جامعة سيدي محمد بن عبد الله بفاس
UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH DE FES

كلية العلوم والتقنيات فاس
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE FÈS

N° d'ordre : 62/2022

Centre des Etudes Doctorales : Sciences et Techniques et Sciences Médicales
Formation Doctorale : Sciences de l'Ingénieur, Sciences Physiques, Mathématiques et Informatique
Discipline : Informatique
Spécialité : Informatique
Laboratoire : Laboratoire des Technologies Innovantes

Thèse pour l'obtention de DOCTORAT

Formalisation Mathématique de la Méthode Traditionnelle Tastir du Tracé des Motifs Géométriques Maroco-Andalous

Préparée par : Mr. Zouhair OUAZENE

Soutenue le samedi 15 octobre 2022 devant le jury :

Nom et Prénom	Grade	Etablissement	Qualité
Hamid TAIRI	PES	Faculté des Sciences Dhar El Mehraz de Fès	Président
M'hamed AIT KBIR	PES	Faculté des Sciences et Techniques de Tanger	Rapporteur
Mohammed RZIZA	PES	Faculté des Sciences de Rabat	Rapporteur
Arsalane ZARGHILI	PES	Faculté des Sciences et Techniques de Fès	Rapporteur
Ahlame BEGDOURI	PES	Faculté des Sciences et Techniques de Fès	Examinateur
Aziza EL OUAZIZI	PES	Faculté Polydisciplinaire de Taza	Examinateur
Rachid BENSLIMANE	PES	Ecole Supérieure de Technologie de Fès	Directeur de thèse

DEDICACE

Je dédie ce travail :

A mes chers parents. Je les remercie vivement de leurs encouragements et de leur soutien indéfectible.

A mon frère et à ma sœur. Je leur souhaite beaucoup de succès dans leur vie.

A ma chère épouse en guise de reconnaissance pour tous ses sacrifices et son soutien moral.

A mes chers enfants. Qu'ils trouvent ici l'expression la plus aboutie de mon amour !

A toute la famille OUAZENE, IDRISSI ELYAGOUBI et KARROUM

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier vivement mon directeur de thèse, Professeur Rachid BENSLIMANE pour la qualité de son encadrement, ses orientations et ses conseils largement prodigués. Je ne le remercierais jamais assez. Sa posture, ses idées et sa disponibilité m'ont été d'un grand secours lors de la réalisation de ce travail.

Je voudrais aussi remercier les membres de l'honorable jury d'avoir accepté de lire et d'évaluer le présent travail, et ce malgré les contraintes pédagogiques et scientifiques liées à la fin de l'année universitaire.

Mes remerciements vont aussi à tous mes amis qui ont participé, de loin ou de près, à la concrétisation de ce projet, soit par leurs idées, soit par leurs encouragements.

RESUME

L'art géométrique est omniprésent dans le monde islamique. On rencontre cet art dans les mosquées, les madrasas, les palais et même dans les maisons privées. Dans le contexte maroco-andalous, la production de cet art remonte à très loin et l'une de ses premières techniques de conception est celle dite « *Tastir* ».

Cette thèse se focalise sur cette technique traditionnelle *Tastir*, héritée de génération en génération. Mais, de nos jours, cette technique, ancrée dans l'Histoire, est en passe de disparaitre. D'où notre idée de dédier cette thèse à l'analyse à la conception et à l'automatisation de cette technique. L'objectif est de générer des motifs ornementaux périodiques et quasi- périodiques en prenant appui sur des algorithmes que nous avons déduits en utilisant les deux concepts de géométrie et de symétrie. En effet, l'art maroco-andalous, en fait usage des règles de la symétrie et se servant de *Tastir*, a la particularité de générer des rosaces d'ordres élevés.

La première contribution de ce travail consiste à automatiser la construction de ces rosaces en formulant mathématiquement leurs principales caractéristiques.

Cette formalisation est utilisée dans une seconde contribution pour la génération des motifs périodiques. La méthode proposée est évaluée en reconstruisant des motifs périodiques historiques.

Finalement, une adaptation de cette méthode a été appliquée dans une troisième contribution à la génération des motifs quasi périodiques.

Mots-clés : Art géométrique Islamique, *Tastir*, Groupes de symétries, Tesselles, Ornement géométrique, Pavages périodiques, Pavages quasi-périodiques, Etoile, Rosace.

ABSTRACT

Geometric art is omnipresent in the Islamic world. It can be found in mosques, madrasas, palaces and even in private homes. In the Moroccan-Andalusian context, the production of this art goes back goes back to ancient history and one of its first design techniques is the so-called "Tastir".

This thesis focuses on this traditional Tastir technique, inherited from generation to generation. But, nowadays, this technique, rooted in history, is about to disappear. Hence our idea is to dedicate this thesis to the analysis, design and automation of this technique. The objective is to generate periodic and quasi-periodic ornamental patterns based on algorithms that we have deduced using the two concepts of geometry and symmetry. Indeed, the Moroccan-Andalusian art, using the rules of symmetry and using Tastir, has the particularity to generate rosettes of high orders.

The first contribution of this work consists in automating the construction of these rosettes by mathematically formulating their main characteristics.

This formalization is used in a second contribution for the generation of periodic patterns. The proposed method is evaluated by reconstructing historical periodic patterns.

Finally, an adaptation of this method has been applied in a third contribution to the generation of quasi-periodic patterns.

Keywords: Islamic geometric art, CAD, *Tastir*, Symmetry groups, Tiles, Geometric ornament, Periodic tiling, Quasi-periodic tiling, Star, Rosette.

TABLE DES MATIERES

DEDICACE ii
REMERCIEMENTS iii
RESUME iv
ABSTRACT v
LISTE DES FIGURES x
LISTE DES TABLEAUX xv
INTRODUCTION GENERALE 16
Approche et motivation 18
Problématique de la recherche 20
Contributions scientifiques 21
Organisation de la thèse 22
CHAPITRE 1: L'ART GEOMETRIQUE MAROC-ANDALOUS 25
1. Introduction 25
2. Évolution de l'art ornemental marocain 26
2.1 Art almoravide (XIe siècle) 26
2.2 Art almohade (12e siècle) 27
2.3 Art des Mérinides, des Saadiens et des Alaouites (du 13e au 20e siècle) 28
1. Introduction 31
2. Contexte géologique 33
3. Technique de fabrication de zellige 35
3.1 Première phase de fabrication de zellige 37
3.2 Deuxième phase de fabrication de zellige 45
4. Conclusion 47
CHAPITRE 2: CONCEPTS MATHEMATIQUES DE BASE 48
1. Introduction 48
2. La Symétrie 48
2.1 Transformation 49
2.2 Transformation linéaire 49
2.3 Isométrie 49

2.4 Rotation par rapport à l'origine 50
2.5 Translation 51
2.6 Coordonnées homogènes 51
2.7 Rotation par rapport à un point quelconque 52
2.8 Réflexion (miroir) par rapport à une ligne 53
3. Groupes de symétrie des motifs ornementaux 54
3.1 Modèles finis (0-D) 55
3.2 Les Frises 58
3.1 Papiers peints 61
3.2 La répétition autour d'un point 65
4. Concept de pavage du plan 66
4.1 Pavage périodique 67
4.2 Pavage apériodique 70
5. Conclusion 72
CHAPITRE 3: METHODES CLASSIQUES DE CONCEPTION DES ORNEMENTS GEOMETRIQUES ISLAMIQUES 74
1. Introduction 74
2. Aperçu sur les travaux réalisés 75
3. Les méthodes historiques de construction des motifs 77
3.1 La méthode polygonale 77
3.2 La méthode de jonctions de points 78
3.1 La méthode l'Hasba 79
4. Méthode basée sur le squelette représentant un pavage périodique 81
5. Conclusion 86
CHAPITRE 4: LA GEOMETRIE DES MOTIFS CONSTRUITS PAR LA TECHNIQUE TRADITIONNELLE '*TASTIR'* 87
1. Introduction 87
2. Le tracé géométrique ou '*Tastir'* 87
3. Description et formalisation de la méthode *Tastir* 88
3.1 Grille sous-jacente d'une rosace à huit 88
3.2 Construction de la grille sous-jacente 89

3.3 Conceptualisation de la méthode pour un motif de rosace à 8 90
3.4 Automatisation de la méthode pour un motif de rosace à 8 94
3.5 Génération d'autres motifs 95
4. Tesselles dérivés du Khatam Slimani 96
5. Conclusion 101
CHAPITRE 5: CONCEPTION ASSISTEE PAR ORDINATEUR DE ROSACES D'ORDRES MULTIPLES DE 16 UTILISANT LA METHODE TRADITIONNELLE *TASTIR* 103
1. Introduction 103
2. Analyse géométrique des rosaces 104
2.1 Introduction 104
2.2 Types de rosaces à 16 109
3. Analyse du tracé d'un motif avec rosace 16 111
3.1 Calcul de paramètres 112
3.2 Calcule de rayon intérieur de "Khatem Slimani" 113
3.3 Calculer le rayon extérieur de "Khatem Slimani" 116
3.4 Calcul des rayons de l'étoile à 16 et de la rosace à 16 117
4. Méthode proposée pour automatiser le tracé de la rosace à 16 119
4.1 Construction de la rosace 119
4.2 Construction de motif 123
5. Construction des grandes rosaces 127
6. Conclusion 133
CHAPITRE 6: Génération des motifs quasi-périodiques 134
1. Introduction 134
2. Processus de construction des motifs islamiques quasi-périodiques 134
3. Principe de construction des rosaces ornant les pavés quasi périodiques 137
4. Exemples de motif quasi périodiques 142
4.1 Pavage octogonal utilisant des rosaces maroco-andalouses 142
4.2 Motifs quasi périodiques à pavage décagonal 145
4.3 Motifs quasi périodiques à pavage dodécagonal 147
CONCLUSION GENERALE 149

Références bibliographiques..... 151

LISTE DES FIGURES

Figure 0-1: Exemple de grille obtenue par la technique *Tastir* donnant lieu à un ornement géométrique 21
Figure 1-1: Détail du minbar almoravide 27
Figure 1-2: Tour Hassan - Rabat 27
Figure 1-3 : Madrasa Attarine - Fès 29
Figure 1-4 : Plafond Mosquée Al-Qarawiyyin (Fès) 30
Figure 1-5: Fontaine Nejjarine (Fès) 30
Figure 1-6: Fontaine à la mosquée Hassan II à la fin du vingtième siècle 31
Figure 1-7: Vue panoramique du site potier Benjliq (Fès, Maroc) 33
Figure 1-8: carte géotechnique de la zone Benjliq (Extrait de la carte du Maroc au 1/20.000, feuille de Fès, service géologique du Maroc, 1967) 34
Figure 1-9: Gisement d'argile actuel dans la carrière de Benjliq à Fès 35
Figure 1-10: Meqlaa : endroit d'où l'argile est extraite, se situant à quelques kilomètres de la ville de Fès en direction de Sidi Hrazem 37
Figure 1-11: Touba : blocs d'argile concassés à l'aide d'un marteau en blocs plus petits pouvant peser de 3 à 5 kilos 38
Figure 1-12: l'argile est plongée dans la zouba au bout de 24h d'immersion le ajjan ou mélangeur descend dans la zouba pour malaxer la terre 39
Figure 1-13: Agena : pâte sortie de la fosse puis égouttée pendant quelques jours 39
Figure 1-14: Remplissage à la main du moule avec l'argile 40
Figure 1-15: Les tuiles carrées en terre crue lors du séchage en plein air 40
Figure 1-16: Tuiles aplatis par l'artisan 41
Figure 1-17: Coupure des bords de la tuile par le maalem 'qattaa' (coupeur) à l'aide d'une spatule métallique 41
Figure 1-18: Carreaux séchés prêts pour une première cuisson 42
Figure 1-19: illustre l'émaillage à l'aide d'un tonneau en plastique 43
Figure 1-20: illustre le placement des tuiles dans le four 44
Figure 1-21: illustre tuiles après la sortie de four 44
Figure 1-22: l'artisan marqueur trace le contour d'une tesselle sur une tuile de forme carrée 45
Figure 1-23: l'artisan découpe des morceaux de zellige s, la pièce à découper est soutenue par une petite pièce de marbre afin qu'elle ne se brise pas 46
Figure 2-1: Réflexion avec glissement 50
Figure 2-2: Rotation d'angle β sur les deux points (1, 0) et (0, 1) du plan euclidien 50
Figure 2-3: Symétrie axiale 54
Figure 2-4: une calligraphie présentant une symétrie translationnelle 56
Figure 2-5: Motif coufique ayant le groupe C4 (4) - Les deux panneaux citent Muhammad 56

Figure 2-6: Exemple de Tawriq, Mosquée Hassan 2-Casablanca 57
Figure 2-7: exemple de décor de Zellige andalou 58
Figure 2-8: Algorithme pour la détermination des 7 groupes de frise..... 60
Figure 2-9: P11 : Le groupe engendré par une translation 60
Figure 2-10: P1g : Le groupe engendré par la réflexion glissée. La composée de cette réflexion glissée avec elle-même redonne la translation 60
Figure 2-11: P1m : Le groupe engendré par la translation et la réflexion..... 61
Figure 2-12: Pm1 : Le groupe engendré par la translation et une réflexion orthogonale à la direction de la frise 61
Figure 2-13: P12 : Le groupe engendré par la translation et un demi-tour 61
Figure 2-14:Pmg : Le groupe est engendré par une réflexion orthogonale dans la direction de la frise et une réflexion glissée 61
Figure 2-15: Pmm : Le groupe engendré par la translation, une réflexion orthogonale dans la direction de la frise, et la réflexion. La composée des deux réflexions donne un demi-tour 61
Figure 2-16: Algorithme de D.Crowe pour la détermination des 17 groupes cristallographiques du plan..... 63
Figure 2-17: Exemple de symétrie p4m 64
Figure 2-18: Exemple de symétrie p6m 65
Figure 2-19: Exemple de motif à symétrie autour d'un point 66
Figure 2-20: Exemple de pavage du plan 67
Figure 2-21: Exemples de décors obtenus par partitions régulières utilisant respectivement le carré et l'hexagone 67
Figure 2-22: pavage semi-régulier ou pavage archimédiens..... 68
Figure 2-23: Les 21 Configurations pour construire des pavages..... 69
Figure 2-24: Pavage semi -régulier avec K variable 70
Figure 2-25: Premier type de motif de Penrose en 3 couleurs 71
Figure 2-26: pavage de Penrose..... 72
Figure 3-1 : Construction d'un motif avec une étoile à 8 en utilisant la méthode de jonctions de points..... 79
Figure 3-2: processus de construction de la grille sous-jacente reproduit de (Thalal et al., 2011)..... 80
Figure 3-3: Construction du motif sur la grille sous-jacente reproduit de (Thalal et al., 2011)..... 80
Figure 3-4: Construction d'un autre motif en se basant sur la même grille h = 16 reproduit de (Thalal et al., 2011). 81
Figure 3-5: Disposition du Saft entre deux étoiles 82
Figure 3-6: Quart du squelette..... 82
Figure 3-7: quart du squelette orné de l'intérieur par d'autres tesselles..... 83
Figure 3-8: Squelette complet de la rosace..... 83
Figure 3-9: Extraction du carré..... 84

Figure 3-10: rotation 16 fois par rapport au centre 84
Figure 3-11: Principe de construction étoile à 16 et ces tesselles 85
Figure 3-12: Etoile à 16 et ses tesselles 85
Figure 3-13: Etoile à 16 et ses pièces intérieures 86
Figure 4-1 : Cadre de taille L=n*q 88
Figure 4-2 : (a) Motif et grille sous-jacente, (b) Khatem Slimani 89
Figure 4-3 : (a) grille sous-jacente, (b) motif rosace à 8 branches 89
Figure 4-4 : (a) motif de base rosace à 8, (b) motif fondamentale, (c) grille sous-jacente sous le motif fondamentale 90
Figure 4-5 : Différents cercles utilisés pour construire le motif fondamental 91
Figure 4-6 : Points qui caractérisent l'étoile et la rosace 94
Figure 4-7: Construction de rosace à 8 94
Figure 4-8 : Plusieurs motifs développés à partir de la même grille 95
Figure 4-9 : Motif fondamentale et ses tesselles constitutives 96
Figure 4-10 : L'apparition d'un petit carré et des petits triangles dans l'étoile à 8 96
Figure 4-11 : Exemple pour montrer circonférence et surface 97
Figure 4-12 : Relation entre étoile à 8 et losange 98
Figure 4-13 : Autre relations entre les tesselles 98
Figure 4-14 : Etoile à 8 et quelques tesselles extraites 99
Figure 5-1 : Exemple de rosaces géométriques. (a) rosace d'ordre 8, (b) rosace d'ordre (12), (c) rosace d'ordre 16 (d) , rosace d'ordre 24 106
Figure 5-2 : Deux exemples d'arrangement spatial des rosaces 107
Figure 5-3 : Exemple de rosace synthétique et sa nomenclature selon (Lee & Soliman, 2014) 108
Figure 5-4 : Rosace à 16 pétales avec ses 3 composantes : (a) Rosace à 16, (b) étoile à 16, (c) Louza Stachria, (d) Saft Stachri 109
Figure 5-5 : a- Rosace à seize avec une simple extension, b- Rosace à seize avec une double extension 110
Figure 5-6 : Ornements avec rosaces à seize pétales : (a) Alhambra-Grenade, (b) Alcazar-Séville, (c) Mausole My-Driss – Fez 110
Figure 5-7: Ornement contient une rosace à 16: (a) motif répétitif, (b) tracé géométrique de motif répétitif de (a) 112
Figure 5-8: motif de base et sa grille: (a) motif de base, (b) grille sous-jacente du motif de base 112
Figure 5-9 : calcul du rayon intérieur de Khatem Slimani 113
Figure 5-10: deuxième rayon utiliser pour construire la grille sous-jacent 116
Figure 5-11 : Troisième et quatrième rayon utiliser pour construire la grille sous-jacente 117
Figure 5-12 : Motif contenant une rosace à 16 avec ses paramètres de construction (Rsi, Rse, Rs16, Rr16, q) 119

Figure 5-13 : déterminations des points caractéristique de rosace à 16 et dessin de demi pétale 121
Figure 5-14 : Application de reflet miroir pour obtenir le pétale plein 121
Figure 5-15 : Application des symétries de rotation successives 122
Figure 5-16 : Application successivement une symétrie miroir verticale et horizontale pour construire la rosace 122
Figure 5-17 : périodique ornement illustre la méthode proposée 126
Figure 5-18 : Déterminations des points caractéristique de rosace à 32 et dessin de demi pétale 128
Figure 5-19 : application de reflet miroir pour obtenir le pétale plein 129
Figure 5-20 : Application des symétries de rotation successives 129
Figure 5-21 : Application successivement une symétrie miroir verticale et horizontale pour construire la rosace 130
Figure 5-22 : Application de reflet miroir pour obtenir le pétale plein 131
Figure 5-23 : Application des symétries de rotation successives 132
Figure 5-24 : Application successivement une symétrie miroir verticale et horizontale pour construire la rosace 132
Figure 5-25 : Relation entre rosaces 133
Figure 7-1 : Pavage octogonal construit par un carré et un losange d'angle $\pi/4$ 135
Figure 7-2: Pavage décagonal construit par deux losanges d'angles $2\pi/5$ et $2\pi/5$ respectivement. 135
Figure 7-3: Pavage dodécagonal construit par deux losanges et un carré. 136
Figure 7-4: les pavés utilisés dans les deux pavages ci-dessus, le carré est divisé en 8 triangles rectangles identiques et les losanges sont divisés en 4 triangles rectangles identiques. 136
Figure 7-5: Génération d'une division avec les paramètres de la rosace 138
Figure 7-6: application des symétries aux contenus des deux triangles pour obtenir les tuiles. 139
Figure 7-7: Insertion des contenus des tuiles dans le pavage 140
Figure 7-8: Motif quasi périodique avec rosace $N=8,\theta=\varphi=\pi/8,R>AB,s=3$) 141
Figure 7-9: Triangle divisé en deux triangles rectangles identiques. Donc le carré est divisé en 16 triangles rectangles identiques. 141
Figure 7-10: motifs octogonaux adapté à la méthode 142
Figure 7-11: Le motif extrait en éliminant le pavage 142
Figure 7-12: motif octogonal avec une rosette principale d'ordre 16, une rosette à 8 pointes placée sur les côtés des deux triangles rectangles et une étoile à 8 pointes placée sur le sommet libre du triangle rectangle du carré. 143
Figure 7-13: Le motif extrait en éliminant le pavage. 143
Figure 7-14: motifs octogonaux adapté à la méthode deux rosaces à 16. 144
Figure 7-15: Le motif extrait en éliminant le pavage. 144
Figure 7-16: motif quasi-périodique décagonal 145

Figure 7-17: Le motif extrait en éliminant le pavage 145
Figure 7-18: Motif quasi-périodique décagonal 146
Figure 7-19: Le motif extrait en éliminant le pavage 146
Figure 7-20: (a) Le panneau de la Madrasa Attarine (Fès, Maroc), (b) les tuiles décorées correspondants, (c) l'arrangement dodécagonal des tuiles décorées. 147

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 4.1 : Tesselles extraites à partir de l'étoile à 8..... 101
Tableau 5.1 : Paramètres essentiels à l'automatisation de la rosace à 16 pétales..... 119

INTRODUCTION GENERALE

L'art géométrique islamique est au cœur des préoccupations académiques de nombre de scientifiques. Sa complexité requiert des approches variées et interdisciplinaires. Beaucoup de contributions se sont intéressées à cet art, et ce en cherchant à décrypter ses spécificités et le secret de ses ornements. Mais, depuis les années vingt du siècle dernier, la recherche s'est orientée vers les méthodes génératives d'anciens et de nouveaux ornements en recourant à des modèles inspirés des différentes études réalisées par les premiers chercheurs.

Certes les méthodes d'analyse de l'art géométrique islamique sont nombreuses, mais il est possible de les répartir en deux catégories :

La première catégorie comprend des méthodes centrées sur l'analyse des méthodes et procédés ancestraux de construction. Figurent dans cette catégorie les méthodes suivantes :

- La méthode de tracé régulateur Paccard : il s'agit d'un réseau régulier de lignes considérées comme base de conception d'un ornement de zellige.
- La méthode *Hasba* utilisée notamment par les maîtres artisans travaillant le bois.
- La méthode de Castéra qui a décrit une technique de construction de motifs géométriques marocains en partant d'un squelette obtenu par la combinaison des étoiles à huit pointes et des hexagones appelés *Saft. Cette méthode permet la construction d'un type particulier d'ornements dit Bendrissiya.*

Quant à la seconde catégorie, elle repose sur une approche d'analyse mathématique et numérique. Les concepts principaux de cette deuxième catégorie sont, de manière globale, la symétrie et le pavage. Parmi les méthodes inhérentes à cette seconde catégorie, nous citons :

- Les méthodes d'analyse qui permettent de décrire un ornement géométrique périodique, en utilisant la théorie des groupes de symétries du plan. L'ornement est ainsi représenté par une région fondamentale, partie répétitive de l'ornement, et une série d'isométries du plan qui définit le groupe de symétrie de l'ornement.
- Les méthodes de pavage consistent à paver le plan de manières périodique ou apériodique. Il convient de préciser que les méthodes de pavage périodique dites également méthodes polygonales, s'appuient au préalable sur un pavage du plan, suivi par un habillage de ses pavés par des motifs. Ces derniers sont, de manière générale, soit des étoiles, soit des rosaces. Contrairement au pavage périodique, les méthodes de pavage apériodiques, reposant sur un pavage non périodique du plan, utilisent deux à trois pavés.

Cette thèse se fixe comme objectif de mettre en évidence une nouvelle approche d'analyse, de conception des ornements géométriques islamiques et d'automatisation de la méthode traditionnelle, connu par le nom *Tastir*.

Pour pallier la complexité qui marque la compréhension des grilles réalisées par le biais de la méthode susmentionnée, nous utiliserons deux principes mathématiques, à savoir la symétrie et la géométrie.

Les résultats escomptés, à partir de ce travail, consistent, d'une part, à faire ressortir les relations entre la symétrie, la géométrie et les ornements. Concrètement, il s'agira d'abord d'automatiser la construction des rosaces pour ensuite les utiliser pour la génération des motifs géométrique périodiques et apériodiques.

Approche et motivation

De manière générale, on peut classer les motifs géométriques islamiques en deux grandes catégories. D'une part, on a les motifs périodiques et d'autre part les motifs quasi-périodiques. On trouve ces deux types de motifs dans l'univers islamique. Ces motifs se caractérisent par des rendus, généralement décorés au moyen d'entrelacement et de coloration. Afin de les appréhender et de les saisir, selon une approche mathématique, il est indispensable de trouver une abstraction de ces rendus sur lesquels les différentes techniques de décoration seront appliquées. Ainsi est- il important de mettre de côté les informations relatives au niveau chromatique et à l'entrelacement pour parvenir à ce que Grünbaum et al. (Grünbaum et al., 1986) nomment Design pattern. Ce dernier est un dessin constitué de segments de droites. On doit noter également que les motifs de l'art géométrique islamique recèlent un mystère mathématique. La majorité des techniques de conception originales ont disparu au fil des siècles. Par conséquent, le chercheur est tenu d'explorer l'esprit des anciens artisans et des mathématiciens, en étudiant les patrons qu'ils ont légués. Par exemple, les motifs périodiques ont été analysés, à travers l'usage de la théorie des groupes de symétries. Cette analyse est susceptible de fournir des indications utiles sur leur structure, comme le soulignent (Abas et al., 1994; Abas & Salman, 1992; Grünbaum et al., 1986; Jowers et al., 2010; Wichmann, 2008). D'après

(Kaplan & Salesin, 2004). Ces analyses ne réussissent pas à saisir les détails importants qui font la beauté de ces motifs. En effet, les groupes de symétrie ne peuvent saisir, dans le plan, que la structure mathématique du dessin.

L'analyse nous amène à élaborer notre propre approche et compréhension de l'art géométrique islamique. A partir de cette compréhension, nous pouvons automatiser le processus de conception des ornements géométriques en concevant des modèles mathématiques et des algorithmes capables de reproduire d'anciens comme de nouveaux motifs périodiques.

La création des motifs ornementaux par les artisans marocains repose sur la technique de *Tastir*. Cette dernière utilise des symétries selon des règles mathématiques bien précises. Ce savoir-faire ancestral est légué d'une génération à l'autre d'une façon orale au travers des cadres sociaux et corporatiste. L'absence d'un corpus d'enseignement moderne et la limitation de la formation à des groupes restreint a provoqué le dépérissement progressif de cet art voire parfois la disparition de certain de ses formes. Notre ambition est de focaliser ce travail sur la méthode *Tastir* dans une logique de revalorisation, de réhabilitation d'un héritage ancestral qui fait partie de notre personnalité culturelle et du patrimoine universel en général. Cette contribution répond aussi à un souci de vulgarisation et de popularisation au profit des scientifiques et des artisans. Cela passe par un effort de formalisation et de standardisation de ce savoir-faire et un échange d'expertise entre les milieux académique et universitaire et les artisans. Cela est à même de stimuler la créativité et l'inventivité des artisans et ce par la conception de motif inédits.

Problématique de la recherche

L'art en terre d'Islam a interpellé nombre de chercheurs occidentaux qui ont grandement contribué à l'étude de cet art. Certes les études menées par ces derniers ont été d'une grande valeur, mais ce n'est que dernièrement qu'il est possible d'en donner un traitement mathématique rigoureux, grâce aux apports mathématiques et informatiques. C'est ce qui explique, dans une large mesure, l'intérêt que plusieurs scientifiques portent aux multiples méthodes d'analyse et de synthèse des motifs géométriques.

Il est vrai que les technologies informatiques ont aidé à la création de l'ornement géométrique, mais les chercheurs et les designers se limitent à reproduire, selon des procédés variés, les motifs existants. Cette reproduction n'est pas toujours satisfaisante dans la mesure où elle génère une déformation de quelques motifs. Ces mêmes outils peuvent servir à la production rapide des décors et ornements géométriques, surtout s'ils sont automatisés.

L'art décoratif mauresque est marqué par la prédominance des motifs de symétries qui ont été l'objet d'un engouement en Occident musulman notamment au Maroc et à Al Andalous. Ses figures ornementales de base se déclinent en plusieurs formes construites à partir d'une composante centrale appelée rosace. Dans l'état actuel, cette automatisation est à son stade de balbutiements.

La figure 0.1 ci-dessus, extraite de livre de khalid Saib, illustre la complexité de construction de la grille sous-jacente à la création de l'ornement et par suite la difficulté de son automatisation si des règles précises de construction ne sont pas élaborées.

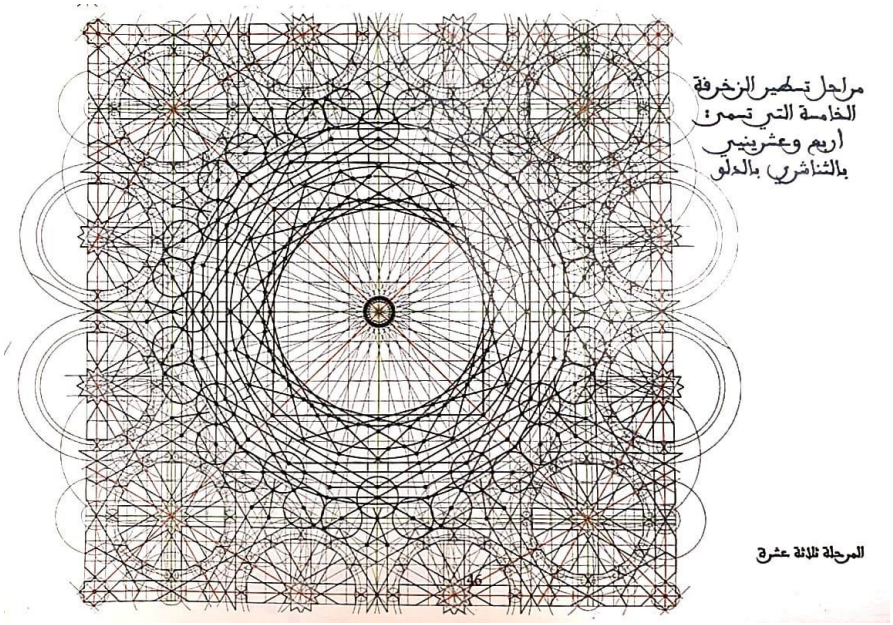


Figure 0-1: Exemple de grille obtenue par la technique *Tastir* donnant lieu à un ornement géométrique

En partant de ce contexte, notre travail de recherche s'assigne comme objectif d'étudier et d'analyser les potentialités données par les outils mathématiques et technologiques modernes à même de modéliser l'art géométrique maroco-andalou et d'assurer par conséquent son évolution.

Plus précisément, cela impose de mettre au point des modèles mathématiques pour conceptualiser la technique traditionnelle *Tastir*.

Contributions scientifiques

Cette thèse se focalise sur une exploration des opportunités offertes par les outils mathématiques dans la création d'ornements géométriques. Ces outils peuvent être appliqués à l'analyse et la génération de motifs géométriques ornementaux. En effet, ce travail vise à analyser des motifs géométriques en vue d'élaborer, par la suite, des

algorithmes pour la conception des ornements géométriques de l'art décoratif maroco-andalous.

Les principales contributions de ce travail sont les suivantes :

Articles:

- Zouhair Ouazene, Rachid Benslimane, Aziz Khamjane. CAD geometry for the traditional Tastir style Moroccan and Andalusian 16-fold rosaces. Symmetry: Culture and Science Volume 33, Number 1, pages 055-068(2022). https://doi.org/10.26830/symmetry_2022_1_055
- Zouhair Ouazene, Rachid Benslimane, Aziz Khamjane. RELATIONSHIP BTWEEN EIGHT-FOLD STAR AND OTHER TILES IN TRADITIONAL MTHOD 'TASTIR'". in the ICATH'21. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-94188-8_33
- Khamjane, A., Ouazene, Z., & Benslimane, R. Method of Construction of Decagonal Self-Similar Patterns. Nexus Netw J 22, 507–520 (2020). https://link.springer.com/article/10.1007/s00004-019-00461-4

Communications:

- Khamjane, A., Taime, A., Ouazene, Z., & Benslimane, R. (2019). Computer Graphics for Generating Islamic Geometric Periodic and Quasi-Periodic Patterns. International Conference on Intelligent Systems and Advanced Computing Sciences (ISACS). https://ieeexplore.ieee.org/document/9068879

Organisation de la thèse

Le premier chapitre de cette thèse sera réservé à une étude historique, à travers laquelle nous présenterons les différentes évolutions qui ont concerné la construction des motifs de l'art géométrique au Maroc et en Andalousie, puis on analysera le processus de fabrication de zellige : nous y présenterons le contexte géographique de gisement *Benjliq*, puis les techniques de fabrication de zellige. Dans le deuxième chapitre, nous exposerons

les concepts mathématiques sur lesquels se basent les méthodes proposées. Il s'agit, en l'occurrence, de la géométrie et de du concept de symétrie.

Le troisième chapitre se focalisera sur une étude méthodologique qui permet de présenter les différentes méthodes de construction des motifs de l'art géométrique islamique. Cette étude nous amènera à comprendre la riche diversité des motifs géométriques islamiques et à nous familiariser avec les compétences techniques nécessaires à la création des motifs nouveaux et originaux.

Dans le quatrième chapitre, nous présenterons et définirons la technique traditionnelle *Tastir* utilisée à ce jour au Maroc par les maitres artisans. Cette dernière, régie par des règles strictes, permet d'obtenir plusieurs motifs à partir de la même grille. La notion de symétrie est présente dans le processus de construction des motifs. Ces derniers sont sous-tendus par des grilles caractérisées par une unité de mesure appelée *lqsma*. Celle-ci nous donne la taille de tesselles. La conceptualisation de la méthode pour la rosace à 8 nous permet, d'une part, d'automatiser le processus de construction et, d'autre part, nous donne la possibilité d'extraire des relations entre les différentes tesselles.

Dans le cinquième chapitre de ce travail, nous procéderons, d'abord, à l'analyse de l'information géométrique, du contenu des motifs géométriques marocains et dégagerons les caractéristiques des rosaces. Puis, nous étudierons la technique *Tastir* pour définir mathématiquement les paramètres de la grille sous-jacente utilisée pour construire la rosace à seize. Ensuite, nous utiliserons les paramètres précédents pour proposer une méthode automatique de construction de rosace. La puissance de la méthode proposée est la construction automatique d'une rosace à travers quatre points clés définis à partir des

paramètres calculés. Finalement, nous procéderons à la généralisation de la construction des rosaces d'ordres multiples de 16.

Dans le sixième chapitre, nous présenterons la méthode de construction des motifs quasi-périodiques de types : octogonal, décagonal et dodécagonal.

Enfin, nous terminerons ce manuscrit par une conclusion et la proposition de quelques perspectives de recherche pour couvrir l'art géométrique Maroco-Andalous.

CHAPITRE 1: L'ART GEOMETRIQUE MAROC-ANDALOUS

I. APERÇU HISTORIQUE

1. Introduction

Il est indéniable que l'art géométrique remonte, historiquement parlant, à des temps immémoriaux. Les recherches anthropologiques, spéléologiques et historiques attestent que l'Homme a toujours procédé, depuis l'âge préhistorique, à l'ornementation des objets dont il se servait et à la décoration des grottes, des cottages et les demeures où il habitait.

L'art géométrique a toujours évolué, cela prouve que cet art millénaire allait de pair avec le grand essor scientifique et culturel de l'humanité. Si on prend l'exemple de la culture islamique, il est aisé de constater que l'art géométrique est omniprésent. En effet, les mosquées, les mausolées, les écoles traditionnelles, les palais et les maisons des anciennes médinas regorgent de motifs géométriques. Du point de vue historique, cette pratique trouve son ancrage dans le huitième siècle. Certes, depuis l'avènement de l'Islam, les artisans ont puisé des motifs de décoration dans des sphères culturelles différentes, en l'occurrence perses et romaines. Toutefois, ces artisans ont amélioré les procédés et les techniques de la décoration, et ce dans l'objectif de donner lieu à des formes artistiques inédites. Force est de souligner que cette pratique artisanale a perduré, sous le règne de plusieurs dynasties, avant de connaitre son apogée au quatorzième siècle. Le recours des artisans à l'abstraction s'explique par le désir de faire de la décoration le lieu où s'exprime

la spiritualité, et c'à travers des motifs dont la symbolique est éminemment religieux. Ainsi, au lieu d'imiter aveuglément les techniques empruntées aux Romains et Byzantins,

2. Évolution de l'art ornemental marocain

Depuis le XIe siècle, trois thèmes caractérisent l'art ornemental marocain (Rosser-Owen, 2016). Ils apparaissent d'abord à Fès sous l'impulsion de l'art " classique " des Omeyyades de Cordoue ; il s'étend à toutes les grandes villes sous la domination des Almoravides et des Almohades du Maghreb et de l'Andalousie musulmane (Pérez, 2018). Ces thèmes sont désignés comme le *Tastir* ou art de la ligne et donc géométrique, le *Tawriq* qui signifie l'art de la feuille ou art floral et enfin l'art du *Khatt* utilisant la lettre arabe comme ornement dans la calligraphie (J. M. Castera, 1999; Paccard, 1980).

