

N° d'ordre : 3496

THÈSE

En vue de l'obtention du : **DOCTORAT**

Structure de recherche : Équipe des sciences de la matière et du rayonnement

Discipline : Physique

Spécialité : Physique des hautes énergies

Présentée et soutenue le 10/07/2021 par :

Wijdane EL HADRI

Contributions à l'aspect thermodynamique des trous noirs rotatifs

Jury

Yassine HASSOUNI	PES, Faculté des Sciences, Université Mohammed V - Rabat	Président
Hasan EL MOUMNI	PH, Faculté des Sciences, Université Ibn Zohr - Agadir	Rapporteur/Examineur
Hamid EZ-ZAHRAOUI	PES, Faculté des Sciences, Université Mohammed V - Rabat	Rapporteur/Examineur
Yahya TAYALATI	PES, Faculté des Sciences, Université Mohammed V - Rabat	Rapporteur/Examineur
Asmae ARBAOUI	PES, Faculté des Sciences, Université Mohammed V - Rabat	Examineur
Nour eddine FETTOUHI	PES, Faculté des Sciences, Université Mohammed V - Rabat	Examineur
Bouzid MANAUT	PES, Faculté polydisciplinaire de Béni Mellal , Université Sultan Moulay Slimane	Examineur
Adil BELHAJ	PH, Faculté des Sciences, Université Mohammed V - Rabat	Directeur de thèse

Année universitaire: 2020/2021

Je dédie cette thèse

À mon très cher père, De tous les pères, tu es le meilleur. Tu as été et tu seras toujours un exemple pour moi par tes qualités humaines, ta persévérance et perfectionnisme. En témoignage de brut d'années de sacrifices, de sollicitudes, d'encouragement de prières. Pourriez vous trouver dans ce travail le fruit de toutes vos peines et tous vos efforts. En ce jour, j'espère réaliser l'un de tes rêves. Aucune dédicace ne saurait exprimer mes respects, ma reconnaissance et mon profond amour. Puisse Dieu vous préserver et vous procurer santé et bonheur.

À ma très chère mère, Source inépuisable de tendresse et de patience et de sacrifice. Ta prière et ta bénédiction m'ont été d'un grand secours tout au long de ma vie. Quoique je puisse dire et écrire, je ne pourrais exprimer ma grande affection et ma profonde reconnaissance. J'espère ne jamais te décevoir, ni traiter ta confiance et tes sacrifices. Puisse Dieu tout puissant, te préserver et t'accorder santé, longue vie et bonheur.

À mes chers frères et sœur, Je vous dédie ce travail en témoignage à notre moments d'enfance passés et mon estime envers vous. Pour nos rêves partagés et notre lien fraternels.

À mes chers tantes, À une famille au sein de laquelle je me suis toujours senti chez moi. L'affection que j'ai pour vous est sans aucune mesure, que Dieu vous accorde santé et longue vie. Trouvez ici l'assurance de mon profond respect et de mon fidèle attachement.

À mon regrette grand mère Fatima, Comment t'oublier? ta bonté reste encore gravée dans ma mémoire, j'imagine quelle serait ta joie aujourd'hui, j'aurai voulu que tu assistes à l'aboutissement de ces années de dur labeur, Dieu en a décidé autrement. Que Dieu t'accorde la paix éternelle et t'accueille dans son paradis.

À la mémoire de mes grands parents, Que vous reposiez dans le paradis du seigneur.

À toutes ma famille maternelle et paternelle, Aucun langage ne saurait exprimer mon respect et ma considération pour votre soutien et encouragements.

À anas, Nous avons formé une bonne équipe. Je suis impatience de travailler à nouveau avec toi. Merci d'être l'épaule sur laquelle je peux toujours compter. Je suis fière de notre fidélité en amitié.

À Mohamed, Un excellent collègue est une personne qui comprend que les objectifs de l'équipe sont plus importants que son égo. Alors je te remercie d'être un collègue excellent. Encore merci pour ta collaboration.

À mes amis, Zakaria, Sana, Aicha, Omar, que Dieu accomplisse vos vœux, soyez assurés de mon estime.

Remerciements

*Ce travail a été réalisé au sein du laboratoire d'équipe des sciences de la matière et du rayonnement sous la direction de Monsieur **Adil BELHAJ**, Professeur Habilité à la Faculté des Sciences de Rabat. Je tiens à lui exprimer toute ma reconnaissance pour sa disponibilité et ses grandes qualités humaines d'écoute et d'attention. Qu'il soit aussi remercié pour les nombreux encouragements qu'il m'a prodigués.*

*Je remercie Monsieur **Yassine HASSOUNI**, Professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, président de jury, de m'avoir honoré par sa présence en présidant le jury de soutenance de mon doctorat. J'en suis honorée et je lui exprime toute ma profonde reconnaissance.*

*Je remercie également Monsieur **Hasan EL MOUMNI**, Professeur Habilité à la Faculté des Sciences d'Agadir, d'avoir accepté de rapporter cette thèse et scruter de si près le contenu de ma thèse de doctorat.*

*J'adresse tous mes remerciements à Monsieur **Hamid EZ-ZAHRAOUI**, Professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, de l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'être rapporteur de cette thèse.*

*Je remercie Monsieur **Yahya TAYALATI**, Professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, d'avoir accepté de juger mon travail en étant un rapporteur, et pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail.*

*J'exprime ma gratitude à Madame **Asmae ARBAOUI**, Professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, qui a bien voulu être accepté de participer à ce jury de thèse en qualité d'examineur.*

*Je remercie Monsieur **Nour eddine FETTOUHI**, Professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, pour faire partie de ce jury en étant un examineur.*

*J'exprime mes plus vifs remerciements à Monsieur **Bouzid MANAUT**, Professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté Polydisciplinaire de Béni Mellal, pour sa participation à mon jury de thèse en qualité d'examineur de mon travail.*

*J'exprime tout particulièrement mes remerciements et ma gratitude à Monsieur **Moulay Brahim SEDRA**, Doyen à la Faculté des Sciences et Techniques d'Errachidia, pour m'avoir accueillie chaleureusement au début de cette thèse, je tiens à le remercier infiniment pour toute sa confiance, et son aide précieuse.*

*A l'issue de la rédaction de cette recherche, je suis convaincue que la thèse est loin d'être un travail solitaire. Je remercie Monsieur **Emilio ORRENTE-LUJAN**, Professeur à l'université de Murcia, Campus de Espinardo à l'Espagne, et Monsieur **Antonio SEGUI**, Professeur à l'université de Zaragoza à l'Espagne, pour leurs aide précieuse et leurs collaborations.*

*Mes vifs remerciements à l'ensemble des chercheurs doctorants de l'équipe des sciences de la matière et du rayonnement, je citerai, **Hajar BELMAHI, Mohamed BENALI, Anas EL BALALI**, aussi le thésard **Mohamed Amine ESSEBANI**, Doctorant au sein du laboratoire des Sciences de l'ingénieur et modélisation à la Faculté des Sciences de Kénitra, pour la collaboration rigoureuse, et pour toutes les innombrables discussions fructueuses qui m'ont toujours aidé à progresser dans mon travail.*

W.É

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude de l'aspect thermodynamique des trous noirs rotatifs. Particulièrement, nous nous intéressons aux trous noirs à quatre dimensions en présence d'un champ appelé quintessence considéré comme un candidat de l'énergie noire. Pour comprendre son impact, nous examinons analytiquement le spectre de la radiation ainsi que l'aspect thermique des solutions chargées et rotatives. En déterminant les quantités thermodynamiques associées, nous montrons que cette contribution énergétique se comporte comme un système de refroidissement. Cette étude est étendue en analysant le comportement critique des trous noirs neutres et rotatifs dans un espace-temps Anti de-Sitter. Concrètement, nous explorons la transition de Hawking-Page de certains modèles caractérisés par des valeurs spécifiques du paramètre d'état décrivant l'énergie noire. Nous terminons ce travail par une présentation des solutions des trous noirs rotatifs s'inscrivant dans le cadre de la théorie des supercordes hétérotiques. Concrètement, nous examinons le comportement critique du trou noir de Kerr-Sen. En exploitant le schéma d'Ehnenfest, nous montrons que cette solution subit une transition de phase du second ordre. En proposant une nouvelle forme de la métrique de la géothermodynamique à partir de l'énergie libre de Gibbs, nous assurons la présence de telles transitions en déterminant la courbure scalaire associée. Finalement, nous explorons les exposantes critiques qui sont en accord avec la théorie des champs moyens.

Mots-clés : Trou noir rotatifs, quintessence, énergie noire, radiation de Hawking-Page, espace-temps AdS, géothermodynamique, trou noir de Kerr-Sen, Ehnenfest.

Abstract

This thesis is devoted to the study of the thermodynamic aspect of rotating black holes. In particular, we are interested in four-dimensional black holes in the presence of a field called quintessence considered as a dark energy candidate. To understand its influence, we examine analytically the radiation spectrum as well as the thermal aspect of charged and rotating solutions. By determining the associated thermodynamics quantities, we show that this energy contribution behaves as a cooling system. This study is extended by analyzing the critical behavior of neutral and rotating black holes in Anti de-Sitter space-time. Concretely, we explore the Hawking-Page transition of certain models characterized by specific values of the state parameter describing the dark energy. We end this work by investigating the critical behaviors of the Kerr-Sen black holes in four dimensional embedded in heterotic superstring theories. By using the Ehrenfest scheme, we show that this solution undergoes a second order phase transition. Proposing a new form of the geothermodynamics metric derived from the Gibbs free energy, the presence of such transitions is confirmed by computing the associated scalar curvature. Finally, we explore the critical exponents matching perfectly with the mean field theory.

Keywords : *Rotating black holes, quintessence, dark energy, radiation spectrum, Anti de-Sitter space-time, Hawking-Page transition, Kerr-Sen black hole, Ehrenfest, geothermodynamics.*

Liste des publications

Articles principaux

- A. Belhaj, A. El Balali, W. El Hadri, H. El Moumni, M. B. Sedra, *Dark energy effects on charged and rotating black holes*, The European Physical Journal Plus, vol. 134, No 9 (2019), p. 422.
- A. Belhaj, A. El Balali, W. El Hadri, M. A. Essebani, M. B. Sedra, A. Segui, *Kerr-AdS black hole behaviors from dark energy*, International Journal of Modern Physics D, Vol. 29, No. 09 (2020), 2050069 .
- A. Belhaj, A. El Balali, W. El Hadri, H. El Moumni, M. A. Essebani, M. B. Sedra, *On phase transition behaviors of Kerr-Sen black hole*, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, Vol. 17, No. 11 (2020), 2050169.

Articles en collaboration

- A. Belhaj, A. El Balali, W. El Hadri, Y. Hassouni, E. Torrente-Lujan, *Phase transition and shadow behaviors of quintessential black holes in M-theory/superstring inspired models*, International Journal of Modern Physics A, Vol. 36, Nos. 8 - 9 (2021) 2150057.
- A. Belhaj, A. El Balali, W. El Hadri, E. Torrente-Lujan, *On universal constants of AdS black holes from Hawking-Page phase transition*, Physics Letters B, 811 (2020), 135871.
- A. Belhaj, M. Benali, A. El Balali, W. El Hadri, H. El Moumni, E. Torrente-Lujan, *Black hole shadows in M-theory scenarios*, International Journal of Modern Physics D, 30(04) 2021, 2150026.
- A. Belhaj, H. Belmahi, M. Benali, W. El Hadri, H. El Moumni, E. Torrente-Lujan, *Shadows of 5D Black Holes from String Theory*, Physics Letters B, 812 (2021), 136025
- A. Belhaj, M. Benali, A. El Balali, W. El Hadri, H. El Moumni, *Shadows of Charged and Rotating Black Holes with a Cosmological Constant*, Accepted in International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, (2021).

Table des matières

Dédicaces	i
Remerciements	ii
Résumé	iv
Abstract	iii
Liste des publications	iv
Liste des figures	ix
Liste des tableaux	xii
I Aspects thermodynamiques des trous noirs	6
1 Physique des trous noirs	7
1.1 Symétrie sphérique du champ gravitationnel	8
1.2 Symétrie sphérique du champ gravitationnel dans le vide	9
1.2.1 Solution de Schwarzschild	10
1.2.1.1 Horizon des événements	12
1.2.1.2 Coordonnées de Kruskal-Szekeres et géodésiques du trou noir de Schwarzschild	15

1.2.1.3	Géodésique et potentiel effectif du trou noir de Schwarzschild	17
1.2.1.4	Diagrammes de Penrose	19
1.2.2	Solution de Reissner-Nordström	21
1.2.2.1	Champ de Maxwell et gravité	22
1.2.2.2	Coordonnées de Kruskal-Szekers	24
1.2.2.3	Géodésique du trou noir de Reissner-Nordström	25
1.2.2.4	Diagrammes de Penrose du trou noir de Reissner-Nordström	26
1.3	Trous noirs rotatifs	26
1.3.1	Solution de Kerr	26
1.3.2	Théorème de Calvitie	33
1.4	Espace-temps à courbure constante	34
1.4.1	Espace-temps de symétrie maximale à courbure constante	34
1.4.2	Espace-temps Anti de-Sitter	36
1.4.2.1	Définition, frontière et isométrie	36
1.4.2.2	Paramétrisations	37
1.5	Solution de Kerr-Newman AdS	38
1.5.1	Géométrie de Kerr-Newman AdS	38
1.5.2	Équations de mouvements de Kerr-Newman AdS	40
2	Thermodynamique des trous noirs	44
2.1	Physique des trous noirs et thermodynamique	45
2.1.1	Loi zéro	45
2.1.2	Gravité de surface de la solution de Kerr	48
2.1.3	Première loi	50
2.1.4	Première loi du trou noir de Kerr-Newman	50
2.1.5	Deuxième loi	52
2.1.6	Troisième loi	52
2.2	Formule de Smarr	53
2.3	Entropie des trous noirs	53
2.4	Radiation de Hawking	54
2.4.1	Approche basée sur la typicalité canonique	56
2.4.2	Approche basée sur l'effet tunnel	58
2.5	Propriétés thermodynamiques des trous noirs	60
2.5.1	Température des trous noirs	60

2.5.2	Durée de vie du trou noir	63
2.5.3	Capacité thermique	64
2.5.4	Volume thermodynamique	65
2.5.5	Paradoxe de la perte d'information	66
3	Transitions de phase et géothermodynamique des trous noirs AdS	68
3.1	Transitions de phase des trous noirs AdS	69
3.1.1	Transitions de phase liquide à vapeur	69
3.1.2	Transitions de phase du trou noir de Reissner-Nordström AdS	70
3.2	Transitions de phase du second ordre	77
3.2.1	Équations d'Ehrenfest des trous noirs	77
3.2.2	Géothermodynamique des trous noirs	81
3.3	Trou noir de Kerr-AdS	82
3.3.1	Schéma d'Ehrenfest du trou noir de Kerr-AdS	84
3.3.2	Géothermodynamique du trou noir de Kerr-AdS	89
3.4	Transitions de phase du second ordre du trou noir de Kerr-Sen	91
3.4.1	Schéma d'Ehrenfest du trou noir de Kerr-Sen	94
3.4.2	Géothermodynamique du trou noir de Kerr-Sen	100
4	Effet de l'énergie noire sur les trous noirs rotatifs	103
4.1	Matière noire	104
4.1.1	Aspect observationnel	104
4.1.2	Preuve dynamique	104
4.2	Modélisation de l'énergie noire	106
4.2.1	Constante cosmologique	106
4.2.2	Modèles de l'énergie noire	107
4.3	Champ de quintessence	108
4.3.1	Densité de quintessence	108
4.3.2	Trou noir quintessenciel	111
4.4	Thermodynamique des trous noirs entourés de quintessence	112
4.4.1	Effets de l'énergie noire sur la radiation de Hawking	112
4.4.1.1	Spectre de radiation	112
4.4.1.2	Processus d'évaporation du trou noir de Kerr	114
4.4.1.3	Information noire	116

4.4.2	Transitions de phase du trou noir de Kerr-AdS à partir des modélisations de quintessence	118
4.4.3	Modèle avec paramètre d'état de l'énergie noire $\omega = -\frac{1}{3}$	119
4.4.4	Modèle avec paramètre d'état de l'énergie noire $\omega = -\frac{2}{3}$	125
II	Résultats et contributions scientifiques	132
	Appendices	207
A	Aspect optique du trou noir de Schwarzschild	208
A.1	Équations de mouvement du trou noir de Schwarzschild	208
A.2	Potentiel effectif et stabilité du mouvement circulaire	211
A.3	Ombre du trou noir en coordonnées célestes	212
	Bibliographie	217
	Bibliographie	218

Table des figures

1.1	<i>Diagramme spatio-temporel de la région proche de l'horizon de la métrique de Schwarzschild.</i>	13
1.2	<i>Espace-temps de Schwarzschild en coordonnées d'Eddington-Finkelstein.</i>	15
1.3	<i>Diagramme du trou noir de Schwarzschild en fonction des coordonnées de Kruskal-Szekeres.</i>	17
1.4	<i>Diagramme de potentiels effectifs du trou noir de Schwarzschild.</i>	18
1.5	<i>Diagramme conforme de l'espace de Minkowski avec des coordonnées infinies du genre temps, spatiales et nulles.</i>	20
1.6	<i>Diagramme de Penrose du trou noir de Schwarzschild.</i>	22
1.7	<i>Diagramme de Kruskal à partir des coordonnées sortantes d'Eddington-Finkelstein.</i>	25
1.8	<i>Diagramme de Kruskal à partir des coordonnées entrantes d'Eddington-Finkelstein.</i>	25
1.9	<i>Diagramme de Penrose du trou noir de Reissner-Nordström.</i>	27
1.10	<i>Diagramme de Penrose du trou noir de Kerr.</i>	30
1.11	<i>Diagramme de l'ergorégion à l'extérieur du trou noir de Kerr.</i>	33
1.12	<i>Graphique montrant les positions des horizons des événements pour le cas $\Lambda < 0$.</i>	41
2.1	<i>Force attractive entre deux plaques parallèles conductrices et non chargées (l'effet de Casimir).</i>	55
2.2	<i>Paires des particules autour du trou noir.</i>	56
2.3	<i>Information noire de la radiation du trou noir.</i>	66

3.8	Diagramme de la température de Hawking (T) et la capacité thermique (C_Ω) en fonction de l'entropie (S) du trou noir Kerr-AdS pour une valeur fixe de Ω ($\Omega = 0.3$).	84
3.11	Diagramme de la température (T) en fonction de l'entropie (S) du trou noir de Kerr-Sen pour différentes valeurs de J et Q .	93
3.12	Diagramme de la capacité thermique (C) par rapport à l'entropie (S) du trou noir de Kerr-Sen pour $J = 0.1$ et $Q = 0.05$.	94
3.13	Variation de α , κ , χ , α' , κ' par rapport à l'entropie (S) pour des valeurs fixes de Q et J .	97
3.14	Diagramme de la courbure scalaire $\mathfrak{R}_G$ en fonction de l'entropie (S).	102
4.1	Répartition de la densité d'énergie de l'univers après l'exploitation des premières données du satellite Planck.	104
4.2	Diagramme représentant les courbes de rotation observées et celles qui ont été prévue par les lois de Newton.	105
4.3	Diagramme de la température de Hawking ($T^{(-1/3)}$) et la capacité thermique ($C_\Omega^{(-1/3)}$) du trou noir de Kerr-AdS en fonction de l'entropie (S) pour $\Omega = 0.3$.	121
4.4	Diagramme de l'énergie libre de Gibbs ($G^{(-1/3)}$) par rapport à l'entropie ($S^{(-1/3)}$) du trou noir de Kerr-AdS pour $\Omega = 0.3$, $\omega = -1/3$ et différentes valeurs de α .	123
4.5	Diagramme de l'énergie libre de Gibbs ($G^{(-1/3)}$) par rapport à la température ($T^{(-1/3)}$) du trou noir de Kerr-AdS pour $\Omega = 0.3$, $\omega = -1/3$ et différentes valeurs de α .	124
4.6	Diagramme de la capacité thermique $C_\Omega^{(-1/3)}$ par rapport à la température ($T^{(-1/3)}$) du trou noir de Kerr-AdS pour $\Omega = 0.3$, $\omega = -1/3$ et différentes valeurs de α .	125
4.7	Diagramme de la température de Hawking ($T^{(-2/3)}$) et la capacité thermique ($C_\Omega^{(-2/3)}$) du trou noir de Kerr-AdS en fonction de l'entropie (S) pour $\Omega = 0.3$ et $\omega = -2/3$.	127
4.8	Diagramme de l'énergie libre de Gibbs $G^{(-2/3)}$ du trou noir de Kerr-AdS par rapport à l'entropie S pour $\Omega = 0.3$, $\omega = -2/3$.	129
4.9	Diagramme de l'énergie libre de Gibbs ($G^{(-2/3)}$) par rapport à la température ($T^{(-2/3)}$) du trou noir de Kerr-AdS pour $\Omega = 0.3$, $\omega = -2/3$ et différentes valeurs de α .	130
4.10	Diagramme de la capacité thermique $C_\Omega^{(-2/3)}$ par rapport à la température ($T^{(-2/3)}$) du trou noir de Kerr-AdS pour $\Omega = 0.3$, $\omega = -2/3$ et différentes valeurs de α .	131
A.1	Diagramme de potentiel effectif en fonction de r pour $M = 1$.	211

A.2	<i>Trajectoire des rayons lumineux au voisinage du trou noir de Schwarzschild pour différentes valeurs de b et pour une valeur fixe de la masse $M = 1$ et $E = 1$. La singularité du trou noir est représentée par un disque noir de rayon $2M$. Les coordonnées x et y sont les coordonnées cartésiennes calculées par $x = r \cos \phi$ et $y = r \sin \phi$.</i>	215
A.3	<i>Ombre et rayons lumineux au voisinage du trou noir de Schwarzschild dans le plan céleste pour $M = 1$ et $E = 1$. La singularité du trou noir est représentée par un disque noir de rayon $2M$.</i>	216

Liste des tableaux

3.1	<i>Équations d'Ehrenfest du trou noir de Kerr-Sen.</i>	95
4.1	<i>Équation d'état décrivant la relation entre la pression et la densité selon $\omega = p/\rho$.</i>	108

Introduction générale

L'étude des propriétés physiques de notre univers donne lieu à des concepts étranges et mystérieux, dont l'un est le trou noir (TN) [1–8]. Ce dernier est considéré comme l'objet le plus fascinant et également le plus séduisant de l'univers [9–14]. Les trous noirs ont été prédits par la relativité générale et sont modélisés de façon théorique comme des solutions des équations d'Einstein [15–22]. Récemment, ils sont devenus des objets d'observation recevant un intérêt majeur. La première image du trou noir, qui a été capturée en 2019 grâce à la collaboration internationale Event Horizon Telescope (EHT) [23–28], pourrait être considérée comme une preuve visuelle directe qui confirme la relativité générale et qui enlève toute sorte de doute de l'existence de ces derniers [29–32].

Afin de comprendre les différents comportements des trous noirs, des liens avec de nombreuses théories et plusieurs domaines de recherche ont été étudiés [33,34]. Particulièrement, le théorème de l'aire de Hawking stipulant que la surface de l'horizon du trou noir ne peut jamais diminuer a permis d'ouvrir une nouvelle voie de recherche où les trous noirs peuvent être compris d'un point de vue thermodynamique [35–37]. À cet égard, l'aire de l'horizon a été identifiée à l'entropie, la gravité de surface a été interprétée comme une température et l'analogie entre les quatre lois de la thermodynamiques et la mécanique des trous noirs a été déterminée [38,39]. Cela permet à la fois de considérer l'aspect thermodynamique des trous noirs ainsi que l'aspect quantique [40–43]. Dans l'approche quantique, il a été démontré par Hawking que les trous noirs peuvent rayonner [44–50]. Cette caractéristique a été étudiée en élaborant plusieurs approches. Les plus intuitives entre elles sont l'effet tunnel et le mécanisme d'anomalie [51–55]. En utilisant la méthode de l'effet tunnel, la température a été

déduite de deux manières. L'une est basée sur la méthode des géodésiques nulles et l'autre est basée sur la méthode d'Hamilton-Jacobie [56–59]. En outre, une autre approche inspirée de la physique statistique a été élaborée récemment donnant des résultats similaires [60, 61].

Récemment, la thermodynamique de nombreuses classes des trous noirs dans l'espace-temps Anti de-Sitter (AdS) a également été étudiée [62–65]. Dans cet espace-temps, la constante cosmologique négative a été traitée comme une variable thermodynamique et interprétée comme une pression dans l'équation d'état [66–69]. L'introduction de cette constante cosmologique induit des phénomènes de transition de phase apparaissant de façon naturelle dans la physique des trous noirs [70–77]. Particulièrement, la transition de phase de Hawking-Page a été définie comme une transition de phase de premier ordre entre les radiations thermiques et les trous noirs larges [78–81]. Dans des espaces de dimension arbitraire, une étude comparative entre le comportement des transitions de phase des trous noirs chargés dans l'espace-temps AdS et le fluide de Van der Waals a été établie [82–84]. En particulier, la transition de phase de deuxième ordre des trous noirs Kerr-AdS à quatre dimensions a été étudiée [85–87]. Les phénomènes critiques des trous noirs Kerr-AdS dans l'espace de phase étendu ont également été abordés [88–91]. Plus précisément, certaines approches numériques ont été développées afin de calculer les quantités thermodynamiques, y compris l'énergie libre de Gibbs [92–94]. Cette dernière a été considérée comme une quantité pertinente pour discuter les transitions de phase correspondant au trou noir de Kerr-AdS [95]. En l'occurrence, il a été montré, en empruntant les idées d'Ehrenfest et Clausius-Clapeyron, que les phases des trous noirs peuvent être classées en deux catégories [96, 97]. Les trous noirs, subissant une transition de phase de premier ordre, ont une énergie libre de Gibbs continue mais les dérivées premières associées sont discontinues [98–101]. Pour les transitions de phase d'ordre supérieur, plus précisément de second ordre, l'énergie libre de Gibbs et ses dérivées premières sont toutes continues, tandis que les dérivées secondes sont discontinues au point critique [102, 103].

La géothermodynamique des trous noirs est apparue comme une nouvelle branche d'étude où les variables thermodynamiques décrivant le système définissent un espace métrique virtuel. Par suite, la courbure thermodynamique est devenue une quantité importante qui peut décrire les transitions de phase associées aux trous noirs [104, 105]. Ce concept a été largement étendu. Notamment, dans la théorie de supercordes type IIB associée à la physique des $D3$ -branes, la géothermodynamique des trous noirs AdS à cinq dimensions a été examinée [106–112]. Une autre investigation concernant les trous noirs asymptotiques AdS_4 en

théorie M a été établie [113–115]. Concrètement, la métrique de Quevedo associée à des géométries représentant les branes $M2$ et $M5$ a permis d’étudier la stabilité ainsi que les transitions de phase du trou noir correspondant [116–118]. Ces transitions de phase ont été abordées de différentes manières afin de classer et identifier les comportements physiques associés [119–122].

Plus récemment, la matière noire (MN) et l’énergie noire (EN) ont été mises en œuvre dans l’étude de la thermodynamique des trous noirs [123–126]. En particulier, il a été montré que ces contributions modifient l’aspect thermodynamique de certains trous noirs. Concrètement, les quantités associées fournissent des propriétés différentes par rapport à celles des trous noirs ordinaires [127–131]. Plusieurs modèles ont été proposés afin d’examiner de telles modifications [132–135]. Les trous noirs rotatifs ont été traités en introduisant des théories non triviales. Précisément, l’énergie noire a été largement abordée en traitant les propriétés thermodynamiques et optiques des trous noirs à quatre dimensions [136–139]. Dans l’approche thermodynamique, il a été montré que l’énergie noire peut agir comme un système de refroidissement entourant le trou noir. Ainsi, le trou noir est plus froid, rayonne plus lentement et a un temps de vie plus lent. Cette étude a été menée en se basant sur des valeurs spécifiques du paramètre d’état de l’énergie noire $\omega = p/\rho$, où p indique la pression et ρ représente la densité de l’énergie noire respectivement. Les modèles de quintessence peuvent être expliqués par des champs scalaires canoniques. Ils représentent une forme d’énergie avec une pression négative variant avec l’espace-temps. Concrètement, les modèles de quintessence ($\omega > -1$), décrits par des champs scalaires dynamiques, ont été utilisés afin d’expliquer l’accélération cosmique.

L’intérêt majeur des contributions réalisées dans cette thèse est d’explorer les transitions de phase des trous noirs rotatifs à quatre dimensions dans des cadres plus pertinents avec la présence d’une constante cosmologique et des champs de l’énergie noire de nature dynamique. Certains modèles peuvent s’inscrire dans le cadre de la théorie des cordes hétérotiques en s’appuyant sur les travaux de Sen [140–144]. En utilisant la méthode de typicalité canonique, nous reconsidérons d’abord l’étude de l’impact de l’énergie noire sur la thermodynamique des trous noirs à quatre dimensions. Concrètement, nous étudions les influences associées sur le spectre de radiation pour divers trous noirs, y compris les trous noirs chargés et les rotatifs. Pour ces solutions de trous noirs, nous élaborons analytiquement le spectre de rayonnement correspondant, la température de Hawking et l’information noire. Ensuite, nous discutons et analysons les résultats correspondants. Ceci confirme que l’énergie noire peut

être considérée comme un système de refroidissement entourant les trous noirs, fournissant une radiation plus froide et un processus de radiation de Hawking plus lent. Ensuite, nous étudions les transitions de phase et les comportements critiques du trou noir de Kerr-Sen. En calculant les quantités thermodynamiques relevantes, y compris la capacité thermique, et en utilisant le schéma d'Ehrenfest, nous montrons qu'un tel trou noir subit une transition de phase du second ordre. En adoptant une nouvelle forme métrique de la géothermodynamique dérivée de l'énergie libre de Gibbs, nous calculons la courbure scalaire associée recouvrant des transitions de phase similaires. Finalement, nous déterminons les lois d'échelle et les exposants critiques, qui correspondent parfaitement à la théorie du champ moyen.

Quant à la transition de phase de Hawking-Page, nous examinons le trou noir de Kerr-AdS. Concrètement, en utilisant un espace de module contrôlé par le paramètre d'état ω_q de l'énergie noire et l'intensité du champ de quintessence, nous traitons trois modèles différents. En élaborant des formules analytiques des quantités thermodynamiques pertinentes, nous trouvons des similitudes et des distinctions significatives. Précisément, pour le modèle ($\omega_q = -1/3$), nous montrons que les contributions de l'énergie noire stabilisent de tels trous noirs. Pour le modèle ($\omega_q = -1$), nous obtenons un effet inversé de l'énergie noire. Dans le modèle ($\omega_q = -2/3$), les trous noirs Kerr-AdS révèlent une résistance aux effets de l'énergie noire. En exploitant les formules explicites des quantités thermodynamiques, nous fournissons certaines interprétations physiques des comportements thermiques. Malgré ces distinctions pertinentes, nous montrons que ces modèles impliquent des rapports universels similaires associés à certaines quantités thermodynamiques critiques.

Ce mémoire de thèse est présenté en deux parties. La première partie du manuscrit contenant quatre chapitres est consacrée à l'initialisation des notions utilisées au cours de la thèse. Le chapitre 1 est dédié à une révision des trous noirs tout particulièrement leurs aspects mathématiques et physiques. Dans un premier lieu, nous rappelons l'aspect mathématique. Ensuite, nous présentons quelques définitions et exemples. Finalement, nous fournissons une classification des modèles des trous noirs à quatre dimensions ainsi que des exemples des trous noirs dans l'espace-temps AdS. Le chapitre 2 concerne l'étude des propriétés thermodynamiques des trous noirs. D'abord, nous élaborons l'analogie entre les lois de la thermodynamique ordinaires et la mécanique des trous noirs. Afin de mieux comprendre cette correspondance, nous examinons la thermodynamique de quelques trous noirs à quatre dimensions. Ensuite, nous examinons la radiation de Hawking en se basant sur la typicalité canonique ainsi que l'effet tunnel. Puis, nous dérivons la température de Hawking en uti-

lisant l'approche Euclidienne. Le chapitre 3 est consacré à l'étude des transitions de phase des trous noirs rotatifs. En expliquant les différentes méthodes utilisées dans ce cadre, nous élaborant une nouvelle métrique afin d'étudier la géothermodynamique associée au trou noir de Sen obtenu à partir de la théorie de supercordes hétérotiques. Particulièrement, nous déduisons les points critiques associées. Une comparaison est également établie en utilisant le schéma d'Ehrenfest. Nous abordons dans le chapitre 4, de ce mémoire, les propriétés thermodynamiques des trous noirs en présence d'un champ dynamique nommé quintessence. En premier lieu, nous expliquons la matière noire et l'énergie noire en s'inspirant des études cosmologiques. En second lieu, nous abordons la géométrie des trous noirs en présence de quintessence utilisé pour modéliser l'énergie noire. En particulier, nous réalisons une étude thermodynamique du trou noir de Kerr dans l'espace-temps AdS. En inspectant les différents états associés à l'énergie noire, nous montrons son effet sur la transition de Hawking-Page.

Pour clore cette thèse, nous présentons une conclusion générale qui résumera nos résultats réalisés et des questions ouvertes.

Première partie I

Aspects thermodynamiques des trous noirs

CHAPITRE 1

Physique des trous noirs

En 1916, un an après l'élaboration de la théorie de la relativité générale par Einstein, Schwarzschild a publié une solution exacte pour l'équation fameuse d'Einstein. Cette solution décrit le champ gravitationnel produit par un objet sphérique et symétrique, qui est aussi non chargé et non rotatif [145, 146]. D'ailleurs, afin de construire une étude profonde pour cette solution, ainsi que pour d'autres qui ont été trouvées plus tard, nous avons nécessairement besoin des principaux concepts majeurs introduit par la relativité générale tels que l'espace temps, la courbure, ainsi que d'autres concepts [147, 148]. En effet, nous pouvons dire que les trous noirs constituent un espace naturel pour comprendre la relativité générale. En outre, les trous noirs sont sans doute étonnants au côté astrophysique. Ils sont l'explication unique et la plus rationnelle pour le futur de certaines étoiles massives. Pour cette raison, ils sont considérés fondamentaux pour comprendre l'évolution des corps célestes de notre univers [149–153]. La solution de Schwarzschild présente deux propriétés intrinsèques du trou noir qui sont nommées l'horizon et la singularité. Cette dernière est définie par une région où la densité de la matière est infinie. De plus, elle présente un sens non physique. Par conséquent, une fois qu'un objet franchit l'horizon du trou noir, il est immédiatement empêché de s'échapper. Ainsi, il se termine à se trouver dans la singularité situé au centre. Plus tard, deux solutions ont été élaborées, celle de Reissner-Nordström et une de Kerr, décrivant respectivement un champ gravitationnel d'un objet chargé et un rotatif [154–156].

1.1 Symétrie sphérique du champ gravitationnel

Nous commençons l'analyse des propriétés physiques des trous noirs avec le cas le plus simple dans lequel le trou noir et son champ gravitationnel aient une symétrie sphérique [13, 16]. De surcroît, le champ gravitationnel des corps à symétrie sphérique est très intéressant en astrophysique. En effet, le champ gravitationnel d'un corps à symétrie sphérique ne dépend que de la masse totale du corps et non du détail de sa structure [18, 19]. Il est alors de la même forme pour un trou noir, une étoile..etc.

Dans le but de faire une étude profonde pour cette analyse, nous dérivons l'expression de la métrique dans une région éloignée des champs gravitationnels forts dans laquelle les lois de la relativité restreinte restent valables [21]. Un espace de métrique¹ $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ est dit stationnaire s'il existe un système de coordonnées² $(x^\alpha) = (x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$, tels que les composantes $g_{\alpha\beta}$ du tenseur métrique par rapport à ces coordonnées soient indépendantes de t . En effet, nous avons

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t} = 0. \quad (1.1)$$

Le vecteur $\vec{\partial t}$ de la base naturelle associée aux coordonnées (x^α) est du type temps. L'équation (1.1) montre que le vecteur $\vec{\partial t}$ est un générateur de symétrie de la métrique ds^2 . En d'autres termes, le tenseur métrique ne varie pas lorsqu'on suit les lignes de champs de ce vecteur [151, 153, 154]. Pour cette raison, nous pouvons dire que $\vec{\partial t}$ est un vecteur de Killing. D'ailleurs, les vecteurs de Killing obéissent à une équation différentielle, nommée par l'équation de Killing qui s'exprime à l'aide de la dérivée covariante. Pour t_0 appartenant à $\mathbf{R}(t = t_0)$, nous pouvons construire un ensemble de dimension trois constituant une sous-variété de l'espace-temps de tenseur métrique ds^2 . Cet ensemble est nommé une hypersurface de l'espace-temps. Par conséquent, un espace-temps est considéré statique si le vecteur de Killing $\vec{\partial t}$ est orthogonal aux hypersurfaces [16, 155]. En outre, nous définissons la symétrie sphérique d'un espace-temps quelconque par l'existence d'un système de coordonnées $(x^\alpha) = (x^0 = t, r, \theta, \phi)$ de telle sorte que les surfaces $\{t = \text{const}, r = \text{const}\}$ aient une topologie sphérique. De ce fait, le tenseur métrique ds^2 associé prend la forme suivante

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + C(r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1.2)$$

1. Nous utilisons la convention de signature $(-, +, +, +)$ pour la métrique d'espace-temps $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$. Les indices grecs α, β prennent les valeurs $0, 1, 2, 3$.

2. Dans ce qui suit, les unités de longueur et de masse sont redéfinies de telle sorte que la vitesse de la lumière dans le vide $c = 1$ et la constante gravitationnelle de Newton $G = 1$.

1.2. Symétrie sphérique du champ gravitationnel dans le vide

où A, B et C sont trois fonctions quelconques dépendants de r seulement en raison que l'espace-temps est considéré statique. Il est évident que les composantes $g_{\alpha\beta}$ données par (1.2) sont indépendantes de la coordonnée ϕ . Autrement dit, nous avons

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \phi} = 0. \quad (1.3)$$

Il est à noter que le vecteur $\overrightarrow{\partial\phi}$ de la base naturelle associée aux coordonnées (t, r, θ, ϕ) est un vecteur de Killing, permettant l'invariance par rotation autour de l'axe des z ($z \equiv r \cos \theta$). En raison que la dérivée $\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \theta} \neq 0$, qui est dûe au terme de $\sin^2 \theta$ dans (1.2), le vecteur $\overrightarrow{\partial\theta}$ n'est pas considéré un vecteur de Killing.

1.2 Symétrie sphérique du champ gravitationnel dans le vide

L'équation d'Einstein [153–155], où l'équation du champ gravitationnel, décrit l'intime liaison entre la masse-énergie et l'espace-temps. Dans le formalisme de la relativité générale, Einstein possédait deux tenseurs

$$T_{\mu\nu} \quad \text{et} \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu}.$$

$R_{\mu\nu}$ représente le tenseur de Ricci, qui est calculé à partir de la courbure de Reimann $R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda}$. Tandis que $T_{\mu\nu}$ indique le tenseur énergie-impulsion qui doit agir comme une source de champ gravitationnel. Or, $g_{\mu\nu}$ est le tenseur métrique, et il est considéré comme un objet fondamental permettant de décrire le champ gravitationnel [151, 152]. En analysant les caractéristiques de l'univers, nous trouvons trois propriétés fondamentales, la gravité $g_{\mu\nu}$, la matière $T_{\mu\nu}$ et la courbure $R_{\mu\nu}$. Étant donné que la courbure est issue de la déformation de l'espace-temps, nous pouvons établir l'égalité suivante

$$G^{\mu\nu} [g, \partial g, \partial^2 g, \dots] = 8\pi T^{\mu\nu}, \quad (1.4)$$

1.2. Symétrie sphérique du champ gravitationnel dans le vide

où nous avons $D_\mu G^{\mu\nu} = 0$. Ceci correspond à l'identité de Bianchi $g^{\mu\nu} D_\mu (R_{\nu\alpha} - \frac{1}{2}R g_{\nu\alpha})$. Partant de ce fait, l'équation d'Einstein s'écrit sous la forme suivante

$$R^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} \frac{1}{2}R + g^{\mu\nu} \Lambda = 8\pi T^{\mu\nu}, \quad (1.5)$$

où R est le scalaire de Ricci, défini par $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = 2K$, tel que K est la courbure de Gauss. Or, Λ représente la constante cosmologique [145]. La courbure de Reimann et le symbole de Christoffel sont définis respectivement par

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\lambda, \\ \Gamma_{\mu\nu}^\rho &= \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Le premier terme d'équation d'Einstein (1.5) décrit la déformation de l'espace-temps en fonction de la matière. En revanche, le deuxième terme informe comment la matière peut se déplacer en fonction de la déformation de l'espace-temps. À l'aide de cette équation, la définition traditionnelle de la gravitation selon Newton doit être rompue. Au lieu de la considérer comme une force exercée entre deux corps, elle doit plutôt se manifester à travers la courbure de l'espace-temps.

1.2.1 Solution de Schwarzschild

L'absence de la linéarité dans l'équation d'Einstein provoque une difficulté dans la recherche des solutions associées [71, 150, 151]. En effet, nous imposons les conditions de symétrie sur l'élément linéaire. De même, nous considérons un tel cas correspondant au champ gravitationnel créé par un astre immobile à symétrie sphérique et sans rotation par rapport aux galaxies lointaines. De plus, nous cherchons des solutions avec un tenseur d'énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ nul, et associé à un fluide parfait dans une région limitée de l'espace. Pour cette raison, la solution exacte correspondra à un trou noir de Schwarzschild [5, 21].

L'hypothèse d'une solution statique et sphérique signifie qu'il existe des coordonnées $\{x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi\}$, impliquant une métrique de la forme suivante

$$ds^2 = -a(r) dt^2 + b(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1.7)$$

où r est le rayon de la sphère associée à la symétrie sphérique. La partie angulaire de la

1.2. Symétrie sphérique du champ gravitationnel dans le vide

métrique est la même que la forme non gravitationnelle en raison de la symétrie sphérique. Tandis que $a(r)$ et $b(r)$ représentent des fonctions qui ne dépendent que de r . C'est une énorme simplification parce que nous avons uniquement quatre composantes diagonales de la matrice $g_{\mu\nu}$ qui sont non nulles. En effet, il n'y a essentiellement que deux fonctions inconnues d'une même variable. En raison de l'indépendance temporelle et de la symétrie sphérique, les coefficients de la métrique sont indépendants à la fois de $x^0 = t$ et de $x^3 = \phi$. Par conséquent, nous attendons d'obtenir deux quantités conservées liées à l'énergie et au moment cinétique, de manière similaire à la gravité Newtonienne à symétrie sphérique [39, 148].

D'après la forme sphérique de la matrice $g_{\mu\nu}$, on peut calculer immédiatement les symboles de Christoffel associés $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$, puis $R_{\mu\nu}$. En effet, dans le cas où le tenseur énergie-impulsion est nul $T_{\mu\nu} = 0$ (vide) et $\Lambda = 0$ (absence de constante cosmologique), l'équation d'Einstein prend la forme suivante

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (1.8)$$

Il est à noter que la solution de Schwarzschild est une métrique dont le tenseur de Ricci est nul [22]. Alors, le tenseur de Riemann n'est pas nul, sauf dans le cas où la solution est présentée par la métrique de Minkowski. La résolution des fonctions inconnues $a(r)$ et $b(r)$ conduit à une première solution, trouvée par K.Schwarzschild en 1916. Cette dernière est donnée par

$$a(r) = \frac{1}{b(r)} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = 1 - \frac{r_s}{r}, \quad (1.9)$$

où M est la masse totale de la distribution de matière déterminée par le potentiel Newtonien M/r pour r tend vers zéro. La quantité r_s est définie comme

$$r_s = 2M. \quad (1.10)$$

C'est le rayon de Schwarzschild du corps gravitant ayant la dimension de longueur. Écrivons à nouveau la solution dans sa forme traditionnelle complète comme suit

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.11)$$

Ceci est connu sous le nom de métrique de Schwarzschild [66, 74]. Nous avons un seul paramètre, la masse M , tandis que la charge électrique Q et le moment angulaire J sont nuls. Nous voyons que si r est grand, nous pouvons atteindre le développement suivant

1.2. Symétrie sphérique du champ gravitationnel dans le vide

$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \approx 1 + \frac{2M}{r}$, ce qui donne la métrique d'une étoile. De surcroît, pour r qui tend vers l'infini et/ ou M qui tend vers zéro, nous retrouvons l'espace de Minkowski.

Nous calculons maintenant la courbure de cette géométrie. Dans cette métrique, nous avons $R_{\mu\nu} = 0 = R$. Autrement dit, cet espace est appelé Ricci-plat. Par conséquent, nous considérons un autre invariant de courbure correspond au scalaire de Kretschmann [151–153]. En effet, nous obtenons

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48M^2}{r^6} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty. \quad (1.12)$$

À ce stade, nous observons qu'il y a une singularité spatio-temporelle à $r = 0$. C'est une singularité qui ne peut être résolue par une transformation de coordonnées [66]. Ceci est différent de la singularité de coordonnées à $r = 2M$, où le scalaire de Kretschmann est fini. En l'occurrence, cette transformation de coordonnées peut être supprimée, en considérant les coordonnées d'Eddington-Finkelstein, comme nous le verrons plus tard.

1.2.1.1 Horizon des événements

L'horizon des événements a la topologie de S_2 , et il est situé à $r = 2M$. Par suite, la métrique devient divergente [156]. Cependant, toutes les composantes de $R_{\mu\nu\rho}^\lambda$ sont finies. Par conséquent, nous voyons (comme indiqué précédemment) qu'il ne s'agit pas d'une vraie singularité (spatio-temporelle) mais simplement d'une singularité de coordonnées. De surcroît, nous manquons d'outils théoriques afin de répondre avec certitude aux questions liées au singularité $r = 0$. En raison de la petite échelle combinée à une densité élevée, les effets de gravité quantique devraient jouer un rôle important à l'origine [1, 33, 107].

Pour $r > 2M$, nous avons la région *I* ou l'extérieur du trou noir, la métrique a une signature $(-, +, +, +)$.

Pour $r < 2M$, nous obtenons région *II* ou l'intérieur du trou noir, la métrique a une signature $(+, -, +, +)$.

À $r = 2M$, nous trouvons l'horizon des événements, qui est une surface nulle puisqu'elle a une signature $(0, 0, +, +)$.

Nous remarquons que l'horizon des événements est une zone où x et t échangent leurs signatures respectivement (positives et négatives). Dans la région *II*, nous devons avancer dans r jusqu'à $r = 0$, ce qui signifie que l'on atteint inévitablement la singularité. Cela rappelle les particules qui avancent toujours dans le temps (après avoir défini nos conventions de

1.2. Symétrie sphérique du champ gravitationnel dans le vide

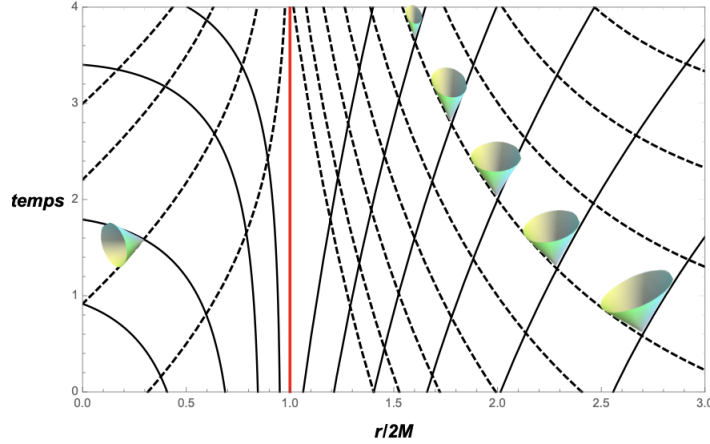


FIGURE 1.1 – *Diagramme spatio-temporel de la région proche de l'horizon de la métrique de Schwarzschild.*

direction du temps) dans la région I .

Un observateur extérieur ne verra jamais un signal atteindre l'horizon des événements car les signaux proches de l'horizon des événements sont décalés vers le rouge à l'infini. En d'autres termes, les signaux ralentissent jusqu'à ce qu'ils deviennent stationnaires près de l'horizon des événements. Un décalage vers le rouge infini signifie que la lumière perd toute son énergie. Autrement dit, elle devient complètement noire. C'est pourquoi le trou noir est un nom approprié pour cet objet. Nous pouvons le voir à partir du cône de lumière qui se ferme complètement à l'approche de l'horizon. En effet, en $r = 2M$, le cône de lumière bascule puisque la signature métrique passe de $(-, +, +, +)$ à $(+, -, +, +)$.

Notamment, nous considérons une géodésique nulle radiale [157]. Autrement dit, nous avons

$$ds^2 = 0 \longrightarrow \frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \quad (1.13)$$

où $d\theta = d\phi = 0$. Partant de cette dernière équation, nous constatons que même si le cône de lumière se ferme, la lumière et la matière peuvent atteindre $r = 2M$ en durée de vie finie. Lorsque l'observateur atteint $r = 2M$, il n'éprouve rien d'étrange, sauf que son destin a été scellé et la composante métrique g_{rr} explose à l'infini. Par ailleurs, l'horizon des événements est considéré comme une zone sphérique qui délimite la région, d'où la lumière et la matière ne peuvent s'échapper [66, 156]. En effet, nous pouvons prouver que l'horizon des événements n'est qu'une singularité de coordonnées, en changeant le système de coordonnées en un autre [147, 148]. En premier lieu, nous introduisons les coordonnées de la tortue (tortoise coordinates) résolvant l'équation différentielle du cône de lumière (1.13). Pour $r \geq 2M$, nous

1.2. Symétrie sphérique du champ gravitationnel dans le vide

avons

$$t = \pm \left[r + 2M \ln \left(\frac{2r}{2M} - 1 \right) \right]. \quad (1.14)$$

Puis nous introduisons

$$r^* = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right) \xrightarrow{r \rightarrow 2M} -\infty. \quad (1.15)$$

Dans ce nouveau type de coordonnées, la métrique prend la forme suivante

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{R} \right) (-dt^2 + (dr^*)^2) + r^2 d\omega^2. \quad (1.16)$$

Dans ces coordonnées, le cône de lumière ne se ferme pas. De plus, aucune composante métrique ne tend vers l'infini lorsque r tend vers $2M$. En outre, les rayons lumineux radiaux (les courbes radiales nulles) entrants et sortants se déplacent le long des coordonnées constantes d'Eddington-Finkelstein ($v = \text{cst}$ et $u = \text{cst}$, respectivement). Ces dernières, sont définies par

$$\begin{cases} v &= t + r^*, \\ u &= t - r^*. \end{cases}$$

En termes de ces coordonnées, nous pouvons alors exprimer la métrique associée comme suit

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dv^2 + 2dr dv + r^2 d\omega^2. \quad (1.17)$$

C'est la métrique d'Eddington-Finkelstein. Pour une courbe nulle, nous avons $ds^2 = 0$. En termes de ces coordonnées, la condition pour les courbes radiales nulles ($d\Omega = 0$) s'exprime comme suit

$$\frac{dv}{dr} = \begin{cases} 0 & \longrightarrow \text{courbe nulle entrante,} \\ 2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} & \longrightarrow \text{courbe nulle sortante.} \end{cases} \quad (1.18)$$

À ce niveau, nous remarquons que $dv/dr \leq 0$ pour $r < 2M$. Alors, pour $r < 2M$, tous les futurs chemins dirigés sont dans le sens de r décroissant. Cette propriété est illustrée dans la figure 1.2. Cela signifie qu'un signal à $r < 2M$ atteindra la singularité spatio-temporelle à $r = 0$.

Dans ce qui suit, nous présentons les coordonnées de Kruskal-Szekeres. Cela nous aide à supprimer les singularités de coordonnées. Ce qui rend l'espace-temps associé géodésique-

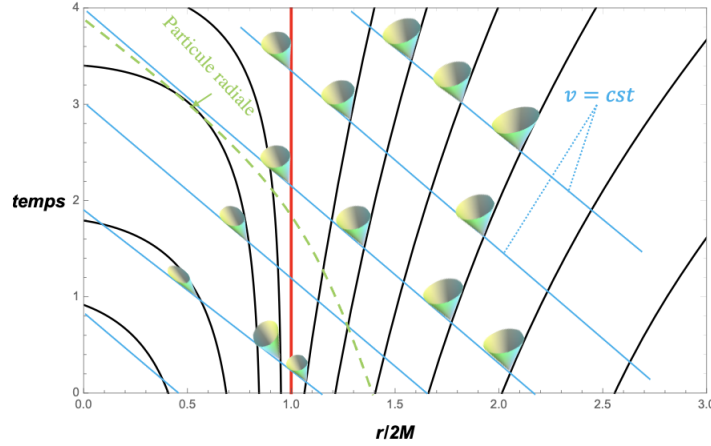


FIGURE 1.2 – *Espace-temps de Schwarzschild en coordonnées d'Eddington-Finkelstein.*

ment complet. Cependant, nous obtenons également des régions supplémentaires *III* et *IV* indiquant les copies de *I* et *II*.

1.2.1.2 Coordonnées de Kruskal-Szekeres et géodésiques du trou noir de Schwarzschild

La solution de Schwarzschild est caractérisée par une singularité spatio-temporelle de courbure à $r = 0$, et une singularité de métrique à $r = 2M$ [21, 66, 74]. Ainsi, l'espace-temps possède une région extérieure ($r > 2M$) et une région intérieure ($r < 2M$) représentées respectivement par les régions *I* et *II*. Dans cette section, nous allons considérer un nouveau système de coordonnées permettant de doubler l'espace-temps et de trouver des copies des régions *I* et *II*. Jusqu'à présent, nous avons introduit les systèmes de coordonnées suivants

1. Coordonnées de Schwarzschild: (t, r, θ, ϕ) .
2. Coordonnées de la tortue: (t, r^*, θ, ϕ) avec $r^* = r + 2M \ln|\frac{r}{2M} - 1|$.
3. Coordonnées d'Eddington-Finkelstein: (v, u, θ, ϕ) , où v et u sont les coordonnées du cône de lumière données par $v = t + r^*$, $u = t - r^*$.

1.2. Symétrie sphérique du champ gravitationnel dans le vide

De ce fait, les coordonnées de Kruskal-Szekeres sont définies à partir des coordonnées de Schwarzschild comme suit

$$\begin{aligned} \text{Région } I \begin{cases} R &= \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|^{1/2} e^{r/4M} \cosh \left(\frac{t}{4M} \right), \\ T &= \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|^{-1/2} e^{r/4M} \sinh \left(\frac{t}{4M} \right). \end{cases} \\ \text{Région } II \begin{cases} R &= \left| 1 - \frac{r}{2M} \right|^{1/2} e^{r/4M} \sinh \left(\frac{t}{4M} \right), \\ T &= \left| 1 - \frac{r}{2M} \right|^{-1/2} e^{r/4M} \cosh \left(\frac{t}{4M} \right). \end{cases} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Dans ces coordonnées, la métrique prend la forme suivante

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} (dR^2 - dT^2) + r^2 d\Omega^2, \quad (1.20)$$

où nous avons implicitement défini r à partir de $T^2 - R^2 = (1 - r/2M) e^{r/2M}$.

En termes de ces coordonnées, les courbes radiales nulles obéissent à $T = \pm R + cste$. Cependant, nous notons que l'horizon des événements $r = 2M$ est situé à $T = \pm R$. Ceci provient de la condition $ds^2 \leq 0$ pour les courbes du genre temps et du genre lumière. Cette structure causale est schématisée par la figure 1.3. La transformation de coordonnées (r, t) en (R, T) ne décrit que les deux régions I et II de la figure 1.3. En principe, nous devrions admettre toutes les valeurs de R et T qui n'atteignent pas la singularité à $r = 0$. Puisque la singularité correspond à $T^2 = R^2 + 1$, nous devrions vraiment exiger l'intervalle $T^2 < R^2 + 1$ et $-\infty < R < \infty$. Par conséquent, les coordonnées R et T couvrent également les régions III et IV . C'est pourquoi que la géométrie de Schwarzschild en coordonnées de Kruskal-Szekeres affiche plus de régions de l'espace-temps que ceux représentées par les coordonnées de Schwarzschild.

Dans l'espace-temps maximalement étendu, nous pouvons distinguer les quatre régions différentes illustrées dans le diagramme de Kruskal-Szekeres. La région I ($r > 2M$) correspond à l'espace-temps original. Tandis que la région II ($r < 2M$) est associée au trou noir puisqu'il empêche toute forme dedans de s'en échapper. Ainsi, la région III représente un univers parallèle. Elle est causalement déconnectée de la région I . Puis, la région IV correspond à un trou blanc. C'est une région de l'espace-temps dans laquelle les signaux peuvent atteindre tous les autres points de l'espace-temps, mais pas l'inverse. En outre, ce trou blanc se comporte comme un trou noir à temps inversé. Conséquemment, nous pouvons dire que

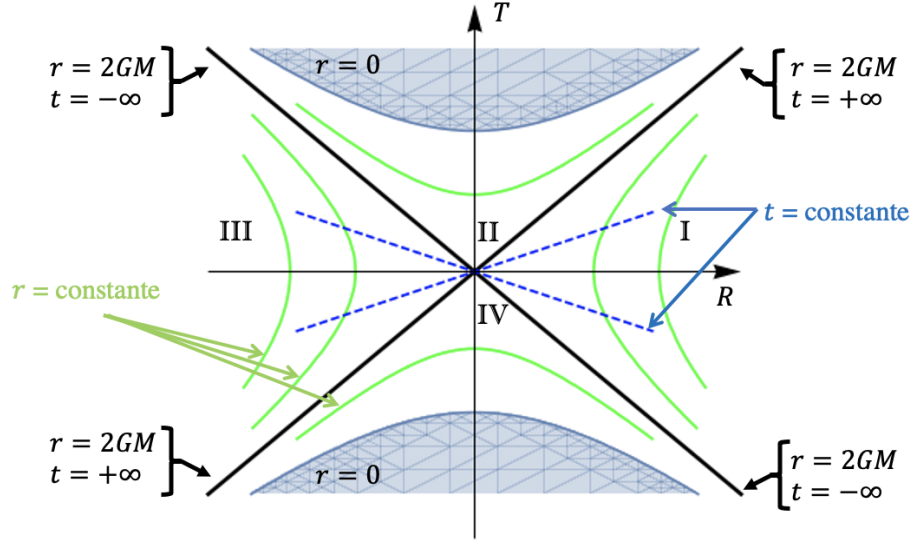


FIGURE 1.3 – Diagramme du trou noir de Schwarzschild en fonction des coordonnées de Kruskal-Szekeres.

les deux régions *I* et *II* représentent l'espace-temps d'origine. Or, les régions *III* et *IV*, sont considérées comme une copie de l'espace-temps original [5, 157].

1.2.1.3 Géodésique et potentiel effectif du trou noir de Schwarzschild

Nous avons conclu que la singularité est le destin de toute forme de matière ou de rayonnement [157]. En effet, l'horizon des événements implique le point de non retour. N'importe quel chemin du genre temps pourrait accélérer en s'éloignant de l'horizon avant de l'atteindre. En conséquence, l'équation géodésique est définie comme

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0. \quad (1.21)$$

Évidemment, ceci conduit à quatre équations différentielles couplées, qui sont impossibles à résoudre. Cependant, la symétrie de notre système réduit le problème pour une seule équation différentielle avec un potentiel effectif [59]. En raison de la symétrie sphérique et statique de la métrique, nous avons obtenu deux vecteurs de Killing, $K_t^\mu = (1, 0, 0, 0)$ et $K_\phi^\mu = (0, 0, 0, 1)$. Ces derniers, sont satisfaits par l'équation de Killing suivante

$$K_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} = \text{constant}.$$

1.2. Symétrie sphérique du champ gravitationnel dans le vide

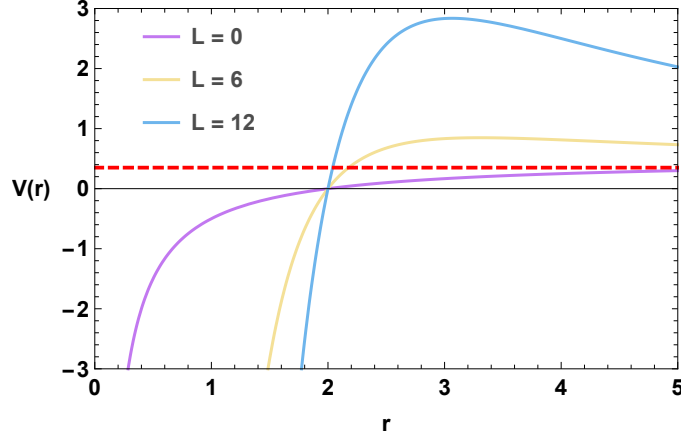


FIGURE 1.4 – *Diagramme de potentiels effectifs du trou noir de Schwarzschild.*

Cela implique que le moment cinétique $L = r^2 \frac{d\phi}{d\tau}$ et l'énergie $E = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau}$ sont conservés le long des géodésiques, correspondant respectivement à la symétrie sphérique et à l'invariance temporelle [16]. L'équation géodésique est donnée par

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V(r) = \frac{1}{2} E^2. \quad (1.22)$$

En prenant $\theta = \frac{\pi}{2}$, le potentiel effectif $V(r)$ est donné par

$$V(r) = \frac{1}{2} \left(\epsilon - \frac{L^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{2M}{r} \right), \quad (1.23)$$

où $\epsilon = +1, -1, 0$ pour les géodésiques temporelles, spatiales et nulles, respectivement. À partir de la figure 1.4, nous concluons qu'un observateur tombant librement d'une distance finie du trou noir sans aucune vitesse spatiale ($L = 0$) traverse l'horizon des événements et péricérise dans la singularité. En effet, la dérivée du potentiel effectif implique une équation de second ordre qui s'exprime comme suit

$$\frac{dV}{dr} = \epsilon \frac{M}{r^2} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3ML^2}{r^4} = 0. \quad (1.24)$$

Les solutions trouvées sont associées à $L > 12M^2$. De plus, les orbites circulaires sont situées en

$$r_{\pm} = \frac{L^2}{2M} \left(1 \pm \sqrt{L^2 - 12M^2} \right). \quad (1.25)$$

1.2. Symétrie sphérique du champ gravitationnel dans le vide

Tandis que les géodésiques nulles ont une orbite stationnaire instable à $r = 3M$ si $L > 0$.

1.2.1.4 Diagrammes de Penrose

Nous complétons cette section par l'introduction des diagrammes de Penrose. Ces derniers sont considérés comme une représentation de la structure entière de l'espace-temps sur une partie compacte de l'espace à deux dimensions [6]. Cela conduit à la suppression de quelques dimensions, de telle sorte que $ds^2 = 0$ implique que $da = \pm db$, où a et b sont les coordonnées de l'espace image. Cette dernière condition garantit que les géodésiques nulles sont représentées par des lignes à $\pm 45^\circ$. Pour rendre cet espace-temps plus raisonnables, nous effectuons des compactifications dites conformes (une carte). En effet nous avons

- Les frontières infinies sont représentées par des lignes, des points ou des hypersurfaces à des distances finies.
- La structure conforme est facilement visible. En particulier, nous exigeons que les rayons lumineux se déplacent à 45 degrés. Cela peut être exprimé par $da = \pm db$, où a et b , indiquent les nouvelles coordonnées conformes.

Cela rend les diagrammes de Penrose particulièrement adaptés pour montrer la structure causale de l'espace-temps.

• L'espace de Minkowski tridimensionnel $\mathbb{R}^{1,3}$

En considérant la métrique suivante

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega_2^2 = -du dv + \left(\frac{v-u}{4}\right)^2 d\Omega_2^2, \quad 0 \leq r < \infty, \quad (1.26)$$

où $v = t + r$, $u = t - r$. Nous définissons maintenant $V := \arctan v$ et $U := \arctan U$. La marge des coordonnées est $-\frac{\pi}{2} < u \leq v < \frac{\pi}{2}$. Nous pouvons aussi définir $T := U + V$, $R := V - U$, ce qui donne $|T| + R < \pi$, et $0 \leq R < \pi$. Par conséquent, T et R couvrent un triangle définissant un espace compact. De ce fait, nous obtenons

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{4 \cos^2 V \cos^2 U} (-4 dU dV + \sin^2 (V - U) d\Omega_2^2), \\ &= \frac{1}{4 \cos^2 V \cos^2 U} d\tilde{s}^2, \end{aligned} \quad (1.27)$$

où nous avons

$$d\tilde{s}^2 = \underbrace{-dT^2 + dR^2}_{\text{métrique plate}} + \sin^2 R d\Omega_2^2.$$

1.2. Symétrie sphérique du champ gravitationnel dans le vide

C'est la métrique de l'univers statique d'Einstein [5]. Sa topologie est donnée par $I \otimes S^3$, où I indique un intervalle fini.

Cependant, nous avons

- i^+ : l'infini futur du genre temps $t = \infty$.
- i^- : l'infini passé du genre temps $t = \infty$.
- i^0 : l'infini futur du genre espace $r = \infty$.
- $\mathcal{I}^+$: l'infini futur du genre lumière $v = \infty$ et $u = \text{fixée}$.
- $\mathcal{I}^-$: l'infini passé du genre lumière $v = \text{fixée}$ et $u = \infty$.

Par ailleurs, nous constatons les remarques suivantes

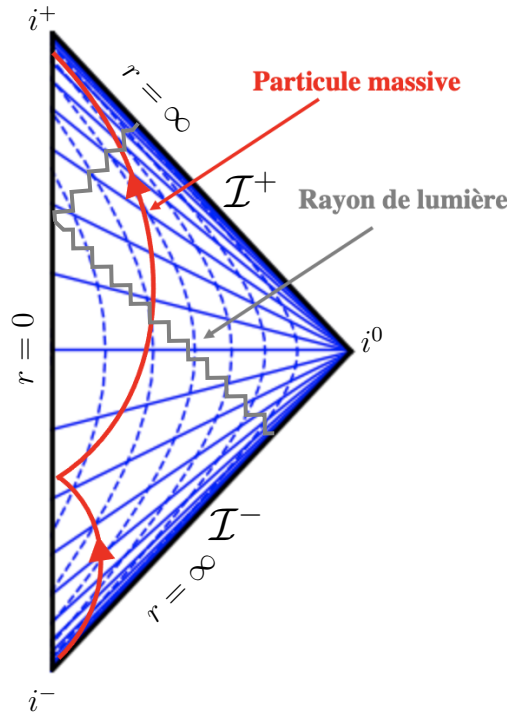


FIGURE 1.5 – Diagramme conforme de l'espace de Minkowski avec des coordonnées infinies du genre temps, spatiales et nulles.

- Les géodésiques nulles radiales, autrement dit, les cônes lumineux sont inclinées à 45° .
- Tous les points du diagramme de Penrose représentent une sphère S^2 sauf i^0 et $i^\pm$.
- i^0 et $i^\pm$ sont des points.
- $\mathcal{I}^\pm$ indiquent des hypersurfaces nulles.
- Toutes les géodésiques temporelles infiniment étendues commencent à i^- et se terminent à i^+ .
- Toutes les géodésiques spatiales infiniment étendues commencent à i^0 .

1.2. Symétrie sphérique du champ gravitationnel dans le vide

— Toutes les géodésiques nulles infiniment étendues commencent à $\mathcal{I}^-$.

•Diagramme de Penrose du trou noir de Schwarzschild

Maintenant, nous discutons le diagramme de Penrose de l'espace de Schwarzschild. Pour ce faire, nous nous concentrons sur la région I [6]. C'est la première région externe du trou noir correspondant à $r > 2M$. La transformation utilisée est donnée par

$$(r, t) \longrightarrow (u, v); \quad u = t - r^*, v = t + r^*.$$

Notons que $-\infty \leq t \leq \infty$ et $-\infty \leq r^* \leq \infty$. En effet, les frontières s'expriment comme suit

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^+ : \quad & u = \text{finie}, \quad v \longrightarrow \infty, \\ \mathcal{I}^- : \quad & v = \text{finie}, \quad u \longrightarrow -\infty. \end{aligned}$$

De plus, les horizons sont donnés par

$$\begin{aligned} H^+ : \quad & u \longrightarrow \infty, \quad v = \text{finie}, \\ H^- : \quad & v \longrightarrow -\infty, \quad u = \text{finie}. \end{aligned}$$

Nous définissons $u := \tan \tilde{U}$ et $v := \tan \tilde{V}$, tels que $|\tilde{U}| \leq \frac{\pi}{2}$ et $|\tilde{V}| \leq \frac{\pi}{2}$.

À ce niveau, nous nous dirigeons vers les coordonnées de Kruskal (R, T) associées à la métrique (1.20). Ensuite, nous les redéfinissons successivement comme: $u := T - R := \tan \hat{U}$ et $v := T + R := \tan \hat{V}$, de sorte que, $\hat{T} = \hat{U} + \hat{V}$ et $\hat{R} = \hat{V} - \hat{U}$. Cela conduit à la construction du diagramme de Penrose. Ce dernier possède les régions suivantes

- Région I : l'extérieur du trou noir.
- Région II : l'intérieur du trou noir.
- Région III : univers parallèle.
- Région IV : un trou blanc.

1.2.2 Solution de Reissner-Nordström

À ce stade, nous dérivons juste la solution correspondante à un trou noir avec une masse seulement. Maintenant, nous implémentons une charge électrique constante. Cette solution est connue sous le nom de la solution de Reissner-Nordström [38]. Elle est trouvée en choisissant la même forme de la métrique (1.7) en coordonnées de Schwarzschild, mais en prenant

1.2. Symétrie sphérique du champ gravitationnel dans le vide

par

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \Rightarrow T_{\mu\nu} = -F_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\alpha} + \left(\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - J_{\alpha}A^{\alpha}\right)g_{\mu\nu}. \quad (1.31)$$

Pour une charge électrique ponctuelle, le tenseur d'intensité du champ est donné par $F_{rt} = \frac{Q}{r^2}$, où Q est la charge électrique. La solution unique pour l'équation $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}$ s'exprime comme suit

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (1.32)$$

Cette solution est connue sous le nom de la métrique de Reissner-Nordström, qui est caractérisée par les paramètres (M, Q) [38]. Nous avons à nouveau une singularité de courbure à $r = 0$ (caractérisée par un scalaire de Kretschmann divergeant). Cependant, nous obtenons deux horizons situés à

$$r = r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}. \quad (1.33)$$

Les signatures de la métrique pour la solution de Reissner-Nordström sont données par

1. $r > r_+$: $(-, +, +, +)$.
2. $r_- < r < r_+$: $(+, -, +, +)$.
3. $r < r_-$: $(-, +, +, +)$.

À partir des signatures de la métrique, nous pouvons constater que les géodésiques temporelles ne se terminent pas nécessairement à $r = 0$ puisqu'elles sont forcées de se déplacer dans le sens de la diminution de r uniquement pour $r_- < r < r_+$. La singularité à $r = 0$ forme une ligne du genre temps, qui peut être évitée, par opposition aux trous noirs non chargés (Schwarzschild) dont $r = 0$ est spatial. La métrique de Reissner-Nordström possède deux limites intéressantes.

- $Q \rightarrow 0$: dans cette limite, nous récupérons le rayon de Schwarzschild, alors $r_+ = 2M$, et $r_- = 0$.
- Trou noir extrémal: $Q^2 = M^2$, de sorte que $r_- = r_+ = M$.

Étant donné que le trou noir extrémal provoque $r_- = r_+$, la signature de la métrique est $(-, +, +, +)$ partout dans l'espace-temps. Ainsi, nous remarquons que la métrique ne change pas de signature à l'horizon $r = M$. Cependant, $M^2 = Q^2$ représente un cas limite dans le

1.2. Symétrie sphérique du champ gravitationnel dans le vide

sens où nous avons besoin de $M^2 \geq Q^2$. Or, pour $M^2 < Q^2$, nous obtenons une singularité nue, violant la conjecture de censure cosmique [157].

1.2.2.2 Coordonnées de Kruskal-Szekers

En premier lieu, avant d'aborder la définition des coordonnées de Kruskal-Szekers, nous avons besoin des coordonnées de la tortue [5]. Similairement au cas précédent, pour la métrique de Reissner-Nordström, nous avons

$$r^* = r + \frac{1}{2\kappa_+} \log \left| \frac{r - r_+}{r_+} \right| + \frac{1}{2\kappa_-} \log \left| \frac{r - r_-}{r_-} \right|, \quad (1.34)$$

où nous avons

$$\kappa_{\pm} = \frac{r_{\pm} - r_{\mp}}{2r_{\pm}^2}, \quad (1.35)$$

définissant la surface de gravité du trou noir. Ensuite, nous définissons les coordonnées d'Eddington-Finkelstein par $v = t + r^*$ et $u = t - r^*$. Par conséquent, les coordonnées de Kruskal s'expriment comme

$$\begin{aligned} U^{\pm} &= -e^{-\kappa_{\pm} u}, \\ V^{\pm} &= \pm e^{-\kappa_{\pm} v}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

En termes de ces coordonnées, la métrique (1.32) prend la forme suivante

$$ds^2 = -\frac{r_+ r_-}{\kappa_{\pm}^2} \frac{e^{2|\kappa_{\pm}|r}}{r^2} \left(\pm \frac{r - r_{\mp}}{r_{\mp}} \right)^{1 \pm} \left| \frac{\kappa_{\pm}}{\kappa_{\mp}} \right| dU^{\pm} V^{\pm} + r^2 d\Omega^2. \quad (1.37)$$

Il est à noter que les combinaisons de coordonnées U^+, V^+ et U^-, V^- correspondent à deux régions distinctes. Dans la région positive, nous définissons u et v comme précédemment pour remarquer que $r > r_-$ dans ce que l'on appelle les coordonnées sortantes d'Eddington-Finkelstein. Dans la second région négative, nous utilisons les coordonnées d'Eddington-Finkelstein entrantes, impliquant que $u = v - 2r^*$. Par suite, nous obtenons la région contenant $r < r_+$.

À partir de la figure 1.7, nous observons que la région *II* est couplée aux régions *I*, *III* et *IV* dans le sens du temps passé. En utilisant le principe du retournement temporel, nous attendons que la région *III'* (voir figure 1.8) soit couplée directement aux régions *I'*, *II'* et *IV'*.

En effet, ce couplage entre ces différentes régions est rationnel, puisqu'il rend la com-

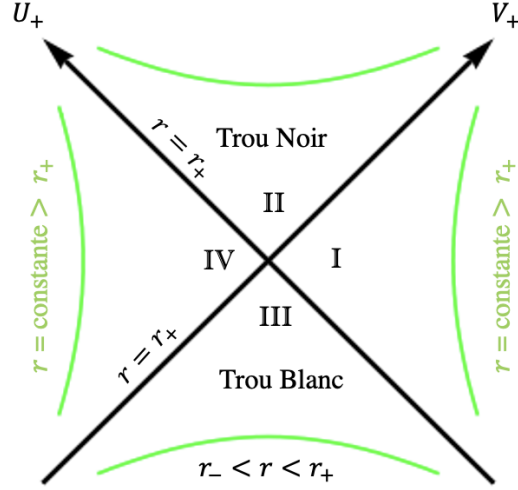


FIGURE 1.7 – Diagramme de Kruskal à partir des coordonnées sortantes d'Eddington-Finkelstein.

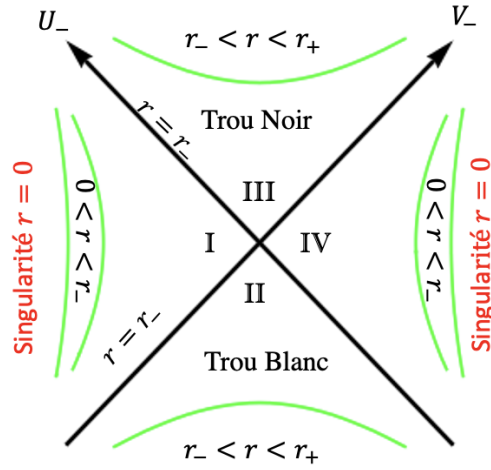


FIGURE 1.8 – Diagramme de Kruskal à partir des coordonnées entrantes d'Eddington-Finkelstein.

munication entre le trou (noir et blanc) et l'univers impossible. Cela donnera le même type des régions comme dans le premier diagramme 1.7, qui se couplera à nouveau au deuxième diagramme 1.8 et ainsi de suite [5].

1.2.2.3 Géodésique du trou noir de Reissner-Nordström

En utilisant la même équation pour les géodésiques que celle donnée dans la section 1.2.1.3, nous obtenons quatre équations différentielles dont l'une est annulée [157]. Ensuite,

1.3. Trous noirs rotatifs

en utilisant les vecteurs de Killing, ainsi que la symétrie sphérique et statique de la métrique associée, nous trouvons les équations correspondant respectivement au moment cinétique et à l'énergie. Ces derniers s'expriment comme suit

$$E = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right), \quad (1.38)$$

$$L = r^2 \frac{d\phi}{d\tau}. \quad (1.39)$$

L'équation géodésique est donnée par

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = \frac{Q^2 - Mr}{r^3} g_{rr} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{r}{g_{rr}} \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 - \frac{Q^2 - Mr}{r^3 g_{rr}} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2. \quad (1.40)$$

Prenant $\theta = \frac{\pi}{2}$, le potentiel effectif $V(r)$ prend la forme suivante

$$V(r) = \left(\frac{L^2}{r^2} + \epsilon\right) \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right), \quad (1.41)$$

où $\epsilon = +1, -1, 0$ pour les géodésiques temporelles, spatiales et nulles, respectivement.

