



UNIVERSITÉ MOHAMMED V - AGDAL
FACULTÉ DES SCIENCES
Rabat



N° d'ordre 2713

THÈSE DE DOCTORAT ES SCIENCES (DOCTORAT D'ETAT)

Présentée par

Najib BENNIS

Discipline : PHYSIQUE
Spécialité : AUTOMATIQUE

**Contribution à la commande robuste $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$ centralisée et décentralisée
et la réduction optimale de modèles par les
Inégalités Matricielles Linéaires**

Soutenue le 21 juin 2014

Devant le jury

Président :

Mohamed HALOUA : Professeur de l'Enseignement Supérieur, Ecole Mohammadia d'Ingénieurs de Rabat

Examineurs :

- Mohamed KACIM : Professeur de l'Enseignement Supérieur, Institut National des Postes et des Télécommunications de Rabat

- Saâd LISSANE ELHAQ : Professeur de l'Enseignement Supérieur, Ecole Nationale Supérieure d'Électricité et de Mécanique de Casablanca

- Ali SOUISSI : Professeur de l'Enseignement Supérieur, Faculté des Sciences de Rabat

- Hussein YOULAL : Professeur de l'Enseignement Supérieur, Faculté des Sciences de Rabat

Avant-Propos

Le travail de recherche présenté dans ce mémoire est l'aboutissement de plusieurs années de recherche au sein de l'Unité de Formation et de Recherche en Automatique et Technologies de l'Information (UFR-ATI) à la Faculté des Sciences de Rabat dans le domaine de la commande robuste centralisée/décentralisée et ses applications aux procédés industriels. Une partie de ce travail est le fruit de l'étroite collaboration avec l'Université de Toulon-Var (France) dans le cadre de l'action intégrée sur le thème « Le développement et l'application des techniques avancées de contrôle et de gestion pour une meilleure production agricole dans les exploitations sous serres et pour des économies en eau ». C'est aussi le fruit des rencontres fructueuses lors de mes séjours scientifiques au LAAS de Toulouse (France).

Mes premiers remerciements reviennent à mon directeur de thèse, Monsieur Hussein YOULAL, Professeur à la Faculté des Sciences de Rabat. Je lui exprime ma profonde gratitude et le remercie pour sa clairvoyance à diriger la recherche. Je le remercie aussi pour la patience et la compréhension qu'il a toujours manifestée à mon égard. Ses qualités scientifiques et humaines font de lui le meilleur souvenir que je garderais de ces dernières années de recherche.

Mes remerciements les plus sincères vont également à Monsieur Mohamed HALOUA, Professeur à l'École Mohammedia d'Ingénieurs de Rabat, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance. Je lui dois ma reconnaissance pour sa contribution et la valorisation des travaux de recherche et aussi pour son soutien moral qu'il m'a toujours apporté.

Je tiens à remercier vivement Monsieur Ali SOUISSI, Professeur à la Faculté des Sciences de Rabat pour avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse.

Je remercie également Monsieur Mohamed KACIM, Professeur à INPT de Rabat pour avoir accepté d'expertiser ce travail et d'être rapporteur de ma thèse, et aussi pour ses suggestions constructives.

J'exprime mes vifs remerciements à Monsieur Saad LISSANE ELHAQ, Professeur à l'ENSEM de Casablanca pour avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse. Sa lecture approfondie de ce mémoire et ses remarques m'ont été très utiles.

Que Messieurs les Professeurs Gille ENÉA et Jean DUPLAIX de l'Université de Toulon trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude pour m'avoir accueilli au sein de leur laboratoire LSIS. Je leur adresse mes sincères remerciements pour avoir mis à ma disposition des données expérimentales relatives à la serre agricole expérimentale installée au campus à l'université de Toulon. Je les remercie aussi pour leur contribution dans mes travaux de recherche entrepris dans le cadre de l'action intégrée.

Mes sincères remerciements s'adressent au Professeur J. BERNUSSOU du LAAS de Toulouse et à son équipe de recherche pour l'aimable accueil qui m'ont réservé pendant mes séjours scientifiques, pour les nombreuses discussions fructueuses et aussi de m'avoir facilité l'accès à la documentation scientifique.

Enfin, mes remerciements vont aussi à tous mes collègues et amis de l'ENSET de Rabat pour leur sincère soutien et encouragement.

Dédicaces

A mes chers parents,

Que Dieu ait miséricorde pour eux et leur accorde une place en son vaste jardin. Merci pour tout ce que vous m'avez donné.

A ma famille,

Ma bien aimée épouse Aurania, mes chers et adorables enfants Yasmine, Sarah et Ismail. Merci pour votre amour et soutien.

Sommaire

Introduction générale

Motivations de la thèse	004
Organisation du mémoire et contribution de la thèse	006

Chapitre 1 : Modélisation des systèmes dynamiques dans le cadre de la commande robuste

1.1 Introduction	007
1.2 Rappel sur la modélisation des systèmes	007
1.2.1 Les modèles linéaires	008
1.2.2 Les modèles non-linéaires	009
1.2.3 Les modèles algébro-différentiels	011
1.2.4 Les modèles implicites	011
1.2.5 Sur la modélisation des systèmes incertains	012
1.2.6 Les modèles LTV	019
1.2.7 Les modèles LPV	020
1.2.8 Les modèles pour les systèmes de grande dimension	021
1.3 Conclusion	027

Chapitre 2 : Outils pour l'analyse et la synthèse de la commande robuste

2.1 Introduction	028
2.2 Rappel sur les normes	028
2.2.1 Norme d'un signal	028
2.2.2 La norme $\mathcal{H}_2$	028
2.2.3 La norme $\mathcal{H}_\infty$	031
2.2.4 La norme de Hankel	033
2.3 Les inégalités linéaires matricielles, un outil pour l'Automatique	033
2.3.1 Bref historique	033
2.3.2 La convexité et l'optimisation convexe	033
2.3.3 LMI : Définitions et quelques problèmes associés	035
2.3.4 Aspect algorithmique pour la résolution des LMIs	036
2.3.5 Les principales propriétés des LMI(s)	037
2.3.6 La LMI, un outil plus général que les équations de Riccati	039
2.3.7 Intérêt théorique et pratique des LMIs	040
2.3.8 Algorithme de complémentarité conique	041
2.3.9 Les Inégalités Matricielles Bilinéaires	043
2.3.10 Notions de LMIs étendues et systèmes implicites	053
2.4 Transformation Fractionnaire Linéaire	053
2.4.1 Introduction	053
2.4.2 Définitions	054
2.4.3 Règles de construction	056
2.4.4 Exemples de mise en forme de LFT	057
2.5 Les valeurs singulières.....	059
2.6 Conclusion.....	061

Chapitre 3 : Commande $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ par la formulation des Inégalités Matricielles Linéaires

3.1 Introduction	062
3.2 Cadre général de la synthèse optimale des systèmes linéaires continus	062
3.2.1 Modélisation dans le cadre de la commande robuste et forme standard	062
3.2.2 Objectif de la synthèse optimale	063
3.2.3 Bref historique de la synthèse $\mathcal{H}_\infty$	065
3.2.4 Comparaison entre les normes $\mathcal{H}_\infty$ et $\mathcal{H}_2$	065
3.3 Stabilité interne et représentation d'état	066
3.4 Synthèse $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ dans le cas d'un retour d'état par l'approche classique	067

3.4.1 Synthèse $\mathcal{H}_2$ par retour d'état	068
3.4.2 Synthèse $\mathcal{H}_\infty$ par retour d'état	069
3.4.3 Synthèse $\mathcal{H}_2$ par retour de sortie dynamique	070
3.4.4 Synthèse $\mathcal{H}_\infty$ par retour de sortie dynamique	071
3.4.5 Synthèse du contrôleur $\mathcal{H}_\infty$ dans un cadre plus général	073
3.5 Synthèse $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ par LMI	074
3.5.1 Stabilisation par retour d'état	075
3.5.2 Stabilisation par retour de sortie dynamique.....	075
3.5.3 Synthèse et performance $\mathcal{H}_2$ par retour d'état statique	078
3.5.4 Synthèse et performance $\mathcal{H}_2$ par retour de sortie dynamique	080
3.5.5 Synthèse $\mathcal{H}_\infty$ par retour d'état statique	081
3.5.6 Synthèse $\mathcal{H}_\infty$ par retour de sortie dynamique	081
3.6 Synthèse $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ par LMI (Cas incertain)	083
3.6.1 Introduction à la synthèse multi-modèle	083
3.6.2 Stabilisation quadratique par l'approche LMI	084
3.7 Stabilisation par retour de sortie dynamique avec contrainte d'ordre	086
3.7.1 La motivation de la recherche d'un contrôleur d'ordre réduit	086
3.7.2 Synthèse d'un gain de retour de sortie statique	087
3.7.3 Synthèse d'un contrôleur par de retour de sortie dynamique d'ordre fixe	088
3.7.4 Problème $\mathcal{H}_\infty$ standard sous-optimal d'ordre réduit r	090
3.8 Commande par placement de pôles et formulation LMI	094
3.8.1 zone de performance	095
3.8.2 Commande par retour d'état	095
3.8.3 Commande par retour de sortie dynamique	096
3.8.4 Extension au cas des systèmes incertains et récapitulation des résultats	097
3.9 Commande mixte $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$ des systèmes certains et extension aux systèmes incertains.....	098
3.9.1 Formulation du problème de la commande mixte par retour d'état statique...	099
3.9.2 Formulation du problème de la commande mixte par retour de sortie dynamique.....	099
3.10 Commande des systèmes décentralisés	100
3.10.1 Position générale du problème	100
3.10.2 Extension de la synthèse $\mathcal{H}_\infty$ centralisé au cas décentralisé	104
3.10.3 Synthèse $\mathcal{H}_\infty$ de la commande décentralisée par la méthode de l'homotopie	106
3.10.4 Synthèse $\mathcal{H}_\infty$ de la commande décentralisée par la méthode de l'homotopie pour les systèmes composites- Méthode 1	107
3.10.5 Synthèse $\mathcal{H}_\infty$ de la commande décentralisée par la méthode de l'homotopie pour les systèmes composites - Méthode 2	110
3.10.6 Synthèse $\mathcal{H}_\infty$ de la commande décentralisée par observateur d'état	112
3.10.7 Synthèse $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$ de la commande décentralisée par paramétrisation des Contrôleurs	120
3.11 Conclusion	129

Chapitre 4 : La réduction de modèle à la lumière des Inégalités Matricielles Linéaires

4.1 Introduction	130
4.2 Réduction de "type boucle ouverte"	131
4.2.1 Réduction modale par agrégation	132
4.2.2 Réduction par troncature des valeurs singulières de Hankel	132
4.2.3 Réduction optimale	135
4.2.4 Réduction optimale selon la norme $\mathcal{H}_\infty$ par l'approche des LMIs	136
4.2.5 Réduction optimale selon la norme $\mathcal{H}_2$ par approche les LMIs	148
4.2.6 Réduction de modèle des systèmes instables	155

4.2.7 Conclusion sur la réduction de "type boucle ouverte"	156
4.3 Réduction à posteriori tenant compte de la boucle fermée	156
4.3.1 Cas des systèmes centralisés	156
4.3.2 Extensions aux systèmes interconnectés	159
4.4 Conclusion	162

Chapitre 5 : Applications de la commande $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$

5.1 Introduction	163
5.2 Rejet de perturbations dans une colonne binaire de distillation. Approche robuste par LMI	163
5.2.1 Introduction	163
5.2.2 Modélisation d'une colonne binaire de distillation	164
5.2.3 Réduction de modèle	168
5.2.4 Rejet de perturbations par régulateurs $\mathcal{H}_\infty$ et PI	172
5.2.5 Simulation et résultats	176
5.2.6 Conclusion	178
5.3 Contrôle climatique d'une serre agricole.....	178
5.3.1 Introduction au contrôle climatique	178
5.3.2 Présentation de la serre expérimentale	180
5.3.3 Modélisation et identification	182
5.3.4 Contrôle du microclimat de la serre expérimentale	187
5.3.5 Simulation et résultats.....	190
5.3.6 Conclusion.....	197
5.4 Contrôle décentralisé d'un système aérothermique	198
5.4.1 Description et identification du système	198
5.4.2 Approche par paramétrisation des contrôleurs $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ décentralisée par les LMI	199
5.4.3 Approche par PID décentralisée avec découplage des commandes	204
5.4.4 Conclusion	205
Conclusion générale	207
Annexes	209
Références bibliographiques	214
Abstract	223
Résumé	224

Notations et Acronymes

Notations

$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathfrak{R}^{n \times m}$	Ensembles des matrices à coefficients réels, de dimensions (n,m)
j	$\sqrt{-1}$
$:=, \triangleq$	Egal par définition, équivalent
$0, 0_n, 0_{n \times m}$	Matrice nulle de dimension appropriée, de dimension (n,n) , de dimension (n,m)
I, I_n	Matrice identité de dimension appropriée, de dimension (n,n)
A^T	Transposée de la matrice A
A^{-1}	Inverse de la matrice A
A^{-T}	Transposée de l'inverse de la matrice A , Inverse de la matrice transposée
$A^\perp, A_\perp$	Base de l'orthogonal de A
A^+	Pseudo-inverse de Moore-Penrose de A
Trace (A), $\text{Tr}(A)$	Trace de la matrice A
Rang (A)	Rang de la matrice A
$\text{Diag}(A_1, A_2, \dots, A_n)$	$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & A_n \end{bmatrix}$
$\lambda_{\max}(A), \lambda_{\min}(A)$	Valeur propre maximale, minimale, de la matrice A
$\bar{\sigma}(A)$	$\sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$, Valeur singulière maximale de la matrice A
$\underline{\sigma}(A)$	$\sqrt{\lambda_{\min}(A^T A)}$, Valeur singulière minimale de la matrice A
$\rho(A)$	Rayon spectral de la matrice A
$\otimes$	Produit matriciel de Kronecker
s, z	Variable de Transformée de Laplace, Variable de Transformée en Z
$X \geq 0$ (> 0)	Matrice symétrique semi-définie positive (positive)
$\mathcal{RL}_2$	Ensemble des matrices de fonctions de transfert rationnelles à coefficients réels, strictement propres, n'ayant pas de pôle sur l'axe imaginaire.
$\mathcal{RH}_2$	Ensemble des fonctions de transfert stables de $\mathcal{RL}_2$
$\mathcal{RL}_\infty$	Ensemble des matrices de fonctions de transfert rationnelles à coefficients réels, n'ayant pas de pôle sur l'axe imaginaire.
$\mathcal{RH}_\infty$	Ensemble des fonctions de transfert stables de $\mathcal{RL}_\infty$
$G(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$	Représentation d'état d'un système $G(s)$
$G(s) = (A, B, C, D)$	

$\|G(s)\|_2$ Norme $\mathcal{H}_2$ d'une fonction de transfert $G(s)$

$\|G(s)\|_\infty$ Norme $\mathcal{H}_\infty$ d'une fonction de transfert $G(s)$

Acronymes

LMI (LMIs)	L inear M atrix I nequality (Inégalité(s) Matricielle(s) Linéaire(s))
BMI	B ilinear Matrix I nequality (Inégalité Matricielle Bilinéaire)
LFT	L inear F ractional T ransformation (Transformation Fractionnaire Linéaire)
SOF	S tatic O utput F eedback (Commande par retour de sortie statique)
LQ	L inear Q uadratic (Commande Linéaire Quadratique)
LPV	L inear P arameter V arying (Système Linéaire à Paramètre Variant)
LTi	L inear T ime I nvariant (Système Linéaire Invariant dans le temps)
LTV	L inear Time V arying (Système Linéaire variant dans le temps)

Introduction générale

Introduction générale

Motivations de la thèse

Au fil du temps, l'Automatique a connu un réel progrès. Jusque dans les années 60, à l'époque de "l'Automatique classique", la conception de régulateur se faisait dans le domaine fréquentiel à l'aide des lieux de Nyquist, de Black,... Les outils utilisés pour caractériser la robustesse et les performances des systèmes étaient essentiellement la marge de gain, la marge de phase et l'étude des fonctions de sensibilité dans le plan de Bode. L'Automatique moderne est apparue dans les années 1960 avec la représentation d'état introduite par les premiers travaux de Kalman. Les techniques utilisées étaient principalement des techniques de placement de pôles pour des synthèses de type retour d'état avec/sans observateur d'état. Ces techniques conduisent à des théorèmes de stabilité pour le système nominal et permettent le choix de la dynamique en boucle fermée pour le système nominal mais ne donnent aucune garantie de robustesse, ce qui explique leur échec dans de nombreuses applications. Seule exception, la théorie de la commande Linéaire Quadratique (LQ) introduite en 1964 par Kalman offre certaines garanties de robustesse, à travers, des marges de stabilité convenables.

Par ailleurs, les hypothèses simplificatrices faites lors de la modélisation et les variations paramétriques du système engendrent des incertitudes de modèle. Ainsi, pour une modélisation plus réaliste d'un système physique, une solution naturelle est d'inclure ces incertitudes dans le modèle utilisé aussi bien pour l'analyse que pour la synthèse. De cette façon, le système réel est caractérisé par un ensemble de modèles admissibles. Ceci a conduit à l'émergence de la théorie de la commande robuste. Un système est dit alors robuste est un système qui garde ses caractéristiques et ses performances même sous l'influence de perturbation. Une commande est dite robuste si elle permet au système de préserver toutes ses propriétés, soit en prenant en compte les incertitudes au niveau de la synthèse, soit alors parce qu'elle est conçue implicitement à garantir certaines marges de stabilité et/ou de performance.

Face à un besoin incessant de performance dans la commande des systèmes de plus en plus complexe, il est nécessaire d'adopter une formulation avancée pour appréhender ces systèmes. Parmi les approches ayant contribué ces dernières années de manière significative dans le domaine de robustesse est sans aucun doute la commande $\mathcal{H}_\infty$ qui, initialement formulé dans le domaine fréquentiel, a eu plus tard une formulation dans le domaine temporel (Représentation d'état). Dès lors, la commande $\mathcal{H}_\infty$ n'a cessé d'attirer l'intérêt d'Automaticiens. En effet, pour assurer la stabilité du système, malgré les incertitudes dues à la méconnaissance du modèle exact ou à des variations paramétriques du système, le critère de la norme $\mathcal{H}_\infty$ est souvent utilisé comme exigence de synthèse grâce aux liens existant entre la norme d'une certaine fonction de transfert et la stabilité.

Dans la littérature, un critère de performance largement utilisé est la norme $\mathcal{H}_2$, car nous pouvons tirer profit de l'équivalence entre ce critère et celui de la commande linéaire quadratique réputée par sa performance notamment les bonnes marges de stabilité qu'elle permet de garantir. En combinant ces deux critères, nous obtenons le problème de synthèse connu dans la littérature comme le problème mixte $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$.

En leur début, les approches de type $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$ ou encore mixte, ont été abordées en faisant appel à la résolution d'un jeu d'équations de type Riccati basées sur des contraintes égalités. Plus

tard, un grand nombre de problèmes d'Automatique, concernant la robustesse peuvent se traduire sous la forme d'un ensemble d'inégalités matricielles linéaires (LMI/LMIs). Cette nouvelle approche a été vite adoptée pour devenir un moyen très élégant pour formuler de nombreux problèmes d'optimisation convexe sous de contraintes matricielles. En effet, de nombreux travaux ont montré qu'un grand nombre de problèmes qui apparaissaient difficile, voire impossible, à résoudre de manière analytique, pouvaient se reformuler et se résoudre par l'approche des LMIs.

Les LMIs ont, non seulement contribué à la résolution des problèmes de synthèse de contrôleurs robustes de type $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$, mais aussi dans d'autres domaines comme la réduction optimale d'ordre des modèles dont l'ordre est jugé contraignant pour la synthèse des lois de commande et/ou pour leur d'implantation.

Ce succès s'explique également par le développement des algorithmes de résolution des LMIs, par la puissance de calcul numérique et par l'émergence de solveurs commerciaux de plus en plus rapides et bien adaptés.

Indépendamment de l'approche retenue pour la synthèse de contrôleurs performants, à savoir par la résolution des équations de Riccati ou par la résolution d'un ensemble d'inégalités matricielles, un contrôleur de type $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$ est souvent critiqué pour sa dimension qui peut égale, voire supérieure, à celle du système commandé. Paradoxalement, plus nous introduisons des fonctions de pondérations afin d'exprimer le besoin en performance, plus la dimension de ces contrôleurs augmentent. Dans ce contexte, deux approches peuvent être envisagées pour obtenir des procédures systématiques permettant d'aboutir à des correcteurs performants d'ordre le plus faible possible. La synthèse directe d'un correcteur d'ordre minimal est l'approche la plus séduisante. C'est une méthode globale, qui prend en compte à la fois les contraintes de la boucle fermée et celles sur l'ordre du correcteur. La seconde démarche, plus classique, procède en deux temps : une synthèse robuste est suivie d'une phase de réduction à posteriori du correcteur ou une réduction du modèle du système suivie d'une synthèse robuste. Il est alors nécessaire d'étudier les couplages entre ces deux techniques, en particulier l'impact de la réduction sur les performances de la loi de commande. Le formalisme LMI permet également d'apporter un nouvel éclairage sur ces techniques, soit en se ramenant à un problème de synthèse avec contrainte d'ordre, soit en interprétant directement les contraintes imposées en termes d'inégalités matricielles.

Compte tenu de l'apport des LMIs dans la formulation et la résolution de nombreux problèmes liés notamment à la synthèse des lois de commande et à la réduction optimale d'ordre d'une part et l'abondance des contributions rencontrées dans la littérature en ces dernières années d'autre part, il nous a semblé opportun de proposer une synthèse ciblée et harmonieuse s'articulant sur les commandes $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$ et la réduction d'ordre. C'est un travail fastidieux que nous tentons de mener le mieux possible afin qu'il puisse être considéré comme une source de puisement dans les deux domaines abordés.

Dans ce travail, un intérêt particulier est accordé à la commande robuste décentralisée. Une contrainte structurelle sur la loi de commande telle que la commande décentralisée conduit intuitivement à une certaine complexité dans la synthèse de la loi de commande. Nous verrons comment les outils de la synthèse centralisée peuvent être étendus à la synthèse décentralisée par le formalisme des LMIs. Précisons que ce problème est toujours ouvert de nos jours et toute contribution dans ce domaine est fortement appréciée.

Organisation du mémoire et contribution de la thèse

Le chapitre 1 est consacré à un bref rappel sur la modélisation des systèmes dynamiques continus aussi bien dans le contexte des systèmes certains qu'aux systèmes incertains. Nous avons aussi jugé utile de s'attarder sur la modélisation des systèmes décentralisés compte tenu de la large place qui leur est accordé dans ce travail.

Le chapitre 2 rassemble quelques outils pour la synthèse de contrôleurs robustes. L'accent est mis particulièrement sur les LMIs compte tenu de la grande place qu'elles occupent dans cette thèse, et ce, sans prétendre se substituer aux références spécialisées dans ce domaine. L'accent est mis également sur l'aspect algorithmique pour résoudre un certain nombre de problème de commande formulé en termes des LMIs.

Le chapitre 3 propose une synthèse sur l'apport de l'approche LMI dans le cadre de la commande $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ et aux liens avec la solution classique formulée en termes d'équations de Riccati. La contribution principale de ce chapitre réside dans le fait qu'il rassemble un grand nombre des avancées de la synthèse de type $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ par le formalisme des LMIs dans le cadre des systèmes continus. Cette synthèse est faite de manière à clarifier les méthodologies proposées en les enrichissant par des algorithmiques pour la mise en œuvre pratique. Dans ce travail, la commande décentralisée prend un intérêt particulier.

Le chapitre 4 présente ensuite les principales méthodes de réduction de modèle, revisitées à la lumière des inégalités matricielles. Certaines font l'objet de développements et commentaires personnels dans le cadre des LMIs notamment lorsque le problème abordé est analogue à un problème de synthèse $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ avec contrainte d'ordre. Là aussi, Il s'agit d'une contribution clé de cette thèse puisque nous avons structuré le travail de manière à formuler le problème de la réduction d'ordre comme un problème de synthèse de contrôleurs de type $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ par le formalisme des LMIs en mettant l'accent sur l'aspect algorithmique. En somme, il s'agit de la réduction optimale d'ordre à la lumière des LMIs.

Le dernier chapitre de ce mémoire est consacré à quelques applications de la commande de type $\mathcal{H}_2$ et/ou $\mathcal{H}_\infty$ à trois processus de nature différente. Il s'agit précisément du rejet de perturbations dans une colonne binaire de distillation semi-industrielle installée à la Faculté des Sciences de Rabat, du contrôle du microclimat dans une serre expérimentale installée à l'Université de Toulon et du Var (France) dans le cadre d'une intégrée Franco-Marocaine¹, et enfin le contrôle décentralisé d'un prototype expérimental de type aérothermique installé à l'Ecole Supérieure de Technologie de Salé. Pour chacun de ces systèmes, des méthodologies sont proposées allant de l'étape de la modélisation/identification jusqu'à la mise au point d'une stratégie de contrôle. Le tout est couronné par des simulations numériques ou des essais en temps réel.

Nous terminons par une conclusion générale et quelques perspectives de ce travail. Des annexes fournies à la fin de ce manuscrit complètent certains développements théoriques considérés ici.

¹ Action Intégrée AI-224/SI/00

Chapitre 1

**Modélisation des systèmes dynamiques
dans le cadre de la commande robuste**

Chapitre 1

Modélisation des systèmes dynamiques dans le cadre de la commande robuste

1.1 Introduction

Bien que dans le cadre de notre travail, nous nous intéressons à des modèles linéaires invariants dans le temps, de dimension finie, déterministes, multivariables, à temps continu ou à temps discret. Nous avons jugé utile de dresser un bref panorama sur les différents systèmes qui ont suscités l'intérêt de la communauté d'automaticiens. Ces systèmes ont fait l'objet de plusieurs travaux s'inscrivant dans le cadre de la commande robuste. Ceci nous amène naturellement à la modélisation des systèmes incertains. Une attention particulière est réservée aux systèmes dits de grande dimension ou complexes pour lesquels la notion de décentralisation est souvent adoptée.

Par la suite nous désignons le temps par la variable indépendante t pour les systèmes continus et par k pour les systèmes discrets. Dans le domaine complexe, nous utilisons respectivement la variable s et z pour les systèmes continus et les systèmes discrets.

1.2 Rappel sur la modélisation des systèmes

Rappelons brièvement la notion de modèle. Un modèle dynamique correspond à une représentation mathématique du comportement d'un processus physique. Des grandeurs reliées par des relations de cause à effet définissent les entrées et sorties de ces systèmes. La modification de certaines de ces grandeurs d'entrée entraîne une modification de certaines grandeurs de sortie.

Rappelons de même les principaux objectifs de l'Automaticien qui peuvent se résumer en deux mots qui sont l'analyse et la synthèse. Par analyse on entend la possibilité de comprendre et de prévoir le comportement d'un système, et d'évaluer ses performances. Quant à la synthèse c'est la maîtrise de son comportement, l'amélioration de ses performances, par actions au niveau des entrées (on parle alors de commande).

Pour cela, il est nécessaire d'établir un ensemble de relations mathématiques reliant plus ou moins directement les entrées et les sorties d'un système. Ces relations conduisent à des différents modèles qui peuvent être classés principalement en plusieurs catégories :

- linéaires / non-linéaires
- invariant dans le temps / variant dans le temps
- à paramètres localisés / à paramètres répartis
- monovariable / multivariable
- à temps continu / à temps discret
- centralisé / décentralisé
- déterministe / stochastique...

Dans chaque classe de systèmes, on peut trouver bien évidemment une ramification donnant lieu à des « sous-classes ». La modélisation d'un système est une partie sensible du travail préalable à celui de l'analyse et de la synthèse. Un manque de précision lors de la phase de la

modélisation peut être pauvre en informations sur le système physique et un dysfonctionnement de son fonctionnement en boucle fermée. En revanche une modélisation rigoureuse peut conduire à des modèles trop complexes, lors de l'analyse ou de la synthèse d'une loi de commande. Il faut donc choisir judicieusement la technique permettant d'approcher le comportement d'un système physique, en fonction de ce que l'on souhaite faire par la suite. C'est ainsi que l'on peut choisir de linéariser un système non-linéaire autour d'un ou plusieurs points de fonctionnement et ainsi obtenir une famille de modèles linéaires ou encore d'utiliser un modèle non-linéaire pour construire une loi de commande...

Dans le domaine de la modélisation des systèmes dynamiques, il est utile de mentionner le cas pratique où les lois de la physique régissant le comportement d'un système sont mal connues ou que le système est trop compliqué pour pouvoir en extraire un modèle simple et utilisable en vue d'analyse et de synthèse. Il est alors possible d'utiliser une forme littérale de modèle décrivant le système, et de compléter la modélisation par des techniques d'identifications paramétriques [101], [98].

1.2.1 Les modèles linéaires

La propriété fondamentale des systèmes linéaires s'exprime par les deux principes bien connus à savoir la proportionnalité et la superposition et qu'il est inutile de les rappeler ici.

Le comportement d'un système dynamique linéaire invariant peut être décrit de deux manières différentes :

- l'une fréquentielle, la matrice de transfert en s (continu) ou en z (discret)
- l'autre temporelle, la représentation d'état ou plus généralement les équations intégrées-différentielles.

Ces systèmes sont désignés dans la littérature par **LTI**, acronyme de « Linear Time-Invariant ».

1.2.1.1 Matrice de transfert

Généralisation au cas multivariable du concept de la fonction de transfert du cas monovisible, la matrice de transfert est fondée sur la transformée de Fourier et de Laplace des signaux dans le cas des systèmes à temps continu et sur la transformée en z pour des systèmes à temps discret. Cette représentation, encore très utilisée de nos jours, empruntée au monde de l'électronique fut popularisée par les premiers résultats de Bode sur la commande des systèmes monovisibles. Elle caractérise le transfert entre l'entrée et la sortie du système, en fonction de la variable de Laplace s ou z , c'est-à-dire en fonction des fréquences.

Dans le cas multivariable, si $U(s) (U(z)) \in \mathbb{R}^m$ et $Y(s) (Y(z)) \in \mathbb{R}^p$ désignent respectivement les transformées de Laplace (en z) des signaux d'entrée $u(t) ((ek)) \in \mathbb{R}^m$ et de sortie $y(t) (y(k)) \in \mathbb{R}^p$ alors la représentation fréquentielle d'un système peut s'écrire :

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (Y(z) = G(z)U(z)) \tag{1.1}$$

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1m} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{p1} & G_{p2} & \cdots & G_{pm} \end{bmatrix}$$

et $G(s) (G(z)) \in \mathbb{R}^{m \times p}$ est la matrice de transfert. Il s'agit en fait d'une matrice de fonctions de transferts, où chaque élément $G_{ij}(s) (G_{ij}(z))$, représente le transfert entre la $j^{ème}$ entrée et la $i^{ème}$ sortie du système.

1.2.1.2 Représentation d'état

Introduite en début des années soixante par Kalman, ce type de modèle est une équation différentielle vectorielle du premier ordre. Il s'agit dans ce cas de décrire la dynamique interne du système, à partir de l'évolution d'un vecteur $x(t) (x(k)) \in \mathbb{R}^n$, appelé vecteur d'état, et représentant les variables internes intervenant dans le processus.

Cela donne la forme suivante pour des systèmes linéaires invariants :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \triangleq \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad \left(\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \right), \quad (1.2)$$

où $e(t) (e(k)) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée ou de commande et $y(t) (y(k)) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de sortie ou d'observation. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est appelée la matrice d'état, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ la matrice de commande, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ la matrice de sortie et $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ la matrice de transmission directe.

Donc il s'agit des systèmes stationnaires permettant d'envisager avec la même approche, des problèmes monovariabiles et multivariabiles, en utilisant les outils efficaces de l'algèbre linéaire.

En 1969, Kalman a introduit deux concepts fondamentaux, celui de commandabilité et celui d'observabilité repris largement dans les ouvrages spécialisés dédiés à la représentation dans l'espace d'état. A ces deux propriétés liées à la représentation d'état s'ajoutent la notion de la stabilisabilité et de la détectabilité. Tous ces concepts demeurent toujours d'actualité, notamment dans le cadre de la commande robuste.

1.2.1.3 Lien entre matrice de transfert et équation d'état

Les matrices A, B, C et D sont liées à la matrice de transfert $G(s) (G(z))$ par la relation :

$$G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B \quad \left(G(z) = D + C(zI - A)^{-1}B \right) \quad (1.3)$$

La notation (A, B, C, D) est souvent utilisée pour désigner une représentation d'état, appelée réalisation de $G(s) (G(z))$. On utilisera le symbole $\leftrightarrow$ pour désigner la correspondance entre les deux représentations :

$$G(s)(G(z)) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

Une réalisation (A, B, C, D) est dite minimale si toute autre réalisation (A_l, B_l, C_l, D_l) est telle que la dimension de A_l est supérieure ou égale à celle de A .

1.2.2 Les modèles non-linéaires

Contrairement au modèle linéaire, un modèle non-linéaire n'obéit pas à la propriété de superposition. Les systèmes physiques sont très souvent intrinsèquement non-linéaires et peuvent être décrits par des équations différentielles non-linéaires.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) + d(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (1.4)$$

C'est un modèle non-linéaire en l'état, en la commande et aussi en la mesure.

Dans l'étude des systèmes non linéaires, on se heurte à plusieurs difficultés :

- L'analyse par les fonctions de transfert est impossible ;
- La notion de pôles disparaît ;
- Un système non linéaire possède en général plusieurs points d'équilibre et l'étude de leur stabilité est plus complexe que dans le cas linéaire pour lequel le concept de stabilité est global.

Beaucoup de raisons peuvent expliquer l'intérêt accordé aux systèmes non-linéaires:

- Amélioration des systèmes de commande existant : Les méthodes de commande linéaire se fondent sur l'hypothèse de validité d'un modèle linéaire sur un domaine de fonctionnement dit domaine de validation. Une dégradation dans le fonctionnement peut apparaître dès que cette hypothèse cesse d'être valable. Il s'explique par le fait que des non-linéarités du système ne peuvent pas être correctement compensées, même dans le cadre d'une approche de type commande robuste qui a ses limites. Les contrôleurs non-linéaires, en revanche, peuvent prendre en compte les non-linéarités du système si elles sont connues et conduire à des lois de commande dont la performance et la robustesse sont peu sensibles voire indépendantes du point de fonctionnement considéré.

- Analyse des non-linéarités dures : Une autre hypothèse de la commande linéaire est que le modèle de système est linéarisable. Cependant, dans des systèmes de commande il y a beaucoup de non-linéarités dont la nature discontinue et ne se prêtent pas par conséquence aux techniques de linéarisation (Relais, Cycle d'hystérésis, saturation, zones mortes..etc). Leurs effets ne peuvent pas toujours être traités avec des méthodes linéaires. Des techniques d'analyse non linéaires doivent souvent être développées pour assurer la performance du système en présence de ces non-linéarités.

Souvent, lorsque un modèle non-linéaire est utilisé dans une plage de variation limitée de ses variables d'état, l'évolution s'effectuant autour d'un état d'équilibre x_0 , il peut être linéarisé autour de ce point de fonctionnement, en prenant comme nouvelle variable : $\tilde{x} := x - x_0$. Ainsi, nous pouvons lui appliquer la théorie des systèmes linéaires pour effectuer la synthèse d'un contrôleur linéaire entre autres.

Si la plage de variation s'avère importante, il peut être envisageable de procéder à ce qui est appelée une représentation multi-modèle du système. Chaque modèle étant représentatif de l'évolution du processus dans un domaine limité de l'espace et du temps. Ainsi un système non-linéaire peut être représenté par un ensemble de modèles linéaires à coefficients constants se succédant au cours du temps.

Le développement de lois de commande non-linéaire constitue un domaine de recherche relativement investi dans le cadre de la commande robuste. Il existe une variété de méthodes puissantes et avec beaucoup d'exemples d'applications industrielles. Cette diversité du champ d'applications montre l'intérêt important pour le développement des méthodologies de commande non-linéaire. Dans [92], une récapitulation est proposée sur quelques techniques de commande adaptées aux systèmes non-linéaires ainsi que le développement de nouvelles techniques faisant appel aux inégalités matricielles linéaires comme outil pour la synthèse des lois de commande.

1.2.3 Les modèles algébro-différentiels

Dans ce paragraphe, nous donnons une présentation de ce type de modèles. Pour une connaissance approfondie, nous recommandons la thèse [50] ainsi que les références y sont mentionnées sur ce sujet.

Un système dynamique est souvent modélisé par un ensemble d'équations différentielles ordinaires, se ramenant à une description sous forme d'état (système d'équations différentielles matricielles du 1er ordre définie par :

$$F(\dot{x}(t), x(t)) = 0 \quad (1.6)$$

où F et x sont des fonctions vectorielles. La forme ci-dessus comporte non seulement des équations différentielles, mais aussi potentiellement une classe de contraintes algébriques, on parle alors d'équations algébro-différentielles.

Dans le domaine d'Automatique, on suppose le plus souvent les équations différentielles ordinaires considérées sous la forme explicite 1.2 dans le cas linéaire et 1.4 dans le cas non - linéaire.

1.2.4 Les modèles implicites

Un système libre dont l'évolution est décrite à la fois par un ensemble d'équations différentielles ordinaires et par un ensemble d'équations algébriques peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (1.7)$$

$$0 = g(x(t)) \quad (1.8)$$

où f et g sont deux fonctions vectorielles. Comparée avec la forme explicite, la forme implicite ci-dessus associe aux équations différentielles des équations algébriques qui n'existent pas dans la modélisation explicite.

ces systèmes sont aussi connus dans la littérature de différentes façons par : système implicite, système d'état généralisé (ou étendu), système descripteur, système algébro-différentiel ou système semi-état. Dans la suite, seul le cas linéaire et invariant dans le temps est considéré dont la modélisation dans l'espace d'état s'écrit :

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.9a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (1.9b)$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur de variables « descripteurs », $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des entrées de commande et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de sorties mesurées. Les matrices E , A , B et C sont à coefficients réels et dimensions compatibles avec celles de x , u et y . On peut, de plus, considérer, sans perte de généralité, que E et A sont des matrices carrées, quitte à compléter par des lignes nulles jusqu'à obtention de matrices de dimensions (n, n) . Par ailleurs, la matrice E n'est pas nécessairement de plein rang, auquel cas $\text{rang}(E) = r \leq n$. Le fait de ne pas considérer de terme de transfert direct entre y et u dans la deuxième équation n'est pas restrictif. Il suffit en effet de partir de :

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.10a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (1.10b)$$

et d'augmenter le vecteur d'état comme ci-dessous, en incluant la commande u dans le nouveau vecteur de description afin d'annuler la matrice D .

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}_a(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}}_{A_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}}_{x_a(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ I \end{bmatrix}}_{B_a} u(t) \quad (1.11a)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix}}_{C_a} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (1.11b)$$

Les systèmes implicites constituent un puissant outil de modélisation dans la mesure où ils peuvent décrire des processus régis à la fois par des équations dynamiques et des équations statiques. Ce type de systèmes apparaît dans différentes situations [50]. L'outil LMI a été étendu au cas des systèmes implicites. Les premières extensions, notamment le Lemme Borné Réel, sont résumées dans [122]. Citons par exemple comme domaine d'application, le contrôle des colonnes à distiller [121], [123].

1.2.5 Sur la modélisation des systèmes incertains

Lors de l'automatisation d'un système en vue de son contrôle, la phase initiale consiste, en général, à sa modélisation par la manière la plus représentative possible. Le modèle mathématique d'un système doit être à la fois détaillé et rigoureux pour bien décrire les phénomènes physiques qui le caractérisent et suffisamment simple pour permettre de mettre en œuvre une technique de commande facile.

Cette étape préliminaire dans la synthèse de systèmes de commande a considérablement progressé tout au long de ces dernières décennies. En effet, en opposition à la période des années 1960-1970, pendant laquelle les efforts portaient essentiellement sur l'élaboration de contrôleurs qui agissaient sur des systèmes considérés comme parfaitement connus, à la fin des années 70, avec la parution de la théorie de la commande robuste, l'effet des éventuelles incertitudes de modélisation a été considéré à priori dans le développement des régulateurs.

Le concept de robustesse apparu dans la littérature de la théorie de la commande permet, avec la prise en compte explicite de ces incertitudes à priori, c'est à dire, dans la phase de développement des contrôleurs, de concevoir des régulateurs ayant des bonnes propriétés (stabilité, par exemple) même en présence des incertitudes.

1.2.5.1 Origines des erreurs de modélisation

Les sources d'incertitudes sont nombreuses dont nous citons principalement :

- Le système non-linéaire peut fonctionner autour de plusieurs points d'équilibre (points de fonctionnement, dans l'espace d'état) au cours de son évolution normale : on peut alors calculer en chaque point de fonctionnement un modèle linéaire valable uniquement autour de ce point. L'ensemble des modèles possibles doit donc contenir l'ensemble de ces modèles linéarisés.
- Certaines caractéristiques d'un système peuvent changer, il en résulte que les paramètres de son modèle changent de valeurs par saut (c'est le cas de l'inertie d'un bras de robot qui prend un objet pesant) : l'ensemble des modèles possibles doit alors contenir les différents modèles correspondant aux valeurs possibles de ces paramètres.

- Souvent les modèles sont élaborés à partir d'identification utilisant des mesures d'entrée-sortie (analyse harmonique, moindres carrés ou autres). Dans ce cas, les erreurs ou bruits de mesure induisent des erreurs de modèles qu'il faut quantifier. En général le rapport signal/bruit des signaux se dégrade en haute fréquence : les modèles sont donc imprécis à ces hautes fréquences.
- Les modèles linéaires utilisés pour la synthèse de commande, sont souvent des modèles d'ordre fini et réduit, alors que les systèmes physiques sont souvent d'ordre infini (paramètres répartis ou systèmes à retard). Il faut donc caractériser cette erreur de troncature (dynamiques non modélisées) et la borner.
- les variations paramétriques lentes et continues dues au vieillissement de certains éléments physiques ou brutales dues à des changements de point de fonctionnement.
- les dynamiques négligées lors d'une procédure de simplification de modèle.
- Etc..

1.2.5.2 Les notions fondamentales de la robustesse

La présence d'incertitudes dans les paramètres d'un modèle amène le concepteur de commande à considérer les problèmes de robustesse des lois de commande et l'étude de stabilité du système en boucle fermée. La loi de commande est conçue sur le modèle nominal, et les propriétés de stabilité et des performances doivent être respectées en boucle fermée en présence de déviations des paramètres.

Un système est dit robuste en stabilité s'il le demeure malgré les incertitudes qui l'affectent (erreurs de modélisation, erreurs de mesures, perturbations extérieures..).

Un système est dit robuste en performance si les caractéristiques de performances (marges de stabilité, rapidité, bande passante..) ne sont pas altérées par les perturbations.

C'est dans ce contexte que l'analyse et la commande robuste des systèmes dynamiques trouvent ses origines et leur motivation.

1.2.5.3 Robustesse et Insensibilité

Il convient de distinguer entre les concepts d'insensibilité et de robustesse. Le concept d'insensibilité est lié à une analyse à posteriori de l'influence des incertitudes sur le système de commande en boucle fermée, comme dans la définition suivante :

Définition 1.1 Un système de commande est dit insensible s'il est conçu de façon à minimiser l'influence des incertitudes sur la performance du système en boucle fermée ■.

Par contre, si l'on considère que le système physique étudié est représenté non pas par un modèle mathématique unique mais plutôt par un ensemble de modèles qui prend en compte toutes les incertitudes admissibles, nous pouvons définir un contrôleur robuste comme suit :

Définition 1.2 Un contrôleur est dit robuste par rapport à un ensemble de modèles, donné à priori, s'il garantit un certain niveau de performance pour tous les modèles appartenant à cet ensemble ■.

Notons qu'avec la notion d'insensibilité, la modélisation du système physique en question utilise un seul modèle mathématique, appelé modèle nominal. Nous sommes donc en présence d'un concept local, dans le sens où l'influence des incertitudes sur la performance du système de commande en boucle fermée est analysée à posteriori, sur un seul modèle mathématique le représentant.

A l'opposé, la robustesse est un concept d'ensemble, où le modèle mathématique considéré prend explicitement en compte l'effet des incertitudes de modélisation, constituant ainsi un ensemble de modèles admissibles. Donc toutes les spécifications de synthèse pour le système en boucle fermée doivent être satisfaites pour tout modèle appartenant à cet ensemble donné à priori.

Dans la section suivante, nous allons décrire les différentes catégories d'incertitudes ainsi que leurs possibles origines.

1.2.5.4 Caractérisation des incertitudes

Les incertitudes présentes dans un modèle mathématique peuvent avoir plusieurs origines comme il a été précisé précédemment.

Une famille de modèles entrée-sortie se définit dans le cas général par un modèle nominal et des incertitudes de modèle représentées par une matrice dite d'incertitude. Ces dernières englobent les écarts entre le comportement nominal et le comportement réel du procédé dans son fonctionnement normal. Les incertitudes de modèle se décomposent habituellement en deux catégories, les incertitudes définies par une borne supérieure de l'écart de modèle dans le domaine fréquentiel, et les incertitudes définies par les variations des différents paramètres du modèle nominal. La matrice d'incertitude dépend du type d'incertitudes considérées.

Selon leurs origines, et aussi leur façon d'agir sur le modèle considéré, les incertitudes sont usuellement classées comme suit:

- Paramétriques / Non-Paramétriques;
- Structurées / Non-Structurées;
- Déterministes / Stochastiques.

Incertitudes Paramétriques: celles dues à des variations ou à la méconnaissance de certains paramètres physiques du système comme par exemple les masses, résistances, etc.

Incertitudes Non-Paramétriques: en général dues à des dynamiques négligées ou non observées lors d'une procédure d'identification fréquentielle, n'ayant ainsi aucune interprétation physique claire.

Incertitudes Structurées: celles sur lesquelles nous avons une information précise sur la façon dont elles agissent sur le modèle. Elles sont par conséquent prises en compte lors de la modélisation.

Incertitudes Non-Structurées: celles dont la seule information disponible est une borne supérieure pour leur norme. Elles permettent d'établir des conditions de robustesse en stabilité, mais aussi de développer des procédures appropriées pour la synthèse de contrôleurs. D'une manière générale, les incertitudes non-structurées peuvent être modélisées comme additives, multiplicatives en entrée ou multiplicatives en sortie.

Incertitudes déterministes: Contrairement aux incertitudes stochastiques, les incertitudes déterministes pour lesquelles aucune hypothèse statistique n'a été nécessaire pour leur formulation.

La représentation des incertitudes sous forme d'incertitudes structurées ou non structurées est utilisée pour la modélisation d'un système incertain sous forme LFT. Cette approche, présentée dans le paragraphe §2.4 du chapitre 2, consiste à modéliser le système incertain par un système nominal en rétroaction avec la matrice d'incertitudes.

Dans le cas d'incertitudes paramétriques, cette représentation peut être vue comme un continuum de modèles. En effet, les éléments de la matrice d'incertitudes sont bornés mais peuvent prendre des valeurs quelconques entre les bornes. Ainsi, la forme LFT représente une infinité de modèles (ou un continuum) à l'intérieur des bornes. Cette représentation permet l'étude de la stabilité robuste et même de la performance robuste à l'aide de la μ -analyse. Pour ce faire, toutes les incertitudes appliquées au système (additives et paramétriques) sont regroupées sous forme d'un unique bloc d'incertitudes structurées.

Une autre manière de représenter des incertitudes paramétriques sur un système consiste tout simplement à considérer toute une famille de modèles discrets où chaque modèle représente le même système pour des valeurs différentes des paramètres. Bien évidemment, pour représenter toutes les possibilités de variations paramétriques à l'intérieur des limites de variations, il faudrait une infinité de modèles. Comme il est impossible de travailler avec une infinité de modèles, seul un nombre fini de modèles (les plus critiques) est considéré.

1.2.5.5 Définition de l'ensemble des modèles

Cette section a pour but de définir l'ensemble des modèles considérés lors de la synthèse de contrôleurs robustes. La définition de cet ensemble dépend de l'approche fréquentielle ou temporelle utilisée pour la modélisation mathématique du système physique.

a) Approche par Matrices de Fonctions de Transfert

Quand l'approche fréquentielle est retenue pour la modélisation du système physique, l'outil mathématique de base employé est la transformée de Laplace. Ainsi, un système à m entrées et p sorties, supposé linéaire, invariant dans le temps et sans retard pur, peut être écrit sous la forme :

$$y(s) = G(s) u(s), \quad (1.12)$$

où $u(s)$ et $y(s)$ sont, respectivement, les transformées de Laplace des vecteurs d'entrées et de sorties, et $G(s)$ représente la matrice de transfert dont chaque élément est constitué de fractions rationnelles propres de la variable complexe s :

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \dots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \dots & G_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{p1}(s) & G_{p2}(s) & \dots & G_{pm}(s) \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Chaque élément G_{ij} représente la fonction de transfert entre l'entrée j et la sortie i du système.

Si l'on définit $G_o(s)$ comme étant la matrice de transfert nominale du système, les incertitudes qui affectent le modèle peuvent, en général, être regroupées en trois catégories comme cela est montré à la figure 1.1 où $\Delta G(s)$ représente des incertitudes additives provenant des incertitudes sur le modèle. $\Delta G_s(s)$ et $\Delta G_e(s)$ représentent, respectivement, des incertitudes multiplicatives à la sortie prenant en compte les erreurs sur les capteurs et à l'entrée du système prenant en compte les erreurs sur les actionneurs. Dans la plupart des cas, nous ne disposons pas d'informations précises concernant la structure des blocs représentant ces incertitudes. Elles sont considérées ayant un caractère non-structuré et ne sont connues que par une majoration de leur norme dans le plan complexe. Aucune information n'est disponible quant à la phase.

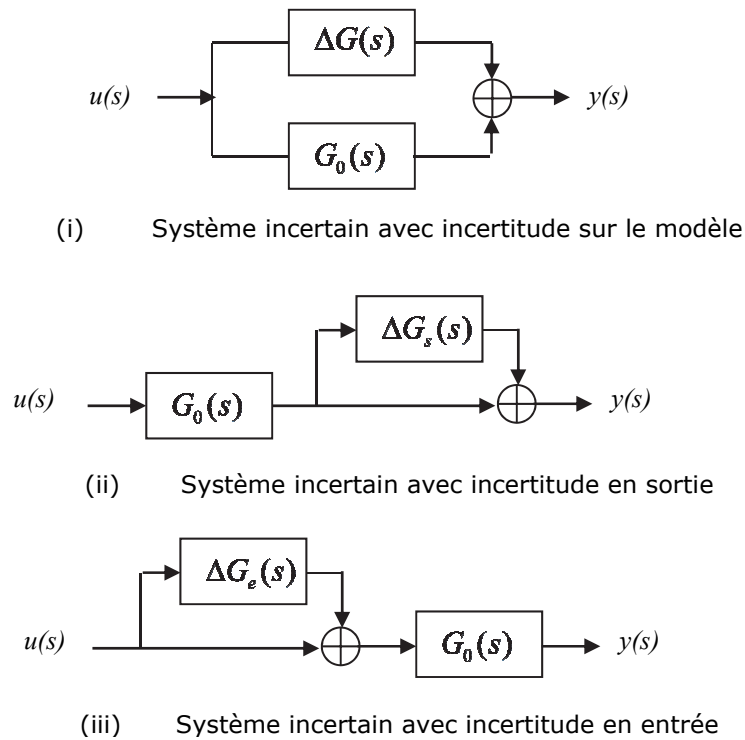


Figure 1.1 : Exemples de systèmes incertains

Les configurations (i), (ii) et (iii) ne sont pas exclusives, nous pouvons bien entendu envisager une configuration dans laquelle plusieurs types d'incertitude sont prises en compte.

Ainsi, l'ensemble des modèles considérés est composé d'une partie connue qui représente le modèle nominal ($G_0(s)$) et d'une partie qui représente les incertitudes de modélisation.

Les incertitudes ainsi caractérisées ont une nature clairement non-paramétrique puisqu'elles traduisent une mesure de la méconnaissance de la réponse fréquentielle du système dont l'origine peut être attribuée, par exemple, à des dynamiques négligées.

Notons que lors de l'utilisation de l'approche fréquentielle pour la modélisation d'un système incertain, nous supposons implicitement que les incertitudes sont invariantes dans le temps puisque la transformée de Laplace est définie uniquement pour les systèmes linéaires invariants. D'ailleurs, l'ensemble des modèles ainsi défini doit être vu comme une collection de modèles invariants qui doivent être simultanément considérés pour la synthèse de contrôleurs robustes.

Cette modélisation peut être facilement être représentée par une LFT. En effet, si nous prenons par exemple le cas correspondant d'un système incertain avec incertitude multiplicative en sortie, nous pouvons écrire :

$$\begin{bmatrix} v \\ y \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & G_0(s) \\ I & G_0(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

Figure 1.2 : Exemple de systèmes incertains

b) Approche par équations d'état

Dans le contexte des systèmes linéaires incertains, l'ensemble des modèles considéré peut s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \quad A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B} \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{1.14}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sorties, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, le vecteur d'entrées, A , B et C sont des matrices réelles de dimensions adéquates et $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des ensembles compacts qui regroupent, respectivement, A et B . Dans un souci de simplicité et de concision, la matrice C est supposée non affectée par des incertitudes.

Les incertitudes sont prises en compte par le fait que les matrices A et B peuvent prendre n'importe quelle valeur dans les compacts $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ spécifiés à priori.

Notons que grâce aux outils mathématiques utilisés avec l'approche temporelle, les matrices A et B peuvent avoir des éléments variant dans le temps.

Selon les structures des ensembles compacts $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, nous avons différentes caractérisations pour les incertitudes qui forment l'ensemble de modèles [92].

Définition 1.3 Incertitudes du type polytope : Les incertitudes du système (1.14) sont du type polytope si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ont les structures suivantes :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_p &= \{A / A \in Co\{A_i\}; \quad i=1, \dots, na\} \\ \mathcal{B}_p &= \{B / B \in Co\{B_j\}; \quad j=1, \dots, nb\}\end{aligned}\tag{1.15}$$

où A_i et B_i définissent, respectivement, les sommets des polytopes $\mathcal{A}_p$ et $\mathcal{B}_p$ et Co représente l'enveloppe convexe.

Les incertitudes du type polytope sont considérées comme structurées puisque nous pouvons facilement évaluer les variations admises pour chaque élément des matrices qui définissent l'ensemble de modèles. D'autre part, en général, ces incertitudes ont une nature paramétrique étant donné qu'elles sont associées à des variations dans des coefficients d'équations différentielles et par conséquent étroitement liées aux paramètres physiques du système. Plus précisément si A et B dépendent respectivement de r et de s paramètres incertains : $\theta_A = [\theta_{A1}, \dots, \theta_{Ar}]$, $\theta_B = [\theta_{B1}, \dots, \theta_{Bs}]$, on définit les domaines d'incertitude $R \subset \mathbb{R}^r$ et $S \subset \mathbb{R}^s$ par :

$$\begin{aligned}R &= \left\{ \theta_A \in \mathbb{R}^r / \quad \theta_{Ai_{\min}} \leq \theta_{Ai} \leq \theta_{Ai_{\max}} \right\}, \quad \theta_{Ai_{\min}}, \theta_{Ai_{\max}} \text{ constantes} \\ S &= \left\{ \theta_B \in \mathbb{R}^s / \quad \theta_{Bi_{\min}} \leq \theta_{Bi} \leq \theta_{Bi_{\max}} \right\}, \quad \theta_{Bi_{\min}}, \theta_{Bi_{\max}} \text{ constantes}\end{aligned}$$

Les matrices A et B sont alors des fonctions multilinéaires de leurs arguments θ_A et θ_B . Dès lors, il est facile de montrer que ces matrices appartiennent à des domaines bornés convexes du type :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_p &= \left\{ A / A = \sum_{i=1}^{na} \beta_i(t) A_i; \quad \beta_i(t) \geq 0; \quad \sum_{i=1}^{na} \beta_i(t) = 1; \quad \forall t \geq 0 \right\} \\ \mathcal{B}_p &= \left\{ B / B = \sum_{i=1}^{nb} \beta_i'(t) B_i; \quad \beta_i'(t) \geq 0; \quad \sum_{i=1}^{nb} \beta_i'(t) = 1; \quad \forall t \geq 0 \right\}\end{aligned}\tag{1.16}$$

Définition 1.4 Incertitudes bornées en norme : Les incertitudes du système (1.14) sont bornées en norme si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ possèdent les structures suivantes :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\Delta(t)) &= \{A / A = A_0 + \Delta A = A_0 + D\Delta(t)E_A; \quad \|\Delta(t)\| \leq 1\} \\ \mathcal{B}(\Delta(t)) &= \{B / B = B_0 + \Delta B = B_0 + D\Delta(t)E_B; \quad \|\Delta(t)\| \leq 1\},\end{aligned}\quad (1.17)$$

D'une façon équivalente, le système incertain (1.14) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + B_0 u(t) + Dp(t) \\ q(t) = E_A x(t) + E_B u(t) \\ p(t) = \Delta(t)q(t) \quad \|\Delta(t)\| \leq 1 \end{cases} \quad (1.18)$$

où A_0 et B_0 sont des matrices constantes connues (modèle nominal), $p(t) \in \mathbb{R}^{n_d}$ et $q(t) \in \mathbb{R}^{n_e}$ sont des vecteurs auxiliaires, D , E_A et E_B sont des matrices constantes connues qui spécifient les éléments incertains des matrices A_0 et B_0 ; $\Delta(t) \in \mathbb{R}^{n_d \times n_e}$ est une matrice inconnue, éventuellement variante dans le temps, bornée en norme et qui représente la source d'incertitudes.

Notons que dans cette définition, la notion de modèle nominal apparaît explicitement, ce qui n'était pas le cas pour les incertitudes du type polytope.

Dans la littérature de la commande robuste, la matrice $\Delta(t)$ désigne un bloc d'incertitudes non structurées, puisqu'elle représente, dans un seul bloc, toutes les imprécisions sur les matrices A_0 et B_0 .

Si par contre nous sommes capables d'identifier les diverses sources d'incertitudes et quels sont les éléments des matrices A_0 et/ou B_0 perturbés par ces incertitudes, nous pouvons définir les incertitudes de la forme suivante.

Définition 1.5 Incertitudes diagonales : Les incertitudes du système (1.14) sont diagonales si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ possèdent les structures suivantes :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\Delta_d(t)) &= \{A / A = A_0 + \Delta A = A_0 + D\Delta(t)E_A; \quad \Delta^T(t)\Delta(t) \leq I\} \\ \mathcal{B}(\Delta_d(t)) &= \{B / B = B_0 + \Delta B = B_0 + D\Delta(t)E_B; \quad \Delta^T(t)\Delta(t) \leq I\} \\ \Delta(t) &= \text{Diag}(\delta_i(t))\end{aligned}\quad (1.19)$$

D'une façon équivalente, l'équation d'état du système (1.14) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_0 x(t) + B_0 u(t) + Dp(t) \\ q(t) &= E_A x(t) + E_B u(t) \\ p(t) &= \Delta(t)q(t); \quad \Delta^T(t)\Delta(t) \leq I\end{aligned}\quad (1.20)$$

où $\Delta(t)$ est une matrice carrée diagonale de dimension (n_b, n_i) .

Afin d'illustrer ces différentes écritures, nous proposons un exemple d'un système dynamique dont la matrice d'état d'ordre (2,2) avec deux éléments incertains qui varient indépendamment et dont les valeurs limites de variation sont connues :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix},$$

où seuls les éléments a_{11} et a_{12} sont affectés par des incertitudes : $a_{11m} \leq a_{11} \leq a_{11M}$ et $a_{12m} \leq a_{12} \leq a_{12M}$.

Une façon de représenter ce système incertain par un ensemble de modèles est d'utiliser la définition des incertitudes de type polytope :

$$\mathcal{A}_p = \left\{ A / A = \sum_{i=1}^4 \beta_i(t) A_i; \quad \beta_i(t) \geq 0; \quad \sum_{i=1}^4 \beta_i(t) = 1; \quad \forall t \geq 0 \right\}$$

Avec :

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11M} & a_{12M} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11M} & a_{12m} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \quad A_3 = \begin{bmatrix} a_{11m} & a_{12M} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \quad A_4 = \begin{bmatrix} a_{11m} & a_{12m} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Par contre, en utilisant la définition des incertitudes bornées en norme, une représentation possible du système incertain est la suivante :

$$\mathcal{A}(\Delta(t)) = \left\{ A / A = A_0 + D\Delta(t)E_A; \quad \|\Delta(t)\| \leq 1 \right\},$$

avec :

$$A_0 = \begin{bmatrix} \frac{a_{11M} + a_{11m}}{2} & \frac{a_{12M} + a_{12m}}{2} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad E_A = \begin{bmatrix} \frac{a_{11M} - a_{11m}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a_{12M} - a_{12m}}{2} \end{bmatrix}$$

Finalement, si nous utilisons la définition d'incertitudes diagonales, ou dans ce cas d'une façon équivalente la définition d'incertitudes élémentaires, nous avons :

$$\mathcal{A}(\Delta_d(t)) = \mathcal{A}(\Delta_e(t)) \left\{ A / A = A_0 + D\Delta(t)E_A; \quad \Delta^T(t)\Delta(t) \leq I \right\},$$

$$\Delta(t) = \text{Diag}(\delta_1, \delta_2)$$

avec :

$$A_0 = \begin{bmatrix} \frac{a_{11M} + a_{11m}}{2} & \frac{a_{12M} + a_{12m}}{2} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad E_A = \begin{bmatrix} \frac{a_{11M} - a_{11m}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a_{12M} - a_{12m}}{2} \end{bmatrix}$$

Il est à noter que, avec les définitions d'incertitudes du type polytope et diagonale, nous pouvons représenter exactement l'ensemble des valeurs que peut prendre le modèle en question. En revanche, si nous utilisons la définition d'incertitudes bornées en norme, forcément nous augmentons l'ensemble des modèles considérés, puisque nous traitons le modèle incertain, à la base polytopique, à l'aide de l'ensemble ellipsoïdal qui le contient.

Evidemment, le choix de la définition à utiliser dépend de la connaissance acquise sur le système ainsi que de la méthode de synthèse qui sera employée.

1.2.6 Les modèles LTV

Il s'agit de systèmes dynamiques linéaires à temps variant (LTV) dont la représentation dans l'espace d'état et sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \end{cases} \quad (1.21)$$

où les matrices $(A(t), B(t), C(t), D(t))$ sont des fonctions du temps bornées continues et analytiques connues. La notion de fonction de transfert dans le cas d'un système LTV n'existe pas et les techniques classiques s'effondrent.

Par analogie avec l'intégration des équations d'états des systèmes LTI, nous avons pour les systèmes LTV :

$$x(t) = \phi(0, t)x(0) + \int_0^t \phi(\delta, t)Bu(\delta) d\delta, \quad (1.22)$$

avec ϕ , appelée matrice de transition, solution de l'équation différentielle suivant :

$$\begin{cases} \phi(0,0) = I \\ \frac{\partial \phi(\delta,t)}{\partial t} = A(t)\phi(\delta,t) \end{cases} \quad (1.23)$$

1.2.7 Les modèles LPV

Ces systèmes ont une dépendance paramétrique explicite de leur représentation d'état ($A(\theta)$, $B(\theta)$, $C(\theta)$, $D(\theta)$) où le paramètre $\theta = \theta(t)$ peut présenter certaines variations temporelles. Il s'agit donc d'un modèle linéaire dépendant explicitement d'un paramètre (ou d'un vecteur de paramètres) variant dans le temps, et qui est défini par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t) \\ y(t) = C(\theta(t))x(t) + D(\theta(t))u(t) \\ \forall t \geq 0, \quad \theta(t) = [\theta_1(t) \quad \theta_2(t) \quad \dots \quad \theta_r(t)]^T \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^r \end{cases} \quad (1.24)$$

Cette modélisation, permet de prendre en compte les variations paramétriques d'un système dynamique. Le modèle évolue alors en fonction d'une trajectoire paramétrique admissible. Une trajectoire paramétrique admissible, est telle que chacun de ses points appartient à chaque instant au domaine $\mathcal{P}$.

Les systèmes LPV peuvent être définis comme une généralisation des systèmes à temps invariants (LTI) et à temps variant (LTV) [36]. En effet, en choisissant une trajectoire $\theta = \tilde{\theta}(t)$, dans le domaine de fonctionnement $\mathcal{P}$, nous obtenons un modèle dépendant du temps. Si l'on gèle le temps dans ce modèle LTV, nous obtenons un modèle LTI. Sachant que le modèle LTI peut être directement généré à partir du modèle LPV en figeant le paramètre $\theta(t) = \theta_0$.

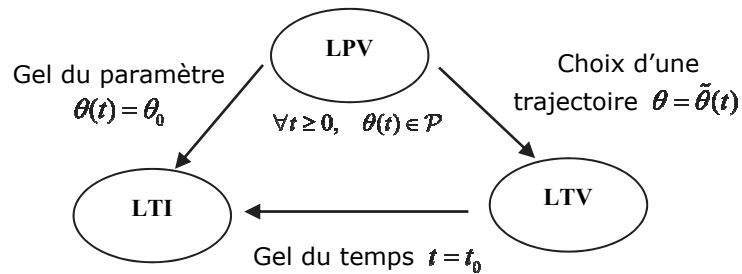


Figure 1.3 : Passage d'un modèle à un autre

Il est parfois possible de modéliser à l'aide d'une représentation LPV, un modèle non-linéaire, il s'agit alors de système quasi-LPV.

A défaut de connaître à l'avance la trajectoire de θ , il arrive que nous connaissions des bornes sur ses différentes composantes : $\theta_{\min} \leq \theta_k \leq \theta_{\max}$, ce qui définit l'ensemble de variation des paramètres. Les matrices du système ont une dépendance affine en les paramètres, alors elles peuvent être mises sous la forme :

$$\begin{aligned} A(\theta) &= A_0 + \sum_{k=1}^r \theta_k A_k & B(\theta) &= B_0 + \sum_{k=1}^r \theta_k B_k \\ C(\theta) &= C_0 + \sum_{k=1}^r \theta_k C_k & D(\theta) &= D_0 + \sum_{k=1}^r \theta_k D_k \end{aligned}$$

On dit que le système est affine en les paramètres variables. Si on souhaite prendre en compte de manière fidèle la dépendance en fonction des paramètres, il est nécessaire de recourir à une représentation linéaire fractionnaire [146].

Enfin les systèmes LPV se décrivent mathématiquement comme on peut le noter sous une forme proche de celle des modèles incertains dont les incertitudes varient lentement dans le temps. Cependant, en synthèse la problématique diffère puisque dans le cas des systèmes LPV, les paramètres sont connus et peuvent être utilisés dans la loi de commande. Concernant les systèmes LPV et des techniques de commande, le lecteur peut se référer pour en savoir plus à [35], [72] entre autres et aux références qui y sont indiquées.

1.2.8 Les modèles pour les systèmes de grande dimension

1.2.8.1 Motivation

Dans la majorité des approches de commande déployées dans la théorie des systèmes, l'ensemble des informations issues des capteurs et des commandes générées vers les actionneurs est centralisé dans une structure de contrôle unique. On peut alors parler de commande centralisée, comme il est représenté par la figure ci-dessous.

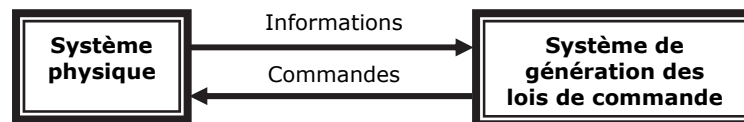


Figure 1.4 : Structure de la commande centralisée

Cependant, ce type d'approche c'est-à-dire centralisée, s'avère difficile à mettre au point en pratique dans le cas des systèmes de grande dimension et ce, pour des raisons conceptuelles mais aussi numériques [34]. Les difficultés d'ordre conceptuel sont liées à la formulation du problème de commande, c'est-à-dire :

- la difficulté de définir un critère unique qui regroupe l'ensemble des objectifs de commande ;
- la difficulté de modéliser les systèmes de grande dimension.

Les difficultés d'ordre numérique sont liées, quant à elles, à la synthèse des lois de commandes et plus particulièrement à :

- la manipulation de problèmes numériques de grandes tailles gourmand en temps de calcul et / ou en espaces mémoires;
- la présence des dynamiques différentes au sein d'un même système; par exemple lors de la combinaison de dynamiques lentes et rapides ;

Pour pallier à ces problèmes, le concept de la théorie de la commande décentralisée et la commande hiérarchisée ont naturellement émergées.

1.2.8.2 Terminologie

Différentes terminologies comme "système complexe" (complex system), "grand système" (large-scale system), "système interconnecté" (interconnected system), système structuré (structured system), "systèmes composés" (composite system), sont employées dans la littérature pour désigner cette classe de systèmes. Elles semblent à première vue toutes

désigner des systèmes présentant des dynamiques complexes (i.e. un grand nombre de variables d'état), mais aussi un système multivariable possédant un grand nombre d'entrées et de sorties, et/ou des systèmes composites constitués de sous-systèmes distincts (distinction spatiale et/ou fonctionnelle) plus ou moins fortement interconnectés).

Dans les publications scientifiques consultées, nous nous référons en particulier à [34] qui, elle-même se réfère à Šiljak, J. Bernussou et A.Titli, pionniers reconnus dans le domaine et qui, selon eux, on retrouve trois caractéristiques fondamentales de cette complexité :

- la dimension;
- les incertitudes et/ou perturbations;
- les informations sur les contraintes structurelles.

Sont reprises ici les définitions de "systèmes complexes", "grands systèmes", etc... telles qu'elles peuvent être trouvées dans la littérature. Ces définitions sont extraites principalement des ouvrages spécialisés et reprises ultérieurement dans beaucoup de travaux s'intéressant à cette classe de systèmes [90],[34].

Définition 1.6 : Grand système

Un "grand système" est un système nécessitant pour des raisons conceptuelles ou numériques une décomposition en un nombre fini de sous-systèmes interconnectés.

Définition 1.7 : Grand système

Un grand système est un système susceptible de se décomposer en un certain nombre de sous-systèmes reliés par des interconnexions.

Il peut être aussi défini par un modèle mathématique, souvent linéaire et de grande taille, mettant en jeu, dans le cas de l'approche des équations d'état, un grand nombre de variables d'état, quelques dizaines, voire supérieur à la centaine.

Définition 1.8 : Système complexe

Un "système complexe" se caractérise principalement par la difficulté à le modéliser à l'aide d'outils mathématiques classiques, ou bien par la complexité des modèles existants (souvent obtenus via des considérations physiques ou analytiques). Ces systèmes sont donc fréquemment modélisés par des équations aux dérivées partielles, des équations fortement non linéaires.

Définition 1.9 : Système complexe

Un "système complexe" est un système présentant les trois caractéristiques suivantes, rendant sa manipulation délicate (en analyse et en commande) : grande dimension (nombre d'entrées /sorties/états), présence d'incertitudes, et contraintes sur la structure des flux d'information.

Définition 1.10 : Système interconnecté

Un "système interconnecté" est un système pouvant être décomposé en un ensemble de N systèmes élémentaires et une unique interconnexion reliant l'ensemble des systèmes.

Définition 1.11 : Système structuré

Dans le cas d'une modélisation par représentation d'état, un "système structuré" est représenté par un quadruplet (A,B,C,D) dont certains coefficients sont nuls strictement, i.e. indépendamment des incertitudes.

L'absence de définitions unifiées est sans doute la conséquence de la grande variété de systèmes rencontrés et de situations qu'elles tentent de recouvrir.

Il convient de souligner que certaines de ces définitions, notamment les définitions 1.6 à 1.9 sont subjectives. Le nombre d'entrées et sorties semble tout aussi pertinent que la diversité des dynamiques dans un système. Un modèle comportant un grand nombre de dynamiques mais un faible nombre d'entrées et de sorties (à l'extrême un système monovisible) pourra être à l'origine d'un problème de synthèse de régulateur moins complexe qu'un système présentant moins de dynamiques mais un plus grand nombre d'entrées et de sorties. En effet, on peut espérer pour le premier modèle une réduction d'ordre importante via l'utilisation d'outils "classiques" de réduction de modèle, aboutissant à un problème de synthèse de taille raisonnable. Dans le second cas, l'apport de la réduction d'ordre risque d'être moindre; de plus, même si le problème de commande multivariable s'avère résoluble par les outils classiques (par exemple ceux de la commande $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$, l'implantation d'un régulateur centralisé peut se heurter à différentes difficultés pratiques (lisibilité, fiabilité, contraintes spatiales...).

De ces quelques définitions, il est mis en évidence les difficultés à définir rigoureusement chacune de ces classes de systèmes.

1.2.8.2 Modélisation dans l'espace d'état

- **Cas des systèmes centralisés**

Les outils et techniques de synthèse de lois de commande qui seront présentés par la suite s'appuient principalement sur une modélisation linéaire des systèmes invariants dans l'espace d'état.

Nous nous limiterons donc dans tout le document au contexte des systèmes linéaires, invariants dans le temps et certains. On se placera sous l'hypothèse de systèmes strictement propres afin de simplifier les notations. Sans hypothèse particulière sur l'organisation interne de ces systèmes, ceux-ci seront représentés par :

$$G(s) \leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.25)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de commande, et $y \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. A , B , et C sont des matrices réelles de dimensions appropriées. Le symbole $\leftrightarrow$ désigne, pour rappel, une réalisation dans l'espace d'état du transfert $G(s)$.

Partant de la description en boucle ouverte du système à commander représenté par les équations (1.25), il s'agit de construire un nouveau système augmenté en boucle ouverte contenant des entrées et des sorties additionnelles w et z , ainsi qu'éventuellement des dynamiques supplémentaires correspondant typiquement à des pondérations fréquentielles qui sont introduites sur les signaux w et z pour prendre en compte le contenu spectral des perturbations ou spécifier des domaines de performance. C'est la forme standard qui s'écrit usuellement sous la forme.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{cases} \quad (1.26)$$

Avec $x \in \mathbb{R}^n$, est le vecteur d'état de description, $u \in \mathbb{R}^{m_2}$ est le vecteur des commandes et $w \in \mathbb{R}^{m_1}$ est le vecteur des perturbations. $z \in \mathbb{R}^{p_1}$ et $y \in \mathbb{R}^{p_2}$ représentent respectivement les variables contrôlées et mesurées. Il est bien connu que le système augmenté G correspond au modèle nominal du système à commander augmenté de filtres de pondération. Les entrées sont constituées des signaux de consignes et éventuellement des perturbations liées à l'environnement du système.

Cas des systèmes décentralisés

La notion de décentralisation d'une commande s'apparente en un sens de l'idée de la délocalisation. L'idée de base est de décomposer une structure complexe en entités moins complexes appelées communément sous-systèmes. Chaque sous-système est muni de capteurs et d'actionneurs qui leur sont propres, et qui sont donc commandés localement et indépendamment les uns des autres. L'intérêt d'une telle façon de faire est que ces éléments peuvent être modélisés plus simplement une fois séparés, et qu'il n'est plus nécessaire de calculer un modèle complet du système initial. Ainsi la représentation de chaque sous-système est d'ordre moins élevé, d'où une simplification de la synthèse et de l'implantation des lois de commande.

Considérons dans une première étape, une décomposition des vecteurs d'entrée u et de sortie y en N composantes telle que :

$$\begin{aligned} u^T &= [u_1^T \quad \dots \quad u_N^T]; \quad \text{avec } u_i \in \mathbb{R}^{m_{2i}} \quad i=1, \dots, N; \quad \sum_{i=1}^N m_{2i} = m_2 \\ y^T &= [y_1^T \quad \dots \quad y_N^T]; \quad \text{avec } y_i \in \mathbb{R}^{p_{2i}} \quad i=1, \dots, N; \quad \sum_{i=1}^N p_{2i} = p_2 \end{aligned} \quad (1.27)$$

Le système (1.25) peut s'écrire sous la façon suivante [149], [64] :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^N B_i u_i \\ y_i = C_i x \quad i=1, \dots, N. \end{cases} \quad (1.28)$$

Avec :

$$B = [B_1 \quad \dots \quad B_N] \quad C^T = [C_1^T \quad \dots \quad C_N^T]$$

Par extension aux systèmes centralisés la modélisation adaptée au problème standard (sans incertitudes) dans le cas des systèmes décentralisés est donnée par les équations suivantes ou ses variantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + \sum_{i=1}^N B_{2i} u_i \\ z = C_1 x + D_{11} w + \sum_{i=1}^N D_{12i} u_i \\ y_i = C_{2i} x + D_{21i} w + \sum_{i=1}^N D_{22i} u_i \quad i=1, \dots, N. \end{cases} \quad (1.29)$$

où $u_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ et $y_i \in \mathbb{R}^{p_i}$ sont respectivement les signaux de commande et de mesure ($i=1, \dots, N$). A , B_1 , B_{2i} , C_1 , C_{2i} , D_{12i} , D_{21i} et D_{22i} sont des matrices de dimensions appropriées, avec :

$$D_{12} = [D_{121} \quad \dots \quad D_{12N}] \quad D_{21}^T = [D_{211}^T \quad \dots \quad D_{21N}^T] \quad D_{22} = [D_{221} \quad \dots \quad D_{22N}]$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert du système augmenté s'écrit :

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = H(s) \begin{bmatrix} w \\ u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = H(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

Le système augmenté peut s'écrire de manière compacte sous la forme :

$$H(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c|c} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ \hline C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \triangleq \left[\begin{array}{c|c|c} A & B_1 & B_{21} \dots B_{2N} \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{121} \dots D_{12N} \\ \hline C_{211} & D_{211} & \\ \vdots & \vdots & D_{221} \dots D_{22N} \\ \hline C_{2IN} & D_{2IN} & \end{array} \right] \quad (1.31)$$

La structure d'une commande décentralisée par N contrôleurs C_i :

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(s) & 0.. & 0 \\ 0 & C_2(s) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0.. & C_N(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, \quad (1.32)$$

est donnée par la figure suivante :

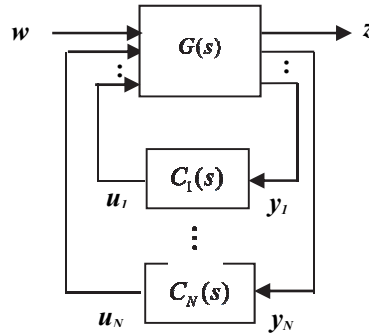


Figure 1.5 : Structure 1 de la commande décentralisée

Par ailleurs, la décomposition du vecteur d'état x en N composantes $x^T = [x_1^T \dots x_N^T]$ avec $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i=1, \dots, N$ avec $\sum_{i=1}^N n_i = n$, mène en définitive la représentation 1.25 à la représentation suivante :

$$S_i \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i = A_{ii} x_i + B_{ii} u_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N A_{ij} x_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N B_{ij} u_j \\ y_i = C_{ii} x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N C_{ij} x_j \end{array} \right. \quad i=1, \dots, N. \quad (1.33)$$

La structure de la commande consiste à considérer le système 1.25 comme étant une collection de N sous-système S_i commandé et observé chacun localement, respectivement par $u_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $y_i \in \mathbb{R}^{p_i}$, $i=1, \dots, N$. Les termes en Σ correspondent aux termes de couplages ou

d'interactions. On trouve également dans la littérature, une représentation encore plus générale [95] ou ses variantes [109] :

$$S_i \begin{cases} \dot{x}_i = A_{ii}x_i + B_{ii}u_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N A_{ij}x_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N B_{ij}u_j \\ y_i = C_{ii}x_i + D_{ii}u_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N C_{ij}x_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N D_{ij}u_j \end{cases} \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.34)$$

Dans certains problèmes, la représentation (1.34) est réduite à :

$$S_i \begin{cases} \dot{x}_i = A_{ii}x_i + B_{ii}u_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N A_{ij}x_j \\ y_i = C_{ii}x_i \end{cases} \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.35)$$

La structure de la commande décentralisée par N contrôleurs C_i est donnée par la figure ci-dessous :

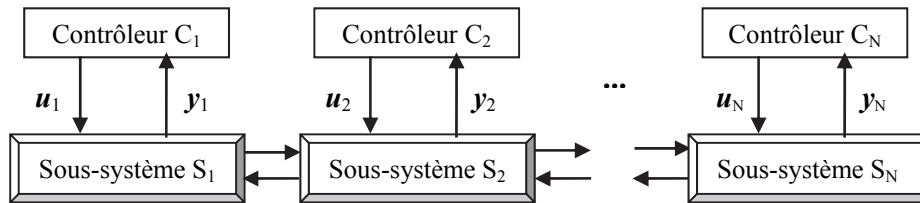


Figure 1.6 : Structure 2 de la commande décentralisée

La représentation (1.35) peut être également étendue pour obtenir la forme standard donnée ci-dessous ou ses variantes selon les auteurs [30], [69] :

$$S_i \begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i + B_{1i} w_i + B_{2i} u_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N A_{ij} x_j \\ z_i = C_{1i} x_i + D_{11i} w_i + D_{12i} u_i \\ y_i = C_{2i} x_i + D_{21i} w_i + D_{22i} u_i \end{cases} \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.36)$$

Dans le cas d'une modélisation incertaine sur les matrices intervenant dans la représentation d'état, celle-ci est généralement donnée par les équations suivantes :

$$S_i \begin{cases} \dot{x}_i = (A_i + \Delta A_i)x_i + (B_i + \Delta B_i)u_i + \sum_{j=1}^N A_{ij}x_j \\ y_i = (C_i + \Delta C_i)x_i + (D_i + \Delta D_i)u_i \end{cases} \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.37)$$

où $\Delta A_i, \Delta B_i, \Delta C_i, \Delta D_i$ $i = 1, \dots, N$. représentent des incertitudes sur lesquelles différentes hypothèses peuvent être formulées [148], [83], [109].

Notons enfin, comme pour le cas des systèmes centralisés, on trouve des modélisations pour les systèmes non linéaires, des systèmes à retard (Time-delay systems). La prise en compte des incertitudes peuvent également formulée pour les systèmes décentralisés de type (1.29).

1.3 Conclusion

Nous avons rappelés dans ce chapitre les principaux modèles usuellement rencontrés dans le cadre de l'analyse et la synthèse robuste des systèmes dynamiques. L'accent est mis particulièrement sur quelques classes de systèmes qui feront objet dans le cadre de notre travail. Il s'agit plus particulièrement des systèmes continus centralisés et décentralisés modélisés dans l'espace d'état. Un bref aperçu sur la modélisation des systèmes incertains est également donné.

Chapitre 2

**Outils pour l'analyse et la synthèse
de la commande robuste**

Chapitre 2

Outils pour l'analyse et la synthèse de la commande robuste

2.1 Introduction

Ce chapitre débute par une courte présentation sur les principales normes vectorielles et matricielles utilisées dans le cadre de notre travail. Ensuite quelques notions de base sur les inégalités matricielles linéaires et bilinéaires sont rappelées, suivies d'une présentation plus détaillée concernant leur propriétés et leur résolutions. Cette présentation quoiqu'elle ne soit pas très approfondie, il nous apparaît indispensable de lui consacrer une place privilégiée pour une meilleure adéquation avec les sujets abordés dans ce mémoire. Ce chapitre se termine par un rappel sur les transformations Fractionnaires Linéaires (LFT) et les valeurs singulières, outils fondamentaux communément utilisés dans le cadre d'analyse et de synthèse des lois de commande robuste.

2.2 Rappel sur les normes

Afin de quantifier les demandes de performances, il est nécessaire de définir des normes en adéquation avec les spécifications requises.

2.2.1 Norme d'un signal

Définition 2.1 (norme $\mathcal{L}_p$) : Soit x un vecteur de $\mathbb{C}^m$ et $p \in \mathbb{R}$. La norme $\mathcal{L}_p$ de x est définie par :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p \right)^{1/p} \quad (2.1)$$

Par extension, un signal $x(t) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à l'ensemble $\mathcal{L}_p(I)$ si :

$$\|x\|_1 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty \quad (2.2)$$

Pour $p = 2$, nous retrouvons la norme euclidienne classique.

Définition 2.2 (norme $\mathcal{L}_\infty$) : Soit x un vecteur de $\mathbb{C}^m$. La norme $\mathcal{L}_\infty$ de x est définie par :

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i| \quad (2.3)$$

Par extension, un signal $x(t) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à l'ensemble $\mathcal{L}_\infty(I)$ si :

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in I} |x(t)| < \infty \quad (2.4)$$

2.2.2 La norme $\mathcal{H}_2$

Considérons un système linéaire stationnaire décrit par ses équations d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \leftrightarrow G(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

dans le cas continu et par :

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k), \end{cases} \leftrightarrow G(z) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

dans le cas discret.

x : Vecteur d'état (dimension n)

u : Vecteur de commandes (dimension m)

y : Vecteur de mesures (dimension p).

Les matrices (A, B, C, D) sont réelles et de dimensions appropriées.

La définition de la norme $\mathcal{H}_2$, notée $\|\bullet\|_2$, peut se faire de deux manières équivalentes, une dans le domaine fréquentiel et l'autre dans le domaine temporel [152].

2.2.2.1 Définition

La norme $\mathcal{H}_2$ de $G(s)$ représentant un système linéaire stable, est donnée par :

$$\|G(s)\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}(G(j\omega)G^T(-j\omega))d\omega \right)^{1/2}, \quad (2.7)$$

pour les systèmes continus et par :

$$\|G(z)\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Tr}(G(e^{j\theta})G^T(e^{-j\theta}))d\theta \right)^{1/2}, \quad (2.8)$$

pour les systèmes discrets.

2.2.2.2 Calcul de la norme $\mathcal{H}_2$

Soit le système (2.5) stable avec $D=0$, la somme des normes au carré des réponses impulsionnelles est donnée par [152].

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \|y_i\|_2^2 &= \|G(s)\|_2^2 = \text{Trace}(B^T W_o B) = \int_0^{\infty} \text{Trace}(B^T e^{A^T t} C^T C e^{A t} B) dt \\ &= \text{Trace}(C W_c C^T) = \int_0^{\infty} \text{Trace}(C e^{A t} B B^T e^{A^T t} C^T) dt \end{aligned} \quad (2.9)$$

En appliquant le théorème de Parseval sur la norme d'un système stable, la définition donnée par (2.7) pour les systèmes continus conduit aux relations (2.9). Le calcul de la norme $\mathcal{H}_2$ est alors obtenu par l'utilisation des Grammiens de commandabilité W_c et d'observabilité W_o qui sont respectivement solutions des équations de Lyapunov suivantes :

$$\begin{aligned} A W_c + W_c A^T + B B^T &= 0 \\ A^T W_o + W_o A + C^T C &= 0' \end{aligned} \quad (2.10)$$

où, pour rappel :

$$\begin{aligned} W_c &= \int_0^{\infty} e^{A t} B B^T e^{A^T t} dt \\ W_o &= \int_0^{\infty} e^{A^T t} C^T C e^{A t} dt. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Dans le cas des systèmes discrets, le terme D de la représentation d'état peut être non nul. Le Grammien de commandabilité W_{cd} (resp. d'observabilité W_{od}) pour le système discret (2.6) est solution de l'équation de Lyapunov respectivement les suivantes :

$$\begin{aligned} AW_{cd}A^T - W_{cd} + BB^T &= 0 \\ A^TW_{od}A - W_{od} + C^TC &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Dans les deux cas, continu et discret, la norme est déterminée directement et sans calcul itératif.

2.2.2.3 Caractérisation de la norme $\mathcal{H}_2$ par LMI

Un certain nombre de problèmes en Automatique peuvent être mis sous forme d'inégalités matricielles linéaires "Linear Matrix Inequality", que nous notons LMI dans la suite. Sachant que nous rencontrerons un certain nombre de problèmes pouvant être formulés en termes de LMIs tout au long de ce mémoire, le paragraphe 2.3 qui suit lui est spécialement consacré.

Le théorème suivant permet d'énoncer le lien entre la norme $\mathcal{H}_2$ en termes de LMI [132].

