جامعة سيدي محمد بن عبد الله بفاس
UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDALLAH DE FES
كلية العلوم ظهر المهراز فاس
FACULTE DES SCIENCES DHAR EL MEHRAZ FES



N° d'ordre : 39/2020

Formation Doctorale : Mathématiques et Applications

Discipline : Mathématiques

Spécialité : Analyse Fonctionnelle et Théorie spectrale

Laboratoire : Sciences Mathématiques et Applications

THESE DE DOCTORAT

Présentée par

MOUSSAOUJA Khalil

Familles cosinus sur les espaces localement convexes

Soutenue le 23 / 07/ 2020 devant le jury composé de :

Pr. A. Tajmouati	***Faculté des Sciences Dhar El Mahraz-Fès***	**Président**
Pr. M. Babahmed	***Faculté des Sciences-Meknès***	**Rapporteur**
Pr. M. Bendaoud	***Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers-Meknès***	**Rapporteur**
Pr. M. Ech-Chérif El Kettani	***Faculté des Sciences Dhar El Mahraz-Fès***	**Rapporteur**
Pr. A. El Amrani	***Faculté des Sciences Dhar El Mahraz-Fès***	**Examinateur**
Pr. M. Ouzahra	***Ecole Normale Supérieure-Fès***	**Examinateur**
Pr. H. Zguitti	***Faculté des Sciences Dhar El Mahraz-Fès***	**Examinateur**
Pr. A. Blali	***Ecole Normale Supérieure-Fès***	**Co-directeur de thèse**
Pr. R. Ameziane Hassani	***Faculté des Sciences Dhar El Mahraz-Fès***	**Directeur de thèse**

Année universitaire : 2019-2020

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier très vivement Mes directeurs de thèse Messieurs **Rachid Ameziane Hassani** et **Aziz Blali**, Professeurs de l'Université Sidi Mohammed Ben Abdellah de Fès, pour la confiance qu'ils m'ont accordée en me permettant d'effectuer mes travaux de thèse sous leur direction. Leurs conseils et leur aide ont été d'une importance capitale ; que ce travail leur témoigne toute ma reconnaissance.

J'exprime également ma reconnaissance à Monsieur **Abdelkhalek El Amrani**, Professeur de l'Université Sidi Mohammed Ben Abdellah de Fès, de l'intérêt qu'il a porté à mon travail. Ses conseils, son soutien et sa gentillesse ont été primordiaux pendant l'élaboration de cette thèse. Qu'il soit aussi remercié de m'avoir fait l'honneur de participer au Jury de soutenance.

Ma gratitude va au professeur **Abdelaziz Tajmouati** pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

J'adresse mes sincères remerciements aux Professeurs **Mohammed Babahmed** et **Mohamed Bendaoud**, de l'Université Moulay Ismaïl de Meknès, et Professeur **Mustapha Ech-chérif El Kettani** de l'Université Sidi Mohammed Ben Abdellah de Fès, pour avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse, qu'ils trouvent l'expression de ma grande gratitude.

Je remercie aussi très chaleureusement les Professeurs **Mohamed Ouzahra** et **Hassane Zguitti** de l'Université Sidi Mohammed Ben Abdellah de Fès, qui ont accepté d'examiner mon travail et me faire l'honneur d'être membres du Jury de soutenance.

J'en profite pour exprimer ici ma gratitude et mes sincères remerciements à mon cher enseignant **Hassan ZAROK** pour m'avoir donné le goût et le courage pour continuer mes études jusqu'au bout.

En dernier, je dédie cette thèse à mes parents, qui ont su m'amener à ce niveau d'étude, mes frères, ma famille et mes amis qui m'ont soutenu durant la conception de ce travail, et pour qui j'éprouve un grand amour et un profond respect que je tiens à leur exprimer ici.

TABLE DES MATIÈRES

1 Préliminaires **13**

1.1 Généralités 13

1.1.1 Espaces localement convexes et espaces tonnelés 13

1.1.2 Ensembles équicontinus d'opérateurs linéaires 17

1.2 Calcul différentiel et intégral dans les espaces localement convexes 20

1.2.1 Dérivation 20

1.2.2 Intégration de Riemann 21

1.3 Familles C_0-Cosinus sur les espaces de Banach 30

2 Familles Cosinus sur les espaces localement convexes **44**

2.1 Familles Cosinus fortement continues et familles C_0-Cosinus 45

2.2 La résolvante du générateur infinitésimal 62

2.3 Famille cosinus de la forme $\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k\}_{t\geq 0}$ pour un certain $A \in \mathcal{L}(X)$. 66

3 Familles Cosinus sur une classe d'espaces de Fréchet **71**

3.1 Introduction du problème 71

3.2 Familles cosinus sur la classe Quojection d'espaces de Fréchet 77

3.3 Familles cosinus sur la classe GDP-Quojection d'espaces de Fréchet 85

Bibliographie **90**

RÉSUMÉ

Dans ce travail, nous étendons certains résultats de la théorie des familles cosinus à des classes d'espaces localement convexes.

Nous introduisons la notion de famille cosinus fortement continue dans les espaces localement convexes séparés et séquentiellemt complets et nous étudions de telles familles sous la condition de l'équicontinuité locale, nous établissons une généralisation du théorème de l'unicité de l'engendrement et nous donnons une classe d'espaces localement convexes sur laquelle l'équicontinuité locale est vérifiée pour toute famille cosinus fortement continue. Ainsi, nous introduisons la notion de famille C_0-cosinus dans les espaces localement convexes séparés et nous montrons que toute famille C_0-cosinus localement équicontinue est fortement continue.

Nous étendons ensuite un théorème de M. Sova [45] à la classe d'espaces de Fréchet-Quojection, où il s'agit de montrer que le générateur infinitésimal A de toute famille cosinus uniformément continue $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est défini sur l'espace tout entier, et que cette dernière s'écrit sous la forme : $C(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}A^k$, $t \geq 0$. Ceci nous permet de donner la réponse de la question de J. A. Conejero [14] dans le cas des familles cosinus.
Nous présentons une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur linéaire continu soit le générateur infinitésimal d'une famille cosinus fortement continue sur un espace Fréchet-Quojection.

Enfin, nous prouvons que sur la classe GDP-Quojection d'espaces de Fréchet, toute famille C_0-cosinus exponentiellement équicontinue est uniformément continue.

Mots et phrases clés : *Familles cosinus, équicontinuité local, équicontinuité exponentielle, espace localement convexe tonnelé, espace de Fréchet, espace quojection et préquojection, espace de Grothendieck, propriété Dunford-Pettis.*

ABSTRACT

In this work, we extend some results of the theory of cosine families to classes of locally convex spaces.

We introduce the notion of strongly continuous cosine family on sequentially complete locally convex Hausdorff spaces and we study such families under the condition of local equicontinuity, we establish a generalization of the theorem of uniqueness of generation and we give a class of locally convex spaces on which the local equicontinuity is verified for every strongly continuous cosine family.

Also, we introduce the notion of C_0-cosine family on locally convex Hausdorff spaces and we show that every locally equicontinuous C_0-cosine family is strongly continuous.

We extend a theorem of M. Sova [45] to the class of Quojection-Fréchet spaces, where it is shown that the infinitesimal generator A of all uniformly continuous cosine family $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ is everywhere defined, and that the family is written in the form : $C(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k$, $t \geq 0$. This allows us to give the answer to the question of J. A. Conejero [14] in the case of cosine families.

We present a necessary and sufficient condition for a continuous linear operator to be the infinitesimal generator of a strongly continuous cosine family in a Fréchet-Quojection space.

Finally, we prove that in the class of GDP-Quojection Fréchet spaces, every exponentially equicontinuous C_0-cosine family is uniformly continuous.

Key Words and phrases : *Cosine Families, local equicontinuity, exponential equicontinuity, barrelled locally convex space, Fréchet space, quojection and préquojection space, Grothendieck space, property of Dunford-Pettis.*

ملخص

في هذا العمل، نقوم بتعميم بعض نتائج نظرية أسر جيب التمام لتشمل الفضاءات المحدبة محليا.

نقدم مفهوم أسر جيب التمام قوية الاتصال في الفضاءات المحدبة محليا المنفصلة والمتكاملة بالتتابع، ونقوم بدراسة هذه الأسر في ظل تساوي الاتصال محليا، ونعمم نظرية وحدانية المولد و نعطي فئة من الفضاءات المحدبة محليا يتم فيها تحقق تساوي الاتصال محليا لكل أسرة جيب التمام قوية الاتصال.

ونقدم أيضا مفهوم أسرة جيب التمام من فئة C_0 في الفضاءات المحدبة محليا ونبرهن أن أي أسرة جيب التمام من فئة C_0 متساوية الاتصال محليا هي أسرة قوية الاتصال.

ثم نقوم بتعميم نظرية سوفا $(M.\ Sova)$ [45] الى فئة فضاءات فريشي كوجيكسيون $(Frèchet - Quojection)$، لنبرهن أن المولد المتناهي الصغر A لأي أسرة جيب التمام $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ موحدة الاتصال معرف على كل الفضاء، وهذه الأخيرة تكتب على شكل: $C(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k$، $t \geq 0$. الأمر الذي يمكننا من تقديم اجابة لسؤال كونيخرو $(J.A.Conejero)$ [14] في حالة أسر جيب التمام.

كما نقدم شرطا لازما وكافيا لتكون دالة خطية متصلة المولد المتناهي الصغر لأسرة جيب التمام قوية الاتصال في فئة فضاءات فريشي كوجيكسيون.

أخيرا، نثبت أنه في صنف GDP من فضاءات فريشي كوجكسيون، كل أسرة جيب التمام قوية الاتصال و متساوية الاتصال أسيا هي أسرة موحدة الاتصال.

INTRODUCTION

La théorie des équations différentielles est une branche importante des mathématiques ; elle trouve des applications dans plusieurs domaines scientifiques ; ces équations interviennent, par exemple, dans la modélisation d'un très grand nombre de problèmes en physique.

La notion de familles cosinus est étroitement liée à cette théorie ; historiquement parlant, elle remonte à l'année 1966 avec le mathématicien M. Sova [45].

Une famille $\{C(t)\}_{t\geq 0}$, d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach $(E, ||.||)$, est appelée famille cosinus si elle vérifie :

(i) $C(0) = I$ et Pour tous $0 \leq s \leq t$, $2C(t)C(s) = C(t+s) + C(t-s)$ (Equation fonctionelle de d'Alembert).

Une famille cosinus $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est dite :

(ii) Famille C_0-cosinus sur E si, pour tout $x \in E$, $\lim_{t\longrightarrow 0^+} C(t)x = x$.

(iii) Famille cosinus uniformément continue sur E si, $\lim_{t\longrightarrow 0^+} ||C(t) - I|| = 0$.

Le générateur infinitésimal A d'une famille C_0-cosinus $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ sur E est défini sur :

$$D(A) := \{x \in E : \lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{2}{t^2}(C(t)x - x) \text{ existe dans } E\}$$

par

$$Ax := \lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{2}{t^2}(C(t)x - x).$$

La notion de familles cosinus est intimement liée au problème suivant :

Soient $B : D(B) \subseteq E \longrightarrow E$ un opérateur fermé et $x, y \in E$, le problème de Cauchy de deuxième ordre associé à B est donné par :

$$P^2(x,y) : \begin{cases} u''(t) = Bu(t), & t \geq 0, \\ u(0) = x, \\ u'(0) = y. \end{cases}$$

On dit que $P^2(x,y)$ est bien posé si $D(B)$ est dense dans E, s'il existe une solution unique $u(.,x)$ de $P^2(x,y)$ pour chaque $x \in D(B)$ et $y = 0$ et l'opérateur $u(t,.)$ est continu sur E pour tout $t \geq 0$.

Inspiré par les résultats de M. Sova [45], H. O. Fattorini [21, 22] a caractérisé les problèmes de Cauchy de deuxième ordre bien posés par l'équivalence suivante : $P^2(x,y)$ est bien posé si, et seulement si, B est le générateur infinitésimal d'une famille C_0-cosinus $\{C(t)\}_{t\geq 0}$.

Dans le cas classique (espaces de Banach), la théorie des familles cosinus a des analogies parallèles avec la théorie des semi-groupes [8, 20, 23, 25, 35, 45] ; les démonstrations dans le premier cas sont plus difficiles, en raison de la structure compliquée de l'équation fonctionnelle de d'Alembert.

Dans un cadre plus général, celui des espaces localement convexes, tonnelés ou de Fréchet, et suite aux travaux remarquables de E. Hille et R. S. Phillips [26] et K. Yosida [46], les résultats de la théorie des semi-groupes ont été généralisés par de nombreux auteurs au cours des soixante dernières années (voir par exemple [4, 5, 30, 33, 34]).

Soit $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires continus sur un espace localement convexe X. On dit que $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est :

— Fortement continue si l'application $C(.)x : \mathbb{R}^+ \longrightarrow X$ est continue pour tout $x \in X$.

— Uniformément continue si l'application $C(.) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ est continue.

— Exponentiellement équicontinue s'il existe $\omega \geq 0$ tel que la famille d'opérateurs $\{e^{-\omega t}C(t)\}_{t\geq 0}$ soit équicontinue.

Dans le cas classique, la majorité des résultats de la théorie des familles cosinus proviennent du fait que les familles C_0-cosinus sont exponentiellement bornées et fortement continues (voir par exemple [25, 35, 45]).

L'objectif de cette thèse est d'étendre la théorie des familles cosinus à des classes d'espaces localement convexes.

En s'inspirant des travaux de K. Yosida [46] et T. Komura [30], nous étendons la notion de famille cosinus fortement continue aux espaces localement convexes ; nous montrons que ces familles ne vérifient pas, en général, la propriété de l'équicontinuité exponentielle (voir Exemple 2.1.13), et que moyennant cette propriété, plusieurs résultats de la théorie des familles cosinus trouvent leurs généralisations. Le premier but, atteint dans ce travail, est de trouver une propriété, plus faible que l'équicontinuité exponentielle, et assure la

généralisation des résultats de la théorie des familles cosinus fortement continues. Nous donnons, en suite, une classe d'espaces localement convexes sur laquelle la propriété en question est vérifiée pour toute famille cosinus fortement continue.

On rappelle qu'une famille $\{C(t)\}_{t\geq 0}$, d'opérateurs linéaires continus sur X, est localement équicontinue si, pour chaque $s > 0$, la famille $\{C(t),\ 0 \leq t \leq s\}$ est équicontinue. Nous remarquons que l'équicontinuité exponentielle implique l'équicontinuité locale, mais la réciproque n'est pas vraie en général (Exemple 2.1.13) ; nous montrons que par l'équicontinuité locale (seulement), certains résultats de la théorie des familles cosinus fortement continues se généralisent et nous prouvons que sur la classe d'espaces localement convexes tonnelés, toute famille cosinus fortement est localement équicontinue.
En suite, nous introduisons la notion de familles C_0-cosinus dans les espaces localement convexes. On se pose, d'une manière naturelle, la question suivante : est-ce-que, comme dans le cas classique, toute famille C_0-cosinus est fortement continue ?
Nous montrons que si une famille C_0-cosinus $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est localement équicontinue, alors elle est fortement continue [7, Proposition 2.3], ce qui donne une réponse partielle à la dernière question.
Récemment, M. Kunze [33] a donné une réponse négative pour cette question dans le cas des semi-groupes ; il a montré, à l'aide d'un exemple intéressant [33, Exemple 5.2], qu'un C_0-semi-groupe sur un espace localement convexe n'est pas nécessairement fortement continu. Par ailleurs, dans le cas des familles cosinus cette question est encore ouverte.

Après avoir généralisé les outils nécessaires, on attaque l'objectif principal de ce travail qui consiste à étudier les familles cosinus uniformément continues dans les espaces de Fréchet. Où nous donnons une généralisation du théorème suivant sur une classe d'espaces de Fréchet.

Théorème 0.0.1. *[45, Théorème 3.4] Le générateur infinitésimal A, de toute famille cosinus uniformément continue $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ sur un espace de Banach E, est un opérateur borné. De plus, la famille $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ s'écrit sous la forme :*

$$C(t)x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k x, \ \textit{pour tout } x \in E \ \textit{et tout } t \geq 0.$$

Dans cette thèse nous proposons la généralisation suivante :

Théorème 0.0.2. *[6, Théorème 1] Soit X un espace de Fréchet-quojection. Toute famille cosinus $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ uniformément continue sur X admet un générateur infinitésimal A continu sur X ($A \in \mathcal{L}(X)$). De plus, la famille cosinus $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ s'écrit sous la forme :*

$$C(t)x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k x, \text{ pour tout } x \in X \text{ et tout } t \geq 0.$$

Cette généralisation est motivée par le contre exemple [6, Exemple 1] qui montre que, dans les espaces de Fréchet, le Théorème 0.0.1 ci-dessus n'est pas vrai.
Dans [14], J. A. Conejero a posé la question de savoir si tout semi-groupe fortement continu $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, sur l'espace de suites complexes $\boldsymbol{\omega} = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, s'écrit sous la forme $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$, pour certains opérateurs linéaires continus A sur $\boldsymbol{\omega}$. Récemment, L Frerick, E. Jorda, T. Kalmes et J. Wengenroth [24] ont donné une réponse positive à cette question, suite au travail remarquable [4] de A.A. Albanese, J. Bonet et W.J. Ricker.
Comme application du Théorème 0.0.2, nous donnons une réponse positive pour la question de Conejero dans le cas des familles cosinus.

Le contenu de cette thèse sera présenté comme suit :

Le premier chapitre se compose de trois sections. On commence (première section) par un préliminaire sur les espaces localement convexes, les espaces tonnelés et certains résultats fondamentaux. En suite, nous rappelons, dans la deuxième section, le calcul différentiel et intégral des fonctions de la variable réelle et à valeurs dans un espace localement convexe. On finit ce chapitre par un exposé assez détaillé sur la notion de familles C_0-cosinus dans le cas des espaces de Banach (cas classique).

Dans le deuxième chapitre, nous montrons que le générateur infinitésimal A d'une famille cosinus fortement continue et localement équicontinue $\{C(t)\}_{t\geq 0}$, sur un espace localement convexe séparé et séquentiellement complet X, est un opérateur fermé, et pour tout $x \in D(A)$, l'application $C(.)x : \mathbb{R}^+ \longrightarrow X$ est deux fois différentiable. Ainsi, nous établissons l'analogue du théorème de l'unicité de l'engendrement pour cette classe de familles cosinus dans les espaces localement convexes séparés et séquentiellement complets. Si de plus X est tonnelé, l'équicontinuité locale est vérifiée pour les familles cosinus fortement continues.
En suite, On étudie la résolvante du générateur infinitésimal dans le cas des familles C_0-

cosinus qui sont exponentiellement équicontinues. On finit ce chapitre par une étude, dans les espaces localement convexes, des familles cosinus qui s'écrivent sous forme d'une série.

Le troisième chapitre est divisé en trois sections, dans la première nous exposons un exemple qui montre que le Théorème 0.0.1 ne reste plus vrai dans les espaces de Fréchet, et nous donnons une classe d'espaces de Fréchet sur laquelle on peut trouver une famille cosinus uniformément continue admettant un générateur infinitésimal qui n'est pas défini sur l'espace tout entier.

Dans la deuxième section, nous généralisons le Théorème 0.0.1 à la classe quojection d'espaces de Fréchet. Comme application, on montre que toute famille cosinus fortement continue $\{C(t)\}_{t\geq 0}$, sur l'espace des suites $\boldsymbol{\omega}$, s'écrit sous la forme : $C(t)x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k x$, avec A est le générateur infinitésimal de $\{C(t)\}_{t\geq 0}$; ce qui donne la réponse à la question de Conejero. Ainsi, sur cette classe d'espaces, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur linéaire continu soit le générateur infinitésimal d'une famille cosinus fortement continue.

Enfin, à l'aide des résultats obtenus dans le deuxième chapitre, nous montrons, dans la dernière section, que toute famille C_0-cosinus exponentiellement équicontinue sur un espace quojection de Grothendieck admet la propriété de Dunford-Pettis est uniformément continue.

NOTATIONS

Sauf indication contraire, on adoptera les notations suivantes :

$\mathbb{K}$	l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ ou complexes $\mathbb{C}$
$[t]$	la partie entier d'un nombre réel t
J	intervalle de $\mathbb{R}$ ouvert ou fermé
E, X_n, X_m	espaces de Banach
$B(E)$	l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés sur E
π_m^n	application linéaire continue de X_m dans X_n
$(X_n, \pi_m^n)_{m\geq n}$	système projectif d'espaces de Banach $(X_n)_n$ par rapport aux $(\pi_m^n)_{m\geq n}$
$\underleftarrow{Proj}_n(X_n, \pi_m^n)$	la limite projective du système $(X_n, \pi_m^n)_{m\geq n}$
X	espace localement convexe
p	semi-norme continue sur X
Γ_X	un système fondamental de semi-normes engendrant la topologie de X
X'	le dual topologique de l'espace X
π^n	la n-ième projection de $\underleftarrow{Proj}_n(X_n, \pi_m^n)$ dans X_n
$C^0(J, X)$	l'espace vectoriel des fonctions continues de J dans X
$C^r(J, X)$	l'espace vectoriel des fonctions de J dans X de classe C^r
I	l'opérateur identité
$B(X)$	l'ensemble des parties bornées de X
$\mathcal{L}(X)$	l'espace vectoriel des opérateurs linéaires continus sur X
τ_s	la topologie de la convergence forte
τ_b	la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de X
$\mathcal{L}_s(X)$	L'espace $\mathcal{L}(X)$ muni de la topologie τ_s
$\mathcal{L}_b(X)$	L'espace $\mathcal{L}(X)$ muni de la topologie τ_b
$\boldsymbol{\omega}$	l'espace des suites complexes $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

1.1 Généralités

Dans toute cette section, $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1.1 Espaces localement convexes et espaces tonnelés

Définition 1.1.1. *Soient A et B deux parties non vides d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel X.*

1. *A est dite **équilibrée** si pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $|\lambda| \leq 1$ on a : $\lambda A \subseteq A$.*
2. *A est dite **convexe** si pour tout $(x, y) \in A^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{+2}$, avec $\lambda + \mu = 1$, on a : $\lambda x + \mu y \in A$.*
3. *A est dite **disquée** (**disque** ou **absolument convexe**) si A est à la fois convexe et équilibrée.*
4. *On dit que A **absorbe** B s'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $|\lambda| \geq \alpha$ on a : $B \subseteq \lambda A$.*
5. *On dit que A est **absorbante** si elle absorbe toute partie réduite à un point.*
6. *On appelle **enveloppe convexe** (resp. équilibrée, resp. disquée) de A la plus petite partie convexe (resp. équilibrée, resp. disquée) qui contient A.*

Proposition 1.1.2. *Soient X un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A et B deux parties de X. Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *Si A est équilibrée, alors*

(a) *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$ *on a :* $\lambda A = |\lambda| A$.

(b) *Pour tout* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ *on a :* $|\lambda| \leq |\mu|$ *implique que* $\lambda A \subseteq \mu A$.

2. *Si* A *est équilibrée, alors* A *absorbe* B *si, et seulement si, il existe* $\alpha > 0$ *tel que* $B \subset \alpha A$.

3. *L'intersection de parties convexes (resp. équilibrées, resp. disquées) est convexe (resp. équilibrée, resp. disquée).*

4. A *est disquée si, et seulement si, pour tout* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, *avec* $|\lambda| + |\mu| \leq 1$, *on a :*

$$\lambda A + \mu A \subseteq A.$$

5. *Si* A *est disquée, alors* $\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta) A$ *pour tous* $\alpha, \beta \geq 0$.

Un espace vectoriel topologique X est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une topologie Γ pour laquelle les applications suivantes sont continues.

$$\begin{aligned} X \times X &\longrightarrow X, & \mathbb{K} \times X &\longrightarrow X \\ (x, y) &\longmapsto x + y, & (\lambda, x) &\longmapsto \lambda x \end{aligned}$$

Dans ce cas, Γ est dite topologie d'espace vectoriel (ou topologie vectorielle).

Remarque 1.1.3. Soit X un espace vectoriel topologique, alors les propriétés suivantes sont vérifiées :.

a. Pour tout $x \in X$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, les applications suivantes sont des homéomorphismes.

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow X, & X &\longrightarrow X \\ y &\longmapsto x + y, & y &\longmapsto \lambda y \end{aligned}$$

b. Une base de voisinages d'un point $x \in X$ est donnée par $\mathcal{V}(x) = \{x + V / V \in \mathcal{V}(0)\}$, avec $\mathcal{V}(0)$ une base de voisinages de 0 dans X. Autrement dit, la topologie d'un espace vectoriel topologique est entièrement déterminée par la donnée d'une base de voisinages de 0.

c. Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et tout voisinage V de 0 dans X, αV est un voisinage de 0 dans X.

Proposition 1.1.4. *[13, Proposition 1 et 14] Dans un espace vectoriel topologique, l'adhérence d'une partie convexe (resp. équilibrée, resp. disquée) est convexe (resp. équilibrée, resp. disquée).*

Proposition 1.1.5. *[44, Corollaire 3.1] Tout espace vectoriel topologique X possède une base de voisinages de 0 constituée de parties équilibrées et fermées.*

Définition 1.1.6. *[44] Un espace vectoriel topologique X est dit **séparé** (ou de Hausdorff) si pour tous $x, y \in X$, avec $x \neq y$, il existe deux voisinages U et V de 0 tels que :*

$$(x + U) \cap (y + V) = \emptyset.$$

Définition 1.1.7. *[44] Soit X un espace vectoriel topologique. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X est dite de **Cauchy** si pour tout voisinage U de 0 dans X, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n - x_m \in U$, pour tous $n, m \geq N$.*
*On dit que l'espace X est **séquentiellement complet** si toute suite de Cauchy dans X est convergente dans X.*

Définition 1.1.8. *[13] Soit X un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une **semi-norme** p sur X est une application $p : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout $x \in X$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$:*

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x).$$

2. *Pour tous $x, y \in X$:*

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y).$$

p est dite une norme si de plus : $x \in X,\ p(x) = 0 \implies x = 0$.

Pour toute semi-norme p sur l'espace X, on définit les ensembles suivants :

$$\bar{U}_p = \{x \in X; \quad p(x) \leq 1\}, \quad \mathring{U}_p = \{x \in X; \quad p(x) < 1\}.$$

Proposition 1.1.9. *[13, Proposition 1, II.2] Soient X un espace vectoriel topologique et p une semi-norme sur X. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathring{U}_p$ est un ouvert dans X.*
2. *p est continue en 0.*

3. *p est continue sur X.*

4. *$\mathring{U}_p$ est un voisinage de 0 dans X.*

Définition 1.1.10. *Soit A une partie absorbante d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel X, on appelle* ***jauge*** *de A, l'application p_A définie par :*

$$\begin{aligned} p_A : & X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ & x \longrightarrow p_A(x) = \inf\{\alpha \geq 0 / x \in \alpha A\}. \end{aligned}$$

Proposition 1.1.11. *Soit A une partie disquée et absorbante d'un espace vectoriel topologique X. Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *La jauge p_A de A est une semi-norme sur X.*

2. *p_A est continue si, et seulement si, A est un voisinage de 0.*

Définition 1.1.12. *[44] On dit qu'une partie A de X est un* ***tonneau*** *si elle est disquée, absorbante et fermée.*

Proposition 1.1.13. *[44, Proposition 7.5] Soient X un espace vectoriel topologique et A un tonneau de X. Il existe une seule semi-norme p sur X telle que :*

$$A = \bar{U}_p.$$

La semi-norme p est continue si, et seulement si, A est un voisinage de 0.

