UNIVERSITE IBNOU ZOHR
FACULTE DES SCIENCES AGADIR
CENTRE DES ETUDES DOCTORALES

T H E S E

pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences

de l'Université IBNOU ZOHR d'Agadir

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Présentée et soutenue par

Hicham MAHDIOUI

Sujet

Le principe auxiliaire et algorithmes d'approches pour les problèmes d'équilibres et études d'un problème du point selle vectoriel

Soutenue le 01 décembre 2012 devant le jury composé de :

Président

Hassan RIAHI, Professeur à la faculté des sciences Semlalia, Université Cadi Ayyad, Marrakech.

Membres de jury

Zaki CHBANI	Professeur à la faculté des sciences Semlalia, Université Cadi Ayyad, Marrakech.
Abdelmalek ABOUSSOROR	Professeur à la Faculté polydisciplinaire de Safi, Université Cadi Ayyad.
Abdrahim DRIOUCH	Professeur à la faculté des sciences, Université Ibnou ZOHR, Agadir.
Abdellah BNOUHACHEM	Professeur à l'école nationale des sciences appliquées, université Ibnou ZOHR, Agadir.

Directeur de thèse : **Ouayl CHADLI**. Professeur à FSJES Ibnou ZOHR, Agadir.
Co-directeur : **Hamid BOUNIT**. Faculté des sciences Ibnou ZOHR, Agadir.

Laboratoire de recherche d'analyse Mathématiques et applications.

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma gratitude et ma sympathie à mon directeur de thèse, Ouayl CHADLI. Sa disponibilité totale et sa modestie face au travail et au quotidien furent pour moi une aide constante durant mes quatre années. Je le remercie de m'avoir orienté vers ce sujet lors de mon stage de Master, il a pris le temps nécessaire pour m'éveiller à la recherche, montrant constamment une très grande rigueur et précision. Il n'a cessé de me soutenir et de m'encourager dans tous ces moments où un doctorant peut douter, de lui et de son travail. Il m'a poussé en avant, m'obligeant en permanence à aller toujours plus loin. J'espère qu'il a pris autant de plaisir que moi à cette aventure à la fois passionnante mais parfois délicate qu'est la réalisation d'une thèse. Un très grand merci à lui, et toute ma reconnaissance.

Un très grand merci à mon co-directeur de thèse, Hamid BOUNIT, pour m'avoir fortement encouragée à poursuivre dans cette voie et choisie pour ce sujet de thèse.

Je tiens bien évidemment à exprimer ma reconnaissance aux membres du jury, mes rapporteurs, pour avoir pris le temps de lire cette thèse dans les moindres détails et juger ce travail et le jury dans son ensemble pour leur présence, leurs encouragements et conseils qui m'ont permis de tout finaliser et leur sympathie.

C'est d'une manière indubitable et profondément sincère que je dis un grand merci à mes parents et ma famille pour leur soutien, la fierté et la confiance qu'ils me portent.

Je remercie toutes les personnes côtoyées au sein de la faculté des sciences Ibnou Zohr pour leur accueil. Plus particulièrement tout les professeurs et les personnelles du département de Mathématique et Informatique. J'exprime mes remerciements à mes collègues avec lesquelles j'ai partagé d'agréables moments. Merci à toutes les personnes avec qui j'ai travaillé avec un immense plaisir et tous ceux avec qui j'ai pu être en contact au sein de la faculté des sciences juridiques, économiques et sociales, je tiens également à leur exprimer toute ma gratitude pour leur aide, conseils, soutien. . . et ceci aussi bien sur le plan professionnel que personnel. Grâce à eux, j'ai aussi pu rencontrer et travailler avec des chercheurs de différents spécialités, ce qui est un atout et une chance exceptionnelle, et je leur en suis particulièrement reconnaissant.

Je tiens à remercier l'ensemble des secrétaires du C.E.D et tout particulièrement Madame la Directrice L. Idrissi Hassani pour sa gentillesse, sa disponibilité et son efficacité à résoudre mes problèmes.

Petite dédicace aux amis qui ont partagé mon quotidien ou de simples moments : Abd Aziz, Sultana, Ahmed et Mustapha, mes collègues, bien évidemment Anouar avec qui j'ai partagé les différentes phases de ma thèse et tous les autres. Grâce à eux, des moments sympathiques ont égayé mes quatre années, même dans les moments les moins roses. Enfin, merci à Ahmed pour son écoute et son soutien, à tout mes amis pour les moments de détentes partagés et à tous ceux que j'aurai pu oublié.

Liste des principales publications et communications

- **H. Mahdioui** and O. Chadli : On a system of generalized mixed equilibrium problems involving variational-like inequalities in Banach Spaces : Existence and algorithmic aspects, Advances in Operations Research, N. ID 843486, pages 18, 2012.

- O. Chadli and **H. Mahdioui** : Existence results for vector saddle points problems, Taiwanese Journal of Mathematics, vol.16, number 2, pages 429-444,2012.

- O. Chadli, **H. Mahdioui** and J. C. Yao : Bilevel mixed equilibrium problems in Banach spaces : existence and algorithmic aspects, Journal of Numerical Algebra, Control and Optimization, vol.1, number 3, pages 549-561, 2011.

- **H. Mahdioui** and O. Chadli : Existence results for vector saddle points problems. Communication aux 5th International Conference On Operations Research, CIRO'10, Marrakech, Morocco, 24-27 Mai 2010.

Résumé

Cette thèse est divisée en deux parties. La première partie est consacrée au côté algorithmique des problèmes d'équilibres dans un cadre général d'espace de Banach. Pour ce faire un concept du principe auxiliaire a été utilisé. L'extension de ce concept au cadre des problèmes d'équilibre présente plusieurs intérêts d'ordre théoriques et numériques entre autre. En effet, il permet de retrouver les principaux algorithmes d'optimisation dans un cadre unifié où l'étude de convergence a été effectuée une fois pour toute. Ainsi qu'il réside dans le conditionnement numérique des problèmes d'optimisation et des inéquations variationnelles. La deuxième partie présente une étude d'existence des solutions pour un problème du point selle dans un espace vectoriel ordonné par un cône. On propose deux méthodes pour cette étude. La première méthode consiste à introduire une condition de type Brézis-Nirenberg-Stampacchia étendue au cadre vectoriel ainsi qu'une relaxation de la notion de C-semicontinuité. Dans la seconde approche, nous établissons un résultat d'existence pour le problème de point selle vectoriel dans un espace paracompact en faisant appel à la notion de la partition de l'unité.

Mots-clés : Analyse convexe, problèmes d'équilibres, problèmes d'équilibres mixte, principe auxiliaire, monotonie, coercivité, point selle vectoriel, C-semicontinuité, C-quasiconvexité, Lemme de KKM, espace paracompact.

Abstract

This thesis is divided into two parts. The first part is devoted to algorithmic problems aside equilibria in a general Banach space. To do this a concept of auxiliary principle was used. Extending this concept to the context of equilibrium problems has several advantages theoretical and numerical order among others. Indeed, it can find the main optimization algorithms in a unified framework where convergence study was carried out once and for all. As is the conditioning numerical optimization problems and variational inequalities. The second part presents a study of existence of solutions for a saddle point problem in a vector space ordered by a cone. We propose two methods for this study. The first method is to introduce a condition type Brézis-Nirenberg-Stampacchia vector extended framework and a relaxation of the notion of C-semicontinuity. In the second approach, we establish an existence result for the saddle point problem in a paracompact space vector by using the notion of partition of unity.

Keywords : Convex analysis, equilibrium problem, mixed equilibrium problem, auxiliary problem, monotonie, coercivity, vector saddle point, C-semicontinuity, C-quasiconvexity, KKM-Lemma, paracompact space.

Introduction générale

Étant donné K un sous-ensemble convexe, fermé et non vide d'un espace vectoriel topologique et $f : K \times K \to I\!R$ une bifonction d'équilibre, c-à-d $f(x, x) = 0$ pour tout $x \in K$. On entend par un problème d'équilibre, en abrégé (PE), le problème suivant :

$$\text{(PE)} \qquad \text{Trouver} \quad \overline{x} \in K \quad \text{tel que} \quad f(\overline{x}, y) \geq 0 \quad \forall y \in K.$$

Les solutions du problème (PE) sont appelées points d'équilibres. Plusieurs problèmes tels que les inéquations variationnelles, l'optimisation (maximum, minimum), les points selles, les points fixes, les problèmes de complémentarité et autres peuvent être traités sous cette forme.

Il est à noter que l'appellation **problèmes d'équilibre** n'a été adoptée qu'avec l'apparition du papier de Blum-Oettli [15], où les auteurs ont précisé comment les problèmes d'équilibres sont relativement liés à d'autres problèmes généraux d'analyse non linéaire, problèmes de points fixe, la théorie des jeux, des problèmes du point selle, les inéquations variationnelles, les problèmes de complémentarité et les problèmes d'optimisation.

Toutes ces raisons ont convaincu de nombreux mathématiciens d'aller loin dans le traitement de la théorie de cette classe riche et importante de modèles mathématiques. Nous tenons à souligner que les résultats d'existence d'un point d'équilibre proviennent du célèbre théorème de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz (1929) et sa généralisation au cadre de dimension infinie par Ky Fan (1961,1972) ainsi que des arguments de la monotonie et la convexité généralisée. La flexibilité des problèmes d'équilibres permet d'avoir une gamme complète d'applications aux classes de problèmes d'optimisations, problèmes d'inéquations variationnelles, problèmes d'équilibres de Nash dans les jeux non coopératifs, problèmes de points fixes, problèmes de complémentarités et les problèmes d'optimisations vectorielle non-linéaire. Dès lors, de nombreux travaux ont été présentés dans un cadre plus général en introduisant des hypothèses plus faible que la convexité classique, la compacité et les conditions de monotonie généralisée.

Aujourd'hui, cette théorie est appliquée à de nombreux problèmes issus de l'économie, de l'ingénierie... etc. Nous citons, par exemple, les travaux de Allen [2], Yen [95], Baiocchio [10], Tuc-Tan [90], Liou-Yao [64], Ben-El-Mechaiekh-Deguire-Granas [11], Aubin [7], Schaible [46], Bianchi-Schaible [14], Bianchi-Hadjisavvas-Schaible [12], Chadli-Chbani-Riahi [22, 20, 21], Konnov-Schaible [62], Ding-Liou [38, 35] et autres.

Comme nous l'avons déjà mentionné, de nombreux problèmes mathématiques peuvent être modélisés par les problèmes d'équilibres. Nous donnons, par la suite, quelques cas particuliers :

Problème de minimisation convexe : Soit $\varphi : K \to I\!R$ une fonction convexe et semi-continue inférieurement. Le problème de minimisation convexe (PMC) consiste à

$$\text{trouver} \quad x^* \in K \quad \text{tel que} \quad \varphi(x^*) \leq \varphi(y) \qquad \text{pour tout} \quad y \in K.$$

Si on considère la bifonction d'équilibre $f(x, y) = \varphi(y) - \varphi(x)$ pour tout $x, y \in K$, alors x^* est une solution du problème (PMC) si et seulement si x^* est aussi une solution du problème (PE).

Problème d'inéquation variationnelle : Soit T un opérateur de K à valeur dans X^*. On définit le problème d'inéquation variationnelle IV(T,K), sous la forme

$$IV(T, K) \begin{cases} \text{trouver } \overline{x} \in K \text{ tel que} \\ \langle T\overline{x}, y - \overline{x} \rangle \geq 0, \qquad \forall y \in K. \end{cases}$$

En considérant la bifonction d'équilibre $f(x, y) = \langle Tx, y - x \rangle$, alors les problèmes (PE) et IV(T,K) sont équivalents.

La théorie des inéquations variationnelles a débuté avec les problèmes de minimisation de fonctionnelles. L'étude systématique de cette théorie remonte aux travaux de G. Fichera et son analyse du problème de Signorini en 1964. Cette théorie a connu de nombreux développements, d'abord avec les travaux de G. Stampacchia et P. Hartmann en 1966 et ensuite avec la contribution en 1967 de G. Stampacchia et J.L. Lions. Un théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème d'inéquation variationnelle a été donné par Stampacchia dans [84].

Problème du point selle : Soit $\phi : K_1 \times K_2 \to I\!R$. On dit que le couple $(x_1, x_2) \in K_1 \times K_2$ est un point selle de la fonction ϕ si et seulement si

$$(PS) \qquad \phi(x_1, v) \leq \phi(u, x_2) \quad \forall (u, v) \in K_1 \times K_2.$$

Posons $K = K_1 \times K_2$ et considérons la bifonction d'équilibre suivante :

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \phi(y_1, x_2) - \phi(x_1, y_2).$$

Alors, le problème d'équilibre (PE) associé à f est équivalent au problème de point selle (PS).

Problème du point fixe : Soient $X = H$ un espace de Hilbert et $K \subset H$ un ensemble non vide. Soit $T : K \to K$ un opérateur. Un problème du point fixe (PF) est présenté sous la forme

$$(PF) \begin{cases} \text{trouver } \overline{x} \in K \text{ tel que} \\ T\overline{x} = \overline{x}. \end{cases}$$

Prenons $f(x,y) = \langle x - Tx, y - x\rangle$. Alors $\overline{x}$ est un point fixe de l'application T si et seulement si $\overline{x}$ est aussi une solution du problème d'équilibre (PE) associé à f.

Problème de complémentarité : Ce problème est considéré comme un cas spécial du problème d'inéquation variationnelle, où K est un cône convexe fermé non vide d'un espace vectoriel topologique X. On note par $K^* = \{x^* \in X^* \ : \langle x^*, y\rangle \geq 0, \forall y \in K\}$, le cône polaire associé à K et T un opérateur non borné de K à valeur dans X^* où X^* est le dual topologique de X. On définit le problème de complémentarité par

$$(PC) \quad \begin{cases} \text{trouver } \overline{x} \in \ X, \quad \text{tel que} \\ \overline{x} \in K, \quad T\overline{x} \in K^* \quad \text{et} \quad \langle T\overline{x}, \overline{x}\rangle = 0. \end{cases}$$

Le problème (PC) est équivalent au problème IV(T,K), donc équivalent au problème (PE). En effet, soit $\overline{x}$ une solution du problème IV(T,K), si on prend d'une part $y = 2\overline{x}$ et puis $y = 0$ dans la relation du problème IV(T,K), on obtient donc que $\overline{x}$ est aussi solution du problème (PC). Réciproquement s'il existe $\overline{x} \in K$ solution du problème (PC) tel que $T\overline{x} \in K^*$, alors pour tout $y \in K$ on a $\langle T\overline{x}, y\rangle \geq 0$, d'où $\langle T\overline{x}, y\rangle - \langle T\overline{x}, \overline{x}\rangle \geq 0$. Ainsi, $\overline{x}$ est une solution du problème d'inéquation variationnelle IV(T,K). On a donc une équivalence entre le problème (PC) et le problème IV(T,K), d'où une équivalence entre les problèmes (PC) et (PE).

Problème de minimisation vectoriel : Soit $C \subset I\!R^m$ un cône fermé convexe de cône polaire C^* d'intérieur non vide. On considère l'ordre partiel dans $I\!R^m$ défini comme suit

$$x \preceq y \quad \Leftrightarrow \quad y - x \in C;$$

$$x \prec y \quad \Leftrightarrow \quad y - x \in int(C).$$

La fonction $\Phi : K \subset I\!R^m \to I\!R^m$ est dite $C-$convexe si $\Phi(tx + (1-t)y) \preceq t\Phi(x) + (1-t)\Phi(y)$ pour tout $x, y \in K$ et $t \in]0,1[$.

On définit le problème de minimisation vectoriel convexe par

$$(PMV) \begin{cases} \text{trouver } \ \overline{x} \in K \text{ tel que} \\ \ \Phi(\overline{x}) \preceq \Phi(y) \quad \text{pour tout} \quad y \in K. \end{cases}$$

avec K un convexe fermé de $I\!R^m$ et $\Phi : K \to I\!R^m$ une fonction $C-$convexe. Si on prend $f(x,y) = \max_{\|z\|=1, z \in C^*} \langle z, \Phi(y) - \Phi(x)\rangle$, alors $\overline{x}$ est une solution du problème (PMV) si et seulement si $\overline{x}$ solution du problème (PE).

Organisation de la thèse

Cette thèse est divisée en deux parties : la première traite le côté algorithmique des problèmes d'équilibres dans un cadre général d'espace de Banach en introduisant le concept du principe auxiliaire, ceci permet de présenter des algorithmes définis pour des classes différentes de problèmes d'équilibre ainsi les problèmes d'équilibres à deux niveaux. La seconde partie sera consacrée à l'étude de l'existence de la solution pour un problème du point selle dans un cadre vectoriel.

Ce travail est structuré en cinq chapitres, nous les décrivons brièvement :
Le premier chapitre présente la plupart des notions de bases qui seront utilisées tout au long de ce travail. Il sera divisé en deux parties principales. La première sera consacrée au rappel de quelques notions et définitions ainsi qu'un rappel simplifié des résultats d'existence des solutions pour un problème d'équilibre et un problème d'équilibre mixte. Nous terminerons cette partie, par un paragraphe où nous donnons des conditions suffisantes pour établir l'hypothèse de la coercivité pour un problème d'équilibre mixte. La seconde partie sera dédiée à une motivation d'un problème d'optimisation vectorielle ainsi qu'une brève présentation de la fonction lagrangienne vectorielle. Le but est de donner une présentation vectorielle d'un problème du point selle afin de motiver l'étude faite au Chapitre 5.

Le deuxième chapitre étudie le principe auxiliaire pour un problème d'équilibre. Cette notion a été introduite par Guy Cohen [31, 32] pour les problèmes d'optimisation puis généralisée par Glowinski [48] pour l'étude des problèmes d'inéquations variationnelles. L'idée de cette méthode est de remplacer le problème (PE), par le problème auxiliaire suivant

$$(AuxPE) \quad \begin{cases} \text{Pour} \;\; x \in K \text{ trouver } \;\overline{z} \in K \;\; \text{tel que} \\ \rho f(\overline{z}, z) + \langle T(z) - T(\overline{z}), \overline{z} - x \rangle \geq 0 \;\; \forall z \in K, \end{cases}$$

avec $T : X \to X^*$ un opérateur et $\rho > 0$, de telle sorte que chaque problème particulier auxiliaire peut être résolu par l'un des algorithmes connus.

Dans le troisième chapitre, on étudie dans le cadre d'espace de Banach une classe de problème d'équilibre à deux niveaux. Notre approche se base sur le principe auxiliaire à fin d'établir une nouvelle étude approximative aux problèmes d'équilibres à deux niveaux via un seul algorithme. Les résultats obtenus présentent plus de points avantageux que ceux trouvés par Moudafi [74]. Celui-ci a proposé un algorithme proximal dans un cadre d'espace de Hilbert où la suite générée par l'algorithme converge faiblement vers une solution du problème en supposant la suite $\{x_n\}$ générée par l'algorithme vérifie une condition du type $\|x_n - x_{n+1}\| = \theta(\varepsilon_n)$. Cette condition est non réalisable car on ne peut pas à priori estimer $\|x_n - x_{n+1}\|$. Notre approche est aussi plus intéressante que celle proposée par Ding [36] qui consiste à utiliser le principe auxiliaire en fournissant deux algorithmes pour chaque niveau. Plus précisément, Ding [36] présente une étude constituée de deux algorithmes séparés en imposant des conditions de la forte monotonie sur les bifonctions du problème. (Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'une publication, voir [26]).

Dans le quatrième chapitre, nous appliquons le principe auxiliaire de nouveau pour suggérer un algorithme pour étudier un système des problèmes d'équilibres généralisés. Cet algorithme permet de construire une suite qui converge fortement sous des hypothèses faibles que celles dans [37]. Pour bien mener ce travail, nous nous sommes basés sur les travaux de Kazmi et Khan [57], Ding et Wang [39], [16] et [75]. (Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'une publication, voir [67]).

Le cinquième chapitre est consacré à l'étude d'existence des solutions pour un problème du point selle dans un espace vectoriel ordonné par un cône. On propose deux méthodes pour cette étude. La première méthode consiste à introduire une condition de type Brézis-Nirenberg-Stampacchia [18] étendue au cadre vectoriel ainsi qu'une relaxation de la notion de C-semicontinuité introduite par Tanaka [87]. Dans la seconde approche, nous établissons un résultat d'existence pour le problème de point selle vectoriel dans un espace paracompact en faisant appel à la notion de la partition de l'unité. (Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'une publication, voir [25]).

Table des matières

Chapitre 1

Notions générales

Sommaire

Ce chapitre est divisé en deux parties :

Dans la première partie, nous rappelons quelques définitions qui seront fréquemment utilisées tout au long de ce travail. De plus, nous donnerons quelques résultats d'existence des solutions pour un problème d'équilibre ainsi celle d'un problème équilibre mixte. Nous présenterons des hypothèses faibles concernant la condition de la coercivité.

Dans la deuxième partie, nous rappelons quelques définitions et outils d'optimisation vectorielle. Nous présenterons quelques notions sur un espace vectoriel ordonné par un cône ainsi que sur la convexité et semi-continuité dans le cadre vectoriel. Les résultats ainsi donnés seront appliqués ultérieurement à l'étude d'un problème du point selle vectoriel.

Partie I

On regroupe dans cette partie des notions préliminaires et résultats de base auxquels on fait appel dans les chapitres suivants. On rappelle les principaux résultats concernant l'existence des solutions pour les problèmes d'équilibres ainsi que les problèmes d'équilibres mixtes.

1.1 Préliminaires

Dans la suite, soient X un espace vectoriel topologique de Hausdorff et K un sous-ensemble convexe, fermé et non vide de X.

Définition 1.1.1. *Une fonction $F : K \to I\!R$ est dite*

(i) *convexe si pout tout $x, y \in K$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$*

$$F(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y);$$

(ii) *quasi-convexe si pour tout $x, y \in K$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$*

$$F(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{F(x), F(y)\};$$

(iii) *semi-strictement quasi-convexe si pour tout $x, y \in K$ tel que $F(x) \neq F(y)$ et pour tout $\lambda \in (0, 1)$, on a*

$$F(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \max\{F(x), F(y)\};$$

(iv) *hémi-continue supérieurement si pour tout $x, y \in K$, on a*

$$\lim_{\lambda \to 0^+} F(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq F(y);$$

(v) *semi-continue inférieurement au point $x \in K$ si pour tout suite généralisée $\{x_\lambda\}_{\lambda \in I} \subset K$ convergente vers x, on a*

$$\limsup_{\lambda \in I} F(x_\lambda) \geq F(x);$$

(vi) *semi-continue supérieurement au point $x \in K$ si pour tout suite généralisée $\{x_\lambda\}_{\lambda \in I} \subset K$ convergente vers x, on a*

$$\limsup_{\lambda \in I} F(x_\lambda) \leq F(x).$$

De plus, F est dite semi-continue inférieurement (semi-continue supérieurement) sur K si F est semi-continue inférieurement (semi-continue supérieurement) en tout point x de K.

Remarque 1.1.2. *Cette définition montre immédiatement que*

(a) *Si F est convexe, alors elle est aussi quasi-convexe ;*

(b) *Si F semi-continue inférieurement et semi-continue supérieurement, alors F est continue ;*

(c) *Si F est hémi-continue, alors F est semi-continue supérieurement.*

Définition 1.1.3. *([54]) Soit $f : K \times K \to I\!R$ une bifonction. Alors f est dite*

(i) *monotone, si pour tout $x, y \in K$*

$$f(x, y) + f(y, x) \leq 0;$$

(ii) *strictement monotone, si pour tout $x, y \in K$ et $x \neq y$*

$$f(x, y) + f(y, x) < 0;$$

(iii) *γ-fortement monotone, s'il existe un nombre positif γ tel que*

$$f(x, y) + f(y, x) \leq -\gamma \|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in K;$$

(iv) *pseudomonotone, si pour tout $x, y \in K$*

$$f(x, y) \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad f(y, x) \leq 0;$$

(v) *strictement pseudomonotone, si pour tout $x, y \in K$ et $x \neq y$*

$$f(x, y) \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad f(y, x) < 0.$$

Il est facile de voir que si f est monotone, alors f est pseudomonotone et si f est strictement pseudomonotone, alors f est pseudomonotone. En plus, si f est fortement monotone, alors f est monotone.

Définition 1.1.4. *Une bifonction $\psi : K \times K \to I\!R$ est dite skew symétrique, si pour tout $x, y \in K$*

$$\psi(x, x) - \psi(x, y) - \psi(y, x) + \psi(y, y) \geq 0.$$

Remarque 1.1.5. *Les bifonctions skew-symétriques ont certaines propriétés qui peuvent être considérées comme analogues des conditions régissant la monotonie du gradient et la positivité de la dérivé seconde d'une fonction convexe. Pour plus de détails sur cette notion de skew-symétrie, nous renvoyons le lecteur à [3].*

Nous définissons aussi la notion de la monotonie pour un opérateur $T : X \to X^*$.

Définition 1.1.6. *([98], Définition 25.2) Un opérateur $T : X \to X^*$ est dit*

(a) *monotone si et seulement si*

$$\langle T(x) - T(y), x - y \rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in X;$$

(b) *$\alpha-$fortement monotone, s'il existe un nombre positif α tel que*

$$\langle T(x) - T(y), x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in X;$$

(c) *$L-$Lipschitzien si et seulement s'il existe $L > 0$ tel que*

$$\|T(x) - T(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall x, y \in X.$$

Définition 1.1.7. *Un opérateur $T : X \to X^*$ est dit $\delta-$fortement positif, si pour tout $x \in K$*

$$\langle T(x), x \rangle \geq \delta \|x\|^2.$$

Remarque 1.1.8. *Il est facile de monter que pour tout opérateur linéaire et borné $T : X \to X^*$ est $\delta-$fortement positif, $\delta-$fortement monotone et $\|T\|-$Lipschitzien, avec $\|T\|$ est la norme de T.*

Définition 1.1.9. *Soit K un sous-ensemble convexe, fermé et non vide d'un espace vectoriel topologique de Hausdorff X. On dit que la bifonction $f : K \times K \to I\!R$ vérifie la condition de coercivité, s'il existe un sous-ensemble compact non vide $L \subset X$ et $y_0 \in L \cap K$ tels que*

$$f(x, y_0) < 0, \qquad \text{pour tout } x \in K \backslash L.$$

Remarque 1.1.10. *Dans le cas particulier où X est un espace de Banach réflexif muni de la topologie faible, on peut introduire d'autres conditions suffisantes pour assurer la coercivité définie ci-dessus.*

1.2 Problème d'équilibre

Soit K un sous-ensemble convexe, fermé non vide d'un espace vectoriel topologique de Hausdorff X. Considérons une bifonction $f : K \times K \to I\!R$ satisfaisant à la condition d'équilibre $f(x, x) = 0$, pour tout $x \in K$. Nous présentons, dans ce paragraphe, les principaux résultats d'existence de solutions d'un problème d'équilibre donné par :

$$(PE) \quad \begin{cases} \text{trouver } \overline{x} \in K \ \text{ tel que} \\ f(\overline{x}, y) \geq 0 \quad \forall y \in K. \end{cases}$$

L'étude systématique de la théorie des problèmes d'équilibre remonte aux travaux de Blum-Oettli [15]. Cette théorie a connu de nombreux développements, d'abord avec les travaux de Allen [2], Yen [95], Baiocchio [10], Tuc-Tan [90], Liou-Yao [64], Ben-El-Mechaiekh-Deguire - Granas [11], Aubin [7], Schaible [46], Bianchi-Schaible [14], Bianchi-Hadjisavvas-Schaible [12], Chadli- Chbani-Riahi [22, 20, 21]...etc. Nous tenons à souligner que les résultats d'existence d'un point d'équilibre proviennent du célèbre théorème Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz (1929) et qui a été généralisé par Ky Fan [41] au cadre d'espace de dimension infinie et leurs utilisations pour les inéquations de minimax de Ky Fan [42].

Les domaines d'applications des problèmes d'équilibre sont nombreux, citons des disciplines aussi différentes que la physique, la chimie, l'économie, la finance etc... . Il n'est pas étonnant que cette théorie ait conduit à de nombreux développements depuis les années soixante et les travaux pionniers que nous venons de citer.

1.2.1 Résultats d'existence

Dans ce paragraphe et afin de commencer l'étude de résultats d'existence du problème (PE), nous présentons par le lemme suivant une caractérisation de l'ensemble des solutions du problème (PE).

Lemme 1.2.1. *Soient X un espace de Banach et K un sous-ensemble convexe, fermé et non vide de X. Soit $f : K \times K \to I\!R$ une bifonction d'équilibre telle que*

(i) *f est monotone et hémi-continue supérieurement ;*

(ii) *Pour tout x de K, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est convexe et semicontinue inférieurement.*

Alors l'ensemble des solutions S_f du problème d'équilibre (PE) est convexe et fermé quand il n'est pas vide.

