Université Sidi Mohamed Ben Abdallah
Faculté des Siences et Techniques - Fès
CED : Sciences et Techniques de l'Ingénieur

N° d'ordre : 01 / 2020

THÈSE

Présentée à la Faculté des Sciences et Techniques de Fès
En vue de l'obtention du titre de :

Docteur de l'Université Sidi Mohamed Ben Abdellah

Discipline : Génie Mécanique

Spécialité : Mécanique et Énergétique

Par :

Elyazid FLILIHI

MODÉLISATION NUMÉRIQUE DES TRANSFERTS THERMIQUES CONVECTIFS EN MILIEU POREUX SATURÉ NON-DARCIEN

*Soutenue le **02 Janvier 2020** devant le jury composé de :*

Pr Fouad BELMAJDOUB	*PES*	*USMBA, FST-Fès*	*Président*
Pr M'Barek BAKKAS	*PES*	*UMI, ENSAM-Meknès*	*Rapporteur*
Pr Nourddine BOUTAMMACHTE	*PH*	*UMI, ENSAM-Meknès*	*Rapporteur*
Pr Abdelmajid JAMIL	*PES*	*USMBA, EST-Fès*	*Rapporteur*
Pr Tarik EL RHAFIKI	*PH*	*USMBA, FP-Taza*	*Examinateur*
Pr Driss ACHEMLAL	*PESA*	*USMBA, FP-Taza*	*Invité*
Pr Mohammed SRITI	*PES*	*UMI, ENSAM-Meknès*	*Directeur de thèse*

Laboratoire d'Accueil : Sciences de l'Ingénieur (LSI)
Établissement : Faculté Polydisciplinaire de Taza

Dédicace

Cette thèse est dédiée :

À l'âme de mon père.

À ma mère qui a éclairé mon chemin et qui m'a encouragé et soutenu tout au long de ma vie, et de mes études,

À mes soeurs et frères.

À ma femme, Badiâ et mes chers petits enfants : Barae et Jad Allah.

À toute ma famille et à mes ami(e)s.

À tous ceux qui me sont chers.

À tous les professeurs, enseignants et instituteurs, qui ont contribué à mon éducation et à ma formation et qui m'ont permis, par leurs efforts, d'atteindre ce niveau.

Avant - propos

Le présent travail a été réalisé au sein du Laboratoire des Sciences de l'Ingénieur (LSI) de la Faculté Polydisciplinaire de Taza, sous la direction du Professeur ***M. SRITI****.*

En premier lieu, j'exprime ma profonde gratitude et mes sincères remerciements à mon directeur de thèse, Monsieur ***M. SRITI****, Professeur à l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers de Meknès, pour m'avoir donné la chance de préparer cette thèse de doctorat et pour m'avoir parfaitement guidé et m'encouragé tout au long de ce travail. Je le remercie très chaleureusement pour sa disponibilité, ses compétences scientifiques et pédagogiques, ses idées originales ainsi que ses qualités humaines.*

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à Monsieur ***F. BELMAJDOUB****, Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques de Fès, qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury, malgré ses multiples occupations, qu'il veuille trouver ici, l'expression de ma gratitude pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail.*

Je tiens à remercier sincèrement Messieurs : ***M. BAKKAS****, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers de Meknès,* ***N. BOUTAMMACHTE****, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers de Meknès et* ***A. JAMIL****, Professeur à l'Ecole Supérieure de Technologie de Fès pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être rapporteurs de mon travail et pour ses remarques qui ont permis d'améliorer la qualité de ce mémoire. Je tiens à leurs exprimer tous mes remerciements pour l'honneur qu'ils me font en participant à mon jury de thèse.*

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur ***T. EL RHAFIKI****, Professeur à la Faculté Polydisciplinaire de Taza, pour l'intérêt qu'il a porté à mes travaux en tant que examinateur et pour l'honneur qu'il me fait d'être dans mon jury de thèse.*

Je remercie également Monsieur ***D. ACHEMLAL****, Professeur à la Faculté Polydisciplinaire de Taza, pour le soutien qu'il m'a apporté tout au long du déroulement de ma thèse et pour avoir accepté d'assister au jury, en tant que membre invité.*



Je voudrai aussi témoigner ma reconnaissance à mes amis et collègues de l'équipe et membres du laboratoire des sciences de l'ingénieur, notamment ***M. EL HAROUI*** *et* ***Y. EL KHCHINE****, pour leur aide, leur soutien et leur gentillesse.*

Mes sincères remerciements vont aussi à tous mes enseignants qui m'ont donné les bases de la science, et à toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à l'accomplissement de ce modeste travail.

Enfin, je souhaite remercier ma famille pour sa patience pendant toutes mes années de recherche ainsi que pour son encouragement quotidien.

Résumé

Au cours de ces dernières années, un effort de recherche considérable a été consacré à l'étude du transfert de chaleur induit par convection naturelle au sein d'un milieu poreux saturé par un fluide. L'intérêt pour ces phénomènes de convection naturelle est dû aux nombreuses applications potentielles en ingénierie. Parmi ces applications potentielles, on peut citer l'extraction de l'énergie géothermique, du pétrole et du gaz à travers le sol, le refroidissement dans les réacteurs nucléaires, l'isolation thermique des bâtiments, le problème de séchage des produits agro-alimentaires, etc,...

Dans la présente thèse, nous avons effectué une étude théorique et numérique du phénomène de la convection naturelle ou mixte dans un milieu poreux non-Darcien saturé de fluide newtonien incompressible , en régime laminaire autour d'une plaque plane verticale, ou inclinée d'un angle par rapport à la verticale, soumise à une température non uniforme et à une vitesse d'aspiration/injection, en absence ou en présence d'une source/puits interne de chaleur, de la radiation thermique, et de la dissipation visqueuse. L'extension de la loi de Darcy au modèle de Brinkman-Forchheimer a été adoptée pour décrire le mouvement du fluide au sein de la matrice poreuse. En premier lieu, le problème a été modélisé en adoptant une méthode de similarité qui se ramène à un système d'équations différentielles non-linéaires de troisième ordre. Ce dernièr a été résolu, numériquement, en utilisant la méthode de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 5 couplée avec une technique itérative de Tir. Les effets des paramètres physiques contrôlant les phénomènes étudiées sur les solutions de similarité sont étudiés et analysés en détail.

En second lieu, l'approche CFD a été utilisée, pour analyser l'effet du nombre de Rayleigh sur la distribution du champ thermique et le taux du transfert de chaleur à la surface de la plaque plane chauffée et posé verticalement dans un milieu poreux non-Darcien saturé.

Mots clés :

Transfert thermique, milieu poreux non-Darcien, plaque inclinée, méthode de similarité, Runge-Kutta-Fehlberg, approche CFD.

Abstract

In recent years, considerable research efforts have been devoted to the study of heat transfer induced by buoyancy forces in a saturated porous medium by a Newtonian fluid. The interest for these natural convection phenomena has been motivated by such diverse engineering problem as of geothermal energy extraction, oil and gas extraction through the ground, cooling in nuclear reactors, buildings thermal insulation, the problem of drying agro-food products. , etc., ...

In the present thesis, we carried out a theoretical and numerical study of the phenomenon of natural or mixed convection in a non-Darcian porous medium saturated with incompressible Newtonian fluid, in a laminar regime around a vertical plate, or inclined at an angle with respect to the vertical, subjected to a non-uniform temperature and a suction/injection velocity, with or without internal heat source/sink, thermal radiation, and viscous dissipation. The Brinkman-Forchheimer extension of Darcy's law has been adopted to describe the movement of fluid within the porous matrix. Firstly, the problem has been modeled by adopting a similarity method, which reduces to a system of third-order nonlinear differential equations. The latter has been solved, numerically, using the fifth order Runge-Kutta-Fehlberg method coupled with the shooting iteration technique. The effects of physical parameters controlling the problem on the similarity solutions are studied and analyzed in detail.

Secondly, the CFD approach was used to analyze the effect of Rayleigh number on the thermal field distribution and the heat transfer rate at the surface of a heated flat plate and placed vertically in a saturated non-Darcian porous medium.

Keywords

Thermal convection, non-Darcian porous medium, inclined plate, similarity method, Runge-Kutta-Fehlberg, CFD approach.

Liste des publications

1. ***E. Flilihi, M. Sriti, D. Achemlal and M. El Haroui***, Variable heat source and wall radiation effects on boundary layer convection from an inclined plate in non-Darcian porous medium, *Frontiers in Heat and Mass Transfer (FHMT)*, Vol. 9, 23(2017).

2. ***M. El Haroui, M. Sriti, D. Achemlal and E. Flilihi***, Prediction of thermosolutal convection in a porous medium with Soret-Dufour and chemical reaction effects, *Computational Thermal Sciences*, Vol. 9, 5(2017), 383-393.

3. ***D. Achemlal, M. Sriti, M. El Haroui and E. Flilihi***, Solute transport and heat transfer in single-phase flow in porous medium with generative/destructive chemical reaction and variable viscosity impacts, *Frontiers in Heat and Mass Transfer (FHMT)*, Vol. 9, 34(2017).

4. ***E. Flilihi, M. Sriti, D. Achemlal and M. El Haroui***, Semi-analytical prediction of mixed convection in porous medium using Darcy-Brinkman model, *Journal of Engineering and Applied Sciences*, Vol 14, 4(2019), 1122-1129.

5. ***E. Flilihi, M. Sriti and D. Achemlal***, Numerical solution on non-uniform mesh of Darcy-Brinkman-Forchheimer model for transient convective heat transfer over flat plate in saturated porous medium, *Frontiers in Heat and Mass Transfer (FHMT)*, Vol. 12, 12(2019).

6. ***E. Flilihi, M. Sriti and D. Achemlal***, Viscous dissipation and heat source/Sink effects on convection heat transfer in a saturated porous medium, Accepted for Publication in the indexed book of Springer–AISC Series "Advances in Intelligent Systems and Computing", May 2019.

Table des matières

Liste des symboles utilisés 1

Liste des tableaux 2

Liste des figures 2

Introduction générale 6

CHAPITRE I Généralités et revue bibliographique 9

I Introduction 9

II Modes fondamentaux du transfert thermique 9

II.1 Conduction 9

II.2 Rayonnement 10

II.3 Convection 11

III Notion sur les milieux poreux 12

IV Paramètres caractérisant le milieu poreux 13

IV.1 Porosité 13

IV.2 Perméabilité 14

IV.3 Volume élémentaire représentatif (V.E.R.) 15

V Echelles de modélisation en milieux poreux 16

V.1 Echelle microscopique 16

V.2 Echelle macroscopique 16

V.3 Changement d'échelle 16

VI Modèles d'écoulement dans les milieux poreux 17

VI.1 Modèle de Darcy 17

VI.2 Modèle de Brinkman 18

VI.3 Modèle de Forchheimer 18
VI.4 Modèle de Darcy avec terme convectif 19
VI.5 Modèle modifié de Darcy-Brinkman-Forchheimer (DBF) 19
VI.6 Modèle général 19
VII Transfert thermique dans un milieu poreux 20
VIII Revue bibliographique 21
VIII.1 Introduction 21
VIII.2 Travaux utilisant le modèle de Darcy 21
VIII.3 Travaux utilisant le modèle non-Darcien 23
IX Situation du problème 26
X Conclusion 27

CHAPITRE II Formulation mathématique et méthode de solution 28

I Introduction 28
II Problème physique 28
II.1 Domaines d'applications 28
II.2 Description du Problème posé 29
II.3 Hypothèses simplificatrices 29
II.4 Approximation de Boussinesq-Oberbeck 30
III Equations de conservation 31
III.1 Equation de continuité 31
III.2 Equation de conservation de la quantité de mouvement en milieu poreux 31
III.3 Equation d'energie 31
IV Système d'équations gouvenant l'écoulement et le transfert de chaleur en milieu poreux non-Darcien 32
IV.1 Analyse dimensionnelle de la couche limite 32
IV.2 Système des équations retenu 34
V Méthodes de résolution 35
V.1 La Méthode de Runge-Kutta-Fehlberg 35
V.2 Technique de Tir 37
V.3 Organigramme de calcul 37

VI Conclusion 39

CHAPITRE III Approche semi-analytique du modèle de Darcy-Brinkman 40

I Introduction 40

II Transfert de chaleur par convection le long d'une plaque verticale 40

II.1 Position du problème 40

II.2 Système d'équations gouvernant le phénomène étudié 41

II.3 Approche de similarité et modèle adimensionnel 42

II.4 Nombres adimensionnels 43

II.5 Procédure de résolution numérique. 45

II.6 Algorithme de résolution 46

II.7 Résultats numériques et analyse. 46

III Transfert de chaleur par convection le long d'une plaque inclinée 57

III.1 Position du problème 57

III.2 Hypothèses de calcul 57

III.3 Système des équations retenu 58

III.4 Formulation adimensionnelle 59

III.5 Coefficient de frottement et nombre de Nusselt 60

III.6 Technique de résolution. 61

III.7 Résultats numériques et analyse. 61

IV Conclusion 71

CHAPITRE IV Approche semi-analytique du modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer 74

I Introduction 74

II Problème physique 75

II.1 Position du problème 75

II.2 Hypothèses de calcul 75

II.3 Système des équations retenu 76

II.4 Formulation adimensionnelle 77

II.5 Coefficient de frottement et nombre de Nusselt local 78

III Méthode et technique de résulution. 78

IV Résultats numériques et analyse. 79
IV.1 Profils dynamiques 79
IV.2 Champs thermiques 80
IV.3 Profils du nombre de Nusselt local et du coefficient de frottement local 84
V Conclusion 90

CHAPITRE V Approche CFD du modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer 92
I Introduction 92
II Modélisation mathématique du problème 93
II.1 Description du problème considéré 93
II.2 Hypothèses de calcul 94
II.3 Formulation mathématique 94
II.4 Paramètres sans dimension 95
III Méthode de solution et schémas numériques. 96
III.1 Présentation du code de calcul CFD 96
III.2 Maillage de calcul 96
III.3 Conditions aux limites 97
III.4 Critères de convergence 98
III.5 Résultats numériques et analyse. 98
IV Comparaison de calcul CFD et méthode de similarité. 101
V Conclusion. 104

CONCLUSION GENERALE 105

Bibliographie 108

Liste des symboles utilisés

A	Paramètre de température de surface	T	Température du fluide (K)
a	Diffusivité thermique équivalente $(m^2\,s^{-1})$	u	Vitesse axiale $(m\,s^{-1})$
B	Paramètre de la vitesse V_w	U_0	Vitesse de référence $(m\,s^{-1})$
Cf	Coefficient de frottement	v	Vitesse orthogonale $(m\,s^{-1})$
C_p	Chaleur spécifique du fluide $(J\,Kg^{-1}\,K^{-1})$	x	Axe des abscises (m)
Da	nombre de Darcy	y	Axe des ordonnées (m)
Ec	Nombre d'Eckert	β	Coefficient d'expansion thermique (K^{-1})
f	Fonction du courant adimensionnelle	ε	Porosité du milieu poreux
Fr	Nombre de Forchheimer	η	Variable de similarité
f_w	Paramètre d'aspiration/injection	θ	Température adimensionnelle
Gr	Nombre de Grashof	λ	Exposant de température de surface
g	Acceleration de la gravité $(m\,s^{-2})$	μ	Viscosité dynamique $(Kg\,m^{-1}\,s^{-1})$
g_s	Paramètre de convection mixte	ν	Viscosité cinématique $(m^2\,s^{-1})$
H	Longueur de la plaque (m)	ρ	Masse volumique du fluide $(Kg\,m^{-3})$
h	Coefficient du transfert thermique	τ	Contrainte de cisaillement (Pa)
k	Perméabilité du milieu poreux (m^2)	φ	Source de chaleur interne$(W\,m^{-3})$
K	Paramètre de Perméabilité	ϕ	Angle d'inclinaison par rapport à la verticale
k^*	Coefficient d'absorption de Rosseland	ψ	Fonction du courant
Nu	Nombre de Nusselt	σ^*	constante de Stefan-Boltzmann,
Pr	Nombre de Prandtl	w	Condition à la surface
Q	Terme source/puits de chaleur	∞	Condition à l'infini
R	Paramètre de radiation thermique	$'$	Dérivée par rapport à η
Ra	Nombre de Rayleigh		
Re	Nombre Reynolds		

Liste des tableaux

I.1 Porosité de quelques matériaux. 14

I.2 Perméabilité de quelques matériaux 15

II.1 Valeurs des constantes de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 5 36

III.1 Comparaison du gradient de température à la surface avec les résultats précédemment publiés pour une plaque imperméable. 47

III.2 Comparaison du gradient de température à la surface avec les résultats précédemment publiés pour une plaque imperméable. 47

III.3 Comparaison du coefficient de frottement à la surface avec les résultats précédemment publiés pour une plaque imperméable. 48

III.4 $Nu/Re^{1/2}$ pour différentes valeurs de Pr à $Gr = 2$, $R = 1$, $K = 1$, $f_w = 1$ et $\phi = 30°$ 62

V.1 Conditions aux limites utilisées dans les simulations CFD. 97

V.2 Limites résiduelles 98

Liste des figures

I.1 Transfert thermique par conduction. 10

I.2 Transfert thermique par rayonnement entre deux surfaces 10

I.3 Mode du Transfert thermique par convection naturelle. 11

I.4 Transfert thermique par convection forcée. 12

I.5 Milieux poreux naturels [7]. 13

I.6 Représentation schématique du volume élémentaire représentatif. 16

II.1 Modèles physiques et système de coordonnées. 29

III.1 Modèle physique et système de coordonnées. 41
III.2 Profil de vitesse adimensionnelle pour $\lambda = 0$. 48
III.3 Profil de température adimensionnelle pour $\lambda = 0$. 49
III.4 Effet de Pr sur la distribution de température adimensionnelle pour $\lambda = 0$ et $f_w = 0$ 49
III.5 Influence du paramètre g_s sur les profils de vitesse adimensionnelle pour $\lambda = 0$ et $f_w = 0$ 50
III.6 Influence du paramètre g_s sur la distribution de température adimensionnelle pour $\lambda = 0$ et $f_w = 0$ 51
III.7 Profils de la la température adimensionnelle pour différentes valeurs de λ avec $f_w = 0$ 51
III.8 Influence du nombre Da sur les profils de température adimensionnelle pour $\lambda = 0$ et $f_w = 0$ 52
III.9 Influence du nombre Re sur les profils de température adimensionnelle pour $\lambda = 0$ et $f_w = 0$ 53
III.10 Profils de Nu en fonction de Da pour différentes valeurs de λ 53
III.11 Profils de Nu en fonction de Re pour différentes valeurs de λ 54
III.12 Profils de Nu en fonction du paramètre g_s pour différentes valeurs de f_w . . 54
III.13 Profils de C_f en fonction de Re pour différentes valeurs de λ 55
III.14 Profils de C_f t en fonction du paramètre g_s pour différentes valeurs de f_w . 55
III.15 Profils de C_f en fonction du nombre Re pour différentes valeurs de λ . . . 56
III.16 Profils de C_f en fonction du paramètre g_s pour différentes valeurs de f_w . . 57
III.17 Modèle physique et système de coordonnées. 58
III.18 Lignes isothermes en fonction de x et y pour $\phi = 0°$ 63
III.19 Lignes isothermes en fonction de x et y pour $\phi = 45°$ 63
III.20 Lignes isothermes en fonction de x et y pour $\phi = 90°$ 64
III.21 Lignes isothermes en fonction de x et y pour $R = 0.5$ 64
III.22 Lignes isothermes en fonction de x et y pour $R = 10^6$ 65

III.23Lignes isothermes en fonction de x et y pour $Gr = 0.2$ 65
III.24Lignes isothermes en fonction de x et y pour $Gr = 10$ 66
III.25Lignes isothermes en fonction de x et y pour $K = 0.1$ 66
III.26Lignes isothermes en fonction de x et y pour $K = 4$ 67
III.27Profils du nombre de Nusselt en fonction de ϕ pour différentes valeurs de R 68
III.28Profils de la contrainte de cisaillement en fonction de ϕ pour différentes valeurs de R 68
III.29Profils du nombre de Nusselt en fonction de Gr pour différentes valeurs de f_w 69
III.30Profils de la contrainte de cisaillement en fonction de Gr pour différentes valeurs de f_w 69
III.31Profils du nombre de Nusselt en fonction de K pour différentes valeurs de Pr 70
III.32Profils de la contrainte de cisaillement en fonction de K pour différentes valeurs de Pr 70
III.33Profils du nombre de Nusselt en fonction de ϕ avec et sans IHS 71
III.34Profils de la contrainte de cisaillement en fonction de ϕ avec et sans IHS . 71

IV.1 Modèle physique et système de coordonnées. 75
IV.2 Profils adimensionnels de vitesse pour différentes valeurs de Fr 80
IV.3 Profils adimensionnels de vitesse pour différentes valeurs de Ec 81
IV.4 Lignes isothermes en fonction de x et y pour $Fr = 0$ 81
IV.5 Lignes isothermes en fonction de x et y pour $Fr = 1.5$ 82
IV.6 Lignes isothermes en fonction de x et y pour $Ec = 0$ 82
IV.7 Lignes isothermes en fonction de x et y pour $Ec = 2$ 83
IV.8 Lignes isothermes en fonction de x et y pour $Q = -0.2$ 84
IV.9 Lignes isothermes en fonction de x et y pour $Q = 0$ 84
IV.10Lignes isothermes en fonction de x et y pour $Q = 0.2$ 85
IV.11Lignes isothermes en fonction de x et y pour $f_w = -1$ 85
IV.12Lignes isothermes en fonction de x et y pour $f_w = 0$ 86
IV.13Lignes isothermes en fonction de x et y pour $f_w = 1$ 86
IV.14Profils du nombre de Nusselt en fonction de ϕ pour $Fr = 0$ et $Fr = 0.5$ . . 87

IV.15Profils du coefficient du frottement en fonction de ϕ pour $Fr = 0$ et $Fr = 0.5$ 87
IV.16Effet de Fr sur le coefficient du frottement et sur le nombre de Nusselt local. 88
IV.17Effet de Ec sur le coefficient du frottement et sur le nombre de Nusselt local. 88
IV.18Effet de Q sur le coefficient du frottement local et sur le nombre de Nusselt local pour une plaque imperméable. 89
IV.19Effet de K sur le coefficient du frottement local et sur le nombre de Nusselt local pour une plaque imperméable. 90

V.1 Modèle physique et système de coordonnées. 93
V.2 Maillage utilisé dans les simulations CFD. 97
V.3 Profils de température pour differentes positions le long de la plaque. . . . 99
V.4 Contours de température pour $Ra = 5,58.10^2$. 99
V.5 Contours de température pour $Ra = 4,46.10^3$. 99
V.6 Contours de température pour $Ra = 1,20.10^5$. 100
V.7 Contours de température pour $Ra = 4,46.10^6$. 100
V.8 profil du nombre de Nusselt local en fonction de y. 101
V.9 Profils de température en fonction de x pour $Ra = 1.53\ 10^3$ à $y = H/4$ . . 102
V.10 Profils de température en fonction de x pour $Ra = 1.53\ 10^3$ à $y = H/2$ . . 102
V.11 Profils de température en fonction de x pour $Ra = 1.53\ 10^3$ à $y = 3H/4$ . . 102
V.12 Profils de température en fonction de x pour $Ra = 1.22\ 10^4$ à $y = H/4$ . . 103
V.13 Profils de température en fonction de x pour $Ra = 1.22\ 10^4$ à $y = H/2$ . . 103
V.14 Profils de température en fonction de x pour $Ra = 1.22\ 10^4$ à $y = 3H/4$ . . 103

Introduction générale

L'étude du phénomène de la convection naturelle, d'origine thermique, en milieu poreux a suscité et suscite encore l'intérêt de nombreux scientifiques et industriels par ses applications potentielles en ingénierie dans plusieurs secteurs industriels. On note également que le flux de convection naturelle autour d'une surface verticale immergée dans un milieu poreux se manifeste aussi dans plusieurs applications d'ingénierie. Parmi ces applications, on peut citer l'extraction de l'énergie géothermique, du pétrole et du gaz à travers le sol, le refroidissement dans les réacteurs nucléaires, l'isolation thermique des bâtiments, le problème de séchage des produits industriels, le séchage des produits agro-alimentaires, etc,...

L'objet de la présente thèse est la contribution à la modélisation des transferts thermiques convectifs en régime laminaire autour d'une plaque plane chauffée et insérée verticalement, ou inclinée d'un angle ϕ par rapport à la verticale, dans un milieu poreux non Darcien saturé par un fluide newtonien de propriétés thermodynamiques constantes à l'exception de la densité qui varie avec la température selon l'approximation de Boussinesq, avec et sans présence d'une source/puits interne de chaleur, de la radiation thermique, de la dissipation visqueuse. Le modèle adopté pour décrire le mouvement du fluide au sein de la matrice poreuse est celui de Darcy étendu par Brinkman et Forchheimer (modèle de Darcy-Brinkman, et modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer), afin de tenir compte des effets des contraintes visqueuses et des forces d'inerties.

La thèse comporte une introduction générale, cinq chapitres, une conclusion générale et perspectives et deux annexes.

Dans le premier chapitre, nous allons présenter les modes du transfert de chaleur, des généralités sur les milieux poreux, avec une revue bibliographique des travaux antérieurs réalisés sur la convection naturelle ou mixte dans différentes configurations géométriques dans des milieux poreux Darcien ou non-Darcien saturés par des fluides newtoniens, dans le but de situer notre travail par rapport à ceux publiés dans la littérature.

Le second chapitre est consacré à la formulation mathématique des équations de base qui régissent le mouvement du fluide, le transfert de chaleur dans le milieu poreux non-Darcien saturé en tenant compte de certaines hypothèses simplificatrices, avec une description générale du problème physique étudié.

Dans le chapitre 3, nous étudierons, dans la première partie, le phénomène de la convection naturelle/mixte autour d'une plaque poreuse maintenue à une température non-uniforme immergée verticalement dans un milieu poreux non Darcien saturé de

fluide newtonien en présence d'une vitesse d'aspiration/injection à sa surface. Le modèle de Darcy-Brinkman est utilisé pour modéliser l'écoulement dans le milieu poreux. La deuxième partie de ce chapitre portera sur le phénomène de la convection naturelle le long d'une plaque perméable isotherme, maintenue à une température uniforme, inclinée d'un angle ϕ par rapport à la verticale placée dans un milieu poreux non-Darcien saturé, en présence d'une source de chaleur variable, et de radiation thermique. Pour la résolution, nous avons adopté une approche semi-analytique, dite "méthode de similarité" qui consiste à transformer le système d'équations aux dérivées partielles, régissant le problème étudié, en un système d'équations différentielles ordinaires adimensionnelles, non-linéaires, de troisième ordre, La résolution numérique est basée sur la méthode de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 5, couplée avec une technique itérative de Tir. A la fin de ce chapitre, la validation de notre code de calcul avec les travaux déjà publiés, sur une large gamme de variation des paramètres de contrôles est effectuée. et les effets des principaux paramètres physiques et nombres sans dimension contrôlant le problème étudié sont discutés et analysées de point de vue mathématique et physique.

Le quatrième chapitre sera consacré à la modélisation numérique de la convection naturelle autour d'une plaque inclinée d'un angle ϕ par rapport à la verticale, posée dans un milieu poreux non-Darcien saturé, en présence d'une source/puits interne de chaleur, et de dissipation visqueuse, en utilisant la méthode de similarité. Dans ce chapitre, nous avons adopté le modèle général de Darcy-Brinkman-Forchheimer pour décrire l'écoulement dans la matrice poreuse. La résolution numérique utilise la méthode de Runge-Kutta-Fehlberg couplée avec la technique de Tir. De même, les résultats obtenus sont discutés et analysés de point de vue mathématique et physique.

Le dernier chapitre sera réservé à la modélisation numérique de la convection naturelle autour d'une plaque imperméable, isotherme, incorporée dans un milieu poreux non-Darcien saturé, en présence des effets visqueux et inertiels, en utilisant l'approche CFD. Le modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer est adopté pour décrire le mouvement du fluide dans la zone poreuse. Ici, dans la première partie, nous avons analysé l'effet du nombre de Rayleigh sur la distribution du champ thermique et le profil du taux de transfert de chaleur à la surface de la plaque. Et dans la deuxième partie, nous avons confronté les résultats obtenus par le calcul CFD avec ceux trouvés par la méthode de similarité.

En fin nous terminons ce travail par une conclusion générale qui résume les principaux résultats obtenus. Quelques recommandations pour les études futures sont finalement émises.

Chapitre I

Généralités et revue bibliographique

I Introduction

Le transfert de chaleur est une science qui étudie la façon de propagation thermique d'une région à l'autre, et cela quel que soit le milieu, sous l'influence d'une différence de température, elle a subit une étude intensive pour satisfaire les exigences de plusieurs domaines d'ingénieries.

Dernièrement, un effort de recherche considérable a été consacré à l'étude du transfert thermique par convection au sein d'un milieu poreux saturé par un fluide newtonien. Elle a été un sujet de recherche attractif pour plusieurs auteurs et demeure d'actualité. L'intérêt pour ces phénomènes du transfert thermique par convection est dû à ses diverses applications potentielles en ingénierie, telles que l'extraction de l'énergie géothermique, la récupération du pétrole, l'isolation thermique, les échangeurs de chaleur et le stockage des produits d'agriculture, etc,...

Généralement, le transfert de chaleur a lieu sous trois formes : Conduction, rayonnement et convection.

II Modes fondamentaux du transfert thermique

On peut définir le transfert thermique entre deux corps comme étant le transfert d'énergie qui résulte d'une différence de température entre les deux corps. On distingue habituellement trois modes de transmission : par conduction, par convection et par rayonnement. Le premier phénomène, la conduction, a lieu dans les solides [1]. La convection se rencontre spécialement dans les fluides, elle traduit le transfert de chaleur d'un point à un autre à l'intérieur d'un fluide (gaz ou liquide) par déplacements des particules de ce fluide [2].

II.1 Conduction

La conduction est définie comme étant le mode de transmission de la chaleur (ou l'échange d'énergie interne) provoquée par la différence de température entre deux régions

d'un milieu solide, liquide ou gazeux, ou encore entre deux milieux en contact physique ; il n'y a pas de déplacement appréciable des molécules.

Comme le montre la figure I.1, la conduction est le seul mécanisme intervenant dans le transfert de chaleur dans un solide homogène, opaque et compact. Dans les fluides, elle joue aussi un rôle important, mais elle est presque toujours combinée à la convection et parfois au rayonnement.

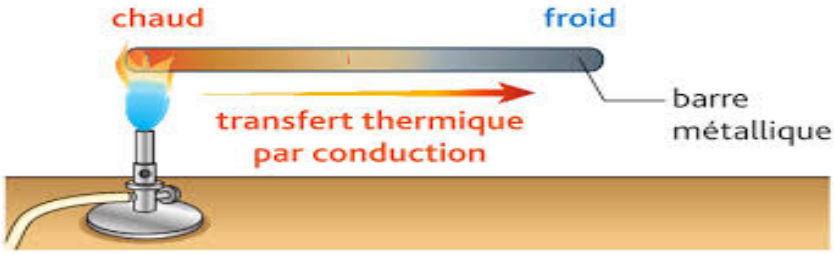


FIGURE I.1 – Transfert thermique par conduction.

II.2 Rayonnement

Le rayonnement thermique est le mode de transmission par lequel la chaleur passe d'un corps à haute température à un autre plus froid ; les deux corps ne se touchent pas, mais ils sont séparés par un milieu transparent tel que l'air, ou le vide, figure I.2. Il s'agit d'un rayonnement électromagnétique, mais limité aux longueurs d'onde du "rayonnement thermique", dont l'absorption par certains corps à la propriété de transformer (en ou en partie) "l'énergie radiante" en chaleur, ou plus exactement, en énergie calorifique [3].

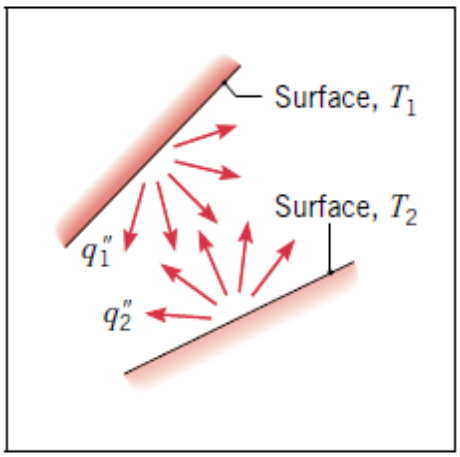


FIGURE I.2 – Transfert thermique par rayonnement entre deux surfaces .

Le rayonnement thermique est émis continuellement par tous les corps dans toutes les directions et à la vitesse de la lumière (dans le vide).

Le rayonnement thermique et la lumière peuvent être considérés comme des cas particuliers du rayonnement électromagnétique ; ils sont caractérisés par leurs longueurs d'onde. L'exemple du rayonnement thermique le plus simple est celui du soleil.

II.3 Convection

La convection est un mode du transfert de chaleur dû à une différence de température et qui induit un déplacement de matière dans un milieu fluide (liquides ou gaz). Dans ce mode du transfert, on distingue trois mécanismes : la convection naturelle ou libre, la convection forcée et la convection mixte (convection naturelle + convection forcée).

II.3.1 Convection naturelle

Il y a convection naturelle lorsque le mouvement du fluide est provoqué par des gradients de densité dû à la distribution non uniforme de la température, figure I.3 . Les zones chaudes de poids spécifique plus faible, sont soumises à des forces dirigées vers le haut suivant un mécanisme similaire à celui de la poussée d'Archimède. Dans les zones où la température est élevée, le fluide prend donc un mouvement ascendant. Le phénomène inverse de courants descendants se produit pour les parties du fluide dont la température est inférieure à celle du fluide chaud. Les courants de convection naturelle sont alors dus à des différences de poids spécifique, et par conséquent le phénomène se produit en raison de l'existence du champ de pesanteur [4].

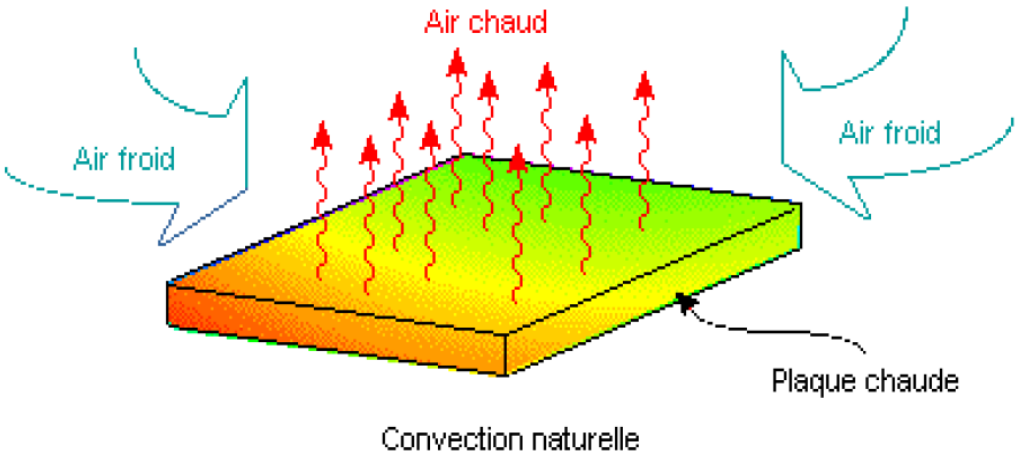


FIGURE I.3 – Mode du Transfert thermique par convection naturelle.

II.3.2 Convection forcée

La convection forcée se distingue de la convection naturelle par le fait que le mouvement du fluide s'effectue grâce à des effets externes (pompe, ventilateur, agitateur, etc) où l'effet de la poussée d'Archimède est négligeable devant les forces génératrices du mouvement du fluide. En réalité, dans la majorité des applications industrielles, la convection forcée s'accompagne souvent de la convection naturelle.

II.3.3 Convection mixte

Il existe, un grand nombre de situations où les mécanismes de la convection naturelle et la convection forcée coexistent dans des ordres plus ou moins comparables, il s'agit

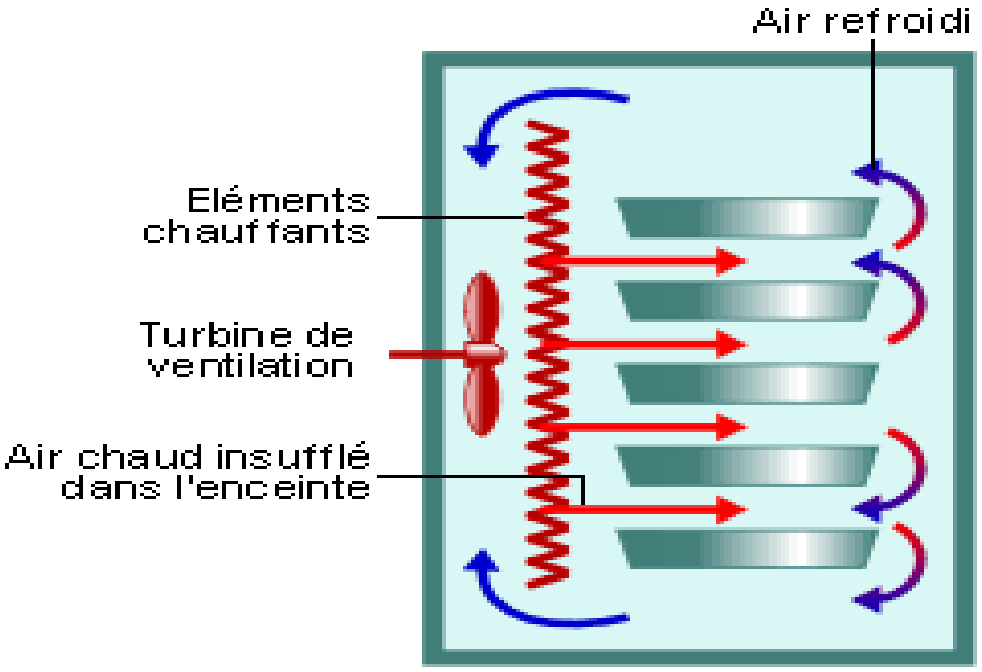


FIGURE I.4 – Transfert thermique par convection forcée.

donc d'un mécanisme de la convection mixte. Parmi les exemples les plus répondus, nous citons les écoulements dans les canalisations (chauffage central, radiateurs, climatisation), les écoulements atmosphériques, les courants marins, etc.

III Notion sur les milieux poreux

Un milieu poreux est généralement défini comme un solide de forme compliquée délimitant et englobant des vides appelés pores. Ces vides peuvent communiquer entre eux et contenir une ou plusieurs phases fluides pouvant s'écouler et, éventuellement, échanger entre elles et/ou avec le solide de la matière et/ou de l'énergie [6]. Dans notre étude, nous nous restreindrons aux cas d'une matrice solide non déformable, totalement remplie (saturée) par une seule phase fluide. De plus, nous admettons l'hypothèse qu'il n'y a pas d'échange de matière entre la phase fluide et la matrice solide. Il existe de nombreux exemples de milieux poreux naturels (figure I.5) comme le sable (a), les sols (b - pierre), les matériaux de construction (c - chaux), les aliments (d - pain sec), le papier ou le bois (e), les tissus (f - poumon humain). Dans le secteur industriel, certains milieux poreux moins compacts sont conçus ayant des propriétés physiques spécifiques.

On rencontre de nonbreux exemples de milieux poreux dans la vie courante, dans de nombreuses applications industrielles telles que le génie pétrolier, le génie chimique, l'hydrogéologie, la géothermie, le génie civil et le génie médical, etc,...

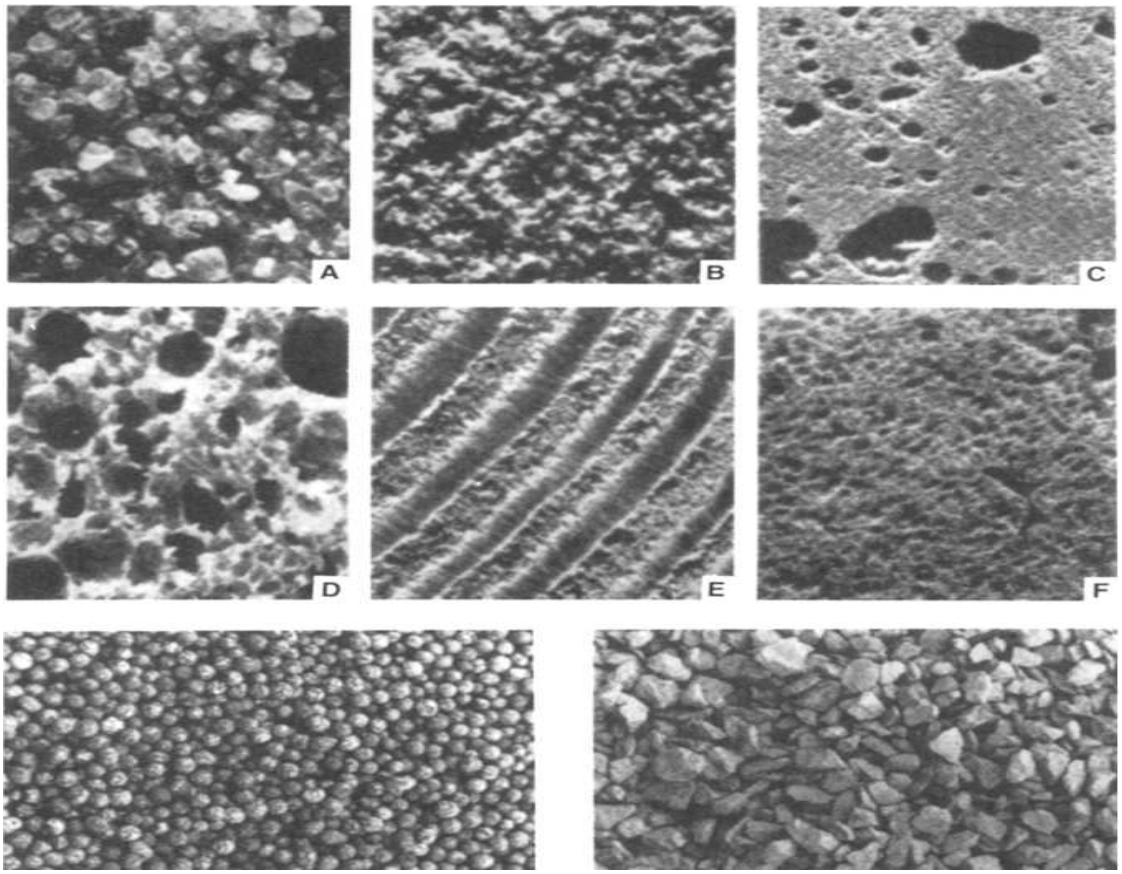


FIGURE I.5 – Milieux poreux naturels [7].

IV Paramètres caractérisant le milieu poreux

IV.1 Porosité

La plupart des roches et des sols contient un pourcentage de vide qui peut être occupé par de l'eau ou d'autres fluides. C'est ce que nous appelons leur porosité. Cette grandeur est notée, généralement , et définie comme étant le rapport du volume occupé par les espaces vides (pores) V_p au volume total du milieu poreux V_T.

$$\varepsilon = \frac{V_P}{V_T} \tag{I.1}$$

ε varie entre 0 et 1. Puisqu'il s'agit d'un rapport de mêmes propriétés, la porosité n'a pas d'unité et elle est souvent exprimée en pourcentage. Un autre paramètre caractérisant la proportion de pores dans un milieu poreux est l'indice de vides e, qui est défini par le rapport du volume de vides V_v sur celui des solides V_s

$$e = \frac{V_v}{V_s} \tag{I.2}$$

Cette grandeur est plus utilisée en géotechnique, car il permet d'utiliser un volume de référence (celui des solides) qui reste constant, contrairement au volume totale qui peut varier considérablement dans des matériaux compressibles comme les silts et les argiles. La relation entre la porosité et l'indice de vides est exprimée par :

TABLE I.1 – Porosité de quelques matériaux.

Matériaux	Porosité
Matériau mousseux	0.98
Fibre de verre	0.88 - 0.93
Fil à tisser	0.68 - 0.76
Grains de silice	0.65
Poudre d'ardoise noire	0.57 - 0.66
Cuir	0.56 - 0.59

$$\varepsilon = \frac{e}{e+1} \tag{I.3}$$

La porosité est un concept indépendant de la forme et des connexions entre les pores, elle dépend fortement de l'arrangement et de la taille des grains. Des mesures expérimentales réalisées par Kaviany [8] résument dans le tableau (I.1) quelques valeurs de la porosité pour différents matériaux.

IV.2 Perméabilité

La perméabilité est la propriété d'un corps poreux de se laisser traverser par les fluides. Cette constante caractéristique d'un milieu poreux est liée à la forme des grains et a la porosité. Cette grandeur est déterminée généralement par des mesures expérimentales, à partir de la loi de Darcy régissant le mouvement du fluide dans le milieu poreux. 1l y'a des relations qui donne la perméabilité K en fonction de la porosité ε et d'une dimension caractéristique de la matrice solide à l'échelle du pore. Plusieurs modèles empiriques ont été proposés. On rappelle notamment :

La relation de Kozeny-Carman [9], qui donne une estimation satisfaisante de K dans le cas d'un empilement de grains de formes à peu près identiques et dont la distribution des tailles des grains n'est pas trop éloignée d'une taille moyenne D :

$$K = \frac{\varepsilon^3 D^2}{36 C_0 (1-\varepsilon)^2} \tag{I.4}$$

C_0 est un coefficient de forme dépend de la forme des grains, il est compris entre 3.6 et 5.

