جامعة سيدي محمد بن عبد الله بفاس
UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH DE FES

كلية العلوم ظهر المهراز فاس
FACULTE DES SCIENCES DHAR EL MAHRAZ FES

N° d'ordre : 84/2023

Centre des Etudes : Sciences et Techniques et Sciences Médicales
Formation Doctorale : Mathématiques et Applications (MA)
Discipline : Mathématiques
Spécialité : Analyse Fonctionnelle et Théorie Spectrale
Laboratoire : Sciences Mathématiques et Applications (LaSMA) Mathématiques, Modélisation et Physique Appliquée (LMMPA)

Thèse pour l'obtention de DOCTORAT

Opérateurs bornés dans un espace de Banach non-Archimédien

Préparée par : TAYBI Mohamed Amine

Soutenue le 13 / 10 / 2023 devant le jury :

Nom et Prénom	Grade	Etablissement	Qualité
Pr. Ech-Cherif El Kettani Mustapha	PES	Faculté des Sciences Dhar El Mehraz de Fès	Président
Pr. Babahmed Mohammed	PES	Faculté des Sciences Meknès	Rapporteur
Pr. Benbouziane Hassane	PH	Faculté des Sciences Dhar El Mehraz de Fès	Rapporteur
Pr. Bendaoud Mohamed	PES	Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers- Meknès	Rapporteur
Pr. Ameziane Hassani Rachid	PES	Faculté des Sciences Dhar El Mehraz de Fès	Examinateur
Pr. Hadder Younes	PH	Centre régional des métiers de l'éducation et de la formation-Fès	Examinateur
Pr. Zguitti Hassane	PES	Faculté des Sciences Dhar El Mehraz de Fès	Examinateur
Pr. Abdelkhalek El Amrani	PH	Faculté des Sciences Dhar El Mehraz de Fès	Directeur de thèse
Pr. Aziz Blali	PES	École Normale Supérieure de Fès	Co-Directeur de thèse

Année Universitaire : 2022-2023

جامعة سيدي محمد بن عبد الله بفاس
UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH DE FES

كلية العلوم ظهر المهراز فاس
FACULTE DES SCIENCES DHAR EL MAHRAZ FES

N° d'Ordre : **/2023**

Formation Doctorale : Mathématiques et Applications (MA)

Discipline : Mathématiques

Spécialité : Analyse Fonctionnelle et Théorie Spectrale

Laboratoires : Sciences Mathématiques et Applications (LaSMA)

Mathématiques, Modélisation et Physique Appliquée (LMMPA)

THÈSE DE DOCTORAT

Présentée par

TAYBI Mohamed Amine

Opérateurs bornés dans un espace de Banach non-Archimédien

Soutenue le 13 / 10 / 2023 devant le jury composé de :

Pr. Ech-Cherif El Kettani Mustapha	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, Fès	***Président***
Pr. Babahmed Mohammed	Faculté des Sciences- Meknès	***Rapporteur***
Pr. Benbouziane Hassane	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, Fès	***Rapporteur***
Pr. Bendaoud Mohamed	Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers- Meknès	***Rapporteur***
Pr. Ameziane Hassani Rachid	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, Fès	***Examinateur***
Pr. Hadder Younes	Centre régional des métiers de l'éducation et de la formation-Fès	***Examinateur***
Pr. Zguitti Hassane	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, Fès	***Examinateur***
Pr. Abdelkhalek El Amrani	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, Fès	***Directeur de thèse***
Pr. Aziz Blali	École Normale Supérieure de Fès	***Co-Directeur de thèse***

Année universitaire : 2022-2023

REMERCIEMENTS

Je remercie dieu le tout puissant de m'avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce travail.

D'abord, je tiens à remercier mon cher encadrent le Professeur **Abdelkhalek El amrani** qui m'a encadré tout au long de cette thèse et qui m'a fait partager ses brillantes intuitions. Qu'il soit aussi remercié pour sa gentillesse, sa disponibilité permanente et pour les nombreux encouragements.

J'adresse tous mes remerciements à mon co-encadrent le Professeur **Aziz Blali** qui m'a aidé à travers les questions qu'il m'a posées tout au long de ce travail.

Un grand merci aussi à mon cher Professeur **R. Ameziane Hassani** qui m'a toujours honoré par sa présence, ses questions et ses remarques pertinentes dans mes exposés au séminaire hebdomadaire organisé par l'équipe d'analyse fonctionnelle au département de la faculté des sciences Dhar El Mahraz.

J'exprime ma gratitude au président du jury mon cher Professeur **Ech-Cherif El Kettani Mustapha** d'avoir accepté cette tâche et de donner de l'intérêt à mon travail.

Mes remerciement vont également aux : Pr. **Babahmed Mohammed** de la faculté des Sciences- Meknès, Pr. **Benbouziane Hassane** de la faculté des Sciences Dhar El Mahraz-Fès et Pr. **Bendaoud Mohamed** de l'école Nationale Supérieure des Arts et Métiers-Meknès qu'ont accepté d'être mes rapporteurs, ainsi qu'autre membres du jury Pr. **Hadder Younes** du centre régional des métiers de l'éducation et de la formation-Fès et Pr. **Zguitti**

Hassane de la faculté des Sciences Dhar El Mahraz-Fès qui ont accepté d'examiner et de juger ce modeste travail.

Enfin, je tiens à remercier tous les membres de l'équipe d'analyse fonctionnelle de la Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, qu'ont répondu avec calme et patience aux questions quotidiennes dont je les accablais.

Résumé

Cette thèse présente une étude des opérateurs bornés dans le cas des espaces de Banach non-Archimédiens. En particulier, elle offre une étude de la théorie spectrale pour la perturbation des opérateurs de rang fini et des opérateurs compacts auto-adjoint par un opérateur diagonal borné dans les espaces de Banach non-Archimédiens.

Dans la première partie de ce travail, nous présentons quelques résultats fondamentaux sur la théorie des espaces de Banach non-Archimédiens. Aussi, nous présentons des notions générales sur la théorie des opérateurs bornés dans le cadre non-Archimédien.

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous attaquons la théorie spectrale pour la perturbation des opérateurs de rang fini par un opérateur diagonal borné dans les espaces de Banach non-Archimédiens de type dénombrable. Notamment, nous caractérisons le spectre de la classe des opérateurs qui s'écrit sous la forme suivante :

$$T = D + F.$$

Avec D est un opérateur diagonal borné et F est un opérateur de rang fini.

Dans la dernière partie de cette thèse, nous introduisons la théorie spectrale pour la perturbation des opérateurs compacts auto-adjoint. Notamment, nous étudions théorie spectrale pour la classe des opérateurs qui s'écrit sous la forme suivante :

$$T = D + T_\lambda.$$

Où D est un opérateur diagonal borné et T_λ est un opérateur compact auto-adjoint.

Abstract

This thesis presents a study of bounded operators in the case of non-Archimedean Banach spaces. In particular, it offers a study of the spectral theory for the perturbation of finite rank operators and self-adjoint compact operators by a bounded diagonal operator in non-Archimedean Banach spaces.

In the first part of this work, we present some fundamental results on the theory of non-Archimedean Banach spaces. Also, we present general notions on the theory of bounded operators in the non-Archimedean case.

In the second part of this thesis, we attack the spectral theory for the perturbation of operators of finite rank by a bounded diagonal operator in non-Archimedean Banach

spaces of countable type. In particular, we characterize the spectrum of the class of operators which is written in the following form :

$$T = D + F.$$

With D is a bounded diagonal operator and F is a finite rank operator.

In the last part of this thesis, we introduce the spectral theory for the perturbation of self-adjoint compact operators. In particular, we study spectral theory for the class of operators which is written in the following form :

$$T = D + T_\lambda.$$

Where D is a bounded diagonal operator and T_λ is a self-adjoint compact operator.

Liste des Symboles

K corps valué non-Archimédien.
$\mathbb{X}$ espace de Banach non-Archimédien.
$|K|$, G groupe des valeur de K.
$\|\mathbb{X}\|$ image de la norme.
A^* adjoint de l'opérateur A.
$N(A)$ noyau de l'opérateur A.
$R(A)$ image de l'opérateur A.
$\eta(A)$ dimension de $N(A)$.
$\delta(A)$ codimension de $R(A)$.
$\chi(A)$ indice de l'opérateur A.
δ_{ij} symbol de Kronecker.
$d(x, y)$ distance de x à y.
$\|x\|$ norme non-Archimédienne de x.
$\langle ., . \rangle$ produit scalaire non-Archimédien.
$[S]$ sous-espace engendré par S.
$\overline{S}$ la fermeture de S.
S' ensemble des points d'accumulation de S.
$card(S)$ cardinal de S.
c_0 espace des suite qui converge vers zéro dans K.
c_0' espace dual de c_0.
$B(\mathbb{X})$ espace des opérateur borné.
$F(\mathbb{X})$ espace des opérateur de rang fini.
$C(\mathbb{X})$ espace des opérateur compact.
$\Phi(\mathbb{X})$ espace des opérateur de Fredholm.
$\Phi_0(\mathbb{X})$ espace des opérateur de Fredholm d'indice zéro.
$B(c_0)$ espace des opérateur borné sur c_0.
$F(c_0)$ espace des opérateur de rang fini sur c_0.
$C(c_0)$ espace des opérateur compact sur c_0.
$\Phi(c_0)$ espace des opérateur de Fredholm sur c_0.
$\Phi_0(c_0)$ espace des opérateur de Fredholm d'indice zéro sur c_0.
$\mathcal{A}_0$ sous-espace des opérateurs qui admet un adjoint.
C_Y algèbre des opérateurs compact auto-adjoint.
$\varrho(A)$ résolvante de A.
$\sigma(A)$ spectre de A.
$\sigma_p(A)$ spectre ponctuel de A.
$\sigma_e(A)$ spectre essentiel de A.

$\sigma_r(A)$ spectre résiduel de A.
$\sigma_c(A)$ spectre continu de A.
$S^\perp$ orthogonal de S.
$S^\vdash$ complément transversal de S.
$S^\dashv$ complément normal de S.
$(e_i)_i$ base orthonormale de c_0.
$(e'_i)_i$ base dual de c'_0.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction **10**

1 Espaces de Banach non-Archimédiens **19**

1.1 Introduction et préliminaires 19

1.1.1 Corps valués non-Archimédiens 20

1.1.2 Espaces de Banach non-Archimédiens 20

1.2 Espaces normés non-Archimédiens de type dénombrable 25

1.2.1 Définitions et propriétés 25

1.2.2 Orthogonalité dans un espace de Banach non-Archimédien 26

1.2.3 Bases orthogonales 29

1.2.4 Espaces de Banach non-Archimédiens libres 31

1.2.5 L'espace c_0 32

2 Étude spectrale des opérateurs de la forme $A = D + F$ **35**

2.1 Introduction 35

2.2 Opérateurs bornés 36

2.2.1 Propriétés de Bases 39

2.2.2 Opérateurs bornés dans un espace de Banach $n.a$ libre 40
2.3 Opérateurs de rang Fini 42
2.3.1 Définitions de bases 42
2.3.2 Propriétés des opérateurs de rang fini 43
2.4 Opérateurs de Fredholm 44
2.4.1 Définitions et exemples 44
2.4.2 Propriétés d'opérateurs de Fredholm 44
2.5 Analyse spectrale des opérateurs bornés 46
2.5.1 Spectre d'un opérateur borné 46
2.5.2 Spectre Essentiel d'un opérateur borné 47
2.6 Analyse spectrale pour une perturbation des opérateurs de rang fini 49
2.6.1 Analyse spectrale des opérateurs de la forme $T = D + K$ 49
2.6.2 Analyse spectrale des opérateurs de la forme $T = D + F$ 52
2.6.3 Caractérisation du spectre essentiel d'un opérateur diagonal . . . 54

3 Étude spectrale des opérateurs de la forme $T = D + T_\mu$ 59
3.1 Introduction et préliminaires 59
3.1.1 Produit scalaire non-Archimédien 60
3.1.2 Opérateur adjoint 62
3.2 Opérateurs compacts 65
3.2.1 Étude de C_Y 68
3.2.2 Étude spectrale des opérateurs de la forme $T = D + T_\mu$ 69

Bibliographie 75

INTRODUCTION

En $1908,$ Hensel a introduit les corps $p-$adiques. L'étude de ces corps était principalement limitée aux domaines de l'algèbre et de la théorie des nombres. Ces corps n'ont été étudiés du point de vue de l'analyse qu'après 1940; ce qui a donné lieu à un ensemble d'articles dans plusieurs journaux. Ces articles étaient la base de l'analyse fonctionnelle non-Archimédienne (ultramétrique ou $p-$adique) qui s'est beaucoup développée dans les dernières soixante années, voir [27, 36, 52].

La publication des monographies [3, 26, 29, 30, 31, 32, 36, 52] et les différentes conférences internationales : Paris $(1972),$ Nijmegen (1978) et $p-$adic Functional Analysis (depuis 1999) montre que l'évolution de l'analyse fonctionnelle non-Archimédienne s'est développée dans une direction séparée de l'analyse classique (analyse réelle ou complexe) pendant les dernières 50 années.

Comme l'analyse réelle ou complexe est basée sur le corps des nombres réels, respectivement le corps des nombres complexes, les corps valués non-Archimédiens c'est-à-dire les corps munis d'une valeur absolue non-Archimédienne $|\ .\ |$ (valeur absolue qui vérifie l'inégalité triangulaire forte, c'est-à-dire $|x+y| \leq \max\{|x|,|y|\},\ pour\ tous\ x,y \in K$), dont les corps $p-$adiques sont un exemple, sont à la base de l'analyse non-Archimédienne $(n.a.)$

Du point de vue analytique on a suivi, dans un premier temps, le chemin qui consiste

simplement à remplacer, dans la théorie de l'analyse réelle (classique), le corps des nombres réels par un corps valué non-Archimédien et à voir ce que devient cette théorie. Cependant, cela a nécessité des nouvelles définitions adaptées aux situations non-Archimédiennes pour obtenir une bonne théorie. Il existe plusieurs résultats identiques entre l'analyse non-Archimédienne et l'analyse classique, mais ils diffèrent complètement en terme de la démonstration, notamment, le théorème de l'application ouverte de Banach, le théorème du graphe fermé et le théorème de Banach-Steinhaus. Mais il apparait qu'aucune théorie unifiée n'est possible. Il faut remarquer qu'il y a pas un ordre sur le corps de base K, notez qu'en analyse classique, nous bénéficions de l'ordre sur le corps des nombres réels. Par conséquence, il est nécessaire de trouver des méthodes en analyse non-Archimédienne qui n'utilisent pas d'ordre sur le corps K, mais utilisent plutôt la norme que ce soit la norme sur K ou la norme non-Archimédienne sur l'espace de Banach non-Archimédien. Il est clair que ces méthodes ont de nombreuses conséquences profondes en ce qui concerne les méthodes à utiliser ou sur les résultats de la théorie. Par exemple, il semble difficile de généraliser une notion telle qu'une intégrale positive de l'analyse classique. D'autre part, ces nouvelles méthodes peuvent être importantes pour l'analyse classique, afin que nous connaissions les résultats qui peuvent être obtenus dans cette analyse en utilisant uniquement la norme sans utiliser la notion de l'ordre sur K.

Environs 1940, [33,34] Monna a commencé l'étude systématique des espaces de Banach $n.a$, c'est-à-dire les espaces normés complets $\mathbb{X}$ sur K dont la norme satisfait à l'inégalité triangulaire forte,

$$\|x+y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|) \quad pour\ tous\ x, y \in \mathbb{X}.$$

Il a obtenu une caractérisation d'une classe d'espace de Banach $n.a$ au moyen des bases orthogonales et sous quelques conditions spéciales, il arrive a démontrer le théorème de Hahn-Banach .

Mais il y a aussi des différences inattendues, par exemple les espaces de Banach $n.a$ sur K, ont la dimension 0, c'est-à-dire admet une base de voisinage de zero formée par des ouverts et fermés à la fois $O.F$. C'est le même cas pour les espaces localement convexes sur K, voir [39]. La topologie n'est donc que très faible (l'addition et la multiplication sont continues) et cela présente des difficultés sérieuses pour certains problèmes. On les rencontre notamment dans la transcription des résultats de l'analyse réelle où la frontière de certains ensembles semble essentielle ; dans ces cas la frontière de ces ensembles est vide en analyse non-Archimédienne. Par exemple, lorsqu'on définit sur $\mathbb{X}$ une topologie

au moyen de semi-norme p, et si A est un ensemble convexe absorbant alors on a

$$\{x \in \mathbb{X} \mid p(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in \mathbb{X} \mid p(x) \leq 1\}.$$

Les ensembles à droite et à gauche de ces inclusions sont à la fois ouverts et fermés de sorte que les frontières de ces ensembles sont vides.

En 1952, Ingleton [25] (précédé par un travail de I.S. Cohen en 1948 [11]) réussit à prouver le théorème de Hahn-Banach dans un cadre plus général du cas non-Archimédien, en s'appuyant sur le concept d'espace sphériquement complet qui lui même a introduit dans un travail fondamental.

La théorie des opérateurs linéaires dans les espaces de Banach $n.a$ et dans les espaces localement convexes sur un corps valué non-Archimédien K fut traitée par quelques auteurs.

Dans $[37]$, Monna réussit à démontrer que le théorème de Banach-Steinhaus pour les espaces localement convexes, tel qu'on trouve, dans une forme très générale, chez Bourbaki $[8]$, reste vrai pour les espaces non-Archimédiens par l'introduction des espaces tonnelés. Pour les espaces normés $n.a$ on a le théorème suivant :

Théorème 0.0.1. $[36]$ *Soient E et F des espaces normés $n.a$, et $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace normé $n.a$ des applications linéaires continues de E dans F. Supposons E soit complet. Alors $H \subset \mathcal{L}(E,F)$ est borné en norme si et seulement si l'ensemble $H(x) = \{f(x) | f \in H\}$ est borné dans F pour tout $x \in E$.*

Ce théorème est en défaut si E n'est pas complet ; pour un contre exemple voir $[37]$.

La différence la plus importante dans cette nouvelle théorie est que l'image de la norme $n.a$ peut être différente de $|K|$ ensemble des valeurs de K ; et alors les vecteurs non nuls ne peuvent pas être toujours normalisés. On peut traduire cela en disant que si x est un vecteur d'un espace normé $n.a$ $\mathbb{X}$, il n'existe pas en général un $\lambda \in K$ tel que $\|\lambda x\| = 1$, pour un contre exemple voir $[39]$. Cette situation ne se présente pas dans les espaces normés sur $\mathbb{R}$. Et parmi les conséquences de cette différence la réciproque du résultat suivant :

$$\texttt{A est un opérateur borné} \Longrightarrow \texttt{A est continu.}$$

n'est pas toujours vraie ; pour un contre-exemple voir $[46]$.

Dans [34], Monna réussit à démontrer que la théorie de Riesz reste vraie pour les opérateurs linéaires dans le cas des espaces de Banach $n.a$, si le corps de base est local, l'auteur y a utilisé la version non-Archimédienne du lemme classique de Riesz (voir [5]), qui prend même une forme plus simple (voir [6]).

Serre [48] a étudié les applications linéaires complètement continues (on dit qu'une application linéaire A est complètement continu s'il existe une suite $(F_n)_n$ d'opérateurs de rang fini telle que $\|A - F_n\| \to 0$ lorsque $n \to \infty$) dans les espaces de Banach $n.a$. Il arrive à démontrer qu'on peut appliquer la théorie de Fredholm aux endomorphismes complètement continus dans les espaces de Banach $n.a$ libres et il introduit le déterminant de Fredholm.

Van Tiel [51] a aussi étudié les applications complètement continues pour les espaces localement convexes, il a démontré qu'on peut suivre la méthode classique si K est local. Et il arrive a généraliser deux théorèmes de Schwartz [47].

Nous mentionnons également les travaux de Van der Put [41], [42].
Dans [41] Van der Put donne une théorie sur la décomposition spectrale des éléments d'une algèbre de Banach $n.a$.
Ainsi, dans [42], Van der Put a démontré un théorème de décomposition (théorème 2) pour les opérateurs sur un espace normé non-Archimédien. Ce théorème est un analogue de la décomposition des opérateurs de von Neumann dans les espaces de Hilbert classiques. A l'aide de cette décomposition il a pu déterminé (théorème 5) la structure des idéaux fermés bilatéraux dans l'anneau des opérateurs bornés sur un espace normé non-Archimédien.

L. Narici et E. Beckenstein [38] ont défini un produit scalaire sur un espace vectoriel $\mathbb{X}$ sur un corps valué non-Archimédien K; et pour bien définir ce produit scalaire, ils ont remplacé la linéarité de la seconde coordonnée par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ils ont suivi le chemin habituel pour définir l'orthogonalité à partir de ce produit scalaire, ils se sont aperçus, tout de suite, que cette méthode ne conduit pas à une théorie satisfaisante d'espaces de Hilbert $n.a$ car le concept de l'orthogonalité dans le cas $n.a$ est basé sur la norme et non pas sur le produit scalaire.