Démonstration. Supposons que $S_f \neq \emptyset$. Pour montrer la convexité de l'ensemble S_f, considérons $\overline{u}, \overline{v} \in S_f$, $\lambda \in [0, 1]$ et $x_\lambda = \lambda\overline{u} + (1 - \lambda)\overline{v} \in K$ et montrons que $x_\lambda \in S_f$. On a $\overline{u}, \overline{v} \in S_f$, donc

$$f(\overline{u}, y) \geq 0 \quad \text{et} \quad f(\overline{v}, y) \geq 0 \quad \text{pour tout } y \in K.$$

Comme f est monotone, on en déduit que

$$f(y, \overline{u}) \leq 0 \quad \text{et} \quad f(y, \overline{v}) \leq 0 \quad \text{pour tout } y \in K.$$

Grâce à la convexité de la bifonction f par rapport au second argument, on a

$$f(y, x_\lambda) \leq 0 \quad \text{pour tout } y \in K. \tag{1.1}$$

Notons, pour $t \in]0, 1[$ et $y \in K$, $x_t = ty + (1 - t)x_\lambda \in K$. Puisque f est une bifonction d'équilibre et que f est convexe par rapport au second argument, on obtient

$$0 = f(x_t, x_t) \leq tf(x_t, y) + (1 - t)f(x_t, x_\lambda). \tag{1.2}$$

Prenons $y = x_t$ dans la relation (1.1) et utilisons la relation (1.2) pour obtenir

$$f(x_t, y) \geq 0 \quad \text{pour tout} \quad y \in K.$$

Puisque f est hémi-continue supérieurement, il s'ensuit

$$f(x_\lambda, y) \geq \limsup_{t \to 0} f(x_t, y) \geq 0.$$

Par conséquent $x_\lambda \in S_f$. Ainsi S_f est convexe. Montrons maintenant que S_f est fermé. Soit $\{x_n\}$ une suite d'éléments de S_f tel que $x_n \to \overline{x}$. Montrons que $\overline{x} \in S_f$. On a $f(x_n, y) \geq 0$ pour tout y $\in K$. Puisque f est monotone, il s'ensuit

$$f(y, x_n) \leq 0 \quad \text{pour tout} \quad y \in K.$$

En utilisant la semicontinuité inférieurement de f par rapport au second argument, on obtient

$$f(y, \overline{x}) \leq \liminf_{n \to +\infty} f(y, x_n) \leq 0.$$

Par un raisonnement similaire que ci-dessus, on peut facilement montrer que $f(\overline{x}, y) \geq 0$ pour tout y $\in K$. Donc $\overline{x} \in S_f$, ce qui termine la preuve. □

L'étude concernant l'existence des solutions pour le problème d'équilibre (PE) fait généralement appel au célèbre théorème de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz (1929) et sa généralisation par Ky Fan [43, 42].

Définition 1.2.2. *Soient U un sous ensemble non vide d'un espace vectoriel topologique X et $F : U \to 2^X$ une multi-application, où 2^X est la famille des sous ensembles de X. On dit que F est une multi-application de KKM (ou la famille $\{F(x)\}_{x \in U}$ satisfait le principe de KKM) si pour tout sous ensemble fini non vide $A \subset U$, on a*

$$co(A) \subset \bigcup_{x \in A} F(x).$$

Le théorème suivant est un résultat fondamental qui nous sera utile par la suite.

Théorème 1.2.3. *[41, Fan-KKM Theorem] Soient U un sous ensemble non vide d'un espace vectoriel topologique X et $F : U \to 2^X$ une multi-application de KKM telle que*

- **(i)** *Pour tout $x \in X$, $F(x)$ est fermé dans X ;*
- **(ii)** *Il existe $x_0 \in U$ tel que $F(x_0)$ est un compact.*

Alors $\cap_{x \in U} F(x)$ est non vide.

Notons que la preuve de l'existence de solutions au problème d'équilibre (PE) consiste à montrer que $\cap_{y \in K} Q(y) \neq \emptyset$ où $Q(y) = \{x \in K, \quad f(x, y) \geq 0\}$ par application du Théorème 1.2.3.

Théorème 1.2.4. *([43, Théorème 1]) Soient X un espace vectoriel topologique de Hausdorff et K un compact convexe de X. Soit $f : K \times K \to \mathbb{R}$ une bifonction d'équilibre telle que*

(i) *Pour tout $x \in K$, la fonction $f(x, \cdot) : K \to \mathbb{R}$ est convexe ;*

(ii) *Pour tout $y \in K$, la fonction $f(\cdot, y) : K \to \mathbb{R}$ est semicontinue supérieurement.*

Alors $\cap_{y \in K} Q(y) \neq \emptyset$, i.e., le problème (PE) admet une solution.

Preuve. La démonstration est une conséquence directe du Théorème 1.2.3. En effet, considérons la famille des sous ensembles $\{Q(y)\}_{y\in K}$ où $Q(y) = \{x \in K, \quad f(x,y) \geq 0\}$ et on montre que $\cap_{y\in K} Q(y) \neq \emptyset$. L'hypothèse (i) assure le fait que la famille $\{Q(y)\}_{y\in K}$ est une multi-application et à partir de l'hypothèse (ii) assure les hypothèses (i) et (ii) du Théorème 1.2.3. □

Lorsque K n'est pas compact, le Théorème 1.2.4 n'est plus applicable. Pour éviter cet inconvénient on remplace la compacité de K par la coercivité de f dans le sens de la Définition 1.1.9, voir ([18],[10]).

Théorème 1.2.5. *([18]) Soient X un espace vectoriel topologique de Hausdorff et K un convexe fermé non vide de X. Soit $f : K \times K \to I\!R$ une bifonction d'équilibre telle que*

(i) *f est coercive ;*

(ii) *Pour tout $x \in K$, la fonction $f(x,\cdot) : K \to I\!R$ est convexe ;*

(iii) *Pour tout $y \in K$, la fonction $f(\cdot,y) : K \to I\!R$ est semi-continue supérieurement.*

Alors le problème (PE) admet une solution.

Une autre approche, voir Bianchi-Pini [13], a été introduite pour étudier l'existence des solutions du problème d'équilibre (PE) en s'appuyant sur une formulation duale du problème. Le problème d'équilibre dual (ou Problème de Minty, voir [72]), consiste à trouver un point $x^* \in K$ tel que

$$f(y, x^*) \leq 0, \qquad \text{pour tout} \quad y \in K.$$

Ce problème a été étudié par Konnov-Schaible [62] et Iusem-Sosa [51], en considérant la formulation suivante : trouver $x^* \in K$ tel que $x^* \in \cap_{y\in K} L_f(y)$ avec $L_f(y) = \{x \in K \mid f(y,x) \leq 0\}$ pour tout $y \in K$.

Notons par S et S^d les ensembles des solutions de (PE) et (PED), respectivement. Il est clair que cette stratégie pour résoudre (PE) en résolvant (PED) n'est intéressante que dans le cas où $S^d \subset S$.

Lemme 1.2.6. *([14]) Soient X un espace vectoriel topologique de Hausdorff et K un compact convexe de X. Soit $f : K \times K \to I\!R$ une bifonction d'équilibre.*

(i) *Si f est pseudomonotone, alors $S \subset S^d$.*

(ii) *Si, pour tout $x \in K$, la fonction $f(x,\cdot)$ est semi-strictement quasi-convexe et pour tout $y \in K$, la fonction $f(\cdot,y)$ est hemi-continue supérieurement, alors $S^d \subset S$.*

Grâce à ce lemme, Bianchi- Schaibe [14], Konnov-Schaible [62], Bianchi-Pini [13] ont prouvé l'existence et l'unicité des solutions des problèmes (PE) et (PED).

Théorème 1.2.7. *Soit K un sous-ensemble convexe, fermé non vide d'un espace vectoriel topologique de Hausdorff X et $f : K \times K \to I\!R$ une bifonction réelle. Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

(i) *$f(x,\cdot)$ est convexe et semi-continue inférieurement pour tout $x \in K$;*

(ii) *$f(\cdot,y)$ est hémi-continue supérieurement pour tout $y \in K$;*

(iii) *f est pseudomonotone.*

(iv) *Soit K est compact ou soit f est coercive sur K;*

Alors, les ensembles des solutions des problèmes (PE) et (PED) coïncident et sont non vides, convexes et compacts. En plus, si f est strictement pseudomonotone, alors les problèmes (PE) et (PED) ont une solution unique.

Remarque 1.2.8. *Sous l'une des conditions de la monotonie, l'ensemble des solutions de (PE) est convexe. Si f est fortement monotone, l'ensemble des solutions se réduit à un point unique.*

Avant de terminer ce paragraphe, nous donnons le lemme suivant qui sera utile par la suite.

Lemme 1.2.9. *([22]) Soient X un espace vectoriel topologique de Hausdorff et K un convexe fermé non vide de X. Soit $f : K \times K \to I\!R$ une bifonction tel que $f(x,x) = 0$, pour tout $x \in K$. On suppose que*

(i) *Pour tout $y \in K$, la fonction $x \in K \mapsto f(x,y)$ est semicontinue supérieurement ;*

(ii) *Pour tout sous ensemble fini A de K, on a*

$$\min_{x \in co(A)} \max_{y \in A} f(x,y) \geq 0;$$

(iii) *(Condition de coercivité) Il existe un compact non vide B de K et un compact convexe non vide C de K tels que pour tout $x \in K \setminus B$, il existe $y \in C$ tels que $f(x,y) < 0$.*

Alors il existe $\overline{x} \in K$ tel que $f(\overline{x}, y) \geq 0$ pour tout $y \in K$.

Remarque 1.2.10. *Si la bifonction f est supposé convexe par rapport au second argument, alors la condition (ii) du Lemme 1.2.9 est vérifiée.*

Nous donnons aussi un autre résultat principal qui nous sera utile par la suite.

Lemme 1.2.11. *([22]) Soient X un espace vectoriel topologique de Hausdorff et K un sous ensemble fermé non vide de X. Soient $\Phi, \Psi : K \times K \to I\!R$ deux bifonctions telles que :*

(i) *Pour tout $x, y \in K$, si $\Psi(x,y) \leq 0$ alors $\Phi(x,y) \leq 0$;*

(ii) *Pour tout $x \in K$, la fonction $y \mapsto \Phi(x,y)$ est semicontinue inférieurement sur tout compact de K ;*

(iii) *Pour tout sous ensemble fini A de K, on a*

$$\sup_{y \in co(A)} \min_{x \in A} \Psi(x,y) \leq 0;$$

(iv) *(Condition de coercivité) Il existe un compact convexe non vide* C *de* X *et* $y_0 \in C \cap K$ *tels que l'une des assertions suivante est vérifiée*

$$\begin{array}{ll} (a) & \textit{Pour tout } \ y \in K \setminus C, \ \ \textit{il existe } \ x \in C \ \ \textit{tel que } \ \Phi(x,y) > 0; \\ (b) & \textit{Il existe } \ \ x_0 \in C \ \ \textit{tel que } \ \forall y \in K \setminus C \ \ \Psi(x,y) > 0. \end{array}$$

Alors il existe $\overline{y} \in C$ *tel que* $\Phi(x, \overline{y}) \leq 0$ *pour tout* $x \in K$*. En plus l'ensemble des solutions est un compact.*

Proposition 1.2.12. *On suppose que*

(i) $\Psi(x,x) \leq 0$ *pour tout* $x \in K$ *;*

(ii) *Pour tout* $y \in K$*, l'ensemble* $\{x \in K \ : \Psi(x,y) > 0\}$ *est convexe.*

Alors la condition (iii) du Lemme 1.2.11 est vérifiée.

Preuve. Par l'absurde, supposons qu'il existe $x_1, ..., x_n \in K$ et $\lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0$ avec $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, tels que $\Psi(x_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j) > 0$. Prenons $y = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j$,d'aprés l'hypothèse (ii), on a

$$0 < \Psi(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j, \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j) = \Psi(y,y).$$

Ce qui contredit l'hypothèse (i). $\square$

1.3 Problème d'équilibre mixte

Le problème d'équilibre qu'on va décrire par la suite est une approche particulière très intéressante où la bifonction d'équilibre est une somme de deux bifonctions. Une telle approche permet de séparer les hypothèses de base décrivant un problème d'équilibre mixte.

Par un problème d'équilibre mixte, on entend le problème suivant

$$(PEM) \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \overline{x} \in K \ \ \text{tel que} \\ f(\overline{x}, y) + g(\overline{x}, y) \geq 0, \quad \forall y \in K \end{array} \right.$$

où $f, g : K \times K \to I\!R$ sont deux bifonctions d'équilibres.

Définition 1.3.1. *([15]) Soient* K *et* C *deux ensembles convexes avec* $C \subset K$*. On note par* $core_K(C)$*, le core de* C *relativement à* K*, le sous ensemble défini par*

$$a \in core_K(C) \Leftrightarrow (a \in C \ \ et \ C \cap]a, y[\neq \emptyset, \forall y \in K \setminus C).$$

En particulier $core_K(K) = K$*.*

Théorème 1.3.2. *[15] Soient* X *un espace vectoriel topologique de Hausdorff et* K *un sous ensemble fermé non vide de* X*. Soient* $f, g : K \times K \to I\!R$ *deux bifonctions d'équilibre telles que :*

(i) *f est monotone et hémi-continue supérieurement ;*

Pour tout $x \in K$, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est convexe et semicontinue inférieurement ;

(ii) *Pour tout $y \in K$, la fonction $x \mapsto g(x,y)$ est semicontinue supérieurement ;*

Pour tout $x \in K$, la fonction $y \mapsto g(x,y)$ est convexe ;

(iii) *(Condition de coercivité) Il existe un compact convexe non vide C de X et $y_0 \in core_K(C)$ tels que*

$$f(x,y_0) + g(x,y_0) < 0 \qquad \textit{pour tout } x \in C \backslash core_K(C).$$

Alors il existe $\overline{x} \in C \cap K$ tel que

$$f(\overline{x},y) + g(\overline{x},y) \geq 0 \qquad \textit{pour tout } y \in K. \tag{1.3}$$

Par ailleurs, l'ensemble de solution $S_{f,g}$ du problème d'équilibre mixte (1.3), est un ensemble compact et convexe.

La démonstration de ce théorème se base sur les lemmes suivants.

Lemme 1.3.3. *[15] Il existe $\overline{x} \in C$ tel que*

$$f(y,\overline{x}) \leq g(\overline{x},y) \quad \forall y \in C.$$

Démonstration. Pour $y \in C$, considérons l'ensemble suivant

$$S(y) = \{x \in C / f(y,x) \leq g(x,y)\}.$$

Montrons que $\cap_{y\in C}\{S(y)\} \neq \emptyset$. Grâce à la compacité de C, il suffit de montrer que la famille $\{S(y)\}_{y\in C}$ vérifie la propriété de l'intersection finie. En effet, soit $\{y_i, i \in I\}$ une famille d' éléments de C, avec I un sous ensemble fini non vide de $I\!N$. Soit ξ un élément dans l'enveloppe convexe $co\{y_i, i \in I\}$, alors $\xi = \Sigma_{i\in I}\alpha_i y_i$ avec $\alpha_i \geq 0$ pour tout $i \in I$ et $\Sigma_{i\in I}\alpha_i = 1$. On suppose par l'absurde qu'il existe un élément ξ dans $conv\{y_i, i \in I\}$ tel que $\xi \notin \cap_{i\in I}\{S(y_i)\}$. Alors

$$f(y_i,\xi) > g(\xi,y_i), \quad \forall i \in I.$$

Si on multiplie par α_i et on fait la somme par rapport à i, on trouve l'inégalité suivante

$$\sum_{i\in I}\alpha_i f(y_i,\xi) > \sum_{i\in I}\alpha_i g(\xi,y_i). \tag{1.4}$$

Grâce aux hypothèses de la convexité et la monotonie de la bifonction f, on obtient

$$\sum_{i\in I}\alpha_i f(y_i,\xi) = \sum_{i\in I}\alpha_i f(y_i, \sum_{i\in I}\alpha_i y_i) \leq \sum_{i\in I}\alpha_i \sum_{j\in I}\alpha_j f(y_i,y_j) \tag{1.5}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j\in I}\alpha_i\alpha_j(f(y_i,y_j) + f(y_j,y_i)) \leq 0.$$

D'autre part, la convexité de la bifonction g donne l'inégalité suivante

$$0 = g(\xi, \xi) \leq \sum_{i \in I} \alpha_i g(\xi, y_i). \tag{1.6}$$

D'après les relations (1.5) et (1.6), on a

$$\sum_{i \in I} \alpha_i f(y_i, \xi) \leq 0 \leq \sum_{i \in I} \alpha_i g(\xi, y_i),$$

ce qui contredit la relation (1.4). Alors $f(y_i, \xi) \leq g(\xi, y_i) \quad \forall i \in I$. Par conséquent $S(y_i) \neq \emptyset$ pour tout $i \in I$, donc $\xi \in conv\{y_i, i \in I\} \subset \cup_{i \in I} S(y_i)$ pour tout $I \subset \mathbb{N}$. Puisque les sous ensembles $S(y)$ sont fermés et compacts, alors d'après le Théorème 1.2.3 on a $\cap_{y \in C} S(y) \neq \emptyset$. Donc il existe $\overline{x} \in C$ tel que $\overline{x} \in S(y)$ pour tout $y \in C$, ainsi $f(y, \overline{x}) \leq g(\overline{x}, y) \quad \forall y \in C$. $\square$

Lemme 1.3.4. *[15] Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\overline{x} \in C, \quad f(y, \overline{x}) \leq g(\overline{x}, y) \quad \forall y \in C;$

(ii) $\overline{x} \in C, \quad f(\overline{x}, y) + g(\overline{x}, y) \geq 0 \quad \forall y \in C.$

Preuve. Supposons que l'assertion (ii) est vérifiée, alors

$$0 \leq f(\overline{x}, y) + g(\overline{x}, y) \quad \forall y \in C.$$

Grâce à la monotonie de la bifonction f, on a

$$f(\overline{x}, y) + f(y, \overline{x}) \leq 0 \quad \forall y \in C,$$

donc

$$f(\overline{x}, y) \leq -f(y, \overline{x}) \quad \forall y \in C$$

$$g(\overline{x}, y) + f(\overline{x}, y) \leq -f(y, \overline{x}) + g(\overline{x}, y) \quad \forall y \in C,$$

d'après l'assertion (ii), on a $0 \leq g(\overline{x}, y) + f(\overline{x}, y) \leq g(\overline{x}, y) - f(y, \overline{x}) \quad \forall y \in C$. Alors

$$f(y, \overline{x}) \leq g(\overline{x}, y) \quad \forall y \in C.$$

Réciproquement, supposons que l'assertion (i) est vérifiée. Soit $y \in C$ arbitraire, considérons pour tout $t \in]0, 1]$, $x_t = (1-t)\overline{x} + ty \in C$. Alors, en prenant $y = x_t$ dans l'assertion (i), on obtient

$$f(x_t, \overline{x}) \leq g(\overline{x}, x_t).$$

Comme f est convexe par rapport au second argument et en tenant compte de l'assertion (i), on obtient

$$0 = f(x_t, x_t) \leq t f(x_t, y) + (1-t) f(x_t, \overline{x})$$

$$0 \leq t f(x_t, y) + (1-t) g(\overline{x}, x_t)$$

$$0 \leq tf(x_t, y) + (1-t)[tg(\overline{x}, y) + (1-t)g(\overline{x}, \overline{x})].$$

Puisque $g(\overline{x}, \overline{x}) = 0$ et en simplifiant par t, on obtient

$$0 \leq f(x_t, y) + (1-t)g(\overline{x}, y).$$

Quand on fait tendre t vers 0, x_t tend vers x et comme la fonction f est hémi-continue supérieurement en 0 (i.e. $\limsup_{t \to 0} f(x_t, y) \leq f(\overline{x}, y)$) alors $f(\overline{x}, y) + g(\overline{x}, y) \geq 0 \quad \forall y \in C$. Ce qui termine la preuve. □

Lemme 1.3.5. *[15] Soient $\varphi : K \to I\!R$ une fonction convexe et $x_0 \in core_K(C)$ tel que $\varphi(x_0) \leq 0$ et $\varphi(y) \geq 0$ pour tout $y \in C$. Alors $\varphi(y) \geq 0 \quad \forall y \in K$.*

Preuve. Par l'absurde, supposons qu'il existe $y \in K \backslash C$ tel que $\varphi(y) < 0$. Comme $x_0 \in core_K(C)$, alors $\varphi(\eta) < 0$ pour tout $\eta \in]x_0, y[$. Puisque $C \cap]x_0, y[\neq \emptyset$, alors il existe $\eta \in C$ tel que $\varphi(\eta) < 0$, ce qui est absurde par hypothèse. □

Démonstration du Théorème 1.3.2

D'après le Lemme 1.3.3, il existe $\overline{x}$ dans C tel que

$$f(y, \overline{x}) \leq g(\overline{x}, y) \quad \forall y \in K.$$

On en déduit, d'après le Lemme 1.3.4, que

$$0 \leq f(\overline{x}, y) + g(\overline{x}, y) \quad \forall y \in C.$$

Fixons $\overline{x} \in K$ et considérons la fonction ψ définie par $\psi(y) = f(\overline{x}, y) + g(\overline{x}, y)$. Il est facile de voir que $\psi(y) \geq 0$ pour tout $y \in C$. Si $\overline{x} \in core_K(C)$, alors, on peut considérer $x_0 = \overline{x}$ dans le Lemme 1.3.5. Si $\overline{x} \in C \backslash core_K(C)$, alors $x_0 = y_0$ (avec y_0 est donné par l'hypothèse (iii) du Théorème 1.3.2).

Dans les deux cas, on peut appliquer le Lemme 1.3.5, pour obtenir $\psi(y) \geq 0$, $\forall y \in C$. Alors $f(\overline{x}, y) + g(\overline{x}, y) \geq 0$, $\forall y \in K$. Ce qui termine la démonstration. □

Remarque 1.3.6. 1- *Dans le cas où K est un compact, on peut considérer $C := K$, d'où $C \setminus core(C) = \emptyset$. Alors la condition de coercivité du Théorème 1.3.2 n'est plus nécessaire.*

2- *Nous remarquons aussi, dans le cas d'un espace de Banach, que la condition (iii) du Théorème 1.3.2 peut être remplacée par la condition de coercivité suivante :*

Il existe un compact convexe non vide $B \subset K$ tel que pour tout $x \in K \backslash B$ il existe $a \in B$ tel que

$$f(x, a) + g(x, a) < 0. \tag{1.7}$$

En effet, soit $\{y_1, ..., y_n\}$ une famille finie des éléments de K. Considérons l'ensemble suivant

$$C := co\{B, \bigcup_{i=1}^{n}\{y_i\}\}.$$

C est un compact convexe. Il résulte du Théorème 1.3.2 qu'il existe $x \in C$ tel que

$$f(x,y) + g(x,y) \geq 0 \quad \forall y \in C. \tag{1.8}$$

Prenons $y = a$, alors d'après la relation (1.7), on a bien $x \in B$. Grâce à la monotonie de la bifonction f, on a

$$f(y,x) \leq g(x,y) \ \forall y \in C,$$

en particulier

$$f(y_i,x) \leq g(x,y_i) \ \forall i \in \{1, ..., n\}.$$

Par conséquent, la famille finie des sous ensembles fermés définie pour tout $y \in K$ par

$$S(y) = \{x \in B \ \mid \ f(y,x) \leq g(x,y) \ \}$$

possède la propriété de l'intersection finie. Puisque B est compact, alors $\bigcap_{y \in K} S(y) \neq \emptyset$. Par conséquent, il existe $\overline{x} \in B$ tel que

$$f(y,\overline{x}) \leq g(\overline{x},y) \ \forall y \in C.$$

On peut donc appliquer le Lemme 1.3.4 pour conclure que

$$f(\overline{x},y) + g(\overline{x},y) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Voici maintenant un résultat principal, conséquence des développements précédents.

Lemme 1.3.7. *Soient X un espace vectoriel topologique de Hausdorff et K un sous ensemble fermé non vide de X. Soient $f, g : K \times K \to I\!R$ deux bifonctions telles que :*

(i) *$f(x,x) \geq 0$ pour tout $x \in K$;*
f est monotone et hémi-continue supérieurement ;
Pour tout $x \in K$, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est convexe et semicontinue inférieurement ;

(ii) *$g(x,x) \geq 0$ pour tout $x \in K$;*
Pour tout $y \in K$, la fonction $x \mapsto g(x,y)$ est semicontinue supérieurement ;
Pour tout $x \in K$, la fonction $y \mapsto g(x,y)$ est convexe semicontinue inférieurement ;

(iii) *(Condition de coercivité) Il existe un compact convexe non vide C de X et $y_0 \in C \cap K$ tels que*

$$f(x,y_0) + g(x,y_0) < 0 \qquad \text{pour tout } x \in K \backslash C.$$

Alors il existe $\overline{x} \in C \cap K$ tel que

$$f(\overline{x}, y) + g(\overline{x}, y) \geq 0 \quad \text{pour tout } y \in K. \tag{1.9}$$

Par ailleurs, l'ensemble de solution $S_{f,g}$, du problème d'équilibre mixte (1.9), est un ensemble compact et convexe.

Preuve. La démonstration de ce résultat est une application directe du Théorème 1.2.11 en considérant pour tout $x, y \in K$,

$$\Phi(x, y) = f(x, y) - g(y, x) \quad \text{et} \quad \Psi(x, y) = -g(y, x) - f(y, x).$$

$\square$

Remarque 1.3.8. - *La condition utilisée dans le Lemme 1.3.7 est une relaxation de la condition d'équilibre utilisée par [15, Théorèm 1] et [22, Théorème 4-5], où l'on trouvera $f(x, x) = g(x, x) = 0$.*

- *La condition (iii) du Lemme 1.2.11 est liée à la convexité de la bifonction Ψ introduite dans la proposition 1.2.12.*

1.3.1 La condition de coercivité

Dans le cas d'un espace de Banach réflexif, on peut prouver des résultats d'existence, en vertu des hypothèses faibles concernant la condition de la coercivité du Théorème 1.3.2.

Soit X un espace de Banach réflexif muni de la topologie faible $\sigma(X, X^*)$, alors la condition de coercivité (iii) du Théorème 1.3.2 peut être remplacée par l'une des conditions suffisantes suivantes :

(1) Il existe $y_0 \in K$ tel que

$$\lim_{\|x-y_0\| \to +\infty} \frac{g(x, y_0)}{\|x - y_0\|} = -\infty. \tag{1.10}$$

En effet, soit $r_1 > 0$ et considérons la boule $B(y_0, r_1) = \{x \in X : \|x - y_0\| \leq r_1\}$. Alors $B(y_0, r)$ est un convexe et compact pour la topologie faible $\sigma(X, X^*)$ de X. Comme l'espace X est un Banach réflexif, $f(y_0, \cdot)$ est semicontinue inférieurement et que $B(y_0, r)$ est faiblement compact, alors il existe $\alpha_0 \in I\!R$ tel que $f(y_0, x) > \alpha_0$ pour tout $x \in B(y_0, r)$. Soit $x \in K \backslash B(y_0, r)$, considérons l'élément

$$y = \frac{r_1}{\|x - y_0\|} x + (1 - \frac{r_1}{\|x - y_0\|}) y_0.$$

Comme $f(y_0, \cdot)$ est convexe, $y \in B(y_0, r_1)$ et $f(y_0, y_0) = 0$, on obtient

$$f(y_0, x) \geq \frac{\alpha_0}{r_1} \|x - y_0\| \quad \text{pour tout } x \in K \backslash B(y_0, r_1). \tag{1.11}$$

Puisque f est monotone, il résulte de la relation (1.11) que pour tout $x \in K\backslash B(y_0, r_1)$

$$f(x, y_0) + g(x, y_0) \leq g(x, y_0) - \frac{\alpha_0}{r_1}\|x - y_0\|. \tag{1.12}$$

Comme $\dfrac{g(x, y_0)}{\|x - y_0\|} \to -\infty$ quand $\|x - y_0\| \to +\infty$, alors il existe $r_2 > 0$ tel que pour tout $x \in K$ avec $\|x - y_0\| > r_2$ on a

$$g(x, y_0) - \frac{\alpha_0}{r_1}\|x - y_0\| < 0. \tag{1.13}$$

On pose $r = \max\{r_1, r_2\}$, considérons l'ensemble $C = \{x \in X : \|x - y_0\| \leq r\}$. Grâce aux relations (1.12) et (1.13) on déduit que pour tout $x \in K\backslash C$ on a

$$f(x, y_0) + g(x, y_0) < 0.$$

Par conséquent la condition (iii) du Théorème 1.3.2 est vérifiée.

(2) Supposons qu'il existe $a \in K$ et $R > 0$ tels que :

$$\begin{cases} g(x, a) \leq M\|x - a\| \quad \text{pour tout} \quad x \in K \quad \text{tel que} \quad \|x - a\| \geq R \\ \dfrac{f(x, a)}{\|x - a\|} \to -\infty \quad \text{quand} \quad \|x - a\| \to +\infty \end{cases} \tag{1.14}$$

Alors la condition (1.14) implique l'hypothèse (iii) du Théorème 1.3.2. En effet, on a l'inégalité suivante

$$\lim_{\|x-a\|\to+\infty} \frac{g(x, a) + f(x, a)}{\|x - a\|} \leq M + \lim_{\|x-a\|\to+\infty} \frac{f(x, a)}{\|x - a\|}.$$

D'après la relation (1.14), on en déduit la limite suivante

$$\lim_{\|x-a\|\to+\infty} \frac{g(x, a) + f(x, a)}{\|x - a\|} \to -\infty.$$

Donc $g(x, a) + f(x, a) < 0$ pour tout $\|x - a\| > R$ où $R > 0$. Ainsi l'hypothèse (iii) du Théorème 1.3.2 est vérifiée en considérant l'ensemble $C = B(0, R)$.

(3) Supposons qu'il existe $a \in K$ tel que :

$$\begin{cases} g(x, a) \leq M\|x - a\| \quad \text{pour tout} \quad x \in K \quad \text{tel que} \quad \|x - a\| \geq R \\ \dfrac{f(x, a) + f(a, x)}{\|x - a\|} \to -\infty \quad \text{quand} \quad \|x - a\| \to +\infty \end{cases} \tag{1.15}$$

D'après la condition (1.15), il existe une constante $M < 0$ telle que

$$\frac{f(x, a) + f(a, x)}{\|x - a\|} \leq M.$$

Grâce à la monotonie de la bifonction f, on a

$$f(x, a) \leq -f(a, x) \leq -M\|x - a\|.$$

D'où la condition (1.14), Ainsi l'hypothèse (iii) de Théorème 1.3.2 est satisfaite.

