جامعة سيدي محمد بن عبد الله بفاس
UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH DE FES

كلية العلوم ظهر المهراز فاس
FACULTE DES SCIENCES DHAR EL MAHRAZ FES

N° d'ordre : 68/2024

Centre des Études : Sciences et Techniques et Sciences Médicales

Formation Doctorale : Mathématiques et Applications

Discipline : Mathématiques appliquées

Spécialité : Contrôle Optimal

Laboratoire : Analyse Mathématique et Applications (LAMA)

Thèse de Doctorat

Titre de la thèse

Stabilisation Des Systèmes Dynamiques Semi-Linéaires Non Homogènes Par Un Contrôle Feedback

Soutenue par :

Mourad Chqondi

Soutenue le 7 Décembre 2024 devant le jury :

Nom et prénom	Établissement	Grade	Qualité
Pr AZROUL Elhoussine	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz,USMBA, Fès	PES	Président
Pr EL MOUMNI Mostafa	FS, Université, Chouaib Doukkali,El Jadida	MCH	Rapporteur & Examinateur
Pr HJIAJ Hassane	FS Université, Abdelmalek Essaadi, Tétouan.	MCH	Rapporteur & Examinateur
Pr OUZAHRA Mohamed	Ecole Normale Superieure USMBA, Fès	PES	Rapporteur & Examinateur
Pr AIT HAMMOU Mustapha	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz,USMBA, Fès	MCH	Examinateur
Pr EL MASSOUDI M'hamed	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz,USMBA, Fès	MCH	Examinateur
Pr BADDI Mohamed	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz,USMBA, Fès	MCH	Co-Directeur de thèse
Pr AKDIM Youssef	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz,USMBA, Fès	PES	Directeur de thèse

2023/2024

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse le professeur Youssef Akdim, de m'avoir accueilli au sein de son équipe de recherche, et pour ses précieuses recommandations qui ont grandement contribué à l'avancement de mes recherches. Sa gentillesse et son soutien ont été essentiels à mon développement et je lui suis sincèrement reconnaissant pour ses conseils.

Je voudrais remercier mon co-encadrant le professeur Mohamed Baddi pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et pour les nombreuses discussions que j'ai eu avec lui.

Je voudrais exprimer toute ma gratitude aux professeurs qui m'ont fait l'honneur d'être les rapporteurs de mon travail.

Je tiens également à remercier sincèrement les professeurs qui m'ont fait l'honneur d'accepter de faire partie de mon jury de thèse.

La préparation de cette thèse a été faite au sein du Laboratoire Analyse Mathématique et Applications (LAMA) à La Faculté des Sciences Dhar El Mahraz FSDM. A ce titre je tiens à remercier tous ses membres, en particulier monsieur le directeur du Laboratoire (LAMA).

Je tiens à remercier le professeur Ouzahra Mohamed pour ses travaux publiés dans diverses revues, et qui ont été déterminant dans la compréhension de ce domaine.

Enfin, je tiens à remercier toutes celles et tous ceux qui, par leur dévouement, leur présence et leur amitié, m'ont aidé à traverser les moments difficiles et à réaliser ce travail.

Résumé

Les systèmes dynamiques sont des concepts mathématiques qui permettent de modéliser des phénomènes évoluant au cours du temps. Ces phénomènes proviennent de divers domaines tels que la physique, la chimie, la mécanique, la biologie ou encore l'environnement. La théorie du contrôle est la théorie qui vise à comprendre la façon dont un contrôle (ou une commande) permet aux humains d'agir sur un système dynamique qu'ils souhaitent maîtriser, et d'influencer son comportement afin d'atteindre un objectif donné. Cet objectif peut être de stabiliser le système, en le rendant insensible à certaines perturbations. La stabilité est un concept crucial pour le contrôle des systèmes dynamiques, largement étudié en raison de sa pertinence dans des domaines pratiques tels que l'ingénierie, la finance, les sciences naturelles et les sciences sociales, etc.

Dans cette thèse, notre activité de recherche porte principalement sur la stabilisation. Nous avons proposé de nouveaux contrôles (feedback) pour stabiliser des systèmes dynamiques semi-linéaires non homogènes. Les systèmes semi-linéaires sont des types particuliers de systèmes non linéaires qui constituent une classe de transition entre les systèmes linéaires et non linéaires, Certains systèmes non linéaires complexes peuvent être représenter comme des systèmes semi-linéaires ce qui réduit leur complexité a fin d'en faciliter l'étude. C'est pourquoi l'étude de la stabilisation des systèmes semi-linéaires présente un grand intérêt dans nos travaux de recherche. Des recherches approfondies ont été menées sur la stabilité des systèmes dans les cas linéaires et homogènes, cependant, dans les cas non linéaires et non homogènes, le problème n'est pas vraiment abordé. Notre objectif principal est la stabilisation des systèmes semi-linéaires non homogènes par la détermination de contrôle (feedback). Il s'agit d'étendre les résultats connus de la stabilisation en s'appuyant sur des techniques et des méthodes établies dans la littérature, et de déterminer si les principes régissant la stabilisation dans les cas linéaires et bilinéaires s'appliquent également aux cas semi-linéaires, en particulier ceux présentant des caractéristiques non homogènes. Notre recherche ouvrira la voie au développement de stratégies de contrôle plus robustes et plus efficaces, avec des applications potentielles dans un large éventail de domaines, tels que la physique, l'ingénierie et l'économie, etc.

Mots clés : Systèmes dynamiques ; Stabilisation ; Feedback ; contrôle optimal ; systèmes semi-linéaires ; systèmes non homogènes.

Publications issues de la thèse

A New Feedback Control for Exponential and Strong Stability of Semi-Linear Systems with General Decay Estimates.

Un travail réalisé en collaboration avec Youssef Akdim, Chqondi Soumya et Tigma Khalid, publié dans le journal *Nonlinear Dynamics and Systems Theory.* 2024, vol. 24, no. 01, p. 41-53.

Exponential and Strong Stabilization for Inhomogeneous Semilinear Control Systems by Decomposition Method.

Un travail réalisé en collaboration avec Youssef Akdim et Mouhmed Baddi, publié dans le journal *Nonlinear Dynamics and Systems Theory.* 2023, vol. 23, no. 01, p. 1-13

Stabilization with Decay Estimate for Inhomogeneous Semilinear Control Systems using Unbounded Controls.

Un travail réalisé en collaboration avec Youssef Akdim et Mouhmed Baddi, publié dans *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*. 2024, vol. 13, no 03, p. 439-448.

Partial Strong Stabilization of Semi-Linear Systems and Robustness of Optimal Control.

Un travail réalisé en collaboration avec Youssef Akdim et Abdsamad El Alami, publié dans le journal *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*. 2021, vol. 10, no. 03, p. 369-380.

Table des matières

Introduction générale **6**

1 Généralités. **20**

1.1 Systèmes dynamiques 20

1.2 Problème de Cauchy 22

1.3 Semi-groupes linéaires 24

1.4 Problèmes d'évolution 29

1.5 Stabilité des systèmes linéaires. 31

1.6 Stabilisation 35

2 Un nouveau feedback pour la stabilité exponentielle et forte des systèmes semi-linéaires avec des estimations générales de décroissance. **37**

2.1 Introduction 37

2.2 Choix du contrôle 38

2.3 Existence et unicité des solutions 39

2.4 Stabilisation forte et estimation de la décroissance. 41

2.5 Stabilisation exponentielle 45

2.6 Applications 46

2.7 Conclusion 48

3 Stabilisation exponentielle et forte pour les systèmes de contrôle semi-linéaires non homogènes par la méthode de décomposition. **49**

3.1 Introduction 49

3.2 Choix du Contrôle 50

3.3 Existence et unicité des solutions 51

3.4 Stabilisation exponentielle 52

3.5 Stabilisation forte 57

3.6 Applications 59

3.7 Conclusion 59

4 Stabilisation avec estimation de la décroissance d'un système de contrôle semi-linéaire non homogène avec un contrôle non borné. 61

4.1 Introduction 61

4.2 Choix du contrôle 63

4.3 Existence et unicité des solutions 63

4.4 Stabilisation forte et estimation de la décroissance. 66

4.5 Stabilisation faible. 68

4.6 Applications 69

4.7 Conclusion 71

5 Stabilisation partielle forte des systèmes semi-linéaires et robustesse du contrôle optimal. 72

5.1 Introduction 72

5.2 Stabilisation partielle forte et robustesse 73

5.3 Robustesse de la stabilisation forte 75

5.4 Stabilisation optimale et robustesse 76

5.5 Applications et Simulation 79

5.6 Conclusion 81

Introduction générale

Systèmes Dynamiques, un discours des mathématiciens sur la nature.

Depuis l'antiquité, l'être humain a essayé d'intégrer les mathématiques dans sa vie pour mieux comprendre la nature. Il ne s'agit pas seulement d'utiliser les mathématiques pour représenter un phénomène à l'aide de mesures quantitatives, mais également de trouver des équations et des systèmes régis par des lois formulées mathématiquement qui permettent de comprendre et de prévoir des phénomènes avec le plus de précision possible. Cela concerne notamment le mouvement des planètes, le développement d'épidémies, les évolutions sociales d'un pays ou encore la reproduction des espèces, etc.
Le discours de l'homme, en particulier de mathématiciens, sur la nature n'est rien d'autre que ce que la nature dit sur elle-même en tant qu'être humain et ce que l'homme dit sur lui-même en tant qu'être naturel. Mais la question philosophique qui se pose depuis toujours est la suivante :
Le monde est-il mathématique ?
Le monde est complexe, dynamique, souvent imprévisible et fréquemment surprenant. Le mathématiser permet de capturer sa complexité en le réduisant à un modèle suffisamment simple pour comprendre les mécanismes des phénomènes, leurs origines et les liens qui les unissent. Au XVII^{e} siècle, Galilée, ainsi que Kepler, Descartes et Huygens, ont contribué de manière significative à combler le fossé entre la physique et les mathématiques. Au cours de cette période, un changement majeur s'est produit : la mécanique a commencé à être considérée comme une branche des mathématiques. Le processus de mathématisation vise à représenter les phénomènes naturels à l'aide de descriptions mathématiques, réduisant ainsi les frontières entre la compréhension physique et mathématique de ces phénomènes.
En 1623, Galilée affirme dans son œuvre « L'Essayeur » que le monde est écrit en langue mathématique.

Modélisation et systèmes dynamiques.

Le grand problème d'un mathématicien est de représenter les phénomènes observés dans la nature avec une précision suffisante et un modèle de structure simple. Le dilemme réside alors entre la fidélité du modèle vis-à-vis du processus réel et son adéquation à une forme mathématique exploitable. Cela soulève la question de savoir quelles pourraient être les lois les plus élémentaires et les plus simples qui expliquent l'évolution de ces phénomènes dans le temps. En découvrant ces lois, nous parvenons à mieux comprendre le fonctionnement du monde et les processus qui façonnent la vie sur notre planète. La question n'est pas facile, c'est une question d'expérimentation, de modélisation et de validation. Plusieurs difficultés

interviennent : les phénomènes sont observés avec des incertitudes et on ne peut observer qu'un nombre fini de fois le phénomène (rien ne garantit en principe que la prochaine fois il se reproduira tel quel).
De cela il découle qu'il n'y a pas forcément un modèle unique qui explique les phénomènes observés.
Depuis les travaux d'Isaac Newton (1687) dans son mémoire intitulé « Les lois mathématiques de la physique », l'idée que l'évolution temporelle d'un système physique est bien modélisée par une équation différentielle ou par des équations aux dérivées partielles est admise. De nombreux modèles de la physique ont été énoncés par l'intermédiaire des équations différentielles ordinaires (E.D.O.) ou par des équations aux dérivées partielles (E.D.P.). Au XVII^{e} siècle, on peut citer les équations d'Euler-Lagrange pour les systèmes mécaniques, la loi de l'électromagnétisme de Maxwell en 1865, la relativité générale (théorie relativiste de la gravitation) d'Einstein en 1915, qui est actuellement une loi fondamentale de la physique, ainsi que les lois de la mécanique quantique en 1920 et celles du modèle standard des particules (1930-1970), basé sur la théorie quantique des champs, etc. Les systèmes dynamiques constituent essentiellement une approche mathématique très générale permettant de décrire et d'expliquer le changement, centrée sur l'évolution temporelle de certains phénomènes et essayant de spécifier les principes ou les règles qui décrivent cette évolution temporelle. Afin de concevoir et d'automatiser ces systèmes, il est nécessaire de leur donner une représentation mathématique, c'est-à-dire un ensemble d'équations dont la résolution permet de définir l'état du système. Cet état peut être représenté par un vecteur constitué d'un nombre fini de composantes (on parle alors de systèmes localisés) ou peut être considéré dans un espace de dimension infinie (il s'agit alors de systèmes distribués). Le calcul infinitésimal (différentiel) a tout naturellement conduit les scientifiques à énoncer certaines lois du monde réel en termes de relations entre des variables dépendantes en général du temps, et leurs dérivées ou leurs dérivées partielles. Il s'agit d'équations différentielles ordinaires (E.D.O) ou d'équations aux dérivées partielles (E.D.P).
Deux aspects importants d'un système dynamique sont qu'il est :

- Causale, où son avenir ne dépend que de phénomènes du passé ou du présent.
- Déterministe : à une condition initiale donnée va correspondre un et un seul état (futur) possible.

L'évolution déterministe du système dynamique peut alors se modéliser de deux façons distinctes :

- Une évolution continue dans le temps, représentée par une équation différentielle ordinaire.
- Une évolution discrète dans le temps, représentée par des équations aux différences finies.

Les systèmes en temps continu occupent une large place dans la littérature. Les systèmes discrets sont quant à eux d'un intérêt plus récent, mais croissant. Ils ont une grande importance pratique. D'une part, les systèmes discrets sont utilisés en tant que modèle approché pour l'étude des systèmes continus (échantillonnage et utilisation de calculateurs, etc.). D'autre part, ils sont le modèle de nombreux problèmes dynamiques d'origine discrète (systèmes économiques, modèles de croissance d'une population, etc.

Stabilité et chaos.

Dans le domaine des sciences et des mathématiques, les systèmes déterministes sont ceux dont l'état futur peut être prédit avec précision à partir de leur état actuel. Ces systèmes fonctionnent de manière prévisible et régulière. Cependant, tous les systèmes ne se comportent pas de cette manière. Certains systèmes complexes, tels que les phénomènes météorologiques ou le comportement des marchés boursiers, présentent une instabilité appelée « sensibilité aux conditions initiales ». Cela signifie que leur comportement futur n'est pas connu et que de petites modifications de leur état initial peuvent conduire à des résultats très différents. L'étude de ces systèmes imprévisibles est connue sous le nom de chaos déterministe. « L'effet papillon » est une métaphore largement connue qui représente le phénomène fondamental de la sensibilité aux conditions initiales dans la théorie du chaos. La formulation exacte qui en est à l'origine fut exprimée par Edward Lorenz lors d'une conférence scientifique en 1972, dont le titre était : « Le battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut-il provoquer une tornade au Texas ? ».
Le comportement chaotique est à la base de nombreux systèmes naturels, tels que la météo ou le climat. C'est le mathématicien Henri Poincaré qui, dès la fin du XIX^{e} siècle, a mis en évidence l'imprévisibilité d'un système de trois corps en interaction. La théorie du chaos est désormais utilisée dans de très nombreux domaines : géophysique, météorologie, astronomie, turbulence, économie, sociologie, biologie, etc. Le chaos n'est pas aussi « chaotique » que son nom le laisse entendre ; son désordre est uniquement apparent. Un système chaotique est imprévisible, mais il est parfaitement décrit par des équations simples et déterministes. Un système qui n'est pas très sensible à son état initial peut être stable, tout comme il peut être instable tout en restant prévisible. Par conséquent, la prévisibilité et la stabilité d'un système dépendent non seulement des conditions initiales, mais aussi de la nature et du comportement global du système.
La stabilité est une notion majeure dans l'étude des systèmes dynamiques. Il s'agit d'une caractéristique cruciale qui détermine la capacité du système à supporter toutes les perturbations et à maintenir une trajectoire optimale. La stabilité est un facteur critique qui influence la fiabilité, la sécurité et l'efficacité des systèmes dynamiques, quels que soient les facteurs externes susceptibles d'avoir un impact. Elle joue un rôle fondamental dans la théorie des systèmes dynamiques, permettant aux chercheurs de développer des solutions fiables et efficaces qui peuvent résister à l'épreuve du temps. Dans l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques, les fonctions de Lyapunov sont un outil couramment utilisé. Lyapounov a introduit ce concept dans sa thèse en 1892. L'objectif premier d'une fonction de Lyapunov est d'analyser le comportement des trajectoires des systèmes dynamiques et la manière dont ce comportement est préservé après des perturbations. L'existence d'une telle fonction permettait de conclure sur la stabilité asymptotique du système. Cependant, malgré le développement d'une théorie très complète pour déduire l'existence des fonctions de Lyapunov, leur construction en pratique semble être une tâche très difficile.

Systèmes de contrôles et stabilisation.

En mathématiques, la théorie du contrôle vise à comprendre la façon dont un contrôle (une commande) permet aux humains d'agir sur un système qu'ils souhaitent maîtriser et influencer son comportement en vue d'atteindre un objectif donné. Un ingénieur pourra vouloir contrôler un système mécanique en lui appliquant des forces, tandis qu'un économiste pourra vouloir agir sur un équilibre financier en modifiant un taux, etc. Les systèmes de contrôle ou systèmes commandés sont des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'un contrôle. Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. L'objectif peut être de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations, ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (contrôle optimal). Durant les dernières décennies, cette théorie a pris une grande importance chez les ingénieurs, les mathématiciens, les scientifiques et autres chercheurs.
Les exemples de problèmes de contrôle sont très nombreux et touchent à de nombreux domaines d'application comme, par exemple, le suivi d'un véhicule dans l'espace, le contrôle de l'économie d'une nation, la fabrication de robots, le contrôle d'une épidémie ou d'une agriculture biologique, etc.
Du point de vue mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé « contrôle ».
De manière abstraite, un système dynamique est donné par un espace d'états $\mathcal{X}$ et par une loi d'évolution, généralement exprimée sous forme analytique, comme un système d'équations différentielles ordinaires de la forme :

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = F(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

où $y(t) \in \mathcal{X}$ est l'état du système à l'instant $t \in [0, T]\,; T > 0$.
On suppose maintenant qu'on peut agir sur le système (1) par une fonction $u(.)$ (contrôle), alors le système devient :

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = F(t, y(t), u(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{2}$$

Le système (2) est appelé un système de contrôle (ou système commandé). La fonction u s'appelle le contrôle (ou la commande). L'espace vectoriel auquel appartient $u(.)$ est notée $\mathcal{U}$ et s'appelle l'espace des contrôles. Une fois que l'on s'est fixé un système et sa modélisation en termes mathématiques, il existe une multitude de questions dans la théorie du contrôle auxquelles il est possible de s'intéresser. On trouve en premier lieu des questions dites d'accessibilité ou de contrôlabilité, qui se formulent ainsi : étant donnés deux états x_i et x_f de $\mathcal{X}$, est-il possible d'amener le système d'un état x_i à l'état x_f ? Ou bien, depuis un état initial particulier x_i, quels sont tous les états qu'il est possible d'atteindre ? Un autre domaine de la

théorie du contrôle est celui de la stabilisation. Étant donné qu'un système dynamique est en équilibre instable, est-il possible de le stabiliser en appliquant un contrôle convenable ? Nous pouvons utiliser des lois de commande u(t) qui dépendent uniquement du temps, c'est ce que l'on appelle de la commande en boucle ouverte : la loi de commande est fixée au départ, à t = 0, et est appliquée indépendamment du comportement du système. Les limitations de ce type de loi de commande sont cependant assez évidentes : la moindre erreur sur les données (la condition initiale par exemple) ne pourra être prise en compte. Pour stabiliser le système, il faut faire appel à une autre loi de commande, $u(t) = f(y(t))$, dite commande en boucle fermée (ou feedback), cette méthode, tient compte à tout moment de l'information disponible en sortie pour déterminer la commande. Une dernière famille de questions est celle de l'optimalité des choix effectués. En effet, une fois qu'on sait qu'il est possible d'amener un système d'un état à un autre, on peut chercher à le faire en un temps minimal, en dépensant le minimum d'énergie.

Formulation du problème et état de l'art.

Considérons le système semi-linéaire non homogène suivant,

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + u(t)(Ny(t) + c), \\ y(0) = y_0, \in \mathcal{H} \end{cases} \tag{3}$$

où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert réel de dimension infinie (espace des états), menu du produit scalaire $\langle ., . \rangle$ et de la norme $\|.\|$ correspondante. A est un opérateur non borné de domaine $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}$ qui génère un semi-groupe de contractions fortement continu $(S(t))_{t \geq 0}$ dans $\mathcal{H}$; N est un opérateur non linéaire de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ localement Lipschitzien et séquentiellement continu tel que $N(0) = 0$; $u(t)$ est une fonction à valeur scalaire, représente le contrôle et $c \neq 0$ est un vecteur de $\mathcal{H}$.

Étant donné un système dynamique commandé dont l'évolution peut être décrite par une équation différentielle ordinaire du type (3), le problème de stabilisation consiste à étudier la possibilité de trouver un feedback $u(y(t))$, aussi "régulier" que possible, tel que le système en boucle fermée, soit asymptotiquement stable au voisinage d'un point d'équilibre y_e.

Si N est linéaire et $c = 0$ le système (3) est bilinéaire homogène, et s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + u(t)By(t), \\ y(0) = y_0, \in \mathcal{H} \end{cases} \tag{4}$$

Le problème de la stabilisation du système (4) (avec $B \in \mathcal{L}(U, H)$) a fait l'objet de plusieurs études qui ont donné des résultats intéressants. En général, ces résultats se basent sur trois approches différentes. La première utilise le résultat de la décomposition canonique des semi-groupes de contractions de Nagy et Foias (voir [NFBK10]). Cette méthode a permis d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilisation faible du système (4) lorsque le semi-groupe engendré par A est contractif (voir C. Benchimol dans [Ben78]). La seconde approche, est basée sur la décomposition de l'espace des états, moyennant

celle du spectre du générateur A, dans le cas où le sous-espace dans lequel le semi-groupe restreint est exponentiellement stable est de codimension finie (voir R. Triggiani dans [Tri75]. La troisième approche, est basée sur le principe d'invariance de LaSalle généralisé en dimension infinie, (voir J. M. Ball dans [BS79] et M. Slemrod dans [Sle89], ou la méthode de Lyapunov, [RM05]. En 1969, Garrard a présenté une approche pour la synthèse d'une loi de commande par retour d'état pour la stabilisation en temps fini d'un système non linéaire continu. Dans le cas des systèmes linéaires, ce problème a été largement étudié et une théorie complète est disponible. Pour les systèmes non linéaires, le problème reste essentiellement ouvert ; les résultats sont limités à des classes particulières de systèmes. L'étude de la stabilité des systèmes bilinéaires et semi-linéaires homogènes a fait l'objet de nombreux travaux, et différents résultats ont été développés dans les cas de dimension finie et infinie. Voir J. Ball, M. Slemrod [BS79], M. Ouzahra, A. Tsouli et A. Boutoulout [OTB12], M. Ouzahra [Ouz08], A. Benzaza et M. Ouzahra [BM19], E. Zerrik et M. Ouzahra [ZO07], H. Bounit et Hammouri [BH99], etc. Cependant, seuls quelques travaux étudient le cas des systèmes non homogènes ; la stabilité de tels systèmes a été étudiée dans le cas bilinéaire par Z. Hamidi et M. Ouzahra dans [HO18], ils ont prouvé les conditions nécessaires et suffisantes pour une stabilisation partielle faible et forte d'un système bilinéaire non homogène par le contrôle :

$$v(t) = -\rho \frac{\langle y(t), Ny(t) + c \rangle}{|\langle y(t), Ny(t) + c \rangle| + 1}, \quad \forall t > 0, \quad \rho > 0 \tag{5}$$

Lorsqu'on cherche à stabiliser un système de contrôle, l'une des principales approches consiste à rechercher un contrôle en boucle fermée (feedback) qui puisse garantir que le système est bien posé et que la solution converge vers zéro au coure du temps. Ce contrôle est généralement représentée par $u(y(t))$ et doit être soigneusement choisie pour atteindre la stabilisation souhaitée. En calculant formellement le taux de variation temporel de l'énergie $\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2$ et en utilisant le fait que le semi-groupe est de contraction de sorte que $\mathcal{R}e\langle Ay, y\rangle \leq 0; \forall y \in \mathcal{D}(A)$, nous obtenons, $\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 \leq 2\mathcal{R}e\big(u(t) < y(t); Ny(t) > \big); \forall t \in [0, T]$
Nous cherchons un contrôle qui assure la dissipation d'énergie tout en satisfaisant l'inégalité précédente.
Cette thèse est organisée comme suit :

Chapitre 1. Généralités

Un chapitre préliminaire des outils mathématiques, dans lequel nous rappelons quelques définitions et résultats nécessaires à l'élaboration de ce travail, on y trouve des rappels sur la théorie des semi-groupes, celle-ci étant un outil de base pour la représentation, par des équations d'état, des systèmes à paramètres distribués, on y trouve aussi quelques théorèmes d'existence et de régularité pour les systèmes linéaires et non-linéaires. Ensuite, on donne un rappel sur les notions et résultats fondamentaux de stabilité, d'abord dans le cas général des systèmes dynamiques, puis, dans le cas des systèmes semi-linéaires. Enfin, on termine par un rappel de quelques résultats de stabilisation par retour d'état.

Chapitre 2. Un nouveau feedback pour la stabilité exponentielle et forte des systèmes semi-linéaires avec des estimations générales de décroissance.

Dans ce chapitre nous avons considéré le système de contrôle suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + u(t)Ny(t) \\ y(0) = y_0 \in \mathcal{H}, \end{cases} \tag{6}$$

où A est un opérateur non borné dont le domaine est $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}$ et génère un semi-groupe de contraction $(S(t))_{t\geq 0}$ sur un espace de Hilbert réel de dimension infinie $\mathcal{H}$, dont la norme et le produit scalaire sont désignés, respectivement, par $\|.\|$ et $\langle .,. \rangle$, N est un opérateur non linéaire de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ localement Lipschitzien et séquentiellement continu tel que $\mathcal{N}(0) = 0$, la fonction de contrôle $u(.)$ représente le contrôle scalaire.

Pour étudier la stabilisation du système (6) nous avons proposé un contrôle par retour d'état, qui permet de démontrer l'existence et l'unicité des solutions de (6), et d'obtenir, sous certaines hypothèses d'observabilité approximative, une stabilisation forte et exponentielle, avec une estimation de la vitesse de convergence dans le cas de la stabilisation forte. Les résultats obtenus ont été illustrés par une application au cas particulier de l'équation de Schrödinger non linéaire.

- Choix du contrôle.

  Le contrôle par retour d'état proposé est le suivant :

  $$\text{Pour } r \geq 0, \quad u_r\left(y(t)\right) = -\frac{\langle y(t), Ny(t)\rangle \mid \langle y(t), Ny(t)\rangle \mid^r}{\|y(t)\|^r}, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{7}$$

  En utilisant le contrôle (7), nous pouvons garantir la dissipation d'énergie tout en respectant l'inégalité suivante : $\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 \leq -2\frac{|\langle y(t), Ny(t)\rangle|^{r+2}}{\|y(t)\|^r}; \forall t \in [0,T]$.

- Existence et unicité des solutions du système.

  Avec le contrôle (7) pour tous les $r \in [-2; +\infty[$, nous avons démontré que le système (6) possède une unique solution globale $y(t)$ définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$

- Estimation de décroissance.

  Sous l'hypothèse d'observabilité approximative suivante,

  $\exists \delta, T > 0$ tel que $\int_0^T |\langle NS(s)y, S(s)y\rangle|\, ds \geq \delta \|y\|^2, \quad \forall y \in \mathcal{H}$.

  Pour tout $r \geqslant 0$, la solution $y(t)$ du système (6) satisfait au voisinage de $+\infty$, l'estimation suivante,

  $$\int_0^T |\langle NS(s)y(t), S(s)y(t)\rangle| \mathrm{d}s = O\left(\|y(\tau)\|^{\frac{r}{r+2}} \left(\int_0^T \frac{|\langle y(s+\tau), Ny(s+\tau)+c\rangle|^{r+2}}{\|y(s+\tau)\|^r}\, \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{r+2}}\right).$$

- Stabilisation forte.

  En utilisant l'estimation précédente nous avons établi que le contrôle (7) pour tout $r \geqslant 0$, stabilise fortement le système (6) avec l'estimation : $\|y(t)\| = O\left(t^{-\frac{r+2}{4}}\right)$ as $t \longrightarrow +\infty$.

- Stabilisation exponentielle.

  Sous l'hypothèse d'observabilité approximative suivantes,

  $\exists \delta, T > 0$ tel que $\int_0^T |\langle NS(s)y, S(s)y\rangle|\, ds \geq \delta \|y\|^{2+\frac{r}{r+2}}, \quad \forall y \in \mathcal{H},$

  on a montré que le contrôle (7) pour tout $r \geqslant 0$, stabilise exponentiellement le système (6).