1.2.2.4 Diagrammes de Penrose du trou noir de Reissner-Nordström

Les diagrammes de Kruskal 1.8 et 1.7 peuvent être assemblés afin de donner le diagramme de Penrose associé pour le trou noir de Reissner-Nordström [71, 157]. Il peut sembler étonnant qu'il s'agit d'un modèle qui se répète à l'infini, à la fois vers le passé et vers le futur, comme le montre la figure 1.9. Notons que la singularité apparaisse comme une ligne verticale.

1.3 Trous noirs rotatifs

Dans cette section, nous nous tournons vers les trous noirs rotatifs. Ils sont considérés comme des solutions appropriées pour décrire les trous noirs observées dans l'univers [65, 88].

1.3.1 Solution de Kerr

À cause de l'axe de rotation des objets rotatifs, la symétrie de rotation est brisée. Cela rend la solution des trous noirs rotatifs considérablement plus compliquée que les solutions sphériques discutées jusqu'à présent [8, 95]. En utilisant les coordonnées de Boyer-Lindquist

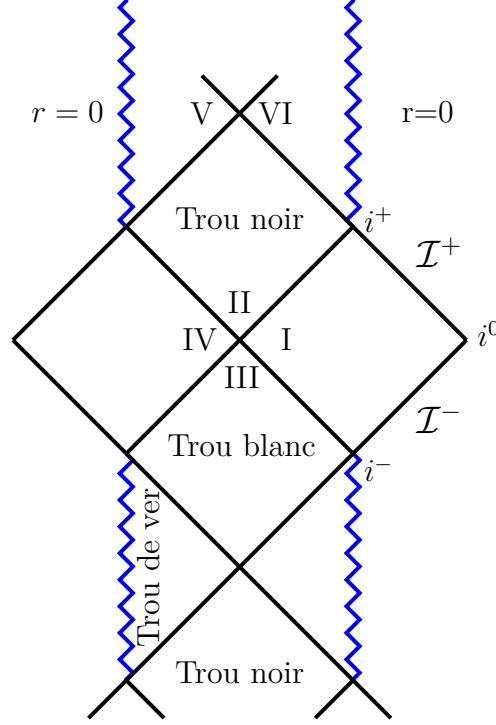


FIGURE 1.9 – Diagramme de Penrose du trou noir de Reissner-Nordström.

(t, r, θ, ϕ) , la métrique prend la forme suivante

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2) d\phi - a dt]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad (1.42)$$

où $\Delta(r)$ et $\rho^2(r, \theta)$ sont donnés par

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (1.43)$$

Cette solution est nommée par la solution de Kerr trouvée en 1963 [65]. Il est également utile d'avoir une expression pour la métrique à partir de laquelle nous pouvons immédiatement lire les composantes métriques g_{tt} , $g_{t\phi}$ et $g_{\phi\phi}$. En effet, nous avons

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{4M a r \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta] d\phi^2 + \rho^2 d\theta^2. \quad (1.44)$$

1.3. Trous noirs rotatifs

La solution de Kerr dépend de deux paramètres, M et a . Une inspection rapide de la métrique montre que le paramètre de rotation a possède une dimension de longueur. Cependant, lorsque $a = 0$, la solution de Kerr se réduit à la solution de Schwarzschild.

Par ailleurs, il existe deux isométries continues de la métrique de Kerr. Ces derniers sont définis comme suit

$$K = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \text{et} \quad L = \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (1.45)$$

Par conséquent, nous pouvons calculer les intégrales de Komar pour chacun d'entre eux, donnant respectivement la masse M et le moment angulaire $J = a M$ du trou noir. Il est à noter que l'inversion de signe de a change la direction de rotation. Dans ce qui suit, nous prenons $a > 0$. En outre, la solution de Schwarzschild était également invariante sous les symétries $t \rightarrow -t$ et $\phi \rightarrow -\phi$. En revanche, la solution de Kerr est invariante uniquement sous la combinaison $(t, \phi) \rightarrow (-t, -\phi)$. Cela est en accord avec les propriétés d'un tel objet rotatif.

• Unicité du trou noir

Il existe un ensemble de théorèmes, chacun avec des hypothèses légèrement différentes, qui peuvent être résumés collectivement comme suit. Toute solution de trou noir, asymptotiquement plate, indépendante du temps, appartient à la famille de Kerr [7, 88, 95]. En d'autres termes, les trous noirs sont caractérisés seulement par deux paramètres, la masse M et le moment angulaire J . Dans la théorie d'Einstein-Maxwell, ces théorèmes sont étendus pour tenir compte les charges électriques et magnétiques également.

Ces théorèmes ne sont pas aussi forts que le théorème de Birkhoff. Ici, nous n'avons eu besoin que de supposer une symétrie sphérique pour obtenir la solution de Schwarzschild. Cela garantit que la métrique de Schwarzschild décrit l'espace-temps à l'extérieur d'une étoile, même celle qui subit un effondrement sphérique.

En revanche, un ensemble plus large de théorèmes utilise explicitement l'horizon des événements. Cela signifie que la solution de Kerr ne décrit pas nécessairement l'espace-temps à l'extérieur d'une étoile en rotation, bien qu'elle semble admissible qu'elle s'agit d'une bonne approximation loin de la surface de l'étoile.

Néanmoins, ces théorèmes informent que le point final de l'effondrement gravitationnel est génériquement le trou noir de Kerr.

• Structure globale

1.3. Trous noirs rotatifs

Lorsque $\Delta = 0$, la composante métrique g_{rr} diverge. L'étude précédente des trous noirs de Schwarzschild et de Reissner-Nordström suggère qu'il s'agit de singularité de coordonnées. Les racines de $\Delta = 0$ sont données par

$$\Delta = (r - r_+)(r - r_-), \quad (1.46)$$

où nous avons

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (1.47)$$

En particulier, si le trou noir tourne plus vite, alors, nous avons $a > M$. Par suite, la solution de Kerr présente une singularité nue. Or, le cas critique, où $a = M$, correspond au trou noir extrémal de Kerr [10]. Généralement, les valeurs de spin autorisés sont $a/M \leq 1$. Afin de montrer que $r = r_{\pm}$ sont les singularités de coordonnées, nous pouvons appliquer une approche semblable à celle d'Eddington-Finkelstein. De ce fait, nous introduisons les coordonnées de Kerr (v, r, θ, χ) , avec $v = t + r^*$, tels que r^* et χ sont définies par

$$dr^* = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr, \quad d\chi = d\phi + \frac{a}{\Delta} dr. \quad (1.48)$$

Cependant, il est désormais qu'il n'y a pas de géodésiques radiales. Elles sont tordues par la rotation du trou noir [65, 88, 95]. En outre, nous remplaçons les coordonnées t et ϕ respectivement par v et χ dans (1.42) afin d'obtenir l'équation suivante

$$\begin{aligned} ds^2 = & \frac{-\Delta}{\rho^2} [dv - a \sin^2 \theta d\chi]^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [a dv - (a^2 + r^2) d\chi]^2 \\ & + (dv - a \sin^2 \theta d\chi) dr + \rho^2 d\theta^2. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Tout d'abord, nous notons que les géodésiques nulles sont définies par $dv = d\chi = d\theta$, puisque cela garantit que $ds^2 = 0$. Ensuite, comme pour les coordonnées d'Eddington-Finkelstein, il n'y a plus de facteur Δ dans le dominateur de la métrique (1.49), permettant d'étendre la coordonnée r jusqu'à $r > 0$ sans atteindre la singularité.

Afin de construire une structure causale complète du trou noir de Kerr, nous avons besoin des coordonnées de Kruskal analogues aux coordonnées $U_{\pm}$ et $V_{\pm}$ (1.36), que nous avons introduites pour le trou noir de Reissner-Nordström [5]. Il est à noter que la procédure reste la même. Les coordonnées U_+ et V_+ permettent d'étendre l'espace-temps au-delà de l'horizon

extérieur à r_+ , jusqu'à l'horizon intérieur à r_- . Puis, nous devons passer aux coordonnées U_- et V_- afin d'obtenir la singularité [6]. En effet, cela se répète à l'infini comme le montre le diagramme de Penrose dans la figure 1.10.

- **Singularité du trou noir de Kerr**

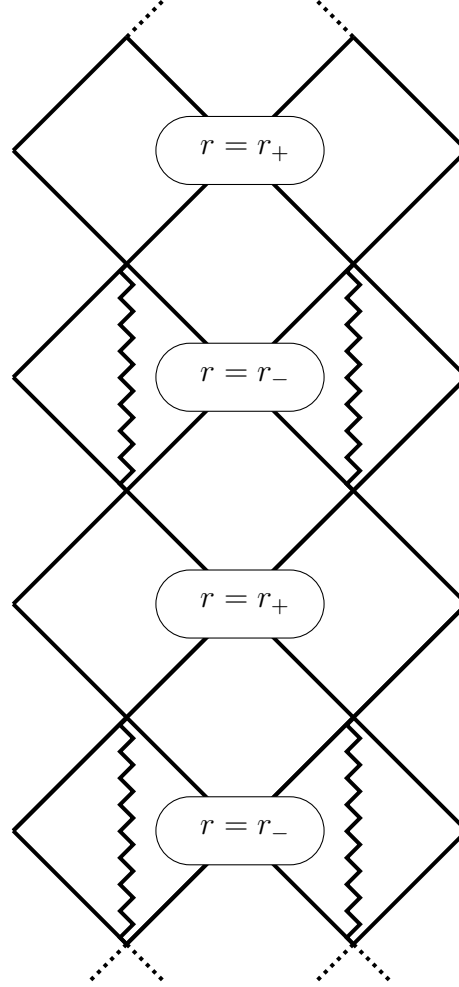


FIGURE 1.10 – *Diagramme de Penrose du trou noir de Kerr.*

La structure globale de la solution de Kerr diffère de celle de Reissner-Nordström. La composante métrique g_{tt} diverge lorsque

$$\rho = 0 \longrightarrow r = 0 \quad \text{et} \quad \theta = \pi/2. \quad (1.50)$$

Et comme précédemment pour les trous noirs de Schwarzschild et Reissner-Nordström, nous pourrions nous attendre que la singularité $\rho = 0$ indique une singularité de courbure. Cela est confirmé par une analyse du scalaire de Kretschmann [154, 155].

1.3. Trous noirs rotatifs

Cependant, la singularité est apparue à $r = 0$. Ici, il n'était pas nécessaire de spécifier les coordonnées angulaires sur S^2 , puisque cette dernière est dégénérée⁴ à $r = 0$, tout comme à l'origine de l'espace plat. En revanche, la singularité de Kerr est associée avec $\theta = \pi/2$. Pour mieux comprendre cette situation, nous pouvons observer que, pour $r = 0$, où t constante, la métrique (1.42) prend la forme suivante

$$ds^2 = a^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + a^2 \cos^2 \theta d\theta^2. \quad (1.51)$$

Par conséquent, nous remarquons que la sphère S^2 n'est pas dégénérée à ce point ($r = 0$). Ceci est prévu, en raison que la solution de Kerr n'avait pas de symétrie de rotation. La restriction de $\theta = \pi/2$ correspond au plan équatorial. Il s'agit d'un anneau de rayon a , paramétré par $\phi \in [0, 2\pi]$. De ce fait, nous remarquons que la singularité du trou noir de Kerr a une structure d'un anneau [7, 10]. Dans ce cas, la singularité est à nouveau temporelle comme la montre le diagramme de Penrose 1.10.

En somme, nous concluons que la singularité de Kerr est particulière. C'est une singularité annulaire d'une part. D'où sa topologie est celle d'un anneau. D'autre part, c'est une singularité du genre temps.

• Courbes temporelles fermées

Dans le trou noir de Reissner-Nordström, l'espace-temps se termine à la singularité temporelle [95, 157]. Puisque la sphère S^2 n'est pas dégénérée pour Kerr, l'espace-temps continue au-delà de la singularité comme la montre la figure 1.10.

Cette région est accessible aux observateurs en suivant une géodésique temporelle traversant $r = 0$ en $\theta \neq \pi/2$. Cela correspond à $r < 0$ dans les coordonnées d'origine (1.42). Cependant, nous considérons une courbe qui se situe aux constantes t , r et $\theta = \pi/2$. En d'autres termes, la courbe est paramétrée par ϕ . À partir de l'équation (1.42), la métrique associée à cette courbe se réduit à

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(-\frac{a^2 \Delta}{r^2} + \frac{(r^2 + a^2)^2}{r^2} \right) d\phi^2, \\ &= \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r} \right) d\phi^2. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Le terme $\left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r} \right)$ est négatif pour $r < 0$. Cela signifie que ϕ est une direction

4. En mathématique, la dégénérescence se traduit par l'apparition des valeurs nulles ou infinies dans les représentations analytiques des objets. Un cercle est dégénéré lorsque son rayon est nul, se réduisant donc à son centre.

temporelle proche de la singularité. Mais ϕ est une coordonnée périodique vérifiant $\phi \sim \phi + 2\pi$. Cela indique que si nous nous déplaçons le long de cette courbe, nous revenons au même moment que nous avons commencé. Par conséquent, il s'agit d'une courbe temporelle fermée.

• Ergosphère

Une des propriétés principales du trou noir de Kerr est l'ergosphère [8, 83]. C'est une région dont laquelle l'espace-temps n'est pas quasiment modifié. Afin d'étudier l'ergosphère du trou noir de Kerr, nous examinons la norme de vecteur de Killing K . En effet, nous avons

$$g_{\mu\nu} K^\mu K^\nu = \frac{-1}{\rho^2} (r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta). \quad (1.53)$$

On en déduit que l'équation (1.53) est négative, Par conséquent, K est un vecteur temporel pour r grand. Cependant, les racines de l'équation (1.53) sont données par

$$r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta = 0 \mapsto r = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (1.54)$$

Autrement, nous devrions comparer ceci aux horizons se situant à $r = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$. La plus petite racine de l'équation (1.54) se trouve à l'intérieur de l'horizon. En revanche, la plus grande racine est située à l'extérieur de l'horizon, sauf aux pôles $\theta = 0, \pi$. En outre, le vecteur de Killing K devient du genre espace dans une région en dehors de l'horizon. Par suite, nous avons

$$M + \sqrt{M^2 - a^2} < r < M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (1.55)$$

C'est ce qu'on l'appelle l'ergorégion schématisée dans la figure 1.11. La limite de l'ergorégion est nommée par l'ergosurface. l'ergorégion est une région comprise entre l'horizon et l'ergosphère. Ainsi, le rayon équatorial de l'ergosphère est donné par

$$r_{ergo} = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (1.56)$$

Il est à noter que, pour l'espace-temps de Schwarzschild, l'ergosphère est confondue avec l'horizon des événements $r_{ergo} = r_s = 2M$.

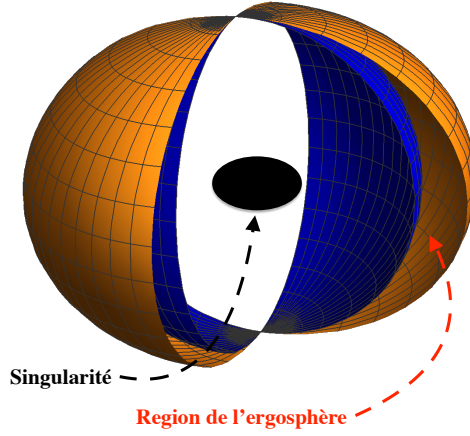


FIGURE 1.11 – *Diagramme de l'ergorégion à l'extérieur du trou noir de Kerr.*

1.3.2 Théorème de Calvitie

Les théorèmes d'unicités nous informent que la métrique de Kerr est la solution du trou noir la plus générale pour l'équation d'Einstein dans le vide [76, 87]. Nous avons remarqué que l'ajout d'un champ de Maxwell à l'action ouvre une possibilité d'existence d'autres paramètres. Nous avons obtenu une solution avec une charge électrique ou magnétique. En effet, il existe une généralisation décrivant un trou noir à la fois rotatif et chargé [91]. Cet amalgame des solutions de Reissner-Nordström et de Kerr a une métrique de la forme suivante

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & - \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2} + \frac{e^2}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{2a \sin^2 \theta}{\rho^2} (2Mr - e^2) dt d\phi \\
 & + \frac{\rho^2}{\delta} dr^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \left[(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta \right] d\phi^2 + \rho^2 d\theta^2,
 \end{aligned} \tag{1.57}$$

où $\Delta(r)$, $\rho^2(r, \theta)$ et e sont données par

$$\begin{aligned}
 \Delta &= r^2 - 2Mr + a^2 + e^2, \\
 \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \\
 e^2 &= \frac{1}{4\pi} \sqrt{Q_e^2 + Q_m^2}.
 \end{aligned} \tag{1.58}$$

1.4. Espace-temps à courbure constante

Parallèlement, le champ de jauge s'écrit comme

$$A = \frac{-Q_e r}{4\pi\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\phi) - \frac{Q_m \cos \theta}{4\pi\rho^2} (adt - (r^2 + a^2) d\phi). \quad (1.59)$$

C'est la solution de Kerr-Newman, considérée comme la solution du trou noir la plus générale d'équation d'Einstein-Maxwell. Dans ce cas, le trou noir est caractérisé par la masse M , le moment angulaire J et les charges électrique et magnétique Q_e et Q_m , respectivement.

Il s'avère qu'un champ quelconque ne peut pas prendre d'autre profils indépendants du temps en présence d'un trou noir [91]. Cela est connu sous le nom de théorème de Calvitie, encore nommé par l'absence de chevelure.

1.4 Espace-temps à courbure constante

1.4.1 Espace-temps de symétrie maximale à courbure constante

Considérons un espace de dimension d . L'équation d'Einstein, à constante cosmologique, s'exprime comme suit

$$G_{AB} + \Lambda g_{AB} = 0, \quad (1.60)$$

où G_{AB} est le tenseur d'Einstein, et les lettres latines majuscules désignent d indices dimensionnels de l'espace-temps [154, 155]. Les solutions les plus simples de l'équation (1.60) que nous pouvons considérer sont les espaces-temps caractérisés localement par la condition géométrique donnée par

$$R_{ABCD} = \frac{R}{(d-1)d} (g_{AC}g_{BD} - g_{AD}g_{BC}), \quad (1.61)$$

où R est la courbure scalaire de Ricci. En utilisant l'équation (1.60), nous avons

$$G_{AB} = -\frac{d-2}{2d} R g_{AB} = -\Lambda g_{AB}. \quad (1.62)$$

Ainsi, $R = \frac{2d}{d-2}\Lambda$ représentent les solutions à courbure constante des équations d'Einstein avec une constante cosmologique. Ce sont des espaces-temps d'Einstein localement homogènes. Le cas particulier de $\Lambda = 0$ correspond à un espace-temps plat de Minkowski [145]. En outre, pour le cas $\Lambda > 0$ nous avons un espace-temps de de-Sitter et le cas $\Lambda < 0$ représente l'espace-temps Anti de-Sitter [12].

1.4. Espace-temps à courbure constante

Les trois espace-temps ci-dessus sont maximalelement symétriques [53,122]. L'espace-temps plat par exemple est isométrique sous le groupe de transformation de Poincaré, autrement dit, d transformations de coordonnées de Lorentz et d translations. Ceci est évident dans le système de coordonnées inertielles de Minkowski. Par conséquent, nous avons d vecteurs de Killing qui représentent les générateurs de symétries. Puisqu'il s'agit du nombre maximale des vecteurs de Killing. Cet espace-temps est, par définition, maximalelement symétrique. L'espace-temps plat est défini comme étant le seul espace-temps dont la courbure de Riemann est nulle (et de topologie trivial) [4].

Avant de considérer les modèles d'espace-temps à courbure constantes, il est utile de classer les espaces-temps maximalelement symétriques discutés auparavant en des sections. Ces sections sont considérées localement comme des sections euclidiennes (*Minkowski*), sphériques (*de-Sitter*) et hyperboliques (*Anti de-Sitter*) [12]. L'élément de longueur de ces dernières peut être écrit de la manière compacte suivante

$$dK_n^2 = \frac{d\chi^2}{(1-k)\chi^2} + \chi^2 d\Omega_{n-1}^2, \quad X \geq 0, \quad (1.63)$$

pour la courbure normalisée $k = 0, 1, -1$ respectivement. L'élément de longueur sphérique $d\Omega_{n-1}^2$, ($n > 1$) s'écrit comme

$$d\Omega_n^2 = d\theta_n^2 + \sin^2(\theta_n) d\Omega_{n-1}^2, \quad (1.64)$$

où $0 \leq \theta_1 < 2\pi$ et $0 \leq \theta_i < \pi$, $i = 2, \dots, n$. En fixant $\chi = \sin \phi$ ou $\chi = \sinh \phi$ dans l'équation (1.63) pour $k = 1, -1$ respectivement, nous obtenons l'élément de longueur usuel pour la sphère unitaire et l'hyperboloïde,

$$d\Omega_n^2 = d\phi^2 + \sin^2(\phi) d\Omega_{n-1}^2, \quad (1.65)$$

$$dH_n^2 = d\phi^2 + \sinh^2(\phi) d\Omega_{n-1}^2, \quad (1.66)$$

où $0 \leq \phi \leq \pi$ pour la sphère et $0 \leq \phi \leq +\infty$ pour l'hyperboloïde.

1.4.2 Espace-temps Anti de-Sitter

1.4.2.1 Définition, frontière et isométrie

Des représentations utiles et élégantes pour les espaces-temps de-Sitter et Anti de-Sitter sont obtenues en incorporant des hypersurfaces à d dimensions dans un espace-temps plat à $d + 1$ dimensions [12, 53]. Alors, l'espace-temps de-Sitter de rayon de courbure $\ell < 0$ est défini par l'hyperboloïde

$$-X_0^2 + \sum_{i=1}^d X_i^2 = \ell^2, \quad (1.67)$$

intégré dans l'espace-temps de Minkowski de dimension $d + 1$. L'espace-temps de-Sitter est défini topologiquement par $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}$. Sa région spatiale est compacte [122]. Pour l'espace-temps Anti de-Sitter, qui est le but de cette section, la définition est donnée par

$$X_0^2 + X_d^2 - \sum_{i=1}^{d-1} X_i^2 = \ell^2, \quad (1.68)$$

dont le rayon de courbure $\ell > 0$ injecté dans l'espace-temps de dimension $d + 1$. En effet, nous avons

$$ds^2 = -\left(dX_0^2 + dX_d^2\right) + \sum_{i=1}^{d-1} dX_i^2. \quad (1.69)$$

Notons que l'espace-temps Anti de-Sitter possède des courbes temporelles fermées comme des boucles. Clairement, tout élément du groupe de Lorentz $SO(2, d-1)$ laisse les équations (1.68) et (1.69) invariantes. Cependant, nous observons que l'invariance par translation est brisée dans l'équation (1.68). Puisque, $SO(2, d-1)$ possède $\frac{d(d-1)}{2}$ générateurs de Killing tout comme l'espace-temps plat, qui est maximale symétrique. Par suite, $SO(2, d-1)$ est le groupe d'isométrie précis de l'espace-temps Anti de-Sitter [4, 12].

Un deuxième point important est que l'espace-temps AdS a une limite conforme à l'infini de l'hyperboloïde [145]. Pour démontrer cette limite, nous redimensionnons toutes les coordonnées par $X_A \rightarrow \Lambda X_A$ et prenons $\Lambda \rightarrow \infty$. Cette limite définit la frontière comme suit

$$X_0^2 + X_d^2 - \sum_{i=1}^{d-1} X_i^2 = 0, \quad (1.70)$$

$$X_A = \Lambda X_A, \quad (1.71)$$

1.4. Espace-temps à courbure constante

où Λ appartient à $\mathbb{R}$. Supposons d'abord que $X_0 \neq 0$, nous pouvons alors diviser par X_0 puis redimensionner. Par conséquent, nous obtenons la limite suivante

$$-X_d^2 + \sum_{i=1}^{d-1} X_i^2 = 1. \quad (1.72)$$

En effet, cette équation représente un hyperboloïde de dimensions $(d-1)$. Selon l'équation (1.67), ce dernier est un espace-temps de-Sitter de dimension $d-1$. La topologie est celle de $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-2}$ si $X_0 = 0$. En revanche, à partir de (1.70), nous avons une sphère de dimensions $d-2$. En ajoutant les deux espaces ensemble, la frontière est un espace maximalelement symétrique de topologie $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{d-2}$.

Puisque l'isométrie de AdS agit sur cet espace. La frontière préserve la symétrie $SO(1, d-1)$. Cependant, il est à noter que, nous avons encore d transformations supplémentaires de l'équation (1.71) pour la métrique à la frontière dont une dilatation et $d-1$ transformations spéciales conformes. Le groupe de symétrie est le groupe conforme que nous notons $\mathcal{C}(1, d-2)$ qui possède le groupe de Lorentz et les transformations préservant l'angle. En raison de cette dernière propriété, la frontière de l'espace-temps AdS admet autant de symétrie que l'espace-temps AdS global. En d'autres termes, le groupe de symétrie de la frontière $\mathcal{C}(1, d-2)$ est isomorphe au groupe de symétrie de l'espace-temps AdS global $SO(2, d-1)$.

1.4.2.2 Paramétrisations

Maintenant, nous construisons l'élément de longueur des espaces temps AdS et dS à quatre dimensions [4]. Nous commençons par intégrer les espaces-temps correspondants dans l'espace de dimension supérieur $\mathbb{R}^5$ avec la métrique de Minkowski. Pour dS_4 , ce plongement est défini comme

$$-x_0^2 + \sum_{i=1}^4 x_i^2 = \ell^2. \quad (1.73)$$

Pour AdS_4 , nous trouvons

$$-x_0^2 + \sum_{i=1}^3 x_i^2 - x_4^2 = -\ell^2. \quad (1.74)$$

1.5. Solution de Kerr-Newman AdS

Pour dS_4 , la représentation explicite des coordonnées est donnée par

$$x_0 = \sqrt{\ell^2 - r^2} \sinh(t/\ell), \quad (1.75)$$

$$x_1 = r \cos \theta, \quad (1.76)$$

$$x_2 = r \sin \theta \sin \phi, \quad (1.77)$$

$$x_3 = r \sin \theta \cos \phi, \quad (1.78)$$

$$x_4 = \sqrt{\ell^2 - r^2} \cosh(t/\ell). \quad (1.79)$$

Pour AdS_4 , elle s'écrit comme

$$x_0 = \sqrt{\ell^2 + r^2} \sin(t/\ell), \quad (1.80)$$

$$x_1 = r \cos \theta, \quad (1.81)$$

$$x_2 = r \sin \theta \sin \phi, \quad (1.82)$$

$$x_3 = r \sin \theta \cos \phi, \quad (1.83)$$

$$x_4 = \sqrt{\ell^2 + r^2} \cos(t/\ell). \quad (1.84)$$

Par conséquent, la métrique de Minkowski sur $\mathbb{R}^5$ induit la métrique suivante

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{\Lambda r^2}{3}} + r^2 d\Omega^2. \quad (1.85)$$

Avant d'obtenir cette métrique, nous avons remplacé la valeur du rayon de courbure ℓ en fonction de la constante cosmologique [145]. Cette constante cosmologique pour dS_4 est égale à $\Lambda = 3/\ell^2$. Alors que pour AdS_4 , elle est donnée par $\Lambda = -3/\ell^2$.

1.5 Solution de Kerr-Newman AdS

1.5.1 Géométrie de Kerr-Newman AdS

Dans les coordonnées standard de Boyer-Lindquist (t, r, θ, ϕ) , l'espace-temps Kerr-Newman Anti de-Sitter est complètement déterminé par les quatre paramètres [64, 76]. Ce sont la charge e , la masse M , le moment cinétique $J = aM$ et la constante cosmologique Λ . La

1.5. Solution de Kerr-Newman AdS

métrie correspondante est donnée par

$$ds^2 = \frac{-\Delta_r}{\rho^2} \left(\frac{dt}{\Xi} - \frac{a \sin^2 \theta d\phi}{\Xi} \right)^2 + \frac{\Delta_\theta \sin^2 \theta}{\Xi^2} \left(\frac{adt}{\rho} - \frac{(r^2 + a^2) d\phi}{\rho} \right)^2 + \rho^2 \left(\frac{dr^2}{\Delta_r} + \frac{d\theta^2}{\Delta_\theta} \right), \quad (1.86)$$

où les fonctions ρ , Δ_r , Δ_θ et Ξ sont définies respectivement par

$$\begin{aligned} \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \\ \Delta_r &= \left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) (r^2 + a^2) - 2Mr + e^2, \\ \Delta_\theta &= \left(1 + \frac{\Lambda a^2 \cos^2 \theta}{3} \right), \\ \Xi &= 1 + \frac{\Lambda a^2}{3}. \end{aligned} \quad (1.87)$$

Il est à noter que le champ électromagnétique associé est donné par le potentiel vectoriel suivant

$$A_\mu = \frac{e r}{\Xi \rho^2} \left(\delta_\mu^t - a \sin^2 \theta \delta_\mu^\phi \right). \quad (1.88)$$

Notons que a est positif. Si $e = 0$, alors le tenseur du champ électromagnétique (1.88) disparaît. Par conséquent, la métrique (1.86) satisfait l'équation de champ d'Einstein dans le vide [23]. Les composantes métriques contravariantes non nulles correspondantes g^{ij} sont données par

$$g^{tt} = \frac{\Xi^2}{\Delta_r \Delta_\theta \rho^2} \left[\Delta_r a^2 \sin^2 \theta - \Delta_\theta (r^2 + a^2)^2 \right], \quad (1.89)$$

$$g^{\phi t} = g^{t\phi} = \frac{\Xi^2}{\Delta_r \Delta_\theta \rho^2} \left[\Delta_r - \Delta_\theta (r^2 + a^2)^2 \right], \quad (1.90)$$

$$g^{\phi\phi} = \Xi^2 \left[\frac{1}{\sin^2 \theta \Delta_\theta \rho^2} - \frac{a^2}{\Delta_r \rho^2} \right], \quad (1.91)$$

$$g^{rr} = \frac{\Delta_r}{d\rho^2}, \quad (1.92)$$

$$g^{\theta\theta} = \frac{\Delta_\theta}{d\rho^2}. \quad (1.93)$$

Il est bien noté que la constante Λ est identifiée comme la constante associée à l'échelle de longueur caractéristique ℓ , tels que $\Lambda = -3/\ell^2$. Nous pouvons trouver le rayon d'horizon en trouvant les racines de l'équation $\Delta_r = 0$. Pour des raisons de simplification, nous prenons

1.5. Solution de Kerr-Newman AdS

les racines r_n , r_+ , r_- et r_c , tels que

$$\Delta_r(r) = (r - r_n)(r - r_-)(r - r_+)(r - r_c), \quad (1.94)$$

où r_- et r_+ sont respectivement les horizons intérieur et extérieur du trou noir [4, 23]. Tandis que r_c est l'horizon cosmologique des observateurs entre r_c et r_+ . Or, $r_n(< 0)$ est l'autre horizon cosmologique à l'intérieur de la singularité $r = 0$ [158]. Ces racines sont données par

$$r_{\pm} = X_+ \pm \ell \sqrt{Y_-}, \quad r_n = r_c^* = -X_+ + i \ell \sqrt{Y_+}, \quad (1.95)$$

où nous avons

$$X_+ = \sqrt{\frac{(\rho^2 + a^2)}{6}} \left[\sqrt{1 + \frac{12\ell^2(a^2 + e^2)}{(\ell^2 + a^2)^2} \cosh\left(\frac{1}{3} \cosh^{-1} \frac{\left(4 + \frac{54M^2\ell^4}{(\ell^2 + a^2)^3} - 3\left(1 + \frac{12\ell^2(a^2 + e^2)}{(\ell^2 + a^2)}\right)\right)}{\left(1 + \frac{12\ell^2(a^2 + e^2)}{(\ell^2 + a^2)^2}\right)^{3/2}}}\right)} - 1 \right]^{1/2}, \quad (1.96)$$

et

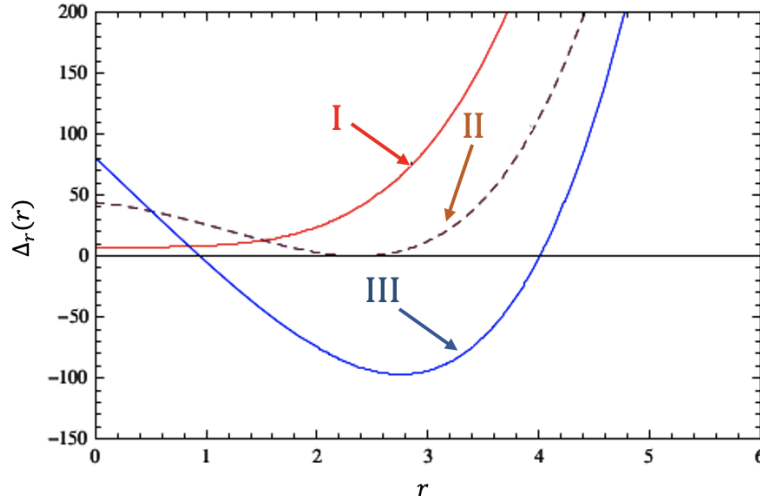
$$Y_{\pm} = \frac{M}{2X_+} \pm \frac{X_+^2}{\ell^2} \pm \frac{1 + a^2/\ell^2}{2}. \quad (1.97)$$

Pour $\Lambda < 0$, nous obtenons deux racines réelles lorsque $Y_- > 0$, qui sont physiquement acceptables et les deux autres sont imaginaires [158]. Lorsque $Y_- < 0$, toutes les racines sont imaginaires, ce qui n'est pas physiquement acceptable. Mais lorsque $Y_- = 0$, les deux premières racines coïncident et les racines restantes sont imaginaires. Le graphique typique montrant les positions des horizons pour $\Lambda < 0$ est présenté sur la figure 1.12.

1.5.2 Équations de mouvements de Kerr-Newman AdS

Nous soulignons les propriétés générales d'une particule test dans la région du trou noir de Kerr-Newman AdS où $0 < r < r_-$. Pour faire ceci, nous dérivons l'équation géodésique du mouvement de la particule massive dans l'espace-temps Anti de-Sitter de Kerr-Newman [23, 59, 157]. L'hamiltonien associé au mouvement géodésique est donné par

$$H[p_i, x^j] = \frac{1}{2} g^{ij} (p_i - \epsilon A_i) (p_j - \epsilon A_j), \quad (1.98)$$


 FIGURE 1.12 – Graphique montrant les positions des horizons des événements pour le cas $\Lambda < 0$.

où p_i est le moment conjugué des coordonnées généralisées x^i , et ϵ est la charge du particule test. Puisque H ne dépend pas explicitement du paramètre affine λ , l'hamiltonien indique une constante de mouvement. En utilisant la condition de normalisation, nous obtenons $H = \frac{-m^2}{2}$. Si l'action $S = S(\lambda, x^i)$, où λ est le paramètre affine associé [158]. Alors, le moment conjugué est défini comme $p_i = \frac{\partial S}{\partial x^i}$. Par conséquent, l'équation de mouvement correspondante est donnée par

$$-\frac{m^2}{2} = \frac{g^{ij}}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial x^i} - \epsilon A_i \right) \left(\frac{\partial S}{\partial x^j} - \epsilon A_j \right). \quad (1.99)$$

En substituant toutes les composantes métriques contravariantes dans l'équation (1.99), nous trouvons

$$\begin{aligned} & \frac{\Xi^2}{\Delta_\theta \sin^2 \theta} (aE \sin^2 \theta - L)^2 - \frac{\Xi^2}{\Delta_r} \left((r^2 + a^2) E - aL + \frac{\epsilon e r}{\Xi^2} \right)^2 \\ & + \frac{\Delta_r}{\rho^2} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{\Delta_\theta}{\rho^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + r^2 m^2 + m^2 a^2 \cos^2 \theta = 0. \end{aligned} \quad (1.100)$$

Ici, E et L représentent respectivement l'énergie et le moment angulaire de la particule [158]. En séparant les parties de θ et r , et en les assimilant à une constante K avec un signe opposé, nous pouvons établir les équations suivantes

$$\Delta_r \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \frac{\Xi^2}{\Delta_r} \left((r^2 + a^2) E - aL + \frac{\epsilon e r}{\Xi^2} \right)^2 + r^2 m^2 = -K. \quad (1.101)$$

1.5. Solution de Kerr-Newman AdS

Alors, nous obtenons

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \pm \sqrt{\frac{\Xi^2 \left((r^2 + a^2) E - aL + \frac{\epsilon e r}{\Xi^2} \right)^2 - \Delta_r (K + m^2 r^2)}{\Delta_r^2}} = \pm \frac{\sqrt{R}}{\Delta_r}, \quad (1.102)$$

où nous avons

$$R(r) = \Xi^2 \left((r^2 + a^2) E - aL + \frac{\epsilon e r}{\Xi^2} \right)^2 - \Delta_r (K + m^2 r^2). \quad (1.103)$$

De même, nous trouvons

$$\Delta_\theta \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\Xi^2}{\Delta_\theta \sin^2 \theta} (aE \sin^2 \theta - L)^2 + m^2 a^2 \cos^2 \theta = K, \quad (1.104)$$

ce qui donne

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = \pm \sqrt{\frac{(K - m^2 a^2 \cos^2 \theta) \Delta_\theta - \frac{\Xi^2}{\sin^2 \theta} (aE \sin^2 \theta - L)^2}{\Delta_\theta^2}} = \pm \frac{\sqrt{V(\theta)}}{d\Delta_\theta}, \quad (1.105)$$

tandis que nous avons

$$V(\theta) = (K - m^2 a^2 \cos^2 \theta) \Delta_\theta - \frac{\Xi^2}{\sin^2 \theta} (aE \sin^2 \theta - L)^2. \quad (1.106)$$

La constante K est déterminée de telle sorte que $V(\theta = \frac{\pi}{2}) = Q$, où Q est la constante de Carter. De ce fait, nous trouvons $K = Q + \Xi^2 (aE - L)^2$. Par ailleurs, nous pouvons écrire les solutions des équations ci-dessus comme

$$\begin{aligned} S_r &= \pm \int^r \frac{\sqrt{R(r)}}{\Delta_r} dr, \\ S_\theta &= \pm \int^\theta \frac{\sqrt{V(\theta)}}{\Delta_\theta} d\theta. \end{aligned} \quad (1.107)$$

Dans cette approche, l'action peut être exprimée comme

$$S = -\frac{1}{2} m^2 \lambda - Et + L\phi + \int^r \frac{\sqrt{R(r)}}{\Delta_r} dr + \int^\theta \frac{\sqrt{V(\theta)}}{\Delta_\theta} d\theta. \quad (1.108)$$

1.5. Solution de Kerr-Newman AdS

Ensuite, nous obtenons les équations géodésiques suivantes

$$\rho^2 \frac{\partial r}{\partial \lambda} = \sqrt{R(r)}, \quad (1.109)$$

$$\rho^2 \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} = \sqrt{V(\theta)}, \quad (1.110)$$

$$\rho^2 \frac{\partial t}{\partial \lambda} = \Xi^2 (r^2 + a^2) \left((r^2 + a^2) E - aL + \frac{\epsilon e r}{\Xi^2} \right)^2 - \frac{\Xi^2 a}{\Delta_\theta} (aE \sin^2 \theta - L), \quad (1.111)$$

$$\rho^2 \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = -\frac{\Xi^2}{\Delta_\theta \sin^2 \theta} (aE \sin^2 \theta - L) + \frac{\Xi^2 a}{\Delta_r} \left(E (r^2 + a^2) - aL + \frac{er\epsilon}{\Xi} \right), \quad (1.112)$$

où E et L sont des constantes de mouvement. Or, λ est un paramètre affine le long des géodésiques nulles, et Q représente la constante de Carter déterminant le comportement du mouvement de la particule dans la direction θ . Les potentiels effectifs $R(r)$ et $V(\theta)$ définissent le mouvement de la particule test dans les directions r et θ . En effet, l'étude d'une particule test dans le champ gravitationnel de l'espace-temps Anti de-Sitter de Kerr-Newman se réduit à l'étude du mouvement de la particule [158].

CHAPITRE 2

Thermodynamique des trous noirs

Au début des années soixante-dix du siècle dernier, Bekenstein et Hawking ont mis en avant les concepts d'entropie de surface, de température gravitationnelle et de rayonnement thermique d'un trou noir [1, 96]. Ils ont ainsi établi une nouvelle branche de l'astrophysique nommée la thermodynamique du trou noir. En outre, Bekenstein et Hawking soutiennent que la deuxième loi de la thermodynamique est valable partout [3]. L'absorption du rayonnement thermique de l'espace cosmique par un trou noir réduit l'entropie de l'espace, entre-temps la surface de l'horizon des événements du trou noir augmente [19, 44]. Ils affirment que la surface de l'horizon des événements est également une entropie, et que le changement global de l'entropie dans l'ensemble du processus d'absorption augmente. Partant de ce fait, Stephen Hawking appliqua la théorie quantique des champs à l'espace-temps courbé de la relativité générale [52, 55, 62]. Il a découvert que les trous noirs pouvaient se comporter comme des objets thermodynamiques émettant un rayonnement proche du rayonnement thermique. Ce dernier est nommé par le rayonnement ou la radiation de Hawking. Ceci a été exploré dans la compréhension de la thermodynamique des trous noirs sur des espaces non triviaux. Encore, certaines propriétés thermodynamiques ont été étudiées pour de nombreux trous noirs.

En thermodynamique des trous noirs Anti de-Sitter (AdS), la constante cosmologique Λ a été considérée comme une grandeur dynamique associée à une variable thermodynamique [15]. D'après [69], Λ a été interprétée comme une pression thermodynamique en utilisant le fait que la variable thermodynamique conjuguée est proportionnelle à un volume.

Hawking découvrit un mécanisme par lequel les trous noirs pouvaient effectivement émettre un rayonnement. Ce mécanisme implique les processus de mécanique quantique près de l'horizon du trou noir [54, 87]. Selon cette dernière, le vide n'est plus un état vide comme en physique classique. C'est au contraire, c'est un endroit où les particules virtuelles sont constamment créées et détruites. La création d'un couple d'énergie de paire particule-antiparticule est autorisée en mécanique quantique tant que leur durée de vie satisfait le principe d'incertitude de Heisenberg [100, 113, 123]. Ces processus de la mécanique quantique de création et d'annihilation de particules-antiparticules sont également connus sous le nom des fluctuations du vide.

2.1 Physique des trous noirs et thermodynamique

Maintenant, nous allons comparer la mécanique des trous noirs avec la thermodynamique. En d'autres termes, nous énonçons les lois de la mécanique des trous noirs et les lois correspondantes de la thermodynamique ordinaire [11, 15]. En particulier, nous verrons dans ce qui suit que les trous noirs sont des objets à température finie qui perdent de l'énergie lors du rayonnement thermique (Hawking). D'ailleurs, le fait que les trous noirs émettent un rayonnement thermique est alors un phénomène intrinsèquement de mécanique quantique. Il est à noter que dans ce qui suit, nous utilisons des unités dans lesquelles $c = G = \hbar = K_B = 1$.

2.1.1 Loi zéro

En premier lieu, nous rappelons les définitions des hypersurfaces nulles et les horizons de Killing. Prenons un ensemble d'hypersurfaces $\{S\}$. Autrement dit, des sous variétés tridimensionnelles dans un espace-temps à quatre dimensions [28, 97]. Les familles d'hypersurfaces peuvent être définies en imposant une condition de la forme suivante

$$S(x) = \text{const}, \quad (2.1)$$

où $S(x)$ est une fonction dépendante des coordonnées x^μ . Une hypersurface qui fait partie d'une telle famille a un vecteur normal qui peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned} l &= N(x) \partial^\mu S \partial_\mu = N(x) g^{\mu\nu} \partial_\nu S \partial_\mu, \\ l^\mu &= N(x) \partial^\mu S = N(x) g^{\mu\nu} \partial_\nu S, \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.1. Physique des trous noirs et thermodynamique

où $N(x)$ est une fonction arbitraire qui définit la normalisation de l . Tandis que ∂_μ est un vecteur de base pour l'espace vectoriel des dérivées directionnelles. Ici, nous avons également utilisé le fait que $\partial_\mu S$ est normal à l'hypersurface.

Une hypersurface nulle Σ est définie comme une hypersurface pour laquelle son vecteur normal l satisfait la condition suivante

$$l^2|_\Sigma = l^\mu l_\mu|_\Sigma = 0. \quad (2.3)$$

En d'autres termes, le vecteur normal l est orthogonal à lui-même et alors l est aussi un vecteur tangent à l'hypersurface.

Un horizon de Killing est une hypersurface nulle Σ , pour laquelle il existe un vecteur Killing ξ^μ normal à Σ . Puisque ξ^μ est normal à Σ , à l'horizon Killing, il est clair que le vecteur de Killing et le vecteur normal défini sur Σ satisfont l'équation suivante

$$\xi^\mu = f(x) l^\mu(x), \quad (2.4)$$

pour une fonction f . Ainsi, nous remarquons que

$$\xi^2|_\Sigma = f^2 l^2|_\Sigma = 0. \quad (2.5)$$

De ce fait, nous pouvons montrer l'équation suivante

$$\xi^\sigma \Delta_\sigma \xi^\mu|_\Sigma = \kappa \xi^\mu, \quad (2.6)$$

où κ est la surface de gravité. Elle donne l'accélération d'un observateur statique à l'horizon Killing dans un espace-temps asymptotiquement plat. Une autre formule utile de la surface de gravité est élaborée par Robert M. Wald. Cette quantité est donnée par l'équation suivante

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}(\nabla^\alpha \xi^\beta) \cdot (\nabla_\alpha \xi_\beta)|_\Sigma. \quad (2.7)$$

Pour la métrique Schwarzschild, un calcul simple montre que $\kappa = \frac{1}{2r_s} = \frac{1}{4M}$.

Par ailleurs, nous prenons la solution de Schwarzschild dans un espace euclidien à l'aide de la rotation de Wick $t \rightarrow i\tau$. De ce fait, la métrique euclidienne associée à la signature

2.1. Physique des trous noirs et thermodynamique

$(+, +, +, +)$ prend la forme suivante

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tau^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2. \quad (2.8)$$

Nous nous intéressons à la température du trou noir, alors nous déterminons le comportement près de l'horizon des événements $r = 2M$. On compactifie la coordonnée temporelle imaginaire, tels que $\tau \sim \tau + \beta$, où β est la température inverse. De plus, nous notons que le trou noir est en équilibre thermique.

Nous définissons une nouvelle coordonnée $x = r - 2M$, de sorte que x tends vers zéro à l'approche de l'horizon des événements depuis l'extérieur du trou noir. L'expansion des composantes du tenseur métrique à l'ordre le plus bas en x donne

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{x}{r} d\tau^2 + \frac{r}{x} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2, \\ &\approx \frac{x}{2M} d\tau^2 + \frac{2M}{x} dx^2 + (2M)^2 d\Omega_2^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Nous définissons maintenant une nouvelle coordonnée $\rho^2 = 8Mx$, tel que ρ appartient à $\mathbb{R}_+$, nous obtenons

$$ds^2 = \frac{\rho^2}{16M^2} d\tau^2 + d\rho^2. \quad (2.10)$$

Nous avons ignoré la partie de S_2 de la métrique. De ce fait, la métrique (2.10) décrit un espace plat en coordonnées polaires. À partir de la métrique (2.10), Nous pouvons remarquer que τ a la périodicité suivante

$$\tau \sim \tau + 8\pi M.$$

Mais nous avons déjà compactifié la coordonnée temporelle imaginaire de telle sorte que $\tau \sim \tau + \beta$. Par conséquent, nous trouvons que

$$\beta = 8\pi M. \quad (2.11)$$

Par suite, nous concluons que

$$T = \frac{1}{8\pi M} = \frac{2\pi}{\kappa}. \quad (2.12)$$

C'est exactement le résultat que Hawking a trouvé en utilisant des méthodes plus différentes

qui seront expliquées plus tard.

En définitive, la loi zéro de la thermodynamique postule que la température T d'un corps est la même partout lors de l'équilibre thermique

$$T_{eq} = cst. \quad (2.13)$$

Partant de ce fait, dans la mécanique des trous noirs, la gravité de surface κ est constante sur toute la surface du trou noir.

2.1.2 Gravité de surface de la solution de Kerr

Maintenant, nous passons au calcul de la gravité de surface pour la solution de Kerr satisfaisant $M > a$, car c'est le cas de plus d'intérêts physiques [1, 13]. Pour ce faire, nous commençons par l'introduction des coordonnées de Kerr (v, r, θ, χ) . Ils sont formulées comme suit

$$dv = dt + \frac{(r^2 + a^2)}{\Delta} dr, \quad d\chi = d\phi + \frac{a}{\Delta} dr. \quad (2.14)$$

En utilisant ces coordonnées, la métrique correspondante prend la forme suivante

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\frac{(\Delta - a^2 \sin^2 \theta)}{\rho^2} dv^2 + 2dv dr - \frac{2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\rho^2} dv d\chi \\ & - 2a \sin^2 \theta d\chi dr + \frac{[(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta]}{\rho^2} \sin^2 \theta d\chi^2 + \rho^2 d\theta^2, \end{aligned} \quad (2.15)$$

où nous rappelons que $\Delta = (r - r_+)(r - r_-)$.

Comme nous l'avons fait auparavant, nous considérerons les hypersurfaces de type $S(x) = r = \text{Const}$. À partir de l'équation (2.2), nous pouvons écrire les vecteurs normaux comme suit

$$\begin{aligned} l &= N(x) g^{\mu r} \partial_\mu = N(x) [g^{rr} \partial_r + g^{vr} \partial_v + g^{xr} \partial_\chi], \\ &= N(x) \left[\frac{2(r^2 + a^2)}{a^2 + 2r^2 + a^2 \cos(2\theta)} \partial_v + \frac{\Delta}{\rho^2} \partial_r + \frac{2a}{a^2 + 2r^2 + a^2 \cos(2\theta)} \partial_\chi \right]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

2.1. Physique des trous noirs et thermodynamique

Nous voyons qu'à $r = r_{\pm}$, l'équation (2.16) se réduit à

$$l|_{r=r_{\pm}} = N(x) \frac{(r_{\pm}^2 + a^2)}{r_{\pm}^2 + a^2 \cos^2(\theta)} \left[\partial_v + \frac{a}{a^2 + r_{\pm}^2} \partial_{\chi} \right]. \quad (2.17)$$

Maintenant, nous allons examiner les hypersurfaces nulles. La norme du vecteur normal est donnée par

$$l^2 = N^2(x) g^{\mu r} g^{\nu r} g_{\mu\nu} = N^2(x) g^{rr} = N^2(x) \frac{\Delta}{\rho^2}. \quad (2.18)$$

À partir de ceci, il est clair que la norme l^2 disparaît lorsque Δ disparaît. Alors, les hypersurfaces définies par $r = r_{\pm}$ sont nulles.

Nous passons maintenant à la construction des vecteurs de Killing pour ces coordonnées. Il est à noter que $\xi = \partial_t + \Omega_H \partial_{\phi}$. Afin de spécifier complètement ce vecteur Killing, nous calculons Ω_H en utilisant les coordonnées (t, r, θ, ϕ) .

$$\begin{aligned} 0 &= \xi^2|_{r=r_{\pm}} = \xi^{\mu} \xi^{\nu} g_{\mu\nu}|_{r=r_{\pm}}, \\ &= [g_{tt} + 2\Omega_H g_{t\phi} + \Omega_H^2 g_{\phi\phi}]|_{r=r_{\pm}}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

En résolvant cette équation pour Ω_H , nous trouvons que

$$\Omega_H = \frac{a}{r_{\pm}^2 + a^2}. \quad (2.20)$$

En coordonnées (v, r, θ, χ) , le vecteur Killing devient

$$\xi = \frac{dv}{dt} \partial_v + \Omega_H \frac{d\chi}{d\phi} \partial_{\chi} = \partial_v + \Omega_H \partial_{\chi}. \quad (2.21)$$

À partir de l'équation de Ω_H et de résultat de $l|_{r=r_{\pm}}$, nous remarquons que ξ et l sont bien proportionnelles à l'horizon.

À ce stade, nous pouvons calculer la gravité de la surface. Pour faire ceci, nous partons de l'équation suivante

$$\xi^{\sigma} \nabla_{\sigma} \xi^{\mu}|_{r=r_{\pm}} = \xi^{\sigma} \Gamma_{\nu\nu}^{\mu} + 2\Gamma_{\nu\chi}^{\mu} \Omega_H + \gamma_{\chi\chi}^{\mu} \Omega_H. \quad (2.22)$$

En dernier lieu, nous obtenons l'expression de la surface de gravité correspondante donnée

par

$$\kappa_{\pm} = \frac{r_{\pm} - r_{\mp}}{2(r_{\pm}^2 + a^2)}. \quad (2.23)$$

2.1.3 Première loi

La première loi de la mécanique des trous noirs est plus compliquée que celle de la thermodynamique usuelle ($dE = TdS + dW$ équivalence entre chaleur et travail). La première loi de la mécanique des trous noirs postule comment la masse d'un trou noir change avec sa surface A , sa charge Q et son moment cinétique J [11, 72]. En effet, nous obtenons la formule suivante

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \Omega \delta J + \Phi \delta Q, \quad (2.24)$$

où les quantités Φ et Ω s'identifient respectivement au potentiel électrique au voisinage de la surface du trou noir, et à sa vitesse angulaire. Cette dernière est déduite du moment cinétique J et de la masse M du trou noir.

On en déduit que le terme de la variation d'énergie dE s'identifie avec le terme δM d'après la formule célèbre $E = mc^2$. En considérant un système ayant une charge électrique et un moment cinétique, le travail fourni dW correspond à $\Omega \delta J + \Phi \delta Q$. De plus, afin d'avoir une analogie physique entre le trou noir et la thermodynamique ordinaire, nous devons supposer l'identification du terme $\frac{1}{8\pi} \kappa \delta A$ au terme TdS . Pour cette raison, nous identifions la surface du trou noir à une entropie.

2.1.4 Première loi du trou noir de Kerr-Newman

Dans cette section, nous dériverons la première loi pour la solution de Kerr-Newman. Nous commencerons par calculer l'aire de l'horizon des événements correspondant. Ce dernier est associé à une surface bidimensionnelle créée par la fixation $t = t_0$ et $r = r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2 - J^2/M^2}$. Or, t_0 et r_+ sont des constantes dans la métrique du trou noir de Kerr-Newman [23, 91]. La métrique induite $h_{\mu\nu}$ sur cette surface bidimensionnelle est donnée par

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & g_{\phi\phi} \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

2.1. Physique des trous noirs et thermodynamique

où $g_{\theta\theta}$ et $g_{\phi\phi}$ sont les composantes métriques de Kerr-Newman. L'aire est alors donnée par

$$A = \int \sqrt{\det(h_{\mu\nu})} d\theta d\phi. \quad (2.26)$$

En utilisant les expressions pour $g_{\theta\theta}$ et $g_{\phi\phi}$ qui sont exprimées dans le chapitre précédent. Ainsi, les évaluer à l'horizon $r = r_+$. Nous pouvons établir le déterminant de la métrique induite [26]. Ce dernier est formulé comme suit

$$\det(h_{\mu\nu}) = (r_+^2 + a^2)^2 \sin^2(\theta), \quad (2.27)$$

où $a = \frac{J}{M}$. Maintenant, nous pouvons calculer directement l'aire comme suit

$$A = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi (r_+^2 + a^2) \sin(\theta) = 4\pi (r_+^2 + a^2). \quad (2.28)$$

Cela peut être exprimé en termes de M , J et Q . En effet, nous avons

$$A = 2\pi \left(2M^2 - Q^2 + 2M\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} \right). \quad (2.29)$$

À ce niveau, nous pouvons mettre en place $dA = \frac{\partial A}{\partial M}dM + \frac{\partial A}{\partial Q}dQ + \frac{\partial A}{\partial J}dJ$ en déterminant simplement les dérivés suivantes

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial M} &= 4\pi \left(4M + \frac{4M^3 - 2Q^2M}{\sqrt{M^4 - Q^2M^2 - J^2}} \right), \\ \frac{\partial A}{\partial Q} &= 4\pi \left(-2Q + \frac{-2QM^2}{\sqrt{M^4 - Q^2M^2 - J^2}} \right), \\ \frac{\partial A}{\partial J} &= \frac{-8\pi J}{\sqrt{M^4 - Q^2M^2 - J^2}}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Puis nous réécrivons le différentiel dA . En conséquent, nous élaborons la formule du première loi du trou noir de Kerr-Newman, qui est donnée par l'expressions suivante

$$dM = \frac{1}{16\pi} \frac{r_+ - r_-}{r_+^2 + a^2} dA + \frac{a}{r_+^2 + a^2} dJ + \frac{Qr_+}{r_+^2 + a^2} dQ. \quad (2.31)$$

En comparant les deux équations (2.31) et (2.24), nous pouvons remarquer que la surface de gravité κ pour le trou noir de Kerr-Newman est donnée par

$$\kappa = \frac{r_+ - r_-}{r_+^2 + a^2}. \quad (2.32)$$

2.1.5 Deuxième loi

Une question naturelle concernant les trous noirs est de savoir s'il existe des restrictions sur les charges possibles, les surfaces, les moments cinétiques et les masses du trou noir pour un ensemble donné de conditions aux limites [44, 46]. Cette question est pertinente pour la matière qui s'effondre dans un trou noir, ou généralement pour des problèmes dynamiques. En effet, il existe des restrictions à savoir $\frac{dA}{dt} \geq 0$ (théorème de la surface de Hawking) [28, 97]. Les hypothèses fondamentales de ce théorème désignent que notre espace-temps étudié est asymptotiquement plat. Aussi, la condition d'énergie faible ($T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0$) et la conjecture de censure cosmique (pas de singularité nue) sont satisfaites.

Par conséquent, la deuxième loi de la mécanique des trous noirs peut être formulée comme suit

$$\frac{dA}{dt} \geq 0. \quad (2.33)$$

Par analogie, la deuxième loi de la thermodynamique ordinaire annonce que l'entropie d'un système ne peut qu'augmenter lors de sa transformation. Autrement dit, nous avons

$$\Delta S \geq 0. \quad (2.34)$$

Or, la loi de Bekenstein-Hawking donne un lien entre l'entropie S et l'aire du trou noir A . Elle est formulée comme suit

$$S = \frac{A}{4}. \quad (2.35)$$

Partant de ce fait, nous pouvons conclure que dans n'importe quel processus classique, l'aire du trou noir (ou son entropie) ne peut qu'augmenter.

2.1.6 Troisième loi

Dans la thermodynamique ordinaire, il est impossible de réduire la température d'un système au zéro absolu [3, 23]. En outre, dans la mécanique du trou noir, nous avons un lien entre la température T et la surface de gravité κ ,

$$T = \frac{\kappa}{2\pi}. \quad (2.36)$$

Par conséquent, nous pouvons énoncer la troisième loi de la mécanique des trous noirs. Cette loi postule qu'il est impossible de former un trou noir dont la surface de gravité est égale à

zéro en une succession finie d'opérations.

2.2 Formule de Smarr

La formule de Smarr est une relation reliant la masse d'un trou noir à d'autres paramètres géométriques et dynamiques d'un trou noir, tels que le spin J , la charge Q et le potentiel électromagnétique Φ . Il est possible d'obtenir la formule de Smarr en utilisant l'intégrale de Komar [73], qui donne

$$M = \int_{\Sigma} 2 (T_{\nu}^{\mu} - T \nabla_{\nu}^{\mu}) K^{\nu} dS_{\mu} + 2\Omega_H J + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B} \nabla^{\mu} \xi^{\nu} dS_{\mu\nu}. \quad (2.37)$$

Ici, nous utilisons B pour référer l'intérieur d'un trou noir et Σ pour désigner l'extérieur. Nous supposons que ∂B est un horizon de killing, et Ω_H indique la vitesse angulaire d'un trou noir en rotation. Or, $dS_{\mu\nu}$ correspond à l'élément de longueur de surface à l'horizon de Killing ∂B . Puis, dS_{μ} désigne l'élément de volume sur Σ qui est borné par l'horizon de killing ∂B à l'infini.

En utilisant $\xi^{\mu} \nabla_{\nu} \xi^{\nu} = \kappa \xi^{\nu}$, nous pouvons réécrire le dernier terme de l'équation (2.37) pour trouver la loi de Smarr. Ce dernier est formulé comme suit

$$M = \Phi Q + 2\Omega_H J + \frac{\kappa}{4\pi} A, \quad (2.38)$$

où Φ est le potentiel électromagnétique entre $r = \infty$ et $r = 2M$. La formule de Smarr exprime le lien entre les variable extensives (M, J, Q) et intensives (T, Ω, Φ).

2.3 Entropie des trous noirs

Jusqu'à présent, nous avons examiné les lois de la mécanique des trous noirs et brièvement discuté de leur correspondance avec les lois de la thermodynamique. Nous souhaitons maintenant de considérer les lois de la mécanique des trous noirs comme des énoncés thermodynamiques [96, 105]. Ceci signifie que nous allons définir une température et une entropie pour les trous noirs. En thermodynamique, nous pouvons considérer en l'occurrence l'ensemble grand-canonique où le système est caractérisé par les quantités μ , V et T . Or, μ correspond au potentiel chimique, V est le volume et T la température. La première loi de

2.4. Radiation de Hawking

la thermodynamique est donnée par

$$dE = TdS - PdV + \mu dN. \quad (2.39)$$

Par ailleurs, la première loi de la mécanique des trous noirs est définie comme

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega dJ + \Phi dQ. \quad (2.40)$$

En comparant les deux dernières équations, nous remarquons que le terme $-pdV + \mu dN$ est analogue au terme $\Omega dJ + \Phi dQ$. Ainsi, le terme $\frac{\kappa}{8\pi} dA$ s'identifie avec le terme d'entropie [28]. En outre, le théorème d'aire de Hawking annonce que $\frac{dA}{dt} \geq 0$, ce qui renforce l'analogie entre A et S . La relation précise impliquera $\hbar$, ce qui signale l'importance des effets quantiques. L'expression complète est la loi d'aire de Bekenstein-Hawking

$$S_{bh} = S_{BH} = \frac{A}{4}, \quad (2.41)$$

où l'indice bh signifie le trou noir et l'indice BH indique Bekenstein-Hawking. En physique statistique, l'entropie est interprétée comme une information [61, 74, 96]. En outre, l'entropie de Von-Neumann est donnée par

$$S = - \sum_n p_n \log p_n, \quad (2.42)$$

où p_n sont des probabilités satisfaisant $\sum_n p_n = 1$. D'ailleurs, l'entropie est liée à l'information (bits quantiques). On se demande naturellement quels sont les bits quantiques des trous noirs. Autrement dit quels sont les porteurs d'informations sur les trous noirs. Puisque $S \propto A$, les gens ont supposé que les bits quantiques sont distribués à l'horizon.

2.4 Radiation de Hawking

Le spectre de rayonnement du trou noir décrit la distribution statistique de l'énergie des particules après que les particules aient traversé l'horizon à travers le processus de Hawking. Du point de vue microscopique, le processus Hawking se compose des deux étapes [87, 89, 90]. La première se manifeste par la création et l'annihilation de paires de particules près de l'horizon à l'aide des fluctuations quantiques. Tandis que dans la deuxième étape nous

2.4. Radiation de Hawking

trouvons que la particule d'énergie positive d'une paire créée virtuellement à l'extérieur de l'horizon s'échappe de l'horizon. Par conséquent, le rayonnement Hawking se produit. Ceci signifie que le processus de Hawking est un processus dynamique. Ainsi, il semble que l'analyse dynamique des particules de radiation soit nécessaire pour dériver le spectre de radiation de Hawking. Le spectre de radiation du trou noir a été obtenu pour la première fois par Hawking. Il s'est avéré qu'il obéissait à la distribution thermique.

En effet, ce spectre thermique implique que l'entropie augmentera à travers le processus de Hawking, ce qui conduit au paradoxe de l'information du trou noir. Afin de résoudre ce paradoxe, différents scénarios ont été proposés [89, 138], comme la modification du spectre de radiation lui-même.

Dans le cadre de la mécanique quantique, le vide est une entité très complexe et fondamentale [54]. Selon la relation suivante

$$dE.dt > h. \quad (2.43)$$

Nous remarquons qu'un vide parfait n'existe pas puisque la variation de l'énergie peut être non nulle dans un temps très bref de l'ordre de constante de Planck divisé par un intervalle temporel.

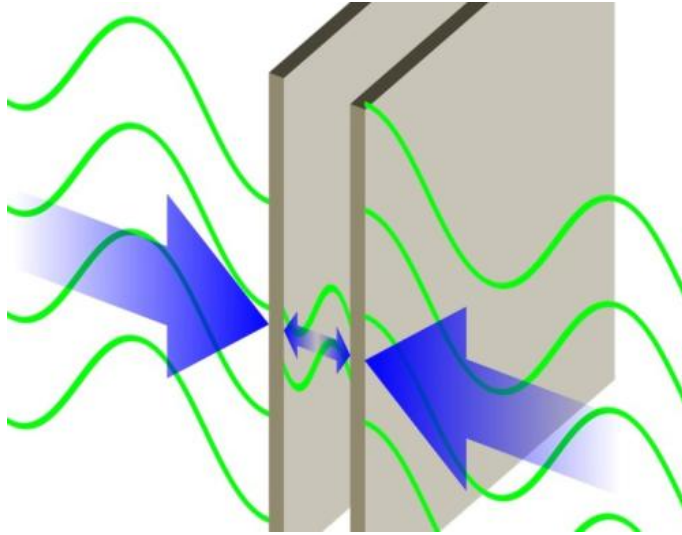


FIGURE 2.1 – *Force attractive entre deux plaques parallèles conductrices et non chargées (l'effet de Casimir).*

La théorie quantique des champs explique l'existence des fluctuations du vide. Les paires particule-antiparticule sont en permanence générées par le vide causant en l'occurrence l'effet

2.4. Radiation de Hawking

de Casimir illustré dans la figure 2.1.

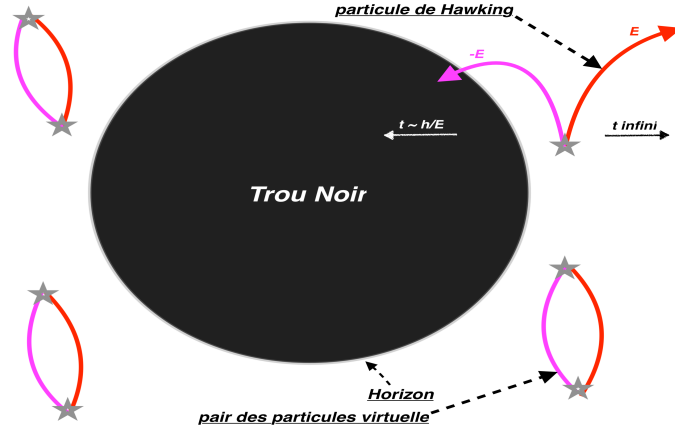


FIGURE 2.2 – Paires des particules autour du trou noir.

Dans la figure 2.2, nous observons qu'à l'horizon d'un trou noir, les forces de marée générées par le champ gravitationnel du trou noir peuvent éloigner la particule de son antiparticule, avant qu'elles ne s'annihilent, l'une est absorbée par le trou noir et l'autre s'en éloigne dans un sens opposé. La particule qui s'éloigne du trou noir n'est autre que la radiation de Hawking. En revanche, celle absorbée par le trou noir a une énergie négative, ce qui cause la diminution de la masse de ce dernier.

2.4.1 Approche basée sur la typicalité canonique

Alternativement, une approche de mécanique statistique a également été découverte, apportant les mêmes résultats que la méthode d'effet tunnel basée sur la dynamique des particules [60, 89]. Pour un trou noir B de masse M , de charge Q et d'un moment cinétique J , la matrice de densité correspondante se lit comme suit

$$\rho_B = \sum_i \frac{1}{\Omega_B(M, Q, J)} |M, Q, J\rangle_i \langle M, Q, J|, \quad (2.44)$$

où $|M, Q, J\rangle$ désigne le i ème état propre de B . Cependant, $\Omega_B(M, Q, J)$ est le nombre de micro-états associé. Cette expression peut être obtenue en supposant qu'un univers U est composé de deux sous-ensembles B et O s'identifiant respectivement au trou noir et à l'environnement. Ainsi que, l'évaporation du trou noir produit deux autres sous-systèmes.

2.4. Radiation de Hawking

Ces derniers sont le champ de radiation R et le trou noir restant $B' \equiv B - R$. De ce fait, la matrice de densité se réduit à

$$\rho_B = \sum_{r,b'} \frac{1}{\Omega_B(E)} |r, b'\rangle \langle r, b'|. \quad (2.45)$$

Notons que $|r\rangle$ et $|b'\rangle$ sont les états propres de R et B' d'énergies propres E_r et $E_{b'}$, respectivement. Ici, $\Omega_B(E)$ est le nombre de micro-états d'énergie $E = E_r + E_{b'}$ requis par le principe de conservation d'énergie [61, 74, 105]. Le calcul associé à B' montre que la matrice de densité réduite de R prend la forme suivante

$$\rho_R = \text{Tr}_{B'}(\rho_B) = \sum_r \frac{\Omega_{B'}(E - E_r)}{\Omega_B(E)} |r\rangle \langle r|, \quad (2.46)$$

où $\Omega_{B'}(E - E_r)$ est le nombre de micro-états de B' d'énergie $E - E_r$. De plus, la distribution micro-canonique permet d'exprimer les entropies comme $S_B = \ln \Omega_B(E)$ et $S_{B'} = \ln \Omega_{B'}(E - E_r)$. En utilisant ces expressions, la matrice de densité (2.46) peut être réécrite comme

$$\rho_R = \sum_r e^{-\Delta S_{BB'}(E_r, E)} |r\rangle \langle r| = \sum_{\omega, q, j} p(\omega, q, j, M, Q, J) |\omega, q, j\rangle \langle \omega, q, j|, \quad (2.47)$$

où $p(\omega, q, j, M, Q, J)$ représente la probabilité de distribution de la radiation donnée par

$$p(\omega, q, j, M, Q, J) = e^{-\Delta S_{BB'}(\omega, q, j, M, Q, J)}. \quad (2.48)$$

Nous notons que $|\omega, q, j\rangle$ est l'état propre du rayonnement R , de masse ω , de charge q et de moment cinétique j . Dans la physique des trous noirs, $\Delta S_{BB'}(\omega, q, j, M, Q, J)$ désigne la différence d'entropie entre B et B' . Elle prend la forme suivante

$$\begin{aligned} \Delta S_{BB'}(E_r, E) &= \Delta S_{BB'}(\omega, q, j, M, Q, J), \\ &= S_B(M, Q, J) - S_{B'}(M - \omega, Q - q, J - j). \end{aligned} \quad (2.49)$$

En utilisant les équations (2.47) et (2.49), nous pouvons calculer le spectre de rayonnement en termes de $p(\omega, q, j, M, Q, J)$. Pour ce faire, il convient de noter que l'entropie peut être obtenue en utilisant la formule de Bekenstein-Hawking suivante

$$S_{BH}(M, Q, J) = \frac{A_H(M, Q, J)}{4} = \pi R_H^2(M, Q, J), \quad (2.50)$$

2.4. Radiation de Hawking

où $A_H(M, Q, J)$ et $R_H(M, Q, J)$ sont l'aire et le rayon du trou noir, respectivement. Par conséquent, le spectre de rayonnement, donné en (2.48), peut être réécrit comme

$$p(\omega, q, j, M, Q, J) = e^{-\pi[R_H^2(M, Q, J) - R_H^2(M - \omega, Q - q, J - j)]}. \quad (2.51)$$

En l'occurrence, nous appliquons (2.51) au trou noir de Schwarzschild avec un rayon d'horizon $R_H = 2M$. Nous obtenons directement la probabilité de distribution pour une particule d'énergie ω comme

$$p(\omega, M) = \exp[4\pi(M - \omega)^2 - 4\pi M^2] = \exp\left[-8\pi\omega\left(M - \frac{\omega}{2}\right)\right]. \quad (2.52)$$

Ce spectre non thermique est exactement le même que celui dérivé par effet tunnel [52]. À l'aide de ce dernier, nous trouvons la formule suivante

$$\Gamma = e^{-8\pi\omega\left(M - \frac{\omega}{2}\right)}. \quad (2.53)$$

Évidemment, lorsque la masse d'un trou noir est grande. Autrement dit, si M tends vers l'infini, l'équation (2.52) peut être approximée par

$$p(\omega, M) \approx \exp(-8\pi M\omega). \quad (2.54)$$

Il s'agit du spectre de radiation thermique original obtenu par Hawking.

2.4.2 Approche basée sur l'effet tunnel

Dans la dérivation susmentionnée, nous n'utilisons que les propriétés statistiques du trou noir. Cette méthode permet d'obtenir le spectre de radiation du trou noir sans se référer à la dynamique de la particule et n'est donc que de la mécanique statistique. Une autre approche permettant d'obtenir le spectre de radiation du trou noir est la méthode de tunnel quantique [51, 52]. Cette dernière a été introduite pour la première fois par Parikh et Wilczek pour dériver le spectre de radiation non thermique du trou noir de Schwarzschild [31]. Cette méthode a même été utilisée pour différents types de trous noirs afin d'obtenir leurs spectres de radiation avec succès [54, 55, 87]. Il a été prouvé que ces spectres répondent à l'exigence de la conservation de l'information. Ils sont exactement cohérents avec notre résultat de l'équation (2.50) obtenue mécaniquement.

2.4. Radiation de Hawking

Maintenant, nous allons brièvement présenter cette approche. Puisqu'il existe un fort potentiel gravitationnel près de l'horizon, les particules s'échappant de l'horizon par le processus de Hawking peuvent être considérées comme un processus d'effet tunnel. À l'aide de l'approximation semi-classique, la probabilité de tunnel pour la particule s'exprime comme suit

$$\Gamma = \exp[-2 \operatorname{Im}(I)], \quad (2.55)$$

où nous avons

$$\operatorname{Im}(I) = \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} p_r dr, \quad (2.56)$$

c'est la partie imaginaire de l'action I pour une particule d'énergie positive franchissant à l'extérieur en traversant l'horizon. $r_{\text{in}}(r_{\text{out}})$ est le rayon de l'horizon avant (après) la particule s'échappant de l'horizon. Tandis que, p_r est le moment radial de la particule. En utilisant l'équation d'Hamilton suivante

$$\dot{r} = \frac{dH}{dp_r}, \quad (2.57)$$

nous pouvons éliminer le moment radial dans l'action. De ce fait, l'équation (2.56) prend la forme suivante

$$\operatorname{Im} = \operatorname{Im} \int_{H_i}^{H_f} \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} \frac{dr}{\dot{r}} dH. \quad (2.58)$$

Ici, $\dot{r}$ indique la géodésique radiale nulle, et elle peut être obtenue à partir de la métrique du trou noir. Ainsi, $H_i(H_f)$ est l'énergie du trou noir avant (après) la particule s'échappant de l'horizon. De plus, l'approche de la mécanique statistique permet de calculer la probabilité de distribution dans le processus de radiation sans analyser la dynamique de l'effet tunnel des particules. Les résultats obtenus sont exactement les mêmes que ceux donnés par l'approche d'effet tunnel. Cela indique que les propriétés mécaniques statistiques du spectre de radiation peuvent avoir une relation intrinsèque avec l'effet tunnel dynamique des particules à travers le processus de Hawking.

2.5 Propriétés thermodynamiques des trous noirs

Dans cette section, nous allons présenter certaines propriétés thermodynamiques des trous noirs.

2.5.1 Température des trous noirs

Dans la théorie des champs quantiques, nous considérons le vide comme une mer de paires virtuelles de particules [54, 113]. Chaque paire est constituée d'une particule à énergie positive E et d'une particule à énergie négative $-E$. De surcroît, selon le principe d'incertitude, une particule à énergie négative ne peut exister que pour un temps $t \sim \hbar / |E|$ [7]. Pour le cas des trous noirs de Schwarzschild la métrique est donnée par

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2d\Omega^2. \quad (2.59)$$

La coordonnée t est une coordonnée spatiale à l'extérieur, mais à l'intérieur elle devient une coordonnée temporelle. Une particule ayant une énergie négative par rapport à un observateur extérieur peut donc avoir une énergie positive par rapport à un observateur intérieur, et si elle traverse l'horizon assez rapidement, cela permettra d'échapper au principe de l'incertitude.