2.1 Art almoravide (XIe siècle)

Les artisans almoravides du XIe siècle se plaisaient dans un décor floral couvrant et envahissant figure 1.1. Ils aimaient la multiplicité des détails et préféraient l'abondance facile au choix.

Un décor végétal sculpté peut être observé sur le Minbar de la mosquée Kutubiyya. Les décors géométriques ne sont pas suffisamment développés pendant la période almoravide. Quelques formes géométriques comme les hexagones et les étoiles octuples sont peintes sur du plâtre blanc ou sculptées sur du bois ou du bronze (Bourgoin, 2012). Le rouge-brun, le rouge-orange, le bleu, le bleu-gris et le noir obtenu à partir de pigments inorganiques étaient les couleurs les plus utilisées.



Figure 1-1: Détail du minbar almoravide

2.2 Art almohade (12e siècle)

Les premiers monuments almohades révèlent un art nouveau (Buresi, 2008) figure 1.2.



Figure 1-2: Tour Hassan - Rabat

La profusion de l'ornement végétal, qui s'exprimait de manière hégémonique dans les grands ensembles décoratifs almoravides, laisse place à la rigueur de l'entrelacs géométrique. Dans les intérieurs, ils évitent la polychromie. Dans la mosquée de Tinmel, premier monument almohade (1153), le décor est modelé dans un stuc rose qui adoucit la lumière et colore les ombres (Terrasse, 1955).

Les façades des bâtiments sont décorées de motifs géométriques simples et abstraits. Le

concept de zellige (mosaïques fines) est timidement apparu dans l'art almohade. Les artisans utilisaient des zelliges permettant une polychromie brillante sur le ton chaud du minaret. Une large bande de zellige turquoise apparaît en dehors de la façade, dans des formes décoratives plus petites.

2.3 Art des Mérinides, des Saadiens et des Alaouites (du 13e au 20e siècle)

Le treizième siècle et la première moitié du quatorzième siècle ont été l'âge d'or de l'art marocain. Les souverains mérinides de cette époque ont donné au Maroc plusieurs de ses plus beaux monuments. Les madrasas (écoles) fleurissaient partout dans les villes, véritables chefs-d'œuvre d'architecture où abondent la sculpture et l'ornementation. L'intérieur est décoré d'arabesques géométriques et florales et de calligraphies. Les Muqarnas (stalactites), motifs tridimensionnels, ornent les voûtes et la coupole à l'intérieur. Les zelliges étaient surmontés de sculptures sur plâtre ou marbre et de bois sculptés (figure 1.3).

Les artisans mérinides reviennent à la décoration florale des almoravides mais restreignent le répertoire de ses formes dont le modelé et les mouvements sont moins élaborés. En revanche, ils développent l'ornement géométrique en le portant à son apogée. Ils construisent de grandes rosaces polychromes à symétrie 8-, 10-, 12-, 16- 20-et 48- et à motifs cristallographiques planaires (Fili, 2000). Cette riche ornementation n'était pas exclusive aux madrasas, elle était également utilisée dans la décoration des palais, des mausolées, des fontaines publiques, des bains et des riches demeures.

Même après la décadence de la dynastie au XVe siècle, la tradition architecturale

mérinide survit sous les Saadiens (XVIe-XVIIe) et les Alaouites (XVIIe, jusqu'à aujourd'hui).



Figure 1-3 : Madrasa Attarine - Fès

A l'époque Saadienne, l'ouverture du Maroc sur le reste du monde a permis au royaume de recevoir des influences de l'Europe, ou encore de l'art de l'Afrique subsaharienne et d'en faire la synthèse. L'art Saadienne est un composite où se mêlent et se confondent la tradition almohade, l'héritage mérinide et les influences ottomanes (figure 1.4).

L'ornementation tend à remplir tout le champ à décorer et est plus chargée en formes et en couleurs. Presque toutes les surfaces sont richement décorées avec les plus beaux motifs floraux et géométriques. Les ornements géométriques ont été largement utilisés avec un rendu complexe et abondamment coloré. Des motifs très complexes avec de grandes rosaces, telles que des rosaces d'ordre 8, 12,16 et 24 ont été réalisées (figure 1.5).



Figure 1-4 : Plafond Mosquée Al-Qarawiyyin (Fès)



Figure 1-5: Fontaine Nejjarine (Fès)

Après la chute de la dynastie Saadienne, l'art ornemental marocain a connu une stagnation notable jusqu'au XIXe siècle. Mais sous l'impulsion de la dynastie Alaouite, les arts mérinide et Saadiens ont connu un nouveau souffle grâce à la rénovation des édifices religieux et des palais. De plus, l'ébauche d'un nouveau style est apparue dans la construction du motif géométrique ainsi que dans le support matériel, comme le montre

la mosquée Hassan II construite en 1988 (figure 1.6).

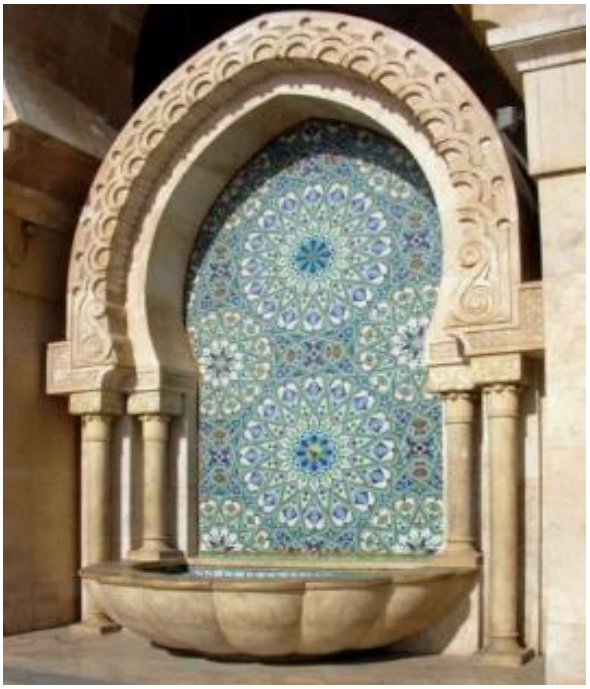


Figure 1-6: Fontaine à la mosquée Hassan II à la fin du vingtième siècle

II. PROCESSUS DE FABRICATION DES TESSELLES DE ZELLIGE

1. Introduction

Le zellige (carreaux de faïence) a pris son essor vers le XI siècle. C'est sous la dynastie marinides (1269-1465) qu'il atteint son apogée, comme l'attestent les monuments de l'époque, notamment la Médersa Attarine, chef d'œuvre des Mérinides. D'après des auteurs, l'histoire de zellige remonte aux Byzantins. Par exemple,(Paccard, 1980) formule l'hypothèse que le zellige est issu *'de mosaïque faite de pierre colorées et de smalt'* ; Le Zellige est omniprésent dans l'architecture marocaine. Cela s'explique par le fait que l'argile ne coute pas très cher et que les artisans marocains justifient, à travers l'histoire, d'un savoir-faire artisanal attesté. Même dans la décoration de nos jours, on l'utilise car

il s'adapte facilement aux formes artistiques contemporaines. En effet, le zellige est largement utilisé aussi bien dans les mosquées, les monuments historiques et les maisons marocaines.

Les panneaux de zellige s sont des mosaïques composées de petites tuiles de céramique émaillée. Ces tuiles sont découpées à l'aide d'un marteau spécial, sous plusieurs formes (carré, étoile, losange, …) à partir des carreaux de zellige. La disposition des tuiles se réalise sur la base de règles géométriques (J. M. Castera, 1999; J. M. Castera & Jolis, 1992). Pour produire du zellige, on utilise une argile grise, provenant des galeries relevant de la région de Fez.

Il convient de souligner que le travail du zellige présente certaines difficultés. En effet l'artisan se heurte à deux problèmes majeurs. Il s'agit concrètement de :

- La découpe de la céramique par les moyens traditionnels provoque des pertes considérables de la matière.
- L'exploitation excessive et démesurée risque de provoquer, dans un futur proche, l'épuisement des galeries d'argile grise.

Après avoir donné un aperçu général sur l'origine du zellige, sur la matière première utilisée et les contraintes qui pèsent sur le travail artisanal, nous consacrerons ce chapitre à la présentation du processus relatif à la construction de zellige.

Nos visites dans les lieux d'extraction de l'argile (zone Benjliq endroit d'où l'argile est extraite, se situant à quelques kilomètres de la ville de Fès en direction de Sidi Hrazem) et dans les usines de fabrication nous ont permis de voir et de comprendre les différentes étapes du processus de fabrication de zellige.

Pour assurer la bonne qualité de zellige, il est important de prêter une attention particulière aux paramètres suivants :

- Choisir la bonne argile.
- Veiller à la préparation des mélanges, au pressage, à l'émaillage et à la cuisson.

Etant l'importance et les particularités du Zellige de Fès, nous exposerons, dans ce qui suit, le contexte géologique de son argile et ses techniques de fabrication.

2. Contexte géologique

Géographiquement, la ville de Fès est située au nord-est du Maroc, plus exactement dans la partie orientale du bassin de Sais.

La région de Sais est entourée au Nord par les montagnes du Rif et au Sud par celles du moyen Atlas. La partie qui recèle le plus grand gisement de l'argile se trouve dans la partie sud-est de la ville de Fès comme le montre la (figure 1.7).



Figure 1-7: Vue panoramique du site potier Benjliq (Fès, Maroc)

Sur le plan géologique, le gisement se caractérise par des roches sédimentaires d'âges Trias à Quaternaire. On y trouve un socle Paléozoïque majoritairement constitué de schistes, marnes, quartzites et calcaires (Achiou et al., 2016). Il est à noter que les affleurements des carrières de ce gisement sont Miopliocènes et quaternaires (figure 1.8).

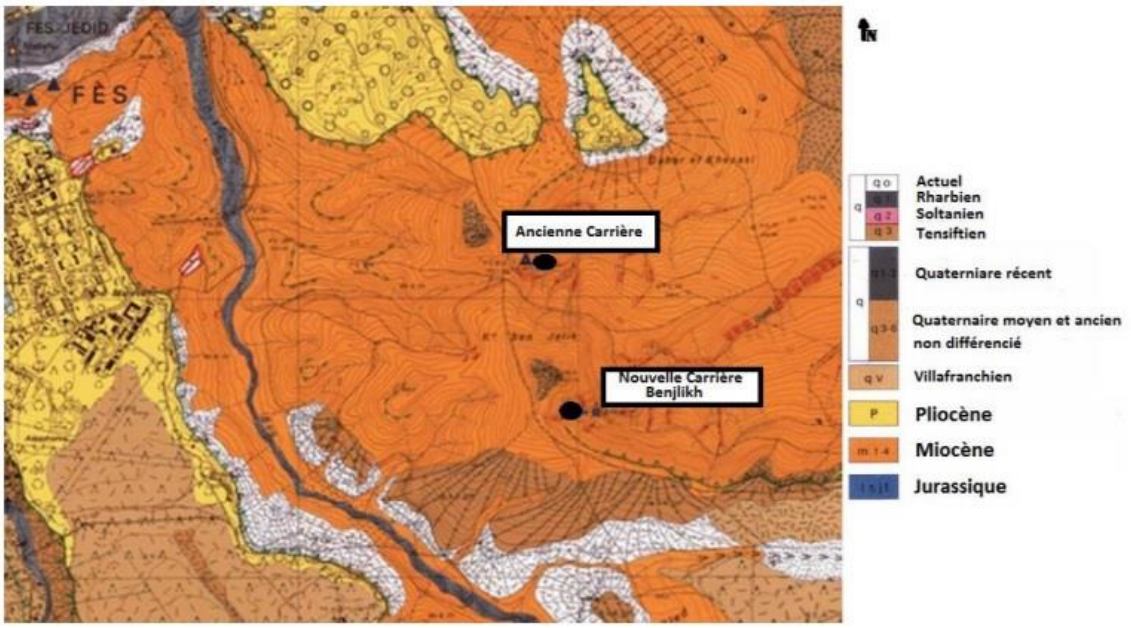


Figure 1-8: carte géotechnique de la zone Benjliq (Extrait de la carte du Maroc au 1/20.000, feuille de Fès, service géologique du Maroc, 1967)

Les argiles utilisées dans la fabrication traditionnelle et locale du Zellige proviennent d'un gisement qui remonte à l'âge Miocène supérieur (figure 1.9). Les artisans de la poterie utilisent un mélange d'argile lisse, appelée *Lmless*, extraite de la partie supérieure du gisement et d'argile rugueuse, qualifiée de *Lhrech*, extraite de la partie inférieure du gisement en question. Soulignons qu'uniquement l'argile lisse favorise l'obtention de pièces solides et valable à la fin de la cuisson.

Concernant les pièces produites à partir de l'argile rugueuse, elles ont l'inconvénient de se briser facilement au toucher. C'est pourquoi, il est impératif de mélanger les deux types d'argiles pour avoir de bons résultats.

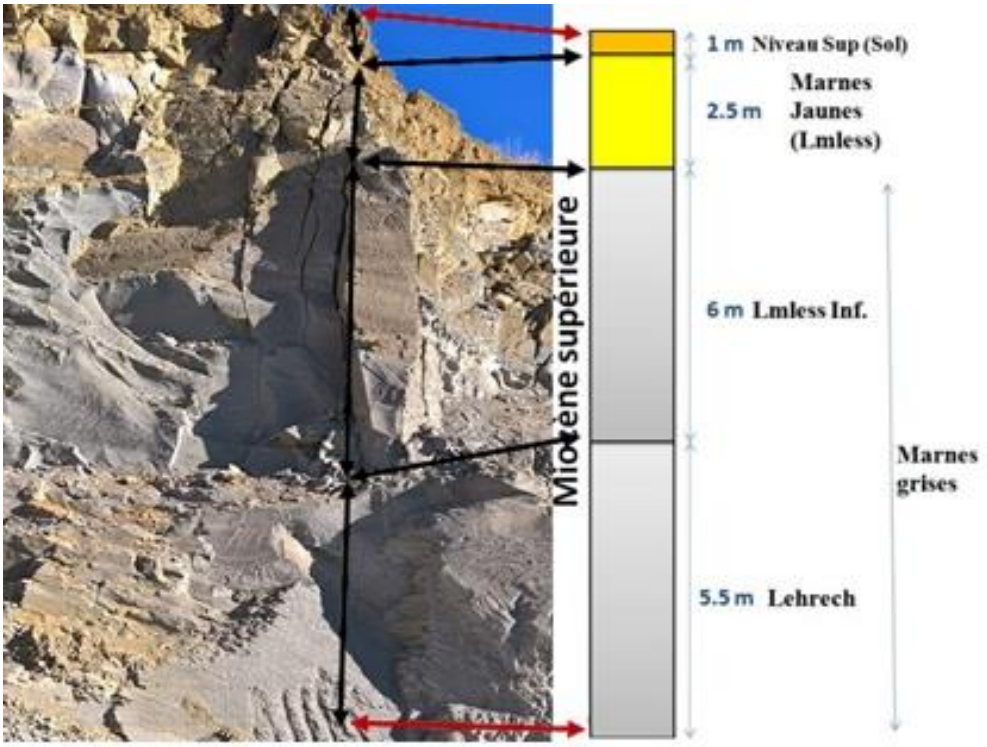


Figure 1-9: Gisement d'argile actuel dans la carrière de Benjliq à Fès

3. Technique de fabrication de zellige

Le gisement de Benjliq fournit l'argile calcaire. Après extraction, celle-ci est, d'abord, déposée dans des bassins aquatiques dans l'objectif de décanter cette argile et la faire débarrasser des mélanges et des impuretés par un malaxeur confirmé. L'opération de la décantation prend au minimum 24 heures. Elle permet, ainsi, de doter l'argile d'une consistance suffisante et surtout homogène. Ensuite, le mélange est dégagé du bassin et

exposé à l'air libre pour le faire sécher comme l'attestent les potiers que nous avons interrogés, et ce en fonction du climat de la région.

Après ces deux phases, les artisans travaillent le mélange asséché de manière à réaliser des carreaux de 11,5 cm x 11,5 cm en se servant d'un gabarit en bois de cèdre d'une épaisseur de 2 cm. Ces carreaux sont, à leur tour, exposés au soleil durant plusieurs jours. Une fois raffermis, les carreaux ne subissent pas de déformation au moment de leur transport et de leur utilisation. L'artisan avant de procéder au découpage des carreaux de 10 cm x 10 cm, il les sélectionne, les lisse et les aplatit en utilisant un maillet en bois et une planche. En vue de raboter les aspérités, l'artisan fait appel à une baguette en bois et à une lame

Après ce travail de découpage, les carreaux sont encore une fois exposés au soleil. L'objectif est de les sécher complètement, avant de les mettre, dans un four traditionnel, les carreaux étant refroidis après leur évacuation du four, l'artisan applique de la glaçure, préparée antérieurement en mélangeant du plomb, du sable et de l'oxyde colorant. En outre, la surface de chaque carreau est mise dans une bassine contenant le mélange précité. Il convient de souligner que cette étape nécessite beaucoup de délicatesse et de doigté. En effet, l'artisan prend toutes les précautions pour éviter que le revers du carreau contienne de l'émail, car celui- ci peut engendrer l'adhérence des carreaux les uns aux autres au niveau de la cuisson. A l'issue de l'émaillage, les carreaux seront réintroduits dans le four pour une dernière cuisson. A ce niveau, comme le four ne se ferme pas totalement, la cuisson est réalisée en condition oxydante.

Après toutes les phases susmentionnées, les artisans découpent des carreaux en mosaïque de zellige selon les formes souhaitées ou selon les commandes reçues. On peut diviser le

processus de fabrication de zellige en deux phases, dont chacune se compose de plusieurs étapes.

3.1 Première phase de fabrication de zellige

La 1ère phase d'une longue tradition artisanale de fabrication d'objets en céramique se compose des étapes suivantes :

Étape 1 *:*

Trouver une argile de bonne qualité est extrêmement important pour produire une tuile marocaine de qualité supérieure. La région de Fès possède l'une des meilleures qualités d'argile au Maroc. D'une part La figure 1.10 montre meqlaa de Benjliq d'où on peut extraire l'argile.



Figure 1-10: Meqlaa : endroit d'où l'argile est extraite, se situant à quelques kilomètres de la ville de Fès en direction de Sidi Hrazem

D'autre part la figure 1.11 montre des blocs d'argile concassés à l'aide d'un marteau.



Figure 1-11: Touba : blocs d'argile concassés à l'aide d'un marteau en blocs plus petits pouvant peser de 3 à 5 kilos

Etape 2 :

L'argile extraite en grosse motte qui constitue la matière première pour réaliser les carreaux de céramique est trempée dans un bassin d'eau (Zouba qui est une Fosse, sous forme de carré aux bords renforcés par des cailloux, remplie d'eaux où on dépose les blocs d'argiles concassées pendant deux jours) jusqu'à ce qu'elle atteigne une texture douce. Une fois que l'argile est suffisamment molle pour être manipulée, elle est filtrée à la main par le *ajjan* (le mélangeur ou malaxeur) les 2 illustrations figure 1.12 et figure 1.13 au-dessous montrent ces étapes.



Figure 1-12: l'argile est plongée dans la zouba au bout de 24h d'immersion le ajjan ou mélangeur descend dans la zouba pour malaxer la terre



Figure 1-13: Agena : pâte sortie de la fosse puis égouttée pendant quelques jours

Etape 3 :

L'étape 3 consiste à remplir à la main le moule (gabarits de bois) avec l'argile et le lisser ensuite avec la paume de la main pour arriver à des tuiles carrées en terre crue, qui sont ensuite séchées au soleil de manière entièrement naturelle (figure 1.14 et figure 1.15). La plupart de la production de carreaux a lieu en été, au début de l'automne et au printemps.



Figure 1-14: Remplissage à la main du moule avec l'argile



Figure 1-15: Les tuiles carrées en terre crue lors du séchage en plein air

Etape 4 :

Les tuiles crues sont ensuite aplaties sur une planche en les battant au moyen d'une batte de bois (figure 1.16) avant qu'elles soient découpées au niveau des bords (figure 1.17). Cette partie est très importante car l'argile doit être compacte et sans bulles d'air.



Figure 1-16: Tuiles aplatis par l'artisan



Figure 1-17: Coupure des bords de la tuile par le maalem 'qattaa' (coupeur) à l'aide d'une spatule métallique

Etape 5 :

Une fois l'argile façonnée, moulée et aplatie, les tuiles obtenues sont conservées et stockées dans un endroit frais et sec, c'est la dernière opération avant le séchage définitif au soleil qui précède la première cuisson (figure 1.18).



Figure 1-18: Carreaux séchés prêts pour une première cuisson

Etape 6 :

Une fois les carreaux bien séchés, un autre artisan qualifié applique les couleurs sur la partie supérieure des carreaux en utilisant une technique ancestrale (figure 1.19).



Figure 1-19: illustre l'émaillage à l'aide d'un tonneau en plastique

Etape 7 :

Les tuiles sont maintenant placées dans les fours à bois naturels. Dans les fours marocains traditionnels, la chaleur circule de manière inégale, donnant des tons de couleurs légèrement différents à chaque carreau. Cette imperfection rend les carreaux marocains si uniques et si beaux. La figure 1.14 et la figure 2.15 illustrent les opérations de cette étape.



Figure 1-20: illustre le placement des tuiles dans le four



Figure 1-21: illustre tuiles après la sortie de four

3.2 Deuxième phase de fabrication de zellige

Etape 1 : *Traçage des tesselles de zellige*

Cette étape nécessite l'implication de l'artisan marqueur 'racham'. Au moyen d'un bâtonnet de bambou trempé dans un encrier, le marqueur trace le contour de la pièce de zellige servant de gabarit tout en optimisant l'espace à couvrir afin de minimiser les chutes de la matière première (figure 2.16).



Figure 1-22: l'artisan marqueur trace le contour d'une tesselle sur une tuile de forme carrée

Etape 2 : *Taillage des tesselles*

Le coupeur 'qsar' présenté sur la figure 2.17, coupe et façonne grossièrement les tuiles à l'aide d'un outil pointu combinant les fonctions d'une hache et d'un marteau. Cet outil médiéval, affûté à la main sur une roche naturelle, est appelé au Maroc *Menkach*.



Figure 1-23: l'artisan découpe des morceaux de zellige s, la pièce à découper est soutenue par une petite pièce de marbre afin qu'elle ne se brise pas

L'étape la plus précise de tout ce processus est celle exécutée par un maître artisan qui réalise une coupe de précision consistant à suivre exactement le tracé d'une tesselle. Les tesselles obtenues suite à cette étape seront assemblées pour créer les différents motifs de zellige.

Après le découpage des pièces de zelliges, on procède à leur répartition en fonction des motifs et des couleurs de ces pièces. Ainsi, les artisans avant de poser les pièces de zelliges procèdent, sur un sol lisse, au traçage des lignes essentielles de la composition décorative.

Par la suite, les artisans placent au centre une rosace qui déterminera l'ensemble du motif. La complexité de l'exercice réside dans le faite que les artisans placent les tesselles à l'envers, c'est-à-dire dans le sens inverse et sans regarder. Le travail artisanal de la pose à l'envers des zelliges reste mystérieux. Pour éviter les erreurs, les artisans utilisent exprès une couleur différente pour chaque forme de zelliges. Pour l'étape finale, le maallem feragh se concentre sur le motif de zellige réalisé et vérifie si ce dernier comporte des erreurs. Grâce à son savoir-faire et à son œil d'expert, il sait parfaitement la pièce qui doit être insérée autour d'une rosace centrale et celle qui joue le rôle de jonction entre la grande rosace et les petites rosaces satellites.

4. Conclusion

Dans ce qui précède, nous avons essayé d'une part de présenter les motifs géométriques et l'évolution de l'art décoratif à travers les siècles et les dynasties. Nous avons d'autre part présenté dans la géologie de la région de Fès qui se caractérise par l'argile grise. Cette dernière permet, par un processus de plusieurs étapes, d'obtenir des céramiques adaptées à l'art du zellige. Outre cet aperçu, nous avons exposé les motivations qui ont présidé au choix du sujet de notre thèse et avons formulé la problématique de celle- ci et les différentes contributions que nous avons publiées en parallèle avec la réalisation de ce travail académique.

CHAPITRE 2: CONCEPTS MATHEMATIQUES DE BASE

1. Introduction

A travers des siècles, les sociétés ont fait appel au pavage comme moyen de production géométrique artistique. Notons que des sociétés, comme la société romaine, ont utilisé des formes géométriques décorées par les dessins des êtres humains ou par des paysages naturels. Les Musulmans ont utilisé des formes géométriques afin de décorer et d'embellir leurs constructions (Henni & Khaldi, 2018).

Par ailleurs, la symétrie permet de relever et d'identifier les types de répétitions des pavages. D'ailleurs, les groupes de symétries planaires constituent un outil puissant qui permet de saisir et de répertorier les motifs issus de différentes pratiques ornementales.

Dans ce chapitre, nous allons exposer les fondements mathématiques et algorithmiques des théories du pavage et de la symétrie. La compréhension de ces fondements nous amènera, par la suite, à les utiliser au niveau de l'analyse et de la conception des motifs de l'art géométrique maroco-andalous et islamique en général.

2. La Symétrie

Au niveau de cette section, nous fournirons des définitions formelles de la symétrie et des groupes de symétries en tant que sous-groupes des groupes euclidiens.

2.1 Transformation

Une transformation est une action qui modifie l'état initial d'un objet.

2.2 Transformation linéaire

On dit qu'une transformation (fonction) $T : R^n \rightarrow R^m$ est linéaire si pour tout vecteur u, v $\in R^n$ et $k \in R$:

$$T(ku) = kT(u).$$

$$T(u + v) = t(u) + t(v).$$

2.3 Isométrie

Une isométrie est une transformation qui permet de transformer le plan euclidien en lui-même tout en préservant les distances.

Si on note $\sigma : E2 \rightarrow E2$ cette transformation et A et B deux points quelconques, alors la distance entre A et B est égale à celle entre leurs transformés $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$.

On trouve quatre types d'isométrie pour le plan euclidien R^2 (Conway et al., 2016; Coxeter & Moser, 1972) :

- Rotation autour d'un point O par un angle θ. Le point O est dit centre de rotation.
- Translation suivant un vecteur.
- Réflexion (Miroir) par rapport à un axe donné.
- Réflexion avec glissement : la composition d'une réflexion par rapport à une droite et d'une translation parallèle à cette droite par une distance $d \neq 0$ (figure 2.1).

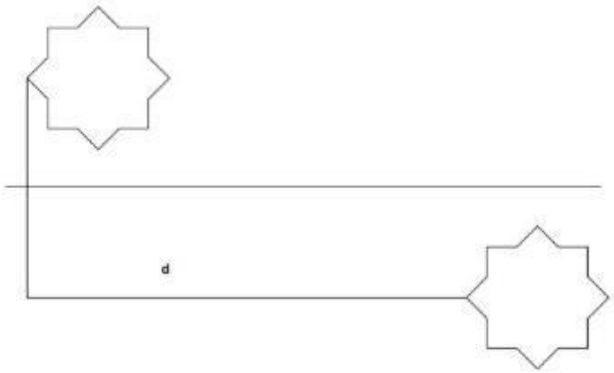


Figure 2-1: Réflexion avec glissement

2.4 Rotation par rapport à l'origine

Pour appliquer une rotation à un point P du plan (x, y) par rapport au point O (0, 0) d'un angle β, on détermine la matrice de transformation et on calcule le produit de celle- ci et du vecteur des coordonnées de P. Cette matrice peut être déduite par application de la rotation aux points (1, 0) et (0, 1) (figure 2.2) :

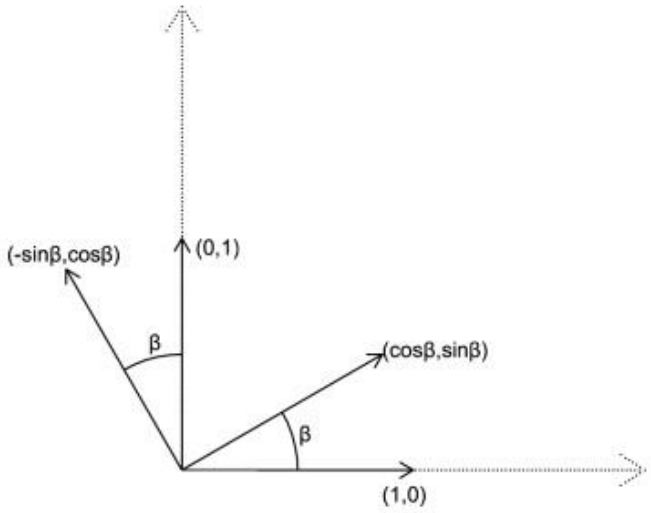


Figure 2-2: Rotation d'angle β sur les deux points (1, 0) et (0, 1) du plan euclidien

2.5 Translation

La translation est une transformation simple qu'on peut exprimer par :

$$x' = x + a$$

$$y' = y + b$$

Où (a, b) est le vecteur de translation. Le problème est que cette transformation n'est pas linéaire. En conséquence, on ne peut pas trouver une matrice de transformation équivalente. C'est un problème majeur qui nous empêche de combiner sa matrice avec d'autres transformations matricielles. Dans ce sens, la réflexion avec glissement, par exemple, ne peut pas être obtenue car elle est une combinaison d'une réflexion et d'une translation. Toutefois, il existe une solution à ce problème en utilisant les coordonnées homogènes.

2.6 Coordonnées homogènes

Afin de pallier le problème susmentionné, on utilise les coordonnées homogènes. Ces coordonnées nous permettent d'exprimer toutes les transformations sous forme de multiplications matricielles. Pour cela, nous ajoutons une dimension supplémentaire. En général, pour exprimer un point en coordonnées homogènes, il faut ajouter une nouvelle dimension à droite dont la valeur est 1. Les coordonnées homogènes d'un point P(x, y) sont (x, y, 1). Ainsi, on peut exprimer la translation par la transformation matricielle ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Et la rotation par rapport au point (0, 0) d'un angle β peut être exprimée par la transformation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\,\beta & sin\,\beta & 0 \\ -sin\,\beta & cos\,\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.7 Rotation par rapport à un point quelconque

La rotation par rapport à l'origine O (0, 0) est une transformation linéaire.

Cependant, la rotation par rapport à un point A quelconque (A ≠ O) n'est pas une transformation linéaire. Pour appliquer une rotation par rapport à un point A (x_A, y_A) d'un angle β on procède suivant trois étapes :

- On effectue une translation du point A pour qu'elle serait identique à l'origine :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_A & -y_A & 1 \end{pmatrix}$$

- On applique une rotation par rapport à l'origine O (0, 0) de l'angle β :

$$\begin{pmatrix} cos\,\beta & sin\,\beta & 0 \\ -sin\,\beta & cos\,\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- On effectue une translation inverse pour faire revenir le point A à sa position initiale :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_A & y_A & 1 \end{pmatrix}$$

Les trois transformations peuvent être combinées en calculant le produit matriciel des trois matrices :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_A & -y_A & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos\,\beta & sin\,\beta & 0 \\ -sin\,\beta & cos\,\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_A & y_A & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} cos\,\beta & sin\,\beta & 0 \\ -sin\,\beta & cos\,\beta & 0 \\ -x_A * cos\,\beta + y_A * sin\,\beta + x_A & -x_A * sin\,\beta - y_A * cos\,\beta + y_A & 1 \end{pmatrix}$$

2.8 Réflexion (miroir) par rapport à une ligne

L'opération de symétrie axiale d'un point P par rapport à l'axe principal Ox peut être exprimée par la matrice de transformation suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La symétrie par rapport à une ligne L est composée de plusieurs transformations : une transformation M associée à la translation de la ligne L pour qu'elle passe par l'origine O (0, 0), une transformation R associée à la rotation de la ligne L pour qu'elle coïncide avec l'axe Ox (axe des abscisses), une transformation de symétrie axiale S par rapport à Ox, une transformation inverse R^{-1} de l'alignement de L avec Ox, et d'une transformation inverse de la translation M^{-1}. Ainsi, la matrice de transformation et le produit :

$T = M \times R \times S \times R^{-1} \times M^{-1}$ (figure 2.3). En général, la matrice de transformation d'une symétrie axiale par rapport à une ligne L d'équation y = ax+b est :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos\,\beta & sin\,\beta & 0 \\ -sin\,\beta & cos\,\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} cos\,\beta & -sin\,\beta & 0 \\ sin\,\beta & cos\,\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}$$

Où β est l'angle dont tanβ = -a.

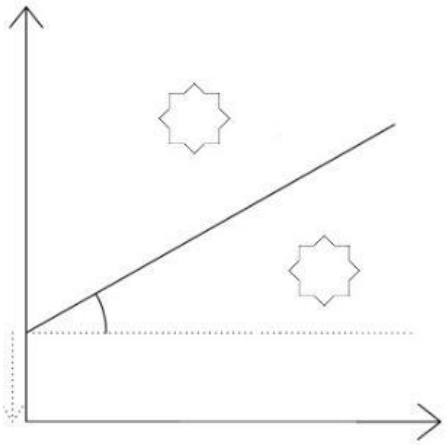


Figure 2-3: Symétrie axiale

3. Groupes de symétrie des motifs ornementaux

Les motifs ornementaux peuvent être classés en fonction de leurs symétries (Hann & Thomas, 2007; Ouazene et al., 2022). En effet, une classification uniforme rend possible l'étude et la comparaison systématiques des ornements.

Dans son ouvrage Symmetry, (Makovicky, 2016) a défini trois classes de motifs en fonction de leur dimension. Les motifs finis qui ornent des surfaces finies sont appelés motifs zéro- dimensionnels (0D), ceux qui couvrent des bandes étroites infinies sont des motifs unidimensionnels (1D) et ceux qui pavent des surfaces infinies sont des motifs bidimensionnels (2D).

En considérant la géométrie des motifs, le terme de symétrie peut être introduit. En effet, l'analyse de la symétrie des motifs permet de comprendre l'organisation d'un motif et fournit un moyen de déterminer à la fois l'invariance et la création de nouveau motif (Khamjane & Benslimane, 2018b).

3.1 Modèles finis (0-D)

Les motifs finis sont générés par la répétition périodique d'un motif unitaire autour d'un axe central ponctuel ou par des réflexions autour d'un axe appelé miroir. Il n'y a pas de translations ou de réflexions glissées. (Bourgoin, 2012; Pecharsky, V.K., Zavalij, 2009).
Les motifs symétriques sont des éléments constitutifs composés de deux ou plusieurs parties, de taille, de forme et de contenu identiques. En fonction des caractéristiques de symétrie constitutives les groupes de symétrie des motifs peuvent être classés à l'aide des notations de Hermann-Mauguin ou de Schöenflies qui sont respectivement "m" ou σ pour les motifs contenant un axe de réflexion (miroir), n ou C_n (groupes cycliques, n rotations). Pour ceux qui sont invariants par un nième axe de rotation et nmm ou D_n (groupes dièdres, n rotations et n réflexions) pour les motifs invariants par n axes de réflexion séparés ainsi que par le nième axe de rotation(Grünbaum et al., 1986)

3.1.1 Motifs calligraphiques

La calligraphie islamique est la pratique artistique de l'écriture manuscrite basée sur l'alphabet arabe dans la vaste zone géographique partageant un héritage culturel islamique commun elle comprend l'écriture arabe et persane (Barbot, 2005; Déroche, 2007).
Les lettres sont sculptées et/ou peintes sur un large éventail de supports matériels. La calligraphie est utilisée comme élément décoratif pour embellir l'intérieur de différents bâtiments. Il s'agit généralement de citations du saint Coran et d'invocation de Dieu ou de poèmes dédiés à la gloire du sultan (Azzouna, 2016).La symétrie est souvent rencontrée dans l'ornementation calligraphique. Un ensemble d'exemples de symétrie par groupes de

points orne les murs et les dômes des mausolées, des mosquées et des palais(Makovicky, 2016). La figure 2.4 montre une calligraphie translationnelle



Figure 2-4: une calligraphie présentant une symétrie translationnelle

Dans de nombreux cas, les motifs appartiennent aux groupes cycliques C_n, composés seulement de n rotations (figure 2.5).