L'adjoint A^* de $A \in B(\mathbb{X})$, s'il existe, est défini par $\langle Au, v\rangle = \langle u, A^*v\rangle$ pour tout $u, v \in \mathbb{X}$. Contrairement au cas classique, l'adjoint d'un opérateur borné dans le cas non-Achimédien n'existe pas toujours. Notons que s'il existe, l'adjoint A^* d'un opérateur A,

est unique et de même norme que A, et donc, $A^* \in B(\mathbb{X})$. Les propriétés de l'adjoint dans un espace de Banach $n.a$ libre (espace de Banach $n.a$ qui admet une base orthogonale) sont plus faciles à exprimer en termes de $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base orthogonale de $\mathbb{X}$ voir [13] pour plus de détails.

La théorie de perturbation des opérateurs linéaires dans le cas non-Archimédien a été étudiée à travers plusieurs étapes. Dans une première étape réalisée par J. P. Serre dans [48], où il a traité des perturbations compactes de l'identité sur les espaces de Banach ayant une base orthogonale. Une autre approche a été franchie par L. Gruson [23] pour une vision plus générale, travaillant toujours sur les perturbations de l'identité. Une étude complète des perturbations de l'identité a finalement été réalisée par W. H. Schikhof dans [45].
Dans [43], P. Robba a travaillé sur les perturbations des opérateurs injectifs, il introduit la théorie des indices comme une moyenne importante pour étudier la théorie des opérateurs différentiels non-Archimédien (voir aussi [44]). Cette connexion entre les opérateurs différentiels non-Archimédiens et la théorie des indices représente un important sujet de recherche actuel, car des articles récents comme [9] et [10], entre autres, couvrent les nouvelles tendances. Aussi, dans ce dernier article, un remarquable fait est que les restrictions sur les opérateurs perturbés sont apparues pour une grande classe d'espaces, mais travaillant juste sur des corps localement compacts.

Dans [4], J. Araujo, C. Perez-Garcia et S. Vega ont prouvé que l'indice d'un opérateur de Fredholm est préservé sous des perturbations compactes entre les espaces de Banach non-Archimédiens. Un cas d'intérêt particulier est fourni lorsque le corps est non sphériquement complet. Dans ce cas, les techniques classiques ne sont plus valables et la relation entre le noyau d'un opérateur de Fredholm et celui d'une petite perturbation compacte s'avère en général beaucoup plus riche que dans le contexte complexe.

Avant d'attaquer la théorie de perturbation des opérateurs de rang fini et des opérateurs compacts auto-adjoints on va définir $\mathbb{E}_w$.
Soit $w = (w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite non nulle de K, définissons l'espace $\mathbb{E}_w$ par :

$$\mathbb{E}_w = \{u = (u_j)_{j\in\mathbb{N}} \ : \ u_j \in K, \ \ pour\ tout\ j \in \mathbb{N}\ et\ \lim_{j\to\infty} |u_j||w_j|^{\frac{1}{2}} = 0\}.$$

Considérons l'opérateur linéaire B défini sur $\mathbb{E}_w$ par :

$$(\forall j \in \mathbb{N}) \ \ Be_j = e_j + \sum_{i\neq j} w_i^{-1} e_i.$$

L'analyse spectrale de l'opérateur B a été étudiée par Diarra [16]. Il a montré que sous certaines hypothèses, le spectre $\sigma(B)$ de B est donné par $\sigma(B) = \{1\} \cup \sigma_p(B)$, où $\sigma_p(B)$ est l'ensemble des valeurs propres de B. Et les valeurs propres de B sont de la forme $\lambda = 1 + \alpha$, où α parcourt la famille de tous les zéros de la fonction définie par

$$\varphi(\alpha) = 1 - \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{1+\alpha w_j}.$$

Ensuite, Diarra [9] a largement utilisé la théorie classique des fonctions analytiques $p-$adiques pour localiser tous les zéros de φ.

Dans [13], Diagana et McNeal ont étudié l'analyse spectrale pour la perturbation de rang un d'opérateurs diagonaux sur $\mathbb{E}_w$, qui s'avère plus générale que B. Sous quelques hypothèses raisonnables, ils ont donné le spectre pour les éléments de la classe des opérateurs linéaires notés $\mathcal{D}_{per}(\mathbb{E}_w)$, qui se compose des opérateurs linéaires bornés sur $\mathbb{E}_w$ de la forme

$$A = D + u \otimes v,$$

où D est l'opérateur diagonal défini par $De_j = \lambda_j e_j$ avec $\lambda = (\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset K$ et $u \otimes v$ est un opérateur linéaire de rang un défini par $(u \otimes v)(w) = \langle v; w\rangle u$ pour tout $u = (\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}},\ v = (\beta_j)_{j\in\mathbb{N}},\ w = (w_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{E}_w$ où $\alpha_j, \beta_j, w_j \in K \setminus \{0\}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.

Dans [14], T. Diagana et R. Kerby ont étudié le spectre des opérateurs complètement continus perturbés par un opérateur diagonal borné c-à-dire le spectre pour les opérateurs de la forme

$$A = D + K$$

où D est un opérateur diagonal borné et K est un opérateur complètement continu défini sur $\mathbb{E}_w$. Puis il ont déduit la théorie spectrale des opérateurs de la forme

$$T = D + F,$$

où D est un opérateur diagonal borné et $F = \sum_{i=1}^{m} u_i \otimes v_i$ est un opérateur de rang fini, avec $u_i = (\alpha_j^i)_{j\in\mathbb{N}}, v_i = (\beta_j^i)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{E}_w \setminus \{0\}$ pour tout $i = 1, \ldots, m$.
Pour enrichir l'étude de la théorie spectrale pour la perturbation des opérateurs de rang fini et des opérateurs compacts auto-adjoints, nous avons besoin de déterminer le spectre essentiel de D alors, dans toute la suite $(K, |.|)$ désigne un corps valué $n.a$ complet et non trivial et son corps résiduel est formellement réel c'est-à-dire, pour tout sous-ensemble fini

$\{a_1, \ldots, a_n\}$ de K, $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ implique que $a_i = 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Pour une suite donnée $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ avec $\lambda_j \in K$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, on pose $\Lambda = \{\lambda_j \in K \ : \ j \in \mathbb{N}\}$. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, $I_\lambda = \{j \in \mathbb{N} \ : \ \lambda_j = \lambda\}$, et $r_\lambda = card(I_\lambda)$. De plus $\Lambda^* = \{\lambda \in \Lambda \ : \ r_\lambda < \infty\}$. L'ensemble $\overline{\Lambda}$ est la fermeture de Λ dans K, $\Lambda' = \{\lambda \in \Lambda \ : \ \lambda \ est \ un \ point \ d'accumulation \ de \ \Lambda\}$. Alors le spectre essentiel $\sigma_e(D)$ de D est donné par

$$\sigma_e(D) = (\Lambda \setminus \Lambda^*) \cup (\Lambda^* \cap \Lambda') \ \ [15].$$

Dans le premier chapitre de ce travail, on va présenter quelques résultats concernant la théorie des espaces de Banach $n.a$, avec un accent particulier sur les espaces de Banach non-Archimédiens de type dénombrable. Ainsi, on va mettre le point sur la notion d'orthogonalité dans ces espaces et on va présenter une relation importante entre c_0 et les espaces de Banach $n.a$ de type dénombrable et de dimension infinie. Encore, les résultats ici sont bien connus et serviront de base à la théorie des opérateurs développée par la suite.

Dans le deuxième chapitre de cette thèse, on va commencer avec des notions générales sur la théorie des opérateurs bornés dans le cadre $n.a$, pour attaquer par la suite la théorie spectrale sur les espaces de Banach $n.a$ de type dénombrable des opérateurs qui s'écrivent sous la forme suivante :

$$T = D + F$$

avec D un opérateur diagonal borné défini par $De_j = \lambda_j e_j$ avec $\lambda = (\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset K$ et $F = \sum_{i=1}^{m} u_i' \otimes v_i$ est un opérateur de rang fini, avec $u_i' \in c_0'$ et $v_i \in c_0$ pour tout $i = 1, \ldots, m$.
Utilisons le résultat suivant (Théorème 2.6.1) :

$$si \ A \in \Phi(c_0) \ et \ K \in C(c_0) \ alors \ A + K \in \Phi(c_0) \ et \ \chi(A + K) = \chi(A).$$

nous avons montré que si $A \in B(c_0)$, on a

$$\sigma_e(A + K) = \sigma_e(A)$$

pour tout $K \in C(c_0)$ (Théorème 2.6.2).
Puis, à l'aide de ce dernier résultat, nous montrerons que le spectre $\sigma(T)$ de l'opérateur linéaire borné T est donné par :

$$\sigma(T) = \sigma_e(D) \cup \sigma_p(T),$$

où $\sigma_e(D)$ est le spectre essentiel de D et $\sigma_p(T)$ est le spectre ponctuel de T, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de T donné par $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \rho(D) : detM(\lambda) = 0\}$

avec $M(\lambda)$ étant la $m \times m$ matrice carrée $M(\lambda) = (b_{ij})_{i,j=1,\ldots,m}$ dont les coefficients sont donnés par $b_{ij} = \delta_{ij} + \langle C_\lambda u_i', v_j \rangle_d$ pour tout $i, j = 1, \ldots, m$ et $C_\lambda = (D - \lambda I)^{-1}$.

Dans le dernier chapitre de ce travail, nous introduisons une analyse spectrale pour la perturbation des opérateurs compacts et auto-adjoints par un opérateur diagonal borné dans un espace de Banach non-Archimédien de type dénombrable. Nous étudions l'analyse spectrale pour la classe des opérateurs de la forme :

$$T = D + T_\lambda,$$

où $D = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \langle ., e_i \rangle e_i,\ (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in c_0$ est un opérateur diagonal borné et $T_\mu = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_i \frac{\langle ., y_i \rangle}{\langle y_i, y_i \rangle} y_i$ est un opérateur compact out-adjoint, comme dans la partie précédente où on a démontré que le spectre de T est donné par :

$$\sigma(T) = \sigma_e(D) \cup \sigma_p(T),$$

avec $\sigma_e(D)$ désigne le spectre essentiel de D et $\sigma_p(T)$ est le spectre ponctuel de T c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de T données par $\sigma_p(T) = \{a_n + \lambda_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. De plus, on a prouvé que $\sigma_p(T) \cap \sigma_p(D) = \emptyset$.

CHAPITRE 1

ESPACES DE BANACH NON-ARCHIMÉDIENS

1.1 Introduction et préliminaires

Dans ce chapitre nous allons rappeler quelques résultats concernant les corps valués non-Archimédiens $(n.a)$, les espaces de Banach $n.a$, la notion d'orthogonalité et les espaces de Banach $n.a$ de type dénombrable.
Dans la première partie de ce chapitre on va traiter les notions fondamentales des corps valués $n.a$ qui seront utiles dans la suite de cette thèse. Ensuite, on va traiter les espaces de Banach $n.a$ et on va donner les propriétés essentielles des espaces de Banach $n.a$ de type dénombrable. Et on va définir une notion d'orthogonalité sur les espaces $n.a$ relative à la norme $n.a$ qui sera symétrique, contrairement au cas classique où c'est rare qu'il soit symétrique, sauf pour les espaces de Hilbert. Cette notion fonctionnera pour tous les espaces normés $n.a$. Et on montre aussi, à l'encontre du cas classique, que cette orthogonalité est stable par petite perturbation (théorème de perturbation). Ainsi, on définit les bases orthogonales et les bases $t-$orthogonales et on rappelle une caractérisation des espaces de Banach $n.a$ libres a l'aide de ces bases. Enfin, on définit c_0 l'espace des suites qui tendent vers 0; puis, on démontre que tout espace de Banach $n.a$ de type dénombrable et de dimension infinie et linéairement homéomorphe a c_0.

1.1.1 Corps valués non-Archimédiens

Un corps valué $n.a$ est un corps K muni d'une valeur absolue non-Archimédienne $|.|$ qui est une application de K dans $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $(\forall \lambda \in K)\ |\lambda| \geqslant 0$;
2. $(\forall \lambda \in K)\ |\lambda| = 0$ si, et seulement si, $\lambda = 0$;
3. $(\forall\, (\lambda, \mu) \in K^2)\ |\lambda\mu| = |\lambda||\mu|$;
4. $(\forall\, (\lambda, \mu) \in K^2)\ |\lambda + \mu| \leq \max\{|\lambda|, |\mu|\}$.

La dernière inégalité est appelée l'inégalité ultamétrique.
La valeur absolue $n.a$ est dite triviale si et seulement si $|\lambda| = 1$ pour tout $\lambda \in K \setminus \{0\}$.
Pour tout $\lambda, \mu \in K$ on a $|\lambda| \neq |\mu| \Rightarrow |\lambda + \mu| = \max\{|\lambda|, |\mu|\}$.
La valeur absolue $n.a$ $|.|$ définie sur K une topologie d'espace métrique par la métrique $n.a$ $d(\lambda, \mu) = |\lambda - \mu|$. K muni de cette topologie est un corps topologique.
Les ensembles $B_\epsilon = \{\lambda \in K \ : \ |\lambda| \leq \epsilon\}$ et $B'_\epsilon = \{\lambda \in K \ : \ |\lambda| < \epsilon\}$ avec ϵ un réel positif, sont à la fois ouverts et fermés ; donc chaque corps valué $n.a$ est de dimension 0 (c'est-à-dire il possède un système fondamental de voisinages (S.F.V.) de 0 formé d'ensembles à la fois ouverts et fermés).
L'ensemble $G = \{|\lambda| \ : \ \lambda \in K \setminus \{0\}\}$ est appelé le groupe des valeurs de la valeur absolue $|.|$; c'est un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{R}^{+*}$, si G est monogène ; il existe $\rho > 0$ tel que $G = \{\rho^n \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$ et la valeur absolue $n.a$ est dite discrète ou K est discret, sinon, G est dense dans $\mathbb{R}^{+*}$: c'est-à-dire que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 \leq a \leq b$, il existe $\lambda \in K$ tels que $0 \leq |\lambda| \leq |b|$; et on dit que la valeur absolue $n.a$ est dense, ou K est dense. Dans ce cas, il existe $\rho > 1$ vérifiant :

$$(*) \quad (\forall n \in \mathbb{Z}) \ : \ (\exists \lambda_n \in K) \ tel\ que\ |\lambda_n| = \rho^n.$$

Dans toute la suite, K désigne un corps muni d'une valeur absolue $n.a$ non triviale, on suppose qu'il soit complet pour la topologie définie par cette valeur absolue $n.a$ et le nombre réel $\rho > 1$ désigne :
1. Le générateur de G si K est discret ;
2. Le nombre vérifiant $(*)$ si K est dense.

1.1.2 Espaces de Banach non-Archimédiens

Dans cette section, nous rassemblons quelques faits de base sur les espaces de Banach non-Archimédiens, avec un accent particulier sur les espaces de Banach non-Archimédiens de type dénombrable. Encore, les résultats ici sont bien connus et serviront de base à la théorie des opérateurs développée par la suite.

Définition 1.1.1. *Soit $\mathbb{X}$ un espace vectoriel sur K. Une norme non-Archimédienne sur $\mathbb{X}$ est une application $\|.\| : \mathbb{X} \to \mathbb{R}^+$ satisfaisant les trois propriétés suivantes :*

1. $(\forall x \in \mathbb{X})\ \ \|x\| = 0$ *si, et seulement si* $x = 0$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ *pour tous* $x \in E$ *et* $\lambda \in K$ *;*
3. $\|x + y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$ *pour tous* $x, y \in \mathbb{X}$.

La propriété 3 de la définition précédente est appelée inégalité triangulaire forte.

Définition 1.1.2. *Un espace normé non-Archimédien est un couple $(\mathbb{X}, \|.\|)$ où $\mathbb{X}$ est un espace vectoriel sur K et $\|.\|$ est une norme non-Archimédienne sur $\mathbb{X}$.*

Remarque 1.1.1.

a) Un espace normé $n.a$ est un espace normé ; mais la réciproque n'est pas vraie.

b) Pour que la norme dans un $K-$espace vectoriel, soit $n.a$, il faut que K soit $n.a$ (en effet $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ |n| \leq 1$).

Définition 1.1.3. *Soit $(\mathbb{X}, \|.\|)$ un espace normé $n.a$, deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sur $\mathbb{X}$ sont dites équivalentes si et seulement si elles définissent la même topologie sur $\mathbb{X}$. Dans ce cas, il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^{+2}$ tel que :*

$$(\forall x \in \mathbb{X}) \quad m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1.$$

Proposition 1.1.1. *Toutes les normes $n.a$ sur un espace normé $n.a$ de dimension finie sont équivalentes.*

Démonstration. Voir ([15], proposition 2.27). □

Sauf mention explicite du contraire, toutes les normes considérées dans la suite sont non-Archimédiennes.
Voici quelques premiers exemples de normes non-Archimédiennes sur certains espaces vectoriels.

Exemple 1.1.1.

1. *La valeur absolue sur K elle-même est une norme non-Archimédienne.*
2. *Considérons le produit cartésien K^n avec $n \in \mathbb{N}^*$ et définissons l'application $\|\ .\ \|$ par :*

$$(\forall\, (x_1, ..., x_n) \in K^n)\ \ \|(x_1, ..., x_n)\| = \max\{|x_i|\ :\ 1 \leq i \leq n\}.$$

Alors $\|\ .\ \|$ est une norme non-Archimédienne sur K^n.

3. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, soit $K^{(i)} = K$ considérons $P = \prod_{i=0}^{\infty} K^{(i)}$ alors P est le produit direct d'une copie dénombrable de K. L'ensemble P est un espace vectoriel sur K. Notez qu'un élément de P est juste une suite d'élément de K de la forme $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$.
Soit

$$L^{\infty}(K) = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in P \ : \ (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \ est \ bornée\},$$

$L^{\infty}(K)$ est un sous-espace de P. Définissons

$$\|(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_{\infty} = \sup\{|x_i| \ : \ i \in \mathbb{N}\}$$

alors $\|.\|_{\infty}$ est une norme $n.a$ sur $L^{\infty}(K)$.

4. Soit $(\mathbb{X}_i, \|.\|_i)_{i=1,2}$ des espaces normés non-Archimédiens sur K, soit $L(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$ l'ensemble de toutes les applications $K-$linéares $A : \mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}_2$; alors c'est un espace vectoriel sur K.
Soit $B(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$ l'ensemble de toutes les applications $K-$linéares $A : \mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}_2$ vérifiant : il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{X}_1$

$$\|Ax\|_2 \leqslant C\|x\|_1.$$

Alors $B(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$ est un sous-espace vectoriel de $L(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$. Définissons pour tout $A \in B(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$

$$\|A\| = \sup_{x\in\mathbb{X}_1\setminus\{0\}} \frac{\|A(x)\|_2}{\|x\|_1},$$

alors $\| \ . \ \|$ est une norme non-Archimédienne sur $B(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$.

5. Soit $\mathbb{X}$ un $K-$espace vectoriel, alors l'application $\| \ . \ \|$ définie sur $\mathbb{X}$ par $\| \ 0 \ \| = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{X} \setminus \{0\}$, $\| \ x \ \| = 1$, est une norme non-Archimédienne sur $\mathbb{X}$, dite norme triviale (on dit aussi que $\mathbb{X}$ est triviale lorsqu'il est muni de cette norme).

Proposition 1.1.2. *Soit $(\mathbb{X}, \|.\|)$ un espace normé $n.a$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{X}^2$, on a :*

$$Si \ \ \|x\| \neq \|y\| \ \ alors \ \ \|x + y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

Démonstration. Voir ([15], proposition 2.9). □

Définition 1.1.4. *Une suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans un espace normé $(\mathbb{X}, \|.\|)$ converge (fortement) vers $x \in \mathbb{X}$ et on écrit :*

$$\lim_{i\to\infty} x_i = x,$$

si et seulement si la suite de nombre réel $(\|x_i - x\|)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}$ muni de sa valeur absolue usuelle.

Définition 1.1.5. *Une série* $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i$ *dans* $\mathbb{X}$ *converge vers* $x \in \mathbb{X}$ *et on écrit*

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i = x,$$

si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *avec* $S_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$, *pour chaque* $n \in \mathbb{N}$, *converge vers* x.

Définition 1.1.6. *Soit* $\mathbb{X}$ *un espace normé* $n.a$, *on dit qu'une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* $\mathbb{X}$ *est sommable dans* $\mathbb{X}$ *si et seulement si il existe* $x \in \mathbb{X}$, *qui s'appelle somme de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tel que* $\lim_{n\to\infty} \|x - \sum_{i=0}^{n} x_i\| = 0$. *Dans ce cas, on écrit*

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i.$$

Et on dit que $(x_n)_n$ *est sommable inconditionnellement si et seulement si pour tout permutation* σ *de* $\mathbb{N}$, *la suite* $(x_{\sigma(n)})_n$ *est sommable dans* $\mathbb{X}$.

