UNIVERSITE SIDI MOHAMMED BEN ABDELLAH

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES-FES

N^0 d'ordre : 10/2016

THESE DE DOCTORAT

Présentée par

Mr : Rachid Bahloul

Discipline :

Mathématiques

Spécialité :

Equations Différentielles

Sujet de la thèse :

Existence et unicité des solutions périodiques des équations différentielles à retard et de type neutre dans un espace de Banach de type UMD.

Thèse présenté et setenue à la FST de Fés le 27/02/2016, devant le jury composé

de :

Remerciements

Je tiens à remercier le professeur **Ahmed El Hilali Alaoui** pour l'honneur qu'il m'a fait pour présider le jury.

Je remercie vivement monsieur le professeur **Omar Sidki** qui a dirigé cette thèse. Ses conseils multiformes et la richesse de ses connaissances ainsi que ses initiatives m'ont permis de mener à bien ce travail. Cette direction s'est caractérisé par une grande patience, une disponibilité permanente, des conseils abondants, un support et un suivi continus dans le but de mettre ce projet sous sa forme finale.

Je remercie particulièrement monsieur le professeur **Khallil Ezzinbi**, qui a beaucoup donné au domaine des équations différentielles, pour ses suggestions et propositions très utiles pour l'amélioration de ce travail, par son soutien, son suivi et l'intêret apportés à cette thèse.

je remercie également le professeur **Mohamed Bahaj** qui m'a apporté une aide très efficace grâce à ses nombreuses remarques pertinentes et ses précieux conseils qui m'étaient utiles tout au long de la réalisation de ce travail

Je remercie également les professeurs **Talibi Alaoui Hamad, Elbaraka Azzeddine** et **Hilal Khalid** pour avoir accepté de rapporter mon travail.

je tiens à exprimer ma vive reconnaissance à ceux qui m'ont donné le sens de la vie : mes parents, tout au long de mes études : ma femme, mes fils, ma sur et mes frères.

Résumé de la thèse

Ce travail est motivé par l'étude des équations différentielles fonctionnelles à retard et de type neutre. Elles sont apparues dans différentes disciplines scientifiques (dynamique de population, trafic urbain, physique, biologie,..) et sont difficiles à résoudre.

Le retard est défini comme étant la propriété d'un système physique pour lequel la réponse à une action appliquée est retardée dans son effet. Les systèmes à retards sont appelés aussi systèmes héréditaires.

Notre objectif dans ce travail est de chercher les solutions périodiques de telle équations par des nouvelles méthodes, notamment en utilisant la théorie de R-bornétude et en travaillant dans un espace de Banach de type UMD.

La première partie de la thése est consacré à des rappels sur la théorie des semi groupes d'opérateurs linéaires et non linéaires, Analyse de Fourier, la théorie des R-bornétude et quelques notion sur l'espace de Banach, ainsi que des propriété géométriques d'espace de Banach de type UMD.

Dans la deuxième partie, nous montrons l'existence et l'unicité de solutions périodiques d'équations différentielles à retard et de type neutre dans un espace de Banach de type UMD.

Dans la troisiéme partie, on s'intéresse à résoudre le problème d'équations différentielles dégénérées du second ordre dans un espace de Banach de type UMD.

En fin, la quatrième partie est consacrée à montrer l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle à retard non linéaire en appliquant le théorème de Crandall-Liggett.

Mots clés : Solution périodique des équations différentielles à retard et de type neutre, espace de Banach de type UMD, Transformée de Fourier, R-Bornétude, L^p-multiplicateur.

Fiche présentative de la thèse

Articles dans les journaux :

✓**K. Ezzinbi, R.Bahloul et O.Sidki**, Periodic Solutions in UMD spaces for some neutral partial function differential equations, Advances in Pure Mathematics (accepter)

✓**M.Bahaj, R.Bahloul et O.Sidki**, Periodic weak solutions of some degenerate equations, Global Journal of Pure and Applied Mathematics (GJPAM), indexed in Scopus, Mathematical Reviews, MathSciNet, and Zentralblatt databases. (accepter)

✓**M.Bahaj, R.Bahloul et O.Sidki**,Periodic solutions of degenerate equations with finite delay in UMD space, journal of Advances in Dynamical Systems and Applications. ISSN 0973-5321, Volume 10, Number 1, (2015) pp. 23-31

✓**R.Bahloul et O.Sidki** ; Periodic Solutions of abstract neutral functional differential equations, International Organization of Scientific Research Journals of Mathematics (IOSR-JM), e-ISSN : 2278-5728, p-ISSN :2319-765X, Vol.10, Issue 2, Mar-Apr 2014, 86-96. Doi :10.9790/5728-10228696.

✓**R.Bahloul et O.Sidki** ; A Semigroup Approach to Semilinear Functional Differential Equations in a Banach Space, International Journal of Scientific and Engineering Research (IJSER),ISSN 2229-5518, Volume 4, Issue 11, November-2013.

Communications orales :

✓Workshop Oujda 2012, Operator Theory and Applications, 14-19 December, 2012, A Semigroup approach to semi-linear function differential equations in a Banach space.

✓Workshop CIMPA-Tanger, EDPs Non Linéaires et Applications : Etude Théorique and Numérique, Tanger, Maroc, 05-17 mai 2014, Periodic Solutions of abstract neutral functional differential equations and application

Travaux soumis :

✓M.Bahaj, R.Bahloul et O.Sidki, Periodic solutions of second order equations with finite delay in UMD space, Nonlinear Analysis : Modelling and Control

Formations

✓Formation au sein du Laboratoire de Mathématiques et Dynamique de Population (LMDP) à la faculté de science semlalia de marrakech 2011-2014 (sous la direction de monsieur Ezzinbi Khalil).

✓Formation de 60 heures à l'école CIMPA-Tanger organisée du 08 au 17 mai 2014.

Table des matières

Introduction générale

Les équations différentielles à retard sont des équations différentielles dans lesquelles la dérivée à un moment t dépend de la fonction (et de la dérivée dans le cas des équations de type neutre) à des moments antérieurs $t - r_i$, $r_i \in \mathbb{R}^+$. Autrement dit ces équations tiennent compte de l'effet du passé dans la prédiction du futur.
Les équations différentielles à retard occupent une place importante dans tous les domaines de la science (physique, chimique, biologique, economique.....).

0.1 Présentation de la thèse

Le but de ce travail est l'étude d'équations différentielles à retard et de type neutre. Notre principale contribution est de prouver l'existence et l'unicité de solution périodique avec une nouvelle méthode.
Les outils mathématiques qui sont à la base d'une telle étude ont été initiés par Arendt et Bu [5] et ensuite formalisés par d'autres auteurs. Par exemple, Lizama [42] qui montre l'existence et l'unicité de la solution périodique forte et faible de l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + L(x_t) + f(t)$$

Où $A : D(A) \subseteq X \to X$ un opérateur linéaire fermé et $f : \mathbb{R} \to X$ est une fonction locallement p-intégrable et 2π-périodique pour $1 \leq p < +\infty$, $L \in \mathbb{B}(L^p([-r, 0], X); X)$ (l'espace des opérateurs linéaires bornés).

Bu a étudié dans [8] un problème d'équations différentielles dégénérées suivante :

$$\frac{d}{dt}(Mx(t)) = Ax(t) + L(x_t) + f(t)$$

Avec $D(A) \subset D(M)$. Cette équation est une généralisation de l'équation dégénérée de Lizama suivante :

$$\frac{d}{dt}(Mx(t)) = Ax(t) + f(t)$$

Finalement, et à titre d'information, nous citons des travaux sur des problèmes intégro-différentiels. Bu et Fang ([9], [10]), ont étudié l'existence et l'unicité d'équation différentielle à retard et d'équation intégro-différentielle suivante :

$$u'(t) = Au(t) + \int_{-\infty}^{t} a(t-s)Au(s)ds + f(t)$$

Dans ce travail, nous avons étudié les hypothèses adéquates pour l'existence des solutions fortes et faibles des équations différentielles à retard et de type neutre, des équations différentielles dégénérées et des équations fonctionnelles à retard de type neutre du second ordre. Cette thèse comporte 4 chapitres.

Le premier chapitre est consacré à des rappels sur la théorie des semi-groupes d'opérateurs linéaires et non linéaires, l'analyse de Fourier et quelques notions sur l'espace de Banach, ainsi que des propriétés géomètriques des espace UMD.

Le deuxième chapitre s'intéresse à résoudre par la méthode de transformation de Fourier l'équation différentielle de type neutre suivante :

$$\tfrac{d}{dt}[x(t) - Bx(t-r)] = A[x(t) - Bx(t-r)] + L(x_t) + f(t), t \in \mathbb{R}$$

Où $A : D(A) \subseteq X \to X$ et $B : D(B) \subseteq X \to X$ sont deux opérateurs linéaires fermés. La fonction x_t est donnée par $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ pour $\theta \in [-r, 0]$.

$L \in \mathbb{B}(L^p([-r_{2\pi}, 0], X); X)$ [l'espace des opérateurs linéaires bornés] avec $r_{2\pi} = 2\pi n_0 (n_0 \in \mathbb{N} - \{0\})$ et $f : \mathbb{R} \to X$ est une fonction locallement p-intégrable et 2π-périodique pour $1 \leq p < +\infty$. Plus généralement nous allons étendre nos résultats d'existence à l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt}[x(t) - L(x_t)] = A[x(t) - L(x_t)] + G(x_t) + f(t), t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Sous les conditions suivantes :

(1) : $A : D(A) \subseteq X \to X$ un opérateur linéaire fermé.

(2) : $L, G \in \mathbb{B}(L^p([-r_{2\pi}, 0], X); X)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés.

(3) : X un espace UMD.

Nous montrons l'existence et l'unicité d'une solution périodique de l'équation (1) sous les hypothèses (1) , (2), (3) et des propriétés de R-bornétude suivantes : $\sigma_Z(\Delta) = \varnothing$ et $\left\{ik\Delta_k^{-1}\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est R-borné, avec $\Delta_k = (ik(I - L_k) - A(I - L_k) - G_k)$.

Le troisième chapitre, porte sur l'existence de solutions fortes de deux types d'équations différentielles du second ordre présentées sous la forme :

(Pour le première type)

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \frac{d}{dt}Bx(t) + Ax(t) = G(x_t) + f(t)$$

Où $A : D(A) \subseteq X \to X$ et $B : D(B) \subseteq X \to X$ sont deux opérateurs linéaires fermés tel que $D(A) \subset D(B)$, et $G \in \mathbb{B}(L^p([-r_{2\pi}, 0], X); X)$.

(Pour le deuxième type)

$$\frac{d^2}{dt^2}(Mx(t)) + Ax(t) + G(x_t) = f(t)$$

Où $A : D(A) \subseteq X \to X$ et $M : D(M) \subseteq X \to X$ sont deux opérateurs linéaires fermés tel que $D(A) \subset D(M)$, M borné et $G \in \mathbb{B}(L^p([-r_{2\pi}, 0], X); X)$.

Dans le quatrième chapitre, nous considérons les opérateurs à valeurs dans l'espace des fonctions continues, définies sur $[-r, 0]$ dans un espace de Banach X.

Notre démarche consiste à appliquer le théorème de Crandall-Liggett, pour établir l'existence et l'unicité de l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + F(x_t), 0 \leq t \leq T. \\ \qquad x_0 = \varphi \in C([-r, 0]; X) \end{cases} \tag{2}$$

où X est un espace de Banach, muni d'une norme que l'on note par $\|.\|_X$, la notation x_t correspond à la fonction définie sur $[-r, 0]$ à valeurs dans X, par :

$$x_t(\theta) = x(t + \theta); -r \leq \theta \leq 0$$

Pour $\varphi \in C([-r,0];X)$, on a : $\|\varphi\| = sup_{\theta\in[-r,0]} \|\varphi(\theta)\|_X$

Nous supposons les hypothèses suivantes :

1) Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \to X$ (non borné) est générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contractions T(t), t$\geq$ 0.

2) $F : C([-r,0];X) \to X$ est une application non linéaire supposée continue, lipschitzienne de constante de Lipschitz α, autrement dit : $\|F(\varphi_1) - F(\varphi_2)\|_X \leq \alpha \|\varphi_1 - \varphi_2\|$, pour tout $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}$.

La preuve de l'existence et de l'unicité de la solution consiste à transformer l'équation (2) en l'équation d'évolution associée :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \tilde{A}u. \\ u_0 = \varphi \end{cases}$$

Où $\tilde{A}$ est un opérateur non linéaire défini par :

$$\begin{cases} D(\tilde{A}) = \{\varphi \in C^1([-r,0];X) : \varphi(0) \in D(A)\ et\ \dot{\varphi}(0) = A\varphi(0) + F(\varphi)\} \\ \tilde{A}\varphi = \dot{\varphi}\ \ pour\ \ \varphi \in\ D(\tilde{A}) \end{cases} \tag{3}$$

On montre d'abord que $\tilde{A}$ est α-dissipatif et tel que $Im(I - \lambda\tilde{A}) = \mathcal{C} := C([-r,0];X)$, pour $\lambda > 0$ assez petit. Donc d'après le théorème de Crandall-Liggett (Théorème 1.2.12), $lim_{n\to\infty}(I - \frac{t}{n}\tilde{A})^{-n}\varphi$ existe pour tout $t \geq 0$ et tout $\varphi \in C([-r,0];X)$. Si on pose $\tilde{T}(t)\varphi = lim_{n\to\infty}(I - \frac{t}{n}\tilde{A})^{-n}\varphi$, alors $\tilde{T}(t)$ est un semi-groupe non linéaire fortement continu de type α, et le générateur infinitésimal de $\tilde{T}(t)$ est l'opérateur défini par (3). Donc la solution de (2) existe et elle est unique. Elle est donnée par :

$$\begin{cases} x(t) = \varphi(t)\ \ si\ \ t \in [-r,0] \\ x(t) = (\tilde{T}(t)\varphi)(0)\ \ si\ \ t \in [0,+\infty[. \end{cases}$$

La thèse se termine par une conclusion générale et une bibliographie relative à l'ensemble des travaux présentés ici.

0.2 Quelques modèles sur les équations à retard et de type neutre

- Modèles de compétition de Lotka-Voltera Le premier modèle de compétition d'interactions en dynamique des populations a été développé par Lotka [44] et Volterra [66], qui est décrit par le système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}P_1(t) = aP_1(t) - bP_1(t)P_2(t) \quad pour \quad t \geq 0 \\ \frac{d}{dt}P_2(t) = -cP_2(t) + dP_1(t)P_2(t) \quad pour \quad t \geq 0 \\ \qquad P_1(0) = P_1^0 \quad et \quad P_2(0) = P_2^0. \end{cases} \tag{4}$$

Où P_1 et P_2 désignent respectivement les populations de proies et de prédateurs, et les paramétres :

a est le taux de croissance naturelle de la proie en absence de la prédation,

b est le taux de mortalité de la proie due à la prédation,

c est le taux de mortalité naturelle des prédateurs en absence de proies,

d est le taux de croissance des prédateurs en présence de proies.

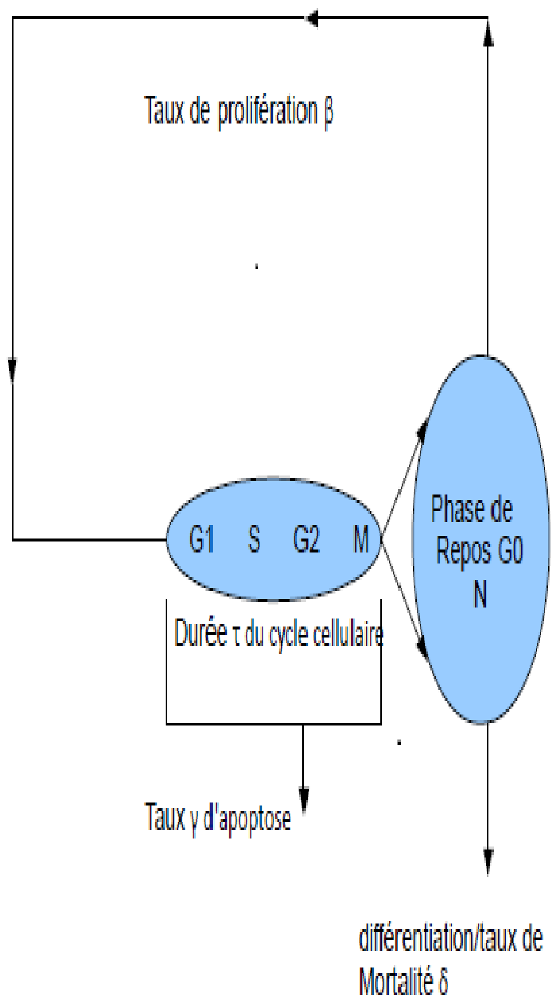
Dernièrement, plusieurs auteurs ont observé qu'il est plus naturelle de supposer que le taux de croissance dépend aussi du passé, qui peut résulter d'une variété de causes, telles que la période d'éclosion, la lenteur du remplacement de la nourriture ou le bénéfice du stock de nourriture, ce qui nous emmène à une équation différentielle fonctionelle à retard. Dans [66], le modèle (4) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}P_1(t) = P_1(t)(a - bP_2(t)) \;\; pour \;\; t \geq 0 \\ \frac{d}{dt}P_2(t) = P_2(t)(-c + dP_1(t) + \int_{-r}^{0} k(s)P_1(t+s)ds) \;\; pour \;\; t \geq 0 \\ P_1(\theta) = \varphi(\theta) \;\; et \;\; P_2(0) = P_2^0 \end{cases} \tag{5}$$

où k est la fonction noyau.

- Modèle cellulaire Des modèles mathématiques pour une variété de la dynamique biologique sont plus commodes sous la forme d'équations différentielles fonctionnelles. Dans ce cas, le retard naturel est le cycle cellulaire. Dans [45], [46], [47], [48], [49], [50] et [51], les auteurs ont étudié une série de modèles pour la réplication des cellules et de maturation dans lesquelles la dynamique est décrite par la solution d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre avec retard dans le temps ainsi que la non localité de la variable de maturation. La figure ci-dessous se compose d'une phase de prolifération cellulaire d'une population $P(t)$ au temps t et une phase de repos G_0, avec une population de cellules $N(t)$. La phase de prolifération des cellules se compose de cellules dans la phase G_1 du cycle cellulaire, la synthèse de l'ADN appelée phase $(S), G_2$, et des mitoses M. Dans cette phase de prolifération, les cellules sont engagées à subir la division cellulaire en un temps constant τ après leur entrées en G_1. Le taux de mortalité de la phase de prolifération est dû à l'apoptose. Au moment de la cytogenèse (division cellulaire), une cellule se divise en deux cellules filles, qui sont censées entrer dans la phase de repos (N).

Dans cette phase, les cellules ne peuvent pas se diviser mais elles ont trois destins possibles : se différencier à un taux constant δ, entrer de nouveau dans la phase de prolifération à un taux β ou rester dans G_0.



La phase de prolifération des cellules (P) comprend les cellules en G_1, S (synthèse de l'ADN), G_2 et M (mitose), tandis que dans la phase de repos (N), les cellules sont dans la phase G_0, δ est le taux de différenciation dans toutes les populations découlant de cellules souches et représente la perte apoptotique de la phase de prolifération des cellules. β est le taux de cellules entrées de nouveau dans G_0 pendant la phase de prolifération, le cycle cellulaire τ est la durée de la phase de prolifération. Dans [48], Mackey, Pujo-Menjouet et Wu, ont présenté un modèle décrit par un couplage non linéaire d'équations différentielles à retard, qui prend la forme suivante

$$\frac{d}{dt}P(t) = -\gamma P(t) + \beta(N(t))N(t) - e^{-\gamma\tau}\beta(N(t-\tau))N(t-\tau), t \geq 0 \qquad (6)$$

$$\frac{d}{dt}N(t) = -[\beta(N(t))+\delta]N(t)+\beta(N(t))N(t)+2e^{-\gamma\tau}\beta(N(t-\tau))N(t-\tau), t \geq 0 \quad (7)$$

où dans le repos G_0, β est donnée par

$$\beta(N) = \frac{\beta_0\delta^n}{\delta^n+N^n}$$

Dans l'équation (7), le premier terme de droite représente la perte de la non prolifération des cellules à la phase de prolifération et à la différentiation, le deuxième terme représente la phase de production des cellules dans G_0 à partir de la prolifération des cellules souches. Le facteur 2 compte pour l'amplification des effets de la division cellulaire tandis que $e^{-\gamma\tau}$ compte pour l'atténuation dans la phase de prolifération en raison de l'apoptose.

- Dynamique des populations Pour décrire l'interaction de diffusion spatiale et le retard dans une dynamique des populations, commençons par une simple espèce de population distribuée uniformément dans un environnement isolé.

Soit $u(t)$ le nombre d'indivudus au temps t. Alors le modèle de la croissance est donné par

$$\frac{du(t)}{dt} = ru(t)f(u(t))$$

où r est une constante positive appélée taux de croissance intrinsèque et $uf(u)$ est le taux de croissance effective.

Un choix possible de f qui saisit les caractéristiques essentielles d'un environnement est $f(u) = 1 - u/K$ ce qui conduit à la célèbre équation logistique

$$\frac{du(t)}{dt} = ru(t)(1 - \frac{u(t)}{K}) \tag{8}$$

où chaque solution non triviale non négative converge vers l'équilibre stable $u = K, K$ est la capacité de transport de l'environnement déterminée entre autres par la nourriture, l'espace, la prédation, etc. Dans l'équation (8), la densité dépend d'un mécanisme régulateur, qui est répresenté par le facteur $(1 - u/K)$ opére instantanément. Cependant, dans la plupart des situations réelles, ces effets régulateurs sont susceptibles de fonctionner avec certains retard. Une voie d'incorporer ce retard est d'écrire l'équation (8) comme suit

$$\frac{du(t)}{dt} = ru(t)(1 - \frac{u(t-\tau)}{K}) \tag{9}$$

où τ peut provenir d'une grande variété de causes telles que la période d'éclosion, la durée des grossesses, la lenteur du remplacement du stock de nourriture. Cette équation peut aussi se poser comme une approximation pour décrire entièrement une seule population structuré en âge.

Les modifications et généralisations des équations (9) ont été largement étudiées, et de nombreux comportements complexes à long terme et des modes temporelles de croissance démographique observée dans les expériences en laboratoire et dans la réalité peuvent souvent être attribués au mécanisme de retard. Pour plus de détails, on pourra se référer à McDonald [45], Hale [31] pour des résultats détaillés des problémes des systémes dynamiques en présence d'effets héréditaires.

- Modèle de type neutrale Le modèle le plus simple et le plus largement adopté est

$$\dot{x}(t) = rx(t)(1 - x(t)/K)$$

où r est appelé le taux de croissance intrinsèque des espèces x, K est interprété comme l'environnement capacité de x, et $r(1 - x(t)/K)$ est le taux de croissance par habitant de x à l'instant t. basé sur l'enquête sur les populations de laboratoire de la daphnie. FE Smith [57] a fait valoir que le taux de croissance par habitant devrait être remplacé par $rx(t)(1 - (x(t) + \rho\dot{x}(t))/K)$.

$$\dot{x}(t) = rx(t)[1 - (x(t) + \rho\dot{x}(t))/K]$$

Nous pouvons penser à x comme une espèce de pêturage sur la végétation, ce qui prend du temps τ pour récupérer. Dans ce cas, il sera encore plus réaliste d'intégrer un seul retard discret τ, ce qui conduit à l'équation logistique à retard neutre

$$\dot{x}(t) = rx(t)[1 - (x(1 - \tau) + \rho\dot{x}(t - \tau))/K]$$

Cette équation a été présentée et étudiée par Gopalsamy et Zhang [30]. Par la suite, elle a été étudiée par Freedman et Kuang [29].

Chapitre 1

Préliminaires

Dans cette partie, nous présentons quelques notions et résultats fondamentaux sur la théorie des semi-groupes, Analyse Fonctionnelle, Analyse de Fourier et Analyse multivoque.

1.1 Semi-groupes d'opérateurs linéaires

1.1.2 Rappels sur les opérateurs linéaires. On va effectuer quelques rappels sur les opérateurs linéaires bornés et fermés afin que les notations utilisées au cours de cette thèse soient claires. Les démonstrations ne sont pas données, on renvoie par exemple à Dunford-Schwartz [20], Hille [34], [35], [36] ; Yosida [70], [71] ; Feller [25],[26] et Phillips [55]. Dans tout ce paragraphe on désigne par X un espace de Banach muni de la norme $\|.\|_X$ et $\mathbb{B}(X)$ l'espace des applications linéaires continues de X dans lui même ou encore l'espace des opérateurs bornés sur X muni de la norme $\|.\|_X$ pour $A \in \mathbb{B}(X)$ on a $\|A\|_{\mathbb{B}(X)} = Sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_X$ (muni de cette norme, $\mathbb{B}(X)$ est un espace de Banach). ■

Définition 1.1.1 *:* [14]

Un opérateur linéaire dans X est un couple $(D(A), A)$ où $D(A)$ est un sous espace vectoriel de X (domaine de A) et $A : D(A) \to X$ est une application linéaire. On dit que A est borné s'il existe une constante $c \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\|Ax\| \leq c\,\|x\|$ pour tout $x \in D(A)$. Dans le cas contraire, A est dit non borné. ■

Proposition 1.1.2 *: (Neuman Expansion)* $[39, Theorem 1.1.7]$

Soit $A \in L(X)$. Si $\|A\|_{L(X)} < 1$, alors $I - A$ est inversible dans $L(X)$ et $(I - A)^{-1}$ $= \sum_{n=0}^{\infty} A^n$. ■

Définition 1.1.3 *:* [14]

1. On appelle noyau de A le sous-espace de X, noté $Ker(A)$, défini par :

$Ker(A) := \{x \in D(A) : Ax = 0\}$.

2. On appelle graphe de A le sous espace de $X \times X$, noté $G(A)$, défini par :

$G(A) := \{(x, y) \in X \times X : x \in D(A), y = Ax\}$.

3. Un opérateur A est dit fermé si son graphe $G(A)$ est fermé autrement dit :

si $x_n \in D(A)$ tel que : $x_n \to x$ et $Ax_n \to y$ quand n tend vers ∞ ; alors $x \in D(A)$ et $y = Ax$. ■

Théorème 1.1.4 *:* [14] *(théorème du graphe fermé)*

Soit X un espace de Banach, A une application linéaire de X dans X. Alors $G(A)$ est fermé dans $X \times X$ si et seulement si A est continue. ■

Lemme 1.1.5 *:* [53]

Soit X un espace de Banach et $A, B : D(A) = D(B) \to X$ deux opérateurs linéaires tel que A borné et B fermé alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) $(\lambda A + \mu B)$ est un opérateur fermé. $\blacksquare$

Théorème 1.1.6 *: (théorème 1.4.6 ; [53])*

Soit X un espace de Banach , si $A : D(A) \subset X \to X$ est fermé et A^{-1} existe alors A^{-1} est fermé. $\blacksquare$

Définition 1.1.7 *:* [53]

Soient $A : D(A) \subset X \to Y$ et $B : D(B) \subset Y \to Z$ deux opérateurs linéaires. On peut définir l'opérateur BA :

$D(BA) = \{x \in D(A) : Ax \in D(B)\}$ *et* $(BA)x = B(Ax), \forall x \in D(BA)$. $\blacksquare$

Définition 1.1.8 *:* [53]

Soit A un opérateur linéaire sur X. L'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A est défini par :

$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)$ *est bijective de* $D(A)$ *dans* X *et* $(\lambda I - A)^{-1} \in L(X)\}$.

Si $\lambda \in \rho(A)$ on définit la résolvante $R(\lambda, A)$ de A au point λ par :

$$R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}$$

Le spectre de A, noté $\sigma(A)$, est défini par : $\sigma(A) := \mathbb{C} \backslash \rho(A)$. $\blacksquare$

On donne maintenant quelques propriétés importantes de l'ensemble résolvant ρ(A) et de la résolvante R(λ, A).

Lemme 1.1.9 *:* [53]

(1) Si $\rho(A) \neq \phi$ *alors* A *est fermé.*

(2) Si A *est fermé alors* $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) : D(A) \to X \;\; est \;\; bijectif\}$.

C'est à dire que si A *est fermé avec* $(\lambda I - A)$ *bijectif, alors on a* $(\lambda I - A)^{-1} \in L(X)$■

Définition 1.1.10 *:* [14]

Soit A *: D(A)* $\subset X \to Y$ *un opérateur linéaire. On peut munir D(A) d'une norme notée* $\|.\|_{D(A)}$ *et appelée norme du graphe, elle est définie pour tout* $x \in$ *D(A) par :*

$$\|x\|_{D(A)} := \|x\|_X + \|Ax\|_Y$$

Proposition 1.1.11 *:* [14]

Si A *est un opérateur linéaire fermé, alors* $(D(A), \|.\|_{D(A)})$ *est un espace de Banach.*■

1.1.3 Opérateurs dissipatifs

Définition 1.1.12 *:* [53]

Un opérateur $(A, D(A))$, *linéaire non borné dans* X, *est dit dissipatif si*

$\|(\lambda I - A)x\|_X \geq \lambda \|x\|_X$, *pour tout* $x \in D(A)$ *et tout* $\lambda \geq 0$.■

Définition 1.1.13 *:* [53]

Un opérateur $(A, D(A))$, *linéaire non borné dans* X, *est dit m-dissipatif si*

1. A *est dissipatif*

2. $\forall f \in X, \forall \lambda > 0, \exists x \in D(A)$ *tel que* $\lambda x - Ax = f$; *i.e* $Im(\lambda I - A) = X$.■

Théorème 1.1.14 *:* [53]

Si A est m-dissipatif, alors pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $(\lambda I - A)$ admet un inverse et $(\lambda I - A)^{-1}f$ appartient à $D(A)$ pour tout $f \in X$, et $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur linéaire borné sur X vérifiant $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$. ■

Théorème 1.1.15 *:* [53] *(théorème 4.5)*

Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire non borné dissipatif .

S'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $Im(\lambda_0 I - A) = X$ alors $Im(\lambda I - A) = X$, pour tout $\lambda > 0$.■

1.1.4 Semi-groupes

Dans ce paragraphe, on énonce les définitions d'un semi-groupe uniformément continu et d'un générateur infinitésimal. On désigne $(X, \|.\|_X)$ un espace de Banach.

Définition 1.1.16 *: La famille $(T(t))_{t\geq 0}$ de $L(X)$ est appelée semi-groupe si on a :*

1. $T(0) = I$,

2. $T(s + t) = T(s)T(t)$. $\forall s, t \in \mathbb{R}^+$. ■

1.1.4.1 Semi-groupe uniformément continu

Définition 1.1.17 *:* [53]

Un ***semi-groupe*** $(T(t))_{t\geq 0}$ *est appelé* ***semi-groupe uniformément continu*** *d'opérateurs linéaires bornés si,*

$$lim_{t\to 0^+} \|T(t) - I\|_{L(X)} = 0. \blacksquare$$

Remarque 1.1.18 *: Si $(T(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés alors :*

$$lim_{t\to s}\|T(t)-T(s)\|_{L(X)}=0$$

1.1.4.2 Générateurs infinitésimaux

A chaque semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$, On fait correspondre une famille d'opérateurs A_h définie par : $A_hx=\frac{1}{h}(T(h)x-x)$, pour $h>0$ et $x\in X$. En général A_hx n'admet pas de limite pour tout $x\in X$ quand $h\to 0$. En effet,

Exemple 1.1.19 *:* [62]

Soit $X=l_2=\left\{x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}:\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n|^2<+\infty\right\}$, X est un espace de Hilbert pour la norme : $x\to\|x\|_{l_2}=(\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n|^2)^{1/2}$, associée au produit scalaire $(x,y)=\sum_{n=1}^{+\infty}x_n\overline{y}_n$. On défini $T(t)x=\left\{e^{-n^2t}x_n\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}\in l_2$.