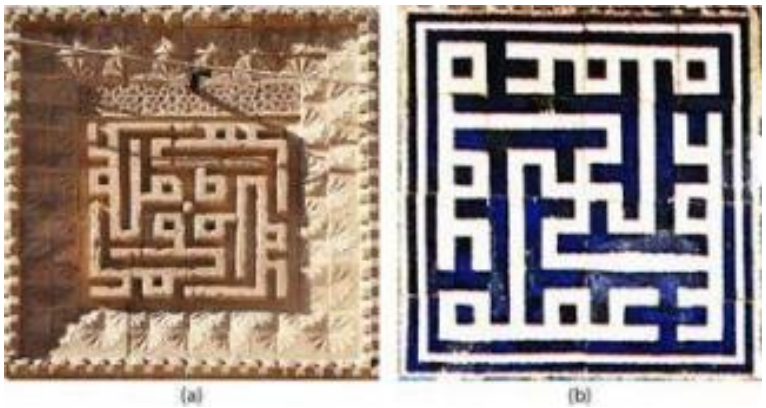


Figure 2-5: Motif coufique ayant le groupe C4 (4) - Les deux panneaux citent Muhammad

3.1.2 Motifs floraux

Les artistes musulmans utilisaient généralement les fleurs et les arbres comme motifs décoratifs pour embellir les vêtements, les objets, les articles personnels et les bâtiments. Les motifs floraux ont souvent servi de base à une décoration en "motif infini" couvrant une zone donnée. Ils sont appliqués sur des panneaux de céramique, du marbre, du bois ou du plâtre. Dans les décors marocains, le Tawriq (motifs floraux) désigne les décors basés sur diverses formes de feuilles végétales généralement dérivées de l'acanthe stylisée

ou de la feuille de palmier (Bazzana, 1980).

Le Tawriq recouvre presque toutes les surfaces des murs, des arches, des fenêtres et des plafonds. Il remplit également les espaces vides créés par les motifs géométriques et les inscriptions calligraphiques. Le Tawriq est généralement sculpté et/ou peint sur du plâtre et du bois. Bien que la symétrie bilatérale soit prédominante dans les motifs du Tawriq, la symétrie rotative n'est pas inhabituelle (figure 2.6).



Figure 2-6: Exemple de Tawriq, Mosquée Hassan 2-Casablanca

3.1.3 Motifs géométriques

Les symétries rotationnelle et circulaire ont été largement exploitées pour réaliser des motifs géométriques finis sculptés ou peints sur du bois, du marbre, du plâtre et de la pierre, ou assemblés à partir de carreaux de terre cuite. La rosace géométrique cyclique peut être considérée à la fois comme un motif complet à part entière ou comme une variété de motifs périodiques finis ou infinis. La symétrie rotationnelle est locale et n'est pas commune à l'ensemble du motif.

Les compositions géométriques, si populaires dans l'art islamique, apparaissent au Maroc avec un design si distinctif, précis et rigoureux qu'elles forment une école occidentale au sein de l'art musulman. Travaillant avec différentes formes géométriques, les artisans marocains produisent une variété infinie de compositions géométriques autour de rosaces centrales.

Ces rosaces que l'on trouve à travers les siècles ont une symétrie multiple de 5, 6 et 8.

Des rosaces d'ordre n ($6 \leq n \leq 96$) existent dans les motifs géométriques marocains. Presque toutes les rosaces existantes sont de symétrie paire. Les rosaces les plus courantes sont d'ordres 8-, 12-, 16-, 24 et 48. Les ordres 6-, 9-, 10-, 32-, 64- et 96- sont peu fréquents.

La figure 7 montre un exemple de décor de Zellige andalou utilisant des rosaces d'ordres différents (figure 2.7).

Cet exemple montre qu'un décor maroco-andalou peut présenter des rosaces de différentes symétries et de compositions spatiales (Khamjane & Benslimane, 2018b; Thalal et al., 2018).



Figure 2-7: exemple de décor de Zellige andalou

3.2 Les Frises

3.2.1 Définition

Dans l'art ornemental, le motif unidimensionnel est appelé motif de frise (Coxeter, 1971).

La frise est une bande qui est considérée comme un complément de décoration. Les frises séparent les différents revêtements muraux, carreaux de céramique, stuc, plâtre et bois. Elles sont formées par des séquences de motifs de Zellige s, plâtres, bois ou tout autre support décoratif. Les motifs présentent une translation d'un motif répétitif dans une direction. Selon (Makovicky, 2016), les ornements de frise peuvent être découpés de motifs bidimensionnels ou conçus à l'origine comme des motifs unidimensionnels.

Les quatre opérations de symétrie du plan peuvent être utilisées pour générer ces motifs ; la combinaison de ces opérations produit sept groupes de symétrie différents. Appelés groupes de frises.

Le schéma de classification de ces groupes est donné suivant l'algorithme de la figure 2.8

La notation conventionnellement attribuée aux groupes de frises est de la forme pxyz , (Hann & Thomas, 2007).

- La lettre p précède chacun des sept motifs.
- La lettre x est le symbole qui dénote les opérations de symétrie perpendiculaires à l'axe longitudinal de la bordure ;
    - m est utilisé lorsque la réflexion verticale est présente,
    - le chiffre 1 est utilisé lorsque l'opération est absente.
- Le troisième symbole, y, dénote des opérations de symétrie travaillant parallèlement aux côtés de la bordure ;

- la lettre m ou g est utilisée en cas de réflexion longitudinale ou de réflexion glissante
    - le chiffre 1 si aucune de ces opérations n'est présente.

- Le quatrième symbole, z, indique la présence ou non d'une double rotation ;

o le chiffre 2 est utilisé si la rotation est présente

o le chiffre 1 dans le cas contraire. La symétrie la plus faible est la translation pure p111, la symétrie la plus élevée pmm2 combine des miroirs verticaux et horizontaux et un axe double (CAMPBELL, 1989; Washburn & Crowe, 1988).

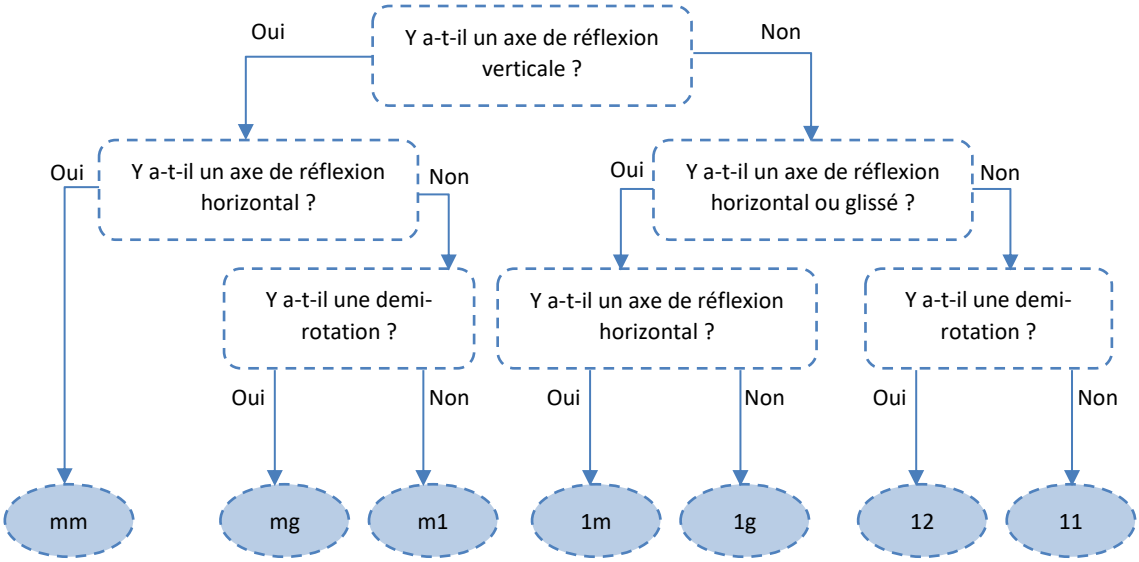


Figure 2-8: Algorithme pour la détermination des 7 groupes de frise

3.2.2 Illustration des sept groupes de frises

Les figures ci-dessous illustrent les sept groupes de frises



Figure 2-9: P11 : Le groupe engendré par une translation



Figure 2-10: P1g : Le groupe engendré par la réflexion glissée. La composée de cette réflexion glissée avec elle-même redonne la translation

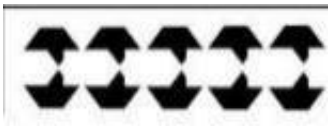


Figure 2-11: P1m : Le groupe engendré par la translation et la réflexion



Figure 2-12: Pm1 : Le groupe engendré par la translation et une réflexion orthogonale à la direction de la frise

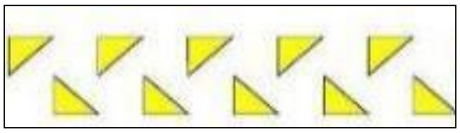


Figure 2-13: P12 : Le groupe engendré par la translation et un demi-tour

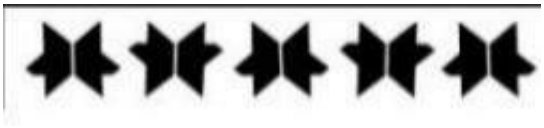


Figure 2-14:Pmg : Le groupe est engendré par une réflexion orthogonale dans la direction de la frise et une réflexion glissée



Figure 2-15: Pmm : Le groupe engendré par la translation, une réflexion orthogonale dans la direction de la frise, et la réflexion. La composée des deux réflexions donne un demi-tour

3.1 Papiers peints

C'est un ornement qui résulte de la répétition d'un motif de base dans deux directions différentes (Coxeter & Moser, 1972; Schattschneider, 1978). La théorie des groupes classe les papiers peints en 17 types. Cette classification est attribuée par Fédorov en 1891. Un algorithme donné par D. Crowe en 1982 permet de déterminer rapidement la classe d'un motif donné.

Comme les modèles de frise, il y a quatre symboles *qrst*, la notation provient de cristallographes qui l'utilisent pour classer les cristaux. L'interprétation de la notation cristallographique est comme suite :

q = {*p* si la cellule unitaire ne contient pas de centre de rotation.

{*c* si la cellule unitaire contient un centre de rotation.

r = n, le premier ordre de la rotation.

s désigne un axe de symétrie normal à l'extrémité gauche de la cellule primitive ou centré. Ce bord gauche est connue comme l'axe des x.

s = {*m*, s'il y a un axe de symétrie

{*g* s'il n'y a pas d'axe de symétrie, mais un axe de symétrie glissée

{*1* si il n'est pas l'axe de symétrie

t désigne un axe de symétrie à l'angle θ (≤ 180^o).En particulier, θ = 180 ° si n = 1 ou 2;

θ = 45^o, si n = 4 ; θ = 60^o, si n = 3 ou 6.

t = {*m*, s'il y a un axe de symétrie.

{*G* s'il n'y a pas de symétrie, mais un axe de symétrie glissée.

{*1* s'il n'est pas l'axe de symétrie.

S'il n'y pas de symboles dans les troisièmes et quatrièmes positions alors le groupe ne contient ni symétrie, ni symétrie glissée.

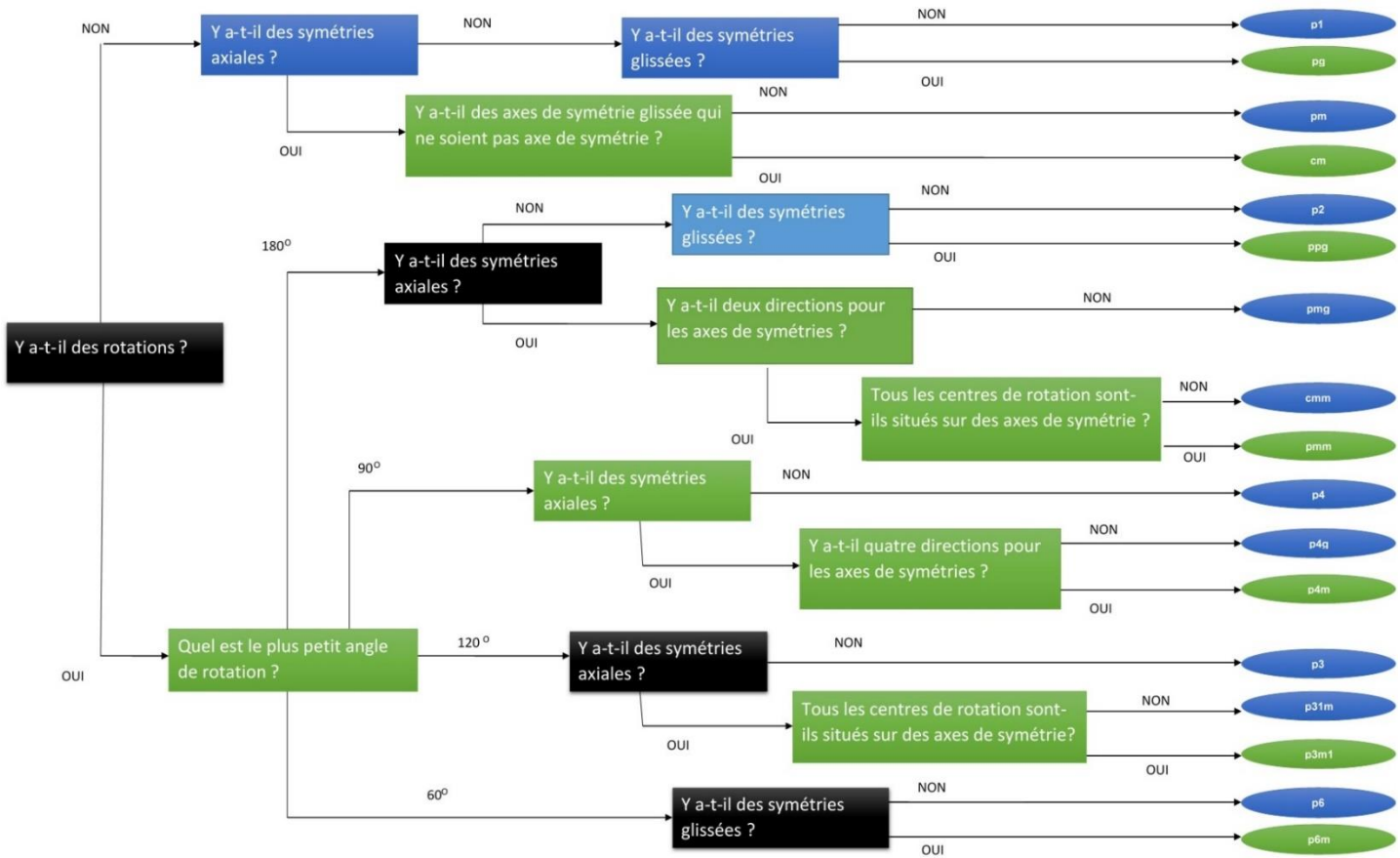


Figure 2-16: Algorithme de D.Crowe pour la détermination des 17 groupes cristallographiques du plan

Dans l'art décoratif islamique, les motifs les plus communs sont ceux des classes p4m et p6m raison pour laquelle nous donnons dans ce qui suit plus de détail sur ces deux classes :

p4m : la figure 2.17 montre deux miroirs orthogonaux passent par chaque axe d'ordre 4 au sommet de la maille.



Figure 2-17: Exemple de symétrie p4m

P6m : La figure 2.18 montre la rencontre d'un miroir horizontal avec un miroir incliné de 30° engendre au total, par réflexions successives, 6 miroirs passant par le point d'intersection et inclinés d'un multiple de 30° par rapport à l'horizontal.

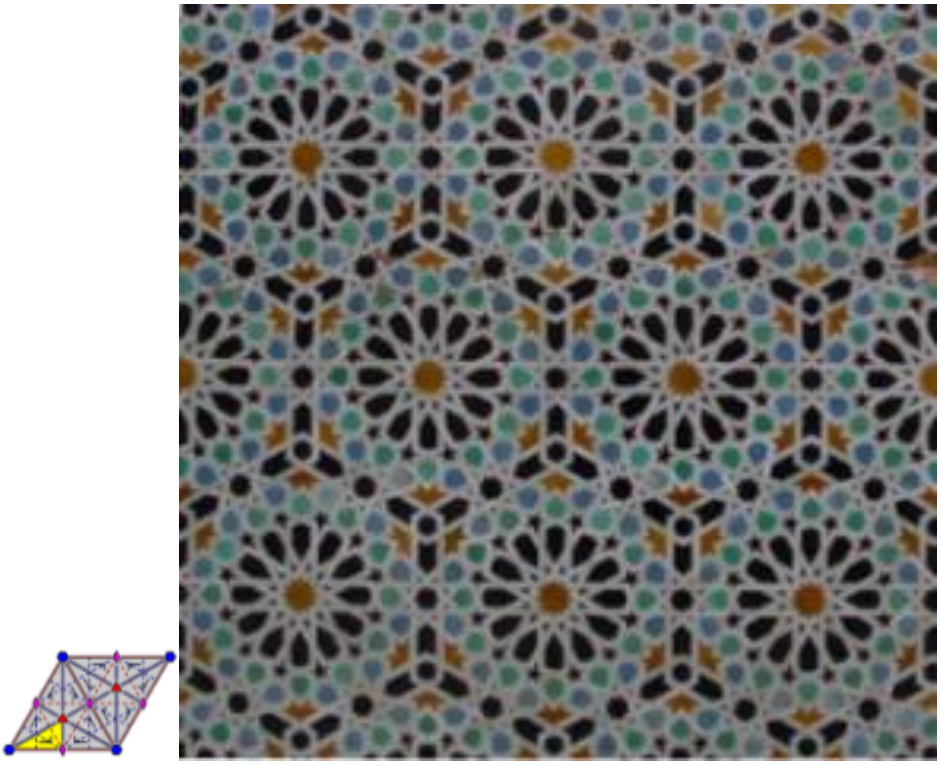


Figure 2-18: Exemple de symétrie p6m

3.2 La répétition autour d'un point

La répétition autour d'un point regroupe les familles infinies de groupes de rosaces figure 2.19.

Un groupe de rosace R ne contient aucune translation (et donc aucune réflexion glissée). Il est isomorphe à un groupe cyclique Cn (n rotations) ou dièdre Dn (n rotations et n réflexions).

Les tesselles sont symétriques autour d'un point central et ils contiennent toujours au centre une étoile soit de 8, 16, 24, 32, 64, 40, 48, 96. Ces décors sont appelés rosaces (Bonner, 2017a; J.-M. Castera, 1999; Kaplan, 2002).



Figure 2-19: Exemple de motif à symétrie autour d'un point

4. Concept de pavage du plan

Un pavage est un recouvrement du plan sans espace et sans chevauchement. Il y a une infinité de façons d'y parvenir mais les pavages les plus intéressants sont ceux dans lesquels on détecte une règle de construction et des symétries. La figure 2.20 montre un exemple de pavage du plan.

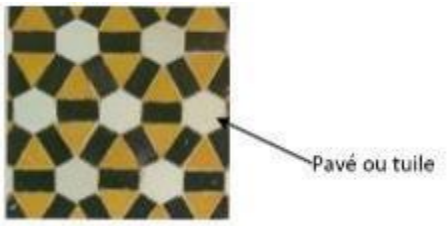


Figure 2-20: Exemple de pavage du plan

4.1 Pavage périodique

Le pavage périodique se distingue par deux types de pavages réguliers et semi-réguliers.

4.1.1 Pavage régulier

Pour le pavage régulier, le même polygone est utilisé pour toute la partition du plan.

Les trois pavages réguliers isométriques sont donc : le pavage par les triangles, le pavage par les carrés et le pavage par les hexagones. La figure 2.21 montre un des exemples de décors obtenus par partitions régulières



Figure 2-21: Exemples de décors obtenus par partitions régulières utilisant respectivement le carré et l'hexagone

4.1.2 Pavage semi-régulier

Le pavage semi-régulier ou archimédiens : plusieurs polygones réguliers peuvent participer à la construction d'une partition de la surface à paver (voir figure 2.22). Celle-ci se caractérise en associant à un sommet S la suite $(n1, n2, \dots, nk)$, obtenue en tournant

autour de S, où ni est le nombre de côtés de l'iéme polygone rencontré. La somme des angles internes des polygones qui se rencontrent en S doit être égale à 2π soit :

$$\sum i = 1 \ldots k \ (1/ni) = k/2 - 1$$

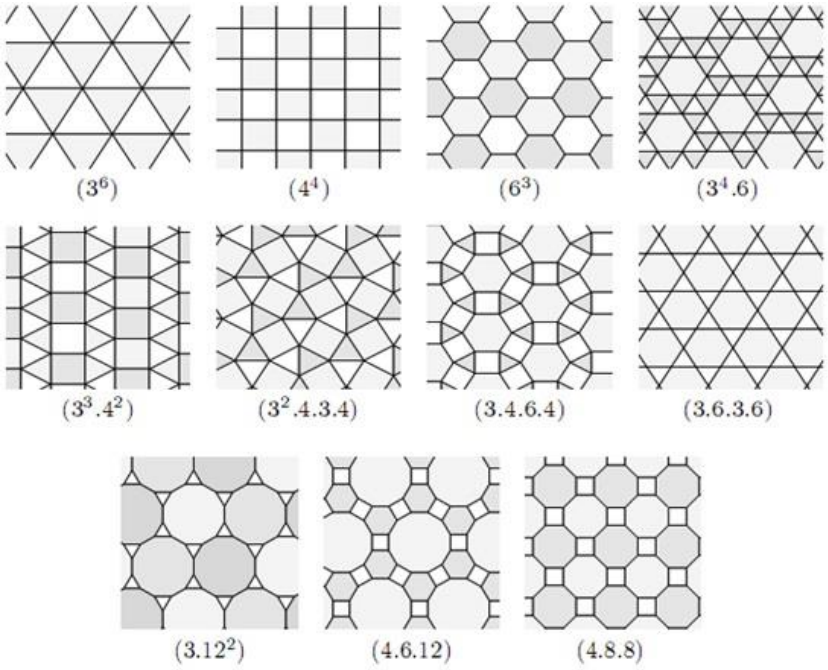


Figure 2-22: pavage semi-régulier ou pavage archimédiens

Par conséquent, nous obtenons 21 solutions (si on garde k constant pour tous les sommets) que l'on code en indiquant les suites (ni) i = 1…k (3.3.3.3.3.3. par exemple).

Si on laisse varier le nombre k, et c'est le cas le plus intéressant, on découvrira les 21 solutions dont 3 régulières et 8 semi-réguliers. D'autres pavages possibles ni réguliers ni semi-réguliers, considérer comme des pavages périodiques non réguliers (voir la figure 2.23).

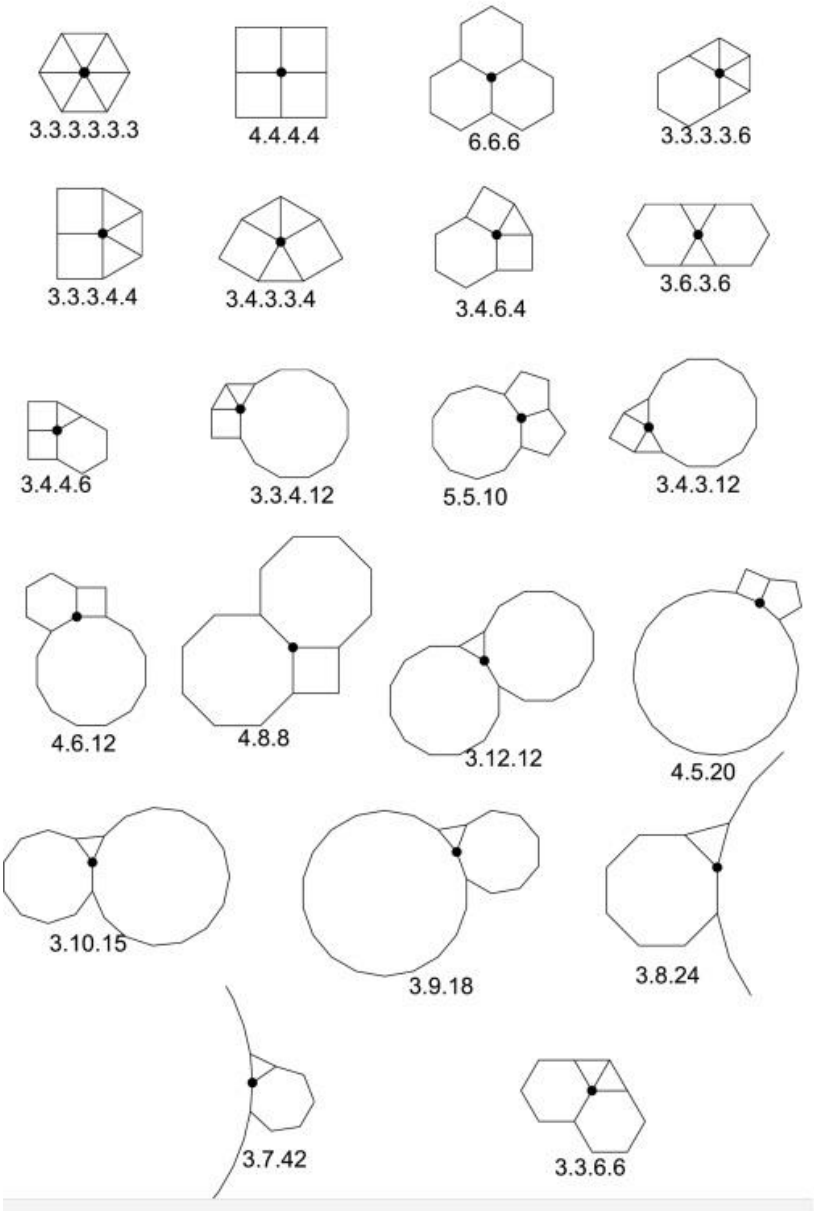


Figure 2-23: Les 21 Configurations pour construire des pavages

Le fait de faire varier le nombre k nous a conduit à découvrir des structures existantes dans les décors de l'art maroco-andalous.

Dans le double octogone étoilé de la figure 2.24, on a placé une rosace d'une étoile à 16 entourées de 8 rosaces d'une étoile à 8 insérées chacune dans un octogone double (c'est à dire comporte 3 étoiles à 8 pointes sur son côté).



Figure 2-24: Pavage semi -régulier avec K variable

4.2 Pavage apériodique

Les mathématiciens ont longtemps pensé que tout jeu de tuiles pouvant paver le plan pouvait le faire périodiquement. En 1974, Roger Penrose découvre un jeu de tuiles donnant le pavage de Penrose. Les pavages de Penrose présentent une symétrie d'ordre 5 (invariance par rotation d'angle $2\pi/5$ radian, soit 72 degrés). Ils ne sont pas périodiques, c'est-à-dire qu'on ne peut les décrire comme un motif répété sur une grille régulière. Ils sont cependant quasi- périodiques. Autrement dit, tout motif apparaissant dans le pavage réapparaît régulièrement.

Il existe trois types de pavages de Penrose, chacun contenant une infinité de variantes :

• Le premier type, qu'on appelle P1 figure 2.25, utilise comme pièces de base des pentagones, des losanges, des pentagrammes et des portions de pentagramme.

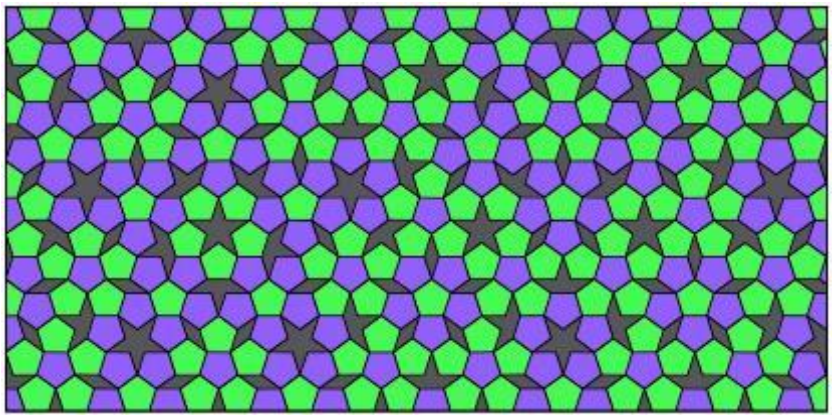


Figure 2-25: Premier type de motif de Penrose en 3 couleurs

• Le second type, ou P2, (figure 2.26- a) a pour pièces de base deux quadrilatères, l'un convexe, l'autre concave, connus comme « cerfs-volants » et « fléchettes ».

• Le troisième type, P3, (figure 2.26- b) a pour pièces de base deux sortes de losanges, « fins » et « gros ». Il est aussi possible de paver le plan à l'aide de deux figures géométriques simples comme les deux losanges suivants. À condition de les assembler en respectant la couleur et le sens des vecteurs. Ces contraintes d'assemblage assurent que le pavage obtenu ne sera pas périodique. Comme précédemment, il existe une infinité de pavages du plan non périodiques à l'aide de ces deux pièces.

Ce pavage quasi-périodique a révélé une nouvelle classe de symétries. L'intérêt de ces symétries mystérieuses a été déclenché principalement par la découverte des quasi-

cristaux en 1984. Ces quasi-cristaux présentent des symétries interdites, que l'on croyait impossible pour la matière cristalline dans la cristallographie classique.

Étonnamment, huit siècles avant cette découverte, des ornements quasi-périodiques présentant des symétries pentagonales ou décagonales couvraient les murs de certains monuments du monde musulman, de son extrême est à son extrême ouest. Au Maroc des exemples de ces ornements peuvent être trouvés sur les murs de la madrasa Attarine (1323 CE) à Fès, de la madrasa Bou Inania Maroc et la porte d'entrée du mausolée Moulay Idriss à Fès.

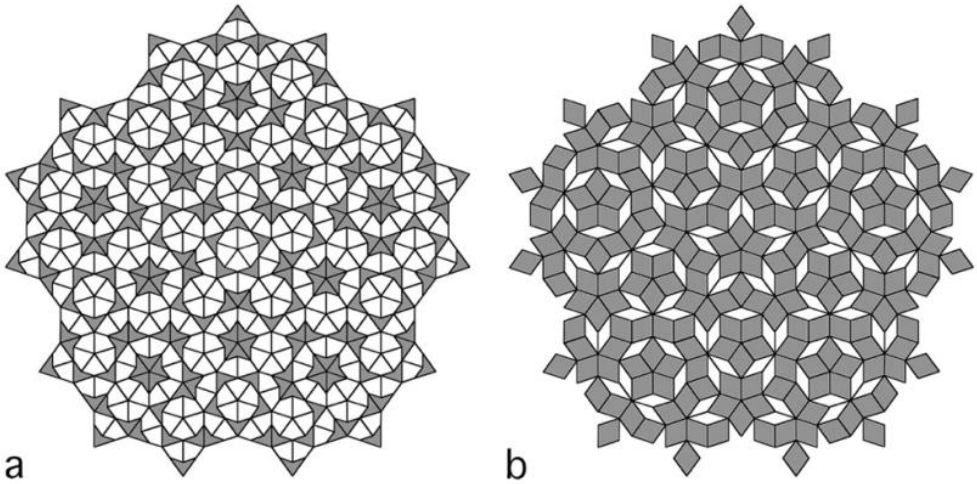


Figure 2-26: pavage de Penrose
-a : type P2. -b : type P3

5. Conclusion

Nous avons présenté les deux concepts mathématiques sur lesquels se basent les approches modernes d'analyse et de conception des motifs géométriques islamiques. Le pavage du plan constitue l'ossature de construction de tout motif géométrique. Pour les motifs géométriques de l'orient musulman, ce pavage est utilisé comme gabarit de

construction qui est supprimé une fois la construction du motif achevée. Par contre, pour les motifs de l'orient musulman, ce pavage est représenté par une structure géométrique dont le squelette décrit par (J.-M. Castera, 1996) constitue un exemple. Toute la difficulté de construction des motifs géométrique consiste à trouver le lien existant entre le pavage ou sa structure représentative avec sa rosace centrale.

CHAPITRE 3: METHODES CLASSIQUES DE CONCEPTION DES ORNEMENTS GEOMETRIQUES ISLAMIQUES

1. Introduction

L'ornementation et les décors islamiques regorgent de réalisations en motifs géométriques abstraits. Les artisans musulmans maitrisaient les règles de la géométrie. La preuve est que leurs constructions étaient solidement enracinées. Cela est dû à la traduction en arabe des éléments d'Euclide par les savants islamiques.

L'étude de l'art islamique requiert une parfaite compréhension des méthodes de conception historiques que les artisans utilisaient. Grâce à cette compréhension, on obtient des indications importantes à propos du développement initial, (Bonner, 2017b, 2017d, 2017c).

Il est à souligner que les méthodes traditionnelles et les connaissances qui en découlent sont en voie de disparition. Cela s'explique par la dominance de la transmission orale de ce savoir entre l'artisan confirmé et ses apprentis. Ainsi, pour sauver ce patrimoine culturel et artistique, la compréhension des méthodes de conception historiques s'avère d'une importance capitale. Ce chapitre donne un aperçu général sur les recherches les plus notoires réalisées dans ce domaine.

2. Aperçu sur les travaux réalisés

L'art islamique a intéressé des scientifiques, historiens et designers. Prisse d'Avennes (d'Avennes, 1877), Owen Jones (Jones, 1868) Critchlow (Critchlow, 1976), El-Said et al (El-Said & El-Bouri, 1993), Wade (Wade, 1976), et Paccard (Paccard, 1980) ont publié de grandes collections de motifs islamiques.

Ensuite, Bourgoin (Bourgoin, 2012)) a analysé les méthodes de construction d'un grand nombre de motifs géométriques.

Dans un ensemble d'articles (Hankin, 1925a, 1925b, 1934, 1936), Hankin a décrit une technique de construction de motifs étoilés basée sur le pavage du plan. Cette technique est appelée également « méthode de polygones en contact ». Kaplan (Kaplan, 2005) a ensuite proposé une méthode qui s'appuie sur la technique polygonale de Hankin. Celle-ci permet de construire les motifs géométriques étoilés à partir d'un pavage du plan et d'un ensemble de paramètres intuitifs. Dans un autre article, Kaplan et Salesin (Kaplan & Salesin, 2004) ont proposé une approche utilisant une famille de pavages produits par un processus appelé « de gonflage ». Les polygones réguliers du pavage sont remplis par une série de motifs paramétrés (les étoiles et les rosaces). En revanche, le contenu des polygones irréguliers est produit par un algorithme dit « algorithme d'inférence ». Bonner a présenté une méthode dont les motifs sont créés sur la base de constructions géométriques systématiques et non systématiques (Bonner, 2014b, 2014a, 2017c). Castera (J. M. Castera, 1999) a décrit une technique de construction de motifs géométriques marocains basée sur ce qu'il appelle squelette du décor. Le squelette qui décrit en fait le pavage ou chaque polygone du pavage est représenté par une séquence

fermée d'étoiles à 8 pointes et de Safts (tesselles de forme hexagonale). Cromwell (Cromwell, 2010) a fourni une analyse mathématique d'un nombre de motifs, et ce en illustrant une variété de méthodes de construction. Bodner a décrit la construction de plusieurs motifs géométriques islamiques(Bodner, 2007, 2008, 2011).

Par ailleurs, d'autres travaux à caractère analytique ont fait appel à la théorie des groupes de symétrie. Par exemple, (Abas et al., 1994; Abas & Salman, 1992; Wichmann, 2008) ont répertorié et classé un ensemble de motifs en fonction de leurs groupes de symétries. Dans (Djibril & Thami, 2008), Ould Djibril et Oulad Haj Thami ont proposé un modèle pour l'extraction des caractéristiques de symétrie des motifs islamiques. Ce travail permet de classer ces motifs en groupes cycliques, en groupes de frises et en groupes cristallographiques. Rønning (Rønning, 2009) a étudié les groupes de symétrie des motifs géométriques islamiques d'Alhambra en Espagne. Grünbaum et Shephard (Grünbaum & Shephard, 1992) ont proposé une application de la théorie des groupes de symétries pour l'étude des motifs étoilés périodiques. Ostromoukhov (Ostromoukhov, 1998) a élargi cette analyse aux 17 groupes cristallographiques.