Partie II

1.4 Optimisation vectorielle

Dans cette section, nous donnons quelques définitions et théorèmes relatifs à l'optimisation vectorielle. En particulier, nous introduirons les notions d'un cône, la C-semicontinuité et C-convexité. Pour plus de détail, on peut se référer aux ouvrages de Chen [45], Luc [66] et [52].

Définition 1.4.1. *On appelle un espace vectoriel ordonné tout espace vectoriel X muni d'une relation "$\preceq$" vérifiant les conditions suivantes :*

(i) *Réflexive : $\forall x \in X,\ x \preceq x$;*

(ii) *Anti-symétrique : $\forall x, y \in X,\ (x \preceq y)$ et $(y \preceq x) \Rightarrow x = y$;*

(iii) *Transitive : $\forall x, y, z \in X,\ (x \preceq y)$ et $(y \preceq z) \Rightarrow x \preceq z$.*

Remarque 1.4.2. *On appelle un préorde toute relation est réflexive et transitive.*

Définition 1.4.3. *([45]) Soient X un espace vectoriel topologique et C un sous-ensemble non vide de X.*

(i) *C est dit un cône si $x \in C,\ \lambda \geq 0$ on a $\lambda x \in C$;*

(ii) *Le cône C est dit convexe si $C + C \subset C$;*

(iii) *Un sous ensemble B d'un cône convexe $C \neq \{0_X\}$ est dit base de C si pour tout $x \in C \backslash \{0_X\}$ il existe $b \in B$ et $\lambda \geq 0$ tel que $x = \lambda b$;*

(iv) *Le cône C est dit saillant si $C \cap (-C) = \{0_X\}$, où $-C = \{q \in X \quad | \quad -q \in C\}$.*

La notion d'ordre dans un espace vectoriel a un lien étroit avec la notion d'un cône. En effet, soit X un espace vectoriel, un cône C convexe permet d'introduire une relation de préorde $\preceq_C$ dans X d'une façon naturelle ;

$$\text{On dit que } \ y \preceq_C x \ \text{ si } \ x - y \in C.$$

Lorsque le cône convexe C est saillant, alors $\preceq_C$ est un ordre.

Exemple. Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 2. Considérons $X = I\!R^n$. Munissons X de la relation $\preceq$ suivante :

$$\forall x = (x_1, ..., x_n), \quad y = (y_1, ..., y_n) \in I\!R^n, \qquad x \preceq y \quad \Leftrightarrow x_i \leq y_i, \ \forall i = 1, ..., n.$$

La réflexivité, la transitivité et l'antisymétrie de $\preceq$ résultent respectivement de la réflexivité, de la transitivité et de l'antisymétrie de la relation d'ordre $\leq$ appliquée aux composantes des éléments $x = (x_1, ..., x_n)$ de X. On vérifie aisément que cette relation d'ordre est convenable avec la structure de X. On a alors

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \text{ pour tout } \; i \in \{1, ..., n\}\} = \mathbb{R}^n_+$$

est un cône convexe saillant, souvent appelé un cône de Pareto. En particulier si $n = 1$, $\mathbb{R}_+$ est un cône convexe saillant dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.4.4. *[45] Soit X un espace vectoriel topologique ordonné par un cône convexe C tel que $0 \in \partial C$ et $intC \neq \emptyset$. Soit A une partie non vide de X.*

(i) *Un point x^* est dit minimum de A si*

$$(A - x^*) \cap (-C \backslash \{0\}) = \emptyset;$$

(ii) *Un point x^* est dit minimum faible de A si*

$$A \cap (x^* - intC) = \emptyset;$$

(iii) *Un point x^* est dit maximum de A si*

$$(A - x^*) \cap (C \backslash \{0\}) = \emptyset;$$

(iv) *Un point x^* est dit maximum faible de A si*

$$A \cap (x^* + intC) = \emptyset;$$

On note par $Min_C(A)$, $Max_C(A)$, $Min_{intC}(A)$ et $Max_{intC}(A)$ l'ensemble des points minimaux, maximaux, minimaux faibles et maximaux faibles de A respectivement.

Définition 1.4.5. *[45] Soient X un espace vectoriel topologique, U un convexe non vide de X et Z un espace vectoriel topologique ordonné par un cône convexe C. Considérons une fonction vectorielle f définie sur U à valeurs dans Z.*

(i) *On dit qu'un point $x^* \in U$ est un minimum de f sur U si*

$$(f(U) - f(x^*)) \cap (-C \setminus \{0\}) = \emptyset.$$

(ii) *On dit qu'un point $x^* \in U$ est un minimum faible de f sur U si*

$$(f(U) - f(x^*)) \cap (-intC) = \emptyset.$$

On note par $Min_C(f, U)$ et $Min_{intC}(f, U)$ l'ensemble des points minimaux et minimaux faibles de f sur U respectivement.

L'introduction des point minimaux et maximaux, nous conduit également à définir les notions de la C-continuité et la C-convexité et de présenter quelques unes de leurs propriétés qui seront utiles par la suite.

Définition 1.4.6. *([87]) Soient X un espace vectoriel topologique et Z un espace vectoriel topologique ordonné par un cône convexe C d'intérieur non vide. Une fonction vectorielle $f : X \to Z$ est dite C-semi-continue inférieurement (C-sci) si l'une des assertions suivantes est vérifiée :*

(i) *Pour tout $x \in X$ et $d \in int(C)$, il existe un voisinage ouvert U de x tel que*

$$f(u) \in f(x) - d + int(C), \qquad \forall u \in U.$$

(ii) *Pour tout $z \in Z$, $f^{-1}(z + int(C))$ est un ouvert de X.*

(iii) *Pour tout $x_0 \in X$ et V voisinage ouvert de $f(x_0)$, il existe un voisinage ouvert U de x_0 tel que*

$$f(u) \in V + C, \qquad \forall u \in U.$$

Proposition 1.4.7. *([87]) Soit X un espace vectoriel topologique. Les assertions (i)-(iii) de la Définition 1.4.6 sont équivalentes entre elles.*

Preuve. Montrons que les assertions (i)-(ii) sont équivalentes. En effet, pour tout $a \in Z$, on suppose que $f^{-1}(a + intC)$ est un ouvert. Pour tout $x_0 \in X$ et $d \in intC$, on considère $a = (f(x_0) - d)$, d'où $x_0 \in f^{-1}(intC + (f(x_0) - d))$, alors il existe un voisinage ouvert U de x_0 tel que $f(x) \in f(x_0) - d + intC$ pour tout $x \in U$. Réciproquement, soit $x_0 \in f^{-1}(a + intC)$ et $d = f(x_0) - a$. Puisque $d \in intC$, il existe un voisinage ouvert U de x_0 tel que $f(x) \in f(x_0) - d + intC$ pour tout $x \in U$, alors $f(x) \in a + intC$. Ce qui entraîne que $f^{-1}(a + intC)$ est un ouvert.
Montrons que les assertions (i)-(iii) sont équivalentes. En effet, soit $x_0 \in X$ et $d \in intC$. Alors il existe un voisinage ouvert W de d tel que $W \subset intC$. Ce qui entraîne que $f(x_0) \in f(x_0) - d + W \subset f(x_0) - d + intC$. Considérons par la suite l'ensemble $V = f(x_0) - d + W$, alors V est un voisinage ouvert de $f(x_0)$ et il existe un voisinage ouvert U de x_0 tel que $f(x) \in V + C = (f(x_0) - d + intC) + C$ pour tout $x \in U$. Puisque $intC + C = intC$ (Voir Théorème 2.2 dans [88]), alors on a $f(x) \in f(x_0) - d + intC$ pour tout $x \in U$. Réciproquement, soient $x_0 \in X$ et V un voisinage ouvert de $f(x_0)$. Il existe $d \in intC$ tel que $(f(x_0) - d) \in V$. Alors il existe un voisinage ouvert U de x_0 tel que $f(x) \in f(x_0) - d + intC$ pour tout $x \in U$. Puisque V un ouvert et que $V + intC = V + C$ (Voir Théorème 2.2 dans [89]), on obtient finalement $f(x) \in V + C$ pour tout $x \in U$. □

Remarque 1.4.8. **1-** *Si $Z = I\!R$ et $C = I\!R^+$, les différentes notions de la C-semi-continuité coincident avec celles de la semi-continuité classique.*

2- *Dans la littérature, l'assertion (iii) de la Définition 1.4.6 est considérée comme une définition de la C-continuité, dont les propriétés sont étudiées dans le livre [66].*

3- *Une fonction f est C-semi-continue supérieurement si et seulement si $-f$ est C-semi-continue inférieurement. Toute fonction C-continue, alors elle est C-semi-continue inférieurement et C-semi-continue supérieurement. Réciproquement, si f C-semi-continue inférieurement et C-semi-continue supérieurement, alors f est C-continue que si C est à base fermé convexe bornée. Pour plus de détails voir [66, Théorème 5.3, p.22].*

La proposition suivante, présente une caractérisation de la C-semi-continuité par une suite généralisée.

Proposition 1.4.9. *([27]) Soit X un espace vectoriel topologique de Hausdorff. Une fonction vectorielle $f : X \to Z$ est C-semi-continue supérieurement sur X si et seulement si pour tout $x \in X$, $v \in intC$ et toute suite généralisée $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ dans X convergente vers x, il existe α_0 dans I tel que*

$$\overline{\{f(x_\beta) : \quad \beta \geq \alpha\}} \subset \ f(x) + v - intC. \tag{1.16}$$

pour tout $\alpha \geq \alpha_0$.

Preuve. Pour tout $\alpha \in I$, posons $A_\alpha = \{f(x_\beta) \ \ : \beta \geq \alpha\}$. Supposons que f est C-semi-continue supérieurement en $x \in X$, alors il existe un voisinage ouvert U de x tel que $f(y) \in f(x) + \frac{1}{2}v - int(C)$ pour tout $y \in U$. D'où, il existe un indexe $\alpha_0 \in I$ tel que

$$\alpha \geq \alpha_0 \quad \Rightarrow \quad x_\alpha \in U \text{ et } f(x_\alpha) \in f(x) + \frac{1}{2}v - int(C).$$

Ce qui implique que $A_\alpha \subset f(x) + \frac{1}{2}v - int(C)$ et $\overline{A}_\alpha \subset f(x) + \frac{1}{2}v - C$ pour tout $\alpha \geq \alpha_0$. Puisque $\frac{1}{2}v - C = v - \frac{1}{2}v - C \subset v - int(C)$, alors

$$\overline{A}_\alpha \subset f(x) + \frac{1}{2}v - int(C) \quad \text{pour tout} \quad \alpha \geq \alpha_0.$$

Réciproquement, on suppose que f n'est pas C-semi-continue supérieurement. Alors il existe $z_0 \in Z$ tel que $f^{-1}(z_0 - int(C))$ n'est pas un ouvert de X. Soit $x_0 \in f^{-1}(z_0 - int(C))$, alors tout voisinage ouvert de x_0 n'est pas dans $f^{-1}(z_0 - int(C))$. Posons $f(x_0) = z_0 - v_0$ pour $v_0 \in int(C)$. Donc, pour une suite généralisée $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ convergente vers $x_0 \in X$, on a $f(x_\alpha)$ n'appartient pas à $z_0 - int(C) = f(x_0) + v_0 - int(C)$. Puisque le complémentaire de $f(x_0) + v_0 - int(C)$ est fermé, alors pour tout $\alpha \in I$ on a

$$\overline{A}_\alpha \cap (f(x_0) + v_0 - int(C)) = \emptyset,$$

ce qui contredit la condition (1.16). □

Définition 1.4.10. *([86, 66]) Soient X un espace vectoriel topologique, K un convexe non vide de X et Z un espace vectoriel topologique ordonné par un cône convexe C d'intérieur non vide. Une fonction vectorielle $f : K \to Z$ est dite*

(i) *C-convexe si*

$$tf(u_1) + (1-t)f(u_2) \subseteq f(tu_1 + (1-t)u_2) + C,$$

pour tout $u_1, u_2 \in K$ et $t \in [0,1]$;

(ii) *C-quasi-convexe si pour tout $z \in Z$, le sous ensemble*

$$A(z) = \{x \in X \ : \ f(x) \in z - C\}$$

est convexe ;

(iii) *Proprement C-quasi-convexe si*

$$f(tu_1 + (1-t)u_2) \in f(u_1) - C$$

ou bien

$$f(tu_1 + (1-t)u_2) \in f(u_2) - C$$

pour tout $u_1, u_2 \in K$ et $t \in [0,1]$.

Remarque 1.4.11. *Une fonction vectorielle $f : X \to Z$ est dite C-concave (proprement C-quasi-concave) si $(-f)$ est C-convexe (proprement C-quasi-convexe).*

Proposition 1.4.12. *([66] Soient X un espace vectoriel topologique et Z un espace vectoriel topologique ordonné par un cône convexe C d'intérieur non vide. Une fonction vectorielle $f : X \to Z$ est proprement C-quasi-convexe si et seulement si pour tout $z \in Z$ l'ensemble suivant*

$$A(z) = \{x \in X \ : \ f(x) \notin z + C\}$$

est convexe.

Une propriété importante de la définition précédente est donnée par le lemme suivant.

Lemme 1.4.13. *([23, Lemma 3.8]) Soient U et V deux sous ensembles convexes non vide de deux espaces vectoriels topologiques X et Y respectivement. Soit $f : U \times V \to Z$ une fonction vectorielle proprement C-quasi-convexe par rapport au premier argument. Soient $y \in V$ et E un sous ensemble fini dans U. Pour tout $z \in Z$, s'il existe $x \in co(E)$ tel que*

$$f(x,y) - z \in (-intC)^c, \tag{1.17}$$

où $(-intC)^c$ désigne le complémentaire de $(-intC)$ dans Z. Alors il existe $\overline{x} \in E$ tel que $f(\overline{x}, y) - z \in (-intC)^c$.

Preuve. Soient $z \in Z$ et $E = \{x_1, ..., x_n\}$ un sous ensemble fini de U. Considérons

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \quad \text{avec } \lambda_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Si $n = 2$ et puisque la fonction $f(\cdot, y)$ est proprement C-quasi-convexe, alors pour tout $y \in V$

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) - z \in f(x_1, y) - z - C$$

ou

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) - z \in f(x_2, y) - z - C.$$

Si on suppose que $f(x_1, y) - z \in -intC$ et $f(x_2, y) - z \in -intC$, alors

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) - z \in \{f(x_1, y), f(x_2, y)\} - z - C \subset -intC.$$

Ce qui contredit la condition (1.17). Donc $f(x_1, y) - z \in (-intC)^c$ ou $f(x_2, y) - z \in (-intC)^c$. Procédons par récurrence sur n. Supposons que le résultat soit établi pour n et soit $z \in Z$, on a donc

$$f(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i, y) - z \in (-intC)^c.$$

Soit $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 - \lambda_{n+1}$ et $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i$. Puisque $\overline{x} = \lambda x + \lambda_{n+1} x_{n+1}$, alors $f(x, y) - z \in (-intC)^c$ ou $f(x_{n+1}, y) - z \in (-intC)^c$.
Si on considère le cas $f(x, y) - z \in (-intC)^c$, on montre par récurrence sur n que $f(x_i, y) - z \in (-intC)^c$. Ce qui achève la preuve. □

1.5 Problème des points selles vectoriels

Soient X, Y et Z des espaces vectoriels topologiques de Hausdorff. Soit U un sous ensemble non vide de X. On suppose que les espaces Z et Y sont ordonnés par deux cônes convexes saillants C et K respectivement.

Considérons le problème d'optimisation sous contrainte suivant

$$(POV) \quad \begin{cases} \min_C F(x) \\ \text{tel que} \;\; x \in X, \;\; G(x) \cap (-K) \neq \emptyset. \end{cases} \tag{1.18}$$

avec $F : X \to Z$ et $G : X \to Y$ deux fonctions vectorielles.

Nous souhaitons classifier les points critiques du problème d'optimisation vectorielle (1.18). Soit $L(Y, Z)$ l'ensemble des applications linéaires continues de Y dans Z. On définit un sous ensemble L de $L(Y, Z)$ par

$$L = \{T \in L(Y, Z) : \;\; T(K) \subset C\}.$$

Nous introduisons la fonction Lagrangienne associée au problème vectoriel (1.18) définie par

$$\mathcal{L}(x, y) = F(x) + y(G(x)), \qquad (x, y) \in X \times L,$$

et les applications de dualité $D : L \to Z$ et $P : X \to Z$ par

$$D(y) = Min_C(\mathcal{L}(X,y)), \quad \text{pour tout} \quad y \in L;$$

$$P(x) = Max_C(\mathcal{L}(x,L)), \quad \text{pour tout} \quad x \in X.$$

Le problème d'optimisation vectorielle (1.18) peut être transféré au problème dual suivant

$$\begin{cases} \max_C D(y) \\ \text{tel que} \quad y \in L \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad \begin{cases} \min_C P(x) \\ \text{tel que} \quad x \in X \end{cases} \tag{1.19}$$

On peut donc ramener le problème d'optimisation vectoriel (1.18) à celui d'un problème de minimax pour les applications de dualité P et D. La plus ancienne des théories de dualité est celle basée sur les théorèmes de minimax de Ky-Fan [42] et Sion [83] qui donnent des critères d'existence de point selle (ou points de minimax) pour la fonction Lagrangienne $\mathcal{L}$ dans le cas scalaire. Le lien entre les points selles et les points optimaux pour (POV) et de façon générale l'approche par des fonctions lagrangiennes se trouvent détaillés dans Luc [65].

Définition 1.5.1. **(i)** *On dit qu'un couple $(x_0, y_0) \in X \times L$ est un point selle de la fonction $\mathcal{L}$ si*

$$\mathcal{L}(x_0, y_0) \cap Max_C(\mathcal{L}(x_0, L)) \cap Min_C(\mathcal{L}(X, y_0)) \neq \emptyset. \tag{1.20}$$

(ii) *On dit qu'un couple $(x_0, y_0) \in X \times L$ est un point selle faible de la fonction $\mathcal{L}$ si*

$$\mathcal{L}(x_0, y_0) \cap Max_{intC}(\mathcal{L}(x_0, L)) \cap Min_{intC}(\mathcal{L}(X, y_0)) \neq \emptyset. \tag{1.21}$$

Remarque 1.5.2. *Dans le cas particulier de $Y = Z = I\!R$, soit le problème d'optimisation scalaire suivant*

$$\begin{array}{c} \min\limits_x f(x) \\ \textit{tel que} \quad g(x) \leq 0. \end{array} \tag{1.22}$$

avec $f, g : X \to I\!R$ deux fonctions réelles. Définissons le lagrangien

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x) + yg(x).$$

L'optimum primal-dual (x_0, y_0) $(y_0 \geq 0)$ est un point selle du Lagrangien $\mathcal{L}$, ç-à-d

$$\mathcal{L}(x_0, y) \leq \mathcal{L}(x_0, y_0) \leq \mathcal{L}(x, y_0), \forall (x,y) \in I\!R \times I\!R^+.$$

Donc $x \mapsto \mathcal{L}(x, y_0)$ atteint un minimum en x_0 et $y \mapsto \mathcal{L}(x_0, y)$ atteint un maximum en y_0.

Plus généralement, l'utilisation de la fonction Lagrangienne nous a également permis de fournir une formulation plus générale du problème de point selle permettant d'améliorer les techniques de résolution de ce type des problèmes.

En effet, considérons deux sous ensembles non vides U et V des deux espaces vectoriels topologiques de Hausdorff X et Y respectivement et Z un espace vectoriel topologique ordonné par un cône convexe C d'intérieure non vide. Soit $\mathcal{L} : U \times V \to Z$ une fonction vectorielle. Si (u_0, v_0) est un point selle de la fonction $\mathcal{L}$, alors d'après la définition 1.5.1, on a

$$\mathcal{L}(u_0, v_0) \cap Max_C(\mathcal{L}(u_0, V)) \cap Min_C(\mathcal{L}(U, v_0)) \neq \emptyset.$$

ce qui conduit à

$$\mathcal{L}(u_0, v_0) \in Max_C(\mathcal{L}(u_0, V)) \text{ et } \mathcal{L}(u_0, v_0) \in Min_C(\mathcal{L}(U, v_0));$$

D'après la définition 1.4.4, on déduit que le couple (u_0, v_0) satisfait

$$\begin{cases} \mathcal{L}(u, v_0) - \mathcal{L}(u_0, v_0) \notin -C & \forall u \in U \; et \\ \mathcal{L}(u_0, v_0) - \mathcal{L}(u_0, v) \notin -C & \forall v \in V, \end{cases}$$

De même, on obtient aussi la reformulation du point selle faible suivante

$$\begin{cases} \mathcal{L}(u, v_0) - \mathcal{L}(u_0, v_0) \notin -intC & \forall u \in U \; et \\ \mathcal{L}(u_0, v_0) - \mathcal{L}(u_0, v) \notin -intC & \forall v \in V. \end{cases}$$

De nombreuses méthodes, pour prouver l'existence du point selle, font appel à la procédure de la scalarisation, voir [44, 57, 58, 59]. L'idée principale de ces méthodes est de remplacer un problème de point selle vectoriel par une famille de problèmes de point selle scalaire. Plus précisément, Kimura-Tanaka [59] ont utilisé une scalarisation au sens de Luc [66] et une extension de convexité généralisée. Un autre résultat de Kimura-Tanaka [59], où le problème du point selle vectoriel a été étudié par une approche basée sur un théorème du point maximal et en introduisant des notions de C-continuité au sens de Tanaka [86, 87].

1.6 Commentaires

Ce premier chapitre introductif a été constitué de deux parties. Dans un premier temps, nous avons rappelé quelques outils importants de l'analyse convexe ainsi que des résultats d'existence des solutions pour un problème d'équilibre puis d'un problème d'équilibre mixte en présentant des conditions suffisantes de la coercivité. La deuxième partie est consacrée à la présentation des quelques résultats d'optimisation vectorielle ainsi qu'une brève présentation du problème du point selle vectoriel. Le but est de faire le lien entre les différentes notions d'un problème d'optimisation vectorielle avec celles d'un problème du point selle vectoriel, qui sera étudié au chapitre 5.

Les résultats rappelés concernant l'existence de solutions pour un problème d'équilibre seront appliqués pour générer des algorithmes d'approche de solution en se basant sur la notion du principe auxiliaire qui sera détaillée dans la suite.

Chapitre 2

Principe auxiliaire

Sommaire

2.1 Introduction

Dans le but d'obtenir des solutions approximatives, nous allons à présent proposer une méthode, appelée principe auxiliaire, permettant de construire un algorithme d'approche des solutions pour un problème d'équilibre. Le principe auxiliaire a été introduit par [30, 31] pour étudier des problèmes d'optimisations, il consiste à développer une famille d'algorithmes de type décomposition-coordination pour l'approche de solution. Ce principe a été étendu par [32] pour étudier des problèmes d'inéquations variationnelles, voir aussi Glowinski [48].

Nous nous intéressons au problème d'équilibre suivant

$$(\mathrm{PE}) \quad \text{trouver } \overline{z} \in K \ \text{ tel que } \ f(\overline{z}, z) \geq 0 \quad \forall z \in K, \tag{2.1}$$

avec K un convexe fermé non vide d'un espace vectoriel topologique de Hausdorff X et $f : K \times K \to I\!R$ une bifonction d'équilibre.

Afin d'obtenir des solutions approximatives du problème (PE), nous introduisons le principe auxiliaire suivant

$$(AuxPE) \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } \ x \in K \text{ trouver } \ \overline{z} \in K \ \text{ tel que} \\ \rho f(\overline{z}, z) + \langle T(z) - T(\overline{z}), \overline{z} - x \rangle \geq 0 \ \ \forall z \in K, \end{array} \right. \tag{2.2}$$

avec $T : X \to X^*$ un opérateur et $\rho > 0$.

Ce principe auxiliaire généralise et relie un grand nombre de méthodes variationnelles permet entre autre de remplacer le problème initial par une suite des problèmes régularisés, de telle sorte que chaque problème particulier auxiliaire peut être résolu par l'un des algorithmes connus. Chaque problème auxiliaire est fortement monotone et de ce fait on a l'unicité des solutions des sous-problèmes. En outre, la suite des solutions converge vers une solution du problème initial.

2.2 Existence et unicité

Dans ce paragraphe, on donne des résultats d'existence et d'unicité de solution pour le problème auxiliaire (2.2).

Théorème 2.2.1. *Soient X un espace de Banach et K un convexe fermé non vide de X. Soient $f : K \times K \to I\!R$ une bifonction, $T : X \to X^*$ un opérateur linéaire borné et $\rho > 0$ tels que*

(i) *$f(x,x) = 0$ pour tout $x \in K$;*
f est monotone et hémi-continue supérieurement ;
Pour tout $x \in K$ fixé, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est convexe et semicontinue inférieurement ;

(ii) *T est δ-fortement positif ;*

(iii) *(Condition de coercivité) Pour tout $x \in X$, il existe un compact convexe non vide C_x de X et $y_0 \in C_x \cap K$ tels que*

$$\rho f(z, y_0) + \langle T(y_0) - T(z), z - x\rangle < 0 \qquad \text{pour tout } z \in K \backslash C_x.$$

Alors, pour tout $x \in X$, il existe un unique $\overline{z} \in C_x \cap K$ tel que

$$\rho f(\overline{z}, z) + \langle T(z) - T(\overline{z}), \overline{z} - x\rangle \geq 0 \quad \forall z \in K.$$

Preuve. La démonstration de ce résultat est une application directe du Théorème 1.3.2 en considérant pour tout $u, v \in K$, $F(u,v) = \rho f(u,v)$ et $g(u,v) = \langle T(v) - T(u), u - x\rangle$.
Nous avons besoin seulement de montrer l'unicité de la solution. En effet, supposons que le problème (AuxPE) admet deux solutions z_1 et z_2, alors

$$\rho f(z_1, z) + \langle T(z) - T(z_1), z_1 - x\rangle \geq 0 \quad \forall z \in K \tag{2.3}$$

$$\rho f(z_2, z) + \langle T(z) - T(z_2), z_2 - x\rangle \geq 0 \quad \forall z \in K. \tag{2.4}$$

Prenons $z = z_2$ dans la relation (2.3) et $z = z_1$ dans la relation (2.4), en faisant la somme, on obtient

$$\rho[f(z_1, z_2) + f(z_2, z_1)] \geq \langle T(z_2 - z_1), z_2 - z_1\rangle.$$

Comme f est monotone et T est δ-fortement positif, alors

$$0 \geq \langle T(z_2 - z_1), z_2 - z_1\rangle \geq \delta\|z_1 - z_2\|^2.$$

Par conséquent $z_1 = z_2$, ce qui termine la preuve. □

Théorème 2.2.2. *Soient X un espace de Banach réflexif et K un convexe fermé non vide de X. Soient $f : K \times K \to I\!R$ une bifonction à valeur réelle, $T : X \to X^*$ un opérateur linéaire borné et $\rho > 0$ tels que*

(i) $f(x, x) = 0$ *pour tout* $x \in K$ *;*
f est monotone hémi-continue supérieurement ;
Pour tout $x \in K$ fixé, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est convexe et semicontinue inférieurement ;

(ii) *T est δ-fortement positif.*

Alors, pour tout $x \in X$, il existe une solution unique $\overline{z} \in K$ tel que

$$\rho f(\overline{z}, z) + \langle T(z) - T(\overline{z}), \overline{z} - x\rangle \geq 0 \quad \forall z \in K.$$

Preuve. La démonstration de ce résultat est une application directe du Théorème 1.3.2 en considérant pour tout $u, v \in K$, $F(u, v) = \rho f(u, v)$ et $G(u, v) = \langle T(v) - T(u), u - x\rangle$.
Il est facile de montrer que les conditions (i)-(ii), du Théorème 2.2.2 impliquent les conditions (i)-(ii) du Théorème 1.3.2. Il suffit donc de montrer que la condition de coercivité (iii) du Théorème 1.3.2 est satisfaite. En effet, nous devons montrer que pour un certain $v_0 \in K$ on a $\dfrac{G(u, v_0)}{\|v_0 - u\|} \to -\infty$ quand $\|v_0 - u\| \to +\infty$. Soit $v_0 \in K$ tel que

$$\begin{aligned} G(u, v_0) &= \langle T(v_0) - T(u), u - x\rangle \\ &= \langle T(v_0 - u), u - v_0\rangle + \langle T(v_0 - u), v_0 - x\rangle \\ &= -\langle T(v_0 - u), v_0 - u\rangle + \langle T(v_0 - u), v_0 - x\rangle \\ &\leq -\delta\|v_0 - u\|^2 + \|T\|\|v_0 - u\|\|v_0 - x\|. \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{G(u, v_0)}{\|v_0 - u\|} \leq -\delta\|v_0 - u\| + \|T\|\|v_0 - x\|. \tag{2.5}$$

Par conséquent $\dfrac{G(u, v_0)}{\|v_0 - u\|} \to -\infty$ quand $\|v_0 - u\| \to +\infty$. □

2.3 Algorithme et convergence

Après avoir donné un résultat d'existence de solution du problème (AuxP), ce paragraphe sera consacré à l'étude de la convergence d'un algorithme d'approche pour la solution du problème d'équilibre à l'aide d'un problème auxiliaire.