Théorème 2.1 (cas continu)

Soit le système (2.5) sans pôles sur l'axe imaginaire, alors nous avons les propositions suivantes :

1. $\|G(s)\|_2 < \infty \Leftrightarrow D = 0$,
2. Les propositions suivantes sont équivalentes :
 - a) $G(s)$ est stable et $\|G(s)\|_2^2 = \text{Trace}(B^TW_cB) = \text{Trace}(CW_oC^T) < \gamma^2$
 - b) $\exists X = X^T > 0$ et $Z = Z^T > 0$ telles que :

$$\begin{bmatrix} XA + A^TX & XB \\ (XB)^T & -I \end{bmatrix} < 0; \quad \begin{bmatrix} X & C^T \\ C & Z \end{bmatrix} > 0; \quad \text{Trace}(Z) < \gamma^2 \quad (2.13a)$$

- c) $\exists X = X^T > 0$ et $Z = Z^T > 0$ telles que :

$$\begin{bmatrix} XA + A^TX & CX \\ (CX)^T & -I \end{bmatrix} < 0; \quad \begin{bmatrix} X & B \\ B^T & Z \end{bmatrix} > 0; \quad \text{Trace}(Z) < \gamma^2 \quad (2.13b)$$

Dans le cas des systèmes discrets, le terme du transfert direct D peut être non nul. Le Grammien de commandabilité W_{cd} (resp. d'observabilité W_{od}) pour le système discret (2.6) est solution de l'équation de Lyapunov $AW_{cd}A^T - W_{cd} + BB^T = 0$ (resp. $A^TW_{od}A - W_{od} + C^TC = 0$). D'où le théorème :

Théorème 2.2 (cas discret)

Soit le système (2.6) sans pôles sur le cercle unité, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $G(z)$ est stable et $\|G(z)\|_2^2 = \text{Trace}(B^TW_{od}B + D^TD) = \text{Trace}(CW_{cd}C^T + DD^T) < \gamma^2$
2. $\exists X = X^T > 0$ et $Z = Z^T > 0$ telles que :

$$\begin{bmatrix} X & XA & XB \\ (XA)^T & X & 0 \\ (XB)^T & 0 & I \end{bmatrix} > 0; \quad \begin{bmatrix} X & 0 & C \\ 0 & I & D \\ C^T & D^T & Z \end{bmatrix} > 0; \quad \text{Trace}(Z) < \gamma^2$$

Ces deux théorèmes sont d'une grande importance pratique. Ils s'utilisent dans la synthèse des régulateurs optimaux au sens de la norme $\mathcal{H}_2$.

2.2.3 La norme $\mathcal{H}_\infty$

La norme $\mathcal{H}_\infty$ est largement exploitée pour résoudre un grand nombre de problèmes liés aux performances tels que le rejet de perturbations, la synthèse des régulateurs robustes, réduction d'ordre, minimisation de l'erreur de poursuite.

2.2.3.1 Définition

Définition 2.3 : La norme $\mathcal{H}_\infty$ d'un système linéaire (entrée u , sortie y), est finie et bornée par γ , si ce système est stable, et l'énergie qu'il restitue reste inférieure, dans un rapport γ à celle qu'on lui apporte, c'est-à-dire :

$$\forall t > 0, \int_0^t y^T(\tau)y(\tau)d\tau \leq \gamma^2 \int_0^t u^T(\tau)u(\tau)d\tau$$

Cette définition à caractère « énergétique » du domaine temporel se transpose au domaine fréquentiel par l'utilisation de l'égalité de Parseval :

$$\forall u \in \mathcal{L}_2, \int_{-\infty}^{\infty} (u(\tau))^2 d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{u}(j\omega))^2 d\omega,$$

d'une part et de la relation entrée/sortie :

$$\forall \omega \in \mathfrak{R}, \hat{y}(j\omega) = G(j\omega) \hat{u}(j\omega)$$

d'autre part. On en déduit, pour un système de transfert $G(s)$ stable, une expression bien connue de la norme $\mathcal{H}_\infty$, notée $\|\bullet\|_\infty$, à savoir :

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega \geq 0} \bar{\sigma}(G(j\omega)) \quad (2.14)$$

La norme s'interprète dans le cas monovarié comme étant la valeur maximale du module de la fonction de transfert $G(j\omega)$ (Voir le paragraphe 2.5 pour la définition des valeurs singulières $\sigma(\bullet)$).

2.2.3.2 Propriétés

- Deux systèmes en cascade : $\forall F, G \in \mathbb{C}^{p \times n}, \|FG\|_\infty \leq \|F\|_\infty \|G\|_\infty$
- Système à une entrée et deux sorties $\forall F, G \in \mathbb{C}^{p \times n}, \left\| \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} \right\|_\infty \geq \sup(\|F\|_\infty, \|G\|_\infty)$
- Système à deux entrées et une sortie $\forall F, G \in \mathbb{C}^{p \times n}, \|F \quad G\|_\infty \geq \sup(\|F\|_\infty, \|G\|_\infty)$
- Soit (A, B, C) une réalisation minimale d'un système linéaire et stationnaire. de transfert $G(s)$ strictement propre. $\|G(s)\|_\infty \leq \gamma$ si et seulement si la matrice Hamiltonienne:

$$\begin{bmatrix} A & \gamma^{-1}BB^T \\ -\gamma^{-1}C^T C & -A^T \end{bmatrix},$$

n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire.

2.2.3.3 Calcul de la norme $\mathcal{H}_\infty$

Le problème le plus classique qui fait appel à cette norme est celui qui consiste à calculer une commande permettant d'assurer la stabilité tout en réduisant les effets de perturbations. Ce

problème formulé dans un premier temps par Zames en 1981 [145], a été jugé difficile à résoudre du fait de la non existence d'une méthode directe de calcul de la norme $\mathcal{H}_\infty$ du système. Par contre, il est possible de tester si la norme $\mathcal{H}_\infty$ d'un système est inférieure ou non à une valeur γ donnée, cela a été résolu dans le domaine fréquentiel dans [52], puis dans le domaine temporel dans [43]. L'utilisation de la norme $\mathcal{H}_\infty$ d'un transfert est un peu plus compliquée en comparaison avec la norme $\mathcal{H}_2$ du fait du calcul de sa valeur précise..

On associe en particulier à la norme $\mathcal{H}_\infty$ l'espace $\mathcal{H}_\infty$ des matrices de transfert analytiques dans le demi-plan droit et de norme finie. Si l'on restreint son attention aux fractions rationnelles à coefficients dans $\mathcal{R}$, le sous espace associé de $\mathcal{H}_\infty$ sera noté $\mathcal{HR}_\infty$.

Contrairement à la norme $\mathcal{H}_2$, il n'existe pas en toute rigueur un moyen de calculer la norme $\mathcal{H}_\infty$, néanmoins il est possible de calculer une bonne approximation par son encadrement entre une borne inférieure et une borne supérieure, et ensuite de l'approcher d'aussi près que possible par un algorithme itératif.

2.2.3.4 Caractérisation de la norme $\mathcal{H}_\infty$ par LMI

Nous rappelons ci-dessous le Lemme Borné Réel permettant le calcul d'une borne supérieure de la norme par l'utilisation des LMIs [52].

Lemme 2.1 : Lemme Borné Réel (LBR) – Cas continu- Le système 2.5 est stable et sa norme $\mathcal{H}_\infty$ est bornée par γ si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ telle que :

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A & P B & C^T \\ (P B)^T & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.15)$$

La transposition de ce lemme dans le cas discret est donnée par le lemme suivant :

Lemme 2.2 : Cas discret- Soit le système 2.6 de transfert $G(z)$ ayant pour réalisation $G(z) = D + C(zI - A)^{-1}B$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. A est stable au sens des systèmes discrets (i.e. $|\lambda_i(A)| < 1$) et $\|G(z)\|_\infty < \gamma$,
2. il existe une matrice symétrique définie positive $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ telle que :

$$\begin{bmatrix} A^T P A - P & A^T P B & C^T \\ B^T P A & B^T P B - \gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.16)$$

3. il existe une matrice symétrique définie positive $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ telle que :

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & A & B & 0 \\ A^T & -P & 0 & C^T \\ B^T & 0 & -\gamma I & D^T \\ 0 & C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.17)$$

2.2.4 La norme de Hankel

On définit la norme de Hankel par :

$$\|G(s)\|_H = \sqrt{\bar{\lambda}(PQ)} \quad (2.18)$$

(sous l'hypothèse d'une matrice de transfert $G(s)$ asymptotiquement stable) où $\bar{\lambda}(PQ)$ désigne la plus grande valeur propre de la matrice produit PQ avec P et Q représentent respectivement les Grammiens de commandabilité et d'observabilité du système. Elles correspondent aux solutions semi-définies positives des équations de Lyapunov :

$$\begin{aligned} AP + PA^T + BB^T &= 0 \\ A^T Q + QA + C^T C &= 0 \end{aligned}$$

2.3 Les inégalités matricielles linéaires, un outil pour l'Automatique

Ce paragraphe a pour objectif une représentation qui se veut volontairement élémentaire des inégalités matricielles qui seront utilisées dans ce mémoire, ainsi quelques principaux résultats sur lesquels nous nous appuyons dans nos développements théoriques.

2.3.1 Bref historique

Les propriétés des résultats issus de techniques d'optimisation convexe ont depuis très longtemps suscité le plus vif intérêt de la communauté d'automaticiens. L'apparition de la première LMI semble devoir être imputée aux travaux de Lyapunov qui traduit la stabilité d'un système $\dot{x} = Ax$ par une condition d'existence d'une matrice symétrique définie-positive P telle que :

$$A^T P + PA < 0$$

Le lien avec l'Automatique moderne n'apparaît explicitement qu'une cinquantaine d'années plus tard. Ces conditions sont dans un premier temps résolues analytiquement pour des systèmes de faible taille. Plus tard, des travaux dans le domaine de la commande des systèmes ont permis de franchir une nouvelle étape qui conduisent à combiner les possibilités mathématiques et le développement de la puissance du calcul informatique. En fait, le début des années 1980 a vu le développement d'algorithmes numériques de résolution de conditions LMI basé sur l'utilisation d'ellipsoïdes. Depuis, de nombreux travaux ont montré qu'un grand nombre de problèmes qui apparaissaient difficiles à résoudre de manière analytique, pouvant se reformuler et se résoudre par l'approche LMI. Encouragés par l'émergence des solveurs de plus en plus efficaces, d'énormes progrès sur le plan théorique ont été réalisés ces dernières années dans l'analyse et le contrôle des systèmes. En effet, les nouvelles techniques basées sur les points intérieurs très efficaces ont relancé depuis quelques années l'intérêt de la formulation convexe de problèmes automatiques. Ces méthodes d'optimisation convexe sont à la base de plusieurs codes et interfaces de résolutions de LMI.

2.3.2 La convexité et l'optimisation convexe

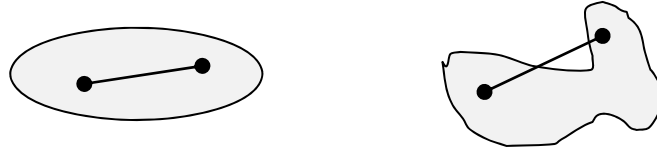
En vue d'une formulation d'un problème d'optimisation, il faut toujours trouver des conditions d'existence pour une solution optimale. Le cas d'un problème d'optimisation convexe s'avère très intéressant en pratique. Aussi, nous présentons très brièvement la notion de convexité et quelques propriétés qui lui sont associées.

2.3.2.1 Définition (Ensemble convexe)

Un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit convexe si :

$$\forall \{x, y\} \in E, \quad \forall \lambda \in [0, 1] \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in E$$

L'interprétation géométrique revient à dire que le segment qui joint deux points appartenant à un ensemble convexe est inclus dans cet ensemble.



Ensemble convexe

Ensemble non convexe

Figure 2.1 : Exemples d'ensemble convexe et non convexe

2.3.2.2 Définition (Enveloppe convexe)

On note $Co(E)$ le plus petit ensemble convexe contenant l'ensemble E . $Co(E)$ est aussi l'ensemble des combinaisons barycentriques des éléments de E :

$$Co\{E\} = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \mid x_k \in E, 0 \leq \lambda_k \leq 1, \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \right\}$$

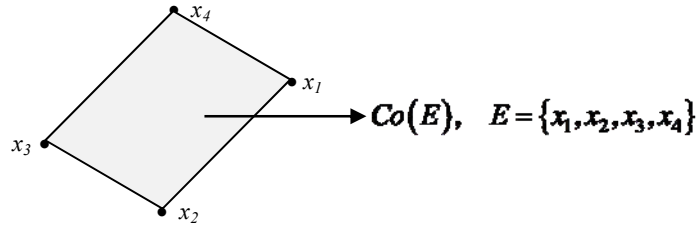


Figure 2.2 : Enveloppe convexe

2.3.2.3 Définition (Fonction convexe)

Une fonction $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si et seulement si :

$$\forall \{x, y\} \in E, \quad \forall \lambda \in [0, 1] \Rightarrow f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

2.3.2.4 Propriétés

Soient A et B deux ensembles convexes. Alors

1. L'ensemble $\alpha A := \{x \mid x = \alpha y, y \in A\}$ est convexe quel que soit α scalaire.
2. La somme $A + B := \{x \mid x = y + z, y \in A, z \in B\}$ est convexe.
3. Le fermé et l'intérieur A de est convexe.
4. L'ensemble $A \cap B$ est convexe.

Proposition 1

Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Si f admet un minimum local x_0 , alors ce minimum est global. De plus, si f est strictement convexe, ce minimum est unique. ■

L'optimisation convexe permet, entre autres, de garantir que tout minimum local est global,

d'aborder des problèmes non différentielles. C'est précisément le cas des problèmes d'optimisation présentés dans le paragraphe suivant.

2.3.3 LMI : Définitions et quelques problèmes associés

Une **LMI** (**L**inear **M**atrix **I**nequality) appelée communément en français **In**égalité **M**atricielle **L**inéaire est une contrainte sur un vecteur réel $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$ qui s'écrit sous la forme :

$$F(x) := F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i \geq 0, \quad (2.19)$$

où les matrices $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symétriques sont données, et le symbole d'inégalité au sens large (respectivement strict) signifie que F est semi-définie positive, c'est-à-dire que $u^T F u \geq 0$ pour tout u (respectivement définie positive, c'est-à-dire que $u^T F u > 0$ pour tout u).

Remarque :

Le terme « Linear Matrix Inequality » n'est pas cohérent avec l'expression de $F(x)$ qui n'est pas nécessairement linéaire en la variable x . En toute rigueur, l'appellation « AMI » pour Inégalité Matricielle Affine semblerait plus appropriée. Cependant, cette incohérence est couramment admise ■

Des contraintes de type LMI permettent d'aborder différents types de problèmes. On présente ci-dessous quelques problèmes dans lesquels, $F(x)$, $H(x)$ et $G(x)$ sont des fonctions symétriques, affines de la variable $x \in \mathbb{R}^m$.

La liste des problèmes formulés ci-dessous en termes de LMI n'est pas exhaustive, mais permet de montrer néanmoins l'étendue du domaine des applications usuellement rencontrées. Pour en savoir plus, l'ouvrage [23] constitue une des excellentes références en la matière.

a. Problème de faisabilité

$$\text{Trouver une solution } x \in \mathbb{R}^m \text{ telle que } F(x) > 0 \quad (2.20)$$

b. Problème d'optimisation d'un objectif linéaire

$$\text{Min } c^T x \text{ sous la contrainte } F(x) > 0. \quad (2.21)$$

où c est un vecteur colonne donné à m composantes définissant l'objectif du problème. Ce problème d'optimisation est une généralisation du problème de programmation linéaire classique au cône des matrices définies positives. Puisque le critère $c^T x$ est linéaire et la contrainte $F(x) > 0$ est convexe, le problème ci-dessus est un problème d'optimisation convexe.

c. Problème de valeur propre généralisée (Generalized Eigenvalue Minimization Problem):

Minimiser le scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ sous les contraintes

$$\begin{aligned} \lambda F(x) - G(x) &> 0, \\ F(x) &> 0, \\ H(x) &> 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

A et B sont deux matrices symétriques affines de la variable x . Ce problème s'interprète comme la minimisation de la valeur propre maximale d'une paire de matrices qui dépendent de manière affine en la variable x , en étant soumis à une contrainte LMI.

d. Problème de maximalisation de déterminant

Un tel problème se formule de la manière suivante :

$$\begin{aligned} &\text{Minimiser } \log(\det(F^{-1}(x))), \\ &\text{sous la contrainte } F(x) > 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Ce problème est convexe, car la fonction « Objectif » est convexe sur l'ensemble faisable.

e. Problème avec contrainte de rang

$$\begin{aligned} &\text{Min } c^T x \text{ sous la contrainte} \\ &F(x) := F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \\ &\text{Rang}(G_0 + \sum_{i=1}^m x_i G_i) \leq N \end{aligned} \quad (2.24)$$

2.3.4 Aspect algorithmique pour la résolution des LMIs

Les méthodes algorithmiques de résolution des problèmes d'optimisation convexe mènent naturellement à l'utilisation des outils informatiques en plus en plus puissant mis à notre disposition. Au cœur des interfaces mis en place pour la résolution des problèmes LMI réside des « Solveurs » de LMI basés sur des algorithmes tenant compte en d'autres des aspects suivants :

- **La calculabilité** : un problème est dit calculable lorsque sa résolution est prouvée être faisable par un algorithme en un nombre fini d'étapes.
- **La complexité** : elle peut être définie comme la fonction qui lie le temps de résolution de l'algorithme à la taille du problème. Celle-ci est définie comme le nombre de variables mis en jeu dans la résolution ainsi que la place mémoire qu'elle nécessite. Le temps de résolution peut être une fonction exponentielle ou polynômiale de la taille du problème.

De nombreux outils numériques sont maintenant disponibles pour résoudre les LMIs. Les algorithmes les plus connus sont vraisemblablement l'algorithme de l'ellipsoïde qui permet de résoudre en un temps polynomial des problèmes LMI standards et l'algorithme des points intérieurs. L'optimisation sous contraintes LMI recouvre des problèmes d'optimisation sans contrainte avec une fonction de coût non différentiable. Pour résoudre ce problème la méthode des points intérieurs consiste à se ramener à la résolution d'une série de problèmes d'optimisation différentiables sans contrainte. Parmi les solveurs disponibles à notre connaissance, nous citons :

- La LMI Control Toolbox pour MATLAB [135], dont le principal avantage est la rapidité, au prix d'une syntaxe peu intuitive.
- Les programmes SP (semidefinite programming) MAXDET (Determinant Maximization Problems) en d'autres et plus récemment CVX (convex optimization) dont les sources en langage C sont disponibles. Une interface conviviale reprenant une syntaxe de type MATLAB est également disponible pour ces deux programmes. Il s'agit du logiciel SDPSOL. Pour en savoir plus sur ce sujet, on peut consulter la page web :

<http://www.stanford.edu/~boyd/software.html>

- L'interface conviviale LMITOOL [46], qui génère un code MATLAB permettant d'utiliser indifféremment le programme SP cité ci-dessus.

Dans le cadre des travaux présentés dans cette thèse, les problèmes LMI rencontrés ont été résolus numériquement en utilisant la boîte à outils commerciale de Matlab^(*) : LMI Control Toolbox [55].

2.3.5 Les principales propriétés des LMI(s)

2.3.5.1 Concaténation en une condition unique

Le problème suivant :

$$\text{Trouver } x \in \mathbb{R}^m \text{ tel que } F_1(x) > 0, F_2(x) > 0, \dots, F_m(x) > 0 \quad (2.25)$$

où $F_i(x) > 0, i = 1, \dots, m$, sont des fonctions affines de la variable x , peut se réécrire en une contrainte LMI unique sous la forme :

$$\text{Trouver } x \in \mathbb{R}^m \text{ tel que : } \begin{bmatrix} F_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_m(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (2.26)$$

Cette propriété permet de traiter facilement des problèmes qui se présentent sous la forme de plusieurs contraintes LMI à satisfaire simultanément. Nous ne distinguerons donc pas une LMI unique et un ensemble de LMIs, même si la distinction est importante de point de vue algorithmique. Cette propriété découle du fait que les valeurs propres d'une matrice diagonale par blocs sont constituées par les valeurs propres des matrices sur la diagonale.

2.3.5.2 Quelques règles de transformation

Nous allons voir des règles de transformation de problèmes d'optimisation en problèmes d'optimisation sous contraintes LMI. Soit une contrainte LMI est définie par :

$$\mathcal{C} = \left\{ x \in \mathbb{R}^m, \forall \zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \zeta^T F(x) \zeta > 0 \right\} \text{ avec } F(x) := F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (2.27)$$

où x est le vecteur des variables de décision, vecteur de $\mathbb{R}^m$ et où les $F_i(x)$ sont m matrices symétriques données de $\mathbb{R}^{n \times n}, i = 1, \dots, m$. Lors de l'établissement d'un problème d'optimisation, les contraintes peuvent être similaires à (2.20) mais différer sous deux points:

- $F(x)$ n'est pas une fonction affine en x (par exemple, c'est une fonction biaffine, d'où une contrainte de type BMI);
- l'inégalité $\zeta^T F(x) \zeta > 0$ est définie pour x appartenant à un sous ensemble de $\mathbb{R}^m$.

Néanmoins, dans certains cas, il est possible de présenter certaines règles de transformation qui permettent de réécrire le problème d'optimisation en un problème d'optimisation équivalent sous contraintes LMI

❖ Lemme de Schur

La LMI :

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0, \quad (2.28)$$

où $Q(x) = Q^T(x), R(x) = R^T(x), S(x)$ sont des fonctions affines de x , est équivalente à :

$$Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) > 0, \quad R(x) > 0. \quad (2.29)$$

En pratique c'est l'ensemble d'inégalités non linéaires (2.29) qui peut être représenté par la LMI linéaire (2.28).

Remarque : On montre de même que (2.29) est équivalente à $\begin{bmatrix} R(x) & S^T(x) \\ S(x) & Q(x) \end{bmatrix} > 0$

Comme application, l'inégalité non linéaire sous la forme (à cause du terme XPX) :

$$A^T X + XA + XPX + Q < 0, \quad (2.30)$$

avec $P > 0$, à priori non convexe car sous cette forme non linéaire en la variable X , peut être réécrite sous la forme de la LMI équivalente suivante :

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA + Q & X \\ X & -P^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.31)$$

❖ Norme matricielle sous forme LMI

$$\|A(x)\|_2 < 1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} I & A(x) \\ A^T(x) & I \end{bmatrix} > 0 \quad (2.32)$$

❖ Règle d'élimination d'une variable

$$A(x) + B(x)XC^T(x) + C(x)X^T B^T(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{B}^T(x)A(x)\tilde{B}(x) > 0 \\ \tilde{C}^T(x)A(x)\tilde{C}(x) > 0 \end{cases}, \quad (2.33)$$

où $\tilde{B}$ et $\tilde{C}$ représentent respectivement le complément orthogonal de B et C . Ce résultat est remarquable puisqu'il donne une condition nécessaire et suffisante permettant de tester l'existence d'une matrice X telle que la matrice $A(x) + B(x)XC^T(x) + C(x)X^T B^T(x)$ est définie positive, sans rechercher X explicitement.

On rappelle par ailleurs que le complément orthogonal d'une matrice $U \in \mathbb{R}^{n \times p}$ est la matrice $\tilde{U}$ telle que $U^T \tilde{U} = 0$ et $\text{Rang} \begin{bmatrix} U & \tilde{U} \end{bmatrix} = n$.

❖ Règle de complétion

Le lemme de complétion est utilisé entre d'autres lors de la synthèse de correcteurs avec critère $\mathcal{H}_\infty$. Il permet de restreindre le nombre de variables lorsqu'une inégalité matricielle fait intervenir une matrice et son inverse [113].

Soient P et Q deux matrices symétriques définies positives de dimension (n, n) . Il existe une matrice symétrique définie positive $\tilde{P}$ de dimension $(2n, 2n)$ telle que le bloc supérieur gauche de $\tilde{P}$ soit P , et que celui de $\tilde{P}^{-1}$ soit Q , si et seulement si :

$$\begin{bmatrix} P & I \\ I & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.34)$$

Quand (2.34) est strictement vérifiée, les matrices $\tilde{P}$ et $\tilde{Q} = \tilde{P}^{-1}$ peuvent être paramétrisées avec des matrices M et N de dimension (n, n) telles que $N = (I - QP)M^{-1}$.

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} P & M \\ * & \bar{P} \end{bmatrix} \quad \tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q & N \\ * & \bar{Q} \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

où $\bar{P} = M^T(P - Q^{-1})^{-1}M$ et $\bar{Q} = N^T(Q - P^{-1})^{-1}N$.

Lemme 2.3 : Soient $X = X^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $Y = Y^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ et $r \in \mathbb{N}^*$ alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :

i) $\exists X_{12} \in \mathfrak{R}^{n \times r}$, $X_2 = X_2^T \in \mathfrak{R}^{r \times r}$ telles que :

$$\begin{pmatrix} X & X_{12} \\ X_{12}^T & X_2 \end{pmatrix} > 0 \text{ et } \begin{pmatrix} X & X_{12} \\ X_{12}^T & X_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} Y & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

ii) $\begin{pmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{pmatrix} \geq 0$ et $\text{Rang} \begin{pmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{pmatrix} \leq n + r$

iii) $\begin{pmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{pmatrix} \geq 0$ et $\text{Rang}(XY - I_n) \leq n + r$ ■

2.3.6 La LMI, un outil plus général que les équations de Riccati

Les équations de Riccati sont très souvent rencontrées dans nombreux problèmes d'Automatique. La résolution de ces équations fait appel à des procédures relativement simples sur le plan numérique. La résolution d'un problème LMI passe en revanche par une optimisation itérative, de mise en œuvre lourde (coût numérique, problème de convergence, ...).

De manière générale, une résolution d'un problème formulé en termes d'équations de Riccati est toujours préférable à une formulation LMI. Cependant, depuis le début des années 90, bon nombre de problèmes classiques d'Automatique ont pu être reformulés en termes de LMI (voir par exemple [23]). Il est ainsi intéressant d'établir le lien entre ces deux outils.

Par ailleurs, certains problèmes n'ayant pas de solution analytique peuvent être reformulés en termes de LMI, et donc être résolus dans ce cadre. Il est aussi intéressant de souligner que ce formalisme permet parfois de lever des hypothèses, nécessaires à une résolution par équations de Riccati. De manière générale, le contexte LMI permet d'aboutir à des formulations plus élégantes qu'une formulation par des équations de Riccati, mais au prix d'une résolution numérique plus coûteux.

2.3.6.1 Définition

Soient A , $Q = Q^T$ et $P = P^T$ des matrices réelles d'ordre (n, n) . Une équation algébrique de Riccati (notée ARE) a la forme suivante :

$$A^T X + XA + XPX + Q = 0, \quad (2.36)$$

et à laquelle, il est d'usage de lui associer la matrice Hamiltonienne d'ordre $(2n, 2n)$ suivante :

$$H := \begin{bmatrix} A & P \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Supposons que H n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire : elle a alors n valeurs propres à partie réelle strictement négative et n à partie réelle strictement positive. Soit $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$,

une base de l'espace propre associée aux valeurs propres à partie strictement négative avec X_1 et $X_2 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$.

Supposons de plus X_1 inversible, ou de manière équivalente, que les deux sous-espaces :

$$\text{Im} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 0_{n \times n} \\ I_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

sont complémentaires.

Alors, $X := X_2 X_1^{-1}$ est déterminée de façon unique à partir de H , elle est réelle symétrique et vérifie (2.36), et de plus elle assure que la matrice $A + PX$ n'a que des valeurs propres à partie réelle strictement négative. Cette matrice sera appelée la solution stabilisante de (2.36), et notée :

$$X = \text{Ric}(H) \quad (2.39)$$

Nous noterons par la suite $\text{dom}(\text{Ric})$ l'ensemble des matrices Hamiltoniennes H vérifiant les deux propriétés précédentes, à savoir : H n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire et les deux sous-espaces définis par (2.38) sont complémentaires.

2.3.6.2 Lien avec les LMIs

Le théorème suivant souligne les relations qui existent entre les AREs et les LMIs.

Théorème 2.3 [152]

Soit $P > 0$. Supposons que (A, P) soit commandable et qu'il existe une matrice $X \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ symétrique telle que :

$$A^T X + XA + XPX + Q < 0 \quad (2.40)$$

Alors, il existe une solution $Y > X$ de l'équation de Riccati :

$$A^T Y + YA + YPY + Q = 0, \quad (2.41)$$

telle que les valeurs propres de $A + PY$ sont à partie réelle strictement négative. ■

2.3.7 Intérêt théorique et pratique des LMIs

L'intérêt des méthodes basées sur des LMIs vient du fait que ces dernières peuvent être résolues en utilisant la programmation convexe. Avec cette approche, on n'est plus limité aux problèmes ayant une solution analytique. En résolvant ces inégalités, on obtient un domaine de solutions faisables, c'est-à-dire de solutions satisfaisant ces LMIs, plus vaste que celui généré par la recherche de solutions analytiques. En utilisant le fait qu'une inégalité possède davantage de solutions qu'une équation, il est possible d'employer les degrés de liberté supplémentaires pour inclure d'autres objectifs que ceux initialement retenus.

Nous résumons ci-dessous sans forcément dans l'ordre d'importance, des atouts qui ont fait que l'approche LMI a suscité de plus en plus l'intérêt de la communauté des automaticiens.

1. Lien grandissant avec l'Automatique : De nombreuses conditions classiques dans les problèmes d'Automatique (Norme $\mathcal{H}_2$, Lemme Positif Borné, Lemme Réel Borné,

stabilité quadratique, positivité, commande LQG,..) peuvent se formuler sous la forme de problèmes LMI. De plus, il est possible de convertir certaines inégalités non-linéaires en inégalités linéaires moyennant l'utilisation de quelques règles de transformations. Nous rencontrerons dans la suite les cas les plus courants.

2. Convexité : La LMI (2.20) définit une contrainte convexe en variables de décisions x . L'intérêt de la convexité comme il a été précisé provient du fait qu'un nombre de problèmes peuvent s'écrire sous formes de contraintes de type inégalités matricielles. Ces problèmes peuvent être résolus numériquement de manière efficace en un temps « raisonnable » grâce à la disponibilité des logiciels créés à cet effet.
3. La concaténation : Plusieurs contraintes de type LMI peuvent être traduites par une seule contrainte:

$$F_1(x) > 0, \dots, F_n(x) > 0 \quad (2.42)$$

peuvent se grouper en une seule :

$$\text{Diag}(F_1(x), \dots, F_n(x)) > 0 \quad (2.43)$$

4. Possibilité à prendre en compte des contraintes supplémentaires, en particulier celle concernant l'ordre du correcteur à synthétiser.
5. Possibilité de considérer des contraintes impliquant une performance $\mathcal{H}_2$, ou encore des placements de pôles.
6. Disponibilité des outils informatiques : Les algorithmes utilisés pour résoudre les contraintes de type LMI sont efficaces. Une bonne initialisation garantit la convergence de l'algorithme de résolution. Cette convergence est de type polynômial.

2.3.8 Algorithme de complémentarité conique

Certains problèmes rencontrés peuvent être formulés par un ensemble d'inégalités matricielles linéaires par rapport aux variables de décision qui ne posent pas de problème particulier pour leur résolution (Le cas convexe). Cependant lorsque ces inégalités sont augmentées par une contrainte de type rang matriciel, le problème devient non convexe et une méthode heuristique doit être proposée pour sa résolution.

Dans ce contexte, nous présentons l'algorithme de la complémentarité conique connu par l'abréviation CCA : Cone Complementarity Algorithm proposé par El-Ghaoui [48] dans le cadre de la synthèse d'un compensateur d'ordre réduit par la technique des LMIs.

Pour fixer les idées, on considère le problème de faisabilité suivant : trouver $X = X^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y = Y^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ définies positives solutions des inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} F_1(X, Y) &< 0 \\ F_2(X, Y) &< 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{bmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} \leq n + r \Leftrightarrow \text{rang}(XY - I_n) \leq r \quad (2.45)$$

Si $r \geq n$, la contrainte (2.45) est toujours satisfaite. Lorsque $r < n$, la contrainte de rang fait perdre la convexité du problème.

La résolution du problème défini par les contraintes LMI (2.44) avec réduction du rang (2.45) de la matrice $XY - I_n$ est proposée dans [48].

L'objectif peut être formulé de la manière suivante :

$$\underset{X=X^T, Y=Y^T}{Min} \text{Trace}(XY),$$

sous des contraintes LMIs de la forme :

$$F_1(X, Y) < 0$$

$$F_2(X, Y) < 0$$

$$\begin{bmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} \geq 0$$

Après optimisation, lorsque le résultat obtenu est n , la matrice $XY - I_n$ est la matrice nulle.

On remarque que le problème ci-dessus n'est pas linéaire. Il ne peut donc pas être résolu par les algorithmes d'optimisation sous contrainte LMI. Une méthode de linéarisation est donc utilisée. Au point (X_k, Y_k) , la linéarisation de la fonction $\text{Trace}(XY)$ s'écrit :

$$\phi_{lin}(X, Y) = \text{constante} + \text{Trace}(X_k Y + Y_k X)$$

L'algorithme minimise de manière itérative $\phi_{lin}(X, Y)$. On arrête la procédure itérative lorsque les valeurs propres de $XY - I_n$ n'évoluent plus de manière significative selon à une tolérance choisie à priori.

A chaque pas, la solution est actualisée à partir des résultats des itérations courantes et précédente. On utilise un facteur d'oubli $\lambda \in [0, 1]$, ce qui conduit à adopter l'algorithme suivant :

Algorithme 2.1.

Etape 1

Recherche d'un point initial (X_0, Y_0) . Ceci consiste à déterminer un point de départ de l'algorithme. Des recommandations sont faites selon le problème à résoudre, par exemple les paramètres d'un correcteur d'ordre plein dans un problème de recherche d'un correcteur d'ordre réduit. S'il n'existe pas, on arrête.

Sinon, on pose $k = 0$ et on choisit le facteur d'oubli λ

Etape 2

Recherche de (X_{opt}, Y_{opt}) solution du problème LMI :

$$\underset{X=X^T, Y=Y^T}{Min} \text{Trace}(X_k Y + Y_k X) \text{ sous les contraintes (2.44)}$$

Etape 3

Actualisation des valeurs des variables X et Y :

$$\begin{cases} X_{k+1} = \lambda X_{opt} + (1 - \lambda) X_k \\ Y_{k+1} = \lambda Y_{opt} + (1 - \lambda) Y_k \end{cases}$$

Etape 4

Si le critère d'arrêt est vérifié, Fin.

Sinon, on pose $k := k + 1$ et on retourne en étape 2 ■

2.3.9 Les Inégalités Matricielles Bilinéaires

La formulation BMI (**B**ilinear **M**atrix **I**nequality suivant l'acronyme Anglo-Saxon) des problèmes de commande est devenue populaire à partir des années 90 et constitue depuis un outil performant pour la formulation de problèmes de commande notamment dans le cadre de l'analyse et la commande robuste. C'est pour cela, il nous a paru important de lui consacrer ce paragraphe en insistant particulièrement sur les méthodes de résolution des BMIs.

Les BMIs étant non convexes, il n'y avait pas à l'époque de leur apparition de méthodes de calcul ni d'algorithme unique pour les résoudre, contrairement aux problèmes LMI, qui eux sont convexes, et pour lesquels des algorithmes très performants étaient disponibles.

2.3.9.1 Définition

Une Inégalité Matricielle Biaffine est une contrainte matricielle de la forme [63] [126] :

$$F(x, y) := F_{o,o} + \sum_{i=1}^{m_1} x_i F_{i,o} + \sum_{j=1}^{m_2} y_j F_{o,j} + \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} x_i y_j F_{i,j} \geq 0 \quad (2.46)$$

où $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{m_1}] \in \mathbb{R}^{m_1}$ et $y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{m_2}] \in \mathbb{R}^{m_2}$ sont les vecteurs des $m_1 + m_2$ variables de décision, $F_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont des matrices symétriques données.

Dans le cadre de notre thèse, les problèmes que nous avons rencontrés sont de deux sortes :

- **Problème de faisabilité**

$$\text{Trouver une solution } (x, y) \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2} \text{ à la BMI } F(x, y) \geq 0 \quad (2.47a)$$

- **Problème de minimisation d'un objectif linéaire**

$$\text{Min } (c_x^T x + c_y^T y) \text{ sous la contrainte } F(x, y) \geq 0 \quad (2.47b)$$

où c_x et c_y sont deux vecteurs colonne donnés à m_1 et m_2 et composantes respectivement.

Notons qu'une LMI est un cas particulier de BMI pour laquelle :

$$F_{i,j} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, m_1, \quad \forall j = 1, \dots, m_2$$

D'autre part, certaines BMI peuvent être transformées en LMI par changement ou élimination de variables dont leur résolution par des algorithmes d'optimisation convexe ne pose pas a priori de problème.

Il n'existe pas aujourd'hui à notre connaissance de méthodes exactes pour résoudre ce genre de problèmes, mais des heuristiques qui ont été mises en place dans différents cadres. Ce type de contraintes matricielles permet de formuler d'une façon élégante différents problèmes de commande robuste. Cependant, contrairement aux Inégalités Matricielles Linéaires qui peuvent être résolues efficacement par des algorithmes performants, les BMIs conduisent à un problème de calcul difficile tant sur le plan théorique que pratique.

Dans ce paragraphe, nous décrivons quelques problèmes de commande traités par des BMIs ainsi que certaines méthodes proposées pour la résolution de ce type de problèmes. Dans le cas général, un problème de faisabilité BMI correspond à un problème de minimisation d'une fonction biconvexe $\mathcal{R}^{m_1} \times \mathcal{R}^{m_2}$ sur $\mathcal{R}^{m_1} \times \mathcal{R}^{m_2}$, pour lequel il n'existe pas de méthodologie générale de résolution efficace [63]. Le problème vient du fait qu'une formulation BMI ne pouvant pas être réduite à une formulation LMI sera donc considérée comme difficile à résoudre.

Des algorithmes itératifs de nature heuristiques sous-optimaux ont été proposés pour approcher la solution. L'idée la plus simple consiste à diviser (2.46) en deux problèmes de faisabilité linéaires en les variables de décision lorsqu'une des deux variables est fixée [81].

L'inconvénient majeur de ces démarches provient du fait qu'elles ne permettent de garantir ni la convergence, ni la convergence vers un minimum global: il peut exister des minima locaux de la fonction biconvexe qui ne correspondent pas avec le minimum global, solution du problème. Beaucoup d'efforts ont été considérés pour améliorer le processus de convergence.

2.3.9.2 Classification des problèmes BMIs

Dans le domaine de la commande en particulier, on rencontre les BMIs dans plusieurs problèmes comme le retour d'état statique, la stabilisation des systèmes incertains, la synthèse d'un correcteur avec contraintes d'ordre et/ou de structure, la stabilisation simultanée de plusieurs systèmes et la synthèse de correcteurs décentralisés avec des contraintes sur le gain [5] [23] [28] [77]. C'est dans l'article [125] où on trouve le premier travail traitant les BMIs comme un outil simple et convivial pour formuler et résoudre les problèmes de synthèse de correcteurs robustes. Cependant, les auteurs ne proposent pas d'algorithme de résolution de ces problèmes.

Dans la littérature consultée, on peut scinder deux grandes familles pour la résolution des BMIs : « la résolution globale » et « la résolution locale ». Dans ce qui suit, on donnera un bref aperçu sur ces deux grandes familles en soulignant les sujets de commande traités et les algorithmes de résolution choisis.

- **Résolution des problèmes BMIs par optimisation globale**

La résolution des problèmes BMIs par optimisation globale n'a pas visiblement suscité un grand intérêt de chercheurs, automaticiens ou informaticiens. L'inconvénient majeur de tous les algorithmes globaux de résolution de BMIs est leur complexité numérique, due aux variables de décision additionnelles.

- **Résolution des problèmes BMIs par optimisation locale**

La deuxième grande famille de l'optimisation BMI, en l'occurrence « l'optimisation locale », a attiré un grand nombre de chercheurs durant la dernière décennie. Contrairement aux approches globales, la plupart des approches locales sont moins exigeantes sur le plan numérique, mais leur efficacité reste dépendante de la (ou des) condition(s) initiale(s) et peuvent ne pas converger vers le minimum global. Ce qui constitue en soit l'inconvénient majeur.

A l'issue de la lecture que nous avons faite sur ce sujet, nous classifions les différentes méthodes au sein de cette grande famille par type d'algorithme choisi. Par la même occasion, nous mentionnerons certains articles qui nous ont paru les plus intéressants, tout en signalant le type de problème de commande qu'ils ont traité.

a- Algorithmes itératifs

L'approche la plus simple dans cette famille d'optimisation locale est celle qui utilise le fait qu'en fixant certaines variables de décision le problème BMI devient convexe en les variables restantes et vice-versa, et itère entre les deux. On se retrouve alors avec des LMIs très simples à résoudre par des algorithmes standards de type point intérieur ou grâce aux boîtes à outils disponibles. Tous les articles décrits ci-dessous reposent sur le même principe d'itération.

Plus récemment, les méthodes itératives ont continué à susciter l'intérêt de plusieurs auteurs comme le montre la liste bibliographique suivante [19], [78], [140], [20], [45],[130] qui s'articulent sur la synthèse des régulateurs robustes.

b- Algorithmes basés sur des transformations vers des problèmes convexes (convexification)

L'article [85] aborde le problème de synthèse de correcteurs avec ordre fixé. L'idée est de proposer une approche unifiée permettant la résolution de différents types de problèmes de synthèse, tels que la synthèse robuste, optimale, linéaire, etc. C'est grâce à un changement de variable que ces problèmes sont réécrits sous forme LMI. La résolution est ensuite assurée par tout solveur LMI.

L'article [103] traite le même problème que précédemment. Le problème BMI est converti en un problème LMI de faisabilité à l'aide d'une condition « suffisante » qui permet d'aboutir à transformer le problème en un problème de synthèse de retour de sortie statique. Deux conditions suffisantes permettent de transformer ce problème en deux LMIs de faisabilité.

L'idée de l'article [52] est de proposer une méthode pour optimiser des correcteurs $\mathcal{H}_\infty$ d'ordre réduit fixé a priori. Par l'intermédiaire du « Lemme Borné Réel », le problème d'optimisation est reformulé pour s'exprimer sous la forme avec contrainte BMI avec une fonction de Lyapunov pour chaque mesure de performance. Cette fonction de Lyapunov est une variable de décision supplémentaire. Du fait qu'elles soient choisies identiques permet de transformer le problème BMI en un problème LMI convexe. Or les auteurs soulignent néanmoins que cette condition introduit sur le problème d'optimisation un certain conservatisme.

c - Algorithmes basés sur la méthode de l'homotopie

Une autre approche locale est celle appelée « méthode du suivi du chemin » (Path-Following Method) ou encore « méthode d'homotopie » (Homotopy Method) [77]. C'est principalement une méthode de linéarisation du problème bilinéaire. L'idée de base est que, sous l'hypothèse d'un petit nombre de pas, le problème BMI peut être approximé par un problème LMI en utilisant une perturbation du premier ordre. En pratique, cette méthode pourra être utilisée pour les problèmes où les performances en boucle fermée ne sont pas fondamentalement meilleures que celle en boucle ouverte, comme par exemple pour le placement d'actionneurs et de capteurs ou la synthèse topologique du correcteur (imposition d'une structure particulière, par exemple PID, ou d'un ordre donné) [77].

Dans le but de remédier au moins à la perte de robustesse suite à la réduction a posteriori d'ordre de correcteurs synthétisés par la synthèse $\mathcal{H}_\infty$, les auteurs de [139] ont été les premiers à avoir proposé un algorithme utilisant la méthode d'homotopie avec un formalisme BMI pour synthétiser un correcteur d'ordre fixé à l'avance. Ceci dit, les auteurs reconnaissent que le problème devient très difficile numériquement. Cet article considère les deux cas de synthèse $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$.

Les auteurs des articles [84], [149] et [105] traitent le problème de commande décentralisée pour des systèmes à grande dimension. Le système de grande dimension est composé de sous-systèmes interconnectés. Le problème de commande $\mathcal{H}_\infty$ est réduit à un problème de faisabilité BMI. La BMI est résolue en utilisant un algorithme basé sur la méthode de l'homotopie. L'idée est donc d'augmenter graduellement l'interconnexion entre les sous-systèmes depuis zéro jusqu'à un gain d'amplitude donnée. Le cas de présence de perturbations polytopiques entre les interconnexions est aussi considéré dans l'article [84]. Cependant, comme nous allons le revoir plus loin, les auteurs attestent que cette méthode, bien que destinée en théorie aux systèmes de grandes dimensions, présente d'énormes difficultés de programmation et de calcul numérique, du fait de la présence d'un grand nombre de variables additionnelles, empêchant ainsi la convergence en un temps acceptable.

La méthode de l'homotopie, présentée dans l'article [77] mentionné plus haut, consiste à utiliser une perturbation du premier ordre pour linéariser le problème BMI et calculer ensuite, à partir d'un correcteur initial, un correcteur amélioré d'itération en itération. Toutefois, les auteurs soulignent ici encore l'importance du choix du point initial.

Dans le cadre de la commande décentralisée des systèmes incertains, nous mentionnons également le travail [29]. L'idée est, partant de " **Bounded Real Lemma** " pour calculer un régulateur décentralisé, le problème est alors formulé comme un ensemble d'inégalités matricielles non linéaires (NMI), qui sont résolues par une méthode itérative grâce à la méthode de l'homotopie en les transformant auparavant sous forme d'un ensemble d'inégalités matricielles linéaires (LMI).

Nous présentons ci-après l'algorithme général dont on trouve une de ses applications dans le cadre de la commande robuste décentralisée. Pour ce faire, on part de l'inégalité matricielle suivante non linéaire en paramètres de décision X et G :

$$F(X, G) < 0 \quad (2.48)$$

On constate que la BMI (2.48) peut être traitée comme une double LMI. Effectivement, si G est fixé, trouver X qui satisfait (2.48) devient une LMI de faisabilité, pour laquelle des algorithmes des solveurs existent. La même chose est vraie si on fixe X . Cependant, même si la BMI est faisable à l'origine, cela n'empêchera pas de pouvoir trouver des LMIs en X et G qui ne soient pas faisables. Ceci est dû au choix non approprié de X , respectivement de G . Le problème est alors de trouver X et G appropriés qui réduisent la BMI à une LMI faisable. C'est dans cette optique que la méthode de l'homotopie est proposée.

L'idée de départ est d'introduire un nombre réel λ , variant de 0 à 1, et de considérer la fonction matricielle :

$$H(X, G, \lambda) = F((1 - \lambda)G_i + \lambda G, X), \quad (2.49)$$

où G_i est une matrice constante supposée une donnée du problème, de même dimension que G . Le terme $F((1 - \lambda)G_i + \lambda G, X)$ dans (2.49) définit une interpolation entre G_i et G . A titre d'exemple :

$$H(X, G, \lambda) = F((1 - \lambda)G_i + \lambda G, X) = \begin{cases} F(G_i, X), & \text{si } \lambda = 0 \\ F(G, X), & \text{si } \lambda = 1. \end{cases} \quad (2.50)$$

Le problème de la recherche d'une solution pour (2.48) est donc inclus dans la famille des problèmes :

$$H(X, G, \lambda) < 0, \quad \lambda \in [0, 1] \quad (2.51)$$

Le point initial G_0 est choisi arbitrairement égal à zéro. Le problème consiste maintenant à trouver le chemin pour aller de (X_0, G_0) , au point $\lambda = 0$, à (X, G) , au point $\lambda = 1$. Pour cela, on considère un entier m positif et $(m + 1)$ points $\lambda_k = \frac{k}{m}, k=1, \dots, m$, dans l'intervalle $[0, 1]$ pour engendrer une famille de problèmes :

$$H(X, G, \lambda_k) < 0, \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (2.52)$$

Si le problème au point k est faisable, on notera la solution obtenue (X_k, G_k) . On calculera ensuite la solution (X_{k+1}, G_{k+1}) de $H(X, G, \lambda_{k+1}) < 0$ en résolvant cette inégalité matricielle comme une LMI avec l'une des deux variables fixée, $G = G_k$ ou $X = X_k$. Si les problèmes de la famille (2.51) sont tous faisables, la solution pour la BMI (2.48) est obtenue au point $k = m$ correspondant à $\lambda = 1$.

Si ce n'est pas le cas, c'est-à-dire si $H(X_k, G, \lambda_{k+1}) < 0$ n'est pas faisable pour une valeur de k donnée, après qu'ait été fixé $G = G_k$ ou, $X = X_k$ on considèrera davantage de points dans l'intervalle $[\lambda_k, 1]$ en augmentant le nombre m . La procédure sera alors répétée à partir de la solution (X_k, G_k) au point $\lambda = \lambda_k$. D'où l'organigramme général de la méthode donné par la figure 2.3 dans la page suivante.

e- Algorithme itératif pour le calcul du gain de retour de sortie statique

Nombreux sont les problèmes de synthèse des régulateurs ou la réduction d'ordre peuvent être exprimés comme un problème équivalent à la détermination du gain de retour de sortie statique. Comme ce problème est non convexe, une attention particulière est alors lui est accordé. Nous proposons dans ce qui suit de rappeler la formulation du problème de la détermination d'un gain de retour de sortie statique pour ensuite présenter un algorithme dû à [25] et que nous avons testé avec beaucoup de succès.

Le système en boucle fermée par la loi de commande $u = yc + Ky$ est alors régi par :

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + BKC)x + By_c \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.55)$$

Le système (A, B, C) est dit stabilisable par retour de sortie statique s'il existe un gain K tel que les valeurs propres de $(A + BKC)$ soient à partie réelle négative. Le problème de la stabilisation consiste donc à calculer un gain $K \in \mathbb{R}^{m \times p}$ de telle sorte que les valeurs propres de $(A + BKC)$ soient à partie réelle négative.

En termes des LMIs, ce problème est équivalent à la recherche d'une matrice $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et un gain $K \in \mathbb{R}^{m \times p}$ tels que :

$$P(A + BKC) + (A + BKC)^T P < 0 \quad (2.56)$$

Il est montré par ailleurs que la stabilisation par retour de sortie statique avec contrainte sur le placement des pôles [26] peut être formulée par l'inégalité matricielle suivante :

$$P(A + BKC) + (A + BKC)^T P - \alpha P < 0 \quad (2.57)$$

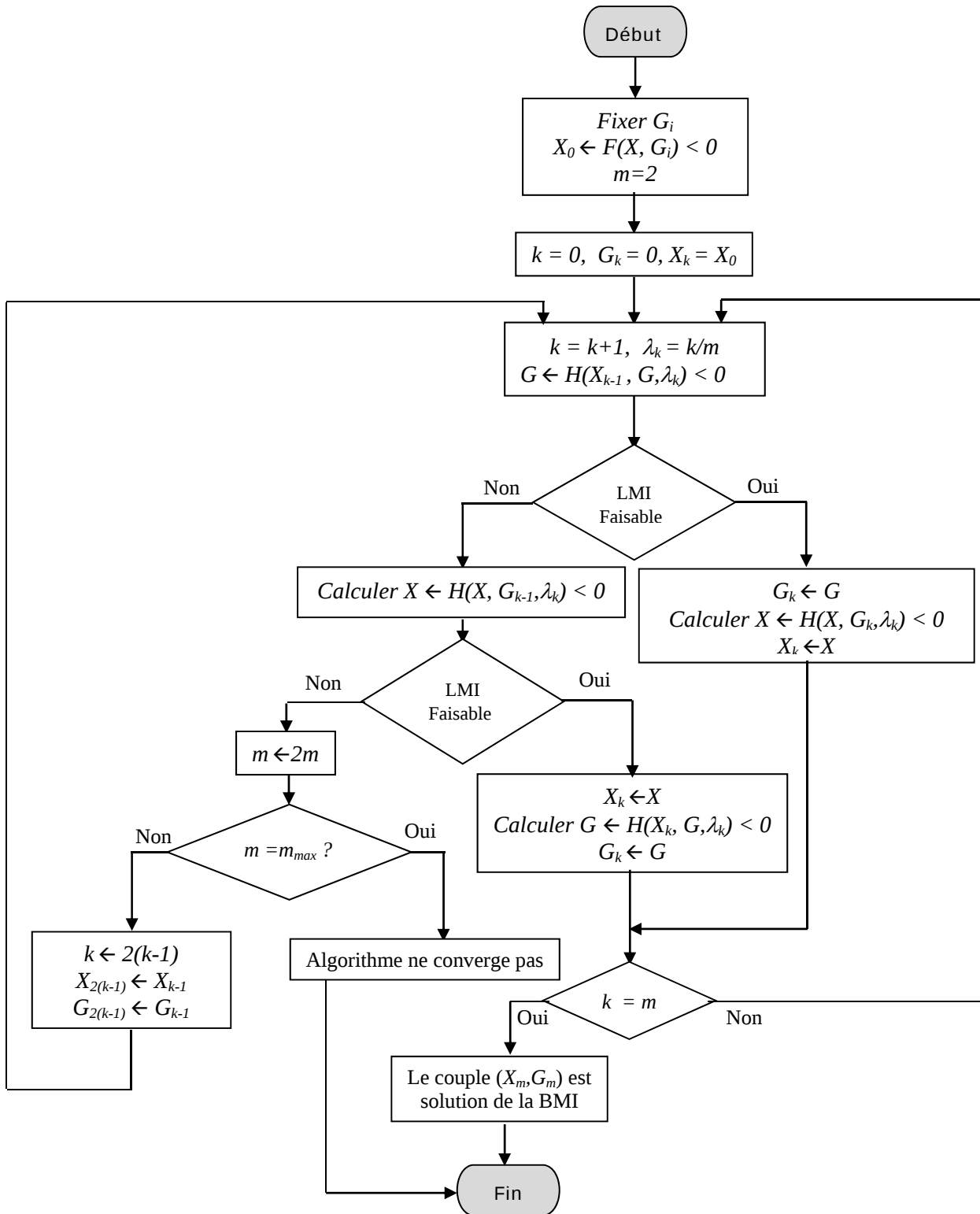


Figure 2.3 : Organigramme général d'homotopie

Le problème lié à la résolution de l'inégalité 2.57 est un problème non convexe. La clé de l'algorithme proposé est de trouver une valeur initiale pour la matrice P .

Initialisation de la matrice P

En fixant $V_1 = BKC$, alors (2.53) devient :

$$PA + A^T P + V_1 C + C^T V_1^T < 0 \quad (2.58)$$

Cette inégalité est linéaire en P et V_1 . Cependant, P ne donne pas toute l'information puisque le terme B n'apparaît pas dans l'inégalité (2.58). Cette inégalité peut être transformée en l'inégalité suivante par une pré et post-multiplication par la matrice $L = P^{-1}$:

$$(A+BKC)L + L(A+BKC)^T < 0 \quad (2.59)$$

Par ailleurs, en fixant $V_2 = KCL$, alors (2.59) devient :

$$AL + LA^T + BV_2 + V_2^T B^T < 0 \quad (2.60)$$

Conformément à l'idée de la méthode de linéarisation dans [48], La relation $L = P^{-1}$ doit être aussi exprimée sous forme d'une contrainte LMI. Les problèmes comportant ce type de contraintes peuvent s'exprimer de manière équivalente sous la forme de problème comprenant une condition LMI associée à une condition de rang.

$L = P^{-1}$ donne $PL = I$, qui est LMI suivante:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P & I \\ I & L \end{bmatrix} &\geq 0 \\ \text{Rang} \begin{bmatrix} P & I \\ I & L \end{bmatrix} = n &\Leftrightarrow \text{rang}(PL - I) = n \end{aligned} \quad (2.61)$$

et la version linéarisée $\text{Trace}(PL)$ est minimisée. Ensuite, un algorithme itératif pour trouver une matrice P initiale est donnée comme suit :

Algorithme 2.2 :

- **Etape 1** : Mettre $i=1$ et $P_0=I$ et $L_0=I$
- **Etape 2** : Dérivée P_i et L_i par la résolution du problème d'optimisation avec les variables de décision P_i, L_i, V_1 et V_2 :

OP1 : Minimiser $\text{Trace}(P_i L_{i-1} - L_i P_{i-1})$ sous les contraintes LMI suivantes :

$$PA + A^T P + V_1 C + C^T V_1^T < 0$$

$$PA + A^T P + BV_2 + V_2^T B^T < 0$$

$$\begin{bmatrix} P & I \\ I & L \end{bmatrix} \geq 0$$

- **Etape 3** : Si $\text{Trace}(P_i L_i) - n < \varepsilon_1$, où ε_1 est une tolérance prédéfinie, alors $P = P_i$ initiale est trouvée, **s'arrêter**.
- **Etape 4** : Si la différence entre les deux itérations satisfait :

$\text{Trace}(P_i L_{i-1} - P_{i-1} L_{i-1}) < \varepsilon_2$, où ε_2 est une tolérance prédéfinie, alors $P = P_0$ initiale ne peut pas être trouvée, **s'arrêter**.

- **Etape 5** : mettre $i = i+1$, aller à l'étape 2. ■

Si une matrice initiale P ne peut pas être déterminée par l'algorithme 2.2, alors un gain par retour de sortie statique pour le système (2.53) peut ne pas avoir de solution. D'autre part si P est trouvée, alors un algorithme itératif pour le calcul du gain K qui stabilise le système (2.53) peut être établi comme ci-dessous.

Résolution du problème de la commande par retour de sortie statique

L'algorithme de calcul du gain statique de retour de sortie est basé sur la recherche du α ($\alpha \leq 0$), tel que l'inégalité (2.57) soit satisfaite. L'algorithme 2.3 est alors proposé :

Algorithme 2.3 :

- **Etape 1** : Mettre $i=1$ et $P_1 = P_0$, où P_0 est donné par l'algorithme 2.2
- **Etape 2** : Résoudre le problème d'optimisation suivant pour K avec P_i donnée :
OP1 : Minimiser α_i sujet à la contrainte LMI suivante :

$$P_i(A+BKC) + (A+BKC)^T P_i - \alpha_i P_i < 0 \quad (2.62)$$
- **Etape 3** : Si $\alpha_i \leq 0$, K est un gain stabilisant, **s'arrêter**.
- **Etape 4** : Mettre $i=i+1$, résoudre le problème d'optimisation OP2 suivant pour P_i avec K donné :
OP2 : minimiser α_i sujet à la contrainte LMI (2.62)
- **Etape 5** : Si $\alpha_i \leq 0$, K est un gain stabilisant, **s'arrêter**.
- **Etape 6** : Résoudre le problème d'optimisation OP3 suivant pour P_i avec K et α_i donnés :
OP3 : Minimiser $Trace(P_i)$ sujet à la contrainte LMI (2.62)
- **Etape 7** : Si $\|P_i - P_{i-1}\| / \|P_i\| < \delta$, où δ est une tolérance prescrite, aller à l'étape 8, si non mettre $i=i+1$ et $P_i = P_{i-1}$ puis aller à l'étape 2.
- **Etape 8** : Le système n'est peut-être pas stabilisable par un retour statique de sortie, **s'arrêter**. ■

Remarques

- Les discussions sur la procédure itérative et de la convergence de l'algorithme 2.3 sont dans [25].
- Si $C = I$, le problème de stabilisation par retour statique de sortie se réduit à une stabilisation par retour d'état. En fait, la matrice d'initialisation P obtenue à partir de l'algorithme 2.1 sera aussi la solution du problème de stabilisation par retour d'état puisque le gain K de retour d'état peut être dérivé par $K = V_2 L = V_2 P^{-1}$. D'autre part, le gain K peut être aussi obtenu directement par OP1 dans l'Algorithme 2.3 où la matrice d'initialisation P est donnée.
- Dans l'étape 4 du l'algorithme 2.3, la matrice K est donnée alors que P_i et α_i sont inconnus. Le problème est non convexe dû au produit $\alpha_i P_i$. Cependant le problème d'optimisation OP2 peut être formulé comme un problème de valeur propre généralisé maximale. En effet, l'inégalité (2.62) s'écrit en omettant l'indice i pour simplifier l'écriture :

$$P > 0, \quad \alpha P - G > 0$$

$$\text{avec : } G = P(A+BKC) + (A+BKC)^T P$$

En notant :

$$\begin{cases} P(x) = \sum_{i=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} x_i V_i > 0 \\ G(x) = \sum_{i=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} x_i G_i > 0, \quad G_i = V_i(A + BKC) + (A + BKC)^T V_i \end{cases}$$

où :

$x = [x_1 \dots x_k]^T, k = \frac{n(n+1)}{2}$, le vecteur de décision

$V_i, i=1, \dots, \frac{n(n+1)}{2}$, des matrices symétriques de dimension (n, n) formant une base orthonormée.

La recherche de α s'écrit alors :

Minimiser α , pour $\alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^k$ contraint à :

$$\begin{cases} P(x) > 0 \\ \alpha P(x) - G(x) > 0 \end{cases}$$

Ce qui est un problème de minimisation de la valeur propre généralisée maximale qui peut être résolu grâce aux solveurs LMI disponibles à cet effet.

f- Algorithme itératif pour la synthèse $\mathcal{H}_\infty$ par retour de sortie statique

Dans cette section nous allons voir qu'il possible de proposer deux algorithmes itératifs comment précédemment pour résoudre un problème de synthèse $\mathcal{H}_\infty$ par retour de sortie statique. En effet, considérons la description standard utilisée dans le contexte de la synthèse $\mathcal{H}_\infty$:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y = C_2 x + D_{21} w \end{cases} \leftrightarrow P(s) := \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right] \quad (2.63)$$

Le problème de synthèse $\mathcal{H}_\infty$ par retour de sortie statique consiste à trouver un gain K tel que la commande $u(t) = Ky(t)$ assure la contrainte sur la norme $\mathcal{H}_\infty$ du transfert façon que la fonction de transfert en boucle :

$$\|T_{wz}\|_\infty < \gamma, \text{ où } \gamma \text{ est un paramètre } > 0$$

Cette contrainte peut être réécrite d'après le lemme 2.1 « Lemme Borné Réel » par l'inégalité matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T P + P A_{cl} & P B_{cl} & C_{cl}^T \\ (P B_{cl})^T & -\gamma I & D_{cl}^T \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.64)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} A_{cl} = A + B_2 K C_2 \\ B_{cl} = B_1 + B_2 K D_{21} \\ C_{cl} = C_1 + D_{12} K C_2 \\ D_{cl} = D_{11} + D_{12} K D_{21} \end{cases}$$

Notons que, pour un γ donné, ce problème est non convexe. De la même façon qu'avec l'algorithme 2.3, il a été proposé dans [79], un algorithme qui trouve la solution de la matrice inégalité (2.64) pour un $\gamma > 0$ donné. On s'appuie comme pour l'algorithme 2.2, sur un autre algorithme pour trouver une valeur initiale de P pour le problème de synthèse $\mathcal{H}_\infty$ par retour de sortie statique K .

Algorithme 2.2' :

- **Etape 1 :** Mettre $i=1$ et $P_0=I$ et $L_0=I$
- **Etape 2 :** Dériver P_i et L_i par la résolution du problème d'optimisation avec les variables de décision P_i, L_i, V_1 et V_2 :

OP1 : Minimiser $\text{Trace}(P_i L_{i-1} - L_i P_{i-1})$ sous les contraintes LMI suivantes :

$$\begin{bmatrix} P_i A + A^T P_i + V_1 C_2 + C_2^T V_1^T & P_i B_1 + V_1 D_{21} & C_1^T + C_2^T K^T D_{12}^T \\ B_1^T P_i + D_{21}^T V_1^T & -\gamma I & D_{11}^T + D_{21}^T K^T D_{12}^T \\ C_1 + D_{12} K C_2 & D_{11} + D_{12} K D_{21} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} A L_i + L_i A^T + B_2 V_2 + V_2^T B_2^T & B_1 + B_2 K D_{21} & L_i C_1^T + V_2^T D_{12}^T \\ B_1^T + D_{21}^T K^T B_2^T & -\gamma I & D_{11}^T + D_{21}^T K^T D_{12}^T \\ L_i C_1 + D_{12} V_2 & D_{11} + D_{12} K D_{21} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.65)$$

$$\begin{bmatrix} P_i & I \\ I & L_i \end{bmatrix} \geq 0$$

- **Etape 3 :** Si $\text{Trace}(P_i L_i) - n < \varepsilon_1$, où ε_1 est une tolérance prédéfinie, alors $P = P_i$ initiale est trouvée, **s'arrêter**.
- **Etape 4 :** Si la différence entre les deux itérations satisfait :
 $\text{Trace}(P_i L_{i-1} - P_{i-1} L_{i-1}) < \varepsilon_2$, où ε_2 est une tolérance prédéfinie, alors $P = P_0$ initiale ne peut pas être trouvée, **s'arrêter**.
- **Etape 5 :** mettre $i = i + 1$, aller à l'étape 2. ■

Une fois une matrice P trouvée, on exécute l'algorithme suivant pour calculer le gain K :

Algorithme 2.3' :

- **Etape 1 :** Mettre $i=1$ et $P_1 = P_0$, où P_0 est donné par l'algorithme 2.2'
- **Etape 2 :** Résoudre le problème d'optimisation suivant pour K avec P_i donnée :

OP1 : Minimiser α_i sujet à la contrainte LMI suivante :

$$\begin{bmatrix} \phi_i & P_i B_1 + V_1 D_{21} & C_1^T + C_2^T K^T D_{12}^T \\ B_1^T P_i + D_{21}^T V_1^T & -\gamma I & D_{11}^T + D_{21}^T K^T D_{12}^T \\ C_1 + D_{12} K C_2 & D_{11} + D_{12} K D_{21} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.66)$$

$$\phi_i = P_i A + A^T P_i + V_1 B_2 C_2 + C_2^T B_2^T V_1^T - \alpha_i P_i$$

- **Etape 3 :** Si $\alpha_i \leq 0$, K est un gain stabilisant et vérifiant $\|T_{wz}\|_\infty < \gamma$, **s'arrêter**.
- **Etape 4 :** Mettre $i = i + 1$, résoudre le problème d'optimisation OP2 suivant pour P_i avec K donné :

OP2 : Minimiser α_i sujet à la contrainte LMI (2.66)

- **Etape 5** : Si $\alpha_i \leq 0$, K est un gain stabilisant et vérifiant $\|T_{wz}\|_\infty < \gamma$, , **s'arrêter**.
- **Etape 6** : Résoudre le problème d'optimisation OP3 suivant pour P_i avec K et α_i donnés :
OP3 : Minimiser $\text{Trace}(P_i)$ sujet à la contrainte LMI (2.66)
- **Etape 7** : Si $\|P_i - P_{i-1}\| / \|P_i\| < \delta$, où δ est une tolérance prescrite, aller à l'étape 8, si
Non, mettre $i = i + 1$ et $P_i = P_{i-1}$ puis aller à l'étape 2.
- **Etape 8** : Le système n'est peut-être pas stabilisable par un retour statique de sortie avec la contrainte $\|T_{wz}\|_\infty < \gamma$, , **s'arrêter**. ■

2.3.10 Notions des LMIs étendues

Comme il a été souligné à plusieurs reprises, les techniques d'analyse et de synthèse de lois de commande basées sur la formulation LMI ont connu un essor important grâce à leur efficacité inspirée de l'utilisation d'algorithmes d'optimisation convexes et au développement des boîtes à outils disponibles à cet effet. Cependant un certain conservatisme des techniques LMI classiques apparaît lors du traitement de certains problèmes d'analyse ou de commande.

Pour réduire ce conservatisme, une nouvelle caractérisation dite LMI étendue (ou dilatée, généralisée) a été introduite pour les systèmes continus pour résoudre notamment des problèmes liés à la commande et à la réduction optimale d'ordre des modèles d'état dans le contexte $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$. De manière synthétique, les avantages de ces LMIs étendues par rapport aux LMIs standards peuvent être résumés comme suit [50] :

- Les LMIs étendues ne comportent pas de produits entre la matrice de Lyapunov et la matrice système d'état A . Cette séparation permet l'utilisation de fonctions de Lyapunov dépendantes des paramètres, dans le cas de l'analyse et de la synthèse robuste;
- Il n'existe pas de termes quadratiques fonction de la matrice d'état;
- Les variables auxiliaires introduites induisent l'utilisation de variables de décision supplémentaires. Cela peut éventuellement réduire le conservatisme.

2.4 Transformation Fractionnaire Linéaire

2.4.1 Introduction.

La mise d'un système sous une forme standard est l'une des étapes essentielles de la méthodologie de la commande robuste. La forme standard qui a suscité le plus d'intérêt dans la communauté des automaticiens porte le nom de Transformation Fractionnaire Linéaire (LFT) [151].

Les LFT sont largement utilisées dans le problème d'analyse et la synthèse robuste. Un système bouclé pouvait être représenté par une LFT faisant intervenir un transfert caractérisant le problème de commande du système. Les incertitudes de modélisation de la dynamique du système peuvent aussi être représentées par une LFT. En assemblant ces deux représentations, on obtient le schéma général d'interconnexion de la Figure 2.4. Elle représente l'interconnexion entre trois blocs qui interviennent dans ce problème : le système représenté par son modèle nominal G , le compensateur K et les incertitudes Δ affectant la modélisation.

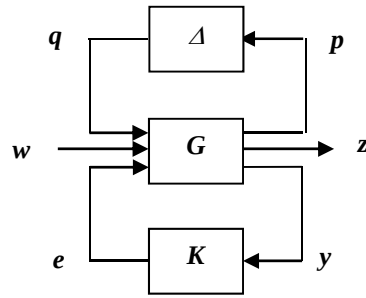


Figure 2.4 : Schéma bloc général d'un problème de commande robuste

Les LFT permettent d'interpréter les différentes classes d'incertitudes du système en termes d'interconnexion d'opérateurs. En effet, dans la figure 2.4, un système incertain est vu comme l'interconnexion d'un bloc représentant le système nominal de transfert G avec un bloc regroupant les incertitudes représenté par le bloc Δ .

Une LFT représente le système comme un bloc Linéaire Temps Invariant (LTI) connecté à une matrice d'incertitude à l'aide d'entrées et de sorties fictives. Cette matrice d'incertitudes contient les paramètres incertains du système. Pour une large classe de systèmes incertains, un modèle LFT peut être construit de manière systématique à partir des équations dynamiques du système.

Néanmoins, certains problèmes apparaissent dans certains cas pratiques, notamment :

- Cas des systèmes non-linéaires ;
- Prise en compte des contraintes supplémentaires telles que des bornes sur la commande ou sur certaines sorties.

Dans le cas où l'on connaît le transfert du régulateur $K(s)$, ce formalisme permet d'exprimer le problème de l'analyse de la stabilité et de la performance, soit nominale (s'il n'y a pas de bloc d'incertitude Δ), soit robuste. Pour l'étude de ce dernier cas, on se ramène généralement à la forme de la figure 2.5, dite forme M - Δ .

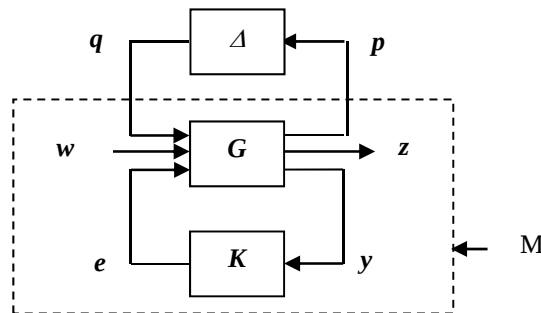


Figure 2.5 : Schéma général d'analyse de robustesse (forme "M - Δ")

2.4.2 Définitions

Considérons trois matrices Q , I (matrice identité) et G partitionnée comme suit :

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

Si $(I - G_{11}Q)^{-1}$ existe, la Transformation Fractionnaire Linéaire de Q par G est définie par :

$$F_u(G, Q) = G_{22} + G_{21}Q(I - G_{11}Q)^{-1}G_{12} \quad (2.67)$$

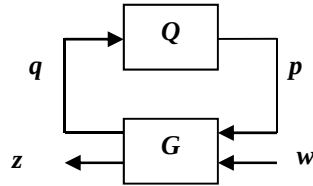


Figure 2.6 Schéma d'une Transformation Fractionnaire Linéaire dite haute

Si G_{11} est une matrice réelle de dimension (n,n) , On appelle n l'ordre de la LFT.

Remarques :

- Les signaux w, z, p et q d'une part et les matrices Q et G d'autre part sont utilisés pour introduire le formalisme LFT sans interprétation physique. Cependant selon l'utilisation de cette représentation, ces signaux ainsi que ces matrices auront un sens spécifique.
- La LFT définie ci-dessus est en fait Transformée Fractionnaire Linéaire dite haute (up en anglais). Cela sous-entend qu'une Transformée Fractionnaire Linéaire basse (lower en anglais) peut être définie comme le montre la figure 2.6. Son expression est donnée ci-dessous sous réserve de l'existence de $(I - G_{22}Q)^{-1}$.

$$F_l(G, Q) = G_{11} + G_{12}Q(I - G_{22}Q)^{-1}G_{21} \quad (2.68)$$

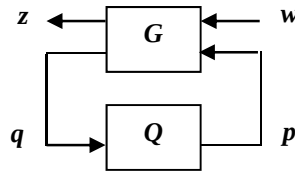


Figure 2.7 : Schéma d'une Transformation Fractionnaire Linéaire basse

- Une LFT est aussi notée par :

$$F(G, Q) \triangleq Q * G$$

- Le bloc G_{11} peut contenir indifféremment des réels, des fonctions non stationnaires sans mémoire, linéaires ou non-linéaires, des opérateurs dynamiques. Il peut se présenter sous forme pleine ou comme la répétition d'un même élément. Les différents opérateurs ainsi formés permettent de traduire les effets d'incertitudes paramétriques, variant ou non dans le temps, ainsi que les erreurs de modèle telles que les dynamiques négligées des actionneurs ou du système en haute fréquence. Ces opérateurs seront en général construits selon la structure bloc-diagonale.
- La notion de LFT peut être étendue à la représentation des systèmes LTI (Linear Time-Invariant), en considérant le cas particulier de l'opérateur d'intégration $Q(s) = I/s$. Une fonction de transfert $G(s)$ décrite par sa représentation d'état (A, B, C, D) peut donc s'interpréter comme une LFT haute $F_u(G, I/s) = D + C(sI - A)^{-1}B$.

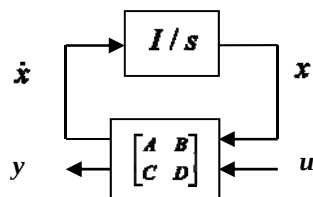


Figure 2.8 : Représentation d'état par LFT

2.4.3 Règles de construction

Des techniques opératoires ont été développées pour les systèmes LFT afin de former, à partir de LFT élémentaires, la LFT du système global. A partir de deux LFT supérieures $F_u(G_1, Q_1)$ et $F_u(G_2, Q_2)$ avec G_1 et G_2 partitionnées comme suit :

$$G_1 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \quad G_2 = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}$$

et de $Q = \text{Diag}(Q_1, Q_2)$, nous pouvons définir les opérations élémentaires suivantes:

- **Addition**

$$F_u(G_1, Q_1) + F_u(G_2, Q_2) = F_u \left(\left[\begin{array}{cc|c} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D_1 + D_2 \end{array} \right], Q \right) \quad (2.69)$$

- **Cascade**

$$F_u(G_1, Q_1) F_u(G_2, Q_2) = F_u \left(\left[\begin{array}{cc|c} A_1 & B_1 C_2 & B_1 D_2 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & D_1 C_2 & D_1 D_2 \end{array} \right], Q \right) \quad (2.70)$$

- **Concaténation en ligne**

$$\begin{bmatrix} F_u(G_1, Q_1) & F_u(G_2, Q_2) \end{bmatrix} = F_u \left(\left[\begin{array}{cc|cc} A_1 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D_1 & D_2 \end{array} \right], Q \right) \quad (2.71)$$

- **Concaténation en colonne**

$$\begin{bmatrix} F_u(G_1, Q_1) \\ F_u(G_2, Q_2) \end{bmatrix} = F_u \left(\left[\begin{array}{cc|c} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_1 \\ 0 & C_2 & D_2 \end{array} \right], Q \right) \quad (2.72)$$

- **Concaténation sous forme bloc-diagonale**

$$\begin{bmatrix} F_u(G_1, Q_1) & 0 \\ 0 & F_u(G_2, Q_2) \end{bmatrix} = F_u \left(\left[\begin{array}{cc|cc} A_1 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_1 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & D_2 \end{array} \right], Q \right) \quad (2.73)$$

- **Inversion (D_1 inversible)**

$$(F_u(G_1, Q_1))^{-1} = F_u \left(\left[\begin{array}{c|c} A_1 - B_1 D_1^{-1} C_1 & B_1 D_1^{-1} \\ \hline -D_1^{-1} C_1 & D_1^{-1} \end{array} \right], Q_1 \right) \quad (2.74)$$

- **Changement de base dans l'espace « d'état »**

Soient T_q et T_p deux matrices inversibles. Alors :

$$F_u(G, Q) = F_u \left(\left[\begin{array}{c|c} G_{11} & G_{12} \\ \hline G_{21} & G_{22} \end{array} \right], Q \right) = F_u \left(\left[\begin{array}{c|c} T_q^{-1} G_{11} T_p & T_q^{-1} G_{12} \\ \hline G_{21} T_p & G_{22} \end{array} \right], T_p^{-1} Q T_q \right) \quad (2.75)$$

Si T_q et T_p sont deux matrices de permutation, cette opération revient à faire des déplacements de lignes et de colonnes dans la représentation LFT.

- **Transposition**

$$F_u(G, Q)^T = F_u \left(\left[\begin{array}{c|c} G_{11} & G_{12} \\ \hline G_{21} & G_{22} \end{array} \right]^T, Q \right) = F_u \left(\left[\begin{array}{c|c} G_{11}^T & G_{21}^T \\ \hline G_{12}^T & G_{22}^T \end{array} \right], Q \right) \quad (2.76)$$

A noter que cette formule est valable pour une matrice réelle et $Q=Q^T$.

- **Produit de Redheffer**

Considérons deux matrices Q et G partitionnées comme suit :

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}$$

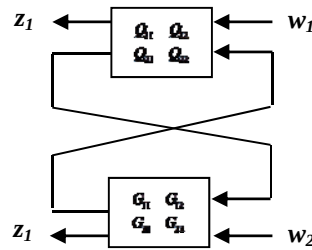


Figure 2.9 : Schéma Le produit de Redheffer

Le produit de Redheffer appelé aussi le produit en étoile est égal à une matrice R partitionnée comme suit sous réserve que les matrices $(I - Q_{22}G_{11})$ et $(I - G_{11}Q_{22})$ sont réversibles :

$$R = \begin{bmatrix} \frac{Q_{11} + Q_{12}G_{11}(I - Q_{22}G_{11})^{-1}Q_{21}}{G_{21}(I - Q_{22}G_{11})^{-1}Q_{21}} & \frac{Q_{12}(I - G_{11}Q_{22})^{-1}G_{12}}{G_{22} + G_{21}Q_{22}(I - G_{11}Q_{22})^{-1}G_{12}} \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

Cette matrice de fonctions de transfert correspond à la fonction de transfert qui lie les signaux d'entrée w_1 et w_2 aux signaux de sortie z_1 et z_2 . Il s'agit simplement de la fonction de transfert obtenue lorsqu'une partie des signaux de sortie de Q est renvoyée sur une partie des signaux d'entrée de G et qu'une partie des signaux de sortie de G est renvoyée sur une partie des signaux d'entrée de Q . A ce schéma est ainsi associé une expression algébrique compacte dont les possibilités d'utilisation sont très nombreuses [151]. Il permet ainsi de définir la représentation LFT d'un système interconnecté.

En fait, ce qui fait le gros intérêt du produit de Redheffer, c'est qu'il permet de faire correspondre n'importe quelle fonction de transfert définie par un schéma bloc une expression algébrique compacte et élégante. Les possibilités d'utilisation sont très nombreuses. Par exemple, considérons la transformation fractionnelle linéaire inférieure.

2.4.4 Exemples de mise en forme de LFT

La notion de bouclage en Automatique est prépondérante avec éventuellement la prise en compte des incertitudes de modélisation. Une façon très élégante pour étudier un système bouclé est l'utilisation des LFTs. La figure 2.10-a correspond au bouclage d'un système par un correcteur K , alors que la figure 2.10-b correspond à la prise en compte des incertitudes de

modélisation. Bien entendu, ces deux figures peuvent être combinées comme le montre la figure 2.10-c. Les exemples suivants permettent d'illustrer quelques mises en forme des systèmes bouclés à l'aide de LFT.

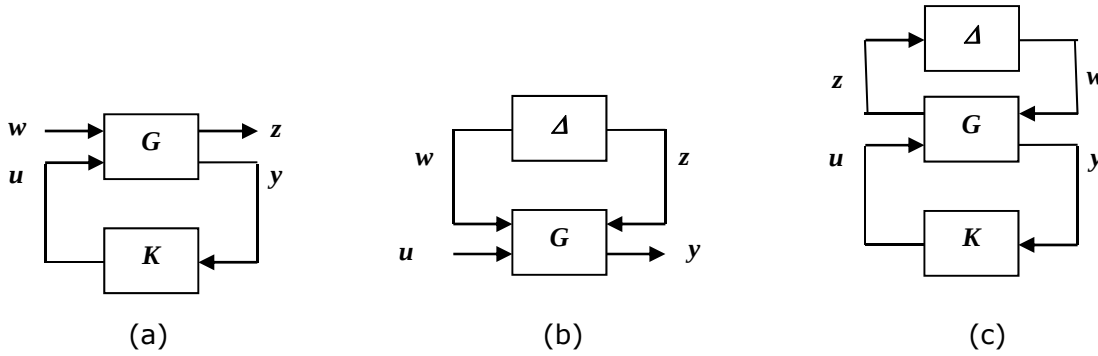


Figure 2.10 : Exemples de Transformation Fractionnaire Linéaire

2.4.4.1 Systèmes bouclés

Comme il a été mentionné plus haut, la LFT est un formalisme qui permet de boucler deux systèmes linéaires entre eux. Nous détaillons le cas des figures 2.10-a et 2.10-b.

Soient les transferts matriciels G et K dont les réalisations d'état sont données par :

$$G = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \leftrightarrow F_u(G, I/s) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

$$K = \left[\begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & D_K \end{array} \right] \leftrightarrow F_u(K, I/s) = C_K (sI - A_K)^{-1} B_K + D_K$$

La représentation d'état du système équivalent correspondant à la figure 2.10-a, notée $F_l(G, K)$ est :

$$\left[\begin{array}{cc|c} A + B_2(I - D_K D_{22})^{-1} D_K C_2 & B_2(I - D_K D_{22})^{-1} C_K & B_1 + B_2(I - D_K D_{22})^{-1} D_K D_{21} \\ B_K(I - D_{22} D_K)^{-1} C_2 & A_K + B_K(I - D_{22} D_K)^{-1} D_{22} C_K & B_K(I - D_{22} D_K)^{-1} D_{21} \\ \hline C_1 + D_{12} D_K(I - D_{22} D_K)^{-1} C_2 & D_{12}(I - D_K D_{22})^{-1} C_K & D_{11} + D_{12} D_K(I - D_{22} D_K)^{-1} D_{21} \end{array} \right] \quad (2.79)$$

Si on considère le schéma de la figure 2.10-b avec Δ répartie comme suit :

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{bmatrix},$$

La représentation d'état du système équivalent notée $F_u(G, \Delta)$ est alors :

$$\left[\begin{array}{cc|c} A + B_1(I - \Delta_{22} D_{11})^{-1} \Delta_{22} C_1 & B_1(I - \Delta_{22} D_{11})^{-1} \Delta_{21} & B_2 + B_1(I - \Delta_{22} D_{11})^{-1} \Delta_{22} D_{12} \\ \Delta_{12}(I - D_{11} \Delta_{22})^{-1} C_1 & \Delta_{11} + \Delta_{12}(I - D_{11} \Delta_{22})^{-1} D_{11} \Delta_{21} & \Delta_{12}(I - D_{11} \Delta_{22})^{-1} D_{12} \\ \hline C_2 + D_{21}(I - \Delta_{22} D_{11})^{-1} \Delta_{22} C_1 & D_{21}(I - \Delta_{22} D_{11})^{-1} \Delta_{21} & D_{22} + D_{21}(I - \Delta_{22} D_{11})^{-1} \Delta_{22} D_{12} \end{array} \right] \quad (2.80)$$

2.4.4.2 Exemple de système bouclé : Commande par retour de sortie

Considérons le système de commande par retour de sortie représenté par la figure suivante :

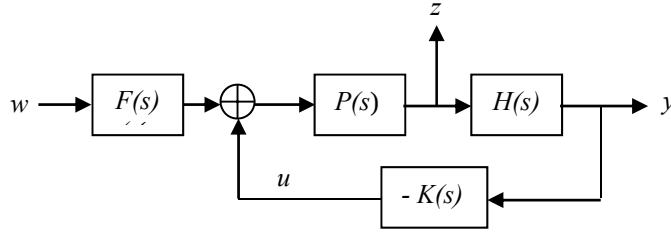


Figure 2.11 : Schéma d'une commande par retour de sortie

P : matrice de transfert du système à régler,
 H : matrice de transfert des capteurs,
 F : matrice de transfert du précompensateur de consigne,
 K : matrice de transfert du correcteur de retour de sortie.

Les équations d'entrée/sortie s'écrivent :

$$\begin{cases} z = PFw + Pu \\ y = HPFw + H Pu \end{cases}$$

Soit sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}, \quad \text{avec } G = \begin{bmatrix} PF & P \\ HPF & HP \end{bmatrix}$$

Par ailleurs, comme $u = -Ky$ nous avons :

$$z = (PF - PK(I + HPK)^{-1}HPF)w \quad (2.81)$$

Le schéma de la figure 2.11 peut être réorganisé de manière à faire apparaître la structure d'une LFT :

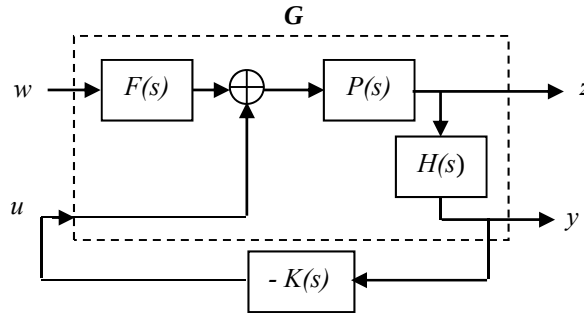


Figure 2.12 : LFT inférieure relative à la figure 2.15

L'expression entre z et w , à savoir (2.81) s'obtient directement en utilisant la définition de la LFT inférieure $F_l(G, -K)$ et en considérant le partitionnement de G . La figure 2.12 est à rapprocher de la figure 2.9-a.

2.5 Les valeurs singulières

Soit A une matrice complexe de dimension (m, n) et dont le conjugué transposé est noté A^* . Les valeurs singulières de A sont définies par :

$$\sigma_i(A) \triangleq \sqrt{\lambda_i(AA^*)} \geq 0, \quad (2.82)$$

où $\lambda_i(AA^*)$ désigne la $i^{\text{ème}}$ valeur propre de (AA^*) . Les valeurs singulières étant des réels, il est possible de les ordonner de la plus grande $\bar{\sigma}(A)$ à la plus petite $\underline{\sigma}(A)$:

$$\bar{\sigma}(A) = \sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \dots \geq \sigma_m(A) = \underline{\sigma}(A) \quad (2.83)$$

Nous avons les relations suivantes :

$$\bar{\sigma}(A) = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \quad \underline{\sigma}(A) = \min_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \quad (2.84)$$

On peut montrer par ailleurs que $\bar{\sigma}(A)$ est une norme matricielle. On a en effet :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(A) &= 0 \Leftrightarrow A = 0 \\ \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \bar{\sigma}(\lambda A) &= |\lambda| \bar{\sigma}(A) \\ \bar{\sigma}(A+B) &\leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B) \\ \bar{\sigma}(AB) &\leq \bar{\sigma}(A) \bar{\sigma}(B) \end{aligned}$$

Les trois premières propriétés prouvent que $\bar{\sigma}(A)$ est une norme pour A . La dernière propriété montre que c'est en plus une norme multiplicative.

