma(P)$$

or $\sigma(P) = 1$ donc $r(P) = 1$, finalement $x_0 = x_1$, ce qui signifie l'existence d'une seule racine simple dans $]\frac{1}{2}, 1[$.

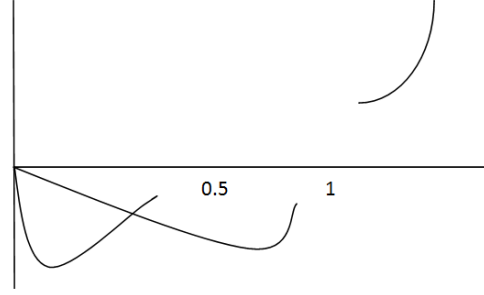


Figure IV.3 – Courbe possible du polynôme P

4.3 Algorithme de calcul de la racine

Cette modélisation transforme la recherche de la rentabilité d'un investissement sur un cycle de formation à la recherche des zéros d'un polynôme. Le théorème montre l'existence d'un seul zéro simple pour ce polynôme dans l'intervalle $]\frac{1}{2}, 1[$, ce qui permet, pratiquement, de choisir un algorithme convergeant vers ce zéro. Puisque la racine x_0 est simple ($P'(x_0) \neq 0$), nous proposons l'algorithme de Newton, ainsi, nous écrivons l'algorithme suivant :

$$x_{n+1} = \frac{\sum_{i=N+1}^T (i-1)\delta_i x_n^i + \sum_{i=1}^N (1-i)\alpha_i x_n^i}{\sum_{i=N+1}^T i\delta_i x_n^{i-1} - \sum_{i=1}^N i\alpha_i x_n^{i-1}}$$

posons

$$M = \max_{x \in]\frac{1}{2}, 1[} |P''(x)|$$

$$m = \min_{x \in]\frac{1}{2}, 1[} |P'(x)|$$

nous avons :

$$e_n = |x_{n+1} - x_n| \leq \left(\frac{M}{2m}\right)^{2n-1} e_0^{2n} < \epsilon \text{ donnée}$$

Calculons le nombre d'itérations nécessaires pour la convergence. Nous avons $|e_0| < \frac{1}{2}$ et nous choisirons e_0 et ϵ de façon que $(\frac{M}{2m}|e_0|)^{2n} < \epsilon \frac{M}{2m} < 1$, ce qui permet de déduire que

$$n > \frac{\ln \epsilon \frac{M}{2m}}{2 \ln(\frac{M}{2m}|e_0|)}$$

Prenons $n_0 = E(\frac{\ln \epsilon \frac{M}{2m}}{2 \ln(\frac{M}{2m} |e_0|)}) + 1$, alors notre algorithme converge vers la racine à partir de n_0 . Une fois la racine est déterminée, nous obtenons le taux de rentabilité sachant que : $t_r = \frac{1}{x-1}$.

Remarque 7 *L'intérêt de ce chapitre est de proposer une modélisation permettant de trouver la solution qui représente le TRI. L'aspect numérique, dans ce chapitre, n'est qu'un outil de calcul, et le programmeur peut choisir d'autre méthode numérique.*

4.4 Formation avec période de chômage

Dans ce qui précède, nous nous sommes intéressés à des formations qui donnent, en général, l'accès au marché du travail dès la fin des études et auxquelles nous avons associé un taux de rentabilité. Mais le chômage est une réalité sociale que nous ne pouvons pas ignorer.

C'est pour cette raison que nous reformulons, dans ce paragraphe, le problème en considérant une période de chômage de la manière suivante : Nous supposons qu'un individu a fait une formation de N années à partir de la date de référence (l'arrêt de la formation d'un autre), puis il a vécu une période de chômage entre l'année $N + 1$ et l'année K avant d'être intégré dans le monde professionnel comme l'indique le schéma suivant :

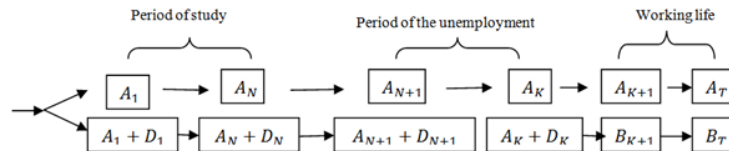


Figure IV.4 – Le parcours possible avec une période de chômage

Comme le taux de rentabilité t_r est solution de l'équation "*Dépenses = Profits*", alors il sera pour ces N années d'investissement solution de l'équation bilan :

$$\sum_{i=k+1}^T \frac{(B_i - A_i)}{(1 + t_r)^i} = \sum_{i=1}^N \frac{(D_i + A_i)}{(1 + t_r)^i} + \sum_{i=N+1}^K \frac{(D_i + A_i)}{(1 + t_r)^i} \quad (\text{IV.26})$$

avec :

- D_i $i = 1, \dots, N$: les dépenses de la formation.
- A_i $i = 1, \dots, T$: les coûts d'opportunités.
- D_i $i = N + 1, \dots, T$: les coûts de solidarité tant que quelqu'un paie les dépenses de subsistance de ce chômeur.
- B_i $i = 1, \dots, T$: les revenus après l'accès au travail.
- $\sum_{i=k+1}^T \frac{(B_i - A_i)}{(1 + t_r)^i}$: les revenus nets prévus.
- $\sum_{i=1}^N \frac{(D_i + A_i)}{(1 + t_r)^i}$: les dépenses de la formation.
- $\sum_{i=N+1}^K \frac{(D_i + A_i)}{(1 + t_r)^i}$: les dépenses de la période du chômage.

Si nous fusionnons les deux termes décrivant les coûts tout en tenant compte de ce que représentent les coûts lors de la modélisation, cette équation s'écrira simplement sous la forme :

$$\sum_{i=k+1}^T \frac{(B_i - A_i)}{(1 + t_r)^i} = \sum_{i=1}^K \frac{(D_i + A_i)}{(1 + t_r)^i} \quad (\text{IV.27})$$

ce qui nous ramène à la formulation citée précédemment. En suite, tous nos résultats restent valables même avec une période de chômage. Plus précisément, nous obtenons le même polynôme avec une modification des coefficients selon les données. Ces dernières changent forcément la valeur du TRI.

5 Applications

5.1 Justification de l'application

Notre objectif dans ce chapitre était l'évaluation numérique de la rentabilité d'une formation professionnelle donnée à des classes vulnérables afin de perfectionner leurs niveaux du savoir-faire, et réformer leurs statuts socio-économiques.

À travers une modélisation mathématique, nous avons transformé la recherche du taux de la rentabilité interne à la recherche d'un unique zéro simple d'un polynôme. Nous avons commencé par une formation qui dure une année, puis nous avons généralisé la modélisation en

considérant une formation de N années. Dans les deux cas, nous avons proposé un algorithme de résolution. Mesurer l'efficacité et l'efficience de ces deux algorithmes nécessite des applications concrètes avec des chiffres réels, chose dont nous ne disposons pas. Néanmoins, notre modélisation simule toutes les formations car, par construction, elle n'est pas liée uniquement à des formations professionnelles. Pour cet argument, nous proposons des applications dans le domaine de l'enseignement et de l'éducation où nous pouvons estimer les coûts et les revenus. Premièrement, nous commençons par la recherche de la rentabilité de la formation Licence par rapport au DEUG qui nécessite une année de plus. Puis dans un deuxième temps, nous cherchons la rentabilité de la formation Licence par rapport au Bac qui nécessite trois ans.

5.2 Rentabilité de la formation Licence par rapport au DEUG

Pour chercher la rentabilité de la formation Licence par rapport au DEUG, nous comparons les revenus annuels d'un salarié diplômé Licence et d'un autre diplômé DEUG. Et pour rendre l'application plus concrète, nous considérons quatre filières différentes de Licence, notées F_1 , F_2 , F_3 et F_4 .

Pour chaque formation, nous précisons les dépenses D_0 et également le premier revenu annuel. Pour simplifier les calculs, nous supposons qu'il varie annuellement avec un taux fixé. Nous récapitulons ces données dans le tableau suivant avec des chiffres approximatifs des salariés marocains donnés en DH.

	DEUG	Licence			
		F_1	F_2	F_3	F_4
Dépenses	20000	40000	80000	120000	80000
Revenus	5000	6000	6000	6000	10000
Taux	0.8 %	1%	1.2%	1.3%	1%

Tableau IV.1 – *Les inputs du premier l'algorithme*

Le premier revenu d'un diplômé de DEUG est $A_0 = 5000 \times 12 = 60000$ et varié par un taux $t = 0.8\%$, donc son revenu de la $n^{ième}$ année est $A_n = A_0(1 + t)^n$.

Le revenu d'un salarié diplômé de Licence de la $n^{ième}$ année est $B_n = B_0(1 + t)^n$.

À l'aide du changement de variable suivant :

$$a_m = \frac{B_{T-m} - A_{T-m}}{C_0}$$

avec $C_0 = A_0 + D_0$, nous obtenons l'écriture de $P(x)$.

Pour chaque filière, nous cherchons son unique zéro dans l'intervalle $]1, 2[$ et nous traçons sa courbe comme suit :

* Pour F_1 , nous avons $P(1) = -5.51$ et $P(2) = 9.07 \cdot 10^{11}$, et à l'aide du premier algorithme cité au paragraphe 3.4. le zéro de P est $x = 1.133$. Donc la rentabilité de la filière F_1 est $t_r = 0.133$.

* Pour F_2 , nous avons $P(1) = -4.93$ et $P(2) = 1.006 \cdot 10^{12}$, et le zéro cherché est $x = 1.107$.

Ce qui permet de conclure que la rentabilité de la filière F_2 est $x = 0.133$.

Le même algorithme se répète pour la filière F_3 et F_4 . Nous traçons les quatre courbes dans le graphe suivant : Les fonctions sont presque constantes jusqu'à une valeur à partir de laquelle

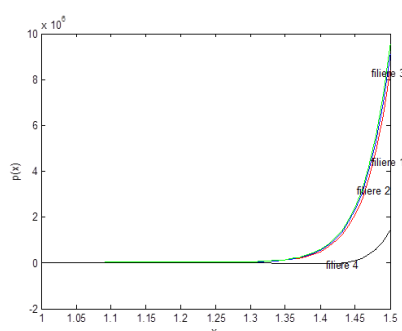


Figure IV.5 – La courbe de P pour les quatre filières

elles varient rapidement (presque exponentiellement). Cela peut être expliqué par le recouvrement des coûts d'un certain nombre d'années d'activités professionnelles.

La figure IV.5, qui contient les courbes de diverses situations, montre l'influence des deux données à savoir le revenu ainsi que le taux de sa variation.

Nous pouvons conclure qu'on peut classer, en trois grandes catégories socioprofessionnelles, la rentabilité d'un système éducatif à partir des trois possibilités :

- Salaire de base faible avec un taux de variation élevé.
- Salaire de base élevé avec un taux de variation faible.
- Salaire de base élevé avec un taux de variation élevé.

Une des conséquences pratiques de notre étude est qu'elle permet de déterminer le taux de rentabilité t_r que nous comparons avec le taux d'actualisation t_a . Tout système éducatif tel que $t_r \leq t_a$ sera rejetable au sens économique, donc, il faudra encourager les systèmes éducatifs sous la condition $t_r > t_a$.

Maintenant, nous cherchons la rentabilité des quatre filières à l'aide de l'algorithme précédent, mais avec des valeurs d'espérance de vie différentes.

Chapitre IV. Rentabilité des systèmes de formation dans le cadre micro-économique

Le tableau suivant donne les résultats obtenus :

Espérance de vie	F_1	F_2	F_3	F_4
20	0.1161	0.0816	0.0938	0.4368
30	0.1296	0.1011	0.0947	0.4371
40	0.1332	0.1073	0.0953	0.3472
50	0.1342	0.1096	0.0956	0.3472
60	0.1346	0.1104	0.0958	0.3472
90	0.1347	0.1110	0.0960	0.3472
100	0.1347	0.1110	0.0960	0.3472

Tableau IV.2 – *Variation de la rentabilité avec l'espérance de vie*

Remarquons que F_1 est toujours plus rentable que F_2 même si elles ont un revenu de base identique et le taux de variation de F_1 est inférieur à celui de F_2 . Ceci étant dû au fait que les dépenses de F_1 sont inférieures à ceux de F_2 .

Remarquons également que F_4 est la plus rentable parmi les quatre filières, même avec la plus petite valeur du taux de variation (1%). C'est une conséquence directe du fait que le revenu de base est élevé en comparaison à ceux des autres filières étudiées.

D'autre part, nous constatons que le taux de rentabilité interne de chaque filière augmente en fonction de l'espérance de vie. À un certain moment il devient constant, ce qui nous incite à poser la question suivante : y a-t-il un seuil d'espérance de vie à partir duquel la rentabilité demeure constante ?

5.3 Rentabilité de la formation DEUG par rapport au BAC

Pour chercher cette rentabilité, nous comparons les revenus annuels d'un salarié bachelier et d'un autre diplômé DEUG. Nous supposons que les dépenses de DEUG sont constantes et nous donnons également le premier revenu annuel des deux salariées.

Pour simplifier les calculs, nous supposons que les salaires varient annuellement avec un taux fixé. Nous récapitulons ces données dans le tableau suivant avec des chiffres approximatifs des salariés marocains donnés en DH.

	BAC	DEUG
Dépenses		40000
Salaire annuel	36000	60000
Taux d'augmentation du salaire	1%	0.8%

Tableau IV.3 – *Dépenses et revenus de la formation DEUG*

Le revenu de la $n^{ième}$ année pour le salarié bachelier est $A_n = A_0(1 + 0.01)^n$, et le revenu de l'autre diplômé DEUG de la $n^{ième}$ année est $B_n = B_0(1 + 0.008)^n$.

À l'aide du changement de variable suivant $\delta_i = B_i - A_i$, $\alpha_i = D_i + A_i$, nous obtenons l'écriture de $P(x)$. L'algorithme proposé au paragraphe 4.3 nous donne l'unique zéro de $P(x)$ dans l'intervalle $]\frac{1}{2}, 1[$. Ainsi nous avons :

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = -6.61 \cdot 10^4 \quad P(1) = 1.8 \cdot 10^6 \quad \text{et la racine } x = 0.7595$$

À l'aide du changement du variable $x = \frac{1}{1+TRI}$, alors le taux interne de la rentabilité de cette formation DEUG est $TRI = 0.3166$.

Le même algorithme se répète pour un salarié bachelier et un autre diplômé Licence avec les données du tableau suivant :

	BAC	Licence
Dépenses		80000
Salaire annuel	30000	60000
Taux d'augmentation du salaire	1%	1.2%

Tableau IV.4 – *Dépenses et revenus de la formation Licence*

et nous avons :

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = -9.81 \cdot 10^4 \quad P(1) = 2.54 \cdot 10^6 \quad \text{et la racine } x = 0.8858$$

ce qui permet de conclure que le taux interne de la rentabilité de cette formation Licence est $TRI = 0.2214$.

6 Conclusion

Toute décision d'investissement doit être précédée de plusieurs études. Dans ce cadre, l'objectif principal de ce chapitre était la proposition d'une modélisation mathématique pour déterminer le taux de rentabilité interne d'une formation dans un cadre général. Nous étions convaincus que savoir la valeur numérique de cette rentabilité particulière aide à la décision de faire un investissement dans le domaine de l'enseignement, de la formation et en particulier la formation socioprofessionnelle.

Cette modélisation intègre la période du chômage qui peut être survenue avant de se joindre à

Chapitre IV. Rentabilité des systèmes de formation dans le cadre micro-économique

la classe active, et elle paraît fortement réaliste car elle se base sur des hypothèses naturelles que nous avons définies à savoir :

- la justification de la poursuite des formations
- l'impossibilité de recouvrer les coûts en une année
- une contrainte nécessaire pour assurer la rentabilité d'un système

Cette nouvelle formulation mathématique proposée nous a permis d'obtenir une famille de polynômes spéciaux de telle sorte que l'évaluation du taux de la rentabilité interne est transformée à la recherche (existence et unicité) d'une racine simple d'un polynôme de grand degré que nous avons étudié de façon optimale comme fonction analytique. Nous avons gardé l'aspect général de la preuve, mais la technique, pour la modélisation de la rentabilité interne d'une formation d'une année, est un peu différente de celle d'une formation de plusieurs années tout en préservant les mêmes hypothèses.

À la fin de chaque modélisation, soit celle d'une formation d'une année ou celle de plusieurs années, nous avons proposé un algorithme de recherche de la rentabilité interne, il suffit d'introduire les données d'un tel système pour l'appliquer de manière plus large et plus efficace. En plus une application numérique a permis de montrer l'intérêt de cette étude en appliquant ce travail sur des données liées au système éducatif au Maroc (BAC- Licence).

Et comme perspectives, nous travaillerons sur la notion de moyenne via une écriture du groupe au lieu d'individu. Nous espérons, également, intégrer la notion de la probabilité conditionnelle dans cette étude, et nous souhaitons , fortement, élargir le champ des formations et augmenter ainsi le nombre des spécialités à étudier.

Chapitre V

Analyse probabiliste et différentielle des profits des opérateurs d'un projet micro-économique

1 Introduction

Tout projet économique de tendance sociale cible des classes fragiles économiquement qui ont besoin d'une aide financière. L'aide aux financements de la création d'entreprise apparaît comme instrument nécessaire pour démarrer l'économie d'une manière générale et faire intégrer les petits capitaux dans l'économie du marché et la contribution dans le développement socioéconomique d'un pays. Malheureusement, l'argent gratuit n'existe pas et les membres de ces projets sont obligés de chercher des financements externes. Et pour le faire, il y a deux manières : soit en augmentant les capitaux en faisant appel aux actionnaires, soit en augmentant les dettes en cherchant à emprunter. Or, les augmentations du capital modifient sa répartition dans l'entreprise ou l'AGR, et les augmentations des dettes dépendent de la volonté des créanciers. De plus, ces dernières sont limitées par certaines valeurs relatives aux conditions de réussite ou d'échec du projet, d'où l'utilité d'une analyse financière qui influence fortement les différents paramètres de l'évaluation d'un tel projet et le choix des méthodes à retenir, voire même le choix des stratégies de financement externes qu'on peut appeler : émettre des nouvelles actions ou emprunter.

Dans ce chapitre, nous calculons les profits réalisés à fin de la période du projet micro-économique des trois opérateurs intervenant au financement : les membres du projet, l'actionnaire et le créancier, en fonction de la probabilité de risque d'échec du projet et la probabilité de non remboursement du prêt, puis nous étudions les paramètres statistiques : la moyenne et la variance liées à ce modèle. Le deuxième objectif de ce travail est de projeter ces résultats sur un échantillon de projets homogènes de taille N choisi de manière à augmenter la confiance

Chapitre V. Analyse probabiliste et différentielle des profits des opérateurs d'un projet micro-économique

du pouvoir public aux résultats obtenus qui mettent en disponibilité un fond de garantie¹. Le troisième objectif est de chercher le maximum du profit de chaque opérateur relativement à sa part au financement. Cette étude nous a permis de préciser certaines valeurs critiques pour chacun. Ainsi dans ce chapitre, nous proposons :

- Une formulation mathématique afin de calculer les profits de chaque intervenant au financement d'un projet microéconomique (SARL², PME³, AGR⁴).
- Une étude de l'impact de la probabilité de risque d'échec sur les profits des membres du projet et les actionnaires, et l'impact de la probabilité de non-remboursement des dettes sur le profit des créanciers.
- Une étude de l'influence positive du degré de la technologie utilisée lors de la réalisation du projet.
- Une analyse économique montrant le lien entre le risque de non-remboursement des dettes et le fond de garantie assurée par l'état.
- Une étude de la variation du profit de chaque opérateur suivant la variation de la probabilité de risque d'échec du projet.
- La précision d'une valeur minimale du capital assurant le gain de l'entrepreneur et l'actionnaire.
- Le calcul de l'action assurant le maximum du profit pour l'actionnaire.
- Le contrôle de la dette permettant un profit au créancier, ainsi que la détermination de son gain maximal

Enfin, nous définissons une nouvelle fonction appelée fonction gain comme somme de profits des trois opérateurs. Avec une probabilité de risque d'échec et un niveau de technologie fixés, nous cherchons les cas où elle admet un maximum global. L'idée est de proposer des scénarios afin de répartir le total des gains possibles de façon solidaire (aider les AGR est un but non lucratif), indépendamment des taux de distributions.

1. Un fonds de garantie est un fond qui permet l'indemnisation de personnes victimes d'un préjudice. Il permet de contrer l'insolvabilité de l'auteur de ce préjudice ou de le remplacer lorsque celui-ci n'a pas été identifié. On distingue plusieurs types de fonds de garantie. Le plus connu d'entre eux est le fonds de garantie des dépôts, dont la mission est d'indemniser les déposants en cas de faillite de leur banque. Les différents fonds de garantie sont financés en partie par les compagnies d'assurances, en partie grâce au soutien de l'État. Comme exemple au Maroc, "FOGARIM" garantie des prêts destinés au logement au profit des populations à revenus modestes ou non réguliers.