On montre facilement que $t\to T(t)x$ est un semi-groupe uniformément continu.

$$A_hx=\frac{T(h)x-x}{h}=\left\{\frac{e^{-n^2h}-1}{h}x_n\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{e^{-n^2h}-1}{h}x_n=-n^2x_ne^{-\theta_nn^2h}; 0<\theta_n<1$. Il en résulte que A_h a une limite dans l_2 si et seulement si la suite de terme général $\{-n^2x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dans l_2. Alors

$$lim_{h\to 0}A_hx=lim_{h\to 0}\frac{T(h)x-x}{h}=\{-n^2x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}.$$

*On note $Ax=lim_{h\to 0}A_hx$, appelé le **générateur infinitésimal** de $T(t)$ et on a*

$D(A) = \{x = (x_n)_n \in l_2/(-n^2 x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l_2\}$ *appelé le domaine de* A*, d'où la définition suivante.* ■

Définition 1.1.20 *:* [53]

Le ***générateur infinitésimal*** *d'un semi-groupe* $(T(t))_{t\geq 0}$ *est l'opérateur* A *défini par :*

$$D(A) := \left\{x \in X : lim_{h\to 0^+} \tfrac{T(h)x-x}{h} \quad existe \quad dans \quad X\right\}$$

$$et \quad Ax := lim_{h\to 0^+} \tfrac{T(h)x-x}{h}, x \in D(A)$$

$D(A)$ est non vide $(0 \in D(A))$ et est bien un sous-espace vectoriel de X. A est clairement linéaire de $D(A)$ dans X. ■

Théorème 1.1.21 *:* [39]

Un opérateur linéaire A *est* ***générateur infinitésimal*** *d'un semi-groupe* ***uniformément*** *continu si et seulement si* A *est* ***borné****.* ■

Corollaire 1.1.22 *:* [53]

Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ *un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés. Alors,*

(1) Il existe une constante $\omega \geq 0$ *tel que :* $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$

(2) Il existe un unique opérateur linéaire borné A *tel que :* $T(t) = e^{tA}$

(3) $t \to T(t)$ *est différentiable et* $\frac{d}{dt}T(t) = AT(t) = T(t)A$*.* ■

1.1.4.3 Semi-groupe fortement continu (C_0-Semi-groupe)

Définition 1.1.23 *:* [53]

Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ *un* ***semi-groupe*** *d'opérateur linéaires bornés. On dit que* $T(t)$ *est un semi-groupe* ***fortement continu*** *ou* C_0*- semi-groupe ou aussi semi-groupe de classe* C_0*, si pour tout* $x \in X$*, l'application* $\mathbb{R}^+ \ni t \to T(t)x$ *est continue en 0, i.e*

$$lim_{t\to 0} \|T(t)x - x\| = 0. \blacksquare$$

Cette propriété est appelée la forte continuité en zéro.

Remarque 1.1.24 *Tout semi-groupe uniformément continu est fortement continu.*

En effet, $\|T(t)x - x\| \leq \|T(t) - I\| \, \|x\|$.

Proposition 1.1.25 *:* [53] *(Théorème 2.2)*

Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ *un* C_0*- semi-groupe. Alors il existe deux constantes réelles*

$\omega \in \mathbb{R}$ *et* $M \geq 1$*, telles que* $\forall t \geq 0, \|T(t)\|_{L(X)} \leq Me^{\omega t}$

Si $\omega = 0$ *et* $M = 1, (T(t))_{t\geq 0}$ *est appelé* C_0***- semi-groupe de contraction.*** $\blacksquare$

Théorème 1.1.26 *:* [53] *(Théorème 2.1.5)*

Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ *un* C_0*- semi-groupe, alors pour tout* $x \in X, t \to T(t)x$ *est continue pour tout* $t \geq 0$*. ie* $\lim_{t\to t_0} \|T(t)x - T(t_0)x\| = 0, \forall t \geq 0$. $\blacksquare$

Lemme 1.1.27 *;* [53]

Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ *un* C_0*- semi-groupe, alors* $\lim_{t\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x, \forall x \in X$. $\blacksquare$

Proposition 1.1.28 *: [53] (Théorème 2.1.5)*

Soit A de domaine $D(A)$, le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$,

Alors on a les propriétés suivantes :

1. *Pour tout $x \in X, \int_0^t T(s)xds \in D(A)$ et $A(\int_0^t T(s)xds) = T(t)x - x$*
2. *Pour tout $x \in D(A), T(t)x \in D(A)$ et $t \to T(t)x$ est différentiable sur $\mathbb{R}^+$ avec*

   $\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$
3. *Pour tout $x \in D(A), T(t)x - T(s)x = \int_s^t AT(\tau)xd\tau = \int_s^t T(\tau)Axd\tau$.* ■

Lemme 1.1.29 *: [53]*

Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe et A son générateur infinitésimal, alors

$$\text{(} x \in D(A) \quad \textbf{\textit{et}} \quad Ax = y \text{)} \Leftrightarrow \int_0^t T(s)yds = T(t)x - x, \forall t \geq 0. \ \blacksquare$$

Corollaire 1.1.30 *: [53]*

Soit A, de domaine $D(A)$, le générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$.

Alors :

(1) $\overline{D(A)} = X$

(2) A est un opérateur linéaire fermé. ■

Proposition 1.1.31 *: [53] (Théorème 2.6)*

Soient $(T(t))_{t\geq 0}$ et $(S(t))_{t\geq 0}$ deux C_0-semi-groupes de générateurs infinitésimaux respectifs A et B. Si $A = B$ alors $T(t) = S(t) \forall t \geq 0$. ■

1.1.4.4 Théorème de Hille-Yosida La plupart des phénomènes physiques se modélisent grâce aux équations aux dérivées partielles. Le mathématicien s'intéresse plus particulièrement à l'existence et à l'unicité de solutions de telles équations.

On va donner une condition nécéssaire et suffisante pour qu'un opérateur A soit le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contractions.

Théorème 1.1.32 *:* [53] ***(Théorème de Hille-Yosida)***

Un opérateur linéaire A, de domaine D(A), est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contractions $(T(t))_{t\geq 0}$ sur X si et seulement si

1. *A est fermé et $\overline{D(A)} = X$;*

2. *$\mathbb{R}^+ \subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda > 0$, on a*

$$\|R(\lambda; A)\|_{L(X)} \leq \frac{1}{\lambda}. \blacksquare$$

Lemme 1.1.33 *:* [53]

Soit A un opérateur linéaire satisfaisant :

1. *A est fermé et $\overline{D(A)} = X$;*

2. *$\mathbb{R}^+ \subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda > 0$, on a : $\|R(\lambda, A)\|_{L(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$*

Alors : $\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = Ax; \forall x \in D(A)$, où $A_\lambda = \lambda A R(\lambda, A)$, appelé l'approximation de Yosida de A. $\blacksquare$

Remarque 1.1.34 *:* [53]

$A_\lambda = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I$. Donc si $R(\lambda, A)$ est borné pour tout $\lambda \in \rho(A)$ alors A_λ est

borné. ■

Lemme 1.1.35 *:* [53]

Soit A un opérateur linéaire satisfaisant :

1. *A est fermé et $\overline{D(A)} = X$;*

2. *$\mathbb{R}^+ \subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda > 0$, on a : $\|R(\lambda, A)\|_{L(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$*

Alors A_λ est un générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu $(e^{tA_\lambda})_{t\geq 0}$.

Théorème 1.1.36 *:* [53] *(corollaire 3.5)*

Soit A un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$, alors :

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x.$$

On peut aussi déterminer une relation entre le semi-groupe $T(t)$ et l'opérateur

$A_h = \frac{T(h)-I}{h}$, d'où,

Théorème 1.1.37 *:* [53]

Soit $T(t)$ un C_0-semi-groupe sur X, et soit $A_h x = \frac{T(h)x-x}{h}$. Alors pour tout $x \in X$, on a :

$$T(t)x = \lim_{h\to 0} e^{tA_h}x$$

La limite est uniforme pour tout $t \in [0, T]$, où $T > 0$. ■

On peut aussi relier un C_0 semi-groupe et son générateur infinitésimal d'où,

Théorème 1.1.38 :[53] *(formule exponentielle)*

Soit $T(t)$ un C_0-semi-groupe dans X et A son générateur infinitésimal, alors :

$T(t)x = \lim_{n\to\infty}(I - \frac{t}{n}A)^{-n}x = \lim_{n\to\infty}[\frac{t}{n}R(\frac{n}{t}, A)]^n x$, *pour tout $x \in X$ et $t \geq 0$, et la limite est uniforme en t sur tout intervalle borné.* ■

1.2 Semi-groupes d'opérateurs non linéaires

1.2.1 Introduction. Dans ce chapitre. nous rassemblons les résultats fondamentaux de la théorie des opérateurs non linéaires dissipatifs et des semigroupes qui leur sont associés. Les ouvrages de référence pour ces rappels sont les livres de Pavel [56] et de Clement [18].

1.2.2 Définitions et propriétés des opérateurs non linéaires : Un **opérateur multivoque** est une application $A : D(A) \subset X \to \mathcal{P}(X)$ (ensemble des parties de X), où son domaine est donné par :

$$D(A) = \{x \in X : A(x) \neq \emptyset\}$$

et son image est définie par :

$$Im(A) = \{y \in X; \exists x \in X, y \in A(x)\}.$$

Si pour tout $x \in D(A); A(x)$ est réduit à un seul élément, on parle d'opérateur univoque. Par convention, on identifie l'opérateur A avec son graphe dans $X \times X$, défini par

$$G(A) = \{(x;y) \in X \times X; y \in A(x)\}$$

La notion d'opérateur dissipatif se généralise au cas non linéaire multivoque

Définition 1.2.1 *:* [56]

Soit A un opérateur non linéaire multivoque

1. *Un opérateur A est dite ω-dissipatif si $(A - \omega I)$ est dissipatif.*

2. *A est accrétif dans X si et seulement si $B = -A$ est dissipatif.* $\blacksquare$

Donnons maintenant quelques propriétés des opérateurs dissipatifs.

Proposition 1.2.2 *:* [56] *(proposition 2.1, page 247)*

Soit A un opérateur non linéaire multivoque sur X. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes

1. *A est dissipatif.*

2. $\|x_1 - x_2\|_X \leq \|(I - \lambda A)x_1 - (I - \lambda A)x_2\|_X$, $\forall \lambda > 0$ *et* $\forall$ x_1, $x_2 \in D(A)$. $\blacksquare$

On donne un exemple d'un opérateur non dissipatif.

Exemple 1.2.3 *:*[62]

Soit $F(\varphi) = 4\varphi^3(1-r)(r \geq 0)$ on prend $\lambda = \frac{r}{2}$. Soit $\theta \in [-r, 0]$, on définit l'opératur A par :

$$D(A) = \{\varphi \in C^1 : \dot{\varphi}(0) = F(\varphi)\}$$

$$A\varphi = \dot{\varphi}$$

Et soient :

$\varphi_1 = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}r,$ *donc* $\dot{\varphi}_1(\theta) = \frac{1}{2}$ *d'où* $\dot{\varphi}_1(0) = \frac{1}{2}$

$\varphi_2 = -\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}r,$ *donc* $\dot{\varphi}_2(\theta) = -\frac{1}{2}$ *d'où* $\dot{\varphi}_2(0) = -\frac{1}{2}$

$F(\varphi_1) = 4\varphi_1^3(1-r) = 4(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{2},$ *donc* $\dot{\varphi}_1(0) = F(\varphi_1) \Rightarrow \varphi_1 \in D(A)$

$F(\varphi_2) = 4\varphi_2^3(1-r) = 4(-\frac{1}{2})^3 = -\frac{1}{2},$ *donc* $\dot{\varphi}_2(0) = F(\varphi_2) \Rightarrow \varphi_2 \in D(A)$

$\|\varphi_1 - \varphi_2 - \lambda(A\varphi_1 - A\varphi_2)\| = \|\varphi_1 - \varphi_2 - \lambda(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)\| = sup_{-r\leq\theta\leq 0}|\theta + r - \lambda|$

$= sup_{-r\leq\theta\leq 0}\left|\theta + \frac{r}{2}\right| = \frac{r}{2}.$

$|\varphi_1 - \varphi_2| = sup_{-r\leq\theta\leq 0}|\theta + r| = r.$ *D'où,* $\|\varphi_1 - \varphi_2 - \lambda(A\varphi_1 - A\varphi_2)\| < |\varphi_1 - \varphi_2|,$

alors A n'est pas dissipatif. ■

Proposition 1.2.4 *:* [56] *(proposition 2.2, page 247)*

Soit A un opérateur non linéaire multivoque sur X. Les propriétés suivantes sont équivalentes

1. *A est ω-dissipatif ($\omega \in \mathbb{R}$).*

2. $(1-\lambda\omega)\|x_1 - x_2\|_X \leq \|(I-\lambda A)x_1 - (I-\lambda A)x_2\|_X = \|x_1 - x_2 - \lambda(y_1 - y_2)\|_X$ *pour* $\lambda > 0$ *et pour tout* $x_1, x_2 \in D(A)$. ■

De la même façon que pour le cas linéaire, on définit la notion d'opérateur m-dissipatif.

Définition 1.2.5 :[56]

(1) A est dite ***m-dissipatif*** *si A est dissipatif et* $Im(I - \lambda A) = X$ *pour tout* $\lambda > 0$.

*(2) A est dit **m-accrétif** si $B = -A$ est m-dissipatif.* ■

Lemme 1.2.6 *:* [56]

*Tout opérateur ω-**Lipschitzienne** est ω-**dissipatif**.* ■

En s'inspirant du cas linéaire, on définit **l'opérateur résolvant** et **l'approximation de yosida** d'un opérateur A comme suit :

Pour $\lambda > 0, J_\lambda = (I - \lambda A)^{-1}$ et $A_\lambda = \lambda^{-1}\ (\ J_\lambda - I)$. D'où la définition suivante qui est utilisée par plusieurs auteurs :

Définition 1.2.7 *: Un opérateur non linéaire multivoque A est dit **dissipatif** si et selement si $(I - \lambda A)^{-1}$ est une fonction et*

$$\|(I - \lambda A)^{-1}x - (I - \lambda A)^{-1}y\|_X \leq \|x - y\|_X$$

pour tout $x, y \in D((I - \lambda A)^{-1})$ et pour tout $\lambda > 0$. ■

Donnons maintenant quelques propriétés fondamentales des opérateurs A_λ et J_λ

Théorème 1.2.8 *:* [62]

On suppose que A est un opérateur non linéaire dissipatif. Alors,

1. *J_λ est une contraction.*
2. *A_λ est lipschitzienne de constante $\frac{2}{\lambda}$ et $D(A_\lambda) = D(J_\lambda) = Im(I - \lambda A)$.*
3. *Pour tout $x \in D(J_\lambda)$, on a : $A_\lambda x \in A(J_\lambda x)$.*
4. *A_λ est dissipatif.* ■

Proposition 1.2.9 *: [56](proposition 2.5, page 252)*

Soit A un opérateur non linéaire multivoque ω-dissipatif ($\omega \in \mathbb{R}$). Alors, pour $\lambda > 0$, tel que $\lambda\omega < 1$, on a

1. $\|J_\lambda u - J_\lambda v\|_X \leq \frac{1}{1-\lambda\omega} \|u - v\|_X \,; u, v \in Im(I - \lambda A)$
2. $\|J_\lambda u - u\|_X \leq \frac{\lambda}{1-\lambda\omega} \|Au\|_X \,; u \in D(A) \cap Im(I - \lambda A)$
3. $\|J_\lambda^n u - u\|_X \leq \frac{n\lambda}{(1-\lambda\omega)^{n-1}} \|Au\|_X \,; u \in D(A) \cap Im(I - \lambda A)$. ■

1.2.3 Semi-groupes d'opérateurs non linéaires

Définition 1.2.10 *: [18]*

Soit K un sous ensemble fermé non vide de X et soit $\omega \in \mathbb{R}$. Une famille d'opérateurs non linéaires sur $K, (T(t))_{t\geq 0}$ est dite semi-groupe non linéaire de type ω sur K (et on écrit $T(t) \in Q_\omega(K)$) si et seulement si les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

(1) $T(s+t) = T(s)T(t)$, pour tout $t, s \geq 0$; $\quad T(0) = I_K$

(2) Pour tout $x \in K, t \to T(t)x$ est continue sur $[0, +\infty)$.

(3) $\|T(t)x - T(t)y\|_X \leq e^{\omega t} \|x - y\|_X$, pour tout $t \geq 0$ et tout $x, y \in K$.

Si $\omega = 0$, on dit que $T(t)$ est un semi-groupe de contractions et on écrit $T(t) \in Q_0(K)$. ■

La définition du générateur infinitésimal est la même que dans le cas linéaire : $Ax = lim_{t\to 0}\frac{T(t)x-x}{t}$ et $D(A) = \left\{x \in K, lim_{t\to 0}\frac{T(t)x-x}{t} existe\right\}$.

Remarque 1.2.11 *:* [18]

Si $(T(t))_{t\geq 0}$ *vérifie (1) et (3) et* $lim_{t\to 0}T(t)x = x$*, pour tout* $x \in K$*, alors* $t \to T(t)x$ *est continue sur* $[0, +\infty)$. ■

1.2.4 Théorème de Crandall-Liggett

Dans ce paragraphe, on donne quelques résultats liant un semi-groupe non linéaire de contractions et un opérateur dissipatif, c'est à dire si A est un opérateur dissipatif donné, sous quelles conditions supplémentaires sur A et sur l'espace X, peut-on trouver un semi-groupe associé à A? Le principal résultat dans ce sens est le théorème de **Crandall-Liggett**.

Théorème 1.2.12 *:* [17]*(théorème de Crandall-Liggett)*

Soit A *un opérateur* ω*-dissipatif (*$\omega \in \mathbb{R}$*) tel que* $Im(I - \lambda A) \supset \overline{D(A)}$*, (c'est le cas si* A *est m-dissipatif), pour tout* $\lambda > 0$ *assez petit. Alors,* $lim_{n\to +\infty}(I - \frac{t}{n}A)^{-n}x$ *existe, pour tout* $x \in \overline{D(A)}$ *et* $t > 0$*. Si on note* $T(t)x$ *cette limite, alors la famille d'applications* $T(t) : \overline{D(A)} \to \overline{D(A)}$*, est un semi-groupe non linéaire de type* ω *sur* $\overline{D(A)}$. ■

1.3 Analyse de Fourier et espaces UMD

1.3.1 Analyse de Fourier

1.3.1.1 Fonctions périodiques

Définition 1.3.1 *: Une fonction* f *définie de* $\mathbb{R}$ *dans un espace de Banach* X *est dite périodique s'il existe* $T > 0$ *(appelée période de* f*) tel que* $\forall x \in \mathbb{R}; f(x+T) = f(x)$*.*■

Notation 1.3.2

On notera $Per_X(T)$, ou $Per(T; X)$ ensemble des fonctions T-périodiques. Cet ensemble constitue un K-e.v. ■

Exemple 1.3.3 *: Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $x \to e^{inx}$ est un élément de Per($2\pi, \mathbb{C}$).*

Les fonctions $x \to cos(nx)$ et $x \to sin(nx)$ sont des éléments de Per(2π, $\mathbb{R}$).

Remarque 1.3.4 *Une fonction T-périodique est totalement déterminée par sa restriction à un intervalle de la forme $[x_0; x_0 + T)$.* ■

Définition 1.3.5 *: Soit $f : \mathbb{R} \to X$.*

*On appelle groupe des périodes de **f** l'ensemble $P_f = \{T \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}; f(x+T) = f(x)\}$.*■

Remarque 1.3.6 *:*

1) Si P_f =$\{0\}$, on dit que f n'est pas périodique.

2) Si $P_f \neq \{0\}$, on dit que f est périodique.

3) Si $P_f = \mathbb{R}$, on dit que f est constante.

4) P_f est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. ■

1.3.1.2 Le groupe quotient $\mathbb{T} := \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$

On fixe dans toute cette partie un réel non nul T et X un espace de Banach. On note $\mathbb{T}$ le groupe quotient $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ et p_T le morphisme quotient $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{T}, +)$. Remarquons qu'à tout élément de $X^{\mathbb{T}}$ (i.e. à toute fonction f définie sur $\mathbb{T}$ à valeurs dans X), on peut associer naturellement une fonction $\tilde{f}$ de $\mathbb{R}$ dans X : on pose $\tilde{f} = fop_T$. On remarque que $\tilde{f}$ est un élément de $Per(T, X)$. En effet, pour tout élément x de $\mathbb{R}$, on a $\tilde{f}(x+T) = f[p_T(x+T)] = f[p_T(x)] = \tilde{f}(x)$ car T est dans le noyau de p_T.

Proposition 1.3.7 *: L'application $f \to \tilde{f} = fop_T$ définit une bijection de $X^{\mathbb{T}}$ sur $Per(T, X)$.* ■

Dans la suite de la thèse on se limitera aux cas des fonctions 2π-périodiques.

1.3.1.3 Espaces $L^p(\mathbb{T}, X)$

Soit X un espace de Banach. Pour $p \geq 1$ on note $L^p(\mathbb{T}, X)$ l'espace des (classes de) fonctions de $\mathbb{R}$ dans X, 2π-périodiques et de puissance p-ième intégrable sur $[0; 2\pi]$, que l'on munit de la norme naturelle :

$$\|f\|_p = (\int_0^{2\pi} \|f(x)\|_X^p \, dx)^{1/p}$$

Théorème 1.3.8 *: Pour tout $p \in [1, +\infty), (L^p(\mathbb{T}, X); \|.\|_p)$ est un espace de Banach.* ■

1.3.1.4 Transformation de Fourier

Introduction : Le nom de Fourier n'est-il pas depuis longtemps, l'un des plus familiers au public scientifique ; Séries de Fourier, les transformations de Fourier sont en mathématiques les sujets les plus classiques qui soient. L'équation de la chaleur qui gouverne en général les phénomènes de diffusion est appelée par les physiciens équation de Fourier. L'analyse de Fourier est pour les ingénieurs inséparable de la théorie du signal, de la transmission des sons et des images.

Définition 1.3.9 *:* [5]

Soit $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$, pour tout $1 \leq p < \infty$. On définit le k-ième coefficient de Fourier de f par :

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt} f(t)dt, \forall k \in \mathbb{Z}. \blacksquare$$

Remarque 1.3.10 *: La suite des coefficients de Fourier $\hat{f}(k), k \in \mathbb{Z}$ est bornée :*

$$\left|\hat{f}(k)\right| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T},X)}, \forall k \in \mathbb{Z}. \blacksquare$$

Exemple 1.3.11 *: Soit $f(x) = e^{(x-\pi)}$ pour $x \in [0, 2\pi]$, alors*

$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{x-\pi}e^{-ikx}dx$

$= \frac{e^{-\pi}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(1-ik)x}dx = \frac{1}{\pi(1-ik)}(\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2}) = \frac{sinh(\pi)}{\pi(1-ik)}. \blacksquare$

Proposition 1.3.12 *:*

1. *L'intégration étant une opération linéaire, la transformation de Fourier l'est aussi, c'est-à-dire que, $\forall$ λ, $\mu \in \mathbb{R}$, $(\widehat{\lambda f + \mu g})(k) = \lambda\hat{f}(k) + \mu\hat{g}(k)$*

2. *Soit $f_\tau(t) := f(\tau + t)$, $\tau \in \mathbb{R}$; alors on a $\hat{f_\tau}(k) = e^{ik\tau}\hat{f}(k)$.* $\blacksquare$

Proposition 1.3.13 *:*

1. *Supposons que f intégrable, dérivable et à dérivée intégrable. Sa dérivée f' possède alors une transformation de Fourier, donnée par : $\hat{f'}(k) = ik\hat{f}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$*

2. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T}\,; X)$. Si $g(t) = \int_0^t f(s)ds$ et $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ alors,*

   $\hat{g}(k) = \frac{i}{k}\hat{f}(0) - \frac{i}{k}\hat{f}(k)$. ■

Preuve : 1) $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt} f(t)dt$, par intégration par partie, on trouve après calcul pour $k \neq 0$, $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi ik}\int_0^{2\pi} e^{-ikt} f'(t)dt = \frac{1}{ik}(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt} f'(t)dt) = \frac{1}{ik}\hat{f'}(k)$, d'où $\hat{f'}(k) = ik\hat{f}(k)$ de plus $\hat{f}'(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)dt = \frac{1}{2\pi}(f(2\pi) - f(0)) = \frac{1}{2\pi}(f(0) - f(0)) = 0 = i0\hat{f}(0)$.

2) $\hat{g}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt} g(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\int_0^t f(s)dsdt$; par intégration par partie on a :

$\hat{g}(k) = \frac{1}{-ik}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)ds + \frac{1}{ik}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt} f(t)dt = \frac{1}{-ik}\hat{f}(0) + \frac{1}{ik}\hat{f}(k)$

Donc $\hat{g}(k) = \frac{i}{k}\hat{f}(0) - \frac{i}{k}\hat{f}(k)$, pour tout $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. ■

Remarque 1.3.14 *:* [5, p 314]

1) Si $\hat{f}(k) = 0$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ alors $f(t) = 0$

2) Si $\hat{f}(k) = 0$, pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$ alors $f(t) = \hat{f}(0)$. ■

Lemme 1.3.15 *: [42]*

Soit $G \in \mathbb{B}(L^p([-r_{2\pi}, 0], X); X)$. Alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et pour tout $u \in L^p([-r_{2\pi}, 0], X)$

tel que u est 2π-périodique, on a :

$$\widehat{G(u_.)}(k) = G(e_k\hat{u}(k)) := G_k\hat{u}(k).\ \blacksquare$$

Preuve. Soit $\theta \in [-r_{2\pi}, 0]$, on a :

$(e_k\hat{u}(k))(\theta) = e^{ik\theta}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-iks}u(s)ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ik(\theta-s)}u(s)ds$

$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik(s-\theta)}u(s)ds$

$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\theta}^{2\pi-\theta} e^{-iks'}u(s'+\theta)ds', (s' = s-\theta)$

$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\theta}^{0} e^{-iks'}u(s'+\theta)ds' + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-iks'}u(s'+\theta)ds' + \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}^{2\pi-\theta} e^{-iks'}u(s'+\theta)ds'$

On a :

$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}^{2\pi-\theta}e^{-iks'}$u(s'+$\theta$)ds' = -$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\theta}e^{-ik(2\pi-t)}$u($2\pi$ - t +θ)dt, (t = 2π - s')

= - $\frac{1}{2\pi}\int_0^{\theta}e^{ikt}$u(- t +$\theta$)dt, (u est 2π-periodique)

= $\frac{1}{2\pi}\int_0^{-\theta}e^{-iks}$u(s +$\theta$)ds, (- t = s)

= - $\frac{1}{2\pi}\int_{-\theta}^{0}e^{-iks}$u(s +$\theta$)ds et donc

$(e_k\hat{u}(\mathrm{k}))(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-iks}u_s(\theta)$ds, donc $e_k\hat{u}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-iks}u_s ds$

et par conséquent puisque G est linéaire on a

G($e_k\hat{u}$(k))=G($\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-iks}u_s$ds)=$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-iks}Gu_s$ds

et donc

$G_k\hat{u}(k) := G(e_k\hat{u}(k)) = \widehat{G(u_.)}(k).\blacksquare$

1.3.1.5 Théorème de Fejer

Elles existent des fonctions continues 2π-périodiques qui ne sont pas somme de leur série de Fourier. Pour remédier à cet inconvénient, Fejer a eu l'idée ingénieuse de considérer les moyennes des n premières sommes partielles de la série de Fourier pour forcer la convergence vers f. Ce résultat a de nombreuses applications.

Soit f une fonction 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

Notation 1.3.16

Soit $f \in L^1(\mathbb{T}; X)$. On note

$$S_N(f)(\theta) := \sum_{k=-N}^{N} e_k(\theta)\hat{f}(k), \text{ où } e_k(\theta) = e^{ik\theta}$$

le terme d'ordre N de sa série de Fourier

puis

$$\sigma_n(f)(\theta) := \frac{1}{n+1} \sum_{N=0}^{n} S_N(f)(\theta). \blacksquare$$

Théorème 1.3.17 *: Soient X un espace de Banach et $1 \leq p < \infty$.*

Alors pour tout $f \in L^p(\mathbb{T}; X), \sigma_n(f)$ converge vers la fonction f au sens de la norme $\|.\|_p$, de plus on a $\|\sigma_n(f)\|_p \leq \|f\|_p$. $\blacksquare$

Lemme 1.3.18 :[[5], *Lemma* 2.1]

Soit $1 \leq p < \infty$ et $u, v \in L^p(\mathbb{T}; X)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $\int_0^{2\pi} v(s)ds = 0$ et $\exists x \in X$ tel que $u(t) = x + \int_0^t v(s)ds$

(2) $\hat{v}(k) = ik\hat{u}(k) \quad (k \in \mathbb{Z})$

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2). Soit $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$. Par intégration par parties,

$$\hat{u}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} \int_0^t v(s)dsdt = \frac{1}{ik}\hat{v}(k).$$

Alors $\hat{v}(k) = ik\hat{u}(k)$ (pour $k \neq 0$). Puisque $\hat{v}(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} v(s)ds = 0$, alors on a (2).

(2) $\Rightarrow$ (1). Soit $w(t) = \int_0^t v(s)ds$.

$\int_0^{2\pi} v(s)ds = 2\pi\hat{v}(0) = 0$. Comme ci-dessus on a $\hat{w}(k) = \frac{1}{ik}\hat{v}(k) = \hat{u}(k)$ pour $k \neq 0$.

$\hat{w}(k) - \hat{u}(k) = 0$ pour tout $k \neq 0$, alors d'après la remarque 1.3.14 $w(t) - u(t) = \hat{w}(0) - \hat{u}(0)$. Ainsi $u - w$ est une fonction constante, $u(t) - w(t) = x$, alors $u(t) = x + \int_0^t v(s)ds$

Notation 1.3.19

Notons : $H^{1,p}(\mathbb{T}; X) = \{u \in L^p(\mathbb{T}, X) : \exists v \in L^p(\mathbb{T}, X), \hat{v}(k) = ik\hat{u}(k) \forall k \in \mathbb{Z}\}$

D'après le lemme précédent on a :

(α) : $u \in H^{1,p}(\mathbb{T}; X) \Leftrightarrow u \in L^p(\mathbb{T}; X), \exists v \in L^p(\mathbb{T}; X)$ tel que $\int_0^{2\pi} v(s)ds = 0$ et $\exists x \in X$ tel que $u(t) = x + \int_0^t v(s)ds$. ■

1.3.2 Espaces probabilisés

Expérience aléatoire : On appelle expérience aléatoire toute expérience dont on connaît parfaitement les conditions mais dont on ne peut pas prévoir l'issue.

Univers : On appelle univers d'une expérience aléatoire l'ensemble des issues possibles. Un univers est noté Ω.

Probabilité $\mathbb{P}$: On appelle probabilité définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$, où $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des parties de Ω toute application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ te que

$$\mathbb{P}(A) \in [0,1], \quad \mathbb{P}(\Omega) = 1, \quad A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \ \ \forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$$

Espace probabilisé : Le triplet $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé.

Variable aléatoire : une variable aléatoire est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$

On note $X(\Omega) = \{X(\omega); \omega \in \Omega\}$ l'ensemble des valeurs de X. ■

Définition 1.3.20 *: Soit* $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$ *un espace de probabilisé, on dit que les* ***variables aléatoires*** X_1 *;.... ;* X_n *définies de* Ω *dans* $\mathbb{R}$ *sont indépendantes si :*

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \ldots \mathbb{P}(X_n = x_n). \blacksquare$$

Définition 1.3.21 *: Soit* $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$ *un espace de probabilisé, les* ***fonctions de Rademacher*** $X_k, k \in \mathbb{Z}^+$ *sont des variables aléatoires indépendantes définies sur* Ω *à valeurs dans* $\{-1, 1\}$*,(i.e* $X_k : \Omega \to \{-1, 1\}$*) et vérifiant :* $\mathbb{P}(X_k(\omega) = -1) = \mathbb{P}(X_k(\omega) = 1) = \frac{1}{2}$. ■

1.3.3 R-bornétude

Définition 1.3.22 *:* [42]

Une famille d'opérateurs $T := (T_j)_{j \geq 1} \subset \mathbb{B}(X; Y)$*, où* X *et* Y *sont deux espaces normés est dite bornée aléatoirement (**R-bornée**) si pour un certain*

$p \in [1; +\infty)$, $\exists C \geq 0, \forall n > 0$, $\forall T_1, ..., T_n \in T, \forall x_1, ..., x_n \in X$

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} T_j r_j x_j \right\|_{L^p(0,1;X)} \leq C \left\| \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \right\|_{L^p(0,1;X)}$$

avec r_j*,* $j = 1 \ldots n$ *sont des fonctions de Rademacher,*

La plus petite constante C notée par R_p (T) est appelée la R-borne de **T** d'ordre p.