  Plus précisément, il existe $\beta > 0$ tel que $\|y(t)\| \leq e^{-\beta} \|y_0\| e^{-\frac{\beta}{T}(t)}, \quad \forall t > 0.$

- Applications.

  Comme application des résultats obtenus, on a étudié la stabilisation de l'équation non linéaire de Schrödinger sur Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, avec les conditions aux limites de Dirichlet, défini par :

$$\begin{cases} i\partial_t \psi = \Delta\psi + K(x)|\psi|^\alpha \psi, & \text{sur } \Omega\times]0,\infty[, \quad \alpha > 0 \\ \psi(\cdot,t) = 0, & \text{sur } \partial\Omega\times]0,\infty[\\ \psi(\cdot,0) = \varphi. \end{cases} \tag{8}$$

  Nous avons exprimé le système (8) sous la forme générale des systèmes de contrôle semi-linéaires dans l'espace d'état de Hilbert et nous avons appliqué les résultats obtenus au cas particulier de l'équation suivante,

$$\begin{cases} i\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = A\psi(x,t) + u_r(\psi(x,t))N\psi(x,t), & \text{in } \Omega\times]0,\infty[\\ \psi(x,t) = 0, & \text{on } \partial\Omega\times]0,\infty[\\ \psi(x,0) = \varphi. \end{cases} \tag{9}$$

  On a montré que le contrôle,

$$u_r(\psi(x,t)) = -i\frac{\langle\psi(x,t), N\psi(x,t)\rangle|\langle\psi(x,t), N\psi(x,t)\rangle|^r}{\|\psi(x,t)\|^r} \quad , \quad (\forall r \geqslant 0)$$

  stabilise (9) avec l'estimation de décroissance suivante :$\|\psi(x,t)\| = O\left(t^{-\frac{r+2}{4}}\right)$ as $t \to +\infty$.

  Le contrôle $u_r(\psi(x,t))$ pour $r = \frac{2\alpha}{1-\alpha}$ et $0 < \alpha < 1$, stabilise exponentiellement le système (9).

Chapitre 3. Stabilisation exponentielle et forte pour les systèmes de contrôle semi-linéaires non homogènes par la méthode de décomposition.

Dans ce chapitre nous avons considéré le système de contrôle semi-linéaire non homogène suivant :

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + v(t)(Ny(t) + c) \\ y(0) = y_0, \in \mathcal{H} \end{cases} \tag{10}$$

où

- $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert réel de dimension infinie, menu du produit scalaire $\langle ., . \rangle$ et de la norme correspondante $\|.\|$.
- A est un opérateur non borné dont le domaine est $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}$ et génère un semi-groupe de contraction fortement continu $(S(t))_{t\geq 0}$ dans $\mathcal{H}$;
- N est un opérateur non linéaire de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ localement Lipschitzien et séquentiellement continu tel que $\mathcal{N}(0) = 0$;
- $v(t)$ est une fonction à valeur scalaire, représente le contrôle ; et $c \neq 0$ est un vecteur de $\mathcal{H}$.

Pour étudier la stabilisation du système (10) nous avons proposé un contrôle par retour d'état, qui permet de démontrer l'existence et l'unicité des solutions de (10), et d'obtenir, sous certaines hypothèses d'observabilité approximative, une stabilisation forte et exponentielle, avec une estimation de la vitesse de convergence dans le cas de la stabilisation forte. Les résultats obtenus ont été illustrés par une application au cas particulier de l'équation de la chaleur semi-linéaire.

- Choix du contrôle.

  Le contrôle par retour d'état proposé est le suivant :

$$v(t) = -\rho \frac{\langle y(t), Ny(t) + c \rangle}{|\langle y(t), Ny(t) + c \rangle| + 1}; \left(\forall t > 0, \rho > 0\right) \tag{11}$$

  En utilisant le contrôle (11), nous pouvons garantir la dissipation d'énergie tout en respectant l'inégalité suivante : $\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 \leq -2\frac{|\langle Ny(t)+c, y(t)\rangle|^2}{|\langle y(t), Ny(t)+c\rangle|+1}; \forall t \in [0, T]$.

- Existence et unicité des solutions du système.

  Avec le contrôle (11) nous avons démontré que le système (10) possède une unique solution globale $y(t)$ définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$, qui est donnée par la formule de variation de la constante suivante : $y(t) = S(t)y_0 + \int_0^t v(\tau)(Ny(\tau) + c)S(t - \tau)d\tau$.

- Estimation de décroissance.

  La solution du système (2.1) satisfait au voisinage de $+\infty$, l'estimation suivante,

$$\int_0^T |\langle S(\tau)y(t), NS(\tau)y(t) + c\rangle| d\tau = O\left(\sqrt{\int_t^{t+T} \frac{|\langle y(\tau), Ny(\tau) + c\rangle|^2}{1 + |\langle Ny(\tau) + c, y(\tau)\rangle|} d\tau}\right)$$

- Stabilisation exponentielle par la méthode de décomposition.

  Nous avons supposé que l'opérateur A peut être décomposé selon la décomposition $H = H_u \oplus H_s$, où $H_u = P_u H$ et $H_s = P_s H$ avec $P_u = \frac{1}{2\pi i}\int_C (\lambda I - A)^{-1} d\lambda$ et $P_s = I - P_u$.

  Alors l'opérateur A peut être décomposé comme suit $A = A_u + A_s$ avec $A_u = P_u A$ et $A_s = P_s A$ où A_s et A_u sont les restrictions de A sur H_s et sur H_u respectivement.

  Nous avons montrer que, si A_s satisfais l'hypothèse : $\exists \eta, K_\eta > 0$ telles que $\|S_s(t)\| \leqslant K_\eta e^{-\eta t}, t \geqslant 0$. Alors pour $\rho < \frac{\eta}{K_\eta (LR + \|c_s\|)^2}$ le contrôle $v_u(t) = -\rho \frac{\langle y_u(t), N_u y_u(t) + c_u \rangle}{\langle y_u(t), N_s y(t) + c_u \rangle |+1}$ $\quad ; \forall t > 0$ et $\|y_0\| \leq R$, stabilise exponentiellement le système (10).

- Stabilisation forte.

  Sous l'hypothèse suivante,

  $\Big(\exists \delta, T > 0$ tels que $\int_0^T |\langle NSs)y, S(s)y\rangle|\, ds \geq \delta \|y\|^2, \forall y \in \mathcal{H}\Big)$,

  nous avons établi que le contrôle (11) stabilise fortement le système (10) avec l'estimation de la vitesse de convergence suivante : $\|y(t)\| = O\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)$ quand $t \longrightarrow +\infty$.

- Applications.

  Comme application des résultats obtenus, on a étudié la stabilisation de l'équation de la chaleur semi-linéaire suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial y(t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(t)}{\partial x^2} + v(y(t))(Ny(t) + c), & x \in (0,1), t > 0, \\ y'(0) = y'(1) = 0 = 0, & \forall t > 0, \end{cases} \tag{12}$$

  où $y(t)$ est la température à l'instant t.

  Nous prenons l'espace d'état $H = L^2(0,1)$ et l'opérateur A est définie par

  $Ay = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, avec $\quad \mathcal{D}(A) = \{y \in \mathcal{H}^2(0,1); \quad y'(0) = y'(1) = 0\}$.

  On a montré que le contrôle, $v_u(t) = -\rho \frac{\langle y_u(t), N_u y_u(t) + c_u \rangle}{\langle y_u(t), N_s y(t) + c_u \rangle |+1} \quad \forall t \geq 0$,

  stabilise exponentiellement le système (12).

Chapitre 4. Stabilisation avec estimation de la décroissance pour les systèmes de contrôle semi-linéaires non homogènes avec des contrôles non bornés.

Dans ce chapitre nous avons considéré le système de contrôle semi-linéaire non homogène décrit par l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = Ay(t) + u(t)(Ny(t) + c), \quad y(0) = y_0 \tag{13}$$

où A est un opérateur non borné de domaine $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}$ et génère un semi-groupe de contraction $(S(t))_{t\geq 0}$ sur un espace de Hilbert de dimension infinie $\mathcal{H}$ dont la norme et le produit scalaire sont désignés, respectivement, par $\|.\|$ et $\langle ., .\rangle$, N est un opérateur non linéaire de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ localement Lipschitzien et faiblement séquentiellement continu tel que $\mathcal{N}(0) = 0$, la fonction $u(.)$ représente le contrôle scalaire.
Pour étudier la stabilisation du système (13) nous avons proposé un feedback, qui permet de démontrer l'existence et l'unicité des solutions de (13), et d'obtenir, sous certaines hypothèses d'observabilité approximative, une stabilisation forte et faible, avec une estimation de la vitesse de convergence. Les résultats obtenus ont été illustré par une application au cas particulier de l'équation de la chaleur semi-linéaire et de l'équation de Schrödinger non linéaire.

- Choix du contrôle.

  Le contrôle par retour d'état proposé est le suivant :

  $$u(t) = -\frac{\langle Ny(t) + c, y(t)\rangle}{r(y(t))}; \forall t \in [0, T] \tag{14}$$

  où $r : \mathcal{H} \to]0, +\infty[$ est une fonction Lipschitzienne sur tout intervalle borné et telle que $r(.) \geq m > 0$ sur $\mathcal{H}$,

  En utilisant le contrôle (14), nous pouvons garantir la dissipation d'énergie tout en respectant l'inégalité suivante : $\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 \leq -2\frac{|\langle Ny(t)+c,y(t)\rangle|^2}{r(y(t))}; \forall t \in [0, T]$.

- Existence et unicité des solutions du système.

  Avec le contrôle (14) nous avons considéré la fonction f définie par $f(t, y(t)) = u(t)(Ny(t) + c)$ et nous avons défini les fonctions $f_c(t, y)$ et $f_h(t, y)$ de $[0, +\infty[\times H$ dans $\mathcal{H}$, telles que $f(t, y(t)) = f_c(t, y) + f_h(t, y)$, ensuite nous avons démontré que le système (13) possède une unique solution globale $y(t)$ définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$, qui est donnée par la formule de variation de la constante suivante : $y(t) = S(t)y_0 + \int_0^t u(\tau)S(t - \tau)(Ny(\tau) + c)d\tau$.

- Estimation de décroissance.

  La solution du système (13) satisfait au voisinage de $+\infty$, l'estimation suivante :
  $\left(\int_0^T |\langle NS(s)y(t) + c, S(s)y(t)\rangle|\mathrm{d}s\right) = O\left(\int_t^{T+t} |\langle y(s), Ny(s) + c\rangle|^2\, \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}$ quand $t \to +\infty$

- Stabilisation forte.

  Sous l'hypothèse : $\left(\exists \eta, K_\eta > 0 \text{ tels que } \int_0^T |\langle NS(s)y + c, S(s)y\rangle|\mathrm{d}s \geq \delta\|y\|^2, \forall y \in \mathcal{H}\right)$,

le contrôle (14) stabilise fortement le système (13) et $\|y(t)\| = O\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)$, quand $t \to +\infty$.

- Stabilisation faible.

  Sous les hypothèses suivantes, $\langle NS(t)y + c, S(t)y\rangle = 0, \quad \forall t \geq 0 \Longrightarrow y = 0$, et N est localement Lipschitzien et faiblement séquentiellement continu de $\mathcal{H}_w$ dans $\mathcal{H}$, nous avons établi que le contrôle (14) stabilise faiblement le système (13).

- Applications.

  Pour $r(.) \in L^2(\omega)$ Lipschitzienne, telle que $r(.) \geq m > 0$, sur un premier exemple, on a étudié l'équation de la chaleur semi-linéaire suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = \Delta y + \frac{v(y)}{1+\|y\|} \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_j \left\langle y, \varphi_j \right\rangle \varphi_j + v(y)c, & \text{sur } Q \\ y' = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(0) = y_0 & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{15}$$

  On a montré que le contrôle,

$$v\big(y\big) = \frac{\frac{1}{1+\sum_{j=1}^{+\infty}\langle y,\varphi_j\rangle^2} \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_j \left|\left\langle y, \varphi_j \right\rangle\right|^2 + \left\langle \sum_{j=0}^{\infty} \left\langle c, \varphi_j \right\rangle \varphi_j, y \right\rangle}{r\big(\sum_{j=1}^{+\infty} \left\langle y, \varphi_j \right\rangle_H \varphi_j\big)},$$

  stabilise faiblement le système (15).

  Sur un autre exemple, on a étudié l'équation de Schrödinger non linéaire suivante :

$$\begin{cases} i\frac{\partial z(x,t)}{\partial t} = \Delta z(x,t) + V\big(z(x,t)\big)|z(x,t)|^{\alpha} z(x,t) + V\big(z(x,t)\big)c, & \text{sur} \quad \Omega\times]0,\infty[\\ z(x,t) = 0, \quad z(x,0) = \varphi & \text{sur} \quad \partial\Omega\times]0,\infty[. \end{cases} \tag{16}$$

  Nous avons exprimé le système (16) sous la forme,

$$\begin{cases} i\frac{\partial z(x,t)}{\partial t} = \Delta z(x,t) + V\big(z(x,t)\big)Nz(x,t) + V\big(z(x,t)\big)c, & \text{sur} \quad \Omega\times]0,\infty[\\ z(x,t) = 0, \quad z(x,0) = \varphi, & \text{sur} \quad \partial\Omega\times]0,\infty[\end{cases} \tag{17}$$

  On a montré que le contrôle, $V((z(x,t)) = -i\frac{\langle Nz(x,t)+c, z(x,t)\rangle}{r(z(x,t))}$, stabilise faiblement le système (17).

Chapitre 5. Stabilisation partielle forte des systèmes semi-linéaires et robustesse du contrôle optimal.

Dans ce chapitre nous avons considéré le système de contrôle semi-linéaire décrit par l'équation :

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + Ny(t) + v(t)By(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{18}$$

où l'espace d'état $\mathcal{H}$ est un Hilbert de dimension infinie muni du produit scalaire $\langle ., . \rangle$ et la norme correspondante $\| \cdot \|$, A est un opérateur non borné de domaine $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}$ et génère un semi-groupe de contraction $(S(t))_{t \geq 0}$ sur $\mathcal{H}$, N est un opérateur non linéaire de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ localement Lipschitzien faiblement séquentiellement continu tel que $\mathcal{N}(0) = 0$, la fonction $v(t)$ représente le contrôle scalaire, et B est un opérateur linéaire de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$. Dans ce chapitre, nous introduisons un nouveau concept, celui de la stabilisation partielle et aussi la robustesse de la stabilisation optimale, en utilisant un contrôle borné. Nous montrons que le système est partiellement stable une fois que l'hypothèse d'observabilité exacte est vérifiée et que l'opérateur non linéaire N est Lipschitzien. Le feedback stabilisant est caractérisée par la minimisation du problème du coût. Les résultats obtenus ont été illustré par des exemples, régis par une équation d'onde et par une équation de Schrödinger.

- Choix du contrôle.

  Le feedback proposé est le suivant :

$$v(t) = \begin{cases} -\rho \frac{\langle y, By \rangle}{\|y\|^2}, \ \rho > 0, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases} \tag{19}$$

- Stabilisation partielle forte

  Sous les hypothèses suivantes,

  (A_1) l'opérateur A génère un semi-groupe de contraction C_0 $(S(t))_{t \geq 0}$ sur $\mathcal{H}$,

  (A_2) l'opérateur non linéaire N est localement Lipschitzien et dissipatif,

  (A_3) l'opérateur B satisfait,

$$\int_0^T |\langle BS(t)y, S(t)y \rangle|_U dt \geq \delta \|Cy\|^2, \ \forall y \in \mathcal{H}, \ (T > 0),$$

  avec $\delta \leq \inf_{\|y_0\|=1} |\langle BS(t)y, S(t)y \rangle|_{L^2(0,T,U)}$ et $C \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{Y})$
  nous avons établi que le contrôle (19) assure la stabilisation partielle forte du système (18)

- Robustesse de la stabilisation forte

Nous considérons le système perturbé suivant,

$$\begin{cases} y_t = Ay + Ny + u(B+b)y & sur \quad Q \\ y(x,0) = y_0(x), & sur \quad \Omega \\ y(\xi,t) = 0 & sur \quad \Sigma, \end{cases} \tag{20}$$

où b est une perturbation de B. Nous montrons la robustesse du contrôle (19).

- Stabilisation optimale

Dans cette partie, nous considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \min Q(v) & = \int_0^{+\infty} \frac{\|y(t)\|^2}{\rho} \left(\|v(t)\|^2 + \frac{|\rho \langle y(t), By(t)\rangle|^2}{\|y(t)\|^4} \right) dt \\ & + \int_0^{+\infty} 2|\langle y(t), Ny(t)\rangle| + \langle y(t), Ry(t)\rangle dt, \\ v \in V_{ad}(\Omega) & = \left\{ \frac{v(t)}{\|v(t)\|} \leq r, \forall t > 0, et\ Q(v) < \infty \right\} \end{cases} \tag{21}$$

où R est un opérateur linéaire positif auto-adjoint pour un certain $r > 0$. Sous les hypothèses,

$(H1)$- A génère un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ d'isométries,

$(H2)$- $2\mathcal{R}e\langle Ay, y\rangle + \langle y, Ry\rangle = 0, \forall y \in \mathcal{D}(A)$,

$(H3)$- $\int_0^T \|B^* S(t) y_0\|^2 dt \geq \alpha \|y_0\|^2, \ \forall y_0 \in \mathcal{H}, \ (T, \alpha > 0)$.

Alors le contrôle (19) est la solution de (21).

- Applications

Sur un premier exemple, nous considérons l'équation de transport semi-linéaire suivante sur $\Omega =]0, +\infty[$:

$$\begin{cases} \frac{\partial z(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial z(x,t)}{\partial x} - \frac{|z(t)|^2}{(1+|z(t)|^2)} \int_0^1 z(x)\sin(x)dx + v(t)z(x,t) & \Omega\times]0,+\infty[, \\ z(x,0) = z_0(x) & \Omega, \end{cases} \tag{22}$$

Nous montrons que (22) est fortement partiellement stabilisable par le contrôle (19) .

Sur un autre exemple, nous considérons l'équation d'onde semi-linéaire suivante sur $\Omega =]0, 1[$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} = \Delta y(t) - \frac{|y(t)|^2 y(t)}{\zeta} + v(t)\frac{\partial y(t)}{\partial t}, & in\ \Omega\times]0,+\infty[, \\ y(0) = y_0, y_t(0) = y_1, & on\ \partial\Omega\times]0,+\infty[, \end{cases} \tag{23}$$

Nous montrons que le contrôle (19) stabilise fortement et partiellement le système (23) et minimise le coût de performance suivant :

$$\begin{cases} \min Q(v) = \int_0^{+\infty} \|y(t)\|^2 (\frac{1}{\eta}|v(t)|^2 + \eta + \frac{2|y(t)|^2}{\zeta} + 4)dt \\ v \in V_{ad}^r(\Omega) = \{v(t),\ |v(t)| \leq r, \forall t > 0\ et\ Q(v) < \infty\} \quad \text{où} \quad R = 4\,I \quad \text{et} \quad 0 < \eta \leq r. \end{cases}$$

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS.

Ce chapitre est consacré aux définitions classiques et aux résultats liés à la stabilité des systèmes dynamiques en dimension infinie. Nous commençons par donner la définition formelle d'un système dynamique, suivie des définitions et des résultats concernant les semi-groupes et leurs générateurs sur un espace de Banach, ensuite nous donnons quelques résultats d'existence et de régularité pour les problèmes d'évolution (linéaires, et semi-linéaires). Nous rappelons également certains théorèmes d'analyse fonctionnelle visant à améliorer la clarté des preuves et des résultats présentés.

1.1 Systèmes dynamiques

Un système dynamique est un système dont l'état change avec le temps. Mathématiquement, un système dynamique consiste en un espace d'état et une loi appelée dynamique qui permet de déterminer quel état correspondra, dans un temps futur, à un état présent.
Un système dynamique est donné par un triplet $(\mathcal{X}; I; F)$

1. **Espace d'état :** c'est un espace géométrique $\mathcal{X}$ qui décrit les états du système appelé espace d'état ou espace des phases. En réalité, la spécification d'un point $x \in \mathcal{X}$ doit être suffisante non seulement pour décrire la position actuelle du système, mais également pour déterminer son évolution.

2. **L'espace du temps :** L'évolution d'un système dynamique signifie un changement d'état du système avec le temps $t \in I$, où I est un ensemble de nombres. Nous considérerons deux types de systèmes dynamiques : ceux à temps continu (réel) $I = \mathbb{R}$ et ceux à temps discret (entier) $I = \mathbb{Z}$. Les systèmes du premier type sont appelés systèmes dynamiques à temps continu, alors que ceux du second type sont appelés systèmes dynamiques à temps discret.

3. **L'opérateur d'évolution :** Le composant principal d'un système dynamique est une loi d'évolution qui détermine l'état $x(t)$ du système à l'instant t, à condition que l'état initial x_0 soit connu.
   La manière la plus générale de spécifier l'évolution consiste à définir pour tout $t \in I$,

l'application F_t dans l'espace d'états $\mathcal{X}$ par : $F_t : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$

$$x_0 \longrightarrow F_t(x_0) = x(t).$$

où $x_0 \in \mathcal{X}$ est l'état initial.

L'opérateur d'évolution F_t a deux propriétés naturelles qui expliquent le caractère déterministe du comportement des systèmes dynamiques.

(i) $F_0 = id$.

(ii) $F_{t+s} = F_t \circ F_s$.

Les systèmes dynamiques sont, généralement, exprimés sous forme analytique comme un système d'équations différentielles ordinaires, $\frac{dy(t)}{dt} = F(t, y(t))$.

La fonction : $y : I \to \mathcal{X}$

$$t \to y(t)$$

s'appelle la trajectoire du système.

L'application : $F : I \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$

$$(t, y) \to F(t, y(t))$$

s'appelle la dynamique du système.

Avec l'espace des phases l'équation différentielle $\frac{dy(t)}{dt} = F(t, y(t))$ décrit l'évolution à court terme du système. Le but de la théorie c'est de passer de cet compréhension à court terme (locale) qui est supposé au départ, à une compréhension à long terme (globale) même à très grand terme.

1.1.1 Systèmes dynamiques à temps continus

Si le système évolue en temps continu, il est dit système continu. La description mathématique de son évolution est donnée par une équation différentielle ordinaire et un ensemble de conditions initiales :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = F(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

où $x(t) \in \mathcal{X}$ est l'état du système à l'instant $t \in \mathbb{R}$

Lorsque F dépend explicitement du temps le système est dit non autonome. Dans le cas contraire on dit que le système est autonome.

1.1.2 Systèmes dynamiques à temps discrets

Si le système prends ses valeurs uniquement à des instant régulièrement distribués, celui-ci est dit système en temps discret ou tout simplement système discret. Sa représentation mathématique est donnée par le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} X_{n+1} = F(X_n) \\ X_0 = X(0) \end{cases}$$

où n est l'instant discret, et $X(0)$ est le vecteur des états initiaux. Dans le cas général un système dynamique discret est décrit par un système d'équation aux différences finies, autrement dit, par une récurrence.

1.2 Problème de Cauchy

1.2.1 Définitions de base

On considère dans un premier temps ($\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$).

Définition 1.1:

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $F : I \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ une application.

On appelle solution de l'équation différentielle : $y'(t) = F(t, y(t))$ tout couple (J, φ) ou J est un sous intervalle de I et φ une fonction dérivable définie sur J telle que : $\forall t \in J$, $\varphi'(t) = F(t, \varphi(t))$



Remarques:

- Il est possible que J ne soit pas égal à I et qu'on ne puisse pas faire mieux.
- La notion de solution maximale donne un sens précis à "on ne peut pas faire mieux ?".

Problème de Cauchy : Il arrive qu'on ne cherche pas toutes les solutions d'une EDO mais seulement celles qui vérifient certaines conditions, dites conditions initiales de Cauchy ou tout simplement conditions de Cauchy. et alors le problème de Cauchy associée à la donnée (t_0, y_0) est exprimé sous la forme :

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Définition 1.2:

Soit $F : I \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ et $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathcal{X}$.

On appelle solution du problème de Cauchy associée à la donnée (t_0, y_0) toute solution (J, φ) de $y'(t) = F(t, y)$ vérifiant de plus : $t_0 \in J^\circ$ (ouverture de J) et $\varphi(t_0) = y_0$

1.2.2 Théorème de Cauchy (forme faible) :

Si la fonction $F : I \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ est de classe C^1 alors pour toute donnée de Cauchy $(t_0, y_0) \in I \times \mathcal{X}$, il existe, au voisinage de t_0, une unique solution du problème de Cauchy associé.
En particulier, pour toute telle donnée, il existe une unique solution maximale associée et toute autre solution vérifiant la condition de Cauchy est une restriction de cette solution maximale.Par le théorème des accroissements finis, on vérifie que toute fonction de classe C^1 est localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable. C'est pourquoi le théorème suivant est bien plus fort que le précédent.

1.2.3 Théorème de Cauchy (forme forte) :

Si la fonction $F : I \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ est continue et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état (deuxième variable), alors il existe une unique solution maximale associée au problème de Cauchy.

1.2.4 Démonstration du théorème de Cauchy

La démonstration de ce théorème peut se faire de plusieurs manières.

Elles partent toutes de la constatation que(J, y) est solution du problème de Cauchy si et seulement si $t_0 \in J$ et si y est une fonction continue sur J qui vérifie :

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s, y(s))ds, \quad \forall t \in J.$$

Il s'agit donc de résoudre cette équation intégrale dans l'espace fonctionnel $C^0(J, \mathcal{X})$ c'est pourquoi il est naturel que les preuves du théorème utilisent de façon fondamentale les grands théorèmes de l'analyse fonctionnelle : ou bien le théorème d'Ascoli (méthode de compacité) ou bien le théorème du point fixe de Banach.

Méthode du point fixe de Banach : Les théorèmes de point fixe sont les outils mathématiques de base qui aident a établir l'existence de solutions de divers genres d'équations. La méthode du point fixe consiste a transformer un problème donne en un problème de point fixe. Les points fixes du problème transforme sont ainsi les solutions du problème donne. Pour tout ce qui suivra, nous aurons besoin des théorèmes de point fixe suivants :

1.2.5 Explosion en temps fini

Il arrive que l'intervalle de définition de la solution maximale d'un problème de Cauchy soit strictement inclus dans I. On va voir pourquoi ce phénomène est appelé explosion en temps fini.

Théorème : On suppose que F est continue et localement Lipschitzienne par rapport à sa variable d'état. Soit (J, y) une solution maximale du problème de Cauchy, On note $J =]\alpha, \beta[$

Si $\alpha \in I$,alors :

$$\limsup_{t \to \alpha^+} \|y(t)\| = +\infty$$

Si $\beta \in I$,alors :

$$\limsup_{t \to \beta^-} \|y(t)\| = +\infty$$

Exemple :(cas particulier) Si la fonction F est bornée sur $I \times X$, toutes les solutions maximales sont globales.

En effet, appelons M une borne de $\|y(t)\|$ sur $I \times X$, et (J, y) une solution maximale du problème.

On prend $\tau \in J$ quelconque de sorte que :

$$\|y(t)\| = \|y(\tau) + \int_{\tau}^{t} F(s, y(s))ds\| \leqslant \|y(t)\| + M(t - \tau)$$

ce qui montre que si la borne supérieure de J est finie, la solution y est bornée au voisinage de $sup(J)$ et donc $SupJ \notin I$, d'après le théorème d'explosion en temps fini. La démarche est identique pour montrer

que $Inf J \notin I$ et donc $J = I$.

1.2.6 Théorème de Cauchy-Lipschitz global

Si la fonction F est continue et globalement Lipschitzienne par rapport à y.

c-à-d : s'il existe $k : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et positive telle que : $\forall t \in I, \forall y_1, y_2 \in \mathcal{X}$

$$\|F(t, y_1) - F(t, y_2)\| \leqslant k(t)\|y_1 - y_2\|$$

alors toutes les solutions maximales sont globales.

1.2.7 Stabilité locale, stabilité asymptotique et stabilité exponentielle.

Définition 1.3:

y_e est un état d'équilibre du système $\dot{y} = f(y)$, si $y(t_1) = y_e$ implique $y(t) = y_e$ pour tout $t \geq t_1$.

Ou tout simplement que l'état y_e vérifie l'équation $f(y_e) = 0$.