2. SARL (société à responsabilité limitée) : c'est la forme la plus simple de société. Elle est simplement gérée au quotidien par un gérant (associé ou non, minoritaire ou majoritaire) et par une assemblée générale annuelle qui réunit les différents associés, pour valider les comptes et décider de la répartition des bénéfices.

3. PME (petites et moyennes entreprises) : ce sont des entreprises dont le nombre de salariés est compris entre 10 et 250, et dont le chiffre d'affaires annuel ne dépasse pas les 50 millions d'euros.

4. AGR (Activité génératrice de revenus) : c'est une activité économique de production et/ou de commercialisation d'un bien ou d'un service, faite par un individu ou groupe d'individus afin de réaliser des bénéfices.

2 Formulation des résultats des opérateurs

2.1 Le résultat net du projet

Supposons qu'une structure micro-économique AGR ou PME désire lancer un projet d'investissement risqué qui nécessite, au minimum, une mise de fond C , et qu'un représentant de cette structure est à la recherche d'un financement externe pour son projet d'investissement, le financement peut être réalisé de deux manières :

- soit en augmentant les capitaux propres, c'est le financement par action notée A
- soit en augmentant les dettes notées⁵ D .

Les experts estiment une probabilité du risque d'échec en tenant compte de plusieurs données et informations : nature du projet, compétences, qualité du savoir faire des ressources humaines, risque du marché ...

- Soit θ la probabilité du risque d'échec. Cette probabilité conditionne le revenu réalisable par le projet.
- Soit α un paramètre fixé permettant d'envisager des considérations d'ordre technologique⁶ relatives aux conditions de la réalisation du projet, il peut être obtenu à partir de l'information publique et les données des services externes de l'État⁷ (des données monographiques par exemple). Les variations de ce paramètre permettent de modifier les perspectives de retour sur l'investissement.
- Soit kA le coût de financement par actions pour le projet avec k une constante positive. Il est donné, en général, par un modèle de type " Capital Asset Pricing Model " (CAPM) :

$$k = R_f + \beta_a(R_m - R_f)$$

avec R_f le coût de l'actif sans risque, R_m le coût du portefeuille actions de marché, β_a le coefficient de sensibilité du titre aux variations de la prime de risque du marché actions.

5. Certaines banques participent avec les deux types de financement. Les banques dites Islamiques ont lancé un produit financier aux microstructures sous cet angle comme première expérience au Maroc, mais nous n'avons pas des données pour projeter ce travail sur cette expérience.

6. Certains Activités des revenus générateurs du type agroalimentaire (huile d'Argan) commencent à intégrer des machines avec un degré technologique non négligeable pour obtenir un produit de qualité qui respecte les normes du marché international, nous pouvons dire la même chose pour les produits artisans (fer forgé) qui utilise un niveau technologique important.

7. Ministre de l'industrie, du commerce et des nouvelles technologies, ministre de l'Économie et des finances, Ministre de l'Artisanat...

- Soit rD le coût de financement par dette avec r une constante positive. Comptablement, le coût de la dette correspond aux charges financières nettes des produits rapportées au niveau d'endettement net. Financièrement, le coût de la dette représente le taux de rentabilité exigé par les créanciers d'une entreprise pour refinancer son passif [Gollier 2001] [Smit & Trigeorgis 2004].

Après la distribution des dividendes et en négligence de l'effet de la fiscalité⁸ et l'effet de l'amortissement de l'investissement (le cas de l'économie sociale), le résultat d'exploitation net à fin de la période⁹ noté X est une variable aléatoire discrète qui représente le résultat d'exploitation moins les deux coûts kA et rD .

Plus précisément nous avons la proposition suivante [Khomssi & Chaibi 2015].

Proposition 2.1 *Soit X la variable aléatoire modélisant le résultat d'exploitation d'un projet microstructure, le résultat net réalisé en fin de période R_F est l'espérance mathématique $E[X]$ donnée par :*

$$R_F = E(X) = C\varphi_\alpha(\theta) - (kA + rD) \quad \text{avec} \quad \varphi_\alpha(\theta) = 1 + \theta^\alpha(1 - 2\theta) \quad (\text{V.1})$$

Preuve 6 *le résultat d'exploitation est :*

- $C(1 + \theta^\alpha)$ dans une situation de succès qui se réalise avec une probabilité $(1 - \theta)$.
- $C(1 - \theta^\alpha)$ dans une situation de d'échec qui se réalise avec une probabilité θ .

X est la variable aléatoire discrète qui représente le résultat d'exploitation net, elle correspond à la somme des produits d'exploitation moins les charges d'exploitation, donc elle prend $C(1 + \theta^\alpha) - kA - rD$ en cas de succès et $C(1 - \theta^\alpha) - kA - rD$ en cas d'échec, par conséquent le résultat net réalisé en fin de période est l'espérance mathématique $E(X)$ tel que :

$$\begin{aligned} E(X) &= (1 - \theta)(C(1 + \theta^\alpha) - kA - rD) + \theta(C(1 - \theta^\alpha) - kA - rD) \\ &= C\varphi_\alpha(\theta) - (kA + rD) \end{aligned}$$

Remarque 8 *Pour un échec sûr, un gain sûr ou le cas équiprobable, le paramètre α n'a aucune influence sur le résultat net qui est constant. En effet :*

- Pour une probabilité du risque d'échec qui vaut $\theta = 0$ ou $\theta = \frac{1}{2}$, le résultat net est $R_F = C - (kA + rD)$.
- Pour une probabilité du risque d'échec qui vaut $\theta = 1$, le résultat net est $R_F = -(kA + rD)$.

8. Les activités génératrices de revenus sont non imposables.

9. Nous cherchons les profits en considérant une étude d'une année.

Nous constatons que :

- Dans le cas d'un échec sûr ($\theta = 1$), il est naturel de ne pas financer le projet sans parler du niveau de la technologie du travail¹⁰.
- Dans le cas d'un gain sûr ($\theta = 0$), le niveau de la technologie reste un choix à faire.
- Le cas équiprobable est notable puisque le résultat net réalisé en fin de période R_F est constant indépendamment du niveau de la technologie. De plus, c'est le même pour le cas d'un gain sûr.

2.2 Formulation du revenu des actions

Chaque projet a une valeur du capital, mais cette valeur peut être valorisée.

Il y a deux sources de " réévaluation " par le marché :

- Les perspectives de flux peuvent être revues à la hausse. L'évaluation repose d'abord sur les cash-flows attendus. Ceux-ci peuvent être améliorés en raison de l'émergence d'une nouvelle donnée économique (baisse des prix des matières premières par exemple).
- Le coût requis sur le capital qui sert de taux d'actualisation peut baisser. La condition est que le niveau de risque diminue lui-même, soit en raison de l'évolution des conditions macro-économiques, soit grâce à une meilleure maîtrise de son activité par l'entreprise.

La méthode de valorisation consiste à appliquer un multiple au résultat d'exploitation R_E de l'entreprise à valoriser et à diminuer le résultat obtenu de l'endettement financier net de la société. Ce multiple est donné par le ratio :

$$\frac{V_e}{R_E}$$

V_e la valeur d'entreprise et R_E le résultat d'exploitation.

Pour notre modélisation, nous considérons la valorisation du capital $\tilde{C}$ du projet. Si nous nous basons sur la méthode de l'actualisation de capacité d'autofinancement [Hirigoyen & Jean-Guy 1988], le capital estimé $\tilde{C}$ s'écrit comme un multiple de l'espérance du résultat net $\tilde{C} = mR_E$. Le coefficient m de valorisation du capital $\tilde{C}$ dépend d'une manière naturelle de l'horizon temporel choisi par l'investisseur et de la capacité d'autofinancement prévisionnelle du projet.

Proposition 2.2 Soit Y la variable aléatoire du profit de l'actionnaire, nous avons :

$$R_A = E(Y) = \frac{A}{C} \left(\frac{m+t}{1+i} \right) E(X) - A \quad (\text{V.2})$$

10. Dans la suite de cette étude nous supposons que $\theta \neq 1$ puisque l'étude du cas d'un échec sûr ($\theta = 1$) n'a aucun intérêt.

Chapitre V. Analyse probabiliste et différentielle des profits des opérateurs d'un projet micro-économique

t est le taux de distribution de dividendes qui est défini par le ratio :

$$t = \frac{\text{la rémunération des actionnaires}}{\text{résultat net après la rémunération de tous les apporteurs de capitaux}}$$

Preuve 7 Puisque l'actionnaire n'est pas un membre de la structure microéconomique, il n'existe pas d'asymétrie de l'information entre celui-ci et les membres du projet. De ce fait, le niveau du profit annoncé à l'investissement en action est R_A , celui-ci, s'il contribue au financement du projet, il peut espérer réaliser un profit égal à la somme de la plus-value¹¹ réalisée R_{1A} et des dividendes perçus R_{2A} :

$$R_A = R_{1A} + R_{2A} \quad (\text{V.3})$$

Soit $\tilde{C}$ la valorisation du capital du projet, l'actionnaire est rémunéré proportionnellement au poids de sa participation dans l'investissement C qui est égal à $\frac{A}{\tilde{C}}$ ainsi :

$$R_{1A} = \frac{A}{\tilde{C}} \left(\frac{\tilde{C}}{1+i} \right) - A \quad (\text{V.4})$$

i est la valeur de l'actualisation du capital.

Le deuxième gain est dû au fait qu'il récupère une partie de R_F actualisée tel que :

$$R_{2A} = \frac{A}{C} \left(\frac{tR_F}{1+i} \right) \quad (\text{V.5})$$

Finalement

$$R_A = \frac{A}{\tilde{C}} \left(\frac{\tilde{C}}{1+i} \right) - A + \frac{A}{C} \left(\frac{tR_F}{1+i} \right) \quad (\text{V.6})$$

Si nous nous basons sur la méthode de l'actualisation de capacité d'autofinancement, nous aurons $\tilde{C} = mR_F$, ainsi :

$$R_A = \frac{A}{C} \left(\frac{mR_F}{1+i} \right) - A + \frac{A}{C} \left(\frac{tR_F}{1+i} \right) = \frac{A}{C} \left(\frac{m+t}{1+i} \right) R_F - A \quad (\text{V.7})$$

Soit Y la variable aléatoire qui représente le profit de l'actionnaire, elle vaut

- $\frac{A}{C} \left(\frac{m+t}{1+i} \right) [C(1+\theta^\alpha) - kA - rD] - A$ au cas de succès qui se réalise avec une probabilité $(1-\theta)$.
- $\frac{A}{C} \left(\frac{m+t}{1+i} \right) [C(1-\theta^\alpha) - kA - rD] - A$ au cas d'échec qui se réalise avec une probabilité θ .

11. La plus-value est la différence entre la valeur du marché et la valeur de l'action.

Après la simplification des calculs, nous trouvons :

$$R_A = E(Y) = \frac{A}{C} \left(\frac{m+t}{1+i} \right) E[X] - A$$

2.3 Formulation de revenu du créancier

Le groupe membre du projet cherche à obtenir la dette dans les meilleures conditions. En général, le créancier n'a pas l'accès direct à l'information ou il est mal informé à propos des caractéristiques réelles et du risque des projets. C'est pour cela qu'il augmente le taux d'intérêt de prêt afin de compenser la prise de risque. Dans ce paragraphe, nous calculons son profit à la fin de période en fonction de la probabilité de non remboursement des dettes et le volume de garantie ¹².

Proposition 2.3 *Soient Z la variable aléatoire qui représente le profit du créancier, $\bar{\theta}$ la probabilité de non remboursement de la créance D , et G le volume de garantie en cas de défaut, l'espérance de profit du créancier noté R_D est égale à :*

$$R_D = E(Z) = (1 - \bar{\theta})(r - i) \left(\frac{D}{1+i} \right) + \bar{\theta} \left(\frac{G}{1+i} - D \right) \quad (\text{V.8})$$

Preuve 8 *Si les membres du projet sont en mesure de rembourser le prêt, Z prend $(r - i) \left(\frac{D}{1+i} \right)$ avec iD le coût d'opportunité lié au non-placement des fonds dans les actifs non risqués. Et si les membres du projet ne sont pas en mesure de rembourser le prêt, Z prend $\frac{G}{1+i} - D$ avec G le volume de garantie qu'ils peuvent apporter. L'espérance de profit du créancier R_D n'est rien que l'espérance mathématique de Z :*

$$E(Z) = (1 - \bar{\theta})(r - i) \left(\frac{D}{1+i} \right) + \bar{\theta} \left(\frac{G}{1+i} - D \right)$$

Ainsi, nous retrouvons l'espérance de profit de chaque intervenant : membres du projet, l'actionnaire et le créancier, sachant que l'espérance est un indicateur de position permettant de minimiser les risques. Dans la deuxième partie, nous répondons à la question suivante : à quel degré nous pouvons faire confiance à ces valeurs d'espérances ? Pour cela, nous devons calculer et analyser les variances $\sigma^2(X)$, $\sigma^2(Y)$ et $\sigma^2(Z)$ qui sont des indicateurs de dispersion.

12. Une garantie est un instrument financier. Elle protège un établissement faisant crédit en cas de défaillance de l'emprunteur. Un fonds de garantie est destiné à compenser les pertes éventuelles d'une institution faisant crédit dans l'octroi de ses prêts. Si l'emprunteur ne rembourse pas, le fonds s'étant porté garant doit assumer entièrement ou partiellement (selon ce que prévoit le contrat) les obligations de l'emprunteur.

Remarque 9 *Pour les microprojets, la prise en charge d'une partie du risque par un fond de garantie constitue une garantie externe pour l'entrepreneur . Chaque pays a un seuil de garantie qui dépend de plusieurs facteurs socio-économiques(géographique, économique, restructuration...). Ce seuil s'exprime souvent par :*

$$G = \tau D \quad \tau \in [0, 1[\quad (\text{V.9})$$

3 Variance des profits et interprétations

En statistique et en théorie des probabilités, la variance est une mesure servant à caractériser la dispersion d'un échantillon ou d'une distribution. Elle indique de quelle manière la série statistique ou la variable aléatoire se disperse autour de sa moyenne ou de son espérance. Une variance de zéro signale que toutes les valeurs sont identiques. Une petite variance est signe que ces valeurs sont proches les unes des autres, alors qu'une variance élevée est signe que celles-ci sont très écartées. Dans cette partie, nous calculons les variances aléatoires liées au profit de chaque intervenant dans le projet pour localiser les variances aléatoires par rapport à leurs moyennes(leurs positions centrales).

3.1 Variance du profit des membres de la structure

Proposition 3.1 *Soit X le résultat d'exploitation, sa variance $\sigma^2(X)$ est donnée par :*

$$\sigma^2(X) = 4C^2\theta^{2\alpha+1}(1 - \theta) \quad (\text{V.10})$$

de plus elle vérifie :

$$\max_{\theta} \sigma^2(X) = \frac{2C^2}{(\alpha + 1)} \left(\frac{2\alpha + 1}{2(\alpha + 1)} \right)^{2\alpha+1} \quad (\text{V.11})$$

Preuve 9 *Puisque : $\sigma^2(X) = E(X^2) - E(X)^2$.*

Pour simplifier les calculs posons : $\eta = C(1 + \theta^\alpha)$, $\kappa = kA + rD$ et $\vartheta = C(1 - \theta^\alpha)$

donc : $E(X) = (1 - \theta)(\eta - \kappa) + \theta(\vartheta - \kappa)$

par conséquent :

$$\sigma^2(X) = (1 - \theta)(\eta - \kappa)^2 + \theta^2(\vartheta - \kappa) + [(1 - \theta)(\eta - \kappa) + \theta(\vartheta - \kappa)]^2$$

Après la simplification des calculs, nous déduisons que :

$$\sigma^2(X) = 4C^2\theta^{2\alpha+1}(1 - \theta)$$

$\sigma^2(X)$ est une fonction de classe C^1 par rapport à θ , sa dérivée est

$$\frac{\partial \sigma^2(X)}{\partial \theta} = 4C^2 \theta^{2\alpha} [2\alpha + 1 - 2(\alpha + 1)\theta]$$

Elle s'annule pour $\theta = 0$ ou $\theta = \frac{2\alpha+1}{2(\alpha+1)}$, ces deux valeurs sont inférieures à 1, de plus

$$\max_{\theta} \sigma^2(X) = \frac{2C^2}{(\alpha + 1)} \left(\frac{2\alpha + 1}{2(\alpha + 1)} \right)^{2\alpha+1}$$

Qui est une fonction décroissante par rapport à α et

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \max_{\theta} \sigma^2(X) = 0$$

Le fait que $\sigma^2(X)$ est décroissante par rapport à α donne la possibilité d'utiliser un degré de technologie élevé afin de diminuer le risque d'échec. De plus, R_E reflète une information fiable et sûre pour tous les partenaires.

3.2 Variance du profit de l'actionnaire

Proposition 3.2 Soit Y la variable aléatoire qui représente le profit de l'actionnaire, elle réalise l'espérance mathématique R_A en fin de période avec la variance $\sigma^2(Y)$ donnée par :

$$\sigma^2(Y) = 4A^2 \left(\frac{m+t}{1+i} \right)^2 \theta^{2\alpha+1} (1 - \theta) \quad (\text{V.12})$$

De plus, elle vérifie

$$\max_{\theta} \sigma^2(Y) = 2 \left(\frac{m+t}{1+i} \right)^2 \frac{A^2}{\alpha + 1} \left(\frac{2\alpha + 1}{2(2\alpha + 1)} \right)^{2\alpha+1} \quad (\text{V.13})$$

Preuve 10 Soit Y la variable aléatoire qui représente le profit de l'actionnaire, nous avons vu dans paragraphe précédent que $Y = \frac{A}{C} \left(\frac{m+t}{1+i} \right) X - A$ donc $E(Y) = \frac{A}{C} \left(\frac{m+t}{1+i} \right) E(X) - A$.

Et

$$\sigma^2(Y) = \frac{A^2}{C^2} \left(\frac{m+t}{1+i} \right)^2 \sigma^2(X) = 4A^2 \left(\frac{m+t}{1+i} \right)^2 \theta^{2\alpha+1} (1 - \theta)$$

De plus

$$\max_{\theta} \sigma^2(Y) = \frac{A^2}{C^2} \left(\frac{m+t}{1+i} \right)^2 \max_{\theta} \sigma^2(X) = 2 \left(\frac{m+t}{1+i} \right)^2 \frac{A^2}{\alpha + 1} \left(\frac{2\alpha + 1}{2(2\alpha + 1)} \right)^{2\alpha+1}$$

Du fait que $\max_{\theta} \sigma^2(X)$ est une fonction décroissante par rapport à α alors $\max_{\theta} \sigma^2(Y)$ est une fonction décroissante par rapport à α et

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \max_{\theta} \sigma^2(Y) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \max_{\theta} \sigma^2(X) = 0$$

Remarque 10 le coefficient $\frac{A^2}{C^2}(\frac{m+t}{1+i})^2$ est un coefficient d'échelle permettant de mesurer la différence entre l'erreur quadratique faite sur X et Y .

Posons $\mu = \frac{A^2}{C^2}(\frac{m+t}{1+i})^2$, nous aurons $\sigma^2(Y) = \mu^2 \sigma^2(X)$ ce qui permet de déduire les trois situations suivantes :

- Si $\mu < 1$ alors l'information au sens des moindres carrées sur Y est plus précise que celle de X .
- Si $\mu > 1$ alors l'information au sens des moindres carrées sur X est plus précise que celle de Y .
- Si $\mu = 1$ alors nous avons la même information sur X et Y .

3.3 Variance du profit du créancier

Proposition 3.3 Soient $\bar{\theta}$ la probabilité de non remboursement de la créance D , Z la variable aléatoire qui représente le profit du créancier, elle réalise une variance donnée par :

$$\sigma^2(Z) = \bar{\theta}(1 - \bar{\theta}) \frac{D - G + rD}{1 + i} \quad (\text{V.14})$$

de plus :

$$\max_{\bar{\theta}} \sigma^2(Z) = \frac{D - G + rD}{4(1 + i)} \quad (\text{V.15})$$

Preuve 11 Soit Z la variable aléatoire qui représente le profit du créancier, l'espérance mathématique de Z est :

$$R_D = E(Z) = (1 - \bar{\theta})(r - i) \frac{D}{1 + i} + \bar{\theta} \left(\frac{G}{1 + i} - D \right)$$

Sachant que $\sigma^2(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$ alors

$$\sigma^2(Z) = (1 - \bar{\theta})(r - i)^2 \left(\frac{D}{1 + i} \right)^2 + \bar{\theta} \left(\frac{G}{1 + i} - D \right)^2 - \left[(1 - \bar{\theta})(r - i) \frac{D}{1 + i} + \bar{\theta} \left(\frac{G}{1 + i} - D \right) \right]^2$$

après la simplification, nous trouvons

$$\sigma^2(Z) = \bar{\theta}(1 - \bar{\theta}) \frac{D - G + rD}{1 + i}$$

$\sigma^2(Z)$ est une fonction de variable $\bar{\theta}$ de classe C^1 , sa dérivée $\frac{\partial \sigma^2(Z)}{\partial \bar{\theta}} = (1 - 2\bar{\theta}) \frac{D - G + rD}{1 + i}$ s'annule pour $\bar{\theta} = 1/2$, son maximum est :

$$\max_{\bar{\theta}} \sigma^2(Z) = \frac{D - G + rD}{4(1 + i)}$$

On sait bien d'après V.9

$$G \leq D + rD \tag{V.16}$$

donc notre écriture a un sens.