D'autres travaux se sont basés sur la théorie des groupes de symétries pour la génération des motifs géométriques. A titre d'exemple, Lavani (Lalvani, 1989) a présenté une méthode de génération de motifs géométriques complexes en s'appuyant sur des classes infinies de subdivisions de la région fondamentale. Pour cet auteur, les motifs construits n'intègrent pas les motifs étoilés. Jowers et al. (Jowers et al., 2010) ont proposé une autre méthode basée sur les groupes de symétries et le formalisme de la grammaire des formes. On définit un modèle en choisissant des formes émergentes à partir d'une grille sous-

jacente, et ce, en utilisant une série de règles, obtenues à partir de l'analyse d'un corpus de huit motifs. Cependant, ces règles ne sont pas universelles car l'analyse d'un corpus alternatif pourrait mener à la définition de règles alternatives. En outre, aucune information n'est fournie à propos du choix de la grille utilisée. Nasri et Benslimane (Nasri & Benslimane, 2017) ont proposé une méthode de modélisation pour générer automatiquement des motifs géométriques mauresques. La méthode proposée s'appuie sur la symétrie et le formalisme de la grammaire des formes. Il s'agit concrètement de repérer et de relever le vocabulaire des formes propres au style mauresque. Des règles sont déterminées par l'identification des caractéristiques communes dudit style, au travers de l'analyse d'un ensemble de données de motifs historiques.

Traditionnellement, ces mécanismes sont dictés par une grille sous-jacente utilisée par les artisans dans la conception des motifs géométriques complexes.

Thalal et al. (Thalal et al., 2011) ont formalisé la méthode Hasba, largement utilisée par les artisans marocains qui travaillent sur le bois.

3. Les méthodes historiques de construction des motifs

3.1 La méthode polygonale

L'examen de plusieurs exemples de motifs géométriques anciens accompagnés de leurs pavages sous-jacents indique que la méthode polygonale est la méthode de conception la plus ancienne (Bonner, 2017b, 2017c).

Cette méthode, appelée aussi « méthode de polygones en contact » et notée PIC, a été décrite par Hankin (Hankin, 1925a, 1925b, 1934, 1936) au début du vingtième siècle. Elle

permet de créer des motifs étoilés en partant d'un pavage du plan par des polygones. A partir de ce pavage, il faut faire émerger deux lignes du milieu de chacun des côtés des polygones. Chacune de ces lignes sera tronquée à la rencontre d'une autre ligne provenant d'un autre côté. Finalement, les polygones utilisés dans le pavage sous-jacent sont supprimés laissant derrière le motif construit. En fonction des angles des deux lignes qui émergent d'un même point milieu, plusieurs conceptions peuvent être produites.

Kaplan a développé un algorithme pour automatiser la génération des motifs islamiques par la technique PIC (Kaplan, 2005).

J. Bonner a présenté la technique PIC sous forme de deux méthodes distinctes dites respectivement systématique et non-systématique (Bonner, 2017c).

3.2 La méthode de jonctions de points

Plusieurs chercheurs se sont intéressés à la méthode de jonction de points connue comme étant une méthode historique utilisée dans la construction des motifs géométriques islamiques (Bakırer, 1981; Broug, 2008; Critchlow, 1976; Wade, 1976). Cependant, les multiples publications réalisées sur cette technique ne fournissent aucune preuve de son utilisation historique.

Cette technique consiste à utiliser une règle et un compas : on commence généralement par un cercle, on le divise pour produire une matrice de coordonnées géométriques à l'intérieure d'une unité répétitive régulière carrée ou hexagonale. Les lignes reliant des points d'intersection sélectionnés dans cette matrice produisent une conception dans son unité de base. Cette unité peut être ensuite répétée pour aboutir au motif final (figure 3.1).

Cette technique est bien adaptée pour reconstruire des motifs avec une complexité modérée.

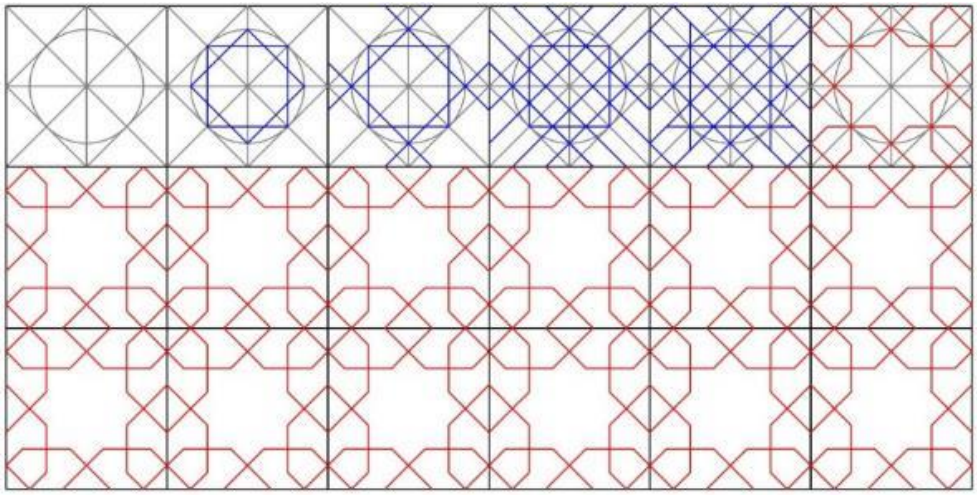


Figure 3-1 : Construction d'un motif avec une étoile à 8 en utilisant la méthode de jonctions de points

3.1 La méthode l'Hasba

L'Hasba est un terme qui fait partie du jargon des Maalems pour décrire des motifs tracés suivant des valeurs empiriques (Thalal et al., 2011). Autrement dit, L'Hasba est une méthode utilisée par les maitres artisans pour construire des motifs ornementaux sur le bois. Cette méthode consiste à tracer un motif à partir d'une grille sous-jacente élaborée sur un cadre qui est souvent carré (figure 3.2). Sur les côtés du cadre est définie une division unitaire empirique q appelée *lqsma*. La largeur L de chaque côté est un multiple de q : L = h × q (Figure 3.2.a). Le motif obtenu dépend fortement de sa mesure spécifique h. Pour construire la grille sous-jacente, on trace des pairs de cercles concentriques de rayon respectifs q et 2q situés aux coins, et au milieu de chaque côté du cadre gradué

(figure 3.2- b). Ensuite, on joigne les centres des cercles et on trace les tangentes à tous les cercles (figure 3.2- c).

Finalement, le motif est tracé sur la grille sous-jacente (Figure 3.3).

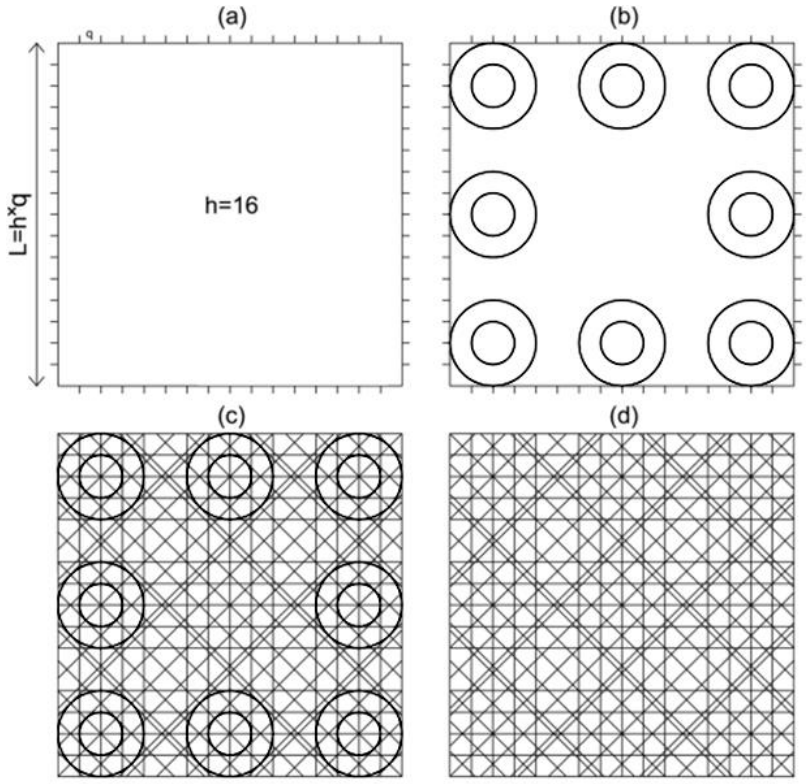


Figure 3-2: processus de construction de la grille sous-jacente reproduit de (Thalal et al., 2011)

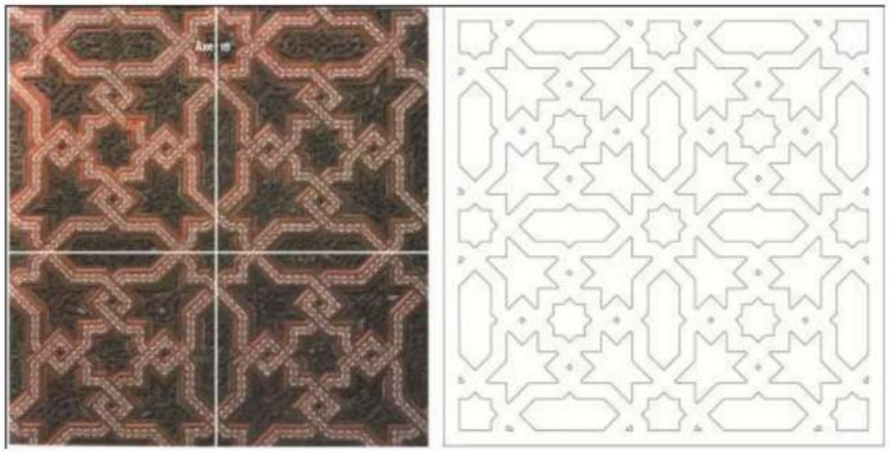


Figure 3-3: Construction du motif sur la grille sous-jacente reproduit de (Thalal et al., 2011)

A partir d'une même grille on peut obtenir plusieurs motifs (figure 3.4). Une description détaillée de cette technique est donnée en (Thalal et al., 2011).

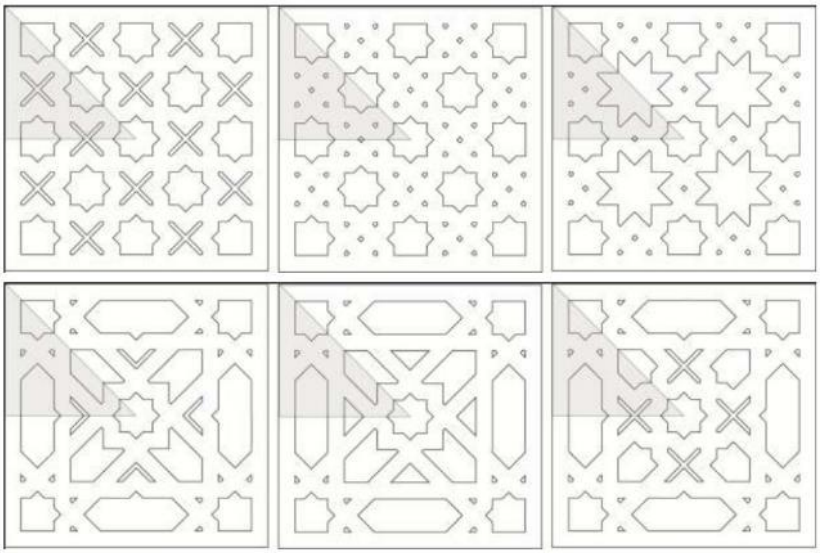


Figure 3-4: Construction d'un autre motif en se basant sur la même grille h = 16 reproduit de (Thalal et al., 2011).

4. Méthode basée sur le squelette représentant un pavage périodique

Nous allons illustrer cette méthode de construction en prenant comme exemple la famille des ornements de type octogonal et dont l'octogone de pavage est représenté par un squelette alternant doublement l'étoile à 8 et le Saft (figure 3.5)

- Etoile à 8 : octogone étoilé de largeur r.
- Saft : hexagone de largeur r, qui est déduit de 2 étoiles à 8.

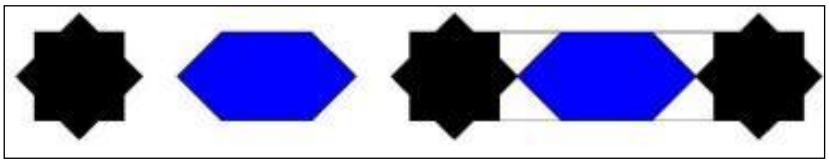


Figure 3-5: Disposition du Saft entre deux étoiles

Le prolongement des lignes des éléments de cette structure de pavage permet de construire le motif octogonal qui peut être à rosace centrale d'ordre 8 ou d'ordre 16. On présentera sur un motif octogonal à rosace d'ordre 16 dont le principe de construction est comme suite :

- Puisque les rosaces sont symétriques par rapport aux deux axes orthogonaux schématisés par la figure suivante, la première étape consiste à prendre le quart du squelette de l'octogone de pavage ceci est illustré dans figure 3.6.

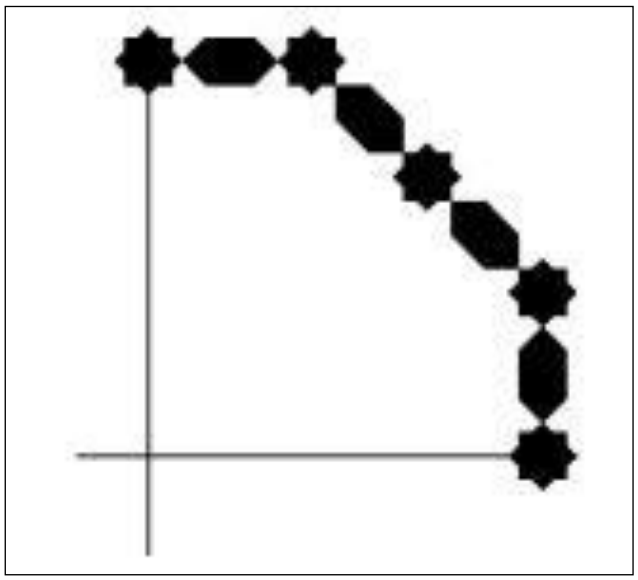


Figure 3-6: Quart du squelette

- Ornant ensuite ce quart du squelette par les tesselles possibles, obtenues par prolongement des lignes prenant naissances des lignes émergentes des côtés du Saft et de l'étoile à 8 ceci est illustré dans figure 3.7.

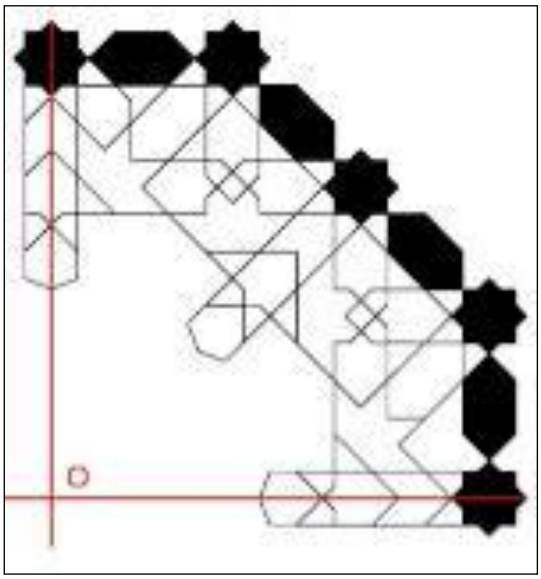


Figure 3-7: quart du squelette orné de l'intérieur par d'autres tesselles

- Application d'un réseau polaire de 4 fois par rapport au même centre *o* de la Figure précédente, dont le résultat est donné par la figure 3.8 :

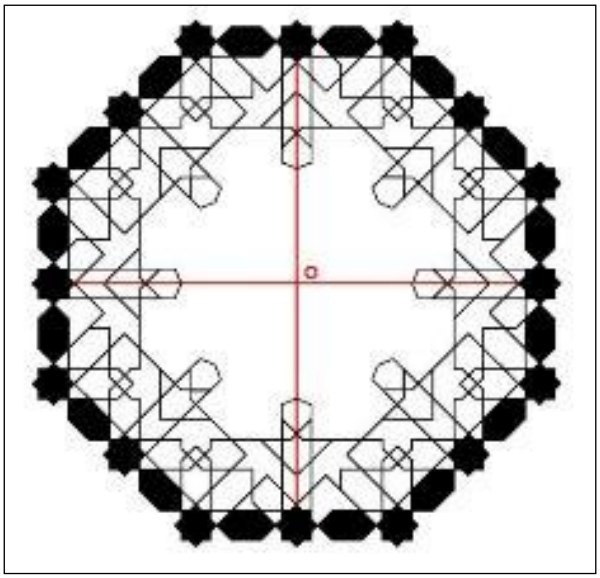


Figure 3-8: Squelette complet de la rosace

- Maintenant, reste à insérer la ceinture de l'étoile à 16, la figure 3.9. Pour cela il nous faut la taille du carré de base en reliant les point a, b, c, d

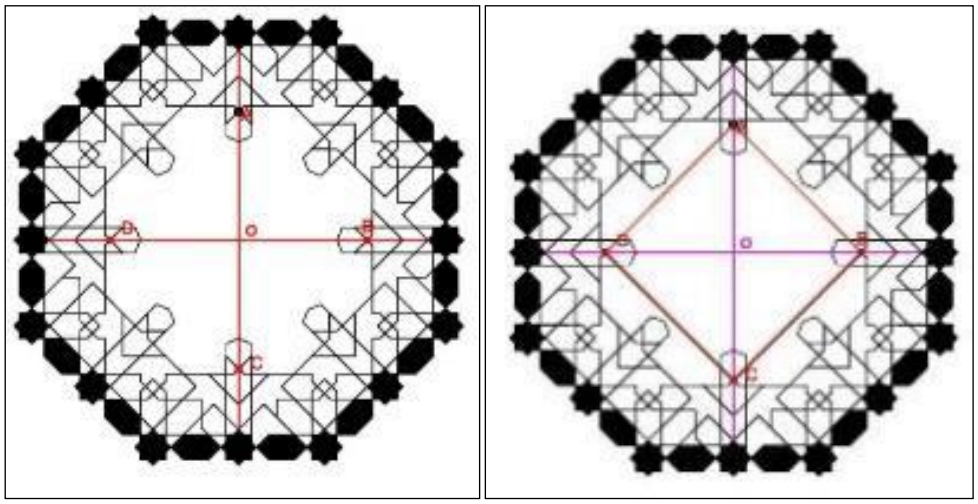


Figure 3-9: Extraction du carré

- Une fois le carré est bien extrait, il va subir 16 rotations par rapport au centre *o* pour obtenir la ceinture qui va nous aider à détecter l'étoile à 16. La figure 3.10 illustre cette phase.

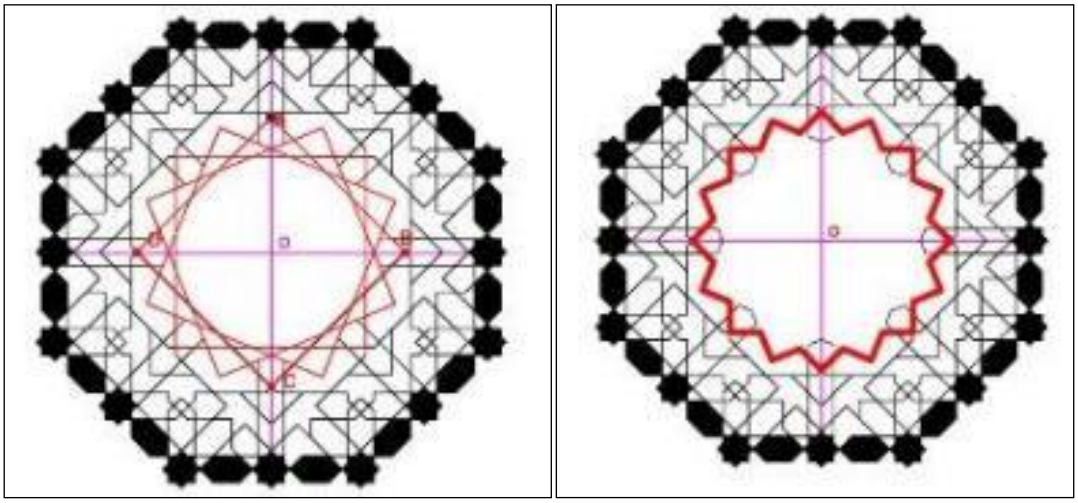


Figure 3-10: rotation 16 fois par rapport au centre

- Traçons ensuite les lignes qui sont symétriques par rapport au centre ***o***, il suffit alors d'éliminer quelques traits pour laisser apparaitre les tesselles intérieures. La figure 3.11 illustre cette phase.

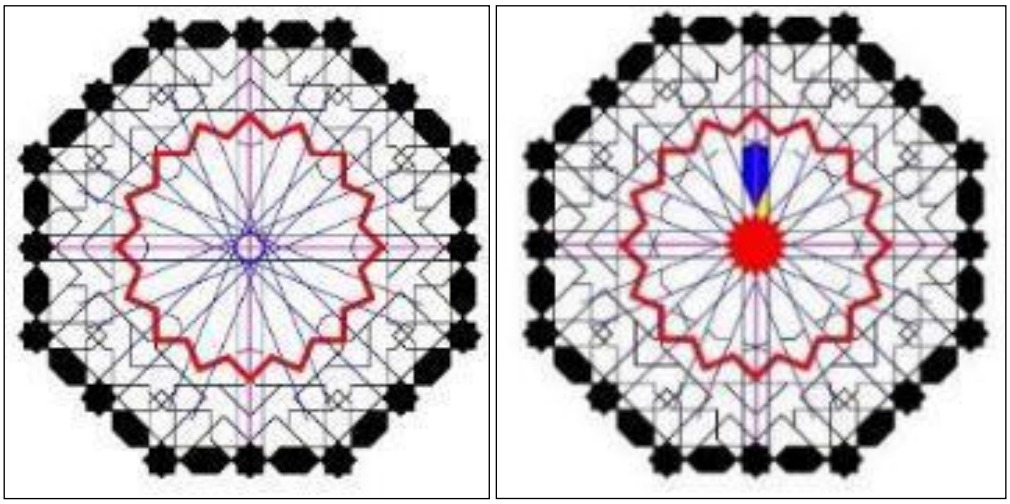


Figure 3-11: Principe de construction étoile à 16 et ces tesselles

Déjà trois tesselles sont mises en place, reste à faire sortir les autres tesselles, toujours en combinant toutes les opérations de symétrie possibles : translations, rotations, réflexions-miroirs et glissements (réflexion suivie d'une translation). La figure 3.12 illustre cette phase.

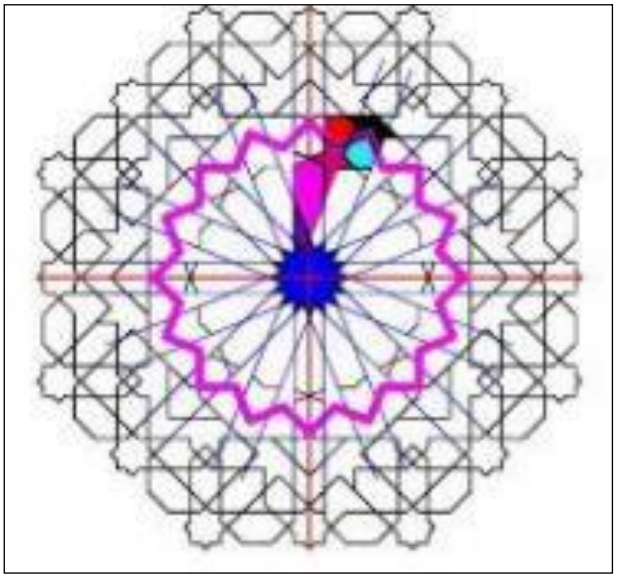


Figure 3-12: Etoile à 16 et ses tesselles

Finalement on aura l'étoile à 16 et ses principales tesselles.

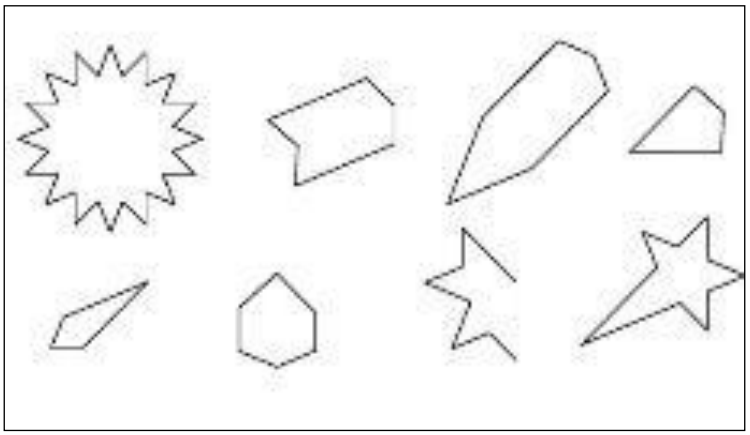


Figure 3-13: Etoile à 16 et ses pièces intérieures

On peut donc mettre en œuvre toutes les rosaces à base de l'étoile à 16.

5. Conclusion

L'étude méthodologique faite dans ce chapitre nous permet d'avoir une compréhension des méthodes de conception utilisées par les artisans pour construire les motifs géométriques de l'art islamique et les différents travaux qui ont essayé d'analyser et concevoir ces méthodes.

CHAPITRE 4: LA GEOMETRIE DES MOTIFS CONSTRUITS PAR LA TECHNIQUE TRADITIONNELLE '*TASTIR*'

1. Introduction

Dans ce chapitre nous étudierons la technique de conception de motifs géométriques dite *Tastir*. Cette technique, caractérisé par la beauté des motifs produits, a atteint son apogée sous la dynastie des Mérinides (13, 14ème siècle). Les ornements des Médersas Attarine Bouanania à Fez témoignent de la sophistication des ornements géométriques de cette période.

Ces ornements sont constitués par l'agencement spatial de rosaces de symétrie d'ordres $8*2^p$, $12*2^p$ (p = 0, 1, 2, 3) et $5*2^{p'}$ (p'= 0,1, et 2).

2. Le tracé géométrique ou '*Tastir*'

Le « *Tastir* » est un terme traditionnel faisant parti du dictionnaire des maitres artisans ou « Maalems » qui fait source aux tracés utilisant des mesures empiriques.

Le « *Tastir* » utilise des grilles formées de lignes et de cercles dans un cadre de forme carrée de côté L. La mesure caractérisant une grille est appelée *lqsma*. Cette mesure est liée à la dimension du cadre par la relation : L = n*q, la figure 4.1 montre un exemple de grille.

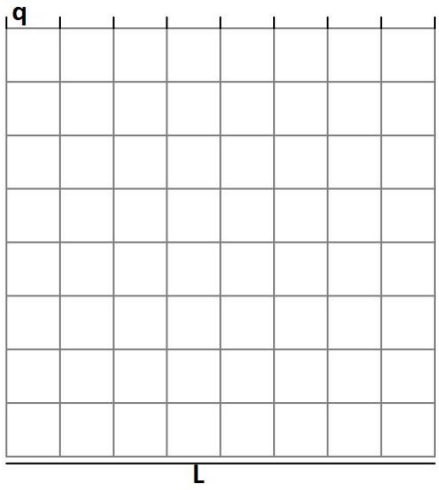


Figure 4-1 : Cadre de taille L=n*q

3. Description et formalisation de la méthode *Tastir*

3.1 Grille sous-jacente d'une rosace à huit

La figure 4.2-a illustre l'exemple d'un cadre carré où le motif apparaît en renforçant les lignes constituant la grille suivant des règles bien précises qui ne permettent aucune transgression.

Une pièce ou tesselle en forme d'étoile à huit sommets appelée « Khatem Slimani » ressort toujours au centre et aux quatre coins de la grille. Il s'agit de deux carrés tournés de 45° l'un par rapport à l'autre figure 4.2-b. Cette pièce importante permet d'abord de dériver un ensemble d'autres tesselles[2]. Elle permet par ailleurs, grâce à son agencement spatial la construction de tout le motif.

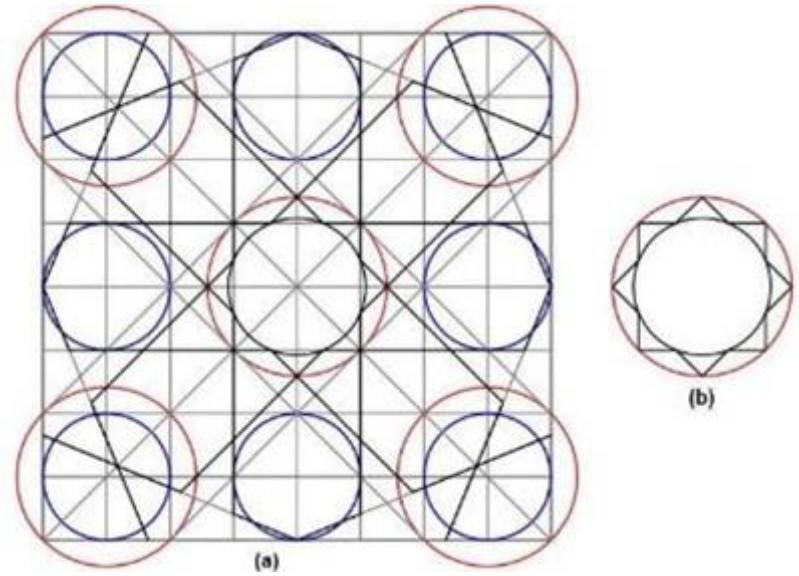


Figure 4-2 : (a) Motif et grille sous-jacente, (b) Khatem Slimani

3.2 Construction de la grille sous-jacente

Nous proposons de construire la grille sous-jacente d'une rosace à 8 en analysant le motif géométrique illustré par la figure 4.3-b.

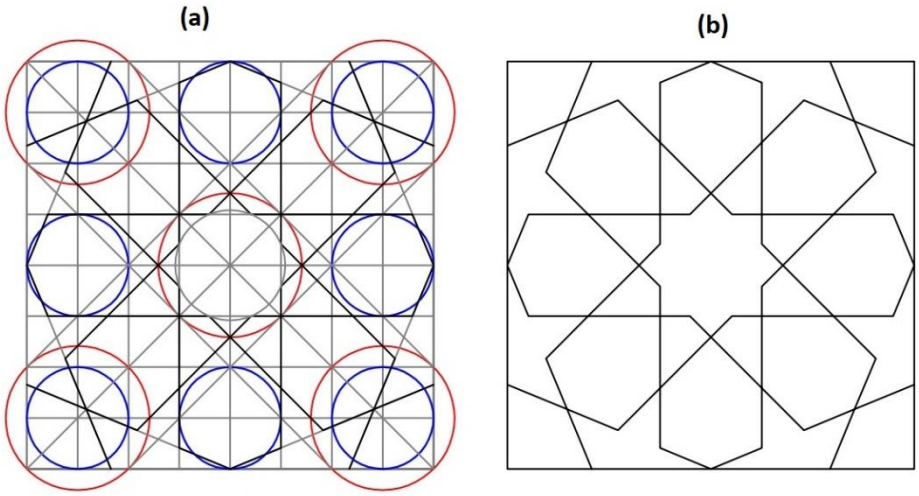


Figure 4-3 : (a) grille sous-jacente, (b) motif rosace à 8 branches

3.3 Conceptualisation de la méthode pour un motif de rosace à 8

La conceptualisation de la méthode de tracé, vient par l'utilisation des deux principes de l'art islamique : la symétrie et la géométrie.

Ci-dessous une présentation succincte avec des illustrations pour la construction de la rosace à 8 pétales. Les figures ci-dessous illustrent les étapes de construction :

La première étape consiste à utiliser le principe de symétrie, en tenant compte des deux symétries axiales (ligne en rouge), ce motif de base figure 4.4-a peut-être décrit par le motif carré de la figure 4.4-b, que nous appelons un motif fondamental, la figure 4.4-c montre la grille sous-jacente sous le motif on fondamentale.

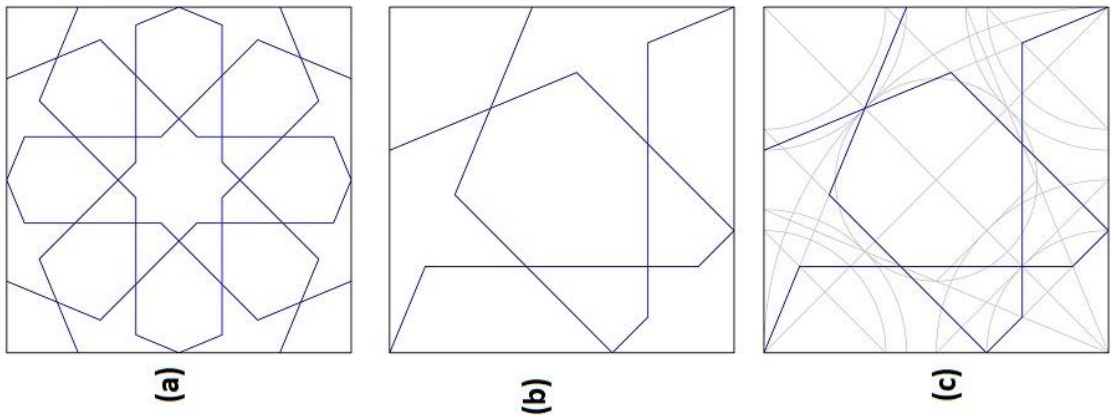


Figure 4-4 : (a) motif de base rosace à 8, (b) motif fondamentale, (c) grille sous-jacente sous le motif fondamentale

Les étapes suivantes vont utiliser le principe de la géométrie mathématique pour déchiffrer et calculer les différents cercles de la grille sous-jacente de motif fondamentale figure 4.5.

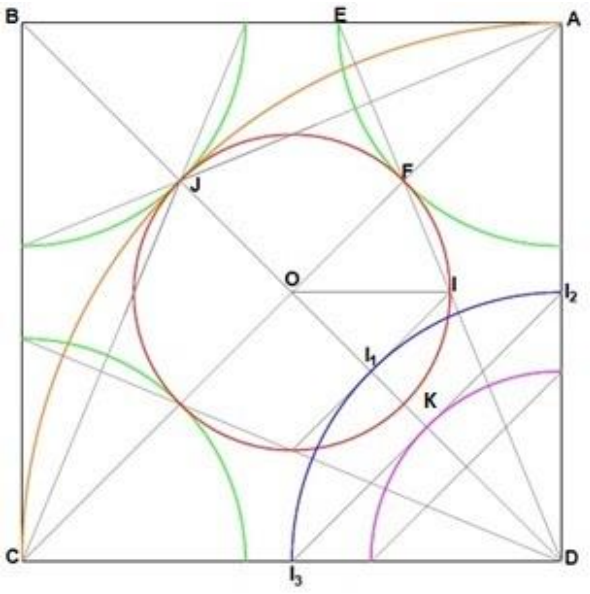


Figure 4-5 : Différents cercles utilisés pour construire le motif fondamental

- Démonstration mathématique

A. Rayon de cercle orange

$$r_0 = DJ = AD = a \quad \text{(Taille de carré)}$$

B. Rayon de cercle vert

$$r_1 = BJ = BD - DJ = a\sqrt{2} - a$$

$$r_1 = a * (\sqrt{2} - 1)$$

C. Rayon de cercle rouge

$$r_2 = OJ = BO - BJ$$

$$r_2 = \frac{a\sqrt{2}}{2} - a * (\sqrt{2} - 1)$$

$$r_2 = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) a$$

D. Rayon de cercle bleu DI_1

- Calculons IF

OF=OI (rayon de cercle)

$$\angle(OFI) = \angle(OFD) = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$$

Le triangle OFI isocèle en O par ce que $OF = OI$ et $\angle(IOF) = \frac{\pi}{4}$

On applique théorème de Al-Kachi dans le triangle IOF

$$IF^2 = OI^2 + OF^2 - 2 * OI * OF * cos\frac{\pi}{4}$$

$$IF^2 = {r_2}^2 + {r_2}^2 - 2{r_2}^2 * cos\frac{\pi}{4}$$

$$IF^2 = {r_2}^2 * (2 - \sqrt{2})$$

$$IF = r_2 * \sqrt{(2 - \sqrt{2})}$$

- Calculons EF

$$EF^2 = AE^2 + AF^2 - 2 * AE * AF * cos\frac{\pi}{4}$$

$$\mathrm{EF}^2 = {\mathrm{r}_1}^2 + {\mathrm{r}_1}^2 - 2 * \mathrm{r}_1 * \mathrm{r}_1 * \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\mathrm{EF}^2 = {\mathrm{r}_1}^2 * (2 - \sqrt{2})$$

$$\mathrm{EF} = \mathrm{r}_1 * \sqrt{(2 - \sqrt{2})}$$

- Calculons DE

Dans le triangle rectangle DEA

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{EA}{DE}$$

$$DE = \frac{r_1}{\sin\frac{\pi}{8}}$$

- Calculons DI

$$DI = DE - IF - EF$$

$$DI = \frac{r_1}{\sin\frac{\pi}{8}} - r_1 * \sqrt{(2-\sqrt{2})} - r_2 * \sqrt{(2-\sqrt{2})}$$

Enfin calculons DI_1

Dans le triangle DII_1

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{DI_1}{DI}$$

$$r_3 = DI_1 = \cos\frac{\pi}{8} * DI$$

Rayon de cercle rose DK, à partir de ce rayon on trouve le cercle qui entoure 'Khatem Slimani' Dans le triangle DKI_2 rectangle en K parce que (I_2I_3) // (AC) et (AC) perpendiculaire (BD)

L'angle (KDI_3) = $\frac{\pi}{4}$

Donc on peut dire que $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{DK}{DI_3}$

Donc $r_4 = DK = DI_3 * \cos\frac{\pi}{4} = r_3 * \frac{\sqrt{2}}{2}$

3.4 Automatisation de la méthode pour un motif de rosace à 8

Chaque rosace est définie par le rayon qui entoure l'étoile à 8 et le rayon de rosace donc on a besoin de trouver 3 points qui caractérise l'étoile à 8 et 2 points qui caractérise la rosace. Ces points sont calculés à partir des rayons précédents figure 4.6.