Considérons une paire virtuelle de particules sans masse et au repos à une distance δr de l'horizon du trou noir. La bonne distance δr pour que la particule d'énergie négative atteigne l'horizon est donnée par le moment τ ,

$$\tau \sim \sqrt{GM\delta r}. \quad (2.60)$$

Puisque $\tau \sim \hbar / |E|$, nous pouvons établir l'équation suivante

$$|E| \sim \frac{\hbar}{\sqrt{GM\delta r}}. \quad (2.61)$$

Cette valeur représente l'énergie positive de la particule qui s'échappe. C'est l'énergie à $2M + \delta r$. Par conséquent, l'énergie à l'infini sera décalée en rouge. En effet, nous avons

$$E_\infty \sim \frac{\hbar}{\sqrt{GM\delta r}} \sqrt{1 - \frac{2GM}{2GM + \delta r}} \sim \frac{\hbar}{GM}. \quad (2.62)$$

2.5. Propriétés thermodynamiques des trous noirs

Ainsi, le trou noir rayonne avec une température caractéristique $T k_\beta \sim \frac{\hbar}{GM}$ [143]. Cette température notée T_H (température de Hawking) est proportionnelle à la gravité de surface comme suit

$$T_H = \frac{1}{k_B} \frac{\hbar \kappa}{2\pi c} = \frac{\kappa}{2\pi}. \quad (2.63)$$

• Température du trou noir de Kerr

Dans ce qui suit, nous calculerons la température du trou noir de Kerr en utilisant l'approche de gravité euclidienne [65, 87]. Nous commençons par la métrique Kerr,

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} dt^2 - \frac{2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\rho^2} d\phi dt + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 \\ + \rho^2 d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.64)$$

où $a = J/M$, $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ et $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$. Il est à noter que la métrique de Kerr n'est pas diagonale. Alors, si nous effectuons une rotation de Wick ($i\tau \mapsto t$), nous remarquons que la composante non diagonale $g_{t\phi}$ devient imaginaire. Afin de résoudre ce problème, nous introduisons le moment cinétique complexe suivant

$$a = i\alpha. \quad (2.65)$$

Par conséquent, la métrique euclidienne prend la forme suivante

$$ds^2 = \frac{\Delta + \alpha^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} d\tau^2 - \frac{2\alpha \sin^2 \theta (r^2 - \alpha^2 - \Delta)}{\rho^2} d\phi d\tau + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 \\ + \rho^2 d\theta^2 + \left(r^2 - \alpha^2 + \frac{(r^2 - \alpha^2)^2 - \Delta \alpha^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.66)$$

où nous avons $\rho^2 = r^2 - \alpha^2 \cos^2 \theta$ et $\Delta = r^2 - 2Mr - \alpha^2$.

Ensuite, nous introduisons les formes différentielles suivantes

$$\omega = \frac{r^2 - \alpha^2}{\rho^2} (d\tau - \alpha \sin^2 \theta d\phi), \\ \tilde{\omega} = \frac{r^2 - \alpha^2}{\rho^2} \left(d\phi + \frac{\alpha}{r^2 - \alpha^2} d\tau \right). \quad (2.67)$$

La raison de l'introduction de ces formes différentielles est qu'elles sont précisément les formes duales des vecteurs de killing orthogonaux pour la solution de Kerr. Ces derniers prennent

2.5. Propriétés thermodynamiques des trous noirs

la forme suivante

$$\begin{aligned}\xi &= \partial_\tau - \frac{\alpha}{r^2 - \alpha^2} \partial_\phi, \\ \tilde{\xi} &= \alpha \sin^2 \theta \partial_\tau + \partial_\phi.\end{aligned}\tag{2.68}$$

Ainsi, nous pouvons réécrire la métrique de Kerr en utilisant les formes duals ω et $\tilde{\omega}$ comme suit

$$ds^2 = \frac{\Delta \rho^2}{(r^2 - \alpha^2)^2} \omega^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta \tilde{\omega}^2).\tag{2.69}$$

En exploitant la similarité mentionnée ci-dessus entre dt et ω , ainsi que entre $d\phi$ et $\tilde{\omega}$ nous pourrions penser que nous avons diagonalisé la métrique de Kerr. En revanche, nous ne l'avons pas fait. Contrairement à dt et $d\phi$, les formes différentielles ω et $\tilde{\omega}$ ne sont pas exactes. Cela signifie que nous ne pouvons pas les écrire comme des différentiels d'une fonction de coordonnées.

Il a été montré que le trou noir de Kerr a des horizons des événements à $r = r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 + \alpha^2}$. Nous introduisons maintenant la coordonnée $\xi = r - r_+$, tel que $\xi \rightarrow 0$ si nous rapprochons du trou noir de l'extérieur. Pour ces raisons, le tenseur métrique correspondant en ξ prend la forme suivante

$$ds^2 \approx \frac{(r_+ - r_-) \rho^2}{(r_+^2 - \alpha^2)^2} \xi \omega^2 + \frac{\rho^2}{(r_+ - r_-) \xi} d\xi^2 + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta \tilde{\omega}^2),\tag{2.70}$$

où ρ , ω et $\tilde{\omega}$ sont maintenant évaluées à l'horizon extérieur r_+ . Cependant, les deux derniers termes de la métrique (2.70) ne sont qu'une sphère bidimensionnelle. Pour illustrer cela, nous remarquons que $\tilde{\omega}$ est maintenant évaluée à r_+ . De ce fait, nous pouvons écrire $\tilde{\omega} = d\psi$, où ψ est donnée par

$$\psi = \frac{r_+^2 - \alpha^2}{\rho^2} \left(\phi + \frac{\alpha}{r_+^2 - \alpha^2} \tau \right).\tag{2.71}$$

Il est à noter que le dernier terme de la métrique ci-dessus, qui se lit comme $\rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2)$, est en effet une sphère bidimensionnelle.

En introduisant $\chi = \tau - \alpha \sin^2 \theta \phi$, tel que $\omega = \frac{r_+^2 - \alpha^2}{\rho^2} d\chi$, nous pouvons réécrire la métrique

2.5. Propriétés thermodynamiques des trous noirs

(2.70) par la formule suivante

$$ds^2 = \frac{(r_+ - r_-)\xi}{\rho^2} d\chi^2 + \frac{\rho^2}{(r_+ - r_-)\xi} d\xi^2, \quad (2.72)$$

où nous avons ignoré la partie S^2 de la métrique. Définissons maintenant la coordonnée ζ par $\zeta^2 = \frac{4\rho^2\xi}{r_+ - r_-}$. En termes de cette nouvelle coordonnée, la métrique est définie comme

$$ds^2 = \frac{(r_+ - r_-)\zeta^2}{4\rho^4} d\chi^2 + d\zeta^2. \quad (2.73)$$

Cependant, notons que dans ce cas ρ dépend de l'angle θ . Par ailleurs, pour que la périodicité requise du χ soit valable pour tout θ , nous devons exiger que les points (τ, ϕ) soient identifiés avec les points $\left(\tau + \frac{4\pi(r_+^2 - \alpha^2)}{r_+ - r_-}, \phi - \frac{4\pi\alpha}{r_+ r_-}\right)$.

Évidemment, nous notons qu'avec cette identification ψ reste toujours une coordonnée bien définie. Autrement, la température inverse est toujours égale à la périodicité de la coordonnée τ . Par conséquent, la température de Hawking du trou noir Kerr-AdS est donnée par

$$T = \frac{r_+ - r_-}{4\pi(r_+^2 - \alpha^2)} = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad (2.74)$$

où nous avons utilisé l'équation (2.23) pour la gravité de surface du trou noir de Kerr. En termes de masse M et de moment cinétique J du trou noir, la température se réduit à

$$T = \frac{\sqrt{M^4 - J^2}}{4\pi M (M^2 + \sqrt{M^4 - J^2})}. \quad (2.75)$$

2.5.2 Durée de vie du trou noir

Lorsque les particules s'échappent, le trou noir perd une petite quantité de son énergie et donc une partie de sa masse (masse et énergie sont liées par l'équation d'Einstein $E = mc^2$). Par conséquent, un trou noir qui s'évapore aura une durée de vie finie [99]. Il découle de la Loi de Stefan-Boltzmann que la puissance de radiation du trou noir de température T_H est donnée par

$$P = A_H \sigma T_H^4, \quad (2.76)$$

2.5. Propriétés thermodynamiques des trous noirs

où $A_H = 4\pi R_H^2$ est l'aire de l'horizon, et $\sigma = \pi^2/60$ est la constante de Stefan. En utilisant la loi de conservation de l'énergie du trou noir et sa radiation, nous obtenons la formule suivante

$$\frac{dM}{dt} + P = 0. \quad (2.77)$$

La résolution de la dernière expression donne la durée de vie d'un trou noir une fois qu'il commence à s'évaporer. De ce fait, nous pouvons montrer que pour un trou noir de mass M le temps qu'il prend pour se dissiper est donnée par

$$t_{ev} = 5120\pi M^3 \approx 2.1 \times 10^{67} \text{ans} \left(\frac{M}{M_s} \right)^3. \quad (2.78)$$

Un trou noir d'une masse solaire $M_s = 2 \times 10^{30}$ met plus de 10^{67} ans à s'évaporer beaucoup plus longtemps que l'âge actuel de l'univers à 14.10^9 ans. En revanche, pour un trou noir de $10^{11} Kg$, le temps d'évaporation est de $2.6.10^9$ ans.

2.5.3 Capacité thermique

La capacité thermique d'un corps est une grandeur qui mesure l'énergie qu'il faut transférer à un corps pour augmenter sa température d'un kelvin. Lorsqu'un trou noir isolé s'évapore, il émet de l'énergie, sa masse diminue et sa température augmente en conséquence [62, 72]. Ainsi, un trou noir a une capacité thermique C négative

$$C = T \frac{\partial S}{\partial T} = -\frac{1}{8\pi T^2}. \quad (2.79)$$

Pour un trou noir qui possède un spin, la situation est plus compliquée. La capacité thermique à vitesse angulaire fixe est négative seulement si J est faible.

Il existe deux façons standards (théoriques) pour stabiliser un trou noir. La première consiste à le placer dans une cavité réfléchissante, ce qui lui permet d'atteindre l'équilibre à l'aide de la radiation de Hawking [3]. Pour une cavité sphérique de surface $A = 4\pi r_B^2$, la capacité thermique d'un trou noir de Schwarzschild devient

$$C_A = 8\pi M^2 \left(1 - \frac{2M}{r_B}\right) \left(\frac{3M}{r_B} - 1\right)^{-1}, \quad (2.80)$$

qui est positive pour une cavité assez petite, $r_B < 3M$. La seconde est de considérer un trou noir dans un espace asymptotiquement Anti de-Sitter, dans lequel la géométrie sert en quelque sorte de "cavité". Pour une température donnée, nous trouvons deux configurations de trous noirs Anti de-Sitter possibles, un "petit" trou noir à capacité thermique négative et un "grand" trou noir à capacité thermique positive.

2.5.4 Volume thermodynamique

La première loi de la mécanique des trous noirs (équation (2.24)) ressemble beaucoup à la forme standard de la première loi de la thermodynamique usuelle, mais il manque un terme de pression $-PdV$. Par ailleurs, la constante cosmologique Λ a la bonne dimension, et agit comme une pression dans les milieux cosmologiques, mais Λ n'est pas considéré comme une fonction d'état [59]. C'est une constante de couplage qui est fixée par la théorie et non par l'état du système thermodynamique [49, 63, 68]. Dans certains cas, il est logique de la traiter comme une fonction d'état. Par conséquent, nous pouvons généraliser la première loi comme suit

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega dJ + \Phi dQ + V_{\text{therm}} dp, \quad (2.81)$$

où nous avons $P = -\frac{\Lambda}{8\pi}$. Notons que la masse M doit être interprétée comme l'enthalpie ($U + PdV$, où U est l'énergie interne). En outre, pour un trou noir de Schwarzschild, il est facile de vérifier que

$$V_{\text{therm}} = \frac{4}{3}\pi r_+^3, \quad (2.82)$$

où r_+ est l'horizon extérieur de Schwarzschild. Cette relation se généralise aux trous noirs statiques de plus grande dimension, le volume thermodynamique est le volume d'une bille ronde plate dont la surface est égale à la surface de l'horizon des événements. Mais la généralisation aux trous noirs rotatifs est compliquée, et le volume thermodynamique correspondant n'a pas encore une interprétation physique simple [91, 101].

Ainsi, l'inclusion d'un terme de volume dans la première loi enrichit la structure en phases de la théorie, avec un certain nombre de conséquences intéressantes. Par exemple, l'équation d'état d'un trou noir Anti de-Sitter chargé et rotatif devient très proche de celle d'un gaz Van Der Waals. Les trous noirs Anti de-Sitter rotatif dans plus de six dimensions présentent des transitions de phases rentrantes, et les trous noirs Anti de-Sitter dans six dimensions à spin multiples ont un point triple [78].

2.5.5 Paradoxe de la perte d'information

Au fur et à mesure que le trou noir s'évapore et devient de plus en plus petit, l'effet non thermique de son radiation augmente progressivement [99, 138]. La radiation non thermique s'est avérée être à l'origine de la corrélation d'informations entre les émissions rayonnées depuis l'horizon du trou noir.

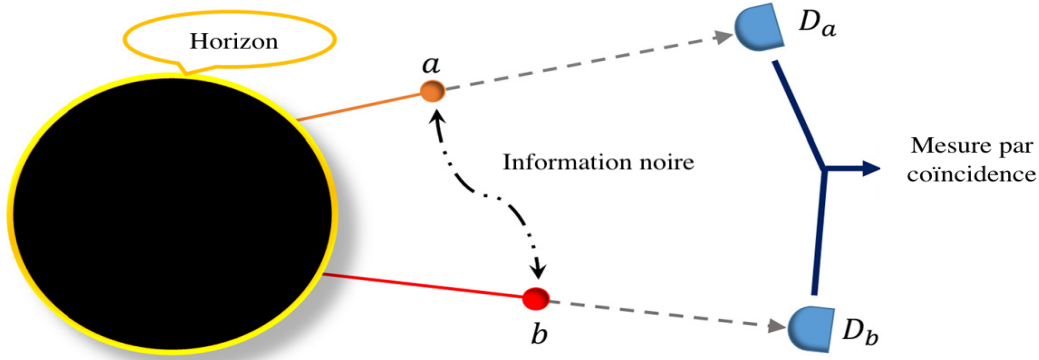


FIGURE 2.3 – *Information noire de la radiation du trou noir.*

Comme le montre la figure 2.3, cette corrélation d'informations ne peut pas être observée localement même si la radiation de Hawking peut être mesurée expérimentalement. En ce sens, les informations stockées dans la corrélation sont nommées par des informations noires. Lorsque l'information noire est prise en compte, la somme des informations du champ de radiation et du trou noir restant donne l'information totale du système de trou noir. Ainsi, cette dernière est conservée dans le processus de radiation de Hawking [15,16,50]. Par conséquent, les informations noires causées par le comportement statistique non canonique de la radiation de Hawking aboutiront à une solution possible au paradoxe de l'information du trou noir. En outre, les informations noires de Hawking dépendent du spectre de radiation du trou noir. Plus précisément, elles dépendent de la forme spécifique de la partie non thermique du spectre de rayonnement.

Pour deux événements non indépendants a et b , ils sont corrélés entre eux. Autrement dit, il existe une corrélation d'informations entre eux. Du point de vue de la théorie de l'information quantique, cette corrélation peut être décrite quantitativement avec l'information mutuelle [74, 105]. Cette dernière est définie comme suit

$$I(a, b) = \sum_{a,b} p_{a,b} \ln \left(\frac{p_{a,b}}{p_a p_b} \right), \quad (2.83)$$

2.5. Propriétés thermodynamiques des trous noirs

où p_i est la probabilité de l'événement i ($i = a, b$), et $p_{a,b}$ est la probabilité conjointe de ces deux événements. Évidemment, quand a et b sont indépendants l'un de l'autre, nous avons $p_{a,b} = p_a p_b$. Par conséquent, l'information mutuelle disparaît ($I(a, b) = 0$). Le spectre de radiation original du trou noir découvert par Hawking étant parfaitement thermique, nous pouvons facilement vérifier que la corrélation entre les radiations est nulle. Cela implique qu'il n'y a pas d'informations noires dans la radiation thermique du trou noir. Pour trouver la corrélation entre les radiations non thermiques du trou noir, nous choisissons les deux événements comme processus de radiation des deux particules a , b avec l'énergie ω_a et ω_b , respectivement. Dans ce cas, nous avons $p_{a,b} = p(\omega_a + \omega_b, M)$, tels que $p_i = p(\omega_i, M)$ ($i = a, b$).

CHAPITRE 3

Transitions de phase et géothermodynamique des trous noirs AdS

Il est bien connu que les trous noirs se comportent comme des systèmes thermodynamiques. Les lois de la mécanique des trous noirs deviennent similaires aux lois habituelles de la thermodynamique après des identifications appropriées entre les paramètres du trou noir et les variables thermodynamiques [3, 100, 101]. Néanmoins, les trous noirs présentent certains comportements exotiques en tant que système thermodynamique. En effet, l'entropie des trous noirs est proportionnelle à la surface et non au volume. Ainsi, leur température diverge à l'infini lorsque la masse disparaît en raison de l'évaporation de Hawking. En particulier, ces comportements exotiques élargissent la portée des études alternatives sur les trous noirs. Ces propriétés ont été approfondies au début des années quatre-vingt lorsque Hawking et Page ont découvert une transition de phase entre l'AdS thermique et le trou noir AdS de Schwarzschild [14, 74].

L'approche gibbsienne des transitions de phase est basée sur les équations de Clausius-Clapeyron-Ehrenfest [29, 47]. Ces équations permettent une classification des transitions de phase en tant que transitions de premier ordre ou continues (d'ordre supérieur). Précisément, les équations d'Ehrenfest ont été considérées comme un outil traditionnel pour inspecter la transition de phase du second ordre à certains points critiques [68, 75]. Au voisinage de tels points, certaines grandeurs thermodynamiques, y compris la capacité thermique, présentent des comportements singuliers.

3.1 Transitions de phase des trous noirs AdS

3.1.1 Transitions de phase liquide à vapeur

Le liquide et la vapeur ne sont que deux phases de la matière d'un seul constituant. Lorsqu'ils sont chauffés jusqu'au point d'ébullition, les liquides se vaporisent [100]. Au voisinage de ce point, la pente de la courbe de coexistence (pression P en fonction de la température T) obéit à l'équation de Clausius Clapeyron, donnée par

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta S}{\Delta V}, \quad (3.1)$$

où S et V correspondent respectivement à l'entropie et le volume. Nous notons que la dérivation de la relation (3.1) provient de la définition du potentiel de Gibbs. Cette dernière est définie comme suit

$$G = U - TS + PV, \quad (3.2)$$

tel que U est l'énergie interne. Nous supposons que les dérivées du premier ordre de G par rapport aux variables intrinsèques (P et T) sont discontinues. De plus, il en ressort que les valeurs spécifiques de P et T en deux phases donnent la pente de la courbe de coexistence au point de transition de phase [30]. Il s'agit d'un exemple de transition de phase de premier ordre qui diffère clairement du cas que nous allons étudier ensuite.

En se concentrant sur la solution de Schwarzschild, nous pouvons représenter l'énergie libre de Gibbs associée en fonction de la température. Ce comportement est illustré dans la figure 3.1. Partant de ce fait, nous observons une discontinuité à T_{HP} . Cela indique une transition de phase de premier ordre. C'est la transition de phase de Hawking-Page entre la radiation thermique et le trou noir large [62, 67].

Par ailleurs, dans l'interprétation du fluide dans un espace de phase étendu, la ligne de coexistence des phases de radiation thermique/large trou noir est déterminée à partir de l'équation $G = 0$. En effet, nous avons

$$P|_{\text{coexistence}} = \frac{3\pi}{8} T^2. \quad (3.3)$$

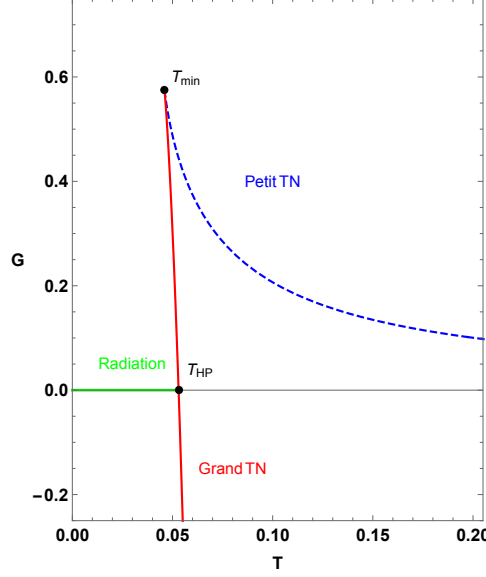


FIGURE 3.1 – *Transition de phase de Hawking-Page*

Diagramme de l'énergie libre de Gibbs du trou noir de Schwarzschild-AdS en fonction de la température pour une pression fixe ($P = 1/96\pi$).

En prenant $S_r \approx 0$ et $V_r \approx 0$, l'équation de Clausius Clapeyron (3.1) prend la forme suivante

$$\left. \frac{dP}{dt} \right|_{\text{coexistence}} = \frac{S_{bh} - S_r}{V_{bh} - V_r} = \frac{S_{bh}}{V_{bh}}, \quad (3.4)$$

où les indices (r) et (bh) sont associés respectivement à la radiation et au trou noir. À partir de la figure 3.2, nous remarquons que le diagramme de phase ($P - T$) correspondant pour ce type de trou noir n'a pas de point fini indiquant que cette transition de phase est présente pour toutes ces pressions. Cela rappelle la transition de phase solide/liquide, tel que la phase de radiation joue le rôle du solide [97].

3.1.2 Transitions de phase du trou noir de Reissner-Nordström AdS

Dans cette analyse nous nous focalisons sur les trous noirs de Reissner-Nordström aux dimensions $(n+1)$. Nous rappelons que les trous noirs de Reissner-Nordström sont caractérisés par la masse M et la charge Q [79]. Cependant, la solution pour l'espace-temps RN-AdS de dimension $(n+1)$ avec une constante cosmologique négative $\Lambda = -n(n-1)/2\ell^2$ est définie

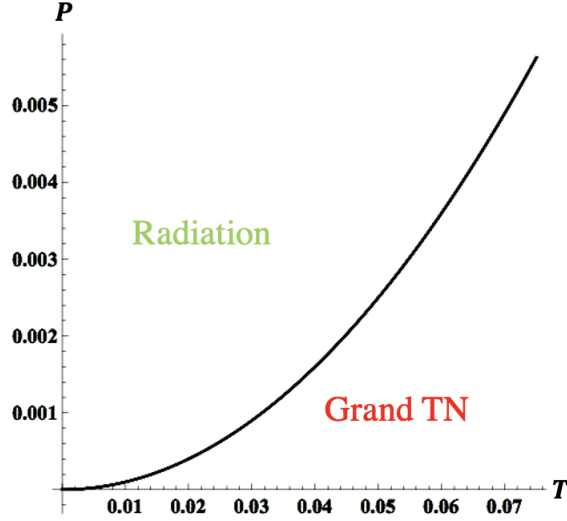


FIGURE 3.2 – Diagramme de phase $P-T$ représente la ligne de coexistence indiquant une longueur infinie comme celle de la transition de phase solide/liquide.

à travers l'élément de longueur suivant

$$ds^2 = -f dt^2 + f^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{n-1}^2. \quad (3.5)$$

Selon [14], la fonction métrique s'exprime comme

$$f(r) = 1 - \frac{m}{r^{n-2}} + \frac{q^2}{r^{2n-4}} + \frac{r^2}{\ell^2}. \quad (3.6)$$

En fixant $G = 1$, nous notons que m est liée à la masse ADM (M) du trou noir par

$$M = \frac{(n-1)\omega_{n-1}}{16\pi} m \quad \text{et} \quad \omega_{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}, \quad (3.7)$$

où ω_{n-1} est le volume de la sphère de dimension $(n-1)$. Le paramètre q est lié à la charge électrique Q comme suit

$$Q = \sqrt{2(n-1)(n-2)} \left(\frac{q}{8\pi} \right). \quad (3.8)$$

L'entropie associée est définie par la relation suivante

$$S = \frac{\omega_{n-1} r_+^{n-1}}{4}, \quad (3.9)$$

3.1. Transitions de phase des trous noirs AdS

où r_+ est le rayon extérieur de l'horizon des événements obtenu à partir de la condition $f(r_+) = 0$ [84]. Or, le potentiel électrostatique entre l'horizon et l'infini est donné par

$$\Phi = \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2(n-2)}} \frac{q}{r_+^{n-2}}. \quad (3.10)$$

En utilisant (3.8) et (3.9), nous pouvons exprimer (3.10) par la formule suivante

$$\Phi = \frac{4\pi Q}{(n-2)\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}(4S)^{\frac{n-2}{n-1}}}. \quad (3.11)$$

À partir de la condition $f(r_+) = 0$, ainsi, en utilisant (3.7), (3.8), (3.9) et (3.11), la masse du trou noir peut s'écrire comme suit

$$M = \frac{(4S)^{\frac{n-2}{n-1}}\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}(n-1)}{16\pi} \left[1 + \frac{2n-4}{n-1}\Phi^2 + \left(\frac{4S}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{2}{n-1}} \right]. \quad (3.12)$$

En appliquant la première loi de la mécanique des trous noirs $dM = TdS + \Phi dQ$, la température de Hawking peut être obtenue comme suit

$$\begin{aligned} T_H &= \left(\frac{\partial M}{\partial S} \right)_Q, \\ &= \frac{4^{\frac{n-2}{n-1}}\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}(n-2)}{16\pi S^{\frac{1}{n-1}}} \left[1 - \frac{2n-4}{n-1}\Phi^2 \right] + \frac{n4^{\frac{n}{n-1}}S^{\frac{1}{n-1}}}{16\pi\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

À ce niveau, il est nécessaire de mentionner que les différents paramètres du trou noir M , Q , J , S , T ont été interprétés comme $\frac{M}{\ell^{n-2}}$, $\frac{Q}{\ell^{n-2}}$, $\frac{S}{\ell^{n-1}}$, $T\ell$, respectivement [84, 93]. En se basant sur cette nouvelle convention, le paramètre ℓ n'apparaît dans aucune des équations obtenues.

En utilisant la relation (3.13), nous représentons la variation de l'entropie (S) en fonction de la température (T) dans la figure 3.3. Afin d'obtenir une expression explicite de la température minimale ($T_{\min}$) correspondant au point de transition, nous définissons d'abord $\left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_\Phi = 0$. À partir de cette condition, et en exploitant (3.13), nous trouvons

$$S_{\min} = \left(\frac{\omega_{n-1}}{4} \right) \left(\frac{n-2}{n} \right)^{(n-1)/2} \left[1 - \frac{2n-4}{n-1}\Phi^2 \right]^{(n-1)/2}. \quad (3.14)$$

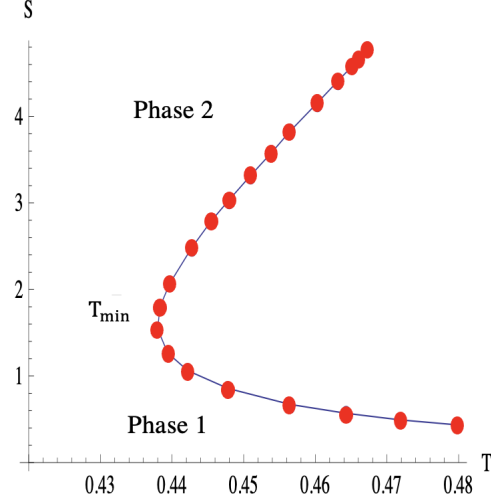


FIGURE 3.3 – *Diagramme de l'entropie (S) par rapport à la température (T) du trou noir RN-AdS, où $\Phi = 0.2$ et $n = 4$.*

De plus, nous concluons que

$$\left[\left(\frac{\partial^2 T}{\partial S^2} \right)_{\Phi} \right]_{S=S_{\min}} = \frac{n(n-2)}{8\pi(n-1)^3} \left(\frac{4^n}{\omega_{n-1} S^{2n-3}} \right)^{1/(n-1)}. \quad (3.15)$$

Par conséquent, nous pouvons obtenir $\left(\frac{\partial^2 T}{\partial S^2} \right)_{\Phi} > 0$ pour $n > 2$. En substituant (3.14) dans (3.13), nous trouvons que la température minimale correspondante pour l'espace-temps RN-AdS est donnée par

$$T_{\min} = \frac{\sqrt{n(n-2)}}{2\pi} \left[1 - \frac{2n-4}{n-1} \Phi^2 \right]^{1/2}. \quad (3.16)$$

Dans la limite $\Phi = 0$, nous obtenons la température minimale du trou noir de Schwarzschild AdS de dimension $(n+1)$ [93]. Cette température est définie comme suit

$$T_{\min} = \frac{\sqrt{n(n-2)}}{2\pi}. \quad (3.17)$$

Pour $n = 3$, l'équation (3.17) se réduit à

$$T_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}. \quad (3.18)$$

Notons que l'équation (3.18) a été obtenue plus tôt par Hawking et Page dans leur analyse

originale [165].

Maintenant, il est possible d'interpréter les deux branches de la courbe $(S - T)$, séparées par le point $(S_{\min}, T_{\min})$. Ces deux branches sont associées à deux phases. Puisque l'entropie est proportionnelle à la masse du trou noir, la phase (1) correspond alors à un trou noir de masse faible. En revanche, la phase (2) associée à un trou noir de masse plus élevée. En outre, nous remarquons que ces deux phases existent au-dessus de la température minimale ($T = T_{\min}$). Afin d'obtenir une expression de la masse ($M_{\min}$) du trou noir séparant ses deux phases, nous substituons (3.14) dans (3.12). En effet, nous obtenons

$$M_{\min} = \frac{\omega_{n-1}(n-2)^{(n-2)/2}}{8\pi n^{n/2}} \left[1 - \frac{2n-4}{n-1}\Phi^2\right]^{(n-2)/2} \left[(n-1)^2 + 2(n-2)\Phi^2\right]. \quad (3.19)$$

Partant de ce fait, la phase 1 correspond à un trou noir de masse $M < M_{\min}$. Tandis que la phase 2 associée à un trou noir de masse $M > M_{\min}$.

Dans la limite $\Phi = 0$, nous obtenons la masse critique correspondante du trou noir de Schwarzschild AdS de dimension $(n+1)$, qui est donnée par

$$M_{\min} = \frac{\omega_{n-1}(n-2)^{(n-2)/2}(n-1)^2}{8\pi n^{n/2}}. \quad (3.20)$$

Une observation plus approfondie de la courbe $(S - T)$ révèle que la pente de la courbe change progressivement son signe autour de $T = T_{\min}$. Ainsi, ceci indique clairement la discontinuité de la capacité thermique $(C_{\Phi} = T(\partial S/\partial T)_{\Phi})$. Cette dernière est associée à l'occurrence d'une transition continue d'ordre supérieur à $T = T_{\min}$. Nous notons que la capacité thermique à potentiel constant (C_{Φ}) est l'analogue de la capacité thermique à pression constante (C_P) dans les systèmes conventionnels [84]. Par suite, la capacité thermique établie prend la forme suivante

$$\begin{aligned} C_{\Phi} &= T(\partial S/\partial T)_{\Phi}, \\ &= \frac{(n-1)S \left[(n-2)\omega_{n-1}^{\frac{2}{n-1}} \left(1 - \frac{2n-4}{n-1}\Phi^2\right) + n(4S)^{\frac{2}{n-1}} \right]}{\left[n(4S)^{\frac{2}{n-1}} - (n-2)\omega_{n-1}^{\frac{2}{n-1}} \left(1 - \frac{2n-4}{n-1}\Phi^2\right) \right]}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

En fixant le dénominateur de (3.21) égal à zéro, nous pouvons trouver la température critique à laquelle la capacité thermique (C_{Φ}) diverge. Cela donne exactement la valeur de l'entropie (S) trouvée dans (3.14). En substituant cette valeur dans (3.13), il est trivial de montrer que

3.1. Transitions de phase des trous noirs AdS

(3.16) correspond à la température critique à laquelle C_Φ diverge. De surcroît, la divergence de C_Φ à $T = T_{\min}$ peut être observée à partir de la figure 3.4, où nous avons illustré la capacité thermique (C_Φ) en fonction de la température (T). À partir de la figure 3.4, nous remarquons

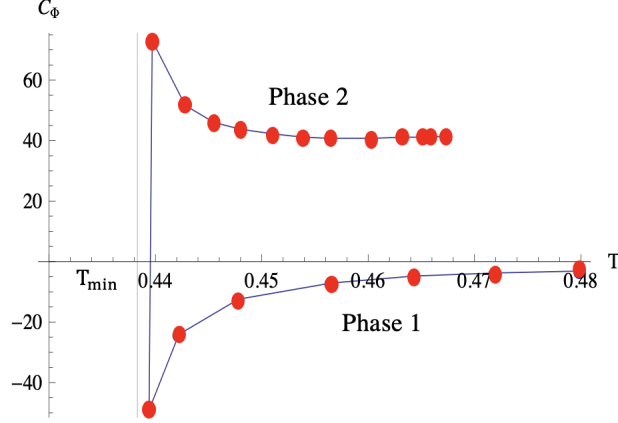


FIGURE 3.4 – Diagramme de la capacité thermique (C_Φ) par rapport à la température (T) du trou noir RN-AdS pour $\Phi = 0.2$ et $n = 4$.

que la capacité thermique C_Φ change de l'infini négatif à l'infini positif à $T = T_{\min}$ [26]. En outre, nous pouvons noter que le trou noir de masse faible (phase 1) est considéré instable parce qu'il possède une capacité thermique négative ($C_\Phi < 0$). Alors que le trou noir de masse élevée (phase 2) est stable puisqu'il est associé à une capacité thermique positive ($C_\Phi > 0$).

À ce stade, nous nous dirigeons vers la définition du grand potentiel canonique qui est connu sous le nom de l'énergie libre de Gibbs [84, 93]. Pour le trou noir RN-AdS, ceci est défini comme

$$G = M - TS - \Phi Q, \quad (3.22)$$

où le dernier terme est l'analogue du terme PV dans les systèmes conventionnels. En utilisant (3.11), (3.12), et (3.13), nous pouvons facilement exprimer G en fonction de (S, Φ) par la formule suivante

$$G = \frac{(4S)^{\frac{n-2}{n-1}} \omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}}{16\pi} \left[1 - \frac{2n-4}{n-1} \Phi^2 \right] - \frac{(4S)^{\frac{n}{n-1}}}{16\pi \omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}}. \quad (3.23)$$

En effet, nous ne pouvons pas substituer directement l'entropie S dans l'équation (3.23) en terme de la température T . Pour cette raison, il est difficile d'obtenir la courbe $(G - T)$.

3.1. Transitions de phase des trous noirs AdS

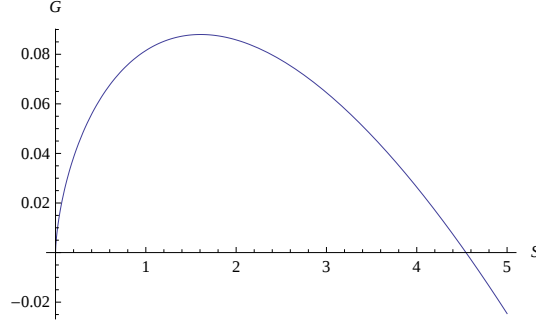


FIGURE 3.5 – *Diagramme de l'énergie libre de Gibbs (G) par rapport à l'entropie (S) du trou noir RN -AdS pour $\Phi = 0.2$ et $n = 4$.*

Pour déterminer cette dernière, nous utilisons d'abord l'équation (3.23) pour exprimer la variation de l'énergie libre de Gibbs G en fonction de l'entropie S . Ensuite, à partir de la figure 3.5, nous notons les valeurs de G pour différentes valeurs de S en obtenant les valeurs correspondantes de T à partir de la figure 3.3. Finalement, nous rassemblons toutes ces données afin d'obtenir la figure 3.6. Il est important de noter que, dans la figure 3.5, la phase instable (phase 1) correspond aux valeurs faibles de l'entropie S tandis que la phase stable (phase 2) est associée aux grades valeurs de S .

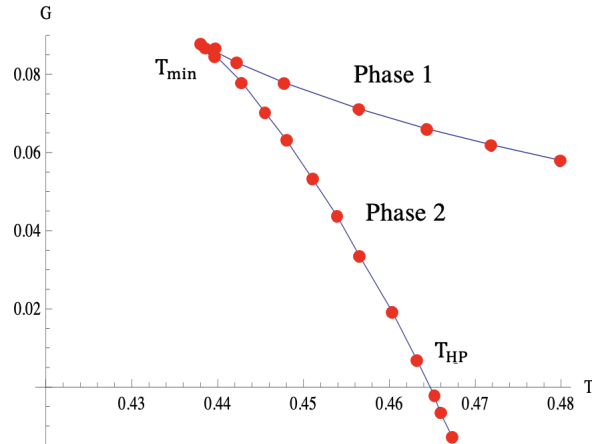


FIGURE 3.6 – *Diagramme de l'énergie libre de Gibbs (G) par rapport à la température (T) du trou noir RN -AdS pour $\Phi = 0.2$ et $n = 4$.*

À partir de la figure 3.6, nous observons que la valeur de G pour la phase 1 est supérieure à celle de la phase 2 à température constante. En outre, la phase 1 correspond aux trous noirs instables, tandis que la phase 2 est associée aux trous noirs stables. De plus, nous observons que G est toujours positive pour l'intervalle $T_{\min} < T < T_{\text{HP}}$. Il est à noter que la tempé-

3.2. Transitions de phase du second ordre

rature T_{HP} est nommée par la température de Hawking-Page [81, 84]. À cette température, nous pouvons remarquer une transition de phase du premier ordre entre l'espace-temps AdS thermique et le trou noir stable. Afin de calculer T_{HP} , nous fixons d'abord $G = 0$ en (3.23). Partant de ce fait, nous pouvons obtenir la formule suivante

$$S_{\text{HP}} = \left(\frac{\omega_{n-1}}{4} \right) \left[1 - \frac{2n-4}{n-1} \Phi^2 \right]^{\frac{(n-1)}{2}}. \quad (3.24)$$

En substituant (3.24) dans (3.13), nous obtenons finalement l'expression ci-dessous

$$T_{\text{HP}} = \frac{(n-1)}{2\pi} \left[1 - \frac{2n-4}{n-1} \Phi^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.25)$$

À partir de (3.16) et (3.25), nous trouvons la formule suivante

$$T_{\text{min}} = \frac{\sqrt{n(n-2)}}{n-1} T_{\text{HP}}. \quad (3.26)$$

C'est est une relation universelle en ce sens qu'elle ne dépend pas des paramètres du trou noir.

3.2 Transitions de phase du second ordre

3.2.1 Équations d'Ehrenfest des trous noirs

La classification de la nature de la transition de phase à l'aide du schéma d'Ehrenfest est une technique très élégante en thermodynamique ordinaire. Notons que pour toute vraie transition de phase du second ordre, les deux équations d'Ehrenfest doivent être satisfaites au point critique [45, 49, 63]. Dans ce qui suit, nous analyserons les transitions de phase pour le trou noir RN AdS en exploitant le schéma d'Ehrenfest [29, 47].

En effet, à l'aide de la figure 3.3, nous concluons que l'entropie (S) est une fonction continue de la température (T). Par conséquent, la possibilité d'une transition de phase du premier ordre est exclue. Cependant, la divergence infinie de la capacité thermique près du point critique T_{min} (voir figure 3.4) indique fortement le début d'une transition de phase d'ordre supérieur (continue). La nature de cette divergence est parfaitement clarifiée par la figure 3.7.

3.2. Transitions de phase du second ordre

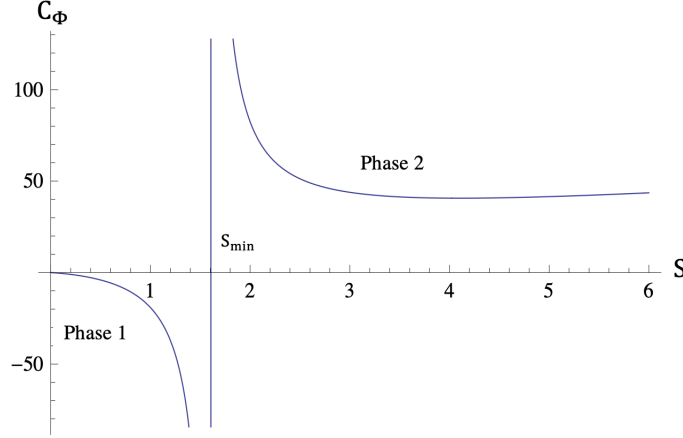


FIGURE 3.7 – Diagramme de la capacité thermique (C_Φ) par rapport à l'entropie (S) du trou noir $RN-AdS$ pour $\Phi = 0, 2$ et $n = 4$.

Maintenant, nous exploitons le schéma d'Ehrenfest afin de comprendre la nature de la transition de phase. D'ailleurs, le schéma d'Ehrenfest consiste essentiellement en une paire d'équations appelées équations d'Ehrenfest du premier et du second type [49, 63]. Pour un système thermodynamique ordinaire, ces équations peuvent s'écrire comme

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S = \frac{C_{P_2} - C_{P_1}}{TV(\alpha_2 - \alpha_1)} = \frac{\Delta C_P}{TV\Delta\alpha}, \quad (3.27)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{k_{T_2} - k_{T_1}} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta k_T}. \quad (3.28)$$

Pour une véritable transition de phase du second ordre, ces deux équations doivent être satisfaites simultanément. En considérant l'analogie entre les variables d'état thermodynamique et les paramètres du trou noir ($V \longleftrightarrow Q, P \longleftrightarrow -\Phi$), nous sommes désormais en mesure d'écrire les équations d'Ehrenfest pour le trou noir $RN-AdS$ [79, 84]. Ces équations sont exprimées comme suit

$$-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_S = \frac{C_{\Phi_2} - C_{\Phi_1}}{TQ(\alpha_2 - \alpha_1)} = \frac{\Delta C_\Phi}{TQ\Delta\alpha}, \quad (3.29)$$

$$-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_Q = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{k_{T_2} - k_{T_1}} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta k_T}, \quad (3.30)$$

où $\alpha = \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_\Phi$ est l'analogue du coefficient de dilatation volumique et $k_T = \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial Q}{\partial \Phi}\right)_T$ est

3.2. Transitions de phase du second ordre

identifié avec la compressibilité isotherme. Leurs formes explicites sont données par

$$\alpha = \frac{16\pi(n-2)\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}S^{\frac{1}{n-1}}}{4^{\frac{n-2}{n-1}} \left[n(4S)^{\frac{2}{n-1}} - (n-2)\omega_{n-1}^{\frac{2}{n-1}} \left(1 - \frac{2n-4}{n-1}\Phi^2 \right) \right]}, \quad (3.31)$$

$$k_T = \frac{\left[n(4S)^{\frac{2}{n-1}} - (n-2)\omega_{n-1}^{\frac{2}{n-1}} \left(1 - \frac{(4n-6)(n-2)}{n-1}\Phi^2 \right) \right]}{\Phi \left[n(4S)^{\frac{2}{n-1}} - (n-2)\omega_{n-1}^{\frac{2}{n-1}} \left(1 - \frac{2n-4}{n-1}\Phi^2 \right) \right]}. \quad (3.32)$$

D'un autre côté, nous remarquons que les dénominateurs de C_Φ (3.21), α (3.31), et k_T (3.32) sont tous identiques [84]. Pour cette raison, α et k_T divergent au point critique. Autrement, en utilisant (3.13), le côté gauche de la première équation d'Ehrenfest (3.29) au point critique $S_{\min}$ peut être trouvé comme

$$- \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_S \right]_{S=S_{\min}} = \frac{\pi(n-1)}{\Phi(n-2)^2} \left(\frac{4S_{\min}}{\omega_{n-1}} \right)^{1/(n-1)}. \quad (3.33)$$

Afin de calculer le côté droit, nous notons d'abord que

$$Q\alpha = (\partial Q / \partial T)_\Phi = (\partial Q / \partial S)_\Phi (C_\Phi / T). \quad (3.34)$$

Par conséquent, le côté droit de (3.29) devient

$$\frac{\Delta C_\Phi}{T_{\min} Q \Delta \alpha} = \left[\left(\frac{\partial S}{\partial Q} \right)_\Phi \right]_{S=S_{\min}}. \quad (3.35)$$

En utilisant (3.11), nous calculons le côté droit de (3.29) de l'équation ci-dessus. En effet, nous trouvons que

$$\frac{\Delta C_\Phi}{T_{\min} Q \Delta \alpha} = \frac{\pi(n-1)}{\Phi(n-2)^2} \left(\frac{4S_{\min}}{\omega_{n-1}} \right)^{1/(n-1)}. \quad (3.36)$$

En somme, les équations (3.33) et (3.36) révèlent clairement la validité de la première équation d'Ehrenfest. En effet, nous pouvons conclure que la divergence de C_Φ s'annule avec celle de α dans la première équation.

3.2. Transitions de phase du second ordre

Afin d'évaluer le côté gauche de (3.30), nous notons la relation suivante

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \Phi}\right)_Q = \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_\Phi \left(\frac{\partial S}{\partial \Phi}\right)_Q + \left(\frac{\partial T}{\partial \Phi}\right)_S. \quad (3.37)$$

Étant donné que la capacité thermique C_Φ diverge au point critique ($S_{\min}$). Il est évident d'après (3.21) de trouver

$$\left[\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_\Phi\right]_{S=S_{\min}} = 0. \quad (3.38)$$

De surcroît, à partir de (3.11) nous trouvons que $\left(\frac{\partial S}{\partial \Phi}\right)_Q$ a une valeur finie lorsqu'elle est évaluée à $S = S_{\min}$. Par conséquent, le premier terme du côté droit de (3.37) disparaît. En effet, dans ces circonstances, nous obtenons

$$-\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_Q\right]_{S=S_{\min}} = -\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_S\right]_{S=S_{\min}}. \quad (3.39)$$

En exploitant l'identité thermodynamique suivant

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial \Phi}\right)_T \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_Q \left(\frac{\partial T}{\partial Q}\right)_\Phi = -1, \quad (3.40)$$

nous pouvons établir que

$$Qk_T = \left(\frac{\partial Q}{\partial \Phi}\right)_T = -\left(\frac{\partial T}{\partial \Phi}\right)_Q \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_\Phi = -\left(\frac{\partial T}{\partial \Phi}\right)_Q Q\alpha. \quad (3.41)$$

Par conséquent, le côté droit de (3.30) peut s'écrire comme suit

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta k_T} = -\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_Q\right]_{S=S_{\min}}. \quad (3.42)$$

En effet, cela montre la validité de la deuxième équation d'Ehrenfest. Ainsi, nous pouvons conclure que les divergences de α et k_T s'annulent dans la deuxième équation comme dans le cas précédent. En outre, en utilisant (3.29), (3.39) et (3.42), le rapport de Prigogine-Defay

3.2. Transitions de phase du second ordre

(PD) peut s'exprimer par la relation suivante

$$\Pi = \frac{\Delta C_\Phi \Delta k_T}{T_{\min} Q (\Delta \alpha)^2} = 1. \quad (3.43)$$

En définitive, la transition de phase qui se produit à $T = T_{\min}$ est une transition d'équilibre du second ordre [48, 56, 101]. Cela est vrai en raison que les courbes de transition de phase sont étalées et divergentes près du point critique.

3.2.2 Géothermodynamique des trous noirs

Récemment, l'analyse des transitions de phase des trous noirs du point de vue de la géométrie de l'espace d'états thermodynamiques (la géométrie de Ruppeiner) a attiré l'attention. Dans cette approche, la métrique de Ruppeiner est définie par le Hessien de l'entropie, ce qui donne la fonction de corrélation de paires [159, 160]. De plus, la longueur invariante sur l'espace d'états thermodynamiques, définie par la métrique de Ruppeiner, donne la distribution de probabilité des fluctuations autour de l'état d'entropie maximale [161]. En utilisant les outils de la géométrie riemannienne, nous pouvons définir le scalaire de courbure de Ruppeiner (R). Ce dernier est interprété comme le volume de corrélation multiplié par une certaine constante de proportionnalité [160]. Dans la géométrie de Ruppeiner, une grandeur purement thermodynamique (R) est censée avoir le même but que la longueur de corrélation. Par ailleurs, cette interprétation s'est avérée assez réussie pour décrire de nombreuses transitions de phase du second ordre où ce scalaire de courbure diverge au point critique [12, 13].

À cet égard, la métrique de Ruppeiner est définie comme

$$dS_R^2 = g_{ij}^R dX^i dX^j, \quad (3.44)$$

où $g_{ij} = -\frac{\partial^2 S(X^k)}{\partial X^i \partial X^j}$, et $X^i \equiv X^i(M, N^a)$ [8]. Tandis que, N^a sont toutes les autres variables extensives du système. Afin de trouver g_{ij} pour un trou noir rotatif non chargé, il est préférable d'exprimer S en termes de M et J . Selon [38], la métrique de Weinhold est définie de la manière suivante

$$dS_W^2 = g_{ij}^W dX^i dX^j, \quad (3.45)$$

où $g_{ij}^W = \frac{\partial^2 M(X^k)}{\partial X^i \partial X^j}$, et $X^i \equiv X^i(S, J)$. Il est bien connu que la métrique de Ruppeiner et

celle de Weinhold sont liées par un facteur conforme [39,40]. De ce fait, nous pouvons obtenir l'expression suivante

$$dS_R^2 = \frac{1}{T} dS_W^2, \quad (3.46)$$

où T est la température du système.

3.3 Trou noir de Kerr-AdS

Le trou noir de Kerr-AdS est une solution de l'équation d'Einstein en dimensions $(3+1)$ avec une constante cosmologique négative $\Lambda = -3/\ell^2$. Il est caractérisé par deux paramètres, à savoir la masse M et le moment cinétique J [81]. Cependant, la première loi de la thermodynamique est donnée par

$$dM = TdS + \Omega dJ, \quad (3.47)$$

où T est la température de Hawking, tandis que, Ω est la différence entre les vitesses angulaires à l'horizon des événements (Ω_H) et à l'infini (Ω_∞) [10,81]. Comme précédemment, nous écrivons ces équations avec une redéfinition appropriée, où nous considérons $T\ell$, $\frac{M}{\ell}$, $\frac{J}{\ell^2}$, $\frac{S}{\ell^2}$, comme la température (T), la masse (M), le moment cinétique (J), l'entropie (S) et la vitesse angulaire (Ω). Cela assure l'absence de ℓ dans les quantités thermodynamiques. En termes de ces nouvelles variables, nous trouvons

$$T = \frac{1}{8\pi M} \left(1 - \frac{4\pi^2 J^2}{S^2} + \frac{4S}{\pi} + \frac{3S^2}{\pi^2} \right). \quad (3.48)$$

Aussi, nous pouvons obtenir les relations suivantes

$$M^2 = \frac{S}{4\pi} + \frac{\pi J^2}{S} + J^2 + \frac{S}{2\pi} \left(\frac{S}{\pi} + \frac{S^2}{2\pi^2} \right), \quad (3.49)$$

$$\Omega = \frac{\pi J}{MS} \left(1 + \frac{S}{\pi} \right), \quad (3.50)$$

$$\frac{J}{S} = \frac{M\Omega}{\pi + S}, \quad (3.51)$$

$$a = \frac{J}{M} = \frac{S\Omega}{\pi} \left(1 + \frac{S}{\pi} \right)^{-1}. \quad (3.52)$$

3.3. Trou noir de Kerr-AdS

Nous substituons J dans (3.49) et en utilisant (3.51), nous pouvons exprimer M^2 en termes de S et Ω . En effet, nous trouvons

$$M^2 = \frac{S}{4\pi} \frac{1 + \frac{2S}{\pi}(1 + \frac{S}{2\pi})}{1 - \frac{\Omega^2 S}{\pi(1 + \frac{S}{\pi})}}. \quad (3.53)$$

De même, en remplaçant (3.53) dans (3.48), la température s'exprime comme suit

$$T = \sqrt{\frac{S(\pi + S)^3}{(\pi + S - S\Omega^2)}} \left[\frac{\pi^2 - 2\pi S(\Omega^2 - 2) - 3S^2(\Omega^2 - 1)}{4\pi^{\frac{3}{2}} S(\pi + S)^2} \right]. \quad (3.54)$$

À partir de cette équation, nous remarquons que la température T n'est pas réelle. La condition de réalité est satisfaite par la contrainte suivante

$$\pi + S - S\Omega^2 > 0. \quad (3.55)$$

Cela implique que $\Omega^2 < 1 + \frac{\pi}{S}$, imposant une restriction à Ω pour une valeur fixe de l'entropie. Pour examiner le comportement thermodynamique du trou noir associé, nous calculons la capacité thermique semi-classique à vitesse angulaire constante. En effet, nous exploitons (3.54), ainsi que, la relation $C_\Omega = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_\Omega = \frac{T}{\left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_\Omega}$. Par conséquent, nous trouvons l'expression suivante

$$C_\Omega = \frac{2S(\pi + S)(\pi + S - S\Omega^2) (\pi^2 - 2\pi S(\Omega^2 - 2) - 3S^2(\Omega^2 - 1))}{(\pi + S)^3(3S - \pi) - 6S^2(\pi + S)^2\Omega^2 + S^3(4\pi + 3S)\Omega^4}. \quad (3.56)$$

Afin d'examiner les transitions de phase correspondantes, nous illustrons (3.54) et (3.56) en fonction de l'entropie pour une valeur fixe de Ω ($\Omega = 0.3$). Ces courbes sont représentées dans la figure 3.8. À partir de la figure 3.8.a, nous remarquons que la température de Hawking (T) est continue. La continuité de l'entropie (S), suggère que, pour Ω fixe, il n'y a pas de transition de phase de premier ordre se produisant dans le trou noir de Kerr-AdS. Néanmoins, il existe une température minimale en $S = 1.09761$. Ainsi, la figure 3.8.b montre une discontinuité dans C_Ω à cette valeur critique d'entropie ($S = S_c = 1.09761$). Cependant, dans cette courbe, la discontinuité de la capacité thermique est infinie, ce qui est complètement différent des systèmes thermodynamiques ordinaires. En raison que l'entropie est proportionnelle au carré de la masse du trou noir, le point critique S_c sépare essentiellement deux branches de trou noir de Kerr-AdS avec des masses des plus petites aux plus grandes [81].

3.3. Trou noir de Kerr-AdS

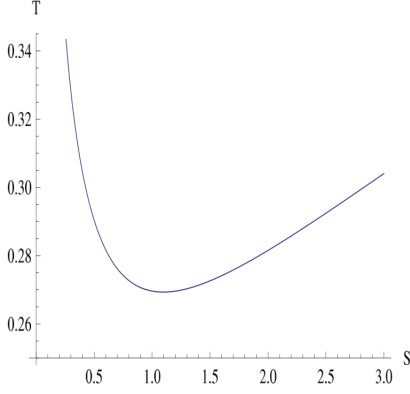


FIGURE 3.8.a

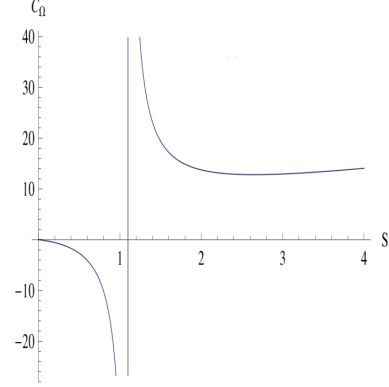


FIGURE 3.8.b

FIGURE 3.8 – Diagramme de la température de Hawking (T) et la capacité thermique (C_Ω) en fonction de l'entropie (S) du trou noir Kerr-AdS pour une valeur fixe de Ω ($\Omega = 0.3$).

3.3.1 Schéma d'Ehrenfest du trou noir de Kerr-AdS

La méthode conventionnelle pour analyser les transitions de phase est basée sur l'approche d'Ehrenfest [29]. Notons que pour toute transition de phase du second ordre, les deux équations d'Ehrenfest doivent être satisfaites au point critique [68]. Pour le trou noir de Kerr-AdS, les deux équations d'Ehrenfest correspondantes sont données par

$$-\left(\frac{\partial\Omega}{\partial T}\right)_S = \frac{C_{\Omega_2} - C_{\Omega_1}}{TJ(\alpha_2 - \alpha_1)}, \quad (3.57)$$

$$-\left(\frac{\partial\Omega}{\partial T}\right)_J = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)}{(k_{T_2} - k_{T_1})}. \quad (3.58)$$

Où nous avons

$$\alpha = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial J}{\partial T} \right)_\Omega, \quad (3.59)$$

$$k_T = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial J}{\partial \Omega} \right)_T. \quad (3.60)$$

Précédemment, nous avons noté qu'il existe une discontinuité dans C_Ω , comme le montre la figure 1 (b). Néanmoins, la présence de discontinuité dans α et K_T est également nécessaire pour montrer qu'une transition de phase est réalisée. En utilisant (3.51) et (3.53), nous pouvons exprimer J en fonction de S et Ω . Par conséquent, nous trouvons l'expression

suivante

$$J(S, \Omega) = \frac{S\Omega \sqrt{\frac{S(\pi+S)^3}{(\pi+S-S\Omega^2)}}}{2\pi^{\frac{3}{2}}(\pi+S)}. \quad (3.61)$$

En utilisant la définition de a (3.52), nous écrivons (3.59) comme

$$J\alpha = M \left(\frac{\partial a}{\partial T} \right)_{\Omega} + a \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_{\Omega}. \quad (3.62)$$

Afin de calculer le premier terme du côté droit de l'équation (3.62), nous avons besoin d'une relation entre Ω , T et a . Pour ce faire, nous réécrivons l'entropie (3.51) du trou noir de Kerr-AdS en termes de Ω et a comme suit

$$S = \frac{\pi a}{\Omega - a}. \quad (3.63)$$

En remplaçant (3.63) dans (3.54), nous pouvons exprimer la température en termes de a et Ω . En effet, nous obtenons

$$T = T(\Omega, a) = \frac{2a\Omega^2 + \Omega a^2 - 2a - \Omega}{4\pi \sqrt{a(a-\Omega)(a\Omega-1)}}. \quad (3.64)$$

À ce stade, nous pouvons simplement calculer $\left(\frac{\partial a}{\partial T} \right)_{\Omega}$. Pour évaluer le deuxième terme du côté droit de l'équation (3.62), nous écrivons

$$\left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_{\Omega} = \left(\frac{\partial M}{\partial S} \right)_{\Omega} \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{\Omega}.$$

En utilisant (3.53) et (3.54), nous trouvons $\left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_{\Omega}$. En exploitant ces résultats, nous incluons a (3.63) et J (3.61) dans (3.62). Particulièrement, nous obtenons l'analogie du coefficient de dilatation volumique. Ce dernier est donné par

$$\alpha = \frac{\sqrt{4\pi^3 S(\pi+S)(\pi+S-S\Omega^2)[6\Omega(\pi+S)^2 - 2S\Omega^2(2\pi+3S)]}}{(\pi+S)^3(3S-\pi) - 6S^2(\pi+S)^2\Omega^2 + S^3(4\pi+3S)\Omega^4}. \quad (3.65)$$

3.3. Trou noir de Kerr-AdS

Afin de trouver une expression correspondante à l'analogie de la compressibilité $k_T = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial J}{\partial \Omega} \right)_T$, nous établissons l'expression de J en termes de a et Ω . En effet, nous avons

$$J = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a(\Omega - a)}{(1 - a\Omega)}} \left[\frac{a\Omega}{(\Omega - a)^2} \right]. \quad (3.66)$$

Puisque nous ne pouvons pas exprimer J en termes de T et Ω , nous passons vers l'utilisation des règles de la dérivée partielle pour trouver k_T à partir (3.64) et (3.66). En exploitant $dJ = \left(\frac{\partial J}{\partial a} \right)_\Omega da + \left(\frac{\partial J}{\partial \Omega} \right)_a d\Omega$, nous pouvons écrire

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \Omega} \right)_T = \left(\frac{\partial J}{\partial a} \right)_\Omega \left(\frac{\partial a}{\partial \Omega} \right)_T + \left(\frac{\partial J}{\partial \Omega} \right)_a. \quad (3.67)$$

À partir de la relation $\left(\frac{\partial a}{\partial \Omega} \right)_T = -\frac{\left(\frac{\partial T}{\partial \Omega} \right)_a}{\left(\frac{\partial T}{\partial a} \right)_\Omega}$, l'équation (3.67) prend la forme suivante

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \Omega} \right)_T = \frac{\left(\frac{\partial J}{\partial a} \right)_a \left(\frac{\partial T}{\partial a} \right)_\Omega - \left(\frac{\partial T}{\partial \Omega} \right)_a \left(\frac{\partial J}{\partial a} \right)_\Omega}{\left(\frac{\partial T}{\partial a} \right)_\Omega}. \quad (3.68)$$

De plus, en utilisant (3.64) et (3.66) dans l'équation ci-dessus, nous obtenons k_T en termes de a et Ω . En exploitant (3.63) et (3.61), nous pouvons trouver la formule suivante

$$k_T = \frac{(3S - \pi)(\pi + S)^3 + 2S(\pi + S)^2(4\pi + 3S)\Omega^2 - S^2(2\pi + 3S)^2\Omega^4}{(3S - \pi)\Omega(\pi + S)^3 - 6S^2(\pi + S)^2\Omega^3 + S^3(4\pi + 3S)\Omega^5}. \quad (3.69)$$

Dans la figure 3.9, nous illustrons (3.65) et (3.69) en fonction de l'entropie S en prenant

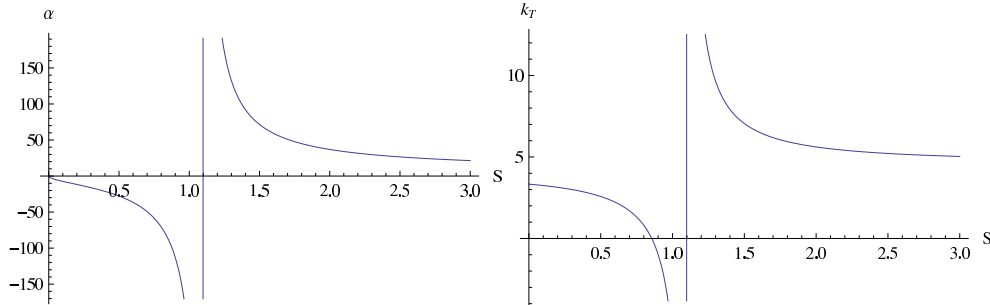


FIGURE 3.9 – Diagramme de α et k_T en fonction de l'entropie (S) pour $\Omega = 0.3$.

$\Omega = 0.3$. Au point critique $S_c = 1.09761$, les deux courbes (k_T, S) et (α, S) montrent une

discontinuité. Par suite, il s'agit d'une véritable transition de phase du trou noir de Kerr-AdS.

À cet égard, nous effectuons une analyse numérique pour examiner l'ordre de cette transition de phase. L'idée est consacrée à l'étude des deux équations d'Ehrenfest en vérifiant leurs validités. Pour toute transition de phase du second ordre, les deux équations d'Ehrenfest doivent être satisfaites au point critique [31, 81].

En considérant la première équation d'Ehrenfest (3.57), nous pouvons calculer le côté gauche à partir de la relation (3.54). Par conséquent, nous trouvons

$$-\left(\frac{\partial\Omega}{\partial T}\right)_S = -\frac{4\pi^{\frac{3}{2}}(\pi + S - S\Omega^2)^2 \sqrt{\frac{S(\pi+S)^3}{(\pi+S-S\Omega^2)}}}{S\Omega(S(\pi+S)(2\pi+3S)\Omega^2 - 3(\pi+S)^3)}. \quad (3.70)$$

Au point de transition de phase, nous obtenons $S = S_c = 1.09761$ et $\Omega = 0.3$. En substituant ces valeurs dans (3.70), nous trouvons

$$-\left(\frac{\partial\Omega}{\partial T}\right)_S = 23.2085. \quad (3.71)$$

En effet, nous établissons le côté gauche de la première équation d'Ehrenfest (3.57). Afin de calculer le côté droit, nous rappelons les expressions de C_Ω et α à partir de (3.56) et (3.65). Ces dernières sont données par

$$C_\Omega = \frac{f(S, \Omega)}{g(S, \Omega)} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{h(S, \Omega)}{g(S, \Omega)}, \quad (3.72)$$

où les dénominateurs sont identiques. De ce fait, le dominateur associé est donné par

$$g(S, \Omega) = (\pi + S)^3(3S - \pi) - 6S^2\Omega^2(\pi + S)^2 + S^3\Omega^4(4\pi + 3S). \quad (3.73)$$

En fixant la vitesse angulaire à ($\Omega = 0.3$), C_Ω et α divergent lorsque $g(S_c) = 0$. Puisqu'il s'agit d'une équation polynomiale avec une puissance maximale de quatre, nous avons quatre racines. Parmi ceux-ci, deux sont réelles et les deux autres sont imaginaires. Puisque l'entropie est toujours positive, $S_c = 1.09761$ est la seule racine physique. C'est le point de transition de phase où les deux relations d'Ehrenfest sont applicables.

Considérons maintenant deux points $S_1 = S_c + \epsilon$ et $S_2 = S_c - \epsilon$ ($\epsilon \ll 1$), qui sont infinitésimalement proches de S_c , et connectés respectivement à la phase 1 et à la phase 2 des courbes données dans les figures 3.8 et 3.9. Les valeurs de C_Ω et Ω , pour les phases

3.3. Trou noir de Kerr-AdS

correspondantes, sont données respectivement par $C_\Omega|_{S_1} = C_{\Omega_1}$, $C_\Omega|_{S_2} = C_{\Omega_2}$ et $\alpha|_{S_1} = \alpha_1$, $\alpha|_{S_2} = \alpha_2$. Par conséquent, en utilisant les valeurs critiques de $T(S_c)$ (3.54) et $J(S_c)$ (3.61), le côté droit de la première relation d'Ehrenfest est donné par

$$\frac{C_{\Omega_2} - C_{\Omega_1}}{TJ(\alpha_2 - \alpha_1)} = 23.2085. \quad (3.74)$$

Une comparaison entre l'équation ci-dessus et (3.71) montre que la première équation d'Ehrenfest est satisfaite pour le trou noir de Kerr-AdS.

Examinons maintenant la validité de la deuxième équation d'Ehrenfest (3.58). Pour calculer $\left(\frac{\partial\Omega}{\partial T}\right)_J$, l'équation (3.64) s'écrit comme

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial a}\right)_\Omega da + \left(\frac{\partial T}{\partial \Omega}\right)_a d\Omega. \quad (3.75)$$

À partir (3.66), et en fixant J , nous obtenons

$$\left(\frac{\partial J}{\partial a}\right)_\Omega da + \left(\frac{\partial J}{\partial \Omega}\right)_a d\Omega = 0. \quad (3.76)$$

En éliminant les termes impliquant da dans les deux relations ci-dessus, nous établissons la formule suivante

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial \Omega}\right)_J = \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial a}\right)_\Omega \left(\frac{\partial J}{\partial \Omega}\right)_a - \left(\frac{\partial T}{\partial \Omega}\right)_a \left(\frac{\partial J}{\partial a}\right)_\Omega}{\left(\frac{\partial J}{\partial a}\right)_\Omega}. \quad (3.77)$$

En somme, en utilisant (3.64) et (3.66) et en substituant a en termes de Ω et S à partir de l'équation (3.63), nous trouvons

$$-\left(\frac{\partial \Omega}{\partial T}\right)_J = \sqrt{\frac{\pi + S - S\Omega^2}{S(\pi + S)^3}} \left[\frac{4\pi^{3/2}S(\pi + S)^2\Omega((3(\pi + S)^2 - S(2\pi + 3S)\Omega^2))}{(\pi + S)^3(3S - \pi) + 2S(\pi + S)^2(4\pi + 3S)\Omega^2 - S^2(2\pi + 3S)^2\Omega^4} \right]. \quad (3.78)$$

Au point critique ($S = 1.09761$) et à $\Omega = 0.3$, nous obtenons

$$-\left(\frac{\partial \Omega}{\partial T}\right)_J = 23.2083, \quad (3.79)$$

produisant ainsi le côté gauche de la deuxième équation d'Ehrenfest (3.58).

3.3. Trou noir de Kerr-AdS

Pour calculer le côté droit de l'équation (3.58), nous écrivons d'abord (3.69) de la manière suivante

$$k_T = \frac{u(S, \Omega)}{g(S, \Omega)}.$$

À ce niveau, nous répétons les étapes effectuées pour le côté droit de (3.57). En effet, nous obtenons le côté droit de la deuxième relation d'Ehrenfest (3.58), qui est donné par la relation suivante

$$\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{k_{T_2} - k_{T_1}} = 23.2083. \quad (3.80)$$

En conséquence, la deuxième équation d'Ehrenfest est satisfaite. En définitive, la validité des équations d'Ehrenfest suggère clairement que cette transition de phase de trou noir de Kerr-AdS est du second ordre.

3.3.2 Géothermodynamique du trou noir de Kerr-AdS

Pour étudier la géothermodynamique du trou noir de Kerr-AdS, nous exploitons les résultats obtenus dans la section 3.2.2. En utilisant (3.49), nous pouvons calculer dS_W^2 . Par suite, nous obtenons dS_R^2 à partir de (3.46) et (3.48). La forme explicite de dS_R^2 est donnée par

$$dS_R^2 = g_{SS}dS^2 + 2g_{SJ}dSdJ + g_{JJ}dJ^2, \quad (3.81)$$

où les composantes métriques sont données par

$$g_{SS} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{3}{S} - \frac{1}{\pi + S} - \frac{S(2\pi + 3S)}{4J^2\pi^3 + S^2(\pi + S)} + \frac{4S(\pi^2 + 6\pi S + 6S^2)}{-4J^2\pi^4 + S^2(\pi + S)(\pi + 3S)} \right), \quad (3.82)$$

$$g_{SJ} = g_{JS} = -4J\pi^3 \left(-\frac{1}{4J^2\pi^3 + S^2(\pi + S)} + \frac{2\pi}{4J^2\pi^4 - S^2(\pi + S)(\pi + 3S)} \right), \quad (3.83)$$

$$g_{JJ} = -\frac{4\pi^3 S^3 (\pi + S)^2}{(4J^2\pi^3 + S^3 + S^2\pi)(-4J^2\pi^4 + S^2(\pi + S)(\pi + 3S))}. \quad (3.84)$$

Par définition, la courbure de Ruppeiner est construite exactement comme la courbure riemannienne [81, 159]. En effet, la courbure scalaire est donnée par

$$R = -\frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{g_{SJ}}{\sqrt{g}g_{SS}} \frac{\partial g_{SS}}{\partial J} - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial g_{JJ}}{\partial S} \right) + \frac{\partial}{\partial J} \left(\frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\partial g_{SJ}}{\partial J} - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial g_{SS}}{\partial J} - \frac{g_{SJ}}{\sqrt{g}g_{SS}} \frac{\partial g_{SS}}{\partial S} \right) \right]. \quad (3.85)$$

3.3. Trou noir de Kerr-AdS

En exploitant les composantes métriques (3.82), (3.83) et (3.84), nous pouvons calculer la courbure R en fonction de S et J . En utilisant la relation (3.61), nous établissons R en fonction de S et Ω . Cependant, nous illustrons R en fonction de l'entropie S pour différentes valeurs de Ω , comme le montre la figure 3.10.

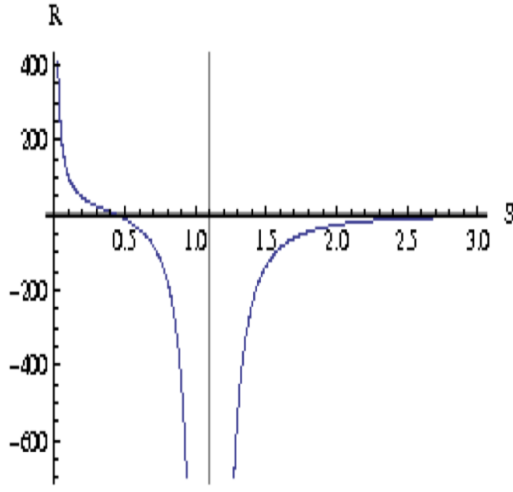


FIGURE 3.10.a

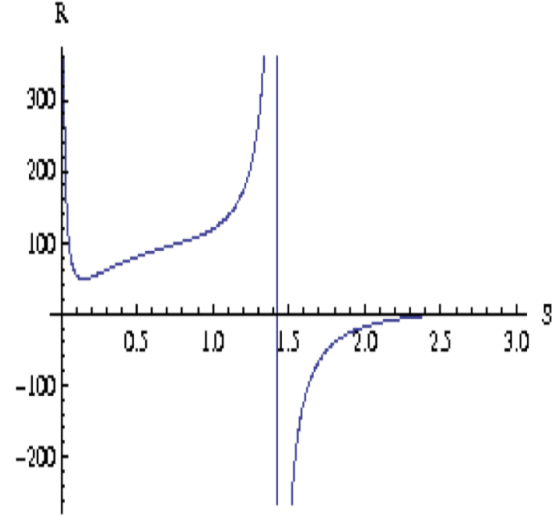


FIGURE 3.10.b

FIGURE 3.10 – Diagramme de courbure scalaire thermodynamique R en fonction de l'entropie: ($\Omega = 0.3$) dans 3.10.a et ($\Omega = 1.5$) dans 3.10.b.

Par ailleurs, la figure 3.10.a montre une divergence à $S_c = 1,0976$. Cela est semblable du cas où C_Ω était discontinue. Puisque nous avons déjà montré que la nature de cette transition de phase est du second ordre, ceci confirme que la divergence de R signifie l'occurrence d'une transition de phase du second ordre. En outre, dans la figure 3.10.b, nous remarquons que R est également divergente à $S = 1,4$ pour $\Omega = 1,5$. Notons que ce choix pour S et Ω est compatible avec la contrainte (3.55). En revanche, nous ne trouvons aucune discontinuité dans C_Ω à ce point, impliquant qu'il n'y a pas de transition de phase ici. Cela montre clairement que dans ce cas, il est incorrect d'associer la divergence de R à une transition de phase.

En remarquant que R est divergente dans les deux courbes de la figure 3.10. Ainsi, la nature de ces divergences est complètement différente. Dans la figure 3.10.a, le secteur divergent de la courbe est symétrique par rapport au point singulier ($S_c = 1.0976$). En revanche, dans la figure 3.10.b il est antisymétrique au point singulier. En somme, à partir de cette analyse, nous concluons que la divergence de R dans la figure 3.10.a signale une transition de phase du second ordre dans le trou noir de Kerr- AdS [81].