Remarque 1.3.23 *:* [42]

Soient X et Y deux espaces normés, alors on a :

1. R-bornitude concerne une famille d'opérateurs linéaires bornés contrairement à la notion de borné qui concerne un seul operateur.

2. $R_p(T)$ *dépend de p, c'est-à-dire, si T est non R-bornée pour un seul* $p \in [1;+\infty)$*, alors elle est non R-bornée pour tous les* $p \in [1;+\infty)$

3. Soient $T_1, T_2 \subset B(X;Y)$ *deux familles R-bornées, alors on a :*

$$R_p(T_1 + T_2) \leq R_p(T_1) + R_p(T_2)$$

et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$*,*

$$R_p(\lambda T) \leq |\lambda| \; R_p(T).$$

4. La composition des familles R-bornées est une famille R-bornée, et pour $T_1 \subset$ B(Z ; Y) et $T_2 \subset B(X; Z)$ on a l'inégalité suivante :

$$R_p(T_1 T_2) \leq R_p(T_1) R_p(T_2)$$

où Z est un espace normé.

5. Chaque ensemble contenant un seul opérateur linéaire borné T $\in$ B(X,Y) est R-bornée et de plus on a

$$R_p(\{T\}) = |T|_{B(X,Y)}$$

6. Chaque sous-famille d'une famille R-bornée est R-bornée.

7. Toute famille finie d'opérateurs linéaires bornés est R-bornée.

8. Si T est R-bornée, alors elle est uniformément bornée, avec

$$\sup \{|S| : S \in T\} \leq R_p(\mathrm{T})$$

Lemme 1.3.24 *:* [5] *(Principe de contraction de Kahane)*

Pour $\alpha_j \in \mathbb{C}$*,* $x_j \in X$*,* r_j *des fonctions de Rademacher,* j *= 1,..., n,*

on a :

$$\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j r_j x_j \|_{L^p(0,1;X)} \leq 2 \max_{j=1,\dots,n} |\alpha_j| \| \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \|_{L^p(0,1;X)}$$

Lemme 1.3.25 *: [42]*

Soit X *un espace de Banach. Alors pour tout* $L \in \mathbb{B}(L^p([-r_{2\pi}, 0], X); X)$*,* $(L_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ *est R-borné, avec*

$$R_p((L_k)_{k\in\mathbb{Z}}) \leq (2r_{2\pi})^{1/p} \|L\|.$$

où $L_k(x) = L(e_k x)$ *pour tout* $x \in X$ *et* $e_k(t) := e^{ikt}$*.* ■

Preuve. Soit $x_j \in X$ on a :

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} r_j L_j x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}^p = \int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t) L(e_j x_j)\right\|_X^p \mathrm{dt} = \int_0^1 \left\| L(\sum_{j=1}^{n} r_j(t) e_j x_j)\right\|_X^p \mathrm{dt}$$

$$\leq \|L\|^p \int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t) e_j x_j\right\|_{L^p([-r_{2\pi},0];X)}^p \mathrm{dt}$$

$$\leq \|L\|^p \int_0^1 \int_{-r_{2\pi}}^0 \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t) e_j(s) x_j\right\|_X^p \mathrm{dsdt}$$

$$\leq \|L\|^p \int_{-r_{2\pi}}^0 \int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t) e_j(s) x_j\right\|_X^p \mathrm{dtds}$$

$\leq \|L\|^p \int_{-r_{2\pi}}^{0} \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j e_j(s) x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}^p$ds.

D'après le lemme 1.3.24, on a

$\left\|\sum_{j=1}^{n} r_j L_j x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}^p \leq 2\|L\|^p \int_{-r_{2\pi}}^{0} \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}^p$ds.

$\leq 2r_{2\pi}\|L\|^p \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}^p ds.$

Donc $R_p((L_k)_{k\in\mathbb{Z}}) \leq (2r_{2\pi})^{1/p} \|L\|$ d'où $(L_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est R-bornée. ■

1.3.4 Espaces UMD

Les espaces de Banach fournissent un cadre de travail parfois insuffisant. Il faut alors se placer dans un espace ayant des propriétés supplémentaires, il s'agit des espaces UMD. Soit (X, $\|.\|_X$) un espace de Banach complexe.

Transformation de Hilbert

la transformée de Hilbert est l'une des transformations intégrales (comme Laplace et Fourier), définie par David Hilbert, qui l'a introduit pour résoudre des équations intégrales dans le domaine de la physique mathématique.

La transformée de Hilbert de la fonction $f \in L^p(\mathbb{R}, X)$ est définie par :

$$H[f(x)] = \frac{1}{\pi} lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon\leq|s|\leq\frac{1}{\epsilon}} \frac{f(t-s)}{s} ds$$

Définition 1.3.26 *: On dit que l'espace de Banach X admet la propriété des martingales différences inconditionnelles dans* $L^p(\mathbb{R}, X)$ *, (* $1 < p < \infty$ *) ou bien X est de type UMD, si l'inégalité*

$$\|Hf\|_p \leq c_p \|f\|_p.$$

est satisfaite pour un certain C_p et pour chaque f dans $L^p(\mathbb{R}, X)$.

Et on dit que $L^p(\mathbb{R}, X)$ est un espace UMD pour $1 < p < \infty$ si et seulement si X est un espace de type UMD.

Exemples 1.3.27 *:* [12].[64]

Exemple 1.3.27.1

$L^1(0,1;\mathbb{R})$ n'est pas un espace de type UMD. En effet :

Soit $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ (fonction indicatrice), alors $f \in L^1(0,1;\mathbb{R})$ avec $H[f(x)] = log|\frac{x}{x+1}|$, mais $H(f)$ n'appartient pas à $L^1(0,1;\mathbb{R})$.

Exemple 1.3.27.2

1. *Tout espace de Hilbert est un espace UMD.*

2. *$L^p(0,1;X)$ sont des espaces UMD, pour tout $1 < p < \infty$,*

3. *Tout espace isomorphe à un espace UMD est un espace UMD.* ■

Exemple 1.3.27.3

$L^p(0,1;X)$ est un espace UMD pour $p = 2^k, (k \in \mathbb{N} - \{0\})$.

La preuve repose sur l'identité suivante : ([64], (8.1.1))

$$(Hf)^2 = f^2 + 2H(fHf).$$

Pour $k = 1$, on a $\|Hf\|_2 = \|f\|_2$ (d'après la proposition 8.1.2 [64]). Par récurrence on montre que H est bornée sur $L^{2^k}(0,1;X)(k \in \mathbb{N} - \{0\})$. En effet

Supposons alors que pour $p = 2^k (k \in \mathbb{N} - \{0\})$

$$\|Hf\|_p \le C_p \|f\|_p.$$

On a :

$$\begin{aligned} \|Hf\|_{2p}^2 = \|(Hf)^2\|_p &\le \|f^2\|_p + 2\|H(fHf)\|_p \\ &\le \|f\|_{2p}^2 + 2C_p \|fHf\|_p \\ &\le \|f\|_{2p}^2 + 2C_p \|f\|_{2p} \|Hf\|_{2p} \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned} &(\tfrac{\|Hf\|_{2p}}{\|f\|_{2p}})^2 \le 1 + 2C_p(\tfrac{\|Hf\|_{2p}}{\|f\|_{2p}}) \\ &\Leftrightarrow (\tfrac{\|Hf\|_{2p}}{\|f\|_{2p}})^2 - 2C_p(\tfrac{\|Hf\|_{2p}}{\|f\|_{2p}}) \le 1 \\ &\Leftrightarrow (\tfrac{\|Hf\|_{2p}}{\|f\|_{2p}} - C_p)^2 \le C_p^2 + 1 \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\|Hf\|_{2p} \le (C_p + \sqrt{C_p^2 + 1})\|f\|_{2p}$$

On a donc H *est borné sur* $L^{2p}(0,1;X)$ *avec la borne*

$$C_{2p} \le C_p + \sqrt{C_p^2 + 1}$$

ce qui conclut la récurrence. Par exemple on a pour un espace de Banach X*,*

$L^4(0,1;X)$ *est un espace UMD avec* $C_4 \le 1 + \sqrt{2}$ *et*

$L^8(0,1;X)$ *est un espace UMD avec* $C_8 \le 1 + \sqrt{2} + \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$. ■

1.3.5 L^p-multiplicateur

Définition 1.3.28 *: [42]*

Soient X et Y deux espaces de Banach, et $1 \leq p < \infty$, on dit que $\{M_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{B}(X,Y)$ est un (L^p,L^p)-multiplicateur (ou bien L^p-multiplicateur) si pour chaque $f \in L^p(\mathbb{T},X)$, il existe $u \in L^p(\mathbb{T},Y)$ tel que $\hat{u}(k) = M_k\hat{f}(k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$. ■

Une famille $\{M_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{B}(X,Y)$ est un L^p-multiplicateur si et seulement s'il existe un opérateur borné $M : L^p(\mathbb{T},X) \to L^p(\mathbb{T},Y)$ tel que

$$\widehat{(Mf)}(k) = M_k\hat{f}(k)$$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $f \in L^p(\mathbb{T},X)$.

Proposition 1.3.29 *: [5]*

Soit X un espace de Banach et $1 \leq p < \infty$. Si $\{M_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est un L^p-multiplicateur, alors $\{M_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est R-bornée. ■

Définition 1.3.30 *Soit $1 \leq p < \infty$, on dit que $\{M_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset B(X,Y)$ est un $(L^p, H^{1,p})$-multiplicateur si pour chaque $f \in L^p(\mathbb{T},X)$, il existe $g \in H^{1,p}(\mathbb{T},Y)$ tel que $\hat{g}(k) = M_k\hat{f}(k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.*

Théorème 1.3.31 *: [5] (Marcinkiewicz operator-valud multiplier theorem)*

Soient X et Y deux espaces UMD et $\{M_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset B(X,Y)$. Si $\{M_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ et $\{k(M_{k+1} - M_k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sont R-bornées, alors $\{M_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est un L^p-multiplicateur pour $1 < p < \infty$. ■

Définition 1.3.32 *: Soit $1 \leq p < \infty$, on dit que $\{M_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset B(X,Y)$ est un $(L^p, H^{2,p})$-multiplicateur si pour chaque $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$, il existe $g \in H^{2,p}(\mathbb{T}, Y)$ tel que $\hat{g}(k) = M_k\hat{f}(k)$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.* ■

Lemme 1.3.33 :[42]

Soient $1 \leq p < \infty$ et $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset$ B(X)(l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de X dans X), alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(1)$(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un $(L^p, H^{1,p})$-multiplicateur.

(2)$(ikM_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un (L^p, L^p)-multiplicateur. ■

Preuve :

$(1) \Rightarrow (2)$. Soit $f \in L^p(\mathbb{T}; X)$. Par hypothèse, il existe

$g \in H^{1,p}(\mathbb{T}; X)$ tel que $\hat{g}(k) = (M_k)\hat{f}(k)$, donc il existe

$h \in L^p(\mathbb{T}; X)$ tel que $\hat{h}(k) = ik\hat{g}(k) = ik(M_k)\hat{f}(k)$ et alors

$(ikM_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un (L^p, L^p)-multiplicateur.

$(2) \Rightarrow (1)$. Soit $f \in L^p(\mathbb{T}; X)$. Par hypothèse, il existe

$v \in L^p(\mathbb{T}; X)$ tel que $\hat{v}(k) = ik(M_k)\hat{f}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. en particulier

$\hat{v}(0) = 0$, donc $\int_0^{2\pi} v(t)dt = 2\pi\hat{v}(0) = 0$.

Soit $w(t) = \int_0^t v(s)ds$. Alors d'après la proposition 1.3.13 (2), on a

$\hat{w}(k) = \frac{i}{k}\hat{v}(0) - \frac{i}{k}\hat{v}(k) = \frac{1}{ik}\hat{v}(k) = (M_k)\hat{f}(k)$ pour $k \neq 0$.

Soit $u = w + M_0\hat{f}(0) - \hat{w}(0)$. Alors $u(t) = x + \int_0^t v(t)dt$ où $x = u(0)$.

Ainsi d'après (α) dans la notation (1.3.19) : $u \in H^{1,p}(\mathbb{T}; X)$ et $\hat{u}(k) = \hat{w}(k) + 0 =$

$\hat{w}(k) = (M_k)\hat{f}(k)$ pour $k \neq 0$,

et $\hat{u}(0) = M_0\hat{f}(0)$: $\left\{\hat{u}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(t)dt + M_0\hat{f}(0) - \hat{w}(0) = M_0\hat{f}(0)\right\}$,

d'où $\exists u \in H^{1,p}$ tel que $\hat{u}(k) = M_k\hat{f}(k), \forall k \in \mathbb{Z}$ c-à-d $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un $(L^p, H^{1,p})$-multiplicateur. ■

1.3.6 M-bornétude et MR-bornétude.

Définition 1.3.34 *: (M-bornétude)*

Une famille d'opérateurs T⊂ B(X ; Y), où X et Y sont deux espaces normés, est dite M-bornée d'ordre n si

$$\sup_{0\leq l\leq n} \sup_{k\in\mathbb{Z}} \|k^l \Delta^l M_k\| < \infty$$

avec

$$\Delta^0 M_k = M_k \text{ et } \Delta^1 M_k = \Delta M_k = M_{k+1} - M_k$$

et pour n = 2,3,...

$$\Delta^n = \Delta(\Delta^{n-1} M_k)$$

Remarques 1.3.35 *: 1)* $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset B(X,Y)$ *est M-borné d'ordre 1 si :*

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \|M_k\| < \infty, \quad \sup_{k\in\mathbb{Z}} \|k(M_{k+1} - M_k)\| < \infty, \tag{1.1}$$

2) $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset B(X,Y)$ *est M-borné d'ordre 2 si on a (1.1) et*

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \|k^2(M_{k+1} - 2M_k + M_{k-1})\| < \infty. \tag{1.2}$$

3) $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset B(X,Y)$ *est M-borné d'ordre 3 si on a (1.1), (1.2) et*

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \|k^3(M_{k+3} - 3M_{k+2} + 3M_{k+1} - M_k)\| < \infty. \tag{1.3}$$

Définition 1.3.36 *: (MR-bornétude)*

Une famille d'opérateurs T⊂ B(X; Y) est dite MR-bornée d'ordre n si pour tout

$l \in \{0, 1, ...n\}$

$$\{k^l \Delta^l M_k : k \in \mathbb{Z}\}$$

est R-borné.

Remarques 1.3.37 *: 1)* $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset B(X,Y)$ *est MR-borné d'ordre 1 si :*

$$\{M_k : k \in \mathbb{Z}\} \quad et \quad \{k(M_{k+1} - M_k) : k \in \mathbb{Z}\} \tag{1.4}$$

sont R-bornés

2) $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset B(X,Y)$ *est MR-borné d'ordre 2 si on a (1.4) et*

$$\{k^2(M_{k+1} - 2M_k + M_{k-1}) : k \in \mathbb{Z}\}. \tag{1.5}$$

est R-borné.

3) $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset B(X,Y)$ *est MR-borné d'ordre 3 si on a (1.4), (1.5) et*

$$k^3(M_{k+3} - 3M_{k+2} + 3M_{k+1} - M_k). \tag{1.6}$$

est R-borné.

4) La composition des familles MR-bornées est une famille MR-bornée.

5) La somme de deux familles MR-bornées est MR-bornée.

Chapitre 2

Solutions périodiques pour une classe d'équations différentielles de type neutre

2.1 Solution forte d'équations différentielles fonctionnelles à retard

2.1.1 Introduction

Dans cette partie nous étudions l'existence et l'unicité de solution 2π-périodique forte de l'équation différentielle à retard suivante :

$$\frac{d}{dt}x(t) = A[x(t) - Bx(t-r)] + L(x_t) + f(t), t \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

où $A : D(A) \subseteq X \to X$ et $B : D(B) \subseteq X \to X$ sont deux opérateurs linéaires fermés. La fonction x_t est donnée par $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ pour $\theta \in [-r, 0]$.

$L \in \mathbb{B}(L^p([-r_{2\pi}, 0], X); X)$ [l'espace des opérateurs linéaires bornés] avec $r_{2\pi} = 2\pi n_0 (n_0 \in \mathbb{N} - \{0\})$ et $f : \mathbb{R} \to X$ est une fonction localement p-intégrable et 2π-périodique pour $1 \leq p < +\infty$.

Durant les dernières années, beaucoup de travaux ont pu améliorer cet axe de recherche par des résultats intéressants, surtout dans le retard fini.$[5, 32, 42]$. En effet, Dans [5], Arendt et S.Bu ont étudié l 'existence et l'unicité des solutions 2π-périodique faibles et fortes de l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + f(t) \tag{2.2}$$

avec $A : D(A) \subseteq X \to X$ un opérateur linéaire fermé, $f : \mathbb{R} \to X$ une fonction locallement p-intégrable et 2π-périodique pour $1 \leq p < +\infty$.

Dans [42], C.Lizama a étudié une nouvelle équation qui généralise l'équation (2.2) :

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + L(x_t) + f(t), t \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$

avec $A : D(A) \subseteq X \to X$ un opérateur linéaire fermé, $f : \mathbb{R} \to X$ une fonction locallement p-intégrable et 2π-périodique pour $1 \leq p < +\infty$ et $L \in \mathbb{B}(L^p([-r_{2\pi}, 0], X); X)$.

Le système (2.1) considéré dans cette partie généralise celui étudié par Lizama [42].

Notre résultat principal dans cette section établit que :

Dans un espace X de type UMD, si $D_k = (ikI - A(I - B_k) - L_k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ est inversible et l'ensemble $(ikD_k^{-1})_{k\in\mathbb{Z}}$ est R-borné (voir définition 1.3.22),

alors pour chaque $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$ il existe une solution unique 2π-périodique forte de l'équation (2.1).

Ce travail a fait l'objet d'une publication dans le journal (International Organization of Scientific Research Journals of Mathematics (IOSR-JM), Vol.10, Issue 2, Mar-Apr 2014, 86-96. Doi :10.9790/5728-10228696.).

2.1.2 Critère de solution forte

Notation 2.1.1

Notons : $D_k = ikI - A(I - B_k) - L_k$ *;* $B_k := e^{-ikr}B; L_k(x) := L(e_k x)$, $e_k(t) := e^{ikt}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ *et* $H^{1,p}(\mathbb{T}; X) = \{u \in L^p(\mathbb{T}, X) : \exists v \in L^p(\mathbb{T}, X), \hat{v}(k) = ik\hat{u}(k) \forall k \in \mathbb{Z}\}$.■

Hypothèses principales :

(H_1) A et B sont deux opérateurs linéaires fermés.

(H_2) $L \in \mathbb{B}(L^p(\mathbb{T}, X); X)$ (l'espace des opérateurs linéaires bornés).

(H_3) $\{S_k = k(L_{k+1} - L_k), k \in \mathbb{Z}\}$ et $\{T_k = kA(B_{k+1} - B_k), k \in \mathbb{Z}\}$ sont R-bornées avec $\hat{x}(k) \in D(B)$ et $(I - B_k)\hat{x}(k) \in D(A)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Et supposons que les hypothèses (H_1) et (H_2) soient satisfaites tout au long de cette partie.

Définition 2.1.2 *: Soit* $1 \leq p < \infty$*. Une fonction* $x(.)$ *est dite 2π-périodique* L^p*-solution forte de (2.1) si* $x \in H^{1,p}(\mathbb{T}, X)$ *tel que* $x \in D(B)$ *et* $(x(t) - Bx(t - r)) \in D(A)$ *et* (2.1) *est vérifiée p.p* $t \in [0, 2\pi]$. ■

Si on suppose que l'équation (2.1) admet une solution 2π-périodique forte, alors on a la proposition suivante :

Proposition 2.1.3 *: Soient* X *un espace de Banach et* $p \in [1, +\infty[$*. On suppose que pour chaque* $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$*, l'équation (2.1) admet une unique* L^p*-solution forte 2π-périodique. Alors Pour tout* $k \in \mathbb{Z}$*,* D_k *est inversible et borné, et* $(ikD_k^{-1})_{k\in\mathbb{Z}}$ *est R-bornée, où* $D_k = (ikI - A(I - B_k) - L_k)$. ■

Avant de donner la preuve de ce théorème on montre le lemme suivant.

Lemme 2.1.4 *: Soit X un espace de Banach. Supposons que $(ikI - A(I - B_k) - L_k)x = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, alors, $u(t) = e^{ikt}x$ est 2π-periodique L^p-solution forte de l'équation (2.1) correspond à la fonction $f = 0$.* ■

Preuve :

On a $(ikI - A(I - B_k) - L_k)x = 0$ alors $ikx = A(x - B_k x) + L_k x$.

Or $u(t) = e^{ikt}x$ donc on a

$u^{'}(t) = ike^{ikt}x = e^{ikt}(ikx) = e^{ikt}[A(x - B_k x) + L_k x]$

$= A(e^{ikt}x - B_k e^{ikt}x) + L_k e^{ikt}x$

$= A(u(t) - B_k e^{ikt}x) + L_k e^{ikt}x$

$= A(u(t) - Be^{-ikr}e^{ikt}x) + L(e_k e^{ikt}x)$

$= A(u(t) - Be^{ik(t-r)}x) + L(e^{ik(t+.)}x)$

$= A(u(t) - Bu(t - r)) + L(u(t + .))$

$= A(u(t) - Bu(t - r)) + L(u_t)$.■

Preuve de la proposition 2.1.3. Montrons que $D_k = (ikI - A(I - B_k) - L_k)$ est surjectif. En effet, soit $y \in X$, on pose $f(t) = e^{ikt}y$, alors, l'équation (2.1) admet une solution unique, c'est-à-dire il existe $x \in H^{1,p}(\mathbb{T}, X)$ L^p-solution forte de l'équation. (2.1). Appliquons la transformée de Fourier, L est linéaire et borné, donc d'après le lemme 1.3.15 et la proposition 1.3.13 (1), on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $ik\hat{x}(k) = A(I - B_k)\hat{x}(k) + L_k\hat{x}(k) + \hat{f}(k)$, donc

$(ikI - A(I - B_k) - L_k)\hat{x}(k) = \hat{f}(k) = y$, d'où $(ikI - A(I - B_k) - L_k)$ est surjectif.

Maintenant montrons que D_k est injectif. En effet, soit $x \in X$ tel que

$(ikI - A(I - B_k) - L_k)x = 0$ alors d'après le lemme 2.1.4, $u(t) = e^{ikt}x$ est une solution forte de problème (2.1) correspond à la fonction $f = 0$, or 0 est une autre solution et d'après l'unicité de solution, on a $u(t) = 0$ et $x = 0$. Alors D_k est injectif.

Or L est borné, alors $A(I-B_k)+L_k$ est fermé (lemme 1.1.5), donc d'après le lemme 1.1.9(2), on a D_k est inversible et borné.

Montrons que $(ikD_k^{-1})_{k\in\mathbb{Z}}$ est R-borné. En effet soit $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$, par hypothèse, elle existe une unique $x \in H^{1,p}(\mathbb{T}, X)$ tel que l'équation (2.1) est verifiée. Par application de la transformée de Fourier, on en déduit que $(ikI - A(I - B_k) - L_k)\hat{x}(k) = \hat{f}(k) \ \ \forall k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi

$ik\hat{x}(k) = ik(ikI - A(I-B_k) - L_k)^{-1}\hat{f}(k) \ \ \forall k \in \mathbb{Z}$, d'autre part, étant donné que $x \in H^{1,p}(\mathbb{T}, X)$, il existe $v \in L^p(\mathbb{T}, X)$ tel que $\hat{v}(k) = ik\hat{x}(k)$. Donc $\hat{v}(k) = ikD_k^{-1}\hat{f}(k)$ ce qui implique que $(ikD_k^{-1})_{k\in\mathbb{Z}}$ est un L^p-multiplicateur donc R-borné d'après la proposition 1.3.29. ■

Remarquons que l'énoncé de la proposition 2.1.3 reste vrai pour tout espace de Banach quelconque.

Réciproquement , on suppose l'hypothèse supplémentaire suivante :

X est un espace de Banach de type UMD.

Proposition 2.1.5 *: Soit X un espace de Banach de type UMD. On suppose que les hypothèses* (H_1)*,* (H_2) *et* (H_3) *soient satisfaites et que l'opérateur* $(ikI - A(I - B_k) - L_k)$ *est inversible et borné, alors les assertions suivantes sont equivalentes.*

1. $ik(ikI - A(I - B_k) - L_k)^{-1}$ *est un* L^p*-multiplicateur.*

2. $ik(ikI - A(I - B_k) - L_k)^{-1}$ *est R-borné.* ■

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2). voir proposition 1.3.29

(2) $\Rightarrow$ (1) : Rappelons que dans un espace UMD, si $\{M_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ et $\{k(M_{k+1} - M_k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sont R-bornées alors $\{M_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est un L^p-multiplicateur (voir Théorème 1.3.31).

Posons $M_k := ik(ikI - A(I - B_k) - L_k)^{-1} = ikN_k = ik(C_k - A(I - B_k))^{-1}$, avec $C_k := ikI - L_k$. Donc il suffit de montrer que l'ensemble $\{k(M_{k+1} - M_k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est R-bornée.

Notons les identités suivantes

$k[M_{k+1} - M_k] = k[i(k+1)N_{k+1} - ikN_k]$

$=kN_{k+1}[i(k+1)(C_k - A(I - B_k)) - ik(C_{k+1} - A(I - B_{k+1}))]N_k$

$=kN_{k+1}[ik(C_k - C_{k+1}) + i(C_k - A(I - B_k)) + ik(A(I - B_{k+1}) - A(I - B_k))]N_k$

$=kN_{k+1}[ik(C_k - C_{k+1})N_k + i + ik(A(I - B_{k+1}) - A(I - B_k))N_k]$

$=kN_{k+1}[(C_k - C_{k+1})ikN_k + i + (A(I - B_{k+1}) - A(I - B_k))ikN_k]$

$=N_{k+1}k(C_k - C_{k+1})M_k + ikN_{k+1} + kN_{k+1}(A(I - B_{k+1}) - A(I - B_k))M_k$

$=N_{k+1}k(C_k - C_{k+1})M_k + ikN_{k+1} - kN_{k+1}(A(B_{k+1} - B_k))M_k$

$=N_{k+1}k(C_k - C_{k+1})M_k + ikN_{k+1} - N_{k+1}(kA(B_{k+1} - B_k))M_k$

$=N_{k+1}k(C_k - C_{k+1})M_k + \frac{k}{k+1}M_{k+1} - \frac{1}{i(k+1)}M_{k+1}(kA(B_{k+1} - B_k))M_k$

$=N_{k+1}k(C_k - C_{k+1})M_k + \frac{k}{k+1}M_{k+1} + \frac{i}{k+1}M_{k+1}T_kM_k.$

Nous avons

$C_k - C_{k+1} = ikI - L_k - i(k+1)I + L_{k+1} = L_{k+1} - L_k - iI,$

donc

$N_{k+1}k(C_k - C_{k+1})M_k = N_{k+1}k(L_{k+1} - L_k - iI)M_k$

$=N_{k+1}(k(L_{k+1} - L_k)M_k - ikN_{k+1}M_k = \frac{1}{i(k+1)}M_{k+1}S_kM_k - \frac{k}{k+1}M_{k+1}M_k,$

d'où

$k[M_{k+1} - M_k] = \frac{1}{i(k+1)}M_{k+1}S_kM_k - \frac{k}{k+1}M_{k+1}M_k + \frac{k}{k+1}M_{k+1} + \frac{i}{k+1}M_{k+1}T_kM_k,$

par conséquent on a :

$\| \sum_{j=1}^n j(M_{j+1}-M_j)\xi_j x_j\|_p \leq [R_p^2(M_k)R_p(S_k)+R_p^2(M_k)+R_p(M_k)+R_p^2(M_k)R_p(T_k)]\| \sum_{j=1}^n \xi_j x_j\|_p$

donc $\{k(M_{k+1} - M_k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est R-bornée, la preuve est terminée. ■

Le théorème principal peut maintenant être énoncé.

Théorème 2.1.6 *: Soient X un espace de Banach de type UMD et $1 < p < \infty$. On suppose que les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3) soient satisfaites, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *Pour chaque $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$ il existe une unique L^p-solution forte et 2π-périodique de l'équation (2.1).*

2. *$(D_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est inversible et borné et l'ensemble $(ikD_k^{-1})_{k\in\mathbb{Z}}$ est R-bornée, où $D_k = (ikI - A(I - B_k) - L_k)$.* ■

Dans la démonstration de ce théorème on utilise le lemme suivant.

Lemme 2.1.7 *: [5] (Lemme 3.1)*

Soit A un opérateur linéaire fermé, et Soient $f, g \in L^p(\mathbb{T}; X)$ pour $1 \leq p < \infty$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1) $\hat{f}(k) \in D(A)$ et $A\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$

2) $f(t) \in D(A)$ et $Af(t) = g(t)$. ■

Remarque 2.1.8 *: Soit $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$. Alors d'après le théorème 1.3.17, on a*

$$f = lim_{n\to\infty}\sigma_n(f) = lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{n+1}\textstyle\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=-m}^{m} e_k\hat{f}(k)$$

dans $L^p(\mathbb{T}, X)$ avec $e_k(t) := e^{ikt}$. ■

Preuve de théorème 2.1.6. $1 \Rightarrow 2$. Voir proposition 2.1.3.

$2 \Rightarrow 1$. **Existence**, soit $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$. Supposons que La famille $\left\{ikD_k^{-1}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est R-borné, alors d'après la Proposition 2.1.5, $\left\{ikD_k^{-1}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est un L^p-multiplicateur, ce qui équivaut à dire que la famille $\left\{D_k^{-1}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est un L^p-multiplicateur de $L^p(\mathbb{T}, X)$ dans $H^{1,p}(\mathbb{T}, X)$ (Lemme 1.3.33) c'est à dire qu' il existe $x \in H^{1,p}(\mathbb{T}, X)$ (voir notation 2.1.1) tel que : $\hat{x}(k) = D_k^{-1}\hat{f}(k) = (ikI - A(I - B_k) - L_k)^{-1}\hat{f}(k)$,

ce qui implique que $(ikI - A(I - B_k) - L_k)\hat{x}(k) = \hat{f}(k)$, donc on a

$$ik\hat{x}(k) = A(I - B_k)\hat{x}(k) + L_k\hat{x}(k) + \hat{f}(k) \tag{2.4}$$

on a, $x \in L^p(\mathbb{T}, X)$ et il existe $v \in L^p(\mathbb{T}, X)$ tel que :

$$\hat{x'}(k) := \hat{v}(k) = ik\hat{x}(k) \tag{2.5}$$

Par le théorème de Fejer (Remarque 2.1.8) on a dans L^p([-$r_{2\pi}$,0],X),

$$x_t(\theta) = x(t+\theta) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=-m}^{m} e^{ikt} e^{ik\theta} \hat{x}(k).$$

Ainsi dans $L^p(\mathbb{T}, X)$ nous obtenons,

$$x_t = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=-m}^{m} e^{ikt} e_k \hat{x}(k).$$

Puisque L est linéaire et borné on a :

L$x_t = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=-m}^{m} e^{ikt}$L($e_k\hat{x}$(k))=$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=-m}^{m} e^{ikt} L_k \hat{x}$(k).