Soit le problème d'équilibre suivant

$$\text{trouver } \overline{z} \in K \text{ tel que } f(\overline{z}, z) \geq 0 \quad \forall z \in K.$$

Pour tout $\rho > 0$ et $x \in K$ fixé, on considère le problème auxiliaire suivant :

$$\text{(AuxPE)} \qquad \text{Trouver } \overline{z} \in K \text{ tel que } \quad \rho f(\overline{z}, z) + \langle T(z) - T(\overline{z}), \overline{z} - x\rangle \geq 0 \quad \forall z \in K.$$

avec $T : X \to X^*$.

Algorithme 1 :

Étape 0. Etant donné une suite $\{\rho_n\}_{n\in I\!\!N} \subset]0,+\infty[$ et $x_0 \in X$ arbitraire.
Posons $n := 0$.

Étape 1. Etant donné $x_n \in X$, on calcule $x_{n+1} \in X$ tel que

$$\rho_{n+1}\ f(x_{n+1}, z) + \langle T(z) - T(x_{n+1}), x_{n+1} - x_n\rangle \geq 0 \quad \forall z \in K. \tag{2.6}$$

Reprendre $n := n + 1$ et effectuer l'étape 1.

Théorème 2.3.1. *Soient X un espace de Banach et K un convexe fermé non vide de X. Soient $f : K \times K \to I\!\!R$ une bifonction d'équilibre et $T : X \to X^*$ un opérateur linéaire. On suppose que*

(i) *f est $\sigma-$fortement monotone et hémi-continue supérieurement ;*
Pour tout $x \in K$ fixé, la fonction $f(x, \cdot)$ est semi-continue inférieurement et convexe ;

(ii) *La suite $\{\rho_n\}_{n\in I\!\!N}$ est croissante ;*

(iii) *L'opérateur T est $\delta-$fortement positif ;*

(iv) *(Coercivité) Pour tout $x \in X$, il existe un compact convexe non vide C_x de X et $y_0 \in C_x \cap K$ tel que*

$$\rho_n f(z, y_0) + \langle T(y_0) - T(z), z - x\rangle < 0 \qquad \text{pour tout } z \in K\backslash C_x.$$

En plus, on suppose que la condition suivante est satisfaite :

$$(C_1) \qquad \exists k \in]0,1[, \qquad \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}\frac{\|T\|}{\delta + \sigma\rho_{n+1}} < k;$$

Alors l'ensemble des solutions du problème d'équilibre auxiliaire (AuxPE) n'est pas vide et la suite itérative $\{x_n\}_{n\in I\!\!N}$ générée par l'algorithme 1 converge fortement vers une solution $\overline{z} \in S_f$.

Preuve. Par la définition de l'Algorithme 1, on a respectivement

$$\rho_{n+1}\ f(x_{n+1}, z) + \langle T(z) - T(x_{n+1}), x_{n+1} - x_n\rangle \geq 0 \quad \forall z \in K \tag{2.7}$$

et

$$\rho_n\ f(x_n, z) + \langle T(z) - T(x_n), x_n - x_{n-1}\rangle \geq 0 \quad \forall z \in K. \tag{2.8}$$

Prenons $z = x_n$ dans la relation (2.7) et $z = x_{n+1}$ dans la relation (2.8), et additionnons les deux inéquations, on obtient

$$\begin{aligned}[f(x_{n+1}, x_n) + f(x_n, x_{n+1})] - \frac{1}{\rho_{n+1}}\langle T(x_{n+1} - x_n), x_{n+1} - x_n\rangle \\ + \tfrac{1}{\rho_n}\langle T(x_{n+1} - x_n), x_n - x_{n-1}\rangle \geq 0\end{aligned} \tag{2.9}$$

Puisque la suite $\{\rho_n\}_{n\in I\!N}$ est croissante et à termes positifs, alors la relation (2.9) devient

$$\begin{aligned}[f(x_{n+1}, x_n) + f(x_n, x_{n+1})] - \frac{1}{\rho_{n+1}}\langle T(x_{n+1} - x_n), x_{n+1} - x_n\rangle \\ + \tfrac{1}{\rho_n}\langle T(x_{n+1} - x_n), x_n - x_{n-1}\rangle \geq 0.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Puisque f est σ-fortement monotone et l'opérateur T est supposé δ-fortement positif et $\|T\|$-Lispchitzien continue, on déduit de la relation (2.10) que

$$\sigma\|x_{n+1} - x_n\|^2 + \frac{\delta}{\rho_{n+1}}\|x_{n+1} - x_n\|^2 \leq \frac{\|T\|}{\rho_n}\|x_{n+1} - x_n\|\|x_n - x_{n-1}\|.$$

Par conséquent

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}\frac{\|T\|}{\sigma\rho_{n+1} + \delta}\|x_n - x_{n-1}\|. \tag{2.11}$$

En tenant compte de la condition (C_1), il s'ensuit que

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k\|x_n - x_{n-1}\|. \tag{2.12}$$

Alors la suite $\{x_n\}$ est de Cauchy. Par conséquent, elle converge fortement vers un point de $\overline{x} \in K$. D'autre part, nous montrons que $\overline{x}$ est une solution du problème d'équilibre (PE). En effet, par la définition de l'Algorithme 1 et puisque f est monotone, on déduit, pour tout $n \in I\!N$,

$$\frac{1}{\rho_{n+1}}\langle T(y) - T(x_{n+1}), x_{n+1} - x_n\rangle \geq f(y, x_{n+1}) \quad \forall y \in K.$$

Grâce à la linéarité de T, on obtient

$$\frac{1}{\rho_{n+1}}\|T\|\|y - x_{n+1}\|\|x_{n+1} - x_n\| \geq f(y, x_{n+1}) \quad \forall y \in K. \tag{2.13}$$

Puisque la fonction $f(y, \cdot)$ semi-continue inférieurement et T est borné, alors en passant à la limite inférieure dans la relation (2.13), on obtient

$$0 \geq f(y, \overline{x}) \qquad \text{pour tout } y \in K.$$

Soit, pour $t \in [0, 1]$ et $y \in K$, un élément $y_t = ty + (1 - t)\overline{x}$. Puisque K est convexe, alors $y_t \in K$ pour tout $t \in [0, 1]$. Par conséquent

$$f(y_t, \overline{x}) \leq 0. \tag{2.14}$$

D'autre part, puisque $f(y_t, y_t) = 0$ et que la fonction $f(y_t, \cdot)$ est convexe, on déduit que

$$0 = f(y_t, y_t) \leq t f(y_t, y) + (1-t) f(y_t, \overline{x}).$$

Alors, grâce à la relation (2.14), on obtient, pour tout $t \in]0, 1]$,

$$f(y_t, y) \geq 0.$$

Puisque f est hémi-continue supérieurement, alors par passage à la limite quand $t \to 0^+$ dans l'inégalité précédente, on obtient

$$f(\overline{x}, y) \geq 0 \quad \text{pour tout } y \in K.$$

Alors $\overline{x} \in S_f$. □

Corollaire 2.3.2. *Soient X un espace de Banach réflexif et K un convexe fermé non vide de X. Soient $f : K \times K \to I\!R$ une bifonction d'équilibre et T un opérateur linéaire de X à valeur dans X^* tels que*

(i) *f est $\sigma-$fortement monotone et hémi-continue supérieurement ;*
Pour tout $x \in K$ fixé, la fonction $f(x, \cdot)$ est semi-continue inférieurement et convexe ;

(ii) *La suite $\{\rho_n\}_{n \in I\!N}$ est croissante ;*

(iii) *L'opérateur T est δ-fortement positif.*

En plus, on suppose que la condition suivante est satisfaite :

$$(C_1) \qquad \exists k \in]0, 1[, \qquad \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} \frac{\|T\|}{\delta + \sigma \rho_{n+1}} < k;$$

Alors l'ensemble des solutions du problème d'équilibre auxiliaire (AuxP) n'est pas vide et la suite itérative générée par l'algorithme 1 converge fortement vers une solution $\overline{z} \in S_f$ du problème d'équilibre (PE).

2.4 Exemples numériques.

Grâce à des considérations faisant intervenir tout aussi bien l'aspect numérique, nous avons pu appliquer notre algorithme pour des exemples satisfaisant aux résultats du paragraphe précédent.

En effet, nous appelons la fonction de mérite (Gap function) et la méthode de la descente, inspiré des travaux antérieurs de Chadli-Konnov-Yao [24] et Konnov [60], nous avons eu l'idée d'implementer l'algorithme 1 à l'aide du logiciel Matlab 7.7.

Par la suite, on considère $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\rho_n = (0.5)^n$.

Exemple.1 On considère d'une la bifonction f définie sur $K := [0,1] \times [0,1]$ à valeur réelle telle que

$$f(x,y) = 2x_1(y_1 - x_1) + x_1(y_2 - x_2).$$

La bifonction f est 1-monotone et continue. Par conséquent le problème d'équilibre : Trouver $\overline{x} \in K$ tel que

$$f(\overline{x}, y) \geq 0 \quad \text{pour tout } y \in K$$

admet une solution et l'ensemble des solution est $S_f = \{x \in K \ : \ \ x_1 = x_2 = 0\}$.

Exemple.2 Soit $K := \{x \in [0,1] \times [0,1] : \ \ x_2 \leq x_1\}$. On considère le problème d'équilibre associé à la bifonction g définie par

$$g(x,y) = (y_1 - x_1)(3x_1 - x_2) + 2x_2(y_2 - x_2),$$

La bifonction g est 2-monotone et continue. Par conséquent le problème d'équilibre : Trouver $\overline{x} \in K$ tel que

$$g(\overline{x}, y) \geq 0 \quad \text{pour tout } y \in K$$

admet une solution et l'ensemble des solution est $S_g = \{x \in K \ : \ \ x_1 = x_2 = 0\}$.

Exemple.3 Soit $K := [0,1] \times [0,1]$. On considère le problème d'équilibre associé à la bifonction h définie par

$$h(x,y) = e^{x_2^2}(y_2^2 - x_2^2).$$

La bifonction h est monotone et continue. Par conséquent le problème d'équilibre : Trouver $\overline{x} \in K$ tel que

$$h(\overline{x}, y) \geq 0 \quad \text{pour tout } y \in K$$

admet une solution et l'ensemble des solution est $S_h = \{x \in K \ : \ \ x_2 = 0\}$.

Problème	Point initial	Solution	Nombre d'itérations
Exemple 1	(0.644,0.379)	(4.189e-04 , 3.631e-04)	10
	(0.135,0.46)	(9.181e-01 ,1.408e-06)	15
	(0.431,0.91)	(6.640e-01 , 3.075e-07)	17
	(0.226,0.171)	(4.968e-01 , 8.011e-08)	18
Exemple 2	(0.44,0.71)	(3.666e-04 , 4.769e-01)	13
	(0.13,0.246)	(4.405e-04 , 5.818e-01)	15
	(0.03,0.251)	(5.188e-04 5.002e-01)	17
	(0.643,0.061)	(3.653e-04 , 3.211e-04)	20
Exemple 3	(0.43,0.61)	(9.953e-01 , 7.683e-08)	10
	(0.13,0.246)	(1.430e-02 , 1.279e-08)	12
	(0.803,0.151)	(9.857e-01 , 1.063e-08)	16
	(0.435,0.461)	(9.715e-01 , 3.787e-08)	13

Table 2.1 – Résultats numériques de l'Algorithme 1, testé sur les exemples 1-2-3

2.5 Commentaires

Le principe du problème auxiliaire tel qu'il a été défini pour les problèmes d'optimisations et les inéquations variationnelles [30, 32] et son extension dans ce travail au cadre des problèmes d'équilibre présente plusieurs intérêts d'ordre théoriques et numériques entre autre.

Intérêt théorique : Il permet de retrouver les principaux algorithmes d'optimisation dans un cadre unifié où l'étude de convergence a été effectuée une fois pour toute.

En effet, par exemple lorsqu'on se restreint à l'étude d'un problème d'optimisation dans un cadre hilbertien et selon un choix approprié de l'opérateur T on peut retrouver comme cas particuliers les algorithmes du gradient projeté ainsi que l'algorithme de Newton-Raphson.

Intérêt numérique : Il réside dans le conditionnement numérique des problèmes d'optimisation et des inéquations variationnelles.

En effet, le principe du problème auxiliaire permet de remplacer un problème dont la résolution s'avère numériquement difficile par une suite de problèmes bien conditionnés de ce point de vue. A titre d'exemple, lorsqu'on se restreint au problème d'optimisation

$$\min_{u \in U} J(u)$$

et l'on suppose qu'il se prête à priori à une résolution par la méthode de Newton, à ceci près que le hessien $\nabla^2 J$ de J n'est pas défini positif à l'optimum u^*. Alors, le conditionnement

de la matrice hessienne $\nabla^2 J(u)$ se détériore au voisinage de u^* et l'itération de l'algorithme de Newton "explose" lorsque x_k tend vers u^*.
Choisissons un scalaire $\delta > 0$, on applique le principe du problème auxiliaire avec l'opérateur T est défini par :

$$\langle Tu, u\rangle = \frac{\delta}{2}\langle u, u\rangle + \frac{1}{2}\langle u, \nabla^2 J(x_k) - u\rangle.$$

Le problème auxiliaire au point x_k est quadratique, sa matrice hessienne est égale à $(\delta I + \nabla^2 J(x_k))$ et elle est partout définie positive dès que $\nabla^2 J(x_k)$ est elle même semi-définie positive. Le problème auxiliaire se résolu alors de manière explicite et sa solution est :

$$x_{k+1} = x_k - [\delta I + \nabla^2 J(x_k)]^{-1}.\nabla J(u_k),$$

que l'on peut interpreter comme itération d'une méthode de Newton "avec conditionnement". On notera que le choix du coefficient δ résulte d'un compromis entre, d'une part le respect des conditions de convergence de l'algorithme (Coércivité : δ doit être "grand") et d'autre part le ralentissement induit par le terme quadratique dans l'expression de T (freinage : δ doit être "petit").

Chapitre 3

Problème d'équilibre à deux niveaux

Sommaire

Dans ce chapitre, nous étudions une nouvelle classe de problèmes d'équilibre mixtes à deux niveaux dans un espace de Banach. L'introduction de la technique du principe auxiliaire, permet de construire un algorithme d'approche pour un tel problème.

3.1 Introduction

Soient X un espace vectoriel topologique, K un convexe fermé non vide de X. Soient $\Psi, \Phi : K \times K \to I\!R$ deux bifonctions d'équilibre et une bifonction $\psi : K \times K \to I\!R$. On entend par un problème d'équilibre mixte à deux niveaux, en abrégé (PEMB), le problème suivant :

$$\text{Trouver } \overline{x} \in S_{\Psi,\psi} \text{ tel que } \Phi(\overline{x}, y) \geq 0 \quad \forall y \in S_{\Psi,\psi},$$

avec $S_{\Psi,\psi}$ désigne l'ensemble des solutions du problème d'équilibre mixte suivant :

$$\text{Trouver } \overline{z} \in K \text{ tel que } \Psi(\overline{z}, z) + \psi(z, \overline{z}) - \psi(\overline{z}, \overline{z}) \geq 0 \quad \forall z \in K.$$

L'introduction de cette classe des problèmes permet de fournir une étude pour un grand nombre de problèmes existants dans les différentes branches de l'analyse mathématique, comme la programmation mathématique à deux niveaux, problèmes d'inéquation variationnelle sous contraintes, la théorie du contrôle et la théorie des jeux. Le traitement de la première étude a débuté avec les travaux de Chadli-Chbani-Riahi [22], en utilisant le principe de selection de viscosité, qui a pour but de caractériser la solution selon un critère de type norme minimale d'inéquation variationnelle ou autre. En introduisant des fonctions de pénalité, nous étudions la position d'une solution choisie en s'appuyant sur le principe de la selection de viscosité. Le but de cette méthode est de fournir une solution du problème primal en tant qu'un point limite de la suite des solutions des problèmes approximatifs. Nous la décrivons brièvement :

Soit $f : K \times K \to I\!R$ une bifonction d'équilibre, c-à-d $f(x,x) = 0$ pour tout $x \in K$. Considérons à nouveau le problème d'équilibre suivant :

$$(PE) \quad \text{Trouver} \quad \overline{x} \in K \quad \text{tel que} \quad f(\overline{x}, y) \geq 0 \quad \forall y \in K. \tag{3.1}$$

On note par S_f l'ensemble des solutions du problème (PE).

Nous présentons une solution du problème d'équilibre, appelée solution de viscosité, obtenue en tant que limite d'une suite des solutions des problèmes approximatifs. Ce cadre très général a été étudié par Giusti [47] et par Attouch [5] pour l'étude des problèmes de minimisation.

Soit $h : K \times K \to I\!R$ une bifonction telle que $h(x,x) = 0$, pour tout $x \in K$. Considérons maintenant le problème d'équilibre mixte suivant :

$$(PE)_\varepsilon \quad \text{Trouver} \quad \overline{x}_\varepsilon \in K \quad \text{tel que} \quad f(\overline{x}_\varepsilon, y) + \varepsilon h(\overline{x}_\varepsilon, y) \geq 0 \quad \forall y \in K. \tag{3.2}$$

Remarque 3.1.1. *Si l'ensemble de solutions S_f est réduit à un point, ce schéma de perturbation peut être considéré comme une méthode de pénalité pour les problèmes d'optimisation avec un paramètre ε et la fonction de pénalité h.*

Le résultat suivant assure l'existence de solution pour le problème (PEMB) comme limite de solutions des problèmes $(PE)_\varepsilon$.

Théorème 3.1.2. *([22]) Soient X un espace vectoriel topologique, K un convexe fermé non vide de X. Soient $f, h : K \times K \to I\!R$ deux bifonctions réelles telles que $f(x,x) = h(x,x) = 0$ pour tout $x \in K$. Supposons que :*

(i) *f est monotone et hémi-continue supérieurement ;*

(ii) *Pour tout $x \in K$, $f(x, \cdot)$ est convexe semi-continue inférieurement ;*

(iii) *Pour tout $y \in K$, $h(\cdot, y)$ semi-continue supérieurement ;*

(iv) *Le problème perturbé $(PE)_\varepsilon$ admet une solution $\overline{x}_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.*

Si $\overline{x}$ est une valeur adhérence de la suite $\{\overline{x}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, alors $\overline{x}$ est solution du problème d'équilibre (PE). En plus, on a

$$h(\overline{x}, y) \geq 0, \quad \forall y \in S_f. \tag{3.3}$$

Démonstration.

(i) Soit $\overline{x}_\varepsilon$ une solution du problème $(PE)_\varepsilon$, alors pour tout $y \in K$, on a

$$f(\overline{x}_\varepsilon, y) + \varepsilon h(\overline{x}_\varepsilon, y) \geq 0.$$

Puisque f est monotone, on obtient

$$\varepsilon h(\overline{x}_\varepsilon, y) \geq f(y, \overline{x}_\varepsilon)$$

Soit $\overline{x}$ un point limite de la suite $\{\overline{x}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$. Par la semi-continuité inférieure de la fonction $f(y,\cdot)$ et la semi-continuité supérieure de $h(\cdot,y)$, on obtient

$$f(y,\overline{x}) \leq 0, \quad y \in K.$$

Considérons, pour $t \in (0,1]$, $y \in K$, $x_t = ty + (1-t)\overline{x} \in K$. Alors

$$0 = f(x_t,x_t) \leq tf(x_t,y) + (1-t)f(x_t,\overline{x}).$$

Ce qui implique, $f(x_t,y) \geq 0$. Puisque f est hémi-continue supérieurement, on a

$$f(\overline{x},y) \geq 0, \;\; \forall y \in K.$$

(ii) Soit $z \in S_f$, et $\overline{x}_\varepsilon \in K$ une solution de $(PE)_\varepsilon$. Alors grâce à la monotonie de f, on obtient

$$\varepsilon h(\overline{x}_\varepsilon,z) \geq f(z,\overline{x}_\varepsilon) \geq 0.$$

Par conséquent, $h(\overline{x}_\varepsilon,z) \geq 0$, par la semi-continuité supérieure de h, on déduit que

$$h(\overline{x},z) \geq 0, \quad \text{pour tout} \;\; z \in S_f.$$

Ce qui termine la preuve . $\square$

Exemple : Soit X un espace vectoriel muni de la norme $\|\cdot\|$. On considère le problème de minimisation suivant

$$(P_1) \qquad \min\{f(x): \quad x \in X\},$$

qui est supposé bien posé. Pour tout $\varepsilon > 0$, on introduit le problème approximatif suivant

$$(P_1)_\varepsilon \qquad \min\{f(x) + \varepsilon\|x\|^2: \quad x \in X\},$$

Soit u_ε la solution unique du problème $(P_1)_\varepsilon$. Si l'espace X est un Hilbert et que la fonctionnelle f est une fonction propre semi-continue inférieurement et convexe, alors la caractéristique commune de cette approximation est que le résultat suivant :

$$u_\varepsilon \to \overline{u}, \quad tel \;\; que \quad \begin{cases} \overline{u} \in argmin \;\; f, \\ \|\overline{u}\|^2 \leq \|v\|^2 \qquad \forall v \in argmin \;\; f; \end{cases}$$

La suite $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, minimisante du problème $(P_1)_\varepsilon$, converge vers une solution $\overline{u}$, de norme minimale de la fonctionnelle f.

3.2 Algorithme et convergence

Dans cette section, on utilise le principe auxiliaire pour le problème d'équilibre mixte à deux niveaux (PEMB), dans le but de générer un algorithme général pour approcher la solution de (PEMB). Plus précisément, on obtient une suite de solutions approchées qui converge fortement vers une solution du problème d'équilibre de chaque niveau.

Considérons le problème d'équilibre à deux niveaux suivant (PEMB) : Soient $\Psi, \Phi : K \times K \to I\!R$ deux bifonctions d'équilibre et une bifonction $\psi : K \times K \to I\!R$ telles que

$$\text{trouver } \overline{x} \in S_{\Psi,\psi} \text{ tel que } \Phi(\overline{x}, y) \geq 0 \quad \forall y \in S_{\Psi,\psi},$$

avec la contrainte $S_{\Psi,\psi}$ est l'ensemble des solutions du problème d'équilibre mixte suivant :

$$\text{trouver } \overline{z} \in K \text{ tel que } \Psi(\overline{z}, z) + \psi(z, \overline{z}) - \psi(\overline{z}, \overline{z}) \geq 0 \quad \forall z \in K.$$

On considère un opérateur linéaire $T : X \to X^*$ et une famille de bifonctions $\{\Theta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ définie sur $K \times K$ comme suit

$$\Theta_\varepsilon(u, v) = [\Psi(u, v) + \psi(v, u) - \psi(u, u)] + \varepsilon[\Phi(u, v)].$$

pour $\rho_\varepsilon > 0$ et $x \in K$ fixé, puis considérons le problème auxiliaire suivant :

$$(\text{AuxP})_\varepsilon \qquad \text{trouver } \overline{z} \in K \text{ tel que } \qquad \rho_\varepsilon \; \Theta_\varepsilon(\overline{z}, z) + \langle T(z) - T(\overline{z}), \overline{z} - x \rangle \geq 0 \quad \forall z \in K.$$

On commence par établir un résultat d'existence pour le problème $(\text{AuxP})_\varepsilon$.

Lemme 3.2.1. *Soient X un espace de Banach et K un fermé convexe de X. Soient $\Psi, \Phi : K \times K \to I\!R$ deux bifonctions d'équilibres, $\psi : K \times K \to I\!R$ une fonction à valeur réelles et $T : X \to X^*$ un opérateur tels que*

(i) *Ψ et Φ sont monotones et hémi-continues supérieurement ;*
pour tout $x \in K$ fixé, les fonctions $\Psi(x, \cdot)$ et $\Phi(x, \cdot)$ sont convexes et semicontinues inférieurement ;

(ii) *ψ est skew symétrique et continue ;*
Pour tout $y \in K$ fixé, la fonction $\psi(\cdot, y)$ est convexe ;

(iii) *T est δ-fortement positif ;*

(iv) *(Coercivité) Pour tout $x \in X$, il existe un compact convexe non vide C_x de X et $y_0 \in C_x \cap K$ tels que*

$$\rho_\varepsilon \Theta_\varepsilon(z, y_0) + \langle T(y_0) - T(z), z - x \rangle < 0 \qquad \textit{pour tout } z \in K \backslash C_x.$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $\rho_\varepsilon > 0$ et $x \in X$, il existe $\overline{z}_\varepsilon$ solution unique du problème auxiliaire $(AuxP)_\varepsilon$ avec $\overline{z}_\varepsilon \in C_x \cap K$.

Démonstration. La démonstration est similaire à celle du Théorème 1.3.2, en considérant les bifonctions suivantes $f(u,v) = \rho_\varepsilon \Theta_\varepsilon(u,v)$ et $g(u,v) = \langle T(v) - T(u), u - x\rangle$. $\square$

Lemme 3.2.2. *Soient X un espace de Banach réflexif et K un fermé convexe de X. Soient $\Psi, \Phi : K \times K \to I\!R$ deux bifonctions d'équilibres, $\psi : K \times K \to I\!R$ une fonction à valeur réelle et $T : X \to X^*$ un opérateur tels que*

(i) *Ψ et Φ sont monotones et hémi-continues supérieurement ;*
Pour tout $x \in K$ fixé, les fonctions $\Psi(x,\cdot)$ et $\Phi(x,\cdot)$ sont convexes et semicontinues inférieurement ;

(ii) *ψ est skew symétrique et continue ;*
Pour tout $y \in K$ fixé, la fonction $\psi(\cdot, y)$ est convexe ;

(iii) *T est δ-fortement positif.*

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $\rho_\varepsilon > 0$ et $x \in X$, il existe $\overline{z}_\varepsilon \in K$ solution unique du problème auxiliaire $(AP)_\varepsilon$.

On introduit l'algorithme suivant pour le problème d'équilibre mixte à deux niveaux (PEMB).

Algorithme 2 :

Etape 0. On suppose les données : $\{\varepsilon_n\}_{n\in I\!N}$, $\{\rho_n\}_{n\in I\!N} \subset]0, +\infty[$.
Soit un élément $x_0 \in X$ arbitraire et $n := 0$.

Etape 1. Donner $x_n \in X$ et calculer $x_{n+1} \in X$ tel que

$$\rho_{n+1}\, \Theta_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1}, z) + \langle T(z) - T(x_{n+1}), x_{n+1} - x_n\rangle \geq 0 \quad \forall z \in K. \tag{3.4}$$

Reprendre $n := n + 1$ et effectuer l'étape 1.

Théorème 3.2.3. *Soit X un espace de Banach et K un convexe fermé non vide de X. Soient $\Psi, \Phi : K \times K \to I\!R$ deux bifonctions d'équilibre, $\psi : K \times K \to I\!R$ une fonction à valeur réelle et T un opérateur de X à valeur dans X^* tels que*

(i) *Ψ est monotone et hémicontinue supérieurement ;*
Φ est $\sigma-$fortement monotone et hémi-continue supérieurement ;
Pour tout $x \in K$ fixé, les fonctions $\Psi(x,\cdot)$ et $\Phi(x,\cdot)$ sont convexes et semi-continue inférieurements ;
Il existe $\alpha \in I\!R^+$ tel que $\Phi(x,y) \geq -\alpha\|x-y\|^2$, pour tout $x, y \in K$;

(ii) *ψ est skew-symétrique et continue ;*
Pour tout $y \in K$ fixé, la fonction $\psi(\cdot, y)$ est convexe ;

(iii) *La suite* $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante vers* 0 *et* $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite croissante ;*

(iv) T *un opérateur* δ*-fortement positif ;*

(v) *(Coercivité) Pour tout* $x \in X$*, il existe un compact convexe non vide* C_x *de* X *et* $y_0 \in C_x \cap K$ *tels que*

$$\rho_\varepsilon \Theta_\varepsilon(z, y_0) + \langle T(y_0) - T(z), z - x\rangle < 0 \qquad \text{pour tout } z \in K \backslash C_x.$$

En plus, on suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :

$$(C_1) \quad \exists k \in]0,1[, \qquad \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} \frac{\|T\|}{\delta + \rho_{n+1}(\sigma\varepsilon_n - \alpha(\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}))} < k;$$
$$(C_2) \quad \text{La suite } \{\alpha_n\} \text{définie par } \alpha_n = \rho_n \varepsilon_n \quad \text{est bornée.}$$

Alors l'ensemble des solutions du problème d'équilibre mixte (PEMB) n'est pas vide et la suite itérative donnée par l'algorithme 2 converge fortement vers une solution $\overline{z} \in S_{\Psi,\psi}$.