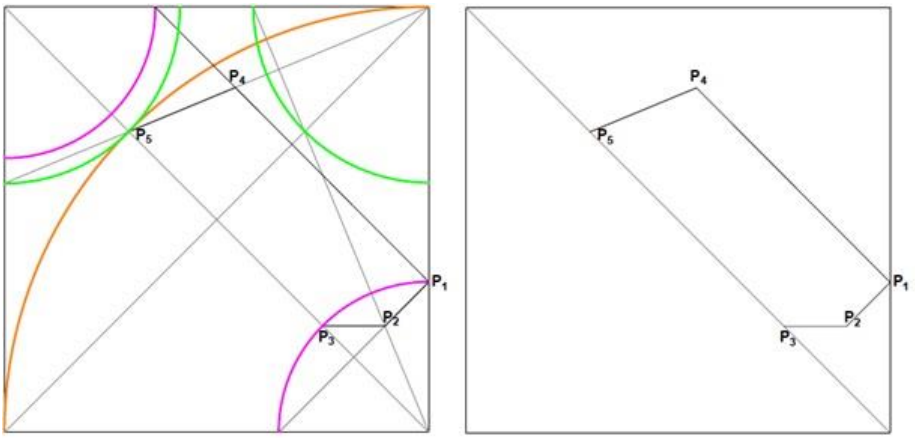


Figure 4-6 : Points qui caractérisent l'étoile et la rosace

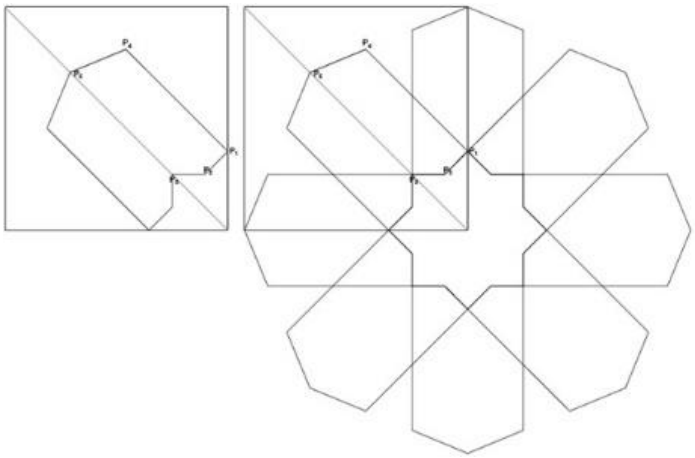


Figure 4-7: Construction de rosace à 8

On fait des symétries et des rotations successives on trouve la rosace à 8 figure 4.7

3.5 Génération d'autres motifs

La compréhension et la maitrise de la grille sous-jacente peut nous aider à développer et extraire plusieurs motifs géométriques, la figure 4.8 illustre plusieurs motifs développer à partir de la même grille.

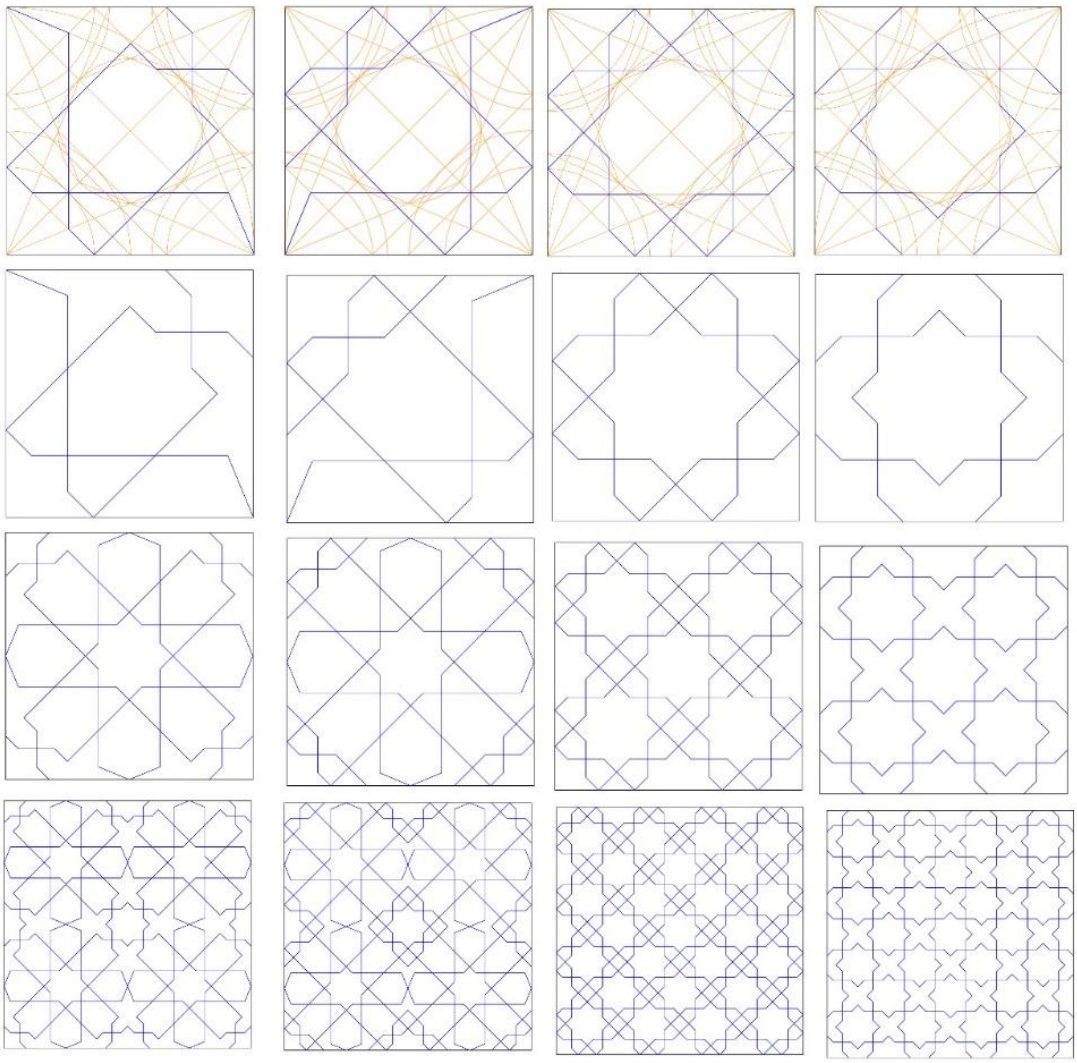


Figure 4-8 : Plusieurs motifs développés à partir de la même grille

4. Tesselles dérivés du Khatam Slimani

Chaque motif se compose de plusieurs formes géométriques, voir figure 4.9 par exemple on cherchera les différentes relations entre les tesselles.

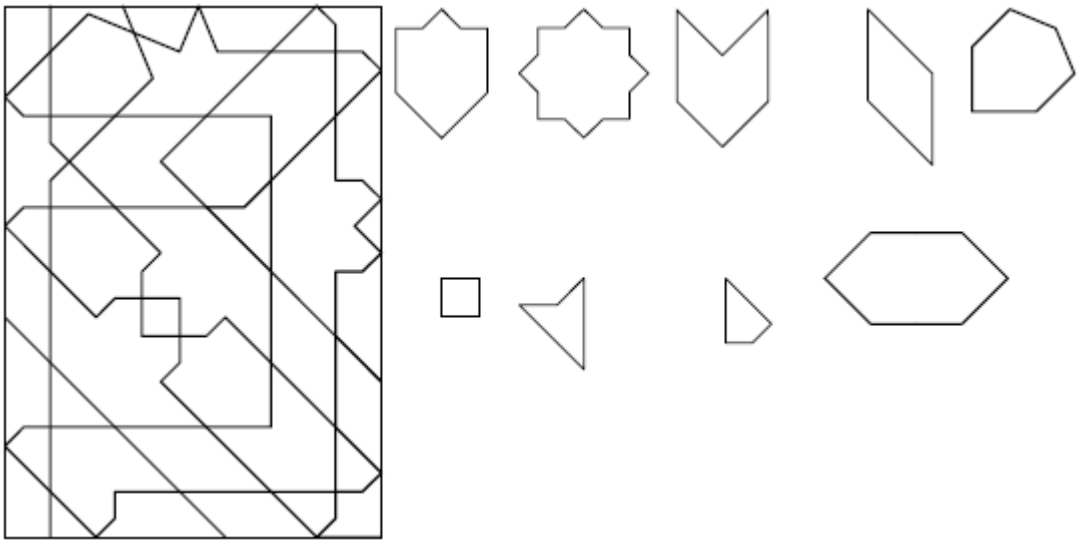


Figure 4-9 : Motif fondamentale et ses tesselles constitutives

Lafigure 4.10 montre des exemples de motifs dérivés de l'étoile à 8 (Khatam Slimani)

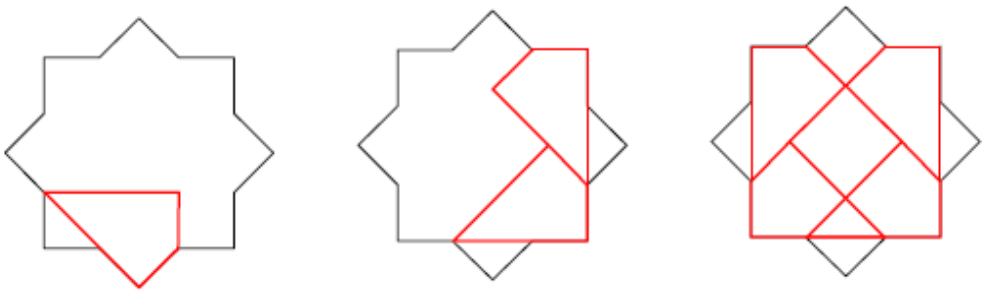


Figure 4-10 : L'apparition d'un petit carré et des petits triangles dans l'étoile à 8

Deuxièmement quand on prend l'étoile à 8 et qu'on y met une tesselle appelée 'lbaoula' Il devient clair que la longueur de "lbaoula" est égale à la longueur de l'étoile à 8 ainsi le

périmètre et l'aire de "lbaoula" est égal au périmètre et à l'aire de l'un des deux carrés formant l'étoile à 8 voir figure 4.11.

Pour clarifier cela, on grise un des deux carrés qui composent l'étoile à 8, on remarque que nous avons quatre triangles non ombrés, et si nous ombrons "lbaoula", nous avons quatre triangles non ombrés.

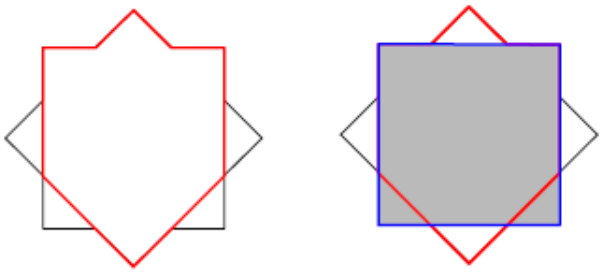


Figure 4-11 : Exemple pour montrer circonférence et surface

Troisièmement, en plaçant la tuile en losange dans l'étoile à 8 de cette manière, voir Figure 4.12, nous remarquons l'apparition de la forme 'Louzt Lmtmn', si nous ajoutons un autre 'Louzt Lmtmn' à l'autre extrémité de la forme en losange, nous extrayons une nouvelle tuile appelée le tambour.

En déplaçant le losange vers le haut, il devient clair que le côté du losange est égal au côté de l'un des deux carrés formant l'étoile octuple, on peut donc en conclure que le périmètre du losange est égal au périmètre de l'un des deux carrés formant l'étoile à 8.

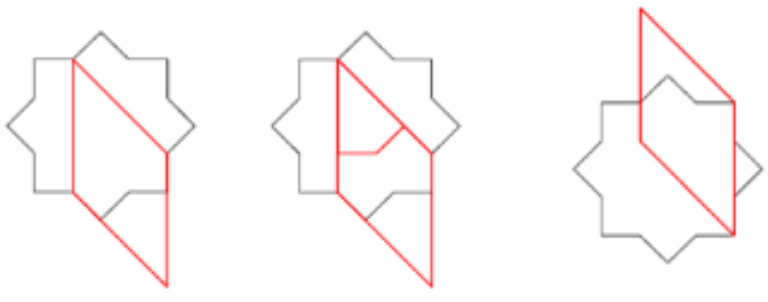


Figure 4-12 : Relation entre étoile à 8 et losange

Chaque fois que nous comparons les tuiles avec l'étoile à 8, différentes relations géométriques apparaissent (voir la figure 4.13). On peut également voir que les angles de toutes ces tuiles sont égaux à 45 degrés ou leurs multiples ou divisions. Par conséquent, nous pouvons dire que la relation entre les pièces combine la longueur, le périmètre, l'aire et les angles.

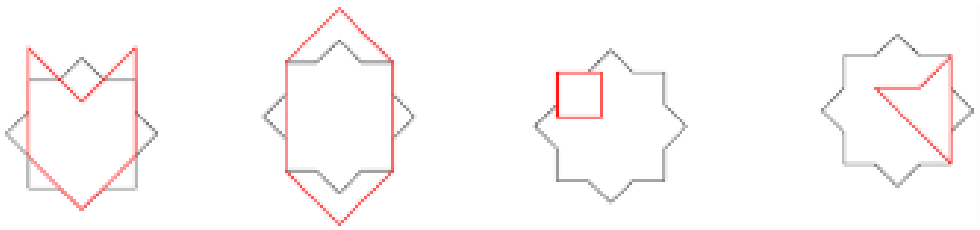


Figure 4-13 : Autre relations entre les tesselles

Enfin on peut voir dans la figure 4.14 qu'on peut extraire les tesselles à partir de l'étoile à 8.

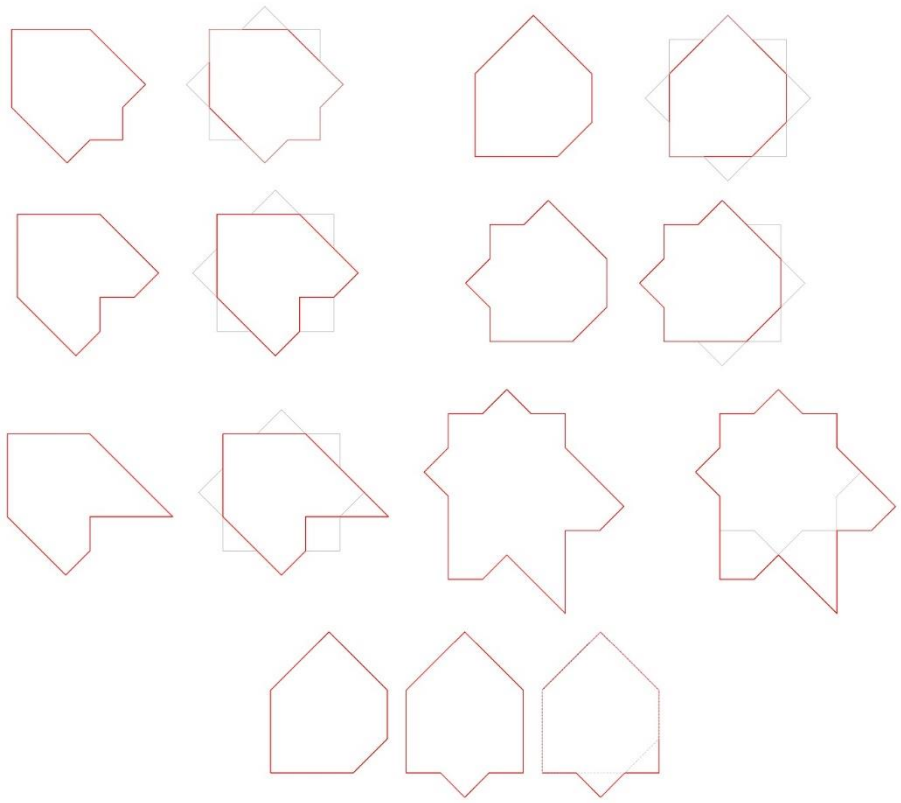
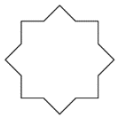
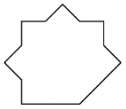
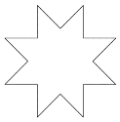
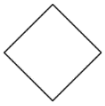
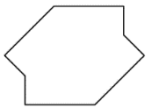
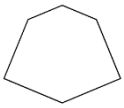
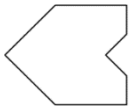
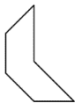
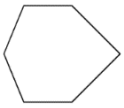
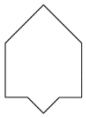
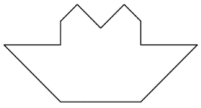
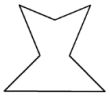


Figure 4-14 : Etoile à 8 et quelques tesselles extraites

Le tableau ci-dessous regroupe des tesselles extraites à partir de l'étoile à 8.

 KHATEM SLIMANI	 TAJE	 SFET BENDRISSIYA	 CHOUKA
 LKTEF MHLOUL	 KHATEM BDLOU	 LQFIA	 LQFA

 MHERRA	 MRBAA	 LOUZAT LMTEMEN	 TALET
 QUENDIL BAOULA	 QUENDIL TARBIA	 LFERMA LMEGRSA	 LQUERKBA
 LAARJA	 NEJIMA	 TOUYER	 KEF
 LFERMA LMGRSA	 LQFA	 LKTEF	 METWA LGRAA
 KHTMKHMSYA	 SAFET	 LAAKDA	 SAFET LBAOULA
 LKTF MHLOUL	 LKEF	 KEF MTRKA SRIR	 TBAL

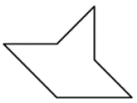
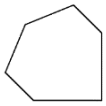
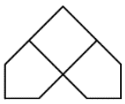
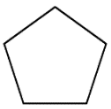
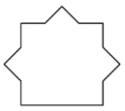
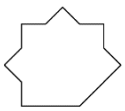
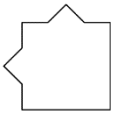
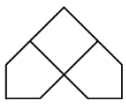
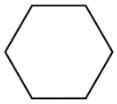
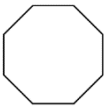
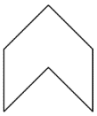
 TBL	 SEFT SGHIR	 OKDAT LKOFI	 KORA KHMSYA
 KHATEM TERA	 KHATEM DLOU	 KHATEM RKEN	 KHATM SDASYA
 OKDAT LKOFI	 ROUYSE	 KORA SDASYA	 KORA TMANYA
 LMTWA MHDODA	 LKEF SGHIR	 LQFA	 LMTWA

Tableau 4.1 : Tesselles extraites à partir de l'étoile à 8

5. Conclusion

La notion de symétrie est présente dans le processus de construction des motifs. Ces derniers sont tendus par des grilles caractérisées par une unité de mesure appelée *lqsma* qui nous donnent la taille de tesselles.

La conceptualisation de la méthode pour la rosace à 8, d'une part elle nous a permis d'automatiser le processus de construction, d'autre part elle nous autoriser d'extraire des relations entre les différentes tesselles.

CHAPITRE 5: CONCEPTION ASSISTEE PAR ORDINATEUR DE ROSACES D'ORDRES MULTIPLES DE 16 UTILISANT LA METHODE TRADITIONNELLE *TASTIR*

1. Introduction

Historiquement, les rosaces remontent à la période de l'art paléolithique et montrent l'un des plus anciens exemples de la volonté humaine d'exprimer la régularité et la symétrie à travers l'art, notamment architectural. Au fil des siècles, elles sont apparues dans les œuvres d'art fondamentales d'une large gamme de cultures (romane, byzantine, andalouse...). Elles sont largement utilisées avec un rendu complexe et abondamment coloré. On trouve des motifs très complexes avec de grandes rosaces, telles que des rosaces d'ordres 48, 64, 72 et 96.

L'examen des rosaces montre que celles-ci constituent la base la plus simple pour un traitement mathématique des ornements, fondé sur la géométrie et la symétrie. Elles représentent l'illustration visuelle la plus évidente des symétries de groupe de points Cn (n) et Dn (nm). La détermination des caractéristiques des rosaces repose sur les deux étapes suivantes :

- Détection du centre de symétrie
- Identification de la symétrie par son type, son ordre et son rayon.

Plusieurs auteurs ont étudié les rosaces aussi bien dans l'art islamique que dans l'art appartenant à d'autres cultures. Castera (J.-M. Castera, 1996) a essayé de trouver l'origine de ce type de rosace. (Jablan, 1995) a présenté un chapitre sur les rosaces dans l'ouvrage Theory of Symmetry and Ornament. (Abad-Zapatero, 2014) s'est intéressé aux groupes de points des rosaces rencontrés dans les cathédrales. (Lee & Soliman, 2014) ont analysé les rosaces géométriques dans les motifs décoratifs islamiques. Cependant, aucun de ces auteurs n'a étudié en détail les rosaces à 16 pétales ou les rosaces marocaines d'ordres supérieurs.

Dans ce chapitre, nous allons d'abord étudier les propriétés de rosaces rencontrées dans l'art ornemental marocain. Pour comprendre le processus de construction de la rosace à 16 pétales, nous allons ensuite analyser la méthode traditionnelle utilisée par les artisans marocains (*Tastir*). Finalement, nous allons automatiser le processus de construction de la rosace à 16 ainsi que sa généralisation aux rosaces d'ordres multiples de 16.

2. Analyse géométrique des rosaces

2.1 Introduction

Dans l'art géométrique marocain, les rosaces sont les éléments les plus pertinents et les plus accrocheurs d'un motif fini. Toutes les rosaces trouvées sont tirées de polygones tels que des pentagones, des hexagones et des octogones. Nous classons ces rosaces conformément à leurs symétries en trois groupes :

- Le « groupe pentagone » est composé de rosaces de 5, 10, 20 et 40 pétales ;
- Le « groupe hexagonal » est composé de rosaces à 6, 12, 24, 48 et 96 pétales ;

- Le « groupe octogone » est composé de rosaces à 8, 16, 32, 64 et 128 pétales.

En analysant des ornements de type étoilés, nous remarquons que les surfaces sont couvertes par agencement spatial des rosaces. La figure 5.1 montre quatre rosaces géométriques caractérisées par leur ordre de symétrie respectif, 8, 12, 16 et 24.

La composition spatiale des rosaces dans les décors maroco-andalous permet de différencier entre trois modèles de décors :

• Les frises : Les rosaces sont distribuées suivant une direction ;

• *Les* papier-peints : Les rosaces sont distribuées suivant deux directions du plan ;

• Décors de type Naaoura : Les rosaces sont distribuées de manière rotationnelle, et ce autour d'un centre : distribution radiale des rosaces.

La figure 5.2 met en évidence des distributions différentes : distribution périodique (a) et distribution radiale (b).

La figure 5.3 montre que les rosaces utilisées dans la construction de ornements géométriques étoilés sont construites à l'aide d'un polygone régulier. Il est facile d'observer qu'une rosace est formée d'une étoile centrale appelée *Khatem* , entourée de deux types de formes ou *Farma*ts (cellules médianes et cellules externes) (Lee & Soliman, 2014)

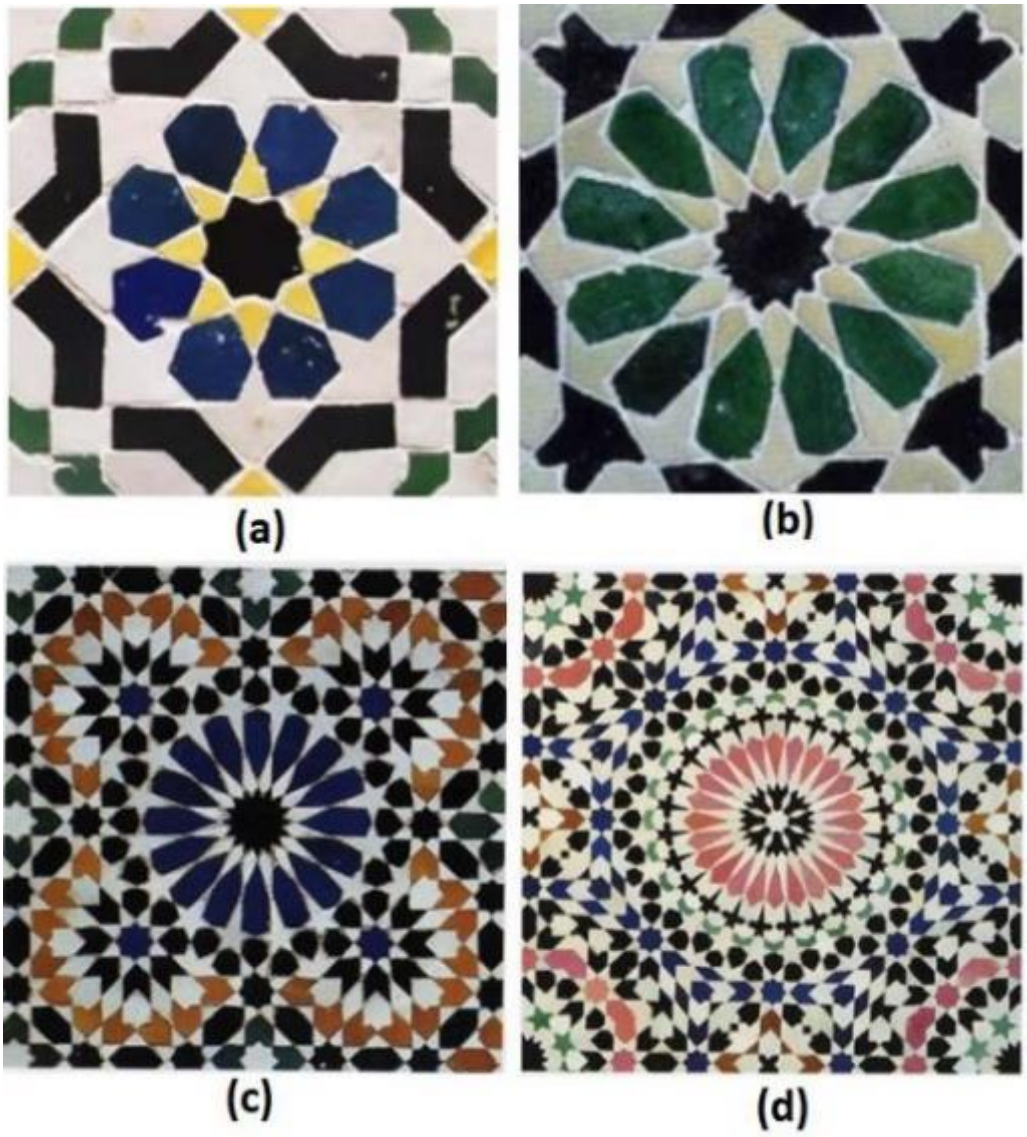
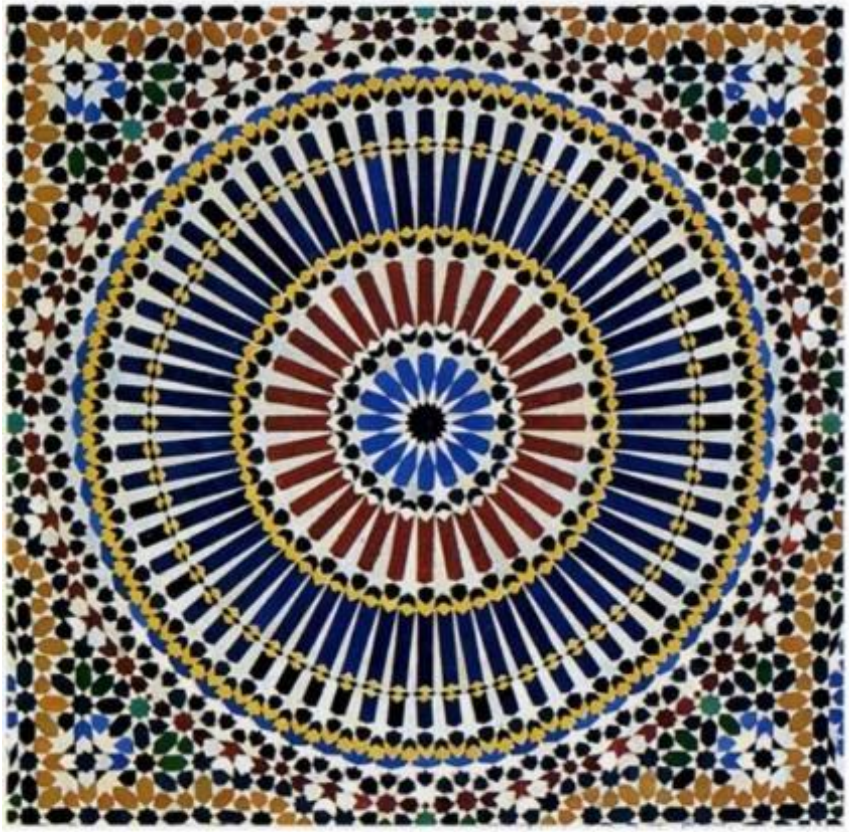


Figure 5-1 : Exemple de rosaces géométriques. (a) rosace d'ordre 8, (b) rosace d'ordre (12), (c) rosace d'ordre 16 (d) , rosace d'ordre 24

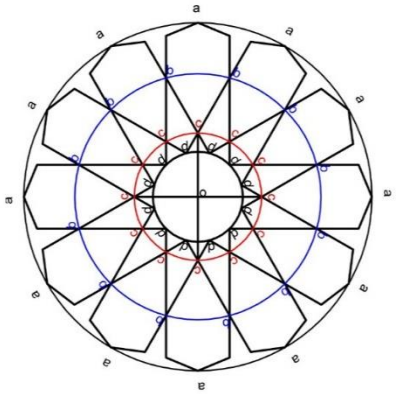


(a)



(b)

Figure 5-2 : Deux exemples d'arrangement spatial des rosaces



oa : rayon de rosace à 12 pétale
oc : rayon de extérieur de l'étoile à 12
od : rayon de intérieur de l'étoile à 12
o : centre de rosace

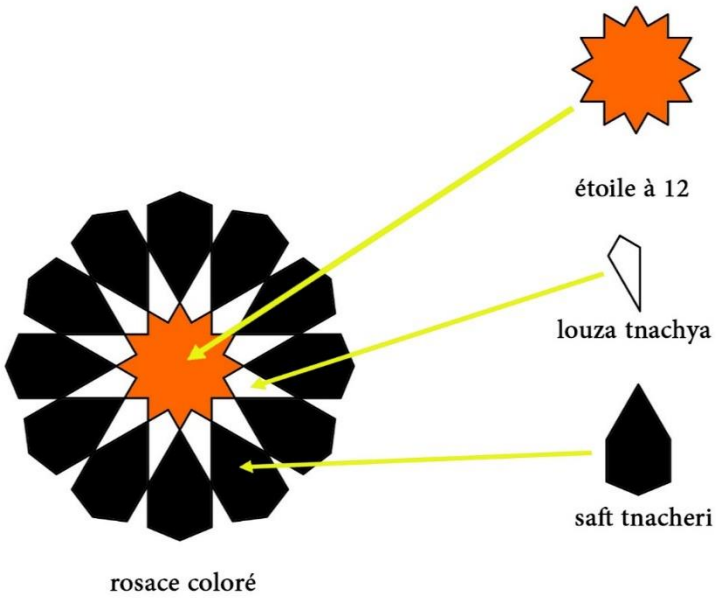


Figure 5-3 : Exemple de rosace synthétique et sa nomenclature selon (Lee & Soliman, 2014)

Plusieurs auteurs ont étudié les rosaces. Cependant, très peu se sont intéressés au « groupe octogone » et plus précisément aux rosaces à seize pétales qui représentent le motif le plus courant dans l'art géométrique maroco-andalou (Aboufadil et al., 2019).

2.2 Types de rosaces à 16

Dans l'art géométrique maroco-andalous, nous distinguons les trois types suivants de rosaces à 16 :

- Rosace à 16 simple, illustrée par la figure 5.4, est composée de trois composants de forme appelée : étoile à 16, Louza-Stachria et Saft-Stachri.
- Rosace à seize avec simple extension, illustrée à la Figure 5.5-a, est composée des trois formes de la rosace simple et de la forme Chouka.
- Rosace à seize avec double extensions illustrée à la figure 5.5-b

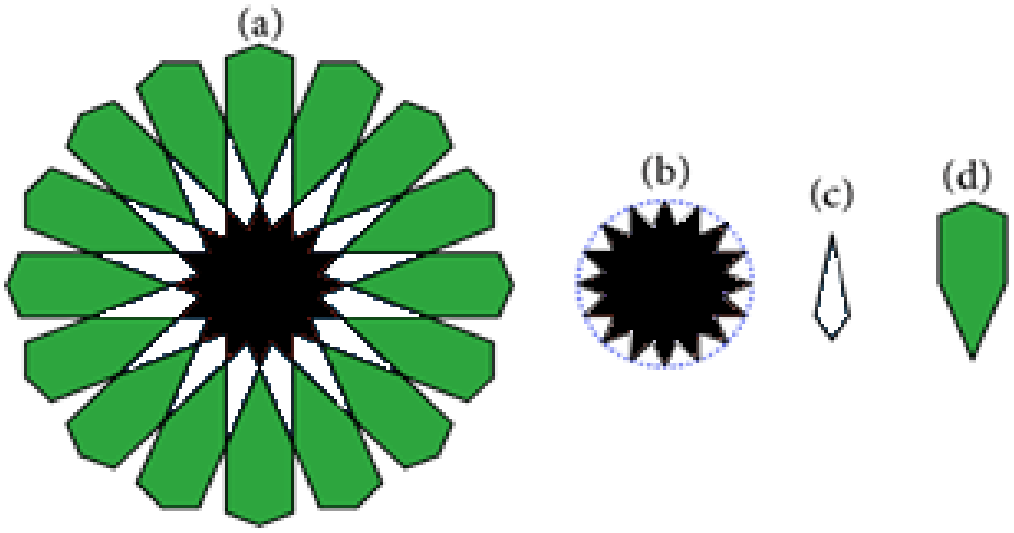


Figure 5-4 : Rosace à 16 pétales avec ses 3 composantes : (a) Rosace à 16, (b) étoile à 16, (c) Louza Stachria, (d) Saft Stachri

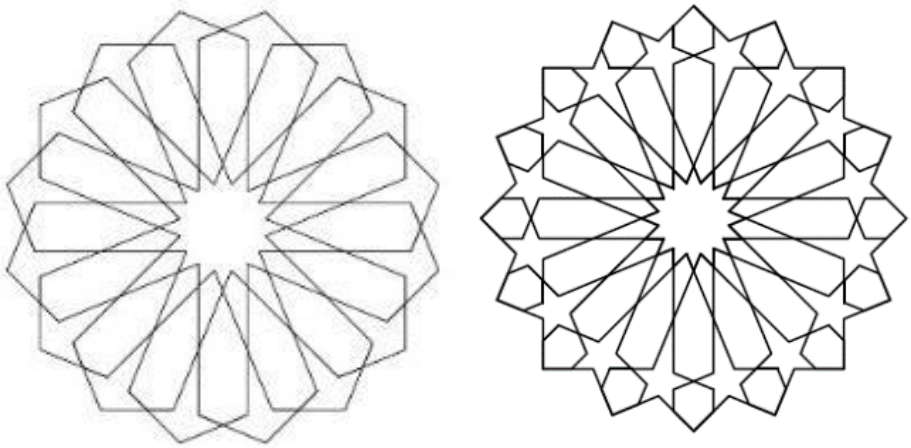


Figure 5-5 : a- Rosace à seize avec une simple extension, b- Rosace à seize avec une double extension

Les ornements maroco-Andalous présentés à la figure 5.6 montrent que les variantes les plus utilisées de la rosace à seize pétales sont celles à double extension.