D'après (2.4) et (2.5) on a

$$\hat{x'}(k) = ik\hat{x}(k) = A(I - B_k)\hat{x}(k) + L_k\hat{x}(k) + \hat{f}(k), \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Ensuite, en utilisant A et B fermés et le lemme 2.1.7, nous concluons que

$x(t) \in D(B)$, $(x(t) - Bx(t-r)) \in D(A)$, et $x'(t) = A(x(t) - Bx(t-r)) + L(x_t) + f(t)$.

Périodicité, montrons que x est 2π-périodique. En effet,

on a $x \in H^{1,p}(\mathbb{T}, X)$, et d'après ($\alpha$) dans la notation 1.3.19, on a : $\exists v \in L^p(\mathbb{T}, X)$ et $u \in X$ tel que $\int_0^{2\pi} v(s)ds = 0$ et $x(t) = u + \int_0^t v(s)ds$,

donc $x(0) = u = x(2\pi)$, et alors x est 2π-périodique.

Unicité, supposons que l'équation (2.1) admet deux solutions x_1 et x_2, alors $x = x_1 - x_2$ est une solution forte de l'équation (2.1) correspond à la fonction $f = 0$, appliquons la transformée de fourier, on obtient $(ikI - A(I - B_k) - L_k)\hat{x}(k) = 0$, alors $\hat{x}(k) = D_k^{-1}.0 = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$ et d'après la remarque 1.3.14, $x(t) = 0$ ce qui implique que $x_1 = x_2$.■

2.2 Solutions périodiques d'équations différentielles fonctionnelles de type neutre

2.2.1 Introduction

Dans ce chapitre on étudie l'équation différentielle de type neutre suivante :

$$\frac{d}{dt}[x(t) - Bx(t-r)] = A[x(t) - Bx(t-r)] + L(x_t) + f(t), t \in \mathbb{R} \tag{2.6}$$

où $A : D(A) \subseteq X \to X$ et $B : D(B) \subseteq X \to X$ sont deux opérateurs linéaires fermés, $L \in \mathbb{B}(L^p([-r_{2\pi}, 0], X); X)$ avec $r_{2\pi} = 2\pi n_0(n_0 \in \mathbb{N} - \{0\})$ et $f : \mathbb{R} \to X$ est une fonction locallement p-intégrable et 2π-périodique pour $1 \leq p < +\infty$.

Dans cette partie on utilise le résultat de la partie 2.1, pour montrer l'existence et l'unicité de la solution forte de l'équation (2.6).

Théorème : On suppose que

1) X est un espace UMD

2) D_k^{-1} est borné et l'ensemble $\left\{ikD_k^{-1}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est R-bornée

3) $|k|\|B_k\|\left\|D_k^{-1}\right\| < 1$ et $\|B\|\|\Gamma\| < 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $B \in \mathbb{B}(X)$.

Alors pour tout $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$, l'équation (2.6) a une unique L^p-solution forte, 2π-périodique où $D_k = (ikI - A(I - B_k) - L_k)$ et $\Gamma : L^p(\mathbb{T}, X) \to L^p(\mathbb{T}, X)$ définie par :

$\Gamma(\mathrm{g}) = v^{'}$

avec $v(.)$ est une solution forte de l'équation (2.1), c'est-à-dire :

$$v^{'}(t) = A(v(t) - Bv(t-r)) + L(v_t) + g(t).\blacksquare$$

Dans le cas où A génére un C_0-semi-groupe, on trouve le résultat suivant :

Théorème : Supposons que A génère un C_0-semigroupe $(T(t))_{t\geq 0}$ dans un espace X de type UMD. si $(ik(I-B_k)-A(I-B_k)-L_k)^{-1}$ est un L^p-multiplicateur alors l'équation (2.6) admet un unique L^p-solution faible 2π-périodique. ■

2.2.2 Critère de solution forte

Notation 2.2.1

Notons : $\Delta_k = ikI - ikB_k - A(I-B_k) - L_k$ *, pour tout* $k \in \mathbb{Z}$.

Et $B_k := e^{-ikr}B; L_k(x) := L(e_k x)$ *et* $e_k(t) := e^{ikt} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$H^{1,p}(\mathbb{T};X) = \{u \in L^p(\mathbb{T},X) : \exists v \in L^p(\mathbb{T},X), \hat{v}(k) = ik\hat{u}(k), \forall k \in \mathbb{Z}\}$

Nous définissons : $\sigma_{\mathbb{Z}}(\Delta) = \{k \in \mathbb{Z} : \Delta_k \;\; n'a \;\; pas \;\; d'inverse\}$. ■

Hypothèses principales :

(H_1) : A et B deux opérateurs linéaires fermés.

(H_2) : $L \in \mathbb{B}(L^p(\mathbb{T},X);X)$.

(H_3) : $\{S_k = k(L_{k+1}-L_k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ et $\{T_k = kA(B_{k+1}-B_k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sont R-bornées avec $\hat{x}(k) \in D(B)$ et $(I-B_k)\hat{x}(k) \in D(A)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Et supposons tout au long de cette partie que (H_1) et (H_2) sont satisfaites.

Définition 2.2.2 *: Soit X un espace de Banach. Une fonction x(.) est dite 2π-périodique* L^p*-solution forte de (2.6) si* $x \in H^{1,p}(\mathbb{T},X)$ *tel que* $x \in D(B)$, $(x(t) - Bx(t-r)) \in D(A)$ *et* (2.6) *est vérifiée pour tout* $t \in [0,2\pi]$.■

On suppose l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (2.6), d'où on a la proposition suivante :

Proposition 2.2.3 *: Supposons que pour chaque $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$ il existe un unique 2π-périodique L^p-solution forte de (2.6) et que la condition suivante soit satisfaite : $D_k = ikI - A(I - B_k) - L_k$ a un inverse borné et $|k|\|B_k\|\left\|D_k^{-1}\right\| < 1$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $B \in \mathbb{B}(X)$.*

Alors

1. $\sigma_{\mathbb{Z}}(\Delta) = \phi$
2. *L'ensemble* $\{ik(ikI - ikB_k - A(I - B_k) - L_k)^{-1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ *est un L^p-multiplicateur.* ■

Preuve : 1) On reprend la même démonstration que la proposition 2.1.3. Soit $\underline{y \in X}$. On définit la fonction $f(t) = e^{ikt}y$ pour $t \in \mathbb{R}$. Par hypothèse, elle existe une L^p-solution forte $x(.)$ de (2.6), Par transformation de Fourier sur les deux côtés de l'équation (2.6), on obtient $(ik(I - B_k) - A(I - B_k) - L_k)\hat{x}(k) = y$, ce qui implique que $\Delta_k = (ik(I - B_k) - A(I - B_k) - L_k)$ est surjectif.

D'autre part, si on suppose que $\underline{x \in ker(\Delta_k)}$, on montre que la fonction u(t) = e^{ikt}x est 2π-périodique L^p-solution forte de l'équation (2.6) correspondant à la fonction $f = 0$ (même démonstration que le lemme 2.1.4), par conséquent, $u(t) = 0$ et $x = 0$, et donc Δ_k est injectif. Δ_k surjectif et injectif, alors il est inversible.

On a $|k|\|B_k\|\left\|D_k^{-1}\right\| < 1$, donc d'après la proposition 1.1.2, $(I - ikB_kD_k^{-1})$ est inversible. Alors, nous pouvons écrire

$\Delta_k^{-1} = (ikI - A(I - B_k) - L_k - ikB_k)^{-1} = [(I - ikB_kD_k^{-1})D_k]^{-1}$

$= D_k^{-1}(I - ikB_kD_k^{-1})^{-1}$, où $D_k^{-1} = (ikI - A(I - B_k) - L_k)^{-1}$. Puisque $B_kD_k^{-1}$ est un opérateur linéaire fermé, et d'après le lemme 1.1.9 (2), nous obtenons également Δ_k^{-1} est un opérateur linéaire borné. Par conséquent,

$\sigma_{\mathbb{Z}}(\Delta) = \{k \in \mathbb{Z} : \Delta_k \;\; n'a \;\; pas \;\; d'inverse\} = \emptyset.$

2) Soit $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$, par hypothèse, nous pouvons affirmer qu'il existe un 2π-périodique L^p-solution forte de l'équation (2.6) . En appliquant la transformation de Fourier sur les deux côtés de cette équation, et d'apès le lemme 1.3.13 (1) et la proposition 1.3.15, on obtient,

ik$\hat{x}$(k) - ik$B_k\hat{x}$(k)=A(I-B_k)$\hat{x}$(k)+$L_k\hat{x}$+$\hat{f}$(k).

$(ikI - ikB_k - A(I - B_k) - L_k)\hat{x}(k) = \hat{f}(k).$

$ik\hat{x}(k) = ik(ikI - ikB_k - A(I - B_k) - L_k)^{-1}\hat{f}(k)$. Puisque $x \in H^{1,p}(\mathbb{T}, X)$, il existe $v \in L^p(\mathbb{T}, X)$ tel que $\hat{v}$(k)=ik$\hat{x}$(k), donc $\hat{v}(k) = ik(ikI - ikB_k - A(I - B_k) - L_k)^{-1}\hat{f}(k)$, d'où d'après la définition 1.3.28, $ik(ikI - ikB_k - A(I - B_k) - L_k)^{-1}$ est un L^p-multiplicateur. ■

2.2.3 Critère de solution faible

Définition 2.2.4 *: Supposons que A génère un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ sur X. Une fonction x est dite 2π-périodique L^p-solution faible de problème (2.6) si,*

$x \in D(B)$, $(x(t) - Bx(t - r)) \in D(A)$ et on a

$x(t) - Bx(t - r) = T(t)(x(0) - Bx(-r)) + \int_0^t T(t - s)(Lx_s + f(s))ds$, $0 \leq t \leq 2\pi$.■

Proposition 2.2.5 *: Supposons que A génère un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ sur X, si $x(.)$ est l'unique solution faible et 2π-périodique du problème (2.6) tel que $\int_0^t [x(s) - Bx(s-r)]ds \in D(A)$ alors :*

$x(t) - Bx(t-r) = x(0) - Bx(-r) + A\int_0^t [x(s) - Bx(s-r)]ds + \int_0^t (Lx_s + f(s))ds,$

pour tout $t \in [0, 2\pi]$. ■

La démonstration de cette proposition utilise la remarque suivante :

Remarque 2.2.6 *(*[42]*)*

Supposons que A génère un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$, si $g : [0, a] \to X$ est une fonction cotinue, alors $\int_0^t \int_0^s T(t-\xi)g(\xi)d\xi ds \in D(A)$ et

$A\int_0^t \int_0^s T(t-\xi)g(\xi)d\xi ds = \int_0^t (T(t-s) - I)g(s)ds$

Preuve de la proposition 2.2.5 : Supposons que $x(.)$ est l'unique solution faible et 2π-périodique de l'équation (2.6), alors

$x(t) - Bx(t-r) = T(t)(x(0) - Bx(-r)) + \int_0^t T(t-s)(L(x_s) + f(s))ds$

D'après la proposition 1.1.28 (1) et la remarque 2.2.6, $\int_0^t T(t)(x(0) - Bx(-r))ds \in D(A)$ et $\int_0^t \int_0^s T(t-\xi)(L(x_\xi) + f(\xi))d\xi ds \in D(A)$, d'où

$A\int_0^t (x(s) - Bx(s-r))ds =$

$$A\int_0^t T(s)(x(0) - Bx(-r))ds + A\int_0^t \int_0^s T(t-\xi)(L(x_\xi) + f(\xi))d\xi ds =$$

$T(t)((x(0) - Bx(-r)) - (x(0) - Bx(-r)) + \displaystyle\int_0^t (T(t-s) - I)(L(x_s) + f(s))ds,$

donc

$A\int_0^t (x(s) - Bx(s-r))ds + x(0) - Bx(-r) + \int_0^t (L(x_s) + f(s))ds = T(t)(x(0) - Bx(-r)) + \int_0^t T(t-s)(L(x_s) + f(s))ds.$

Par hypothèse, nous avons :

$x(t) - Bx(t-r) = T(t)(x(0) - Bx(-r)) + \int_0^t T(t-s)(L(x_s) + f(s))ds,$

donc

$x(t) - Bx(t-r) = x(0) - Bx(-r) + A\int_0^t (x(s) - Bx(s-r))ds + \int_0^t (L(x_s) + f(s))ds.$ ■

Le théorème suivant peut alors être énoncé.

Théorème 2.2.7 *: Supposons que A génère un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ sur X, Soit $f \in L^p(\mathbb{T}; X)$ et $1 \leq p < \infty$; si $x(.)$ est l'unique L^p-solution faible et 2π-périodique de l'équation (2.6) tel que $\int_0^t (x(s) - Bx(s-r))ds \in D(A)$, alors*

$(ikI - ikB_k - A(I - B_k) - L_k)\hat{x}(k) = \hat{f}(k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$. ■

Preuve. Soit $x(.)$ une unique solution faible et 2π-périodique de l'équation (2.6), alors d'après la proposition 2.2.5, on a

$x(t) - Bx(t-r) = x(0) - Bx(-r) + A\int_0^t (x(s) - Bx(s-r))ds + \int_0^t (L(x_s) + f(s))ds$

Pour $t = 2\pi$, on a

$x(2\pi) - Bx(2\pi - r) = x(0) - Bx(-r) + A\int_0^{2\pi} (x(s) - Bx(s-r))ds + \int_0^{2\pi} (Lx_s + f(s))ds,$

or x est 2π-périodique, donc $x(2\pi) = x(0)$ et $x(2\pi - r) = x(-r)$,

alors

$A\int_0^{2\pi} (x(s) - Bx(s-r))ds + \int_0^{2\pi} (Lx_s + f(s))ds = 0$

$\frac{1}{2\pi} A\int_0^{2\pi} (x(s) - Bx(s-r))ds + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (L(x_s) + f(s))ds = 0$

$\frac{1}{2\pi}A\int_0^{2\pi}(x(s)-Bx(s-r))ds+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-i0s}L(x_s)ds+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-i0s}f(s)ds=0$

$\frac{1}{2\pi}A\int_0^{2\pi}e^{-i0s}(x(s)-Bx(s-r))ds+L(e_0\hat{x}(0))+\hat{f}(0)=0$

$A(\hat{x}(0)-B_0\hat{x}(0))+L_0\hat{x}(0)+\hat{f}(0)=0$

(A(I-B_0)+ L_0)$\hat{x}(0)$+ $\hat{f}(0)=0$.

Pour $k=0$, on a :

$$(0-A(I-B_0)-L_0)\hat{x}(0)=\hat{f}(0). \tag{2.7}$$

Il reste à verifier pour $k\neq 0$. En effet, on définit $v(t)=\int_0^t(x(s)-Bx(t-r))ds$, et $g(t)=x(t)-Bx(t-r)-(x(0)-Bx(-r))-\int_0^t(Lx_s+f(s))ds$, donc d'après la proposition 2.2.5, on a $g(t)=Av(t)$, et d'après la proposition 1.3.12 (1), la proposition 1.3.13 (2) et le lemme 1.3.15, on trouve :

$\hat{v}(k)=\frac{i}{k}(I-B_0)\hat{x}(0)-\frac{i}{k}(I-B_k)\hat{x}(k)\Rightarrow A\hat{v}(k)=\frac{i}{k}A(I-B_0)\hat{x}(0)-\frac{i}{k}A(I-B_k)\hat{x}(k)$

et,

$\hat{g}(k)=(I-B_k)\hat{x}(k)-[\frac{i}{k}L_0\hat{x}(0)-\frac{i}{k}L_k\hat{x}(k)]-[\frac{i}{k}\hat{f}(0)-\frac{i}{k}\hat{f}(k)]$,

i.e,

$\hat{g}$(k)=(I-B_k)$\hat{x}$(k)-$\frac{i}{k}L_0\hat{x}(0)$ + $\frac{i}{k}L_k\hat{x}$(k)-$\frac{i}{k}\hat{f}(0)$+ $\frac{i}{k}\hat{f}$(k)

$\hat{g}(k)=\frac{i}{k}A(I-B_0)\hat{x}(0)-\frac{i}{k}A(I-B_k)\hat{x}(k)$.

On multiplie par ik, on trouve

$ik(I-B_k)\hat{x}(k)+L_0\hat{x}(0)-L_k\hat{x}(k)+\hat{f}(0)-\hat{f}(k)=-A(I-B_0)\hat{x}(0)+A(I-B_k)\hat{x}(k)$,

donc

$[ik(I-B_k)\hat{x}(k)-A(I-B_k)\hat{x}(k)-L_k\hat{x}(k)-\hat{f}(k)]-[-A(I-B_0)\hat{x}(0)-L_0\hat{x}(0)-\hat{f}(0)]=0$

$\Leftrightarrow ik(I-B_k)\hat{x}(k) - A(I-B_k)\hat{x}(k) - L_k\hat{x}(k) - \hat{f}(k) = 0$ (d'après (2.7)),

ce qui implique que

$$(ikI - ikB_k - A(I-B_k) - L_k)\hat{x}(k) = \hat{f}(k), \forall \in \mathbb{Z} - \{0\}. \tag{2.8}$$

Donc d'après (2.7) et (2.8), $(ikI - ikB_k - A(I-B_k) - L_k)\hat{x}(k) = \hat{f}(k), \forall \in \mathbb{Z}.$■

Corollaire 2.2.8 *: Supposons que A génère un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ sur X et que pour chaque $f \in L^p(\mathbb{T};X)$ il existe une unique L^p-solution faible et 2π-périodique de l'équation (2.6) tel que $\int_0^t (x(s) - Bx(s-r))ds \in D(A)$, $(ikI - A(I-B_k) - L_k)$ est inversement borné et $|k|\|B_k\|\left\|D_k^{-1}\right\| < 1$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $B \in \mathbb{B}(X)$. Alors Δ_k est inversible et borné, de plus Δ_k^{-1} est un L^p-multipliplicateur où $\Delta_k = (ikI - ikB_k - A(I-B_k) - L_k)$.* ■

Preuve. On reprend la même demonstration que la proposition 2.1.3, on montre que Δ_k est inversible et borné. En effet,

Montrons que Δ_k est surjectif : Soit $y \in X$, donc pour $f(t) = e^{ikt}y$, il existe une solution unique de l'équation (2.6). Appliquons la transformation de Fourier et le théorème 2.2.7, on trouve $\Delta_k\hat{x}(k) = y$, d'où Δ_k est surjectif.

Δ_k est injectif. En effet, soit $x \in ker(\Delta_k)$, donc on a $ikx - ikB_kx = A(I-B_k)x + L_kx$, alors $u(t) = e^{ikt}x$ vérifie l'équation (2.6), avec $f = 0$ (même démonstration que le lemme 2.1.4), c'est à dire,

$$\frac{d}{dt}(u(t) - Bu(t-r)) = A(u(t) - Bu(t-r)) + L(u_t).$$

On pose $g(s) = T(t-s)(u(s) - Bu(s-r))$. D'après la proposition 1.1.28 (2), on a

$\frac{d}{dt}g(s) = -AT(t-s)(u(s) - Bu(s-r)) + T(t-s)(A(u(s) - Bu(s-r)) + L(u_s))$

$\frac{d}{dt}g(s) = T(t-s)L(x_s)$,

on intègre de 0 à t :

$g(t) = g(0) + \int_0^t T(t-s)L(u_s)ds$.

$u(t) - Bu(t-r) = T(t)(u(0) - Bu(-r)) + \int_0^t T(t-s)L(u_s)ds$, or $u(0) = x = e^{i2\pi k}x = u(2\pi)$, donc u est 2π-périodique L^p-solution faible de (2.6) correspond à $f = 0$, or 0 est une autre solution, et d'après l'unicité de la solution on a $u(t) = 0$, donc $x = 0$, ce qui implique que Δ_k est injectif, et par la proposition 2.2.3, Δ_k est inversible et borné. D'autre part par le théorème 2.2.7 nous avons :

$\hat{x}(\mathrm{k}) = (ikD_k - AD_k - G_k)^{-1}\hat{f}(\mathrm{k})$, $\forall f \in L^p(\mathbb{T}; X)$ c'est-à-dire, Δ_k est un L^p-multipliplicateur. ∎

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de ce paragraphe.

2.2.4 Résultat de solution 2π-périodique

Notre résultat principal dans cette partie est d'établir la réciproque de la proposition 2.2.3 et du corollaire 2.2.8.

2.2.4.1 Résultat de solution forte

Rappelons le théorème 2.1.6 principal de partie 2.1,

Théorème 2.1.6 : Supposons que les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3) soient satisfaites, $1 < p < +\infty$ et X un espace UMD. Alors les assertions suivantes sont équivalentes

1. Pour chaque $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$, il existe une unique L^p-solution forte et 2π-périodique de l'équation (2.1).
2. $(D_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est inversement borné et l'ensemble $(ikD_k^{-1})_{k\in\mathbb{Z}}$ est R-bornée où $D_k = (ikI - A(I - B_k) - L_k)$.

Donc sous les hypothèses suivantes :

(H_1) : X un espace UMD.

(H_2) : $\{S_k = k(L_{k+1} - L_k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ et $\{T_k = kA(B_{k+1} - B_k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sont R-bornées.

(H_3) : $(D_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est inversible et l'ensemble $(ikD_k^{-1})_{k\in\mathbb{Z}}$ est R-bornée avec $\hat{x}(k) \in D(B)$ et $(I - B_k)\hat{x}(k) \in D(A)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Pour chaque $g \in L^p(\mathbb{T}, X)$, il existe une unique 2π-périodique L^p-solution forte $v \in H^{1,p}(\mathbb{T}, X)$ de l'équation suivante :

$$v^{'}(t) = A(v(t) - Bv(t - r)) + L(v_t) + g(t) \tag{2.9}$$

Par transformation de Fourier, nous obtenons

$$\hat{v}(k) = D_k^{-1}\hat{g}(k) = (ikI - A(I - B_k) - L_k)^{-1}\hat{g}(k), k \in \mathbb{Z}, \tag{2.10}$$

d'où

$$\widehat{v'}(k) = ik\hat{v}(k) = ikD_k^{-1}\hat{g}(k)$$

Soit $\Gamma : L^p(\mathbb{T}, X) \to L^p(\mathbb{T}, X)$ définie par : $\Gamma(\mathrm{g}) = v^{'}$

Γ est un opérateur linéaire borné.

Lemme 2.2.9 *On suppose que les hypothèses* $(H_1),(H_2)$ *et* (H_3) *sont satisfaites et que pour tout* $k \in \mathbb{Z}$*,* D_k *est inversement borné,* $\left\{ikD_k^{-1}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *est R-borné,* $B \in B(X)$*,* $|k|\|B_k\|\left\|D_k^{-1}\right\| < 1$ *et* $\|B\|\|\Gamma\| < 1$*, alors* $(I - ikB_kD_k^{-1})^{-1}$ *est inversement borné, de plus on a* $(S_k)_{k\in\mathbb{Z}} = \left\{(I - ikB_kD_k^{-1})^{-1}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *est un* L^p*-multiplicateur.* ■

Preuve. On a, $|k|\|B_k\|\left\|D_k^{-1}\right\| < 1$, donc d'après la proposition 1.1.2, il en résulte que $((I - ikB_kD_k^{-1})^{-1})_{k\in\mathbb{Z}} \in B(X)$.

Maintenant montrons que $(S_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un L^p-multiplicateur. Soit $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$, nous définissons $\Lambda : L^p(\mathbb{T}, X) \to L^p(\mathbb{T}, X)$ par $\Lambda(\varphi)(\mathrm{t}) = \mathrm{B}\Gamma(\varphi)(t - r) + f(t)$.

Il est clair que Λ est une contraction. En effet,

$\|\Lambda(\varphi_1) - \Lambda(\varphi_2)\| = \|B\Gamma(\varphi_1) - B\Gamma(\varphi_2)\| \leq \|B\|\|\Gamma\|\|\varphi_1 - \varphi_2\| < \|\varphi_1 - \varphi_2\|$.

Par conséquent, il existe une unique $g \in L^p(\mathbb{T}, X)$ tel que $\Lambda(g)(t) = g(t)$, alors $g(t) = B\Gamma(g)(t - r) + f(t)$, et donc

$$g(t) = Bv^{'}(t - r) + f(t).$$

En utilisant (2.10), nous obtenons que

$\hat{g}(k) = e^{-ikr}ikB\hat{v}(k) + \hat{f}(k) = ik(e^{-ikr}B)D_k^{-1}\hat{g}(k) + \hat{f}(k) = ikB_kD_k^{-1}\hat{g}(k) + \hat{f}(k)$, ce qui implique que $(I - ikB_kD_k^{-1})\hat{g}(k) = \hat{f}(k)$. D'où $\hat{g}(k) = (I - ikB_kD_k^{-1})^{-1}\hat{f}(k)$ c'est à dire que $\hat{g}(k) = S_k\hat{f}(k)$, ainsi $(S_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un L^p-multiplicateur. ■

Le théorème principal peut maintenant être énoncé.

Théorème 2.2.10 *:*

On suppose que $(H_1),(H_2)$ *et* (H_3) *soient satisfaites,* D_k *est inversement borné, l'en-*

semble $\left\{ikD_k^{-1}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *est R-bornée et* $B \in B(X)$*. Si pour tout* $k \in \mathbb{Z}$ $|k|\|B_k\|\left\|D_k^{-1}\right\| < 1$ *et* $\|B\|\|\Gamma\| < 1$*, alors, Pour tout* $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$ *il existe un unique* L^p*-solution forte et* 2π*-périodique de l'équation.(2.6).* ■

Preuve. Soit $\underline{f \in L^p(\mathbb{T}, X)}$, il en résulte du lemme 2.2.9 que $(S_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un L^p-multiplicateur. Par conséquent, il existe $g \in L^p(\mathbb{T}, X)$ tel que

$$\hat{g}(k) = S_k \hat{f}(k). \tag{2.11}$$

D'autre part, en utilisant le théorème 2.1.6, nous pouvons dire qu'il existe une unique $x \in H^{1,p}(\mathbb{T}, X)$ tel que :

$x'(t) = A(x(t) - Bx(t-r)) + L(x_t) + g(t)$, par transformation de Fourier, on obtient $ik\hat{x}(k) = A(I - B_k)\hat{x}(k) + L_k\hat{x}(k) + \hat{g}(k)$, d'où $\hat{x}(\mathrm{k}) = D_k^{-1}\hat{g}(\mathrm{k})$, où

$D_k = ikI - A(I - B_k) - L_k$. Par (2.11), on a : $\hat{x}(k) = D_k^{-1}S_k\hat{f}(k)$. Or $D_k^{-1}S_k = D_k^{-1}(I - ikB_kD_k^{-1})^{-1} = ((I - ikB_kD_k^{-1})D_k)^{-1} = (D_k - ikB_k)^{-1}$

$=(ikI - A(I - B_k) - L_k - ikB_k)^{-1}$, donc

$$\hat{x}(k) = (ikI - ikB_k - A(I - B_k) - L_k)^{-1}\hat{f}(k).$$

Ainsi

$$ik\hat{x}(k) - ikB_k\hat{x}(k) = A(\hat{x}(k) - B_k\hat{x}(k)) + L_k\hat{x}(k) + \hat{f}(k)$$

Enfin, en utilisant A et B fermés, le théorème de Fejer (théorème 1.3.17) et le lemme 2.1.7, nous concluons que $x(t) \in D(B)$, $(x(t) - Bx(t-r)) \in D(A)$ et

$x^{'}(t) = A(x(t) - Bx(t-r)) + L(x_t) + Bx^{'}(t-r) + f(t)$. Par conséquent $x(.)$ est 2π-périodique L^p-solution forte de l'équation. (2.6). ■

2.2.4.2 Résultat de solution faible

Dans ce paragraphe on suppose que A génère un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$.

Théorème 2.2.11 *: Supposons que A génère un C_0-semigroup $(T(t))_{t\geq 0}$ dans un espace de Banach X de type UMD, et supposons que $(ik(I-B_k) - A(I-B_k) - L_k)$ est inversement borné et $(ik(I-B_k) - A(I-B_k) - L_k)^{-1}$ est un L^p-multiplicateur, alors il existe une unique 2π-périodique L^p- solution faible de l'équation.(2.6).* ■

Preuve. Soit $f \in L^p(\mathbb{T}; X)$, alors d'après le théorème 1.3.17, on a

$$f(t) = lim_{n\to+\infty} \tfrac{1}{n+1}\textstyle\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=-m}^{m} e^{ikt}\hat{f}(\text{k}).$$

L'opérateur $(ik(I-B_k) - A(I-B_k) - L_k)^{-1}$ est un L^p-multiplicateur, donc il existe $x \in L^p(\mathbb{T}; X)$ tel que $\hat{x}(k) = (ik(I-B_k) - A(I-B_k) - L_k)^{-1}\hat{f}(k)$,

d'où

$ik\hat{x}(k) = ikB_k\hat{x}(k) + A(I-B_k)\hat{x}(k) + L_k\hat{x}(k) + \hat{f}(k)$.

Posons $f_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=-m}^{m} e^{ikt}\hat{f}(k)$ et

$x_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=-m}^{m} e^{ikt}(ik(I-B_k) - A(I-B_k) - L_k)^{-1}\hat{f}(\text{k})$, donc

$x_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=-m}^{m} e^{ikt}\hat{x}(\text{k})$ et par le théorème 1.3.17 (Théorème de Fejer) on a $x_n(\text{t}) \to x(t)$ et $f_n(\text{t}) \to f(t)$ quand $n \to +\infty$. Montrons qua la suite (x_n) vérifie l'équation (2.6). En effet,

$x_n'(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=-m}^{m} e^{ikt} ik\hat{x}(k)$

$= \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=-m}^{m} e^{ikt}[ikB_k\hat{x}(k) + A(I-B_k)\hat{x}(k) + L_k\hat{x}(k) + \hat{f}(k)]$

$= Bx_n'(t-r) + A(x_n(t) - Bx_n(t-r)) + L((x_n)_t) + f_n(t),$

d'où

$x_n'(t) - Bx_n'(t-r) = A(x_n(t) - Bx_n(t-r)) + L((x_n)_t) + f_n(t).$

$x_n(0) = \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=-m}^{m} e^{0} ik\hat{x}(k) = \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=-m}^{m} e^{ik2\pi} ik\hat{x}(k) = x_n(2\pi)$, donc

(x_n) est une solution périodique de l'équation (2.6) :

$$x_n'(t) - Bx_n'(t-r) = A(x_n(t) - Bx_n(t-r)) + L((x_n)_t) + f_n(t).$$

Posons $h(s) = T(t-s)[x_n(s) - Bx_n(s-r)]$.

D'après la proposition 1.1.28, on a :

$\frac{d}{ds}h(s) = -AT(t-s)[x_n(s) - Bx_n(s-r)] + T(t-s)[A(x_n(s) - Bx_n(s-r) + L((x_n)_s) + f_n(s)] = T(t-s)[L((x_n)_s) + f_n(s)]$. On intégre de 0 à t, on obtient,

$h(t) = h(0) + \int_0^t T(t-s)(L((x_n)_s) + f_n(s))ds$, c'est à dire que

x_n(t)-Bx_n(t-r) =T(t)($x_n(0)$ - Bx_n(-r))+ $\int_0^t$T(t-s)[L($(x_n)_s$) + f_n(s)]ds.

On pose $y_n = x_n(0)$ - Bx_n(-r), donc

x_n(t) -Bx_n(t-r)= T(t)y_n+ $\int_0^t$T(t-s)[L($(x_n)_s$) + f_n(s)]ds

pour $t = 2\pi$ on a

$x_n(2\pi)$ - Bx_n(2π-r) = $T(2\pi)y_n$+ $\int_0^{2\pi}$T(2π-s)(L($(x_n)_s$ + f_n(s))ds, or $x_n(2\pi) = x_n(0)$ et x_n(2π-r) = x_n(-r), donc

$$y_n = T(2\pi)y_n + \int_0^{2\pi} T(2\pi - s)(L(x_n)_s) + f_n(s))ds.$$

On passe à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient :

$$y = T(2\pi)y + \int_0^{2\pi} T(2\pi - s)(L(x_s) + f(s))ds. \tag{2.12}$$

x_n(t) - Bx_n(t-r) = T(t)y_n+ $\int_0^t$T(t-s)(L((x_n)$_s$) + f_n(s))ds (quand $n \to +\infty$)

x(t)-Bx(t-r) = T(t)y+ $\int_0^t$T(t-s)(L(x_s) + f(s))ds := g(t), et d'après (2.12), on a

$g(2\pi) = T(2\pi)y + \int_0^{2\pi} T(2\pi - s)(L(x_s) + f(s))ds = y$ et $g(0) = y$, d'où $g(2\pi) = g(0)$ et $x(2\pi) = x(0)$. Nous concluons alors que $x(.)$ es une solution faible et 2π-périodique de l'équation(2.6). ■

On términe ce chapitre par un travail plus général.