Ergun [10], établit une expression semblable à l'équation de Kozney-Carmen en considérant l'écoulement unidirectionnel d'un fluide incompressible au sein d'une colonne poreuse constituée de particules sphériques, de diamètres d, et soumise à un gradient de pression :

$$K = \frac{d^2 \varepsilon^3}{150 (1-\varepsilon)^2} \tag{I.5}$$

D'autres équations qui calculent la perméabilité, citons par exemple celle tirée du modèle de Kozeny-Carman [9] où le milieu poreux est assimilé à un ensemble de tubes dont la section est à priori considérée comme constante. Le diamètre de ces tubes est le diamètre des pores. Cette équation s'écrit :

$$K = \frac{d^2\varepsilon^3}{180(1-\varepsilon)^2} \tag{I.6}$$

Le tableau (I.2) ci-dessous, présente la perméabilité de quelques matériaux poreux définis par *Nield et Bejan* [11].

TABLE I.2 – Perméabilité de quelques matériaux

Matériaux	Perméabilité K (en m^2)
Ardoise (en poudre)	$4.9.10^{-14} - 1.2.10^{-13}$
Brique	$4.8.10^{-15} - 2.2.10^{-13}$
Béton bitumineux	$1.0.10^{-13} - 2.3.10^{-11}$
Cuivre (en poudre)	$3.3.10^{-10} - 1.5.10^{-9}$
Feutre	$8.3.10^{-10} - 1.2.10^{-9}$
Cuir	$9.5.10^{-14} - 1.2.10^{-13}$
Calcaire (dolomite)	$2.0.10^{-15} - 4.5.10^{-14}$
Sable	$2.0.10^{-11} - 1.8.10^{-10}$
Silice (en poudre)	$1.3.10^{-14} - 5.1.10^{-14}$
Sol	$2.9.10^{-13} - 1.4.10^{-11}$

IV.3 Volume élémentaire représentatif (V.E.R.)

La notion du volume élémentaire représentatif (V.E.R) consiste à associer à un point mathématique les propriétés d'un volume suffisamment représentatif pour définir ou mesurer les propriétés moyennes du milieu [12].

Dans la présentation continue d'un milieu poreux, les variables physiques décrivant le milieu, discontinues à l'échelle microscopique, sont remplacées par des fonctions continues à l'échelle macroscopique. La valeur de chaque variable physique affectée à un point mathématique dans l'espace continu est obtenue en moyennant la propriété physique sur un volume élémentaire représentatif (VER).

La figure 1.1 illustre la taille intermédiaire du volume élémentaire représentatif (V.E.R) entre la taille du milieu poreux à l'échelle macroscopique L et à l'échelle des pores d [13].

Le VER permet la définition de la quantité macroscopique (pression, porosité,...) comme la moyenne sur ce VER de la même quantité prise à l'échelle microscopique. La taille du VER s'avère un choix important, vu que le VER doit être suffisamment grand pour que les hétérogénéités présentes à l'échelle microscopique ne soient plus apparentes à l'échelle macroscopique, Bear [14]

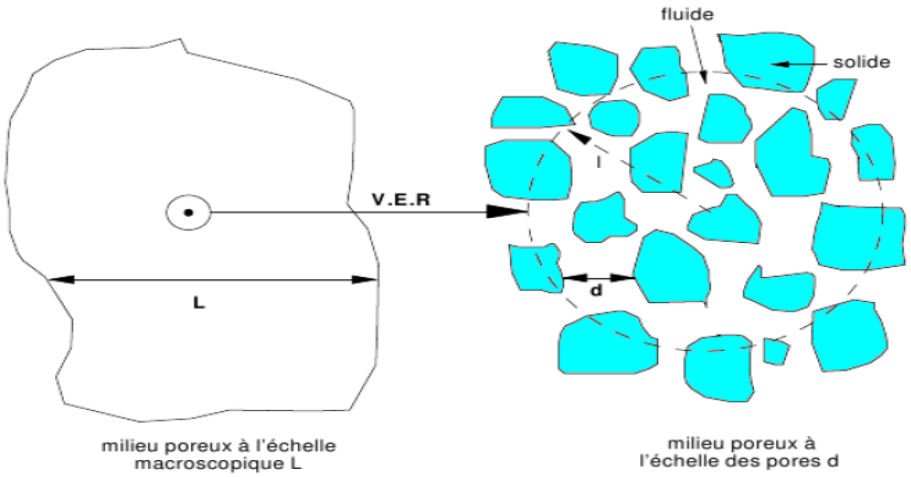


FIGURE I.6 – Représentation schématique du volume élémentaire représentatif.

Par la suite, nous supposerons donc, l'existence d'un volume élémentaire représentatif pour obtenir les équations du modèle à l'échelle macroscopique par prise de moyenne sur ce V.E.R des équations données à l'échelle microscopique, Dal Pont [15]. Les règles de changement d'échelle micro-macro sont présentées dans les travaux de Gray [16], Bear [17] et Lewis [18].

V Echelles de modélisation en milieux poreux

V.1 Echelle microscopique

L'échelle microscopique, ou du pore, est une échelle à l'intérieur de laquelle les grandeurs physiques locales peuvent subir de larges variations. En général, cette échelle est associée au diamètre moyen des pores, soit d.

V.2 Echelle macroscopique

L'échelle macroscopique, ou du milieu poreux, est une échelle caractéristique des variations significatives de ces mêmes grandeurs, définies en moyenne sur le volume élémentaire représentatif (V.E.R). Cette échelle macroscopique est associée à la dimension géométrique du milieu, soit L.

V.3 Changement d'échelle

Dans notre travail, nous avons basé sur la théorie de la prise de moyenne (Whitaker [19]), c'est une technique mathématique de changement d'échelles très utilisée par les auteurs qui travaillent sur l'étude des phénomènes du transfert de chaleur et de masse en milieux poreux, dont l'objectif est de créer des modèles macroscopiques à partir de problèmes à l'échelle microscopique. Dans la littérature se trouvent plusieurs travaux qui ont utilisé cette technique, on peut citer : Whitaker [20], Jomaa [21], Quintard et al. [22], Zabaras et Deep [23] et Delmi et al. [24]. Ces travaux nous rassurent quant à la validité

des résultats dans une échelle où la longueur caractéristique du rayon l du V.E.R (Figure II.2) se trouve entre d et L.

VI Modèles d'écoulement dans les milieux poreux

VI.1 Modèle de Darcy

Il s'agit du modèle classique le plus ancien sur l'étude fondatrice des écoulements dans les milieux poreux, établie sur des fondements expérimentaux qui ont été réalisés par l'ingénieur Darcy en 1856 [25]. Il a montré que l'écoulement dépendait linéairement du gradient de pression et de la force de gravité. La vitesse moyenne de filtration $\overrightarrow{V}$ (vitesse de Darcy) est alors proportionnelle à la somme du gradient de pression ∇P et de la force gravitationnelle $\rho\overrightarrow{g}$. Pour un milieu poreux isotrope, la forme generalisée de la loi de Darcy est donnée par l'équation :

$$\overrightarrow{V} = -\frac{K}{\mu}(\overrightarrow{\nabla} P - \rho\overrightarrow{g}) \tag{I.7}$$

dans laquelle K est la perméabilité du milieu poreux, μ la viscosité dynamique du fluide et P la pression. Cette formulation généralisée de la loi de Darcy qui néglige les forces d'inerties et visqueuses, n'est valable que pour des écoulements à basses vitesses et pour des milieux de porosité pas trop élevée. Elle est valable lorsque les conditions suivantes sont satisfaites Kalla [26] :

$$\begin{cases} \varepsilon < 0.8 \\ Da \leq 10^{-6} \\ Re < 1 \end{cases} \tag{I.8}$$

où, ε est la porosité du milieu, Da est le nombre de Darcy, et Re est le nombre de Reynolds. Dans ces conditions, le nombre de Darcy Da et le nombre de Reynolds Re sont donnés respectivement par :

$$Da = \frac{K}{H^2} \quad et \quad Re = \frac{V_p\sqrt{K}}{\nu} \tag{I.9}$$

où H est la longueur caractéristique du domaine étudié, V_p est la vitesse moyenne de filtration des particules fluides et ν est la viscosité cinématique du fluide.

Bear [27] distingue trois régimes d'écoulement suivant la valeur du nombre de Reynolds de pore. Tandis que, Dybbs et Edwards [28], à l'aide de mesures de vitesse, distinguent plusieurs régimes d'écoulement que l'on peut classifier de la manière suivante :

1. Pour des nombres de Reynolds de pore inférieurs à 1, le régime d'écoulement est laminaire, les forces de viscosité sont grandes devant les forces d'inertie, la loi de Darcy est applicable.

2. Lorsque Re est compris entre 1 et 10, les couches limites au niveau des parois solides

des pores se développent. En dehors de ces couches limites apparaît un régime d'écoulement inertiel. Les forces d'inertie deviennent alors importantes et il n'y a plus de proportionnalité entre le gradient de pression et la vitesse de filtration : la loi de Darcy n'est plus applicable. Ce régime d'écoulement stationnaire laminaire persiste jusqu'à un nombre de Reynolds de 150 environ.

3. Pour des nombres de Reynolds de pore compris entre 150 et 300, un régime d'écoulement laminaire instationnaire se développe. Ce régime est d'abord oscillatoire résultant de la superposition de plusieurs modes de période et d'amplitude distinctes.

4. Au-delà de Re de l'ordre de 300, le régime d'écoulement devient chaotique, et présente les caractéristiques d'un écoulement turbulent.

VI.2 Modèle de Brinkman

Dans le cas où la porosité est importante (de l'ordre de 0.8), il faut tenir compte des effets de diffusion visqueuse au niveau des parois (Delache [29]). Pour cette situation Brinkman [30] propose de modifier l'équation de Darcy en introduisant un terme équivalent au terme de diffusion visqueuse dans la loi de Stokes. Sa formule est donnée par :

$$\overrightarrow{\nabla} P = \rho \overrightarrow{g} - \frac{\mu}{K} \overrightarrow{V} + \mu_{eff} \overrightarrow{\nabla}^2 \overrightarrow{V} \tag{I.10}$$

Cette loi empirique est connue sous le nom de la formulation de Darcy-Brinkman. Le deuxième terme a droite de l'équation (I.10) est le terme de Darcy et le troisième est appelé terme de Brinkman. Cette loi empirique est justifiée par le fait que, pour des faibles valeurs de la perméabilité K, l'équation (I.10) dégénère en loi de Darcy, donnée par l'équation (I.7), et lorsque K devient grand, l'équation se réduit à l'équation de Stokes avec $\mu_{eff} \approx \mu$. Cette approximation a été prouvée expérimentalement et elle est en accord avec les travaux de Neale et Nader [31] et Beckermann et Viskanta [32].

VI.3 Modèle de Forchheimer

Dans le cas d'un écoulement où les vitesses sont élevées, l'effet d'inertie non linéaire devient important et l'équation de Darcy devient insuffisante pour décrire l'écoulement. Forchheimer [33] a proposé une modification de la loi de Darcy en rajoutant une relation non linéaire du second ordre entre le gradient de pression et la vitesse de filtration. Cette formulation est connue sous le nom de Darcy-Forchheimer [34] :

$$\overrightarrow{\nabla} P = \rho \overrightarrow{g} - \frac{\mu}{K} \overrightarrow{V} - \frac{\rho F}{\sqrt{K}} \parallel \overrightarrow{V} \parallel \overrightarrow{V} \tag{I.11}$$

où F est un coefficient empirique qui dépend de la porosité et de la microstructure du milieu poreux.

Muskat [35] propose une classification du domaine de validité des lois de Darcy et Darcy-Forchheimer. Il distingue 3 zones en fonction du nombre de Reynolds Re (Delache [29]) :

1. Zone 1 : correspondant à de très faibles Re ($Re < 1$) , la loi de Darcy est valable.
2. Zone 2 : correspondant à une zone de transition entre les faibles et les grands nombres de Reynolds.
3. Zone 3 : correspondant à de forts Re ($1 < Re < 10$) , la loi de Darcy-Forchheimer est valable.

VI.4 Modèle de Darcy avec terme convectif

Wooding [36] a proposé une extension de l'équation de Darcy en introduisant un terme convectif par analogie avec les équations de Navier-Stokes.

$$\frac{\rho}{\varepsilon^2}\overrightarrow{V}\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{V} = -\overrightarrow{\nabla}P + \rho\overrightarrow{g} - \frac{\mu}{K}\overrightarrow{V} \tag{I.12}$$

Le terme de gauche de l'équation (VI.4) est le terme de convection qui tient compte des effets inertiels quand les vitesses sont importantes.

VI.5 Modèle modifié de Darcy-Brinkman-Forchheimer (DBF)

La loi modifiée de Darcy-Brinkman-Forchheimer (DBF) est alors représentée par l'équation suivante :

$$\overrightarrow{\nabla}P = -\frac{\mu}{K}\overrightarrow{V} + \rho\overrightarrow{g} - \frac{\rho F}{\sqrt{K}}\|\overrightarrow{V}\|\overrightarrow{V} + \mu_{eff}\overrightarrow{\nabla}^2\overrightarrow{V} \tag{I.13}$$

où μ_{eff} est une viscosité effective qui dépend de la viscosité du fluide μ et de la porosité ε.

VI.6 Modèle général

Une forme plus générale d'équation du mouvement peut être obtenue en faisant la moyenne des équations de Navier-Stokes sur le volume élémentaire représentatif (VER). Cette forme qui tient compte des forces inertielles et instationnaires à l'échelle macroscopique du fluide a été proposée, cité par Rohensenow et al. [37].

$$\underbrace{\frac{\rho_0}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial t} + \overrightarrow{V}.\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{V}\right)}_{(1)} = -\underbrace{\overrightarrow{\nabla}P}_{(2)} + \underbrace{\rho\overrightarrow{g}}_{(3)} + \underbrace{\frac{\mu_{eff}}{\varepsilon}\overrightarrow{\nabla}^2\overrightarrow{V}}_{(4)} - \underbrace{\frac{\mu}{K}\overrightarrow{V}}_{(5)} - \underbrace{\frac{\rho F}{\sqrt{K}}\|\overrightarrow{V}\|\overrightarrow{V}}_{(6)} \tag{I.14}$$

Avec :
(1) terme exprimant les forces d'inertie macroscopiques (développement des écoulements à l'échelle macroscopique).
(2) gradient de pression.
(3) force de gravité.
(4) cisaillement visqueux à l'échelle macroscopique, appelé terme visqueux de Brinkman ou encore terme de l'effet de la surface délimitant le milieu poreux.
(5) cisaillement visqueux à l'échelle microscopique, appelé terme de Darcy.
(6) terme exprimant les forces dinertie microscopiques, appelé terme d'inertie d'Ergun ou encore terme de Forchheimer (développement des écoulements à l'échelle microscopique)

VII Transfert thermique dans un milieu poreux

Le transfert de chaleur à travers un milieu poreux saturé est un sujet important, et a fait l'objet de nombreux travaux théoriques et expérimentaux. En raison de leur importance dans de nombreux domaines d'ingénierie naturels et industriels. (Kaviany [8]).

Pour établir l'équation d'énergie issue du premier principe de la thermodynamique dans un milieu poreux, on fait recours a quelques simplifications et approximations afin de diminuer la complexité et la forme du milieu poreux. On suppose que l'équilibre thermique local est atteint entre la phase solide et fluide. Compte tenu des vitesses d'écoulement faibles, les effets de radiation et de dissipation visqueuse sont négligeables, et en tenant compte de l'hypothèse de l'absence de source interne de chaleur, ainsi en considèrant que les pores du milieu poreux sont interconnectés. L'équation d'énergie pour un milieu poreux saturé est dérivée en utilisant la méthode de prise de moyenne volumique pour un élément de volume de contrôle représentatif, est donnée par [13] :

$$\frac{(\rho C_p)_{eff}}{(\rho C_p)_f}\frac{\partial T}{\partial t} + V.\nabla T = \nabla(\alpha.\nabla T) \tag{I.15}$$

où :

$$\alpha = \frac{K_{eff}}{(\rho C_p)_f} \tag{I.16}$$

$$(\rho C_p)_{eff} = \varepsilon\,(\rho C_p)_f + (1-\varepsilon)(\rho C_p)_s \tag{I.17}$$

$$K_{eff} = \varepsilon\,K_f + (1-\varepsilon)K_s \tag{I.18}$$

Où, T est la temprérature, α représente la diffusivité thermique avec $(\rho C_p)_{eff}$, $(\rho C_p)_s$ et $(\rho C_p)_f$ sont respectivement la capacité calorifique volumique effective, et la capacité calorifique volumique de la phase solide et fluide, et K_{eff} est la conductivité thermique du milieu poreux.

VIII Revue bibliographique

VIII.1 Introduction

Au cours de ces dernières années, un effort de recherche considérable a été consacré à l'étude du transfert de chaleur induit par convection au sein d'un milieu poreux saturé. L'intérêt pour ces phénomènes de convection naturelle est dû aux nombreuses applications potentielles en ingénierie. Parmi les applications potentielles, on peut citer l'extraction de l'énergie géothermique, la dispersion des polluants dans les aquifères, les problèmes de sécurité dans le coeur des réacteurs nucléaires, l'isolation thermique des bâtiments, etc. Une synthèse des travaux antérieurs est présentée dans les livres de Kaviany [8], Nield et Bejan [38] et Vafai [39], (Ingham et Pop, [40]), (Pop et Ingham, [41]).

Pour mener une étude sur le phénomène de transfert de chaleur par convection dans une couche poreuse, il faut caractériser le mouvement du fluide au sein de cette matrice poreuse. En raison de la complexité de cette matrice poreuse, il s'avère impossible de connaitre exactement le mouvement du fluide saturant le milieu poreux. D'où l'introduction de la notion du modèle d'écoulement pour décrire d'une façon macroscopique le mouvement des particules fluides au sein d'une couche poreuse ainsi que le transfert de chaleur engendré.

Le modèle empirique le plus simple pour décrire le mouvement de fluide au sein d'une couche poreuse est celui de H. Darcy [42, 43]. Ce modèle est limité pour des écoulements lents à travers un milieu poreux à faible perméabilité. Plus tard, ce modèle a été corrigé pour être mieux adapté à des écoulements à grand nombre de Reynolds. En se basant sur des données expérimentales, un terme non-linéaire de second ordre entre la vitesse d'infiltration et le gradient de pression a été ajouté par Forchheimer [44] pour tenir compte des effets d'inertie pour des écoulements à grandes vitesses. Les effets des parois (contraintes visqueuses) sont pris en considération en modifiant la loi de Darcy, la modification a été présentée par Brinkman [45, 46].

Dans cette section, nous présenterons une synthèse bibliographique sur les travaux de recherche déjà menés sur le phénomène de transfert thermique par convection autour des configurations géométriques immergées dans un milieu poreux saturé par un seul fluide, utilisant le modèle de Darcy, ainsi le modèle de Darcy modifié ou le modèle non-Darcien.

VIII.2 Travaux utilisant le modèle de Darcy

Il y a plus d'un siècle, un grand nombre d'études sur ce sujet existaient déjà et peuvent être trouvées dans la littérature. Ces études ont porté sur le transfert de chaleur par convection dans un milieu poreux ayant utilisé la formulation classique de Darcy. Ceci a été formulé plus tard par Bear [49] comme équation de mouvement macroscopique pour les fluides Newtoniens dans un milieu poreux à faibles nombres de Reynolds. Il a été démontré que l'écoulement dépendait linéairement de la force de gravitation et du gradient de pression. La constante dans l'équation de Darcy a été prouvée plus tard par

Muskat et Wyckoff [50] et devrait être liée à la perméabilité du matériau poreux.

Cheng et Minkowycz [51] ont été les premiers à étudier les problèmes du transfert de chaleur et d'écoulement de convection naturelle le long d'une paroi verticale chauffée adjacente à un milieu poreux saturé d'un fluide Newtnien, en se basant sur la théorie de la couche limite. Ensuite, [52–54] ont analysé le transfert de chaleur par convection naturelle dans un milieu poreux saturé par un fluide Newtonien autour d'une plaque posée verticalement ou horizontalement, en se basant sur la loi de Darcy, et mettant en évidence les effets de certains paramètres physiques et la variabilité des conditions aux limites du domaine étudié.

Par la suite, Belhachmi et al [55] ont étudié en régime de la couche limite, le phénomène de la convection naturelle sur une plaque verticale à température variable dans un milieu poreux saturé par un fluide Newtonien. La méthode de similarité utilisée dans la modélisation de ce phénomène permet une réduction de la dimension du problème. Ces chercheurs ont proposé deux approches numériques au calcul des solutions du problème, une basée sur la méthode de Tir en association avec la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 et l'autre est basée sur une simulation directe par la méthode des différences finies. Après une comparaison entre les deux approches, ils ont conclu que les deux méthodes sont très précises et que si nous sommes seulement intéressés par la solution physique, l'approche directe est un peu coûteuse mais plus rapide. Ali [56] a étudié l'effet de l'aspiration et de l'injection du fluide sur la convection naturelle induite par une plaque chauffée, immergée verticalement dans un milieu poreux saturé en présence d'une source interne de chaleur. Dans cette investigation les effets du paramètre d'aspiration/injection f_w et de l'exposant de la température λ sur l'écoulement du fluide et le transfert de chaleur ont été analysés.

Mohmed Ali et Al-yousef [57,58] ont étudié l'écoulement d'une couche limite laminaire, en convection mixte, sur une surface verticale présentant une perméabilité linéaire en mouvement. L'investigation traite les cas d'une poussée thermique qui aide ou s'oppose à l'écoulement. Les solutions locales de similarité sont obtenues par les équations de la couche limite. Comme conditions aux limites, ces auteurs ont supposés que les variations de température et de vitesse suivent une loi en puissance. L'étude a porté sur l'effet de divers paramètres régissant l'écoulement, tels que le nombre de Prandtl Pr, le paramètre d'injection/aspiration et le nombre de Richardson sur les distributions de vitesse, de température et du coefficient du transfert thermique. Des valeurs critiques ont été trouvées et qui sont vérifiées par la solution analytique de l'équation d'énergie.

Récemment, Achemlal et al [59–62] ont étudié théoriquement et numériquement en régime de la couche limite laminaire, le phénomène de la convection naturelle ou mixte autour d'une plaque plane, maintenue à une température non uniforme, et soumise à une vitesse d'aspiration/injection, enfoncée verticalement dans un milieu poreux saturé par un fluide Newtonien ou non-Newtonien, en absence et en présence d'une génération interne de chaleur, de la radiation thermique, de la non-uniformité de perméabilité du milieu poreux et de la variation de la viscosité du fluide. Le problème étudié a été modélisé par une méthode de similarité, et se ramène à une équation différentielle

non-linéaire de troisième ordre. Cette dernière a été résolue, numériquement, par la méthode de Runge-Kutta-Fehlberg couplée avec une technique itérative de Tir. Dans le même contexte , Achemlal et al [63, 64] ont utilisé une méthode de différences finies avec des schémas et des techniques numériques appropriés pour la résolution du problème dans une configuration bidimensionnelle pour des fluides Newtoniens traduisant le phénomène du transfert de chaleur par convection autour d'une plaque plane verticale chauffée et posée verticalement dans un milieu poreux saturé. Les résultats obtenus sont validés par confrontation avec ceux de l'approche de similarité.

Le modèle de Darcy est limité à des écoulements à faible nombre de Reynolds (faible vitesse). Des instabilités numériques apparaissent pour des grands nombres de Rayleigh dans les problèmes adoptant le modèle de Darcy. L'extension de Brinkman-Forchheimer (EBFD) permet de prendre en compte les effets des contraintes de cisaillement macroscopiques ainsi que les effets d'inertie. Ce qui lui rend plus au moins mieux adapté aux écoulements lorsque les vitesses sont importantes ou des grandes perméabilités.

VIII.3 Travaux utilisant le modèle non-Darcien

Les effets non-Darcien sur la convection thermique dans les milieux poreux ont fait l'objet d'une attention considérable au cours des deux dernières décennies en raison des expériences menées avec plusieurs combinaisons de solides et de fluides couvrant une large gamme de paramètres déterminants. Les travaux de Vafai et Tien [65, 66] ont été l'une des premières tentatives de prise en compte des effets non Darcien (effets de frontière et d'inertie) sur l'écoulement et le transfert thermique et de masse dans les milieux poreux. Dans ces travaux, ils ont discuté l'importance de ces deux effets sur l'écoulement et le transfert de chaleur dans des milieux poreux, ansi ils ont trouvé que l'épaisseur de la couche limite dynamique est de l'ordre de $\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}$. Dans le même sens, Hong et al [67] ont étudié analytiquement les effets non Darcien sur la convection naturelle autour d'une plaque verticale incorporée dans un milieu poreux. Ils ont montré que les effets de frontière et d'inertie ont une influence significative sur les profils de vitesse et sur les flux thermiques à la paroi. Ainsi, ils réduisent le transfert thermique au niveau de la paroi chaude. D'après cette étude, ils ont constaté que l'effet de frontière devient notable dans la région proche du bord d'attaque de la plaque chaude, tandis que l'effet d'inertie augmente avec la position sur la plaque chaude. Les résultats montrent aussi que lorsque la résistance due à la matrice solide augmente, le profil de vitesse tend vers la forme exponentielle qui résulte d'un glissement de vitesse à la frontière. Vafai et Thiyagaraju [68] ont présenté des solutions analytiques pour les champs de vitesse et de température dans la zone de la couche limite en utilisant l'équation de Darcy-Brinkman-Forchheimer. Après, des comptes rendus détaillés sur les efforts consacrés à l'étude de la convection dans un milieu poreux non-Darcien ont été rapportés dans Tien et Hong [69], Cheng [70], Prasad et al [71], et Kalidas et Prasad [72],

Raptis et al. [73] ont étudié en régime de la couche limite, le phénomène d'un écoulement instationnaire de convection naturelle dans un milieu poreux saturé par un fluide Newtonien (air) adjacent à une plaque verticale semi-infinie. Un schéma explicite de différences finies est utilisé pour la solution numérique des équations aux dérivées partielles non linéaires et couplées. Les résultats obtenus montrent que la vitesse augmente avec l'augmentation du paramètre de perméabilité, alors que la température diminue. Après, les caractéristiques d'écoulement et du transfert de chaleur par la convection mixte dans la zone de la couche limite d'une plaque verticale dans un milieu poreux non Darcien saturé en fluide, ont été examiné par Chien-Hsin et al [74]. Dans cette investigation les effets de l'inertie, de la frontière, de la porosité non uniforme et de la dispersion thermique sont pris en compte. D'après ce travail les auteurs montrent que ces effets ont une influence significative sur les profils de vitesse et de température et également sur le taux du transfert de chaleur surfacique.

Plus tard, Kodah [75] et Elbashbeshy [76] ont étudié la convection mixte le long d'une plaque verticale immergée dans un milieu poreux non Darcien saturé, avec un flux de chaleur variable à la surface. Les équations gouvernant le problème étudié sont d'abord transformées en une forme sans dimension, puis résolues par un schéma de différences finies. Les résultats obtenus indiquent que la vitesse et la température augmentent avec le paramètre de la convection mixte, ainsi que la vitesse se réduit par l'effet d'inertie, alors que la température augmente. Dans ce contexte, les effets d'aspiration/injection sur la convection mixte le long d'une plaque horizontale ou verticale immergée dans un milieu poreux non Darcien saturé, ont été analysé par Elbashbeshy [77,78]. Il a trouvé que l'injection augmente le transfert de chaleur alors que l'aspiration entraîne une diminution du transfert de chaleur pour tous les paramètres étudiés.

L'effet de la dissipation visqueuse joue un rôle essentiel dans les écoulements géophysiques et l'aérodynamique. El-Amin et Ebrahiem [79] et Udin et Kumar [80] ont été discuté, dans le cas instationnaire, l'effet de la dissipation visqueuse sur la convection naturelle autour des plaques verticale et inclinée immergées dans un milieu poreux non Darcien, utilisant le modèle généralisé de Darcy-Drinkman-Forchheimer. Dans ces travaux, les équations de base de la couche limite, sont transformées en formes adimensionnelles, puis résolues numériquement à l'aide d'une méthode explicite de différences finies. Ces auteurs ont constaté que lorsque le temps tend vers l'infini, les valeurs des coefficients de frottement et du transfert thermique se rapprochent de l'état stationnaire. Récemment , Mondal et al. [81] ont également examiné le transfert thermique convectif instationnaire le long d'une plaque poreuse verticale avec une viscosité et conductivité thermique variables en présence de la dissipation visqueuse et d'une génération interne de chaleur. Dans ce travail le problème étudié est également résolu numériquement par une méthode explicite de différences finies. Les résultats ainsi obtenus montrent que le profil thermique est sensiblement influencé par les paramètres du problème tels que la conductivité thermique, le nombre d'Eckert et le paramètre de génération interne de chaleur.

Dans certaines applications des milieux poreux, tels que ceux impliquant l'élimination

de chaleur à partir de débris de combustible nucléaire, le stockage souterrain des déchets radioactifs, le stockage des aliments et les réactions chimiques exothermiques, l'influence de la génération interne de chaleur est importante ce qui nécessite dans la simulation de telles situations, l'addition d'une expression de source de chaleur dans l'équation d'énergie. Dans la plupart des cas, ce terme est supposé constant où dépend de température.

L'effet de la radiation thermique joue un rôle important dans le contrôle du processus de transfert de chaleur dans l'industrie impliquant des températures élevées, tels, la transformation des polymères, la fabrication du verre, la technologie du four, de l'aérodynamique à haute température. En outre, l'effet de la radiation thermique sur les processus d'écoulement et du transfert de chaleur par convection est d'une importance capitale dans la conception de nombreux systèmes qui fonctionnent à haute température. L'approximation de Rosseland est utilisée pour décrire le flux de chaleur radiatif dans l'équation d'énergie. De nombreux travaux sont actuellement consacrés à l'étude de l'interaction de flux radiatif avec le flux de convection thermique. Parmi ces travaux, celui de Hossain et Pop [82] qui ont analysé, numériquement, l'effet de rayonnement sur un flux de convection naturelle le long d'une plaque inclinée maintenue à une température uniforme posée dans un espace poreux, en utilisant la méthode des differences finies implicite conjointement avec la technique d'élimination de Keller box pour prévoir les effets du paramètre de radiation R_d et de la température de surface θ_d sur le nombre de Nusselt local, la distribution de la vitesse tangentielle et la distribution de la température. Dans le même contexte, Raptis [83] a étudié l'effet de rayonnement sur le flux de convection naturelle à travers un milieu poreux délimité par une plaque poreuse verticale soumise à une vitesse d'aspiration constante. Il a constaté, à travers cette étude que la vitesse diminue lorsque le paramètre de rayonnement augmente.

La convection naturelle en présence de la radiation thermique dans la zone de la couche limite d'une plaque verticale intégrée dans un milieu poreux saturé non Darian saturé a été étudié par El-Hakiem et El-Amin [84] en utilisant la méthode Runge-Kutta couplée avec la technique de tir. Ils ont conclu, à partir de cette investigation que les profils de vitesse et de température augmentent lorsque le paramètre de radiation augmente, ainsi, les grandes valeurs de ce paramètre permet d'améliorer le taux du transfert de chaleur à la surface. Ensuite, Chamkha et al. [85] ont étudié l'effet du rayonnement sur l'écoulement de la convection naturelle en régime de la couche limite près d'une plaque inclinée semi-infinie noyée dans un milieu poreux à porosité variable, en tenant compte de la présence d'un champ magnétique appliqué. Les équations aux dérivées partielles non linéaires qui régissent le problème physique sont résolues numériquement par un schéma implicite aux différences finies. Les résultats graphiques pour les champs de vitesse et de température ainsi que le coefficient de frottement à la surface et le nombre de Nusselt sont présentés et discutés pour diverses conditions paramétriques. Ensuite. Aydin et Kaya [86] ont étudié le transfert de chaleur par convection mixte autour d'une plaque verticale perméable en présence des effets du champ magnétique et de rayonnement thermique. Dans ce travail, le

problème est résolu numériquement à l'aide du schéma aux différences finies de Keller. Les résultats obtenus montrent qu'une augmentation du paramètre de rayonnement thermique diminue le frottement local et augmente le taux du transfert thermique local à la surface.

Plus tard, les effets de la génération interne de chaleur, du rayonnement thermique et de la force de flottabilité sur la convection thermique dans la zone de la couche limite d'une plaque verticale présentant une condition au limite de surface, convective ont été examiné par Olanrewaju et al. [87]. Les équations non linéaires régissant le phénomène de l'écoulement et du transfert de chaleur ont été résolues numériquement à l'aide de la méthode de Runge- Kutta d'ordre 6 associée avec la technique de tir. Au cours de la même année, Ferdows et al. [97] ont analysé les effets de rayonnement sur l'écoulement et le transfert de chaleur par convection naturelle le long d'une surface poreuse inclinée avec génération interne de chaleur. Ces auteurs ont constaté que le flux de rayonnement favorise davantage les forces de frottement et affecte de manière significative le taux de transfert de chaleur à la surface. De plus, les effets du rayonnement et de la dissipation visqueuse sur un écoulement convectif instationnaire le long d'une plaque poreuse verticale en mouvement intégrée dans un milieu poreux ont été analysés par Das et al. [89]. Les modèles mathématiques régissant le phénomène étudié, ont résolu numériquement par une méthode de différences finies implicite de type Crank - Nicolson. Les résultats ainsi obtenus montrent que le taux du transfert de chaleur à la surface de la plaque augmente avec l'augmentation du paramètre de rayonnement.

IX Situation du problème

Notre travail de thèse portera sur la modélisation et l'analyse de la convection thermique en milieu poreux non Darcien saturé de fluide Newtonien, en se basant sur le modèle généralisé de Darcy-Brinkman-Forchheimer et en tenant compte le terme convectif dans l'équation de quantité du mouvement qui traduit les effets des forces inertielles et instationnaires à l'échelle macroscopique du fluide. La configuration géométrique utilisée est une plaque plane poreuse en position verticale, ou inclinée par rapport à la verticale d'un angle ϕ, de température non-uniforme, et qui peut être soumise à un flux de fluide latéral (aspiration/injection). Ce travail apporte diverses contributions à savoir :

- L'approfondissement de l'aspect théorique de l'approche semi-analytique (dite aussi méthode de similarité). L'aspect numérique de cette approche sera amélioré en intégrant la méthode de Range-Kutta-Fehlberg d'ordre 5 couplée avec la technique de tir, qui aura des conséquences positives sur la précision des résultats attendus.

- L'étude de l'influence de certains phénomènes (aspiration/injection, génération/puits interne de chaleur, répartition de température sur la plaque, radiation thermique, perméabilité du milieu et dissipation visqueuse) et des paramètres physiques (Grachof , Prandtl, Darcy, Reynolds, Eckert, Rayleigh, ...) sur la convection thermique dans le milieu.

- La mise en place d'une approche CFD en 2D pour la simulation du phénomène du transfert thermique par convection naturelle autour d'une plaque plane chauffée et posée verticalement dans un milieu poreux saturé non-Darcien. Cette approche servira par la suite, comme une base de validité de quelques résultats obtenus par l'approche de similarité.

X Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les modes fondamentales du transfert de chaleur, des généralités sur les milieux poreux et leurs grandeurs physiques caractéristiques, ainsi que les modèles d'écoulement et du transfert de chaleur dans les milieux poreux. Ensuite, nous avons présenté une étude bibliographique détaillée concernant les travaux antérieurs portant sur les phénomènes d'écoulement et du transfert de chaleur par convection dans les milieux poreux saturés utilisant le modèle de Darcy et le modèle non-Darcien : modèle de Darcy-Brinkman et le modèle de Darcy-Brinkman -Forchheimer appelé modèle généralisé de Darcy, pour différentes configurations géométriques.

Dans le chapitre suivant, on va présenter le problème physique étudié, la formulation mathématique bidimensionnelle adaptée à notre problème, avec les hypothèses simplificatrices de base, et les conditions aux limites appropriées, ainsi que la méthode de solution utilisée.

Chapitre II

Formulation mathématique et méthode de solution

I Introduction

Dans ce chapitre, nous allons rappeler les différentes équations de conservation de la mécanique des fluides et des transferts thermiques. On présente dans un premier temps, les équations de continuité, de Navier-Stokes et de l'énergie. Ces équations sont incapables de modéliser les phénomènes physiques à l'échelle d'un milieu poreux, pour cette raison, nous allons baser sur le théorème de la moyenne volumique qui consiste à intégrer ces équations sur un volume élémentaire représentatif du milieu poreux afin d'obtenir les équations macroscopiques auxquelles obéissent les phénomènes en milieu poreux à partir des équations microscopiques de la thermodynamique à l'échelle des pores en tenant compte des hypothèses simplificatrices physiques et mathématiques afin d'aborder l'analyse du phénomène physique auquel nous nous sommes intéressés.

En second lieu, nous présentons le principe de la méthode de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 5 et de la technique de Tir. Ensuite, nous décrivons l'algorithme de calcul utilisé.

II Problème physique

II.1 Domaines d'applications

Le phénomène de transfert thermique par convection dans les milieux poreux a une importance fondamentale, il est fréquemment rencontré dans la nature et dans de nombreux domaines physiques, technologiques, chimiques et microbiologiques. Parmi les applications potentielles, on peut citer :

- L'extraction du pétrole à travers le sol.
- L'extraction de l'énergie géothermique. L'isolation thermique des bâtiments
- Les processus de séchage électrochimiques et beaucoup d'autres applications.
- La croissance cristalline où l'on essaie d'obtenir un monocristal à partir d'un mélange fondu.

- La dispersion des polluants dans les aquifères et les sols saturés.
- L'enfouissement souterrain des déchets radioactifs.

Cela a motivé les chercheurs et les industriels ces dernières années, à mener des recherches dans ce cadre dont l'objectif principal est de comprendre les différents mécanismes résultants des mouvements convectifs engendrés. Plusieurs travaux sur ce sujet ont été réalisés en utilisant l'expérimentation et la simulation numérique, ainsi que les développements analytiques dans des cas simples.

II.2 Description du Problème posé

Dans le présent chapitre, on considère comme il est représenté sur la figure (II.1), une plaque plane, de longueur H. Cette dernière est chauffée et immergée verticalement, ou inclinée d'un angle ϕ par rapport à la verticale, dans un milieu poreux non-Darcian saturé de fluide Newtonien incompressible. Le modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer est adopté pour décrire le mouvement du fluide au sein du milieu poreux. La plaque est maintenue à une température T_w supérieure à la température ambiante T_∞, et soumise à une vitesse latérale d'aspiration ou d'injection V_w , L'origine du repère (O,x,y) est située sur la plaque et coïncide avec son bord d'attaque. L'axe Ox est orienté suivant le sens de l'écoulement. L'axe Oy est perpendiculaire à la plaque et orienté vers le milieu.

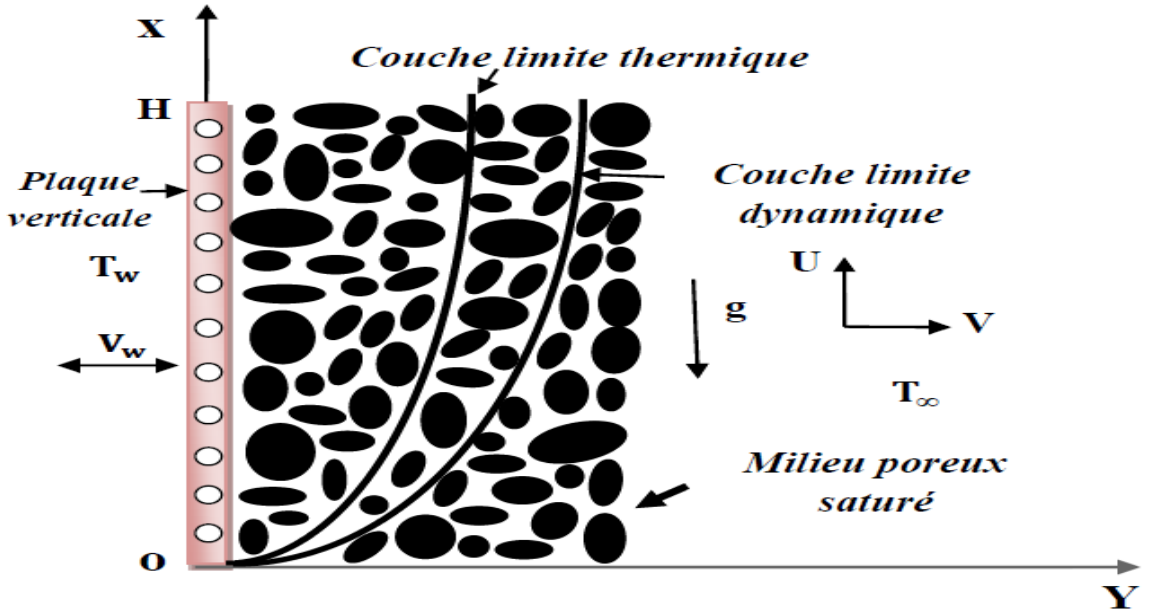


FIGURE II.1 – Modèles physiques et système de coordonnées.

II.3 Hypothèses simplificatrices

Comme dans la majorité des études portant sur la convection naturelle, quelques approximations sont considérées afin d'obtenir une formulation simple du modèle mathématique. Nous nous limitons donc aux hypothèses couramment retenues dans les études de la convection naturelle qui sont les suivantes :

- Le fluide saturant le milieu poreux est supposé newtonien, incompressible et satisfaisant l'hypothèse de Boussinesq, à savoir que les propriétés physiques du fluide ne varient pas avec la température, à l'exception de la masse volumique dans les forces de gravitation.

- L'ensemble de fluide et le milieu poreux constituent un milieu continu fictif, isotrope et homogène.

- Le milieu poreux est en équilibre thermodynamique local avec le fluide.

- L'ensemble de fluide et le milieu poreux constituent un milieu continu fictif, isotrope et homogène..

- L'écoulement du fluide au sein du milieu est stationnaire, laminaire et bidimensionnel.

- Le transfert de chaleur par rayonnement, la dissipation visqueuse et la dispersion thermique sont négligeables.

- Dans ce travail, on suppose qu'il n'y a pas d'échange de la matière entre le fluide et la matrice poreuse.

II.4 Approximation de Boussinesq-Oberbeck

L'approximation de Boussinesq est valide, elle consiste à considérer que les variations de la masse volumique sont négligeables aux niveaux de les termes des équations de quantité de mouvement ($\rho = \rho_0$), sauf au niveau du terme de gravité. La variation de ρ en fonction de la température est dommée comme suit :

$$\rho = \rho_0[1 - \beta(T - T_0)] \tag{II.1}$$

Où :
ρ_0 est la masse volumique du fluide évaluée à une température de référence T_0.
$\beta = \dfrac{1}{\rho_0}\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$ est le coefficient d'expansion thermique.

L'approximation de Boussinesq est valable à condition que les changements de la masse volumique $\Delta\rho$ reste faible par rapport à ρ_0 dans toute la région de l'écoulement et à condition que les variations de température sont insuffisante pour provoquer des variations de façon sgnificative dans les valeurs moyennes de différentes propiètés physiques du milieu (liquide et solide) [38].

Par consequent, on admet que, dans le cadre d'une approximation de Boussinesq généralisée les propriétés physiques comme la viscosité, la chaleur massique, la conductivité thermique,..., sont des constantes évaluées aussi à une température moyenne de référence.

III Equations de conservation

Il existe plusieurs méthodes pour obtenir les équations fondamentales de la mécanique des fluides. Nous considérons un volume de contrôle élémentaire pour analyser les variations au cours du temps, de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Cette méthode qui consiste à faire un bilan des quantités transportées et produites au cours du temps, dans un volume élémentaire de contrôle, a été largement étudiée dans les ouvrages de référence [90, 91].

III.1 Equation de continuité

L'équation de continuité décrit la loi de conservation de la masse. Pour établir cette équation dans un milieu poreux, nous considérons un volume de élémentaire représentatif du milieu avec une porosité ε et utilisons les coordonnées cartésiennes. L'équation de conservation de masse s'écrit sous la forme :

$$\overrightarrow{\nabla}(\rho\overrightarrow{V}) = 0 \tag{II.2}$$

Pour un fluide incompressible, l'équation de conservation de masse s'écrit sous la forme suivante :

$$\overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{V}) = 0 \tag{II.3}$$

Où $\overrightarrow{V}$ est la vitesse moyenne de filtration et $\overrightarrow{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$.

III.2 Equation de conservation de la quantité de mouvement en milieu poreux

L'équation de quantité de mouvement traduit le principe fondamentale de la dynamique établi par Newton pour un fluide incompressible, en tenant compte les effets de Brinkman et de Forchheimer avec l'incorporation du terme convectif $(\overrightarrow{V}.\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{V}$, ce qui conduire à l'équation ci-dessous. Cette forme à l'échelle macroscopique a été proposée, et citée par Kaviany dans Rohensenow et al. [37].

$$\frac{\rho}{\varepsilon^2}\overrightarrow{V}.\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{V} = -\overrightarrow{\nabla}P + \rho\overrightarrow{g} + \frac{\mu}{\varepsilon}\overrightarrow{\nabla}^2\overrightarrow{V} - \frac{\mu}{K}\overrightarrow{V} - \frac{\rho F}{\sqrt{K}} \parallel \overrightarrow{V} \parallel \overrightarrow{V} \tag{II.4}$$

III.3 Equation d'energie

L'équation d'énergie issue du premier théorème de la thermodynamique dans un milieu poreux, en tenant compte de quelques simplifications et quelques approximations dans le but d'enlever la complexité et l'hétérogénéité du milieu poreux. Pour cela, on considère que le milieu est isotrope, et les effets radiatifs et de la dissipation visqueuse sont négligeables. Les pores sont interconnectés pour former un milieu homogène. On suppose aussi qu'il y a un équilibre thermique entre la phase solide et fluide ($T_f = T_s$). Où T_f et T_s représentent respectivement les températures des phases fluide et solide. On admet ainsi qu'il n'y a pas de transfert thermique entre les deux phases solide et fluide [92].

L'équation d'énergie pour un milieu poreux saturé s'écrit dans le cas stationnaire pour un élément de volume de contrôle représentatif comme suit :

$$\overrightarrow{V}.\overrightarrow{\nabla}T = \overrightarrow{\nabla}(\alpha.\overrightarrow{\nabla}T) \tag{II.5}$$

où :

$$\alpha = \frac{K_{eff}}{(\rho C_p)_f} \tag{II.6}$$

Où, T est la temprérature, α représente la diffusivité thermique avec $(\rho C_p)_f$ estla capacité calorifique volumique de la phase fluide, et K_{eff} est la conductivité thermique effective du milieu poreux, qui'est donnée par la formule :

$$K_{eff} = K_f + (1-\varepsilon)K_s \tag{II.7}$$

Où K_f et K_s sont respectivement la conductivité thermique de la phase solide et de la phase fluide.