Démonstration. Par définition de l'algorithme 2, on a

$$\rho_{n+1}\ \Theta_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1}, z) + \langle T(z) - T(x_{n+1}), x_{n+1} - x_n\rangle \geq 0 \quad \forall z \in K \tag{3.5}$$

et pour l'itération n, on a

$$\rho_n\ \Theta_{\varepsilon_n}(x_n, z) + \langle T(z) - T(x_n), x_n - x_{n-1}\rangle \geq 0 \quad \forall z \in K. \tag{3.6}$$

Prenons $z = x_n$ dans la relation (3.5) et $z = x_{n+1}$ dans la relation (3.6), on additionne les deux inéquations précédentes, on obtient

$$\begin{aligned}[\Theta_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1}, x_n) + \Theta_{\varepsilon_n}(x_n, x_{n+1})] - \tfrac{1}{\rho_{n+1}}\langle T(x_{n+1} - x_n), x_{n+1} - x_n\rangle \\ + \tfrac{1}{\rho_n}\langle T(x_{n+1} - x_n), x_n - x_{n-1}\rangle \geq 0.\end{aligned} \tag{3.7}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\Theta_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1}, x_n) + \Theta_{\varepsilon_n}(x_n, x_{n+1}) = [\Psi(x_{n+1}, x_n) + \Psi(x_n, x_{n+1})] \\ +[\psi(x_n, x_{n+1}) + \psi(x_{n+1}, x_n) - \psi(x_{n+1}, x_{n+1}) - \psi(x_n, x_n)] \\ +[\varepsilon_{n+1}\Phi(x_{n+1}, x_n) + \varepsilon_n\Phi(x_n, x_{n+1})].\end{aligned} \tag{3.8}$$

Puisque Φ est σ-fortement monotone, Ψ est monotone et ψ est skew-symétrique, on déduit de la relation (3.8) que

$$\Theta_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1}, x_n) + \Theta_{\varepsilon_n}(x_n, x_{n+1}) \leq -\sigma\varepsilon_n\|x_{n+1} - x_n\|^2 + (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n)\Phi(x_{n+1}, x_n) \tag{3.9}$$

Comme T est δ-fortement positif et $\|T\|$-Lispchitzien, la relation (4.15) devient

$$(\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1})\Phi(x_{n+1}, x_n) + \sigma\varepsilon_n\|x_{n+1} - x_n\|^2 + \frac{\delta}{\rho_{n+1}}\|x_{n+1} - x_n\|^2 \leq \frac{\|T\|}{\rho_n}\|x_{n+1} - x_n\|\|x_n - x_{n-1}\|.$$

En tenant compte de l'hypothèse (i) sur la bifonction Φ, on obtient

$$[\varepsilon_n\sigma - \alpha(\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}) + \frac{\delta}{\rho_{n+1}}]\|x_{n+1} - x_n\|^2 \leq \frac{\|T\|}{\rho_n}\|x_{n+1} - x_n\|\|x_n - x_{n-1}\|.$$

Par conséquent, pour ε_n suffisamment petit, on trouve la relation suivante :

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{\|T\|}{\rho_n[\sigma\varepsilon_n + \frac{\delta}{\rho_{n+1}} - \alpha(\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1})]}\|x_n - x_{n-1}\|. \tag{3.10}$$

Alors, d'après l'hypothèse (C_1), il existe $k \in]0, 1[$ tel que

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k\|x_n - x_{n-1}\|.$$

Par conséquent, la suite $\{x_n\}$ est de Cauchy, alors elle converge fortement vers une limite $\overline{x} \in K$.

Maintenant, on montre que la limite $\overline{x}$ est une solution des problèmes d'équilibre de deux niveaux. En effet, puisque la bifonction Ψ est monotone, on déduit de la relation définie dans l'algorithme 2, pour tout $n \in I\!N$ et tout $y \in K$:

$$\begin{aligned}&\psi(y, x_{n+1}) - \psi(x_{n+1}, x_{n+1}) + \varepsilon_{n+1}\Phi(x_{n+1}, y)\\ &+\frac{1}{\rho_{n+1}}\langle T(y) - T(x_{n+1}), x_{n+1} - x_n\rangle \geq \Psi(y, x_{n+1}).\end{aligned}$$

Grâce à la monotonie de Φ et la linéarité de l'application T, on obtient aussi

$$\begin{aligned}\psi(y, x_{n+1}) - \psi(x_{n+1}, x_{n+1}) + +\frac{\|T\|}{\rho_{n+1}}\|y - x_{n+1}\|\|x_{n+1} - x_n\|\\ \geq \Psi(y, x_{n+1}) + \varepsilon_{n+1}\Phi(y, x_{n+1}) \quad \forall y \in K.\end{aligned} \tag{3.11}$$

En passant à la limite quand $n \to \infty$ dans la relation précédente et en tenant compte du fait que la fonction $\Phi(y, \cdot)$ est semi-continue inférieurement, que la fonction ψ est continue et de la condition (C_2), on obtient :

$$\psi(y, \overline{x}) - \psi(\overline{x}, \overline{x}) \geq \Psi(y, \overline{x}) \quad \text{pour tout } y \in K.$$

Considérons, pour $t \in [0, 1]$ et $y \in K$, $y_t = ty + (1 - t)\overline{x} \in K$. On déduit que

$$\psi(y_t, \overline{x}) - \psi(\overline{x}, \overline{x}) \geq \Psi(y_t, \overline{x}).$$

En tenant compte la convexité de la fonction $\psi(\cdot, \overline{x})$, on obtient

$$\Psi(y_t, \overline{x}) \leq t[\psi(y, \overline{x}) - \psi(\overline{x}, \overline{x})]. \tag{3.12}$$

D'autre part, puisque $\Psi(y_t, y_t) = 0$ et puisque la fonction $\Psi(y_t, \cdot)$ est convexe, on en déduit que

$$0 = \Psi(y_t, y_t) \leq t\Psi(y_t, y) + (1 - t)\Psi(y_t, \overline{x}).$$

Par conséquent, la relation (3.12) se traduit comme suit

$$t[\Psi(y_t, y) + (1-t)(\psi(y, \overline{x}) - \psi(\overline{x}, \overline{x}))] \geq 0.$$

On obtient, pour tout $t \in]0, 1]$, l'inégalité

$$\Psi(y_t, y) + (1-t)[\psi(y, \overline{x}) - \psi(\overline{x}, \overline{x})] \geq 0.$$

Puisque Ψ est hémi-continue supérieurement, on déduit par passage à la limite quand $t \to 0$,

$$\Psi(\overline{x}, y) + \psi(y, \overline{x}) - \psi(\overline{x}, \overline{x}) \geq 0 \quad \text{pour tout } y \in K.$$

Par suite $\overline{x} \in S_{\Psi,\psi}$.
Montrons maintenant que $\overline{x}$ satisfait l'inégalité

$$\Phi(\overline{x}, y) + \varphi(y, \overline{x}) - \varphi(\overline{x}, \overline{x}) \geq 0 \quad \forall y \in S_{\Psi,\psi}.$$

En effet, on considère la relation (3.4) en prenant $y \in S_{\Psi,\psi}$. Alors

$$\begin{gathered}\rho_{n+1}[\Psi(x_{n+1}, y) + \psi(y, x_{n+1}) - \psi(x_{n+1}, x_{n+1})] + \rho_{n+1}\varepsilon_{n+1}\Phi(x_{n+1}, y) \\ +\langle T(y) - T(x_{n+1}), x_{n+1} - x_n\rangle \geq 0.\end{gathered}$$

Puisque Ψ est monotone et ψ est skew-symétrique, on obtient l'inégalité

$$\begin{gathered}\Phi(x_{n+1}, y) + \frac{1}{\rho_{n+1}\varepsilon_{n+1}}\langle T(y - x_{n+1}), x_{n+1} - x_n\rangle \\ \geq \tfrac{1}{\varepsilon_{n+1}}[\Psi(y, x_{n+1}) + \psi(x_{n+1}, y) - \psi(y, y)].\end{gathered} \tag{3.13}$$

Comme $y \in S_{\Psi,\psi}$, alors

$$\Psi(y, x_{n+1}) + \psi(x_{n+1}, y) - \psi(y, y) \geq 0.$$

On déduit alors de la relation (3.13) et de la monotonie de Φ, l'inégalité

$$\frac{\|T\|}{\rho_{n+1}\varepsilon_{n+1}}\|y - x_{n+1}\|\|x_{n+1} - x_n\| \geq \Phi(y, x_{n+1}).$$

Grâce à la condition (C_2) et puisque $\Phi(y, .)$ est semi-continue supérieurement, on déduit en passant à la limite de $n \to \infty$, dans l'inégalité précédente, que

$$0 \geq \Phi(y, \overline{x}) \quad \text{pour tout} \quad y \in S_{\Psi,\psi}.$$

Puisque $S_{\Psi,\psi}$ est un fermé convexe et de façon similaire, on en déduit que

$$\Phi(\overline{x}, y) \geq 0 \quad \text{pour tout} \quad y \in S_{\Psi,\psi}.$$

Ce qui termine la démonstration . □

Dans le cadre d'espace de Banach réflexif, la condition de coercivité (v) dans le théorème précédent peut être omise. On obtient alors le théorème suivant :

Théorème 3.2.4. *Soit X un espace de Banach réflexif et K un convexe fermé de X. Soient $\Psi, \Phi : K \times K \to I\!R$ deux bifonctions d'équilibre, $\psi : K \times K \to I\!R$ une fonction à valeur réelle et T un opérateur de X à valeur dans X^* tels que*

(i) *Ψ est monotone et hémi-continue supérieurement ;*
Φ est $\sigma-$fortement monotone et hémi-continue supérieurement ;
Pour tout $x \in K$ fixé, les fonctions $\Psi(x, \cdot)$ et $\Phi(x, \cdot)$ sont convexes et semi-continue inférieurements ;
Il existe $\alpha \in I\!R^+$ tel que $\Phi(x, y) \geq -\alpha \|x - y\|^2$, pour tout $x, y \in K$;

(ii) *ψ est skew-symétrique et continue ;*
Pour tout $y \in K$, la fonction $\psi(\cdot, y)$ est convexe ;

(iii) *La suite $\{\varepsilon_n\}_{n\in I\!N}$ est décroissante vers 0 et la suite $\{\rho_n\}_{n\in I\!N}$ est une suite croissante ;*

(iv) *T un opérateur δ-fortement positif ;*

En plus, on suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :

$$(C_1) \quad \exists k \in]0, 1[, \qquad \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} \frac{\|T\|}{\delta + \rho_{n+1}(\sigma\varepsilon_n + \alpha(\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}))} < k;$$
$$(C_2) \quad \text{La suite} \quad \{\alpha_n\}_{n\in I\!N} \ \text{définie par } \alpha_n = \rho_n \varepsilon_n \quad \text{est bornée.}$$

Alors l'ensemble des solutions du problème d'équilibre mixte (PEMB) n'est pas vide et la suite itérative donnée par l'algorithme 2 converge fortement vers une solution $\overline{z} \in S_{\Psi,\psi}$.

3.3 Exemples numériques

Dans tous les exemples présentés ci-dessous, on considère les paramètres suivants

$$\rho_n = 2^n \quad \text{et} \quad \varepsilon_n = (0.5)^n.$$

et l'opérateur linéaire $T : I\!R^2 \to I\!R^2$ tel que $T(x) = x, \quad \forall x \in I\!R^2$.

Exemple.1 Soit $K := [0, 1] \times [0, 1]$. On considère les bifonctions Φ et Ψ définies par

$$\Phi(x, y) = x_1(y_1 - x_1) + 2x_2(y_2 - x_2).$$

$$\Psi(x, y) = (y_1^2 - x_1^2) + (y_2^2 - x_2^2).$$

On considère le problème d'équilibre à deux niveaux suivant : Trouver $\overline{x} \in K$ tel que

$$\Phi(\overline{x}, y) \geq 0 \quad \text{pour tout } y \in S_g.$$

avec $S_g = \{\overline{z} \in K \ : \quad \Psi(\overline{z}, z) \geq 0 \quad \text{pour tout } z \in K\}$.
L'ensemble des solution est $S_{\Phi,\Psi} = \{x \in K \ : \quad x_1 = x_2 = 0\}$.

Exemple.2 Soit $K := [0,1] \times [0,1]$. On considère le problème d'équilibre mixte associé aux bifonctions g et φ définies respectivement par

$$g(x,y) = (x_1 + x_2 - 1)(y_1 - x_1) + (x_1 + x_2 - 1)(y_2 - x_2),$$

$$\varphi(x,y) = (x_1 - x_2)(y_1 - x_1) + (x_2 - x_1)(y_2 - x_2)$$

admet une solution et l'ensemble des solution est $S_{g,\varphi} = \{x \in K \;:\; x_1 = x_2 = 1/2\}$.

Problème	Point initial	Solution	Nombre d'itérations
Exemple 1	(0.644,0.379)	(4.189e-04 , 3.631e-04)	10
	(0.135,0.46)	(9.181e-05 ,1.408e-06)	15
	(0.431,0.91)	(6.640e-04 , 3.075e-07)	17
	(0.226,0.171)	(4.968e-06 , 8.011e-08)	18
Exemple 2	(0.34,0.71)	(4.866e-04 , 4.169e-04)	13
	(0.13,0.846)	(4.405e-01 , 5.818e-01)	15
	(0.03,0.251)	(5.188e-04 5.002e-01)	17

3.4 Commentaires

Le résultat du Théorème 3.2.3 permet d'établir une nouvelle étude approximative aux problèmes d'équilibre à deux niveaux via un seul algorithme. Moudafi [74] a proposé un algorithme proximal, dans un cadre d'espace de Hilbert, où la suite des solutions de l'algorithme converge faiblement vers une solution du problème. Il suppose que la suite générée par l'algorithme vérifie une condition de type $\|x_n - x_{n+1}\| = \theta(\varepsilon_n)$. Cette condition est non réalisable car à priori on ne peut pas estimer $\|x_n - x_{n+1}\|$. Une autre approche présentée par Ding [36], consiste à utiliser le principe auxiliaire en fournissant deux algorithmes séparés pour chaque niveau.

De plus, contrairement aux résultats dans [36, Théorème 3.2], les bifonctions Φ et Ψ ne sont pas nécessairement fortement monotones. En effet, il suffit de supposer que la bifonction Ψ est monotone pour que l'ensemble des solutions du problème de la contrainte soit non vide.

L'algorithme 2 ainsi que les développements exposés plus haut appellent certaines remarques. Notamment, le choix des paramètre α, σ, des suites ρ_n et ε_n et des exemples des bifonctions d'applications. En effet

- La condition (C_1) du Théorème 3.2.3 est vérifiée, en prenant par exemple $\rho_n = 1/\varepsilon_n$ ou bien $\rho_n = 1/\varepsilon_n^2$.

- Il est à noter que le choix du paramètre α dépend évidemment du paramètre σ. D'une part, si on combine les hypothèses de la bifonction Φ, on constate dans un premier lieu que $0 < \sigma < 2\alpha$, et d'autre part, on remarque que la condition (C_1) exige que la quantité $[\sigma\varepsilon_n - \alpha(\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1})]$ soit positive, par conséquent, on peut choisir $\alpha < \sigma < 2\alpha$.

Chapitre 4

Système des problèmes d'équilibres généralisés

Sommaire

4.1 Introduction

Nous nous intéressons dans ce chapitre à un système de problèmes d'équilibre mixtes généralisés dans un espace de Banach. Plus précisément, soit $I = \{1, 2\}$ et considérons pour tout $i \in I$, un espace de Banach X_i d'espace dual X_i^*. On note par $\|\cdot\|_i$ la norme de X_i et X_i^* et par $\langle\cdot,\cdot\rangle_i$ le crochet de dualité entre X_i^* et X_i. Soit K_i un convexe fermé non vide de l'espace vectoriel topologique X_i. On note par $\mathcal{CB}(X_i^*)$ l'ensemble des sous-ensembles fermés bornés et non vides de X_i^*.

Pour tout $i \in I$, soient les applications $R_i : K_1 \rightrightarrows \mathcal{CB}(X_1^*)$, $A_i : K_2 \rightrightarrows \mathcal{CB}(X_2^*)$, $N_i : X_1^* \times X_2^* \to X_i^*$ et $\eta_i : X_i \times X_i \to X_i$, et soient deux bifonctions $F_i, \psi_i : K_i \times K_i \to I\!R$ et $w_i \in X_i^*$.

On considère le système de problèmes d'équilibres mixtes généralisés (SPEMG) impliquant les problèmes d'inéquations variationnelles généralisées suivant :

Trouver $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \in K_1 \times K_2$, $(\overline{u}_1, \overline{v}_1) \in R_1(\overline{x}_1) \times A_1(\overline{x}_2)$ et $(\overline{u}_2, \overline{v}_2) \in R_2(\overline{x}_1) \times A_2(\overline{x}_2)$ tels que

$$\begin{cases} F_1(\overline{x}_1, y_1) + \langle N_1(\overline{u}_1, \overline{v}_1) - w_1, \eta_1(y_1, \overline{x}_1)\rangle_1 + \psi_1(\overline{x}_1, y_1) - \psi_1(\overline{x}_1, \overline{x_1}) \geq 0 \quad \forall y_1 \in K_1; \\ \\ F_2(\overline{x}_2, y_2) + \langle N_2(\overline{u}_2, \overline{v}_2) - w_2, \eta_2(y_2, \overline{x}_2)\rangle_2 + \psi_2(\overline{x}_2, y_2) - \psi_2(\overline{x}_2, \overline{x_2}) \geq 0 \quad \forall y_2 \in K_2. \end{cases} \tag{4.1}$$

Quelques cas particuliers

1. Si, pour tout $i \in I = \{1, 2\}$, $X_i = X_i^* = H_i$ est un espace de Hilbert, $K_i = H_i$, $F_i \equiv 0$, $w_i = 0$ et pour tout $(x, y) \in H_1 \times H_2$, $R_i(x) = x$ et $A_i(y) = y$, alors le système (4.1), se réduit au système suivant : Trouver $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \in H_1 \times H_2$ tel que

$$\begin{cases} \langle N_1(\overline{u}_1, \overline{v}_1), \eta_1(y_1, \overline{x}_1)\rangle_1 + \psi_1(\overline{x}_1, y_1) - \psi(\overline{x}_1, \overline{x_1}) \geq 0 \quad \forall y_1 \in H_1; \\ \\ \langle N_2(\overline{u}_2, \overline{v}_2), \eta_2(y_2, \overline{x}_2)\rangle_2 + \psi_2(\overline{x}_2, y_2) - \psi(\overline{x}_2, \overline{x_2}) \geq 0 \quad \forall y_2 \in H_2. \end{cases} \tag{4.2}$$

   Le problème (4.2) a été introduit et étudié par Kazmi-Khan [57].
2. Si, pour tout $i \in I = \{1, 2\}$, X_i est un espace de Banach réflexif, $K_i = X_i$ et $F_i \equiv 0$, alors le système (4.1), se réduit au système suivant : Trouver $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \in X_1 \times X_2$, $(\overline{u}_1, \overline{v}_1) \in R_1(\overline{x}_1) \times A_1(\overline{x}_2)$ et $(\overline{u}_2, \overline{v}_2) \in R_2(\overline{x}_1) \times A_2(\overline{x}_2)$ tels que

$$\begin{cases} \langle N_1(\overline{u}_1, \overline{v}_1) - w_1, \eta_1(y_1, \overline{x}_1)\rangle_1 + \psi_1(\overline{x}_1, y_1) - \psi_1(\overline{x}_1, \overline{x_1}) \geq 0 \quad \forall y_1 \in K_1; \\ \\ \langle N_2(\overline{u}_2, \overline{v}_2) - w_2, \eta_2(y_2, \overline{x}_2)\rangle_2 + \psi_2(\overline{x}_2, y_2) - \psi_2(\overline{x}_2, \overline{x_2}) \geq 0 \quad \forall y_2 \in K_2. \end{cases} \tag{4.3}$$

   Le système précédent a été considéré par Ding-Wang [39].
3. Dans le cas des espaces de dimensions infini, Mordokhovich-Panicucci [19] ont considéré un système similaire au problème (4.1), où le système consiste à déterminer une solution commune entre un problème d'inéquation variationnelle et un problème d'équilibre en se basant sur l'algorithme proximal.

Plusieurs algorithmes traitent ce type de systèmes des problèmes d'équilibre et les inéquations variationnelles en utilisant des méthodes de la projection, l'algorithme proximal et la méthode de la résolvant pour les opérateurs, voir [16, 33, 93, 50, 75, 79, 91]. Ces résultats sont loin d'être appliqués dans le cas des inéquations like-variationnelles mixtes généralisées. A l'aide du problème auxiliaire, Kazmi et Khan [57] ont étudié un système de problèmes d'inéquations like-variationnelles généralisées dans un espace de Hilbert. Ainsi que Ding-Wang [39] et Ding [37], ils ont introduit un nouveau algorithme pour résoudre une classe de système des inéquations like-variationnelles mixtes généralisés et un système des problèmes d'équilibres mixtes. Il est à noter que la technique de projection ne peut pas être utilisée pour suggérer des algorithmes d'approche des solutions des inéquations like-variationnelles, car il n'est pas possible de trouver la projection de la solution.

On définit la distance de Hausdorff $\mathcal{H}(\cdot, \cdot)$ dans $\mathcal{CB}(X^*)$ par

$$\mathcal{H}(A, D) = \max\{\sup_{a \in A} d(a, D), \sup_{d \in D} d(A, d)\}, \quad \forall A, D \in \mathcal{CB}(X^*)$$

avec $d(a, D) = \inf_{d \in D} \|a - d\|$ et $d(A, d) = \inf_{a \in A} \|a - d\|$.

Définition 4.1.1. *L'application $N_i : X_1 \times X_2 \to X_i$ est dite $(\beta_i, \xi_i)-$mixte Lipschitzienne s'il existe $\beta_i, \xi_i > 0$ telle que*

$$\|N_i(x_1, y_1) - N_i(x_2, y_2)\| \leq \beta_i \|x_1 - x_2\|_1 + \xi_i \|y_1 - y_2\|_2 \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X_1 \times X_2.$$

Définition 4.1.2. *L'application $\eta : X \times X \to X^*$ est dite*

(i) *affine par rapport au second argument si*

$$\eta(y, tx + (1-t)z) = t\eta(y, x) + (1-t)\eta(y, z), \quad \forall t \in [0, 1], \quad x, y, z \in K;$$

(ii) *τ-Lipschitz s'il existe une constante $\tau > 0$ telle que*

$$\|\eta(x, y)\| \leq \tau \|x - y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

Lemme 4.1.3. *[76] Soient E un espace métrique complet et $R : E \to \mathcal{CB}(E)$ une multi-application. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $x, y \in E$ et $u \in R(x)$, il existe $v \in R(y)$ tel que*

$$d(u, v) \leq (1 + \varepsilon)\mathcal{H}(R(x), R(y)).$$

4.2 Approximation par le principe auxiliaire

Pour tout $i \in I = 1, 2$, soient les applications $R_i : K_1 \rightrightarrows \mathcal{CB}(X_1^*)$, $A_i : K_2 \rightrightarrows \mathcal{CB}(X_2^*)$, $N_i : X_1^* \times X_2^* \to X_i^*$ et $\eta_i : X_i \times X_i \to X_i$, et soient deux bifonctions $F_i, \psi_i : K_i \times K_i \to I\!R$ et $w_i \in X_i^*$. Considérons le problème suivant : Trouver $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \in K_1 \times K_2$, $(\overline{u}_1, \overline{v}_1) \in R_1(\overline{x}_1) \times A_1(\overline{x}_2)$, et $(\overline{u}_2, \overline{v}_2) \in R_2(\overline{x}_1) \times A_2(\overline{x}_2)$ tels que

$$\begin{cases} F_1(\overline{x}_1, y_1) + \langle N_1(\overline{u}_1, \overline{v}_1) - w_1, \eta_1(y_1, \overline{x}_1)\rangle_1 + \psi_1(\overline{x}_1, y_1) - \psi_1(\overline{x}_1, \overline{x_1}) \geq 0 \quad \forall y_1 \in K_1. \\ \\ F_2(\overline{x}_2, y_2) + \langle N_2(\overline{u}_2, \overline{v}_2) - w_2, \eta_2(y_2, \overline{x}_2)\rangle_2 + \psi_2(\overline{x}_2, y_2) - \psi_2(\overline{x}_2, \overline{x_2}) \geq 0 \quad \forall y_2 \in K_2. \end{cases} \tag{4.4}$$

On définit, pour tout $i \in I$, le problème auxiliaire suivant :

$$\text{(PA)} \quad \begin{cases} \text{Trouver } (z_1, z_2) \in K_1 \times K_2 \quad \text{tels que} \\ \rho_i[F_i(z_i, y_i) + \langle N_i(u_i, v_i) - w_i, \eta_i(y_i, z_i)\rangle_i + \psi_i(z_i, y_i) - \psi_i(z_i, z_i)] \\ +\langle T_i(y_i - z_i), z_i - x_i\rangle_i \geq 0 \quad \forall y_i \in K_i, \end{cases} \tag{4.5}$$

où $T_i : X_i \to X_i^*$ une application, $\rho_i > 0$, $(x_1, x_2) \in K_1 \times K_2$, $(u_1, v_1) \in R_1(x_1) \times A_1(x_2)$, $(u_2, v_2) \in R_2(x_1) \times A_2(x_2)$.

Théorème 4.2.1. *Pour chaque $i \in I = \{1, 2\}$, soient X_i un espace de Banach et K_i un convexe fermé non vide de X_i. Soient les bifonctions $F_i, \psi_i : K_i \times K_i \to I\!R$, $T_i : X_i \to X_i^*$ un opérateur borné, $\eta_i : X_i \times X_i \to X_i$ une application univoque et $\rho_i > 0$ tels que*

(i) $F_i(x_i, x_i) \geq 0$ *pour tout* $x_i \in K_i$ *;*
F_i *est monotone et hémi-continue supérieurement ;*
Pour $x_i \in K_i$ *fixé, la fonction* $y_i \mapsto F_i(x_i, y_i)$ *est convexe semi-continue inférieurement ;*

(ii) η_i *est affine par rapport au premier argument et continue par rapport au second argument telle que*

$$\eta_i(x_i, y_i) + \eta_i(y_i, x_i) = 0, \qquad \forall x_i, y_i \in K_i;$$

(iii) ψ_i *est skew-symétrique et continue ;*
Pour $y \in K_i$ *fixé, la fonction* $x \mapsto \psi_i(x, y)$ *est convexe ;*

(iv) T_i *est un opérateur linéaire* δ_i*-fortement positif ;*

(v) *(Condition de Coercivité) Pour tout* $x_i \in K_i$*,* $u_i \in X_i^*$ *et* $v_i \in X_2^*$*, il existe un compact convexe non vide* $C^i_{x_i,u_i,v_i}$ *de* X_i *et* $y_i^0 \in C^i_{x_i,u_i,v_i} \cap K_i$ *tels que, pour tout* $z_i \in K_i \setminus C^i_{x_i,u_i,v_i}$
$\rho_i[F_i(z_i, y_i^0) + \langle N_i(u_i, v_i) - w_i, \eta_i(y_i^0, z_i)\rangle_i + \psi_i(z_i, y_i^0) - \psi_i(z_i, z_i)] + \langle T_i(y_i^0 - z_i), z_i - x_i\rangle < 0.$

Alors, le problème auxiliaire (4.5) admet une unique solution.

Démonstration. Pour l'existence il suffit d'appliquer le Lemme 1.3.7 en considérant, pour tout $i \in I$, les bifonctions $f_i, g_i : K_i \times K_i \to I\!R$ définies par

$$f_i(z_i, y_i) = \rho_i[F_i(z_i, y_i) + \langle N_i(u_i, v_i) - w_i, \eta_i(y_i, z_i)\rangle_i + \psi_i(z_i, y_i) - \psi_i(z_i, z_i)]$$

$$\text{et} \quad g_i(z_i, y_i) = \langle T_i(y_i) - T_i(z_i), z_i - x_i\rangle_i.$$

avec $(x_1, x_2) \in K_1 \times K_2$, $(u_1, v_1) \in R_1(x_1) \times A_1(x_2)$ et $(u_2, v_2) \in R_2(x_1) \times A_2(x_2)$. Montrons que la solution est unique. Par l'absurde, supposons que le problème (PA) admet deux solutions z_i^1 et z_i^2. Alors

$$\rho_i[F_i(z_i^1, z) + \langle N_i(u_i, v_i) - w_i, \eta_i(z, z_i^1)\rangle_i + \psi_i(z_i^1, z) - \psi_i(z_i^1, z_i^1)] + \langle T_i(z) - T_i(z_i^1), z_i^1 - x_i\rangle_i \geq 0 \quad \forall z \in K_i. \tag{4.6}$$

$$\rho_i[F_i(z_i^2, z) + \langle N_i(u_i, v_i) - w_i, \eta_i(z, z_i^2)\rangle_i + \psi_i(z_i^2, z) - \psi_i(z_i^2, z_i^2)] + \langle T_i(z) - T_i(z_i^2), z_i^2 - x_i\rangle_i \geq 0 \quad \forall z \in K_i. \tag{4.7}$$

Prenons $z = z_i^2$ dans la relation (4.6) et $z = z_i^1$ dans la relation (4.7) et additionnons les deux inéquations, on obtient

$$\rho_i[F(z_i^1, z_i^2) + F(z_i^2, z_i^1) + \langle N_i(u_i, v_i) - w_i, \eta_i(z_i^1, z_i^2) + \eta_i(z_i^2, z_i^1)\rangle_i$$
$$+\psi_i(z_i^1, z_i^2) + \psi_i(z_i^2, z_i^1) - \psi_i(z_i^1, z_i^1) - \psi_i(z_i^2, z_i^2)] \geq \langle T_i(z_i^2 - z_i^1), z_i^2 - z_i^1\rangle.$$

Puisque, pour tout $i \in I$, F_i est monotone, ψ_i est skew-symétrique, T_i est δ_i-fortement positif et en tenant compte de la condition (iii), on constate

$$0 \geq \langle T_i(z_i^2 - z_i^1), z_i^2 - z_i^1\rangle_i \geq -\delta\|z_i^1 - z_i^2\|_i^2.$$

Par conséquent $z_i^1 = z_i^2$, ce qui termine la démonstration. □

Théorème 4.2.2. *Pour tout $i \in I$, soient X_i un espace de Banach réflexif et K_i un convexe fermé non vide de X_i et soient $F_i, \psi_i : K_i \times K_i \to I\!R$ deux bifonctions, $T_i : X_i \to X_i^*$ un opérateur linéaire borné, $\eta_i : X_i \times X_i \to X_i$ une application univoque et $\rho_i > 0$ tels que*

(i) *$F_i(x_i, x_i) \geq 0$ pour tout $x_i \in K_i$;*
F_i est monotone et hémi-continue supérieurement ;
Pour $x_i \in K_i$ fixé, la fonction $y_i \mapsto F_i(x_i, y_i)$ est convexe semi-continue inférieurement ;

(ii) *η_i est affine par rapport au premier argument et continue par rapport au second argument telle que*

$$\eta_i(x_i, y_i) + \eta_i(y_i, x_i) = 0, \qquad \forall x_i, y_i \in K_i;$$

(iii) *ψ_i est skew-symétrique et continue ;*
Pour $y \in K_i$ fixé, la fonction $x \mapsto \psi_i(x, y)$ est convexe ;

(iv) *T_i est un opérateur linéaire δ_i-fortement positif ;*

Alors, le problème auxiliaire (4.5) admet une unique solution.