Définition 1.4:

L'état d'équilibre y_e est stable si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \|y_0 - y_e\| \leqslant \eta \Rightarrow \|y(t) - y_e\| \leqslant \varepsilon \ , \quad \forall t \in I$

Définition 1.5:

Le point d'équilibre y_e est dit asymptotiquement stable si après une faible perturbation il revient à sa position d'équilibre quand $t \longrightarrow +\infty$ i.e :

si y_e est stable et si : $\exists \rho > 0, \|y_0 - y_e\| \leqslant \rho$ alors $\lim_{t \to +\infty} y(t) = y_e$

Définition 1.6:

Le point d'équilibre y_e est dit exponentiellement stable si :

y_e est stable et si $\exists M \in \mathbb{R}; \omega > 0, \|y_t - y_e\| \leqslant M e^{-\omega t} \|y_0 - y_e\|$

1.3 Semi-groupes linéaires

L'objectif recherché dans la construction des semi-groupes est la résolution des équations différentielles ordinaires d'évolution de la forme :

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

La résolution de ce système est aisée si A est un opérateur bornée (cas d'une matrice A constante) à l'aide de l'exponentielle, dans ce cas la solution est donnée par : $y(t) = e^{tA} y(0)$, l'exponentielle d'une application linéaire bornée sur un espace de Banach, même de dimension infinie, garde tout son sens comme somme d'une série absolument convergente, mais ce n'est pas le cas quand l'opérateur A est non borné, donc il s'agit de généraliser la notion d'exponentielle pour des opérateurs non bornés sur un espace de Banach (telles que le laplacien).

On commence d'abord par rappeler quelques définitions concernant les opérateurs non-bornés sur un espace de Banach.

1.3.1 Opérateurs non-bornés sur un Banach

Un des buts premiers de l'étude d'un opérateur est la détermination de son spectre, qui est la généralisation en dimension infinie de l'ensemble des valeurs propres d'une matrice. Dans les cas les plus agréables, notamment pour les opérateurs dits compacts on peut déterminer de manière qualitative le spectre d'un opérateur, et ensuite l'approcher numériquement, ceci permet de résoudre complètement des problèmes d'évolution en mécanique, physique, etc, comme l'équation de la chaleur, l'équation des ondes, ou l'équation de Schrödinger .

1.3.2 Définitions et propriétés

Dans tout ce qui suit, sauf indication contraire, $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ représentent des espaces de Banach réels.

Définition 1.7: Opérateurs bornés et non bornés

Un opérateur dans $\mathcal{X}$ est un couple $(\mathcal{D}(A), A)$, où $\mathcal{D}(A)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{X}$, et $A : \mathcal{D}(A) \to X$, est une application linéaire.

Le sous-espace $\mathcal{D}(A)$ est le domaine de A.

On dit qu'un opérateur $(\mathcal{D}(A), A)$ dans $\mathcal{X}$ est borné si $\mathcal{D}(A) = \mathcal{X}$ et $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ est continue. Dans le cas contraire, on dit que A est non-borné.

De manière analogue, un opérateur de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$ est un couple $(A, \mathcal{D}(A))$ ou $\mathcal{D}(A)$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{X}$ et A est une application linéaire de $\mathcal{D}(A)$ dans $\mathcal{Y}$

Remarques:

- En dimension infinie, il est donc absolument nécessaire de toujours spécifier le domaine $\mathcal{D}(A)$ sur lequel on travaille.
- On note un opérateur par $(\mathcal{D}(A), A)$ mais s'il n'y a pas d'ambiguïté concernant son domaine on pourra le noter simplement par A.

L'exemple le plus simple d'un opérateur A est celui d'une application linéaire définie sur tout l'espace $\mathcal{D}(A) = \mathcal{X}$, mais il y a plusieurs exemples d'opérateurs dont le domaine est un sous-espace strict de $\mathcal{X}$. Nous pensons particulièrement à la dérivation $A : f \mapsto f'$ qui est bien linéaire mais qui n'est pas définie sur tout $\mathcal{X} = L^2(]0, 1[)$, cette dernière est par contre bien définie sur $\mathcal{D}(A) = \left\{f \in L^2((]0, 1[) \text{ tel que } f' \in L^2(]0, 1[)\right\}$ Alors $(\mathcal{D}(A), A)$ est un opérateur non borné . On remarque que $\mathcal{D}(A)$ n'est rien d'autre que l'espace de Sobolev $H^1(]0, 1[) \subset L^2(]0, 1[)$.

Définition 1.8: Opérateur fermé

On appelle le graphe de A, le sous espace vectoriel de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ défini par :

$$G(A) = \{(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}, x \in \mathcal{D}(A); y = Ax\}.$$

L'opérateur A est dit fermé si son graphe est un fermé de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$.

Remarques:

- Il est important de définir à la fois l'action de l'opérateur et son domaine sur le quel il agit.
- Deux opérateurs ayant la même action sont différents si leurs domaines sont différents.
- On ne peut pas toujours comparer les domaines de deux opérateurs en terme d'inclusion, mais lorsque cela est possible, on parle d'extension.

1.3.3 Spectre et résolvante

Définition 1.9:

Soient un opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ et $A_\lambda = \lambda I - A$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$.

Si λ est tel que l'image de A_λ, noté $R(A_\lambda)$, est dense dans $\mathcal{X}$ et que A_λ possède un inverse continu, on dit alors que λ est un élément de l'ensemble résolvant de A, désigné par $\rho(A)$, et on note $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$.

— Si $\lambda \notin \rho(A)$, on dit que λ est dans le spectre de A, noté $\sigma(A)$, et qui se décompose en trois sous ensembles :

— $P_\sigma(A)$: il contient tous les λ tels que A_λ n'ait pas d'inverse, c'est le spectre ponctuel et ses éléments sont les valeurs propres de A.

— $C_\sigma(A)$: il contient tous les λ pour lesquels A_λ possède un inverse de domaine dense mais qui n'est pas continu, c'est le spectre continu.

— $R_\sigma(A)$: il contient tous les λ tels que A_λ aie un inverse dont le domaine n'est pas dense dans $\mathcal{X}$, c'est le spectre résiduel.

Un cas très important est lorsque la résolvante $R(\lambda, A)$ est compacte, pour un certain $\lambda \in \rho(A)$, nous avons alors le théorème suivant :

Théorème 1.1: ([Kat13])

Soit A un opérateur fermé dans $\mathcal{X}$ tel que $R(\lambda, A)$ est compacte, pour un certain $\lambda \in \rho(A)$. Alors le spectre de A est discret et formé uniquement de valeurs propres de multiplicité finie. De plus, $R(\xi, A)$ est compacte pour tout $\xi \in \rho(A)$.

1.3.4 Adjoint d'un opérateur

Dans ce sous-paragraphe, on suppose que $\mathcal{X}$ est un espace de Hilbert. Si A est un opérateur linéaire dans $\mathcal{X}$, de domaine dense, on définit A^*, l'opérateur adjoint de A par :

$\langle A^* v, u\rangle_X = \langle v, Au\rangle_X, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A^*), \forall u \in \mathcal{D}(A).$

et $D(A^*) = \{v \in X; \exists C < \infty / | < Au, v > | \leq C\|u\|; \forall u \in D(A)\}$

Il est à noter que A^* est toujours fermé.

De plus, $\mathcal{D}(A^*)$, muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle_{D(A^*)} = \langle f, g\rangle_X + \langle A^* f, A^* g\rangle_X$, est un espace de Hilbert.

1.3.5 Opérateurs m-dissipatif sur $\mathcal{X}$

Définition 1.10:

Soit $\mathcal{X}$ un Banach, et A un opérateur linéaire dans $\mathcal{X}$. A est dit dissipatif s'il vérifie

$$\|u - \lambda Au\|_X \geq \|u\|_X, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A), \quad \forall \lambda > 0.$$

A est dit m-dissipatif si A est dissipatif et pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $(I - \lambda A)$ est surjectif.

Proposition 1.1: ([Har91])

Soit A un opérateur (linéaire) dissipatif dans $\mathcal{X}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) A est m-dissipatif dans $\mathcal{X}$

ii) $\exists \lambda_0 > 0$ tel que l'opérateur $(I - \lambda_0 A)$ est surjectif.

Dans le cas où $\mathcal{X}$ est un espace de Hilbert réel, on a la proposition suivante :

Proposition 1.2: ([Har91])

Soit $\mathcal{X}$ un espace de Hilbert réel. A est dissipatif si et seulement si $\langle Au, u\rangle \leq 0$, pour tout $u \in \mathcal{D}(A)$.

De plus, si A est m-dissipatif dans $\mathcal{X}$, alors $\mathcal{D}(A)$ est dense dans $\mathcal{X}$.

1.3.6 Semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur un Banach

Définition 1.11:

Soit $\mathcal{X}$ un espace de Banach.

Un semi-groupe d'opérateurs bornés sur $\mathcal{X}$ est une famille $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs vérifiant :

i) $T(t)$ est un opérateur borné de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}$ pour tout $t \geq 0$,

ii) $T(t+s) = T(t)T(s) \quad \forall s, t \geq 0$ et $T(0) = I_X$.

- Le semi-groupe est dit fortement continu à l'origine (ou de classe C^0) si :
  $\lim_{t\to 0} T(t)x = x \quad \forall x \in \mathcal{X}$.
- Il est dit contractant si : $\|T(t)\|_{L(X)} \leq 1 \quad \forall t \geq 0$, où $L(X)$ désigne l'ensemble des opérateurs bornés de $\mathcal{X}$.

Définition 1.12:

On appelle générateur infinitésimal de $T(t)$, l'opérateur A de domaine $\mathcal{D}(A)$ défini par :

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in \mathcal{X} / \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h}, \text{ existe} \right\},$$

et pour $x \in \mathcal{D}(A)$: $Ax = \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h}$.

Théorème 1.2: ([Paz12])

Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe d'opérateurs bornés sur un espace de Banach $\mathcal{X}$, et soit A son générateur infinitésimal. Pour tout $x_0 \in \mathcal{D}(A)$, on a

i) $T(t)x_0 \in \mathcal{D}(A)$, pour tout $t \geq 0$

ii) $\frac{d}{dt}(T(t)x_0) = AT(t)x_0 = T(t)Ax_0, \forall t > 0$

iii) $T(t)x_0 - x_0 = \int_0^t AT(s)x_0 ds$

iv) A est fermé, $\mathcal{D}(A)$ est partout dense dans $\mathcal{X}$.

D'après le théorème précédent, si A est générateur infinitésimal d'un semigroupe C_0 sur $\mathcal{X}$ alors A est fermé de domaine dense. Réciproquement, si A est fermé de domaine dense, il existe des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il engendre un semi-groupe sur X, elles sont données par les deux théorèmes fondamentaux suivants.

Théorème 1.3: (Hille-Yosida [Paz12])

Soit A un opérateur fermé de domaine dense.

Une condition nécessaire et suffisante pour que A engendre un semigroupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de classe C_0 est qu'il existe deux constantes réelles M et ω telles que :

$$\forall \lambda > \omega; \quad \lambda \in \rho(A), \quad \text{et} \quad \|R(\lambda, A)^n\|_{L(X)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \quad n = 1, 2, ..$$

Dans ce cas, on a $\|T(t)\|_{L(X)} \leq Me^{t\omega}; \quad \forall t \geq 0.$

Théorème 1.4: (Lummer-Phillips [Paz12])

Soit A un opérateur de domaine dense et m-dissipatif, alors A engendre un semi-groupe C_0 de contractions.

Comme corollaire de ce théorème, nous avons le résultat suivant :

Corollaire 1.1:

Soit A un opérateur fermé de domaine dense.

Si A et A^* sont dissipatifs, alors A engendre un semi-groupe C_0 de contractions.

Théorème 1.5: ([Paz12])

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et A un générateur infinitésimal d'un semi-groupe $T(t)$ fortement continu, alors $T^*(t)$ est aussi un semi-groupe C_0 de générateur A^*.

Enfin, le théorème suivant affirme qu'un générateur de semi-groupe perturbé par un opérateur linéaire borné, est aussi générateur d'un semi-groupe.

Théorème 1.6: ([Paz12])

Soit $\mathcal{X}$ un espace de Banach et A un générateur infinitésimal d'un semi-groupe $T(t)$ de classe C_0 sur $\mathcal{X}$, tel que $\|T(t)\|_{L(X)} \leq Me^{\omega t}$.

Si B est un opérateur linéaire borné dans $\mathcal{X}$ alors $A+B$ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe $S(t)$ de classe C_0 sur $\mathcal{X}$, tel que $\|S(t)\|_{L(X)} \leq Me^{(\omega+M\|B\|)t}$.

1.3.7 Groupe d'opérateurs bornés

Définition 1.13:

Soit $\mathcal{X}$ un espace de Banach. Un groupe C_0 d'opérateurs bornés sur $\mathcal{X}$ est une famille $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ d'opérateurs vérifiant :

i) $T(t)$ est un opérateur borné de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$

ii) $T(t+s) = T(t)T(s) \quad \forall s,t \in \mathbb{R}$, et $T(0) = I_X$.

iii) $\lim_{t\to 0} T(t)x = x \quad , \forall x \in \mathcal{X}$.

Théorème 1.7: (Stone [Paz12])

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.

A est générateur d'un groupe d'opérateurs unitaires sur $\mathcal{H}$ si et seulement si A est anti-adjoint.

Définition 1.14:

Un opérateur borné A défini sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, est unitaire si et seulement si $A^* = A^{-1}$.

1.4 Problèmes d'évolution

Dans cette section, nous rappelons quelques résultats standards concernant l'existence et la régularité des solutions pour deux classes de problèmes d'évolution.

1.4.1 Cas linéaire

Considérons le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \forall t \geq 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Le théorème suivant assure l'existence globale des solutions de ce problème dans le cas où l'opérateur A est m-dissipatif.

Théorème 1.8: (Hille-Yosida-Phillips [Har91])

Soit $\mathcal{X}$ un Banach et A un opérateur m-dissipatif dans $\mathcal{X}$, de domaine dense, alors il existe un unique semi-groupe de contractions $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ tel que :

Pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, $u(t) = T(t)x$ est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} u \in C([0,\infty), \mathcal{D}(A)) \cap C^1([0,\infty), X) \\ \dot{u}(t) = Au(t), \forall t \geq 0 \\ u(0) = x \end{cases} \tag{1.2}$$

1.4.2 Cas des problèmes semi-linéaires

Soit maintenant le problème semi-linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = Au(t) + f(u(t), t), \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \tag{1.3}$$

où l'opérateur A est générateur infinitésimal d'un semi-groupe e^{tA} de classe C_0 sur l'espace de banach $\mathcal{X}$ et $f : X \times [t_0, t_1] \to X$ une fonction donnée.

Définition 1.15:

Soit $t_1 > t_0$. Une fonction $u : [t_0, t_1] \to X$ est une solution faible de (1.3) sur $[t_0, t_1]$ si et seulement si $f(u(.), .) \in L^1([t_0, t_1]; X)$ et $u(.)$ satisfait la formule de la variation de la constante

$$u(t) = e^{(t-t_0)A}u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} f(u(s), s)ds. \tag{1.4}$$

Définition 1.16:

Une fonction $u(.) : [t_0, t_1] \to X$ est une solution forte (classique) de (3) sur $[t_0, t_1]$ si et seulement si $u(.)$ est continue sur $[t_0, t_1]$, continûment différentiable sur $]t_0, t_1[$, $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ pour $t_0 \leq t \leq t_1$, et (1.4) est satisfaite sur $[t_0, t_1]$.

Nous allons énoncer le résultat classique suivant qui assure l'existence et l'unicité des solutions faibles de (1.3) dans le cas où f est lipschitzienne.

Théorème 1.9: ([Paz12])

Soit $f : \mathcal{X} \times [0, T] \to \mathcal{X}$ une fonction continue en $t \in [0, T]$, uniformément lipschitzienne en $u \in \mathcal{X}$.

Si A est générateur infinitésimal d'un semi-groupe C_0 sur $\mathcal{X}$, alors :

Pour chaque $u_0 \in \mathcal{X}$, le problème (1.3) admet une unique solution faible $u(.) \in C([t_0, T]; \mathcal{X})$.

De plus, l'application $u_0 \to u(.)$ est Lipschitz continue de $\mathcal{X}$ dans $C([t_0, T]; \mathcal{X})$.

Remarque:

Le fait que la fonction f soit uniformément lipschitzienne dans le théorème précédent, assure l'existence globale sur $[t_0, T]$ de la solution faible de (1.3).

Dans le cas où f est supposée seulement localement lipschitzienne en u, uniformément en t sur tout intervalle borné, on a la version locale du théorème précédent.

Théorème 1.10: ([Paz12]

Soit $f : \mathcal{X} \times [0, \infty[\to \mathcal{X}$ continue en t pour $t \geq 0$, uniformément lipschitzienne en t, sur tout intervalle borné, et localement lipschitzienne en $u \in \mathcal{X}$. Si A est générateur infinitésimal d'un semi-groupe C_0 sur $\mathcal{X}$, alors :

Pour chaque $u_0 \in \mathcal{X}$, il existe un $t_{\max} \leq \infty$, tel que le problème (1.3), (avec $t_0 = 0$) admet une solution faible $u(.)$ sur $[0, t_{\max}[$. De plus, si $t_{\max} < +\infty$ alors : $\lim_{t \to t_{\max}} \|u(t)\|_{\mathcal{X}} = +\infty$.

En pratique, pour montrer que les solutions de (1.3) sont globales, on montre qu'elles sont bornées. D'autre part, le théorème précédent assure la continuité des solutions par rapport aux conditions initiales. Il est à noter que cette propriété sera utile pour étudier le comportement des solutions de (1.3) lorsque t tend vers l'infini.

Notons qu'en général, si la fonction f satisfait juste les conditions du théorème 1.9 ou celles du théorème 1.10, la solution faible de (1.3) peut ne pas être une solution classique. Le théorème suivant donne une condition suffisante qui permet de conclure sur la régularité de la solution faible de (1.3).

Théorème 1.11: [Paz12])

Soit A un générateur infinitésimal d'un semigroupe C_0 sur $\mathcal{X}$. Si $f : \mathcal{X} \times \mathbb{R}^+ \to \mathcal{X}$ est continûment différentiable de $\mathcal{X} \times [t_0, t_1]$ dans $\mathcal{X}$, alors la solution faible de (1.3) avec $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, est aussi une solution classique de (1.3).

1.5 Stabilité des systèmes linéaires.

Dans toute cette section, l'opérateur A est générateur infinitésimal d'un semi-groupe $S(t)$. On va commencer par rappeler quelques résultats et définitions concernant la stabilité des semi-groupes linéaires.

Définition 1.17: Différents types de stabilité

i) Le semi-groupe $S(t)$ est dit fortement stable si et seulement si $\lim_{t \to +\infty} S(t)x = 0; \quad \forall x \in \mathcal{X}$.

ii) Il est dit exponentiellement (ou uniformément) stable $\operatorname{silim}_{t \to +\infty} \|S(t)\|_{L(\mathcal{X})} = 0$

ou, d'une manière équivalente, s'il existe deux constantes M et $\alpha > 0$ telles que $\|S(t)\|_{L(\mathcal{X})} \leq Me^{-\alpha t}$.

iii) Enfin, on dit que le semi-groupe $S(t)$ est faiblement stable si,

$\lim_{t \to +\infty} \langle S(t)x, y \rangle_H = 0, \quad \forall x, y \in \mathcal{X}$.

Pour la dernière définition, $\mathcal{H}$ est supposé un espace de Hilbert et $\langle ., . \rangle$ son produit scalaire.

Il est bien connu que dans le cas où l'espace $\mathcal{X}$ est de dimension finie, nous avons les équivalences suivantes i) $\iff ii) \iff iii)$

En revanche, lorsque $\mathcal{X}$ est de dimension infinie, on a seulement les implications suivantes $ii) \Rightarrow i) \Rightarrow iii)$. En effet, il est possible de construire des exemples de systèmes fortement stable sans l'être exponentiellement (voir par exemple [Tri89] [Hua85].)

1.5.1 Stabilité forte

Dans le cas particulier où le semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de contractions sur un espace de Banach $\mathcal{X}$, pour établir que les trajectoires sont pré-compactes dans $\mathcal{X}$, il suffit de montrer qu'il existe un $\lambda > 0$ tel que la résolvante $R(\lambda, A)$ soit compacte (ceci est vrai même pour les semi-groupes de contractions non linéaires, à condition que $0 \in R(A)$ (voir par exemple le théorème 3 de [DS73]), et on montre dans ce cas que pour tout $\phi_0 \in \mathcal{D}(A)$, l'ensemble ω-limite correspondant $\omega(\phi_0)$ est contenu dans $\mathcal{D}(A)$, ce qui permet de mieux le caractériser, en particulier, lorsqu'il existe une fonction de Lyapunov différentiable. Le principe d'invariance de LaSalle s'énonce alors comme suite :

Proposition 1.3:

S'il existe une fonction V telle que $\frac{dV}{dt} \leq 0$ le long de la trajectoire de $S(t)$, et un réel $\lambda > 0$ tel que la résolvante $R(\lambda, A)$ soit compacte. Alors, pour tout $\phi_0 \in \mathcal{X}$, i) la trajectoire $\{S(t)(\phi_0)\}_{t\geq 0}$ est pré-compacte dans $\mathcal{X}$; ii) si $\phi_0 \in \mathcal{D}(A)$, l'ensemble $\omega(\phi_0)$ est contenu dans M, où M est le plus grand sous ensemble invariant de $S = \left\{\phi \in \mathcal{D}(A) / \frac{dV}{dt}(\phi(t)) = 0; \quad \forall t \geq 0\right\}$

Remarque:

En pratique, pour montrer que les solutions convergent vers le point d'équilibre 0, on montre que l'ensemble M est réduit à $\{0\}$.

Outre cette approche, basée sur le principe d'invariance, il existe une autre approche relativement récente, et qui est basée sur l'analyse spectrale de l'opérateur A.

Théorème 1.12: [Hua93]

Soit $\mathcal{X}$ un espace de Banach, et A générateur infinitésimal d'un semi-groupe e^{tA} de classe C_0 et uniformément borné sur $\mathcal{X}$ (i.e $\left\|e^{tA}\right\|_{L(\mathcal{X})} \leq M; \quad \forall t \geq 0$).

Si $\Re e\lambda < 0$ pour tout $\lambda \in \sigma(A)$, alors $\lim_{t\to\infty} \left\|e^{tA}x\right\|_{\mathcal{X}} = 0; \forall x \in \mathcal{X}$. Réciproquement, si e^{tA} est fortement stable, alors il est uniformément borné et $\Re e(\lambda) \leq 0$, pour tout $\lambda \in \sigma(A)$. De plus, seuls les éléments du spectre continu de A peuvent être imaginaires purs.

1.5.2 Stabilité exponentielle (ou uniforme)

Dans cette section, on rappelle les résultats essentiels sur la stabilité uniforme d'un semi-groupe. Rappelons tout d'abord que, dans le cas de la dimension finie, on peut caractériser la stabilité exponentielle d'un semi-groupe à l'aide du spectre de son générateur infinitésimal : e^{tA} est exponentiellement stable si et seulement si $\sigma_0(A) = \sup\{\Re e\lambda; \lambda \in \sigma(A)\} < 0$. Cette condition, bien que nécessaire, ne suffit pas en général pour avoir la stabilité exponentielle d'un semi-groupe en dimension infinie (voir par exemple [Hua85], [PZ81]), néanmoins elle est nécessaire et suffisante pour une classe de semi-groupes.

Définition 1.18:

On appelle ordre d'un semi-groupe e^{tA} le nombre réel $\omega_0(A)$ défini par

$$\omega_0(A) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln\left(\left\|e^{tA}\right\|_{L(X)}\right)}{t}.$$

Par la théorie des semi-groupes (voir [Bal12]), on montre que $\omega_0(A) < +\infty$ et que $\sigma_0(A) \leq \omega_0(A)$, et dans le cas où $\omega_0(A)$ est fini, on a le résultat suivant liant $\omega_0(A)$ et la stabilité exponentielle du semi-groupe e^{tA} (voir [Bal12])

Proposition 1.4: [CDKP87]

Soit e^{tA} un semi-groupe C_0, tel que $\omega_0(A) < \infty$. On a alors

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists M_\epsilon / \quad \left\|e^{tA}\right\|_{L(X)} \leq M_\epsilon e^{(\omega_0+\epsilon)t}.$$

En particulier, si $\omega_0 < 0$ on obtient la stabilité exponentielle du semi-groupe avec un taux de décroissance qui ne peut être meilleur que $\omega_0 t$.

Dans le cas où $\sigma_0 = \omega_0$, la condition $\sigma_0 < 0$ entraîne la stabilité exponentielle du semi-groupe. On retrouve alors la condition nécessaire et suffisante de stabilité exponentielle en dimension finie.

Dans le cas où $\omega_0(A) = -\infty$, on a

$\forall N > 0; \exists M_N > 0 / \left\|e^{tA}\right\|_{L(X)} \leq M_N e^{-Nt}$, et la stabilité exponentielle est ainsi établie.

Pour conclure sur la stabilité exponentielle d'un semi-groupe, il suffit d'avoir $\|S(t)\|_X < 1$, pour un certain $t > 0$.

Dans ce qui suit, on énonce deux théorèmes fondamentaux pour montrer la stabilité exponentielle d'un semi-groupe.

Théorème 1.13: ([Paz12])

Soit A un générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $T(t)$. Si pour un certain $p, 1 \leq p < \infty$ on a

$$\int_0^\infty \|T(t)x\|_X^p dt < \infty, \text{ pour tout } \quad x \in X.$$

Alors, il existe deux constantes $M \geq 1$ et $\mu > 0$ telles que

$$\|T(t)\|_{L(X)} \leq M e^{-\mu t}.$$

Le théorème précédent est souvent utilisé avec $p = 2$. On se ramène alors à la recherche de multiplicateur de manière à avoir une bonne majoration de $\|T(t)x\|_X^2$, pour t assez grand. Cependant, il n'est pas toujours évident de trouver le bon multiplicateur (voir par exemple le système étudié dans [8]), le théorème suivant dû à F.L.Huang ([Hua85]) peut être utile dans certains cas, surtout pour les problèmes de dimension un en espace (équation de poutres, équation de thérmoélasticité, équation des ondes en dimension un,..), où le calcul de la résolvante est parfois relativement simple.

Théorème 1.14: ([Ben78])

Soit e^{tA} un semi-groupe C_0 sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, tel que

$$\exists M > 0; \left\|e^{tA}\right\|_{L(H)} \leq M \quad (t \geq 0).$$

Alors e^{tA} est exponentiellement stable si et seulement si

i) $\{i\omega : \quad -\infty < \omega < +\infty\} \subset \rho(A)$,

ii) $\exists M_0 > 0; \quad \left\|(i\omega - A)^{-1}\right\|_{L(H)} \leq M_0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$.

Pour finir cette section, on présente deux théorèmes de perturbation compacte, l'un est dû à R. Triggiani, et l'autre à D.L .Russell. Ces théorèmes sont parfois utiles pour montrer qu'un semi-groupe est uniformément stable ou pas. Le premier théorème est parfois utile pour montrer la stabilité uniforme, tandis que le deuxième est plutôt utilisé pour prouver la non stabilité uniforme.

Théorème 1.15: (R. Triggiani [Tri89])

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, et soit A un générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $S_A(t)$ fortement stable. Soit B un opérateur compact de $L(H)$ et $S_{A+B}(t)$ le semi-groupe engendré par $A + B$. Si $S_{A+B}(t)$ est exponentiellement stable alors $S_A(t)$ est exponentiellement stable.

Théorème 1.16: (D.L. Russell [Rus75])

Soit $\mathcal{X}$ un espace de Banach de dimension infinie, et soit C un générateur d'un groupe fortement continu d'opérateurs bornés sur $\mathcal{X}$. Alors, il ne peut exister d'opérateurs linéaires compacts D_1, D_2, de nombres réels strictement positifs T_1, T_2 et de réels $0 \leq \gamma_1 < 1, 0 \leq \gamma_2 < 1$ tels que les deux groupes $S_1(t)$ et $S_2(t)$ engendrés respectivement par $C + D_1$, et $C + D_2$ satisfont simultanément

$$\|S_1(t)\|_{L(X)} \leq \gamma_1; \quad t \geq T_1,$$

et

$$\|S_2(t)\|_{L(X)} \leq \gamma_2; \quad t \leq -T_2.$$

Ce théorème est utilisé, dans certains cas, pour prouver la non stabilité uniforme, de la manière suivante : étant donné A générateur d'un groupe d'opérateurs bornés, et B un opérateur linéaire compact, pour montrer que le groupe $S_{A+B}(t)$ engendré par $A + B$ n'est pas uniformément stable, on exhibe un opérateur linéaire compact $\tilde{B}$ tel que

$$\|S_{A+B}(t)\|_{L(X)} = \left\|S_{A+\tilde{B}}(-t)\right\|_{L(X)},$$

et le théorème permet alors de conclure.

Par exemple, dans le cas où A est anti-adjoint ($A^* = -A$), on peut prendre $\tilde{B} = -B^*$, en effet

$$\|S_{A+B}(t)\| = \left\|S_{(A+B)^*}(t)\right\| = \left\|S_{-(A-B^*)}(t)\right\| = \left\|S_{(A-B^*)}(-t)\right\| = \left\|S_{(A+\tilde{B})}(-t)\right\|, \forall t \in \mathbb{R}.$$

1.6 Stabilisation

La stabilisation par retour d'état constitue l'un des principaux objectifs de la théorie du contrôle. Dans cette section on présente quelques rappels des définitions et principaux résultats concernant ce problème. Pour cela, considérons le système linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{\phi}(t) = A\phi(t) + Bu(t) \\ \phi(0) = \phi_0 \in \mathcal{H}, \end{cases} \tag{1.5}$$

où l'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow H$ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe C_0 sur un espace de Hilbert H (espace des états), et $B : U \longrightarrow H$ un opérateur linéaire appelé opérateur de contrôle, U étant un espace de Hilbert (espace des commandes). On distinguera deux classes de systèmes suivant que l'opérateur B est borné (ce qui correspond au cas du contrôle distribué) ou non (ce qui correspond au cas du contrôle local).