IV Système d'équations gouvenant l'écoulement et le transfert de chaleur en milieu poreux non-Darcien

Il convient donc d'après ce qui précède, que le transfert de chaleur et le mouvement de fluide newtonien incompressible dans un milieu poreux non-Darcien saturé, isotrope et homogène sont gouvernés par le système d'équations de conservation (continuité, quantité de mouvement et d'énergie). Notons que, ces équations sous la forme vectorielle en régime permanent peuvent s'écrire : [93]

$$\begin{cases} div(\overrightarrow{V}) = 0 \\ \\ \dfrac{\rho}{\varepsilon^2}\overrightarrow{V}.\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{V} = -\overrightarrow{\nabla}P + \rho\overrightarrow{g} + \dfrac{\mu}{\varepsilon}\overrightarrow{\nabla}^2\overrightarrow{V} - \dfrac{\mu}{K}\overrightarrow{V} - \dfrac{\rho F}{\sqrt{K}} \parallel \overrightarrow{V}\parallel\overrightarrow{V} \\ \\ \overrightarrow{V}.\overrightarrow{\nabla}T = \overrightarrow{\nabla}(\alpha.\overrightarrow{\nabla}T) \end{cases} \tag{II.8}$$

Où : $\sigma = \dfrac{(\rho C_p)_{eff}}{(\rho C_p)_f}$ et $\overrightarrow{\nabla} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$.

IV.1 Analyse dimensionnelle de la couche limite

L'analyse dimensionnelle permet de mesurer l'importance des termes et de réduire le nombre de paramètres de contrôle dans le problème étudié. Dans cet objectif, nous utiliserons deux échelles caractéristiques de l'écoulement, telles que :
H : longueur de la plaque.
δ : l'épaisseur de la couche limite.

Dans cette étude, nous supposons que la couche limite est très mince : $\delta << H$.

Considérons l'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{II.9}$$

Les termes de l'équation de continuité peuvent être estimés comme suit :

$$\frac{U}{H} \approx \frac{V}{\delta} \tag{II.10}$$

Alors,

$$V \approx \frac{\delta}{H}.U \tag{II.11}$$

or $\delta << H$ ce qui signifie que $U >> V$.

Dans cette étude, nous admettons que la vitesse d'injection du fluide au niveau de la plaque est suffisamment faible, afin d'éviter la perturbation de l'écoulement dans la zone de la couche limite, par conséquence l'écoulement est presque parallèle à la plaque.

Les gradients de pression dans la couche limite correspondent à des effets hydrostatiques du fluide. En supposant que le gradient de pression à l'intérieur et à l'extérieur de la couche limite est le même, alors :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho_\infty g \tag{II.12}$$

Où ρ_∞ est la masse volumique à l'extérieur de la couche limite.

En utilisant l'approximation de Boussinesq, l'équation de la quantité de mouvement projetée dans la direction x s'écrit :

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\nu}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + g\beta(T - T_\infty) - \frac{\nu}{K}u - \frac{F\sqrt{u^2+v^2}}{\sqrt{K}}u \tag{II.13}$$

Les ordres de grandeur de chacun des termes de l'équation (II.9) sont respectivement :

$$\underbrace{\frac{U^2}{H}}_{1} \quad ; \quad \underbrace{\frac{U^2}{H}}_{2} \quad ; \quad \underbrace{\nu\frac{U}{H^2}}_{3} \quad ; \quad \underbrace{\nu\frac{U}{\delta^2}}_{4} \quad ; \quad \underbrace{g\beta T}_{5} \quad ; \quad \underbrace{\frac{\nu}{K}U}_{6} \quad ; \quad \underbrace{\frac{F}{\sqrt{K}}U^2}_{7}$$

Les deux premiers termes sont du même ordre de grandeur. En se basant sur l'approximation de la couche limite, on peut négliger le troisième terme.

Considérons maintenant, l'équation de la quantité de mouvement projetée dans la direction y :

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\nu}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \frac{\nu}{K}v - \frac{F\sqrt{u^2+v^2}}{\sqrt{K}}v \tag{II.14}$$

Or, $V = \frac{U}{H}\delta$, Les ordres de grandeur de chacun des termes de l'équation (**??**) sont

respectivement :

$$\frac{U^2\delta}{H^2} \quad ; \quad \left(\frac{U\delta}{H}\right)^2 \frac{1}{\delta} \quad ; \quad \nu\left(\frac{U\delta}{H^3}\right) \quad ; \quad \nu\left(\frac{U}{\delta^2}\frac{\delta}{H}\right) \quad ; \quad \frac{\nu}{K}\frac{U\delta}{H} \quad ; \quad \frac{F}{\sqrt{K}}\frac{U^2\delta}{H}$$

En tenant compte l'approximation de la couche limite $\delta \ll H$, tous les termes qui contiennent le rapport $\frac{\delta}{H}$ seront négligés, alors tous les termes de cette équation se simplifient.

Dans le cas stationnaire et bidimensionnel l'équation de conservation d'énergie s'écrit :

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \tag{II.15}$$

Les ordres de grandeur de chacun des termes de l'équation sont respectivement :

$$\underbrace{\frac{UT}{H}}_{1} \quad ; \quad \underbrace{\frac{U\delta}{H}\frac{T}{\delta}}_{2} \quad ; \quad \underbrace{\alpha\left(\frac{T}{H^2}\right)}_{3} \quad ; \quad \underbrace{\alpha\left(\frac{T}{\delta^2}\right)}_{4}$$

On voit clairement que, Les deux premiers termes sont du même ordre de grandeur UT/H, et puisque $\delta \ll H$, alors Le troisième terme est plus petit que le quatrième. Donc on peut le négliger en gardant le quatrième.terme

IV.2 Système des équations retenu

Compte tenu des hypothèses mentionnés auparavant, de l'approximation de la couche limite et en supposant la validité de la formulation de Darcy-Brinkman-Forchheimer, les équations de conservation macroscopiques de masse, de quantité de mouvement et d'énergie décrivant le phénomène de l'écoulement et de transfert de chaleur par convection dans un milieu poreux saturé par un fluide newtonien incompressible en régime stationnaire peuvent être écrites de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T - T_\infty) - \dfrac{\nu}{K}u - \dfrac{F}{\sqrt{K}}|u|u \\ \\ u\dfrac{\partial T}{\partial x} + v\dfrac{\partial T}{\partial y} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{cases} \tag{II.16}$$

Où u et v sont, respectivement, les composantes de la vitesse le long des axes x et y. T est la température du fluide. Les constantes : ν, K, α, β et g sont, respectivement, la viscosité cinématique, la perméabilité du milieu poreux, la diffusivité thermique, le coefficient d'expansion thermique et l'accélération de la pesanteur, F est le coefficient de Forchheimer.

Ces équations sont couplées avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} y = 0, \quad x \geq 0, \quad u = U_0, \quad v = V_w, \quad T = T_w \\ \\ y \to \infty, \quad x \geq 0, \quad u = 0, \quad T = T_\infty \end{cases} \tag{II.17}$$

$V_w = Bx^{(\lambda-1)/2}$ est la vitesse d'aspiration/injection au niveau de la plaque, où B est une constante, avec $B > 0$ correspond au cas de l'injection du fluide , $B < 0$ correspond au cas de l'aspiration du fluide et $B = 0$ correspond à une plaque imperméable. $U_0 = ax$ est la vitesse du courant libre parallèle à la plaque verticale, généralement, consdérée très faible.

V Méthodes de résolution

Beaucoup de phénomènes physiques et des sciences de l'ingénieur peuvent être modélisés par des équations différentielles ou, aux dérivées partielles "EDP", non linéaires. La résolution de ces équations est ainsi un problème courant, souvent difficile ou impossible à résoudre de façon analytique. Pour cela, dans les deux chapitres suivants, nous avons procédé à une résolution numérique des systèmes d'équations différentielles gouvernent le problème d'écoulement et du transfert de chaleur obtenus par l'approche de similarité, en utilisant la méthode de Runge-Kutta- Fehlberg d'ordre 5 couplée avec la technique de Tir qui est plus adaptée aux problèmes à valeurs limites, lorsque les valeurs initiales nécessaires au démarrage du calcul ne sont pas toutes connues. Cette situation est bien rencontrée dans la présente étude.

V.1 La Méthode de Runge-Kutta-Fehlberg

La Méthode de Runge-Kutta-Fehlberg, est une méthode couramment utilisée pour la résolution d'équations différentielles ordinaires. Elle a été élaborée en 1901 par les mathématiciens Carl Runge, Martin Wilhelm Kutta et Erwin Fehlberg, Cette méthode, à pas unique, repose sur le principe de l'itération, c'est-à-dire qu'une première estimation de la solution est utilisée pour calculer une seconde estimation plus précise. Elle présente l'avantage d'être simple à programmer et d'être assez stable pour les fonctions courantes de la physique.

Sur le plan de l'analyse numérique, la méthode de Runge-Kutta-Fehlberng a surtout l'immense avantage de ne pas nécessiter autre chose que la connaissance des valeurs initiales pour le démarrage du calcul. Son inconvénient est qu'elle est assez consommatrice en temps de calcul. On peut donc l'utiliser lorsque le temps de calcul n'est pas trop grand.

Pour résoudre le système d'équations différentielles rencontrées dans cette étude, nous avons choisi la méthode de Runge-Kutta- Fehlberg d'ordre 5, grâce à ses avantages cités précédemment et sa précision par rapport aux méthodes de Runge-Kutta d'ordres inférieurs.

Le principe général de cette méthode est le suivant :
On considère l'équation différentielle du premier ordre à valeur initiale (PVI) suivante :

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{II.18}$$

On suppose que la valeur de y_n au noeud x_n est approximativement connue, et on cherche à rapprocher $y_{(n+1)}$ au noeud $x_{(n+1)}$ en utilisant la méthode de Runge-Kutta- Fehlberg d'ordre 5. La forme générale de cette méthode :

$$k_1 = h\, f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h\, f(x_n + a_2 h, y_n + b_{21} k_1)$$

...

$$k_6 = h f(x_n + a_6 h, y_n + b_{61} k_1 + b_{62} k_2 + b_{63} k_3 + b_{64} k_4 + b_{65} k_5)$$

$$y_{n+1} = y_n + c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3 + c_4 k_4 + c_5 k_5 + c_6 k_6 + O(h^6)$$

Les valeurs particulières des différentes constantes que nous privilégions sont celles trouvées par Runge-Kutta-Fehlberg qui sont regroupées dans le tableau suivant :

TABLE II.1 – Valeurs des constantes de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 5

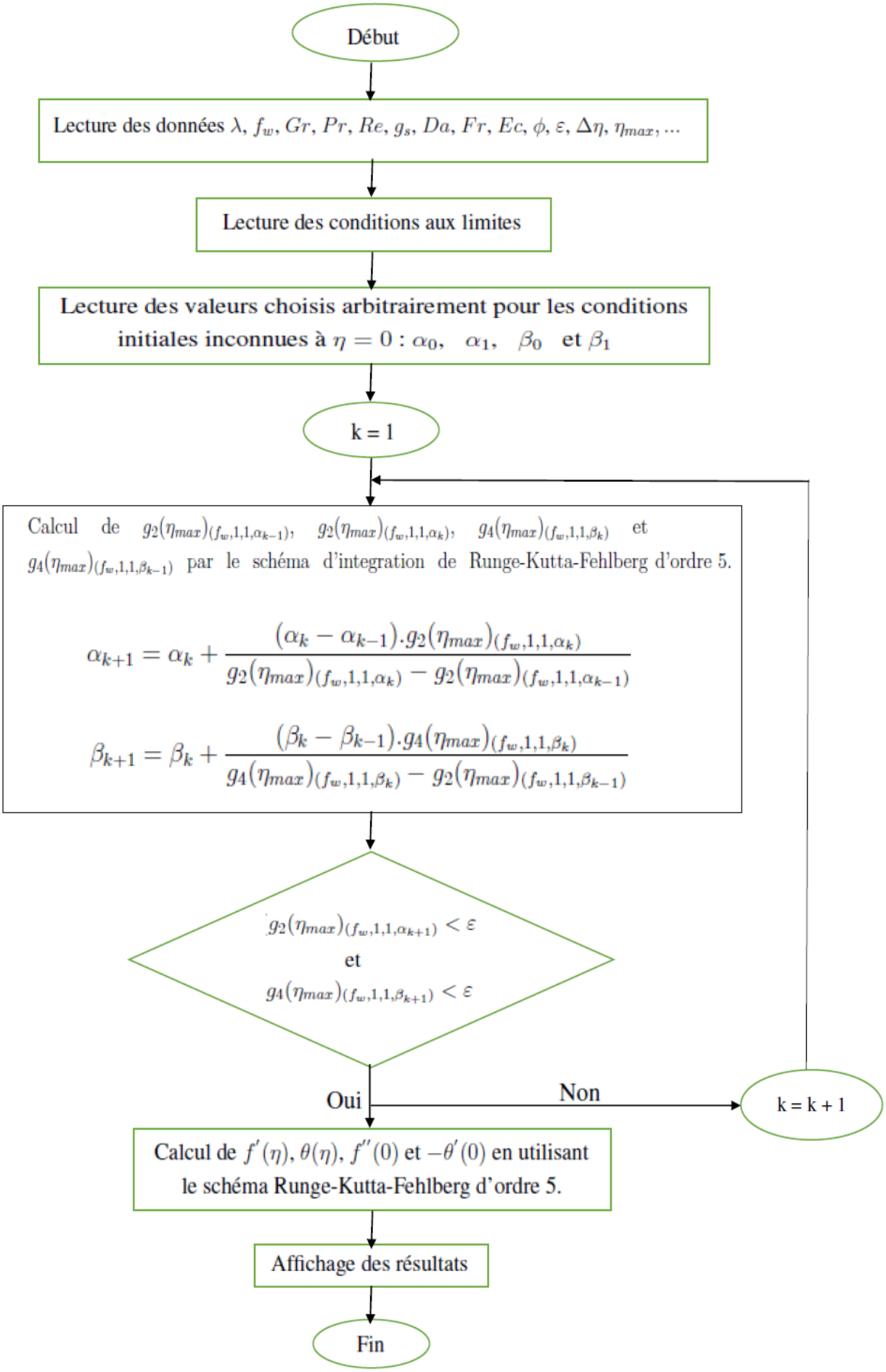
i	a_i	b_{ij}					c_i
1							$\frac{16}{135}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$					0
3	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$				$\frac{6656}{12825}$
4	$\frac{12}{13}$	$\frac{1932}{2197}$	$-\frac{7200}{2197}$	$\frac{7296}{2197}$			$\frac{28561}{56430}$
5	1	$\frac{439}{216}$	-8	$\frac{3680}{513}$	$-\frac{845}{4104}$		$-\frac{9}{50}$
6	$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{27}$	2	$-\frac{3544}{2565}$	$\frac{1859}{4104}$	$-\frac{11}{40}$	$\frac{2}{55}$
j =		1	2	3	4	5	

V.2 Technique de Tir

Beaucoup d'applications dans les sciences physiques n'ont pas des conditions initiales, mais plutôt des conditions aux limites. En effet, la méthode de Tir consiste à transformer le problème aux limites en un problème aux valeurs initiales. Elle est basée sur les quatre étapes itératives suivantes :

- On choisit une condition initiale x_0.
- On résout alors le problème aux conditions initiales par la méthode de Runge Kutta d'ordre 5.
- On calcule la valeur de la condition aux limites.
- Si la valeur finale n'est pas atteinte, on modifie la valeur initiale, et on recommence les étapes précédentes jusqu'à l'obtention de la valeur finale souhaitée.

V.3 Organigramme de calcul


Début
Lecture des données λ, f_w, Gr, Pr, Re, g_s, Da, Fr, Ec, ϕ, ε, $\Delta\eta$, η_{max}, ...
Lecture des conditions aux limites
Lecture des valeurs choisis arbitrairement pour les conditions initiales inconnues à $\eta = 0$: α_0, α_1, β_0 et β_1
k = 1
Calcul de $g_2(\eta_{max})_{(f_w,1,1,\alpha_{k-1})}$, $g_2(\eta_{max})_{(f_w,1,1,\alpha_k)}$, $g_4(\eta_{max})_{(f_w,1,1,\beta_k)}$ et $g_4(\eta_{max})_{(f_w,1,1,\beta_{k-1})}$ par le schéma d'integration de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 5.
$\alpha_{k+1} = \alpha_k + \frac{(\alpha_k - \alpha_{k-1}).g_2(\eta_{max})_{(f_w,1,1,\alpha_k)}}{g_2(\eta_{max})_{(f_w,1,1,\alpha_k)} - g_2(\eta_{max})_{(f_w,1,1,\alpha_{k-1})}}$
$\beta_{k+1} = \beta_k + \frac{(\beta_k - \beta_{k-1}).g_4(\eta_{max})_{(f_w,1,1,\beta_k)}}{g_4(\eta_{max})_{(f_w,1,1,\beta_k)} - g_2(\eta_{max})_{(f_w,1,1,\beta_{k-1})}}$
$g_2(\eta_{max})_{(f_w,1,1,\alpha_{k+1})} < \varepsilon$
et
$g_4(\eta_{max})_{(f_w,1,1,\beta_{k+1})} < \varepsilon$
Oui
Non
k = k + 1
Calcul de $f'(\eta)$, $\theta(\eta)$, $f''(0)$ et $-\theta'(0)$ en utilisant le schéma Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 5.
Affichage des résultats
Fin

VI Conclusion

Ce chapitre a été consacré, dans un premier temps, à la présentation des équations de conservations de la masse, de quantité mouvement et d'énergie gouvernant l'écoulement et le transfert de chaleur par convection en milieu poreux saturé de fluide newtonien, avec une description générale du problème physique à étudier dans les prochains chapitres. En second lieu, nous avons fait une description du principe de la méthode de Runge-Kutta-Fehlberng d'ordre 5, et de la technique de Tir. Ensuite, nous avons présenté l'algorithme de calcul utilisé.

Dans le prochain chapitre, nous étudierons, le phénomène de la convection naturelle/mixte autour d'une plaque poreuse maintenue à une température non-uniforme immergée verticalement ou inclinée d'un angle ϕ par rapport à la verticle, dans un milieu poreux non Darcien saturé de fluide newtonien en présence d'une vitesse d'aspiration/injection à sa surface. La formulation de Darcy-Brinkman est utiliséé pour modéliser l'écoulement dans le milieu poreux. La résolution numérique du système d'équations régissant le problème étudié est basée sur la méthode de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 5 couplée avec une technique itérative de Tir.

Chapitre III

Approche semi-analytique du modèle de Darcy-Brinkman

I Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter une étude théorique et numérique du phénomène de la convection naturelle ou mixte, dans un milieu poreux non-Darcien saturé de fluide incompressible newtonien en régime laminaire autour d'une plaque plane verticale et inclinée d'un angle ϕ par rapport à la verticale, soumise à une vitesse d'aspiration/injection, en absence ou en présence d'une génération interne de chaleur et des effets de la radiation thermique. L'écoulement est modélisé par la formulation de Darcy-Brinkman, en raison de la considération des effets de diffusion visqueuse au niveau des parois. L'approximation de Rosseland est utilisée pour décrire le flux de chaleur radiatif pris en compte dans l'équation d'énergie. Les équations aux dérivées partielles régissant le phénomène étudié sont transformées en un système d'équations différentielles ordinaires non linéaires et résolues numériquement à l'aide la méthode de Runge-Kutta à l'ordre 5 couplée avec la technique de tir. La procédure de simulation a été validée en comparant les résultats obtenus avec des travaux publiés antérieurement. Les résultats sont analysés pour l'effet de divers paramètres physiques contrôlant le problème étudié.

II Transfert de chaleur par convection le long d'une plaque verticale

II.1 Position du problème

Le modèle physique étudié dans cette section est représenté sur la figure (IV.1). Il s'agit une plaque plane poreuse de hauteur H, chauffée et immergée verticalement dans un milieu poreux non-Darcien saturé par un fluide Newtonian. La plaque est maintenue à une temperature T_w, qui varie selon la relation $T_w = T_\infty + Ax^\lambda$, supérieure à la température ambiante T_∞ et soumise à une vitesse latérale d'aspiration ou d'injection $V_w = Bx^{(\lambda-1)/2}$ où A et B sont des constantes et λ est l'exposant de température de la plaque. Les coordonnées cartésiennes x et y sont mesurées, respectivement, le long de, et perpendiculaire à la plaque.

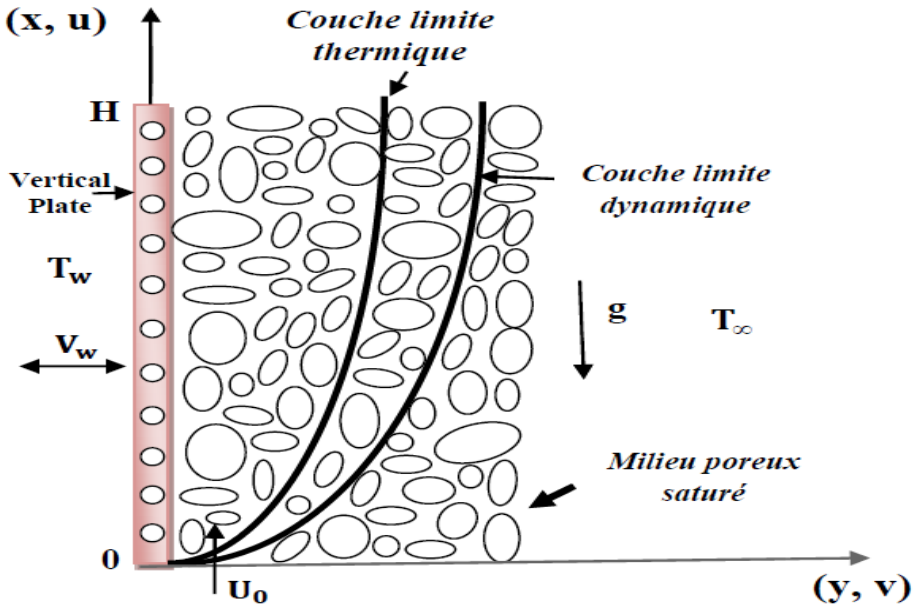


FIGURE III.1 – Modèle physique et système de coordonnées.

II.2 Système d'équations gouvernant le phénomène étudié

Compte tenu des hypothèses mentionnés au chapitre II, et en supposant la validité de la formulation de Darcy-Brinkman, les équations de conservation macroscopiques de masse, de quantité de mouvement et d'énergie décrivant le phénomène de l'écoulement et de transfert de chaleur par convection dans un milieu poreux saturé par un fluide newtonien incompressible en régime stationnaire peuvent être écrites de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T - T_\infty) - \dfrac{\nu}{K}u \\ u\dfrac{\partial T}{\partial x} + v\dfrac{\partial T}{\partial y} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{cases} \tag{III.1}$$

Où u et v sont, respectivement, les composantes de la vitesse le long des axes x et y. T est la température du fluide. Les constantes : ν, K, α, β et g sont, respectivement, la viscosité cinématique, la perméabilité du milieu poreux, la diffusivité thermique, le coefficient d'expansion thermique et l'accélération de la pesanteur. T_∞ est la température ambiante.

Ces équations sont couplées avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} y = 0, \quad x \geq 0, \quad u = U_0, \quad v = V_w, \quad T = T_w \\ y \to \infty, \quad x \geq 0, \quad u = 0, \quad T = T_\infty \end{cases} \tag{III.2}$$

$V_w = Bx^{(\lambda-1)/2}$ est la vitesse d'aspiration/injection au niveau de la plaque, où B est

une constante, avec $B > 0$ correspond au cas de l'injection du fluide , $B < 0$ correspond au cas de l'aspiration du fluide et $B = 0$ correspond à une plaque imperméable. $U_0 = ax$ est la vitesse du courant libre parallèle à la plaque verticale, généralement, consdérée très faible.

II.3 Approche de similarité et modèle adimensionnel

La non-linéarité du modèle utilisé et la complexité des phénomènes rencontrés (couche limite, instabilité, géométrie du milieu poreux ...) rendent difficile sa résolution directe. A cet effet, nous utiliserons par la suite une méthode de similarité qui consiste à transformer le système d'équations aux dérivées partielles (EDP) décrivant le problème d'écoulement et du transfert de chaleur étudié en un simple système d'équations différentielles ordinaires non-linéaires.

En introduisant la fonction du courant ψ qui est définie habituellement par :

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ \\ v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \tag{III.3}$$

La première équation du système (III.1) est satisfaite automatiquement, la deuxième et la troisième équation deviennent, respectivement, de telle sorte que la deuxième équation fait apparaître des dérivées partielles jusqu'au troisième ordre :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + g\beta(T - T_\infty) - \frac{\nu}{K}\frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{III.4}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{III.5}$$

Nous introduisons les transformations de similarité suivantes :

$$\begin{cases} \eta = y\left(\dfrac{a}{\nu}\right)^{1/2} \\ \\ \psi = (a\nu)^{1/2} x f(\eta) \\ \\ \theta = \dfrac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \end{cases} \tag{III.6}$$

Après substitution et développement, les équations aux dérivées partielles (III.4) et (III.5) sont réduites au système d'équations différentielles sous forme adimensionnelle suivante :

$$\begin{cases} f''' + f f'' - f'^2 - \dfrac{1}{Da\ Re} f' + g_s \theta = 0 \\ \\ \theta'' + Pr\,(f\theta' - \lambda f'\theta) = 0 \end{cases} \tag{III.7}$$

Où $f(\eta)$ et $\theta(\eta)$ sont des fonctions de similarité adimensionnelles, et $g_s = \frac{Gr}{Re^2}$ est le paramètre de convection mixte, $Gr = \frac{\beta g(T_w - T_\infty)x^3}{\nu^2}$ est le nombre de Grashof, $Re = \frac{U_0\, x}{\nu}$ est le nombre de Reynolds, and $Pr = \frac{\nu}{a}$, $Da = \frac{K}{x^2}$ sont respectivement le nombre de Prandtl et le nombre Darcy.

Les conditions aux limites associées à ce système sont :

$$\begin{cases} \eta = 0, \quad f(0) = f_w, \quad f'(0) = 1, \quad \theta(0) = 1 \\ \\ \eta \to \infty \quad f'(\infty) = 0, \quad \theta(\infty) = 0 \end{cases} \tag{III.8}$$

Où $f_w = -V_w \left(\dfrac{x}{U_0 \nu}\right)^{1/2}$ est le paramètre d'aspiration/injection, avec $f_w > 0$ correspond à une aspiration, $f_w < 0$ à une injection et $f_w = 0$ à une plaque imperméable.

II.4 Nombres adimensionnels

La mise sous forme adimensionnelle des équations de conservations, fait apparaître dans la présente étude, des nombres sans dimensions caractéristiques du problème physique, qui sont :

- $Gr = \frac{\beta g(T_w - T_\infty)x^3}{\nu^2}$ est le nombre de Grashof : indique le rapport de la force de flottabilité à la force visqueuse agissant sur le fluide.

- $Re = \frac{U_0\, x}{\nu}$ est le nombre de Reynolds : fournit une mesure du rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses agissant sur un élément de fluide.

- $Pr = \frac{\nu}{a}$ le nombre de Prandtl : représente le rapport entre la diffusivité de quantité de mouvement (ou viscosité cinématique)ν et la diffusivité thermique α.

- $Da = \frac{K}{x^2}$ le nombre Darcy.

- $g_s = \frac{Gr}{Re^2}$ est le paramètre de convection mixte : D'une façon générale, les effets combinés de la convection naturelle et forcée doivent être considérés quand $(Gr/Re^2) = 1$. Si $(Gr/Re^2) \ll 1$ les effets de convection naturelle peuvent être négligés. Si $(Gr/Re^2) \gg 1$ les effets de convection forcée peuvent être négligés (Incropera et Dewitt [94]).

II.4.1 Coefficient de frottement

Le coefficient de frottement local est défini par :

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\,\rho\,U_0^2} \tag{III.9}$$

Où τ_w est la contrainte pariétale à la surface de la plaque donnée par l'équation :

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \tag{III.10}$$

Soit donc :

$$C_f = \frac{\mu}{\frac{1}{2}\,\rho\,U_0^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \tag{III.11}$$

On remplace u par la fonction du courant ψ, l'équation (III.11) devient :

$$C_f = \frac{\mu}{\frac{1}{2}\,\rho\,U_0^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right)_{y=0} \tag{III.12}$$

Alors :

$$C_f = \frac{\mu}{\frac{1}{2}\,\rho\,U_0^2} \left(\frac{U_0}{\nu x}\right)^{1/2} U_0 f''(0) \tag{III.13}$$

Finalement C_f peut être exprimé par :

$$C_f = \frac{2}{\sqrt{Re}} f''(0) \tag{III.14}$$

II.4.2 Nombre de Nusselt local

On applique la loi de Fourier, le flux de conduction transmis à l'interface de la plaque $(y = 0)$ est donné par l'équation :

$$q_w = -k \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = -k \triangle T \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} \theta'(0) \tag{III.15}$$

Ainsi le nombre de Nusselt local est défini par :

$$Nu = \frac{h\,x}{k} \tag{III.16}$$

On utilise l'équation de flux de convection (loi Newton) :

$$q_{con} = h\,\triangle T \tag{III.17}$$

On remplace (III.17) dans (III.16) on aura :

$$Nu = \frac{q_{con}.x}{k\triangle T} \tag{III.18}$$

Comme le flux de conduction transmis à l'interface de la plaque est égale au flux reçu par le fluide par convection $q_w = q_{conv}$, alors :

$$Nu = -\frac{x\ k\ \triangle T}{k\triangle T}\sqrt{\frac{U_0}{\nu x}}\ \theta'(0) \tag{III.19}$$

Finalement Nu peut être exprimé par :

$$Nu = -\sqrt{Re}\ \theta'(0) \tag{III.20}$$

II.5 Procédure de résolution numérique.

Le système d'équations différentielles adimensionnelles (III.7) assorti des conditions aux limites (III.8) est non-linéaire. Cependant, il est difficile de le résoudre analytiquement. Pour cela, nous avons procédé à une résolution numérique en utilisant la méthode de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 5 couplée avec la technique de Tir qui est plus adaptée aux problèmes à valeurs limites, lorsque les valeurs initiales nécessaires au démarrage du calcul ne sont pas toutes connues. Cette situation est bien rencontrée dans la présente étude.

Le système d'équations différentielles (III.7) est non-linéaire et contenant des équations de troisième ordre. Cependant, il est encore difficile de le résoudre analytiquement. Pour cela on cherche à le réécrire comme un système d'équations différentielles de premier ordre en adoptant les transformations suivantes :

$$g_1 = f(\eta), \quad g_2 = f'(\eta), \quad g_3 = f''(\eta), \quad g_4 = \theta(\eta), \quad g_5 = \theta'(\eta) \tag{III.21}$$

Donc le système d'équation différentielle (III.7 est équivalent au système d'équations différentielles de premier ordre suivant :

$$\begin{cases} g_1' = g_2 \\ g_2' = g_3 \\ g_3' = g_3 g_2 + g_2^2 - g_s g_4 + \dfrac{1}{Da.Re} g_2 \\ g_4' = g_5 \\ g_5' = -Pr(g_1 g_5 - \lambda g_2 g_4) \end{cases} \tag{III.22}$$

Les conditions aux limites associés au système d'équations (III.22) sont :

$$\begin{cases} \eta = 0, \ \ g_1 = f_w, \ \ g_2 = 1, \ \ g_4 = 1 \\ \\ \eta \to \infty \ \ g_2 = 0, \ \ g_4 = 0 \end{cases} \tag{III.23}$$

II.6 Algorithme de résolution

Le système d'équations différentielles (III.22) couplées avec les conditions aux limites (III.23) a été résolu numériquement en utilisant la méthode de Runge-Kutta- Fehlberg d'ordre 5 en association avec la technique itérative de Tir avec $\eta_{max} = 15$ et $\Delta\eta = 10^{-4}$.

Puisque nous disposons des conditions initiales sur les fonctions g_2 et g_4 , il serait naturel de chercher les conditions initiales sur les fonctions g_3 et g_5 à $\eta = 0$, supposons que ($g_3 = \alpha \quad et \quad g_5 = \beta$) de telle sorte que $g_2(\infty) = 0$ et $g_4(\infty) = 0$.

L'algorithme pratique adopté à la résolution du système d'équations (III.22) précédent, associés avec les conditions aux limites (III.23) est le suivant :

- Etape initiale : On prendre les valeurs α_0, α_1, β_0 et β_1 arbitrairement dans $\mathbb{R}$.

- Etape k : On suppose que les valeurs α_{k-1}, α_k, β_{k-1} et β_k connues

  - Calcul de $g_2(\eta_{max})_{(f_w,1,1,\alpha_{k-1})}$, $g_2(\eta_{max})_{(f_w,1,1,\alpha_k)}$, $g_4(\eta_{max})_{(f_w,1,1,\beta_k)}$ et $g_4(\eta_{max})_{(f_w,1,1,\beta_{k-1})}$ par le schéma d'integration de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 5.

  - Calcul de α_{k+1} et β_{k+1}

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + \frac{(\alpha_k - \alpha_{k-1}).g_2(\eta_{max})_{(f_w,1,1,\alpha_k)}}{g_2(\eta_{max})_{(f_w,1,1,\alpha_k)} - g_2(\eta_{max})_{(f_w,1,1,\alpha_{k-1})}} \tag{III.24}$$

$$\beta_{k+1} = \beta_k + \frac{(\beta_k - \beta_{k-1}).g_4(\eta_{max})_{(f_w,1,1,\beta_k)}}{g_4(\eta_{max})_{(f_w,1,1,\beta_k)} - g_2(\eta_{max})_{(f_w,1,1,\beta_{k-1})}} \tag{III.25}$$

- Répéter le processus jusqu'à ce que la condition suivante soit satisfaite : $(g_2(\eta_{max})_{(f_w,1,1,\alpha_{k+1})} = 0,\ \eta_{max} = 15)$ et $g_4(\eta_{max})_{(f_w,1,1,\beta_{k+1})} = 0,\ \eta_{max} = 15)$.

II.7 Résultats numériques et analyse.

Dans cette étude, nous avons analysé les effets du paramètre exposant de la température λ, du paramètre aspiration/injection f_w, du nombre Prandtl Pr, du nombre de Reynolds Re, du nombre de Darcy Da et du paramètre de la convection mixte g_s sur le flux convectif le long d'une plaque plane verticale chauffée et noyée dans un milieu poreux non Darcien saturé de fluide newtonien. L'écoulement est modélisé par la formulation de Darcy-Brinkman, en temant compte du terme convectif dans l'équation de quantité mouvement. Nous rappelons que l'aspiration de fluide correspond à $f_w > 0$, l'injection de fluide à $f_w < 0$ et $f_w = 0$ correspond à une plaque imperméable. Ainsi que l'importance du régime de transfert de chaleur par rapport à l'autre est caractérisée par le paramètre de convection mixte g_s, le cas $g_s < 1$ correspond à une convection forcée pure, $g_s = 1$ correspond à une convection mixte et $g_s > 1$ correspond à une convection naturelle pure.

II.7.1 Validation des résultats.

Pour évaluer la précision du code de calcul, développé dans le cadre de la présente thèse, des comparaisons ont été faites en termes de gradient de température et de coefficient de frottement à la surface de la plaque avec les résultats de Imran et al. [95] et Ishak et al. [96]. Les tableaux III.1 et III.2 montrent un très bon accord entre nos résultats et ceux des auteurs. Par conséquent, nous déduisons que la méthode de résolution numérique (RK5) sur laquelle est basé le travail est assez précise.

TABLE III.1 – Comparaison du gradient de température à la surface avec les résultats précédemment publiés pour une plaque imperméable.

Pr	Résultats analytiques [95]	Présente étude RK5	RE (%)/ [95]
0.72	0.8086	0.8088	0.02
1.00	1.0000	1.0000	0.0
3.00	1.9234	1.9236	0.01
10.0	3.7205	3.7206	0.002

TABLE III.2 – Comparaison du gradient de température à la surface avec les résultats précédemment publiés pour une plaque imperméable.

Da	Pr	Résultats de Ishak et al. [96]	Présente étude RK5	ER (%)/ [96]
0.2	0.72	0.8278	0.8278	0.0
0.2	1.00	1.0000	1.0000	0.0
0.2	6.80	2.9573	2.9571	0.006
0.2	10.0	3.6478	3.6474	0.01
0.04	0.72	0.6374	0.6373	0.01
0.04	1.00	0.7917	0.7918	0.01
0.04	6.80	2.6953	2.6952	0.003
0.04	10.0	3.3859	3.3860	0.002

II.7.2 Profils adimensionnels de vitesse et de température

II.7.2.a Effet du paramètre d'aspiration/injection f_w

Les figures (III.2) et (III.3) présentent, respectivement, les profils de vitesse et de température adimensionnelle dans la zone de la couche limite, près d'une plaque isotherme $\lambda = 0$, immergée dans un milieu poreux saturé de fluide newtonien, pour $Pr = 0.71$, $Re = 5$, $Da = 0.2$ et $g_s = 1$, à différentes valeurs du paramètre d'aspiration/injection

TABLE III.3 – Comparaison du coefficient de frottement à la surface avec les résultats précédemment publiés pour une plaque imperméable.

Da	Pr	Résultats de Ishak et al. [96]	Présente étude RK5	ER (%)/ [96]
0.2	0.72	-0.9625	-0.9625	0.0
0.2	1.00	-1.0000	-1.0000	0.0
0.2	6.80	-1.2089	-1.2089	0.0
0.2	10.0	-1.2404	-1.2404	0.0
0.04	0.72	-2.1118	-2.1118	0.0
0.04	1.00	-2.1281	-2.1281	0.0
0.04	6.80	-2.2584	-2.2583	0.004
0.04	10.0	-2.2848	-2.2848	0.0

f_w. Il est bien remarquable à partir de la figure (III.2) l'épaisseur de la couche limite dynamique diminue avec l'aspiration du fluide et augmente avec l'injection du fluide. Autrement dit, la vitesse d'écoulement augmente avec l'injection du fluide au niveau de la surface et diminue avec son aspiration, ce résultat est en accord avec celui qu'on peut tirer de la figure (III.3), qui montre que l'aspiration du fluide à la surface réduit considérablement l'épaisseur de la couche limite thermique, et par conséquent conduit à un refroidissement près de la plaque, contrairement à l'effet de l'injection du fluide.

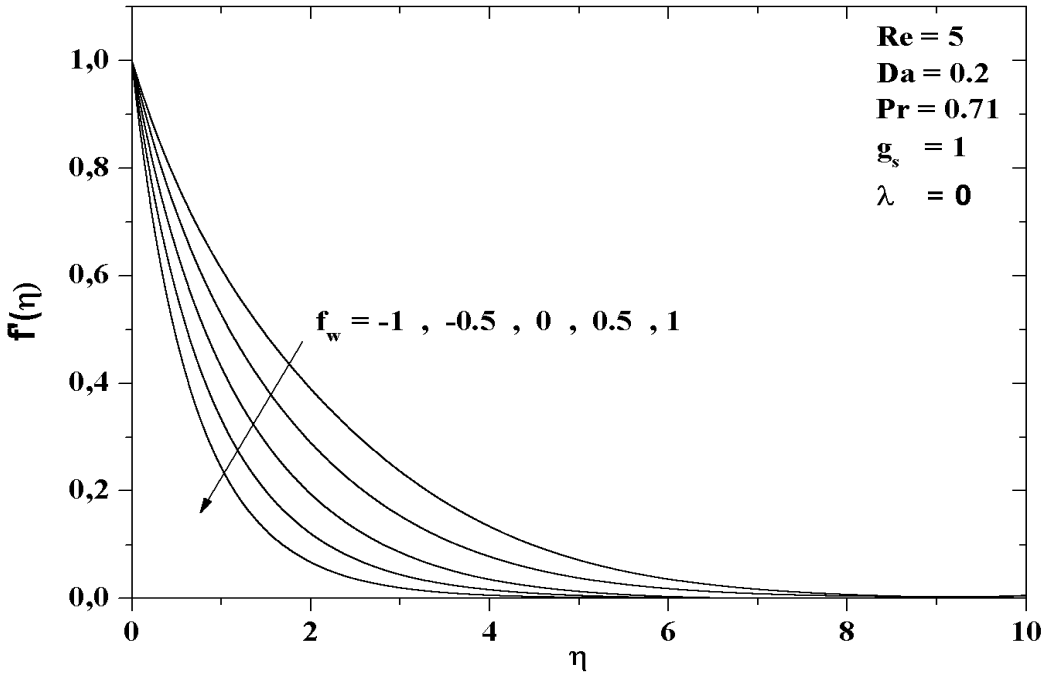


FIGURE III.2 – Profil de vitesse adimensionnelle pour $\lambda = 0$.

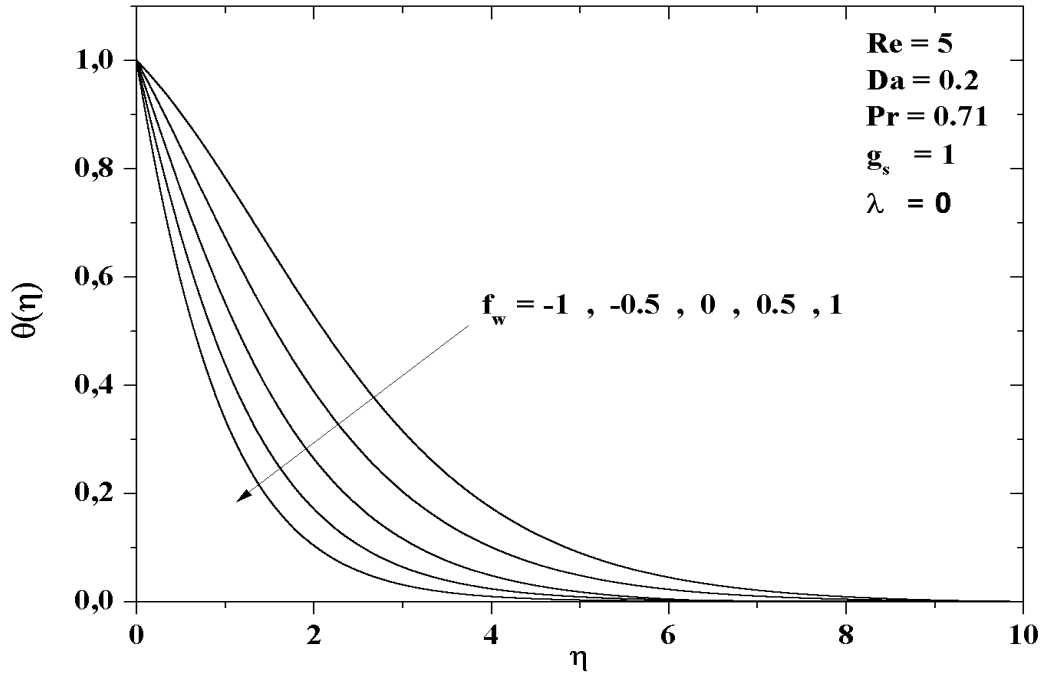


FIGURE III.3 – Profil de température adimensionnelle pour $\lambda = 0$.

II.7.2.b Effet du nombre de Prandtl Pr sur la distribution de température adimensionnelle

Dans la figure (III.4), nous présentons la distribution de température adimensionnelle dans la zone de la couche limite pour une plaque verticale isotherme ($\lambda = 0$) et imperméable ($f_w = 0$) encastrée dans un milieu poreux saturé pour différentes valeurs du nombre de Prandtl à $Re = 5$, $Da = 0.2$ et $g_s = 1$. On observe clairement que les profils de température diminuent avec l'augmentation du nombre de Prandtl, ce qui indique qu'une augmentation du nombre de Prandtl réduit l'épaisseur de la couche de limite thermique.

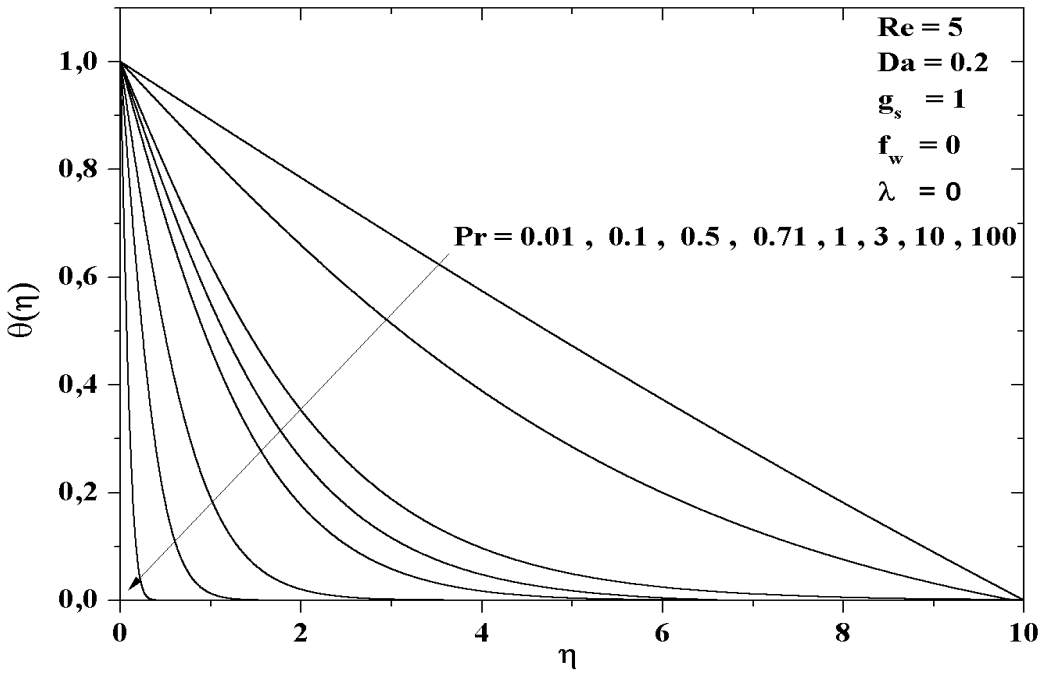


FIGURE III.4 – Effet de Pr sur la distribution de température adimensionnelle pour $\lambda = 0$ et $f_w = 0$

II.7.2.c Effet du paramètre de convection mixte g_s

La figure (III.5) montre pour différentes valeurs du paramètre de convection mixte g_s à $Re = 5$, $Da = 0.2$ et $Pr = 0.71$, les profils de vitesse adimensionnelle dans la zone de la couche limite pour une plaque plane isotherme ($\lambda = 0$) et imperméable ($f_w = 0$), chauffée et posée verticalement dans un milieu poreux saturé de fluide Newtonien, en tenant compte l'existance de trois régimes de transfert de chaleur par convection ($g_s < 1$, $g_s = 1$,$g_s > 1$). Nous remarquons ici que les profils de vitesse sont rapidement réduits en passant de régime du transfert de chaleur par convection libre ($g_s > 1$) au régime du transfert de chaleur par convection forcée ($g_s < 1$). D'autre part, l'épaisseur de la couche limite dynamique diminue lorsque le régime du transfert de chaleur par convection forcée est dominant, par contre il augmente lorsque le régime de transfert de chaleur par convection naturelle devient important.