3.4 Transitions de phase du second ordre du trou noir de Kerr-Sen

Dans cette section, nous examinons la thermodynamique du trou noir de Kerr-Sen [32, 140]. Cette solution de trou noir à quatre dimensions a été obtenue à partir de la théorie des supercordes hétérotiques vivant en dix dimensions [25]. L'action associée est donnée par

$$S = \int d^4x \sqrt{-\det g} e^{-\Phi} \left(R - g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{8} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} \right), \quad (3.86)$$

où R est le scalaire de Ricci, g désigne le déterminant de la métrique et $F_{\mu\nu}$ indique le tenseur électromagnétique abélien ($F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$). Tandis que A_μ représente le champ de Maxwell. Or, Φ est un champ scalaire appelé dilaton. En effet, le champ tensoriel $H_{\mu\nu\rho}$ est donné par

$$H_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu} - (A_\mu F_{\nu\rho} + A_\nu F_{\rho\mu} + A_\rho F_{\mu\nu}), \quad (3.87)$$

où $B_{\mu\nu}$ est un champ antisymétrique. Cette action a été considérée comme le point initial pour élaborer le trou noir de Kerr-Sen (chargé et en rotation) à quatre dimensions. Afin d'étudier le comportement thermodynamique correspondant, nous exploitons l'élément de longueur en utilisant les coordonnées standard de Boyer-Lindquist [141]. De ce fait, nous pouvons établir la formule suivante

$$ds^2 = -\frac{f(r)}{\sigma} \left(dt - a \sin^2 \theta d\phi \right)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\sigma} \left(a dt - (\sigma + a^2 \sin^2 \theta d\phi) \right)^2 + \sigma \left(\frac{dr^2}{f(r)} + d\theta^2 \right). \quad (3.88)$$

Dans ce cas, la fonction métrique $f(r)$ s'exprime comme suit

$$f(r) = r^2 + 2(b - M)r + a^2. \quad (3.89)$$

Autrement, la quantité σ prend la forme suivante

$$\sigma = r^2 + 2br + a \cos^2 \theta. \quad (3.90)$$

3.4. Transitions de phase du second ordre du trou noir de Kerr-Sen

Ainsi que, le paramètre de torsion b et le moment cinétique J sont donnés respectivement par

$$b = \frac{Q^2}{2M}, \quad J = aM. \quad (3.91)$$

Dans cette solution de trou noir de Kerr-Sen, M , Q et a représentent respectivement la masse, la charge et le moment angulaire spécifique. L'horizon des événements r_h d'un tel trou noir peut être obtenu en imposant la contrainte $f(r) = 0$. En effet, nous trouvons

$$r^\pm = M - b \pm \sqrt{(M - b)^2 - a^2}. \quad (3.92)$$

En utilisant (3.91), l'entropie correspondante se réduit à

$$S = \frac{A}{4} = \pi \left(2M^2 - Q^2 + \sqrt{(2M^2 - Q^2)^2 - 4J^2} \right). \quad (3.93)$$

La température de Hawking, étant liée à la gravité de surface, prend la forme suivante

$$T = \frac{\sqrt{(2M - Q^2)^2 - 4J^2}}{4\pi M \left(2M - Q^2 + \sqrt{(2M - Q^2)^2 - 4J^2} \right)}. \quad (3.94)$$

Des calculs similaires produisent une formule généralisée pour le trou noir de Kerr-Sen. En effet, nous avons

$$M(S, Q, J) = \left(\frac{4\pi^2 J^2 + 2\pi Q^2 S + S^2}{4\pi S} \right)^{1/2}. \quad (3.95)$$

Par ailleurs, à l'aide de la première loi de la mécanique des trous noirs, nous pouvons établir les expressions explicites relatives aux Ω et Φ . En effet, nous avons

$$\Omega = \frac{\partial M}{\partial J} = \frac{\pi J}{MS}, \quad (3.96)$$

$$\phi = \frac{\partial M}{\partial Q} = \frac{Q}{2M}. \quad (3.97)$$

De même, la température est donnée par

$$T(S, Q, J) = \frac{\partial M}{\partial S} = \frac{(S - 2\pi J)(S + 2\pi J)}{4S^{3/2} \sqrt{\pi(4\pi^2 J^2 S + 2\pi Q^2 S^2 + S^3)}}. \quad (3.98)$$

3.4. Transitions de phase du second ordre du trou noir de Kerr-Sen

Dans la figure 3.11, nous avons illustré la température (3.98) en fonction de l'entropie (S) pour différentes valeurs du moment cinétique (J) et de la charge (Q). Un examen approfondi

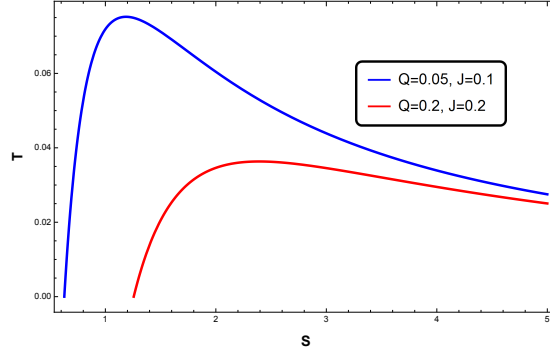


FIGURE 3.11 – Diagramme de la température (T) en fonction de l'entropie (S) du trou noir de Kerr-Sen pour différentes valeurs de J et Q .

de la courbe ($S - T$) montre que la température T est une fonction continue de l'entropie. Par conséquent, la possibilité d'une transition de phase du premier ordre est retirée. En outre, nous pouvons remarquer à partir de la figure 3.11 que la température diminue lorsque le moment cinétique et la charge diminuent. Cependant, nous constatons que la température disparaît à $S = 2\pi J$, ce qui pourrait être lié à une solution de trou noir extrémal. En outre, la température présente un point maximum correspondant à la disparition de sa première dérivée. Ce point maximum est situé à

$$S_{\max} = \pi \sqrt{2 \sqrt[3]{2J^4Q^4 - 8J^6} + 4J^2} + \left[4\pi^2 J^2 \left(\frac{Q^2}{\sqrt{\frac{1}{2} \sqrt[3]{2J^4Q^4 - 8J^6} + J^2}} + 2 \right) - 2\pi^2 \sqrt[3]{2J^4Q^4 - 8J^6} \right]^{1/2}. \quad (3.99)$$

Nous notons que la transition de phase de seconde ordre se produit au point où la capacité thermique présente une singularité. Pour mieux comprendre le comportement thermodynamique du trou noir de Kerr-Sen, nous calculons la capacité thermique semi-classique en utilisant la relation $C_{J,Q} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)$. Cela produit

$$C_{J,Q}(S, Q, J) = \frac{2S(-4J^2\pi^2 + S^2)(4J^2\pi^2 + S(2\pi Q^2 + S))}{48J^4\pi^4 - S^4 + 8J^2\pi^2 S(4\pi Q^2 + 3S)}. \quad (3.100)$$

Pour examiner le comportement thermodynamique associé, nous illustrons la capacité thermique (3.100) en fonction de l'entropie dans la figure 3.12. Il s'ensuit que la capacité ther-

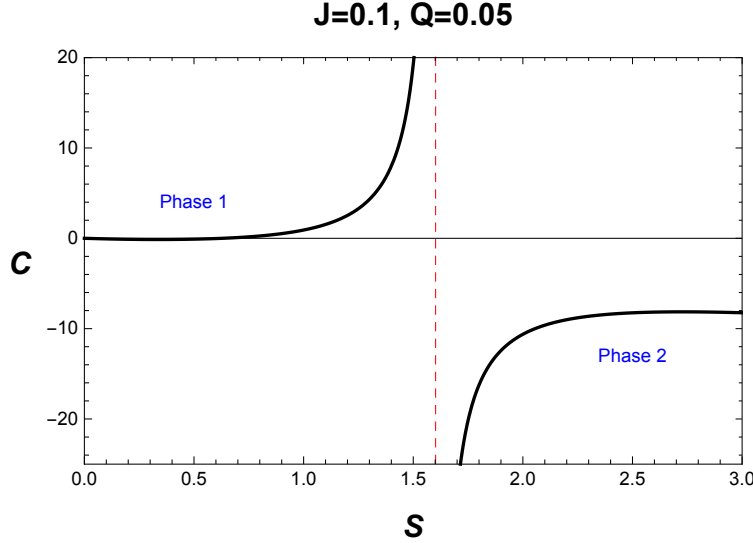


FIGURE 3.12 – Diagramme de la capacité thermique (C) par rapport à l'entropie (S) du trou noir de Kerr-Sen pour $J = 0.1$ et $Q = 0.05$.

mique implique une discontinuité à une valeur critique de l'entropie donnée par $S_c = S_{\max} = 1.60199$. Il est à noter que le point S_c sépare deux branches associées à une transition de petit et grand trou noir. De plus, à partir de la figure 3.12, nous observons que la capacité thermique change d'une infinité positive à une infinité négative à $T = T_c = 0.0874147$. Ainsi, nous remarquons qu'il existe une divergence infinie de la capacité thermique indiquant une transition de phase d'ordre supérieur du trou noir de Kerr-Sen. Cette transition peut être traitée en utilisant deux approches différentes qui seront étudiées plus tard. La première sera basée sur la méthode d'Ehrenfest [49]. Cependant, la seconde sera réalisée de manière géométrique en adoptant une nouvelle forme métrique de la géothermodynamique inspirée de l'énergie libre de Gibbs [159, 160].

3.4.1 Schéma d'Ehrenfest du trou noir de Kerr-Sen

Dans ce qui suit, nous étudions la transition de phase apparaissant dans le trou noir de Kerr-Sen en utilisant d'abord le schéma d'Ehrenfest [29, 47]. En particulier, nous montrerons que ce trou noir présente une transition de phase du second ordre en adoptant une technique utilisée pour l'étude des systèmes thermodynamiques.

Nous rappelons que le schéma d'Ehrenfest a été exploité pour comprendre la nature de la transition de phase. Pour un tel trou noir, douze équations d'Ehrenfest sont impliquées. Elles sont regroupées dans le Tableau 3.1.

3.4. Transitions de phase du second ordre du trou noir de Kerr-Sen

S fixed	Ω fixed	ϕ fixed
$-\left(\frac{\partial J}{\partial T}\right)_{S,Q} = \frac{(C_{J,Q})_2 - (C_{J,Q})_1}{\Omega T(\alpha_2 - \alpha_1)}$	$\left(\frac{\partial J}{\partial T}\right)_{\Omega,Q} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\kappa_2 - \kappa_1}$	$\left(\frac{\partial J}{\partial T}\right)_{\phi,Q} = \frac{\phi(\alpha'_2 - \alpha'_1)}{\Omega(\chi_2 - \chi_1)}$
$-\left(\frac{\partial J}{\partial Q}\right)_{S,T} = \frac{\phi(\alpha'_2 - \alpha'_1)}{\Omega(\alpha_2 - \alpha_1)}$	$-\left(\frac{\partial J}{\partial Q}\right)_{\Omega,T} = \frac{\phi(\chi'_2 - \chi'_1)}{\Omega(\kappa_2 - \kappa_1)}$	$-\left(\frac{\partial J}{\partial Q}\right)_{\phi,T} = \frac{\phi(\kappa'_2 - \kappa'_1)}{\Omega(\chi_2 - \chi_1)}$
$-\left(\frac{\partial Q}{\partial J}\right)_{S,T} = \frac{\Omega(\alpha_2 - \alpha_1)}{\phi(\alpha'_2 - \alpha'_1)}$	$-\left(\frac{\partial Q}{\partial J}\right)_{\Omega,T} = \frac{\Omega(\kappa_2 - \kappa_1)}{\phi(\chi'_2 - \chi'_1)}$	$-\left(\frac{\partial Q}{\partial J}\right)_{\phi,T} = \frac{\Omega(\chi_2 - \chi_1)}{\phi(\kappa'_2 - \kappa'_1)}$
$-\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_{S,J} = \frac{(C_{J,Q})_2 - (C_{J,Q})_1}{\phi T(\alpha'_2 - \alpha'_1)}$	$\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_{\Omega,J} = \frac{\Omega(\alpha_2 - \alpha_1)}{\phi(\chi'_2 - \chi'_1)}$	$\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_{\phi,J} = \frac{\alpha'_2 - \alpha'_1}{\kappa'_2 - \kappa'_1}$

TABLE 3.1 – *Équations d'Ehrenfest du trou noir de Kerr-Sen.*

Les coefficients thermodynamiques pertinents sont donnés par les formules suivantes

$$\begin{aligned}
 \alpha &= -\frac{1}{\Omega} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_{J,Q}, & \kappa &= \frac{1}{\Omega} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial J} \right)_{T,Q}, & \chi &= \frac{1}{\Omega} \left(\frac{\partial \phi}{\partial J} \right)_{T,Q}, \\
 \alpha' &= -\frac{1}{\phi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial T} \right)_{J,Q}, & \chi' &= \frac{1}{\Omega} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial Q} \right)_{T,J}, & \kappa' &= \frac{1}{\Omega} \left(\frac{\partial \phi}{\partial Q} \right)_{T,J}.
 \end{aligned} \tag{3.101}$$

Comme le montre la figure 3.12, la capacité thermique $C_{J,Q}$ est discontinue, ce qui est nécessaire pour révéler que le trou noir étudié subit une transition de phase de second ordre. Cela peut être confirmé en examinant les comportements discontinus de α , κ , χ , α' , κ' et χ' . Pour ce faire, nous utilisons (3.96) et (3.97) afin d'exprimer Ω et Φ en fonction de S , J et Q . En effet, les calculs produisent

$$\Omega(S, Q, J) = \frac{2J\pi^{3/2}}{\sqrt{2\pi S^2 Q^2 + 4J^2 s\pi^2 + S^3}}, \tag{3.102}$$

$$\phi(S, Q, J) = \frac{\sqrt{S\pi}Q}{\sqrt{4J^2\pi^2 + 2\pi Q^2 S + S^2}}. \tag{3.103}$$

En utilisant (3.98), (3.102), et (3.103), les expressions de α et α' peuvent être écrites comme suit

$$\alpha = -\frac{1}{\Omega} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial S} \right)_{J,Q} \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{J,Q} = \frac{4S(4J^2\pi^2 + S(4\pi Q^2 + 3S))\sqrt{S\pi(4J^2\pi^2 + S(2\pi Q^2 + S))}}{48J^4\pi^4 - S^4 + 8J^2\pi^2 S(4\pi Q^2 + 3S)}, \tag{3.104}$$

$$\alpha' = -\frac{1}{\phi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial S} \right)_{J,Q} \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{J,Q} = \frac{4S(-4J^2\pi^2 + S^2)\sqrt{S\pi(4J^2\pi^2 + S(2\pi Q^2 + S))}}{48J^4\pi^4 - S^4 + 8J^2\pi^2 S(4\pi Q^2 + 3S)}. \tag{3.105}$$

3.4. Transitions de phase du second ordre du trou noir de Kerr-Sen

À l'aide des équations suivantes

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\Omega}{\partial J}\right)_{T,Q} &= \frac{\left(\frac{\partial\Omega}{\partial J}\right)_{S,Q}\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_{J,Q} - \left(\frac{\partial\Omega}{\partial S}\right)_{J,Q}\left(\frac{\partial T}{\partial J}\right)_{S,Q}}{\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_{J,Q}}, \\ \left(\frac{\partial\phi}{\partial Q}\right)_{T,J} &= \frac{\left(\frac{\partial\phi}{\partial Q}\right)_{S,J}\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_{J,Q} - \left(\frac{\partial\phi}{\partial S}\right)_{J,Q}\left(\frac{\partial T}{\partial Q}\right)_{S,J}}{\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_{J,Q}}, \end{aligned} \quad (3.106)$$

nous pouvons obtenir

$$\kappa = \frac{(4J^2\pi^2 + S^2)^2}{J(48J^4\pi^4 - S^4 + 8J^2\pi^2S(4\pi Q^2 + 3S))}, \quad (3.107)$$

$$\kappa' = \frac{48J^4\pi^4 + 24J^2\pi^2S^2 - S^4}{Q(48J^4\pi^4 - S^4 + 8J^2\pi^2S(4\pi Q^2 + 3S))}. \quad (3.108)$$

Pour trouver les expressions des deux quantités finales, nous avons besoin des formules suivantes

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\phi}{\partial J}\right)_{T,Q} &= \frac{\left(\frac{\partial\phi}{\partial J}\right)_{S,Q}\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_{J,Q} - \left(\frac{\partial\phi}{\partial S}\right)_{J,Q}\left(\frac{\partial T}{\partial J}\right)_{S,Q}}{\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_{J,Q}}, \\ \left(\frac{\partial\Omega}{\partial Q}\right)_{T,J} &= \frac{\left(\frac{\partial\Omega}{\partial Q}\right)_{S,J}\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_{J,Q} - \left(\frac{\partial\Omega}{\partial S}\right)_{J,Q}\left(\frac{\partial T}{\partial Q}\right)_{S,J}}{\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_{J,Q}}. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Par suite, nous élaborons les quantités suivantes

$$\chi = \frac{-4\pi QS(4J^2\pi^2 + S^2)}{48J^4\pi^4 - S^4 + 8J^2\pi^2S(4\pi Q^2 + 3S)}, \quad (3.110)$$

$$\chi' = \frac{-8J\pi^2(4J^2\pi^2 + S^2)}{48J^4\pi^4 - S^4 + 8J^2\pi^2S(4\pi Q^2 + 3S)}. \quad (3.111)$$

Il est à noter que les coefficients α , χ , α' , κ' et χ' partagent le même dénominateur étant exactement celui de $C_{J,Q}(S, Q, J)$. Par conséquent, ces quantités divergent à la même valeur critique de l'entropie. Ce comportement critique peut être clairement vu à partir de la figure 3.13 en montrant la variation de telles quantités en fonction de l'entropie S . Précisément, il a été observé que toutes les quantités calculées présentent une discontinuité à la valeur critique $S_c = 1.60199$ illustrée par la ligne le rouge pointillée. Les résultats obtenus montrent une véritable transition de phase du second ordre pour le trou noir de Kerr-Sen.

À cet égard, nous pouvons inspecter les équations d'Ehrenfest organisées dans le tableau 3.1 en vérifiant leurs validités. Il est à noter que pour toute transition de phase du second ordre, les équations d'Ehrenfest doivent être satisfaites au point critique. En effet, nous considérons d'abord les équations d'Ehrenfest associées aux classes d'entropie fixe. En utilisant

3.4. Transitions de phase du second ordre du trou noir de Kerr-Sen

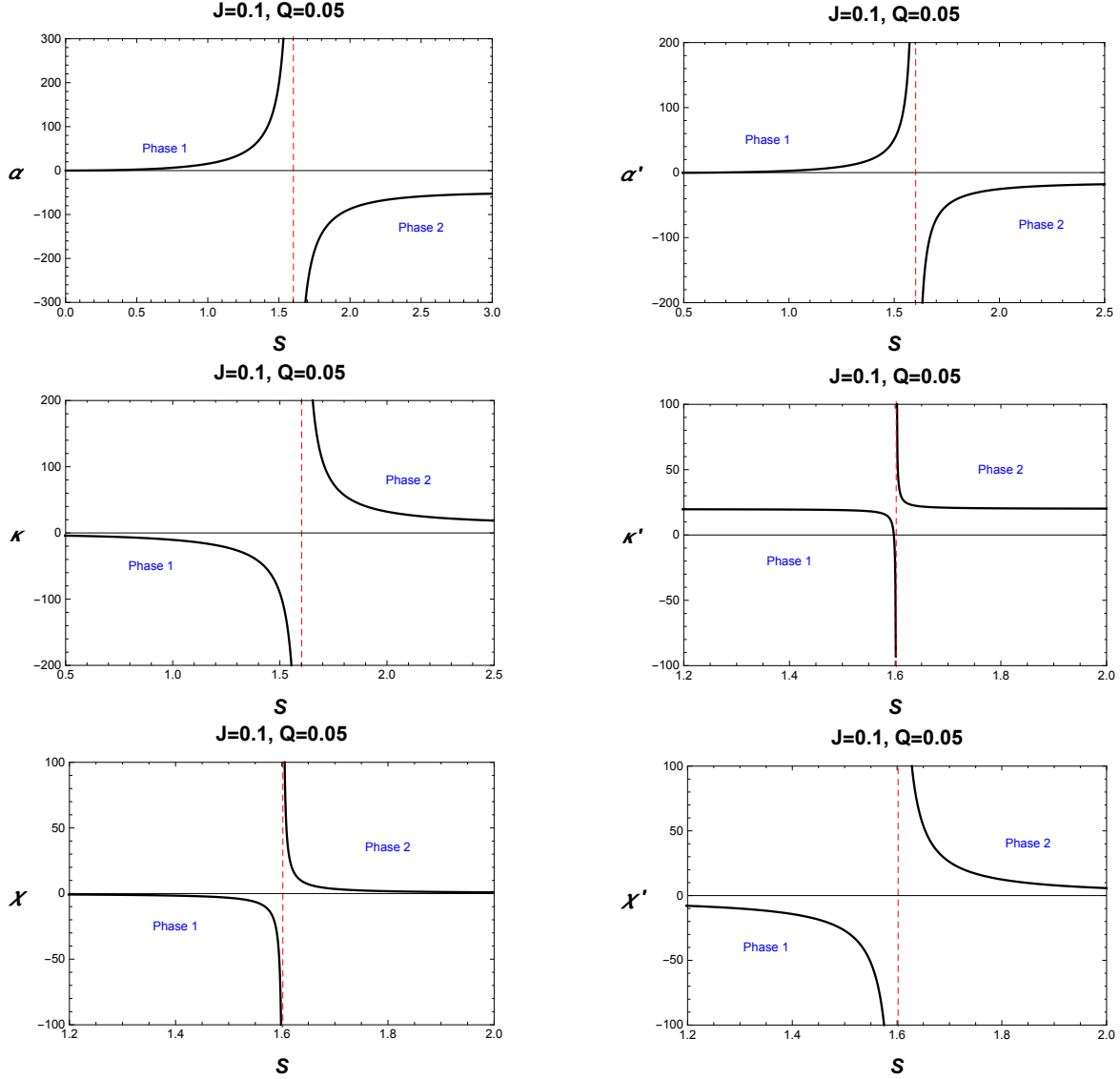


FIGURE 3.13 – Variation de α , κ , χ , α' , κ' par rapport à l'entropie (S) pour des valeurs fixes de Q et J .

(3.98), le côté gauche de la première équation peut être calculé. Cela conduit à

$$-\left(\frac{\partial J}{\partial T}\right)_{S,Q} = \frac{\left(\frac{S}{\pi}(4J^2\pi^2 + S(2\pi Q^2 + S))\right)^{3/2}}{J(4J^2\pi^2 + S(4\pi Q^2 + 3S))}. \quad (3.112)$$

Pour obtenir le côté droit, nous pouvons utiliser les expressions de $C_{J,Q}$ et α données dans (3.100) et (3.104). D'un autre côté, nous considérons deux points $S_1 = S_c + \epsilon$ et $S_2 = S_c - \epsilon$, tel que ($\epsilon \ll 1$), associés respectivement à la phase 1 et la phase 2 apparaissant dans les figures

3.4. Transitions de phase du second ordre du trou noir de Kerr-Sen

3.12 et 3.13. De plus, nous notons que $C_{J,Q} |_{S_1} = C_{(J,Q)_1}$, $C_{J,Q} |_{S_2} = C_{(J,Q)_2}$ et $\alpha |_{S_1} = \alpha_1$, $\alpha |_{S_2} = \alpha_2$. En prenant $D(S, J, Q) = 48J^4\pi^4 - S^4 + 8J^2\pi^2S(4\pi Q^2 + 3S)$, le côté droit de la première relation d'Ehrenfest pour des valeurs fixes de l'entropie s'exprime comme

$$\frac{(C_{J,Q})_2 - (C_{J,Q})_1}{\Omega T(\alpha_2 - \alpha_1)} = \frac{2S(-4J^2\pi^2 + S^2)(4J^2\pi^2 + S(2\pi Q^2 + S))}{\Omega T[4S(4J^2\pi^2 + S(4\pi Q^2 + 3S))\sqrt{S\pi(4J^2\pi^2 + S(2\pi Q^2 + S))}]} \times \left(\frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_1}\right), \quad (3.113)$$

où D_1 et D_2 désignent les dénominateurs associés respectivement aux phases 1 et 2. En utilisant les expressions de T et Ω , le côté droit de la première relation d'Ehrenfest pour une valeur fixe de l'entropie est donné par

$$\frac{(C_{J,Q})_2 - (C_{J,Q})_1}{\Omega T(\alpha_2 - \alpha_1)} = \frac{\left(\frac{S}{\pi}(4J^2\pi^2 + S(2\pi Q^2 + S))\right)^{3/2}}{J(4J^2\pi^2 + S(4\pi Q^2 + 3S))}. \quad (3.114)$$

Bien évidemment, cela montre la validité de la première équation d'Ehrenfest. En utilisant des calculs similaires, nous pouvons examiner la deuxième équation apparaissant dans le tableau 3.1. De ce fait, le côté gauche de la deuxième équation d'Ehrenfest peut s'écrire comme suit

$$-\left(\frac{\partial J}{\partial Q}\right)_{S,T} = \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial Q}\right)_{S,J}}{\left(\frac{\partial T}{\partial J}\right)_{S,Q}}. \quad (3.115)$$

À l'aide des équations (3.98) et (3.115), nous obtenons

$$-\left(\frac{\partial J}{\partial Q}\right)_{S,T} = \frac{QS(S^2 - 4J^2\pi^2)}{8J^3\pi^3 + 2J\pi S(4\pi Q^2 + 3S)}. \quad (3.116)$$

En exploitant la même procédure utilisée dans la vérification du côté droit de la première équation, nous pouvons établir que

$$\frac{\phi(\alpha'_2 - \alpha'_1)}{\Omega(\alpha_2 - \alpha_1)} = \frac{\phi[4S(-4J^2\pi^2 + S^2)\sqrt{S\pi(4J^2\pi^2 + S(2\pi Q^2 + S))}]}{\Omega[4S(4J^2\pi^2 + S(4\pi Q^2 + 3S))\sqrt{S\pi(4J^2\pi^2 + S(2\pi Q^2 + S))}]} \times \frac{\left(\frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_1}\right)}{\left(\frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_1}\right)}. \quad (3.117)$$

3.4. Transitions de phase du second ordre du trou noir de Kerr-Sen

En utilisant (3.103) et (3.102), nous avons

$$\frac{\phi(\alpha'_2 - \alpha'_1)}{\Omega(\alpha_2 - \alpha_1)} = \frac{QS(S^2 - 4J^2\pi^2)}{8J^3\pi^3 + 2J\pi S(4\pi Q^2 + 3S)}. \quad (3.118)$$

Cela révèle clairement la validité de la deuxième équation d'Ehrenfest. Pour la troisième équation, le côté gauche peut être calculé en utilisant (3.98). Par conséquent, nous trouvons que

$$-\left(\frac{\partial Q}{\partial J}\right)_{S,T} = \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial J}\right)_{S,Q}}{\left(\frac{\partial T}{\partial Q}\right)_{S,J}} = \frac{8J^3\pi^3 + 2J\pi S(4\pi Q^2 + 3S)}{QS(S^2 - 4J^2\pi^2)}. \quad (3.119)$$

Des calculs similaires produisent la formule suivante

$$\begin{aligned} \frac{\Omega(\alpha_2 - \alpha_1)}{\phi(\alpha'_2 - \alpha'_1)} &= \frac{\Omega[4S(4J^2\pi^2 + S(4\pi Q^2 + 3S))\sqrt{S\pi(4J^2\pi^2 + S(2\pi Q^2 + S))}]}{\phi[4S(-4J^2\pi^2 + S^2)\sqrt{S\pi(4J^2\pi^2 + S(2\pi Q^2 + S))}]} \times \\ &\quad \left(\frac{\frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_1}}{\frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_1}}\right). \end{aligned} \quad (3.120)$$

D'après les équations (3.103) et (3.102), nous pouvons remplacer Φ et Ω par leur expressions. Partant de ce fait, nous avons

$$\frac{\Omega(\alpha_2 - \alpha_1)}{\phi(\alpha'_2 - \alpha'_1)} = \frac{QS(S^2 - 4J^2\pi^2)}{8J^3\pi^3 + 2J\pi S(4\pi Q^2 + 3S)}. \quad (3.121)$$

De surcroît, cela indique la validité de la troisième équation d'Ehrenfest. Pour la dernière équation donnée dans le tableau (3.1) correspondant à une entropie fixe, nous poursuivons les mêmes calculs en trouvant d'abord le côté gauche. Concrètement, nous concluons que

$$-\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_{S,J} = \frac{2(S(4J^2\pi^2 + S(2\pi Q^2 + S)))^{3/2}}{\sqrt{\pi}QS(S^2 - 4J^2\pi^2)}. \quad (3.122)$$

Pour le côté droit, nous pouvons montrer qu'il implique la même expression que celle du côté gauche. Par conséquent, nous trouvons

$$\frac{(C_{J,Q})_2 - (C_{J,Q})_1}{\phi T(\alpha'_2 - \alpha'_1)} = \frac{2(S(4J^2\pi^2 + S(2\pi Q^2 + S)))^{3/2}}{\sqrt{\pi}QS(S^2 - 4J^2\pi^2)}. \quad (3.123)$$

De même, les équations restantes données dans le tableau (3.1) peuvent être examinées

3.4. Transitions de phase du second ordre du trou noir de Kerr-Sen

en utilisant la même méthode. Pour cette raison, pour un moment cinétique fixe, elles se présentent comme suit

$$\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\kappa_2 - \kappa_1} = \frac{4SJ(4J^2\pi^2 + S(4\pi Q^2 + 3S))\sqrt{S\pi(4J^2\pi^2 + S(2\pi Q^2 + S))}}{(4J^2\pi^2 + S^2)^2} = \left(\frac{\partial J}{\partial T}\right)_{\Omega, Q}, \quad (3.124)$$

$$\frac{\phi(\chi'_2 - \chi'_1)}{\Omega(\kappa_2 - \kappa_1)} = \frac{4J\pi QS}{4J^2\pi^2 + S^2} = -\left(\frac{\partial J}{\partial Q}\right)_{\Omega, T}, \quad (3.125)$$

$$\frac{\Omega(\kappa_2 - \kappa_1)}{\phi(\chi'_2 - \chi'_1)} = \frac{4J^2\pi^2 + S^2}{4J\pi QS} = -\left(\frac{\partial Q}{\partial J}\right)_{\Omega, T}, \quad (3.126)$$

$$\frac{\Omega(\alpha_2 - \alpha_1)}{\phi(\chi'_2 - \chi'_1)} = \frac{Q(4J^2\pi^2 + S^2)}{\sqrt{\frac{S}{\pi}(4J^2\pi^2 + S(2\pi Q^2 + S))}} = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_{\Omega, J}. \quad (3.127)$$

Aussi, pour un potentiel électrique fixe, les équations d'Ehrenfest sont également vérifiées. Par conséquent, nous obtenons les formules suivantes

$$\frac{\phi(\alpha'_2 - \alpha'_1)}{\Omega(\chi_2 - \chi_1)} = \frac{S(4J^2\pi^2 - S^2)\sqrt{S(4J^2\pi^2 + S(2\pi Q^2 + S))}}{2J\pi^{3/2}(4J^2\pi^2 + S^2)} = \left(\frac{\partial J}{\partial T}\right)_{\phi, Q}, \quad (3.128)$$

$$\frac{\phi(\kappa'_2 - \kappa'_1)}{\Omega(\chi_2 - \chi_1)} = -\frac{48J^4\pi^4 + 24J^2\pi^2 S^2 - S^4}{32J^3\pi^4 Q + 8J\pi^2 QS^2} = -\left(\frac{\partial J}{\partial Q}\right)_{\phi, T}, \quad (3.129)$$

$$\frac{\Omega(\chi_2 - \chi_1)}{\phi(\kappa'_2 - \kappa'_1)} = -\frac{32J^3\pi^4 Q + 8J\pi^2 QS^2}{48J^4\pi^4 + 24J^2\pi^2 S^2 - S^4} = -\left(\frac{\partial Q}{\partial J}\right)_{\phi, T}, \quad (3.130)$$

$$\frac{\alpha'_2 - \alpha'_1}{\kappa'_2 - \kappa'_1} = \frac{4QS(-4J^2\pi^2 + S^2)\sqrt{S\pi(4J^2\pi^2 + S(2\pi Q^2 + S))}}{48J^4\pi^4 + 24J^2\pi^2 S^2 - S^4} = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_{\phi, J}. \quad (3.131)$$

En dernier lieu, puisque toutes les équations d'Ehrenfest présentées dans le Tableau (3.1) sont vérifiées, nous pouvons confirmer l'existence d'une transition de phase du second ordre pour le trou noir de Kerr-Sen.

Afin de renforcer ce résultat, nous exploitons par suite la géothermodynamique en proposant une nouvelle forme métrique dérivée de l'énergie libre de Gibbs.

3.4.2 Géothermodynamique du trou noir de Kerr-Sen

Maintenant nous nous dirigeons vers l'étude de la géothermodynamique du trou noir de Kerr-Sen [140, 161]. Pour ce faire, nous examinons les comportements singuliers de certaines grandeurs thermodynamiques dont la capacité thermique. Cette dernière est considérée comme une quantité pertinente dans la détermination de la nature des transitions de

3.4. Transitions de phase du second ordre du trou noir de Kerr-Sen

phase des trous noirs impliquant des propriétés thermodynamiques intéressantes [44]. En effet, la géothermodynamique du trou noir de Kerr-Sen a été abordée en se concentrant sur la courbure géométrique thermodynamique.

En s'inspirant de la matrice hessienne de plusieurs énergies libres générées par la transformation de Legendre de M , nous adoptons une nouvelle forme de la métrique de la géothermodynamique obtenue à partir de l'énergie libre de Gibbs [160]. En introduisant un facteur conforme $\frac{1}{T}$ motivé par l'absence des solutions extrémales. De plus, nous exploitons l'énergie libre de Gibbs G . Alors, nous pouvons écrire l'expression suivante

$$dG = -S dT + \phi dQ + \Omega dJ. \quad (3.132)$$

En insérant le facteur conforme $\frac{1}{T}$, nous obtenons

$$\frac{1}{T}dG = \frac{1}{T}(-SdT + \phi dQ + \Omega dJ). \quad (3.133)$$

Il s'ensuit que la métrique associée à l'énergie libre de Gibbs peut être écrite comme suit

$$ds_G^2 = \frac{1}{T}(-dTdS + d\phi dQ + d\Omega dJ). \quad (3.134)$$

En outre, nous pouvons établir une nouvelle expression de la métrique. Cette dernière s'écrit comme

$$ds_G^2 = g_{SS} dS^2 + g_{QQ} dQ^2 + g_{JJ} dJ^2 + 2g_{QJ} dQ dJ. \quad (3.135)$$

En utilisant cette nouvelle forme, nous vérifions le point de transition de phase du second ordre. En effet, la courbure scalaire peut s'exprimer de la manière suivante

$$\mathfrak{R}_G = \frac{\mathfrak{N}_G}{\mathfrak{D}_G}, \quad (3.136)$$

où le dénominateur $\mathfrak{D}_G$ est donné par

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_G = & S(2J\pi - S)(2J\pi + S)(2\pi Q^2 + S)^2(4J^2\pi^2 + S^2)(4J^2\pi^2 + 2\pi Q^2 S + S^2), \\ & (48J^4\pi^4 - S^4 + 8J^2\pi^2 S(4\pi Q^2 + 3S))^2. \end{aligned} \quad (3.137)$$

Nous constatons que la métrique proposée fournit une forme assez simple de la courbure

3.4. Transitions de phase du second ordre du trou noir de Kerr-Sen

scalaire. Par ailleurs, cette dernière possède le même dénominateur que celui des quantités (3.100) et (3.101). Cela montre que ce dénominateur peut également présenter une discontinuité au point critique $S_c = 1.60199$, confirmant l'existence d'une transition de phase du second ordre. Pour visualiser ce comportement, nous illustrons la courbure scalaire dans la figure 3.14 en fonction de l'entropie.

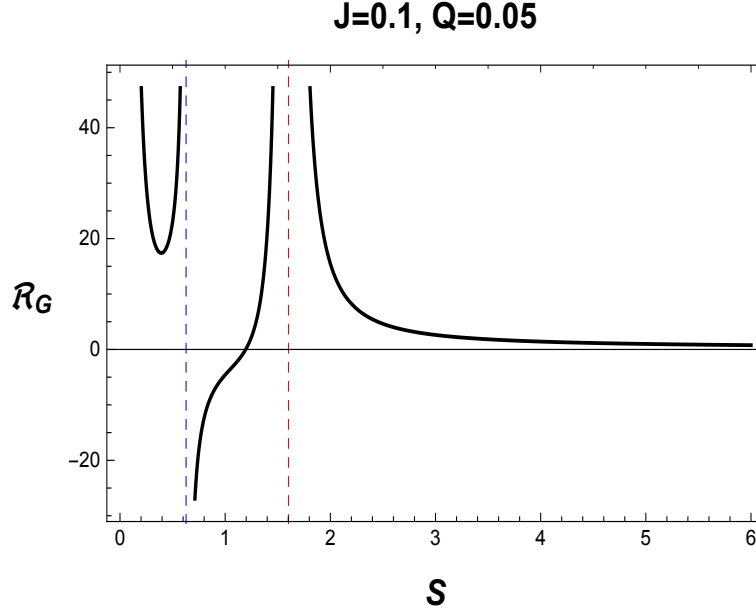


FIGURE 3.14 – Diagramme de la courbure scalaire $\mathfrak{R}_G$ en fonction de l'entropie (S).

En définitive, à partir de la figure 3.14, on en déduit que le scalaire $\mathfrak{R}_G$ est discontinu en S_c (la ligne pointillée rouge) et en $S = 2\pi J$ (la ligne pointillée bleue).

CHAPITRE 4

Effet de l'énergie noire sur les trous noirs rotatifs

L'une des révélations les plus étonnantes du XXe siècle en terme de notre compréhension de l'univers est que la matière baryonique ordinaire, autrement dit, la matière composée de protons et de neutrons, n'est pas la forme dominante dans l'univers [19]. En revanche, une nouvelle forme de matière étrange, appelée matière noire, remplit notre univers [134, 135]. Évidemment, cette dernière n'est pas encore détectée expérimentalement. Néanmoins, de nombreuses preuves indiquent la nécessité de son existence. La rotation des galaxies¹ a particulièrement contribué à la découverte de la matière noire. Sous certaines hypothèses simplifiées, il est désormais possible de déduire la distribution de masse des galaxies à partir de leurs rotations.

D'autre part, les observations de supernovas distantes de type Ia et de la loi de Hubble démontrent l'expansion accélérée de l'univers [109]. Par conséquent, une nouvelle substance, l'énergie noire, a été introduite comme un terme commun pour décrire l'énergie du vide dont la pression est négative [123, 125, 126].

Nous allons consacrer ce chapitre à l'effet de cette contribution énergétique sur la physique des trous noirs. Particulièrement, nous examinons les propriétés thermodynamiques en présence du champ de quintessence considéré comme un candidat de cette énergie.

1. La vitesse circulaire des étoiles et du gaz d'une galaxie, en fonction de leur distance au centre galactique

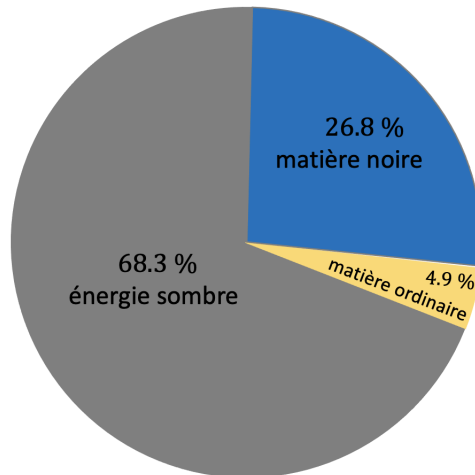


FIGURE 4.1 – Répartition de la densité d'énergie de l'univers après l'exploitation des premières données du satellite Planck.

4.1 Matière noire

4.1.1 Aspect observationnel

La première spéculation sur l'existence de la matière noire est généralement attribuée à l'article original de Zwicky [135] publié il y a plus de quatre-vingts ans et dans lequel il a étudié le Coma Cluster. L'amas se compose d'environ 1000 galaxies se déplaçant le long d'orbites compliquées, qui sont déterminées par la force gravitationnelle. Une analyse attentive de ce mouvement a conduit à la conclusion qu'il devrait y avoir une grande quantité de matière non lumineuse contenue dans l'amas, appelée la matière noire par Zwicky. En outre, l'un des arguments les plus reconnus en faveur de l'existence de la matière noire est basé sur la rotation des galaxies [134]. En d'autres termes, la relation entre les vitesses orbitales v des étoiles ou des gaz visibles et leur distance radiale r du centre de la galaxie a été établie.

4.1.2 Preuve dynamique

L'existence de la matière noire a été montrée par de nombreuses preuves d'observation. Malgré cela, nous l'avons pas encore détectée. Une preuve relevante de la matière noire provient de la mesure des vitesses de rotation des galaxies. En effet, on peut calculer la masse d'une galaxie en mesurant les vitesses des étoiles lorsqu'elles orbitent autour du centre de

4.1. Matière noire

la galaxie. Si les galaxies étaient composées uniquement de la matière visible, la majeure partie de leur masse serait en leurs centres. Dans ce cas, les lois de Kepler et les lois de Newton prédisent que les vitesses orbitales des étoiles devraient diminuer quand on se dirige vers les bords extérieurs de la galaxie [134]. En d'autres termes, l'équilibre entre les forces gravitationnelles et centrifuges est donné par

$$\frac{GmM}{r^2} = \frac{mv^2}{r}, \quad (4.1)$$

où v est la vitesse de rotation, G est la constante gravitationnelle et M est la masse de la galaxie. Or, m représente la masse de l'objet en orbite autour du centre de la galaxie. Tandis que r est la distance entre la galaxie et l'objet. Par conséquent, nous trouvons

$$v \propto \frac{1}{\sqrt{r}}. \quad (4.2)$$

De ce fait, nous concluons que les étoiles lointaines de la galaxie ont une vitesse orbitale inférieure à la vitesse de celles qui sont situées plus près de son centre. Autrement, la courbe de rotation, après un maximum, se met à diminuer. Néanmoins, les astronomes ont observé que les vitesses restaient pratiquement constantes au fur et à mesure que l'on s'éloignait du centre. Par conséquent, la courbe de rotation des galaxies spirales était plate. D'ailleurs, l'astronome américaine Vera Rubin confirma ce résultat en étudiant la rotation des galaxies spirales. Cela ne peut s'expliquer que s'il y a une masse invisible dans les galaxies. Particulièrement, la présence de matière noire est l'une des explications possibles.

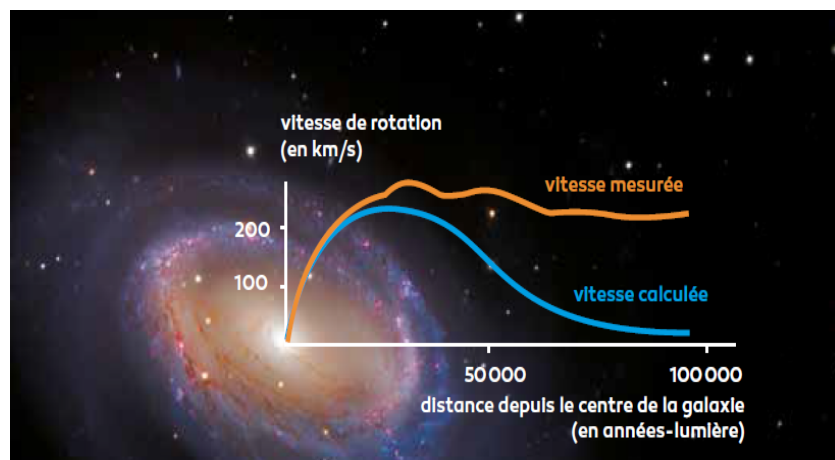


FIGURE 4.2 – Diagramme représentant les courbes de rotation observées et celles qui ont été prévue par les lois de Newton.

4.2 Modélisation de l'énergie noire

4.2.1 Constante cosmologique

Einstein a initialement introduit une constante cosmologique, Λ , en construisant le premier modèle cosmologique de sa théorie gravitationnelle [127]. L'expansion cosmique n'avait pas encore été découverte. Le calcul d'Einstein indiqua qu'un univers contenant de la matière ne pouvait pas être maintenu statique sans l'addition mathématique de Λ [15]. Cependant, en 1929, Hubble découvrit que l'univers est en expansion durant l'observation des galaxies lointaines. De ce fait, Hubble remarqua l'existence d'une loi linéaire entre le redshift spectral (signe d'un mouvement de récession général des galaxies) et la distance d . De surcroît, cette loi est donnée par

$$v = H.d, \tag{4.3}$$

où H représente la constante de Hubble. Les théoriciens ont réutilisé la constante cosmologique dans le but d'expliquer de nouveaux phénomènes astronomiques. À la fin des années 1960, les développements de la physique des particules ont suggéré que l'énergie du vide de toutes les particules et tous les champs devrait générer un terme comme Λ .

En 1980, la théorie de l'inflation a été développée. Dans cette théorie, l'univers primitif est soumis à une brève période d'expansion exponentielle accélérée. La pression négative entraîne l'expansion provenant d'une nouvelle particule appelée inflaton, plutôt que Λ . Ainsi, l'inflaton se comporte de manière similaire à une constante cosmologique. De ce fait, il est à l'origine d'une phase d'expansion accélérée permettant à une petite région homogène de l'univers de prendre des dimensions, considérablement plus grandes que l'univers observable aujourd'hui, tout en restant homogène. Après cette brève période d'inflation, l'univers aurait continué à se dilater, mais au rythme modéré de la théorie du Big Bang, à partir des conditions initiales adéquates pour que son contenu évolue vers les étoiles et les galaxies que nous voyons aujourd'hui [163]. Néanmoins, le décalage vers le rouge cosmologique informe comment un tel objet s'éloigne de nous rapidement en raison de l'expansion de l'univers. Ces observations ont indiqué que notre univers est en expansion et en accélération. Par conséquent, la densité d'énergie manquante devrait avoir une pression négative, comme la constante cosmologique. Cette énergie manquante à l'origine de l'accélération est généralement appelée énergie noire [131, 133, 138].

4.2.2 Modèles de l'énergie noire

Le plus grand mystère de l'accélération cosmique suggère l'existence d'une substance qui est gravitationnellement répulsive [139]. Afin d'étudier cette propriété étrange de l'énergie noire, il est utile d'introduire la relation suivante

$$\omega = p/\rho, \quad (4.4)$$

où p est la pression moyenne, et ρ est la densité de l'énergie noire dans l'univers. L'équation (4.4) est considérée comme l'équation d'état pour un gaz. En relativité générale, le taux de changement dans l'expansion cosmique est proportionnel à $-(\rho_{\text{tot}} + 3p_{\text{tot}})$, où ρ_{tot} est la densité de toute la matière et de l'énergie dans l'univers, tandis que p_{tot} est la pression correspondante. Dans ce qui suit, nous allons expliciter les différentes formes décrivant l'énergie noire.

- **Constante cosmologique** ($\omega = -1$)

Premièrement, la constante cosmologique a été introduite par Albert Einstein, puis Yakov Zel'dovich, a suggéré que l'énergie du vide quantique produit une densité d'énergie constante. Cela est raisonnable parce que Λ est une propriété du vide [127]. La densité d'énergie associée (ρ_Λ) peut être déduite d'observations indiquant que la densité d'énergie totale correspond à la densité d'énergie critique. Autrement dit, l'univers est plat. Dans ce cas, nous avons

$$\rho_\Lambda = -p_\Lambda, \quad (4.5)$$

ce qui conduit à la relation suivante

$$\omega = p_\Lambda/\rho_\Lambda = -1. \quad (4.6)$$

- **Quintessence** ($\omega > -1$)

Les modèles de quintessence peuvent être décrits par des champs scalaires canoniques. Ils représentent une forme d'énergie avec une pression négative variant avec l'espace-temps. La quintessence est dynamique, contrairement à la constante cosmologique, et sa densité d'énergie moyenne ainsi que sa pression, décroissent lentement avec le temps [128, 129]. Ainsi, ce comportement pourrait être exploité afin d'expliquer l'accélération cosmique. En d'autres

4.3. Champ de quintessence

termes, la quintessence s'inspire des modèles d'inflation les plus élémentaires, où un champ scalaire lent entraîne l'expansion rapide et accélérée de l'univers primitif [132, 136].

- **Autre énergie de vide** ($\omega < -1$)

Dans ce modèle, les effets quantiques d'un champ de type quintessence conduisent à des modifications de la relativité générale. Alors que d'autres modèles suggèrent que la densité de l'énergie noire augmente avec le temps, ce qui peut amener l'univers à se terminer par une grande déchirure catastrophique. Il existe d'autres modèles dont un champ exotique qui provoque une accélération de type constante cosmologique mais varie dans l'espace [128].

Équation d'états (ω)	
Radiation	1/3
Matière (poussière)	0
Courbure	-1/3
Constante cosmologique	-1
Matière (générale)	$0 < \omega < 1/3$
Quintessence	$-1 < \omega_q < -1/3$

TABLE 4.1 – Équation d'état décrivant la relation entre la pression et la densité selon $\omega = p/\rho$.

4.3 Champ de quintessence

4.3.1 Densité de quintessence

Dans le cas d'une symétrie sphérique et statique, nous considérons la métrique sous la forme suivante

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4.7)$$

où $\nu = \nu(r)$ et $\lambda = \lambda(r)$ [5]. Prenant $4\pi G = 1$, les expressions du tenseur énergie-impulsion se présentent sous les équations suivantes

$$2T_t^t = -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (4.8)$$

$$2T_r^r = -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (4.9)$$

$$2T_\theta^\theta = 2T_\phi^\phi = -\frac{1}{2}e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2} \right), \quad (4.10)$$

où nous avons $\nu' = d(\nu)/dr$ et $\lambda' = d(\lambda)/dr$. L'expression générale du tenseur énergie-impulsion de la quintessence est donnée par

$$\begin{aligned} T_t^t &= \rho_q(r), \\ T_i^j &= \rho_q(r) \alpha \left[-(1 + 3B) \frac{r_i r^j}{r_n r^n} + B \delta_i^j \right], \end{aligned} \quad (4.11)$$

de sorte que la partie spatiale soit proportionnelle à la composante temporelle [85]. La moyenne isotrope résultante prend la forme suivante

$$\langle T_i^j \rangle = -\rho_q(r) \frac{\alpha}{3} \delta_i^j = -p_q(r) \delta_i^j, \quad (4.12)$$

où nous avons $\langle r_i r^j \rangle = \frac{1}{3} \delta_i^j r_n r^n$, et α représente l'intensité de la quintessence. Pour ces contributions quintessentiels, nous en déduisons l'équation suivante

$$\omega_q = \frac{1}{3} \alpha. \quad (4.13)$$

En effet, l'équation d'états est définie par

$$-1 < \omega_q < 0,$$

générant une contrainte sur α comme suit

$$-3 < \alpha < 0.$$

La relation d'additivité et de linéarité implique que

$$T_t^t = T_r^r, \quad (4.14)$$

4.3. Champ de quintessence

ce qui produit la relation suivante

$$\lambda + \nu = 0.$$

En fixant la constante ($\lambda + \nu = \text{constante} = 0$), nous pouvons choisir λ sous la forme suivante

$$\lambda = -\ln(1 + f). \quad (4.15)$$

Par suite, nous obtenons les équations différentielles linéaires en f comme suit

$$T_t^t = T_r^r = -\frac{1}{2r^2}(f + rf'), \quad (4.16)$$

$$T_\theta^\theta = T_\phi^\phi = -\frac{1}{4r}(2f' + rf''). \quad (4.17)$$

La condition d'additivité et de la linéarité fixe le paramètre libre B du tenseur énergie-impulsion [164]. En effet, nous trouvons

$$B = -\frac{-3\omega_q + 1}{6\omega_q}, \quad (4.18)$$

Par conséquent, nous établissons

$$T_t^t = T_r^r = \rho_q, \quad (4.19)$$

$$T_\theta^\theta = T_\phi^\phi = -\frac{1}{2}\rho_q(3\omega_q + 1). \quad (4.20)$$

La combinaison des équations (4.16) et (4.17) avec les équations (4.19) et (4.20) implique que

$$(3\omega_q + 1)f + 3(1 + \omega_q)rf' + r^2f'' = 0. \quad (4.21)$$

En effet, nous obtenons les deux solutions suivantes

$$f_q = -\frac{c}{r^{3\omega_q+1}}, \quad (4.22)$$

$$f_{BH} = -\frac{r_g}{r}, \quad (4.23)$$

où c et r_g sont les facteurs de normalisation. La fonction f_{BH} représente la solution de Schwarzschild, qui coïncide avec le choix particulier de la matière de poussière associée à la

4.3. Champ de quintessence

valeur numérique $\omega_q = 0$. En définitive, la densité d'énergie s'exprime comme

$$\rho_q = -\frac{c}{2} \frac{3\omega_q}{r^{3(1+\omega_q)}}. \quad (4.24)$$

4.3.2 Trou noir quintessenciel

Dans ce qui suit, nous examinons les équations d'Einstein décrivant un trou noir entouré par une quintessence sphérique symétrique statique. En effet, nous résolvons telles équations en considérant un choix spécifique du paramètre libre, caractérisant le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ de la quintessence [85, 164]. En utilisant la symétrie sphérique d'un état statique, nous pouvons expliciter l'expression générale des composantes temporelles et spatiales. En effet, nous avons

$$T_t^t = A(r), \quad T_t^j = 0, \quad T_i^j = -C(r)r_i r^j + B(r)\delta_i^j, \quad (4.25)$$

où la métrique correspondante est définie comme

$$ds^2 = g_{tt}(r)dt^2 - g_{rr}(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (4.26)$$

Pour un état isotrope, nous pouvons obtenir

$$\langle T_i^j \rangle = D(r)\delta_i^j, \quad D(r) = -\frac{1}{3}C(r)r^2 + B(r). \quad (4.27)$$

En présence du champ de quintessence, nous trouvons

$$D(r) = -\omega_q A(r). \quad (4.28)$$

En fixant le paramètre d'état ω_q , nous pouvons établir l'expression explicite de la fonction $D(r)$ représentant la pression en terme de la densité $A(r)$. La condition qui assure la présence d'une quintessence libre est donnée par

$$C(r) \equiv 0. \quad (4.29)$$

Dans la suite de ce chapitre, nous considérons que $C(r)$ (non nulle) est proportionnelle à $B(r)$, de sorte que les solutions exactes des trous noirs soient possibles. Le coefficient

constant $C(r)/B(r)$ est fixé en imposant la condition d'additivité et de linéarité. En effet, nous pouvons retrouver des cas particuliers associés aux valeurs connues.

4.4 Thermodynamique des trous noirs entourés de quintessence

Dans cette section, nous exploitons la thermodynamique des trous noirs afin d'examiner les trous noirs rotatifs en présence des champs de quintessence [128, 129, 132]. En effet, les trous noirs entourés de l'énergie noire jouent un rôle crucial dans la cosmologie. Il est également intéressant de voir comment l'énergie noire affecte les quantités thermodynamiques des trous noirs.

Particulièrement, nous étudions l'impacte de l'énergie noire sur le spectre des trous noirs rotatifs, y compris le trou noir de Kerr. Ainsi, nous élaborons analytiquement le spectre de rayonnement correspondant, la température de Hawking et l'information noire [138]. Ensuite, nous étudions le comportement critique du trou noir de Kerr-AdS à quatre dimensions à partir des contributions de l'énergie noire. En analysant l'espace de modules, décrit par le paramètre d'état ω et l'intensité du champ de quintessence α , nous examinons certains modèles en fixant les valeurs de ω .

4.4.1 Effets de l'énergie noire sur la radiation de Hawking

4.4.1.1 Spectre de radiation

D'après [164], la métrique du trou noir de Kerr, en présence de champ de quintessence, est donnée par

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M r + c r^{1-3\omega_q}}{\Sigma} \right) dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - 2a \sin^2 \theta \left(\frac{2M r + c r^{1-3\omega_q}}{\Sigma} \right) d\phi dt + \Sigma d\theta^2 \\ + \sin^2 \theta \left\{ r^2 + a^2 + a^2 \sin^2 \theta \left(\frac{2M r + c r^{1-3\omega_q}}{\Sigma} \right) \right\} d\phi^2, \quad (4.30)$$

où nous avons $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ et $a = \frac{J}{M}$. Tandis que J et M indiquent respectivement le moment cinétique et la masse du trou noir. Nous rappelons que c est le paramètre quintessenciel qui indique l'intensité de la contribution énergétique liée à la métrique du trou noir

4.4. Thermodynamique des trous noirs entourés de quintessence

via la relation suivante

$$c = 2 \left(\frac{6}{\Lambda} \right)^{\frac{3\omega_q+1}{2}}. \quad (4.31)$$

Dans ce type de trou noir, nous avons

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 - cr^{1-3\omega_q}. \quad (4.32)$$

Pour obtenir l'horizon extérieur, nous devons résoudre l'équation $\Delta = 0$. En absence de l'énergie noire, nous avons $R_H^0 = M + \sqrt{M^2 - a^2}$. En présence de telle énergie, la solution de $\Delta = 0$ peut être modifiée comme suit

$$R_H^K = R_H^0 + \delta. \quad (4.33)$$

En considérant la limite $\delta/R_H^0 \ll 1$, nous trouvons

$$\delta_K = \frac{(M + \sqrt{M^2 - a^2})^{2\xi+2}}{\sqrt{M^2 - a^2}} \left(\frac{\Lambda}{6} \right)^\xi. \quad (4.34)$$

Par conséquent, le rayon d'horizon correspondant prend la forme suivante

$$R_H^K = M + \sqrt{M^2 - a^2} + \frac{(M + \sqrt{M^2 - a^2})^{2\xi+2}}{\sqrt{M^2 - a^2}} F_K. \quad (4.35)$$

Dans cette solution rotative, la fonction F_K s'exprime comme

$$F_K = F_K(\xi, \Lambda) = \left(\frac{\Lambda}{6} \right)^\xi, \quad (4.36)$$

en ne gardant que le premier ordre de F_K . En considérant la contrainte $0 < |a| < M$, $\Delta = 0$ implique deux solutions représentant les horizons intérieur et extérieur.

En utilisant le rayon d'horizon modifié, nous pouvons obtenir la probabilité de distribution d'une particule de masse ω et de spin j [129]. En substituant le rayon de l'horizon (4.35) dans le spectre de radiation (2.51), nous pouvons établir le spectre de radiation modifié du trou noir de Kerr. Notons que le paramètre de rotation a doit être fixé pour garantir la conservation du moment cinétique et de l'énergie. Lorsqu'une particule de spin $j = \omega.a$ s'échappe du trou noir, le moment cinétique devient $J = (M - \omega).a$.

De surcroît, l'effet de l'énergie noire sur la radiation du trou noir peut être discuté à

4.4. Thermodynamique des trous noirs entourés de quintessence

l'aide de la méthode utilisée en mécanique statistique présentée dans le chapitre 2. Pour la détermination du spectre de radiation, nous exploitons certaines simplifications et approximations [164]. En substituant (4.35) dans (2.51), nous trouvons

$$R_K^2(M, J) - R_K^2(M - \omega, J - j) = \left(M + \sqrt{M^2 - a^2}\right)^2 - \left(M - \omega + \sqrt{(M - \omega)^2 - a^2}\right)^2 + 2F_K \left\{ \frac{\left(M + \sqrt{M^2 - a^2}\right)^{2\xi+3}}{\sqrt{M^2 - a^2}} - \frac{\left(M - \omega + \sqrt{(M - \omega)^2 - a^2}\right)^{2\xi+3}}{\sqrt{(M - \omega)^2 - a^2}} \right\}, \quad (4.37)$$

En examinant cette équation, certaines difficultés apparaissant associées à la racine carrée et aux dénominateurs figurant dans le deuxième terme. Pour évincer ce problème, nous supposons que la masse est plus grande que le spin. Dans le régime de vitesse de rotation lente, cette approximation est physique. En effet, nous obtenons

$$R_K^2(M, J) - R_K^2(M - \omega, J - j) = \left(M + \sqrt{M^2 - a^2}\right)^2 - \left(M - \omega + \sqrt{(M - \omega)^2 - a^2}\right)^2 + 4F_K \left\{ \left(M + \sqrt{M^2 - a^2}\right)^{2\xi+2} - \left(M - \omega + \sqrt{(M - \omega)^2 - a^2}\right)^{2\xi+2} \right\}. \quad (4.38)$$

En utilisant $\sqrt{1-x} \simeq 1 - \frac{x}{2}$, la probabilité de distribution finale se réduit comme suit

$$p(\omega, j, M, J) = \exp \left[-\pi \left\{ 2M\sqrt{M^2 - a^2} - 2(M - \omega)\sqrt{(M - \omega)^2 - a^2} + 4\omega \left[M + 4(\xi + 1)F_K \left(2M - \frac{a^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi+1} \right] - 2\omega^2 \left[1 + 8(\xi + 1)(2\xi + 1)F_K \left(2M - \frac{a^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi} \right] \right\} \right]. \quad (4.39)$$

où nous avons conservé le second ordre de ω , et les ordres supérieurs sont omis. Nous remarquons clairement la dépendance du spectre de radiation par rapport à ξ et Λ . Il est à noter que nous pouvons obtenir le spectre de radiation de Schwarzschild en prenant $a = 0$.

4.4.1.2 Processus d'évaporation du trou noir de Kerr

Nous passons maintenant vers la discussion de la température de Hawking modifiée du trou noir de Kerr en présence de l'énergie noire [132]. Pour le cas ordinaire du trou noir de Kerr, nous avons explicité précédemment la température de Hawking associée. Cette dernière

4.4. Thermodynamique des trous noirs entourés de quintessence

est donnée par

$$T_H^{K_0} = \frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{4\pi (M^2 + M\sqrt{M^2 - a^2})}. \quad (4.40)$$

Dans le cas d'un trou noir de grande masse ($M \gg 1$), la partie non thermique du spectre de radiation peut être ignorée. Ainsi, la probabilité de distribution thermique approximative prend la forme suivante

$$p(\omega, j, M, J) = \exp \left[-\pi \left\{ 2M\sqrt{M^2 - a^2} - 2(M - \omega) \sqrt{(M - \omega)^2 - a^2} + 4\omega \left[M + 4(\xi + 1) F_K \left(2M - \frac{a^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi+1} \right] \right\} \right]. \quad (4.41)$$

Nous remarquons que lorsque l'effet de l'énergie noire disparaît (F_K tends vers zéro), cette distribution se réduit au spectre de rayonnement de Hawking suivant

$$p(\omega, j, M, J) = \exp \left[-\pi \left\{ 4M\omega + 2M\sqrt{M^2 - a^2} - 2(M - \omega) \sqrt{(M - \omega)^2 - a^2} \right\} \right]. \quad (4.42)$$

En utilisant (4.42) et en se basant sur une approximation appropriée, nous obtenons

$$p(\omega, j, M, J) = \exp(-\beta_H^{K_0} \omega) = \exp \left(-4\pi \frac{(M^2 + M\sqrt{M^2 - a^2})}{\sqrt{M^2 - a^2}} \omega \right), \quad (4.43)$$

où $\beta_H^{K_0}$ s'exprime comme

$$\beta_H^{K_0} = 4\pi \frac{(M^2 + M\sqrt{M^2 - a^2})}{\sqrt{M^2 - a^2}}. \quad (4.44)$$

Cependant, en présence de DE, nous trouvons

$$p(\omega, j, M, J) = \exp \left\{ \frac{-4\pi (M^2 + M\sqrt{M^2 - a^2})}{\sqrt{M^2 - a^2}} \left(1 + 4(\xi + 1) F_K \left(2M - \frac{a^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi} \left(1 - \frac{a^2}{2M^2} \right) \right) \omega \right\}. \quad (4.45)$$

On en déduit que

$$\beta_H^K = \frac{4\pi (M^2 + M\sqrt{M^2 - a^2})}{\sqrt{M^2 - a^2}} \left(1 + 4(\xi + 1) F_K \left(2M - \frac{a^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi} \left(1 - \frac{a^2}{2M^2} \right) \right). \quad (4.46)$$

4.4. Thermodynamique des trous noirs entourés de quintessence

Par conséquent, la température de Hawking associée s'exprime comme

$$T_H^K = \frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{4\pi (M^2 + M\sqrt{M^2 - a^2})} \left(1 - 4(\xi + 1) F_K \left(2M - \frac{a^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi} \left(1 - \frac{a^2}{2M^2} \right) \right). \quad (4.47)$$

Pour vérifier et obtenir la forme explicite de la température, nous utilisons (4.40). En effet, l'équation (4.47) peut être réécrite comme suit

$$T_H^K = T_H^{K_0} \left(1 - 4(\xi + 1) F_K \left(2M - \frac{a^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi} \left(1 - \frac{a^2}{2M^2} \right) \right). \quad (4.48)$$

En introduisant le facteur de modification suivant

$$\lambda_K = 4(\xi + 1) F_K \left(2M - \frac{a^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi} \left(1 - \frac{a^2}{2M^2} \right), \quad (4.49)$$

la température de Hawking peut être encore simplifiée comme

$$T_H^K = T_H^0 (1 - \lambda_K). \quad (4.50)$$

En somme, il convient de noter que (4.46) confirme que l'énergie noire rend la radiation de Hawking plus froide. Cela implique que le trou noir devient plus stable.

4.4.1.3 Information noire

Pour évaluer l'information associée à la radiation de Hawking [105], nous exploitons l'entropie de Von-Neumann, qui s'exprime comme suit

$$S_R = -Tr(\rho_R \ln \rho_R). \quad (4.51)$$

Dans ce cas, l'entropie conditionnelle de B' est donnée par

$$S(B'|R) = \sum_r e^{-\Delta S_{BB'}(E_r, E)} S_{B'}(E - E_r), \quad (4.52)$$

montrant une corrélation entre R et B' . En considérant la limite d'énergie faible ($E_r \ll E$), B' est approchée en gardant le premier ordre de E_r . Notons que $E(B'|R) \simeq S_{B'}(E_{B'})$. Ici, $E_{B'} = E - E_R$ et $E_R = \sum_r \exp(-\Delta S_{BB'}(E_r, E)) E_r$, représentent les énergies internes de B'

4.4. Thermodynamique des trous noirs entourés de quintessence

et R , respectivement. En d'autres termes, la corrélation entre B et R pourrait être ignorée lorsque l'énergie de R est beaucoup plus petite que celle de B . Cela implique l'existence de la radiation thermique de Hawking [3, 52]. Il s'avère que le spectre thermique de la radiation du trou noir est dû à l'ignorance des informations de corrélation entre le trou noir et son rayonnement. Concrètement, cela montre la principale cause de la perte d'information du trou noir [105, 164].

Nous rappelons que la radiation non thermique s'est avérée être à l'origine de la corrélation d'information entre les émissions radiées depuis l'horizon du trou noir.

En effet, l'information mutuelle pour deux émissions ω_a et ω_b peut s'écrire comme

$$I(a, b) = \sum_{\omega_a \omega_b} p_{a,b} \ln \left(\frac{p_{a,b}}{(p_a p_b)} \right). \quad (4.53)$$

Dans le cas du trou noir de Kerr, il résulte de l'équation (2.51) que les probabilités de distribution pour deux particules s'expriment comme

$$\begin{aligned} p_a &= p(\omega_a, M) = \exp \left(-\beta_H^K \omega_a + \Gamma^K \omega_a^2 \right), \\ p_b &= p(\omega_b, M) = \exp \left(-\beta_H^K \omega_b + \Gamma^K \omega_b^2 \right), \end{aligned} \quad (4.54)$$

où la quantité Γ^K est donnée par

$$\Gamma_K = 2\pi \left[1 + 4(2\xi + 1)(\xi + 1) F_K \left(2M - \frac{a^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi} \right]. \quad (4.55)$$

Ensuite, la probabilité conjointe prend la forme suivante

$$p_{a,b} = p(\omega_a, M) \cdot p(\omega_b, M') = \exp \left(-\beta_H^K (\omega_a + \omega_b) + \Gamma_H^K (\omega_a + \omega_b)^2 \right), \quad (4.56)$$

où nous avons $M' = M - \omega$. En utilisant (4.54) et (4.56), l'information noire prend la forme suivante

$$I^K(a, b) = 2\Gamma^K E_a E_b, \quad (4.57)$$

où les énergies internes des particules a et b sont données par

$$E_a = \sum_{\omega_a=0}^{\omega_a=M} p(\omega_a, M) \cdot \omega_a, \quad E_b = \sum_{\omega_b=0}^{\omega_b=M'} p(\omega_b, M') \cdot \omega_b. \quad (4.58)$$

Par conséquent, l'information noire du trou noir de Kerr prend la forme suivante

$$I_K(a, b) = 8\pi \left[1 + 4(2\xi + 1)(\xi + 1) F_K \left(2M - \frac{a^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi} \right] E_a E_b. \quad (4.59)$$

Ce résultat correspond parfaitement avec le fait que les informations du trou noir ne sont pas perdues, lorsque nous considérons les corrélations d'informations entre les particules radiées.

4.4.2 Transitions de phase du trou noir de Kerr-AdS à partir des modélisations de quintessence

Dans cette section, nous étudions l'impact de l'énergie noire sur la physique du trou noir de Kerr-AdS en quatre dimensions. Cette étude s'élabora en termes de nouveaux paramètres liés aux contributions de l'énergie noire [162]. En effet, une inspection minutieuse montre que l'espace des paramètres du trou noir $\mathcal{M}$ peut être factorisé en deux secteurs. En effet, nous écrivons

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{OBH} \times \mathcal{M}_{ec}. \quad (4.60)$$

Le premier secteur est associé aux paramètres des trous noirs ordinaires. Il est défini comme

$$\mathcal{M}_{OBH} \equiv \{J, M, Q\}, \quad (4.61)$$

où Q est la charge. Pour un trou noir neutre ($Q = 0$), cela se réduit au trou noir de Kerr paramétré uniquement par J et M . Ainsi, nous trouvons

$$\mathcal{M}_{OBH} \equiv \{J, M\}. \quad (4.62)$$

Le deuxième secteur concerne les contributions supplémentaires paramétrant le facteur $\mathcal{M}_{ec}$ associé aux contributions de l'horizon extérieur incluant l'énergie noire, la matière noire et d'autres non triviaux.

Dans ce qui suit, nous considérons uniquement les contributions de l'énergie noire via un champ scalaire de quintessence. De ce fait, le deuxième secteur $\mathcal{M}_{ec}$ est contrôlé par deux paramètres α et ω correspondant respectivement à l'intensité de la quintessence et au paramètre d'état de l'énergie noire.

4.4. Thermodynamique des trous noirs entourés de quintessence

Cependant, nous examinons certains modèles (ω) décrivant un trou noir de Kerr-AdS. D'après [162], l'expression de la métrique associée s'écrit sous la forme suivante

$$ds^2 = \frac{\Sigma^2}{\Delta_r} dr^2 + \frac{\Sigma^2}{\Delta_\theta} d\theta^2 + \frac{\Delta_\theta \sin^2 \theta}{\Sigma^2} \left(a \frac{dt}{\Xi} - (r^2 - a^2) \frac{d\phi}{\Xi} \right)^2 - \frac{\Delta_r}{\Sigma^2} \left(\frac{dt}{\Xi} - a \sin^2 \theta \frac{d\phi}{\Xi} \right)^2. \quad (4.63)$$

Dans ce cas, nous avons

$$\Delta_r = r^2 - 2Mr + a^2 + \frac{r^2}{\ell^2} (r^2 + a^2) - \alpha r^{1-3\omega}. \quad (4.64)$$

Les grandeurs thermodynamiques correspondantes que nous obtiendrons comportent un indice indiquant les valeurs de ω . En effet, ces grandeurs, nous les référons comme suit

$$X^{(\omega)}(S, \Omega, \alpha), \quad (4.65)$$

où S est l'entropie du trou noir de Kerr-AdS à quatre dimensions.

4.4.3 Modèle avec paramètre d'état de l'énergie noire $\omega = -\frac{1}{3}$

Pour étudier le comportement du trou noir de Kerr-AdS à quatre dimensions en présence de l'énergie noire pour la valeur $\omega = -\frac{1}{3}$, nous élaborons d'abord la formule de Smarr associée. Pour le modèle $(-\frac{1}{3})$, les calculs produisent

$$M^{(-1/3)}(S, J, \alpha) = \left(\frac{\pi}{4S} \left\{ \frac{4SJ^2}{\pi \ell^2} + 4J^2 + \left[\frac{S^2}{\pi^2 \ell^2} + \frac{S}{\pi} - \frac{\alpha S}{\pi} \right]^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.66)$$

Ainsi, la température thermique du trou noir de Kerr-AdS, en présence de l'énergie noire, s'exprime comme

$$T^{(-1/3)}(S, J, \alpha) = \frac{\partial M}{\partial S} = \frac{1}{8\pi M} \left((\alpha - 1)^2 - \frac{4\alpha S}{\pi} - \frac{4\pi^2 J^2}{S^2} + \frac{4S}{\pi} + \frac{3S^2}{\pi^2} \right). \quad (4.67)$$

En particulier, le carré de la masse est donné par

$$\left(M^{(-1/3)}(S, J, \alpha) \right)^2 = \frac{S}{4\pi} + \frac{\pi J^2}{S} + J^2 + \frac{S}{2\pi} \left(\frac{S}{\pi} + \frac{S^2}{2\pi^2} + \frac{\alpha^2}{2} - \alpha \left(\frac{S}{\pi} + 1 \right) \right). \quad (4.68)$$

4.4. Thermodynamique des trous noirs entourés de quintessence

En exploitant le moment cinétique, nous obtenons l'expression de $\left(M^{(-1/3)}(S, J, \alpha)\right)^2$ en termes de S et Ω . En effet, nous trouvons

$$\left(M^{(-1/3)}(S, \Omega, \alpha)\right)^2 = \frac{S}{4\pi} (\pi + S) \frac{\left((\alpha - 1)^2 + \frac{2S}{\pi} \left(1 + \frac{S}{2\pi} - \alpha\right)\right)}{(\pi + S - \Omega^2 S)}. \quad (4.69)$$

En considérant l'effet de l'énergie noire, nous dérivons la température $T^{(-1/3)}$ et la capacité thermique $C_\Omega^{(-1/3)}$ en termes de S , α et Ω du trou noir de Kerr-AdS. À cet égard, nous établissons la formule suivante

$$T^{(-1/3)}(S, \Omega, \alpha) = \left[\frac{\left(\pi^2 + 3S^2 - 4S\pi(\alpha - 1) - (2\alpha - \alpha^2)\pi^2 - \frac{S\pi(\pi + S - \pi\alpha)^2\Omega^2}{(\pi + S)(\pi + S - S\Omega^2)}\right)}{4\pi^{3/2} \sqrt{\frac{S(\pi + S)(\pi + S - \pi\alpha)^2}{(\pi + S - S\Omega^2)}}} \right]. \quad (4.70)$$

Il est à noter que nous pouvons retrouver les résultats ordinaires correspondants en évinçant les contributions de l'énergie noire. Cependant, afin d'examiner les comportements thermodynamiques du trou noir associé, nous calculons la capacité thermique à vitesse angulaire constante Ω . En présence de l'énergie noire, la capacité thermique prend la forme simplifiée suivante

$$C_\Omega^{(-1/3)}(S, \Omega, \alpha) = \frac{2S(\pi + S)(\pi + S - S\Omega^2) \left((\pi + S)(\pi^2 - 2\pi S(\Omega^2 - 2) - 3S^2(\Omega^2 - 1)) - \alpha\beta_1\right)}{(\pi + S) \left((\pi + S)^3(3S - \pi) - 6S^2(\pi + S)^2\Omega^2 + S^3(4\pi + 3S)\Omega^4\right) + \alpha\beta_2}, \quad (4.71)$$

où les termes β_i sont donnés par

$$\beta_1 = \left(\pi^3 + \pi S^2(1 - \Omega^2) - 2\pi^2 S(-1 + \Omega^2)\right), \quad (4.72)$$

$$\beta_2 = \left(\pi^5 + 4\pi^4 S - 6\pi^3 S^2 + (\Omega^2 - 1)^2(\pi S^4 + 4\pi^2 S^3)\right). \quad (4.73)$$

En fixant $\alpha = 0$, nous pouvons obtenir la capacité thermique ordinaire associée, comme indiqué dans [165]. Nous illustrons maintenant la variation de la température $T^{(-1/3)}$ et de la capacité thermique ($C_\Omega^{(-1/3)}$) en fonction de l'entropie (S) pour une valeur fixe de Ω (0.3).