La définition des valeurs singulières est étendue aux matrices fonction d'une variable complexe s . Ainsi les valeurs singulières d'une matrice de transfert $G(s)$ se définissent, dans le cas multivariable, comme les racines carrées des valeurs propres de $G(j\omega)$ multipliée par sa transconjugée :

$$\sigma_i(G(j\omega)) \triangleq \sqrt{\lambda_i(G(j\omega)G(-j\omega)^T)} \quad (2.85)$$

Les valeurs singulières sont liées à la norme $\mathcal{H}_\infty$. En effet, soit $G(s)$ une matrice de transfert d'un système LTI, supposé stable. C'est une fonction rationnelle réelle de la variable complexe s , comme fraction de polynômes à coefficients réels. Elle est propre, analytique et bornée dans le demi-plan droit $\mathbb{C}^+$. Ses valeurs singulières étant des nombres réels positifs ou nuls, elles peuvent être également être rangés selon l'ordre suivant par exemple :

$$\bar{\sigma}(G(j\omega)) = \sigma_1(G(j\omega)) \geq \sigma_2(G(j\omega)) \geq \dots \geq \sigma_m(G(j\omega)) = \underline{\sigma}(G(j\omega))$$

On définit sa norme $\mathcal{H}_\infty$ par :

$$\begin{aligned} \|G\|_\infty &\triangleq \sup_{\text{Re } s} \bar{\sigma}[G(s)] \\ &= \sup_{\omega \in \mathbb{R}^+} \bar{\sigma}[G(j\omega)] \end{aligned} \quad (2.86)$$

Pour un système monovariable, il n'existe qu'une seule valeur singulière correspondant au module de la fonction de transfert :

$$\bar{\sigma}(G(j\omega)) = \underline{\sigma}(G(j\omega)) = |G(j\omega)|$$

Enfin, on définit la décomposition en valeurs singulières de toute matrice A complexe de dimension (m,n) sous la forme $A = U \Sigma V^T$ avec :

$$\begin{aligned}
 \Sigma &= \text{Diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) & \text{si } m = n \\
 \Sigma &= \text{Diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_m, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m}) & \text{si } m < n \\
 \Sigma &= \text{Diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-n}) & \text{si } n < m
 \end{aligned} \tag{2.87}$$

où les valeurs singulières de A sont rangées par ordre croissant $\sigma_{i+1} \leq \sigma_i$; et U et V sont deux matrices orthogonales (i.e. $U^*U = UU^* = I_m$ et $V^*V = VV^* = I_n$). Les v_i et les u_i (les i^{eme} colonnes de V et de U , respectivement), sont les paires de Schmidt associées à la valeur singulière σ_i , respectivement à droite et à gauche :

$$\begin{aligned}
 Av_i &= \sigma_i u_i \\
 A^* u_i &= \sigma_i v_i
 \end{aligned}$$

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, il a été introduit principalement une présentation des LMIs et les BMIs, outils qui seront largement utilisés tout le long de ce travail. En effet, dans le chapitre 3 suivant, la synthèse des lois de commande basés sur $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ sont formulées et résolus à l'aide de ces outils. De même le problème de la réduction d'ordre de modèles abordé dans le chapitre 4 sera formulé comme un problème d'optimisation à la lumière des LMIs/BMIs. L'accent est également mis sur l'aspect algorithmique pour résoudre numériquement quelques problèmes d'optimisation.

Chapitre 3

**Commande $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ par la formulation
des Inégalités Matricielles Linéaires**

Chapitre 3

Commande $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ par la formulation des Inégalités Matricielles Linéaires

3.1 Introduction

Ce chapitre aborde le problème de la synthèse des lois de commande de type $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ par la formulation des LMIs. Après une brève présentation du cadre général de la commande optimale des systèmes linéaires continus, nous précisons les objectifs de la commande $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ en soulignant quelques points qui les relient ainsi que ceux qui les différencient. Trois types de commande sont abordés : Commande par retour d'état, commande par retour de sortie dynamique et commande par retour de sortie statique. D'autres problèmes sont également abordés à la lumière des LMIs : la commande mixte $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, la commande par placement de pôles, et la commande décentralisée. Un intérêt particulier est accordé à ce dernier point.

3.2 Cadre général de la synthèse optimale des systèmes linéaires

3.2.1 Modélisation dans le cadre de la commande robuste et forme standard

Dans le cadre des systèmes linéaires invariants où nous nous situons, le système est représenté par une matrice de transfert $G(s)$. Un certain nombre d'éléments perturbateurs liés à l'environnement du système physique (signaux parasites ...) et aux erreurs de modélisation (ordre réduit du modèle, idéalisation des actionneurs avec des bandes passantes infinies, incertitudes paramétriques ...) peuvent être décrits respectivement à travers un signal w' et une matrice de transfert $\Delta(s)$ comme le montre la figure 3.1 suivante :

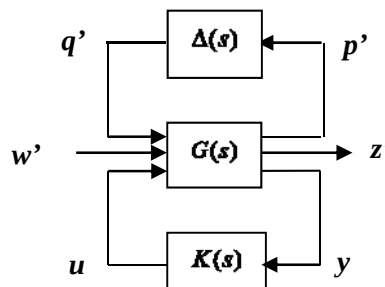


Figure 3.1 : Forme générale d'un problème de commande

avec :

- $G(s)$: Modèle nominal du système physique
- $\Delta(s)$: Incertitudes affectant la modélisation
- $K(s)$: Compensateur
- w' : Entrées exogènes (consignes, bruits ...)
- z' : Signaux d'erreurs
- y : Mesures
- u : Commandes
- p' : Entrées des perturbations
- q' : Sorties des perturbations

Les incertitudes de modélisation $\Delta(s)$ peuvent être traduites à l'aide de signaux parasites externes q' . A ce stade, il est possible d'introduire des fonctions de pondérations sur les signaux q' et w afin d'effectuer une répartition fréquentielle et structurelle de leurs effets. Ceci conduit au modèle augmenté noté $P(s)$ sur la figure 3.2. Dans cette figure, $P(s)$ représente le « modèle augmenté », et $K(s)$ le correcteur. Le système $P(s)$ est formé des quatre transferts multivariables existant entre les entrées u (commande du système) et w (entrées exogènes : consignes, perturbations, ...) et les sorties y (mesures) et z (sorties régulées, ou grandeurs à surveiller). Ces dernières sorties caractérisent le bon fonctionnement du système commandé :

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

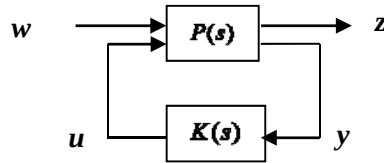


Figure 3.2 : Schéma standard d'un problème de commande en boucle fermée

w : Vecteur des entrées exogènes : consignes, perturbations, erreurs de modélisation (dimension m_1)

u : Vecteur de commandes (dimension m_2)

z : Vecteur de signaux à commander (dimension p_1)

y : Vecteur de mesures (dimension p_2).

Une autre représentation par LFT très utilisée pour l'analyse de la stabilité robuste (Structure $M-\Delta$) est donnée par la figure suivante :

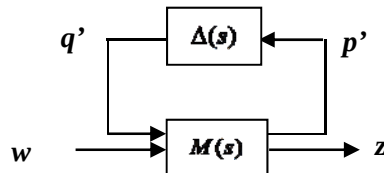


Figure 3.3 : Structure $M-\Delta$ pour analyse de la stabilité

Pour des raisons de non trivialité, nous supposons tout au long de ce chapitre que :

$$\begin{cases} p_1 \geq m_2 \\ m_1 \geq p_2 \end{cases} \quad (3.2)$$

3.2.2 Objectif de la synthèse optimale

L'objectif de la compensation $K(s)$ est d'assurer la stabilité du système en boucle fermée et un comportement satisfaisant en nominal. L'ensemble de ces qualités devra être préservé autant que possible en présence des perturbations externes et des incertitudes de modélisation.

Une grande classe de problèmes peut être mise sous la forme standard. L'objectif consiste à trouver un compensateur $K(s)$ tel que la stabilité interne du système soit assurée et tel qu'une certaine norme du transfert noté $F_l(P, K)$ de w vers z caractérisant des critères de performance et/ou de robustesse, soit minimisée.

Le problème posé s'écrit alors de la façon suivante :

$$\underset{K \text{ stabilisant}}{\text{Min}} \|F_l(P, K)\| \quad (3.3)$$

En considérant le partitionnement de P où les dimensions de chaque sous-matrice respectant les nombres d'entrées et de sorties du système, l'expression de $F_l(P, K)$ est alors donnée par :

$$F_l(P, K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (3.4)$$

Le problème général formulé en (3.3) s'exprime donc par :

$$\underset{K_{\text{stabilisant}}}{\text{Min}} \left\| P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \right\| \quad (3.5)$$

Souvent, la norme considérée dans le critère (3.3) ou (3.5) est la norme $\mathcal{H}_\infty$. Cette norme représente la valeur maximale du rapport entre l'énergie du signal de sortie $z(t)$ et l'énergie du signal d'entrée $w(t)$. Il est clair que la minimisation de cette norme est nécessaire pour optimiser le rejet de perturbations et le suivi de consignes. La synthèse du correcteur est alors définie par les deux problèmes suivants :

Problème $\mathcal{H}_\infty$ standard optimal : Trouver tous les compensateurs $K(s)$ qui stabilisent le système bouclé de la figure (3.2), et minimisent $\|F_l(P, K)\|_\infty$.

La valeur minimale du critère est notée $\gamma_{\min}$. Le problème optimal consiste à optimiser sa valeur alors que le problème sous-optimal recherche l'ensemble des compensateurs stabilisant pour une borne donnée du critère.

Problème $\mathcal{H}_\infty$ standard sous-optimal : $\gamma > 0$ est donné, trouver tous les compensateurs $K(s)$ qui stabilisent le système bouclé de la figure (3.2), et assurent $\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$.

La stabilisation du système P par le compensateur K est l'un des objectifs de la compensation. Cependant, P étant un système multivariable, la notion de stabilité doit être précisée. C'est l'objectif du paragraphe 3.2.

Problème $\mathcal{H}_2$ optimal : Lorsque la norme $\mathcal{H}_2$ est utilisée, le problème consiste à trouver le compensateur $K(s)$ qui stabilise le système bouclé de la figure (3.2), et minimise $\|F_l(P, K)\|_2$.

Nous tenons à mettre en évidence les similitudes formelles et aussi les différences conceptionnelles qui existent entre la synthèse $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$. Nous faisons donc une présentation en parallèle de ces deux méthodes de synthèse des compensateurs optimaux.

L'approche fondée sur les équations algébriques de Riccati et les techniques utilisant des représentations par transfert ont été les premières méthodes pour la résolution de ces problèmes. Ultérieurement, l'apparition des techniques des inégalités matricielles a donné un second souffle à l'optimisation $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$.

Ce sont les aspects essentiels de synthèse $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ formulées de manière classique que nous présentons brièvement dans la suite. Le lecteur peut se référer pour une connaissance plus précise aux principales références [43], [42], [151], [62]. Par contre, nous nous attardons plus longtemps sur les méthodes récentes fondées sur les inégalités matricielles. Il convient de noter que l'approche par les inégalités matricielles nécessite parfois des démonstrations théoriques assez longues dont nous avons épargné le lecteur sauf quand celles-ci sont constructives et permettent de clarifier la méthodologie à suivre pour les applications pratiques.

3.2.3 Bref historique de la synthèse $\mathcal{H}_\infty$

Le problème $\mathcal{H}_\infty$ consiste à concevoir une commande assurant la stabilité asymptotique du système bouclé ainsi qu'un certain taux d'atténuation de l'influence des entrées exogènes sur les sorties du système augmenté. Ce dernier étant composé du système lui-même et de filtres de pondération (weighting filters). Ces entrées sont constituées des signaux de consignes et éventuellement des perturbations liées à l'environnement du système. La synthèse $\mathcal{H}_\infty$ fournit une commande robuste vis-à-vis de ces perturbations. De plus, si les filtres de pondération ont pris en compte les incertitudes du modèle du système, la commande $\mathcal{H}_\infty$ est également robuste vis-à-vis de ces incertitudes.

En 1984, une solution sous forme de représentation d'état est apportée par Doyle. La technique, connue sous le nom "d'approche 1984" ou l'algorithme de Glover-Doyle, est déterminante dans la recherche d'une solution au problème $\mathcal{H}_\infty$. La méthode proposée se décomposait en plusieurs étapes.

En 1988, une méthode mettant en œuvre des outils mathématiques simples tels que les équations de Riccati est publiée [42]. La technique permet de calculer dans le cas général un compensateur dont le nombre d'état est égal à celui de P . Un lien évident a été mis en évidence entre les techniques de la synthèse $\mathcal{H}_2$ et de $\mathcal{H}_\infty$. Ces techniques avaient suscité de nombreux intérêts.

L'inconvénient majeur de cette technique réside d'une part dans la complexité et le volume énorme de calcul qu'elle nécessite et d'autre part dans le nombre d'états prohibitif caractérisant le compensateur.

Durant ces dernières années, des progrès conséquents dans le domaine d'optimisation avec l'utilisation des inégalités matricielles ont permis d'envisager des formulations plus simples pour certains problèmes et la résolution numérique de certains problèmes ne disposant pas de solutions algébriques.

Dans la synthèse $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$, deux méthodes de résolution sont particulièrement utilisées. Toutes les deux utilisent une représentation d'état de la matrice $P(s)$ qui apparaît sur la figure (3.2). La première est basée sur la résolution des équations de Riccati, la seconde conduit à un problème de faisabilité sous des contraintes exprimées par des inégalités matricielles. Dans le paragraphe suivant, nous reprenons les deux types de synthèse $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ en donnant leurs récentes formulations en utilisant l'approche des inégalités matricielles linéaires (LMI).

3.2.4 Comparaison entre les normes $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$

La norme $\mathcal{H}_\infty$ correspond au maximum du gain entrées/sorties à la fréquence optimale. Autrement dit, cette norme privilégie la pulsation pour laquelle le gain est maximal. Si l'on cherche à minimiser une telle norme, cela signifie que l'on s'intéresse à la fréquence la plus défavorable. L'effort de minimisation porte donc sur cette fréquence « la pire » et le niveau de performance qui en découle est ensuite a fortiori garanti pour les autres fréquences.

Lorsque la norme $\mathcal{H}_2$ utilisée comme critère d'optimisation, il en est tout autrement. Elle ne privilégie aucune fréquence mais traduit plutôt une énergie des sorties répartie sur toutes les fréquences. La minimiser signifie porter l'effort de minimisation sur l'ensemble des fréquences. Cette norme est en réalité celle qui est minimisée lors de la résolution d'un problème LQG.

3.3 Stabilité interne et représentation d'état

Pour un système multivariable, du fait d'éventuelles simplifications entre pôles et zéros, la stabilité n'est pas équivalente à celle des pôles de sa matrice de transfert. Deux types de stabilité sont alors étudiés : la stabilité interne et la stabilité externe.

La stabilité externe exprime la stabilité des modes de la matrice de transfert tandis que la stabilité interne exprime la stabilité des valeurs propres de la matrice dynamique du système.

Nous présentons une brève analyse de la stabilité interne dans le cas des systèmes caractérisés par une représentation d'état.

La stabilité interne du système bouclé est liée aux valeurs propres de la matrice d'état du système en boucle fermée. Nous allons établir cette matrice.

Soit une réalisation minimale de P dans l'espace d'état :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{cases} \quad P(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \quad (3.6)$$

Le compensateur K stabilise P ou de manière équivalente, la stabilité interne est assurée si le vecteur d'état associé à la représentation d'état du système en boucle fermée autonome tend asymptotiquement vers zéro à partir d'une condition initiale quelconque.

Si l'on tient compte de la représentation d'état de P donnée en (3.6), celle de chaque sous-système P_{ij} pour $i = 1, 2$ et $j = 1, 2$ est alors :

$$P_{ij}(s) := \left[\begin{array}{c|c} A & B_j \\ \hline C_i & D_{ij} \end{array} \right] \quad (3.7)$$

Soit maintenant une représentation d'état minimale du compensateur K .

$$\begin{cases} \dot{x}_k = A_k x_k + B_k y \\ u_k = C_k x_k + D_k y \end{cases}, \quad K(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A_k & B_k \\ \hline C_k & D_k \end{array} \right] \quad (3.8)$$

Pour calculer la matrice dynamique en boucle fermée, les entrées exogènes w sont annulées et le signal z ignoré.

Les équations d'état qui régissent alors le comportement du système représenté sur la figure (3.2) sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_2 u \\ y = C_2 x + D_{22} u \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_k = A_k x_k + B_k y \\ u_k = C_k x_k + D_k y \end{cases} \quad (3.9)$$

Pour éliminer les variables u et y dans l'équation (3.9), il est d'abord nécessaire de résoudre l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} I & -D_k \\ -D_{22} & I \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & C_k \\ C_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_k \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Ceci nécessite l'inversion de la matrice :

$$\begin{pmatrix} I & -D_k \\ -D_{22} & I \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Donc, pour pouvoir calculer la matrice dynamique du système en boucle fermée, la matrice (3.11) doit être inversible. C'est la raison pour laquelle, nous supposons que le problème représenté par la figure (3.2) est bien posé, ou de manière équivalente, l'une des trois propositions suivantes qui sont équivalentes, soit vérifiée [151]:

- a. La matrice $I - D_k D_{22}$ est inversible
- b. La matrice $I - D_{22} D_k$ est inversible
- c. La matrice $\begin{pmatrix} I & -D_k \\ -D_{22} & I \end{pmatrix}$ est inversible.

Notons que le problème est bien posé si la transmission directe de P_{22} est nulle. Ainsi, la matrice (3.11) maintenant supposée inversible, l'expression de l'équation différentielle régissant la dynamique de l'état est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_k \end{bmatrix} = \left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & B_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -D_k \\ -D_{22} & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & C_k \\ C_2 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{bmatrix} x \\ x_k \end{bmatrix} = A_{bf} \begin{bmatrix} x \\ x_k \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

La stabilité interne est alors équivalente à celle de la matrice A_{bf} . Celle-ci ne dépendant que du sous-système P_{22} . Le théorème suivant est alors énoncé [151] :

Théorème 3.1

Il existe un correcteur propre et tel que la stabilité interne du système soit assurée si et seulement si (A, B_2) est stabilisable et (C_2, A) détectable.

L'existence d'un compensateur stabilisant n'est donc liée qu'à la stabilisabilité et à la détectabilité du sous-système P_{22} . Dans la pratique, celui-ci représente généralement le système à commander.

Nous avons formulé le cadre général pour la synthèse de compensateurs optimaux. Dans ce qui suit, nous présentons un bref historique de l'évolution de la synthèse $\mathcal{H}_\infty$.

3.4 Synthèse $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ dans le cas d'un retour d'état par l'approche classique

Dans ce paragraphe, nous considérons que les états sont mesurables. La représentation d'état relative au problème posé et déjà décrite en (3.6). Les équations qui régissent alors le comportement dynamique se simplifient et deviennent :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_{12} u \\ y = x \end{cases} \quad P(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ \hline I & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (3.13)$$

où w étant le vecteur des perturbations, u le vecteur de commande, y le vecteur des sorties mesurées et z les sorties du système à contrôler.

Le problème d'optimisation est donc de trouver un compensateur stabilisant et minimisant le critère suivant :

$$\underset{K_{\text{stabilisant}}}{\text{Min}} \|F_l(P, K)\|_\alpha, \quad (3.14)$$

où $\alpha = 2$ (synthèse $\mathcal{H}_2$ ou quadratique) ou $\alpha = \infty$ (synthèse $\mathcal{H}_\infty$).

Soit $T_{wz}(s)$ le transfert multivariable entre le vecteur d'entrée $w = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_{m_1}]^T$ et le vecteur de sorties contrôlées $z = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_{p_1}]^T$.

Si $\|T_{wz}(s)\|_\infty \leq \gamma$, alors $\forall i = 1, \dots, m_1$ et $\forall j = 1, \dots, p_1$, $\|T_{w_i z_j}(s)\|_\infty \leq \gamma$.

La réciprocity de cette propriété n'est pas vraie.

Cette propriété traduit le fait qu'en imposant une borne supérieure γ à la norme $\mathcal{H}_\infty$ du transfert multivariable entre les entrées exogènes et les sorties régulées, on impose cette borne sur chacun des sous-transferts monovariabiles. A l'inverse, on remarque qu'il est important de faire en sorte que des transferts SISO « non utiles » ne contraignent pas l'optimisation de γ .

La validité des expressions des correcteurs optimaux n'est garantie que sous les hypothèses suivantes :

- a. (A, B_2) est stabilisable
- b. (C_1, A) est détectable
- c. $D_{12}^T C_1 = 0 \quad D_{12}^T D_{12} = I$

Cette dernière hypothèse n'est pas restrictive mais permet de simplifier notablement les représentations d'état des compensateurs optimaux.

Le problème étant posé dans sa forme la plus générale, nous sommes maintenant en mesure de présenter les principaux résultats relatifs aux synthèses $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$. Pour les notations et les détails, nous renvoyons le lecteur principalement à la référence [151].

3.4.1 Synthèse $\mathcal{H}_2$ par retour d'état

La loi de commande est de type par retour d'état : $u(t) = F_2 x(t)$, où $K \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$ est une matrice constante.

Dans le cas où $\alpha = 2$, le critère (3.14) est quadratique et correspond à la minimisation de l'énergie du signal de sortie $w(t)$ (voir figure (3.2)).

Classiquement, le régulateur LQ (Linéaire Quadratique) est optimal et nécessite la résolution d'une équation de Riccati standard dont l'Hamiltonienne est donnée par :

$$H_2 = \begin{bmatrix} A & -B_2 B_2^T \\ -C_1^T C_1 & A^T \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

D'après les hypothèses faites, celle-ci appartient à $\text{dom}(\text{Ric})$ et la solution X_2 est unique et semi-définie positive.

Le retour d'état optimal est donné par :

$$F_2 = -B_2^T X_2 \quad (3.16)$$

D'où l'on déduit la matrice dynamique en boucle fermée :

$$A_{F_2} = A + B_2 F_2, \quad (3.17)$$

ainsi que la nouvelle matrice associée au vecteur z :

$$C_{F_2} = C_1 + D_{12} F_2 \quad (3.18)$$

Considérons à présent le système en boucle fermée dont la représentation d'état est la suivante :

$$G_c \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A_{F_2} & B_2 \\ \hline C_{F_2} & 0 \end{array} \right] \quad (3.19)$$

La valeur optimale du critère est alors donnée par :

$$\min_{K_{\text{stabilisant}}} \|F_l(P, K)\|_2 = \|G_c\|_2 \quad (3.20)$$

Il apparaît que cette technique de résolution, bien connue et appréciée des Automaticiens, est très simple car elle nécessite seulement la résolution d'une équation algébrique: l'équation de Riccati.

3.4.2 Synthèse $\mathcal{H}_\infty$ par retour d'état

La commande par retour d'état statique est la commande la plus élémentaire dans le cadre de la synthèse $\mathcal{H}_\infty$. Le principal résultat se résume dans le théorème suivant :

Théorème 3.2

Il existe un compensateur admissible satisfaisant :

$$\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma \quad (3.21)$$

Si et seulement si l'équation de Riccati :

$$H_\infty = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ -C_1^T C_1 & -A^T \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} H_\infty &\in \text{dom}(\text{Ric}) \\ X_\infty &= \text{Ric}(H_\infty) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Dans ce cas, la loi de commande est donnée par :

$$u(t) = F_\infty x(t) = -B_2^T X_\infty x(t) \quad (3.24)$$

Le retour d'état décrit en (3.24) n'est pas nécessairement optimal. Il permet seulement d'assurer la bornitude de (3.21). L'optimalité est obtenue par des itérations successives qui consistent à diminuer γ progressivement et à tester à chaque pas les conditions (3.23). Les itérations se poursuivent jusqu'à ce que l'une des conditions (3.23) ne soit plus vérifiée.

Notons que le signe de $\gamma^2 B_1 B_1^T - B_2 B_2^T$ n'étant pas défini, l'équation de Riccati à résoudre pour chaque itération a une nature légèrement différente de l'équation de Riccati obtenue dans le cas $\mathcal{H}_2$ où le signe du terme quadratique est défini.

Conclusion

Finalement, il apparaît que les formes des retours d'état $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$, sont analogues l'un est optimal, l'autre est sous-optimal. Dans le premier cas (synthèse $\mathcal{H}_2$), son calcul est direct et nécessite seulement la résolution d'une équation de Riccati classique alors que dans le deuxième cas (synthèse $\mathcal{H}_\infty$), le retour d'état sous-optimal est approché par une itération sur γ et à chaque pas, certaines conditions sur une équation de Riccati non standard doivent être testées.

3.4.3 Synthèse $\mathcal{H}_2$ par retour de sortie dynamique

Dans ce paragraphe nous présentons les synthèses $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ dans le cas où le système est représenté par (3.6). La forme standard relative à ce problème est donnée par la figure (3.2).

Dans le cadre des synthèses $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ les mêmes hypothèses sont formulées :

1. (A, B_2) est stabilisable et (C_2, A) est détectable
 2. (A, B_1) est stabilisable et (C_1, A) est détectable
 3. $D_{12}^T C_1 = 0$ $D_{12}^T D_{12} = I$
 4. $B_1 D_{21}^T = 0$ $D_{21} D_{21}^T = I$
 5. $D_{11} = 0$ $D_{22} = 0$
- L'hypothèse (1) est une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une solution.
 - L'hypothèse (2) facilite les démonstrations. Elle peut être évitée mais au prix d'une augmentation de la complexité théorique.
 - L'hypothèse (3) signifie d'une part que la participation de la commande u à la sortie w est normalisée et d'autre part que la sortie w dont la norme $\mathcal{H}_\infty$ doit être minimisée est constituée de deux parties orthogonales : une composante d'état $C_1 x$ et une composante de commande $D_{12} u$. Il n'y a pas de termes croisés (termes en $x.u$) dans le critère.
 - L'hypothèse (4) est duale de (3). Ces hypothèses sont souvent faites dans le cadre de la commande LQG car elles simplifient l'énoncé des solutions pour l'écriture d'un problème LQ ou LQG dans le formalisme $\mathcal{H}_2$.

Dans ce cadre, le principe de séparation (commande-estimation) est vérifié. On a donc, d'une part, un retour d'état comme il a été décrit précédemment et d'autre part un estimateur dont le gain est obtenu par la résolution d'une équation de Riccati J_2 duale de celle intervenant dans le problème de commande :

$$J_2 = \begin{bmatrix} A^T & -C_2^T C_2 \\ -B_1 B_1^T & -A \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

La matrice de gain d'estimation est alors donné par :

$$L_2 = -Y_2 C_2^T \quad (3.26)$$

Ainsi la matrice dynamique du système en boucle fermée est :

$$A_{L_2} = A + L_2 D_{21}, \quad (3.27)$$

et la nouvelle matrice associée au signal z est :

$$B_{L_2} = B_2 + L_2 D_{21} \quad (3.28)$$

Considérons à présent le système en boucle fermée dont la représentation d'état est donnée par :

$$G_f \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A_{L_2} & B_{L_2} \\ \hline F_2 & 0 \end{array} \right] \quad (3.29)$$

L'unique compensateur optimal K_{opt} a pour représentation d'état :

$$K_{opt}^2 \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} \frac{A + B_2 F_2 + L_2 C_2}{F_2} & -L_2 \\ \hline & 0 \end{array} \right] \quad (3.30)$$

La valeur optimale du critère est alors donnée par :

$$\min_K \|F_l(P, K)\|_2 = \sqrt{\|G_c\|_2 + \|G_f\|_2} \quad (3.31)$$

Ainsi, la synthèse d'un compensateur $\mathcal{H}_2$ dans le cas d'un retour de sortie dynamique est directe et nécessite la résolution de deux équations de Riccati standards. La valeur optimale est atteinte et c'est le compensateur correspondant, noté K_{opt}^2 qui est calculé.

Sa représentation d'état peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_k = Ax_k + B_2 u + L_2 (C_2 x_k - y) \\ u = F x_k \end{cases} \quad (3.32)$$

Cette représentation met en évidence le principe de séparation commande-estimation. L_2 est le gain optimal de l'observateur, F_2 la matrice de gain appliquée à l'état estimé x_k .

3.4.4 Synthèse $\mathcal{H}_\infty$ par retour de sortie dynamique

De manière analogue, le calcul du compensateur $\mathcal{H}_\infty$, nécessite la résolution d'une deuxième équation de Riccati associée à la matrice J_∞ suivante :

$$J_\infty = \begin{bmatrix} A^T & \gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \\ -B_1 B_1^T & -A \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Celle-ci est duale de la matrice H_∞ (3.22), et de plus, elle n'est pas standard (au sens du caractère défini de son terme quadratique). Notons Y_∞ , sa solution si elle existe.

Les hypothèses (1) à (4) étant vérifiées, il existe un compensateur admissible tel que :

$$\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma, \quad (3.34)$$

si et seulement si :

- i. $H_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$ et $J_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$
- ii. $X_\infty = \text{Ric}(H_\infty) \geq 0$ et $Y_\infty = \text{Ric}(J_\infty) \geq 0$
- iii. $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$,

où $\rho(\cdot)$ désigne le rayon spectral.

La représentation d'état du compensateur optimal K_{opt}^∞ est alors donnée par :

$$K_{opt}^\infty \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} \frac{A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2}{F_\infty} & -Z_\infty L_\infty \\ \hline & 0 \end{array} \right], \quad (3.35)$$

avec :

$$\begin{cases} F_\infty = -B_2^T X_\infty \\ L_\infty = -Y_\infty C_2^T \\ L_\infty = (I - \gamma^{-2} X_\infty Y_\infty)^{-1} \end{cases} \quad (3.36)$$

La valeur optimale du critère $\mathcal{H}_\infty$ est encore approchée par itérations sur γ . A partir d'une valeur initiale suffisamment grande qu'on diminue progressivement jusqu'à ce que l'une des conditions (i), (ii), (iii) ne soit plus vérifiée. Le compensateur est alors calculé pour la valeur de γ immédiatement supérieure.

La représentation d'état du compensateur $\mathcal{H}_\infty$ peut être aussi réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_k = A x_k + B_1 \hat{w}_k + B_2 u + Z_\infty L_\infty (C_2 x_k - y) \\ u = F_\infty x_k \\ \hat{w}_k = \gamma^{-2} B_1^T X_\infty x_k \end{cases} \quad (3.37)$$

La structure de cette loi de commande est du type commande-estimation mais avec un terme supplémentaire $\hat{w}_k$ dont on peut montrer, dans un cadre de jeu différentiel, qu'il correspond au signal de la perturbation la plus défavorable pour le problème posé.

Discussions

Les lois de commande synthétisées par les deux techniques $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ présentent donc des similitudes: elles obéissent toutes les deux au principe de séparation Commande/Estimation, avec cependant l'introduction de termes supplémentaires au niveau de la représentation d'état du compensateur $\mathcal{H}_\infty$ et un couplage dans la formulation des équations de Riccati (voir condition (iii)).

On peut également vérifier, d'après la structure des équations de Riccati que lorsque $\gamma \rightarrow \infty$, le problème $\mathcal{H}_\infty$ se confond avec le problème $\mathcal{H}_2$. Le lien est donc définitivement établi entre ces deux approches.

Par ailleurs, alors que le compensateur $\mathcal{H}_2$ est optimal et obtenu directement à partir de la résolution d'un jeu d'équations standards, le compensateur $\mathcal{H}_\infty$ quant à lui, est sous-optimal et obtenu par des itérations successives. A chaque pas, certaines conditions relatives à deux équations de Riccati non standards devant être testées.

Nous résumons dans le tableau ci-dessous les principaux parallèles qui peuvent être faits entre les synthèses $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ dans le cas général d'un retour de sortie dynamique.

	synthèse $\mathcal{H}_2$	synthèse $\mathcal{H}_\infty$
Hypothèses	Identiques	
Calcul des compensateurs	Direct	Itératif
Equations de Riccati	Classiques	1. signe du terme quadratique non défini 2. Couplage (condition (iii))
Compensateur	Optimal	sous-optimal
Principe de séparation	Oui	Oui, avec l'introduction d'un terme supplémentaire.

3.4.5 Synthèse du compensateur $\mathcal{H}_\infty$ dans un cadre plus général

Les hypothèses précédentes sont faites dans un cas bien particulier de retour de sortie correspondant à une structure bien particulière de la matrice P rappelée ci-dessous :

$$P(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right]$$

On peut se placer dans un cadre beaucoup plus général avec des hypothèses moins restrictives où les compensateurs stabilisant sont paramétrés et sont donnés par :

$$K = \|F_l(K_a, \Phi)\|_\infty \quad (3.38)$$

avec $\Phi \in \mathcal{RH}_\infty$ est une matrice arbitraire de dimension (m_2, p_2) vérifiant $\|\Phi\|_\infty < \gamma$.

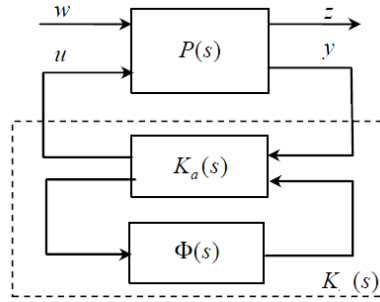


Figure 3.4 : Ensemble des régulateurs solutionnant le problème $\mathcal{H}_\infty$

Les compensateurs sont obtenus en fonction d'un paramètre Φ tel que $\Phi \in \mathcal{RH}_\infty$ et $\|\Phi\|_\infty < \gamma$. Le choix de ce paramètre en tenant compte des contraintes imposées est difficile. En pratique, il est souvent choisi nul et le compensateur trouvé est alors appelé "compensateur central". Cependant ce paramètre peut être choisi judicieusement pour conférer au compensateur une propriété particulière comme il sera montré ultérieurement dans le cadre de la synthèse des compensateurs décentralisés.

Dans le cas où D_{22} est non nulle, le correcteur se déduit d'un correcteur K_0 obtenu pour $D_{22} = 0$ par :

$$K = F_u(K_0, \left[\begin{array}{c|c} -D_{22} & I \\ \hline I & 0 \end{array} \right]) \quad (3.39)$$

On garantit par cette relation :

$$\|F_l(P_{D_{22}=0}, K_0)\|_\infty = \|F_l(P, K)\|_\infty \quad (3.40)$$

La méthode ne fournit pas de formule explicite pour la valeur optimale $\gamma_{\min}$. La valeur optimale du niveau $\mathcal{H}_\infty$ est approchée par dichotomie en utilisant les conditions de résolution du problème général (procédure de γ -itération). Une fois cette valeur déterminée, un correcteur répondant au problème est obtenu pour une valeur fixée de γ supérieure à $\gamma_{\min}$.

Dans le cas général, l'ordre du correcteur central sous-optimal est égal à l'ordre n de la matrice d'interconnexion $P(s)$. Comme cette dernière comprend à la fois le modèle du système à commander et des matrices de pondération choisies de manière à assurer certains objectifs

de performance et de robustesse, l'ordre n est souvent important et peut être excessif pour une implantation industrielle du correcteur. Des études ont été menées dans le but d'exploiter les degrés de liberté apportés par le paramètre $\Phi(s)$ pour réduire l'ordre du correcteur final $K(s)$.

3.5 Synthèse $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ par les LMIs

En dehors de l'approche fondée sur les équations algébriques de Riccati et des techniques utilisant des représentations en transfert, il existe une approche plus récente pour la résolution des problèmes $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$. Il s'agit des techniques LMI. Ces dernières utilisent une formulation du problème en termes d'inégalités matricielles si possible linéaires en les variables d'optimisation.

Du fait de cette linéarité possible, l'ensemble ainsi décrit est convexe et il résulte de cette propriété que l'on peut aisément et avec une grande efficacité calculatoire extraire une solution particulière.

Dans le paragraphe §2.2 du chapitre 1, nous avons donné très brièvement la définition des LMIs et nous avons souligné l'intérêt de la convexité des problèmes posés. Nous renvoyons le lecteur à la théorie développée par P. Gahinet et P. Apkarian dans [54].

La synthèse par LMIs fournit une autre façon de résoudre le problème standard [54]. Elle est plus générale, dans la mesure où elle ne nécessite pas le respect des hypothèses usuellement introduites dans l'approche classique. A l'exception de la stabilisabilité de (A, B_2) et détectabilité de (C_2, A) qui restent bien entendu nécessaire à toute méthode de synthèse. La synthèse par LMIs permet également de rechercher directement la valeur optimale de γ dans le cadre de la synthèse $\mathcal{H}_\infty$, sans passer par une procédure itérative. Elle permet en outre la possibilité à prendre en compte des contraintes supplémentaires, en particulier concernant l'ordre du correcteur à synthétiser. Il est également possible de considérer des contraintes impliquant une performance $\mathcal{H}_2$, ou encore des placements de pôles.

Nous supposons sans perdre de généralité que le terme D_{22} est nul. Rappelons que dans le cas contraire, il peut être réintroduit à posteriori (Voir annxe 1). Nous supposons de même que l'hypothèse sur la stabilisabilité et la détectabilité est toujours satisfaite.

Dans le cadre $\mathcal{H}_\infty$ les techniques LMI utilisent le lemme fondamental suivant (Bounded Real Lemma en anglais) :

Lemme 3.1 (Lemme Borné Réel : LBR)

Le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \leftrightarrow P(s) := \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$$

est stable et la norme $\mathcal{H}_\infty$ du transfert $\|P(s)\|_\infty = \|C(sI - A)^{-1}B + D\|_\infty$ est borné par γ si et seulement si, il existe une matrice symétrique définie positive $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que :

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB & C^T \\ B^T P & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.41)$$

Ce résultat est fondamental dans la synthèse $\mathcal{H}_\infty$ et connu sous la forme du Lemme de Kalman-Popov-Yacubovich. Il est facile de voir que l'ensemble des solutions de l'inégalité matricielle constitue un ensemble convexe dont on peut extraire une solution par des algorithmes de résolution numérique très performants.

Le principe de synthèse $\mathcal{H}_\infty$ consiste à appliquer ce lemme au système bouclé puis à manipuler la condition obtenue jusqu'à obtenir des conditions plus simples.

3.5.1 Stabilisation par retour d'état

Considérons un système LTI représenté par les équations (3.13). Les équations du système en boucle fermée s'écrivent avec $u(t) = Kx(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + B_2 K)x + B_1 w \\ z = (C_1 + D_{12} K)x \end{cases} \quad (3.42)$$

Le système invariant (3.13) est stabilisable asymptotiquement en boucle fermée par la loi de commande $u(t) = Kx(t)$ si et seulement s'il existe une matrice $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symétrique définie positive et une matrice $R \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$ telles que :

$$AS + SA^T + B_2 R + R^T B_2^T < 0 \quad (3.43)$$

Un gain de retour d'état est alors donné par $K = RS^{-1}$.

La condition (3.43) se démontre facilement en partant du théorème de stabilité de Lyapunov : le système (3.42) est stable si et seulement si, il existe une matrice S symétrique définie positive telle que :

$$(A + B_2 K)S + S(A + B_2 K)^T < 0$$

Soit,

$$AS + B_2 KS + SA^T + SK^T B_2^T < 0$$

Cette inégalité matricielle est non linéaire en K et S . En posant $R = KS$, on retrouve la condition (3.43) dont la résolution numérique en R et S conduit au gain de retour d'état par $K = RS^{-1}$.

Remarque : La preuve de ce résultat repose sur un changement de variable désormais classique. C'est une manière élégante de pouvoir transformer une égalité matricielle bilinéaire en égalité linéaire en variables de décision. Ce même changement de variable avec quelques aménagements sera appliqué dans la suite pour le retour d'état en stabilité et performance robustes.

Les principaux résultats présentés dans la suite sont synthétisés majoritairement des références [36] et [38].

3.5.2 Stabilisation par retour de sortie dynamique

En pratique, il arrive souvent que l'état complet ne soit pas accessible à la mesure et que seule une information partielle sur l'état est disponible. Celle-ci constitue le vecteur de sortie qui

peut être utilisée pour élaborer la loi de commande. Dans ce paragraphe, il est rappelé comment, au moyen du formalisme des LMIs, il est possible de déterminer une loi de commande de type retour de sortie dynamique [131]. Seul le problème de stabilisation sera rappelé, les autres (synthèse $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$) s'en déduisent de façon directe [54],[37].

Soit donc le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_{12} u \\ y = C_2 x + D_{21} w \end{cases} \quad (3.44)$$

où $x \in \mathbb{R}^n, w \in \mathbb{R}^{m_1}, u \in \mathbb{R}^{m_2}, z \in \mathbb{R}^{p_1}$ et $y \in \mathbb{R}^{p_2}$ étant la sortie mesurée. Le problème est celui de la détermination d'un compensateur de type retour de sortie dynamique propre stabilisant, c'est à dire, la détermination du triplet (A_c, B_c, C_c) :

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y \\ u = C_c x_c \end{cases}, \quad (3.45)$$

tel que le système bouclé, avec $X_e = \begin{bmatrix} x^T & x_c^T \end{bmatrix}^T$:

$$\begin{cases} \dot{X}_e = A_e X_e + B_e w = \begin{bmatrix} A & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix} X_e + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_c D_{21} \end{bmatrix} w, \\ z = C_e X_e = \begin{bmatrix} C_1 & D_{12} C_c \end{bmatrix} X_e \end{cases} \quad (3.46)$$

soit asymptotiquement stable. Pour ce problème de stabilisation et avec les hypothèses qui seront retenues, il n'est pas nécessaire de considérer les correcteurs qui ne seraient pas strictement propres.

Le système défini par (3.44) est stabilisable par retour de sortie dynamique (3.45) si et seulement si, Il existe deux matrices symétriques définies positives $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et les matrices $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$ et $F \in \mathbb{R}^{n \times p_2}$ solution des inégalités matricielles suivantes :

$$\begin{bmatrix} AY + YA^T + B_2 L + L^T B_2^T & Z + M \\ Z^T + M^T & A^T X + XA + FC_2 + C_2^T F^T \end{bmatrix} < 0 \quad (3.47)$$

$$\begin{bmatrix} Y & I \\ I & X \end{bmatrix} > 0$$

Avec :

$$\begin{cases} L = C_c V^T, \quad F = UB_c, \quad M = VA_c^T U^T \\ Z = A + YA^T X + L^T B_2^T X + YC_2^T F^T \end{cases} \quad (3.48)$$

Le point de départ pour justifier ce résultat est l'application de l'inégalité de Lyapunov au système en boucle fermée (3.46). Le système (3.44) est stabilisable par le contrôleur (3.45) si et seulement si :

$$\exists P_e = P_e' > 0 \quad / \quad A_e P_e + P_e A_e^T < 0 \quad (3.49)$$

où P_e est une matrice carrée de dimension $(2n, 2n)$. (3.47) n'est évidemment pas une égalité matricielle linéaire en variables de décision. Partitionnons P_e et P_e^{-1} comme suit :

$$P_e = \begin{bmatrix} X & U \\ U^T & \hat{X} \end{bmatrix}, \quad P_e^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V \\ V^T & \hat{Y} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

où $X \in \Re^{n \times n}$ et $Y \in \Re^{n \times n}$.

$Y = (X - U\hat{X}^{-1}U^T)^{-1} > X^{-1}$, ce qui traduit par la deuxième inégalité matricielle de (3.47).

Définissons une matrice T comme suit :

$$T = \begin{bmatrix} Y & I \\ V^T & 0 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

T est régulière si V de rang plein. La multiplication de (3.50) à droite et à gauche respectivement par T et T^T , conduit après un calcul non développé ici, à la première inégalité matricielle de (3.47) en tenant compte des changements de variables (3.48).

L'utilisation de ce résultat pour la synthèse d'un compensateur ne peut pas être directement effectuée par les techniques de résolution des LMIs car (3.47) est bilinéaire par rapport aux variables d'optimisation.

Cependant sans contrainte supplémentaire, notamment sur l'ordre du correcteur, il est possible de linéariser cette inégalité en effectuant le changement de variable :

$$\bar{M} = M + Z,$$

et en définissant comme nouvelles inconnues X, Y, L, F et $\bar{M}$. Les inégalités deviennent linéaires et peuvent être résolues numériquement par les algorithmes disponibles à cet effet.

Reconstruction du compensateur (3.45)

Les conditions d'existence (3.47) ne fournissent pas la procédure pour la reconstruction du compensateur lorsqu'il existe. A partir de la connaissance des matrices X, Y, L, F et M , solutions de (3.47), il est possible de reconstruire un compensateur comme suit. La décomposition de la matrice de Lyapunov P_e en quatre blocs de dimension (n, n) , a conduit à effectuer les changements des variables (3.49), ce qui implique la connaissance de U et V pour la reconstruction du compensateur. Notons que la liberté de choix pour le couple (U, V) n'est pas totale puisque $XY + UV^T = I$.

La matrice de transfert du compensateur s'écrit :

$$\begin{aligned} K(s) &= C_c(sI - A_c)^{-1}B_c = L(V^T)^{-1}(sI - U^{-1}M^T(V^T)^{-1}U^{-1}F) \\ &= L(sUV^T - M^T)^{-1}F. \end{aligned}$$

D'après $XY + UV^T = I$, nous avons :

$$K(s) = L(s(I - XY) - M^T)^{-1}F.$$

Cela donne en définitive la représentation d'état du compensateur :

$$\begin{cases} (I - XY)\dot{x}_c = M^T x_c + Fy \\ u = Lx_c \end{cases}$$

D'où :

$$\boxed{A_c = (I - XY)^{-1}M^T \quad B_c = (I - XY)^{-1}F \quad C_c = L} \quad (3.52)$$

On remarque que le compensateur est défini uniquement par les matrices X , Y , L , F et M . il n'est pas tributaire du choix de U et V .

3.5.3 Synthèse et performance $\mathcal{H}_2$ par retour d'état statique

3.5.3.1 Calcul de la norme $\mathcal{H}_2$

Rappelons que la norme $\mathcal{H}_2$ d'un système linéaire représenté par un triplet (A, B, C) asymptotiquement stable peut se calculer par le biais des Grammiens de commandabilité (ou d'observabilité) selon :

$$\|C(sI - A)^{-1}B\|_2^2 = \text{Trace}(CSC^T), \quad (3.53)$$

où S , le Grammien de commandabilité, solution définie non négative de :

$$AS + SA^T + BB^T = 0, \quad (3.54)$$

ou, de manière duale, selon :

$$\|C(sI - A)^{-1}B\|_2^2 = \text{Trace}(B^TQB) \quad (3.55)$$

Q , le Grammien d'observabilité, solution définie non négative de :

$$A^TQ + QA + C^TC = 0 \quad (3.56)$$

Par utilisation de la propriété de monotonie de la solution de l'équation de Lyapunov il est possible de traduire le calcul de cette norme en termes de LMI [15] :

$$\|C(sI - A)^{-1}B\|_2^2 = \text{Min}[\text{Trace}(W)],$$

sous les contraintes matricielles suivantes :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} W & CS \\ SC^T & S \end{bmatrix} \geq 0 \\ AS + SA^T + BB^T \leq 0, \end{cases} \quad (3.57)$$

ou, de manière équivalente :

$$\|C(sI - A)^{-1}B\|_2^2 = \text{Min}[\text{Trace}(W)],$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} W & B^TQ \\ QB & Q \end{bmatrix} \geq 0 \\ A^TQ + QA + C^TC \leq 0 \end{cases} \quad (3.58)$$

3.5.3.2 Synthèse par retour d'état statique

Considérons le système linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1w + B_2u \\ z = C_1x + D_{12}u \end{cases} \quad (3.59)$$

Le problème de synthèse $\mathcal{H}_2$ se formule comme la détermination d'une loi de commande de contre-réaction minimisant la norme $\mathcal{H}_2$ du transfert entre z et w . En reprenant les résultats

rappelés en début du paragraphe, la stabilisation et performance $\mathcal{H}_2$ se formule pour le cas du retour d'état comme suit :

L'existence d'un compensateur admissible satisfaisant $\|T_{zw}(s)\|_2^2 < \mu$ est garantie si et seulement s'il existe deux matrices symétriques définies positives $S \in \Re^{n \times n}$, $W \in \Re^{m_1 \times m_1}$ et une matrice $R \in \Re^{m \times n}$ solution des inégalités matricielles suivantes :

$$\begin{aligned} & \text{Trace}(W) \leq \mu \\ & \begin{bmatrix} W & C_1 S + D_{12} R \\ (C_1 S + D_{12} R)^T & S \end{bmatrix} \geq 0 \\ & \begin{bmatrix} AS + SA^T + B_2 R + R^T B_2^T & B_1 \\ B_1^T & -I \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

Le gain de retour d'état étant défini par $K = RS^{-1}$

Ce résultat se justifie en considérant le système en boucle fermée dont le transfert $T_{zw}(s)$ s'écrit :

$$T_{zw}(s) = (C_1 + D_{12}K)(sI - (A + B_2K)^{-1})B_1$$

Par ailleurs, sachant que la norme $\mathcal{H}_2$ peut s'exprimer en fonction du Grammien de commandabilité, c'est-à-dire pour le système bouclé:

$$\|T_{zw}(s)\|_2^2 = \text{Trace}((C_1 + D_{12}K)L_c(C_1 + D_{12}K)^T),$$

$$\text{avec : } (A + B_2K)L_c + L_c(A + B_2K)^T + B_1B_1^T = 0$$

Finalement [59], le problème peut s'écrire avec $S \geq L_c$:

$$\text{Trace}((C_1 + D_{12}K)S(C_1 + D_{12}K)^T) \leq \text{Trace}(W) \leq \mu, \text{ où } W = W^T \geq 0,$$

sous : $(A + B_2K)S + S(A + B_2K)^T + B_1B_1^T \leq 0$, qui donne :

$$(C_1 + D_{12}K)L_c + L_c(C_1 + D_{12}K)^T \leq W$$

$$\text{Sous : } (A + B_2K)S + S(A + B_2K)^T + B_1B_1^T \leq 0$$

En utilisant le complément de Schur et en posant $K = RS^{-1}$, on obtient les inégalités matricielles (3.60).

Remarque: De manière analogue, nous pouvons formuler le problème de la manière suivante:

$$\text{Trace}(W) \leq \mu$$

Sous les contraintes :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} W & B_1^T S \\ SB_1 & Q \end{bmatrix} \geq 0 \\ & \begin{bmatrix} AS + SA^T + B_2 R + R^T B_2^T & SC_1^T + R^T D_{12}^T \\ C_1 S + D_{12} R & -I \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned} \quad (3.61)$$

Si l'on souhaite minimiser μ et donc la norme $\|T_{zw}(s)\|$, on cherchera alors à résoudre le problème suivant :

$$\text{Min}(\text{Trace}(W))$$

Sous les contraintes (3.60) ou (3.61)

3.5.4 Synthèse et performance $\mathcal{H}_2$ par retour de sortie dynamique

Le sous-paragraphe précédent traite la stabilisation des systèmes par retour de sortie dynamique où seules les matrices d'état (A, B_2, C_2) interviennent. La performance réelle passe par le calcul à posteriori de la norme $\mathcal{H}_2$ du transfert en boucle fermée. Ce sous-paragraphe traite, outre la stabilisation, aussi la performance en boucle fermée par ce type de compensateur par l'approche LMI.

Ci-dessous est formulée une condition nécessaire et suffisante de stabilisation et de performance [36].

Le système défini par (3.44) est stabilisable par retour de sortie dynamique (3.47) et $\|T_{zw}(s)\|_2^2 < \mu$, avec $\mu := \text{Trace}(W)$ si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive $W \in \mathfrak{R}^{m_1 \times m_1}$ et les matrices $X, Y \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $M \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $L \in \mathfrak{R}^{m_2 \times n}$ et $F \in \mathfrak{R}^{n \times p_2}$ telles que :

$$\begin{bmatrix} Y & I & B_1 \\ I & X & XB_1 + FD_{21} \\ B_1^T & (XB_1 + FD_{21})^T & W \end{bmatrix} > 0 \quad (3.62)$$

$$\begin{bmatrix} AY + YA^T + B_2L + L^TB_2^T & Z + M & YC_1^T + L^TD_{12}^T \\ Z^T + M^T & A^TX + XA + FC_2 + C_2^TF^T & C_1^T \\ (YC_1^T + L^TD_{12}^T)^T & C_1 & -I \end{bmatrix} < 0$$

avec Z est défini par (3.48).

En effet, la norme $\mathcal{H}_2$ du transfert $T_{zw}(s)$ en z et w pour le système en boucle fermée (3.46) est définie par :

$$\|T_{zw}(s)\|_2^2 = \text{Trace}(B_e^T P B_e),$$

avec $P \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$ solution de $A_e^T P + P A_e + C_e^T C_e = 0$.

Ainsi :

$$\|T_{zw}(s)\|_2^2 < \text{Trace}(W)$$

où P et W vérifient les inégalités matricielles suivantes :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} P & P B_e \\ B_e^T P & W \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} A_e^T P + P A_e & C_e^T \\ C_e & -I \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \quad (3.63)$$

Soit la matrice de transformation suivante : $T_e = \begin{bmatrix} Y & I & 0 \\ V^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$.

La pré et post multiplication des deux inégalités de (3.63) respectivement par T_e^T et T_e , et en utilisant les changements de variables (3.57), on obtient les inégalités matricielles (3.62). La détermination du compensateur est la même que précédemment.

3.5.5 Synthèse $\mathcal{H}_\infty$ par retour d'état statique

Après avoir donné une formulation de la synthèse $\mathcal{H}_2$ par l'approche LMI, nous présentons quelques résultats de la synthèse $\mathcal{H}_\infty$ par cette même approche [37].

Il s'agit de déterminer le gain de retour d'état K permettant à la loi de commande $u(t) = Kx(t)$ la stabilisation du système (3.13). L'application du Lemme Borné Réel au système en boucle fermée:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + B_2K)x + B_1w \\ z = (C_1 + D_{12}K)x, \end{cases} \quad (3.64)$$

permet d'énoncer le résultat suivant :

Le système invariant (3.13) est stabilisable par retour d'état $u(t) = Kx(t)$ et sa norme $\mathcal{H}_\infty$ est inférieure à γ si et seulement si, il existe une matrice symétrique définie positive $S \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ et une matrice $R \in \mathfrak{R}^{m_2 \times n}$ telles que :

$$\begin{bmatrix} AS + SA^T + B_2R + R^TB_2^T & B_1 & SC_1^T + R^TD_{12}^T \\ B_1^T & -\gamma I & 0 \\ C_1S + D_{12}R & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.65)$$

Le gain de retour d'état stabilisant étant alors donné par $K = RS^{-1}$.

3.5.6 Synthèse $\mathcal{H}_\infty$ par retour de sortie dynamique

Le théorème suivant permet de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un compensateur pour le problème $\mathcal{H}_\infty$ sous-optimal :

Théorème 3.3 [59]

Le problème $\mathcal{H}_\infty$ sous-optimal admet une solution si et seulement s'il existe deux matrices symétriques définies positives $X, Y \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ satisfaisant le système LMI suivant :

$$\begin{bmatrix} N_X & 0 \\ 0 & I_{m_1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} AX + XA^T & XC_1^T & B_1 \\ C_1X & -\gamma I_{p_1} & D_{11} \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I_{m_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_X & 0 \\ 0 & I_{m_1} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.66)$$

$$\begin{bmatrix} N_Y & 0 \\ 0 & I_{p_1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^TY + YA & YB_1 & C_1^T \\ B_1^TY & -\gamma I_{m_1} & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I_{p_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_Y & 0 \\ 0 & I_{p_1} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.67)$$

$$\begin{bmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.68)$$

où N_X et N_Y constituent des bases des noyaux de $\begin{bmatrix} B_2^T & D_{12}^T \end{bmatrix}$ et de $\begin{bmatrix} C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ respectivement.

Dans l'approche basée sur les LMIs, il est possible de calculer le γ minimum directement. Au lieu de réduire itérativement la borne supérieure γ de la norme $\mathcal{H}_\infty$ du système bouclé, le γ minimum atteignable peut être trouvé directement. En effet, ces trois inégalités sont affines en les variables X et Y mais également en γ . Le niveau $\mathcal{H}_\infty$ optimal $\gamma_{\min}$ est donc solution du problème d'optimisation suivant :

$$\underset{\lambda, X=X^T, Y=Y^T}{Min} (\gamma) \text{ Sous les contraintes (3.66) à (3.68)}$$

qui est un problème de minimisation d'un objectif linéaire sous contraintes LMIs. (Voir §2.3.3 du chapitre 2).

Notons que les expressions intérieures des inégalités (3.66) et (3.67) ne dépendent que des matrices (A, B_1, C_1, D_{11}) et que les facteurs externes ne dépendent que des matrices de commande $(B_2, C_2, D_{12}, D_{21})$.

Remarquons également que la condition (3.68) implique, par les propriétés des LMIs, que :

$$X > 0 \text{ et } Y > 0$$

Les correcteurs solutions du problème standard sont obtenus à partir des solutions X et Y du problème d'optimisation précédent. Différentes techniques permettant de construire une représentation d'état du correcteur seront détaillées dans la suite. Une démonstration du théorème précédent sera donnée dans le cadre plus général de la recherche d'un correcteur avec contrainte d'ordre.

Nous donnons ci-dessous une autre formulation de la synthèse $\mathcal{H}_\infty$ en adoptant la même notation utilisée dans la section 3.5.3.2

Le système défini par (3.44) est stabilisable par retour de sortie dynamique (3.45) et $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$, si et seulement s'il existe deux matrices symétriques définies positives $X, Y \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ et les matrices $M \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $L \in \mathfrak{R}^{m_2 \times n}$ et $F \in \mathfrak{R}^{n \times p_2}$ solutions des inégalités matricielles suivantes :

$$\begin{bmatrix} Y & I \\ I & X \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} AY + YA^T + B_2L + L^TB_2^T & Z + M & B_1 & YC_1^T + L^TD_{12}^T \\ Z^T + M^T & A^TX + XA + FC_2 + C_2^TF^T & XB_1 + FD_{21} & C_1^T \\ B_1^T & B_1^TX + D_{21}^TF^T & -\gamma I & 0 \\ C_1Y + D_{12}L & C_1 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.69)$$

avec Z est défini par (3.48).

Le point de départ pour justifier ce résultat est de considérer le « Lemme Borné Réel ». Le système décrit par (3.55) est stable et la norme $\mathcal{H}_\infty$ du transfert $\|C_e(sI - A_e)^{-1}B_e\|_\infty$ est borné par γ si et seulement, il existe une matrice symétrique définie positive $P \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$ telle que :

$$\begin{bmatrix} A_e^T P + P A_e & P B_e & C_e^T \\ B_e^T P & -\gamma I & 0 \\ C_e & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.70)$$

Soit le partitionnement de P et P^{-1} en quatre blocs de dimension $(n \times n)$ telles que :

$$P_e = \begin{bmatrix} X & U \\ U^T & \hat{X} \end{bmatrix}, \quad P_e^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V \\ V^T & \hat{Y} \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

où $Y = (X - U\hat{X}^{-1}U^T)^{-1} > X^{-1}$ ce qui traduit par la première inégalité matricielle de (3.69).

Définissons les matrices T et T_e comme suit :

$$T = \begin{bmatrix} Y & I \\ V^T & 0 \end{bmatrix}, \quad T_e := \text{Diag} \left(T, \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right)$$

La pré et post multiplication de (3.71) respectivement par T_e^T et T_e , on obtient alors la deuxième inégalité matricielle de (3.69).

3.6 Synthèse $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ par LMI (Cas incertain)

3.6.1 Introduction à la synthèse multi-modèle

Considérons la représentation (3.1) adoptée pour le cas certain et plaçons-nous dans le cas où le système $P(s)$ est incertain. La prise en compte de la robustesse à priori, c'est-à-dire lors même de la procédure de synthèse, peut être conduite en cherchant un unique correcteur $K(s)$ pour un ensemble $\mathcal{M}$ de N modèles :

$$\mathcal{M} = \left\{ P_i(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A_i & B_i \\ \hline C_i & D_i \end{array} \right], i=1, \dots, N \right\} \quad (3.72)$$

Le problème de synthèse $\mathcal{H}_\infty$ standard sous-optimal multi-modèle peut être formulé de la façon suivante :

Problème $\mathcal{H}_\infty$ standard multi-modèle : Soient $\gamma > 0$ et N modèles $P_i(s)$. Trouver tous les correcteurs $K(s)$ qui stabilisent le système bouclé (3.4) de la figure 3.2 pour chacun des $P_i(s)$, et assurent $\|F_l(P_i, K)\|_\infty < \gamma$, $\forall i=1, \dots, N$.

En d'autres termes, le correcteur $K(s)$ est solution du problème $\mathcal{H}_\infty$ standard avec $P(s)$ incertain si et seulement si, il est solution du problème standard pour chacun des modèles $P_i(s)$. La famille des modèles P est ainsi remplacée par un ensemble fini de N modèles. Certains problèmes, tels que le placement de pôles robuste et la synthèse mixte $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$ avec placement de pôles par retour d'état, sont connus pour avoir des extensions multi-modèles [26]. Nous allons tout d'abord justifier pourquoi il n'en est pas de même pour le problème de synthèse standard.

Le cadre LMI permet naturellement l'extension de certains problèmes de synthèse au cas multi-modèle par "empilement" de contraintes. Prenons l'exemple simple du problème de retour d'état stabilisant en considérant un système constitué par une famille de N systèmes S_i , de matrices d'état A_i et de matrices de commande B_i :

$$\mathbf{S}_i \begin{cases} \dot{x} = A_i x + B_i u, & A_i \in \mathfrak{R}^{n \times n}, B_i \in \mathfrak{R}^{n \times m} \\ y = x \end{cases} \quad i = 1, \dots, N$$

L'extension multi-modèle consiste à chercher un gain $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ (s'il en existe) telle que l'unique loi de commande $u(t) = Kx(t)$ stabilise le système. Par une démarche analogue à celle présentée pour $N = 1$, la théorie de Lyapunov indique que le problème admet une solution si et seulement s'il existe N matrices S_i symétriques définies positives satisfaisant le système de N inégalités suivant :

$$(A_i + B_i K)S_i + S_i(A_i + B_i K)^T < 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$$

Soit :

$$S_i A_i^T + A_i S_i + S_i K^T B_i^T + B_i K S_i < 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$$

Pour $N = 1$, le changement de variable « $R = K S$ » utilisé dans le cas certain, transforme cette dernière inégalité non linéaire en une inégalité linéaire en les variables S et R , dont la résolution permet de déduire K .

Dans le cas multi-modèle, le changement de variables $R_i = K S_i$ conduit à des matrices R_i non indépendantes les unes des autres. Pour se ramener, à une condition LMI, il est nécessaire de supposer égales les N fonctions de Lyapunov S_i . L'hypothèse étant conservative, les conditions de résolution obtenues ne sont alors que suffisantes. Ceci signifie que, s'il existe des matrices $S = S^T > 0$ et R telles que :

$$S A_i^T + A_i S + R^T B_i^T + B_i R < 0 \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad (3.73)$$

alors, l'unique loi de commande $u(t) = K x(t) = R S^{-1} x(t)$ stabilise la famille des N systèmes $\mathbf{S}_i$. En revanche, la non faisabilité du système LMI précédent n'implique pas que le problème initial n'ait pas de solution. Notons que pour ce problème particulier, la loi de commande ne dépend pas directement des représentations d'état des systèmes $\mathbf{S}_i$ (qui n'interviennent que dans le problème (3.73) : elle se construit à partir de l'unique connaissance des matrices S et R solutions de (3.73).

Dans le cadre des systèmes incertains, Il existe un grand nombre d'approches de commande robuste mais nous n'évoquerons que la stabilité et la stabilisabilité quadratique [35]. Le principe de la synthèse robuste par l'approche « stabilisabilité quadratique » est de trouver une fonction de Lyapunov unique pour toute une famille de systèmes incertains et d'en déduire une loi de commande. Dans la suite nous orienterons vers la stabilisabilité quadratique de systèmes LTI incertains polytopiques par l'approche des fonctions de Lyapunov quadratiques.

Concernant la définition de la stabilité quadratique d'un système LTI incertain, nous la rappelons dans le paragraphe suivant.

3.6.2 Stabilisation quadratique par l'approche LMI

Définition : Stabilité quadratique

Un système incertain $\dot{x}(t) = A(\Delta)x(t)$ est quadratiquement stable si et seulement s'il existe une matrice unique $P > 0$ telle que pour toutes les incertitudes Δ :

$$\psi^T (PA(\Delta) + A^T(\Delta)P)\psi < 0 \quad \forall \psi \neq 0 \quad (3.74)$$

La stabilité quadratique est une condition suffisante de stabilité robuste.

Dans le paragraphe suivant, nous nous intéressons à la stabilisation d'une classe de système incertain. Le domaine d'incertitude étant de type polytopique convexe :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad P(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

$$A \in \mathcal{D}_A := \left\{ A / A = \sum_{i=1}^{na} \beta_i A_i; \quad \beta_i \geq 0; \quad \sum_{i=1}^{na} \beta_i = 1 \right\} \quad (3.75)$$

$$B_2 \in \mathcal{D}_{B_2} := \left\{ B_2 / B_2 = \sum_{i=1}^{nb_2} \beta_i B_{2i}; \quad \beta_i \geq 0; \quad \sum_{i=1}^{nb_2} \beta_i = 1 \right\} \quad (3.76)$$

Nous allons nous placer dans le cas de la stabilité quadratique et donner ensuite des conditions pour la synthèse des compensateurs $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$.

3.6.2.1 Stabilisation quadratique par retour d'état

L'idée est d'utiliser une seule fonction de Lyapunov pour garantir la stabilité du système sur tout le domaine des incertitudes. Cela conduit à la synthèse d'un seul compensateur unique pour tous les sommets du polytope. La condition de stabilisabilité quadratique pour un système incertain avec incertitude polytopique sur la matrice dynamique A et la matrice de commande B_2 est donnée sous forme LMIs par l'extension du cas certain (§3.6.1), mais ici la condition (3.78) doit être vérifiée sur tous les sommets du polytope définissant le domaine d'incertitude [16]. Plus précisément :

Le système linéaire incertain :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_{12} u \end{cases} \quad \begin{cases} A \in \mathcal{D}_A \\ B_2 \in \mathcal{D}_{B_2} \end{cases} \quad (3.77)$$

est quadratiquement stabilisable par retour d'état $u(t) = K x(t)$ si et seulement si, il existe une matrice symétrique définie positive $S \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ et une matrice $R \in \mathfrak{R}^{m_2 \times n}$ telles que :

$$A_i S + S A_i^T + B_{2j} R + R^T B_{2j}^T < 0 \quad \forall i = 1, \dots, n_a \quad \forall j = 1, \dots, n_b \quad (3.78)$$

$K = RS^{-1}$ est le gain de retour d'état.

3.6.2.2 Stabilisation quadratique par retour de sortie dynamique

Le système (3.44) est considéré incertain avec un domaine d'incertitude de type polytopique convexe défini par :

$$\mathcal{A} := \left[\begin{array}{c|c} A & B_2 \\ \hline C_2 & 0 \end{array} \right] \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}} := \left\{ \mathcal{A} / \mathcal{A} = \sum_{i=1}^N \mu_i \mathcal{A}_i; \quad \mu_i \geq 0; \quad \sum_{i=1}^N \mu_i = 1 \right\} \quad (3.79)$$

Là aussi, par extension de la condition (3.47) établie pour le cas certain, le système incertain (3.44) est quadratiquement stabilisable par retour de sortie dynamique (3.45) s'il existe deux

matrices symétriques définies positives $X, Y \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, et des matrices $M \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $L \in \mathfrak{R}^{m_2 \times n}$ et $F \in \mathfrak{R}^{n \times p_2}$ solutions des inégalités matricielles suivantes :

$$\begin{bmatrix} H_i & Z_i + M \\ Z_i^T + M^T & G_i \end{bmatrix} < 0, \quad i=1, \dots, N \quad (3.80)$$

$$\begin{bmatrix} Y & I \\ I & X \end{bmatrix} > 0$$

avec :

$$\begin{cases} H_i = A_i Y + Y A_i^T + B_{2i} L + L^T B_{2i}^T \\ G_i = A_i^T X + X A_i + F C_{2i} + C_{2i}^T F^T \\ Z_i = A_i + Y A_i^T X + Y C_{2i}^T F^T + L^T B_{2i}^T X \end{cases} \quad (3.81)$$

Contrairement au cas certain traité dans le paragraphe (3.4.2) où il a été possible de linéariser les inégalités en effectuant le changement de variables $\bar{M} = Z + M$, ici ce n'est plus possible et par conséquent le problème n'est plus réductible à un problème LMIs.

A la lumière de ces deux derniers résultats, la stabilisation du système incertain avec des incertitudes polytopiques par retour d'état ou par retour de sortie dynamique est obtenue par extension du cas certain en utilisant une seule fonction de Lyapunov. Toutes les méthodes de synthèses présentées dans les paragraphes (3.6.2) et (3.6.4) sont également étendues au cas incertain.

Pour ce faire, il convient de vérifier les conditions pour les sommets du polytope définissant le domaine d'incertitude. Par ailleurs dans le cas incertain, la synthèse $\mathcal{H}_2$ est dite à coût garanti car elle permet de déterminer un retour de sortie dynamique en minimisant la borne supérieure de la norme $\mathcal{H}_2$ du transfert $T_{zw}(s)$.

Il en demeure pas moins, à l'exception de la synthèse $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ par retour d'état, que les inégalités matricielles sont bilinéaires en variables de décision. Des algorithmes itératifs peuvent leur être appliqués, notamment l'algorithme par décomposition croisée qui est préconisé compte tenu de la structure particulière de ces BMI [36]. Celui-ci consiste, à partir d'une solution initiale faisable, de résoudre alternativement deux LMIs. Rappelons que d'autres méthodes ont été présentées dans le paragraphe § 2.3.9 du chapitre 2.

3.7 Stabilisation par retour de sortie dynamique avec contrainte d'ordre

3.7.1 La motivation de la recherche d'un compensateur d'ordre réduit

Toutes les méthodes présentées jusqu'à présent conduisent à des correcteurs d'ordre n égal à celui de la matrice d'état associée au système $P(s)$ de la figure 3.2. Rappelons que $P(s)$ correspond au modèle augmenté qui comprend le modèle du système à réguler augmenté soit par les filtres exprimant les objectifs de synthèse (dans l'approche standard) soit par les réseaux correcteurs effectuant le modelage de la boucle ouverte (dans l'approche par « loop-shaping »). Or on conçoit aisément que cet ordre, qui peut être très élevé, n'est pas forcément nécessaire pour obtenir une politique de commande satisfaisante. Cependant ajouter une contrainte d'ordre fera perdre la convexité du problème d'optimisation. Ce problème réputé comme difficile a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs compte tenu de son importance et le lecteur intéressé par ce sujet peut consulter les références suivantes [150], [141] et [88] en autres. La méthode que nous présentons dans la suite constitue une extension d'une méthode de synthèse d'un compensateur d'ordre n à la synthèse d'un compensateur d'ordre fixe $r < n$.

L'idée de base est de montrer que ce problème est équivalent à la synthèse d'un gain de retour de sortie statique. C'est l'objet du paragraphe suivant.

3.7.2 Synthèse d'un gain de retour de sortie statique

Considérons un système LTI noté S , de représentation d'état donnée ci-dessous, avec l'hypothèse non restrictive que la matrice de transmission directe est nulle:

$$S \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + 0u \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$$

Dans le cas où le système considéré n'est pas strictement propre le "terme D " de la représentation d'état peut être réintroduit à posteriori (voir Annexe 1).

Les hypothèses classiques de la stabilisabilité et de la détectabilité respectivement de (A, B) et de (C, A) , sont supposées vérifiées.

Le problème de retour de sortie statique consiste à chercher une matrice $K \in \mathbb{R}^{m \times p}$ (s'il en existe) telle que la loi de commande $u(t) = Ky(t)$ stabilise le système S . Le système bouclé a alors pour représentation d'état :

$$\dot{x} = (A + BKC)x = A_{cl}x$$

La stabilisation par retour de sortie demeure un problème ouvert de la commande. Il a été, toujours, l'objet de publications très abondantes, dont le lecteur trouvera une sélection des premières références sur le sujet [48] ainsi quelques une plus récentes [66].

Ce problème est d'une importance primordiale en théorie de la commande et particulièrement dans les cas pratiques.

En effet, dans la majorité des cas, les problèmes pratiques de commande doivent être résolus sous l'hypothèse restrictive d'information partielle puisque seules les mesures fournies par les capteurs (en nombre limité) lui sont accessibles. Il est intéressant de remarquer également que de très nombreux problèmes de synthèse (synthèse par retour de sortie d'ordre réduit, synthèse par retour de sortie dynamique) peuvent être reformulés ainsi.

La condition de stabilité est alors :

$$\exists P = P^T > 0 \quad / \quad (A + BKC)^T P + P(A + BKC) < 0 \quad (3.82)$$

Cette inégalité matricielle est bilinéaire en les variables P et K . Contrairement au problème de la commande par retour d'état, il n'existe pas de changement de variable permettant de la linéariser. Il s'agit donc d'un problème difficile.

Une formulation équivalente de ce problème peut être obtenue par application du lemme d'élimination, que nous rappelons ci-dessous, à l'inégalité (3.82). La variable à éliminer étant la matrice K .

Nous rappelons d'abord le lemme d'élimination ou de projection §1.2.5.2 du chapitre 1 [54].

Soient trois matrices $G = G^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $U \in \mathbb{R}^{n \times p}$ et $V \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ($\text{Rang}(U) < n$ et $\text{Rang}(V) < n$). Les deux problèmes suivants sont équivalents :

- $\exists K \in \mathbb{R}^{p \times q} \quad / \quad G + UKV + V^T K^T U^T < 0$

$$\bullet \quad \begin{cases} U_\perp^T G U_\perp < 0 \\ V_\perp^T G (V_\perp^T)^T < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (U_\perp^T)^T G U_\perp < 0 \\ V_\perp^T G V_\perp < 0 \end{cases}$$

où $U_\perp$ et $V_\perp$ sont les compléments orthogonaux des matrices U et V .

Afin d'appliquer ce lemme au problème posé, réécrivons l'inégalité matricielle (3.82) sous la forme suivante :

$$\underbrace{A^T P + P A}_G + \underbrace{P B}_U K \underbrace{C}_V + \underbrace{C^T}_V K^T \underbrace{B^T P}_U < 0$$

Il s'en suit par équivalence les deux inégalités matricielles :

$$\begin{cases} ((B^T P)_\perp)^T (A^T P + P A) (B^T P)_\perp < 0 \\ (C_\perp)^T (A^T P + P A) C_\perp < 0 \end{cases}$$

En notant que $(B^T P)_\perp = P^{-1} (B^T)_\perp$ et en posant $Q = P^{-1}$, la condition (3.82) est équivalente à :

$$\exists P = P^T \text{ et } \exists Q = Q^T \quad / \quad \begin{cases} ((B^T)_\perp)^T P^{-1} (A^T P + P A) P^{-1} (B^T)_\perp < 0 \\ (C_\perp)^T (A^T P + P A) C_\perp < 0 \\ P = Q^{-1} \end{cases}$$

Soit :

$$\exists P = P^T \text{ et } \exists Q = Q^T \quad / \quad \begin{cases} ((B^T)_\perp)^T (Q A^T + A Q) (B^T)_\perp < 0 \\ (C_\perp)^T (A^T P + P A) C_\perp < 0 \\ P Q = I \end{cases} \quad (3.83)$$

Le non convexité du problème se traduit par la troisième condition $PQ = I$. Cette condition de couplage entre les deux variables de décision P et Q est équivalente à une condition sur le rang de la matrice $(PQ - I)$. La complexité en est d'ailleurs connue : le problème est NP-difficile selon la terminologie pour qualifier les problèmes difficilement résolubles [53]. Il a donné lieu à de nombreux algorithmes heuristiques, dont la convergence vers une solution n'est pas garantie.

3.7.3 Synthèse d'un compensateur par de retour de sortie dynamique d'ordre fixe

Le problème de synthèse d'un correcteur dynamique stabilisant d'ordre fixe consiste à chercher une loi de commande d'ordre $r < n$:

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y \\ u = C_c x_c + D_c y \end{cases} \quad x_c \in \mathbb{R}^r$$

Le système bouclé a alors pour représentation d'état :

$$\dot{X}_e = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = A_e X_e = \begin{bmatrix} A + B D_c C & B C_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix} X_e$$

En organisant la matrice d'état A_e sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} A + B D_c C & B C_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ C & 0 \end{bmatrix} \triangleq \hat{A} + \hat{B} \hat{K} \hat{C},$$

C'est-à-dire sous la forme d'une expression linéaire de $\hat{K}$. Le problème se ramène donc à la recherche d'un gain $\hat{K}$ de retour de sortie statique pour un système dont la représentation d'état est définie par $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$.

La condition (3.83) peut être explicitée en remarquant que:

$$\hat{C}_\perp = \begin{bmatrix} C_\perp \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } (\hat{B})_\perp^T = \begin{bmatrix} (B^T)_\perp \\ 0 \end{bmatrix},$$

et en posant :

$$P = \begin{bmatrix} X & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Y & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix},$$

Il peut être montré par un développement algébrique que la troisième condition de (3.83) est équivalente à [72]:

$$\begin{bmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} \geq 0 \text{ et } \text{rang} \begin{bmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} \leq n+r$$

En conclusion, une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un d'ordre r stabilisant le système S s'écrit alors :

$$\exists X = X^T > 0 \text{ et } \exists Y = Y^T > 0 \text{ telles que :}$$

$$(C_\perp)^T (A^T X + XA) C_\perp < 0 \quad (3.84)$$

$$((B^T)_\perp)^T (YA^T + AY)(B^T)_\perp < 0 \quad (3.85)$$

$$\begin{bmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.86)$$

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} \leq n+r \quad (3.87)$$

Notons que les expressions intérieures des inégalités (3.84) et (3.85) ne dépendent que de la matrice d'état A du système et que les facteurs externes ne dépendent que des matrices B et C .

L'ordre du correcteur est lié au rang de la matrice qui apparaît dans (3.86) et (3.87), condition s'exprimant de manière équivalente par :

$$\text{Rang}(XY - I_n) \leq r \quad (3.88)$$

Pour $r \geq n$, cette contrainte de rang est toujours satisfaite et (3.84 à 3.86) définissent un problème LMI convexe, linéaire en X et Y , qui peut donc être résolu par des algorithmes efficaces d'optimisation convexe disponibles à cet effet. Par contre, pour $r < n$, la contrainte de rang fait perdre la convexité du problème. Ce dernier a généralement de nombreux minima locaux et les algorithmes efficaces d'optimisation convexe ne sont plus applicables. Pour $r = 0$, on obtient la condition $XY = I_n$, analogue à la troisième des conditions (3.83) obtenue pour le problème du retour de sortie statique. Cette formulation est donc une généralisation du problème précédent.

La contrainte de rang précédemment citée correspond à une condition de reconstruction des matrices P et Q intervenant dans l'équation de Lyapunov de stabilité du système bouclé, qui s'écrit ici :

$$PQ = \begin{bmatrix} X & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & * \\ * & * \end{bmatrix} = I_{n+r} \quad (3.89)$$

Contrairement à l'écriture sous la forme (3.89), la formulation (3.88) permet d'optimiser l'ordre du correcteur, qui dépend du rang de la matrice $(XY - I)$. Il peut donc être minimisé en considérant le problème (3.90), dont une généralisation est donnée dans [47] :

$$\underset{X,Y}{\text{Min Rang}}(XY - I) \text{ sous les contraintes (3.84) à (3.86)}. \quad (3.90)$$

3.7.4 Problème $\mathcal{H}_\infty$ standard sous-optimal d'ordre réduit r

Nous nous intéressons à présent à la recherche d'un correcteur stabilisant d'ordre fixe avec contrainte de performance $\mathcal{H}_\infty$ exprimée par $\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$. Dans cette section nous considérons le modèle augmenté suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y = C_2 x + D_{21} w \end{cases}$$

que nous cherchons à commander par un compensateur de type :

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y \\ u = C_c x_c + D_c y \end{cases}$$

Supposons (A, B_2) stabilisable, (C_2, A) détectable, et $D_{22} = 0$. Les équations du système bouclé, avec $X_{bf} = \begin{bmatrix} x^T & x_c^T \end{bmatrix}$, s'écrivent :

$$S_{bf} \begin{cases} \dot{X}_{bf} = \begin{bmatrix} A + B_2 D_c C_2 & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix} X_{bf} + \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_c D_{21} \\ B_c D_{21} \end{bmatrix} w \\ z = \begin{bmatrix} C_1 + D_{12} D_c C_2 & D_{12} C_c \end{bmatrix} X_{bf} + \begin{bmatrix} D_{11} + D_{12} D_c D_{21} \end{bmatrix} w, \end{cases}$$

que nous écrivons sous la forme compacte :

$$\begin{cases} \dot{X}_{bf} = A_{bf} X_{bf} + B_{bf} w \\ z = C_{bf} X_{bf} + D_{bf} w \end{cases}$$

Théorème 3.4

Le problème $\mathcal{H}_\infty$ sous-optimal d'ordre r admet une solution si et seulement s'il existe deux matrices symétriques X et $Y \in \Re^{n \times n}$ satisfaisant le système LMI suivant [54] :

$$\begin{bmatrix} N_X & 0 \\ 0 & I_{m_1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} AX + XA^T & XC_1^T & B_1 \\ C_1 X & -\gamma I_{p_1} & D_{11} \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I_{m_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_X & 0 \\ 0 & I_{m_1} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.91)$$

$$\begin{bmatrix} N_Y & 0 \\ 0 & I_{p_1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T Y + Y A & Y B_1 & C_1^T \\ B_1^T Y & -\gamma I_{m_1} & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I_{p_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_Y & 0 \\ 0 & I_{p_1} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.92)$$

$$\begin{bmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.93)$$

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} \leq n + r \Leftrightarrow \text{Rang}(XY - I_n) \leq r \quad (3.94)$$

où N_X et N_Y constituent des bases des noyaux de $\begin{bmatrix} B_2^T & D_{12}^T \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ respectivement.

Pour $r \geq n$, la contrainte de rang (3.94) est toujours satisfaite et le théorème précédent est donc équivalent au théorème 3.3 énoncé au paragraphe 3.4.6. Par contre, pour $r < n$, comme pour le problème de synthèse d'un correcteur stabilisant d'ordre fixe, la contrainte de rang fait perdre la convexité du problème. De manière analogue au problème de synthèse d'un correcteur stabilisant d'ordre fixe, ce problème est équivalent à un problème de synthèse d'un correcteur statique $\mathcal{H}_\infty$ pour un système augmenté. Pour ce système augmenté, la contrainte (3.94) devient $XY = I_n$, qui est une contrainte bilinéaire.

Démonstration du théorème 3.4

Nous donnons ici une démonstration succincte de ce théorème car elle permet d'une part d'introduire de façon naturelle les techniques de construction du compensateur à partir des solutions X et Y du système LMI précédent.

Considérons les équations du système en boucle fermée et adoptons les décompositions suivantes :

$$\begin{aligned} A_{bf} &= \begin{bmatrix} A + B_2 D_c C_2 & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_{n_c} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ I_{n_c} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_{n_c} \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \triangleq \hat{A} + \hat{B} \hat{K} \hat{C} \\ B_{bf} &= \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_c D_{21} \\ B_c D_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ I_{n_c} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ D_{21} \end{bmatrix} \triangleq \hat{B}_w + \hat{B} \hat{K} \hat{D}_{21} \\ C_{bf} &= \begin{bmatrix} C_1 + D_{12} D_c C_2 & D_{12} C_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_{n_c} \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \triangleq \hat{C}_z + \hat{D}_{12} \hat{K} \hat{C} \\ D_{bf} &= D_{11} + D_{12} D_c D_{21} = D_{11} + \begin{bmatrix} 0 & D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ D_{21} \end{bmatrix} \triangleq D_{11} + \hat{D}_{12} \hat{K} \hat{D}_{21} \end{aligned} \quad (3.95)$$

Etape 1 : Application du Lemme Borné Réel

Le « Lemme Borné Réel » nous permet d'établir que A_{bf} n'a que des valeurs propres à partie réelle strictement négative et $\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$ si et seulement si, il existe une matrice P_{bf} symétrique définie positive solution de l'inégalité matricielle :

$$\begin{bmatrix} A_{bf}^T P_{bf} + P_{bf} A_{bf} & P_{bf} B_{bf} & C_{bf}^T \\ B_{bf}^T P_{bf} & -\gamma I & D_{bf}^T \\ C_{bf} & D_{bf} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.96)$$

$(A_{bf}, B_{bf}, C_{bf}, D_{bf})$ étant des fonctions affines de la matrice $\hat{K}$ formée par les composantes du compensateur, il s'en suit que (3.96) est une fonction affine de la matrice $\hat{K}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{A}^T P_{bf} + P_{bf} \hat{A} & P_{bf} \hat{B}_w & \hat{C}_z^T \\ \hat{B}_w^T P_{bf} & -\gamma I & D_{11}^T \\ \hat{C}_z & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix}}_{\Psi} + \underbrace{\begin{bmatrix} P_{bf} \hat{B} \\ 0 \\ \hat{D}_{12} \end{bmatrix}}_{\hat{P}} \hat{K} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{C} & \hat{D}_{21} & 0 \end{bmatrix}}_{\hat{Q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{C}^T \\ \hat{D}_{21}^T \\ 0 \end{bmatrix}}_{\hat{Q}} \hat{K}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{B}^T P_{bf} & 0 & \hat{D}_{12}^T \end{bmatrix}}_{\hat{P}} < 0 \quad (3.97)$$

Cependant l'inégalité (3.97) est une inégalité matricielle bilinéaire en les variables $\hat{K}$ et P_{bf} . La deuxième étape consiste à éliminer $\hat{K}$.

Etape 2 : Elimination d'inconnues

L'application du lemme d'élimination garantit donc l'existence d'un compensateur sous-optimal d'ordre r si et seulement si, il existe une matrice P_{bf} symétrique définie positive telle que :

$$P_{\perp}^T \Psi P_{\perp} < 0 \quad (3.98)$$

$$Q_{\perp}^T \Psi Q_{\perp} < 0 \quad (3.99)$$

En remarquant que :

$$P = \begin{bmatrix} \hat{B}^T P_{bf} & 0 & \hat{D}_{12}^T \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{B}^T & 0 & \hat{D}_{12}^T \end{bmatrix}}_{P_0} \begin{bmatrix} P_{bf} & 0 & 0 \\ 0 & I_{m_i} & 0 \\ 0 & 0 & I_{p_i} \end{bmatrix}$$

Il vient $P_{\perp} = \begin{bmatrix} P_{bf}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{m_i} & 0 \\ 0 & 0 & I_{p_i} \end{bmatrix} P_{0\perp}$ et l'inégalité (3.98) devient :

$$(P_{0\perp})^T \phi P_{0\perp} < 0, \quad (3.100)$$

avec : $\phi = \begin{bmatrix} \hat{A} P_{bf}^{-1} + P_{bf}^{-1} \hat{A}^T & \hat{B}_w & P_{bf}^{-1} \hat{C}_z^T \\ \hat{B}_w^T & -\gamma I_{m_i} & D_{11}^T \\ \hat{C}_z P_{bf}^{-1} & D_{11} & -\gamma I_{p_i} \end{bmatrix}$

Etape 3 : Réduction du nombre de variables de décision

Posons :

$$P_{bf} = \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & * \end{bmatrix} \text{ et } P_{bf}^{-1} = \begin{bmatrix} R & M \\ M^T & * \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

où $R, S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $M, N \in \mathbb{R}^{n \times n_c}$

Explicitons : $P_{0\perp} = \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ W_2 & 0 \end{bmatrix}$ avec $N_X := \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix}$ une base de l'orthogonal du noyau de $\begin{bmatrix} B_2^T & D_{12}^T \end{bmatrix}$.

Par un calcul matriciel non développé ici et la réorganisation des matrices, l'inégalité (3.100) se réécrit sous la forme (3.91) (la ligne nulle de $P_{0\perp}$ élimine les termes où apparaît M).

De manière similaire, on montre que (3.99) se réécrit sous la forme (3.92).

Etape 4 : Exploitation de la positivité de P_{bf}

P_{bf} étant une matrice définie positive, l'application de la règle de complétion (§1.2.5.2 du chapitre 1) à P_{bf} et P_{bf}^{-1} termine la démonstration en établissant l'équivalence entre (3.100) d'une part, (3.93) et (3.94) d'autre part.

Etape 5 : Construction du compensateur

Les correcteurs solutions du problème $\mathcal{H}_\infty$ standard, avec ou sans contrainte d'ordre, sont obtenus à partir des solutions R et S de la formulation LMI, soit par des formules explicites [85], soit en résolvant un problème d'optimisation matriciel. La seconde méthode apparaît de manière plus naturelle dans le contexte LMI. Cependant, la première méthode est plus efficace et permet en général d'éviter des problèmes numériques pouvant survenir lorsque les matrices R et S sont mal conditionnées. Nous présentons ci-dessous les grandes lignes de la seconde méthode.

Supposons connues, pour une valeur donnée γ du niveau $\mathcal{H}_\infty$, des solutions R et S du problème LMI (3.91)-(3.93), avec ou sans la contrainte d'ordre (3.94), donc pour $r < n$.