3.4 Estimation de la probabilité de non-remboursement

Le créancier étudie son gain à partir d'une probabilité de non-remboursement de la dette $\bar{\theta}$. Supposons que l'entrepreneur est optimiste sur les perspectives du projet, donc il va annoncer au créancier une espérance du profit supérieur à R_F . Il suppose que son profit est le résultat d'exploitation dans une situation de succès $C(1 + \theta^\alpha)$. Or, le créancier, de sa part, n'est pas sûr de l'information. Pour compenser la surévaluation du résultat déclaré par le dirigeant, il considère le profit $C(1 + \theta^\alpha)(1 - \theta)$ du fait que le résultat déclaré se réalise avec la probabilité $(1 - \theta)$.

Si il néglige le remboursement des intérêts rD , la probabilité de non-remboursement de la dette peut être approchée par le ratio [Sylvie & Cécile 2002] :

$$\bar{\theta} \simeq \frac{D}{(1 - \theta)(1 + \theta^\alpha)C} \tag{V.17}$$

l'idée est que le créancier ne prête jamais à l'entreprise plus que son estimation de revenu futur.

Dans ce cas, le profit du créancier est égal à :

$$E(Z) = \left(1 - \frac{D}{(1 - \theta)(1 + \theta^\alpha)C}\right) \left(\frac{(r - i)D}{1 + i}\right) + \frac{D}{(1 - \theta)(1 + \theta^\alpha)C} \left(\frac{G}{1 + i} - D\right) \tag{V.18}$$

avec une variance donnée par :

$$\sigma^2(Z) = \frac{D}{(1-\theta)(1+\theta^\alpha)C} \left(1 - \frac{D}{(1-\theta)(1+\theta^\alpha)C}\right) \frac{D-G+rD}{1+i} \quad (\text{V.19})$$

3.5 Analyse économique des résultats obtenus

Concrètement, les membres du projet ont suffisamment pensé aux critères de sélection afin d'accepter un tel projet. Néanmoins, à l'aide de notre étude probabiliste, ils peuvent fixer un seuil maximal à la dispersion noté ϵ_1 pour garantir la confiance aux profits calculés, ce qui permet de voir : $\sigma^2(X) < \epsilon_1$ donc

$$4C^2\theta^{(2\alpha+1)}(1-\theta) < \epsilon_1$$

Ce qui est équivalent à

$$\alpha > \frac{\ln\left(\frac{\epsilon_1}{4C^2\theta(1-\theta)}\right)}{\ln \theta^2}$$

Posons $\alpha_1 = E\left[\frac{\ln\left(\frac{\epsilon_1}{4C^2\theta(1-\theta)}\right)}{\ln \theta^2}\right] + 1$, c'est le niveau de la technologie minimale à utiliser pour que $\sigma^2(X) < \epsilon_1$.

Notons que le niveau de la technologie n'est pas nécessairement un entier, il peut être une fraction par exemple. Nous concluons qu'à l'aide des résultats du théorème 1, nous faisons confiance à R_F avec une erreur quadratique qui vaut $4C^2\theta^{(2\alpha+1)}(1-\theta)$, cette valeur de dispersion est contrôlable par l'augmentation du niveau de technologie à partir de α_1 , ce qui permet de réduire le niveau du risque.

De même, l'actionnaire accepte l'information sur Y avec un seuil maximal noté ϵ_2 , ce qui donne $\sigma^2(Y) < \epsilon_2$. Donc

$$4A^2\left(\frac{m+t}{1+i}\right)^2\theta^{2\alpha+1}(1-\theta) < \epsilon_2$$

Ce qui est équivalent à

$$\alpha > \frac{\ln\left(\frac{(1+i)^2\epsilon_2}{4A^2(m+t)^2\theta(1-\theta)}\right)}{\ln \theta^2}$$

Posons $\alpha_2 = E\left[\frac{\ln\left(\frac{(1+i)^2\epsilon_2}{4A^2(m+t)^2\theta(1-\theta)}\right)}{\ln \theta^2}\right] + 1$, c'est le niveau de la technologie minimale à utiliser pour que $\sigma^2(Y) < \epsilon_2$.

La proposition 3.2 donne la variance de la variable aléatoire Y qui représente le profit de l'actionnaire. Cette variance illustre la dispersion de l'information donnée sur le profit de

l'actionnaire à partir de la connaissance de θ la probabilité de risque d'échec et A le financement par actions. De plus, elle est maîtrisée à partir du niveau de technologie α_2 .

Les valeurs α_1 et α_2 sont déterminées à partir des seuils ϵ_1 choisi par les membres du projet et ϵ_2 choisi par l'actionnaire. La comparaison de ces valeurs donne trois possibilités :

- Si $\mu\epsilon_1 < \epsilon_2$ alors $\alpha_1 > \alpha_2$. Dans ce cas, il faut utiliser un niveau de technologie $\alpha > \alpha_1$ pour avoir $\sigma^2(X) < \epsilon_1$ et $\sigma^2(Y) < \epsilon_2$.
- Si $\mu\epsilon_1 = \epsilon_2$ alors $\alpha_1 = \alpha_2$. Dans ce cas, la dispersion est contrôlée par le même niveau de technologie pour les deux intervenants : membres du projet et l'actionnaire.
- Si $\mu\epsilon_1 > \epsilon_2$ alors $\alpha_1 < \alpha_2$. Dans ce cas, il faut utiliser un niveau de technologie $\alpha > \alpha_2$ pour avoir $\sigma^2(X) < \epsilon_1$ et $\sigma^2(Y) < \epsilon_2$.

Dans les trois cas, nous pouvons corriger et améliorer la confiance aux valeurs des profits R_E et R_A à partir de α , mais il existe des situations où nous n'avons pas la possibilité de choisir le niveau de la technologie qui est imposé soit par la nature du projet lui même ou par les conditions socio-économiques du pays.

Le dernier théorème étudie la variance de la variable aléatoire Z qui représente le profit du créancier à partir de $\bar{\theta}$ la probabilité de non remboursement de la créance D et du coût de financement par dette rD et également le volume de garantie. Nous remarquons, de plus, que $\sigma^2(Z)$ tend vers 0 lorsque $\bar{\theta}$ se rapproche des bords ou lorsque G se rapproche de $(1+r)D$, c'est-à-dire que le volume de garantie permet de maîtriser l'erreur quadratique faite sur le profit de créancier. Finalement, nous concluons que la confiance à la moyenne pour les trois opérateurs doit être améliorée à partir de certaines valeurs données. Comme explication de ces résultats obtenus, nous pouvons dire qu'il s'agit d'un glissement de l'économie informelle vers l'économie formelle¹³.

4 Analyse d'un échantillon de N projets

4.1 Choix de la taille de l'échantillon ou contrôle du fond de garantie

Considérons N-échantillon de projets micro-économiques (les variables ont la même loi de probabilité). Pour le projet i soit X_i le résultat d'exploitation, Y_i le profit de l'actionnaire et Z_i le profit du créancier, avec $i = 1, \dots, N$, posons $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$, $\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i$ et $\bar{Z} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z_i$.

13. Il est évident que la production d'Huile d' Argan nécessite une technologie élevée que celle de capparispinosa

Proposition 4.1 *Il existe trois entiers $N_1(\epsilon_1)$, $N_2(\epsilon_2)$ et $N_3(\epsilon_3)$ estimés d'une manière optimale tel que pour $N = \max(N_1(\epsilon_1), N_2(\epsilon_2), N_3(\epsilon_3))$ nous avons : $\sigma^2(\bar{X}) < \epsilon_1$, $\epsilon^2(\bar{Y}) < \epsilon_2$, $\sigma^2(\bar{Z}) < \sigma_3$ avec ϵ_1 , ϵ_2 et ϵ_3 des seuils d'erreurs donnés.*

Preuve 12 *Les X_i sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi donc*

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E(X_i) = E(X_1) = R_F$$

$$\sigma^2(\bar{X}) = \left(\frac{1}{N}\right)^2 \sum_{i=1}^N \sigma^2(X_i) = \frac{1}{N} \sigma^2(X_1) = \frac{1}{N} (4C^2 \theta^{2\alpha+1} (1 - \theta))$$

Les membres du projet ont un seuil maximal de la dispersion de $\bar{X}$ déterminé à partir des informations publiques collectées sur les projets noté ϵ_1 , donc $\sigma^2(\bar{X}) < \epsilon_1$ implique que

$$\frac{1}{N} (4C^2 \theta^{2\alpha+1} (1 - \theta)) < \epsilon_1$$

Par suite $\frac{1}{\epsilon_1} (4C^2 \theta^{2\alpha+1} (1 - \theta)) < N$, posons $N_1 = E[\frac{1}{\epsilon_1} (4C^2 \theta^{2\alpha+1} (1 - \theta))] + 1$, c'est le nombre minimal des projets à considérer pour contrôler la dispersion de $\bar{X}$ par une valeur ϵ_1 donnée. De même, les Y_i sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi, donc

$$E(\bar{Y}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E(Y_i) = E(Y_1) = R_A$$

$$\sigma^2(\bar{Y}) = \left(\frac{1}{N}\right)^2 \sum_{i=1}^N \sigma^2(Y_i) = \frac{1}{N} \sigma^2(Y_1) = 4 \frac{A^2}{N} \left(\frac{m+t}{1+i}\right)^2 \theta^{2\alpha+1} (1 - \theta)$$

Soit ϵ_2 le seuil maximal de la dispersion de $\bar{Y}$ donc $\sigma^2(\bar{Y}) < \epsilon_2$ implique que

$$4 \frac{A^2}{\epsilon_2} \left(\frac{m+t}{1+i}\right)^2 \theta^{2\alpha+1} (1 - \theta) < N$$

Prenons $N_2 = E[4 \frac{A^2}{\epsilon_2} \left(\frac{m+t}{1+i}\right)^2 \theta^{2\alpha+1} (1 - \theta)] + 1$ c'est le nombre minimal des projets à considérer pour contrôler la dispersion de $\bar{Y}$ par la valeur ϵ_2 .

Si les N projets ont la même probabilité de non remboursement $\bar{\theta}$ alors

$$E(\bar{Z}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E(Z_i) = E(Z_1) = R_D$$

$$\sigma^2(\bar{Z}) = \left(\frac{1}{N}\right)^2 \sum_{i=1}^N \sigma^2(Z_i) = \frac{1}{N} \sigma^2(Z_1) = \frac{\bar{\theta}(1-\bar{\theta})}{N} \left(\frac{D-G+rD}{1+i}\right)$$

Soit ϵ_3 le seuil maximal de la dispersion de $\bar{Z}$ donc $\sigma^2(\bar{Z}) < \epsilon_3$ implique que

$$\frac{\bar{\theta}(1-\bar{\theta})}{\epsilon_3} \left(\frac{D-G+rD}{1+i}\right) < N \quad (\text{V.20})$$

Prenons $N_3 = E\left[\frac{\bar{\theta}(1-\bar{\theta})}{\epsilon_3} \left(\frac{D-G+rD}{1+i}\right)\right] + 1$ c'est le nombre minimal des projets à considérer pour contrôler la dispersion de $\bar{Z}$ par la valeur ϵ_3 .

Comme conclusion, nous disons que le contrôle de la dispersion des trois variables au même temps est assuré par le financement de N projets avec $N = \max(N_1, N_2, N_3)$.

Maintenant, supposons que nous sommes devant un échantillon de taille fixée, la condition V.9 permet de conclure que $G < D + rD$. De plus, à partir de l'équation V.20, nous obtenons $D + rD - \frac{\epsilon_3 N(1+i)}{\bar{\theta}}(1-\bar{\theta}) < G$ Donc

$$D + rD - \frac{\epsilon_3 N(1+i)}{\bar{\theta}}(1-\bar{\theta}) < G \leq D + rD \quad (\text{V.21})$$

Ce qui permet de contrôler le volume de garantie.

4.2 Simulation numérique

Le contrôle des variances $\sigma^2(\bar{X})$, $\sigma^2(\bar{Y})$ et $\sigma^2(\bar{Z})$ nous a ramené aux trois majorations suivantes :

$$\frac{1}{N}(4C^2\theta^{2\alpha+1}(1-\theta)) < \epsilon_1; \quad 4\frac{A^2}{N}\left(\frac{m+t}{1+i}\right)^2\theta^{2\alpha+1}(1-\theta) < \epsilon_2; \quad \frac{\bar{\theta}(1-\bar{\theta})}{N}\left(\frac{D-G+rD}{1+i}\right) < \epsilon_3 \quad (\text{V.22})$$

Ce qui équivaut :

$$\frac{\theta^{2\alpha+1}(1-\theta)}{N} < \frac{\epsilon_1}{4C^2}; \quad \frac{\theta^{2\alpha+1}(1-\theta)}{N} < \frac{\epsilon_1}{4A^2} \frac{1+i}{m+t}^2; \quad \frac{\bar{\theta}(1-\bar{\theta})}{N} < \frac{\epsilon_3(1+i)}{D-G+rD} \quad (\text{V.23})$$

Posons $f_\alpha(\theta) = \frac{\theta^{2\alpha+1}(1-\theta)}{N}$. Sachant que les quantités $\frac{\epsilon_1}{4C^2}$, $(\frac{\epsilon_1}{4A^2} \frac{1+i}{m+t})^2$ et $\frac{\epsilon_3(1+i)}{D-G+rD}$ sont suffisamment petites, du fait que ϵ_1 , ϵ_2 et ϵ_3 représentent les erreurs admises. Les trois dernières

inégalités s'écrivent, généralement, sous la forme :

$$f_\alpha(\theta) < \beta \quad \text{avec } \alpha \geq 0 \text{ et } \beta \text{ assez petit} \quad (\text{V.24})$$

Traçons les courbes des fonctions f_α pour $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ et $\alpha = 10$ pour visualiser l'influence du niveau de la technologie sur les fonctions f_α , tout en variant la probabilité dans l'intervalle $]0, 1[$ et la taille de l'échantillon des projets étudiés $N = 2, 5, 6, 8, 10, 14, 15, 20, 40$. À l'aide de l'Excel, nous avons trouvé les résultats suivants :

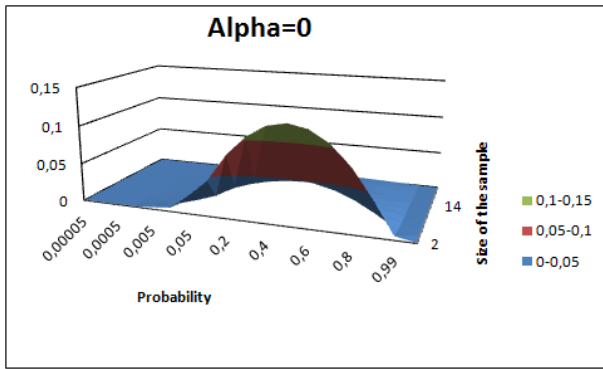


Figure V.1 – La courbe de f_0

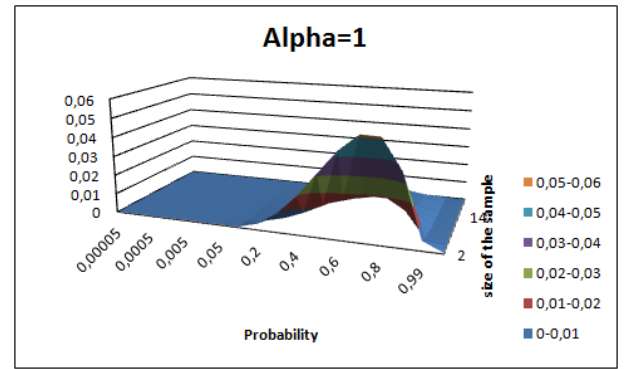


Figure V.2 – La courbe de f_1

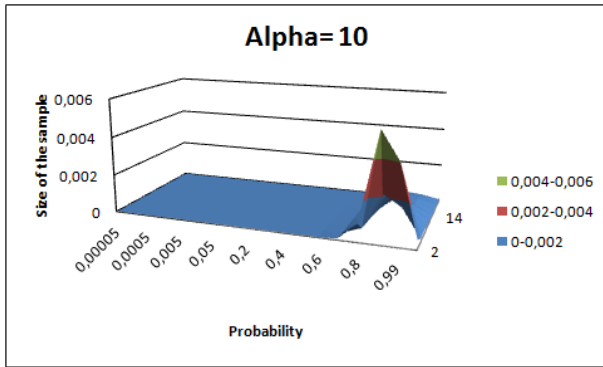


Figure V.3 – La courbe de f_{10}

Nous remarquons que lorsque la probabilité se rapproche des bords, les valeurs $f_0(\theta)$ deviennent très petites, ce qui donne un sens à l'inégalité $f_0(\theta) < \beta$ car β assez petit. Autrement dit, l'inégalité $\frac{\bar{\theta}(1-\bar{\theta})}{N} < \frac{\epsilon_3(1+i)}{D-G+rD}$ est réalisable, donc $\sigma^2(\bar{Z}) < \epsilon_3$. C'est ce que nous avons montré théoriquement au paragraphe 3.

La deuxième remarque est que $f_0(\theta)$ augmente si on est proche de $\theta = 0.5$ mais dans un intervalle des petites valeurs $[0.1, 0.15]$.

Pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 10$, nous remarquons que la courbe de f_α garde sa forme générale

avec une chute de valeurs qui deviennent très petites avec l'augmentation du niveau technologique. Constatons, également, que pour $\alpha = 10$, les plus grandes valeurs sont dans l'intervalle $[0.002, 0.004]$.

Cette simulation numérique illustre fortement l'influence positive de l'amélioration du niveau technologie sur les résultats probabilistes de cette étude, et elle confirme, par conséquence, nos résultats théoriques.

5 Étude de revenus des opérateurs économiques

5.1 Remarques d'aspect économique

Quelque soit la nature de la modélisation mathématique d'un problème économique, le comportement humain, basé sur des règles psychologiques et sociales, impose un choix intuitif. Dans ce contexte, nous constatons, à partir de la littérature [Sylvie & Cécile 2002], que lors de la décision, il y a une proportionnalité inverse d'une part entre la contribution de l'actionnaire et le taux de distributions des dividendes, et d'autre part entre la probabilité de risque d'échec et la dette de tel sorte que :

- R_1 lorsque la probabilité de risque d'échec θ augmente, la dette D diminue. C'est une règle naturelle puisque le créancier, dans ce cas, ne doit pas miser trop sur un gain fortement risqué.
- R_2 lorsque la probabilité de risque d'échec θ diminue, la dette D augmente. C'est un cas très raisonnable. Le créancier devient plus en plus sûr de son gain, au moins théoriquement. Ce qui le pousse à augmenter sa part au financement.
- R_3 Lorsque l'action A diminue, le taux de distributions des dividendes augmente. c'est pour assurer un gain acceptable à l'actionnaire si non, il ne sera pas motivé d'intervenir au financement.
- R_4 Par contre, lorsque l'action A augmente, le taux de distributions des dividendes diminue. Il s'agit d'une règle d'équilibre pour garder des gains raisonnables pour tous les opérateurs Si non l'actionnaire aura la part la plus importante. Chose qui sera suffisante pour éliminer tout créancier.

5.2 Étude du résultat net en fin de la période

Un des objectifs de cette étude est de faire une analyse financière de la notion du profit en terme d'espérance mathématique à cause de l'existence d'une probabilité de risque d'échec.

Chapitre V. Analyse probabiliste et différentielle des profits des opérateurs d'un projet micro-économique

L'intérêt de cette partie est de trouver les conditions nécessaires ou suffisantes pour réaliser des profits au moins positifs, et de trouver ainsi le lien entre la probabilité de risque d'échec et le maximum ou le minimum du profit d'un opérateur.

Proposition 5.1 *Pour tout projet de probabilité de risque d'échec θ et du capital C , le résultat net a un maximum indépendamment de θ . Plus précisément, nous avons :*

$$R_F(\theta) \leq R_F(\theta^*) = C[1 + \frac{1}{\alpha+1}(\frac{\alpha}{2(\alpha+1)})^\alpha] - (kA + rD) \quad (\text{V.25})$$

avec $\theta^* = \frac{\alpha}{2(\alpha+1)}$, et le maximum $R_F(\theta^*)$ vérifie :

$$C - (kA + rD) < R_F(\theta^*) \leq 2C - (kA + rD) \quad (\text{V.26})$$

de plus :

- pour $\theta \in]0, \frac{1}{2}[$ le résultat net R_F est décroissante par rapport au niveau technologie α .
- pour $\theta \in]\frac{1}{2}, 1[$ le résultat net R_F est croissante par rapport au niveau technologie α .

Preuve 13 Nous avons vu que $R_F(\theta) = C\varphi_\alpha(\theta) - (kA + rD)$, la fonction φ_α est concave atteint son maximum au point $\theta^* = \frac{\alpha}{2(\alpha+1)}$, par suite $R_F(\theta) \leq R_F(\theta^*)$.