Proposition 1.1.3. *Soit* $\mathbb{X}$ *un espace normé* $n.a$ *et soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite dans* $\mathbb{X}$.
Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est sommable dans* $\mathbb{X}$, *alors elle est sommable inconditionnellement et de même somme.*

Démonstration. Voir [15]. □

Remarque 1.1.2. *La proposition précédente n'est pas vraie dans le cas Archimédien ; il existe des suites sommables qui ne sont pas sommables inconditionnellement.*

Soit $(\mathbb{X}, \|.\|)$ un espace normé non-Archimédien, alors une métrique (dite naturelle) peut être définie sur $\mathbb{X}$ pour lui donner une structure d'espace métrique. Cette métrique est définie par :

$$\left(\forall (x, y) \in \mathbb{X}^2\right) \quad d(x, y) = \|x - y\|.$$

Et l'inégalité triangulaire forte se traduit par

$$\left(\forall (x, y, z) \in \mathbb{X}^3\right) \quad d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}.$$

Définition 1.1.7. *Un espace normé* $n.a$ $(\mathbb{X}, \|.\|)$ *est dit espace de Banach* $n.a$ *si, et seulement si, il est complet par rapport à la métrique naturelle induite par la norme.*

Les espaces K, K^n, où $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{i=0}^{\infty} K^{(i)}$ et $B(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$ avec leurs respectives normes, définies précédemment, sont des espaces de Banach non-Archimédiens.

Proposition 1.1.4. *Tout espace normé $n.a$ de dimension finie est un espace de Banach $n.a$. Et tous ses sous-espaces sont fermés.*

Démonstration. Voir [15]. □

Définition 1.1.8. *Deux espaces de Banach $n.a$ sont dits isomorphes lorsqu'il existe une application linéaire, bijective et bicontinue de l'un vers l'autre.*

Proposition 1.1.5. *Les espaces de Banach $n.a$ de dimension 1 sont en général non isomorphes.*

Démonstration. Soit $r > 0$; on note K_r le corps K muni de la norme $n.a$ définie par : $(\forall \lambda \in K) \quad \|\lambda\|_r = r|\lambda|$. Alors $(K_r, \|.\|_r)$ est un espace de Banach $n.a$ et on a :

$$K_r \; est \; isomorphe \; à \; K \; si, \; et \; seulement \; si \; r \in |K|.$$

□

Le théorème suivant est un critère de complétion pour les espaces normés n.a.

Théorème 1.1.1. *Soit $\mathbb{X}$ un espace normé $n.a$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathbb{X}$ est un espace de Banach $n.a$.*
2. *Toute suite convergente vers 0 est sommable dans $\mathbb{X}$.*

Démonstration. Voir ([39], Théorème 2.1.3, p. 16). □

Proposition 1.1.6.

1) Un sous-espace fermé d'un espace de Banach $n.a$ est un espace de Banach $n.a$.

2) La somme directe de deux espaces de Banach $n.a$ est un espace de Banach $n.a$.

Démonstration. Voir ([15], proposition 2.16). □

Proposition 1.1.7. *Soit $\mathbb{X}$ un espace de Banach $n.a$. Alors une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est convergente dans $\mathbb{X}$ si, et seulement si $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.*

Démonstration. Voir ([15], proposition 2.25). □

L'exemple suivant joue un rôle très important dans la théorie des espaces de Banach $n.a.$

Exemple 1.1.2. *Soit $c_0(K)$ l'ensemble de toutes les suites $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de K qui converge vers 0. On définit sur $c_0(K)$ la norme non-Archimédienne suivante :*

$$\|(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|;$$

alors $(c_0(K), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach $n.a.$

1.2 Espaces normés non-Archimédiens de type dénombrable

On rappelle qu'un espace topologique est dit séparable si, et seulement si, il contient une partie dénombrable dense. Dans la théorie des espaces de Banach classique, un rôle important est joué par la notion de séparabilité, et le concept d'espace séparable trouve son application et son importance du fait que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont séparables, et alors tout espace de Banach de dimension finie est séparable aussi. Mais, si $\mathbb{X}$ est un espace normé $n.a.$ non trivial sur un corps valué $n.a$, alors tous les sous-espaces de $\mathbb{X}$ de dimension 1 sont homéomorphes à K, et alors K doit être séparable. Mais c'est pas toujours le cas, il existe des corps valués $n.a$ qui ne sont pas séparables. Donc pour les espaces $n.a$ le concept de séparabilité est inutile si K est non séparable. Ainsi, on doit penser à un autre concept qui est bien adapté au cas non-Archimédien. C'est en linéarisant la notion de séparabilité qu'on obtient une généralisation de ce concept, qui est bien adaptée au cas $n.a$ et qu'on peut utiliser pour tout corps valué K. Il s'agit alors de la notion d'espaces normés $n.a$ de type dénombrable. Ce sont les espaces admettant une partie dénombrable dont le sous-espace engendré est partout dense.

1.2.1 Définitions et propriétés

Définition 1.2.1. *Soit $\mathbb{X}$ un espace $n.a$; on dit que $\mathbb{X}$ est de type dénombrable si et seulement si, il existe D une partie dénombrable de $\mathbb{X}$ telle que $\mathbb{X} = \overline{[D]}$.*

Il est évident que tout espace $n.a$ séparable est de type dénombrable. Et si K est séparable, on a le résultat suivant :

Proposition 1.2.1. *Soit $\mathbb{X}$ un espace $n.a$ sur un corps valué séparable K, alors :*
$\mathbb{X}$ est séparable si, et seulement si $\mathbb{X}$ est de type dénombrable.

Démonstration. Si $\mathbb{X}$ est séparable, alors il est de type dénombrable.
Réciproquement, si $\mathbb{X}$ est de type dénombrable, soit D une partie dénombrable de $\mathbb{X}$ telle que : $\mathbb{X} = \overline{[D]}$. Et comme K est séparable, alors $[D]$ est dénombrable. Et par suite, $\mathbb{X}$ est séparable. □

Exemple 1.2.1. *Soit $\mathbb{X} = c_0$ muni de la norme $\|.\|_\infty$, c'est un espace de Banach $n.a$ de dimension infinie. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons : $e_n = (0, ..., 0, 1, 0...) = (\delta_{ni})_{i\geq 1}$. Alors $c_0 = \overline{[e_n : n \geq 1]}$ et par suite c_0 est de type dénombrable.*

Proposition 1.2.2.

1. *Le produit fini d'espaces normés $n.a$ de type dénombrable est de type dénombrable.*
2. *La somme directe dénombrable d'espaces normés $n.a$ de type dénombrable est de type dénombrable.*
3. *L'image par une application linéaire continue d'un espace normé $n.a$ de type dénombrable est de type dénombrable.*

Démonstration. Voir ([39], p. 29). □

Théorème 1.2.1. *Soient $\mathbb{X}$ un espace $n.a$ et D un sous-espace dense dans $\mathbb{X}$, alors :*
$\mathbb{X}$ est de type dénombrable si, et seulement si D est de type dénombrable.

Démonstration. Voir ([39], Théorème 2.3.3, p. 29). □

1.2.2 Orthogonalité dans un espace de Banach non-Archimédien

Dans cette partie, on va introduire la notion d'orthogonalité dans un espace de Banach $n.a$, et on va donner des propriétés importantes de cette orthogonalité.
Avant de donner la définition de l'orthogonalité, on énonce le théorème suivant :

Théorème 1.2.2. (***Principe de Van Rooij***) *Soient $\mathbb{X}$ un espace de Banach $n.a$ et x, y deux éléments de $\mathbb{X}$. S'il existe $t \in]0, 1]$ tel que $\|x + y\| \geq t\|x\|$, alors $\|x + y\| \geq t\|y\|$.*

Démonstration.

- Si $\|x\| \geq \|y\|$ alors $\|x + y\| \geq t\|x\| \geq t\|y\|$.

- Si $\|x\| < \|y\|$; alors $\|x+y\| = \|y\|$, or $t \in]0,1]$ d'où $\|y\| \geq t\|y\|$, et par suite $\|x+y\| \geq t\|y\|$. □

Définition 1.2.2. *Soient $(\mathbb{X}, \|.\|)$ un espace de Banach $n.a$ et x, y deux éléments de $\mathbb{X}$.*
On dit que x est $\|.\|-$orthogonal à y (ou tout simplement que x est orthogonal à y) si et seulement si $d(x,[y]) = \|x\|$ où $[y] = K.y$ est le sous espace de $\mathbb{X}$ engendré par y. On note alors $x \perp y$.

Remarque 1.2.1.

1. *Pour tout $(x,y) \in \mathbb{X}^2$, $x \perp y$ signifie que l'application $K \to \mathbb{R}^+$, $\lambda \mapsto \|x - \lambda y\|$ atteint son minimum en 0.*

2. *Pour tout $(x,y) \in \mathbb{X}^2$ $d(x,[y]) \leq \|x\|$. Donc, le point essentiel dans la définition de l'orthogonalité et l'autre inégalité : $d(x,[y]) \geq \|x\|$.*

Théorème 1.2.3. *Soient $(\mathbb{X}, \|.\|)$ un espace de Banach $n.a$ et x, y deux éléments de $\mathbb{X}$. Alors :*
$x \perp y$ si, et seulement si, $(\forall (\lambda,\mu) \in K^2)\ \|\lambda x + \mu y\| = \max\{\|\lambda x\|, \|\mu y\|\}$.

Démonstration. Voir ([39], Théorème 2.2.3, p. 23). □

Corollaire 1.2.1. *Soient $(\mathbb{X}, \|.\|)$ un espace de Banach $n.a$ et x, y deux éléments de $\mathbb{X}$. Alors :*
$x \perp y$ si, et seulement si, $y \perp x$.

La relation d'orthogonalité $\perp$ est donc symétrique. Et alors on peut dire aussi que x et y sont orthogonaux si on a $x \perp y$. Comme conséquence du théorème précédent, on a aussi :

1. $(\forall x \in \mathbb{X})\ 0 \perp x$;

2. $(\forall x \in \mathbb{X})\ x \perp x \Rightarrow x = 0$;

3. $(\forall (x,y) \in \mathbb{X}^2)\ (\forall (\lambda,\mu) \in K^2)\ \ x \perp y \Rightarrow \lambda x \perp \mu y$.

Remarque 1.2.2. *Il existe une grande différence entre cette orthogonalité et celle qu'on connait dans les espaces de Hilbert classiques.*
En effet, dans $\mathbb{X} = K^2$ muni de la norme $n.a$ définie par :

$$\left(\forall (\lambda,\mu) \in K^2\right)\ \|(\lambda,\mu)\| = \max\{|\lambda|, |\mu|\}.$$

Posons $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$. Alors $e_1 \perp e_2$, $e_1 \perp e_1 + e_2$, $e_2 \perp e_1 + e_2$, mais on a pas $e_1 + e_2 \perp e_1 + e_2$; cela signifie que $\{x \in K^2 \ :\ x \perp e_1 + e_2\}$ n'est pas un $K-$e.v.

Définition 1.2.3. *Soient* $(\mathbb{X}, \|.\|)$ *un espace de Banach* $n.a$ *et* A *et* B *deux sous-ensembles de* $\mathbb{X}$.
On dit que A *et* B *sont orthogonaux, et on note* $A \perp B$ *si, et seulement si,*
$(\forall (x, y) \in A \times B)\ x \perp y$.

On note souvent $x \perp A$, au lieu de $\{x\} \perp A$.
Maintenant, on va étendre la notion d'orthogonalité à plus de deux vecteurs.

Définition 1.2.4. *Soient* $(\mathbb{X}, \|.\|)$ *un espace de Banach* $n.a$ *et* X *un sous-ensemble de* $\mathbb{X}$ *ne contenant pas* 0.
On dit que X *est un système orthogonal si, et seulement si,* $(\forall x \in X)\ x \perp (X \setminus \{x\})$.
Si, en plus $(\forall x \in X)\ \ \|x\| = 1$, *on dit que* X *est un système orthonormal.*
Clairement ; on a :
X *est un système orthogonal si, et seulement si, tout sous-ensemble fini de* X *est un système orthogonal.*
Donc, Tout système orthogonal est un système linéairement indépendant.

Le résultat suivant est un test pour l'orthogonalité d'un système.

Théorème 1.2.4. *Soient* $(\mathbb{X}, \|.\|)$ *un espace de Banach* $n.a$ *et* $e_1, e_2, ..., e_n$ *des vecteurs non nuls de* $\mathbb{X}$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *est un système orthogonal ;*

(ii) $(\forall (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in K^n)\ \ \| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \| = \max_{1 \leq i \leq n} \|\lambda_i e_i\|$;

(iii) $(\forall j \in \{1, 2, ..., n-1\})\ \ e_{j+1} \perp [e_1, e_2, ..., e_j]$.

Démonstration. Voir ([39], Théorème 2.2.7, p. 25). □

A l'encontre des suites orthogonales dans un espace de Hilbert classique, en perturbant un peu la suite orthogonale dans un espace de Banach $n.a$, elle reste une suite orthogonale ; on a alors le résultat suivant :

Théorème 1.2.5. (***Théorème de perturbation***)
Soient $(\mathbb{X}, \|.\|)$ *un espace de Banach* $n.a$ *et* $(e_i)_{i \in I}$ *un système orthogonal dans* $\mathbb{X}$.
Pour tout $i \in I$ *soit* $e'_i \in E$ *tel que* $\|e_i - e'_i\| \leq \|e_i\|$. *Alors* $(e'_i)_{i \in I}$ *est aussi un système orthogonal dans* $\mathbb{X}$.

Démonstration. Voir ([39], Théorème 2.2.9). □

Définition 1.2.5. *Soient* $(\mathbb{X}, \|.\|)$ *un espace de Banach* $n.a$, $t \in]0,1]$ *et* x, y *deux éléments de* $\mathbb{X}$.
On dit que x *est* $t-$*orthogonal à* y *si, et seulement si,* $d(x,[y]) \geq t.\|x\|$.

D'après le principe de Van Rooij, si x est t-orthogonal à y, alors :

$$\Big(\forall(\lambda,\mu) \in K^2\Big) \quad \|\lambda x + \mu y\| \geq t.\max\{\|\lambda x\|, \|\mu y\|\}.$$

Et alors la $t-$orthogonalité est symétrique.
On note aussi que la $1-$orthogonalité est l'orthogonalité qu'on a déjà définie.

Définition 1.2.6. *Soient* $(\mathbb{X}, \|.\|)$ *un espace* $n.a$, X *un sous-ensemble de* $\mathbb{X}\backslash\{0\}$ *et* $t \in]0,1]$.
On dit que X *est un système* $t-$*orthogonal si, et seulement si, pour tout* $x \in X$, x *est* $t-$*orthogonal à tout* y *de* $[X]\backslash\{0\}$.

1.2.3 Bases orthogonales

Définition 1.2.7. *Soient* $\mathbb{X}$ *un espace normé* $n.a$ *et* $t \in]0,1[$.

a) Une suite $(e_n)_n$ *dans* $\mathbb{X}$ *est une base* $t-$*orthogonale de* $\mathbb{X}$ *si, et seulement si,* $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ *est un système* $t-$*orthogonal et tout élément* x *de* $\mathbb{X}$ *peut s'écrire sous la forme :* $x = \sum_n \lambda_n e_n$, *avec* $(\lambda_n)_n \subset K$.

b) Une base $1-$*orthogonale de* E *est appelée Base orthogonale de* $\mathbb{X}$.

c) Si $(e_n)_n$ *est une base orthogonale de* $\mathbb{X}$ *telle que* $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \|e_n\| = 1$, *alors on dit que* $(e_n)_n$ *est une base orthonormale de* $\mathbb{X}$.

Soit $(e_n)_n$ une base orthogonale de $\mathbb{X}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{X}$, on a :

$$(\exists(\lambda_n)_n \subset K) : x = \sum_n \lambda_n e_n (*),$$

d'où $\lim_{n\to\infty} \lambda_n e_n = 0$ et $\|x\| = \lim_{m\to\infty} \|\sum_{n=0}^{m} \lambda_n e_n\|$, et par suite :

$$\|x\| \geq \lim_{m\to\infty} \{\max_{0\leq n\leq m} \|\lambda_n e_n\|\}$$

$$= \sup_n \|\lambda_n e_n\|.$$

Et alors l'écriture de x dans $(*)$ est unique.
Et si $(e_n)_n$ est une base orthogonale de $\mathbb{X}$, on a :

$x = \sum_n \lambda_n e_n$ (écriture unique) et $\|x\| \geq \sup_n \|\lambda_n e_n\|$.

Remarque 1.2.3. *Il est évident que tout espace de Banach $n.a$ ayant une base $t-$orthogonale est de type dénombrable. Alors, pour voir la réciproque, on va donner un résultat qui va nous permettre de savoir quand une suite $t-$orthogonale est une base.*

Théorème 1.2.6. *Soient $\mathbb{X}$ un espace de Banach $n.a$, $t \in]0,1[$ et $(e_n)_n$ une suite $t-$orthogonale de $\mathbb{X}$.*
Si $[e_n : n \in \mathbb{N}]$ est dense dans $\mathbb{X}$, alors $(e_n)_n$ est une base $t-$orthogonale de $\mathbb{X}$.

Démonstration. Voir ([39], Théorème 2.3.6, p. 30). □

Définition 1.2.8. *Soient $\mathbb{X}$ un espace de Banach $n.a$ et $(e_n)_{n\geq 1}$ une suite de vecteurs non nuls de $\mathbb{X}$. Alors $(e_n)_{n\geq 1}$ est Base topologique (ou tout simplement base) de $\mathbb{X}$ si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{X}$, il existe une unique suite $(\lambda_n)_n$ dans K telle que : $x = \sum_n \lambda_n e_n$.*

Et cette base est dite Base de Schauder de $\mathbb{X}$ si, en plus, toutes les formes linéaires $x \to \lambda_n \ \ (n \geq 1)$ sont continues.
Il est évident qu'on a :
1. Tout espace de Banach $n.a$ ayant une base est de type dénombrable.
2. Toute base $t-$orthogonale est une base de Schauder.

Théorème 1.2.7. *Dans un espace de Banach $n.a$ toute base est une base de Schauder, et toute base de Schauder est une base $t-$orthogonale pour un certain $t \in]0,1]$.*

Démonstration. Voir ([39], Théorème 2.3.11, p. 32). □

Remarque 1.2.4.

(i) Il existe des espaces normés $n.a$ non complets qui ont une base qui n'est pas base de Schauder.

(ii) Il existe des espaces normés $n.a$ non complets qui ont des bases de Schauder qui ne sont $t-$orthogonales pour aucun $t \in]0,1]$.

Proposition 1.2.3. *Tout système $t-$orthogonal dans un espace normé $n.a$ de type dénombrable est dénombrable.*

Démonstration. Voir([39], Théorème 2.3.18, p. 34). □

Théorème 1.2.8. *Soit $\mathbb{X}$ un espace normé $n.a$ ayant une base orthogonale $(e_n)_n \geq 1$. Alors, tout sous-espace de $\mathbb{X}$ admet une base orthogonale.*

Démonstration. Voir ([39], Théorème 2.3.22, p. 35). □

1.2.4 Espaces de Banach non-Archimédiens libres

Soit $(\mathbb{X}, \|.\|)$ un espace de Banach $n.a$.

Définition 1.2.9. *On dit que $\mathbb{X}$ est libre si, et seulement si, $\mathbb{X}$ admet une base orthogonale $(e_i)_{i\in I}$. Dans ce cas, tout élément x de $\mathbb{X}$ s'écrit d'une façon unique sous la forme : $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$ et on a $\|x\| = \sup_{i\in I} |x_i|\|e_i\|$. Si, en plus $(\forall i \in I) \quad \|e_i\| = 1$, la base $(e_i)_{i\in I}$ est dite orthonormale. Dans ce cas on a : $\|x\| = \sup_{i\in I} |x_i|$.*

Certains auteurs appellent cet espace un espace orthogonalisable.

Remarque 1.2.5. *On sait que si la valeur absolue $n.a$ de K est discrète, $(i.e\ |K^*| = \rho^{\mathbb{Z}}\ avec\ 0 < \rho < 1)$, alors tout espace de Banach $n.a$ $\mathbb{X}$ tel que $\|\mathbb{X}\| \subset |K|$ admet une base orthonormale.*
Et si $\|\mathbb{X}\| \nsubseteq |K|$, on peut définir une norme $n.a$ p sur $\mathbb{X}$ équivalente à $\|.\|$ et telle que $p(\mathbb{X}) \subset |K|$. Et alors $(\mathbb{X}, p)$ est un espace de Banach $n.a$ libre.