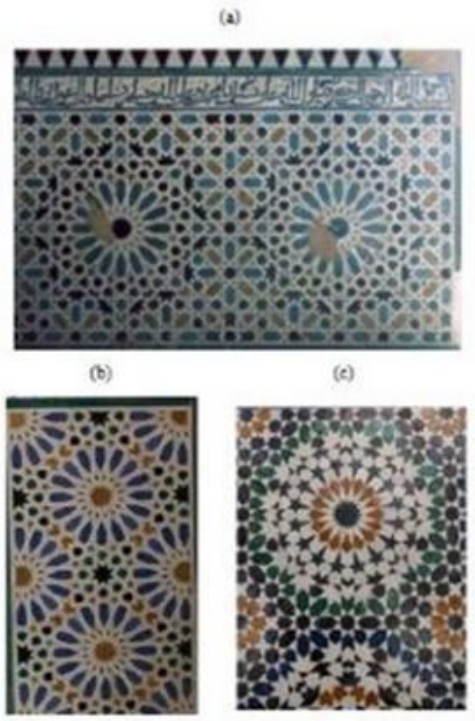


Figure 5-6 : Ornements avec rosaces à seize pétales : (a) Alhambra-Grenade, (b) Alcazar-Séville, (c) Mausole My-Driss – Fez

3. Analyse du tracé d'un motif avec rosace 16

Avant de proposer une automatisation de la méthode de conception traditionnelle, nous commençons par analyser un motif périodique contenant une rosace à seize.

La figure 5.7 illustre le cas d'un motif à rosace d'ordre 16. La figure 5.7-a montre le motif original alors que la figure 5.7-b illustre son tracé géométrique.

Tenant compte des deux symétries axiales (ligne en rouge et bleu), la conception de ce motif répétitif peut être réduite à celle de son motif de base illustré à la figure 5.8-a.

Pour comprendre le processus de construction de ce motif de base nous allons commencer par une analyse de son tracé, tel que réalisé par les maitres artisans marocains.
A cet effet, nous allons décrire brièvement la méthode de *Tastir* adoptée par les artisans marocains. Cette méthode consiste à définir *lqsma* ou mesure définissant la largeur de toutes les tesselles du motif. Elle consiste par ailleurs à définir les rayons caractéristiques de la rosace d'ordre 16 et de l'étoile d'ordre 8.
La figure 5.8-b représente la grille sous-jacente de ce motif de base tel que produite par les artisans. On peut extraire de cette grille les caractéristiques principales suivantes :

- Le rayon intérieur en rouge et le rayon extérieur en bleu de l'étoile à 8 ou de ses dérivés,
- Ensuite, le rayon de l'étoile à 16 en vert,
- Et enfin, le rayon de la rosace à 16 en bleu ciel.

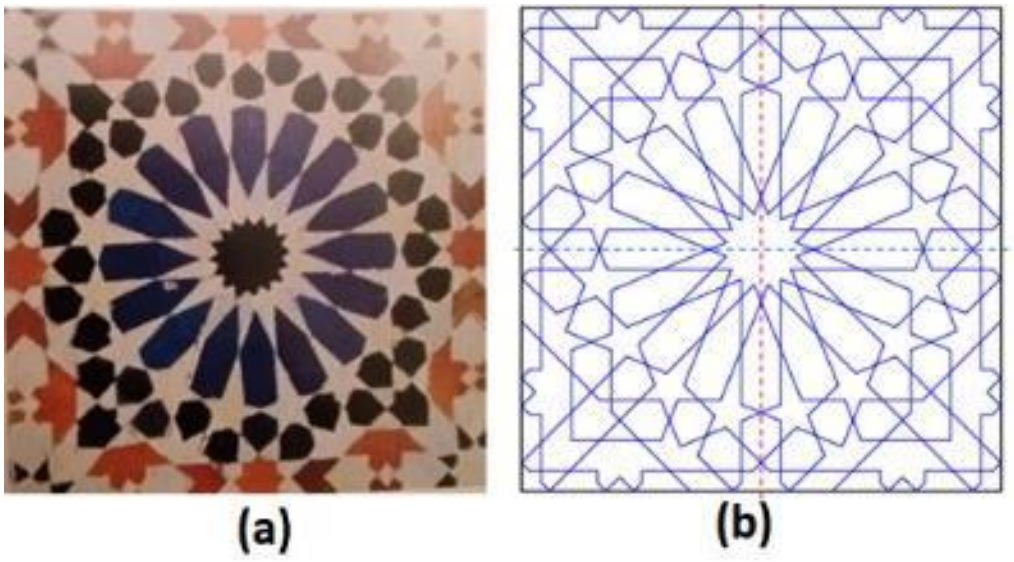


Figure 5-7: Ornement contient une rosace à 16: (a) motif répétitif, (b) tracé géométrique de motif répétitif de (a)

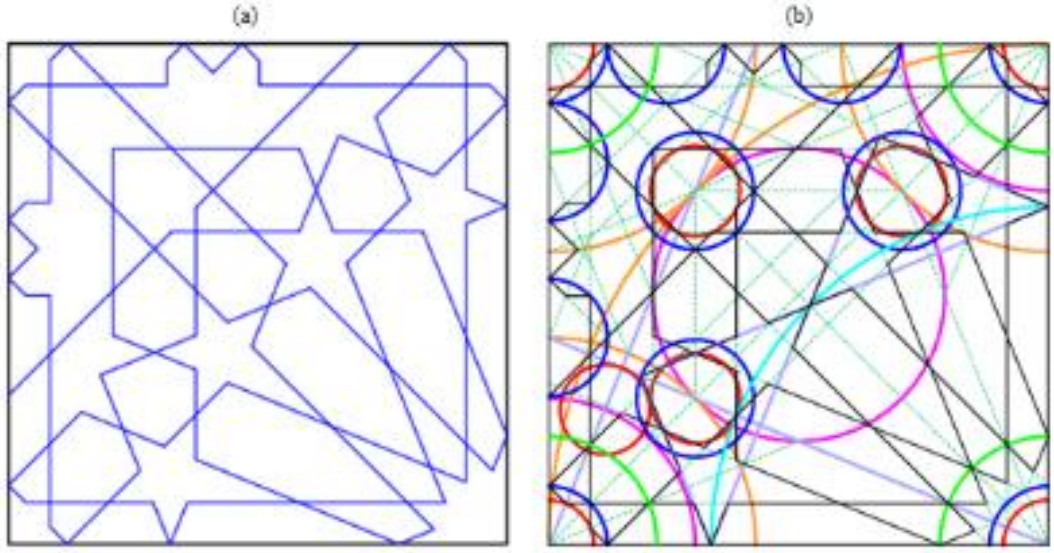


Figure 5-8: motif de base et sa grille: (a) motif de base, (b) grille sous-jacente du motif de base

3.1 Calcul de paramètres

La compréhension de la méthode de tracé *Tastir* va permettre lors de son automatisation de calculer mathématiquement ces paramètres sans avoir besoin de tracer la grille sous-jacente.

3.2 Calcule de rayon intérieur de "Khatem Slimani"

Le rayon intérieur de *Khatem Slimani* correspond à la distance entre les points R et S représentés sur la figure 5.9.

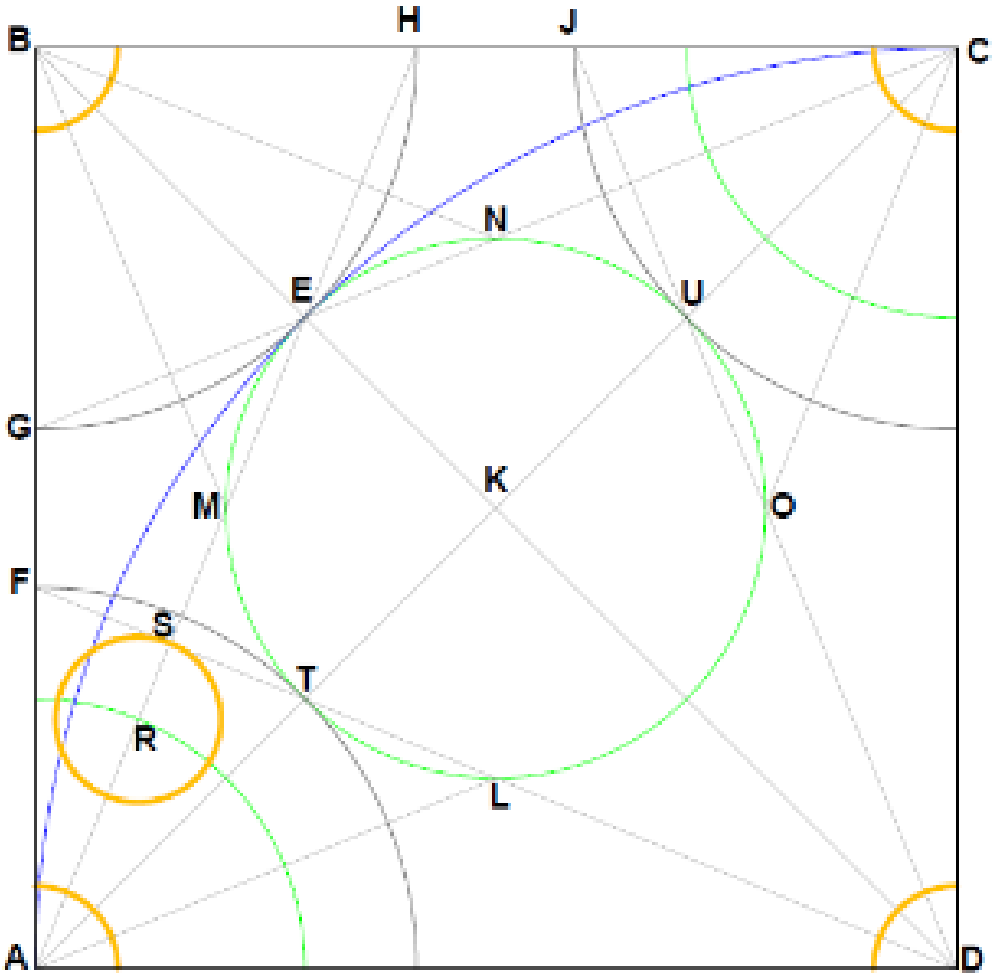


Figure 5-9 : calcul du rayon intérieur de Khatem Slimani

D'abord, on commence par le tracé d'un carré avec ses deux diagonales (BD) et (AC) et un arc dont le centre est le coin inférieur droit D du carré. Rappelons que le rayon est égal au côté du carré. Notons bien aussi que cet arc n'est que l'intersection du cercle avec le carré. Ensuite, on dessine trois arcs dont les centres sont

Le coin supérieur droit C et gauche B et le coin inférieur gauche A. Les trois arcs ont des rayons égaux à la distance B et E qui est la différence entre la diagonale et le côté de carré, puis on trace aussi 4 droites (AH), (DJ), (CG) et (DF). Ces droites divisent respectivement en deux les angles (BAC), (CDB), (BCA) et (ADB). En plus, on trace un cercle et 2 arcs dont les centres sont le centre du carré K (intersection des diagonales), le coin A et le coin C. Les rayons sont égaux à la distance entre le centre du carré K et l'intersection de la diagonale (BD) avec l'arc dont le centre est le coin D de rayons égal à la distance B et E qui est la différence entre la diagonale et le côté de carré. Enfin, on trace 4 droites (AL), (DL), (BN) et (CN) : ces droites divisent les angles (CAD), (ADB), (DBC) et (ACB) successivement à 22.5 degrés. Donc, on trouve, à partir de la figure 9, que :

$$RS = AS - AR \qquad (1)$$

D'une part, On calcule la distance entre A et R, notée AR.

On a :

$$AT = BE = a(\sqrt{2} - 1)$$

$$AR = KT = AK - AT$$

$$AR = \frac{AC}{2} - AT$$

$$AR = \frac{a\sqrt{2}}{2} - a(\sqrt{2} - 1) = \frac{a\sqrt{2} - 2a\sqrt{2} + 2a}{2}$$

$$AR = \frac{2a - a\sqrt{2}}{2}$$

$$AR = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) a \quad (2)$$

D'autre part, on calcule la distance entre A et S, notée AS.

On connaît la valeur de deux angles dans le triangle ASD. Donc :

$$\angle ASD = 180 - \angle SAD - \angle ADS$$

$$\angle ASD = 180 - 67.5 - 22.5$$

$$\angle ASD = 90$$

Par conséquent, la ligne AS est perpendiculaire sur la ligne DF:

$$\sin \angle ADS = \frac{AS}{AD}$$

$$\sin 22.5 = \frac{AS}{a}$$

$$AS = (\sin 22.5)\, a \quad (3)$$

En substituant (2) et (3) dans (1), on trouve :

$$RS = (\sin 22.5) * a - \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) * a$$

$$\mathrm{RS} = a * \left(\sin 22.5 - \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

3.3 Calculer le rayon extérieur de "Khatem Slimani"

Le rayon extérieur de *Khatem Slimani* correspond à la distance entre les points B et N (Voir figure 5.10) :

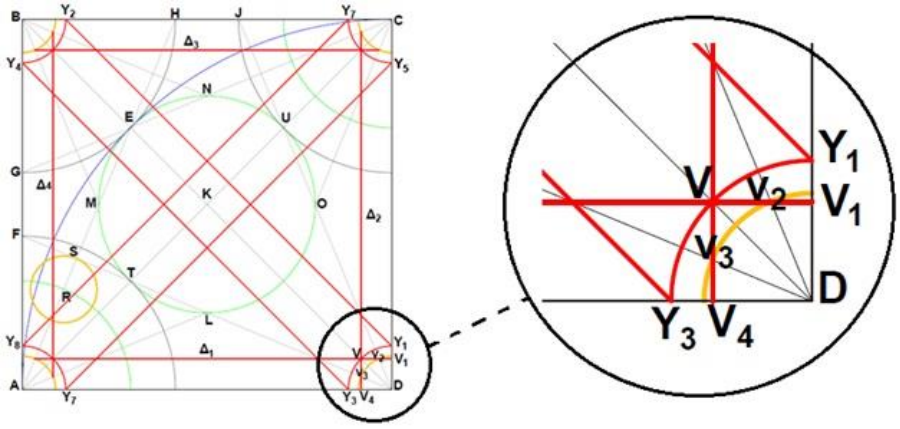


Figure 5-10: deuxième rayon utiliser pour construire la grille sous-jacent

Sur la figure 5.10, nous remarquons que [AD] et [CD] sont perpendiculaires, (Δ1) et (Δ2) sont également perpendiculaires.

- Soit V l'intersection entre (Δ_1) et (Δ_2)
- Soit V_1 l'intersection entre (Δ_1) et (CD)
- Soit V_2 l'intersection entre (DJ) et l'arc de cercle centré en D avec le rayon égale à RS
- Soit V_4 l'intersection entre (Δ_2) and (AD)

Par conséquent, DV_1VV_4 est quadrilatéral (rectangle ou carré).

Comme V appartient à la bissectrice de l'angle (V_1DV_4), donc

$VV_1 = VV_4$ D'où, DV_1VV_4 est un carré.

Calculons DV : DV_1V est un triangle rectangle on V_1

et l'angle (V_2DV_1) =$\frac{\pi}{8}$, Donc $\cos(V_2DV_1) = \frac{DV_1}{DV_2}$

$$DV_1 = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) * DV_2 = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) * RS$$

En plus, on a DV_1VV_2 est un carré, ses côtés sont égaux.

Donc, on a toutes les informations pour appliquer le théorème de Pythagore :

$$DV = DV_1\sqrt{2} = RS * \sqrt{2} * \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

3.4 Calcul des rayons de l'étoile à 16 et de la rosace à 16

Afin de calculer le rayon qui définit l'étoile à 16, il est nécessaire de calculer le rayon DW du cercle rose, cela veut dire la distance entre D et W, illustrée dans la figure 5.11. Aussi, pour calculer le rayon définissant la rosace à 16, nous devons calculer le rayon DX du cercle bleu ciel illustré dans la même figure.

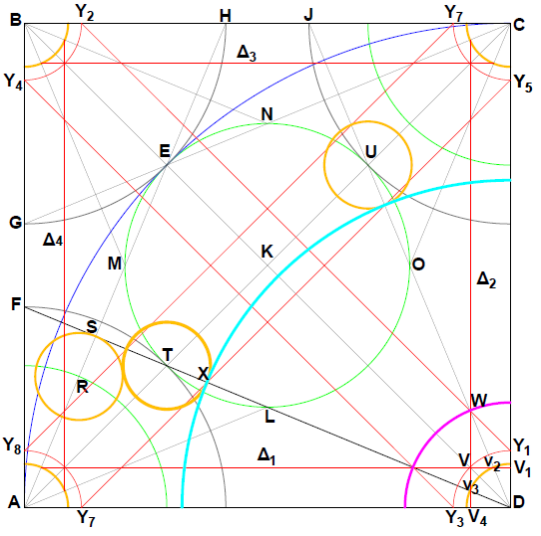


Figure 5-11 : Troisième et quatrième rayon utiliser pour construire la grille sous-jacente

- Rayon de l'étoile à 16

Le rayon de l'étoile à 16 'Rs_{16}' correspond à la distance entre D et W.

On a, d'après la figure 10 (DY_1) // (VW) et (Y_1W) // (DV) et

DY_1 = DV, ce qui nous donne que DY_1WV est un losange.

Soit DY_1W un triangle sur lequel on applique la relation Al-Khasi pour le calcul de DW comme suit : $$DW^2 = {DY_1}^2 + Y_1W^2 - 2\cos\frac{\pi}{4} * DY_1 * Y_1W$$

$$DW = DV * \sqrt{2 - 2\cos\frac{\pi}{4}}$$

- Rayon de rosace à 16

Le rayon de rosace à 16 'Rr_{16}' correspond à la distance entre D et X.

Pour calculer cette distance, on utilisera le théorème de sinus dans le triangle ATD.

On a l'angle (TAD) =$\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et l'angle (TDA) = $\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Donc l'angle (ATD) =$\left(\frac{5\pi}{8}\right)$

$$\frac{\sin(TAD)}{DT} = \frac{\sin(ATD)}{AD}$$

$$DT = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

D'où, on peut conclure que le rayon de la rosace à seize est :

$$DX = DT - XT = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} - RS$$

4. Méthode proposée pour automatiser le tracé de la rosace à 16

4.1 Construction de la rosace

L'analyse des ornements maroco-Andalous montre que le rayon d'une rosace à N pétales est constant et indépendant du motif étoilé auquel elle appartient. Les paramètres essentiels à l'automatisation de la rosace à 16 pétales sont définis dans le tableau ci-dessous et dans la figure 5.12.

Rayon intérieur de cercle contenant l'étoile à 8	$Rsi = RS = a\left(\sin\frac{\pi}{8} - \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\right)$
Rayon extérieur de cercle contenant l'étoile à 8	$Rse = DV = DV_1\sqrt{2} = RS * \sqrt{2} * \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$
Rayon de l'étoile à 16	$Rs_{16} = DW = DV * \sqrt{2 - 2\cos\frac{3\pi}{4}}$
Rayon de rosace à 16	$Rr_{16} = \mathrm{DX} = DT - XT = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} - RS$

Tableau 5.1 : Paramètres essentiels à l'automatisation de la rosace à 16 pétales

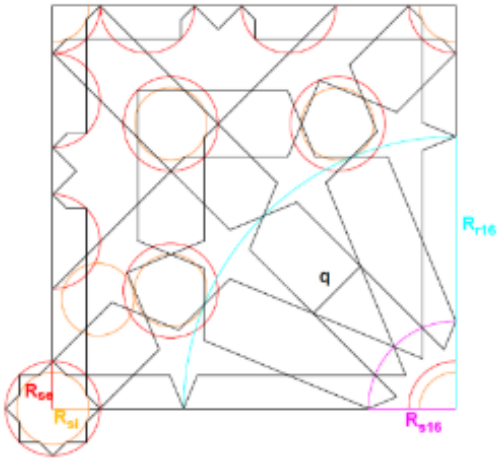


Figure 5-12 : Motif contenant une rosace à 16 avec ses paramètres de construction (Rsi, Rse, Rs16, Rr16, q)

Finalement la construction de la rosace à seize pétales se présente selon les étapes suivantes :

- Déterminer les trois points clés I, I_1, I_2 représentés sur la figure 5.13.

  D'abord on utilise le rayon de rosace à 16 calculé précédemment Rr_{16} qui est la distance entre le point C et le point I de carré.

  Ensuite le point I_1 est l'intersection entre les deux segments (IF) et (DE) sachant que (IF) est la bissectrice de l'angle (AIB) et (DE) est un segment de grilles sous-jacente qui est utilisé pour trouver la division ou la largeur de pétale.

  Enfin I_2 est l'intersection entre le segment (DE) et l'arc de cercle de centre C et de rayon égale deux fois le rayon de l'étoile à seize.

- Dessiner le demi-pétale. En joignant les points I, I_1, I_2 comme indiqué sur la Figure 5.13,
- Appliquer un reflet miroir pour obtenir le pétale plein, représenté sur la Figure 5.14,
- Appliquer les symétries de rotations successives de $\frac{k\pi}{8}, k = 1, \ldots, 4$, le centre de rotation est le point D. cette étape est illustrée en Figure 5.15,
- Appliquer successivement une symétrie miroir verticale et horizontale pour construire la rosace complète illustrée à la figure 5.16.

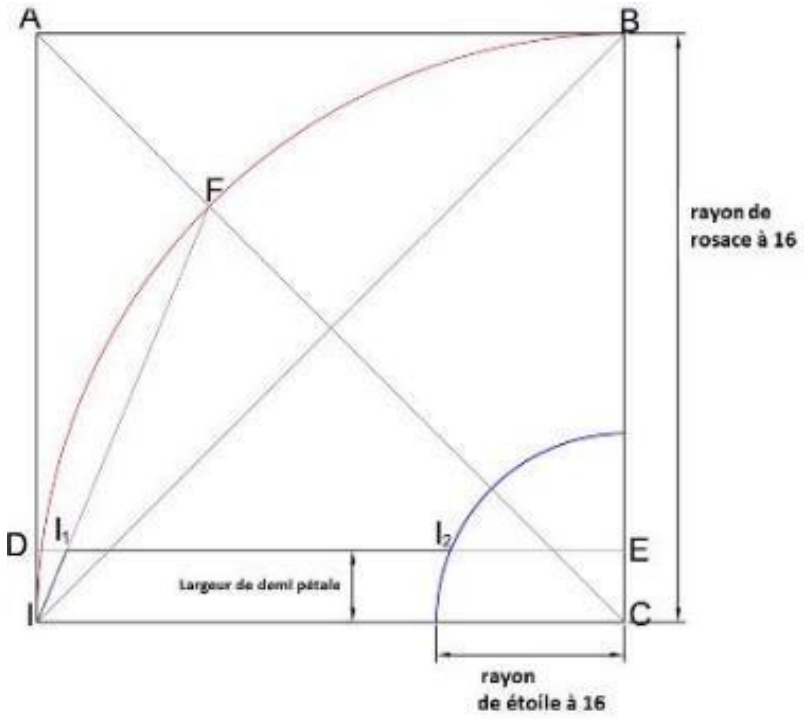


Figure 5-13 : déterminations des points caractéristique de rosace à 16 et dessin de demi pétale

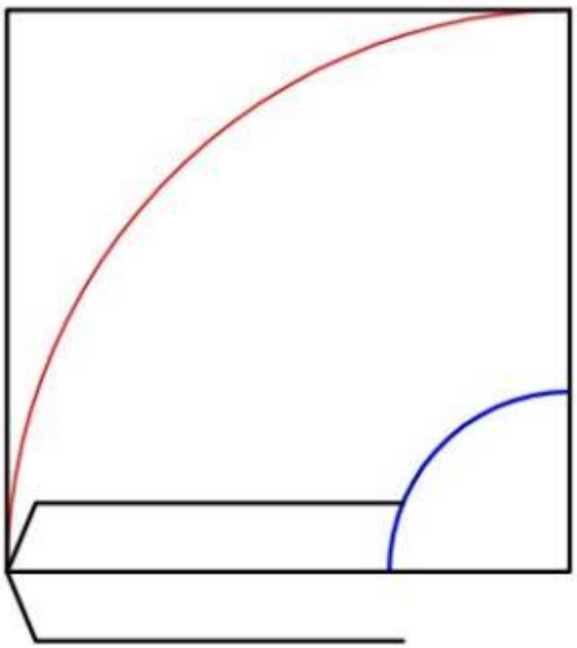


Figure 5-14 : Application de reflet miroir pour obtenir le pétale plein

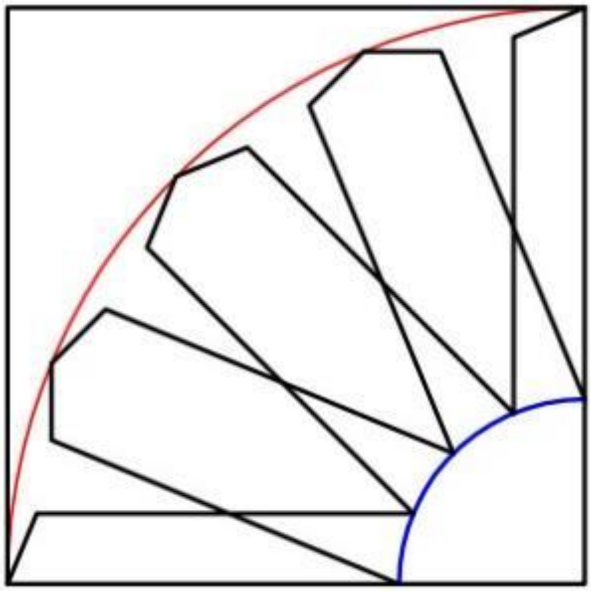


Figure 5-15 : Application des symétries de rotation successives

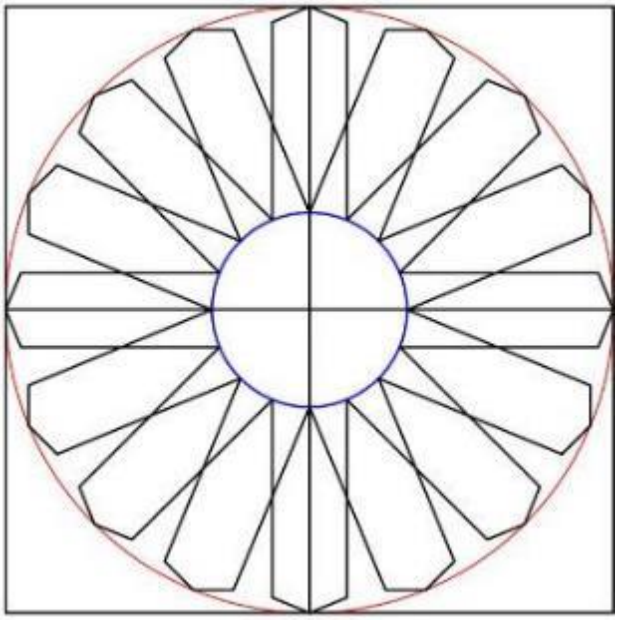


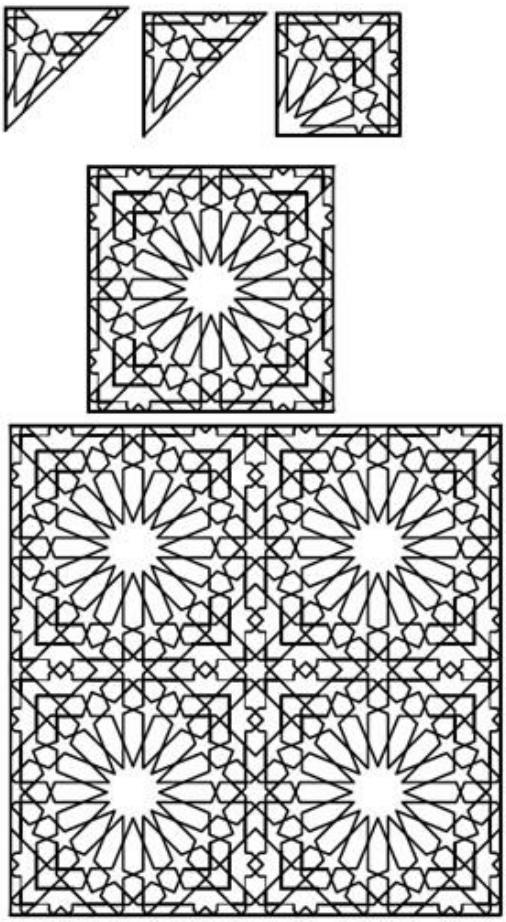
Figure 5-16 : Application successivement une symétrie miroir verticale et horizontale pour construire la rosace

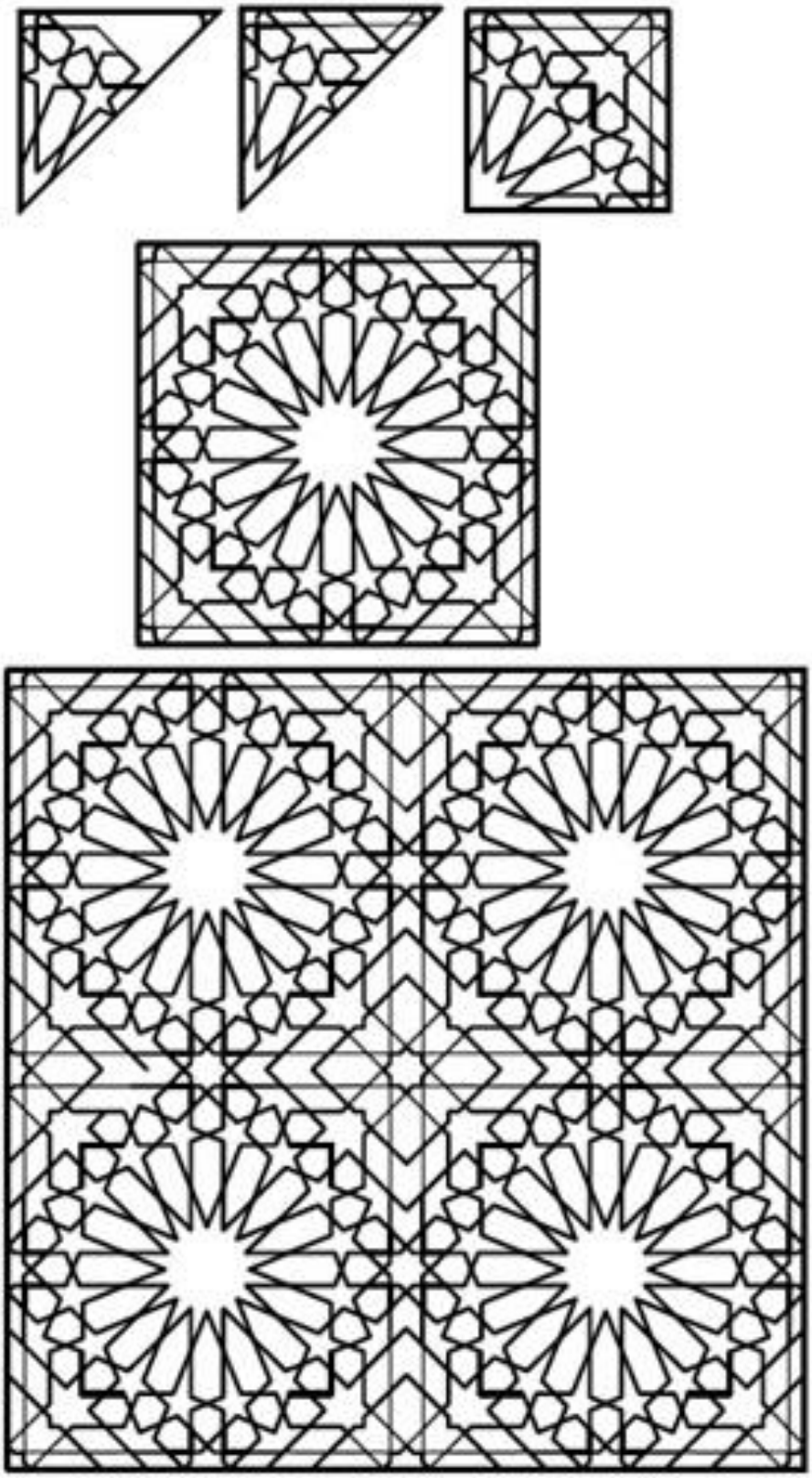
4.2 Construction de motif

Basé sur les principes de la théorie des groupes de symétrie et du motif fondamental un motif périodique peut être construit par les deux étapes suivantes :

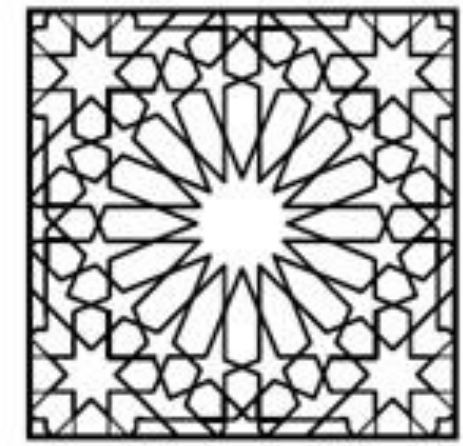
- Construction du motif de base en appliquant des transformations de symétrie au motif fondamental. Le groupe p4m est le groupe de symétrie fréquemment utilisé dans l'art géométrique traditionnel maroco-andalou.
- Construction du motif périodique en répétant dans deux directions orthogonales le motif de base.