La variation de $R_F(\theta^*)$ par rapport à α est celle de $\varphi_\alpha(\theta^*)$, et nous avons

$$\frac{\partial \varphi_\alpha(\theta^*)}{\partial \alpha} = \frac{1}{\alpha+1}(\frac{\alpha}{2(\alpha+1)})^\alpha \ln \frac{\alpha}{2(\alpha+1)} < 0$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \varphi_\alpha(\theta^*) = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \varphi_\alpha(\theta^*) = 1$$

ce qui permet de déduire que [V.26](#).

Remarquons que la variation de R_F par rapport à α est celle de φ_α par rapport à α .

Le but de l'entrepreneur est de trouver les conditions nécessaires ou suffisantes pour assurer un résultat net positif : c'est la première motivation pour créer le projet. Or, il ne maîtrise que la valeur du capital, mais pratiquement, il peut changer les conditions de la réalisation du projet, l'adapter de telle manière à diminuer la probabilité de risque d'échec, ou améliorer même le niveau de technologie afin d'assurer un gain raisonnable.

La proposition suivante cherche la valeur minimale du capital assurant un résultat net positif à partir de la probabilité de risque d'échec.

Proposition 5.2 *Pour tout projet de probabilité de risque d'échec θ , il existe un minimum de mise de fond critique noté $C_\theta = \frac{k}{\varphi_\alpha(\theta)}A + \frac{r}{\varphi_\alpha(\theta)}D$ vérifiant :*

V.5 Étude de revenus des opérateurs économiques

pour tout $C \leq C_\theta$ l'espérance du résultat réalisé en fin de période est négative $R_F(C) \leq 0$.

Preuve 14 La proposition découle du fait que le résultat net R_F est une fonction strictement croissante par rapport au capital C et elle s'annule au point C_θ .

Si la probabilité de risque d'échec d'un projet est connue, cette proposition permet aux membres du projet de connaître la valeur minimale du capital à investir en fonction de l'action et de la dette. Il ne suffit pas d'avoir un capital C pour créer un projet, mais il doit vérifier :

$$C > C_\theta \quad (\text{V.27})$$

Remarque 11 le résultat net $R_F > 0$ si et seulement si $C > C_\theta$ or $C_\theta > C_{\theta^*}$, donc une condition nécessaire non suffisante pour avoir R_F positif est que

$$C > C_{\theta^*} = \frac{kA + rD}{\varphi_\alpha(\theta^*)} \quad (\text{V.28})$$

Proposition 5.3 Pour toute AGR de capital C , nous avons trois possibilités :

- Si $C = kA + rD$ alors $R_F > 0$ si et seulement si $\theta \in]0, \frac{1}{2}[$
- Si $C > kA + rD$ alors $R_F > 0$ si et seulement si $\theta < \theta_0 = \varphi_\alpha^{-1}(\frac{kA+rD}{C})$ sur $] \theta^*, \frac{1}{2}[$.
- Si $C < kA + rD$ alors il existe deux probabilités de risque d'échec données par :

$$\theta_1 = \varphi_\alpha^{-1}(\frac{kA+rD}{C}) \text{ sur }]0, \theta^*[\text{ et } \theta_2 = \varphi_\alpha^{-1}(\frac{kA+rD}{C}) \text{ sur }] \theta^*, \frac{1}{2}[\quad (\text{V.29})$$

tel que

$$R_F > 0 \text{ si et seulement si } \theta_1 < \theta < \theta_2$$

Preuve 15 La preuve découle des propriétés de la fonction φ_α . En effet :

- Si $C = kA + rD$ alors $R_F = C(\varphi_\alpha(\theta) - 1)$, or $\varphi_\alpha(\theta) > 1$ pour toute $\theta \in]0, \frac{1}{2}[$.
- Si $C > kA + rD$ alors $R_F > 0$ pour toute $\theta \leq \frac{1}{2}$. Pour $\theta > \frac{1}{2}$, R_F est décroissante de $R_F(\frac{1}{2}) = C - kA + rD > 0$ vers $R_F(1) = -(kA + rD) < 0$, donc R_F admet un zéro $\theta_0 = \varphi_\alpha^{-1}(\frac{kA+rD}{C})$ dans l'intervalle $]\frac{1}{2}, 1[$.
Par suite $R_F > 0$ si et seulement si $\theta < \theta_0$.
- Si $C < kA + rD$ alors $R_F(0) = R_F(\frac{1}{2}) < 0$ or $R_F(\theta^*) > 0$ à partir de la condition [V.28](#), donc R_F augmente d'une valeur négative vers une valeur positive et décroît vers une valeur négative $R_F(\frac{1}{2})$, par conséquent R_F admet deux zéros θ_1 et θ_2 tel que $\theta_1 = \varphi_\alpha^{-1}(\frac{kA+rD}{C})$

sur $]0, \theta^*[$ et $\theta_2 = \varphi_\alpha^{-1}(\frac{kA+rD}{C})$ sur $]\theta^*, \frac{1}{2}[$ et de plus

$$R_F(\theta) > 0 \text{ si et seulement si } \theta \in]\theta_1, \theta_2[$$

5.3 Étude de revenu d'actionnaire

Sur la base de la méthode de l'actualisation de capacité d'autofinancement, l'actionnaire gagne un revenu donné par :

$$R_A = \frac{A(m+t)}{1+i} [\varphi_\alpha(\theta) - \frac{kA+rD}{C}] - A \quad (\text{V.30})$$

si $i \geq t$, le projet est inutile puisqu'il y a la possibilité de gagner plus sans prendre du risque, par conséquent, l'actionnaire n'intervient que pour les projets dont le taux de distribution de dividendes $t > i$.

Notons que chaque opérateur ne peut contrôler que sa variable, mais au moins, il a la possibilité d'étudier son profit par rapport à la probabilité de risque d'échec donnée du projet.

Proposition 5.4 • *Le profit de l'actionnaire R_A atteint son maximum relativement à la probabilité de risque d'échec au point θ^* .*

• *Soit θ la probabilité de risque d'échec du projet et C son capital*

$$R_A(C) > 0 \text{ si et seulement si } \theta < \tilde{\theta} \text{ et } C > C_\theta^*$$

$$\text{avec } \tilde{\theta} = \varphi_\alpha^{-1}(\frac{1+i}{m+t}) \text{ sur }]\frac{1}{2}, 1[\text{ et } C_\theta^* = \frac{kA+rD}{\varphi_\alpha(\theta) - \frac{1+i}{m+t}}$$

Preuve 16 *Remarquons que la variation de R_A par rapport à θ est celle de φ_α .*

Nous avons :

$$\lim_{C \rightarrow 0^+} R_A(C) = -\infty \text{ et } \lim_{C \rightarrow +\infty} R_A(C) = A[\frac{(m+t)}{1+i} \varphi_\alpha(\theta) - 1]$$

– Pour $\theta \leq \frac{1}{2}$ nous avons $\varphi_\alpha(\theta) > 1$ or $\frac{(m+t)}{1+i} > 1$ puisque $m \geq 1$ et $t > i$ donc $\lim_{C \rightarrow +\infty} R_A(C) > 0$.

– Pour $\frac{1}{2} < \theta < \tilde{\theta}$, φ_α est décroissante, donc $\frac{(m+t)}{1+i} \varphi_\alpha(\theta) > \frac{(m+t)}{1+i} \varphi_\alpha(\tilde{\theta}) = 1$, par suite $\lim_{C \rightarrow +\infty} R_A(C) > 0$.

D'autre part R_A est strictement croissante par rapport à C , donc il existe une unique valeur

V.5 Étude de revenus des opérateurs économiques

du capital C_θ^* défini par $C_\theta^* = \frac{kA+rD}{\varphi_\alpha(\theta) - \frac{1+i}{m+t}}$ tel que $R_A(C_\theta^*) = 0$ de plus

$$R_A(C) > 0 \text{ si et seulement si } \theta < \tilde{\theta} \text{ et } C > C_\theta^*$$

Remarque 12 * $\tilde{\theta}$ est bien défini car φ_α^{-1} est décroissante bijective sur $]\frac{1}{2}, 1[$ et $\frac{1+i}{m+t} < 1 = \varphi_\alpha(\frac{1}{2})$.

* C_θ^* est bien défini car : $C_\theta^* = \frac{kA+rD}{\varphi_\alpha(\theta) - \varphi_\alpha(\tilde{\theta})}$ et $\varphi_\alpha(\theta) > \varphi_\alpha(\tilde{\theta})$.

* Pour l'investisseur ou l'actionnaire, il existe une valeur minimale du capital à investir afin de réaliser un gain, elle est donnée par :

- $C_\theta = \frac{kA+rD}{\varphi_\alpha(\theta)}$ le seuil minimal du capital pour avoir $R_F > 0$.
- $C_\theta^* = \frac{kA+rD}{\varphi_\alpha(\theta) - \frac{1+i}{m+t}}$ le seuil minimal du capital pour avoir $R_A > 0$.

or $C_\theta < C_\theta^*$, donc pour un projet du capital $C > C_\theta^*$ l'investisseur et l'actionnaire réalisent des profits positifs.

Étude par rapport au financement par action

Rappelons que $R_A = \frac{A(m+t)}{1+i}[\varphi_\alpha(\theta) - \frac{kA+rD}{C}] - A$, et posons $\rho = \frac{(m+t)}{1+i}$ et $\lambda = C\varphi_\alpha(\theta) - \frac{1}{\rho} - rD$. Ce sont des constantes par rapport à A , qui permettent d'écrire le profit net de l'actionnaire sous la forme :

$$R_A = \rho(\lambda A - kA^2) \tag{V.31}$$

Lemme 5.5 Si $\lambda \leq 0$ alors l'actionnaire n'a aucun intérêt économique pour participer au financement du projet.

Preuve 17 Il est évident que si $\lambda \leq 0$ alors $R_A < 0$ pour tout A .

Notons que λ dépend du capital C , de la probabilité de risque d'échec θ et également de D qui sont des variables imposées à l'actionnaire. Mais sous quelles conditions $\lambda > 0$? Le lemme suivant répond à la question.

Lemme 5.6 Pour tout projet de probabilité de risque d'échec θ et du capital $C > C_\theta^*$ nous avons $\lambda > 0$.

Preuve 18 *Nous avons*

$$\begin{aligned} \lambda > 0 & \text{ équivaleant à } C\varphi_\alpha(\theta) - \frac{1+i}{m+t} - rD \\ & \text{équivaleant à } C > \frac{rD}{\varphi_\alpha(\theta) - \frac{1+i}{m+t}} \end{aligned}$$

or, l'actionnaire ne finance que les projets du capital $C > C_\theta^* = \frac{kA+rD}{\varphi_\alpha(\theta) - \frac{1+i}{m+t}} > \frac{rD}{\varphi_\alpha(\theta) - \frac{1+i}{m+t}}$ donc $\lambda > 0$ pour $C > C_\theta^*$.

ainsi la contrainte $C > C_\theta^*$ est un seuil de protection pour l'actionnaire.

Proposition 5.7 *Pour tout projet de probabilité de risque d'échec $\theta < \tilde{\theta}$ et du capital $C > C_\theta^*$, le revenu maximal par rapport à l'action A que l'actionnaire peut réaliser est :*

$$\max_A R_A = \frac{\rho\lambda^2}{4k} \quad (\text{V.32})$$

Ce maximum est atteint au point $A^* = \frac{\lambda}{2k}$, de plus si l'action $A > A_{max} = \frac{\lambda}{k}$ alors $R_A < 0$.

Si nous maximisons sur la probabilité θ , alors le meilleur revenu que l'actionnaire peut réaliser est :

$$\max_\theta \max_A R_A = \frac{m+t}{4k(1+i)} (C\varphi_\alpha(\theta^*) - \frac{1+i}{m+t} - rD)^2 \quad (\text{V.33})$$

Ce gain est une fonction décroissante par rapport à la dette D .

Preuve 19 *Le profit de l'actionnaire s'écrit sous la forme*

$$R_A = \rho(\lambda A - kA^2)$$

c'est une fonction concave par rapport à A , elle atteint son maximum au point $A^* = \frac{\lambda}{2k}$ et s'annule au point 0 et au point $A_{max} = \frac{\lambda}{k}$.

Le deuxième résultat découle du fait que la variation de $\max_A R_A$ par rapport à θ est celle de φ_α .

De plus,

$$\frac{\partial(\max_\theta \max_A R_A)}{\partial D} = -r \frac{m+t}{4k(1+i)} (C\varphi_\alpha(\theta^*) - \frac{1+i}{m+t} - rD)$$

donc c'est une fonction décroissante par rapport à D .

L'actionnaire accepte les projets dont la probabilité de risque d'échec est supérieure à $\frac{1}{2}$ jusqu'à $\tilde{\theta}$, et il participe au financement par une part maximale A_{max} conditionnée par cette probabilité. La formule V.33 donne la probabilité assurant son meilleur profit.

Proposition 5.8 *Si l'actionnaire participe avec une action $A < \tilde{A}$, il garantie un profit de la plus-value positif*

$$R_{1A} = \frac{A}{C} \left(\frac{\tilde{C}}{1+i} \right) - A > 0$$

avec $\tilde{A} = \frac{1}{k} (C\varphi_\alpha(\theta) - rD - \frac{C(1+i)}{m}) < A_{max}$

Preuve 20 *Si l'actionnaire participe avec une action $A < A_{max}$, son profit R_A sera positif. Or $R_A = R_{1A} + R_{2A}$.*

Rappelons que $\tilde{C}$ est la valorisation du capital du projet, et $R_{1A} = \frac{A}{C} \left(\frac{\tilde{C}}{1+i} \right) - A$, nous avons :

$$\begin{aligned} A < \tilde{A} = \frac{1}{k} (C\varphi_\alpha(\theta) - rD - \frac{C(1+i)}{m}) & \text{ équivaut à } m(C\varphi_\alpha(\theta) - rD - kA) > C(1+i) \\ & \text{ équivaut à } \tilde{C} > C(1+i) \\ & \text{ équivaut à } R_{1A} > 0 \end{aligned}$$

de plus

$$A_{max} = \frac{1}{k} (C\varphi_\alpha(\theta) - rD - \frac{1+i}{m+t}) \text{ et } \tilde{A} = \frac{1}{k} (C\varphi_\alpha(\theta) - rD - \frac{C(1+i)}{m})$$

donc $\tilde{A} < A_{max}$ car $C > \frac{m}{m+t}$.

Économiquement, avoir $\frac{A}{C} \left(\frac{\tilde{C}}{1+i} \right) - A = 0$ représente une situation de déchéance du gain de la somme de la plus-value, et le gain prévu de l'actionnaire se limite à $R_{2A} = \frac{A}{C} \left(\frac{tR_E}{1+i} \right)$. Ainsi, la condition $A < \tilde{A}$ est une condition de préférence pour l'actionnaire.

Conditions de participation de l'actionnaire

Cette étude a permis d'aboutir à certaines contraintes nécessaires pour avoir un profit positif pour l'actionnaire, donc l'actionnaire participe au financement du projet, au moins si

$$\begin{cases} \text{la probabilité } \theta < \tilde{\theta} \\ \text{le capital } C > C_\theta^* \\ \text{l'action } A < A_{max} \end{cases} \quad (\text{V.34})$$

Notons que :

- La condition sur la probabilité est une condition explicite, car $\tilde{\theta}$ s'écrit en fonction des paramètres fixes de la modélisation ($\tilde{\theta} = \varphi_\alpha^{-1}(\frac{1+i}{m+t})$).
- La deuxième contrainte sur le capital et la troisième sur l'action sont implicites du fait que $C_\theta^* = \frac{kA+rD}{\varphi_\alpha(\theta) - \frac{1+i}{m+t}} = f_1(A)$ et $A_{max} = \frac{1}{k} (C\varphi_\alpha(\theta) - \frac{1+i}{m+t} - rD) = f_2(C)$

Néanmoins, la condition sur la probabilité est équivalente à $\varphi_\alpha(\theta) > \frac{1+i}{m+t}$, donc le système

$$\begin{cases} C > C_\theta^* \\ A < A_{max} \end{cases}$$

est équivalent au système

$$\begin{cases} C(\varphi_\alpha(\theta) - \frac{1+i}{m+t}) - kA - rD > 0 \\ C\varphi_\alpha(\theta) - kA - (rD + \frac{1+i}{m+t}) > 0 \end{cases} \quad (V.35)$$

suivant le signe de $\varphi_\alpha(\theta) - \frac{1+i}{m+t} - rD$, ce système V.35 est représenté par l'un des deux graphes suivants :

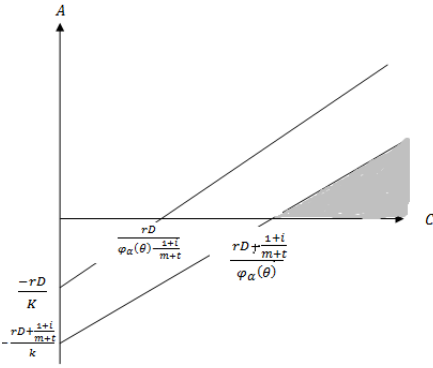


Figure V.4 – Domaine D_1 de participation de l'actionnaire

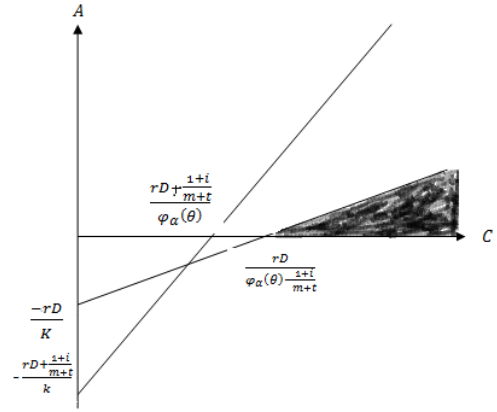


Figure V.5 – Domaine D_2 de participation de l'actionnaire

Remarquons que dans les deux cas, le domaine de participation de l'actionnaire garde la même forme géométrique.

5.4 Étude de revenu de créancier

Lemme 5.9 *Pour toute dette D telle que*

$$D > D_{min} = \frac{\varphi_\alpha(\theta^*)C - kA}{r} \quad (V.36)$$

Le résultat net d'exploitation est négatif $R_F \leq 0$.

Preuve 21 *Si $D > D_{min} = \frac{\varphi_\alpha(\theta^*)C - kA}{r}$ alors $R_F(\theta^*) < 0$, par suite $R_F(\theta) < 0$ pour tout θ .*

V.5 Étude de revenus des opérateurs économiques

lorsque l'entrepreneur cherche une dette, elle doit être supérieure à D_{min} , donc c'est une contrainte de pré-étude imposée au créancier.

Si $i \geq r$, le projet est inutile puisqu'il y a la possibilité de gagner plus sans prendre du risque. Par conséquent, le créancier n'intervient que pour les projets dont le taux de refinancement de son passif $r > i$. Or, il n'a le droit de changer que sa part de participation au financement. C'est pour cette raison qu'il doit chercher la part donnant le plus grand profit. Une étude du revenu R_D relativement au D est donnée dans la proposition suivante.

Proposition 5.10 *Le revenu du créancier s'écrit comme suit :*

$$R_D = -\gamma D^2 + \beta D \quad (\text{V.37})$$

avec $\gamma = \frac{r+1}{C(1-\theta)(1+\theta^\alpha)(1+i)}$ et $\beta = \frac{1}{1+i}[(r-i) + \frac{G}{C(1-\theta)(1+\theta^\alpha)}]$.

La fonction R_D est positive pour $D < D_{max} = \frac{\beta}{\gamma}$. Elle atteint son maximum au point $D^* = \frac{\beta}{2\gamma}$, et nous avons :

$$R_D \leq R(D^*) = \frac{\beta^2}{4\gamma} = \frac{C(1-\theta)(1+\theta^\alpha)}{4(r+1)(1+i)^2} [(r-i) + \frac{G}{C(1-\theta)(1+\theta^\alpha)}]^2 \quad (\text{V.38})$$

De plus R_D est une fonction décroissante par rapport à θ , et croissante par rapport au capital C .

Preuve 22 *Rappelons que*

$$R_D = -\frac{r+1}{C(1-\theta)(1+\theta^\alpha)(1+i)} D^2 + \frac{1}{1+i} [(r-i) + \frac{G}{C(1-\theta)(1+\theta^\alpha)}] D \quad (\text{V.39})$$

si nous posons $\gamma = \frac{r+1}{C(1-\theta)(1+\theta^\alpha)(1+i)}$ et $\beta = \frac{1}{1+i}[(r-i) + \frac{G}{C(1-\theta)(1+\theta^\alpha)}]$, alors le revenu R_D s'écrit sous la forme :

$$R_D = -\gamma D^2 + \beta D$$

Le deuxième résultat est une conséquence du fait que le profit du créancier est une fonction concave relativement à la dette.