1.6.1 Cas où l'opérateur de contrôle B est borné

Définition 1.19:

Considérons le système (1.5) avec $B \in \mathcal{L}(U, H)$, ce système est dit faiblement (resp.fortement, exponentiellement) stabilisable, s'il existe $F \in \mathcal{L}(H, U)$ tel que le semi-groupe engendré par $A + BF$ est faiblement, (resp. fortement, exponentiellement) stable.

Le problème de la stabilisation du système (1.5), avec $B \in \mathcal{L}(U, H)$, a fait l'objet de plusieurs études qui ont donné des résultats intéressants. En général, ces résultats se basent sur trois approches différentes.

- La première, utilise le résultat de la décomposition canonique des semi-groupes de contractions dû à Nagy-Foias ([NFBK10]) . Cette méthode a permis d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilisation faible du système (1.5) dans le cas où le semi-groupe engendré par A est contractif, (voir C. Benchimol dans[Ben78]).
- La seconde approche, est basée sur la décomposition de l'espace des états, moyennant celle du spectre du générateur A, dans le cas où le sous espace dans lequel le semi-groupe restreint est exponentiellement stable est de codimension finie (voir R. Triggiani dans ([Tri75]).
- La troisième approche, est basée sur le principe d'invariance de LaSalle généralisé en dimension infinie, (voir J. M. Ball dans ([BS79]) et M. Slemrod dans ([Sle89]).

Par ailleurs, le problème de stabilisabilité est lié à un autre problème celui de la contrôlabilité.

Définition 1.20:

Le système (1.5) est dit approximativement contrôlable sur un intervalle $[t_0, t_1]$ si, pour tout $\epsilon > 0$, et $(x_0, x_1) \in \mathcal{H} \times H$, il existe une commande admissible $u(t) \in L^2(t_0, t_1)$ telle que :

$$\|\phi(t_1, t_0, u) - x_1\| \leq \epsilon.$$

($\phi(t, t_0, u)$ étant la solution de (1.5) correspondante à $\phi(t_0) = x_0$.)

-Le système est dit exactement contrôlable sur $[t_0, t_1]$ si $\epsilon = 0$.



Remarques:

- Lorsque l'espace des états $\mathcal{H}$ est de dimension finie, on montre que les deux définitions précédentes coïncident.
- En dimension finie, le système (1.5) est stabilisable par retour d'état si et seulement si les modes instables du système sont contrôlables ((1.5) contrôlable implique (1.5) stabilisable) de plus, le spectre du système en boucle fermée peut être choisi arbitrairement.
- En dimension infinie, cette implication n'est plus vraie en général (voir l'exemple donné dans [Tri89]) de système approximativement contrôlable sans être stabilisable).
- Dans le cas de semi-groupes de contractions, il a été démontré dans ([Ben78]) que le fait que les modes instables du système soient contrôlables assure seulement la stabilisation faible de celui-ci.

Chapitre 2

Un nouveau feedback pour la stabilité exponentielle et forte des systèmes semi-linéaires avec des estimations générales de décroissance.

2.1 Introduction

L'équation de Schrödinger non linéaire non homogène est un phénomène naturel en optique non linéaire lorsqu'il s'agit de la propagation de faisceaux laser. Un faisceau laser préliminaire peut être envoyé pour créer un canal avec une densité d'électrons réduite afin d'obtenir une propagation stable à haute puissance dans le plasma. Cela permet en fin de compte de réduire la non-linéarité dans le canal. Gill [Gil00] et Tripathi et Liu [LT94] fournissent des exemples de cette approche. Dans ce scénario, la propagation du faisceau peut être expliquée par l'équation suivante

$$i\partial_t u + \Delta u + K(x)|u|^{\alpha}u = 0,$$

qui représente l'équation non linéaire non homogène de Schrödinger et est un exemple typique de système de contrôle semi-linéaire dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ donné par l'équation d'évolution suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + u(t)Ny(t) \\ y(0) = y_0 \in \mathcal{H}, \end{cases} \tag{2.1}$$

où A est un opérateur non borné de domaine $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}$ et génère un semi-groupe de contraction fortement continu $(S(t))_{t\geq 0}$ sur un espace de Hilbert de dimension infinie $\mathcal{H}$ (espace d'état) dont la norme et le produit scalaire sont désignés, respectivement, par $\|.\|$ et $\langle ., .\rangle$, N est un opérateur non linéaire de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ localement Lipschitzien et séquentiellement continu tel que $N(0) = 0$, la fonction de contrôle $u(.)$ représente le contrôle scalaire.

2.2 Choix du contrôle

Lorsque l'on cherche à stabiliser un système de contrôle, l'une des principales approches consiste à rechercher un contrôle (feedback) qui puisse garantir que le système est bien posé et que la solution converge vers zéro au fil du temps. Ce contrôle est généralement représenté par $u(y(t))$ et doit être soigneusement choisi pour atteindre la stabilisation souhaitée.

En calculant formellement le taux de variation temporelle de l'énergie $\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2$ et en utilisant le fait que le semi-groupe est de contraction de sorte que $\mathcal{R}e\langle Ay, y\rangle \leq 0$ pour tout $y \in \mathcal{D}(A)$, nous obtenons l'inégalité,

$$\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 \leq 2\mathcal{R}e\big(u(t) < y(t); Ny(t) > \big); \forall t \in [0,T].$$

Pour que l'énergie soit décroissante, nous considérons la famille de contrôles,

$$\text{pour } r \geq 0, \quad u_r\left(y(t)\right) = -\frac{\langle y(t), Ny(t)\rangle \mid \langle y(t), Ny(t)\rangle \mid^r}{\|y(t)\|^r}, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{2.2}$$

Ce contrôle permette de dissiper l'énergie tout en satisfaisant l'inégalité suivante :

$$\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 \leq -2\frac{|\langle y(t), Ny(t)\rangle|^{r+2}}{\|y(t)\|^r}; \forall t \in [0,T]. \tag{2.3}$$

Dans notre famille de contrôle, il existe un cas particulier lorsque $r = 0$, et il est appelé le contrôle quadratique $u_0(y(t)) = -\langle y(t), By(t)\rangle$. Plusieurs travaux ont étudié en profondeur ce contrôle pour obtenir une stabilisation faible ou forte. Dans Ball et Slemrod (voir [Bal77] et [BS79], p. 175), il a été montré que si $N = B$ est un opérateur linéaire compact et $S(t)$ est un semi-groupe de contractions tel que :

$$\langle BS(t)y, S(t)y\rangle = 0, \forall t \geq 0 \Longrightarrow y = 0, \tag{2.4}$$

alors le contrôle $u_0\left(y(t)\right)$ stabilise faiblement le système (2.1).

Dans [Ouz07] et [Ouz08], Ouzahra a établi que si (2.4) est remplacé par :

$$\int_0^T |\langle BS(t)y, S(t)y\rangle| dt \geq \delta\|y\|^2, \forall y \in \mathcal{H}$$

(pour certains $T, \delta > 0$), alors le contrôle $u_0(y(t))$ stabilise fortement le système (2.1). Plus précisément, l'état satisfait l'estimation

$$\|z(t)\|^2 = O\left(\frac{1}{t}\right), \text{ as } t \longrightarrow +\infty.$$

Berrahmoune dans ([Ber99]) a obtenu un résultat de stabilisation forte en utilisant le contrôle $u_0(t)$, et l'estimation suivante $\|y(t)\| = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ a été obtenue.

Dans ce chapitre, nous étudions la stabilisation forte et exponentielle du système (2.1) à l'aide de la commande (2.2) pour tous les $r \geq 0$, en mettant en œuvre la commande (2.2), nous pouvons améliorer

l'estimation fournie par $u_0(y(t))$ dans [BS79], [Ouz07], [Ouz08] et [Ber99].

2.3 Existence et unicité des solutions

Avec le contrôle (2.2), le système (2.1) devient

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + F_r(t, y(t)) \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{2.5}$$

où $F_r(t, y(t)) = -\frac{\langle y(t), Ny(t)\rangle |\langle y(t), Ny(t)\rangle|^r}{\|y(t)\|^r} Ny(t)$ if $y \neq 0$.

Dans cette section, nous allons discuter l'existence et l'unicité de la solution du système (2.5). Tout d'abord, nous devons démontrer que l'état du système est décroissant. Pour ce faire, nous intégrons l'inégalité (2.3) sur l'intervalle [s, t], il s'ensuit que

$$\|y(t)\|^2 - \|y(s)\|^2 \leq -2 \int_s^t \frac{|\langle y(\tau), Ny(\tau)\rangle|^{r+2}}{\|y(\tau)\|^r} d\tau, \quad \forall t \geq s \geq 0,$$

par conséquent $\|y(t)\| \leq \|y_0\|, \forall t \geq 0$.

Proposition 2.1:

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, A un générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions $S(t)$ et N un opérateur non linéaire localement Lipschitzien et faiblement séquentiellement continu, alors pour tout $r \in [-2, +\infty[$ et $y_0 \in \mathcal{H}$, le système (2.5) possède une unique solution globale $y(t)$ définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$, qui est donnée par la formule de variation de la constante suivante :

$$y(t) = S(t)y_0 - \int_0^t S(t-s)F_r(s, y(s))ds.$$

Preuve

Nous allons considérer le système (2.5) et démontrer que la fonction $F_r : y \mapsto F_r(t, y(t))$ est localement lipschitzienne de $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{H}$.

Soit $x \in \mathcal{H}$ et soit $R > 0$, $L_N > 0$ tel que pour tous $z, y \in \mathcal{H}$ tels que $\|x - y\| \leq R$ et $\|x - z\| \leq R$, on a $\|Nz - Ny\| \leq L_N\|z - y\|$. Le développement ci-dessous montre clairement que l'on peut supposer que $x = 0$ et $0 < \|y\| \leq \|z\|$.

Considérons les deux fonctions suivantes : $f_1(y) = \frac{|\langle y, Ny\rangle|^r}{\|y\|^r}$ et $f_2(y) = \langle y, Ny\rangle Ny$.

Nous pouvons donc conclure que

$$\|F_r(t, y) - F_r(t, z)\| = \|f_1(y)f_2(y) - f_1(z)f_2(z)\|$$

$$\leq L_N^r \|y\|^r \|f_2(y) - f_2(z)\| + L_N^2 \|z\|^3 \|f_1(y) - f_1(z)\|.$$

Il est facile de majorer la valeur de $L_N^r\|y\|^r \|f_2(y) - f_2(z)\|$, en fait,

$$\begin{aligned}\|f_2(y)-f_2(z)\| &= \|\langle y,Ny\rangle Ny-\langle z,Nz\rangle Nz\|\\ &\le (L_N\|y\|+2L_N\|z\|)\,L_N\|y\|\|y-z\|\\ &\le 3L_N^2\|y\|^2\|y-z\|.\end{aligned}$$

par conséquent

$$L_N^r\|y\|^r\|f_2(y)-f_2(z)\| \le 3L_N^{r+2}\|y\|^{r+2}\|y-z\|. \tag{2.6}$$

Il existe deux cas pour majorer $\|f_1(y)-f_1(z)\|$, en utilisant la fonction réelle $t\mapsto t^r$, qui vérifie les propositions suivantes.

Si $r\geqslant 1$, alors $|\|z\|^r-\|y\|^r|\le r\|z\|^{r-1}|\|z\|-\|y\||$.

Si $r<1$, alors $|\|z\|^r-\|y\|^r|\le|\ r\ |\ \|y\|^{r-1}|\|z\|-\|y\||$.

Premier cas : Si $r\geqslant 1$.

Dans ce cas on a $\|f_1(y)-f_1(z)\|\le r\left|\frac{|\langle z,Nz\rangle|}{\|z\|}\right|^{r-1}\left|\frac{|\langle y,Ny\rangle|}{\|y\|}-\frac{|\langle z,Nz\rangle|}{\|z\|}\right|$, et puisque,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\langle y,Ny\rangle}{\|y(t)\|}-\frac{\langle z,Nz\rangle}{\|z(t)\|}\right| &= \left|\frac{\|z(t)\|\langle y,Ny\rangle-\|y(t)\|\langle z,Nz\rangle}{\|y(t)\|\|z(t)\|}\right|\\ &\le \frac{\|y\|(L_N\|y\|)\ |\ \|z\|-\|y\|\ |\ +\|y(t)\|\,(L_N\|z\|+L_N\|y\|)\,\|z-y\|}{\|y(t)\|\|z(t)\|}\\ &\le \frac{L_N\|y\|^2\ |\ \|z\|-\|y\|\ |\ +2L_N\|y(t)\|^2\|z-y\|}{\|y(t)\|\|z(t)\|}\\ &\le \frac{3L_N\|y\|}{\|z\|}\|z-y\|,\end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned}\|f_1(y)-f_1(z)\| &\le r\left|\frac{|\langle z,Nz\rangle|}{\|z\|}\right|^{r-1}\frac{3L_N\|y\|}{\|z\|}\|z-y\|\\ &\le r(L_N\|z\|)^{r-1}\frac{3L_N\|y\|}{\|z\|}\|z-y\|\\ &\le \frac{3rL_N^r\|y\|^r}{\|z\|}\|z-y\|.\end{aligned}$$

par conséquent $\quad L_N^2\|z\|^3\|f_1(y)-f_1(z)\|\le 3rL_N^{2+r}\|y\|^{r+2}\|z-y\|.$ (2.7)

Par les inégalités (2.6) et (2.7) présentées ci-dessous, nous pouvons conclure que

$$\|F_r(t,y)-F_r(t,z)\|\le 3L_N^{r+2}\,(1+r)\,\|y_0\|^{r+2}\|y-z\|.$$

Deuxième cas : Si $-2\leqslant r\leqslant 1$.

On a $\|f_1(y)-f_1(z)\|\le\frac{3\ |\ r\ |\ L_N^r\|y\|^r}{\|z\|}\|z-y\|$,

par conséquent

$$L_N^2\|z\|^3\|f_1(y)-f_1(z)\|\le 3\ |\ r\ |\ L_N^{r+2}\|y\|^{r+2}\|z-y\|. \tag{2.8}$$

On utilisant les inégalités (2.6) et (2.8), nous pouvons conclure que

$$\|F_r(t,y) - F_r(t,z)\| \leq 3L_N^{r+2}(1+\mid r \mid)\|y_0\|^{r+2}\|y-z\|.$$

Nous avons prouvé que pour tout $r \geqslant -2$, $F_r(t; y(t))$ est localement Lipschitzienne en y, uniformément en t sur des intervalles bornés. Il s'ensuit (voir [Paz12], p.185) que le système (2.5) possède une unique solution $y(t)$ définie sur un intervalle maximal $[0, t_{\max}[$, qui est donnée par la formule de variation de la constante suivante :

$$y(t) = S(t)y_0 - \int_0^t F_r(s, y(s))S(t-s)Ny(s)ds.$$

Pour montrer que $t_{\max} = +\infty$, il suffit de montrer que pour chaque $T > 0$, la solution $y(t)$ est bornée par une constante indépendante de T. Pour ce faire, nous discutons deux cas :
Pour $y_0 \in \mathcal{D}(A)$, la solution $y(t)$ est différentiable (voir [Paz12], p.189), et comme $S(t)$ est un semi-groupe de contractions (donc A est dissipatif), on peut écrire

$$\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 \leq -2\frac{|\langle y(t), Ny(t)\rangle|^{r+2}}{\|y(t)\|^r}; \forall t \in [0,T].$$

En intégrant cette dernière inégalité sur l'intervalle [s, t], il s'ensuit que

$$\|y(t)\|^2 - \|y(s)\|^2 \leq -2\int_s^t \frac{|\langle y(s), Ny(s)\rangle|^{r+2}}{\|y(s)\|^r}ds, \forall t \geq s \geq 0.$$

par conséquent $\|y(t)\| \leq \|y_0\|, \forall t \geq 0$.
Si $y_0 \notin \mathcal{D}(A)$, il existe une suite $\left(y_0^n\right)_n$ d'élément de $\mathcal{D}(A)$ converge vers y_0 dans $\mathcal{H}$ puisque $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$. Pour tout $t \in [0,T]$ et pour tout entier $\mathcal{H}$, nous savons, d'après le premier cas, que $\|y^n(t)\| \leq \left\|y_0^n\right\|$. Nous concluons que $\|y(t)\| \leq \|y_0\|, \quad \forall t \in [0, t_{\max}[$, donc $t_{\max} = +\infty$.

2.4 Stabilisation forte et estimation de la décroissance.

Proposition 2.2:

Soient A un générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions $S(t)$ et $\mathcal{H}$ non linéaire localement Lipschitzien.

Alors, pour tout $r \geqslant 0$, l'état du système (2.5) satisfait au voisinage de $+\infty$, l'estimation de la décroissance suivante, pour $\tau > 0$,

$$\int_0^T |\langle NS(s)y(t), S(s)y(t)\rangle| \mathrm{d}s = O\left(\|y(\tau)\|^{\frac{r}{r+2}}\left(\int_0^T \frac{|\langle y(s+\tau), Ny(s+\tau)+c\rangle|^{r+2}}{\|y(s+\tau)\|^r}\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{r+2}}\right).$$

Preuve

En utilisant la proposition (2.1), nous déduisons que le système (2.5) admet une unique solution globale donnée par la formule suivante :

$$y(t) = S(t)y_0 - \int_0^t \frac{\langle y(s), Ny(s)\rangle \mid \langle y(s), Ny(s)\rangle \mid^r}{\|y(s)\|^r} S(t-s)Ny(s)\mathrm{d}s,$$

On a $S(t)$ est un semi-groupe de contractions, donc pour tout $t \in [0,T]$, on a

$$\begin{aligned}\|y(t) - S(t)y_0\| &\leqslant \int_0^T \frac{|\langle y(s), Ny(s)\rangle|^{r+1}}{\|y(s)\|^r}(\|Ny(s))\|\mathrm{d}s \\ &\leqslant L_N \int_0^T \frac{|\langle y(s), Ny(s)\rangle|^{r+1}}{\|y(s)\|^r}\|y(s)\|\ \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Nous pouvons appliquer l'inégalité de Hölder

$$p = \frac{r+2}{r+1} \quad , q = r+2 \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right), \quad r \in]-1+\infty[$$

$$\begin{aligned}\|y(t) - S(t)y_0\| &\leqslant L_N T^{\frac{1}{r+2}} \left(\int_0^T \left(\frac{|\langle y(s), Ny(s)\rangle|^{r+1}}{\|y(s)\|^r}\|y(s)\|\right)^{\frac{r+2}{r+1}} \mathrm{d}s\right)^{\frac{r+1}{r+2}} \\ &\leqslant L_N T^{\frac{1}{r+2}} \left(\int_0^T \frac{|\langle y(s), Ny(s)\rangle|^{r+2}}{\|y(s)\|^r}\|y(s)\|^{\frac{2}{r+1}}\mathrm{d}s\right)^{\frac{r+1}{r+2}}.\end{aligned}$$

On a $r \geqslant 0$, donc $\frac{2}{r+1} > 0$ et puisque$\|y(t)\| \leq \|y_0\|$ alors $\|y(t)\|^{\frac{2}{r+1}} \leq \|y_0\|^{\frac{2}{r+1}}$.

$$\text{Donc} \qquad \|y(t) - S(t)y_0\| \leqslant L_N T^{\frac{1}{r+2}} \|y_0\|^{\frac{2}{r+2}} \left(\int_0^T \frac{|\langle y(s), Ny(s)+\rangle|^{r+2}}{\|y(s)\|^r}\mathrm{d}s\right)^{\frac{r+1}{r+2}}. \tag{2.9}$$

D'après la relation

$\langle NS(t)y_0, S(t)y_0\rangle = \langle NS(t)y_0, S(t)y_0 - y(t)\rangle + \langle NS(t)y_0 - Ny(t), y(t)\rangle + \langle Ny(t), y(t)\rangle$,

Or $\|y(t)\| \leq \|y(0)\|, \forall t \in [0, t_{\max}[$, et $S(t)$ est un semi-groupe de contractions et N est localement Lipschitzienne,donc on trouve

$$|\langle NS(s)y_0, S(s)y_0\rangle| \leq 2L_N \|y_0\| \|y(t)) - S(t)y_0\| + \mid \langle Ny(s), y(s)\rangle \mid . \tag{2.10}$$

D'après (2.9), on a

$$|\langle NS(s)y_0, S(s)y_0\rangle| \leq 2L_N^2 T^{\frac{1}{r+2}} \|y_0\|^{\frac{r+4}{r+2}} \left(\int_0^T \frac{|\langle y(s), Ny(s)\rangle|^{r+2}}{\|y(s)\|^r}\mathrm{d}s\right)^{\frac{r+1}{r+2}} + \mid \langle Ny(s), y(s)\rangle \mid . \tag{2.11}$$

En remplaçant y_0 par $y(\tau)$ dans (2.11), on obtient

$$\begin{aligned}|\langle NS(s+\tau)y(\tau), S(s+\tau)y(\tau)\rangle| \leq 2L_N^2 T^{\frac{1}{r+2}} \|y(\tau)\|^{\frac{r+4}{r+2}} &\left(\int_0^T \frac{|\langle y(s+\tau), Ny(s+\tau)+c\rangle|^{r+2}}{\|y(s+\tau)\|^r}\mathrm{d}s\right)^{\frac{r+1}{r+2}} \\ &+ \mid \langle Ny(s+\tau), y(s+\tau)\rangle \mid .\end{aligned}$$

En intégrant la dernière inégalité sur l'intervalle $[0,T]$

$$\int_0^T |\langle NS(s+\tau)y(\tau), S(s+\tau)y(\tau)\rangle| \, ds \leq \int_0^T \langle Ny(s+\tau), y(s+\tau)\rangle \, ds$$

$$+2L_N^2 T^{\frac{1}{r+2}+1} \|y(\tau)\|^{\frac{r+4}{r+2}} \left(\int_0^T \frac{|\langle y(s+\tau), Ny(s+\tau)\rangle|^{r+2}}{\|y(s+\tau)\|^r} ds \right)^{\frac{r+1}{r+2}}. \tag{2.12}$$

En raison du fait que $\|y(s+\tau)\| \leq \|y(\tau)\|, \forall \tau \geq 0$, et l'inégalité de Hölder on a

$$\int_0^T \langle Ny(s+\tau), y(s+\tau)\rangle \, ds \leq T^{\frac{r+1}{r+2}} \|y(\tau)\|^{\frac{r}{r+2}} \left(\int_0^T \frac{\langle Ny(s+\tau), y(s+\tau)\rangle^{r+2}}{\|y(s+\tau)\|^r} ds \right)^{\frac{1}{r+2}},$$

donc (2.12) devient

$$\int_0^T |\langle NS(s+\tau)y(\tau), S(s+\tau)y(\tau)\rangle| \, ds \leq 2L_N^2 T^{\frac{1}{r+2}+1} \|y(\tau)\|^{\frac{r+4}{r+2}} \left(\int_0^T \frac{|\langle y(s+\tau), Ny(s+\tau)\rangle|^{r+2}}{\|y(s+\tau)\|^r} ds \right)^{\frac{r+1}{r+2}}$$

$$+T^{\frac{r+1}{r+2}} \|y(\tau)\|^{\frac{r}{r+2}} \left(\int_0^T \frac{\langle Ny(s+\tau), y(s+\tau)\rangle^{r+2}}{\|y(s+\tau)\|^r} ds \right)^{\frac{1}{r+2}}. \tag{2.13}$$

On a, $$\left(\int_0^T \frac{|\langle y(s+\tau), Ny(s+\tau)\rangle|^{r+2}}{\|y(s+\tau)\|^r} ds \right)^{\frac{r+1}{r+2}} = \left(\int_0^T \frac{|\langle y(s+\tau), Ny(s+\tau)\rangle|^{r+2}}{\|y(s+\tau)\|^r} ds \right)^{\frac{1}{r+2}+\frac{r}{r+2}}.$$

Et par l'inégalité de Schwartz, on a

$$\int_0^T \frac{|\langle y(s+\tau), Ny(s+\tau)\rangle|^{r+2}}{\|y(s+\tau)\|^r} ds \leq TL_N^{r+2} \|y(\tau)\|^{r+4} \left(\int_0^T \frac{|\langle y(s+\tau), Ny(s+\tau)\rangle|^{r+2}}{\|y(s+\tau)\|^r} ds \right)^{\frac{r+1}{r+2}}$$

$$\leq T^{\frac{r}{r+2}} L_N^{\frac{r}{r+2}} |y(\tau)\|^{\frac{r^2+4r}{r+2}} \left(\int_0^T \frac{|\langle y(s+\tau), Ny(s+\tau)\rangle|^{r+2}}{\|y(s+\tau)\|^r} ds \right)^{\frac{1}{r+2}}.$$

Enfin, en utilisant (2.13), nous avons

$$\int_0^T |\langle NS(s+\tau)y(\tau), S(s+\tau)y(\tau)\rangle| ds \leq \mathcal{M}_{\|y_0\|} \|y(\tau)\|^{\frac{r}{r+2}} \left(\int_0^T \frac{|\langle y(s+\tau), Ny(s+\tau)\rangle|^{r+2}}{\|y(s+\tau)\|^r} ds \right)^{\frac{1}{r+2}}, \tag{2.14}$$

où $$\mathcal{M}_{\|y_0\|} = T^{\frac{r+1}{r+2}} \left(2L_N^2 TL_N^{\frac{r}{r+2}} \|y(\tau)\|^{r+2} + 1 \right).$$

Théorème 2.1:

Soit A un générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $S(t)$, et supposons que les conditions suivantes soient remplies : (1) $S(t)$ est un semi groupe de contraction ; (2) il existe $\delta, T > 0$ tel que,

$$\int_0^T |\langle NS(s)y, S(s)y\rangle| \, ds \geq \delta \|y\|^2, \quad \forall y \in \mathcal{H}. \tag{2.15}$$

Alors le contrôle (2.2) pour tout $r \geqslant 0$, stabilise fortement le système (2.5) avec l'estimation de décroissance suivante : $\|y(t)\| = O\left(t^{-\frac{r+2}{4}}\right)$ as $t \to +\infty$.

Preuve

Soit la suite $s_k = \|y(kT)\|^2$, $k \in IN$.

En intégrant l'inégalité (2.3) sur l'intervalle $[kT, (k+1)T]$, on obtient

$$\int_{kT}^{(k+1)T} \frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 dt \leq -2\int_{kT}^{(k+1)T} \frac{(\langle Ny(t), y(t)\rangle)^{r+2}}{\|y(t)\|^r} dt$$

$$\|y((k+1)T)\|^2 - \|y(kT)\|^2 \leq -2\int_{kT}^{(k+1)T} \frac{(\langle Ny(t), y(t)\rangle)^{2+r}}{\|y(t)\|^r} dt.$$

En utilisant maintenant l'estimation (2.14), nous déduisons que

$$\int_0^T |\langle NS(s+\tau)y(\tau) + c, S(s+\tau)y(\tau)\rangle| \, \mathrm{d}s \leq \left(\mathcal{M}_{\|y_0\|}\|y(\tau)\|^{\frac{r}{2+r}}\right)\left(\int_\tau^{T+\tau} \frac{|\langle Ny(s)+c, y(s)\rangle|^{2+r}}{\|y(s)\|^r} \, \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2+r}}$$

$$\|y((k+1)T)\|^2 - \|y(kT)\|^2 \leq \frac{-2}{\mathcal{M}_{\|y_0\|}\|y(\tau)\|^{\frac{r}{2+r}}}\int_0^T |\langle NS(s+\tau)y(\tau), S(s+\tau)y(\tau)\rangle| \, \mathrm{d}s$$

et d'après l'inégalité (2.15), on a

$$\|y((k+1)T)\|^2 - \|y(kT)\|^2 \leq \frac{-2\rho}{\mathcal{M}_{\|y_0\|}}\|y(kT)\|^{\frac{-r}{2+r}}\|y(kT)\|^2 \leq \frac{-2\rho}{\mathcal{M}_{\|y_0\|}}\|y(kT)\|^{1+\frac{2}{2+r}}.$$

On pose $s_k = \|y(kT)\|^2$, $k \in \mathbb{N}$, alors la dernière inégalité peut s'écrire comme suit

$$s_{k+1} \leq s_k - \frac{2\rho}{\mathcal{M}_{\|y_0\|}} s_k^{1+\frac{2}{2+r}}, \quad \forall k \geq 0.$$

En utilisant le fait que $t \mapsto \|y(t)\|$ est une fonction décroissante sur $[0, +\infty[$, on obtient

$$s_{k+1} \leq s_k - \frac{2\rho}{\mathcal{M}_{\|y_0\|}} s_{k+1}^{1+\frac{2}{2+r}}, \quad \forall k \geq 0.$$

$$s_{k+1} + \frac{2\rho}{\mathcal{M}_{\|y_0\|}} s_{k+1}^{1+\frac{2}{2+r}} \leq s_k, \quad \forall k \geq 0.$$

La dernière inégalité peut être écrite comme suit : $s_{k+1} + Cs_{k+1}^{2+\alpha} \leq s_k, \quad \forall k \geq 0,$

où $C = \frac{2\rho}{\mathcal{M}_{\|y_0\|}} > 0$ et $\alpha = \frac{-r}{r+2} > -1 \quad \forall r \in \mathbb{R}/(-1,-2)$.