Définition 1.1.14. *[13, 44] On appelle* ***espace localement convexe*** *tout espace vectoriel topologique qui possède une base de voisinages de 0 constituée de parties convexes.*

Proposition 1.1.15. *[44, Proposition 7.2] Tout espace localement convexe X possède une base de voisinages de 0 constituée de tonneaux.*

Théorème 1.1.16. *[13] Étant donnée une famille Γ_X de semi-normes sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel X.*
La topologie vectorielle la moins fine sur X, qui rend continue toutes les semi-normes de Γ_X, est une topologie d'espace localement convexe dont une base de voisinages de 0 est donnée par les intersections finies des $r\mathring{U}_p$, où $r \in \mathbb{R}^+$ et $p \in \Gamma_X$.
Cette topologie est dite définie ou engendrée par la famille de semi-normes Γ_X.

Théorème 1.1.17. *[13] Toute topologie d'espace localement convexe est définie par une famille de semi-normes.*

Proposition 1.1.18. *Soit X un espace localement convexe dont la topologie est définie par une famille de semi-normes Γ_X.*
X est séparé (ou de Hausdorff) si, et seulement si, pour tout $x \in X \setminus \{0\}$, il existe $p \in \Gamma_X$ telle que $p(x) > 0$.

Définition 1.1.19. *[44, Définition 33.1] Un espace vectoriel topologique X est dit **tonnelé** si tout tonneau de X est un voisinage de 0.*

Notons qu'un espace tonnelé n'est pas nécessairement localement convexe. La proposition suivante donne une caractérisation d'espaces tonnelés qui sont localement convexes.

Proposition 1.1.20. *[44] Un espace tonnelé X est localement convexe si, et seulement si, X possède une base de voisinages de 0 constituée de tonneaux.*

Proposition 1.1.21. *[44, Proposition 33.1] Soient X un espace tonnelé et M un sous-espace vectoriel de X. L'espace quotient X/M est tonnelé.*

Proposition 1.1.22. *[44, Proposition 33.2] Tout espace vectoriel topologique qu'est de Baire est tonnelé.*

Corollaire 1.1.23. *[44, Corollaire 1-2] Les espaces de Fréchet (en particulier de Banach) sont des espaces tonnelés.*

Définition 1.1.24. *[44, Définition 34.2] On appelle **espace de Montel** un espace vectoriel topologique localement convexe séparé, tonnelé et dont tout fermé borné est compact.*

1.1.2 Ensembles équicontinus d'opérateurs linéaires

Dans la suite, on désigne par X, Y deux espaces vectoriels topologiques et par $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace vectoriel des opérateurs linéaires continus de X dans Y.
On rappelle qu'une partie A de X est dite bornée si elle est absorbée par tout voisinage de 0.
Considérons une famille $\mathcal{G}$ de parties bornées de X vérifiant les propriétés suivantes :

1. Pour tous $A, B \in \mathcal{G}$, il existe $C \in \mathcal{G}$ tel que $A \cup B \subseteq C$.

2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $A \in \mathcal{G}$, il existe $B \in \mathcal{G}$ tel que $\lambda A \subseteq B$.

Pour toute partie bornée B de X et tout voisinage V de 0 dans Y, on définit le sous-ensemble $\mathcal{U}(B,V) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ par :

$$\mathcal{U}(B,V) = \{T \in \mathcal{L}(X,Y),\ T(B) \subseteq V\}.$$

Proposition 1.1.25. *[44, Proposition 32.1] Le sous-ensemble $\mathcal{U}(B,V)$ de $\mathcal{L}(X,Y)$ est absorbant ; de plus, il est convexe (resp équilibré) si V est convexe (resp équilibré).*

Définition 1.1.26. *[44, Définition 33.2] Soient $\mathcal{G}$ une famille de parties bornées de X satisfaisant les deux propriétés précédentes, et $\mathcal{V}(0)$ une base de voisinages de 0 dans Y. On appele **$\mathcal{G}$-topologie** sur $\mathcal{L}(X,Y)$ la topologie ayant pour base de voisinages de 0 les sous-ensembles $\mathcal{U}(B,V)$, avec $B \in \mathcal{G}$ et $V \in \mathcal{V}(0)$.*
$\mathcal{L}(X,Y)$ muni de la $\mathcal{G}$-topologie sera noté par $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(X,Y)$.

Exemple 1.1.27.

1. Si $\mathcal{G}$ est la famille de toutes les parties finies de X ; la $\mathcal{G}$-topologie correspondante est appelée la topologie de la convergence forte (ou la convergence simple).
   $\mathcal{L}(X,Y)$ muni de cette topologie sera noté par $\mathcal{L}_s(X,Y)$.
2. Si $\mathcal{G}$ est la famille de toutes les parties bornées de X ; la $\mathcal{G}$-topologie correspondante est appelée la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de X (ou la convergence bornée).
   $\mathcal{L}(X,Y)$ muni de cette topologie sera noté par $\mathcal{L}_b(X,Y)$.
3. Si $Y = \mathbb{K}$, l'espace $\mathcal{L}(X,\mathbb{K})$ noté par X' est le dual topologique de X. Dans ce cas, X'_s (resp X'_b) est le dual faible (resp forte) de X.

Proposition 1.1.28. *[44, Proposition 32.2] Si Y est un espace localement convexe, alors $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(X,Y)$ est aussi localement convexe. Si Y est séparé et la réunion de toutes les parties appartenant à $\mathcal{G}$ est dense dans X, alors $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(X,Y)$ est séparé.*

Proposition 1.1.29. *[13, III.14] Soient p une semi-norme continue sur Y et B une partie bornée de X. On définit l'application p_B de $\mathcal{L}(X,Y)$ dans $\mathbb{R}^+$ par :*

$$p_B(T) = \sup_{x \in B} p(Tx), \quad T \in \mathcal{L}(X,Y).$$

L'application p_B est une semi-norme sur $\mathcal{L}(X,Y)$.

Proposition 1.1.30. *[13, III.14] Si Y est un espace localement convexe et Γ_Y un système fondamental de semi-normes sur Y. La famille de semi-normes*

$$\Gamma_{\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(X,Y)} = \{p_B, \quad p \in \Gamma_Y \text{ et } B \in \mathcal{G}\}$$

est un système fondamental de semi-normes sur $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(X,Y)$.

Définition 1.1.31. *[44, Définition 32.2] Soient X, Y deux espaces vectoriels topologiques. Une partie H, d'opérateurs linéaires continus de X dans Y $(H \subset \mathcal{L}(X,Y))$, est dite* ***équicontinue*** *si pour tout voisinage V de 0 dans Y, il existe un voisinage U de 0 dans X tel que :*

$$\bigcup_{T \in H} T(U) \subseteq V.$$

Proposition 1.1.32. *[44, Proposition 32.6] Toute partie équicontinue de $\mathcal{L}(X,Y)$ est bornée pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de X.*

Proposition 1.1.33. *[13, Propostion 5, II.7] Soient X, Y deux espaces localement convexes, et Γ_X (resp. Γ_Y) un système fondamental de semi-normes engendrant la topologie de X (resp. Y). Pour toute partie $H \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *H est équicontinue.*
2. *Pour tout $p \in \Gamma_Y$, il existe $q \in \Gamma_X$ et $M > 0$ tels que :*

$$p(T(x)) \leq Mq(x), \text{ pour tout } T \in H \text{ et tout } x \in X.$$

3. *Pour toute semi-norme $p \in \Gamma_Y$, $\sup_{T \in H}(p \circ T)$ est une semi-norme continue sur X.*

Théorème 1.1.34. *[44, Théorème 33.1] Soient X un espace tonnelé et Y un espace localement convexe. Pour toute partie H de $\mathcal{L}(X,Y)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *H est bornée pour la topologie forte.*
2. *H est bornée pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de X.*
3. *H est équicontinue.*

Théorème 1.1.35. *[44, Théorème 33.2] Soit X un espace tonnelé, avec X' son dual topologique. Pour toute partie H de X', les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *H est faiblement bornée.*
2. *H est fortement bornée.*
3. *H est équicontinue.*

1.2 Calcul différentiel et intégral dans les espaces localement convexes

Dans cette section, on désigne par X un espace localement convexe séparé et séquentiellement complet, Γ_X un système fondamental de semi-normes sur X, $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $J =]a, b[$ ou $[a, b]$.
Les résultats de cette section sont inclus dans les références [2, 12].

1.2.1 Dérivation

Soient $f : J \longrightarrow X$ une fonction et $t \in J$, on dit que :

i) f est différentiable à droite en t s'il existe $L \in X$ tel que :

$$\lim_{h \longrightarrow 0,\ h>0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = L.$$

L'élément L est appelé la dérivée de f à droite en t, et on le note par $f'_d(t)$.

ii) f est différentiable à gauche en t s'il existe $l \in X$ tel que :

$$\lim_{h \longrightarrow 0,\ h<0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = l.$$

L'élément l est appelé la dérivée de f à gauche en t, et on le note par $f'_g(t)$.

iii) f est différentiable en t si elle est différentiable à droite et à gauche en t et $f'_d(t) = f'_g(t)$. Dans ce cas, la dérivée de f en t sera notée par $f'(t)$.

Définition 1.2.1. *Soit $f : J \longrightarrow X$ une fonction.*

1. *Si $J =]a, b[$, on dit que f est **différentiable** sur J si f est différentiable en tout point $t \in J$.*
2. *Si $J = [a, b]$, on dit que f est **différentiable** sur J si f est différentiable sur $]a, b[$, à droite en a et à gauche en b.*

Remarque 1.2.2. Si $f : J \longrightarrow X$ et $g : J \longrightarrow X$ sont deux fonctions différentiables sur J, alors $(f + g)$ et λf $(\lambda \in \mathbb{C})$ sont différentiables sur J et

$$(f + g)' = f' + g' \text{ et } (\lambda f)' = \lambda f'.$$

Définition 1.2.3. *Une fonction $f : J \longrightarrow X$ est dite **de classe** C^1 si elle est différentiable sur J et $f' : J \longrightarrow X$ est continue.*
Dans ce cas, f' est appelée la dérivée de f sur J.

Définition 1.2.4. *Soit $f : J \longrightarrow X$ une fonction. On définit, par récurrence, f comme étant* ***de classe*** *C^r, pour un certain $r \in \mathbb{N}$, comme suit :*

1. *f est de classe C^0 si elle est continue sur J.*
2. *Pour $r \geq 1$, f est de classe C^r si f est de classe C^1 et f' est de classe C^{r-1}.*

Si f est de classe C^r, pour un certain $r \in \mathbb{N}$, alors sa r-ième dérivée $f^{(r)} : J \longrightarrow X$ est définie par :

1'. $f^{(0)} = f$.

2'. Si $r \geq 1$, $f^{(r)} = (f^{(r-1)})'$.

Si pour tout $r \in \mathbb{N}$, la fonction f est de classe C^r, alors on dit que f est de classe C^∞.

Proposition 1.2.5. *Soient $f : J \longrightarrow X$ une fonction et $r, k \in \mathbb{N}$.*

1. *Si f est de classe C^r et $k \leq r$, alors f est de classe C^k, $f^{(k)}$ est de classe C^{r-k} et*

$$(f^{(k)})^{(r-k)} = f^{(r)}.$$

2. *Si f est de classe C^r et $f^{(r)}$ est de classe C^k, alors f est de classe C^{r+k} et*

$$f^{(r+k)} = (f^{(r)})^{(k)}.$$

Proposition 1.2.6. *Pour chaque $r \in \mathbb{N}$, l'ensemble $C^r(J, X)$ forme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. De plus, si $k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq r$, l'application $C^r(J, X) \longrightarrow C^{r-k}(J, X)$, $f \mapsto f^{(k)}$ est linéaire.*

Proposition 1.2.7. *Soient $f : J \longrightarrow X$ une fonction, $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire continu, avec Y un espace localement convexe séparé et séquentiellement complet et $r \in \mathbb{N}$. Si f est de classe C^r, alors $T \circ f : J \longrightarrow Y$ est de classe C^r et*

$$(T \circ f)^{(r)} = T \circ f^{(r)}.$$

1.2.2 Intégration de Riemann

On appelle subdivision de $[a, b]$ tout sous-ensemble fini $S = \{t_k\}_{k=0}^n$ de $[a, b]$ tel que :

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b.$$

On note par $\mathcal{S}([a, b])$ l'ensemble de toutes les subdivisions de $[a, b]$, et pour chaque subdivision $S \in \mathcal{S}([a, b])$ on définit :

$$|S| = \max_{1 \leq k \leq n} |t_k - t_{k-1}|, \quad [S] = \prod_{k=1}^{n} [t_{k-1}, t_k] \subset \mathbb{R}^n.$$

Définition 1.2.8. *On dit qu'une fonction $f : J \longrightarrow X$ est* ***bornée*** *si $f(J)$ est une partie bornée de X.*

Définition 1.2.9. *Soient $f : [a, b] \longrightarrow X$ une fonction bornée, $S = \{t_k\}_{k=0}^n \in \mathcal{S}([a, b])$ et $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in [S]$. On appelle* ***somme de Riemann*** *de la fonction f relative à S et ξ, et on la note par $R(f, S, \xi)$, l'élément :*

$$R(f, S, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(t_k - t_{k-1}) \in X.$$

On définit l'ensemble $\mathcal{D}$ comme suit :

$$\mathcal{D} = \bigcup_{S \in \mathcal{S}([a,b])} \{(S, \xi); \quad \xi \in [S]\}.$$

Soient $S, Q \in \mathcal{S}([a, b])$, $\xi \in [S]$ et $\eta \in [Q]$, on définit la relation $\geq$ sur $\mathcal{D}$ par :

$$(S, \xi) \geq (Q, \eta) \text{ si } |S| \leq |Q|.$$

Par suite, $(\mathcal{D}, \geq)$ est un ensemble ordonné filtrant à droite.
Donc, $\{R(f, S, \xi); \quad (S, \xi) \in \mathcal{D}\}$ est une suite généralisée dans X.

Définition 1.2.10. *Soit $f : [a, b] \longrightarrow X$ une fonction bornée. On dit que f est* ***Riemann-intégrable*** *si la suite généralisée $\{R(f, S, \xi); \quad (S, \xi) \in \mathcal{D}\}$ converge vers un élément de X.*
Ce dernier élément est appelé ***l'intégrale de Riemann*** *de f, et il sera noté par $\int_a^b f(t)dt$.*

En d'autre terme, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $p \in \Gamma_X$, il existe $(\bar{S}, \bar{\xi}) \in \mathcal{D}$ tel que :

$$p(R(f, S, \xi) - \int_a^b f(t)ds) \leq \varepsilon, \text{ pour tout } (S, \xi) \in \mathcal{D} \text{ avec } (S, \xi) \geq (\bar{S}, \bar{\xi}).$$

De manière équivalente, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $p \in \Gamma_X$, il existe $\delta > 0$ ($\delta = |\bar{S}|$) tel que :

$$p(R(f, S, \xi) - \int_a^b f(t)ds) \leq \varepsilon, \text{ pour tout } S \in \mathcal{S}([a, b]) \text{ avec } |S| \leq \delta.$$

Théorème 1.2.11. *Soit $f : [a, b] \longrightarrow X$ une fonction continue.*
Alors la suite généralisée $\{R(f, S, \xi); \quad (S, \xi) \in \mathcal{D}\}$ est de Cauchy.

Preuve. On peut se ramener à $[a, b] = [0, 1]$.
Soient $p \in \Gamma_X$ et $\varepsilon > 0$ fixés. D'abord l'espace X muni de la pseudo-métrique $(x, y) \longrightarrow$

$p(x-y)$ est un espace uniforme.

Comme $[0,1]$ est un espace uniforme compact, d'après [29, Théorème 31] la fonction f est uniformément continue, c'est à dire, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $s,t \in [0,1]$, avec $|s-t| < \delta$, on a :

$$p(f(s) - f(t)) < \varepsilon.$$

D'une part, on fixe $\bar{S} \in \mathcal{S}([0,1])$, avec $|\bar{S}| < \delta$, et $\bar{\xi} \in [\bar{S}]$.

Soient $(S,\xi),(Q,\eta) \in \mathcal{D}$ tels que $(S,\xi) \geq (\bar{S},\bar{\xi})$ et $(Q,\eta) \geq (\bar{S},\bar{\xi})$, et on considère la subdivision $S \cup Q$ et $\xi' \in [S \cup Q]$.

D'autre part, soient $[u,v]$ un sous-intervalle de $[0,1]$, déterminé par deux points adjacents u,v de la subdivision S, et r la coordonnée de ξ dans $[u,v]$ ($r \in [u,v]$), donc $|v-u| < \delta$ et $|r - t_k| < \delta$ pour tout $k = 0,1,...,n$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, avec $\{t_k\}_{k=0}^n$ sont les points de $S \cup Q$ appartenant à $[u,v]$, par suite $\{t_k\}_{k=0}^n$ forme une subdivision de $[u,v]$. Alors

$$f(r)(v-r) - \sum_{k=1}^{n} f(\xi'_k)(t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (f(r) - f(\xi'_k))(t_k - t_{k-1}).$$

Par conséquent

$$p(f(r)(v-r) - \sum_{k=1}^{n} f(\xi'_k)(t_k - t_{k-1})) < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) = \varepsilon(v-u).$$

D'où, pour tout $\xi \in [S]$ et tout $\xi' \in [S \cup Q]$,

$$p(R(f,S,\xi) - R(f,S \cup Q,\xi')) < \varepsilon.$$

Par la même procédure, pour tout $\eta \in [Q]$ et tout $\xi' \in [S \cup Q]$, on obtient

$$p(R(f,Q,\eta) - R(f,S \cup Q,\xi')) < \varepsilon.$$

Alors, pour tous $(S,\xi),(Q,\eta) \in \mathcal{D}$, avec $(S,\xi) > (\bar{S},\bar{\xi})$ et $(Q,\eta) > (\bar{S},\bar{\xi})$, on a :

$$p(R(f,S,\xi) - R(f,Q,\eta)) < 2\varepsilon.$$

D'où $\{R(f,S,\xi); \quad (S,\xi) \in \mathcal{D}\}$ est une suite généralisée de Cauchy dans X. □

Corollaire 1.2.12. *Toute fonction $f : [a,b] \longrightarrow X$ continue est Riemann-intégrable.*

Preuve. On se ramène à $[a,b] = [0,1]$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la subdivision S_n et l'élément $\xi_{[n]} \in [S_n]$ qui sont définis par :

$$S_n = \{\frac{k}{n}; \quad k = 0,1,...,n\}, \quad \xi_{[n]} = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., 1).$$

L'ensemble $\{(S_n, \xi_{[n]}); \quad n \in \mathbb{N}^*\}$ est cofinal dénombrable dans $\mathcal{D}$.
Comme pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$, avec $n \leq m$, on a $(S_n, \xi_{[n]}) \leq (S_m, \xi_{[m]})$, les sommes de Riemann

$$R(f, S_n, \xi_{[n]}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}), \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

forment une suite de Cauchy qui converge vers un élément x dans X, puisque X est séquentiellement complet.
D'une part, on fixe $\varepsilon > 0$ et $p \in \Gamma_X$, d'après le théorème précédent il existe $(\bar{S}, \bar{\xi}) \in \mathcal{D}$ telle que pour tous $(S, \xi), (Q, \eta) \in \mathcal{D}$, avec $(S, \xi) > (\bar{S}, \bar{\xi})$ et $(Q, \eta) > (\bar{S}, \bar{\xi})$, on a :

$$p(R(f, S, \xi) - R(f, Q, \eta)) < \varepsilon.$$

D'autre part, soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$, $(S_n, \xi_{[n]}) \geq (\bar{S}, \bar{\xi})$. Donc, pour tout $(S, \xi) \in \mathcal{D}$, avec $(S, \xi) \geq (\bar{S}, \bar{\xi})$, et tout $n \geq N$ on a :

$$p(R(f, S, \xi) - R(f, S_n, \xi_{[n]})) < \varepsilon.$$

Par suite, quand $n \longrightarrow \infty$ on obtient :

$$\text{pour tout } (S, \xi) \in \mathcal{D}, \text{ avec } (S, \xi) \geq (\bar{S}, \bar{\xi}), \text{ on a : } p(R(f, S, \xi) - x) \leq \varepsilon.$$

D'où la suite généralisée $\{R(f, S, \xi); \quad (S, \xi) \in \mathcal{D}\}$ est convergente, ce qui implique que la fonction f est Riemann-intégrable. □

Proposition 1.2.13. *Soient $f \in C^0([a, b], X)$ et $c \in]a, b[$. Alors*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Preuve. Comme $f \in C^0([a, b], X)$, $f \in C^0([a, c], X) \cap C^0([c, b], X)$.
D'une part, soient $S = \{t_k\}_{k=0}^n \in \mathcal{S}([a, b])$, avec $c \in \{t_k\}_{k=0}^n$, et $\xi \in [S]$, et soit $R(f, S, \xi)$ la somme de Riemann de f relative à S et ξ :

$$R(f, S, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_n)(t_k - t_{k-1}).$$

D'autre part, puisque $c \in \{t_k\}_{k=0}^n$, il existe $m \in \mathbb{N}$, avec $0 \leq m \leq n$, tel que $t_m = c$, i.e. $\{t_k\}_{k=0}^m \subset [a, c]$ et $\{t_k\}_{k=m}^n \subset [c, b]$.
Par suite, $S_1 = \{t_0, t_1, ..., t_{m-1}, t_m\}$ (resp. $S_2 = \{t_m, t_{m+1}, ..., t_n\}$) forme une subdivision de

$[a, c]$ (resp. $[c, b]$). De plus, $\xi^{[1]} = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{m-1}, \xi_m\} \in [S_1]$ et $\xi^{[2]} = \{\xi_{m+1}, \xi_{m+1}, ..., \xi_n\} \in [S_2]$.

Alors,

$$\begin{aligned} R(f, S, \xi) &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_n)(t_k - t_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{m} f(\xi_n)(t_k - t_{k-1}) + \sum_{k=m+1}^{n} f(\xi_n)(t_k - t_{k-1}) \\ &= R(f, S_1, \xi^{[1]}) + R(f, S_2, \xi^{[2]}) \end{aligned}$$

D'après le Corollaire 1.2.12, par passage à la limite on obtient

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

□

Proposition 1.2.14. *Pour tout $\phi \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ et tout $x \in X$ on a :*

$$\int_a^b \phi(t)xdt = (\int_a^b \phi(t)dt)x.$$

Pour la démonstration de cette proposition il suffit de considérer $f(t) = \phi(t)x$ (i.e. $f \in C^0([a, b], X)$).

Proposition 1.2.15. *Soient $f \in C^0([a, b], X)$. Les assertions suivantes sont vérifiées.*

1. *Pour tout $x' \in X'$ on a*
$$< \int_a^b f(t)dt, x' >= \int_a^b < f(t), x' > dt.$$
2. *Pour tout $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, avec Y est un espace localement convexe séparé et séquentiellement complet, on a*
$$\int_a^b T \circ f(t)dt = T(\int_a^b f(t)dt).$$

Preuve. 1. Pour chaque $x' \in X'$, on considère la fonction $g(t) =< f(t), x' >\in C^0([a, b], \mathbb{R})$. En suite, il suffit d'utiliser la linéarité et la continuité de $<, >$, et l'intégration de Riemann des fonctions réelles.

2. Comme $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, la fonction h définie par $h(t) = T \circ f(t)$ est continue de $[a, b]$ dans Y (i.e. $h \in C^0([a, b], Y)$). Pour obtenir le résultat, il suffit d'utiliser les sommes de Riemann de h et le fait que $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

□

Théorème 1.2.16. *Soient $f \in C^0([a,b],X)$ et M une partie convexe dans X telle que $f([a,b]) \subset M$. Alors*

$$\int_a^b f(t)dt \in (b-a)\bar{M}.$$

En d'autre termes $\int_a^b f(t)dt$ est un élément de l'enveloppe convexe fermée de $(b-a)f([a,b])$.

Remarque 1.2.17.

1. Pour chaque $p \in \Gamma_X$, on définit la semi-norme $\bar{p}$ sur l'espace vectoriel $C^0([a,b],X)$ par

$$\bar{p}(f) = \sup_{[a,b]} p(f(t)), \quad f \in C^0([a,b],X).$$

La famille de semi-normes $\{\bar{p};\ p \in \Gamma_X\}$ définie une topologie localement convexe sur $C^0([a,b],X)$, cette topologie est appelée la topologie de la convergence uniforme.
De plus, puisque X est séparé et séquentiellement complet, l'espace $C^0([a,b],X)$ muni de la dernière topologie est aussi séparé et séquentiellement complet.

2. Si $f \in C^0([a,b],X)$, alors pour tout $p \in \Gamma_X$ on a :

$$p(\int_a^b f(t)dt) \leq \int_a^b p(f(t))dt.$$

3. D'après 2, pour tout $f \in C^0([a,b],X)$ et tout $p \in \Gamma_X$, on a :

$$p(\int_a^b f(t)dt) \leq (b-a)\sup_{[a,b]} p(f(t)) = (b-a)\bar{p}(f).$$

Alors l'application linéaire suivante

$$\begin{aligned} C^0([a,b],X) &\longrightarrow X \\ f &\longrightarrow \int_a^b f(t)dt, \end{aligned}$$

avec $C^0([a,b],X)$ muni de la topologie de la convergence uniforme, est continue.

Théorème 1.2.18. *Soit $f \in C^0(]a,b[,X)$. Pour tout $c \in]a,b[$ la fonction définie par :*

$$\begin{aligned} \int_c^{(.)} f(s)ds :]a,b[&\longrightarrow X \\ t &\longrightarrow (\int_c^{(.)} f(s)ds)(t) = \int_c^t f(s)ds \end{aligned}$$

est de classe C^1. De plus, pour tout $t \in]a,b[$, on a :

$$(\int_c^{(.)} f(s)ds)'(t) = f(t).$$

Preuve. Soient $p \in \Gamma_X$, $t \in]a,b[$ et $h > 0$ avec $t+h$ et $t-h \in]a,b[$, on a :

$$p(\frac{\int_c^{t+h} f(s)ds - \int_c^t f(s)ds}{h} - f(t)) = p(\frac{1}{h}\int_t^{t+h}(f(s)-f(t))ds) \leq \sup_{[t,t+h]} p(f(s)-f(t)).$$

$$p(\frac{\int_c^{t-h} f(s)ds - \int_c^t f(s)ds}{-h} - f(t)) = p(\frac{1}{-h}\int_t^{t-h}(f(s)-f(t))ds) \leq \sup_{[t-h,t]} p(f(s)-f(t)).$$

Comme $f \in C^0(]a,b[,X)$,

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+} \sup_{[t,t+h]} p(f(s)-f(t)) = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \sup_{[t-h,t]} p(f(s)-f(t)) = 0.$$

Alors la fonction $\int_c^{(.)} f(s)ds$ est de classe C^1, et pour tout $t \in]a,b[$ on a :

$$(\int_c^t f(s)ds)' = f(t).$$

□

Lemme 1.2.19. *Soit $f \in C^0([a,b],X)$. Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *Pour tout $c \in]a,b[$ on a : $\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(s)ds = f(c)$.*
2. $\lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(s)ds = f(a)$.
3. $\lim_{h\longrightarrow 0^-} \frac{1}{h}\int_b^{b+h} f(s)ds = f(b)$.

Preuve. Soient $p \in \Gamma_X$, $c \in]a,b[$ et $h > 0$, avec $c+h, c-h \in]a,b[$, on a :

$$p(\frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(s)ds - f(c)) \leq \frac{1}{h}\int_c^{c+h} p(f(s)-f(c))ds \leq \sup_{s\in[c,c+h]} p(f(s)-f(c)),$$

$$p(\frac{1}{-h}\int_c^{c-h} f(s)ds - f(c)) \leq \frac{1}{h}\int_{c-h}^{c} p(f(s)-f(c))ds \leq \sup_{s\in[c-h,c]} p(f(s)-f(c)).$$

Comme $f \in C^0([a,b],X)$,

$$\lim_{h\longrightarrow 0+} \sup_{s\in[c,c+h]} p(f(s)-f(c)) = \lim_{h\longrightarrow 0+} \sup_{s\in[c-h,c]} p(f(s)-f(c)) = 0.$$

Alors

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(s)ds = f(c).$$

D'où le résultat.