Nous avons :

$$\frac{\partial R_D}{\partial \theta} = -\frac{(1+\theta^\alpha) + \alpha\theta^{\alpha-1}(1-\theta)}{C(1+i)(1-\theta)^2(1+\theta^\alpha)^2} ((r+1)D^2 - GD) < 0$$

donc R_D est une fonction décroissante par rapport à θ .

autrement

$$\frac{\partial R_D}{\partial C} = \frac{D[(r+1)D - G]}{C(1+i)(1-\theta)(1+\theta^\alpha)}$$

à partir de V.9 nous concluons que $\frac{\partial R_D}{\partial C} > 0$, ce qui donne le troisième résultat.

Cette proposition reflète trois conditions réelles :

1. Les données de chaque projet déterminent, pour le créancier, un seuil maximal de la dette.
2. La probabilité de risque d'échec et le profit du créancier sont deux variables inversement proportionnelles.
3. Le créancier assure la récupération de son aide à partir du capital dès que ce dernier a une grande valeur.

Corollaire 5.11 *Le créancier a un intervalle optimal du choix de la dette, qui doit vérifier :*

$$D \in]D_{min}, D_{max}[\quad (V.40)$$

autrement dit :

$$\frac{\varphi_\alpha(\theta^*)C - kA}{r} < D < C(1-\theta)(1+\theta^\alpha)(r-i) + G \quad (V.41)$$

Remarquons que les bords (D_{min} et D_{max}) de cet intervalle sont bien déterminés pour le créancier, puisqu'ils sont décrits en fonction des autres paramètres du projet indépendamment de sa part.

À ce stade, nous arrivons à l'étude des trois profits relativement aux variables essentielles du problème à savoir : la probabilité de risque d'échec déterminé par la nature du projet, le capital comme variable lié à l'entrepreneur, l'action déterminée par l'actionnaire et la dette portée par le créancier.

Ainsi pour simplifier, nous proposons des tableaux de synthèse présentant les différentes variations de ces profits relativement aux variables citées. Notons que les cellules en noir représentent les zones où l'opérateur n'intervient pas.

	R_E	R_A	R_D
$\theta \leq \theta^*$	croissante	croissante	décroissante
$\theta \in [\theta^*, \tilde{\theta}[$	décroissante	décroissante	
$\theta \geq \tilde{\theta}$			

Tableau V.1 – *Étude des profits par rapport à la probabilité*

	R_E	R_A	R_D
$C \leq C_\theta$			
$C \in [C_\theta, C_\theta^*]$	varie suivant		croissante
$C \geq C_\theta^*$	θ, A et D	croissante	

Tableau V.2 – Étude des profits par rapport au capital

	R_E	R_A
$A \leq A^*$		croissante
$A \in [A^*, A_{max}]$	décroissante	décroissante
$A \geq A_{max}$		

Tableau V.3 – Étude des profits par rapport à l'action

6 La fonction du gain total

6.1 Étude de la fonction du gain total

Pour une activité génératrice de revenus, la probabilité de risque d'échec θ est déduite de la nature du projet et du contexte de sa réalisation, et les membres de l'AGR n'ont pas assez de liquidité pour augmenter le capital. C'est pour ça qu'ils cherchent des financements externes. La fonction gain, que nous définissons comme la somme des revenus attendus, varie suivant la part de chaque intervenant au financement : le capital, l'action A et la dette D . Notre but dans ce paragraphe est de trouver les extremums de cette fonction.

Proposition 6.1 La fonction R_t définie par :

$$R_t = R_E + R_A + R_D \quad (\text{V.42})$$

est strictement croissante par rapport au capital C .

De plus, avec $\zeta = \frac{4k}{(m+t)(1-\theta)(1+\theta^\alpha)}$, nous avons :

- Si $\zeta \geq \frac{1}{2}$ ou si $\zeta < \frac{1}{2}$ et $r < \frac{1}{2}(\zeta + \sqrt{\zeta^2 + 4\zeta})$ alors R_t atteint son unique maximum au point (A', D') défini par :

$$A' = \frac{(m+t)[2C(r+1)(m+t)\varphi_\alpha(\theta) + riC(1-\theta)(1+\theta^\alpha)(1+r) - rG] + 2C(r+1)(1+i)(k+1)}{4k(r+1)(m+t) - r^2(m+t)^2(1-\theta)(1+\theta^\alpha)}$$

$$D' = \frac{C\varphi_\alpha(\theta) - 2kA'}{r} - \frac{C(1+i)(k+1)}{r(m+t)}$$

- Si $\zeta < \frac{1}{2}$ et $r > \frac{1}{2}(\zeta + \sqrt{\zeta^2 + 4\zeta})$ alors elle admet un point selle.

	R_E	R_A	R_D
$D \in [D_{min}, D^*[$	décroissante	décroissante	croissante
$D \in [D^*, D_{max}[$			décroissante

Tableau V.4 – Étude des profits par rapport à la dette

Autrement dit :

- la fonction $D \mapsto R_t(A', D)$ admet un maximum en D' .
- la fonction $A \mapsto R_t(A, D')$ admet un minimum en A' .

Preuve 23 La dérivée de R_t par rapport à C est :

$$\frac{\partial R_t}{\partial C} = \varphi_\alpha(\theta) + \frac{A(m+t)(kA+rD)}{(1+i)C^2} + \frac{D[(r+1)D-G]}{C^2(1-\theta)(1+\theta^\alpha)(1+i)} \quad (\text{V.43})$$

D'après V.9, nous avons $(r+1)D - G > 0$. Donc R_t est strictement croissante par rapport au capital C .

Le fait que R_t est une fonction monotone par rapport au capital C réduit la recherche de ses extremums relativement au triple (C, A, D) à la recherche des couples (A, D) permettant d'avoir ses extremums s'ils existent. Or, la fonction R_t est continue dérivable par rapport à A et D , et nous avons :

$$\frac{\partial R_t}{\partial A} = -k + \frac{m+t}{1+i}\varphi_\alpha(\theta) - \frac{(m+t)(2kA+rD)}{C(1+i)} - 1 \quad (\text{V.44})$$

$$\frac{\partial R_t}{\partial D} = -r - \frac{rA(m+t)}{C(1+i)} - \frac{2(r+1)D}{C(1+i)(1-\theta)(1+\theta^\alpha)} + \frac{1}{1+i}[(r-i) + \frac{G}{C(1-\theta)(1+\theta^\alpha)}] \leq 0 \quad (\text{V.45})$$

posons : $p = \frac{\partial^2 R_t}{\partial A^2} = -\frac{2k(m+t)}{C(1+i)}$, $t = \frac{\partial^2 R_t}{\partial D^2} = -\frac{2(r+1)}{C(1+i)(1-\theta)(1+\theta^\alpha)}$ et $s = \frac{\partial^2 R_t}{\partial A \partial D} = -\frac{r(m+t)}{C(1+i)}$

nous avons

$$pt - s^2 = \frac{(m+t)}{C^2(1+i)^2} \left[\frac{4k(r+1)}{(1-\theta)(1+\theta^\alpha)} - (m+t)r^2 \right]$$

donc il faut étudier son signe. Pour cela cherchons les racines de l'équation suivante :

$$\frac{4k(r+1)}{(1-\theta)(1+\theta^\alpha)} - (m+t)r^2 = 0 \quad (\text{V.46})$$

posons $\zeta = \frac{4k}{(m+t)(1-\theta)(1+\theta^\alpha)}$, l'équation V.46 devient sous la forme :

$$-r^2 + \zeta r + \zeta = 0 \quad (\text{V.47})$$

elle admet deux racines :

$$r_1 = \frac{1}{2}(\zeta - \sqrt{\zeta^2 + 4\zeta} < 0$$

$$r_2 = \frac{1}{2}(\zeta + \sqrt{\zeta^2 + 4\zeta}$$

– nous avons $r_2 \geq 1 \iff \zeta \geq \frac{1}{2}$. Dans ce cas

$$-r^2 + \zeta r + \zeta > 0 \text{ pour tout } r$$

car le taux r est compris entre 0 et 1, par suite $pt - s^2 > 0$

Or $p < 0$, ce qui montre que R admet un maximum local relativement à A et D .

La résolution du système :

$$\begin{cases} \frac{\partial R_t}{\partial A} = 0 \\ \frac{\partial R_t}{\partial D} = 0 \end{cases}$$

donne l'unique solution (A', D') , donc il s'agit d'un maximum global à R_t .

- de même nous avons $r_2 < 1 \iff \zeta < \frac{1}{2}$. Dans ce cas, nous discutons la position de r par rapport à r_2
 - si $r < r_2$ nous retrouvons le cas précédent.
 - si $r > r_2$, alors $pt - s^2 < 0$, donc R_t admet un point selle.

6.2 Utilité de la fonction du gain total

Si le but de l'actionnaire et le créancier est non lucratif, et leur participation au financement du projet a l'objectif d'encourager l'entrepreneur, comme par exemple les AGR soutenues par l'Etat, le gain attendu sera dispensé d'une manière solidaire. Dans ce contexte, nous proposons quelques possibilités de distribution des bénéfices.

Distribution équitable Les trois opérateurs distribuent le profit total R_t d'une manière équitable. En conséquence :

$$R_E = R_A = R_D = \frac{R_t}{3}$$

Distribution solidaire Le but est d'aider l'entrepreneur de l'AGR, donc il aura la part la plus importante du profit. Ainsi nous aurons :

$$R_E > R_A > R_D$$

Distribution par poids Posons $I = C + A + D$, c'est le fond total du financement du projet.

- $\frac{C}{I}$ est le poids de l'entrepreneur au fond total.
- $\frac{A}{I}$ est le poids de l'actionnaire.
- $\frac{D}{I}$ est le poids du créancier.

les bénéfices se distribuent proportionnellement au poids de chaque intervenant.

Autrement dit :

$$R_E = \frac{C}{I} R_t \quad R_A = \frac{A}{I} R_t \quad R_D = \frac{D}{I} R_t$$

Distribution avec épargne Puisque cette étude est faite sur les profits attendus après une année seulement, nous pouvons décomposer le profit total sous la forme :

$$R_t = \tilde{R}_E + \tilde{R}_A + \tilde{R}_D + R_G$$

avec

- ▷ $\tilde{R}_E$ le nouveau profit de l'entrepreneur.
- ▷ $\tilde{R}_A$ le nouveau profit de l'actionnaire.
- ▷ $\tilde{R}_D$ le nouveau profit du créancier, tel que :

$$\tilde{R}_E < R_E \quad \tilde{R}_A < R_A \quad \tilde{R}_D < R_D$$

▷ $R_G = R_t - (\tilde{R}_E + \tilde{R}_A + \tilde{R}_D)$.

l'idée est de préserver une part du profit à la deuxième année, dans le but de la rajouter au capital , pour l'accroître de C à $C + R_G$. Si R_G est suffisamment importante, nous pouvons envisager de nouveaux scénarios, par exemple :

- L'entrepreneur n'empruntera pas l'année prochaine.
- Le fond de garantie G peut être remplacé par R_G totalement ou partiellement.

Ce sont des exemples de distributions des gains, mais les décideurs peuvent prévoir d'autres.

7 conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé un modèle pour déterminer la rentabilité au sens de bénéfices d'une structure microéconomique basée sur la coopération de trois opérateurs à savoir : l'entrepreneur, l'actionnaire et le créancier. Notre but était l'évaluation du profit de chaque opérateur en terme d'espérance mathématique, et effectivement, nous avons obtenu des résultats utiles pour prendre la décision de financer un projet microéconomique ou non.

L'analyse mathématique nous a permis de prouver l'influence de la probabilité de risque d'échec et la probabilité de non remboursement des dettes sur chaque rentabilité, et nous a donné un ensemble d'informations statistiques sur un échantillon. D'ailleurs, le calcul de la variance liée à chaque profit a contrôlé la dispersion, ce qui nous a montré l'influence du degré de technologie utilisée lors de la réalisation du projet. Or, il y a une limite au niveau du choix d'une technologie convenable. C'est la raison pour laquelle nous avons pensé à faire une extension des résultats obtenus sur un N-échantillon pour choisir la taille minimale de l'échantillon permettant de contrôler la dispersion.

L'étude différentielle des profits attendus nous a ramenés à définir des critères et des contraintes garantissant le gain pour chaque intervenant.

Le traitement des cas et des scénarios possibles a complété ce travail.

Conclusion générale et perspectives

La désorganisation du secteur informel constitue aujourd'hui un problème crucial pour tous les pays et notamment le Maroc. La création d'un cadre formel à ses activités est désormais le principal défi auquel doit faire face la politique économique.

Puisqu'il n'existe pas une solution qui relève le défi de manière globale, les recherches doivent proposer une approche intégrée et cohérente, tout en combinant les interventions microéconomiques avec les contraintes sociales des populations touchées par l'informel. Cette approche doit aider les catégories défavorisées de la population à sortir de la pauvreté.

Ce mémoire contribue, partiellement, à construire cette approche. En effet, les thèmes abordés traitent des sujets importants et complexes de l'informel en particulier les problèmes des activités génératrices de revenus, tels que :

- La modélisation
- Les techniques d'aide à la décision avec des problèmes multicritères multi intervenants
- L'évaluation de la rentabilité des microprojets
- Le rendement de la formation des classes ciblées
- L'analyse probabiliste de financement des microstructures
- La maximisation des revenus attendus
- L'affaiblissement du risque d'échec

Les résultats obtenus permettent de passer du quantitatif au qualitatif dans les cas modélisés et étudiés. Plus précisément nous avons construit :

- une méthode d'aide à la décision multicritère multi-opérateurs qui répond à de nombreuses contraintes imposées par la nature des micro-structures. Cette méthode a montré son efficacité dans deux exemples : le premier dans le cadre de la macroéconomie et l'autre dans la microéconomie.
- un ensemble d'outils mathématiques d'évaluation de la rentabilité à partir de la valeur actuelle nette ou l'indice de la profitabilité, et par conséquent des moyens du choix et de sélection

socio-économiques basés sur la performance et l'impact sur une population fragile en besoin d'aide.

Nous avons proposé, aussi, une technique mathématique intéressante transformant la recherche de la rentabilité d'une formation socioprofessionnelle à la recherche des zéros d'une famille de polynôme. Et en suite, nous avons prouvé l'existence et l'unicité de ses zéros via l'analyse des fonctions analytiques ce qui nous a servi pour localiser les zéros. La résolution a fait appel à des hypothèses économiques réelles.

La dernière idée de ce travail est l'intégration de la probabilité de risque d'échec des microprojets qui a donné la puissance et la vitalité à notre étude, car elle a ajouté le facteur du risque qui caractérise les microprojets. Nous avons pu analyser par la suite les profits prévus avec leurs variations et leurs optimums possibles, ce qui a déterminé les contraintes de la réussite du projet pour chaque opérateur et ainsi que les stratégies d'aide et de répartition des gains de différentes manières solidaires avec un aspect non lucratif. Cette dernière étude a pour but d'augmenter la confiance de l'État pour donner des fonds de garantie aux structures microéconomiques.

Nos études de recherche ont fait l'objet de présentations dans des conférences internationales, ainsi que des publications dans des revus internationales à comités de lecture. Pourtant, nous souhaitons comme perspectives d'arriver à :

1. Une technique d'aide multicritère multi-décideurs objective surtout lors d'évaluation des poids.
2. Une étude économique des valeurs actualisées et des taux variables comme le taux d'actualisation que nous avons supposé fixé. Or, il peut être changé d'une année à une autre ou même au cours de l'année. Dans ce contexte, nous espérons que l'étude numérique donnera une idée sur l'écriture générale de ces taux.
3. Une reformulation de l'étude financière avec des lois de probabilités de risque d'échec liées à chaque opérateur : entrepreneur, actionnaire ou créancier, et non plus au projet comme nous avons étudié. Le nouveau modèle sera évidemment plus compliqué.
4. Nous souhaitons également écrire un modèle où les garanties portées par l'État aux microprojets remplacent complètement les dettes pour encourager de plus l'élargissement de ce champ.

Notre travail donne envie de continuer les recherches car il ouvre d'autres pistes de réflexion dans un secteur vaste qui est au début de sa reformulation, et il contribue par la suite à l'amélioration sociale et économique d'un tiers de la population marocaine.

Références

- [Andrews *et al.* 2011] D. Andrews, S. A. Caldera et A. Johansson. *Towards a better understanding of the informal economy*. Economics department working papers. Paris : OECD, vol. 873, 2011. 13
- [Aynaoui 1997] J. El Aynaoui. *Participation, choix occupationnel et gains sur un marché du travail segmenté : une analyse appliquée au cas du Maroc*. Centre d'économie du développement, Université Montesquieu-Bordeaux IV-France, 1997. 13
- [Becker 1993] Gary S. Becker. *Human Capital : A Theoretical and Empirical Analysis, With Special Reference To Education*. PUBLISHED BY NATIONAL BUREAU OF ECONOMIC RESEARCH, NEW YORK. Distributed by Columbia University Press New York and London, 1993. 79
- [Berkoune *et al.* 2005] D. Berkoune, K.Mesghouni et B. Rabenasolo. *Evaluation approach for advanced scheduling problems : Aggregation method with dynamic search direction*. International Conference on Systems, Man and Cybernetics (SMC'2005 From 10/10/2005 to 12/10/2005 Hawaii, USA , Etats Unis www.smsi.rnu.tn/html/manifes/mhosi/Mesghouni45.pdf, 2005. 25
- [Borgers & Timmermans 1986] A. Borgers et H. Timmermans. *A Model of Pedestrian Route Choice and Demand for Retail facilities within Inner-City Shopping Areas*. Geographical Analysis, vol. 18, no. 2, pages 115–128., 1986. 30
- [B.Roy 1985] B.Roy. *Méthodologie multicritère d'aide à la décision*. Economica Paris, French, page 423, 1985. 24, 27

-
- [Chaibi & Khomssi 2015] Ghizlane Chaibi et Mohammed EL Khomssi. *Profitability of education systems : Training on N years*. A Peer Reviewed International Journals of Asian Academic Research Associates, AARJSH : ASIAN ACADEMIC RESEARCH JOURNALS OF SOCIAL SCIENCE and HUMANITIES, vol. 1, no. 33, pages 387–398, 2015. 90
- [Chaibi & Khomssi 2016] Ghizlane Chaibi et Mohammed El Khomssi. *The Classification of Alternatives Based a Multi-criteria Analysis Technique and the Combination of AHP and the Weighted Sum*. British journals of Mathematics and Computer Science, vol. 14 Article no.BJMCS.23247 www.sciencedomain.org, no. 3, pages 1–18, 2016. 34
- [C.Vincent 2004] C.Vincent. *Thesis :Systematic approach and multi-criteria approach to the definition of a system of performance indicators*. 2004. 27
- [D. Berkoune & Rabenasolo 2008] K. Mesghouni D. Berkoune et B. Rabenasolo. *Evaluation approach for advanced scheduling problems : Aggregation method with dynamic search direction*. Paris : Tutorial, Evolutionary Quarterly Day. Paris.French www.smsi.rnu.tn/html/manifes/mhosi/Mesghouni45.pdf, 2008. SMC 276-281. French. 35
- [Fikri et al. 2011] Majda Fikri, El Khomssi Mohammed et Sahar Saoud. *Proposal of a Semi Fuzzy Poverty Index*. EuroEconomica, vol. 28, no. 2, pages 23–36, 2011. 52
- [Gardès 2006] Nathalie Gardès. *Finance d'entreprise : chapitre 2 "la décision de l'investissement"*. [gestionfin.canalblog.com/docs/ Deuxième Chapitre Décision d'investissement.pdf](http://gestionfin.canalblog.com/docs/Deuxième%20Chapitre%20Décision%20d'investissement.pdf), 29 juin 2006. 82
- [Ginting & Dou] Rasmi Ginting et Henri Dou. *L'approche multidécideur multicritère d'aide à la décision*. www.master-vti.fr/sfba/ile-rousse/1997/article23.pdf, YEAR = , volume = , number = , pages = , month = , note = , abstract = , keywords = , source = www.master-vti.fr/sfba/ile-rousse/1997/article23.pdf,. 25
- [Gollier 2001] C. Gollier. *The economics of risk and time*. MIT Press, Cambridge. MA, 2001. 106
- [GOUMI et al. 2015] Badreddine EL GOUMI, Mohammed El KHOMSSI et Ghizlane CHAIBI. *Comparative analysis multiple criteria for the choice of a common transport system in Rabat (Morocco)*. EuroEconomica, vol. Issue 2, no. 34, pages 7–19, 2015. 142