Quelle que soit la technique de construction de la représentation d'état du correcteur, la première étape consiste à reconstruire une matrice $P_{pf} \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$ vérifiant (3.100), où P_{pf} est la variable intervenant dans le lemme d'élimination.

Pour cela, une décomposition en valeurs singulières de $RS - I$ permet de former deux matrices de rang plein $M, N \in \mathfrak{R}^{n \times n_c}$ telles que $RS + MN^T = I$. Une matrice P_{pf} qui convient est alors donnée par :

$$P_{bf} = \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & -M^+RN \end{bmatrix} \text{ avec } P_{bf}^{-1} = \begin{bmatrix} R & M \\ M^T & -N^+SM \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

M^+, N^+ représentent respectivement les pseudo-inverse de Moore-Penrose de M et N : ($N^+N = I_c, M^+M = I_c$). En fait, Le choix particulier de M et de N est non pertinent dans la mesure où il détermine seulement les paramètres du correcteur.

Enfin, une fois que P_{pf} est reconstruite, l'équation (3.97) devient alors une LMI en $\hat{K}$ dont la solution donne les matrices (A_c, B_c, C_c, D_c) du compensateur.

Remarque : Si après, nous donnons un algorithme alternatif pour la construction de P_{pf} en

$$\text{posant } P_{bf} = \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & L \end{bmatrix} \text{ et } P_{bf}^{-1} = \begin{bmatrix} R & M \\ M^T & F \end{bmatrix}.$$

On commence par décomposer $I - RS$ en valeurs singulières : $I - RS = U\Sigma V^T$ qu'on décompose ensuite selon l'ordre n_c , comme suit : $U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} U_{n_c} & U_{n-n_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{n_c} & 0 \\ 0 & \Sigma_{n-n_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n_c} & V_{n-n_c} \end{bmatrix}^T$. $I - RS$ est alors

approchée par : $I - SR = U_{n_c} \Sigma_{n_c} V_{n_c}^T$. En écrivant ce dernier résultat sous la forme : $U_{n_c} \Sigma_{n_c}^{1/2} \Sigma_{n_c}^{1/2} V_{n_c}^T$, un choix pour les matrices M et N est alors donné par :

$$M = U_{n_c} \Sigma_{n_c}^{1/2}$$

$$N = V_{n_c} \Sigma_{n_c}^{1/2}$$

Par ailleurs, de l'égalité $P_{bf} P_{pf}^{-1} = I$, on déduit que $N^T R + L M^T = 0$, soit $\Sigma_{n_c}^{1/2} V_{n_c}^T R + L \Sigma_{n_c}^{1/2} U_{n_c}^T = 0$. La multiplication de cette relation par U_{n_c} et en notant que $U_{n_c}^T U_{n_c} = I$, on a :

$$L = -\Sigma_{n_c}^{-1/2} V_{n_c}^T R U_{n_c} \Sigma_{n_c}^{1/2}.$$

Notons enfin connaissant M et N , peut calculer P_{bf} comme solution de l'équation :

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ R & M \end{bmatrix} P_{bf} = \begin{bmatrix} S & N \\ I & 0 \end{bmatrix}.$$

3.8 Commande par placement de pôles et formulation LMI

Les méthodes classiques pour la synthèse des compensateurs ne sont pas calculées de manière à placer les pôles en boucle fermée. Les pôles qui résultent de ces types de synthèse sont appréciés ou non à posteriori. Or les performances relatives au régime transitoire des réponses du système en boucle fermée (temps de réponse, amortissement,..) sont étroitement liées à la notion de pôles du système, c'est-à-dire à la localisation des valeurs propres de la matrice d'état dans le plan complexe. Il est souvent souhaitable que ces valeurs propres soient contenues dans une région $\mathcal{D}$ du demi-plan gauche du plan complexe spécifiée pour garantir certaines performances. On parle alors de $\mathcal{D}$ -stabilité de la matrice d'état. C'est-à-dire qu'un système dynamique $\dot{x} = Ax$ est dit $\mathcal{D}$ -stable si les valeurs propres de A sont contenues dans la région $\mathcal{D}$.

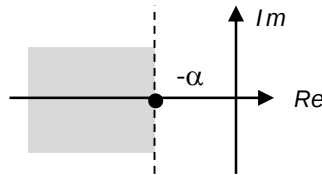
De même, une région $\mathcal{D}$ du plan complexe se définit région LMI par [31]:

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} / L + zM + z^* M^T < 0\}, \text{ où } L = L^T \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ et } M \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

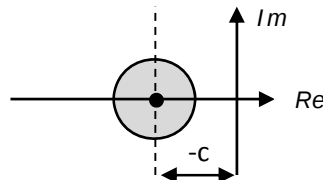
La notation z^* désigne le conjugué de z . La fonction $f_{\mathcal{D}}(z) = L + zM + z^* M^T$ est appelée fonction caractéristique de $\mathcal{D}$.

C'est ainsi, qu'on trouve les régions LMI suivantes ou leurs intersections :

- Demi-plan $\text{Re}(z) < -\alpha$: $2\alpha P + PA + A^T P < 0$

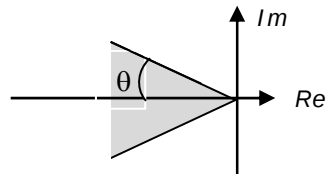


- Cercle de centre $-c < 0$ et de rayon r : $\begin{bmatrix} -rP & (A + cI)^T P \\ P(A + cI) & -rP \end{bmatrix} < 0$



- Zone délimitée par deux demi-droites formant un angle θ avec l'axe réel :

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(PA + A^T P) & \sin(\theta)(PA - A^T P) \\ \cos(\theta)(A^T P - PA) & \sin(\theta)(PA + A^T P) \end{bmatrix} < 0$$



Les résultats présentés ici s'appuient sur la définition des régions LMI définis dans [31] et plus récemment dans [68] dans le contexte des systèmes incertains. Dans un premier temps nous donnons la définition de la zone de performance où les pôles en boucle fermée seront placés et ensuite nous donnons une formulation en termes de LMI pour la synthèse de compensateur par retour d'état statique et par retour de sortie dynamique. Ces deux résultats permettent de montrer comment un problème de synthèse de type $\mathcal{H}_\infty$ par exemple peut être enrichi par une contrainte de performance par placement de pôles.

3.8.1 zone de performance

La zone de performance est une région convexe du plan complexe dans laquelle nous souhaitons placer les pôles en boucle fermée. Elle sera définie par trois paramètres (α, r, θ) conformément à la figure 3.5 et notée $R(\alpha, r, \theta)$. Elle est constituée par :

- l'intersection du demi-plan à gauche de α ;
- de l'intérieur du disque de centre O et de rayon r ;
- du secteur d'angle $\pm\theta$ autour de l'axe des réels

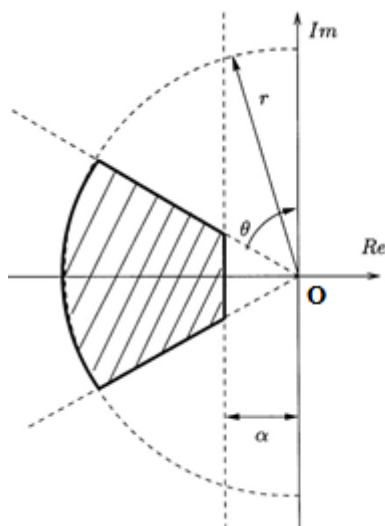


Figure 3.5 : Zone de performance

3.8.2 Commande par retour d'état

On se place dans le cas où le système (3.13) est certain et l'on souhaite placer ses pôles en boucle fermée dans une région $R(\alpha, r, \theta)$ par une commande par retour d'état $u(t) = K x(t)$.

L'application de cette loi de commande au système (3.13) conduit au système en boucle fermée (3.66). Celui-ci est stable et les valeurs propres se trouvent dans la région LMI s'il existe une matrice P satisfaisant les contraintes suivantes [31] :

$$P(A+B_2K)+(A+B_2K)^T P+2\alpha P < 0 \quad (3.103)$$

$$\begin{bmatrix} -rP & (A+B_2K)^T P \\ P(A+B_2K) & -rP \end{bmatrix} < 0 \quad (3.104)$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(P(A+B_2K)+(A+B_2K)^T P) & \sin(\theta)(P(A+B_2K)-(A+B_2K)^T P) \\ \cos(\theta)(P(A+B_2K)^T - P(A+B_2K)) & \sin(\theta)(P(A+B_2K)+(A+B_2K)^T P) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.105)$$

En pré et post multipliant l'inégalité (3.103) par P^{-1} et par $\text{Diag}(P^{-1}, P^{-1})$ les inégalités (3.104) et (3.105) et en posant $S = P^{-1}, R = KS$, nous obtenons les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} AS + SA^T + B_2R + R^T B_2^T + 2\alpha S &< 0 \\ \begin{bmatrix} -rS & SA^T + R^T B_2^T \\ AS + B_2R & -rS \end{bmatrix} &< 0 \\ \begin{bmatrix} M_1(S, R) & M_2(S, R) \\ M_2^T(S, R) & M_3(S, R) \end{bmatrix} &< 0 \end{aligned} \quad (3.106)$$

Avec :

$$\begin{cases} M_1(S, R) = \sin \theta (AS + SA^T + B_2R + R^T B_2^T) \\ M_2(S, R) = \cos \theta (AS - SA^T + B_2R - R^T B_2^T) \\ M_3(S, R) = \sin \theta (AS + SA^T + B_2R + R^T B_2^T) \end{cases} \quad (3.107)$$

La résolution du système des LMIs (3.106) en $S = S^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et en $R \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$ permet d'en déduire le gain de retour d'état par $K = RS^{-1}$.

3.8.3 Commande par retour de sortie dynamique

Nous présentons ici un résultat dans le cas de la commande par retour de sortie dynamique d'un système certain. La stabilisation du système (3.44) par (3.45) conduit aux équations en boucle fermée (3.46) avec des pôles du système en boucle fermée situés dans la région $R(\alpha, r, \theta)$ si et seulement s'il existe deux matrices symétriques définies positives $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, et des matrices $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$ et $F \in \mathbb{R}^{n \times p_2}$ solutions des inégalités matricielles suivantes :

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} H(Y, L) + 2\alpha Y & Z + M + 2\alpha I \\ Z^T + M^T + 2\alpha I & G(X, F) + 2\alpha X \end{bmatrix} < 0 \\ &\begin{bmatrix} Y & I \\ I & X \end{bmatrix} > 0 \\ &\begin{bmatrix} -rY & -rI & YA^T + L^T B_2^T & Z + M - A \\ -rI & -rX & A^T & A^T X + C_2^T F^T \\ AY + B_2L & A & -rY & -rI \\ Z^T + M^T - A^T & XA + FC_2 & -rI & -rX \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (3.108)$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)H(Y, L) & \sin(\theta)(Z + M) & \cos(\theta)\hat{H}(Y, L) & \cos(\theta)(2A - Z - M) \\ \sin(\theta)(Z^T + M^T) & \sin(\theta)G(X, F) & \cos(\theta)(-2A^T + Z^T + M^T) & \cos(\theta)\hat{G}(X, F) \\ \cos(\theta)\hat{H}^T(Y, L) & \cos(\theta)(-2A + Z + M) & \sin(\theta)H(Y, L) & \sin(\theta)(Z + M) \\ \cos(\theta)(2A^T - Z^T - M^T) & \cos(\theta)\hat{G}^T(X, F) & \sin(\theta)(Z^T + M^T) & \sin(\theta)G(X, F) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.109)$$

Avec :

$$\begin{cases} H = AY + YA^T + B_2L + L^TB_2^T & \hat{H} = AY - YA + B_2L + L^TB_2^T \\ G = A^TX + XA + FC_2 + C_2^TF^T & \hat{G} = A^TX - XA - FC_2 + C_2^TF^T \\ Z = A + YA^TX + YC_2^TF^T + L^TB_2^TX \end{cases} \quad (3.110)$$

L'idée de la démonstration consiste à montrer pour que le système en boucle fermée soit asymptotiquement stable avec des pôles situés dans la région $R(\alpha, r, \theta)$, il faut et il suffit qu'il existe une matrice symétrique P définie positive $\in \Re^{2n \times 2n}$ telle que :

$$PA_{bf} + A_{bf}^TP + 2\alpha P < 0$$

$$\begin{bmatrix} -rP & A_{bf}^TP \\ PA_{bf} & -rP \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(PA_{bf} + A_{bf}^TP) & \cos(\theta)(PA_{bf} - A_{bf}^TP) \\ \cos(\theta)(A_{bf}^TP - PA_{bf}) & \sin(\theta)(PA_{bf} + A_{bf}^TP) \end{bmatrix} < 0$$

où A_{bf} représente la matrice d'état en boucle fermée donnée par (3.46). On pose $P = \begin{bmatrix} X & U \\ U^T & \hat{X} \end{bmatrix}$,

$P^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V \\ V^T & \hat{Y} \end{bmatrix}$ et $T = \begin{bmatrix} Y & I \\ V^T & 0 \end{bmatrix}$. Le pré et le post multiplication de la première inégalité ci-dessus par T^T et T respectivement, la deuxième et la troisième inégalité ci-dessus par $\text{Diag}(T^T, T^T)$ et $\text{Diag}(T, T)$ et la prise en compte des expressions (3.110) permettent d'établir les inégalités (3.107). Pour les détails de la démonstration, voir [36],[31].

3.8.4 Extension au cas des systèmes incertains et récapitulation des résultats

Reprenons le problème de la synthèse $\mathcal{H}_\infty$ standard. Comme pour la synthèse $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ où des extensions ont été possibles du cas des systèmes certains aux systèmes incertains, là aussi il est possible de procéder par extension pour établir la commande par placement des pôles en prenant soin de chercher les solutions pour les sommets du polytope.

Récapitulation des résultats

Dans cette présentation consacrée à un rappel de quelques résultats sur la synthèse $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$, nous avons tenu à mettre en évidence l'apport de l'approche LMI dans la résolution des problèmes de commande. En précisant la classe des systèmes LTI certains et incertains -type polytopique-, nous avons rappelé les conditions de stabilisation par retour d'état et par retour de sortie dynamique pour ces deux classes de systèmes. De même, nous avons rappelé

quelques résultats pour la synthèse de retour d'état et de sortie dynamique pour une toute une famille de systèmes.

Les domaines d'incertitude considérés ici portent sur tous les couples de matrices A_i, B_{2i} avec $i=1, \dots, n_{a_i}$ et $j=1, \dots, n_{b_j}$. Que ce soit pour le retour d'état ou le retour de sortie dynamique, nous avons rappelé des conditions nécessaires et suffisantes de synthèse exprimées en termes des inégalités matricielles. Lorsque ces inégalités matricielles ne sont plus linéaires, mais bilinéaires, on peut utiliser des algorithmes itératifs (ILMI) disponibles à cet effet.

3.9 Sur la commande mixte $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$ des systèmes certains et extension aux systèmes incertains

Les théories de la synthèse $\mathcal{H}_2$ et de la synthèse $\mathcal{H}_\infty$ sont théoriquement et séparément bien établies. La confrontation de ces théories très ficelées mais en partie fermées a conduit à faire deux constats complémentaires. D'une part, il est bien connu depuis les travaux présentés de Doyle sur la commande LQG que celle-ci peut présenter des marges de robustesse vis-à-vis d'incertitudes paramétriques, dramatiquement et arbitrairement faibles. D'autre part, les nombreuses applications récentes des compensateurs $\mathcal{H}_2$ à des problèmes pratiques ont également montré qu'il est relativement difficile d'obtenir avec ce type de correcteurs un niveau satisfaisant de performances mesurées par exemple par la norme $\mathcal{H}_2$. Cela provient en partie du fait que la synthèse $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$ est essentiellement fondée sur l'analyse de la performance dans le pire des cas alors que la norme $\mathcal{H}_2$ reflète une performance moyenne.

Face à ces deux constats, l'idée d'associer ces deux types de performance a donné lieu à la naissance de la commande mixte $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$ dont le schéma standard est représenté figure 3.6.

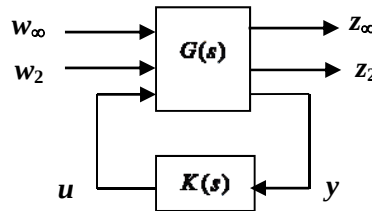


Figure 3.6 : Schéma général du problème $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$

Les deux paragraphes suivants traitent le problème de la commande mixte pour les systèmes à temps continu par retour d'état et ensuite par retour de sortie dynamique, garantissant certaines performances sur la norme $\mathcal{H}_\infty$ et la norme $\mathcal{H}_2$ de deux transferts différents.

Nous considérons que le système $G(s)$ est décrit par les équations ci-dessous où $x(t)$, $u(t)$, $w(t)$ représentent respectivement les vecteurs d'état, de commande, des entrées exogènes. $z_\infty(t) \in \mathbb{R}^{p_1-r}$, $z_2(t) \in \mathbb{R}^r$ sont les vecteurs de sorties contrôlées, et $y(t) \in \mathbb{R}^{p_2}$ les sorties mesurées.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\
 z_\infty(t) &= C_{1_\infty} x(t) + D_{12_\infty} u(t) \\
 z_2(t) &= C_{12} x(t) + D_{122} u(t) \\
 y(t) &= C_2 x(t) + D_{21} w(t),
 \end{aligned} \tag{3.111}$$

Le problème multicritère consiste à synthétiser une loi de commande qui :

- Stabilise le système en boucle fermée.
- Vérifie que $\|T_{z_\infty w}(s)\|_\infty < \gamma$
- Vérifie que $\|T_{z_2 w}(z)\|_2 < \mu$

3.9.1 Formulation du problème de la commande mixte par retour d'état statique

Dans ce cas, le vecteur d'état est complètement accessible, soit $y(t) = x(t)$. En combinant les résultats des paragraphes §3.4.3.2 et § 3.4.5 consacrés respectivement à la synthèse $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ par retour d'état $u(t) = Kx(t)$, le problème de la commande mixte se ramène à la recherche d'une fonction de Lyapunov unique S qui vérifie les conditions (3.60) et (3.65), soit :

$$\begin{aligned} & \text{Trace}(W) < \mu \\ & \begin{bmatrix} W & C_1 S + D_{12} R \\ (C_1 S + D_{12} R)^T & S \end{bmatrix} > 0 \\ & \begin{bmatrix} AS + SA^T + B_2 R + R^T B_2^T & B_1 \\ B_1^T & -I \end{bmatrix} < 0 \\ & \begin{bmatrix} AS + SA^T + B_2 R + R^T B_2^T & B_1 & SC_1^T + R^T D_{12}^T \\ B_1^T & -\gamma I & 0 \\ C_1 S + D_{12} R & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (3.112)$$

Le gain de retour d'état stabilisant étant alors donné par $K = RS^{-1}$.

3.9.2 Formulation du problème de la commande mixte par retour de sortie dynamique

Le but de la commande mixte est de minimiser la norme $\mathcal{H}_2$ du transfert $T_{z_2 w}$ sous la contrainte $\|T_{z_\infty w}\|_\infty < \gamma$ où $\gamma > 0$ étant fixé a priori.

Cela grâce à un retour de sortie dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t) \\ u(t) = C_c x_c(t) \end{cases}$$

Nous avons les équations en boucle fermée suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{X}_e(t) &= A_e X_e(t) + B_e w(t) \triangleq \begin{bmatrix} A & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix} X_e(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_c D_{21} \end{bmatrix} w(t) \\ z_\infty(t) &= C_{e\infty} X_e(t) \triangleq [C_{1\infty} \quad D_{12\infty} C_c] X_e(t) \\ z_2(t) &= C_{e2} X_e(t) \triangleq [C_{12} \quad D_{122} C_c] X_e(t) \end{aligned} \quad (3.113)$$

Nous obtenons les deux fonctions de transfert :

$$T_{z_\infty w}(s) = C_{e\infty} (sI - A_e)^{-1} B_e, \quad T_{z_2 w}(z) = C_{e2} (sI - A_e)^{-1} B_e$$

C'est la même idée appliquée dans le paragraphe précédent peut être étendue ici pour déterminer les conditions d'existence d'un compensateur par retour de sortie dynamique. En

effet, en se basant sur les conditions (3.6.2) et (3.6.9), le problème posé de la commande mixte par l'approche LMI se formule par :

S'il existe deux matrices symétriques définies positives $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et les matrices $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$ et $F \in \mathbb{R}^{n \times p_2}$ solutions des inégalités matricielles bilinéaires suivantes dans lesquelles

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} Y & I & B_1 \\ I & X & XB_1 + FD_{21} \\ B_1^T & (XB_1 + FD_{21})^T & W \end{bmatrix} > 0 \\ & \begin{bmatrix} AY + YA^T + B_2L + L^TB_2^T & Z + M & YC_{12}^T + L^TD_{122}^T \\ Z^T + M^T & A^TX + XA + FC_2 + C_2^TF^T & C_{12}^T \\ (YC_{12}^T + L^TD_{122}^T)^T & C_{12} & -I \end{bmatrix} < 0 \\ & \begin{bmatrix} AY + YA^T + B_2L + L^TB_2^T & Z + M & B_1 & YC_{12}^T + L^TD_{122}^T \\ Z^T + M^T & A^TX + XA + FC_2 + C_2^TF^T & XB_1 + FD_{21} & C_{12}^T \\ B_1^T & B_1^TX + D_{21}^TF^T & -\gamma I & 0 \\ C_{12}Y + D_{122}L & C_{12} & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (3.114)$$

Enfin dans le cas des systèmes incertains avec des incertitudes de type polytopiques convexe dont le domaine d'incertitudes est défini par (3.75-3.76), il est possible de faire l'extension des résultats présentés pour le cas sans incertitudes. Pour ce faire il suffit de vérifier les conditions établies pour le cas sans incertitudes à tous les sommets du polytope définissant le domaine des incertitudes.

3.10 Commande des systèmes décentralisés

3.10.1 Position générale du problème

Dans la théorie de la commande des systèmes multivariables, se situe deux types de structure de contrôle :

- La structure de contrôle centralisée (appelé aussi multivariable),
- La structure de contrôle décentralisée.

La commande centralisée multivariable consiste à utiliser un seul contrôleur centralisé multivariable à p entrées et m sorties pour commander un procédé dans son intégralité ayant m entrées et p sorties.

Le contrôleur centralisé reçoit l'information globale concernant le procédé et tous les calculs effectués pour la commande du procédé se basent sur cette information globale. En conséquence, le contrôle centralisé tient compte de toutes les interactions ou couplages présents entre les différents sous-systèmes composant le procédé. Cette structure permet d'obtenir des performances intéressantes. Cependant la commande centralisée présente des inconvénients notables rendant son implantation aussi bien complexe que coûteuse :

- le volume des calculs augmente vite avec la taille du procédé,
- le manque d'intégrité (la structure de commande est formée d'un bloc unique, une panne d'un capteur ou d'actionneur peut conduire à une panne totale de la commande),
- la difficulté de maintenance
- la grande demande en personnel qualifié,
- pas d'évolution (concernant l'éventuel ajout ou suppression de boucle de commande).

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté une modélisation des systèmes de grande dimension pour lesquels la commande décentralisée est fortement préconisée. Dans ce paragraphe nous essaierons d'apporter un certain éclairage sur la synthèse des régulateurs décentralisés utilisant le formalisme des LMIs. Cette contribution reste néanmoins modeste car il s'agit d'un sujet extrêmement vaste et diversifié.

Dans le contexte des systèmes décentralisés continus et certains, nous définissons quatre types de problème qui ont sollicité le plus grand intérêt des Automaticiens. Nous verrons par la suite que ces problèmes demeurent très ouverts. Motivés par le succès qu'a connu la commande $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$ dans le cas centralisé, les Automaticiens ont tout naturellement accordé un grand intérêt à l'application de ces techniques aux systèmes décentralisés. C'est dans ce créneau, que nous situons également notre contribution.

Considérons d'abord la classe des systèmes augmentés pouvant être modélisés par les équations (3.115) suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + \sum_{i=1}^N B_{2i} u_i \\ z = C_1 x + D_{11} w + \sum_{i=1}^N D_{12i} u_i \\ y_i = C_{2i} x + D_{21i} w + \sum_{i=1}^N D_{22i} u_i \quad i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (3.115)$$

Dans lesquelles $u_i \in \mathbb{R}^{m_{2i}}$ et $y_i \in \mathbb{R}^{p_{2i}}$ sont respectivement les signaux de commande et de mesure ($i = 1, \dots, N$). z regroupe les variables à contrôler. $A, B_1, B_{2i}, C_1, C_{2i}, D_{12i}, D_{21i}$ et D_{22i} sont des matrices de dimensions appropriées, avec : $m_2 = \sum_{i=1}^N m_{2i}$, $p_2 = \sum_{i=1}^N p_{2i}$ et :

$$D_{12} = [D_{121} \quad \dots \quad D_{12N}], \quad D_{21}^T = [D_{211}^T \quad \dots \quad D_{21N}^T], \quad D_{22} = [D_{221} \quad \dots \quad D_{22N}]$$

Dans le domaine de Laplace, le transfert du système augmenté s'écrit :

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = G(s) \begin{bmatrix} w \\ u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = G(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

Sans perte de généralité, il est d'usage de supposer que D_{22} . Le système augmenté (3.115) peut s'écrire de manière compacte sous la forme :

$$G(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c|c} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ \hline C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right] \triangleq \left[\begin{array}{c|c|c} A & B_1 & B_{21} \quad \dots \quad B_{2N} \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{121} \quad \dots \quad D_{12N} \\ \hline C_{211} & D_{211} & \\ \vdots & \vdots & 0 \\ C_{21N} & D_{21N} & \end{array} \right] \quad (3.117)$$

La commande décentralisée consiste à utiliser plusieurs contrôleurs locaux, à la place d'un seul contrôleur pour commander le procédé multivariable (3.117). Le schéma de principe de la commande décentralisée est donné à la figure 3.7 ci-dessous :

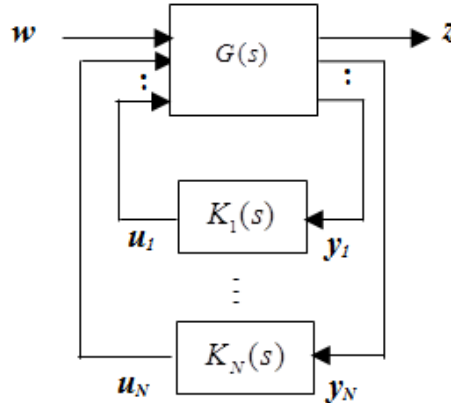


Figure 3.7 : Structure 1 de la commande décentralisée

La matrice des fonctions de transfert de l'ensemble des contrôleurs est diagonale par blocs où les $K_i(s)$ représentent les fonctions de transfert des contrôleurs locaux.

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2(s) & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K_N(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, \quad (3.118)$$

Pour le système (3.117), nous considérons N contrôleurs à retour de sortie dynamique :

$$K_i(s) \begin{cases} \hat{x}_i(t) = \hat{A}_i \hat{x}_i(t) + \hat{B}_i y_i(t) \\ u_i(t) = \hat{C}_i \hat{x}_i(t) + \hat{D}_i y_i(t) \end{cases} \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_i & \hat{B}_i \\ \hline \hat{C}_i & \hat{D}_i \end{array} \right] \quad (3.119)$$

Avec $\hat{A}_i \in \mathbb{R}^{\hat{n}_i \times \hat{n}_i}$, $\hat{B}_i \in \mathbb{R}^{\hat{n}_i \times m_i}$, $\hat{C}_i \in \mathbb{R}^{p_i \times \hat{n}_i}$, $\hat{D}_i \in \mathbb{R}^{p_i \times m_i}$. Sans perdre de généralité, nous admettons que les contrôleurs sont strictement propres, i.e., $\hat{D}_i = 0$. Cette hypothèse sera précisée dans le développement algébrique qui suit chaque fois qu'il est commode de la retenir.

Dans le cas particulier où $\hat{A}_i = \hat{B}_i = \hat{D}_i = 0$, la loi de commande par retour de sortie dynamique se ramène à la commande par retour d'état statique $u_i(t) = F_i x_i(t)$. Ce cas ne présente pas d'intérêt pratique car il est rare que tous les états sont accessibles et à fortiori pour les systèmes de grande dimension. Il ne sera pas abordé dans la suite.

En notant $T_{zw}(s) = F_i(G, K)$ la fonction de transfert en boucle fermée, le premier problème de la commande décentralisée est défini par :

P1: Commande décentralisée de type $\mathcal{H}_\infty$:

Le problème de la commande décentralisée sous-optimale de type $\mathcal{H}_\infty$ consiste à calculer N contrôleurs (3.119) stabilisant le système (3.117) et que la fonction de transfert en boucle fermée vérifie $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$, où $\gamma > 0$, est un paramètre prédéfini.

Dans le cadre de la synthèse décentralisée de type $\mathcal{H}_2$, nous définissons le problème à résoudre comme suit :

P2: Commande décentralisée de type $\mathcal{H}_2$:

Le problème de la commande décentralisée optimale de type $\mathcal{H}_2$ consiste à calculer N contrôleurs (3.119) stabilisant le système (3.117) et que la norme $\mathcal{H}_2$ de la fonction de transfert en boucle fermée $T_{zw}(s)$ soit minimale.

D'autres problèmes sont à définir. En effet, considérons à présent la classe des systèmes composites que nous pouvons modéliser par :

$$S_i \begin{cases} \dot{x}_i = A_{ii}x_i + B_{ii}w_i + B_{2i}u_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N A_{ij}x_j \\ z_i = C_{1i}x_i + D_{11i}w_i + D_{12i}u_i \\ y_i = C_{2i}x_i + D_{21i}w_i \end{cases} \quad i=1, \dots, N. \quad (3.120)$$

et que nous cherchons à commander par N contrôleurs à retour de sortie dynamique (3.119). Le procédé à contrôler est décomposé en N sous-systèmes (plus simples). Chaque contrôleur utilise l'information y_i et génère la commande u_i sans aucun échange d'informations avec les autres contrôleurs.

L'ensemble des sous-systèmes S_i peut être compacté pour conduire à la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = (A_D + A_C)x + B_{1D}w + B_{2D}u \\ z = C_{1D}x + D_{11D}w + D_{12D}u \\ y = C_{2D}x + D_{21D}w \end{cases} \quad (3.121)$$

où :

$$y^T = [y_1^T \quad \dots \quad y_N^T]^T \quad w^T = [w_1^T \quad \dots \quad w_N^T]^T \quad u^T = [u_1^T \quad \dots \quad u_N^T]^T$$

$$\begin{aligned} A_D &= \text{Diag}(A_{11}, \dots, A_{NN}) & B_{1D} &= \text{Diag}(B_{11}, \dots, B_{1N}) & B_{2D} &= \text{Diag}(B_{21}, \dots, B_{2N}) \\ C_{1D} &= \text{Diag}(C_{11}, \dots, C_{1N}) & D_{11D} &= \text{Diag}(D_{111}, \dots, D_{11N}) & D_{12D} &= \text{Diag}(D_{121}, \dots, D_{12N}) \\ C_{2D} &= \text{Diag}(C_{21}, \dots, C_{2N}) & D_{21D} &= \text{Diag}(D_{211}, \dots, D_{21N}) & A_C &= [A_{cij}]_{N \times N}, \quad A_{cij} = \begin{bmatrix} A_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.122)$$

Le problème de la commande des systèmes composites par la loi de commande décentralisée est défini par :

P3: Commande décentralisée de type $\mathcal{H}_\infty$ des systèmes composites:

Le problème de la commande décentralisée sous-optimale de type $\mathcal{H}_\infty$ consiste à calculer N contrôleurs (3.119) stabilisant le système composite (3.121) et que la fonction de transfert en boucle fermée vérifie $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$, où $\gamma > 0$, est un paramètre prédéfini.

Enfin, le problème P4 ci-dessous est relatif à la commande $\mathcal{H}_2$ décentralisée des systèmes composites.

P4: Commande décentralisée de type $\mathcal{H}_2$ des systèmes composites:

Le problème de la commande décentralisée optimale de type $\mathcal{H}_2$ consiste à calculer N contrôleurs (3.119) stabilisant le système (3.119) et que la norme $\mathcal{H}_2$ de la fonction de transfert en boucle fermée $T_{zw}(s)$ soit minimale.

Pour l'ensemble de ces problèmes, nous donnons dans les paragraphes suivants quelques méthodes proposées dans la littérature pour leur résolution ainsi que notre contribution sur ce sujet. Celles-ci sont principalement fondées sur l'utilisation des LMIs.

3.10.2 Extension de la synthèse $\mathcal{H}_\infty$ centralisée au cas décentralisé

Commençons par établir les équations du système en boucle fermée en considérant le système (3.117) stabilisés par les contrôleurs (3.119).

$$\begin{cases} \dot{x}_{bf}(t) = A_{bf}x_{bf}(t) + B_{bf}w(t) \\ z(t) = C_{bf}x_{bf}(t) + D_{bf}w(t) \end{cases} \quad x_{bf} := \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}; \quad \hat{x} := \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_N \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{\hat{n}}; \quad \hat{n} = \sum_{i=1}^N \hat{n}_i$$

$$A_{bf} = \begin{bmatrix} A + \sum_{i=1}^N B_{2i} \hat{D}_i C_{21i} & \sum_{i=1}^N B_{2i} \hat{C}_i \\ \hat{B}_i C_{2i} & \hat{A}_i \end{bmatrix} \quad B_{bf} = \begin{bmatrix} B_1 + \sum_{i=1}^N B_{2i} \hat{D}_i D_{21i} \\ \hat{B}_i D_{21i} \end{bmatrix} \quad (3.123)$$

$$C_{bf} = \begin{bmatrix} C_1 + \sum_{i=1}^N D_{12i} \hat{D}_i C_{2i} & \sum_{i=1}^N D_{12i} \hat{C}_i \end{bmatrix} \quad D_{bf} = D_{11} + \sum_{i=1}^N D_{12i} \hat{D}_i D_{21i}$$

Ce système peut s'écrire de la manière équivalente suivante en réorganisant les matrices $A_{bf}, B_{bf}, C_{bf}, D_{bf}$ sous la forme:

$$\begin{aligned} A_{bf} &= \begin{bmatrix} A + B_2 \hat{D}_D C_2 & B_2 \hat{C}_D \\ \hat{B}_D C_2 & \hat{A}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0_{n \times n_c} \\ 0_{n_c \times n} & 0_{n_c \times n_c} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n \times n_c} & B_2 \\ I_{n_c} & 0_{n_c \times m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_D & \hat{B}_D \\ \hat{C}_D & \hat{D}_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{n_c \times n} & I_{n_c \times n_c} \\ C_2 & 0_{p_2 \times n_c} \end{bmatrix} \triangleq \hat{A} + \hat{B}_2 \hat{K} \hat{C}_2 \\ B_{bf} &= \begin{bmatrix} B_1 + B_2 \hat{D}_D D_{21} \\ \hat{B}_D D_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{n \times m_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n \times n_c} & B_2 \\ I_{n_c} & 0_{n_c \times m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_D & \hat{B}_D \\ \hat{C}_D & \hat{D}_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{n_c \times m_1} \\ D_{21} \end{bmatrix} \triangleq \hat{B}_1 + \hat{B}_2 \hat{K} \hat{D}_{21} \\ C_{bf} &= \begin{bmatrix} C_1 + D_{12} \hat{D}_D C_2 & D_{12} \hat{C}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0_{p_1 \times n_c} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{p_1 \times n_c} & D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_D & \hat{B}_D \\ \hat{C}_D & \hat{D}_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{n_c \times n} & I_{n_c \times n_c} \\ C_2 & 0_{p_2 \times n_c} \end{bmatrix} \triangleq \hat{C}_1 + \hat{D}_{12} \hat{K} \hat{C}_2 \\ D_{bf} &= D_{11} + D_{12} \hat{D}_D D_{21} = D_{11} + \begin{bmatrix} 0_{p_1 \times n_c} & D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_D & \hat{B}_D \\ \hat{C}_D & \hat{D}_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{n_c \times m_1} \\ D_{21} \end{bmatrix} \triangleq D_{11} + \hat{D}_{12} \hat{K} \hat{D}_{21} \end{aligned} \quad (4.124)$$

Les matrices définissant les contrôleurs (3.119) sont regroupés dans une seule matrice $\hat{K}$ dans laquelle, on a posé :

$$\begin{aligned} \hat{A}_D &= \text{Diag}(\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_N) & \hat{B}_D &= \text{Diag}(\hat{B}_1, \dots, \hat{B}_N) \\ \hat{C}_D &= \text{Diag}(\hat{C}_1, \dots, \hat{C}_N) & \hat{D}_D &= \text{Diag}(\hat{D}_1, \dots, \hat{D}_N) \end{aligned} \quad (3.125)$$

D'après cette dernière représentation de l'équation du système en boucle fermée, nous notons, comme pour le cas centralisé, que la commande par retour de sortie dynamique peut être

ramenée à un problème de retour de sortie statique $u = \hat{K}y$ d'un système fictif défini par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = \hat{A}x + \hat{B}_1 w + \hat{B}_2 u \\ z = \hat{C}_1 x + D_{11} w + \hat{D}_{12} u \\ y = \hat{C}_2 x + \hat{D}_{21} w \end{cases} \quad (3.126)$$

Nous savons que la résolution de ce type de problème n'est pas triviale. A cette difficulté, s'ajoute le fait que la matrice $\hat{K}$ se caractérise par sa structure bien particulière. Dans ce cas, le problème se ramène à calculer un gain statique, diagonal par blocs $F_D = \text{Diag}(F_1, \dots, F_N)$, tel que la loi de commande $u = F_D y$ stabilise le système (3.126). Nous mentionnons les références [25], [18] qui traitent le problème de la stabilisation des systèmes composites et la synthèse des régulateurs décentralisés par retour de sortie statique.

Revenons à présent au problème P1 et rappelons que d'après le lemme LBR, le système en boucle fermée (3.123) est stable et que la fonction de transfert en boucle fermée vérifie la condition sur la norme $\|T_{zw}\|_\infty = \|D_{cl} + C_{cl}(sI - A_{cl})B_{cl}\|_\infty < \gamma$, si et seulement si, les inégalités matricielles suivantes sont satisfaites :

$$\begin{bmatrix} A_{bf}^T P_{bf} + P_{bf} A_{bf} & P_{bf} B_{bf} & C_{bf}^T \\ B_{bf}^T P_{bf} & -\gamma I & D_{bf}^T \\ C_{bf} & D_{bf} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.127)$$

$$P_{bf} = P_{bf}^T > 0$$

A ce stade du calcul, il est tout à fait possible de s'inspirer des calculs effectués dans le cadre des systèmes centralisés et énoncer l'extension suivante : le système (3.117) est stabilisable par N contrôleurs décentralisés (3.119) et la fonction de transfert en boucle fermée satisfait $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$, si et seulement si, il existe une matrice $P_{bf} = P_{bf}^T > 0$ et une matrice $\hat{K}$ vérifiant la contrainte matricielle suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{A}^T P_{bf} + P_{bf} \hat{A} & P_{bf} \hat{B}_w & \hat{C}_1^T \\ \hat{B}_1^T P_{bf} & -\gamma I & D_{11}^T \\ \hat{C}_1 & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix}}_{\Psi} + \underbrace{\begin{bmatrix} P_{bf} \hat{B}_2 \\ 0 \\ \hat{D}_{12} \end{bmatrix}}_{P^T} \hat{K} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} & 0 \end{bmatrix}}_Q + \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{C}_2^T \\ \hat{D}_{21}^T \\ 0 \end{bmatrix}}_{Q^T} \hat{K}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{B}_2^T P_{bf} & 0 & \hat{D}_{12}^T \end{bmatrix}}_P < 0 \quad (3.128)$$

Notons que l'inégalité ci-dessous est bilinéaire et donc le problème à résoudre est non convexe. Compte tenu de la similitude entre ce problème et celui rencontré dans le cas centralisé (§3.4.6), nous pouvons suivre la même démarche que nous résumons en quelques lignes :

- **Etape 1** : Appliquer la règle d'élimination à l'inégalité (3.128) pour éliminer $\hat{K}$. Cela conduit à deux inégalités couplées.
- **Etape 2** : Résoudre les deux inégalités augmentées par une contrainte d'ordre.
- **Etape 3** : Reconstruire P_{bf} à partir de la solution trouvée dans l'étape précédente.
- **Etape 4** : P_{bf} étant reconstruite, résoudre (3.128) en $\hat{K}$. ■

Nous soulignons les deux principales difficultés qu'on peut rencontrer dans cet algorithme :

- La contrainte d'ordre vient du fait que nous cherchons un ordre réduit pour les régulateurs ($\hat{n} = \sum_{i=1}^N \hat{n}_i < n$), ce qui accentue la non convexité du problème. Si cette contrainte est relaxée, la difficulté est partiellement atténuée.
- Dans l'étape 4, la contrainte structurelle sur $\hat{K}$, peut réduire le domaine d'admissibilité. C'est le problème du conservatisme.

A la lumière de ces précisions, nous notons par conséquent que la synthèse décentralisée accroît notablement la difficulté que nous pouvons rencontrer dans le cas de la synthèse centralisée. A ce jour, nous estimons que ce problème reste encore ouvert.

3.10.3 Synthèse $\mathcal{H}_\infty$ de la commande décentralisée par la méthode de l'homotopie

En début du paragraphe §3.10, nous avons souligné la difficulté de résoudre le problème P1. Nous présentons dans la suite, la méthode de l'homotopie qui fait partie des méthodes heuristiques ayant contribué dans la résolution de ce type de problème. Le premier fondement de cette méthode est probablement dû à Ikeda et al. [84],[149], [30],[148],[83]. Voir aussi [105],[29], [147] ainsi que le paragraphe §1.2.9.2-d du chapitre 1 pour une meilleure maîtrise de cet outil.

Ecrivons l'inégalité (3.128) de manière à faire apparaître les variables de décision :

$$F(P_{bf}, \hat{K}) < 0, \quad (3.129)$$

qui est bilinéaire en P_{bf} et $\hat{K}$ à cause de la présence du terme $P_{bf} \hat{B}_2 \hat{K} \begin{bmatrix} \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} & 0 \end{bmatrix}$.

Elle peut être aperçue comme une simple LMI si l'une de ces deux variables est fixée. Donc, la première idée consiste à résoudre itérativement les deux inégalités. Malheureusement cette méthode que nous avons déjà rencontrée et baptisée ILMI souffre de plusieurs problèmes, principalement la non convergence même si la BMI initiale est faisable.

Le point de départ de la méthode de l'homotopie est de considérer le problème (3.129) comme une famille de problèmes paramétrée en fonction d'un paramètre λ :

$$F(P_{bf}, \hat{K}, \lambda) = F(P_{bf}, (1-\lambda)\hat{K}_0 + \lambda\hat{K}) < 0, \quad (3.130)$$

où :

$$\hat{K}_0 = \begin{bmatrix} \hat{A}_0 & \hat{B}_0 \\ \hat{C}_0 & \hat{D}_0 \end{bmatrix}, \quad (3.131)$$

est une matrice qui regroupe les matrices d'un contrôleur centralisé de dimension $\hat{n}$ et λ est un paramètre appartenant à l'intervalle $[0,1]$. Le terme $(1-\lambda)\hat{K}_0 + \lambda\hat{K}$ dans (3.130) définit une interpolation entre le correcteur centralisé $\hat{K}_0$, calculé par une méthode de synthèse standard, et le correcteur décentralisé désiré $\hat{K}$. A titre d'exemple

$$F(P_{bf}, \hat{K}, \lambda) = \begin{cases} F(P_{bf}, \hat{K}_0) & \text{si } \lambda = 0 \\ F(P_{bf}, \hat{K}) & \text{si } \lambda = 1 \end{cases} \quad (3.132)$$

Le problème de la recherche d'une solution pour (3.129) est donc inclus dans la famille des problèmes suivant lorsque λ parcourt l'intervalle $[0,1]$:

$$F(P_{bf}, \hat{K}, \lambda) < 0, \quad \lambda \in [0,1]$$

L'idée de l'algorithme est de faire varier progressivement λ de 0 à 1. Le détail de cet algorithme est fourni dans §1.2.9.2-d du chapitre 1. Le but recherché est bien sûr le calcul de

$\hat{K}$ et de préférence de dimension $\hat{n} = \sum_{i=1}^N \hat{n}_i < n$. Cependant, il n'est pas facile de calculer un correcteur $\mathcal{H}_\infty$ centralisé dans le cas où $\hat{n} < n$ (synthèse d'un correcteur d'ordre réduit fixe). Toutefois, il est possible de calculer un régulateur $\mathcal{H}_\infty$ décentralisé de dimension $\hat{n} < n$ en utilisant un régulateur $\mathcal{H}_\infty$ centralisé d'ordre n qui, quant à lui, plus facile à calculer.

En effet, en augmentant artificiellement la matrice $\hat{K}$ comme suit :

$$\hat{K}_D^a = \left[\begin{array}{cc|c} \hat{A}_D & 0_{\hat{n} \times l} & \hat{B}_D \\ * & -I_{l \times l} & ** \\ \hline \hat{C}_D & 0_{m_2 \times l} & \hat{D}_D \end{array} \right] \quad (3.133)$$

où $l = n - \hat{n}$ et les notations $*$, $**$, désignent des sous-matrices quelconques qui peuvent être prises éventuellement nulles. Notons que le correcteur défini par $\hat{K}_D^a$ dans (3.133) est équivalent à $\hat{K}_D$ si nous extrayons leurs parties observables et/ou commandables.

De la même façon que dans (3.130), nous considérons une fonction matricielle :

$$F^a(P_{bf}, \hat{K}_D^a, \lambda) = F^a(P_{bf}, (1-\lambda)\hat{K}_0^a + \lambda\hat{K}_D^a) < 0, \quad (3.134)$$

où F^a est définie comme F donné par (3.128) avec les matrices définies par (3.122) et (3.124) et où $\hat{n}$ étant remplacé par n . Après cela, on pourra appliquer l'algorithme de la section précédente en utilisant $\hat{K}_0^a$ pour un correcteur centralisé $\mathcal{H}_\infty$ standard.

Remarques :

- Dans l'algorithme initial (sans augmentation), il est recommandé d'initialiser $\hat{K}$ par 0. On peut faire de même pour $\hat{K}_D^a$ à l'exception du bloc $I_{l \times l}$
- Le bloc $-I_{l \times l}$ dans (3.133) peut être remplacé par toute matrice stable de même dimension. ■

3.10.4 Synthèse $\mathcal{H}_\infty$ de la commande décentralisée par la méthode de l'homotopie pour les systèmes composites- Méthode 1

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la présentation de la technique de l'homotopie pour calculer une commande décentralisée stabilisant les systèmes composites. Compte tenu

de la similitude entre ce problème et celui présenté dans le paragraphe précédent, nous nous contenterons de donner l'essentiel du résultat.

Rappelons qu'il s'agit ici de résoudre le problème formulé par P3, c'est-à-dire la recherche de N contrôleurs (3.119) stabilisant le système composite (3.121) et que la fonction de transfert en boucle fermée vérifie $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$, où $\gamma > 0$, est un paramètre prédéfini. Pour ce faire, commençons par calculer la fonction de transfert en boucle fermée locale obtenue à partir des équations (3.119) et (3.121):

$$\begin{cases} \tilde{x}_i(t) = \begin{bmatrix} A_{ii} + B_{2i}\hat{D}_iC_{2i} & B_{2i}\hat{D}_iC_{21i} \\ \hat{B}_iC_{2i} & \hat{A}_i \end{bmatrix} \tilde{x}_i(t) + \begin{bmatrix} B_{1i} + B_{2i}\hat{D}_iD_{21i} \\ \hat{B}_iD_{21i} \end{bmatrix} w_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \begin{bmatrix} A_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}_j(t) \\ z_i(t) = \begin{bmatrix} C_{1i} + D_{12i}\hat{D}_iC_{2i} & D_{12i}\hat{C}_i \end{bmatrix} \tilde{x}_i(t) + \begin{bmatrix} D_{11i} + D_{12i}\hat{D}_iD_{21i} \end{bmatrix} w_i(t) \end{cases} \quad i=1, \dots, N \quad (3.135)$$

$$\tilde{x}_i := \begin{bmatrix} x_i \\ \hat{x}_i \end{bmatrix}$$

Ces relations peuvent s'écrire de manière compacte sous la forme :

$$\begin{cases} \tilde{x}_i(t) = (\tilde{A}_{ii} + \tilde{B}_{2i}G_i\tilde{C}_{2i})\tilde{x}_i(t) + (\tilde{B}_{1i} + \tilde{B}_{2i}G_i\tilde{D}_{21i})w_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \tilde{A}_{ij}\tilde{x}_j(t) \\ z_i(t) = (\tilde{C}_{1i} + \tilde{D}_{12i}G_i\tilde{C}_{2i})\tilde{x}_i(t) + (\tilde{D}_{11i} + \tilde{D}_{12i}G_i\tilde{D}_{21i})w_i(t) \end{cases} \quad i=1, \dots, N \quad (3.136)$$

où :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{ii} &= \begin{bmatrix} A_{ii} & 0_{n_i \times n_i} \\ 0_{n_i \times n_i} & 0_{n_i \times n_i} \end{bmatrix} & \tilde{B}_{1i} &= \begin{bmatrix} B_{1i} \\ 0_{n_i \times m_{1i}} \end{bmatrix} & \tilde{B}_{2i} &= \begin{bmatrix} 0_{n_i \times n_i} & B_{2i} \\ I_{n_i} & 0_{n_i \times m_{2i}} \end{bmatrix} \\ \tilde{C}_{1i} &= \begin{bmatrix} C_{1i} & 0_{p_{1i} \times n_i} \end{bmatrix} & \tilde{D}_{11i} &= D_{11i} & \tilde{D}_{12i} &= \begin{bmatrix} 0_{p_{1i} \times n_c} & D_{12i} \end{bmatrix} \\ \tilde{C}_{2i} &= \begin{bmatrix} 0_{n_i \times n_i} & I_{n_i \times n_i} \\ C_{2i} & 0_{p_{2i} \times n_i} \end{bmatrix} & \tilde{D}_{12i} &= \begin{bmatrix} 0_{n_i \times m_{1i}} \\ D_{21i} \end{bmatrix} & G_i &= \begin{bmatrix} \hat{A}_i & \hat{B}_i \\ \hat{C}_i & \hat{D}_i \end{bmatrix} & \tilde{A}_{ij} &= \begin{bmatrix} A_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.137)$$

Soit enfin le système global en boucle fermée:

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = (\tilde{A}_D + \tilde{A}_C + \tilde{B}_{2D}G_D\tilde{C}_{2D})\tilde{x}(t) + (\tilde{B}_{1D} + \tilde{B}_{2D}G_D\tilde{D}_{21D})w(t) \\ z(t) = (\tilde{C}_{1D} + \tilde{D}_{12D}G_D\tilde{C}_{2D})\tilde{x}(t) + (\tilde{D}_{11D} + \tilde{D}_{12D}G_D\tilde{D}_{21D})w(t) \end{cases}$$

(3.138)

Avec :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_D &= \text{Diag}(\tilde{A}_{11}, \dots, \tilde{A}_{NN}) & \tilde{B}_{1D} &= \text{Diag}(\tilde{B}_{11}, \dots, \tilde{B}_{1N}) & \tilde{B}_{2D} &= \text{Diag}(\tilde{B}_{21}, \dots, \tilde{B}_{2N}) \\ \tilde{C}_{1D} &= \text{Diag}(\tilde{C}_{11}, \dots, \tilde{C}_{1N}) & \tilde{D}_{11D} &= \text{Diag}(\tilde{D}_{111}, \dots, \tilde{D}_{11N}) & \tilde{D}_{12D} &= \text{Diag}(\tilde{D}_{121}, \dots, \tilde{D}_{12N}) \\ \tilde{C}_{2D} &= \text{Diag}(\tilde{C}_{21}, \dots, \tilde{C}_{2N}) & \tilde{D}_{21D} &= \text{Diag}(\tilde{D}_{211}, \dots, \tilde{D}_{21N}) & \tilde{A}_C &= [\tilde{A}_{ij}] \end{aligned} \quad (3.139)$$

$$G_D = \text{Diag}(G_1, \dots, G_N)$$

$$\tilde{x}^T = [\tilde{x}_1^T \quad \dots \quad \tilde{x}_N^T]^T, \quad w^T = [w_1^T \quad \dots \quad w_N^T]^T, \quad z^T = [z_1^T \quad \dots \quad z_N^T]^T$$

En utilisant le Lemme Borné Réel (LBR), il est possible d'énoncer le résultat suivant [83]:

Le système composite (3.121) est stabilisable avec un niveau d'atténuation $\gamma > 0$, par les N contrôleurs décentralisés (3.119) si et seulement s'il existe une matrice $P_{bf} = P_{bf}^T > 0$ et une matrice G_D diagonale par blocs vérifiant la contrainte matricielle suivante :

$$F_D(P_{bf}, G_D) + F_C(P_{bf}) < 0$$

$$\text{où : } \left\{ \begin{aligned} F_D(P_{bf}, G_D) &= \underbrace{\begin{bmatrix} P_{bf}\tilde{A}_D^T + \tilde{A}_D P_{bf} & P_{bf}\tilde{C}_{1D}^T & \tilde{B}_{1D} \\ \tilde{C}_D P_{bf} & -\gamma I & \tilde{D}_{11D} \\ \tilde{B}_{1D}^T & \tilde{D}_{11D}^T & -\gamma I \end{bmatrix}}_{\Psi} + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{B}_{2D} P_{bf} \\ \tilde{D}_{12D} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{P}} G_D \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{C}_{2D} & 0 & \tilde{D}_{21D} \end{bmatrix}}_{\tilde{Q}} \\ &+ \left(\underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{B}_{2D} P_{bf} \\ \tilde{D}_{12D} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{P}} G_D \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{C}_{2D} & 0 & \tilde{D}_{21D} \end{bmatrix}}_{\tilde{Q}} \right)^T \\ F_C(P_{bf}) &= \begin{bmatrix} P_{bf}\tilde{A}_C^T + \tilde{A}_C P_{bf} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right. \quad (3.140)$$

Comme pour le problème P1, le problème P3 formulé en termes des inégalités matricielles a conduit à un problème de type BMI et donc non convexe. Une méthode heuristique comme la méthode de l'homotopie peut être envisagée. Le point de départ de cette méthode est de considérer le problème (3.140) comme une famille de problèmes paramétrée en fonction d'un paramètre λ appartenant à l'intervalle $[0,1]$:

$$F(P_{bf}, G_D, \lambda) = F_D(P_{bf}, G_D) + \lambda F_C(P_{bf}) < 0, \quad (3.141)$$

Pour $\lambda = 1$, l'inégalité (3.141) coïncide avec (3.140) et pour $\lambda = 0$, l'inégalité (3.141) coïncide avec (3.140) avec une matrice d'interconnexion $\tilde{A}_C$ nulle. Ainsi, le problème de la recherche d'une solution pour (3.140) est donc inclus dans la famille des problèmes :

$$F(P_{bf}, G_D, \lambda) < 0, \quad \lambda \in [0,1]$$

L'idée de l'algorithme est de faire varier progressivement λ de 0 à 1, ce qui s'interprète comme la transformation pas à pas d'un contrôleur pour un système composite sans interconnexion au même système mais interconnecté. L'algorithme est similaire à celui du paragraphe §1.2.9.2-d du chapitre 1. Pour plus de détail, voir [83].

Remarques :

- L'algorithme itératif débute avec $\lambda = 0$, l'inégalité (3.141) coïncide avec (3.140) non interconnecté. Les N contrôleurs peuvent être déterminés de manière séparée ou de manière globale en considérant P_{bf} sous forme diagonale par blocs. L'existence de ces contrôleurs est liée aux hypothèses d'existence des régulateurs centralisés de type $\mathcal{H}_\infty$.
- Une extension est proposée dans la même référence en envisageant le cas où la matrice d'interconnexion est sujette de perturbations, ce qui peut se traduire physiquement par des ruptures d'interconnexion entre les sous-systèmes par exemple. Ces perturbations ont été modélisées par des incertitudes de type polytopiques.

3.10.5 Synthèse $\mathcal{H}_\infty$ de la commande décentralisée par la méthode de l'homotopie pour les systèmes composites - Méthode 2

La présente méthode est basée également sur la technique de l'homotopie pour résoudre le problème P2 dans le cas certain et incertain avec l'hypothèse simplificatrice $D_{11i} = 0, i = 1, \dots, N$ et que les contrôleurs sont strictement propres. Le principal résultat se résume comme suit [29] :

Pour un niveau d'atténuation $\gamma > 0$ donné, le système composite :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_{1D}w(t) + B_{2D}u(t) \\ z(t) = C_{1D}x(t) + D_{12D}u(t) \\ y(t) = C_{2D}x(t) + D_{21D}u(t) \end{cases} \quad (3.142)$$

où :

$$\begin{aligned} A &= [A_{ij}]_{N \times N} & B_{1D} &= \text{Diag}(B_{11}, \dots, B_{1N}) & B_{2D} &= \text{Diag}(B_{21}, \dots, B_{2N}) \\ C_{1D} &= \text{Diag}(C_{11}, \dots, C_{1N}) & C_{2D} &= \text{Diag}(C_{21}, \dots, C_{2N}) & D_{12D} &= \text{Diag}(D_{121}, \dots, D_{12N}) \\ D_{21D} &= \text{Diag}(D_{211}, \dots, D_{21N}) & u^T &= [u_1^T \ \dots \ u_N^T]^T & x^T &= [x_1^T \ \dots \ x_N^T]^T \\ w^T &= [w_1^T \ \dots \ w_N^T]^T & z^T &= [z_1^T \ \dots \ z_N^T]^T & y^T &= [y_1^T \ \dots \ y_N^T]^T \end{aligned} \quad (3.143)$$

est stabilisable, avec un niveau d'atténuation $\gamma > 0$, par N contrôleurs décentralisés strictement propres (3.119) s'il existe deux matrices X, Y diagonales par blocs définies positives et des matrices F, L, Q diagonales par blocs, de dimensions appropriées, vérifiant les contraintes matricielles suivantes :

$$T(X, Y, L, F, Q) = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{21}^T & B_{1D} & XC_{1D}^T + F^T D_{12D}^T \\ P_{21} & P_{22} & YB_{1D} + LD_{21D} & C_{1D}^T \\ B_{1D}^T & B_1^T Y + D_{21D}^T L^T & -\gamma I & 0 \\ C_{1D} X + D_{12D} F & C_{1D} & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.144)$$

Dans la démonstration de ce résultat, les auteurs soulignent que la solution est indépendante du choix de U et V dans (3.148). Dans ce but, on peut faire une décomposition en valeurs singulières de $I - XY$ ou prendre tout simplement $V = I$ et $U = I - XY$.

En fait, l'idée est standard dans le cas de la commande $\mathcal{H}_\infty$ centralisée [131] sans contraintes structurelles sur les variables de décision. Par ailleurs et dans le même contexte, il est possible moyennant un choix approprié de la matrice Q , d'éliminer le terme P_{21} bilinéaire. Ce qui conduit à la transformation de l'inégalité (3.144) bilinéaire en inégalité linéaire. A défaut de pouvoir faire autant dans le contexte décentralisé, une solution itérative basée sur la méthode de l'homotopie est proposée dans [29].

En fixant Y et L , l'inégalité (3.144) devient linéaire en X, F , et Q . De même, en fixant X et F , l'inégalité (3.144) devient linéaire en Y, Q , et L . Ainsi, en appliquant alternativement cette idée, on peut converger vers une solution locale, mais cela dépend d'une bonne initialisation de l'algorithme.

On introduit un paramètre λ appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ de manière à écrire l'inégalité (3.144) sous la forme :

$$H(X, Y, F, L, Q, \lambda) = T(X, Y, F, L, (1 - \lambda)Q_F + \lambda Q) \quad (3.149)$$

Dans laquelle, on remplace P_{21} par :

$$P_{21} = A^T + YAX + LC_{2D}X + YB_{2D}F + (1-\lambda)Q_F + \lambda Q \quad (3.150)$$

Q_F est une matrice pleine. On note que :

$$H(X, Y, F, L, Q, \lambda) = \begin{cases} T(X, Y, F, L, Q_F) & \text{si } \lambda = 0 \\ T(X, Y, F, L, Q) & \text{si } \lambda = 1 \end{cases} \quad (3.151)$$

Ainsi, le problème de trouver une solution pour (3.144) est inclus dans la famille du problème paramétré suivant :

$$H(X, Y, F, L, Q, \lambda) < 0, \quad \lambda \in [0, 1] \quad (3.152)$$

L'idée par la suite est subdiviser l'intervalle $[0, 1]$ en M intervalles et définir $M+1$ points auxquels sont associés $\lambda_k = k / M, k = 0, \dots, M$ pour générer une famille de problème (3.152).

Ci-dessous, nous donnons sous forme d'étapes, un algorithme itératif pour résoudre numériquement le problème posé :

Algorithme

Etape 1 : Calculer des matrices diagonales par blocs X_0, Y_0, F_0, L_0 , solutions de (3.144) et (3.145) en prenant $P_{21} = P_{21}^T = 0$. Si le problème est faisable :

- Prendre $Q_F = -(A^T + Y_0AX_0 + L_0C_{2D}X_0 + Y_0B_{2D}F_0)$
- Initialiser M par une valeur entière et définir une borne supérieure M_{max}
- Initialiser $k = 0$

Etape 2 : Mettre $k := k + 1$ et $\lambda_k = k / M$. Calculer des matrices diagonales par blocs X, F, Q solutions de $H(X, Y_{k-1}, F, L_{k-1}, Q, \lambda_k) < 0$ et (3.145) avec $Y = Y_{k-1}$. Si le problème n'est pas faisable, aller à l'étape 3. S'il est faisable, mettre $X_k = X, F_k = F$ et calculer des matrices diagonales par blocs Y, L, Q solutions de $H(X_k, Y, F_k, L, Q, \lambda_k) < 0$ et (3.145) avec $X = X_{k-1}$. Mettre $Y_k = Y, L_k = L$ et $Q_k = Q$ aller à l'étape 5.

Etape 3 : Calculer des matrices diagonales par blocs Y, L, Q solutions de $H(X_{k-1}, Y, F_{k-1}, L, Q, \lambda_k) < 0$ et (3.145) avec $X = X_{k-1}$. Si le problème n'est pas faisable, aller à l'étape 4. S'il est faisable, mettre $Y_k = Y, L_k = L$ et calculer des matrices diagonales par blocs X, F, Q solutions de $H(X, Y_k, F, L_k, Q, \lambda_k) < 0$ et (3.145) avec $Y = Y_k$. Mettre $X_k = X, F_k = F, Q_k = Q$ et aller à l'étape 5.

Etape 4 : $M := 2M$ sous la contrainte $M \leq M_{max}$. Mettre $X_{2(k-1)} = X_{k-1}, Y_{2(k-1)} = Y_{k-1}, F_{2(k-1)} = F_{k-1}, L_{2(k-1)} = L_{k-1}, k := 2(k-1)$ et aller à l'étape 2. S'il n'est plus possible d'augmenter M , conclure que l'algorithme ne converge pas.

Etape 5 : Si $k < M$, aller à l'étape 2. Si $k = M$, X_M, Y_M, F_M, L_M, Q_M sont solutions de (3.144) et (3.145).

Etape 6 : Calculer des matrices diagonales par blocs U, V telles que $UV^T = I - X_M Y_M$ et en déduire les paramètres des régulateurs décentralisés par :

$$\hat{A}_D = V^{-1}Q_M U^{-T} \quad \hat{B}_D = V^{-1}L_M \quad \hat{C}_D := F_M U^{-T} \quad \blacksquare$$

Dans le même article [29], les auteurs proposent l'extension de cette méthode et l'algorithme qui est lui associée par la méthode de l'homotopie au cas des systèmes incertains. Les matrices A_{ii}, B_{2i} dans (3.120) sont perturbées respectivement par $\Delta A_{ii}, \Delta B_{2i}$ supposées bornées.

3.10.6 Synthèse $\mathcal{H}_\infty$ de la commande décentralisée par observateur d'état

Dans ce paragraphe nous présentons une méthode pour le développement d'une stratégie de commande décentralisée pour les systèmes multivariables composites utilisant la structure d'un observateur d'état et commandé par retour d'état estimé. Elle permet d'assurer la stabilité du système en boucle fermée avec un transfert borné au sens de la norme $\mathcal{H}_\infty$. Elle assure aussi le maintien de ces performances en cas de défaillance éventuelle d'un ensemble de capteurs spécifié lors de l'étape de la synthèse [13]. L'idée consiste à élaborer des contrôleurs monovariables ayant chacun la structure d'un observateur d'état augmenté d'une estimation des perturbations et des commandes générées par les autres contrôleurs. Leur synthèse conduit à la résolution de trois équations algébriques dont l'une est de type Riccati et l'autre est qualifiée de pseudo-équation de Riccati pour lesquelles un algorithme de résolution leur sera proposé. Deux cas seront envisagés dans cette méthode : le cas d'un fonctionnement sain c'est-à-dire sans défaillance matérielle et un autre cas, avec défaillance éventuelle d'un ensemble de capteurs spécifié à l'avance.

3.10.6.1 Développement algébrique

Nous considérons la classe de systèmes multivariables pouvant être modélisés par les équations de type (3.115) avec comme hypothèses non restrictives : la matrice D_{11} est nulle et qu'il y'a autant des entrées de commande u que de mesures y , c'est-à-dire $p_2 = m_2$.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + \sum_{i=1}^N B_{2i} u_i \\ z &= C_1 x + \sum_{i=1}^N D_{12i} u_i \\ y_i &= C_{2i} x + D_{21i} w + \sum_{j=1}^N D_{22j}^i u_j \quad i=1, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.153)$$

Dans cette description, nous considérons que $u_i \in \mathbb{R}$ et $y_i \in \mathbb{R}$. Le système augmenté (3.153) peut s'écrire de manière compacte sous la forme :

$$G(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ \hline C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \triangleq \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_{21} \dots B_{2N} \\ \hline C_1 & 0 & D_{121} \dots D_{12N} \\ \hline C_{211} & D_{211} & D_{221}^1 \dots D_{22N}^1 \\ \vdots & \vdots & D_{221}^2 \dots D_{22N}^2 \\ C_{21N} & D_{21N} & D_{221}^N \dots D_{22N}^N \end{array} \right] \quad (3.154)$$

$$D_{12} = [D_{121} \dots D_{12N}], \quad D_{21}^T = [D_{211}^T \dots D_{21N}^T], \quad D_{22} = [D_{22i}^j]_{N \times N}$$

Dans la suite, il sera supposé que les hypothèses de normalisation et d'orthogonalisation sont vérifiées, à savoir :

$$\begin{cases} D_{12}^T C_1 = 0 & D_{12}^T D_{12} = I \\ B_1 D_{21}^T = 0 & D_{21} D_{21}^T = I \end{cases}$$

La commande décentralisée consiste à utiliser plusieurs contrôleurs locaux monovariables, à la place d'un seul contrôleur pour commander le procédé multivariable (3.154). Chaque contrôleur a la structure un observateur d'état d'ordre n augmenté d'un retour d'état estimé d'état dont l'équation est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_i(t) = A\hat{x}_i(t) + B_1\hat{w}_i(t) + B_{2i}u_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N D_{22j}^i \hat{u}_j + L_i(y_i(t) - C_{2i}\hat{x}_i(t)) \\ i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (3.155)$$

où :

$$\begin{aligned} \hat{w}_i(t) &= G_i \hat{x}_i(t) & u_i(t) &= K_i \hat{x}_i(t), & i &= 1, \dots, N \\ \hat{u}_j(t) &= K_j \hat{x}_i(t), & i &= 1, \dots, N & j &\neq i \end{aligned} \quad (3.156)$$

où $\hat{w}_i(t)$, $u_i(t)$, $\hat{u}_j(t)$ représentent respectivement, une estimation locale de la perturbation w , la commande locale $u_i(t)$ qui est une commande par retour d'état, et une estimation de la commande $u_j(t)$ générée par le j^{me} contrôleur.

Les N gains G_i, K_i de retour d'état et les gains L_i des observateurs locaux constituent les paramètres à déterminer de la loi de commande décentralisée.

L'erreur d'observation locale $e_i(t) = \hat{x}_i(t) - x_i(t)$ obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= (B_1 G_i + L_i \sum_{j=1}^N D_{22j}^i K_j) x + (A + B_1 G_i - L_i C_{2i} + \sum_{j=1, j \neq i}^N B_{2j} K_j + L_i C_{2i} D_{22i}^i) e_i \\ &+ \sum_{j=1, j \neq i}^N (L_i D_{22j}^i - B_{2j} \hat{u}_j) K_j e_j + (-B_1 + L_i D_{21i}) w \end{aligned} \quad (3.157)$$

Pour établir la fonction de transfert en boucle fermée, nous définissons le vecteur d'état en boucle fermée par x_{bf} et nous avons alors la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_{bf}(t) = A_{bf} x_{bf}(t) + B_{bf} w(t) \\ z(t) = C_{bf} x_{bf}(t) \end{cases} \quad x_{bf} := \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}; \quad x_e := \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix} \quad (3.158)$$

Avec :

$$\begin{aligned} A_{bf} &= \begin{bmatrix} A + B_2 K & B_2 K_D \\ -B_D + L_D D N_D & A_D - L_D C_D + L_D D_{22} K_D \end{bmatrix} \\ B_{bf} &= \begin{bmatrix} B_1 \\ -B_D + L_D D_{21} \end{bmatrix} \quad C_{bf} = [C_1 + D_{12} K \quad D_{12} K_D] \end{aligned} \quad (3.159)$$

où :

$$\begin{aligned}
 A_D &= A_d + B_{1D}G_D + B_{2D}(K_d - M_d) \\
 A_d &= \text{Diag}(A, \dots, A) \quad K_D = \text{Diag}(K_1, \dots, K_N), \quad K_d = \text{Diag}(K, \dots, K) \\
 B_{1D} &= \text{Diag}(B_1, \dots, B_1) \quad B_{2D} = \text{Diag}(B_2, \dots, B_2), \quad G_D = \text{Diag}(G_1, \dots, G_N) \\
 L_D &= \text{Diag}(L_1, \dots, L_N) \quad D = \text{Diag}(D_1, \dots, D_N), \quad C_D = \text{Diag}(C_{21}, \dots, C_{2N}) \\
 M_d &= [K_D^T, \dots, K_D^T]^T \quad N_D = [K^T, \dots, K^T]^T, \quad B_D = [B_1^T, \dots, B_1^T]^T \\
 K &= [K_1^T, \dots, K_N^T]^T \quad G = [G_1^T, \dots, G_N^T]^T
 \end{aligned}$$

L'objectif final est de déterminer les gains K , L et G de manière à ce que le système en boucle fermée soit stable et que le transfert entre z et w vérifie $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$, avec $\gamma > 0$, un paramètre prédéfini. Pour ce faire, nous partons du Lemme Borné Réel que nous pouvons formuler de manière équivalente par :

Le système (3.158) est stable avec un niveau d'atténuation $\gamma > 0$ prédéfini et tel que $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$, si et seulement s'il existe une matrice X_{bf} symétrique définie positive vérifiant l'inégalité matricielle suivante :

$$X_{bf}A_{bf} + A_{bf}^T X_{bf} + \gamma^{-2} X_{bf}B_{bf}B_{bf}^T X_{bf} + C_{bf}^T C_{bf} < 0 \quad (3.160)$$

Ou encore :

$$X_{bf}A_{bf} + A_{bf}^T X_{bf} + \gamma^{-2} X_{bf}B_{bf}B_{bf}^T X_{bf} + C_{bf}^T C_{bf} + Q = 0 \quad (3.161)$$

pour toute matrice $Q = Q^T > 0$, afin de transformer l'inégalité (3.160) en égalité. Notons que la difficulté pour résoudre (3.160) ou (3.161) réside dans la présence des termes non linéaires en les variables de décision. Nous proposons dans la suite une démarche algébrique pour résoudre (3.161) en considérant les trois cas suivants :

- D_{22} non nulle.
- D_{22} nulle
- D_{22} diagonale.

Le premier et le deuxième cas correspondent respectivement à la classe des systèmes propres et strictement propres. Nous proposons une démarche simplifiée pour le troisième cas qui est un cas particulier du premier.

1^{er} Cas D_{22} non nulle

Compte tenu de la structure de certaines matrices mises en jeu dans l'équation (3.161), nous cherchons $X_{bf}, Q > 0$ sous la forme suivante :

$$X_{bf} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \quad (3.162)$$

X_1, X_2 (respectivement Q_1, Q_2) ont pour dimension respective (n, n) et $(N \times n, N \times n)$. De cette manière, nous pouvons découpler le calcul des gains K_i de retour d'état des autres gains.

Dans ces conditions, L'équation (3.161) se décompose en trois équations algébriques :

$$(A + B_2 K)^T X_1 + X_1 (A + B_2 K) + \gamma^{-2} X_1 B_1 B_1^T X_1 + C_1^T C_1 + K^T K + Q_1 = 0 \quad (3.163)$$

$$(G^T B_{1D}^T + N_D^T D^T L_D^T) X_2 + X_1 B_2 K_D + K^T K_D - \gamma^{-2} X_1 B_1 B_D^T X_2 = 0 \quad (3.164)$$

$$(A_D - L_D C_D + L_D D_{22} K_D)^T X_2 + X_2 (A_D - L_D C_D + L_D D_{22} K_D) + \gamma^{-2} X_2 (B_D B_D^T + L_D L_D^T) X_2 + K_D^T K_D + Q_2 = 0 \quad (3.165)$$

L'équation (3.163) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$A^T X_1 + X_1 A + X_1 (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X_1 + (K + B_2^T X_1)^T (K + B_2^T X_1) + C_1^T C_1 + Q_1 = 0 \quad (3.166)$$

Le choix $K = -B_2^T X_1$, soit :

$$K_i = B_{2i}^T X_1, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.167)$$

permet de réduire l'équation (3.166) à :

$$A^T X_1 + X_1 A + X_1 (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X_1 + C_1^T C_1 + Q_1 = 0 \quad (3.168)$$

C'est-à-dire à une équation de Riccati classique. Avec le choix (3.167) pour les gains K_i et en posant $B = [B_1 \dots B_1]^T$, l'équation (3.164) se réduit à :

$$B_{1D} G = L_D D N_D + \gamma^{-2} B_{1D} B^T X_1 \quad (3.169)$$

Enfin, pour l'équation (3.165), nous effectuons le changement de variable $Y_2 = \gamma^2 X_2$, qui conduit à l'équation suivante que nous baptisons la pseudo-équation de Riccati :

$$Y_2 A_D^T + A_D Y_2 + Y_2 (\gamma^{-2} (K_D^T K_D + Q_2) - H_2^T H_2) Y_2 + (L_D - Y_2 H_2^T) (L_D - Y_2 H_2^T)^T + B_D B_D^T = 0 \quad (3.170)$$

où la matrice H_2 est définie par :

$$H_2 = C_D - D_{22} K_D \quad (3.171)$$

Il serait intéressant de choisir :

$$L_D = Y_2 H_2^T \quad (3.172)$$

afin de ramener l'équation (3.170) en une simple équation de Riccati, mais la structure diagonale de la matrice L_D ne permet pas de faire un tel choix. Toutefois nous pouvons décomposer les matrices Y_2 et D_{22} de la manière suivante :

$$D_{22} = D_{22d} + D_{22}', \quad D_{22d} = \text{Diag}(D_{221}^1, D_{222}^2, \dots, D_{22N}^N) \\ Y_2 = [Y_{ij}]_{N \times N} = Y_{2d} + Y_2', \quad Y_{2d} = \text{Diag}(Y_{11}, Y_{22}, \dots, Y_{NN})$$

Dans ces conditions le choix suivant pour L_D :

$$L_D = Y_{2d} H_{2d}^T, \quad H_{2d} = C_D - D_{22d} K_D$$

permet d'écrire en définitive l'équation (3.170) sous la forme :

$$Y_2 A_D^T + A_D Y_2 + Y_2 (\gamma^{-2} (K_D^T K_D + Q_2) - H_2^T H_2) Y_2 + (Y_{2d} H_{2d}^T - Y_2 H_2^T) (Y_{2d} H_{2d}^T - Y_2 H_2^T)^T + B_D B_D^T = 0 \quad (3.173)$$

Dans ce cas, l'équation algébrique (3.169) s'écrit :

$$B_{1D} G = Y_{2d} H_{2d}^T D N_D + \gamma^{-2} B_{1D} B^T X_1 \quad (3.174)$$

A l'issue de ce développement algébrique, nous concluons que l'existence d'une solution $X_1 > 0$ pour l'équation (3.168) et d'une solution $Y_2 > 0$ pour l'équation (3.173) permettent alors de garantir l'existence d'une solution $X_{bf} > 0$ qui constitue l'objectif final de ce calcul.

2^{ème} Cas D_{22} nulle

Nous proposons à présent d'étudier ce cas particulier qui conduit à des simplifications algébriques intéressantes. En effet, l'équation (3.168) est inchangée, alors que les équations (3.173) et (3.174) ne sont plus couplées. Les gains G_i , sont tous égaux et sont donnés par :

$$G_i = \gamma^{-2} B_1^T X_1, \quad i=1,..,N \quad (3.175)$$

Quant à l'équation (3.173), elle peut s'écrire sous la forme suivante :

$$Y_2 A_D^T + A_D Y_2 + Y_2 (\gamma^{-2} (K_D^T K_D + Q_2) - C_D^T C_D) Y_2 + (Y_{2d} - Y_2) C_D^T C_D (Y_{2d} - Y_2)^T + B_D B_D^T = 0 \quad (3.176)$$

dont sa solution permet de calculer L_D par :

$$L_D = Y_{2d} C_D^T \quad (3.177)$$

3^{ème} Cas D_{22} diagonale

Nous pouvons appliquer dans ce cas l'algorithme général relatif à $D_{22} \neq 0$. Cependant, il est plus intéressant de simplifier la procédure en rappelant le résultat suivant qui s'applique sans aucun problème pour les systèmes centralisés. La connaissance d'un contrôleur $\tilde{K}_0(s)$ obtenu pour $D_{22} = 0$ permet d'en déduire le contrôleur $\tilde{K}(s) = \tilde{K}_0(s)(I + D_{22}\tilde{K}_0(s))^{-1}$ correspondant à $D_{22} \neq 0$ (Voir annexe1). Cette relation demeure valable dans le cas de structure diagonale de $\tilde{K}_0(s)$ et de D_{22} .

3.10.6.2 Développement algorithmique

La mise au point de cette stratégie de commande décentralisée, revient à résoudre dans le cas général, le système d'équations (3.168), (3.173) et (3.174). La première équation est indépendante des deux autres qui sont, quant à elles couplées algébriquement par la présence de D_{22} . Nous ne développons pas davantage la méthode permettant de résoudre de telles équations. Nous nous contentons d'indiquer l'algorithme de Beseler qui a été testé avec succès dans une situation similaire à celle-ci [40]. Dans le cas où D_{22} est nulle, nous sommes amenés à résoudre la pseudo-équation de Riccati (3.175). Pour ce faire, nous proposons un algorithme itératif dans l'étape 3 de l'algorithme général suivant :

Etape 1 :

Résoudre l'équation de Riccati (3.168) en se donnant arbitrairement une matrice $Q_1 = Q_1^T > 0$.

Etape 2 :

Calculer les gains K_i par (3.167) et les gains G_i par (3.175)

Etape 3 :

Résoudre itérativement l'équation (3.176) selon l'algorithme suivant :

a) Initialiser : $k = 0$, $Y_2 = Y_2^k = 0$, $Y_{2d} = Y_{2d}^k = 0$, , se donner arbitrairement une matrice $Q_2 = Q_2^T > 0$.

b) Mettre $k = k + 1$ et résoudre l'équation de Riccati :

$$Y_2^k A_D^T + A_D Y_2^k + Y_2^k (\gamma^{-2} (K_D^T K_D + Q_2) - C_D^T C_D) Y_2^k + (Y_{2d}^{k-1} - Y_2^{k-1}) C_D^T C_D (Y_{2d}^{k-1} - Y_2^{k-1})^T + B_D B_D^T = 0$$

c) Tester la convergence en vérifiant si une norme matricielle entre deux solutions successives est inférieure à une certaine tolérance. Si oui, arrêter les itérations et déduire L_D par :

$$L_D = Y_{2d}^k C_D^T$$

Si non , mettre $Y_2^k = Y_2^{k-1}$, $Y_{2d}^k = Y_{2d}^{k-1}$, et aller en b. ■

3.10.6.3 Aspect de la fiabilité de la commande

Les méthodes de la commande centralisée dans le contexte classique ou dans le contexte robuste peuvent conduire à une dégradation des performances, voire même à une instabilité dans la cas d'une éventuelle défaillance de capteurs et/ou d'actionneurs. Il est alors intéressant de synthétiser une commande qui permet non seulement d'assurer la stabilité et un niveau de performances, mais de les maintenir le mieux possible en cas de défaillance éventuelle de capteurs et/ou d'actionneurs. Ce sujet à énormément intéressé les Automaticiens ces dernières décennies sous le nom de la synthèse de commande avec tolérance aux fautes.

Dans ce travail nous présentons la synthèse d'un contrôleur qui permet de maintenir un certain niveau de performances dans le cas de défaillance de capteurs. Nous admettons qu'une panne de capteur se traduit physiquement par une mesure nulle. C'est aussi le cas où d'une liaison défectueuse entre le capteur et la grandeur physique à mesurer.

Notons $S = \{1, 2, \dots, N\}$ l'ensemble des N capteurs disponibles et $S_d = \{1, 2, \dots, N_d\} \subset S$ l'ensemble des N_d capteurs susceptibles d'être défaillants. Pour des raisons de simplicité et sans perte de généralité, nous supposons que $D_{22} = 0$. Auquel cas, les équations du système comportant capteurs défaillants s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + \sum_{i=1}^N B_{2i} u_i \\ z = C_1 x + \sum_{i=1}^N D_{12i} u_i \\ y_i = C_{2i}^* x + D_{21i}^* w \quad i=1, \dots, N. \end{cases} \quad (3.178)$$

Avec :

$$\begin{cases} C_{2i}^* = 0 & D_{21i}^* = 0 & \text{si } i \in S_d \\ C_{2i}^* = C_{2i} & D_{21i}^* = D_{21i} & \text{si } i \notin S_d \end{cases} \quad (3.179)$$

Des équations (3.155) et (3.179), il en résulte que les équations des N contrôleurs perturbés s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \hat{\dot{x}}_i(t) = (A + B_1 G_i + B_2 K - L_i C_{2i}) \hat{x}_i(t) + L_i^* y_i(t) \\ i=1, \dots, N. \end{cases} \quad (3.180)$$

Avec :

$$\begin{cases} L_i^* = 0 & \text{si } i \in S_d \\ L_i^* = L_i & \text{si } i \notin S_d \end{cases} \quad (3.181)$$

Notons au passage que la stabilité des contrôleurs n'est pas mise en question en cas de défaillance possible. En définissant le vecteur d'état x_e comme précédemment, les matrices d'état en boucle fermée s'obtiennent en utilisant les équations du système (3.152) et les équations des contrôleurs (3.180), s'écrivent sous la forme suivante :

$$A_{bf}^* = A_{bf} + \Delta A_{bf} \quad B_{bf}^* = B_{bf} + \Delta B_{bf} \quad C_{bf}^* = C_{bf} + \Delta C_{bf} \quad (3.182)$$

où les variations paramétriques sont données par :

$$\begin{aligned} \Delta A_{bf} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (L_D^* - L_D)C_2 & 0 \end{bmatrix} \triangleq (L_C^* - L_C)C_{2c}, \quad \Delta B_{bf} = \begin{bmatrix} 0 \\ (L_D^* - L_D)D_{21} \end{bmatrix}, \quad \Delta C_{bf} = 0 \\ L_C &= \begin{bmatrix} 0 \\ L_D \end{bmatrix} \quad L_C^* = \begin{bmatrix} 0 \\ L_D^* \end{bmatrix} \quad L_D^* = \text{Diag}(L_i^*) \quad C_{2c} = \begin{bmatrix} C_2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.183)$$

Rajoutons et retranchons des termes adéquats de manière à écrire la condition (3.161) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & X_{bf}(A_{bf} + \Delta A_{bf}) + (A_{bf} + \Delta A_{bf})^T X_{bf} + \gamma^{-2} X_{bf}(B_{bf} + \Delta B_{bf})(B_{bf} + \Delta B_{bf})^T X_{bf} + C_{bf}^T C_{bf} \\ & - X_{bf} \Delta A_{bf} - \Delta A_{bf}^T X_{bf} - \gamma^{-2} X_{bf}(B_{bf} \Delta B_{bf}^T + \Delta B_{bf} B_{bf}^T + \Delta B_{bf} \Delta B_{bf}^T) X_{bf} + Q = 0 \end{aligned} \quad (3.184)$$

En vertu du Lemme Borné Réel, le système perturbé par ces pannes de capteurs est stable en boucle fermée et le transfert entre z et w vérifie $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$, avec $\gamma > 0$ un paramètre prédéfini, si la condition suivante est vérifiée :

$$Q - X_{bf} \Delta A_{bf} - \Delta A_{bf}^T X_{bf} - \gamma^{-2} X_{bf}(B_{bf} \Delta B_{bf}^T + \Delta B_{bf} B_{bf}^T + \Delta B_{bf} \Delta B_{bf}^T) X_{bf} > 0 \quad (3.185)$$

Soit encore sous la forme :

$$(\gamma^{-1} X_{bf}(L_C^* - L_C) + \gamma C_{2c}^T)(\gamma^{-1} X_{bf}(L_C^* - L_C) + \gamma C_{2c}^T)^T - \gamma^2 C_{2c}^T C_{2c} + Q > 0 \quad (3.186)$$

Dans le cas où tous les capteurs sont opérationnels nous retrouvons la condition qui correspond à la stabilité du système nominal puisque nous avons $L_C^* = L_C$.

En conclusion, les étapes à suivre pour la synthèse tolérante à des défaillances possibles sont :

- On se donne $Q = Q^T > 0$ et on détermine les contrôleurs selon l'algorithme du paragraphe §3.10.6.2
- On se donne l'ensemble S_d et on teste la condition (3.186) pour les différentes éventualités choisies à priori.
- Si cette condition est satisfaite, on arrête. Si non, on recommence cette procédure jusqu'à ce que cette condition soit satisfaite. Dans cette démarche le sous-ensemble S_d doit être défini lors de l'étape de la synthèse et la sélection des capteurs est faite à priori. On conçoit que plus N_d est grand, plus le nombre des éventualités à considérer est grand.