Les effets du paramètre de convection mixte g_s sur la distribution de température adimensionnelle dans la zone de la couche limite au voisinage une plaque plane verticale, isotherme ($\lambda = 0$) et imperméable ($f_w = 0$), immergée dans un milieu poreux saturé de fluide Newtonien sont présentés sur la figure (III.6). Ici, on observe que, lorsque la valeur de gs augmente, les profils de température diminuent, ce qui entraîne une réduction de l' 'épaisseur la couche limite thermique.

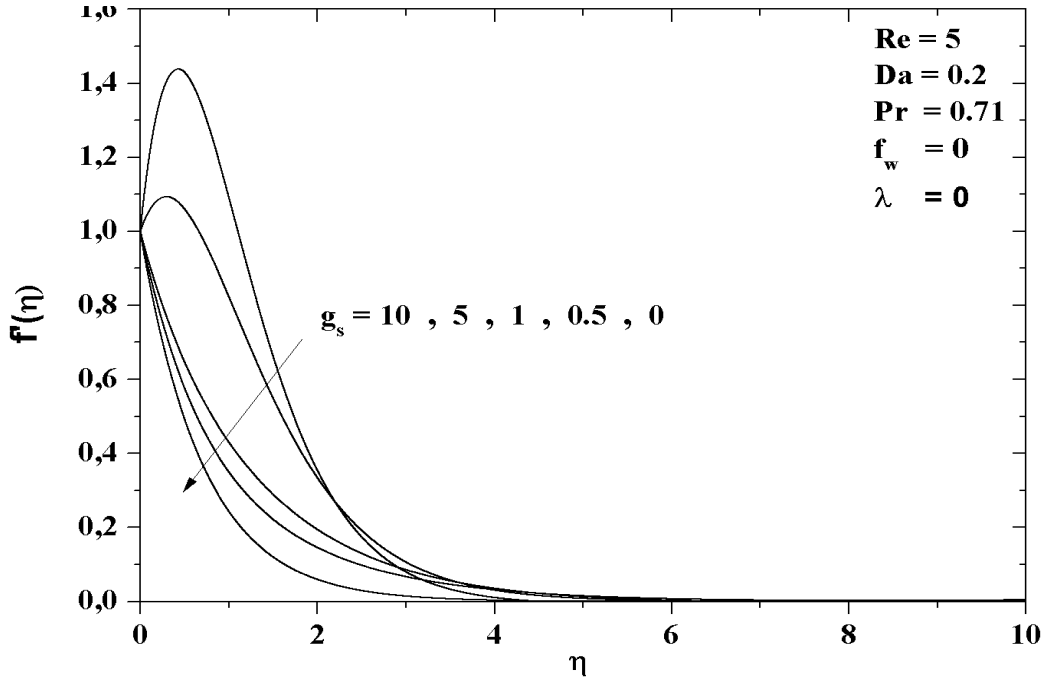


FIGURE III.5 – Influence du paramètre g_s sur les profils de vitesse adimensionnelle pour $\lambda = 0$ et $f_w = 0$

II.7.2.d Effet de l'exposant λ

L'effet de l'exposant de température λ sur les profils de température pour une plaque imperméable $f_w = 0$, incorporée dans un milieu poreux saturé, est représenté dans la figure (III.7), avec $Pr = 0.71$, $Re = 5$, $Da = 0.2$ et $g_s = 1$. D'après cette figure, on

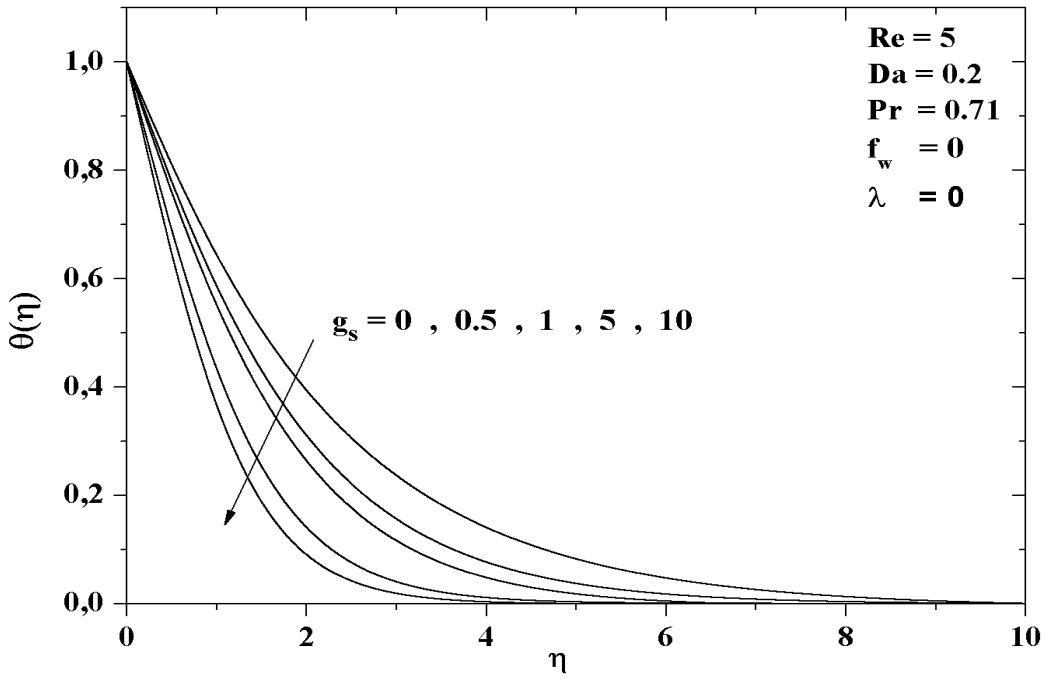


FIGURE III.6 – Influence du paramètre g_s sur la distribution de température adimensionnelle pour $\lambda = 0$ et $f_w = 0$

en conclut d'une part, que pour les quatre états thermiques de la plaque, nous avons des gradients thermiques qui sont négatifs, ce qui indique que le transfert de chaleur est toujours dirigé dans le sens direct (de la plaque vers le milieu poreux). D'autre part, l'augmentation de l'exposant de la température permet de réduire considérablement l'épaisseur de la couche limite thermique.

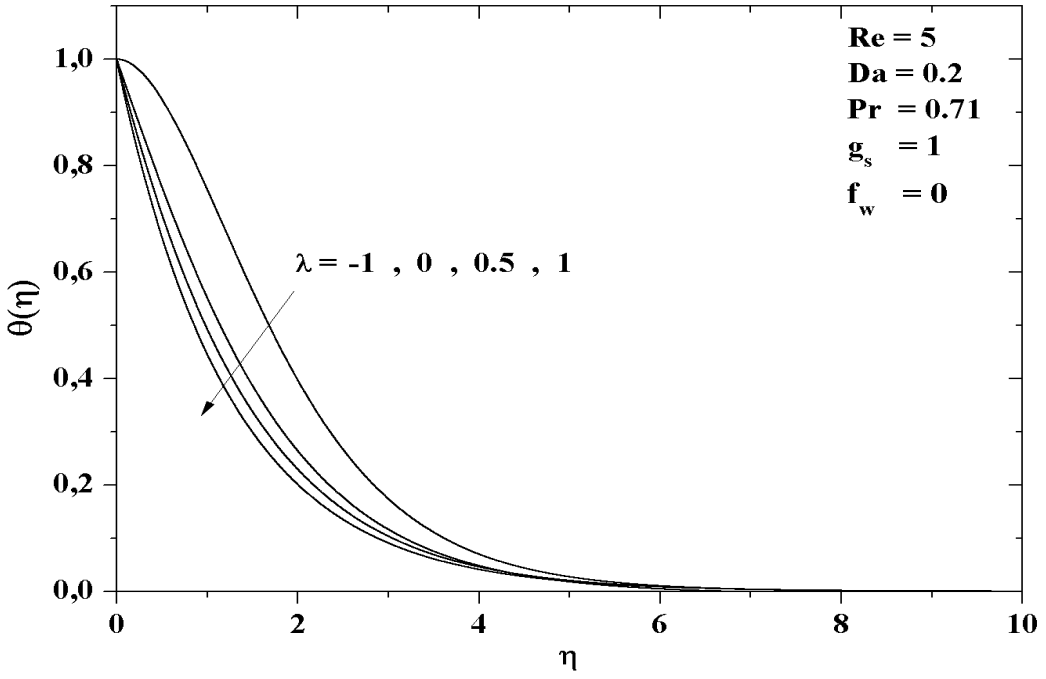


FIGURE III.7 – Profils de la la température adimensionnelle pour différentes valeurs de λ avec $f_w = 0$

II.7.2.e Effet du nombre de Darcy Da

La figure (III.8) montre l'influence du nombre de Darcy Da sur les profils de température adimensionnelle pour une plaque verticale isotherme ($\lambda = 0$) et imperméable ($f_w = 0$) dans le cas d'une convection mixte ($g_s = 1$). Nous remarquons que le milieu poreux perméable favorise davantage le refroidissement dans la zone de la couche limite, ce qui explique la réduction de l'épaisseur de la couche limite thermique.

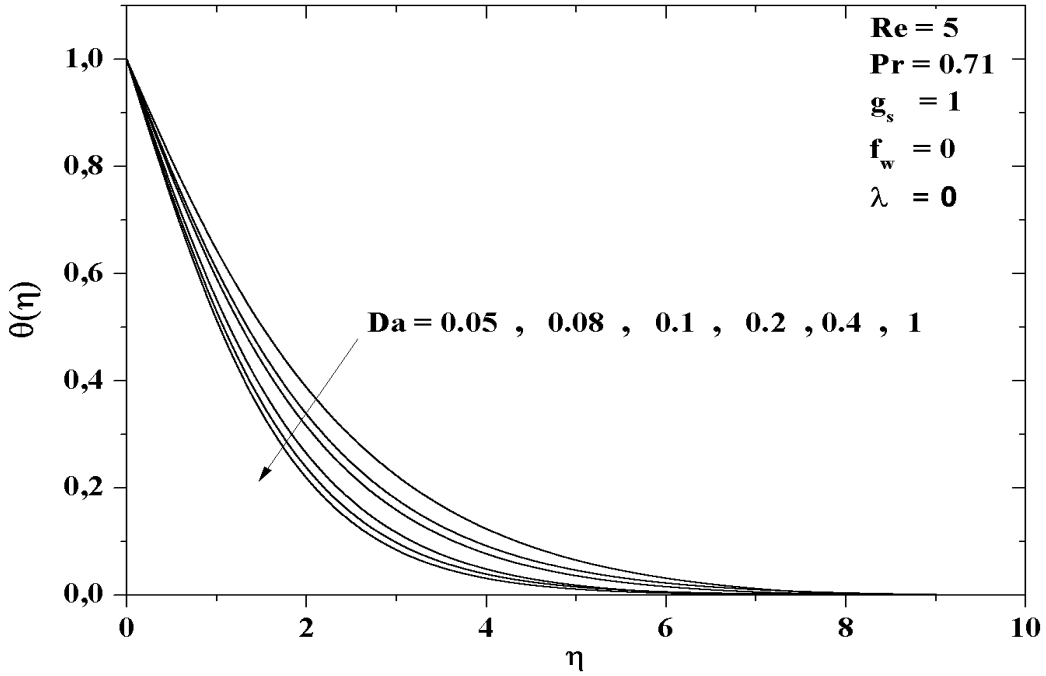


FIGURE III.8 – Influence du nombre Da sur les profils de température adimensionnelle pour $\lambda = 0$ et $f_w = 0$

II.7.2.f Effet du nombre de Reynolds Re

Dans la figure (III.9), nous présentons les profils de température adimensionnelle dans la zone de la couche limite pour différentes valeurs du nombre de Reynolds Re, avec $Pr = 0,71$, $Da = 0.2$, $g_s = 1$ et $f_w = 0$. Nous concluons de cette figure que les forces d'inertie aident à réduire l'épaisseur de la couche limite thermique contrairement à l'effet des forces de cisaillement, ce qui permet de l'étendre.

II.7.3 Profils du nombre de Nusselt

Les effets du nombre de Reynolds et de Darcy sur le taux de transfert de chaleur à la surface pour les trois états thermiques de la plaque ($\lambda = -1, 0, 1$) sont illustrés respectivement aux figures (III.10) et (III.11). Il apparait clairement de ces figures que l'augmentation de Da et Re conduit à une augmentation du nombre de Nusselt dans les deux cas $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$. Par contre, on peut noter que le taux de transfert de chaleur reste constant et égal à zéro pour le cas $\lambda = -1$, ce qui indique qu'il n'ya pas d'échange de chaleur entre la plaque et le milieu poreux.

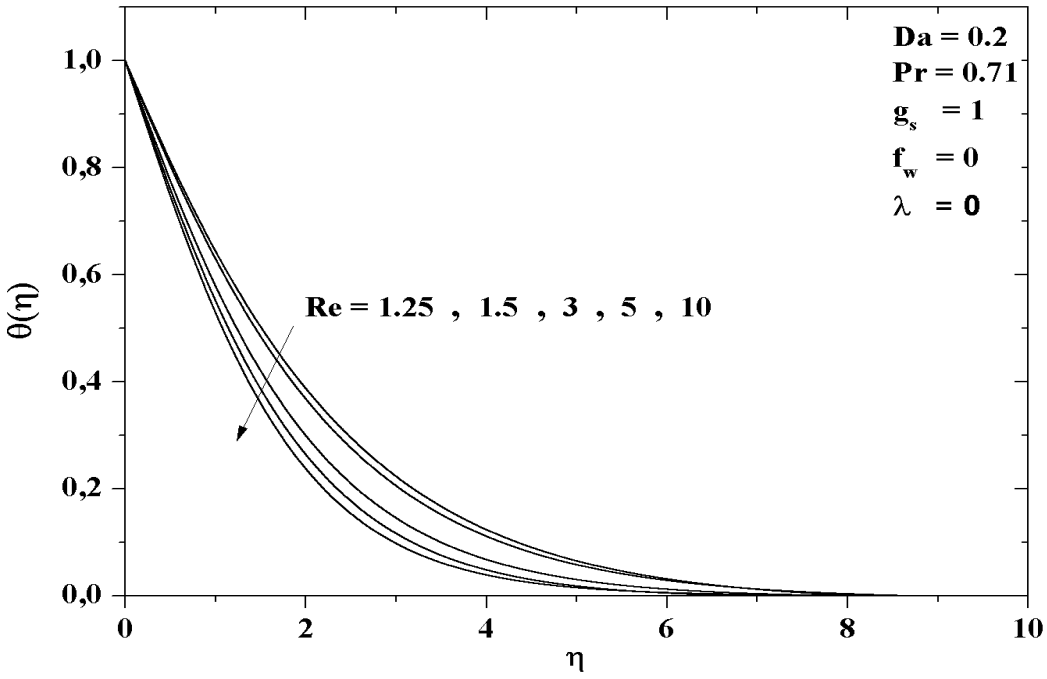


FIGURE III.9 – Influence du nombre Re sur les profils de température adimensionnelle pour $\lambda = 0$ et $f_w = 0$

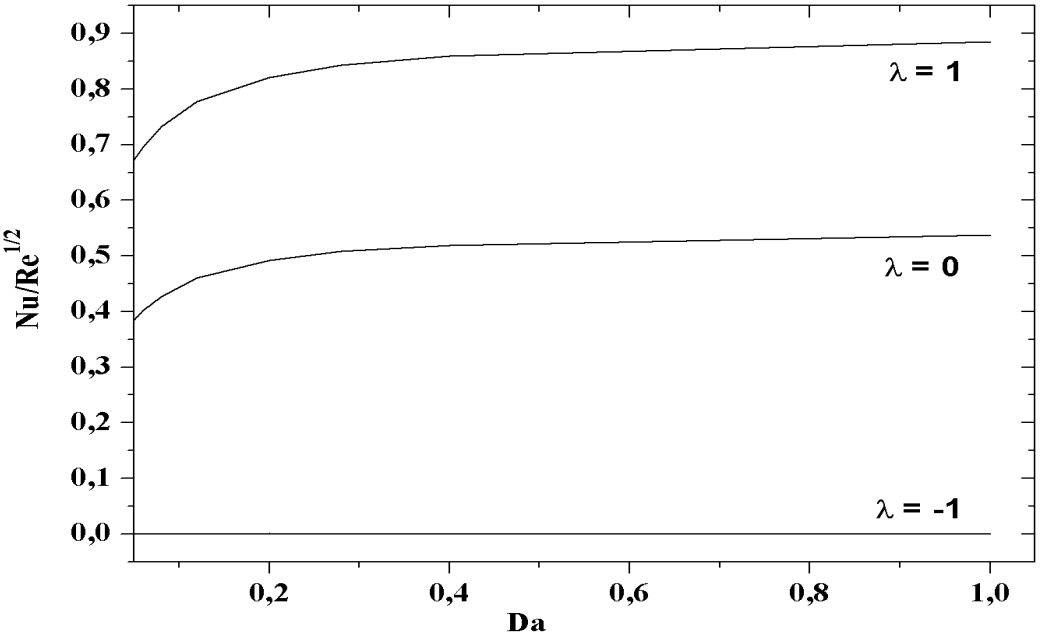


FIGURE III.10 – Profils de Nu en fonction de Da pour différentes valeurs de λ

La figure (III.12) illustre les profils du nombre de Nusselt local en fonction du paramètre de convection mixte g_s dans le cas d'une plaque perméable $f_w \neq 0$ et imperméable $f_w = 0$. Ici, on peut noter évidement que le taux de transfert de chaleur à la surface de la plaque est plus important lors du passage du régime de convection forcée $g_s < 1$ au régime de la convection naturelle $g_s > 1$. De plus, ce taux est amplifié avec l'aspiration du fluide et réduit avec l'injection du fluide. Cette évolution est également due à la dominance des forces gravitationnelles dans la zone de la couche limite.

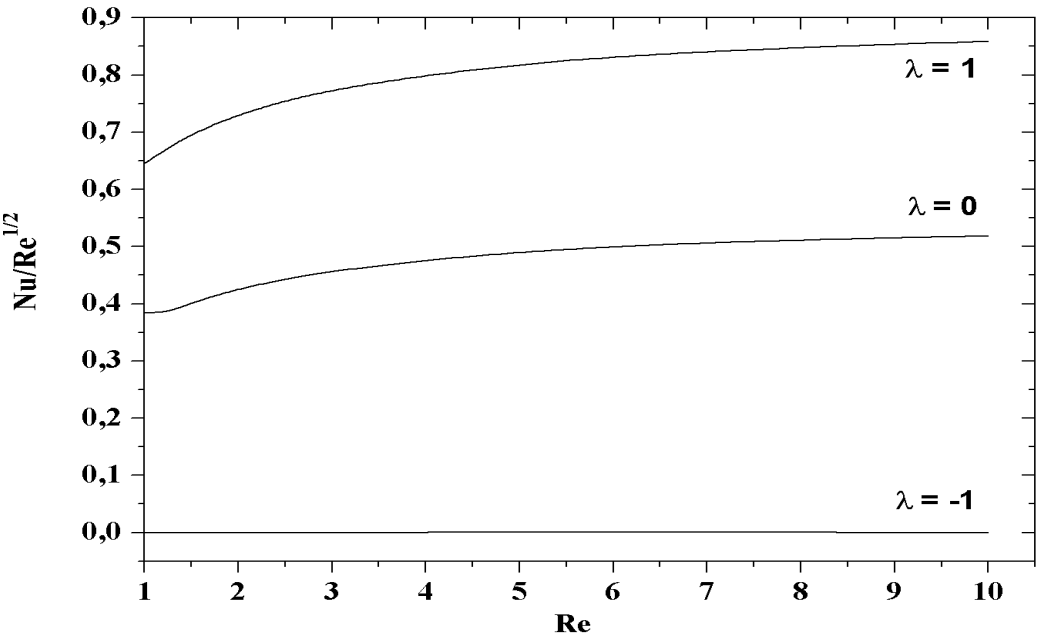


FIGURE III.11 – Profils de Nu en fonction de Re pour différentes valeurs de λ

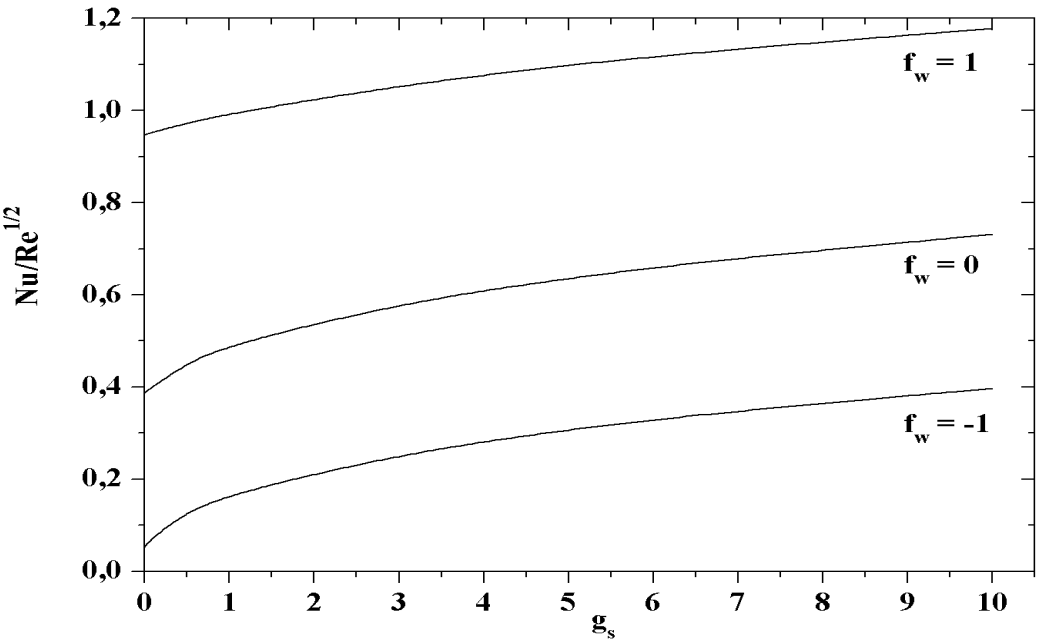


FIGURE III.12 – Profils de Nu en fonction du paramètre g_s pour différentes valeurs de f_w

II.7.4 Profils du coefficient de frottement

Dans la figure (III.13), nous présentons pour $g_s = 1$ les profils de la contrainte de cisaillement adimensionnelle dans la zone de couche limite près d'une plaque isotherme ($\lambda = 0$), chauffée est immergée verticalement dans un milieu poreux non Darcien saturé de fluide Newtonien, pour différentes valeurs du paramètre d'aspiration/injection f_w. Il ressort clairement de cette figure que le minimum des forces de cisaillement dans la zone de la couche limite augmente avec l'injection de fluide et diminue avec l'aspiration du fluide. L'augmentation peut être justifiée par l'effet de l'injection de fluide à la surface de la plaque, ce qui conduit à une augmentation de la vitesse d'écoulement à proximité de cette dernière et favorise donc davantage les forces de cisaillement.

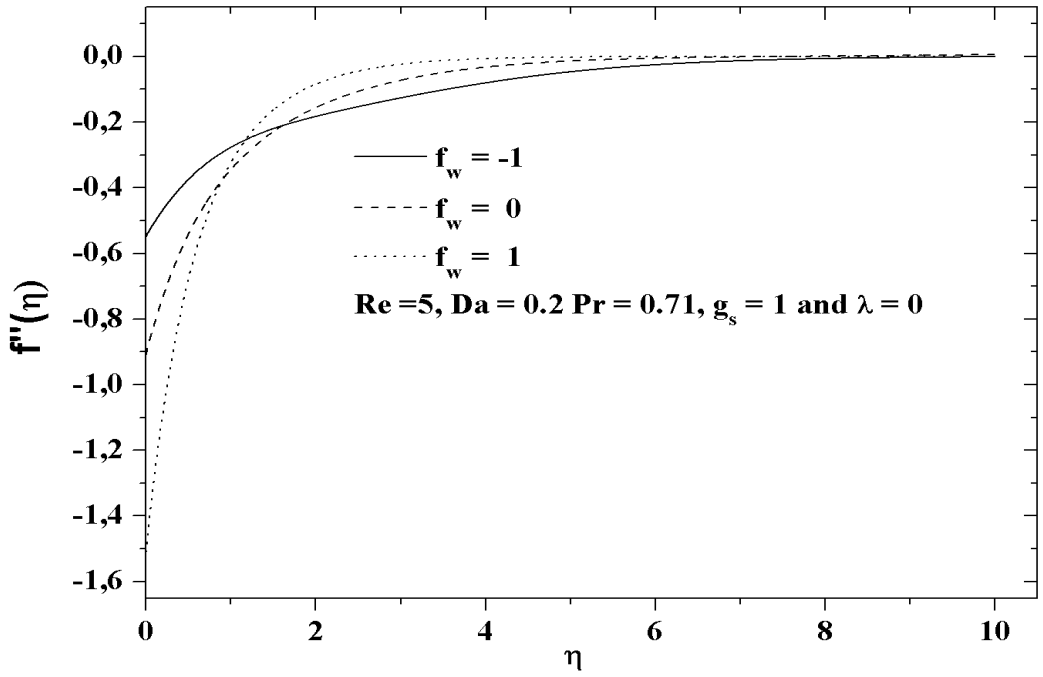


FIGURE III.13 – Profils de C_f en fonction de Re pour différentes valeurs de λ

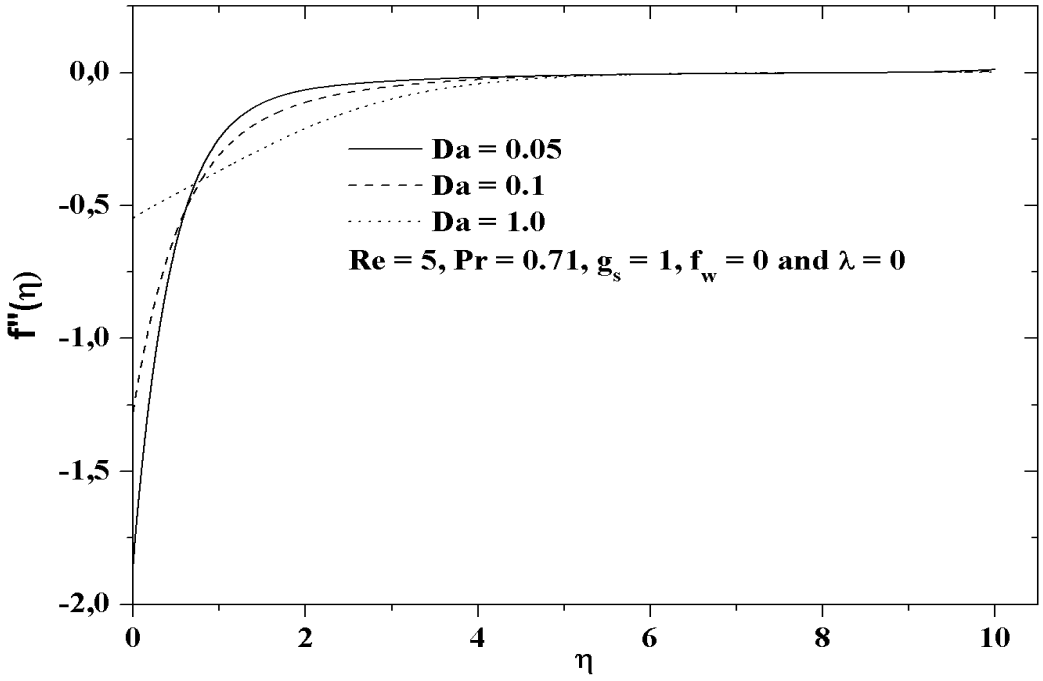


FIGURE III.14 – Profils de C_f t en fonction du paramètre g_s pour différentes valeurs de f_w

La figure (III.14) montre pour $g_s = 1$ les profils de contrainte de cisaillement adimensionnelle dans la zone de couche limite au voisinage d'une plaque isotherme ($\lambda = 0$) et imperméable ($f_w = 0$) pour diverses valeurs du nombre de Darcy Da. Ici, il est remarquable que les forces de frottement deviennent importantes près de la surface de la plaque dans le cas où le milieu poreux est plus perméable que dans le cas où le milieu poreux est moin perméable. Ceci s'explique par l'effet de la vitesse d'écoulement qui est importante près de la plaque et qui favorise davantage les contraintes de cisaillement.

La figure ((III.15)) montre les profils de la contrainte de cisaillement sans dimension dans la zone de couche limite près d'une plaque isotherme ($\lambda = 0$) et imperméable ($f_w = 0$) pour diverses valeurs du nombre de Reynolds Re dans le cas du régime de convection mixte $g_s = 1$. D'après cette figure, nous remarquons clairement que le minimum de la contrainte de cisaillement augmente avec l'augmentation du nombre de Reynolds local. Ceci peut être physiquement justifié par l'augmentation de la vitesse d'écoulement au voisinage de la surface de la plaque provoquée par la dominance des forces d'inertie, ce qui entraîne par conséquent une augmentation des forces de frottement près de la plaque.

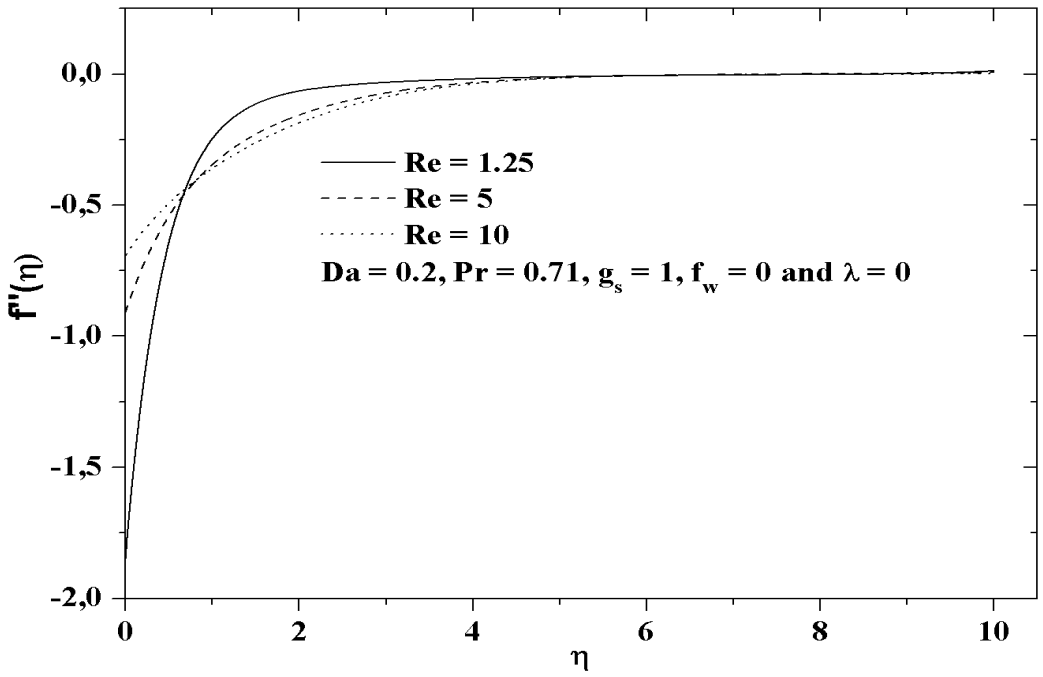


FIGURE III.15 – Profils de C_f en fonction du nombre Re pour différentes valeurs de λ

La figure ((III.16)) prédit les profils de contrainte de cisaillement sans dimension dans la zone de couche limite d'une plaque isotherme ($\lambda = 0$) et imperméable ($f_w = 0$) pour trois régimes de transfert de chaleur par convection ($g_s < 1$, $g_s = 1$, $g_s > 1$). Nous remarquons que les forces de cisaillement sont plus importantes près du la plaque lors du passage du régime de convection forcée au régime de la convection naturelle. Cette tendance peut être expliquée par la montée des différences de température dans la zone de la couche limite, ce qui conduit par conséquent à la prédominance des forces de gravitation par rapport aux forces d'inertie.

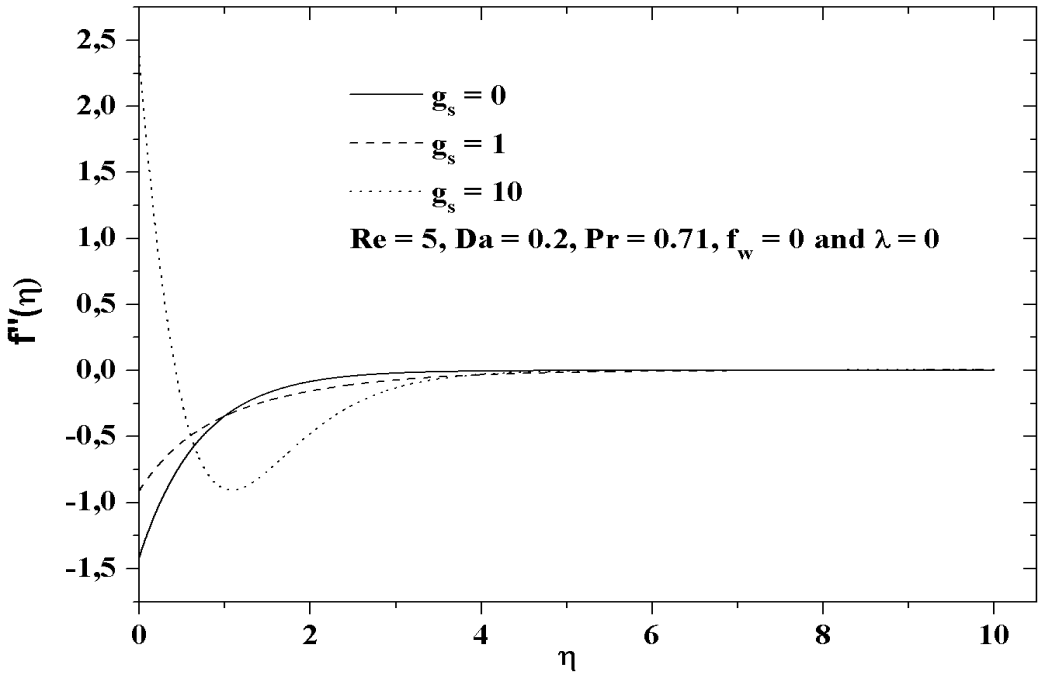


FIGURE III.16 – Profils de C_f en fonction du paramètre g_s pour différentes valeurs de f_w

III Transfert de chaleur par convection le long d'une plaque inclinée

III.1 Position du problème

Dans cette section, nous cherchons à étudier l'écoulement et le transfert de chaleur par convection naturelle dans le cas stationnaire dans la zone de la couche limite d'une plaque isotherme multi-orientée intégrée dans un milieu poreux non-Darcien saturé par un fluide newtonien, en présence de génération interne de chaleur et des effets de rayonnement. Un angle ϕ permet de déterminer la position de la plaque par rapport à la direction verticale. Le modèle de Darcy-Brinkman est utilisé pour décrire l'écoulement dans un milieu poreux en prenant en compte le terme convectif dans l'équation du mouvement. L'axe des x et des y sont pris respectivement, le long de, et normal à la plaque. La plaque de longueur H est maintenue à une température uniforme T_w supérieure à la température ambiante T_∞ et soumise à un flux de fluide latéral V_w. Le système des coordonnées et la configuration de l'écoulement sont représentés dans la figure suivante :

III.2 Hypothèses de calcul

En se basant ici sur les hypothèses de base citées dans le chapitre II, mais cette fois-ci en tenant compte des hypothèses supplémentaires suivantes :

- La phase solide du milieu poreux est considérée opaque et en équilibre thermodynamique local avec la phase fluide.
- Le phase fluide est considérée transparente.
- Le milieu poreux peut être assimilé à une phase semi-transparente.
- Le flux radiatif dans la direction x est considéré négligeable par rapport à la direction y.

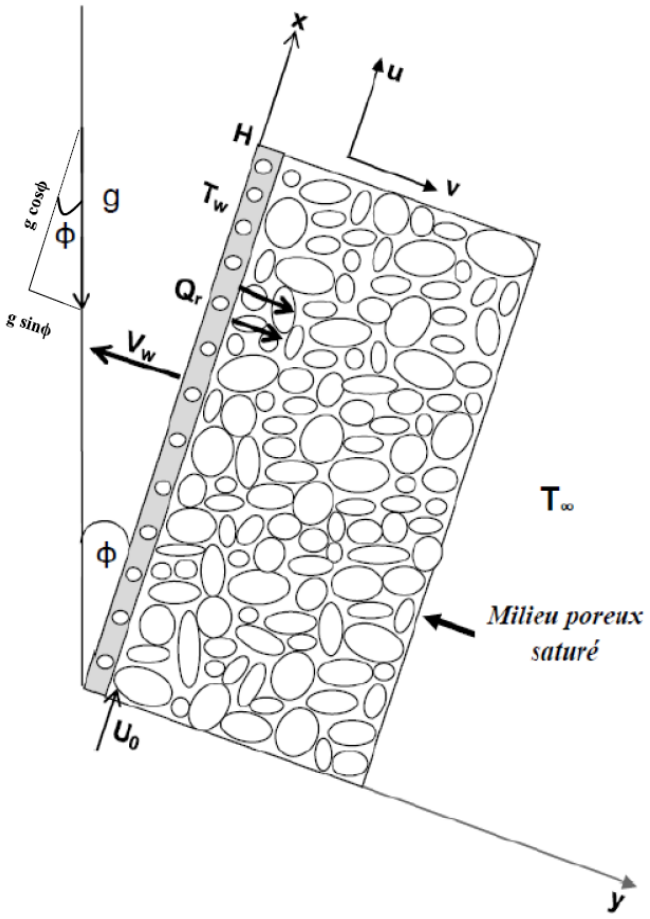


FIGURE III.17 – Modèle physique et système de coordonnées.

- Les termes de dissipation visqueuse et de la dispersion thermique sont supposés négligeables.

III.3 Système des équations retenu

Compte tenu des hypothèses formulées précédemment, les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie en 2D régissant l'écoulement et le transfert de chaleur par convection naturelle en présence des effets de radiation thermique et d'une génération interne de chaleur dans la zone de la couche limite d'une plaque inclinée, posée dans un milieu poreux non-Darcien saturé, modélisé par la formulation de Darcy-Binkman, sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T - T_\infty)\cos\phi - \dfrac{\nu}{K'}u \\ u\dfrac{\partial T}{\partial x} + v\dfrac{\partial T}{\partial y} = \alpha\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial T}{\partial y} - \dfrac{Q_r}{k}\right) + q''' \end{cases} \tag{III.26}$$

Ces équations sont couplées avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} y = 0, \;\; x \geq 0, \;\; u = U_0, \;\; v = V_w(x), \;\; T = T_w \\ \\ y \to \infty, \;\; x \geq 0, \;\; u = 0, \;\; v = 0, \;\; T \to T_\infty \end{cases} \tag{III.27}$$

Où u et v sont, respectivement, les composantes de la vitesse le long des axes x et y. T est la température du fluide. Les constantes : ν, α, k, g, K' and β sont, respectivement, la viscosité cinématique, la diffusivité thermique, la conductivité thermique, l'accélération de la pesanteur, la perméabilité du milieu poreux, et le coefficient d'expansion thermique. $V_w = Bx^{-1/2}$ est la vitesse d'aspiration du fluide au niveau de la plaque, où B est une constante négative. U_0 est la vitesse du courant libre parallèle à la plaque verticale, généralement, consdérée très faible.

Le flux radiatif basé sur le modèle de diffusion de Rosseland pour le transfert de chaleur par rayonnement peut être approchée par une loi semblable à la loi de Fourier caractérisant le transfert de chaleur par conduction comme suit :

$$Q_r = -\frac{16\sigma^* T_\infty^3}{3k^*}\frac{\partial T}{\partial y} \tag{III.28}$$

où σ^* est la constante de Stefan-Boltzmann, k^* est le coefficient d'absorption moyen de Rosseland.

Dans cette étude, une forme exponentielle est utilisée pour la génération interne de chaleur, et se présente comme suit :

$$q''' = \frac{U_0(T_w - T_\infty)}{2x}e^{-\eta} \tag{III.29}$$

En utilisant les deux équations (III.28) et (III.29), le système d'équations (III.26) prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T - T_\infty)\cos\phi - \dfrac{\nu}{K'}u \\ \\ u\dfrac{\partial T}{\partial x} + v\dfrac{\partial T}{\partial y} = \alpha\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}\left(1 + \dfrac{16\sigma^* T_\infty^3}{3kk^*}\right) + \dfrac{U_0(T_w - T_\infty)}{2x}e^{-\eta} \end{cases} \tag{III.30}$$

III.4 Formulation adimensionnelle

Pour résoudre le système d'équations (III.30), en suivant les mêmes démarches décrites dans la première partie de ce chapitre, nous utiliserons une méthode de similarité qui consiste à transformer le système d'équations aux dérivées partielles (EDP) non-linéaire

(III.30) décrivant le problème d'écoulement et du transfert de chaleur étudié en un simple système d'équations différentielles ordinaires. Pour cela, nous introduisons les transformations de similarité suivantes [97–99] :

$$\begin{cases} \eta = y\sqrt{\dfrac{U_0}{2\nu x}} \\ \\ \psi = (2\nu x U_0)^{1/2} f(\eta) \\ \\ \theta = \dfrac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \end{cases} \tag{III.31}$$

Où, ψ est la fonction de courant qui est définie comme suit :

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ \\ v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \tag{III.32}$$

Après substitution des transformations de similarité (III.31) et développement du système d'équations aux dérivées partielles (III.30), le système d'équations différentielles adimensionnlles obtenu se présente comme suit :

$$\begin{cases} f''' + ff'' + Gr\theta\cos\phi - Kf' = 0 \\ \\ (3 + \dfrac{4}{R})\theta'' + 3Prf\theta' + 3Pre^{-\eta} = 0 \end{cases} \tag{III.33}$$

Où $f(\eta)$ et $\theta(\eta)$ sont des fonctions de similarité adimensionnelles, et $Gr = \dfrac{g\beta(T_w - T_\infty)2x}{U_0^2}$ est le nombre de Grashof, $K = \dfrac{2\nu x}{K' U_0}$ est le paramètre de pérmiabilité, $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ est le nombre de Prandtl, et $R = \dfrac{kk^*}{4\sigma^* T_\infty^3}$ est le paramètre de radiation.

Les conditions aux limites associées à ce système sont :

$$\begin{cases} \eta = 0, f(0) = f_w, f'(0) = 1, \theta(0) = 1 \\ \\ \eta \to \infty, f'(\infty) = 0, \theta(\infty) = 0 \end{cases} \tag{III.34}$$

Où $f_w = -V_w\sqrt{\dfrac{2x}{\nu U_0}}$ est le paramètre d'aspiration.

III.5 Coefficient de frottement et nombre de Nusselt

Les quantités physiques les plus intéressantes pour ce type de problèmes sont le coefficient de frottement local C_f et le nombre de Nusselt local Nu, qui indiquent respectivement la contrainte de cisaillement et le taux de transfert de chaleur à la surface. Comme l'on a détaillé précédemment dans la premire partie du présent chapitre, le

coefficient de frottement local et le nombre de Nusselt local sont donnés respectivement par les équations suivantes :

$$C_f = \frac{2}{\sqrt{Re}} f''(0) \tag{III.35}$$

$$Nu = -\sqrt{Re}\, \theta'(0) \tag{III.36}$$

III.6 Technique de résolution.

Le système d'équations différentielles adimensionnelles (III.33) est résolue numériquement en adoptant les mêmes démarches algorithmiques présentées dans la sous section (II.8). afin de le réécrire comme un système d'équations différentielles de premier ordre en utilisant les transformations suivantes :

$$g_1 = f(\eta), \quad g_2 = f'(\eta), \quad g_3 = f''(\eta), \quad g_4 = \theta(\eta), \quad g_5 = \theta'(\eta) \tag{III.37}$$

Donc le système d'équation différentielle (III.33) est équivalent au système d'équations différentielles de premier ordre suivant :

$$\begin{cases} g_1' = g_2 \\ \\ g_2' = g_3 \\ \\ g_3' = -g_1 g_3 - Gr\, g_4 \cos\phi + K\, g_2 \\ \\ g_4' = g_5 \\ \\ g_5' = -\dfrac{3\,R\,Pr}{3\,R+4}\left(g_1 g_5 + e^{-\eta}\right) \end{cases} \tag{III.38}$$

Les conditions aux limites couplées au système d'équations (III.38) sont :

$$\begin{cases} \eta = 0, \;\; g_1 = f_w, \;\; g_2 = 1, \;\; g_4 = 1 \\ \\ \eta \to \infty \;\; g_2 = 0, \;\; g_4 = 0 \end{cases} \tag{III.39}$$

III.7 Résultats numériques et analyse.