Il est à noter que la dérivation de la température minimale $T_{\min}^{(-1/3)}$ est assez compliquée. Cependant, afin d'obtenir une expression explicite pour une telle température minimale, nous pouvons utiliser une méthode d'optimisation. En fixant $(\frac{\partial T}{\partial S})_{\alpha, \Omega} = 0$, nous trouvons un polynôme d'un cinquième ordre par rapport à S . Cette étape de calcul est considérée comme une tâche non triviale. Pour surmonter ce problème, nous avons besoin de plusieurs

4.4. Thermodynamique des trous noirs entourés de quintessence

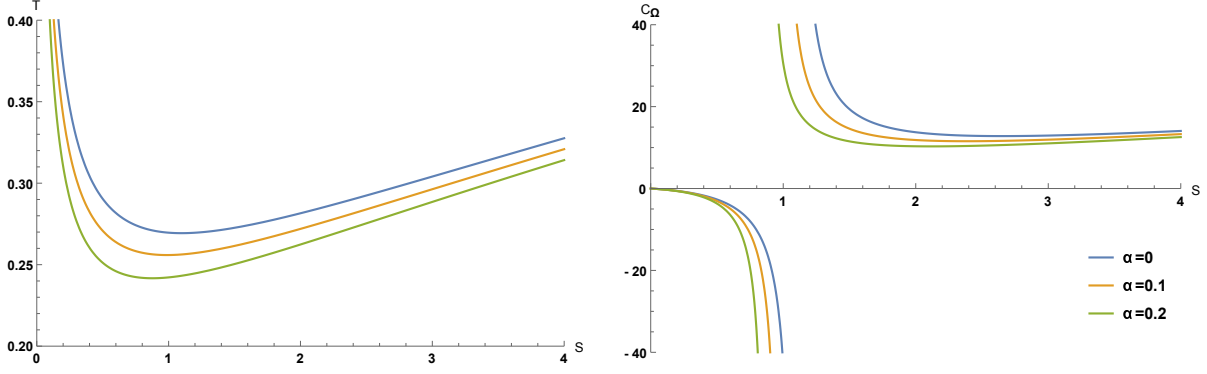


FIGURE 4.3 – Diagramme de la température de Hawking ($T^{(-1/3)}$) et la capacité thermique ($C_\Omega^{(-1/3)}$) du trou noir de Kerr-AdS en fonction de l'entropie (S) pour $\Omega = 0.3$.

approximations et simplifications. En effet, la première approximation que nous devons exploiter est de supprimer le cinquième ordre. De plus, lorsque l'effet de l'énergie noire s'annule, nous obtenons un polynôme identique à celui trouvé en l'absence de l'énergie noire. Après la résolution du polynôme en présence de l'énergie noire, les solutions obtenues peuvent être représentées d'une manière simplifiée [162]. Par ailleurs, puisque nous avons traité des objets ayant une faible valeur d'intensité α , les ordres supérieurs à deux seront omis. En effet, l'entropie approchée correspondante à la température minimale s'exprime comme

$$S_{min}^{(-1/3)}(\Omega, \alpha) = \frac{\pi}{\sqrt{6}(3+\alpha)} \left[\frac{\sqrt{6}(2+\alpha-\Omega^2-\alpha\Omega^2)}{(-1+\Omega^2)} + \gamma_2 \right. \\ \left. + \sqrt{\gamma_3 - \frac{6\sqrt{6}(2-3\Omega^2-3\Omega^4+2\Omega^6+\alpha(9-6\Omega^2-9\Omega^4+6\Omega^6))}{(-1+\Omega^2)^3 \gamma_2}} \right], \quad (4.74)$$

où les termes γ_i sont donnés par

$$\gamma_1 = \left((-1+\Omega^2)^2 (-\Omega^4 + \alpha^2(3-4\Omega^2+\Omega^4) - \alpha(-4+2\Omega^2+\Omega^4) + \right. \\ \left. \sqrt{\Omega^8 + 2\alpha\Omega^4(-4+2\Omega^2+\Omega^4) - \alpha^2(-16+16\Omega^2+10\Omega^4-12\Omega^6+\Omega^8)}) \right)^{1/3}, \quad (4.75)$$

$$\gamma_2 = \sqrt{\frac{20\alpha^2(-1+\Omega^2)^2 + 3\gamma_1(2+3\gamma_1-2\Omega^2+2\Omega^4) + 3\alpha(\gamma_1^2 + 4\gamma_1\Omega^2(-1+\Omega^2) + 8(-1+\Omega^2)^2)}{\gamma_1(-1+\Omega^2)^2}}, \quad (4.76)$$

$$\gamma_3 = \frac{-20\alpha^2(1+\Omega^4) + 3\gamma_1(4-3\gamma_1-4\Omega^2+4\Omega^4) - 3\alpha(\gamma_1^2 - 8\gamma_1\Omega^2(-1+\Omega^2) + 8(-1+\Omega^2)^2)}{\gamma_1(-1+\Omega^2)^2}. \quad (4.77)$$

4.4. Thermodynamique des trous noirs entourés de quintessence

En substituant (4.74) dans (4.70), nous trouvons la température minimale correspondante. Cette dernière est donnée par

$$T_{min}^{(-1/3)}(\Omega, \alpha) = \left[\frac{3^{5/4} \left(1 + \frac{\delta^2}{2} - 2\sqrt{\frac{2}{3}} \delta (-1 + \alpha) - 2\alpha + \alpha^2 + \frac{\delta(6+\sqrt{6}\delta-6\alpha)^2\Omega^2}{\sqrt{6}(6+\sqrt{6}\delta)(-6+\sqrt{6}\delta(-1+\Omega^2))} \right)}{2^{3/4} \pi \sqrt{-\frac{\delta(6+\sqrt{6}\delta)(6+\sqrt{6}\delta-6\alpha)^2}{(-6+\sqrt{6}\delta(-1+\Omega^2))}}} \right], \quad (4.78)$$

où nous avons

$$\begin{aligned} \delta = \frac{1}{3 + \alpha} & \left[\frac{\sqrt{6}(2 + \alpha - \Omega^2 - \alpha\Omega^2)}{(-1 + \Omega^2)} + \gamma_2 \right. \\ & \left. + \sqrt{\gamma_3 - \frac{6\sqrt{6}(2 - 3\Omega^2 - 3\Omega^4 + 2\Omega^6 + \alpha(9 - 6\Omega^2 - 9\Omega^4 + 6\Omega^6))}{(-1 + \Omega^2)^3 \gamma_2}} \right]. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Nous notons que ce résultat correspond parfaitement à celui obtenu lorsque l'énergie noire est absente [165]. À ce stade, il est possible de fournir une interprétation concernant les deux branches représentées sur la figure 4.3. Dans la courbe $(S - T)$, nous remarquons que ces deux phases existent au-dessus de la température minimale $T_{min}^{(-1/3)}$. Ainsi, puisque l'entropie est proportionnelle à la masse du trou noir, la première branche correspondant à une masse inférieure est considérée thermodynamiquement instable. En revanche, la deuxième associée à une masse plus élevée est considérée thermodynamiquement stable. Ainsi, nous remarquons à partir de la diminution de $S_{min}^{(-1/3)}$, lorsque l'intensité α augmente, que la phase stable devient pertinente.

En outre, la courbe $(S - C_\Omega)$, apparaissant dans la figure 4.3, montre deux phases séparées par une entropie critique $S_c^{(-1/3)} = S_{min}^{(-1/3)}$. En effet, la première phase, associée à un trou noir de plus petite masse qui possède une capacité thermique négative ($C_\Omega < 0$), est distinguée instable. Tandis que la deuxième phase, correspondant au trou noir de plus grande masse impliquant une capacité thermique positive ($C_\Omega > 0$), est considérée stable. De plus, l'égalité entre l'entropie critique $S_c^{(-1/3)}$ et $S_{min}^{(-1/3)}$ donne directement la diminution de l'entropie critique $S_c^{(-1/3)}$ lorsque l'intensité α augmente. Par conséquent, cela rend la phase stable plus étendue.

En utilisant la formule $G = M - T \cdot S - J \cdot \Omega$ [43], nous obtenons l'énergie libre de Gibbs

4.4. Thermodynamique des trous noirs entourés de quintessence

qui s'exprime comme

$$G^{(-1/3)}(S, \Omega, \alpha) = \frac{\sqrt{S} (\pi^3 (1 - \alpha) + \pi^2 (S - 2S\alpha) - S^3(1 - \Omega^2) - \pi S^2(1 + \alpha)(1 - \Omega^2))}{4\pi^{3/2}(\pi + S)^{3/2}(\pi + S - S\Omega^2)^{1/2}}. \quad (4.80)$$

Maintenant, à l'aide de la figure 4.4, nous étudions l'effet de l'énergie noire sur les transitions de phase du trou noir de Kerr-AdS en illustrant l'énergie libre de Gibbs en fonction de l'entropie.

A partir de la figure 4.4, nous remarquons que l'énergie libre de Gibbs change de signe.

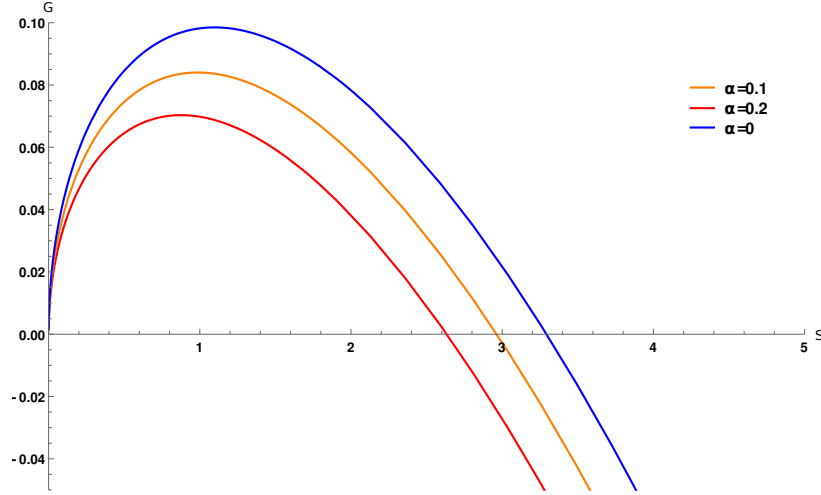


FIGURE 4.4 – Diagramme de l'énergie libre de Gibbs ($G^{(-1/3)}$) par rapport à l'entropie ($S^{(-1/3)}$) du trou noir de Kerr-AdS pour $\Omega = 0.3$, $\omega = -1/3$ et différentes valeurs de α .

Les valeurs positives de $G^{(-1/3)}(S, \Omega, \alpha)$ correspondent aux trous noirs instables tandis que les valeurs négatives sont associées aux trous noirs stables. En effet, nous pouvons constater que l'énergie noire diminue la phase instable. Ainsi, l'énergie noire fournit un trou noir plus stable. De plus, le point où l'énergie libre de Gibbs change de signe correspond à la transition de phase de Hawking-Page. À ce niveau, l'entropie est donnée par

$$S_{HP}^{(-1/3)}(\Omega, \alpha) = \frac{\pi}{3A(1 - \Omega^2)} \left((4 - 5\Omega^2 + \Omega^4 - A(1 - \Omega^2) + A^2 - \alpha(1 - \Omega^2)(4 + 2\Omega^2 + A)) \right), \quad (4.81)$$

où la quantité A prend la forme suivante

$$A(\Omega, \alpha) = (8 - 15\Omega^2 + 6\Omega^4 + \Omega^6 + 3\alpha(-4 + \Omega^2)(-1 + \Omega^2)^2 - 3\sqrt{3}\sqrt{\Omega^2(1 - \Omega^2)^3(\Omega^2 + 2\alpha(4 - \Omega^2))})^{\frac{1}{3}}. \quad (4.82)$$

4.4. Thermodynamique des trous noirs entourés de quintessence

Cette valeur de l'entropie correspond à la température suivante

$$T_{HP}^{(-1/3)}(\Omega, \alpha) = \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{q(3\pi + \pi q - \pi q \Omega^2)} (\pi + \frac{\pi q}{3})^{3/2}} \times \left[3\pi^3 (1 - \alpha) + \frac{1}{3} \pi^3 q^3 (1 - \Omega^2) + \frac{1}{3} \pi^3 q^2 (7 - \alpha - 5\Omega^2 + \alpha \Omega^2) + \pi^3 q (5 - 2\Omega^2 + 2\alpha(-1 + \Omega^2)) \right], \quad (4.83)$$

tandis que la quantité q est donnée par

$$q(\Omega, \alpha) = \frac{(4 - A + A^2 - 5\Omega^2 + A\Omega^2 + \Omega^4 - \alpha(1 - \Omega^2)(4 + A + 2\Omega^2))}{A(1 - \Omega^2)}. \quad (4.84)$$

Dans la figure 4.5, nous illustrons l'énergie libre de Gibbs en fonction de la température afin de comparer les différentes phases pour plusieurs valeurs de l'intensité de l'énergie noire α . À partir de la figure 4.5, nous remarquons que la phase de radiation, qui est la phase où le

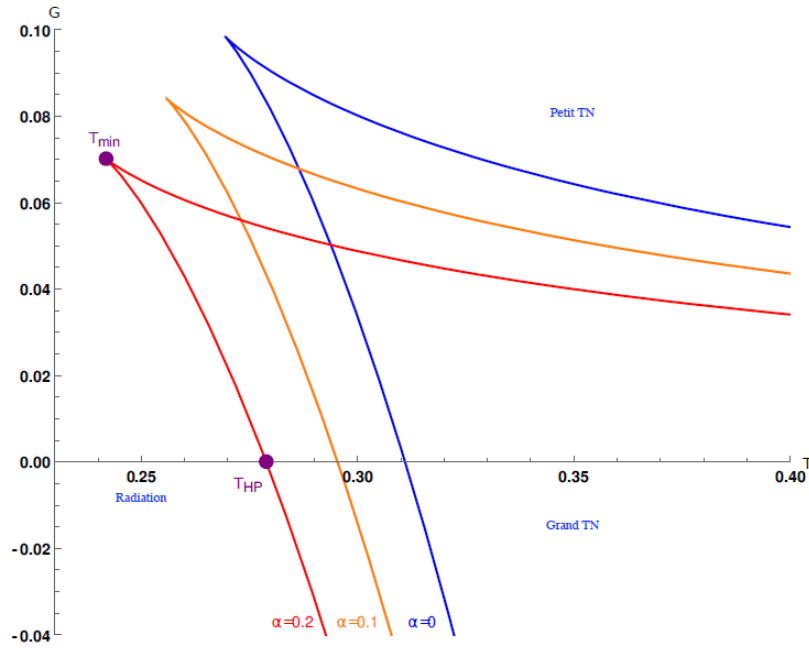


FIGURE 4.5 – Diagramme de l'énergie libre de Gibbs ($G^{(-1/3)}$) par rapport à la température ($T^{(-1/3)}$) du trou noir de Kerr-AdS pour $\Omega = 0.3$, $\omega = -1/3$ et différentes valeurs de α .

trou noir se désintègre dans un espace AdS thermique pur, et la phase, où aucun trou noir ne peut exister, diminue à mesure que le paramètre α augmente. De plus, nous constatons que ces données confirment l'idée que l'énergie noire stabilise le trou noir Kerr-AdS. Pour confirmer de tels comportements, nous pouvons illustrer la capacité thermique $C_{\Omega}^{(-1/3)}$ en fonction de la température. Cela est réalisé dans la figure 4.6.

4.4. Thermodynamique des trous noirs entourés de quintessence

Il découle de la figure 4.6 que la capacité thermique change de signe à la température

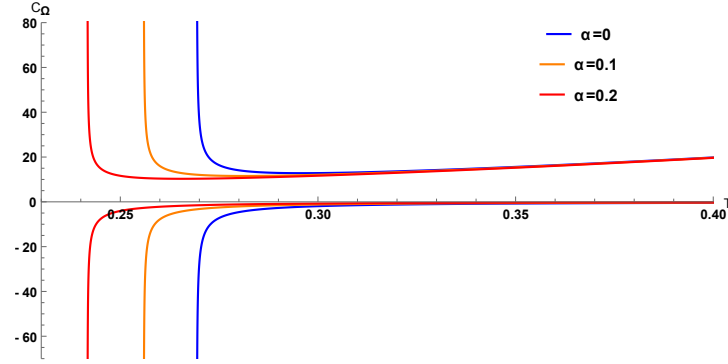


FIGURE 4.6 – Diagramme de la capacité thermique $C_{\Omega}^{(-1/3)}$ par rapport à la température ($T^{(-1/3)}$) du trou noir de Kerr-AdS pour $\Omega = 0.3$, $\omega = -1/3$ et différentes valeurs de α .

minimale $T_{min}^{(-1/3)}$. Nous constatons également que la phase où aucun trou noir ne peut exister diminue lorsque l'intensité α augmente.

Dans le modèle $(-\frac{1}{3})$, nous concluons que la diminution de $S_{min}^{(-1/3)}$ confirme que la phase stable devient pertinente lorsque l'intensité α augmente, ce qui rend le trou noir plus stable. En effet, cette analyse correspond parfaitement au mécanisme trivial de l'énergie noire.

4.4.4 Modèle avec paramètre d'état de l'énergie noire $\omega = -\frac{2}{3}$

Afin d'étudier profondément l'effet de l'énergie noire, nous discutons le comportement du trou noir de Kerr-AdS en quatre dimensions pour la valeur $\omega = -\frac{2}{3}$. Pareillement au modèle précédent, nous donnons d'abord la formule de Smarr généralisée du trou noir associé. Cette dernière est donnée par

$$M^{(-2/3)}(S, J, \alpha) = \left(\frac{\pi}{4S} \left\{ \frac{4SJ^2}{\pi\ell^2} + 4J^2 + \left[\frac{S^2}{\pi^2\ell^2} + \frac{S}{\pi} - \alpha \left(\frac{S}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \right]^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.85)$$

Ainsi, la température thermique du trou noir de Kerr-AdS s'exprime comme

$$T^{(-2/3)}(S, J, \alpha) = \frac{1}{8\pi M} \left(1 - \frac{4\pi^2 J^2}{S^2} + \frac{4S}{\pi} + \frac{3S^2}{\pi^2} - \alpha \left(\frac{5S^{3/2}}{\pi^{3/2}} + \frac{3S^{1/2}}{\pi^{1/2}} \right) + \frac{2\alpha^2 S}{\pi} \right). \quad (4.86)$$

De même, la masse carrée est donnée par

$$\left(M^{(-2/3)}(S, J, \alpha) \right)^2 = \frac{S}{4\pi} + \frac{\pi J^2}{S} + J^2 + \frac{S}{2\pi} \left(\frac{S^2}{2\pi^2} + \frac{S}{\pi} + \frac{\alpha^2 S}{2\pi} - \alpha \frac{S^{1/2}}{\pi^{1/2}} \left(\frac{S}{\pi} + 1 \right) \right). \quad (4.87)$$

4.4. Thermodynamique des trous noirs entourés de quintessence

En substituant J dans (4.87), nous écrivons $(M^{(-2/3)})^2$ en termes de S et Ω comme suit

$$(M^{(-2/3)}(S, \Omega, \alpha))^2 = \frac{S}{4\pi} (\pi + S) \frac{\left(1 + \frac{2S}{\pi} \left(1 + \frac{S}{2\pi} + \frac{\alpha^2}{2} - \alpha \left(\frac{S^{1/2}}{\pi^{1/2}} + \frac{S^{-1/2}}{\pi^{-1/2}}\right)\right)\right)}{(\pi + S - \Omega^2 S)}. \quad (4.88)$$

En outre, afin d'examiner l'effet de l'énergie noire, nous substituons (4.88) dans (4.86), ce qui donne la température en termes de S et Ω . En effet, pour le modèle $(-\frac{2}{3})$, les calculs produisent

$$T^{(-2/3)}(S, \Omega, \alpha) = \left[\frac{\pi^2 + 3S^2 + 4S\pi - \frac{\sqrt{S}(3\pi+5S)\alpha}{\pi^{-1/2}} + 2S\alpha^2\pi - \frac{S\pi(\pi+S-\sqrt{\pi}\sqrt{S}\alpha)^2\Omega^2}{(\pi+S)(\pi+S-S\Omega^2)}}{4\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{S(\pi+S)(\pi+S-\sqrt{\pi}\sqrt{S}\alpha)^2}{(\pi+S-S\Omega^2)}}} \right]. \quad (4.89)$$

En prenant $\alpha = 0$, nous obtenons la température ordinaire [165]. En revanche, pour $\alpha \neq 0$, le comportement thermodynamique du trou noir correspondant peut être examiné en exploitant la capacité thermique. À vitesse angulaire constante, les calculs conduisent à

$$C_{\Omega}^{(-2/3)}(S, \Omega, \alpha) = \frac{2S(\pi + S)(\pi + S - S\Omega^2)((\pi + S)(\pi^2 - 2\pi S(\Omega^2 - 2) - 3S^2(\Omega^2 - 1)) - \alpha\beta_3)}{(\pi + S)((\pi + S)^3(3S - \pi) - 6S^2(\pi + S)^2\Omega^2 + S^3(4\pi + 3S)\Omega^4) + \alpha\beta_4}, \quad (4.90)$$

tandis que les termes β_i sont donnés par

$$\beta_3 = \left(2\pi^{5/2}\sqrt{S} - S^{3/2}\pi^{3/2}(-4 + 3\Omega^2) - 2\sqrt{\pi}S^{5/2}(-1 + \Omega^2)\right), \quad (4.91)$$

$$\beta_4 = \left(4\pi^{7/2}S^{3/2}\Omega^2 - \pi^{5/2}S^{5/2}\Omega^2(-4 + 3\Omega^2)\right). \quad (4.92)$$

En annulant les effets de l'énergie noire ($\alpha = 0$), ce résultat se réduit à la capacité thermique ordinaire apparaissant dans [165]. Pour spécifier l'effet de l'énergie noire ($\alpha \neq 0$), nous examinons la température (4.89) et la capacité thermique (4.90) en terme de l'entropie S pour une valeur fixe $\Omega = 0.3$. Cela est illustré dans la figure 4.7.

Comme mentionné précédemment, l'expression de la température minimale est compliquée. Cependant, les calculs correspondants peuvent nécessiter certaines approximations pertinentes. En effet, il existe de nombreuses façons afin d'atteindre les résultats souhaités. En prenant $\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_{\alpha, \Omega} = 0$, nous trouvons un polynôme avec des ordres rationnels de S . Pour gérer cet ordre rationnel, nous exploitons le développement limité suivant $(1 - x^n) \approx 1 - nx$ pour les petites valeurs de x . De plus, nous utilisons des techniques similaires explorées dans le modèle $(-\frac{1}{3})$. Après les étapes de calculs, l'entropie approchée correspondant à l'entropie

4.4. Thermodynamique des trous noirs entourés de quintessence

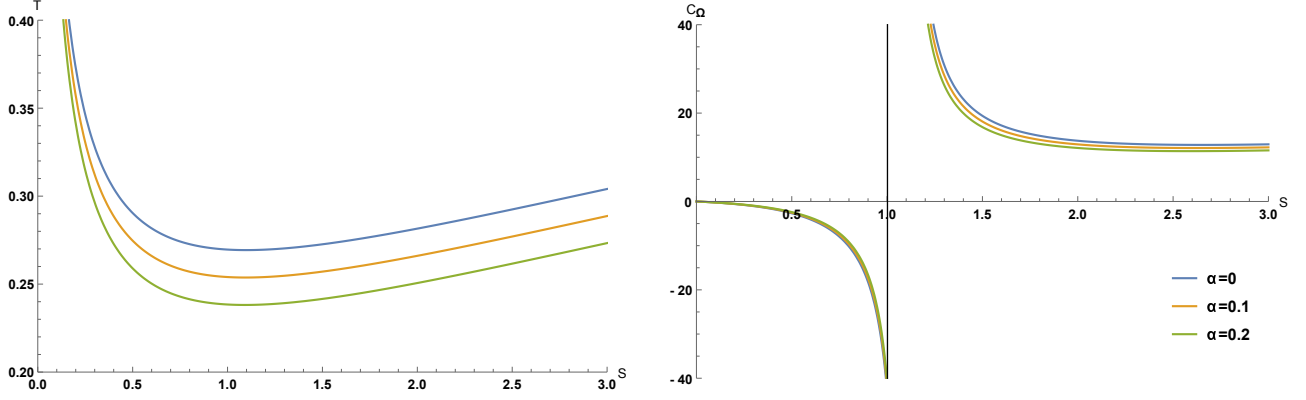


FIGURE 4.7 – Diagramme de la température de Hawking ($T^{(-2/3)}$) et la capacité thermique ($C_Q^{(-2/3)}$) du trou noir de Kerr-AdS en fonction de l'entropie (S) pour $\Omega = 0.3$ et $\omega = -2/3$.

minimale peut s'écrire sous la forme suivante

$$S_{min}^{(-2/3)}(\Omega, \alpha) = \frac{1}{6} \left[3\gamma_6 - \frac{2\pi(-2 + \Omega^2)}{(-1 + \Omega^2)} + 3\sqrt{\left(\gamma_7 + \frac{(-108\pi\alpha\Omega^2(-1 + \Omega^2) + 45\alpha\Omega^2(4 - 7\Omega^2 + 3\Omega^4) - 8\pi^3(2 - 3\Omega^2 - 3\Omega^4 + 2\Omega^6))}{27\gamma_6(-1 + \Omega^2)^3} \right)} \right], \quad (4.93)$$

où les paramètres γ_i sont donnés par

$$\gamma_4 = \left(54(-1 + \Omega^2)^2 \gamma_5 + \left(55296 \pi^3 \alpha^3 \Omega^6 (20 + 12\pi - 15\Omega^2)^3 (2 - 3\Omega^2 + \Omega^4)^3 + 2916 \Omega^4 (-1 + \Omega^2)^4 \gamma_5^2 \right)^{1/2} \right)^{1/3}, \quad (4.94)$$

$$\gamma_5 = \left(-64 \pi^6 \Omega^2 + 432 \pi^2 \alpha^2 \Omega^2 + 75 \alpha^2 \Omega^2 (4 - 3\Omega^2)^2 + 192 \pi^4 \alpha (-2 + \Omega^2) - 360 \pi \alpha^2 \Omega^2 (-4 + 3\Omega^2) - 80 \pi^3 \alpha (8 - 10\Omega^2 + 3\Omega^4) \right), \quad (4.95)$$

$$\gamma_6 = \sqrt{\frac{(2^{-4/3} \gamma_4^2 - 12 \times 2^{1/3} \pi \alpha \Omega^2 (20 + 12\pi - 15\Omega^2) (2 - 3\Omega^2 + \Omega^4) + 4\gamma_4 \pi^2 (1 - \Omega^2 + \Omega^4))}{9 \gamma_4 (-1 + \Omega^2)^2}}, \quad (4.96)$$

$$\gamma_7 = \frac{(-2^{-4/3} \gamma_4^2 + 12 \times 2^{1/3} \pi \alpha \Omega^2 (20 + 12\pi - 15\Omega^2) (2 - 3\Omega^2 + \Omega^4) + 8\gamma_4 \pi^2 (1 - \Omega^2 + \Omega^4))}{9 \gamma_4 (-1 + \Omega^2)^2}. \quad (4.97)$$

4.4. Thermodynamique des trous noirs entourés de quintessence

En substituant (4.93) dans (4.89), nous établissons la température minimale correspondante donnée par

$$T_{min}^{(-2/3)}(\Omega, \alpha) = \left[\frac{\sqrt{\frac{3}{2}} \left(12 + 8\xi + \xi^2 - 2\sqrt{6} \left(3 + \frac{5\xi}{6} \right) \sqrt{\xi} \alpha + 4\xi \alpha^2 + \frac{2\xi(6+\xi-\sqrt{6}\sqrt{\xi}\alpha)^2 \Omega^2}{(6+\xi)(-6+\xi(-1+\Omega^2))} \right)}{4\pi \sqrt{-\frac{\xi(6+\xi)(6+\xi-\sqrt{6}\sqrt{\xi}\alpha)^2}{(-6+\xi(-1+\Omega^2))}}} \right], \quad (4.98)$$

où nous avons

$$\xi(\Omega, \alpha) = \frac{1}{\pi} \left[3\gamma_6 - \frac{2\pi(-2 + \Omega^2)}{(-1 + \Omega^2)} + 3\sqrt{\left(\gamma_7 + \frac{(-108\pi\alpha\Omega^2(-1 + \Omega^2) + 45\alpha\Omega^2(4 - 7\Omega^2 + 3\Omega^4) - 8\pi^3(2 - 3\Omega^2 - 3\Omega^4 + 2\Omega^6))}{27\gamma_6(-1 + \Omega^2)^3} \right)} \right]. \quad (4.99)$$

Maintenant, nous nous dirigeons vers l'étude des transitions de phase du trou noir de Kerr-AdS.

À partir de la figure 4.7, nous remarquons que la courbe $(S - T)$ possède deux branches séparées par une température minimale (4.98). En effet, la première branche associée à une petite masse de trou noir est thermodynamiquement instable. Cependant, la deuxième, qui est associée à une grande masse de trou noir, est distinguée stable.

En outre, la courbe $(S - C_\Omega)$ implique deux phases séparées par une entropie critique $S_c^{(-\frac{2}{3})} = S_{min}^{(-\frac{2}{3})}$. La première phase, correspondant à une petite masse de trou noir ayant une capacité thermique négative ($C_\Omega < 0$), est instable. En revanche, la deuxième, qui est associée à une grande masse de trou noir possédant une capacité thermique positive ($C_\Omega > 0$), est considérée stable. Ainsi, nous remarquons que la capacité thermique n'est pas affectée par les contributions de l'énergie noire.

Ensuite, pour mieux visualiser le comportement non trivial pour ce modèle, nous exploitons l'énergie libre de Gibbs. Pour ce modèle, cette dernière peut être écrite comme

$$G^{(-2/3)}(S, \Omega, \alpha) = \frac{\sqrt{S}(\pi^3 + \pi^2 S - \pi^{\frac{3}{2}} S^{\frac{3}{2}} \alpha \Omega^2 + \pi S^2(-1 + \Omega^2) + S^3(-1 + \Omega^2))}{4\pi^{\frac{3}{2}}(\pi + S)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi + S - S\Omega^2}}. \quad (4.100)$$

Dans la figure 4.8, nous illustrons l'énergie libre de Gibbs en fonction de l'entropie afin d'obtenir plus d'informations sur l'effet de l'énergie noire sur les transitions de phase du trou noir. À partir de cette figure, nous remarquons que l'énergie libre de Gibbs change de signe. Les valeurs positives de $G^{(-2/3)}(S, \alpha, \Omega)$ correspondent aux trous noirs instables, tandis que

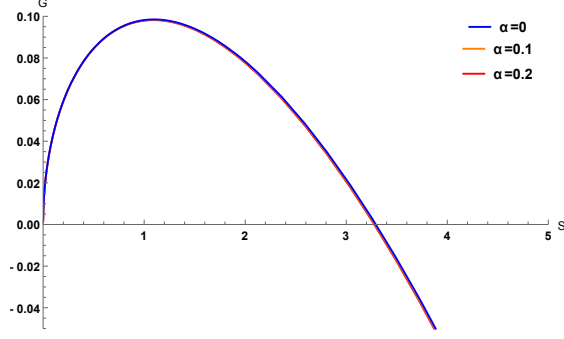


FIGURE 4.8 – Diagramme de l'énergie libre de Gibbs $G^{(-2/3)}$ du trou noir de Kerr-AdS par rapport à l'entropie S pour $\Omega = 0.3$, $\omega = -2/3$.

les valeurs négatives sont associées aux trous noirs stables. Nous constatons également que pour le modèle $(-\frac{2}{3})$, qu'il n'y a pas d'impact de l'intensité α sur l'énergie libre de Gibbs. Cela pourrait être compris du fait que le coefficient de multiplication α est très petit par rapport au cas ordinaire. Pour $\Omega = 0.3$, sa valeur numérique est d'environ 10^{-4} qui pourrait être ignorée. De plus, la transition de Hawking-Page correspond au point où l'énergie libre de Gibbs change de signe. En effet, l'entropie associée s'exprime comme

$$S_{HP}^{(-2/3)}(\Omega, \alpha) = \frac{\sqrt{\pi} \left(2^{\frac{1}{3}} z^2 - \sqrt{\pi} (1 - \Omega^2) (2z + 9 \times 2^{\frac{2}{3}} \alpha \Omega^2) + 2 \times 2^{\frac{2}{3}} \pi (4 - \Omega^2) (1 - \Omega^2) \right)}{6z(1 - \Omega^2)}, \quad (4.101)$$

où nous avons

$$z(\alpha, \Omega) = \left(27\pi(1 + \pi) \alpha \Omega^2 (1 - 2\Omega^2) + 4\pi^{\frac{3}{2}} (1 - \Omega^2)^2 (8 + \Omega^2) - 6\sqrt{6} \Omega \pi^{\frac{3}{4}} \sqrt{\alpha(8 - 31\Omega^2 + \pi(24 - 87\Omega^2)) + 2\pi^{\frac{2}{3}} \Omega^2 (1 - \Omega^2)^3} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (4.102)$$

Cette valeur d'entropie conduit à la température suivante

$$T_{HP}^{(-2/3)}(\Omega, \alpha) = \frac{1}{4\sqrt{6}\pi^{5/2} \sqrt{d(d+6\sqrt{\pi}-d\Omega^2)(d+6\sqrt{\pi})^{3/2}}} \times \\ \left(216\pi^{3/2} - 72\sqrt{6d} \pi^{5/4} \alpha + 3d^3 (1 - \Omega^2) - 2\sqrt{6} d^{5/2} \pi^{1/4} \alpha (1 - \Omega^2) + 36d \pi (5 - 2\Omega^2) - 6\sqrt{6} d^{3/2} \pi^{3/4} \alpha (4 - 3\Omega^2) + 6d^2 \sqrt{\pi} (7 - 5\Omega^2) \right), \quad (4.103)$$

4.4. Thermodynamique des trous noirs entourés de quintessence

où d est donné par

$$d(\alpha, \Omega) = \frac{\left(2^{1/3}z^2 - \sqrt{\pi}(1 - \Omega^2)(2z + 9 \times 2^{2/3}\alpha\Omega^2) + 2 \times 2^{2/3}\pi(4 - \Omega^2)(1 - \Omega^2)\right)}{z(1 - \Omega^2)}. \quad (4.104)$$

Dans la figure 4.9, nous illustrons l'énergie libre de Gibbs en fonction de la température, dans le but de comparer les différentes phases pour plusieurs valeurs de l'intensité de l'énergie noire α .

À partir de la figure 4.9, nous observons que la phase de radiation, qui est la phase où le

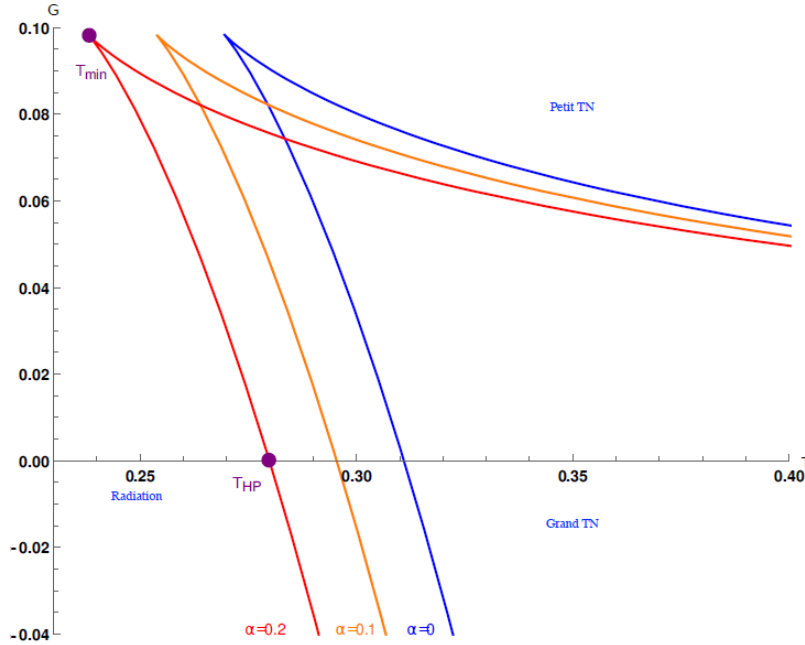


FIGURE 4.9 – Diagramme de l'énergie libre de Gibbs ($G^{(-2/3)}$) par rapport à la température ($T^{(-2/3)}$) du trou noir de Kerr-AdS pour $\Omega = 0.3$, $\omega = -2/3$ et différentes valeurs de α

trou noir se désintègre dans un espace AdS thermique pur, et la phase où aucun trou noir ne peut exister diminuent quand le paramètre α augmente. De plus, nous remarquons que les phases stables et instables ne sont pas affectées par les contributions de l'énergie noire. Pour examiner les effets de l'énergie noire sur la capacité thermique (4.90), nous illustrons cette dernière en fonction de la température pour différentes valeurs de l'intensité de l'énergie noire dans la figure 4.10.

Il découle de la figure 4.10 que la capacité thermique change de signe à la température minimale $T_{min}^{(-2/3)}$. Nous constatons également que la phase où aucun trou noir ne peut exister diminue lorsque l'intensité α augmente.

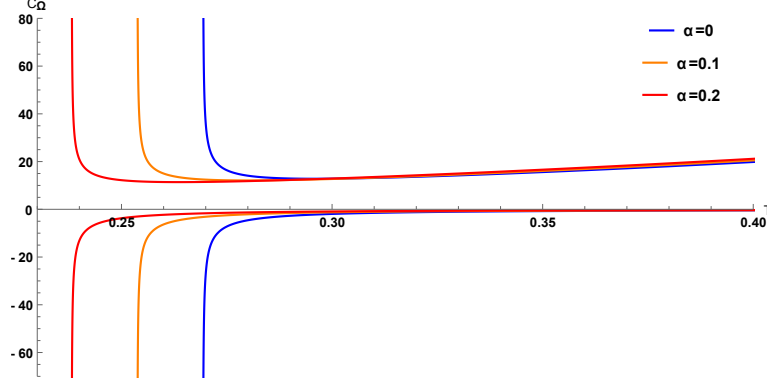


FIGURE 4.10 – *Diagramme de la capacité thermique $C_{\Omega}^{(-2/3)}$ par rapport à la température ($T^{(-2/3)}$) du trou noir de Kerr-AdS pour $\Omega = 0.3$, $\omega = -2/3$ et différentes valeurs de α .*

Pour le modèle $(-\frac{2}{3})$, nous concluons que l'énergie noire n'a aucun effet sur les quantités thermodynamiques pertinentes. Cependant, la phase où aucun trou noir ne peut exister et la phase de radiations deviennent petites.

Deuxième partie II

Résultats et contributions scientifiques

Dans cette partie, nous présentons nos travaux portant sur l'aspect thermodynamique des trous noirs rotatifs à quatre dimensions. Il est à noter que la physique des trous noirs, aussi bien par ces implications théoriques, phénoménologiques, et observationnelles a un impact réel sur plusieurs branches à savoir

- L'astrophysique
- la cosmologie
- La physique des hautes énergies
- L'information quantique

Avant de lister les différentes contributions scientifiques, nous donnons les principales réalisations concernant les travaux de recherches liés à la physique des trous noirs rotatifs.

- Étudier l'impact de l'énergie noire sur l'aspect thermodynamique de certains trous noirs chargés et rotatifs.
- Examiner la transition de Hawking-Page du trou noir de Kerr-AdS, en présence et en absence de l'énergie noire.
- Analyser le comportement critique d'un trou noir rotatif dans le cadre de la théorie des supercordes hétérotiques.

L'étude de la thermodynamique du trou noir se fait à travers une analogie avec des systèmes thermodynamiques classiques. En remarquant qu'il existe beaucoup des travaux traitant les trous noirs rotatifs en présence de l'énergie noire, nous avons abordé la thermodynamique des trous noirs en introduisant un paramètre de modélisation. Motivé par l'existence des modèles de supercordes, nous avons étudié les transitions de phase du trou noir de Kerr-Sen. De même, une étude a été fournie sur des trous noirs quitenssiels.

Nous allons présenter les contributions réalisées correspondant à deux approches de modélisation analytiques et numériques.

Article 1

Titre: Dark Energy Effects on Charged and Rotating Black Holes

Auteurs: A. Belhaj, A. El Balali, W. El Hadri, H. El Moumni, M. B. Sedra

Journal: Eur.Phys.J.Plus (9)134 (2019) 422.

Résumé:

En utilisant la méthode de la typicalité canonique, nous reconsidérons l'étude des effets de l'énergie noire sur les trous noirs à quatre dimensions. Concrètement, nous étudions l'effet associé sur le spectre des trous noirs chargés et rotatifs. En particulier, nous élaborons d'abord analytiquement le spectre de radiation, la température de Hawking et l'information noire. Ensuite, nous discutons et analysons les résultats correspondants. Ce travail, retrouvant les résultats du trou noir de Schwarzschild, confirme que l'énergie noire peut être considérée comme un système de refroidissement fournissant une radiation plus froide et un processus de radiation de Hawking plus lent.

Dark energy effects on charged and rotating black holes

A. Belhaj^{1,a}, A. El Balali², W. El Hadri², H. El Moumni^{3,4}, and M. B. Sedra²

¹ Equipe des Sciences de la Matière et du Rayonnement, ESMAR, Département de Physique Faculté des Sciences, Université Mohammed V, Rabat, Morocco

² Département de Physique, LabSIMO, Faculté des Sciences, Université Ibn Tofail Kénitra, Morocco

³ High Energy and Astrophysics Laboratory, FSSM, Cadi Ayyad University, P.O.B. 2390, Marrakesh, Morocco

⁴ LMTI, Faculty of Sciences, Ibn Zohr University, B.P 8106, Agadir, Morocco

Received: 28 January 2019 / Revised: 3 June 2019

Published online: 3 September 2019

© Società Italiana di Fisica / Springer-Verlag GmbH Germany, part of Springer Nature, 2019

Abstract. Using the canonical typicality method, we reconsider the study of dark energy effects on four-dimensional black holes. Concretely, we investigate the associated influences on the spectrum of various black hole backgrounds including the charged and the rotating ones. For such black hole solutions, we first elaborate analytically the corresponding radiation spectrum, the Hawking temperature and the dark information. Then, we discuss and analyze the corresponding findings. This work, recovering the results of the Schwarzschild black hole, confirms that dark energy can be considered as a cooling system surrounding the black holes providing a colder radiation and a slower Hawking radiation process.

1 Introduction

From many years, black holes have been considered as important and fascinating objects, appearing in various theories of gravity. Such objects can provide some insight with respect to the comprehension of certain aspects of quantum gravity theory [1, 2]. It has been suggested that black holes can behave as thermodynamic objects emitting radiation from the event horizon by exploiting results of quantum field theory on curved space-time. This is known by Hawking radiation, which has been explored in the understanding of black hole thermodynamics on non trivial spaces [3, 4]. Certain thermodynamical properties have been investigated for many black holes [5]. In AdS black hole thermodynamics, the cosmological constant Λ has been viewed as a dynamical quantity associated with a thermodynamical variable. According to [6], Λ has been interpreted as a thermodynamical pressure by using the fact that the conjugate thermodynamic variable is proportional to a volume. In this way, the corresponding phase transitions have been extensively studied in order to support the correspondence between the critical behaviors of the Van der Waals gas and the charged black holes [7–17].

Recently, certain black holes have been investigated in the presence of Dark Energy (DE) considered as one of the hardest puzzles in modern physics and astronomy due to its exact origin problem [18, 19]. It is recalled that the dark energy was related to the cosmological constant and vacuum energy long time ago the observation of the acceleration of the recent universe. However, it is still motivated and supported by the recent experimental observations [20, 21]. Compared to the fundamental energy density of gravity, the current DE, under this vision, is very small $\rho_{DE} \sim (10^{-3} \text{ GeV})^4$ [22, 23]. In this regard, any attempt associated with enlightening this tiny magnitude, however dominant energy, is welcome. In particular, the black holes surrounded by DE have received considerable emphasis and their thermodynamics have been intensively investigated [24, 25]. More details on properties of the black holes in quintessential fields can be found in [26–37].

More recently, it has been shown that DE affects the radiation spectrum of black holes. In the presence of such an energy, the radiation spectrum of the Schwarzschild black hole has been obtained using either the statistical mechanical approach or the tunneling approach [38–42].

The aim of this paper is to contribute to this rich area by investigating the effect of DE on other black hole backgrounds including the charged and the rotating ones. More precisely, we first give the corrected radiation spectrum, the Hawking temperature and the dark information of such black holes. Then, we discuss and analyze the corresponding

^a e-mail: belhaj@unizar.es

results. Among others, the Schwarzschild black hole results are recovered by sending the extra parameters to zero. It has been argued that DE can be considered as a cooling system surrounding the black holes providing a colder radiation and a slower Hawking radiation process. In the present paper, we will use dimensionless units in which one has $\hbar = c = k_B = G = 1$.

The outline of this paper is as follows. In sect. 2, we present a concise review on the canonical approach, which has been developed, in order to derive the radiation spectrum of the Schwarzschild black hole. Section 3 deals with the spectrum of the Reissner-Nordstrom (RN) black hole. Section 4 concerns results associated with rotating black holes. In sect. 5, we discuss and analyze the corresponding results. The last section is devoted to conclusions and open questions.

2 Black hole radiation spectrum

In this section, we give a review on the black hole spectrum physics [43]. In particular, we discuss the radiation spectrum by recalling the explored computation method.

2.1 Radiation spectrum

It is shown that, inside the black holes, the quantum fluctuations create and annihilate a large number of particle pairs near the horizon. In this way, the positive energy particles escape through tunneling from the black hole, inside region where the Hawking radiation occurs. Once such particles cross the black hole horizon, the statistical energy distribution can be described using the radiation spectrum. It has been remarked that the determination of the Hawking radiation deserves deeper investigations. The radiation spectrum, found by Hawking, obeys the thermal distribution [44,45]. Alternatively, a statistical mechanical approach has been also discovered [42,46], bringing the same results as the quantum tunneling method based on particle dynamics [47–53].

In what follows, we recall such an approach being based on canonical typicality [39–41], or the micro-canonical hypothesis. It is recalled that a black hole B could involve a mass M , a charge Q , and an angular momentum J . The corresponding density matrix reads as

$$\rho_B = \sum_i \frac{1}{\Omega_B(M, Q, J)} |M, Q, J\rangle_i \langle M, Q, J|, \quad (1)$$

where $|M, Q, J\rangle_i$ denotes the i th eigenstate of B . However, $\Omega_B(M, Q, J)$ is the associated microstate number. This expression can be obtained by assuming that a universe U is composed by two subsets B and O being identified with the black hole and the environment, respectively. The black hole evaporation provides two other subsystems which are the radiation field R and the remaining black hole $B' \equiv B - R$. In this way, the density matrix reduces to

$$\rho_B = \sum_{r, b'} \frac{1}{\Omega_B(E)} |r, b'\rangle \langle r, b'|. \quad (2)$$

It is noted that $|r\rangle$ and $|b'\rangle$ are the eigenstates of R and B' with eigen-energies E_r and $E_{b'}$, respectively. Here, $\Omega_B(E)$ is the number of the microstates with energy $E = E_r + E_{b'}$ required by the energy conservation principal. The calculation associated with B' shows that the reduced density matrix of R takes the following form:

$$\rho_R = \text{Tr}_{B'}(\rho_B) = \sum_r \frac{\Omega_{B'}(E - E_r)}{\Omega_B(E)} |r\rangle \langle r|, \quad (3)$$

with $\Omega_{B'}(E - E_r)$ is the number of micro-states of B' with energy $E - E_r$. Moreover, the micro-canonical distribution allows one to express the entropies as $S_B = \ln \Omega_B(E)$ and $S_{B'} = \ln \Omega_{B'}(E - E_r)$. Using these expressions, the above density matrix can be rewritten as

$$\rho_R = \sum_r e^{-\Delta S_{BB'}(E_r, E)} |r\rangle \langle r| = \sum_{\omega, q, j} p(\omega, q, j, M, Q, J) |\omega, q, j\rangle \langle \omega, q, j|, \quad (4)$$

where $p(\omega, q, j, M, Q, J)$ represents the distribution probability of the radiation given by

$$p(\omega, q, j, M, Q, J) = e^{-\Delta S_{BB'}(\omega, q, j, M, Q, J)}. \quad (5)$$

It is noted that $|\omega, q, j\rangle$ is the eigenstate of the radiation R , with mass ω , charge q and angular momentum j . In the black hole physics, $\Delta S_{BB'}(\omega, q, j, M, Q, J)$ denotes the entropy difference between B and B' taking the following form:

$$\Delta S_{BB'}(E_r, E) = \Delta S_{BB'}(\omega, q, j, M, Q, J) = S_B(M, Q, J) - S_{B'}(M - \omega, Q - q, J - j). \quad (6)$$

Using (4)–(6), we can compute the radiation spectrum in terms of $p(\omega, q, j, M, Q, J)$. To do so, it is worth noting that the entropy can be obtained by using the Bekenstein-Hawking formula

$$S_{BH}(M, Q, J) = \frac{A_H(M, Q, J)}{4} = \pi R_H^2(M, Q, J), \quad (7)$$

where $A_H(M, Q, J)$ and $R_H(M, Q, J)$ are the area and the radius of the black hole, respectively. In this way, the radiation spectrum, given in (5), can be rewritten as

$$p(\omega, q, j, M, Q, J) = e^{-\pi[R_H^2(M, Q, J) - R_H^2(M - \omega, Q - q, J - j)]}. \quad (8)$$

2.2 Schwarzschild black hole spectrum

Here, we examine the Schwarzschild black hole which will be considered as a reference model, in order to check the validity of the present computations.

2.2.1 Radiation spectrum

We start by deriving the radiation spectrum for the Schwarzschild black hole in the existence of the DE using a statistical mechanical approach [42]. To do so, we first express the horizon radius in terms of the mass function using the associated metric. The latter is given by

$$ds^2 = f(r)dt^2 - f^{-1}(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (9)$$

The DE effect appears in such a metric via the $f(r)$ function given by

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - 2\left(\frac{r_o}{r}\right)^{3\omega_q+1}, \quad (10)$$

where r_o is a scale factor depending on the cosmological constant Λ , and where ω_q indicates the state parameter restricted to lie in $-1 < \omega_q < -1/3$. It is noted that the $f(r)$ function can be obtained by considering first the Einstein equations for a physical contribution corresponding to a static spherically symmetric quintessence field surrounding a black hole [26–28]. Then, one should solve such equations exactly for a specific choice of free parameters, associated with energy-momentum tensor of the quintessence noted by $T_{\mu\nu}$. For a static state involving a spherical symmetry, it is noted that one can write a general form of space-time components of such a tensor as follows:

$$T_t^t = A(r), \quad T_t^j = 0, \quad T_i^j = -C(r)r_i r^j + B(r)\delta_i^j. \quad (11)$$

It is emphasized that, for an isotropic state, one can get

$$\langle T_i^j \rangle = D(r)\delta_i^j, \quad D(r) = -\frac{1}{3}C(r)r^2 + B(r). \quad (12)$$

In the presence of the quintessence field, one has

$$D(r) = -\omega_q A(r). \quad (13)$$

Fixing the state parameter ω_q , one can obtain the explicit expression of the function $D(r)$ representing the pressure in terms of the density $A(r)$. Then, it is possible to parameterize the space-time interval of spherically symmetric static gravitational field as follows:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\tau dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (14)$$

where one can use $\nu = \nu(r)$ and $\tau = \tau(r)$. Normalizing the gravitational constant, we can determine the general expression of the quintessence tensor $T_{\mu\nu}$. In this way, its spatial part is proportional to the time component with the arbitrary parameter B depending on the internal structure of the quintessence. Up to calculations, one gets

$$T_t^t = \rho_q(r), \quad T_i^j = \rho_q(r)\alpha\left(-(1+3B)\frac{r_i r^j}{r_n r^n} + B(r)\delta_i^j\right). \quad (15)$$

Using $\langle r_i r^j \rangle = \frac{1}{3} r_n r^n \delta_i^j$, one can obtain

$$\langle T_i^j \rangle = -\rho_q(r) \frac{\alpha}{3} \delta_i^j = -p_q(r) \delta_i^j. \quad (16)$$

Thus, the pressure takes the following form:

$$p_q = \omega_q \rho_q, \quad \omega_q = \frac{\alpha}{3}. \quad (17)$$

Using the metric components $T_t^t = T_r^r$, and the following equations,

$$2T_t^t = -e^{-\tau} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\tau'}{r} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (18)$$

$$2T_r^r = -e^{-\tau} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (19)$$

we can define a principle of linearity and additivity given by $\nu + \tau = 0$, with $v' = dv/dr$. Taking $\tau = -\ln(1+f)$, one gets a linear differential form of Einstein equations as follows:

$$T_t^t = T_r^r = -\frac{1}{r^2} (f + r f'), \quad (20)$$

$$T_\theta^\theta = T_\phi^\phi = -\frac{1}{4r} (2f' + r f''). \quad (21)$$

Using the condition of additivity and linearity, we can fix the free parameter of the energy momentum tensor B . Indeed, one considers

$$B = -\frac{3\omega_q + 1}{6\omega_q}, \quad (22)$$

leading to

$$T_t^t = T_r^r = \rho_q, \quad (23)$$

$$T_\theta^\theta = T_\phi^\phi = -\frac{1}{2} \rho_q (3\omega + 1). \quad (24)$$

Using eqs. (20)–(21)–(23)–(24), we obtain

$$(3\omega + 1)f + 3(\omega + 1)r f' + r^2 f'' = 0. \quad (25)$$

The solutions can be given as follows:

$$f_q = -\frac{c}{r(3\omega_q + 1)}, \quad f_{BH} = -\frac{r_g}{r}, \quad (26)$$

with c and $r_g = 2M$ are normalization factors. Since we deal in this paper with three types of black holes, it is useful to generalize the metric form using a free parameter ω_n being different from the quintessence state parameter ω_q . It was shown that the form of the exact spherically symmetric solutions of Einstein equations can have the following form:

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2M}{r} - \sum_n \left(\frac{r_n}{r} \right)^{3\omega_n + 1} \right] dt^2 - \left[1 - \frac{2M}{r} - \sum_n \left(\frac{r_n}{r} \right)^{3\omega_n + 1} \right]^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (27)$$

where r_n are now dimensional normalization constants. Taking $\omega_n = 1/3$ for instance, with the corresponding normalization constant being equal to $-Q^2$, one can get the Reissner-Nordstrom black hole function $f(r)$ given by

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}. \quad (28)$$

To obtain the de Sitter space, one can take $\omega_n = -1$, where the normalization constant is ℓ^2 . For a particular contribution of quintessence, one can write

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \left(\frac{r_q}{r} \right)^{3\omega_q + 1} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^{3\omega_q + 1}, \quad (29)$$

where $r_q^{3\omega_q+1} = 2r_0^{3\omega_q+1} = c$. Taking $Q = 0$, however, we obtain the Schwarzschild black hole with quintessence. In this way, the metric function is given by (10).

Besides, it is known that the de-Sitter Schwarzschild black hole has a metric function given by

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{r^2}{\ell^2}, \quad (30)$$

which is nothing but the function $f(r)$ of the Schwarzschild black hole surrounded by quintessence with $\omega_q = -1$. The associated function is written as

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - 2\frac{r^2}{r_0^2}. \quad (31)$$

It turns out that can relate the de-Sitter parameter ℓ to r_0 by $\frac{r_0}{\sqrt{2}} = \ell = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$ providing the expression $r_0 = \sqrt{\frac{6}{\Lambda}}$.

To determine the horizon radius of the Schwarzschild black holes surrounded by the quintessence, we can exploit the metric function given in (10), and then resolve the following equation:

$$f(R_H) = 1 - \frac{2M}{R_H} - 2\left(\frac{6}{\Lambda R_H^2}\right)^{\frac{3\omega_q+1}{2}} = 0. \quad (32)$$

Assuming that the quintessence affects slightly the geometry of the black hole, we can resolve such an equation perturbatively by taking $R_H = R_H^0 + \delta_{Sch}$, where δ_{Sch} represents the modification or perturbation generated by the presence of quintessence. Indeed, the above equation takes the following form:

$$1 - \frac{2M}{R_H^0 + \delta_{Sch}} - 2\left(\frac{6}{\Lambda(R_H^0 + \delta_{Sch})^2}\right)^{\frac{3\omega_q+1}{2}} = 0. \quad (33)$$

A simple factorization gives

$$1 - \frac{2M}{R_H^0(1 + \frac{\delta_{Sch}}{R_H^0})} - 2\left(\frac{6}{\Lambda(R_H^0(1 + \frac{\delta_{Sch}}{R_H^0}))^2}\right)^{\frac{3\omega_q+1}{2}} = 0. \quad (34)$$

Using the fact that $\frac{\delta_{Sch}}{R_H^0} \ll 1$, one can write

$$1 - \frac{2M}{2M} \left(1 + \frac{\delta_{Sch}}{2M}\right)^{-1} - 2\left(\frac{6}{\Lambda(2M)^2}\right)^{\frac{3\omega_q+1}{2}}. \quad (35)$$

Moreover, applying $(1 + \frac{\delta_{Sch}}{R_H^0})^{-1} = (1 - \frac{\delta_{Sch}}{R_H^0})$, one gets

$$1 - \left(1 - \frac{\delta_{Sch}}{2M}\right) - 2\left(\frac{6}{\Lambda(2M)^2}\right)^{\frac{3\omega_q+1}{2}}. \quad (36)$$

Taking $\xi = -\frac{3\omega_q+1}{2}$, one obtains

$$\frac{\delta_{Sch}}{2M} - 2\left(\frac{6}{\Lambda(2M)^2}\right)^{-\xi} = 0, \quad (37)$$

leading to

$$\delta_{Sch} = 2(2M)^{2\xi+1} \left(\frac{\Lambda}{6}\right)^\xi. \quad (38)$$

Note in passing that this method will be exploited, through this paper, to determine the horizon locus of black holes treated in the present work. Roughly, the corresponding horizon radius reads as

$$R_H^{Sch} = 2M + 4M^{2\xi+1} F_{Sch}, \quad (39)$$

where $\xi = -(3\omega_q + 1)/2$ belonging to the interval $[0, 1]$ and where F_{Sch} is a function given by

$$F_{Sch} = F_{Sch}(\xi, \Lambda) = \left(\frac{2\Lambda}{3}\right)^\xi. \quad (40)$$

Replacing (39) in (8), we obtain the corrected radiation spectrum in the presence of DE,

$$p(\omega, M) = \exp \left\{ -8\pi M \left[1 + 4(\xi + 1)M^{2\xi} F_{Sch} \right] \omega + 4\pi \left[1 + 4(\xi + 1)(2\xi + 1)M^{2\xi} F_{Sch} \right] \omega^2 \right\}. \quad (41)$$

Turning off the effect of DE $F_{Sch} \rightarrow 0$ ($\Lambda \rightarrow 0$), this probability reduces to

$$p(\omega, M) = \exp [-8\pi\omega(M - \omega/2)] \quad (42)$$

which is the Parikh-Wilczek (P-W) spectrum reported in [54].

2.2.2 Temperature

Analyzing the Hawking radiation as tunneling, Parikh and Wilczek have noticed that the radiation spectrum can not be strictly thermal [52]. However, they have given a correction of the probability of emission. In the absence of quintessence, the above probability of emission is called the non thermal radiation. In fact, it is not easy to derive the Hawking temperature from this radiation. However, one should deal with only the thermal part which is achieved by considering large black holes ($M \gg 1$). Since ω is the mass of the radiated particle, it is obviously much smaller than M . In this way, the above relation reduces to

$$p(\omega, M) = e^{(-8\pi M\omega)} = e^{-\beta\omega}, \quad (43)$$

where β is the inverse of Hawking temperature. Thus, the temperature of Schwarzschild black hole is when DE is absent

$$T_H^{Sch_0} = \frac{1}{8\pi M}. \quad (44)$$

To derive the temperature from the thermal radiation spectrum, similar analysis is needed in the rest of the paper.

For the radiation spectrum in the presence of DE, we discuss the evaporation process. as stated above for a black hole with a large mass ($M \gg 1$), the non-thermal contribution of the radiation spectrum can be evinced. Then, the approximated thermal distribution probability now becomes

$$p(\omega, M) = \exp \left\{ -8\pi M \left[1 + 4(\xi + 1)M^{2\xi} F_{Sch} \right] \omega \right\}. \quad (45)$$

In the presence of DE, further calculations associated with (45) gives β_H^{Sch} leading to the following expression of the Hawking temperature

$$T_H^{Sch} = \frac{1}{8\pi M} \left[1 - 4(\xi + 1)M^{2\xi} \left(\frac{2\Lambda}{3} \right)^\xi \right]. \quad (46)$$

Introducing a modification factor

$$\lambda_{Sch} = 4(\xi + 1)M^{2\xi} \left(\frac{2\Lambda}{3} \right)^\xi, \quad (47)$$

this Hawking temperature takes the following form:

$$T_H^{Sch} = T_H^{Sch_0} (1 - \lambda_{Sch}), \quad (48)$$

Having discussed a simple black hole, we are going to consider generic models by introducing other physical parameters including charge and the spin. Concretely, we investigate the effect of DE on the corresponding black hole solutions.

3 Spectrum of Reissner-Nordstrom black hole

3.1 Radiation spectrum

In this section, we would like to derive the radiation spectrum of the Reissner-Nordstrom (RN) black hole in the existence of DE using the above discussed statistical mechanical approach. Like the previous discussions, we first determine the horizon radius. Turning on the effect of the DE, the $f(r)$ metric function, for the RN black hole, is written as

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2} - 2 \left(\frac{r_o}{r} \right)^{3\omega_q + 1}, \quad (49)$$

where M is the mass of the black hole and Q is its charge [55]. In this way, the horizon radius can be obtained by solving the constraint $f(R_H) = 0$. Taking $r_0 = \sqrt{\frac{6}{\Lambda}}$, the calculation gives

$$1 - \frac{2M}{R_H} - \frac{Q^2}{R_H^2} - 2 \left(\frac{6}{\Lambda R_H^2} \right)^{\frac{3\omega q + 1}{2}} = 0. \quad (50)$$

The solution of (50) can be put as $R_H^{RN} = R_H^0 + \delta_{RN}$. The first term $R_H^0 = M + \sqrt{M^2 - Q^2}$ is the horizon radius of the RN black hole without DE. While, the second one carries information on the effect of DE. For such a black hole, this term is given by

$$\delta_{RN} = \frac{(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^{2\xi+2}}{\sqrt{M^2 - Q^2}} \left(\frac{\Lambda}{6} \right)^\xi. \quad (51)$$

Thus, the associated horizon radius reads as

$$R_H^{RN} = M + \sqrt{M^2 - Q^2} + \frac{(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^{2\xi+2}}{\sqrt{M^2 - Q^2}} F_{RN}, \quad (52)$$

where F_{RN} is a function depending on ξ and Λ . For such a black hole, it is given by

$$F_{RN} = F_{RN}(\xi, \Lambda) = \left(\frac{\Lambda}{6} \right)^\xi, \quad (53)$$

obtained by keeping only the first order of F_{RN} . Taking $Q = 0$, we recover the horizon radius of the Schwarzschild black hole given in (39). It is noted that the modified RN black hole horizon radius is quite complicated. The corresponding calculations need relevant approximations. It follows from (52) that DE increases the horizon radius. This can be understood from the fact that DE produces the opposite effect being repulsion, contrary to the gravitation produces an attraction force for regular objects. This could explain the expansion of the Universe. Obviously, the extension of the black hole horizons should be considered as a consequence of the presence of DE. Indeed, the repulsion caused by DE which appears naturally from (52) leads to a larger black hole.

The influences of DE on the black hole radiation can be discussed through the statistical mechanical method introduced in the previous section. Toward the determination of the radiation spectrum, we use several simplifications and approximations. Substituting (52) into (8), for instance, we find the term

$$R_H^{RN^2}(M, Q) - R_H^{RN^2}(M - \omega, Q - q) = \left(M + \sqrt{M^2 - Q^2} \right)^2 - \left(M - \omega + \sqrt{(M - \omega)^2 - (Q - q)^2} \right)^2 \\ + 2F_{RN} \left\{ \frac{(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^{2\xi+3}}{\sqrt{M^2 - Q^2}} - \frac{(M - \omega + \sqrt{(M - \omega)^2 - (Q - q)^2})^{2\xi+3}}{\sqrt{(M - \omega)^2 - (Q - q)^2}} \right\} \quad (54)$$

up to the first order in F_{RN} . An examination shows that the first term can be simplified. However, the second one is stuck. The problem here is the square root functions and the denominators. As we are dealing with objects that have big masses (many times the solar mass 10^{30}), we can consider the case $Q \ll M$. The second term, which will be denoted by α_{DE} , can be rewritten as

$$\alpha_{DE} = 4F_{RN} \left\{ \left(M + \sqrt{M^2 - Q^2} \right)^{2\xi+2} \frac{(M + \sqrt{M^2 - Q^2})}{2\sqrt{M^2 - Q^2}} \right. \\ \left. - \left(M - \omega + \sqrt{(M - \omega)^2 - (Q - q)^2} \right)^{2\xi+2} \frac{(M - \omega + \sqrt{(M - \omega)^2 - (Q - q)^2})}{2\sqrt{(M - \omega)^2 - (Q - q)^2}} \right\}. \quad (55)$$

Using the approximations $M \simeq \sqrt{M^2 - Q^2}$ and $M - \omega \simeq \sqrt{(M - \omega)^2 - (Q - q)^2}$, α_{DE} can be expressed as

$$\alpha_{DE} \simeq 4F_{RN} \left\{ \left(M + \sqrt{M^2 - Q^2} \right)^{2\xi+2} - \left(M - \omega + \sqrt{(M - \omega)^2 - (Q - q)^2} \right)^{2\xi+2} \right\}. \quad (56)$$

To handle these square root functions, we shall use the following limit $\sqrt{1 - x} \simeq 1 - \frac{x}{2}$. After calculations, the corrected radiation spectrum of the RN black hole reads as

$$p(\omega, q, M, Q) = \exp \{ -\pi(\alpha_{RN} + \alpha_{DE}) \}, \quad (57)$$

with

$$\begin{aligned}\alpha_{RN} &= 2M\sqrt{M^2 - Q^2} + 2\omega(2M - \omega) - q(2Q - q) - 2(M - \omega)\sqrt{(M - \omega)^2 - (Q - q)^2}, \\ \alpha_{DE} &= 4(\xi + 1) \left\{ 2 \left(2\omega + q \frac{q - 2Q}{2(M - \omega)} \right) \left(2M - \frac{Q^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi+1} \right. \\ &\quad \left. - (2\xi + 1) \left(2\omega + q \frac{q - 2Q}{2(M - \omega)} \right)^2 \left(2M - \frac{Q^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi} \right\} F_{RN},\end{aligned}$$

where we have kept the second order of ω and q . The higher orders are omitted. It is noted that the first term $\exp\{-\pi\alpha_{RN}\}$ concerns the radiation spectrum without DE. However, the extra factor α_{DE} is associated with the DE correction. This reveals that the radiation spectrum depends on ξ and Λ . When the effect of DE vanishes, the above probability would reduce to

$$p(\omega, q, M, Q) = e^{-\pi[(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2 - (M - \omega + \sqrt{(M - \omega)^2 - (Q - q)^2})^2]} = e^{-\pi\alpha_{RN}}. \quad (58)$$

It is worth noting that we can check the validity of the main results by comparing them to the Schwarzschild black hole case. Taking $Q = 0$ and $q = 0$, we recover (41) which matches perfectly with the results given in [42]. It is noted that the black hole radiation spectrum can be investigated using an alternative method based on the so-called quantum tunneling, which will not be discussed here. For the absence of DE, we can use, however, the results obtained in [54, 56] to verify the validity of the present results concerning the absence of DE.

3.2 Evaporation process the RN black hole

Here, we reconsider the Hawking temperature of the RN black holes with the DE corrections. It is recalled that such a temperature is

$$T_H^{RN_0} = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{2\pi(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2}. \quad (59)$$

For a black hole with a large mass ($M \gg 1$), the non-thermal part of the radiation spectrum can be ignored. In this way, the approximated thermal distribution probability reads as

$$\begin{aligned}p(\omega, q, M, Q) &= \exp \left(-\pi \left\{ 2M \left[\sqrt{M^2 - Q^2} - \sqrt{(M - \omega)^2 - (Q - q)^2} \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\omega \left[2M + \sqrt{(M - \omega)^2 - (Q - q)^2} + 8(\xi + 1)F_{RN} \left(2M - \frac{Q^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi+1} \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2q \left[-Q + 8(\xi + 1)F_{RN} \left(\frac{q - 2Q}{2(M - \omega)} \right) \left(2M - \frac{Q^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi+1} \right] \right\} \right). \quad (60)\end{aligned}$$

It is observed that, when the effect of the DE vanishes ($F_{RN} \rightarrow 0$), this distribution reduces to the ordinary Hawking radiation spectrum

$$p(\omega, q, M, Q) = \exp \left(-\pi \left[2M\sqrt{M^2 - Q^2} + 4M\omega - 2Qq - 2(M - \omega)\sqrt{(M - \omega)^2 - (Q - q)^2} \right] \right). \quad (61)$$

In what follows, we discuss such a spectrum in terms of DE.

3.2.1 Without DE

Here, we deal with two cases. The first one concerns the neutral radiated particles ($q = 0$) while the second one is associated with charged radiated particles ($q \neq 0$). In the first case, (61) becomes

$$p(\omega, q, M, Q) = \exp \left(-\pi \left[2M\sqrt{M^2 - Q^2} + 4M\omega - 2(M - \omega)\sqrt{(M - \omega)^2 - Q^2} \right] \right). \quad (62)$$

Using appropriate approximations, we get

$$p(\omega, q, M, Q) = \exp(-\beta_H^{RN_0} \omega) = \exp\left(-2\pi \frac{(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2}{\sqrt{M^2 - Q^2}} \omega\right), \quad (63)$$

where $\beta_H^{RN_0}$, being the inverse of the temperature in the absence of DE, reads as

$$\beta_H^{RN_0} = 2\pi \frac{(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2}{\sqrt{M^2 - Q^2}}. \quad (64)$$

In the second case ($q \neq 0$), however, similar approximations give

$$\begin{aligned} p(\omega, q, M, Q) &= \exp\left(-\beta_H^{RN_0}(\omega - \omega_0)\right), \\ &= \exp\left(-2\pi \frac{(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2}{\sqrt{M^2 - Q^2}}(\omega - \omega_0)\right), \end{aligned} \quad (65)$$

where we have used $\omega_0 = q \frac{Q}{M + \sqrt{M^2 - Q^2}}$. It is noted that these results match perfectly with the quantum tunneling method developed in [54, 56].

3.2.2 With DE

In this part, we discuss generic situations associated with (60). Taking $q = 0$ ($\omega_0 = 0$), we find

$$\begin{aligned} p(\omega, q, M, Q) &= \exp\left(-\pi \left\{ 2M \left[\sqrt{M^2 - Q^2} - \sqrt{(M - \omega)^2 - Q^2} \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\omega \left[2M + \sqrt{(M - \omega)^2 - Q^2} + 8(\xi + 1)F_{RN} \left(2M - \frac{Q^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi+1} \right] \right\} \right). \end{aligned} \quad (66)$$

Using the expression of $\beta_H^{RN_0}$ and leaving the added term by DE unchanged, we obtain

$$p(\omega, q, M, Q) = \exp\left(-\beta_H^{RN_0} \omega - 16\pi\omega(\xi + 1)F_{RN} \left(2M - \frac{Q^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi+1}\right). \quad (67)$$

Factorizing by $\beta_H^{RN_0} \omega$, this can be put as

$$p(\omega, q, M, Q) = \exp\left(-\beta_H^{RN_0} \omega \left\{ 1 + 8(\xi + 1)F_{RN} \left(2M - \frac{Q^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi+1} \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2} \right\} \right). \quad (68)$$

Considering the situation where the mass of the particle (ω) is very small compared to the black hole for only one power of $(2M - \frac{Q^2}{2(M - \omega)})$, we can find

$$p(\omega, q, M, Q) \simeq \exp\left(-\beta_H^{RN_0} \omega \left\{ 1 + 4(\xi + 1)F_{RN} \left(2M - \frac{Q^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi} \frac{2\sqrt{M^2 - Q^2}}{(M + \sqrt{M^2 - Q^2})} \right\} \right). \quad (69)$$

Taking $Q \ll M$, we can write $M \simeq \sqrt{M^2 - Q^2}$. In this way, the probability distribution takes the following form

$$p(\omega, q, M, Q) = \exp\left(-2\pi \frac{(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2}{\sqrt{M^2 - Q^2}} \left\{ 1 + 4(\xi + 1)F_{RN} \left(2M - \frac{Q^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi} \right\} \omega\right). \quad (70)$$

Using this equation, we get

$$\beta_H^{RN} = \frac{2\pi(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2}{\sqrt{M^2 - Q^2}} \left\{ 1 + 4(\xi + 1)F_{RN} \left(2M - \frac{Q^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi} \right\}. \quad (71)$$

It is expected that these calculation steps and approximations can be exploited for other black hole solutions including Kerr and Kerr-Newmann ones. The temperature of the RN black hole, in the presence of DE, reads as

$$T_H^{RN} = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{2\pi(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2} \left\{ 1 - 4(\xi + 1)F_{RN} \left(2M - \frac{Q^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi} \right\}. \quad (72)$$

Using (59), the Hawking temperature, with the existence of DE, takes the following form:

$$T_H^{RN} = T_H^{RN_0} \left\{ 1 - 4(\xi + 1)F_{RN} \left(2M - \frac{Q^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi} \right\}, \quad (73)$$

where we only kept the first order of F_{RN} . Introducing a modification factor

$$\lambda_{RN} = 4(\xi + 1)F_{RN} \left(2M - \frac{Q^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi}, \quad (74)$$

the Hawking temperature can be further put as

$$T_H^{RN} = T_H^{RN_0} (1 - \lambda_{RN}). \quad (75)$$

For $q \neq 0$, we obtain, however,

$$p(\omega, q, M, Q) = \exp \left(- 2\pi \frac{(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2}{\sqrt{M^2 - Q^2}} \right) \cdot \left\{ 1 + 4(\xi + 1)F_{RN} \left(2M - \frac{Q^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi} \eta \right\} (\omega - \omega_0), \quad (76)$$

where η is a function depending on the RN black hole parameters given by

$$\eta = \frac{1 - Qq/(2M\omega)}{1 - Qq/(\omega(M - \frac{Q^2}{2M}))} - \frac{M}{2M - \frac{Qq}{\omega} - \frac{Q^2}{2M}}. \quad (77)$$

Further calculations give

$$\beta_H^{RN} = \beta_H^{RN_0} \left\{ 1 + 4(\xi + 1)F_{RN} \left(2M - \frac{Q^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi} \eta \right\}. \quad (78)$$

Then, the temperature is

$$T_H^{RN} = T_H^{RN_0} \left\{ 1 - 4(\xi + 1)F_{RN} \left(2M - \frac{Q^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi} \eta \right\}. \quad (79)$$

It is remarked from (73) and (79) that DE makes the Hawking radiation colder. Taking $Q = 0$ and $q = 0$, we recover the Schwarzschild black hole case given by

$$\beta_H^{Sch} = 8\pi M [1 + 4(\xi + 1)M^{2\xi} F_{Sch}]. \quad (80)$$

This produces the ordinary temperature appearing in (46).

3.3 Dark information added by DE

To investigate the information carried by the Hawking radiation, we should use the von Neumann entropy $S_R = -\text{Tr}(\rho_R \ln \rho_R)$ of R which reads as

$$S_R = S_B - S(B'|R). \quad (81)$$

Here, $S(B'|R)$ is given by

$$S(B'|R) = \sum_r e^{-\Delta S_{BB'}(E_r, E)} S_{B'}(E - E_r), \quad (82)$$

which is the conditional entropy of B' . This shows that there is a correlation between R and B' . Taking low energy limit, *i.e.*, $E_r \ll E$, B' is approximated by keeping the first order of E_r . It is noted that $E(B'|R) \simeq S_{B'}(E_{B'})$. Here, $E_{B'} = E - E_R$ and $E_R = \sum_r \exp(-\Delta S_{BB'}(E_r, E)) E_r$ are the internal energies of B' and R , respectively. In other words, the correlation between R and B could be ignored when the energy of R is much smaller than that of B . This implies the existence of the thermal radiation discovered by Hawking [44, 45]. It turns out that the thermal spectrum of the black hole radiation is due to the ignorance of the correlation information between the black hole and its radiation. Concretely, this is also the primary cause of the black hole information loss [46].

It is recalled that the non-thermal radiation has been shown to be the origin of the information correlation between the emissions being radiated out from the horizon of the black hole. Consider the influence of DE on the dark information of neutral particles ($q = 0$). Indeed, the mutual information for two emissions ω_a and ω_b can be written as

$$I(a, b) = \sum_{\omega_a \omega_b} p_{a,b} \ln \left(\frac{p_{a,b}}{(p_a p_b)} \right). \quad (83)$$

In the case of the RN black hole, it follows, from (57), that the distribution probabilities for two particles a and b read as

$$\begin{aligned} p_a &= p(\omega_a, M) = \exp \left(-\beta_H^{RN} \omega_a + \Gamma_H^{RN} \omega_a^2 \right), \\ p_b &= p(\omega_b, M) = \exp \left(-\beta_H^{RN} \omega_b + \Gamma_H^{RN} \omega_b^2 \right). \end{aligned} \quad (84)$$

It is noted that β_H^{RN} is the inverse radiation temperature and Γ_H^{RN} given by

$$\Gamma_H^{RN} = 4\pi \left(1 + 4(\xi + 1)(2\xi + 1)F_{RN} \left(2M - \frac{Q^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi} \right). \quad (85)$$

Then, the joint probability takes the following form:

$$p_{a,b} = p(\omega_a, M) \cdot p(\omega_b, M') = \exp \left(-\beta_H^{RN} (\omega_a + \omega_b) + \Gamma_H^{RN} (\omega_a + \omega_b)^2 \right), \quad (86)$$

where $M' = M - \omega$. Using (84) and (86), the dark information becomes

$$I^{RN}(a, b) = 2\Gamma_H^{RN} E_a E_b, \quad (87)$$

where the internal energies of the particles a and b are given by

$$E_a = \sum_{\omega_a=0}^{\omega_a=M} p(\omega_a, M) \cdot \omega_a, \quad E_b = \sum_{\omega_b=0}^{\omega_b=M'} p(\omega_b, M') \cdot \omega_b. \quad (88)$$

Thus, the dark information for the RN black hole can be expressed as

$$I^{RN}(a, b) = 8\pi \left[1 + 4(2\xi + 1)(\xi + 1)F_{RN} \left(2M - \frac{Q^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi} \right] E_a E_b. \quad (89)$$

At this level, we wish to add some comments on this expression. The first comment concerns the fact that the mutual information between the emissions is proportional to their internal energies. Taking into account information correlation between the radiation particles, the present result can confirm that the RN black hole information is not lost. The second comment is that one can recover the results of [42]. Indeed, taking $Q = 0$, we find

$$I_{Sch}(a, b) = 8\pi [1 + 4(\xi + 1)(2\xi + 1)M^{2\xi} F_{Sch}] E_a E_b. \quad (90)$$

4 DE effects on rotating black holes

In this section, we investigate DE influences on the rotating black hole solutions. Precisely, we establish the associated spectrum.

4.1 Kerr black hole

First, we consider the Kerr black hole which is an uncharged black hole which rotates about a central axis. However, it has only mass and angular momentum considered as a possible generalization of the Schwarzschild black hole. This black hole, having spinning structure, involves two surfaces: the horizon, region from which no signal can escape and the Ergosphere which rotates so fast. Moreover, the relevant feature of such a black hole solution is that it describes all black holes without electric charges. It has been proposed that the Kerr solution can be considered as a general description of astrophysical black holes [57].