3.10.6.4 Exemple de simulation

Pour illustrer notre démarche, nous considérons le modèle multivariable donné ci-dessous.

$$\begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

La valeur γ^* est de l'ordre de grandeur qui borne le transfert dans le cas de la commande $\mathcal{H}_\infty$ centralisée. En effet, celle-ci peut être établie selon l'approche développée par [43] avec $\gamma = 9.2265$ obtenue par la γ -itération. Après un nombre très limité d'essais pour le choix de Q_1 et de Q_2 répondant à cet objectif, nous avons obtenus les contrôleurs suivants:

$$\begin{cases} R_1(s) = \frac{-1.79s^2 - 5.59s - 5.77}{s^3 + 13.57s^2 + 39.53s + 37.48} \\ R_2(s) = \frac{-6p^2 - 18.12p - 18.47}{s^3 + 5.33s^2 + 16.79s + 14.97} \end{cases} \quad (3.187)$$

Les figures a, b et c suivantes sont obtenues en considérant les entrées comme suit : $w_1 = 1$, et $w_2 = w_3 = w_4 = 0$. Sur chacune des courbes, nous avons représenté le comportement du système en fonctionnement nominal repéré par des « traits continus » et en fonctionnement perturbé par la panne du deuxième capteur repéré par des « pointillés ». La figure d représente $\text{Sup}_i [\sigma_i(T_{zw}(j\omega))]$ où $\sigma_i(\cdot)$ désigne la $i^{\text{ème}}$ valeur singulière dans le cas nominal et dans le cas perturbé. Nous notons que les performances sont pratiquement conservées et que dans les deux cas, nous avons

$$\|T_{zw}\|_\infty = \text{Sup}_\omega \text{Sup}_i [\sigma_i(T_{zw}(j\omega))] < \gamma^* \quad (3.188)$$

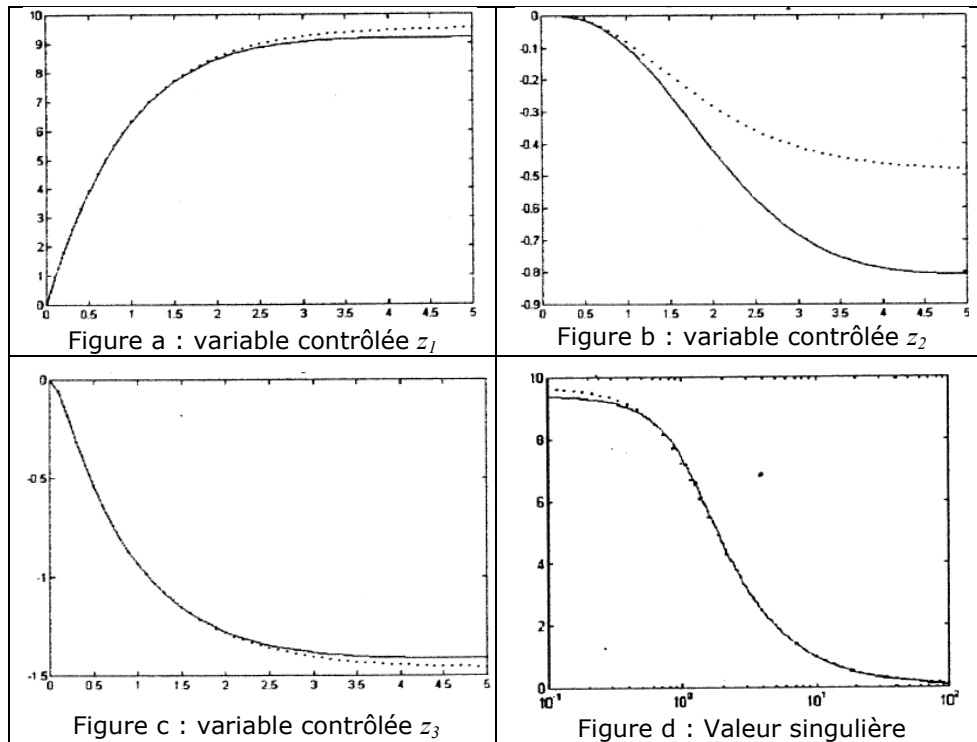


Figure 3.8 : Simulation en boucle fermée avec et sans défaillance du capteur 2

En conclusion générale, nous avons présenté une méthode pour la décentralisation de la loi de commande des systèmes multivariables. Nous estimons qu'elle est simple dans sa conception puisqu'elle revient à résoudre principalement une équation de Riccati et une pseudo-équation de Riccati couplée ou non à une troisième équation selon la nature de la matrice D_{22} . Cette approche permet non seulement une synthèse robuste des contrôleurs décentralisés, mais aussi une tolérance avec maintien des performances vis à vis d'une défaillance éventuelle d'un ou plusieurs capteurs spécifié(s) à l'avance. Cependant cette méthode souffre, comme la plus part des méthodes itératives, du problème de convergence qui reste tributaire de la matrice arbitraire Q_e .

3.10.7 Synthèse $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$ de la commande décentralisée par paramétrisation des Contrôleurs

3.10.7.1 Formulation du problème

L'approche que nous développons dans ce paragraphe est de deux types $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ faisant appel à la notion de paramétrisation des contrôleurs [42],[151]. Cette notion est exploitée judicieusement pour décentraliser la structure des contrôleurs centralisés et conduire à des contrôleurs dits aussi contrôleurs observateurs décentralisés [40]. Elle fait intervenir des gains de retour d'état et des gains des observateurs. Deux approches sont détaillées pour la synthèse de ces gains : une approche basée sur la résolution des équations algébriques couplées ayant découlées du problème d'optimisation paramétrique; et une autre approche basée la technique des LMIs inspirée de la synthèse $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$ centralisée [11], [14], [15].

Nous considérons que le système à commander est mis sous la forme standard (3.138) avec $D_{11} = D_{22} = 0$, pour simplifier la formulation du problème de commande; soit :

$$G(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ \hline C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right] \triangleq \left[\begin{array}{c|cc|cc} A & B_1 & B_{21} & \dots & B_{2N} \\ \hline C_1 & 0 & D_{121} & \dots & D_{12N} \\ \hline C_{211} & D_{211} & & & \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ \hline C_{21N} & D_{21N} & & & \end{array} \right] \quad (3.189)$$

Nous supposons que les conditions suivantes sont vérifiées:

- a) (A, B_1, C_1) est stabilisable et détectable.
- b) (A, B_2, C_2) est stabilisable et détectable.

$$\begin{aligned} & D_{12}^T [C_1 \ D_{12}] = [0 \ I] \\ \text{c) } & \begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pour formuler le problème de synthèse optimale des contrôleurs, nous nous baserons sur le schéma standard de commande donné par la figure 3.7 où la loi de commande 3.118 est générée par N contrôleurs décentralisés ayant chacun la structure d'un contrôleur-observateur d'état :

$$K_i \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} \hat{A} - B_2 \hat{F} - \bar{L}_i C_{2i} & \bar{L}_i \\ \hline -\bar{F}_i & 0 \end{array} \right] \quad \hat{F} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \vdots \\ \bar{F}_N \end{bmatrix} \quad (3.190)$$

La matrice d'état $\hat{A}$ sera explicitée dans la suite selon le type de commande envisagée $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$. $\bar{F}_i$ et $\bar{L}_i$ pour $i = 1, \dots, N$ représentent respectivement les gains de retour d'état et les gains des observateurs. Ces gains constituent les paramètres à déterminer dans la loi de commande décentralisée formulée ci-dessous.

Commande $\mathcal{H}_2$ décentralisée: Elle consiste à calculer le contrôleur optimal $K_d = \text{Diag}(K_i)$ minimisant la norme $\mathcal{H}_2$ du transfert $T_{wz}^d = T_{wz}(K_d)$ entre w et z :

$$\alpha_2^* = \min_{C_d \in \mathbb{C}_d} \|T_{wz}^d\|_2, \quad (3.191)$$

où $\mathbb{C}_d$ représente l'ensemble des contrôleurs décentralisés stabilisant le système (3.189) en boucle fermée.

Commande $\mathcal{H}_\infty$ décentralisée: Elle consiste à calculer un contrôleur sous optimal $K_d = \text{Diag}(K_i)$ tel que la norme $\mathcal{H}_\infty$ du transfert $T_{wz}^d = T_{wz}(K_d)$ entre w et z vérifie :

$$\|T_{wz}^d\|_\infty < \gamma, \quad (3.192)$$

où $\gamma > 0$ est un paramètre de synthèse prédéfini.

3.10.7.2 Préliminaire

Dans les deux types de contrôle décentralisé, la première étape de synthèse consiste à élaborer le contrôleur optimal centralisé $\mathcal{H}_2$ et le contrôleur sous-optimal centralisé $\mathcal{H}_\infty$. Nous rappelons ci-dessous l'essentiel du résultat pour leur calcul. Pour plus de détails, nous renvoyons aux paragraphes §3.3.3 et §3.3.4 de ce chapitre.

Nous avons les résultats suivants:

L'unique contrôleur centralisé optimal $\mathcal{H}_2$ noté $\mathcal{C}_2(s)$ minimisant la norme : $\varepsilon_2 = \|T_{wz}^c(C_2)\|_2$ possède la représentation d'état suivante:

$$\mathcal{C}_2(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A_2 & L_2 \\ \hline -F_2 & 0 \end{array} \right] \begin{cases} A_2 = A - B_2 F_2 - L_2 C_2 \\ F_2 = B_2^T X_2 \quad L_2 = Y_2 C_2^T \end{cases} \quad (3.193)$$

Avec X_2 et Y_2 désignent respectivement les solutions des équations algébriques de Riccati associées aux Hamiltoniens J_2 et H_2 .

De même, le contrôleur centralisé $\mathcal{H}_\infty$ sous-optimal noté $C_\infty(s)$ vérifiant:

$$\|T_{wz}^c(C_\infty)\|_\infty < \gamma \quad (3.194)$$

est donné par sa représentation d'état :

$$C_\infty(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A_\infty & Z_\infty L_\infty \\ \hline -F_\infty & 0 \end{array} \right], \quad (3.195)$$

où :

$$\begin{aligned} A_\infty &= A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty - B_2 F_\infty - Z_\infty L_\infty C_2 \\ F_\infty &= B_2^T X_\infty \quad L_\infty = Y_\infty C_2^T \quad Z_\infty = (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} \end{aligned} \quad (3.196)$$

Avec X_∞ et Y_∞ désignent respectivement les solutions des équations algébriques de Riccati associées aux Hamiltoniens J_∞ et H_∞ .

3.10.7.3 Paramétrisation des contrôleurs et optimisation paramétrique

Plusieurs approches de contrôle avec des contraintes structurelles sur les contrôleurs basées sur la notion de paramétrisation des contrôleurs sont disponibles dans la littérature et peuvent être judicieusement utilisés pour concevoir des contrôleurs stabilisants. L'idée de base,

introduite dans [43], est de caractériser l'ensemble des contrôleurs stabilisants décentralisés par une paramétrisation Q_d , comme indiqué sur la figure 3.9. Le contrôleur $K_d(s)$ est donc considéré comme le résultat d'une transformation linéaire fractionnaire inférieure d'une certaine matrice de transfert Q_d stable et un certain transfert J invariant dans le temps linéaire modélisé par des équations d'état, i.e. $K_d = F_i(J, Q_d)$. Le paramètre Q_d est supposé appartenir à $\mathcal{H}$, l'ensemble des matrices de fonction de transfert stables de dimension appropriée. Dans le cas particulier où le paramètre $Q_d = 0$, on retrouve le contrôleur centralisé.

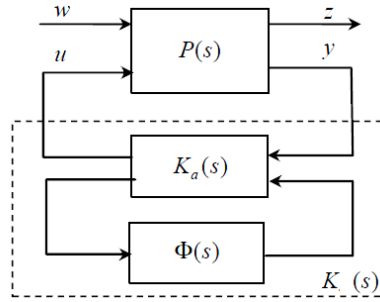


Figure 3.9 : Paramétrisation du contrôleur

Pour une meilleure clarté de la démarche, nous proposons de développer tous les calculs en considérant que K_d est constitué uniquement de deux blocs ($N = 2$). Toutefois, cette hypothèse n'est pas restrictive sur le plan théorique et les résultats sont généralisables pour un nombre plus important de blocs. Dans ces conditions, nous considérons la représentation réduite du système (3.189) :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_{21} u_1(t) + B_{22} u_2(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_{121} u_1(t) + D_{122} u_2(t) \\ y_1(t) &= C_{21} x(t) + D_{211} w(t) \\ y_2(t) &= C_{22} x(t) + D_{212} w(t) \end{aligned} \quad (3.197)$$

Par ailleurs, nous proposons d'utiliser dans nos démarches la parametrization suggérée dans [40] que nous avons jugés utile de la rappeler dans l'annexe 3.

En adoptant les notations de cet annexe, les problèmes de commande $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ décentralisés conduisent à la détermination des paramètres de synthèse $\bar{F}_i$ et $\bar{L}_i$ pour $i = 1, 2$ à travers l'optimisation du transfert Q_d qui dépend explicitement de ces paramètres. En effet, celle-ci est donnée par :

$$Q_d \leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} \bar{A}_F & B_2 \bar{F} & L \\ 0 & \bar{A}_L & \hat{L} - \bar{L} \\ \hline F - \hat{F} & \bar{F} & 0 \end{array} \right] \in \mathcal{H}, \quad \bar{A}_F = \hat{A} - B_2 \hat{F} \quad \bar{A}_L = \bar{A} - \bar{L} \bar{C} \quad \hat{F} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{bmatrix} \quad \hat{L} = \begin{bmatrix} L \\ L \end{bmatrix} \quad (3.198)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \hat{A} - B_{22} \bar{F}_2 & B_{22} \bar{F}_2 \\ B_{21} \bar{F}_1 & \hat{A} - B_{21} \bar{F}_1 \end{bmatrix} \quad \bar{L} = \begin{bmatrix} \bar{L}_1 & 0 \\ 0 & \bar{L}_2 \end{bmatrix} \quad \bar{F} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1 & 0 \\ 0 & \bar{F}_2 \end{bmatrix} \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} C_{21} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix}$$

Avec $\hat{A} = A$ dans le cas de la synthèse $\mathcal{H}_2$ et $\hat{A} = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty$ dans le cas de la synthèse $\mathcal{H}_\infty$.

3.10.7.4 Synthèse $\mathcal{H}_2$ décentralisée par minimisation du Lagrangien

D'après l'annexe 3, la minimisation de la norme $\mathcal{H}_2$ du paramètre Q_d par rapport aux paramètres $\bar{F}_i$ et $\bar{L}_i$ pour $i=1,2$ est équivalente à la minimisation par rapport à ces mêmes paramètres de la norme du transfert T_{wz}^d obtenue bouclage du système (3.197) par le contrôleur :

$$K_d \leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} A - B_2 \hat{F} - \bar{L}_1 C_{21} & 0 & \bar{L}_1 & 0 \\ 0 & A - B_2 \hat{F} - \bar{L}_2 C_{22} & 0 & \bar{L}_2 \\ \hline -\bar{F}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{F}_2 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (3.199)$$

Nous proposons de simplifier la solution générale en imposant le choix suivant pour les matrices de gains du retour d'état:

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2^1 \\ F_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.200)$$

où F_2^1 et F_2^2 résultent du partitionnement de F_2 , gain de retour d'état dans le cas de la synthèse centralisée. Ce choix est licite puisqu'il n'altère pas la stabilité en boucle fermée et permet de réduire le nombre de paramètres d'optimisation. En effet, dans ce cas, le problème se réduit à :

$$\min_{\bar{L}_1, \bar{L}_2} \|Q_d\|_2 = \min_{\bar{L}_1, \bar{L}_2} \left\| \left[\begin{array}{c|c} \bar{A}_L & \hat{L} - \bar{L} \\ \hline \bar{F} & 0 \end{array} \right] \right\|_2 \quad (3.201)$$

et d'où, une nouvelle formulation du problème pour la détermination des gains $\bar{L}_i$ pour $i=1,2$. En effet, d'après les propriétés de la norme $\mathcal{H}_2$, (3.201) s'écrit :

$$\min_{\bar{L}_1, \bar{L}_2} \left[\text{Trace}(\bar{F} Y \bar{F}^T) \right], \quad (3.202)$$

sous la contrainte:

$$\bar{A}_L Y + Y \bar{A}_L^T + (\hat{L} - \bar{L})(\hat{L} - \bar{L})^T = 0 \quad (3.203)$$

Donc il s'agit d'un problème de minimisation sous contrainte et pour lequel nous définissons le Lagrangien:

$$\mathcal{L} = \text{Trace}(\bar{F} Y \bar{F}^T) + \text{Trace}((\bar{A}_L Y + Y \bar{A}_L^T + (\hat{L} - \bar{L})(\hat{L} - \bar{L})^T) P) \quad (3.204)$$

où P , représente le multiplicateur de Lagrange. Les conditions d'optimalité s'obtiennent en égalant à zéro les dérivées partielles de $\mathcal{L}$ par rapport à $Y, P, \bar{L}_1$ et $\bar{L}_2$ soit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P} &= \bar{A}_L Y + Y \bar{A}_L^T + (\hat{L} - \bar{L})(\hat{L} - \bar{L})^T = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y} &= \bar{A}_L^T P + P \bar{A}_L + \bar{F}^T \bar{F} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{L}_1} &= P_1 Y_1 C_1^T + P_2 Y_2^T C_1^T + P_1 L_1 + P_2 L_1 - P_1 \bar{L}_1 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{L}_2} &= P_3 Y_3 C_2^T + P_2^T Y_2 C_2^T + P_3 L_2 + P_2^T L_2 - P_3 \bar{L}_2 = 0 \end{aligned} \quad \text{où } Y = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_2^T & Y_3 \end{bmatrix} \text{ et } P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} \quad (3.205)$$

Ces équations sont couplées algébriquement et donc une solution numérique s'impose. Dans [17] une étude comparative est faite entre certains algorithmes pouvant résoudre des équations analogues à (3.205). De cette étude, Il en ressort que c'est l'algorithme de Beseler qui convient le plus. Celui-ci constitue une variante de la méthode de Newton.

Dans la suite, nous présentons les étapes clés de l'algorithme de Beseler. Pour plus de détail, nous renvoyons à l'article de base [17]. Pour ce faire, nous donnons au préalable l'ensemble des équations algébriques intervenant dans l'algorithme et nous précisons ensuite les différentes étapes. Dans celui-ci, il convient de distinguer les inconnues Y et P , qu'on peut qualifier de secondaires par opposition aux principales inconnues $\bar{L}_1, \bar{L}_2$ par rapport auxquelles l'optimisation est faite. Au cours du calcul itératif, l'actualisation de ces variables serviront de données pour la résolution des deux premières équations de Lyapunov du système algébrique (3.205)

L'ensemble des équations (3.205) peuvent être réécrites de manière plus explicite, en utilisant l'expression de $\bar{A}_L$ (3.198) et le partitionnement de Y et P (3.205), sous la forme suivante:

$$f_k(Y_j, P_j, \bar{L}_i) = 0 \quad k=1,2,\dots,8 \quad i=1,2. \quad j=1,2,3. \quad (3.206)$$

Dans chacune de ces équations la substitution respective de $Y_i, P_i, \bar{L}_i$ par $Y_i + \Delta Y_i, P_i + \Delta P_i, \bar{L}_i + \Delta \bar{L}_i$ conduit, après avoir négliger les variations du second degré, aux équations de la forme:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 h_i^{1k} \Delta Y_i g_i^{1k} + \sum_{i=1}^3 e_i^{1k} \Delta Y_i^T f_i^{1k} + \sum_{i=1}^3 h_i^{2k} \Delta P_i g_i^{2k} + \sum_{i=1}^3 e_i^{2k} \Delta P_i^T f_i^{2k} + \sum_{i=1}^2 h_i^{3k} \Delta \bar{L}_i g_i^{3k} + \sum_{i=1}^2 e_i^{3k} \Delta \bar{L}_i^T f_i^{3k} = M_k \\ k=1,2,\dots,8. \end{cases} \quad (3.207)$$

avec :

$$\begin{cases} M_k = 0, \quad k=1,2,\dots,6. \\ M_7 = -(P_1 Y_1 C_1^T + P_2 Y_2^T C_1^T + P_1 L_1 + P_2 L_1 - P_1 \bar{L}_1) \\ M_8 = -(P_3 Y_3 C_2^T + P_2^T Y_2 C_2^T + P_3 L_2 + P_2^T L_2 - P_3 \bar{L}_2) \end{cases} \quad (3.208)$$

Les coefficients $h_i^{jk}, g_i^{jk}, e_i^{jk}$, et f_i^{jk} sont fonctions en particulier de Y_i, P_i , et $\bar{L}_i$ dont certains sont éventuellement nuls.

Le système algébrique ci-dessus dont les inconnues sont les différentes variations $\Delta(.)$ peut être résolu par la méthode de vectorisation. En effet si M est une matrice et m est le vecteur associé à M par $m = \text{vect}(M)$ où $\text{vect}(\cdot)$ désigne l'opérateur de vectorisation de M par colonne, on a alors le résultat général suivant où le symbole $\otimes$ représente le produit de Kroneker:

$$\begin{aligned} \text{vect}(h \Delta X g) &= (g^T \otimes h) \text{vect}(\Delta X) \\ \text{vect}(h \Delta X^T g) &= (g^T \otimes h) \text{vect}(\Delta X^T) \\ \text{vect}(\Delta X^T) &= T \text{vect}(\Delta X), \end{aligned} \quad (3.209)$$

où T est une matrice de transformation.

L'application de ces règles aux équations (3.207) conduit en définitive à un système d'équations algébriques que nous écrivons sous la forme suivante:

$$H \begin{bmatrix} vect(\Delta Y_1) \\ vect(\Delta Y_2) \\ vect(\Delta Y_3) \\ vect(\Delta P_1) \\ vect(\Delta P_2) \\ vect(\Delta P_3) \\ vect(\Delta \bar{L}_1) \\ vect(\Delta \bar{L}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ vect(M_7) \\ vect(M_8) \end{bmatrix} \quad (3.210)$$

A l'issue de ce développement, nous résumons sous forme d'étapes l'algorithme de résolution général :

Etape 0

Mise en équation (3.207) et par la suite l'établissement de la matrice H du système algébrique (3.210)

Etape 1

Initialiser l'algorithme par $\bar{L}_1^0, \bar{L}_2^0$

Etape 2

Résoudre les deux premières équations de Lyapunov du système algébrique (3.205).

Etape 3

Résoudre le système algébrique (3.210) et extraire les variations $\Delta \bar{L}_1, \Delta \bar{L}_2$.

Etape 4

Evaluer le critère (3.204) à la solution courante. Si le test d'arrêt est satisfait, fin de calcul itératif, si non aller à l'étape 5.

Etape 5

Actualiser les paramètres d'optimisation:

$$\bar{L}_1 \leftarrow \bar{L}_1 + \Delta \bar{L}_1 \quad \bar{L}_2 \leftarrow \bar{L}_2 + \Delta \bar{L}_2$$

aller à l'étape 2 ■

Dans cet algorithme, l'initialisation doit assurer une solution stabilisante et que cette propriété doit être également maintenue au cours du calcul itératif.

Exemple d'illustration

Le système étudié en simulation numérique pour montrer la faisabilité de cette approche est représenté par la figure ci-dessous :

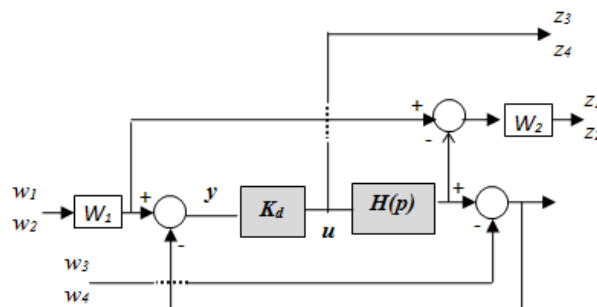


Figure 3.10 : Schéma fonctionnel

Le procédé à contrôler est donné par sa représentation d'état $H(p)$ et les pondérations W_1 et W_2 sont données par :

$$H(p) \leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad W_1 \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|cc} -1 & 10 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad W_2 = \text{Diag}(10)$$

Les gains des contrôleurs décentralisés sont les suivants:

$$\begin{cases} \bar{F}_1 = F_2^1 = [0.3872 & 0.0371 & -0.3712] \\ \bar{F}_2 = F_2^2 = [0.0371 & 0.2523 & -0.1099] \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{L}_1 = [1.5621 & -0.1827 & 10.6540]^T \\ \bar{L}_2 = [0.4073 & -0.1948 & 1.6307]^T \end{cases}$$

F_2^1 et F_2^2 résultent du partitionnement de F_2 , gain du gain de retour d'état du contrôleur centralisé. Les gains $\bar{L}_1$ et $\bar{L}_2$ des contrôleurs-observateurs ont été obtenus à partir des conditions initiales arbitraires, et l'algorithme a convergé au bout d'une dizaine d'itérations comme le montre la figure 3.11. Le test d'arrêt a été choisi lorsque la différence entre deux valeurs successives du critère est inférieure à 10^{-8} .

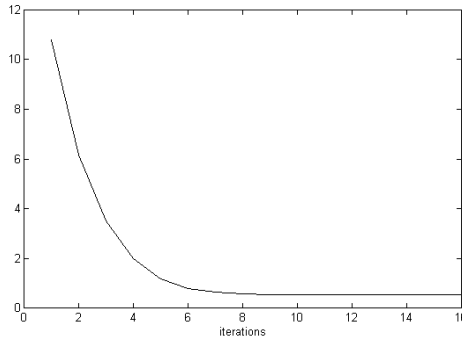


Figure 3.11 : Evolution du critère d'optimisation

Il convient de préciser que l'initialisation arbitraire est une étape critique qui peut donner lieu à plusieurs tentatives avant de parvenir à une solution stabilisante. Toutefois des recommandations ont été formulées dans [17] permettant d'améliorer les conditions de convergence.

En conclusion générale, la méthodologie développée dans ce paragraphe est mise au point essentiellement en deux étapes. Dans la première étape on calcule les paramètres du contrôleur centralisé par l'approche $\mathcal{H}_2$. Dans la deuxième étape, on calcule uniquement les paramètres $\bar{L}_i$ pour $i = 1, 2$. Les gains de retour d'état $\bar{F}_i$ pour $i = 1, 2$ sont imposés judicieusement. Nous avons ainsi réduit considérablement la taille du problème en termes de paramètres à optimiser sans altérer la stabilité du système en boucle fermée. Précisons cependant que le contrôleur ainsi obtenu est sous-optimal.

Sur l'aspect numérique, la méthode de Beseler semble convenir pour la résolution des équations algébriques couplées. Les conditions de convergence pourraient être améliorées par une initialisation adéquate et par une meilleure accélération de la convergence dans la recherche de l'optimum. En revanche, la mise en équation effectuée dans l'étape 0, nécessite un développement algébrique important et celui-ci augmente avec le nombre de blocs, c'est-à-dire avec N .

Comme méthode alternative, nous proposons dans le paragraphe suivant une autre démarche basée sur l'approche des LMIs dont nous apprécierons sûrement son apport.

3.10.7.5 Synthèse $\mathcal{H}_2$ décentralisée par LMI

Le point de départ de l'approche proposée dans ce paragraphe est le critère d'optimisation (3.201) traduit par le critère (3.202) sous la contrainte (3.203). En utilisant la caractérisation de la norme $\mathcal{H}_2$ par LMI et d'après le théorème 1.1 énoncé dans le chapitre 1, le problème de la détermination optimale du gain $\bar{L}$ optimal peut être formulé comme un problème d'optimisation sous contrainte d'inégalités matricielles. En effet, nous avons $\|Q_d\|_2^2 < \mu^2$ s'il existe une matrice Y symétrique définie positive telle que :

$$\begin{aligned} \text{Trace}(\bar{F}Y\bar{F}^T) &< \mu^2 \\ \bar{A}_L Y + Y\bar{A}_L^T + (\hat{L} - \bar{L})(\hat{L} - \bar{L})^T &< 0 \end{aligned} \quad (3.211)$$

La pré multiplication et post multiplication de cette dernière inégalité par $W = Y^{-1}$ conduit à l'inégalité équivalente suivante :

$$W\bar{A}_L + \bar{A}_L^T W + W(\hat{L} - \bar{L})(\hat{L} - \bar{L})^T W < 0$$

En utilisant le complément de Schur [23] à l'inégalité ci-dessus, nous avons alors:

$$\begin{bmatrix} W\bar{A} + \bar{A}^T W - W\bar{L}\bar{C} - \bar{C}^T \bar{L}^T W & W\hat{L} - W\bar{L} \\ \hat{L}^T W - \bar{L}^T W & -I \end{bmatrix} < 0$$

Par ailleurs, considérons une matrice $M = M^T > 0$ telle que :

$$\text{Trace}(M) < \text{Trace}(\bar{F}Y\bar{F}^T) = \text{Trace}(\bar{F}W^{-1}\bar{F}^T)$$

soit : $M - \bar{F}W^{-1}\bar{F}^T > 0$. En utilisant de nouveau le complément de Schur, nous avons alors :

$$\begin{bmatrix} M & \bar{F} \\ \bar{F}^T & W \end{bmatrix} > 0$$

En résumé, le problème d'optimisation consiste en la détermination des matrices $W = W^T > 0$, $M = M^T > 0$ et $\bar{L}$, solutions des conditions suivantes:

$$\begin{aligned} \text{Trace}(M) &< \mu^2 \\ \begin{bmatrix} M & \bar{F} \\ \bar{F}^T & W \end{bmatrix} &> 0 \\ \begin{bmatrix} W\bar{A} + \bar{A}^T W - W\bar{L}\bar{C} - \bar{C}^T \bar{L}^T W & W\hat{L} - W\bar{L} \\ \hat{L}^T W - \bar{L}^T W & -I \end{bmatrix} &< 0 \end{aligned} \quad (3.212)$$

Cette dernière inégalité est non linéaire à cause de la présence du terme $W\bar{L}$. Le changement de variable classique $R = W\bar{L}$ permet de linéariser cette inégalité et transformer ainsi le problème BMI (3.212), non convexe, en un problème LMI convexe :

$$\begin{aligned} \text{Trace}(M) &< \mu^2 \\ \begin{bmatrix} M & \bar{F} \\ \bar{F}^T & W \end{bmatrix} &> 0 \\ \begin{bmatrix} W\bar{A} + \bar{A}^T W - R\bar{C} - \bar{C}^T R^T & W\hat{L} - R \\ \hat{L}^T W - R^T & -I \end{bmatrix} &< 0 \end{aligned} \quad (3.213)$$

En notant respectivement par R^* et W^* les solutions optimales découlant de (3.213), nous pouvons en déduire le gain optimal $\bar{L}$ recherché par $\bar{L}^* = (W^*)^{-1} R^*$. Cependant, compte tenu de la structure diagonale de $\bar{L}$, cette dernière relation n'est pas applicable dans ces conditions.

Afin de contourner cette difficulté, nous imposons la structure diagonale par blocs pour les matrices R et W :

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix}, \quad (3.214)$$

où R_1, R_2, W_1 et W_2 sont des matrices symétriques définies positives de dimensions appropriées desquelles résultent les gains optimaux :

$$\bar{L}_1^* = (W_1^*)^{-1} R_1^* \quad \bar{L}_2^* = (W_2^*)^{-1} R_2^* \quad (3.215)$$

Exemple

Afin d'illustrer notre méthodologie, nous dressons le tableau comparatif ci-dessous. Le système considéré est celui de [40] où la méthode retenue est semblable à celle proposée dans le paragraphe précédent est dans laquelle les paramètres $\bar{F}_i$ et $\bar{L}_i$ pour $i = 1, 2$ des contrôleurs décentralisés ont été optimisés.

Méthode de résolution	Norme $\mathcal{H}_2$ de T_{wz}^c Contrôle centralisé	Norme $\mathcal{H}_2$ de T_{wz}^d Contrôle décentralisé
Méthode de [40]	458.19	489.39
LMI		489.77

Indépendamment de la méthode de résolution, la différence entre les normes $\mathcal{H}_2$ des transferts T_{wz}^c et de T_{wz}^d en boucle fermée s'explique par le "prix à payer" pour décentraliser la loi de commande. Dans notre cas, seuls les paramètres $\bar{L}_i$ pour $i = 1, 2$ du contrôleur décentralisé qui ont été optimisés et déterminés par un effort calculatoire considérablement réduit en comparaison avec celui de [40] ou celui du paragraphe précédent.

3.10.7.6 Synthèse $\mathcal{H}_\infty$ décentralisée par LMI

Il s'agit ici de considérer le problème P2 en proposant une méthodologie basée sur la technique LMI. Comme pour la synthèse présentée dans le paragraphe 3.10.7.1, le point de départ est la minimisation de la norme de du transfert Q_d par rapport aux paramètres $\bar{F}_i$ et $\bar{L}_i$ pour $i = 1, 2$ au sens de la norme $\mathcal{H}_\infty$. Dans le cas $\mathcal{H}_\infty$, la paramétrisation Q_d est donnée par (3.198) et le contrôleur décentralisé est donné par (Voir annexe 3 pour plus de détail) :

$$C_\infty(p) \leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty - B_2 \hat{F} - \bar{L}_1 C_{21} & 0 & \bar{L}_1 & 0 \\ 0 & A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty - B_2 \hat{F} - \bar{L}_2 C_{22} & 0 & \bar{L}_2 \\ \hline -\bar{F}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{F}_2 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (3.216)$$

Tous les autres paramètres dans (3.216) gardent les définitions (3.198). Dans la suite, nous faisons le même choix licite pour les gains de retour $\bar{F}_i$ pour $i = 1, 2$, à savoir :

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_\infty^1 \\ F_\infty^2 \end{bmatrix} \quad (3.217)$$

où F_∞^1 et F_∞^2 résultent du partitionnement de F_∞ , gain de retour d'état dans le cas de la synthèse $\mathcal{H}_\infty$ centralisée. La paramétrisation Q_d se réduit à :

$$Q_d \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} \bar{A}_L & \hat{L} - \bar{L} \\ \hline \bar{F} & 0 \end{array} \right]$$

Par ailleurs, comme l'optimisation du transfert T_{wz}^d est équivalente à l'optimisation de Q_d par rapport aux paramètres $\bar{L}_i$ pour $i = 1, 2$, nous avons le résultat suivant d'après le Lemme Borné Réel : $\|Q_d\|_\infty < \gamma$, où $\gamma > 0$, est un paramètre prédéfini, si et seulement s'il existe une matrice $Z = Z^T > 0$ telle que:

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_L^T Z + Z \bar{A}_L & Z(\hat{L} - \bar{L}) & \bar{F}^T \\ (\hat{L} - \bar{L})^T Z & -\gamma I & 0 \\ \bar{F} & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}^T Z + Z \bar{A} - Z \bar{L} \bar{C} - \bar{C}^T \bar{L}^T Z & Z \hat{L} - Z \bar{L} & \bar{F}^T \\ \hat{L}^T Z - \bar{L}^T Z & -\gamma I & 0 \\ \bar{F} & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.218)$$

Notons au passage que le paramètre γ n'est pas forcément le même que celui du cas $\mathcal{H}_\infty$ centralisé. Notons également que l'inégalité (3.218) n'est pas linéaire par rapport aux paramètres de décision Z et $\bar{L}$. Grâce au changement de variable $S = Z \bar{L}$, cette inégalité devient linéaire et donc peut être résolue facilement avec les solveurs LMIs disponibles. Enfin, en raison de la structure diagonale par blocs de $\bar{L}$, nous cherchons S et Z sous la forme :

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{bmatrix}, \quad (3.219)$$

où S_1, S_2, Z_1 et Z_2 sont des matrices symétriques définies positives de dimensions appropriées desquelles résultent les gains optimaux :

$$\bar{L}_1^* = (Z_1^*)^{-1} S_1^* \quad \bar{L}_2^* = (Z_2^*)^{-1} S_2^* \quad (3.220)$$

3.11 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présentés les principaux résultats de la synthèse $\mathcal{H}_2 \mathcal{H}_\infty$ à la lumière des LMIs aussi bien dans le contexte centralisé que décentralisé. Visiblement cet outil a donné un second souffle à synthèse classique $\mathcal{H}_2 \mathcal{H}_\infty$.

Nous avons souligné la contribution de cet outil à la résolution de certains problèmes de la commande robuste réputés difficiles comme celui de la contrainte d'ordre sur le contrôleur ou le placement de pôles dans une région de performance, la synthèse mixte, etc. Nous avons également apportés un certain éclairage sur les méthodologies proposées en les accompagnant par des algorithmes à mettre en place, ce qui facilite leur résolution numérique.

Qu'il soit dans le contexte centralisé ou décentralisé, certain ou incertain, un reproche que l'on fait aux contrôleurs issus de ces méthodes de synthèse est leur grande taille qui peuvent être contraignante pour leur implantation. Le chapitre 4 suivant aborde le problème de la réduction optimale des modèles revisité à la lumière des LMIs.

Chapitre 4
La réduction de modèle à la
lumière des Inégalités
Matricielles Linéaires

Chapitre 4

La réduction de modèle à la lumière des Inégalités Matricielles Linéaires

4.1 Introduction

En raison des exigences de précision de l'ingénierie des systèmes complexes, des modèles d'ordres élevés sont souvent nécessaires pour représenter les systèmes réels. Il en résulte, pour la mise en œuvre de régulateurs basés sur les modèles d'ordres élevés, une tâche qui peut être très coûteuse en capacité de calcul. En effet, les méthodes avancées de synthèse de correcteurs, telles que LQ, LQG, la commande robuste $\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_\infty$ ou la synthèse convexe produisent généralement des correcteurs ayant un ordre comparable à celui du système. Dans le contexte de la commande robuste, l'ordre d'un système peut se retrouver éventuellement augmenté par l'introduction des pondérations ou fonctions poids pour tenir compte de certaines performances de robustesse et de stabilité. En pratique, des régulateurs d'ordres réduits sont souvent exigés pour réduire la redondance dynamique et faciliter l'implantation pratique. Par conséquent, la réduction de modèle joue un rôle fondamental dans la conception des commandes pour les systèmes dynamiques de grande dimension.

Quatre stratégies peuvent être envisagées dans le but d'obtenir des régulateurs d'ordres réduits comme il est illustré sur la figure ci-dessous :

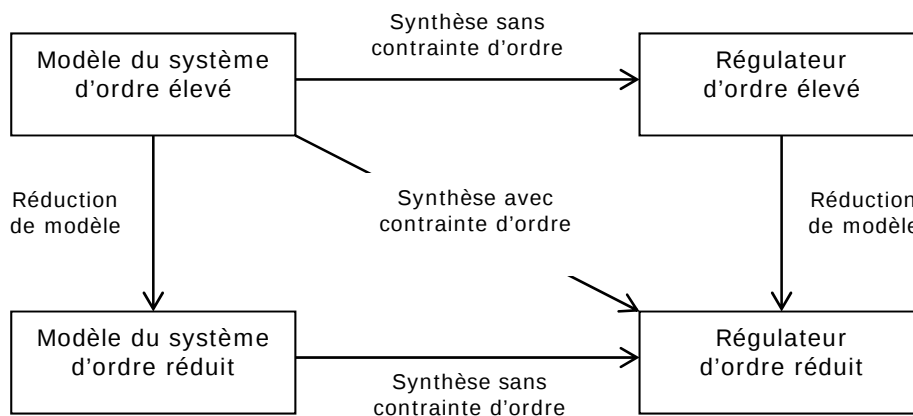


Figure 4.1 : schémas de réduction de modèle

- Considérer un régulateur d'ordre fixe lors de sa conception sans faire appel aux techniques de réduction. C'est l'approche directe ou de la boucle fermée.
- Réduire le modèle du système à commander et concevoir un régulateur en se basant sur le modèle réduit ainsi obtenu,
- Maintenir l'ordre du modèle du système à commander et réduire ensuite l'ordre du régulateur ,
- Considérer les deux dernières stratégies à la fois.

Déjà, nous pouvons constater d'après la figure ci-dessus qu'il y'a deux orientations possibles : une orientation qui se base sur la réduction de modèle en boucle ouverte pour aboutir à un régulateur d'ordre réduit et une autre qui se base sur la réduction lors de sa conception en boucle fermée.

Les procédures en boucle ouverte ne seront réellement évaluées qu'une fois la boucle fermée est réalisée et évaluer le comportement réel du régulateur. Les procédures directes sont importantes puisqu'à la différence des deux autres approches, elles permettent au concepteur d'imposer non seulement une contrainte de degré à la solution mais également exiger un certain niveau de performance.

Dans la littérature, il existe des techniques très répandues dans le domaine de la réduction de l'ordre des modèles dynamiques dont la méthode de troncature équilibrée [151], et plus récemment les méthodes optimales de réduction de modèle. Parmi ces dernières, celles qui sont basées sur la norme $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$ comme mesure pour l'erreur d'approximation faisant appel aux techniques des LMIs. Autres critères d'évaluation qu'on trouve dans la littérature consacrée au problème de la réduction de modèle, on cite v-gap metric [24],[134], et [82].

Dans la troisième stratégie de la figure 4.1, le régulateur d'ordre réduit permet de garantir les propriétés de robustesse quand il est appliqué au système réel. Cependant imposer une contrainte sur l'ordre du correcteur lors de la phase de synthèse conduit à un problème, certes difficile à résoudre, mais qui peut être traité par des méthodes heuristiques disponibles dans la littérature. En revanche, la différence d'ordre entre un régulateur d'ordre complet et d'ordre réduit n'est pas généralement très significative.

Les méthodes de réduction des systèmes complexes que nous présentons dans ce chapitre partent de l'hypothèse qu'un modèle mathématique linéaire donnant une description détaillée du processus est connu. Le but recherché, par une procédure d'approximation est alors de déterminer un autre modèle linéaire de dimension inférieure à celle du précédent qui soit une représentation satisfaisante du système. De même, partant d'un régulateur d'ordre élevé, on peut appliquer ces mêmes méthodes pour obtenir un régulateur d'ordre réduit.

Dans ce chapitre, seront tout d'abord décrites les principales techniques actuelles de réduction de modèle en boucle ouverte, c'est-à-dire celles dont le critère d'évaluation ne fait intervenir que le système à réduire et le système réduit. Des méthodes de réduction du correcteur de type "boucle fermée", c'est-à-dire prenant en compte cette particularité, seront finalement présentées.

Nous n'avons pas l'ambition de dresser une liste exhaustive des méthodes de réduction proposées dans la littérature. Nous renvoyons le lecteur aux références suivantes qui abordent la problème de la réduction par des méthodes qui ne se basent pas sur l'approche LMI [137],[60].

L'objectif de ce chapitre est double. Nous avons accordé une attention particulière aux techniques récentes de réduction sur lesquelles le cadre LMI apporte un nouvel éclairage. Notre apport personnel ne se limitera pas ici à la présentation des nouvelles approches de résolution de réduction décrites dans la littérature, mais nous nous sommes également attachés à donner un éclairage personnel sur ces nouvelles méthodes. Ensuite, nous présenterons dans le chapitre 5, consacré aux applications, comment nous pouvons tirer profit de ces méthodes pour réduire l'ordre des lois de commande proposées pour le contrôle d'une colonne binaire de distillation.

4.2 Réduction de "type boucle ouverte"

Elle consiste à remplacer un modèle initial par un modèle de taille plus petite, qui conserve certaines des caractéristiques les plus importantes du système représenté. Ce sont les premières méthodes de réduction apparues dans la littérature. Les techniques mises en œuvre ainsi que

leurs propriétés sont maintenant bien connues.

Nous allons d'abord énoncer le problème de réduction de modèle. Considérons un système $G(s)$ linéaire invariant dans le temps (LTI) de représentation d'état minimale :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

Le problème de réduction de modèle consiste à déterminer une représentation d'état réduite :

$$\begin{cases} \dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + B_r u(t) \\ y_r(t) = C_r x_r(t) + D_r u(t) \end{cases} \quad (4.2)$$

où $A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $B_r \in \mathbb{R}^{r \times m}$, $C_r \in \mathbb{R}^{p \times r}$ et $D_r \in \mathbb{R}^{p \times m}$ avec $r < n$, de fonction de transfert $G_r(s)$ de manière à ce que le comportement du modèle réduit soit aussi proche que possible de celui du modèle original selon un certain critère à définir.

4.2.1 Réduction modale par agrégation

Il s'agit d'une approche développée dans les années 70 qui se donne pour but de conserver les modes jugés les plus importants du système à réduire. Supposons que le système soit stable. Pour simplifier la présentation de la méthode on considérera tout d'abord le cas d'un système monovarié où la matrice A possède toutes ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ réelles et distinctes.

Par un processus de diagonalisation de la matrice A , le système (4.1) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \Lambda z(t) + \Gamma u(t) \\ y(t) = \Omega z(t) + Du(t) \end{cases} \quad \Lambda = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (4.3)$$

La méthode de réduction par agrégation consiste à ne garder qu'une partie des valeurs propres du système : en général, les modes sont classés suivant l'importance de leur contribution énergétique dans la sortie du système. Un classement peut donc être effectué en ordonnant les contributions par ordre décroissant. Il donne l'ordre préférentiel dans lequel doivent être retenus les modes, et les valeurs propres de plus faible contribution énergétique peuvent alors être éliminées.

D'autres critères d'élimination des modes peuvent être choisis en fonction du problème. On peut par exemple vouloir éliminer tous les modes en dehors de la bande passante.

L'avantage de la méthode par troncature modale est que les pôles du modèle d'ordre réduit sont exactement ceux du système réel, ce qui peut être un aspect important dans certains cas pratiques (analyse des vibrations et des résonances des systèmes flexibles). Néanmoins, cette approche est assez réductrice, car elle ne prend pas en compte les oscillations provoquées par des modes ayant une grande partie imaginaire; et le comportement transitoire n'est pas totalement pris en compte.

4.2.2 Réduction par troncature des valeurs singulières de Hankel

4.2.2.1 Préliminaires [151]

La méthode de troncature équilibrée a été introduite par Moore [108]. Supposons que le système soit asymptotiquement stable et que sa réalisation (A, B, C, D) soit minimale. Ses Gramiens de commandabilité et d'observabilité sont notés W_c et W_o .

Notons, pour rappel, que les matrices W_c et $W_o \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symétriques et définies positives, sont

solutions des équations de Lyapunov suivantes :

$$\begin{aligned} AW_c + W_c A^T + BB^T &= 0 \\ A^T W_o + W_o A + C^T C &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Une représentation d'état est équilibrée est une représentation pour laquelle les deux Gramiens sont égaux et diagonaux :

$$\tilde{W}_c = \tilde{W}_o = \Sigma = \text{Diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n),$$

avec $\sigma_i > 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ désignant les valeurs singulières de Hankel du système G . Ce sont des invariants par toute transformation de similitude.

La forme équilibrée peut donc être obtenue par un changement de base par une matrice T , qui diagonalise le produit matriciel $W_c W_o$ et telle que les valeurs singulières de Hankel soient classées par ordre décroissant :

$$W_c W_o = T \Sigma^2 T^{-1} \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \dots \geq \sigma_n > 0 \quad (4.5)$$

La représentation d'état équilibrée induite s'obtient en posant $x(t) = T \tilde{x}(t)$. On a alors :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = T^{-1} A T \tilde{x}(t) + T^{-1} B u(t) \\ y(t) = C T \tilde{x}(t) + D u(t) \end{cases} \quad (4.6a)$$

Dans la suite de ce paragraphe nous supposons que le système est mis sous cette forme en posant : $\tilde{A} = T^{-1} A T, \tilde{B} = T^{-1} B, \tilde{C} = C T$.

La $i^{\text{ème}}$ valeur singulière de Hankel reflète le degré de commandabilité et d'observabilité du $i^{\text{ème}}$ état de la forme équilibrée. Plus une valeur singulière de Hankel est faible, moins l'état correspondant en coordonnées équilibrées est simultanément commandable et observable. Ces états à faibles valeurs singulières de Hankel peuvent alors être tronqués.

Soit $r < n$ l'ordre d'approximation choisi. On réalise alors une partition de $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ correspondant à la partition de Σ en deux sous matrices diagonales Σ_1, Σ_2 , délimitées par σ_r . Il en résulte l'état $\tilde{x}(t)$ est partitionné en $\tilde{x}_1(t)$ et $\tilde{x}_2(t)$, où $\tilde{x}_1(t)$ rassemble les r états à conserver et $\tilde{x}_2(t)$ les $(n-r)$ états à éliminer. En organisant les valeurs singulières dans l'ordre croissant $\sigma_1 \geq \sigma_2 \dots \geq \sigma_n > 0$, l'ordre de troncature r peut être choisi lorsque $\frac{\sigma_{r+1}}{\sigma_r} \ll 1$.

La représentation (4.6a) devient alors :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1(t) \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + D u(t) \end{cases} \quad (4.6b)$$

Un résultat fondamental sur la troncature équilibrée est le suivant :

Soit $G(s) \in \mathcal{RH}_\infty$, tel que (4.6a) soit sa réalisation équilibrée, dont le Gramien est donné par :

$$\tilde{W}_c = \tilde{W}_o = \Sigma = \text{Diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \text{Diag}(\Sigma_1, \Sigma_2)$$

Avec :

$$\Sigma_1 = \text{Diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \quad \Sigma_2 = \text{Diag}(\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_n)$$

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_n > 0$$

où σ_i est la $i^{\text{ème}}$ valeur singulière de Hankel. Alors, le modèle réduit, $G_r(s)$, d'ordre r de représentation d'état équilibrée :

$$G_r(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_1 & \tilde{B}_1 \\ \hline \tilde{C}_1 & D \end{array} \right], \quad (4.7)$$

obtenu par troncature est asymptotiquement stable. D'autre part, la norme $\mathcal{H}_\infty$ de l'erreur est majorée par :

$$\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \leq 2 \sum_{i=r+1}^n \sigma_i = 2 \text{Trace}(\Sigma_2) \quad (4.8)$$

et cette borne est atteinte si $r = n - 1$, i.e.,

$$\|G(s) - G_r(s)\|_\infty = 2\sigma_n \quad (4.9)$$

Le choix de r peut être fait a priori ou par le choix d'une borne supérieure pour la différence entre deux valeurs singulières successives de Hankel.

Remarque

Pour les systèmes instables, une première troncature est appliquée en séparant la partie instable du système à réduire. Cette dernière partie est ensuite ajoutée au système réduit. ■

Deux politiques différentes peuvent être conduites, suivant que le régime permanent doit être conservé ou non. Nous allons les exposer successivement avant d'analyser leurs propriétés.

4.2.2.2 Troncature équilibrée directe

La troncature équilibrée consiste à ne garder que les matrices associées à la partie de l'état à conserver. La représentation d'état réduite est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1(t) = \tilde{A}_1 \tilde{x}_1(t) + \tilde{B}_1 u(t) \\ y_1(t) = \tilde{C}_1 \tilde{x}_1(t) + D u(t) \end{cases} \quad (4.10)$$

L'inconvénient majeur de cette technique est qu'elle ne conserve pas le gain statique.

4.2.2.3 Troncature équilibrée avec conservation du gain statique

Le modèle réduit est obtenu en annulant la dérivée de $\tilde{x}_2(t)$, d'où :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1(t) = (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_{12} \tilde{A}_{22}^{-1} \tilde{A}_{21}) \tilde{x}_1(t) + (\tilde{B}_1 - \tilde{A}_{12} \tilde{A}_{22}^{-1} \tilde{B}_2) u(t) \\ y_1(t) = (\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2 \tilde{A}_{22}^{-1} \tilde{A}_{21}) \tilde{x}_1(t) + (D - \tilde{C}_2 \tilde{A}_{22}^{-1} \tilde{B}_2) u(t) \end{cases} \quad (4.11)$$

Ces formules peuvent aisément être établies en utilisant par exemple la notion de la perturbation singulière équilibrée [82]. Ainsi le gain statique est cette fois préservé mais il est à noter que la matrice $\tilde{A}_{22}$ doit être inversible.

Pour la plupart des systèmes dynamiques, les valeurs singulières de Hankel diminuent très rapidement. Par conséquent, la troncature des petites valeurs singulières de Hankel n'a pas un impact significatif sur la dynamique du système. Cependant, cette approche est souvent

appropriée seulement pour des systèmes à petite ou moyenne taille parce que les équations de Lyapunov demandent beaucoup d'efforts de calcul. Une étude comparative de ces techniques peut être trouvée dans [71], [70].

Dans certains cas, l'exigence de précision de l'approximation pour certains intervalles dans le domaine fréquentiel (intervalles de fréquence de fonctionnement) est plus importante que sur d'autres. Pour faire face à ce problème, la troncature équilibrée a été étendue par l'introduction de fonctions de pondération. Néanmoins, le choix des fonctions de pondération appropriées peut être assez difficile et demande une certaine expertise.

4.2.2.4 Propriétés de la troncature équilibrée [151]

La propriété la plus importante des deux techniques présentées ci-dessus est que chacune donne un système réduit asymptotiquement stable si σ_r est strictement supérieure à σ_{r-1} .

D'autre part, la norme $\mathcal{H}_\infty$ de l'erreur d'estimation est bornée à priori, c'est-à-dire qu'une borne supérieure de $\|G(s) - G_r(s)\|_\infty$ est connue avant d'effectuer la réduction elle-même. Pour les deux méthodes proposées, elle est donnée par deux fois la somme des valeurs singulières de Σ_2 , où Σ_2 résulte du partitionnement de Σ sous la forme $Diag \Sigma = Diag(\Sigma_1, \Sigma_2)$:

$$\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \leq 2 \sum_{i=r+1}^n \sigma_i = 2 Trace(\Sigma_2) \quad (4.12)$$

Dans le cas où certaines valeurs singulières de Hankel ont une multiplicité supérieure à un, Glover [61] a montré que chacune d'entre elles ne devait être comptée qu'une seule fois dans la somme précédente, ce qui diminue d'autant la borne sur l'erreur. Cette propriété est très importante puisque la valeur de $(2 Trace(\Sigma_2))$ fournit une indication sur l'efficacité de la méthode pour un problème donné.

Par ailleurs, il est prouvé que l'erreur de réduction ne peut jamais être rendue plus faible que la première valeur singulière de Hankel tronquée : $\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \geq \sigma_{r+1}$. De même, il est prouvé que l'erreur de réduction ne peut jamais être rendue plus faible que la première valeur singulière de Hankel tronquée : $\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \geq \sigma_{r+1}$.

Ces méthodes présentent l'avantage d'être très systématiques et donc d'exiger peu d'effort à l'utilisateur qui a pour seul moyen d'action le choix du seuil au-dessous duquel les valeurs singulières de Hankel seront écartées. Ce sont des techniques de type boucle ouverte recommandées pour l'initialisation les algorithmes itératifs pour le calcul des modèles réduits basées sur les techniques des LMIs. La méthode de troncature équilibrée ont été une grande source d'inspiration pour les techniques de réduction de type boucle fermée qui seront exposées au paragraphe §4.3.2.

Notons enfin, que ce type de méthode peut être envisagé pour obtenir un modèle réduit du système commandé et/ou du régulateur synthétisé selon le chemin suivi de la figure 4.1.

4.2.3 Réduction optimale

Soit $G(s) = (A, B, C, D)$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une représentation d'état d'un système asymptotiquement stable dont l'ordre doit être réduit. Le problème de réduction optimale selon la norme $\|\bullet\|_\alpha$ consiste à

chercher une fonction de transfert asymptotiquement stable $G_r(s) = (A_r, B_r, C_r, D_r)$, $A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$, de degré $r < n$, solution du problème d'optimisation suivant :

$$\underset{G_r(s)}{\text{Min}} \|G(s) - G_r(s)\|_\alpha \quad (4.13)$$

Les cas $\alpha = H$ (norme de Hankel), $\alpha = \infty$ (norme $\mathcal{H}_\infty$) et $\alpha = 2$ (norme $\mathcal{H}_2$) vont être abordés dans les paragraphes qui suivent.

Une représentation d'état de $G(s) - G_r(s) = (A_\varepsilon, B_\varepsilon, C_\varepsilon, D_\varepsilon)$ se déduit aisément des représentations d'état de $G(s)$ et $G_r(s)$ définies respectivement par (4.1) et (4.2). Cette représentation s'obtient en écrivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_\varepsilon(t) &= \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_r(t) \end{bmatrix} = A_\varepsilon x_\varepsilon(t) + B_\varepsilon u(t) \\ e(t) &= y(t) - y_r(t) = C_\varepsilon x_\varepsilon + D_\varepsilon u(t) \end{aligned}$$

$$G(s) - G_r(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A_\varepsilon & B_\varepsilon \\ \hline C_\varepsilon & D_\varepsilon \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A & 0 & B \\ 0 & A_r & B_r \\ \hline C & -C_r & D - D_r \end{array} \right] \quad (4.14)$$

4.2.3.1 Réduction optimale selon la norme de Hankel

C'est la seule méthode optimale pour laquelle il existe une théorie bien développée et une procédure numérique non itérative permettant de caractériser et de calculer le modèle $G_r(s)$ cherché [61]. Cependant, la norme de Hankel n'a pas de signification physique directe. Nous allons donc rapidement passer en revue cette méthode. Son importance est due au fait qu'il existe une borne à priori sur la norme $\mathcal{H}_\infty$ de l'erreur, en termes de valeurs singulières de Hankel, et que cette borne est deux fois plus faible que celle obtenue par troncature équilibrée (4.12). Elle sert de source d'inspiration à la résolution d'autres problèmes (réduction optimale selon la norme $\mathcal{H}_\infty$ par exemple).

4.2.3.2 Réduction optimale selon la norme $\mathcal{H}_\infty$

Contrairement à la réduction optimale selon la norme de Hankel, on ne sait pas résoudre de manière exacte ce problème. Plusieurs approches permettent cependant d'obtenir une solution sous-optimale. Les premiers travaux sur ce sujet dus Kavranoğlu et Bettayeb [90-a], s'inspirent des propriétés bien connues de la réduction optimale selon la norme de Hankel. La seconde passe par la résolution des LMIs [81], [91], [80], [65].

4.2.4 Réduction optimale selon la norme $\mathcal{H}_\infty$ par l'approche des LMIs

Récemment, il y a des approches fondées sur la métrique de distance [24] ou la minimisation de la norme $\mathcal{H}_2$ ou de la norme $\mathcal{H}_\infty$ via des LMIs.

Le critère à minimiser est la norme $\mathcal{H}_2$ ou la norme $\mathcal{H}_\infty$ de l'erreur de réduction. Ainsi, cette approche donne une plus petite erreur d'approximation que les méthodes précédentes [104]. Le problème de réduction de modèle est formulé comme un problème d'optimisation via LMI avec une contrainte d'ordre. De ce fait, la présence de la contrainte d'ordre, conduit à un problème d'optimisation non convexe et donc difficile à résoudre. Beaucoup de recherches ont été faites

pour surmonter cette difficulté. Cette difficulté est prévisible compte tenu que les méthodes de réduction optimale selon les normes $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ s'inspirent fortement des méthodes de synthèse des régulateurs $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ abordée dans le chapitre 3 précédent.

Le formalisme LMI permet d'apporter un nouvel éclairage sur le problème de réduction optimal. Globalement, on peut distinguer deux méthodes basées sur ce formalisme. Celles qui tendent de résoudre un système d'inégalités matricielles de type BMI auquel le problème de la réduction d'ordre a abouti, et celles, qui tendent de résoudre un système d'inégalités matricielles linéaires mais augmenté d'une contrainte de rang. Dans les deux cas, la bilinéarité et la contrainte d'ordre font que le problème de réduction d'ordre optimal est un problème difficile.

Afin de montrer que le problème de la réduction optimale est équivalent de point de vue formulation à un problème de synthèse standard $\mathcal{H}_\infty$ avec contrainte d'ordre particulier, nous proposons de représenter le système $G(s) - G_r(s)$ sous la forme de la figure 4.2 ci-dessous. Les paramètres du « modèle augmenté particulier » sont définis par [80], [65] :

$$P(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] =: \left[\begin{array}{c|cc} A & B & 0 \\ \hline C & D & -I \\ 0 & I & 0 \end{array} \right] \text{ et } K(s) = G_r(s) \quad (4.15)$$

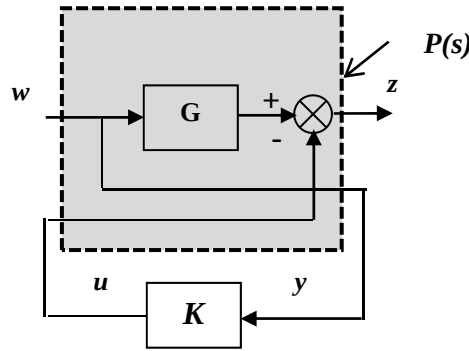


Figure 4.2 : Equivalence avec un problème de synthèse $\mathcal{H}_\infty$

Il est donc possible d'appliquer des résultats de synthèse $\mathcal{H}_\infty$ présentés dans le chapitre 3 pour obtenir une formulation LMI au problème de la réduction optimale. Cependant, de manière à retracer l'historique des principaux algorithmes proposés sur le sujet, nous allons reprendre dans 4.2.4.2 la démarche suivie pour la démonstration du théorème 3.3 du chapitre 3.

4.2.4.1 Passage à une formulation par deux inégalités matricielles linéaires

Le lemme 2.1 du chapitre 2 (LBR : Lemme Borné Réel) nous permet d'établir que l'existence d'un système d'ordre réduit $G_r(s)$ tel que $\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \leq \gamma$ est équivalente à l'existence d'une matrice P symétrique définie positive telle que :

$$\begin{bmatrix} A_\varepsilon^T P + P A_\varepsilon & P B_\varepsilon & C_\varepsilon^T \\ (P B_\varepsilon)^T & -\gamma I & D_\varepsilon^T \\ C_\varepsilon & D_\varepsilon & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.16)$$

où les matrices $A_\varepsilon, B_\varepsilon, C_\varepsilon$ et D_ε sont définies par (4.14).

Cette inégalité est bilinéaire en les variables P, A_r, B_r et linéaire en C_r et D_r . Si A_r et B_r

étaient fixés à l'avance, l'inégalité matricielle bilinéaire (4.17) devenait une LMI en P , C_r et D_r . Le problème de réduction optimale selon la norme $\mathcal{H}_\infty$ est alors équivalent au problème LMI suivant :

$$\underset{\gamma, P=P^T, C_r, D_r}{\text{Min}} \quad \gamma \text{ sous la contrainte (4.16)} \quad (4.17)$$

Ce problème revient à considérer que les modes du système d'ordre réduit sont connus (ils ont pu être obtenus par agrégation, troncature équilibrée, ...etc.). Dans le cas monovarié, ceci correspond à optimiser le numérateur de sa fonction de transfert afin d'obtenir la plus petite norme $\mathcal{H}_\infty$ possible de l'erreur.

Un autre algorithme permettant d'améliorer la norme $\mathcal{H}_\infty$ de l'erreur de réduction obtenue par la première approche dont la convergence n'a toutefois pas été prouvée en particulier pour les modèles d'ordre élevé est décrit par la procédure suivante.

Dans le cas général, nous avons vu au chapitre 2 sur le traitement des BMIs que l'idée la plus simple est d'aborder une BMI comme deux problèmes LMI consécutifs, et à itérer jusqu'à ce qu'un certain critère de convergence soit atteint. Une solution sous-optimale est alors obtenue. De plus, une décomposition des contraintes BMI permet souvent de faire apparaître des sous-blocs linéaires en certaines variables, qui peuvent donc être optimisées à chaque étape, ce qui améliore d'autant la convergence de l'algorithme. Plus précisément, partitionnons la matrice P de façon compatible avec A_ε :

$$P = \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & R \end{bmatrix} \text{ avec } S = S^T \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ et } R = R^T \in \mathbb{R}^{r \times r}$$

L'inégalité (4.16) se réécrit sous la forme (4.18) ci-dessous où les variables de décision sont représentées en gras :

$$\begin{bmatrix} SA + A^T S & NA_r + A^T N & SB + NB_r & C^T \\ (*)^T & RA_r + A_r^T R & N^T B + RB_r & -C_r^T \\ (*)^T & (*)^T & -\gamma I & D^T - D_r^T \\ (*)^T & (*)^T & (*)^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.18)$$

Un premier algorithme proposé par Helmersson [81] est le suivant :

Algorithme 4.1 :

Etape 1 : Réduire $G(s)$ par réduction optimale, selon la norme de Hankel par exemple.

Etape 2 : En gardant A_r et B_r constants, minimiser γ par rapport à P, C_r, D_r sous la contrainte (4.18).

Etape 3 : En gardant S et R constants, minimiser γ par rapport à S, A_r, B_r, C_r, D_r sous la contrainte (4.18).

Etape 4 : Répéter **Etape 2** et **Etape 3** jusqu'à ce que la solution converge suivant un critère donné. ■

4.2.4.2 Passage à une formulation par inégalités matricielles avec contrainte d'ordre

Les améliorations de cet algorithme sont fondées sur l'élimination de variables dans la formulation matricielle [80].

L'étape 2 et l'étape 3 de l'algorithme 4.1 peuvent tout d'abord être modifiées de manière à

éliminer les variables A_r, B_r, C_r et D_r de (4.16). Dans ce but, réécrivons celle-ci sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}^T P + P \mathcal{A} & P \mathcal{B}_1 & \mathcal{C}_1^T \\ \mathcal{B}_1^T P & -\gamma I & D^T \\ \mathcal{C}_1 & D & -\gamma I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{C}^T \\ \mathcal{D}_{21}^T \\ 0 \end{bmatrix} \mathcal{K}^T \begin{bmatrix} \mathcal{B}^T P & 0 & \mathcal{D}_{12}^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \mathcal{B} \\ 0 \\ \mathcal{D}_{12} \end{bmatrix} \mathcal{K} \begin{bmatrix} \mathcal{C} & \mathcal{D}_{21} & 0 \end{bmatrix} < 0, \quad (4.19)$$

Avec :

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \triangleq \mathcal{A} + \mathcal{B} \mathcal{K} \mathcal{C} \\ B_\varepsilon &= \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \triangleq \mathcal{B}_1 + \mathcal{B} \mathcal{K} \mathcal{D}_{21} \\ C_\varepsilon &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \triangleq \mathcal{C}_1 + \mathcal{D}_{12} \mathcal{K} \mathcal{C} \\ D_\varepsilon &= D + \begin{bmatrix} 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \triangleq D + \mathcal{D}_{12} \mathcal{K} \mathcal{D}_{21} \\ \mathcal{K} &\triangleq \begin{bmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.20)$$

L'application de la règle d'élimination (2.33) sur (4.19) permet de préciser les conditions de l'existence d'une solution d'ordre r au problème d'optimisation, à savoir l'existence d'une matrice P symétrique définie positive telle que :

$$\mathcal{P}^{\perp T} \Phi \mathcal{P}^{\perp} < 0 \quad (4.21)$$

$$\mathcal{Z}^{\perp T} \Phi \mathcal{Z}^{\perp} < 0 \quad (4.22)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathcal{A}^T P + P \mathcal{A} & P \mathcal{B}_1 & \mathcal{C}_1^T \\ \mathcal{B}_1^T P & -\gamma I & D^T \\ \mathcal{C}_1 & D & -\gamma I \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Avec :

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}^T P & 0 & \mathcal{D}_{12}^T \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$\mathcal{Z} = \begin{bmatrix} \mathcal{C} & \mathcal{D}_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Dans le but de réduire le nombre de variables de décision, écrivons $\mathcal{P}$ peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}^T P & 0 & \mathcal{D}_{12}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

Il vient alors :

$$\mathcal{P}^{\perp} = \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Posons alors :

$$\begin{cases} P = \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & R \end{bmatrix} & P^{-1} = \begin{bmatrix} Z & M \\ M^T & J \end{bmatrix} \text{ avec } S = S^T, Z = Z^T \in \Re^{n \times n} \text{ et } R = R^T, J = J^T \in \Re^{r \times r} \\ P P^{-1} = I \end{cases} \quad (4.26)$$

La relation (4.21) se développe en :

$$\begin{bmatrix} ZA^T + AZ & B \\ B^T & -\gamma I \end{bmatrix} \leq 0,$$

D'autre part (4.25) implique que $\mathcal{Z}^\perp = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$. Ce qui permet de réécrire (4.22) en :

$$\begin{bmatrix} A^T S + SA & C^T \\ C & -\gamma I \end{bmatrix} \leq 0$$

Enfin, P étant une matrice symétrique définie positive, l'application du lemme 2.3 énoncée dans §2.3.5.2, aux variables P et P^{-1} , permet de restreindre le nombre de variables du problème en établissant que (4.26) est équivalente à :

$$\begin{aligned} Z > 0, S > 0 \\ \begin{bmatrix} Z & I \\ I & S \end{bmatrix} &\geq 0 \\ \text{Rang} \begin{bmatrix} Z & I \\ I & S \end{bmatrix} &\leq n + r \end{aligned}$$

Les résultats précédents conduisent enfin aux conditions suivantes que l'on peut retrouver dans [65] sous une forme équivalente qui sera utilisée pour la reconstruction du modèle réduit.

En résumé, le problème de réduction optimale selon la norme $\mathcal{H}_\infty$ à l'ordre r a une solution si et seulement s'il existe deux matrices symétriques Z et S de $\Re^{n \times n}$ satisfaisant le système LMI suivant :

$$\begin{bmatrix} ZA^T + AZ & B \\ B^T & -\gamma I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.27)$$

$$\begin{bmatrix} A^T S + SA & C^T \\ C & -\gamma I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.28)$$

$$\begin{bmatrix} Z & I \\ I & S \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.29)$$

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} Z & I \\ I & S \end{bmatrix} \leq n + r \quad (4.30)$$

Le problème revient donc à nouveau à minimiser un objectif linéaire sous contrainte de rang qui peut donc être abordé par l'une des heuristiques mentionnées au chapitre 3 dans le cadre de la synthèse $\mathcal{H}_\infty$ avec contrainte d'ordre.

Reconstitution du modèle réduit

Une première méthode de nature numérique est inspirée de la méthode proposée pour résoudre le problème de synthèse d'un compensateur d'ordre fixe (§3.6.3 du chapitre 3) dont nous résumons les étapes :

Algorithme 4.2 :

Etape 1

Résoudre le système des inégalités (4.27)..(4.30) en Z et S

Etape 2

Reconstruire une matrice $P = \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & R \end{bmatrix}$

Etape 3

Résoudre (4.19) en $\mathcal{K}$.■

Comme alternative pour obtenir les paramètres du modèle réduit est de considérer une formulation équivalente aux équations (4.27)..(4.30) est donnée ci-dessous. En effet, l'application du lemme de Schur aux inégalités (4.27) et (4.28) conduit à :

$$AZ + ZA^T + \gamma^{-1}BB^T \leq 0$$

$$A^T S + SA + \gamma^{-1}C^T C \leq 0,$$

qui, par multiplication par γ et le changement de variable $X = \gamma Z$ et $Y = \gamma S$, elles deviennent :

$$AX + XA^T + BB^T \leq 0 \quad (4.31)$$

$$A^T Y + YA + C^T C \leq 0 \quad (4.32)$$

X et Y s'interprètent comme étant les Gramiens de commandabilité et d'observabilité dites généralisées liées par une condition de rang alors que dans la troncature équilibrée, ces matrices sont indépendantes l'une de l'autre (§4.2.2.1).

Quant aux relations (4.29) et (4.30), elles s'écrivent par application du lemme de Schur et la prise en compte du précédent changement de variables:

$$\begin{bmatrix} X & \gamma I \\ \gamma I & Y \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.33)$$

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} X & \gamma I \\ \gamma I & Y \end{bmatrix} \leq n + r \quad (4.34)$$

Considérons à présent une représentation d'état équivalente pour le système $G - G_r$ défini par (4.14) :

$$G(s) - G_r(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} \bar{A} + \bar{B}\bar{G}\bar{M} & \bar{D} + \bar{B}\bar{G}\bar{E} \\ \hline \bar{C} + \bar{H}\bar{G}\bar{M} & \bar{F} + \bar{H}\bar{G}\bar{E} \end{array} \right], \quad (4.35)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \bar{A} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \bar{B} = \bar{M} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} & \bar{E} &= \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \bar{C} &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} & \bar{H} &= \begin{bmatrix} -I & 0 \end{bmatrix} & \bar{F} &= D \\
 \bar{G} &= \begin{bmatrix} D_r & C_r \\ B_r & A_r \end{bmatrix} & \bar{D} &= \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Dans [65], le résultat suivant est énoncé :

Il existe des modèles G_r d'ordre $r < n$ tels que $\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \leq \gamma$ si et seulement si les LMIs (4.31).. (4.34) sont satisfaites.

Tous les modèles d'ordre r , solutions au problème (4.31).. (4.34) sont paramétrés :

$$\begin{bmatrix} D_r & C_r \\ B_r & A_r \end{bmatrix} = \hat{G}_1 + \hat{G}_2 L \hat{G}_3, \tag{4.37}$$

où $L \in \Re^{(p+r)(m+n)}$ est une matrice arbitraire vérifiant $\|L\| < 1$, et :

$$\begin{aligned}
 \hat{G}_1 &= (M_1 - Q_{12} Q_{22}^{-1} M_2^T) (M_2 Q_{22}^{-1} M_2^T)^{-1} \\
 \hat{G}_2 &= (-Q_{11} + Q_{12} Q_{22}^{-1} Q_{12}^T - \hat{G}_1 \hat{G}_3 \hat{G}_1^T)^{1/2} \\
 \hat{G}_3 &= (-M_2 Q_{22}^{-1} M_2^T)^{1/2},
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Où :

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_x^2 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_x^2 \end{bmatrix} \\
 Q_{11} &= \begin{bmatrix} -\gamma^2 I & CL_x R_x \\ (CL_x R_x)^T & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_{12} = \begin{bmatrix} CX & D \\ R_x L_x^T A^T & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_{22} = \begin{bmatrix} AX + XA^T + B & B \\ B^T & -I \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

et $R_x \in \Re^{r \times r}$ est une matrice arbitraire définie positive et $L_x \in \Re^{n \times r}$ est une matrice arbitraire vérifiant :

$$L_x L_x^T = X - \gamma^2 Y^{-1} \tag{4.40}$$

La difficulté majeure dans ces algorithmes est la présence des contraintes d'ordre (4.30) et (4.34) qui rend difficile la résolution numérique des systèmes des inégalités matricielles.

Un algorithme itératif dont la convergence vers un optimum global n'est toutefois pas garantie est donné par les étapes suivantes :

Algorithme 4.3 :

Etape 1 : Initialiser par une paire de matrices (X, Y) et une valeur de γ

Etape 2 : résoudre le problème de faisabilité (4.31)..(4.34) en (X, Y) par la technique de la projection alternative (Alternating projection methods) ou par la méthode de la complémentarité conique [126], ou toute méthode disponible à cet effet.

Etape 3 : décroître la valeur de γ et aller à l'étape 2 en utilisant comme conditions initiales la solution (X, Y) obtenue dans l'étape précédente.

Etape 4 : Une fois la convergence est obtenue, on reconstruit le modèle réduit à partir des relations (4.37)..(4.40).

Remarques

- Augmenter la valeur de γ dans l'étape 2 si le problème n'est pas faisable.
- Dans l'étape 1, on peut utiliser pour initialiser l'algorithme pour proposer (X,Y) et γ par la méthode de troncature équilibrée ou la méthode de réduction de Hankel. Dans ce but on fixe un modèle réduit $G_r = (A_r, B_r, C_r, D_r)$ par la méthode de troncature équilibrée par exemple et on résout ensuite en $\bar{Y}$ et γ la LMI suivante en posant :

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} D_r & C_r \\ B_r & A_r \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (\bar{A} + \bar{B}\bar{G}\bar{M})^T \bar{Y} + \bar{Y}(\bar{A} + \bar{B}\bar{G}\bar{M}) & \bar{Y}(\bar{D} + \bar{B}\bar{G}\bar{E}) & (\bar{C} + \bar{H}\bar{G}\bar{M})^T \\ (\bar{D} + \bar{B}\bar{G}\bar{E})^T \bar{Y} & -\gamma I & (\bar{F} + \bar{H}\bar{G}\bar{E}) \\ \bar{C} + \bar{H}\bar{G}\bar{M} & (\bar{F} + \bar{H}\bar{G}\bar{E})^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.41)$$

$$\bar{Y} = \bar{Y}^T > 0$$

Les valeurs initiales (X,Y) sont extraites de $\bar{Y}$ et $\bar{X} = \gamma^2 \bar{Y}$ en les partitionnant sous la forme :

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} X & * \\ * & * \end{bmatrix} \quad \bar{Y} = \begin{bmatrix} Y & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

Il est suggéré de prendre la valeur de γ initiale en respectant la propriété (4.9). ■

4.2.4.3 Passage à une formulation par inégalités matricielles non itératives

Dans le cadre des méthodes non itératives, Il est tout à fait possible de point algorithmique de résoudre le problème en résolvant une seule LMI au lieu de deux LMI comme il est précisé dans l'algorithme ci-dessous.

Pour ce faire, effectuons formellement le changement de base suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + B_r u(t) \\ y_r(t) = C_r x_r(t) + D_r u(t) \end{cases} \xleftrightarrow{x_r = Q \tilde{x}_r} \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_r(t) = \tilde{A}_r \tilde{x}_r(t) + \tilde{B}_r u(t) \\ y_r(t) = \tilde{C}_r \tilde{x}_r(t) + D_r u(t) \end{cases}$$

en posant :

$$\tilde{A}_r = Q^{-1} A_r Q, \quad \tilde{B}_r = Q^{-1} B_r, \quad \tilde{C}_r = C_r Q \quad (4.42)$$

L'inégalité (4.18) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} SA + A^T S & NQ\tilde{A}_r Q^{-1} + A^T N & SB + NQ\tilde{B}_r & C^T \\ (*)^T & \tilde{A}_r Q^{-1} + Q^{-1} \tilde{A}_r^T & N^T B + \tilde{B}_r^T & -Q^{-1} C_r^T \\ (*)^T & (*)^T & -\gamma I & D^T - D_r^T \\ (*)^T & (*)^T & (*)^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

La multiplication à droite et à gauche par $T = \text{Diag}(I, Q, I, I)$, et en posant $\tilde{A} = Q\tilde{A}_r, \tilde{B} = Q\tilde{B}_r$ permet de transformer cette LMI en :

$$\begin{bmatrix} SA + A^T S & N\tilde{A} + A^T NQ & SB + N\tilde{B} & C^T \\ (*)^T & \tilde{A} + \tilde{A}^T & QN^T B + \tilde{B}^T & -\tilde{C}_r^T \\ (*)^T & (*)^T & -\gamma I & D^T - D_r^T \\ (*)^T & (*)^T & (*)^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.43)$$

Par conséquent, le problème revient à minimiser γ sous la contrainte (4.43) par rapport aux variables $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}_r, D_r, S, Q)$ et N , qui est toujours un problème non convexe. Cependant on note que cette inégalité devient linéaire par rapport aux variables $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}_r, D_r, S, Q)$ si N est fixée à priori. Certes en fixant arbitrairement N , on perd par conséquent l'optimalité au détriment de la convexité due au conservatisme introduit par le choix de N .

Notons enfin que la connaissance de $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}_r, D_r, S, Q)$ permet la reconstruction du modèle réduit :

$$\begin{cases} \dot{x}_r(t) = \tilde{A}Q^{-1}x_r(t) + \tilde{B}u(t) \\ y_r(t) = \tilde{C}_rQ^{-1}x_r(t) + D_ru(t) \end{cases} \quad (4.44)$$

Dans la continuité de cette dernière formulation, on considère un cas particulier du problème de réduction d'ordre qui demeure néanmoins intéressant et qui découle des travaux de Yoshio Ebihara et al. [143], dont lesquels la résolution des BMIs n'est pas nécessaire.

En effet, on considère un système $G(s)$ stable et propre i.e appartenant à $\mathcal{RH}_\infty$ et de réalisation minimale (A, B, C, D) d'ordre n sous la forme équilibrée avec :

$$\begin{aligned} \tilde{W}_c = \tilde{W}_o = \Sigma = \text{Diag}(\underbrace{\sigma_1 I_{k_1}, \sigma_2 I_{k_2}, \dots, \sigma_l I_{k_l}}_{\Sigma_1}, \underbrace{\sigma_{l+1} I_{k_{l+1}}, \dots, \sigma_m I_{k_m}}_{\Sigma_2}) \\ \sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_n > 0, \quad \sum_{i=1}^m k_i = n, \end{aligned} \quad (4.45)$$

où k_i représente la multiplicité de la valeur singulière σ_i .

Dans le cas où $G(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ et de degré n minimal avec les valeurs singulières (4.45), alors pour toute valeur $\gamma > \sigma_m$, il existe un modèle d'ordre réduit $G_r(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ de degré au plus $n - k_m$ satisfaisant $\|G(s) - G_{n-k_m}(s)\|_\infty < \gamma$ [143].

D'après cette propriété et la propriété $\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \geq \sigma_{r+1}$ on peut conclure que σ_m est la petite erreur qu'on peut espérer avoir pour $\|G(s) - G_{n-k_m}(s)\|_\infty$.

Afin de présenter le principal résultat décrit dans [260], nous allons introduire une nouvelle formulation équivalente du problème de la réduction optimale.

En effet, considérons les conditions d'existence d'un modèle réduit $G_r = (A_r, B_r, C_r, D_r)$ à partir d'un modèle initial $G = (A, B, C, D)$ où les représentations d'état sont supposées minimales et équilibrées :

$$\begin{bmatrix} Z^{-1}A + A^T Z^{-1} + Z^{-1}B \\ B^T Z^{-1} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.46)$$

$$\begin{bmatrix} A^T S + SA & C^T \\ C & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.47)$$

$$\text{avec } S = Z^{-1} + N R^{-1} N^T \text{ ou } Z^{-1} = S - N R^{-1} N^T$$

En posant $Q = R^{-1}$ et après quelques manipulations algébriques simples, la première inégalité matricielle s'écrit avec ce changement de variable sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} SA + A^T S - NQN^T A - A^T NQN^T & SB - NQN^T B \\ (*)^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.48)$$

Quant au relation $Z^{-1} = S - N R^{-1} N^T$, elle peut s'écrire d'abord sous la forme ci-dessous en posant $Q = R^{-1}$:

$$\begin{aligned} Z^{-1} &= S - N R^{-1} N^T \\ &= S - N Q N^T \\ &= S - \underbrace{N Q Q^{-1}} \underbrace{Q N^T} \end{aligned}$$

Soit en exploitant la positivité de Z^{-1} et en appliquant la règle de Schur, on a :

$$\begin{bmatrix} S & N Q \\ Q N^T & Q \end{bmatrix} > 0 \quad (4.49)$$

Les auteurs font remarquer que si N est choisie constante, les inégalités matricielles (4.47) .. (4.49) sont linéaires par rapport aux variables restantes, à savoir S et Q . Dans ce cas, si la représentation d'état est équilibrée, les auteurs proposent une structure particulière pour N qui n'introduit aucun conservatisme.

D'où l'algorithme permettant le calcul d'un modèle d'ordre $n-k_m$:

Algorithme 4.4

Etape 1 : Minimiser γ par rapport aux variables S et Q sous les contraintes :

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} S & N Q \\ Q N^T & Q \end{bmatrix} > 0 \\ &\begin{bmatrix} SA + A^T S - N Q N^T A - A^T N Q N^T & SB - N Q N^T B \\ (*)^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \\ &\begin{bmatrix} A^T S + S A & C^T \\ C & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned}$$

Avec :

$$N = \begin{bmatrix} I_{n-k_m} \\ 0_{k_m, n-k_m} \end{bmatrix}$$

Etape 2 : De l'étape 1, on considère γ, S, N et $R = Q^{-1}$ et on résout la LMI suivante en (A_r, B_r, C_r, D_r) :

$$\begin{bmatrix} SA + A^T S & N A_r + A^T N & SB + N B_r & C^T \\ (*)^T & R A_r + A_r^T R & N^T B + R B_r & -C_r^T \\ (*)^T & (*)^T & -\gamma I & D^T - D_r^T \\ (*)^T & (*)^T & (*)^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

L'intérêt de cet algorithme réside dans le fait qu'il permet de trouver un modèle réduit d'ordre $n-k_m$ en résolvant un problème convexe. Dans le cas particulier où la multiplicité de la petite valeur singulière égale à $k_m=1$, le degré de la réduction ne présentera pas grand intérêt pratique. Cependant dans le cas où les k_m dernières valeurs singulières sont faibles et peuvent alors être assimilées à une valeur unique, soit σ_m pour fixer les idées . Ceci permet d'obtenir un modèle réduit d'ordre $r=n-k_m$ conséquent.

4.2.4.4 Passage à une formulation par inégalités matricielles linéaires étendues

Nous proposons pour terminer cette section réservée au problème de la réduction optimale d'ordre utilisant la norme $\mathcal{H}_\infty$ comme critère d'optimisation, par une méthode utilisant la notion des LMIs dilatées ou étendues (dilated, enhanced, extended LMI en anglais). Cette notion a apporté en autres, une certaine flexibilité et ce, grâce à l'introduction de variables auxiliaires. Pour en savoir plus sur ce sujet, on peut consulter notamment [116].

L'idée de base repose sur le résultat suivant [1]:

L'erreur d'approximation $\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \leq \gamma$ est satisfaite si et seulement si, il existe une matrice auxiliaire Q , une matrice symétrique X et un scalaire $\mu > 0$ tels que la LMI suivante soit satisfaite.

$$\begin{bmatrix} A_\varepsilon Q + Q^T A_\varepsilon^T & \mu A Q - Q^T + X & Q^T C_\varepsilon^T & B_\varepsilon \\ (*)^T & -\mu(Q + Q^T) & \mu Q^T C_\varepsilon^T & 0 \\ (*)^T & (*)^T & -\gamma I & D_\varepsilon^T \\ (*)^T & (*)^T & (*)^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.50)$$

Ce résultat ne fournit pas une démarche à suivre pour déterminer un modèle réduit une fois que la condition ci-dessus soit satisfaite. Pour ce faire, les auteurs proposent de structurer la matrice auxiliaire Q de la manière suivante :

$$Q \triangleq \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_{s+1} \\ H & H & \cdots & H \end{bmatrix}, \quad (4.51)$$

où $Q_i \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $i=1, \dots, s+1$, $H \in \mathbb{R}^{r \times r}$ et $r = n/s$, $r, s \in \mathbb{N}$.

Le principal résultat permettant une reconstruction du modèle réduit se résume comme suit [1]:

L'erreur d'approximation $\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \leq \gamma$ est satisfaite si et seulement si, il existe des matrices auxiliaires $Q_i, i=1, \dots, s+1$, une matrice H , une matrice symétrique X , des matrices $\tilde{A}_r, B_r, \tilde{C}_r, D_r$ et un scalaire $\mu > 0$ tels que la LMI suivante soit satisfaite :

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_\varepsilon + \tilde{A}_\varepsilon^T & \mu \tilde{A}_\varepsilon - Q^T + X & \tilde{C}_\varepsilon^T & B_\varepsilon \\ (*)^T & -\mu(Q + Q^T) & \mu \tilde{C}_\varepsilon^T & 0 \\ (*)^T & (*)^T & -\gamma I & D_\varepsilon^T \\ (*)^T & (*)^T & (*)^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.52)$$

où :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_\varepsilon &\triangleq \begin{bmatrix} A Q_1 & A Q_2 & \cdots & A Q_{s+1} \\ \tilde{A}_r & \tilde{A}_r & \cdots & \tilde{A}_r \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_r = A_r H \\ \tilde{C}_\varepsilon &= \begin{bmatrix} C Q_1 - \tilde{C}_r & C Q_2 - \tilde{C}_r & \cdots & C Q_{s+1} - \tilde{C}_r \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}_r = C_r H \end{aligned} \quad (4.53)$$

Une fois qu'une solution est trouvée, le modèle réduit peut être reconstruit par :

$$\begin{cases} \dot{x}_r(t) = \tilde{A}_r H^{-1} x_r(t) + B_r u(t) \\ y_r(t) = \tilde{C}_r H^{-1} x_r(t) + D_r u(t) \end{cases} \quad (4.54)$$

Cette méthode suggère les remarques suivantes :

- La LMI (4.52) est linéaire par rapport aux variables de décision, ce qui correspond à un problème convexe. Ceci constitue bien entendu le principal atout pour obtenir un modèle réduit optimal.
- Etant donné un ordre n , le modèle réduit est d'ordre $r = n/s$. Le choix de s peut restreindre considérablement le choix de r . En effet, si $n = 10$ par exemple, le choix pour $r < 10$ est : les entiers 5, 2, et 1. Afin de se donner plus de flexibilité pour le choix de r , les auteurs proposent d'augmenter artificiellement l'ordre du modèle initial (c'est-à-dire n) :

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_a \end{bmatrix} \quad B \rightarrow \begin{bmatrix} B \\ B_a \end{bmatrix} \quad C \rightarrow [C \quad C_a], \quad (4.55)$$

en veillant à ce que la contribution de la « partie ajoutée » ait une dynamique négligeable.

- Au cours de nombreux tests effectués, le paramètre μ laissé au choix de l'utilisation semble avoir une conséquence sur la faisabilité du problème ainsi sur la valeur optimale de γ minimal. Il convient de faire plusieurs tests pour arriver à une « valeur optimale ».

D'après les mêmes auteurs, si la méthode décrite ci-dessus ne donne pas de résultat satisfaisant sur la qualité de l'approximation, il est suggéré d'utiliser un algorithme itératif dont lequel aucune structure n'est imposée à la matrice auxiliaire Q . On pose auparavant :

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_r & C_r \\ B_r & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} Q \\ B_\varepsilon &= \begin{bmatrix} B \\ B_r \end{bmatrix} \\ C_\varepsilon &= [C \quad 0] Q + [-I \quad 0] \begin{bmatrix} D_r & C_r \\ B_r & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} Q \\ D_\varepsilon &= D - D_r \end{aligned} \quad (4.56)$$

Les principales étapes sont présentées dans l'algorithme suivant.