Proposition 1.2.4. *Soit $\mathbb{X}$ un espace de Banach $n.a$ libre de base orthogonale $(e_i)_{i\in I}$. Pour tout $j \in I$ l'application $e'_j : \mathbb{X} \to K,\ x = \sum_{i\in I} x_i e_i \mapsto x_j$ est une forme linéaire continue et on a : $\|e'_j\| = \frac{1}{\|e_j\|}$.*

Démonstration. Voir ([15], p. 65). □

Soient E et F deux espaces de Banach $n.a$ libres ayant comme bases orthogonales $(e_i)_{i\in I}$ et $(f_j)_{j\in J}$ respectivement. Pour tout $x' \in E'$ et tout $y \in F$, on définit une application sur E de la manière suivante :

$$x' \otimes y : E \to F,\ x \mapsto (x' \otimes y)(x) = x'(x).y;$$

$x' \otimes y$ est une application linéaire continue. Et on a : $\|x' \otimes y\| = \|x'\|.\|y\|$.
En particulier, on a les applications linéaires continues élémentaires suivantes :
$(\forall (i,j) \in I \times J)\ E_{ji} = e'_j \otimes f_j$. Et on a $(\forall (i,j) \in I \times J)\ \|E_{ji}\| = \|e'_i\|.\|f_j\| = \frac{\|f_j\|}{\|e_i\|}$.

Proposition 1.2.5. *Tout sous-espace fermé d'un espace de Banach $n.a$ libre est libre.*

Définition 1.2.10. *Soient $(\mathbb{X}, \|.\|)$ un espace de Banach $n.a$ et $t \in]0,1]$. On dit que $\mathbb{X}$ est $t-$libre si $\mathbb{X}$ admet une base $t-$orthogonale.*

Remarque 1.2.6. *Tout espace de Banach $n.a$ libre, ou $t-$libre pour un certain $t \in]0,1]$, est de type dénombrable.*

Théorème 1.2.9. *Soit $\mathbb{X}$ un espace de Banach $n.a$ de type dénombrable. Alors, pour tout $t \in]0,1[$, $\mathbb{X}$ est $t-$libre.*

Démonstration. Voir ([39], p. 36). □

Théorème 1.2.10. *Soit $\mathbb{X}$ un espace de Banach $n.a$ ayant une base. Alors $\mathbb{X}$ est $t-$libre pour un certain $t \in]0,1]$.*

Démonstration. Voir [39]. □

1.2.5 L'espace c_0

Dans ce paragraphe, on va parler de l'espace de Banach $n.a$ c_0.
Soit K un corps valué $n.a$ complet. On pose :

$$c_0 = \{(u_i)_i \subset K \ : \ \lim_{i\to\infty} |u_i| = 0\}$$

alors c_0 est l'espace des suites qui convergent vers 0 dans K. Il est évident qu'on a

$$(u_i)_i \in c_0 \Leftrightarrow \lim_{i\to\infty} u_i = 0.$$

Pour tout $u = (u_i)_i$ dans c_0, on pose $\|u\|_\infty = \sup_i |u_i|$.
$\|.\|_\infty$ défini une norme $n.a$ sur c_0. Et $(c_0, \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach $n.a$.
Posons : pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ $e_i := (\delta_{ij})_j$ (δ_{ij} est le symbole de Kronecker). Alors, $(e_i)_i$ est une base orthogonale de c_0. Donc $(c_0, \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach $n.a$ libre. Tout $x \in c_0$ peut s'écrire d'une façon unique sous la forme suivante :

$$x = \sum_{i\in I} x_i e_i,$$

avec

$$\|x\|_\infty = \sup_i |x_i|.\|e_i\| = \sup_i |x_i|.$$

Soit f la fonction définie par :

$$f \ : \ c_0 \times c_0 \to K$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \sum_i x_i y_i,$$

où $x = (x_i)_i$ et $y = (y_i)_i$.
f est une forme bilinéaire symétrique.
1. On a : pour touts x, y dans c_0 $|f(x,y)| \leq \|x\|_\infty . \|y\|_\infty$. Donc f est continue.
2. Pour tout $x \in c_0$, si $(\forall y \in c_0) \ \ f((x,y)) = 0$, alors $x = 0$. Donc f est non-dégénérée.
3. Pour tout $x \in c_0, \ \ f((x,x)) = \sum_i x_i^2$. (On ne peut pas parler de : "définie positive" !)
4. Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ $f(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.
Donc : Sur c_0, on peut définir un produit scalaire(c-à-d : une forme bilinéaire symétrique non dégénérée) comme suit : pour tout $x = (x_i)_i$ et tout $y = (y_i)_i$ dans c_0, on pose : $\langle x, y \rangle := f((x,y)) = \sum_i x_i y_i$.

Remarque 1.2.7.

a) La norme $\|.\|_\infty$ n'est pas déduite du produit scalaire $\langle ., . \rangle$.

b) Dans l'espace c_0 on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\forall (x,y) \in c_0^2\right) \ \ |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_\infty . \|y\|_\infty.$$

Définition 1.2.11. *Soit A un sous-ensemble de c_0. On appelle orthogonale de A dans c_0 l'ensemble :*

$$A^\perp = \{x \in c_0 \ : \ (\forall y \in c_0) \ \langle x, y \rangle = 0\}.$$

On vérifie que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de c_0.

Théorème 1.2.11. *Soient $\mathbb{X}$ un espace normé $n.a$ de type dénombrable. Alors, pour tout $t \in]0,1[$ $\mathbb{X}$ admet une base $t-$orthogonale.*

Démonstration. Découle immédiatement du théorème 1.2.9. □

Théorème 1.2.12. *Tout espace de Banach $n.a$ de type dénombrable de dimension infinie est linéairement homéomorphe à c_0.*

Démonstration. Soit $\mathbb{X}$ un espace de Banach $n.a$ de type dénombrable de dimension infinie.
Soit $t \in]0,1[$, alors $\mathbb{X}$ admet une base $t-$orthogonale $(e_n)_{n \geq 1}$ (théorème précédent). Soit

$\pi \in K$ tel que $0 < |\pi| < 1$. Par multiplication par un scalaire convenable, on peut supposer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ \ |\pi| \leq \|e_n\| \leq 1$. Soit T l'application

$$T \ : \ c_0 \to \mathbb{X}$$

$$(\lambda_n)_{n\geq 1} \mapsto \sum_{n\geq 1} \lambda_n e_n$$

T est une application linéaire et $Im(T)$ est dense dans $\mathbb{X}$. Et pour tout $x = (\lambda_n)_n \in c_0$,

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &= \| \sum_{n\geq 1} \lambda_n e_n \| \\ &\leq \sup_n \|\lambda_n e_n\| \\ &\leq \sup_n \|\lambda_n\| \\ &= \|x\| \end{aligned}$$

et par la $t-$orthogonalité on a :

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &= \| \sum_{n\geq 1} \lambda_n e_n \| \\ &\geq t. \sup_n \|\lambda_n e_n\| \\ &\geq t.|\pi|. \sup_n \|\lambda_n\| \\ &= t.|\pi|.\|x\|. \end{aligned}$$

Donc : T est un homéomorphisme. □

Remarque 1.2.8. *Ce théorème nous permet de dire, qu'à un homéomorphisme linéaire près ; il n'existe qu'un seul espace de Banach $n.a$ de type dénombrable de dimension infinie, en l'occurrence c_0. Cela est, clairement, à l'encontre du cas Archimédien où il existe des espaces de Banach séparables qui n'ont pas de bases de Schauder ; et des espaces de Banach qui ont des bases de Schauder sans être linéairement homéomorphe à l^1.*

CHAPITRE 2

ÉTUDE SPECTRALE DES OPÉRATEURS DE LA FORME $A = D + F$

2.1 Introduction

On développe dans ce chapitre la théorie spectrale pour la perturbation des opérateurs de rang fini par un opérateur diagonal borné.
Dans la première partie on a traité les propriétés de base des opérateurs bornés dans un espace de Banach $n.a$, ainsi on a donné une caractérisation des opérateurs bornés dans les espaces de Banach $n.a$ libres, puis on a étudié les propriétés fondamentales des opérateurs de rang fini et des opérateurs de Fredholm dans le contexte non-Archimédien.
Aussi, dans la dernière partie on a étudié la théorie spectrale des opérateurs de la forme

$$T = D + K$$

avec D un opérateur diagonal borné et K est un opérateur complètement continu ; puis on déduit la théorie spectrale des opérateurs de la forme

$$T = D + F,$$

où D est un opérateur diagonal borné et F est un opérateur de rang fini.
Nous montrerons que le spectre $\sigma(T)$ de l'opérateur linéaire borné T est donné par :

$$\sigma(T) = \sigma_e(D) \cup \sigma_p(T),$$

où $\sigma_e(D) = (\overline{\Lambda} \setminus \Lambda^*) \cup (\Lambda^* \cap \Lambda')$ est le spectre essentiel de D et $\sigma_p(T)$ est le spectre ponctuel de T, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de T donné par $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \rho(D) : detM(\lambda) = 0\}$ avec $M(\lambda)$ est la $m \times m$ matrice carrée $M(\lambda) = (b_{ij})_{i,j=1,\ldots,m}$ dont les coefficients sont donnés par $b_{ij} = \delta_{ij} + \langle C_\lambda u_i', v_j \rangle_d$ pour tout $i, j = 1, \ldots, m$ et $C_\lambda = (D - \lambda I)^{-1}$.

2.2 Opérateurs bornés

Définition 2.2.1. *Soit $\mathbb{X}$ un espace de Banach non-Archimédien.*
Une application $A : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ est dite un opérateur si, et seulement si,

$$A(x + y) = Ax + Ay$$

et

$$A(\lambda x) = \lambda Ax$$

pour tout $\lambda \in K$ et $x, y \in \mathbb{X}$. Si de plus il existe C positive tel que :

$$(\forall x \in \mathbb{X}) \ \|Ax\| \leq C\|x\|,$$

A est dit un opérateur borné. L'ensemble des opérateurs bornés sur $\mathbb{X}$ est noté par $\boldsymbol{B}(\mathbb{X})$.
Pour un opérateur borné $A \in \boldsymbol{B}(\mathbb{X})$ la norme de A est définie par :

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{X} \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Par définition de la norme, si $A \in \mathbf{B}(\mathbb{X})$ alors on a la propriété suivante

$$(\forall x \in \mathbb{X}) \ \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|.$$

Proposition 2.2.1. *Tout opérateur borné sur $\mathbb{X}$ est continu.*

Démonstration. En effet, soit $(x_n)_n \subset \mathbb{X}$ une suite converge vers $x \in \mathbb{X}$ c-à-d $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow 0$.
Par application de l'inégalité précédente on trouve :
$\|A(x_n - x)\| \leq \|A\|\|x_n - x\|$ or on a $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow 0$, alors $\|A(x_n - x)\| \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow 0$.
D'où A est continu. □

Remarque 2.2.1. *La réciproque n'est pas toujours vraie, pour un contre exemple voir* $([46], Exemple\ 4.2)$.

Exemple 2.2.1. *Soit K un corps valué $n.a$.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathbb{X} = K^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_k \in K, k = 1, 2, \ldots, n\}$ muni de la norme non-Archimédienne suivante

$$\|x\| = \max_{i=1}^{n} |x_i|$$

pour $i = 1, 2 \ldots, n$ et pour tout $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K$.

Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de K^n définie par :
$e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0) \cdots e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ *alors on a pour tout* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n$

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \quad pour \quad x_j \in K \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Soit $A : K^n \longrightarrow K^n$ une application linéaire. Il est clair que $Ae_i \in K^n$, donc il existe $a_{ij} \in K$ pour $i, j = 1, \ldots, n$ tel que :

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i.$$

Dans ce qui suit, nous montrons que l'opérateur arbitraire donné ci-dessus est nécessairement borné. En effet, pour tout

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$$

on a :

$$\|Ax\| = \|\sum_{j=1}^{n} x_j Ae_j\|$$

$$\leq C \max_{j=1}^{n} |x_j|$$

$$= C\|x\|.$$

Avec

$$C = \max_{j=1\ldots,n} \|Ae_j\| = \max_{j=1\ldots,n} \left(\max_{i=1,\ldots,n} |a_{ij}| \right) < \infty.$$

Par conséquence $A : K^n \longrightarrow K^n$ est un opérateur borné.

Exemple 2.2.2. *Soient $\mathbb{K} = (\mathbb{Q}_p, |.|_p)$ où p est un nombre premier et $\mathbb{X} = C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ est l'espace des fonctions continues de $\mathbb{Z}_p$ à valeur dans $\mathbb{Q}_p$ muni de la norme $n.a$ suivante :*

$$\|f\|_\infty = \max_{z \in \mathbb{Z}_p} |f(z)|.$$

Pour toute $f \in C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$.
Soit $P : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Q}_p$, $z \longmapsto P(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k z^k$ un polynôme de degré n avec $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}_p$.
Considérons l'application définie par :

$$A(f)(z) = P(z) f(z).$$

Pour toute $f \in C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ et $z \in \mathbb{Z}_p$. Il est clair que A est linéaire. De plus, $\|Af\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$ pour toute $f \in C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$, où $C = \max(|a_1|_p, |a_2|_p, \ldots, |a_N|_p)$.
Par suite A est un opérateur borné.

Exemple 2.2.3. *Soient $\mathbb{K} = (\mathbb{Q}_p, |.|_p)$ où p est un nombre premier et $\mathbb{X} = C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ est l'espace des fonctions continues de $\mathbb{Z}_p$ à valeur dans $\mathbb{Q}_p$ muni de la norme $n.a$ suivante :*

$$\|f\|_\infty = \max_{z \in \mathbb{Z}_p} |f(z)|.$$

Pour toute $f \in C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$.
Fixons $\xi \in \mathbb{Z}_p$ et considérons l'application définie par :

$$A_\xi(f)(z) = f(z + \xi) - f(z).$$

Pour toutes $f \in C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ et $z \in \mathbb{Z}_p$.
Il est clair que A_ξ est linéaire. De plus, $\|A_\xi f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ pour toute $f \in C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$.
Alors $A_\xi \in \boldsymbol{B}(C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p))$.

2.2.1 Propriétés de Bases

Théorème 2.2.1. *Soit $\mathbb{X}$ un espace de Banach $n.a$ et K un corps value $n.a$.*
Si $A, B \in \boldsymbol{B}(\mathbb{X})$ et $\lambda \in K$, alors $A+B$, AB, BA et λA sont dans $\boldsymbol{B}(\mathbb{X})$.

Démonstration. Voir ([15], Théorème 3.5 p.64). □

D'après ce qui précède $\mathbf{B}(\mathbb{X})$ est un espace vectoriel muni de la norme suivante : pour $A \in \mathbf{B}(\mathbb{X})$

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{X}\setminus(0)} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Et on va voir dans le théorème suivant que $\mathbf{B}(\mathbb{X})$ est un espace de Banach $n.a$.

Théorème 2.2.2. *L'espace des opérateurs bornés $(\boldsymbol{B}(\mathbb{X}), \|.\|)$ est un espace de Banach $n.a$.*

Démonstration. La preuve peut être faite comme dans le cadre classique. En effet, soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathbf{B}(\mathbb{X})$. Alors pour toute $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n, m > N,\ \|A_n - A_m\| < \varepsilon.$$

Donc il suffit de montrer qu'il existe un opérateur borné $A : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ tel que $\| A_n - A \| \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow \infty$.
Pour tout $x \in \mathbb{X} \setminus \{0\}$ on a :

$$\| (A_n - A_m)\, x \| < \varepsilon \| x \| \quad (*)$$

pour $n, m > N$.

Par conséquent $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{X}$. Puisque $\mathbb{X}$ est un espace de Banach $n.a$, il existe $\xi \in \mathbb{X}$ tel que $\| A_n x - \xi \| \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow \infty$.
Donc

$$Ax := \xi = \lim_{n\longrightarrow\infty} A_n x,$$

ce qui défini l'opérateur $A : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$.
En faisant tendre $m \longrightarrow \infty$ dans $(*)$, on obtient $\| A_n x - Ax \| < \varepsilon \| x \|$ pour $n > N$.
Par conséquent :

$$\begin{aligned} \| Ax \| &= \| Ax - A_n x + A_n x \| \\ &\leq \max(\| Ax - A_n x \|, \| A_n x \|) \\ &\leq \max(\varepsilon \| x \|, \| A_n x \|) \end{aligned}$$

$$\leq \max(\varepsilon \parallel x \parallel, \parallel A_n \parallel\parallel x \parallel)$$

$$= \max(\varepsilon, \parallel A_n \parallel) \parallel x \parallel$$

pour $n > N$.
Donc A est un opérateur borné. De plus $\parallel A_n - A \parallel \leq \varepsilon$ pour $n > N$, c-a-d $\parallel A_n - A \parallel \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow \infty$.
Et par suite **B** $(\mathbb{X})$ est un espace de Banach non-Archimédien. □

2.2.2 Opérateurs bornés dans un espace de Banach $n.a$ libre

Soit $\mathbb{X}$ un espace de Banach $n.a$ libre sur un corps valué $n.a$ $(K, |.|)$ muni de la base canonique orthogonale $(e_j)_{j\in I}$. Pour chaque i de I, on définit l'application $e_i^{'} \in \mathbb{X}^*$ ($\mathbb{X}^*$ *est le dual topologique de* $\mathbb{X}$) par :

$$x = \sum_{i\in I} x_i e_i, \qquad e_i'(x) = x_i.$$

De plus, pour tout $x' \in \mathbb{X}^*$ on peut exprimer sous la forme $x' = \sum_{i\in I} \langle x', e_i\rangle e_i'$ avec $\langle x', e_i\rangle = x'(e_i)$ et

$$\|x'\|_* = \sup_{i\in I} \frac{|\langle x', e_i\rangle|}{\|e_i\|}.$$

En effet ; Soit $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$ et $x' \in \mathbb{X}^*$ on a :

$$| \langle x', x\rangle | = | \sum_{i\in I} x_i \langle x', e_i\rangle |$$

$$\leq \sup_{i\in I} |x_i| \mid \langle x', e_i\rangle \mid$$

$$= \sup_{i\in I} |x_i| \|e_i\| \frac{| \langle x', e_i\rangle |}{\|e_i\|}$$

$$\leq \|x\| \sup_{i\in I} \frac{| \langle x', e_i\rangle |}{\|e_i\|}$$

alors

$$\|x'\| \leq \sup_{i\in I} \frac{| \langle x', e_i\rangle |}{\|e_i\|}.$$

D'autre part, on a : $\forall i \in I \ \ |\langle x', e_i\rangle| \leq \|x'\|.\|e_i\|$ alors $\sup_{i\in I} \dfrac{|\ \langle x', e_i\rangle\ |}{\|e_i\|} \leq \|x'\|$.
Donc : $\|x'\| = \sup_{i\in I} \dfrac{|\ \langle x', e_i\rangle\ |}{\|e_i\|}$.
En particulier $(\forall i \in I) \quad \|e_i'\|_* = \|e_i\|^{-1}$.
Pour tout $v' \in \mathbb{X}^*$, on définit l'opérateur $v' \otimes u : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ par $(v' \otimes u)(w) := \langle v', w\rangle u$. Il est clair que l'opérateur $(v' \otimes u)$ est borné de norme

$$\|v' \otimes u\| = \|v'\|_*\|u\|.$$

En particulier, si $\left(e_i'\right)_{i\in I}$ la base canonique orthogonale dual de $\mathbb{X}^*$, alors $\left(e_i' \otimes e_j\right)_{i,j\in I\times I} \in$ **B** $(\mathbb{X})$ et de norme donné par

$$\|e_i' \otimes e_j\| = \|e_i'\|_*.\|e_j\| = \frac{\|e_j\|}{\|e_i\|}.$$

Proposition 2.2.2. *Soit $\mathbb{X}$ un espace de Banach n.a. libre muni d'une base orthogonale $(e_i)_{i\in I}$. Alors, tout élément $A \in$ **B** $(\mathbb{X})$ peut s'écrire d'une façon unique sous la forme*

$$A = \sum_{(i,j)\in I\times I} a_{ji} e_i' \otimes e_j,$$

avec $\forall i \in I \lim_j |a_{ji}|\|e_j\| = 0$. En plus on a :

$$\|A\| = \sup_{i,j} \frac{|a_{ji}|\|e_j\|}{\|e_i\|}.$$

Démonstration. Pour tout $j \in I, Ae_j = \sum_{i\in I} a_{ij}e_i$ avec $a_{ij} \in K$, $\lim_i |a_{ij}|\|e_j\| = 0$. Donc pour tout $x = \sum_{j\in I} x_j e_j \in \mathbb{X}$,

$$\begin{aligned} Ax &= \sum_{j\in I} x_j Ae_j \\ &= \sum_{j\in I}\sum_{i\in I} a_{ij}x_j e_i \\ &= \sum_{j\in I}\sum_{i\in I} a_{ij}\langle e_j', x\rangle e_i \\ &= \sum_{j,i} a_{ij}\left(e_j' \otimes e_i\right)x. \end{aligned}$$

Il reste a montrer que

$$\|A\| = \sup_{j\in I} \frac{\|Ae_j\|}{\|e_j\|} = \sup_{i,j} \frac{|a_{ij}|\|e_i\|}{\|e_j\|}.$$

On a : $\|Ae_j\| \leq \| A \| \, \|e_j\|$ pour tout $j \in I$ donc

$$\sup_{j\in I} \frac{\|Ae_j\|}{\|e_j\|} \leq \| A \| .$$

D'abord pour $x = \sum_{j\in I} x_j e_j$,

$$\begin{aligned} \|Ax\| &= \| \sum_{i\in I} x_j Ae_j \| \\ &\leq \sup_{j\in I} (|x_j|.\|Ae_j\|) \\ &= \sup_{j\in I} \left(|x_j|.\|e_j\|.\frac{\|Ae_j\|}{\|e_j\|} \right) \\ &\leq \|x\|. \sup_{j\in I} \frac{\|Ae_j\|}{\|e_j\|}. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

2.3 Opérateurs de rang Fini

Dans cette partie on va étudier les propriétés des opérateurs de rang fini dans le contexte non-Archimédien.