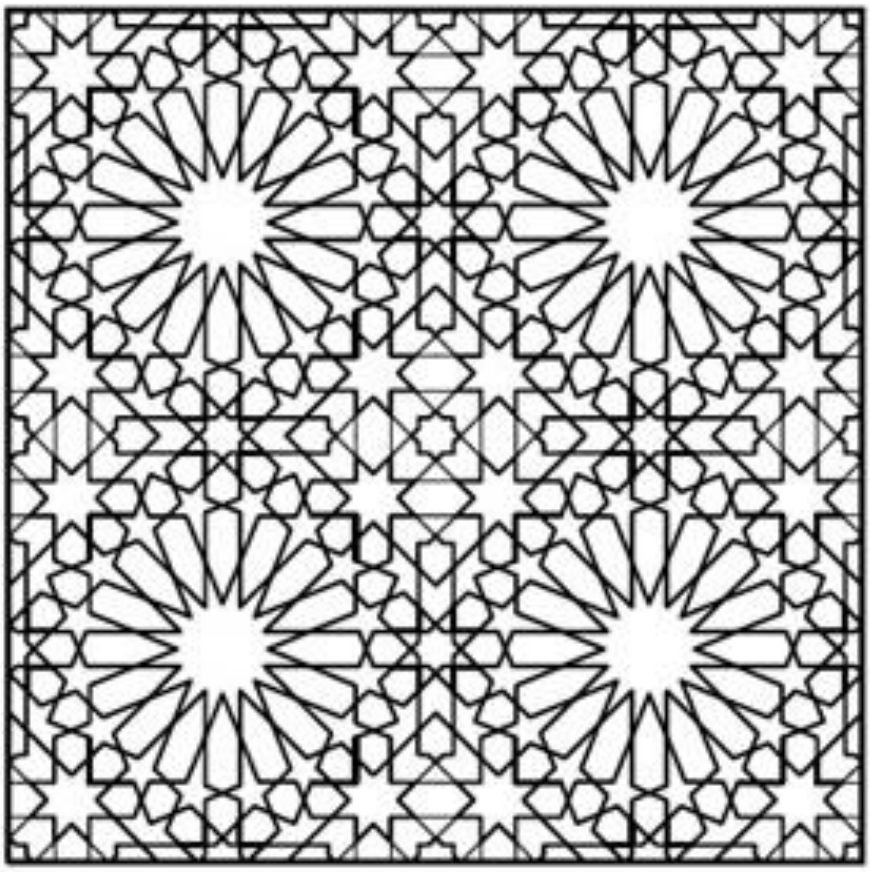
La figure 5.17 illustre la construction de 4 motifs périodiques en appliquant la méthode proposée :











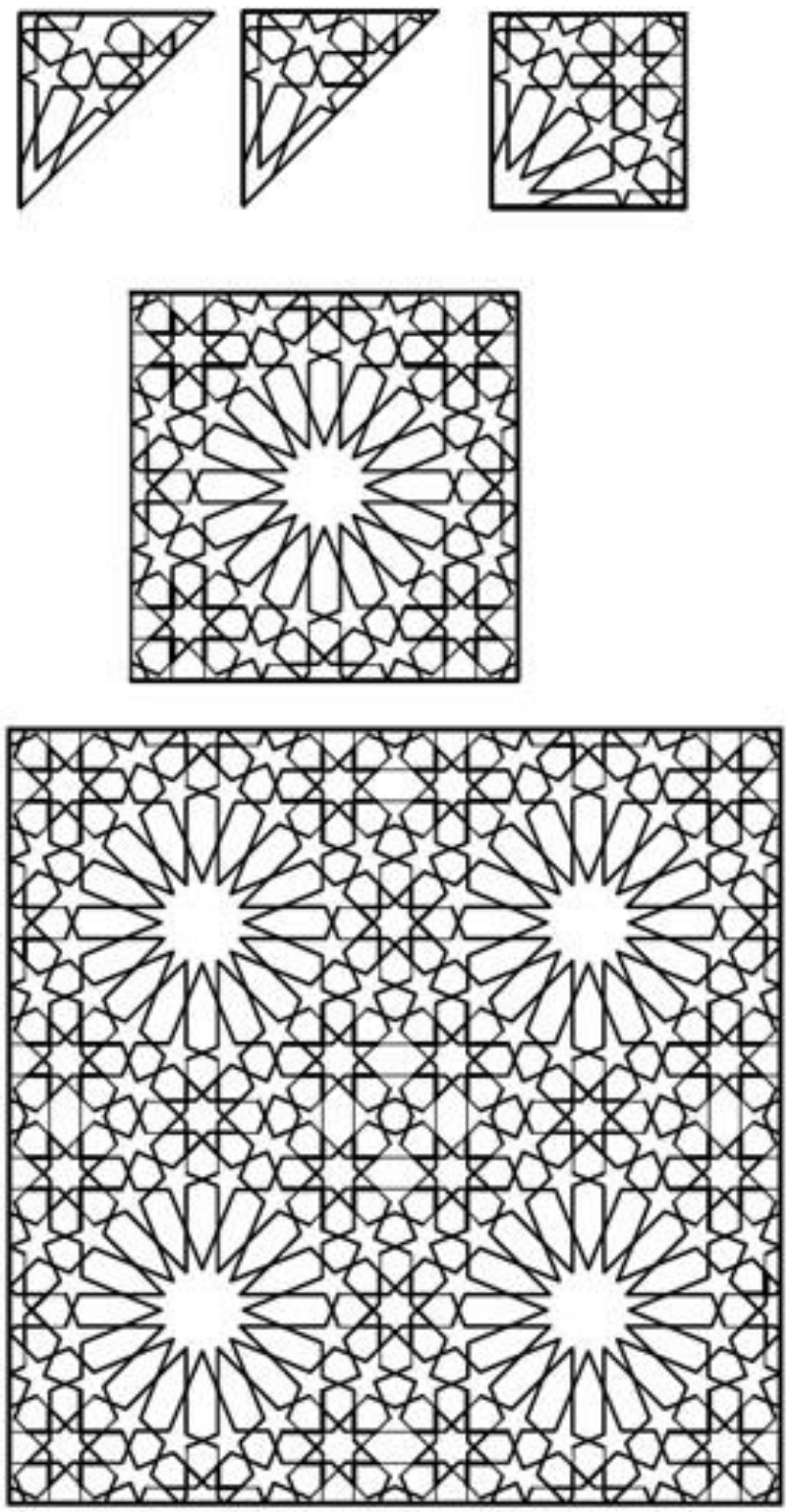


Figure 5-17 : périodique ornement illustre la méthode proposée

5. Construction des grandes rosaces

Des rosaces plus sophistiquées ornant des monument historiques et mausolées sont construites suivant le même processus décrit plus haut. En effet, à partir des paramètres présentés précédemment, il est possible d'obtenir la rosace à 32 pétales et la rosace à 64 pétales. Notons que ces rosaces sont basées sur la symétrie d'ordre 4 et caractérisées par des assemblages périodiques.

D'après (J.-M. Castera, 1996), le rayon de la rosace à 32 s'obtient par le doublement de rayon de la rosace à 16 pétales. Et le rayon de la rosace à 64 s'obtient par le doublement de rayon de rosace à 32 pétales. Mathématiquement parlant, la méthode traditionnelle *Tastir* préserve les mêmes principes de génération. Qu'il s'agisse de rosace à 16, 32 ou 64, la construction de la rosace répond aux mêmes principes. Ce qui change, c'est uniquement la taille de la rosace, le nombre de pétales ainsi que l'angle de celle-ci. Les figures 6.18, 6.19,6.20 et 6.22 montrent le processus de construction automatique de la rosace à 32.

La construction de la rosace à trente-deux pétale suit alors les étapes suivantes :

- Déterminer les trois points clés I, I_1, I_2 représentés sur la figure 5.18.

  Pour cela on définit d'abord le rayon de la rosace à 32 qui est la distance entre le point C et le point I de carré.

  Ensuite le point I_1 est l'intersection entre les deux segments (IF) et (DE) sachant que (IF) est la bissectrice de l'angle (AIB) et (DE) est un segment de grilles sous-jacente qui est utilisé pour trouver la division ou la largeur de pétale.

Enfin I_2 est l'intersection entre le segment (DE) et l'arc de cercle de centre C et de rayon égale deux fois le rayon de l'étoile à seize.

- Dessiner le demi-pétale. En joignant les points I, I_1, I_2 comme indiqué sur la Figure 5.18,
- Appliquer un reflet miroir pour obtenir le pétale plein, représenté sur la Figure 5.19,
- Appliquer les symétries de rotation successives de $\frac{k\pi}{16}, k = 1, \ldots, 8$. Cette étape est illustrée en Figure 5.20,
- Appliquer successivement une symétrie miroir verticale et horizontale pour construire la rosace complète illustrée à la figure 5.21.

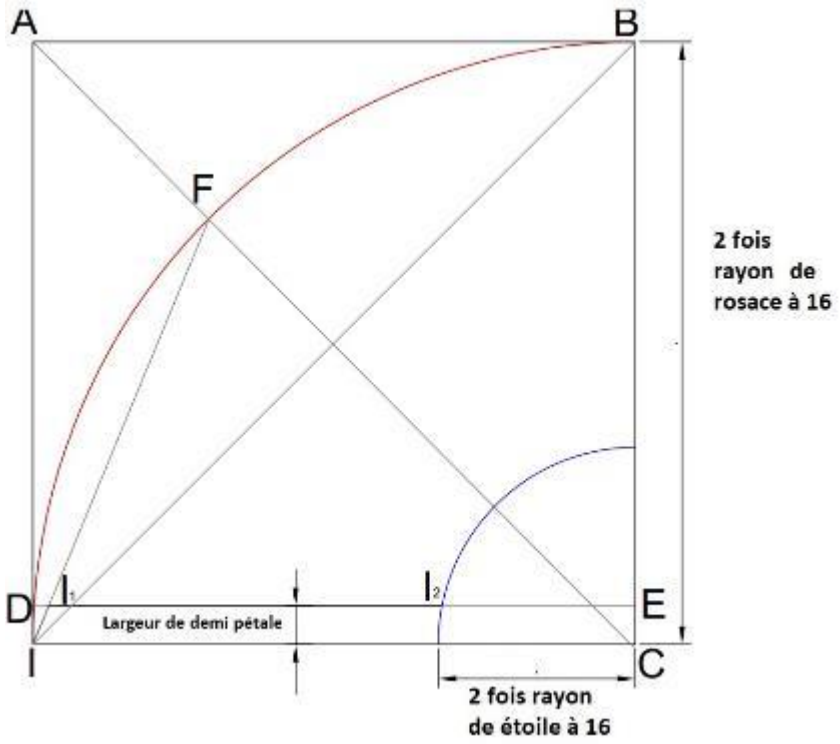


Figure 5-18 : Déterminations des points caractéristique de rosace à 32 et dessin de demi pétale

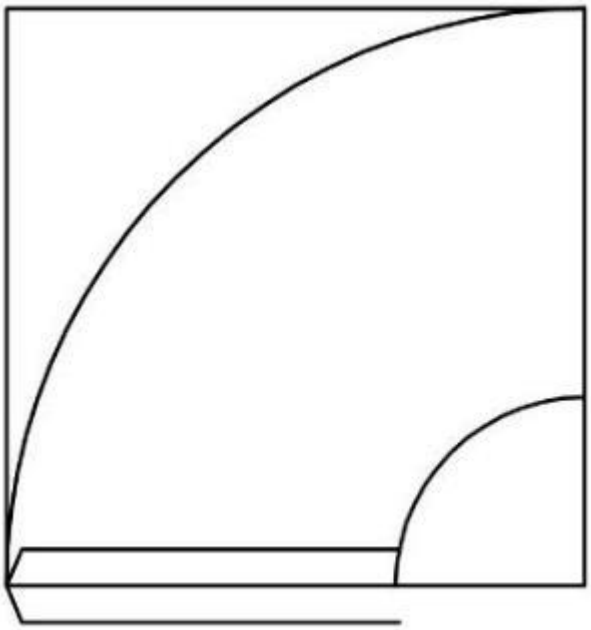


Figure 5-19 : application de reflet miroir pour obtenir le pétale plein

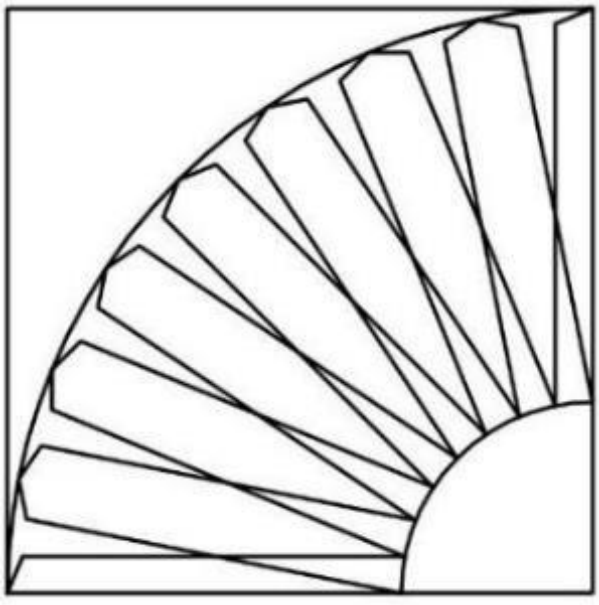


Figure 5-20 : Application des symétries de rotation successives

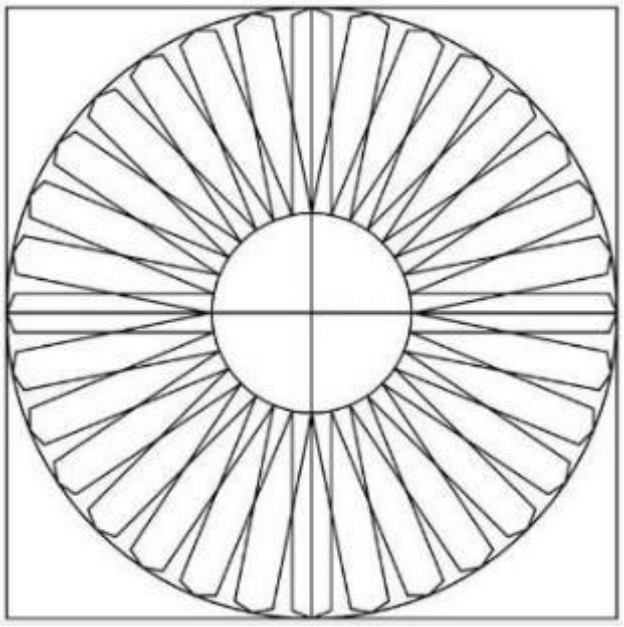


Figure 5-21 : Application successivement une symétrie miroir verticale et horizontale pour construire la rosace

De la même façon, le rayon de l'étoile à 64 s'obtient en doublant le rayon de la rosace à 16. Et le rayon de la rosace à 64 s'obtient en doublant le rayon de la rosace à 32.

La construction de la rosace à soixante-quatre pétales suit alors les étapes suivantes :

- Déterminer les trois points clés I, I_1, I_2 représentés sur la figure 5.22.

  Pour cela on définit d'abord le rayon de la rosace à 64 qui est la distance entre le point C et le point I de carré (quatre fois le rayon de la rosace à 16).

  Ensuite le point I_1 est l'intersection entre le deux ligne (IF) et (DE) sachant que (IF) est la bissectrice de l'angle (AIB) et (DE) est une ligne de grilles sous-jacente qui est utilisé pour trouver la division ou la largeur de pétale.

  Enfin I_2 est l'intersection entre la ligne (DE) et l'arc de cercle de centre C et de rayon égale à quatre fois le rayon de l'étoile à seize

- Dessiner le demi-pétale. En joignant les points I, I_1, I_2 comme indiqué sur la figure 5.22,
- Appliquer un reflet miroir pour obtenir le pétale plein, représenté sur la Figure 5.23,
- Appliquer les symétries de rotation successives de $\frac{k\pi}{32}, k = 1, \ldots, 16$. Cette étape est illustrée en figure 5.24,
- Appliquer successivement une symétrie miroir verticale et horizontale pour construire la rosace complète illustrée à la figure 5.25.

La figure 5.26 montre les relations entre les rosaces d'ordre 16, 32 et 64.

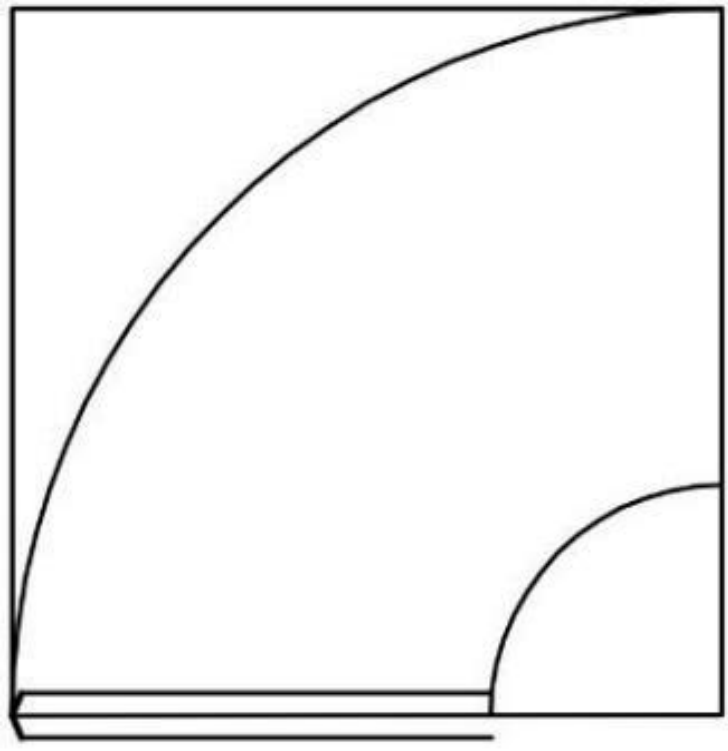


Figure 5-22 : Application de reflet miroir pour obtenir le pétale plein

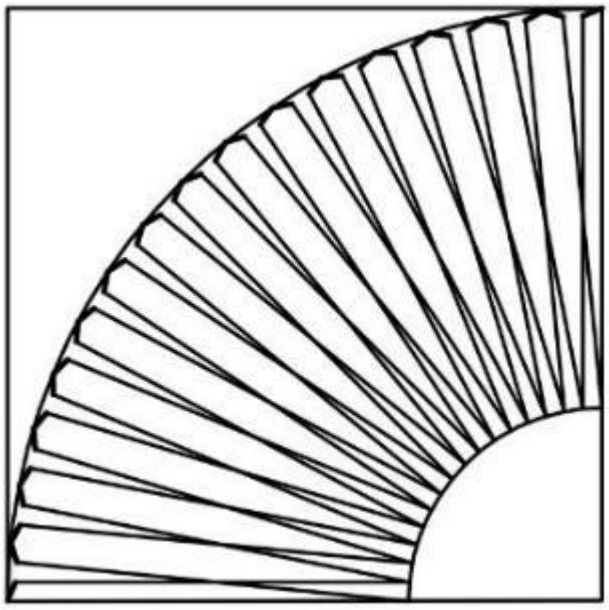


Figure 5-23 : Application des symétries de rotation successives

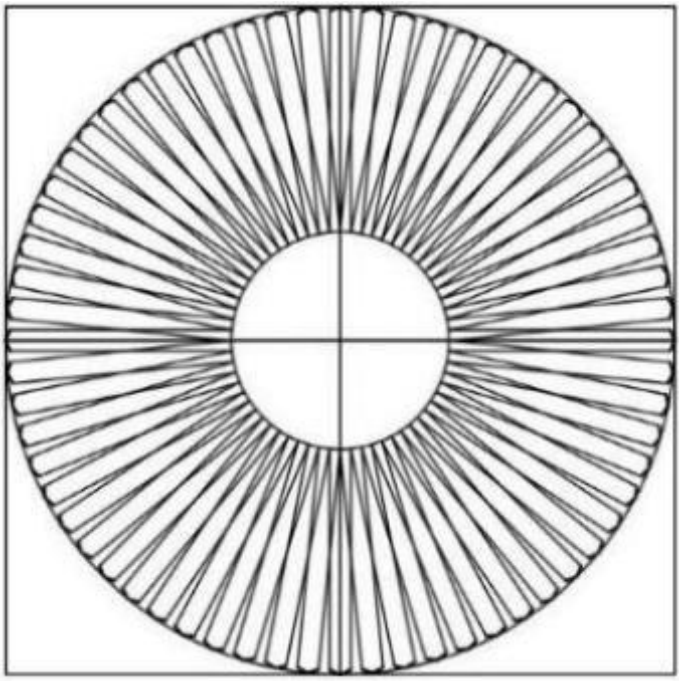


Figure 5-24 : Application successivement une symétrie miroir verticale et horizontale pour construire la rosace

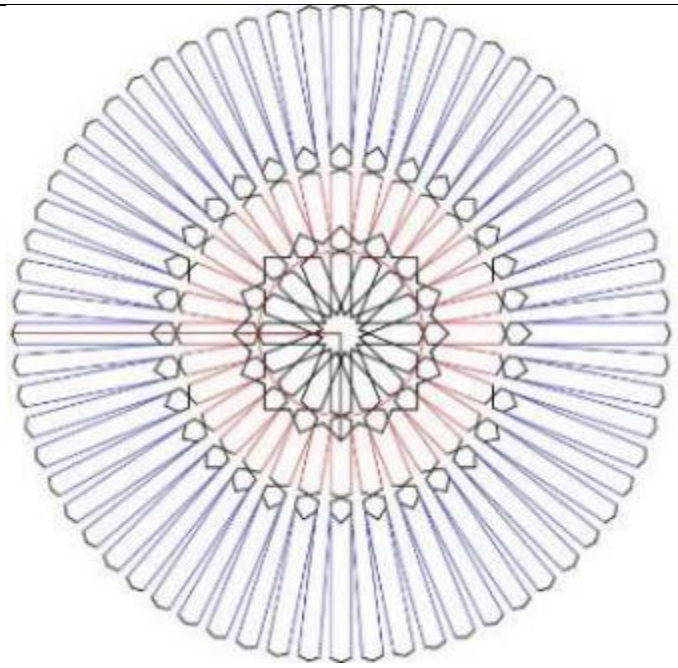


Figure 5-25 : Relation entre rosaces

6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons analysé l'information et le contenu des motifs géométriques marocains et trouvé les caractéristiques des rosaces, puis nous avons étudié le Tastir utilisé par les artisans marocains pour définir mathématiquement les paramètres de la grille sous-jacente utilisée pour construire la rosace à seize. Ensuite, nous avons utilisé les paramètres précédents pour proposer une méthode automatique de construction de rosace, la puissance de la méthode proposée est la construction automatique d'une rosace à travers quatre points clés définis à partir des paramètres calculés. Enfin, nous avons donnés des exemples de construction de grandes rosaces.

CHAPITRE 6: GÉNÉRATION DES MOTIFS QUASI-PÉRIODIQUES

1. Introduction

Dans le cadre de ce chapitre, nous présenterons une méthode de construction des motifs quasi périodiques (octogonal, décagonal et dodécagonal).

Rappelons que les structures quasi-périodiques ont été découvertes dans une infinité de motifs géométriques islamiques qui remontent à très longtemps. Ces découvertes ont interpellé l'attention des chercheurs, d'autant plus qu'elles attestent que les connaissances mathématiques des artisans musulmans étaient d'une grande profondeur contrairement à ce que l'on pensait auparavant.

Ce chapitre commencera par présenter le processus de constriction des motifs islamiques quai périodiques tel que proposé par Aziz Khamjane (Khamjane & Benslimane, 2018a). Il présentera ensuite une adaptation de cette méthode au cas des motifs quasi-périodiques maroco-andalous grâce au tracé unifié des rosaces ornant les triangles minimales extraits des pavés constituants les pavages quasi périodiques. Des exemples de construction de motifs quasi périodiques seront finalement présentés pour illustrer l'adaptation proposée.

2. Processus de construction des motifs islamiques quasi-périodiques

Les pavages quasi-périodiques sont construits par des tuiles sous forme de losange ou de carré. La génération d'un motif quasi-périodique consiste donc à générer le contenu des

tuiles qui composent le pavage. Les figures 6-1, 6-2 et 6-3 présentent les pavages de types octogonal, décagonal et dodécagonal.

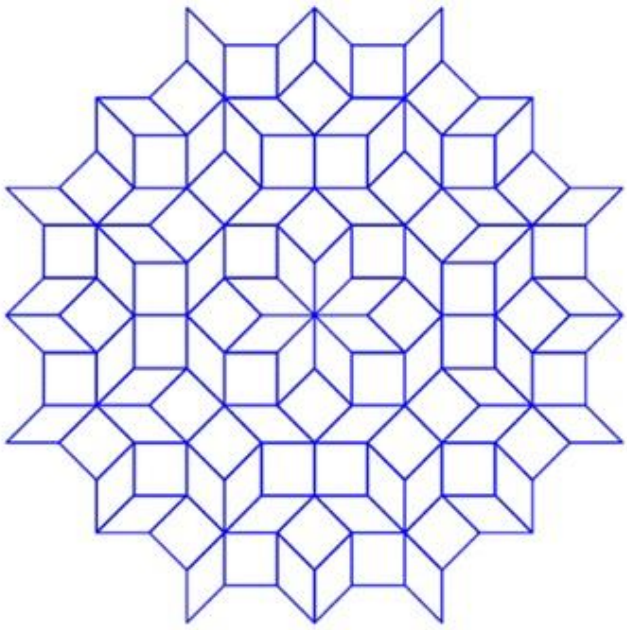


Figure 6-1 : Pavage octogonal construit par un carré et un losange d'angle π/4

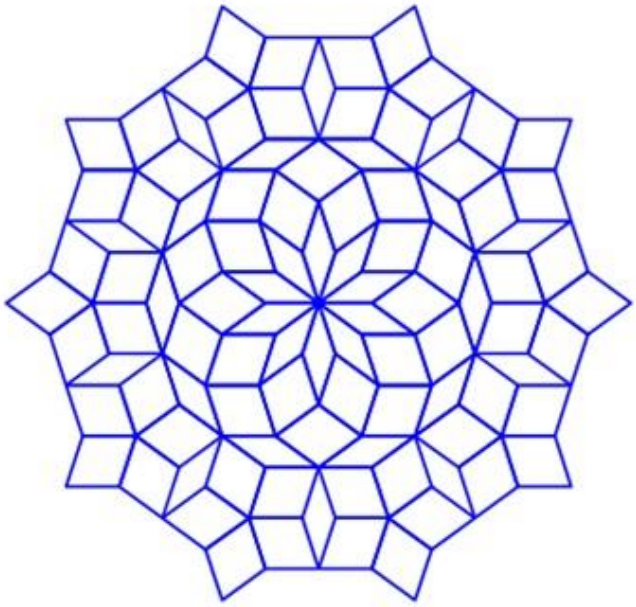


Figure 6-2: Pavage décagonal construit par deux losanges d'angles 2π/5 et 2π/5 respectivement.

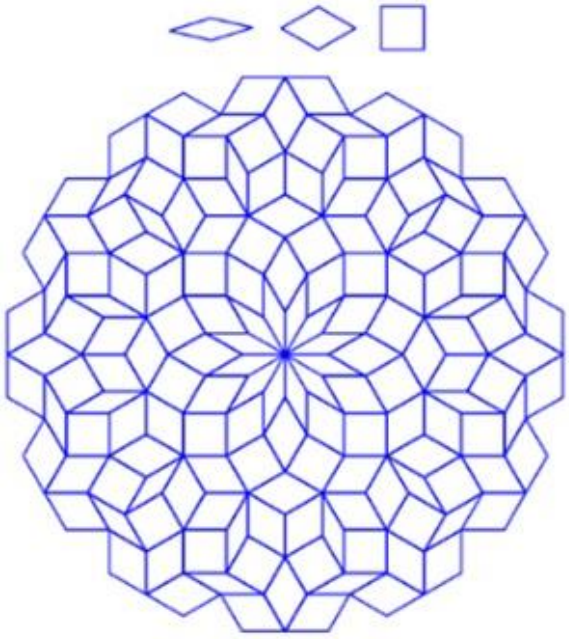


Figure 6-3: Pavage dodécagonal construit par deux losanges et un carré.

Le losange et le carré peuvent être divisés en plusieurs triangles rectangles identiques. Alors, la génération du contenu d'une tuile peut être réduite juste à la génération du contenu d'un triangle, puis il s'agit d'appliquer les symétries appropriées sur ce dernier pour construire la tuile. La figure 6-4 illustre la division des deux tuiles principales en triangles.

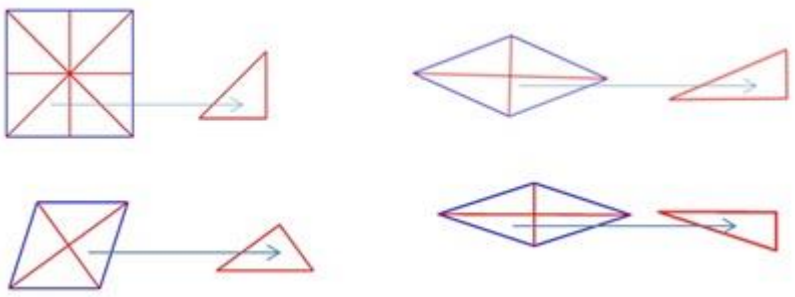


Figure 6-4: les pavés utilisés dans les deux pavages ci-dessus, le carré est divisé en 8 triangles rectangles identiques et les losanges sont divisés en 4 triangles rectangles identiques.

Les formes les plus utilisées dans un pavage quasi périodique sont des rosaces de différents ordres. Il est donc indispensable de déterminer les paramètres des rosaces des différents pavés qui composent le motif quasi périodique. Dans ce travail, nous allons commencer par développer la méthodologie générale pour ensuite l'appliquer aux cas des rosaces maroco-andalouses dont le rayon de chacune des rosaces utilisée est fixe quel que soit le motif étoilé.

3. Principe de construction des rosaces ornant les pavés quasi périodiques

L'ordre de la rosace N que peut contenir un motif quasi périodique est déterminé en fonction du plus petit angle ω dans l'ensemble des tuiles qui composent le pavage :

$$N = k \times \frac{2\pi}{\omega}$$, ω est le petit angle et k est un entier tel que $k \geq 1$.

Le rayon de la rosace principale est tel que : $R \leq \frac{L}{2}$ avec L : BC (figure 6-5). Le processus de construction se fait comme suit :

(1) génération d'une division avec les paramètres de la rosace : (N=8, θ=φ=π/8, R=AB, s=3),

(2) application d'une symétrie axiale à cette division par rapport à l'axe perpendiculaire à l'hypoténuse et passant par son milieu,

(3) construction des autres divisions par symétries axiales par rapport aux lignes de divisions,

(4) les lignes candidates aux processus de prolongements/réflexions,

(5) triangle après prolongement/réflexion des lignes en rouge.

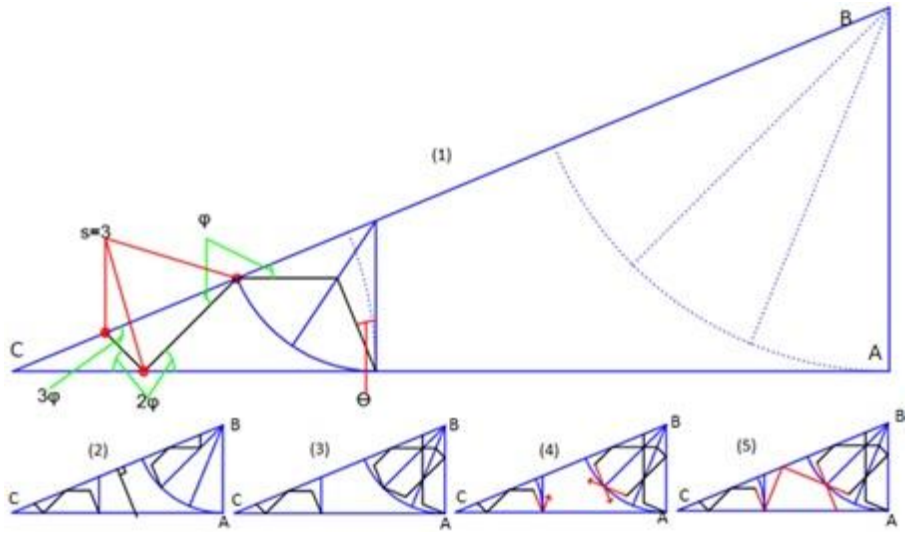


Figure 6-5: Génération d'une division avec les paramètres de la rosace

Le centre de la rosace principale sera placé simultanément sur les deux sommets du triangle extrait des losanges, et sur un seul sommet du triangle extrait des carrés (les sommets d'angles droits ne sont pas considérés).

L'étape suivante est de générer la partie de la rosace qui se trouve à l'intérieur de chaque triangle. Cette étape commence par la division des angles des sommets considérés en X angles identiques en fonction de l'ordre de la rosace et l'angle du sommet considéré.

$$X = N \times \frac{\gamma}{\pi}$$

N est l'ordre de la rosace et γ est l'angle au sommet qui va être son centre.

Chaque division va contenir une demi-branche de la rosace avec détermination des paramètres : $(\theta, \varphi, et\ s)$ de la rosace. Dans cette étape, il suffit de construire une seule division puis appliquer des miroirs pour obtenir les autres.

La figure 7-6 montre le cas de construction du contenu du triangle extrait du losange d'angle $\frac{\pi}{4}$ du pavage octogonal. Dans ce cas le losange d'angle $\omega = \frac{2\pi}{8}$ qui va déterminer l'ordre de la rosace : $N = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{8}} \times k = 8 \times k, N = 8\ si\ k = 1$

Les mêmes étapes sont appliquées au triangle extrait du carré en utilisant juste un seul sommet d'angle $\frac{\pi}{4}$ en respectant les mêmes paramètres$(N, R, \theta, \varphi, s)$. Les contenus des deux tuiles sont générés par application des symétries appropriés à chaque tuile aux contenus des triangles obtenus (figure 6-6).

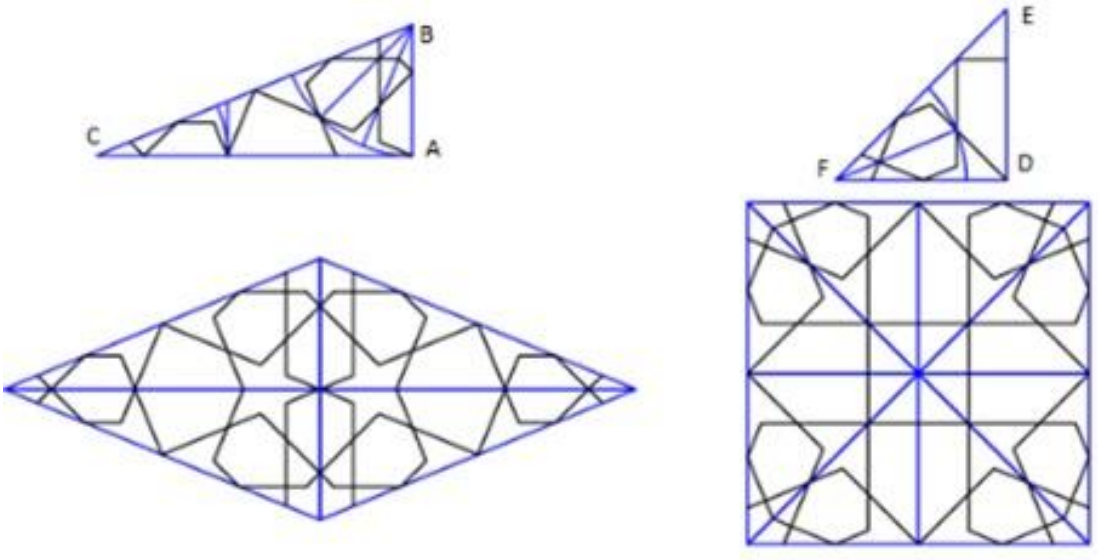


Figure 6-6: application des symétries aux contenus des deux triangles pour obtenir les tuiles.

La dernière étape de construction du motif quasi périodique consiste à insérer le contenu des tuiles dans un pavage quasi périodique constitué par ces tuiles (figure 6-7).

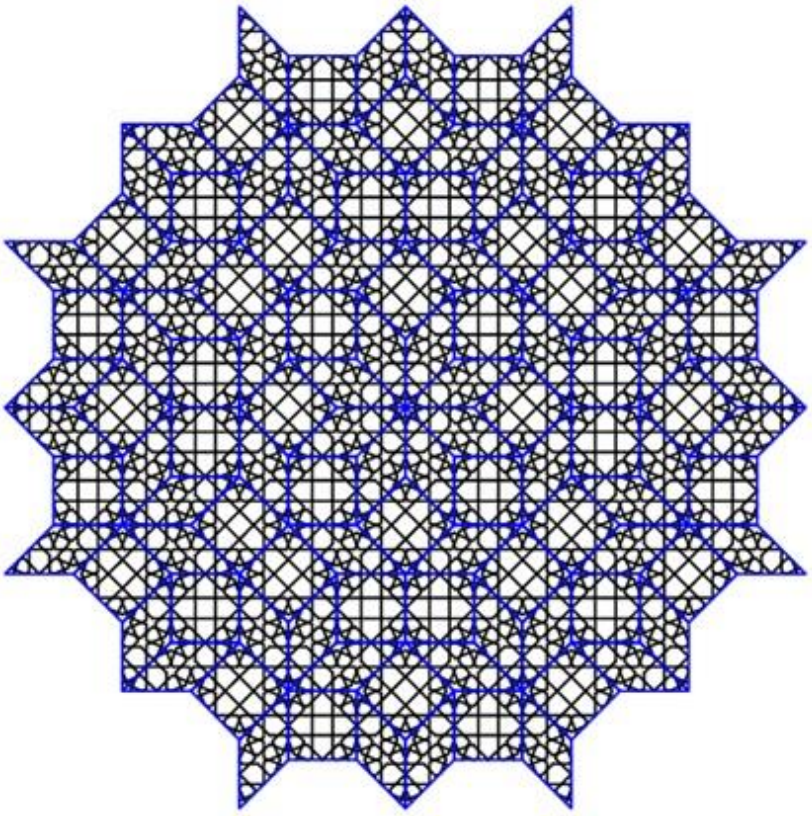


Figure 6-7: Insertion des contenus des tuiles dans le pavage

Si on augmente le rayon de la rosace, des chevauchements entre rosaces sont produits. Dans ce cas, on supprime la partie de la rosace qui sort du triangle avant d'appliquer les symétries qui permettent d'obtenir la tuile. La figure suivante illustre le cas où $R > AB$ (figure 6-8).

En général, cette méthode permet de contrôler tous les paramètres de la rosace. Ce contrôle nous permet d'obtenir une grande diversité de motifs par changement d'un ou de plusieurs paramètres pour un même pavage.