Algorithme 4.5

Etape 1 : poser $j=1$ et initialiser par un modèle réduit d'ordre r : A_{rj} , B_{rj} , C_{rj} , D_{rj} et définir une tolérance ε ,

Etape 2 : Trouver γ_j et Q_j solutions du problème suivant :

Minimiser γ par rapport à Q , sous la contrainte (4.52), avec (4.56) :

Etape 3 : Trouver γ_j et A_{rj} , B_{rj} , C_{rj} , D_{rj}

Minimiser γ par rapport à A_r, B_r, C_r , et D_r , sous la contrainte (4.52), avec (4.56)

et Q trouvée dans l'étape 2,

Etape 4 : si $|\gamma_j - \gamma_{j-1}| < \varepsilon$, arrêter, si non incrémenter j et aller à l'étape 2. ■

Remarque

On trouve dans le même article [1], des résultats pour la réduction d'ordre selon la norme $\mathcal{H}_2$ ainsi qu'une extension pour les systèmes incertains et les systèmes discrets.

4.2.4.5 Comparaison des approches présentées

A l'issue de la présentation de certaines méthodes proposées récemment en vue d'obtenir un modèle réduit et dont les algorithmes associés ont été calibrés, il en ressort clairement que le problème de la réduction optimale de modèle en boucle ouverte selon la norme $\mathcal{H}_\infty$ n'est pas un problème trivial. Bien que la formulation soit claire, la résolution n'est pas toujours évidente et les principales contributions se situent au niveau de l'efficacité des démarches heuristiques proposées.

Le choix d'une technique de résolution du problème de réduction optimale selon la norme $\mathcal{H}_\infty$ est dicté principalement par l'objectif visé. Indépendamment de la méthode de réduction, il s'agit de minimiser deux paramètres : le niveau de performance γ reflétant l'erreur d'approximation et l'ordre r du modèle réduit. L'algorithme itératif 4.1 semble convenir pour des modèles d'ordre modéré et adaptés au cas où l'erreur de réduction doit être minimisée pour un ordre fixé du système recherché. En revanche dans les algorithmes 4.2 et 4.3, si une borne sur l'erreur acceptable est fixée à priori, par exemple par des conditions performance, l'algorithme de complémentarité conique peut être appliqué. En effet, la formulation présentée permet de rechercher un modèle d'ordre minimal répondant au problème. Notons enfin que dans ce cas, une indication quant à la valeur à choisir pour l'ordre du système réduit peut être fournie par les bornes à priori sur l'erreur de réduction, par troncature équilibrée ou réduction optimale selon la norme de Hankel, en fonction de l'ordre choisi pour le système réduit.

Le plus grand reproche que l'on fait à ces méthodes inspirées de la synthèse $\mathcal{H}_\infty$ par la technique LMI est la non convexité du problème dont la résolution numérique par des méthodes heuristiques est la non convergence ou convergence vers un minima local plutôt que global. C'est dans ce sens que les méthodes de type LMIs étendues peuvent être appréciées.

4.2.5 Réduction optimale selon la norme $\mathcal{H}_2$ par l'approche des LMIs

La norme $\mathcal{H}_2$ est aussi un critère d'évaluation usuellement utilisé comme mesure de l'erreur d'approximation de modèle. Elle continue à susciter l'intérêt des Automaticiens comme l'indiquent les présentes recherches dans ce domaine [1], [87], [33].

La formulation du problème de réduction optimale selon la norme $\mathcal{H}_2$ en termes d'inégalités matricielles découle directement de la définition de la norme $\mathcal{H}_2$. De manière à ce que le système $G_e(s) = G(s) - G_r(s)$ soit strictement propre, il est nécessaire de choisir $D_r = D$. Nous ferons cette hypothèse dans toute la suite de ce paragraphe.

En partant de l'hypothèse que le système $G_e(s) = G(s) - G_r(s)$ est stable et strictement propre et de représentation d'état 4.14 minimale, la norme $\mathcal{H}_2$ s'exprime par l'une des deux expressions suivantes :

$$\|G_e(s)\|_2 = \sqrt{\inf_{P=P^T, A_r, B_r, C_r} \left\{ \text{Trace}(C_e P C_e^T) / A_e P + P A_e^T + B_e B_e^T < 0 \right\}} \quad (4.57)$$

$$\|G_e(s)\|_2 = \sqrt{\inf_{Q=Q^T, A_r, B_r, C_r} \left\{ \text{Trace}(B_e^T Q B_e) / A_e^T Q + Q A_e + C_e^T C_e < 0 \right\}} \quad (4.58)$$

La formulation du problème d'optimisation selon la norme $\mathcal{H}_2$ s'exprime de manière équivalente par les problèmes suivants :

- **Problème 1 :**

$\underset{R=R^T, P=P^T, A_r, B_r, C_r}{Min} (Trace(R))$ sous les contraintes :

$$\begin{bmatrix} R & C_\varepsilon P \\ PC_\varepsilon^T & P \end{bmatrix} > 0 \quad (4.59a)$$

$$\begin{bmatrix} A_\varepsilon P + PA_\varepsilon^T & B_\varepsilon \\ B_\varepsilon^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.59b)$$

- **Problème 2 :**

$\underset{R=R^T, P=P^T, A_r, B_r, C_r}{Min} (Trace(R))$ sous les contraintes :

$$\begin{bmatrix} R & B_\varepsilon^T Q \\ QB_\varepsilon & Q \end{bmatrix} > 0 \quad (4.60a)$$

$$\begin{bmatrix} A_\varepsilon^T Q + QA_\varepsilon & C_\varepsilon^T \\ C_\varepsilon & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.60b)$$

La première remarque à souligner est que ces deux problèmes ne sont pas linéaires en les variables de décision mais bilinéaires, ce qui soulève dès à présent la non convexité du problème.

Comme pour la réduction optimale selon la norme $\mathcal{H}_\infty$, les problèmes précédents peuvent être résolus soit par division du problème global en deux problèmes d'optimisation linéaires en les variables de décision, soit par passage à une formulation en problème d'optimisation linéaire sous contrainte matricielle de rang, soit enfin par des techniques de relaxation des LMIs. Nous allons aborder successivement ces trois points de vue.

4.2.5.1 Algorithmes itératifs

Nous proposons ici d'approcher les solutions du problème par des algorithmes itératifs à deux étapes, similaires à ceux déjà utilisés pour la réduction optimale selon la norme $\mathcal{H}_\infty$. Cependant, le problème n'étant pas convexe, les algorithmes correspondants peuvent converger vers des minimas locaux au lieu de tendre vers la solution globale. L'idée clé développée dans ce paragraphe consiste à utiliser deux formulations différentes du problème pour améliorer la convergence.

Notons que la variable B_r est une variable d'optimisation de chacune des deux étapes car les inégalités (4.59a) et (4.59b) sont affines en cette variable.

En partitionnant P de façon compatible avec A_ε :

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \text{ avec } P_{11} = P_{11}^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}, P_{22} = P_{22}^T \in \mathfrak{R}^{r \times r} \text{ et } P_{12} \in \mathfrak{R}^{n \times r} \quad (4.61)$$

les contraintes (4.59a) et (4.59b) se réécrivent sous la forme:

$$\begin{bmatrix} R & CP_{11} - C_r P_{12}^T & CP_{12} - C_r P_{22} \\ (*)^T & P_{11} & P_{12} \\ (*)^T & (*)^T & P_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.62a)$$

$$\begin{bmatrix} AP_{11} + P_{11}A^T & AP_{12} + P_{12}A_r^T & B \\ (*)^T & A_r P_{22} + P_{22}A_r^T & B_r \\ (*)^T & (*)^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.62b)$$

Puisqu'aucun des termes fonctions de P_{11} des deux inégalités ci-dessus ne dépend des matrices d'état du modèle réduit recherché, il est possible d'optimiser à chaque étape par rapport à la variable P_{11} . On obtient ainsi l'algorithme suivant :

Algorithme itératif 4.6

Etape 1 : Trouver une approximation d'ordre r du système $G(s)$ par une méthode de réduction classique.

Etape 2 : En maintenant A_r et C_r constantes, minimiser $Trace(R)$ par rapport à P, R et B_r sous les contraintes (4.62a) et (4.62b).

Etape 3 : En maintenant P_{22} et P_{12} constantes, minimiser $Trace(R)$ par rapport à P_{11}, R et A_r sous les contraintes (4.62a) et (4.62b).

Etape 4 : Répéter Etape 2 et Etape 3 jusqu'à ce que la solution converge suivant un critère donné. ■

Notons qu'il n'existe pas de garantie que l'algorithme converge vers le minimum global de la fonction à optimiser : $Trace(R)$. Cet algorithme peut converger vers un minimum local.

Un algorithme sous-optimal similaire correspondant à la formulation (4.59) peut être également envisagé en posant:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} \text{ avec } Q_{11} = Q_{11}^T \in \Re^{n \times n}, \quad Q_{22} = Q_{22}^T \in \Re^{r \times r} \text{ et } P_{12} \in \Re^{n \times r}$$

Cette formulation conduit aux inégalités matricielles suivantes :

$$\begin{bmatrix} R & B^T Q_{11} + B_r^T Q_{12}^T & B^T Q_{12} + B_r^T Q_{22} \\ (*)^T & Q_{11} & Q_{12} \\ (*)^T & (*)^T & Q_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.62c)$$

$$\begin{bmatrix} A^T Q_{11} + Q_{11}A & A^T Q_{12} + Q_{12}A_r & C^T \\ (*)^T & A_r^T Q_{22} + Q_{22}A_r & -C_r^T \\ (*)^T & (*)^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.62d)$$

D'où l'algorithme itératif 4.7.

Algorithme itératif 4.7

Etape 1 : Trouver une approximation d'ordre r du système $G(s)$ par une méthode de réduction classique.

Etape 2 : En maintenant A_r et B_r constantes, minimiser $Trace(R)$ par rapport à P, R et C_r sous les contraintes (4.62c) et (4.62d).

Etape 3 : En maintenant Q_{22} et Q_{12} constantes, minimiser $\text{Trace}(R)$ par rapport à Q_{11} , R , A_r , B_r et C_r sous les contraintes (4.62c) et (4.62d).

Etape 4 : Répéter Etape 2 et Etape 3 jusqu'à ce que la solution converge suivant un critère donné. ■

Il est important de remarquer que cette formulation permet d'optimiser à chaque étape suivant la variable C_r . En effet, C_r n'apparaît pas dans l'inégalité (4.62c) et intervient de manière affine dans l'inégalité (4.62d) alors que A_r et B_r ne sont mises à jour qu'à la troisième étape de l'Algorithme 4.7.

D'autre part, alors que de point de vue formulation, les problèmes 1 et 2 sont équivalents compte tenue de la définition de la norme $\mathcal{H}_2$, ce n'est plus le cas des algorithmes sous-optimaux 4.6 et 4.7. Il est possible d'exploiter cette différence pour améliorer leurs performances et tenter de converger vers la solution globale effective du problème.

Du fait de leur différence, il est probable que les algorithmes 4.6 et 4.7 n'aient pas les mêmes minimas locaux. L'idée est d'alterner itérativement ces deux algorithmes. D'où l'algorithme suivant :

Algorithme itératif 4.8

Etape 1 : Trouver une approximation G_r^i d'ordre r du système $G(s)$ par une méthode de réduction classique et poser $G_r^1 = G_r^i$

Etape 2 : Appliquer l'Algorithme 4.6 initialisé avec le modèle d'ordre réduit G_r^1 . Soit G_r^2 le résultat.

Etape 3 : Appliquer l'Algorithme 4.7 initialisé avec le modèle d'ordre réduit G_r^2 . Soit G_r^3 le résultat.

Etape 4 : Répéter Etape 2 et Etape 3 jusqu'à ce que la solution converge suivant un critère donné. ■

En conclusion sur ces méthodes dites itératives, nous soulignons d'abord leur avantage qui réside dans le fait qu'elles conduisent à des inégalités matricielles linéaires qui peuvent être résolues facilement par les algorithmes disponibles à cet effet. En revanche, ces méthodes testées sur des exemples de tailles différentes, ont montré leur sensibilité aux conditions d'initialisation.

4.2.5.2 Formulation en problème d'optimisation sous contrainte de rang

Dans ce paragraphe, nous présentons une approche dans laquelle le problème de réduction optimale selon la norme $\mathcal{H}_2$ peut être formulé en un problème d'optimisation linéaire sous contrainte matricielle de rang. Le résultat principal est basée sur l'application de la règle d'élimination (voir §1.2.5.2) à chacune des inégalités (4.59) intervenant dans le problème 1. Nous proposons ensuite une formulation équivalente découlant du problème 2.

La première étape du développement de la méthode consiste à remarquer que les matrices A_ε , B_ε , et C_ε définies par (4.14) peuvent s'écrire sous la forme affine suivante en les variables $[A_r \ B_r]$ et C_r :

$$\begin{aligned}
 A_\varepsilon &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} [A_r \quad B_r] \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 B_\varepsilon &= \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} [A_r \quad B_r] \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad C_\varepsilon = [C \quad 0] + C_r [0 \quad -I]
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

Ce qui permet d'écrire (4.59a) et (4.59b) respectivement sous la forme :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R & CP_1 & CP_2 \\ P_1 C^T & P_1 & P_2 \\ P_2^T C^T & P_2^T & P_3 \end{bmatrix}}_{\Phi_p} + \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{Z}^T} C_r \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -P_2^T & -P_3 \end{bmatrix}}_{\mathcal{P}_p} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -P_2^T & -P_3 \end{bmatrix}^T}_{\mathcal{P}_p^T} C_r^T \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{Z}} > 0 \tag{4.64}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} AP_1 + P_1 A^T & AP_2 & B \\ P_2^T A^T & 0 & 0 \\ B^T & 0 & -I \end{bmatrix}}_{\Phi_p} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{Z}^T} [A_r \quad B_r] \underbrace{\begin{bmatrix} P_2^T & P_3 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}}_{\mathcal{P}_p} + \underbrace{\begin{bmatrix} P_2^T & P_3 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^T}_{\mathcal{P}_p^T} [A_r \quad B_r]^T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{Z}} < 0 \tag{4.65}$$

où la matrice P et P^{-1} sont partitionnées de manière compatible avec A_ε :

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2^T & S_3 \end{bmatrix},$$

L'application de la règle d'élimination (voir §1.2.5.2) aux inégalités (4.64) et (4.65) pour éliminer respectivement C_r et $[A_r \quad B_r]$ d'une part et application du lemme 1.3 (§1.2.5.2), à la condition suivante d'autre part :

$$0 < P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2^T & S_3 \end{bmatrix}^{-1}, \tag{4.66}$$

le problème de réduction optimale selon la norme $\mathcal{H}_2$ est alors équivalent au problème d'optimisation suivant :

$\underset{R=R^T, P_1=P_1^T, P_3=P_3^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}}{\text{Min}} (\text{Trace}(R))$ sous les contraintes :

$$\begin{bmatrix} R & C \\ C^T & S_1 \end{bmatrix} > 0 \tag{4.67}$$

$$S_1 A + A^T S_1 < 0 \tag{4.68}$$

$$\begin{bmatrix} AP_1 + P_1 A^T & B \\ B^T & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.69}$$

$$\begin{bmatrix} S_1 & I \\ I & P_1 \end{bmatrix} \geq 0 \tag{4.70}$$

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} S_1 & I \\ I & P_1 \end{bmatrix} \leq n + r \tag{4.71}$$

Reconstitution du modèle réduit :

A partir des solutions R , P_1 , et S_1 du problème d'optimisation précédent, il est possible de

reconstruire une matrice $P \in \mathfrak{R}^{(n+r) \times (n+r)}$ vérifiant (4.66). Pour cela, une décomposition en valeurs singulières de $(P_1 S_1 - I)$ permet de former deux matrices de rang plein $M, N \in \mathfrak{R}^{n \times r}$ telles que $P_1 S_1 - I = NM^T$. Une matrice P qui convient est alors donnée par

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & N \\ N^T & -M^+ S_1 N \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} S_1 & M \\ M^T & -N^+ P_1 M \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

P étant reconstruite, les matrices $\Phi_p, \mathcal{P}_p, \mathcal{Z}, \tilde{\Phi}_p, \tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{Z}}$ peuvent alors être formées suivant leurs définitions (4.64), (4.65). Une représentation d'état du système $G_r(s)$ d'ordre r tel que $\|G_\varepsilon(s)\|_2 = \|G(s) - G_r(s)\|_2 = \sqrt{\text{Trace}(R)}$ est finalement obtenue en résolvant les problèmes de faisabilité suivants :

- Trouver A_r et B_r vérifiant :

$$\tilde{\Phi}_p + \tilde{\mathcal{Z}}^T [A_r \quad B_r] \tilde{\mathcal{P}}_p + \tilde{\mathcal{P}}_p^T [A_r \quad B_r]^T \tilde{\mathcal{Z}} < 0$$

- Trouver C_r vérifiant :

$$\Phi_p + \mathcal{Z}^T C_r \tilde{\mathcal{P}}_p + \tilde{\mathcal{P}}_p^T C_r^T \tilde{\mathcal{Z}} < 0$$

et en se rappelant que $Dr = D$.

De même, il est possible de suivre la même démarche en considérant le problème P2 et énoncer le problème d'optimisation suivant :

Le problème de réduction optimale selon la norme $\mathcal{H}_2$ est équivalent au problème d'optimisation suivant :

$\underset{R=R^T, Q_1=Q_1^T, V_1=V_1^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}}{\text{Min}} (\text{Trace}(R))$ sous les contraintes :

$$\begin{bmatrix} R & B^T \\ B & V_1 \end{bmatrix} > 0 \quad (4.73)$$

$$V_1 A^T + A V_1 < 0 \quad (4.74)$$

$$\begin{bmatrix} A^T Q_1 + Q_1 A & C^T \\ C & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.75)$$

$$\begin{bmatrix} V_1 & I \\ I & Q_1 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.76)$$

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} V_1 & I \\ I & Q_1 \end{bmatrix} \leq n + r \quad (4.77)$$

En effet, à partir des solutions R, Q_1 , et V_1 du problème d'optimisation précédent, on reconstruit une matrice Q vérifiant :

$$0 < Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_2^T & V_3 \end{bmatrix}^{-1}, \quad (4.78)$$

Pour cela, une décomposition en valeurs singulières de $(Q_1 V_1 - I)$ permet de former deux matrices de rang plein $M, N \in \mathfrak{R}^{n \times r}$ telles que $Q_1 V_1 - I = NM^T$. Une matrice Q qui convient est alors donnée par :

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & N \\ N^T & -M^+ V_1 N \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} V_1 & M \\ M^T & -N^+ Q_1 M \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

Q étant reconstruite, une représentation d'état du modèle réduit $G_r(s)$ d'ordre r tel que $\|G_\varepsilon(s)\|_2 = \|G(s) - G_r(s)\|_2 = \sqrt{\text{Trace}(R)}$ est finalement obtenue en résolvant les problèmes de faisabilité suivants :

- Trouver A_r et C_r vérifiant :

$$\begin{bmatrix} A^T Q_1 + P_1 A & A^T Q_2 & C^T \\ Q_2 A & 0 & 0 \\ C & 0 & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_2 & 0 \\ Q_3 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ C_r \end{bmatrix} [0 \ I \ 0] + [0 \ I \ 0]^T \begin{bmatrix} A_r \\ C_r \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_2 & 0 \\ Q_3 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}^T < 0 \quad (4.80)$$

- Trouver B_r vérifiant :

$$\begin{bmatrix} R & B^T Q_1 & B^T Q_2 \\ Q_1 B & Q_1 & Q_2 \\ Q_2^T B & Q_2^T & Q_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} B_r [I \ 0 \ 0] + [I \ 0 \ 0]^T B_r^T \begin{bmatrix} 0 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix}^T < 0 \quad (4.81)$$

et en se rappelant de nouveau que $D_r = D$.

Enfin, rappelons que les problèmes d'optimisation présentés par (4.67)..(4.71) et (4.73)..(4.77) entrent dans le même cadre que le problème de synthèse $\mathcal{H}_\infty$ standard avec contrainte d'ordre. Ils peuvent par conséquent être abordés par les heuristiques proposés à cet effet.

Si l'on souhaite obtenir une approximation satisfaisant un certain niveau d'atténuation spécifié par une certaine valeur $\gamma > 0$, i.e $\|G(s) - G_r(s)\|_2 < \gamma$, les auteurs dans [87] ont formulé ce cas par un ensemble d'inégalités matricielles linéaires augmentés par une contrainte d'ordre :

Etant donné un système $G=(A,B,C,0)$ de degré n , il existe un modèle réduit $G_r=(A_r,B_r,C_r,0)$ de degré $r < n$, satisfaisant $\|G_\varepsilon(s)\|_2 = \|G(s) - G_r(s)\|_2 = \sqrt{\text{Trace}(R)} < \gamma$, si et seulement si :

$$AX + XA^T + B B^T < 0 \quad (4.82a)$$

$$A(X - Z) + (X - Z)A^T < 0 \quad (4.82b)$$

$$\text{Trace}(C(X - Z)C^T) < \gamma^2 \quad (4.82c)$$

$$Z > 0 \quad (4.82d)$$

$$\text{Rang}(Z) \leq r \quad (4.82e)$$

La démonstration de ce résultat découle globalement de (4.67)..(4.71). En effet, de la condition (4.66), on déduit que $S_1^{-1} = P_1 - P_2 P_3^{-1} P_2^T$, qui peut s'écrire sous la forme $S_1^{-1} = X - Z$ en posant $X = P_1$, $Z = P_2 P_3^{-1} P_2^T$.

En multipliant à droite et à gauche l'inégalité (4.68) par S_1^{-1} et en tenant compte du changement de variable ci-dessous, cette inégalité s'écrit sous la forme (4.82b). L'inégalité (4.69) conduit à l'inégalité (4.82a) en appliquant le Lemme de Schur et en posant $P_1 = X$. Quant à l'inégalité (4.67) s'écrit également grâce au lemme de Schur et le changement de variable ci-dessous sous

la forme : $R - CS_1^{-1}C^T = R - C(X - Z)C^T > 0$. En imposant à ce que $\text{Trace}(R) < \gamma^2$, on a alors la condition (4.82c). Enfin la positivité de P d'après (4.66) est équivalente à $P_1 - P_2 P_3^{-1} P_2^T > 0$ et $P_3 > 0$. Il s'en suit alors que $Z = P_2 P_3^{-1} P_2^T > 0$ et de rang $\leq r$.

Une fois que les matrices X et Z vérifiant les conditions (4.82a).. $(4.82e)$ sont trouvées, on construit alors P en la reconstituant à partir de X et la décomposition de Z . Etant donnée P , on résout le problème de faisabilité (4.62a) et (4.62b) en (A_r, B_r, C_r) . Cependant Il est à noter de nouveau que cette formulation n'est pas convexe à cause de la contrainte d'ordre (4.82e), il convient par conséquent de résoudre ce problème par l'une des méthodes heuristiques proposées dans le cadre de la synthèse d'un régulateur d'ordre fixe ou de la réduction optimale de modèle selon la norme $\mathcal{H}_\infty$.

4.2.5.3 Formulation en problème d'optimisation par utilisation des LMIs étendues.

On reprend les notations introduites dans le paragraphe 4.2.5 pour introduire la version de la réduction optimale selon la norme $\mathcal{H}_2$ par utilisation de la technique des LMIs étendues. En effet, l'essentiel du résultat est résumé dans le théorème suivant [1]:

L'erreur d'approximation $\|G(s) - G_r(s)\|_2 \leq \gamma$ est satisfaite si et seulement si, il existe des matrices auxiliaires $Q_i, i=1, \dots, s+1$, une matrice H , des matrices symétriques X, Z , des matrices $\tilde{A}_r, B_r, \tilde{C}_r, D_r$ tels que la LMI suivante soit satisfaite :

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_\varepsilon + \tilde{A}_\varepsilon^T & -\tilde{A}_\varepsilon + Q^T - X & \tilde{C}_\varepsilon^T \\ (*)^T & -(Q + Q^T) & -\tilde{C}_\varepsilon^T \\ (*)^T & (*)^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad \begin{bmatrix} Z & B_\varepsilon^T \\ B_\varepsilon & X \end{bmatrix} > 0 \quad (4.83)$$

$$\text{Trace}(Z) < \gamma, \quad (4.84)$$

où :

$$\tilde{A}_\varepsilon \triangleq \begin{bmatrix} AQ_1 & AQ_2 & \dots & AQ_{s+1} \\ \tilde{A}_r & \tilde{A}_r & \dots & \tilde{A}_r \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}_\varepsilon \triangleq \begin{bmatrix} CQ_1 - \tilde{C}_r & CQ_2 - \tilde{C}_r & \dots & CQ_{s+1} - \tilde{C}_r \end{bmatrix}, \quad (4.85)$$

$$\tilde{A}_r = A_r H, \quad \tilde{C}_r = C_r H$$

Une fois qu'une solution est trouvée, le modèle réduit peut être reconstruit :

$$\begin{cases} \dot{x}_r(t) = \tilde{A}_r H^{-1} x_r(t) + B_r u(t) \\ y_r(t) = \tilde{C}_r H^{-1} x_r(t) + D_r u(t) \end{cases} \quad (4.86)$$

Rappelons que l'intérêt à notre sens de cette méthodologie est la procédure non itérative pour la résolution du problème. Les mêmes remarques peuvent faites que celles soulignées dans le paragraphe 2.3.10 du chapitre 2.

4.2.6 Réduction de modèle des systèmes instables

Dans le cas de systèmes instables, il est clair que pour que la méthode de réduction assure un comportement similaire des systèmes $G(s)$ et $G_r(s)$. Le modèle d'ordre réduit doit impérativement avoir les mêmes pôles instables que ceux du modèle initial. Une simplification des pôles instables dans un modèle de synthèse ou dans un correcteur engendrerait certainement des problèmes de stabilité de la boucle fermée.

Or, les méthodes exposées ci-dessus ne sont directement applicables qu'à des systèmes stables. Elles peuvent cependant facilement s'étendre au cas des systèmes instables. Pour se faire, il suffit de composer le système G instable en la somme de deux sous-systèmes, l'un stable, l'autre instable $G = G^s + G^i$. La partie stable G^s est réduite par l'une des techniques présentées alors que la partie instable G^i est conservée. Le système d'ordre réduit est ensuite reconstitué à partir des deux sous-systèmes précédemment cités : $G_r = G_r^s + G^i$.

4.2.7 Conclusion sur la réduction de "type boucle ouverte"

Nous avons présenté quelques méthodes de réduction en boucle ouverte. Ces méthodes s'appliquent aussi bien au système commandé qu'au régulateur dont leurs modèles sont décrits par des équations d'état. Nous avons noté que même si des conditions sont formulées de manière à obtenir des modèles réduits optimaux, les algorithmes proposés ne conduisent pas forcément à ces solutions du fait que les procédures proposées sont heuristiques et ne permettent pas d'accéder par convergence à ces modèles réduits optimaux. Malgré ces difficultés, ces méthodes sont abondantes et sont souvent appréciées pour leur simplicité.

Par ailleurs, si ces méthodes sont envisagées dans le but d'obtenir un compensateur d'ordre réduit, une première approche serait de réduire l'ordre du système à commander pour en déduire un compensateur de taille raisonnable. Cette approche présente, toutefois, des inconvénients importants. En premier lieu, étant donné que la réduction d'ordre est exécutée tout au début de la procédure, des effets de propagation d'erreur peuvent devenir critiques. En conséquence, il n'existe aucune garantie que le compensateur réduit stabilisera le système original en boucle fermée. De même si ces méthodes sont appliquées à la réduction d'un régulateur après sa synthèse, il convient de rester vigilant également quant aux performances réelles obtenues en boucle fermée, une fois que ces régulateurs réduits sont implantés.

Le prochain paragraphe traite le cas de la réduction à posteriori tenant compte de la boucle fermée, qui constitue une des méthodologies permettant de pallier les problèmes posés par la réduction d'ordre en boucle ouverte.

4.3 Réduction à posteriori tenant compte de la boucle fermée

4.3.1 Cas des systèmes centralisés

On considère la figure 4.3 relatif à un système bouclé selon la formulation standard :

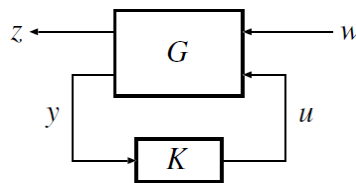


Figure 4.3 : Schéma standard d'un problème de commande en boucle fermée

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

$$P(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \quad K(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A_k & B_k \\ \hline C_k & D_k \end{array} \right] \quad (4.88)$$

La méthode de réduction présentée ici part du fait que le correcteur K est connu et que son ordre soit contraignant pour son implantation. Elle s'applique quelle que soit la technique utilisée pour sa synthèse.

Le système augmenté P et Le régulateur K sont supposés de même dimension de même ordre soit d'ordre n . La représentation d'état du système en boucle fermée correspondant à la figure 4.3, notée $F_l(P, K)$, est :

$$F_l(P, K) = \left[\begin{array}{cc|c} A + B_2 L D_K C_2 & B_2 L C_K & B_1 + B_2 L D_K D_{21} \\ B_K F C_2 & A_K + B_K F D_{22} C_K & B_K F D_{21} \\ \hline C_1 + D_{12} D_K F C_2 & D_{12} L C_K & D_{11} + D_{12} D_K F D_{21} \end{array} \right] := \left[\begin{array}{c|c} A_{bf} & B_{bf} \\ \hline C_{bf} & D_{bf} \end{array} \right] \quad (4.89)$$

$$L = (I - D_K D_{22})^{-1} \quad F = (I - D_{22} D_K)^{-1}$$

Plusieurs méthodes de réduction dont certaines basées sur la troncature équilibrée tentent d'obtenir un régulateur K_r de degré $r \ll n$ qui stabilise le système P et que $\|F_l(P, K) - F_l(P, K_r)\|_\infty$, soit la plus faible possible [138], [93], [94].

Dans le contexte des méthodes basées sur la troncature équilibrée, désignons par $\bar{P}$ et $\bar{Q}$ respectivement les Gramiens de commandabilité et d'observabilité du transfert $F_l(P, K)$ ou de manière équivalente du système $(A_{bf}, B_{bf}, C_{bf}, D_{bf})$ vérifiant :

$$\begin{aligned} A_e \bar{P} + \bar{P} A_e^T + B_e B_e^T &= 0 \\ A_e^T \bar{Q} + \bar{Q} A_e + C_e^T C_e &= 0 \end{aligned}$$

et qui peuvent être partitionnées selon A_{bf} de la manière suivante :

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{12}^T & \bar{P}_{22} \end{bmatrix} \quad \bar{Q} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{12}^T & \bar{Q}_{22} \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

Il existe une matrice de transformation T permettant de diagonaliser simultanément $\bar{P}_{22}$ et $\bar{Q}_{22}$:

$$\begin{aligned} T \bar{P}_{22} T^T &= T^{-T} \bar{Q}_{22} T^{-1} = \text{Diag}(\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \dots \quad \sigma_n) := \Sigma \\ \sigma_i &\geq \sigma_{i+1} \geq 0 \end{aligned} \quad (4.91)$$

où les $\{\sigma_i\}_{i=1, \dots, n}$ désignent les valeurs singulières de Hankel.

L'application de la transformation au régulateur (4.88) permet de partitionner sa représentation d'état comme suit :

$$K(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A_k & B_k \\ \hline C_k & D_k \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} T A_k T^{-1} & T B_k \\ \hline C_k T^{-1} & D_k \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A_r & A_{k12} & B_r \\ \hline A_{k21} & A_{k22} & B_{k2} \\ \hline C_r & C_{k2} & D_k \end{array} \right] \quad (4.92)$$

De cette expression, on définit un régulateur d'ordre $r < n$ par :

$$K_r(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A_r & B_r \\ \hline C_r & D_k \end{array} \right]$$

Deux avantages sont à souligner dans cet algorithme : le premier est que la procédure est très simple à mettre en œuvre et la transformation T existe inconditionnellement. Le deuxième avantage est que cette procédure ne nécessite pas la séparation de la « partie stable » et « la partie instable » du régulateur K si cette dernière existe. En revanche, l'inconvénient majeur est que ni la stabilité de $F_l(P, K_r)$ ni les performances en boucle fermée ne sont prévisibles.

Dans le but d'améliorer cette procédure, les auteurs dans [6] proposent une procédure similaire à la précédente mais en imposant la structure diagonale aux matrices $\bar{P}$ et $\bar{Q}$ définies en 4.90 :

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & 0 \\ 0 & \bar{P}_2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \bar{Q} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_1 & 0 \\ 0 & \bar{Q}_2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.93)$$

$$A_e \bar{P} + \bar{P} A_e^T + B_e B_e^T \leq 0 \quad (4.94a)$$

$$A_e^T \bar{Q} + A_e \bar{Q} + C_e^T C_e \leq 0 \quad (4.94b)$$

Il s'agit des Gramiens généralisés structurés. Notons que le calcul de ces matrices est formulé sous forme d'inégalité au lieu de la stricte égalité du fait que l'approche LMI permet de prendre plus simplement en compte la contrainte structurelle. Cependant, Il est évident que leur existence n'est pas garantie à l'avance. Un développement algébrique des inégalités (4.94) permet de les écrire de manière plus explicite sous la forme :

$$\begin{cases} (A + B_2 L D_K C_2) \bar{P}_1 + \bar{P}_1 (A + B_2 L D_K C_2)^T + (B_1 + B_2 L D_K D_{21})(B_1 + B_2 L D_K D_{21})^T \leq 0 \\ (A + B_2 L D_K C_2) \bar{Q}_1 + \bar{Q}_1 (A + B_2 L D_K C_2)^T + (C_1 + D_{12} D_K F C_2)^T (C_1 + D_{12} D_K F C_2) \leq 0 \\ (A_k + B_k F D_{22} C_k) \bar{P}_2 + \bar{P}_2 (A_k + B_k F D_{22} C_k)^T + (B_k F D_{21})(B_k F D_{21})^T \leq 0 \\ (A_k + B_k F D_{22} C_k)^T \bar{Q}_2 + \bar{Q}_2 (A_k + B_k F D_{22} C_k) + (D_{12} L C_k)^T (D_{12} L C_k) \leq 0 \end{cases}$$

Ces inégalités impliquent que si $(A + B_2 L D_K C_2)$ et/ou $A_k + B_k F D_{22} C_k$ sont instables, alors $\bar{P}_1, \bar{P}_2 \geq 0$ et/ou $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2 \geq 0$ n'existeront pas, i.e $\bar{P} \geq 0$ et $\bar{Q} \geq 0$ n'existeront pas non plus. Notons au passage que dans le cas où le système augmenté P et le compensateur K sont strictement propre ($D_{22} = D_K = 0$), l'existence de ces Gramiens structurés est liée à la stabilité du système P et de son compensateur K .

Désignons par la transformation T permettant de diagonaliser simultanément $\bar{P}_2$ et $\bar{Q}_2$:

$$\begin{aligned} T \bar{P}_2 T^T = T^{-T} \bar{Q}_2 T^{-1} = \Sigma = \text{Diag}(\underbrace{\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \dots \sigma_{r_k}}_{\Sigma_1} \quad \underbrace{\sigma_{r_{k+1}} \quad \sigma_{r_{k+2}} \quad \dots \sigma_{n_k}}_{\Sigma_2}) \\ \sigma_i \geq \sigma_{i+1} \geq 0 \end{aligned}$$

L'application de cette transformation au régulateur K permet de le structurer selon l'expression donnée en 4.92 et de laquelle un régulateur K_r d'ordre réduit r en est extrait.

La structure diagonale 4.93 si, elle existe, permet d'énoncer le résultat suivant soulignant le grand intérêt de la procédure [6].

Soit $G_r(s) = F_l(P, K_r)$ le transfert en boucle fermée obtenu par un compensateur K_r d'ordre réduit r . Alors $G_r(s) = F_l(P, K_r)$ est stable et vérifie :

$$\|F_l(P, K) - F_l(P, K_r)\|_\infty \leq 2 \text{Trace}(\Sigma_2) \quad (4.95)$$

Les étapes à suivre pour mettre en œuvre un compensateur K_r d'ordre réduit r sont :

Algorithme 4.9

Etape 1

Faire la synthèse d'un compensateur K de dimension n (4.88)

Etape 2

Calculer le transfert en boucle fermée (4.89)

Etape 3

Résoudre les systèmes des inégalités matricielles linéaires (4.94)

Etape 4

Déterminer la transformation T qui diagonalise simultanément $\bar{P}_2$ et $\bar{Q}_2$ (4.93)

Etape 5

Calculer la réalisation équilibrée du compensateur K dont extrait un compensateur d'ordre réduit K_r . ■

Remarques

1° Dans l'étape 4, la diagonalisation simultanée de $\bar{P}_2$ et $\bar{Q}_2$ peut être effectuée par la procédure suivante :

- Calculer les décompositions de Cholesky de $\bar{P}_2$ et $\bar{Q}_2$: $\bar{P}_2 = R_c^T R_c$ et $\bar{Q}_2 = R_o^T R_o$
- Décomposer en valeurs singulières la matrice $M = R_o R_c^T = U \Sigma V^T$
- Calculer la transformation $T = R_c^T U \Sigma^{-1/2}$ et son inverse $T^{-1} = \Sigma^{-1/2} U^T R_o$

2° Il est à noter que les matrices $\bar{P}$ et $\bar{Q}$ définies en 4.93 ne sont pas uniques. Les auteurs dans leur article soulignent l'intérêt de les choisir respectivement solutions des deux problèmes suivants :

- Minimiser trace ($\bar{P}_2$) sous la contrainte (4.94a)
- Minimiser trace ($\bar{Q}_2$) sous la contrainte (4.94b). ■

Bien que ce deuxième algorithme permette de garantir la stabilité en boucle fermée en substituant le régulateur d'ordre complet par un régulateur d'ordre réduit, le problème de l'existence de Gramiens structurés reste néanmoins posé. Dans le but d'apporter une relaxation de cet algorithme, Asato et al. [6] ont suggéré un nouveau algorithme en partant des conditions suivantes :

- Le transfert P_{22} qui correspond généralement au système non augmenté est strictement propre ($D_{22}=0$)
- Le régulateur d'ordre complet K est stable et strictement propre ($D_k=0$).

4.3.2 Extension aux systèmes interconnectés

Dans ce paragraphe, nous considérons la classe des systèmes interconnectés comme il est montré sur la figure 4.4 donnée ci-dessous. Il est à préciser que la présente méthode est inspirée des travaux [129], [127] dans lesquels les auteurs proposent une méthodologie pour traiter la réduction des systèmes structurés (interconnectés). Nous proposons ici d'adapter cette méthodologie au cas des systèmes bouclés avec une loi de commande décentralisée. La structure de commande est donnée par la figure 4.4.

Le système augmenté $G(s)$ peut s'écrire de manière compacte sous la forme :

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \quad (4.96)$$

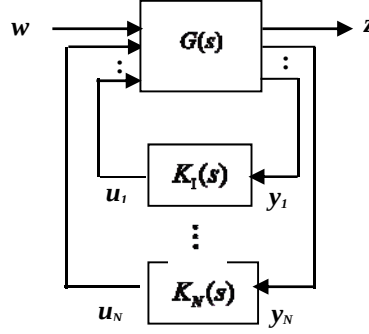


Figure 4.4 : Structure de la commande décentralisée

La structure de la commande décentralisée est constituée par N contrôleurs K_i , $i=1,..,N$:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2(s) & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K_N(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, \quad (4.97)$$

Les contrôleurs sont représentés par :

$$K_i(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A_i & B_i \\ \hline C_i & D_i \end{array} \right] \quad i=1,..,N \quad (4.98)$$

$$A_i \in \mathfrak{R}^{n_i \times n_i} \quad B_i \in \mathfrak{R}^{n_i \times m_i} \quad C_i \in \mathfrak{R}^{p_i \times n_i} \quad D_i \in \mathfrak{R}^{p_i \times m_i}$$

La structure diagonale (4.97) peut s'écrire de manière compacte sous la forme :

$$K(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A_k & B_k \\ \hline C_k & D_k \end{array} \right] \quad (4.99)$$

$$\begin{aligned} A_k &= \text{Diag}(A_1, \dots, A_N) & B_k &= \text{Diag}(B_1, \dots, B_N) \\ C_k &= \text{Diag}(C_1, \dots, C_N) & D_k &= \text{Diag}(D_1, \dots, D_N) \end{aligned} \quad (4.100)$$

Enfin, la fonction de transfert en boucle fermée s'écrit :

$$T_{zw}(s) = F_l(G, K) \leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} A + B_2 L D_k C_2 & B_2 L C_k & B_1 + B_2 L D_k D_{21} \\ \hline B_k F C_2 & A_k + B_k F D_{22} C_k & B_k F D_{21} \\ \hline C_1 + D_{12} D_k F C_2 & D_{12} L C_k & D_{11} + D_{12} D_k F D_{21} \end{array} \right] := \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & \tilde{D} \end{array} \right] \quad (4.101)$$

$$L = (I - D_k D_{22})^{-1} \quad F = (I - D_{22} D_k)^{-1}$$

que nous supposons stable et $F_l(G, K) \in \mathcal{RH}_\infty$ ($\|F_l(G, K)\|_\infty < \infty$).

On notera par la suite $B_{k,1} \in \mathfrak{R}^{r_k \times m_k}$, $\mathcal{K}_d = \{K(s) / K(s) = \text{diag}(K_1, \dots, K_N)\}$

Le problème de la réduction d'ordre pour les systèmes interconnectés ne diffère pas dans sa définition du problème de réduction des systèmes classiques abordés jusqu'à présent. En effet, le problème consiste à trouver un régulateur $K_d(s) \in \mathcal{K}_d$ tel que :

$$K_{opt}(s) := \arg \min_{\substack{K_d(s) \in \mathcal{K}_d \\ \deg(K_{id}(s)) < r_i, i=1,..,N}} \|F_l(G, K) - F_l(G, K_d)\|_\infty \quad (4.102)$$

En fait, on ne sait pas comment résoudre efficacement le problème d'optimisation (4.102), même dans le cas des systèmes non structurés. Néanmoins, il est possible de faire l'extension des méthodes sous optimales comme par la norme de Hankel et la méthode troncature équilibrée vues dans (§4.2.2). Dans la suite, nous proposons de faire l'extension de la troncature équilibrée présentée dans le paragraphe précédent dans le cadre de la commande centralisée.

Pour utiliser la troncature équilibrée, les Gramiens de commandabilité P et d'observabilité Q sont nécessaires. Elles sont solutions non uniques des inégalités matricielles suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{A}P + P\tilde{A}^T + \tilde{B}\tilde{B}^T &< 0, \quad P = P^T > 0 \\ \tilde{A}^T Q + Q\tilde{A} + \tilde{C}^T \tilde{C} &< 0, \quad Q = Q^T > 0 \end{aligned} \quad (4.103)$$

Le système $F_l(G, K)$ possède des Gramiens structurés si P et Q sont sous forme diagonale :

$$\begin{aligned} P &= \text{diag}(P_G, P_1, \dots, P_N) \\ Q &= \text{diag}(Q_G, Q_1, \dots, Q_N) \end{aligned} \quad (4.104)$$

où $P_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ conformément à (4.101). En plus, les Gramiens sont dits équilibrés si on a :

$$\begin{aligned} P_k &= Q_k = \text{Diag}(\sigma_{k,1} \quad \sigma_{k,2} \quad \dots \quad \sigma_{k,r} \quad \dots \quad \sigma_{k,n_k}) \\ \sigma_{k,i} &\geq \sigma_{k,i+1} > 0 \quad k=1, \dots, N \\ \sigma_{k,i} &= \sqrt{\lambda_i(P_k Q_k)} \end{aligned} \quad (4.105)$$

Les deux principaux résultats sont résumés dans les deux propositions suivantes dont les démonstrations sont établies dans [128] :

Proposition 1 :

S'il existe des Gramiens de commandabilité P et d'observabilité Q pour le système interconnecté $F_l(G, K)$, alors il existe une transformation $T = \text{diag}(T_G, T_1, \dots, T_N)$, $T_G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $T_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, $i=1, \dots, N$ permettant d'avoir la structure diagonale par blocs (4.105).

$$T_k^T P_k T_k = T_k^{-T} Q_k T_k^{-1} = \Sigma_k \quad (4.106)$$

Proposition 2 :

Supposons le système interconnecté $F_l(G, K)$ possède des Gramiens structurés de commandabilité P et d'observabilité Q et la structure équilibrée (4.95) et considérons les sous-systèmes K_k et $\hat{K}_k$:

$$K_k(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} A_{k,11} & A_{k,12} & B_{k,1} \\ A_{k,21} & A_{k,22} & B_{k,2} \\ \hline C_{k,1} & C_{k,2} & D_k \end{array} \right] \quad \hat{K}_k(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A_{k,11} & B_{k,1} \\ \hline C_{k,1} & D_k \end{array} \right], \quad k=1, \dots, N \quad (4.107)$$

où $A_{k,11} \in \mathbb{R}^{r_k \times r_k}$, $B_{k,1} \in \mathbb{R}^{r_k \times m_k}$, $C_{k,1} \in \mathbb{R}^{p_k \times r_k}$.

Le régulateur d'ordre réduit s'obtient par $\hat{K}(s) = \text{Diag}(\hat{K}_1, \dots, \hat{K}_N)$. Alors :

$$\|F_l(G, K) - F_l(G, K_d)\|_\infty \leq 2 \sum_{k=1}^N \sum_{i=r+1}^{n_k} \sigma_{k,i} \quad (4.108)$$

En résumé, les étapes à suivre sont :

Algorithme 4.10**- Etape 1**

Calculer les Gramiens de commandabilité P et d'observabilité Q structurés (4.104), solutions de (4.101) du système en boucle fermée (4.101).

- Etape 2

Utiliser la proposition 1 pour avoir la structure équilibrée (4.105) par la transformation T . (Voir procédure dans l'étape 4 de l'algorithme 4.9)

- Etape 3

Etablir les réalisations (4.107) et d'où un modèle réduit.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons sélectionné les principales techniques de réduction de modèle dites optimales dans le sens des normes $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$.

De façon fondamentale, le formalisme des inégalités matricielles a permis d'apporter un nouvel éclairage sur la plupart des approches, et ainsi de les analyser de façon critique. Pour certaines d'entre elles, nous avons également proposé de nouveaux algorithmes de résolution, en nous inspirant notamment de résultats obtenus dans le cadre de la synthèse $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$.

Les méthodes dites en boucle ouverte sont très nombreuses et se rivalisent mais leur efficacité pour les systèmes bouclés ne peut être appréciée qu'à posteriori: la stabilité et les performances ne sont pas systématiquement conservées. Dans cette même catégorie de méthodes, la classe de méthodes dites optimales utilisant le formalisme LMI sont intéressantes mais souffrent malheureusement du fait qu'elles conduisent à des problèmes non convexes et donc des procédures heuristiques doivent leur être appliquées. Les méthodes itératives souffrent généralement du non convergence vers des minimas globaux. Certes, les LMIs étendues ont apportées une certaine amélioration au problème posé.

Les méthodes dites en boucle fermée permettant de prendre en compte à posteriori la boucle fermée sont simples dans leur conception, notamment pour les systèmes décentralisés. La possibilité de leur application reste néanmoins liée à l'existence des Gramiens de commandabilité et d'observabilité généralisées structurées. Par ailleurs l'ordre de réduction subjectif est laissé à l'appréciation de l'utilisateur. L'ordre de réduction est basée sur l'analyse des valeurs singulières et il risque de ne pas être significatif s'il n'est y'a pas une décroissance significative de ces valeurs. Enfin, on note malheureusement le manque d'abondance de méthodes de réduction des compensateurs décentralisés.

Chapitre 5

Applications de la commande $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$

Chapitre 5

Applications de la commande $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$

5.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'application des méthodologies théoriques développées dans ce mémoire sur des procédés concrets de nature et de complexité diverse. Il s'agit précisément du rejet de perturbations dans une colonne binaire de distillation, le contrôle du microclimat dans une serre agricole et la commande décentralisée d'un système aérothermique. Nous envisageons à travers ce chapitre l'application de ces méthodologies débutant par une phase de modélisation/identification puis aboutissant à l'élaboration de lois de commande répondant aux exigences et aux performances attendues.

5.2 Rejet de perturbations dans une colonne binaire de distillation. Approche robuste par LMI

5.2.1 Introduction

La distillation est une opération de base dans les industries pétrochimiques et pharmaceutiques. C'est un procédé chimique qui permet de séparer les constituants d'un mélange liquide en se basant sur le fait que leurs points d'ébullition sont différents. Lors de la distillation, le chauffage d'un mélange de corps liquides entraîne la vaporisation de certains de ces corps, qui sont ensuite condensés et de cette manière séparés du mélange initial.

La distillation est binaire lorsque le produit à distiller est un mélange de deux composés qui peuvent être partiellement ou complètement miscibles. Cette opération est réalisée industriellement par les colonnes de distillation.

Chaque composé est caractérisé par sa volatilité, terme qui désigne la capacité à s'évaporer selon la température, dite, température d'ébullition. Le procédé de distillation utilise la différence de volatilité entre les constituants afin de les séparer : le composé le plus volatil s'évaporerait et composerait la majeure partie des vapeurs. Il est ainsi possible de créer une phase gazeuse ayant une composition différente du mélange initial. Ces vapeurs sont liquéfiées ensuite par condensation. Le produit final ainsi obtenu est appelé distillat qui est récupéré avec une concentration élevée du composé le plus volatil.

Les colonnes de distillation ne produisent pas en général un distillat d'une grande pureté : il contient une certaine proportion des autres composés du mélange initial. Il faut dès lors répéter l'opération d'évaporation-condensation avec le distillat afin de concentrer davantage le composé le plus volatil. En fait, seul un certain pourcentage du produit condensé est récupéré sous forme de distillat, l'autre partie est réinjectée dans la colonne sous forme de reflux.

On parle de la distillation continue quand l'installation de distillation est continuellement alimentée par le produit à distiller, par opposition à la distillation discontinue où le mélange à séparer est chargé une fois dans l'installation et d'où les composants sont distillés les uns après les autres.

Ce type de procédé industriel est complexe, multivariable, fortement non linéaire et de dimension très grande. Obtenir un distillat de bonne qualité avec un grand débit est tel l'objectif final. C'est un problème qui a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche comme il est mentionné à titre indicatif dans les références bibliographiques [133], [106], [89], et [67].

Dans la suite, nous considérons les paramètres de la colonne pilote installée à la faculté des

sciences de Rabat qui a fait l'objet d'une intense recherche comme le témoigne la liste bibliographique suivante [117],[111],[76],[144], et[75].

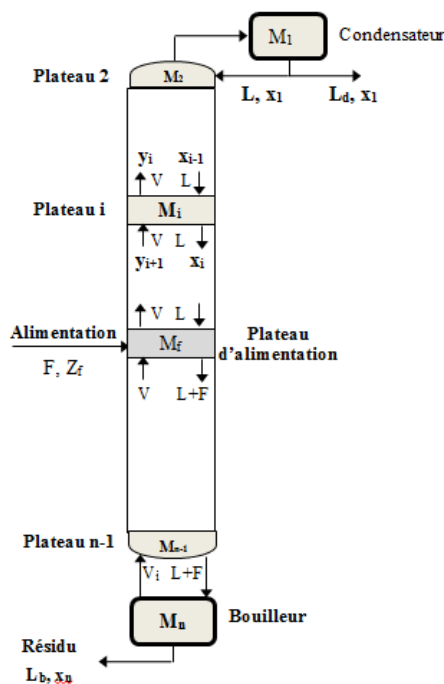
Dans notre travail, nous présentons une méthodologie pour la mise au point pratique de deux schémas de régulation dans une colonne binaire de distillation. Ce type de procédé industriel est fortement non linéaire, multivariable, et de dimension très grande. Pour son contrôle, nous considérons un modèle non linéaire pour décrire la conduite de la colonne et un modèle linéarisé autour d'un point de fonctionnement pour élaborer la commande. Nous comparons deux approches pour obtenir un modèle linéaire réduit pour la colonne et pour le régulateur multivariable. La première est basée sur la troncature équilibrée et l'autre est basée sur la norme $\mathcal{H}_\infty$ en utilisant la technique des Inégalités Matricielles Linéaires (LMIs). La synthèse d'un régulateur d'ordre réduit basé sur l'approche $\mathcal{H}_\infty$ est élaborée de manière à assurer la robustesse vis-à-vis des incertitudes de modélisation et le rejet des principales perturbations affectant le procédé. Il est calculé pour minimiser la norme $\mathcal{H}_\infty$ en utilisant la technique des LMIs. L'autre régulateur de type Proportionnel Intégral sera également élaboré en formulant sa détermination comme un problème de commande par retour de sortie statique dont le gain est déterminé par les LMIs.

Des simulations numériques sont montées sur un Benchmark obtenu à partir des équations non linéaires reproduisant ainsi une conduite plus réaliste de la colonne.

5.2.2 Modélisation d'une colonne binaire de distillation

5.2.2.1 Description et nomenclature

La figure 5.1 montre un schéma simplifié d'une unité de distillation. Il s'agit d'une colonne qui comporte un certain nombre de plateaux, un condensateur et un bouilleur situés respectivement en tête et au pied de la colonne. Le mélange binaire, c'est-à-dire constitué de deux composés à température d'ébullition différente, est introduit dans la colonne et chauffé au niveau du bouilleur de la colonne jusqu'à évaporation. Le produit le plus volatil évacué sous forme de vapeur est ensuite condensé au niveau du condensateur. Le produit fini (produit de tête) peut être soutiré comme distillat ou partiellement retourné dans la colonne comme reflux. Le produit riche en composant lourd est extrait du bouilleur et constitue le produit de pied.



- i, l, n : indice du $i^{\text{ème}}$ plateau, indice du condensateur, indice du bouilleur
- f : indice du plateau d'alimentation
- n : nombre de plateaux
- X_i : concentration molaire liquide
- Y_i : concentration molaire vapeur.
- M_i : accumulation de la matière liquide dans le $i^{\text{ème}}$ plateau.
- L : débit molaire liquide du reflux
- F : débit molaire liquide de l'alimentation
- Z_f : concentration molaire liquide de l'alimentation.
- L_d : débit molaire liquide du distillat.
- L_b : débit molaire liquide du résidu

Figure 5.1 : Schéma de principe d'une colonne binaire à distiller

Les produits d'alimentation, de tête et de pied, sont caractérisés par leur débit, concentration et température. Le reflux a une grande influence sur le processus de séparation du mélange. Un excès de reflux entraîne un produit de grande pureté, mais avec une dépense énergétique plus importante due à l'excès de liquide à évaporer. En revanche, un faible taux de reflux produit un distillat de grande impureté.

5.2.2.2 Modèle non linéaire (Benchmark)

Le comportement dynamique d'une colonne à distiller est caractérisé par un ensemble d'équations différentielles non linéaires qui découlent des lois physico-chimiques. Il existe des modèles très intéressants mais mathématiquement trop complexes et trop lourds à manipuler. De plus, ils mélangent des phénomènes très différents, comme l'hydrodynamique, généralement rapide, et la dynamique des compositions, nettement plus lente. Nous n'utiliserons pas ces modèles dynamiques pour élaborer la simulation et la commande. Nous proposons de considérer un modèle moins complet mais suffisant pour prendre principalement en compte les transitoires liés aux compositions. Pour ce faire, il est d'usage de formuler les hypothèses suivantes [124] :

- Le comportement hydrodynamique est instantané : les débits liquides et vapeurs s'établissent de façon instantanée dans la colonne.
- Les retenues molaires en phase vapeur sont négligeables et les retenues en phase liquide sont constantes.
- Tous les débits entrant et sortant sont à l'état liquide.
- Les plateaux sont dits théoriques avec une efficacité qui est prise en compte dans le terme de la volatilité relative, supposée constante le long de la colonne.
- Le liquide et la vapeur sont en équilibre thermodynamique traduit par :

$$y = \frac{\alpha x}{1 + (\alpha - 1)x} \quad (5.1)$$

x : Titre molaire liquide du constituant le plus volatil du $i^{\text{ème}}$ plateau

y : Titre molaire vapeur du constituant le plus volatil du $i^{\text{ème}}$ plateau

$\alpha > 1$: Volatilité relative des deux constituants.

- Les débits internes liquides et vapeur sont constants dans chaque tronçon de la colonne (la colonne est adiabatique, les chaleurs molaires de vaporisation des reflux des deux constituants sont voisines et le mélange est supposé parfait).
- La pression est supposée constante dans chaque plateau.

Les principales notations sont données sur la figure 5.1. En plus, en notant :

$i, 1, n$: indice du $i^{\text{ème}}$ plateau, indice du condensateur, indice du bouilleur

n : nombre de plateaux

L_i : débit molaire liquide du $i^{\text{ème}}$ plateau

V_i : débit molaire vapeur du $i^{\text{ème}}$ plateau

M_i : accumulation de la matière liquide dans le $i^{\text{ème}}$ plateau

L_r : débit molaire liquide du reflux

L_d : débit molaire liquide du distillat,

les hypothèses additionnelles suivantes sont communément adoptées en pratique :

$$\begin{aligned}
 L_i &= L_r = L, \quad i = 1, \dots, f \\
 L_i &= L_r + F = L + F, \quad i = f+1, \dots, n \\
 V_i &= V_b = V, \quad i = 1, \dots, n. \\
 D &= L_d = V - L \\
 M_i &= M, \quad i = 2, \dots, n-1.
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Sous ces hypothèses et en faisant un bilan de matière, il est possible de déduire les équations différentielles suivantes en assimilant le condensateur et le bouilleur situés respectivement en haut et en bas de la colonne comme deux plateaux indicés respectivement 1 et n [124]:

- Condensateur $i=1$

$$M_1 \frac{dX_1(t)}{dt} = V(Y_2 - X_1) \tag{5.3a}$$

- Zone de rectification $i = 2, \dots, f-1$

$$M_i \frac{dX_i(t)}{dt} = L(X_{i-1} - X_i) + V(Y_{i+1} - Y_i) \tag{5.3b}$$

- Plateau d'alimentation $i = f$

$$M_f \frac{dX_f(t)}{dt} = LX_{f-1} + V(Y_{f+1} - Y_f) - (L+F)X_f + FZ_f \tag{5.3c}$$

- Zone d'enrichissement $i = f+1, \dots, n-1$

$$M_i \frac{dX_i(t)}{dt} = (F+L)(X_{i-1} - X_i) + V(Y_{i+1} - Y_i) \tag{5.3d}$$

- Bouilleur $i=n$

$$M_n \frac{dX_n(t)}{dt} = (F+L)(X_{n-1} - X_n) + V(X_n - Y_n) \tag{5.3e}$$

Ce système d'équations différentielles montre la dépendance entre les différents plateaux de la colonne. Il s'agit d'un modèle fortement non linéaire et le nombre de variables d'état dépend de n qui peut être de l'ordre de quelques dizaines, voire plus, ce qui rend le problème d'élaboration d'un système de commande basé sur le modèle de connaissance particulièrement complexe et difficilement mis en pratique. Pour obtenir un modèle linéaire plus simple afin de concevoir une loi de commande reposant sur la théorie des systèmes linéaires, nous allons considérer la linéarisation des équations (5.3a~5.3e) autour d'un point de fonctionnement. Le choix de s'orienter vers une commande linéaire est dictée par l'abondance des outils robustes existants à cet effet. Néanmoins, le modèle non linéaire (5.3a~5.3e) sera utilisé pour simuler la conduite « réelle » de la colonne lors des différentes phases de simulation.

5.2.2.3 Modèle linéarisé de la colonne à distiller (de commande)

Une colonne à distiller dispose de plusieurs variables de commande : L , V , L_d ..etc. De nombreuses études ont été faites sur les configurations les plus appropriées pour définir les grandeurs manipulées. A défaut d'un bon choix, ceci peut conduire à des performances médiocres [107], [120]. Le choix de la configuration (L,V) comme configuration pour la commande est souvent retenue compte tenu de la sensibilité immédiate de la composition du produit à distiller à ces deux variables [124]. Elle est également préférée pour la simplicité qu'elle offre pour son implantation par rapport à d'autres configurations possibles. Le vecteur de mesure sera défini par la concentration molaire liquide en bas (résidu) et en haut de la colonne (distillat). Leurs régulations reflètent la qualité de la distillation.

En désignant par $\delta(.)$ les variations de toutes les grandeurs mises en jeu autour d'un point de fonctionnement repéré par l'exposant 0 dans les équations qui suivent, nous obtenons alors les

équations linéarisées suivantes obtenues par le développement en en série de Taylor d'ordre 1 des équations (5.3a~5.3e):

$$\begin{aligned}
 M_1 \delta \dot{X}_1 &= -V^0 \delta X_1 + V^0 \frac{\partial Y_2}{\partial X_2} \bigg|_0 \delta X_2 + (Y_2^0 - X_1^0) \delta V \\
 \begin{cases} M_i \delta \dot{X}_i = L^0 \delta X_{i-1} - (L^0 + V^0 \frac{\partial Y_i}{\partial X_i} \big|_0) \delta X_i + V^0 \frac{\partial Y_{i+1}}{\partial X_{i+1}} \big|_0 \delta X_{i+1} + (Y_{i+1}^0 - Y_i^0) \delta V + (X_{i-1}^0 - X_i^0) \delta L \\ i = 2, \dots, f \end{cases} \\
 M_f \delta \dot{X}_f &= L^0 \delta X_{f-1} - (F^0 + L^0 + V^0 \frac{\partial Y_f}{\partial X_f} \big|_0) \delta X_f + V^0 \frac{\partial Y_{f+1}}{\partial X_{f+1}} \big|_0 \delta X_{f+1} + (Z_f^0 - X_f^0) \delta F + F^0 \delta Z_f + (Y_{f+1}^0 - Y_f^0) \delta V + (X_{f-1}^0 - X_f^0) \delta L \\
 \begin{cases} M_i \delta \dot{X}_i = (L^0 + F^0) \delta X_{i-1} - (L^0 + F^0 + V^0 \frac{\partial Y_i}{\partial X_i} \big|_0) \delta X_i + V^0 \frac{\partial Y_{i+1}}{\partial X_{i+1}} \big|_0 \delta X_{i+1} + (Y_{i+1}^0 - Y_i^0) \delta V + (X_{i-1}^0 - X_i^0) \delta L + (X_{i-1}^0 - X_i^0) \delta F, \\ i = f+1, \dots, n-1 \end{cases} \\
 M_n \delta \dot{X}_n &= (L^0 + F^0) \delta X_{n-1} - (L^0 + F^0 - V^0 + V^0 \frac{\partial Y_n}{\partial X_n} \big|_0) \delta X_n - (Y_n^0 - X_n^0) \delta V + (X_{n-1}^0 - X_n^0) \delta L + (X_{n-1}^0 - X_n^0) \delta F
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Le système d'équations ci-dessus peut alors se mettre sous la forme de la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_p w_p(t) + B_u u(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{5.5}$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_p \in \mathbb{R}^{n \times m_p}$, $B_u \in \mathbb{R}^{n \times m_u}$, et $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, avec : $n = 22$, $p = 2$, $m_p = m_u = 2$.

Dans cette représentation $x = [\delta X_1 \ \dots \ \delta X_n]^T$ représente le vecteur d'état, $u = [\delta L \ \delta V]^T$ le vecteur de commande et $w_p = [\delta F \ \delta Z_f]^T$ le vecteur de perturbations mesurables. $y(t) = [\delta X_1(t) \ \delta X_n(t)]^T$ représente la concentration molaire liquide en haut et en bas de la colonne. Dans la suite, nous considérons la représentation d'état sous la forme compacte suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t) \\ y(t) = Cx(t) + Dv(t) \end{cases} \text{ avec : } \begin{cases} B = \begin{bmatrix} B_p & B_u \end{bmatrix} & D = 0 \\ v = \begin{bmatrix} w_p^T & u^T \end{bmatrix}^T \end{cases} \tag{5.6}$$

Les paramètres de la colonne sont résumés dans les tables données ci-dessous. Les compositions molaires X_i , $i = 1, \dots, 22$ sont obtenues par simulation numérique du modèle non linéaire (5.3a~5.3e):

Volatilité relative α	Débit molaire d'alimentation F	Débit molaire de reflux L	Débit molaire vapeur V	Concentration molaire liquide de l'alimentation Z_f	Accumulation de la matière liquide Mi
3	25	10	20	0.5	$M_1 = 0.9$ $M_i = 0.15, \ i = 2, \dots, 21$ $M_{22} = 1.5$

Table 1 : Paramètres du point de fonctionnement de la colonne

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
0.98015	0.9428	0.89279	0.83103	0.76193	0.69266	0.63043	0.57983	0.54189
X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}	X_{17}	X_{18}
0.51515	0.51512	0.51505	0.51489	0.5145	0.51358	0.51137	0.50616	0.49392
X_{19}	X_{20}	X_{21}	X_{22}					
0.46666	0.41038	0.31352	0.18696					

Table 2 : Valeurs des compositions au point de fonctionnement

5.2.3 Réduction de modèle

Le modèle linéaire (5.6) ainsi obtenu présente un nombre important de variables d'état (22 dans le cas traité). Indépendamment de la stratégie adoptée pour l'élaboration d'une loi de commande et sans souci de réduction de modèle, il va conduire à un régulateur également de même dimension, voire plus.

Rappelons que l'objectif de la réduction est d'éliminer la redondance dynamique et de faciliter l'implantation du régulateur. Pour ce faire, quatre stratégies peuvent être envisagées dans le but d'obtenir des modèles d'ordre réduit.

- Considérer un régulateur d'ordre fixe lors de sa conception sans faire appel aux techniques directes de réduction,
- Réduire le modèle linéarisé (5.6) de la colonne et concevoir par conséquent un régulateur d'ordre réduit,
- Maintenir l'ordre du modèle (5.6) et réduire ensuite l'ordre du régulateur qui en découle,
- Combiner éventuellement les deux dernières stratégies à la fois.

Il se dessine déjà d'après ces quatre procédures qu'il y'a deux orientations possibles : celle qui se base sur la réduction de modèle en boucle ouverte pour aboutir à un régulateur d'ordre réduit et celle qui se base sur l'obtention d'un régulateur d'ordre fixe lors de sa conception en boucle fermée. Les procédures directes permettant d'obtenir un régulateur d'ordre fixé sont intéressantes puisqu'à la différence des deux autres approches, elles permettent d'imposer non seulement une contrainte de degré à la solution mais également exiger un certain niveau de performance relative à la synthèse du régulateur. Cependant imposer une contrainte sur l'ordre du correcteur lors de la phase de synthèse conduit à un problème difficile à résoudre, mais il peut être traité de manière plus au moins efficace par des méthodes heuristiques disponibles dans la littérature (§ 3.6.4 du chapitre 3). Par ailleurs la différence d'ordre entre un régulateur d'ordre complet et un régulateur d'ordre fixé n'est pas généralement très significative. Pour ces raisons, nous nous orientons vers des méthodes de réduction en boucle ouverte tout en prévoyant une méthode de régulation robuste vis à vis des incertitudes de modélisation.

Pour disposer d'un modèle réduit pour une colonne à distiller, la méthode qui semble être la plus répandue est la méthode d'agrégation. Elle considère une colonne à distiller comme un système composé d'un nombre restreint de compartiments [75], [99], [100]. Le modèle réduit préservant le caractère physique est de nature non linéaire et sa linéarisation autour d'un point de fonctionnement permet d'obtenir en définitive un modèle linéaire de dimension raisonnable.

Dans notre méthodologie, nous partons de l'hypothèse qu'un modèle mathématique linéaire (5.6) est connu donnant une description assez détaillée de la colonne. Le but recherché est alors de déterminer à partir des méthodes d'approximation, un autre modèle linéaire de dimension inférieure à celle du précédent qui soit une représentation satisfaisante du système. De même, partant d'un régulateur d'ordre élevé, ces mêmes méthodes peuvent être appliquées pour obtenir un régulateur d'ordre réduit. Nombreuses sont les méthodes de réduction en boucle ouverte sont disponibles dans la littérature (voir chapitre 4). Ici, nous avons retenu une des méthodes optimales de réduction, à savoir, celle basée sur la norme $\mathcal{H}_\infty$ comme mesure pour l'erreur d'approximation faisant appel aux techniques des LMIs. C'est dans ce dernier contexte que nous nous plaçons dans la suite.

5.2.3.1 Préliminaires : méthode de la troncature équilibrée [151]

Soit $G(s)$, la fonction de transfert associée à la réalisation (A, B, C, D) minimale et stable donnée par (5.6) et considérons la représentation d'état équilibrée obtenue par diagonalisation

simultanée des Gramiens de commandabilité et d'observabilité :

$$\tilde{W}_c = \tilde{W}_o = \Sigma = \text{Diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n),$$

où $\sigma_i > 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ désignant les valeurs singulières de Hankel du système G . Ces valeurs sont données par la table suivante:

σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
0.96585	0.25987	0.067438	0.038314	0.00775	0.0027026
σ_7	σ_8	σ_9	σ_{10}	σ_{11}	σ_{12}
0.0008919	0.00011032	$8.5324 \cdot 10^{-5}$	$1.24 \cdot 10^{-5}$	$9.1539 \cdot 10^{-6}$	$1.8261 \cdot 10^{-6}$
σ_{13}	σ_{14}	σ_{15}	σ_{16}	σ_{17}	σ_{18}
$6.1656 \cdot 10^{-7}$	$1.7411 \cdot 10^{-7}$	$2.2823 \cdot 10^{-8}$	$9.5376 \cdot 10^{-9}$	$1.0337 \cdot 10^{-10}$	$5.2723 \cdot 10^{-10}$
σ_{19}	σ_{20}	σ_{21}	σ_{22}		
$5.0705 \cdot 10^{-11}$	$1.4777 \cdot 10^{-11}$	$7.8567 \cdot 10^{-13}$	$2.2307 \cdot 10^{-13}$		

Table 3 : valeurs singulières du modèle complet

La représentation d'état équilibrée induite s'obtient en posant $x(t) = T \tilde{x}(t)$. Nous avons alors :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = T^{-1} A T \tilde{x}(t) + T^{-1} B v(t) \\ y(t) = C T \tilde{x}(t) + D v(t) \end{cases} \quad (5.7)$$

Dans la suite de ce paragraphe nous supposons que le système (5.6) est mis sous cette forme équilibrée en posant $\tilde{A} = T^{-1} A T, \tilde{B} = T^{-1} B, \tilde{C} = C T$.

La $i^{\text{ème}}$ valeur singulière de Hankel reflète le degré de commandabilité et d'observabilité de l' $i^{\text{ème}}$ état de la forme équilibrée. Plus une valeur singulière de Hankel est faible, moins l'état correspondant en coordonnées équilibrées est simultanément commandable et observable. Ces états à faibles valeurs singulières de Hankel peuvent alors être tronqués. Par conséquent, la troncature des petites valeurs singulières de Hankel n'a pas un impact significatif sur la dynamique du système.

En organisant ces valeurs dans l'ordre décroissant $\sigma_1 \geq \sigma_2 \dots \geq \sigma_n > 0$, l'ordre de troncature r peut être choisi lorsque $\frac{\sigma_{r+1}}{\sigma_r} \ll 1$, ou par le choix d'une borne supérieure pour la différence entre deux valeurs singulières successives. Soit $r < n$, l'ordre d'approximation choisi. On réalise alors une partition de $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ correspondant à la partition de Σ en deux sous-matrices diagonales Σ_1, Σ_2 , délimitées par σ_r . Il en résulte l'état $\tilde{x}(t)$ est partitionné en $\tilde{x}_1(t)$ et $\tilde{x}_2(t)$, où $\tilde{x}_1(t)$ rassemble les r états à conserver et $\tilde{x}_2(t)$ les $(n-r)$ états à éliminer. La représentation (5.7) devient alors:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1(t) \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} v(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + D v(t) \end{cases} \quad (5.8)$$

Un modèle réduit $G_r(s)$ asymptotiquement stable d'ordre r de représentation d'état équilibrée est alors obtenu par troncature :

$$G_r(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_{11} & \tilde{B}_1 \\ \hline \tilde{C}_1 & D \end{array} \right] \quad (5.9)$$

D'autre part, la norme $\mathcal{H}_\infty$ de l'erreur est majorée par :

$$\| G(s) - G_r(s) \|_\infty \leq 2 \sum_{i=r+1}^n \sigma_i = 2 \text{Trace}(\Sigma_2) \quad (5.10)$$

Notons qu'il existe une version de la troncature équilibrée avec conservation du gain statique (voir l'expression 4.11 du chapitre 4).

5.2.3.2 Réduction optimale selon la norme $\mathcal{H}_\infty$

Le problème de réduction optimale selon la norme $\mathcal{H}_\infty$ est formulé comme un problème d'optimisation paramétrique. Considérons la représentation d'état (5.6) de la colonne dont nous cherchons à réduire son ordre. Le problème de réduction optimale selon la norme $\mathcal{H}_\infty$ consiste à chercher une fonction de transfert asymptotiquement stable $G_r(s) = (A_r, B_r, C_r, D_r)$, $A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$, de degré $r < n$, solution du problème d'optimisation suivant :

$$\underset{G_r(s)}{\text{Min}} \|G(s) - G_r(s)\|_\infty \quad (5.11)$$

Une représentation d'état de $G(s) - G_r(s) = (A_\varepsilon, B_\varepsilon, C_\varepsilon, D_\varepsilon)$ se déduit aisément des représentations d'état de $G(s)$ et $G_r(s)$:

$$\begin{cases} \dot{x}_e(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_r(t) \end{bmatrix} = A_e x_e(t) + B_e v(t) \\ e(t) = y(t) - y_r(t) = C_e x_e + D_e v(t) \end{cases} \quad (5.12)$$

$$G(s) - G_r(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A_\varepsilon & B_\varepsilon \\ \hline C_\varepsilon & D_\varepsilon \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A & 0 & B \\ 0 & A_r & B_r \\ \hline C & -C_r & D - D_r \end{array} \right] \quad (5.13)$$

La majorité des méthodes basées sur l'approche LMI ont comme point de départ le Lemme Borné Réel (LBR) qui permet d'établir les conditions d'existence d'un modèle d'ordre réduit $G_r(s)$ tel que $\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \leq \gamma$, à savoir, l'existence d'une matrice P symétrique définie positive telle que (§4.2.4.1) :

$$\begin{bmatrix} SA + A^T S & NA_r + A^T N & SB + NB_r & C^T \\ (*)^T & RA_r + A_r^T R & N^T B + RB_r & -C_r^T \\ (*)^T & (*)^T & -\gamma I & D^T - D_r^T \\ (*)^T & (*)^T & (*)^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (5.14)$$

où P est partitionnée de façon compatible avec A_ε :

$$P = \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & R \end{bmatrix} \quad S = S^T \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{et} \quad R = R^T \in \mathbb{R}^{r \times r}$$

Cette inégalité est bilinéaire (BMI) en les variables N, R, A_r, B_r et linéaire en S, C_r et D_r . Sous cette forme, le problème n'est pas convexe et on ne sait pas le résoudre exactement. Dans le cas général, l'idée la plus simple est d'aborder la BMI (4.27) comme deux problèmes LMI consécutifs, et à itérer jusqu'à ce qu'un certain critère de convergence soit atteint. Une solution sous-optimale est alors obtenue. Cependant ce type d'algorithme itératif souffre de quelques problèmes notamment la convergence vers un minimum local au lieu d'un minimum global. Nous avons testé sans succès quelques-unes de ces méthodes, notamment les algorithmes (4.1) et (4.2) du chapitre 4.

Afin d'éviter ce type de problème, l'idée consiste de s'orienter vers une méthode d'optimisation convexe et notre choix s'est porté sur la méthode proposée dans [143] moyennant une adaptation au cas de la colonne à distiller compte tenu de la propriété de ses valeurs singulières.

En effet, considérons plus généralement un système dont la représentation d'état est minimale et équilibrée $G(s) = (A, B, C, D)$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et en admettant que ses valeurs singulières sont structurées de la sorte :

$$\begin{cases} \tilde{W}_c = \tilde{W}_o = \tilde{\Sigma} = \text{Diag}(\underbrace{\sigma_1 I_{k_1}, \sigma_2 I_{k_2}, \dots, \sigma_l I_{k_l}}_{\Sigma_1}, \underbrace{\sigma_{l+1} I_{k_{l+1}}, \dots, \sigma_m I_{k_m}}_{\Sigma_2}) \\ \sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_n > 0, \quad \sum_{i=1}^m k_i = n, \end{cases}$$

où k_i représente la multiplicité de la valeur singulière σ_i . Nous résumons la méthode sous forme algorithmique [143] (Voir aussi l'algorithme 4.4 du chapitre 4):

Etape 1 : Minimiser γ par rapport aux variables γ, S, N et $R = Q^{-1}$ et $Q = Q^T > 0 \in \mathbb{R}^{(n-k_m) \times (n-k_m)}$ sous les contraintes :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} S & NQ \\ QN^T & Q \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} SA + A^T S - NQN^T A - A^T NQN^T & SB - NQN^T B \\ (SB - NQN^T B)^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} A^T S + SA & C^T \\ C & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \quad (5.15a)$$

$$\text{avec: } N = \begin{bmatrix} I_{n-k_m} \\ 0_{k_m, n-k_m} \end{bmatrix} \quad (5.15b)$$

Etape 2 : De l'étape 1, on considère γ, S, N et $R = Q^{-1}$ et on résout la LMI (5.14) en (A_r, B_r, C_r, D_r) ■

L'intérêt de cet algorithme réside dans le fait qu'il permet de trouver un modèle réduit optimal d'ordre $r = n - k_m$ en résolvant un problème convexe de type LMI en imposant une structure particulière à N . Ce choix n'introduit aucun conservatisme tant que la représentation d'état est équilibrée. Dans le cas particulier où la multiplicité de la petite valeur singulière est égale à $k_m=1$, le degré de la réduction ne présentera pas grand intérêt pratique. Cependant dans le cas où les k_m dernières valeurs singulières sont faibles et peuvent être assimilées à une seule valeur σ_m , il est possible d'obtenir un modèle réduit d'ordre $r = n - k_m$ conséquent. C'est justement le cas de la colonne compte tenu des valeurs singulières (Table 3).

L'étude qui suit est relative à une comparaison entre la méthode de troncature équilibrée et la technique LMI pour montrer que celle-ci est plus prometteuse malgré « ce conservatisme » dans le choix de k_m .

En effet, en toute rigueur la multiplicité des valeurs singulières est égale à $k_i = 1, i=1, \dots, 22$. D'après la méthode de réduction présentée ci-dessus, il est possible d'obtenir un modèle optimal d'ordre $r=21$. Cependant, notre idée consiste à assimiler les k_m dernières valeurs singulières à une même valeur, ce qui permet d'obtenir un modèle réduit d'ordre $r = n - k_m$.

Comparaison et simulation

Dans la Table 4, nous avons présenté $\|G(s) - G_r(s)\|_\infty$ pour différentes valeurs de r en comparant la méthode de troncature équilibrée et la méthode basée sur la formulation LMI.

r	2	3	4	5
Troncature équilibrée	0.075194	0.04325	0.0081189	0.0029637
Formulation LMI	0.06994	0.041603	0.0082178	0.0027414

Table 4 : Comparaison entre les méthodes de réduction

Il en ressort que la méthode de réduction par LMI semble être meilleure par rapport à la première au sens du critère d'évaluation adoptée. Cette même remarque a été observée en faisant une comparaison entre le régulateur d'ordre complet ($n=24$) et ses versions réduites (Voir §5.2.4). Précisons que la méthode par troncature se base sur un ordre choisi à priori alors que par la formulation LMI, il est toujours possible d'imposer une atténuation γ telle que $\|G(s) - G_r(s)\|_\infty < \gamma$ et de chercher le modèle réduit qui en résulte.

Nous présentons ci-après le résultat de simulation du comportement du modèle non linéaire et des modèles complet ($n=22$) et réduit ($r = 4$) autour du point de fonctionnement suite aux variations des entrées données par la table suivante :

Instant (en minutes)	Variation ΔV	Variation ΔL	Variation ΔF	Variation Z_f
3	1	0	0	0
5	*	1	0	0
6	*	*	1	0
8	*	*	*	0.05

(*) : Variation conservée

Table 5 : Variations des entrées autour du point de fonctionnement

La figure 5.2 présente respectivement l'évolution des compositions x_1 et x_{22} respectivement en tête et au pied de la colonne. Elle illustre le bon comportement du modèle réduit par rapport au modèle d'ordre complet. Dans la suite nous retenons le modèle réduit d'ordre 4.

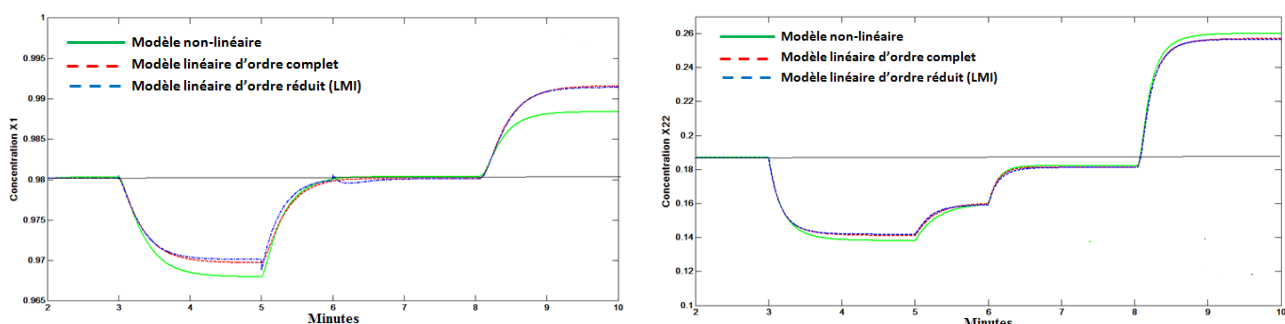


Figure 5.2 : Validation du modèle réduit

5.2.4 Rejet de perturbations par régulateurs $\mathcal{H}_\infty$ et PI

L'objectif de la compensation est d'assurer la stabilité du système en boucle fermée et un comportement satisfaisant en nominal. L'ensemble de ces qualités devra être préservé autant que possible en présence des perturbations externes et des incertitudes de modélisation. La méthode de synthèse de la commande envisagée pour la colonne à distiller doit répondre à un certain nombre de performance :

- La robustesse vis-à-vis des incertitudes de modélisation. Celles sont matérialisées essentiellement par des dynamiques négligées, la linéarisation pour obtenir un modèle linéaire et la réduction de son ordre ;

- Le rejet de perturbations qui sont matérialisées essentiellement par les variations du débit du produit à distiller et sa concentration afin que les fractions molaires en bas et en haut de la colonne soient les plus constantes possibles.

Dans ce contexte, nous proposons deux types de régulation. Le premier schéma conduit à la synthèse d'un régulateur R_{Hinf} permettant de minimiser la norme $\mathcal{H}_\infty$ entre les entrées exogènes et les grandeurs contrôlées et d'assurer une bonne précision vis-à-vis des consignes et des perturbations lentement variables. Cette dernière performance sera assurée par l'insertion d'une action intégrale dans la structure de commande comme il est illustré par la figure 5.3.

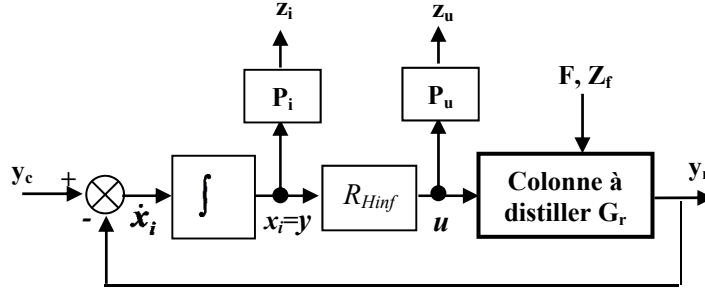


Figure 5.3 : Schéma pour la synthèse du régulateur $\mathcal{H}_\infty$

Quant au deuxième type de régulation envisagée, elle conduit à la synthèse du régulateur industriel **P**roportionnel **I**ntégral (R_{PI}) multivariable comme il est illustré par la figure 5.4 suivante :

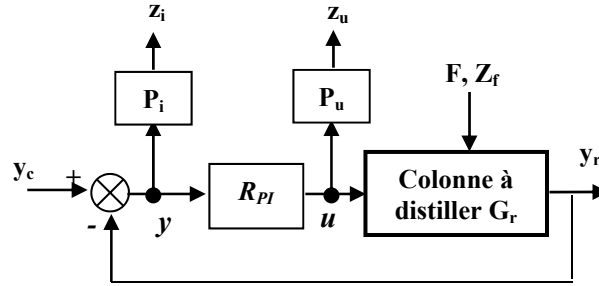


Figure 5.4 : Schéma pour la synthèse du régulateur PI

Dans les deux schémas, la colonne est représentée par son modèle réduit $G_r(s) = (A_r, B_r, C_r, D_r)$ de degré 4. y_c et y_m représentent respectivement la consigne et la mesure des fractions molaires liquide en bas et en haut de la colonne.

- Synthèse du régulateur R_{Hinf} (Figure 5.3)

En visant à contrôler les signaux pondérés à la sortie de l'intégrateur d'une part et les variations des commandes pondérées d'autre part, on définit alors le vecteur z de composantes $z_i = P_i x_i$ et $z_u = P_u u$ représentant les variables contrôlées. L'ensemble des équations qui régissent le système sont comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_r x(t) + B_{rp} w_p(t) + B_{ru} u(t) \\ y_r(t) = C_r x(t) + D_{rp} w_p(t) + D_{ru} u(t) \\ \dot{x}_i(t) = y_c(t) - y_r(t) \\ y_c = \begin{bmatrix} x_{lc} \\ x_{22c} \end{bmatrix} \quad y_m = \begin{bmatrix} x_l \\ x_{22} \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (5.16)$$

Dans la suite les pondérations P_i et P_u seront choisies constantes et telles que :

$$P_i = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \quad P_u = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

Le schéma de la figure 5.3 est réorganisé pour mettre en évidence le schéma standard de la synthèse $\mathcal{H}_\infty$, à savoir :

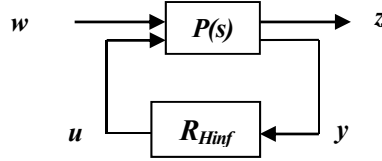


Figure 5.5: Schéma de la boucle fermée

$P(s)$ représente le système augmenté de représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) = C_1 X(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\ y(t) = C_2 X(t) + D_{21} w(t) + D_{22} u(t), \end{cases} \quad (5.17)$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} \delta L \\ \delta V \end{bmatrix} \quad w = \begin{bmatrix} y_c \\ w_p \end{bmatrix} \quad w_p = \begin{bmatrix} \delta F \\ \delta Z_f \end{bmatrix} \quad y_c = \begin{bmatrix} y_{1c} \\ y_{22c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1c} \\ x_{22c} \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} z_i \\ z_u \end{bmatrix}$$

$$\text{où : } \begin{cases} A = \begin{bmatrix} A_r & 0 \\ -C_r & 0 \end{bmatrix} & B_1 = \begin{bmatrix} 0 & B_{rp} \\ I & -D_{rp} \end{bmatrix} & B_2 = \begin{bmatrix} B_{ru} \\ -D_{ru} \end{bmatrix} \\ C_1 = \begin{bmatrix} 0 & P_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ P_u \end{bmatrix} \\ C_2 = [0 \quad I] & D_{21} = [0 \quad 0] & D_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Le problème de la synthèse optimale consiste à trouver tous les régulateurs $R_{Hinf}(s)$ qui stabilisent le système bouclé de la figure (5.5) et minimisent $\|T_{zw}\|_\infty$, où T_{zw} représente le transfert entre les entrées exogènes w et les variables contrôlées z . On peut également envisager le problème sous optimal qui consiste à trouver tous les contrôleurs R_{Hinf} qui stabilisent le système bouclé de la figure (5.5) et assurent $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$, où $\gamma > 0$ spécifie le niveau de performance souhaitée.