Dans cette section, nous avons présenté et analysé les effets du paramètre de radiation R, de l'angle d'inclinaison ϕ, du paramètre d'aspiration f_w, du nombre de Grashof Gr, du paramètre de perméabilité K et de nombre de Prandtl Pr (compris entre 0,1 et 10) sur l'écoulement et le transfert de chaleur par convection naturelle autour une plaque isotherme immergée dans un milieu poreux non-Darcien saturé par un fluide newtonien, sans et en présence d'une source interne de génération de chaleur. L'écoulement est modélisé par la formulation de Darcy-Brinkman, en temant compte du terme convectif

dans l'équation de quantité mouvement. Nous notons que l'aspiration du fluide correspond à $f_w > 0$ et que $R \to \infty$ correspond à l'absence de rayonnement thermique.

III.7.1 Validation des résultats.

Le système des équations différentielles ordinaires (III.38) est résolu numériquement en utilisant le schéma de Runge-Kutta à l'ordre 5 couplé avec la méthode de Tir. Pour évaluer l'exactitude de nos résultats, une comparaison a été effectuée avec les résultats de Ferdows et al. [97] en terme du nombre de Nusselt local pour différentes valeurs de nombre de Prandtl à $Gr = 2$, $R = 1$, $K = 1$, $f_w = 1$ et $\phi = 30°$, sont présentées dans le tableau III.4, montrant un très bon accord entre nos résultats et ceux des auteurs mentionnés auparavant.

TABLE III.4 – $Nu/Re^{1/2}$ pour différentes valeurs de Pr à $Gr = 2$, $R = 1$, $K = 1$, $f_w = 1$ et $\phi = 30°$

Pr	*Ferdows et al, (2011)*	*Présente étude*	*Erreur relative (%)*
0.71	0.3004	0.2990	0.47
2.05	0.5431	0.5410	0.39
4.24	0.8760	0.8710	0.57
13.6	2.1396	2.1300	0.45

III.7.2 Champs thermiques

III.7.2.a Effet de l'angle d'inclinaison ϕ

Les figures (III.18), (III.19) et (III.20) montrent les distributions des lignes isothermes dans la zone de la couche limite d'une plaque perméable maintenue à une température Tw = 353.15K placée dans un milieu poreux saturé par un fluide newtonien ($T_\infty = 293,15K$), pour trois positions de la plaque : verticale, inclinée et horizontale correspondant respectivement à $\phi = 0°$, $\phi = 45°$ et $\phi = 90°$ à $Gr = 2$, $Pr = 0.71$, $R = 1$, $K = 1$ et $f_w = 1$. D'après ces figures, il est clairement remarquable que passant de la position verticale à la position horizontale de la plaque, plus la chaleur se transporte davantage vers le milieu poreux, ce qui conduit à l'élargissement de l'épaisseur de la couche limite thermique. Par conséquent, dans le domaine de l'extraction du pétrole par la méthode thermique, la position verticale de l'équipement utilisé est celle qui convient le mieux pour une extraction optimale du pétrole (taux de transfert élevé).

III.7.2.b Effet du paramètre R

Les figures (III.21) et (III.22) illustrent pour $Gr = 2$, $Pr = 0,71$, $K = 1$ et $f_w = 1$, la distribution des lignes isothermes dans la zone de la couche limite près d'une plaque isotherme ($T_w = 353,15K$), inclinée ($\phi = 30°$) et perméable placé dans un milieu poreux

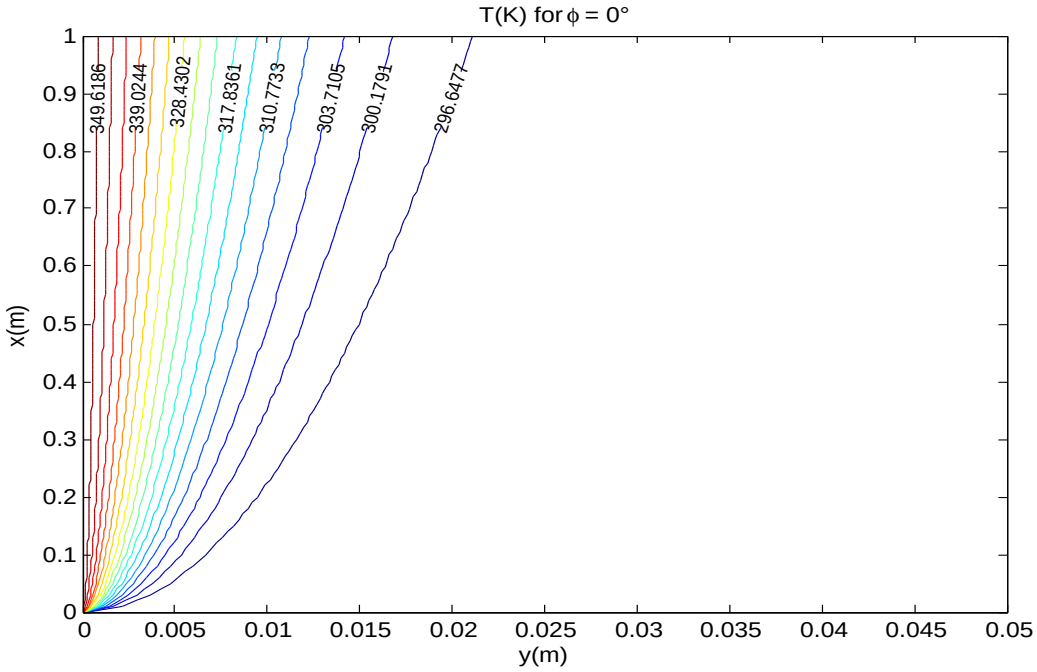


FIGURE III.18 – Lignes isothermes en fonction de x et y pour $\phi = 0°$

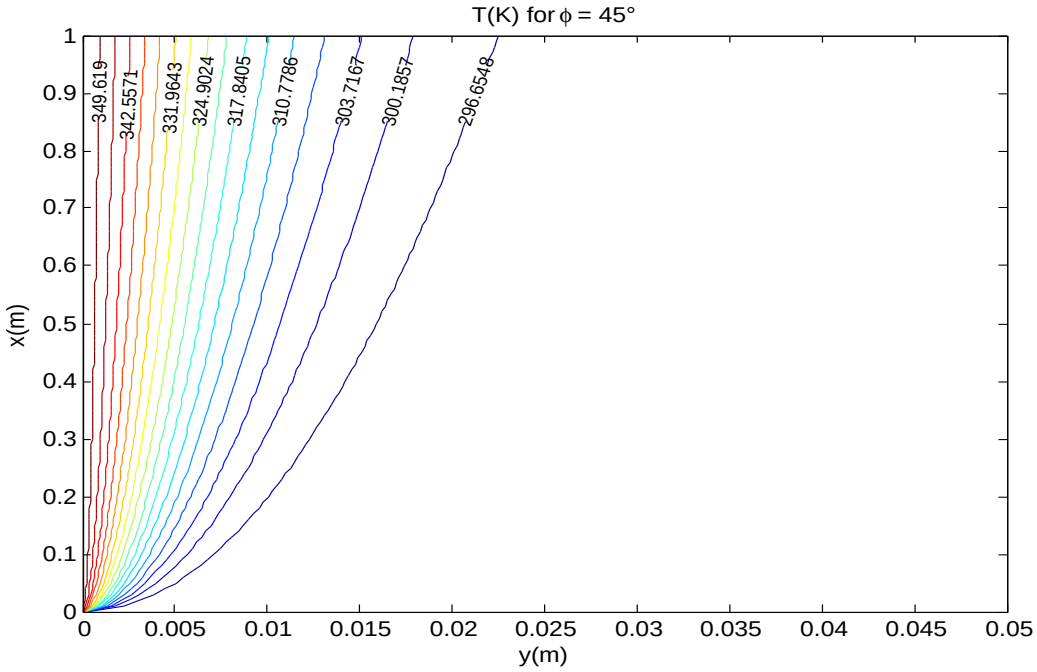


FIGURE III.19 – Lignes isothermes en fonction de x et y pour $\phi = 45°$

saturé par un fluide newtonien ($T_\infty = 293,15K$), pour deux valeurs du paramètre de rayonnement $R = 0,5$ et $R = 10^6$ respectivement. Ici, on voit clairement que la prise en compte du rayonnement thermique favorise le transfert thermique au milieu poreux, ce qui conduit à la dilatation de la couche limite thermique. Ce qui montre qu'il est déraisonnable de négliger l'effet du rayonnement, en particulier dans les applications nécessitant des températures moyennes ou élevées.

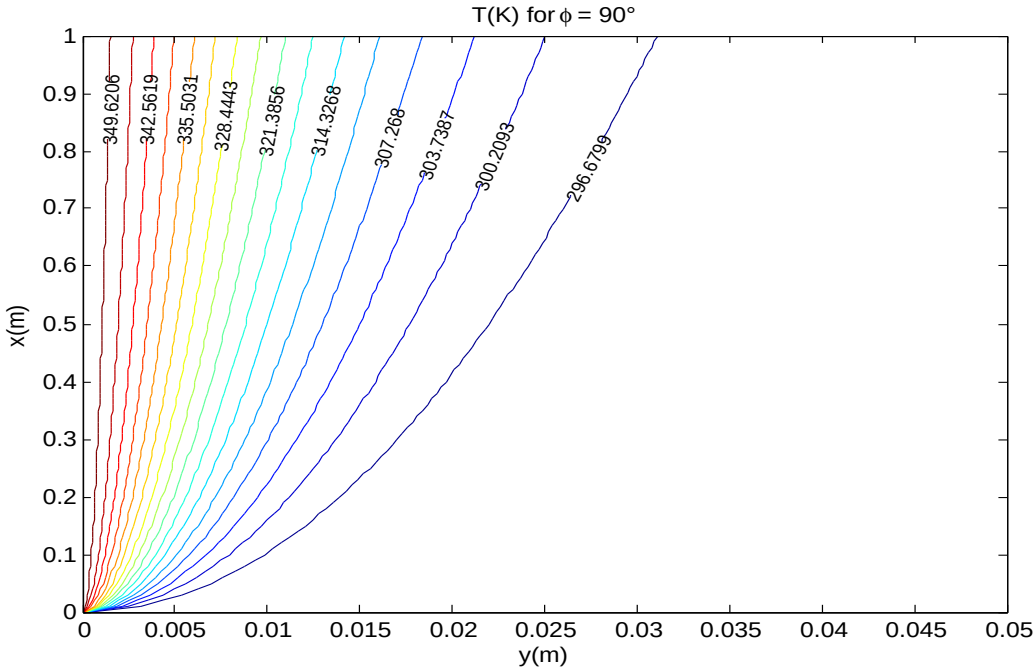


FIGURE III.20 – Lignes isothermes en fonction de x et y pour $\phi = 90°$

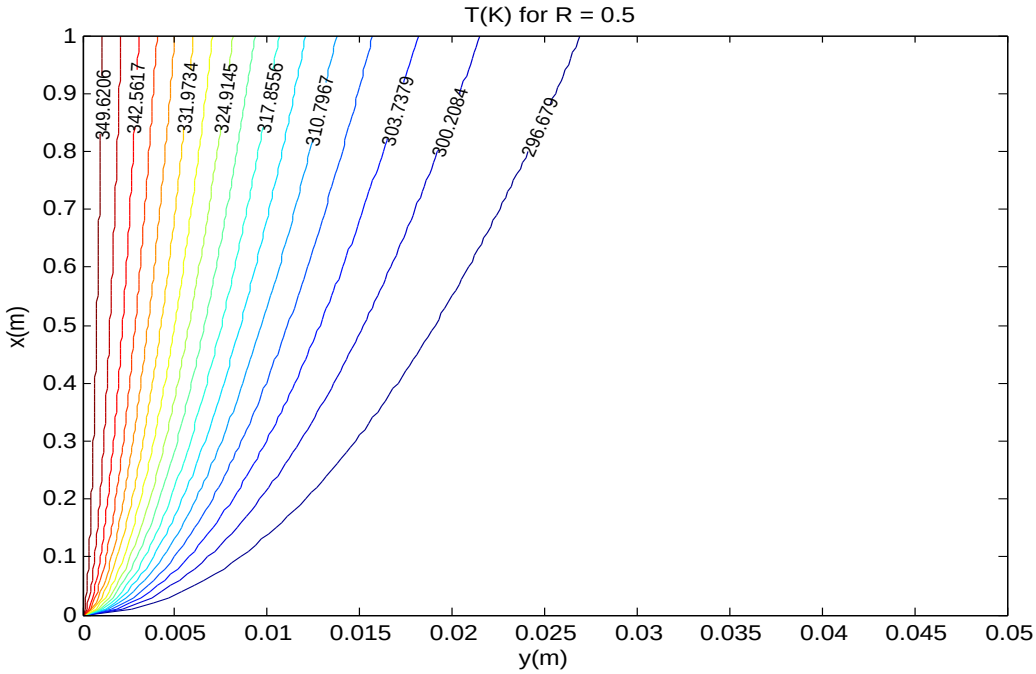


FIGURE III.21 – Lignes isothermes en fonction de x et y pour $R = 0.5$

III.7.2.c Effet du nombre de Grashof Gr

La distribution des lignes isothermes dans la zone de la couche limite dans la zone de la couche limite près d'une plaque isotherme ($T_w = 353,15K$), inclinée ($\phi = 30°$) et perméable placé dans un milieu poreux saturé par un fluide newtonien ($T_\infty = 293,15K$), pour deux valeurs du nombre de Grashof $Gr = 0,2$ et $Gr = 10$, pour $Pr = 0,71$, $R = 1$, $k = 1$ et $f_w = 1$, sont présentés respectivement sur les figures (III.23) et (III.24). À partir de ces figures, il convient de noter clairement que la température diminue avec l'augmentation du nombre de Grashof Gr et entraîne par conséquent une réduction de

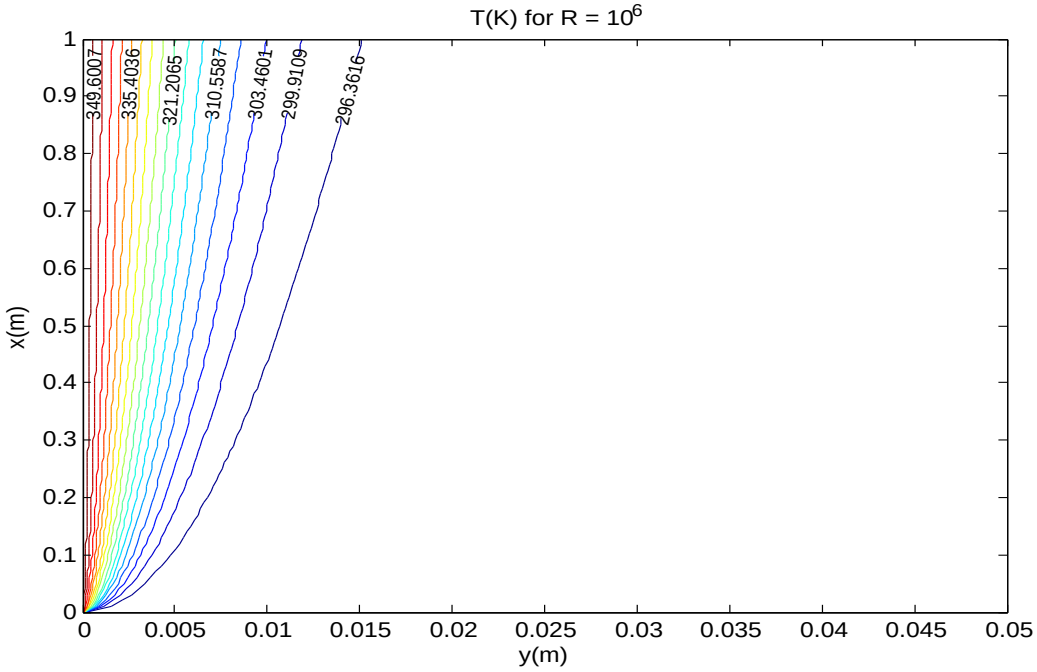


FIGURE III.22 – Lignes isothermes en fonction de x et y pour $R = 10^6$

l'épaisseur de la couche limite thermique. Cela peut être justifié par l'importance des forces de flottabilité qui conduisent à un refroidissement rapide autour de la plaque.

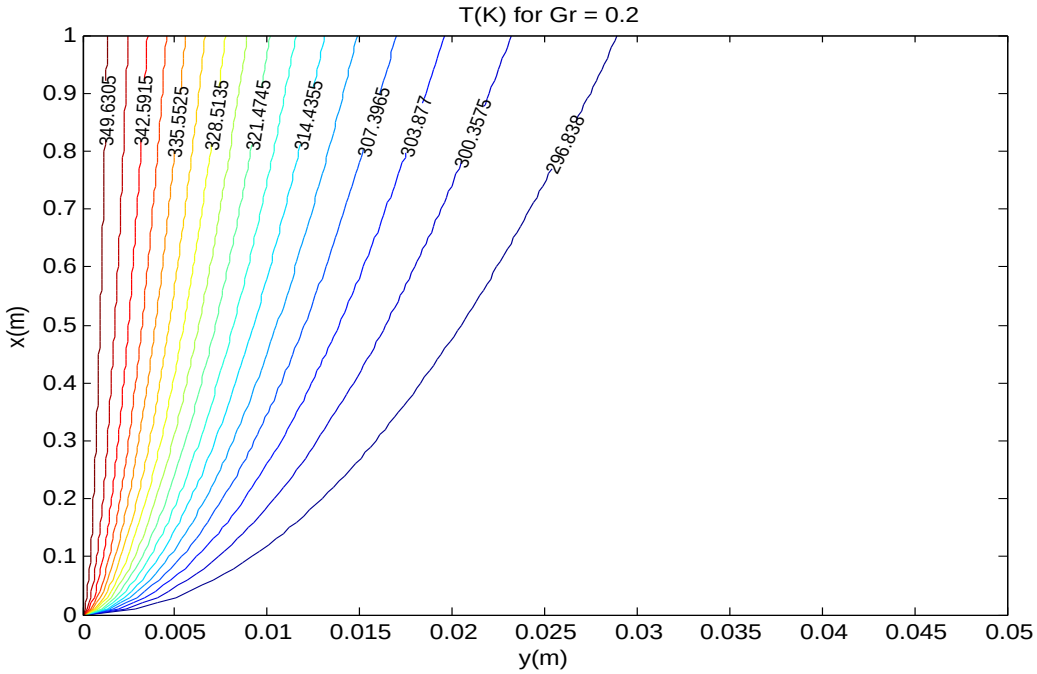


FIGURE III.23 – Lignes isothermes en fonction de x et y pour $Gr = 0.2$

III.7.2.d Effet du paramètre K

Les lignes isothermes dans la zone de la couche limite d'une plaque isotherme ($T_w = 353,15K$), imperméable, inclinée d'un angle ($\phi = 30°$) par rapport à la verticale, immergée dans un milieu poreux saturé ($T_\infty = 293.15K$) pour des valeurs sélectionnées du paramètre de perméabilité $K = 0.1$ et $K = 4$ respectivement, sont représentées,

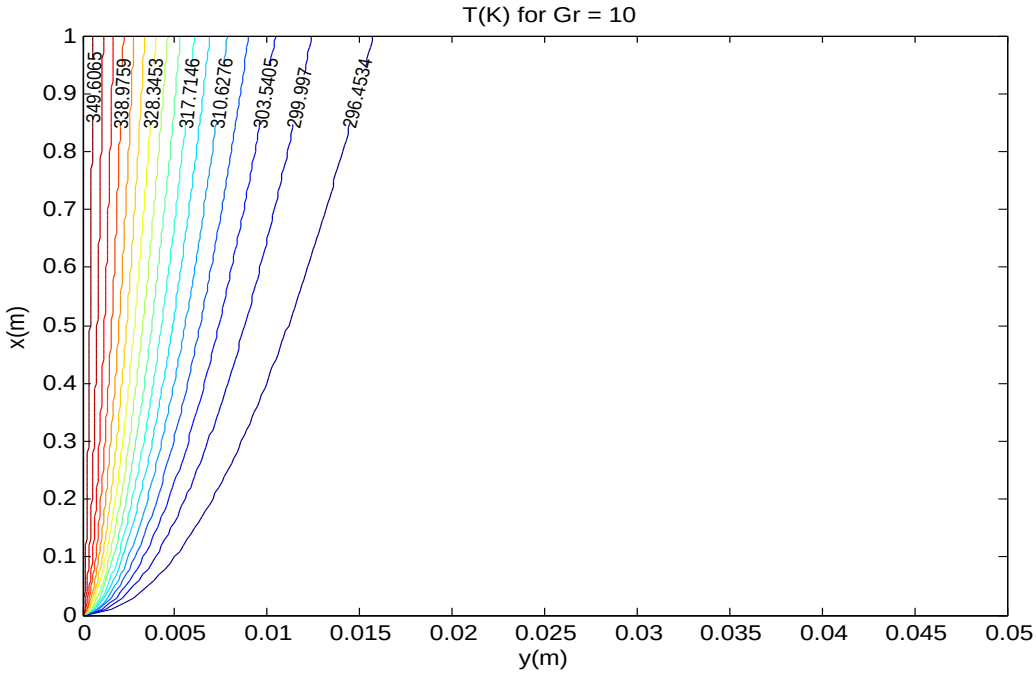


FIGURE III.24 – Lignes isothermes en fonction de x et y pour $Gr = 10$

respectivement, sur les figures (III.25) et (III.26). De ces figures, on peut déduire que le milieu poreux plus perméable permet de diffuser plus la chaleur loin de la plaque, ce qui explique l'élargissement notable de l'épaisseur de la couche de limite thermique, contrairement au cas où le milieu poreux est moins perméable.

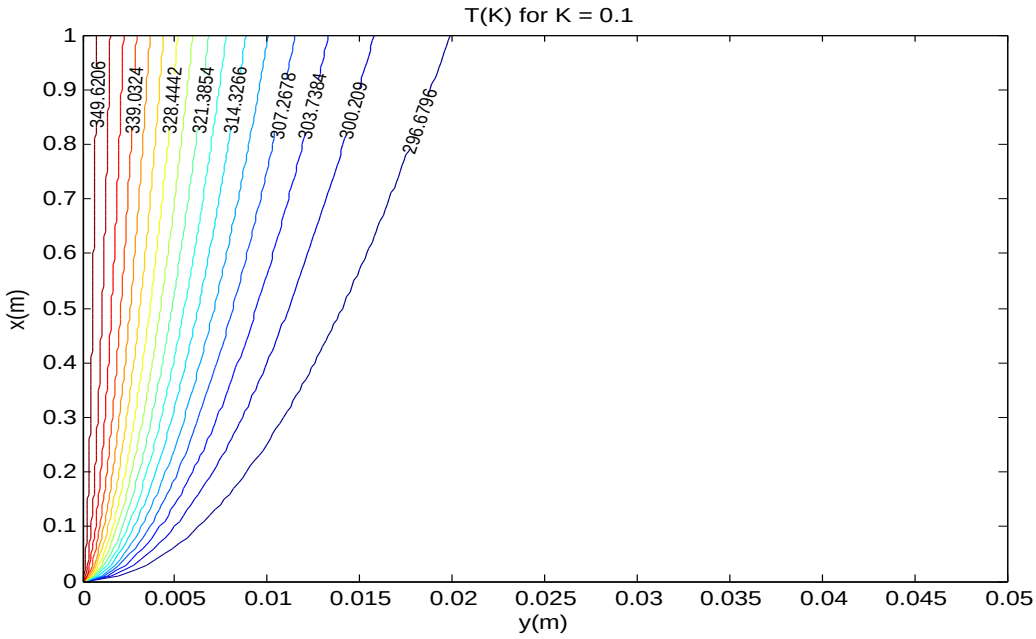


FIGURE III.25 – Lignes isothermes en fonction de x et y pour $K = 0.1$

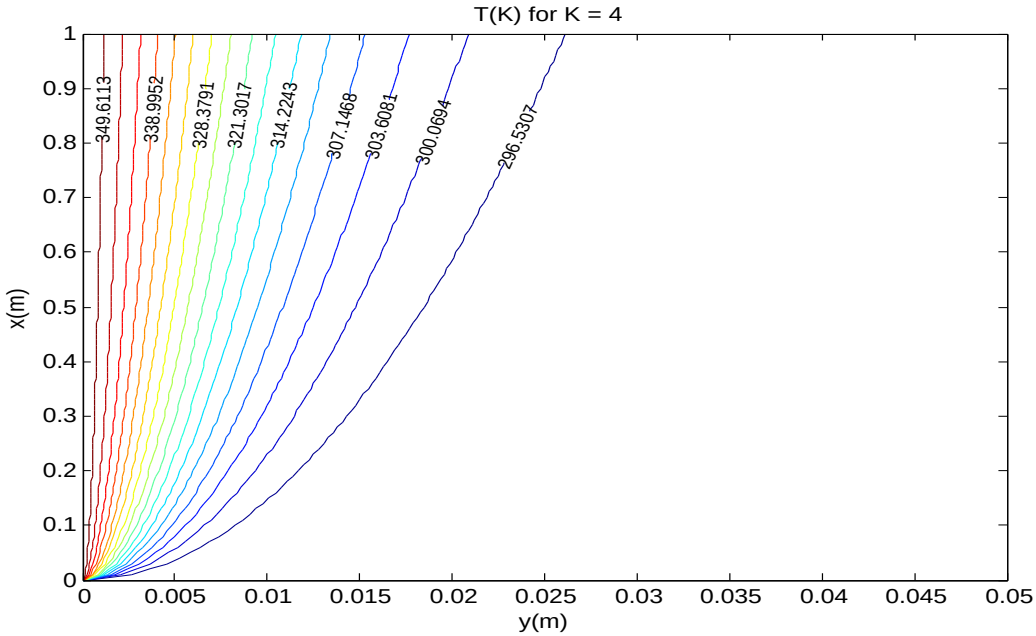


FIGURE III.26 – Lignes isothermes en fonction de x et y pour $K = 4$

III.7.3 Profils du coefficient de frottement et du nombre de Nusselt

III.7.3.a Effets de l'angle ϕ et du paramètre R

Les figures (III.27) et (III.28) illustrent le taux de transfert de chaleur et le coefficient de frottement à la surface en fonction de l'angle d'inclinaison ϕ pour une plaque isotherme et perméable dans un milieu poreux saturé par un fluide Newtonien, avec une génération interne de chaleur pour différentes valeurs du paramètre de radiation R, à $Gr = 2$, $Pr = 0.71$ et $K = 1$. D'après ces figures, on observe que, pour toutes les valeurs du paramètre de radiation R, le taux de transfert de chaleur et le coefficient de frottement à la surface diminuent avec l'augmentation de l'angle d'inclinaison. Ici, il est évident que le taux de transfert de chaleur et le coefficient de frottement sont plus importants à la surface dans le cas où la plaque est verticale. Nous remarquons également que l'effet du rayonnement conduit à réduire le taux de transfert de chaleur et augmente la contrainte de cisaillement à la surface de plaque.

III.7.3.b Effets du nombre de Grachof Gr et du paramètre d'aspiration f_w

Les effets du nombre de Grashof Gr et du paramètre d'aspiration de fluide f_w sur le taux de transfert de chaleur le coefficient de frottement à la surface, à $Pr = 0.71$, $R = 1$, $K = 1$ pour une plaque isotherme inclinée ($\phi = 30°$) placée dans un milieu poreux saturé en présence une génération interne de chaleur, sont représentés respectivement sur les figures (III.29) et (III.30). Ici, nous remarquons également que les forces de flottabilité ont amplifié le taux de transfert de chaleur et les forces de frottement à la surface pour toutes les valeurs du paramètre d'aspiration f_w. De plus, il est important de noter que l'aspiration de fluide à la surface de la plaque permet d'amplifier le taux de transfert de chaleur et de réduire l'effet des forces de cisaillement à la surface.

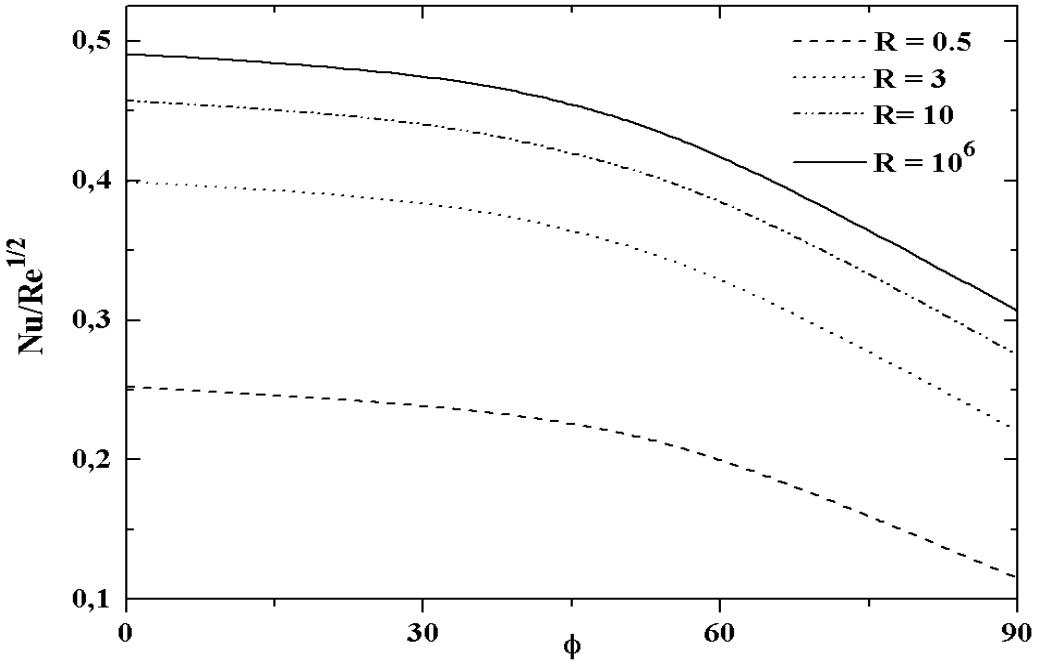


FIGURE III.27 – Profils du nombre de Nusselt en fonction de ϕ pour différentes valeurs de R

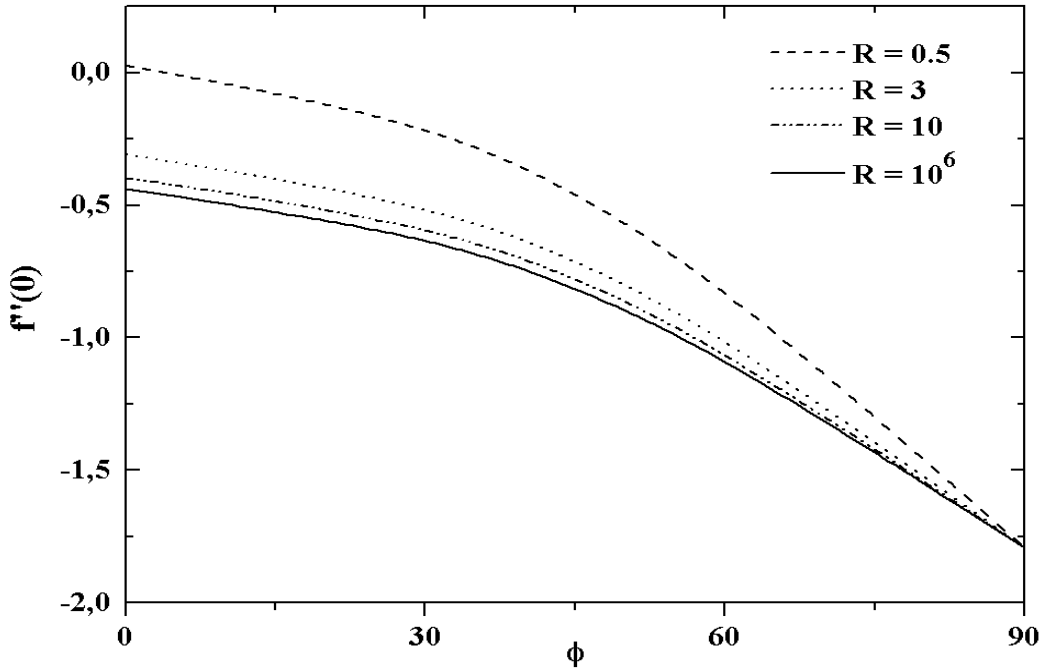


FIGURE III.28 – Profils de la contrainte de cisaillement en fonction de ϕ pour différentes valeurs de R

III.7.3.c Effets du nombre de Prandtl Pr et du paramètre de perméabilité K

Les figures (III.31) et (III.32) montrent respectivement pour $Gr = 2$, $R = 1$, $\phi = 30°$ et $f_w = 1$ les profils du nombre de Nusselt et de la contrainte de cisaillement à la surface en fonction du paramètre de perméabilité K pour certaines valeurs du nombre de Prandtl Pr. Ici, on remarque que le taux de transfert de chaleur augmente et que la contrainte de cisaillement à la surface diminue avec l'augmentation du paramètre de perméabilité K indépendamment du nombre de Prandtl Pr. En outre, le taux de transfert de chaleur et

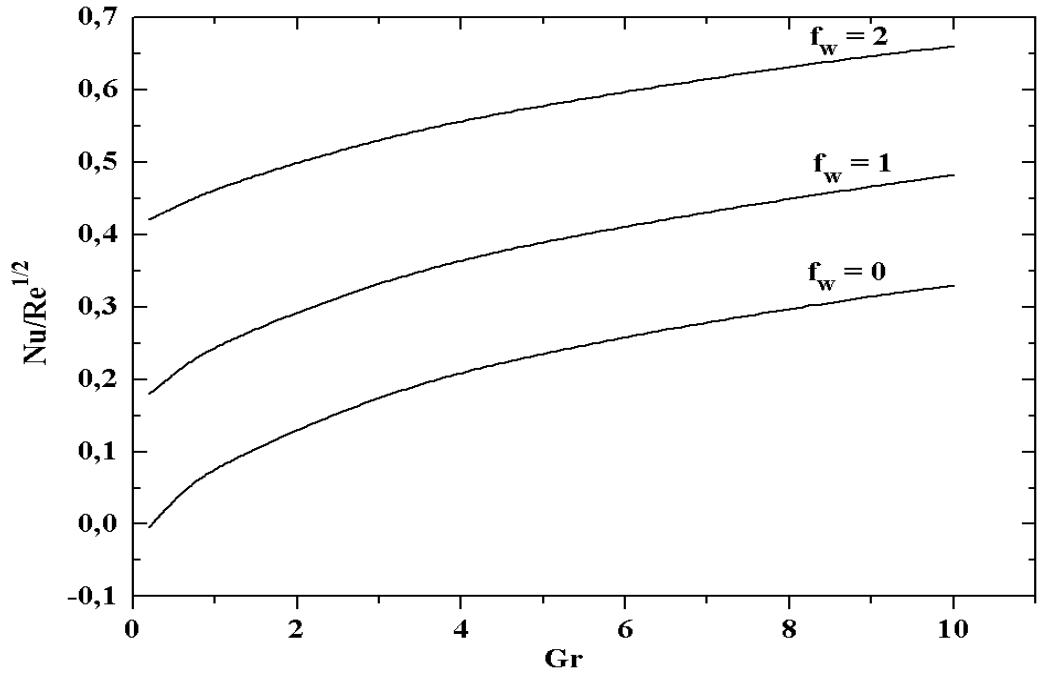


FIGURE III.29 – Profils du nombre de Nusselt en fonction de Gr pour différentes valeurs de f_w

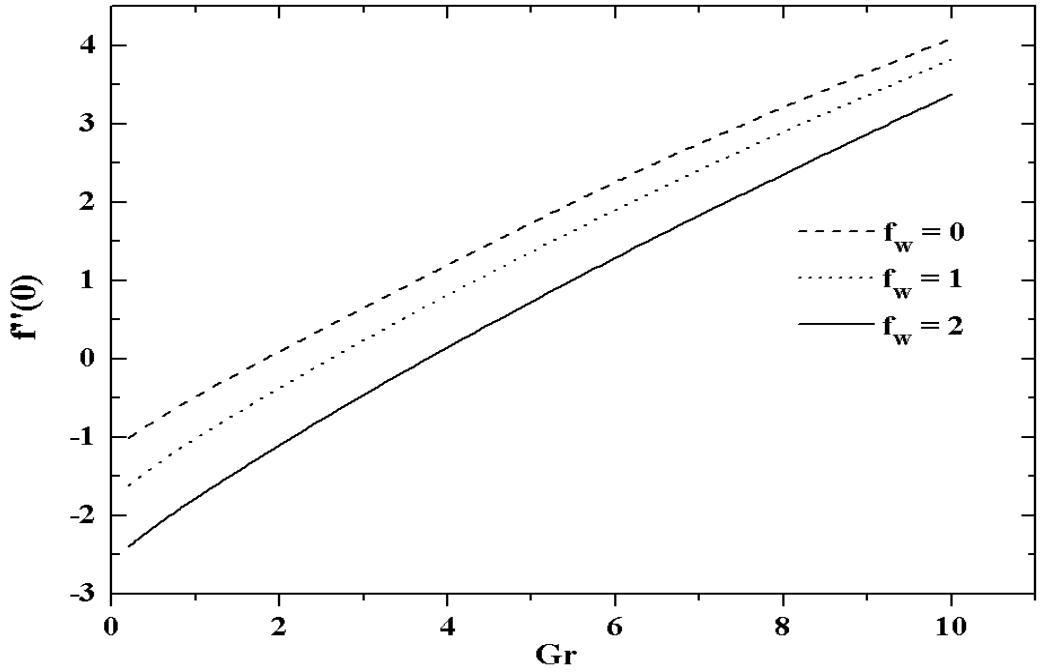


FIGURE III.30 – Profils de la contrainte de cisaillement en fonction de Gr pour différentes valeurs de f_w

les forces de frottement à la paroi augmentent lorsque le profil thermique est plus rapide que le profil hydrodynamique $Pr < 1$, contrairement au cas où $Pr > 1$.

III.7.3.d Effet de l'angle d'inclinaison ϕ et de (IHS)

Aux figures (III.33) et (III.34), nous présentons respectivement l'évolution du nombre de Nusselt et la contrainte de cisaillement à la surface pour plusieurs positions de la plaque à $Gr = 2$, $Pr = 0,71$, $R = 1$, $K = 1$ et $f_w = 1$ avec et sans source interne de chaleur

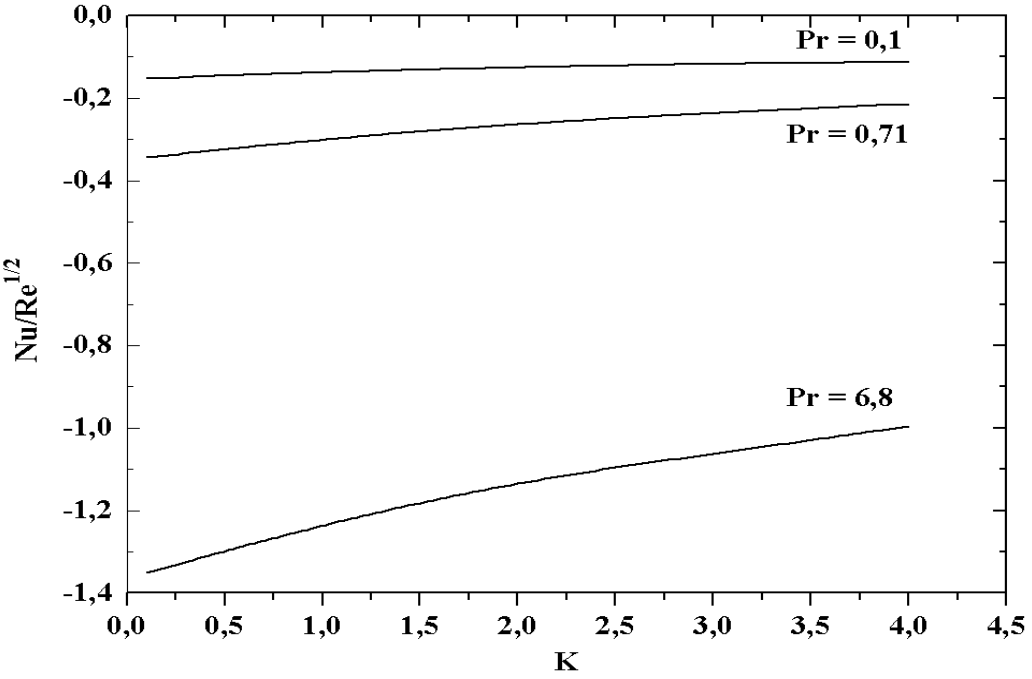


FIGURE III.31 – Profils du nombre de Nusselt en fonction de K pour différentes valeurs de Pr

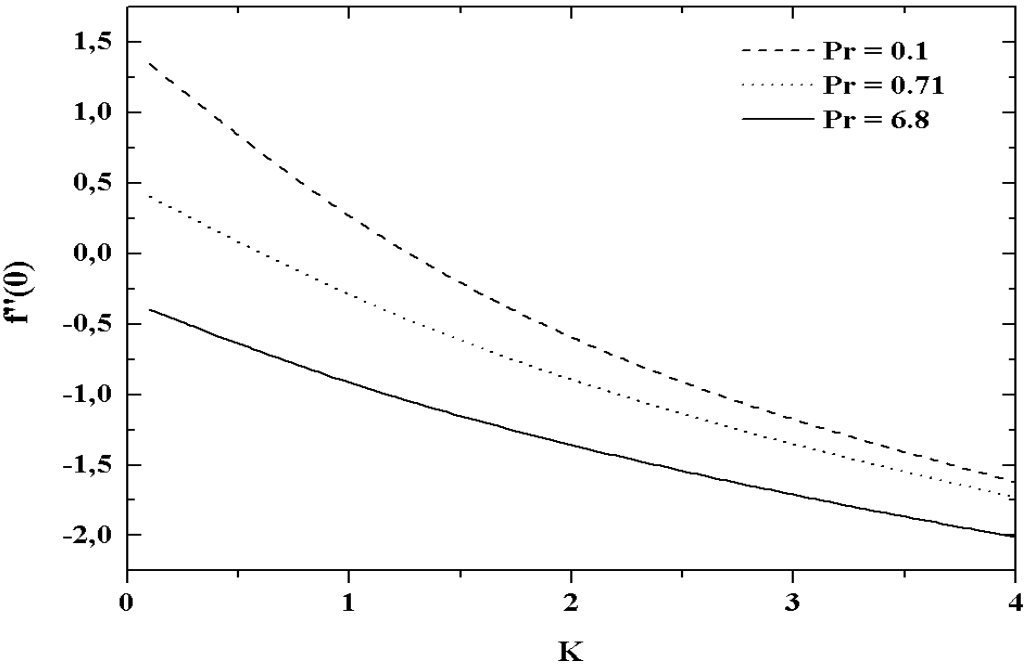


FIGURE III.32 – Profils de la contrainte de cisaillement en fonction de K pour différentes valeurs de Pr

(IHS). D'après ces figures, On en conclu que la présence d'une source d'énergie variable dans le milieu (effet joule, source d'eau chaude, etc) permet de réduire le taux de transfert de chaleur et d'amplifier les forces de cisaillement à la surface pour toutes les positions sélectionnées de la plaque.