Pour 2. et 3., on utilise le même raisonnement. □

Corollaire 1.2.20. *Si $f \in C^0([a,b],X)$, alors, pour tout $c \in [a,b]$, la fonction $\int_c^{(.)} f(s)ds$ est de classe C^1 sur $[a,b]$. De plus, pour tout $t \in [a,b]$, on a :*

$$(\int_c^{(.)} f(s)ds)'(t) = f(t).$$

Preuve. Comme $f \in C^0([a,b],X)$, $f \in C^0(]a,b[,X)$.

D'une part, si $c \in]a,b[$, d'aprés le théorème précédent, on a :

$$\int_c^{(.)} f(s)ds \in C^1(]a,b[,X), \text{ et pour tout } t \in]a,b[\text{ on a :} (\int_c^t f(s)ds)' = f(t).$$

Pour $c = a$ ou b, on prend $\varepsilon > 0$ tel que $a+\varepsilon, b-\varepsilon \in]a,b[$, pour tout $t \in]a,b[$, on a :

$$\int_a^t f(s)ds = \int_a^{a+\varepsilon} f(s)ds + \int_{a+\varepsilon}^t f(s)ds,$$

$$\int_b^t f(s)ds = \int_b^{b-\varepsilon} f(s)ds + \int_{b-\varepsilon}^t f(s)ds.$$

Comme $\int_a^{a+\varepsilon} f(s)ds$ et $\int_b^{b-\varepsilon} f(s)ds$ ne depend pas de t, d'après le théorème précédent on obtient :

$$(\int_a^t f(s)ds)' = f(t) \text{ et } (\int_b^t f(s)ds)' = f(t).$$

Alors, pour tout $c \in [a,b]$, $\int_c^{(.)} f(s)ds \in C^1(]a,b[,X)$, et pour tout $t \in]a,b[$, on a :

$$(\int_c^t f(s)ds)' = f(t).$$

D'autre part, soient $c \in [a,b]$ et $h > 0$ avec $a+h, b-h \in [a,b]$, on a :

$$\frac{1}{h}(\int_c^{a+h} f(s)ds - \int_c^a f(s)ds) = \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(s)ds,$$

$$\frac{1}{-h}(\int_c^{b-h} f(s)ds - \int_c^b f(s)ds) = \frac{1}{-h}\int_b^{b-h} f(s)ds.$$

D'après le lemme précédent, on obtient :

$$(\int_c^{(.)} f(s)ds)'_d(a) = \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{1}{h}(\int_c^{a+h} f(s)ds - \int_c^a f(s)ds) = f(a),$$

$$(\int_c^{(.)} f(s)ds)'_g(b) = \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{1}{-h}(\int_c^{b-h} f(s)ds - \int_c^b f(s)ds) = f(b).$$

D'où, pour tout $c \in [a,b]$, $\int_c^{(.)} f(s)ds \in C^1([a,b],X)$, et pour tout $t \in [a,b]$, on a :

$$(\int_c^{(.)} f(s)ds)'(t) = (\int_c^t f(s)ds)' = f(t).$$

□

Corollaire 1.2.21. *Si $f \in C^r(J, X)$, pour un certain $r \in \mathbb{N}$, alors, pour tout $c \in J$, la fonction $\int_c^{(.)} f(s)ds$ est de classe C^{r+1}, et pour tout $0 \leq k \leq r+1$, on a :*

$$(\int_c^{(.)} f(s)ds)^{(k)} = f^{(k-1)}.$$

Théorème 1.2.22. *Soit $f \in C^1(]a, b[, X)$. Pour tout $c, d \in]a, b[$, on a :*

$$\int_c^d f'(t)dt = f(d) - f(c).$$

Preuve. Soient $c, d \in]a, b[$, avec $c \leq d$. Pour tout $t \in]c, d[$, on a :

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = f'(t).$$

Par conséquent

$$\int_c^d f'(t)dt = \int_c^d \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} dt = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h} \int_c^d (f(t+h) - f(t))dt.$$

D'autre part, soient $t \in]c, d[$ et $h \neq 0$, avec $c + h, d + h \in]a, b[$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h} \int_c^d (f(t+h) - f(t))dt &= \frac{1}{h}(\int_c^d f(t+h)dt - \int_a^b f(t)dt) \\
&= \frac{1}{h}(\int_{c+h}^{d+h} f(t)dt - \int_c^d f(t)dt) \\
&= \frac{1}{h}(\int_c^{d+h} f(t)dt - \int_c^d f(t)dt - \int_a^{a+h} f(t)dt) \\
&= \frac{\int_c^{d+h} f(t)dt - \int_c^d f(t)dt}{h} - \frac{\int_c^{c+h} f(t)dt}{h}.
\end{aligned}$$

Du Théorème 1.2.18 on obtient

$$\int_c^d f'(t)dt = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h} \int_c^d (f(t+h) - f(t))dt = f(d) - f(c).$$

□

Corollaire 1.2.23. *Si $f \in C^1([a, b], X)$, alors pour tout $c, d \in [a, b]$ on a :*

$$\int_c^d f'(t)dt = f(d) - f(c).$$

Preuve. Pour $c, d \in]a, b[$, c'est le cas du théorème précédent, alors il suffit de montrer que :

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

Comme $f \in C^1([a,b],X)$, f et $f' \in C^0([a,b],X)$, par suite f' est Riemann-intégrable et on a :

$$\int_a^b f'(t)dt = \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_{a+\frac{1}{n}}^{b-\frac{1}{n}} f'(t)dt = \lim_{n\longrightarrow\infty} (f(b-\frac{1}{n}) - f(a+\frac{1}{n})) = f(b) - f(a).$$

D'où le résultat. □

Corollaire 1.2.24. *Si $f \in C^1(J,X)$ telle que pour tout $t \in J$ on a $f'(t) = 0$, alors il existe $x_0 \in X$ tel que $f(t) = x_0$ pour tout $t \in J$.*

1.3 Familles C_0-Cosinus sur les espaces de Banach

Dans cette section, on désigne par $(E, ||.||)$ un espace de Banach et $\mathcal{B}(E)$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur E. tous les résultats de cette section a été montré par M. Sova dans [45].

Définition 1.3.1. *Soit $\{C(t)\}_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{B}(E)$ une famille d'opérateurs linéaires bornés sur X. On dit que $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est une **famille cosinus** si :*

1. $C(0) = I$.
2. $2C(t)C(s) = C(t+s) + C(t-s)$ *pour tous* $s,t \in \mathbb{R}^+$ *avec* $s \leq t$.

Exemple 1.3.2.

1. soient $E = \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}$, pour tout $t \geq 0$, on définit l'opérateur $C(t)$ sur E par :

$$C(t)x = \cosh(\sqrt{a}t)x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} a^n x, \text{ pour tout } x \in \mathbb{C}.$$

$\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est une famille cosinus sur $\mathbb{C}$.

2. Soit $E = C_b(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}; \quad f \text{ bornée et continue}\}$ avec $||f|| = \sup_{x\in\mathbb{R}}(f(x))$, et on définit la famille $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires continus sur $C_b(\mathbb{R})$ par :

$$(C(t)f)(s) = \frac{1}{2}(f(s+t) + f(s-t)), \text{ pour tout } t \geq 0, \ f \in C_b(\mathbb{R}) \text{ et tout } s \in \mathbb{R}.$$

$\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est une famille cosinus sur $C_b(\mathbb{R})$.

Remarque 1.3.3. Soit $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ une famille cosinus sur E, pour tout $t \geq 0$, on a :

$$C(2t) = 2C(t)^2 - I \text{ et } C(\frac{1}{2}t)^2 = \frac{1}{2}(C(t) - I).$$

Lemme 1.3.4. *Soit $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ une famille cosinus sur E. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $n+1$ constantes $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ telles que :*

$$C(nt) = a_0 I + a_1 C(t) + a_2 C(t)^2 + ... + a_n C(t)^n, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Preuve. On va utiliser le raisonnement par récurrence. Pour $n = 0$ il est évident.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que pour chaque $m \leq n$, il existe $a_0, a_1, ..., a_m \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$C(mt) = a_0 I + a_1 C(t) + a_2 C(t)^2 + ... + a_m C(t)^m, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

D'après 2. de la définition précédente on a :

$$C((n+1)t) = 2C(t)C(nt) - C((n-1)t), \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Et par hypothèse, il existe $b_0, b_1, ..., b_{n-1} \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$C((n-1)t) = b_0 I + b_1 C(t) + ... + b_{n-1} C(t)^{n-1}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} C((n+1)t) &= 2C(t)(a_0 I + a_1 C(t) + a_2 C(t)^2 + ... + a_n C(t)^n) - C((n-1)t) \\ &= 2a_0 C(t) + 2a_1 C(t)^2 + ... + 2a_n C(t)^{n+1} - b_0 I - b_1 C(t) - ... - b_{n-1} C(t)^{n-1} \\ &= c_0 I + c_1 C(t) + c_2 C(t)^2 + ... + c_{n+1} C(t)^{n+1}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} c_m = 2a_{m-1} - b_m, \text{ pour tout } 1 \leq m \leq n-1, \\ c_0 = -b_0, \\ c_n = 2a_{n-1}, \\ c_{n+1} = 2a_n. \end{cases}$$

D'où le résultat. □

Définition 1.3.5. *Soit $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ une famille cosinus sur E. On dit que :*

1. *$\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est une **famille C_0-cosinus** sur E si :*

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} C(t)x = x, \text{ pour tout } x \in E.$$

2. *$\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est une **famille cosinus uniformément continue** sur E si :*

$$||C(t) - I|| \longrightarrow 0, \text{ quand } t \longrightarrow 0^+.$$

Théorème 1.3.6. *Toute famille C_0-cosinus $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ sur E est exponentiellement bornée, c'est à dire, il existe deux constantes $M \geq 1$ et $\omega \geq 0$ telles que :*

$$||C(t)|| \leq Me^{\omega t}, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Dans ce cas, on dit que $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est d'ordre ω.

Preuve. D'après le théorème de Banach Steinhaus, il existe $K \geq 0$ tel que :

$$||C(t)|| \leq K \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

Comme $C(0) = I$, $K \geq 1$.
D'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$, on a : $||C(nt)|| \leq (3K)^n$. En effet, on utilise le raisonnement par récurrence, pour $n = 0$ c'est évident.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que pour tout $m \leq n$ on a : $||C(mt)|| \leq (3K)^m$.
D'après la définition de famille cosinus, on a : $C((n+1)t) = 2C(nt)C(t) - C((n-1)t)$.
Par conséquent

$$||C((n+1)t)|| = ||2C(nt)C(t) - C((n-1)t)|| \leq 2(3K)^n K + (3K)^{n-1} \leq (3K)^{n+1}.$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1]$, on a :

$$||C(nt)|| \leq (3K)^n.$$

D'autre part, soit $s \geq 0$ fixé, il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $n - 1 < s \leq n$.
Posons $t = \frac{s}{n}$, comme $3k \geq 1$ et $n - s \geq 1$,

$$||C(s)|| = ||C(nt)|| \leq (3K)^n = (3K)^s(3K)^{n-s} \leq (3K)^s(3K).$$

On pose $M = 3K$ et $\omega = \ln(3K)$, alors $||C(s)|| \leq Me^{\omega s}$. □

Corollaire 1.3.7. *Soit $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ une famille C_0-cosinus sur E. Alors il existe $M \geq 1$ et $\omega \geq 0$ tels que :*

$$||C(t)|| \leq M\cosh(\omega t), \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Preuve. D'après le théorème précédent, il existe $M_0 \geq 1$ et $\omega \geq 0$ tels que :

$$||C(t)|| \leq M_0 e^{\omega t}, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Par suite,

$$||C(t)|| \leq 2M_0(\frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}) \leq M\cosh(\omega t), \text{ pour tout } t \geq 0 \text{ avec } M = 2M_0.$$

□

Théorème 1.3.8. *Toute famille C_0-cosinus $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ sur E est fortement continue. C'est à dire, pour tour $x \in E$ l'application $C(.)x : \mathbb{R}^+ \longrightarrow E$ est continue.*

Preuve. Supposons qu'il existe $x_0 \in E$ et $t_0 \geq 0$ tels que l'application $C(.)x_0$ n'est pas continue en t_0.
On considère la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, de nombres réels positifs, définie par :

$$K_n = \sup_{s,t\geq 0}\{||C(t)x_0 - C(s)x_0|| : \ |t-t_0| \leq \frac{t_0}{8n}, \ |s-t_0| \leq \frac{t_0}{8n}\} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Il existe $K > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $K_n \geq K$, en effet :
   Comme $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de nombres positifs, il existe $K \geq 0$ tel que : $K_n \longrightarrow K$, par suite $K > 0$, puisque $C(.)x_0$ n'est pas continue en t_0.
   D'où le résultat.

2. De la définition de la suite $(K_n)_n \in \mathbb{N}^*$, on déduit qu'il existe deux suites $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :
   $\tau_n < \sigma_n$, $|\tau_n - t_0| \leq \frac{t_0}{8n}$, $|\sigma_n - t_0| \leq \frac{t_0}{8n}$ et
   $$||C(\tau_n)x_0 - C(\sigma_n)x_0|| \geq K_n - \frac{1}{n}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $2\tau_n - \sigma_n \geq 0$, en effet :
   D'après 2, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\sigma_n - \tau_n \leq \frac{t_0}{4n}$ et $\tau_n \geq t_0 - \frac{t_0}{8n}$.
   Par suite, $\tau_n \geq \frac{t_0}{2n} > \frac{t_0}{4n}$, donc $2\tau_n - \sigma_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $||C(\tau_{4n})x_0 - C(2\tau_{4n} - \sigma_{4n})x_0|| \leq K_n$.
   Il suffit de remarquer que $|\tau_{4n} - t_0| \leq \frac{t_0}{8n}$ et $|2\tau_{4n} - \sigma_{4n} - t_0| \leq \frac{t_0}{8n}$.

5. $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} K_n = 0$, en effet :
   D'abord, d'après la définition de famille cosinus, pour tous $s, t \in \mathbb{R}^+$, avec $0 \leq s \leq t$, on a :
   $$C(t-s) - C(t+s) + 2(C(t+s) - C(t)) = 2C(t)(C(s) - I).$$
   Par conséquent, pour tout $x \in E$, on a :
   $$||C(t+s)x - C(t)x|| \leq ||C(t)||.||C(s)x - x|| + \frac{1}{2}||C(t-s)x - C(t+s)x||.$$
   En particulier, pour $t = \tau_{4n}$, $s = \sigma_{4n} - \tau_{4n}$ et $x = x_0$ on obtient :
   $$||C(\sigma_{4n})x_0 - C(\tau_{4n})x_0|| \leq ||C(\tau_{4n})||.||C(\sigma_{4n} - \tau_{4n})x_0 - x_0|| + \frac{1}{2}||C(\sigma_{4n})x_0 - C(2\tau_{4n} - \sigma_{4n})x_0||.$$

D'après 2. et 4. on obtient :

$$K_{4n} - \frac{1}{4n} \leq ||C(\tau_{4n})||.||C(\sigma_{4n} - \tau_{4n})x_0 - x_0|| + \frac{1}{2}K_{4n}.$$

C'est à dire,

$$K_{4n} \leq \frac{1}{2n} + 2||C(\tau_{4n})||.||C(\sigma_{4n} - \tau_{4n})x_0 - x_0||.$$

Comme $||C(\tau_{4n})||$ est borné et $||C(\sigma_{4n} - \tau_{4n})x_0 - x_0|| \longrightarrow 0$, quand $n \longrightarrow \infty$ (car $\sigma_n - \tau_n \leq \frac{t_0}{n}$), $K_n \longrightarrow 0$.

Finalement, on a une contradiction entre 1. et 5., d'oú le résultat. □

Lemme 1.3.9. *Les opérateurs d'une famille C_0-cosinus $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ sur un espace de Banach E commutent. C'est à dire,*

$$C(t)C(s) = C(s)C(t), \text{ pour tous } s, t \geq 0.$$

Preuve. Soit $t \geq 0$, d'après la Remarque 1.3.3 on a $C(t) = 2C(\frac{t}{2})^2 - I$.
Donc, $C(t)$ est un polynôme de $C(\frac{t}{2})$, et par suite $C(t)$ est un polynôme de $C(\frac{t}{2^n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $C(t)$ commute avec $C(\frac{t}{2^n})$.
En suite, soient $n, k \in \mathbb{N}^*$, supposons que $C(t)$ commute avec $C(\frac{rt}{2^n})$ pour tout $r \leq k \in \mathbb{N}^*$.
Comme

$$C(\frac{(k+1)t}{2n}) = 2C(\frac{kt}{2^n})C(\frac{t}{2^n}) - C(\frac{(n-1)t}{2^n}),$$

l'opérateur $C(t)$ commute avec $C(\frac{(k+1)t}{2^n})$. Alors, pour tout $n, r \in \mathbb{N}^*$, $C(\frac{rt}{2^n})$ commute avec $C(t)$.
D'autre part, soit $s \geq 0$, on prend $r = [\frac{s2^n}{t}]$ (la partie entière), d'après ce qui précède, $C(t)$ commute avec $C([\frac{s2^n}{t}]\frac{t}{2^n})$.
Comme $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}[\frac{s2^n}{t}]\frac{t}{2^n} = s$ et la famille $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est fortement continue, $C(t)$ commute avec $C(s)$. □

Lemme 1.3.10. *Soit $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ une famille C_0-cosinus sur E. Alors pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in E$ on a :*

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{2}{h^2}\int_t^{t+h} (t + h - s)C(s)xds = C(t)x.$$

Preuve. Soient $x \in E$, $h > 0$ et $t \geq 0$, comme $\frac{2}{h^2}\int_t^{t+h}(t + h - s)ds = 1$,

$$\begin{aligned} ||\frac{2}{h^2}\int_t^{t+h} (t + h - s)C(s)xds - C(t)x|| &= ||\frac{2}{h^2}\int_t^{t+h} (t + h - s)(C(s)x - C(t)x)ds|| \\ &\leq \sup_{t\leq s\leq t+h} ||C(s)x - C(t)x||. \end{aligned}$$

D'après le Théorème 1.3.8 la famille $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est fortement continue, donc

$$\sup_{t\leq s\leq t+h} ||C(s)x - C(t)x|| \longrightarrow 0, \text{ quand } h \longrightarrow 0^+.$$

D'où le résultat. □

Remarque 1.3.11. 1. Si $t > 0$, alors pour tout $x \in E$ on a :

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{2}{h^2}\int_t^{t-h} (t-h-s)C(s)xds = C(t)x.$$

2. Si $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est une famille cosinus uniformément continue sur E, alors, pour tout $t \geq 0$,

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+} ||\frac{2}{h^2}\int_t^{t+h} (t+h-s)C(s)ds - C(t)|| = 0.$$

De plus, si $t > 0$, alors

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+} ||\frac{2}{h^2}\int_t^{t-h} (t-h-s)C(s)ds - C(t)|| = 0.$$

Définition 1.3.12. *Soit $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ une famille C_0-cosinus sur E. On appelle* ***générateur infinitésimal****, de la famille C_0-cosinus $\{C(t)\}_{t\geq 0}$, l'opérateur $(A, D(A))$ défini par :*

$$Ax = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{2}{h^2}(C(h)x - x), \text{ pour tout } x \in D(A),$$

avec

$$D(A) = \{x \in E : \quad \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{2}{h^2}(C(h)x - x) \text{ existe dans } E\}$$

Remarque 1.3.13. Pour tout $t \geq 0$ on a : $C(t)D(A) \subseteq D(A)$ et

$$AC(t)x = C(t)Ax, \text{ pour tout } x \in D(A).$$

Proposition 1.3.14. *Soit $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ une famille C_0-cosinus sur E avec A son générateur infinitésimal. Alors, pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in E$, on a :*

$$\int_0^t (t-s)C(s)xds \in D(A) \text{ et } A\int_0^t (t-s)C(s)xds = C(t)x - x.$$

Preuve. Soit $x \in E$, pour $t = 0$ c'est évident car $0 \in D(A)$.

Soit $t > 0$, et on prend $h \in \mathbb{R}^+$ tel que $0 \leq h \leq t$, alors

$$\frac{2}{h^2}(C(h) - I)\int_0^t (t-s)C(s)xds = \frac{1}{h^2}\int_0^t (t-s)2C(h)C(s)xds - \frac{2}{h^2}\int_0^t (t-s)C(s)xds$$
$$= \frac{1}{h^2}\int_0^h (t-s)2C(h)C(s)xds + \frac{1}{h^2}\int_h^t (t-s)2C(h)C(s)xds - \frac{2}{h^2}\int_0^t (t-s)C(s)xds$$
$$= \frac{1}{h^2}[\int_0^h (t-s)(C(h+s)x + C(h-s)x)ds + \int_h^t (t-s)2C(h)C(s)xds - 2\int_0^t (t-s)C(s)xds]$$
$$= \frac{1}{h^2}[\int_0^t (t-s)C(h+s)xds + \int_0^h (t-s)C(h-s)xds + \int_h^t (t-s)C(s-h)xds$$
$$- 2\int_0^t (t-s)C(s)xds]$$
$$= \frac{1}{h^2}[\int_h^{t+h} (t+h-s)C(s)xds + \int_0^h (t-h+s)C(s)xds + \int_0^{t-h} (t-h-s)C(s)xds$$
$$- 2\int_0^t (t-s)C(s)xds]$$
$$= \frac{1}{h^2}[\int_0^{t+h} (t+h-s)C(s)xds - \int_0^h (t+h-s)C(s)xds + \int_0^h (t-h+s)C(s)xds$$
$$+ \int_0^{t-h} (t-h-s)C(s)xds - 2\int_0^t (t-s)C(s)xds]$$
$$= \frac{1}{h^2}[\int_t^{t+h} (t+h-s)C(s)xds + \int_t^{t-h} (t-h-s)C(s)xds - \int_0^h (t+h-s)C(s)xds$$
$$+ \int_0^h (t-h+s)C(s)xds]$$
$$= \frac{1}{h^2}\int_t^{t+h} (t+h-s)C(s)xds + \frac{1}{h^2}\int_t^{t-h} (t-h-s)C(s)xds - \frac{2}{h^2}\int_0^h (h-s)C(s)xds$$

Donc, d'après le Lemme 1.3.10 et la Remarque 1.3.11, quand $h \longrightarrow 0^+$ on obtient :

$$\int_0^t (t-s)C(s)xds \in D(A) \text{ et } A\int_0^t (t-s)C(s)xds = C(t)x - x.$$

□

Proposition 1.3.15. *Soit $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ une famille C_0-cosinus sur E avec A son générateur infinitésimal. Soient $x, y \in E$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$x \in D(A)$ et $Ax = y$.*
2. *$\int_0^t (t-s)C(s)yds = C(t)x - x$.*

Preuve. 1 $\implies$ 2) Soient $x, y \in E$ tels que $x \in D(A)$ et $Ax = y$.

D'après la Proposition 1.3.14 on a :

$$\frac{2}{h^2}(C(h) - I)\int_0^t (t-s)C(s)xds \longrightarrow C(t)x - x, \text{ quand } h \longrightarrow 0^+.$$

Par suite, comme les opérateurs d'une famille C_0-cosinus commutent,

$$\int_0^t (t-s)C(s)(\frac{2}{h^2}(C(h)x-x))ds \longrightarrow C(t)x-x, \text{ quand } h \longrightarrow 0^+,$$

Alors

$$\int_0^t (t-s)C(s)yds = C(t)x-x.$$

2 $\Longrightarrow$ 1) Soient $x, y \in E$ tels que pour tout $t \geq 0$ on a : $\int_0^t (t-s)C(s)yds = C(t)x-x$.
En particulier, pour $t > 0$ on a :

$$\frac{2}{t^2}(C(t)x-x) = \frac{2}{t^2}\int_0^t (t-s)C(s)yds.$$

D'après le Lemme 1.3.10, $x \in D(A)$ et $Ax = y$. □

Proposition 1.3.16. *Soit $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ une famille C_0-cosinus sur E avec A son générateur infinitésimal. Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *$D(A)$ dense dans E.*
2. *Le générateur infinitésimal A est un opérateur fermé.*
3. *Pour tout $x \in D(A)$, l'application $C(.)x : \mathbb{R}^+ \longrightarrow X$ est deux fois différentiable. De plus, pour tout $x \in D(A)$ et tout $t \geq 0$, on a :*

$$\frac{d}{dt}C(t)x = \int_0^t C(s)Axds,$$

$$\frac{d^2}{dt^2}C(t)x = AC(t)x = C(t)Ax.$$

Preuve. 1. Soient $x \in E$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres strictement positifs, avec $t_n \longrightarrow 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $x_n = \frac{2}{t_n^2}\int_0^{t_n}(t_n-s)C(s)xds$, d'après la Proposition 1.3.15 et le Lemme 1.3.10, on a $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(A)$ et

$$x_n = \frac{2}{t_n^2}\int_0^{t_n}(t_n-s)C(s)xds \longrightarrow x.$$

Alors $D(A)$ est dense dans E.
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(A)$ telle que : $x_n \longrightarrow x$ et $Ax_n \longrightarrow y$. Soit $t \geq 0$ fixé, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $C(t)x_n - x_n = \int_0^t (t-s)C(s)x_n ds$.
Comme $C(t)$ est un opérateur borné, $C(t)x_n - x_n \longrightarrow C(t)x - x$.

D'autre part, d'après le Théorème 1.3.6, la famille $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est exponentiellement bornée, alors :

$$\int_0^t (t-s)C(s)Ax_n \longrightarrow \int_0^t (t-s)C(s)y.$$

Donc, d'après la Proposition 1.3.16, on a : $x \in D(A)$ et $Ax = y$, et par suite A est un opérateur fermé.

3. Soient $x \in D(A)$ et $t \geq 0$, comme $AC(t)x = C(t)Ax$, d'après la Proposition 1.3.15, pour tout $t \geq 0$, on a :

$$C(t)x = x - t\int_0^t C(s)Axds + \int_0^t sC(s)Axds.$$

Alors $\frac{d}{dt}C(t)x = \int_0^t C(s)Ax$, et par suite :

$$\frac{d^2}{dt^2}C(t)x = AC(t)x = C(t)Ax.$$

□

Lemme 1.3.17. *Soit $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ une famille C_0-cosinus sur E avec A son générateur infinitésimal. Pour tout $x \in D(A)$ et tout $t \geq 0$ on a :*

$$||C(t)x - x|| \leq \frac{t^2}{2}||Ax|| \sup_{0\leq s\leq t} ||C(s)||.$$

Preuve. Soient $x \in D(A)$ et $t \geq 0$, d'après la Proposition 1.3.15 on a :

$$\begin{aligned} ||C(t)x - x|| &\leq ||\int_0^t (t-s)C(s)Axds|| \\ &\leq \int_0^t (t-s)||C(s)Ax||ds \\ &\leq \int_0^t (t-s)||C(s)||.||Ax||ds \\ &\leq \frac{t^2}{2}||Ax|| \sup_{0\leq s\leq t} ||C(s)|| \end{aligned}$$

□

Lemme 1.3.18. *Soit $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ une famille C_0-cosinus sur E avec A son générateur infinitésimal. Alors $D(A^2)$ est dense dans E.*

Preuve. Il suffit de monter que $D(A^2)$ est dense dans $D(A)$.