2.3 Solutions périodiques dans un espace UMD pour certaines équations différentielles fonctionnelles de type neutre

2.3.1 Introduction

Motivé par le fait que les équations différentielles fonctionnelles à retard surviennent dans de nombreux domaines des mathématiques appliquées, ces types d'équations ont reçu beaucoup d'attention ces dernières années. En particulier, le problème de l'existence d'une solution périodique, a été traité par plusieurs auteurs. Nous renvoyons le lecteur aux articles [5], [32, [42] et les références qui y sont énumérées pour obtenir des informations à ce sujet.

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence d'une solution périodique pour une classe d'équations différentielles fonctionnelles décrites sous la forme :

$$\frac{d}{dt}[x(t) - L(x_t)] = A[x(t) - L(x_t)] + G(x_t) + f(t), t \in \mathbb{R} \tag{2.13}$$

où $A : D(A) \subset X \to X$, est un opérateur linéaire fermé, et X est un espace de Banach muni de la norme $\|.\|_X$, la fonction x_t donnée par $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ pour $\theta \in [-r, 0]$, L et G sont dans $\mathbb{B}(L^p([-r_{2\pi}, 0], X); X)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés, et $f : \mathbb{R} \to X$ est une fonction 2π-périodique et locallement p-intégrable pour $1 \leq p < +\infty$.

Le cas où $L = 0$ a été traité dans [42] avec des résultats importants concernant l'existence de solutions périodiques.

Notre contribution dans ce travail est une généralisation des résultats d'existence des solutions périodiques [42] au cas d'équations fonctionnelles de type neutre (2.13).

Dans cette partie on montre l'existence et l'unicité de L^p-solution forte et 2π-périodique de l'équation (2.13), pour $1 < p < \infty$ et sous les conditions suivantes :

- X est un espace UMD (voir définition 1.3.26).

- $\sigma_{\mathbb{Z}}(\Delta) = \phi$ et $\left\{ik\Delta_k^{-1}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est R-borné, où $\Delta_k = (ikD_k - AD_k - G_k)$ et $D_k = I - L_k$.

- $\{S_k = k(L_{k+1} - L_k), k \in \mathbb{Z}\}$, $\{T_k = k(G_{k+1} - G_k), k \in \mathbb{Z}\}$ et $\{P_k = kA(L_{k+1} - L_k), k \in \mathbb{Z}\}$ sont R-bornées.

Pour l'existence d'une solution faible de l'équation (2.13), on montre le résultat suivant :

Théorème : Supposons que A génère un C_0-semigroupe $(T(t))_{t\geq 0}$ sur un espace de

Banach X de type UMD et que $(ikD_k - AD_k - G_k)^{-1}$ est un L^p-multiplicateur, alors il existe une solution unique faible et 2π-périodique de l'équation. (2.13).■

2.3.2 Critère de solutions périodiques

Hypothèses principales.

(1) A est un opérateur linéaire fermé.

(2) $L, G \in \mathbb{B}(L^p(\mathbb{T}, X); X)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés.

(3) $\{S_k, k \in \mathbb{Z}\}$, $\{T_k, k \in \mathbb{Z}\}$ et $\{P_k, k \in \mathbb{Z}\}$ sont R-bornées avec $D_k\hat{x}(k) \in D(A)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

On suppose que les hypothèses (1) et (2) sont satisfaites tout au long du partie 2.3.

Notation 2.3.1

On note : $\boldsymbol{D}x_t = \mathbf{x(t)} - \boldsymbol{L}(x_t)$, $\quad D\varphi = \varphi(0) - L(\varphi)$

Alors l'équation (2.13) est équivalente

$$\frac{d}{dt}Dx_t = A[Dx_t] + G(x_t) + f(t). \tag{2.14}$$

Notons $L_k(x) := L(e_k x)$; $G_k(x) := G(e_k x)$, $e_k(t) := e^{ikt}$, $D_k = I - L_k$ *et*

$\Delta_k = (ikD_k - AD_k - G_k)$ *pour tout* $k \in \mathbb{Z}$, *on définit*

$H^{1,p}(\mathbb{T}; X) = \{u \in L^p(\mathbb{T}, X) : \exists v \in L^p(\mathbb{T}, X), \hat{v}(k) = ik\hat{u}(k), \forall k \in \mathbb{Z}\}$

et $\sigma_{\mathbb{Z}}(\Delta) = \{k \in \mathbb{Z} : \Delta_k \ n'est \ \ pas \ \ inversible\}$.■

2.3.2.1 Critère de solution forte

Nous commençons par établir notre concept de solution forte pour l'équation (2.14) :

Définition 2.3.2 *: Soit $f \in L^p(\mathbb{T};X)$. Une fonction $x \in H^{1,p}(\mathbb{T};X)$ est dite 2π-périodique L^p-solution forte de (2.14) si $Dx_t \in D(A)$ et x vérifie l'équation (2.14) pour tout $t \in [0,2\pi]$.* ∎

La proposition suivante montre l'équivalence entre L^p-multiplicateur et R-bornétude de l'opérateur $(ik\Delta_k^{-1})$.

Proposition 2.3.3 *: Soit X un espace de Banach de type UMD. On suppose que les hypothèses (1), (2) et (3) sont satisfaites et que $\sigma_{\mathbb{Z}}(\Delta) = \varnothing$, alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $(ik(ikD_k - AD_k - G_k)^{-1})_{k\in\mathbb{Z}}$ est un L^p-multiplicateur pour $1 < p < \infty$

(ii) $(ik(ikD_k - AD_k - G_k)^{-1})_{k\in\mathbb{Z}}$ est R-borné. ∎

Preuve :

(i) $\Rightarrow$ (ii) : voir la proposition 1.3.29

(ii) $\Rightarrow$ (i). Posons $M_k = ik(ikD_k - AD_k - G_k)^{-1}$, $N_k = (C_k - AD_k)^{-1}$ et $C_k := ikD_k - G_k$, alors on a $M_k = ikN_k = ik(C_k - AD_k)^{-1}$. On utilise le théorème 1.3.31 pour montrer que l'ensemble $\{k(M_{k+1} - M_k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est R-bornée.

Nous notons les identités suivantes

k[M_{k+1}-M_k]= k[i(k+1)$(c_{k+1} - AD_{k+1})^{-1}$ -ik$(C_k - AD_k)^{-1}$]

= k$(c_{k+1} - AD_{k+1})^{-1}$[i(k+1)($C_k$-A$D_k$) - ik($C_{k+1}$-A$D_{k+1}$)]$(C_k - AD_k)^{-1}$

$= kN_{k+1}[ik(C_k - C_{k+1}) + i(C_k - AD_k) + ik(AD_{k+1} - AD_k]N_k$

$=kN_{k+1}[ik(C_k - C_{k+1})N_k + i + ik(AD_{k+1} - AD_k)N_k]$

$=kN_{k+1}(C_k - C_{k+1})ikN_k + ikN_{k+1} + kN_{k+1}(AD_{k+1} - AD_k)ikN_k$, $(D_k = I - L_k)$

$=kN_{k+1}(C_k - C_{k+1})M_k + \frac{k}{k+1}M_{k+1} - N_{k+1}(kA(L_{k+1} - L_k))M_k$

$=N_{k+1}k(C_k - C_{k+1})M_k + \frac{k}{k+1}M_{k+1} - \frac{1}{i(k+1)}M_{k+1}P_kM_k.$

Nous avons

C_k-C_{k+1}=ikD_k- i(k+1)D_{k+1} + G_{k+1} - G_k

= ik(D_k - D_{k+1}) - iD_{k+1} + (G_{k+1}-G_k)

=ik(L_{k+1} - L_k) + (G_{k+1} - G_k) + iL_{k+1} - iI, donc on a

$N_{k+1}k(C_k - C_{k+1})M_k = ikN_{k+1}(k(L_{k+1} - L_k))M_k + N_{k+1}(k(G_{k+1} - G_k))M_k$

$+ ikN_{k+1}L_{k+1}M_k - ikN_{k+1}M_k$

$=ikN_{k+1}S_kM_k + N_{k+1}T_kM_k + ikN_{k+1}L_{k+1}M_k - ikN_{k+1}M_k$

$= \frac{k}{k+1}M_{k+1}S_kM_k + \frac{1}{i(k+1)}M_{k+1}T_kM_k + \frac{k}{k+1}M_{k+1}L_{k+1}M_k - \frac{k}{k+1}M_{k+1}M_k,$

donc

$k[M_{k+1} - M_k] = \frac{k}{k+1}M_{k+1}S_kM_k + \frac{1}{i(k+1)}M_{k+1}T_kM_k + \frac{k}{k+1}M_{k+1}L_{k+1}M_k - \frac{k}{k+1}M_{k+1}M_k +$

$\frac{k}{k+1}M_{k+1} - \frac{1}{i(k+1)}M_{k+1}P_kM_k.$

Comme les produits et les sommes de R-borné est R-borné [42. Remarque 2.2] et les hypothèses (1), (2) et (3), la preuve est terminée. ■

Le lemme suivant montre l'unicité de la solution forte de l'équation (2.14) :

Lemme 2.3.4 *: Soit $1 \leq p < \infty$. Supposons que $\sigma_{\mathbb{Z}}(\Delta) = \varnothing$ et que pour chaque f dans $L^p(\mathbb{T}; X)$, il existe une solution forte de l'équation.(2.14), alors cette solution est unique.* ■

Preuve. Supposons que x_1 et x_2 sont deux L^p-solutions fortes de l'équation (2.14), alors $x = x_1 - x_2$ est un L^p-solution forte de l'équation (2.14) correspond à $f = 0$. Appliquons la transformée de Fourier dans (2.14), on obtient ik$D_k\hat{x}$(k) = A$D_k\hat{x}$(k) + $G_k\hat{x}$(k) pour tout k $\in \mathbb{Z}$, donc (ikD_k-AD_k - G_k)$\hat{x}$(k)=0. Il en résulte que $\hat{x}(k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et donc d'après la remarque 1.3.14, $x(t) = 0$, i.e $x_1 = x_2$.■

Si on suppose que l'équation (2.14) admet une solution unique, alors on a le théorème suivant :

Théorème 2.3.5 *: Soit X un espace de Banach. Supposons que pour chaque f dans $L^p(\mathbb{T}; X)$, il existe une unique L^p-solution forte et 2π-périodique de l'équation (2.14) pour $1 \leq p < +\infty$. Alors*

1. *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, Δ_k est inversible et borné*
2. *$\left\{ik\Delta_k^{-1}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est R-borné, où $\Delta_k = (ikD_k - AD_k - G_k)$.* ■

Avant de donner la preuve de ce théorème, on montre le lemme suivant :

Lemme 2.3.6 *: Soit X un espace de Banach. Si $(ikD_k - AD_k - G_k)(x) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, alors $u_t = e^{ikt}e_kx$ est 2π-periodique L^p-solution forte de l'équation (2.14) correspond à $f = 0$.* ■

Preuve : On a $(ikD_k - AD_k - G_k)(x) = 0$, cela implique que $ikD_kx = AD_kx + G_kx$
$\Rightarrow$ ikx = ikL_kx + AD_kx + G_kx.

Nous avons $u_t = e^{ikt}e_kx$, donc

$u_t' = \mathrm{ik}e^{ikt}e_k\mathrm{x} = e^{ikt}e_k(\mathrm{ikx}) = e^{ikt}e_k[\mathrm{ik}L_k\mathrm{x} + \mathrm{A}D_k\mathrm{x} + G_k\mathrm{x}]$

$= \mathrm{ik}e^{ikt}e_kL_k\mathrm{x} + e^{ikt}e_k\mathrm{A}D_k\mathrm{x} + e^{ikt}e_kG_k\mathrm{x}$

$= \mathrm{ikL}(e^{ikt}e_k\mathrm{x}) + \mathrm{AD}(e^{ikt}e_k\mathrm{x}) + \mathrm{G}(e^{ikt}e_k\mathrm{x})$

$= \mathrm{ikL}(u_t) + \mathrm{AD}(u_t) + \mathrm{G}(u_t)$

$= (Lu_t)' + \mathrm{AD}(u_t) + \mathrm{G}(u_t)$,

donc

$(u_t - Lu_t)' = \mathrm{AD}(u_t) + \mathrm{G}(u_t)$,

par conséquent, on a : $(Du_t)' = \mathrm{AD}(u_t) + \mathrm{G}(u_t)$. ■

Preuve de théorème 2.3.5 :

1) Montrons que Δ_k est surjectif. En effet soit $\underline{y \in X}$.

Pour $f(t) = e^{ikt}y, \exists x \in H^{1,p}(\mathbb{T}; X)$ tel que : $\frac{d}{dt}\mathrm{D}x_t = \mathrm{A}(\mathrm{D}x_t) + \mathrm{G}(x_t) + \mathrm{f(t)}$

Par application de la transformée de Fourier et puisque G et D sont linéaires et bornés, on obtient

$\widehat{(Dx_.)'}(\mathrm{k}) = \hat{x}'(\mathrm{k})$ - $\widehat{(Lx_.)'}(k)$.

Par la proposition 1.3.12, la proposition 1.3.13 et le lemme 1.3.15, nous avons :

$\hat{x}'(\mathrm{k})$ - $\widehat{(Lx_.)'}(\mathrm{k}) = \mathrm{ik}\ \hat{x}(\mathrm{k})$ - ik $L_k\hat{x}(\mathrm{k})$= ik(I - Ł$_k$)$\hat{x}(\mathrm{k}) = \mathrm{ik}D_k\hat{x}(\mathrm{k})$. Par conséquent, on a :

$\mathrm{ik}D_k\hat{x}(\mathrm{k}) = \mathrm{A}D_k\ \hat{x}(\mathrm{k}) + G_k\hat{x}(\mathrm{k}) + \hat{f}(\mathrm{k})$, c'est à dire

(ikD_k-AD_k- G_k)$\hat{x}$(k)= $\hat{f}$(k)= y $\Rightarrow$ (ikD_k-AD_k- G_k) est surjectif.

Maintenant montrons que Δ_k est injectif. Soit $\underline{(\mathrm{ik}D_k\text{-}\mathrm{A}D_k\text{-}\ G_k)(\mathrm{u}) = 0}$, alors d'apès le lemme 2.3.6, $x_t = e^{ikt}e_k$u est 2π-périodique L^p-solution forte du problème (2.14) correspondant à la fonction $f = 0$, or 0 est une autre solution de cette équation, et d'après le lemme 2.3.4, $x_t = 0$ donc $u = 0$ alors (ikD_k-AD_k- G_k) est injectif. Ainsi (ikD_k-AD_k- G_k) est bijectif. Or L et G sont bornés, donc d'après le lemme 1.1.9 (2), on a $\Delta_k = (ikD_k - AD_k - G_k)$ est inversement borné.

2) Soit f $\in L^p(\mathbb{T}\,; X)$. Par hypothèse, il existe une unique $x \in H^{1,p}(\mathbb{T}, X)$ telle que l'équation (2.14) est vérifiée. D'après ce qui précède, on a :

$\hat{x}$(k) $= (ikD_k - AD_k - G_k)^{-1}$ $\hat{f}$(k) pour tout $k \in \mathbb{Z}$, d'où

ik$\hat{x}$(k)= ik $(ikD_k - AD_k - G_k)^{-1}$ $\hat{f}$(k) pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

D'autre part, puisque $x \in H^{1,p}(\mathbb{T}; X)$, il existe $v \in L^p(\mathbb{T}; X)$ tel que $\hat{v}$(k)=ik$\hat{x}$(k), c'est-à-dire $\left\{ik\Delta_k^{-1}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est un L^p-multiplicateur, donc $\left\{ik\Delta_k^{-1}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est R-borné et par la proposition 1.3.29, la preuve est terminée. ■

2.3.2.2 Critère de solution faible

Dans de nombreuses applications, l'opérateur A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe $(T(t))_{t\geq 0}$ sur l'espace X.

Définition 2.3.7 *: Supposons que A génère un C_0-semigroupe $(T(t))_{t\geq 0}$ sur X. Une fonction x est dite L^p-solution faible et 2π-périodique de problème (2.14), si $D\varphi \in D(A)$ et $Dx_t = T(t)D\varphi + \int_0^t T(t-s)(G(x_s) + f(s))ds$, $0 \leq t \leq 2\pi$.* ■

Si on suppose que l'équation (2.14) admet une solution faible, alors on a le théorème suivant :

Théorème 2.3.8 *: Supposons que A génère un C_0-semigroupe $(T(t))_{t\geq 0}$ sur X, et soit $f \in L^p(\mathbb{T}; X)$ pour $1 \leq p < \infty$; si x est une L^p-solution faible et 2π-périodique de l'équation (2.14), alors $(ikD_k - AD_k - G_k)\hat{x}(k) = \hat{f}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.* ■

Avant de donner la preuve de ce théorème, on montre le lemme suivant :

Lemme 2.3.9 *: Supposons que A génère un C_0-semigroupe $(T(t))_{t\geq 0}$ sur X et que x est une L^p-solution faible et 2π-périodique d'équation. (2.14) tel que $\int_0^t Dx_s ds \in D(A)$, alors $Dx_t = D\varphi + A\int_0^t Dx_s ds + \int_0^t (Gx_s + f(s))ds, 0 \leq t \leq 2\pi$.* ■

Preuve. Supposons que x est une L^p-solution faible et 2π-périodique de l'équation. (2.14), alors Dx_t =T(t)Dφ + $\int_0^t$T(t-s)(Gx_s + f(s))ds.

Par intégration et par application de l'opérateur A, on a :

A$\int_0^t$D$x_s$ds = A$\int_0^t$T(s)Dφds + A$\int_0^t\int_0^s$T(t-ξ)(G(x_ξ) + f(ξ))dξds. Par la proposition 1.1.28 (1) et la remarque 2.2.6 on obtient :

A$\int_0^t$D$x_s$ds = - Dφ+T(t)Dφ+$\int_0^t$(T(t-s)-I)(G(x_s)+f(s))ds, i.e,

T(t)Dφ+$\int_0^t$T(t-s)(G(x_s)+f(s))ds=A$\int_0^t$D$x_s$ds+ Dφ+$\int_0^t$(G(x_s)+f(s))ds.

Par hypothèse, nous avons : Dx_t =T(t)Dφ+$\int_0^t$T(t-s)(Gx_s+f(s))ds,

donc

$Dx_t = D\varphi + A\int_0^t Dx_s ds + \int_0^t (Gx_s + f(s))ds.$■

Preuve de théorème 2.3.8. Soit x une L^p-solution faible et 2π-périodique de l'équation (2.14), alors d'après le lemme 2.3.9, on a

Dx_t = Dφ + A$\int_0^t$D$x_s$ds + $\int_0^t$(Gx_s + f(s))ds

Pour $t = 2\pi$, on a

D$x_{2\pi}$ = Dφ + A$\int_0^{2\pi}$D$x_s$ds + $\int_0^{2\pi}$(Gx_s + f(s))ds ;

Nous avons : D$x_{2\pi}$ = Dφ, donc

A$\int_0^{2\pi}$D$x_s$ds + $\int_0^{2\pi}$(Gx_s + f(s))ds=0

$\frac{1}{2\pi}$A$\int_0^{2\pi}$D$x_s$ds +$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}$(G$x_s + f(s))ds = 0 \ \ (Dx_s = x_s - L(x_s))$

= $\frac{1}{2\pi}$A$\int_0^{2\pi}$(x(s)- Lx_s)ds +$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i0s}Gx_s$ds + $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i0s}$f(s)ds=0

$\frac{1}{2\pi}$A$\int_0^{2\pi} e^{-i0s}$(x(s)- Lx_s)ds + $G(e_0\hat{x}(0)) + \hat{f}(0) = 0$(lemme 1.3.15)

A($\hat{x}(0)$ - $L_0\hat{x}(0)$) + $G_0\hat{x}(0)$ + $\hat{f}(0)$ =0

A$D_0\hat{x}(0)$ + $G_0\hat{x}(0)$ + $\hat{f}(0)$ =0

(AD_0+ G_0)$\hat{x}(0)$+ $\hat{f}(0) = 0$.

Donc, pour $k = 0$, on a

$$(0 - AD_0 - G_0)\hat{x}(0) = \hat{f}(0). \tag{2.15}$$

Il reste à vérifier pour $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$. En effet, on définit $v(t) = \int_0^t Dx_s ds$

et $g(t) = Dx_t - D\varphi - \int_0^t (G(x_s) + f(s))ds$.

D'après la proposition 1.3.12, la proposition 1.3.13 (2) et le lemme 1.3.15, nous avons :

$\hat{v}$(k)=$\frac{i}{k}D_0\hat{x}(0)$ - $\frac{i}{k}D_k\hat{x}(k) \Rightarrow$ A$\hat{v}$(k)=$\frac{i}{k}$A$D_0\hat{x}(0)$ - $\frac{i}{k}$A$D_k\hat{x}$(k)

$\hat{g}$(k)=$D_k\hat{x}$(k)-[$\frac{i}{k}G_0\hat{x}(0)$ - $\frac{i}{k}G_k\hat{x}$(k)]-[$\frac{i}{k}\hat{f}(0)$ - $\frac{i}{k}\hat{f}$(k)]

$\hat{g}$(k)=$D_k\hat{x}$(k)-$\frac{i}{k}G_0\hat{x}(0)$ + $\frac{i}{k}G_k\hat{x}$(k)-$\frac{i}{k}\hat{f}(0)$+ $\frac{i}{k}\hat{f}$(k).

Alors

ik$D_k\hat{x}$(k) + $G_0\hat{x}(0)$ - $G_k\hat{x}$(k)+$\hat{f}(0)$- $\hat{f}$(k)= -A$D_0\hat{x}(0)$+A$D_k\hat{x}$(k)

$\Leftrightarrow$ [ik$D_k\hat{x}$(k) -A$D_k\hat{x}$(k)-$G_k\hat{x}$(k)-$\hat{f}$(k)]-[-A$D_0\hat{x}(0)$-$G_0\hat{x}(0)$-$\hat{f}(0)$]=0

$\Leftrightarrow$ ik$D_k\hat{x}$(k) -A$D_k\hat{x}$(k)-$G_k\hat{x}$(k)-$\hat{f}$(k) = 0 (d'après 2.15).

Donc, pour tout $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, on a

$$(ikD_k - AD_k - G_k)\hat{x}(k) = \hat{f}(k), \tag{2.16}$$

et d'après (2.15) et (2.16), on a, $(ikD_k - AD_k - G_k)\hat{x}(k) = \hat{f}(k)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. ■

Corollaire 2.3.10 *: Supposons que A génère un C_0-semigroupe $(T(t))_{t\geq 0}$ sur X et que x est une L^p-solution faible et 2π-périodique de l'équation (2.14) et Δ_k est inversement borné, alors Δ_k^{-1} est un L^p-multiplicateur, où $\Delta_k = (ikD_k - AD_k - G_k)$.*

■

Preuve. D'après le théorème 2.3.9, on a $(ikD_k - AD_k - G_k)\hat{x}(k) = \hat{f}(k)$. D'où, $\hat{x}(k) = (ikD_k - AD_k - G_k)^{-1}\hat{f}(k)$, pour tout $f \in L^p(\mathbb{T}; X)$.

2.3.3 Résultat de solution 2π-périodique

Notre résultat principal dans cette section est d'établir la réciproque du théorème 2.3.5.

Théorème 2.3.11 *: Soit X un espace de Banach de type UMD et soit $1 < p < +\infty$. Supposons que les hypothèses (1), (2) et (3) sont satisfaites et que $\sigma_{\mathbb{Z}}(\Delta) = \phi$ et $\{ik\Delta_k^{-1}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est R-borné, alors pour tout $f \in L^p(\mathbb{T}; X)$, il existe une unique L^p-solution forte et 2π-périodique de l'équation (2.14).* ■

Preuve.

Existence : Soit f $\in L^p(\mathbb{T}\,;\,\mathrm{X})$. On a $\left\{ik\Delta_k^{-1}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est R-borné, et d'après la proposition 2.3.3, $\left\{ik\Delta_k^{-1}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est un L^p-multiplicateur, ce qui équivaut à dire que par le lemme 1.3.33, la famille $\left\{\Delta_k^{-1}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est un L^p-multiplicateur de $L^p(\mathbb{T}\,;\mathrm{X})$ dans $H^{1,p}(\mathbb{T}\,;\mathrm{X})$. Donc il existe $x \in H^{1,p}(\mathbb{T}, X)$ tel que

$\hat{x}(\mathrm{k})=\Delta_k^{-1}\hat{f}(\mathrm{k})= (ikD_k - AD_k - G_k)^{-1}\hat{f}(\mathrm{k})$, donc $(ikD_k - AD_k - G_k)\hat{x}(k) = \hat{f}(k)$.

D'où

$$ikD_k\hat{x}(k) = AD_k\hat{x}(k) + G_k\hat{x}(k) + \hat{f}(k). \tag{2.17}$$

On a $x \in L^p(\mathbb{T}\,;\,\mathrm{X})$ et il existe $v \in L^p(\mathbb{T}; X)$ tel que $\hat{v}(\mathrm{k}) = \mathrm{ik}\ \hat{x}(\mathrm{k})$, donc

$$\widehat{(Dx_.)}'(k) := D_k\hat{v}(k) = ikD_k\hat{x}(k). \tag{2.18}$$

D'après le théorème de Fejer, on a dans $L^p(\mathbb{T}; X)$

$x_t(\theta) = x(t+\theta) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=-m}^{m}e^{ikt}e^{ik\theta}\hat{x}(\mathrm{k})$.

Par conséquent, dans $L^p(\mathbb{T}\,;\,\mathrm{X})$ on obtient

$x_t = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=-m}^{m}e^{ikt}e_k\hat{x}(\mathrm{k})$

Puisque G est linéaire et bornée, on a

$\mathrm{G}x_t = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=-m}^{m}e^{ikt}\mathrm{G}(e_k\hat{x}(\mathrm{k}))$

$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=-m}^{m}e^{ikt}G_k\hat{x}(k)$.

D'après (2.17) et (2.18) nous avons

$\widehat{(Dx_.)}'(\mathrm{k}) = \mathrm{ik}D_k\hat{x}(\mathrm{k}) = \mathrm{A}D_k\hat{x}(\mathrm{k}) + G_k\hat{x}(\mathrm{k}) + \hat{f}(k)$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

A est fermé, donc d'après le lemme 2.1.7, on a $Dx_t \in D(A)$ et

$\frac{d}{dt}(Dx_t) = ADx_t + Gx_t + f(t)$.

Périodicité : On a $x \in H^{1,p}(\mathbb{T}, X)$. D'après (α) dans la notation 1.3.19, ils existent $v \in L^p(\mathbb{T}, X)$ et $u \in X$ tel ques $\int_0^{2\pi} v(s)ds = 0$ et $x(t) = u + \int_0^t v(s)ds$, donc $x(0) = u = x(2\pi)$, d'où x est 2π-périodique.

Unicité : Supposons que l'équation (2.14) admet deux solutions x_1 et x_2, alors $x = x_1 - x_2$ est une solution forte de l'équation (2.14) corespond à la fonction $f = 0$, appliquons la transformée de fourier, on trouve $(ikD_k - AD_k - G_k)\hat{x}(k) = 0$, d'où $\hat{x}(k) = \Delta_k^{-1}.0 = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$ et d'après la remarque 1.3.14, $x(t) = 0$ ce qui implique que $x_1 = x_2$.■

Maintenant montrons le résultat principal dans le cas où A génère un C_0-semigroupe.

Théorème 2.3.12 *: Supposons que A génère un C_0-semigroupe $(T(t))_{t\geq 0}$ sur X. Si $(ikD_k - AD_k - G_k)^{-1}$ est un L^p-multiplicateur, alors il existe une solution unique faible et 2π-périodique de l'équation. (2.14).* ■

Preuve. Soit $f \in L^p(\mathbb{T}; X)$, alors d'après le théorème de Fejer ; on a

$$f(t) = lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=-m}^{m} e^{ikt} \hat{f}(\mathrm{k}).$$

$(ikD_k - AD_k - G_k)^{-1}$ est un L^p-multiplicateur, donc il existe

$x \in L^p(\mathbb{T}; X)$ tel que $\hat{x}(\mathrm{k}) = (ikD_k - AD_k - G_k)^{-1}\hat{f}(\mathrm{k})$

posons $x_{t,n}(.) = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=-m}^{m} e^{ik(t+.)}(ikD_k - AD_k - G_k)^{-1}\hat{f}(\mathrm{k})$

$x_{t,n}(.) = \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=-m}^{m} e^{ikt}e_k\hat{x}(k)$,

alors d'après le Théorème de Fejer (Théorème 1.3.17) on a $x_{t,n} \to x_t$ (n→∞), de plus $x_{t,n}$ vérifie l'équation (2.14) (même démonstration que dans le théorème 2.2.11) c'est à dire

$$\frac{d}{dt}(Dx_{t,n}) = A(Dx_{t,n}) + L((x_{t,n})) + f_n(t)$$

soit $h(s) = T(t-s)Dx_{t,n}$,

donc, d'après la proposition 1.1.28 on a :

$\frac{d}{ds}h(s) = -AT(t-s)Dx_{s,n} + T(t-s)[A(Dx_{s,n}) + G(x_{s,n}) + f_n(t)]$

$= T(t-s)[G(x_{s,n}) + f_n(s)]$. On intégre de 0 à t, on obtient,

$h(t) = h(0) + \int_0^t T(t-s)(G(x_{s,n}) + f_n(s))ds$, c'est à dire que

D$x_{t,n}$ = T(t)Dφ_n+ $\int_0^t$T(t-s)(G($x_{s,n}$) + f_n(s))ds,

soit y_n = Dφ_n = $Dx_{0,n}$ donc

D$x_{t,n}$ = T(t)y_n+ $\int_0^t$T(t-s)(G($x_{s,n}$) + f_n(s))ds.

Pour $t = 2\pi$ on a

D$x_{2\pi,n}$ = T(2π)y_n+ $\int_0^{2\pi}$T(2π-s)(G(($x_{s,n}$)) + f_n(s))ds.

Or D$x_{2\pi,n}$ = Dφ_n, d'où

$$y = T(2\pi)y + \int_0^{2\pi} T(2\pi - s)(G(x_s) + f(s))ds \tag{2.19}$$

D$x_{t,n}$ = T(t)y_n+ $\int_0^t$T(t-s)(G($x_{s,n}$) + f_n(s))ds (quand n→∞)

Dx_t = T(t)y+ $\int_0^t$T(t-s)(G(x_s) + f(s))ds := g(t)

Dx_t = g(t)

$g(2\pi) = T(2\pi)y + \int_0^{2\pi} T(2\pi - s)(G(x_s) + f(s))ds = y$ d'après (2.19) et $g(0) = y$.

Alors D$x_{2\pi}$ = D$\varphi \Rightarrow x_{2\pi}(.) = x_0(.)$, d'où x est 2π- périodique solution faible d'équation. (2.14). ■

2.3.4 Exemples

Soit A un opérateur linéaire fermé et X un espace de Hilbert, tel que $i\mathbb{Z} \subset \rho(A)$ et $R_p(k(ikD_k - AD_k)^{-1}) =: M < \infty$. Supposons que $\|G\| < \frac{1}{(2r_{2\pi})^{1/p}M}$ par exemple $G(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} a_k\varphi(r_k), r_k \in [-r_{2\pi}, 0]$ et $a_k \in \mathbb{B}(X)$ tel que $\sum_{k=0}^{n} |a_k| < \frac{1}{(2r_{2\pi})^{1/p}M}$.