-
- [GOUMI 2014] Badreddine EL GOUMI. *Master Plan of transport and traffic of the agglomeration of Rabat-Sale-Temara. Rabat-Sale Tramway Society.* Faculté des sciences et techniques Fès Saiss, pages 54–70, 2014. 142
- [GRAVOT 2007] Pierre GRAVOT. *Unité d’enseignement, Economie de l’éducation -2E , sous module de base : Notions fondamentales de l’économie de l’éducation, E - Thème N 2 : Remise en cause et élargissement de la théorie du capital humain.* février 2007. 84
- [Griliches 1997a] Zvi Griliches. *Education Humain Capital.* Journals of Labor Economics, vol. 15, no. 1 Part.2, pages 330–344, 1997. 83
- [Griliches 1997b] Zvi Griliches. *Estimating the Returns to Schooling : Some Econometric problems.* Econometrica web.stanford.edu/~pista/griliches71.pdf, vol. 45, no. 1, pages 1–22, janvier 1997. 83
- [Guitouni & Martel 1998] Adel Guitouni et Jean-Marc Martel. *Tentative guidelines to help choosing an appropriate MCDA method.* European Journals of Operational Research, vol. 109, no. 2, pages 501–521, 1998. 38
- [Henreit 2000] L. Henreit. *Evaluation system and multi-criteria classification.* Paris Dauphine University French, 2000. 25, 34
- [Hirigoyen & Jean-Guy 1988] G. Hirigoyen et Degos Jean-Guy. *Evaluation des sociétés et de leurs titres.* Paris : Vuibert gestion leg.u-bourgogne.fr/images/stories/wp/0970201.pdf, 1988. 107
- [Jeong-hwa] N. Jeong-hwa. *The choice of a sustainable transport system : Comparative analysis of surface guided transport systems.* Doctorate thesis : Université Paris-Est. 142
- [J.Jutting et al. 2008] J.Jutting, J. Parlevliet et T. Xenogiani. *Informal Employment Re-loaded.* OECD Development Centre Working Paper. Paris : OECD, vol. 266, page January, 2008. 13
- [Kanté] S. Kanté. *Le secteur informel en Afrique subsaharienne francophone : vers la promotion d’un travail décent. Document de travail sur l’économie informelle.* International Labour Organizations, Geneva. 9
- [Khoi 1964] LÊ Thanh Khoi. *Le rendement de l’éducation.* In : Tiers-Monde, vol. 5, no. 17, pages 105 – 138, 1964. 81

-
- [Khomssi & Chaibi 2014a] Mohammed EL Khomssi et Ghizlane Chaibi. *Modélisation et quantification de la rentabilité des systèmes éducatifs : Formation d'une année*. Global Journals of Human-Social Science : Economics, vol. 14, no. 7, pages 51–55, Novembre 2014. 86
- [Khomssi & Chaibi 2014b] Mohammed EL Khomssi et Ghizlane Chaibi. *Tools for the selection of microeconomic from socioeconomic rentability*. EuroEconomica, vol. 33, no. 1, 2014. 63
- [Khomssi & Chaibi 2015] Mohammed EL Khomssi et Ghizlane Chaibi. *Probabilistic Analysis of Micro-Economic Projects*. ARPN Journals of Science and Technology <http://www.ejournalofscience.org>, vol. 5, no. 6, pages 314–321, june 2015. 106
- [Kim 2013] J. Y. Kim. *Discours du président du Groupe de la Banque Mondiale*. l'université de Georgetown, pages XIV–38l, 2 avril 2013. 9
- [Kuepie et al. 2009] Mathias Kuepie, Christophe Nordman et François Roubaud. *Education and earnings in urban West Africa*. vol. 37, pages 491–515, 2009. 81
- [Lachaud 2000a] Jean-Pierre Lachaud. *Echelles d'équivalence et différentiel spatial de pauvreté et d'inégalité au Burkina Faso*. Groupe d'Economie du Développement de l'Université Montesquieu Bordeaux IV, 2000. 9
- [Lachaud 2000b] Jean-Pierre Lachaud. *Les déterminants de la réduction de l'inégalité et de la pauvreté en Mauritanie : une approche micro-économique*. Groupe d'Economie du Développement de l'Université Montesquieu Bordeaux IV., 2000. 9
- [l'INDH] Coordination Nationale de l'INDH. *Manuel de procédures des Activités Génératrices de Revenus (AGR)*. Initiative Nationale Pour le Développement Humain 2011-2015 Royaume du Maroc www.indh.gov.ma/images/manuel/Manuel-procedures-AGR.pdf. 50, 51
- [l'INDH 2013] Coordination Nationale de l'INDH. *Initiative Nationale pour le Développement Humain : Genre et Evolution*. Ministère de l'intérieur. Royaume du Maroc, Septembre 2013. 15, 20, 79
- [Mammeri 2013] Mohamed Lounes Mammeri. *Thesis : A multicriteria approach to decision making for the evaluation of comfort in trains*. Paris. French, 2013. 27

-
- [M.Despontin *et al.* 1981] M.Despontin, J. Moscarola et J. Spronk. *Informatique et méthodes multicritères*. Actes du Congrès international informatique et sciences humaines L.A.S.L.A. - Université de Liège, 1981. 35
- [Melvin 2012] Alexander Melvin. *Decision-making using the analytic hierarchy process (AHP) and SAS/IML*. SESUG, vol. Paper SD-04, 2012. 22
- [Millan *et al.* 2010] José Maria Millan, Emilio Congregado et Concepcion Roman. *Determinants of Self-Employment Dynamics and their Implications on Entrepreneurial Policy Effectiveness*. Lecturas de Economia, 2010. 81
- [Mondiale 2001] Banque Mondiale. *Rapport sur le développement : Combattre la pauvreté*. Paris : Éditions Eska, pages XIV–38l, 2001. 9
- [NAFI 2010] Amir NAFI. *Question multicriteria decision : Introduction to multi-criteria analysis methods Electra type*. ENGEES Module : Financial Engineering, 2009-2010. 29
- [OFPPT] site officiel de communication OFPPT. www.ofppt.ma, 31-5-2016. 4
- [Perraton & Creed 2000] Hilary Perraton et Charlotte Creed. *L'utilisation de nouvelles technologies et de systèmes d'enseignement rentables dans l'éducation de base*. Forum mondial sur l'éducation Dakar, Sénégal, avril 26-28 2000. 80
- [Peter 1967] C.Fishbum Peter. *Additive utilities with incomplete product set : Applications to priorities and assignments*. Lifetme Learning Publications, a Operations Research Society of America (ORSA), Baltimore, MD, USA, 1967. 30
- [Poitou-Charentes 2005] IAAT Poitou-Charentes. *Guide méthodologique du travail en commun*. <http://www.iaat.org>, page 128, avril 2005. 25
- [Projet Eloise 2009] « Enhance Labour Opportunities to Improve Social Environment » (Renforcer les Opportunités de Travail pour Améliorer l'Environnement Social) Projet Eloise. *Rapport sur le contexte socio-économique du Maroc*. ENHANCE LABOUR OPPORTUNITIES TO IMPROVE SOCIAL ENVIRONMENT, 2009. 12
- [Reverdy 1997] Bernard Reverdy. *Evaluation de la Rentabilité Economique d'un projet d'Investissement*. septembre 1997. 83
- [Roy 2006] Bernard Roy. *Multicriteria Methodology for Decision Aiding*. Kluwer Academic. Dordrecht, 2006. 25

-
- [Saaty 1884] Thomas L. Saaty. *Decision making for Leders*. Lifetme Learning Publications, a division of Wadsworth, INC., 10 David Drive, Belmont, CA, 94002 USA, 1884. 31, 39
- [Salahdine 2013] Mohamed Salahdine. *LE MAROC ACTUEL : Une modernisation au miroir de la tradition ? Place et rôle du secteur informel dans l'économie marocaine*. Publication sur OpenEdition Books. Éditeur : Institut de recherches et d'études sur le monde arabe et musulman, Éditions du CNRS, pages 192–205, 18-septembre 2013. 9
- [Sen 1993] Amartya Sen. *Capability and Well-Being*. The Quality of Life Nussbaum, Martha, pages 30–53, 1993. 53
- [Sen 2000] Amartya Sen. *l'exclusion sociale : Concept, l'application et examen*. Banque asiatique de développement, 2000. 53
- [Smit & Trigeorgis 2004] H.T.J. Smit et L. Trigeorgis. *Strategic investment : Real options and games*. Princeton University Press, 2004. 106
- [Sylvie & Cécile 2002] Cieply Sylvie et LeCorroller Cécile. *Le ciblage des mesures publiques d'aide au financement privé comme condition de leur efficacité : Application au cas de la création d'entreprise*. XIXème Journées Internationales d'Économie Monétaire et Bancaire. Lyon, 6-7 juin 2002. 113, 119
- [Talbi 1999] E. Talbi. *Metaheuristics for multi-objective combinatorial optimization*. Paris : Tutorial, Evolutionary Quarterly Day. Paris.French, 1999. 24, 35
- [Temple] Temple. *Effet de l'éducation et du capital social sur la croissance dans les pays de l'OCDE*. Revue Economique de l'OCDE www.master-vti.fr/sfba/ile-rousse/1997/article23.pdf. 79
- [Tézenas 1972] Henri Tézenas. *Dictionnaire des sciences de la gestion*. Tours : Mame, page 331 p, 1972. 34
- [Walther 2006] R. Walther. *Vocational Training in the Informal Sector. Report on the MOROCCO Field Survey*. Agence Française de Développement (AFD), Paris. <http://www.afd.fr/webdav/site/afd/shared/PUBLICATIONS/RECHERCHE/Scientifiques/Documents-de-travail-documenttravail-VA.pdf>, 2006. 9
- [wikipedia 2015] wikipedia. <https://fr.wikipedia.org/wiki/Capitalimmatériel>. 22 mars 2015. 79

Annexe du chapitre 2

1 Première application : Comparaison Tramway / Bus

Le but de l'analyse multicritère des systèmes de transport est de chercher le moyen qui garantit une qualité des conditions de déplacement des citoyens afin de répondre aux différents enjeux sociaux, économiques, environnementaux et même des enjeux de la santé [Jeong-hwa] et qui permet de :

- Minimiser les coûts liés au transport comme l'achat et l'entretien de véhicules de société.
- Optimiser les déplacements et les infrastructures.
- Réduire les coûts liés au stationnement.
- Réduire les retards.
- Réduire les émissions de gaz à effet de serre.
- Améliorer la sécurité des trajets.
- Diminuer le stress et de la fatigue des citoyens.
- Réduire le nombre d'accidents sur les trajets.

Au cours de ce travail, nous allons effectuer une analyse multicritère des données de la société du Tramway de Rabat-Salé (STRS) et des données de l' Office National des Hydrocarbures et des Mines (ONHYM) afin d'évaluer le système de transport dans cette zone [GOUMI 2014] [GOUMI *et al.* 2015].

1.1 Problématique

Il s'agit d'un problème du tri, de l'ensemble des actions Tramway et Bus, multi- décideur dans le sens où plusieurs ministères peuvent être intervenir (ministère de la modernisation des secteurs publics, ministère de l'équipement et du transport, ministère des finances et de

la privation...), multicritères dans le sens où l'évaluation d'une action se fait en considérant plusieurs critères à la fois. Des critères que les décideurs se fixent et qu'ils classent en affectant à chacun d'eux des poids relatifs et globaux. En raison de l'absence de données suffisantes pour diversifier les dimensions et les critères, nous nous limitons à certains critères dont nous avons l'évaluation.

Nous définissons les mêmes dimensions et les mêmes critères pour tous les décideurs. De plus nous n'avons pas les formules des fonctions d'évaluation, du fait qu'il s'agit de données moyennes privées de la société du Tramway de Rabat-Salé.

1.2 Identifier les dimensions et les critères

Concernant le choix des critères possibles pour évaluer les systèmes de transport, il est très important de tenir compte des occupations majeures dans le domaine du transport public : la fiabilité, la disponibilité et la sécurité. Ce sont des critères essentiels pour toute analyse comparative des systèmes de transport, par conséquent l'ensemble des critères dans cette application sera imposé pour tous les décideurs.

Pour différencier un système de transport d'un autre, nous utilisons les dimensions et les critères suivants :

La dimension $d_{i,1}$	La performance et les services rendus
La dimension $d_{i,2}$	Coût
La dimension $d_{i,3}$	Environnement

Tableau A.1 – *Identification des dimensions*

avec $d_{i,k}$ la $k^{ième}$ dimension choisie par le $i^{ième}$ décideur .

Pour appliquer notre méthode, il existe deux façons de procéder : soit de l'appliquer pour le premier décideur puis le deuxième et ainsi de suite, soit de travailler avec tous les décideurs à la fois. Nous avons choisi cette dernière pour notre application.

La première dimension : La performance et les services rendus

La performance des systèmes de transport est une mesure composée en général de la capacité, la fréquence, la vitesse commerciale, la fiabilité et la productivité. La ponctualité et l'accessibilité mesurent la qualité des services rendus aux usagers des systèmes de transport.

- $C_{i,1,1}$: **Capacité**

La capacité est une valeur qui représente la prestation maximale d'un moyen de transport.

Il y a deux catégories de capacité :

- capacité en nombre (le nombre maximal de véhicules qui peuvent être mis en service dans un temps donné), elle est exprimée par la formule suivante :

$$C_n = \frac{L}{V_c} \times \frac{60}{F}$$

- Capacité en place (le nombre de personnes qui peuvent être transportés dans un temps donné), elle est exprimée par la formule suivante :

$$C_p = C_n \times C_v$$

avec :

L : Longueur de ligne (km)

V_c : Vitesse commerciale (km/h)

f : Fréquence (nombre de véhicule/h)

C_p : Capacité en passagers (nombre de personnes)

C_v : capacité d'un véhicule (nombre de personnes/véhicule).

- $C_{i,1,2}$: **Fréquence**

La fréquence est le nombre de véhicules circulant sur un itinéraire selon un horaire régulier par unité de temps.

- $C_{i,1,3}$: **Vitesse commerciale**

La vitesse commerciale est une vitesse moyenne utile à l'utilisateur. Elle peut être obtenue par la division de longueur de la ligne sur le temps du trajet.

- $C_{i,1,4}$: **Ponctualité**

Elle est liée à la qualité du service car elle influence le temps d'attente à l'arrêt pour les usagers.

- $C_{i,1,5}$: **Fiabilité**

La fiabilité est l'aptitude d'un système ou d'un matériel, fonctionnant sans incidents pendant un temps donné.

- $C_{i,1,6}$; **Accessibilité**

Ainsi nous ne choisissons que les critères dont nous avons l'évaluation :

La deuxième dimension : Coût

1 Première application : Comparaison Tramway / Bus

Le critère $C_{i,1,1}$	Capacité
Le critère $C_{i,1,2}$	Fréquence
Le critère $C_{i,1,3}$	Vitesse commerciale
Le critère $C_{i,1,4}$	Ponctualité

Tableau A.2 – *Critères de la première dimension*

Dans cette dimension, nous considérons un seul critère c'est :

$C_{i,2,1}$: **Coût d'investissement**. Le coût d'investissement représente un coût prévisionnel d'atterrissage des marchés avenants. Ce coût intègre :

- ◇ Marchés d'études et de travaux Tramway
- ◇ La quote part du tablier tramway dans le nouveau pont Hassan II
- ◇ Frais de pré-exploitation
- ◇ Frais financiers (avant démarrage exploitation)

Remarque 13 *Dans toute étude, il faut évaluer le coût global pour avoir une information correcte. Ce coût se compose du coût d'investissement et du celui d'exploitation. Mais puisque nous n'avons pas l'évaluation du coût d'exploitation, nous avons considéré juste le coût d'investissement.*

La troisième dimension : Environnement

$C_{i,3,1}$: **Gaz à Effet de Serre (GES)**. Un gaz à effet de serre (GES) est un gaz qui influence le changement climatique. C'est un gaz qui se trouve dans l'atmosphère terrestre et qui arrête le passage des infrarouges émis par la surface terrestre, particulièrement les halocarbures que l'homme fabrique artificiellement.

Remarque 14 *Dans la dimension "environnement" il existe plusieurs critères. Nous ne considérons que le critère "Gaz à Effet de Serre" car nous avons ses valeurs réelles .*

1.3 Affecter les poids

Dans cette étude, la pondération sera effectuée à deux niveaux :

- Le premier : les trois dimensions seront pondérées entre eux, à savoir que nous attribuons des poids aux aspects de performance et aux services rendus, coût et pollution.
- Le deuxième : les critères d'une même dimension seront pondérés entre eux. Or, pour la deuxième et la troisième dimension, nous avons un seul critère. Donc nous cherchons les poids relatifs des critères juste de la première dimension.

Annexe du chapitre 2

Décideur D_1				Décideur D_2				Décideur D_3				Décideur D_4			
	$d_{1,1}$	$d_{1,2}$	$d_{1,3}$		$d_{2,1}$	$d_{2,2}$	$d_{2,3}$		$d_{3,1}$	$d_{3,2}$	$d_{3,3}$		$d_{4,1}$	$d_{4,2}$	$d_{4,3}$
$d_{1,1}$	1	3	7	$d_{2,1}$	1	7	9	$d_{3,1}$	1	$\frac{1}{3}$	5	$d_{4,1}$	1	3	3
$d_{1,2}$	$\frac{1}{3}$	1	5	$d_{2,2}$	$\frac{1}{7}$	1	5	$d_{3,2}$	3	1	7	$d_{4,2}$	$\frac{1}{3}$	1	1
$d_{1,3}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$	1	$d_{2,3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{5}$	1	$d_{3,3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	1	$d_{4,3}$	$\frac{1}{3}$	1	1

Tableau A.3 – *Matrice de comparaison des dimensions*

Chaque décideur remplit sa matrice de comparaison à partir de l'échelle de Saaty [II.3](#) pour évaluer l'importance d'une dimension à l'autre de son point de vue. Puis il calcule les poids des dimensions à partir de la formule [II.12](#).

le tableau ci-dessous présente les valeurs trouvées :

Décideur D_1			Décideur D_2			Décideur D_3			Décideur D_4		
$P_{1,1}$	$P_{1,2}$	$P_{1,3}$	$P_{2,1}$	$P_{2,2}$	$P_{2,3}$	$P_{3,1}$	$P_{3,2}$	$P_{3,3}$	$P_{4,1}$	$P_{4,2}$	$P_{4,3}$
0.65	0.28	0.07	0.75	0.2	0.05	0.28	0.65	0.07	0.6	0.2	0.2

Tableau A.4 – *Poids des dimensions*

Remarquons que les trois décideurs favorisent la performance et les services rendus par rapport au coût d'investissement et GES, par contre le décideur D_3 donne plus d'importance à la valeur du coût d'investissement. Mais avant d'utiliser ces poids, il faut calculer la cohérence des jugements. Pour cela le décideur calcule le ratio de cohérence lié à chaque matrice de comparaison.

Pour le décideur D_1

	$d_{1,1}$	$d_{1,2}$	$d_{1,3}$	Somme de la ligne $k/P_{1,k}$
$d_{1,1}$	0.65	0.84	0.49	3.046
$d_{1,2}$	0.216	0.28	0.35	3.021
$d_{1,3}$	0.092	0.056	0.07	3.114

Tableau A.5 – *Calcul de la cohérence du jugement du D_1*

1 Première application : Comparaison Tramway / Bus

La cohérence moyenne se calcule à partir de la formule II.2 :

$$\text{la cohérence moyenne} = \frac{1}{3}(3.046 + 3.021 + 3.114) = 3.06$$

L'indice de cohérence se calcule à partir de la formule II.3 :

$$\text{l'indice de cohérence} = \frac{3.06 - 3}{2} = 0.03$$

Et finalement, le ratio de cohérence se calcule à partir de la formule II.4 :

$$\text{le ratio de cohérence} = \frac{0.03}{0.58} = 0.05 < 10\%$$

La matrice de comparaison binaire des dimensions du décideur D_1 est acceptable et nous gardons les poids des dimensions trouvés.

Pour le décideur D_2

$$\text{le ratio de cohérence} = \frac{3.95}{0.58} = 6.81 < 10\%$$

De même, la matrice de comparaison binaire des dimensions du décideur D_2 est acceptable et nous gardons les poids des dimensions trouvés.

Pour le décideur D_3

$$\text{le ratio de cohérence} = \frac{0.03}{0.58} = 0.05 < 10\%$$

La matrice de comparaison binaire des dimensions du décideur D_3 est acceptable et nous gardons les poids des dimensions trouvés.

Pour le décideur D_4

$$\text{le ratio de cohérence} = \frac{0}{0.58} = 0 < 10\%$$

De même, la matrice de comparaison binaire des dimensions du décideur D_4 est acceptable et nous gardons les poids trouvés des dimensions.

Maintenant, nous cherchons les poids relatifs des critères de la première dimension pour les quatre décideurs d'une manière analogue à celle du calcul des poids des dimensions. Pour cela

Annexe du chapitre 2

nous commençons par les matrices de comparaison des critères suivants :

Décideur D_1					Décideur D_2				
	$C_{1,1,1}$	$C_{1,1,2}$	$C_{1,1,3}$	$C_{1,1,4}$		$C_{2,1,1}$	$C_{2,1,2}$	$C_{2,1,3}$	$C_{2,1,4}$
$C_{1,1,1}$	1	5	3	3	$C_{2,1,1}$	1	5	3	3
$C_{1,1,2}$	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$C_{2,1,2}$	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$C_{1,1,3}$	$\frac{1}{3}$	3	1	1	$C_{2,1,3}$	$\frac{1}{3}$	3	1	1
$C_{1,1,4}$	$\frac{1}{3}$	3	1	1	$C_{2,1,4}$	$\frac{1}{3}$	3	1	1
Décideur D_3					Décideur D_4				
	$C_{3,1,1}$	$C_{3,1,2}$	$C_{3,1,3}$	$C_{3,1,4}$		$C_{4,1,1}$	$C_{4,1,2}$	$C_{4,1,3}$	$C_{4,1,4}$
$C_{3,1,1}$	1	7	5	5	$C_{4,1,1}$	1	5	3	3
$C_{3,1,2}$	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$C_{4,1,2}$	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$C_{3,1,3}$	$\frac{1}{5}$	5	1	1	$C_{4,1,3}$	$\frac{1}{3}$	3	1	1
$C_{3,1,4}$	$\frac{1}{5}$	5	1	1	$C_{4,1,4}$	$\frac{1}{3}$	3	1	1

Tableau A.6 – Matrice de comparaison des critères de 1ère dimension

nous calculons les poids relatifs des critères à partir de la formule II.13.