Soit $x \in D(A)$, d'après la Proposition 1.3.14, pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\int_0^t (t-s)C(s)xds \in D(A) \text{ et } A\int_0^t (t-s)C(s)xds = C(t)x - x.$$

Comme $C(t)x - x \in D(A)$ pour tout $t \geq 0$, $A\int_0^t (t-s)C(s)xds \in D(A)$ pour tout $t \geq 0$. Par conséquent, pour tout $t \geq 0$ on a : $\int_0^t (t-s)C(s)xds \in D(A^2)$.
Comme $\frac{2}{t^2}\int_0^t (t-s)C(s)xds \longrightarrow x$, quand $t \longrightarrow 0^+$, on peut construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(A^2)$ telle que $x_n \longrightarrow x$ (voir la preuve de la Proposition 1.3.16), donc $D(A^2)$ est dense dans $D(A)$. □

Lemme 1.3.19. *Soit $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ une famille C_0-cosinus sur E avec A son générateur infinitésimal. Pour tout $x \in D(A^2)$ et tout $t \geq 0$ on a :*

$$||C(t)x - x - \frac{t^2}{2}Ax|| \leq \frac{t^4}{24}||A^2x|| \sup_{0\leq s\leq t} ||C(s)||.$$

Preuve. Soient $x \in D(A^2)$ et $t \geq 0$, d'après la Proposition 1.3.15 on a :

$$\begin{aligned}
||C(t)x - x - \frac{t^2}{2}Ax|| &\leq || \int_0^t (t-s)C(s)Axds - \frac{t^2}{2}Ax|| \\
&\leq || \int_0^t (t-s)(C(s)Ax - Ax)ds|| \\
&\leq \int_0^t (t-s)||C(s)Ax - Ax||ds \\
&\leq \int_0^t (t-s)|| \int_0^s (s-r)C(r)A^2xdr||ds \\
&\leq \int_0^t (t-s)(\int_0^s (s-r)dr)ds.||A^2x|| \sup_{0\leq s\leq t} ||C(s)|| \\
&\leq \frac{t^4}{24}||A^2x|| \sup_{0\leq s\leq t} ||C(s)||
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Lemme 1.3.20. *Soit $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ une famille C_0-cosinus sur E d'ordre $\omega \geq 0$. On définit l'application $|||.|||$ sur E par :*

$$\begin{aligned}
|||.||| : E &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\
x &\longrightarrow |||x||| = \sup_{t\geq 0} e^{-\omega t}||C(t)x||.
\end{aligned}$$

Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. *L'application $|||.|||$ est une norme sur E qui est équivalente à la norme $||.||$.*
2. *Pour chaque $s \geq 0$ on a :*

$$|||C(s)||| \leq 2e^{\omega s}.$$

Preuve. 1. D'une part, il existe $M \geq 1$ tel que pour tout $x \in E$ on a :

$$|||x||| = \sup_{t\geq 0} e^{-\omega t}||C(t)x|| \leq M||x|| < \infty.$$

Alors $|||.|||$ est bien définie, par suite $|||.|||$ est une norme sur E.

D'autre part, comme $C(0) = I$, pour tout $x \in E$, on a :

$$||x|| \leq |||x||| \leq M||x||.$$

Donc les normes $|||.|||$ et $||.||$ sont équivalentes sur E.

2. Soient $s \geq 0$ et $x \in X$ on a :

$$\begin{aligned}
|||C(s)x||| &= \sup_{t\geq 0} e^{-\omega t}||C(t)C(s)x|| \\
&\leq \frac{1}{2}(\sup_{t\leq s} e^{-\omega t}||2C(t)C(s)x|| + \sup_{t\geq s} e^{-\omega t}||C(t)C(s)x||) \\
&\leq \frac{1}{2}(\sup_{t\leq s} e^{-\omega t}||C(t+s)x|| + \sup_{t\leq s} e^{-\omega t}||2C(s-t)x|| \\
&+ \sup_{t\geq s} e^{-\omega t}||C(t+s)x|| + \sup_{t\geq s} e^{-\omega t}||C(t-s)x||) \\
&\leq \frac{1}{2}(2\sup_{t\geq 0} e^{-\omega t}||C(t+s)x|| + \sup_{t\leq s} e^{-\omega t}||C(s-t)x|| + \sup_{t\geq s} e^{-\omega t}||C(t-s)x||) \\
&\leq \frac{1}{2}(2e^{\omega s}\sup_{t\geq 0} e^{-\omega(t+s)}||C(t+s)x|| + e^{\omega s}\sup_{t\leq s} e^{-\omega(s-t)}||C(s-t)x|| \\
&+ e^{-\omega s}\sup_{t\geq s} e^{-\omega(t-s)}||C(t-s)x||) \\
&\leq \frac{1}{2}(4e^{\omega s}|||x|||) = 2e^{\omega s}|||x|||.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

□

Théorème 1.3.21 (Théorème de l'unicité de l'engendrement)**.** *Soient $\{C_1(t)\}_{t\geq 0}$ et $\{C_2(t)\}_{t\geq 0}$ deux familles C_0-cosinus sur E, avec A_1 et A_2 (resp.) leurs générateurs infinitésimaux. Si $D(A_1) \subseteq D(A_2)$ et $A_2|_{D(A_1)} = A_1$, alors $C_1(t) = C_2(t)$ pour tout $t \geq 0$.*

Preuve. D'après le Théorème 1.3.6, il existe $M \geq 1$ et $\omega \geq 0$ tels que :

$$||C_1(t)|| \leq Me^{\omega t} \text{ et } ||C_2(t)|| \leq Me^{\omega t}.$$

Par suite, d'après le Lemme 1.3.20 il existe une norme $|||.|||$ sur E telle que :

$$||x|| \leq |||x||| \leq M||x||,$$

$$|||C_1(t)||| \leq 2e^{\omega t} \text{ et } |||C_2(t)||| \leq 2e^{\omega t}.$$

D'autre part, On va montrer que pour chaque $x \in D(A_1^2)$, $t \geq 0$ et $k = 0, 1, 2, ...$ on a :

$$||C_1(t)x - C_2(t)x|| \leq \frac{t^4 M^4}{2^k} e^{\omega t} ||A_1^2 x||.$$

D'après le Lemme 1.3.20, il suffit de montrer que

$$|||C_1(t)x - C_2(t)x||| \leq \frac{t^4 M^3}{2^k} e^{\omega t} |||A_1^2 x|||.(*)$$

En effet, soit $x \in D(A_1^2)$ fixé, on utilisons le raisonnement par récurrence.

Pour $k = 0$, d'après les Lemme 1.2.19 et 1.2.20, pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
|||C_1(t)x - C_2(t)x||| &\leq M||C_1(t)x - C_2(t)x|| \\
&\leq M||C_1(t)x - x - \frac{1}{2}t^2 A_1 x|| + M||C_2(t)x - x - \frac{1}{2}t^2 A_2 x|| \\
&\leq M\frac{t^4}{12}||A_1^2||Me^{\omega t} \\
&\leq t^4 M^2 e^{\omega t}||A_1^2|| \leq t^4 M^3 e^{\omega t}|||A_1^2|||.
\end{aligned}$$

Donc $(*)$ est vraie pour $k = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $(*)$ est vraie pour tout $0 \leq k \leq n$ et tout $t \geq 0$.

D'après la Remarque 1.3.3, pour tout $t \geq 0$, on a :

$$C_1(t) - C_2(t) = 2(C_1(\frac{t}{2}) - C_2(\frac{t}{2}))C_1(\frac{t}{2}) + 2C_2(\frac{t}{2})(C_1(\frac{t}{2}) - C_2(\frac{t}{2})).$$

D'après la Remarque 1.3.13 et les Lemme 1.3.18 et 1.2.19 on obtient :

$$\begin{aligned}
|||C_1(t)x - C_2(t)x||| &\leq 2|||(C_1(\frac{t}{2}) - C_2(\frac{t}{2}))C_1(\frac{t}{2})x||| + 2|||C_2(\frac{t}{2})(C_1(\frac{t}{2})x - C_2(\frac{t}{2})x)||| \\
&\leq 2\frac{(\frac{t}{2})^4 M^3}{2^n} e^{\omega\frac{t}{2}}|||A_1^2 C_1(\frac{t}{2})x||| + 4e^{\omega\frac{t}{2}}|||C_1(\frac{t}{2})x - C_2(\frac{t}{2})x||| \\
&\leq 4\frac{(\frac{t}{2})^4 M^3}{2^n} e^{\omega\frac{t}{2}} e^{\omega\frac{t}{2}}|||A_1^2 x||| + 4e^{\omega\frac{t}{2}}\frac{(\frac{t}{2})^4 M^3}{2^n} e^{\omega\frac{t}{2}}|||A_1^2 x||| \\
&= 8\frac{(\frac{t}{2})^4 M^3}{2^n} e^{\omega t}|||A_1^2 x||| = \frac{t^4 M^3}{2^{n+1}} e^{\omega t}|||A_1^2 x|||.
\end{aligned}$$

Donc, $(*)$ est vraie pour $k = n + 1$, d'oú le résultat.

Alors, pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in D(A_1^2)$, on a : $C_1(t)x = C_2(t)x$.

Comme $C_1(t), C_2(t) \in \mathcal{B}(E)$ pour tout $t \geq 0$ et $D(A_1^2)$ est dense dans E, $C_1(t)x = C_2(t)x$ pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in E$. □

Proposition 1.3.22. *Soit A un opérateur linéaire borné sur E, pour chaque $t \geq 0$ on définit l'opérateur $\cosh(t\sqrt{A})$ sur E par :*

$$\cosh(t\sqrt{A})(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k x, \text{ pour tout } x \in E.$$

La famille $\{\cosh(t\sqrt{A})\}_{t\geq 0}$ est une famille cosinus uniformément continue sur E admet A comme générateur infinitésimal.

Preuve. D'une part, il est facile de vérifier que $\{\cosh(t\sqrt{A})\}_{t\geq 0}$ est une famille cosinus sur E. De plus, pour tout $t > 0$, on a :

$$\begin{aligned} ||\cosh(t\sqrt{A}) - I|| &= ||\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k - I|| = ||\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k|| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} ||A||^k = \cosh(t\sqrt{||A||}) - 1. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{t\longrightarrow 0^+} \cosh(t\sqrt{||A||}) - 1 = 0$, la famille $\{\cosh(t\sqrt{A})\}_{t\geq 0}$ est uniformément continue sur E.

D'autre part, soit $t > 0$ on a :

$$\begin{aligned} ||\frac{2}{t^2}(\cosh(t\sqrt{A}) - I) - A|| &= ||\frac{2}{t^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k - A|| = ||\frac{2}{t^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k|| \\ &\leq \frac{2}{t^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} ||A||^k = \frac{2}{t^2}(\cosh(t\sqrt{||A||}) - 1) - ||A||. \end{aligned}$$

Alors A est le générateur infinitésimal de la famille $\{\cosh(t\sqrt{A})\}_{t\geq 0}$, puisque

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{2}{t^2}(\cosh(t\sqrt{||A||}) - 1) - ||A|| = 0.$$

□

Corollaire 1.3.23. *Si $A \in \mathcal{B}(E)$, alors $\{\cosh(t\sqrt{A})\}_{t\geq 0}$ est la seule famille cosinus uniformément continue sur E ayant pour générateur infinitésimal l'opérateur A.*

Théorème 1.3.24. *Une famille cosinus $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est uniformément continue sur E si, et seulement si, son générateur infinitésimal A est un opérateur linéaire borné sur E. C'est à dire, toute famille cosinus uniformément continue $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ s'écrit sous la forme*

$$C(t) = \cosh(t\sqrt{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Preuve. Soit $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ une famille cosinus uniformément continue sur E avec A son générateur infinitésimal.

D'une part, d'après la Remarque 1.3.11, on a :

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} ||\frac{2}{t^2}\int_0^t (t-s)C(s)ds - I|| = 0.$$

Alors, il existe $\tau > 0$ tel que

$$||\frac{2}{\tau^2}\int_0^\tau (\tau-s)C(s)ds - I|| < 1.$$

Donc $\frac{2}{\tau^2}\int_0^\tau (\tau-s)C(s)ds$ est inversible dans $B(X)$, et par suite $\int_0^\tau (\tau-s)C(s)ds$ est inversible.

D'autre part, soit $0 < h < \tau$, on a :

$$\frac{2}{h^2}(C(t)-I)\int_0^\tau (\tau-s)C(s)ds = \frac{1}{h^2}(\int_\tau^{\tau+h}(\tau+h-s)C(s)ds + \int_\tau^{\tau-h}(\tau-h-s)C(s)ds - 2\int_0^h (h-s)C(s)ds),$$

(voir la démonstration de la Proposition 1.3.14).

Alors, d'après la Remarque 1.3.11, on a :

$$A\int_0^\tau (\tau-s)C(s)ds = C(\tau) - I.$$

Donc $A = (C(\tau)-I)(\int_0^\tau (\tau-s)C(s)ds)^{-1} \in B(X)$, par suite, d'après le Corollaire précédent,

$$C(t) = \cosh(t\sqrt{A}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}}{(2k)!}A^k, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

La réciproque est le Corollaire 1.3.23. □

CHAPITRE 2

FAMILLES COSINUS SUR LES ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

Dans le cadre de la généralisation de la notion "famille cosinus d'opérateurs linéaires continus" aux espaces plus généraux que les espaces de Banach, nous nous intéressons dans ce chapitre à l'étude des familles cosinus d'opérateurs linéaires continus dans les espaces localement convexes séparés et séquentiellement complets, plus précisément les familles cosinus fortement continues et les familles C_0-cosinus.

Ce chapitre est divisé en trois sections, la première est consacrée à l'étude des familles cosinus sur les espaces localement convexes séparés et séquentiellement complets. Nous montrons que par l'équicontinuité locale on a l'équivalence entre la continuité forte en 0 et celle sur $\mathbb{R}^+$ tout entier, autrement dit, toute famille C_0-cosinus localement équicontinue est fortement continue, et nous généralisons le théorème de l'unicité de l'engendrement pour les famille C_0-cosinus localement équicontinue. De plus, nous établissons que sur la classe d'espaces localement convexes tonnelés, toute famille cosinus fortement continue est localement équicontinue.

Nous étudions, dans la deuxième section, la résolvante du générateur infinitésimal d'une famille C_0-cosinus exponentiellement équicontinue.

Dans la dernière section, nous faisons une étude sur les familles cosinus, sur un espace localement convexe, qui sont écrites sous la forme $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k$, pour un certain $A \in \mathcal{L}(X)$.

2.1 Familles Cosinus fortement continues et familles C_0-Cosinus

Dans tout ce qui suit, on désigne par X un espace localement convexe séparé et séquentiellement complet, Γ_X un système fondamental de semi-normes engendrant la topologie de X, $B(X)$ l'ensemble de toutes les parties bornées de X et $\mathcal{L}(X)$ l'espace des opérateurs linéaires continus sur X.
La topologie forte τ_s sur $\mathcal{L}(X)$ est définie par la famille de semi-normes :

$$p_x(S) = p(Sx), \quad S \in \mathcal{L}(X),$$

pour tout $x \in X$ et tout $p \in \Gamma_X$.
$\mathcal{L}(X)$ muni de la topologie forte τ_s est noté par $\mathcal{L}_s(X)$.
La topologie τ_b de la convergence uniforme sur les parties bornées de X sur $\mathcal{L}(X)$ est définie par la famille de semi-normes :

$$p_B(S) = \sup_{x \in B} p(Sx), \quad S \in \mathcal{L}(X),$$

pour tout $B \in B(X)$ et tout $p \in \Gamma_X$.
$\mathcal{L}(X)$ muni de la topologie τ_b est noté par $\mathcal{L}_b(X)$.

Définition 2.1.1. *Soit $\{C(t)\}_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{L}(X)$ une famille d'opérateurs linéaires continus sur X. On dit que $\{C(t)\}_{t\geq 0}$est une* ***famille cosinus*** *si :*

1. $C(0) = I$.
2. $2C(t)C(s) = C(t+s) + C(t-s)$, *pour tous* $s, t \in \mathbb{R}^+$ *avec* $s \leq t$. *(Équation fonctionnelle de D'Alembert)*

Définition 2.1.2. *Soit $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ une famille cosinus sur X.*

1. $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ *est appelée* ***famille cosinus fortement continue*** *sur X si :*

$$\lim_{t \longrightarrow t_0} C(t) = C(t_0) \text{ dans } \mathcal{L}_s(X), \text{ pour tout } t_0 > 0 \ (\text{avec } t \longrightarrow 0^+ \text{ si } t_0 = 0).$$

2. $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ *est appelée* ***famille cosinus uniformément continue*** *sur X si :*

$$\lim_{t \longrightarrow t_0} C(t) = C(t_0) \text{ dans } \mathcal{L}_b(X), \text{ pour tout } t_0 > 0 \ (\text{avec } t \longrightarrow 0^+ \text{ si } t_0 = 0).$$

Proposition 2.1.3. *Les opérateurs de toute famille cosinus $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ fortement continue sur X commutent.*

Preuve. On fixe $t > 0$, d'après 2. de la Définition 2.1.1. on a

$$C(t) = 2C(\frac{t}{2})^2 - I.$$

Ce qui implique que $C(t)$ est un polynôme de $C(\frac{t}{2})$. Par suite, pour tout $n \geq 0$, on a $C(t)$ est un polynôme de $C(\frac{t}{2^n})$, donc $C(t)$ et $C(\frac{t}{2^n})$ commutent.
Supposons que pour un certain $k \geq 1$, $C(t)$ commute avec $C(\frac{rt}{2^n})$ pour $r = 1, 2, ..., k$. Comme,

$$C(\frac{(k+1)t}{2^n}) = 2C(\frac{kt}{2^n})C(\frac{t}{2^n}) - C(\frac{(k-1)t}{2^n}),$$

$C(t)$ commute avec $C(\frac{(k+1)t}{2^n})$.
Alors, pour tous entiers $r, n \geq 1$, $C(t)$ commute avec $C(\frac{rt}{2^n})$.
D'autre part, soit $s \geq 0$ et on prend $r = [\frac{s2^n}{t}]$ (la partie entière), donc $C(t)$ commute avec $C([\frac{s2^n}{t}]\frac{t}{2^n})$.
Comme $[\frac{s2^n}{t}]\frac{t}{2^n} \longrightarrow s$ quand $n \longrightarrow \infty$ et $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est fortement continue, $C(t)$ commute avec $C(s)$, d'où la proposition. □

Proposition 2.1.4. *Soit $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ une famille cosinus fortement continue sur X. Alors, pour tout $x \in X$ et tout $t \geq 0$, on a :*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{2}{h^2} \int_t^{t+h} (t + h - s)C(s)xds = C(t)x.$$

C'est à dire, pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\frac{2}{h^2} \int_t^{t+h} (t + h - s)C(s)ds \longrightarrow C(t) \text{ quand } h \to 0^+ \text{ dans } \mathcal{L}_s(X).$$

Preuve. Soient $x \in X$ et $t \geq 0$, on prend $h > 0$ d'abord on a :

$$\frac{2}{h^2} \int_t^{t+h} (t + h - s)ds = 1.$$

D'autre part, soit $p \in \Gamma_X$ on a :

$$\begin{aligned} p(\frac{2}{h^2} \int_t^{t+h} (t + h - s)C(s)xds - C(t)x) &= p(\frac{2}{h^2} \int_t^{t+h} (t + h - s)(C(s)x - C(t)x)ds) \\ &\leq \sup_{s\in[t,t+h]} p(C(s)x - C(t)x) \end{aligned}$$

Par la continuité forte da la famille $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ on obtient :

$$\sup_{s\in[t,t+h]} p(C(s)x - C(t)x) \longrightarrow 0 \text{ quand } h \to 0^+.$$

D'où le résultat. □

Remarque 2.1.5.

(a) Si $t > 0$ on a :

$$\frac{2}{h^2}\int_t^{t-h} (t-h-s)C(s)ds \longrightarrow C(t) \text{ quand } h \to 0^+ \text{ dans } \mathcal{L}_s(X).$$

(b) Si $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est une famille cosinus uniformément continue sur X, pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\frac{2}{h^2}\int_t^{t+h} (t+h-s)C(s)ds \longrightarrow C(t) \text{ quand } h \to 0^+ \text{ dans } \mathcal{L}_b(X).$$

De plus, si $t > 0$ on a :

$$\frac{2}{h^2}\int_t^{t-h} (t-h-s)C(s)ds \longrightarrow C(t) \text{ quand } h \to 0^+ \text{ dans } \mathcal{L}_b(X).$$

Définition 2.1.6. *Soit $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ une famille cosinus fortement continue sur X. On appelle* ***générateur infinitésimal*** *de $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ l'opérateur A défini sur*

$$D(A) = \{x \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{2}{t^2}(C(t)x - x) \text{ existe dans } X\},$$

par

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{2}{t^2}(C(t)x - x).$$

Proposition 2.1.7. *Soit $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ une famille cosinus fortement continue sur X avec A son générateur infinitésimal. Si $x \in D(A)$, pour tout $t \geq 0$, on a :*

$$C(t)x \in D(A) \text{ et } AC(t)x = C(t)Ax.$$

Preuve. Soient $x \in D(A)$, $t \geq 0$ et $h > 0$, on a :

$$\frac{2}{h^2}(C(h) - I)C(t)x = \frac{2}{h^2}(C(h)C(t)x - C(t)x).$$

D'après la Proposition 2.1.3, on obtient :

$$\frac{2}{h^2}(C(h) - I)C(t)x = C(t)(\frac{2}{h^2}(C(h)x - x)).$$

Comme $x \in D(A)$ et $C(t) \in \mathcal{L}(X)$, $C(t)x \in D(A)$ et on a :

$$\lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{2}{h^2}(C(h) - I)C(t)x = AC(t)x = C(t)Ax.$$

□

Proposition 2.1.8. *Soit $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ une famille cosinus fortement continue sur X avec A son générateur infinitésimal.*
Pour tout $x \in X$ et tout $t \geq 0$ on a : $\int_0^t (t-s)C(s)xds \in D(A)$ et

$$A\int_0^t (t-s)C(s)xds = C(t)x - x.$$

Preuve. Soient $t > 0$ et $x \in X$, et on prend $h > 0$, avec $h \leq t$, donc on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{h^2}(C(h) - I)\int_0^t (t-s)C(s)xds = \frac{2}{h^2}\int_0^t (t-s)C(h)C(s)xds - \frac{2}{h^2}\int_0^t (t-s)C(s)xds \\
&= \frac{2}{h^2}\int_0^h (t-s)C(h)C(s)xds + \frac{2}{h^2}\int_h^t (t-s)C(h)C(s)xds - \frac{2}{h^2}\int_0^t (t-s)C(s)xds \\
&= \frac{1}{h^2}\int_0^h (t-s)C(h+s)xds + \frac{1}{h^2}\int_0^h (t-s)C(h-s)xds + \frac{1}{h^2}\int_h^t (t-s)C(s+h)xds \\
&+ \frac{1}{h^2}\int_h^t (t-s)C(s-h)xds - \frac{2}{h^2}\int_0^t (t-s)C(s)xds \\
&= \frac{1}{h^2}\int_0^t (t-s)C(s+h)xds + \frac{1}{h^2}\int_0^h (t-s)C(h-s)xds + \frac{1}{h^2}\int_h^t (t-s)C(s-h)xds \\
&- \frac{2}{h^2}\int_0^t (t-s)C(s)xds \\
&= \frac{1}{h^2}\int_t^{t-h} (t-h-s)C(s)xds + \frac{1}{h^2}\int_t^{t+h} (t+h-s)C(s)xds - \frac{1}{h^2}\int_0^h (t+h-s)C(s)xds \\
&+ \frac{1}{h^2}\int_0^h (t-h+s)C(s)xds \\
&= \frac{1}{h^2}\int_t^{t-h} (t-h-s)C(s)xds + \frac{1}{h^2}\int_t^{t+h} (t+h-s)C(s)xds - \frac{2}{h^2}\int_0^h (h-s)C(s)xds
\end{aligned}$$

D'après la Proposition 2.1.4 et 1. de la Remarque 2.1.5, quand $h \longrightarrow 0^+$ on obtient :

$$\int_0^t (t-s)C(s)xds \in D(A) \quad \text{et} \quad A\int_0^t (t-s)C(s)xds = C(t)x - x.$$

□

Corollaire 2.1.9. *Soit $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ une famille cosinus fortement continue sur X avec A son générateur infinitésimal. Alors $D(A)$ est dense dans X.*

Preuve. Soient $x \in X$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$x_n = \frac{2}{t_n^2}\int_0^{t_n}(t_n - s)C(s)xds.$$

D'après la proposition précédente et la Proposition 2.1.4, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$x_n = \frac{2}{t_n^2}\int_0^{t_n}(t_n - s)C(s)xds \in D(A) \text{ et } \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Donc $D(A)$ est dense dans X. □

On rappelle qu'une famille $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{L}(X)$, est équicontinue sur X si pour tout $p \in \Gamma_X$, il existe $q \in \Gamma_X$ et $M > 0$ tels que :

$$p(T(t)x) \leq Mq(x), \text{ pour tout } x \in X \text{ et tout } t \geq 0.$$

D'une manière équivalente, Pour tout voisinage $\mathcal{U}$ de 0 dans X, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans X, tel que $T(t)(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{U}$ pour tout $t \geq 0$.

Définition 2.1.10. *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires continus sur X.*

(a) On dit que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est ***exponentiellement équicontinue*** *sur X, s'il existe $\omega \geq 0$ tel que la famille $\{e^{-\omega t}T(t)\}_{t\geq 0}$ est équicontinue sur X.*
C'est à dire, pour tout $p \in \Gamma_X$, il existe $q \in \Gamma_X$ et $M > 0$ tels que :

$$p(T(t)x) \leq Me^{\omega t}q(x), \text{ pour tout } x \in X \text{ et tout } t \geq 0.$$

Dans ce cas, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sera dite exponentiellement équicontinue d'ordre ω.

(b) On dit que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est ***localement équicontinue*** *sur X, si pour chaque $t_0 \geq 0$ la famille $\{T(t), 0 \leq t \leq t_0\}$ est équicontinue sur X.*
C'est à dire, pour tout $p \in \Gamma_X$, il existe $q \in \Gamma_X$ et $M > 0$ tels que :

$$p(T(t)x) \leq Mq(x), \text{ pour tout } x \in X \text{ et tout } t \in [0, t_0].$$

Remarque 2.1.11. Toute famille exponentiellement équicontinue, sur un espace localement convexe X, est localement équicontinue sur X.

Soit $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ une famille cosinus fortement continue et exponentiellement équicontinue d'ordre $\omega \geq 0$ sur X. Pour chaque semi-norme $p \in \Gamma_X$, on définit $\tilde{p}$ sur X par :

$$\tilde{p}(x) = \sup_{t\geq 0} p(e^{-\omega t}C(t)x), \text{ pour tout } x \in X.$$

D'après l'équicontinuité exponentielle de la famille $\{C(t)\}_{t\geq 0}$, chaque $\tilde{p}$ est bien définie, et par suite $\tilde{p}$ est une semi-norme sur X, puisque $p \in \Gamma_X$.
On note par $\tilde{\Gamma}_X = \{\tilde{p},\ p \in \Gamma_X\}$ l'ensemble de toutes les semi-normes $\tilde{p}$.

Proposition 2.1.12. *La famille de semi-normes $\tilde{\Gamma}_X = \{\tilde{p},\ p \in \Gamma_X\}$ satisfait les propriétés suivantes :*

1. *$\tilde{\Gamma}_X$ est un système fondamental de semi-normes qui engendre la topologie localement convexe de X.*
2. *Pour tout $\tilde{p} \in \tilde{\Gamma}_X$, on a :*

$$\tilde{p}(C(t)x) \leq 2e^{\omega t}\tilde{p}(x), \text{ pour tout } x \in X \text{ et tout } t \geq 0.$$

Preuve. 1. D'une part, de la définition de la famille de semi-normes $\tilde{\Gamma}_X$, pour toute semi-norme $p \in \Gamma_X$ on a : $p(x) \leq \tilde{p}(x)$, pour tout $x \in X$.