Pour obtenir le taux de décroissance des solutions de (2.1), nous rappelons le lemme suivant,

Lemme 2.1: Lasiecka et Tataru ([LT93]).

Soit $(s_k)_{k\geq 0}$ une suite de nombres réels positifs satisfaisant la relation $s_{k+1} + Cs_{k+1}^{2+\alpha} \leq s_k, \quad \forall k \geq 0$, où $C > 0$ et $\alpha > -1$ sont des constantes. Il existe alors une constante positive M_2 (dépend de α et de C) telle que $s_k \leq \frac{M_2}{(k+1)^{\frac{1}{\alpha+1}}}, \quad k \geq 0.$

Ainsi, d'après le lemme de (Lasiecka & Tataru, 1993), on a $s_k \leq \frac{M_2}{(k+1)^{\frac{r+2}{2}}}, \quad k \geq 0.$

Pour $k = E\left(\frac{t}{T}\right)$, $\left(E\left(\frac{t}{T}\right)\right.$ désigne la partie entière de $\left.\frac{t}{T}\right)$, on obtient $s_k \leq \frac{M_3}{t}$, $(M_3 > 0)$, ce qui

donne $\|y(t)\|^2 \leq \frac{M_3}{t^{\frac{r+2}{2}}}$.
donc, $\|y(t)\| = \mathbf{O}\left(t^{-\frac{r+2}{4}}\right)$ quand $t \longrightarrow +\infty$.



Remarque:

Pour $r = 0$, on trouve l'estimation garantie par le contrôle quadratique $u_0(t)$ in [Ouz07] et [Ouz08].

2.5 Stabilisation exponentielle

Théorème 2.2:

Soit A un générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $S(t)$, et supposons que les conditions suivantes soient remplies ;

1. $S(t)$ est un semi groupe de contraction ;
2. il existe $\delta, T > 0$ tel que

$$\int_0^T |\langle NS(s)y, S(s)y\rangle| \, ds \geq \delta \|y\|^{2+\frac{r}{r+2}}, \quad \forall y \in \mathcal{H}. \tag{2.16}$$

Alors le contrôle (2.2) pour tout $r \geqslant 0$, stabilise exponentiellement le système (2.5).
Plus précisément, il existe $\beta > 0$ tel que $\|y(t)\| \leq e^{-\beta} \|y_0\| e^{-\frac{\beta t}{T}}, \quad \forall t > 0.$

Preuve
D'après

$$\|y((k+1)T)\|^2 - \|y(kT)\|^2 \leq \frac{-2}{\mathcal{M}_{\|y_0\|}\|y(\tau)\|^{\frac{r}{2+r}}} \int_0^T |\langle NS(s+\tau)y(\tau), S(s+\tau)y(\tau)\rangle| \mathrm{d}s$$

et d'après l'inégalité (2.16), nous avons

$$\|y((k+1)T)\|^2 - \|y(kT)\|^2 \leq \frac{-2\rho}{\mathcal{M}_{\|y_0\|}} \|y(kT)\|^{\frac{-r}{2+r}} \|y(kT)\|^{2+\frac{r}{2+r}}$$

$$\|y((k+1)T)\|^2 - \|y(kT)\|^2 \leq \frac{-2\delta}{\mathcal{M}_{\|y_0\|}} \|y(kT)\|^2. \tag{2.17}$$

Soit $s_k = \|y(kT)\|^2, k \in \mathbb{N}$, l'inégalité (2.17) peut être écrite comme suit

$$s_{k+1} - s_k \leq \frac{-2\delta}{\mathcal{M}_{\|y_0\|}} s_k, \quad \forall k \geq 0,$$

$$s_{k+1} \leq C s_k, \quad \forall k \geq 0,$$

où $C = \left(1 - \frac{2\delta}{\mathcal{M}_{\|y_0\|}}\right) < 1$, ce qui donne $s_k \leq e^{-k \ln \frac{1}{C}} s_0$, i.e, $\|y(kT)\|^2 e^{-k \ln \frac{1}{C}} \|y_0\|$.
Pour$k = E\left(\frac{t}{T}\right)$, $\left(E\left(\frac{t}{T}\right)\right.$ est la partie entière de $\frac{t}{T}$), et en utilisant le fait que $E\left(\frac{t}{T}\right) T \leq t$ et

$t \mapsto \|y(t)\|$ est une fonction décroissante sur $[0, +\infty[$,
nous obtenons $\|y(t)\| \leq e^{-\frac{\ln(\frac{1}{C})}{2}} \|y_0\| e^{-\frac{\ln(\frac{1}{C})}{2T}t}$ pour tout $t \geq 0$,
$\|y(t)\| \leq e^{-\beta} \|y_0\| e^{-\frac{\beta}{T}t}$ pour tout $t \geq 0$, où $\beta = \frac{\ln(\frac{1}{C})}{2} > 0$.

2.6 Applications

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N, \mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathbb{C})$.

Cet exemple étudie la stabilisation de l'équation non linéaire de Schrödinger sur un domaine ouvert et borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, avec Les conditions aux limites de Dirichlet.

Considérons le système défini par le système :

$$\begin{cases} i\partial_t \psi = \Delta\psi + K(x)|\psi|^\alpha \psi, & \text{sur } \Omega\times]0,\infty[, \quad \alpha > 0 \\ \psi(\cdot, t) = 0, & \text{sur } \partial\Omega\times]0,\infty[\\ \psi(\cdot, 0) = \varphi. \end{cases} \tag{2.18}$$

Pour $\alpha = 2$, il s'agit de l'équation de Gross-Pitaevskii décrivant l'évolution d'un condensat de Bose-Einstein. L'équation (2.18) a suscité beaucoup d'intérêt récemment. Bergé a mené une étude formelle sur les conditions de stabilité des solutions de soliton dans [Ber00]. Towers-Malomed, dans [TM02], a découvert qu'un type spécifique de milieu non linéaire dépendant du temps génère des faisceaux entièrement stables par approximation variationnelle et simulations directes. Merle dans [Mer96] et Raphaël-Szeftel dans [RS11] ont étudié (2.18) pour $k_1 < K(x) < k_2$ avec $k_1, k_2 > 0$. Fibich-Wang dans [FW03] a étudié (2.18) avec $K(x) := K(\epsilon|x|)$, où $\epsilon > 0$ est petit et $K \in C^4\left(\mathbb{R}^d\right) \cap L^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Dans cet exemple, nous allons étudier la stabilité de (2.18) en considérant $K(x) = u_r(\psi)$.

où

$$u_r(\psi) = -i\frac{\langle\psi, N\psi\rangle|\langle\psi, N\psi\rangle|^r}{\|\psi\|^r}; \quad r \geqslant 0.$$

Nous considérons l'opérateur de contrôle $N\psi = |\psi|^\alpha\psi$ afin d'exprimer le système (2.18) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} i\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = A\psi(x,t) + u_r(\psi(x,t))N\psi(x,t), & \text{in } \Omega\times]0,\infty[\\ \psi(x,t) = 0, & \text{on } \partial\Omega\times]0,\infty[\\ \psi(x,0) = \varphi. \end{cases} \tag{2.19}$$

Ici, l'espace d'état $\mathcal{D}(H) = L^2(\Omega; \mathbb{C})$ est menu du produit scalaire complexe naturel.

— L'opérateur A est défini par $A\psi = -i\Delta\psi, \forall\psi \in \mathcal{D}(A)$, où $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(H)^2(\Omega) \cap \mathcal{D}(H)_0^1(\Omega)$. Il est bien connu que l'opérateur $A = -i\Delta$ avec le domaine $\mathcal{D}(A)$ génère un semi-groupe $\mathcal{T}(t)_{t\in\mathbb{R}}$.

— L'opérateur de contrôle est donné par $N\psi = |\psi|^\alpha\psi$.
On pose $f(\psi) = i\frac{\langle\psi,N\psi\rangle|\langle\psi,N\psi\rangle|^r}{\|\psi\|^r}|\psi|^\alpha\psi, \quad \forall\psi \in \mathcal{D}(H), \psi \neq 0.$

Nous en déduisons que,

$|\psi_1||\psi_2||f(\psi_1)-f(\psi_2)| = |\psi_1||\psi_2||\big(f(\psi_1)-f(\psi_2)\big) + \big(\psi_1(|\psi_2|-|\psi_1| + |\psi_1|(\psi_1-\psi_2)\big)f(\psi_2)|$

On a pour $K>0$, $|\psi_1| \leqslant K$ et $|\psi_2| \leqslant K$ il existe $L_K < \infty$ tel que $|f(\psi_1)-f(\psi_2)| \leq L_K|\psi_1-\psi_2|$.

$$\begin{aligned}|\psi_1\|\psi_2\|f(\psi_1)-f(\psi_2)| &\leq |\psi_1\|\psi_2\|f(|\psi_1|)-f(|\psi_2|)| + 2|\psi_1||\psi_1-\psi_2\|f(\psi_2)| \\ &\leq 3|\psi_1\|\psi_2|L_K|\psi_1-\psi_2|\end{aligned}$$

Donc $|f(\psi_1)-f(\psi_2)| \leq 3L_K|\psi_1-\psi_2|$.,

On a $||\psi_1|^\alpha\psi_1 - |\psi_2|^\alpha\psi_2| \leq L_K|\psi_1-\psi_2$, par conséquent N est un opérateur non linéaire et localement Lipschitzien tel que $\mathcal{N}(0)=0$, en appliquant la proposition 2.1, nous déduisons que le système (2.18) possède une unique solution globale $\psi(x,t))$ définie sur l'intervalle infini $[0,+\infty[$, qui est donnée par la formule de variation des constantes suivante :

$\psi(x,t) = \mathcal{T}(t)\varphi + i\int_0^t \mathcal{T}(t-s)u_r(\psi(x,s))N\psi(x,s)ds, \quad \forall t \geq 0.$

Montrons que les condition du théorème (2.4) sont vérifiées,

$$\begin{aligned}\langle N\mathcal{T}(t)\psi(x,t),\mathcal{T}(t)\psi(x,t)\rangle_H &= \langle|\mathcal{T}(t)\psi(x,t)|^\alpha\mathcal{T}(t)\psi(x,t),\mathcal{T}(t)\psi(x,t)\rangle_H \\ &= |\mathcal{T}(t)\psi(x,t)|^\alpha\langle\mathcal{T}(t)\psi(x,t),\mathcal{T}(t)\psi(x,t)\rangle_H \\ &= |\mathcal{T}(t)\psi(x,t)|^\alpha|\mathcal{T}(t)\psi(x,t)|^2 \\ &= |\mathcal{T}(t)\psi(x,t)|^{\alpha+2}.\end{aligned}$$

Nous savons que $|\mathcal{T}(t)\psi(x,t)| = |\psi(x,t)|$, par conséquent,

$\int_0^T \langle N\mathcal{T}(t)\psi(x,t),\mathcal{T}(t)\psi(x,t)\rangle_H dt = \int_0^T |\psi(x,t)|^{\alpha+2}dt.$

En appliquant l'inégalité de Hôlder, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^T |\psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}t &\leq T^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}\left(\int_0^T |\psi(x,t)|^{\alpha+2}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{2}{\alpha+2}} \\ &\leq T^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}\left(\int_0^T |\psi(x,t)|^{\alpha+2}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{2}{\alpha+2}} \\ \sqrt{\int_0^T |\psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}t} &\leq T^{\frac{\alpha}{2\alpha+4}}\left(\int_0^T |\psi(x,t)|^{\alpha+2}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{\alpha+2}} \\ T^{\frac{-\alpha}{2}}\|\psi(x,t)\|^{\alpha+2} &\leq \int_0^T |\psi(x,t)|^{\alpha+2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\int_0^T \langle N\mathcal{T}(t)\psi(x,t),\mathcal{T}(t)\psi(x,t)\rangle\,\mathrm{d}t \geqslant T^{\frac{-\alpha}{2}}\|\psi(x,t)\|^{\alpha+2}. \tag{2.20}$$

Pour $\alpha = 0$, le système (2.18) devient,

$$\begin{cases} i\partial_t\psi = \Delta\psi + K(x)\psi, & \text{in } \Omega\times]0,\infty[, \\ \psi(\cdot,t) = 0, & \text{on } \partial\Omega\times]0,\infty[\\ \psi(\cdot,0) = \varphi. \end{cases} \tag{2.21}$$

En utilisant (2.20), nous pouvons déduire que pour $\delta = 1$ et $T > 0$, nous avons l'inégalité,

$$\int_0^T \langle N\mathcal{T}(t)\psi(x,t), \mathcal{T}(t)\psi(x,t)\rangle_H \, \mathrm{d}t \geqslant \delta \|\psi(x,t)\|^2.$$

après la vérification de la condition (2.15), nous pouvons appliquer le théorème 2.4 pour confirmer que le contrôle $u_r(\psi(x,t))$ stabilise le système (2.21) pour tous les $r \geqslant 0$ avec l'estimation de décroissance suivante : $\|\psi(x,t)\| = O\left(t^{-\frac{r+2}{4}}\right)$ as $t \to +\infty$.
Pour $0 < \alpha < 1$, on pose $r = \frac{2\alpha}{1-\alpha}$, donc on a $r > 0$. et $\alpha = \frac{r}{r+2}$ et pour $\delta = \frac{1}{\sqrt{T^\alpha}}$, on peut ensuite reporter cette valeur dans l'équation (2.20) pour obtenir l'expression modifiée suivante :

$$\int_0^T \langle N\mathcal{T}(t)\psi(x,t), \mathcal{T}(t)\psi(x,t)\rangle_H \, \mathrm{d}t \geqslant \delta \|\psi(x,t)\|^{2+\frac{r}{r+2}}.$$

d'où la condition (2.16) est vérifiée , on peut appliquer le Théorème 2.5 pour déduire que le contrôle $u_r(\psi(x,t))$ stabilise exponentiellement le système (2.20) pour $0 < \alpha < 1$ et $r = \frac{2\alpha}{1-\alpha}$.
Plus précisément, il existe $\beta > 0$ tel que $\|\psi(x,t)\| \leq e^{-\beta} \|\varphi\| e^{-\frac{\beta t}{T}}, \quad \forall t > 0,$
où $\beta = \frac{\ln\left(\frac{1}{C}\right)}{2} > 0,$
$C = \left(1 - \frac{2\delta}{M_{|\varphi|}}\right) < 1,$
$\mathcal{M}_{\|\varphi\|} = T^{\frac{\alpha+1}{2}+1}\left(2T\,(\alpha+1)^{\frac{3+5\alpha}{2}+} \mid \varphi \mid^{\frac{\alpha(3+5\alpha)}{2}+\frac{2}{1-\alpha}} +1\right).$

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un nouveau type de contrôle, qui peut être considéré comme une extension du contrôle quadratique, visant à améliorer la stabilité d'un système semi-linéaire. Le contrôle proposé permet d'obtenir une forte stabilité exponentielle des systèmes dynamiques semi-linéaires, en particulier de l'équation de Schrödinger non linéaire. En outre, une estimation de la décroissance peut être obtenue grâce à des hypothèses d'observation approximatives dépendant de r. Par conséquent, la mise en œuvre de la nouvelle commande permet d'obtenir un temps de réponse nettement plus rapide que la commande quadratique. Cette recherche soulève des questions sur l'application de la même famille de contrôles pour stabiliser les systèmes semi-linéaires non homogènes en physique, y compris le cas non homogène considéré dans [BCA23]. Les résultats obtenus pour les systèmes semi-linéaires à partir de l'étude de la forme générale peuvent-ils être appliqués avec succès à d'autres équations non linéaires, au-delà du cas particulier de l'équation non linéaire de Schrödinger ?
Les résultats de ce chapitre ont été publiés. (voir [CCTA24]).

Chapitre 3

Stabilisation exponentielle et forte pour les systèmes de contrôle semi-linéaires non homogènes par la méthode de décomposition.

3.1 Introduction

Ce chapitre traite le problème de stabilisation des systèmes de contrôle semi-linéaires non homogènes, par un feedback dans un espace d'état de Hilbert, l'existence et l'unicité des solutions du système sont prouvées par la théorie des semi-groupes, nous proposons un feedback et nous donnons des conditions suffisantes pour une stabilisation exponentielle et forte, en utilisant la méthode de décomposition. Les résultats obtenus ont été illustrés par une application au cas particulier de l'équation de la chaleur semi-linéaire non homogène unidimensionnelle. Considérons le système semi-linéaire non homogène décrit par l'équation,

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + v(t)(Ny(t) + c) \\ y(0) = y_0 \in \mathcal{H} \end{cases} \tag{3.1}$$

où

1. $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert de dimension infinie (espace d'état), menu du produit scalaire $\langle ., . \rangle$ et de la norme correspondante $\|.\|$;
2. A un opérateur non borné de domaine $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}$ et génère un semi-groupe de contraction fortement continu $(S(t))_{t \geq 0}$ dans $\mathcal{H}$;
3. N un opérateur non linéaire de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ localement Lipschitzien et faiblement séquentiellement continu, tel que $N(0) = 0$;
4. $v(t)$ est une fonction à valeur scalaire, représente le contrôle ;
5. $c \neq 0$ est un vecteur de $\mathcal{H}$



Remarque:

- Si N est linéaire, le système (3.1) est bilinéaire.
- Si $\mathcal{H}$ est non-linéaire, le système (3.1) est semi-linéaire.
- Si $c = 0$, le système est homogène, et si $c \neq 0$, le système est non homogène.

L'étude de la stabilité des systèmes bilinéaires et semi-linéaires homogènes a fait l'objet de nombreux travaux,

et différents résultats ont été développés dans les cas de dimension finie et infinie, J.Ball, M.Slemrod [BS79] ; M.Ouzahra, A.Tsouli et A. Boutoul [OTB12] ; M.Ouzahra [Ouz08] ; A.Benzaza et M.Ouzahra [BM19] ; E. Zerrik et M. Ouzahra [ZO07] ; H. Bounit, et Hammouri [BH99] ; A. El Alami et M. Chqondi [ECA21]...
Cependant, seuls quelques travaux étudient le cas des systèmes non homogènes ; la stabilité de tels systèmes a été étudiée dans le cas bilinéaire par Z. Hamidi et M. Ouzahra [HO18], qui ont prouvé les conditions nécessaires et suffisantes pour une stabilisation partielle faible et forte d'un système bilinéaire non homogène par le contrôle.

$$v(t) = -\rho \frac{\langle y(t), Ny(t) + c\rangle}{|\langle y(t), Ny(t) + c\rangle| + 1}, \qquad \forall t > 0, \tag{3.2}$$

où $\rho > 0$ est le contrôle du gain. Dans ce travail, un résultat de stabilisation exponentielle et forte a été établi en utilisant le même contrôle par retour d'état (3.2), à condition que l'hypothèse d'observation suivante soit vérifiée :

$$\exists \delta, T > 0 \quad \text{such that} \quad \int_0^T |\langle NS(s)y + c, S(s)y\rangle| \mathrm{d}s \geq \delta \|y\| \quad \forall y \in \mathcal{H}.$$

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section 2, nous choisissons un contrôle qui assure la stabilisation de notre système ; dans la section 3, nous montrons l'existence et l'unicité de la solution dans le cas semi-linéaire non homogène ; dans la section 4, nous présentons une décomposition appropriée de l'espace d'état $\mathcal{H}$ et du système (3.1) via les propriétés spectrales de l'opérateur A, nous appliquons cette approche pour étudier le problème de stabilisation exponentielle du système (3.1). Dans la section 5, nous étudions le problème de stabilisation forte en utilisant le contrôle choisi. Dans la dernière section, nous donnons des illustrations à travers des exemples régis par une équation de chaleur.

3.2 Choix du Contrôle

Soit (3.1) le système comme indiqué dans l'introduction. Le problème de la stabilisation consiste à chercher un contrôle $u(t)$ telle que le système admet une solution $y(t)$ telle que $y(t) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$.
En calculant formellement le taux de variation temporelle de l'énergie $\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2$ et en utilisant le fait que le semi-groupe est de contraction de sorte que $\mathcal{R}e(\langle Ay, y\rangle \leq 0$ pour tous $y \in \mathcal{D}(A)$, nous obtenons,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 &= 2\mathcal{R}e < y(t); \frac{d}{dt}y(t) > \\ &= 2\mathcal{R}e < y(t); Ay(t) > +2\mathcal{R}e\big(u(t) < y(t), Ny(t) + c > \big) \\ &\leq 2\mathcal{R}e\big(u(t) < y(t); Ny(t) + c > \big); \forall t \in [0, T].\end{aligned}$$

Ensuite, pour que l'énergie soit décroissante, un choix évident de la commande en retour (mais pas le seul) est le suivant $v(t) = -\rho \frac{\langle y(t), Ny(t)+c\rangle}{|\langle y(t), Ny(t)+c\rangle|+1}$; $\big(\forall t > 0, \rho > 0\big)$ puisque ce contrôle permet d'obtenir " l'inégalité de dissipation d'énergie".

$$\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 \leq -2\frac{|\langle Ny(t) + c, y(t)\rangle|^2}{|\langle y(t), Ny(t) + c\rangle| + 1}; \forall t \in [0, T]. \tag{3.3}$$

3.3 Existence et unicité des solutions

Considérons le système en boucle fermée suivant,

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + f(y(t)), \quad \forall t > 0 \\ y(0) = y_0 \in \mathcal{H}, \end{cases} \tag{3.4}$$

où $f(y(t)) = v(t)\big(Ny(t) + c\big), \quad \forall y \in \mathcal{H},$

et $v(t)$ est le contrôle donné par (3.2).

On pose $\phi(s) = \frac{s}{|s|+1}$ for all $s \in \mathbb{R}$ donc $f(y(t)) = -\rho\phi(< y; Ny + c >)(Ny + c)$.

Dans cette section, nous étudions l'existence, l'unicité et la régularité de la solution du système (3.1). Nous commençons notre étude par le résultat de bien posé.

Proposition 3.1:

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, A un générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions $S(t)$ et $\mathcal{H}$ un opérateur non linéaire localement Lipschitzien et séquentiellement continu, alors le système (3.4) possède une unique solution globale $y(t)$ définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$, qui est donnée par la formule de variation de la constante suivante : $y(t) = S(t)y_0 + \int_0^t v(\tau)S(t-\tau)(Ny(\tau) + c)d\tau.$

De plus, nous avons l'estimation suivante : $\|z(t)\|^2 - \|z(s)\|^2 \leqslant -2\rho \int_s^t \frac{|\langle y(\tau); Ny(\tau)+c\rangle|^2}{|\langle y(\tau), Ny(\tau)+c\rangle|+1} d\tau.$

En particulier, nous avons $\|y(t)\| \leq \|y_0\| \quad \forall t \geq 0.$

Preuve

Pour établir l'existence et l'unicité de la solution de (3.4), montrons que la fonction f est localement Lipschitzienne pour tout $y, z \in \mathcal{H}$.

Soit $x, y, z \in \mathcal{H}$ avec $t \in [0, T]$ et $R > 0$ tel que $\|x - y\|, \|x - z\| \leq R$.

Sans perte de généralité, nous pouvons prendre $x = 0$.

Puisque N est localement Lipschitzien, il existe $L_R(N) > 0$ tel que pour tous $z, y \in \mathcal{H}$, satisfait $0 < \|z\| \leqslant \|y\| \leqslant R$, on a $\|Nz - Ny\| \leqslant L_R(N)\|z - y\|$.

$$\begin{aligned} \text{On a} \quad f(t, y) - f(t, z) &= \big(\rho\phi(< z; Nz + c >)(Nz + c) - \rho\phi(< y; Ny + c >)(Ny + c)\big) \\ &= \rho\big(\phi(< z; Nz + c >) - \phi(< y; Ny + c > \big)\big(Nz + c\big) \\ &+ \phi(< y; Ny + c > \big(Nz - Ny\big). \end{aligned}$$

En utilisant la fonction $\phi(s) = \frac{s}{|s|+1}$, on a $|\phi(s) - \phi(r)| \leq |s - r|$ et $|\phi(s)| \leq |s| \quad \forall (s, r) \in \mathbb{R}^2$

Or $N()$ est localement Lipschitzien ; et en utilisant l'inégalité de Schwartz, il s'ensuit que :

$$\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq \rho\Big(| < z; Nz + c > - < y; Ny + c > |\|Nz + c\|\Big)$$
$$+ \rho|\phi(< y; Ny + c >)|\|Nz - Ny\|.$$

$$\begin{aligned} \text{On a} \quad | < z; Nz + c >) - < y; Ny + c > | &= | < z - y; Nz + c >) + < y; Nz - Ny > | \\ &\leq \Big(\|c\| + 2L_R(N)\|y_0\|\Big)\|z - y\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad |\phi(< y; Ny + c >)|\|Nz - Ny\| &\leq | < y; Ny + c > |L_R(N)\|z - y\| \\ &\leq \|y_0\|\Big(\|Ny\| + \|c\|\Big)|L_R(N)\|z - y\| \\ &\leq \|y_0\|L_R(N)\Big(L_R(N)\|y_0\| + \|c\|\Big)\|z - y\|. \end{aligned}$$

Donc, $\|f(t,y)-f(t,z)\| \leq \rho\Big(L_R(N)\|y_0\|+\|c\|\Big)\Big(\|y_0\|\|L_R(N)+\|c\|+2L_R(N)\|y_0\|\Big)\|z-y\|$

$\leq \rho\Big(L_R(N)\|y_0\|+\|c\|\Big)\Big(\|c\|+3L_R(N)\|y_0\|\Big)\|z-y\|$

$\leq \mathcal{M}_{(\|y_0\|;c)}\|z-y\|.$

où $\mathcal{M}_{(\|y_0\|;c)} = \rho\Big(L_R(N)\|y_0\|+\|c\|\Big)\Big(\|c\|+3L_R(N)\|y_0\|\Big).$



Remarque: Pour $c=0$, on obtient la constante $\mathcal{M}_{(\|y_0\|;0)} = 3\rho\Big(L_R(N)\|y_0\|\Big)^2$ trouvée dans le cas homogène en [Ouz13].

Donc $f(t;y(t))$ satisfait une condition de Lipschitz locale en y, uniformément en t sur des intervalles bornés. On peut donc appliquer le théorème 1.4 en [Paz12], p.185, pour obtenir qu'il existe un $t_{\max} \leq \infty$ tel que (3.4) a une unique solution y sur $[0, t_{\max}[$, qui est donnée par la formule de variation des constantes suivante :

$$\begin{aligned} y(t) &= S(t)y_0 + \int_0^t f(y(\tau))S(t-\tau)d\tau \\ &= S(t)y_0 - \rho\int_0^t \frac{\langle y(\tau), Ny(\tau)+c\rangle}{|\langle y(\tau), Ny(\tau)+c\rangle|+1} S(t-\tau)(Ny(\tau)+c)d\tau. \end{aligned}$$

Pour montrer que $t_{\max} = +\infty$, il suffit de montrer que pour chaque $T>0$, la solution $y(t)$ est bornée par une constante indépendante de T. Pour ce faire, nous discutons deux cas :

— Si $y_0 \in \mathcal{D}(A)$, la solution $y(t)$ est différentiable (voir [Paz12], p.189), et comme $S(t)$ est un semi-groupe de contractions (donc A est dissipatif), on peut écrire

$$\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 \leq -2\rho\frac{|\langle y(t); Ny(t)+c\rangle|^2}{|\langle y(t), Ny(t)+c\rangle|+1}; \forall t \in [0,T]. \tag{3.5}$$

En intégrant cette dernière inégalité sur l'intervalle [s,t], il s'ensuit que

$$\|y(t)\|^2 - \|y(s)\|^2 \leq -2\rho\int_s^t \frac{|\langle y(\tau); Ny(\tau)+c\rangle|^2}{|\langle y(\tau), Ny(\tau)+c\rangle|+1} d\tau, \forall t \geq s \geq 0. \tag{3.6}$$

Donc $\|y(t)\| \leq \|y_0\|, \forall t \geq 0$

— Si $y_0 \notin \mathcal{D}(A)$, il existe une suite $\left(y_0^n\right)_n$ d'élément de $\mathcal{D}(A)$ converge vers y_0 dans $\mathcal{H}$ puisque $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$. d'après le premier cas, on a $\forall t \in [0,T]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|y^n(t)\| \leq \left\|y_0^n\right\|$.

Nous concluons que $\|y(t)\| \leq \|y_0\|, \quad \forall t \in [0, t_{\max}[$, donc $t_{\max} = +\infty$ (voir [AB03]).

D'après (4.6) nous avons $\|y(\tau)\|^2 - \|y(t)\|^2 \geq 2\rho\int_\tau^t \frac{|\langle y(s);Ny(s)+c\rangle|^2}{|\langle y(t),Ny(t)+c\rangle|+1} ds$ pour tous $0 \leq \tau \leq t$.