Démonstration. Pour tout $i \in I$, $(x_1, x_2) \in K_1 \times K_2$, $(u_1, v_1) \in R_1(x_1) \times A_1(x_2)$ et $(u_2, v_2) \in R_2(x_1) \times A_2(x_2)$, on considère les bifonctions $f_i, g_i : K_i \times K_i \to I\!R$ définies par

$$f_i(z_i, y_i) = \rho_i[F_i(z_i, y_i) + \langle N_i(u_i, v_i) - w_i, \eta_i(y_i, z_i)\rangle_i + \psi_i(z_i, y_i) - \psi_i(z_i, z_i)]$$

$$\text{et} \quad g_i(z_i, y_i) = \langle T_i(y_i) - T_i(z_i), z_i - x_i\rangle_i.$$

Il suffit donc de montrer que la condition de coercivité (iii) du Théorème 1.3.2 est satisfaite. En effet, nous devons montrer que pour certain $v_i^0 \in K_i$ on a $\dfrac{g_i(u_i, v_i^0)}{\|v_i^0 - u_i\|_i} \to -\infty$ quand $\|v_i^0 - u_i\|_i \to +\infty$. Soit $v_i^0 \in K_i$, alors

$$\begin{aligned} g_i(u_i, v_i^0) &= \langle T_i(v_i^0) - T_i(u_i), u_i - x_i\rangle_i \\ &= \langle T_i(v_i^0 - u_i), u_i - v_i^0\rangle_i + \langle T_i(v_i^0 - u_i), v_i^0 - x_i\rangle_i \\ &= -\langle T_i(v_i^0 - u_i), v_i^0 - u_i\rangle_i + \langle T_i(v_i^0 - u_i), v_i^0 - x_i\rangle_i \\ &\leq -\delta_i\|v_i^0 - u_i\|_i^2 + \|T_i\|\|v_i^0 - u_i\|_i\|v_i^0 - x_i\|_i. \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{g_i(u_i, v_i^0)}{\|v_i^0 - u_i\|_i} \leq -\delta_i\|v_i^0 - u_i\|_i + \|T_i\|\|v_i^0 - x_i\|_i. \tag{4.8}$$

Par conséquent $\dfrac{g_i(u_i, v_i^0)}{\|v_i^0 - u_i\|_i} \to -\infty$ quand $\|v_i^0 - u_i\|_i \to +\infty$. □

D'après les résultats des théorèmes précédents, on présente un algorithme d'approche pour le système d'équilibre (SPEMG).

Algorithm 3 :
Pour $(x_1^0, x_2^0) \in K_1 \times K_2$, $(u_1^0, v_1^0) \in R_1(x_1^0) \times A_1(x_2^0)$, et $(u_2^0, v_2^0) \in R_2(x_1^0) \times A_2(x_2^0)$. Grâce au Théorème 4.2.1, le système (4.5) admet une unique solution $(x_1^1, x_2^1) \in K_1 \times K_2$ tel que pour tout $i \in I$, on a

$$\begin{aligned} &\rho_i^1[F_i(x_i^1, y_i) + \langle N_i(u_i^0, v_i^0) - w_i, \eta_i(y_i, x_i^1)\rangle_i + \psi_i(x_i^1, y_i) - \psi_i(x_i^1, x_i^1)] \\ &+\langle T_i(y_i) - T_i(x_i^1), x_i^1 - x_i\rangle_i \geq 0 \quad \forall y_i \in K_i. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Puisque, pour tout $i \in I$, $u_i^0 \in R_i(x_i^0) \in \mathcal{CB}(X_1^*)$, et $v_i^0 \in A_i(x_2^0) \in \mathcal{CB}(X_2^*)$, d'après le Lemme 4.1.3, il existe $u_i^1 \in R_i(x_1^1)$ et $v_i^1 \in A_i(x_2^1)$ tels que

$$\begin{aligned} \|u_i^1 - u_i^0\|_1 &\leq (1+1)\mathcal{H}_1(R_i(x_1^1), R_i(x_1^0)) \\ \|v_i^1 - v_i^0\|_2 &\leq (1+1)\mathcal{H}_2(A_i(x_2^1), A_i(x_2^0)) \end{aligned}$$

avec $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont des distances de Hausdorff dans $\mathcal{CB}(X_1^*)$ et $\mathcal{CB}(X_2^*)$, respectivement. Grâce au Théorème 4.2.1, le problème auxiliaire (PA) admet une unique solution $(x_1^2, x_2^2) \in K_1 \times K_2$ tel que

$$\begin{aligned} &\rho_i^2[F_i(x_i^2, y_i) + \langle N_i(u_i^1, v_i^1) - w_i, \eta_i(y_i, x_i^2)\rangle_i + \psi(x_i^2, y_i) - \psi(x_i^2, x_i^2)] \\ &+\langle T_i(y_i) - T_i(x_i^2), x_i^2 - x_i^1\rangle_i \geq 0 \quad \forall y_i \in K_i. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Par induction, on peut construire une suite d'itération d'algorithme pour calculer la solution approximative du système (4.1) comme suit : Pour $(x_1^0, x_2^0) \in K_1 \times K_2$, $(u_1^0, v_1^0) \in R_1(x_1^0) \times A_1(x_2^0)$ et $(u_2^0, v_2^0) \in R_2(x_1^0) \times A_2(x_2^0)$, il existe des suites $\{x_1^n\}$, $\{x_2^n\}$, $\{u_1^n\}$, $\{u_2^n\}$, $\{v_1^n\}$, et $\{v_2^n\}$ telles que pour tout $i \in I$,

$$\begin{cases} \|u_i^{n+1} - u_i^n\|_1 \leq (1 + \frac{1}{n+1})\mathcal{H}_1(R_i(x_1^{n+1}), R_i(x_1^n)), \quad u_i^n \in R_i(x_1^n), \\ \|v_i^{n+1} - v_i^n\|_2 \leq (1 + \frac{1}{n+1})\mathcal{H}_2(A_i(x_2^{n+1}), A_i(x_2^n)), \quad v_i^n \in A_i(x_2^n), \\ \\ \rho_i^{n+1}[F_i(x_i^{n+1}, y_i) + \langle N_i(u_i^n, v_i^n) - w_i, \eta_i(y_i, x_i^{n+1})\rangle_i \\ \qquad +\psi_i(x_i^{n+1}, y_i) - \psi_i(x_i^{n+1}, x_i^{n+1})] \\ \\ \qquad +\langle T_i(y_i) - T_i(x_i^{n+1}), x_i^{n+1} - x_i^n\rangle_i \geq 0 \\ \qquad\qquad\qquad \forall y_i \in K_i, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \end{cases} \tag{4.11}$$

Dans la suite, on étudie la convergence de l'algorithme présenté ci-dessus.

Théorème 4.2.3. *Supposons que les hypothèses du Théorème 4.2.2 sont satisfaites. En plus supposons que pour tout $i \in I$,*

(i) *F_i est σ_i-fortement monotone et hémi-continue supérieurement ;*
N_i est (β_i, ξ_i)-mixte lipschitzienne ;
R_i est k_i-$\mathcal{H}_1$-lipschitzienne continue, et A_i est μ_i-$\mathcal{H}_2$-lipschitzienne continue ;

(ii) *η_i est τ_i-lipschitzienne continue ;*

(iii) *T_i est un opérateur linéaire tel que T_i est δ_i-fortement positif ;*

(iv) *La suite $\{\rho_i^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de terme positif est croissante et que $\lim_{n\to+\infty} \rho_i^n = +\infty$, $i \in \{1,2\}$;*

Supposons en plus que la condition suivante est satisfaite :

$$(C_1) \quad \begin{cases} \Lambda = \max\{\theta_1+\theta_2, \vartheta_1+\vartheta_2\} < 1, & \text{avec} \\ \theta_1 = \frac{\tau_1\beta_1 k_1}{\sigma_1}, \quad \theta_2 = \frac{\tau_2\beta_2 k_2}{\sigma_2} \\ \vartheta_1 = \frac{\tau_1\xi_1\mu_1}{\sigma_1}, \quad \vartheta_2 = \frac{\tau_2\xi_2\mu_2}{\sigma_2}. \end{cases} \tag{4.12}$$

Alors, les suites $\{x_1^n\}$, $\{x_2^n\}$, $\{u_1^n\}$, $\{u_2^n\}$, $\{v_1^n\}$, $\{v_2^n\}$ convergent fortement vers $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{u}_1, \overline{v}_1, \overline{u}_2$, et $\overline{v}_2$, respectivement, avec $(\overline{u}_1, \overline{v}_1) \in T_1(\overline{x}_1) \times A_1(\overline{x}_2)$, $(\overline{u}_2, \overline{v}_2) \in T_2(\overline{x}_1) \times A_2(\overline{x}_2)$, et $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{u}_1, \overline{v}_1, \overline{u}_2, \overline{v}_2)$ est une solution du système (4.1).

Preuve. Par définition de l'algorithme 3, pour tout $i \in I$, on

$$\begin{aligned} &\rho_i^n[F_i(x_i^n, y_i) + \langle N_i(u_i^{n-1}, v_i^{n-1}) - w_i, \eta_i(y_i, x_i^n)\rangle_i + \psi_i(x_i^n, y_i) - \psi_i(x_i^n, x_i^n)] \\ &\qquad + \langle T_i(y_i) - T_i(x_i^n), x_i^n - x_i^{n-1}\rangle_i \geq 0 \quad \forall y_i \in K_i; \end{aligned} \tag{4.13}$$

et

$$\begin{aligned} &\rho_i^{n+1}[F_i(x_i^{n+1}, y_i) + \langle N_i(u_i^n, v_i^n) - w_i, \eta_i(y_i, x_i^{n+1})\rangle_i + \psi_i(x_i^{n+1}, y_i) - \psi_i(x_i^{n+1}, x_i^{n+1})] \\ &\qquad + \langle T_i(y_i) - T_i(x_i^{n+1}), x_i^{n+1} - x_i^n\rangle_i \geq 0 \quad \forall y_i \in K_i; \end{aligned} \tag{4.14}$$

Prenons $y_i = x_i^{n+1}$ dans la relation (4.13) et $y_i = x_i^n$ dans la relation (4.14). On additionne les deux inégalités précédentes. En tenant compte du fait que $\eta_i(x_i^{n+1}, x_i^n) = -\eta_i(x_i^n, x_i^{n+1})$, on obtient

$$\begin{aligned} F_i(x_i^{n+1}, x_i^n) + F_i(x_i^n, x_i^{n+1}) + \langle N_i(u_i^{n-1}, v_i^{n-1}) - N_i(u_i^n, v_i^n), \eta_i(x_i^{n+1}, x_i^n)\rangle_i \\ + \psi_i(x_i^n, x_i^{n+1}) + \psi_i(x_i^{n+1}, x_i^n) - \psi_i(x_i^n, x_i^n) - \psi_i(x_i^{n+1}, x_i^{n+1}) \\ + \frac{1}{\rho_i^n}\langle T_i(x_i^{n+1} - x_i^n), x_i^n - x_i^{n-1}\rangle_i \\ - \frac{1}{\rho_i^{n+1}}\langle T_i(x_i^n - x_i^{n+1}), x_i^n - x_i^{n+1}\rangle_i \geq 0. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Puisque F_i est σ_i-monotone, ψ_i est skew-symétrique et T_i est δ_i-fortement positif et $\|T_i\|$-Lispchitzienne continue, il s'en suit que

$$\begin{aligned}\|N_i(u_i^{n-1}, v_i^{n-1}) - N_i(u_i^n, v_i^n)\|_i\|\eta_i(x_i^{n+1}, x_i^n)\|_i + \frac{\|T_i\|}{\rho_i^n}\|x_i^{n+1} - x_i^n\|_i\|x_i^n - x_i^{n-1}\|_i \\ \geq [\sigma_i + \frac{\delta_i}{\rho_i^{n+1}}]\|x_i^n - x_i^{n+1}\|_i^2;\end{aligned} \tag{4.16}$$

Puisque N_1 est $(\beta_1, \xi_1)-$mixte Lipschitzienne continue, R_1 est $k_1-\mathcal{H}_1-$Lipschitzienne continue, A_1 est $\mu_1 - \mathcal{H}_2-$Lipschitz-continue, à partir de l'algorithme 3, on obtient

$$\|N_i(u_i^{n-1}, v_i^{n-1}) - N_i(u_i^n, v_i^n)\|_i \leq \beta_1\|u_1^{n-1} - u^n\|_1 + \xi_1\|v_1^{n-1} - v^n\|_1$$

$$\leq \beta_1(1 + \frac{1}{n})\mathcal{H}_1(R_1(x_1^{n-1}), R_1(x_1^n)) + \xi_1(1 + \frac{1}{n})\mathcal{H}_2(A_1(x_2^{n-1}), A_1(x_2^n))$$

$$\leq \beta_1 k_1(1 + \frac{1}{n})\|x_1^{n-1} - x_1^n\|_1 + \xi_1\mu_1(1 + \frac{1}{n})\|x_2^{n-1} - x_2^n\|_2. \tag{4.17}$$

Puisque η_1 est τ_1-Lipschitz-continue, alors de la relation (4.16) avec $i = 1$ et la relation (4.17) on obtient

$$[\sigma_1 + \tfrac{\delta_1}{\rho_1^{n+1}}]\|x_1^n - x_1^{n+1}\|_1 \leq [\tau_1\beta_1 k_1(1 + \tfrac{1}{n}) + \frac{\|T_1\|}{\rho_1^n}]\|x_1^{n-1} - x_1^n\|_1 + \tau_1\xi_1\mu_1(1 + \frac{1}{n})\|x_2^{n-1} - x_2^n\|_2. \tag{4.18}$$

Par conséquent,

$$\|x_1^n - x_1^{n+1}\|_1 \leq \theta_{1n}\|x_1^{n-1} - x_1^n\|_1 + \vartheta_{1n}\|x_2^{n-1} - x_2^n\|_2; \tag{4.19}$$

avec

$$\theta_{1n} = \frac{[\rho_1^{n+1}\tau_1\beta_1 k_1(1 + \frac{1}{n}) + \frac{\rho_1^{n+1}\|T_1\|_1}{\rho_1^n}]}{[\rho_1^{n+1}\sigma_1 + \delta_1]}$$

et

$$\vartheta_{1n} = \frac{\rho_1^{n+1}\tau_1\xi_1\mu_1(1 + \frac{1}{n})}{[\rho_1^{n+1}\sigma_1 + \delta_1]}.$$

De façon similaire, en utilisant les hypothèses sur F_2, N_2, η_2, R_2, A_2, T_2, et la relation (4.16) avec $i = 2$, on obtient

$$\|x_2^n - x_2^{n+1}\|_2 \leq \theta_{2n}\|x_1^{n-1} - x_1^n\|_1 + \vartheta_{2n}\|x_2^{n-1} - x_2^n\|_2, \tag{4.20}$$

où

$$\theta_{2n} = \frac{[\rho_2^{n+1}\tau_2\beta_2 k_2(1 + \frac{1}{n})]}{[\rho_2^{n+1}\sigma_2 + \delta_2]}$$

et

$$\vartheta_{2n} = \frac{\rho_2^{n+1}\tau_2\xi_2\mu_2(1+\frac{1}{n}) + \frac{\rho_2^{n+1}\|T_2\|_2}{\rho_2^n}}{[\rho_2^{n+1}\sigma_2+\delta_2]}.$$

On additionne les deux relations (4.19) et (4.20), on obtient

$$\begin{aligned}\|x_1^n - x_1^{n+1}\|_1 + \|x_2^n - x_2^{n+1}\|_2 &\leq (\theta_{1n}+\theta_{2n})\|x_1^{n-1} - x_1^n\|_1 + (\vartheta_{1n}+\vartheta_{2n})\|x_2^{n-1} - x_2^n\|_2 \\ &\leq \Lambda_n(\|x_1^{n-1} - x_1^n\|_1 + \|x_2^{n-1} - x_2^n\|_2),\end{aligned} \tag{4.21}$$

avec $\Lambda_n = \max\{\theta_{1n}+\theta_{2n}, \vartheta_{1n}+\vartheta_{2n}\}$.

On définit la norme suivante $\|\cdot\|_*$ sur $X_1 \times X_2$ par

$$\|(x,y)\|_* = \|x\|_1 + \|y\|_2, \quad \forall (x,y) \in X_1 \times X_2.$$

Alors $(X_1 \times X_2, \|\cdot\|_*)$ est un espace de Banach. Par conséquent, la relation (4.21) implique

$$\|(x_1^n, x_2^n) - (x_1^{n+1}, x_2^{n+1})\|_* \leq \Lambda_n \|(x_1^{n-1}, x_2^{n-1}) - (x_1^n, x_2^n)\|_*. \tag{4.22}$$

En utilisant la notation donnée dans la relation (4.12), il est facile de voir que $\Lambda_n \to \Lambda$ quand $n \to \infty$, (puisque T_i est un opérateur borné et le fait que $\rho_i^n \to +\infty$ quand $n \to \infty$).

A partir de la relation (C_1), on a $0 < \Lambda < 1$. Alors, il existe $\Lambda_0 \in (0,1)$ et $n_0 > 0$ tels que $\Lambda_n \leq \Lambda_0 < 1$ pour tout $n \geq n_0$. Par conséquent, la relation (4.22) implique

$$\|(x_1^n, x_2^n) - (x_1^{n+1}, x_2^{n+1})\|_* \leq \Lambda_0 \|(x_1^{n-1}, x_2^{n-1}) - (x_1^n, x_2^n)\|_*.$$

Ce qui montre que la suite $\{(x_1^n, x_2^n)\}$ est de Cauchy. Alors, il existe $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \in K_1 \times K_2$ tel que la suite (x_1^n, x_2^n) converge fortement vers $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$.

A partir de la relation (4.11) et la lipschitz continuité de R_1, R_2, A_1 et A_2, on obtient

$$\begin{cases} \|u_i^{n+1} - u_i^n\|_1 \leq (1+\frac{1}{n+1})\mathcal{H}_1(R_i(x_1^{n+1}), R_i(x_1^n)) \leq k_i(1+\frac{1}{n+1})\|x_1^{n+1} - x_1^n\|_1, \\ \\ \|v_i^{n+1} - v_i^n\|_2 \leq (1+\frac{1}{n+1})\mathcal{H}_2(A_i(x_2^{n+1}), A_i(x_2^n)) \leq \mu_i(1+\frac{1}{n+1})\|x_2^{n+1} - x_2^n\|_2. \end{cases} \tag{4.23}$$

Par conséquent, pour tout $i \in I$, la suite $\{u_i^n\}$ est de Cauchy dans X_1^* et $\{v_i^n\}$ est aussi une suite de Cauchy dans X_2^*. Alors, il existe $(\overline{u}_i, \overline{v}_i) \in X_1^* \times X_2^*$ tel que (u_i^n, v_i^n) converge fortement vers $(\overline{u}_i, \overline{v}_i)$. Notons que $u_1^n \in R_1(x_1^n)$, par suite

$$\begin{aligned} d(\overline{u}_1, R_1(x_1^n)) \leq\ & \|\overline{u}_1 - u_1^n\|_1 + d(u_1^n, R_1(x_1^n)) + \mathcal{H}_1(R_1(x_1^n), R_1(\overline{x}_1)) \\ & \|\overline{u}_1 - u_1^n\|_1 + k_1\|\overline{x}_1 - x_1^n\|_1 \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty \end{aligned}$$

Alors, on a forcément $\overline{u}_1 \in R_1(\overline{x}_1)$. De même, on montre que $\overline{u}_2 \in R_2(\overline{x}_1)$, $\overline{v}_1 \in A_1(\overline{x}_2)$ et $\overline{v}_2 \in A_2(\overline{x}_2)$. On a d'après (4.23), pour tout $i \in I$,

$$\rho_i^{n+1}[F_i(x_i^{n+1},y_i)+\langle N_i(u_i^n,v_i^n)-w_i,\eta_i(y_i,x_i^{n+1})\rangle_i+\psi(x_i^{n+1},y_i)-\psi(x_i^{n+1},x_i^{n+1})]$$

$$+\langle T_i(y_i)-T_i(x_i^{n+1}),x_i^{n+1}-x_i^n\rangle\geq 0\quad\forall y_i\in K_i,\forall n\in I\!N. \tag{4.24}$$

Puisque N_i est (β_i,ξ_i)-mixte Lipschitz continue et η_i est continue par rapport au second argument, on a, pour tout $y_i\in K_i$

$$|\langle N_i(u_i^n,v_i^n)-w_i,\eta_i(y_i,x_i^{n+1})\rangle_i-\langle N_i(\overline{u}_i,\overline{v}_i)-w_i,\eta_i(y_i,\overline{x}_i)\rangle_i|$$

$$\leq|\langle N_i(u_i^n,v_i^n)-N_i(\overline{u}_i,\overline{v}_i),\eta_i(y_i,x_i^{n+1})\rangle_i|+|\langle N_i(\overline{u}_i,\overline{v}_i)-w_i,\eta_i(y_i,x_i^{n+1})-\eta_i(y_i,\overline{x}_i)\rangle_i|$$

$$\leq\|N_i(u_i^n,v_i^n)-N_i(\overline{u}_i,\overline{v}_i)\|_i\|\eta_i(y_i,x_i^{n+1})\|_i+|\langle N_i(\overline{u}_i,\overline{v}_i)-w_i,\eta_i(y_i,x_i^{n+1})-\eta_i(y_i,\overline{x}_i)\rangle_i|$$

Alors,

$$|\langle N_i(u_i^n,v_i^n)-w_i,\eta_i(y_i,x_i^{n+1})\rangle_i-\langle N_i(\overline{u}_i,\overline{v}_i)-w_i,\eta_i(y_i,\overline{x}_i)\rangle_i|\to 0\quad\text{quand}\quad n\to\infty. \tag{4.25}$$

Grâce à la monotonie de F_i et la linéarité de T_i, on a

$$\langle N_i(u_i^n,v_i^n)-w_i,\eta_i(y_i,x_i^{n+1})\rangle_i-\langle N_i(\overline{u}_i,\overline{v}_i)-w_i,\eta_i(y_i,\overline{x}_i)\rangle_i+\psi_i(x_i^{n+1},y_i)-\psi_i(x_i^{n+1},x_i^{n+1})$$

$$+\tfrac{\|T_i\|}{\rho_i^{n+1}}\|y_i-x_i^{n+1}\|\|x_i^{n+1}-x_i^n\|\geq F_i(y_i,x_i^{n+1})-\langle N_i(\overline{u}_i,\overline{v}_i)-w_i,\eta_i(y_i,\overline{x}_i)\rangle_i$$
$$\forall y_i\in K_i, n=0,1,2,.... \tag{4.26}$$

En tenant compte de la relation (4.25) et du fait que pour tout $i\in I$, $F_i(y,\cdot)$ est semicontinue inférieurement, ψ_i est continue et que la suite $\{x_i^n\}$ converge fortement vers $\overline{x}_i$, alors par passage à la limite dans la relation (4.26), on obient

$$\psi_i(y_i,\overline{x}_i)-\psi_i(\overline{x}_i,\overline{x}_i)\geq F_i(y_i,\overline{x}_i)-\langle N_i(\overline{u}_i,\overline{v}_i)-w_i,\eta_i(y_i,\overline{x}_i)\rangle_i.$$

Pour tout $i\in I$ et pour $t\in(0,1]$ et $y_i\in K_i$, considérons $y_i(t)=ty_i+(1-t)\overline{x}_i$. Puisque K_i est convexe, alors $y_i(t)\in K_i$ pour $t\in(0,1]$. Ainsi,

$$\langle N_i(\overline{u}_i,\overline{v}_i)-w_i,\eta_i(y_i(t),\overline{x}_i)\rangle_i+\psi_i(y_i(t),\overline{x}_i)-\psi_i(\overline{x}_i,\overline{x}_i)\geq F_i(y_i(t),\overline{x}_i).$$

En tenant compte de la convexité de la fonction $\psi_i(\cdot,\overline{x}_i)$ et que N_i est affine par rapport au premier argument et $\eta_i(\overline{x}_i,\overline{x}_i)=0$, alors

$$F_i(y_i(t),\overline{x}_i)\leq t(\psi_i(y_i,\overline{x}_i)-\psi_i(\overline{x}_i,\overline{x}_i))+t\langle N_i(\overline{u}_i,\overline{v}_i)-w_i,\eta_i(y_i,\overline{x}_i)\rangle_i \tag{4.27}$$

D'autre part, comme $F_i(x_i,x_i)=0$ pour tout $x_i\in K_i$ et que $F_i(y_i,\cdot)$ est convexe, alors

$$0\leq F_i(y_i(t),y_i(t))\leq tF_i(y_i(t),y_i)+(1-t)F(y_i(t),\overline{x}_i).$$

Ainsi à partir de la relation (4.27), on obtient

$$0 \leq t[F_i(y_i(t), y_i) + (1-t)(\psi_i(y_i, \overline{x}_i) - \psi_i(\overline{x}_i, \overline{x}_i) + \langle N_i(\overline{u}_i, \overline{v}_i) - w_i, \eta_i(y_i, \overline{x}_i)\rangle_i)].$$

Par conséquent, pour tout $t \in]0, 1]$ on a

$$0 \leq F_i(y_i(t), y_i) + (1-t)(\psi_i(y_i, \overline{x}_i) - \psi_i(\overline{x}_i, \overline{x}_i) + \langle N_i(\overline{u}_i, \overline{v}_i) - w_i, \eta_i(y_i, \overline{x}_i)\rangle_i).$$

Puisque, pour tout $y_i \in K_i$, $x \mapsto F_i(x, y_i)$ est hémi-continue supérieurement, alors par passage à la limite quand $t \to 0$ dans l'inégalité précédente, on obtient

$$F_i(\overline{x}_i, y_i) + \langle N_i(\overline{u}_i, \overline{v}_i) - w_i, \eta_i(y_i, \overline{x}_i)\rangle_i + \psi_i(y_i, \overline{x}_i) - \psi_i(\overline{x}_i, \overline{x}_i) \geq 0 \quad \forall y_i \in K_i.$$

Ce qui termine la démonstration. $\square$

4.3 Exemples

Dans cette partie, on présente un exemple de système pouvant être résolu par la démarche présentée au cours de ce chapitre.

Pour tout $i \in I = \{1, 2\}$, soient $X_i = X_i^* = I\!R^2$, $K = K_i = [0, 1] \times [0, 1]$, $w_i = 0$ et pour tout $(x, y) \in K \times K$, $R_i(x) = x$ et $A_i(y) = y$. Le système (4.1) se réduit donc au système suivant : Trouver $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \in K \times K$ tel que

$$\begin{cases} F_1(\overline{x}_1, y_1) + \langle N_1(\overline{u}_1, \overline{v}_1), \eta_1(y_1, \overline{x}_1)\rangle_1 + \psi_1(\overline{x}_1, y_1) - \psi_1(\overline{x}_1, \overline{x_1}) \geq 0 \quad \forall y_1 \in K; \\ \\ F_2(\overline{x}_2, y_2) + \langle N_2(\overline{u}_2, \overline{v}_2), \eta_2(y_2, \overline{x}_2)\rangle_2 + \psi_2(\overline{x}_2, y_2) - \psi_2(\overline{x}_2, \overline{x_2}) \geq 0 \quad \forall y_2 \in K. \end{cases}$$

avec $F_i : K \times K \to I\!R$ des bifonctions définie par

$$F_1(x, y) = 2x_1(y_1 - x_1) + 3x_2(y_2 - x_2), \quad \forall x, y \in K.$$

$$F_2(x, y) = 3x_1(y_1 - x_1) + 5x_2(y_2 - x_2), \quad \forall x, y \in K.$$

et $N_i : I\!R^2 \times I\!R^2 \to I\!R^2$ et $\eta_i : X_i \times X_i \to X_i$ deux applications multivoques telles que

$$N_i(x, y) = x + y \quad \text{et} \quad \eta_i(x, y) = x - y, \quad \forall x, y \in K.$$

Les bifonctions F_1 et F_2 sont 2-fortement monotone et 3-fortement monotone respectivement, l'application N_i est (1,1)-mixte lipschitz continue et l'application η_i est affine et 1-lipschitz continue.

4.4 Commentaires

En comparaison avec différentes résultats récents dans la littérature nous signalons que Kazmi-Khan [57] ont traité un système de problèmes d'inéquations like-variationnelles généralisées dans un cadre d'espace de Hilbert à l'aide du principe auxiliaire, Ding-Wang [39] et Ding [37] ont introduit de nouveaux algorithmes pour résoudre une classe de système des problèmes des inéquations like-variationnelles généralisées et un système des problèmes d'équilibres mixtes généralisés. En conclusion, l'approche utilisée dans ce chapitre permet d'améliorer de nouveaux résultats dans la littérature liés aux problèmes étudiés. Plus précisément, nous avons introduit la notion du principe auxiliaire dans le but de générer des algorithmes d'approche pour un système de problèmes d'équilibre mixte généralisé dans un espace de Banach. Les résultats obtenus dans ce chapitre ont les points forts suivants :

1. Pour prouver l'existence des solutions pour le problème auxiliaire et pour la convergence de l'algorithme, on a pas besoin de supposer que F_i est δ_i-lipschitzienne, ni faiblement semi-continue supérieurement par rapport au premier argument. Cela permet d'améliorer considérablement l'étude récente présentée par Ding [37].
2. On note aussi que Ding [37] a présenté ces résultats en imposant l'hypothèse $int\{y_i \in K_i,\ \ \psi_i(y_i, y_i) < \infty\} = int\ K_i \neq \emptyset$, ce qui n'est pas le cas dans le Théorème 4.2.2.