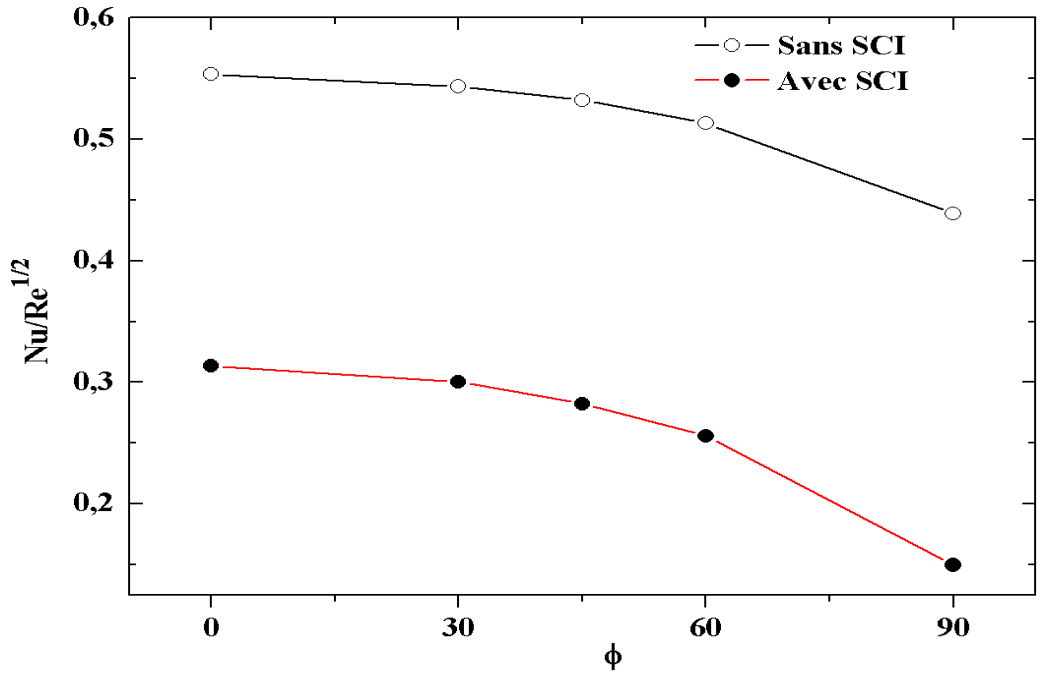


FIGURE III.33 – Profils du nombre de Nusselt en fonction de ϕ avec et sans IHS

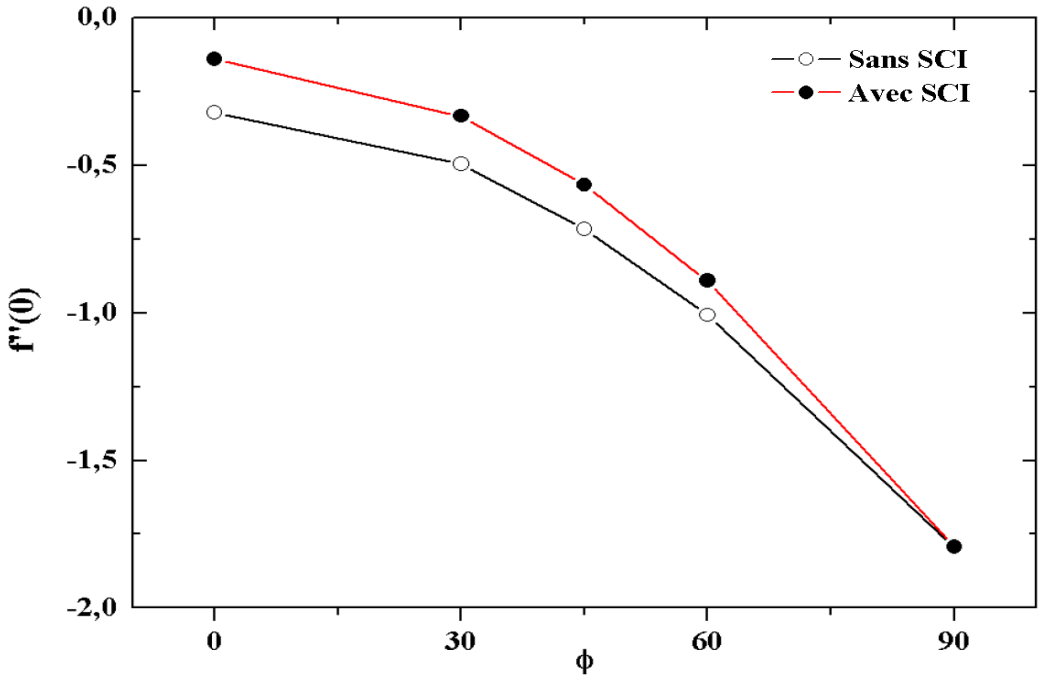


FIGURE III.34 – Profils de la contrainte de cisaillement en fonction de ϕ avec et sans IHS

IV Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié le problème de l'écoulement et du transfert de chaleur par convection induite par une plaque chauffée et placée dans un milieu poreux non-Darcien saturé de fluide Newtonien par l'approche semi-analytique. La modélisation de l'écoulement et du transfert de chaleur est basée sur la formulation de Darcy-Brinkman, en tenant compte l'effet inertiel macroscopique, en introduisant le terme convectif dans l'équation de la quantité mouvement. Le système des équations différentielles ordinaires

régissant les phénomènes étudiés sont résolu numériquement en utilisant la méthode de Runge-Kutta à l'ordre 5 couplé avec la méthode de Tir. La procédure de simulation a été validée en comparant les résultats obtenus avec ceux d'autres auteurs, publiés dans la littérature. Par la suite, une étude paramétrique a été menée et ce en considérant et analysant les effets des différents paramètres physiques contrôlant lees problèmes physiques étudiés, sur la distribution des champs thermiques et dynamiques dans la zone de la couche limite, et sur le taux de transfert de chaleur et la contrainte de cisaillement à la surface de plaque. A partir de cette investigation, les conclusions suivantes peuvent être tirées :

- Les résultats de cette étude sont en très bon accord avec les résultats obtenus des travaux antérieures déjà publiés.
- L'épaisseur de la couche limite thermique diminue considérablement avec l'augmentation du paramètre de l'exposant de la température λ.
- Le taux de transfert thermique à la surface s'amplifie avec l'élévation de l'exposant de température λ.
- L'aspiration du fluide conduit à la réduction des couches limites dynamique et thermique et permet d'augmenter le taux de transfert thermique au niveau de la surface, contrairement à l'effet de l'injection.
- L'aspiration du fluide à la surface permet d'accélérer la convection naturelle en tout point du champ d'écoulement.
- L'augmentation du nombre de Prandtl réduit l'épaisseur de la couche limite thermique et augmente l'épaisseur de la couche limite dynamique.
- La convection forcée favorise le transfert de chaleur dans la zone de la couche limite.
- Augmenter la perméabilité du milieu poreux réduit (ou stabilise) l'épaisseur de la couche limite thermique.
- Les forces d'inertie diminuent l'épaisseur de la couche limite thermique.
- les forces de cisaillement à la surface sont plus importantes près du la plaque lors du passage du régime de convection forcée au régime de la convection naturelle.
- Lorsque le milieu poreux est plus perméable $Da \uparrow$, les forces de frottement deviennent importantes près de la surface de la plaque, ainsi que le taux de transfert de chaleur à la surface augumente.
- Le rayonnement thermique favorise plus le transfert de chaleur dans le milieu poreux, et conduit à l'expansion de la couche limite thermique.
- Plus le milieu poreux est perméable, plus la chaleur est transférée au-delà de la surface de la plaque.

- Les forces de flottabilité amplifient le taux de transfert de chaleur et les forces de frottement à la surface.
- L'aspiration de fluide à la surface de la plaque permet d'amplifier le taux du transfert de chaleur et de réduire l'effet des forces de cisaillement à la paroi.
- Le transfert thermique dans le milieu est optimal dans le cas d'une plaque verticale.
- La présence d'une source de chaleur variable réduit le taux du transfert de chaleur à la surface, et amplifie les forces de cisaillement à la paroi

Chapitre IV

Approche semi-analytique du modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer

I Introduction

L'étude du phénomène de la convection naturelle, d'origine thermique, en milieu poreux a suscité et suscite encore l'intérêt de nombreux scientifiques et industriels par ses applications potentielles d'ingénieries dans plusieurs secteurs industriels. On note également que le flux de convection naturelle autour d'une surface verticale immergée dans un milieu poreux se manifeste aussi dans plusieurs problèmes d'ingénierie tels ceux rencontrés dans l'extraction de l'énergie géothermique, dans le refroidissement des centrales nucléaires, dans l'extraction du gaz et du pétrole, dans le séchage des produits agro-alimentaires etc. Toutefois, lorsque la convection a lieu près d'une plaque verticale, l'analyse des équations régissant le problème devient plus difficile, nécessitant, généralement, un traitement numérique. Plusieurs articles ont été publiés dans cet axe, basés sur l'utilisation des méthodes numériques les plus couramment utilisées, à titre d'exemple, on peut citer : [100], et [101].

Dans ce chapitre, nous présentons le système d'équations gouvernant l'écoulement et le transfert de chaleur par convection naturelle dans la zone de la couche limite, L'extension de Brinkman-Forchheimer de la loi de Darcy a été adoptée pour décrire le mouvement du fluide au sein de la matrice poreuse, afin de tenir compte à la fois des effets d'inertie et de la diffusion visqueuse. Les équations aux dérivées partielles régissant le phénomène étudié sont transformées en un système d'équations différentielles ordinaires non linéaires et résolues numériquement à l'aide de la méthode de Runge-Kutta à l'ordre 5 couplée avec la technique de tir. Les résultats sont analysés pour l'effet de divers paramètres physiques contrôlant le problème physique étudié, tels que : l'orientation de la plaque, le paramètre de de perméabilité, le paramètre d'aspiration/injection, le nombre du Forchheimer, le nombre d'Eckert, et le paramètre du source/puits interne de chaleur sur la distribution des profils dynamiques et thermiques, et Le taux de transfert de chaleur et la contrainte de cisaillement à la surface.

II Problème physique

II.1 Position du problème

Dans ce chapitre, nous cherchons à étudier l'écoulement et le transfert de chaleur par convection naturelle pour le cas stationnaire dans la zone de la couche limite d'une plaque isotherme multi-orientée intégrée dans un milieu poreux non-Darcien saturé par un fluide newtonien, sans ou en présence de génération/absorption interne de chaleur et de la dissipation visqueuse. Un angle ϕ permet de déterminer la position de la plaque par rapport à la direction verticale. Le modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer est utilisé pour décrire l'écoulement dans un milieu poreux en prenant en compte le terme convectif dans l'équation du mouvement. L'axe des x et des y sont pris respectivement, le long de, et normal à la plaque. La plaque de longueur H est maintenue à une température uniforme T_w supérieure à la température ambiante T_∞ et soumise à un flux de fluide latéral V_w. Le système des coordonnées et la configuration de l'écoulement sont représentés dans la figure IV.1 suivante :

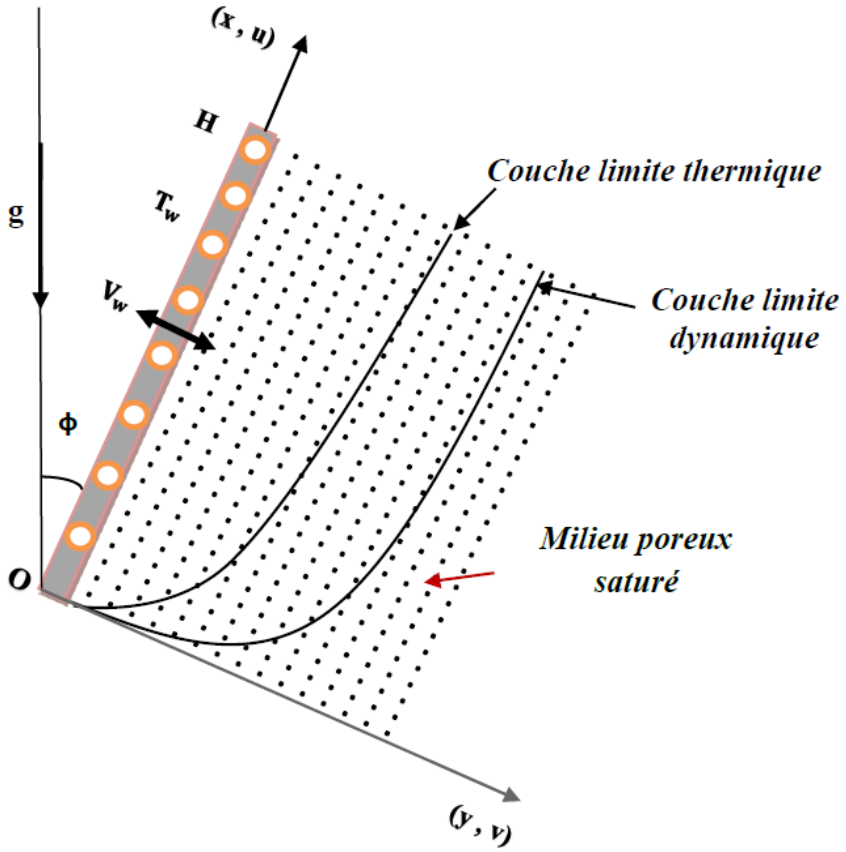


FIGURE IV.1 – Modèle physique et système de coordonnées.

II.2 Hypothèses de calcul

En considérant quelques approximations afin d'obtenir une formulation simple du modèle mathématique. Nous nous limitons donc aux hypothèses couramment retenues dans les études de la convection naturelle qui sont les suivantes :

- Le milieu poreux est complètement saturé par un fluide newtonien incompressible.
- Le fluide satisfait à l'hypothèse de Boussinesq à savoir que les propriétés physiques ne varient pas avec la température à l'exception de la masse volumique dans les forces de gravitation.
- La phase solide du milieu poreux est et en équilibre thermodynamique local avec la phase fluide.
- L'ensemble fluide et matrice poreuse constitue un milieu continue fictif, isotrope et homogène.
- L'écoulement est laminaire, stationnaire et bidimensionnel.
- Le transfert d'énergie par rayonnement et la dispersion thermique sont négligeables.
- Les termes de dissipation visqueuse sont pris en considération.

II.3 Système des équations retenu

Compte tenu des hypothèses formulées précédemment, les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie en 2D régissant l'écoulement et le transfert de chaleur par convection naturelle en présence des effets de la dissipation visqueuse et d'une génération/absorption interne de chaleur dans la zone de couche limite d'une plaque inclinée, posée dans un milieu poreux non-Darcien saturé par un fluide Newtonien, en utilisant la formulation de Darcy-Binkman-Forchheimer sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T - T_\infty)\cos\phi - \dfrac{\nu}{k}u - \dfrac{C_F}{2k^{1/2}}u^2 \\ \\ u\dfrac{\partial T}{\partial x} + v\dfrac{\partial T}{\partial y} = \alpha\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \dfrac{Q(x)}{\rho C_p}(T - T_\infty) + \dfrac{\mu}{\rho C_p}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \end{cases} \tag{IV.1}$$

Ces équations sont couplées avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} y = 0, \;\; x \geq 0, \;\; u = U_0, \;\; v = V_w(x), \;\; T = T_w \\ \\ y \to \infty, \;\; x \geq 0, \;\; u = 0, \;\; v = 0, \;\; T \to T_\infty \end{cases} \tag{IV.2}$$

Où u, v sont, respectivement, les composantes de la vitesse le long des axes x et y. T est la température du fluide. Les constantes : α, β, μ, ν, g, k and ρ sont, respectivement, la diffusivité thermique, le coefficient d'expansion thermique, a viscosité dynamique, la viscosité cinématique, l'accélération de la pesanteur, la perméabilité du milieu poreux. C_F la constante empirique de Forchheimer, Cp est la chaleur spécifique à pression constante. $V_w = Bx^{-1/2}$ est la vitesse d'aspiration/injection du fluide au niveau de la plaque, où B est une constante, avec $B > 0$ correspond au cas de l'injection du fluide, $B < 0$ correspond au cas de l'aspiration du fluide et $B = 0$ correspond à une

plaque imperméable. U_0 est la vitesse du courant libre parallèle à la plaque verticale, généralement, consdérée très faible, et $Q(x) = Q_0/x$ est la source interne de chaleur.

II.4 Formulation adimensionnelle

Pour résoudre le système d'équations (IV.1), en suivant les mêmes démarches décrites dans le chapitre III, nous utiliserons une méthode de similarité qui consiste à transformer le système d'équations aux dérivées partielles (EDP) non-linéaire (IV.1) décrivant le problème d'écoulement et du transfert de chaleur étudié en un simple système d'équations différentielles ordinaires. Pour cela, nous introduisons les transformations de similarité suivantes [97–99] :

$$\begin{cases} \eta = y\sqrt{\dfrac{U_0}{2\nu x}} \\ \\ \psi = (2\nu x U_0)^{1/2} f(\eta) \\ \\ \theta = \dfrac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \end{cases} \tag{IV.3}$$

Où, ψ est la fonction de courant qui est définie comme suit :

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ \\ v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \tag{IV.4}$$

Après substitution des transformations de similarité (IV.3) et développement du système d'équations aux dérivées partielles (IV.1), le système d'équations différentielles adimensionnlles obtenu se présente comme suit :

$$\begin{cases} f''' + ff'' + Gr\theta\cos\phi - Kf' - Fr(f')^2 = 0 \\ \\ \theta'' + Pr.[f\theta' + 2\delta\theta + Ec(f'')^2] = 0 \end{cases} \tag{IV.5}$$

Où $f(\eta)$ et $\theta(\eta)$ sont des fonctions de similarité adimensionnelles, et $Gr = \dfrac{g\beta(T_w - T_\infty)2x}{U_0^2}$ est le nombre de Grashof, $K = \dfrac{2\nu x}{kU_0}$ est le paramètre de pérmiabilité, $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ est le nombre de Prandtl. $Ec = \dfrac{U_0^2}{Cp(T_w - T_\infty)}$ est le nombre de Eckert, $Fr = \dfrac{C_F}{2\sqrt{K}}$ est le nombre de Forchheimer, $\delta = \dfrac{Q_0}{\rho Cp U_0}$ est le paramètre du terme source/puits de chaleur. Notons que $Q_0 = 0$ indique qu'il n'y a ni génération ni absorption de chaleur par le milieu, $Q_0 > 0$ correspond au cas où la génération interne de chaleur est présenté et $Q_0 < 0$ correspond à l'existence d'un puits de chaleur dans le milieu.

Les conditions aux limites associées à ce système sont :

$$\begin{cases} \eta = 0, f(0) = f_w, f'(0) = 1, \theta(0) = 1 \\ \\ \eta \to \infty, f'(\infty) = 0, \theta(\infty) = 0 \end{cases} \tag{IV.6}$$

Où $f_w = -V_w\sqrt{\dfrac{2x}{\nu U_0}}$ est le paramètre d'aspiration/injection.

II.5 Coefficient de frottement et nombre de Nusselt local

Les quantités physiques les plus intéressantes pour ce type de problèmes sont le coefficient de frottement local C_f et le nombre de Nusselt local Nu, qui indiquent respectivement la contrainte de cisaillement et le taux de transfert de chaleur à la surface. Comme l'on a détaillé précédemment dans le chapitre III, le coefficient de frottement local et le nombre de Nusselt local sont donnés respectivement par les équations suivantes :

$$C_f = \frac{2}{\sqrt{Re}} f''(0) \tag{IV.7}$$

$$Nu = -\sqrt{Re}\, \theta'(0) \tag{IV.8}$$

III Méthode et technique de résulution.

Le système d'équations différentielles adimensionnelles (IV.5) assorti des conditions aux limites (IV.6) est non-linéaire. Cependant, il est difficile de le résoudre analytiquement. Pour cela, nous avons procédé aussi à une résolution numérique en utilisant la méthode de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 5 couplée avec la technique de Tir qui est plus adaptée aux problèmes à valeurs limites, lorsque les valeurs initiales nécessaires au démarrage du calcul ne sont pas toutes connues. Cette situation est bien rencontrée dans la présente étude.

Le système d'équations différentielles (IV.5) est non-linéaire et contenant des équations de troisième ordre. Cependant, il est encore difficile de le résoudre analytiquement. Pour cela en adoptant les mêmes démarches algorithmiques précitées dans le chapitre III, afin de le réécrire comme un système d'équations différentielles de premier ordre en utilisant les transformations suivantes :

$$g_1 = f(\eta), \quad g_2 = f'(\eta), \quad g_3 = f''(\eta), \quad g_4 = \theta(\eta), \quad g_5 = \theta'(\eta) \tag{IV.9}$$

Donc le système d'équation différentielle (IV.5) est équivalent au système d'équations différentielles de premier ordre suivant :

$$\begin{cases} g_1' = g_2 \\ g_2' = g_3 \\ g_3' = -g_1 g_3 - Gr\, g_4 \cos\phi + K\, g_2 + Fr g_2^2 \\ g_4' = g_5 \\ g_5' = -Pr\left(g_1 g_5 + 2\delta g_4 + Ec g_3^2\right) \end{cases} \tag{IV.10}$$

Les conditions aux limites couplées au système d'équations (IV.10) sont :

$$\begin{cases} \eta = 0, f(0) = f_w, f'(0) = 1 \\ \eta \to \infty, f'(\infty) = 0, \theta(\infty) = 0 \end{cases} \tag{IV.11}$$

IV Résultats numériques et analyse.

Dans ce chapitre, une étude numérique a été réalisée, de l'écoulement et de transfert de chaleur par convection naturelle, en régime stationnaire, le long d'une plaque isotherme, inclinée d'un angle ϕ par rapport à la verticale, immergée dans un milieu poreux non Darcien saturé par un fluide Newtonien en présence des effets de la dissipation d'énergie par viscosité et avec ou sans génération/absorption interne de chaleur. Le modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer est utilisé pour décrire l'écoulement dans le milieu poreux, afin de tenir compte les effets inertiels et de frottement à la paroi. Le système d'équations différentielles adimensionnlles (IV.5), couplés avec les conditions aux limites (IV.6), est résolu numériquement, par la méthode de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 5 couplée avec la technique de Tir.

Dans cette étude, nous avons analysé les effets de l'angle d'inclinaison ϕ, du nombre de Forchheimer Fr, du nombre de Echert Ec, du paramètre source/puits interne de chaleur, du paramètre de perméabilité K, et du paramètre aspiration/injection f_w sur les profils thermiques, dynamiques et du taux de transfert de chaleur à la surface de la plaque. Rappelons que l'aspiration de fluide correspond à $f_w > 0$, l'injection de fluide à $f_w < 0$ et $f_w = 0$ correspond à une plaque imperméable

IV.1 Profils dynamiques

IV.1.1 Effet du nombre de Forchheimer Fr

La figure (IV.2) montrent l'effet du nombre de Forchheimer Fr sur les profils de la vitesse adimensionnelle autour d'une plaque inclinée $\phi = 30°$ par rapport à la verticale, isotherme et imperméable posée dans un milieu poreux non Darcien saturé pour $Gr = 2$, $Pr = 0.71$, $K = 1$, en abscence de la dissipation visqueuse ($Ec = 0$)

et de génération/absorption interne de chaleur ($Q = 0$). À partir de cette figure, nous remarquons que l'augmentation des valeurs du nombre Fr de 0 à 1.5 entraîne une augmentation de la traînée de Forchheimer qui ralentit l'écoulement, c'est-à-dire réduction notable de la vitesse d'écoulement, ce conduit à une réduction de l'épaisseur de la couche limite dynamique.

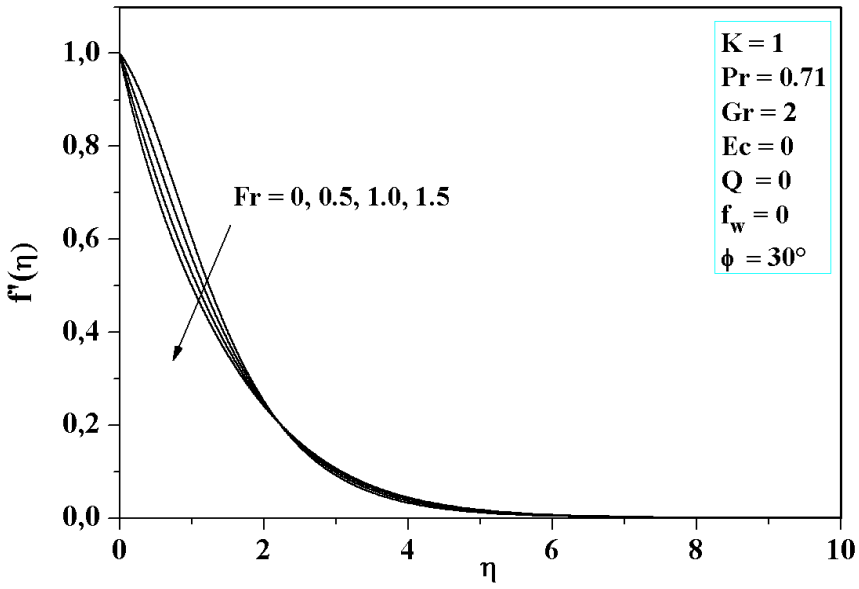


FIGURE IV.2 – Profils adimensionnels de vitesse pour différentes valeurs de Fr

IV.1.2 Effet du nombre de Eckert Ec

La figure (IV.3) illustre pour $Gr = 2$, $Pr = 0,71$, $K = 1$ et $f_w = 0$, les profils de la vitesse adimensionnelle autour d'une plaque isotherme et imperméable, inclinée d'un angle $\phi = 30°$ par rapport à la verticale, et posée dans un milieu poreux non Darcien saturé, pour différentes valeurs du nombre de Eckert Ec. Ici, on voit clairement que la vitesse de l'écoulement dans la zone de la couche limite dynamique augmente avec l'augmentation des valeurs du nombre de Eckert.

IV.2 Champs thermiques

IV.2.0.a Effet du nombre Forchheimer Fr

L'effet du nombre de Forchheimer sur la distribution des lignes isothermes dans la zone de la couche limite d'une plaque inclinée $\phi = 30°$ par rapport à la verticale, isotherme et imperméable placée dans un milieu poreux non Darcien saturé par un fluide Newtonien est présenté sur les figures (IV.4) et (IV.5) pour des valeurs sélectionnées du nombre de forchheimer $Fr = 0$ et $Fr = 1.5$, avec $Gr = 2$, $Pr = 0.71$, $K = 1$, $Ec = 0$, $Q = 0$ et , $f_w = 0$. Ici, nous remarquons que la présence de la traînée de Forchheimer ralentit l'écoulement

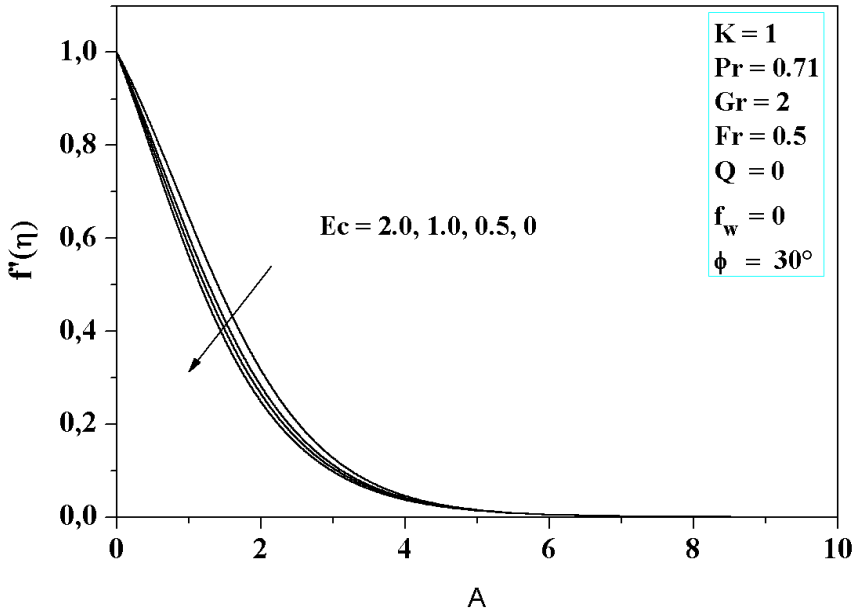


FIGURE IV.3 – Profils adimensionnels de vitesse pour différentes valeurs de Ec

de fluide dans le milieu ce qui se traduit par une augmentation de la température dans la zone de la couche limite.

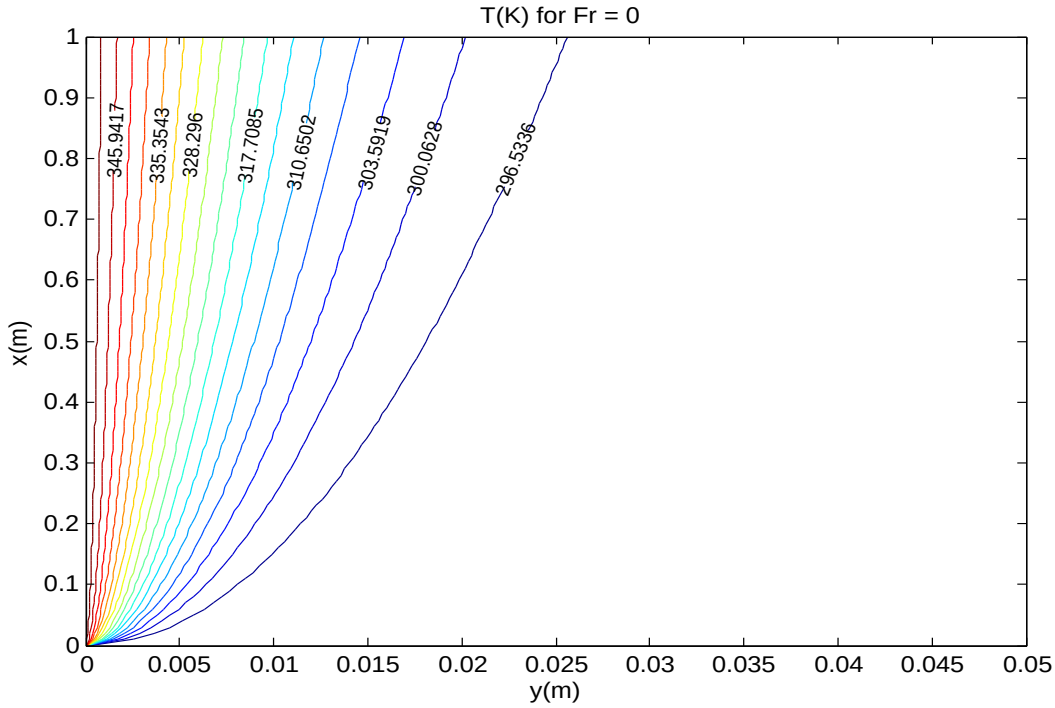


FIGURE IV.4 – Lignes isothermes en fonction de x et y pour $Fr = 0$

IV.2.0.b Effet du nombre d'EckertEc

Les figures (IV.6) et (IV.7) illustrent, à $Gr = 2$, $Pr = 0.71$, $K = 1$, $Fr = 0.5$, $Q = 0$ et , $f_w = 0$, La distribution des lignes isothermes dans la zone de la couche limite

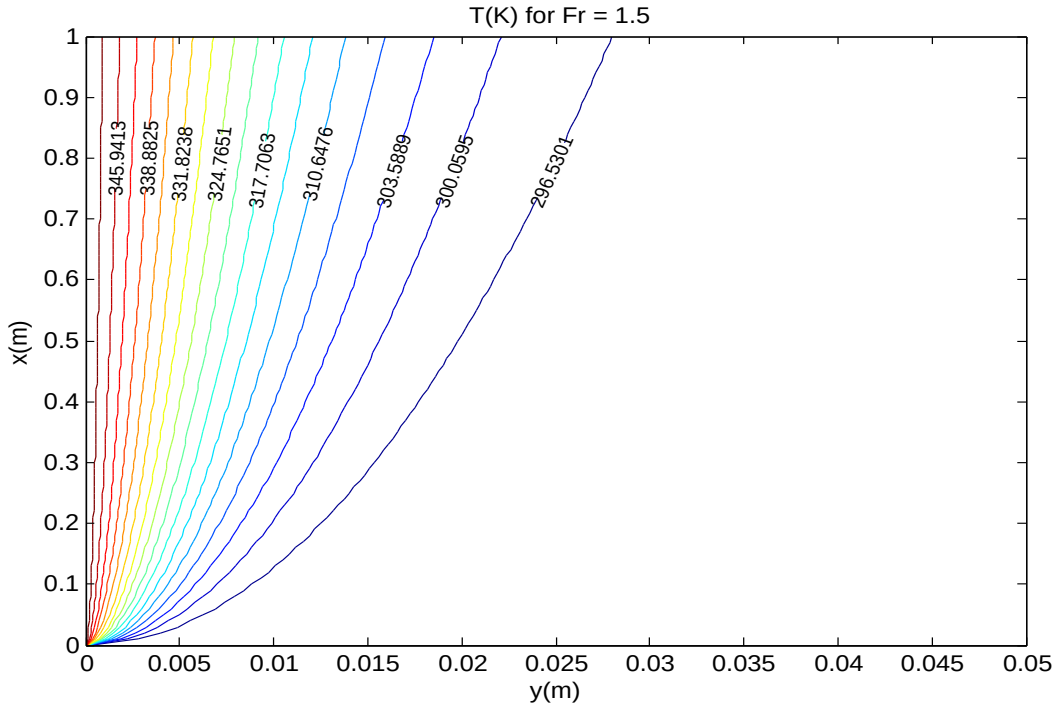


FIGURE IV.5 – Lignes isothermes en fonction de x et y pour $Fr = 1.5$

thermique d'une plaque inclinée d'un angle $\phi = 30°$ par rapport à la verticale, isotherme et imperméable posée dans un milieu poreux saturé, pour deux valeurs sélectionnées du nombre d'Eckert : $Ec = 0$ et $Ec = 2$, indiquent respectivement les deux cas avec ou sans effets de la dissipation visqueuse. Ils montrent que l'effet de la dissipation visqueuse sur la convection naturelle est d'augmenter légèrement l'énergie, ce qui entraîne une augmentation de la température du milieu, ce qui explique l'élargissement de l'épaisseur de la couche limite thermique.

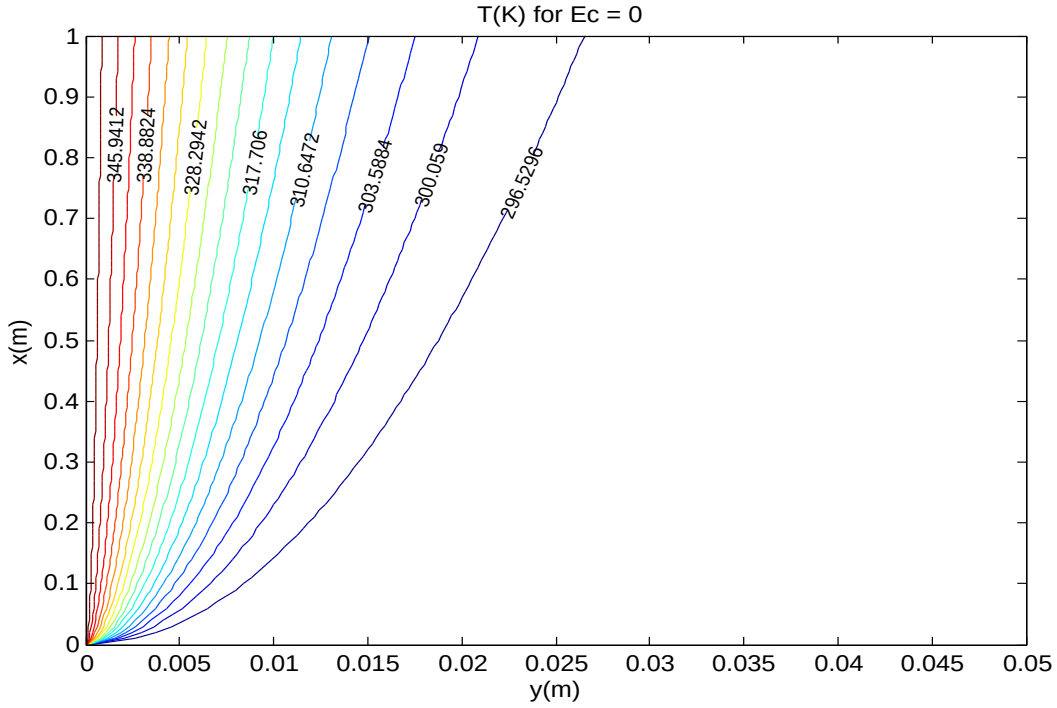


FIGURE IV.6 – Lignes isothermes en fonction de x et y pour $Ec = 0$

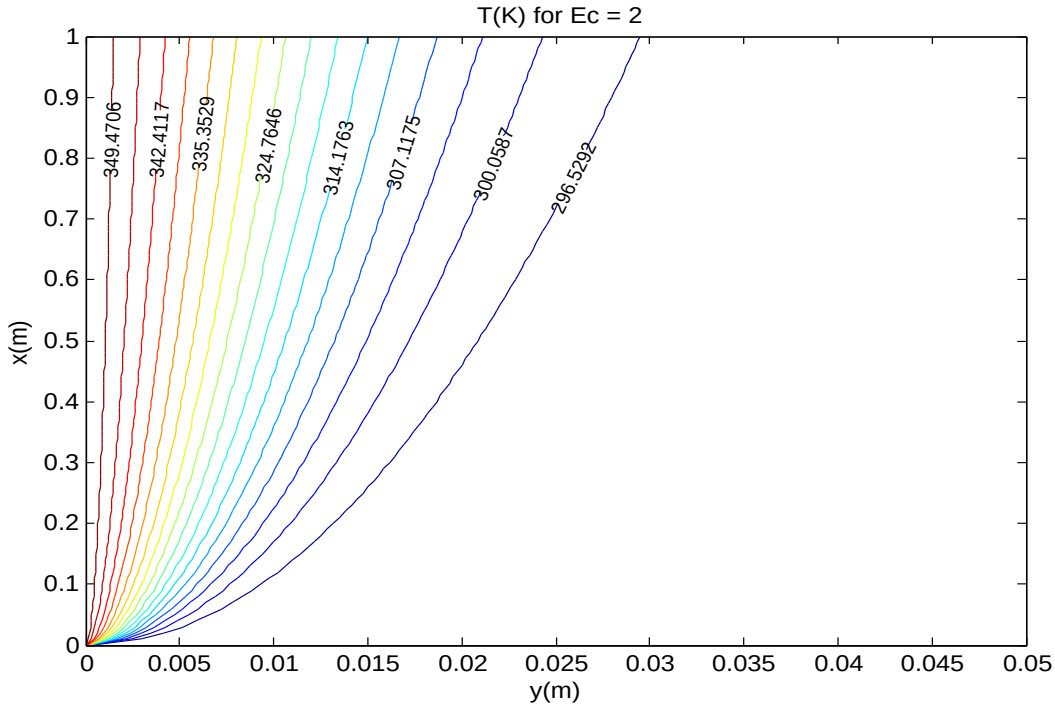


FIGURE IV.7 – Lignes isothermes en fonction de x et y pour $Ec = 2$

IV.2.0.c Effet du terme source Q

Les figures (IV.8), (IV.9) et (IV.10) montrent à $Gr = 2$, $Pr = 0.71$, $K = 1$, $Fr = 0.5$, $Ec = 0$ et , $f_w = 0$, la distribution des lignes isothermes dans la zone de la couche limite d'une plaque inclinée d'un angle $\phi = 30°$ par rapport à la verticale, isotherme et imperméable insérée dans un milieu poreux non Darcien saturé par un fluide Newtonien, pour des valeurs sélectionnées du paramètre source/puits interne de chaleur : $Q = -0.2$, $Q = 0$ et $Q = 0.2$ respectivement. Ici, nous remarquons que l'effet de l'augmentation des valeurs du paramètre source/puits interne de chaleur entraîne une augmentation de la température dans la zone de la couche limite thermique.

IV.2.0.d Effet du paramètre d'aspiration/injection f_w

Les figures (IV.11), (IV.12) et (IV.13) montrent à $Gr = 2$, $Pr = 0.71$, $K = 1$, $Fr = 0.5$, $Ec = 0$ et , $Q = 0$, la distribution des lignes isothermes dans la zone de la couche limite isotherme d'une plaque isotherme inclinée d'un angle $\phi = 30°$ par rapport à la verticale, insérée dans un milieu poreux non Darcien saturé par un fluide Newtonien, pour des valeurs sélectionnées du paramètre d'aspiration/injection : $f_w = -1$, $f_w = 0$ et $f_w = 1$ respectivement. Ici, On observe clairement à partir de ces figures l'aspiration du fluide à la surface réduit considérablement l'épaisseur de la couche limite thermique, et par conséquent conduit à un refroidissement près de la plaque, contrairement à l'effet de l'injection du fluide.

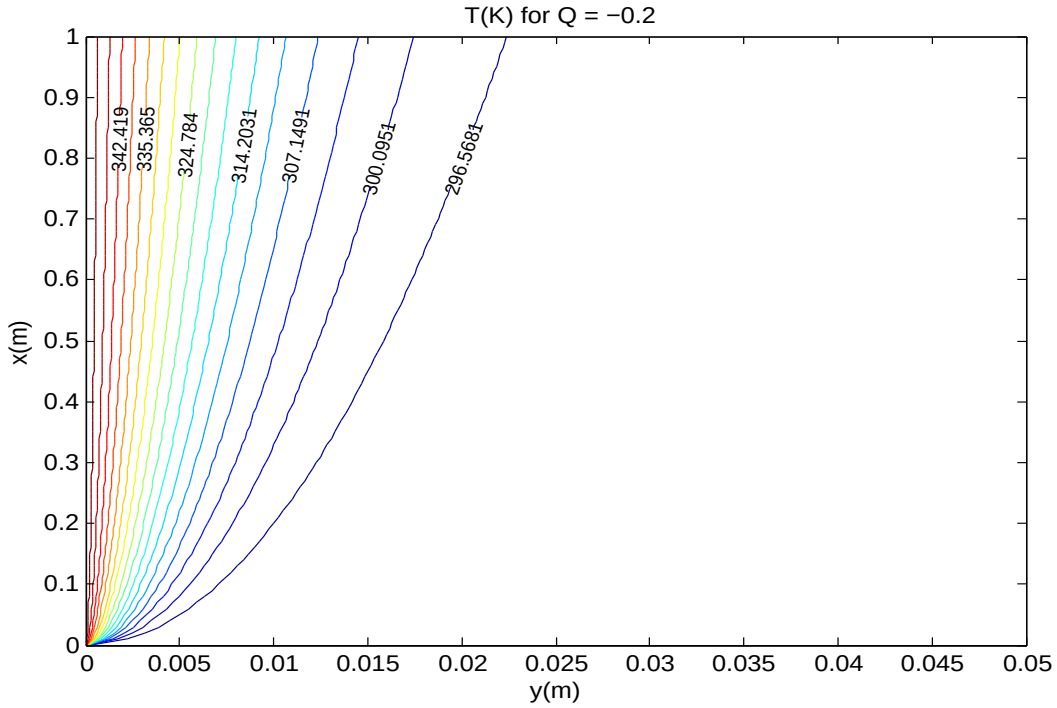


FIGURE IV.8 – Lignes isothermes en fonction de x et y pour $Q = -0.2$

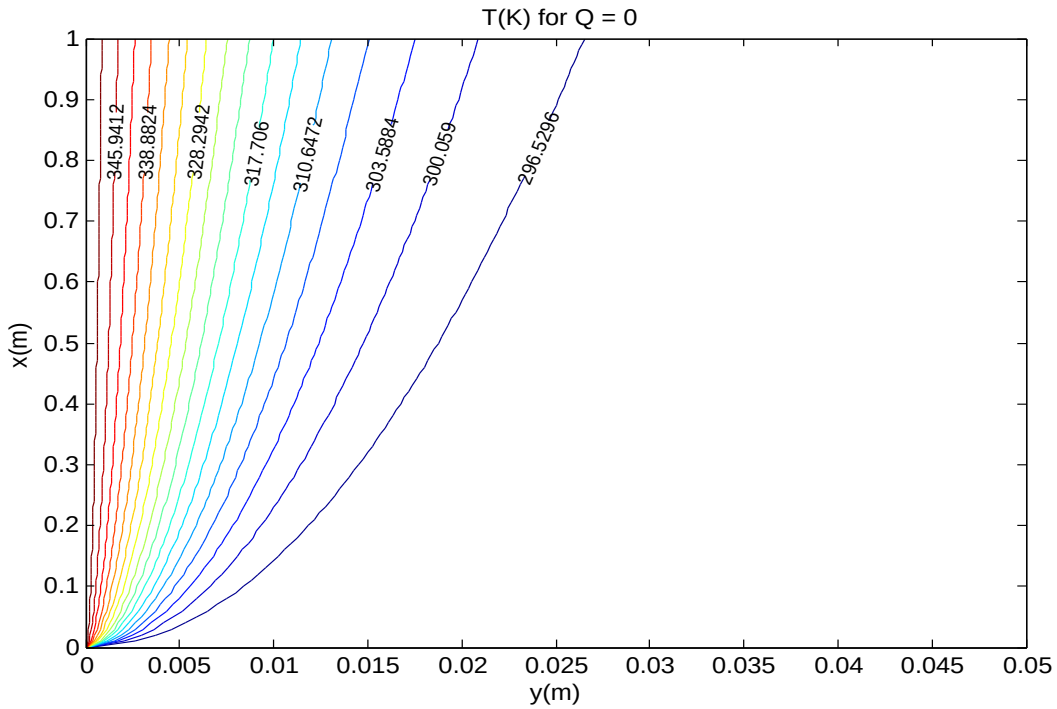


FIGURE IV.9 – Lignes isothermes en fonction de x et y pour $Q = 0$

IV.3 Profils du nombre de Nusselt local et du coefficient de frottement local

Les figures (IV.15) et (IV.16) illustrent les profils du taux de transfert de chaleur et du coefficient de frottement à la surface en fonction de l'angle d'inclinaison ϕ, pour une plaque isotherme et imperméable, posée dans un milieu poreux saturé par un fluide Newtonien, pour deux valeurs du nombre de Forchheimer : $Fr = 0$ et $Fr = 0.5$, à $Gr = 2$, $Pr = 0.71$, $K = 1$, $Ec = 0$ et $Q = 0$. D'après ces figures, on observe que, le taux de transfert de chaleur et le coefficient de frottement à la surface diminuent avec l'augmentation de

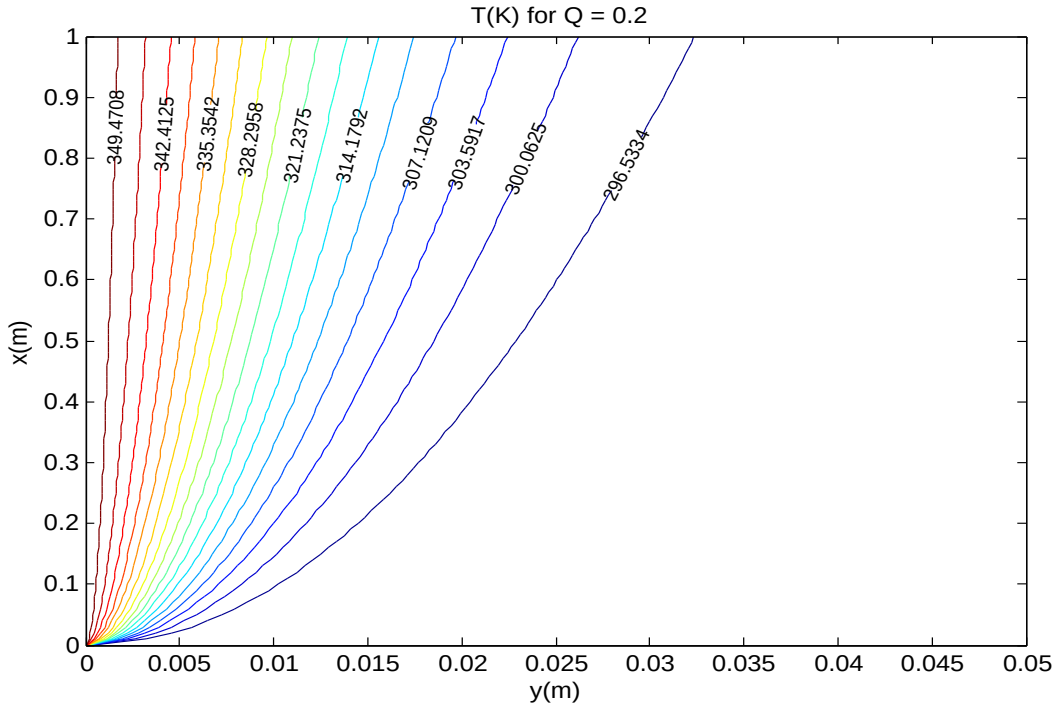


FIGURE IV.10 – Lignes isothermes en fonction de x et y pour $Q = 0.2$

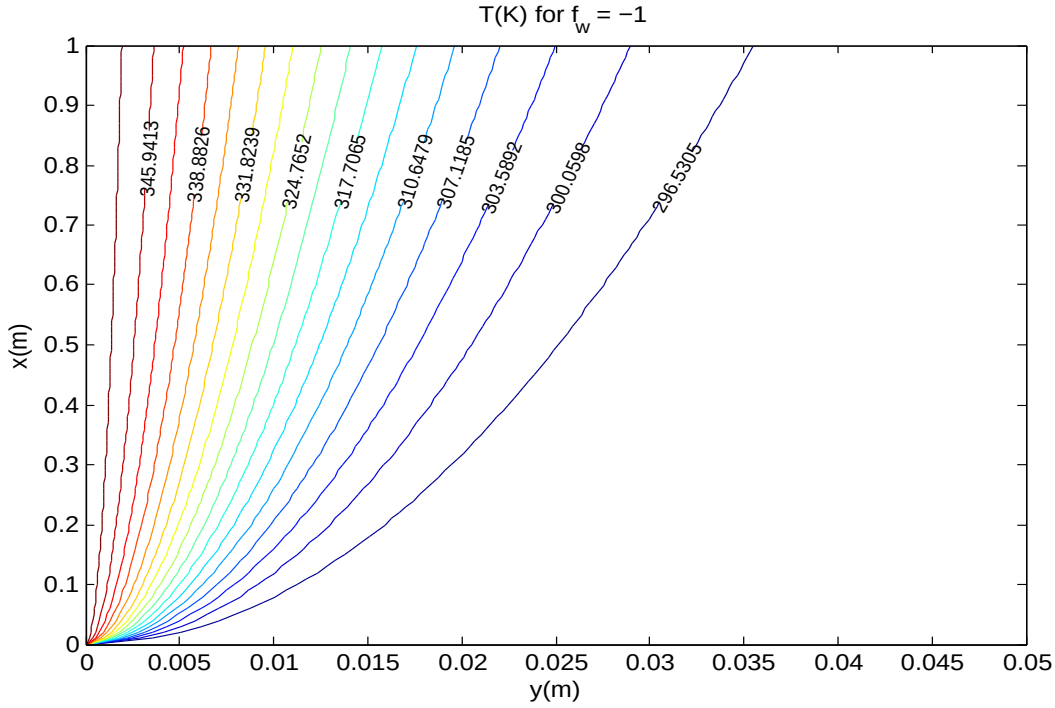


FIGURE IV.11 – Lignes isothermes en fonction de x et y pour $f_w = -1$

l'angle d'inclinaison ϕ, indépendamment de la valeur du nombre de Forchheimer Fr. Ici, il est évident que le taux de transfert de chaleur et le coefficient de frottement sont plus importants à la surface dans le cas où la plaque est verticale ($\phi = 0$). Nous remarquons également que la présence de l'effet de la trainée de Forchheimer conduit à réduire le taux de transfert de chaleur et les effets de forces de frottement à la surface de plaque.