3.4 Stabilisation exponentielle

3.4.1 Décomposition de l'espace d'état et du système

Cette approche, est basée sur la décomposition de l'espace des états, moyennant celle du spectre du générateur A, dans le cas où le sous espace, dans lequel le semi-groupe restreint est exponentiellement stable, est de codimension finie (voir [Tri75])

Soit $\delta > 0$, nous supposons que le spectre $\sigma(A)$ de A peut être décomposé en $\sigma_u(A)$ et $\sigma_s(A)$

tels que $\sigma_u(A) = \sigma(A) \cap \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda \geqslant -\delta\}, \quad \sigma_s(A) = \sigma(A) \cap \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < -\delta\}.$

Alors $\sigma(A) = \sigma_u(A) \cup \sigma_s(A)$ tel que $\sigma_u(A)$ peut être séparée de $\sigma_s(A)$ par une courbe simple et fermée C. Il a été montré dans [Kat13] P.178 et [Tri75] que $\mathcal{H}$ peut être décomposé sous la forme : $H = H_u \oplus H_s$
où $H_u = P_u H$ et $H_s = P_s H$ avec P_u l'opérateur de projection

$$P_u = \frac{1}{2\pi i} \int_C (\lambda I - A)^{-1} d\lambda \text{ et } P_s = I - P_u.$$

On a $P\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A); AH_s \subset H_s$, $AH_u \subset H_u$ (invariance de H_s et H_u par l'opérateur A), alors l'opérateur A peut être décomposé comme suit :

$$A = A_u + A_s \tag{3.7}$$

où , A_s et A_u sont les restrictions de A sur H_s et sur H_u, respectivement.
Nous considérons N_s et N_u, la restriction de N sur H_s et sur H_u, respectivement, tels que

$(\mathbf{H}_0)$: $P_u N = N P_u$ et $P_s N = N P_s$

Dans la suite, nous supposons que l'opérateur A peut être décomposé selon la décomposition (3.7).
Soit $y(t) = y_u(t) + y_s(t)$ la solution du système (3.1),
où y_u et y_s sont les composantes de la solution $y \in \mathcal{H}$ sur H_u et sur H_s respectivement,
De $P(y) = y_u$ et $P_s(y) = y_s$, il découle que $P(\dot{y}) = \dot{y}_u$ et $P_s(\dot{y}) = \dot{y}_s$.
En appliquant P_u et P_s aux deux côtés du système (3.1), on obtient, sous les hypothèses $(\mathbf{H}_0)$:

$$\begin{cases} \frac{dy_u(t)}{dt} = A_u y_u(t) + v_u(t)(N_u y_u(t) + c_u), \quad \forall t > 0 \\ \\ y_u(0) = (y_{u_0}) \in \mathcal{H}_u \end{cases} \tag{3.8}$$

et

$$\begin{cases} \frac{dy_s(t)}{dt} = A_s y_s(t) + v_s(t)(N_s y_s(t) + c_s), \quad \forall t > 0 \\ \\ y_s(0) = (y_{s_0}) \in \mathcal{H}_s. \end{cases} \tag{3.9}$$

où y_u et y_s sont les composantes de la solution $y \in \mathcal{H}$ sur H_u et sur H_s respectivement, et c_u et c_s sont les composantes de la solution $c \in \mathcal{H}$ sur H_u et sur H_s respectivement.
Par [Tri75], le semi-groupe $S(t)$ généré par A commute également avec P_u et P_s, et induit un C_0 semi-groupe $S_u(t)$ (resp. $S_s(t)$) sur H_u (resp. H_s).
Nous supposons en outre que A_u génère un C_0 semi-groupe de contractions $S_u(t)$, et A_u génère un C_0-semigroupe de contractions $S_u(t)$.
Si A_s satisfait l'hypothèse suivante :
$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln\|S_s(t)\|}{t} = \sup \mathrm{Re}\,(\sigma(A_s))$, alors $\exists \eta, K_\eta > 0$ tel que $\|S_s(t)\| \leqslant K_\eta e^{-\eta t}, t \geqslant 0$.
Le but de ce qui suit est d'étudier le problème de la stabilisation forte et exponentielle de (3.1) via les propriétés des systèmes (3.9) et (3.8). Nous commençons par la composante $y_s(t)$ de la solution $y(t)$ du système (3.9).

3.4.2 Stabilisation exponentielle de la composante $y_s(t)$

Théorème 3.1:

Soit A un générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $S(t)$, et supposons que les conditions suivantes soient remplies :

1. L'opérateur A peut être décomposé selon la décomposition (3.7).
2. A_s satisfais l'hypothèse : $\exists \eta, K_\eta > 0$ telles que $\|S_s(t)\| \leqslant K_\eta e^{-\eta t}, \quad t \geqslant 0$. (spectrum-determined growth assumption)

   Alors pour $\rho < \frac{\eta}{K_\eta\left(L\|y_s(0)\|+\|c_s\|\right)^2}$ le contrôle $v_u(t) = -\rho\frac{\langle y_u(t), N_u y_u(t)+c_u\rangle}{|\langle y_u(t), N_s y(t)+c_u\rangle|+1}; \quad \forall t > 0$, stabilise exponentiellement le système (3.9).

   Plus précisément, $\exists \beta_s > 0$ tel que $\quad \|y_s(t)\| \leq K_\eta\|y_s(0)\|e^{-\beta_s t}; \quad \forall t > 0.$

Preuve

En utilisant la proposition (3.1), nous déduisons que le système (3.9) admet une unique solution globale donnée par

$$\begin{cases} y_s(t) = S_s(t)y_s(0) + \int_0^t S_s(t-\tau)v_s(\tau)\left(N_s y_s(\tau) + c_s\right)d\tau, t \geq 0 \\ y_s(0) \in \mathcal{H}_s. \end{cases}$$

Donc, $\|y_s(t)\| \leq \|S_s(t)\|\|y_s(0)\| + \int_0^t |v_s(\tau)|\,\|S_s(t-\tau)\|\left(\|N_s y_s(\tau)\| + \|c_s\|\right)d\tau.$

On a :$\|S_s(t)\| \leqslant K_\eta e^{-\eta t}$. Donc,

$$\begin{aligned} \|y_s(t)\| &\leq K_\eta e^{-\eta t}\|y_s(0)\| + \int_0^t |v_s(\tau)|\,K_\eta e^{-\eta(t-\tau)}\left(\|N_s y_s(\tau)\| + \|c_s\|\right)d\tau \\ &\leq K_\eta e^{-\eta t}\|y_s(0)\| + \left(L_s\|y_s(0)\| + \|c_s\|\right)\int_0^t |v_s(\tau)|\,K_\eta e^{-\eta(t-\tau)}d\tau \\ &\left(L_s \text{ est une constante de Lipschitz de } N_u \text{ dans la boule } \mathcal{B}_{(0,\|z_0\|)}\right). \end{aligned}$$

Le contrôle $v_u(t)$ est borné par rapport aux temps et est uniformément borné par rapport aux états initiaux,

et nous avons, $\quad |v_u(t)| \leq \rho|\left\langle y_u(t), N y_u(t) + c_u\right\rangle| \quad ; \quad \forall t > 0$

$$\leq \rho\|y_u(t)\|\left(L_u\|y_u(0)\| + \|c_u\|\right); \quad \left(L_u \text{ is a Lipschitz constant of } N_u \text{ in the ball } \mathcal{B}_{(0,\|z_0\|)}\right)$$

$$\text{Donc,} \quad \|y_s(t)\| \leq K_\eta e^{-\eta t}\|y_s(0)\| + \rho K_\eta\left(L_u\|y_s(0)\| + \|c_s\|\right)\left(L_s\|y_s(0)\| + \|c_s\|\right)\int_0^t \|y_s(\tau)\|e^{-\eta(t-\tau)}d\tau$$

$$\leq K_\eta e^{-\eta t}\|y_s(0)\| + \mathcal{A}e^{-\eta t}\int_0^t \|y_s(\tau)\|e^{\tau}d\tau,$$

où $\mathcal{A} = \rho K_\eta\left(L_u\|y_s(0)\| + \|c_s\|\right)\left(L_u\|y_s(0)\| + \|c_s\|\right).$

Donc, $\quad \|y_s(t)\|\,e^{\eta t} \leq K_\eta\|y_s(0)\| + \mathcal{A}\int_0^t \|y_s(\tau)\|e^{\tau}d\tau.$

En utilisant l'inégalité de Gronwall, nous avons $\quad \|y_s(t)\|\,e^{\eta t} \leq K\|y_s(0)\|\exp\left(\int_0^t \mathcal{A}ds\right)$

$$\leq K_\eta\|y_s(0)\|e^{\mathcal{A}t}.$$

donc, $\quad \|y_s(t)\| \leq K_\eta\|y_s(0)\|e^{(\mathcal{A}-\eta)t}.$

On pose, $\beta_s = \eta - \mathcal{A} = \eta - \rho K\left(L_u\|y_s(0)\| + \|c_s\|\right)\left(L_u\|y_s(0)\| + \|c_s\|\right)$

Pour $\quad \rho < \frac{\eta}{K_\eta\left(L_u\|y_s(0)\|+\|c_s\|\right)\left(L_u\|y_s(0)\|+\|c_s\|\right)}$

Alors $\rho K_\eta\Big(L_u\|y_s(0)\| + \|c_s\|\Big)\Big(L_u\|y_s(0)\| + \|c_s\|\Big) < \eta$, donc $\beta_s > 0$.

Enfin, $\|y_s(t)\| \leq K_\eta\|y_s(0)\|e^{-\beta_s t}$; $\quad K_\eta, \beta_s > 0$.

Étudions maintenant la composante $y_u(t)$ de la solution $y(t)$ du système (3.9).

3.4.3 Estimation de la décroissance et stabilisation exponentielle de la composante $y_u(t)$

Lemme 3.1:

Soit A_u un générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions $S_u(t)$ dans H_u et soit N_u un opérateur non linéaire localement Lipschitzien. Alors le système (3.8) contrôlé par $v_u(t) = -\rho\frac{\langle y_u(t), N_u y_u(t)+c_u\rangle}{\langle\langle y_u(t), N_s y(t)+c_u\rangle|+1}$ possède une unique solution $y_u(t) \in \mathcal{H}_u$ pour chaque $y_u(0) \in \mathcal{H}_u$ qui satisfait, lorsque $t \longrightarrow +\infty$

$$\int_0^T |\langle S_u(\tau)y_u(t), N_u S_u(\tau)y_u(t) + c_u\rangle|d\tau = O\left(\sqrt{\int_t^{t+T} \frac{|\langle y_u(\tau), N_u y_u(\tau) + c_u\rangle|^2}{1 + |\langle N_u y_u(\tau) + c_u, y_u(\tau)\rangle|}d\tau}\right) \tag{3.10}$$

Preuve

En utilisant la proposition (3.1), nous déduisons que le système (3.8) admet une unique solution globale donnée par la formule suivante :

$$y_u(t) = S_u(t)y_u(0) - \rho\int_0^t \frac{\langle y_u(\tau), N_u y_u(\tau) + c_u\rangle}{|\langle y_u(\tau), N_u y_u(\tau) + c_u\rangle| + 1}(N_u y_u(\tau) + c_u)S_u(t-\tau)d\tau,$$

$S_u(t)$ est un semi-groupe de contractions, et d'après l'inégalité de Schwartz $\forall t \in [0, T]$ nous avons,

$$\|y_u(t) - S_u(t)y_u(0)\| \leq \rho\sqrt{T}\Big(L\,\|y_u(0)\| + \|c_u\|\Big)\left(\int_0^T \frac{|\langle y_u(\tau), N_u y_u(\tau) + c_u\rangle|^2}{1 + |\langle y_u(\tau), N_u y_u(\tau) + c_u\rangle|}d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.11}$$

D'après la relation

$$\begin{aligned}\langle N_u S_u(t)y_0 + c_u, S_u(t)y_0\rangle &= \langle N_u S_u(t)y_0, S_u(t)y_u(0) - y_u(t)\rangle + \langle c_u, S_u(t)y_u(0) - y_u(t)\rangle \\ &\quad + \langle N_u S_u(t)y_0 - N_u y_u(t), y_u(t)\rangle + \langle N_u y_u(t) + c, y_u(t)\rangle,\end{aligned}$$

On a $\|y_u(t)\| \leq \|y_u(0)\|, \forall t \in [0, t_{\max}[$, et N_u est localement lipschitzienne, donc,

$$|\langle N_u S_u(s)y_u(0) + c_u, S_u(s)y_u(0)\rangle| \leq \Big(2L_u\|y_u(0)\| + \|c_u\|\Big)\|y_u t) - S_u(t)y_u(0)\| + |\langle N_u y_u(s) + c_u, y_u(s)\rangle|.$$

utilisant (3.11)

$$\begin{aligned}|\langle N_u S_u(s)y_u(0) + c_u, S_u(s)y_u(0)\rangle| &\leq C_{(\|y_u(0)\|;c_u)}\left(\int_0^t \frac{|\langle y_u(s), N_u y_u(s) + c_u\rangle|^2}{1 + |\langle y_u(s), N_u y_u(s) + c_u\rangle|}ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + |\langle N_u y_u(s) + c_u, y_u(s)\rangle|\end{aligned} \tag{3.12}$$

où $C_{(\|y_u(0)\|;c_u)} = \rho\sqrt{T}\,(2L_u\,\|y_0\| + \|c_u\|)\,(L_u\,\|y_0\| + \|c_u\|)$.

Remplaçant y_0 par $y_u(t)$ dans (3.12) et utilisant $\|y_u(t)\| \leq \|y_u(0)\|\ \forall t \geq 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned}|\langle N_u S_u(s)y_u(t) + c_u, S_u(s)y_u(t)\rangle| &\leq C_{(\|y_0\|;c_u)}\left(\int_0^T \frac{|\langle y_u(s+t), N_u y_u(s+t) + c_u\rangle|^2}{1 + |\langle y_u(s+t), N_u y_u(s+t) + c_u\rangle|}ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + |\langle N_u y_u(s+t) + c_u, y_u(s+t)\rangle|.\end{aligned}$$

En intégrant cette dernière inégalité sur l'intervalle $[0,T]$ et en utilisant la propriété de semi-groupe pour la solution $y(t)$ et l'inégalité de Schwartz, en remarquant que les applications $x \mapsto C_x = (2L_u x + \|c\|)(L_u x + \|c_u\|)$ sont décroissantes $\left(C_{\|y_u(t)\|} \leq C_{\|y_0\|}\right)$, on obtient

$$\int_0^T |\langle N_u S_u(s) y_u(t) + c_u, S_u(s) y_u(t)\rangle| ds \leq T^3 C_{(\|y_0\|;c_u)} \left(\int_0^T \frac{|\langle y_u(s+t), N_u y_u(s+t) + c_u\rangle|^2}{1 + |\langle y_u(s+t), N_u y(s+t) + c_u\rangle|} ds \right)^{\frac{1}{2}} + \int_0^T |\langle N_u y_u(s+t) + c_u, y_u(s+t)\rangle| ds.$$

Puisque

$\int_0^T |\langle N_u y_u(s+t) + c_u, y_u(s+t)\rangle| ds \leq \left(1 + L_u\|y_0\|^2 + \|c_u\|\|y_0\|\right) \int_0^T \frac{|\langle y_u(s+t), N_u y_u(s+t)+c_u\rangle|^2}{1+|\langle y_u(s+t), N_u y_u(s+t)+c_u\rangle|} ds,$

par l'inégalité de Schwartz, on obtient

$\int_0^T |\langle N_u y_u(s+t) + c_u, y_u(s+t)\rangle| ds \leq T\left(1 + L_u\|y_0\|^2 + \|c_u\|\|y_0\|\right) \left(\int_0^T \frac{|\langle y_u(s+t), N_u y_u(s+t)+c_u\rangle|^2}{1+|\langle y_u(s+t), N_u y_u(s+t)+c_u\rangle|} ds \right)^{\frac{1}{2}}.$

Nous en déduisons que

$$\int_0^T |\langle N_u S_u(s) y_u(t) + c_u, S_u(s) y_u(t)\rangle| ds \leq \mathcal{M} \left(\int_0^T \frac{|\langle y_u(s+t), N_u y_u(s+t) + c_u\rangle|^2}{1 + |\langle y_u(s+t), N_u y_u(s+t) + c_u\rangle|} ds \right)^{\frac{1}{2}},$$

où : $\mathcal{M} = \left(\rho T^{\frac{3}{2}} C_{(\|y_0\|;c_u)}\right) + T(1 + L_u\|y_0\|^2 + \|c_u\|\|y_0\|)$. On obtient ainsi l'estimation (3.10).



Remarque:

Pour c=0, on obtient le même résultat que dans le cas homogène (voir [OTB12]),
$\mathcal{M} = \rho T^{\frac{3}{2}}\left(2L_u\|y_u(0)\|)(L(N_u)\|y_u(0)\|\right) + T(1 + L_u\|y_u(0)\|^2)$.

Théorème 3.2:

Soit A un générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $S(t)$, et supposons que les conditions suivantes soient remplies ; **(1)** $S(t)$ est un semi groupe de contraction ; **(2)** il existe $\delta, T > 0$ tel que :

$$\int_0^T |\langle N_u S_u(s) y_u(t) + c_u, S(s) y_u(t)\rangle| ds \geq \delta \|y_u(t)\|, \quad \forall y_u \in \mathcal{H}_u. \tag{3.13}$$

Alors le contrôle $v_u(t) = -\rho \frac{\langle y_u(t), N_u y_u(t)+c_u\rangle}{\langle y_u(t), N_s y(t)+c_u\rangle|+1}$ stabilise exponentiellement le système (3.8).
Plus précisément, il existe $\beta > 0$ tel que $\|y_u(t)\| \leq e^{-\beta_u} \|y_0\| e^{-\frac{\beta_u}{T}(t)} \quad ; \quad \forall t > 0.$

Preuve

Intégrer l'inégalité suivante sur l'intervalle $[kT, (k+1)T]$, for $k \in \mathbb{N}$ et $T > 0$,

$$\frac{d}{dt}\|y_u(t)\|^2 \leq -2\rho \frac{(\langle y_u(t); N_u y(t) + c_u\rangle)^2}{|\langle y_u(t), N_u y(t) + c_u\rangle| + 1}; \forall t \in [0,T].$$

on obtient $\|y_u((k+1)T)\|^2 - \|y_u(kT)\|^2 \leq -2\rho \int_{kT}^{(k+1)T} \frac{|\langle y(\tau), N_u y(\tau)+c_u\rangle|^2}{|\langle y_u(\tau), N_u y_u(\tau)+c_u\rangle|+1} \, \mathrm{d}\tau.$

En utilisant maintenant l'estimation (3.10), nous déduisons que

$$\|y_u((k+1)T)\|^2 - \|y_u(kT)\|^2 \leq \frac{-2\rho}{\mathcal{M}} \left(\int_0^T |\langle S_u(\tau) y_u(t), N_u S_u(\tau) y_u(t) + c_u\rangle| \, \mathrm{d}\tau \right)^2.$$

D'après l'inégalité (3.13), nous avons

$$\|y_u((k+1)T)\|^2 - \|y_u(kT)\|^2 \leq \frac{-2\rho\delta^2}{\mathcal{M}} \|y_u(kT)\|^2. \tag{3.14}$$

Soit $s_k = \|y(kT)\|^2,\ k \in \mathbb{N}$, l'inégalité (4.18) peut être écrite comme suit

$$s_{k+1} - s_k \leq \frac{-2\rho\delta^2}{\mathcal{M}} s_k, \quad \forall k \geq 0$$

$$s_{k+1} \leq C s_k, \quad \forall k \geq 0,$$

où $C = \left(1 - \frac{2\rho}{\mathcal{M}}\delta^2\right) < 1$, ce qui donne $s_k \leq e^{-k \ln \frac{1}{C}} s_0$.

Donc, $\|y_u(t)\| \leq e^{-\frac{\ln(\frac{1}{C})}{2}} \|y_0\| e^{-\frac{\ln(\frac{1}{C})}{2T}t}$ pour tout $t \geq 0$.

$\|y_u(t)\| \leq e^{-\beta_u} \|y_0\| e^{-\frac{\beta_u}{T}t}$ for all $t \geq 0$ où $\beta_u = \frac{\ln(\frac{1}{C})}{2} > 0$.

3.4.4 Stabilisation exponentielle

Théorème 3.3:

Supposons que les hypothèses des théorèmes (3.1) et (3.2) soient vérifiées.

Alors le contrôle $v(t) = -\rho \frac{\langle y(t), Ny(t)+c\rangle}{\langle y(t), Ny(t)+c\rangle |+1}; (\forall t > 0, \rho > 0)$ stabilise exponentiellement le système (3.4).

Plus précisément, il existe $\beta > 0$ et $\alpha > 0$ tel que $\|y(t)\| \leq \alpha e^{-\beta t}, \forall t \geq 0$.

Preuve

En utilisant la proposition 3.1, nous déduisons que le système (3.4) admet une unique solution globale $y(t)$;

D'après la décomposition (3.7), nous avons $y(t) = y_u(t) + y_s(t)$.

Il découle des théorèmes (3.1) et (3.2) que

$$\begin{aligned} y(t) &\leqslant e^{-\beta_u} \|y_0\| e^{-\frac{\beta_u}{T}t} + K_\eta \|y_s(0)\| e^{-\beta_s t} \\ &\leqslant 2(e^{-\beta_u} \|y_0\| + K_\eta \|y_s(0)\|) e^{-min(e^{-\frac{\beta_u}{T}}, \beta_s)t}. \end{aligned}$$

Donc, $\|y(t)\| \leq \alpha e^{-\beta t},\ \forall t \geq 0$, où $\alpha = 2(e^{-\beta_u} \|y_0\| + K_\eta \|y_s(0)\|)$ et $\beta = min(\frac{\beta_u}{T}, \beta_s)$.

3.5 Stabilisation forte

Théorème 3.4:

Soit A un générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $S(t)$, et supposons que les conditions suivantes soient remplies ;

1. N est localement Lipschitzien ;
2. il existe $\delta, T > 0$ tel que

$$\int_0^T |\langle NS(s)y(t) + c, S(s)y(t)\rangle| \mathrm{d}s \geq \delta \|y(t)\|^2 \quad \forall y \in \mathcal{H}. \tag{3.15}$$

Le contrôle $v(t) = -\rho \frac{\langle y(t), Ny(t)+c\rangle}{\langle y(t), Ny(t)+c\rangle |+1}; (\forall t > 0, \rho > 0)$ stabilise fortement le système (3.4) avec l'estimation de décroissance suivante :

$$\|y(t)\| = O\left(t^{-\frac{1}{2}}\right) \text{ as } t \to +\infty.$$

Preuve

Si $\mathcal{H} = \mathcal{H}_u$ est de dimension finie, on retrouve le résultat du théorème (3.2). Dans le cas où $\dim \mathcal{H}_u = +\infty$, en suivant les techniques utilisées dans la preuve du lemme (3.4.3), on peut établir l'estimation suivante,

lorsque $t \longrightarrow +\infty$:

$$\int_0^T |\langle S(\tau)y(t), NS(\tau)y(t)+c\rangle| d\tau = O\left(\sqrt{\int_t^{t+T} \frac{|\langle y(\tau), Ny(\tau)+c\rangle|^2}{1+|\langle Ny(\tau)+c, y(\tau)\rangle|} d\tau}\right). \tag{3.16}$$

En intégrant l'inégalité $\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 \leq -2\rho\frac{(\langle y(t);Ny(t)+c\rangle)^2}{|\langle y(t),Ny(t)+c\rangle|+1}; \forall t \in [0,T]$, sur l'intervalle $[kT,(k+1)T]$, for $k \in \mathbb{N}$ et$T > 0$, on obtient

$\|y((k+1)T)\|^2 - \|y(kT)\|^2 \leq -2\rho \int_{kT}^{(k+1)T} \frac{|\langle y(\tau),Ny(\tau)+c\rangle|^2}{|\langle y(\tau),Ny(\tau)+c\rangle|+1}\, \mathrm{d}\tau.$

En utilisant maintenant l'estimation (3.16), nous en déduisons que $\|y((k+1)T)\|^2 - \|y(kT)\|^2 \leq \frac{-2\rho}{\mathcal{M}}\left(\int_0^T |\langle S(\tau)y, NS(\tau)y+c\rangle| \mathrm{d}\tau\right)^2$.

D'après (3.15), nous avons $\|y((k+1)T)\|^2 - \|y(kT)\|^2 \leq \frac{-2\rho\delta^2}{\mathcal{M}}\|y(kT)\|^4$.

Soit $s_k = \|y(kT)\|^2, k \in \mathbb{N}$, la dernière inégalité peut s'écrire comme suit

$$s_{k+1} \leq s_k - \frac{2\rho\delta^2}{\mathcal{M}} s_k^2, \quad \forall k \geq 0.$$

En utilisant le fait que $t \mapsto \|y(t)\|$ est une fonction décroissante $[0,+\infty[$, on obtient

$$s_{k+1} \leq s_k - \frac{2\rho\delta^2}{\mathcal{M}} s_{k+1}^2, \quad \forall k \geq 0.$$

La dernière inégalité peut être écrite comme suit :

$s_{k+1} \leq s_k - Cs_{k+1}^2, \quad \forall k \geq 0.$

où $C = \frac{2\rho\delta^2}{\mathcal{M}} > 0$. Pour obtenir le taux de décroissance des solutions de (3.4), nous rappelons le lemme suivant, (voir [Rus75] et [LT93]).

Lemme 3.2:

Soit la suite de nombres réels non négatifs $(s_k)_k,\ k = 0,1,2,\ldots$

satisfait $s_{k+1} \leqslant s_k - C(k+1)^r s_{k+1}^2$,

où C est un nombre réel positif et r est un nombre entier.

Il existe alors un nombre positif $M = M(M,r,u_0)$ tel que :

$s_k \leqslant \frac{M}{(k+1)^{r+1}}, \quad k = 0,1,2,3,\ldots.$

Ainsi, d'après le lemme et pour $r = 0$, il existe une constante positive K (dépendant de C) telle que $s_k \leq \frac{M}{k+1}$, donc $\|y(kT)\|^2 \leq \frac{M}{k+1}$.

For $k = E(\frac{t}{T})$, $\left(E\left(\frac{t}{T}\right)\right.$ désigne la partie entière de $\left.\frac{t}{T}\right)$, on obtient

$$\|y(E(\frac{t}{T})T)\|^2 \leq \frac{M}{E(\frac{t}{T})+1}.$$

En utilisant le fait que $E(\frac{t}{T})T \leq t$ et $t \mapsto \|y(t)\|$ est une fonction décroissante $[0,+\infty[$,

on obtient $\|y(t)\|^2 \leq \frac{TM}{t}$.

Donc, $\|y(t)\| = O\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)$, as $t \longrightarrow +\infty$.

3.6 Applications

Équation de la chaleur unidimensionnelle

Considérons l'équation de la chaleur semi-linéaire suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + v(y(x,t))(Ny(x,t)+c), & x \in (0,1), t > 0, \\ \frac{\partial y(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial y(1,t)}{\partial x} = 0, & \forall t > 0, \end{cases} \tag{3.17}$$

où $y(t)$ est la température à l'instant t.

Nous prenons l'espace d'état $H = L^2(0,1)$ et l'opérateur A est définie par

$Ay = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, with $\mathcal{D}(A) = \left\{ y \in \mathcal{H}^2(0,1) \mid \frac{\partial y(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial y(1,t)}{\partial x} = 0 \right\}$.

Le domaine de A donne la condition limite homogène de Neumann imposée aux extrémités de la barre, ce qui nécessite de spécifier comment la chaleur s'écoule hors de la barre et signifie que les deux extrémités sont isolées.

Le contrôle $v(y(t))$ est défini par

$$v(y(t)) = -\rho \frac{\langle y(t), Ny(t)+c \rangle}{|\langle y(t), Ny(t)+c \rangle| + 1} \quad \forall t \geq 0. \tag{3.18}$$

L'opérateur de contrôle $\mathcal{H}$ est définie par $Ny = |\langle y, \varphi_1 \rangle| \varphi_1$

N est un opérateur non linéaire séquentiellement continu et localement Lipschitz tel que $NP_u = P_u N$ et $N(0) = 0$.

Le spectre de A est donné par les valeurs propres simples $\lambda_j = -\pi^2(j-1)^2$, $j \in \mathbb{N}^*$, et les fonctions propres $\varphi_1(x) = 1$ et $\varphi_j(x) = \sqrt{2}\cos((j-1)\pi x)$ for all $j \geq 2$.

Alors le sous-espace H_u est l'espace unidimensionnel engendré par la fonction propre φ_1,

et nous avons $S_u(t)y_u = \langle y_u, \varphi_1 \rangle \varphi_1$, donc $S_u(t) = I_{H_u}$ (l'identité) et donc $(S_u(t))_{t\geq 0}$ est un semigroupe d'isométries.

On voit que (3.13) est valable, et les hypothèses du Théorème 3.1 sont vérifiées.