2.3.1 Définitions de bases

Soit $\mathbb{X}$ un espace de Banach $n.a.$

Définition 2.3.1. *Un opérateur $A : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ est dit de rang fini si, et seulement si, $R(A)$ est sous espace de $\mathbb{X}$ de dimension fini.*

Définition 2.3.2. *Si $A \in \boldsymbol{B}(\mathbb{X})$ un opérateur de rang fini, le rang de A, noté $rangA$, est le nombre entier naturel $dimR(A)$. Ainsi*

$$rangA := dimR(A).$$

Définition 2.3.3. *L'ensemble des opérateurs bornés de rang fini sur $\mathbb{X}$ est noté $\boldsymbol{F}(\mathbb{X})$.*

2.3.2 Propriétés des opérateurs de rang fini

Proposition 2.3.1. *Soit $\mathbb{X}$ un espace de Banach $n.a$ et $A \in \boldsymbol{B}(\mathbb{X})$ alors : $A \in \boldsymbol{F}(\mathbb{X})$ si, et seulement si, il existe deux suites finies $u_1, u_2, \ldots, u_r \in \mathbb{X}$ et $u_1^{'}, u_2^{'}, \ldots, u_r^{'} \in \mathbb{X}^*$ tel que :*

$$A = \sum_{k=1}^{r} u_k^{'} \otimes u_k.$$

Démonstration. Supposons qu'ils existent deux suites finies $u_1, u_2, \ldots, u_r \in \mathbb{X}$ et $u_1^{'}, u_2^{'}, \ldots, u_r^{'} \in \mathbb{X}^*$ tel que $A = \sum_{k=1}^{r} u_k^{'} \otimes u_k$ et montrons que $A \in \boldsymbol{F}(\mathbb{X})$.
A est linéaire d'image $R(A) = Vect\{u_1, \ldots, u_r\}$ donc de dimension au plus r et on a :

$$\|Ax\| \leq \max\left(\|u_1^{'}\|_*.\|u_1\|, \|u_2^{'}\|_*.\|u_2\|, \ldots, \|u_r^{'}\|_*.\|u_r\|\right)\|x\|$$

alors A est un opérateur borné et par conséquence $A \in \boldsymbol{F}(\mathbb{X})$.
Inversement, soient $A \in \boldsymbol{F}(\mathbb{X})$ et $u_1, \ldots, u_r \in \mathbb{X}$ un système linéairement indépendant engendre $R(A)$ alors pour tout $x \in \mathbb{X}$,

$$Ax = \sum_{k=1}^{r} \xi_k(x)\, u_k,$$

avec $\xi_1, \ldots, \xi_r : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{K}$ sont des forme linéaire bornés. Par conséquence il existe $u_k^{'} \in \mathbb{X}^*$ avec $k = 1, \ldots, r$ tel que $\xi_k(x) = u_k^{'}(x)$ par suite :

$$A = \sum_{k=1}^{r} u_k^{'}(x)\, u_k = \sum_{k=1}^{r} \left(u_k^{'} \otimes u_k\right)(x).$$

D'où le résultat. □

Proposition 2.3.2. *Si $A \in \boldsymbol{B}(\mathbb{X})$ et $B \in \boldsymbol{F}(\mathbb{X})$, alors $AB \in \boldsymbol{F}(\mathbb{X})$ et $BA \in \boldsymbol{F}(\mathbb{X})$.*

Démonstration. On écrit B sous la forme $B = \sum_{k=1}^{r} u_k^{'} \otimes u_k$ avec $u_k \in \mathbb{X}$ et $u_k^{'} \in \mathbb{X}^*$ pour $k = 1, 2, \ldots, r$.
D'abord :

$$AB = A\sum_{k=1}^{r} u_k^{'} \otimes u_k = \sum_{k=1}^{r} A\left(u_k^{'} \otimes u_k\right) = \sum_{k=1}^{r} \left(u_k^{'} \otimes Au_k\right) \in \mathbf{F}(\mathbb{X}),$$

de même

$$BA = \sum_{k=1}^{r} \left(v_k^{'} \otimes v_k\right) A = \sum_{k=1}^{r} \left(A^* v_k^{'}\right) \otimes v_k \in \mathbf{F}(\mathbb{X}).$$

□

Remarque 2.3.1. ***F*** $(\mathbb{X})$ *est un idéal de* ***B*** $(\mathbb{X})$.

2.4 Opérateurs de Fredholm

2.4.1 Définitions et exemples

Définition 2.4.1. *Soit* $\mathbb{X}$ *un espace de Banach* $n.a.$
Un opérateur borné $A : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ *est dit opérateur de Fredholm si, et seulement si, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(a) $\eta(A) := dim N(A)$ *est fini,*

(b) $R(A)$ *est fermée,*

(c) $\delta(A) := dim(\mathbb{X}/R(A))$ *est finie.*

Définition 2.4.2. *L'ensemble des opérateurs de Fredholm est noté* $\Phi(\mathbb{X})$, *si* $A \in \Phi(\mathbb{X})$ *l'indice de* A, *noté* $\chi(A)$, *est défini par :*

$$\chi(A) = \eta(A) - \delta(A).$$

Exemple 2.4.1. *Soit* $(\mathbb{X}, \|.\|)$ *un espace vectoriel de dimension fini. Alors tout opérateur* $A : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ *est un opérateur de Fredholm d'indice*

$$\chi(A) = \eta(A) - \delta(A) = 0.$$

Exemple 2.4.2. *Soit* $(\mathbb{X}, \|.\|)$ *un espace de Banach n.a.. Tout opérateur inversible borné* $A : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ *est un opérateur de Fredholm d'indice* $\chi(A) = \eta(A) - \delta(A) = 0$. *En particulier l'opérateur identité* $I : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$, $I(u) = u$, *pour tout* $u \in \mathbb{X}$ *est un opérateur de Fredholm d'indice* $\chi(I) = 0$.

2.4.2 Propriétés d'opérateurs de Fredholm

Soit $A \in \mathbf{B}(\mathbb{X})$ vérifiant la propriété suivante :
$\mathbb{X}_0$ et $\mathbb{Y}_0$ sont les supplémentaires fermés de $N(A)$ et $R(A)$ respectivement dans $\mathbb{X}$.
Il est clair que le produit $\mathbb{X}_0 \times \mathbb{Y}_0$ est un espace de Banach $n.a$ muni de la norme suivante :

$$\|(x_0, y_0)\| = \max(\|x_0\|, \|y_0\|) \ \textit{pour tout} \ (x_0, y_0) \in \mathbb{X}_0 \times \mathbb{Y}_0.$$

On définit l'opérateur $\widetilde{A} : \mathbb{X}_0 \times \mathbb{Y}_0 \longrightarrow \mathbb{X}$, $(x_0, y_0) \mapsto \widetilde{A}(x_0, y_0) = Ax_0 + y_0$.

Il est clair que l'opérateur $\widetilde{A}$ défini ci-dessus est un opérateur linéaire borné bijectif. Dans ce qui suit, nous disons que $\widetilde{A}$ est la bijection associée à l'opérateur borné A et les sous-espaces $\mathbb{X}_0$ *et* $\mathbb{Y}_0$.
Si $A \in \Phi(\mathbb{X})$, alors on a $\widetilde{A} \in \Phi(\mathbb{X}_0 \times \mathbb{Y}_0)$ avec $\mathbb{Y}_0$ étant un sous-espace de dimension finie.
En identifiant $\mathbb{X}_0$ avec $\mathbb{X}_0 \times \{0\}$, il s'ensuit que l'opérateur défini par $A_0 : \mathbb{X}_0 \mapsto \mathbb{X}, \quad A_0 x_0 = Ax_0$ est la restriction des deux opérateurs A et $\widetilde{A}$ à $\mathbb{X}_0$.

Lemme 2.4.1. *Supposons que $A_0 : L \longrightarrow \mathbb{X}$ la restriction de $A \in \boldsymbol{B}(\mathbb{X})$ à un sous-espace $L \subseteq \mathbb{X}$ avec $codim L = N (< +\infty)$. Alors A est un opérateur de Fredholm si, et seulement si, A_0 est un opérateur de Fredholm. Dans ce cas $\chi(A) = \chi(A_0) + N$.*

Démonstration. Voir ([15], Lemme 3.41, p. 80). □

Théorème 2.4.1. *Soit $\mathbb{X}$ un espace de Banach $n.a$.*
Si $A, B : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ sont deux opérateurs de Fredholm, alors leur composition $BA : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ est un opérateur de Fredholm d'indice

$$\chi(BA) = \chi(B) + \chi(A).$$

Démonstration. Soit $\widetilde{A}$ la bijection associée à l'opérateur A et les sous-espaces $\mathbb{X}_0$ et $\mathbb{Y}_0$. Soit A_0 la restriction des deux opérateurs A et $\widetilde{A}$ à $\mathbb{X}_0$.
Considérons l'opérateur $B\widetilde{A}$. Puisque l'opérateur $\widetilde{A}$ est bijectif, il s'ensuit que $B\widetilde{A}$ est un opérateur de Fredholm d'indice $\chi\left(B\widetilde{A}\right) = \chi(B)$. De plus, il est clair que BA_0 est la restriction des deux opérateurs $B\widetilde{A}$ et BA. et par le lemme précédent on a :

$$\begin{aligned} \chi(BA) &= \chi(BA_0) + dim(\mathbb{X} \setminus \mathbb{X}_0) \\ &= \chi\left(B\widetilde{A}\right) - dim(\mathbb{X}_0 \times \mathbb{Y}_0 \setminus \mathbb{X}_0 \times \{0\}) + \eta(A) \\ &= \chi(A) + \chi(B). \end{aligned}$$

□

Théorème 2.4.2. *Soit $A : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ un opérateur de Fredholm. Si $B : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ est un opérateur borné tel que $\|B\| < \|\widetilde{A}^{-1}\|^{-1}$ avec $\widetilde{A}$ désigne la bijection associée à A, alors $A + B$ est un opérateur de Fredholm d'indice $\chi(A + B) = \chi(A)$.*

Démonstration. Soit $S = A + B$ et définissons $\widetilde{S} : \mathbb{X}_0 \times \mathbb{Y}_0 \mapsto \mathbb{X}$ par $\widetilde{S}(x_0, y_0) = Sx_0 + y_0$. Utilisons le fait que $\widetilde{A}$ est bijectif et $\|\widetilde{A} - \widetilde{S}\| \leq \|A - S\| = \|B\| < \|\widetilde{A}^{-1}\|^{-1}$ il s'ensuit que $\widetilde{S}$ est bijectif. D'après le lemme 2.4.1, S est un opérateur de Fredholm et

$$\begin{aligned} \chi(S) &= \chi(S_0) + \eta(A) \\ &= \chi\left(\widetilde{S}\right) - \delta(A) + \eta(A) \end{aligned}$$

$$= \chi(A).$$

□

Remarque 2.4.1. $\Phi(\mathbb{X})$ *est un ouvert de* $\boldsymbol{B}(\mathbb{X})$.

Lemme 2.4.2. *Si* $L \in \mathcal{A}_0$, *alors :*

$$\overline{R(L)} \subset N(L^*)^{\perp}.$$

Où L^* *désigne l'opérateur adjoint de* L. *(*$\mathcal{A}_0$ *On va le traiter dans le chapitre suivant).*

Démonstration. Si $x \in N(L^*)$, alors $L^*x = 0$ par suite $\langle y, L^*x\rangle = 0$ pour tout $y \in c_0$ c-à-d $\langle Ly, x\rangle = 0$ pour tout $y \in c_0$, ce qui montre que $x \in R(L)^{\perp}$. Donc $N(L^*) \subset R(L)^{\perp}$ et par conséquent $\overline{R(L)} \subset N(L^*)^{\perp}$. □

Proposition 2.4.1. *Si* $K \in C(c_0)$, *alors* $I - K \in \Phi(c_0)$.

Noter que $C(c_0)$ est l'ensemble des opérateurs compact qu'on va traiter dans le chapitre suivant.

Démonstration. On a $R(I-K)$ est fermée. De plus $x = Kx$ pour tout $x \in N(I-K)$, il s'ensuit que l'opérateur identité est complètement continu sur $N(I-K)$ donc $dimN(I-K) = \eta(I-K) < \infty$. Or $K \in C(c_0)$ alors $K^* \in C(c_0)$. Et d'après le lemme précédent on a $R(I-K) \subset N(I-K^*)^{\perp}$, donc $\delta(I-K) \leq dimN(I-K^*) < \infty$.
Et par conséquent $I - K \in \Phi(c_0)$. □

2.5 Analyse spectrale des opérateurs bornés

Cette section est consacrée à l'étude de la théorie spectrale des opérateurs bornés dans un espace de Banach $n.a\ (\mathbb{X}, \|.\|)$.

2.5.1 Spectre d'un opérateur borné

Définition 2.5.1. *Soit* $(\mathbb{X}, \|.\|)$ *un espace de Banach* $n.a$. *L'ensemble résolvant de l'opérateur borné* $A : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ *est donné par :*

$$\varrho(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda I - A \ \ est \ \ inversible \ \ dans \ \boldsymbol{B}(\mathbb{X})\},$$

ou bien :

$$\varrho(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : R_\lambda^A = (\lambda I - A)^{-1} \in \boldsymbol{B}(\mathbb{X})\}.$$

La fonction $\lambda \mapsto R_\lambda^A = (\lambda I - A)^{-1}$ *est dite la résolvante de* A.

Définition 2.5.2. *Le spectre* $\sigma(A)$ *de l'opérateur borné* $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ *est défini par :*

$$\sigma(A) = K \backslash \varrho(A).$$

Définition 2.5.3. *Un scalaire* $\lambda \in K$ *est appelé une valeur propre de* $A \in \boldsymbol{B}(\mathbb{X})$, *s'il existe* $u \in \mathbb{X} \setminus \{0\}$ *tel que* $Au = \lambda u$.
u *est appelé vecteur propre associée à la valeur propre* λ.

Dans la définition précédente, les valeurs propres de $A \in \mathbf{B}(\mathbb{X})$ composées de toute $\lambda \in K$ pour laquelle $N(\lambda I - A) \neq \{0\}$. L'ensemble des valeurs propres de $A \in \mathbf{B}(\mathbb{X})$ est noté $\sigma_p(A)$ et est appelé spectre ponctuel de A.

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : N(A - \lambda I) \neq \{0\}\}.$$

2.5.2 Spectre Essentiel d'un opérateur borné

Définition 2.5.4. *Le spectre essentiel* $\sigma_e(A)$ *de l'opérateur borné* $A : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ *est défini par* $\sigma_e = \{\lambda \in K : \lambda I - A$ *n'est pas un opérateur de Fredholm d'indice 0*$\}$.

Si $\lambda \in K$ tel que $\lambda \notin \sigma_p(A) \cup \sigma_e(A)$ alors : $\lambda I - A$ est injectif $(N(\lambda I - A) = \{0\})$ et $R(\lambda I - A)$ est un fermé avec

$$0 = dim N(\lambda I - A) = dim \mathbb{X} \setminus R(\lambda I - A).$$

Par conséquent $(\lambda I - A)$ est bijectif donc $\lambda \in \varrho(A)$.
D'où

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_e(A).$$

Remarque 2.5.1.

$$\sigma_p(A) \cap \sigma_e(A) \neq \emptyset.$$

Définition 2.5.5. *Le spectre continu* $\sigma_c(A)$ *de l'opérateur borné* $A : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ *est défini par*

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \sigma_e(A) \setminus \sigma_p(A) : \overline{R(\lambda I - A)} = \mathbb{X}\}.$$

Définition 2.5.6. *Le spectre résiduel $\sigma_r(A)$ de l'opérateur borné $A : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ est défini par*

$$\sigma_r(A) = (\sigma_e(A) \setminus \sigma_p(A)) \setminus \sigma_c(A).$$

Dans le cadre classique on a

$$\sigma(A) = \sigma_r(A) \cup \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A).$$

Exemple 2.5.1. *Soit $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la base orthonormale de c_0. Considérons l'opérateur diagonal $D : c_0 \to c_0$ défini par :*

$$\textit{pour tout } u = (u_j)_{j\in\mathbb{N}} \in c_0 \; Du = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j u_j e_j \textit{ avec } (\forall j \in \mathbb{N}) \;\; \lambda_j \in K \textit{ et } \sup_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j| < \infty.$$

Proposition 2.5.1. *$\sigma(D) = \overline{\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}}$ la fermeture de $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ dans K.*
C-à-d :

$$\sigma(D) = \{\lambda \in K : \inf_{j\in\mathbb{N}} |\lambda - \lambda_j| = 0\}.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que, pour tout $\lambda \in K$,

$$\lambda \in \varrho(D) \Longleftrightarrow \inf_{j\in\mathbb{N}} |\lambda - \lambda_j| > 0.$$

Soit $\lambda \in K$.
Supposons que $\inf_{j\in\mathbb{N}} |\lambda - \lambda_j| > 0$ est vérifiée ; définissons l'opérateur $D^{'}$ sur c_0 par : pour tout $u = (u_j)_{j\in\mathbb{N}} \in c_0$,

$$D'u = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_j e_j}{\lambda - \lambda_j}.$$

$D^{'}$ est bien défini, borné et sa norme est donnée par :

$$\|D^{'}\| = \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{\|D'e_j\|}{\|e_j\|} = \sup_{j\in\mathbb{N}} \mid \frac{1}{\lambda - \lambda_j} \mid = \frac{1}{\inf_{j\in\mathbb{N}} |\lambda - \lambda_j|} < \infty.$$

Il est facile de vérifier que $(\lambda I - D) D' = D' (\lambda I - D) = I$ c-à-d $D' = (\lambda I - D)^{-1}$.
D'où $\lambda \in \varrho(D)$.
Inversement supposons que $\lambda \in \varrho(D)$. avec $\inf_{j\in\mathbb{N}} |\lambda - \lambda_j| = 0$, alors il existe une sous-suite $(\lambda_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \| (\lambda I - D) e_{j_k} \| = \lim_{k\longrightarrow\infty} |\lambda - \lambda_{j_k}| = 0.$$

D'abord utilisons le fait que $(\lambda I - D)\, D' = D'\,(\lambda I - D) = I$, il s'ensuit que

$$\| (\lambda I - D)\, e_{j_k} \| \geq \frac{1}{\| (\lambda I - D)^{-1} \|},$$

donc

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \| (\lambda I - D)\, e_{j_k} \| \geq \frac{1}{\| (\lambda I - D)^{-1} \|} > 0.$$

D'où la contradiction, et par suite

$$\lambda \in \varrho\,(D) \Longrightarrow \inf_{j \in \mathbb{N}} |\lambda - \lambda_j| > 0.$$

□

2.6 Analyse spectrale pour une perturbation des opérateurs de rang fini

2.6.1 Analyse spectrale des opérateurs de la forme $T = D + K$

Dans cette section, nous étudions l'analyse spectrale pour la perturbation des opérateurs linéaires complètement continus par des opérateurs diagonaux ; à savoir la classe des opérateurs de la forme $T = D + K$, où $D : c_0 \to c_0$ est un opérateur diagonal défini par $De_j = \lambda_j e_j$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, avec $\lambda = (\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée et $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la base orthonormale de c_0. Et $K : c_0 \to c_0$ est un opérateur complètement continu.

Théorème 2.6.1. *Si $A \in \Phi(c_0)$ et $K \in C(c_0)$ alors $A + K \in \Phi(c_0)$ et $\chi(A + K) = \chi(A)$.*

Démonstration. La preuve se déduit de celle du Théorème 4 de [49]. □

Le théorème suivant est très important dans la suite de ce chapitre.