- Synthèse du régulateur R_{PI} (Figure 5.4):

Le système augmenté correspondant à la figure 5.4 est donné par

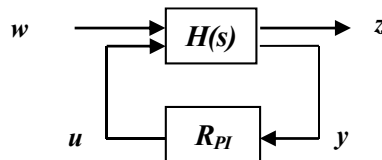


Figure 5.6: Schéma de la boucle fermée

où $H(s)$ est donné par :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) = C_1 X(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\ y(t) = C_2 X(t) + D_{21} w(t) + D_{22} u(t), \end{cases} \quad (5.18)$$

$$X = x \quad u = \begin{bmatrix} \delta L \\ \delta V \end{bmatrix} \quad w = \begin{bmatrix} y_c \\ w_p \end{bmatrix} \quad y_c = \begin{bmatrix} y_{lc} \\ y_{22c} \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} z_i \\ z_u \end{bmatrix}$$

$$\text{où : } \begin{cases} A = A_t & B_1 = \begin{bmatrix} 0 & B_{rp} \end{bmatrix} & B_2 = B_{ru} \\ C_1 = \begin{bmatrix} -P_i C_r \\ 0 \end{bmatrix} & D_{11} = \begin{bmatrix} P_i & -P_i D_{rp} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & D_{12} = \begin{bmatrix} -P_i D_{ru} \\ P_u \end{bmatrix} \\ C_2 = -C_r & D_{21} = \begin{bmatrix} I & -D_{rp} \end{bmatrix} & D_{22} = -D_{ru} \end{cases}$$

avec une loi de commande de type PI :

$$u(t) = K_p y(t) + K_i \int_0^t y(\tau) d\tau, \quad K_p, K_i \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad (5.19)$$

Le problème de la détermination des paramètres K_p, K_i peut être formulé comme un problème de détermination d'un gain de retour de sortie statique. En effet, posons :

$$\begin{cases} \bar{X}_1(t) = X(t) \\ \bar{X}_2(t) = \int_0^t y(\tau) d\tau, \end{cases} \quad \bar{X}(t) = \begin{bmatrix} \bar{X}_1(t) \\ \bar{X}_2(t) \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

et définissons le nouveau vecteur de sortie $\bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} y \\ \int_0^t y(\tau) d\tau \end{bmatrix}$ comme il est illustré sur la figure suivante :

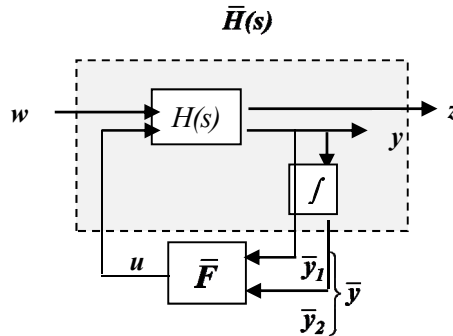


Figure 5.7: Schéma de la boucle fermée avec R_{PI}

et où le nouveau système augmenté $\bar{H}(s)$ est établi à partir de (5.19) et (5.20) :

$$\begin{cases} \bar{X}(t) = \bar{A} \bar{X}(t) + \bar{B}_1 w(t) + \bar{B}_2 u(t) \\ z(t) = \bar{C}_1 \bar{X}(t) + \bar{D}_{11} w(t) + \bar{D}_{12} u(t) \\ \bar{y}(t) = \bar{C}_2 \bar{X}(t) + \bar{D}_{21} w(t) + \bar{D}_{22} u(t) \end{cases} \quad (5.21)$$

$$\text{où : } \begin{cases} \bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} & \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} & \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \bar{C}_1 = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} & \bar{D}_{11} = D_{11} & \bar{D}_{12} = D_{12} \\ \bar{C}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} & \bar{D}_{21} = \begin{bmatrix} D_{21} \\ 0 \end{bmatrix} & \bar{D}_{22} = \begin{bmatrix} D_{22} \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Avec ce changement de variables, la loi de commande (5.19) s'écrit :

$$u(t) = K_p \bar{y}_1(t) + K_i \bar{y}_2(t) = \begin{bmatrix} K_p & K_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y}_1(t) \\ \bar{y}_2(t) \end{bmatrix} \triangleq \bar{F} \bar{y}(t) \quad (5.22)$$

Ainsi, le problème de la détermination des gains K_p, K_i se ramène à la détermination du gain $\bar{F}$ de retour de sortie statique. A ce stade du calcul, il est possible d'éliminer le terme $\bar{D}_{22}u(t)$ de (5.21) en posant $\bar{y}'(t) = \bar{y}(t) - \bar{D}_{22}u(t)$. Avec ce changement, nous envisageons dans un premier temps de calculer la loi de commande $u(t) = \bar{F}' \bar{y}'(t)$ pour en déduire la loi de commande $u(t) = \bar{F} \bar{y}(t)$ où le gain $\bar{F}$ est donné par :

$$\bar{F} = (I + \bar{F}' \bar{D}_{22})^{-1} \bar{F}' \quad (5.23)$$

Par ailleurs, nous savons que le problème de la stabilisation par retour de sortie statique avec ou sans contrainte de performance sur la norme $\mathcal{H}_\infty$ du transfert en boucle fermée, peut être formulé par la technique des LMIs. Malheureusement cela conduit à des problèmes non convexes. Les algorithmes itératifs 2.2 et 2.3 présentés dans le chapitre 2 ont été retenus pour résoudre ce problème.

5.2.5 Simulation et résultats

Les schémas de simulation numérique que nous avons réalisé sont inspirés des schémas des figures 5.3 et 5.4 en substituant le modèle réduit de la colonne par le Benchmark (modèle non linéaire : 5.3a~5.3e). L'évaluation de l'aptitude des contrôleurs face aux changements de consignes et aux perturbations simulées seront ainsi "plus réalistes".

Les premiers tests effectués correspondent aux configurations suivantes:

1. **Schéma 1** : Simulation avec le régulateur d'ordre complet $n=24$ élaboré à partir du modèle de la colonne augmenté $22+2=24$. (Le 2 est dû aux actions intégrales introduites).
2. **Schéma 2** : Simulation avec le régulateur d'ordre $r+2$ élaboré à partir du modèle réduit de la colonne augmenté $r+2$.
3. **Schéma 3** : Simulation avec le régulateur d'ordre r élaboré par réduction du régulateur d'ordre complet $n+2=24$. Le choix de k_m et donc de r est choisi après analyse des valeurs singulières du régulateur.

Ces tests ont pour but de répondre à la question suivante: faut-il réduire le modèle de la colonne pour ensuite faire la synthèse d'un régulateur d'ordre réduit ou élaborer un régulateur d'ordre complet pour ensuite réduire son ordre. Il est évident que seul le régulateur R_{Hinf} est concerné par cette étude. Les résultats de ces tests sont résumés dans la table suivante dans laquelle la norme $\|T_{zw}\|_\infty$ est précisée comme critère de comparaison:

Ordre du régulateur	Test 1	Test 2	Test 3
24	1.183	*	*
4	*	1.2483	46.077
5	*	1.1840	2.5925
6	*	1.1849	1.3204
7	*	1.1864	1.3061

Table 6 : Comparaison entre les méthodes d'implantation du régulateur

Il en ressort que la configuration 2 est plus appropriée pour la synthèse d'un régulateur d'ordre réduit. C'est-à-dire, il est plus intéressant d'élaborer un régulateur d'ordre réduit à partir du modèle réduit du procédé. Cette configuration sera retenue dans la suite.

Nous présentons à présent une étude comparative entre les deux de types de commande :

- Régulateur $\mathcal{H}_\infty$ avec ajout de l'action I d'ordre $r+2= 6$ (Figure 5.3) ;

Paramètres du régulateur												$\ T_{wz}\ _\infty$																																																																			
$\begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix}$																																																																															
<table><tr><td>-9405.7</td><td>-1459</td><td>271.19</td><td>-35.301</td><td>-155.95</td><td>27.662</td><td>-3397.3</td><td>-8906.2</td><td colspan="4" rowspan="8">1.1849</td></tr><tr><td>-3194.1</td><td>-740.71</td><td>129.72</td><td>44.592</td><td>139.14</td><td>-131.69</td><td>461.32</td><td>-3615.6</td></tr><tr><td>932.86</td><td>200.53</td><td>-76.993</td><td>13.405</td><td>-27.839</td><td>21.324</td><td>-72.866</td><td>1033.3</td></tr><tr><td>2449.3</td><td>532.93</td><td>-127.7</td><td>-37.139</td><td>-90.992</td><td>118.89</td><td>-151.22</td><td>2698.6</td></tr><tr><td>-6413</td><td>-1046.7</td><td>198.62</td><td>-5.017</td><td>-70.051</td><td>-21.751</td><td>-1973.3</td><td>-6196.9</td></tr><tr><td>-957.95</td><td>-13784</td><td>2988.6</td><td>3058.5</td><td>10922</td><td>-10082</td><td>91776</td><td>-34646</td></tr><tr><td>-10.963</td><td>-2.4444</td><td>1.0755</td><td>-0.84965</td><td>-11.941</td><td>541.96</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>12.757</td><td>3.2424</td><td>-1.3752</td><td>0.32008</td><td>6.0454</td><td>501.54</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>												-9405.7	-1459	271.19	-35.301	-155.95	27.662	-3397.3	-8906.2	1.1849				-3194.1	-740.71	129.72	44.592	139.14	-131.69	461.32	-3615.6	932.86	200.53	-76.993	13.405	-27.839	21.324	-72.866	1033.3	2449.3	532.93	-127.7	-37.139	-90.992	118.89	-151.22	2698.6	-6413	-1046.7	198.62	-5.017	-70.051	-21.751	-1973.3	-6196.9	-957.95	-13784	2988.6	3058.5	10922	-10082	91776	-34646	-10.963	-2.4444	1.0755	-0.84965	-11.941	541.96	0	0	12.757	3.2424	-1.3752	0.32008	6.0454	501.54	0	0
-9405.7	-1459	271.19	-35.301	-155.95	27.662	-3397.3	-8906.2	1.1849																																																																							
-3194.1	-740.71	129.72	44.592	139.14	-131.69	461.32	-3615.6																																																																								
932.86	200.53	-76.993	13.405	-27.839	21.324	-72.866	1033.3																																																																								
2449.3	532.93	-127.7	-37.139	-90.992	118.89	-151.22	2698.6																																																																								
-6413	-1046.7	198.62	-5.017	-70.051	-21.751	-1973.3	-6196.9																																																																								
-957.95	-13784	2988.6	3058.5	10922	-10082	91776	-34646																																																																								
-10.963	-2.4444	1.0755	-0.84965	-11.941	541.96	0	0																																																																								
12.757	3.2424	-1.3752	0.32008	6.0454	501.54	0	0																																																																								

Table 7 : Paramètre du régulateur R_{Hinf}

- Régulateur PI stabilisant sans contrainte de norme sur le transfert T_{wz} (Figure 5.4).

Paramètres du régulateur				$\ T_{wz}\ _\infty$
$\begin{bmatrix} K_p & K_i \end{bmatrix}$				
$\begin{bmatrix} 299 & -39.5 & 1152 & -382 \\ 231 & -44 & 1040 & -365 \end{bmatrix}$				3.8414

Table 8 : Paramètre du régulateur R_{PI}

Nous analysons les performances de ces deux structures de commande en poursuite vis-à-vis des consignes constantes et le rejet de perturbations matérialisées par des variations du débit d'alimentation F et de la concentration Z_f du produit à distiller. Les instants d'apparition et les amplitudes de ces variations sont résumés dans la table suivante :

Instants (en minutes)	Variation $x1c$	Variation $x22c$	Variation ΔF	Variation Z_f
30	0	0.01	0	0
50	-0.08	*	0	0
70	*	*	-2.5	0
90	*	*	*	0.05

(*) : Variation conservée

Table 9 : Instants et amplitudes des changements de consigne et des perturbations

Les figures (5.8a), (5.8b), et (5.8c) représentent respectivement l'évolution des fractions molaires en haut, en bas de la colonne et les signaux de commande générés par les régulateurs R_{Hinf} et R_{PI} .

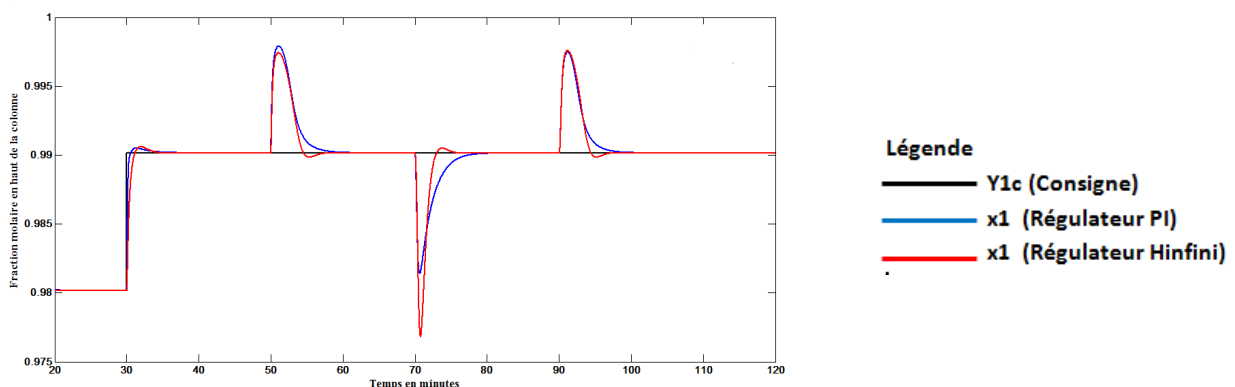


Figure 5.8a : Evolution de la fraction molaire en haut de la colonne

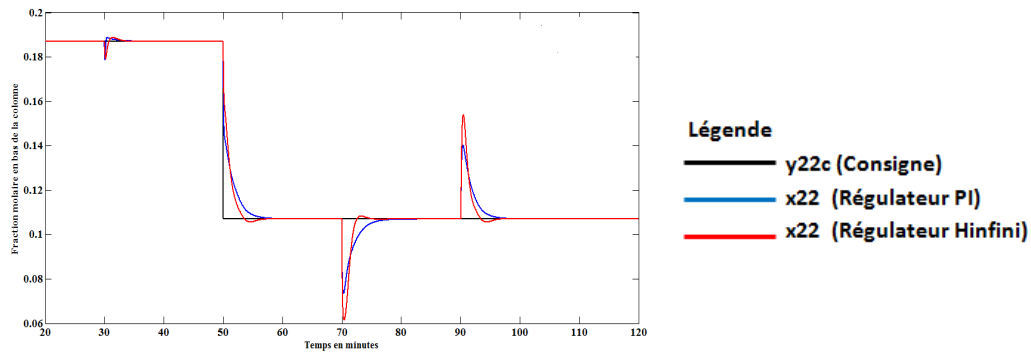


Figure 5.8b : Evolution de la fraction molaire en bas de la colonne

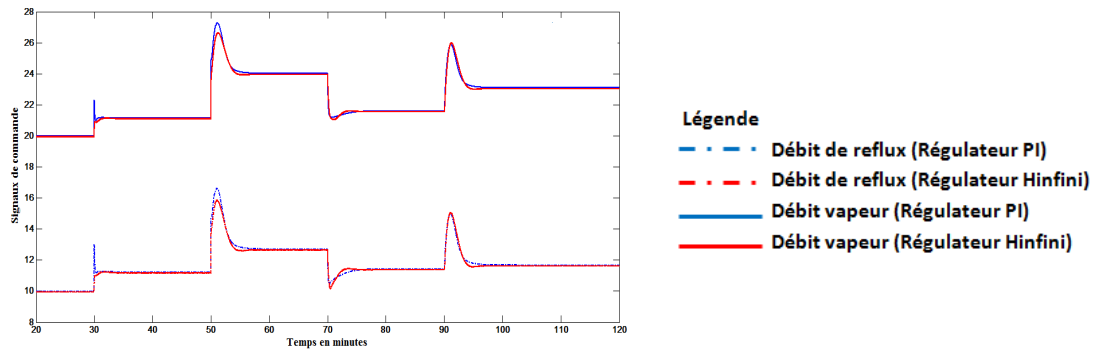


Figure 5.8c : Evolution des signaux de commande

Comme le montre ces figures, les deux régulateurs assurent une bonne conduite en poursuite avec un léger avantage au régulateur R_{Hinf} mais au détriment à des variations de commande légèrement plus brusques. Les deux régulateurs assurent également des bonnes performances en rejet de perturbations. Bien que globalement les deux régulateurs offrent approximativement des performances très proches, le régulateur R_{PI} est préféré pour sa simplicité d'implantation. Cependant, il convient de préciser que les paramètres de ce régulateur sont obtenus par un algorithme itératif pour résoudre numériquement le problème de la détermination du gain de retour de sortie statique. L'algorithme s'arrête dès qu'il y'a une solution admissible. Le résultat reste tributaire de l'initialisation et la convergence de l'algorithme.

5.2.6 Conclusion

En conclusion des résultats de simulation présentés, nous pouvons confirmer qu'un modèle d'ordre réduit linéaire représentant le comportement d'une colonne de distillation peut être élaboré en résolvant un problème formulé en termes des LMIs. Ce modèle peut être utilisé en vue de faire la synthèse d'une loi de commande linéaire. Dans la méthodologie proposée pour la synthèse d'un régulateur robuste et performant, nous avons proposé deux types de régulateurs dont les performances sont globalement encourageantes faisant apparaître que ces types de commande sont efficaces pour la régulation et l'optimisation de la conduite d'une colonne binaire de distillation. Compte tenu de la simplicité d'implantation du régulateur PI , il est alors suggéré pour la mise en œuvre pratique du schéma de régulation.

5.3 Contrôle climatique d'une serre agricole

5.3.1 Introduction au contrôle climatique

La culture sous serre avait initialement comme rôle de protéger les plantations contre les intempéries pour devenir actuellement un moyen de production contrôlée. Le processus de production sous serre peut être représenté par plusieurs niveaux de décision comme le montre la figure suivante :

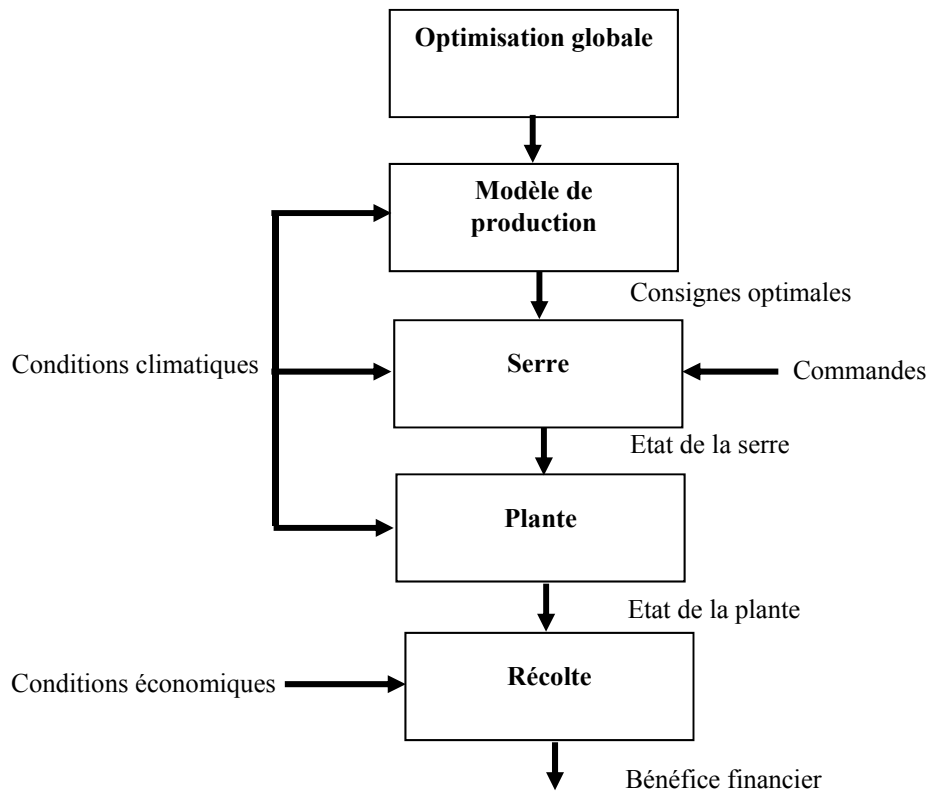


Figure 5.9 : Niveaux hiérarchiques de contrôle d'une serre agricole

Le premier niveau de décision est celui le plus haut sur la figure 5.9. Il permet de définir la politique agricole à suivre, notamment le développement des cultures sous serre. Le deuxième niveau génère les consignes optimales pour une meilleure croissance des cultures à partir de la nature des plantations et des conditions météorologiques. Le système serre proprement dit se situe au troisième niveau où il s'agit de contrôler l'état interne de la serre. Le quatrième niveau est relatif aux besoins de la plante où une gestion rationnelle de la consommation en eau, en engrais et en énergie doit être considérée. Enfin, le dernier niveau concerne la récolte et sa distribution. Il est conditionné notamment par des données économiques du marché.

Dans le présent travail, nous nous intéressons au contrôle automatique du climat interne d'une serre agricole. Le but est de créer un milieu favorable au développement des cultures et de minimiser les prix de production en termes de matières premières et d'énergie qui est un point particulièrement important pour les serristes. Ce milieu est souvent désigné par un microclimat qui correspond à un ensemble de conditions météorologiques qui caractérise un espace homogène de faible étendue. La création d'un environnement favorable à l'intérieur d'une serre exige la régulation de toutes les variables pertinentes au développement de la plante notamment :

La température est en générale la variable la plus importante à contrôler tant du point de vue de la survie et le bien-être de la plante que de son développement.

L'humidité de l'air ou l'hygrométrie est également une variable pertinente. Un excès d'hygrométrie peut bloquer la transpiration de la plante. Egalement, il faut éviter les degrés d'humidité trop bas qui peuvent assécher la plante.

L'humidité du sol est moins cruciale pour des durées de quelques heures, mais c'est une variable importante pour que la plante puisse se nourrir.

Le taux du dioxyde de carbone (CO_2) doit être régulé dans les serres très hermétiques qui consomment rapidement le taux de gaz carbonique lors de la photosynthèse. Ce taux de CO_2 peut être enrichi dans les cas où l'ensoleillement est insuffisant.

L'éclairage peut également être régulé pour contrôler le développement de la plante: au moyen d'un éclairage artificiel pour accélérer son développement, par rideau d'ombrage pour le ralentir. Généralement, on ne réglera que certaines variables en fonction de l'emplacement géographique de la serre, du climat local et du type de la plante à cultiver.

Pratiquer la culture sous serre consiste à mettre en œuvre des techniques et des procédures adaptées pour forcer une adéquation entre l'état interne de la serre et la plante. Le recours aux techniques de la commande automatique est l'une des voies actuellement explorées pour améliorer la production agricole sous serre. Il s'agit d'atteindre cette amélioration entre autres, à travers une bonne régulation du microclimat de la serre. La difficulté de la tâche du contrôle climatique réside dans la complexité des phénomènes qui conditionnent la croissance idéale de la plante liée notamment au cycle jour/nuit, à la saison, au climat régional, et à la nature de la culture. De ce fait, le système serre est considéré comme étant un système non linéaire, multivariable, non stationnaire, et non isolé car "ouvert" sur l'extérieur.

Le contrôle automatique des conditions climatiques dans les serres a connu ces dernières années un intérêt considérable et plusieurs équipes de recherche appliquée se sont investies pour contribuer au développement de ce secteur [44],[112] [21][49] [22], [39], [86], [73], [74], [136], [102]. Nombreuses sont également les stratégies et les techniques de commande qui ont été proposées : La commande logique (TOR), la commande linéaire quadratique (LQ) adaptative [4] [58], la commande prédictive généralisée (GPC) [115], la commande non linéaire [114], la commande par les réseaux de neurones [51], la commande par la logique floue [96], [97], [2], [32], la commande robuste [9], [8], et [7].

Dans notre travail, nous proposons des régulateurs suffisamment performants basés sur la synthèse robuste $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ issus d'un modèle simple du procédé commandé. Ce modèle est déterminé par la technique d'identification paramétrique. L'évaluation des performances des régulateurs est réalisée à l'aide d'un simulateur basé sur un modèle physique qui découle d'un bilan énergétique pour la température et d'un bilan massique en eau pour l'hygrométrie. Pour montrer la faisabilité de ces nouvelles approches, nous réalisons une étude comparative avec la régulation Tout Ou Rien (TOR) appliquée à une serre expérimentale implantée sur le campus de l'Université de Toulon et du Var en France. Une telle comparaison ne peut être possible que par la voie de la simulation numérique compte tenu que les perturbations météorologiques sont des phénomènes non répétitifs. En plus, des tests directs sur le site ne sont pas aisés en présence des cultures.

Après la présentation des principales caractéristiques de la serre expérimentale, nous exploitons les données recueillies pendant la campagne des mesures pour procéder à l'élaboration de deux modèles pour la serre: un modèle non linéaire discret permettant de simuler la conduite de la serre et un modèle linéaire discret permettant la synthèse des lois de commande linéaires. Deux approches de la commande robuste seront envisagées: la commande $\mathcal{H}_2$ et la commande $\mathcal{H}_\infty$ en utilisant le formalisme des Inégalités Matricielles Linéaires (LMI) comme outil d'optimisation mathématique. Des résultats de la simulation seront donnés à la fin du paragraphe montrant la faisabilité de notre contribution pour le contrôle automatique des serres agricoles.

5.3.2 Présentation de la serre expérimentale

Les principales caractéristiques physiques de la serre expérimentale qui fait l'objet dans cette

étude sont :

- Serre en verre à armature métallique
- Surface 40 m²
- Volume 120 m³
- Capteurs de température interne et externe
- Capteurs d'hygrométrie interne et externe
- Anémomètre pour la mesure de la vitesse du vent
- Solarimètre pour la mesure du rayonnement global
- Trois chauffages électriques soufflants d'une puissance totale de 5 KW
- Toit ouvrant de 0 à 35 degrés d'ouverture
- Buses de brumisation
- Rideaux d'ombrage en deux parties allant chacune de 0 à 242 cm.



Figure 5.10: la serre expérimentale installée sur le campus de l'Université de Toulon

Les variables mesurées sont classées en trois catégories (figure 5.11) :

- Les variables de perturbations météorologiques :
 - Rayonnement solaire R_g (Wm⁻²)
 - Température externe T_e (°C)
 - Hygrométrie externe H_e (%)
 - Vitesse du vent V_v (ms⁻¹)
- Les variables de commandes en tout ou rien (TOR) :
 - Chauffage actionné pendant une durée égale à la période d'échantillonnage.
 - Ouvrant O_v (0 - 35°)
 - Ombrage O_m (0 - 5 m)
 - Brumisation actionné en tout ou rien avec une temporisation cyclique.
- Les variables de sorties :
 - Température interne T_i (°C)
 - Hygrométrie interne H_i (%)

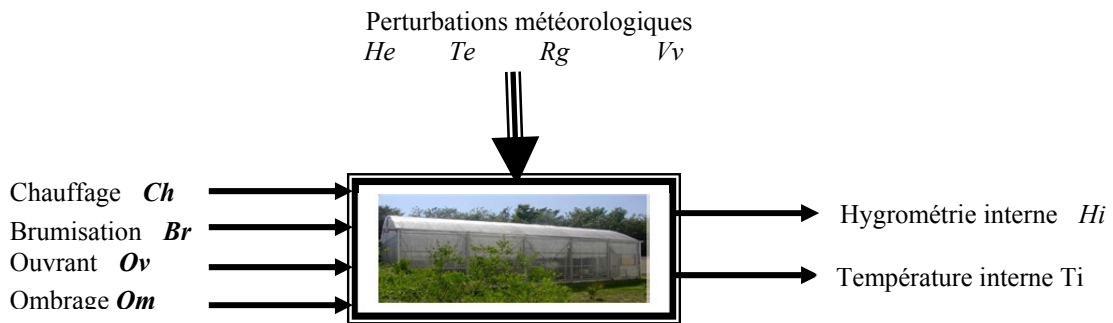


Figure 5.11: Schéma bloc de la serre

La commande de la serre est assurée par des boucles de régulation pour les fonctions du chauffage et de la brumisation par des régulateurs TOR avec une temporisation cyclique pour la brumisation. Un système de sécurité et de surveillance est également installé (DéTECTEURS de pluie et de vitesse du vent).

Les mesures collectées ont été obtenues en situation de boucle fermée assurée par une commande TOR mise en place. Elles sont utilisées par l'identification paramétrique et pour la simulation des lois de commande. L'acquisition des mesures a été réalisée avec un pas d'échantillonnage d'une minute, ce qui correspond à $N=1440$ points de mesure pendant 24 heures. La figure 5.12 donnée ci-dessous représente les données recueillies sur le site expérimental pendant une journée (15 Mars). D'autres mesures étalées sur d'autres périodes sont également disponibles.

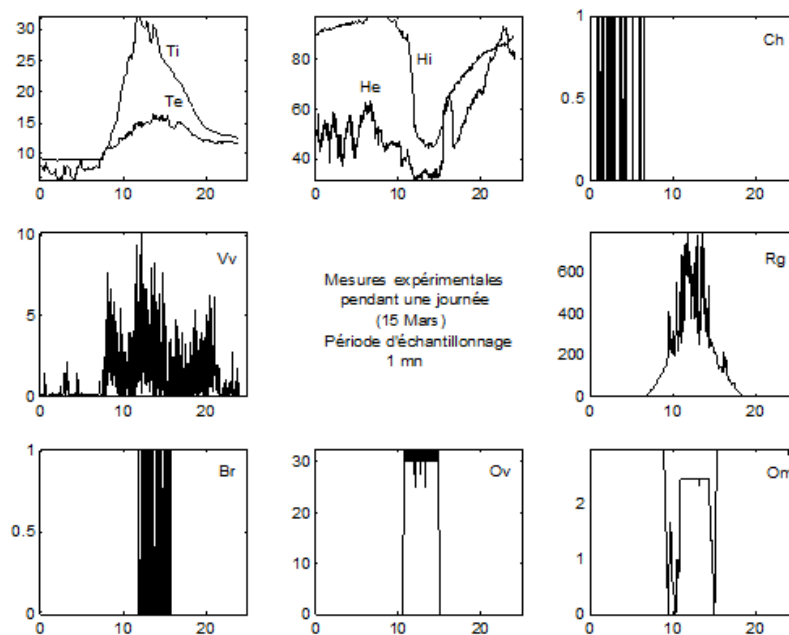


Figure 5.12 : Evolution des variables Entrées-Sorties

5.3.3 Modélisation et identification

Dans ce paragraphe, nous présentons la modélisation et l'identification paramétrique de la serre expérimentale dont les entrées/sorties ont été définies dans le paragraphe précédent.

L'obtention d'un modèle performant pour les serres agricoles n'est pas aisée compte tenu de la complexité du système et les phénomènes physiques mis en jeu. Pour le besoin de la simulation et l'élaboration des commandes, plusieurs méthodes de modélisation et d'identification ont été testées [309], [312] [21] [49] [51]. Dans la littérature, nous trouvons deux types de modèle pour les serres agricoles. Le premier modèle est un modèle de connaissance découlant des lois physiques et le second est un modèle de conduite basé sur l'analyse des entrées/sorties du procédé.

Dans la catégorie de modèles de connaissance, nous pouvons isoler deux types: les modèles statiques établis à partir d'un bilan thermique sur une durée relativement longue surtout utiles au dimensionnement du chauffage et les modèles dynamiques établis à partir du bilan d'énergie décrivant le régime dynamique.

Dans la catégorie de modèles de conduite, nous présentons ci-dessous, un modèle non linéaire de simulation validé sur plusieurs journées successives et un modèle linéaire pour l'élaboration des lois de commande. Les deux modèles sont identifiés en se basant sur la méthode des moindres carrés ordinaires dont le principe est donné par la figure suivante :

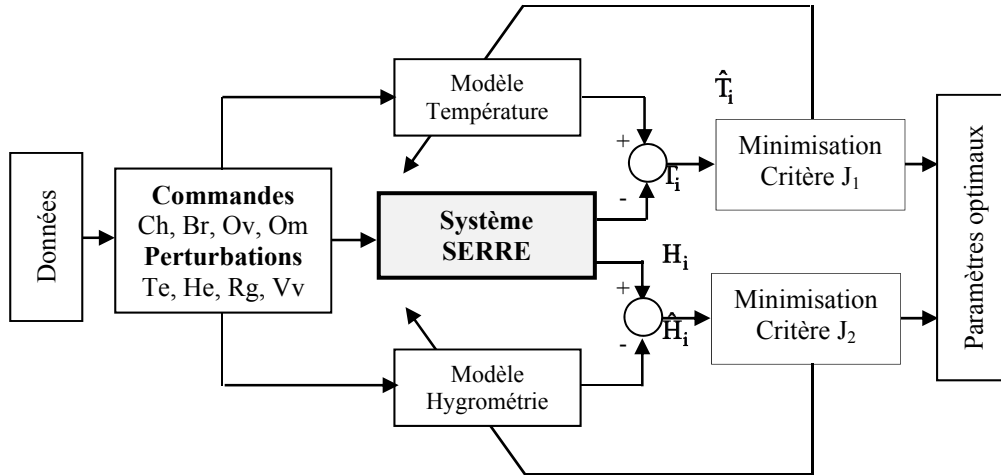


Figure 5.13 : Schéma de principe de l'identification paramétrique

Sur ce schéma, nous retrouvons les différents blocs qui composent le processus d'identification paramétrique, à savoir, le système serre avec ses données expérimentales d'entrées/sorties, le modèle paramétrique retenu pour représenter la conduite de la serre, et le bloc de minimisation du critère de l'écart quadratique entre les sorties mesurées et prédites. Dans les deux sections qui suivent, nous présentons les deux types de modèles pour la serre expérimentale.

5.3.3.1 Modèle de simulation (Simulateur)

Les modèles habituellement rencontrés mettent en jeu un nombre restreint de variables d'entrées-sorties. Le modèle que nous proposons pour simuler la conduite de la serre expérimentale permet de prendre en compte un nombre important de variables pertinentes conditionnant le fonctionnement de la serre [49].

Ce modèle découle du modèle physique de Viard Gaudin [58] en se basant, pour la température sur le bilan des flux de chaleur et pour l'hygrométrie sur le bilan des débits des poids en eau. Les équations auxquelles ces bilans aboutissent sont données par :

$$\begin{cases} \frac{dT_i(t)}{dt} = (c_1 + c_2 Ov(t)) (Te(t) - Ti(t)) + c_3 Ch(t) + c_4 Rg(t) \\ \frac{dXi(t)}{dt} = (d_1 + d_2 Ov(t)) (Xe(t) - Xi(t)) + (d_3 + d_4 Rg(t)) DXi(t) \end{cases} \quad (5.24)$$

avec les hygrométries absolues externes (Xe) et interne (Xi), le déficit en eau $\Delta Xi = Xsat(Ti) - Xi$, où $Xsat$ désigne l'hygrométrie à la saturation :

$$Xsat(T) = \frac{0.622}{e^{\frac{[-(48.9 - \frac{6834}{273.16T} - 5.17 \ln(273.06 + T))]} - 1}} \quad ; \quad T = Ti \text{ ou } Te \quad (5.25)$$

Les coefficients c_1, c_2, c_3, c_4 et d_1, d_2, d_3, d_4 sont les paramètres généraux du modèle introduits à la place des paramètres physiques.

Pour tenir compte des effets des autres variables mesurées, à savoir, la vitesse du vent (V_v) l'ombrage (Om) et de la brumisation (Br), nous considérons l'extension du modèle (5.24) en l'écrivant sous la forme discrète (5.26a) et (5.26b) suivantes :

$$\begin{aligned} Ti(k+1) = & Ti(k) + a_1 [Te(k) - Ti(k)] + a_2 Ov(k)[Te(k) - Ti(k)] + a_3 V_v(k)[Te(k) - Ti(k)] \\ & + a_4 Ov(k)V_v(k)[Te(k) - Ti(k)] + a_5 Ch(k) + a_6 Rg(k) - a_7 Om(k)[Rg(k) - Rgs] \\ & - a_8 Br(k). \end{aligned} \quad (5.26a)$$

$$\begin{aligned} Hi(k+1) = & Hi(k) + b_1 [a(k)He(k) - Hi(k)] + b_2 Ov(k)[a(k)He(k) - Hi(k)] \\ & + b_3 V_v(k)[a(k)He(k) - Hi(k)] + b_4 Ov(k)V_v(k)[a(k)He(k) - Hi(k)] \\ & + b_5 b(k) Br(k) + b_6 b(k)[100 - Hi(k)] + b_7 b(k)Rg(k) - b_8 Om(k) b(k)[Rg(k) - Rgs] \end{aligned} \quad (5.26b)$$

Avec :
$$\begin{cases} a(k) = \frac{X_{sat}(Te(k))}{X_{sat}(Ti(k))} \\ b(k) = \frac{1}{X_{sat}(Ti(k))} \end{cases}$$

Le paramètre Rgs est un seuil fixé à 20 W/m^2 . Il permet l'inversion du signe relatif à l'action de l'ombrage lors du passage du jour à la nuit et réciproquement.

Le modèle (5.26) est linéaire par rapport aux paramètres généraux a_i et $b_i, i=1, \dots, 4$. Nous pouvons l'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{cases} e_{Ti} = \Delta T_i - M_1 \lambda_1 ; \lambda_1 = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_8]^T \\ e_{Hi} = \Delta H_i - M_2 \lambda_2 ; \lambda_2 = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_8]^T \\ \Delta T = [T_i(2) - T_i(1) \ T_i(3) - T_i(2) \ \dots \ T_i(N) - T_i(N-1)]^T \\ \Delta H_i = [H_i(2) - H_i(1) \ H_i(3) - H_i(2) \ \dots \ H_i(N) - H_i(N-1)]^T \\ N = \text{nombre de mesures} \end{cases} \quad (5.27)$$

M_1 et M_2 étant les matrices de mesures et λ_1, λ_2 , deux vecteurs paramètres à identifier.

L'application de la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO) [101] permet d'obtenir explicitement les paramètres optimaux au sens de la minimisation des critères quadratiques suivants:

$$\begin{cases} J_1(\lambda_1) = [\Delta T_i - M_1 \lambda_1]^T [\Delta T_i - M_1 \lambda_1] \\ J_2(\lambda_2) = [\Delta H_i - M_2 \lambda_2]^T [\Delta H_i - M_2 \lambda_2] \end{cases} \quad (5.28)$$

Pour l'identification paramétrique, nous utilisons le fichier de données correspondant à une seule journée (15 Mars). Le choix de cette journée parmi d'autres est justifié par sa richesse en information et par le fait que tous les actionneurs ont été sollicités. En effet, sur une période de 24 heures, la serre se trouve dans des différentes situations (jour/nuit, lever/coucher du soleil). Considérer un intervalle plus large pour l'identification conduirait à une redondance d'informations. Par ailleurs, comme les variables mesurées varient dans des intervalles non homogènes, nous les avons normalisé afin de mieux conditionner le processus d'identification.

Pour valider ce modèle, nous avons procédé aux comparaisons entre les sorties estimées à partir du modèle de la température et de l'hygrométrie internes et les mesures recueillies. La figure 5.14 représente l'évolution de Ti et de Hi pendant la journée du 15 Mars, alors que la figure 5.15 représente l'évolution de ces variables pendant trois journées successives: 13, 14 et 15 Mars.

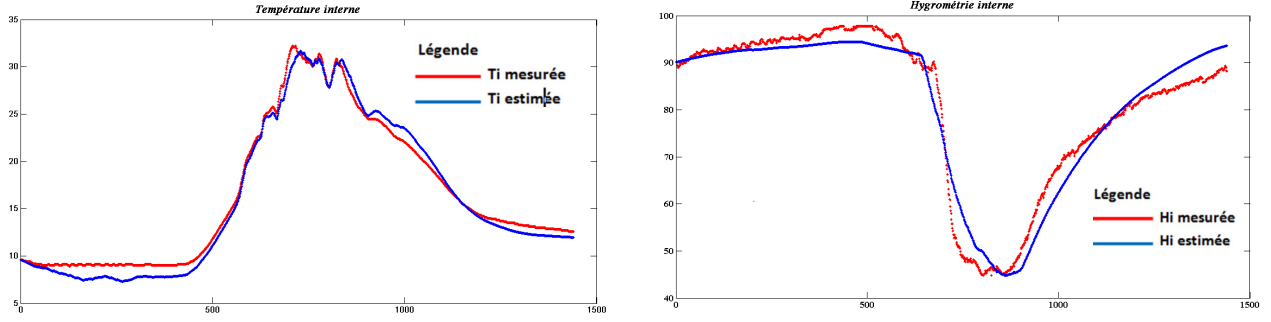


Figure 5.14 : Evolution de la température et de l'hygrométrie

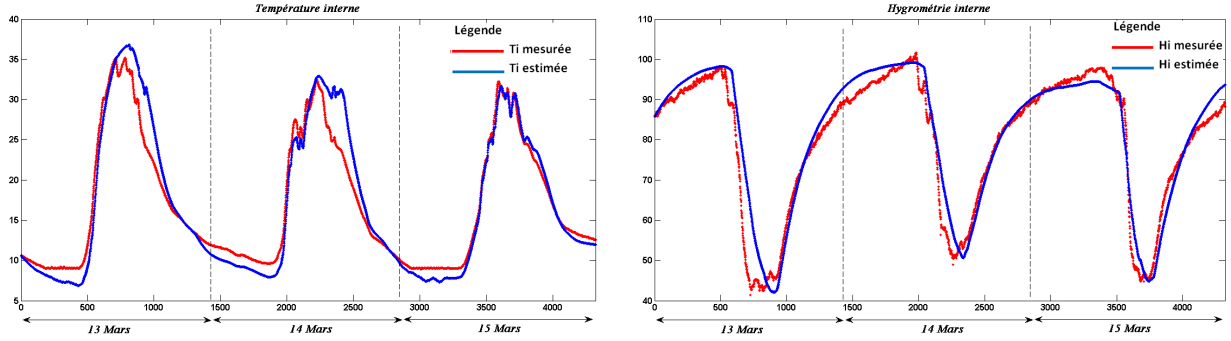


Figure 5.15 : Evolution de la température et de l'hygrométrie pendant 3 journées consécutives

A la base de ces résultats, le modèle non linéaire sera retenu pour simuler le fonctionnement de la serre expérimentale, notamment dans la conduite de la serre en situation de boucle fermée.

5.3.3.2 Modèle de commande

Le modèle (5.24) précédent est représenté par un système d'équations différentielles non linéaires. Il permet de rendre compte de l'évolution de l'état interne de la serre expérimentale. Cependant, vu sa complexité, il n'est pas exploitable pour l'élaboration des lois de commande linéaires. Les méthodes conventionnelles de linéarisation autour d'un point de fonctionnement ne s'appliquent pas au cas des serres puisque nous ne disposons pas de point de fonctionnement valable pour toutes les conditions climatiques internes et externes. Nous allons considérer alors un modèle représentatif du procédé d'un point de vue entrée-sortie permettant d'élaborer un régulateur linéaire. Nous proposons à priori le modèle multivariable linéaire stationnaire et discret suivant :

$$\begin{cases} Ti(k+1) = a_1 Ti(k) + a_2 Hi(k) + a_3 Te(k) + a_4 He(k) + a_5 Ch(k) \\ \quad + a_6 Ov(k) + a_7 Rg(k) + a_8 Vv(k) + a_9 Om(k) + a_{10} Br(k) \\ Hi(k+1) = b_1 Ti(k) + b_2 Hi(k) + b_3 Te(k) + b_4 He(k) + b_5 Ch(k) \\ \quad + b_6 Ov(k) + b_7 Rg(k) + b_8 Vv(k) + b_9 Om(k) + b_{10} Br(k) \end{cases} \quad (5.29)$$

En notant $\hat{Ti}$ et $\hat{Hi}$ les variables estimées respectivement de Ti et de Hi , nous pouvons écrire les équations (5.29) sous la forme de régression suivante :

$$\begin{cases} \hat{Ti}(k+1) = f^T(k) \theta_1 \\ \hat{Hi}(k+1) = f^T(k) \theta_2 \\ k = 1, \dots, N-1. \end{cases} \quad (5.30)$$

$$\begin{cases} f^T(k) = [Ti(k) \quad Hi(k) \quad Te(k) \quad He(k) \quad Ch(k) \quad Ov(k) \quad Rg(k) \quad Vv(k) \quad Om(k) \quad Br(k)] \\ \theta_1^T = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \quad a_9 \quad a_{10}] \quad \theta_2^T = [b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad b_5 \quad b_6 \quad b_7 \quad b_8 \quad b_9 \quad b_{10}] \end{cases}$$

Pour déterminer les paramètres de ce modèle, nous avons appliqué, comme précédemment, la méthode d'identification basée sur les moindres carrés ordinaires qui présente l'avantage d'avoir une formulation simple et explicite.

Les paramètres optimaux s'obtiennent en minimisant les critères quadratiques suivants :

$$J_1(\theta_1) = \sum_{k=1}^{N-1} [\hat{T}_i(k+1) - T_i(k+1)]^2 \quad J_2(\theta_2) = \sum_{k=1}^{N-1} [\hat{H}_i(k+1) - H_i(k+1)]^2 \quad (5.31)$$

Les programmes d'identification exploitent le fichier de données expérimentales correspondant à la même journée (15 Mars). Comme pour l'identification des paramètres du modèle non linéaire, nous avons procédé à la normalisation de tous les signaux d'entrées-sorties mis en jeu.

Les valeurs numériques des paramètres identifiés sont données dans la table ci-dessous. Il est à noter que les coefficients de couplage (a_2 et b_1) entre les deux variables d'état T_i et H_i sont dans un rapport disproportionné. Cela s'interpréterait par le fait que la température dépend peu de l'hygrométrie alors que cette dernière est fortement corrélée à la température. Quant à l'interprétation physique des autres paramètres, elle doit être prise avec précaution. En effet, le modèle de commande proposé ne constitue pas une description complète du système serre et tous les paramètres n'ont pas forcément une interprétation physique.

Coefficient	Valeur numérique	Coefficient	Valeur numérique
a_1	0.9841	b_1	-0.0134
a_2	0.0007	b_2	0.9984
a_3	0.0149	b_3	0.0404
a_4	0.0001	b_4	-0.0014
a_5	0.0087	b_5	0.0165
a_6	-0.0034	b_6	-0.0024
a_7	0.0007	b_7	-0.0003
a_8	-0.0019	b_8	-0.0116
a_9	-0.0145	b_9	0.0063
a_{10}	-0.0217	b_{10}	0.0802

Table 10 : Paramètres du modèle linéaire

Afin d'évaluer la qualité de ce modèle, nous avons confronté ses sorties aux mesures recueillies durant la journée du 15 Mars ayant servi pour l'identification et aussi durant les journées du 13 et 14 Mars. Les résultats de cette étude sont donnés par les figures 5.16 et 5.17. Ces simulations montrent que si l'adaptation entre les estimations et les mesures est acceptable pendant la journée dont le fichier de données a servi à l'identification, elle est moins satisfaisante pour les autres journées et en particulier pour l'hygrométrie. Ce résultat est prévisible compte tenu des hypothèses simplificatrices. En effet, les sources des incertitudes sur le modèle dans le cas de la serre sont nombreuses : dynamiques mal connues ou négligées, effet de la linéarisation, hypothèse de stationnarité...

Cette remarque suggère d'orienter la synthèse d'une loi de commande vers une méthode robuste assurant un certain niveau de performance en dépit des incertitudes de modélisation

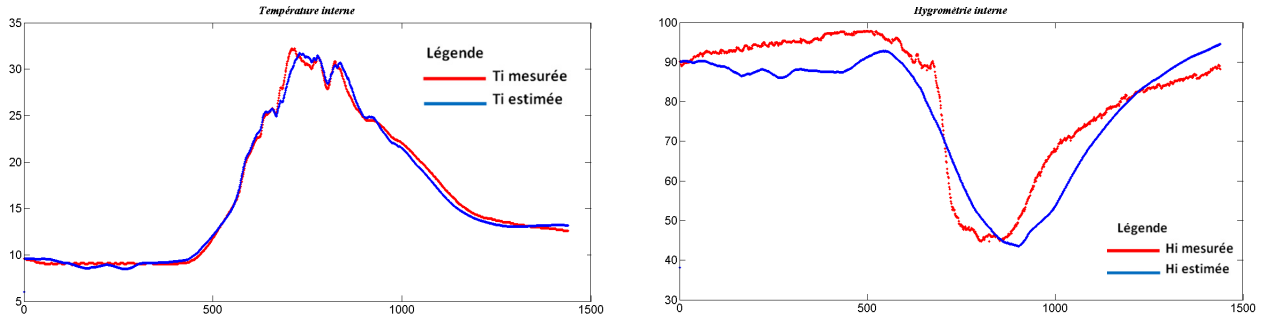


Figure 5.16 : Evolution de la température et de l'hygrométrie internes dans la journée du 15 Mars

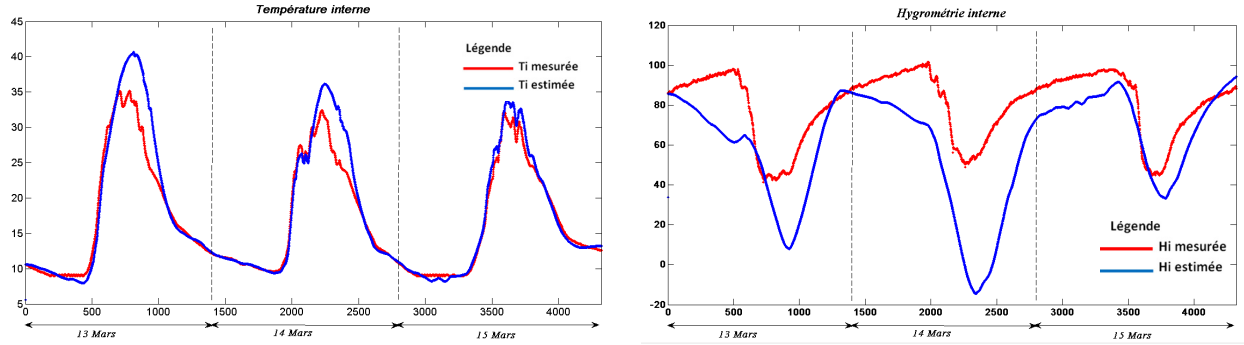


Figure 5.17 : Evolution de la température et de l'hygrométrie internes dans les journées du 13, 14, et 15 Mars

5.3.4 Contrôle du microclimat de la serre expérimentale

La synthèse d'une loi de commande pour contrôler les conditions climatiques passe par l'utilisation d'un modèle de commande qui représente imparfaitement la réalité. Dès lors que nous travaillons avec un modèle dont la validation est limitée, il faut se préoccuper de la robustesse de la loi de commande. C'est-à-dire, de façon qualitative, de la pertinence d'utiliser des outils imparfaits (modèles) pour réguler l'environnement interne de la serre.

Par l'approche robuste nous visons la possibilité de garantir la stabilité du système en boucle fermée et de maintenir les variations des grandeurs climatiques internes dans des proportions acceptables fixées par le cahier des charges.

Au système serre, nous proposons l'application deux approches de la commande robuste, à savoir, les commandes $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ que nous pensons adaptées au contrôle du microclimat de la serre. Le calcul des lois de commande repose sur le formalisme des inégalités matricielles linéaires (LMI) comme outil d'optimisation.

5.3.4.1 Formulation du problème standard

Le modèle linéaire discret (5.29) peut être écrit dans l'espace d'état de la manière suivante :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= a x(k) + b_p p(k) + b_u u(k) \\ y_s(k) &= x(k) \end{aligned} \quad (5.32)$$

Avec :

- $x(k) = [Ti(k) \quad Hi(k)]^T$, le vecteur d'état.
- $p(k) = [Te(k) \quad He(k) \quad Rg(k) \quad Vv(k)]^T$, le vecteur de perturbations météorologiques.
- $u(k) = [Ch(k) \quad Br(k) \quad Ov(k) \quad Om(k)]^T$, le vecteur de commandes.
- $a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$ $b_p = \begin{bmatrix} a_3 & a_4 & a_7 & a_8 \\ b_3 & b_4 & b_7 & b_8 \end{bmatrix}$ $b_u = \begin{bmatrix} a_5 & a_{10} & a_6 & a_9 \\ b_5 & b_{10} & b_6 & b_9 \end{bmatrix}$

Le schéma de commande en boucle fermée est :

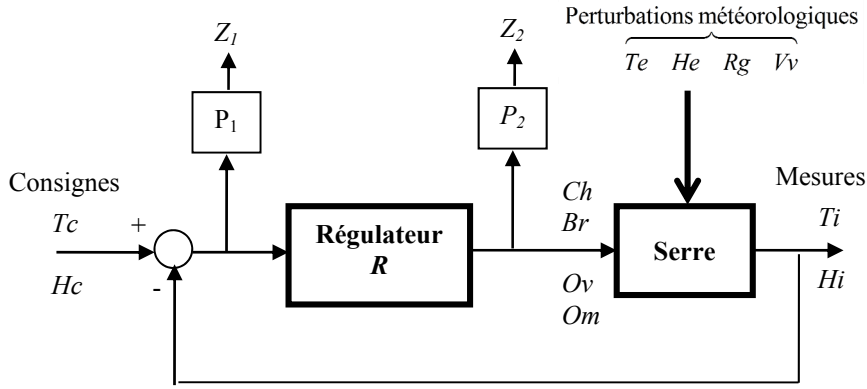


Figure 5.18 : Schéma de commande en boucle fermée

R est un régulateur multivariable discret. T_c et H_c représentent respectivement les consignes en température et en hygrométrie interne.

En cherchant à contrôler d'une part les erreurs entre les consignes et les mesures, et les variables de commande d'autre part, nous introduisons deux pondérations constantes P_1 et P_2 , permettant de définir les deux variables contrôlées Z_1 et Z_2 suivantes:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{bmatrix} = P_1 \begin{bmatrix} T_c - T_i \\ H_c - H_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_c - T_i \\ H_c - H_i \end{bmatrix} \\ Z_2 &= \begin{bmatrix} z_{21} \\ z_{22} \\ z_{23} \\ z_{24} \end{bmatrix} = P_2 \begin{bmatrix} Ch \\ Br \\ Ov \\ Om \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ch \\ Br \\ Ov \\ Om \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Pour introduire la formulation du problème standard, nous réorganisons le schéma fonctionnel de la figure 5.18 en schéma fonctionnel de la figure 5.19 dont laquelle le système P dit « augmenté » englobe les pondérations P_1 et P_2 . Rappelons que ces pondérations sur les variables contrôlées ont pour but de donner un modelage aux différents transferts entre z et w , où w est le vecteur des entrées externes constitué des consignes et des perturbations météorologiques et z est le vecteur des variables contrôlées.

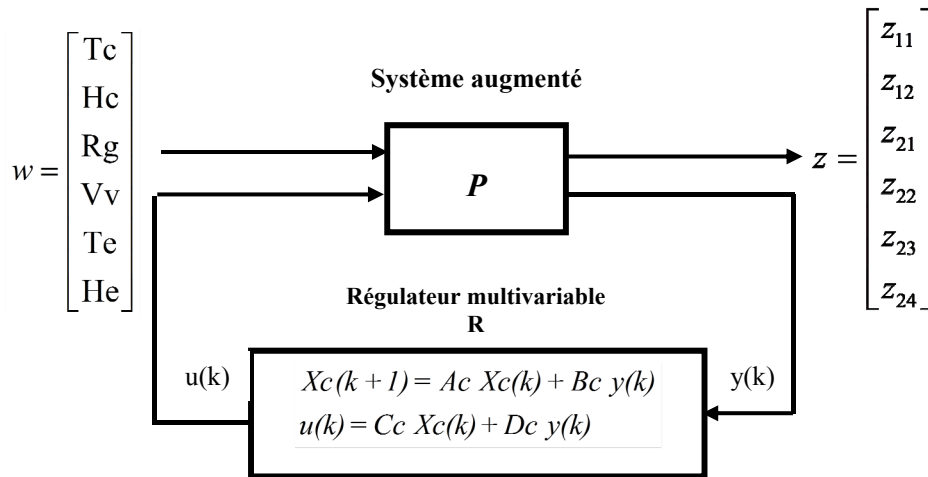


Figure 5.19 : Formulation standard

Le système P est représenté par les équations d'état suivantes :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B_1 w(k) + B_2 u(k) \\ z(k) &= C_1 x(k) + D_{11} w(k) + D_{12} u(k) \\ y(k) &= C_2 x(k) + D_{21} w(k) \end{aligned} \quad (5.34)$$

Avec :

$$\begin{aligned} A &= a \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & b_p \end{bmatrix} \quad B_2 = b_u \quad C_2 = -I \quad D_{21} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \\ C_1 &= \begin{bmatrix} -P_1 & 0 \end{bmatrix} \quad D_{11} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 & P_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

où I est la matrice identité de dimension appropriée, u est le vecteur de commande et y est le vecteur de sortie utilisé pour la contre-réaction. Le régulateur multivariable est représenté dans l'espace d'état par ses matrices Ac , Bc , Cc , et Dc , paramètres à déterminer.

5.3.4.2 Synthèse de la commande

La synthèse consiste à calculer les matrices Ac , Bc , Cc , et Dc du régulateur en minimisant la norme $\mathcal{H}_2$ ou la norme $\mathcal{H}_\infty$ du transfert entre les variables contrôlées et les variables des entrées externes. Nous pouvons alors définir deux types de problèmes :

- **Problème $\mathbf{PH}_2$** : Minimiser la norme $\mathcal{H}_2$ du transfert entre z et w : $\|T_{zw}\|_2$
- **Problème $\mathbf{PH}_\infty$** : Minimiser la norme $\mathcal{H}_\infty$ du transfert entre z et w : $\|T_{zw}\|_\infty$

Ces deux problèmes peuvent être résolus par la méthode des inégalités matricielles linéaires. La démarche que nous avons retenu pour la résolution de ces deux problèmes est due à Oliviera&a/ [41], qui a l'avantage de disposer du même algorithme pour calculer les matrices Ac , Bc , Cc , et Dc du régulateur. Les principales étapes de cet algorithme sont les suivantes :

Etape 1

Nous définissons le système augmenté $(A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{11}, D_{12}, D_{21})$ à partir du modèle (5.29) de la serre et éventuellement des pondérations P_1 et P_2 introduites.

Etape 2

Résoudre les LMIs du problème **$\mathbf{PH}_2$** ou la LMI du problème **$\mathbf{PH}_\infty$** suivantes:

❖ Problème **$\mathbf{PH}_2$**

Tous les régulateurs multivariables tels que $\|T_{zw}\|_2^2 < \mu$ est satisfaite, sont paramétrés par les LMIs suivantes [15]:

$$\begin{aligned} & \text{Trace}(M) < \mu \\ & \begin{bmatrix} M & C_1 X + B_2 L & C_1 + D_{12} G C_2 \\ (C_1 X + B_2 L)^T & X + X^T - P & I + S^T - J \\ (C_1 + D_{12} G C_2)^T & (I + S^T - J)^T & Y + Y^T - H \end{bmatrix} > 0 \\ & \begin{bmatrix} P & J & A X + B_2 L & A + B_2 G C_2 & B_1 + B_2 G D_{21} \\ J^T & H & Q & Y A + F C_2 & Y B_1 + F D_{21} \\ (A X + B_2 L)^T & Q^T & X + X^T - P & I + S^T - J & 0 \\ (A + B_2 G C_2)^T & (Y A + F C_2)^T & (I + S^T - J)^T & Y + Y^T - H & 0 \\ (B_1 + B_2 G D_{21})^T & (Y B_1 + F D_{21})^T & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \\ & D_{11} + D_{21} G D_{12} = 0 \end{aligned} \quad (5.35)$$

X, Y, Q, G, S, J, L, F et P, H, M (symétriques) sont les variables d'optimisation. ■.

❖ Problème **PH_∞**.

Tous les régulateurs multivariables tels que $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$, $\gamma > 0$, est satisfaite, sont paramétrés par la LMI suivante [41]

$$\begin{bmatrix} P & J & AX+B_2L & A+B_2GC_2 & B_1+B_2GD_{21} & 0 \\ J^T & H & Q & YA+FC_2 & YB_1+FD_{21} & 0 \\ (AX+B_2L)^T & Q^T & X+X^T-P & I+S^T-J & 0 & X^TC_1^T+L^TD_{21}^T \\ (A+B_2GC_2)^T & (YA+FC_2)^T & (I+S^T-J)^T & Y+Y^T-H & 0 & C_1^T+C_2^TG^TD_{12}^T \\ (B_1+B_2GD_{21})^T & (YB_1+FD_{21})^T & 0 & 0 & I & D_{11}^T+D_{21}^TG^TD_{12}^T \\ 0 & 0 & C_1X+D_{21}L & C_1+D_{12}G & C_2 & D_{11}+D_{12}G & D_{21} & \gamma I \end{bmatrix} > 0 \quad (5.36)$$

X, Y, Q, G, S, J, L, F et P, H (symétriques) sont les variables d'optimisation.

Etape 3

A partir des solutions obtenues dans l'étape 2, nous décomposons $S - YX$ sous la forme UV , où U et V sont deux matrices non singulières et nous calculons dans l'ordre :

$$\begin{cases} Dc = G \cdot Cc = (L - GC_2X)U^{-1} \\ Bc = V^{-1}(F - YB_2G) \\ Ac = V^{-1}(Q - Y(A + B_2DcC_2)X + VBcC_2X)U^{-1} - V^{-1}YB_2Cc \end{cases}$$

5.3.5 Simulation et résultats

Dans ce paragraphe, nous allons évaluer les performances de la stratégie de commande $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ par voie de simulation. Pour ce faire, nous utilisons le simulateur de la serre expérimentale issu du modèle non linéaire (5.26) permettant de simuler la conduite de la serre expérimentale sur plusieurs journées successives et du régulateur élaboré à partir du modèle linéaire (5.29). Un schéma général de l'identification, de synthèse des lois de commande et de simulation est donné par la figure 5.20 :

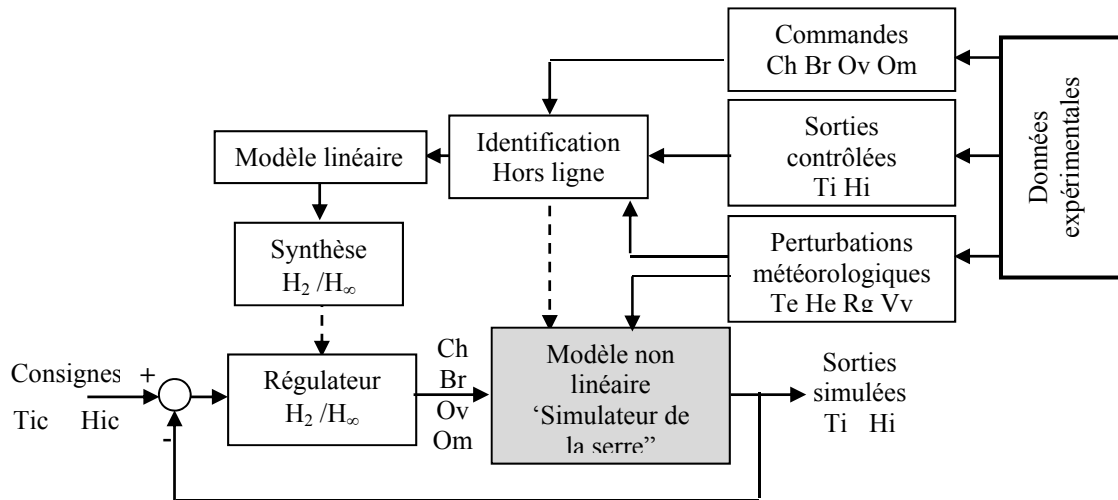


Figure 5.20 : Diagramme général d'identification et de simulation

Nous rappelons que ce sont les données de la journée du 15 Mars qui ont été utilisées pour l'identification des deux modèles. Les journées successives retenues pour la simulation correspondent aux 13, 14, et 15 Mars.

Nous scindons les simulations entre deux parties. Dans la première partie nous laissons libres toutes les commandes générées par les régulateurs, c'est-à-dire sans prendre en compte les caractéristiques des actionneurs installés sur place. Dans la deuxième partie, ces caractéristiques seront modélisées et intégrées dans les schémas de simulation.

Pour les deux types de commande, nous avons fixé comme objectif de la régulation de l'état interne de la serre de maintenir la variation de la température et de l'hygrométrie dans un intervalle n'excédant pas 2% autour de leurs points de consigne : $Tic=20^\circ\text{C}$ pour la température et $Hic=70\%$ pour l'hygrométrie. Pour y parvenir, les pondérations sont choisies constantes $P_1 = \text{Diag}(0.05)$ et $P_2 = \text{Diag}(0.01)$.

Nous avons noté lors des simulations que les comportements dynamiques des variables de sortie sont très similaires dans les deux types de commande $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$. Les pôles en boucle fermée sont très proches comme le montre la table ci-dessous. Aussi, nous n'avons pas jugé utile de présenter les résultats de simulation relative à la commande $\mathcal{H}_\infty$.

	$\mathcal{H}_2$	$\mathcal{H}_\infty$
Valeurs propres en boucle fermée	0.5367500	0.5090800
	0.4864800	0.369700
	0.0041378	0.0003637
	0.0012741	-2.1419e-006

Table 11 : Valeurs propres en boucle fermée

En laissant libre les commandes, le schéma de simulation implanté sur Simulink/Matlab est représenté par la figure suivante :

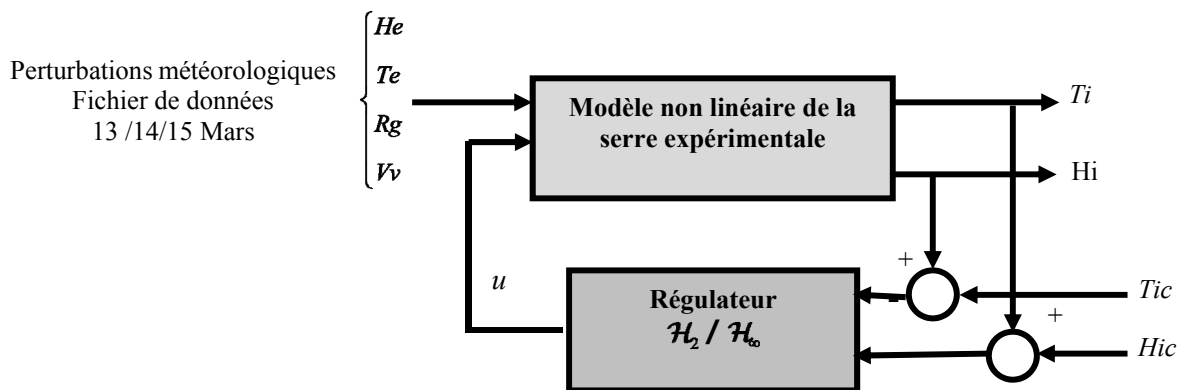


Figure 5.21 : Schéma de simulation en boucle fermée

L'objectif étant atteint avec le régulateur $\mathcal{H}_2$ comme il est montré sur les figures 5.22 et 5.23 correspondant à la journée du 15 Mars. Pour montrer l'aptitude des lois de commande à maintenir ces performances, nous avons simulé le fonctionnement de la serre pendant les journées du 13, 14 et 15 Mars. Ce dernier résultat montré sur les mêmes figures, confirme la robustesse des lois commande vis-à-vis des incertitudes de modélisation. Les figures 5.24 à 5.27 représentent l'évolution des signaux de commande : Ch , Br , Ov , et Om .

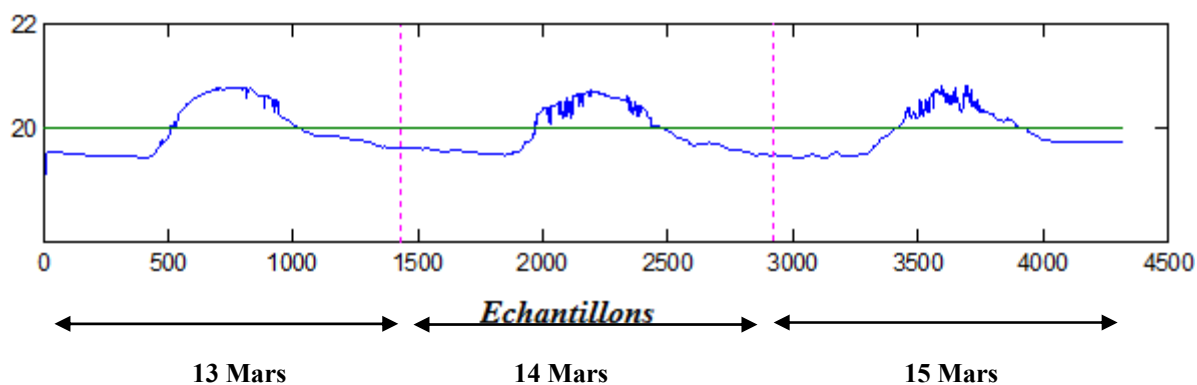


Figure 5.22 : Evolution de la température interne

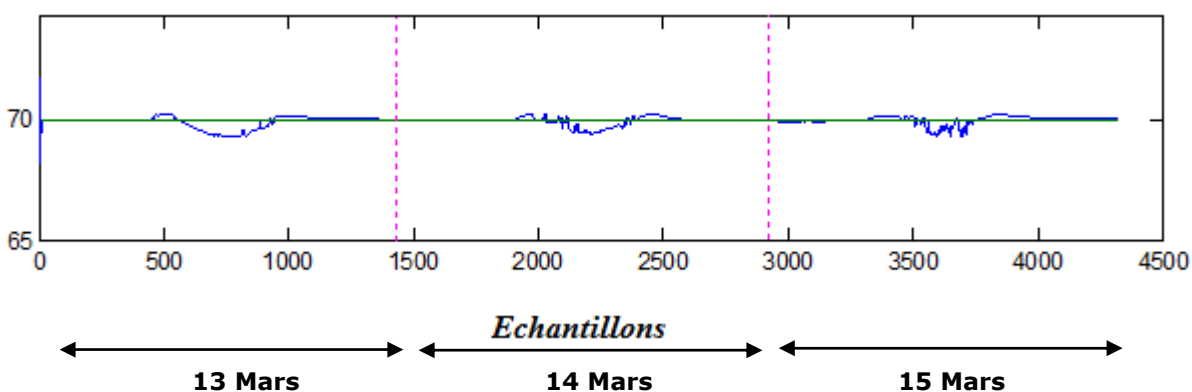


Figure 5.23 : Evolution de l'hygrométrie interne

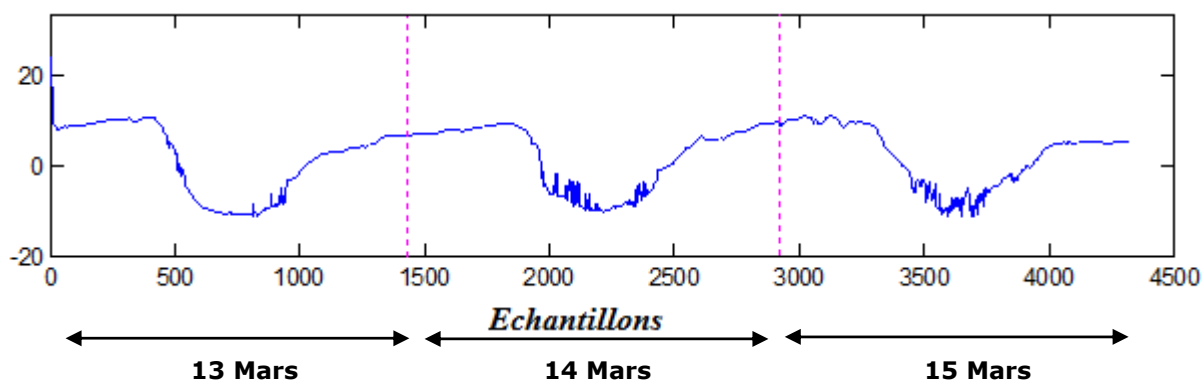


Figure 5.24 : Evolution du chauffage Ch

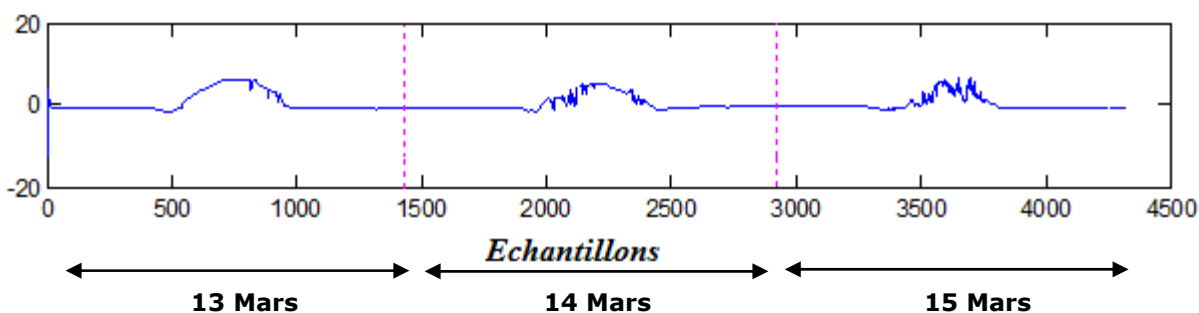
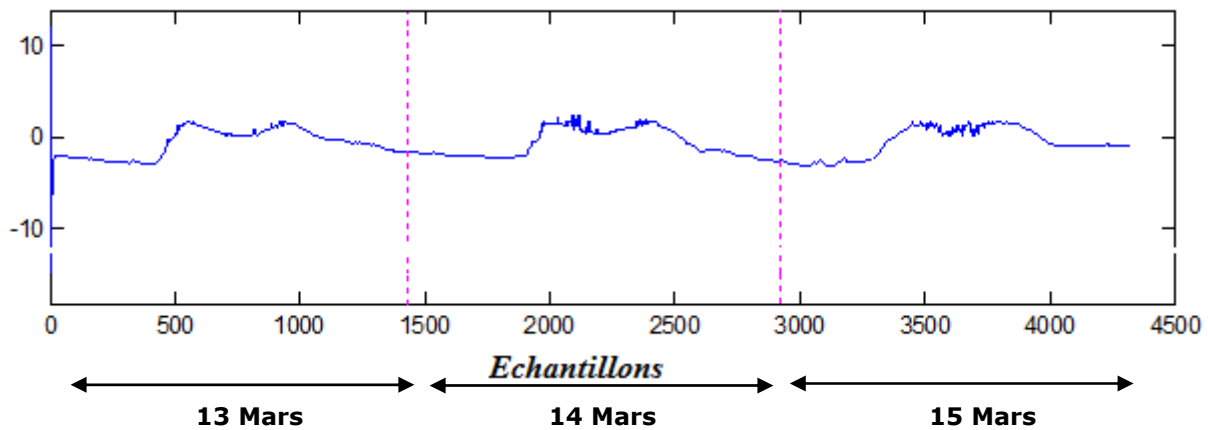
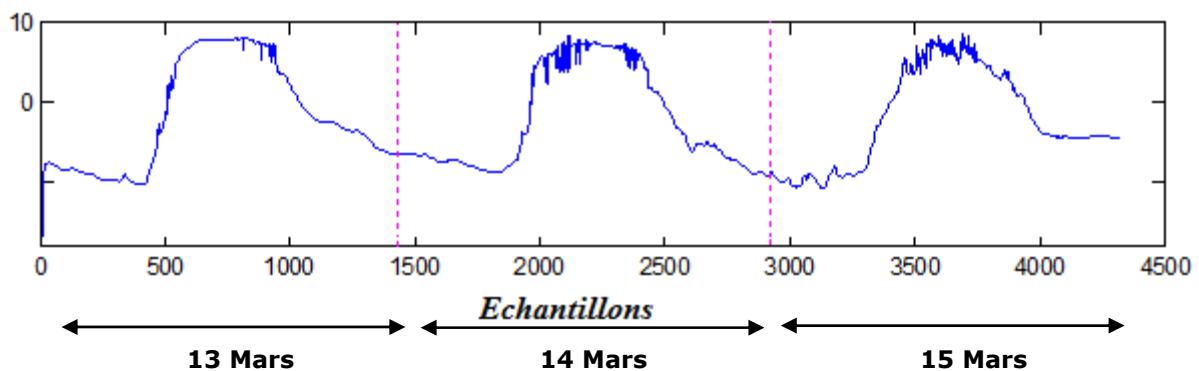
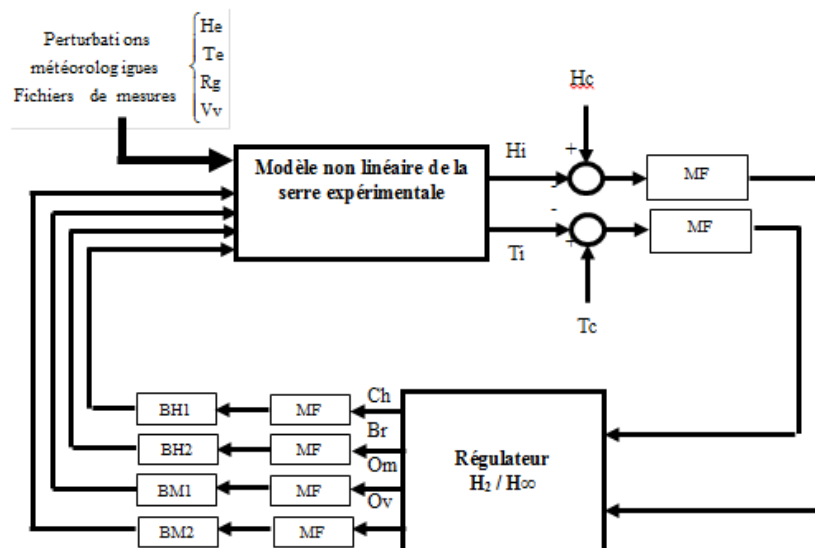


Figure 5.25 : Evolution de la brumisation Br


 Figure 5.26 : Evolution de l'ouvrant Ov

 Figure 5.27 : Evolution de l'ombrage Om

En conclusion de ces résultats, nous estimons que les deux types de régulation sont performants puisque l'objectif visé étant atteint. Cependant, ces résultats sont obtenus en laissant libres les commandes générées par les régulateurs, c'est-à-dire sans tenir compte des contraintes matérielles imposées par les actionneurs mis en place. L'analyse de ces signaux de commande montre qu'ils ne sont pas réalistes pendant certains moments de la journée.

Ainsi, pour le besoin de la simulation en situation du temps réel, nous avons introduit des fonctions de normalisation des signaux et les caractéristiques des actionneurs permettant de prendre en compte l'instrumentation mise en place.


 Figure 5.28: Schéma de simulation en boucle fermée avec prise en compte
Les caractéristiques des actionneurs

- MF** : Bloc de mise en forme des signaux (Normalisation).
- BH1** : Bloc d'hystérésis à sortie 0 ou 1.
- BH2** : Bloc d'hystérésis à sortie 0 ou 1 + Temporisation cyclique de brumisation.
- BM1** : Bloc de maintien de la commande entre 0 et 3m.
- BM2** : Bloc de maintien de la commande entre 0 et 32°5.

Dans ces conditions, il est possible de faire une étude comparative entre les résultats obtenus avec la commande $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ avec ceux des fichiers de données relatifs aux journées 13, 14 et 15 Mars (Commande TOR). Les consignes pour la température et l'hygrométrie sont fixées respectivement à $T_c=11^\circ\text{C}$ et $H_c=70\%$.

Dans l'analyse des simulations réalisées, nous avons également noté une similitude de comportement des régulateurs $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$. Nous présentons dans la suite uniquement les résultats relatifs à la synthèse $\mathcal{H}_2$. Ces résultats sont comparés à ceux des fichiers de données du 13,14 et 15 Mars (Commande TOR). Nous récapitulons sous forme d'une table comparative les performances de chaque type de régulateur.

a) Simulation de la commande $\mathcal{H}_\infty$ et comparaison avec la commande (TOR)

Dans cet essai, la brumisation est actionnée pendant une minute sur un cycle de 11 mn comme le montre la figure suivante :

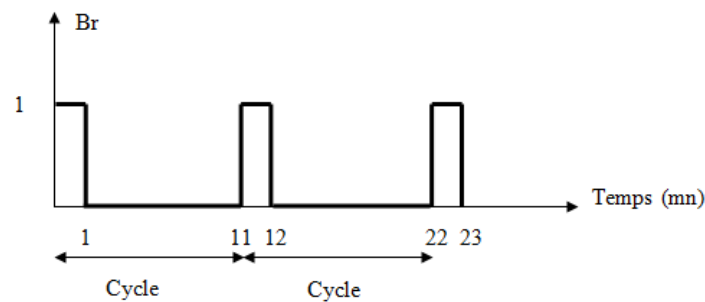


Figure 5.29 : Cycle de brumisation

La figure 5.30 montre l'évolution de la température et de l'hygrométrie pendant trois journées successives 13, 14 et 15 Mars : (1) et (3) correspondent respectivement à l'évolution de la température/hygrométrie internes obtenues par la commande TOR et à l'évolution de la température/hygrométrie externes. (2) correspond à l'évolution de la température/hygrométrie internes obtenues par la commande $\mathcal{H}_2$.

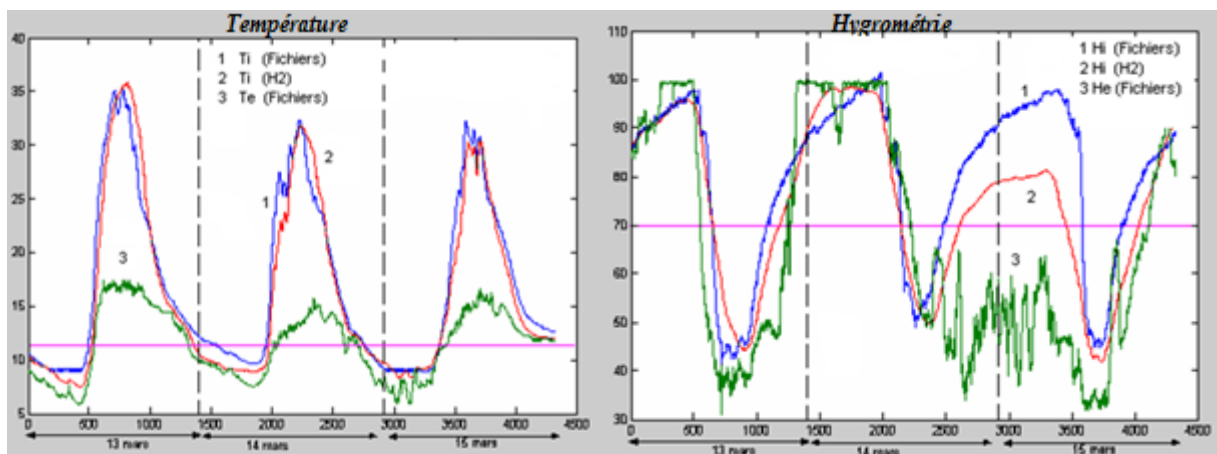


Figure 5.30 : Evolution de la température de l'hygrométrie interne et externe (13, 14 et 15 Mars)

La figure 5.31 donné ci-dessous montre le bon comportement des commandes chauffage et brumisation.

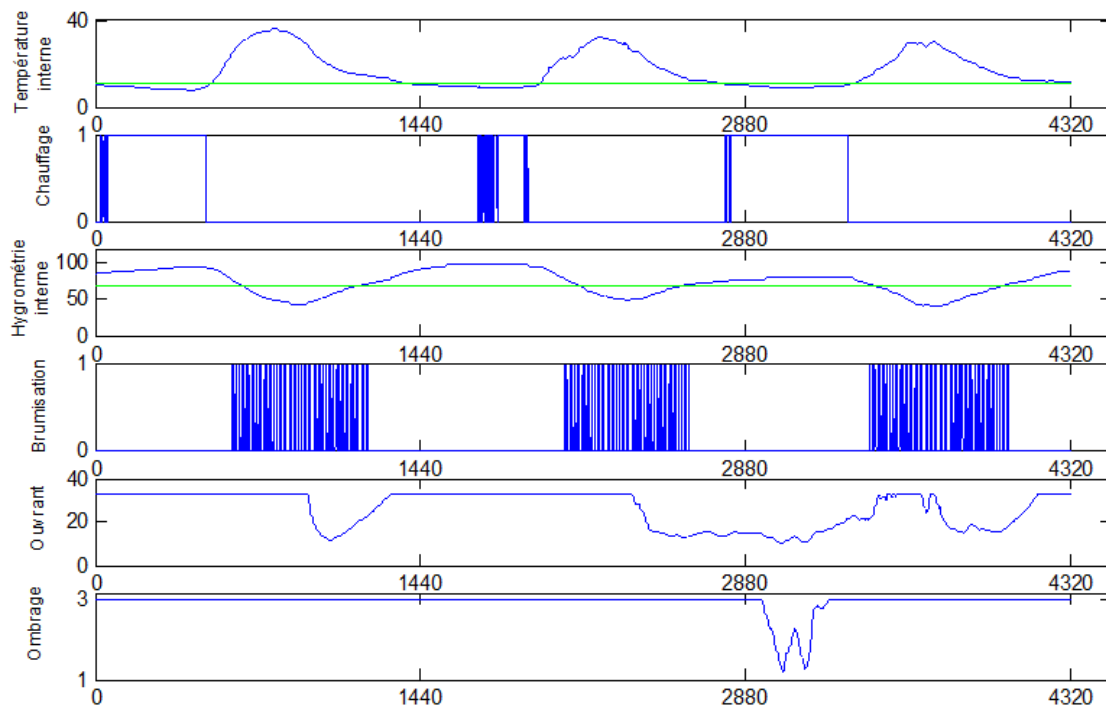


Figure 5.31 : Activation des commandes et évolution de la température et de l'hygrométrie interne.

En effet, par analyse qualitative, nous notons que la brumisation est activée lorsque l'hygrométrie interne est en dessous de sa consigne et la température dépasse sa consigne, alors que le chauffage est actionné lorsque la température est en dessous de sa consigne et l'hygrométrie est au-dessus de sa consigne. En revanche, nous notons que le chauffage et l'ouvrant peuvent être actionnés simultanément, ce qui correspond à une « situation paradoxale ». Une méthodologie basée sur la supervision et contrôle peut apporter une amélioration à cette situation.

Qu'il s'agisse de la commande On-Off ou des commandes $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$, on note que les variables régulées sont assez éloignées par rapport à leurs valeurs de consignes, cela s'explique essentiellement par le fait qu'il s'agit d'une serre expérimentale équipée par des actionneurs dont les puissances fournies sont insuffisantes pour faire face aux fortes perturbations. Celles-ci sont caractérisées par un niveau de puissance énergétique largement supérieur au niveau des puissances disponibles sur les actionneurs, ce qui crée de grosses difficultés, voire des impossibilités pour suivre des consignes imposées. Les non-linéarités de ce processus rajoutent des difficultés supplémentaires. Cette même remarque a été observée avec d'autres types de commandes appliquées à notre serre, notamment la commande floue qui a fait l'objet d'une publication [97]. De même, les écarts constatés entre l'hygrométrie interne et la consigne peuvent s'expliquer en partie par le fait que le procédé de brumisation n'opère pas de manière continue, mais plutôt de manière cyclique avec une temporisation fixée a priori.

Nous donnons ci-après une table comparative entre la commande (TOR) et les commandes $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ en adoptant le même critère de comparaison que celui qui a été retenu pour évaluer les performances d'un régulateur basé sur la commande floue appliquée à la même serre expérimentale [97]. Ce critère est défini par l'erreur moyenne sur une journée et puis sur 3 journées.

Journée(s)	15 Mars			13 14 et 15 Mars		
N : Nombre d'échantillons	1440			1440 x 3		
Type de contrôle	TOR	$\mathcal{H}_2$	$\mathcal{H}_\infty$	TOR	$\mathcal{H}_2$	$\mathcal{H}_\infty$
$\frac{\sum_{k=1}^N Ti(k) - Tc }{N}$	6.69	5.87	5.85	6.92	6.69	6.69
$\frac{\sum_{k=1}^N Hi(k) - Hc }{N}$	18.44	12.32	16.25	18.10	14.91	16.53

Table 12 : Comparaison entre les commandes TOR / $\mathcal{H}_2$ / $\mathcal{H}_\infty$

b) Effet du cycle de brumisation

Nous savons que pour le bien-être de la culture sous serre, il ne convient pas d'appliquer la brumisation en continu sous risque d'endommager cette culture. Nous avons voulu voir l'effet du cycle de brumisation sur le comportement de la température et de l'hygrométrie interne. C'est ainsi que dans les essais précédents, nous avons fixé la durée de brumisation à une minute sur un cycle de 11mn pour se mettre dans les conditions expérimentales pour lesquelles les fichiers de mesure ont été obtenus.

Nous envisageons de comparer les trois cas suivants :

Cycle 1 : la durée de la brumisation est de 1 mn sur un cycle de 11 mn.

Cycle 2 : la durée de la brumisation est de 8 mn sur un cycle de 11 mn.

Cycle 3 : la durée de la brumisation est de 3 mn sur un cycle de 33 mn.

La motivation de comparer l'effet des cycles 1 et 3 est de voir s'il convient d'appliquer la brumisation par des actions de brève période ou de rassembler ces actions pour les appliquer sur une période plus large. De point de vue dépense énergétique, les deux cycles correspondent à la même consommation pendant une période de 33mn. La figure 5.32 correspond à l'application des cycles 1 et 2.