Pour $j \geq 2$, le sous espace $\mathcal{H}_s$ est engendré par les fonctions propres $(\varphi_j)_{j\geq 2}$; $NP_s = P_s N$

On a $S_s(t) = \sum_{j=2}^{\infty} e^{-\pi^2(j-1)^2 t}$.

Or $j - 2 \geq 0$, donc $e^{-2\pi^2 j(j-2)t} \leqslant 1$,

alors : $\|S_s(t)\| \leq \mathrm{e}^{-\pi^2 t}$, $\forall t \geq 0$.

Donc, A_s satisfait l'hypothèse suivant (spectrum-determined growth assumption).

$$\text{Si} \quad \rho < \frac{\pi^2}{(L_s \|y_s(0)\| + \|c_s\|)(L_u \|y_s(0)\| + \|c_s\|)}, \quad \text{où} \quad L_u = \alpha_1 \quad \text{and} \quad L_s = \sum_{j=2}^{+\infty} \alpha_j^2,$$

alors les hypothèses du théorème 3.2 sont vérifiées.

Enfin, les hypothèses des théorèmes 3.1 et 3.2 sont vérifiées. En appliquant le théorème 3.3, nous déduisons que le système (3.17) est exponentiellement stabilisable par le contrôle

$$v(y(t)) = -\rho \frac{(\alpha_1 + |c_u|)y_u(t)^2 + |c_u| y_u(t)}{(1+\alpha_1+|c_u|)y_u(t)^2 + (1+|c_u|)y_u(t)} \quad \forall t \geq 0.$$

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, les ensembles de conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilisation exponentielle des systèmes semi-linéaires non homogènes sont donnés. Les commandes de stabilisation peuvent être limitées en termes de temps et d'états initiaux et peuvent être appliquées à des systèmes soumis à des contraintes sur l'entrée

de commande. Bien que la stabilisation exponentielle d'opérateurs bornés nous permette de discuter de divers problèmes de stabilisation, la présente étude ne couvre pas d'autres situations, comme le cas de la stabilisation exponentielle d'opérateurs non bornés dans un espace de Banach. De plus, la question du contrôle des opérateurs non bornés est d'un grand intérêt.

Les résultats de ce chapitre ont été publiés. (voir [BCA23]).

Chapitre 4

Stabilisation avec estimation de la décroissance d'un système de contrôle semi-linéaire non homogène avec un contrôle non borné.

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions le problème de la stabilisation d'un système de contrôle semi-linéaire non homogène dans un espace d'état de Hilbert. Nous proposons un contrôle qui permet d'obtenir une stabilisation forte et faible sous certaines hypothèses liées à l'observabilité approximative, le contrôle proposé garantit une estimation de la décroissance. Les résultats obtenus ont été illustrés par l'application à l'équation de Schrödinger non linéaires et à l'équation de la chaleur.

Considérons le système semi-linéaire non homogène décrit par l'équation,

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + v(t)(Ny(t) + c) \\ y(0) = y_0 \in \mathcal{H} \end{cases} \tag{4.1}$$

où

1. $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert réel de dimension infinie (espace d'état), menu du produit scalaire $\langle ., . \rangle$ et de la norme correspondante $\|.\|$.
2. A est un opérateur non borné dont le domaine est $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}$ et génère un semi-groupe de contraction fortement continu $(S(t))_{t \geq 0}$ dans $\mathcal{H}$;
3. N est un opérateur non linéaire de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ localement Lipschitzien et séquentiellement continu tel que $N(0) = 0$;
4. $v(t)$ est une fonction à valeur scalaire, représente le contrôle ;
5. $c \neq 0$ est un vecteur de $\mathcal{H}$

Remarque:

Si N est linéaire, le système (4.1) est bilinéaire, et si N est non-linéaire, le système (4.1) est semi-linéaire ; si $c = 0$, le système est homogène, et si $c \neq 0$, le système est non homogène.

Notre objectif est d'étudier la possibilité de trouver un contrôle $u(y(t))$ aussi "régulière" que possible, qui puisse assurer la stabilité du système (4.1). De nombreux auteurs ont étudié la stabilisation, par un contrôle (feedback), des

systèmes bilinéaires et semi-linéaires homogènes dans un espace d'état de Hilbert, en utilisant diverses approches de contrôle. Différentes conditions nécessaires et suffisantes ont été données pour stabiliser des systèmes comme (1.5) dans les cas de dimension finie et infinie. (Voir J.Ball, M.Slemrod [BS79] ; M.Ouzahra, A.Tsouli et A. Boutoulout [OTB12] ; E. Zerrik et M. Ouzahra [ZO07] ; M.Ouzahra [OTB12] ; A.Benzaza et M.Ouzahra[BM19] ; Bounit, H., et Hammouri, [BH99] ; A. El Alami et M. chqondi [ECA21]).

- Dans [BS79], J. Ball et M. Slemrod ont prouvé que si N est un opérateur séquentiellement continu et $S(t)$ est un semigroupe de contractions tel que :

$$\langle BS(t)y, S(t)y\rangle = 0, \forall t \geq 0 \Longrightarrow y = 0$$

  alors le feedback $v(t) = -\langle z(t), Bz(t)\rangle$ stabilise faiblement le système (1.5).

- Dans [OTB12], M. Ouzahra, A. Tsouli, et A. Boutoulout ont proposé une famille de contrôles,

$$p_r(t) = -\frac{\langle Ny(t), y(t)\rangle}{\|y(t)\|^r}, \quad r \in \mathbb{R},$$

  cela garantit une stabilisabilité faible et forte pour les systèmes semi-linéaires, le cas $r = 0$ a été considéré dans de nombreux travaux, (voir [BH99] et [Bal78]).

- Dans [ZO07], E. Zerrik et M. Ouzahra ont prouvé que si $\langle PBS(t)y, S(t)y\rangle = 0, (\forall t \geq 0) \Longrightarrow y = 0$, où P est un opérateur compact satisfaisant $Re\langle PAz, z\rangle = 0, \forall z \in \mathcal{D}(A)$ alors le contrôle

$$v(t) = -\langle z(t), PBz(t)\rangle$$

  stabilise faiblement (1.5).

- Dans [BM19], Benzaza et Ouzahra ont traité la stabilisation faible et forte des systèmes bilinéaires par un contrôle quadratique dans un espace d'état réflexif.

- Dans [HO18], Z. Hamidi et M. Ouzahra ont donné des conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilisation partielle faible et forte de systèmes bilinéaires non homogènes par le contrôle,

$$u(t) = -r\frac{\langle y(t), By(t) + b\rangle}{|\langle y(t), By(t) + b\rangle| + 1}, (r > 0)$$

  où B est un opérateur linéaire borné de l'espace d'état de Hilbert.

Ce chapitre étudie la stabilisation des systèmes de contrôle semi-linéaires non homogènes dans l'espace d'état de Hilbert. Nous proposons le contrôle suivant

$$u(t) = -\frac{\langle Ny(t) + c, y(t)\rangle}{r(y)},$$

pour obtenir une stabilisation forte et faible sous les hypothèses d'observabilité approximative suivantes,

$$\exists \delta, T > 0 \quad \text{such that} \int_0^T |\langle NS(s)y(t) + c, S(s)y(t)\rangle| \mathrm{d}s \geq \delta \|y(t)\|^2 \quad \forall y \in \mathcal{H}.$$

Ce chapitre est organisé comme suit ; dans la section 2, nous choisissons un contrôle qui assure la stabilisation de notre système ; dans la section 3, nous montrons l'existence et l'unicité de la solution dans le cas semi-linéaire non

homogène ; dans la section 4, nous étudions la stabilisation forte et l'estimation de la décroissance, et dans la section 5, nous examinons le problème de la stabilisation faible en utilisant le contrôle choisi, dans la dernière section, nous donnons des illustrations à travers des exemples régis par les équations non linéaires de Schrödinger et de la chaleur.

4.2 Choix du contrôle

Soit (4.1) comme indiqué dans l'introduction. Ici, l'espace d'état est un Hilbert $\mathcal{H}$ avec un produit scalaire $\langle ,. \rangle$ et la norme correspondante $\|.\|$, $y(t)$ est l'état, et $u(t)$ est un contrôle à valeur scalaire.
Le problème de stabilisation consiste à choisir un contrôle de rétroaction $u(t)$ tel que la solution du système de rétroaction résultant satisfasse en un certain sens $y(t)$
Le problème de la stabilisation consiste à choisir une commande de rétroaction (feedback) $u(t)$ telle que la solution du système satisfait dans un certain sens $y(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$. Si nous calculons formellement le taux de variation temporelle de "l'énergie", nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 &= 2 < y(t); \frac{d}{dt}y(t) > \\ &= 2 < y(t); Ay(t) > +2u(t) < y(t), Ny(t) + c >\end{aligned}$$

ce qui implique, puisque $S(t)$ est un semi-groupe de contractions,

$$\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 \leq 2u(t) < y(t); Ny(t) + c >; \forall t \in [0, T]$$

Ensuite, pour s'assurer que l'énergie ne croît pas, un choix évident de contrôle en retour (mais pas le seul) est le suivant,

$$u(t) = -\frac{\langle Ny(t) + c, y(t)\rangle}{r(y(t))}; \forall t \in [0, T] \tag{4.2}$$

où $r : \mathcal{H} \to]0, +\infty[$ est une fonction Lipschitzienne sur tout intervalle borné et telle que $r(.) \geq m > 0$ sur $\mathcal{H}$, notant que ce contrôle permet d'obtenir "l'inégalité de dissipation d'énergie" suivante,

$$\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 \leq -2\frac{|\langle Ny(t) + c, y(t)\rangle|^2}{r(y(t))}; \forall t \in [0, T] \tag{4.3}$$

4.3 Existence et unicité des solutions

Avec la commande (4.2), le système (1.5) devient

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = Ay(t) - \frac{\langle Ny(t) + c, y(t)\rangle}{r(y(t))}(Ny(t) + c), \quad y(0) = y_0 \tag{4.4}$$

Dans cette section, nous allons discuter de l'existence et de l'unicité de la solution du système (4.4).

Théorème 4.1:

Soit A un opérateur non borné de domaine $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}$ qui génère un semi-groupe de contractions fortement continu $S(t)$, soit $\mathcal{N}$ un opérateur localement Lipschitzien et séquentiellement continu, et soit la fonction r(.) lipschitzienne sur tout intervalle borné, tel que $r(.) \geq m > 0$ sur $\mathcal{H}$.

Alors, le système (4.4) possède une unique solution globale $y(t)$ définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$, qui est donnée par la formule :

$$y(t) = S(t)y_0 - \int_0^t \frac{\langle Ny(s) + c, y(s)\rangle}{r(y(s))} S(t-s)(Ny(s) + c)ds$$

Preuve

Soit le système : $\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + f(t, y(t)), \quad y(0) = y_0,$

où $f(t, y) = -\frac{\langle Ny+c,y\rangle}{r(y)}(Ny + c),$ if $y \neq 0$.

Montrer que $f(t; y(t))$ satisfait une condition locale de Lipschitz en y, uniformément en t sur des intervalles bornés. On peut donc appliquer Th. 1.4. dans [MJ85], p. 185, pour obtenir qu'il existe un $t_{\max} \leq \infty$ tel que (4.4) a une unique solution douce y définie sur $[0, t_{\max}[$ et qu'en outre, si $t_{\max} < \infty$ alors $\lim_{t\to t_{max}} \|y(t)\| = \infty$

Soit

$$\begin{aligned} f(t, y) &= -\frac{\langle Ny + c, y\rangle}{r(y)}(Ny + c) \\ &= -\left(\left(\frac{\langle Ny, y\rangle}{r(y)} Ny\right) + \left(\frac{\langle Ny, y\rangle}{r(y)} c + \frac{\langle c, y\rangle}{r(y)}(Ny + c)\right)\right) \end{aligned}$$

Définissons les fonctions $f_c(t, y)$ et $f_h(t, y)$ de $[0, +\infty[\times\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$. En fixant pour tous les $t \in [0, +\infty[$ et pour tout $y \in \mathcal{H}$ $f_c(t, y) = -\left(\frac{\langle Ny,y(t)\rangle}{r(y)} c + \frac{\langle c;y\rangle}{r(y)}(Ny + c)\right)$ et $f_h(t, y) = -\frac{\langle Ny,y\rangle}{r(y)} Ny.$

Donc $\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + f_h(t, y(t)) + f_c(t, y(t)).$

Pour c=0, nous obtenons le cas homogène $\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + f_h(t, y(t))$ (voir [OTB12])

Dans [OTB12] Nous voyons que $f_h(t, y)$ satisfait une condition locale de Lipschitz en y, uniformément en t sur des intervalles bornés, telle que,

$$\|f_h(t, y) - f_h(t, z)\| \leq \frac{RL_R(r)L_R^2(B)\big(3L_R(B) + RL_R(r)\big)}{m^2}\|y - z\| \tag{4.5}$$

Montrons maintenant que $f_c(t, y)$ est localement lipschitzienne$y$.

Soit $x, y, z \in \mathcal{H}$ avec $t \in [0, T]$ et $R > 0$ tel que $\|x - z\| \leq R$ et $\|x - y\| \leq R$, (nous pouvons prendre $x = 0$). Puisque $N()$ et $r()$ sont localement Lipschitziennes, donc il existent $L_R(N) > 0$ et $L_R(r) > 0$ tels que pour tous $z, y \in \mathcal{H}$ tels que $0 < \|y\| \leqslant \|z\| \leqslant R$, on a $\|Nz - Ny\| \leqslant L_R(N)\|z - y\|$ et $\|r(z) - r(y)\| \leqslant L_R(r)\|z - y\|$

$$\text{On a} \quad f_c(t, y) - f_c(t, z) = \left(\frac{\langle Ny, y\rangle}{r(y)} c - \frac{\langle Nz, z\rangle}{r(z)} c\right) - \left(\frac{\langle c, y\rangle}{r(y)}(Ny + c) - \frac{\langle c, z\rangle}{r(z)}(Nz + c)\right)$$

$$\|f_c(t, y(t)) - f_c(t, z(t))\| \leq \left\|\frac{\langle Ny, y\rangle}{r(y)} c - \frac{\langle Nz, z\rangle}{r(z)} c\right\| + \left\|\frac{\langle c, y(t)\rangle}{r(y(t))}(Ny(t) + c) - \frac{\langle c, z(t)\rangle}{r(z(t))}(Nz(t) + c)\right\| \tag{4.6}$$

D'après la relation

$$\frac{\langle Ny, y\rangle}{r(y)} c - \frac{\langle Nz, z\rangle}{r(z)} c = \frac{r(z)\big(\langle Ny - Nz, y\rangle + \langle Nz, y - z\rangle\big) + \big(r(z) - r(y)\big)\langle Nz, z\rangle}{r(y)r(z)} c.$$

En utilisant que $N()$ et $r()$ sont localement Lipschitziennes, ; et l'inégalité de Schwartz, il s'ensuit que :

$$\left\| \frac{\langle Ny, y\rangle}{r(y)}c - \frac{\langle Nz, z\rangle}{r(z)}c \right\| \leq \frac{3R^2 L_R(r)L_R(N)\|c\|}{m^2}\|y - z\| \tag{4.7}$$

d'après (4.6) et (4.7), on a

$$\|f_c(t, y(t)) - f_c(t, z(t))\| \leq \left(\frac{6R^2 L_R(r)L_R(N)\|c\| + 2RL_R(r)\|c\|^2}{m^2}\right)\|y - z\|. \tag{4.8}$$

Puisque $\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq \|f_h(t, y(t)) - f_h(t, z(t))\| + \|f_c(t, y(t)) - f_c(t, z(t))\|$, d'après (4.5) et (4.8),

$$\text{On a} \quad \|f(t, y) - f(t, z)\| \leq \mathcal{M}_{(R;c)}\|y - z\|,$$

où

$$\mathcal{M}_{(R;c)} = \left(\frac{RL_R(r)L_R^2(N)\big(3L_R(N) + RL_R(r)\big)}{m^2}\right) + \left(\frac{6R^2 L_R(r)L_R(N)\|c\| + 2RL_R(r)\|c\|^2}{m^2}\right)$$

Donc $f(t; y(t))$ satisfait une condition locale de Lipschitz en y, uniformément en t sur des intervalles bornés. Nous pouvons donc appliquer Th. 1.4. dans [MJ85] p. 185, et conclure qu'il existe $t_{\max} \leq \infty$ tel que (4.4) admet une unique solution y on $[0, t_{\max}[$ qui est donnée par la formule

$$y(t) = S(t)y_0 - \int_0^t \frac{\langle Ny(s) + c, y(s)\rangle}{r(y(s))}S(t - s)(Ny(s) + c)ds$$

Pour montrer que $t_{\max} = +\infty$, il suffit de montrer que pour chaque $T > 0$, la solution $y(t)$ est bornée par une constante indépendante de T. Pour ce faire, nous discutons deux cas : **i)** Si $y_0 \in \mathcal{D}(A)$ alors la fonction $v(t) := \frac{1}{2}\|y(t)\|^2$ est continuellement différentiable et nous pouvons écrire $\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 = 2 < y(t); Ay(t) > +2u(t) < y(t), Ny(t) + c >$ pour tous $t \geq 0$,
A est dissipatif alors $\langle y(t); Ay(t)\rangle \leq 0$; Cela donne l'inégalité suivante

$$\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 \leq -2\frac{\langle Ny + c, y\rangle^2}{r(y)}; \forall t \in [0, T]$$

En intégrant cette dernière inégalité sur l'intervalle [s,t], il en résulte que,

$$\|y(t)\|^2 - \|y(s)\|^2 + 2\int_s^t \frac{(\langle Ny(s) + c, y(s)\rangle)^2}{r(y(s))} \leq 0, \forall t \geq s \geq 0 \tag{4.9}$$

On peut donc en déduire que,

$$\|y(t)\| \leq \|y_0\|, \forall t \geq 0 \tag{4.10}$$

ii) Si $y_0 \notin \mathcal{D}(A)$, il existe une suite $\left(y_0^n\right)_n$ d'élément de $\mathcal{D}(A)$ converge vers y_0 dans $\mathcal{H}$ puisque $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$. d'après le premier cas, on a $\forall t \in [0, T]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|y^n(t)\| \leq \left\|y_0^n\right\|$.
Nous concluons que $\|y(t)\| \leq \|y_0\|$ ($\forall t \in [0, t_{\max}[$), donc $t_{\max} = +\infty$ (voir [AB03] et [MJ85]).

4.4 Stabilisation forte et estimation de la décroissance.

Proposition 4.1:

Soit A un générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions $S(t)$ dans $\mathcal{H}$ et soit $\mathcal{H}$ un opérateur non linéaire localement Lipschitzien et $r(.)$ est lipschitzienne sur tout intervalle borné, tel que$r(.) \geq m > 0$ sur $\mathcal{H}$, L'état du système (4.4) satisfait à l'estimation de décroissance suivante :

$$\left(\int_0^T |\langle NS(s)y(t)+c, S(s)y(t)\rangle| \mathrm{d}s\right) = O\left(\int_t^{T+t} |\langle y(s), Ny(s)+c\rangle|^2 \, \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} \text{ as } t \to +\infty \tag{4.11}$$

Preuve

D'après la relation

$$\begin{aligned}\langle NS(t)y_0+c, S(t)y_0\rangle &= \langle NS(t)y_0+c, S(t)y_0-y(s)\rangle + \langle NS(t)y_0+c, y(s)\rangle \\ &= \langle NS(t)y_0, S(t)y_0-y(s)\rangle + \langle c, S(t)y_0-y(s)\rangle + \langle NS(t)y_0+c, y(s)\rangle \\ &= \langle NS(t)y_0, S(t)y_0-y(s)\rangle + \langle c, S(t)y_0-y(s)\rangle + \langle NS(t)y_0-NS(t)y(s), y(s)\rangle + \langle NS(t)y(s)+c, y(s)\rangle\end{aligned}$$

Puisque N est lipschitzienne et $S(t)$ est un semi-groupe de contractions, on obtient l'inégalité

$$|\langle NS(s)y_0+c, S(s)y_0\rangle| \leq \Big(2L_R\|y_0\| + \|c\|\Big)\|\Psi(t)\| + |\langle Ny(s)+c, y(s)\rangle|. \tag{4.12}$$

où $\Psi(t) = S(t)y_0 - y(s)$.

Donc $\Psi(t) = \int_0^t \frac{\langle y(s), Ny(s)+c\rangle}{r(y(s))} S(t-s)(Ny(s)+c)ds$.

En utilisant l'inégalité de Schwartz et le fait que $\|y(t)\| \leq \|y_0\|$, on obtient,

$$\|\Psi(t)\| \leq \frac{L_R(N)\|y_0\| + \|c\|}{m}\left(T\int_0^T |\langle y(s), Ny(s)+c\rangle|^2 \, \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} \forall t \in [0,T] \tag{4.13}$$

Il découle de (4.12) et (4.13) que,

$$|\langle NS(s)y_0+c, S(s)y_0\rangle| \leq \frac{M_{\|y_0\|}\sqrt{T}}{m}\left(\int_0^T |\langle y(s), Ny(s)+c\rangle|^2 \, \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} + |\langle Ny(s)+c, y(s)\rangle|. \tag{4.14}$$

Où $M_{\|y_0\|} = (2L_R(N)\|y_0\| + \|c\|)(L_R(N)\|y_0\| + \|c\|)$

en remplaçant y_0 par $y(t)$ dans (4.14) et (4.12) et en utilisant $\|y(t)\| \leq \|y_0\| \, \forall t \geq 0$, on obtient

$$|\langle NS(s)y(t)+c, S(s)y(t)\rangle| \leq \frac{M_{\|y_0\|}\sqrt{T}}{m}\left(\int_0^T |\langle y(\tau+t), Ny(\tau+t)+c\rangle|^2 \, \mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}} + |\langle Ny(s+t)+c, y(s+t)\rangle|.$$

En intégrant cette dernière inégalité sur l'intervalle $[0,T]$ et en utilisant la propriété de semi-groupe de la solution $y(t)$ et l'inégalité de Schwartz, il s'ensuit que

$$\int_0^T |\langle NS(s)y(t)+c, S(s)y(t)\rangle| \, ds \leq \frac{M_{\|y(t)\|}T^{\frac{3}{2}}}{m}\left(\int_0^T |\langle y(\tau+t), Ny(\tau+t)+c\rangle|^2 \, \mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}} + \int_0^T |\langle Ny(s+t)+c, y(s+t)\rangle| ds.$$

Or $x \mapsto M_x = (2L_R(N)x + \|c\|)(L_R(N)x + \|c\|)$ est décroissante $\left(M_{\|y(t)\|} \leq M_{\|y_0\|}\right)$ on obtient,

$$\begin{aligned}
\int_0^T |\langle NS(s)y(t) + c, S(s)y(t)\rangle|\, ds &\leq \frac{M_{\|y_0\|}T^{\frac{3}{2}}}{m}\left(\int_0^T |\langle y(\tau+t), Ny(\tau+t)+c\rangle|^2\, \mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}} + \int_0^T |\langle Ny(s+t)+c, y(s+t)\rangle| ds. \\
&\leq \frac{M_{\|y_0\|}T^{\frac{3}{2}}}{m}\left(\int_t^{T+t} |\langle y(s), Ny(s)+c\rangle|^2\, \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} + \int_t^{T+t} |\langle Ny(s)+c, y(s)\rangle| ds. \\
&\leq \frac{M_{\|y_0\|}T^{\frac{3}{2}}}{m}\left(\int_t^{T+t} |\langle y(s), Ny(s)+c\rangle|^2\, \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{T}\left(\int_t^{T+t} |\langle Ny(s)+c, y(s)\rangle|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}. \\
&\leq \frac{M_{\|y_0\|}T^{\frac{3}{2}} + m\sqrt{T}}{m}\left(\int_t^{T+t} |\langle y(s), Ny(s)+b\rangle|^2\, \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

On déduit que

$$\int_0^T |\langle NS(s)y(t) + c, S(s)y(t)\rangle|\, ds \leq C_R\left(\int_t^{T+t} |\langle y(s), Ny(s)+c\rangle|^2\, \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.15}$$

avec $C_R = \frac{M_{\|y_0\|}T^{\frac{3}{2}} + m\sqrt{T}}{m}$

On obtient ainsi l'estimation (4.11).

Théorème 4.2:

Soit A un générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $S(t)$ sur $\mathcal{H}$,

Supposons que,

1. N est localement Lipschitzien ;
2. il existe $\delta, T > 0$ tel que

$$\int_0^T |\langle NS(s)y + c, S(s)y\rangle| \mathrm{d}s \geq \delta\|y\|^2 \quad \forall y \in \mathcal{H}, \tag{4.16}$$

Alors le contrôle (4.2) stabilise fortement le système (1.5) avec l'estimation de décroissance suivante :

$$\|y(t)\| = O\left(t^{-\frac{1}{2}}\right), \qquad \text{as } t \to +\infty$$

Preuve

Considérons la suite $s_k = \|y(kT)\|^2$, $k \in \mathbb{N}$. En intégrant l'inégalité (4.3) sur l'intervalle $[kT, (k+1)T]$, et en utilisant $r(y) > m > 0$, on en déduit que

$$\left(\int_{kT}^{(k+1)T} \langle Ny(t) + c, y(t)\rangle^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2}}\left(\|y(kT)\|^2 - \|y((k+1)T)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \forall T \geq 0$$

en utilisant (13) et (14), nous obtenons $\|y((k+1)T)\|^2 + \frac{2\delta^2}{C_R^2 m}\|y(kT)\|^4 \leq \|y(kT)\|^2, \forall T \geq 0$

la dernière inégalité peut être écrite comme suit, $s_{k+1} + Cs_{k+1}^2 \leq s_k, \quad \forall k \geq 0$. où $C = \frac{2\delta^2}{C_R^2 m}$.

Pour obtenir le taux de décroissance des solutions de (4.4), nous rappelons le lemme suivant :

Lemme 4.1: Lasiecka et Tataru

Soit $(s_k)_{k\geq 0}$ est une suite de nombres réels positifs satisfaisant $s_{k+1} + Cs_{k+1}^{2+\alpha} \leq s_k, \quad \forall k \geq 0$

où $C > 0$ et $\alpha > -1$ sont des constantes.

Il existe alors une constante positive M_2 (dépendant de α et C), telle que $s_k \leq \frac{M_2}{(k+1)^{\frac{1}{\alpha+1}}}, k \geq 0.$

Donc, d'après le lemme (Lasiecka & Tataru, 1993), voir ([LT93]), on obtient $s_k \leq \frac{M_2}{k+1}$.
For $k = E\left(\frac{t}{T}\right)$, $\left(E\left(\frac{t}{T}\right)$ designed the integer part of $\frac{t}{T}\right)$, alors $s_k \leq \frac{M_3}{t}, (M_3 > 0)$, donc $\|y(t)\|^2 \leq \frac{M_3}{t}$.
Hence, $\|y(t)\| = O\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)$, as $t \to +\infty$.

4.5 Stabilisation faible.

Théorème 4.3:

Supposons que

(i) Soit A un générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $S(t)$ sur $\mathcal{H}$,

(ii) N est localement Lipschitzien et faiblement séquentiellement continu ; de H_w(H muni de sa topologie faible) dans $\mathcal{H}$

$$(iii) \quad \langle NS(t)y + c, S(t)y\rangle = 0, \quad \forall t \geq 0 \Longrightarrow y = 0. \tag{4.17}$$

Alors le contrôle (4.2) stabilise faiblement (1.5)

Preuve

Introduisons l'ensemble limite faible de ω.

$$\Omega_w(y_0) = \{\phi \in \mathcal{H} : \exists t_n \to +\infty \quad \text{such that } y(t_n) \rightharpoonup \phi\}.$$

Puisque $\mathcal{H}$ est réflexif, il découle de (4.10) que $\Omega_w(y_0) \neq \emptyset$
Soit $\phi \in \Omega_w(y_0)$ et $t_n \to +\infty$ tel que $y(t_n) \to \phi$.
Nous savons que N est localement Lipschitzien et faiblement séquentiellement continu ; de H_w dans H et, alors pour tout $t \geq 0$, nous avons

$$S(t)y(t_n) \to S(t)\phi \quad \text{et} \quad NS(t)y(t_n) \to NS(t)\phi, \text{ lorsque } n \to +\infty$$

Il s'ensuit que

$$\langle NS(t)y(t_n) + c, S(t)y(t_n)\rangle \to \langle NS(t)\phi + c, S(t)\phi\rangle, \text{ lorsque } n \to +\infty \tag{4.18}$$

Dans la suite, nous fixons $T > 0$. Par le théorème de convergence dominée, on a de (4.17).
$\int_0^T \langle BS(s)y(t_n) + c, S(s)y(t_n)\rangle\, ds \to \int_0^T \langle BS(s)\phi + c, S(s)\phi\rangle ds$, lorsque $n \to +\infty$
Ensuite, en appliquant (4.16) pour $t = t_n$, on obtient

$$\int_0^T |\langle NS(s)y(t_n) + c, S(s)y(t_n)\rangle|\, ds \leq C_R\left(\int_{t_n}^{T+t_n} |\langle y(s), Ny(s) + c\rangle|^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Puisque $\int_0^T |\langle NS(s)y(t_n) + c, S(s)y(t_n)\rangle|\, ds \to 0$, lorsque $n \to \infty$.
Nous en déduisons, via le théorème de convergence dominée, que

$$\int_0^T \lim_{n\to+\infty} |\langle NS(s)y(t_n) + c, S(s)y(t_n)\rangle|\, ds = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} |\langle NS(s)y(t_n) + c, S(s)y(t_n)\rangle| = 0, \quad \forall s \in [0, T]$$

Comme T est arbitraire, donc $|\langle NS(s)\phi + c, S(s)\phi\rangle| = 0, \forall s > 0$, alors l'hypothèse (4.17) implique que $\phi = 0$.