Théorème 2.6.2. *Soit $A \in B(c_0)$, alors pour tout $K \in C(c_0)$,*

$$\sigma_e(A + K) = \sigma_e(A).$$

Démonstration. Soit $\lambda \in K$.
Si λ n'appartient pas a $\sigma_e(A)$, alors $\lambda I - A$ est un opérateur de Fredholm d'indice $\chi(\lambda I - A) = 0$, donc $\lambda I - (A + K) \in \Phi(c_0)$ avec $\chi(\lambda I - (A + K)) = 0$ pour tout $\lambda \in C(c_0)$ et alors λ n'appartient pas a $\sigma_e(A + K)$. □

Corollaire 2.6.1. *Pour tout opérateur complètement continu K et tout opérateur diagonal borné D on a :*

$$\sigma_e(D + K) = \sigma_e(D).$$

Proposition 2.6.1. *Soit $T = D + K$, avec K un opérateur complètement continu et D un opérateur diagonal borné, alors le spectre $\sigma(T)$ est donné par*

$$\sigma(T) = \sigma_e(D) \cup \sigma_p(T).$$

Démonstration. On a :

$$\sigma(T) = \sigma_e(T) \cup \sigma_p(T).$$

Et d'après le corollaire précédent on a :

$$\sigma_e(T) = \sigma_e(D + K) = \sigma_p(D),$$

il s'ensuit alors que $\sigma(T) = \sigma_e(D) \cup \sigma_p(T)$. □

Lemme 2.6.1. *Soit $A \in \Phi_0(c_0)$ ($\Phi_0(c_0)$ désigne l'ensemble des opérateurs de Fredholm d'indice 0) et $K \in C(c_0)$, alors l'opérateur linéaire $A + K$ est inversible si, et seulement si, $N(A + K) = \{0\}$.*

Démonstration. On a $A \in \Phi_0(c_0)$, alors A est un opérateur de Fredholm d'indice $\chi(A) = 0$, il s'ensuit, d'après le théorème 2.6.1, que $A + K \in \Phi(c_0)$, et $\chi(A + K) = \chi(A) = 0$ pour tout $K \in C(c_0)$.
D'où : $\eta(A + K) = \delta(A + K)$.
D'abord si $A + K$ est inversible, on aura $N(A + K) = \{0\}$.
Inversement, si $N(A + K) = \{0\}$, on aura $\eta(A + K) = \delta(A + K) = 0$ et donc $A + K$ doit être surjectif, c'est-a-dire que $A + K$ est inversible. □

Dans toute la suite de ce chapitre, on suppose qu'il existe $l_i \in K$, $l_i \neq 0$ pour $i = 1, \ldots, m$ tel que :

$$\langle u_i', u_j \rangle_d = l_i \delta_{ij}$$

pour tout $i, j = 1, \ldots, m$.

Lemme 2.6.2. *Considérons l'opérateur de rang fini défini par :*

$$F = \sum_{k=1}^{m} u_k^{'} \otimes v_k$$

avec $u_k^{'} \in c_0^{'}$, $v_k \in c_0$ pour $k = 1, ..., m$, alors l'opérateur $I - F$ est inversible si, et seulement si, $\det P \neq 0$, *où P est la matrice carrée donnée par $P = (a_{ij})_{i,j=1,..,m}$; avec $a_{ij} = \delta_{ij} - \langle u_i^{'}, v_j \rangle_d$.*

Démonstration. En utilisant le lemme précédent, il s'ensuit que l'opérateur $I - F$ est inversible si, et seulement si, $N(I - F) = \{0\}$. Alors pour compléter la preuve il suffit de montrer que $N(I - F) = \{0\}$ si, et seulement si, $\det P \neq 0$.
Pour cela, soit $w \in c_0 \setminus \{0\}$ tel que $(I - F)w = 0$; ce qu'est équivalent à :

$$w - \sum_{k=1}^{m} \langle u_k^{'}, w\rangle_d v_k = 0 \qquad (1.1).$$

Maintenant appliquons $\langle ., .\rangle_d$ à l'équation (1.1) avec $u_1^{'}, ...u_m^{'}$ respectivement ; on obtient le système des équations suivant :

$$P \begin{pmatrix} \langle u_1^{'}, w\rangle_d \\ \vdots \\ \langle u_m^{'}, w\rangle_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1.2).$$

si, nous supposons que $N(I - F) \neq \{0\}$, alors

$$w = \sum_{k=1}^{m} \langle u_k^{'}, w\rangle_d v_k,$$

et donc au moins l'un des scalaires suivants $\langle u_1^{'}, w\rangle_d, ..., \langle u_m^{'}, w\rangle_d$ est non nul. Par conséquent l'équation (1.2) admet au moins une solutions non triviale, ce qui donne $\det P = 0$.
Inversement, si $\det P = 0$, il existe des scalaires $\xi_1, ..., \xi_m$ non tous nuls, tel que $\xi = (\xi_1, ..., \xi_m)^t$, et nous avons :

$$P \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1.3),$$

on prend $w = \sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k v_k$ et on obtient $(I - F)w = 0$.
D'abord $w \neq 0$, si non $\langle u_k^{'}, w\rangle_d = \delta_{kj}\xi_j = 0$ pour $j = 1, ..., m$ par suite $\xi_j = 0$ ce qui contredit le fait que ξ_j ne sont pas tous nuls. Alors $N(I - F) \neq 0$. □

Proposition 2.6.2. *Considérons l'opérateur de rang fini défini par :*

$$F = \sum_{k=1}^{m} u_k^{'} \otimes v_k$$

avec $u_k^{'} \in c_0^{'}$, $v_k \in c_0$ *pour* $k = 1, ..., m$, *alors le spectre de* F *est donné par :*

$$\sigma(F) = \{\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \ : \ \det P(\lambda) = 0\} \cup \{0\},$$

où $P(\lambda)$ *est la matrice carrée définie par* $P(\lambda) = (a_{ij}(\lambda))_{i,j}$ *avec* $a_{ij}(\lambda)) = \lambda\delta_{ij} - \langle u_i^{'}, v_j\rangle_d$

Démonstration. Considérons l'opérateur $\lambda I - F$.
Si $\lambda = 0$ alors $\lambda \in \sigma(F)$, car F n'est pas inversible.
Supposons maintenant que $\lambda \neq 0$, alors $\lambda I - F = \lambda(I - F_\lambda)$, avec $F_\lambda = \lambda^{-1}F$ est un opérateur de rang fini, il est clair que $\lambda I - F$ est inversible si, et seulement si, $I - F_\lambda$ est inversible et $(\lambda I - F)^{-1} = \lambda^{-1}(I - F_\lambda)^{-1}$.
En utilisant le lemme 2.6.1, il s'ensuit que $I - F_\lambda$ est inversible si, et seulement si, $N(I - F_\lambda) = \{0\}$. En Suivant la même démarche de la preuve du lemme précédent, on obtient que $N(I - F_\lambda) = \{0\}$ si, et seulement si, $\det P(\lambda) = 0$. □

2.6.2 Analyse spectrale des opérateurs de la forme $T = D + F$

Dans cette section, nous utilisons largement les résultats de la section précédente pour étudier l'analyse spectrale des opérateurs de la forme $T = D + F$, où $D : c_0 \longrightarrow c_0$ est opérateur diagonal borné et F un opérateur de rang fini défini par :

$$F = \sum_{k=1}^{m} u_k^{'} \otimes v_k$$

avec $u_k^{'} \in c_0^{'}$, $v_k \in c_0$ pour $k = 1, ..., m$.

Théorème 2.6.3. *Soit $T = D + F$ où $D : c_0 \longrightarrow c_0$ est opérateur diagonal borné et $F = \sum_{k=1}^{m} u_k^{'} \otimes v_k$ un opérateur de rang fini, alors $\lambda \in \sigma_p(T)$ si, et seulement, si les propriétés suivantes sont vérifiés :*

- **a)** $\lambda \notin \sigma_p(D) = \{\lambda_j : j \in \mathbb{N}\}$
- **b)** $\det M(\lambda) = 0$ *où* $M(\lambda) = (b_{ij})_{i,j=1,2,...,m}$ *avec* $b_{ij}(\lambda) = \delta_{ij} + \langle C_\lambda u_i^{'}, v_j \rangle_d$ *pour tout* $i = 1, 2, ..., m$ *avec* $C_\lambda = (D - \lambda I)^{-1}$.

Démonstration. Soit $\lambda \in K$. Alors
Supposons que $\lambda \in \sigma_p(T)$, alors il existe $w \in c_0$, $w \neq 0$ tel que $Tw = \lambda w$, ce qui est équivalent à :

$$(\lambda I - D)w = Fw = \sum_{k=1}^{m} \langle u_k^{'}, w \rangle_d v_k \qquad (2.1).$$

Montrons que $\lambda \notin \sigma_p(D)$.
Toutes les expressions $\langle u_k^{'}, w \rangle_d$ pour $k = 1, 2, ..., m$, sont non nuls, si non, nous obtiendrons $(\lambda I - D)w = 0$, avec $w \neq 0$. Alors $\lambda \in \sigma_p(D)$ et par conséquence il existe $j_0 \in \mathbb{N}$

tel que $\lambda = \lambda_{j_0}$, $w = ae_{j_0}$ où $a \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ et

$$0 = \langle u_k^{'}, w\rangle_d = \langle u_k^{'}, ae_{j_0}\rangle_d = a\langle u_k^{'}, e_{j_0}\rangle_d,$$

ce qui entraine que $\langle u_k^{'}, e_{j_0}\rangle_d = 0$ pour $k = 1, 2, ..., m$. Absurde.
Il est clair que l'équation (2.1) est équivalente à :

$$w + (D - \lambda I)^{-1} \sum_{k=1}^{m} \langle u_k^{'}, w\rangle_d v_k = 0$$

$$\text{ou} \quad w + \sum_{k=1}^{m} \langle u_k^{'}, w\rangle_d C_\lambda v_k = 0 \qquad (2.2).$$

D'abord appliquons $\langle ., .\rangle_d$ à l'équation (2.2) avec $u_1^{'}, ..., u_m^{'}$ respectivement, on obtient le système des équations suivant :

$$M(\lambda) \begin{pmatrix} \langle u_1^{'}, w\rangle_d \\ \vdots \\ \langle u_m^{'}, w\rangle_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (2.3).$$

En utilisant le fait qu'au moins un des scalaires suivants $\langle u_1^{'}, w\rangle_d, ..., \langle u_m^{'}, w\rangle_d$ est non nul, il s'ensuit que l'équation (2.2) admet au moins une solution non triviale, ce qui donne $\det M(\lambda) = 0$.
Supposons que $\lambda \notin \sigma_p(D)$ et $\det M(\lambda) = 0$, alors il existe des scalaires $\xi_1, ..., \xi_m$ non tous nuls tels que $\xi = (\xi_1, ..., \xi_m)^t$ et

$$M(\lambda) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (2.4).$$

Nous prenons $w = -\sum_{k=1}^{m} \xi_k C_\lambda v_k$ et on obtient $(T - \lambda I)w = 0$, d'abord $w \neq 0$; pour montrer ça, il suffit de montrer que $C_\lambda^{-1} w \neq 0$ et nous utilisons C_λ on obtient $w \neq 0$, maintenant si $C_\lambda^{-1} w = 0$, il s'ensuit que $0 = \langle C_\lambda^{-1} w, v_j\rangle_d = \delta_{kj}\xi_j$, pour tout $j = 1, ...m$; par conséquence $\xi_j = 0$ pour tout $j = 1, .., m$, cela contredit le fait que certains des ξ_j sont non nuls. Alors $N(T - \lambda I) \neq 0$, c'est-à-dire que $\lambda \in \sigma_p(T)$. □

Corollaire 2.6.2. *Soit $T = D + F$ et $\lambda \in \varrho(D)$ alors $\lambda \in \sigma_p(T)$ si, et seulement si,* $\det M(\lambda) = 0$.

Démonstration. Puisque $\lambda \in \varrho(D)$, il s'ensuit que $\lambda \notin \sigma_p(D)$; alors le résultat découle immédiatement du théorème précédent. □

Corollaire 2.6.3. *Soit $T = D+F$, avec D un opérateur diagonal borné et F un opérateur de rang fini défini par*

$$F = \sum_{k=1}^{m} u_k^{'} \otimes v_k$$

avec $u_k^{'} \in c_0^{'}$, $v_k \in c_0$ pour $k = 1, ..., m$. Alors les valeurs propres et le spectre de T sont donnés par :

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \rho(D) \ : \ \det M(\lambda) = 0\}$$

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \rho(D) \ : \ \det M(\lambda) = 0\} \cup \sigma_e(D).$$

2.6.3 Caractérisation du spectre essentiel d'un opérateur diagonal

Notre objectif principal dans cette section consiste à déterminer $\sigma_e(D)$ le spectre essentiel de l'opérateur D. Pour cela on définit les ensembles suivants :
Soit $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset K$ une suite d'élément de K.

a. $\Lambda = \{\lambda_j : j \in \mathbb{N}\}$.

b. $(\forall \lambda \in \Lambda)\,, I_\lambda = \{k \in \mathbb{N} : \lambda_k = \lambda\}$ et $r_\lambda = card(I_\lambda)$.

c. $\Lambda^* = \{\lambda \in \Lambda : r_\lambda < \infty\}$.

d. $\Lambda' = \{\lambda \in \Lambda : \lambda \ est \ un \ point \ d'accumulation \ de \ \Lambda\}$.

e. $\overline{\Lambda}$ est la fermeture de Λ dans K.

Pour chaque $\lambda \in \Lambda$, on associe le sous-espace V_λ de c_0 défini par :

$$V_\lambda = \left\{ \sum_i v_i e_i : v_i = 0 \ pour \ tout \ i \in I_\lambda \right\}.$$

Alors V_λ est un sous-espace fermé de c_0.

Proposition 2.6.3. *Pour chaque $\lambda \in \Lambda$, soit W_λ le sous-espace engendré par $\{e_k : k \notin I_\lambda\}$ et $\overline{W_\lambda}$ sa fermeture dans c_0, alors :*

$$\overline{W_\lambda} = V_\lambda$$

$$W_\lambda \subset R(\lambda I - D) \subset V_\lambda.$$

Démonstration. Voir ([14], proposition 5.1). □

Théorème 2.6.4. *Considérons l'opérateur diagonal borné D défini par :*

$$De_j = \lambda_j e_j, \quad avec\ \lambda = (\lambda_j)_j \subset K.$$

Alors le spectre essentiel de D est donné par :

$$\sigma_e(D) = (\overline{\Lambda} \setminus \Lambda^*) \cup (\Lambda^* \cap \Lambda').$$

Démonstration. Pour la première inclusion, soit $\lambda \in \sigma_e(D)$.
Supposons que $\lambda \notin \Lambda$, alors $\lambda \in \overline{\Lambda} \setminus \Lambda^*$.
Supposons que $\lambda \in \overline{\Lambda}$ et $r_\lambda = \infty$, alors $\lambda \in \overline{\Lambda} \setminus \Lambda^*$.
Supposons que $\lambda \in \Lambda$ et $r_\lambda < \infty$ et $\lambda \notin \Lambda'$.

a. Montrons que $R(\lambda I - D)$ est un fermé ; en effet $R(\lambda I - D) = V_\lambda$, pour cela, soit $v = \sum_i v_i e_i \in V_\lambda$, alors $v_i = 0$ pour tout $i \in I_\lambda$ qu'est fini. Alors :

$$v = \sum_{k \notin I_\lambda} v_k e_k \ et\ \lim_k |v_k| = 0.$$

D'abord considérons $w = \sum_{k \notin I_\lambda} \frac{v_k e_k}{\lambda - \lambda_k}$, puisque $\lambda \notin \Lambda'$, on a : $\inf |\lambda - \lambda_k| > 0$; de plus $\lim_k |\frac{v_k}{\lambda - \lambda_k}| = 0$, d'où $w \in c_0$, et ainsi $v = (\lambda I - D)w$, alors $v \in R(\lambda I - D)$ et d'après la proposition précédente on a : $R(\lambda I - D) \subset V_\lambda$.
D'où $R(\lambda I - D) = V_\lambda$.

b. Montrons que $\dim(c_0 \setminus R(\lambda I - D)) = r_\lambda < \infty$.
En effet, on a : $c_0 \setminus R(\lambda I - D) = c_0 \setminus V_\lambda$ et par suite :

$$\dim(c_0 \setminus R(\lambda I - D)) = \dim(c_0 \setminus V_\lambda) = r_\lambda.$$

c. Montrons que $\chi(\lambda I - D) = 0$.
En effet on a :

$$\chi(\lambda I - D) = \dim(N(\lambda I - D)) - \dim(c_0 \setminus R(\lambda I - D))$$

$$= r_\lambda - r_\lambda = 0.$$

Maintenant, $r_\lambda < \infty$ et a,b et c impliquent que $\lambda I - D \in \Phi_0(c_0)$; ce qui est contre notre hypothèse $\lambda \in \sigma_e(D)$, et par conséquent si r_λ est fini, alors $\lambda \in \Lambda'$.
D'où : $\sigma_e(D) \subset (\overline{\Lambda} \setminus \Lambda^*) \cup (\Lambda^* \cap \Lambda')$.

Inversement, soit $\lambda \in (\overline{\Lambda} \setminus \Lambda^*) \cup (\Lambda^* \cap \Lambda')$, montrons que $\lambda \in \sigma_e(D)$.
D'abord supposons que $\lambda \in (\overline{\Lambda} \setminus \Lambda^*)$, on a :

$$\overline{\Lambda} = \sigma(D) = \sigma_p(D) \cup \sigma_e(D) = \Lambda \cup \sigma_e(D).$$

Si $\lambda \in \sigma_e(D)$ c'est fini, sinon, $\lambda \in \Lambda$ et r_λ est infini ; et par suite $\dim N(\lambda I - D) = \infty$. Alors $\lambda I - D$ n'est pas un opérateur de Fredholm d'indice zéro. D'où $\lambda \in \sigma_e(D)$.
Il reste à montrer que $(\Lambda^* \cap \Lambda') \subset \sigma_e(D)$, nous le prouvons par l'absurde ; soit $\lambda \in (\Lambda^* \cap \Lambda')$, et on suppose que $\lambda \notin \sigma_e(D)$. Cette hypothèse implique que $R(\lambda I - D)$ est fermé et donc $R(\lambda I - D) = V_\lambda$.
La contradiction que nous cherchons est la suivante : nous construisons un vecteur $v \in V_\lambda$ qui ne peut pas être dans $R(\lambda I - D)$.
Pour compléter la preuve de notre théorème, nous avons besoin des lemmes suivants. □

Lemme 2.6.3. *Soit $\rho \in K$, tel que $|\rho| > 1$, alors pour chaque $x \in \mathbb{R}^{*+}$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que :*

$$|\rho|^n \leq x < |\rho|^{n+1}.$$

Démonstration. Voir ([14], Lemme 5.5). □

Corollaire 2.6.4. *Soit $\rho \in K$, tel que $|\rho| > 1$, alors il existe $n_k \in \mathbb{Z}$ tel que :*

$$1 \leq \frac{1}{|\rho|^{n_k}} < |\rho|.$$

Puisque $\lambda \in \Lambda'$, il existe une sous-suite $\{\lambda_{k_j}\} \subset \Lambda$ telle que :

$$\lim_{j \to \infty} |\lambda - \lambda_{k_j}| = 0 \ \ et\ \lambda_{k_j} \neq \lambda\ pour\ tout\ j \in \mathbb{N}.$$

Lemme 2.6.4. *Soit $v = \sum_i v_i e_i$, où les v_i sont définis par :*

$$v_i = \begin{cases} 0, & \textbf{si}\ i \notin \{k_j : j \in \mathbb{N}\} \\ \left(\lambda - \lambda_{k_j}\right) \rho^{-n_{k_j}}, & \textbf{si}\ i = j\ pour\ certain\ j. \end{cases}$$

Alors $v \in V_\lambda$ et $v \notin R(\lambda I - D)$.

Démonstration. Il est clair que $v \in c_0$ grâce au corollaire précédent et du fait que $|\lambda - \lambda_{k_j}| \to 0$ lorsque $j \to 0$. De plus on a :

$$I_\lambda \cap I_{k_j} = \emptyset \ \ pour\ tout\ j \in \mathbb{N}.$$

Alors $v \in V_\lambda$.
D'abord par l'absurde supposons que $v \in R(\lambda I - D)$, alors il existe $w = \sum_i w_i e_i \in c_0$, tel que $(\lambda I - D)w = v$. Ce qui implique que :

$$\sum_i (\lambda - \lambda_i) w_i e_i = \sum_i v_i e_i.$$

Ainsi, pour tout $j \in \mathbb{N}$ on a :

$$(\lambda - \lambda_{k_j}) w_{k_j} = v_{k_j} = (\lambda - \lambda_{k_j}) \rho^{-n_{k_j}},$$

et par conséquent

$$w_{k_j} = \frac{1}{\rho^{n_{k_j}}} \quad \textit{pour tout } j \in \mathbb{N};$$

de plus :

$$\lim_j |w_{k_j}| = \lim_j \frac{1}{|\rho|^{n_{k_j}}}$$

et par le corollaire précédent cette limite est différente de zéro, ce qui contredit le fait que $w \in c_0$, alors $v \notin R(\lambda I - D)$. Ce qui termine la preuve du lemme et donc celle du théorème également. □

Théorème 2.6.5. *Soit $T = D + F$, avec D un opérateur diagonal borné et F un opérateur de rang fini défini par*

$$F = \sum_{k=1}^{m} u_k' \otimes v_k$$

avec $u_k' \in c_0'$, $v_k \in c_0$ pour $k = 1, ..., m$. Alors le spectre de T est donné par :

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \rho(D) \ : \ \det M(\lambda) = 0\} \cup (\overline{\Lambda} \setminus \Lambda^*) \cup (\Lambda^* \cap \Lambda').$$

Où $M(\lambda)$ est la matrice donnée dans le théorème 2.6.3.