Chapitre 5

Problème du point selle vectoriel

Sommaire

Dans ce chapitre on étudie un problème de point selle vectoriel. On démontre, sous une condition du type Brézis-Nirenberg-Stampacchia étendue au cadre vectoriel, un résultat d'existence pour un problème de point selle vectoriel. On montre aussi ces résultats d'existence dans un espace paracompact.

5.1 Introduction

Soient X et Y deux espaces vectoriels topologiques de Hausdorff et Z un espace vectoriel ordonné par un cône convexe C d'intérieur non vide tel que $Z \neq int\ C$. Soient $U \subset X$ et $V \subset Y$ deux sous ensembles non vides et $f : U \times V \to Z$ une fonction vectorielle topologique.

Nous nous intéressons au problème de point selle vectoriel suivant :

$$(PSV) \begin{cases} \text{Trouver } (u_0, v_0) \in U \times V & \text{tel que} \\ f(u, v_0) - f(u_0, v_0) \notin -intC & \forall u \in U \ et \\ f(u_0, v_0) - f(u_0, v) \notin -intC & \forall v \in V. \end{cases} \tag{5.1}$$

Ce type de problème a été étudié par plusieurs chercheurs, nous citons entre autres Kimura [58], Kimura-Tanaka [59], Tanaka [87, 85]. Dans la littérature, on trouve plusieurs formulations d'un problème du point selle vectoriel ainsi que différentes approches pour son étude. Dans [58], Kimura a donné des résultats d'existence en se basant sur le théorème de Fan-KKM et en utilisant une formulation d'inéquation variationnelle vectorielle. Tanaka [87] a étudié ce problème pour des fonctions vectorielles de type $f(x, y) = u(x) + v(y)$ et $f(x, y) = u(x) + \beta(x)v(y)$. Un autre résultat a été établi dans [85] en utilisant une méthode de scalarisation et un résultat de minimax de Sion [83].

5.2 Résultats d'existence du point selle vectoriel

L'objectif de cette section est de présenter quelques résultats d'existence de solution du problème (5.1). Notre étude dans une première approche, est basée sur le théorème du KKM [97], une condition de type Brézis-Nirenberg-Stampacchia [18] étendue au cadre vectoriel, une relaxation de la notion C-semicontinuité et un argument de convexité généralisée introduite par Tanaka [87]. Dans la seconde approche, nous établissons un résultat d'existence pour le problème de point selle vectoriel dans un cadre d'espace paracompact en faisant appel à la notion de la partition de l'unité.

5.2.1 Condition du type Brézis-Nirenberg-Stampacchia

On commence d'abord par établir le lemme suivant.

Lemme 5.2.1. *Soient X et Y deux espaces vectoriels topologiques de Hausdorff. Soient $U \subset X$ et $V \subset Y$ deux sous ensembles non vides et $f : U \times V \to Z$ une fonction vectorielle. On suppose que pour tout $u \in U$ et $v \in V$, $f(\cdot, v)$ est C-semi-continue inférieurement et $f(u, \cdot)$ est C-semi-continue supérieurement. Si pour tout $(u, v) \in U \times V$ et toute suite généralisée $\{(u_\alpha, v_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ dans $U \times V$ convergente vers (u_0, v_0) telle que*

$$\begin{gathered} f(tu + (1-t)u_0, v_0) - f(u_\alpha, v_0) \notin -intC \ \ et \\ f(u_0, v_\alpha) - f(u_0, tv + (1-t)v_0) \notin -intC, \\ pour\ tout\ t \in [0, 1] \end{gathered}$$

alors

$$\begin{gathered} f(u, v_0) - f(u_0, v_0) \in (-intC)^c \quad \forall u \in U \ \ et \\ f(u_0, v_0) - f(u_0, v) \in (-intC)^c. \quad \forall v \in V \end{gathered}$$

Preuve. Soient $(u, v) \in U \times V$ et une suite généralisée $\{(u_\alpha, v_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ dans $U \times V$ convergente vers (u_0, v_0) tels que

$$\begin{gathered} f(u, v) - f(u_\alpha, v) \notin -intC \ \ \text{et} \\ f(u, v_\alpha) - f(u, v) \notin -intC\ . \end{gathered}$$

Soit $-d = f(u, v_0) - f(u_0, v_0)$. Raisonnons par l'absurde, on suppose que $d \in int(C)$. Puisque, $-f(\cdot, v_0)$ est C-semi-continue supérieurement au point u_0, alors il existe un voisinage ouvert U_{u_0} de u_0 tel que $-f(w, v_0) \in -f(u_0, v_0) + d - intC$ pour tout $w \in U_{u_0}$.
D'autre part, puisque la suite $\{u_\alpha\}_{\alpha \in I}$ converge vers u_0, alors il existe α_0 dans I tel que

$$\alpha \geq \alpha_0 \quad \Rightarrow \quad u_\alpha \in U_{u_0} \quad et \quad -f(u_\alpha, v_0) \in -f(u_0, v_0) + d - intC.$$

Par conséquent, $f(u, v_0) - f(u_\alpha, v_0) \in -intC$, $\forall \alpha \geq \alpha_0$ et $u_\alpha \in U_{u_0}$. Ce qui contredit l'hypothèse. De la même façon on montre que $f(u_0, v_0) - f(u_0, v) \in (-intC)^c$, pour tout $v \in V$. $\square$

On montre le théorème suivant.

Théorème 5.2.2. *Soient U et V deux sous ensembles convexes non vides des espaces vectoriels topologiques de Hausdorff X et Y respectivement. Soit $f : U \times V \to Z$ une fonction vectorielle telle que*

(i) *Pour tout $v \in V$, la fonction $u \mapsto f(u, v)$ est proprement C-quasi-convexe et C-semi-continue inférieurement sur l'enveloppe convexe de toute partie finie de U.*

(ii) *Pour tout $u \in U$, la fonction $v \mapsto f(u, v)$ est proprement C-quasi-concave et C-semi-continues supérieurement sur l'enveloppe convexe de toute partie finie de V.*

(iii) *Pour tout $(u, v) \in U \times V$ et toute suite généralisée $\{(u_\alpha, v_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ dans $U \times V$ convergente vers (u_0, v_0), si*

$$\begin{gathered} f(tu + (1-t)u_0, tv + (1-t)v_0) - f(u_\alpha, tv + (1-t)v_0) \notin -intC \quad \text{et} \\ f(tu + (1-t)u_0, v_\alpha) - f(tu + (1-t)u_0, tv + (1-t)v_0) \notin -intC \\ \text{pour tout } \alpha \in I \text{ et } 0 \leq t \leq 1, \end{gathered}$$

alors

$$\begin{gathered} f(u, v_0) - f(u_0, v_0) \notin -intC \quad \text{et} \\ f(u_0, v_0) - f(u_0, v) \notin -intC. \end{gathered}$$

(iv) *(Coercivité) Il existe un compact non vide $N \times M \subset U \times V$ et un compact convexe non vide $\widetilde{N} \times \widetilde{M} \subset U \times V$ tels que, si $(u, v) \in (N \times M)^c \cap (U \times V)$, alors $f(u, \widetilde{v}) - f(\widetilde{u}, \widetilde{v}) \in -intC$ et $f(\widetilde{u}, \widetilde{v}) - f(\widetilde{u}, v) \in -intC$ pour $(\widetilde{u}, \widetilde{v}) \in \widetilde{N} \times \widetilde{M}$.*

Alors, il existe $(\overline{u}, \overline{v}) \in U \times V$ tel que

$$\begin{gathered} f(u, \overline{v}) - f(\overline{u}, \overline{v}) \in (-intC)^c \quad \forall\, u \in U \quad \text{et} \\ f(\overline{u}, \overline{v}) - f(\overline{u}, v) \in (-intC)^c \quad \forall\, v \in V. \end{gathered}$$

Remarque 5.2.3. *La condition (iii) dans le Théorème 5.2.2 représente en fait une extension au cadre vectorielle de la condition du type Brézis-Nirenberg-Stampacchia [18] définie pour l'étude des inéquations variationnelles. Elle représente en fait une relaxation de la pseudomonotonie au sens de Brézis et un affaiblissement de la semicontinuité inférieure et supérieure (Lemme 5.2.1) (voir [53],[28]).*

Pour la démonstration du Théorème 5.2.2, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 5.2.4. *Soient X et Y deux espaces vectoriels topologiques de Hausdorff et $U \subset X$, $V \subset Y$ deux sous-ensembles convexes et non vides. Soit $f : U \times V \to Z$ une fonction vectorielle telle que*

(i) *Pour tout $v \in V$, la fonction $x \mapsto f(x, v)$ est proprement C-quasi-convex et C-semi-continue inférieurement sur l'enveloppe convexe de toute partie finie de U.*

(ii) *Pour tout $u \in U$, la fonction $y \mapsto f(u, y)$ est proprement C-quasi-concave et C-semi-continue supérieurement sur l'enveloppe convexe de toute partie finie de V.*

Alors pour tout sous-ensemble fini E de U et tout sous-ensemble fini F de V, il existe $x_0 \in co(E)$ et $y_0 \in co(F)$ tels que

$$\begin{aligned} f(u, y_0) - f(x_0, y_0) &\in (-intC)^c \quad \forall\, u \in co(E) \quad et \\ f(x_0, y_0) - f(x_0, v) &\in (-intC)^c \quad\quad \forall v \in co(F). \end{aligned}$$

Preuve. Posons $K := U \times V$. Considérons, pour tout $(x, y) \in K$, les ensembles suivants

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \{u \in U : \quad f(x, y) - f(u, y) \in (-intC)^c\} \\ L(x, y) &= \{v \in V : \quad f(x, v) - f(x, y) \in (-intC)^c\}. \end{aligned}$$

On remarque que $x \in T(x, y)$ et $y \in L(x, y)$ pour tout $(x, y) \in K$, il s'en suit que l'ensemble $T(x, y) \times L(x, y)$ est non vide. Soient E et F deux sous-ensembles finis de U et V respectivement. On considère pour tout $(x, y) \in co(E \times F)$ l'ensemble suivant

$$W(x, y) = \{(u, v) \in co(E \times F) : \quad u \in T(x, y) \quad \text{et} \quad v \in L(x, y)\}.$$

On montre que la famille $\{W(x, y)\}_{(x,y)\in co(E\times F)}$ satisfait les conditions du Théorème 1.2.3. Pour cela, nous avons :

(a) $W(x, y)$ est un fermé pour tout $(x, y) \in co(E \times F)$. En effet, soient $\{(u_\alpha, v_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ une suite de point de $W(x, y)$, $\overline{u}$ une valeur d'adhérence de $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ dans $co(E)$ et $\overline{v}$ une valeur d'adhérence de $\{v_\alpha\}_{\alpha\in I}$ dans $co(F)$. Raisonnons par l'absurde, on suppose que $(\overline{u}, \overline{v})$ n'appartient pas à $W(x, y)$, c-à-d $\overline{u} \notin T(x, y)$ ou $\overline{v} \notin L(x, y)$. Alors il existe $d \in intC$ tel que $f(x, y) - f(\overline{u}, y) = -d$. Puisque $f(\cdot, y)$ est C-semi-continue inférieurement pour tout $y \in V$, alors il existe un voisinage ouvert $U_{\overline{u}}$ de $\overline{u}$ tel que pour tout $d' \in intC$, il existe α_0 dans I tel que

$$\alpha \geq \alpha_0 \quad \Rightarrow \quad u_\alpha \in U_{\overline{u}} \quad et \quad - f(u_\alpha, y) \in -f(\overline{u}, y) + d' - intC.$$

Prenons $d' = d$, on a

$$f(x, y) - f(u_\alpha, y) \in -intC.$$

Ce qui est contraire à l'hypothèse $u_\alpha \in T(x, y)$. Ainsi, $\overline{u} \in T(x, y)$. De façon similaire, on montre que $\overline{v} \in L(x, y)$.

(b) Puisque $co(E) \times co(F)$ est un compact et $X \times Y$ un espace de Hausdorff, alors $W(x, y)$ est un fermé dans $co(E) \times co(F)$, par conséquent c'est un compact dans $X \times Y$.

(c) Montrons que si $\{x_1, ..., x_n\} \subset co(E)$ et $\{y_1, ..., y_m\} \subset co(F)$, alors

$$co(\{x_1, ..., x_n\} \times \{y_1, ..., y_m\}) \subset \bigcup_{i=1,j=1}^{n,m} W(x_i, y_j).$$

Raisonnons par l'absurde, si l'inclusion était fausse, alors il existe un sous ensemble fini $\{x_1, ..., x_n\} \times \{y_1, ..., y_m\} \subset co(E \times F)$ tel que

$$co(\{x_1, ..., x_n\} \times \{y_1, ..., y_m\}) \not\subset \bigcup_{i=1,j=1}^{n,m} W(x_i, y_j).$$

Alors il existe $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in co(\{x_1, ..., x_n\})$ et $v = \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j \in co(\{y_1, ..., y_m\})$ avec $\lambda_i, \beta_j \geq 0 \ \forall i, j$ et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ et $\sum_{j=1}^{m} \beta_j = 1$ tels que $u \notin T(x_i, y_j)$ ou $v \notin L(x_i, y_j)$ pour tout $i = 1, 2, ..., n$ et $j = 1, 2, ..., m$.
On considère le cas où $u \notin T(x_i, y_j)$ pour tout $i = 1, 2, ..., n$ et $j = 1, 2, ..., m$. Soit $j \in \{1, 2, ..., m\}$ fixé, comme $u \in T(u, y_j)$, alors

$$f(u, y_j) - f(u, y_j) \notin -intC.$$

Puisque $f(\cdot, y)$ est proprement C-quasi-convexe, alors d'après le Lemme 1.4.13, il existe $x_i \in \{x_1, ..., x_n\}$ tel que $f(x_i, y_j) - f(u, y_j) \notin -intC$, ce qui contredit $u \notin T(x_i, y_j)$. Par le même raisonnement, on montre que $v \notin L(x_i, y_j)$ conduit à une contradiction pour tout $i = 1, 2, ..., n$ et $j = 1, 2, ..., m$. D'où, W est une application de KKM. Par application du Théorème 1.2.3, on déduire que

$$\bigcap_{(x,y)\in E\times F} W(x, y) \neq \emptyset.$$

Soit $(u_0, v_0) \in \bigcap_{(x,y)\in E\times F} W(x, y)$, alors

$$u_0 \in T(x, y) \quad et \quad v_0 \in L(x, y) \quad \text{pour tout } (x, y) \in E \times F. \tag{5.2}$$

Ce qui termine la preuve en prenant $y = v_0$ et $x = u_0$ dans la relation (5.2). □

Démonstration du Théorème 5.2.2. Commençons par le cas où U et V sont deux compacts de X et Y respectivement. Posons $K := U \times V$, K est un sous-ensemble compact de $X \times Y$. Notons par $\mathfrak{F}$ la famille des sous-ensembles finis non vides de K. Pour tout $E \times F \in \mathfrak{F}$, on considère l'ensemble suivant

$$M_{E\times F} = \{(u, v) \in K, \quad u \in T(x, y) \quad \text{et} \quad v \in L(x, y), \quad \text{pour tout } \ (x, y) \in co(E) \times co(F)\}.$$

D'après le Lemme 5.2.4, $M_{E\times F}$ est non vide pour tout $E \times F \in \mathfrak{F}$. Montrons que

$$\bigcap_{E\times F\in\mathfrak{F}} \overline{M}_{E\times F} \neq \emptyset.$$

Puisque K est compact, alors il suffit de monter que la famille $\mathfrak{M} = \{\overline{M}_{E\times F} : \ E \times F \in \mathfrak{F}\}$ possède la propriété de l'intersection finie. En effet, soient $E_1 \times F_1$, $E_2 \times F_2 \in \mathfrak{F}$ et $E \times F = (E_1 \times F_1) \cup (E_2 \times F_2)$. D'après la définition de $\overline{M}_{E\times F}$, il est facile de voir que

$$M_{E\times F} \subset M_{E_1\times F_1} \cap M_{E_2\times F_2} \text{ et que } \emptyset \neq \overline{M}_{E\times F} \subset \overline{M}_{E_1\times F_1} \cap \overline{M}_{E_2\times F_2}.$$

Ce qui montre que la famille $\mathfrak{M}$ possède la propriété de l'intersection finie.
Soit $(u_0, v_0) \in \bigcap_{E\times F\in\mathfrak{F}} \overline{M}_{E\times F}$. Pour tout $(u, v) \in K$ arbitraire, on considère $\widehat{Y} = \{(u_0, v_0), (u, v)\}$. Puisque $(u_0, v_0) \in \overline{M}_{\widehat{Y}}$, alors il existe une suite généralisée $\{(u_\alpha, v_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ dans $M_{\widehat{Y}}$ tel que $u_\alpha \to u_0$ et $v_\alpha \to v_0$. D'après la définition de $M_{\widehat{Y}}$, on a

$$u_\alpha \in T(tu+(1-t)u_0, tv+(1-t)v_0) \text{ et}$$
$$v_\alpha \in L(tu+(1-t)u_0, tv+(1-t)v_0),$$
$$\text{pour tout } \alpha \in I \text{ et } 0 \le t \le 1.$$

Par conséquent, pour tout $\alpha \in I$, on a

$$f(tu+(1-t)u_0, tv+(1-t)v_0) - f(u_\alpha, tv+(1-t)v_0) \notin -intC \quad \text{et}$$
$$f(tu+(1-t)u_0, v_\alpha) - f(tu+(1-t)u_0, tv+(1-t)v_0) \notin -intC$$
$$\text{pour tout } \alpha \in I \text{ et } 0 \le t \le 1.$$

On déduit de la condition (iii),

$$f(u, v_0) - f(u_0, v_0) \notin -intC \;\text{ et}$$
$$f(u_0, v_0) - f(u_0, v) \notin -intC.$$

Dans le cas où U et V ne sont pas des compacts dans X et Y respectivement, on considère, pour tout $E \times F \in \mathfrak{F}$, l'ensemble suivant

$$M_{E\times F} = \{(u,v) \in N \times M,\ u \in T(x,y) \text{ et } v \in L(x,y), \text{ pour tout } (x,y) \in co(E \cup \widetilde{N}) \times co(F \cup \widetilde{M})\}.$$

Puisque $co(E \cup \widetilde{N})$ et $co(F \cup \widetilde{M})$ sont des compacts, pour tout $E \times F \in \mathfrak{F}$, alors grâce à la première étape de la démonstration, il existe $(\widetilde{u}, \widetilde{v}) \in co(E \cup \widetilde{N}) \times co(F \cup \widetilde{M})$ tel que

$$f(u, \widetilde{v}) - f(\widetilde{u}, \widetilde{v}) \notin -intC \;\text{ pour tout } u \in co(E \cup \widetilde{N}) \text{ et}$$
$$f(\widetilde{u}, \widetilde{v}) - f(\widetilde{u}, v) \notin -intC \;\text{ pour tout } v \in co(F \cup \widetilde{M}).$$

Puisque $\widetilde{N} \times \widetilde{M} \subset co(E \cup \widetilde{N}) \times co(F \cup \widetilde{M})$ et grâce à la condition de coercivité (iv), on en déduit que $(\widetilde{u}, \widetilde{v}) \in N \times M$. Ce qui montre que $M_{E\times F} \neq \emptyset$ pour tout $E \times F \in \mathfrak{F}$. Un argument similaire à ce qui précède permet de montrer que la famille $\mathbb{M} = \{\overline{M}_{E\times F} : \quad E \times F \in \mathfrak{F}\}$ possède la propriété de l'intersection finie et grâce à la compacité de $N \times M$, on en déduit $\bigcap_{E\times F \in \mathfrak{F}} \overline{M}_{E\times F} \neq \emptyset$.
Soit $(u_0, v_0) \in \bigcap_{E\times F \in \mathfrak{F}} \overline{M}_{E\times F}$. Pour tout $(u,v) \in K$, considérons $\widehat{Y} = \{(u_0,v_0),(u,v)\}$. Puisque $(u_0, v_0) \in \overline{M}_{\widehat{Y}}$, il existe une suite généralisée $\{(u_\alpha, v_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ dans $M_{\widehat{Y}}$ tel que $(u_\alpha, v_\alpha) \to (u_0, v_0)$. A partir de la définition de $M_{\widehat{Y}}$, on a

$$u_\alpha \in T(tu+(1-t)u_0, tv+(1-t)v_0)$$
$$v_\alpha \in L(tu+(1-t)u_0, tv+(1-t)v_0)$$
$$\text{pour tout } \alpha \in I \text{ et } 0 \le t \le 1\ .$$

Par conséquent, on a

$$f(tu+(1-t)u_0, tv+(1-t)v_0) - f(u_\alpha, tv+(1-t)v_0) \notin -intC$$
$$f(tu+(1-t)u_0, v_\alpha) - f(tu+(1-t)u_0, tv+(1-t)v_0) \notin -intC$$
$$\text{pour tout } \alpha \in I \text{ et } 0 \le t \le 1.$$

D'après la condition (iii), on déduit

$$\begin{gathered} f(u,v_0) - f(u_0,v_0) \notin -intC \text{ et} \\ f(u_0,v_0) - f(u_0,v) \notin -intC. \end{gathered}$$

Ce qui termine la démonstration. □

Comme conséquence du théorème précédent, nous obtenons le résultat d'existence suivant dans le cas scalaire.

Corollaire 5.2.5. *Soient U et V deux sous-ensembles convexes non vides des espaces vectoriels topologiques de Hausdorff X et Y respectivement. Soit $f : U \times V \to I\!R$ une fonction à valeur réelle telle que*

(i) *Pour tout $v \in V$, la fonction $u \mapsto f(u,v)$ est quasi-convexe et semi-continue inférieurement sur l'enveloppe convexe de tout sous ensemble fini de U.*

(ii) *Pour tout $u \in U$, la fonction $v \mapsto f(u,v)$ est quasi-concave et semi-continue supérieurement sur l'enveloppe convexe de tout sous ensemble fini de V.*

(iii) *Pour tout $(u,v) \in U\times V$ et toute suite généralisée $\{(u_\alpha,v_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ dans $U\times V$ convergente vers (u_0,v_0), si*

$$f(u_\alpha, tv+(1-t)v_0) \leq f(tu+(1-t)u_0, tv+(1-t)v_0) \leq f(tu+(1-t)u_0, v_\alpha)$$
$$\text{pour tout } \alpha \in I \text{ et } 0 \leq t \leq 1$$

alors

$$f(u_0,v) \leq f(u_0,v_0) \leq f(u,v_0).$$

(iv) *(Coercivité) Il existe un compact $N \times M \subset U \times V$ et un compact convexe non vide $\widetilde{N} \times \widetilde{M} \subset U \times V$ tels que si $(u,v) \in (N \times M)^c \cap U \times V$, alors $f(u,\widetilde{v}) - f(\widetilde{u},\widetilde{v}) < 0$ et $f(\widetilde{u},\widetilde{v}) - f(\widetilde{u},v) < 0$ pour $(\widetilde{u},\widetilde{v}) \in \widetilde{N} \times \widetilde{M}$.*

Alors il existe $(\overline{u},\overline{v}) \in U \times V$ tel que

$$f(\overline{u},v) \leq f(\overline{u},\overline{v}) \leq f(u,\overline{v}) \quad \text{pour tout} \quad (u,v) \in (U \times V).$$

5.2.2 Résultat d'existence dans un espace paracompact

On souhaite résoudre le problème (5.1) dans un espace paracompact, nous obtenons un résultat d'existence en utilisant la notion de la partition de l'unité. Plus précisément, en s'inspirant du travail de El Arni [4], on établi un résultat d'existence pour les problèmes du point selle vectorielle dans le cadre d'espace paracompact. On commence d'abord par rappeler quelques définitions et propriétés relatives aux espaces paracompacts.

Définition 5.2.6. *Soit X un espace topologique de Hausdorff.*

(i) *Un recouvrement ouvert* $\{U_i\}_{i\in I}$ *est dit localement fini si tout point de* X *admet un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini d'ouverts de* U_i.

(ii) *Un recouvrement ouvert* $\{V_j\}_{j\in J}$ *est dit plus fin que le recouvrement* $\{U_i\}_{i\in I}$ *si pour tout* $j \in J$, *il existe* $i \in I$ *tel que* $V_j \subset U_i$.

Définition 5.2.7. *Un espace topologique de Hausdorff* X *est dit paracompact si pour tout recouvrement ouvert de* X, *il existe un recouvrement localement fini plus fin.*

Remarque 5.2.8. (a) *Tout compact est un paracompact et tout espace métrique est un paracompact, voir [1, p.68].*

(b) *Tout fermé d'un espace paracompact est un paracompact.*

Définition 5.2.9. *Soit* β *une fonction définie sur un espace topologique* X *à valeurs réelles. On appelle support de* β *et on note* $supp(\beta)$ *le plus petit ensemble* S *tel que* $\beta(x) = 0$, $x \notin S$.

Définition 5.2.10. *Soit* X *un espace topologique de Hausdorff. Considérons un recouvrement d'ouverts* $\{V_i\}_{i\in I}$ *de* X. *On appelle partition continue de l'unité subordonnée associée à ce recouvrement une famille* $\{\beta_i\}_{i\in I}$ *de fonctions continues de* X *dans* $[0, 1]$ *telle que*

(i) *Pour tout* $i \in I$, $Supp(\beta_i) \subset V_i$ *;*

(ii) *La famille* $\{Supp(\beta_i)\}_{i\in I}$ *est localement finie ;*

(iii) *Pour tout* $x \in X$, $\sum_{i\in I} \beta_i(x) = 1$.

Le théorème suivant donne une caractérisation des espaces paracompacts (Voir [1, p. 68]).

Théorème 5.2.11. *[1] Un espace topologique de Hausdorff* X *est paracompact si et seulement si tout recouvrement d'ouverts de* X *admet une partition continue de l'unité finie et unique.*

On montre le théorème suivant.

Théorème 5.2.12. *Soient* U *et* V *deux convexes non vides de deux espaces topologiques vectoriels de Hausdorff respectivement tels que* $U \times V$ *est paracompact dans* $X \times Y$. *Soit* $f : U \times V \to Z$ *une fonction vectorielle telle que*

(i) *Pour tout* $v \in V$, $f(\cdot, v)$ *est proprement* C*-quasi-convexe et* C*-semi-continue inférieurement ;*

(ii) *Pour tout* $u \in U$, $f(u, \cdot)$ *est proprement* C*-quasi-concave et* C*-semi-continue supérieurement ;*

(iii) *(Coercivité) Il existe un compact* $(N \times M) \subset (U \times V)$ *et un compact convexe non vide* $(\widetilde{N} \times \widetilde{M}) \subset (U \times V)$ *tels que si* $(u, v) \in (N \times M)^c \cap (U \times V)$, *alors* $f(u, \widetilde{v}) - f(\widetilde{u}, \widetilde{v}) \in -intC$ *et* $f(\widetilde{u}, \widetilde{v}) - f(\widetilde{u}, v) \in -intC$ *pour* $(\widetilde{u}, \widetilde{v}) \in \widetilde{N} \times \widetilde{M}$.

Alors, le problème (5.1) admet une solution.