Alors d'après la remarque 2.2 (a) dans [42] nous obtenons

$sup_k \|k(ikD_k - AD_k - G_k)^{-1}\| \leq R_p(k(ikD_k - AD_k)^{-1}) = M$. D'après l'identité $ikD_k - AD_k - G_k = (ikD_k - AD_k)(I - G_k(ikD_k - AD_k)^{-1})$, il en resulte que $(ikD_k - AD_k - G_k)$ est inversible si $\|G_k(ikD_k - AD_k)^{-1}\| < 1$. [39, Theorem1.1.7].

$\|G_k\| \leq (2r_{2\pi})^{1/p} \|G\|$,

d'où $\|G_k(ikD_k - AD_k)^{-1}\| = \|G_k(ikD_k - AD_k)^{-1}\| \leq (2r_{2\pi})^{1/p} \|G\| M := \alpha < 1$.

Donc $\sigma_{\mathbb{Z}}(\Delta) = \phi$ et d'après Théorème 1.1.7 dans [39] nous avons

$(ikD_k - AD_k - G_k)^{-1} = (ikD_k - AD_k)^{-1}(I - G_k(ikD_k - AD_k)^{-1})^{-1}$

$=(ikD_k - AD_k)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty}[G_k(ikD_k - AD_k)^{-1}]^n$

$R_p(ik(ikD_k - AD_k)^{-1}[G_k(ikD_k - AD_k)^{-1}]^n$

$\leq R_p(ik(ikD_k - AD_k)^{-1}[R_p(G_k(ikD_k - AD_k)^{-1})]^n$

$\leq R_p(ik(ikD_k - AD_k)^{-1}[R_p(G_k)]^n[R_p((ikD_k - AD_k)^{-1})]^n$

$\leq R_p(ik(ikD_k - AD_k)^{-1}((2r_{2\pi})^{1/p} \|G\|)^n M^n$

$=R_p(ik(ikD_k - AD_k)^{-1}\alpha^n$

Finalement $R_p((ikD_k - AD_k - G_k)^{-1} \leq R_p(ik(ikD_k - AD_k)^{-1})\frac{1}{1-\alpha} \leq \frac{M+1}{1-\alpha}$,

ce qui montre que $\{(ik(D_k - AD_k - G_k)^{-1}, k \in \mathbb{Z}\}$ est R-borné, et d'après le théorème 2.3.11 il existe une unique L^p-solution forte et 2π-périodique de l'équation.(2.14).■

Chapitre 3

Solutions périodiques pour une classe d'équations différentielles du second ordre

3.1 Solutions périodiques d'équations différentielles du second ordre

Dans cette partie, nous étudions l'existence de solutions forte pour une classe d'équations différentielles sous la forme :

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \frac{d}{dt}Bx(t) + Ax(t) = G(x_t) + f(t) \tag{3.1}$$

Où $A : D(A) \subset X \to X$ et $B : D(B) \subset X \to X$ sont deux opérateurs linéaires fermés tel que $D(A) \subset D(B)$, et X est un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$. La fonction x_t donnée par $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ pour $\theta \in [-r, 0]$. $G \in B(L^p([-r_{2\pi}, 0], X); X)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés, et $f : \mathbb{R} \to X$ est une fonction 2π-periodic et localement p-intégrable pour $1 \leq p < +\infty$.

On suppose au cours de cette partie les hypothèses suivantes :

(1) L'opérateur B est borné avec $\|B\| = b$.

(2) $\{k(G_{k+1} - G_k), k \in \mathbb{Z}\}$ est R-borné avec $R_p(\{k(G_{k+1} - G_k), k \in \mathbb{Z}\}) = a$.

Dans cette partie on montre le théorème suivant.

Théorème : Soient X un espace de Banach de type UMD et $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire fermé. Alors pour $1 < p < +\infty$ les assertions suivantes sont équivalentes.

1. $\forall f \in L^p(\mathbb{T}; X)$, il existe une unique L^p-solution forte et 2π-périodique de l'équation (3.1)
2. $(-k^2I + ikB + A - G_k)$ inversement boré et $\{-k^2(-k^2I + ikB + A - G_k)^{-1})_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est R-borné. ■

3.1.1 Préliminaires

Notation 3.1.1

Notons : $G_k(x) := G(e_k x)$ *et* $e_k(t) := e^{ikt} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$\Delta_k = (-k^2I + ikB + A - G_k)$ *et* $\sigma_{\mathbb{Z}}(\Delta) = \{k \in \mathbb{Z} : \Delta_k \ \ n'a \ \ pas \ \ d'inverse\}$.

$H^{2,p}(\mathbb{T}; X) = \{u \in H^{1,p}(\mathbb{T}; X) : u' \in H^{1,p}(\mathbb{T}; X)\}$. ■

$u \in H^{2,p}(\mathbb{T}; X) \Leftrightarrow u \in H^{1,p}(\mathbb{T}; X)$ et $u' \in H^{1,p}(\mathbb{T}; X)$

$\Leftrightarrow u \in H^{1,p}(\mathbb{T}; X)$ et $\exists v \in L^p(\mathbb{T}; X)$ tel que $\hat{v}(k) = ik\hat{u'}(k)$

$\Leftrightarrow u \in H^{1,p}(\mathbb{T}; X) : \exists v \in L^p(\mathbb{T}; X)$ tel que $\hat{v}(k) = -k^2\hat{u}(k)$

Donc

$H^{2,p}(\mathbb{T}; X) = \{u \in H^{1,p}(\mathbb{T}; X) : \exists v \in L^p(\mathbb{T}; X), \hat{v}(k) = -k^2\hat{u}(k), \forall k \in \mathbb{Z}\}$.

Définition 3.1.2 *: Soit $1 \leq p < \infty$, on dit que $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset B(X,Y)$ est un $(L^p, H^{2,p})$-multiplicateur si pour chaque $f \in L^p(\mathbb{T};X)$, il existe $g \in H^{2,p}(\mathbb{T};Y)$ tel que $\hat{g}(k) = M_k\hat{f}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.* ■

3.1.2 Critère de solution périodique

Définition 3.1.3 *: Soit $f \in L^p(\mathbb{T};X)$. Une fonction $x \in H^{2,p}(\mathbb{T};X)$ est dite 2π-périodique L^p-solution forte de (3.1) si $x(t) \in D(A)$, $x(0) = x(2\pi), x'(0) = x'(2\pi)$ et x vérifie l'équation (3.1) p.p $t \in [0; 2\pi]$.* ■

Proposition 3.1.4 *: Soient A un opérateur linéaire fermé et X un espace UMD. Supposons que $\sigma_{\mathbb{Z}}(\Delta) = \emptyset$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $(-k^2(-k^2I + ikB + A - G_k)^{-1})_{k\in\mathbb{Z}}$ est un L^p-multiplicateur pour $1 < p < \infty$

(ii)$(-k^2(-k^2I + ikB + A - G_k)^{-1})_{k\in\mathbb{Z}}$ est R-borné.

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii) est une consésquence de la Proposition 1.3.29

(ii) $\Rightarrow$ (i) Posons $R_p\{M_k, k \in \mathbb{Z}\} = d$, et $M_k = -k^2N_k$, avec

$N_k = (C_k + A)^{-1}$ et $C_k := -k^2I + ikB - G_k$. Donc d'après le théorème 1.3.31 il suffit de montrer que $\{k(M_{k+1} - M_k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est R-borné. En effet,

soit $x_j \in D(A)$, alors on a

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} r_j j(M_{j+1} - M_j)x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$$

$=\left\|\sum_{j=1}^n r_j(j[-(j+1)^2(C_{j+1}+A)^{-1}+j^2(C_j+A)^{-1}])x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$
$=\left\|\sum_{j=1}^n r_j j N_{j+1}[-(j+1)^2(C_j+A)+j^2(C_{j+1}+A)]N_j x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$
$=\left\|\sum_{j=1}^n r_j j N_{j+1}[-j^2(C_j-C_{j+1})-(2j+1)(C_j+A)]N_j x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$
$=\left\|\sum_{j=1}^n r_j [j N_{j+1}(C_j-C_{j+1})(-j^2N_j)-j(2j+1)N_{j+1}]x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$
$=\left\|\sum_{j=1}^n r_j [\frac{-j}{(j+1)^2}M_{j+1}(C_j-C_{j+1})M_j+\frac{j(2j+1)}{(j+1)^2}M_{j+1}]x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$
$\leq \left\|\sum_{j=1}^n r_j [\frac{-j}{(j+1)^2}M_{j+1}(C_j-C_{j+1})M_j]x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}+\left\|\sum_{j=1}^n r_j [\frac{j(2j+1)}{(j+1)^2}M_{j+1}]x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$
$\leq \left\|\sum_{j=1}^n r_j [\frac{-j}{(j+1)^2}M_{j+1}(C_j-C_{j+1})M_j]x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}+2d\left\|\sum_{j=1}^n r_j x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$,

puisque

$C_j-C_{j+1}=-j^2I+ijB-G_j+(j+1)^2I-i(j+1)B+G_{j+1},$

$=(2j+1)I-iB+(G_{j+1}-G_j)$, alors on a :

$\left\|\sum_{j=1}^n r_j [\frac{-j}{(j+1)^2}M_{j+1}(C_j-C_{j+1})M_j]x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$
$\leq \left\|\sum_{j=1}^n r_j M_{j+1}[\frac{-j(2j+1)}{(j+1)^2}I+\frac{ij}{(j+1)^2}B-\frac{1}{(j+1)^2}(j(G_{j+1}-G_j))]M_j x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$
$\leq d^2(2+b+a)\left\|\sum_{j=1}^n r_j x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$.
Enfin, on a $\left\|\sum_{j=1}^n r_j j(M_{j+1}-M_j)x_j\right\|_{L^p(0,1;X)} \leq (d^2(2+b+a)+2d)\left\|\sum_{j=1}^n r_j x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$,
d'où $\{k(M_{k+1}-M_k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est R-borné avec

$$R_p(\{k(M_{k+1}-M_k), k\in\mathbb{Z}\}\leq d^2(2+b+a)+2d,$$

et la preuve est terminée.■

Théorème 3.1.5 *: Soient A un opérateur linéaire fermé et X un espace de Banach. Supposons que $\sigma_{\mathbb{Z}}(\Delta)=\emptyset$ et que pour chaque $f\in L^p(\mathbb{T};X)$, il existe une unique L^p-solution forte et 2π-périodique de l'équation (3.1) pour $1\leq p<\infty$, alors*

$(-k^2\Delta_k^{-1})_{k\in\mathbb{Z}}$ *est R-borné où* $\Delta_k = (-k^2I + ikB + A - G_k)$.

Preuve. Soit $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$. Par hypothèse il existe un unique $x \in H^{2,p}(\mathbb{T}, X)$, vérifiant (3.1). Par application de la transformée de Fourier, on en déduit que $-k^2\hat{x}(k)+ikB\hat{x}(k)+A\hat{x}(k) = G_k\hat{x}(k)+\hat{x}(k)$, donc $(-k^2I+ikB+A-G_k)\hat{x}(k) = \hat{f}(k)$, ce qui implique que $\hat{x}(k) = \Delta_k^{-1}\hat{f}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. D'où $-k^2\hat{x}(k) = -k^2\Delta_k^{-1}\hat{f}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. D'autre part, puisque $x \in H^{2,p}(\mathbb{T}, X)$, il existe $v \in L^p(\mathbb{T}, X)$ tel que $\hat{v}(k) = -k^2\hat{x}(k) = -k^2\Delta_k^{-1}\hat{f}(k)$, c'est-à-dire que $(-k^2\Delta_k^{-1})_{k\in\mathbb{Z}}$ est un L^p-multiplicateur, donc d'après la proposition 1.3.29 $(-k^2\Delta_k^{-1})_{k\in\mathbb{Z}}$ est R-borné. ■

3.1.3 Existence de la solution forte

Notre résultat principal dans cette section est d'établir la réciproque du théorème 3.1.5.

Lemme 3.1.6 *Soient* $1 \le p < \infty$ *et* $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset B(X)$*, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est un* $(L^p, H^{2,p})$*-multiplicateur.*

(ii) $(-k^2M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est un* (L^p, L^p)*-multiplicateur.* ■

Preuve : $(i) \Rightarrow (ii)$. Soit $f \in L^p(\mathbb{T}; X)$, par hypothèse, il existe $v \in H^{2,p}(\mathbb{T}; X)$ tel que $\hat{g}(k) = M_k\hat{f}(k)$, donc il existe $g \in L^p(\mathbb{T}; X)$ tel que $\hat{g}(k) = -k^2\hat{v}(k) = (-k^2M_k)\hat{f}(k)$ et par suite $(-k^2M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un (L^p, L^p)-multiplicateur.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Soit $f \in L^p(\mathbb{T}; X)$, par hypothèse, il existe $v \in L^p(\mathbb{T}; X)$ tel que $\hat{v}(k) =$

$-k^2M_k\hat{f}(k) = ik(ikM_k)\hat{f}(k)$, donc $(ik(ikM_k))_{k\in\mathbb{Z}}$ est un (L^p, L^p)-multiplicateur et d'après le lemme 1.3.33, on a $(ikM_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un $(L^p, H^{1,p})$-multiplicateur c'est à dire qu' il existe $\underline{g \in H^{1,p}(\mathbb{T}; X)}$: $\hat{g}(k) = ikM_k\hat{f}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, en particulier $\hat{g}(0) = 0$.

Soit $w(t) = \int_0^t g(s)ds$. Alors d'après la proposition 1.3.13 (2) :

$\hat{w}(k) = \frac{i}{k}\hat{g}(0) - \frac{i}{k}\hat{g}(k) = \frac{1}{ik}\hat{g}(k) = M_k\hat{f}(k)$ pour $k \neq 0$.

Soit $h = w + M_0\hat{f}(0) - \hat{w}(0)$, alors $h(t) = x + \int_0^t g(s)ds$ où $x = h(0)$ et $\int_0^{2\pi} g(s)ds = 2\pi\hat{g}(0) = 0$. Ainsi d'après (α) dans la notation 1.3.19 : $\underline{h \in H^{1,p}(\mathbb{T}; X)}$ et $\underline{h' = g \in H^{1,p}(\mathbb{T}; X)}$, de plus on a $\hat{h}(k) = \hat{w}(k) + 0 = \hat{w}(k) = M_k\hat{f}(k)$ pour $k \neq 0$ et $\hat{h}(0) = M_0\hat{f}(0)$, en effet $\hat{h}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(t)dt + M_0\hat{f}(0) - \hat{w}(0) = \hat{w}(0) + M_0\hat{f}(0) - \hat{w}(0) = M_0\hat{f}(0)$. Alors il existe $h \in H^{2,p}(\mathbb{T}; X)$ tel que $\hat{h}(k) = M_k\hat{f}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un $(L^p, H^{2,p})$-multiplicateur. ■

Théorème 3.1.7 *: Soient X un espace de Banach de type UMD et $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire fermé et $\sigma_{\mathbb{Z}}(\Delta) = \emptyset$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes pour $1 < p < \infty$.*

1. *Pour chaque $f \in L^p(\mathbb{T}; X)$, il existe une unique L^p-solution forte et 2π-périodique de l'équation (3.1)*
2. *$\{-k^2(-k^2I + ikB + A - G_k)^{-1})\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est R-borné.* ■

Preuve : 1)⇒2) Voir théorème 3.1.5

1)⇐2) **<u>Existence</u>** : Soit f $\in L^p(\mathbb{T}\,;\,$X). On a $\left\{ik\Delta_k^{-1}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est R-borné, donc d'après la proposition 3.1.4, $\left\{ik\Delta_k^{-1}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est un L^p-multiplicateur, ce qui équivaut à dire que la famille $\left\{\Delta_k^{-1}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est un L^p-multiplicateur de $L^p(\mathbb{T};\mathrm{X})$ dans $H^{2,p}(\mathbb{T};\mathrm{X})$, c'est-à-dire, il existe $x \in H^{2,p}(\mathbb{T}, X)$ tel que

$\hat{x}(\mathrm{k})$=$\Delta_k^{-1}\hat{f}(\mathrm{k})$= $(-k^2I + ikB + A - G_k)^{-1}\hat{f}(\mathrm{k})$, donc $(-k^2I + ikB + A - G_k)\hat{x}(k) = \hat{f}(k)$, d'où

$$-k^2\hat{x}(k) + ikB\hat{x}(k) + A\hat{x}(k) = G_k\hat{x}(k) + \hat{f}(k) \tag{3.2}$$

en particulier, $x \in L^p(\mathbb{T};\mathrm{X})$ et il existe $v \in L^p(\mathbb{T}; X)$ tel que $\hat{v}(\mathrm{k}) = -k^2\hat{x}(\mathrm{k})$, donc selon le lemme 1.3.18, on a $\widehat{x'}(\mathrm{k}) := \hat{v}(\mathrm{k}) = \mathrm{ik}\hat{x}(\mathrm{k})$, d'où

$$\widehat{x''}(k) = ik\hat{x'} = ikik\hat{x}(k) = -k^2\hat{x}(k). \tag{3.3}$$

D'après le théorème de Fejer (théorème 1.3.17), on a dans $L^p(\mathbb{T}; X)$

$x_t(\theta) = x(t+\theta) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=-m}^{m}e^{ikt}e^{ik\theta}\hat{x}(\mathrm{k})$

Par conséquent, dans $L^p(\mathbb{T};\mathrm{X})$ on obtient

$x_t = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=-m}^{m}e^{ikt}e_k\hat{x}(\mathrm{k})$

Puisque G est linéaire et bornée, on a :

$\mathrm{G}x_t = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=-m}^{m}e^{ikt}\mathrm{G}(e_k\hat{x}(\mathrm{k}))$

$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=-m}^{m}e^{ikt}G_k\hat{x}(k)$.

D'après (3.2) et (3.3) nous avons :

$\widehat{x''}(k) + (\widehat{(Bx)'}(k) + A\hat{x}(k) = G_k\hat{x}(k) + \hat{f}(k)$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Alors, puisque A et B sont fermés et d'après le lemme 2.1.7, on a $x(t) \in D(A)$ et $\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \frac{d}{dt}Bx(t) + Ax(t) = G(x_t) + f(t)$.

Périodicité : On a, $x \in H^{2,p}(\mathbb{T}, X)$, donc $x \in H^{1,p}(\mathbb{T}, X)$ et $x' \in H^{1,p}(\mathbb{T}, X)$ et d'après (α) dans la notation 1.3.19, $x(0) = x(2\pi)$ et $x'(0) = x'(2\pi)$.

Unicité : Supposons que l'équation (3.1) admet deux solutions x_1 et x_2, alors $x = x_1 - x_2$ est une solution forte de l'équation (3.1) correspond à la fonction $f = 0$, appliquons la transformée de fourier, on trouve $(-k^2 I + ikB + A - G_k)\hat{x}(k) = 0$, donc $\hat{x}(k) = (-k^2 I + ikB + A - G_k)^{-1}.0 = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$ et d'après la Remarque 1.3.14, $x(t) = 0$ ce qui implique que $x_1 = x_2$.$\blacksquare$

3.2 Equations différentielles dégénérées

3.2.1 Introduction

Dans cette partie, nous étudions l'existence de solutions forte pour une classe d'équations différentielles dégénérées sous la forme :

$$\frac{d^2}{dt^2}(M(x(t)) + Ax(t) + G(x_t) = f(t) \tag{3.4}$$

Où $A : D(A) \subseteq X \to X$ et $M : D(M) \subseteq X \to X$ deux opérateurs linéaires fermés tel que $D(A) \subset D(M)$. La fonction x_t est donnée par $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ pour $\theta \in [-r, 0]$. $G \in \mathbb{B}(L^p([-r_{2\pi}, 0], X); X)$ avec $r_{2\pi} = 2\pi n_0 (n_0 \in \mathbb{N})$ et $f : \mathbb{R} \to X$ est une fonction locallement p-intégrable et 2π-periodique pour $1 \leq p < +\infty$.

Il nous parait intéressant de rappeler quelques résultats établis pour des problèmes d'équations différentielles dégénérées.

C.Lizama a étudié l'existence et l'unicité des solutions 2π-périodiques fortes de l'équation différentielle dégénérée suivante :

$$\frac{d}{dt}(Mx(t)) = Ax(t) + f(t) \tag{3.5}$$

avec $A : D(A) \subseteq X \to X$ et $M : D(M) \subseteq X \to X$ sont deux opérateurs linéaires fermés tel que $D(A) \subset D(M)$ et $f : \mathbb{R} \to X$ une fonction locallement p-intégrable et 2π-périodique pour $1 \leq p < +\infty$.

Dans [8], Bu a étudié une nouvelle équation différentielle dégénérée qui généralise l'équation (3.5) :

$$\frac{d}{dt}(Mx(t)) = Ax(t) + L(x_t) + f(t), t \in \mathbb{R} \tag{3.6}$$

Où $L \in \mathbb{B}(L^p([-r_{2\pi}, 0], X); X)$

Remarquons que l'équation (3.5) a été étudié par Favini dans [23] comme suit :

$$\tfrac{d}{dt}(Mx(t)) + Ax(t) = f(t),$$

avec la condition de periodicité suivante : $Mx(0) = Mx(1)$.

Dans [7], Bu a pu montrer l'existence de solution d'équations dégénérées dans un espace de Holder.

Dans [6], Bu s'est intéressé aux équations dégénérées de second ordre suivantes :

$$\frac{d^2}{dt^2}(M(x(t)) = Ax(t) + f(t). \tag{3.7}$$

Pour notre part, nous généralisons les résultats de [6] aux équations dégénérées de second ordre (3.4). Nous utilisons le théorème 1.3.31, et on trouve le résultat suivant :

Théorème : Soient X est un espace UMD et $\sigma_{\mathbb{Z}}(\Delta) = \emptyset$.

On suppose que $\{(-k^2M + A + G_k)^{-1}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ et $\{-k^2M(-k^2M + A + G_k)^{-1}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sont R-bornés, alors l'équation (3.4) a une unique L^p-solution forte et 2π-périodique pour tout $f \in L^p(\mathbb{T}; X)$ avec $1 < p < \infty$. ■

3.2.2 Critère de solutions périodiques

Notation 3.2.1

Notons : $G_k(x) := G(e_k x)$ *et* $e_k(t) := e^{ikt}$ *pour tout* $k \in \mathbb{Z}$

$\Delta_k = (-k^2M + A + G_k)$ *et* $\sigma_{\mathbb{Z}}(\Delta) = \{k \in \mathbb{Z} : \Delta_k \textit{ n'est pas inversible}\}$.

$H^{1,p}_M(\mathbb{T}; X) = \{u \in L^p(\mathbb{T}; D(A)) : \exists v \in L^p(\mathbb{T}; X)$ *tel que* $\hat{v}(k) = ikM\hat{u}(k)\}$.

$H^{2,p}_M(\mathbb{T}; X) = \{u \in L^p(\mathbb{T}; D(A)) : \exists v \in L^p(\mathbb{T}; X)$ *tel que* $\hat{v}(k) = -k^2M\hat{u}(k)\}$. ■

Remarque 3.2.2 *:*

1) $x \in H^{1,p}_M(\mathbb{T}; X) \Longleftrightarrow x \in L^p(\mathbb{T}; D(A)), \exists v \in L^p(\mathbb{T}; X) : \hat{v}(0) = 0$ *et* $\exists a \in X$ *tel que* $Mx(t) = a + \int_0^t v(s)ds$.

2) Si $x \in H^{1,p}_M(\mathbb{T}; X)$*, alors* $Mx(0) = Mx(2\pi)$.

3)$H^{2,p}_M(\mathbb{T}; X) = \left\{u \in H^{1,p}_M(\mathbb{T}; X) : u' \in H^{1,p}_M(\mathbb{T}; X)\right\}$. ■

Nous imposons les conditions techniques suivantes :

(H_1) : $A : D(A) \subseteq X \to X$ et $M : D(M) \subseteq X \to X$ sont deux opérateurs linéaires fermés tel que $D(A) \subset D(M)$ avec M borné.

(H_2) : $G \in \mathbb{B}(L^p(\mathbb{T}, X); X)$.

Définition 3.2.3 *: Soient les hypothèses* (H_1) *et* (H_2) *satisfaites et* $f \in L^p(\mathbb{T}; X)$.

Une fonction $x \in H^{2,p}_M(\mathbb{T};X)$ est dite 2π-périodique L^p-solution forte de (3.4) si $x(t)$ vérifie l'équation (3.4) p.p $t \in [0, 2\pi]$. ■

Théorème 3.2.4 *: Soient les hypothèses (H_1) et (H_2) satisfaites et X un espace de Banach. Supposons que $\sigma_{\mathbb{Z}}(\Delta) = \emptyset$ et que pour chaque f dans $L^p(\mathbb{T};X)$, il existe un unique L^p-solution forte et 2π-périodique de l'équation (3.4) pour $1 \leq p < +\infty$, alors $\{(-k^2M + A + G_k)^{-1}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ et $\{-k^2M(-k^2M + A + G_k)^{-1}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sont R-bornés.*

Preuve : En appliquant la transformée de Fourier sur les deux côtés de l'équation (3.4), et par la proposition 1.3.13 et le lemme 1.3.15, on obtient

$-k^2M\hat{x}(k) + A\hat{x}(k) + G_k\hat{x}(k) = \hat{f}(k)$, ce qui implique que

$\hat{x}(k) = (-k^2M + A + G_k)^{-1}\hat{f}(k) \Rightarrow (-k^2M + A + G_k)^{-1}$ est un L^p-multiplicateur et alors R-borné. D'autre part, puisque $x \in H^{2,p}_M(\mathbb{T};X)$, il existe $v \in L^p(\mathbb{T};X)$ tel que $\hat{v}(k) = -k^2M\hat{x}(k)$, c'est-à-dire que $\{-k^2M(-k^2M + A + G_k)^{-1}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est un L^p-multiplicateur, donc d'après la proposition 1.3.29, $\{-k^2M(-k^2M + A + G_k)^{-1}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est R-borné. ■

Maintenant montrons le résultat principal de cette partie, pour cela on suppose que $\{k(G_{k+1} - G_k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est R-borné, tel que : $R_p(\{k(G_{k+1} - G_k)\}_{k\in\mathbb{Z}}) = b$, et notons $N_k = (C_k + A)^{-1}, C_k = -k^2M + G_k, S_k = -k^2MN_k$ et $T_k = G_kN_k$.

Théorème 3.2.5 *: Soit X un espace de Banach de type UMD. On suppose que (H_1) et (H_2) sont satisfaites et que $\sigma_{\mathbb{Z}}(\Delta) = \emptyset$, $N_k = \{(-k^2M + A + G_k)^{-1}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ et $S_k = \{-k^2M(-k^2M + A + G_k)^{-1}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sont R-bornés avec $\hat{x}(k) \in D(A)$ pour tout*

$k \in \mathbb{Z}$, alors l'équation (3.4) a une unique L^p-solution forte et 2π-périodique pour tout $f \in L^p(\mathbb{T}; X)$ avec $1 < p < \infty$. ■

Preuve. D'après les hypothèses du théorème et le lemme 1.3.25, on a $\{N_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\{S_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ et $\{T_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sont R-bornés, avec $R_p(\{N_k\}_{k\in\mathbb{Z}}) = a_1, R_p(\{S_k\}_{k\in\mathbb{Z}}) = a_2$ et $R_p(\{T_k\}_{k\in\mathbb{Z}}) = a_3$.

Montrons que $\{N_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\{S_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ et $\{T_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sont L^p-multiplicateur.

Soit $x_j \in D(A)$, on a :

$$\left\|\sum_{j=1}^n r_j j(N_{j+1} - N_j)x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$$

$$=\left\|\sum_{j=1}^n r_j j[(C_{j+1} + A)^{-1} - (C_j + A)^{-1}]x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$$
$$=\left\|\sum_{j=1}^n r_j j N_{j+1}[C_j + A - C_{j+1} - A]N_j x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$$
$$=\left\|\sum_{j=1}^n r_j j N_{j+1}[C_j - C_{j+1}]N_j x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$$
$$=\left\|\sum_{j=1}^n r_j j N_{j+1}[-j^2 M + G_j + (j+1)^2 M - G_{j+1}]N_j x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$$
$$=\left\|\sum_{j=1}^n r_j j N_{j+1}[(2j+1)M - (G_{j+1} - G_j)]N_j x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$$
$$\leq \left\|\sum_{j=1}^n r_j [N_{j+1} j(2j+1)MN_j]x_j\right\|_{L^p(0,1;X)} + \left\|\sum_{j=1}^n r_j N_{j+1}[j(G_{j+1} - G_j)]N_j x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$$
$$\leq \left\|\sum_{j=1}^n r_j [N_{j+1} j(2j+1)MN_j]x_j\right\|_{L^p(0,1;X)} + a_1^2 b \left\|\sum_{j=1}^n r_j x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$$
$$\leq \left\|\sum_{j=1}^n r_j [\tfrac{1}{-(j+1)^2}(-(j+1)^2 N_{j+1} M)N_j j(2j+1)]x_j\right\|_{L^p(0,1;X)} + a_1^2 b \left\|\sum_{j=1}^n r_j x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$$
$$\leq \left\|\sum_{j=1}^n r_j [S_{j+1} N_j \tfrac{j(2j+1)}{(j+1)^2}]x_j\right\|_{L^p(0,1;X)} + a_1^2 b \left\|\sum_{j=1}^n r_j x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$$
$$\leq (2a_1 a_2 + a_1^2 b)\left\|\sum_{j=1}^n r_j x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}.$$
Donc d'après le théorème 1.3.31, $\{N_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est un L^p-multiplicateur.

De la même manière, on a :

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} r_j j(S_{j+1}-S_j)x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$$

$=\left\|\sum_{j=1}^{n} r_j j[-(j+1)^2M(C_{j+1}+A)^{-1}+j^2M(C_j+A)^1]x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$

$=\left\|\sum_{j=1}^{n} r_j MjN_{j+1}[-(j+1)^2(C_j+A)+j^2(C_{j+1}+A)]N_jx_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$

$=\left\|\sum_{j=1}^{n} r_j MjN_{j+1}[-j^2(C_j-C_{j+1})-(2j+1)(C_j+A)]N_jx_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$

$=\left\|\sum_{j=1}^{n} r_j MjN_{j+1}[-j^2(C_j-C_{j+1})N_j-(2j+1)I]x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$

$=\left\|\sum_{j=1}^{n} r_j[jN_{j+1}(C_j-C_{j+1})(-j^2MN_j)-j(2j+1)MN_{j+1}]x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$

$=\left\|\sum_{j=1}^{n} r_j[jN_{j+1}(C_j-C_{j+1})S_j-j(2j+1)MN_{j+1}]x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$

$=\left\|\sum_{j=1}^{n} r_j[jN_{j+1}(C_j-C_{j+1})S_j+\frac{j(2j+1)}{(j+1)^2}(-(j+1)^2MN_{j+1})]x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$

$=\left\|\sum_{j=1}^{n} r_j[jN_{j+1}(-j^2M+G_j+(j+1)^2M-G_{j+1})S_j+\frac{j(2j+1)}{(j+1)^2}S_{j+1}]x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$

$=\left\|\sum_{j=1}^{n} r_j[jN_{j+1}((2j+1)M-(G_{j+1}-G_j))S_j+\frac{j(2j+1)}{(j+1)^2}S_{j+1}]x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$

$=\left\|\sum_{j=1}^{n} r_j[-\frac{j(2j+1)}{(j+1)^2}(-(j+1)^2MN_{j+1})-N_{j+1}j(G_{j+1}-G_j)S_j+\frac{j(2j+1)}{(j+1)^2}S_{j+1}]x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$

$=\left\|\sum_{j=1}^{n} r_j[-\frac{j(2j+1)}{(j+1)^2}S_{j+1}S_j-N_{j+1}(j(G_{j+1}-G_j))S_j+\frac{j(2j+1)}{(j+1)^2}S_{j+1}]x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$

$\leq (2a_2^2+a_1ba_2+2a_2)\left\|\sum_{j=1}^{n} r_jx_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$. Donc $\{S_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est un L^p-multiplicateur.