Démonstration. Découle immédiatement de ce qui précède. □

CHAPITRE 3

ÉTUDE SPECTRALE DES OPÉRATEURS DE LA FORME $T = D + T_\mu$

3.1 Introduction et préliminaires

Dans le dernier paragraphe du chapitre 1, on a introduit un produit scalaire $\langle\ .\ ,\ .\ \rangle$ dans l'espace c_0 comme forme bilinéaire symétrique non dégénérée. Mais, on a vu que la norme $n.a$ qu'on a défini dans l'espace c_0 ne provient pas de ce produit scalaire, de même, on a remarqué qu'il peut exister des éléments isotropiques dans c_0 (i.e. des éléments $x \neq 0$ de c_0 vérifiant $\langle x, x\rangle = 0$).

Dans la première partie de ce chapitre, on va généraliser la notion du produit scalaire dans le contexte non-Archimédien, de telle façon qu'on a pas de vecteurs isotropiques et la norme $n.a$ découle de ce produit scalaire.
Dans la deuxième partie, on a traité les opérateurs adjoints dans le cas non-Archimédien, et contrairement au cas classique, on a trouvé qu'un opérateur continu n'admet pas nécessairement un opérateur adjoint, puis, on a étudié les opérateurs compact et on a trouvé que si le corps de base est local la définition des opérateurs compacts dans le contexte non-Archimédien

coïncide avec le cas classique, ainsi, on a donné une caractérisation des opérateurs compacts auto-adjoints a l'aide de projection normale.
Dans la dernière partie, nous avons introduit une analyse spectrale pour la perturbation des opérateurs compact auto-adjoint ; à savoir l'étude de l'analyse spectrale d'un opérateur de la forme :

$$T = D + T_\mu,$$

où $D = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i\langle ., e_i\rangle e_i$, $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c_0$ et $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la base orthonormale de c_0, D est un opérateur diagonal borné et T_μ est un opérateur auto-adjoint compact défini par $T_\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i P_i$ où $P_i = \frac{\langle .,y_i\rangle}{\langle y_i,y_i\rangle} y_i$. avec $\mu = (\mu_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset c_0$ et $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormée dans c_0.

3.1.1 Produit scalaire non-Archimédien

Définition 3.1.1. *Soit $\mathbb{X}$ un $K-$espace vectoriel. On appelle produit scalaire non-Archimédien sur $\mathbb{X}$ toute application $\langle .,.\rangle : \mathbb{X}\times\mathbb{X} \to K$ satisfaisant :*

(a) $(\forall x \in \mathbb{X})\ x \neq 0 \Longrightarrow \langle x, x\rangle \neq 0$;

(b) $(\forall (x, y, z) \in \mathbb{X}^3)\ (\forall(\lambda, \mu) \in K^2)\ \langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle$;

(c) $(\forall (x, y) \in \mathbb{X}^2)\ |\langle x, y\rangle|^2 \leq |\langle x, x\rangle|.|\langle y, y\rangle|$.

Si en plus, $(\forall (x, y) \in \mathbb{X}^2)\ \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, *alors on dit que $\langle .,.\rangle$ est un produit scalaire $n.a$ symétrique.*

Si $\mathbb{X}$ est un $K-$espace vectoriel muni d'un produit scalaire $n.a$ $\langle .,.\rangle$, alors on dit que $(\mathbb{X}, \langle .,.\rangle)$ est un espace Hilbertien non-Archimédien $(n.a)$.

Proposition 3.1.1. *Soit $(\mathbb{X}, \langle .,.\rangle)$ un espace Hilbertien $n.a$. Alors, le produit scalaire $n.a$ $\langle .,.\rangle$ induit sur $\mathbb{X}$ une norme $n.a$ définie par :*

$$(\forall x \in \mathbb{X})\ \|x\| = |\langle x, x\rangle|^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. Voir ([38], Théorème 2.1). □

Exemple 3.1.1. *Considérons K^2 comme $K-$espace vectoriel, pour tout $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in K^2$ soit $\langle .,.\rangle$ l'application définie sur K^2 par :*

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases} x_1y_1 & si\ |y_1| \geq |y_2| \\ x_2y_2 & si\ |y_1| < |y_2|. \end{cases}$$

Alors $\langle .,.\rangle$ est un produit scalaire n.a. sur K^2, et il induit la norme n.a. $\|.\|_\infty$ sur K^2.

Démonstration. Voir ([38], Exemple 2.1). □

Maintenant, on va définir la notion d'orthogonalité dans un espace Hilbertien n.a. par le produit scalaire n.a, comme dans le cas classique des espaces de Hilbert.

Définition 3.1.2. *Soit $(\mathbb{X}, \langle .,. \rangle)$ un espace Hilbertien $n.a$.*

(a) Soit $(x, y) \in \mathbb{X}^2$. On dit que x est normal à y (noté $x \dashv y$) ou que y est transversal à x (noté $y \vdash x$) si $\langle y, x \rangle = 0$.

(b) Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{X}$.
Le sous-ensemble de $\mathbb{X}$ défini par $A^{\dashv} = \{y \in \mathbb{X} : (\forall x \in A) \quad \langle x, y \rangle = 0\}$ est appelé le complément Normal de A.
$A^{\vdash} = \{y \in \mathbb{X} : (\forall x \in A) \quad \langle y, x \rangle = 0\}$ est appelé le complément transversal de A.

Définition 3.1.3. *Soient $(\mathbb{X}, \langle .,. \rangle)$ un espace Hilbertien $n.a$ et A et B deux parties de $\mathbb{X}$. On dit que A est normal à B, ou que B est transversal à A si, et seulement si, $(\forall x \in A)$ et $(\forall y \in B)$ $\langle y, x \rangle = 0$. Dans ce cas, on note : $A \dashv B$ ou $B \vdash A$.*
Si le produit scalaire $n.a$ est symétrique, pour toute partie A de $\mathbb{X}$ on a : $A^{\dashv} = A^{\vdash}$; et dans ce cas on note $A^p = A^{\dashv} = A^{\vdash}$.

Remarque 3.1.1. *Soit A un sous-ensemble d'un espace Hilbertien $n.a$ $(\mathbb{X}, \langle .,. \rangle)$. Par la linéarité de la première coordonnée du produit scalaire $n.a$ $\langle .,. \rangle$, le complément transversal $A^{\vdash}$ de A est un sous-espace de $\mathbb{X}$. Et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $y \in \mathbb{X}$, l'application $\langle ., y \rangle$ est continue et alors $A^{\vdash}$ est fermé. Donc le complément transversal de toute partie de E est un sous-espace fermé de $\mathbb{X}$.*

Le résultat suivant montre que la normalité est plus forte que l'orthogonalité dans un espace Hilbertien $n.a$.

Proposition 3.1.2. *Soient $\mathbb{X}$ un espace hilbertien $n.a$ et $x, y \in \mathbb{X}$. Alors on a : $x \dashv y \Longrightarrow x \perp y$.*

Démonstration. Supposons que $x \neq y$. Alors :
$x \dashv y \Longrightarrow \langle y, x \rangle = 0$, d'où pour tout $\lambda \in K$,

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= |\langle x, x \rangle| \\ &= |\langle x + \lambda y, x \rangle| \\ &\leq \|x + \lambda y\|.\|x\|; \end{aligned}$$

d'où $(\forall \lambda \in K) \ \|x\| \leq \|x + \lambda y\|$, donc $x \perp y$. □

Remarque 3.1.2. *La réciproque de la proposition précédente n'est pas vraie. C-à-d : la normalité est strictement plus forte que l'orthogonalité.*
En effet, dans l'exemple 3.1.1, on a : $(1,1) \perp (1,0)$ *mais* $(1,1)$ *n'est pas normal à* $(1,0)$ *puisque* $\langle (1,1),(1,0)\rangle = 1 \neq 0$.

Théorème 3.1.1. *Supposons que* K *soit sphériquement complet. Et soit* $(\mathbb{X}, \|.\|)$ *un espace normé* $n.a$ *tel que* $\|\mathbb{X}\| \subset |K|^{\frac{1}{2}}$ *où*

$$|K|^{\frac{1}{2}} = \{|\lambda|^{\frac{1}{2}} \ : \ \lambda \in K\}.$$

Alors, il existe un produit scalaire $n.a$ *sur* $\mathbb{X}$ *qui induit la norme* $n.a$ $\|.\|$.

Démonstration. Voir ([38], Exemple 4.1). □

Théorème 3.1.2. *Soit* $\mathbb{X}$ *un espace de Banach* $n.a$; *les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathbb{X}$ *admet un produit scalaire* $n.a$ *qui est induit de la norme* $n.a$ *de* $\mathbb{X}$*;*

(ii) $\|\mathbb{X}\| \subset |K|^{\frac{1}{2}}$ *et tout sous-espace de dimension* 1 *de* $\mathbb{X}$ *est orthocomplémenté (c-à-d : admet un complémentaire orthogonal).*

(iii) Il existe une application $\theta \ : \ \mathbb{X} \to \mathbb{X}'$, $y \mapsto f_y$ *telle que :*

$$(\forall y \in \mathbb{X}) \ \|f_y\| = \|y\| \ et \ \|f_y(y)\| = \|y\|^2.$$

Démonstration. Voir ([38], Théorème 4.1). □

Définition 3.1.4. *Un corps* F *est dit formellement réel si pour tout sous-ensemble fini* $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset F$, $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0$ *implique* $a_i = 0$ *pour tout* $i = 1, ..., n$.

Proposition 3.1.3. *Le produit scalaire qu'on a défini dans le dernier paragraphe du chapitre* 1, *induit la norme* $n.a$ $\|.\|_\infty$ *sur* c_0 *si, et seulement si, le corps résiduel de* K *est formellement réel.*

Démonstration. Voir ([38], Théorème 6.1). □

3.1.2 Opérateur adjoint

Définition 3.1.5. *On dit que l'opérateur* v *est un adjoint de l'opérateur* u *pour le produit scalaire* $\langle .,. \rangle$ *si, et seulement si,*

$$\Big(\forall (x,y) \in \mathbb{X}^2\Big) \ \ \langle u(x), y\rangle = \langle x, v(y)\rangle.$$

Remarque 3.1.3. *Comme $\langle .,. \rangle$ est non dégénérée ; si l'opérateur u sur $\mathbb{X}$ admet un adjoint v, alors v est unique. Il sera noté u^*.*

Exemple 3.1.2. *Soit K un corps valué $n.a$ complet. Et soit $w = (w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite dans K^*.*
On pose :

$$E_w = \{(u_i)_i \in K \ : \ \lim_{i\to\infty} |u_i||w_i|^{\frac{1}{2}} = 0\}.$$

Il est évident qu'on a :

$$(u_i)_i \in E_w \Longleftrightarrow \lim_{i\to\infty} u_i^2 w_i = 0.$$

On pose pour tout $u = (u_i)_i \in E_w$.

$$\|u\|_w = \sup_i |u_i||w_i|^{\frac{1}{2}}.$$

$\|.\|_w$ définit une norme $n.a$ sur E_w. Et $(E_w, \|.\|_w)$ est un espace de Banach $n.a$.
Sur E_w on peut définir un produit scalaire (c-à-d une forme bilinéaire symétrique non dégénérée) comme suit : pour tout $x = (x_i)_i$ et $y = (y_i)_i$ dans E_w, on pose :

$$\langle x, y\rangle_w = \sum_i w_i x_i y_i.$$

L'espace $(E_w, \langle .,. \rangle_w)$ est appelé espace de Hilbert non-Archimédien associé a w.

Proposition 3.1.4. *Soit $A = \sum_{t,s\in\mathbb{N}} a_{st}\left(e_t^{'} \otimes e_s\right) \in B(E_w)$, alors l'opérateur adjoint A^* existe si, et seulement si, pour tout $s \in \mathbb{N}$, $\lim_{t\longrightarrow\infty} \frac{|a_{st}|}{|w_t|^{\frac{1}{2}}} = 0$; dans ce cas*

$$A^* = \sum_{t,s\in N} w_s^{-1} w_t a_{ts}\left(e_t^{'} \otimes e_s\right).$$

Démonstration. Soit $A^* = \sum_{t,s\in\mathbb{N}} b_{st}\left(e_t^{'} \otimes e_s\right)$, alors l'opérateur A^* est l'adjoint de A si, et seulement si, $\langle Ae_s, e_t\rangle = \langle e_s, A^* e_t\rangle$; ce qu'est équivalent à :

$$\langle \sum_{k\in\mathbb{N}} a_{ks} e_k, e_t\rangle = a_{ts} w_t = \langle e_s, \sum_{k\in\mathbb{N}} b_{kt} e_k\rangle = b_{st} w_s$$

pour tout $s, t \in \mathbb{N}$.
Donc $b_{st} = w_s^{-1} w_t a_{ts}$ $\forall s, t \in \mathbb{N}$, de plus pour $t \in \mathbb{N}$ on a :

$$\lim_{s\longrightarrow\infty} |b_{st}||w_s|^{\frac{1}{2}} = 0$$

ce qui est équivalent de dire que :

$$\lim_{s\longrightarrow\infty} \frac{|a_{ts}|}{|w_s|^{\frac{1}{2}}} = 0$$

pour tout $t \in \mathbb{N}$. □

Remarque 3.1.4. *D'après la proposition précédente, on en déduit qu'un opérateur continu sur E_w n'admet pas nécessairement un opérateur adjoint ; comme le montre l'exemple suivant.*

Exemple 3.1.3. *Soit p un nombre premier et $K = \mathbb{Q}_p$, $w_s = 1 + p^s$.*
Et

$$a_{st} = \begin{cases} p^s & si \;\; s < t \\ 0 & si \quad s \geq t \end{cases}$$

soit $A = \sum_{s,t\in\mathbb{N}} a_{st}\left(e_t^{'} \otimes e_s\right)$. *Alors :*

$$|a_{st}| = \begin{cases} p^{-s} & si \;\; s < t \\ 0 & si \quad s \geq t \end{cases}$$

$|w_s| = 1, \;\; \forall t \in \mathbb{N} \lim_{s\longrightarrow\infty} |a_{st}||w_s|^{\frac{1}{2}} = 0$, *de plus :*

$$\|A\| = \sup_{s,t\in N} \frac{|a_{st}||w_s|^{\frac{1}{2}}}{|w_s|^{\frac{1}{2}}} = \sup_{s<t} p^{-s} = 1,$$

donc $A \in B(E_w)$. *Or pour tout* $s \in \mathbb{N} \lim_{t\longrightarrow\infty} \frac{|a_{st}|}{|w_t|^{\frac{1}{2}}} = \lim_{t\longrightarrow\infty} p^{-1} = p^{-1} \neq 0$, *par conséquent A n'admet pas d'opérateur adjoint.*

Proposition 3.1.5. *Soient $A, B \in B(\mathbb{X})$, A^* l'opérateur adjoint de A et B^* l'opérateur adjoint de B et $\lambda \in K$, alors*

(a) $(A + B)^* = A^* + B^*$;
(b) $(AB)^* = B^*A^*$;
(c) $(\lambda A)^* = \lambda A^*$;
(d) $(A^*)^* = A$;
(e) $\|A\| = \|A^*\|$.

Démonstration. Voir ([15], proposition 3.20, p. 74). □

Définition 3.1.6. *Soit $A \in B(\mathbb{X})$. Alors*

(a) A est dit auto-adjoint si, et seulement si, $A = A^*$.

(b) A est dite unitaire si, et seulement si, $AA^* = A^*A = I$.

(c) A est dit normal si, et seulement si, $AA^* = A^*A$.

On notera $\mathcal{A}_0$ l'ensemble de tous les éléments de $B(c_0)$ qui admettent un adjoint.

$$\mathcal{A}_0 = \{T \in B(c_0) \ : \ \lim_{i\to\infty} \langle Te_i, y\rangle = 0, \ pour\ tout\ y \in c_0\}.$$

Théorème 3.1.3. *$\mathcal{A}_0$ est une sous-algèbre fermée et unitaire de $B(c_0)$.*

Démonstration. Voir ([1], p. 22). □

3.2 Opérateurs compacts

Définition 3.2.1. *Soit $\mathbb{X}$ un $K-$espace vectoriel, un sous-ensemble B de $\mathbb{X}$ est dit absolument $K-$convexe si, et seulement si, $\lambda x + \mu y \in B$ pour tous $x, y \in B$ et $\lambda, \mu \in K$ tels que $|\lambda| \leq 1$ et $|\mu| \leq 1$. Si B est un sous-ensemble de $\mathbb{X}$; $co(B)$ est l'enveloppe absolument $K-$convexe de B; c'est le plus petit sous-ensemble absolument $K-$convexe contenant B.*

Définition 3.2.2. *Un sous-ensemble $A \subset \mathbb{X}$ est dit totalement $C-$borné si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble fini $B \subset \mathbb{X}$ tel que $A \subset co(B) + \{x \in \mathbb{X} : \|x\| \leq \varepsilon\}$; où $co(B)$ désigne l'enveloppe absolument convexe de B.*

Définition 3.2.3. *Un opérateur linéaire $T \in B(c_0)$ est dit compact si, et seulement si, $T(B_{c_0})$ est totalement $C-$borné, où B_{c_0} la boule unité de c_0.*

Théorème 3.2.1. *Soit $\mathbb{X}$ un espace de Banach $n.a$, $T \in B(\mathbb{X})$. Alors :*
T est compact si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $S \in B(\mathbb{X})$ tel que : $S(\mathbb{X})$ est de dimension finie et $\|T - S\| \leq \varepsilon$.

Démonstration. Voir ([52], Théorème 4.39, p. 142). □

Remarque 3.2.1.

1. *On désigne par $C(\mathbb{X})$ l'ensemble des opérateurs compact ; d'après ce qui précède, $C(\mathbb{X})$ est un sous-espace fermé de $B(\mathbb{X})$. En fait, c'est la fermeture de l'ensemble des opérateurs de rang fini.*

2. *Si l'identité de $\mathbb{X}$ est compacte, alors $\mathbb{X}$ est de dimension fini.*

3. *Si K est localement compact, les totalement $C-$bornés de $\mathbb{X}$ ne sont que les ensembles pré-compacts.*

4. *Tout ensemble pré-compact est totalement $C-$borné.*

5. *Si $\mathbb{X}$ est de dimension finie, les totalement $C-$bornés de $\mathbb{X}$ ne sont que les ensembles bornés.*

6. *Si K est localement compact, alors :*
$T \in \boldsymbol{B}(\mathbb{X})$ est compact si, et seulement si, $T(B_{\mathbb{X}})$ a une fermeture compacte.

On définit l'ensemble $\mathcal{A}_1$ par :

$$\mathcal{A}_1 = \{T \in B(\mathbb{X}) \ : \ \lim_{n\to\infty} Te_n = 0\},$$

il est a noter que $\mathcal{A}_1 \subsetneq \mathcal{A}_0$, car $|\langle Te_n, y\rangle| \leq \|Te_n\|_\infty \|y\|_\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $y \in c_0$ et $I_d \notin \mathcal{A}_1$. On sait que chaque $T \in B(c_0)$ peut être représenté par :

$$T = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} e'_j \otimes e_i,$$

avec $\lim_{i\to\infty} a_{ij} = 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, où $(e'_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est la base duale, associée à $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$, de l'espace dual c_0^*. De plus on a :

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|T(e_i)\|_\infty : i \in \mathbb{N}\} \\ &= \sup\{|\langle T(e_i), e_j\rangle| : i, j \in \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

De plus T est compact si, et seulement si, $\lim_{j\to\infty} \sup\{|a_{ij}| : i \in \mathbb{N}\} = 0$.

Maintenant, notons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\|T(e_n)\|_\infty &= \|(\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} e'_j \otimes e_i)(e_n)\|_\infty \\ &= \|\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} e'_j(e_n) e_i\|_\infty \\ &= \|\sum_{i=1}^{\infty} a_{in} e_i\|_\infty \\ &= \sup\{|a_{in}| : i \in \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$T \in \mathcal{A}_1 \Longleftrightarrow T \in \mathcal{A}_0 \ et \ T \ est \ compact.$$

Définition 3.2.4. *Une application $p : c_0 \longrightarrow c_0$ est appelée projection si, et seulement si, $p^2 = p$. Elle dite projection normale si de plus elle vérifie $\langle x, y\rangle = 0$ pour tout $(x, y) \in N(p) \times R(p)$.*

Exemple 3.2.1. *Considérons l'application $p : c_0 \longrightarrow c_0$ définie par*

$$p(.) = \frac{\langle ., y\rangle}{\langle y, y\rangle} y; \quad \text{où } y \text{ est fixé dans } c_0 \setminus \{0\}.$$

Alors $p(.)$ est une projection normale sur c_0.

Le théorème suivant permet de construire des opérateurs compacts auto-adjoints à partir d'une suite orthonormée.