4.1.1 Radiation spectrum

According to [58,59], the metric of the Kerr black hole, in the presence of quintessence field, is given by

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr + cr^{1-3\omega_q}}{\Sigma} \right) dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - 2a \sin^2 \theta \left(\frac{2Mr + cr^{1-3\omega_q}}{\Sigma} \right) d\phi dt + \Sigma d\theta^2 + \sin^2 \theta \left\{ r^2 + a^2 + a^2 \sin^2 \theta \left(\frac{2Mr + cr^{1-3\omega_q}}{\Sigma} \right) \right\} d\phi^2, \quad (91)$$

where $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ and $a = \frac{J}{M}$. J and M are the spin and the mass of such a black hole, respectively. It is recalled that c is the quintessential parameter indicating the intensity of the quintessence energy contribution linked to the black hole metric via the relation

$$c = 2 \left(\frac{6}{\Lambda} \right)^{\frac{3\omega_q+1}{2}}. \quad (92)$$

In this black hole solution, we have

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 - cr^{1-3\omega_q}. \quad (93)$$

To get the outer horizon, we should solve the equation $\Delta = 0$. Without DE, we get $R_H^0 = M + \sqrt{M^2 - a^2}$. In the presence of DE, the solution of $\Delta = 0$ can be perturbatively put like $R_H^K = R_H^0 + \delta$. Taking $\delta/R_H^0 \ll 1$, we get

$$\delta_K = \frac{(M + \sqrt{M^2 - a^2})^{2\xi+2}}{\sqrt{M^2 - a^2}} \left(\frac{\Lambda}{6} \right)^\xi. \quad (94)$$

Thus, the corresponding horizon radius takes the following form:

$$R_H^K = M + \sqrt{M^2 - a^2} + \frac{(M + \sqrt{M^2 - a^2})^{2\xi+2}}{\sqrt{M^2 - a^2}} F_K. \quad (95)$$

In this black hole solution, the function F_K is given by

$$F_K = F_K(\xi, \Lambda) = \left(\frac{\Lambda}{6} \right)^\xi, \quad (96)$$

where we have only kept the first order of F_K . Taking $0 < |a| < M$, $\Delta = 0$ involves two solutions representing the inner and outer horizons.

Using the corrected horizon radius, we can write down the distribution probability of a particle with mass ω and spin j . Substituting the horizon radius (95) into (8), we can obtain the corrected radiation spectrum of the Kerr black hole. Here, the rotation rate a must be fixed in order to guarantee the conservation of the angular momentum and the energy. In this way, we should fix the total mass and the total angular momentum and allow the black hole mass and the angular momentum to fluctuate [58]. When a particle of spin $j = \omega \cdot a$ escapes out of the black hole, the angular momentum becomes $J = (M - \omega) \cdot a$. Using similar technics exploited in the RN black hole and substituting (95) in (8), we find

$$R_K^2(M, J) - R_K^2(M - \omega, J - j) = \left(M + \sqrt{M^2 - a^2} \right)^2 - \left(M - \omega + \sqrt{(M - \omega)^2 - a^2} \right)^2 + 2F_K \left\{ \frac{(M + \sqrt{M^2 - a^2})^{2\xi+3}}{\sqrt{M^2 - a^2}} - \frac{(M - \omega + \sqrt{(M - \omega)^2 - a^2})^{2\xi+3}}{\sqrt{(M - \omega)^2 - a^2}} \right\}, \quad (97)$$

up to the first order of F_K . An examination shows difficulties in dealing with such an expression due to the square root and the difference in the denominators appearing in the second term. To evince this difficulty, we proceed in the same way as we have done for the RN black hole. Concretely, we assume that the mass is bigger than the spin. In the slow rotation rate regime, this is considered as a physical assumption. Roughly, we get

$$R_K^2(M, J) - R_K^2(M - \omega, J - j) = \left(M + \sqrt{M^2 - a^2}\right)^2 - \left(M - \omega + \sqrt{(M - \omega)^2 - a^2}\right)^2 + 4F_K \left\{ \left(M + \sqrt{M^2 - a^2}\right)^{2\xi+2} - \left(M - \omega + \sqrt{(M - \omega)^2 - a^2}\right)^{2\xi+2} \right\}. \quad (98)$$

Using $\sqrt{1-x} \simeq 1 - \frac{x}{2}$, the final distribution probability reads as

$$p(\omega, j, M, J) = \exp \left[-\pi \left\{ 2M\sqrt{M^2 - a^2} - 2(M - \omega)\sqrt{(M - \omega)^2 - a^2} + 4\omega \left[M + 4(\xi + 1)F_K \left(2M - \frac{a^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi+1} \right] - 2\omega^2 \left[1 + 8(\xi + 1)(2\xi + 1)F_K \left(2M - \frac{a^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi} \right] \right\} \right], \quad (99)$$

where we have kept the second order of ω , and the higher orders are omitted. It is observed clearly the dependence of the radiation spectrum on ξ and Λ . It is noted that the Schwarzschild radiation spectrum can be recovered by sending a to zero.

4.1.2 Evaporation process of Kerr black hole

We move now to discuss the modified Hawking temperature for the Kerr black hole in the presence of DE. For the ordinary Kerr black hole, one has

$$T_H^{K_0} = \frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{4\pi(M^2 + M\sqrt{M^2 - a^2})}. \quad (100)$$

In the case of black hole with a large mass, *i.e.*, $M \gg 1$, the non-thermal part of the radiation spectrum can be ignored. Thus, the approximated thermal distribution probability takes the following form:

$$p(\omega, j, M, J) = \exp \left[-\pi \left\{ 2M\sqrt{M^2 - a^2} - 2(M - \omega)\sqrt{(M - \omega)^2 - a^2} + 4\omega \left[M + 4(\xi + 1)F_K \left(2M - \frac{a^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi+1} \right] \right\} \right]. \quad (101)$$

It is remarked that when the effect of the DE vanishes, assured by $F_K \rightarrow 0$, such a distribution reduces to the Hawking radiation spectrum

$$p(\omega, j, M, J) = \exp \left[-\pi \left\{ 4M\omega + 2M\sqrt{M^2 - a^2} - 2(M - \omega)\sqrt{(M - \omega)^2 - a^2} \right\} \right]. \quad (102)$$

Using (102) and an appropriate approximation, we obtain

$$p(\omega, j, M, J) = \exp(-\beta_H^{K_0}\omega) = \exp \left(-4\pi \frac{(M^2 + M\sqrt{M^2 - a^2})}{\sqrt{M^2 - a^2}} \omega \right), \quad (103)$$

where $\beta_H^{K_0}$ reads as

$$\beta_H^{K_0} = 4\pi \frac{(M^2 + M\sqrt{M^2 - a^2})}{\sqrt{M^2 - a^2}}. \quad (104)$$

It is noted that this agrees with the result of [60] obtained using quantum tunneling approach. In the presence of DE, however, we find

$$p(\omega, j, M, J) = \exp \left\{ \frac{-4\pi(M^2 + M\sqrt{M^2 - a^2})}{\sqrt{M^2 - a^2}} \right. \\ \left. \times \left(1 + 4(\xi + 1)F_K \left(2M - \frac{a^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi} \left(1 - \frac{a^2}{2M^2} \right) \right) \omega \right\}. \quad (105)$$

This gives

$$\beta_H^K = \frac{4\pi(M^2 + M\sqrt{M^2 - a^2})}{\sqrt{M^2 - a^2}} \left(1 + 4(\xi + 1)F_K \left(2M - \frac{a^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi} \left(1 - \frac{a^2}{2M^2} \right) \right). \quad (106)$$

Thus, the corresponding Hawking temperature reads as

$$T_H^K = \frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{4\pi(M^2 + M\sqrt{M^2 - a^2})} \left(1 - 4(\xi + 1)F_K \left(2M - \frac{a^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi} \left(1 - \frac{a^2}{2M^2} \right) \right). \quad (107)$$

Using (100), the Hawking temperature can be rewritten as

$$T_H^K = T_H^{K_0} \left(1 - 4(\xi + 1)F_K \left(2M - \frac{a^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi} \left(1 - \frac{a^2}{2M^2} \right) \right). \quad (108)$$

Introducing a modification factor

$$\lambda_K = 4(\xi + 1)F_K \left(2M - \frac{a^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi} \left(1 - \frac{a^2}{2M^2} \right), \quad (109)$$

the Hawking temperature can be further simplified as

$$T_H^K = T_H^0(1 - \lambda_K). \quad (110)$$

It is worth noting that (106) confirms the previous results proposing that DE makes the Hawking radiation colder.

4.1.3 Dark information added by DE

To extract dark information associated with the Kerr black hole, we can use the analysis adopted for the previous black solutions. This is achieved naively by a direct calculation. Indeed, the corresponding dark information takes the following form:

$$I_K(a, b) = 8\pi \left[1 + 4(2\xi + 1)(\xi + 1)F_K \left(2M - \frac{a^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi} \right] E_a E_b. \quad (111)$$

This finding matches perfectly with the fact that the black hole information is not lost, when we consider information correlations between radiated particles.

4.2 Kerr Newmann black hole

In this subsection, we discuss the Kerr-Newmann black hole involving three hairs (M, Q, J) . In this way, one might exploit the technical calculations used in the investigation of RN and Kerr black holes. In what follows, we give only the main results.

4.2.1 Radiation spectrum

According to [61,62], the line element, of such a black hole solution, can be written as

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr - Q^2}{\Sigma} \right) dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - 2a \sin^2 \theta \left(\frac{2Mr - Q^2}{\Sigma} \right) d\phi dt + \Sigma d\theta^2 + \sin^2 \theta \left[r^2 + a^2 + a^2 \sin^2 \theta \left(\frac{2Mr - Q^2}{\Sigma} \right) \right] d\phi^2. \quad (112)$$

In the presence of quintessence field, this expression becomes

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr - Q^2 + cr^{1-3\omega_q}}{\Sigma} \right) dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - 2a \sin^2 \theta \left(\frac{2Mr - Q^2 + cr^{1-3\omega_q}}{\Sigma} \right) d\phi dt + \Sigma d\theta^2 + \sin^2 \theta \left[r^2 + a^2 + a^2 \sin^2 \theta \left(\frac{2Mr - Q^2 + cr^{1-3\omega_q}}{\Sigma} \right) \right] d\phi^2, \quad (113)$$

where

$$\Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 - 2r^2 \left(\frac{6}{\Lambda r^2} \right)^{\frac{3\omega_q + 1}{2}}. \quad (114)$$

As the previous cases, the horizon radius can be obtained from the above equation. Using the previous analysis and taking the horizon radius of the ordinary Kerr-Newmann black hole

$$R_H^{KN_0} = M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}, \quad (115)$$

we can obtain

$$\delta_{KN} = \frac{(M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2})^{2\xi+2}}{\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}} \left(\frac{\Lambda}{6} \right)^\xi. \quad (116)$$

Then, the associated horizon radius is given by

$$R_H^{KN} = R_H^{KN_0} + \frac{(M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2})^{2\xi+2}}{\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}} F_{KN}(\xi, \Lambda). \quad (117)$$

Here, the function F_{KN} reads as

$$F_{KN} = F_{KN}(\xi, \Lambda) = \left(\frac{\Lambda}{6} \right)^\xi, \quad (118)$$

where we have only kept the first order of F_{KN} . This corrected horizon radius allows one to derive the distribution probability of a particle with mass ω , charge q and a spin j . Using the statistical mechanical method and substituting the horizon radius (117) into (8), we obtain then the corrected radiation spectrum of the Kerr Newmann black hole. When the rotation rate a is fixed, the angular momentum and the energy are conserved. With the right approximations, the distribution probability reads as

$$p(\omega, q, j, M, Q, J) = \exp \left[- \pi \left\{ 2M \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} - 2(M - \omega) \sqrt{(M - \omega)^2 - (Q - q)^2 - a^2} + 4M\omega - 2\omega^2 - 2Qq + q^2 + 8(\xi + 1)F_{KN} \left(2M - \frac{Q^2 + a^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi+1} \left(2\omega + q \cdot \frac{q - 2Q}{2(M - \omega)} \right) - 4(2\xi + 1)(\xi + 1)F_{KN} \left(2M - \frac{Q^2 + a^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi} \left(2\omega + q \cdot \frac{q - 2Q}{2(M - \omega)} \right)^2 \right\} \right], \quad (119)$$

where we have kept the second order of ω and q , and the higher orders are ignored. We can clearly observe that the radiation spectrum depends on ξ and Λ . Putting $a = 0$ and $Q = 0$, we can recover the Schwarzschild radiation spectrum. RN and Kerr radiation spectrums are also obtained by taking $a = 0$ and $Q = 0$, respectively.

4.2.2 Evaporation process of Kerr Newmann black hole

Here, we study the modified Hawking temperature for the Kerr Newmann black hole in the presence of DE. It is recalled that the ordinary temperature is

$$T_H^{KN_0} = \frac{\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}}{4\pi(M^2 + M\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} - Q^2/2)}. \quad (120)$$

For large mass, *i.e.*, $M \gg 1$, the non-thermal part of the radiation spectrum can be ignored. In this way, the approximated thermal distribution probability is

$$p(\omega, q, j, M, Q, J) = \exp \left[-\pi \left\{ 2M\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} - 2(M - \omega)\sqrt{(M - \omega)^2 - (Q - q)^2 - a^2} \right. \right. \\ \left. \left. + 4M\omega - 2Qq + 8(\xi + 1)F_{KN} \left(2M - \frac{Q^2 + a^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi+1} \left(2\omega + q \cdot \frac{q - 2Q}{2(M - \omega)} \right) \right\} \right]. \quad (121)$$

Considering the limit $F_{KN} \rightarrow 0$, the above distribution reduces to the Hawking radiation spectrum

$$p(\omega, q, j, M, Q, J) = \exp \left[-\pi \left\{ 2M\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} - 2(M - \omega)\sqrt{(M - \omega)^2 - (Q - q)^2 - a^2} + 4M\omega - 2Qq \right\} \right]. \quad (122)$$

Using (122) and the right approximation, we get

$$p(\omega, q, j, M, Q, J) = \exp \left(-\beta_H^{KN_0} \omega \right) = \exp \left(\frac{-4\pi(M^2 + M\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} - \frac{Q^2}{2})}{\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}} \omega \right). \quad (123)$$

This result matches perfectly with the work reported in [63,64] using quantum tunneling approach. When DE is present and the radiated particle is uncharged, we obtain

$$p(\omega, j, M, J) = \exp \left\{ \frac{-4\pi(M^2 + M\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} - \frac{Q^2}{2})}{\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}} \right. \\ \left. \times \left(1 + 4(\xi + 1)F_{KN} \left(2M - \frac{Q^2 + a^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi} \left(1 - \frac{a^2}{2M^2} \right) \right) \omega \right\}. \quad (124)$$

In this way, β_H^{KN} takes the form

$$\beta_H^{KN} = \frac{4\pi(M^2 + M\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} - \frac{Q^2}{2})}{\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}} \left(1 + 4(\xi + 1)F_{KN} \left(2M - \frac{Q^2 + a^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi} \left(1 - \frac{a^2}{2M^2} \right) \right). \quad (125)$$

Then, the Hawking temperature is

$$T_H^{KN} = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}}{4\pi(M^2 + M\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} - \frac{Q^2}{2})} \left(1 - 4(\xi + 1)F_{KN} \left(2M - \frac{Q^2 + a^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi} \left(1 - \frac{a^2}{2M^2} \right) \right). \quad (126)$$

Using (120), the Hawking temperature can be put as

$$T_H^{KN} = T_H^{KN_0} \left(1 - 4(\xi + 1)F_{KN} \left(2M - \frac{Q^2 + a^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi} \left(1 - \frac{a^2}{2M^2} \right) \right). \quad (127)$$

Introducing a modification factor

$$\lambda_{KN} = 4(\xi + 1)F_{KN} \left(2M - \frac{Q^2 + a^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi} \left(1 - \frac{a^2}{2M^2} \right), \quad (128)$$

the Hawking temperature can be further simplified as

$$T_H^{KN} = T_H^{KN_0} (1 - \lambda_{KN}). \quad (129)$$

It follows from (125) that DE makes the Hawking radiation colder.

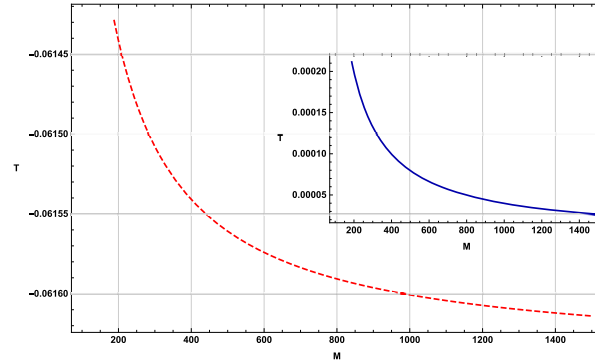


Fig. 1. Schwarzschild temperature in the presence of DE (red dashed line) and without DE blue. Note that $\xi = \frac{1}{2}$.

4.2.3 Dark information added by DE

In the present black hole solution, the dark information can be computed using the same method. However, we give just the obtained calculation. Indeed, we have

$$I_{KN}(a, b) = 8\pi \left[1 + 4(2\xi + 1)(\xi + 1)F_{KN} \left(2M - \frac{Q^2 + a^2}{2(M - \omega)} \right)^{2\xi} \right] E_a E_b. \quad (130)$$

When the information correlation between the radiation particles is taken into account, this confirms the idea that the black hole information is not lost.

5 Results and discussions

In this section, we present the result of our analysis. A close inspection shows that DE increases the black hole size. This can be understood from the horizon radii of Schwarzschild (39), RN (52), Kerr (95) and Kerr Newmann (117) being a consequence of the repulsion effect. Beside, the function F_{Sch} , appearing in (40), takes its maximum value for the Schwarzschild black hole case which is $(\frac{2A}{3})^\xi$. However, this function becomes $(\frac{A}{6})^\xi$ for the RN black hole, kerr black hole or Kerr-Newmann black hole. By comparing these functions, the influence of DE on the Schwarzschild black hole is more relevant. It turns out that the enhancement in the size of the black hole corresponds to the loose of temperature. This can be understood from the fact that the resulting surface gravity, which is inversely proportional to the black hole horizon square, decreases. Thus, the temperature, being proportional to the surface gravity, decreases as well. This result matches with the DE cooling mechanism (DECM) where DE decreases the Hawking temperature in the space expansion context.

It is noted that the factor λ_i where $i = \text{Sch, RN, K, KN}$ is proportional to the mass. This means that the influence of DE on the Hawking temperature increases with the black hole mass. Moreover, in the black-body radiation theory, the lower temperature is associated with the smaller radiation power. Thus, the evaporation of such black holes will be longer.

To understand such thermodynamical behaviors, we plot the black hole temperatures in terms of the mass in the presence and the absence of DE.

In fig. 1, we illustrate the case of the Schwarzschild black hole temperature with DE (red) and without dark energy (blue). It follows from this figure that the DE leads to less temperature. In this way, the black hole takes more time to evaporate, keeping the behavior associated with the absence of DE.

In fig. 2, we plot the case of the RN black hole. It is observed the same behavior as the Schwarzschild case. To evince the extremal case ($Q = M$), we should take only the values of M verifying $Q < M$. As expected, the temperature decreases in the presence of DE providing a long time evaporation.

The case of the Kerr black hole is presented in fig. 3. With or without DE, it is noted similar behaviors as the Schwarzschild case. Avoiding the extremal case and taking $a < M$, we find the same results as the previous ones.

In fig. 4, we plot the Kerr-Newman case. It is observed the same behavior as the Schwarzschild black hole when DE is absent. It is recalled that the extremal case is constrained by $a^2 + Q^2 = M^2$ representing a circle in the black hole moduli space. Far from such a region, we recover the same results as the previous black holes.

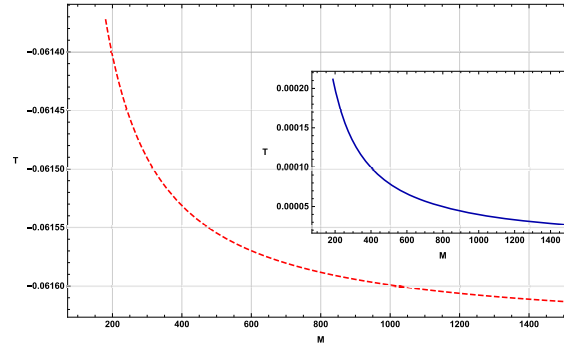


Fig. 2. Reissner Nordstrom temperature in the presence of dark energy (red dashed line) and without dark energy (blue), where we have used $Q = 10$, $\xi = \frac{1}{2}$ and $\omega = -\frac{2}{3}$.

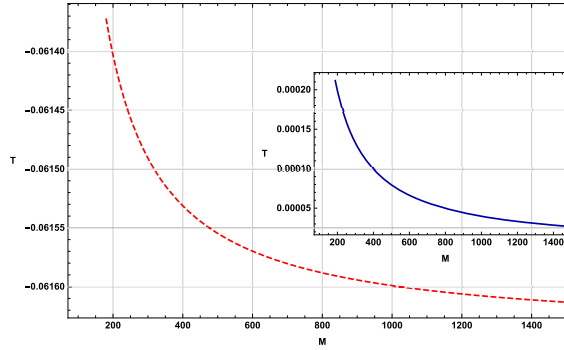


Fig. 3. Kerr temperature in the presence of dark energy (red dashed line) and without dark energy (blue), with $a = 10$, $\xi = \frac{1}{2}$ and $\omega = -\frac{2}{3}$.

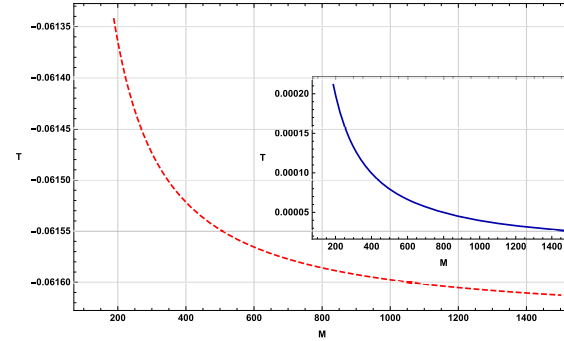


Fig. 4. Kerr-Newmann temperature in the presence of dark energy (red dashed line) and without dark energy (blue). With $Q = 10$, $a = 10$, $\xi = \frac{1}{2}$ and $\omega = -\frac{2}{3}$.

6 Conclusion and open questions

In this paper, we have investigated the effect of DE on charged and rotating black holes. Using a statistical method, we have presented the associated radiation spectrum, the Hawking temperature and dark information of such black holes. These results match perfectly with the ones corresponding to the Schwarzschild black hole. Sending the extra black hole parameters to zero, we have obtained the spectrum expression of such a black hole. Then, we have analyzed in some details the finding of the present work. Indeed, it has been confirmed that DE can behave as a cooling system surrounding the black hole. This produces a colder radiation and a slower Hawking radiation process. A close examination on these results reveals that $T_{KN} > T_K > T_{RN} > T_{Sch}$. Thus, this leads to $R_{Sch} > R_{RN} > R_K > R_{KN}$.

This work comes up with many open questions. For instance, we intend to discuss elsewhere the extension of this explicit study to the other black holes. It would be of interest to study the effect of non trivial backgrounds on black hole spectrums. Moreover, four and higher dimensional black holes have been extensively discussed in connection with string theory and related topics including attractor mechanism associated with the Calabi-Yau compactifications [65, 66]. It will be then an interesting task to investigate such black solutions embedded in non trivial supergravity theories. We believe that these complimentary methods deserve to be studied further.

Publisher's Note The EPJ Publishers remain neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.

References

1. G.W. Gibbons, S.W. Hawking, Phys. Rev. D **15**, 2752 (1977).
2. S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Application of the General Theory of Relativity* (John Wiley & Sons, New York, USA, 1972).
3. D.N. Page, New J. Phys. **7**, 203 (2005).
4. C. Rong-Gen, Phys. Rev. D **65**, 084014 (2002).
5. M.M. Caldarelli, G. Cognola, D. Klemm, Class. Quantum Grav. **17**, 399 (2000).
6. D. Kastor, S. Ray, J. Traschen, Class. Quantum Grav. **26**, 195011 (2009), arXiv:0904.2765 [hep-th].
7. A. Belhaj, M. Chabab, H. El Moumni, M.B. Sedra, Chin. Phys. Lett. **29**, 100401 (2012).
8. A. Belhaj, M. Chabab, H. El Moumni, L. Medari, M.B. Sedra, Chin. Phys. Lett. **30**, 090402 (2013).
9. A. Belhaj, M. Chabab, H. El Moumni, K. Masmar, M.B. Sedra, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. **12**, 1550017 (2014).
10. A. Belhaj, M. Chabab, H. El moumni, K. Masmar, M.B. Sedra, Eur. Phys. J. C **75**, 71 (2015).
11. A. Belhaj, M. Chabab, H. El Moumni, K. Masmar, M.B. Sedra, A. Segui, J. High Energy Phys. **05**, 149 (2015).
12. A. Belhaj, M. Chabab, H. El Moumni, K. Masmar, M.B. Sedra, Eur. Phys. J. C **76**, 73 (2016).
13. M. Chabab, H. El Moumni, K. Masmar, Eur. Phys. J. C **76**, 304 (2016).
14. M. Chabab, H. El Moumni, S. Iraoui, K. Masmar, Eur. Phys. J. C **76**, 676 (2016).
15. H. El Moumni, Int. J. Theor. Phys. **56**, 554 (2017).
16. M. Chabab, H. El Moumni, S. Iraoui, K. Masmar, Astrophys. Space Sci. **362**, 192 (2017).
17. A. Belhaj, H. El Moumni, Nucl. Phys. B **938**, 200 (2019).
18. R. Fardon, A.E. Nelson, N. Weiner, J. Cosmol. Astropart. Phys. **10**, 005 (2004).
19. E.J. Copeland, M. Sami, S. Tsujikawa, Int. J. Mod. Phys. D **15**, 1753 (2006).
20. D.N. Spergel *et al.*, arXiv:astro-ph/0603449.
21. M. Tegmark *et al.*, Phys. Rev. D **74**, 123507 (2006).
22. S.D.H. Hsu, Phys. Lett. B **594**, 13 (2004).
23. R.R. Caldwell, M. Kamionkowski, N.N. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **91**, 071301 (2003).
24. M. Chabab, H. El Moumni, S. Iraoui, K. Masmar, S. Zhizeh, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. **15**, 1850171 (2018).
25. G.Q. Li, Phys. Lett. B **735**, 256 (2014) arXiv:1407.0011 [gr-qc].
26. V.V. Kiselev, Class. Quantum Grav. **20**, 1187 (2003) gr-qc/0210040.
27. S. Chen, J. Jing, Class. Quantum Grav. **22**, 4651 (2005) gr-qc/0511085.
28. S. Chen, B. Wang, R. Su, Phys. Rev. D **77**, 124011 (2008) arXiv: 0801.2053.
29. G.G. Sushant, Eur. Phys. J. C **76**, 222 (2016) arXiv:1512.05476.
30. Z. Xu, J. Wang, Phys. Rev. D **95**, 064015 (2017) arXiv:1609.02045.
31. E. Spallucci, A. Smailagic, J. Grav. **2013**, 525696 (2013) arXiv:1310.2186.
32. S. Chen, B. Wang, R. Su, Phys. Rev. D **77**, 124011 (2008) arXiv:0801.2053 [gr-qc].
33. H. Liu, X.H. Meng, arXiv:1704.04363 [hep-th].
34. J. Schee, Z. Stuchlik, Eur. Phys. J. C **76**, 643 (2016) arXiv:1606.09037 [astro-ph.HE].
35. M. Azreg-Aïnou, M.E. Rodrigues, JHEP **09**, 146 (2013) arXiv:1211.5909 [gr-qc].
36. Y.H. Wei, Z.H. Chu, Chin. Phys. Lett. **28**, 100403 (2011).
37. M.S. Ma, R. Zhao, Y.Q. Ma, Gen. Relativ. Gravit. **49**, 79 (2017) arXiv:1606.06070 [gr-qc].
38. H. Dong, Q.Y. Cai, X.F. Liu *et al.*, Commun. Theor. Phys **61**, 289 (2014).
39. H. Tasaki, Phys. Rev. Lett. **80**, 1373 (1998).
40. S. Goldstein, J.L. Lebowitz, R. Tumulka, N. Zanghi, Phys. Rev. Lett. **96**, 050403 (2006).
41. S. Popescu, A.J. Short, A. Winter, Nat. Phys. **2**, 758 (2006).
42. Y. Ma, J. Chen, C. Sun, Nucl. Phys. B **931**, 418 (2018).
43. Q.Y. Cai, C.P. Sun, L. You, Nucl. Phys. B **905**, 327 (2016).
44. S.W. Hawking, Nature **30**, 248 (1974).
45. S.W. Hawking, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975).
46. Y.H. Ma, Q.-Y. Cai, H. Dong, C.-P. Sun, EPL **122**, 30001 (2018).
47. S. Hemming, E. Keski-Vakkuri, Phys. Rev. D **64**, 044006 (2001).
48. R. Schützhold, W.G. Unruh, Phys. Rev. D **66**, 124009 (2002).

49. M. Alves, Int. J. Mod. Phys. D **10**, 575 (2001).
50. E.C. Vagenas, Mod. Phys. Lett. A **17**, 609 (2002).
51. E.C. Vagenas, Phys. Lett. B **533**, 302 (2002).
52. E.C. Vagenas, Mod. Phys. Lett. A **20**, 2449 (2005).
53. M. Arzano, A.J.M. Medved, E.C. Vagenas, J. High Energy Phys. **0509**, 037 (2005).
54. M.K. Parikh, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **85**, 5042 (2000).
55. H.J. He, Z. Zhang, JCAP **08**, 036 (2017).
56. J. Pu, Y. Han, Int. J. Theor. Phys. **56**, 2485 (2017).
57. C.D. Robinson, Phys. Rev. Lett. **34**, 905 (1975).
58. B. Toshmatov, Z. Stuchlik, B. Ahmedov, Eur. Phys. J. Plus **132**, 98 (2017).
59. M. Reinhard, Ann. Phys. **11**, 509 (2002).
60. Z. Jingyi, Z. Zhao, Mod. Phys. Lett. A **20**, 1673 (2005).
61. E.T. Newman, R. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash, R. Torrence, J. Math. Phys. **6**, 918 (1965).
62. C. Doran, Phys. Rev. D **61**, 067503 (2000).
63. J. Qing-Quan, S.Q. Wu, X. Cai, Phys. Rev. D **73**, 064003 (2006).
64. R. Kerner, Robert B. Mann, Phys. Lett. B **665**, 277 (2008).
65. H. Ooguri, A. Strominger, C. Vafa, Phys. Rev. D **70**, 106007 (2004).
66. A. Belhaj, Afr. J. Math. Phys. **6**, 49 (2008) arXiv:0809.1114.

Article 2

Titre: Kerr-AdS Black Hole Behaviors from Dark Energy

Auteurs: A. Belhaj, A. El Balali, W. El Hadri, M. A. Essebani, M. B. Sedra, A. Segui

Journal: International Journal of Modern Physics D (2020)

Résumé:

Nous étudions le comportement critique du trou noir de Kerr-AdS à quatre dimensions en présence de l'énergie noire. En utilisant un espace de modules, contrôlé par le paramètre d'état de l'énergie noire ω et l'intensité de champ de quintessence α , nous traitons trois modèles (ω). En calculant les quantités thermodynamiques pertinentes notées $X^{(\omega)}$, nous trouvons des similarités relevantes. Précisément, pour le modèle $(-\frac{1}{3})$, nous montrons que les contributions de l'énergie noire stabilisent le trou noir associé. Cependant, pour le modèle (-1) , nous obtenons un effet de l'énergie noire inversé. Tandis que dans le modèle $(-\frac{2}{3})$, le trou noir de Kerr-AdS révèlent une résistance aux effets habituels de l'énergie noire. Une analyse approfondie, montre que les modèles (ω) fournissent des rapports universels similaires associés à certaines quantités thermodynamiques critiques.

Kerr-AdS black hole behaviors from dark energy

A. Belhaj^{*,¶}, A. El Balali^{*}, W. El Hadri^{*}, M. A. Essebani[†],
 M. B. Sedra^{†,‡} and A. Segui[§]

^{*}*Equipe des Sciences de la matière et du Rayonnement, ESMAR
 Faculté des Sciences Université Mohammed V de Rabat, Morocco*

[†]*Département de Physique, LabSIMO, Faculté des Sciences
 Université Ibn Tofail Kénitra, Morocco*

[‡]*Faculté des Sciences et techniques d'Errachidia
 Université Moulay Ismail, Errachidia, Morocco*

[§]*Departamento de física teórica, Universidad de Zaragoza,
 Zaragoza E-50009, Spain*
[¶]*belhajadil@fsr.ac.ma*

Received 24 March 2020

Revised 17 May 2020

Accepted 18 May 2020

Published 9 July 2020

We investigate the critical behaviors of four-dimensional Kerr-AdS black holes from quintessential Dark Energy (DE) contributions. Using a moduli space, coordinated by the DE state parameter ω and the quintessence field intensity α , we deal with three different (ω) -models. By elaborating analytical formulas of relevant thermodynamical quantities denoted by $X^{(\omega)}$, we find significant similarities and distinctions. Precisely, for the $(-\frac{1}{3})$ -model, we show that DE contributions stabilize such black holes. For the (-1) -model, however, we get a reversed DE effect. In the $(-\frac{2}{3})$ -model, Kerr-AdS black holes reveal a resistance regarding the usual DE effects. Exploiting the explicit formulas of such thermodynamical quantities, we give certain physical interpretations for thermal behaviors. Although such relevant distinctions, we show that the (ω) -models involve similar universal ratios associated with certain critical thermodynamical quantities. Then, we analyze the photon orbits in the presence of DE.

Keywords: Kerr-AdS black holes; thermodynamics; quintessential dark energy.

1. Introduction

Recently, black hole thermodynamic systems have been extensively investigated using different approaches including analytic and numerical ones.^{1–7} These efforts have been supported by the fact that such systems have various similarities with known thermodynamic models. Such similarities appear naturally in the study of black holes in AdS geometries in different dimensions. The corresponding thermodynamical properties have been discussed first in Ref. 8. After, this has been generalized to other solutions including charged and rotating AdS black holes. In

particular, it has been revealed that the charged AdS black holes involve Van der Waals-like phase transitions. Concretely, various investigations have been elaborated by interpreting the cosmological constant as the pressure and its conjugate as the volume.^{9–11} In this way, a nice relation has been obtained between the behavior of the RN-AdS black hole systems and the Van der Waals fluids.^{12–14} Precisely, the associated $P - V$ criticality can be linked to the liquid–gas statistical systems. This type of criticality, depending on the AdS black hole space time dimension, provides nontrivial behavioral results.^{15–17} Furthermore, several phase transitions of various black holes have been explored. Concretely, the second-order phase transition of four-dimensional Kerr-AdS black holes has been investigated in Refs.¹⁸ and.¹⁹ Critical phenomena of extended Kerr-AdS black holes in the phase space have been also studied in Ref. 20. Specifically, many numerical approaches have been developed to compute the involved thermodynamical quantities including the Gibbs free energy. The latter has been considered as a relevant quantity to discuss the corresponding Kerr-AdS black hole phase transitions.

More recently, dark matter (DM) and dark energy (DE) have been implemented in the study of black hole thermodynamics by extending the associated space parameter describing nontrivial contributions.^{21–25} It is realized that DE, being still an open subject question, has been approached using the ratio quantity $\omega = \frac{p_{\text{dark}}}{\rho_{\text{dark}}}$, interpreted as the equation of state. Various DE contributions have been investigated in terms of such a ratio belonging to the range $[-1, 0]$. Effectively, the quintessence, with intensity α , corresponding to the range $[-1, -\frac{1}{3}]$, considered as a scalar field having negative pressure has been introduced to investigate the DE effects on the black hole physics.^{26–28} Among others, it has been suggested that DE can be considered as a cooling mechanism affecting the black hole thermodynamical behaviors.^{29, 30}

The aim of this work is to contribute to these activities by studying critical behaviors of the four-dimensional Kerr-AdS black holes from quintessential DE. This study is made in terms of the DE moduli space parameterized by α and ω . These two parameters, together with the angular velocity Ω , control the four-dimensional Kerr-AdS black hole transition behaviors. More precisely, we investigate three different models based on particular values of ω by giving analytical formulas of the corresponding thermodynamical quantities referred to as $X^{(\omega)}$. Among others, we obtain significant similarities and distinctions for such (ω) -models. For the $(-\frac{1}{3})$ -models, DE contributions stabilize the four-dimensional Kerr-AdS black hole. However, for both $(-\frac{2}{3})$ and (-1) -models, we observe significant distinctions. For instance, the (-1) -model exhibits a reversed DE effect regarding the associated thermodynamical quantities. Dealing with the $(-\frac{2}{3})$ -model, we find that the Kerr-AdS black holes resist the DE effects. Analyzing the (ω) -model results, we discuss the associated thermal behavior and certain universalities of critical phase transition points. Moreover, we investigate the DE effect on the photon orbits for the three (ω) -models and make contacts with some known results. In this work, we use dimensionless units $\hbar = c = G = k_B = 1$.

The organization of the paper is as follows. In Sec. 2, we present a concise review on the ordinary properties of four-dimensional Kerr-AdS black holes which will be exploited to discuss the DE effect in Sec. 3. Some results and discussions on thermal behaviors and certain phase transition points, in terms of universality ratios, are given in Sec. 4. In Sec. 5, we inspect the DE effect on the photon orbits for the three (ω)-models and make contact with some known results. The last section is devoted to conclusion and open questions.

2. Ordinary Kerr-AdS black hole phase transitions

Before studying the behavior of four-dimensional Kerr-AdS black holes in the presence of quintessential DE, we first give a concise review on its ordinary thermodynamic phase structure properties. Following Refs. 31–33, the Kerr-AdS black hole is considered as a rotating solution which can be derived from the Gibbons–Hawking action. According to Ref. 34, the Kerr-AdS metric of the four-dimensional rotating black hole reads as

$$ds^2 = \frac{\Sigma^2}{\Delta_r} dr^2 + \frac{\Sigma^2}{\Delta_\theta} d\theta^2 + \frac{\Delta_\theta \sin^2 \theta}{\Sigma^2} \left(a \frac{dt}{\Xi} - (r^2 + a^2) \frac{d\phi}{\Xi} \right)^2 - \frac{\Delta_r}{\Sigma^2} \left(\frac{dt}{\Xi} - a \sin^2 \theta \frac{d\phi}{\Xi} \right)^2, \quad (2.1)$$

where one has the following form:

$$\begin{aligned} \Delta_r &= r^2 - 2Mr + a^2 + \frac{r^2}{\ell^2}(r^2 + a^2), & \Delta_\theta &= 1 - \frac{a^2}{\ell^2} \cos^2 \theta, \\ \Xi &= 1 - \frac{a^2}{\ell^2}, & \Sigma^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \end{aligned} \quad (2.2)$$

In thermodynamical activities, ℓ representing the AdS curvature can be related to the pressure P given by

$$P = \frac{3}{8\pi\ell^2} = -\frac{\Lambda}{8\pi}. \quad (2.3)$$

The metric parameters m and a , appearing in the previous equations, are linked to the black hole mass M and the angular momentum J , respectively, as

$$M = \frac{m}{\Xi^2}, \quad J = \frac{am}{\Xi^2}. \quad (2.4)$$

The mass of the black hole M can be determined by imposing the constraint $\Delta_r(r_+) = 0$. Indeed, we find

$$M = \frac{(r_+^2 + a^2)(r_+^2 + \ell^2)}{2r_+\ell^2}. \quad (2.5)$$

Following Ref. 35, the Bekenstein–Hawking entropy reads as

$$S = \pi \frac{(r_+^2 + a^2)}{\Xi}. \quad (2.6)$$

2050069-3

Using $\Delta_r(r_+) = 0$, (2.4) and (2.6), one can get an extended Smarr formula for the Kerr-AdS black hole in four dimensions. Concretely, the calculation gives the following result:

$$M(S, J) = \left(\frac{\pi}{4S} \left\{ \frac{4SJ^2}{\pi\ell^2} + 4J^2 + \left[\frac{S^2}{\pi^2\ell^2} + \frac{S}{\pi} \right]^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.7)$$

To get elegant relations, it is convenient to use a suitable scaling redefinition $T\ell \rightarrow T$, $\frac{M}{\ell} \rightarrow M$, $\frac{J}{\ell^2} \rightarrow J$, $\frac{S}{\ell^2} \rightarrow S$, $\Omega\ell \rightarrow \Omega$. In this way, ℓ no longer appears in the thermodynamical quantities.¹⁸ To study the Kerr-AdS black hole thermodynamical properties, one should compute the associated quantities using known laws.³³ It is noted that the first law of thermodynamics of such a black hole is expressed as

$$dM = TdS + \Omega dJ, \quad (2.8)$$

where T is the Hawking temperature. Here, Ω denotes the difference between the angular velocities at the event horizon (Ω_h) and at infinity (Ω_∞).³⁶ Following Ref. 18, the temperature, for instance, reads as

$$T(S, J) = \frac{1}{8\pi M} \left(1 - \frac{4\pi^2 J^2}{S^2} + \frac{4S}{\pi} + \frac{3S^2}{\pi^2} \right). \quad (2.9)$$

Using the above scale redefinitions, the other needed quantities can be computed. According to Ref. 18, they are listed as follows:

$$M^2(S, J) = \frac{S}{4\pi} + \frac{\pi J^2}{S} + J^2 + \frac{S}{2\pi} \left(\frac{S}{\pi} + \frac{S^2}{2\pi^2} \right), \quad (2.10)$$

$$\Omega = \frac{\pi J}{MS} \left(1 + \frac{S}{\pi} \right), \quad (2.11)$$

$$\frac{J}{S} = \frac{M\Omega}{\pi + S}, \quad (2.12)$$

$$a = \frac{J}{M} = \frac{S\Omega}{\pi} \left(1 + \frac{S}{\pi} \right)^{-1}. \quad (2.13)$$

Substituting (2.12) in (2.10), one can write M^2 in terms of S and Ω

$$M^2(S, \Omega) = \frac{S}{4\pi} \frac{1 + \frac{2S}{\pi} \left(1 + \frac{S}{2\pi} \right)}{1 - \frac{\Omega^2 S}{\pi \left(1 + \frac{S}{\pi} \right)}}. \quad (2.14)$$

Putting (2.14) in (2.9), one gets the semi-classical temperature

$$T(S, \Omega) = \sqrt{\frac{S(\pi + S)^3}{(\pi + S - S\Omega^2)}} \left[\frac{\pi^2 - 2\pi S(\Omega^2 - 2) - 3S^2(\Omega^2 - 1)}{4\pi^{\frac{3}{2}} S(\pi + S)^2} \right]. \quad (2.15)$$

The reality condition of T being required by

$$\pi + S - S\Omega^2 > 0 \quad (2.16)$$

constraints $\Omega^2 < 1 + \frac{\pi}{S}$. This yields a restriction on Ω for the entropy fixed values. Other thermodynamical properties of the black hole can be approached by

exploiting the semi-classical specific heat at constant angular velocity.¹⁸ Applying the relation $C_\Omega = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_\Omega = \frac{T}{\left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_\Omega}$, one obtains

$$C_\Omega(S, \Omega) = \frac{2S(\pi + S)(\pi + S - S\Omega^2)(\pi^2 - 2\pi S(\Omega^2 - 2) - 3S^2(\Omega^2 - 1))}{(\pi + S)^3(3S - \pi) - 6S^2(\pi + S)^2\Omega^2 + S^3(4\pi + 3S)\Omega^4}. \quad (2.17)$$

To examine the phase transition phenomena, the above temperature expression (2.15) and the specific heat capacity (2.17) will be used. The corresponding behaviors are illustrated in Fig. 1.

It follows from Fig. 1 that the semi-classical Hawking temperature T is continuous as a function of the semi-classical entropy S . Moreover, it is observed that, for a fixed Ω value, there is no first-order phase transition occurring in the Kerr-AdS black hole physics. However, it involves a minimum at the point $S_{\min} = 1.09761$ corresponding to the minimal temperature $T_{\min} = 0.26933$ under which no black hole can survive. Furthermore, the discontinuity of the specific heat C_Ω appears at the critical value of the entropy $S_c = S_{\min} = 1.09761$. At such a critical value, the specific heat C_Ω changes from negative infinity to positive infinity. Since the entropy is proportional to the square of the black hole mass, the critical point S_c separates two branches of the Kerr-AdS black holes. The first one associated with a small black hole mass is considered thermodynamically as an unstable one possessing a negative specific heat ($C_\Omega < 0$). However, the second branch concerning the large black hole mass is interpreted as a stable phase involving a positive specific heat ($C_\Omega > 0$).

Having discussed the case of the Kerr-AdS black holes in the absence of DE, we investigate the effect of DE by considering different quintessential contributions.

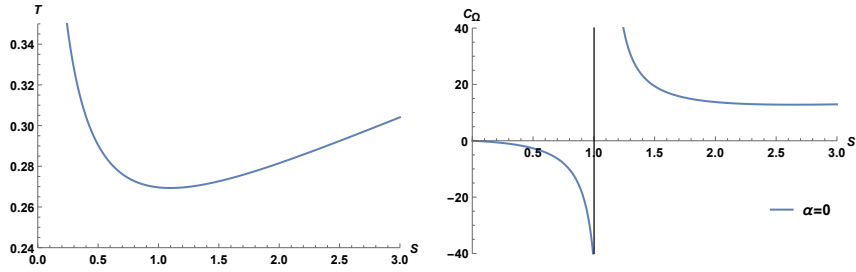


Fig. 1. The semi-classical Hawking temperature (T) and the specific heat (C_Ω) in terms of the entropy (S) for $\Omega = 0.3$.

3. Kerr-AdS black hole phase transitions from quintessence contributions

In this section, we study DE effects on the previous four-dimensional Kerr-AdS black hole physics. This study will be done in terms of new parameters related to DE contributions. In particular, a close inspection shows that the parameter space of the black hole $\mathcal{M}$ can be factorized in two sectors

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\text{OBH}} \times \mathcal{M}_{ec}. \quad (3.1)$$

The first sector is associated with the parameters of the ordinary black holes (OBH)

$$\mathcal{M}_{\text{OBH}} \equiv \{J, M, Q\}, \quad (3.2)$$

where Q is the charge. For the neutral black hole ($Q = 0$), this can be reduced to the Kerr black hole parameterized only by J and M as

$$\mathcal{M}_{\text{OBH}} \equiv \{J, M\}, \quad (3.3)$$

that we are interested in. The second sector $\mathcal{M}_{ec}$ concerns extra contributions associated with outside horizon contributions including DE, DM and other non-trivial ones.

In this work, we consider only DE contributions via a quintessence scalar field. In this way, the second sector $\mathcal{M}_{ec}$ is controlled by two parameters α and ω corresponding to the quintessence intensity and the DE state parameter, respectively. For generic values of α , the dealt with models should depend only on certain values of ω . Here, however, we pay attention to some particular cases. General values of ω , needing nontrivial reflections, could be considered as an investigation project. We hope to come back to it in the future.

In the rest of this paper, we would like to examine three different (ω)-models of the Kerr-AdS black hole behaviors. To determine the corresponding metric, we first consider the usual results associated with spherically symmetric Schwarzschild black hole solutions in quintessential dark energy. Then, we use Newman–Janis algorithm to get Kerr black hole metric surrounded by quintessential DE. For more interpretations, the discussions of this method and its physical implications can be found in Refs. 37–40. The Schwarzschild black hole can be described by the following metric:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (3.4)$$

where the metric function $f(r)$ is given by

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\alpha}{r^{3\omega+1}}. \quad (3.5)$$

More details on such calculations can be found in Ref. 41. Roughly, the expression of the Kerr-AdS metric is written as

$$ds^2 = \frac{\Sigma^2}{\Delta_r}dr^2 + \frac{\Sigma^2}{\Delta_\theta}d\theta^2 + \frac{\Delta_\theta \sin^2\theta}{\Sigma^2} \left(a \frac{dt}{\Xi} - (r^2 + a^2) \frac{d\phi}{\Xi} \right)^2 - \frac{\Delta_r}{\Sigma^2} \left(\frac{dt}{\Xi} - a \sin^2\theta \frac{d\phi}{\Xi} \right)^2. \quad (3.6)$$

In this case, one has

$$\Delta_r = r^2 - 2Mr + a^2 + \frac{r^2}{\ell^2}(r^2 + a^2) - \alpha r^{1-3\omega}. \quad (3.7)$$

In what follows, the corresponding thermodynamical quantities that we will obtain involve a subscript indicating the values of ω . We refer to them as $X^{(\omega)}(S, \Omega, \alpha)$ where α is a positive normalization factor associated with DE intensity.

3.1. Model with DE state parameter $\omega = -\frac{1}{3}$

To study the behavior of the four-dimensional Kerr-AdS black holes in the presence of DE for the value $\omega = -\frac{1}{3}$, we should first elaborate the generalized Smarr formula by using the expressions (2.4), (2.6) and the condition $\Delta_r(r_+) = 0$. For $(-\frac{1}{3})$ -model, the computations give

$$M^{(-1/3)}(S, J, \alpha) = \left(\frac{\pi}{4S} \left\{ \frac{4SJ^2}{\pi\ell^2} + 4J^2 + \left[\frac{S^2}{\pi^2\ell^2} + \frac{S}{\pi} - \frac{\alpha S}{\pi} \right]^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.8)$$

Exploiting the previous scaling redefinitions, the thermal temperature of the Kerr-AdS black holes, in the presence of DE, reads as

$$T^{(-1/3)}(S, J, \alpha) = \frac{\partial M}{\partial S} = \frac{1}{8\pi M} \left((\alpha - 1)^2 - \frac{4\alpha S}{\pi} - \frac{4\pi^2 J^2}{S^2} + \frac{4S}{\pi} + \frac{3S^2}{\pi^2} \right). \quad (3.9)$$

Similarly, the other involved thermodynamics quantities can be computed. In particular, the mass square is given by

$$\left(M^{(-1/3)}(S, J, \alpha) \right)^2 = \frac{S}{4\pi} + \frac{\pi J^2}{S} + J^2 + \frac{S}{2\pi} \left(\frac{S}{\pi} + \frac{S^2}{2\pi^2} + \frac{\alpha^2}{2} - \alpha \left(\frac{S}{\pi} + 1 \right) \right). \quad (3.10)$$

Putting the angular momentum, given in (2.12), into (3.10), we can obtain the expression of $\left(M^{(-1/3)}(S, J, \alpha) \right)^2$ in terms of S and Ω . Concretely, we find

$$\left(M^{(-1/3)}(S, \Omega, \alpha) \right)^2 = \frac{S}{4\pi} (\pi + S) \frac{\left((\alpha - 1)^2 + \frac{2S}{\pi} \left(1 + \frac{S}{2\pi} - \alpha \right) \right)}{(\pi + S - \Omega^2 S)}. \quad (3.11)$$

Turning on the effect of DE, we derive the temperature $T^{(-1/3)}$ and the specific heat $C_\Omega^{(-1/3)}$ in terms of S , α and Ω of the Kerr-AdS black holes. By replacing (3.11) into (3.9), we get

$$T^{(-1/3)}(S, \Omega, \alpha) = \left[\frac{\left(\pi^2 + 3S^2 - 4S\pi(\alpha - 1) - (2\alpha - \alpha^2)\pi^2 - \frac{S\pi(\pi + S - \pi\alpha)^2\Omega^2}{(\pi + S)(\pi + S - S\Omega^2)} \right)}{4\pi^{3/2} \sqrt{\frac{S(\pi + S)(\pi + S - \pi\alpha)^2}{(\pi + S - S\Omega^2)}}} \right]. \quad (3.12)$$

It is worth noting that we can recover the ordinary results by turning off DE contributions. Taking $\alpha = 0$, we get (2.15) which matches perfectly with the results reported in Ref. 18. However, to examine the thermodynamical behaviors of such

Kerr-AdS black holes, we calculate the semi-classical specific heat at constant angular velocity Ω . In the presence of DE, the specific heat takes the simplified form

$$C_{\Omega}^{(-1/3)}(S, \Omega, \alpha) = \frac{2S(\pi + S)(\pi + S - S\Omega^2) \left((\pi + S)(\pi^2 - 2\pi S(\Omega^2 - 2) - 3S^2(\Omega^2 - 1)) - \alpha\beta_1 \right)}{(\pi + S) \left((\pi + S)^3(3S - \pi) - 6S^2(\pi + S)^2\Omega^2 + S^3(4\pi + 3S)\Omega^4 \right) + \alpha\beta_2}, \quad (3.13)$$

where the β_i terms are given by

$$\beta_1 = (\pi^3 + \pi S^2(1 - \Omega^2) - 2\pi^2 S(-1 + \Omega^2)), \quad (3.14)$$

$$\beta_2 = (\pi^5 + 4\pi^4 S - 6\pi^3 S^2 + (\Omega^2 - 1)^2(\pi S^4 + 4\pi^2 S^3)). \quad (3.15)$$

For $\alpha = 0$, this reproduces the ordinary specific heat given in (2.17), as reported in Ref. 18. Using (3.12) and (3.13), we plot the variation of the entropy S in terms of the temperature $T^{(-1/3)}$ and the specific heat ($C_{\Omega}^{(-1/3)}$) for a fixed value of Ω (0.3) in Fig. 2.

It has been realized that the minimal temperature $T_{\min}^{(-1/3)}$ is quite complicated. However, in order to obtain an explicit expression for such a minimal temperature one can use an optimization method. Setting $(\frac{\partial T}{\partial S})_{\alpha, \Omega} = 0$, we find a polynomial of a fifth order with respect to S , being a nontrivial task. However, we need several approximations and simplifications. The first approximation that one should take is to remove the fifth order. Indeed, when the effect of DE vanishes, we get an identical polynomial to the one found in the absence of DE. After solving the polynomial in the presence of DE, an examination shows that the solutions could be simplified. Since we are dealing with objects that have a small value of intensity α , the higher

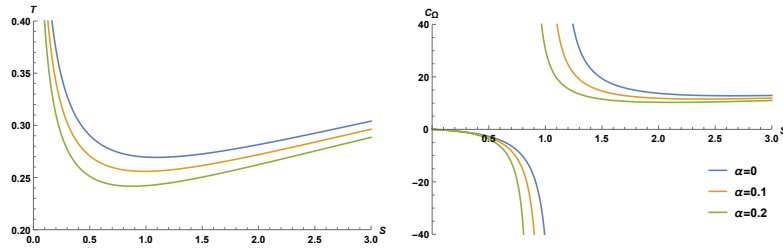


Fig. 2. The semi-classical Hawking temperature ($T^{(-1/3)}$) and the Specific heat ($C_{\Omega}^{(-1/3)}$) in terms of the entropy (S) for fixed $\Omega = 0.3$ and $\omega = -1/3$.

orders greater than two will be omitted. In this way, the approximated entropy which corresponds to the minimal temperature reads as

$$S_{\min}^{(-1/3)}(\Omega, \alpha) = \frac{\pi}{\sqrt{6}(3+\alpha)} \left[\frac{\sqrt{6}(2+\alpha-\Omega^2-\alpha\Omega^2)}{(-1+\Omega^2)} + \gamma_2 \right. \\ \left. + \sqrt{\gamma_3 - \frac{6\sqrt{6}(2-3\Omega^2-3\Omega^4+2\Omega^6+\alpha(9-6\Omega^2-9\Omega^4+6\Omega^6))}{(-1+\Omega^2)^3\gamma_2}} \right], \quad (3.16)$$

where the γ_i terms are given by

$$\gamma_1 = ((-1+\Omega^2)^2(-\Omega^4+\alpha^2(3-4\Omega^2+\Omega^4)-\alpha(-4+2\Omega^2+\Omega^4) \\ + \sqrt{\Omega^8+2\alpha\Omega^4(-4+2\Omega^2+\Omega^4)-\alpha^2(-16+16\Omega^2+10\Omega^4-12\Omega^6+\Omega^8)}))^{1/3}, \quad (3.17)$$

$$\gamma_2 = \sqrt{\frac{20\alpha^2(-1+\Omega^2)^2+3\gamma_1(2+3\gamma_1-2\Omega^2+2\Omega^4)+3\alpha(\gamma_1^2+4\gamma_1\Omega^2(-1+\Omega^2)+8(-1+\Omega^2)^2)}{\gamma_1(-1+\Omega^2)^2}}, \quad (3.18)$$

$$\gamma_3 = \frac{(-20\alpha^2(1+\Omega^4)+3\gamma_1(4-3\gamma_1-4\Omega^2+4\Omega^4)-3\alpha(\gamma_1^2-8\gamma_1\Omega^2(-1+\Omega^2)+8(-1+\Omega^2)^2))}{\gamma_1(-1+\Omega^2)^2}. \quad (3.19)$$

Substituting (3.16) into (3.12), we find the corresponding minimum temperature

$$T_{\min}^{(-1/3)}(\Omega, \alpha) = \left[\frac{3^{5/4} \left(1 + \frac{\delta^2}{2} - 2\sqrt{\frac{2}{3}}\delta(-1+\alpha) - 2\alpha + \alpha^2 + \frac{\delta(6+\sqrt{6}\delta-6\alpha)^2\Omega^2}{\sqrt{6}(6+\sqrt{6}\delta)(-6+\sqrt{6}\delta(-1+\Omega^2))} \right)}{2^{3/4}\pi\sqrt{-\frac{\delta(6+\sqrt{6}\delta)(6+\sqrt{6}\delta-6\alpha)^2}{(-6+\sqrt{6}\delta(-1+\Omega^2))}}} \right], \quad (3.20)$$

where we have

$$\delta = \frac{1}{(3+\alpha)} \left[\frac{\sqrt{6}(2+\alpha-\Omega^2-\alpha\Omega^2)}{(-1+\Omega^2)} + \gamma_2 \right. \\ \left. + \sqrt{\gamma_3 - \frac{6\sqrt{6}(2-3\Omega^2-3\Omega^4+2\Omega^6+\alpha(9-6\Omega^2-9\Omega^4+6\Omega^6))}{(-1+\Omega^2)^3\gamma_2}} \right]. \quad (3.21)$$

At this stage, it is possible to provide an interpretation concerning the two branches shown in Fig. 2. In $S-T$ plane, we observe from the curve that both of these phases exist above the minimal temperature $T_{\min}^{(-1/3)}$. Since the entropy is proportional to the black hole mass, the first branch which corresponds to a lower mass is considered a thermodynamically unstable. The second one which corresponds to a higher mass is considered as a thermodynamically stable. We notice from the decrease of $S_{\min}^{(-1/3)}$ when the intensity α increases that the stable phase becomes relevant.

The curve in the $S-C_\Omega$ plane, appearing in Fig. 2, shows two phases separated by a critical entropy $S_c^{(-1/3)} = S_{\min}^{(-1/3)}$. Indeed, the first phase associated with a smaller mass black hole possesses a negative heat capacity ($C_\Omega < 0$). It is considered as an unstable one. However, the second phase corresponding to the larger mass black hole involving a positive heat capacity ($C_\Omega > 0$) is considered as a stable one. Besides, the equality between the critical entropy $S_c^{(-1/3)}$ and $S_{\min}^{(-1/3)}$ yields

directly the decrease of the critical entropy $S_c^{(-1/3)}$ when the intensity α increases. This makes the stable phase larger.

According to Ref. 42 and using the formula $G = M - T \cdot S - J \cdot \Omega$, we obtain the Gibbs free energy which reads as

$$G^{(-1/3)}(S, \Omega, \alpha) = \frac{\sqrt{S} (\pi^3 (1 - \alpha) + \pi^2 (S - 2S\alpha) - S^3 (1 - \Omega^2) - \pi S^2 (1 + \alpha) (1 - \Omega^2))}{4\pi^{\frac{3}{2}} (\pi + S)^{3/2} (\pi + S - S\Omega^2)^{1/2}}. \quad (3.22)$$

Now, we investigate the effects of DE on the Kerr-AdS black hole phase transitions by plotting the Gibbs free energy as a function of the entropy in Fig. 3.

From Fig. 3, we note that the Gibbs free energy changes its sign. The positive values of $G^{(-1/3)}(S, \Omega, \alpha)$ correspond to unstable black holes while the negative values are associated with stable black holes. In this way, one can remark that DE decreases the unstable phase. Thus, DE provides a more stable black hole. Moreover, the point where the Gibbs free energy changes its sign corresponds to the Hawking–Page phase transition. At this point, the entropy is given by

$$S_{\text{HP}}^{(-1/3)}(\Omega, \alpha) = \frac{\pi (4 - 5\Omega^2 + \Omega^4 - A(1 - \Omega^2) + A^2 - \alpha(1 - \Omega^2)(4 + 2\Omega^2 + A))}{3A(1 - \Omega^2)}, \quad (3.23)$$

where the quantity A takes the following form:

$$A(\Omega, \alpha) = (8 - 15\Omega^2 + 6\Omega^4 + \Omega^6 + 3\alpha(-4 + \Omega^2)(-1 + \Omega^2)^2 - 3\sqrt{3}\sqrt{\Omega^2(1 - \Omega^2)^3(\Omega^2 + 2\alpha(4 - \Omega^2))})^{\frac{1}{3}}. \quad (3.24)$$

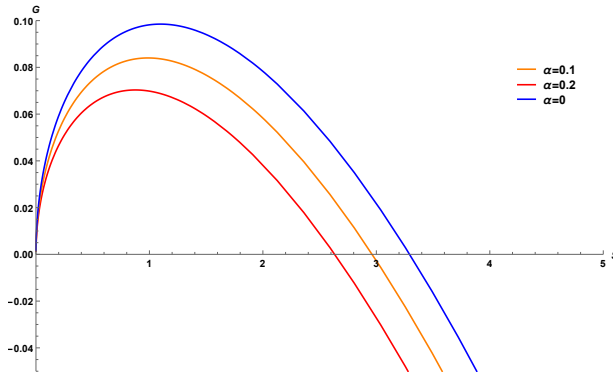


Fig. 3. The Gibbs free energy ($G^{(-1/3)}$) plotted for Kerr-AdS black hole with respect to the entropy ($S^{(-1/3)}$) for fixed $\Omega = 0.3$, $\omega = -1/3$ and different values of α .

This value of the entropy corresponds to the temperature

$$T_{\text{HP}}^{(-1/3)}(\Omega, \alpha) = \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{q(3\pi + \pi q - \pi q \Omega^2)} (\pi + \frac{\pi q}{3})^{3/2}} \times \left[3\pi^3 (1 - \alpha) + \frac{1}{3} \pi^3 q^3 (1 - \Omega^2) + \frac{1}{3} \pi^3 q^2 (7 - \alpha - 5\Omega^2 + \alpha \Omega^2) + \pi^3 q (5 - 2\Omega^2 + 2\alpha(-1 + \Omega^2)) \right], \quad (3.25)$$

where the quantity q is

$$q(\Omega, \alpha) = \frac{(4 - A + A^2 - 5\Omega^2 + A\Omega^2 + \Omega^4 - \alpha(1 - \Omega^2)(4 + A + 2\Omega^2))}{A(1 - \Omega^2)}. \quad (3.26)$$

In Fig. 4, we plot the Gibbs free energy as a function of the temperature in order to compare the different phases for several values of DE intensity α .

From Fig. 4, we note that the radiation phase, which is the phase where the black hole can decay into a pure thermal AdS space, and the phase, where no black hole can exist, decrease as the parameter α increases. Furthermore, we remark that this figure data confirms the idea that DE stabilizes the Kerr-AdS black hole. To confirm such behaviors, one may think about the heat capacity $C_{\Omega}^{(-1/3)}$ as a function of the temperature. This is illustrated in Fig. 5.

It follows from Fig. 5 that the heat capacity changes its sign at the minimal temperature $T_{\text{min}}^{(-1/3)}$. We also find that the phase where no black hole can exist decreases when the intensity α increases.

In $(-\frac{1}{3})$ -model, we conclude that the decrease of $S_{\text{min}}^{(-1/3)}$ confirms that the stable phase becomes relevant when the intensity α increases, which makes the black hole more stable. This analysis matches perfectly with the trivial mechanism of DE.

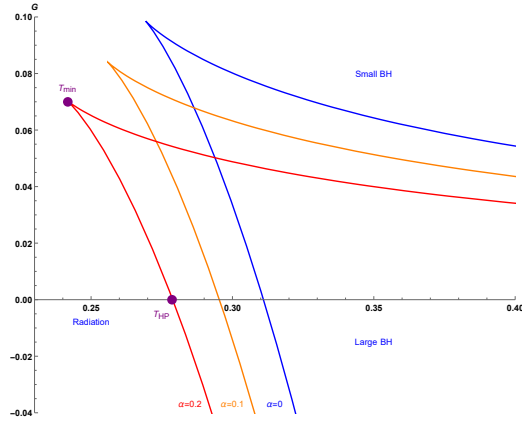


Fig. 4. the Gibbs free energy ($G^{(-1/3)}$) plotted for Kerr-AdS black hole with respect to temperature ($T^{(-1/3)}$) for $\Omega = 0.3$, $\omega = -1/3$ and different values of α .

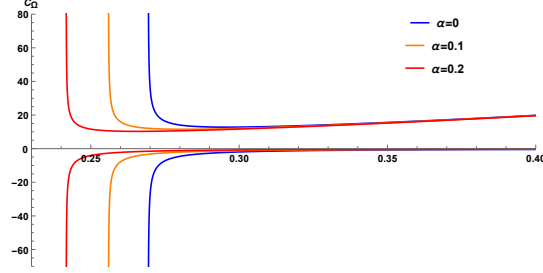


Fig. 5. The specific heat $C_{\Omega}^{(-1/3)}$ illustrated for Kerr-AdS black holes with respect to the temperature ($T^{(-1/3)}$) for $\Omega = 0.3$, $\omega = -1/3$ and different values of α .

3.2. Model with DE state parameter $\omega = -\frac{2}{3}$

To further investigate the DE effect, we investigate four-dimensional Kerr-AdS behaviors for the value $\omega = -\frac{2}{3}$. As the previous model, we first give the generalized Smarr formula for such a $(-\frac{2}{3})$ -model by using the expressions (2.4) and (2.6). Solving the condition $\Delta_r(r_+) = 0$, we get

$$M^{(-2/3)}(S, J, \alpha) = \left(\frac{\pi}{4S} \left\{ \frac{4SJ^2}{\pi\ell^2} + 4J^2 + \left[\frac{S^2}{\pi^2\ell^2} + \frac{S}{\pi} - \alpha \left(\frac{S}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \right]^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.27)$$

Taking into account the above scaling redefinitions, the thermal temperature of the Kerr-AdS black holes become

$$T^{(-2/3)}(S, J, \alpha) = \frac{1}{8\pi M} \left(1 - \frac{4\pi^2 J^2}{S^2} + \frac{4S}{\pi} + \frac{3S^2}{\pi^2} - \alpha \left(\frac{5S^{3/2}}{\pi^{3/2}} + \frac{3S^{1/2}}{\pi^{1/2}} \right) + \frac{2\alpha^2 S}{\pi} \right). \quad (3.28)$$

Similarly, the square mass is given by

$$\left(M^{(-2/3)}(S, J, \alpha) \right)^2 = \frac{S}{4\pi} + \frac{\pi J^2}{S} + J^2 + \frac{S}{2\pi} \left(\frac{S^2}{2\pi^2} + \frac{S}{\pi} + \frac{\alpha^2 S}{2\pi} - \alpha \frac{S^{1/2}}{\pi^{1/2}} \left(\frac{S}{\pi} + 1 \right) \right). \quad (3.29)$$

Using (2.12) and substituting J in (3.29), we write $(M^{(-2/3)})^2$ in terms of S and Ω as follows:

$$\left(M^{(-2/3)}(S, \Omega, \alpha) \right)^2 = \frac{S}{4\pi} (\pi + S) \frac{\left(1 + \frac{2S}{\pi} \left(1 + \frac{S}{2\pi} + \frac{\alpha^2}{2} - \alpha \left(\frac{S^{1/2}}{\pi^{1/2}} + \frac{S^{-1/2}}{\pi^{-1/2}} \right) \right) \right)}{(\pi + S - \Omega^2 S)}. \quad (3.30)$$

To examine the effect of DE, we put (3.30) into (3.28) which can give the semi-classical temperature in terms of S and Ω . For $(-\frac{2}{3})$ -model, the calculations produce

$$T^{(-2/3)}(S, \Omega, \alpha) = \left[\frac{\pi^2 + 3S^2 + 4S\pi - \frac{\sqrt{S}(3\pi+5S)\alpha}{\pi^{-1/2}} + 2S\alpha^2\pi - \frac{S\pi(\pi+S-\sqrt{\pi}\sqrt{S}\alpha)^2\Omega^2}{(\pi+S)(\pi+S-S\Omega^2)}}{4\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{S(\pi+S)(\pi+S-\sqrt{\pi}\sqrt{S}\alpha)^2}{(\pi+S-S\Omega^2)}}} \right]. \quad (3.31)$$

Taking $\alpha = 0$, we recover the ordinary temperature given in (2.15), as obtained in Ref. 18. For $\alpha \neq 0$, the thermodynamical behaviors of the corresponding black

hole can be approached by exploiting the semi-classical specific heat. At constant angular velocity, the computations lead to

$$C_{\Omega}^{(-2/3)}(S, \Omega, \alpha) = \frac{2S(\pi + S)(\pi + S - S\Omega^2) \left((\pi + S)(\pi^2 - 2\pi S(\Omega^2 - 2) - 3S^2(\Omega^2 - 1)) - \alpha\beta_3 \right)}{(\pi + S) \left((\pi + S)^3(3S - \pi) - 6S^2(\pi + S)^2\Omega^2 + S^3(4\pi + 3S)\Omega^4 \right) + \alpha\beta_4}, \quad (3.32)$$

where the β_i terms are given by

$$\beta_3 = \left(2\pi^{5/2}\sqrt{S} - S^{3/2}\pi^{3/2}(-4 + 3\Omega^2) - 2\sqrt{\pi}S^{5/2}(-1 + \Omega^2) \right), \quad (3.33)$$

$$\beta_4 = \left(4\pi^{7/2}S^{3/2}\Omega^2 - \pi^{5/2}S^{5/2}\Omega^2(-4 + 3\Omega^2) \right). \quad (3.34)$$

Turning of the DE effects ($\alpha = 0$), this result reduces to the ordinary specific heat appearing in Ref. 18. To specify the DE effect ($\alpha \neq 0$), we discuss the temperature (3.31) and the specific heat (3.32) with respect to the entropy S for a fixed value of $\Omega = 0.3$. This is illustrated in Fig. 6.

As mentioned before, the expression of the minimal temperature is complicated. However, the corresponding computations may need certain relevant approximations. In fact, there are many ways to reach the desired results. Setting $(\frac{\partial T}{\partial S})_{\alpha, \Omega} = 0$, we find a polynomial with rational orders in S . It is known that this situation is not an easy task. To handle this rational order, we exploit the following limit $(1 - x^n) \approx 1 - nx$ for small values of x . Besides, we use similar tech-

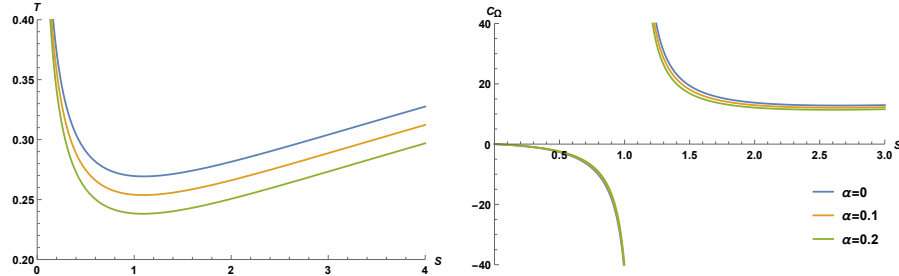


Fig. 6. The semi-classical Hawking temperature ($T^{(-2/3)}$) and the specific heat ($C_{\Omega}^{(-2/3)}$) as function of the entropy (S) for $\Omega = 0.3$ and $\omega = -2/3$.

niques explored in the previous $(-\frac{1}{3})$ -model. After calculations, the approximated entropy, which corresponds to the minimal entropy, can be written as

$$S_{\min}^{(-2/3)}(\Omega, \alpha) = \frac{1}{6} \left[3\gamma_6 - \frac{2\pi(-2 + \Omega^2)}{(-1 + \Omega^2)} + 3\sqrt{\left(\gamma_7 + \frac{(-108\pi\alpha\Omega^2(-1 + \Omega^2) + 45\alpha\Omega^2(4 - 7\Omega^2 + 3\Omega^4) - 8\pi^3(2 - 3\Omega^2 - 3\Omega^4 + 2\Omega^6))}{27\gamma_6(-1 + \Omega^2)^3} \right)} \right], \quad (3.35)$$

where the γ_i parameters are given by

$$\gamma_4 = (54(-1 + \Omega^2)^2\gamma_5 + (55296\pi^3\alpha^3\Omega^6(20 + 12\pi - 15\Omega^2)^3(2 - 3\Omega^2 + \Omega^4)^3 + 2916\Omega^4(-1 + \Omega^2)^4\gamma_5^2)^{1/3}, \quad (3.36)$$

$$\gamma_5 = (-64\pi^6\Omega^2 + 432\pi^2\alpha^2\Omega^2 + 75\alpha^2\Omega^2(4 - 3\Omega^2)^2 + 192\pi^4\alpha(-2 + \Omega^2) - 360\pi\alpha^2\Omega^2(-4 + 3\Omega^2) - 80\pi^3\alpha(8 - 10\Omega^2 + 3\Omega^4)), \quad (3.37)$$

$$\gamma_6 = \sqrt{\frac{(2^{-4/3}\gamma_4^2 - 12 \times 2^{1/3}\pi\alpha\Omega^2(20 + 12\pi - 15\Omega^2)(2 - 3\Omega^2 + \Omega^4) + 4\gamma_4\pi^2(1 - \Omega^2 + \Omega^4))}{9\gamma_4(-1 + \Omega^2)^2}}, \quad (3.38)$$

$$\gamma_7 = \frac{(-2^{-4/3}\gamma_4^2 + 12 \times 2^{1/3}\pi\alpha\Omega^2(20 + 12\pi - 15\Omega^2)(2 - 3\Omega^2 + \Omega^4) + 8\gamma_4\pi^2(1 - \Omega^2 + \Omega^4))}{9\gamma_4(-1 + \Omega^2)^2}. \quad (3.39)$$

Substituting (3.35) into (3.31), we find the corresponding minimum temperature given by

$$T_{\min}^{(-2/3)}(\Omega, \alpha) = \left[\frac{\sqrt{\frac{3}{2}} \left(12 + 8\xi + \xi^2 - 2\sqrt{6} \left(3 + \frac{5\xi}{6} \right) \sqrt{\xi} \alpha + 4\xi\alpha^2 + \frac{2\xi(6+\xi-\sqrt{6}\sqrt{\xi}\alpha)^2\Omega^2}{(6+\xi)(-6+\xi(-1+\Omega^2))} \right)}{4\pi\sqrt{\frac{-\xi(6+\xi)(6+\xi-\sqrt{6}\sqrt{\xi}\alpha)^2}{(-6+\xi(-1+\Omega^2))}}} \right], \quad (3.40)$$

where we have

$$\xi(\Omega, \alpha) = \frac{1}{\pi} \left[3\gamma_6 - \frac{2\pi(-2 + \Omega^2)}{(-1 + \Omega^2)} + 3\sqrt{\left(\gamma_7 + \frac{(-108\pi\alpha\Omega^2(-1 + \Omega^2) + 45\alpha\Omega^2(4 - 7\Omega^2 + 3\Omega^4) - 8\pi^3(2 - 3\Omega^2 - 3\Omega^4 + 2\Omega^6))}{27\gamma_6(-1 + \Omega^2)^3} \right)} \right]. \quad (3.41)$$

Now, we are in position to discuss the corresponding Kerr-AdS black hole phase transitions. From Fig. 6, we observe that the curve in the plane $(S - T)$ involves two branches separated by a minimal temperature (3.40). Indeed, the first branch associated with a small black hole mass is thermodynamically unstable. However, the second one corresponding to a large black hole mass is stable.

In $(S - C_\Omega)$ curve, two phases separated by a critical entropy $S_c^{(-\frac{2}{3})} = S_{\min}^{(-\frac{2}{3})}$ appear. Furthermore, the first phase corresponding to a small black hole mass having a negative heat capacity ($C_\Omega < 0$) is unstable. The second one, which corresponds to a large black hole mass possessing a positive heat capacity ($C_\Omega > 0$), is considered as a stable one. It is observed that the heat capacity is not affected by DE contributions.