La figure (IV.16) présente Les profils du coefficient de frottement local et du nombre de Nusselt local pour le cas d'une d'une plaque isotherme et imperméable inclinée d'un

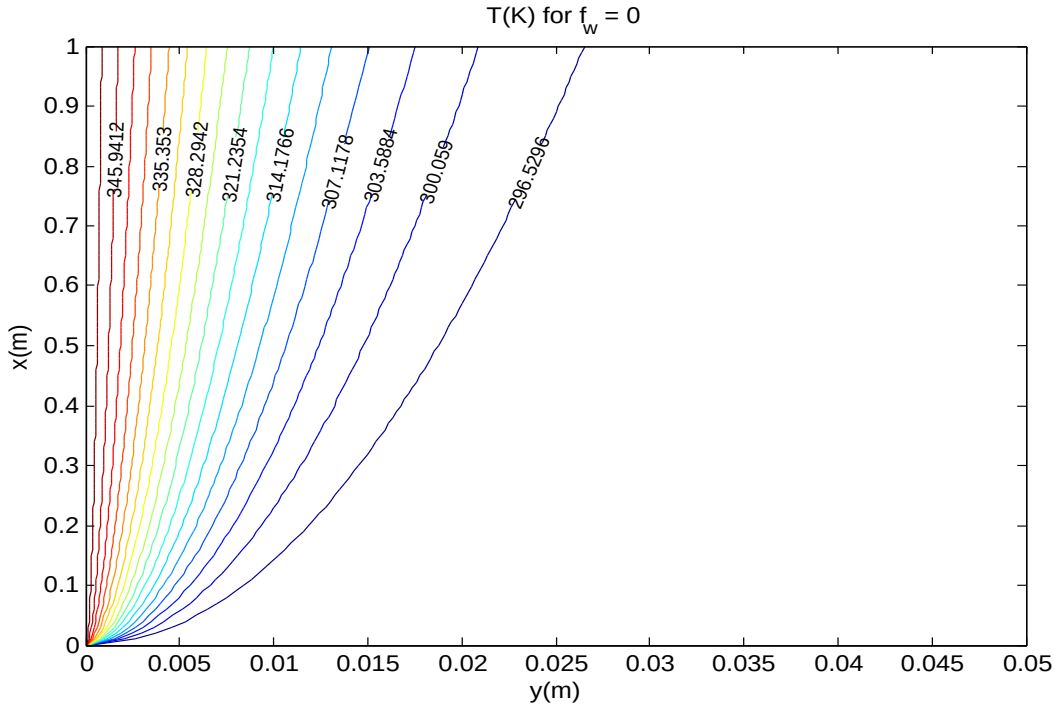


FIGURE IV.12 – Lignes isothermes en fonction de x et y pour $f_w = 0$

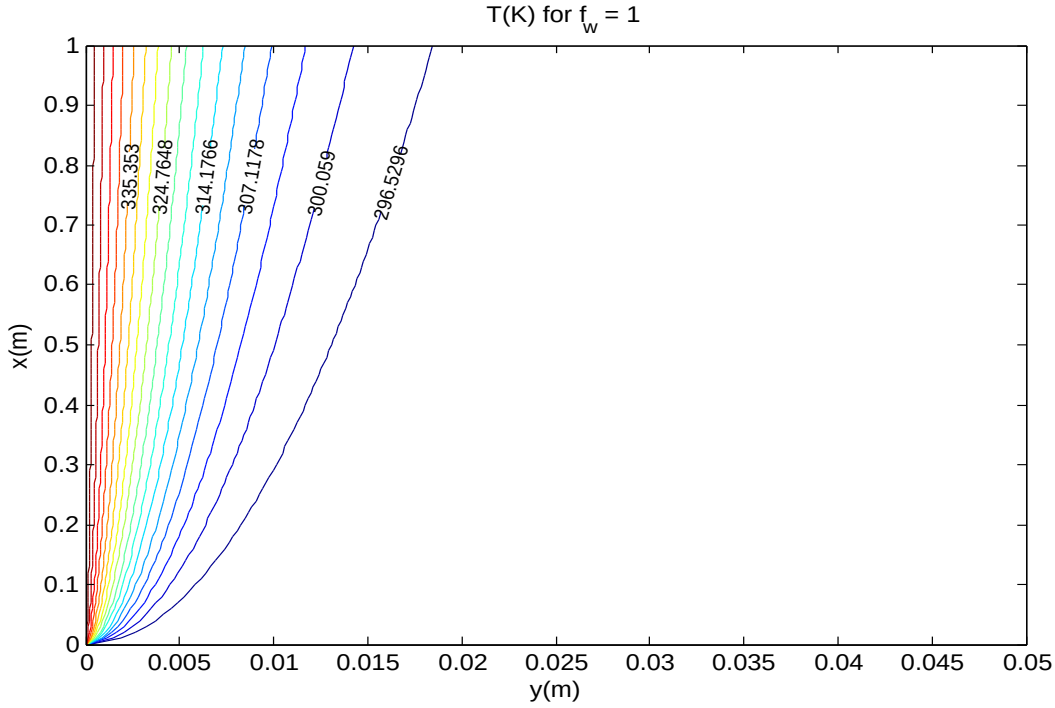


FIGURE IV.13 – Lignes isothermes en fonction de x et y pour $f_w = 1$

angle $\phi = 30°$ par rapport à la verticale, posée dans un milieu poreux saturé, avec $Gr = 2$, $Pr = 0.71$, $K = 1$, $Ec = 0$, et $Q = 0$. A partir de cette figure,on conclut que, la traînée de Forchheimer conduit à la réduction du taux de transfert thermique à la surface de la plaque. Ansi, on voit que l'augmentation du nombre de Forchheimer Fr conduit à réduire l'effet des forces de frottement à la surface de la plaque.

La figure (IV.17) montre l'effet de la dissipation visqueuse sur les profils du coefficient de frottement local et du nombre de Nusselt local pour le cas d'une d'une plaque isotherme

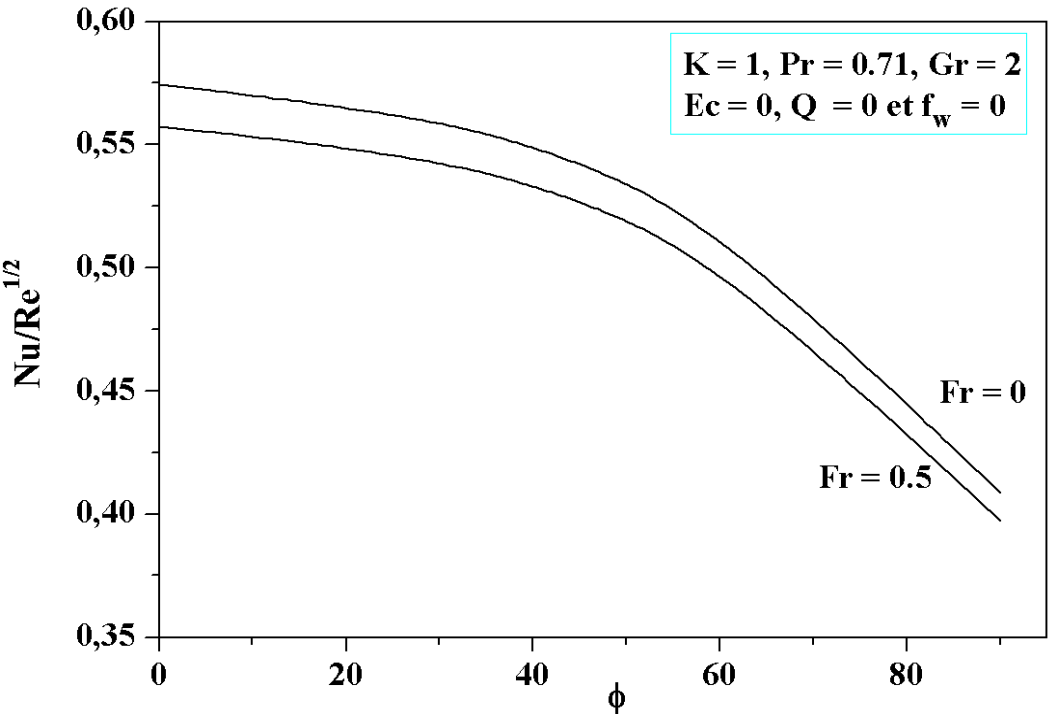


FIGURE IV.14 – Profils du nombre de Nusselt en fonction de ϕ pour $Fr = 0$ et $Fr = 0.5$

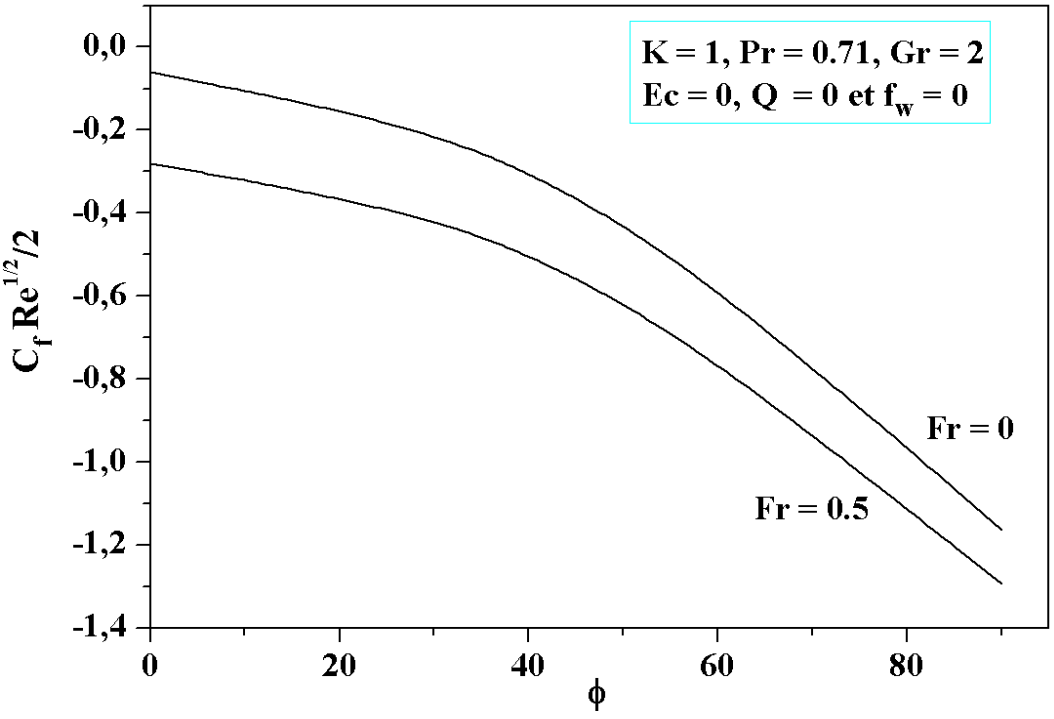


FIGURE IV.15 – Profils du coefficient du frottement en fonction de ϕ pour $Fr = 0$ et $Fr = 0.5$

et imperméable inclinée d'un angle $\phi = 30°$ par rapport à la verticale, immergée dans un milieu poreux saturé, avec $Gr = 2$, $Pr = 0.71$, $K = 1$, $Fr = 0.5$, en absence d'une génération/puits interne de chaleur $Q = 0$. A partir de cette figure, on voit clairement que , lorsque le nombre d'Eckert augmente, le coefficient de frottement augmente, alors que le taux de transfert de chaleur à la surface de la plaque diminue, ce qui indique que la présence de l'effet de la dissipation visqueuse réduit le taux de transfert de chaleur, et

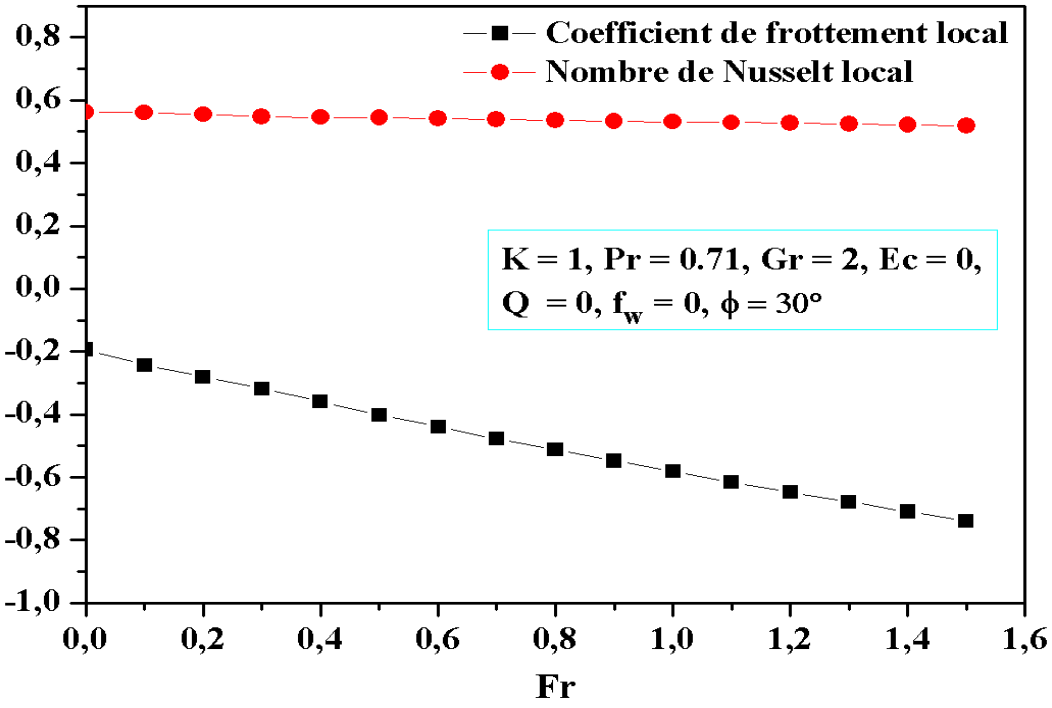


FIGURE IV.16 – Effet de Fr sur le coefficient du frottement et sur le nombre de Nusselt local.

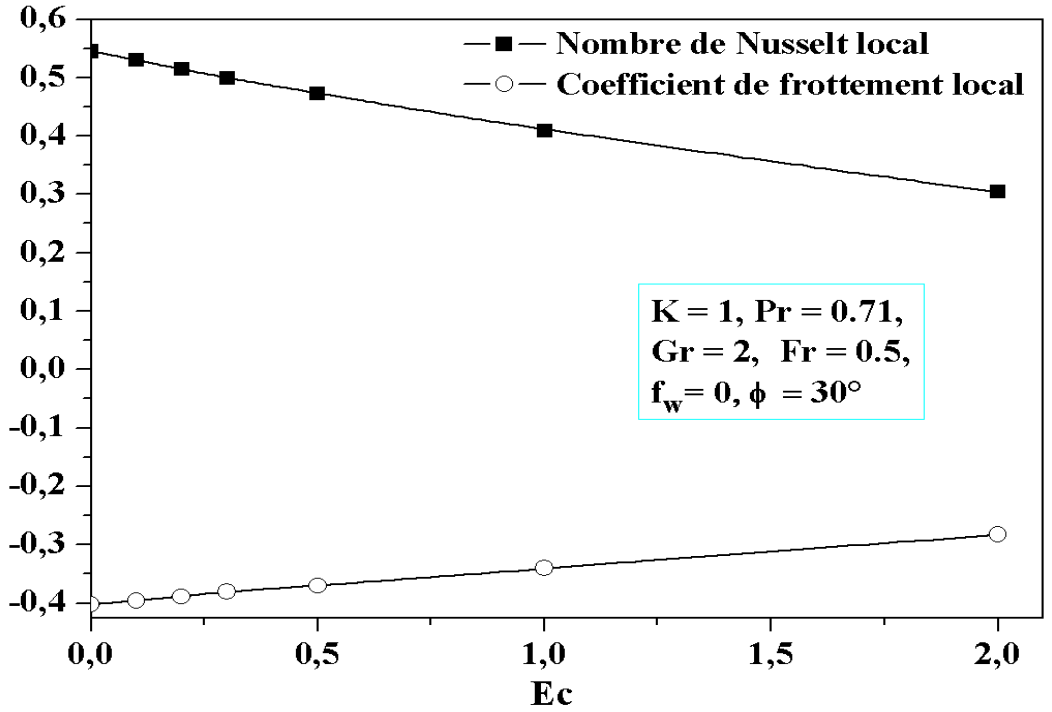


FIGURE IV.17 – Effet de Ec sur le coefficient du frottement et sur le nombre de Nusselt local.

renforcer l'effet des forces de frottement à la surface de la plaque.

Dans la figure (IV.18), nous présentons les profils du taux de transfert de chaleur, et du coefficient de frottement à la surface d'une plaque isotherme et imperméable inclinée d'un angle $\phi = 30°$ par rapport à la verticale, insérée dans un milieu poreux saturé, avec $Gr = 2$, $Pr = 0.71$, $K = 1$, $Fr = 0.5$, en absence des effets de la dissipation de l'énergie

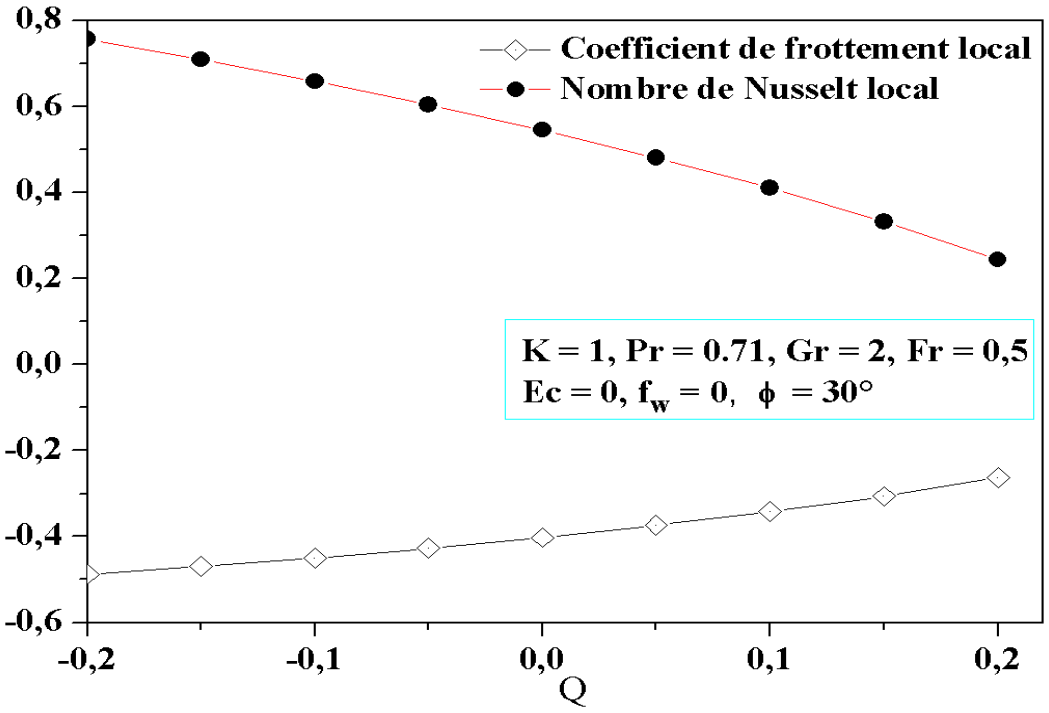


FIGURE IV.18 – Effet de Q sur le coefficient du frottement local et sur le nombre de Nusselt local pour une plaque imperméable.

par viscosité ($Ec = 0$), avec et sans génération/absorption interne de la chaleur . A partir de cette figure, on peut noter que la présence d'une source de chaleur interne dans un milieu poreux ($Q > 0$) permet de réduire le taux de transfert de chaleur à la surface, par contre, la présence d'un puits de chaleur dans le milieu ($Q < 0$) permet de l'amplifier. Cela semblait logique car la présence d'une absorption de chaleur dans le milieu augmente les gradients thermiques, ce qui entraîne par conséquent un taux élevé de transfert de chaleur à la surface de la plaque. Aussi on voit clairement que la présence d'une source de chaleur interne dans un milieu poreux renforcer l'effet des forces de frottement à la surface de la plaque, tandis que la présence d'un puits de chaleur dans le milieu conduit à les réduire.

La figure (IV.19) présente, pour $Gr = 2$, $Pr = 0.71$, $K = 1$, $Fr = 0.5$, en absence des effets de la dissipation de l'énergie par viscosité ($Ec = 0$), et sans génération/absorption interne de la chaleur ($Q = 0$), les profils du nombre de Nusselt et de la contrainte de cisaillement à la surface en fonction du paramètre de perméabilité K . Ici, on remarque que le taux de transfert de chaleur et le coefficient de frottement à la surface diminuent avec l'augmentation du paramètre de perméabilité K.

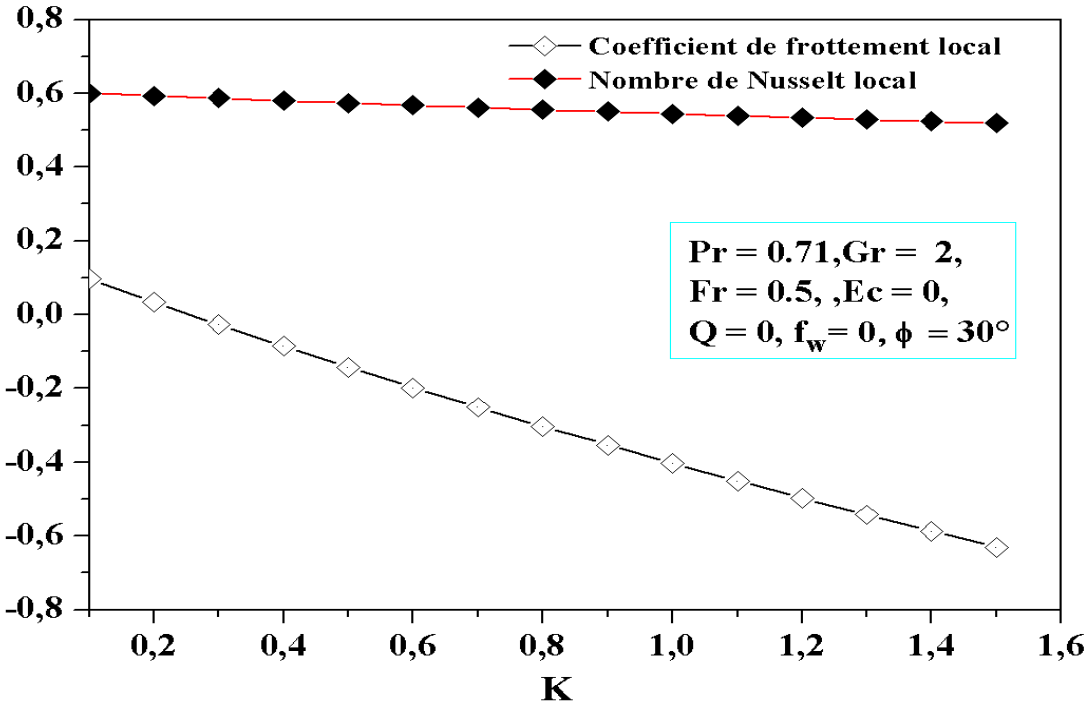


FIGURE IV.19 – Effet de K sur le coefficient du frottement local et sur le nombre de Nusselt local pour une plaque imperméable.

V Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié la convection naturelle d'origine thermique induite par une plaque isotherme, inclinée d'un angle ϕ par rapport à la verticale, immergée dans un milieu poreux non-Darcien saturé par un fluide Newtonien en présence des effets de la dissipation d'énergie par viscosité et avec ou sans génération/absorption interne de chaleur. Le modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer est utilisé pour décrire l'écoulement dans le milieu poreux, afin de tenir compte les effets inertiels et de frottement à la paroi. Le système d'équations différentielles ordinaires non linéaires régissant le phénomène étudié est résolu numériquement à l'aide de la méthode de Runge-Kutta à l'ordre 5 couplée avec la technique de tir. Par la suite, une étude paramétrique a été menée et ce en considérant plusieurs effets à savoir : les effets de l'angle d'inclinaison ϕ, du nombre de Forchheimer Fr, du nombre de Echert Ec, du paramètre d'aspiration/injection, du paramètre de perméabilité et du paramètre source/puits interne de chaleur. A partir de cette investigation, les conclusions suivantes peuvent être tirées :

- L'augmentation du nombre Forchheimer entraîne une augmentation de la traînée de Forchheimer qui conduit à la réduction de la vitesse d'écoulement et à L'augmentation de la température dans la zone de couche limite.
- L'augmentation du nombre Forchheimer Fr conduit à réduire le taux de transfert de chaleur et l'effet des forces de frottement à la surface de la plaque.
- L'aspiration de fluide à la surface de la plaque permet d'amplifier le taux du transfert de chaleur et de réduire l'effet des forces de cisaillement à la paroi.

- Plus le milieu poreux est perméable, plus la chaleur est transférée au-delà de la surface.
- La dissipation visqueuse réduit le taux du transfert thermique et amplifie l'effet des forces de frottement à la paroi.
- La présence d'une source interne de chaleur réduit le taux du transfert de chaleur à la surface, et renforce l'effet des forces de cisaillement à la paroi
- La présence d'un puits interne de chaleur amplifie le taux du transfert de chaleur à la surface, et réduit l'effet des forces de frottement à la paroi
- Le taux surfacique du transfert thermique est optimal dans le cas d'une plaque verticale.

Chapitre V

Approche CFD du modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer

I Introduction

L'analyse du transfert de chaleur par convection naturelle dans un milieu poreux a attiré l'attention de nombreux chercheurs au cours des dernières décennies. Ce type de problèmes se rencontrent dans les systèmes d'énergie géothermique, l'extraction de pétrole et de gaz à travers le sol, le stockage de substances radioactives, les systèmes biologiques, etc,... De nombreuses études principales concernant ces processus ont été mentioonné dans le livre [102].

Les premiers travaux sur l'écoulement et le transfert de chaleur à travers des milieux poreux ont été basé sur le modèle de Darcy, qui néglige les effets inertiels et visqueux, qui ne sont pas significatifs pour une faible perméabilité et lorsque la vitesse d'écoulement est faible. Cependant, dans les situations d'écoulement à grande vitesse et à haute perméabilité, la loi de Darcy devient inapplicable, car elle ne tient pas compte les effets des parois, et des forces d'inerties. Ces effets manquants sont très importants dans la plupart des situations pratiques, dans le domaine d'ingénieries, dans plusieurs secteurs industriels telles que l'écoulement de fluide dans les réservoirs géothermiques, isolation thermique, réservoir de pétrole, etc. Ces effets sont incorporés plus tard, par l'utilisation du modèle général connu sous le nom, modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer. Par conséquent, les études récentes se sont concentrées sur l'importance du phénomène du transfert de chaleur par convection dans les milieux poreux non-Darcien. Plusieurs articles ont été publiés dans cet axe.

L'approche CFD offre la possibilité de simuler le processus complet de transfert de chaleur, dans différentes situations et pour diverses configurations géométriques avec une bonne précision. Parmi les études récentes dans ce domaine, on peut citer : Rajesh et al. [103] ont été analysé le flux laminaire de convection forcée sur une plaque plane. Dans cette étude, les estimations théoriques de l'épaisseur de la couche limite et du coefficient de transfert de chaleur sont examinées à l'aide de l'approche CFD (Computational Fluid Dynamics). Ces auteurs montrent que l'épaisseur de la couche limite diminue avec la distance depuis le bord d'attaque vers l'autre extrémité de la plaque, et augmente avec le nombre de Reynolds. De plus, l'augmentation des valeurs du nombre de Reynolds et

du nombre de Prandtl tend à augmenter le nombre de Nusselt moyen et local .Très récemment, Shankar et al. [104] ont analysé l'influence du processus de transfert de chaleur dans les milieux poreux avec le cas d'une cavité d'air, en utilisant l'approche CFD. Les résultats numériques obtenus par ces auteurs sont validés avec des résultats expérimentaux.

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'écoulement et le transfert de chaleur par convection naturelle le long d'une plaque verticale isotherme chauffée et intégrée dans un milieu poreux non-Darcien saturé par un fluide Newtonien, en présence des effets visqueux et inertiels. Le modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer est utilisé pour décrire le mouvement du fluide dans la matrice poreuse du milieu étudie. L'approche CFD est adoptée pour analyser l'effet du nombre de Rayleigh sur le champ thermique et de prédire le profil du taux de transfert de chaleur à la surface de la plaque. Cette étude trouve des applications dans les domaines de génie pétrolier, de la géothermie, etc.

II Modélisation mathématique du problème

II.1 Description du problème considéré

Il s'agit d'une étude dans le cas d'un régime stationnaire de la convection naturelle induite par une plaque isotherme verticale de longueur H, incorporée dans un milieu poreux non-Darcien saturé par un fluide Newtonien. Le modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer est utilisé pour décrire le mouvement du fluide au sein de la matrice poreuse, en tenant compte du terme convectif dans l'équation de quantité de mouvement. la plaque est maintenue à une température constante $T_w = 353K$. La température du fluide loin de la plaque est T_∞. Le modèle physique et le système de coordonnées sont illustrés sur la figure V.1.

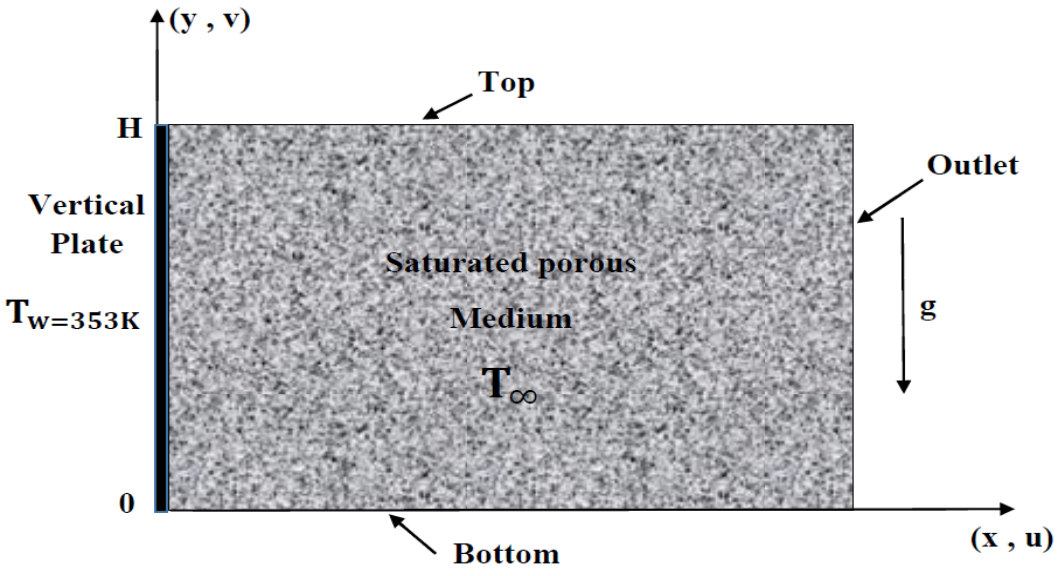


FIGURE V.1 – Modèle physique et système de coordonnées.

II.2 Hypothèses de calcul

Dans ce chapitre, nous allons considérer les hypothèses sinplificatrices suivantes, qui sont souvent utilisées dans l'étude de la convection naturelle :

- Le milieu poreux est complètement saturé par un fluide newtonien incompressible.
- On tient compte de la convection naturelle générée par des différences de température en utilisant l'approximation de Boussinesq.
- La phase solide et en équilibre thermodynamique local avec la phase fluide.
- L'ensemble fluide et matrice poreuse constitue un milieu continue fictif, isotrope et homogène.
- L'écoulement est laminaire, stationnaire et bidimensionnel.
- Le transfert d'énergie par rayonnement, la dissipation visqueuse et la dispersion thermique sont négligeables.

II.3 Formulation mathématique

Dans l'approche CFD, la zone poreuse est traitée comme une zone fluide où les effets visqueux et inertiels sont simulés en ajoutant un terme source S_i donné par l'équation (V.1) dans l'équation de quantité de mouvement ((V.2)). S_i est défini comme la somme du terme visqueux (le terme de Darcy, le premier à droite de l'équation ((V.1)) et du terme inertiel (le second à droite de l'équation (V.1). En général, les équations de base, de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie utilisées par CFD-Fluent pour le cas d'un milieu poreux isotrope et pour un écoulement monophasé sont données par : (V.2), (V.2) et (V.2), [105, 106].

$$S_i = -\frac{\mu}{\alpha} v_i + \frac{1}{2} C_2 |v| v_i \tag{V.1}$$

$$\frac{\partial \gamma\rho}{\partial t} + \nabla.(\gamma\rho\overrightarrow{v}) = 0 \tag{V.2}$$

$$\frac{\partial \gamma\rho\overrightarrow{v}}{\partial t} + \nabla.(\gamma\rho\overrightarrow{v}.\overrightarrow{v}) = -\gamma\nabla p + \nabla(\gamma\overrightarrow{\tau}) + \gamma\rho\overrightarrow{g} - S_i \tag{V.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\gamma\rho_f E_f + (1-\gamma)\rho_s E_s) + \nabla.(\overrightarrow{v}(\rho_f E_f + P)) = \nabla.\left[k_{eff}\nabla T - (\Sigma_i h_i \overrightarrow{J}_i) + (\overrightarrow{\tau}.\overrightarrow{v})\right] + S_f^h \tag{V.4}$$

où S_i est le terme source pour l'équation de quantité de mouvement, l'indice i (x ou y), $|v|$ est la magnitude de la vitesse. μ, α, C_2, g E_f, E_s, ρ_f, ρ_s, γ, k_{eff} et S_f^h sont respectivement la viscosité du fluide, la perméabilité du milieu poreux, le coefficient de la résistance inertielle, l'accélération gravitationnelle, l'énergie totale du fluide, l'énergie

totale du solide , la densité du fluide, la densité du milieu solide, la porosité du milieu, la conductivité thermique effective du milieu et le terme source de l'enthalpie du fluide.

La conductivité thermique effective dans le milieu poreux est calculée par FLUENT en tant que la moyenne en volume de la conductivité du fluide et de la conductivité du solide :

$$k_{eff} = \gamma k_f + (1 - \gamma) k_s \tag{V.5}$$

0ù, k_f et k_f sont respectivement la conductivité thermique de la phase fluide et la conductivité thermique de la phase solide.

II.4 Paramètres sans dimension

Dans cette section, nous présentons les paramètres sans dimension importants pour cette étude.

II.4.1 Nombre de Rayleigh

Le nombre de Rayleigh Ra est la relation entre les forces de flottabilité et les forces visqueuses dans un fluide, il est défini comme :

$$Ra = \frac{g\,\beta\,\Delta T\,H^3}{\nu\,a} \tag{V.6}$$

Où, a, β et ν sont respectivement la diffusivité thermique, le coefficient de dilatation thermique et la viscosité cinématique.

II.4.2 Nombre de Prandtl

Le nombre de Prandtl Pr représente le rapport entre la diffusivité de quantité de mouvement (ou viscosité cinématique)ν et la diffusivité thermique α, il est donné par l'équation suivante :

$$Pr = \frac{\nu}{a} \tag{V.7}$$

II.4.3 Nombre de Nusselt

Le nombre de Nusselt Nu est défini comme le rapport entre le flux thermique avec et sans convection :

$$Nu = \frac{Q\,.\,H}{k(T_w - T_\infty)} \tag{V.8}$$

Où, H est la longueur de la plaque, k est la conductivité thermique dde fluide, Q est le flux de chaleur, T_w et T_∞ sont respectivement la température de la plaque et la température de référence du fluide. le flux thermique Q est donné par :

$$Q = h.(T_w - T_\infty) \tag{V.9}$$

Où, h est le coefficient de transfert de chaleur par convection.

III Méthode de solution et schémas numériques.

Dans ce chapitre l'approche CFD est utilisée pour des simulations dans le cas stationnaire de l'écoulement et du transfert de chaleur par convection naturelle le long d'une plaque isotherme immergée verticalement dans un milieu poreux non Non-Darcien, en utilisant le solveur "pressure-based". Le modèle laminaire est adopté. Le schéma "pressure-velocity" utilisé était SIMPLE "Semi-Implicit Method for Pressure Linked-Equations" et la flottabilité a été modélisée à l'aide de l'approximation de Boussinesq.

La méthode standard a été utilisée pour la pression et des schémas "second order upwind" ont été utilisé pour les calculs concernant les équation de la quantité de mouvement et l'énergie. Ce sont couramment utilisés dans les simulations des phénomènes de convection naturelle.

III.1 Présentation du code de calcul CFD

ANSYS est un logiciel de simulation numérique utilisé dans le développement de produits industriels. Il couvre toutes les étapes nécessaires à une simulation : le traitement géométrique, le maillage, la résolution, le traitement de résultats et l'optimisation.
ANSYS offre une plateforme de calcul multi-physique intégrant la mécanique des fluides et des structures, l'électromagnétisme, la thermique ainsi que la simulation de systèmes et de circuits.

Le logiciel fluent intégré sur ANSYS regroupe l'ensemble des méthodes numériques permettant d'étudier un écoulement de fluide (gaz ou liquide) dans un environnement donné. Il permet de réaliser des simulations en se basant sur la résolution des équations de Navier Stokes sur tous les types de géométries 2D ou 3D complexes (fixes ou mobiles) associé à des maillages fixes ou adaptatifs et avec des modèles physiques variés (Laminaire, turbulent).

La résolution numérique par ANSYS Fluent d'une manière générale, suit les étapes suivantes :

1. Création de la géométrie sous ANSYS-Design modeler.
2. Choix de maillage sous ANSYS-Meching.
3. Définition des conditions aux limites sous Fluent.
4. Calcul avec FLUENT pour les différents cas retenus.
5. Analyse des résultats obtenus.

III.2 Maillage de calcul

La géométrie adoptée est divisée en une grille structurée à l'aide du logiciel Design Modeler. Le maillage typique utilisé dans les simulations CFD, est présenté ci-dessous à la figure V.2.

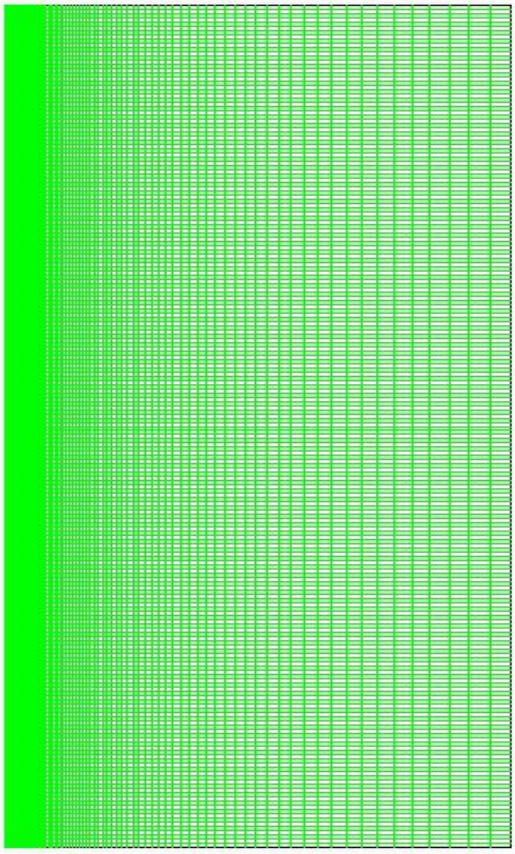


FIGURE V.2 – Maillage utilisé dans les simulations CFD.

III.3 Conditions aux limites

La plaque est maintenue à une température $T_w = 353K$, la température du fond (Bottom), du haut (Top) et de la sortie (Outlet), respectivement, a été fixée à 300K. Les conditions aux limites adoptées dans cette étude pour toutes les simulations, en utilisant le solveur CFD, sont présentées ci-dessous dans le tableau V.1. [107]

TABLE V.1 – Conditions aux limites utilisées dans les simulations CFD.

Zone	***Type des conditions aux limites***
Plate	Wall
Top	Pressure-outlet
bottom	Pressure-inlet
Outlet	Symmetry

III.4 Critères de convergence

Les critères de convergence pour chaque grandeur physiques sont indiqués dans le tableau (V.2). La convergence des résultats est obtenue, lorsque les résidus ont atteints une valeur constante qui n'évolue plus avec l'augmentation du nombre d'itérations.

TABLE V.2 – Limites résiduelles

Continuity	***X-Velocity***	***X-Velocity***	***Energy***
$1e^{-06}$	$1e^{-06}$	$1e^{-06}$	$1e^{-06}$

III.5 Résultats numériques et analyse.

Une étude numérique a été réalisée pour un flux de convection thermique laminaire, bidimensionnel et stationnaire le long d'une plaque verticale chauffée et posée dans un milieu poreux non-Darcien. Le solveur CFD ANSYS Fluent a été utilisé pour analyser l'effet du nombre de Rayleigh Ra sur le champ thermique et pour prédire le profil du taux de transfert de chaleur à la surface de la plaque. Les valeurs du nombre de Rayleigh varient de 10^2 à 10^6. Les principaux résultats obtenus sont présentés et discutés ci-dessous :

III.5.1 Profils de température.

Dans la figure V.3, les profils de température à l'état stationnaire en fonction de x pour différentes positions y le long de la plaque sont présentés. A partir de cette figure, on peut noter que l'épaisseur de la couche limite thermique dépend de la position y le long de la plaque. Ainsi, il augmente avec l'augmentation de y, lorsqu'on passe du bord d'attaque de la plaque vers l'autre extrémité de celle-ci.

III.5.2 Distribution du champ thermique.

La figure V.4 représente le champ thermique pour le nombre de Rayleigh $Ra = 5,58.10^2$. Sur cette figure, la distribution du champ thermique s'explique par l'existence de l'effet du transfert thermique combiné par conduction et convection, de la plaque chauffée vers le milieu.

Les figures V.5, V.6 et V.7 montrent l'effet du nombre de Rayleigh sur la distribution du champ thermique dans la zone de la couche limite d'une plaque isotherme ($T_w = 353K$), placée dans un milieu poreux non-Non-Darcien saturé, pour des valeurs sélectionnées du nombre de Rayleigh : $Ra = 4,46.10^3$, $Ra = 1,20.10^5$ et $Ra = 4,46.10^6$. À partir de ces figures, on remarque clairement que l'augmentation du nombre de Rayleigh Ra conduit à une intensification de la convection naturelle. Ainsi, on peut également observer que la couche limite près de la surface de la plaque est bien capturée par Ansys Fluent.