Finalement nous trouvons les poids suivants :

Décideur D_1				Décideur D_2			
$P_{1,1,1}$	$P_{1,1,2}$	$P_{1,1,3}$	$P_{1,1,4}$	$P_{2,1,1}$	$P_{2,1,2}$	$P_{2,1,3}$	$P_{2,1,4}$
0.52	0.08	0.2	0.2	0.52	0.08	0.2	0.2
Décideur D_3				Décideur D_4			
$P_{3,1,1}$	$P_{3,1,2}$	$P_{3,1,3}$	$P_{3,1,4}$	$P_{4,1,1}$	$P_{4,1,2}$	$P_{4,1,3}$	$P_{4,1,4}$
0.61	0.05	0.17	0.17	0.52	0.08	0.2	0.2

Tableau A.7 – Poids relatifs des critères de 1ère dimension

Ce sont les poids relatifs des critères (Capacité, fréquence, Vitesse commerciale, Ponctualité) de la première dimension : performance et les services rendus . Ils représentent l'importance d'un critère par rapport aux autres dans la même dimension du point de vue de chaque décideur.

Les quatre décideurs se mettent d'accord sur l'ordre de l'importance des critères choisis. Pour eux, la capacité du moyen du transport est la plus importante. Au deuxième niveau d'importance, il y a la vitesse commerciale et la ponctualité, le critère le moins important est celui de

1 Première application : Comparaison Tramway / Bus

la fréquence. Les mêmes poids sont donnés pour les quatre critères.

Evaluons les ratios de la cohérence des jugements des décideurs relativement aux critères de la dimension performance et services rendus à partir des quatre matrices de comparaison II.8 d'une manière analogue à celle des ratios de cohérence des matrices de comparaison des dimensions. Après les calculs, nous avons :

- Pour les décideurs D_1 , D_2 et D_4

$$\text{le ratio de cohérence} = 0.14 < 10\%$$

- Pour le décideur D_3

$$\text{le ratio de cohérence} = 0.077 < 10\%$$

Donc nous gardons les poids des quatre décideurs évaluant l'importance des critères entre eux dans la dimension performance et services rendus.

Nous pouvons également calculer les poids globaux des critères définis par II.15 à partir des poids relatifs des critères et des poids des dimensions.

P. relatifs	Décideur D_1				Décideur D_2			
	$P_{1,1} = 0.65$				$P_{2,1} = 0.75$			
	$P_{1,1,1}$	$P_{1,1,2}$	$P_{1,1,3}$	$P_{1,1,4}$	$P_{2,1,1}$	$P_{2,1,2}$	$P_{2,1,3}$	$P_{2,1,4}$
	0.52	0.08	0.2	0.2	0.52	0.08	0.2	0.2
P. globaux	$w_{1,1,1}$	$w_{1,1,2}$	$w_{1,1,3}$	$w_{1,1,4}$	$w_{2,1,1}$	$w_{2,1,2}$	$w_{2,1,3}$	$w_{2,1,4}$
	0.338	0.052	0.13	0.13	0.39	0.06	0.15	0.15

P. relatifs	Décideur D_3				Décideur D_4			
	$P_{3,1} = 0.28$				$P_{4,1} = 0.6$			
	$P_{3,1,1}$	$P_{3,1,2}$	$P_{3,1,3}$	$P_{3,1,4}$	$P_{4,1,1}$	$P_{4,1,2}$	$P_{4,1,3}$	$P_{4,1,4}$
	0.1708	0.014	0.0476	0.0476	0.312	0.048	0.12	0.12
P. globaux	$w_{1,1,1}$	$w_{1,1,2}$	$w_{1,1,3}$	$w_{1,1,4}$	$w_{2,1,1}$	$w_{2,1,2}$	$w_{2,1,3}$	$w_{2,1,4}$
	0.52	0.08	0.2	0.2	0.52	0.08	0.2	0.2

Tableau A.8 – Poids globaux des critères de 1ère dimension

La deuxième dimension (coût) contient un seul critère, de même pour la troisième dimension (environnement). Le tableau suivant regroupe les différents poids liés à ces deux dimensions.

Du fait que la deuxième dimension "coût" contient un seul critère pour tous les décideurs alors son poids relatif $P_{i,2,1}$ est égal à 1 pour $i = 1, 2, 3, 4$, car nous le comparons avec lui-même,

	Décideur D_1		Décideur D_2	
P. de la dimension	$P_{1,2} = 0.28$	$P_{1,3} = 0.07$	$P_{2,2} = 0.2$	$P_{2,3} = 0.05$
P. relatif du critère	$P_{1,2,1} = 1$	$P_{1,3,1} = 1$	$P_{2,2,1} = 1$	$P_{2,3,1} = 1$
P. global du critère	$w_{1,2,1} = 0.28$	$w_{1,3,1} = 0.07$	$w_{2,2,1} = 0.2$	$w_{2,3,1} = 0.05$
	Décideur D_3		Décideur D_4	
P. de la dimension	$P_{3,2} = 0.65$	$P_{3,3} = 0.07$	$P_{4,2} = 0.2$	$P_{4,3} = 0.2$
P. relatif du critère	$P_{3,2,1} = 1$	$P_{3,3,1} = 1$	$P_{4,2,1} = 1$	$P_{4,3,1} = 1$
P. global du critère	$w_{3,2,1} = 0.65$	$w_{3,3,1} = 0.07$	$w_{4,2,1} = 0.2$	$w_{4,3,1} = 0.2$

Tableau A.9 – *Poids de deuxième et troisième dimensions*

par conséquent son poids global $w_{i,2,1}$ est par définition égal à

$$w_{i,2,1} = P_{i,2} \times P_{i,2,1} \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Même raisonnement pour la troisième dimension "environnement".

1.4 Performance des critères

Comme nous avons expliqué dans la méthode Somme pondérée, les critères à minimiser doivent être modifié de sorte que chaque critère soit à maximiser. Dans notre problème, nous avons :

- Capacité : C'est un critère à maximiser.
- Fréquence : C'est un critère à minimiser.
- Vitesse commerciale : C'est un critère à maximiser.
- Ponctualité : C'est un critère à maximiser.
- Coût d'investissement : C'est un critère à minimiser.
- GES : C'est un critère à minimiser.

Chaque critère est caractérisé par une fonction d'évaluation qui permet de le transformer d'une notion qualitative à une notion quantitative mesurable. Or, dans cette application, nous nous sommes basés sur des données réelles de la société de Tramway de Rabat- Salé sans savoir l'écriture des fonctions d'évaluation. Le tableau suivant regroupe l'ensemble des évaluations données :

La relation d'équivalence [II.11](#) permet de transformer l'objectif de minimisation à un objectif de maximisation. À l'aide de cette relation, nous transformons les valeurs de performance du

1 Première application : Comparaison Tramway / Bus

	$C_{i,1,1}$	$C_{i,1,2}$	$C_{i,1,3}$	$C_{i,1,4}$	$C_{i,2,1}$	$C_{i,3,1}$
Tramway a_1	560	9 min	18.25 Km/h	97 %	3.814 MDH	0
Bus a_2	175	20 min	12 Km/h	70 %	2 MDH	480 gCO ₂

Tableau A.10 – *Tableau des performances réelles*

tableau A.10 au tableau suivant :

	$C_{i,1,1}$	$C_{i,1,2}$	$C_{i,1,3}$	$C_{i,1,4}$	$C_{i,2,1}$	$C_{i,3,1}$
Tramway a_1	560	11	18.25	97	0	480
Bus a_2	175	0	12	70	1.814	0

Tableau A.11 – *Tableau des performances après la transformation*

Afin d'agglomérer ces différents critères en un seul score, une étape de normalisation permet de transposer les différentes unités sur une même échelle comparable. Dans cette application nous travaillons avec une simple formule de normalisation. En effet nous divisons chaque valeur de performance sur la somme de la colonne ce qui normalise les valeurs, ainsi nous aboutissons au tableau suivant :

	$C_{i,1,1}$	$C_{i,1,2}$	$C_{i,1,3}$	$C_{i,1,4}$	$C_{i,2,1}$	$C_{i,3,1}$
Tramway a_1	0.76	1	0.603	0.584	0	1
Bus a_2	0.238	0	0.396	0.419	1	0

Tableau A.12 – *Tableau des performances normalisées*

A cette étape, nous avons précisé l'ensemble des dimensions, leurs poids, l'ensemble des critères, leurs poids et leurs évaluations, ce qui permet de calculer les sommes pondérées relatives à l'aide de la formule II.17. Il s'agit des mêmes critères considérés pour les quatre décideurs. De plus les décideurs D_1 , D_2 et D_4 ont choisis les mêmes poids comme critères de la dimension performance et services rendus, donc nous arrivons au même tableau des sommes pondérées relatives pour $i = 1, 2, 4$.

Annexe du chapitre 2

Dimension $d_{i,1}$						
Critères		$C_{i,1,1}$	$C_{i,1,2}$	$C_{i,1,3}$	$C_{i,1,4}$	Somme
Poids relatifs		0.52	0.08	0.2	0.2	$\sum_{p=1}^4 P_{i,1,p} = 1$
Actions	a_1	0.76	1	0.603	0.584	$S_{i,1}^m(a_1) = 0.7126$
	a_2	0.238	0	0.396	0.419	$S_{i,1}^m(a_2) = 0.28676$

Tableau A.13 – Somme pondérée relative des décideurs D_1 , D_2 et D_4 .

Dimension $d_{3,1}$						
Critères		$C_{3,1,1}$	$C_{3,1,2}$	$C_{3,1,3}$	$C_{3,1,4}$	Somme
Poids relatifs		0.61	0.05	0.17	0.17	$\sum_{p=1}^4 P_{3,1,p} = 1$
Actions	a_1	0.76	1	0.603	0.584	$S_{3,1}^m(a_1) = 0.71539$
	a_2	0.238	0	0.396	0.419	$S_{3,1}^m(a_2) = 0.238373$

Tableau A.14 – Somme pondérée relative du décideur D_3 .

Ces deux tableaux montrent que $S_{i,1}^m(a_1) > S_{i,1}^m(a_2)$ pour $i = 1, 2, 3$ et 4 , même avec une grande différence. Ce qui montre clairement qu'au niveau des performances et services rendus, le Tramway répond aux besoins des citoyens mieux que le bus du point de vue des quatre décideurs. Via cette analyse, et à partir des critères choisis de la première dimension, le Tramway minimise le temps d'arrêt pour les usagers, offre une grande capacité au niveau du nombre et de places, et garantit la plus grande vitesse pour se déplacer. Donc l'action Tramway (a_1) est l'action optimale relativement à la première dimension.

Maintenant, si le but de l'étude est de comparer les deux moyens de transport Tramway et bus relativement aux trois dimensions choisies, alors les décideurs doivent calculer les sommes globales définies par la formule II.19. Le tableau suivant résume les résultats trouvés par le décideur D_1 .

Dimensions		$d_{1,1}$	$d_{1,2}$	$d_{1,3}$	Somme globale
Poids		$P_{1,1} = 0.65$	$P_{1,2} = 0.28$	$P_{1,3} = 0.07$	
Actions	a_1	Sommes p. $S_{1,1}^m(a_1) = 0.7126$	$S_{1,2}^m(a_1) = 0$	$S_{1,3}^m(a_1) = 1$	$S_1^m(a_1) = 0.5328$
	a_2	relatives $S_{1,1}^m(a_2) = 0.28676$	$S_{1,2}^m(a_2) = 1$	$S_{1,3}^m(a_2) = 0$	$S_1^m(a_2) = 0.466$

Tableau A.15 – Somme pondérée globale pour le décideur D_1

De la même manière, le décideur D_2 peut comparer le Tramway et le bus relativement aux trois dimensions choisies, en calculant les sommes globales à partir des données des tableaux A.9 et A.13, ainsi le tableau ci-dessous résume les résultats trouvés par le décideur D_2 .

2 Deuxième application : Sélection d'une AGR

Dimensions		$d_{2,1}$		$d_{2,2}$	$d_{2,3}$	Somme globale
Poids		$P_{2,1} = 0.75$		$P_{2,2} = 0.2$	$P_{2,3} = 0.05$	
Actions	a_1	Sommes p.	$S_{2,1}^m(a_1) = 0.712$	$S_{2,2}^m(a_1) = 0$	$S_{2,3}^m(a_1) = 1$	$S_2^m(a_1) = 0.584$
	a_2	relatives	$S_{2,1}^m(a_2) = 0.286$	$S_{2,2}^m(a_2) = 1$	$S_{2,3}^m(a_2) = 0$	$S_2^m(a_2) = 0.4145$

Tableau A.16 – Somme pondérée globale pour le décideur D_2

Les décideurs D_3 et D_4 calculent les sommes globales relativement à leurs propres poids affectés à partir des tableaux A.9, A.13 et A.14. Ce qui suit regroupe les valeurs trouvées.

Dimensions		$d_{3,1}$		$d_{3,2}$	$d_{3,3}$	Somme globale
Poids		$P_{3,1} = 0.28$		$P_{3,2} = 0.65$	$P_{3,3} = 0.07$	
Actions	a_1	Sommes p. relatives	$S_{3,1}^m(a_1) = 0.71539$	$S_{3,2}^m(a_1) = 0$	$S_{3,3}^m(a_1) = 1$	$S_3^m(a_1) = 0.27$
	a_2		$S_{3,1}^m(a_2) = 0.238373$	$S_{3,2}^m(a_2) = 1$	$S_{3,3}^m(a_2) = 0$	$S_3^m(a_2) = 0.71664$
Dimensions		$d_{4,1}$		$d_{4,2}$	$d_{4,3}$	Somme globale
Poids		$P_{4,1} = 0.6$		$P_{4,2} = 0.2$	$P_{4,3} = 0.2$	
Actions	a_1	Sommes p. relatives	$S_{4,1}^m(a_1) = 0.7126$	$S_{4,2}^m(a_1) = 0$	$S_{4,3}^m(a_1) = 1$	$S_4^m(a_1) = 0.627$
	a_2		$S_{4,1}^m(a_2) = 0.286$	$S_{4,2}^m(a_2) = 1$	$S_{4,3}^m(a_2) = 0$	$S_4^m(a_2) = 0.3716$

Tableau A.17 – Somme pondérée globale pour les décideurs D_3 et D_4

Pour les quatre décideurs nous avons toujours $S_i^m(a_1) > S_i^m(a_2)$ $i = 1, 2, 4$, donc le Tramway est l'action optimale de cette modélisation.

Si la comparaison se fait juste au niveau de la deuxième dimension "coût d'investissement" alors l'action a_2 "Bus" sera la meilleure pour les quatre décideurs et ce résultat se voit clairement du fait que la réalisation du projet de la société de Tramway de Rabat- Salé a nécessité un coût d'investissement de 3.814 MDH tandis que celui du Bus a demandé 2 MDH.

2 Deuxième application : Sélection d'une AGR

2.1 Dimensions et Critères

Supposons que nous avons trois projets d'activités génératrices de revenus notés a_1 , a_2 et a_3 . Pour choisir le projet le plus utile et le plus rentable, nous les proposons aux trois décideurs : un représentant du pouvoir public, l'une des banques et l'une des organisations

Annexe du chapitre 2

non gouvernementales, qui ont exprimé leur volonté à contribuer au financement du meilleur projet. Ces décideurs doivent décomposer leurs objectifs, choisir les dimensions et les critères. Ils doivent également déterminer l'importance de ces derniers à travers leurs poids. Puis nous les aidons afin de les classer par un ordre croissant dans le but de savoir le projet le plus satisfaisant.

Pour ce problème, l'ensemble des actions est

$$A = \{a_1, a_2, a_3\}$$

L'ensemble des décideurs est

$$D = \{D_1, D_2, D_3\}$$

avec

- ★ D_1 : Représentant du pouvoir public.
- ★ D_2 : Banque.
- ★ D_3 : Organisation non gouvernementale (ONG).

Pour D_1 , un projet est évalué par le biais de trois dimensions : sociale, économique et environnementale, mais il favorise la dimension sociale.

Pour D_2 , un projet est évalué d'un point de vue économique. Pour cela, il considère juste la dimension économique.

D_3 est une organisation non gouvernementale intéressée par les affaires sociales et environnementales, pour cela qu'elle choisit les deux dimensions : sociale et environnementale.

Dans cette application, nous avons choisi trois décideurs de différents statuts sociaux et économiques, qui peuvent être des gérants au projet sélectionné ou des fournisseurs afin de diversifier les données de l'application, et également pour montrer l'indépendance lors du choix de l'action optimale, surtout nous avons des décideurs qui n'ont pas les mêmes objectifs.

Le tableau suivant regroupe les dimensions choisies par les trois décideurs.

Décideur D_1		Décideur D_2		Décideur D_3	
$d_{1,1}$	sociale	$d_{2,1}$	économique	$d_{3,1}$	social
$d_{1,2}$	économique				environnementale
$d_{1,3}$	environnementale				

Tableau A.18 – *Dimensions choisies*

2 Deuxième application : Sélection d'une AGR

Toute tentative de progression soit d'aspect social ou économique nécessite une grande attention à une gamme de critères touchant directement la vie quotidienne de citoyens. Nous laissons aux décideurs le choix des critères qu'ils jugent importants et efficaces pour les aider à choisir le meilleur projet.

Le décideur D_1 a choisi les critères suivants :

$d_{1,1}$: Sociale		$d_{1,2}$: Economique		$d_{1,3}$: Environnementale	
$C_{1,1,1}$	Solidarité	$C_{1,2,1}$	Conservation d'énergie	$C_{1,3,1}$	Protection de la nappe
$C_{1,1,2}$	Accès au logement	$C_{1,2,2}$	Innovation et savoir	$C_{1,3,2}$	RMTD

Tableau A.19 – *Critères choisis par le décideur D_1*

RMTD : Réduction de la masse totale des déchets.

Le gain a une définition monétaire. Il est calculé à partir de la différence entre les dépenses et les bénéfices , c'est pour cela que le décideur D_2 a choisi les critères suivants :

$d_{2,1}$: Economique	
$C_{2,1,1}$	Projet rentable
$C_{2,1,2}$	Projet non risqué

Tableau A.20 – *Critères choisis par le décideur D_2*

Le décideur D_3 est une organisation non gouvernementale, ses buts sont non lucratifs, ses préoccupations destinées, en particulier, aux projets du développement durable social et environnemental. Pour ces raisons, il a choisi les critères suivants :

$d_{3,1}$: Sociale		$d_{3,2}$: Environnementale	
$C_{3,1,1}$	Droit des personnes	$C_{3,2,1}$	Protection de la biodiversité
$C_{3,1,2}$	Droit du travail	$C_{3,2,2}$	RMTD

Tableau A.21 – *Critères choisis par le décideur D_3*

2.2 Affectation des poids

Décideur D_1 " Représentant du pouvoir public"

Le décideur D_1 donne la même importance à toutes ses dimensions choisies. Pour lui, elles ont des rôles égaux dans tout projet de qualité approuvée. Pour cela, il donne le même poids aux trois dimensions pour ne pas préférer l'une à l'autre.

	Dimension $d_{1,1}$	Dimension $d_{1,2}$	Dimension $d_{1,3}$
Poids	$P_{1,1} = \frac{1}{3} = 0.33$	$P_{1,2} = \frac{1}{3} = 0.33$	$P_{1,3} = \frac{1}{3} = 0.33$

Tableau A.22 – Poids des dimensions du décideur D_1

A l'aide de l'échelle de Saaty, le décideur D_1 remplit la matrice de comparaison binaire des critères évaluant l'importance d'un critère par rapport à l'autre de son point de vue.

Dimension $d_{1,1}$			Dimension $d_{1,2}$			Dimension $d_{1,3}$		
	$C_{1,1,1}$	$C_{1,1,2}$		$C_{1,2,1}$	$C_{1,2,2}$		$C_{1,3,1}$	$C_{1,3,2}$
$C_{1,1,1}$	1	5	$C_{1,2,1}$	1	7	$C_{1,3,1}$	1	1
$C_{1,1,2}$	$\frac{1}{5}$	1	$C_{1,2,2}$	$\frac{1}{7}$	1	$C_{1,3,2}$	1	1

Tableau A.23 – Matrice de comparaison des critères de D_1

Remarquons que pour le décideur D_1 , le critère "Accès au logement" est 5 fois plus important que critère "Solidarité", et le critère "Innovation et savoir" est 7 fois plus important que critère "Conservation d'énergie" au moment où les deux critères "Protection de la nappe" et "Réduction de la masse totale des déchets" ont la même importance. À partir de cette matrice et la formule [II.13](#), nous trouvons les poids relatifs suivant :

Dimension $d_{1,1}$		Dimension $d_{1,2}$		Dimension $d_{1,3}$	
$P_{1,1,1}$	$P_{1,1,2}$	$P_{1,2,1}$	$P_{1,2,2}$	$P_{1,3,1}$	$P_{1,3,2}$
0.834	0.166	0.875	0.125	0.5	0.5

Tableau A.24 – Poids relatifs des critères de D_1

2 Deuxième application : Sélection d'une AGR

Comme nous l'avons déjà défini (formule II.15), les poids globaux se calculent à partir des poids relatifs des critères ainsi que les poids des dimensions. En conséquence, le décideur D_1 aura besoin des données de ce tableau ainsi que celles du tableau A.22.