D'autre part, comme la famille $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est exponentiellement équicontinue d'ordre ω sur X, il existe $q \in \Gamma_X$ et $M > 0$ tels que : $\tilde{p}(x) \leq Mq(x)$, pour tout $x \in X$.
On en déduit que :

$$p(x) \leq \tilde{p}(x) \leq Mq(x) \leq M\tilde{q}(x), \text{ pour tout } x \in X.$$

Ce qui implique que la famille $\tilde{\Gamma}_X$ est aussi un système de semi-normes qui engendre la topologie localement convexe de X.

2. Soient $t \geq 0$ et $x \in X$, pour chaque semi-norme $\tilde{p} \in \tilde{\Gamma}_X$, on a :

$$\begin{aligned}
2\tilde{p}(C(t)x) &= 2\sup_{s\geq 0} p(e^{-\omega s}C(s)C(t)x) \\
&\leq 2\sup_{s\leq t} p(e^{-\omega s}C(s)C(t)x) + 2\sup_{s>t} p(e^{-\omega s}C(s)C(t)x) \\
&\leq \sup_{s\leq t} p(e^{-\omega s}(C(t+s)x + C(t-s)x)) + \sup_{s>t} p(e^{-\omega s}(C(s+t)x + C(s-t)x)) \\
&\leq \sup_{s\leq t} p(e^{-\omega s}C(t+s)x) + \sup_{s\leq t} p(e^{-\omega s}C(t-s)x) + \sup_{s>t} p(e^{-\omega s}C(s+t)x) \\
&+ \sup_{s>t} p(e^{-\omega s}C(s-t)x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq e^{\omega t}\sup_{s\leq t} p(e^{-\omega(t+s)}C(t+s)x) + e^{\omega t}\sup_{s\leq t} e^{-2\omega s}p(e^{-\omega(t-s)}C(t-s)x)\\
&+ e^{\omega t}\sup_{s>t} p(e^{-\omega(s+t)}C(s+t)x) + e^{-\omega t}\sup_{s>t} p(e^{-\omega(s-t)}C(s-t)x)\\
&\leq e^{\omega t}\sup_{k\leq 2t} p(e^{-\omega k}C(k)x) + e^{\omega t}\sup_{k\leq t} p(e^{-\omega k}C(k)x) + e^{\omega t}\sup_{k>2t} p(e^{-\omega k}C(k)x)\\
&+ e^{-\omega t}\sup_{k>0} p(e^{-\omega k}C(k)x)\\
&\leq 4e^{\omega t}\sup_{k\geq 0} p(e^{-\omega k}C(k)x) = 4e^{\omega t}\tilde{p}(x).
\end{aligned}
$$

Alors, pour tout $\tilde{p}\in\tilde{\Gamma_X}$, $\tilde{p}(C(t)x)\leq 2e^{\omega t}\tilde{p}(x)$ pour tout $x\in X$ et tout $t\geq 0$.

□

On sait que toute famille cosinus fortement continue sur un espace de Banach est nécessairement exponentiellement équicontinue [35, 45]. Comme nous le verrons dans l'exemple suivant ce dernier résultat ne reste plus vrai sur les espaces localement convexes, en particulier sur les espaces de Fréchet.

Exemple 2.1.13. On considère l'espace vectoriel de toutes les suites complexes $\boldsymbol{\omega}=\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, sur lequel on définit la famille des semi-normes continues $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes : pour chaque $n\in\mathbb{N}$,

$$p_n(x)=|x_n|,\ \text{pour tout } x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\boldsymbol{\omega}.$$

L'espace $\boldsymbol{\omega}=\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie engendrée par la famille des semi-normes $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est un espace de Fréchet.
Pour chaque $t\geq 0$, on définit l'opérateur $C(t)$ sur $\boldsymbol{\omega}$ par :

$$C(t)x=(\frac{e^{nt}+e^{-nt}}{2}x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \text{pour tout } x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\boldsymbol{\omega}.$$

D'une part, soient $0\leq s\leq t$, pour tout $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\boldsymbol{\omega}$, on a :

$$
\begin{aligned}
2C(t)C(s)x &= 2C(t)(\frac{e^{ns}+e^{-ns}}{2}x_n)_{n\in\mathbb{N}} = 2(\frac{e^{nt}+e^{-nt}}{2}.\frac{e^{ns}+e^{-ns}}{2}x_n)_{n\in\mathbb{N}}\\
&= (\frac{(e^{nt}+e^{-nt})(e^{ns}+e^{-ns})}{2}x_n)_{n\in\mathbb{N}}\\
&= (\frac{e^{n(t+s)}+e^{n(t-s)}+e^{-n(t-s)}+e^{-n(t+s)}}{2}x_n)_{n\in\mathbb{N}}\\
&= (\frac{e^{n(t+s)}+e^{-n(t+s)}}{2}x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (\frac{e^{n(t-s)}+e^{-n(t-s)}}{2}x_n)_{n\in\mathbb{N}}\\
&= C(t+s)x + C(t-s)x.
\end{aligned}
$$

Donc $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est une famille cosinus sur $\boldsymbol{\omega}$, puisque $C(0) = I$.
D'autre part, soient $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \boldsymbol{\omega}$, $t \geq 0$ et $h > 0$, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} p_n(C(t+h)x - C(t)x) &= |\frac{e^{n(t+h)} + e^{-n(t+h)}}{2}x_n - \frac{e^{nt} + e^{-nt}}{2}x_n| \\ &\leq (\cosh(t+h) - \cosh(t))|x_n| \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{h\to 0^+}(\cosh(t+h) - \cosh(t)) = 0$,

$$C(t+h)x \longrightarrow C(t)x \text{ quand } h \longrightarrow 0^+ \text{ dans } \mathcal{L}_s(X).$$

Alors $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est une famille cosinus fortement continue sur $\boldsymbol{\omega}$.

- La famille $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est localement équicontinue sur $\boldsymbol{\omega}$. En effet :

On fixe $t_0 > 0$ et soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$p_n(C(t)x) = |\frac{e^{nt} + e^{-nt}}{2}x_n| = cosh(nt)|x_n| \leq cosh(nt_0)|x_n|, \text{ pour tout } t \in [0, t_0].$$

On prend $M_n = cosh(nt_0)$, on obtient $p_n(C(t)x) \leq M_n p_n(x)$ pour tout $t \in [0, t_0]$, d'où le résultat.

- La famille $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ n'est pas exponentiellement équicontinue sur $\boldsymbol{\omega}$. En effet :

Supposons que la famille $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est exponentiellement équicontinue d'ordre $\omega \geq 0$.
D'une part, de la Proposition 2.1.12, on peut définir un autre système fondamental de semi-normes $\{\tilde{p}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, engendrant la topologie de $\boldsymbol{\omega}$, par :

$$\tilde{p}_n(x) = \sup_{s\geq 0} e^{-\omega s} p_n(C(s)x) = \sup_{s\geq 0} e^{-\omega s}(\frac{e^{ns} + e^{-ns}}{2})|x_n|, \text{ pour tout } x \in \boldsymbol{\omega}.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\tilde{p}_n(C(t)x) \leq 2e^{\omega t}\tilde{p}_n(x), \text{ pour tout } x \in \boldsymbol{\omega} \text{ et tout } t \geq 0.$$

D'autre part, soient $t \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} \tilde{p}_n(C(t)x) = \sup_{s\geq 0} e^{-\omega s} p_n(C(s)C(t)x) &= \sup_{s\geq 0} e^{-\omega s}(\frac{e^{ns} + e^{-ns}}{2})(\frac{e^{nt} + e^{-nt}}{2})|x_n| \\ &= (\frac{e^{nt} + e^{-nt}}{2}) \sup_{s\geq 0} e^{-\omega s}(\frac{e^{ns} + e^{-ns}}{2})|x_n| \\ &= (\frac{e^{nt} + e^{-nt}}{2})\tilde{p}_n(x). \end{aligned}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(\frac{e^{nt}+e^{-nt}}{2})\tilde{p}_n(x) \leq 2e^{\omega t}\tilde{p}_n(x), \text{ pour tout } x \in \boldsymbol{\omega} \text{ et tout } t \geq 0.$$

En particulier, pour $x = (1)_{n\in\mathbb{N}} \in \boldsymbol{\omega}$ et $t = 1$, on obtient :

$$(\frac{e^{n}+e^{-n}}{2}) \leq 2e^{\omega}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Absurde, car la suite $(\frac{e^n+e^{-n}}{2})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.
D'où la famille cosinus fortement continue $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ n'est pas exponentiellement équicontinue sur $\boldsymbol{\omega}$.

D'après l'exemple précédent, on remarque que l'équicontinuité locale n'implique pas l'équicontinue exponentielle, ce qui signifie que la réciproque de la Remarque 2.1.11 n'est pas vraie.

Proposition 2.1.14. *Si X est un espace tonnelé, alors toute famille cosinus fortement continue sur X est localement équicontinue.*

Preuve. Soient $s > 0$ fixé et $\mathcal{U}$ un voisinage fermé, convexe et équilibré de 0 dans X. On considère l'ensemble :

$$\mathcal{V} = \bigcap_{0\leq t\leq s} (C(t))^{-1}(\mathcal{U}).$$

D'une part, $\mathcal{V}$ est un ensemble fermé, convexe et équilibré de X, et pour tout $t \in [0, s]$, $C(t)(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{U}$.
D'autre part, soit $x \in X$, l'ensemble $\{C(t)x,\ 0 \leq t \leq s\}$ est borné dans X, puisque la famille $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est fortement continue sur X.
Comme $\mathcal{U}$ est un voisinage de 0, il existe $\lambda \geq 0$ tel que :

$$\{C(t)x,\ 0 \leq t \leq s\} \subseteq \lambda\mathcal{U}.$$

Ce qui implique que $x \in \lambda\mathcal{V}$, c'est à dire, l'ensemble $\mathcal{V}$ est absorbant. Comme X est tonnelé, $\mathcal{V}$ est un voisinage de 0.
Alors la famille $\{C(t), 0 \leq t \leq s\}$ est équicontinue, d'où la proposition. □

Théorème 2.1.15. *Soit $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ une famille cosinus fortement continue et localement équicontinue sur X avec A son générateur infinitésimal. Soient $x, y \in X$, alors :*
$x \in D(A)$ et $Ax = y$ si, et seulement si, pour tout $t \geq 0$, on a :

$$C(t)x - x = \int_0^t (t-s)C(s)yds.$$

Preuve. Soient $x, y \in X$, tels que $Ax = y$ (c-à-d $x \in D(A)$).

D'après la Proposition 2.1.8, pour tout $t \geq 0$, on a : $\int_0^t (t-s)C(s)xds \in D(A)$ et

$$C(t)x - x = A\int_0^t (t-s)C(s)xds = \lim_{h \longrightarrow 0^+} \int_0^t (t-s)C(s)\frac{2}{h^2}(C(h)x - x)ds.$$

Soit $t > 0$ fixé, pour tout $p \in \Gamma_X$ et tout $h \in \mathbb{R}^*$, avec $|h| \leq t$, on a :

$$\begin{aligned}
&p(\int_0^t (t-s)C(s)\frac{2}{h^2}(C(h)x - x)ds) \\
&= p(\frac{1}{h^2}\int_t^{t-h} (t-h-s)C(s)xds + \frac{1}{h^2}\int_t^{t+h} (t+h-s)C(s)xds - \frac{2}{h^2}\int_0^h (h-s)C(s)xds) \\
&\leq 3\sup_{[0,2t]} p(C(s)x).
\end{aligned}$$

Comme $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est localement équicontinue sur X, il existe $q \in \Gamma_X$ et $M > 0$ tels que :

$$p(C(s)x) \leq Mq(x), \text{ pour tout } s \in [0, 2t].$$

Par suite, pour tout $p \in \Gamma_X$, il existe $q \in \Gamma_X$ et $M > 0$ tels que :

$$p(\int_0^t (t-s)C(s)\frac{2}{h^2}(C(h)x - x)ds) \leq 3Mq(x).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\lim_{h \longrightarrow 0^+} \int_0^t (t-s)C(s)\frac{2}{h^2}(C(h)x - x)ds &= \int_0^t (t-s)C(s) \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{2}{h^2}(C(h)x - x)ds \\
&= \int_0^t (t-s)C(s)yds.
\end{aligned}$$

Alors, pour tout $t \geq 0$,

$$C(t)x - x = \int_0^t (t-s)C(s)yds$$

Réciproquement, soient $x, y \in X$ tels que pour tout $t \geq 0$ on a :

$$C(t)x - x = \int_0^t (t-s)C(s)yds.$$

En particulier, pour tout $t > 0$, on a :

$$\frac{2}{t^2}(C(t)x - x) = \frac{2}{t^2}\int_0^t (t-s)C(s)yds.$$

D'après la Proposition 2.1.4, on a :

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{2}{t^2}(C(t)x - x) = y.$$

Alors $x \in D(A)$ et $Ax = y$. □

Corollaire 2.1.16. *Le générateur infinitésimal d'une famille cosinus fortement continue et localement équicontinue sur X est un opérateur fermé.*

Preuve. Soient $t > 0$ fixé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(A)$ telle que :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x \text{ et } \lim_{n\longrightarrow\infty} Ax_n = y.$$

D'après la proposition précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$C(t)x_n - x_n = \int_0^t (t-s)C(s)Ax_n ds.$$

Comme $C(t) \in \mathcal{L}(X)$, $\lim_{n\longrightarrow\infty}(C(t)x_n - x_n) = C(t)x - x$.
D'autre part, d'après l'équicontinuité locale de $\{C(t)\}_{t\geq 0}$, on a :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^t (t-s)C(s)Ax_n ds = \int_0^t (t-s)C(s)y ds.$$

En effet, Soit $p \in \Gamma_X$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} p(\int_0^t (t-s)C(s)Ax_n ds - \int_0^t (t-s)C(s)y ds) &= p(\int_0^t (t-s)C(s)(Ax_n - y)ds) \\ &\leq \frac{t^2}{2} \sup_{0\leq s\leq t} p(C(s)(Ax_n - y)). \end{aligned}$$

Comme la famille $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est localement équicontinue sur X, il existe $q \in \Gamma_X$ et $M > 0$ tels que :

$$p(\int_0^t (t-s)C(s)Ax_n ds - \int_0^t (t-s)C(s)y ds) \leq \frac{t^2}{2} Mq(Ax_n - y).$$

Alors $\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^t (t-s)C(s)Ax_n ds = \int_0^t (t-s)C(s)y ds$, puisque $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y$.
Par conséquent

$$C(t)x - x = \int_0^t (t-s)C(s)y ds.$$

Alors $x \in D(A)$ et $Ax = y$ (d'après le Théorème 2.1.15), d'où A est un opérateur fermé.

□

Proposition 2.1.17. *Soit $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ une famille cosinus fortement continue et localement équicontinue sur X avec A son générateur infinitésimal.*
Alors, pour tout $x \in D(A)$, la fonction : $[0,\infty) \to X$, $t \mapsto C(t)x$ est de classe C^2, et pour tout $x \in D(A)$ et tout $t \geq 0$, on a :

$$\frac{dC(t)x}{dt} = \int_0^t C(s)Ax ds = A\int_0^t C(s)x ds,$$

$$\frac{d^2C(t)x}{dt^2} = AC(t)x = C(t)Ax.$$

Preuve. Soient $x \in D(A)$ et $t \geq 0$, d'après la le Théorème 2.1.15, on a :

$$C(t)x = x + t\int_0^t C(s)Axds - \int_0^t sC(s)Axds.$$

Donc, d'après le Corollaire 1.2.20,

$$\frac{dC(t)x}{dt} = \int_0^t C(s)Axds + tC(t)Ax - tC(t)Ax = \int_0^t C(s)Axds.$$

Par suite

$$\frac{d^2C(t)x}{dt^2} = C(t)Ax = AC(t)x.$$

D'où la proposition. □

Définition 2.1.18. *Soit $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ une famille cosinus sur X.*

1. *La famille $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est appelée famille C_0-**cosinus** sur X si :*

$$C(t) \longrightarrow I \text{ quand } t \to 0^+ \text{ dans } \mathcal{L}_s(X).$$

2. *On dit que $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est une **famille cosinus uniformément continue en** 0 sur X si :*

$$C(t) \longrightarrow I \text{ quand } t \to 0^+ \text{ dans } \mathcal{L}_b(X).$$

D'après la Définition 2.1.2, toute famille cosinus fortement continue (resp. uniformément continue) est une famille C_0-cosinus (resp. uniformément continue en 0).
Dans le cas classique d'espaces de Banach, l'équicontinuité exponentielle, des familles C_0-cosinus, nous donne la continuité forte. Par ailleurs, dans les espace localement convexes, les familles C_0-cosinus ne sont pas nécessairement exponentiellement équicontinues (voir l'exemple 2.1.13).
Nous montrons, dans le théorème suivant, que si une famille C_0-cosinus sur X est localement équicontinue, alors elle est fortement continue.

Théorème 2.1.19. *Soit $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ une famille C_0-cosinus localement équicontinue sur X. Pour tout $x \in X$ et tout $t_0 > 0$, on a :*

$$\lim_{t\longrightarrow t_0} C(t)x = C(t_0)x.$$

C'est à dire, la famille $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est fortement continue sur X.

Preuve. Supposons qu'il existe $x_0 \in X$ et $t_0 > 0$ tels que $C(t)x_0$ n'est pas continue en t_0, c'est à dire,

$$\exists \epsilon > 0,\ \exists q \in \Gamma_X,\ \forall \eta > 0,\ \exists t \geq 0 \text{ tels que } |t - t_0| \leq \eta \text{ et } q(C(t)x_0 - C(t_0)x_0) \geq \epsilon.$$

On considère la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, de nombres réels positifs, définie par :

$$K_n = \sup\{q(C(t)x_0 - C(s)x_0), \quad |t - t_0| \leq \frac{t_0}{8n}, \quad |s - t_0| \leq \frac{t_0}{8n}, \quad s \neq t > 0\}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Il existe $K > 0$ tel que $K_n \geq K$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En effet :
   D'abord on voit que $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite décroissante de nombres positifs, donc il existe $K \in \mathbb{R}^+$ tel que $K_n \longrightarrow K$. Comme $C(.)x_0$ non continue en t_0, $K > 0$, d'oú le résultat.

2. De la définition de $(K_n)_n \in \mathbb{N}^*$, on déduit qu'il existe deux suites $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\tau_n < \sigma_n$, $|\tau_n - t_0| \leq \frac{t_0}{8n}$, $|\sigma_n - t_0| \leq \frac{t_0}{8n}$ et
   $$q(C(\tau_n)x_0 - C(\sigma_n)x_0) \geq K_n - \frac{1}{n}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2\tau_n - \sigma_n \geq 0$. En effet :
   Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $$\sigma_n - \tau_n \leq \frac{t_0}{4n} \text{ et } \tau_n \geq t_0 - \frac{t_0}{8n} > \frac{t_0}{4n}.$$
   Ce qui implique $2\tau_n - \sigma_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q(C(\sigma_{4n})x_0 - C(2\tau_{4n} - \sigma_{4n})x_0) \leq K_n$. En effet :
   Comme $|\sigma_{4n} - t_0| \leq \frac{t_0}{32n} < \frac{t_0}{8n}$, il suffit de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|2\tau_{4n} - \sigma_{4n} - t_0| \leq \frac{t_0}{8n}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a :
   $$|2\tau_{4n} - \sigma_{4n} - t_0| \leq |\sigma_{4n} - \tau_{4n}| + |\tau_{4n} - t_0| \leq \frac{t_0}{16n} + \frac{t_0}{32n} \leq \frac{t_0}{8n}.$$
   D'où le résultat.

5. Finalement, $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} K_n = 0$. En effet :
   Soit $s, t \in \mathbb{R}^+$ avec $s \leq t$, on a :
   $$2C(t)(C(s) - I) = C(t - s) - C(t + s) + 2(C(t + s) - C(t)).$$
   D'autre part, soient $p \in \Gamma_X$ et $x \in X$ on a :
   $$2p(C(t + s)x - C(t)x) \leq 2p(C(t)(C(s) - I)x) + p(C(t + s)x - C(t - s)x).$$

On prend $t = \tau_{4n}$, $s = \sigma_{4n} - \tau_{4n}$, $x = x_0$ et $p = q$, on obtient :

$$2q(C(\sigma_{4n})x_0 - C(\tau_{4n})x_0) \leq 2q(C(\tau_{4n})(C(\sigma_{4n} - \tau_{4n}) - I)x_0) + q(C(\sigma_{4n})x_0 - C(2\tau_{4n} - \sigma_{4n})x_0).$$

D'après 2. et 4. on a :

$$2(K_{4n} - \frac{1}{4n}) \leq 2q(C(\tau_{4n})(C(\sigma_{4n} - \tau_{4n}) - I)x_0) + K_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Par conséquent

$$K_{4n} \leq 2q(C(\tau_{4n})(C(\sigma_{4n} - \tau_{4n}) - I)x_0) + \frac{1}{2n} + (K_n - K_{4n}), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Comme $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est localement équicontinue sur X, il existe $q^* \in \Gamma_X$ et $M \geq 0$ tels que :

$$K_{4n} \leq 2Mq^*((C(\sigma_{4n} - \tau_{4n}) - I)x_0) + \frac{1}{2n} + (K_n - K_{4n}), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Comme $\lim_{n\longrightarrow\infty}(\sigma_{4n} - \tau_{4n}) = 0$ et $C(t) \longrightarrow I$ dans $\mathcal{L}_s(X)$ quand $t \to 0^+$, $\lim_{n\longrightarrow\infty} K_n = 0$. Ce qui est en contradiction avec 1.

Alors la famille $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est fortement continue sur X. □

Lemme 2.1.20. *Soient $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ une famille C_0-cosinus localement équicontinue sur X et $f \in C^1(\mathbb{R}^+, X)$. Les propriétés suivantes sont vérifiées :*
Pour chaque $t \geq 0$, on a :

1. $\lim_{h\longrightarrow 0^+} C(t+h)\frac{f(h)-f(0)}{h} = C(t)f'_d(0)$.
2. *Pour tout $s > 0$, on a :*

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+} C(t+h)\frac{f(s+h) - f(s)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0^-} C(t-h)\frac{f(s+h) - f(s)}{h} = C(t)f'(s).$$

De plus, si $t > 0$ on a :

3. $\lim_{h\longrightarrow 0^+} C(t-h)\frac{f(h)-f(0)}{h} = C(t)f'_d(0)$.
4. *Pour tout $s > 0$, on a :*

$$\lim_{h\longrightarrow 0} C(t+h)\frac{f(s+h) - f(s)}{h} = C(t)f'(s).$$

Preuve. Soient $p \in \Gamma_X$, $t \geq 0$ et $h > 0$, on a :

$$p(C(t+h)\frac{f(h)-f(0)}{h} - C(t)f'_d(0)) = p[C(t+h)(\frac{f(h)-f(0)}{h} - f'_d(0)) + (C(t+h)-C(t))f'_d(0)]$$
$$\leq p[C(t+h)(\frac{f(h)-f(0)}{h} - f'_d(0))] + p[(C(t+h)-C(t))f'_d(0)].$$

D'après l'équicontinuité locale, la famille $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est fortement continue, et il existe $q \in \Gamma_X$ et $M > 0$ tels que :

$$p(C(t+h)\frac{f(h)-f(0)}{h} - C(t)f'_d(0)) \leq Mq(\frac{f(h)-f(0)}{h} - f'_d(0)) + p[(C(t+h)-C(t))f'_d(0)].$$

Comme $\lim\limits_{h\longrightarrow 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = f'_d(0)$ et $\lim\limits_{h\longrightarrow 0^+} C(t+h) = C(t)$ dans $\mathcal{L}_s(X)$,

$$p(C(t+h)\frac{f(h)-f(0)}{h} - C(t)f'_d(0)) \longrightarrow 0 \text{ quand } h \longrightarrow 0^+.$$

D'où le résultat.

La démonstration des autres propriétés se fait par la même procédure. □

Théorème 2.1.21. *Soient $\{C_1(t)\}_{t\geq 0}$ et $\{C_2(t)\}_{t\geq 0}$ deux familles C_0-cosinus localement équicontinues sur X.*

Si $\{C_1(t)\}_{t\geq 0}$ et $\{C_2(t)\}_{t\geq 0}$ ayant le même générateur infinitésimal A, alors $C_1(t) = C_2(t)$ pour tout $t \geq 0$.

Preuve. Soient $x \in X$ et $t > 0$. On considère la fonction f définie par :

$$f : [0,t] \longrightarrow X,$$
$$s \longrightarrow f(s) = C_1(t-s)\int_0^s (s-r)C_2(r)xdr.$$

D'après le Corollaire 1.2.20, la fonction $g : [0,t] \longrightarrow X$, $s \mapsto g(s) = \int_0^s (s-r)C_2(r)xdr$ est de classe C^1, puisque $C_2(.)x \in C^0(\mathbb{R}^+, X)$ (d'après le Théorème 2.1.19), de plus, pour tout $s \in [0,t]$, on a :

$$g'(s) = \int_0^s C_2(r)xdr.$$

D'après la Proposition 2.1.8, pour tout $s \in [0,t]$, on a $g(s) \in D(A)$, ce qui implique, par la Proposition 2.1.17, que f est de classe C^1.

Pour calculer la dérivée de f, il faut calculer $f'_d(0)$, $f'_g(t)$ et $f'(s)$ pour tout $s \in]0,t[$.