To understand more such nontrivial behaviors, one may introduce the Gibbs free energy. For the present model, this energy can be written as

$$G^{(-2/3)}(S, \Omega, \alpha) = \frac{\sqrt{S}(\pi^3 + \pi^2 S - \pi^{\frac{3}{2}} S^{\frac{3}{2}} \alpha \Omega^2 - \pi S^2(1 - \Omega^2) - S^3(1 - \Omega^2))}{4\pi^{\frac{3}{2}}(\pi + S)^{\frac{3}{2}}(\pi + S - S\Omega^2)^{1/2}}. \quad (3.42)$$

In Fig. 7, we plot the Gibbs free energy as a function of the entropy in order to get more information about the effect of DE on the black hole phase transitions. From this figure, we remark that the Gibbs free energy changes its sign. The positive values of $G^{(-2/3)}(S, \alpha, \Omega)$ correspond to unstable black holes, while the negative values are associated with stable black holes. We also realize that for the $(-\frac{2}{3})$ -model, there is no impact of intensity α on the Gibbs free energy. This could be understood from the fact that the α multiplication coefficient is very small with respect to the ordinary case. For $\Omega = 0.3$, its numerical value is around 10^{-4} which could be ignored. Moreover, the Hawking–Page transition corresponds to the point where the Gibbs free energy changes its sign. The associated entropy reads as

$$S_{\text{HP}}^{(-2/3)}(\Omega, \alpha) = \frac{\sqrt{\pi} \left(2^{\frac{1}{3}} z^2 - \sqrt{\pi}(1 - \Omega^2)(2z + 9 \times 2^{\frac{2}{3}} \alpha \Omega^2) + 2 \times 2^{\frac{2}{3}} \pi(4 - \Omega^2)(1 - \Omega^2) \right)}{6z(1 - \Omega^2)}, \quad (3.43)$$

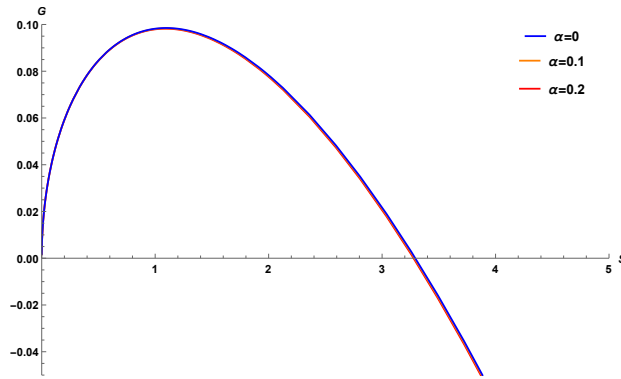


Fig. 7. The Gibbs free energy $G^{(-2/3)}$ plotted for Kerr-AdS black hole with respect to the entropy S for $\Omega = 0.3$, $\omega = -2/3$.

where we have

$$z(\alpha, \Omega) = \left(27\pi(1+\pi)\alpha\Omega^2(1-2\Omega^2) + 4\pi^{\frac{3}{2}}(1-\Omega^2)^2(8+\Omega^2) - 6\sqrt{6}\Omega\pi^{\frac{3}{4}}\sqrt{\alpha(8-31\Omega^2+\pi(24-87\Omega^2))+2\pi^{\frac{2}{3}}\Omega^2(1-\Omega^2)^3} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (3.44)$$

This entropy value leads to the following temperature

$$T_{\text{HP}}^{(-2/3)}(\Omega, \alpha) = \frac{1}{4\sqrt{6}\pi^{5/2}\sqrt{d(d+6\sqrt{\pi}-d\Omega^2)}(d+6\sqrt{\pi})^{3/2}} \times \left(216\pi^{3/2} - 72\sqrt{6}d\pi^{5/4}\alpha + 3d^3(1-\Omega^2) - 2\sqrt{6}d^{5/2}\pi^{1/4}\alpha(1-\Omega^2) + 36d\pi(5-2\Omega^2) - 6\sqrt{6}d^{3/2}\pi^{3/4}\alpha(4-3\Omega^2) + 6d^2\sqrt{\pi}(7-5\Omega^2) \right), \quad (3.45)$$

where d is given by

$$d(\alpha, \Omega) = \frac{(2^{1/3}z^2 - \sqrt{\pi}(1-\Omega^2)(2z + 9 \times 2^{2/3}\alpha\Omega^2) + 2 \times 2^{2/3}\pi(4-\Omega^2)(1-\Omega^2))}{z(1-\Omega^2)}. \quad (3.46)$$

To compare the different phases for several values of DE intensity α , we plot the Gibbs free energy as a function of temperature in Fig. 8.

From Fig. 8, we observe that the radiation phase, which is the phase where the black hole decay into a pure thermal AdS space, and the phase where no black hole can exist decrease as the parameter α increases. Moreover, it is observed that the stable and the unstable phase are not affected by the DE contributions.

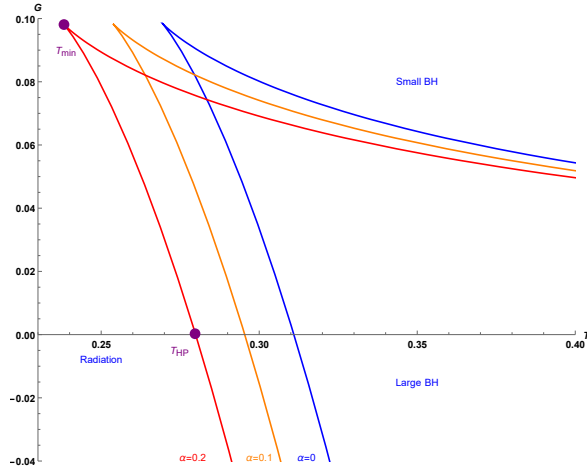


Fig. 8. The Gibbs free energy ($G^{(-2/3)}$) plotted for Kerr-AdS black hole with respect to the temperature ($T^{(-2/3)}$) for $\Omega = 0.3$, $\omega = -2/3$ and different values of α .

To examine DE effects on the heat capacity (3.32), we plot such a quantity as a function of the temperature for different DE intensity values in Fig. 9.

It follows from Fig. 9 that the heat capacity changes its sign at the minimal temperature $T_{\min}^{(-2/3)}$. We also find that the phase where no black hole can exist decreases when the intensity α increases. For the $(-\frac{2}{3})$ -model, we find that DE does not have any affect on the relevant thermodynamical quantities. However, the phase where no black hole can exist and the radiation phase become small.

3.3. Model with DE state parameter $\omega = -1$

Here, we study the (-1) -model, being the last one. A fast examination reveals that this model can be associated with a possible cosmological scaling. Forgetting about other terms, the metric relevant one is given by

$$\Delta_{\alpha}^{\text{AdS}} = \Delta_{\alpha} + \Delta^{\text{AdS}} = -r^4 \left(\frac{\Lambda}{3} + \alpha \right) = -r^4 \Lambda_{\text{eff}}. \quad (3.47)$$

Analyzing the sign of such a cosmological effective constant Λ_{eff} , we expect a reversed DE effect. We believe that the sign will be crucial in the forth coming discussions even by absorbing the cosmological constant in the previous scaling given in (2.8). To discuss the properties of this model, we should find the generalized Smarr formula for such a four-dimensional Kerr-AdS black hole model. Using the expressions (2.4), (2.6) and solving the constraint $\Delta_r(r_+) = 0$, we get

$$M^{(-1)}(S, J, \alpha) = \left(\frac{\pi}{4S} \left\{ \frac{4SJ^2}{\pi\ell^2} + 4J^2 + \left[\frac{S^2}{\pi^2\ell^2} + \frac{S}{\pi} - \alpha \frac{S^2}{\pi^2} \right]^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.48)$$

In terms of DE intensity, the thermal temperature of the four-dimensional Kerr-AdS black holes reads as

$$T^{(-1)}(S, J, \alpha) = \frac{1}{8\pi M} \left(1 - \frac{4\pi^2 J^2}{S^2} + \frac{4S}{\pi} + \frac{3S^2}{\pi^2} - \alpha \left(\frac{4S}{\pi} + \frac{6S^2}{\pi^2} \right) + \frac{3\alpha^2 S^2}{\pi^2} \right). \quad (3.49)$$

Using the previous scaling redefinitions, the mass square takes the following form:

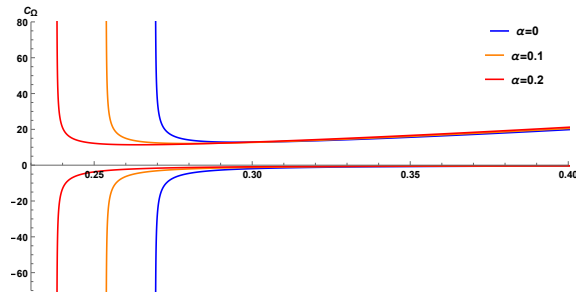


Fig. 9. The specific heat $C_{\Omega}^{(-2/3)}$ plotted for Kerr-AdS black hole with respect to the temperature $(T^{(-2/3)})$ for $\Omega = 0.3$, $\omega = -2/3$ and different values of α .

$$\left(M^{(-1)}(S, J, \alpha)\right)^2 = \frac{S}{4\pi} + \frac{\pi J^2}{S} + J^2 + \frac{S}{2\pi} \left(\frac{S^2}{2\pi^2} + \frac{S}{\pi} + \frac{\alpha^2 S^2}{2\pi^2} - \alpha \frac{S}{\pi} \left(\frac{S}{\pi} + 1 \right) \right). \quad (3.50)$$

Substituting (2.12) in (3.50), we can express $(M^{(-1)})^2$ in terms of S and Ω . This yields

$$\left(M^{(-1)}(S, \Omega, \alpha)\right)^2 = \frac{S}{4\pi} (\pi + S) \frac{\left(1 + \frac{2S}{\pi} \left(1 + \frac{S}{2\pi} + \frac{\alpha^2 S}{2\pi} - \alpha \left(\frac{S}{\pi} + 1\right)\right)\right)}{\pi + S - \Omega^2 S}. \quad (3.51)$$

Similarly, the semi-classical temperature is given by

$$T^{(-1)}(S, \Omega, \alpha) = \left[\frac{\pi^2 + 3S^2 + 4S\pi + 3S^2\alpha^2 - \alpha S(4\pi + 6S) - \frac{S\pi\Omega^2(\pi+S-S\alpha)^2}{(\pi+S)(\pi+S-S\Omega^2)}}{4\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{S(\pi+S)(\pi+S-S\alpha)^2}{(\pi+S-S\Omega^2)}}} \right]. \quad (3.52)$$

It is noted that, we recover the ordinary temperature obtained in (2.15) by sending α to zero. To get further insight into the thermodynamical behavior of the black hole, we can compute the semi-classical specific heat at constant angular velocity. Concretely, we find

$$C_{\Omega}^{(-1)}(S, \Omega, \alpha) = \frac{2S(\pi+S)^2(\pi+S-S\Omega^2)((\pi+S)(\pi^2-2\pi S(\Omega^2-2)-3S^2(\Omega^2-1))+\alpha S\beta_5)}{(\pi+S)^2((\pi+S)^3(3S-\pi)-6S^2\Omega^2(\pi+S)^2+S^3\Omega^4(4\pi+3S))+S\alpha\beta_6}, \quad (3.53)$$

where the β_i parameters are

$$\beta_5 = \left(\frac{\pi S \Omega^2 (2\pi - S(-2 + \alpha))}{(\pi + S)} + (\pi + S - S\Omega^2)(-4\pi + 3S(-2 + \alpha)) \right), \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \beta_6 = & (-2\pi^5 + 3S^5(-2 + \alpha)(-1 + \Omega^2)^2 - 4\pi^3 S^2(-1 + \Omega^2)(-9 + 3\alpha^2 + 2\Omega^2) \\ & + \pi^4 S(-14 + 3\alpha + 12\Omega^2) + 2\pi^2 S^3(-1 + \Omega^2)(22 - 10\Omega^2 + \alpha(-9 + 4\Omega^2)) \\ & + 2\pi S^4(-1 + \Omega^2)(13 - 9\Omega^2 + \alpha(-6 + 4\Omega^2))). \end{aligned} \quad (3.55)$$

To study the black hole phase transitions, we use the standard thermodynamical tools. Indeed, we numerically examine the previous thermodynamical quantities, given in (3.52) and (3.53), with respect to the entropy S . These quantities can be illustrated in Fig. 10.

To interpret this numerical result, we should compute the minimal temperature. Indeed, we use the same steps exploited in the previous (ω) -models. In this way, the approximated entropy, which corresponds to the minimal temperature $T_{\min}^{(-1)}$, can be written as

$$S_{\min}^{(-1)}(\Omega, \alpha) = \frac{1}{6} \left[3\gamma_9 - \frac{2\pi(-2 + \Omega^2)}{(-1 + \Omega^2)} + 3\sqrt{\gamma_{10} - \frac{8\pi^3(2 - 3\Omega^2 - 3\Omega^4 + 2\Omega^6)}{27\gamma_9(-1 + \Omega^2)^3}} \right], \quad (3.56)$$

where the γ_i parameters are given by

$$\begin{aligned} \gamma_8 = & \left((-1 + \Omega^2)^2 \left(\sqrt{27\alpha^3(-1 + \Omega^2)^2 + (\Omega^4 + 3\alpha(1 - \Omega^2 + \Omega^4))^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - (\Omega^4 + 3\alpha(1 - \Omega^2 + \Omega^4)) \right) \right)^{1/3}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

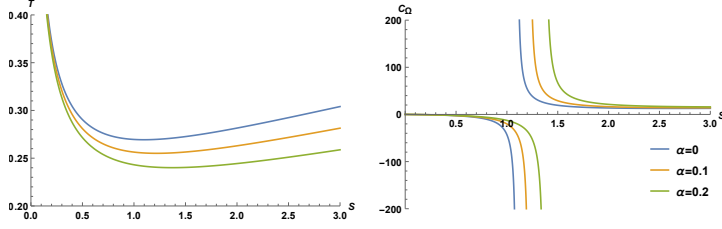


Fig. 10. The semi-classical Hawking temperature ($T^{(-1)}$) and the specific heat ($C_{\Omega}^{(-1)}$) in terms of entropy (S) for $\Omega = 0.3$ and $\omega = -1$.

$$\gamma_9 = \sqrt{\frac{2\pi^2 (3\gamma_8^2 - 9\alpha(-1 + \Omega^2)^2 + 2\gamma_8(1 - \Omega^2 + \Omega^4))}{9\gamma_8(-1 + \Omega^2)^2}}, \quad (3.58)$$

$$\gamma_{10} = \frac{2\pi^2 (-3\gamma_8^2 + 9\alpha(-1 + \Omega^2)^2 + 4\gamma_8(1 - \Omega^2 + \Omega^4))}{9\gamma_8(-1 + \Omega^2)^2}. \quad (3.59)$$

Putting (3.54) in (3.52), we obtain the expression of the minimal temperature

$$T_{\min}^{(-1)}(\Omega, \alpha) = \left[\frac{\sqrt{\frac{3}{2}} \left(12 + 8\chi + \chi^2 - 2\chi(4 + \chi)\alpha + \chi^2\alpha^2 + \frac{2\chi(-6 + \chi(-1 + \alpha))^2\Omega^2}{(6 + \chi)(-6 + \chi(-1 + \Omega^2))} \right)}{4\pi \sqrt{-\frac{\chi(6 + \chi)(-6 + \chi(-1 + \alpha))^2}{(-6 + \chi(-1 + \Omega^2))}}} \right], \quad (3.60)$$

where we have

$$\chi(\Omega, \alpha) = \frac{1}{\pi} \left[3\gamma_9 - \frac{2\pi(-2 + \Omega^2)}{(-1 + \Omega^2)} + 3\sqrt{\gamma_{10} - \frac{8\pi^3(2 - 3\Omega^2 - 3\Omega^4 + 2\Omega^6)}{27\gamma_9(-1 + \Omega^2)^3}} \right]. \quad (3.61)$$

It is possible now to interpret the result given in Fig. 10. The curve of the ($T - S$) plane reveals two branches separated by the minimal temperature given in (3.60). The first branch associated with the small black hole mass is an unstable one. While, the second phase which corresponds to the large black hole mass is considered as a stable one. However, we remark that the entropy $S_{\min}^{(-1)}$ increases when the intensity α increases. In this way, DE makes the unstable phase relevant.

From the curve of the $C_{\Omega} - S$ plane, the enhancement of the critical entropy $S_c^{(-1)} = S_{\min}^{(-1)}$, when the intensity α increases makes the unstable phase larger. Indeed, the stable phase with a positive specific heat is getting smaller.

To investigate the associated phase transitions, we can exploit the Gibbs free energy in terms of the entropy. Concretely, the calculation provides

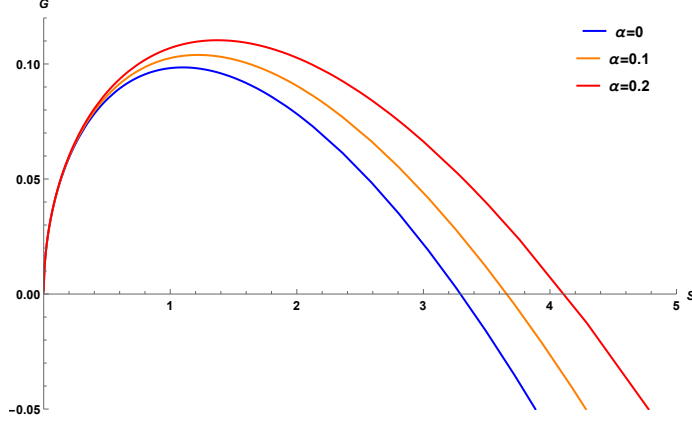


Fig. 11. The Gibbs free energy ($G^{(-1)}$) plotted for Kerr-AdS black hole with respect to the entropy (S) for $\Omega = 0.3$, $\omega = -1$ and different values of α .

$$G^{(-1)}(S, \Omega, \alpha) = \frac{\sqrt{S}(\pi^3 + \pi^2 S(1 + \alpha) - \pi S^2(1 - 2\alpha)(1 - \Omega^2) - S^3(1 - \alpha)(1 - \Omega^2))}{4\pi^{\frac{3}{2}}(\pi + S)^{\frac{3}{2}}(\pi + S - S\Omega^2)^{1/2}}, \quad (3.62)$$

which is illustrated in Fig. 11 for certain values of α .

It follows from the Fig. 11 that the Gibbs free energy changes its sign. The positive values of $G^{(-1)}(S, \Omega, \alpha)$ correspond to unstable black holes while the negative ones are associated with stable phases. We observe that DE increases the unstable phase. Moreover, the point where the Gibbs free energy changes its sign corresponds to the Hawking–Page phase transition. At this point, the entropy takes the form

$$S_{\text{HP}}^{(-1)} = \frac{(2^{2/3}X^2 - 2\pi X(1 - 2\alpha)(1 - \Omega^2) - 2 \times 2^{1/3}\pi^2(1 - \Omega^2)(-4 + 3\alpha^2 + \Omega^2 + 4\alpha(1 - \Omega^2)))}{6X(1 - \alpha)(1 - \Omega^2)}, \quad (3.63)$$

where the quantity X is

$$X(\Omega, \alpha) = \pi (2(1 - \Omega^2)^2(8 + \Omega^2 - 6\alpha(2 + \Omega^2)))^{1/3}. \quad (3.64)$$

This entropy generates the following temperature

$$T_{\text{HP}}^{(-1)}(\alpha, \Omega) = \frac{1}{4\pi^{3/2} \sqrt{2Y \left(2\pi + \frac{Y}{3(1-Y)}\right)} (Y + 6\pi(1 - \alpha)(1 - \Omega^2))^{3/2}} \times [Y^3 + 72\pi^3(1 - \alpha)^2(1 - \Omega^2)^2 + 12a\pi^2(1 - \alpha)(1 - \Omega^2)(5 - 3\alpha - 2\Omega^2) + 2a^2\pi(7 - 5\Omega^2 - \alpha(6 - 4\Omega^2))], \quad (3.65)$$

where the term Y is given by

$$Y(\alpha, \Omega) = \frac{\left(2^{2/3} X^2 - 2\pi X(1 - 2\alpha)(1 - \Omega^2) - 2 \times 2^{1/3} \pi^2 (1 - \Omega^2)(-4 + 3\alpha^2 + \Omega^2 - 4\alpha(-1 + \Omega^2))\right)}{X}. \quad (3.66)$$

To compare the different phases for several values of DE intensity α , we plot the Gibbs free energy as a function of the temperature in Fig. 12.

It follows from Fig. 12 that the radiation phase, which is the phase where the black hole decay into a pure thermal AdS space, and the phase where no black hole can exist decrease as the parameter α increases. This can confirm that DE destabilize the (-1) -model black hole.

In order to more understand the DE effect on the heat capacity $C_{\Omega}^{(-1)}$, we illustrate in Fig. 13 its temperature dependence. An examination shows that the heat capacity changes its sign at the minimal temperature $T_{\min}^{(-1)}$. We also find that the phase where no black hole can exist decreases when the intensity α increases.

For this last model $((-1)$ -model), the obtained result of Kerr-AdS black holes seem to be nontrivial. As expected, the Gibbs free energy and the heat capacity undergo a reversed DE behaviors, which could be associated with the sign of the DE factor. This feature could be in fact due to the cosmological constant contribution. This remark may deserve deeper thinking in future.

4. Results and discussions

In this section, we analyze and discuss the obtained results by giving certain proper physical meanings.

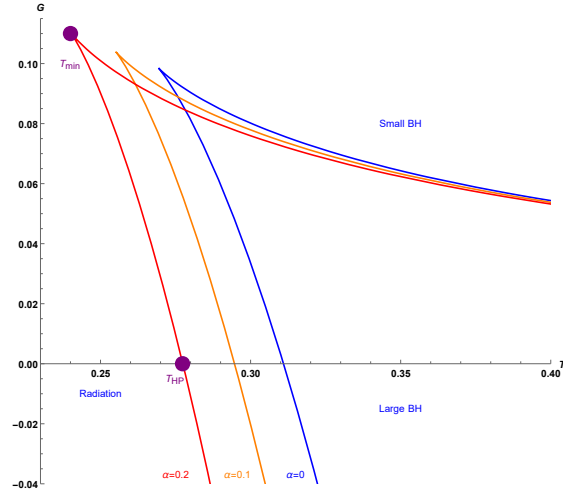


Fig. 12. The Gibbs free energy ($G^{(-1)}$) plotted for Kerr-AdS black hole with respect to the temperature ($T^{(-1)}$) for $\Omega = 0.3$, $\omega = -1$ and different values of α .

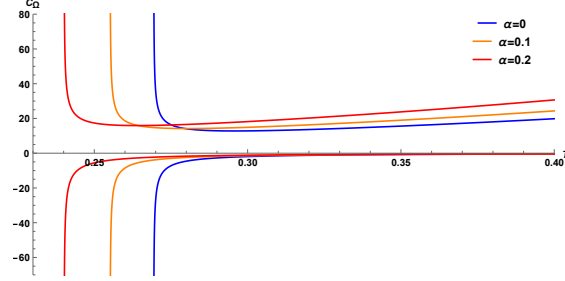


Fig. 13. The specific heat $C_{\Omega}^{(-1)}$ plotted for Kerr-AdS black hole with respect to temperature ($T^{(-1)}$) for $\Omega = 0.3$, $\omega = -1$ and different values of α .

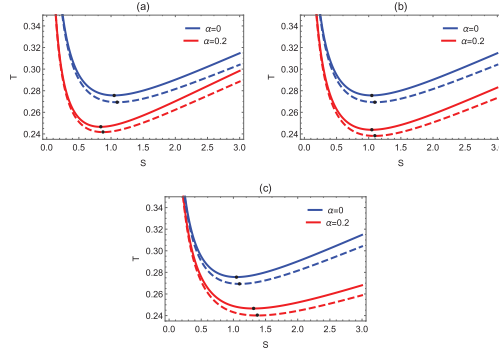


Fig. 14. The temperature T plotted with respect to the entropy S for $\Omega = 0$ (straight line) and $\Omega = 0.3$ (dashed line). (a): $(T-S)$ for $\omega = -\frac{1}{3}$. (b): $(T-S)$ for $\omega = -\frac{2}{3}$. (c): $(T-S)$ for $\omega = -1$. The dots in the figure denotes the minimal entropy $S_{\min}^{(\omega)}$.

4.1. Thermal behaviors

We first start by the temperature behaviors in the studied models. Indeed, we plot the temperature as a function of the entropy for such three models in Fig. 14.

From this figure, we observe that the angular velocity Ω decreases the temperature and increases the unstable phase for all the cases ($\alpha = 0, \alpha \neq 0$). Besides, we remark a special behavior regarding the minimal entropy. In Fig. 14(a), we note that the minimal entropy $S_{\min}^{(-1/3)}$ decreases as a function of DE intensity α . In Fig. 14(b), however, $S_{\min}^{(-2/3)}$ has the same values appearing in the absence of DE. Furthermore, the Fig. 14(c) shows an opposite behavior to the one illustrated in Fig. 14(a). A close examination reveals that the Gibbs free energy G exhibits a similar behavior, being presented in Fig. 15. For the $(-\frac{1}{3})$ -model illustrated in Fig. 15(a), the Gibbs free energy G decreases when the DE intensity α increases. However, the

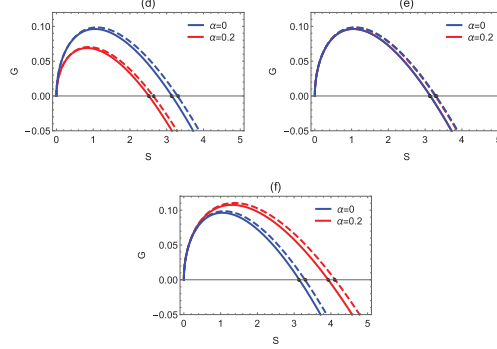


Fig. 15. The Gibbs free energy G plotted with respect to the entropy S for $\Omega = 0$ (straight line) and $\Omega = 0.3$ (dashed line). (a): $(G - S)$ for $\omega = -\frac{1}{3}$. (b): $(G - S)$ for $\omega = -\frac{2}{3}$. (c): $(G - S)$ for $\omega = -1$. The dots in the figure denotes the Hawking–Page entropy $S_{HP}^{(\omega)}$.

(−1)-model of Fig. 15(c) involves an opposite behavior. Besides, we remark that DE does not have any effect on the Gibbs free energy for (− $\frac{2}{3}$)-model shown in Fig. 15(b). This matches perfectly with result associated with the Schwarzschild AdS black hole ($\Omega = 0$), being characterized by the straight line in Fig. 15. This can be supported by the expression of G . Indeed, we give the Gibbs free energy for Schwarzschild AdS black hole

$$\begin{aligned} G^{(-1/3)}(S, \alpha) &= G_0 - \frac{\alpha}{4} \sqrt{\frac{S}{\pi}}, \\ G^{(-2/3)}(S, \alpha) &= G_0, \\ G^{(-1)}(S, \alpha) &= G_0 + \frac{\alpha}{4} \left(\frac{S}{\pi} \right)^{3/2}, \end{aligned}$$

where $G_0 = \frac{\sqrt{S}(\pi-S)}{4\pi^{3/2}}$ indicates the ordinary Gibbs free energy. Physically, this behavior of G and $S_{\min}^{(\omega)}$ values can be understood from the fact that these physical quantities are considered as extensive parameters. It is worth noted that the DE intensity α decreases always the Hawking–Page temperature (T_{HP}), while ω increases T_{HP} when $-1 \leq \omega \leq -\frac{2}{3}$. However, T_{HP} is decreased when $-\frac{2}{3} \leq \omega \leq -\frac{1}{3}$.

4.2. Universality of certain critical quantities

Here, we discuss the obtained results for the three (ω)-models showing relevant similarities and distinctions. However, we focus on some critical thermodynamical quantities of four-dimensional Kerr-AdS black holes by probing possible universal relations. To show that, we list first the corresponding involved quantities for certain values of DE parameters for a fixed value of Ω i.e. 0.3. For simplicity reasons, we vary α between 0.05 and 0.2 by assuming that other values bring similar behaviors. For (−1)-model, we collect the associated numerical results in Table 1.

Table 1. Critical values for the (-1) -model.

	$S_{\min}$	$T_{\min}$	S_{HP}	T_{HP}
$\alpha = 0.05$	1.1556	0.2623	3.4656	0.3029
$\alpha = 0.1$	1.2200	0.2551	3.6587	0.2946
$\alpha = 0.15$	1.2919	0.2477	3.8273	0.2853
$\alpha = 0.2$	1.3726	0.2400	4.1142	0.2774

The relevant thermodynamical quantities of $(-\frac{2}{3})$ -model are listed in Table 2.

Table 2. Critical values for the $(-\frac{2}{3})$ -model.

	$S_{\min}$	$T_{\min}$	S_{HP}	T_{HP}
$\alpha = 0.05$	1.0959	0.2615	3.2917	0.3032
$\alpha = 0.1$	1.0942	0.2537	3.2855	0.2954
$\alpha = 0.15$	1.0925	0.2459	3.2840	0.2877
$\alpha = 0.2$	1.0908	0.2381	3.2777	0.2798

The results of $(-\frac{1}{3})$ -model are given in Table 3.

Table 3. Critical values for the $(-\frac{1}{3})$ -model.

	$S_{\min}$	$T_{\min}$	S_{HP}	T_{HP}
$\alpha = 0.05$	1.0423	0.2627	3.1300	0.3033
$\alpha = 0.1$	0.9870	0.2559	2.9635	0.2953
$\alpha = 0.15$	0.9316	0.2488	2.7975	0.2872
$\alpha = 0.2$	0.8762	0.2416	2.6330	0.2788

In all three (ω) -models, we first remark that there exist nice universal ratio quantities for four-dimensional Kerr-AdS black holes regarding the entropy. In particular, we consider the ratio $\frac{S_{\min}^{(\alpha)}}{S_{\text{HP}}^{(\alpha)}}$. For the (-1) -model ($(-\frac{1}{3})$ -model), we observe that when α increases, the quantity $S_{\min}^{(\alpha)}$ and $S_{\text{HP}}^{(\alpha)}$ increase (decreases). However, for $(-\frac{2}{3})$ -model, the $S_{\min}^{(\alpha)}$ and $S_{\text{HP}}^{(\alpha)}$ keep approximatively the same values which are around 1.09 and 3.28, respectively. Even the relevant distinctions of these (ω) -models, the ratio $\frac{S_{\min}^{(\alpha)}}{S_{\text{HP}}^{(\alpha)}}$ remains almost unchanged. Indeed, it is given by

$$\frac{S_{\min}^{(\alpha)}}{S_{\text{HP}}^{(\alpha)}} \approx 0.33. \quad (4.1)$$

Similarly for the temperature, we compute numerically the ratio $\frac{T_{\min}^{(\alpha)}}{T_{\text{HP}}^{(\alpha)}}$ for all the studied (ω) -models. Inspecting such calculations, we find the second universal relation given by

$$\frac{T_{\min}^{(\alpha)}}{T_{\text{HP}}^{(\alpha)}} \approx 0.86. \quad (4.2)$$

It has been remarked that two critical ratios are independent of DE parameters. These two different values could be explained by physical properties of the involved thermodynamical quantities. We believe that this nice feature needs deeper investigations. This will be investigated in future works.

5. Behaviors of shadow Kerr-AdS black holes surrounded by a quintessential field

In this section, we investigate the Kerr-AdS black hole shadow for the three (ω)-models. To start, we consider the Lagrangian given by

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad (5.1)$$

where the over dot is the derivative with respect to the affine parameter Γ , while $g_{\mu\nu}$ is the metric tensor.⁴³ In this way, the canonical conjugated momentum for such a Kerr-AdS black hole surrounded by quintessential dark energy can be computed from the following relation:

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} = g_{\alpha\mu} \dot{x}^\mu. \quad (5.2)$$

Indeed, this equation generates

$$p_t = g_{tt} \dot{t} + g_{t\phi} \dot{\phi} = -E, \quad (5.3)$$

$$p_\phi = g_{\phi t} \dot{t} + g_{\phi\phi} \dot{\phi} = L, \quad (5.4)$$

where E and L represent the energy and the angular momentum, respectively. The associated metric components are given by

$$g_{tt} = \frac{a^2 \Delta_\theta \sin^2 \theta - \Delta_r}{\Xi^2 \Sigma^2}, \quad (5.5)$$

$$g_{\phi t} = g_{t\phi} = \frac{a \sin^2 \theta [\Delta_r - (a^2 + r^2) \Delta_\theta]}{\Xi^2 \Sigma^2}, \quad (5.6)$$

$$g_{\phi\phi} = \frac{\sin^2 \theta [(a^2 + r^2)^2 \Delta_\theta - a^2 \Delta_r \sin^2 \theta]}{\Xi^2 \Sigma^2}. \quad (5.7)$$

Multiplying (5.3) by $(-g_{\phi\phi})$, (5.4) by $(g_{t\phi})$ and grouping the two equations together, we obtain

$$\dot{t} = \frac{E g_{\phi\phi} + L g_{t\phi}}{(g_{t\phi})^2 - g_{tt} g_{\phi\phi}}. \quad (5.8)$$

Replacing each metric component by its expression, we get

$$\Sigma^2 \dot{t} = \Sigma^2 \frac{dt}{d\Gamma} = \frac{\Xi^2 E [\Delta_\theta (r^2 + a^2) (r^2 + a^2 - a\lambda) + a \Delta_r (\lambda - a \sin^2 \theta)]}{\Delta_r \Delta_\theta}, \quad (5.9)$$

with $\lambda = L/E$. However, the second components of the light rays velocity read as

$$\dot{\phi} = -\frac{E g_{t\phi} + L g_{tt}}{(g_{t\phi})^2 - g_{tt} g_{\phi\phi}}, \quad (5.10)$$

$$\Sigma^2 \frac{d\phi}{d\Gamma} = \Xi^2 E \left[\frac{a(r^2 + a^2) - a^2}{\Delta_r} + \frac{\lambda - a \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta \Delta_\theta} \right]. \quad (5.11)$$

In order to get the remaining two components of the velocity light rays, one should exploit the Hamilton–Jacobi equation governing the geodesic motion in spacetime. This equation can be formulated as follows:

$$\frac{\partial S}{\partial \Gamma} = \mathcal{H} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu}. \quad (5.12)$$

Concretely, the action is given by

$$S = \frac{1}{2} m_0^2 \Gamma - E t + L \phi + S_r(r) + S_\theta(\theta), \quad (5.13)$$

where m_0 is the particle mass.⁴⁴ The contravariant metric tensor is

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{\Xi^2 [\Delta_r a^2 \sin^2 \theta - \Delta_\theta (a^2 + r^2)^2]}{\Delta_r \Delta_\theta \Sigma^2} & 0 & 0 & -\frac{\Xi^2 [a \Delta_\theta (r^2 + a^2) - a \Delta_r]}{\Delta_r \Delta_\theta \Sigma^2} \\ 0 & \frac{\Delta_r}{\Sigma^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta_\theta}{\Sigma^2} & 0 \\ -\frac{\Xi^2 [a \Delta_\theta (r^2 + a^2) - a \Delta_r]}{\Delta_r \Delta_\theta \Sigma^2} & 0 & 0 & \frac{\Xi^2 [-a^2 \Delta_\theta \sin^2 \theta + \Delta_r]}{\Delta_r \Delta_\theta \Sigma^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

The computation shows that the explicit form of the Hamilton–Jacobi equation takes the following form:

$$\begin{aligned} m_0^2 = 2 \frac{\partial S}{\partial \Gamma} = \frac{\Xi^2}{\Sigma^2 \Delta_r} & \left[(r^2 + a^2) \frac{\partial S}{\partial t} + a \frac{\partial S}{\partial \phi} \right]^2 \\ & - \frac{\Xi^2}{\Sigma^2 \Delta_\theta \sin^2 \theta} \left[a \sin^2 \theta \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial \phi} \right]^2 \\ & - \frac{\Delta_r}{\Sigma^2} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \frac{\Delta_\theta}{\Sigma^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Using the notations $\frac{\partial S}{\partial t} = -E$, $\frac{\partial S}{\partial \phi} = L$ and considering photon particles with $m_0 = 0$, we obtain

$$\begin{aligned} 0 = & \left\{ \Delta_r \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \frac{\Xi^2}{\Delta_r} [(r^2 + a^2) E - a L]^2 + \frac{\Xi^2}{\Delta_\theta} (L - a E)^2 \right\} \\ & + \left\{ \frac{\Delta_\theta}{\Sigma^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\Xi^2}{\Delta_\theta} \cos^2 \theta \left[-E^2 a^2 + \frac{L^2}{\sin^2 \theta} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Factorizing these two equations, where the separating constant is $C = \mathcal{K} - \frac{\Xi^2}{\Delta_\theta} (L - a E)^2$, we get

$$\begin{cases} R = \Xi^2 [(r^2 + a^2) E - L a] - \mathcal{K} \Delta_r = E^2 \left\{ \Xi^2 [(r^2 + a^2) - \lambda a]^2 - k \Delta_r \right\}, \\ \Theta = \mathcal{K} \Delta_\theta - \Xi^2 \left(\frac{L - a E \sin^2 \theta}{\sin \theta} \right)^2 = E^2 \left\{ k \Delta_\theta - \Xi^2 \left(\frac{\lambda - a \sin^2 \theta}{\sin \theta} \right)^2 \right\}, \end{cases} \quad (5.17)$$

where $\mathcal{K}$ is the carter constant and $k = \mathcal{K}/E^2$. The equations of motion expression for the photon around a rotating AdS black hole surrounded by DE can be obtained. Precisely, they are expressed as follows:

$$\Sigma^2 \frac{dt}{d\Gamma} = \frac{\Xi^2 E [\Delta_\theta (r^2 + a^2) (r^2 + a^2 - a\lambda) + a\Delta_r (\lambda - a \sin^2 \theta)]}{\Delta_r \Delta_\theta}, \quad (5.18)$$

$$\Sigma^2 \frac{dr}{d\Gamma} = \sqrt{R}, \quad (5.19)$$

$$\Sigma^2 \frac{d\theta}{d\Gamma} = \sqrt{\Theta}, \quad (5.20)$$

$$\Sigma^2 \frac{d\phi}{d\Gamma} = \Xi^2 E \left[\frac{a (r^2 + a^2) - a\lambda}{\Delta_r} + \frac{\lambda - a \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta \Delta_\theta} \right]. \quad (5.21)$$

To analyze the photon orbits, we should introduce two dimensionless impact parameters denoted as $\eta \equiv k$ and $\xi \equiv \lambda$. In this way, the unstable circular orbit can determine the boundary of black hole geometric shape using the equation given by

$$R = 0 = \frac{\partial R}{\partial r}. \quad (5.22)$$

After calculations, we find

$$\eta = \frac{r^2 \Xi^2 (16a^2 \Delta_\theta \Delta_r - 16\Delta_r^2 + 8r\Delta_r \Delta'_r - r^2 (\Delta'_r)^2)}{a^2 \Delta_\theta (\Delta'_r)^2} \Big|_{r=r_0}, \quad (5.23)$$

$$\xi = \frac{-4r\Delta_r + (r^2 + a^2) \Delta'_r}{a\Delta'_r} \Big|_{r=r_0}, \quad (5.24)$$

where r_0 is the circular orbit radius of the photon and $\Delta'_r = \frac{\partial \Delta_r}{\partial r}$. Linking the characteristic length of the AdS space with the cosmological constant by the relation $\Lambda = -3/\ell^2$, we can elaborate the shadow of the Kerr-AdS black hole. Taking the limit $\Lambda = c = 0$,

$$\eta = \frac{r_0^3 (4a^2 M - r_0 (3M - r_0)^2)}{a^2 (r_0 - M)^2}, \quad (5.25)$$

$$\xi = \frac{r_0^2 (3M - r_0) - a^2 (M + r_0)}{a (r_0 - M)}, \quad (5.26)$$

we recover the results associated with Kerr black hole reported in Ref. 45. The Schwarzschild black hole can be also obtained by taking the limit $a = 0$. For $M = 1$, the photon sphere can be described by the equation

$$\eta + \xi^2 = 27 \quad (5.27)$$

with $r_0 = 3$.⁴⁶ In Fig. 16, the orbits are illustrated in terms of the associated celestial coordinates (α, β) , reported in Ref.,⁴⁵ for the three (ω) -models.

It follows from this figure that the decrease of ω implies the increase of the shadow. However, the later increases with high values of the DE intensity c . Besides,

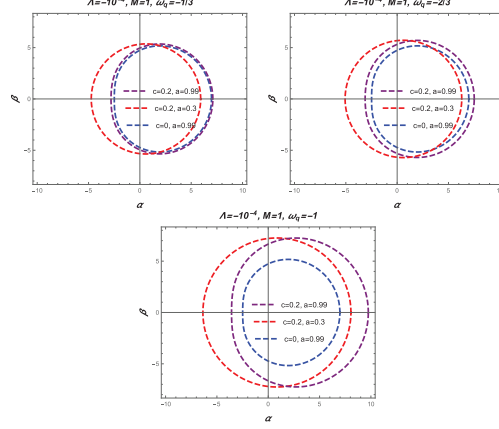


Fig. 16. (Color online) The shadow of Kerr-AdS black hole for (ω) -models in celestial coordinates (α, β) . The ordinary case without DE is plotted with the blue color.

we note that the D -shape of the shadow, which is a characteristic of the Kerr black hole, becomes relevant for the (-1) -model and gets even more deformed for high values of the DE intensity. The same behavior is observed for the spherical shadow of Schwarzschild-AdS black hole.⁴⁶ Moreover, it has been remarked that when the value of ω decreases the size of the shadow gets bigger. We believe that such nontrivial behaviors need deeper investigations. We hope to come back to these behaviors in connection with other features in future works.

6. Conclusions and open questions

In this paper, we have studied the critical behaviors of four-dimensional Kerr-AdS black holes from quintessential DE contributions. Exploiting a moduli space coordinated by the DE state parameter ω and the quintessence field intensity α , we have investigated three (ω) -models. In particular, we have computed relevant thermodynamical quantities needed to approach the corresponding phase transitions. Among others, we have shown that such models involve crucial similarities and distinctions regarding such quantities. For instance, we have found, in the $(-\frac{1}{3})$ -model, that DE stabilize the Kerr-AdS black holes. However, the remaining two models have shown surprising behaviors. Indeed, the $(-\frac{2}{3})$ -model has revealed a resistance to DE effects while (-1) -model has brought reversed DE effects. Moreover, certain thermal behaviors have been discussed. After an examination, we have remarked that the parameter ω can be put as

$$\omega = -1 + \varpi, \quad (6.1)$$

where ϖ is a new parameter restricted by $0 \leq \varpi \leq \frac{2}{3}$. This new parameter could control such distinctions. Starting from an anti-DE effect associated with $\varpi = 0$,

the behaviors completely change by increasing the values of ϖ . Even such visible distinctions in the (ϖ) -models, we have observed similarities associated with universal properties in terms of four-dimensional Kerr-AdS black hole critical quantities. Besides, we have showed that the decrease (increase) of $\omega(\alpha)$ enhances the size of the black hole shadow.

This work comes up with many open questions. The natural one concerns the understanding of the founded results, in terms of ϖ . Besides, higher-dimensional models could be considered as a future work by investigating the effect of space-time dimensions on Kerr-AdS black hole behaviors in the presence of nontrivial contributions including DE.

Acknowledgments

AB would like to thank the Departamento de Física, Universidad de Murcia for very kind hospitality and scientific supports during the realization of a part of this work and he thanks H. El Moumni, J. J. Fernández-Melgarejo and E. Torrente-Lujan for interesting discussions on related topics. The authors would like to thank M. Benali for discussions on the revised version. This work is partially supported by the ICTP through AF-13. This work is partially supported by spanish MINECO/FEDER grant FPA2015-65745-P and DGA-FSE grant E21-17R.

All the authors, being in alphabetical order, contributed equally to this work.

References

1. S. Carlip, *Int. J. Mod. Phys. D* **23** (2014) 1430023.
2. B. P. Dolan, *Mod. Phys. Lett. A* **30** (2015) 1540002.
3. J. Shen, R. G. Cai, B. Wang and R. K. Su, *Int. J. Mod. Phys. A* **22** (2007) 11.
4. S. H. Hendi, S. Panahiyani and M. Momennia, *Int. J. Mod. Phys. D* **25** (2016) 1650063.
5. D. Astefanesei, R. Ballesteros, D. Choque and R. Rojas, *Phys. Lett. B* **782** (2018) 473.
6. E. Torrente-Lujan, *Phys. Lett. B* **798** (2019) 135019.
7. A. Belhaj and H. El Moumni, *Nucl. Phys. B* **938** (2019) 200.
8. S. W. Hawking and D. N. Page, *Commun. Math. Phys.* **87** (1983) 577.
9. J. X. Mo and W. B. Liu, *Phys. Lett. B* **727** (2013) 336.
10. A. Belhaj, M. Chabab, H. El Moumni, K. Masmar and M. B. Sedra, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **12** (2015) 1550017.
11. A. Belhaj, M. Chabab, H. El Moumni, L. Medari and M. B. Sedra, *Chin. Phys. Lett.* **30** (2013) 090402.
12. D. Kubizňák and R. B. Mann, *J. High Energy Phys.* **7** (2012) 33.
13. Y. Liu, D. C. Zou and B. Wang, *J. High Energy Phys.* **9** (2014) 179.
14. C. Niu, Y. Tian and X. N. Wu, *Phys. Rev. D* **85** (2012) 024017.
15. A. Belhaj, M. Chabab, H. El Moumni and M. B. Sedra, *Chin. Phys. Lett.* **29** (2012) 100401.
16. R. G. Cai, L. M. Cao, L. Li and R. Q. Yang, *J. High. Energy Phys.* **9** (2013) 5.
17. S. W. Wei and Y. X. Liu, *Phys. Rev. D* **87** (2013) 044014.
18. R. Banerjee and S. Modak, *Phys. Rev. D* **84** (2011) 064024.
19. A. Al Balushi and R. B. Mann, *Class. Quantum Grav.* **36** (2019) 245017.

20. P. Cheng, S. W. Wei and Y. X. Liu, *Phys. Rev. D* **94** (2016) 024025.
21. V. V. Kiselev, *Class. Quant. Grav.* **20** (2003) 1187.
22. E. Babichev, V. Dokuchaev and Y. Eroshenko, *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004) 021102.
23. E. O. Babichev, V. I. Dokuchaev and Y. N. Eroshenko, *Phys. Usp.* **56** (2013) 1155.
24. P. H. Frampton, M. Kawasaki, F. Takahashi and T. T. Yanagida, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **04** (2010) 023.
25. V. V. Kiselev, arXiv: gr-qc/0303031.
26. S. Hellerman, N. Kaloper and L. Susskind, *J. High Energy Phys.* **06** (2001) 003.
27. S. Chen and J. Jing, *Class. Quantum Grav.* **22** (2005) 4651.
28. Y. Zhang and Y. X. Gui, *Class. Quantum Grav.* **23** (2006) 6141.
29. Y. Ma, J. Chen and C. Sun, *Nucl. Phys. B* **931** (2018) 418.
30. A. Belhaj, A. El Balali, W. El Hadri, H. El Moumni and M. B. Sedra, *Eur. Phys. J. Plus* **134** (2019) 422.
31. G. W. Gibbons and S. W. Hawking, *Phys. Rev. D* **15** (1977) 2752.
32. A. M. Awad and C. V. Johnson, *Phys. Rev. D* **61** (2000) 084025.
33. G. W. Gibbons, M. J. Perry and C. N. Pope, *Class. Quant. Grav.* **22** (2005) 1503.
34. A. M. Awad and C. V. Johnson, *Phys. Rev. D* **63** (2001) 124023.
35. K. Jafarzad and J. Sadeghi, arxiv:1803.04250.
36. V. Cardoso, O. J. C. Dias and S. Yoshida, *Phys. Rev. D* **74** (2006) 044008.
37. S. G. Ghosh, *Euro. Phys. J. C* **76** (2016) 222.
38. B. Toshmatov, Z. Stuchlík and B. Ahmedov, *Euro. Phys. J. Plus* **132** (2017).
39. H. Ibrar and A. Sajid, *Euro. Phys. J.* **131** (2016).
40. J. Schee and Z. Stuchlík, *Euro. Phys. J. C* **76** (2016).
41. Z. Xu and J. Wang, *Phys. Rev. D* **95** (2017) 064015.
42. R. Banerjee and D. Roychowdhury, *J. High Energy Phys.* **11** (2011) 004.
43. B. Carter, *Phys. Rev.* **174** (1968) 15591571.
44. P. A. Blaga and C. Blaga, *Class. Quant. Grav.* **18** (2001) 38933905.
45. P. V. Cunha, C. A. Herdeiro, E. Radu and H. F. Runarsson, *Int. J. Mod. Phys. D* **25** (2016) 1641021.
46. B. P. Singh, S. G. Ghosh, *Ann. Phys.* **395** (2018) 127.

Article 3

Titre: On Phase Transition Behaviors of Kerr-Sen Black Hole

Auteurs: A. Belhaj, A. El Balali, W. El Hadri, H. El Moumni, M. A. Essebani, M. B. Sedra

Journal: Int.J.Geom.Meth.Mod.Phys. 17 (2020) 11, 2050169.

Résumé:

Nous étudions les transitions de phase et les comportements critiques du trou noir de Kerr-Sen en quatre dimensions, en calculant les quantités thermodynamiques associées. En exploitant le schéma d'Ehrenfest, nous montrons que le trou noir de Kerr-Sen subit une transition de phase du second ordre. En adoptant une nouvelle forme métrique de la géothermodynamique dérivée de l'énergie libre de Gibbs, en introduisant un facteur conforme associé à des solutions extrêmes. La dérivation de la courbure scalaire associée confirme l'existence d'une transition de phase du second ordre. En dernier lieu, nous examinons les exposants critiques, qui correspondent parfaitement à la théorie des champs moyens.

On phase transition behaviors of Kerr–Sen black hole

A. Belhaj*, A. El Balali and W. El Hadri

*Département de Physique
 Equipe des Sciences de la Matière et du Rayonnement
 ESMaR, Faculté des Sciences
 Université Mohammed V de Rabat, Rabat, Morocco
 belhadjadil@fsr.ac.ma

H. El Mounni

*EPThe, Département de Physique, Faculté des Sciences
 Université Ibn Zohr, Agadir, Morocco
 hasan.elmounni@edu.uca.ma*

M. A. Essebani

*Département de Physique, LabSIMO, Faculté des Sciences
 Université Ibn Tofail, Kénitra, Morocco*

M. B. Sedra

*Département de Physique, LabSIMO, Faculté des Sciences
 Université Ibn Tofail, Kénitra, Morocco
 Faculté des Sciences et Techniques d'Errachidia
 Université Moulay Ismail, Errachidia, Morocco*

Received 15 July 2020

Accepted 31 July 2020

Published 9 September 2020

We investigate phase transitions and critical behaviors of the Kerr–Sen black hole in four dimensions. Computing the involved thermodynamical quantities including the specific heat and using the Ehrenfest scheme, we show that such a black hole undergoes a second-order phase transition. Adopting a new metric form derived from the Gibbs free energy scaled by a conformal factor associated with extremal solutions, we calculate the geothermodynamical scalar curvature recovering similar phase transitions. Then, we obtain the scaling laws and the critical exponents, matching perfectly with mean field theory.

Keywords: Kerr–Sen black hole; phase transitions; Ehrenfest equations; thermodynamical geometry; scaling laws.

Mathematics Subject Classification 2020: 82B26, 83C57, 83E05

*Corresponding author.

1. Introduction

It has been shown that black holes can be considered as exotic objects predicted by various gravity theories [1, 2]. The associated investigations have been supported by low-energy limits of superstring models and M-theory [3–5]. In this context, many solutions have been elaborated using either brane physics or the dimension reduction mechanism on nontrivial geometries [6]. A particular emphasis has been put on a solution obtained from the heterotic superstring theory [7]. According to some stringy assumptions, the Kerr–Sen black hole has been found as an exact solution having a finite amount of charge and angular momentum. This model has been approached from many angles including the thermodynamical and the optical aspects [8–11]. Recently, such behaviors have been considered as fascinating research topics supported by the black hole imaging [12]. In particular, many studies have been done dealing with thermodynamics of four-dimensional black holes [13–16]. Among others, it has been shown that certain models can undergo phase transitions which have been extensively investigated in different situations and backgrounds including dark sectors [17–19]. In this way, various thermodynamical relations have been exploited to study the nature of such transitions. Precisely, the Ehrenfest equations have been considered as an elegant tool to inspect the second-order phase transition at certain critical points [20, 21]. At the vicinity of such points, certain thermodynamic quantities, including the heat capacity, exhibit singular behaviors relaying on divergencies.

The aim of this paper is to investigate phase transition behaviors of the Kerr–Sen black hole in four dimensions by determining their nature using two different approaches. Concretely, we compute the relevant thermodynamical quantities including the specific heat involving nontrivial behaviors at the critical point. Using the Ehrenfest scheme, we first reveal that such a black hole, being described by three parameters (mass M , norm of angular momentum J and charge Q), undergoes a second-order phase transition. Adopting a new metric form relying on the Gibbs free energy scaled by a conformal factor associated with extremal solutions, we elaborate the geothermodynamics recovering similar phase transition behaviors. Then, we obtain scaling laws and critical exponents of such a black hole, which match perfectly with mean field theory.

The organization of this work is as follows. In Sec. 2, we reconsider the study of the phase transitions of the Kerr–Sen black hole by computing the relevant thermodynamical quantities. In Sec. 3, we examine the Ehrenfest equations and show that the Kerr–Sen black hole undergoes a second-order phase transition. In Sec. 4, we compute thermodynamical curvature showing similar phase transition behaviors. In Sec. 5, we discuss the scaling laws and the critical exponents by computing the associated quantities. The last section is devoted to conclusions and open questions.

2. Kerr–Sen Black Hole Thermodynamics

In this section, we reconsider the study of the Kerr–Sen black hole thermodynamics. This four-dimensional black hole solution has been obtained from the heterotic superstring theory living in ten dimensions [7]. The associated action is given by

$$S = \int d^4x \sqrt{-\det g} e^{-\Phi} \left(R - g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{8} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} \right). \quad (2.1)$$

Here, R is the Ricci scalar curvature, g denotes the determinant of the metric, $F_{\mu\nu}$ indicates the abelian electromagnetic tensor given by $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ with the Maxwell field A_μ , ϕ is the Dilaton scalar field, while the tensor field $H_{\mu\nu\rho}$ is given by

$$H_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu} - \frac{1}{4} (A_\mu F_{\nu\rho} + A_\nu F_{\rho\mu} + A_\rho F_{\mu\nu}), \quad (2.2)$$

where $B_{\mu\nu}$ represents the stringy antisymmetric B -field. This action has been considered as the starting point to elaborate the Kerr–Sen (charged rotating) black hole in four dimensions.

In order to investigate the corresponding thermodynamical behaviors, however, we exploit its line element metric using the standard Boyer–Lindquist coordinates. In this way, it reads as

$$ds^2 = -\frac{f(r)}{\sigma} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\sigma} (adt - (\sigma + a^2 \sin^2 \theta d\phi)^2 + \sigma \left(\frac{dr^2}{f(r)} + d\theta^2 \right). \quad (2.3)$$

In this case, the metric function $f(r)$ reads as

$$f(r) = r^2 + 2(b - M)r + a^2. \quad (2.4)$$

The quantity σ takes the following form:

$$\sigma = r^2 + 2br + a \cos^2 \theta. \quad (2.5)$$

The twist parameter b and the angular momentum J are, respectively, given by

$$b = \frac{Q^2}{2M}, \quad J = aM. \quad (2.6)$$

In this Kerr–Sen black hole solution, M , Q and a represent the mass, the charge and the specific angular momentum, respectively. As usually, the event horizon r_h of such a black hole can be obtained by imposing the constraint $f(r_h) = 0$. The

A. Belhaj et al.

associated solution is given by

$$r_h^\pm = M - b \pm \sqrt{(M - b)^2 - a^2}. \quad (2.7)$$

Using Eq. (2.6), the corresponding entropy reads as

$$S = \frac{A}{4} = \pi(2M^2 - Q^2 + \sqrt{(2M^2 - Q^2)^2 - 4J^2}). \quad (2.8)$$

The Hawking temperature, being related to the surface gravity, takes the following form:

$$T = \frac{\sqrt{(2M - Q^2)^2 - 4J^2}}{4\pi M(2M - Q^2 + \sqrt{(2M - Q^2)^2 - 4J^2})}. \quad (2.9)$$

Similar calculations provide a generalized formula for the Kerr–Sen black hole

$$M(S, Q, J) = \left(\frac{4\pi^2 J^2 + 2\pi Q^2 S + S^2}{4\pi S} \right)^{1/2}. \quad (2.10)$$

It is recalled that the first law of the black hole thermodynamics can be written as

$$dM = TdS + \phi dQ + \Omega_H dJ, \quad (2.11)$$

where T , ϕ and Ω_H are the temperature, the electrostatic potential and the angular velocity, respectively. The explicit expressions of the involved parameters are listed as follows:

$$\Omega = \frac{\partial M}{\partial J} = \frac{\pi J}{MS}, \quad (2.12)$$

$$\phi = \frac{\partial M}{\partial Q} = \frac{Q}{2M}. \quad (2.13)$$

The temperature being given by

$$T(S, Q, J) = \frac{\partial M}{\partial S} = \frac{(S - 2\pi J)(S + 2\pi J)}{4S^{3/2}\sqrt{\pi(4\pi^2 J^2 S + 2\pi Q^2 S^2 + S^3)}} \quad (2.14)$$

is illustrated in Fig. 1 as a function of the entropy for different values of the angular momentum and the charge. This computation generates certain critical behaviors.

A close examination on the curve in the S – T plane shows that the temperature T is indeed a continuous function of the entropy. Thus, the possibility of a first-order phase transition is removed. Besides, one can notice from Fig. 1 that the temperature decreases when the angular momentum and the charge does. However, it has been shown that the temperature vanishes at $S = 2\pi J$ which could be linked with an extremal black hole solution. Then, the temperature exhibits a maximum

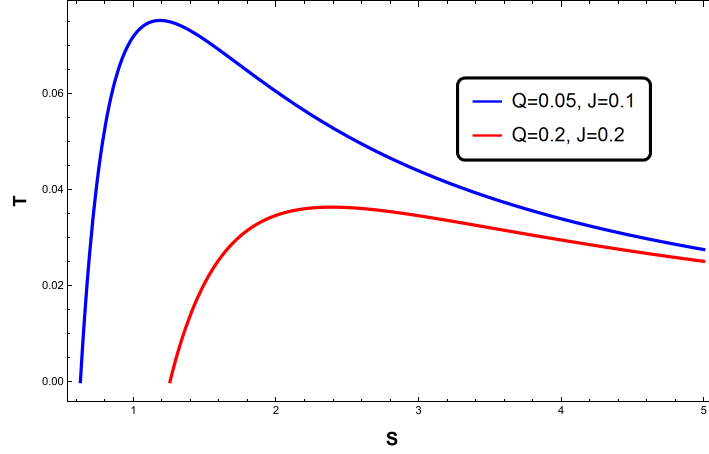


Fig. 1. The Temperature (T) for Kerr–Sen black hole as a function of the entropy (S) for different values of J and Q .

point corresponding to its vanishing first derivative located at

$$S_{\max} = \pi \sqrt{2 \sqrt[3]{2J^4Q^4 - 8J^6} + 4J^2} + \sqrt{4\pi^2 J^2 \left(\frac{Q^2}{\sqrt{\frac{1}{2} \sqrt[3]{2J^4Q^4 - 8J^6} + J^2}} + 2 \right) - 2\pi^2 \sqrt[3]{2J^4Q^4 - 8J^6}}. \quad (2.15)$$

Then, it goes to zero when S goes to infinity. It is known that a second-order occurs at the point where the heat capacity exhibits a singularity. To get further insight into the thermodynamical behaviors of the Kerr–Sen black hole, we compute the semi-classical specific heat by using the relation $C_{J,Q} = T(\frac{\partial S}{\partial T})$. This has been found to be

$$C_{J,Q}(S, Q, J) = \frac{2S(-4J^2\pi^2 + S^2)(4J^2\pi^2 + S(2\pi Q^2 + S))}{48J^4\pi^4 - S^4 + 8J^2\pi^2 S(4\pi Q^2 + 3S)}. \quad (2.16)$$

To investigate the associated behaviors, we plot the heat capacity as a function of the entropy in Fig. 2.

It follows that this function involves a discontinuity at a critical value of the entropy given by $S_c = S_{\max} = 1.60199$. Such a point S_c separates two branches associated with a small and large black hole transition. It can be seen also from Fig. 2 that the heat capacity changes from a positive infinity to a negative infinity at $T = T_c = 0.0874147$. An examination shows that there is an infinite divergence of the heat capacity that indicates a higher-order phase transition of the Kerr–Sen black hole. This critical transition can be treated using two different approaches

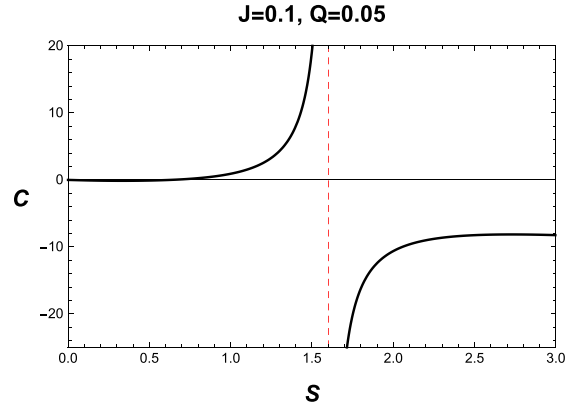


Fig. 2. The heat capacity (C) of Kerr-Sen black hole with respect to the entropy (S) for fixed $J = 0.1$ and $Q = 0.05$.

which will be investigated in the next sections. The first one will be based on the Ehrenfest method. However, the second one will be conducted using a geometric way by adopting a new metric form inspired by the Gibbs free energy scaled by a conformal factor associated with the existence of extremal solutions.

3. Second-Order Phase Transition of the Kerr-Sen Black Hole

In this section, we study a phase transition phenomena appearing in the Kerr-Sen black hole by using first the Ehrenfest scheme [22–26]. In particular, we will show that this black hole exhibits a second-order phase transition by adopting such a nice technique used for studying thermodynamical systems.

3.1. Kerr-Sen black hole behaviors from the Ehrenfest scheme

It is noted that the Ehrenfest scheme has been exploited to understand the nature of the phase transition, based on certain relations and equations. For such a black hole, twelve Ehrenfest equations are involved. They are grouped in Table 1.

Table 1. Ehrenfest equations for the Kerr-Sen black hole.

S fixed	Ω fixed	ϕ fixed
$-(\frac{\partial J}{\partial T})_{S,Q} = \frac{(C_{J,Q})_2 - (C_{J,Q})_1}{\Omega T(\alpha_2 - \alpha_1)}$	$(\frac{\partial J}{\partial T})_{\Omega,Q} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\kappa_2 - \kappa_1}$	$(\frac{\partial J}{\partial T})_{\phi,Q} = \frac{\phi(\alpha'_2 - \alpha'_1)}{\Omega(\chi_2 - \chi_1)}$
$-(\frac{\partial J}{\partial Q})_{S,T} = \frac{\phi(\alpha'_2 - \alpha'_1)}{\Omega(\alpha_2 - \alpha_1)}$	$-(\frac{\partial J}{\partial Q})_{\Omega,T} = \frac{\phi(\chi'_2 - \chi'_1)}{\Omega(\kappa_2 - \kappa_1)}$	$-(\frac{\partial J}{\partial Q})_{\phi,T} = \frac{\phi(\kappa'_2 - \kappa'_1)}{\Omega(\chi_2 - \chi_1)}$
$-(\frac{\partial Q}{\partial J})_{S,T} = \frac{\Omega(\alpha_2 - \alpha_1)}{\phi(\alpha'_2 - \alpha'_1)}$	$-(\frac{\partial Q}{\partial J})_{\Omega,T} = \frac{\Omega(\kappa_2 - \kappa_1)}{\phi(\chi'_2 - \chi'_1)}$	$-(\frac{\partial Q}{\partial J})_{\phi,T} = \frac{\Omega(\chi_2 - \chi_1)}{\phi(\kappa'_2 - \kappa'_1)}$
$-(\frac{\partial Q}{\partial T})_{S,J} = \frac{(C_{J,Q})_2 - (C_{J,Q})_1}{\phi T(\alpha'_2 - \alpha'_1)}$	$(\frac{\partial Q}{\partial T})_{\Omega,J} = \frac{\Omega(\alpha_2 - \alpha_1)}{\phi(\chi'_2 - \chi'_1)}$	$(\frac{\partial Q}{\partial T})_{\phi,J} = \frac{\alpha'_2 - \alpha'_1}{\kappa'_2 - \kappa'_1}$

The relevant thermodynamical coefficients are given by the following formulae:

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{1}{\Omega} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_{J,Q}, \quad \kappa = \frac{1}{\Omega} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial J} \right)_{T,Q}, \quad \chi = \frac{1}{\Omega} \left(\frac{\partial \phi}{\partial J} \right)_{T,Q}, \\ \alpha' &= -\frac{1}{\phi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial T} \right)_{J,Q}, \quad \chi' = \frac{1}{\Omega} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial Q} \right)_{T,J}, \quad \kappa' = \frac{1}{\Omega} \left(\frac{\partial \phi}{\partial Q} \right)_{T,J}.\end{aligned}\quad (3.1)$$

As shown in Fig. 2, the heat capacity $C_{J,Q}$ is discontinuous which is needed to reveal that the studied black hole system undergoes a second-order phase transition. This can be confirmed by examining the discontinuous behaviors of α , κ , χ , α' , κ' and χ' . To do so, one should compute such quantities. Using (2.12) and (2.13), we can express Ω and ϕ as a function of S , J and Q . The calculations give

$$\Omega(S, Q, J) = \frac{2J\pi^{3/2}}{\sqrt{2\pi S^2 Q^2 + 4J^2 \pi^2 + S^3}}, \quad (3.2)$$

$$\phi(S, Q, J) = \frac{\sqrt{S\pi}Q}{\sqrt{4J^2 \pi^2 + 2\pi Q^2 S + S^2}}. \quad (3.3)$$

By using (2.14), (3.2) and (3.3), the expressions of α and α' can be written as

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{1}{\Omega} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial S} \right)_{J,Q} \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{J,Q} \\ &= \frac{4S(4J^2 \pi^2 + S(4\pi Q^2 + 3S))\sqrt{S\pi(4J^2 \pi^2 + S(2\pi Q^2 + S))}}{48J^4 \pi^4 - S^4 + 8J^2 \pi^2 S(4\pi Q^2 + 3S)},\end{aligned}\quad (3.4)$$

$$\alpha' = -\frac{1}{\phi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial S} \right)_{J,Q} \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{J,Q} = \frac{4S(-4J^2 \pi^2 + S^2)\sqrt{S\pi(4J^2 \pi^2 + S(2\pi Q^2 + S))}}{48J^4 \pi^4 - S^4 + 8J^2 \pi^2 S(4\pi Q^2 + 3S)}. \quad (3.5)$$

Using the following equations

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial J} \right)_{T,Q} &= \frac{(\frac{\partial \Omega}{\partial J})_{S,Q} (\frac{\partial T}{\partial S})_{J,Q} - (\frac{\partial \Omega}{\partial S})_{J,Q} (\frac{\partial T}{\partial J})_{S,Q}}{(\frac{\partial T}{\partial S})_{J,Q}}, \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial Q} \right)_{T,J} &= \frac{(\frac{\partial \phi}{\partial Q})_{S,J} (\frac{\partial T}{\partial S})_{J,Q} - (\frac{\partial \phi}{\partial S})_{J,Q} (\frac{\partial T}{\partial Q})_{S,J}}{(\frac{\partial T}{\partial S})_{J,Q}},\end{aligned}$$

we obtain

$$\kappa = \frac{(4J^2 \pi^2 + S^2)^2}{J(48J^4 \pi^4 - S^4 + 8J^2 \pi^2 S(4\pi Q^2 + 3S))}, \quad (3.6)$$

$$\kappa' = \frac{48J^4 \pi^4 + 24J^2 \pi^2 S^2 - S^4}{Q(48J^4 \pi^4 - S^4 + 8J^2 \pi^2 S(4\pi Q^2 + 3S))}. \quad (3.7)$$

A. Belhaj et al.

To get the expressions of the two final quantities, we exploit the formulae

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial J}\right)_{T,Q} = \frac{(\frac{\partial\phi}{\partial J})_{S,Q}(\frac{\partial T}{\partial S})_{J,Q} - (\frac{\partial\phi}{\partial S})_{J,Q}(\frac{\partial T}{\partial J})_{S,Q}}{(\frac{\partial T}{\partial S})_{J,Q}},$$

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial Q}\right)_{T,J} = \frac{(\frac{\partial\Omega}{\partial Q})_{S,J}(\frac{\partial T}{\partial S})_{J,Q} - (\frac{\partial\Omega}{\partial S})_{J,Q}(\frac{\partial T}{\partial Q})_{S,J}}{(\frac{\partial T}{\partial S})_{J,Q}},$$

which gives the following relations:

$$\chi = \frac{-4\pi QS(4J^2\pi^2 + S^2)}{48J^4\pi^4 - S^4 + 8J^2\pi^2S(4\pi Q^2 + 3S)}, \quad (3.8)$$

$$\chi' = \frac{-8J\pi^2(4J^2\pi^2 + S^2)}{48J^4\pi^4 - S^4 + 8J^2\pi^2S(4\pi Q^2 + 3S)}. \quad (3.9)$$

It is worth noting that α , χ , α' , κ' and χ' share the same denominator being exactly the one of $C_{J,Q}(S, Q, J)$. Thus, such quantities diverge at the same critical value of the entropy. This critical behavior can be clearly seen from Fig. 3 showing the variation of such quantities in terms of the entropy S .

Precisely, it has been observed that all the computed quantities exhibit a discontinuity at the critical value $S_c = 1.60199$ illustrated by the red dashed line. The obtained results show a genuine second-order phase transition for the Kerr-Sen black hole.

3.2. Validity of the Ehrenfest equations

Now, we are in position to inspect the Ehrenfest equations organized in Table 1 by checking their validity. It is noted that for any second-order phase transition, the Ehrenfest equations should be satisfied at the critical point. Indeed, we consider first the Ehrenfest equations associated with the fixed entropy classes. Using (2.14), the left-hand side of the first equation can be computed. This has been found to be

$$-\left(\frac{\partial J}{\partial T}\right)_{S,Q} = \frac{(\frac{S}{\pi}(4J^2\pi^2 + S(2\pi Q^2 + S)))^{3/2}}{J(4J^2\pi^2 + S(4\pi Q^2 + 3S))}. \quad (3.10)$$

To get the right-hand side, we can use the expressions of $C_{J,Q}$ and α given in (2.16) and (3.4). Indeed, consider two points $S_1 = S_c + \epsilon$ and $S_2 = S_c - \epsilon$ ($\epsilon \ll 1$) associated with phase 1 and 2, respectively, of the curves given in Figs. 2 and 3 and the corresponding $C_{J,Q}|_{S_1} = C_{(J,Q)_1}$, $C_{J,Q}|_{S_2} = C_{(J,Q)_2}$ and $\alpha|_{S_1} = \alpha_1$, $\alpha|_{S_2} = \alpha_2$, respectively. Putting $D(S, J, Q) = 48J^4\pi^4 - S^4 + 8J^2\pi^2S(4\pi Q^2 + 3S)$, the right-hand side of the first Ehrenfest relation for fixed values of the entropy

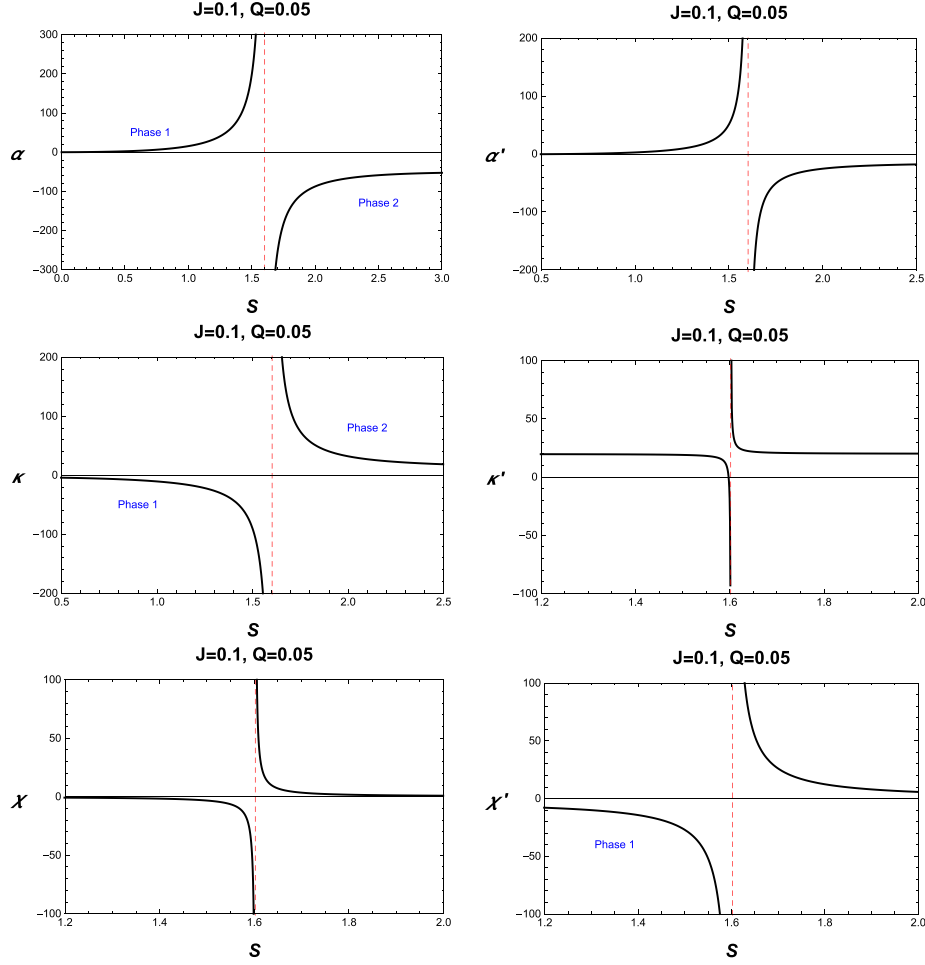


Fig. 3. The variation of α , κ , χ , α' , κ' and χ' with respect to the entropy for fixed values of Q and J .

reads as

$$\frac{(C_{J,Q})_2 - (C_{J,Q})_1}{\Omega T(\alpha_2 - \alpha_1)} = \frac{2S(-4J^2\pi^2 + S^2)(4J^2\pi^2 + S(2\pi Q^2 + S))}{\Omega T[4S(4J^2\pi^2 + S(4\pi Q^2 + 3S))\sqrt{S\pi(4J^2\pi^2 + S(2\pi Q^2 + S))}]}$$

$$\times \frac{(\frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_1})}{(\frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_1})}, \quad (3.11)$$

where D_1 and D_2 denote the denominators associated with the phase 1 and 2, respectively. Using the expressions of T and Ω , the right-hand side of the first

A. Belhaj et al.

Ehrenfest relation for a fixed value of the entropy is found to be

$$\frac{(C_{J,Q})_2 - (C_{J,Q})_1}{\Omega T(\alpha_2 - \alpha_1)} = \frac{(\frac{S}{\pi}(4J^2\pi^2 + S(2\pi Q^2 + S))^{3/2}}{J(4J^2\pi^2 + S(4\pi Q^2 + 3S))}, \quad (3.12)$$

revealing that the first Ehrenfest equation is satisfied. Using similar calculations, we examine the second equation appearing in Table 1. The left-hand side of the second Ehrenfest equation can be written as

$$-\left(\frac{\partial J}{\partial Q}\right)_{S,T} = \frac{(\frac{\partial T}{\partial Q})_{S,J}}{(\frac{\partial T}{\partial J})_{S,Q}}. \quad (3.13)$$

Using Eqs. (2.14) and (3.13), we get

$$-\left(\frac{\partial J}{\partial Q}\right)_{S,T} = \frac{QS(S^2 - 4J^2\pi^2)}{8J^3\pi^3 + 2J\pi S(4\pi Q^2 + 3S)}. \quad (3.14)$$

Exploiting the same procedure used in the verification of the first equation right-hand side, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{\phi(\alpha'_2 - \alpha'_1)}{\Omega(\alpha_2 - \alpha_1)} &= \frac{\phi[4S(-4J^2\pi^2 + S^2)\sqrt{S\pi(4J^2\pi^2 + S(2\pi Q^2 + S))}]}{\Omega[4S(4J^2\pi^2 + S(4\pi Q^2 + 3S))\sqrt{S\pi(4J^2\pi^2 + S(2\pi Q^2 + S))}]} \\ &\times \frac{(\frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_1})}{(\frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_1})}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Using (3.3) and (3.2), we arrive at

$$\frac{\phi(\alpha'_2 - \alpha'_1)}{\Omega(\alpha_2 - \alpha_1)} = \frac{QS(S^2 - 4J^2\pi^2)}{8J^3\pi^3 + 2J\pi S(4\pi Q^2 + 3S)}, \quad (3.16)$$

which reveals clearly the validity of the Ehrenfest second equation at the critical point. For the third equation, the left-hand side can be calculated using (2.14) and (3.17). Indeed, it is given by

$$-\left(\frac{\partial Q}{\partial J}\right)_{S,T} = \frac{(\frac{\partial T}{\partial J})_{S,Q}}{(\frac{\partial T}{\partial Q})_{S,J}} = \frac{8J^3\pi^3 + 2J\pi S(4\pi Q^2 + 3S)}{QS(S^2 - 4J^2\pi^2)}. \quad (3.17)$$

Similar computations provide

$$\begin{aligned} \frac{\Omega(\alpha_2 - \alpha_1)}{\phi(\alpha'_2 - \alpha'_1)} &= \frac{\Omega[4S(4J^2\pi^2 + S(4\pi Q^2 + 3S))\sqrt{S\pi(4J^2\pi^2 + S(2\pi Q^2 + S))}]}{\phi[4S(-4J^2\pi^2 + S^2)\sqrt{S\pi(4J^2\pi^2 + S(2\pi Q^2 + S))}]} \\ &\times \frac{(\frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_1})}{(\frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_1})}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Using the expression of ϕ from (3.3) and Ω from (3.2), we find

$$\frac{\Omega(\alpha_2 - \alpha_1)}{\phi(\alpha'_2 - \alpha'_1)} = \frac{QS(S^2 - 4J^2\pi^2)}{8J^3\pi^3 + 2J\pi S(4\pi Q^2 + 3S)}. \quad (3.19)$$

This indicates the validity of such an Ehrenfest equation. For the last equation given in Table 1 for a fixed entropy, we follow the same calculations by finding first the left-hand side. Concretely, it has been found to be

$$-\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_{S,J} = \frac{2(S(4J^2\pi^2 + S(2\pi Q^2 + S)))^{3/2}}{\sqrt{\pi}QS(S^2 - 4J^2\pi^2)}. \quad (3.20)$$

For the right-hand side, the calculation shows that it involves the same expression as the left-hand side. Thus, we have

$$\frac{(C_{J,Q})_2 - (C_{J,Q})_1}{\phi T(\alpha'_2 - \alpha'_1)} = \frac{2(S(4J^2\pi^2 + S(2\pi Q^2 + S)))^{3/2}}{\sqrt{\pi}QS(S^2 - 4J^2\pi^2)} = -\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_{S,J}. \quad (3.21)$$

As expected, the remaining equations, given in Table 1, can be examined using the same method. Instead of repeating the associated calculation, we give only the obtained results. For a fixed angular momentum, they are presented as follows:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\kappa_2 - \kappa_1} &= \frac{4SJ(4J^2\pi^2 + S(4\pi Q^2 + 3S))\sqrt{S\pi(4J^2\pi^2 + S(2\pi Q^2 + S))}}{(4J^2\pi^2 + S^2)^2} \\ &= \left(\frac{\partial J}{\partial T}\right)_{\Omega,Q}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\frac{\phi(\chi'_2 - \chi'_1)}{\Omega(\kappa_2 - \kappa_1)} = \frac{4J\pi QS}{4J^2\pi^2 + S^2} = -\left(\frac{\partial J}{\partial Q}\right)_{\Omega,T}, \quad (3.23)$$

$$\frac{\Omega(\kappa_2 - \kappa_1)}{\phi(\chi'_2 - \chi'_1)} = \frac{4J^2\pi^2 + S^2}{4J\pi QS} = -\left(\frac{\partial Q}{\partial J}\right)_{\Omega,T}, \quad (3.24)$$

$$\frac{\Omega(\alpha_2 - \alpha_1)}{\phi(\chi'_2 - \chi'_1)} = \frac{Q(4J^2\pi^2 + S^2)}{\sqrt{\frac{S}{\pi}(4J^2\pi^2 + S(2\pi Q^2 + S))}} = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_{\Omega,J}. \quad (3.25)$$

For a fixed electric potential, the Ehrenfest equations are also verified:

$$\begin{aligned} \frac{\phi(\alpha'_2 - \alpha'_1)}{\Omega(\chi_2 - \chi_1)} &= \frac{S(4J^2\pi^2 - S^2)\sqrt{S(4J^2\pi^2 + S(2\pi Q^2 + S))}}{2J\pi^{3/2}(4J^2\pi^2 + S^2)} \\ &= \left(\frac{\partial J}{\partial T}\right)_{\phi,Q}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\frac{\phi(\kappa'_2 - \kappa'_1)}{\Omega(\chi_2 - \chi_1)} = -\frac{48J^4\pi^4 + 24J^2\pi^2S^2 - S^4}{32J^3\pi^4Q + 8J\pi^2QS^2} = -\left(\frac{\partial J}{\partial Q}\right)_{\phi,T}, \quad (3.27)$$

$$\frac{\Omega(\chi_2 - \chi_1)}{\phi(\kappa'_2 - \kappa'_1)} = -\frac{32J^3\pi^4Q + 8J\pi^2QS^2}{48J^4\pi^4 + 24J^2\pi^2S^2 - S^4} = -\left(\frac{\partial Q}{\partial J}\right)_{\phi,T}, \quad (3.28)$$

A. Belhaj et al.

$$\begin{aligned} \frac{\alpha'_2 - \alpha'_1}{\kappa'_2 - \kappa'_1} &= \frac{4QS(-4J^2\pi^2 + S^2)\sqrt{S\pi(4J^2\pi^2 + S(2\pi Q^2 + S))}}{48J^4\pi^4 + 24J^2\pi^2 S^2 - S^4} \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_{\phi, J}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

It has been shown that Prigogine–Defay (PD) ratio Π can be considered as a tool to measure the deviation from the second Ehrenfest equation [27]. Performing numerical calculations from Eqs. (3.12) and (3.23), it has been found to be

$$\Pi = \frac{\Delta C_{J,Q} \Delta \kappa}{T_c \Omega_c (\Delta \alpha)^2} = 1. \quad (3.30)$$

Since all the Ehrenfest equations presented in Table 1 are verified, we can now confirm the existence of a second-order phase transition for the Kerr–Sen black hole. Note that this matches perfectly with the second-order equilibrium transition discussed in [26, 28, 29].