Dimension $d_{1,1}$		Dimension $d_{1,2}$		Dimension $d_{1,3}$	
$P_{1,1} = 0.33$		$P_{1,2} = 0.33$		$d_{1,3} = 0.33$	
$P_{1,1,1} = 0.834$	$P_{1,1,2} = 0.166$	$P_{1,2,1} = 0.875$	$P_{1,2,2} = 0.125$	$P_{1,3,1} = 0.5$	$P_{1,3,2} = 0.5$
$w_{1,1,1} = 0.275$	$w_{1,1,2} = 0.055$	$w_{1,2,1} = 0.289$	$w_{1,2,2} = 0.041$	$w_{1,3,1} = 0.165$	$w_{1,3,2} = 0.165$

Tableau A.25 – *Poids globaux des critères de D_1*

Décideur D_2 " La banque "

Le décideur D_2 a choisi une seule dimension, donc le poids de cette dernière égale à 1. Puis il complète sa matrice de comparaison des critères. Pour lui, un projet non risqué est mieux qu'un projet rentable dans un cas de succès.

Dimension $d_{2,1}$				
	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$		Poids relatif
$C_{2,1}$	1	$\frac{1}{3}$	$P_{2,1,1}$	0.25
$C_{2,2}$	3	1	$P_{2,1,2}$	0.75

Tableau A.26 – *Poids des critères de D_2*

À ce niveau, nous tenons à mentionner que :

$$w_{2,1,1} = P_{2,1,1} \text{ et } w_{2,1,2} = P_{2,1,2}$$

car $w_{i,k,p} = P_{i,k} \times P_{i,k,p}$ et $P_{2,1} = 1$.

Pour le décideur D_3 " ONG "

Cette organisation a considéré, dans sa décomposition, deux dimensions : sociale et environnementale, mais elle favorise plus l'aspect social de tout projet à tenir.

Décideur 3		
	$d_{3,1}$	$d_{3,2}$
$d_{3,1}$	1	3
$d_{3,2}$	$\frac{1}{3}$	1

Tableau A.27 – *Matrice de comparaison des dimensions de D_3*

Ainsi, les poids des deux dimensions trouvés sont : $P_{3,1} = 0.75$ et $P_{3,2} = 0.25$.

Puis le décideur précise l'importance d'un critère par rapport à l'autre dans la dimension sociale et environnementale. De son point de vue, le critère $C_{3,1,1}$ "Droit de la personne" est 3 fois plus important que critère $C_{3,1,2}$ "Droit du travail" au niveau social, et le critère "Protection de la biodiversité" est 5 fois plus important que critère "Réduction de la masse totale des déchets". Ce qui donne la matrice suivante :

Dimension $d_{3,1}$			Dimension $d_{3,2}$		
	$C_{3,1,1}$	$C_{3,1,2}$		$C_{3,2,1}$	$C_{3,2,2}$
$C_{3,1,1}$	1	3	$C_{3,2,1}$	1	5
$C_{3,1,2}$	$\frac{1}{3}$	1	$C_{3,2,2}$	$\frac{1}{5}$	1

Tableau A.28 – *Matrice de comparaison des critères de D_3*

À partir de cette matrice de comparaison, le décideur D_3 arrive à calculer les poids relatifs de chaque critère.

Dimension $d_{3,1}$		Dimension $d_{3,2}$	
$P_{3,1,1}$	$P_{3,1,2}$	$P_{3,2,1}$	$P_{3,2,2}$
0.75	0.25	0.834	0.166

Tableau A.29 – *Poids relatifs des critères de D_3*

Ces poids eux-mêmes seront utilisés avec les poids des dimensions pour calculer les poids globaux des critères préférés et choisis par le décideur. Ainsi, il trouve les évaluations suivantes.

2 Deuxième application : Sélection d'une AGR

	Dimension $d_{3,1}$		Dimension $d_{3,2}$	
Poids de dimension	$P_{3,1} = 0.75$		$P_{3,2} = 0.25$	
Poids relatif	$P_{3,1,1} = 0.75$	$P_{3,1,2} = 0.25$	$P_{3,2,1} = 0.834$	$P_{3,2,2} = 0.166$
Poids global	$w_{3,1,1} = 0.5625$	$w_{3,1,2} = 0.1875$	$w_{3,2,1} = 0.2085$	$w_{3,2,2} = 0.0415$

Tableau A.30 – *Poids globaux des critères de D_3*

2.3 Evaluation des critères

Les critères choisis, par les trois décideurs dans cette application, ont un aspect qualitatif plus qu'un aspect quantitatif (Solidarité, Innovation et savoir, Projet rentable, Projet non risqué). La recherche des fonctions des évaluations pour ces critères fait appel à d'autres facteurs qui les décrivent. Ce qui nous ramènera à étudier les composantes issues de ces critères. Pour sortir de cette circonstance particulière, nous proposons aux décideurs une échelle d'évaluation simple précisant le degré de réalisation des critères par le projet défini comme suit :

nous donnons :

- 0 si le projet ne réalise pas le critère.
- 1 si le projet réalise faiblement le critère.
- 2 si le projet réalise un peu le critère.
- 3 si le projet réalise moyennement le critère.
- 4 si le projet réalise bien le critère.
- 5 si le projet réalise très bien le critère.

Ainsi, le décideur D_1 donne les évaluations des critères pour les trois projets de la manière suivante :

	$C_{1,1,1}$	$C_{1,1,2}$	$C_{1,2,1}$	$C_{1,2,2}$	$C_{1,3,1}$	$C_{1,3,2}$
a_1	4	3	5	1	2	2
a_2	3	2	3	2	3	1
a_3	2	5	4	2	5	4

Tableau A.31 – *Evaluation des critères de D_1*

Une simple normalisation de ces évaluations permet d'avoir le tableau suivant :

Avec ce tableau nous calculons les sommes pondérées relatives des trois dimensions :

Annexe du chapitre 2

	$C_{1,1,1}$	$C_{1,1,2}$	$C_{1,2,1}$	$C_{1,2,2}$	$C_{1,3,1}$	$C_{1,3,2}$
a_1	0.45	0.3	0.41	0.2	0.2	0.29
a_2	0.33	0.2	0.25	0.4	0.3	0.14
a_3	0.22	0.5	0.33	0.4	0.5	0.57

Tableau A.32 – Normalisation d'évaluation de D_1

Dimension		$d_{1,1}$			$d_{1,2}$			$d_{1,3}$		
Critère		$C_{1,1,1}$	$C_{1,1,2}$	S. relatif	$C_{1,2,1}$	$C_{1,2,2}$	S. relatif	$C_{1,3,1}$	$C_{1,3,2}$	S. relatif
poids relatif		0.834	0.166	1	0.875	0.125	1	0.5	0.5	1
Actions	a_1	0.45	0.3	0.425	0.41	0.2	0.383	0.2	0.29	0.245
	a_2	0.33	0.2	0.308	0.25	0.4	0.268	0.3	0.14	0.22
	a_3	0.22	0.5	0.266	0.33	0.4	0.338	0.5	0.57	0.535

Tableau A.33 – Sommes relatives calculées par le décideur D_1

- ◇ Relativement à la dimension sociale, ce décideur déduit que a_1 est mieux que a_2 , elle même est mieux que a_3 .
- ◇ Relativement à la dimension économique, il déduit que a_1 est mieux que a_3 , elle même est mieux que a_2 .
- ◇ Relativement à la troisième dimension, il déduit que a_3 est mieux que a_2 , elle même est mieux que a_1 .

Le fait que le projet a_1 se classe le premier dans deux dimensions nous pousse à penser qu'il réalisera l'objectif global. Autrement dit, il sera l'action optimale relativement à toutes les dimensions. Toutefois, nous ne pouvons pas affirmer ce résultat avant de voir ce que vont donner les sommes globales, car la définition des poids globaux appelle les poids des dimensions, ce qui peut changer toutes les prévisions faites sans calculs.

Le tableau suivant donne ces poids globaux pour le décideur D_1 :

Dimensions		$d_{1,1}$		$d_{1,2}$		$d_{1,3}$		Somme globale
Poids		$P_{1,1} = 0.33$		$P_{1,2} = 0.33$		$P_{1,3} = 0.33$		
Actions	a_1	Sommes p. relatives	$S_{1,1}^m(a_1) = 0.425$	$S_{1,2}^m(a_1) = 0.383$	$S_{1,3}^m(a_1) = 0.245$	$S_1^m(a_1) = 0.347$		
	a_2		$S_{1,1}^m(a_2) = 0.308$	$S_{1,2}^m(a_2) = 0.268$	$S_{1,3}^m(a_2) = 0.22$	$S_1^m(a_2) = 0.262$		
	a_3		$S_{1,1}^m(a_3) = 0.266$	$S_{1,2}^m(a_3) = 0.338$	$S_{1,3}^m(a_3) = 0.535$	$S_1^m(a_3) = 0.375$		

Tableau A.34 – Sommes globales calculées par le décideur D_1

2 Deuxième application : Sélection d'une AGR

Contrairement à toute pensée, le projet a_3 est le meilleur projet proposé au premier décideur de son point de vue.

Maintenant comment la banque, le deuxième décideur, a évalué les trois projets relativement aux deux critères choisis ? La réponse est dans le tableau d'évaluation suivant :

	Evaluation des critères		Normalisation des critères	
Critère	$C_{2,1,1}$	$C_{2,1,2}$	$C_{2,1,1}$	$C_{2,1,2}$
a_1	5	3	0.45	0.25
a_2	4	4	0.36	0.33
a_3	2	5	0.18	0.41

Tableau A.35 – *Evaluation et normalisation des critères de D_2*

Trouver les poids des critères et leurs évaluations permet de calculer les sommes pondérées.

Dimension		$d_{2,1}$		
Critère		$C_{2,1,1}$	$C_{2,1,2}$	S. relatif
Poids relatif		0.25	0.75	1
Actions	a_1	0.45	0.25	0.3
	a_2	0.36	0.33	0.3375
	a_3	0.18	0.41	0.3525

Tableau A.36 – *Somme relative pour D_2*

Les sommes globales sont exactement les sommes relatives du fait que le décideur D_2 "Banque" a choisi une seule dimension. C'est-à-dire :

$$S_{2,1}^m(a_j) = S_2^m(a_j) \text{ pour } j = 1, 2, 3$$

Donc, l'action optimale est celle qui maximise les sommes relatives trouvées, c'est l'action a_3 . Nous concluons que cette banque encourage le financement du troisième projet.

Le décideur D_3 a choisi deux dimensions : sociale et environnementale, chacune a deux critères. Puis il remplit le tableau ci-dessous par les évaluations de ces critères par rapport à chaque projet.

Critère	$C_{3,1,1}$	$C_{3,1,2}$	$C_{3,2,1}$	$C_{3,2,2}$
a_1	3	0	3	2
a_2	5	3	2	1
a_3	2	4	4	4

Tableau A.37 – *Evaluation des critères de D_3*

Une étape de normalisation est nécessaire afin d'avoir une compatibilité d'échelle.

Critère	$C_{3,1,1}$	$C_{3,1,2}$	$C_{3,2,1}$	$C_{3,2,2}$
a_1	0.3	0	0.33	0.28
a_2	0.5	0.42	0.22	0.14
a_3	0.2	0.57	0.44	0.57

Tableau A.38 – *Normalisation des critères de D_3*

Voici les différentes sommes pondérées relatives calculées.

Dimension		$d_{3,1}$			$d_{3,2}$		
Critère		$C_{3,1,1}$	$C_{3,1,2}$	S. relatif	$C_{3,2,1}$	$C_{3,2,2}$	S. relatif
Poids relatif		0.75	0.25	1	0.834	0.166	1
Actions	a_1	0.3	0	0.225	0.33	0.28	0.321
	a_2	0.5	0.42	0.48	0.22	0.14	0.206
	a_3	0.2	0.57	0.292	0.44	0.57	0.461

Tableau A.39 – *Somme relative de D_3*

- ◇ Relativement à la dimension sociale, ce décideur déduit que a_2 est mieux que a_3 , elle même est mieux que a_1 .
- ◇ Relativement à la dimension environnementale, il déduit que a_3 est mieux que a_1 , elle même est mieux que a_2 .

et nous calculons les sommes globales pour chercher la meilleure action globalement.

2 Deuxième application : Sélection d'une AGR

Dimensions		$d_{3,1}$		$d_{3,2}$	Somme globale 1
Poids		$P_{3,1} = 0.75$		$P_{3,2} = 0.25$	
Actions	a_1	Sommes p. relatives	$S_{3,1}^m(a_1) = 0.225$	$S_{3,2}^m(a_1) = 0.321$	$S_3^m(a_1) = 0.249$
	a_2		$S_{3,1}^m(a_2) = 0.48$	$S_{3,2}^m(a_2) = 0.206$	$S_3^m(a_2) = 0.411$
	a_3		$S_{3,1}^m(a_3) = 0.292$	$S_{3,2}^m(a_3) = 0.461$	$S_3^m(a_3) = 0.334$

Tableau A.40 – *Somme globale de D_3*

Ainsi nous obtenons un nouveau classement différent de celui trouvé par les sommes pondérées relatives où le meilleur projet proposé au troisième décideur est le projet a_3 puis a_2 et enfin a_1 . Exceptionnellement, les trois décideurs ont choisi le projet a_3 , sans que l'un influence la décision de l'autre. Ce projet a de la chance d'être financé par les trois décideurs à la fois.

Annexe du chapitre 3

3 Problème de ciblage d'aide

Si l'objectif du décideur est de renforcer la situation économique, c'est-à-dire s'il cherche à augmenter le revenu monétaire indépendamment des conséquences sociales, il choisira la valeur α qui représente la voie économique supérieure à la valeur β qui représente la voie sociale. Etant donné que α s'éloigne de β , l'écart entre les deux situations augment. Par contre, si les deux paramètres se rapprochent, cet écart diminue. Comme exemple du choix de ces paramètres, nous pouvons simplifier et prendre $\beta = \lambda\alpha$, avec $\lambda > 0$. Les différentes possibilités seront représentées via le choix de ce dernier.

Si nous nous intéressons à la situation économique, il suffit de prendre $\lambda > 1$. Nous citons les deux tableaux suivants à titre d'exemples :

$$\lambda = \frac{4}{3} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline e^{\frac{-7}{3}\alpha} & e^{-\alpha} & e^{\frac{1}{3}\alpha} \\ \hline e^{\frac{-4}{3}\alpha} & 1 & e^{\frac{4}{3}\alpha} \\ \hline e^{\frac{-1}{3}\alpha} & e^{\alpha} & e^{\frac{7}{3}\alpha} \\ \hline \end{array} \quad \lambda = \frac{3}{2} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline e^{\frac{-5}{2}\alpha} & e^{-\alpha} & e^{\frac{1}{2}\alpha} \\ \hline e^{\frac{-3}{2}\alpha} & 1 & e^{\frac{3}{2}\alpha} \\ \hline e^{\frac{-1}{2}\alpha} & e^{\alpha} & e^{\frac{5}{2}\alpha} \\ \hline \end{array}$$

Si nous nous intéressons à la situation sociale, il suffit de prendre $\lambda < 1$. Prenons, alors, les deux exemples suivants :

$$\lambda = \frac{3}{4} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline e^{\frac{-7}{4}\alpha} & e^{-\alpha} & e^{\frac{-1}{4}\alpha} \\ \hline e^{\frac{-3}{4}\alpha} & 1 & e^{\frac{3}{4}\alpha} \\ \hline e^{\frac{1}{4}\alpha} & e^{\alpha} & e^{\frac{7}{4}\alpha} \\ \hline \end{array} \quad \lambda = \frac{2}{3} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline e^{\frac{-5}{3}\alpha} & e^{-\alpha} & e^{\frac{-1}{3}\alpha} \\ \hline e^{\frac{-2}{3}\alpha} & 1 & e^{\frac{2}{3}\alpha} \\ \hline e^{\frac{1}{3}\alpha} & e^{\alpha} & e^{\frac{5}{3}\alpha} \\ \hline \end{array}$$

Remarquons que ces tableaux sont faciles à lire et à interpréter. En effet :

- Ils sont caractérisés par une symétrie autour de 1 au niveau des valeurs prises par la fonction exponentielle.
- Ses valeurs sont ordonnées en croissance avec une lecture horizontale, verticale ou même diagonale, ce qui permet de calculer l'écart d'une situation à une autre et de les comparer correctement.

Annexe du chapitre 4

Théorème 3.1 (Lagrange) :

Soit P le polynôme défini par : $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x^1 + a_0$, supposons que $a_n > 0$ et que les a_k ne sont pas tous positifs ou nuls. Soit $K < n$ le plus grand naturel tel que $a_K < 0$, posons

$$A = \max\{|a_k| : a_k < 0\}$$

alors, tout zéro $x > 0$ de P est tel que :

$$x < 1 + \sqrt[n-K]{\frac{A}{a_n}} \quad (1)$$

Preuve 24 Supposons par absurde que :

$$x \geq 1 + \sqrt[n-K]{\frac{A}{a_n}}$$

Si dans l'expression $a_n x^n + \dots + a_1 x^1 + a_0$ on remplace $a_{n-1}, \dots, a_{K+1}$ par 0 et chaque $a_K, \dots, a_0$ par $-A$, on obtient une expression plus petite. Ainsi :

$$P(X) = a_n x^n - Ax^K - Ax^{K-1} - \dots - Ax - A \geq a_n x^n - A \frac{x^{K+1} - 1}{x - 1}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} P(x) &> a_n x^n - A \frac{x^{K+1} - 1}{x - 1} \\ &> \frac{a_n x^{K+1}}{x - 1} (x^{n-K-1} (x - 1) - \frac{A}{a_n}) \\ &> \frac{a_n x^{K+1}}{x - 1} ((x - 1)^{n-K} - \frac{A}{a_n}) \end{aligned}$$

Or $(x - 1)^{n-K} - \frac{A}{a_n}$. Donc $P(x) > 0$, Autrement, dit il ne s'annule pas et la conclusion en découle.

Résumé :

Les travaux de recherche menées dans cette thèse s'inscrivent dans le champ de l'étude et de l'analyse mathématiques des structures microéconomiques. Le But est de construire des outils modélisant les structures du secteur informel. Le premier de nos objectifs est de formaliser une approche pour la construction d'un modèle d'évaluation des projets d'activités génératrices de revenus AGR, en tenant compte de plusieurs données multidimensionnelles, multicritères, multi-décideurs pour des intérêts socioéconomiques.

Le deuxième objectif est la quantification de rentabilité à travers des critères et des indices d'évaluations et de sélections. Nous avons pu construire une partition ordonnée des AGR à partir de la valeur actuelle nette. L'indice de profitabilité proposé a abouti à un algorithme du choix optimal ou admissible de ces structures. Ceci nous a permis d'obtenir un outil de comparaison entre les classes, et par la suite à construire un référentiel d'aide au financement.

Le dernier objectif de ce travail est d'introduire la notion du risque caractérisant l'économie informelle, il fallait adopter une approche probabiliste, dans laquelle nous avons montré son impact sur les profits des opérateurs financiers. Optimiser les profits des opérateurs financiers et proposer des stratégies de distributions des gains sont parties des aboutissements de ce travail.

Mots clés :

Classification ; développement durable ; équation bilan ; étude analytique ; indice ; informel ; modélisations ; microéconomie ; optimisation ; probabilité ; rentabilité ; risque ; stratégie.

Abstract :

The research work conducted in this thesis falls within the field of mathematic analysis and micro economic structures. It aims at building and constructing the tools modelling the informal sector structures. One of our major objectives is to formalise an approach to construct a model to evaluate projects generating income GAR taking into consideration different multi- dimensional data, multi-criteria and multi decision- makers for the sake of socioeconomic interests.

The second objective was the quantification of profitability through evaluation and selection criteria and indices. We managed to construct an ordered partition of the GAR through the net actual value. The index of the suggested profitability has allowed to reach an algorithm the optimal or acceptable choice of these structures. This objective has allowed us to obtain a comparison tool between the classes, which has led us to construct an assistance referential for financing.

The last objective of this work is to introduce the risk notion characterising informal economy. This notion has guided us to words a probabilistic study through which we have displayed its impact on the financial operator projects. Optimising these profits and suggesting gain distribution strategies are major parts of the realisation of this work.

Keywords :

Analytical study ; classification ; equation balance ; index ; informal ; micro-economy ; modelling ; optimisation ; probability ; profitability ; risk ; strategy ; sustainable development.