D'une part, soit $0 < h < t$ on a :

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = C_1(t-h)(\frac{g(h)-g(0)}{h}).$$

D'après 2. du Lemme 2.1.20, la fonction f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

D'autre part, soit $h < 0$, avec $t + h > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{f(t+h)-f(t)}{h} &= \frac{1}{h}[C_1(-h)\int_0^{t+h}(t+h-r)C_2(r)xdr - C_1(0)\int_0^t(t-r)C_2(r)xdr] \\
&= \frac{1}{h}[C_1(-h)\int_0^{t}(t+h-r)C_2(r)xdr - C_1(0)\int_0^t(t-r)C_2(r)xdr \\
&+ C_1(-h)\int_t^{t+h}(t+h-r)C_2(r)xdr] \\
&= \frac{1}{h}[(C_1(-h)-C_1(0))\int_0^t(t-r)C_2(r)xdr + C_1(-h)\int_0^t hC_2(r)xdr \\
&+ C_1(-h)\int_t^{t+h}(t+h-r)C_2(r)xdr] \\
&= \frac{C_1(-h)-C_1(0)}{h}\int_0^t(t-r)C_2(r)xdr + C_1(-h)(\frac{g(t+h)-g(t)}{h}).
\end{aligned}$$

Comme $\int_0^t(t-r)C_2(r)xdr \in D(A)$, d'après la Proposition 2.1.17, on a :

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{C_1(-h)-C_1(0)}{h}\int_0^t(t-r)C_2(r)xdr = 0.$$

Par suite, d'après 2. du Lemme 2.1.20, on obtient que f est dérivable à gauche en t et

$$f'_g(t) = g'(t) = \int_0^t C_2(r)xdr.$$

Finalement, soient $s \in]0,t[$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tels que $0 < s + h < t$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{f(s+h)-f(s)}{h} &= \frac{1}{h}[C_1(t-s-h)\int_0^{s+h}(s+h-r)C_2(r)xdr - C_1(t-s)\int_0^s(s-r)C_2(r)xdr] \\
&= \frac{C_1(t-s-h)-C_1(t-s)}{h}\int_0^s(s-r)C_2(r)xdr + C_1(t-s-h)(\frac{g(s+h)-g(s)}{h}).
\end{aligned}$$

Comme $\int_0^s(s-r)C_2(r)xdr \in D(A)$, d'après la Proposition 2.1.17, on obtient :

$$\begin{aligned}
\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{C_1(t-s-h)-C_1(t-s)}{h}\int_0^s(s-r)C_2(r)xdr &= -\int_0^{t-s}C_1(k)A\int_0^s(s-r)C_2(r)xdrdk \\
&= -\int_0^{t-s}C_1(k)(C_2(s)x-x)dk.
\end{aligned}$$

D'après 4. du Lemme 2.1.20, f est différentiable sur $]0,t[$, et pour tout $s \in]0,t[$, on a :

$$f'(s) = -\int_0^{t-s}C_1(r)C_2(s)xdr + \int_0^{t-s}C_1(r)xdr + C_1(t-s)\int_0^s C_2(r)x.$$

Par suite, $f \in C^1([0,t],X)$, et pour tout $s \in [0,t]$, on a :

$$f'(s) = \int_0^s C_1(t-s)C_2(r)xdr - \int_0^{t-s}C_1(r)C_2(s)xdr + \int_0^{t-s}C_1(r)xdr.$$

En intégrant la dérivée de f sur l'intervalle $[0,t]$, on obtient :

$$\int_0^t f'(s)ds = \int_0^t \int_0^s C_1(t-s)C_2(r)xdrds - \int_0^t \int_0^{t-s} C_1(r)C_2(s)xdrds + \int_0^t \int_0^{t-s} C_1(r)xdrds.$$

D'après le Théorème 1.2.17, on a :

$$\int_0^t f'(s)ds = f(t) - f(0) = \int_0^t (t-r)C_2(r)xdr.$$

D'autre part, comme

$$\{(s,r) \in \mathbb{R}^2; \quad 0 \leq r \leq s \text{ et } 0 \leq s \leq t\} = \{(s,r) \in \mathbb{R}^2; \quad r \leq s \leq t \text{ et } 0 \leq r \leq t\}$$

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_0^s C_1(t-s)C_2(r)xdrds &= \int_0^t \int_r^t C_1(t-s)C_2(r)xdsdr \\ &= \int_0^t \int_0^{t-r} C_1(s)C_2(r)xdsdr \\ &= \int_0^t \int_0^{t-s} C_1(r)C_2(s)xdrds.\end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^t f'(s)ds = \int_0^t (t-r)C_2(r)xdr = \int_0^t \int_0^{t-s} C_1(r)xdrds.$$

Puisque

$$\{(s,r) \in \mathbb{R}^2; \quad 0 \leq r \leq t-s \text{ et } 0 \leq s \leq t\} = \{(s,r) \in \mathbb{R}^2; \quad 0 \leq s \leq t-r \text{ et } 0 \leq r \leq t\},$$

on obtient :

$$\int_0^t \int_0^{t-s} C_1(r)xdrds = \int_0^t \int_0^{t-r} C_1(r)xdsdr = \int_0^t (t-r)C_1(r)xdr.$$

Alors

$$\int_0^t (t-r)C_2(r)xdr = \int_0^t (t-r)C_1(r)xdr.$$

Comme les familles cosinus $\{C_1(t)\}_{t\geq 0}$ et $\{C_2(t)\}_{t\geq 0}$ admettent l'opérateur A comme générateur infinitésimal,

$$A\int_0^t (t-r)C_2(r)xdr = A\int_0^t (t-r)C_1(r)xdr.$$

Alors, d'après la Proposition 2.1.8, on a :

$$C_2(t)x = C_1(t)x.$$

D'où le théorème. □

2.2 La résolvante du générateur infinitésimal

On va étudier, dans cette section, l'existence du résolvant du générateur infinitésimal d'une famille cosinus fortement continue (C_0-cosinus) exponentiellement équicontinue sur X.

Lemme 2.2.1. *Soit $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ une famille C_0-cosinus sur X. Alors, pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in X$, on a :*

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{1}{h^2}\int_0^h (e^{-\lambda(h-t)} - e^{-\lambda(t-h)})C(t)xdt = -\lambda x.$$

Preuve. Soit $\lambda > 0$, pour tout $0 < h < 1$, on pose :

$$B_h = \frac{1}{h^2}\int_0^h (e^{-\lambda(h-t)} - e^{-\lambda(t-h)})dt = \frac{-2}{\lambda h^2}(\frac{e^{\lambda h} + e^{-\lambda h}}{2} - 1) \xrightarrow{h\to 0^+} -\lambda.$$

D'autre part, soient $p \in \Gamma_X$ et $x \in X$, on a :

$$\begin{aligned}
&p(\frac{1}{h^2}\int_0^h (e^{-\lambda(h-t)} - e^{-\lambda(t-h)})C(t)xdt + \lambda x)\\
&\quad = p(\frac{1}{h^2}\int_0^h (e^{-\lambda(h-t)} - e^{-\lambda(t-h)})(C(t)x - x)dt + B_h x + \lambda x)\\
&\quad \leq \frac{1}{h^2}\int_0^h |e^{-\lambda(h-t)} - e^{-\lambda(t-h)}|dt \sup_{[0,h]} p(C(t)x - x) + p(B_h x + \lambda x)\\
&\quad \leq -B_h \sup_{[0,h]} p(C(t)x - x) + p(B_h x + \lambda x).
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{t\longrightarrow 0^+} C(t)x = x$ et $\lim_{h\longrightarrow 0^+} B_h = -\lambda$, pour tout $x \in X$, on a :

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{1}{h^2}\int_0^h (e^{-\lambda(h-t)} - e^{-\lambda(t-h)})C(t)xdt = -\lambda x.$$

□

Théorème 2.2.2. *Soit $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ une famille C_0-cosinus exponentiellement équicontinue, d'ordre $\omega \geq 0$, sur X.*
Pour chaque $\lambda > \omega$, on définit l'opérateur linéaire C_λ sur X par :

$$C_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}C(t)xdt, \text{ pour tout } x \in X.$$

Alors les assertions suivantes sont vérifiées :

1. *C_λ est un opérateur linéaire continu sur X.*

2. *$Im(C_\lambda) \subseteq D(A)$, et pour tout $x \in X$, on a : $AC_\lambda x = \lambda^2 C_\lambda x - \lambda x$.*

3. *Pour tout $x \in X$, on a : $\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \lambda C_\lambda x = x$.*

Preuve. 1. Soient $p \in \Gamma_X$, $x \in X$ et $\lambda > \omega$, on a :

$$p(C_\lambda x) = p(\int_0^\infty e^{-\lambda t} C(t)xdt) \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(C(t)x)dt.$$

Comme $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est exponentiellement équicontinue d'ordre ω, il existe $q \in \Gamma_X$ et $M > 0$ tels que :

$$p(C_\lambda x) \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} M e^{\omega t} q(x)dt \leq \frac{M}{\lambda - \omega} q(x).$$

Alors $C_\lambda \in \mathcal{L}(X)$.

2. Soient $x \in X$ et $h > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{h^2}(C(h) - I)\int_0^\infty e^{-\lambda t} C(t)xdt = \frac{2}{h^2}\int_0^\infty e^{-\lambda t} C(h)C(t)xdt - \frac{2}{h^2}\int_0^\infty e^{-\lambda t} C(t)xdt \\
&= \frac{2}{h^2}\int_0^h e^{-\lambda t} C(h)C(t)xdt + \frac{2}{h^2}\int_h^\infty e^{-\lambda t} C(h)C(t)xdt - \frac{2}{h^2}\int_0^\infty e^{-\lambda t} C(t)xdt \\
&= \frac{1}{h^2}\int_0^h e^{-\lambda t} C(h+t)xdt + \frac{1}{h^2}\int_0^h e^{-\lambda t} C(h-t)xdt + \frac{1}{h^2}\int_h^\infty e^{-\lambda t} C(t+h)dt \\
&+ \frac{1}{h^2}\int_h^\infty e^{-\lambda t} C(t-h)xdt - \frac{2}{h^2}\int_0^\infty e^{-\lambda t} C(t)xdt \\
&= \frac{1}{h^2}\int_0^\infty e^{-\lambda t} C(t+h)xdt + \frac{1}{h^2}\int_0^h e^{-\lambda t} C(h-t)xdt + \frac{1}{h^2}\int_h^\infty e^{-\lambda t} C(t-h)xdt \\
&- \frac{2}{h^2}\int_0^\infty e^{-\lambda t} C(t)xdt \\
&= \frac{1}{h^2}\int_h^\infty e^{-\lambda(t-h)} C(t)xdt + \frac{1}{h^2}\int_0^h e^{-\lambda(h-t)} C(t)xdt + \frac{1}{h^2}\int_0^\infty e^{-\lambda(t+h)} C(t)xdt \\
&- \frac{2}{h^2}\int_0^\infty e^{-\lambda t} C(t)xdt \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h^2}\int_h^\infty e^{-\lambda t} C(t)xdt + \frac{e^{-\lambda h}}{h^2}\int_0^h e^{\lambda t} C(t)xdt + \frac{e^{-\lambda h}}{h^2}\int_0^\infty e^{-\lambda t} C(t)xdt \\
&- \frac{2}{h^2}\int_0^\infty e^{-\lambda t} C(t)xdt \\
&= \frac{e^{\lambda h} + e^{-\lambda h} - 2}{h^2}\int_0^\infty e^{-\lambda t} C(t)xdt + \frac{1}{h^2}\int_0^h (e^{-\lambda(h-t)} - e^{-\lambda(t-h)})C(t)xdt.
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 2.2.1., quand $h \longrightarrow 0^+$, on obtient :

$$Im(C_\lambda) \subseteq D(A) \text{ et } AC_\lambda x = \lambda^2 C_\lambda x - \lambda x.$$

3. Soit $\lambda > \omega$, comme $\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} dt = 1$, $\lambda C_\lambda x - x = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}(C(t)x - x)dt$.

   Alors, pour tout $p \in \Gamma_X$, on a :

$$p(\lambda C_\lambda x - x) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} p(C(t)x - x)dt = I_1 + I_2$$

   avec

$$I_1 = \int_0^\delta \lambda e^{-\lambda t} p(C(t)x - x)dt,$$
$$I_2 = \int_\delta^\infty \lambda e^{-\lambda t} p(C(t)x - x)dt,$$

   pour un certain $\delta > 0$.

   D'une part, pour tout $\delta > 0$ fixé, on a :

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \lambda \int_\delta^\infty e^{-\lambda t}(p(C(t)x) + p(x))dt \\ &\leq \lambda \int_\delta^\infty e^{-\lambda t} p(C(t)x)dt + \lambda \int_\delta^\infty e^{-\lambda t} p(x)dt \end{aligned}$$

   Comme la famille $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est exponentiellement équicontinue d'ordre ω, il existe $q \in \Gamma_X$ et $M > 0$ tels que :

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \lambda \int_\delta^\infty e^{-\lambda t} M e^{\omega t} q(x)dt + \lambda \int_\delta^\infty e^{-\lambda t} p(x)dt \\ &\leq \lambda M q(x) \int_\delta^\infty e^{(\omega-\lambda)t} dt + \lambda p(x) \int_\delta^\infty e^{-\lambda t} dt \\ &\leq \frac{\lambda}{\lambda - \omega} e^{(\omega-\lambda)\delta} M q(x) + e^{-\lambda\delta} p(x) \longrightarrow 0 \text{ quand } \lambda \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

   D'autre part, par la continuité de $C(.)x$ en $t = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que : $p(C(t)x - x) \leq \epsilon$ pour tout $0 \leq t \leq \eta$.

   En particulier pour $\delta = \eta$, on obtient :

$$I_1 \leq \varepsilon\lambda \int_0^\eta e^{-\lambda t} dt \leq \varepsilon\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = \varepsilon.$$

   D'où le résultat.

□

Théorème 2.2.3. *Soit $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ une famille C_0-cosinus exponentiellement équicontinue, d'ordre $\omega > 0$, sur X. Alors, pour tout $\lambda > \omega$, $(\lambda^2 I - A)^{-1}$ existe dans $\mathcal{L}(X)$.*
De plus, pour tout $x \in X$ et tout $\lambda > \omega$,

$$R(\lambda^2, A)x = (\lambda^2 I - A)^{-1} x = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda t} C(t)x dt.$$

Preuve. Soit $\lambda > \omega$. D'une part, supposons qu'il existe $x_0 \in D(A)$, avec $x_0 \neq 0$, tel que

$$(\lambda^2 I - A)x_0 = 0.$$

D'après la Proposition 2.1.17, pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\frac{d}{dt}C(t)x_0 = \int_0^t C(s)Ax_0 ds, \quad \frac{d^2}{dt^2}C(t)x_0 = C(t)Ax_0 = AC(t)x_0.$$

Comme $x_0 \neq 0$, il existe $f \in X'$ tel que $f(x_0) = 1$, et on définit l'application g sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g(t) = f(C(t)x_0).$$

Comme $C(.)x_0$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ (d'après le Théorème 2.1.18), g est continue sur $\mathbb{R}^+$. De plus, on a :

$$\frac{d^2}{dt^2}g(t) = \frac{d^2}{dt^2}f(C(t)x_0) = f(\frac{d^2}{dt^2}C(t)x_0) = f(C(t)Ax_0) = \lambda^2 g(t), \quad g(0) = 1 \text{ et } g'(0) = 0.$$

Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$g(t) = \frac{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}{2}.$$

Comme $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est exponentiellement équicontinue d'ordre ω, il existe $M_0 > 0$ tel que :

$$g(t) \leq M_0 e^{\omega t}, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Ce qui est absurde car $\lambda > \omega$. Donc $(\lambda^2 I - A) : D(A) \to X$ est injective.
D'autre part, d'après le Théorème 2.2.2, on a $Im(C_\lambda) \subseteq D(A)$, et pour tout $x \in X$,

$$(\lambda^2 I - A)C_\lambda x = \lambda x.$$

Ce qui implique que $(\lambda^2 I - A)$ est surjective et $(\lambda^2 I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}C_\lambda$.
Alors, d'après 1. du Théorème 2.2.2, $(\lambda^2 I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. D'où le théorème. □

Proposition 2.2.4. *Soient $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ une famille C_0-cosinus exponentiellement équicontinue, d'ordre $\omega \geq 0$, sur X et $\tilde{\Gamma}_X$ le système de semi-normes continue sur X qui est défini par $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ (voir la Proposition 2.1.12).*
Pour chaque semi-norme $\tilde{p} \in \tilde{\Gamma}_X$, les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. *Pour tout $x \in X$ et $\lambda > \omega$, on a :*

$$\tilde{p}(\lambda^2 R(\lambda^2, A)x) \leq \frac{2\lambda}{\lambda - \omega}\tilde{p}(x).$$

2. Il existe $M > 0$ tel que :

$$\tilde{p}(\lambda^2 R(\lambda^2, A)x) \leq M\tilde{p}(x), \text{ pour tout } x \in X \text{ et tout } \lambda > \omega + 1.$$

Preuve. 1. Soient $x \in X$ et $\lambda > \omega$, d'après le Théorème 2.1.3, on a :

$$\lambda^2 R(\lambda^2, A)x = \lambda^2(\lambda^2 I - A)^{-1}x = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} C(t)x dt, \text{ pour tout } x \in X.$$

Alors, d'après 2. de la Proposition 3.1.19, pour toute semi-norme $\tilde{p} \in \tilde{\Gamma}_X$, on obtient :

$$\tilde{p}(\lambda^2 R(\lambda^2, A)x) \leq \frac{2\lambda}{\lambda - \omega}\tilde{p}(x), \text{ pour tout } x \in X.$$

2. Soit $x \in X$, si $\lambda > \omega + 1$ il est facile de voir que $\frac{2\lambda}{\lambda - \omega} \leq 2(1 + \omega)$.
On prend $M = 2(1 + \omega)$, alors, pour toute semi-norme $\tilde{p} \in \tilde{\Gamma_X}$, on a :

$$\tilde{p}(\lambda^2 R(\lambda^2, A)x) \leq M\tilde{p}(x), \text{ pour tout } x \in X \text{ et tout } \lambda > \omega + 1.$$

□

2.3 Famille cosinus de la forme $\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k\}_{t \geq 0}$ pour un certain $A \in \mathcal{L}(X)$

Dans toute cette section, A désigne un opérateur linéaire continu sur X vérifiant la propriété suivante :
Pour tout $p \in \Gamma_X$, il existe $q \in \Gamma_X$ et $M > 0$ tels que :

$$p(A^n x) \leq M^n q(x), \text{ pour tout } x \in X \text{ et tout } n \in \mathbb{N}. \tag{2.3.1}$$

Les opérateurs à puissances bornées sont des exemples de tel opérateur, i.e. A est à puissance bornée si la famille $\{A^n\}_{n=0}^{\infty}$ est équicontinue.

Proposition 2.3.1. *Pour chaque $x \in X$, les séries suivantes sont absolument convergentes.*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k x, \ t \geq 0.$$

Preuve. Soient $x \in X$ et $p \in \Gamma_X$. D'après (2.3.1), il existe $q \in \Gamma_X$ et $M > 0$ tels que :

$$p(A^k x) \leq M^k q(x), \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Par suite, pour tout $t \geq 0$, on obtient que :

$$\begin{aligned} p(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k x) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} q(A^k x) \\ &\leq (\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} M^k) q(x) \\ &\leq \cosh(t\sqrt{M}) q(x). \end{aligned}$$

Alors, pour tout $t \geq 0$, la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k x$ est absolument convergente. □

Corollaire 2.3.2. *Pour chaque $t \geq 0$, la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k$ forme un opérateur linéaire continu sur X, et sera notée par $\cosh(t\sqrt{A})$,*

$$\cosh(t\sqrt{A})x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k x, \text{ pour tout } x \in X.$$

Proposition 2.3.3. *La famille d'opérateur $\{\cosh(t\sqrt{A})\}_{t\geq 0}$ forme une famille cosinus sur X.*

Preuve. Soit $x \in X$, comme la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k x$ est absolument convergente pour tout $t \geq 0$,

$$\cosh(t\sqrt{A})x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k x = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k x.$$

D'une part, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$A_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k x = x + \frac{t^2}{2} Ax + ... + \frac{t^{2n}}{(2n)!} A^n x.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n(0) = x$, et par suite $\cosh(0)x = \lim_{n \longrightarrow \infty} A_n(0) = x$.
Comme x est arbitraire, $\cosh(0\sqrt{A}) = \cosh(0) = I$.
D'autre part, soient $x \in X$ et $s, t \geq 0$, avec $s \leq t$, comme les séries $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k x$ et $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^{2k}}{(2k)!} A^k x$ sont absolument convergentes, leur produit (produit de cauchy de séries) est absolument convergente, et de plus :

$$(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k)(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^{2k}}{(2k)!} A^k x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k,$$

avec

$$\begin{aligned}
C_k &= \sum_{n=0}^{k} \frac{t^{2n}}{(2n)!} A^n \left(\frac{s^{2(k-n)}}{(2(k-n))!} A^{k-n} x\right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{k} \frac{t^{2n} s^{2(k-n)}}{(2n)!(2(k-n)!)}\right) A^k x = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{2k} \frac{t^n s^{2k-n}}{n!(2k-n)!} + \sum_{n=0}^{2k} \frac{t^n (-s)^{2k-n}}{n!(2k-n)!}\right) A^k x \\
&= \frac{1}{2(2k)!}\left(\sum_{n=0}^{2k} \frac{(2k)!}{n!(2k-n)!}(t^n s^{2k-n}) + \sum_{n=0}^{2k} \frac{(2k)!}{n!(2k-n)!}(t^n (-s)^{2k-n})\right) A^k x \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{(t+s)^{2k}}{(2k)!} A^k x + \frac{(t-s)^{2k}}{(2k)!} A^k x\right).
\end{aligned}$$

Par suite, on obtient :

$$2\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^{2k}}{(2k)!} A^k x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t+s)^{2k}}{(2k)!} A^k x + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-s)^{2k}}{(2k)!} A^k x.$$

Donc, pour tout $x \in X$ et tous $s, t \geq 0$, avec $s \leq t$, on a :

$$2\cosh(t\sqrt{A})\cosh(s\sqrt{A})x = \cosh((t+s)\sqrt{A})x + \cosh((t-s)\sqrt{A})x.$$

Alors $\{\cosh(t\sqrt{A})\}_{t\geq 0}$ est une famille cosinus sur X. □

Proposition 2.3.4. *La famille cosinus* $\{\cosh(t\sqrt{A})\}_{t\geq 0}$ *est localement équicontinue sur* X.

Preuve. D'après ce qui précède (voir la preuve de la Proposition 2.3.1), pour tout $p \in \Gamma_X$, il existe $q \in \Gamma_X$ et $M > 0$ tels que :

$$p(\cosh(t\sqrt{A})) = p\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k x\right) \leq \cosh(t\sqrt{M}) q(x), \text{ pour tout } x \in X \text{ et tout } t \geq 0.$$

Soit $s > 0$ fixé, comme $\cosh(t\sqrt{M}) \leq \cosh(s\sqrt{A})$ pour tout $t \in [0, s]$, pour tout $p \in \Gamma_X$, il existe $q \in \Gamma_X$ et $M_s > 0$ ($M_s = \cosh(s\sqrt{A})$) tels que :

$$p(\cosh(t\sqrt{A}) \leq M_s q(x), \text{ pour tout } x \in X \text{ et tout } t \in [0, s].$$

Alors la famille cosinus $\{\cosh(t\sqrt{A})\}_{t\geq 0}$ est localement équicontinue sur X. □

Remarque 2.3.5. Si A est un opérateur à puissance bornée. Alors la famille $\{\cosh(t\sqrt{A})\}_{t\geq 0}$ est exponentiellement équicontinue d'ordre $\omega = 1$. C'est à dire, pour tout $p \in \Gamma_X$, il existe $q \in \Gamma_X$ et $M \geq 0$ tels que :

$$p(\cosh(t\sqrt{A})x) \leq Me^t q(x), \text{ pour tout } x \in X \text{ et tout } t \geq 0.$$

Proposition 2.3.6. *La famille cosinus* $\{\cosh(t\sqrt{A})\}_{t\geq 0}$ *est uniformément continue sur* X.

Preuve. Comme la famille cosinus $\{\cosh(t\sqrt{A})\}_{t\geq 0}$ est localement équicontinue sur X, d'après le Théorème 2.1.19, il suffit de montrer que $\lim\limits_{t\longrightarrow 0^+}\cosh(t\sqrt{A}) = I$ dans $\mathcal{L}_b(X)$.
Soient $x \in X$, $t \geq 0$ et $p \in \Gamma_X$, on a :

$$p(\cosh(t\sqrt{A})x - x) = p(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}}{(2k)!}A^k x - x) = p(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{2k}}{(2k)!}A^k x) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{2k}}{(2k)!}p(A^k x).$$

D'après l'inégalité (2.3.1), il existe $q \in \Gamma_X$ et $M > 0$ tels que :

$$\begin{aligned} p(\cosh(t\sqrt{A})x - x) &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{2k}}{(2k)!}p(A^k x) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{2k}}{(2k)!}M^k q(x) = (\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}}{(2k)!}M^k - 1)q(x) = (\cosh(t\sqrt{M}) - 1)q(x). \end{aligned}$$

D'autre part, soit B un partie bornée de X, on a :

$$p_B(\cosh(t\sqrt{A}) - I) \leq (\cosh(t\sqrt{M}) - 1)\sup_{x\in B} q(x).$$

Comme $\lim\limits_{t\longrightarrow 0^+}(\cosh(t\sqrt{M}) - 1) = 0$, $p_B(\cosh(t\sqrt{A}) - I) \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow 0^+$.
Alors $\lim\limits_{t\longrightarrow 0^+}\cosh(t\sqrt{A}) = I$ dans $\mathcal{L}_b(X)$, d'où la proposition. □

Proposition 2.3.7. *La famille cosinus* $\{\cosh(t\sqrt{A})\}_{t\geq 0}$ *admet l'opérateur* A *comme générateur infinitésimal, c'est à dire,*

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+}\frac{2}{t^2}(\cosh(t\sqrt{A})x - x) = Ax, \text{ pour tout } x \in X.$$

Preuve. Soient $x \in X$, $t > 0$ et $p \in \Gamma_X$, on a :

$$\begin{aligned} p(\frac{2}{t^2}(\cosh(t\sqrt{A})x - x) - Ax) &= p(\frac{2}{t^2}(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}}{(2k)!}A^k x - x) - Ax) \\ &= \frac{2}{t^2}p(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{2k}}{(2k)!}A^k x - \frac{t^2}{2}Ax) \\ &= \frac{2}{t^2}p(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{t^{2k}}{(2k)!}A^k x). \end{aligned}$$

D'après (2.3.1), il existe $q \in \Gamma_X$ et $M > 0$ tels que :

$$\begin{aligned} p(\frac{2}{t^2}(\cosh(t\sqrt{A})x - x) - Ax) &\leq \frac{2}{t^2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{t^{2k}}{(2k)!}M^k q(x) \\ &\leq (\frac{2}{t^2}(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}}{(2k)!}M^k - 1) - M)q(x) \\ &= (\frac{2}{t^2}(\cosh(t\sqrt{M}) - 1) - M)q(x). \end{aligned}$$

Comme $\lim_{t\longrightarrow 0^+}(\frac{2}{t^2}(\cosh(t\sqrt{M}) - 1) - M) = 0$, $p(\frac{2}{t^2}(\cosh(t\sqrt{A})x - x) - Ax) \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow 0^+$.

Alors $Ax = \lim_{t\longrightarrow 0^+}\frac{2}{t^2}(\cosh(t\sqrt{A})x - x)$ pour tout $x \in X$. □

CHAPITRE 3

FAMILLES COSINUS SUR UNE CLASSE D'ESPACES DE FRÉCHET

Dans ce chapitre nous donnons un exemple d'espace de Fréchet sur lequel on peut toujours définir une famille cosinus uniformément continue admettant un générateur infinitésimal qui n'est pas défini sur l'espace tout entier.
En suite, nous généralisons le Théorème 0.0.1 à la classe quojection d'espaces de Fréchet. Cette généralisation nous a permis de donner une réponse positive à la question de Conejero dans le cas des familles cosinus. Ainsi, sur cette classe d'espaces, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur linéaire continu soit le générateur infinitésimal d'une famille cosinus fortement continue.
Enfin, nous montrons que toute famille C_0-cosinus exponentiellement équicontinue, sur un espace quojection, de Grothendieck qui admet la propriété de Dunford-Pettis, est uniformément continue.

3.1 Introduction du problème

Nous commençons tout d'abord par un rappel sur les espaces de suites de Köthe et quelques propriétés que nous aurons besoins dans notre exemple. Pour les démonstrations des propriétés suivantes voir [36, Chapitre 27].