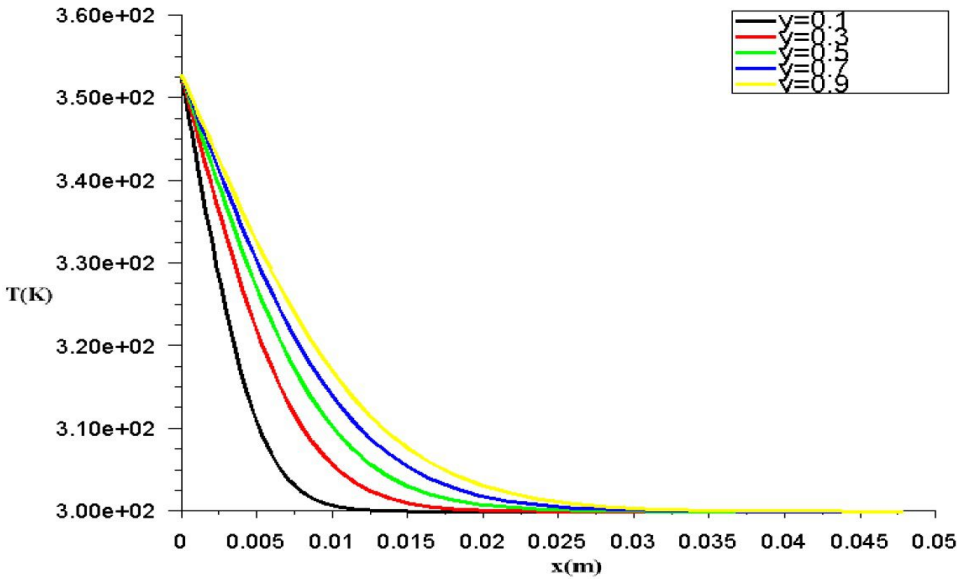


FIGURE V.3 – Profils de température pour differentes positions le long de la plaque.

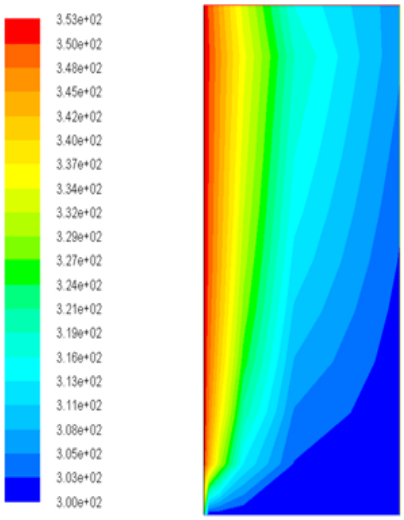


FIGURE V.4 – Contours de température pour $Ra = 5,58.10^2$.

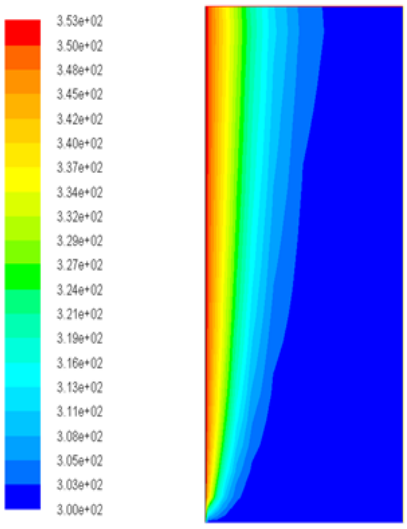


FIGURE V.5 – Contours de température pour $Ra = 4,46.10^3$.

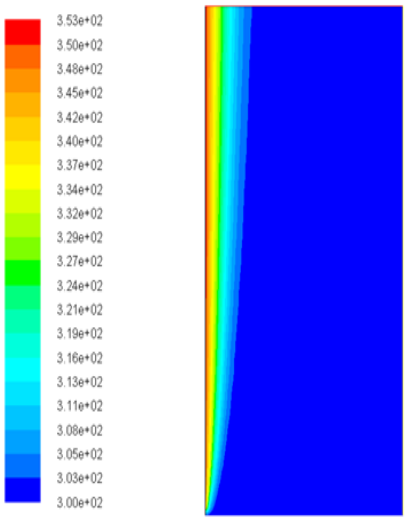


FIGURE V.6 – Contours de température pour $Ra = 1,20.10^5$.

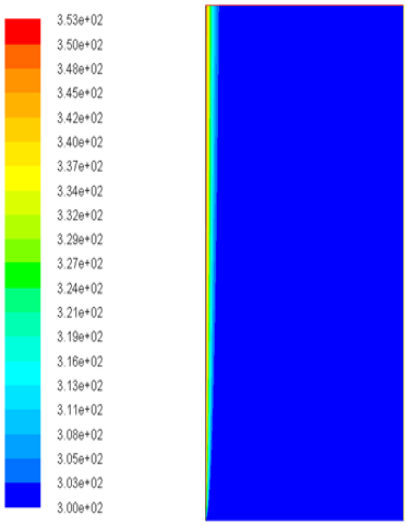


FIGURE V.7 – Contours de température pour $Ra = 4,46.10^6$.

III.5.3 Profil du nombre de Nusselt local.

La figure V.8 illustre l'évolution du nombre de Nusselt local pour le cas d'une plaque isotherme ($T_w = 353K$), placée verticalement dans un milieu poreux non-Non-Darcien saturé. Les résultats indiquent que le taux de transfert de chaleur est important au bord d'attaque de la plaque et nous remarquons qu'il diminue rapidement en passant du bord d'attaque à l'autre extrémité de la plaque.

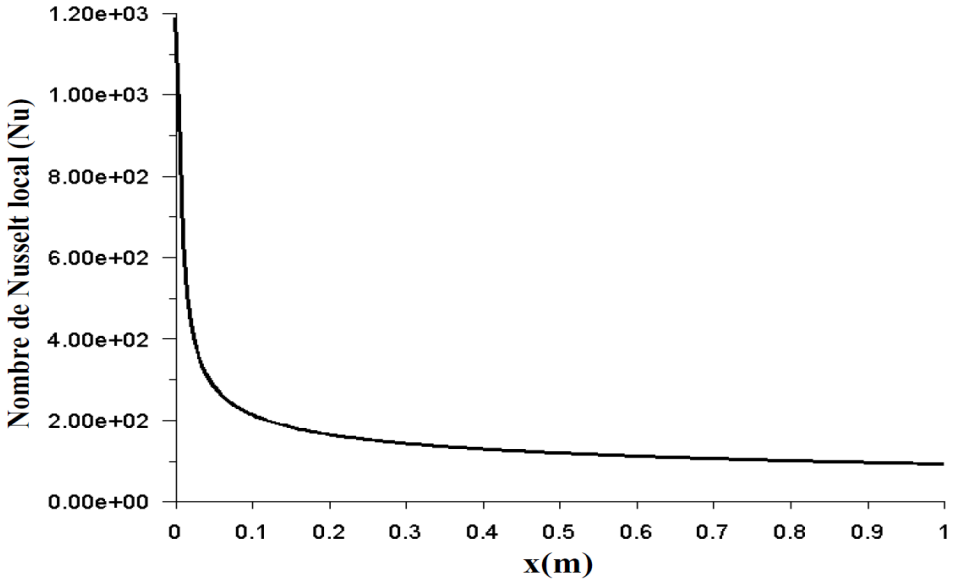


FIGURE V.8 – profil du nombre de Nusselt local en fonction de y.

IV Comparaison de calcul CFD et méthode de similarité.

Les résultats trouvés par la méthode de similarité sont validés avec ceux des travaux publiés dans la littérature et ils ont montrés une très bonne concordance. Dans cette partie, nous avons confronté les résultats obtenus par la méthode CFD avec ceux trouvés par la méthode de similarité pour le cas d'un flux de convection thermique laminaire, bidimensionnel et stationnaire le long d'une plaque verticale chauffée et posée dans un milieu poreux non-Darcien, en utilisant le modèle de Dary-Brinkman-forchheimer, et en absence des effets de source et puits interne de chaleur, de la radiation thermique et de la dissipation visqueuse.

Les figures V.9, V.10, V.11, V.12, V.13 et V.14 présentent les profils de température en fonction de x pour le nombre de Prandtl $Pr = 0,71$ et les nombres de Rayleigh $Ra = 1.53\ 10^3$ et $Ra = 1.22\ 10^4$ respectivement , à trois positions (y= H/4, H/2 et 3H/4) le long de la plaque, avec H est la longueur de la plaque.

La confrontation entre les solutions numériques obtenues par les deux méthodes pour Pr = 0.71 en régime laminaire, montre que pour les simulations CFD effectuées dans des conditions de température constante d'une plaque (T = 353K) posée verticalement dans un milieu poreux saturé non-Darcien. Les résultats trouvés ont montré une erreur de 0.5% avec les solutions obtenues par la méthode semi-analytique ou de similarité, indiquant une performance du code CFD pour le cas étudié.

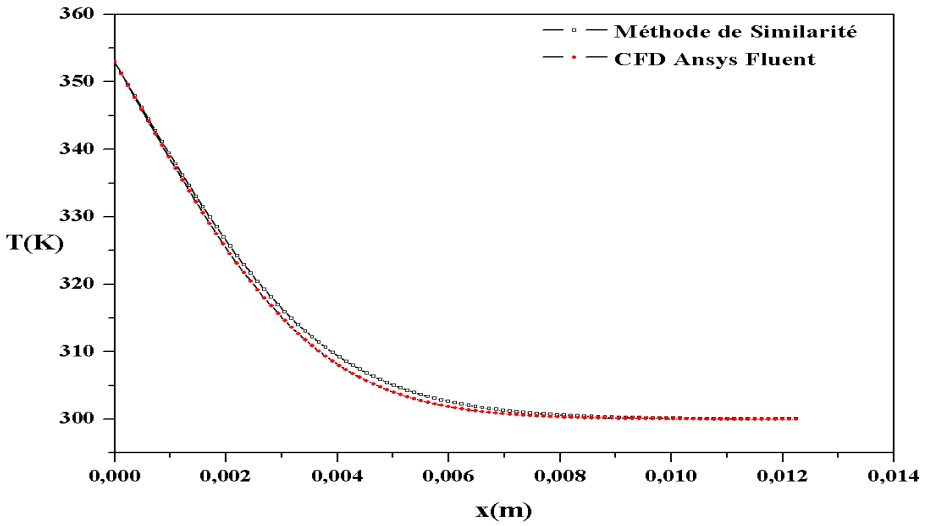


FIGURE V.9 – Profils de température en fonction de x pour $Ra = 1.53\ 10^3$ à $y = H/4$

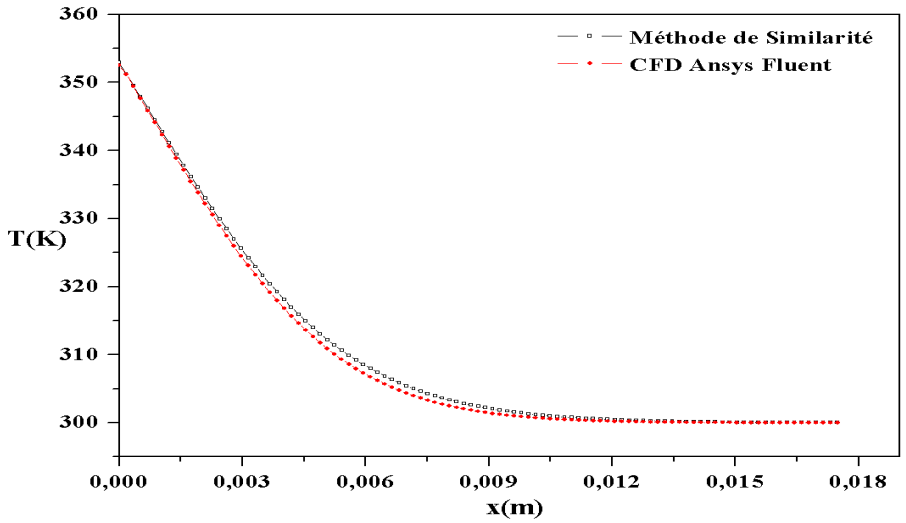


FIGURE V.10 – Profils de température en fonction de x pour $Ra = 1.53\ 10^3$ à $y = H/2$

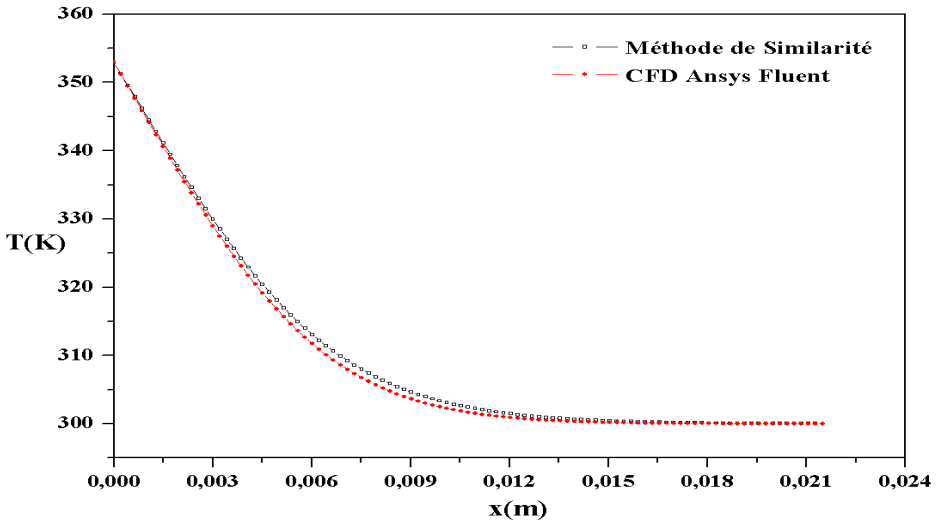


FIGURE V.11 – Profils de température en fonction de x pour $Ra = 1.53\ 10^3$ à $y = 3H/4$

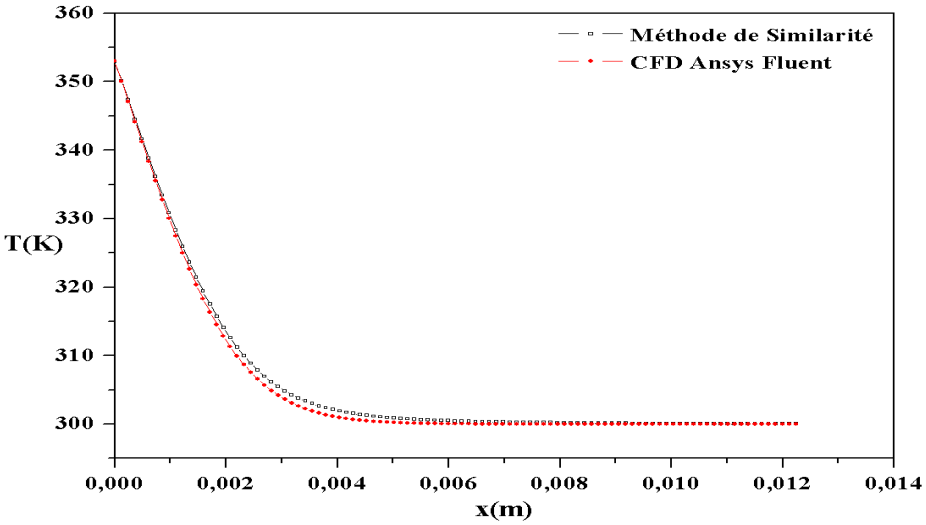


FIGURE V.12 – Profils de température en fonction de x pour $Ra = 1.22\ 10^4$ à $y = H/4$

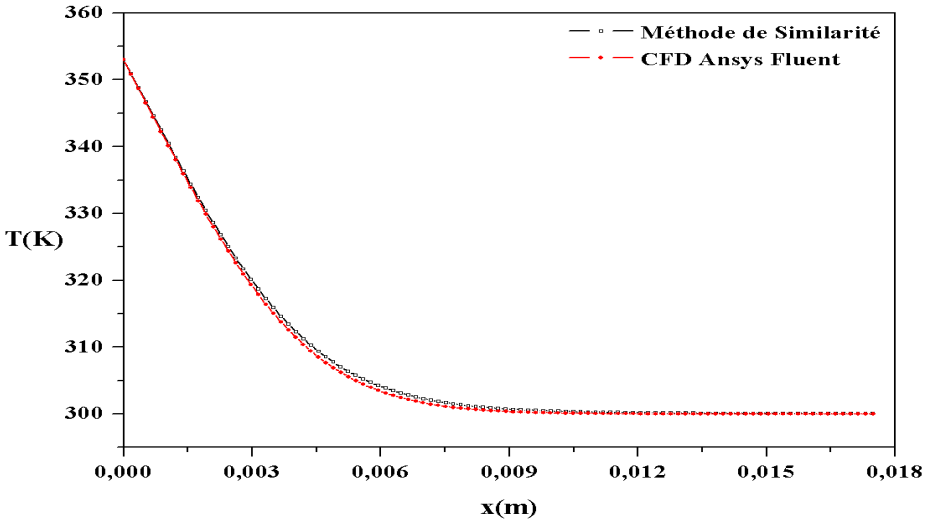


FIGURE V.13 – Profils de température en fonction de x pour $Ra = 1.22\ 10^4$ à $y = H/2$

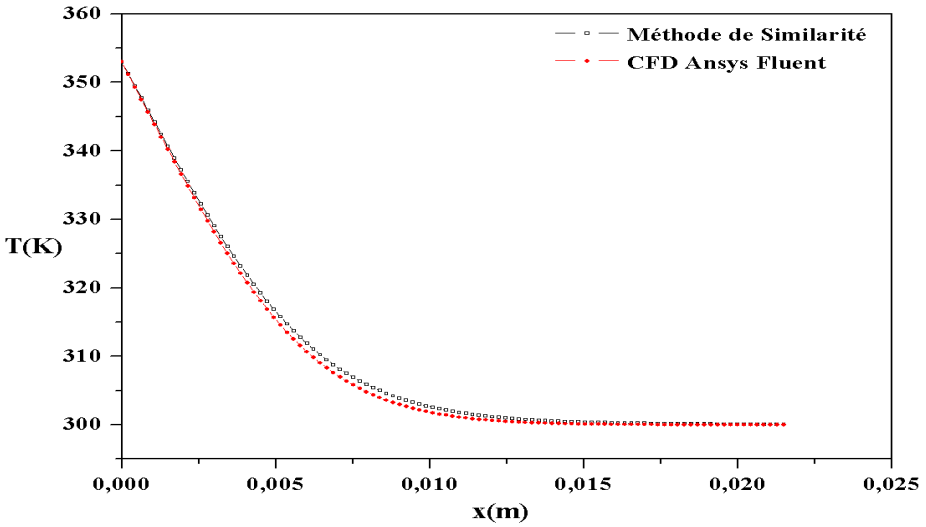


FIGURE V.14 – Profils de température en fonction de x pour $Ra = 1.22\ 10^4$ à $y = 3H/4$

V Conclusion.

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'écoulement et le transfert de chaleur par convection naturelle dans la zone de la couche limite d'une plaque verticale chauffée et immergée dans un milieu poreux saturé par un fluide Newtonien. Le modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer est utilisé pour décrire le mouvement dans le milieu. Les équations qui régissent le problème étudié sont résolues numériquement à l'aide du solveur CFD ANSYS FLUENT. La présente étude permet de tirer les conclusions suivantes :

1. Les résultats de cette étude étaient en bon accord avec ceux de la méthode de similarité.
2. L'épaisseur de la couche limite thermique augmente avec l'augmentation de la position le long de la plaque.
3. La température diminue avec l'augmentation des valeurs du nombre de Rayleigh Ra
4. L'épaisseur de la couche limite thermique diminue avec l'augmentation des valeurs du nombre de Rayleigh Ra
5. L'augmentation du nombre de Rayleigh permet d'accélérer l'écoulement du fluide dans le milieu et le transfert de chaleur passe du mode de conduction au mode de convection.
6. L'augmentation du nombre de Rayleigh Ra conduit à une intensification de la convection naturelle
7. Le taux de transfert thermique à la paroi est important au bord d'attaque de la plaque.

CONCLUSION GENERALE

Nous avons présenté dans ce mémoire de thèse une étude théorique et numérique du phénomène de la convection thermique autour d'une plaque plane maintenue à une température T_w, généralement, supérieure à la température du milieu et soumise à un flux de fluide latéral (aspiration/injection), immergée verticalement ou inclinée d'un angle ϕ par rapport à la verticale, dans un milieu poreux non-Darcien saturé, par un fluide newtonien, de propriétés thermodynamiques constantes à l'exception de la densité qui varie avec la température selon l'approximation de Boussinesq, en présence d'une source/puits interne de chaleur, de la radiation thermique, et de la dissipation visqueuse. Le modèle adopté pour décrire le mouvement du fluide au sein de la matrice poreuse est celui de Darcy étendu par Brinkman et Forchheimer (modèle de Darcy-Brinkman, et modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer), afin de tenir compte des effets des contraintes visqueuses et des forces d'inerties.

Le problème a été abordé par deux approches différentes : la première est l'approche semi analytique, dite de similarité qui consiste à transformer le système d'équations aux dérivées partielles, régissant le problème étudié, en un système d'équations différentielles ordinaires non-linéaires adimensionnelles, par introduction de variables adimensionnelles, appelées variables de similarité. Dans cette approche, La résolution numérique, de systèmes d'équations , pour les deux modèles : Darcy-Brinkman et Darcy-Brinkman-Forchheimer, a été faite en se basant sur la méthode de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 5, couplée avec une technique itérative de Tir.

Les effets des paramètres physiques et nombres sans dimension contrôlant le problème étudié, tels que : l'exposant de température, le paramètre d'aspiration/injection, le paramètre de convection mixte, le nombre de Grashof, le nombre de Darcy, le nombre de Reynolds, le nombre de Prandtl, le paramètre de perméabilité, le paramètre de radiation, le nombre de Frochheimer, le nombre d'Eckert, et le paramètre du terme source/puits de chaleur sur la distribution des champs dynamiques et thermiques, et sur le taux du transfert de chaleur et la contrainte de cisaillement à la surface sont examinés et discutés en détail, de point de vue physique, .

La deuxième approche en utilisant le logiciel commercial CFD ANSYS Fluent 14.0 basé sur la méthode des volumes finis qui est largement utilisée en mécanique des fluides et en thermique lorsqu'il y a un couplage fort entre les champs de température et de vitesse tel est le cas de la convection naturelle d'origine thermique. Dans cette approche, nous avons analysé l'effet du nombre de Rayleigh sur la distribution du champ thermique

et le taux du transfert de chaleur à la surface.

Les principaux résultats dégagés de cette étude peuvent être résumés comme suit :

- L'épaisseur de la couche limite thermique diminue considérablement avec l'augmentation du paramètre de l'exposant de la température λ.
- Le taux de transfert thermique à la surface s'amplifie avec l'élévation de l'exposant de température λ.
- L'aspiration du fluide conduit à la réduction de l'épaisseur couche limite dynamique et thermique et permet d'augmenter le taux de transfert thermique au niveau de la surface, contrairement à l'effet de l'injection.
- L'aspiration du fluide à la surface permet d'accélérer la convection naturelle en tout point du champ d'écoulement.
- La convection forcée favorise le transfert de chaleur dans la zone de la couche limite.
- Les forces d'inertie diminuent l'épaisseur de la couche limite thermique.
- les forces de cisaillement à la surface sont plus importantes près de la plaque lors du passage du régime de convection forcée au régime de la convection naturelle.
- Lorsque le milieu poreux est plus perméable, les forces de frottement deviennent importantes près de la surface de la plaque, ainsi que le taux de transfert de chaleur à la surface augumente.
- Le rayonnement thermique favorise plus le transfert de chaleur dans le milieu poreux, et conduit à l'expansion de la couche limite thermique.
- Plus le milieu poreux est perméable, plus la chaleur est transférée au-delà de la surface de la plaque.
- Les forces de flottabilité amplifient le taux de transfert de chaleur et les forces de frottement à la surface.
- L'aspiration de fluide à la surface de la plaque permet d'amplifier le taux du transfert de chaleur et de réduire l'effet des forces de cisaillement à la paroi.
- L'augmentation du nombre Forchheimer entraîne une augmentation de la traînée de Forchheimer qui conduit à la réduction de la vitesse d'écoulement et à L'augmentation de la température dans la zone de couche limite.
- L'augmentation du nombre Forchheimer Fr conduit à réduire le taux de transfert de chaleur et l'effet des forces de frottement à la surface de la plaque.
- La dissipation visqueuse réduit le taux du transfert thermique et amplifie l'effet des forces de frottement à la paroi.

- La présence d'une source interne de chaleur réduit le taux du transfert de chaleur à la surface, et renforce l'effet des forces de cisaillement à la paroi
- La présence d'un puits interne de chaleur amplifie le taux du transfert de chaleur à la surface, et réduit l'effet des forces de frottement à la paroi
- Le taux surfacique du transfert thermique est optimal dans le cas d'une plaque verticale.
- L'épaisseur de la couche limite thermique augmente avec l'augmentation de la position le long de la plaque.
- L'épaisseur de la couche limite thermique diminue avec l'augmentation des valeurs du nombre de Rayleigh Ra
- L'augmentation du nombre de Rayleigh permet d'accélérer l'écoulement du fluide dans le milieu et le transfert de chaleur passe du mode de conduction au mode de convection.
- L'augmentation du nombre de Rayleigh Ra conduit à une intensification de la convection naturelle

En perspective :

- L'extension de semi analytique à d'autres phénomènes physiques liés à l'instationnarité d'écoulement, la nature du fluide (fluide non newtonien et nanofluide), ainsi que l'intégration des perturbations singulières générées au voisinage de la paroi qui se manifestent dans le cas de forte aspiration du fluide, nous semble pourtant avoir un intérêt réel.
- De plus, dans des applications réelles, les milieux poreux sont anisotropes .Par conséquent, il sera également nécessaire d'étendre l'étude, afin de tenir compte l'influence des effets d'anisotropie en conductivité thermique du milieu poreux.
- En outre, Il sera également nécessaire aussi d'étendre l'approche CFD ANSYS Fluent à d'autres phénomènes physiques liés à l'instationnarité d'écoulement, la nature du fluide (fluide non newtonien), la nature des milieux poreux, et à des géométries plus aux moins complexe
- L'étude pourrait répondre aussi à des applications pratiques (domaines naturels et industriels) dans des configurations plus ou moins complexes (2D et 3D).

Bibliographie

[1] C. L. Popa, Modélisation numérique du transfert thermique, méthode des volumes finies, Universitaria Craiova, pp. 6-43, (2002).

[2] E. Koller, Machines thermiques, Edition Dunod, pp. 71- 92, (2005).

[3] A. Boglietti, A. Cavagnino, and D. Staton, Determination of critical parameters in electrical Mmachine thermal models, IEEE Transactions on Industry Applications, vol. 44, N°. 4, pp. 1150-1159, (2008).

[4] C. Body. Les échangeurs de chaleur par convection (1ère partie), Ed. Bordas/Mouton, Paris, (1968).

[5] J. L. Battaglia, A. Kusiak, eT J. R. Puiggali, Introduction aux transferts thermiques, Dunod, Paris, (2010).

[6] S. Bories, M. Prat, Transferts de chaleur dans les milieux poreux, techniques de l'ingénieur, traité Génie énergétique, B8 250, pp. 1-32, (2005).

[7] R. E.Collins, « Flow of fluids through porous Mmaterials », Reinhold, New York., (1961).

[8] M. Kaviany, Principles of heat transfer in porous media, Springer, New York, (1995).

[9] P.C. Carman, Fluid flow through granular beds. Transactions, Institution of chemical engineers, London, 15, pp. 150-167,(1937).

[10] S. Ergun, A. A. Orning, Fluid flow through packed columns, Chemical Engineering Progress, 48, pp. 89-94, (1952).

[11] D. A. Nield, A. Bejan, Convection in porous media, Springer-Verlag, New York, (1992).

[12] Bear J., Hydraulics of Groundwater. McGraw-Hill series in water resources and environmental Engineering, New York, (1979).

[13] Nield D. A., Bejan A., Convection in porous media. Springer, New York, (1999).

[14] J. Bear. Dynamics in fluids in porous media. Dover, New York, (1979).

[15] D. Pont. Lien entre la perméabilité et l'endommagement dans les bétons à haute température. Thèse de Doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris. (2004).

[16] W.G. Gray and S.M. Hassanizadeh. General conservation equations for multiphase systems : Averaging technique. Adv.Water.Res, 2, pp. 131-144, (1979).

[17] J. Bear and J.M. Buchlin. Modelling and application of transport phenomena in porous media. Kluwer, Academic Publisher, (1991).

[18] R.W. Lewis and B.A. Schrefler. The finite element method in the static and dynamic deformation and consolidation of porous media. J.Wiley&Sons, (1998).

[19] S. Whitaker, Simultaneous heat, mass, and momentum transfer in porous media : A theory of drying, Advances in heat transfer, 13, pp. 119-203, (1977).

[20] S. Whitaker. Flow in porous media III, deformable media, Transport in Porous Media. 1, pp. 127- 154, (1986).

[21] W. Jomaa. Séchage de matériaux fortement déformables, prise en compte de la vitesse de retrait. Thèse de l'Université de Bordeaux I, France, (1991).

[22] N. Puirox, M. Prat, M. Quintard, Non-equilibrium theories for macroscale heat transfer, Ablative composite layer systems, International Journal of Thermal Sciences, 43, pp. 541-554, (2004).

[23] N. Zabaras, D. Samanta. A stabilized volume-averaging finite element method for flow in porous media and binary alloy solidification processes, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 60, N° 5, pp. 1-38, (2004).

[24] M. M. Y. Delmi, A. Ait-Mokhtar and O. Amiri. Modeling the coupled evolution of hydration and porosity of cement-based materials, Construction and Building Materials, 20, pp. 504-514, (2006).

[25] Darcy H., Les fontaines publiques de la ville de Dijon., Paris, Victor Dalmont, (1856).

[26] Kalla L., Convection naturelle au sein d'une couche horizontale poreuse soumis à desflux de chaleur uniforme, Thèse de Maîtrise Es sciences Appliquées, (1999).

[27] J. Bear, Dynamics of fluids in porous media, Elsevier, (1972).

[28] A. Dybbs, R. V. Edwards, A new look at porous media fluid mechanics Darcy to turbulent, Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media Martinus Nishoff, Dordrecht, 82, pp. 199-256, (1984).

[29] Delache A., Etude analytique et numérique des instabilités spation temperelles des écoulements de convection mixte en milieux poreux : comparaison avec l'expérience, Thèse de doctorat, Mention Mécanique, (2005)

[30] H.C.Brinkman, A calculation of viscous force exerted by a flowing fluide on dence swarn of particules, Applied Sciences Research, A1, pp. 27-34, (1947).

[31] G. Neale, W. Nader, Practical significance of brinkman's extension of darcy's law : Coupled parallel flows within a channel and a bounding porous medium, The Canadian Journal of Chemical Engineering, Vol. 52, N° 4, pp. 475-478, (1974).

[32] C. Beckermann, R. Viskanta, Double-diffusive convection due to melting, Int. J. Heat Mass Transfer, 31, pp. 2077-2089, (1988).

[33] P.H. Forchheimer, Wasserbewegun Durch Boden, Zeitschrift des vereines Deutscher Ingeniure, vol. 45, pp. 1782-1788, (1901).

[34] M. Marcoux, Contribution a l'étude de la diffusion thermo gravitationnelle en milieu poreux, Thèse de Doctorat, Toulouse, (1998).

[35] M. Muskat, The flow of homogeneous fluids through porous media, J.W. Edwards, Inc. 2nd Ed., USA, (1946).

[36] R. A. Wooding, Steady state free thermal convection of liquid in a saturated permeable medium, J. Fluid Mech., 2, pp. 273-285, (1957).

[37] Rohensenow W.M., Hartnett J.P., et Cho I.Y., Handbook of heat transfer, 3rd edition, McGraw- Hill Handbooks. Chap. 4 et 9, (1992).

[38] Nield D. A. and Bejan A. Convection in porous media, 3rd edn. Springer Science, New York - USA, (2006).

[39] Vafai K. Handbook of porous media, 2nd edn. CCR Press Taylor & Francis Group LLC, Boca Raton -USA, (2005).

[40] Ingham D. and Pop I. Transport phenomena in porous media III, 3rd edn. Elsevier, Oxford, (2005).

[41] Pop I. and Ingham D. Convective heat transfer. Pergamon, Elsevier Science, Oxford, (2001).

[42] B.Ingham Derek et I. Pop, Transport phenomena in porous media, First Edition, (2002).

[43] W.J. Karplus, (1958), Analog simulation solution of field problems, New York : McGraw-Hill.

[44] S.M Hassanizadeh W.G Gray, Recent advance in theories of two-phase flow in porous media, Advance in Fluide Mechanics, 13, pp. 105-160, (1997).

[45] A.L. Pozzi and R.J. Blackwell, Design of laboratory models for study of miscible displacement, Trans. SPE AIME, 228, pp. 28-40, (1963).

[46] J.S Marcelo de Lemos, Turbulence in porous media modeling and applications, First Edition, Great Britain, (2006).

[47] R. P. Chhabra, J. F. Richardson, Non-Newtonian flow in the process industries - Funamentals and Engineering Applications, Butterworth-Heinemann, Oxford, (1999).

[48] N. B. Khelifa, Etude numérique et analytique de la convection naturelle d'un fluide non newtonien confiné dans une cavité, Thèse de Doctorat de L'Université de Picardie Jules Verne d'Amiens, France, (2012).

[49] J. Bear, Dynamics of fluids in porous media. Environmental science series, New York : American Elsevier, (1972).

[50] M. Muskat and R.D. Wyckoff, The flow of homogeneous fluids through porous media. 1st ed. International series in physics, New York ; London : McGraw-Hill Book Company, inc., (1937).

[51] P. Cheng, W. J. Minkowycz, Free convection about a vertical flat plate embedded in a porous medium with application to heat transfer from a dike, Journal of Geophysical Research, 82, pp. 2040-2044, (1977).

[52] T. Y. Na, I. Pop, Free convection flow past a vertical flat plate embedded in a saturated porous medium, Int. Journal of Engineering Science, Vol. 21, N° 5, pp. 517-526, (1983).

[53] A. Postelnicu, I. Pop, Similarity solutions of free convection boundary-layer over vertical and horizontal surfaces in a porous medium with internal heat generation, Int. comm. Heat Mass Transfer, Vol. 26, N°8, pp. 1183-1191, (1999).

[54] A. Postelnicu, T. Grosan and I. Pop, Free convection boundary layer over a vertical permeable flat plate in a porous medium with internal heat generation, Int. comm. Heat Mass Transfer, Vol. 27, N°5, pp. 729-738, (2000).

[55] Z. Belhachmi, B. Brighi, J. M. Sac-Epee and K. Taous, Numerical simulations of free convection about a vertical flat plate embedded in a porous medium, Computational Geosciences, Vol. 7, N° 2, pp. 137-166, (2003).

[56] M. E. Ali, The effect of lateral mass flux on the natural convection boundary layers induced by a heated vertical plate embedded in a saturated porous medium with internal heat generation, International Journal of Thermal Sciences,Vol. 46, N°2, pp. 157-163, (2007).

[57] Mohmed Ali., Fahd Al-Yousef., Laminar mixed convection boundary layers induced by a linearly stretching permeable surface, Int. J. Heat and Mass Transfer 45, pp. 4241-4250, (2002).

[58] Mohmed Ali., Fahd Al-Yousef, Laminar mixed convection from a continuously moving vertical surface with suction or injection boundary, Int. J. Heat and Mass Transfer 33, pp. 301-306, (1998).

[59] D. Achemlal, M. Sriti and M. Guedda, Numerical solution of the free convection induced by a heated vertical flat plate embedded in a saturated porous medium with a variable internal heat source, Modelling Measurement and Control B, Vol. 81, N°2, pp. 87-99, (2012).

[60] D. Achemlal, M. Sriti, M. El Haroui and M. Guedda, Free convection modeling over a verticale flat plate embedded in saturated porous medium with a variable heat source and radiation flux, World Journal of Modeling and Simulation, Vol. 9, N°3, pp. 163-172, (2013).

[61] D. Achemlal, M. Sriti and M. El Haroui, Viscosity and fluid suction/injection effects on free convection flow from a vertical plate in a porous medium saturated with a pseudoplastic fluid, Computational Thermal Sciences : An International Journal, Vol. 6, N°3, pp. 273-283, (2014).

[62] D. Achemlal, M. Sriti and M. El Haroui, Numerical computation of mixed convection past a heated vertical plate within a saturated porous medium with variable permeability, Accepted in Journal of Modelling Measurement and Control B, (2014).

[63] D. Achemlal, M. Sriti and M. El Haroui, Numerical simulation of free convection flow in saturated porous medium with finite differences method, International Review of Mechanical Engineering (I.RE.M.E.), Vol. 8, N°4, pp. 680-688, (2014).

[64] D. Achemlal, and M. Sriti, Finite differences analysis on nonuniform mesh for free convection in a porous medium and comparison with similarity approach, Computational Thermal Sciences (CTS), Vol. 7, N°3, pp. 231-243, (2015).

[65] K. Vafai and C.L Tien, Boundary and inertia effects on flow and heat transfer in porous media, Int J.Heat Mass Transfer 24, pp. 195-203, (1981).

[66] K. Vafai, and C. L. Tien, Boundary and inertial effects on convective mass transfer in porous media. Int. J. Heat Mass Transfer 25, pp. 1183-1190, (1982).

[67] J. T. Hong, C. L. Tien and M. Kaviany, Non-Darcian effects on vertical plate natural convection in porous media with high porosities, Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 28. N°. 11. pp. 2149-2157, (1985).

[68] K. Vafai, R. Thiyagaraju, Analysis of flow and heat transfer at the interface region of a porous medium, Int J. Heat Mass Transfer 30, pp. 1391-1405 (1987).

[69] C.L. Tien, and J.T. Hong, Natural convection in porous media under non-Darcian and non-uniform permeability conditions, In natural convection (Edited by S.Kakac, W.Aung and R.Viskanta). Hemisphere, Washington, DC. (1985).

[70] P. Cheng, Wail effects on fluid flow and heat transfer in porous media, Proc. ASME/JSME Heat transfer conf., pp.297-303, (1987)

[71] V. Prasad, G. Lauriat, and N. Kladias, Reexamination of Darcy-Brinkrnan solutions for free convection in porous media, Int Symp.Convection in Porous Media : Non-Darcy Effects, Proc. 25th Nat. Heat Transfer Conf., Vol 1, pp. 569-580, (1988).

[72] Kalidas. N and Prasad V : Benard convection in porous media effects of Darcy and Prandtl numbers, Int.Symp Convection in Porous Media : Non-Darcy Effects, Proc. 25^{th} Nat.Heat Transfer Conf., Vol. 1, pp.593-604, (1988).

[73] A. Raptis, A.K. Singh, and D. K. Rai, Finite difference analysis of unsteady free convective flow through a porous medium adjacent to a semi-infinite vertical plate, Mech Res Comm, 14(1), pp 9-16, (1987)

[74] C. H. Chen and C. K. Chen, Non-Darcian mixed convection along a vertical plate embedded in a porous medium, Applied Mathematical Modelling Vol. 14, N° 9, pp. 482-488, (1990).

[75] Z. H. Kodah et A. M. Al Gasem Non-Darcy mixed convection from a verticale plate in saturated porous media-variable surface heat flux embedded in porous medium Heat flux, Sringer Verlag, 33, pp 377-382, (1998).

[76] E. M. A. Elbashbeshy et M. A. Bazid, The mixed convection along a verticale plate with variable surface heat flux embedded in porous medium Applied Mathematics and Computation, 125, pp 317-324, (2002).

[77] E. M. A. Elbashbeshy, Laminar mixed convection over horizontale flat plate embedded in non-Darcian porous medium with suction and injection Applied Mathematics and Computation, 121, pp 123-128, (2001).

[78] E. M. A. Elbashbeshy, The mixed convection along a verticale plate embedded in in non-Darcian porous medium with suction and injection Applied Mathematics and Computation, 136, pp 139-149, (2003).

[79] M.F. El-Amin, and N.A. Ebrahiem, Effect of viscous dissipation on unsteady free convection in a fluid past a vertical plate immersed in a porous medium, Transport in Porous Media, Vol. 64, N°1, pp. 1-14, (2006).

[80] Z. Udin, and M. Kumar, Unsteady free convection in a fluid past an inclined plate immersed in a porous medium, Computer Modelling and New Technologies, 14(3), pp. 41-47, (2010).

[81] R. Mondal, M.A.K. Azad, S. Arifuzzaman, K.E. Hossain, and S. Ahmmed, Unsteady free convective flow along a vertical porous plate with variable viscosity and thermal conductivity, IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM), Vol. 12, N°1, pp. 64-71, (2016).

[82] M. A. Hossain, I. Pop, Radiation effect on Darcy convection flow along an inclined surface placed in porous media, Heat Mass Transfer, Vol. 32, N° 4, , pp. 223-227, (1997).

[83] A. Raptis, Radiation and free convection flow through a porous medium, Int comm Heat Mass Transfer, 25, pp. 289-295, (1998).

[84] M.A. El-Hakiem, M.F. El-Amin, Thermal radiation effect on non-Darcy natural convection with lateral mass transfer, Heat Mass Transfer 37, pp. 161-165, (2001).

[85] A.J. Chamkha, I.B. Camille, and K. Khanafer, Natural convection from an inclined plate embedded in a variable porosity porous media due to solar radiation, Int J Therm Sci, Vol. 41, N° 4, pp. 73-81, (2002).

[86] O. Aydin and A. Kaya, Radiation Effect on MHD Mixed Convection Flow about a Permeable Vertical Plate, Heat Mass Transfer, 45, pp. 239-246, (2008).

[87] P. O. Olanrewaju, J. A. Gbadeyan, T. Hayat and A. A. Hendi, Effects of Internal Heat Generation, Thermal Radiation and Buoyancy Force on a Boundary Layer over a Vertical Plate with a Convective Surface Boundary Condition, South African Journal of Science, 107, pp. 476-6, (2011).

[88] M. Ferdows, A. Postelnecu, and S. Sivasankaran, Radiation effects on natural convection in an inclined Porous Surface with internal heat generation, World Applied Sciences Journal, 13, pp. 957-961, (2011).

[89] S.Das, M. Jana, and N.R. Jana, Effects of radiation and viscous dissipation on unsteady free convective flow past a moving vertical porous plate embedded in a porous medium, Communications in Applied Sciences, Vol. 1, N° 1,pp. 59-80, (2013).

[90] R. B. Bird, W. E. Stewart, E. N. Lightfoot, Transport Phenomena, JohnWiley & Sons, USA, (2006).

[91] J. K. Platten, J. C. Legros, Convection in Liquids, Springer, Berlin - New York, (1984).

[92] M. Kaviany, Principles of heat transfert in porous media, Second Edition, New York. USA, (1995).

[93] D. Achemlal, Modélisation et analyse de la convection thermique dans un milieu poreux saturé de fluide Newtonien et non-Newtonien, Thèse de Doctorat de L'Université Sidi Mohamed Ben Abdellah, Fès, Maroc, (2015).

[94] F.P. Incropera, and D.P. DeWitt, Fundamentals of Heat and Mass Transfer, John Wiley & Sons, INC. 4ème edition, New York, Chap.6 et Chap.9, (1996).

[95] S. M. Imran, S. Asghar, M. Mushtaq, Mixed convection flow over an unsteady stretching surface in a porous medium with heat source, Mathematical Problems in Engineering, (2012).

[96] A. Ishak, et al, Steady and unsteady boundary layers due to a stretching vertical sheet in a porous medium using darcy-brinkman equation model, Int. J. of Applied Mechanics and Engineering, Vol. 11, N° 3, pp 623–637, (2006).

[97] M. Ferdows, A. Postelnecu and S. Sivasankaran, Radiation Effects on Natural Convection in an Inclined Porous Surface with Internal Heat Generation, World Applied Sciences Journal, Vol. 13, pp. 957-961, (2011).

[98] N.F.M. Noor, S. Abbasbandy, I. Hashim, Heat and mass transfer of thermophoretic MHD flow over an inclined radiate isothermal permeable surface in the presence of heat source/sink, Int. J. of Heat and Mass Transfer. Vol. 55, pp 2122-2128, (2012).

[99] G. K. Ramesh, A. J. Chamkha and B. J. Gireesha, Boundary layer flow past an inclined stationary/moving flat plate with convective boundary condition, African Mathematical Union and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2015).

[100] A.J. Chamkha, A.M. Aly, M.A. Mansour, Unsteady natural convective power-law fluid flow past a vertical plate embedded in a non-Darcian porous medium in the presence of a homogeneous chemical reaction, Nonlinear Analysis : Modelling and Control. Vol. 15, N° 2, pp 139-154, (2010).

[101] J.A. Rao, P.R. Babu and R.S. Raju, Finite element analysis of unsteady MHD free convection flow past an infinite vertical plate with Soret, Dufour, thermal radiation and heat source, ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences, vol. 10, N° 12, (2015).

[102] D.A. Nield, and A. Bejan, "Convection in porous media", 5th (ed.). In : Springer Science, New York - USA, (2017).

[103] K. Rajesh, A. Pankaj, G. Mohan and V. Jitendra, "Laminar flow analysis over a flat plate by computational fluid dynamics", International Journal of Advances in Engineering & Technology (IJAET), Vol. 3, N° 2, pp. 756-764. (2012).

[104] V. Shankar, A. Bengtson2, V. Fransson and C.E. Hagentoft, "Influence of Heat Transfer Process in Porous Media with Air Cavity A CFD Analysis", N°. 161, Proceedings of the 4th International Conference of Fluid Flow, Heat and Mass Transfer (FFHMT'17), Toronto, Canada, (2017).

[105] ANSYS Inc., ANSYS Fluent User's Guide. Version 14.0, Canonsburg, USA, (2011).

[106] N. Gascoin, L. Romagnosi, I. Fedioun, Pyrolysis in porous media : part 2. numerical analysis and comparison to experiments. Journal of Porous Media, Vol. 16, N° 9, pp. 857-873, (2013).

[107] D. Kaushik, and B. Debashis, Software validation test plan and report for ansys-fluent version 12.1, Center for Nuclear Waste Regulatory Analyses San Antonio, Texas, (2010).