Montrons maintenant que $\{T_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est un L^p-multiplicateur. En effet, soit $x\in D(A)$,

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} r_j j(T_{j+1}-T_j)x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$$

$=\left\|\sum_{j=1}^{n} r_j j[G_{j+1}N_{j+1}-G_jN_j]x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$

$=\left\|\sum_{j=1}^{n} r_j[j(G_{j+1}-G_j)N_{j+1}+G_jj(N_{j+1}-N_j)]x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$

$\leq \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j[j(G_{j+1}-G_j)N_{j+1}]x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}+\left\|\sum_{j=1}^{n} r_j[G_jj(N_{j+1}-N_j)]x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$

$\leq a_1 b \left\|\sum_{j=1}^n r_j x_j\right\|_{L^p(0,1;X)} + \|G\|(2r_{2\pi})^{1/p} \left\|\sum_{j=1}^n r_j(j(N_{j+1} - N_j)]x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$.

Or

$\left\|\sum_{j=1}^n r_j j(N_{j+1} - N_j)x_j\right\|_{L^p(0,1;X)} \leq (2a_1a_2 + a_1^2 b) \left\|\sum_{j=1}^n r_j x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$, donc

$\left\|\sum_{j=1}^n r_j j(T_{j+1} - T_j)x_j\right\|_{L^p(0,1;X)} \leq (a_1 b + \|G\|(2r_{2\pi})^{1/p}(2a_1a_2 + a_1^2 b)) \left\|\sum_{j=1}^n r_j x_j\right\|_{L^p(0,1;X)}$.

D'où $\{T_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est un L^p-multiplicateur.

En conclusion : $\{N_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\{S_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ et $\{T_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sont L^p-multiplicateurs.

Or $MS_k + AN_k + T_k = I$ (car $(-k^2M + A + G_k)N_k = I$), donc AN_k est aussi un L^p-multiplicateur.

Soit $f \in L^p(\mathbb{T}; X)$, alors il existe $u, v, w, q \in L^p(\mathbb{T}; X)$ tel que :

$\hat{u}(k) = N_k\hat{f}(k), \hat{v}(k) = S_k\hat{f}(k), \hat{w}(k) = T_k\hat{f}(k)$ et $\hat{q}(k) = AN_k\hat{f}(k)$.

D'une part on a $\hat{u}(k) \in D(A)$ et $A\hat{u}(k) = \hat{q}(k) \ \ \forall k \in \mathbb{Z}$, donc $u(t) \in D(A)$ et $Au = q \in L^p(\mathbb{T}; X)$, c'est à dire $u \in L^p(\mathbb{T}; D(A))$, et d'autre part $\exists v \in L^p(\mathbb{T}; X)$ tel que $\hat{v}(k) = S_k\hat{f}(k) = -k^2MN_k\hat{f}(k) = -k^2M\hat{u}(k)$, donc $u \in H_M^{2,p}(\mathbb{T}; X)$.

Nous avons $\widehat{(Mu)''}(k) = -k^2MN_k\hat{u}(k), \hat{A}u(k) = AN_k\hat{u}(k)$ et $\widehat{Gu_.}(k) = G_kN_k\hat{u}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et d'après l'identité $-k^2MN_k + AN_k + G_kN_k = I$, on a $-k^2MN_k\hat{f}(k) + AN_k\hat{f}(k) + G_kN_k\hat{f}(k) = \hat{f}(k)$, ainsi

$$\widehat{(Mx)''}(k) + A\hat{x}(k) + G_k\hat{x}(k) = \hat{f}(k).$$

D'après le théorème de Fejer (théorème 1.3.17), on a dans $L^p(\mathbb{T}; X)$

$x_t(\theta) = x(t + \theta) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n \sum_{k=-m}^m e^{ikt}e^{ik\theta}\hat{x}(\mathrm{k})$

Par conséquent, dans $L^p(\mathbb{T}$; X) on obtient

$x_t = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=-m}^{m} e^{ikt} e_k \hat{x}(\mathrm{k})$

Puisque G est linéaire et bornée, on a

$\mathrm{G}x_t = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=-m}^{m} e^{ikt} \mathrm{G}(e_k \hat{x}(\mathrm{k}))$.

A est fermé, donc d'après le lemme 2.1.7, on a $x(t) \in D(A)$ et

$$(Mu)''(t) + Au(t) + G(u_t) = f(t).$$

Pour l'unicité de la solution, nous supposons l'existence de deux solutions u_1 et u_2 et posons $u = u_1 - u_2$, alors u est une solution de l'équation (3.4) qui correspond à $f = 0$, appliquons la transformée de fourier, on trouve $(-k^2M + A + G_k)\hat{u}(k) = 0$, ce qui implique que $\hat{u}(k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et d'après la Remarque 1.3.14, $u(t) = 0$, d'où $u_1 = u_2$.

De plus, puisque $u \in H_M^{2,p}(\mathbb{T}; X)$ et d'après la Remarque 3.2.2 on a $Mx(0) = Mx(2\pi)$ et $(Mx)'(0) = (Mx)'(2\pi)$.

En conclusion, L'équation (3.4) admet une unique L^p-solution forte et 2π-périodique.$\blacksquare$

Chapitre 4

Approche du théorème de Crandall-Liggett pour une équation différentielle à retard

4.1 Introduction

Dans ce chapitre en étudie l'équation différentielle à retard non linéaire suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + F(x_t), 0 \leq t \leq T. \\ \\ x_0 = \varphi \in C([-r, 0]; X) \end{cases} \tag{4.1}$$

où X est un espace de Banach, muni d'une norme que l'on note par $\|.\|_X$, r une constante supposée strictement positive, la notation x_t correspond à la fonction définie sur $[-r, 0]$ à valeurs dans X, par :

$$x_t(\theta) = x(t+\theta); -r \leq \theta \leq 0$$

Pour $\varphi \in C([-r, 0]; X)$, on a : $\|\varphi\| = sup_{\theta \in [-r,0]} \|\varphi(\theta)\|_X$

On supposera tout au long de ce chapitre que :

1) Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \to X$ (non borné) est générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contractions T(t) pour tout t$\geq$ 0.

2) $F : C([-r,0];X) \to X$ est une application non linéaire supposée continue, lipschitzienne de constante de Lipschitz α, autrement dit : $\|F(\varphi_1) - F(\varphi_2)\|_X \leq \alpha \|\varphi_1 - \varphi_2\|$, pour tout $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}$.

Dans ([65]), Travis et Webb, ont montré l'existence et l'unicité de la solution de (4.1) par une méthode directe .

Notre travail dans ce chapitre suit une demarche différente. On montre l'existence et l'unicité de la solution de (4.1) en considérant l'équation d'évolution associée :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \tilde{A}u. \\ \\ u_0 = \varphi \end{cases}$$

Où $\tilde{A}$ est un opérateur non linéaire défini sur $C^1([-r,0];X)$ à valeur dans $C([-r,0];X)$ par :

$$\tilde{A}\varphi = \dot{\varphi} \;\; et \;\; \varphi \in \; D(\tilde{A}) = \left\{\varphi \in C^1 : \varphi(0) \in D(A) \; et \; \dot{\varphi}(0) = A\varphi(0) + F(\varphi)\right\}. \quad (4.2)$$

On montre que $\tilde{A}$ est α-dissipatif et que $Im(I - \lambda\tilde{A}) = \mathcal{C} := C([-r,0];X)$, pour $\lambda > 0$ assez petit. Donc d'après le théorème de Crandall-Liggett (Théorème 1.2.12), $lim_{n\to\infty}(I - \frac{t}{n}\tilde{A})^{-n}\varphi$ existe pour tout $t \geq 0$ et tout $\varphi \in C([-r,0];X)$. Si on pose $\tilde{T}(t)\varphi = lim_{n\to\infty}(I - \frac{t}{n}\tilde{A})^{-n}\varphi$, alors $\tilde{T}(t)$ est un semi-groupe non linéaire fortement continu de type α, et que le générateur infinitésimal de $\tilde{T}(t)$ est l'opérateur défini par (4.2), donc la solution de (4.1) existe, et elle est unique. Elle est donnée par :

$$\begin{cases} x(t) = (\tilde{T}(t)\varphi)(0) \;\; si \;\; t > 0. \\ \\ x(t) = \varphi(t) \;\; si \;\; t \in [-r,0] \end{cases} \quad (4.3)$$

Ce travail a fait l'objet d'une publication dans le journal (International Journal of Scientific and Engineering Research (IJSER), Volume 4, Issue 11, November-2013).

4.2 Semi-groupe non linéaire et générateur infinitésimal

Notons que d'après le théorème de Hille-Yosida, A verifie la condition (1) si et seulement si A est fermé, $\overline{D(A)} = X$ et pour tout $\lambda > 0, ||(I - \lambda A)^{-1}||_{\mathbb{B}(X)} \leq 1$. On montre que $\tilde{A}$ défini par (4.2) vérifie les hyphothèses du théorème de Crandall-Liggett, c'est-à-dire que $\tilde{A}$ est α-dissipatif et que $Im(I - \lambda\tilde{A}) = C([-r, 0]; X)$, pour tout $\lambda > 0$, assez petit. En effet,

Proposition 4.2.1 *: On suppose que F est continue, lipschitzienne de constante de lipschitz α et A un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction $(T(t))_{t\geq 0}$. Alors, Pour tout $\lambda \in]0, \frac{1}{\alpha}[$, l'application $(I - \lambda\tilde{A}) : D(\tilde{A}) \to \mathcal{C}([-r, 0]; X)$ est bijective, donc $Im(I - \lambda\tilde{A}) = \mathcal{C} = \overline{D(\tilde{A})}$.* ■

Preuve : Soit $\psi \in \mathcal{C}$. On cherche à résoudre l'équation $(I - \lambda\tilde{A})\varphi = \psi$. Si φ existe, on aura : $\varphi(\theta) - \lambda\dot{\varphi}(\theta) = \psi(\theta)$ et $\dot{\varphi}(0) = A\varphi(0) + F(\varphi)$, soit

$\frac{d}{d\theta}(e^{-\theta/\lambda}\varphi(\theta)) = -\frac{1}{\lambda}e^{-\theta/\lambda}[\varphi(\theta) - \lambda\dot{\varphi}(\theta)] = -\frac{1}{\lambda}e^{-\theta/\lambda}\psi(\theta)$.

On intègre de 0 à θ, et on obtient

$$\varphi(\theta) = e^{\theta/\lambda}\varphi(0) + \frac{e^{\theta/\lambda}}{\lambda}\int_\theta^0 e^{-s/\lambda}\psi(s)ds, \tag{4.4}$$

or, $\varphi(0) = \lambda\dot{\varphi}(0) + \psi(0) = \lambda A\varphi(0) + \lambda F(\varphi) + \psi(0)$, donc $\varphi(0) = J_\lambda(\lambda F(\varphi) + \psi(0))$ avec $J_\lambda = (I - \lambda A)^{-1}$. En substituant à φ son expression en fonction de $\varphi(0)$ et ψ, on obtient $\varphi(0) = J_\lambda(\lambda F(e^{\cdot/\lambda}\varphi(0) + \frac{e^{\cdot/\lambda}}{\lambda}\int_{\cdot}^{0} e^{-s/\lambda}\psi(s)ds) + \psi(0))$, qui est une équation en $\varphi(0)$.

Considèrons l'application

$G : X$ dans X tel que $G(x) = J_\lambda(\lambda F(e^{\cdot/\lambda}x + \frac{e^{\cdot/\lambda}}{\lambda}\int_{\cdot}^{0} e^{-s/\lambda}\psi(s)ds) + \psi(0))$.

On vérifie que G est une contraction stricte. En effet,

$\|G(x) - G(y)\|_X \leq \lambda\alpha\|e^{\cdot/\lambda(x-y)}\| = \lambda\alpha\|x - y\|_X\|e^{\cdot/\lambda}\|$,

or $|e^{\cdot/\lambda}| = sup_{\theta\in[-r,0]}|e^{\theta/\lambda}| = 1$, car $\theta \to e^{\theta/\lambda}$ est strictement croissante sur $[-r, 0]$.

Donc, $\|G(x) - G(y)\|_X \leq \lambda\alpha\|x - y\|_X$, d'où le résultat pour $\lambda \in]0, 1/\alpha[$.

D'après le théorème de point fixe il existe un seul point fixe x_0 pour G, d'où $\varphi = e^{\cdot/\lambda}x_0 + \frac{e^{\cdot/\lambda}}{\lambda}\int_{\cdot}^{0} e^{-s/\lambda}\psi(s)ds$ est l'unique solution de $\varphi - \lambda\dot{\varphi} = \psi$, et $\dot{\varphi}(0) = A\varphi(0) + F(\varphi)$. De plus on a F est continue et d'après (proposition 3.2.3 [62]) on a $\mathcal{C} = \overline{D(\tilde{A})}$.■

Montrons maintenant que $\tilde{A}$ est α-dissipatif ($\tilde{A} - \alpha I$ est dissipatif) :

Proposition 4.2.2 *: On suppose que F est continue, lipschitzienne de constante de lipschitz α et A un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction $(T(t))_{t\geq 0}$, alors $\tilde{A}$ est α-dissipative.* ■

Preuve. Soient φ_1, $\varphi_2 \in$ D($[I - \lambda(\tilde{A} - \alpha I)]^{-1}$) et $\lambda > 0$.

$[I - \lambda(\tilde{A} - \alpha I)]^{-1} = \frac{1}{1+\lambda\alpha}(I - \frac{\lambda}{1+\lambda\alpha}\tilde{A})^{-1}$.

D'après la proposition (4.2.1), $(I-\frac{\lambda}{1+\lambda\alpha}\tilde{A})^{-1}$ existe et a pour domaine $\mathcal{C}$ car $\frac{\lambda}{1+\lambda\alpha} < \frac{1}{\alpha}$

$\left\| [I-\lambda(\tilde{A}-\alpha I)]^{-1}\varphi_1 - [I-\lambda(\tilde{A}-\alpha I)]^{-1}\varphi_2 \right\| = \frac{1}{1+\lambda\alpha}\left\| (I-\frac{\lambda}{1+\lambda\alpha}\tilde{A})^{-1}\varphi_1 - (I-\frac{\lambda}{1+\lambda\alpha}\tilde{A})^{-1}\varphi_2 \right\|$

$= \frac{1}{1+\lambda\alpha}\left\| \tilde{J}_\lambda\varphi_1 - \tilde{J}_\lambda\varphi_2 \right\| \leq \frac{1}{1-\lambda\alpha}\|\varphi_1-\varphi_2\|$

Or d'après la proposition 3.2.4 dans [62] on a :

$\left\| [I-\lambda(\tilde{A}-\alpha I)]^{-1}\varphi_1 - [I-\lambda(\tilde{A}-\alpha I)]^{-1}\varphi_2 \right\| \leq \frac{1}{1+\lambda\alpha} \times \frac{1}{1-\frac{\lambda\alpha}{1+\lambda\alpha}}\|\varphi_1-\varphi_2\|$,

d'où $\tilde{A}$ est α-dissipatif.

On a montré que $\tilde{A}$ est α-dissipatif et $Im(I-\lambda\tilde{A}) = \mathcal{C} = \overline{D(\tilde{A})}$, pour $\lambda > 0$ assez petit ($0 < \lambda < 1/\alpha$), donc d'après le théorème de Crandall-Liggett (théorème 1.2.12), énoncé au chapitre 1, $lim_{n\to\infty}(I-\frac{t}{n}\tilde{A})^{-n}$ existe. Si l'on pose,

$$\tilde{T}(t)\varphi = lim_{n\to\infty}(I-\frac{t}{n}\tilde{A})^{-n}\varphi,\ pour\ t \geq 0\ et\ \varphi \in \mathcal{C}, \tag{4.5}$$

alors $\tilde{T}(t)$ est un semi-groupe, fortement continu de type α. .■

On pose J_λ=$(I-\lambda A)^{-1}$ et $\tilde{J}_\lambda$=$(I-\lambda\tilde{A})^{-1}$, Pour tout $\lambda > 0$

Lemme 4.2.3 *: On suppose que F est continue, lipschitzienne de constante de lipschitz α et A un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction $(T(t))_{t\geq 0}$. Alors pour tout $\lambda \in]0, \frac{1}{\alpha}[$ et $\varphi \in \mathcal{C}$, on a*

$$(\tilde{J}_\lambda\varphi)(0) = J_\lambda[\lambda F(\tilde{J}_\lambda\varphi) + \varphi(0)].\blacksquare \tag{4.6}$$

Preuve : D'après la proposition 4.2.1 , on a pour tout $\psi \in \mathcal{C}$ il existe $\varphi \in D(\tilde{A})$ tel que $(I-\lambda\tilde{A})\varphi = \psi$ et d'après (4.4) on a

$$\varphi(\theta) = e^{\frac{\theta}{\lambda}}\varphi(0) + \frac{1}{\lambda}\int_\theta^0 e^{\frac{\theta-s}{\lambda}}\psi(s)ds, \tag{4.7}$$

et $\varphi(0) = \psi(0) + \lambda\dot{\varphi}(0) = \psi\ (0) + \lambda(\mathrm{A}\varphi(0) + \mathrm{F}(\varphi))$,

d'où

$\varphi(0) = (I - \lambda A)^{-1}[\lambda F(e^{\frac{\cdot}{\lambda}}\varphi(0) + \frac{1}{\lambda}\int_{\cdot}^{0} e^{\frac{\cdot - s}{\lambda}}\psi(s)ds) + \psi(0)]$,

donc

$$\varphi(0) = J_\lambda[\lambda F(e^{\frac{\cdot}{\lambda}}\varphi(0) + \frac{1}{\lambda}\int_{\cdot}^{0} e^{\frac{\cdot - s}{\lambda}}\psi(s)ds) + \psi(0)]. \tag{4.8}$$

Pour tout λ assez petit ($\lambda \in]\ 0, \frac{1}{\alpha}[$) et $\varphi \in$ C, $\tilde{J}_\lambda\varphi$ existe et $\tilde{J}_\lambda\varphi \in \mathrm{D}(\tilde{A})$, donné par

$$(\tilde{J}_\lambda\varphi)(\theta) = e^{\frac{\theta}{\lambda}}(\tilde{J}_\lambda\varphi)(0) + \frac{1}{\lambda}\int_{\theta}^{0} e^{\frac{\theta - s}{\lambda}}\varphi(s)ds, \quad pour \quad \theta \in [-r, 0]. \tag{4.9}$$

D'après (4.8) et (4.9), on a $(\tilde{J}_\lambda\varphi)(\theta) = e^{\frac{\theta}{\lambda}}J_\lambda[\lambda\ \mathrm{F}(\tilde{J}\varphi) + \varphi(0)] + \frac{1}{\lambda}\int_{\theta}^{0} e^{\frac{\theta - s}{\lambda}}\varphi(\mathrm{s})\mathrm{ds}$,

donc,

$(\tilde{J}_\lambda\varphi)(0) = J_\lambda[\lambda\mathrm{F}(\tilde{J}\varphi) + \varphi(0)]$. ■

D'après [théorème 1.2.9 (chapitre 1)], on a les résultats suivants :

Proposition 4.2.4 *: On suppose que F est continue, lipschitzienne de constante de lipschitz α et A un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction $(T(t))_{t\geq 0}$, alors pour tout $\lambda > 0$, tel que $\lambda\alpha < 1$, on a*

$$\|\tilde{J}_\lambda^n\varphi - \varphi\| \leq \frac{n\lambda}{(1 - \lambda\alpha)^{n-1}}\|\tilde{A}\varphi\| \tag{4.10}$$

$$\|\tilde{J}_\lambda^n\varphi_1 - \tilde{J}_\lambda^n\varphi_2\| \leq \frac{1}{(1 - \lambda\alpha)^{n}}\|\varphi_1 - \varphi_2\| \tag{4.11}$$

Les semigroupes non linéaires au sens de Crandall-Liggett ne sont pas toujours différentiables. Si l'on définit le générateur infinitésimal de $\tilde{T}$(t) par

$B\varphi = \lim_{t\to 0} \frac{\tilde{T}(t)\varphi-\varphi}{t}$ si $\varphi \in D(B) = \left\{\varphi \in C : \lim_{t\to 0} \frac{\tilde{T}(t)\varphi-\varphi}{t} \ existe\right\}$,

alors on montre que $\tilde{A} = B$, pour cela nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 4.2.5 *: On suppose que F est continue, lipschitzienne de constante de lipschitz α et A un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction $(T(t))_{t\geq 0}$, alors*

(1) Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}$ et pour tout $n \geq 1$, on a

$\lim_{t\to 0}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} J_{\frac{t}{n}}^{(i+1)}[F(\tilde{J}_{\frac{t}{n}}^{n-i}\varphi) - F(\varphi)] = 0$

(2) Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}$ et $n \geq 1$, on a $\lim_{t\to 0}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}[J_{\frac{t}{n}}^{(i+1)} - I]\, F(\varphi)] = 0$.

(3) Pour tout $\varphi \in C$ tel que $\varphi(0) \in D(A)$, on a

$\lim_{t\to 0}\lim_{n\to +\infty}\frac{1}{t}\ [\ [J_{\frac{t}{n}}^{n} - I - tA]\varphi(0) = 0.$ ■

Preuve : (1) Soit $\varphi \in \mathcal{C}$, d'après la proposition 4.2.1 il existe $\varphi_k \in$ D($\tilde{A}$), tel que

$$\|\varphi_k - \varphi\| \to 0 \ \ quand \ \ k \to +\infty \tag{4.12}$$

Pour tout i$\in \{0, 1, ...n-1\}$, nous avons

$$\left|J_{\frac{t}{n}}^{(i+1)}\right|_{L(X)} \leq 1.$$

F est lipschitzienne, donc

$\|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} J_{\frac{t}{n}}^{(i+1)}[F(\tilde{J}_{\frac{t}{n}}^{n-i}\varphi) - F(\varphi)]\| \leq \frac{\alpha}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left\|\tilde{J}_{\frac{t}{n}}^{n-i}\varphi - \varphi\right\|$

$\leq \frac{\alpha}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left\|\tilde{J}_{\frac{t}{n}}^{n-i}\varphi - \tilde{J}_{\frac{t}{n}}^{n-i}\varphi_k\right\| + \frac{\alpha}{n}\sum_{i=0}^{n-1}[\ \left\|\tilde{J}_{\frac{t}{n}}^{n-i}\varphi_k - \varphi_k\right\| + \|\varphi_k - \varphi\|\ ].$

D'après (4.10) et (4.11), $\left\|\tilde{J}_{\frac{t}{n}}^{n-i}\varphi - \tilde{J}_{\frac{t}{n}}^{n-i}\varphi_k\right\| \leq \frac{1}{(1-\frac{t}{n}\alpha)^{n-i}}\|\varphi_k - \varphi\|$ et

$\left\|\tilde{J}_{\frac{t}{n}}^{n-i}\varphi_k - \varphi_k\right\| \leq \frac{(n-i)\frac{t}{n}}{(1-\frac{t}{n}\alpha)^{n-i-1}}\ \left\|\tilde{A}\varphi_k\right\|$, donc

$|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} J_{\frac{t}{n}}^{(i+1)}[F(\tilde{J}_{\frac{t}{n}}^{n-i}\varphi)-F(\varphi)]| \leq \frac{\alpha}{n}\sum_{i=0}^{n-1}[\ \frac{1}{(1-\frac{t}{n}\alpha)^{n-i}}\|\varphi_k-\varphi\| + \frac{(n-i)\frac{t}{n}}{(1-\frac{t}{n}\alpha)^{n-i-1}}\left\|\tilde{A}\varphi_k\right\|$

$+\ \|\varphi_k-\varphi\|]$

$\leq \frac{\alpha}{n}\sum_{i=0}^{n-1}[\ (\frac{1}{(1-\frac{t}{n}\alpha)^{n}}\ +1)\|\varphi_k-\varphi\| + \frac{t}{(1-\frac{t}{n}\alpha)^{n}}\left\|\tilde{A}\varphi_k\right\|]$

$= \alpha\ [\ (\frac{1}{(1-\frac{t}{n}\alpha)^{n}}\ +1)\|\varphi_k-\varphi\| + \frac{t}{(1-\frac{t}{n}\alpha)^{n}}\left\|\tilde{A}\varphi_k\right\|].$

D'où, quand $t \to 0$, on a

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} J_{\frac{t}{n}}^{(i+1)}[F(\tilde{J}_{\frac{t}{n}}^{n-i}\varphi)-F(\varphi)]\right\| \leq 2\alpha\|\varphi_k-\varphi\|.$$

On passe à la limite quand $k \to \infty$, et on trouve le résultat.

(2) Pour tout i $\in \{0,1,...n-1\}$ et tout n ≥ 1, on a

$$\lim_{t\to 0} J_{\frac{t}{n}}^{(i+1)}\mathrm{F}(\varphi) = \mathrm{F}(\varphi),$$

ainsi,

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}[J_{\frac{t}{n}}^{(i+1)} - \mathrm{I}\ ]\mathrm{F}(\varphi) = 0.$$

(3) Pour tout $\varphi \in$ C tel que $\varphi(0) \in$ D(A) et t ≥ 0, on a

$\lim_{n\to\infty}[\ J_{\frac{t}{n}}^{n}\varphi(0) - \varphi(0) - \mathrm{t}A\varphi(0)] = \mathrm{T(t)}\varphi(0) - \varphi(0) - \mathrm{t}A\varphi(0),$

d'où

$lim_{t\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{t}[J_{\frac{t}{n}}^{n}\varphi(0) - \varphi(0) - \mathrm{t}A\varphi(0)] = \lim_{t\to 0}\frac{T(t)\varphi(0)-\varphi(0)}{t} - A\varphi(0) = 0.$ ■

D'après la proposition 4.2.1, $D(\tilde{A})$ est dense dans C, donc on a la proposition suivante :

Proposition 4.2.6 *:* [62]

On suppose que F est continue, lipschitzienne de constante de lipschitz α et A un *générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction $(T(t))_{t\geq 0}$, alors $(\tilde{T}(t)\varphi)(\theta) = \varphi(t+\theta)$, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}$, pour tout $t \in [0,r]$ et $-r \leq t+\theta < 0$.*■

Maintenant on montre que $\tilde{A}$ défini par (4.2) est un générateur infinitésimal de $(\tilde{T}(t))_{t\geq 0}$.

Proposition 4.2.7 *: On suppose que F est continue, lipschitzienne de constante de lipschitz α et A un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction $(T(t))_{t\geq 0}$, alors $\tilde{A} \subseteq B$.* ■

Preuve : On doit montrer que si $\varphi \in$ D($\tilde{A}$), alors $\varphi \in$ D(B) et B$\varphi = \tilde{A}\varphi$. En effet, Soit $\varphi \in$ D($\tilde{A}$) donc $\varphi \in C^1$, $\varphi(0)\in$ D(A) et $\dot{\varphi}(0) =$ A$\varphi(0)$ + F(φ).

D'après la proposition (4.2.6) et pour $\theta < 0$, on a

$$\lim_{t\to 0} \frac{(\tilde{T}(t)\varphi)(\theta) - \varphi(\theta)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t+\theta) - \varphi(\theta)}{t} = \dot{\varphi}(\theta) \tag{4.13}$$

Il reste à vérifier pour $\theta = 0$. En effet,

d'après (4.5) on a $\frac{\tilde{T}(t)\varphi)(0)-\varphi(0)}{t}$=$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{t}$[($\tilde{J}^n_{\frac{t}{n}}\varphi)(0)$ - $\varphi(0)$], et de (4.6) on obtient

$(\tilde{J}^n_\lambda\varphi)(0) = \tilde{J}_\lambda$[($\tilde{J}^{n-1}_\lambda$ φ) (0)]

$$= \lambda J_\lambda F(\tilde{J}^n_\lambda\varphi) + J_\lambda(\tilde{J}^{n-1}_\lambda\varphi)(0) = \lambda \textstyle\sum_{i=0}^{n-1}[J^{i+1}_\lambda F(\tilde{J}^{n-i}_\lambda\varphi)] + J^n_\lambda\varphi(0),$$

d'où

$$\frac{(\tilde{J}^n_{\frac{t}{n}}\varphi)(0) - \varphi(0)}{t} - \dot{\varphi}(0) = \frac{(\tilde{J}^n_{\frac{t}{n}}\varphi)(0) - \varphi(0)}{t} - A\varphi(0) - F(\varphi). \tag{4.14}$$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} J_{\frac{t}{n}}^{(i+1)}[\mathrm{F}(\tilde{J}_{\frac{t}{n}}^{n-i}\varphi)$ - $\mathrm{F}(\varphi)] + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}[J_{\frac{t}{n}}^{(i+1)}$ - I] F$(\varphi)] + \frac{1}{t}$ [$[J_{\frac{t}{n}}^{n}$- I - tA]$\varphi(0)$,

donc d'après le lemme 4.2.5, on a

$$\lim_{t\to 0}\frac{(\tilde{T}(t)\varphi)(0)-\varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{t}[(\tilde{J}_{\frac{t}{n}}^{n}\varphi)(0)-\varphi(0)] = A\varphi(0)+F(\varphi) = \dot{\varphi}(0), \tag{4.15}$$

et d'après (4.13) et (4.14) on a $\varphi \in D(B)$ et$B\varphi = \tilde{A}\varphi = \dot{\varphi}$.■

Il reste à montrer que $B \subseteq \tilde{A}$, autrement dit que $\tilde{A} = B$.

Proposition 4.2.8 *: On suppose que F est continue, lipschitzienne de constante de lipschitz α et A un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction $(T(t))_{t\geq 0}$, alors $B \subseteq \tilde{A}$.* ■

Preuve : On doit montrer que si $\varphi \in$D(B) alors $\varphi \in$D($\tilde{A}$) et $\tilde{A}\varphi$ =Bφ. En effet, soit $\varphi \in$D(B), alors B$\varphi(\theta)$=$\lim_{t\to 0}$ $\frac{(\tilde{T}(t)\varphi)-\varphi}{t}(\theta)$=$\dot{\varphi}(\theta)$ existe dans $C([-r,0];X)$,

donc $\varphi \in C^1$ et

$$\dot{\varphi}(0) = \lim_{t\to 0}\frac{(\tilde{T}(t)\varphi)(0)-\varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{t}[(\tilde{J}_{\frac{t}{n}}^{n}\varphi)(0)-\phi(0)]. \tag{4.16}$$

On doit montrer que $\dot{\varphi}(0)$ = A$\varphi(0)$ + F(φ). D'après (4.14) et le lemme 4.2.5, on a

$\lim_{t\to 0}$ $lim_{n\to+\infty}\frac{1}{t}$[($\tilde{J}_{\frac{t}{n}}^{n}\varphi)(0)$ - $\varphi(0)]$ = A$\varphi(0)$ + F(φ).