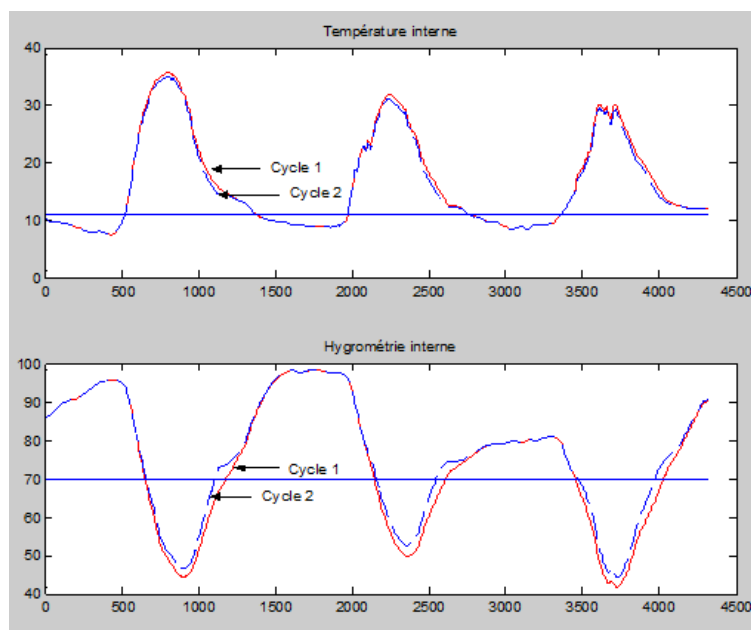


Figure 5.32: Effet de la durée de la brumisation sur la température et l'hygrométrie interne.

Cette simulation montre que l'augmentation de la durée de la brumisation améliore sensiblement les écarts entre les variables régulées et leurs consignes et particulièrement pour l'hygrométrie. En revanche, l'application du cycle 3 ne semble pas apporter une modification significative sur le comportement des variables régulées en comparaison avec l'application du cycle 1. Le choix entre les deux cycles peut être éventuellement décidé selon la nature et le besoin de la culture sous serre.

5.3.6 Conclusion

L'état interne de la serre expérimentale a été caractérisé par deux variables pertinentes, à savoir la température et l'hygrométrie. Ces deux variables sont corrélées et fortement sensibles aux conditions météorologiques externes à la serre. Sur la base d'un modèle de commande linéaire et stationnaire dont la validation reste limitée en raison des hypothèses simplificatrices formulées, nous avons élaboré deux types de la commande robuste $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ permettant d'assurer la stabilité en boucle fermée tout en maintenant les variations de l'état interne dans des proportions comparables (voire légèrement meilleures) à celles de la commande TOR.

Contrairement à la commande $\mathcal{H}_2$, la commande On-Off ne permet pas de prendre en compte l'interaction entre les variables régulées. En effet, la commande On-Off mise en place sur le site est assurée par plusieurs régulateurs qui fonctionnent indépendamment l'un de l'autre et souvent un réglage de seuils est nécessaire.

La comparaison entre la commande On-Off et les commandes $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$ ne doit pas s'arrêter uniquement aux niveaux des performances qui sont essentiellement le maintien des variables régulées dans des fourchettes acceptables pour le développement de la plante, mais aussi sur la robustesse et la fiabilité de la technique de commande.

Notre objectif est de montrer la faisabilité d'une nouvelle approche qui permet de minimiser l'effet des perturbations météorologiques sur le climat interne de la serre en prenant en compte la forte interaction qui existe entre les variables régulées d'une part et entre ces variables et les perturbations externes d'autre part, et ce, malgré l'utilisation d'un modèle imprécis (hypothèse de la linéarité et de stationnarité). Ce point est particulièrement important pour les agriculteurs qui cherchent une fiabilité totale plutôt qu'une grande précision qui peut s'avérer totalement inutile.

Les études effectuées par simulation numérique ont confirmé l'utilité du modèle non linéaire comme un simulateur approprié pour la serre expérimentale dans l'évaluation du système de contrôle et l'étude des effets de la brumisation avant le développement pratique supplémentaire sur site. Comme extension, il est possible d'améliorer la qualité de ce modèle en surmontant le problème de la non stationnarité en définissant plusieurs modèles pour la serre en répartissant une journée en plusieurs périodes compte tenue que certaines entrées (commandes et/ou perturbations) sont normalement absentes pendant des longs moments de la journée.

Nous avons résolu le problème de calcul de chaque loi de commande en considérant une approche unifiée et formulée à partir des inégalités matricielles linéaires utilisées comme outil d'optimisation mathématique, ce qui a facilité le calcul de ces types de régulateur.

A l'issue des résultats obtenus, nous pouvons conclure que les stratégies de commande proposées conviennent pour le contrôle du microclimat d'une serre agricole. Cependant, les résultats de simulation observés sont valables sur une période déterminée, il convient de confirmer la faisabilité de l'approche sur une période beaucoup plus large de l'année pour ensuite l'implanter sur le site expérimental. Enfin, nous pensons que la mise en place des moyens d'action plus puissants améliorera sûrement la qualité de la régulation.

5.4 Contrôle décentralisé d'un système aérothermique

5.4.1 Description et identification du système

Le schéma d'un processus aérothermique utilisé dans cette étude est montré sur les figures 5.33a et 5.33b. Il est constitué d'un tube à travers lequel l'air atmosphérique est aspiré par un ventilateur centrifuge, et est chauffé lors de son passage sur une grille de chauffage avant d'être libéré dans l'atmosphère. Il est équipé d'une résistance électrique chauffante qui, une fois sous tension électrique, libère de la chaleur par effet Joule et transmis par convection à l'air en circulation, ce qui produit de l'air chauffé.

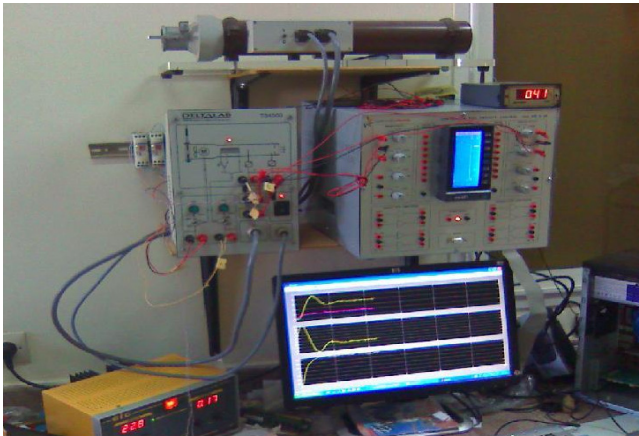


Figure 5.33a : Banc expérimental de l'aérotherme

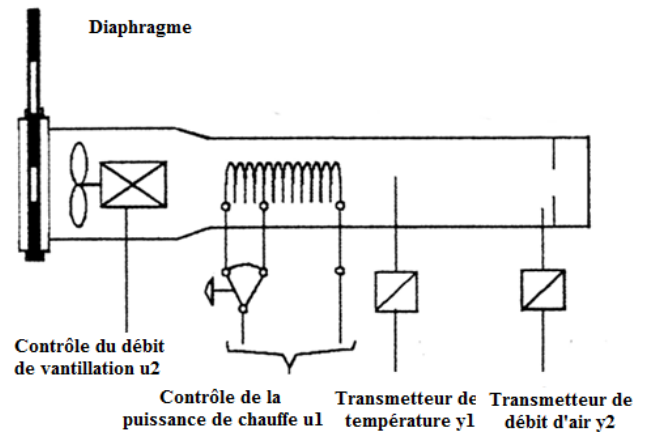


Figure 5.33b : Schéma synoptique de l'aérotherme

L'objectif de la commande dans ce processus est de réguler simultanément la température et le débit d'air. Le contrôle de la température est réalisé en faisant varier la puissance électrique fournie à la grille du dispositif de chauffage. Le débit d'air est ajusté en faisant varier la vitesse du ventilateur. Ce processus est considéré comme un processus non linéaire. Cependant, lorsque la température de l'air et le débit d'air à l'intérieur du processus se stabilisent autour d'un état d'équilibre, un modèle linéaire peut être obtenu.

Comme il est montré sur la figure 5.33b, les entrées de commande du système (u_1, u_2) , sont respectivement le circuit électronique de puissance d'alimentation de la résistance de chauffage et la vitesse du ventilateur. Les sorties (y_1, y_2) , sont respectivement la température de l'air et le débit. Les transmetteurs fournissent des tensions variant entre 0 et 10 V.

Dans le but d'obtenir un modèle multivariable pour le précédé, Un ensemble de données est utilisé dans l'étape d'identification paramétrique. Il est composé de signaux de séquences binaires pseudo-aléatoires appliquées au système et à leurs réponses correspondantes. Le pas d'échantillonnage est $T_s = 1$ seconde. Les signaux recueillis par l'intermédiaire du module d'acquisition de données, sont produisent dans l'intervalle (0V, 10V). Un algorithme d'identification en mode hors ligne est appliqué en vue d'obtenir un modèle paramétrique à temps continu sous forme de représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m u(t) \\ y_m(t) = C_m x(t), \end{cases} \quad (5.37)$$

où A_m , B_m et C_m ont respectivement comme dimension (6,6), (6,2) et (2,6). Dans ce but, le logiciel CONTSID ToolBox a été utilisé. Il s'agit de **CONTinuous-Time System IDentification**, un logiciel libre d'utilisation de Matlab, spécialement adapté à l'identification des modèles continus à partir des données discrètes [57],[56]. La validation de ce modèle est discutée dans [118].

5.4.2 Approche par paramétrisation des contrôleurs $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ et résolution par les LMIs

5.4.2.1 Formulation du problème de la commande décentralisée

Dans le contexte de la commande robuste décentralisée, nous proposons la synthèse de deux types de contrôleurs complètement décentralisés basés respectivement sur les théories de commande $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$. Dans les deux cas envisagés, l'objectif de la synthèse est de minimiser la norme $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ entre les entrées exogènes et les grandeurs contrôlées et d'assurer une bonne précision vis-à-vis des consignes et des perturbations lentement variables. Cette dernière performance sera assurée par l'insertion d'une action intégrale dans la structure de la commande comme il est illustré par la figure 5.34.

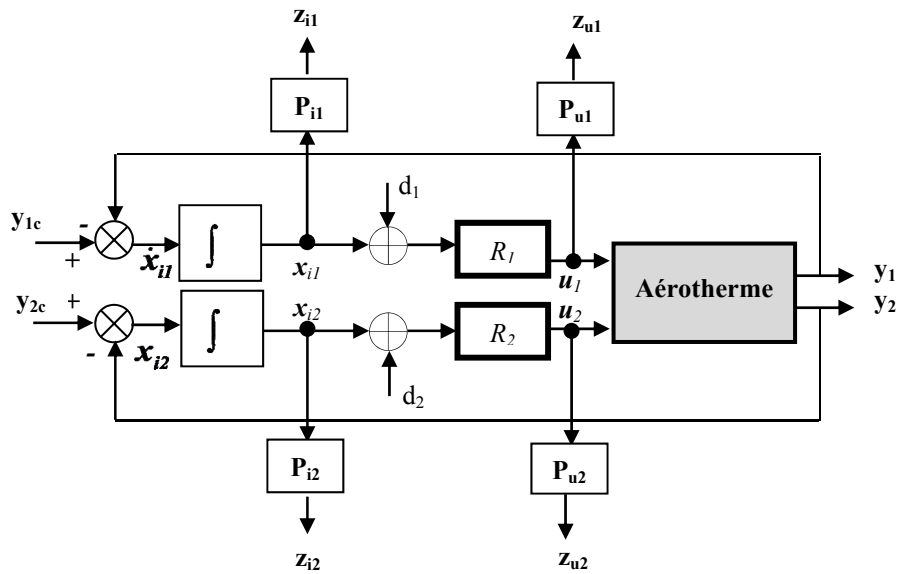


Figure 5.34 : Schéma pour la synthèse des régulateurs décentralisés $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$

où R_1 et R_2 sont des régulateurs de type $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$ selon la méthode de synthèse envisagée dans la suite. y_{1c}, y_{2c} représentent les consignes de température de l'air et du débit. d_1 et d_2 deux signaux de perturbation inconnus mais supposés lentement variables qui s'ajoutent aux signaux issus des intégrateurs. (z_{11}, z_{12}) et (z_{21}, z_{22}) représentent les variables contrôlées.

Le schéma de la figure 5.34 est organisé de manière compacte de manière à faire apparaître la structure standard :

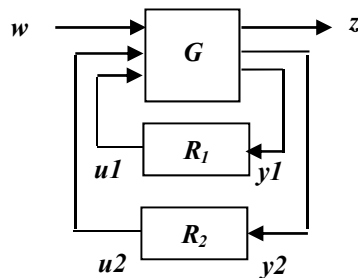


Figure 5.35 : Schéma standard pour la synthèse du régulateur décentralisé $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$

Le système augmenté G admet comme représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_{21} u_1(t) + B_{22} u_2(t) \\ z(t) = C_1 x(t) + D_{121} u_1(t) + D_{122} u_2(t) \\ y_i(t) = C_{2i} x(t) + D_{21i} w(t) \quad i = 1, 2, \end{cases} \quad (5.38)$$

où $x = \begin{bmatrix} x_m^T & x_i^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^8$, avec $\dot{x}_i = y_c - y_m$, est le vecteur d'état, $w \in \mathbb{R}^4$ est le signal exogène, $z \in \mathbb{R}^4$ est le vecteur de variables contrôlées, $A, B_1, B_{21}, C_1, C_{21}, D_{121}$ et D_{211} ($i=1,2$) sont des matrices de dimensions appropriées.

$$G(s) \leftrightarrow \begin{bmatrix} A & B_1 & B_{21} & B_{22} \\ \hline C_1 & 0 & D_{121} & D_{122} \\ \hline C_{21} & D_{211} & 0 & 0 \\ C_{22} & D_{212} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

ou encore de manière plus compacte :

$$G(s) \leftrightarrow \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ \hline C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Le symbole $\leftrightarrow$ représente la correspondance entre la représentation d'état et la fonction de transfert $G(s)$:

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = G(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} w = [d_1 & d_2 & y_{1c} & y_{2c}]^T \\ z = [z_{11} & z_{12} & z_{u1} & z_{u2}]^T \\ y = [y_2 & y_2]^T \end{cases}$$

et où

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_m & 0 \\ -C_m & 0 \end{bmatrix} & B_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} & B_2 &= \begin{bmatrix} B_m \\ 0 \end{bmatrix} & C_1 &= \begin{bmatrix} 0 & P_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & D_{12} &= \begin{bmatrix} 0 \\ P_u \end{bmatrix} \\ C_2 &= [0 \quad I] & D_{21} &= [I \quad 0] & P_i &= \text{Diag}(P_{i1}, P_{i2}), & P_u &= \text{Diag}(P_{u1}, P_{u2}) \end{aligned} \quad (5.41)$$

Les deux problèmes à résoudre sont les suivants :

Commande $\mathcal{H}_2$ décentralisée : Elle consiste à calculer le contrôleur optimal $R_d = \text{Diag}(R_1, R_2)$ minimisant la norme $\mathcal{H}_2$ du transfert $T_{wz}^d = T_{wz}(R_d)$ entre w et z :

$$\alpha_2^* = \min_{C_d \in \mathbb{C}_d} \|T_{wz}^d\|_2, \quad (5.42)$$

où $\mathbb{C}_d$ représente l'ensemble des contrôleurs décentralisés stabilisant le système (5.39) en boucle fermée.

Commande $\mathcal{H}_\infty$ décentralisée : Elle consiste à calculer le contrôleur sous optimal $R_d = \text{Diag}(R_1, R_2)$ tel que la norme $\mathcal{H}_\infty$ du transfert $T_{wz}^d = T_{wz}(R_d)$ entre w et z vérifie :

$$\|T_{wz}^d\|_\infty < \gamma, \quad (5.43)$$

où $\gamma > 0$ est un paramètre de synthèse prédéfini.

5.4.2.2 Synthèse de la loi de commande décentralisée

Pour calculer les contrôleurs R_i et R_2 décentralisés de type $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$, nous proposons d'utiliser la méthodologie proposée dans §3.10.7 du chapitre 3. Rappelons que cette méthode nécessite dans la première phase, la synthèse d'un contrôleur centralisé pour le système augmenté (5.40).

Nous notons par :

$$\begin{aligned} R & \begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t) \\ u_c(t) \triangleq u(t) = C_c x_c(t) \end{cases} \\ R_i & \begin{cases} \dot{x}_{di}(t) = A_{di} x_{di}(t) + B_{di} y_i(t) \\ u_{di}(t) \triangleq u_i(t) = C_{di} x_{di}(t) \end{cases} \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (5.44)$$

pour désigner les paramètres des contrôleurs centralisés et décentralisés de type $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$.

Nous avons les résultats suivants relatifs aux contrôleurs centralisés:

- L'unique contrôleur centralisé optimal $\mathcal{H}_2$ noté $\mathcal{C}_2(s)$ minimisant la norme : $\varepsilon_2 = \|T_{wz}^c(C_2)\|_2$ possède la représentation d'état suivante:

$$\mathcal{C}_2(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A_2 & L_2 \\ \hline -F_2 & 0 \end{array} \right] \begin{cases} A_2 = A - B_2 F_2 - L_2 C_2 \\ F_2 = B_2^T X_2 \quad L_2 = Y_2 C_2^T \end{cases} \quad (5.45)$$

Avec X_2 et Y_2 désignent respectivement les solutions des équations algébriques de Riccati associées aux Hamiltoniens J_2 et H_2 .

- Le contrôleur centralisé $\mathcal{H}_\infty$ sous-optimal noté $C_\infty(s)$ vérifiant:

$$\|T_{wz}^c(C_\infty)\|_\infty < \gamma \quad (5.46)$$

est donné par sa représentation d'état :

$$C_\infty(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A_\infty & Z_\infty L_\infty \\ \hline -F_\infty & 0 \end{array} \right] \begin{cases} A_\infty = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty - B_2 F_\infty - Z_\infty L_\infty C_2 \\ F_\infty = B_2^T X_\infty \quad L_\infty = Y_\infty C_2^T \quad Z_\infty = (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} \end{cases} \quad (5.47)$$

Avec X_∞ et Y_∞ désignent respectivement les solutions des équations algébriques de Riccati associées aux Hamiltoniens J_∞ et H_∞ .

Quant à la structure des contrôleurs décentralisés, elle est basée sur la structure d'un contrôleur-observateur d'état :

$$R_i \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} \hat{A} - B_2 \hat{F} - \bar{L}_i C_{2i} & \bar{L}_i \\ \hline -\bar{F}_i & 0 \end{array} \right], \quad i = 1, 2 \quad \hat{F} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

La matrice d'état $\hat{A} = A$ dans le cas $\mathcal{H}_2$ et $\hat{A} = A + \gamma^2 B_1 B_1^T X_\infty$ dans le cas $\mathcal{H}_\infty$. $\bar{F}_i$ et $\bar{L}_i$ pour $i = 1, 2$ représentent respectivement les gains de retour d'état et les gains des observateurs décentralisés. Ces gains constituent les paramètres à déterminer dans la loi de commande décentralisée formulée ci-dessous.

Les gains de retour d'état respectivement dans la synthèse $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ seront choisis tels que :

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2^1 \\ F_2^2 \end{bmatrix} \quad \hat{F} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_\infty^1 \\ F_\infty^2 \end{bmatrix},$$

conformément à l'annexe 3, où F_2^1 et F_2^2 respectivement F_∞^1 et F_∞^2 , résultent du partitionnement des gains de retour d'état F_2 et F_∞ des contrôleurs centralisés $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$. Ce choix comme nous le savions ne remet en question la stabilité du système en boucle fermée.

Dans ces conditions, le problème de la synthèse $\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$ décentralisée se ramène au problème d'optimisation paramétrique suivant :

$$\min_{\bar{L}} \left\| \begin{bmatrix} \bar{A}_L & \hat{L} - \bar{L} \\ \bar{F} & 0 \end{bmatrix} \right\|_2, \quad \bar{L} = \text{Diag}(\bar{L}_1, \bar{L}_2), \quad (5.49)$$

De même, le problème de la synthèse $\mathcal{H}_\infty$ décentralisée se ramène à la détermination de $\bar{L} = \text{Diag}(\bar{L}_1, \bar{L}_2)$, tel que :

$$\left\| \begin{bmatrix} \bar{A}_L & \hat{L} - \bar{L} \\ \bar{F} & 0 \end{bmatrix} \right\|_\infty < \gamma, \quad \bar{L} = \text{Diag}(\bar{L}_1, \bar{L}_2), \quad (5.50)$$

où $\gamma > 0$ est un paramètre de synthèse prédéfini.

Ces deux problèmes sont reformulés et résolus par le formalisme des LMIs (Voir les détails dans §3.9.7.4 et §3.10.7.6 du chapitre 3 et aussi [10]).

Nous avons tenté par ailleurs de réduire la dimension des régulateurs en s'appuyant sur la méthode présentée dans le §4.3.2 du chapitre 4. L'analyse des valeurs singulières de ces régulateurs a montré que celles-ci ne se caractérisent pas par une grande disparité ce qui nous aurait laissé le choix de procéder par troncature afin d'éliminer les valeurs singulières les plus faibles.

5.4.2.3 Résultats expérimentaux et conclusion

Plusieurs tests en temps réel avec différentes valeurs pour les pondérations P_i et P_u ont conduit aux choix suivant : $P_{i1} = P_{i2} = 0.5$ et $P_{u1} = P_{u2} = 1$. Avec ce choix, les normes des transferts centralisés et décentralisés en boucle fermée dans le cas de la synthèse $\mathcal{H}_2$ sont :

$$\|T_{zw}\|_2 = 2.3917, \quad \|T_{zw}^d\|_2 = 2.4868$$

Ce qui laisse présager que les performances de ces types de contrôleurs sont très proches et que la décentralisation ne dégrade pas les performances en comparaison avec celles attendues du contrôleur centralisé.

Les figures 5.36 et 5.37 représentent respectivement les réponses (y_1, y_2) à des changements brusques de consignes et les signaux de commande (u_1, u_2) résultant de la synthèse $\mathcal{H}_2$ centralisé et décentralisé. Dans les deux expériences, les régulateurs assurent une bonne conduite en poursuite des consignes constantes avec un léger dépassement des signaux de commande pour le contrôleur décentralisé par rapport au contrôleur centralisé. Ces légers dépassements apparaissent aux moments de changement brusques des consignes.

Dans le cas de la synthèse $\mathcal{H}_\infty$, les paramètres de pondération sont choisis comme suit : $P_{i1} = P_{i2} = 0.05$ et $P_{u1} = P_{u2} = 0.01$. et le coefficient d'atténuation γ pour lequel les contrôleurs centralisé et décentralisé sont obtenus correspond à $\gamma = 0,7$.

Les figures 5.38 et 5.39 représentent respectivement les réponses (y_1, y_2) à des changements

brusques de consignes et les signaux de commande (u_1, u_2) résultant de la synthèse $\mathcal{H}_\infty$ centralisé et décentralisé. Ces courbes montrent le bon comportement de ces deux contrôleurs et que la décentralisation ne fait perdre de manière significative les performances par rapport à la commande centralisée.

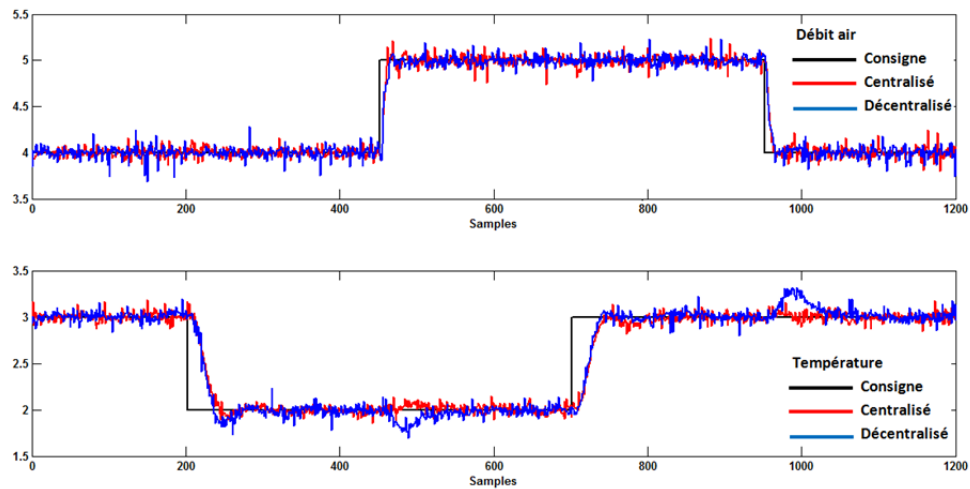


Figure 5.36 : Réponses des sorties en poursuite (Synthèse $\mathcal{H}_2$)

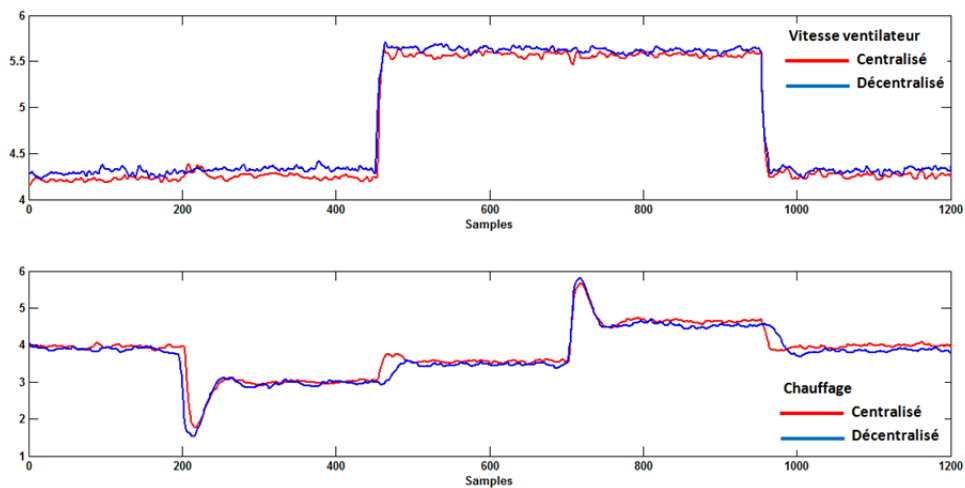


Figure 5.37 : Evolution des commandes (Synthèse $\mathcal{H}_2$)

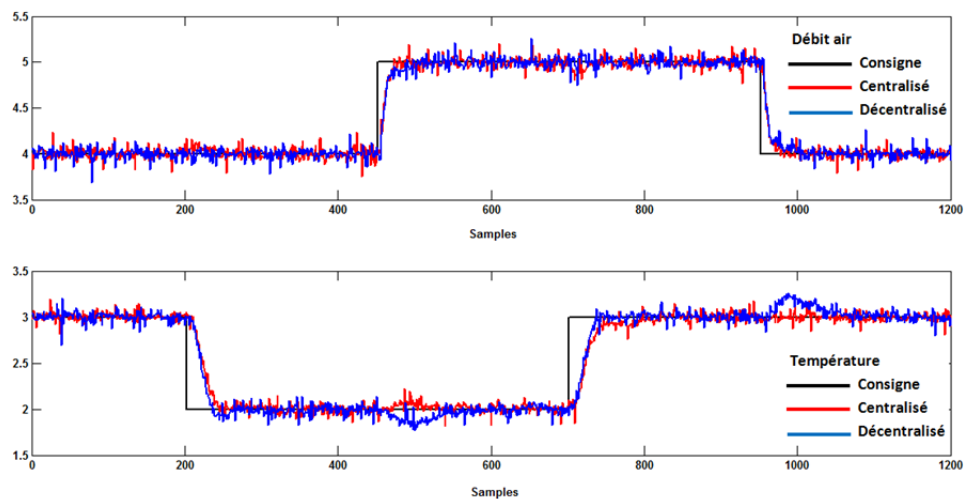
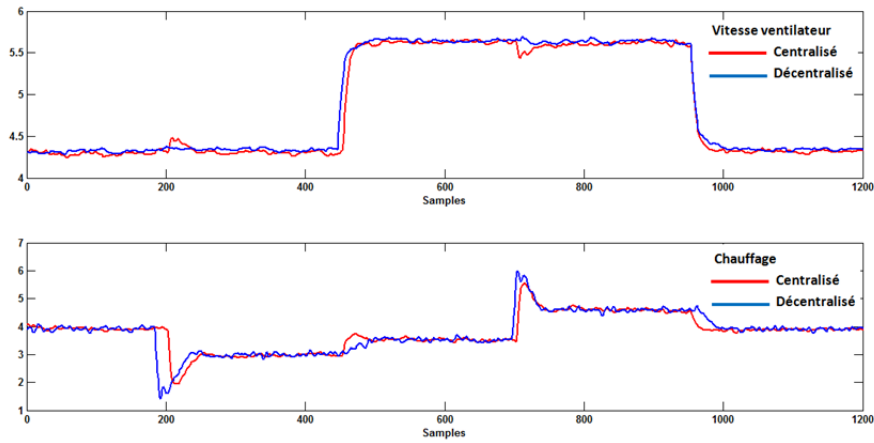


Figure 5.38 : Réponses des sorties en poursuite (Synthèse $\mathcal{H}_\infty$)


 Figure 5.39 : Evolution des commandes (Synthèse $\mathcal{H}_\infty$)

En conclusion générale, nous avons proposé l'application d'une méthodologie basée sur la technique des LMIs pour la conception de deux contrôleurs décentralisés. Un de type $\mathcal{H}_2$ et l'autre de type $\mathcal{H}_\infty$. Grâce à la notion de la paramétrisation des contrôleurs dans le contexte de la commande robuste, le problème crucial de la synthèse décentralisée a été formulé par l'approche des LMIs comme un problème d'optimisation convexe qui peut être résolu efficacement par des solveurs LMI disponibles à cet effet. Les résultats expérimentaux obtenus sur l'aérotherme comme support expérimental ont montré l'efficacité de la méthode de conception des commandes proposées.

Nous constatons par ailleurs que dans les deux types de synthèse, les commandes ne sont pas découplées et qu'il y'a une légère réaction d'une commande lorsque l'autre est sollicitée. Ce type de comportement peut être évité en enrichissant ces commandes décentralisées par un effet de découplage partiel ou complet. Un travail dans ce sens a été réalisé sur l'aérotherme par la mise au point d'un régulateur de type Proportionnel Intégral Dérivée (PID) décentralisé avec un effet de découplage dont nous donnons un aperçu dans le paragraphe suivant.

5.4.3 Approche par PID décentralisée avec découplage des commandes

Dans ce paragraphe nous donnons les principales étapes élaborées pour la mise au point d'une commande de type PID décentralisée avec découplage des commandes. Le détail du développement et des résultats expérimentaux sont dans [119].

Le schéma de commande de l'aérotherme est donné par la figure (5.40) ci-dessous. Sur cette figure, l'aérotherme est représenté par une matrice de fonctions de transfert dont chacune est de la forme d'un modèle du premier ordre affecté par retard :

$$H_{11} = \frac{0.789e^{-7s}}{1+34.07s} \quad H_{12} = \frac{-0.462e^{-7p}}{1+30.97p} \quad H_{22} = \frac{1.08e^{-p}}{1+1.43p} \quad (5.51)$$

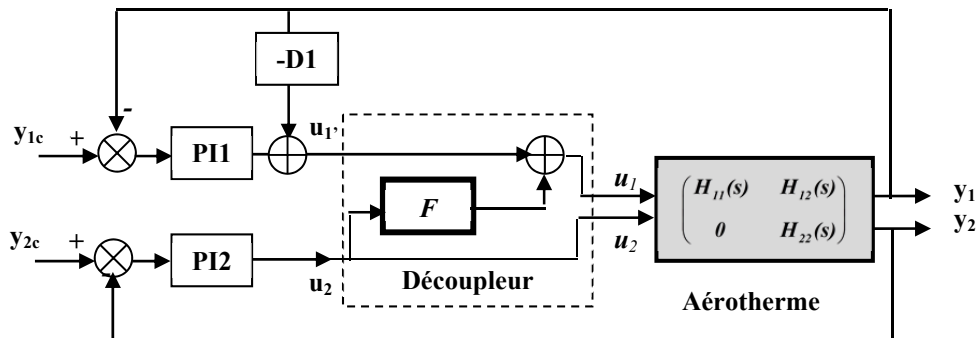


Figure 5.40 : Schéma de commande décentralisée avec découplage

Il s'agit de modèles de type 'boite noire' dont les paramètres sont identifiés et validés à partir d'une base de données obtenue par des essais expérimentaux réalisés sur l'aérotherme [119].

L'élément nul de cette matrice s'interprète par le fait que la commande de chauffe u_1 , n'a pas d'influence sur le débit d'air y_2 à la sortie de l'aérotherme. Le découpleur est partiel dont l'élément F permet un découplage parfait en régime statique :

$$F = -\frac{H_{12}(0)}{H_{11}(0)} = 0.585 \quad (5.52)$$

Les régulateurs monovariabiles PI-1&D1 et PI2 sont dimensionnés selon les recommandations empiriques de la méthode IMC (Internal Model Control) et dont la structure et les paramètres de chacun sont donnés par la table suivante:

Régulateur	Structure	Paramètres
PI-1&D1	$u_1' = k_1(1 + \frac{1}{\tau_{i1}s})(y_{1c} - y_1) - \frac{k_1\tau_{d1}s}{1 + \alpha_1\tau_{d1}s}y_1$	$k_1 = 1.08 \quad \tau_{i1} = 37.6 \quad \tau_{d1} = 3.18 \quad \alpha_1 = 0.5$
PI2	$u_2 = k_2(1 + \frac{1}{\tau_{i2}s})(y_{2c} - y_2)$	$k_2 = 1.04 \quad \tau_{i2} = 1.93 \quad \alpha_2 = 0.5$

Table 13 : Structure et paramètres des régulateurs

Précisons que dans le choix de la structure du régulateur PI-1&D1, l'action dérivée filtrée est placée dans la chaîne de retour pour éviter les sursauts de la commande et des sollicitations abusives de l'instrumentation mise en place. Ce phénomène peut de produire lors des changements brusques des consignes ou des perturbations intensives. Par ailleurs, nous n'avons pas jugé utile d'ajouter une action dérivée pour la boucle de contrôle du débit d'air vue que sa dynamique est plus rapide que la boucle de contrôle de la température.

Cette stratégie de commande implantée en temps réel a bien confirmé l'effet de découplage. Des performances intéressantes sont obtenues en comparaison avec d'autres stratégies plus conventionnelles. Le détail de cette étude comparative est fournie dans [119].

5.4.4 Conclusion

A travers ce chapitre à caractère applicatif, nous étions conduits à mettre en œuvre certaines méthodes développées dans la partie théorique sur des procédés réalistes de nature et de complexité diverse. Les méthodes retenues ont permis de couvrir les principaux problèmes rencontrés dans le contrôle automatique des procédés industriels, à savoir, la modélisation/identification et l'élaboration des lois de commande. Nous avons montré l'efficacité des approches de synthèse proposées par la voie de simulation numérique à travers des modèles de benchmark représentant d'une part une colonne binaire de distillation et une serre agricole d'autre part.

Dans le cas de la colonne à distiller, nous avons mis en évidence que l'ordre du régulateur $\mathcal{H}_\infty$ peut être réduit sans dégrader de manière significative ni les performances ni la robustesse de la boucle fermée. Le régulateur PI multivariable a montré lui aussi son efficacité à réduire les effets des perturbations. Pour des raisons pratiques, il peut être préféré pour sa simplicité d'implantation.

Dans le contrôle climatique de la serre agricole, les commandes $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ semblent convenir pour maintenir les deux pertinentes variables, à savoir la température et l'hygrométrie internes,

dans des proportions acceptables malgré les fortes perturbations météorologiques auxquelles la serre en est soumise continuellement. Nous pensons que ces stratégies seraient plus efficaces si la serre expérimentale est équipée par des actionneurs plus puissants.

Enfin, pour le système aérothermique, deux solutions sont proposées mettant en œuvre des stratégies de contrôle décentralisé avec ou sans découplage des commandes. Le premier schéma issu de la paramétrisation des contrôleurs dont les paramètres sont déterminés en formulant le problème sous forme d'optimisation paramétrique et résolu efficacement par la technique des LMIs. L'autre schéma est testé avec succès sur l'aérotherme a permis de mettre en œuvre deux régulateurs PI-D et PI indépendants pour contrôler et découpler le suivi des consignes.

Conclusion générale

Conclusion générale

Un grand nombre de problèmes de la théorie de la commande s'expriment sous forme de problème d'optimisation convexe sous contraintes d'inégalités matricielles linéaires (LMIs). D'autres problèmes plus difficiles s'expriment sous forme de contraintes matricielles bilinéaires pour lesquelles, il n'existe pas de nos jours de méthodes efficaces pour leur résolution. Néanmoins des méthodes heuristiques dans la littérature ont été préconisées réduisant ainsi cette difficulté constatée. Les LMIs ont, non seulement contribué à la résolution de problèmes de synthèse de contrôleurs robustes de type $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$, mais aussi dans d'autres de type de commande (MPC, la commande floue,..) et dans d'autres domaines comme la réduction optimale d'ordre des modèles dont l'ordre est jugé contraignant pour la synthèse des lois de commande et/ou pour leur implantation. Ce succès s'explique également par le développement des algorithmes de résolution des LMIs, par la puissance de calcul numérique et par la disponibilité de solveurs commerciaux bien adaptés.

La contribution des LMIs dans les problèmes de commande est extrêmement vaste et diversifiée. Nous nous sommes tenus à faire un travail de synthèse le plus étendue possible en gardant une harmonisation et une homogénéité dans les problèmes posés, à savoir la synthèse de lois de commande par des contrôleurs par retour d'état statique, par retour de sortie dynamique et par retour de sortie statique. Notre contribution réside essentiellement dans les chapitres 3, 4 et 5. Le chapitre 3 constitue à lui seul une ressource de puisement sur les dernières avancées sur la résolution des problèmes d'optimisation de type $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ par le formalisme des LMIs. La commande décentralisée a pris un intérêt particulier dans cette étude. Nous avons également enrichi les développements théoriques présentés par un apport sur leur mise en œuvre algorithmique.

Le chapitre 4 consacré à la réduction d'ordre constitue un autre volet de ce mémoire. Dans ce chapitre, nous avons rassemblé un grand nombre de méthodes basées sur l'approche des LMIs traitant la réduction d'ordre. Le problème de la recherche d'un modèle d'ordre réduit est formulé comme un problème d'optimisation de type $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$. Notre souci a été double sur ce volet : présenter les dernières avancées dans le domaine de la réduction optimale d'ordre par l'approche des LMIs et aussi clarifier les méthodologies pour leur mise en œuvre. Comme application de ce problème est l'implantation la plus simple possible d'un contrôleur multivariable après sa conception. Pour obtenir un contrôleur de dimension fixe lors de sa conception semble un problème difficile à résoudre. En revanche l'approche classique consistant à réduire à posteriori le contrôleur issu d'une synthèse sans contrainte d'ordre reste cependant une méthode pertinente pour obtenir contrôleurs d'ordre convenable. L'autre alternative est de procéder d'abord à la réduction du modèle du système pour en déduire des correcteurs aussi d'ordre convenable. Notre point de vue sur ce sujet penche plutôt vers cette deuxième approche.

Le chapitre 5 traite le caractère applicatif de cette thèse. Notre souci applicatif nous a conduit à mettre en œuvre des méthodologies de commande allant depuis de la modélisation/identification jusqu'à l'implantation des lois de commande. Les méthodes de commande sont inspirées largement des développements de la partie théorique et appliquées sur des systèmes de nature et de complexité diverse. Notre première application que nous avons considéré s'articule sur la commande d'une colonne binaire de distillation, procédé de taille industrielle et intéressant par sa complexité (non linéaire, de grande dimension). L'objectif est de proposer une méthodologie pour

le rejet de perturbations matérialisées essentiellement par la variation du débit d'alimentation du produit à distiller et la variation de sa concentration. Pour ce faire, notre choix s'est porté naturellement vers une synthèse de type $\mathcal{H}_\infty$ augmenté par une action intégrale. Dans cette application, plusieurs méthodes basées sur l'approche LMI, ont été testées pour obtenir un modèle réduit pour la colonne. Comme alternative pour la commande, nous avons élaboré un régulateur PI multivariable en formulant le calcul de ses paramètres comme un problème de la détermination d'un gain de retour par sortie statique et résolu par la technique des LMIs. Compte tenu de sa performance en comparaison avec le régulateur $\mathcal{H}_\infty$, il est préféré pour sa simple implantation. La deuxième application est relative au contrôle du micro climat d'une serre expérimentale implantée à l'Université de Toulon et du Var en France. Après une phase de modélisation et d'identification, deux types de modèle sont élaborés dont un est de type non linéaire, ayant permis de reproduire convenablement une conduite plus réaliste de la serre, l'autre modèle est linéaire ayant conduit quant à lui, à l'élaboration de deux types de commande robuste $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$. Les simulations de ces lois de commande ont montré leur aptitude à maintenir l'état interne de la serre dans les mêmes proportions que la commande On/Off mise en place. Enfin, notre contribution théorique pour la synthèse des lois de commande décentralisée de type $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ se sont concrétisées avec succès en les appliquant sur un prototype expérimental d'un aérotherme industriel. En effet, les performances obtenues en comparaison avec les lois de commande centralisées de même nature sont très proches.

Perspectives :

Les méthodes de réduction présentées jusqu'à présent ne permettent pas de privilégier par exemple une gamme de fréquence particulière dans laquelle il est souhaitable d'avoir une erreur de réduction la plus faible possible. Elles ne permettent pas non plus d'assurer que la boucle formée par le système initial corrigé par le correcteur d'ordre réduit soit stable ou robuste. C'est ainsi des versions améliorées du problème de réduction qui consistent à introduire des pondérations fréquentielles. Ces pondérations seront choisies de manière à refléter le sort auquel est destiné le modèle d'ordre réduit : modèle de synthèse d'une loi de commande moderne, correcteur, etc. Le problème qui se pose alors est de trouver un système d'ordre réduit qui minimise une norme de l'erreur pondérée.

Par ailleurs, nous avons souligné à plusieurs reprises que les problèmes formulées par des inégalités matricielles bilinéaires peuvent être « linéarisées » en les transformant en un ensemble d'inégalités matricielles linéaires en fixant certaines variables de décisions et puis d'itérer alternativement jusqu'à la convergence. Cette situation a été rencontrée aussi bien que lors de la synthèse de contrôleurs que dans la réduction d'ordre. Les procédures itératives suscitent quelques points de réflexion et un effort doit être fait pour améliorer le processus de convergence par des initialisations et des tests d'arrêt plus appropriés.

Annexes

Annexe 1

Considérons deux systèmes $G(s)$ et $\tilde{G}(s)$ ayant les représentations suivantes :

$$G(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ \hline C_1 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \quad \tilde{G}(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ \hline C_1 & D_{21} & 0 \end{array} \right] \quad (\text{A11})$$

Le système $\tilde{G}(s)$ se différencie de $G(s)$ par le fait d'avoir $D_{22} = 0$. Soit $K(s)$ et $\tilde{K}(s)$, deux régulateurs stabilisant respectivement $G(s)$ et $\tilde{G}(s)$:

$$K(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A_k & B_k \\ \hline C_k & D_k \end{array} \right] \quad \tilde{K}(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_k & \tilde{B}_k \\ \hline \tilde{C}_k & \tilde{D}_k \end{array} \right] \quad (\text{A12})$$

L'objectif du calcul qui suit consiste à montrer que la connaissance $\tilde{K}(s)$ obtenu pour $D_{22} = 0$ permet d'avoir $K(s)$ pour lequel $D_{22} \neq 0$. Cette relation est la suivante :

$$K(s) = \tilde{K}(s)(I + D_{22}\tilde{K}(s))^{-1} \quad (\text{A13})$$

La répartition de $G(s)$ et $\tilde{G}(s)$ en quatre blocs conformément aux différentes matrices et l'utilisation du formalisme LFT permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} G(s) &:= \left[\begin{array}{c|c} G_{11} & G_{12} \\ \hline G_{21} & G_{22} \end{array} \right] & F_u(G, K) = G_{11} + G_{12}K(sI - G_{22}K)^{-1}G_{21} \\ \tilde{G}(s) &:= \left[\begin{array}{c|c} \tilde{G}_{11} & \tilde{G}_{12} \\ \hline \tilde{G}_{21} & \tilde{G}_{22} \end{array} \right] & F_u(\tilde{G}, \tilde{K}) = \tilde{G}_{11} + \tilde{G}_{12}\tilde{K}(sI - \tilde{G}_{22}\tilde{K})^{-1}\tilde{G}_{21} \end{aligned} \quad (\text{A14})$$

En écrivant $G(s)$ sous les deux formes équivalentes :

$$\begin{aligned} G(s) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ \hline C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{c|c} D_{11} & D_{12} \\ \hline D_{21} & D_{22} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} C_1 \\ \hline C_2 \end{array} \right] (sI - A)^{-1} [B_1 \mid B_2] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ \hline G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{array} \right] \end{aligned} \quad (\text{A15})$$

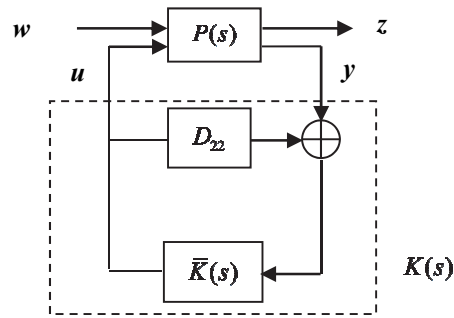
$\tilde{G}(s)$ s'exprime en fonction de $G(s)$ par :

$$\tilde{G}(s) = G(s) - \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & D_{22} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{G}_{11}(s) & \tilde{G}_{12}(s) \\ \hline \tilde{G}_{21}(s) & G_{22}(s) - D_{22} \end{array} \right] \quad (\text{A16})$$

A partir de la relation (A4), nous avons alors :

$$\begin{aligned}
 F_u(G, K) &= G_{11} + G_{12} \tilde{K} \left[I + D_{22} \tilde{K} \right]^{-1} \left[I - G_{22} \tilde{K} (I + D_{22} \tilde{K})^{-1} \right]^{-1} G_{21} \\
 &= G_{11} + G_{12} \tilde{K} \left[\left[I - G_{22} \tilde{K} (I + D_{22} \tilde{K})^{-1} \right] \left[I + D_{22} \tilde{K} \right] \right]^{-1} G_{21} \\
 &= G_{11} + G_{12} \tilde{K} \left[I - (G_{22} - D_{22}) \tilde{K} \right]^{-1} G_{21} \\
 &= F_u \left(G - \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & D_{22} \end{array} \right], \tilde{K} \right) \\
 &= F_u(\tilde{G}, \tilde{K})
 \end{aligned} \tag{A17}$$

Cela veut dire, que tout contrôleur $\tilde{K}$ stabilisant le système $\tilde{G}$, alors le contrôleur $K(s) = \tilde{K}(s)(I + D_{22} \tilde{K}(s))^{-1}$ stabilise le système G et inversement. Cette relation peut être traduite par le schéma fonctionnel suivant :



Cas où $D_{22} \neq 0$

En termes de représentations d'état, nous avons la correspondance suivante :

$$K(s) \Big|_{D_{22}=0} \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A_k & B_k \\ \hline C_k & D_k \end{array} \right] \Rightarrow K(s) \Big|_{D_{22} \neq 0} \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A_k - B_k D_{22} Q^{-1} C_K & B_k - B_k D_{22} Q^{-1} D_K \\ \hline Q^{-1} C_k & Q^{-1} D_k \end{array} \right], Q = I + D_K D_{22}$$

Annexe 2

Normalisation de D_{12} et D_{21}

1) Par changement de variables.

Afin de simplifier les calculs lors de la synthèse du régulateur $\mathcal{H}_\infty$, il est possible au moyen d'un changement de variables de manière à avoir :

$$D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \quad (\text{A21})$$

Pour ce faire, on procède aux changements de variables suivants :

$$\begin{aligned} z &= U_{12} \bar{z} \\ \bar{w} &= U_{21} z \end{aligned} \quad (\text{A22})$$

où U_{12}, U_{21} sont calculées de telle manière que :

$$U_{12}^{-1} D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{m_2} \end{bmatrix} \quad D_{21} U_{21}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & I_{p_2} \end{bmatrix}$$

L'existence des matrices U_{12}, U_{21} est assurée par l'hypothèse II (§4.3.5). Le système standard donné par (4.6) :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 U_{21}^{-1} \bar{w} + B_2 u \\ \bar{z} = U_{12}^{-1} C_1 x + U_{12}^{-1} D_{11} U_{21}^{-1} \bar{w} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} u \\ y = C_2 x + \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \bar{w} + D_{22} u \end{cases} \quad (\text{A23})$$

2) Transformation de D_{12} et D_{21} par les valeurs singulières

- Considérons la décomposition en valeurs singulières de D_{12} :

$$D_{12} = U_{12} \begin{bmatrix} \sigma_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_{12}^T$$

En posant : $U_{12t} = U_{12}^T = \begin{bmatrix} U_{1t} \\ U_{2t} \end{bmatrix}$ et $U_t = \begin{bmatrix} U_{2t} \\ U_{1t} \end{bmatrix}$, on a : $\bar{D}_{12} = U_t D_{12} V_{12} \sigma_{12}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$

- Considérons la décomposition en valeurs singulières de D_{21} :

$$D_{21} = U_{21} \begin{bmatrix} \sigma_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_{21}^T$$

En posant : $V_{21t} = V_{21}^T = \begin{bmatrix} V_{1t} \\ V_{2t} \end{bmatrix}$ et $V_t = \begin{bmatrix} V_{2t} \\ V_{1t} \end{bmatrix}$, on a : $\bar{D}_{21} = \sigma_{21}^{-1} U_{21} D_{21} V_t^T = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$

Annexe 3

Paramétrisation des contrôleurs décentralisés

Tous les contrôleurs décentralisés stabilisants considérés dans [303] :

$$C_d^i \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} \hat{A} - B_2 \hat{F} - \bar{L}_i C_{2i} & \bar{L}_i \\ \hline -\bar{F}_i & 0 \end{array} \right], \quad i=1,2 \quad (\text{A31})$$

sont paramétrés par :

$$Q_d \leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} \bar{A}_F & B_2 \bar{F} & L \\ 0 & \bar{A}_L & \hat{L} - \bar{L} \\ \hline F - \hat{F} & \bar{F} & 0 \end{array} \right] \in \mathcal{H}, \quad (\text{A32})$$

où $\mathcal{H}$ désigne l'ensemble des transferts propres et stables et où les matrices $\bar{A}_F$, $\bar{A}_L$ et $\hat{L}$ sont données par :

$$\begin{aligned} \bar{A}_F &= \hat{A} - B_2 \hat{F} & \bar{A}_L &= \bar{A} - \bar{L} \bar{C} & \hat{F} &= \begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{bmatrix} & \hat{L} &= \begin{bmatrix} L \\ L \end{bmatrix} \\ \bar{A} &= \begin{bmatrix} \hat{A} - B_{22} \bar{F}_2 & B_{22} \bar{F}_2 \\ B_{21} \bar{F}_1 & \hat{A} - B_{21} \bar{F}_1 \end{bmatrix} \\ \bar{L} &= \begin{bmatrix} \bar{L}_1 & 0 \\ 0 & \bar{L}_2 \end{bmatrix} & \bar{F} &= \begin{bmatrix} \bar{F}_1 & 0 \\ 0 & \bar{F}_2 \end{bmatrix} & \bar{C} &= \begin{bmatrix} C_{21} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A33})$$

Selon le type du contrôle, les gains F and L sont fournis par : $F = F_2$, $L = L_2$, et $\hat{A} = A$ dans le cas $\mathcal{H}_2$, ou $F = F_\infty$, $L = L_\infty$, et $\hat{A} = A + \gamma^2 B_1 B_1^T X_\infty$ dans le cas $\mathcal{H}_\infty$.

De plus, le choix suivant pour les gains de retour d'état respectivement dans la synthèse $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$:

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2^1 \\ F_2^2 \end{bmatrix} \quad \hat{F} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_\infty^1 \\ F_\infty^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{A34})$$

n'altère pas la stabilité de la paramétrisation Q_d (A32) qui se réduit à :

$$Q_d \leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} \bar{A}_L & \hat{L} - \bar{L} \\ \hline \bar{F} & 0 \end{array} \right], \quad (\text{A35})$$

Dans (A4), F_2^1 et F_2^2 , respectivement F_∞^1 et F_∞^2 , résultent du partitionnement des gains de retour d'état F_2 et F_∞ du contrôleur centralisé. Ce choix ne remet en question la stabilité du système en boucle fermée.

La détermination des gains $\bar{L}_1$ et $\bar{L}_2$ optimaux des contrôleurs-observateurs (A31) passe par l'optimisation de la paramétrisation Q_d par rapport à ces paramètres. Selon les cas, nous avons :

- cas $\mathcal{H}_2$: Si $\bar{F}$ et $\bar{L}$ sont choisis de manière à ce que $Q_d(s)$ soit optimisée :

$$Q_d^* = \min_{Q_d \in \mathcal{Q}_d} \|Q_d(s)\|_2 \quad (\text{A36})$$

où $\mathcal{Q}_d$ désigne l'ensemble des paramétrisations $Q_d(s)$ stables, décentralisant le contrôleur

centralisé, alors le contrôleur :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A - B_2 \hat{F} - \bar{L}_1 C_{21} & 0 & \bar{L}_1 & 0 \\ 0 & A - B_2 \hat{F} - \bar{L}_2 C_{22} & 0 & \bar{L}_2 \\ \hline -\bar{F}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{F}_2 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (A37)$$

est un contrôleur optimal qui minimise (A₆).

- cas $\mathcal{H}_\infty$: Si $\bar{F}$ et $\bar{L}$ sont choisis tels que la paramétrisation $Q_d(s)$ vérifie $\|Q_d\|_\infty < \gamma$, alors le contrôleur :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \hat{A} - B_2 \hat{F} - \bar{L}_1 C_{21} & 0 & \bar{L}_1 & 0 \\ 0 & \hat{A} - B_2 \hat{F} - \bar{L}_2 C_{22} & 0 & \bar{L}_2 \\ \hline -\bar{F}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{F}_2 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad (A38)$$

où $\hat{A} = A + \gamma^2 B_1 B_1^T X_\infty$, est un contrôleur-observateur sous-optimal et assure :

$$\|T_{wz}^d\|_\infty < \gamma \quad (A39)$$

Références bibliographiques

Références bibliographiques

- [1]: Adegas, Fabiano Daher Stoustrup, Jakob, " $\mathcal{H}_\infty / \mathcal{H}_2$ model reduction through dilated linear matrix inequalities". 7th IFAC Symposium on Robust Control Design. Vol. 7 Elsevier Science. p. 728-733 (I F A C Workshop Series), 2012.
- [2]: Aït Cheikh M.S., Aïss B. Hadj, Malek A., Becherif M., "Mise au point d'une régulation floue pour serre agricole à énergie solaire", Revue des Energies Renouvelables Vol. 13 N°3, 421-443, 2010.
- [3]: Andrey V. Savkin, Ian R. Petersen, "Optimal Stabilization of Linear Systems via Decentralized Output Feedback", IEEE Vol 43, N° 2, 1998.
- [4]: Arvantis K.G., Paraskevopoulos P.N., Vernados A.A., "Multirate adaptative temperature control of greenhouses", Computers and electronics in agriculture, Vol 26, Issue 3, pp 303-320, 2000.
- [5]: Arzelier D., Peaucelle D., "An iterative method for mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ synthesis via static output feedback" In Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, pp. 3464 – 3469, 2002.
- [6]: Asato K., Nagado T., Tamaki S., "Controller Reduction Using Structurally Balanced Truncation Method with New Closed-Loop Structures", In proceeding of: Control & Automation,. Mediterranean Conference, 2007.
- [7]: Bennis N., Duplaix J., Enéa G., Haloua M., Youlal H., "Greenhouse climate modelling and robust control", Computers and electronics in agriculture, 61(2):96-107, 2008
- [8]: Bennis N., Duplaix J., Enéa G., Haloua M., Youlal H., An advanced control of greenhouse climate. In: 33rd International Symposium "Actual Tasks on Agricultural Engineering", 21-25th February, Croatia, pp. 265-277, 2005.
- [9]: Bennis N., Ramzi M., Youlal H., Duplaix J., Enéa G., Haloua M., "Application de la commande $\mathcal{H}_2$ au contrôle climatique d'une serre agricole", SCS04. Sfax, Tunisie, 2004.
- [10]: Bennis N., Ramzi M., Youlal H., Haloua M., "LMI solutions for H-two and H-infinity decentralized controllers applied to an aerothermic process ", J Control Theory Appl 11 (2), 247-254, 2013.
- [11]: Bennis N., Youlal H., Haloua M., "Etude de la faisabilité d'une Commande Robuste Décentralisée", Journées Nationales d'Automatique d'Electronique d'Electrotechnique et de Traitement de Signal, Marrakech, pp 74-77, 1996
- [12]: Bennis N., Youlal H., Haloua M., " An $\mathcal{H}_2$ Decentralized control ", ECC'99 Karlsruhe Germany. Cdrom pp 01-06, 1999.
- [13]: Bennis N., Youlal H., Haloua M., " Une commande $\mathcal{H}_\infty$ décentralisée fiable pour les systèmes multivariables", 6^{ème} Colloque Maghrébin sur les Modèles Numériques de l'Ingénieur (C2MN16), 24-26 Novembre, Tunis, 1998.
- [14]: Bennis N., Youlal H., Haloua M., "Une commande $\mathcal{H}_2$ décentralisée par paramétrisation de contrôleurs", 3^{ème} séminaire sur la commande robuste et ses applications. Nabeul, Tunisie, 1997
- [15]: Bernussou J., Geromel J., Oliveira M., " $\mathcal{H}_2$ Norm Optimization with Constrained Dynamic Output Feedback Controllers : Decentralized and Reliable Control", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 44, pages 1449-1454, 1999.
- [16]: Bernussou J., Peres P., Geromel J., "A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems", *Systems and Control Letters*, 13:65-72, 1989.

- [17]: Beseler J., Chow J. H., Minto K. D., "A feedback descent method for solving constrained LQG control problems", Proc. 1992 ACC, pp. 1044-1048, 1992.
- [18]: Bevrani H., Mitani Y., Tsuji K., "Robust decentralised load-frequency control using an iterative linear matrix inequalities algorithm ", IEE Proceedings - Generation, Transmission and Distribution, Volume 151, Issue 3, May 2004, p. 347 – 354, 2004.
- [19]: Bevrani H., Hiyama T., "PI/PID based multi-objective control design: an ILMI approach", In Proceedings 2005 IEEE Networking, Sensing and Control, pages 750 -755, USA, 2005.
- [20]: Bevrani H., Hiyama T., "Multiobjective PI/PID Control Design Using an Iterative Linear Matrix Inequalities Algorithm", International Journal of Control, Automation, and Systems, vol. 5, no. 2, pp. 117-127, April 2007.
- [21]: Boaventure Cunha J., Couto C., Ruano A.E., " Real-time parameter estimation of dynamic temperature models for greenhouse environmental control ". Control Eng Practice, Vol 5, N° 10, pp 1473-1481, 1997.
- [22]: Bouchouicha M., J. Duplaix , Bouchara F., Lafont F. , Balmat J.F. , Enéa G. "Automatisation d'une serre: Plate-forme expérimentale Multi-applications et Multi-utilisateurs", STA 2002 pp 22-24, 2002.
- [23]: Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V., "Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory", Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM Philadelphia, 1994.
- [24]: Cantoni M., "On model reduction in the v -gap metric", In Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, pages 3665–3670, Florida, USA, December, 2001.
- [25]: Cao Y. Y., Lam J., Sun Y. X., "Static output feedback stabilization: An ILMI approach," Automatica, vol. 34, pp. 1641–1645, 1998.
- [26]: Chadli M., "Stabilité et commande de systèmes décrits par des multi-modèles", Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 2002.
- [27]: Chang W.J., Chang W., Chieh W., " $\mathcal{H}_\infty$ fuzzy control for time-delay affine takagi-sugeno fuzzy models: an ILMI approach ", Journal of the Chinese Institute of Engineers, Vol. 32, No. 4, pp. 501-512, 2009.
- [28]: Chen B.M., Saberi A., Sannuti P., Shamash Y. "Construction and parametrization of all static and dynamic $\mathcal{H}_2$ optimal state feedback solutions, optimal fixed modes and fixed decoupling zeros", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 38, issue n°2, pp. 248-261, February 1993.
- [29]: Chen N., Ikeda M., Gui W., "Design of Robust $\mathcal{H}_\infty$ Control for Interconnected Systems:A Homotopy Method", International Journal of Control, Automation, and Systems, vol. 3, no. 2, pp. 143-151, June 2005.
- [30]: Chen N., Ikeda M., Gui W., "Design of Robust $\mathcal{H}_\infty$ Control for Interconnected Systems:A Homotopy Method", International Journal of Control, Automation, and Systems, vol. 3, no. 2, pp. 143-[151, June 2005.
- [31]: Chilali M., Gahinet P., " $\mathcal{H}_\infty$ design with pole placement constraints: An LMI approach". IEEE Transactions on Automatic Control, 41(3):358-367. 1996.
- [32]: Chouchaine A., Feki E., Mami A., "Stabilization Using a Discrete Fuzzy PDC Control with PID Controllers and Pole Placement: Application to an Experimental Greenhouse", Journal of Control Science and Engineering, Volume 2011, Article ID 537491, 9 pages, 2011.
- [33]: Christopher A. Beattie, Serkan Gugercin, "Krylov-based minimization for optimal $\mathcal{H}_2$ model reduction", Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control, New Orleans, LA, USA, Dec. 12-14, 2007.

- [34]: Claveau F., Thèse , "Contribution à l'analyse et la commande structurée des grands systèmes", Ecole Centrale de Nantes et l'Université de Nantes , décembre 2005.
- [35]: Colmenares W., "Sur la robustesse des systèmes linéaires incertains : approche quadratique, retour de sortie", Thèse de doctorat en Automatique, LAAS, Toulouse, France, 1996.
- [36]: Courties C., "Sur la Commande Robuste et L.P.V. de Systèmes à Paramètres Lentement Variables", Thèse, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, 1999.
- [37]: COURTIES C., BERNUSSOU J., GARCIA G., " $\mathcal{H}_\infty$ Robust Control for Polytopic Uncertain Systems", *IEEE-CESA*, Nabeul-Hammamet, 1998.
- [38]: COURTIES C., BERNUSSOU J., GARCIA G., "LPV control by dynamic output feedback". In *Proceedings of the American Control Conference - ACC'99*, pages 2267-2271, San Diego, Californie, 1999.
- [39]: Cunha J.B., "Greenhouse climate models: An overview", EFITA 2003 Conference, 5-9. July 2003, Debrecen, Hungary, pp823-829, 2003.
- [40]: Date R.A., Chow J.H., "A parametrization approach to optimal $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ decentralized control problems", *Automatica*, 29:457-463, 1993.
- [41]: De Oliveira M.C, Geromel J.C., Bernussou J., "An LMI optimization approach to multiobjective controller design for discrete-time systems", *Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control*, Phoenix, Arizona, pp.3611-3616, 1999.
- [42]: Doyle J., Glover K., Khargonekar P., Francis B., "State space solutions to standard $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ control problems", *American Control Conference (A.C.C.)*, pages 1691-1696, 15-17, Juin 1988.
- [43]: Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P., Francis B.C., "State-space solutions to standard $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ control problems". *IEEE Trans, on Am. Control*, AC-34(8):831-847, 1989.
- [44]: Duplaix J., "Implantation et validation d'une identification en ligne pour une serre agricole", DEA Informatique et Automatique. Université III, Marseille, France, 1991.
- [45]: Echchatbi A., Rizki A., Haddi A., Mrani N., Elalami N., "ILMI Approach for Robust Output Feedback Control of Induction Machine ", *World Academy of Science, Engineering and Technology* 27, 2009.
- [46]: El Ghaoui L., Commeau J.L.. LMITOOL 2.0 package : an interface to solve LMI problems. *E-Letters on Systems, Control and Signal Processing*, No. 125, 1999. Voir la page www.ensta.fr/~gropco/lmi/lmitool.html
- [47]: El Ghaoui L., Gahinet P., "Rank Minimization Under LMI Constraints: A Framework for Output Feedback Problems", *Proceedings of 2nd European Control Conference*, pp. 1176-1179, Groningen, 1993.
- [48]: El Ghaoui L., Oustry F., Ait Rami M., "A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(8):1171-1176, August 1997.
- [49]: Enéa G., "Rapport Interne", Action intégrée N°224/SI/2000, Laboratoire SIS/AI, Université de Toulon France, 2002.
- [50]: Feng Yu , "Commande $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ non standard des systèmes implicites", thèse, Ecole des Mines de Nantes, 2011.
- [51]: Ferreira P.M., Faria E.A., Ruano A.E., "Neural network models in greenhouse air temperature Prediction", *Neurocomputing* 43, pp51-75, 2002.
- [52]: Fransson C.M. Lennarston B., "Low order multicriteria $\mathcal{H}_\infty$ design via bilinear matrix Inequalities". In *proceedings of the 42nd Conference on decision and Control*, Maui, Hawaii, USA, December, 2003.

- [53]: Gahinet P., Apkarian P., "A linear matrix inequality approach to H_∞ control. International Journal of Robust and Nonlinear Control", 4(4):421-48, ISSN 1049-8923. Cited on pages 4, 5, 7, 11, 16, and 17, 1994.
- [54]: Gahinet P., Apkarian P., "A linear matrix inequality approach to $\mathcal{H}_\infty$ control," Int. J. Robust Nonlinear Control, vol. 4, no. 4, pp. 421-448, 1994.
- [55]: Gahinet P., Nemirovski A., Laub A.J., Chilali M., "LMI Control Toolbox for use with Matlab", Mathworks Inc, 1995.
- [56]: Garnier H., Gilson M., « The CONTSID Toolbox for Matlab, Centre de recherche en Automatique de Nancy (CRAN), Nancy-University, www.cran.uhp-nancy.fr/contsid, 2009.
- [57]: Garnier H., Mensler M., "CONTSID : a continuous-time system identification toolbox for Matlab", 5th European Control Conference (ECC'99), Karlsruhe (Germany), September 1999.
- [58]: Gaudin V., "Simulation et commande auto-adaptative d'une serre agricole", Thèse, Université de Nantes, France, 1981.
- [59]: Geromel J. C., Peres P. L. D., Souza S. R., " $\mathcal{H}_2$ guaranteed cost control for uncertain continuous-time linear systems". *Systems and Control Letters*, 19:23-27, 1992.
- [60]: Gildin E., "Model and Controller Reduction of Large-Scale Structures Based on Projection Methods", Dissertation, the university of texas at austin, 2006.
- [61]: Glover K., "All optimal hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L_∞ -error bounds", *Int. J. of Control*, 39(6): 1115 – 1193, 1984.
- [62]: Glover K., Doyle J.C., "State space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an $\mathcal{H}_\infty$ norm bound and relations to risk sensitivity", *Systems and Control Letters*, 11:167-172, North-Holland, 1988.
- [63]: Goh K.C Turan L. Safonov R.E, Papavassilopoulos, Ly J.H., "Biaffine Matrix inequalities and computational methods", American Contr. Conf., pp 850-855, 1994.
- [64]: Gong Z., Aldeen M. , "Stabilization of Decentralized Control Systems, Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control", Birkhäuser-Boston, Vol. 7, No. 1, pp. 1-16, 1997.
- [65]: Grigoriadis K.M., "Optimal $\mathcal{H}_\infty$ model reduction via linear matrix inequalities: continuous and discrete- time cases", *IEEE decision and control*, 3:3074-3079, 1995.
- [66]: Grimstad B., "Studies in static output feedback control", Thesis, Norwegian of Science and Technology, 2009.
- [67]: Groebel M., Allgower F, Storz M., Gilles, E. D., "Nonlinear Control of High Purity Distillation Columns", AIChE Annual Meeting November 13.-18., San Francisco, USA, Nonlinear Control Session, 1994.
- [68]: Guangbin C. , Changhua H., Guangren D., "Efficient LMI-based quadratic stability and stabilization of parameter dependent interval systems with applications", *International Journal of Innovative Computing, Information and Control* Volume 8, Number 3(A), March 2012.
- [69]: Guang-hong Y., Jian L.W., "Decentralized Hinfini controller design for composite systems: linear case", *INT.J.Control*, Vol 72, N° 9, pp 815-825, 1999.
- [70]: Gugercin S. , Antoulas A. C., "A survey of model reduction by balanced truncation and some new results", *International Journal of Control*, vol. 77, iss. 8, pp. 748-766, 2004.
- [71]: Gugercin S., Antoulas A. C., "A comparative study of 7 algorithms for model reduction", In *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2367-2372, Australia, December 2000.

- [72]: Guillermo PITA GIL, "Application de techniques de commande avancées dans le domaine automobile", Thèse de doctorat, Supélec, France, 2011.
- [73]: Haigen Hu, Lihong Xu, Bingkun Zhu, Ruihua Wei, "A Compatible Control Algorithm for Greenhouse Environment Control Based on MOCC Strategy", *Sensors* 2011, 11, 3281-3302, 2011.
- [74]: Haigen Hu, Lihong Xu, Ruihua Wei, Bingkun Zhu, "Multi-Objective Control Optimization for Greenhouse Environment Using Evolutionary Algorithms", *Sensors* 2011, 11, 5792-5807, 2011.
- [75]: Haloua M., "Contribution à la commande décentralisée et mise en œuvre pratique sur des procédés industriels", Thèse d'état, Faculté des Sciences de Rabat, 1993.
- [76]: Haloua M., "Applications des régulateurs auto-ajustables à la commande adaptative d'une colonne à distiller", Thèse de 3^e Cycle, Faculté des Sciences de Rabat, 1987.
- [77]: Hassibi A., How J., Boyd S., "A path-following method for solving BMI problems in control", In Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, Arizona, 1999.
- [78]: He Y., Wang Q.G., "An improved ILMI method for static output feedback control with application to multivariable PID control", *IEEE Trans. on Automatic Control*, 51(10), p. 1678-1683, 2006.
- [79]: He Y., Wang Q.G., "An improved ILMI method for static output feedback control with application to multivariable PID control", *IEEE Trans. Automatic Control* 51, October 10, pp 1678-1683, 2006.
- [80]: Helmerson A., "Model reduction from an $\mathcal{H}_\infty$ /perspective", Proceedings of the 3th ECC, pp. 2181-2186, 1995.
- [81]: Helmerson A., "Model reduction using LMIs", In proceedings of the 33th Conference on Decision and Control, vol 4, pp. 3217-3222, December 1994.
- [82]: Hoang Bao LE, "Contribution aux méthodes de synthèse de correcteurs d'ordres réduits sous contraintes de robustesse et aux méthodes de réduction de modèles pour la synthèse robuste en boucle fermée", Thèse, Laboratoire de Conception et d'Intégration des Systèmes, INP Grenoble, France, 2010.
- [83]: Ikeda M., Zhai G, Jisaki Y., "Robust Decentralized $\mathcal{H}_\infty$ Control of Large-Scale Systems -A Matrix Inequality Approach", IFAC International Workshop on Robust Control, 1996.
- [84]: Ikeda M., Zhai G., Fujisaka Y., "Decentralized $\mathcal{H}_\infty$ controller design for large-scale systems: A matrix inequality approach using a homotopy method", In proceedings of the 35th Conference on Decision and Control, pp. 1-6, Kobe, Japan, December 1996.
- [85]: Iwasaki T., Skelton R. E., "All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas", *Automatica*, Volume 30 Issue 8, pp 1307 - 1317 Aug. 1994.
- [86]: Kabbaj N., Ramzi M., Dahhou B., Youlal H., Enéa G., "Fault detection and isolation in a greenhouse using parity relations", ETFA 2003, 9th IEEE International Conference on Emerging Technologies and Factory Automation, Calouste Gulbenkian Foundation (Ed.), Lisbon, Portugal, Septembre, pp. 16-19, 2003.
- [87]: Kanno M., " $\mathcal{H}_2$ Model Reduction Using LMIs", 44th IEEE Conference 12-15 Dec, p.p 5887-5892, 2005.
- [88]: Karimi, Alireza, Sadabadi, Mahdih, "Fixed-order Controller Design for State Space Polytopic Systems by Convex Optimization", Proceedings of the IFAC Joint Conference Grenoble, France, February 4-6, 2013.
- [89]: Karl O. J., Wilfried H., "Distillation column control using genetic algorithms for LQR design, Proceedings of the International Conference on Computer Systems and Technologies and Workshop for PhD Students in Computing, June 2009.

- [90]: Kacim Mohamed, "Analyse et commande décentralisées des «systèmes complexes. Application au réseau d'énergie O.N.E » ", Doctorat d'Etat en Science, EMI, Rabat (Maroc), 1996.
- [91-a]: Kavranoglu D., Bettayeb M., , "Performance evaluation of a new H_∞ norm model reduction scheme", Proceeding of the 33nd CDC, San Antonio, Texas, December,1993.
- [91-b]: Kavranoglu, D., M. Bettayeb, "LMI-Based computational schemes for $\mathcal{H}_\infty$ model reduction", IFAC 13th Triennial Word congress, pp. 191-196,1996.
- [92]: Khansah H., "Sur la commande de systèmes non linéaires par gains robustes Séquencés", Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du CNRS, Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2007.
- [93]: Kin Cheong Sou, Anders Rantzer, "Controller Reduction with Closed Loop Performance Guarantee", 49th IEEE Conference on Decision and Control December 15-17, Atlanta, GA, USA, 2010.
- [94]: Kin Cheong Sou, Anders Rantzer, Controller reduction via minimum rank matrix approximation, Automatica 48, 1069–1076, 2012.
- [95]: Labibi B., Marquez H. J., Chen T., "Decentralized Robust PI Controller Design for an Industrial Utility Boiler", Journal of Process Control, 19, 216–230, 2009.
- [96]: Lafont F., Balmat J.F., "Modélisation floue itérative d'une serre agricole " Rencontres Francophones sur la logique floue et ses applications", Mons, Belgique, pp 281-288, 2001.
- [97]: Lafont F., Balmat J.F., "Optimized fuzzy control of a greenhouse", Fuzzy Sets and systems, pp 47-59, 2002.
- [98]: Landau, I. *"Identification et commande des procédés"*. Edition Hermes. Deuxième édition, 1993.
- [99]: Levine J., Rouchon P., Quality control of binary distillation columns via nonlinear aggregated models, Automatica, Vol 27, N° 3, pp 463-480, 1991.
- [100]: Linhart A., "An aggregation model reduction method for one-dimensional distributed systems", PhD Thesis, Norwegian University of Science and Technology Faculty of Science and Technology Department of Chemical Engineering, September 8, 2009.
- [101]: Ljung L., *"System Identification - Theory for the user"*. Prentice Hall, 1986.
- [102]: Mashonjowa E., Ronsse F., Milford J.R., Pieters J.G., "Modelling the thermal performance of a naturally ventilated greenhouse in Zimbabwe using a dynamic greenhouse climate model Solar Energy", 91, 381–393, 2013.
- [103]: Mattei M., "A note on the solution of class of BMIs for $\mathcal{H}_\infty$ problems", In proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 2746-2747. Sydneya, 2000.
- [104]: Megretski A., "H-infinity model reduction with guaranteed suboptimality bound", In Proceedings of the 2006 American Control Conference, pages 448–453, Minnesota, USA, June 2006
- [105]: Mehendale C.S., Grigoriadis K.M., "A homotopy method for decentralized control design", In proceedings of the American Control Conference, pp. 5023-5027, Denver, Colorado, June 4-6, 2003.
- [106]: Meshksar S., Jenabali M., Dehzangi O., Jahromi A.J., "Nonlinear Control of Distillation Column using Feedback Linearization", MIC '07 Proceedings of the 26th IASTED International Conference on Modelling, Identification, and Control, 2007.
- [107]: Mihalache S., Popescu M., "Application for testing control configurations of binary distillation columns", MIC '07 Proceedings of the 26th IASTED International Conference on Modelling, Identification, and Control, 2007.
- [108]: Moore B. C., "Principal component analysis in linear systems : Controllability, observability and model reduction", IEEE Transactions on Automatic Control, 26(2) : 17–31, February 1981.

- [109]: Nabil A., Costas K., Brice C., "A Partially Decentralized State Observer and Its Parallel Computer Implementation", *Ind Eng Chem. Res.*, 37, 2742-2760, 1999.
- [110]: Nachidi M., Benzaouia A., Tadeo F., "Temperature and humidity control in greenhouses using the Takagi-Sugeno fuzzy model", *Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Control Applications Munich, Germany, October 4-6, 2006.*
- [111]: Najim K., Youlal H., Najim M., Dahhou B., Haloua M., Ben Ayad R., "Modélisation et commande adaptative à placement de pôles d'une colonne à distiller", *R.A.I.R.O APII*, Vol N°23, pp 263-282, 1989.
- [112]: Nielsen B., Madsen H., "Identification of transfer functions for control of greenhouse air temperature", *Journal of Agricultural Engineering Research*, Vol60, Issue1, pp25-34, 1995.
- [113]: Packard A., Zhou K., Pandey P., Becker G., "A collection of robust control problems leading to LMI's", In *Proc. IEEE Conf. Decision&Contr*, pp 1245-1250, Brighton, England, December 1991.
- [114]: Pasgianos G.D., Arvanitis K.D., Polycarpou P., Sigrimis N., "A nonlinear feedback technique for greenhouse environmental control", *Computers and Electronics in Agriculture* 00, Article in press, pp1-25, 2003.
- [115]: Piñón S., Camacho E.F., Kuchen B., Peña M., "Constrained predictive control of a greenhouse", *Computers and Electronics in Agriculture* 49, 317-329, 2005.
- [116]: Pipeleers, G., Demeulenaere, B., Swevers, J., and Vandenberghe, L., "Extended LMI characterizations for stability and performance of linear systems", *Systems & Control Letters*, 58, 510-518, 2009.
- [117]: Ramzi M., "Contribution à la conception et la réalisation d'un logiciel de supervision et algorithmes de commande robuste", *Thèse de 3° Cycle, Faculté des sciences de Rabat*, 1996.
- [118]: Ramzi M., "Contribution à l'identification par sous-espace et la commande prédictive des systèmes multivariables", *Thèse d'état, Faculté des sciences de Rabat, (à paraître)* 2014.
- [119]: Ramzi M., Bennis N., Haloua M., Youlal H., "Decentralized pi-d controller applied to an aerothermic process", *international journal on smart sensing and intelligent systems*, VOL. 5, NO. 4, December 2012.
- [120]: Razzaghi K., Shahraki F., "A Survey for the Selection of Control Structure for Distillation Columns Based on Steady State Controllability Indexes", *Iranian Journal of Chemical Engineering*, Vol. 6, No. 2 (Spring), IACHE, 2009.
- [121]: Rehm A. Allgöwer F., "Hinfinty control of descriptor systems : an application from binary distillation control", *International Symposium on advanced control of chemical processes*, CDR0M, 11-14 Jan 2004, Hong-Gong, 2004.
- [122]: Rehm A. Allgöwer F., "A Linear Matrix Inequality Approach towards $\mathcal{H}_\infty$ Control of Descriptor Systems ", *Proceedings of the 7th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED99) Haifa, Israel, June 28-30, 1999.*
- [123]: Rehm A., "A General Quadratic Performance Approach to Binary Distillation Control", *7th IFAC International Symposium on Advanced Control of Chemical Processes 2009, Istanbul, Turkey, 12-15 July 2009.*
- [124]: Rouchon P., "Simulation dynamique et commande non linéaire des colonnes à distiller", *Thèse, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris*, 1990.
- [125]: Safonov M.G., Goh K.C., Ly J.H., "Control system synthesis via bilinear matrix inequalities", *Proceedings of ACC, Baltimore, Maryland*, pp. 45-49, 1994.
- [126]: Safonov M.G., Goh K.C., Ly J.H., "Control system synthesis via bilinear Matrix inequalities", *American Contr. Conf.*, pp 45-49, 1994.

- [127]: Sandberg H, "Hankel-norm-based lumping of interconnected linear systems", in Proceedings of MATHMOD 2009, Vienna, Austria, 2009.
- [128]: Sandberg H. Murray R.M., "Model reduction of interconnected linear systems". Optim. Control Appl. Meth., 2007.
- [129]: Sandberg H., Murray R.M., "Model Reduction of Interconnected Linear Systems Using Structured Gramians", Proceedings of the 17th IFAC World Congress, 2008.
- [130]: Satak N., Seetharama B., "Modified ILMI algorithm for practical PID/PD implementation on a micro air vehicle", Proceeding ACC'09 Proceedings of the 2009 conference on American Control Conference Pages 4660-4665, 2009.
- [131]: SCHERER C., GAHINET P., CHILALI M., "Multiobjective Output-feedback Control via LMI Optimization", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 22, N° 7, pages 896-911, 1997.
- [132]: Scorletti G., "Approche unifiée de l'analyse et de la commande des systèmes par formulation LMI", Thèse de doctorat, Université Paris XI Orsay, 1997.
- [133]: Skogestad S., "Dynamics and Control of Distillation Columns - A Critical Survey, Modelling, Identification, and Control", 1997, Vol. 18, No. 3, pp. 177-217, 1997.
- [134]: Sootla A., "Nu-gap Model Reduction in the Frequency Domain", American Control Conference on O'Farrell Street, San Francisco, CA, USA, June 29 - July 01, 2011.
- [135]: The MathWorks, Inc. LMI CONTROL TOOLBOX for MATLAB, Release 1.0.4, 1997. www.mathworks.com. Voir le site pour des éventuelles récentes versions.
- [136]: Van Henten E.J., Bontsema J., "Time-scale decomposition of an optimal control problem in greenhouse climate management", Control Engineering Practice 17, 88– 96, 2009.
- [137]: Vandendorpe A., "Model Reduction of Linear Systems, an Interpolation point of View", Thèse, Université Catholique De Louvain Faculté des sciences appliquées Département d'ingénierie mathématique Center for Systems Engineering and Applied Mechanics, 2004.
- [138]: Wang G., Sreeram V., Liu W.Q., "Balanced performance preserving controller reduction", Systems & Control Letters 46, 99 – 110, 2002.
- [139]: Whorton M.S., Buschek H., Calise A.J., "Homothopy algorithms for fixed order $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ design", In Proceedings of AIAA Guidance Navigation and Control Conference, 1994.
- [140]: Xiang J., Wei W., H. SU, " An ILMI approach to robust static output feedback sliding mode control", International Journal of Control Vol. 79, No. 8, August 2006, 959–967, 2006.
- [141]: Xin X., "A Unified LMI Approach to Reduced-Order Controllers: A Matrix Pencil Perspective", Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control Maui, Hawaii USA, December 2003.
- [142]: Yagoubi M., "On multiobjective synthesis for parameter-dependent descriptor systems", IET Control Theory & Applications, 4(5):817{826, May 2010.
- [143]: Yoshio Ebihara, Tomomichi Hagiwara, "On Model Reduction Using LMI's", Proceeding of the 2004 American Control Conference, Boston, Massachusetts June 30 - July 2, 2004.
- [144]: Youlal H., Kada A., Haloua M., Majdoul A., Ramzi M., "Multilayered neural networks for identification and control of multivariable distillation process", 3rd IEEE Conference on Control Application, Glasgow, Scotland, U.K, 1994.
- [145]: Zames, G., "Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses", IEEE Trans. Aut. Control, AC-16. 301, 1981.
- [146]: Zerar M., "Contribution à la caractérisation LPV d'une classe de systèmes non linéaires par la synthèse de lois de commande robuste Application à un système spatial ", Thèse doctorale, Université Bordeaux I, 2006.

- [147]: Zhai G, Chen N., Gui W., "Decentralized design of interconnected feedback control systems with quantized signals", Int. J. Appl. Math. Comput. Sci, Vol. 23, No. 2, 317–325, 2013.
- [148]: Zhai G, Yasuda K., Ikeda M., "Decentralized Quadratic Stabilization of Large-Scale Systems", Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control, 2337-2339, 1994.
- [149]: Zhai G., Ikeda M., Fujisaki Y., "Decentralized $\mathcal{H}_\infty$ controller design: a matrix inequality approach using homotopy method". Automatica, vol. 37, pp. 565-572, 2001.
- [150]: Zhai G., Murao M., Koyama N., Yoshida Y., "Low order H_∞ controller design: An LMI approach ", European Control Conference, 2003.
- [151]: Zhou K., Doyle J., et Glover K., "Robust and optimal control". Prentice Hall, New Jersey. 1996.
- [152]: Zhou K., Doyle J.C, "Essentials of Robust Control", Prentice-Hal, 1998.

Abstract

Summary of the thesis: "Contribution to centralized and decentralized $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$ robust control and optimal reduction of models using the linear matrix inequalities"

The purpose of this thesis concerns the problem of the $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$ robust control and the optimal model reduction via linear matrix inequalities (LMIs) and their applications to three complex and different processes profiles. Our contribution focuses on three parts. The first one is an expanded synthesis of the solutions of $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ optimization problems using a LMIs approach dealing with three types of controllers, namely, static feedback controller, dynamic output feedback controller, and static output feedback controller. The second part in this thesis deals with the optimal model reduction problems. A reduced order model is formulated as an $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ optimization problem using LMIs tools. Our objective is to clarify the proposed methodologies and to provide further insight on algorithmic issues for their implementation. The last part in this dissertation concerns the application aspect. Three controlled processes are considered: in the first one we focus on binary distillation column control, in the second one we deal with the control of the microclimate of an experimental agricultural greenhouse, and in the last one we report on the real-time application of $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ decentralized controllers to an aerothermic experimental process. The outcome of the results shows that robust approaches are worth to consider.

Keywords: Robust control, $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$ synthesis, LMI/BMI, Model reduction, Applications.

Résumé

Ce mémoire de thèse concerne le problème de la commande robuste $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ et la réduction optimale de modèle par les Inégalités Matricielles Linéaires (LMIs) et leurs applications à des procédés de nature et de complexité diverse. Notre contribution porte sur trois volets. Le premier est une synthèse élargie des solutions aux problèmes d'optimisation de type $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ par les LMIs traitant les trois types de commande optimale, à savoir, la commande par retour d'état statique, par retour de sortie dynamique et par retour de sortie statique. L'autre volet dans ce travail est réservé au problème de la réduction optimale de modèle par LMIs. Le problème de la recherche d'un modèle d'ordre réduit est formulé comme un problème d'optimisation de type $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$. Notre objectif est de clarifier les méthodologies pour leur mise en œuvre, en apportant un éclairage sur l'aspect algorithmique pour la résolution numérique. Le volet applicatif concerne les simulations de commande et de rejet de perturbations d'une colonne binaire de distillation et le contrôle du micro climat d'une serre agricole expérimentale, et l'application temps réel des contrôleurs décentralisés de type $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ sur un procédé aérothermique expérimental. L'ensemble des résultats plaide pour les approches robustes.

Mots clés : Commande robuste, Synthèse $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$, LMI/BMI, Réduction de modèle, Applications.

Résumé

Ce mémoire de thèse concerne le problème de la commande robuste $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ et la réduction optimale de modèle par les Inégalités Matricielles Linéaires (LMIs) et leurs applications à des procédés de nature et de complexité diverse. Notre contribution porte sur trois volets. Le premier est une synthèse élargie des solutions aux problèmes d'optimisation de type $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ par les LMIs traitant les trois types de commande optimale, à savoir, la commande par retour d'état statique, par retour de sortie dynamique et par retour de sortie statique. L'autre volet dans ce travail est réservé au problème de la réduction optimale de modèle par LMIs. Le problème de la recherche d'un modèle d'ordre réduit est formulé comme un problème d'optimisation de type $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$. Notre objectif est de clarifier les méthodologies pour leur mise en œuvre, en apportant un éclairage sur l'aspect algorithmique pour la résolution numérique. Le volet applicatif concerne les simulations de commande et de rejet de perturbations d'une colonne binaire de distillation et le contrôle du micro climat d'une serre agricole expérimentale, et l'application temps réel des contrôleurs décentralisés de type $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ sur un procédé aérothermique expérimental. L'ensemble des résultats plaide pour les approches robustes.

Mots clés : Commande robuste, Synthèse $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$, LMI/BMI, Réduction de modèle, Applications.