Démonstration. Posons $K := U \times V$. Pour tout $(x,y) \in K$, on considère les ensembles

$$T(x,y) = \{u \in U : \quad f(x,y) - f(u,y) \in (-intC)^c\}$$

$$L(x,y) = \{v \in V : \quad f(x,v) - f(x,y) \in (-intC)^c\}.$$

Il est facile de voir que $x \in T(x,y)$ et $y \in L(x,y)$ pour tout $(x,y) \in K$, alors l'ensemble $T(x,y) \times L(x,y)$ n'est pas vide.
Soit, pour tout $(x,y) \in K$, l'ensemble

$$W(x,y) = \{(u,v) \in N \times M : \quad u \in T(x,y) \quad et \quad v \in L(x,y)\}.$$

Montrons que

$$\bigcap_{(x,y)\in K} W(x,y) \neq \emptyset.$$

Raisonnons par l'absurde. Supposons que l'intersection est vide. Alors pour tout $(\overline{u},\overline{v}) \in K$, il existe $(x,y) \in K$ tel que $(\overline{u},\overline{v}) \notin W(x,y)$. En utilisant le théorème de séparation de Hahn-Banach, il existe $p \in (X \times Y)^*$ tel que

$$\langle p, (\overline{u},\overline{v})\rangle > \sup_{(w,t)\in W(x,y)} \langle p, (w,t)\rangle.$$

On en déduit

$$(\overline{u},\overline{v}) \in V_p = \{(u,v) \in K : \exists\ (x,y) \in K/\ \langle p, (u,v)\rangle > \langle p, (w,t)\rangle,\ \forall (w,t) \in W(x,y)\}.$$

Il est facile de vérifier que V_p est un ouvert. Par conséquent $\{V_p : \ p \in (X \times Y)^*\}$ est un recouvrement d'ouverts de K. Puisque $K = U \times V$ est paracompact, il existe une partition continue de l'unité subordonnée $\{\beta_p\}_{p\in(X\times Y)^*}$ associée à ce recouvrement.
Considérons, par la suite, une fonction réelle $\varphi : K \times K \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi\left((u,v),(w,t)\right) = \sum_{p\in(X\times Y)^*} \beta_p(u,v)\langle p, (w,t) - (u,v)\rangle.$$

On note qu'une telle somme est finie car pour tout $(u_0,v_0) \in K$ il existe un voisinage $\mathcal{V}(u_0,v_0)$ de (u_0,v_0) et $p_1,...,p_n \in (X \times Y)^*$ tels que pour tout $(u,v) \in \mathcal{V}(u_0,v_0)$,

$$\varphi\left((u,v),(w,t)\right) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{p_i}(u,v)\langle p_i, (w,t) - (u,v)\rangle \quad \text{pour tout} \quad (w,t) \in K.$$

La fonction φ est convexe par rapport au second argument, alors la condition (ii) du Lemme 1.2.9 est vérifiée. En plus, pour tout $(t,w) \in K$, la fonction $(u,v) \mapsto \varphi\left((u,v),(w,t)\right)$ est continue, d'où elle est C- semi-continue supérieurement sur K. Maintenant, considérons les

ensembles $A = N \times M$ et $B = \widetilde{N} \times \widetilde{M}$. Alors A est un compact de K et B est un compact convexe de K.
Soit $(u, v) \in A$, grâce à la condition de coercivité (iii), il existe $(x_0, y_0) \in B$ tel que $u \notin T(x_0, y_0)$ et $v \notin L(x_0, y_0)$. Par conséquent $(u, v) \notin W(x_0, y_0)$, par l'application du Théorème de séparation de Hahn-Banach, il existe $q \in (X \times Y)^*$ tel que $\langle q, (w, t) - (u, v)\rangle < 0$ pour tout $(w, t) \in W(x_0, y_0)$. Soit la famille finie $\{q, p_1, ..., p_n\} \subset (X \times Y)^*$ telle que

$$\varphi\left((u, v), (w, t)\right) = \beta_q(u, v)\langle q, (w, t) - (u, v) + \sum_{i=1}^{n} \beta_{p_i}(u, v)\langle p_i, (w, t) - (u, v)\rangle,$$

pour tout $(w, t) \in W(x_0, y_0)$. Puisque $\{\beta_p\}_{p\in(X\times Y)^*}$ est une partition de l'unité, alors $\beta_q(u, v) > 0$ ou $\beta_{p_i}(u, v) > 0$ pour un indexe $i \in \{1, ..., n\}$. Par conséquent, $\varphi((u, v), (w, t)) < 0$ pour tout $(w, t) \in W(x_0, y_0)$ si $\beta_q(u, v) > 0$. D'une part , supposons pour un certain i que $\beta_{p_i}(u, v) > 0$. Alors d'après la condition (iv) et la définition de $V(p_i)$, il existe $(x, y) \in K$ tel que $\varphi((u, v), (w, t)) < 0$ pour tout $(w, t) \in W(x, y)$. Donc, on déduit du Lemme 1.2.9, qu'il existe $(\overline{u}, \overline{v}) \in K$ tel que

$$\varphi((\overline{u}, \overline{v}), (w, t)) \geq 0 \;\text{ pour tout }\; (w, t) \in K. \tag{5.3}$$

Soit $\{r_1, ..., r_m\} \subset (X \times Y)^*$ tel que

$$\varphi\left((\overline{u}, \overline{v}), (w, t)\right) = \sum_{i=1}^{m} \beta_{r_i}(\overline{u}, \overline{v})\langle r_i, (w, t) - (\overline{u}, \overline{v})\rangle,$$

pour tout $(w, t) \in K$.
Si $\beta_{r_i}(\overline{u}, \overline{v}) > 0$ pour un certain i, alors $(\overline{u}, \overline{v}) \in V(r_i)$. Donc il existe $(x, y) \in K$ tel que $\langle r_i, (w, t) - (\overline{u}, \overline{v})\rangle < 0$ pour tout $(w, t) \in W(x, y)$ ce qui contredit la relation (5.3). Par conséquent le problème (5.1) admet au moins une solution. $\square$

5.3 Exemples

Comme application des résultats précédents, on donne quelques exemples de fonctions vectorielles admettant des points selles.

Exemple 1. Soient $X = I\!R^N$ et $Y = I\!R$. Considérons les deux sous ensembles $U = [-1, 1]^N$ et $V = [-1, 1]$ des espaces X et Y respectivement. Soit $Z = l^\infty$. Définissons un cône C sur Z par

$$C := \{z \in Z \;:\; z_1 \geq \frac{1}{i}|z_i|, \quad i = 2, 3, ...\},$$

avec z_i est la ième composante du vecteur $z \in Z$. On considère une fonction vectorielle $f : U \times V \to Z$ définie par

$$f(x, y) = (y^2|x_1|, x_2, x_3, ..., x_n, ...).$$

Alors, U et V sont des ensembles convexes compacts de X et Y respectivement, C est un cône convexe saillant de Z.

(i) Pour tout $y \in V$, la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est C-quasi-convexe et C-semi-continue inférieurement sur U. En effet, soit $z \in Z$ et soient a et b deux éléments de $A(z) = \{x \in X \mid f(x,y) \in z - C\}$ avec $y \in Y$ fixé. Alors on a

$$z - f(a,y) \in C \quad \text{et} \quad z - f(b,y) \in C.$$

Pout tout $\alpha, \beta \geq 0$ tel que $\alpha + \beta = 1$, on a

$$z + \alpha f(a,y) + \beta f(b,y) \in C.$$

Comme $z_1 - y^2|a_1| \geq \frac{1}{i}|z_i - a_i|$ et $z_1 - y^2|b_1| \geq \frac{1}{i}|z_i - b_i|$ pour tout $i = 2, 3, ...$, alors

$$z_1 - y^2|\alpha a_1 + \beta b_1| \geq z_1 - y^2\alpha|a_1| - y^2\beta|b_1| \geq \frac{1}{i}(\alpha|z_i - a_i| + \beta|z_i - b_i|) \geq \frac{1}{i}(|z_i - \alpha a_i - \beta b_i|).$$

Alors, $\alpha a + \beta b \in A(z)$, ce qui prouve d'après la Définition 1.4.10 que $f(\cdot, y)$ est C-quasi convexe pour tout $y \in Y$ et grâce à la linéarité des composantes de la fonction f, on en déduit qu'elle est C-semi-continuité inférieurement sur U.

(ii) De même on montre aussi que pour tout $x \in U$, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est C-quasi-concave et C-semi-continue supérieurement sur V.

(iii) En plus, on a pour tout $(u,v) \in U \times V$ et toute suite généralisée $\{(u_\alpha, v_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ dans $U \times V$ convergente vers (u_0, v_0), si

$$\begin{gathered} f(tu + (1-t)u_0, tv + (1-t)v_0) - f(u_\alpha, tv + (1-t)v_0) \notin -intC \quad \text{et} \\ f(tu + (1-t)u_0, v_\alpha) - f(tu + (1-t)u_0, tv + (1-t)v_0) \notin -intC \\ \text{pour tout } \alpha \in I \text{ et } 0 \leq t \leq 1, \end{gathered}$$

alors

$$\begin{gathered} f(u, v_0) - f(u_0, v_0) \notin -intC \quad \text{et} \\ f(u_0, v_0) - f(u_0, v) \notin -intC\,; \end{gathered}$$

Donc f satisfait les hypothèses du Théorème 5.2.2, par conséquent f admet $(\theta_X, 0)$ comme point selle sur $U \times V$.

Exemple 2 Soient $X = Y = I\!R$ et $U = V = [0,3]$. Soit $Z = I\!R^3$, définissons un cône C sur Z par

$$C := \{(z_1, z_2, z_3) \in Z \;:\; z_1 = z_2, \quad z_3 \geq 0\}.$$

On considère une bifonction vectorielle $f : U \times V \to Z$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} (x - \sin(y), x - \sin(y), -x), & \text{si } x \in [0,1], \\ (3 - x + y, 3 - x + y, -x) & \text{si } x \in [1,2] \\ (x + 2, x + 2, y^2 - 4) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, U et V sont des convexes compacts de X et Y respectivement, C est un cône convexe saillant de Z et la fonction f satisfait les hypothèses du Théorème 5.2.2. Par conséquent, f admet $(2,2)$ comme point selle sur $U \times V$.

5.4 Commentaires

Dans ce chapitre, nous avons proposé deux méthodes pour l'étude d'un problème de point selle vectorielle. Dans un premier temps, nous avons donné une brève présentation de la condition de type Brézis-Nirenberg-Stampacchia dans un cadre vectoriel. Le but est de prouver des résultats d'existence d'un point selle vectoriel par une méthode directe sans passer par la procédure de la scalarisation. Dans la deuxième partie, notre contribution consiste à établir un résultat d'existence de point selle vectoriel dans un espace paracompact. Pour bien mener ce travail, nous nous sommes appuyé sur les travaux suivants [17],[56], [6], [34], [96], [28], [22].

Nous signalons qu'un traitement similaire peut être adapté pour l'étude des problèmes de point-selle vectoriels suivants : (voir [59])

$$(PSV)_1 \begin{cases} \text{Trouver } (u_0, v_0) \in U \times V & \text{tel que} \\ f(u, v_0) - f(u_0, v_0) \notin -intC & \forall u \in U \ et \\ f(u_0, v_0) - f(u_0, v) \in C & \forall v \in V, \end{cases}$$

$$(PSV)_2 \begin{cases} \text{Trouver } (u_0, v_0) \in U \times V & \text{tel que} \\ f(u, v_0) - f(u_0, v_0) \in C & \forall u \in U \ et \\ f(u_0, v_0) - f(u_0, v) \notin -intC & \forall v \in V, \end{cases}$$

$$(PSV)_3 \begin{cases} \text{Trouver } (u_0, v_0) \in U \times V & \text{tel que} \\ f(u, v_0) - f(u_0, v_0) \in C & \forall u \in U \ et \\ f(u_0, v_0) - f(u_0, v) \in C & \forall v \in V. \end{cases}$$

Conclusion et perspectives

Ce manuscrit résume les quatres années de thèse que j'ai effectuées au sein du laboratoire LAMA-Département de Mathématiques et Informatique de l'université IBN ZOHR, sous la direction du professeur Ouayl CHADLI.

Cette thèse est divisée en deux parties : la première traite le côté algorithmique des problèmes d'équilibres dans un cadre général d'espace de Banach. Pour ce faire un concept du principe auxiliaire a été utilisé. L'extension de ce concept au cadre des problèmes d'équilibre présente plusieurs intérêts d'ordre théoriques et numérique entre autre. En effet, il permet de retrouver les principaux algorithmes d'optimisation dans un cadre unifié où l'étude de convergence a été effectuée une fois pour toute. Ainsi qu'il réside dans le conditionnement numérique des problèmes d'optimisation et des inéquations variationnelles. La seconde partie sera consacrée à l'étude de l'existence de la solution pour un problème du point selle dans un cadre vectoriel.

Les chapitres 2 et 3 ont permis de vérifier l'applicabilité de cette méthode bien connue pour les problèmes d'optimisations et les inéquations variationnelles, à un problème d'équilibre et un problème d'équilibre à deux niveaux. Notre but est d'établir une nouvelle étude approximative aux problèmes d'équilibres à deux niveaux via un seul algorithme. Les résultats obtenus présentent plus de points avantageux que ceux trouvés par Moudafi [74]. Celui-ci a proposé un algorithme proximal dans un cadre d'espace de Hilbert où la suite générée par l'algorithme converge faiblement vers une solution du problème en supposant la suite $\{x_n\}$ générée par l'algorithme vérifie une condition du type $\|x_n - x_{n+1}\| = \theta(\varepsilon_n)$. Cette condition est non réalisable car on ne peut pas à priori estimer $\|x_n - x_{n+1}\|$. Notre approche est aussi plus intéressante que celle proposée par Ding [36] qui consiste à utiliser le principe auxiliaire en fournissant deux algorithmes pour chaque niveau. Plus précisément, Ding [36] présente une étude constitue de deux algorithmes séparés en imposant des conditions de la forte monotonie sur les bifonctions du problème.

Dans le quatrième chapitre, nous appliquons le principe auxiliaire de nouveau pour suggérer un algorithme pour étudier un système des problèmes d'équilibres généralisés. L'approche utilisée dans ce chapitre permet d'améliorer de nouveaux résultats dans la littérature liés aux problèmes étudiés.

Enfin, le chapitre 5 présente une étude d'existence des solutions pour un problème du point selle dans un espace vectoriel ordonné par un cône. On propose deux méthodes pour cette étude. La première méthode consiste à introduire une condition de type Brézis-Nirenberg-Stampacchia [18] étendue au cadre vectoriel ainsi qu'une relaxation de la notion de C-semicontinuité introduite par Tanaka [87]. Dans la seconde approche, nous établissons un résultat d'existence pour le problème de point selle vectoriel dans un espace paracompact en faisant appel à la notion de la partition de l'unité. La seconde partie traite l'étude de l'existence de la solution d'un problème du point selle vectoriel. Ces résultats seront étudiés à l'aide des résultats du théorème de KKM [97] et une condition de type Brézis-Nirenberg-Stampacchia [18] étendue au cadre vectoriel. Dans un deuxième temps, nous avons étudié ce résultat d'existence de solution dans un espace paracompact en utilisant la notion de la partition de l'unité.

Les principales perspectives de recherche qui apparaissent à l'issue de cette thèse concernent la réutilisabilité de notre travail, à travers la théorie des jeux noncooperatifs en faisant appel au théorème de Berge dans un cadre vectoriel. On s'intéresse donc à traiter les problèmes d'équilibres de Nash et l'équilibre de Berge dans un cadre vectoriel.

Bibliographie

[1] C. D. Aliprantis and K. C. Border. *Infinite dimensional analysis : A hitchhiker's guide.* Berlin : Springer-Verlag, 3d, 2006.

[2] G. Allen. Variational inequalities, complementarity problems, and duality theorems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 58 :1–10, 1977.

[3] A.S. Antipin. The fixed points of extremal maps : computation by gradient methods, zh.vychisl. *Mat. Fiz.*, 37(1) :pp. 42–53, 1997.

[4] A. El Arni. Generalized quasi-variational inequalities with non-compact sets. *Journal of Math. Anal. Appl*, 241 :pp. 189–197, 2000.

[5] H. Attouch. Viscosity solutions of minimization problems. *SIAM Optimization*, 6 :769–806, 1996.

[6] J. P. Aubin. Mathematical methods of game and economic theory. *Studies in Mathematics and its Applications*, North Holland, vol.7, 1979.

[7] J.P. Aubin. *Optima and Equilibria, An introduction to nonlinear analysis.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1993.

[8] A. Auslender. *Optimisation : Méthodes Numériques.* Masson. Paris, 1976.

[9] A. Auslender, M. Teboule, and S. Ben-Tiba. Interior proximal and multiplier methods based on second order homogeneous kernels. *Journal of Math. Oper. Res*, 24 :654–668, 1999.

[10] C. Baiocchio and A. Capelo. Variational and quasivariational inequalites : Applications to free boundary problems. *John Wiley and Sons, New York*, 1984.

[11] H. Ben-El-Mechaiekh, P. Deguire, and A. Granas. Une alternative non linéaire en analyse convexe et applications. *Compte rendu de l'Académie des Sciences Paris Série I*, 295, 1982.

[12] M. Bianchi, N. Hadjisavvas, and S. Schaible. Vector equilibrium problems with generalized monotone bifunctions. *Journal of Optim. Theory App.*, 92 :527–542, 1997.

[13] M. Bianchi and R. Pini. Coercivity conditions for equilibrium problems semi-groups. *Journal of Optim. Theory Appl.*, 2005.

[14] M. Bianchi and S. Schaible. Generalized monotone bifunctions and equilibrium problems. *Journal of Optim. Theory Appl.*, 90 :31–43, 1996.

[15] E. Blum and W. Oettli. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems. *The Mathematics Student*, 63 :123–145, 1994.

[16] A. Bnouhachem and M.A. Noor. A new iterative method for variational inequalities. *Journal of Comput. Math. Appl.*, 182 :1673–1682, 2006.

[17] H. Brézis. Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité. *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, 18 :123–145, 1968.

[18] H. Brézis, L. Nirenberg, and G. Stampacchia. A ramark on ky fan's minmax principale. *Boll. Un. Mat. Ital.*, 6 :293–300, 1972.

[19] M. Pappalardo B.S. Mordukhovich, B. Panicucci. Hybrid proximal methods for equilibrium problems. *Journal of Optim. Lett.*, DOI 10.1007/s11590-011-0348-5, 2011.

[20] O. Chadli, Z. Chbani, and H. Riahi. Some existence results for coercive and noncoercive hemivariational inequalities. *Journal of Applicable Analysis*, 69(1-2) :125–131, 1998.

[21] O. Chadli, Z. Chbani, and H. Riahi. Recession methods for equilibrium problems and application to variational and hemivariational inequalities. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 5(1) :185–196, 1999.

[22] O. Chadli, Z. Chbani, and H. Riahi. Equilibrium problems with generalized monotone bifunctions and applications to variational inequalities. *Journal of Optim. Theory Appl.*, 105(2) :299–323, 2000.

[23] O. Chadli, Y. Chiang, and S. Huang. Topological pseudomonotonicity and vector-valued equilibrium problems. *Journal of Math. Anal. Appl.*, 270 :435–450, 2002.

[24] O. Chadli, I.V. Konnov, and J.C. Yao. Descent methods for equilibrium problems in a banach space. *Journal of Comput. Math. Appl.*, 49 :609–616, 2004.

[25] O. Chadli and H. Mahdioui. Existence results for vector saddle points problems. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 16(2) :429–444, April 2012.

[26] O. Chadli, H. Mahdioui, and J. C. Yao. Bilevel mixed equilibrium problems in banach spaces : existence and algorithmic aspects. *Journal of Numerical Algebra, Control and optimization*, 1(3) :549–561, September 2011.

[27] O. Chadli, X. Q. Yang, and J.C. Yao. On generalized vector pre-variational and prequasivariational inequalities. *Journal of Math. Anal. Appl.*, 295 :392–403, 2004.

[28] O. Chadli and J. C. Yao. Pseudomonotone complementarity problems and variational inequalities. *in Handbook of Generalized Convexity and Generalized Monotonicity*, 76 :501–558, 2005.

[29] K. L. Chew. Maximal points with respect to cone dominance in banach spaces and their existence. *Journal of Optim. Theory Appl.*, 44 :1–53, 1984.

[30] G. Cohen. Optimization by decomposition and coordination : A unified approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 23 :222–232, 1978.

[31] G. Cohen. Auxiliary problem principle and decomposition of optimization problems. *Journal of Optim. Theory Appl.*, 32 :pp. 277–305, 1980.

[32] G. Cohen. Auxiliary problem principle extended to variational inequalities. *Journal of Optim. Theory Appl.*, 59 :325–333, 1988.

[33] P.L. Combettes and S.A. Hirstoaga. Equilibrium programming using proximal-like algorithms. *Journal of Math. Program.*, 78 :29–41, 1997.

[34] P. Deguire, K. K. Tan, and G. X. Z. Yuan. The study of maximal elements, fixed points for ls-majorized mappings and their applications to minimax and variational inequalities in product topological spaces. *Journal of Nonlinear Analysis*, 37(7) :933–951, 1999.

[35] X. P. Ding. System of generalized vector quasi-variational inclusions and generalized vector quasioptimizations in locally fc-uniform spaces. *Journal of Appl. Math. Mech.*, 30(3) :263–274, 2009.

[36] X. P. Ding. Auxiliary principle and algorithm for mixed equilibrium problems and bilevel mixed equilibrium problems in banach spaces. *Journal of Optim. Theory. Appl.*, 146 :347–357, 2010.

[37] X. P. Ding. Auxiliary principle and approximation solvability for system of new generalized mixed equilibrium problems in reflexive banach spaces. *Journal of Appl. Math. Mech-Engl. Ed*, DOI 10.1007/s10483-011-1409-9, 2011.

[38] X. P. Ding and Y.C. Liou. Bilevel optimization problems in topological spaces. *Taiwanese Journal of Math.*, 10(1) :173–179, 2006.

[39] X. P. Ding and Z.B. Wang. The auxiliary principle and an algorithm for a system of generalized set-valued mixed variational-like inequality problems in banach spaces. *Journal of Comput. Appl. Math.*, 233 :2876–2883, 2010.

[40] J. Eckstein and D.P. Bertsekas. On the douglas-rachford splitting method and the proximal point algorithm for maximal monotone operators. *Journal of Mathematical Programming*, 55 :293–318, 1992.

[41] K. Fan. A generalization of tychonoff's fixed point theorem. *Journal of Math. Ann.*, 142, 1961.

[42] K. Fan. A minimax inequality and its applications. *In : O. Shesha, (ed) Inequalities III, Academic Press, New York*, pages 103–113, 1972.

[43] K. Fan. Some properties of convex sets related to fixed point theorems. *Journal of Math. Ann.*, pages 519–537, 1984.

[44] F. Ferro. A minimax theorem for vector-valued functions. *Journal of Optim. Theory Appl.*, 60(1) :19–31, 1989.

[45] X. Huang G. Chen and X.Q. Yang. *Vector Optimization : Set-valued and Variational Analysis*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer-Verlag Berlin Heildelberg, 2005.

[46] F. Giannessi and A. Maugeri, editors. *Generalized Monotonicity : Concepts and uses, In "Variational Inequalities and network Equilibrium Problems"*, volume 289-299. Plenum press, Proceeding of Erice Conference, 1995.

[47] E. Giusti. *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variations*. Birkhäuser, Basel, Switzerland, 1984.

[48] R. Glowinski, J.L. Lions, and R. Tremolieres. *Analyse Numérique des Inéquations Variationnelles*, volume Tome 1 :Théorie Générale, Premières Applications. Dunod, Paris, France, 1976.

[49] K. Goebel and W.A. Kirk. *Topics in Metric Fixed Point Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[50] B.S. He, Z. H. Yang, and X. M. Yuan. An approximate proximal-extragradient type method for monotone variational inequalities. *Journal of Math. Anal. Appl.*, 300 :362–374, 2004.

[51] A. Iusem and W. Sosa. New existence results for equilibrium problem. *Journal of Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, 52 :621–635, 2003.

[52] J. Jahn. *Vector Optimization-Theory, Applications and Extensions*. Springer, Second edition, New York, 2010.

[53] S. Karamardian. Complementarity problems over cones with monotone and pseudomonotone maps. *Journal of Optim. Theory. Appl.*, 18 :445–454, 1976.

[54] S. Karamardian and S. Schaible. Seven kinds of monotone maps. *Journal of Optim. Theory. Appl.*, 66 :37–46, 1990.

[55] S. Karamardian, S. Schaible, and J. P. Crouzeix. Characterizations of generalized monotone maps. *Journal of Optim. Theory. Appl.*, 76 :399–413, 1993.

[56] K. R. Kazmi and S. Khan. Existence of solutions for a vector saddle point problem. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 61 :201–206, 2000.

[57] K.R. Kazmi and F.A. Khan. Auxialiary problems and algorithm for a system of generalized variational-like inequality problems. *Journal of Appl. Math. Comput.*, 187 :789–796, 2007.

[58] K. Kimura. Existence results for cone saddle points by using vector-variational-like inequalities. *Nihonkai Journal of Math.*, 15(1) :23–32, 2004.

[59] K. Kimura and T. Tanaka. Existence theorem of cone saddle-points applying a nonlinear scalarization. *Taiwanese Journal of Math.*, 10(2) :563–571, 2006.

[60] I.V Konnov. Application of the proximal point method to nonmonotone equilibrium problems. *Journal of Optim. Theory Appl.*, 119 :317–333, 2003.

[61] I.V Konnov. Generalized monotone equilibrium problems and variational inequalities. in : Hadjisavvas n., komlosi, s., schaible, s. (eds.). *Handbook of generalized convexity and generalized monotonicity, :nonconvex optimization and applications. Springer, New York*, pages pp. 559–618., 2005.

[62] I.V. Konnov and S. Schaible. Duality for equilibrium problems under generalized monotonicity. *Journal of Optim. Theory. Appl.*, 104(2) :395–408(14), 2000.

[63] J. E. Martinez Legaz and W. Sosa. Duality for equilobrium problems. *Journa of Global Optimimzation*, 35 :311–319, 2006.

[64] Y. C. Liou and J. C. Yao. Bilevel decision via variational inequalities. *Journal of Comput. Math. Appl.*, 49 :1243–1253, 2005.

[65] D. T. Luc. On duality theory in multiobjective programming. *Journal of Optim. Theory Appl.*, 43(n.4), août 1984.

[66] D.T. Luc. *Theory of Vector Optimization, Lecture Notes in Economicsand Mathematical Systems*, volume 319. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[67] H. Mahdioui and O. Chadli. On a system of generalized mixed equilibrium problems involving variational-like inequalities in banach spaces : Existence and algorithmic aspects. *Advances in Operations Research*, (ID 843486) :18, 2012.

[68] B. Martinet. Regularization d'inéquations variationnelles par approximations successiûes. *Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationelle*, 4 :154–159, 1970.

[69] G. Mastroeni. Minimax and extremum problems associated to a variational inequality. *Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Parlemo*, Suppl. 58 :185–196, 1999.

[70] G. Mastroeni. Gap functions for equilibrium problems. *Journal of Global Optim.*, 27 :411–426, 2003.

[71] G. Mastroeni. On auxiliary principle for equilibrium problems. *in Equilibrium Problems and Variational Models*, In. Daniele, P. Giannessi, F., and Maugeri, A.(eds), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands. :289–298, 2003.

[72] G.J. Minty. On a monotonicity method for the solution of non linear equations in banach spaces. *Proc.Nat.Acad.Sci.U.S.A*, 50 :1038–1041, 1963.

[73] S. B. Mordukhovich, B. Panicucci, M. Pappalardo, and M. Passacantando. Hybrid proximal methods for equilibrium problems. *Journal of Optim. Lett.*, 10.1007(s11590-011-0348-5) :1–16, 2011.

[74] A. Moudafi. Proximal methods for a class of bilevel monotone equilibrium problems. *Journal of Global Optimization.*, 47 ; DOI 10.1007/s10898-009-9476-1 :pp. 287–292, 2010.

[75] A. Moudafi and M. Théra. Proximal and dynamical approaches to equilibrium problems. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 477 :187–201, 1999.

[76] S.B. Nadler. Multivalued contraction mapping. *Pacific Journal of Math.*, 30 :475–488, 1969.

[77] A. Nagurney. *A variational inequality approach.* Network economics, Kluwer, Dordrecht, 1993.

[78] Y. E. Nesterov and A. S. Nemirovskii. Interior-point polynomial algorithms in convex programming. *SIAM Publications*, 1994.

[79] M.A. Noor. Projection-proximal methods for general variational inequalities. *Journal of Math. Anal. Appl.*, 318 :53–62, 2006.

[80] J. Parida and A. Sen. A variational like-inequality for multifunctions with applications. *Journal of Math. Anal. Appl*, 124 :7–81, 1987.

[81] M. Patriksson. *Nonlinear Programming and Variational Inequality Problems : a unified approach.* Kluwer, Dordrecht, 1999.

[82] R. T. Rockafellar. Monotone operators and the proximal point algorithm. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 14 :877–898, 1976.

[83] M. Sion. On general minimax theorems. *Pacific Journal of Math.*, 8 :171–176, 1958.

[84] G. Stampacchia. Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 258 :4413–4416, 1964.

[85] T. Tanaka. Generalized quasiconvexities, cone saddle points, and minimax theorem for vector-valued functions. *Journal of Optim. Theory Appl.*, 81(2) :335–377, 1994.

[86] T. Tanaka. Cone-quasiconvexity of vector-valued functions. *Sci ; Rep. Hirosaki Univ.*, 42 :157–163, 1995.

[87] T. Tanaka. Generalised semicontinuity and existence theorem for cone saddle points. *Journal of Appl. Math. Optim.*, 36 :313–322, 1997.

[88] T. Tanaka and D. Kuroiwa. The convexity of a and b assures $inta + b = int(a + b)$. *Journal of Appl. Math. Lett.*, 6(1) :83–86, 1993.

[89] T. Tanaka and D. Kuroiwa. Another observation on conditions assuring $intA + B = int(A + B)$. *Journal of Appl. Math. Lett.*, 7(1) :19–22, 1994.

[90] D. T. Tuc and N. X. Tan. Existence conditions in variational inclusions with constraints. *Journal of Optimization*, 53(5-6) :505–515, 2004.

[91] R.U. Verma. General convergence analysis for two-step projection methods and application to variational problems. *Journal of Appl. Math. Lett.*, 18 :1286–1292, 2005.

[92] P. J. Watson. Variational inequalities in nonreflexive banach spaces. *Journal of Appl. Math. Lett.*, 10(2) :45–48, 1997.

[93] J.M. Chen X.F. He and Z. He. Generalized projection method for a variational inequality system with different mappings in banach spaces. *Journal of Comput. Math. Appl.*, 58 :1391–1396, 2009.

[94] J.C. Yao. The generalized quasi variational inequality problem with applications. *Journal of Math. Anal. Appl.*, 158 :139–160, 1991.

[95] L. C. Yen. A minimax inequality and its applications to variational inequalities. *Pacific Journal of Mathematics*, 97 :477–481, 1981.

[96] P. L. Yu. Cone convexity, cone extreme points, and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives. *Journal of Optim. Theory Appl.*, 14 :319–377, 1974.

[97] C. Zàlinescu. *Convex Analysis in General Vector Spaces.* World Scientific, 2002.

[98] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis ans Its Applications II/B. Nonlinear Monotone Operators.* Springer, New York, 1985.