To consolidate this result, we shall explore the geothermodynamics by proposing a new metric form derived from the Gibbs free energy scaled by a conformal factor associated with the existence of extremal solutions.

4. Kerr–Sen Black Hole Geothermodynamics

In this section, we reconsider the investigation of the geothermodynamics, of such a black hole, relying on singular behaviors of certain thermodynamical quantities including the heat capacity. The latter is relevant in the determination of the nature of the black hole phase transitions, since it involves various interesting thermodynamical properties. To unveil such properties, the thermodynamical geometry of the Kerr–Sen black hole has been approached by focusing on the thermodynamical geometric curvature. Several metrics could be used to approach such a quantity. However, here, we can explore an alternative road. Inspired by the Hessian matrix of several free energies generated from the Legendre transformation of M , we adopt a new metric form derived from the Gibbs free energy [30]. Concretely, we introduce a conformal factor $\frac{1}{T}$ motivated by extremal solutions being absent in known approaches. Exploiting the Gibbs free energy G , we can write

$$dG = -SdT + \phi dQ + \Omega dJ. \quad (4.1)$$

Implementing a conformal factor $\frac{1}{T}$, we obtain

$$\frac{1}{T}dG = \frac{1}{T}(-SdT + \phi dQ + \Omega dJ). \quad (4.2)$$

It follows that the conformal Gibbs free energy metric can be written as

$$ds_G^2 = \frac{1}{T}(-dTdS + d\phi dQ + d\Omega dJ). \quad (4.3)$$

Within the natural variables T , Q and J , it is convenient to trade the temperature by the entropy S . The resulting new representation of the metric takes the following form:

$$ds_G^2 = g_{SS}dS^2 + g_{QQ}dQ^2 + g_{JJ}dJ^2 + 2g_{QJ}dQdJ. \quad (4.4)$$

With the use of this metric, we try to check the second-order phase transition point. Thus, the scalar curvature can be expressed in the following way

$$\mathfrak{R}_G = \frac{\mathfrak{N}_G}{\mathfrak{D}_G}, \quad (4.5)$$

where the denominator is found to be

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_G = & S(2J\pi - S)(2J\pi + S)(2\pi Q^2 + S^2)(4J^2\pi^2 + S^2)(4J^2\pi^2 + 2\pi Q^2S + S^2) \\ & \times (48J^4\pi^4 - S^4 + 8J^2\pi^2S(4\pi Q^2 + 3S))^2, \end{aligned} \quad (4.6)$$

while the term $\mathfrak{N}_G$, having a complicated form, is omitted since it is not relevant in the present discussion. It is worth noting that the proposed metric gives a rather simple form of the scalar curvature. Besides, the resulting scalar curvature has the same denominator as the quantities (2.16) and (3.1). This shows that the latter may also exhibit a discontinuity at the critical point $S_c = 1.60199$ confirming the existence of a second-order phase transition. To visualize such a result, we illustrate the scalar curvature in Fig. 4 as a function of the entropy.

It follows from this figure that the scalar is indeed discontinuous at S_c (the red dashed line) and at $S = 2\pi J$ (the blue dashed line). This not only supports the result obtained in the previous section but also pushes one to investigate the associated scalings laws and critical exponents.

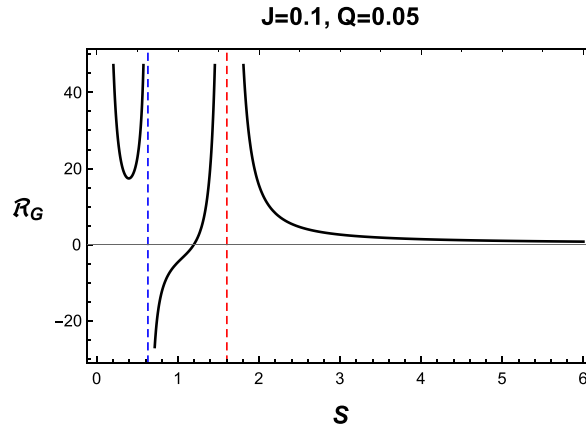


Fig. 4. Scalar curvature as a function of the entropy (S). The red dashed line represents the critical point at which $\mathfrak{R}_G$ goes to infinity. While, the blue one is associated with the extremal black hole solution.

5. Scaling Laws and Critical Exponents

In this section, we investigate the scaling laws and the critical exponents at the obtained critical point for the Kerr–Sen black hole. In the elaboration of critical phenomena, one can meet with three kinds of susceptibilities related to the heat capacity C_A , the moment of inertia (I_B) and the electric capacitance (K_C) defined as

$$C_A = -\beta^2 \left(\frac{\partial M}{\partial \beta} \right)_A, \quad I_B = \beta \left(\frac{\partial J}{\partial (\beta \Omega)} \right)_B, \quad K_C = \beta \left(\frac{\partial Q}{\partial (\beta \phi)} \right)_C. \quad (5.1)$$

Here, β is the inverse of the temperature and the set $\{A, B, C\}$ denotes the fixed quantities [31]. These quantities representing different exchange modes (i.e. thermal, electrical and mechanical) show a behavioral divergence providing a phase transition. It is noted that other propositions have been conducted for the phase transitions at the extremal limit, being a point of a second-order transition, when $M = a + b$ based on the divergence of thermal fluctuations. Precisely, it has been remarked that these fluctuations can be linked to the divergence of (5.1). Before going ahead, it is convenient to re-write certain needed thermodynamical quantities. In particular, they are listed as follows:

$$S_{\pm} = \frac{A_{\pm}}{4} = \pi[2M^2 - Q^2 \pm \sqrt{(2M^2 - Q^2)^2 - 4J^2}], \quad (5.2)$$

$$T_{\pm} = \frac{\pm \sqrt{(2M^2 - Q^2)^2 - 4J^2}}{M \times A_{\pm}} = \beta^{-1}, \quad (5.3)$$

$$\Omega_{\pm} = \frac{4\pi J}{MA_{\pm}}, \quad \phi_{\pm} = \frac{4\pi Q r_h}{A_{\pm}}. \quad (5.4)$$

It is noted that the entropy $S(M, J, Q)$ is a generalized homogeneous function since one has $S(\sqrt{\lambda}M, \lambda J, \sqrt{\lambda}Q) = \lambda S(M, J, Q)$. The response coefficients are related to the susceptibilities via the following relations:

$$\bar{\chi}_1 \equiv \left(\frac{\partial^2 S}{\partial M^2} \right)_{JQ} = -\frac{\beta^2}{C_{JQ}}, \quad (5.5)$$

$$\bar{\chi}_2 \equiv \left(\frac{\partial^2 S}{\partial J^2} \right)_{MQ} = -\frac{\beta}{I_{MQ}}, \quad (5.6)$$

$$\bar{\chi}_3 \equiv \left(\frac{\partial^2 S}{\partial Q^2} \right)_{MJ} = -\frac{\beta}{K_{MJ}}. \quad (5.7)$$

Near the critical points, these quantities obey certain power laws. To derive such laws, we should define the following order parameters $\eta_M = \beta_+ - \beta_-$, $\eta_J = (\beta\Omega)_+ - (\beta\Omega)_-$ and $\eta_Q = (\beta\phi)_+ - (\beta\phi)_-$. It is worth noting that these quantities do not go to zero at the critical point. However, they diverge since the inverse of the black hole temperature does. In this regime, we also need to define the following

terms $M = M_X(1 + \epsilon_M)$, $J = J_X(1 - \epsilon_J)$, $Q = Q_X(1 - \epsilon_Q)$, where M_X , J_X and Q_X represent the mass, the angular momentum, and the charge at the extremal limit, respectively and ϵ is associated with small parameter deviations.^a Some of the relevant scaling laws are given by

$$\bar{\chi}_1 \sim \epsilon_M^{-\alpha} \quad (J = 0 \text{ or } Q = 0), \quad (5.8)$$

$$\bar{\chi}_2 \sim \epsilon_M^{-\gamma} \quad (Q = 0), \quad (5.9)$$

$$\eta_J \sim \epsilon_M^{\beta} \quad (Q = 0), \quad (5.10)$$

$$\eta_J \sim \epsilon_M^{\delta-1} \quad (Q \neq 0). \quad (5.11)$$

Using the definition of $\bar{\chi}_1$ in the extremal limit where $M = \sqrt{J + Q^2/2}(1 + \epsilon_M)$ and taking $Q = 0$, we find

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_1 \approx & \frac{4\pi}{\epsilon_M^{3/2}(\epsilon_M + 2)^{3/2}(\epsilon_M(\epsilon_M + 2) + 2)^{3/2}} [-2 + \epsilon_M^{3/2}(\epsilon_M + 2)(\epsilon_M + 2)\sqrt{\epsilon_M} \\ & \times (\epsilon_M^2 + 2\epsilon_M + \sqrt{\epsilon_M}\sqrt{\epsilon_M + 2}\sqrt{\epsilon_M(\epsilon_M + 2) + 2} + 3) \\ & + 2\sqrt{\epsilon_M + 2}\sqrt{\epsilon_M(\epsilon_M + 2) + 2}]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Thus, we obtain $\bar{\chi}_1 \propto \epsilon_M^{-3/2}$. Using similar road calculations, we get

$$\bar{\chi}_2 \approx -\frac{2\pi(\epsilon_M + 1)^4}{J(\epsilon_M^4 + 4\epsilon_M^3 + 6\epsilon_M^2 + 4\epsilon_M)^{3/2}}, \quad (5.13)$$

which shows that $\bar{\chi}_2 \propto \epsilon_M^{-3/2}$. For the third equation, we obtain

$$\eta_J \approx -\frac{4\pi}{\sqrt{\epsilon_M^4 + 4\epsilon_M^3 + 6\epsilon_M^2 + 4\epsilon_M}}, \quad (5.14)$$

revealing that one has $\eta_J \propto \epsilon_M^{-1/2}$. Identical computations are performed for the last equation. The critical exponents for the Kerr–Sen black hole are therefore summarized as follows:

$$\alpha = \frac{3}{2}, \quad \gamma = \frac{3}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{2}, \quad \delta = -2. \quad (5.15)$$

From these critical exponents, we find the equalities related to the scaling laws of the first kind

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2, \quad \beta(\delta - 1) = \gamma. \quad (5.16)$$

This matches perfectly with the result of [31] where the same relations have been obtained for the Kerr–Newman black hole.

^aIn the extremal limit, we obtain $M_X = \sqrt{J + Q^2/2}$, $Q_X = \sqrt{2(J + M^2)}$ and $J_X = \frac{Q^2 - 2M^2}{2}$.

6. Conclusions

In this work, we have investigated the phase transitions of the Kerr–Sen black hole engineered from the heterotic superstring theory. In particular, we have computed the involved thermodynamical quantities. It has been shown that the phase transition is characterized by divergences in the specific heat and other quantities near the critical points. Using the Ehrenfest scheme, we have inspected the nature of the phase transitions. Concretely, we have analytically verified the validity of such equations near the critical point. We have shown that the phase transition corresponding to the divergence in the heat capacity at the critical point is in fact a second-order equilibrium one. To support such a finding, we have approached the Kerr–Sen black hole geothermodynamics by adopting a new metric form derived from the Gibbs free energy scaled by a conformal factor inspired by the singularity associated with extremal solutions. This geometric method recovers similar behaviors. At the end, we have obtained the involved scaling behaviors at the critical point.

This work comes up with some open questions. It will be interesting to extend this investigation by considering backgrounds with a nonzero cosmological constant built recently in [32]. Motivated by the black hole observational aspect, the gravitational waves and black hole image, a second investigation could concern optical properties from different backgrounds, including dark sectors. We leave these questions for future works.

Acknowledgment

This work is partially supported by the ICTP through AF-13.

References

- [1] S. W. Hawking, Black holes in general relativity, *Commun. Math. Phys.* **25**(2) (1972) 152–166.
- [2] J. B. Hartle and T. Dray, Gravity: An introduction to Einsteins general relativity, *Amer. J. Phys.* **71** (2003) 1086–1087.
- [3] J. L. Zhang, R. G. Cai and H. Yu, Phase transition and thermodynamical geometry for Schwarzschild AdS black hole in $AdS_5 \times S^5$ spacetime, *J. High Energy Phys.* **2** (2015) 143.
- [4] A. Belhaj, M. Chabab, H. El Moumni, K. Masmar and M. B. Sedra, On thermodynamics of AdS black holes in M-theory, *Eur. Phys. J. C* **76**(2) (2016) 73.
- [5] A. Belhaj, A. El Balali, W. El Hadri, Y. Hassouni and E. Torrente-Lujan, Phase transitions of quintessential AdS black holes in M-theory/superstring inspired models, preprint (2004), arXiv: 2004.10647.
- [6] H. J. Boonstra, B. Peeters and K. Skenderis, Branes and anti-de Sitter spacetimes, *Prog. Phys.* **47**(1–3) (1999) 109–116.
- [7] A. Sen, Rotating charged black hole solution in heterotic string theory, *Phys. Rev. Lett.* **69**(7) (1992) 1006.
- [8] S. Liebes Jr, Gravitational lenses, *Phys. Rev. B* **835** (1964) 133.

- [9] L. Ming-Jian, Temperature and thermodynamic geometry of the Kerr–Sen black hole, *Chin. Phys. B* **20**(2) (2011) 020404.
- [10] X. G. Lan and J. Pu, Observing the contour profile of a Kerr–Sen black hole, *Mod. Phys. Lett. A* **33**(17) (2018) 1850099.
- [11] A. Belhaj, M. Benali, A. El Balali, H. El Moumni and S.-E. Ennadifi, Deflection angle and shadow behaviors of quintessential black holes in arbitrary dimensions, preprint (2006), arXiv: 2006.01078.
- [12] Event Horizon Telescope Collab. (K. Akiyama *et al.*), First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The shadow of the supermassive black hole, *Astrophys. J.* **875**(1) (2019) L1.
- [13] A. Belhaj, M. Chabab, H. El Moumni and M. B. Sedra, On thermodynamics of AdS black holes in arbitrary dimensions, *Chin. Phys. Lett.* **29** (2012) 100401.
- [14] A. Belhaj, M. Chabab, H. El Moumni, L. Medari and M. B. Sedra, The thermodynamical behaviors of Kerr–Newman AdS black holes, *Chin. Phys. Lett.* **30** (2013) 090402.
- [15] S. W. Hawking, Black holes and thermodynamics, *Phys. Rev. D* **13**(2) (1976) 191.
- [16] J. Xu, L. M. Cao and Y. P. Hu, P-V criticality in the extended phase space of black holes in massive gravity, *Phys. Rev. D* **91**(12) (2015) 124033.
- [17] A. Belhaj, A. El Balali, W. El Hadri, M. A. Essebani, M. B. Sedra and A. Segui, Kerr-AdS black hole behaviors from dark energy, *Int. J. Mod. Phys. D*, <https://doi.org/10.1142/S0218271820500698>.
- [18] Y. Wu and W. Xu, Effect of dark energy on Hawking–Page transition, *Phys. Dark Univ.* **27** (2020) 100470.
- [19] A. Belhaj, A. El Balali, W. El Hadri, H. El Moumni and M. B. Sedra, Dark energy effects on charged and rotating black holes, *Eur. Phys. J. Plus* **134**(9) (2019) 422.
- [20] J. X. Mo and W. B. Liu, Ehrenfest scheme for PV criticality in the extended phase space of black holes, *Phys. Lett. B* **727**(1–3) (2013) 336–339.
- [21] A. Lala and D. Roychowdhury, Ehrenfest’s scheme and thermodynamic geometry in Born–Infeld AdS black holes, *Phys. Rev. D* **86**(8) (2012) 084027.
- [22] H. E. Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena* (Oxford University Press, New York, 1987).
- [23] M. W. Zemansky and R. H. Dittman, *Heat and Thermodynamics: An Intermediate Textbook* (McGraw-Hill, New York, 1997).
- [24] R. Banerjee, S. K. Modak and S. Samanta, Glassy phase transition and stability in black holes, *Eur. Phys. J. C* **70** (2010) 317.
- [25] R. Banerjee, S. Ghosh and D. Roychowdhury, New type of phase transition in Reissner Nordström–AdS black hole and its thermodynamic geometry, *Phys. Lett. B* **696** (2011) 156.
- [26] T. M. Nieuwenhuizen, Ehrenfest relations at the glass transition: Solution to an old paradox, *Phys. Rev. Lett.* **79** (1997) 1317–1320.
- [27] R. Banerjee and D. Roychowdhury, Thermodynamics of phase transition in higher dimensional AdS black holes, *J. High Energy Phys.* **11** (2011) 004.
- [28] H. Xu, W. Xu and L. Zhao, Extended phase space thermodynamics for third order Love lock black holes in diverse dimensions, *Eur. Phys. J. C* **74**(9) (2014) 3074, arXiv: 1405.4143.
- [29] A. Belhaj, M. Chabab, H. El Moumni, K. Masmar and M. B. Sedra, Ehrenfest scheme of higher dimensional AdS black holes in the third-order Lovelock–Born–Infeld gravity, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **12**(10) (2015) 1550115, arXiv: 1405.3306.

A. Belhaj et al.

- [30] H. Liu, H. Lu, M. Luo and K. N. Shao, Thermodynamical metrics and black hole phase transitions, *J. High Energy Phys.* **1012** (2010) 054.
- [31] O. Kaburaki, Scaling laws at the critical point on black hole equilibrium series, *Phys. Lett. A* **217** (1996) 315–320.
- [32] D. Wu, P. Wu, H. Yu and S.-Q. Wu, Are ultra-spinning Kerr–Sen–AdS4 black holes always super-entropic?, preprint (2007), arXiv: 2007.02224.

Conclusions et perspectives

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'aspect thermodynamique des trous noirs rotatifs à quatre dimensions qui a eu récemment beaucoup d'intérêt. Nous nous sommes particulièrement intéressés aux certaines transitions de phase de telles solutions de l'équation d'Einstein. Ce document est divisé en deux parties.

Dans la première partie, nous avons présenté les différentes notions gravitationnelles donnant naissance à la physique des trous noirs. Concrètement, nous avons rappelé l'équation d'Einstein en dérivant les différents types des trous noirs. En introduisant la constante cosmologique dans cette équation, nous avons également étudié les trous noirs dans l'espace Anti de-Sitter. Ensuite, nous avons élaboré une synthèse des propriétés thermodynamiques ainsi que les transitions de phase des trous noirs rotatifs. En ce qui concerne l'aspect thermodynamique, nous avons abordé certains aspects physiques des solutions rotatives et non rotatives à quatre dimensions. Concrètement, nous avons examiné la radiation de Hawking en se basant sur la typicalité canonique ainsi que l'effet tunnel. Puis, nous avons dérivé la température de Hawking en utilisant l'approche Euclidienne. En utilisant les principes de la mécanique quantique et la théorie de l'information quantique, nous avons étudié l'information noire associée en expliquant le paradoxe de perte d'information pour ces objets. L'analyse des transitions de phase et de la stabilité a également été approché pour plusieurs trous noirs. Dans cette analyse, nous avons obtenu certains comportements thermodynamiques dont les propriétés montrent des liens avec le fluide de Van der Waals. La présence de la constante cosmologique et des champs de l'énergie noire de nature dynamique ont aussi été introduits dans ce travail. En utilisant la méthode de typicalité canonique, nous avons reconsidéré d'abord l'étude de

l'impact de l'énergie noire sur les trous noirs rotatifs à quatre dimensions. Concrètement, nous étudions les influences associées sur le spectre de divers trous noirs chargés et rotatifs. Pour ces solutions, nous élaborons analytiquement le spectre de radiation correspondant, la température de Hawking et l'information noire. En particulier, nous confirmons que l'énergie noire peut être considérée comme un système de refroidissement entourant les trous noirs et agissant comme un système de stabilisation.

En abordant des modèles inscrits dans le cadre de la théorie des supercordes hetérotiques, proposés par Sen, nous avons étudié les transitions de phase et les comportements critiques du trou noir rotatif et chargé correspondant nommé trou noir de Kerr-Sen. En utilisant le schéma d'Ehrenfest, nous avons dérivé les quantités thermodynamiques relevantes, y compris la capacité thermique. En particulier, nous avons montré qu'un tel trou noir subit une transition de phase du second ordre. En adoptant une forme adéquate de la métrique de la géothermodynamique, nous avons calculé la courbure scalaire associée recouvrant des transitions de phase similaires. Quant à la transition de phase de Hawking-Page, nous considérons le trou noir de Kerr-AdS. En utilisant un espace des modules contrôlé par le paramètre d'état ω_q de l'énergie noire et l'intensité du champ de quintessence α , nous avons traité quelques modèles. En dérivant les formules analytiques des quantités thermodynamiques associées, nous avons étudié le modèle correspondant au paramètre d'état $\omega_q = -2/3$ pour lequel le trou noir de Kerr-AdS révèle une résistance aux effets de l'énergie noire. En exploitant les formules explicites des quantités thermodynamiques, nous avons montré que ces modèles possèdent des constantes universelles. Quant à la deuxième partie, nous avons présenté nos contributions réalisées dans cette thèse traitant l'aspect thermodynamique des trous noirs rotatifs.

Ce mémoire, présenté dans ce document, ouvre des perspectives de travail relativement nombreuses. En effet, nous souhaitons approfondir d'avantage le développement du lien entre la physique des trous noirs rotatifs AdS et la thermodynamique. Ceci permettrait d'examiner des nouvelles solutions non-singulières. Cela apporte également une ouverture sur plusieurs pistes de recherche. Nous aimerons souligner qu'une possible connexion avec d'autres théories peut être élaborée. Nous espérons que les lecteurs intéressés par la gravitation trouveraient d'autres pistes d'investigations.

Appendices

Aspect optique du trou noir de Schwarzschild

A.1 Équations de mouvement du trou noir de Schwarzschild

L'équation de mouvement d'une particule dans un référentiel arbitraire $\{x^\mu\}$ s'exprime comme suit

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\rho} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{d^2 x^\nu}{d\rho} \frac{d^2 x^\sigma}{d\rho} = 0, \quad (\text{A.1})$$

où ρ est le paramètre affine décrivant la trajectoire et $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ est le symbole de Christoffel. Pour $x^\mu = t$, l'équation (A.1) se réduit à

$$\frac{d^2 t}{d\rho} + \Gamma_{tr}^t \frac{d^2 t}{d\rho} \frac{d^2 r}{d\rho} + \Gamma_{rt}^t \frac{d^2 r}{d\rho} \frac{d^2 t}{d\rho} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Ce qui donne

$$\ddot{t} + \frac{a'(r)}{a(r)} \dot{t} \dot{r} = 0. \quad (\text{A.3})$$

Pour $x^\mu = r$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \ddot{r} + \Gamma_{rr}^r \dot{r}^2 + \Gamma_{\theta\theta}^r \dot{\theta}^2 + \Gamma_{\phi\phi}^r \dot{\phi}^2 + \Gamma_{tt}^r \dot{t}^2 &= 0, \\ \ddot{r} + \frac{b'}{2b} \dot{r}^2 - \frac{r}{b} \dot{\theta}^2 - \frac{r^2 \sin \theta}{b} \dot{\phi}^2 + \frac{a'}{2b} \dot{t}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

A.1. Équations de mouvement du trou noir de Schwarzschild

De même, Pour $x^\mu = \theta$ et $x^\mu = \phi$ successivement, nous avons

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} - \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$\ddot{\phi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\phi} + \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} \dot{\phi} \dot{\theta} = 0. \quad (\text{A.6})$$

En effet, les équations (A.3), (A.4), (A.5) et (A.6) représentent les équations de mouvement. Nous résolvons ce système des équations en identifiant des constantes de mouvement.

Puisque le champ est isotrope, nous considérons uniquement les trajectoires dans le plan équatorial ($\theta = \frac{\pi}{2}$). Ce qui implique

$$\ddot{t} + \frac{a'(r)}{a(r)} \dot{t} \dot{r} = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$\ddot{r} + \frac{b'}{2b} \dot{r}^2 - \frac{r^2}{b} \dot{\phi}^2 + \frac{a'}{2b} \dot{t}^2 = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$\ddot{\phi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\phi} = 0. \quad (\text{A.9})$$

En divisant l'équation (A.7) par $\frac{dt}{d\rho} = \dot{t}$, et l'équation (A.9) par $\frac{d\phi}{d\rho} = \dot{\phi}$, nous établissons les expressions suivantes

$$\frac{d}{d\rho} (\ln(\dot{t}) + \ln(a)) = 0, \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{d}{d\rho} (\ln(\dot{\phi}) + \ln(r^2)) = 0, \quad (\text{A.11})$$

produisant deux constantes de mouvement

$$a\dot{t} = Kc^2, \quad r^2\dot{\phi} = h. \quad (\text{A.12})$$

Ainsi, l'équation (A.8) prend la forme suivante

$$\ddot{r} + \frac{a'}{2a} K^2 c^2 + \frac{b'}{2b} \dot{r}^2 - \frac{h^2}{br^3} = 0. \quad (\text{A.13})$$

En effet, la dérivée de l'équation (1.7) par rapport au temps propre fournit

$$\begin{aligned} \frac{ds^2}{d\tau^2} &= -a\dot{t}^2 + b\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2, \\ &= -\frac{c^4 K^2}{a} + b\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

A.1. Équations de mouvement du trou noir de Schwarzschild

De plus, la dérivée de l'équation (A.14) produit exactement l'équation (A.13) pour le cas nulle ($\frac{ds^2}{d\tau^2} = 0$) et non nulle ($\frac{ds^2}{d\tau^2} = c$). Ici, nous intéressons au mouvement des particules non massives. Partant de ce fait, nous avons

$$\dot{r}^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) \frac{h^2}{r^2} - K^2 c^2 = 0. \quad (\text{A.15})$$

Puisque les deux composantes p_0 et p_3 du quadri-vecteur énergie impulsion sont données par

$$p_0 = g_{00}\dot{t} = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = Kc^2, \quad (\text{A.16})$$

$$p_3 = g_{33}\dot{\phi} = -r^2\dot{\phi} = -h, \quad (\text{A.17})$$

la constante h joue le rôle d'un moment cinétique et la quantité $E = Kc^2$ correspond à l'énergie du système étudié.

Afin d'identifier la nature du mouvement à partir de l'équation (A.15), nous devons la réarranger sous une forme plus significative. En utilisant la relation suivante

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\phi} \dot{\phi} = \frac{dr}{d\phi} \frac{h}{r^2}, \quad (\text{A.18})$$

alors, nous obtenons

$$\left(\frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) - K^2 c^2 = 0. \quad (\text{A.19})$$

En prenant $Y = \frac{1}{r}$, nous établissons l'expression suivante

$$\left(\frac{dY}{d\phi}\right)^2 + Y^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2} Y\right) = \frac{c^2 K^2}{h^2}. \quad (\text{A.20})$$

En dérivant l'expression ci-dessus par rapport à ϕ , nous trouvons

$$\frac{d^2 Y}{d\phi^2} + Y = \frac{3GM}{c^2} Y^2. \quad (\text{A.21})$$

D'ailleurs, l'équation (A.21) implique une solution particulière associée au mouvement circulaire conditionné par la formule suivante

$$\frac{d^2 Y}{d\phi^2} = 0 \Rightarrow r_c = \frac{1}{Y} = \frac{3GM}{c^2}. \quad (\text{A.22})$$

Par conséquent, r_c est le seul rayon qui donne un mouvement circulaire.

A.2 Potentiel effectif et stabilité du mouvement circulaire

Afin d'étudier la stabilité du mouvement, nous introduisons le potentiel effectif (A.15) vérifiant l'équation suivante

$$\frac{\dot{r}^2}{h^2} + V_{eff} = \frac{1}{\xi^2}, \quad (\text{A.23})$$

où $V_{eff} = \frac{1}{r^2}(1 - \frac{2GM}{rc^2})$ et $\xi = \frac{h}{cK}$. Les orbites circulaires sont obtenus à partir de la contrainte suivante

$$\frac{dV_{eff}}{dr} = 0 \Rightarrow r = \frac{3GM}{c^2} = 3\mu. \quad (\text{A.24})$$

La stabilité du mouvement circulaire est déterminée par le signe de la dérivée second de V_{eff} en $r = r_c$. En effet, nous avons

$$\frac{d^2V_{eff}}{dr^2}|_{r_c} = -\frac{2}{r_c^4} < 0. \quad (\text{A.25})$$

De surcroît, le mouvement circulaire à $r = r_c$ est instable. Dans la figure (A.1), nous illustrons le potentiel effectif en fonction de r .

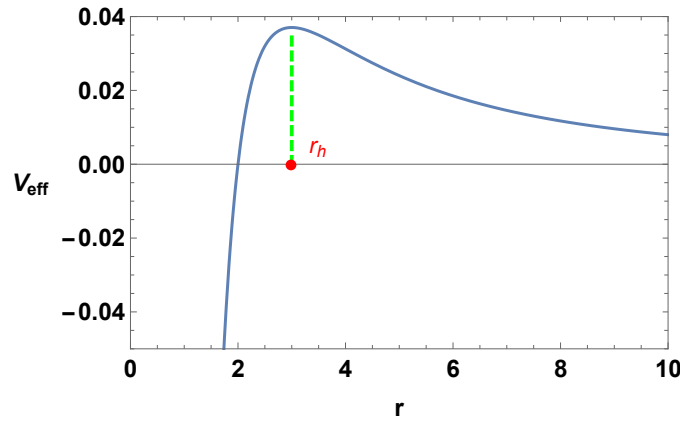


FIGURE A.1 – *Potentiel effectif en fonction de r pour $M = 1$.*

Évidemment, nous observons que V_{eff} possède un seul maximum à $r = r_c$, où l'orbite circulaire est instable et le potentiel prend la valeur $\frac{1}{27\mu^2}$. En somme, nous concluons qu'il n'y a pas d'orbite circulaire stable dans la géométrie de Schwarzschild.

Le caractère des orbites photoniques est déterminé par la valeur de la constante ξ . Pour élaborer une signification physique de ξ , nous exploitons l'équation géodésique, ainsi, que,

l'équation de l'énergie. En effet, nous avons

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{r}} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\xi^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2\mu}{r} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.26})$$

En considérant ϕ tend vers zéro quand r tend vers l'infini, la solution de l'équation est donnée par

$$r = \pm \frac{\xi}{\sin \phi}, \quad (\text{A.27})$$

ce qui donne l'équation de deux droites avec un paramètre d'impact ξ . Notons que la nature des orbites dépend de la valeur ξ .

Par ailleurs, la lumière venant de l'infini peut dévier en retournant à l'infini si $\frac{1}{\xi^2} < \frac{1}{27\mu^2}$. Pour $\frac{1}{\xi^2} = \frac{1}{27\mu^2}$, la lumière se rapproche du trou noir en spiralant pour finir en décrivant un cercle. Cette trajectoire est instable. Par suite, la spirale peut reprendre menant à l'engloutissement. Pour $\frac{1}{\xi^2} > \frac{1}{27\mu^2}$, nous avons un engloutissement à la suite d'une spirale plus ou moins enroulée sur elle même.

A.3 Ombre du trou noir en coordonnées célestes

Si un trou noir est situé entre une source de lumière et un observateur, la lumière atteint l'observateur après avoir déviée par le champ gravitationnel du trou noir. Une partie des photons émis par la source, ceux avec des petits paramètres d'impact, finissent par tomber dans le trou noir. La lumière peut s'enrouler autour du trou noir avant de s'échapper pour rejoindre l'observateur. Ce processus crée une structure annulaire (anneau de photons). La région entourée par cet anneau de photon est sombre représentant l'ombre du trou noir [166].

La forme apparente d'un trou noir est ainsi définie par la frontière de l'ombre. nous pouvons extraire plusieurs informations sur les propriétés du trou noir à partir de la détermination de cette frontière [157, 167]. Pour décrire l'ombre, nous utilisons le système de coordonnées célestes suivant

$$\alpha = \lim_{r_o \rightarrow +\infty} \left(-r_o^2 \sin \theta_o \frac{d\phi}{dr} \right), \quad (\text{A.28})$$

$$\beta = \lim_{r_o \rightarrow +\infty} r_o^2 \frac{d\theta}{dr}, \quad (\text{A.29})$$

où r_o tend vers l'infini puisque nous considérons un observateur très loin du trou noir.

Tandis que, θ_o est la coordonnée angulaire de l'observateur. Il est à noter que la coordonnée α est la distance perpendiculaire apparente de l'image vue depuis l'axe de symétrie. La coordonnée β est la distance perpendiculaire apparente de l'image à partir de sa projection sur le plan équatorial. Nous constatons $\frac{d\phi}{dr}$ et $\frac{d\theta}{dr}$ à partir de la métrique de Schwarzschild plaçant l'observateur dans le plan équatorial [35]. Les coordonnées célestes vérifient l'équation algébrique suivante

$$\alpha^2 + \beta^2 = \xi^2, \quad (\text{A.30})$$

où $\frac{1}{\xi^2} = \frac{1}{27\mu}$. Prenant $G = c = 1$, nous obtenons

$$\alpha^2 + \beta^2 = 27M^2. \quad (\text{A.31})$$

Afin d'étudier la déviation de la lumière par un trou noir, nous devons déterminer comment le rayon lumineux se déplace dans l'espace-temps. De ce fait, nous utilisons principalement l'équation d'Euler-Lagrange suivante

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}, \quad (\text{A.32})$$

où s est le paramètre affine de la trajectoire de la lumière. Tandis que $\dot{x}^\mu$ représente la quadrivitesse du rayon lumineux et $\mathcal{L}$ le Lagrangien du système. En substituant l'équation A.32 dans métrique du trou noir de Schwarzschild, nous trouvons l'équation suivante

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{1}{2} \left(-f(r) \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{f(r)} + r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \right), \quad (\text{A.33})$$

tel que $f(r) = 1 - \frac{2M}{r}$. De plus, nous appliquons les conditions initiales $\theta = \pi/2$, et $\dot{\theta} = 0$, autrement dit, les rayons lumineux se déplacent toujours dans le plan équatorial. De même, les coefficients métriques ne dépendent pas explicitement du temps t et de l'angle azimutal ϕ . Pour cette raison, nous obtenons deux quantités conservées de manière correspondante. En combinant les équations A.32 et A.33, les composantes temporelles, azimutale et radiale

de la vitesse quadruple satisfont les équations de mouvement suivantes

$$\dot{t} = \frac{1}{b \left(1 - \frac{2M}{r}\right)}, \quad (\text{A.34})$$

$$\dot{\psi} = \pm \frac{1}{r^2}, \quad (\text{A.35})$$

$$\dot{r}^2 + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = \frac{1}{b^2}, \quad (\text{A.36})$$

où $b = \frac{|L|}{E}$ est le paramètre d'impact, dans lequel E et L sont les quantités conservées par rapport au temps et à la direction azimutale. De plus, l'équation (A.36) peut être réécrite comme suit

$$\dot{r}^2 + V_{eff}(r) = \frac{1}{b^2}. \quad (\text{A.37})$$

Au niveau de la sphère du photon, les mouvements du rayon lumineux satisfont la condition $\dot{r} = 0$, et $\dot{r} = 0$. Par conséquent, nous obtenons

$$V_{eff}(r) = \frac{1}{b^2}, \quad V'_{eff}(r) = 0, \quad (\text{A.38})$$

En se basant sur l'équation (A.3), nous pouvons obtenir le rayon et le paramètre d'impact de la sphère. De surcroît, le rayon et le paramètre d'impact de la sphère des photons prennent la forme suivante

$$r_{ph} = 3M, \quad (\text{A.39})$$

$$b_{ph} = 3\sqrt{3}M. \quad (\text{A.40})$$

Par ailleurs, la trajectoire du rayon lumineux peut être décrite à partir de l'équation de mouvement. En combinant les équations (A.35) et (A.36), nous trouvons

$$\frac{dr}{d\phi} = \pm r^2 \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)}. \quad (\text{A.41})$$

En fixant $u = 1/r$, l'équation (A.41) se réduit à

$$\frac{du}{d\phi} = \sqrt{\frac{1}{b^2} - u^2 (-2Mu + 1)} \equiv \Phi(u). \quad (\text{A.42})$$

À l'aide de l'équation (A.42), nous pouvons déterminer les trajectoires des rayons lumineux,

comme le montre la figure A.2. Cependant, tous les rayons lumineux s'approchent du trou noir par le côté droit. Les lignes rouge, bleue et verte correspondent respectivement à $b < b_{ph}$, $b = b_{ph}$ et $b > b_{ph}$. Dans la figure (A.3), nous illustrons l'équation (A.31). La silhouette de

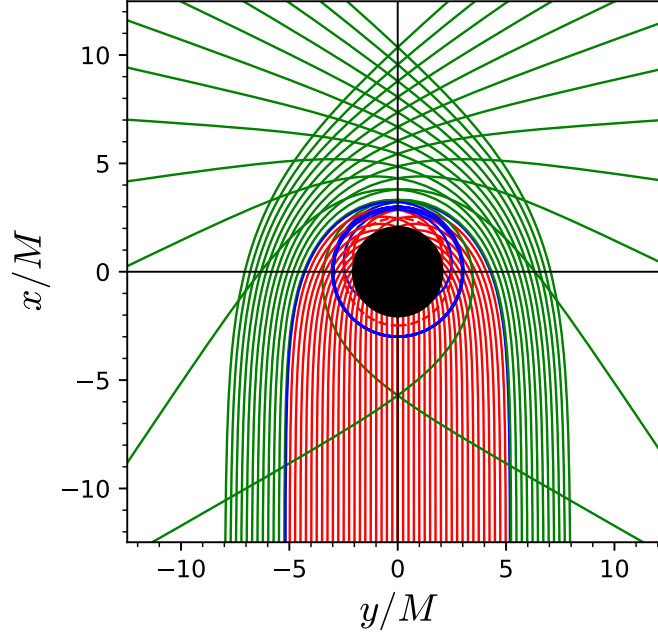


FIGURE A.2 – Trajectoire des rayons lumineux au voisinage du trou noir de Schwarzschild pour différentes valeurs de b et pour une valeur fixe de la masse $M = 1$ et $E = 1$. La singularité du trou noir est représentée par un disque noir de rayon $2M$. Les coordonnées x et y sont les coordonnées cartésiennes calculées par $x = r \cos \phi$ et $y = r \sin \phi$.

l'ombre du trou noir peut être visualisée à partir de la figure A.3.a. À partir de l'équation de mouvement A.41, nous illustrons dans la figure A.3.b l'intersection des rayons lumineux pour différents directions afin de visualiser l'ombre du trou noir de Schwarzschild. Ainsi, la géométrie de l'ombre est associée à un cercle parfait où sa taille est contrôlée par la masse M .

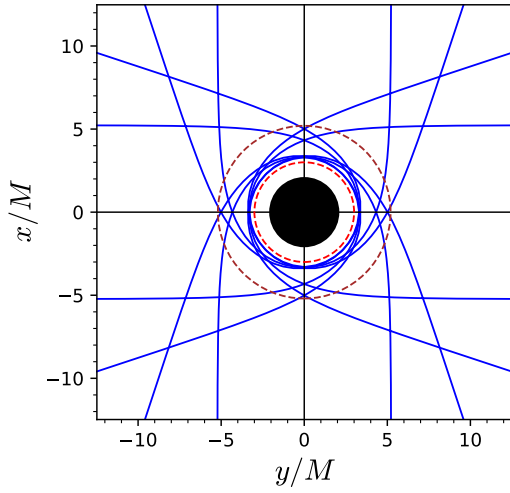


FIGURE A.3.a

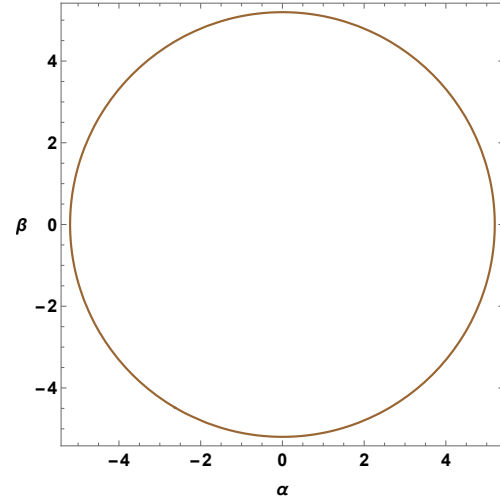


FIGURE A.3.b

FIGURE A.3 – Ombre et rayons lumineux au voisinage du trou noir de Schwarzschild dans le plan céleste pour $M = 1$ et $E = 1$. La singularité du trou noir est représentée par un disque noir de rayon $2M$

Bibliographie

- [1] G. W. Gibbons, S. W. Hawking, *Action integrals and partition functions in quantum gravity*, Phys. Rev. **D15**, (1977) 2752.
- [2] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Application of the General Theory of Relativity*, New York, USA, (1972).
- [3] D. N. Page, *Hawking radiation and black hole thermodynamics*, New. Jour. of. Phys, **7**, (2005) 203.
- [4] C. Rong-Gen, *Gauss-Bonnet black holes in AdS spaces*, Phys. Rev. **D65**, (2002) 084014.
- [5] M. D. Kruskal, *Maximal extension of Schwarzschild metric*, Phys. Rev, **119**, (1960) 1743–1745.
- [6] R. Penrose, *Asymptotic properties of fields and space-times*, Phys. Rev. Lett, **10**, (1963) 66–68.
- [7] B. Carter, *Complete Analytic Extension of the Symmetry Axis of Kerr’s Solution of Einstein’s Equations*, Phys. Rev, **141**, (1966) 1242–1247.
- [8] R. P. Kerr, *Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics*, Phys. Rev. Lett, **11**, (1963) 237.
- [9] H.-P. Nollert, *Quasinormal modes: the characteristic sound of black holes and neutron stars*, Class. Quant. Grav, **16**, (1999).
- [10] A. M. Awad, C. V. Johnson, *Holographic stress tensors for Kerr-AdS black holes*, Phys. Rev. **D61**, (2000) 084025.
- [11] G. W. Gibbons, M. J Perry, C. N. Pope, *The first law of thermodynamics for Kerr anti-de Sitter black holes*, Class. Quant. Grav, **22**, (2005) 1503.
- [12] I. R. Klebanov, E. Witten, *AdS/CFT correspondence and symmetry breaking*, Nucl. Phys. B, **556**, (1999).
- [13] J. B. Hartle, T. Dray, *Gravity: An introduction to Einsteins general relativity*, Amer. J. Phys, **71**, (2003) 1086-1087.
- [14] J. L. Zhang, R. G. Cai, H. Yu, *Phase transition and thermodynamical geometry for Schwarzschild AdS black hole in $AdS_5 \times S^5$ spacetime*, J. High Ener. Phys, **2**, (2015) 143.
- [15] B. P. Dolan, *Black holes and Boyle’s law—The thermodynamics of the cosmological constant*, Mod. Phys. Lett A, **30**, (2015) 1540002.

- [16] A. Al Balushi, R. B. Mann, *Null hypersurfaces in Kerr-(A) dS spacetimes*, Class. Quant. Grav, **36**, (2019) 245017.
- [17] E. Babichev, V. Dokuchaev, Y. Eroshenko, *Black hole mass decreasing due to phantom energy accretion*, Phys. Rev. Lett, **93**, (2004) 021102.
- [18] C. Montgomery, W. Orchiston, I. Whittingham, *Michell, Laplace and the origin of the black hole concept*, Jour. Astr. Hist. Herit, **12**, (2009) 90-96.
- [19] B. J. Carr, S. W. Hawking, *Black holes in the early Universe*, Month. Not. Roy. Astro. Soc, **168**, (1974) 399-415.
- [20] M. Volonteri, *Formation of supermassive black holes*, Astron. Astrop. Rev, **18**, (2010) 279-315.
- [21] K. Schwarzschild, *On the gravitational field of a sphere of incompressible fluid according to Einstein's theory*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berl. (Math. Phys), (1916) 424-434.
- [22] J. Carminati, R. G. McLenaghan, *Algebraic invariants of the riemann tensor in a four-dimensional lorentzian space*. Jour. Math. Phys, **32**, (1991) 3135-3140.
- [23] M. M. Caldarelli, G. Cognola, D. Klemm, *Thermodynamics of Kerr-Newman-AdS black holes and conformal field theories*, Clas. Quan. Grav, **17**, (2000) 399.
- [24] D. Kastor, S. Ray, J. Traschen, *Enthalpy and the Mechanics of AdS Black Holes*, Class.Quant.Grav, **26** (2009) 195011, [arXiv:0904.2765 \[hep-th\]](#).
- [25] A. Belhaj, M. Chabab, H. El Moumni, M. B. Sedra, *On thermodynamics of AdS black holes in arbitrary dimensions*, Chin. Phys. Lett, **29**, (2012) 100401.
- [26] A. Belhaj, M. Chabab, H. El Moumni, L. Medari , M. B. Sedra, *The thermodynamical behaviors of Kerr-Newman AdS black holes*, Chin. Phys. Lett, **30**, (2013) 090402.
- [27] A. Belhaj, M. Chabab, H. El Moumni, K. Masmar , M. B. Sedra, *Critical behaviors of 3D black holes with a scalar hair*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys, **12**, (2014) 1550017.
- [28] A. Belhaj, M. Chabab, H. El moumni, K. Masmar, M. B. Sedra, *Maxwell's equal area law for Gauss-Bonnet-Anti-de Sitter black holes*, Eur. Phys. J. C, **75**, (2015) 71.
- [29] A. Belhaj, M. Chabab, H. EL Moumni, K. Masmar, M. B. Sedra, *Ehrenfest scheme of higher dimensional AdS black holes in the third-order Lovelock-Born-Infeld gravity*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys, **12**, (2015) 1550115, [[arXiv:1405.3306 \[hep-th\]](#)].

- [30] H. Liu, H. Lu, M. Luo, K.N. Shao, *Thermodynamical metrics and black hole phase transitions*, JHEP 1012 (2010) 054.
- [31] O. Kaburaki, *Scaling laws at the critical point on black hole equilibrium series*, Phys. Lett.A, **217**, (1996) 315-320.
- [32] D. Wu, P. Wu, H. Yu, S-Q. Wu, *Are ultra-spinning Kerr-Sen-AdS₄ black holes always super-entropic?*, arXiv:2007.02224.
- [33] A. Belhaj, M. Chabab, H. El Moumni, K. Masmar, M. B. Sedra, A. Segui, *On heat properties of AdS black holes in higher dimensions*, J. High. Energ. Phys, **05**, (2015) 149.
- [34] A. Belhaj, M. Chabab, H. El Moumni, K. Masmar, M. B. Sedra, *On thermodynamics of AdS black holes in M-theory*, Eur. Phys. J. C, **76**, (2016) 73.
- [35] M. Chabab, H. El Moumni, K. Masmar, *On thermodynamics of charged AdS black holes in extended phases space via M2-branes background*, Eur. Phys. J. C, **76**, (2016) 304.
- [36] M. Chabab, H. El Moumni, S. Iraoui, K. Masmar, *Behavior of quasinormal modes and high dimension RN AdS black hole phase transition*, Eur. Phys. J. C, **76**, (2016) 676.
- [37] H. El Moumni, *Phase transition of AdS black holes with non linear source in the holographic framework*, Int. J. Theor. Phys. **56**, (2017) 554-565.
- [38] Y. H. Wei, Z. H. Chu, *Thermodynamic properties of a Reissner-Nordstroem quintessence black hole*, Chin. Phys. Lett, **28**, (2011) 100403.
- [39] R. Schützhold, W. G. Unruh, *Gravity wave analogues of black holes*, Phys. Rev. D**66**, (2002) 124009.
- [40] M. Alves, Int. J. Mod. Phys. D**10**, (2001) 575.
- [41] E. C. Vagenas, Mod. Phys. Lett. A**17**, (2002) 609 .
- [42] E. C. Vagenas, Phys. Lett. B**533**, (2002) 302.
- [43] E. C. Vagenas, Mod. Phys. Lett. A**20**, (2005) 2449 .
- [44] S. W. Hawking, *Black holes and thermodynamics*, Phys. Rev. D**13**, (1976) 191.
- [45] J. Xu, L. M. Cao, Y. P. Hu, *P-V criticality in the extended phase space of black holes in massive gravity*, Phys. Rev. D**91**, (2015) 124033.
- [46] M. W. Zemansky, R. H. Dittman, *Heat and thermodynamics: an intermediate*, (1997).
- [47] A. Lala, D. Roychowdhury, *Ehrenfest's scheme and thermodynamic geometry in Born-Infeld AdS black holes*, Phys. Rev. D**86**, (2012) 084027.

- [48] H. E. Stanley, *Introduction to phase transitions and critical phenomena*, Oxford University Press, New York (1987).
- [49] J.X. Mo, W. B. Liu, *Ehrenfest scheme for PV criticality in the extended phase space of black holes*, Phys. Lett. B**727**, (2013) 336-339.
- [50] H. J. Boonstra, B. Peeters, K. Skenderis, *Branes And Anti-de Sitter Space-times*, Prog. Phys, **47**, (1999) 109-116.
- [51] M. Arzano, A.J.M. Medved, E. C. Vagenas, *Hawking Radiation as Tunneling through the Quantum Horizon*, J. High. Energy. Phys, **0509**, (2005) 037.
- [52] M. K. Parikh, F. Wilczek, *Hawking radiation as tunneling*, Phys. Rev. Lett, **85**, (2000) 5042.
- [53] H. J. He, Z. Zhang, **17**, (2017) 036.
- [54] J. Pu, Y. Han, *Hawking radiation of charged particles via tunneling from the Reissner-Nordstrom black hole*, Int. Jour. of Theo. Phys, **56**, (2017) 2485.
- [55] Z. Jingyi, Z. Zhao, *Hawking radiation via tunneling from Kerr black holes*, Mod. Phys. Lett. A**20** (2005)1673.
- [56] S. Carlip, *Black hole thermodynamics*, Int. J. Mod. Phys. D**23** (2014) 1430023.
- [57] U. Kostić, *Analytical time-like geodesics in Schwarzschild space-time*, Gen. Rel. Grav, **44** (2012) 1057-1072.
- [58] P. Pradhan, P. Majumdar, *Circular orbits in extremal Reissner–Nordstrom spacetime*, Phys. Lett. A**375**, (2011) 474-479.
- [59] B. P. Dolan, *The cosmological constant and black-hole thermodynamic potentials*, Class. Quant. Grav, **28**, (2011) 125020.
- [60] S. Goldstein, J. L. Lebowitz, R. Tumulka, N. Zanghì, *Canonical Typicality*, Phys. Rev. Lett, **96**, (2006) 050403.
- [61] S. Popescu, A. J. Short, A. Winter, *The foundations of statistical mechanics from entanglement: Individual states vs. averages*, Nat. Phys, **2**, (2006) 758.
- [62] S. W. Hawking, D. N. Page, *Thermodynamics of black holes in anti-de Sitter space*, Communications in Mathematical Physics, **87**, (1983) 577-588.
- [63] J. X. Mo, W. B. Liu, *Ehrenfest scheme for PV criticality in the extended phase space of black holes*, Phys. Lett. B**727**, (2013) 336-339.

- [64] E T. Newman, R. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash, R. Torrence, *Metric of a rotating, charged mass*, JMP, **6**, (1965) 918-919.
- [65] C. Doran, *New form of the Kerr solution*, Phys. Rev. D**61**, (2000) 067503.
- [66] T. Regge, J. A. Wheeler, *Stability of a Schwarzschild singularity*, Phys. Rev., **108**, (1957) 1063–1069.
- [67] S.W. Hawking, D.N. Page, *Thermodynamics of black holes in anti-de Sitter space*, Commun. Math. Phys, **87**, (1983) 577.
- [68] R. G. Cai, L. M. Cao, L. Li, R. Q. Yang, *PV criticality in the extended phase space of Gauss-Bonnet black holes in AdS space*, J. High. Ener. Phys, **9**, (2013) 5.
- [69] D. Kubiznak, R. B. Mann, M. Teo, *Black hole chemistry: thermodynamics with lambda*, Class. Quant. Grav, **34** 2017, 063001.
- [70] J. Shen, R. G. Cai, B. Wang, R. K. Su, *Thermodynamic geometry and critical behavior of black holes*, Int. J. Mod. Phys. A**22**, (2007) 11-27.
- [71] S. H. Hendi, S. Panahiyan, M. Momennia, *Extended phase space of AdS black holes in Einstein–Gauss–Bonnet gravity with a quadratic nonlinear electrodynamics*, Int. J. Mod. Phys. D**25**, (2016) 1650063.
- [72] D. Astefanesei, R. Ballesteros, D. Choque, R. Rojas, *Scalar charges and the first law of black hole thermodynamics*, Phys. Lett. B**782**, (2018) 47-54.
- [73] E. Torrente-Lujan, *Smarr mass formulas for BPS multicenter black holes*, Phys. Lett. B**798**, (2019) 135019.
- [74] E. M. Martinez, J.L. Garay, J. Leon, *Unveiling quantum entanglement degradation near a Schwarzschild black hole*. Phys. Rev. D**82**, (2010) 064006.
- [75] D. Kubizňák, R. B. Mann, *P-V criticality of charged AdS black holes*, J. High Ener. Phys, **7**, (2012) 33.
- [76] P. Cheng, S. W. Wei. Y. X. Liu, *Critical phenomena in the extended phase space of Kerr-Newman-AdS black hole*, Phys.Rev. D**94**, (2016) 024025.
- [77] K. D. Kokkotas, B. G. Schmidt, *Quasi-normal modes of stars and black holes*, Living Rev. Rel, **2**, (1999) 262.
- [78] Y. Liu, D. C. Zou, B. Wang, *Signature of the Van der Waals like small-large charged AdS black hole phase transition in quasinormal modes*, J. High Ener. Phys, **9**, (2014) 179.

- [79] C. Niu, Y. Tian, X. N. Wu, *Critical phenomena and thermodynamic geometry of Reissner-Nordström-anti-de Sitter black holes*, Phys. Rev. D **85**, (2012) 024017.
- [80] S. W. Wei, Y. X. Liu, *Critical phenomena and thermodynamic geometry of charged Gauss-Bonnet AdS black holes*, Phys. Rev. D **87**, (2013) 044014.
- [81] R. Banerjee, S. Modak, *Second Order Phase Transition and Thermodynamic Geometry in Kerr-AdS Black Hole*, Phys. Rev. D **84**, (2011) 064024.
- [82] Kh. Jafarzad, J. Sadeghi, *Effects of dark energy on P-V criticality and efficiency of charged Rotational black hole*, arxiv:1803.04250.
- [83] V. Cardoso, O. J. C. Dias, S. Yoshida, *Classical Instability of Kerr-AdS black holes and the issue of final state*, Phys. Rev. D **74**, (2006) 044008.
- [84] R. Banerjee, D. Roychowdhury, *Thermodynamics of phase transition in higher dimensional AdS black holes*, JHEP, **11**, (2011) 004.
- [85] G. G. Sushant, *Ghosh Rotating black hole and quintessence*, Eur. Phys. J. C, **76** (2016), arXiv:1512.05476.
- [86] B. Toshmatov, Z. Stuchlik, B. Ahmedov, *Rotating black hole solutions with quintessential energy*, Eur. Phys. J. Plus, **132**, (2017) 98.
- [87] J. Qing-Quan, S. Q. Wu, X. Cai, *Hawking radiation as tunneling from the Kerr and Kerr-Newmann black holes*, Phys. Rev. D **73**, (2006) 064003.
- [88] C. D. Robinson, *Uniqueness of the Kerr black hole*, Phys. Rev. Lett, **34**, (1975) 905.
- [89] Y. H. Ma, Q-Y. Cai, H. Dong, C-P. Sun, *Non-thermal radiation of black holes off canonical typicality*, EPL, **122**, (2018) 30001.
- [90] S. Hemming, E. Keski-Vakkuri, *Hawking radiation from AdS black holes*, Phys. Rev. D **64**, (2001) 044006.
- [91] E. T. Newman, R. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash, R. Torrence, *Metric of a Rotating, Charged Mass*, Jour. Math. Phys, **6**, (1965) 918–919.
- [92] R. Banerjee, S. K. Modak and S. Samanta, *Glassy phase transition and stability in black holes*, Eur. Phys. J. C, **70**, (2010) 317.
- [93] R. Banerjee, S. Ghosh, D. Roychowdhury, *New type of phase transition in Reissner Nordström–AdS black hole and its thermodynamic geometry*, Phys. Lett. B **696**, (2011) 156.

- [94] T. M. Nieuwenhuizen, *Ehrenfest relations at the glass transition: solution to an old paradox*, Phys. Rev. Lett, **79**, (1997) 1317-1320.
- [95] M. Reinhard, *Black holes: A physical route to the Kerr metric*, Annalen der Physik **11**, (2002) 509-521.
- [96] J. D. Bekenstein, *Black holes and entropy*, Phys. Rev. D**7**, (1973) 2333.
- [97] E. Spallucci, A. Smailagic, *Maxwell's equal area law and the Hawking-Page phase transition*, J. Grav, **2013**, (2013) 525696, arXiv:1310.2186.
- [98] S. Hawking, *Gravitational radiation from colliding black holes*, Phys. Rev. Lett, **26** (1971) 1344.
- [99] K. Schoutens, H. Verlinde, E. Verlinde, *Quantum black hole evaporation*, Phys. Rev. D**48**, (1993) 2670.
- [100] B. Gwak, *Thermodynamics with pressure and volume under charged particle absorption*, JHEP, **11**, (2017) 1-16.
- [101] N. Altamirano, D. Kibiznak, R. B. Mann, Z. Sherkatghanad, *Thermodynamics of rotating black holes and black rings: phase transitions and thermodynamic volume*, arXiv:1401.2586, 2014.
- [102] D. N. Spergel et al., *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Three Year Results: Implications for Cosmology*, arXiv:astro-ph/0603449.
- [103] M. Tegmark et al., *Cosmological constraints from the SDSS luminous red galaxies*, Phys. Rev. D**74**, (2006) 123507.
- [104] M. Chabab, H. El Moumni, S. Iraoui, K. Masmar, *Phase transition of charged AdS black holes and quasinormal modes: A time domain analysis*, Astrophys. Space Sci. **362**, (2017) 192.
- [105] A. Belhaj, H. El Moumni, *Entanglement Entropy and Phase Portrait of $f(R)$ -AdS Black Holes in the Grand Canonical Ensemble*, Nuc. Phys. B**938**, (2019) 200.
- [106] H. Dong, Q. Y. Cai, X. F. Liu, et al. Commun. Theor. Phys, **61**, (2014) 289.
- [107] H. Tasaki, *From Quantum Dynamics to the Canonical Distribution: General Picture and a Rigorous Example*, Phys. Rev. Lett, **80**, (1998) 1373.
- [108] Q. Y. Cai, C. P. Sun, L. You, Nucl. Phys. B**905**, (2016) 327-336.
- [109] S.W. Hawking, *Black hole explosions*, Nature, **248**, (1974) 30-31.

- [110] R. Kerner, Robert B. Mann, *Charged fermions tunneling from Kerr–Newmann black holes*, Phys. Lett. B**665**, (2008) 277-283.
- [111] H. Ooguri, A. Strominger, C. Vafa, *Black Hole Attractors and the Topological String*, Phys. Rev. D**70**, (2004) 106007.
- [112] A. Belhaj, *On Black Objects in Type IIA Superstring Theory on Calabi-Yau Manifolds*, African Journal of Mathematical Physics, **6**, (2008) 49, [arXiv:0809.1114](#).
- [113] S.W. Hawking, *Particle creation by black holes*, Commun. Math. Phys, **43**, (1975) 199.
- [114] R. G. Cai, Y. S. Myung, *Critical behavior for the dilaton black holes*, Nucl. Phys. B**495**, (1997) 339, [[arXiv:hep-th/9702159](#)].
- [115] K. Maeda, M. Natsuume, T. Okamura, *Dynamic critical phenomena in the AdS/CFT duality*, Phys. Rev. D**78**, (2008) 106007.
- [116] J.M. Maldacena, *The Large- N limit of superconformal field theories and supergravity*, Int. J. Theor. Phys. **38**, (1999) 1113-1133.
- [117] O. Aharony, S.S. Gubser, J.M. Maldacena, H. Ooguri, Y. Oz, *Large- N field theories, string theory and gravity*, Phys. Rept. **323**, (2000) 183 [[hep-th/9905111](#)].
- [118] S.S. Gubser, *Phase transitions near black hole horizons*, Class. Quant. Grav. **22**, (2005) 5121 [[hep-th/0505189](#)].
- [119] A. Ashtekar, A. Magnon, *Asymptotically anti-de Sitter space-times*, Class. Quant. Grav, **1**, (1984) L39.
- [120] E. Witten, *Anti de Sitter space and holography*, Adv. Theor. Math. Phys, **2**, (1998) 253-291.
- [121] A. Ashtekar, S. Das, *Asymptotically anti-de Sitter spacetimes: conserved quantities*, Class. Quant. Grav, **17**, (2000) L17.
- [122] S. Hollands, A. Ishibashi, D. Marolf, *Comparison between various notions of conserved charges in asymptotically AdS spacetimes*, Class. Quant. Grav, **22**, (2005) 2881.
- [123] R. Fardon, A. E. Nelson, N. Weiner, *dark energy from mass varying neutrinos*, Jour. Cosmo. Astro. Phys, **10**, (2004) 005.
- [124] E. J. Copeland, M. Sami, S. Tsujikawa, *Dynamics of dark energy*, Int. J. Mod. Phys. D**15**, (2006) 1753.
- [125] S. D. H. Hsu, *Entropy bounds and dark energy*, Phys. Lett. B**594**, (2004) 13.

- [126] R. R. Caldwell, M. Kamionkowski, N. N. Weinberg, *Phantom energy: dark energy with $w < -1$ causes a cosmic doomsday*, Phys. Rev. Lett, **91**, (2003) 071301.
- [127] P. J. E. Peebles, B. Ratra, *The cosmological constant and dark energy*, Rev. Mod. Phys, **75**, (2003) 559.
- [128] S. Panda, Y. Sumitomo, S. P. Trivedi, *Axions as quintessence in string theory*, Phys. Rev. D**83**, (2011) 083506.
- [129] S. Chen, B. Wang, R. Su, *Hawking radiation in a d -dimensional static spherically symmetric black hole surrounded by quintessence*, Phys. Rev. D**77**, (2008) 124011.
- [130] H. Liu, X. Meng, *Effects of dark energy on the efficiency of charged AdS black holes as heat engines*, Eur. Phys. J. C, **77** (2017) 556, arXiv: hep-th/1704.04363 .
- [131] Y. Wu, W. Xu, *Effect of dark energy on Hawking–Page transition*, Phys. Dar. Univ, **27**, (2020) 100470.
- [132] V. V. Kiselev, *Quintessence and black holes*, Class. Quant. Grav, **20**, (2003) 1187.
- [133] E. O. Babichev, V. I. Dokuchaev, Y. N. Eroshenko, *Black holes in the presence of dark energy*, Phys. Usp, **56**, (2013) 1155.
- [134] P. H. Frampton, M. Kawasaki, F. Takahashi, T. T. Yanagida, *Primordial black holes as all dark matter*, J. Cosm. Astro. Phys, **04**, (2010) 023.
- [135] V. V. Kiselev, *Quintessential solution of dark matter rotation curves and its simulation by extra dimensions*, arXiv gr-qc/0303031.
- [136] S. Hellerman, N. Kaloper, L. Susskind, *String theory and quintessence*, J. High Ener. Phys, **06**, (2001) 003.
- [137] Y. Zhang, Y. X. Gui, *Quasinormal modes of gravitational perturbation around a Schwarzschild black hole surrounded by quintessence*, Class. Quant. Grav, **23**, (2006) 6141.
- [138] Y. Ma, J. Chen, C. Sun, *Dark information of black hole radiation raised by dark energy*, Nuc. Phys. B**931**, (2018) 418.
- [139] R. Caldwell, *Dark energy*. Phys. World,**17**, (2004).
- [140] A. Belhaj, A. El Balali, W. El Hadri, H. El Moumni, M. A. Essebani, M. B. Sedra, *On Phase Transition Behaviors of Kerr-Sen Black Hole*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys, **17**, (2020) 2050169.

- [141] A. Sen, *Rotating charged black hole solution in heterotic string theory*, Phys. Rev. Lett. **69**, (1992) 1006.
- [142] S. Liebes Jr, *Gravitational lenses*. Phys. Rev. B**835**, (1964) 133.
- [143] L. Ming-Jian, *Temperature and thermodynamic geometry of the Kerr—Sen black hole*, Chin. Phys. B**20**, (2011) 020404.
- [144] X. G. Lan, J. Pu, *Observing the contour profile of a Kerr—Sen black hole*, Mod. Phys. Lett. A**33** (2018) 1850099.
- [145] T. K. Dey, *Born-Infeld black holes in the presence of a cosmological constant*, Phys. Lett. B**595**, (2004) 484-490 [hep-th/0406169].
- [146] M. H. Dehghani, *Charged rotating black branes in Anti-de Sitter Einstein-Gauss-Bonnet gravity*, Phys. Rev. D **67**, (2003) 064017 [hep-th/0211191].
- [147] O. B. Zaslavskii, *Canonical ensemble for rotating relativistic systems* , Class. Quantum Grav, **8**, (1991) L103-L107.
- [148] T. Torii, H. Maeda, *Spacetime structure of static solutions in Gauss-Bonnet gravity: Charged case*, Phys. Rev. D**72**, (2005) 064007 [hep-th/0504141].
- [149] S. S. Gubser, I. Mitra, *The evolution of unstable black holes in Anti-de Sitter space*, JHEP 08 (2001) 018 [hep-th/0011127].
- [150] A. Einstein, *The field equations of gravitation*, Sitzungsber, Preuss. Akad, Wiss. Berlin, (Math. Phys), (1915) 844-847.
- [151] J. Mehra, *Einstein, Hilbert, and the theory of gravitation: Historical origins of general relativity theory*, Sprin. Sci. Bus. Med, (2012).
- [152] C. Bambi, *Introduction to General Relativity: A Course for Undergraduate Students of Physics*, Springer, (2018).
- [153] S. M. Carroll, *Lecture notes on general relativity*,(1997), arXiv:gr-qc/9712019.
- [154] R. L. Arnowitt, S. D. Deser, C. W. Misner, *The dynamics of general relativity*,(1962), arXiv:gr-qc/0405109.
- [155] K. Hayashi, T. Shirafuji, *New general relativity*, Phys. Rev. D**19** (1979) 3524.
- [156] E.H.T. Collab, *First M87 event horizon telescope results. IV. Imaging the central supermassive black hole*, Astro. Jour. Lett, **875**, (2019) L4.
- [157] U. Kostić, *Analytical time-like geodesics in Schwarzschild space-time*, Gen. Rel. Grav, **44**, (2012) 1057-1072.

- [158] H. Shanjit, K. Yugindro Singh, *Geodesics in the Kerr-Newman anti de Sitter space-times*, Adv. Astrophys, **2**, (2017).
- [159] G. Ruppeiner, *Riemannian geometry in thermodynamic fluctuation theory*, Rev. Mod. Phys, **67**, (1995) 605.
- [160] G. Ruppeiner, *Thermodynamic critical fluctuation theory?*, Phys. Rev. Lett, **50**, (1983), 287.
- [161] J. E. Aman, I. Bengtsson, N. Pidokrajt, *Geometry of black hole thermodynamics*, Gen. Relativ. Gravit, **35**, (2003) 1733 .
- [162] A. Belhaj, A. El Balali, W. El Hadri, M. A. Essebani, M. B. Sedra, A. Segui, *Kerr-AdS black hole behaviors from dark energy*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. D**29**, (2020) 9.
- [163] C. Armendariz-Picon, T. Damour, V. Mukhanov, *k-Inflation*, Phys. Lett. B**458** (1999) 209.
- [164] A. Belhaj, A. El Balali, W. El Hadri, H. El Moumni, M. B. Sedra, *Dark Energy Effects on Charged and Rotating Black Holes*, Eur.Phys.J.Plus, **134**, (2019) 422.
- [165] R. Banerjee, S. Modak, *Second Order Phase Transition and Thermodynamic Geometry in Kerr-AdS Black Hole*, Phys. Rev. D**84**, (2011) 064024.
- [166] S. E. Gralla, D. E. Holz, R. M. Wald, *Black Hole Shadows, Photon Rings, and Lensing Rings*, Phys. Rev. D**100**, (2019) 024018.
- [167] P. V. Cunha, C. A. Herdeiro, *Shadows and strong gravitational lensing: a brief review*, Gene. Relat. Grav, **50**, (2018) 1-27.

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude de l'aspect thermodynamique des trous noirs rotatifs. Particulièrement, nous nous intéressons aux trous noirs à quatre dimensions en présence d'un champ appelé quintessence considéré comme un candidat de l'énergie noire. Pour comprendre son impact, nous examinons analytiquement le spectre de la radiation ainsi que l'aspect thermique des solutions chargées et rotatives. En déterminant les quantités thermodynamiques associées, nous montrons que cette contribution énergétique se comporte comme un système de refroidissement. Cette étude est étendue en analysant le comportement critique des trous noirs neutres et rotatifs dans un espace-temps Anti de-Sitter. Concrètement, nous explorons la transition de Hawking-Page de certains modèles caractérisés par des valeurs spécifiques du paramètre d'état décrivant l'énergie noire. Nous terminons ce travail par une présentation des solutions des trous noirs rotatifs s'inscrivant dans le cadre de la théorie des supercordes hétérotiques. Concrètement, nous examinons le comportement critique du trou noir de Kerr-Sen. En exploitant le schéma d'Ehrenfest, nous montrons que cette solution subit une transition de phase du second ordre. En proposant une nouvelle forme de la métrique de la géothermodynamique à partir de l'énergie libre de Gibbs, nous assurons la présence de telles transitions en déterminant la courbure scalaire associée. Finalement, nous explorons les exposants critiques qui sont en accord avec la théorie des champs moyens.

Mots-clés : Trou noir rotatifs, quintessence, énergie noire, radiation de Hawking-Page, espace-temps AdS, géothermodynamique, trou noir de Kerr-Sen, Ehrenfest.

Abstract

This thesis is devoted to the study of the thermodynamic aspect of rotating black holes. In particular, we are interested in four-dimensional black holes in the presence of a field called quintessence considered as a dark energy candidate. To understand its influence, we examine analytically the radiation spectrum as well as the thermal aspect of charged and rotating solutions. By determining the associated thermodynamics quantities, we show that this energy contribution behaves as a cooling system. This study is extended by analyzing the critical behavior of neutral and rotating black holes in Anti de-Sitter space-time. Concretely, we explore the Hawking-Page transition of certain models characterized by specific values of the state parameter describing the dark energy. We end this work by investigating the critical behaviors of the Kerr-Sen black holes in four dimensional embedded in heterotic superstring theories. By using the Ehrenfest scheme, we show that this solution undergoes a second order phase transition. Proposing a new form of the geothermodynamics metric derived from the Gibbs free energy, the presence of such transitions is confirmed by computing the associated scalar curvature. Finally, we explore the critical exponents matching perfectly with the mean field theory.

Keywords : Rotating black holes, quintessence, dark energy, radiation spectrum, Anti de-Sitter space-time, Hawking-Page transition, Kerr-Sen black hole, Ehrenfest, geothermodynamics.