Définition 3.1.1. *Une matrice $K = (a_n(i))_{i,n\in\mathbb{N}}$ de nombres positifs est appelée* ***matrice de Köthe*** *si elle vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Pour chaque $i \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n(i) > 0$.*
2. *pour tous $i, n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n(i) \leq a_{n+1}(i)$.*

Définition 3.1.2. *Soit $K = (a_n(i))_{i,n\in\mathbb{N}}$ une matrice de Köthe. Pour tout $1 \leq p < \infty$, on définit l'espace :*

$$\lambda^p(K) = \{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \ p_n(x) = (\sum_{i=0}^{\infty} |x_i a_n(i)|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\},$$

et pour $p = \infty$ et $p = 0$:

$$\lambda^\infty(K) = \{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \ q_n(x) = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| a_n(i) < \infty \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\},$$

$$c_0(K) = \{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \lambda^\infty(K) : \ \lim_{i\longrightarrow\infty} x_i a_n(i) = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}.$$

Les espaces $\lambda^p(K)$, $1 \leq p \leq \infty$, et $c_0(K)$ sont appelés ***espaces de suites de Köthe****.*

Lemme 3.1.3. *Pour toute matrice de Köthe $K = (a_n(i))_{i,n\in\mathbb{N}}$, les espace $\lambda^p(K)$, $1 \leq p \geq \infty$ (resp. $\lambda^\infty(K)$ et $c_0(K)$), muni de la topologie définie par la famille de semi-norme canonique $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$), sont des espaces de Fréchet.*

Théorème 3.1.4 (Dieudonné-Gomes Theorem)**.** *Pour toute matrice de Köthe $K = (a_n(i))_{i,n\in\mathbb{N}}$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe $p \in [1, \infty]$ tel que $\lambda^p(K)$ est un espace de Montel.*
2. *Pour chaque $p \in [1, \infty]$, l'espace $\lambda^p(K)$ est de Montel.*
3. *$\lambda^\infty(K) = c_0(K)$.*
4. *$\lambda^1(K)$ est un espace réflexif.*
5. *Pour chaque $p \in [1, \infty]$, tout sous-espace normé de $\lambda^p(K)$ est de dimension finie.*
6. *Pour chaque sous-ensemble infini I de $\mathbb{N}$ et chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$\inf_{i\in I} a_n(i) a_m^{-1}(i) = 0.$$

Proposition 3.1.5. *Pour toute matrice de Köthe $K = (a_n(i))_{i,n\in\mathbb{N}}$, les assertions suivantes et les assertions du théorème précédent sont équivalentes :*

1. *$\lambda^\infty(K) = c_0(K)$.*
2. *$c_0(K)$ est un espace de Fréchet-Montel.*

3. $c_0(K)$ *est un espace réflexif.*

4. $\lambda^\infty(K)$ *est un espace réflexif.*

Proposition 3.1.6. *Pour toute matrice de Köthe* $K = (a_n(i))_{i,n\in\mathbb{N}}$*, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\lambda^p(K)$ *est un espace nucléaire pour un certain* $1 \leq p \leq \infty$*.*

2. $\lambda^p(K)$ *est un espace nucléaire pour tout* $1 \leq p \leq \infty$*.*

3. $c_0(K)$ *est un espace nucléaire.*

4. $\lambda^p(K) = \lambda^q(K)$ *pour certains* $1 \leq p < q \leq \infty$*.*

5. $\lambda^p(K) = \lambda^q(K) = c_0(K)$ *pour tous* $1 \leq p, q \leq \infty$*.*

6. *Pour chaque* $n \in \mathbb{N}$*, il existe* $m \in \mathbb{N}$*, avec* $m \geq n$*, tel que*

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_n(i)a_m^{-1}(i) < \infty.$$

Exemple 3.1.7. Soit $K = (a_n(i))_{i,n\in\mathbb{N}}$ une matrice de Köthe vérifiant les propriétés suivantes :

1. Pour tous $i, n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n(i) \geq 1$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{a_n(i)}{a_{n+1}(i)} < \infty$.

On considère l'espace de suites de Köthe $\lambda^1(K)$ défini par :

$$\lambda^1(K) = \{x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \ p_n(x) = (\sum_{i=0}^{\infty} a_n(i)|x_i|) < \infty \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}.$$

D'aprés ce qui précède l'espace $\lambda^1(K)$ est nucléaire. De plus, pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $\lambda^1(K) = \lambda^p(K) = c_0(K)$.
Soit $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres strictement positifs telle que $\lim\limits_{i\longrightarrow\infty} \mu_i = \infty$, on définit la famille cosinus $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ sur $\lambda^1(K)$ par :

$$C(t)x = (\cos(\sqrt{\mu_i}t)x_i)_{i\in\mathbb{N}}, \text{ pour tout } x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \lambda^1(K) \text{ et tout } t \geq 0.$$

Soient $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \lambda^1(K)$, $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. D'une part, comme $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_n(i)|x_i| < \infty$, il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\sum_{i>i_0} a_n(i)|x_i| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

D'autre part, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $0 < h < \eta$, on a :

$$\sum_{i \leq i_0} |\cos(\sqrt{\mu_i}(t+h)) - \cos(\sqrt{\mu_i}t)| a_n(i)|x_i| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc, pour tout $0 < h < \eta$, on a :

$$\begin{aligned} p_n(C(t+h)x - C(t)x) &= \sum_{i \in \mathbb{N}} |\cos(\sqrt{\mu_i}(t+h)) - \cos(\sqrt{\mu_i}t)| a_n(i)|x_i| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 2\sum_{i > i_0} a_n(i)|x_i| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Alors $\{C(t)\}_{t \geq 0}$ est une famille cosinus fortement continue sur $\lambda^1(K)$.
Comme $\lambda^1(K)$ est un espace nucléaire, $\lambda^1(K)$ est de Montel, et par conséquent $\{C(t)\}_{t \geq 0}$ est une famille cosinus uniformément continue sur $\lambda^1(K)$.
D'autre part, le générateur infinitésimal $(A, D(A))$, de la famille cosinus $\{C(t)\}_{t \geq 0}$, est défini sur :

$$D(A) = \{x \in \lambda^1(K) : \quad (\mu_i x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \lambda^1(K)\},$$

par

$$Ax = (-\mu_i x_i)_{i \in \mathbb{N}}.$$

En effet, soit $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in D(A)$, d'après la définition de générateur infintésimal, il existe $y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \lambda^1(B)$ tel que :

$$Ax = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{2}{t^2}(C(t)x - x) = y.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} p_n((\frac{2}{t^2}(\cos(\sqrt{\mu_i}t) - 1)x_i - y_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \sum_{i \in \mathbb{N}} a_n(i)|\frac{2}{t^2}(\cos(\sqrt{\mu_i}t) - 1)x_i - y_i| = 0.$$

Par suite, pour chaque $i, n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} a_n(i)|\frac{2}{t^2}(\cos(\sqrt{\mu_i}t) - 1)x_i - y_i| = 0.$$

Ce qui implique que $y_i = -\mu_i x_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.
Alors $D(A) \subseteq \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \lambda^1(K) : \quad (\mu_i x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \lambda^1(K)\}$, et pour tout $x \in D(A)$,

$$Ax = (-\mu_i x_i)_{i \in \mathbb{N}}.$$

Réciproquement, soient $n \in \mathbb{N}$ et $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \lambda^1(K)$ tel que $(\mu_i x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \lambda^1(K)$, pour tout $t > 0$, on a :

$$\begin{aligned} p_n((\frac{2}{t^2}(\cos(\sqrt{\mu_i}t)x_i - x_i))_{i\in\mathbb{N}} + (-\mu_i x_i)_{i\in\mathbb{N}}) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} a_n(i)|\frac{2}{t^2}(\cos(\sqrt{\mu_i}t) - 1)x_i + \mu_i x_i| \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} a_n(i)|\mu_i x_i|.|(\frac{2}{\mu_i t^2}(\cos(\sqrt{\mu_i}t) - 1) + 1)| \end{aligned}$$

Comme, pour tout $t \geq 0$, $1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos(t) \leq 1$, pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $t \geq 0$, on a :

$$(\frac{2}{\mu_i t^2}(\cos(\sqrt{\mu_i}t) - 1) + 1) \leq 1.$$

Donc, pour tout $t \geq 0$,

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} a_n(i)|(\frac{2}{\mu_i t^2}(\cos(\sqrt{\mu_i}t) - 1) + 1)\mu_i x_i| \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} a_n(i)|\mu_i x_i| < \infty.$$

Alors

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} \sum_{i\in\mathbb{N}} a_n(i)|\mu_i x_i|.|(\frac{2}{\mu_i t^2}(\cos(\sqrt{\mu_i}t)-1)+1)| = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_n(i)|\mu_i x_i| \lim_{t\longrightarrow 0^+} |(\frac{2}{\mu_i t^2}(\cos(\sqrt{\mu_i}t)-1)+1)| = 0.$$

D'où

$$\{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \lambda^1(K) : \quad (\mu_i x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \lambda^1(K)\} \subseteq D(A),$$

$$Ax = (-\mu_i x_i)_{i\in\mathbb{N}}.$$

Finalement, en particulier pour la suite $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}} = (\sum_{n=0}^{i} a_n(i))_{i\in\mathbb{N}}$.
$(\frac{1}{\mu_i})_{i\in\mathbb{N}} \in \lambda^1(K)$, en effet, soit $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} p_m((\frac{1}{\mu_i})_{i\in\mathbb{N}}) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} a_m(i)\frac{1}{\mu_i} = \sum_{i\leq m} a_m(i)\frac{1}{\mu_i} + \sum_{i\geq m+1} \frac{a_m(i)}{\sum_{n=0}^{i} a_n(i)} \\ &\leq \sum_{i\leq m} a_m(i)\frac{1}{\mu_i} + \sum_{i\geq m+1} \frac{a_m(i)}{a_{m+1}(i)} < \infty. \end{aligned}$$

Mais $(-\mu_i\frac{1}{\mu_i})_{i\in\mathbb{N}} = (-1)_{i\in\mathbb{N}} \notin \lambda^1(K)$, donc la suite $(\frac{1}{\mu_i})_{i\in\mathbb{N}} \notin D(A)$.
Alors le générateur infinitésimal A, de la famille cosinus uniformément continue $\{C(t)\}_{t\geq 0}$, n'est pas défini sur l'espace $\lambda^1(K)$ tout entier ($D(A) \neq \lambda^1(K)$).

Comme indiqué dans le premier chapitre, le générateur infinitésimal de toute famille cosinus uniformément continue, sur un espace de Banach, est défini sur l'espace tout entier. Par ailleur, d'après l'exemple précédent, on a montré que sur certains espaces de

suites de Köthe ce dernier résultat ne reste plus vrai.
On va finir cette section par une caractérisation des espaces de Fréchet sur lesquels on peut définir une famille cosinus uniformément continue admettant un générateur infinitésimal qui n'est pas défini sur l'espace tout entier.
On rappelle qu'un espace de Fréchet X est dit contient une copie supplémentaire d'un certain espace Y, s'il existe un sous-espace Z de X tel que les espaces Y et Z sont supplémentaires dans X.

Proposition 3.1.8. *Soit X un espace de Fréchet qui contient une copie supplémentaire d'un certain espace de suites de Köthe $\lambda^1(K)$ qui est nucléaire.*
Alors, il existe une famille cosinus $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ uniformément continue sur X, telle que son générateur infinitésimal n'est pas défini sur X tout entier.

Preuve. Soit $P : X \longrightarrow X$ une projection satisfait $Im(P) = \lambda^1(K)$, et on définit $Y = Ker(P)$.
D'une part, d'après l'exemple précédent, la famille $\{C_1(t)\}_{t\geq 0}$, d'opérateurs linéaires continus sur $\lambda^1(K)$, qui est définie par :

$$C_1(t)x = (\cos(\sqrt{\mu_i}t)x_i)_{i\in\mathbb{N}}, \text{ pour tout } t \geq 0 \text{ et tout } x \in \lambda^1(K),$$

est une famille cosinus uniformément continue et équicontinue sur $\lambda^1(K)$.
De plus, son générateur infinitésimal A_1 n'est pas défini sur $\lambda^1(K)$ tout entier.
D'autre part, Soit A_2 un opérateur linéaire continu sur Y qui est à puissance bornée, c'est à dire, pour tout $p \in \Gamma_Y$, il existe $q \in \Gamma_Y$ et $M \geq 0$ tels que :

$$p(A_2^n x) \leq Mq(x), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et tout } x \in Y.$$

On définit la famille $\{C_2(t)\}_{t\geq 0}$, d'opérateurs linéaires continus sur Y, par :

$$C_2(t)x = \cosh(t\sqrt{A_2})x, \text{ pour tout } t \geq 0 \text{ et tout } x \in Y.$$

D'après la troisième section du deuxième chapitre, $\{C_2(t)\}_{t\geq 0}$ est une famille cosinus uniformément continue sur Y, admet $A_2 \in \mathcal{L}(Y)$ comme générateur infinitésimal.
Finalement, on définit la famille cosinus $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ sur X par :

$$C(t)x = C_1(t)Px + C_2(t)(I - P)x, \text{ pour tout } t \geq 0 \text{ et tout } x \in X.$$

D'après ce qui précédent, $\{C(t)\}_{\geq 0}$ est uniformément continue sur X, mais son générateur infinitésimal A n'est pas défini sur X tout entier (car $D(A_1) \neq \lambda^1(K)$). □

3.2 Familles cosinus sur la classe Quojection d'espaces de Fréchet

Soient $(X_n, ||.||_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces de Banach, et pour tous $m \geq n$, $\pi_m^n : X_m \longrightarrow X_n$ une application linéaire continue vérifiant $\pi_m^n \circ \pi_k^m = \pi_n^k$ pour tous $n \leq m \leq k$, avec $\pi_n^n = I_{X_n}$.

La paire $((X_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\pi_m^n)_{m\geq n})$ est appelée système projectif d'espaces de Banach $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par rapport aux applications linéaires $(\pi_m^n)_{m\geq n}$, et l'espace X définit par :

$$P = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n : \ \pi_m^n(x_m) = x_n \text{ pour tout } m \geq n\},$$

muni de la topologie induite par la topologie produit de $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est appelé limite projective du système projectif $((X_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\pi_m^n)_{m\geq n})$, et on le note par :

$$P = \underleftarrow{Proj}_n(X_n) = \underleftarrow{Proj}_n(X_n, \pi_m^n).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note par $\pi^n : \underleftarrow{Proj}_n(X_n) \longrightarrow X_n$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto x_n$, la n-iéme projection canonique.

Tout espace de Fréchet X a une telle représentation, c'est à dire, on peut trouver un système projectif d'espace de Banach $((X_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\pi_m^n)_{m\geq n})$ tel que X est isomorphe à $\underleftarrow{Proj}_n(X_n)$ $(X \simeq \underleftarrow{Proj}_n(X_n))$.

Définition 3.2.1. *Un espace de Fréchet X est appelé* ***quojection*** *s'il est isomorphe à la limite projective d'un système projectif $((X_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\pi_m^n)_{m\geq n})$ d'espaces de Banach avec les applications $(\pi_m^n)_{m\geq n}$ sont surjectives.*

Exemple 3.2.2.

1. Tout produit fini ou dénombrable d'espaces de Banach est un espace quojection. En particulier, l'espace des suites complexes $\boldsymbol{\omega} = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est un espace quojection.
2. L'espace de fonctions localement intégrables $L^p_{loc}(\Omega)$, avec $1 \leq p \leq \infty$ et Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ $(N \in \mathbb{N}^*)$, est une quojection.

Dans la proposition suivante, S. Bellenot et E. Dubinsky [9] ont donné une caractérisation d'espaces quojections par leurs quotients.

Proposition 3.2.3. *[9, Proposition 3] Soit X un espace de Fréchet.*
X est un espace quojection si, et seulement si, tout quotient de X (par un sous-espace fermé de X) admettant une norme continue est un espace de Banach.

Proposition 3.2.4. *[16, Proposition 1] Soit X un espace quojection ($X \simeq \underleftarrow{Proj}_n(X_n, \pi_m^n)$). Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute partie bornée B_n de X_n, il existe une partie bornée B de X telle que $B_n \subseteq \pi^n(B)$.*

Théorème 3.2.5. *Soit X un espace quojection ($X \simeq \underleftarrow{Proj}_n(X_n, \pi_m^n)$).*
Toute famille cosinus $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ uniformément continue sur X admet un générateur infinitésimal A défini sur l'espace X tout entier ($A \in \mathcal{L}(X)$). De plus, la famille cosinus $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ s'écrit sous la forme :

$$C(t)x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k x, \text{ pour tout } x \in X \text{ et tout } t \geq 0.$$

Preuve. D'après le Corollaire 1.1.23, X est un espace tonnelé. Puisque la famille $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est uniformément continue sur X, on déduit, d'après la Proposition 2.1.14, que $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est localement équicontinue.
C'est à dire, pour tout $t_0 > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ ($m \geq n$) et $M > 0$ tels que :

$$||\pi^n(C(t)x)||_n \leq M||\pi^m(x)||_m, \text{ pour tout } x \in X \text{ et tout } t \in [0, t_0]. \tag{3.2.1}$$

D'une part, pour chaque $0 < t \leq t_0$, on définit l'opérateur φ_t sur X par :

$$\varphi_t(y) = \frac{2}{t^2} \int_0^t (t-s)C(s)y ds, \text{ pour tout } y \in X.$$

D'après la Proposition 2.1.8, pour tout $y \in X$, on a :

$$\varphi_t(y) \in D(A) \text{ et } A\varphi_t(y) = \frac{2}{t^2}(C(t)y - y).$$

Comme la famille cosinus $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est uniformément continue sur X, d'après (b) de la Remarque 2.1.5 on a : $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} \varphi_t = I$ dans $\mathcal{L}_b(X)$.
D'autre part, pour chaque $0 < t \leq t_0$, on définit l'opérateur $\bar{\varphi}_t$ de X_m dans X_n ($m \geq n$) par :

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_t : X_m &\longrightarrow X_n \\ \pi^m(x) &\longrightarrow \pi^n(\varphi_t(x)) \end{aligned}$$

Chaque opérateur $\bar{\varphi}_t$ est bien défini et linéaire, de plus :

— Pour chaque $0 < t \leq t_0$, l'opérateur $\bar{\varphi}_t$ est continu sur X_m, en effet :

Soient $0 < t \leq t_0$ et $x \in X$, on a :

$$||\bar{\varphi}_t(\pi^m(x))||_n = ||\pi^n(\varphi_t(x))||_n = \frac{2}{t^2}|| \int_0^t (t-s)\pi^n(C(s)x)ds||_n.$$

D'après l'inégalité (3.2.1), il existe $M > 0$ tel que :

$$||\bar{\varphi}_t(\pi^m(x))||_n \leq M||\pi^m(x)||_m.$$

Alors l'opérateur φ_t est continu sur X_m.

— $\lim_{t \longrightarrow 0^+} \bar{\varphi}_t = \pi_m^n$ dans $\mathcal{L}_b(X_m, X_n)$, en effet :

Soit B_m la boule unité de X_m, d'après la Proposition 3.2.4, il existe une partie bornée $B \subset B(X)$ telle que $B_m \subseteq \pi^m(B)$, donc on a :

$$\begin{aligned}
\sup_{x_m \in B_m} ||\bar{\varphi}_t(x_m) - \pi_m^n(x_m)||_n &\leq \sup_{x_m \in \pi^m(B)} ||\bar{\varphi}_t(x_m) - \pi_m^n(x_m)||_n \\
&\leq \sup_{x \in B} ||\bar{\varphi}_t(\pi^m(x)) - \pi_m^n(\pi^m(x))||_n \\
&\leq \sup_{x \in B} ||\pi^n(\varphi_t(x) - x)||_n
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{t \longrightarrow 0^+} \varphi_t = I$ dans $\mathcal{L}_b(X)$, $\lim_{t \longrightarrow 0^+} \bar{\varphi}_t = \pi_m^n$ dans $\mathcal{L}_b(X_m, X_n)$.

Alors, il existe $t_1 > 0$ (suffisamment petit) tel que l'opétareur $\bar{\varphi_{t_1}}$ est surjectif, car l'ensemble des opérateurs surjectifs est ouvert dans $\mathcal{L}_b(X_m, X_n)$ [43, Théorème 3.4, XV].

D'autre part, Soient $m, n \in \mathbb{N}$, avec $m \geq n$, tels que l'inégalité (3.2.1) est vérifiée, en suite, on prend aussi $m_0 \geq m$ tel que l'inégalité (3.2.1) est vérifiée.

Soit $x \in X$, donc il existe $y \in X$ tel que :

$$\pi^m(x) = \bar{\varphi_{t_1}}(\pi^{m_0}(y)) = \pi^m(\varphi_{t_1}(y)).$$

Ce qui implique que, pour tout $0 \leq h \leq t_0$, on a :

$$\pi^n(C(h)x) = \pi^n(C(h)\varphi_{t_1}(y)).$$

En particulier, pour $h = 0$, on obtient :

$$\pi^n(x) = \pi^n(\varphi_{t_1}(y)).$$

Alors, pour tout $0 < h \leq t_0$, on a :

$$\pi^n(\frac{2}{h^2}(C(h)x - x)) = \pi^n(\frac{2}{h^2}(C(h)\varphi_{t_1}(y) - \varphi_{t_1}(y))).$$

Comme $A\varphi_{t_1}(y) = \frac{2}{t_1^2}(C(t_1)y - y)$, on obtient, quand $h \longrightarrow 0^+$,

$$\pi^n(Ax) = \pi^n(\frac{2}{t_1^2}(C(t_1)y - y)).$$

Puisque n est arbitraire, A est défini sur X tout entier. De plus, d'après le Corollaire 2.1.16, A est fermé, puisque $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est localement équicontinue.
Alors, d'après le Théorème du graphe fermé, le générateur infinitésimal A de la famille cosinus $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est un opérateur linéaire continu sur X ($A \in \mathcal{L}(X)$).
Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit la famille d'opérateurs $\{C_n(t)\}_{t\geq 0}$ sur X_n par :

$$C_n(t)\pi^n(x) = \pi^n C(t)x, \text{ pour tout } x \in X \text{ et tout } t \geq 0.$$

— Chaque famille $\{C_n(t)\}_{t\geq 0}$ forme une famille cosinus sur X_n, en effet :
Pour tout $x \in X$, on a $C_n(0)\pi^n(x) = \pi^n C(0)x = \pi^n(x)$, donc $C_n(0) = I_{X_n}$.
Soient $x \in X$ et $s, t \in \mathbb{R}^+$ avec $0 \leq s \leq t$, comme $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est une famille cosinus sur X et d'après la linéarité de π^n, on obtient :

$$\begin{aligned} 2C_n(t)C_n(s)\pi^n(x) &= 2C_n(t)\pi^n(C(s)x) = \pi^n(2C_n(t)C_n(s)x) \\ &= \pi^n(C(t+s)x + C(t-s)x) \\ &= C_n(t+s)\pi^n(x) + C_n(t-s)\pi^n(x). \end{aligned}$$

Alors $\{C_n(t)\}_{t\geq 0}$ est une famille cosinus sur X_n.

— Chaque famille $\{C_n(t)\}_{t\geq 0}$ est uniformément continue sur X_n, en effet :
Soit B_n la boule unité de X_n, d'après la Proposition 3.2.4, il existe une partie bornée $B \in B(X)$ telle que $B_n \subseteq \pi^n(B)$, donc on a :

$$\begin{aligned} \sup_{x_n \in B_n} ||C_n(t)x_n - x_n||_n &\leq \sup_{x_n \in \pi^n(B)} ||C_n(t)x_n - x_n||_n \\ &\leq \sup_{x\in B} ||C_n(t)\pi^n(x) - \pi^n(x)||_n \\ &\leq \sup_{x\in B} ||\pi^n(C(t)x) - \pi^n(x)||_n \\ &\leq \sup_{x\in B} ||\pi^n(C(t)x - x)||_n \end{aligned}$$

Comme la famille $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est uniformèment continue sur X ($X \simeq \underleftarrow{Proj}_n(X_n, \pi_m^n)$), la famille $\{C_n(t)\}_{t\geq 0}$ est uniformément continue sur X_n.

Alors, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\{C_n(t)\}_{t\geq 0}$ est une famille cosinus uniformément continue sur l'espace de Banach X_n.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le générateur infinitésimal de la famille $\{C_n(t)\}_{t\geq 0}$ sera noté par A_n.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, d'après le Théorème 1.3.24, le générateur infinitésimal A_n, de $\{C_n(t)\}_{t\geq 0}$, est un opérateur linéaire borné sur X_n.
Par suite, pour tout $x \in X$, on a : $A_n\pi^n(x) = \pi^n(Ax)$, en effet :
Soient $x \in X$ et $t > 0$, on a :

$$\frac{2}{t^2}(C_n(t)\pi^n(x) - \pi^n(x)) = \frac{2}{t^2}(\pi^n(C(t)x) - \pi^n(x)) = \pi^n(\frac{2}{t^2}(C(t)x - x)).$$

Comme $\lim\limits_{t\longrightarrow 0^+} \frac{2}{t^2}(C(t)x - x) = Ax$ et π^n est un opérateur linéaire continu sur X, on obtient :

$$A_n\pi^n(x) = \pi^n(Ax), \text{ pour tout } x \in X.$$

De plus, d'après le Théorème 1.3.24, la famille cosinus $\{C_n(t)\}_{t\geq 0}$ s'écrit sous la forme :

$$C_n(t)\pi^n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A_n^k\pi^n(x), \text{ pour tout } x \in X \text{ et tout } t \geq 0.$$

Par conséquent, on a :

$$\pi^n(C(t)x) = \pi^n(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k x), \text{ pour tout } x \in X \text{ et tout } t \geq 0.$$

Puisque, n est arbitraire et $X \simeq \underleftarrow{Proj}_n(X_n, \pi_m^n)$, on obtient :

$$C(t)x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k x, \text{ pour tout } x \in X.$$

□

Théorème 3.2.6. *Soit X un espace quojection.*
Un opérateur linéaire continu $A \in \mathcal{L}(X)$ est le générateur infinitésimal d'une famille cosinus $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ fortement continue sur X si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\pi^m(x) = 0 \implies \pi^n(A^k(x)) = 0.$$

La famille cosinus $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est alors uniformément continue sur X.

Preuve. Soit $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ une famille cosinus fortement continue telle que son générateur infinitésimal A est défini sur X tout entier ($A \in \mathcal{L}(X)$).

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t_0 > 0$, Comme X est un espace tonnelé, la famille $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est localement équicontinue, c'est à dire, il existe $m \in \mathbb{N}$, avec $m \geq n$, et $M > 0$ tels que :

$$||\pi^n(C(t)x)||_n \leq M||\pi^m(x)||_m, \text{ pour tout } x \in X \text{ et tout } t \in [0, t_0].$$

Soit $x \in X$ tel que $\pi^m(x) = 0$. D'après l'inégalité précédente, pour tout $t \in [0, t_0]$, on a : $\pi^n(C(t)x) = 0$. Comme $D(A) = X$, d'après la Proposition 2.1.17, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, on a $A^k x$ est la 2k-ième dérivée de l'application $t \longrightarrow C(t)x$ en point $t = 0$.
Par conséquent, $\pi^m(x) = 0 \implies \pi^n(C(t)x) = 0 \implies \pi^n(A^k x) = 0$.
Réciproquement, Soit $A \in \mathcal{L}(X)$, supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\pi^m(x) = 0 \implies \pi^n(A^k(x)) = 0.$$

On va montrer que, pour chaque $t \geq 0$ et chaque $x \in X$, la série suivante est absolument convergente.

$$\cosh(t\sqrt{A})(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k x.$$

Pour cela, on définit les applications linéaires suivantes : $\widetilde{A}_0 = \pi_m^n$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_k : X_m &\longrightarrow X_n \\ \pi^m(x) &\longrightarrow \pi^n(A^k x). \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse, chaque application $\widetilde{A}_k$ est bien définie. De plus, $\widetilde{A}_k \circ \pi^m = \pi^n \circ A^k$ et $\widetilde{A}_{k+1} \circ \pi^m = \widetilde{A}_k \circ \pi^m \circ A$.
D'après la Proposition 3.2.4, il existe une partie bornée B de X telle que $B_m \subseteq \pi^m(B)$ (B_m la boule unité de X_m). Comme A est un opérateur continu sur X, la partie $\pi^m \circ A(B)$ est bornée dans X_m, donc il existe $\lambda > 0$ tel que $\pi^m \circ A(B) \subseteq \lambda B_m$.
Par conséquent, on obtient :

$$||\widetilde{A}_k||_{\mathcal{L}(X_m, X_n)} \leq \lambda^k, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

En effet, on utilisons le raisonnement par récurrence, pour $k = 0$, comme $m \geq n$, on a :

$$||\widetilde{A}_0(\pi^m(x))||_n = ||\pi_m^n(\pi^m(x))||_n = ||\pi^n(x)||_n \leq ||\pi^m(x)||_m, \text{ pour tout } x \in X.$$

Ce qui implique que,

$$||\widetilde{A}_0||_{\mathcal{L}(X_m, X_n)} = \sup_{\substack{x_m \in B_m \\ ||x_m||_m = 1}} ||\pi_m^n(x_m)|| \leq \sup_{\substack{x \in B \\ ||\pi^m(x)||_m = 1}} ||\pi_m^n(\pi^m(x))|| \leq 1.$$

Supposons que l'inégalité est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Pour $y_m \in B_m$ on prend $x \in B$ tel que $\pi^m(x) = y_m$, donc on obtient :

$$\begin{aligned} ||\widetilde{A}_{k+1}(y_m)||_n = ||\widetilde{A}_{k+1}(\pi^m(x))||_n &= ||\widetilde{A}_k(\pi^m(Ax))||_n \\ &\leq \lambda^k ||\pi^m(Ax)||_m \\ &\leq \lambda^{k+1}. \end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$||\pi^n(A^k x)||_n = ||\widetilde{A}_k(\pi^m(x))||_n \leq \lambda^k ||\pi^m(x)||_m.$$

Par conséquent

$$||\pi^n(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k x)||_n \leq \cosh(t\sqrt{\lambda})||\pi^m(x)||_m.$$

Ce qui implique que la série $\cosh(t\sqrt{A})(x)$ est absolument convergente.
Donc, $\{\cosh(t\sqrt{A})\}_{t\geq 0}$ forme une famille cosinus uniformément continue sur X admet A comme générateur infinitésimal (voir la dernière section du chapitre précédent).
De plus, d'après le Théorème 2.1.21, on obtient :

$$C(t)x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k x, \text{ pour tout } x \in X \text{ et tout } t \geq 0.$$

Alors la famille $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est uniformément continue. □

On rappelle que, sur un espace de Montel, la topologie forte et la topologie uniforme coïncident sur les parties bornées. Un exemple connu de tels espaces c'est l'espace des suites $\boldsymbol{\omega} = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
D'après le Théorème 3.2.5 et puisque l'espace $\boldsymbol{\omega} = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est une quojection, nous donnons dans la proposition suivante une généralisation de la réponse de la question de Conejero [14] pour les familles cosinus.