Donc, d'après (4.16) on obtient $\dot{\varphi}(0)$ = A$\varphi(0)$ + F(φ), d'où, $\varphi \in$ D($\tilde{A}$) et $\tilde{A}\varphi$ = Bφ = $\dot{\varphi}$. Donc si F est continue, lipschitzienne de constante de lipschitz α et A un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction $(T(t))_{t\geq 0}$. Alors le générateur infinitésimal de $\tilde{T}(t)$, n'est autre que l'opérateur $\tilde{A}$.■

4.3 Résolution d'équation : $\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + F(x_t)$ par la formule de Crandall-Liggett

Théorème 4.3.1 *: On suppose que F est continue, lipschitzienne de constante de lipschitz α , A un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction $(T(t))_{t\geq 0}$ et φ un élément de $C([-r,0];X)$, alors l'équation (4.1) a une solution unique, continue sur $[-r,+\infty[$ et donnée par*

$$\begin{cases} x(t) = \varphi(t) \quad si \quad t \in [-r,0], \\ \\ x(t) = (\tilde{T}(t)\varphi)(0) \quad si \quad t \in [0,+\infty[. \end{cases} \tag{4.17}$$

En outre, si pour tout $t \in [0,+\infty[, x(t) \in D(A)$ et $t \to Ax(t)$ est continue, alors la solution $x(t)$ est de classe C^1 dans $[-r,+\infty[$. ■

Pour cela on montre les deux lemmes suivants :

Lemme 4.3.2 *: On suppose que F est continue, lipschitzienne de constante de lipschitz α et A un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction $(T(t))_{t\geq 0}$, alors pour chaque $\varphi \in \mathcal{C}, t \geq 0$ et pour tout $j \in \{1,...m\}, k \in \{0,...p-1\}$, on a*

$$\lim_{p\to+\infty} \; lim_{m\to+\infty} J_{\frac{t}{mp}}^{m(p-k)-j+1}[F(\tilde{J}_{\frac{t}{mp}}^{mk+j}\varphi) - F(\tilde{J}_{\frac{t}{mp}}^{mk}\varphi)] = 0. \tag{4.18}$$

et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{m\to+\infty}[J_{\frac{t}{mp}}^{m(p-k)-j+1} - J_{\frac{t}{mp}}^{m(p-k)}]F(\tilde{J}_{\frac{t}{mp}}^{mk}\varphi) = 0. \blacksquare \tag{4.19}$$

Preuve. D'après la proposition (4.2.4) et $\overline{D(\tilde{A})} = \mathcal{C}$ [$\forall\varphi \in \mathcal{C} \;\; \exists\varphi_n \in D(\tilde{A})$: $\|\varphi_n - \varphi\| \to 0 \;\; quand \;\; n \to \infty$] on a,

$\left|J^{m(p-k)-j+1}_{\frac{t}{mp}}[F(\tilde{J}^{mk+j}_{\frac{t}{mp}}\varphi)-F(\tilde{J}^{mk}_{\frac{t}{mp}}\varphi)]\right| \leq\alpha \left\|\tilde{J}^{mk}_{\frac{t}{mp}}(\tilde{J}^{j}_{\frac{t}{mp}}\varphi)-\tilde{J}^{mk}_{\frac{t}{mp}}\varphi\right\| \leq \frac{\alpha}{(1-\frac{t}{mp}\alpha)^{mk}} \left\|\tilde{J}^{j}_{\frac{t}{mp}}\varphi-\varphi\right\|$
$\leq \frac{\alpha}{(1-\frac{t}{mp}\alpha)^{mk}}[\left\|\tilde{J}^{j}_{\frac{t}{mp}}\varphi-\tilde{J}^{j}_{\frac{t}{mp}}\varphi_n\right\| + \left\|\tilde{J}^{j}_{\frac{t}{mp}}\varphi_n-\varphi_n\right\| + \|\varphi_n-\varphi\|]$

$$\leq [\frac{\alpha}{(1-\frac{t}{mp}\alpha)^{mk+j}}+\frac{\alpha}{(1-\frac{t}{mp}\alpha)^{mk}}]\,\|\varphi_n-\varphi\| + \frac{\alpha\frac{jt}{mp}}{(1-\frac{t}{mp}\alpha)^{mk+j-1}}\,\|A\varphi_n\|\,. \quad (4.20)$$

On a,

$\frac{1}{(1-\frac{t}{mp}\alpha)^{mk+j}}\leq\frac{1}{(1-\frac{t}{mp}\alpha)^{(m+1)k}}\rightarrow e^{\frac{t\alpha}{p}}$ quand m $\rightarrow\infty$,

En passant à la limite dans l'inégalité dans (4.20) quand $m\rightarrow\infty$, on obtient

$\left|J^{m(p-k)-j+1}_{\frac{t}{mp}}[F(\tilde{J}^{mk+j}_{\frac{t}{mp}}\varphi)-F(\tilde{J}^{mk}_{\frac{t}{mp}}\varphi)]\right| \leq 2\alpha e^{\frac{t\alpha}{p}}\,\|\varphi_n-\varphi\|+\frac{t\alpha}{p}e^{\frac{t\alpha}{p}}\,\|A\varphi_n\|$,

et quand $p\rightarrow\infty$, on obtient

$\left|J^{m(p-k)-j+1}_{\frac{t}{mp}}[F(\tilde{J}^{mk+j}_{\frac{t}{mp}}\varphi)-F(\tilde{J}^{mk}_{\frac{t}{mp}}\varphi)]\right| \leq 2\alpha\|\varphi_n-\varphi\|$, d'où le résultat (4.18) quand $n\rightarrow\infty$.

Il reste à montrer (4.19), en effet,

$\left|J^{m(p-k)-j+1}_{\frac{t}{mp}}F(\tilde{J}^{mk+j}_{\frac{t}{mp}}\phi)-J^{m(p-k)}_{\frac{t}{mp}}F(\tilde{J}^{mk}_{\frac{t}{mp}}\varphi)]\right| = \left|J^{-(j-1)}_{\frac{t}{mp}}J^{m(p-k)}_{\frac{t}{mp}}F(\tilde{J}^{mk+j}_{\frac{t}{mp}}\varphi)-J^{m(p-k)}_{\frac{t}{mp}}F(\tilde{J}^{mk}_{\frac{t}{mp}}\varphi)]\right|$
$=\left|(I-\frac{t}{mp}A)^{j-1}J^{m(p-k)}_{\frac{t}{mp}}F(\tilde{J}^{mk+j}_{\frac{t}{mp}}\varphi)-J^{m(p-k)}_{\frac{t}{mp}}F(\tilde{J}^{mk}_{\frac{t}{mp}}\varphi)]\right|$.

Si $m\rightarrow\infty$ et d'après (4.5) on obtient

$(I-\frac{t}{mp}A)^{j-1}\rightarrow$ I, $\tilde{J}^{mk}_{\frac{t}{mp}}\rightarrow\tilde{T}(\frac{kt}{p})$ et $J^{m(p-k)}_{\frac{t}{mp}}=(I-\frac{t}{mp}A)^{-mp+mk}=(I-\frac{t}{mp}A)^{-mp}.(I-\frac{-tk/p}{-mk}A)^{-(-mk)}$ $\rightarrow$T(t)T(-kt/p) = T(t - $\frac{kt}{p}$).

Ainsi, le résultat (4.19) est démontré. ■

Lemme 4.3.3 *: On suppose que F est continue, lipschitzienne de constante de lipschitz α et A un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction*

$(T(t))_{t\geq 0}$, *alors pour tout* $\varphi \in \mathcal{C}$ *et pour tout* $t \geq 0$, *on a*

$\lim_{p\to+\infty}$ $lim_{m\to+\infty}[\frac{t}{mp}\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{j=1}^{m} J_{\frac{t}{mp}}^{m(p-k)-j+1} F(\tilde{J}_{\frac{t}{mp}}^{j+mk}$)-$\frac{t}{p}\sum_{k=0}^{p-1} J_{\frac{t}{mp}}^{m(p-k)} F(\tilde{J}_{\frac{t}{mp}}^{mk}$)]=0.■

Preuve : Soit $\varphi \in \mathcal{C}$ et $t \geq 0$, alors on a

$\left|\frac{t}{mp}\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{j=1}^{m} J_{\frac{t}{mp}}^{m(p-k)-j+1} F(\tilde{J}_{\frac{t}{mp}}^{j+mk}\varphi) - \frac{t}{p}\sum_{k=0}^{p-1} J_{\frac{t}{mp}}^{m(p-k)} F(\tilde{J}_{\frac{t}{mp}}^{mk}\varphi)\right|$
$\leq \frac{t}{mp}\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{j=1}^{m}\left|J_{\frac{t}{mp}}^{m(p-k)-j+1} F(\tilde{J}_{\frac{t}{mp}}^{j+mk}\varphi) - J_{\frac{t}{mp}}^{m(p-k)} F(\tilde{J}_{\frac{t}{mp}}^{mk}\varphi)\right|$
$\leq \frac{t}{mp}\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{j=1}^{m}\left|J_{\frac{t}{mp}}^{m(p-k)-j+1}[F(\tilde{J}_{\frac{t}{mp}}^{j+mk}\varphi) - F(\tilde{J}_{\frac{t}{mp}}^{mk}\varphi)]\right| +$
$\frac{t}{mp}\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{j=1}^{m}\left|[J_{\frac{t}{mp}}^{m(p-k)-j+1} - J_{\frac{t}{mp}}^{m(p-k)}] F(\tilde{J}_{\frac{t}{mp}}^{mk}\varphi)\right|$;
on passe à la limite quand $m \to \infty$ et $p \to \infty$ et par le lemme 4.3.2 on trouve le résultat. ■

Maintenant nous donnons une démonstration du théorème 4.3.1

Preuve de théorème 4.3.1 : On doit montrer que $\tilde{T}$(t)φ vérifie l'équation (4.1).

$$x(t) = (T(t)\varphi)(0) + \int_0^t T(t-s)F(x_s)ds,$$

et,

$(\tilde{T}(t)\varphi)(0) = T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)F(\tilde{T}(s)\varphi)ds.$

Or $(\tilde{J}_\lambda^n\varphi)(0) = \tilde{J}_\lambda[\ (\ \tilde{J}_\lambda^{n-1}\ \varphi)\ (0)]=$

$$\lambda J_\lambda F(\tilde{J}_\lambda^n\phi) + J_\lambda(\tilde{J}_\lambda^{n-1}\varphi)(0) = \lambda\sum_{i=0}^{n-1}[J_\lambda^{i+1}F(\tilde{J}_\lambda^{n-i}\varphi)] + J_\lambda^n\varphi(0),$$

d'où

$$(\tilde{J}_{\frac{t}{n}}^n\varphi)(0) - J_{\frac{t}{n}}^n\varphi(0) = \frac{t}{n}\sum_{i=0}^{n-1} J_{\frac{t}{n}}^{i+1}F(\tilde{J}_{\frac{t}{n}}^{n-i}\varphi); \qquad (4.21)$$

par le changement de variable $n-i=j$, on obtient

$\frac{t}{n}\sum_{i=0}^{n-1} J_{\frac{t}{n}}^{i+1}$ F ($\tilde{J}_{\frac{t}{n}}^{n-i}\varphi) = \frac{t}{n}\sum_{j=1}^{n} J_{\frac{t}{n}}^{n-j+1}$ F ($\tilde{J}_{\frac{t}{n}}^{j}\varphi)$,

et nous changeons n par mp, on obtient

$\frac{t}{mp}\sum_{j=1}^{mp} J_{\frac{t}{mp}}^{mp-j+1}$ F ($\tilde{J}_{\frac{t}{mp}}^{j}\varphi) = \frac{t}{mp}\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{j=1}^{m} J_{\frac{t}{mp}}^{m(p-k)-j+1}$ F ($\tilde{J}_{\frac{t}{mp}}^{mk+j}\varphi)$. En effet,

$\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{j=1}^{m} J_{\frac{t}{mp}}^{m(p-k)-j+1}$F($\tilde{J}_{\frac{t}{mp}}^{mk+j}\varphi$

$= \sum_{k=0}^{p-1}\sum_{j=1}^{m} J_{\frac{t}{mp}}^{mp+1} J_{\frac{t}{mp}}^{-mk} J_{\frac{t}{mp}}^{-j}$F($\tilde{J}_{\frac{t}{mp}}^{mk}\tilde{J}_{\frac{t}{mp}}^{j}\varphi)$

$= J_{\frac{t}{mp}}^{mp+1}\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{j=1}^{m} J_{\frac{t}{mp}}^{-mk} J_{\frac{t}{mp}}^{-j}$F($\tilde{J}_{\frac{t}{mp}}^{mk}\tilde{J}_{\frac{t}{mp}}^{j}\varphi)$

$= J_{\frac{t}{mp}}^{mp+1}\sum_{i=0}^{m(p-1)}\sum_{j=1}^{m} J_{\frac{t}{mp}}^{-i} J_{\frac{t}{mp}}^{-j}$F($\tilde{J}_{\frac{t}{mp}}^{i}\tilde{J}_{\frac{t}{mp}}^{j}\varphi)$ (i = mk)

$= J_{\frac{t}{mp}}^{mp+1}\sum_{l=1}^{mp} J_{\frac{t}{mp}}^{-l}$F($\tilde{J}_{\frac{t}{mp}}^{l}\varphi) = \sum_{i=1}^{mp} J_{\frac{t}{mp}}^{mp-i+1}$F($\tilde{J}_{\frac{t}{mp}}^{i}\varphi)$

En autre, à partir de (4.5), on a

$$\frac{t}{p}\sum_{k=0}^{p-1} J_{\frac{t}{mp}}^{m(p-k)} F(\tilde{J}_{\frac{t}{mp}}^{mk}\varphi) \to \frac{t}{p}\sum_{k=0}^{p-1} T(t-\frac{k}{p}t)F(\tilde{T}(\frac{tk}{p})\varphi), quand \;\; m\to+\infty, \tag{4.22}$$

(En effet : $\tilde{J}_{\frac{t}{mp}}^{mk}\varphi) = (I-\frac{t}{mp}\tilde{A})^{-mk} = (I-\frac{tk/p}{mk}\tilde{A})^{-mk} \to \tilde{T}(tk/p)$ quand $m\to+\infty$

$J_{t/mp}^{m(p-k)} = (I-\frac{t}{mp}\tilde{A})^{-m(p-k)} = (I-\frac{t}{mp}\tilde{A})^{-mp}(I-\frac{t(-k)/p}{m(-k)}\tilde{A})^{-m(-k)} \to T(t)T(-kt/p) =$

$T(t-kt/p)$ quand $m\to+\infty$).

et

$$\frac{t}{p}\sum_{k=0}^{p-1} T(t-\frac{k}{p}t)F(\tilde{T}(\frac{tk}{p})\varphi), \to \int_0^t T(t-s)F(\tilde{T}(s)\varphi)ds, quand \;\; p\to+\infty \tag{4.23}$$

Enfin, on a

$\left\|\frac{t}{mp}\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{j=1}^{m} J_{\frac{t}{mp}}^{m(p-k)-j+1}F(\tilde{J}_{\frac{t}{mp}}^{mk+j}\varphi) - \int_0^t T(t-s)F(\tilde{T}(s)\varphi)ds\right\|_X$

$$\leq \left\|\frac{t}{mp}\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{j=1}^{m} J_{\frac{t}{mp}}^{m(p-k)-j+1}F(\tilde{J}_{\frac{t}{mp}}^{mk+j}\varphi) - \frac{t}{p}\sum_{k=0}^{p-1} J_{\frac{t}{mp}}^{m(p-k)}F(\tilde{J}_{\frac{t}{mp}}^{mk}\varphi)\right\|_X \tag{4.24}$$

$+\left\|\frac{t}{p}\sum_{k=0}^{p-1} J_{\frac{t}{mp}}^{m(p-k)}F(\tilde{J}_{\frac{t}{mp}}^{mk}\varphi)-\frac{t}{p}\sum_{k=0}^{p-1} T(t-\frac{k}{p}t)F(\tilde{T}(\frac{tk}{p})\varphi)\right\|_X$

$+\left\|\frac{t}{p}\sum_{k=0}^{p-1} T(t-\frac{k}{p}t)F(\tilde{T}(\frac{tk}{p})\varphi)-\int_0^t T(t-s)F(\tilde{T}(s)\varphi)ds\right\|_X,$

d'après le lemme 4.3.2, le lemme 4.3.3 , (4.22) et (4.23), le côté droit de (4.24) tend vers 0 quand m, p $\to +\infty$, d'où, on passe à la limite dans (4.21) quand $n \to +\infty$, et on obtient

$$(\tilde{T}(t)\varphi)(0) = T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)F(\tilde{T}(s)\varphi)ds.$$

Ainsi,

$$x(t) = T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)F(x_s)ds, \tag{4.25}$$

Maintenant, on doit montrer que $x(t)$ est l'unique solution de (4.1). En effet, d'après (4.25), on a

$\|x_t - y_t\| = sup_{-r\leq\theta\leq 0}|x(t+\theta)-y(t+\theta)|$

$=sup_{-r\leq\theta\leq 0}\left|\int_0^{t+\theta} T(t+\theta-s)(F(x_s)-F(y_s))ds\right|$

$\leq \alpha \int_0^t \|x_s - y_s\|\, ds \Rightarrow \|x_t - y_t\| \leq e^{\alpha t}\,\|x_0 - y_0\| = 0$, d'où $x_t = y_t$ pour tout $t \geq 0$.■

Théorème 4.3.4 *: On suppose que F est continue, lipschitzienne de constante de lipschitz α et A un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction $(T(t))_{t\geq 0}$. Si on a $(\tilde{T}(t)\varphi)(0) \in D(A)$ et t $\to A(\tilde{T}(t)\varphi)(0)$ est continue sur $[0,+\infty[$ alors $\tilde{T}(t)\varphi \in D(A)$, pour tout $\varphi \in D(\tilde{A})$.* ■

Preuve : (1) Pour tout $\theta \in [-r, 0]$, nous avons $x_t = \tilde{T}$(t)φ.i.e.

$$x(t+\theta) = (\tilde{T}(t)\varphi)(\theta) = (\tilde{T}(t+\theta)\varphi)(0) \text{ si } t+\theta \geq 0.$$

$$x(t+\theta) = (\tilde{T}(t)\varphi)(\theta) = \varphi(t+\theta) \text{ si } (t+\theta) \in [-r, 0].$$

Donc,

$$\begin{cases} (\tilde{T}(t)\varphi)(\theta) = (\tilde{T}(t+\theta)\varphi)(0) + \int_0^{t+\theta} T(t+\theta-s)F(\tilde{T}(s)\varphi)ds, \quad si \quad t+\theta \geq 0, \\ (\tilde{T}(t)\varphi)(\theta) = \varphi(t+\theta) \ si \ (t+\theta) \in [-r, 0]. \end{cases} \tag{4.26}$$

On montre que $\tilde{T}(t)\varphi \in D(\tilde{A})$. En effet,

$\frac{d}{d\theta}(\tilde{T}(t)\varphi)(\theta) = A(\tilde{T}(t+\theta)\varphi)(0) + F(\tilde{T}(t+\theta)\varphi)$ si $t+\theta \geq 0$,

d'où

$$\frac{d}{d\theta}(\tilde{T}(t)\varphi)(\theta) = \frac{d}{d\theta}\varphi(t+\theta) \ si \ (t+\theta) \in [-r, 0]. \tag{4.27}$$

$\varphi \in D(\tilde{A})$, alors $\varphi \in C^1$ et $\dot{\varphi} = A\varphi(0) + F(\varphi)$. Ainsi $\theta \to \frac{d}{d\theta}(\tilde{T}(t)\varphi)(\theta)$ est continue sur $[-r, 0]$ et $\frac{d}{d\theta}(\tilde{T}(t)\varphi)(0) = A(\tilde{T}(t)\varphi(0)) + F(\tilde{T}(t)\varphi)$. Par conséquent $\tilde{T}(t)\varphi \in D(A)$. ■

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

Conclusion Nous rappelons en quelques mots les points principaux de notre travail et signalons quelques pistes pour des recherches futures.

Dans le chapitre 2, nous avons étudié les équations différentielles à retard linéaires suivantes :

$$\tfrac{d}{dt}x(t) = A(x(t) - Bx(t-r)) + L(x_t) + f(t).$$

et les équations différentielles de type neutre suivantes :

$$\tfrac{d}{dt}(x(t) - Bx(t-r)) = A(x(t) - Bx(t-r)) + L(x_t) + f(t).$$

puis l'équation plus générale suivante,

$$\tfrac{d}{dt}(x(t) - Lx_t) = A(x(t) - Lx_t) + G(x_t) + f(t).$$

Nous avons montré l'existence et l'unicité par l'approximation de la théorie de R-bornitude avec une condition supplémentaire sur l'espace.

Dans le chapitre 3, nous avons etudié les équations différentielles de second ordre suivante :

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \frac{d}{dt}Bx(t) + Ax(t) = G(x_t) + f(t).$$

et une équation dégénérée de second ordre suivante :

$$\frac{d^2}{dt^2}(Mx(t)) + Ax(t) + G(x_t) = f(t).$$

Le chapitre 4 est consacré à une équation différentielle fonctionnelle à retard finie non linéaire suivante :

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + F(x_t).$$

L'intérêt est de la traiter avec la condition que la fonction F soit lipschitzienne et A génére un C_0-semi-groupe, et en utilisant le théorème de Crandall-Liggett (théorème 1.2.12), on a montré, l'existence et l'unicité de la solution et établir l'équivalence du théorème de Crandall-Liggett pour ce type d'équation.

Perspectives :

✠ Notre première perspective est l'étude de l'existence de solutions périodiques des équations fractionnelles suivantes :

$$D^{\alpha}[x(t) - Lx_t] = A[x(t) - Lx_t] + G(x_t) + f(t), 1 < \alpha < 2 \tag{5.1}$$

✠ La deuxième perspective est l'étude d'existence périodique des équations différentielles fonctionnelles avec retard infini :

$$\frac{d}{dt}[x(t) - Lx_t] = A[x(t) - Lx_t] + G(x_t) + f(t), \tag{5.2}$$

où A est un opérateur linéaire fermé, L et G deux opérateurs linéaires bornées.

$x_t : (-\infty, 0] \to X$ donnée par $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ pour $\theta \leq 0$.

Bibliographie

[1] M. Adimy, H. Bouzahir and K. Ezzinbi, Existence and stability for some partial nentral functional differential equations with infinite delay, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 294, No. 2, (2004), 438-461.

[2] M. Adimy, K. Ezzinbi and M. Laklach, Local existence and global continuation for a class of partial neutral functional differential equations, C. R. Acad. Sci. Paris, t.330, Série I, (200), 957-962.

[3] M. Adimy and K. Ezzinbi, A class of linear partial neutral functional differential equations with non-dense domain, Journal of Differential Equations, 147, (1998),285-332.

[4] M Adimy and K. Ezzinbi, Local existence and linearized stability for partial functional differential equations, Dynamic Systems and Applications, 7, (1998), 389-404.

[5] W.Arend and S.Bu, The operator-valued Marcinkiewicz multiplier theorem and maximal regularity, Math.Z. 240, (2002), 311-343.

[6] S.Bu, well-posedness of second order degenerate differential equations in vector-valued function spaces, studia Math. No 1, 214 (2013), 1-16.

[7] S. Bu : Well-posedness of degenerate differential equations in Hölder continuous function spaces. Front. Math. China 10 (2) (2015), 239-248.

[8] S. Bu : L^p-maximal regularity of degenerate delay equations with periodic conditions. Banach J. Math. Anal. 8 (2) (2014), 49-59.

[9] S. Bu and Y. Fang, Periodic solutions of delay equations in Besov spaces and Triebel-Lizorkin spaces. Taiwanese J. Math. No. 3, 13 (2009), 10631076.

[10] S. Bu and Y. Fang, Maximal regularity for integro-differential equations on periodic Triebel-Lisorkin spaces, Taiwanese J. Math. 12 (2009), no. 2, 281292.

[11] J.Bourgain, Some remarks on Banach spaces in which martingale differences sequences are unconditional. Arkiv Math. 21, (1983), 163-168.

[12] D.L. Burkholder, A geometrical characterization of Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional, Ann. Probab. 9 (1981), 997-1011.

[13] Butzer P.L. and Westphal, An access to fractional differentiation via fractional difference quotients, Lecture Notes in Math. 457, (1975), 116-145.

[14] H.Brezis, Analyse fonctionnelle. Théorie et application, Collection Math.Appl,Masson(1983).

[15] M.G.Crandall, A.Pazy, Nonlinear evolution in Banach Space, Israel, J.Math 11, (1972), 57-94.

[16] M.G.Crandall, The semigroups approach to quasilinear equations, Israel,J.Math, 12, (1972), 108-132.

[17] M.G.Crandall and T.Liggett, Generation of Semigroups of Nonlinear Transformations on general Banach Spaces, Amer.J.Math 93,(1971), 265-298.

[18] PH.Clement and H.J.A.M.Heijmans : One-parameter Semigroup, North-Holland, (1991).

[19] R.Dautray, J.L.Lions, Analyse mathématique et calcul numérique. Spectre des opérateurs, Masson (1983).

[20] N. Dunford and J. T. Schwartz, Linear operators. Part 1 : General Theory, Interscience Publishers, New York, 1958.

[21] K.Ezzinbi and A. Hachimi, Existence of a positive almost periodic solution through the use of the Hilbert projective metric for a class of functional equations, Nonlinear Analysis, Volume 26, $N^0 6$, (1996), 1169-1176.

[22] K.Ezzinbi, G.M. N'Guérékata, Almost automorphic solutions for some partial functional differential equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 328, (2007), 344-358.

[23] A.Favini, V.Barbou, Periodic problems for degenerate differential equations, Rend.Istit. mat. univ. trieste suppl. vol. XXVIII, 29-57 (1997).

[24] A.Favini, P.Colli, on some degenerate second order equations of mixed type, Funkcialaj Ekvacioj, 38 (1995) 473-489.

[25] Feller, W, On the generation of unbounded semigroups of bounded linear operators. Ann. of Math. 58, (1953), 166-174.

[26] Feller, W. The parabolic differential equations and the associated semigroups of transformations. Ann. Math., (3), 55, (1952), 468-519.

[27] H. Flaschka, Nonlinear semi groups and a hyperbolic conservation low, Technical Report 72-9, Department of mathematics, Mellon Institute of Science, Carrengie- Mellon University, Pittsburgh, PA, (1972).

[28] H.Flaschka and M.J.Leitman, On semigroups of nonlinear operators and the solution Of the functional equation $\dot{x}$ (t) = F(x_t), Journal of Mathematical Analysis and Applications 49, (1975), 649-658.

[29] Freedman, H. I., and Y. Kuang : Stability switches in linear scalar neutral delay equations, Funkcialaj Ekvacioj 34, 187-209.

[30] Gopalsamy, K., and B. G. Zhang : On a neutral delay logistic equation, Dynamics and Stability of Systems. 2, 183-195.

[31] J.Hale, Theory of functional differential equations, Springer-Verlag, New-York, Vol 3, (1977).

[32] H.R.Henriquez, Michelle Pierri and Andrea Prokopczyk Periodic Solutions of abstract neutral functional differential equations, J. Math. Ana. Appl. 385,

(2012), 608 - 621.

[33] K. X. He. Gopalsamy, and L. Wen : On a periodic neutral logistic equation, Glasgow Mathematics Journal. 33, 281-286.

[34] J.Hille. Notes on linear transformation. Trans. Amer. Math. Soc., 39(1936), 131-153.

[35] Hille, E. Functional Analysis and semigroups. A.M.S., New York, 1948.

[36] Hille, E. A note on Cauchys problem. Ann. Soc. Pol. Math., 25(1952), 56-68.

[37] R.S, Hille, E. Phillips. Functional Analysis and semigroups. A.M.S., Providence, Rhode Island, 1957.

[38] Y.Hino, T.Naito,N. Van Minh and J.S.Shin, Almost periodic solution of Differential Equations in Banach Spaces, Taylor and Francis, London,2002.

[39] Khalil Ezzinbi, Lecture Notes on Differential Equations in Banach Spaces, African University of Science and Technology, 2009

[40] Kuang, Y : On neutral delay logistic Gause-type predator-prey systems, Dynamics and Stability of Systems. 6, 173-189.

[41] V. Keyantuo, C. Lizama. A characterization of periodic solutions for time-fractional differential equations in UMD spaces and applications,Math. Nach., to appear.

[42] C.Lizama, Fourier multipliers and perodic solutions of delay equatons in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. 324,(2) (2006), 921-933.

[43] C.Lizama and V. Poblete, Periodic Solutions of Fractional Differential Equations With Delay, J.Evol.Equ.11, (2011), 57-70.

[44] A. J. Lotka, Elements of Physical Biology, Williams and Wilkins, Baltimore, (1925).

[45] N. MacDonald, Time Lags in Biological Models, Lecture Notes in Biomathematics, Springer-Verlag, (1978), Vol. 27.

[46] M. C. Mackey, Unified hypothesis of the origin of aplastic anemia and periodic hematopoiesis, Blood, Vol. 51, N^o5, (1978), 941-956.

[47] M. C. Mackey, Dynamic haematological disorders of stem cell origin, in Biophysical and Biochemical Information Transfer in Recognition, J. Vassileva-Popova and E. Jensen, reds., Plenum Press, (1979), 373-409.

[48] M. C. Mackey, C. Ou, L. Pujo-Menjouet and J. Wu, Periodic oscillations of blood cell populations in chronic myelogenous leukemia, SIAM Journal of Mathematic Analysis, Vol. 38, N^o 1, (2006), 166-187.

[49] M. C. Mackey and A. Rey, Multistability and boundary layer development in a transport equation with retarded arguments, The Canadian Applied Mathematics Quarterly, Volume 1, Issue 1, (1993), 61-81.

[50] M. C. Mackey and A. Rey, Transitions and kinematics of reaction-convection fronts in a cell population model, Physica D 80, Issue 1-2, (1995), 120-139.

[51] M. C. Mackey and R. Rudnicki, A new criterion for the global stability of simultaneous cell replication and maturation processes, Journal of Mathematical Biology, Vol. 38, N^o3, (1999), 195-219.

[52] Nathan, D.S. One-parameter semigroups of transformations in abstract vector spaces. Duke Math. J., 1(1935), 518-526.

[53] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, 1983.

[54] V.Poblete, Maximal regularity of second-order equations with delay, J. Differential Equations 246 (2009) 261276.

[55] V.Poblete, Solutions of second-order integro-differential équations on periodic Besov spaces. Proc.Edinb. Math. Soc. 50(2) (2007), 477-492.

[56] N.Pavel, Nonlinear evolution operators and Semigroups, lecture Notes in Mathematics 1260, Springer-Verlag, (1987).

[57] F. E. Smith, Population dynamics in Daphnia magna, Ecology, 44, 651-653.

[58] R.S.Phillips. On the generation of semi-groups of linear operators. Pacific J.Math., 2(1952), 393-415.

[59] I.E.Segal, Nonlinear semigroups, Ann, of Math. (2) 78 (1963), 339-364.

[60] O.Sidki et R.Bahloul ; A Semigroup Approach to Semilinear Functional Differential Equations in a Banach Space, International Journal of Scientific and Engineering Research (IJSER), Volume 4, Issue 11, November-2013.

[61] O.Sidki et R.Bahloul, Periodic Solutions of abstract neutral functional differential equations, International Organization of Scientific Research Journals of Mathematics (IOSR-JM), Vol.10, Issue 2, Mar-Apr 2014, 86-96. Doi :10.9790/5728-10228696.

[62] O.Sidki, Une approche par la théorie des semi-groupes non linéaires de la résolution d'une classe d'équations différentielles fonctionnelles de type neutre, Application à une équation de dynamique De population, Thèse d'université, Université de Pau, N0 221, (1994).

[63] O.Sidki and O.Arino,on semigroups of Nonlinear Operators and the Solution of Functional Differential Equation, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive systems, Math.Anal (2001) 8(2), 249-259.

[64] L. Saint-Raymond, Université Paris VI and DMA Ecole Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, FRANCE.

[65] C.C.Travis and G.F.Webb, Existence and staility for partial functional differential, Trans. Math. Soc. 200, (1974), 395-418.

[66] V. Volterra, Sur la théorie mathématiques des phénomènes héréditaires, Journal de Math Pures et Appliquées, Volume 7, (1928), 249-298.

[67] G.F.Webb, Autonomous nonlinear functional differential equations and nonlinear Semigroups, Journal of Mathematical and Applications 46, (1974), 1-12.

[68] L. Weis, Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal Lp-regularity (2001) Math.Ann. 319, 735-758.

[69] J.Wu, Theory and Applications of Partial Differential Equations, Appl, Math .Sci. 119, Springer-verlag, 1969.

[70] Yosida, K. On the group embeded in a matriceal complete ring. Japan J. Math., 13 (1936), 7-26.

[71] Yosida, K. On the differentiability and the representation of one-parameter semi-groups of linear operators. J. Math. Soc. Japan, 1, (1948), 15-21.

[72] Yosida, K. Lectures on Semi-group Theory and its application to Cauchy problem in Partial Differential Equations. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1957.

[73] K.yosida, Functional Analysis, 2end Edition, Springer-verlag, New-York, (1968).