Théorème 3.2.2. *Soit $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormée dans c_0. Alors, pour tout $\lambda = (\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset c_0$, l'application $T : c_0 \longrightarrow c_0$ définie par :*

$$T(.) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i(.)$$

est un opérateur compact et auto-adjoint, où $P_i(.) = \frac{\langle ., y_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle} y_i$.

Démonstration. Voir ([2], Théorème 8, p. 11). □

Le théorème suivant permet de caractériser un opérateur compact auto-adjoint par une projection normale et une suite orthonormale de c_0; en faite c'est la réciproque du théorème précédent.

Théorème 3.2.3. *Soit $T : c_0 \longrightarrow c_0$ un opérateur compact auto-adjoint. Alors il existe un élément $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset c_0$ et une suite orthonormée $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset c_0$, tels que :*

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n,$$

où

$$P_n = \frac{\langle ., y_n\rangle}{\langle y_n, y_n\rangle} y_n$$

est une projection normale définie par y_n.

Démonstration. Voir ([2], Théorème 10, p. 13). □

3.2.1 Étude de C_Y

Dans toute la suite de ce travail, nous considérons une suite orthonormée $Y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ fixée dans c_0.
On notera par C_Y la collection des opérateurs compacts T_μ, $\mu \in c_0$; où T_μ s'écrit sous la forme suivante :

$$T_\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i P_i.$$

L'opérateur T_μ est auto-adjoint et $\lim_{n\longrightarrow\infty} T_\mu(e_n) = 0$.
D'autre part, puisque Y est orthonormée, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $T_\mu(y_i) = \mu_i y_i$, alors μ_i est une valeur propre de T_μ.
Désignons par $\sigma_p(T_\mu)$ l'ensemble des valeurs propres de T_μ.
D'abord C_Y est un espace vectoriel muni des opérations suivantes :

$$T_\lambda + T_\mu = T_{\lambda+\mu}; \quad \alpha T_\lambda = T_\alpha \lambda.$$

D'autre part, puisque c_0 est une algèbre commutative muni de l'opération suivante : $\lambda.\mu = (\lambda_i\mu_i)$, on a :

$$T_\lambda \circ T_\mu = T_{\lambda.\mu} = T_\mu \circ T_\lambda.$$

Pour simplifier la notation $T_\lambda \circ T_\mu$ sera noté $T_\lambda T_\mu$.
Avec les opérations décrites ci-dessus, C_Y est une algèbre commutative. De plus, du fait que $T_\lambda = T_\mu$ implique $\lambda = \mu$, l'application

$$\Lambda : c_0 \longrightarrow C_Y;\ \lambda \longmapsto \Lambda(\lambda) = T_\lambda$$

est un isomorphisme isométrique.
Comme on le sait, toute algèbre E sans unité peut être transformée en une algèbre avec unité, en considérant la collection $E^+ = K \oplus E$ munie de l'addition usuelle et de la multiplication définie par :

$$(\alpha, \mu) \odot (\beta, \nu) = (\alpha\beta, \alpha\nu + \beta\nu + \mu.\nu).$$

L'unité de cette algèbre est $(1, \theta)$, où θ est le vecteur nul de E. Si E est, en particulier, un espace vectoriel normé, alors E^+ est aussi un espace vectoriel normé de norme :

$$\|(\alpha, \mu)\| = \max\{|\alpha|, \|\mu\|_\infty\}.$$

Maintenant l'algèbre de Banach commutative $(C_Y, +, \cdot, \circ, \|.\|)$ peut être transformée, comme ci-dessus, en une algèbre de Banach commutative unitaire $(C_Y^+, +, \cdot, \circ, \|.\|)$. Par le fait que c_0 est isométriquement isomorphe à C_Y et C_Y^+ est isométriquement isomorphe à c_0^+.

3.2.2 Étude spectrale des opérateurs de la forme $T = D + T_\mu$

Dans cette partie, nous introduisons une analyse spectrale pour la perturbation des opérateurs compacts auto-adjoints ; à savoir nous étudions l'analyse spectrale pour un opérateur de la forme :

$$T = D + T_\mu,$$

où $D = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i\langle ., e_i\rangle e_i$, $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c_0$ est un opérateur diagonal borné et T_μ est l'opérateur auto-adjoint compact défini dans la section précédente.

Théorème 3.2.4. *1. Soit $T_\lambda \in C_Y$ un opérateur auto-adjoint compact et soit $\mu \in K,\ \mu \neq 0$ une valeur propre de T_λ. Alors $\mu = \lambda_i$ pour certain i.*

2. Soit $T \in B(c_0)$, alors pour tout $T_\mu \in C_Y$, on a :

$$\sigma_e(T + T_\mu) = \sigma_e(T).$$

3. Si $T = D + T_\mu$, où $T_\mu \in C_Y$ et D est un opérateur diagonal borné, alors le spectre de T est donné par :

$$\sigma(T) = \sigma_e(D) \cup \sigma_p(T).$$

4. Le spectre ponctuel de $T = D + T_\mu$ est donné par :

$$\sigma_p(T) = \{\mu_n + a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Démonstration.

1. Soit $x \in c_0$ un vecteur propre correspondant à la valeur propre μ. Alors :

$$T_\lambda x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \frac{\langle x, y_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle} y_i$$

$$T_\lambda(T_\lambda x) = T_\lambda(\mu x) = \mu T_\lambda x.$$

Il résulte de la dernière équation que :

$$T_\lambda(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \frac{\langle x, y_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle} y_i) = \mu(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \frac{\langle x, y_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle} y_i).$$

Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 \frac{\langle x, y_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle} y_i = \sum_{i=1}^{\infty} \mu\lambda_i \frac{\langle x, y_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle} y_i.$$

Puisque $T_\lambda x = \mu x \neq 0$, il s'ensuit que $\langle x, y_i\rangle \neq 0$ pour un certain i. D'où :

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}\{\lambda_i\} \neq \emptyset.$$

Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i(\lambda_i-\mu)\frac{\langle x, y_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle}y_i = 0 \;\; pour\; \langle x, y_i\rangle \neq 0.$$

La normalité de la suite $(y_i)_i$ implique que :

$$(\forall i \in \mathbb{N}) \quad \lambda_i(\lambda_i-\mu)\frac{\langle x, y_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle}y_i = 0;\; \langle x, y_i\rangle \neq 0.$$

Puisque les vecteurs propres correspondants aux différentes valeurs propres sont normaux et puisque $x \neq 0$, il s'ensuit que $\lambda_i \neq 0$ pour un certain $i \in \mathbb{N}$, alors $\lambda_i - \mu = 0$ pour $i \in \mathbb{N}$.
D'où $\lambda_i = \mu$ pour un certain $i \in \mathbb{N}$.

2. Si λ n'appartient pas a $\sigma_e(T)$, alors $\lambda I - T$ appartient a $\Phi(c_0)$ avec $\chi\lambda I - T) = 0$, donc $\lambda I - T - T_\mu$ appartient a $\Phi(c_0)$ avec $\chi(\lambda I - (T + T_\mu)) = 0$ pour tout $T_\mu \in C_Y$. Par conséquent λ n'appartient pas $\sigma_e(T + T_\mu)$.

3. On a : $\sigma(T) = \sigma_e(T) \cup \sigma_p(T)$, on pose $T = D + T_\mu$. Au vu de la seconde assertion du théorème $\sigma_e(T) = \sigma_e(D + T_\mu) = \sigma_e(D)$. Il s'ensuit alors que $\sigma(T) = \sigma_e(D) \cup \sigma_p(T)$.

4. Soit $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormée dans c_0 alors :

$$Ty = (D + T_\mu)(y);$$

puisque y est orthonormée ; on a : $Dy = a_n\langle y_n, e_n\rangle e_n$ et $T_\mu y = \mu_n y_n$. Alors :

$$Ty = Ty_n = a_n\langle y_n, e_n\rangle e_n + \mu_n y_n \qquad (*).$$

En prenant le produit scalaire de l'égalité $(*)$ avec la base canonique de c_0 on obtient :

$$\begin{aligned}\langle Ty_n, e_n\rangle &= a_n\langle y_n, e_n\rangle + \mu_n\langle y_n, e_n\rangle \\ &= (\mu_n + a_n)\langle y_n, e_n\rangle.\end{aligned}$$

Alors $\langle Ty_n - (\mu_n + a_n)y_n, e_n\rangle = 0$ ce qui implique que $Ty_n - (\mu_n + a_n)y_n = 0$, si non, il existe une suite non nulle $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset K$ telle que $Ty_n - (\mu_n + a_n)y_n = \sum_{i\in\mathbb{N}}\alpha_i e_i$ alors $\langle\sum_{i\in\mathbb{N}}\alpha_i e_i, e_n\rangle = \alpha_n = 0$, ce qui contredit le fait que la suite $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est non nulle. Par conséquent $\mu_n + a_n$ est une valeur propre de T. □

Corollaire 3.2.1. *Pour tout $T_\mu \in C_Y$, on a $\sigma_e(D + T_\mu) = \sigma_e(D)$, où D est un opérateur diagonal borné sur c_0.*

Théorème 3.2.5. *Soit $T = D + T_\mu$, alors le spectre $\sigma(T)$ est donné par :*

$$\sigma(T) = \{\mu_n + a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup (\overline{\Lambda} \setminus \Lambda^*) \cup (\Lambda^* \cap \Lambda').$$

Démonstration. La preuve découle immédiatement du théorème précédent. □

Proposition 3.2.1. *Soit $T = D + T_\mu$, où D est un opérateur diagonal borné et T_μ est un opérateur compact auto-adjoint, alors $\sigma_p(T) \cap \sigma_p(D) = \emptyset$.*

Démonstration. Supposons que $\lambda \in \sigma_p(T)$, alors il existe $u \neq 0$, $u \in c_0$ tel que $Tu = \lambda u$ ce qui est équivalent à :

$$(\lambda I - D)u = T_\mu u = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \frac{\langle u, y_i \rangle}{\langle y_i, y_i \rangle} y_i.$$

Il est clair que les expressions $\langle u, y_i \rangle$ ne sont pas toutes nulles. Car si non, on aura :
$(\lambda I - D)u = 0$ avec $u \neq 0$, c-à-d $\lambda \in \sigma_p(D)$, alors il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = \lambda_{j_0}$ et $u = ae_{j_0}$, où $a \in K \setminus \{0\}$. Alors pour $i = j_0$ on aura $0 = \langle u, y_{j_0} \rangle = \langle ae_{j_0}, y_{j_0} \rangle = a\langle e_{j_0}, y_{j_0} \rangle \neq 0$. Ce qu'est absurde, alors $\lambda \notin \sigma_p(D)$.
Inversement, supposons que $\lambda \in \sigma_p(D)$, alors il existe $u \neq 0$, $u \in c_0$ tel que $Du = \lambda u$, d'où il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ et $\alpha_{i_0} \in K \setminus \{0\}$ tel que $\lambda = \lambda_{i_0}$ et $u = \alpha_{i_0} e_{i_0}$.
D'autre part on a :

$$\begin{aligned} Tu &= Du + T_\mu u \\ &= \lambda u + \mu_{i_0} \alpha_{i_0} \frac{\langle e_{i_0}, y_{i_0} \rangle}{\langle y_{i_0}, y_{i_0} \rangle} y_{i_0}. \end{aligned}$$

Alors,

$$\lambda u - Tu = -\mu_{i_0} \alpha_{i_0} \frac{\langle e_{i_0}, y_{i_0} \rangle}{\langle y_{i_0}, y_{i_0} \rangle} y_{i_0} \neq 0.$$

Car si non, on aura $\mu_{i_0} y_{i_0} = 0 = T_\mu(y_{i_0})$, ce qui est absurde. Alors $\lambda \notin \sigma_p(T)$. □

Remarque 3.2.2. *T et T_μ ont les mêmes vecteurs propres correspondant respectivement à $\mu_i + a_i$ et μ_i.*

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

L'étude des opérateurs dans les espaces de Banach non-Archimédiens a rencontré une suite de difficultés, et avant tout avec l'existence des opérateurs ne possédant pas de spectre (sur un corps algébrique fermé) et des opérateurs sans sous-espaces invariants. Le théorème de Guelfand Mazur n'est pas réalisé. Il n'existe pas un analogue précis d'un espace de Hilbert. De plus l'adjoint d'un opérateur continu n'existe pas toujours et la continuité d'un opérateur dans un espace de Banach n.a. n'entraine pas forcement sa bornitude. L'étude présentée dans cette thèse a été donc conforté à ces différents obstacles. Il a été donc difficile, parfois impossible, d'adapter des résultats dans la cas classique au cas non-Archimédien. Pourtant, on a pu obtenir des résultats concernant notre sujet de recherche. Ainsi, Dans la première partie de ce travail, on a attaqué la théorie spectrale pour la perturbation des opérateurs de rang fini par un opérateur diagonal borné c'est a dire les opérateurs de la forme

$$T = D + F,$$

où D est un opérateur diagonal borné et F un opérateur de rang fini dans un espace de Banach $n.a$ de type dénombrable.

Dans la deuxième partie, on a étudié la théorie spectrale pour la perturbation des opérateurs compact auto-adjoints par un opérateur diagonale borné c'est a dire les opérateurs de la forme

$$T = D + T_\mu,$$

avec D un opérateur diagonal borné et T_μ un opérateur compact auto-adjoint dans un espace de Banach $n.a$ de type dénombrable.

Notre perspective à l'avenir est :

• Étudier la théorie spectrale pour la perturbation des opérateurs normaux et unitaires par un opérateur diagonal.

• Donner une caractérisation des classes des opérateurs qui n'admettent pas d'adjoint.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Aguayo, J., Nova, , and Ojeda J., Representation Theorems for Operators on Free Banach Spaces of Countable Type. p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications. 11, 1 (2019), 21-36.

[2] Aguayo, J., Nova, M., and Shamseddine, K. Characterization of compact and self-adjoint operators on free Banach spaces of countable type over the complex Levi-Civita field. J. Math. Phys. 54, 2 (2013), 023503, 19.

[3] Amice, Y., Les nombres p-adiques. Presses Universitaires de France, 1975.

[4] Araujo, J., Perez-Garcia, C., and Vega, S. Preservation of the index of p-adic linear operators under compact perturbations. Compositio Math. 118, 3 (1999), 291-303.

[5] Banach, S., Theorie des operations lineaires, Warszawa. 1932.

[6] Beckenstein, E., and Narici, L., Riesz's lemma in non-archimedean spaces. 1971.

[7] Bosch, S., Guntzer, U., and Remmert, R., Non-Archimedean analysis, vol. 261 of Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin, 1984. A systematic approach to rigid analytic geometry.

[8] Bourbaki, N., Espaces vectoriels topologiques, Chap. 111, IV, V, Paris 1964.

[9] Christol, G., and Mebkhout, Z., Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques I, Ann. Inst. Fourier 43,5 (1993), 1545-1574.

[10] Christol, G., and Mebkhout, Z., Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques II, Ann. of Math. 146 (1997), 345-410.

[11] Cohen, I.S., On non-Archimedean normed space. Indag. math. 10, (1948), 244-9.

[12] Diagana, T., Non-archimedean Linear Operators and Applications. Hauppauge, New York, Nova Science Publishers, Inc., 2007.

[13] Diagana, T., and McNeal, G. D., Spectral analysis for rank one perturbations of diagonal operators in non-archimedean Hilbert space, Comment. Math. Univ. Carolin. 50,3 (2009), 385-400.

[14] Diagana, T., Kerby, R., Miabey, T. H., and Ramaroson, F. Spectral analysis for finite rank perturbations of diagonal operators in non-archimedean Hilbert space. p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl. 6, 3 (2014), 171-187.

[15] Diagana, T., and Ramarson, F., Non-Archimedean operator Theory. Briefs in mathematics Springer, New york, 2016.

[16] Diarra, B., An operator on some ultrametric Hilbert Spaces, J. Anal. 6 (1998), 55-74.

[17] El amrani, A., Blali, A., and Taybi, M. A., Spectral analysis for finite rank perturbation of diagonal operator in non-archimedean Banach space of countable type. Proyeccions 41, 5 (2022), 1063-1074.

[18] El amrani, A., Blali, A., and Taybi, M. A., Spectral analysis of special perturbations of diagonal operators on non-Archimedean Banach spaces. Novi Sad J. Math. September 19, 2022.

[19] El amrani, A., Blali, A., Ameziane Hassani R., and Taybi, M. A., Finite Rank Operator in Non-Archimedean Sequence Spaces (soumis)

[20] Ellis, R. L., The Fredholm alternative for non-archimedean fields, 1. London Math. Soc. 42 (1967), 701-705.

[21] Ellis, R. L., The state of a bounded linear operator on a non-archimedean normed space, J. Reine Angew. Math. 229 (1968), 155-162 (1968).

[22] Fleischer, I., Sur les espaces normes non-archimediens. Proc. Kon. Ned. Ak. v. Wetensch., Amsterdam, 57 (1954), 165-168.

[23] Gruson, L. Théorie de Fredholm p-adique. Bull. Soc. Math. France 94 (1966), 67-95.

[24] Gruson, L. Catégories d'espaces de Banach ultramétriques. Bulletin de la S. M. F., tome 94 (1966), 287-299.

[25] Ingleton, A. W., The Hahn-Banach theorem for non-archimedean valued fields. Proc. Cambridge Phil. Soc. 48 (1952), 41-45.

[26] Iwasawa, K., Lectures on p-adic L-Functions. Princeton University. Press, 1972.

[27] Kalujny V.N., Randimbindrainibe F. ≪ Problèmes des moments sur le groupe monotétique ≫. Conférence internationale sur l'algèbre en mémoire de Maltsev. (Novossibirsk 1989), tome 2, 1989, p.28 (en russe)

[28] Kiyosawa, T., On spaces of compact operators in non-Archimedean Banach spaces. Canad. Math. Bull. Vol. 32,4 (1989).

[29] Koblitz N., p-adic analysis, a short course on recent work, London Math soc. Lect. Note, 1980.

[30] Koblitz N., p-adic Numbers, p-adic Analysis and Zeta functions, second edition, Springer-Verlag, New-York, 1984.

[31] Lenskoy, D.N., Les fonctions dans les corps normés non archimédiennes J. de l'université de Saratov, Saratov,1962, (en russe).

[32] Mahler, K., p-adic numbers and their functions. 2nd- edition Cambridge university press, tome X ,1981.

[33] Monna, A.F., Over een lineaire p-adische ruimte, Proc. Ned. Akad. v. Wetensch. 52 (1943), 74-82.

[34] Monna, A.F., Lineaire functionalvergelijkingen in niet-archimedische Banachruimten, Proc. Ned. Akad. v. Wetensch. 52 (1943), 654-661.

[35] Monna, A.F., On integral equations for functions with values in a non-archimedean valued field, Nieuw Arch. Wisk. 22 (1948), 283-292.

[36] Monna, A.F., Analyse non-archimédienne. Springer-Verlag. Berlin 1970.

[37] Monna, A. F., Sur le théorème de Banach-Steinhaus, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. A 66 (1963), 121-131.

[38] Narici, L., and Beckenstein, E. A non-Archimedean inner product. In Ultrametric functional analysis, vol. 384 of Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2005), 187-202.

[39] Perez-Garcia, C., and Schikhof, W. H. Locally convex spaces over non-Archimedean valued fields, vol. 119 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[40] Perez-Garcia, C., Vega, S. Perturbation theory of p-adic Fredholm and semi-Fredholm operators. Indag. Math. (N.S.) 15,1 (2004), 115-127.

[41] Put, M. van der, Algèbres des fonctions continues p-adiques, Thèse Université d'Utrecht 1967.

[42] Put, M. van der, The ring of bounded operators on a non-archimedean normed space, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. A 71 (1968), 260-264.

[43] Robba, P., On the index of p-adic differential operators I, Annals of Math. 101 (1975), 280-316.

[44] Robba, P. and Christol, G., Équations différentielles p-adiques. Hermann, Paris, 1994.

[45] Schikhof, W. H. On p-adic Compact Operators. Report 8911. Nijmegen, Katholieke Universiteit, Department of Mathematics, 1989.

[46] Schikhof, W. H., Ochsenius, H. Linear homeomorphisms of non-Classical Hilbert spaces. Indag. Mathem., N.S., 10(4), (1999), 601-613.

[47] Sehwartz, L., Homomorphismes et applications complètement continues, C. R. Aead. Sei. Paris Ser. A-B 236 (1953), 2472-2473.

[48] Serre, J.-P. Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 12 (1962), 69-85.

[49] Sliwa, W. On Fredholm operators between non-Archimedean Fréchet spaces. Compositio Math. 139, 1 (2003), 113-118.

[50] Tiel, J. van., Espaces localement K-convexes. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. A 68, (1965), 249-289.

[51] Tiel, J. van., Une note sur les applications complètement continues, Proe. Kon. Ned. Akad. v. Wetenseh. A 68 (1965),772-776.

[52] van Rooij, A. C. M. Non-Archimedean functional analysis, vol. 51 of Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.