Proposition 3.2.7. *Soit $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ une famille cosinus fortement continue sur $\boldsymbol{\omega}$ avec A son générateur infinitésimal.*
Alors la famille $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ est uniformément continue sur $\boldsymbol{\omega}$ et $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{\omega})$. De plus,

$$C(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Définition 3.2.8. *On dit qu'un espace de Fréchet X est une* ***préquojection*** *si son bidual fort X''_β est une quojection*

Un espace préquojection X est dit non-trivial s'il n'est pas lui-même une quojection. Dans [9], le problème de l'existence des préquojections non-triviales se pose d'une façon naturelle, il a été résolu dans le sens positif dans divers papiers (voir par exemple [9, 15]). Pour un exemple concret d'espace préquojection non-triviale voir [1].
L'importance de tels espaces pour ce document est l'extension suivante de Théorème 3.2.5.

Proposition 3.2.9. *Le générateur infinitésimal A, d'une famille cosinus $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ uniformément continue sur une préquojection X, est un opérateur linéaire continu sur X.*

Pour montrer la proposition on va utiliser le lemme suivant.

Lemme 3.2.10. *[3, Lemme 2.1] Soient X et Y deux espaces localement convexes séparés, avec Y est quasi-tonnelé. Alors l'application linéaire suivante est continue.*

$$\begin{aligned}\Phi : \mathcal{L}_b(X,Y) &\longrightarrow \mathcal{L}_b(Y'_\beta, X'_\beta)\\ \Phi(T) &\longrightarrow T^t,\end{aligned}$$

En particulier, si X est quasi-tonnelé et $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(X)$ une suite d'opérateurs vérifiant $\tau_b - \lim_{n\longrightarrow\infty} T_n = T$ dans $\mathcal{L}_b(X)$, alors on a : $\tau_b - \lim_{n\longrightarrow\infty} T_n^t = T^t$ dans $\mathcal{L}_b(X'_\beta)$.

Preuve. Soit $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ une famille cosinus uniformément continue sur X avec A son générateur infinitésimal.
On considère la famille d'opérateurs transposés $\{C(t)^t\}_{t\geq 0}$ sur X'_β. C'est à dire, pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}C(t)^t : X'_\beta &\longrightarrow X'_\beta\\ x' &\longrightarrow C(t)^t x',\end{aligned}$$

avec pour tout $x' \in X'_\beta$ et $x \in X$, on a :

$$C(t)^t x'(x) = \langle C(t)x, x'\rangle.$$

Par suite, $\{C(t)^t\}_{t\geq 0}$ forme une famille cosinus sur X'_β. De plus, comme X est tonnelé, $\{C(t)^t\}_{t\geq 0}$ est uniformément continue sur X'_β.

Par la même procédure on obtient que la famille $\{C(t)^{tt}\}_{t\geq 0}$ est une famille cosinus uniformément continue sur X''_β.
Comme X''_β est une quojection, d'après le Théorème 3.2.5, le générateur infinitésimal A^{tt} (le bitransposé de A) est défini sur l'espace X''_β tout entier ($A^{tt} \in \mathcal{L}(X''_\beta)$).
Puisque $A^{tt}/_{D(A)} = A$ et $D(A)$ dense dans X, donc A est défini sur l'espace X tout entier ($D(A) = X$), d'où $A \in \mathcal{L}(X)$. □

3.3 Familles cosinus sur la classe GDP-Quojection d'espaces de Fréchet

Soit X un espace quojection qui est de Montel. Une conséquence naturelle du Théorème 3.2.5 est que toute famille cosinus $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ fortement continue sur X est uniformément continue, de plus

$$C(t)x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k x, \text{ pour tout } x \in X \text{ et tout } t \geq 0.$$

Avec, A est le générateur infinitésimal de la famille $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ ($A \in \mathcal{L}(X)$).
Nous nous intéressons dans cette section à généraliser ce dernier résultat dans la classe GDP-Quojection.

Définition 3.3.1. *Un espace localement convexe séparé X est dit de* ***Grothendieck*** *si toute suite dans X', qui converge pour $\sigma(X', X)$, est aussi converge pour $\sigma(X', X'')$.*

Il est clair que les espaces réflexifs sont de Grothendieck.

Définition 3.3.2. *Un espace localement convexe séparé X est dit admet* ***la propriété de Dunford-Pettis*** *si pour tout $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, avec Y un espace localement convexe séparé quasi-complet, qui transforme les éléments de $B(X)$ en ensembles $\sigma(Y, Y')$-compacts de Y, est aussi transforme les ensembles $\sigma(X, X')$-compacts de X en ensembles relativement compacts de Y.*

On appelle GDP espace tout espace de Grothendieck admettant la propriété de Dunford-Pettis.

Exemple 3.3.3.
1. Tout espace de Fréchet-Montel est un espace GDP [11, Remarque 2.2].

2. L'espace de suite $\lambda^\infty(B)$ (voir définition 3.1.2) est un espaces GDP [11, Proposition 3.1].

Nous préférons de rappeler le lemme suivant qui joue un rôle important pour le résultat principal de cette section, ce lemme a été montré par A.A. Albanese, J. Bonet et W. Ricker dans [4].

Lemme 3.3.4. *[4, Lemme 2.4] Soient X est un espace GDP-tonnelé et $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *Pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, on a $S_nS_m = S_mS_n$.*
2. *Pour chaque $m \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{n\longrightarrow\infty}(S_n - I)S_m = 0$ dans $\mathcal{L}_b(X)$.*
3. *$\lim_{n\longrightarrow\infty} S_n = I$ dans $\mathcal{L}_s(X)$.*

Alors $\lim_{n\longrightarrow\infty}(S_n - I)^2 = 0$ dans $\mathcal{L}_b(X)$.
De plus, si X est une quojection et s'il existe un système fondamental de semi-normes $\{p_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ engendrant la topologie localement convexe de X tel que :

4. *Pour chaque $j \in \mathbb{N}$, il existe $c_j > 0$ tel que :*

$$p_j(S_nx) \leq c_jp_j(x), \text{ pour tout } x \in X \text{ et tout } n \in \mathbb{N}.$$

Alors $\lim_{n\longrightarrow\infty} S_n = I$ dans $\mathcal{L}_b(X)$.

Théorème 3.3.5. *Si X est un espace GDP-Quojection, alors toute famille C_0-Cosinus $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ exponentiellement équicontinue, d'ordre $\omega \geq 0$, sur X est uniformément continue. De plus, son générateur infinitésimal A est un opérateur linéaire continu sur X et*

$$C(t)x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}A^kx, \text{ pour tout } x \in X \text{ et } t \geq 0.$$

Preuve. D'après la Proposition 2.1.12 il existe une famille de semi-normes croissante $\{p_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ engendrant la topologie localement convexe de X telle que pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a :

$$p_j(C(t)x) \leq 2e^{\omega t}p_j(x), \text{ pour tout } x \in X \text{ et tout } t \geq 0. \quad (*)$$

Pour chaque $j \in \mathbb{N}$ fixé, on pose $X_j = X/p_j^{-1}(\{0\})$ muni de la topologie quotient, et on note par $Q_j : X \longrightarrow X_j$ la surjection canonique, donc $\ker Q_j = p_j^{-1}(\{0\})$.

Alors X_j est un espace de Fréchet et sa topologie est donnée par la famille de semi-normes $\{(\tilde{p}_j)_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ qui est définie par :

$$(\tilde{p}_j)_k(Q_j x) = \inf\{p_k(y), \text{ avec } Q_j x = Q_j y\}, \text{ pour tout } x \in X \text{ et tout } k \in \mathbb{N}.$$

Remarquons que, pour tout $x \in X$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$(\tilde{p}_j)_k(Q_j x) \leq p_k(x).$$

De plus, pour tout $x \in X$, on a :

$$(\tilde{p}_j)_j(Q_j x) = p_j(x).$$

Comme $\ker Q_j = p_j^{-1}(\{0\})$, $(\tilde{p}_j)_j$ est une norme sur X_j, et par suite, $(\tilde{p}_j)_k$ est une norme sur X_j pour tout $k \geq j$.
Puisque X est une quojection et X_j admet une norme continue, d'après la Proposition 3.2.3, X_j est un espace de Banach.
La famille de normes $\{(\tilde{p}_j)_k\}_{k\geq j}$ sur X_j est croissante, donc les normes $(\tilde{p}_j)_k$, $k \geq j$, sont comparables, par conséquent ils sont équivalentes.
Alors, pour chaque $j \in \mathbb{N}$, on pose $k(j) \geq j$ tel que $(X_j, (\tilde{p}_j)_{k(j)})$ est un espace de Banach.
Comme $\ker Q_{j+1} \subseteq \ker Q_j$ et les applications Q_j, $j \in \mathbb{N}$, sont surjectives, pour tout $j \in \mathbb{N}$, l'application suivante est bien définie, linéaire, continue et surjective.

$$\begin{aligned} Q_{j,j+1} : & X_{j+1} \longrightarrow X_j \\ & Q_{j+1}x \longrightarrow Q_j x. \end{aligned}$$

De plus, l'espace X est isomorphe à la limite projective du système projectif d'espaces de Banach $(X_j, (\tilde{p}_j)_{k(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ par rapport aux applications $(Q_{j,j+1})_{j\in\mathbb{N}}$, c'est à dire

$$X = \{(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \prod^{j\in\mathbb{N}} X_j; \quad Q_{j,j+1}(x_{j+1}) = x_j, \ j \in \mathbb{N}\}.$$

D'autre part, soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres strictement positifs telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n \geq \omega + 1$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \lambda_n = \infty$.
On définit la suite $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, d'opérateurs linéaires continus sur X, par :

$$S_n = \lambda_n^2 R(\lambda_n^2, A), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Voir la deuxième section du chapitre 2.

D'une part, on vérifie que la suite $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait les quatre conditions du Lemme 3.3.4. Comme les opérateurs, d'une famille cosinus fortement continue, commutent, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, $S_n S_m = S_m S_n$.

D'après le Théorème 2.2.2 on a : $\lim_{n\longrightarrow\infty} S_n = I$ dans $\mathcal{L}_s(X)$, et d'après la Proposition 2.2.4 pour tout $j \in \mathbb{N}$ on a :

$$p_j(S_n x) \leq 2(\omega+1)p_j(x), \text{ pour tout } x \in X \text{ et tout } n \in \mathbb{N}.$$

Donc, il reste à vérifier la condition 2 du Lemme 3.3.4, soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $\lambda_n \neq \lambda_m$, d'après les relations de la résolvante on obtient :

$$\begin{aligned}
(S_n - I)S_m &= (\lambda_n^2 R(\lambda_n^2, A) - I)\lambda_m^2 R(\lambda_m^2, A) \\
&= \lambda_n^2\lambda_m^2 R(\lambda_n^2, A)R(\lambda_m^2, A) - \lambda_m^2 R(\lambda_m^2, A) \\
&= \lambda_m^2(\lambda_n^2 R(\lambda_n^2, A)R(\lambda_m^2, A) - R(\lambda_m^2, A)) \\
&= \lambda_m^2(\lambda_n^2 R(\lambda_n^2, A)R(\lambda_m^2, A) + (\lambda_m^2 - \lambda_n^2)R(\lambda_n^2, A)R(\lambda_m^2, A) - R(\lambda_n^2, A)) \\
&= \lambda_m^2(\lambda_m^2 R(\lambda_n^2, A)R(\lambda_m^2, A) - R(\lambda_n^2, A)) \\
&= \lambda_m^2(\frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2 - \lambda_m^2}(R(\lambda_n^2, A) - R(\lambda_m^2, A)) - R(\lambda_n^2, A)) \\
&= \frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2 - \lambda_m^2}(\lambda_m^2(R(\lambda_n^2, A) - R(\lambda_m^2, A)) - (\lambda_m^2 - \lambda_n^2)R(\lambda_n^2, A)) \\
&= \frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2 - \lambda_m^2}(\lambda_n^2 R(\lambda_n^2, A) - \lambda_m^2 R(\lambda_m^2, A)) \\
&= \frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2 - \lambda_m^2}(S_n - S_m).
\end{aligned}$$

Soient B une partie bornée de X et $j \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in B} p_j((S_n - I)S_m x) &\leq \sup_{x\in B} p_j(\frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2 - \lambda_m^2}(S_n x - S_m x)) \\
&\leq \frac{\lambda_m^2}{|\lambda_n^2 - \lambda_m^2|}\sup_{x\in B} p_j(S_n x - S_m x) \\
&\leq \frac{4\lambda_m^2(\omega+1)}{|\lambda_n^2 - \lambda_m^2|}\sup_{x\in B} p_j(x).
\end{aligned}$$

Soit $m \in \mathbb{N}$ fixé, comme $\frac{4\lambda_m^2(\omega+1)}{|\lambda_n^2-\lambda_m^2|} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$, $\lim_{n\longrightarrow\infty}(S_n - I)S_m = 0$ dans $\mathcal{L}_b(X)$.

D'où, d'après le Lemme 3.3.4, $\lim_{n\longrightarrow\infty} S_n = I$ dans $\mathcal{L}_b(X)$.

D'autre part, soit $j \in \mathbb{N}$, on définit la famille $\{C_j(t)\}_{t\geq 0}$, d'opérateurs sur X_j, par :

$$C_j(t)Q_j x = Q_j C(t)x, \text{ pour tout } x \in X \text{ et tout } t \geq 0.$$

Pour chaque $t \geq 0$, l'opérateur $C_j(t)$ est bien défini, linéaire et continu sur X_j, en effet : soit $x \in X$ tel que $Q_j x = 0$, donc $x \in \ker Q_j$, ce qui implique que $p_j(x) = 0$, alors, d'après l'inégalité $(*)$, on a $p_j(C(t)x) = 0$, c'est à dire $C_j(t)x \in \ker Q_j$, par suite $C_j(t)Q_j x = Q_j C(t)x = 0$.

Soient $x \in X$ et $t \geq 0$, d'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned}(\tilde{p}_j)_{k(j)}(C_j(t)Q_j x) = (\tilde{p}_j)_{k(j)}(Q_j C(t)x) &\leq p_{k(j)}(C(t)x) \\ &\leq 2e^{\omega t} p_{k(j)}(x).\end{aligned}$$

On prend l'infimum par rapport à y tel que $Q_j y = Q_j x$, on obtient :

$$(\tilde{p}_j)_{k(j)}(C_j(t)Q_j x) \leq 2e^{\omega t}(\tilde{p}_j)_{k(j)}(Q_j x). \quad (**)$$

Ce qui implique que $C_j(t) \in \mathcal{L}(X_j)$, et par suite $\{C_j(t)\}_{t\geq 0}$ est une famille C_0-cosinus sur X_j.

De plus, d'après $(**)$, la famille C_0-cosinus $\{C_j(t)\}_{t\geq 0}$ est exponentiellement équicontinue d'ordre ω, et son générateur infinitésimal sera noté A_j .

Pour tout $\lambda > \omega$, on a :

$$R(\lambda^2, A_j)Q_j x = Q_j R(\lambda^2, A)x, \text{ pour tout } x \in X.$$

En effet, pour tout $x \in X$, on a :

$$\begin{aligned} C_j(t)Q_j x &= Q_j C(t)x. \\ e^{-\lambda t} C_j(t)Q_j x &= e^{-\lambda t} Q_j C(t)x = Q_j e^{-\lambda t} C(t)x. \\ \int_0^\infty e^{-\lambda t} C_j(t)Q_j x dt &= \int_0^\infty Q_j e^{-\lambda t} C(t)x dt = Q_j \int_0^\infty e^{-\lambda t} C(t)x dt \\ R(\lambda^2, A_j)Q_j x &= Q_j R(\lambda^2, A)x. \end{aligned}$$

De plus, on a $Q_j(D(A)) \subseteq D(A_j)$, en effet, soient $x \in D(A)$ et $h > 0$ on a :

$$\frac{2}{h^2}(C_j(t)Q_j x - Q_j x) = Q_j \frac{2}{h^2}(C(t)x - x)$$

Donc, quand $h \longrightarrow 0^+$, on obtient $A_j Q_j x = Q_j A x$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose la suite $S_n^{(j)} = \lambda_n^2 R(\lambda_n^2, A_j)$, d'opérateurs linéaires bornés sur X_j.

Comme $S_n \longrightarrow I$ dans $\mathcal{L}_b(X)$ quand $n \longrightarrow \infty$, $S_n^{(j)} \longrightarrow I$ dans $\mathcal{L}_b(X_j)$ quand $n \longrightarrow \infty$.

En effet, soit B_j la boule unité de X_j, comme X est une quojection, d'après la Proposition 3.2.4, il existe $B \in B(X)$ tel que $B_j \subseteq Q_j(B)$, donc :

$$\begin{aligned}\sup_{x_j \in B_j} (\tilde{q}_j)_{k(j)}(S_n^{(j)}x_j - x_j) &\leq \sup_{x_j \in Q_j(B)} (\tilde{q}_j)_{k(j)}(S_n^{(j)}x_j - x_j) \\ &\leq \sup_{x \in B} (\tilde{q}_j)_{k(j)}(S_n^{(j)}Q_j x - Q_j x) \\ &\leq \sup_{x \in B} (\tilde{q}_j)_{k(j)}(Q_j(S_n x - x)) \\ &\leq \sup_{x \in B} (\tilde{q}_{k(j)}(S_n x - x)).\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Par conséquent, il existe $\eta_j > 0$ tel que :

$$(\tilde{q}_j)_{k(j)}(S_n^{(j)}x_j - x_j) < 1, \text{ pour tout } n \geq \eta_j.$$

Alors, pour chaque $j \in \mathbb{N}$, il existe $n(j) \in \mathbb{N}$ avec $n(j) \geq \eta_j$, tel que $S_{n(j)}^{(j)}$ est inversible dans $\mathcal{L}(X_j)$. Donc, $Im(S_{n(j)}^{(j)}) = X_j = D(A_j)$, de plus

$$A_j = \lambda_{n(j)}(I - (S_{n(j)}^{(j)})^{-1}) \in \mathcal{L}(X_j).$$

Ce qui implique, d'après le Théorème 1.3.24, que $\{C_j(t)\}_{t \geq 0}$ est une famille cosinus uniformément continue sur X_j.

Finalement, soient $j \in \mathbb{N}$ et $B \in B(X)$, alors :

$$\begin{aligned}\sup_{x \in B} q_j(C(t)x - x) &= \sup_{x \in B} (\tilde{q}_j)_j(Q_j C(t)x - Q_j x) \\ &\leq \sup_{x \in B} (\tilde{q}_j)_{k(j)}(C_j(t)Q_j x - Q_j x) \\ &\leq \sup_{x_j \in Q_j(B)} (\tilde{q}_j)_{k(j)}(C_j(t)x_j - x_j).\end{aligned}$$

Comme $\{C_j(t)\}_{t \geq 0}$ est uniformément continue et $Q_j(B)$ est un ensemble borné de X_j, $\{C(t)\}_{t \geq 0}$ est uniformément continue sur X.

Alors, d'après le Théorème 3.2.5, le générateur infinitésimal A de la famille $\{C(t)\}_{t \geq 0}$ est défini sur X tout entier ($A \in \mathcal{L}(X)$) et

$$C(t)x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k x, \text{ pour tout } x \in X \text{ et tout } t \geq 0.$$

□

Corollaire 3.3.6. *Si X est un espace GDP-Banach, alors toute famille C_0-cosinus sur X est uniformément continue.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.A. Albanese, A Fréchet space of continuous functions which is prequojection, Bull. Soc. Sci. Liège **60** (1991), 409-417.

[2] A.A. Albanese, J. Bonet, w.j. Ricker, Mean ergodic semigroups of operators. RACSAM **106** (2012), 299–319.

[3] A.A. Albanese, J. Bonet, W.J. Ricker, Grothendieck spaces with the Dunford-Pettis property, Positivity **14** (2010), 145–164.

[4] A.A. Albanese, J. Bonet, W.J. Ricker, C_0-semigroups and mean ergodic operators in a class of Fréchet spaces, J. Math. Anal. Appl. **365** (2010), 142–157.

[5] A.A. Albanese, J. Bonet, W.J. Ricker, Montel resolvents and uniformly mean ergodic semigroups of linear operators, Quaestiones Mathematicae **36 :2** (2013), 253-290.

[6] R. Ameziane Hassani, A. Blali, A. Elamrani, K. Moussaouja, Cosine families of operators in a class of Fréchet spaces, Proy. J. Math. **37** (2018), 103-118.

[7] R. Ameziane Hassani, A. Blali, A. Elamrani, K. Moussaouja, Cosine families in GDP Quojection-Fréchet Spaces, Bol. Soc. Paran. Mat. doi :10.5269/bspm.48149, In Press.

[8] W. Arendt, C.J.K. Batty,M. Hieber, F. Neubrander, Vector-Valued Laplace Transforms and Cauchy Problems, Birkhauser, Basel (2001).

[9] S.F. Bellenot, E. Dudinsky, Fréchet spaces with nuclear Köthe quotient, Trans. Amer. Math. Soc. **273** (1982), 579-594.

[10] J. Bonet, M. Maestre, G. Metafune, V.B. Moscatelli, D. Vogt, Every quojection is the quotient of a countable product of Banach spaces. In : "Advances in the Theory of

Fréchet spaces", T. Terzioglu (Ed.), NATO ASI Series **287**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1989), 355-356.

[11] J. Bonet, W.J. Ricker, Schauder decompositions and the Grotheindieck and Dunford-Pettis properties in Köthe echelon spaces of infinite order, Positivity **11** (2007), 77-93.

[12] N. Bourbaki, Functions of a real variable, Translated from the 1976 French original by Philip Spain, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2004).

[13] N. Bourbaki, Espaces vectoriels topologiques, Chapitre 1 à 5, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2007).

[14] J.A. Conejero, On the existence of transitive and topologically mixing semigroups, Bull. Bely. Math. Soc. Simon Stevin **14** (2007), 463–471.

[15] S. Dierolf, V.B. Moscatelli, A note on quojections, Funct. Approx. Comment. Math. **17** (1987), 131–138.

[16] S. Dierolf, D.N. Zarnadze, A note on strictly regular Fréchet spaces, Arch. Math. **42** (1984), 549–556.

[17] J. Dieudonné, Foundations of Modern Analysis, Academic Press, New-York (1960).

[18] N. Dunford, J.T. Schwartz, Linear Operators I : General Theory (2nd printing), Wiley–Interscience, New York (1964).

[19] R.E. Edwards, Functional Analysis, Reinhart and winston, New-York (1965).

[20] K.J. Engel, R. Nagel, One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations, Springer-Verlag (2000).

[21] H.O. Fattorini, Ordinary differential equations in linear topological spaces I, J. Diff. Equ. **5** (1968), 72-105.

[22] H.O. Fattorini, Ordinary differential equations in linear topological spaces II, J. Diff. Equ. **6** (1968), 50-70.

[23] H.O. Fattorini, Second Order Linear Differential Equations in Banach spaces, Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam (1985).

[24] L. Frerick, E. Jorda, T. Kalmes, J. Wengenroth, Strongly continuous semigroups on some Fréchet spaces, J. Math. Anal. Appl. **412** (2014), 121-124.

[25] J. A. Goldstein, Semigroups of Linear Operators and Application, Oxford U. Press, New York and Oxford (1985).

[26] E. Hille, R. S. Phillips, Functional Analysis and Semi-Groups, Amer. Math. Soc., Providence (1957).

[27] H. Jarchow, Locally Convex Spaces, B.G. Teubner, Stuttgart (1981).

[28] H.H. Keller, Differential Calculus in Locally Convex Spaces, Lecture Notes in Math. **417**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York (1974).

[29] J. L. Kelley, General Topology, Springer-Verlag, New York (1955).

[30] T. Komura, Semigroups of operators in locally convex spaces, J. Funct. Anal. **2** (1968), 258–296.

[31] G. Köthe, Topological Vector Spaces I, 2nd Rev. Ed., Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1983).

[32] G. Köthe, Topological Vector Spaces II, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1979).

[33] M. Kunze, Continuity and equicontinuity of semigroups on norming dual pairs, Semigroup Forum **79** (3) (2009), 540–560.

[34] R. Kraaij, Strongly continuous and locally equi-continuous semigroups on locally convex spaces, Semigroup Forum **92** (2016), 158-185.

[35] D. Lutz, Strongly continuous operator cosine functions. Functional analysis, Lecture Notes in Math. **948** (1982), Springer, Berlin-New York, 73–97.

[36] R. Meise, D. Vogt, Introduction to Functional Analysis, Clarendon Press, Oxford (1997).

[37] G. Metafune, V.B. Moscatelli, Quojections and Prequojections, In "Advances in the Theory of Fréchet spaces", T. Terzioglu (Ed.), NATO ASI Series **287**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1989), 235–254.

[38] G. Metafune, V.B. Moscatelli, Prequojections and their duals. In : "Progress in Functional Analysis", K.D. Bierstedt, J. Bonet, J. Horváth and M. Maestre (Eds.), North Holland, Amsterdam (1992), 215-232.

[39] V.B. Moscatelli, Strongly non–norming subspaces and prequojections, Studia Math. **95** (1990), 249–254.

[40] P. Pérez Carreras, J. Bonet, Barrelled Locally Convex Spaces, North-Holland Math. Stud. **131**, North-Holland, Amesterdam (1987).

[41] A. Pietsch, Nuclear Locally Convex Spaces, Springer, New-York (1972).

[42] H.H. Schaefer, Topological Vector Spaces, Graduate texts in Mathematics, springer-verlag, Berlin Heidelberg New York (1971).

[43] L. Serge, Real and Functional Analysis, third ed., Graduate Texts in Mathematics **142**, Springer-Verlag, NewYork (1993).

[44] F. Trèves, Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels. Academic Press, New York (1967).

[45] M. Sova, Cosine operator functions, Rozprawy Mat. **49** (1966), 1-47.

[46] K. Yosida, Functional Analysis, Springer–Verlag, Berlin (1980).