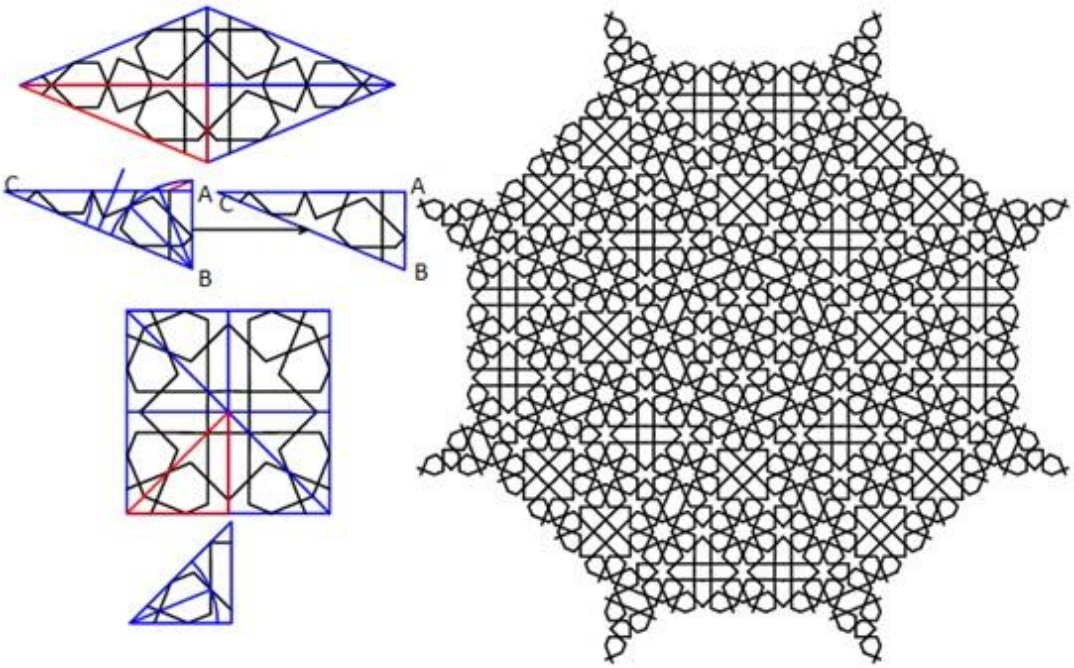


Figure 6-8: Motif quasi périodique avec rosace N=8,θ=φ=π/8,R>AB,s=3)

Si on veut que le deuxième sommet d'angle $\frac{\pi}{4}$ du triangle extrait du carré contienne une autre rosace, il suffit de le diviser en deux triangles rectangles identiques (figure 6-9), puis construire le contenu d'un seul triangle par les mêmes étapes, et appliquer ensuite les symétries appropriées pour obtenir le carré.

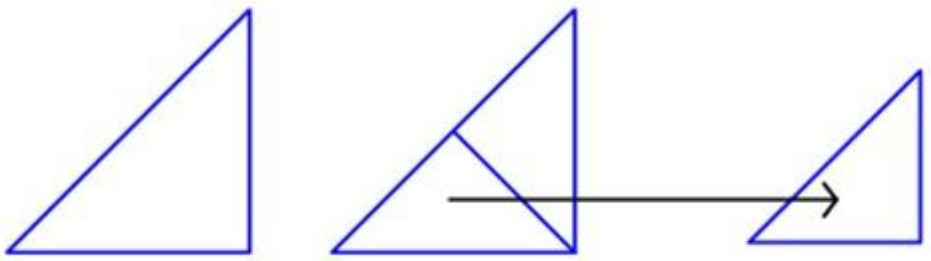


Figure 6-9: Triangle divisé en deux triangles rectangles identiques. Donc le carré est divisé en 16 triangles rectangles identiques.

4. Exemples de motif quasi périodiques

4.1 Pavage octogonal utilisant des rosaces maroco-andalouses

Les 3 exemples dans les figures suivantes illustrent l'adaptation de la méthode générale développée par (Khamjane et al., 2019; Khamjane & Benslimane, 2018a) à la génération de motifs quasi périodiques maroco-andalous.

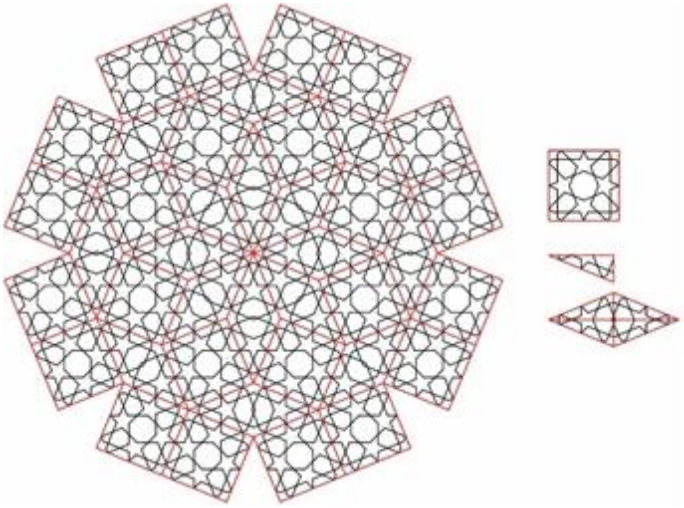


Figure 6-10: motifs octogonaux adapté à la méthode.

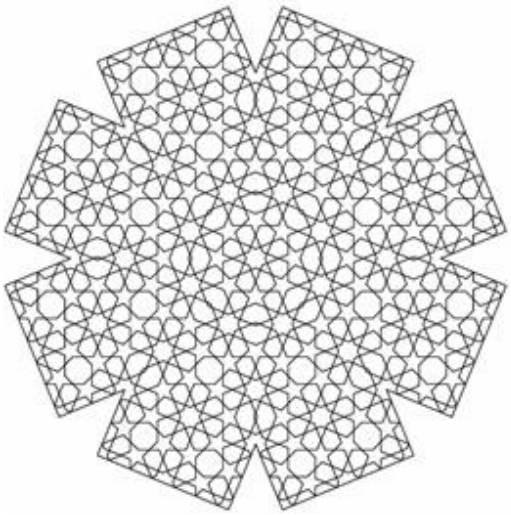


Figure 6-11: Le motif extrait en éliminant le pavage

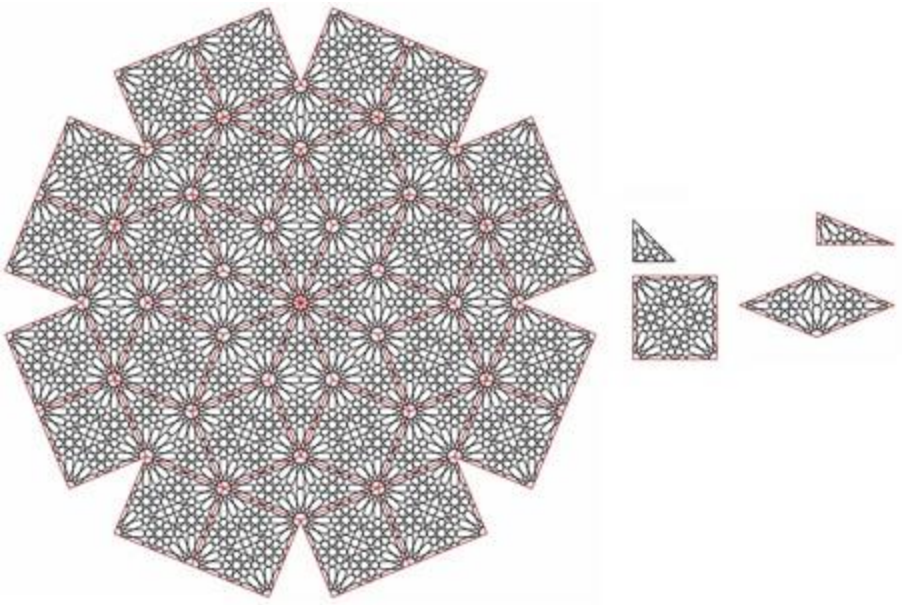


Figure 6-12: motif octogonal avec une rosette principale d'ordre 16, une rosette à 8 pointes placée sur les côtés des deux triangles rectangles et une étoile à 8 pointes placée sur le sommet libre du triangle rectangle du carré.

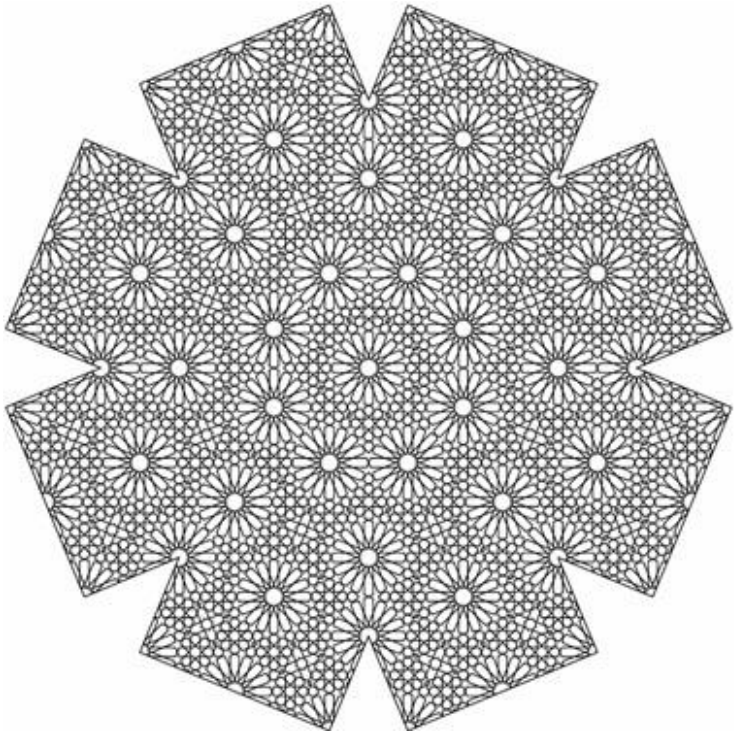


Figure 6-13: Le motif extrait en éliminant le pavage.

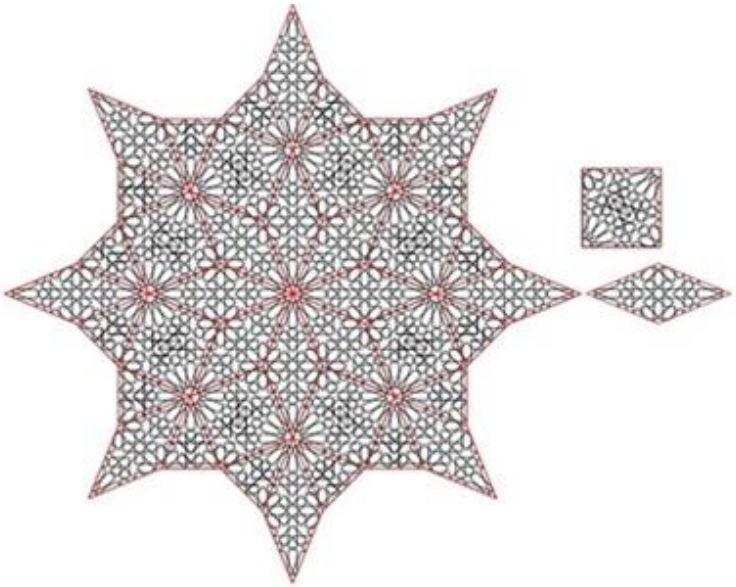


Figure 6-14: motifs octogonaux adapté à la méthode deux rosaces à 16.

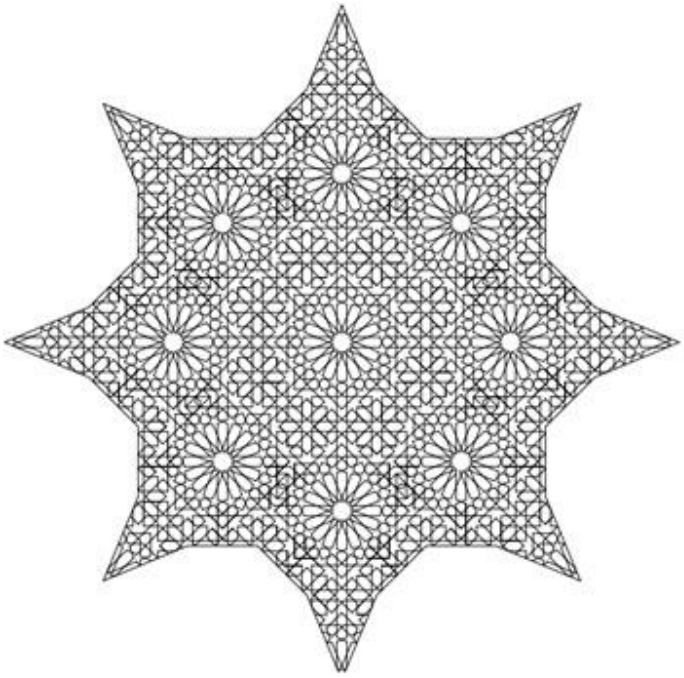


Figure 6-15: Le motif extrait en éliminant le pavage.

4.2 Motifs quasi périodiques à pavage décagonal

Le pavage décagonal est formé de tuiles associées d'angles respectifs $\pi/5$ et $2\pi/5$. Les deux exemples dans les figures suivantes montrent l'adaptation de la méthode générale développée par (Khamjane & Benslimane, 2018a) à la construction de motifs quasi périodiques de forme décagonal.

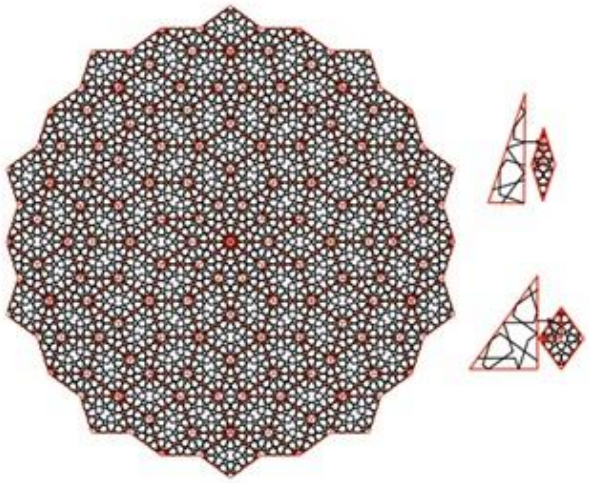


Figure 6-16: motif quasi-périodique décagonal

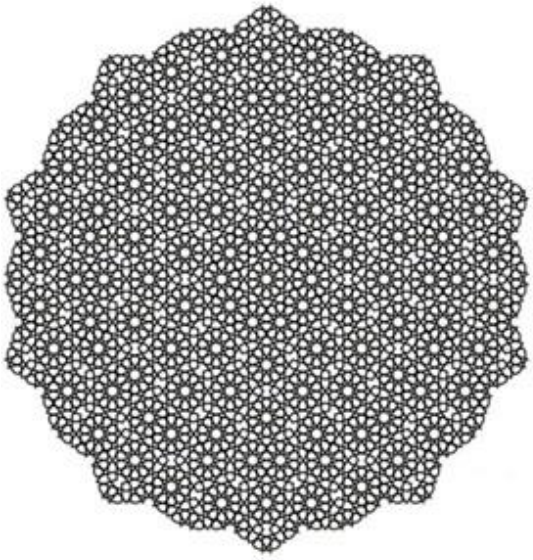


Figure 6-17: Le motif extrait en éliminant le pavage

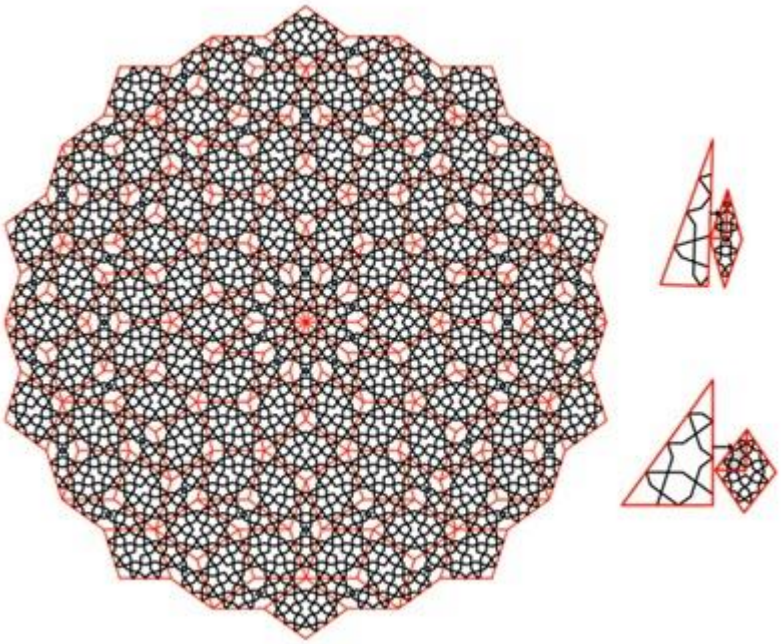


Figure 6-18: Motif quasi-périodique décagonal

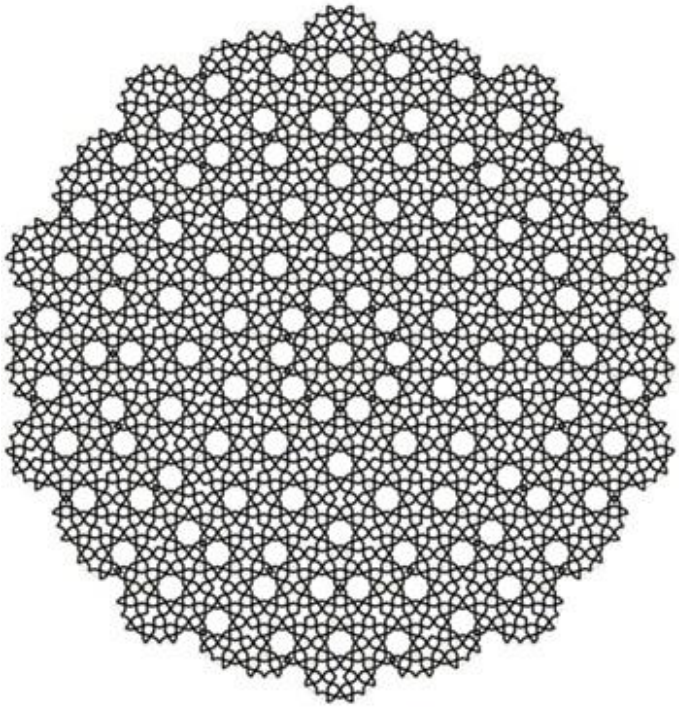


Figure 6-19: Le motif extrait en éliminant le pavage

4.3 Motifs quasi périodiques à pavage dodécagonal

Le pavage dodécagonal se construit de trois tuiles d'angles respectifs : $\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6} et \frac{\pi}{2}$ sont générées de la même façon. On débute toujours par la tuile qui présente le petit angle pour déterminer l'ordre de la rosace principale (losange d'angle$\frac{\pi}{12}$). L'exemple dans la figure suivante illustre l'adaptation de la méthode générale développée par (Khamjane & Benslimane, 2018a) à la génération de motifs quasi périodiques de forme dodécagonale.

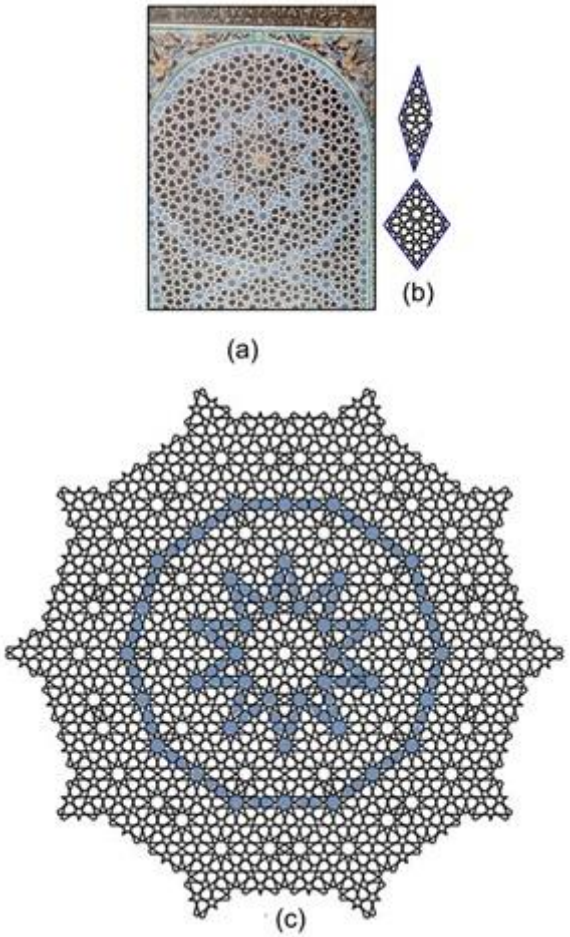


Figure 6-20: (a) Le panneau de la Madrasa Attarine (Fès, Maroc), (b) les tuiles décorées correspondants, (c) l'arrangement dodécagonal des tuiles décorées.

5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons commencé par montrer les différentes recherches réalisées par Roger Penrose qui est un mathématicien et physicien britannique et qui a trouvé une solution élégante en combinant le pentagone avec d'autres polygones à savoir une étoile, une demi-étoile, et un losange. Toute portion finie du pavage obtenu, aussi grande soit-elle, se répète infiniment dans le pavage, mais il n'est pas périodique. Cette analyse nous a motivé à élaborer une méthode de conception des motifs géométriques quasi-périodiques.

CONCLUSION GENERALE

Cette thèse s'est fixée comme objectif principal d'automatiser la construction des rosaces maroco-andalouses, motifs principaux de tout ornement périodique ou apériodique.

Nous avons montré que cet objectif est atteint grâce à une compréhension de la technique de tracé traditionnel Tastir des motifs géométriques.

Cette thèse a montré que cette compréhension est réalisée grâce à l'analyse d'ornements historiques.

Les travaux réalisés dans le cadre de cette thèse ont abouti aux contributions suivantes : Dans une première contribution, nous avons d'abord automatisé la construction de la rosace à 8 pétales. Nous avons ensuite défini la relation entre l'étoile à 8 branches, appelée Khatem Slimani, et les autres tesselles extraites de cette dernière. En plus de l'automatisation de la construction de la rosace à 8, cette première contribution a permis donc la construction d'une base de données des tesselles dérivées de l'étoile à 8.

Dans une deuxième contribution, nous avons analysé des motifs étoilés à rosace à 16 reposant sur des tracés obtenus par la technique traditionnelle Tastir. Ce travail a abouti à l'automatisation de la construction de la rosace à 16 en calculant de manière précise ses principaux paramètres caractéristiques. Il a par ailleurs abouti à la généralisation de la construction des rosaces d'ordres multiples de 16.

Dans une troisième contribution, nous avons utilisé les résultats précédents consistant automatisés la construction des rosaces pour construire des motifs quasi- périodiques.

Les résultats de ce travail peuvent être utilisés dans les différents centres de formation professionnelle. Cela permettra aux futurs lauréats de ces centres de comprendre cet art ancestral et d'œuvrer dans le sens de le moderniser et d'innover dans la conception de nouveaux motifs.

Ces résultats contribueront par ailleurs à sauvegarder et à valoriser ce riche patrimoine hérité pour le transmettre aux générations futures.

Cependant, d'autres questions en suspens méritent des travaux scientifiques pour en élucider les secrets. La question de la représentation du pavage reste non élucidée pour des compositions complexes. Par ailleurs, ce travail ne traite pas des compositions à symétrie centrale dites de type Naouras et qui sont une spécificité marocaine.

Ces deux dernières problématiques constitueront des perspectives intéressantes pour formaliser l'art géométrique maroco-andalous dans sa globalité.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Abad-Zapatero, C. (2014). Notes of a protein crystallographer: the beauty of rose windows and the different meanings of symmetry. *Acta Crystallographica Section D Biological Crystallography*, *70*(3), 907–911. https://doi.org/10.1107/S1399004713032859

Abas, S. J., & Salman, A. (1992). Geometric and Group-theoretic Methods for Computer Graphic Studies of Islamic Symmetric Patterns. *Computer Graphics Forum*, *11*(1), 43–53. https://doi.org/10.1111/1467-8659.1110043

Abas, S. J., Salman, A. S., Moustafa, A., & Atiyah, M. (1994). *Symmetries of Islamic Geometrical Patterns*. WORLD SCIENTIFIC. https://doi.org/10.1142/2301

Aboufadil, Y., Thalal, A., El Idrissi Raghni, M. A., Jali, A., & Oueriagli, A. (2019). Varieties of 12-fold rosettes and their applications in Moroccan geometric ornament. *Journal of Applied Crystallography*, *52*(3), 605–617. https://doi.org/10.1107/S1600576719004928

Achiou, B., Omari, H. El, Bennazha, J., Albizane, A., Daoudi, L., Saadi, L., Ouammou, M., Younssi, S. A., Maadi, E. A., & Chehbouni, M. (2016). Physicochemical and mineralogical characterizations of clays from Fez region (basin of Saiss, Morocco) in the perspective of industrial use. *Journal of Materials and Environmental Science*, *7*(5), 1474–1484.

Azzouna, N. Ben. (2016). Mohammad Gharipour, Irvin Cemil Schick (eds.). Calligraphy and Architecture in the Muslim World. *Abstracta Iranica, Volume 34-35-36*. https://doi.org/10.4000/abstractairanica.41888

Bakırer, Ö. (1981). *Selçuklu öncesi ve Selçuklu dönemi Anadolu mimarisinde tuğla kullanımı* (Vol. 2). Orta Doğu Teknik Üniversitesi.

Barbot, M. (2005). Calligraphie, arabesque et structures lexicales. *Revue Des Sciences Sociales*, *34*(1), 160–169.

Bazzana, A. (1980). Céramiques médiévales: les méthodes de la description analytique aux productions de l'Espagne orientale. II Les poteries décorées. Chronologie des productions médiévales. *Mélanges de La Casa de Velázquez*, *16*(1), 57–95.

Bodner, B. L. (2007). Bridges 2006: Mathematical connections in art, music, and science : 406, London. *Nexus Network Journal*, *9*(1), 145–150. https://doi.org/10.1007/s00004-006-0034-6

Bodner, B. L. (2008). Hankin's 'Polygons in Contact'Grid Method for Recreating a Decagonal Star Polygon Design. *Bridges Leeuwarden: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture*, 21–28.

Bodner, B. L. (2011). A Nine- and Twelve-Pointed Star Polygon Design of the Tashkent Scrolls. *Proceedings of Bridges 2011: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture*, 147–154. http://archive.bridgesmathart.org/2011/bridges2011-147.pdf

Bonner, J. (2014a). The design of particularly complex non-systematic geometric patterns with multiple centers of localized symmetry. *Les Tracés de l'arabesque Géométrique, Fondation de La Mosquée Hassan ų de Casablanca, Ed. Casablanca*, 85–94.

Bonner, J. (2014b). The historical use of polygonal systems to create islamic geometric patterns. In Fondation de la mosquée Hassan ų de casablanca (Ed.), *Les Tracés De L'Arabesque Géométrique* (pp. 85–94).

Bonner, J. (2017a). 3 Polygonal Design Methodology. In *Islamic Geometric Patterns* (pp. 221–548). Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0217-7_3

Bonner, J. (2017b). Differentiation: Geometric Diversity and Design Classification. In *Islamic Geometric Patterns* (pp. 153–220). Springer.

Bonner, J. (2017c). Polygonal Design Methodology. In *Islamic Geometric Patterns* (pp. 221–548). Springer.

Bonner, J. (2017d). The Historical Antecedents, Initial Development, Maturity, and Dissemination of Islamic Geometric Patterns. In *Islamic Geometric Patterns* (pp. 1–152). Springer.

Bourgoin, J. (2012). *Arabic geometrical pattern and design*. Courier Corporation.

Broug, E. (2008). *Islamic geometric patterns*. Thames & Hudson London.

Buresi, P. (2008). L'empire almohade. Le Maghreb et al-Andalus (1130-1269). In F. Hurlet (Ed.), *Les Empires. Antiquité et Moyen Âge. Analyse comparée* (pp. 221–237). Presses universitaires de Rennes. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01384547

CAMPBELL, P. J. (1989). THE GEOMETRY OF DECORATION ON PREHISTORIC PUEBLO POTTERY FROM STARKWEATHER RUIN. In *Symmetry 2* (pp. 731–749). Elsevier. https://doi.org/10.1016/B978-0-08-037237-2.50052-0

Castera, J.-M. (1996). *Arabesques: art décoratif au Maroc*. Art, Création et Réalisation, ACR.

Castera, J.-M. (1999). Zellijs, muqarnas and quasicrystals. *ISAMA, 99*, 99–104.

Castera, J. M. (1999). *Arabesques: Decorative Arts in Morocco* (ACR Editio).

Castera, J. M., & Jolis, H. (1992). *Géométrie douce, éditions 61/2*. Paris.

Conway, J. H., Burgiel, H., & Goodman-Strauss, C. (2016). *The Symmetries of Things*.

A K Peters/CRC Press. https://doi.org/10.1201/b21368

Coxeter, H. S. M. (1971). Inversive Geometry. In H.-G. Steiner (Ed.), *The Teaching of Geometry at the Pre-College Level: Proceedings of the Second CSMP International Conference Co-Sponsored by Southern Illinois University and Central Midwestern Regional Educational Laboratory* (pp. 34–45). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-017-5896-3_5

Coxeter, H. S. M., & Moser, W. O. J. (1972). *Generators and Relations for Discrete Groups*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-21946-1

Critchlow, K. (1976). *Islamic patterns*. Thames and Hudson London.

Cromwell, P. R. (2010). Islamic geometric designs from the Topkap Scroll I: Unusual arrangements of stars. *Journal of Mathematics and the Arts*, *4*(2), 73–85. https://doi.org/10.1080/17513470903311669

d'Avennes, P. (1877). *L'art arabe d'après les monuments du Kaire depuis le VIIe siècle jusqu'à la fin du XVIIIe: Atlas* (Vol. 4). A. Morel et Cie.

Déroche, F. (2007). La calligraphie dans le monde musulman. In *Aesthetics and Philosophy of Art* (pp. 141–156). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-5069-5_7

Djibril, M. O., & Thami, R. O. H. (2008). Islamic geometrical patterns indexing and classification using discrete symmetry groups. *Journal on Computing and Cultural Heritage*, *1*(2), 95–112. https://doi.org/10.1145/1434763.1434767

El-Said, I., & El-Bouri, T. (1993). *Islamic art and architecture: the system of geometric design*. Ithaca Press.

Fili, A. (2000). La céramique de la madrasa mérinide al-Bu'inaniyya de Fès. *Transfretana: Revista Del Instituto de Estudios Ceut{\'\i}es*, *4*, 259–290.

Grünbaum, B., Grünbaum, Z., & Shepard, G. C. (1986). Symmetry in Moorish and other ornaments. *Computers and Mathematics with Applications*, *12*(3-4 PART 2), 641–653. https://doi.org/10.1016/0898-1221(86)90416-5

Grünbaum, B., & Shephard, G. C. (1992). Interlace patterns in Islamic and Moorish art. *Leonardo*, 331–339.

Hankin, E. H. (1925a). Examples of Methods of Drawing Geometrical Arabesque Patterns. *The Mathematical Gazette*, *12*(176), 370. https://doi.org/10.2307/3604213

Hankin, E. H. (1925b). The Drawings of Geometric Patterns in Saracenic Art (microfiche). In *Memoirs of Archaeological Survey of India* (Vol. 15).

Hankin, E. H. (1934). Some Difficult Saracenic Designs. II. A Pattern Containing Seven-Rayed Stars. *The Mathematical Gazette*, *18*(229), 165.

https://doi.org/10.2307/3606813

Hankin, E. H. (1936). Some Difficult Saracenic Designs. III. A Pattern Containing Fifteen-Rayed Stars. *The Mathematical Gazette*, *20*(241), 318. https://doi.org/10.2307/3607312

Hann, M. A., & Thomas, B. G. (2007). Beyond the Bilateral--Symmetry in Two Dimensional Design. *International Association of Societies of Design Research*, 1–15.

Henni, M. I., & Khaldi, M. (2018). L'art Du Zellige Dans L'architecture Musulmane:, Cas Des Mosquées Ziani Des De Tlemcen. 17 ,*مجلة الحوار الثقافي*. https://doi.org/10.37140/1701-007-002-021

Jablan, S. V. (1995). Theory of Symmetry and Ornament. the Mathematical Institute. *Belgrade, Yugoslavia*.

Jones, O. (1868). The Grammar of Ornament. In *The Grammar of Ornament*. B. Quaritch. https://doi.org/10.2307/j.ctvc77mhw

Jowers, I., Prats, M., Eissa, H., & Lee, J. H. (2010). A study of emergence in the generation of Islamic geometric patterns. *New Frontiers - Proceedings of the 15th International Conference on Computer-Aided Architectural Design in Asia, CAADRIA 2010*, 39–48.

Kaplan, C. S. (2002). *Computer graphics and geometric ornamental design*. University of Washington.

Kaplan, C. S. (2005). Islamic star patterns from polygons in contact. *Proceedings - Graphics Interface*, 177–185. https://doi.org/http://doi.acm.org/10.1145/1089508.1089538

Kaplan, C. S., & Salesin, D. H. (2004). Islamic star patterns in absolute geometry. *ACM Transactions on Graphics*, *23*(2), 97–119. https://doi.org/10.1145/990002.990003

Khamjane, A., & Benslimane, R. (2018a). Generating islamicquasi-periodic patterns: A new method. *Journal on Computing and Cultural Heritage*, *11*(3), 13:1--13:18. https://doi.org/10.1145/3127090

Khamjane, A., & Benslimane, R. (2018b). A computerized method for generating Islamic star patterns. *CAD Computer Aided Design*, *97*, 15–26. https://doi.org/10.1016/j.cad.2017.11.002

Khamjane, A., Taime, A., Ouazene, Z., & Benslimane, R. (2019). Computer Graphics for Generating Islamic Geometric Periodic and Quasi-periodic Patterns. *Proceedings - 2019 International Conference on Intelligent Systems and Advanced Computing Sciences, ISACS 2019*, *2012-Octob*, 391–400. https://doi.org/10.1109/ISACS48493.2019.9068879

Lalvani, H. (1989). Coding and generating complex periodic patterns. *The Visual*

Computer, *5*(4), 180–202. https://doi.org/10.1007/BF02153749

Lee, T., & Soliman, A. (2014). *The Geometric Rosette: analysis of an Islamic decorative motif*.

Makovicky, E. (2016). *Symmetry*. De Gruyter. https://doi.org/10.1515/9783110417142

Nasri, A., & Benslimane, R. (2017). Parametric shape grammar formalism for Moorish geometric design analysis and generation. *Journal on Computing and Cultural Heritage (JOCCH)*, *10*(4), 1–20.

Ostromoukhov, V. (1998). Mathematical tools for computer-generated ornamental patterns. In Springer-Verlag (Ed.), *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)* (Vol. 1375, pp. 193–223). https://doi.org/10.1007/BFb0053272

Ouazene, Z., Khamjane, A., & Benslimane, R. (2022). *Relationship Between Eight-Fold Star and Other Tiles in Traditional Method 'Tastir'* (pp. 352–358). https://doi.org/10.1007/978-3-030-94188-8_33

Paccard, A. (1980). *Traditional Islamic craft in Moroccan architecture*. Atelier 74.

Pecharsky, V.K., Zavalij, P. . (2009). *Fundamentals of Powder Diffraction and Structural Characterization of Materials*. Springer US. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09579-0

Pérez, J. (2018). III. Cordoue. In *Andalousie* (pp. 113–196). Tallandier. https://www.cairn.info/load_pdf.php?ID_ARTICLE=TALLA_PEREZ_2018_01_0113

Rønning, F. (2009). Islamic patterns and symmetry groups. *Philosophy of Mathematics Education Journal [Electronic Only]*, *24*, 14 p., electronic only.

Rosser-Owen, M. (2016). Le Maroc médiéval: Un empire de l'Afrique à l'Espagne: edited by Yannick Lintz, Claire Déléry and Bulle Tuil Leonetti. Éditions Hazan/Musée du Louvre, 2014. Hb., 616pp., approx 350 illustrations, 49€. ISBN-13: 9782754107891 and 9782350314907. Exhibition. *Journal of Islamic Archaeology*, *3*(1), 139–144.

Schattschneider, D. (1978). The Plane Symmetry Groups: Their Recognition and Notation. *The American Mathematical Monthly*, *85*(6), 439–450. https://doi.org/10.1080/00029890.1978.11994612

Terrasse, H. (1955). L'art de l'empire almoravide: ses sources et son evolution. *Studia Islamica*, *3*, 25. https://doi.org/10.2307/1595100

Thalal, A., Aboufadil, Y., Elidrissi Raghni, M. A., Jali, A., Oueriagli, A., & Ait Rai, K. (2018). Symmetry in art and architecture of the Western Islamic world. *Crystallography Reviews*, *24*(2), 102–130. https://doi.org/10.1080/0889311X.2017.1343306

Thalal, A., Benatia, M. J., Jali, A., Aboufadil, Y., & Elidrissi, M. A. R. (2011). Islamic Geometric Patterns Constructed By Craftsmen Working on Wood. *Symmetry: Culture and Science*, *22*(January), 103–130.

Wade, D. (1976). *Pattern in Islamic art*. Studio Vista.

Washburn, D. K., & Crowe, D. W. (1988). *Symmetries of culture: Theory and practice of plane pattern analysis*. University of Washington Press.

Wichmann, B. (2008). Symmetry in Islamic geometric art. *Symmetry: Culture and Science*, *19*(2–3), 95–112.