En d'autres termes $\Omega_w(y_0) = \{0\}$, il en résulte que $y(t) \to 0$, lorsque $t \to +\infty$.(voir [Ber99])

4.6 Applications

Exemple 1 : Équation de la chaleur unidimensionnelle.

Soient $\Omega =]0,1[$, $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$, $\varphi_0(x) = 1$, $(\varphi_j, \forall j \in \mathbb{N}^*)$ sont les fonctions propres de l'opérateur Laplacien Δ, $c \in L^2(\Omega)$ et $\alpha_j \geq 0$.

Nous considérons l'équation de la chaleur semi-linéaire non homogène avec une condition aux limites de Neumann,

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = \Delta y + \frac{v(y)}{1+\|y\|} \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_j \langle y, \varphi_j \rangle \varphi_j + v(y)c, & \text{on } Q \\ y' = 0 & \text{on } \Sigma, \\ y(x,0) = 0 & \text{on } \Omega \end{cases} \tag{4.19}$$

Où $Q = \Omega\times]0,+\infty[$, $\Sigma = \partial\Omega\times]0,+\infty[$

et $\varphi_j(x) = \sqrt{2}\cos(j\pi x)$, if $j \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi_0(x) = 1$

Le spectre de $\Delta = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$ est donné par les valeurs propres simples $\lambda_j = -\pi^2 j^2$ avec $j, k \in \mathbb{N}^*$

Le système peut être écrit comme suit

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = Ay + v(y)Ny + v(y)c, & \text{on } Q \\ y' = 0 & \text{on } \Sigma, \\ y(x,0) = 0, & \text{on } \Omega \end{cases} \tag{4.20}$$

— Le contrôle $v(y(t))$ est défini par $v\big(y(t)\big) = -\frac{\langle Ny(t)+c, y(t)\rangle}{r(y(t))}$,

— L'opérateur A est défini par $Ay = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$, $\forall y \in \mathcal{D}(A)$, où $\mathcal{D}(A) = \big\{y \in \mathcal{H}^2(\Omega); \quad y' = 0 \text{ et } y(x,0) = 0\big\}$.

$y = \sum_{j=1}^{+\infty} \langle y, \varphi_j\rangle_{\mathcal{H}} \varphi_j$, et $\|y\|^2_{\mathcal{H}} = \sum_{j=1}^{+\infty} \langle y, \varphi_j\rangle^2_{\mathcal{H}}$.

L'opérateur A génère le semigroupe de contractions $S(t)y = \sum_{j=0}^{\infty} e^{\lambda_j t} \langle y, \varphi_j\rangle \varphi_j$.

— L'opérateur N, est défini par $Ny = \frac{1}{1+\|y\|} \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_j \langle y, \varphi_j\rangle \varphi_j, \quad \alpha_j \geq 0, \forall j \geq 1$

N est un opérateur non linéaire, faiblement séquentiellement continu et Lipschitzien.

On a

$$\begin{aligned} < NS(t)y + c, S(t)y > &=< NS(t)y, S(t)y > + < c, S(t)y > \\ &=< \tfrac{1}{1+\|y\|} \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_j < S(t)y, \varphi_j > \varphi_j, S(t)y > + < c, S(t)y > \\ &= \tfrac{1}{1+\|y\|} \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_j | < S(t)y, \varphi_j > |^2 + < \sum_{j=0}^{\infty} \langle c, \varphi_j\rangle \varphi_j, S(t)y > \end{aligned}$$

Par conséquent $\langle NS(t)y + c, S(t)y\rangle = 0; \big(\forall t \geq 0\big) \quad \Rightarrow \quad y = 0$

La condition (4.17) est vérifiée donc en appliquant le théorème (4.5), nous déduisons que le système (4.19) est faiblement stabilisable par le contrôle

$$v\big(y\big) = \frac{\frac{1}{1+\sum_{j=1}^{+\infty}\langle y,\varphi_j\rangle^2} \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_j \big|\langle y, \varphi_j\rangle\big|^2 + \Big\langle \sum_{j=0}^{\infty} \langle c, \varphi_j\rangle \varphi_j, y \Big\rangle}{r\big(\sum_{j=1}^{+\infty} \langle y, \varphi_j\rangle_H \varphi_j\big)}$$

où $r(.)$ est Lipschitzienne sur tout ensemble borné, telle que $r() \geq m > 0$ sur $L^2(\Omega)$.

Exemple 2 : Équation de Schrödinger non linéaire.

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathbb{C})$ et $c \in \mathcal{H}$.

Cet exemple étudie l'équation de Schrödinge non linéaire sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et soit $\partial\Omega$ la frontière de Ω.

Considérons le système défini par l'équation

$$\begin{cases} i\partial_t u = \Delta u + V(x)|u|^\alpha u + V(x)c = 0, & \text{in } \Omega\times]0,\infty[\\ z(\cdot,t) = 0, & \text{on } \partial\Omega\times]0,\infty[\end{cases} \tag{4.21}$$

L. Bergé [Ber00] a formellement étudié la condition de stabilité des solutions de soliton de (4.21), en fonction de la forme de $V(x)|u|^\alpha$ et Towers-Malomed [GS08] a observé en utilisant l'approximation variationnelle et des simulations directes qu'un certain type de non linéaire dépendant du temps donne lieu à des faisceaux complètement stables. Pour $\alpha = 2$, il s'agit de l'équation de Gross-Pitaevskii décrivant l'évolution de la condensation de Bose-Einstein qui est l'apparition d'un état particulier d'un gaz quantique à très basse température.

Nous considérons l'équation de Schrödinger semi-linéaire non homogène suivante :

$$\begin{cases} i\frac{\partial z(x,t)}{\partial t} = \Delta z(x,t) + V\big(z(x,t)\big)|z(x,t)|^\alpha z(x,t) + V\big(z(x,t)\big)c, & \text{in } \Omega\times]0,\infty[\\ z(x,t) = 0, & \text{on } \partial\Omega\times]0,\infty[\\ z(x,0) = \varphi, \end{cases} \tag{4.22}$$

Le système peut être écrit comme suit :

$$\begin{cases} i\frac{\partial z(x,t)}{\partial t} = \Delta z(x,t) + V\big(z(x,t)\big)Nz(x,t) + V\big(z(x,t)\big)c, & \text{in } \Omega\times]0,\infty[\\ z(x,t) = 0, & \text{on } \partial\Omega\times]0,\infty[\\ z(x,0) = \varphi, \end{cases} \tag{4.23}$$

Ici, l'espace d'état $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathbb{C})$ est muni de son produit scalaire complexe usuel.

— L'opérateur A est défini par $Az = -i\Delta z, \forall z \in \mathcal{D}(A)$, où : $\mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Il est bien connu que l'opérateur $A = -i\Delta$ sur le domaine $\mathcal{D}(A)$ génère un semi-groupe $\mathcal{T}(t)_{t\in\mathbb{R}}$ et nous avons $z(t) = \mathcal{T}(t)\varphi + i\int_0^t \mathcal{T}(t-s)f(s)ds, \quad \forall t \geq 0.$

— L'opérateur de contrôle est donné par $Nz = |z|^\alpha z$

$\mathcal{H}$ est un opérateur non linéaire, faiblement séquentiellement continu, et localement Lipschitzien tel que $\mathcal{N}(0) = 0$ (de sorte que 0 est un équilibre pour (4.23).

On a

$$\begin{aligned} \langle N\mathcal{T}(t)z + c, \mathcal{T}(t)z\rangle_H &= \langle N\mathcal{T}(t)z, \mathcal{T}(t)z\rangle_H + \langle c, \mathcal{T}(t)z\rangle_H \\ &= \langle|\mathcal{T}(t)z|^\alpha\mathcal{T}(t)z, \mathcal{T}(t)z\rangle_H + \langle c, \mathcal{T}(t)z\rangle_H \\ &= |\mathcal{T}(t)z|^\alpha\langle\mathcal{T}(t)z, \mathcal{T}(t)z\rangle_H + \langle c, \mathcal{T}(t)z\rangle_H \\ &= |\mathcal{T}(t)z|^\alpha\|\mathcal{T}(t)z\|_H + \langle c, \mathcal{T}(t)z\rangle_H \end{aligned}$$

It follows that $\langle N\mathcal{T}(t)z + c, \mathcal{T}(t)z\rangle_H = 0; \big(\forall t \geq 0\big) \quad \Rightarrow \quad z = 0$

La condition (4.17) est satisfaite donc en appliquant le théorème (4.5), on en déduit que le système (4.23) est faiblement stabilisable, avec un état borné sur l'ensemble du domaine Ω, par les contrôles

$V(z(x,t) = -i\frac{\langle Nz(x,t)+c,z(x,t)\rangle}{r(z(x,t))}$

Où $r(.)$ est Lipschitzienne sur tout ensemble borné, tel que $r(.) \geq m > 0$ sur $\mathcal{H}$.

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit une approche de contrôle permettant d'examiner la stabilisation faible et forte des systèmes semi-linéaires non homogènes. Le contrôle que nous avons proposé garantit l'estimation de la décroissance dans le cas d'une stabilisation forte. Cette étude incite à poursuivre les recherches sur la stabilisation forte des systèmes semi-linéaires non homogènes (4.1) avec d'autres estimations de la décroissance, en développant les résultats établis pour les systèmes semi-linéaires homogènes (le cas c = 0) dans des recherches antérieures.
Les résultats de ce chapitre ont été publiés. (voir [CBA24]).

Chapitre 5

Stabilisation partielle forte des systèmes semi-linéaires et robustesse du contrôle optimal.

5.1 Introduction

Le problème de la stabilisation partielle a fait l'objet de nombreux travaux, et il comprend l'étude de l'action d'un système distribué, dans l'ensemble du domaine d'évolution géométrique (cas de la stabilisation globale), mais aussi dans une sous-région qui peut être à l'intérieur ou à la frontière de ce domaine (cas de la stabilisation régionale). De nombreuses approches ont été utilisées pour caractériser les différents types de stabilisation, et principalement la caractérisation du contrôle qui atteint la stabilité et minimise une norme de coût donnée. Par la suite, la notion de stabilisation optimale a été développée pour les systèmes bilinéaires par Ouzahra [Ouz10]. Dans ce chapitre on propose d'étendre les résultats ci-dessus au système semi-linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + Ny(t) + v(t)By(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{5.1}$$

L'espace d'état $\mathcal{H}$ est doté du produit scalaire $\langle ., . \rangle$, et de la norme correspondante $\|.\|$, $v(t)$ est un contrôle à valeur scalaire. La dynamique A est un opérateur non borné dont le domaine $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}$ génère un semi-groupe de contractions $(S(t))_t$ sur $\mathcal{H}$. N est un opérateur non linéaire de $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{H}$ qui est dissipatif, tel que $N(0) = 0$, et B est un opérateur linéaire de $\mathcal{H}$vers $\mathcal{H}$. Notons que l'hypothèse $N(0) = 0$ implique que 0 reste un équilibre pour (5.1).
Ce problème a été traité par Haraux pour l'équation des ondes (voir [HABS17]). Dans [GT15] Gugat et. al, considèrent l'équation de Schrödinger avec une non-linéarité cubique qui détermine trois états d'équilibre constants. Ils ont donné un résultat de stabilité exponentielle du système en boucle fermée par rapport à la norme L^2. En particulier, ils ont montré que avec le feedback limite, le point d'équilibre constant instable peut être stabilisé.
Le contrôle optimal, y compris les processus quadratiques et non linéaires, a été traité par Ouzahra dans [Ouz09].
Le problème de la stabilisation des systèmes commutés comporte deux aspects : Le premier est de savoir comment rendre les systèmes commutés stables sous des lois de commutation arbitraires, et l'autre est de savoir comment concevoir une loi de commutation dans laquelle les systèmes commutés sont stabilisés. Les extensions aux systèmes à commutation de dimension infinie ont été étudiées à l'aide de la méthodologie de contrôle par mode de roulement, des fonctions de Lyapunov et de la méthode de Galerkins (voir par exemple : [EFC04],[GS10],[Gug08],[GT11]).

Le but de cet article est d'étudier la stabilisation partielle d'un système semi-linéaire de dimension infinie.
Dans Ouzahra [Ouz09], le contrôle est défini par $v(t) = -\dfrac{\langle y(t), By(t)\rangle}{\|y(t)\|^2}$ si $y(t) \neq 0$ et $v(t) = 0$.
Sinon, il est utilisé pour obtenir la stabilité exponentielle de (5.1) avec $N = 0$ par l'hypothèse d'observabilité exacte suivante :

$$\int_0^T |\langle BS(t)y, S(t)y\rangle| dt \geq \delta \|y\|^2, \ \forall y \in \mathcal{H}, (T, \delta > 0). \tag{5.2}$$

Le problème de la stabilisation faible a été étudié dans Ball et Slemrod [Bal78] avec $N = 0$ et B non linéaire, à condition que B satisfasse l'hypothèse d'observabilité faible suivante :

$$\langle BS(t)y, S(t)y\rangle = 0, \ \forall t \geq 0 \Longrightarrow y = 0, \tag{5.3}$$

Concernant le type de ces travaux que nous trouvons récemment, le problème de stabilisation exponentielle régionale des systèmes semi-linéaires distribués a été résolu (voir [HABS17]), il a ensuite été prouvé que, sous l'hypothèse

$$\int_0^T |\langle i_\omega BS(t)y, S(t)y\rangle| dt \geq \delta \|\chi_\omega y\|^2, \ \forall \ y \in \mathcal{H}, \ pour \ T, \delta > 0, \tag{5.4}$$

le feedback définie par,

$$v_j(t) = \frac{-B^* i_\omega y(t)}{R_j(i_\omega y(t))}, \ (j = 1, 2), \ \text{où } R_1(i_\omega y) = 1 + \|B^* i_\omega y\| \text{ et } R_2(i_\omega y) = sup(1, \|B^* i_\omega y\|), \tag{5.5}$$

garantit la stabilisation exponentielle régionale.
Dans ce chapitre, nous étudions la stabilisation optimale et sa robustesse du système semi-linéaire (5.1), en utilisant le contrôle borné suivant,

$$v(t) = \begin{cases} -\rho \frac{\langle y, By\rangle}{\|y\|^2}, \ \rho > 0, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases} \tag{5.6}$$

$v(t)$ est uniformément bornée par rapport aux états initiaux et peut donc être appliquée comme un contrôle contraint.
Ce chapitre traite de la robustesse de la stabilisation optimale partielle régie par une classe de systèmes (5.1) utilisant un contrôle limité dont l'état appartient à un espace de Hilbert abstrait $\mathcal{H}$. Le document est structuré comme suit : La section 2 présente la stabilisation forte partielle et la robustesse des équations d'évolution semi-linéaires. La section 3 est consacrée à l'idée de robustesse des résultats de stabilisation optimale pour les systèmes (5.1).

5.2 Stabilisation partielle forte et robustesse

Dans cette section, nous examinons la stabilisation forte partielle du système (5.1) en utilisant le feedback (5.6) le système (5.1) devient donc :

$$\begin{cases} y_t(t) = Ay(t) + f(y(t)), & \forall t > 0 \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{5.7}$$

où $f(y) = Ny + v(t)By, \quad \forall y \in \mathcal{H}$.
Soient l'espace d'état de sortie $\mathcal{Y}$ un espace de Banach avec la norme $\|.\|_{\mathcal{Y}}$ et $C \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{Y})$ un opérateur de sortie.

La fonction évaluée représente le contrôle quadratique proposé pour étudier la stabilisation par feedback de (5.1) avec $N = 0$ (voir [BS79]), s'écrit comme suit $v(t) = -\langle y(t), By(t)\rangle$, et le résultat de la stabilisation faible a été établi sous la condition

$$\langle BS(t)y, S(t)y\rangle = 0,\ \forall t \geq 0 \Rightarrow y = 0\,. \tag{5.8}$$

Le résultat concernant la stabilisation forte globale de (5.1) a été étudié par Zine et El Alami [ZEA20]. Le résultat de stabilisation de cet article nécessite les hypothèses suivantes :

$(A1)$ - L'opérateur A est dissipatif.

$(A2)$ - L'opérateur non linéaire N est localement Lipschitzien et dissipatif.

$(A3)$ - L'opérateur B satisfait

$$\int_0^T |\langle BS(t)y, S(t)y\rangle| dt \geq \delta \|Cy\|^2,\ \forall y \in \mathcal{H},\ (T, \delta > 0), \tag{5.9}$$

Définition 5.1:

Le système (5.1) est faiblement (resp. fortement) partiellement stabilisable s'il existe un contrôle par rétroaction $v(t) = f(y(t))$, $t \geq 0$, $f : \mathcal{H} \longrightarrow K := \mathbb{R}, \mathbb{C}$ telle que la solution $y(t)$ du système (5.1) satisfasse les propriétés :

1. Pour chaque état initial y_0 , il existe une solution unique définie pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ du système (5.1).
2. $\{0\}$ est un état d'équilibre du système (5.1).
3. $Cy(t) \to 0$, faiblement (resp. fortement), quand $t \to +\infty$, pour tout $y_0 \in \mathcal{H}$.

Théorème 5.1:

Supposons que :

1. A génère un semi-groupe de contraction C_0 $(S(t))_{t\geq 0}$ sur $\mathcal{H}$ tel que (5.9) est vérifié.
2. L'opérateur non linéaire $\mathcal{N}$ satisfait (A_2)

Alors le système (5.1) est fortement partiellement stabilisable par le feedback (5.6).

Preuve

Soit $y(t)$ la solution correspondante de (5.1).

Pour$t \geq 0$ nous définissons la fonction

$$\tau \longrightarrow z(\tau) := \int_t^\tau v(s)S(\tau - s)By(s) + S(\tau - s)Ny(s)ds$$

En appliquant la formule de variation de la constante avec $y(t)$ comme état initial, nous obtenons

$$y(\tau) = S(\tau - t)y(t) + z(\tau), \forall \tau \in [t, t + T]. \tag{5.10}$$

On obtient alors, $\|y(\tau)\| \leq \|S(\tau - t)y(t)\| + \|z(\tau)\|$ Ainsi $\|y(\tau)\| \leq \|y(t)\| + \|z(\tau)\|$.

Puisque N est faiblement séquentiellement continue et B est continu, donc $F = vBy + N$ i.e $F(y(t)) \to 0$, as $t \to +\infty$.

Soient $\varepsilon > 0$ et $T > 0$ telles que $\|F(y(t))\| < \frac{\varepsilon}{2T\|B\|\|y_0\|}$, $\forall t \geq 0$.

Nous avons la relation

$$\begin{aligned}\langle BS(\tau - t)y(t), S(\tau - t)y(t)\rangle &= \langle B(y(\tau) - z(\tau)), S(\tau - t)y(t)\rangle \\ &= -\langle Bz(\tau), S(\tau - t)y(t)\rangle - \langle By(\tau), z(\tau)\rangle + \langle By(\tau), y(\tau)\rangle.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$|\langle BS(\tau - t)y(t), S(\tau - t)y(t)\rangle| \leq \|B\|\|y(t)\|\|z(\tau)\| + \|B\|\|z(\tau)\|\|y(\tau)\| + |\langle By(\tau), y(\tau)\rangle|.$$

Donc

$$|\langle BS(\tau - t)y(t), S(\tau - t)y(t)\rangle| \leq \|B\|\|z(\tau))\|(\|y(t)\| + \|y(\tau)\|) + |\langle By(\tau), y(\tau)\rangle|.$$

On obtient

$$|\langle BS(\tau - t)y(t), S(\tau - t)y(t)\rangle| \leq \|B\|\|z(\tau))\|(2\|y_0\|) + |\langle By(\tau), y(\tau)\rangle|.$$

En utilisant le fait que

$$\|z(\tau))\| \leq \int_0^T \frac{\varepsilon}{2T\|B\|\|y_0\|} d\tau,$$

et en intégrant la dernière inégalité sur $[t, t + T]$ on obtient l'estimation

$$\int_t^{T+t} |\langle BS(\tau - t)y(t), S(\tau - t)y(t)\rangle| d\tau \leq \varepsilon + \int_t^{t+T} |\langle By(\tau), y(\tau)\rangle| d\tau.$$

Par conséquence

$$\int_0^T |\langle BS(\tau)y(t), S(\tau)y(t)\rangle| d\tau \leq \varepsilon + \int_t^{t+T} |\langle By(\tau), y(\tau)\rangle| d\tau.$$

Puisque

$$\int_t^{t+T} |\langle By(\tau), y(\tau)\rangle| d\tau \longrightarrow 0, as\ t \longrightarrow +\infty,$$

on en déduit que $\|Cy(t)\| \longrightarrow 0, as\ t \longrightarrow +\infty$, en utilisant (5.9).

5.3 Robustesse de la stabilisation forte

Considérons le système perturbé

$$\begin{cases} y_t = Ay + Ny + u(B + b)y & in \quad Q \\ y(x, 0) = y_0(x), & in \quad \Omega \\ y(\xi, t) = 0 & on \quad \Sigma, \end{cases} \tag{5.11}$$

où b est une perturbation de B.

Dans cette partie, nous considérons la robustesse du contrôle (5.6).

Définissons l'ensemble des opérateurs de perturbations admissibles

$$\Lambda = \left\{ b \in \mathcal{L}(H); \|b^*\| \leq \frac{C(B)}{2T\|B^*\|} \right\},$$

avec $\tilde{B}_b y(t) = v(t)(B + b)y(t)$, qui est localement Lipschitzien Nous obtenons alors le résultat suivant.

Proposition 5.1:

Considérons les hypothèses suivantes :

(i) $b \in \Lambda$.

(ii) Nous supposons que

$$\int_0^T \|B^*S(t)y_0\|^2 dt \geq \alpha\|y_0\|^2, \ \forall y_0 \in \mathcal{H}, \ (T, \alpha > 0). \tag{5.12}$$

Le feedback (5.6) est alors fortement robuste.

Preuve

Nous avons $\|(B+b)^*S(t)y_0\| \geq \|B^*S(t)y_0\| - \|b^*S(t)y_0\|$. Then

$$\begin{aligned} \|(B+b)^*S(t)y_0\|^2 &\geq \|B^*S(t)y_0\|_H^2 - 2\|B^*S(t)y_0\|\|b^*S(t)y_0\| + \|b^*S(t)y_0\|^2 \\ &\geq \|B^*S(t)y_0\|_H^2 - 2\|B^*\|_{\mathcal{L}(H)}^2\|b^*\|_{\mathcal{L}(H)}^2\|y_0\|^2, \end{aligned} \tag{5.13}$$

En intégrant cette inégalité et en utilisant (5.12), on obtient

$$\int_0^T \|(B+b)^*S(t)y_0\|_H^2 dt \geq (\alpha(B) - 2T\|B^*\|_{\mathcal{L}(H)}\|b^*\|_{\mathcal{L}(H)})\|y_0\|^2, \ \forall y_0 \in \mathcal{H}, \ (T, \alpha > 0), \tag{5.14}$$

ce qui implique que $B+b$ vérifie (5.12), avec $C = C(B) - 2T\|B\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\|b\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$.

En remplaçant (A_3) par (5.12), nous déduisons du théorème (5.2) que le feedback (5.6) est fortement robuste.

Remarques:

(i) On notera que le feedback (5.6) est une fonction bornée par rapport au temps et est uniformément bornée par rapport aux états initiaux, $|v(t)| \leq \rho\|B\|, \quad \forall t \geq 0, \ \forall y_0 \in \mathcal{H}$.

(ii) En dimension finie, les conditions (5.8) et (5.4) sont équivalentes (Voir [Che98] et [Qui80]).

(iii) En dimension infinie si B est compact, alors la condition (5.4) est impossible. En effet, si (φ_j) est une base orthonormée de $\mathcal{H}$, alors en appliquant (5.4) pour $y = \varphi_j$ et en utilisant le fait que $\varphi_j \rightharpoonup 0$, quand $j \to +\infty$, nous obtenons la contradiction suivante $\delta = 0$. Puisque $\|y(t)\|$ décroit, alors nous avons $\exists t_0 \geq 0 ; y(t_0) = 0 \Leftrightarrow y(t) = 0, \ \forall t \geq t_0$. Dans ce cas, nous obtenons $v(t) = 0, \ \forall t \geq t_0$.

5.4 Stabilisation optimale et robustesse

Dans cette partie, nous traitons le cas de $C = I$

5.4.1 Stabilisation optimale

Dans cette partie, nous examinons le problème suivant :

$$\begin{cases} \min Q(v) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\|y(t)\|^2}{\rho}\left(\|v(t)\|^2 + \frac{|\rho\,\langle y(t), By(t)\rangle|^2}{\|y(t)\|^4}\right)dt + \int_0^{+\infty} 2|\langle y(t), Ny(t)\rangle| + \langle y(t), Ry(t)\rangle dt, \\ v \in V_{ad}(\Omega) = \left\{\frac{v(t)}{\|v(t)\|} \leq r, \forall r, t > 0, et\ Q(v) < \infty\right\} \end{cases} \tag{5.15}$$

où R est un opérateur linéaire positif auto-adjoint ;

Théorème 5.2:

Supposons que :

— A génère un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ d'isométries,

— $2\langle Ay, y\rangle + \langle y, Ry\rangle = 0, \forall y \in \mathcal{D}(A)$, pour un opérateur linéaire positif auto-adjoint R.

— La condition (5.12) est vérifiée.

Alors le contrôle (5.6) est la solution de (5.15).

Preuve

Considérons $r > 0$, il découle de (A_3) que (5.6) est un contrôle admissible $\forall \eta, r > 0$, donc $V_{ad}^r \neq 0$.

Soit $y(t)$ la solution correspondante de (5.1). Pour $t \geq 0$ nous définissons la fonction

$$\tau \longrightarrow z(\tau) := \int_t^\tau v(s)S(\tau - s)By(s) + S(\tau - s)Ny(s)ds$$

En appliquant la formule de variation de la constante avec $y(t)$ comme état initial, nous obtenons :

$$y(\tau) = S(\tau - t)y(t) + z(\tau), \forall \tau \in [t, t + T]. \tag{5.16}$$

ce qui donne, $\|y(\tau)\| \leq \|S(\tau - t)y(t)\| + \|z(\tau)\|$, ensuite, nous avons :$\|y(\tau)\| \leq \|y(t)\| + \|z(\tau)\|$.

Puisque $\mathcal{H}$ est séquentiellement continue et B continue, alors $F = vBy + N$ et $F(y(t)) \to 0, \quad \text{as} \quad t \to +\infty$.

Soient $\varepsilon > 0$ et $T > 0$ telles que $\|F(y(t))\| < \frac{\varepsilon}{\rho T}, \forall t \geq 0$.

nous avons la relation

$$\begin{aligned}\langle BS(\tau - t)y(t), S(\tau - t)y(t)\rangle &= \langle B(y(\tau) - z(\tau)), S(\tau - t)y(t)\rangle \\ &= -\langle Bz(\tau), S(\tau - t)y(t)\rangle - \langle By(\tau), z(\tau)\rangle + \langle By(\tau), y(\tau)\rangle.\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}|\langle BS(\tau - t)y(t), S(\tau - t)y(t)\rangle| &\leq \|B\|\|y(t)\|\|z(\tau)\| + \|B\|\|z(\tau)\|\|y(\tau)\| + |\langle By(\tau), y(\tau)\rangle|. \\ &\leq \|B\|\|z(\tau))\|(\|y(t)\| + \|y(\tau)\|) + |\langle By(\tau), y(\tau)\rangle|.\end{aligned}$$

En intégrant cette inégalité sur $[t, t + T]$, on obtient l'estimation suivante

$$\int_t^{t+T} |\langle BS(\tau - t)y(t), S(\tau - t)y(t)\rangle| d\tau \quad \leq \varepsilon + \int_t^{t+T} |\langle By(\tau), y(\tau)\rangle| d\tau.$$

Nous avons

$$\int_t^{t+T} |\langle By(\tau), y(\tau)\rangle| d\tau \longrightarrow 0, as\ t \longrightarrow +\infty.$$

Et en utilisant (5.9) on déduit que $\|y(t)\| \longrightarrow 0, as\ t \longrightarrow +\infty$. en utilisant (5.15), nous obtenons l'inégalité suivante

$$\frac{d\|y(t)\|^2}{dt} \leq 2v(t)\langle By(t), y(t)\rangle + 2\langle Ny(t), y(t)\rangle - \langle Ry(t), y(t)\rangle, \tag{5.17}$$

alors, nous avons

$$\frac{d\|y(t)\|^2}{dt} \leq -2\,\rho\,\frac{|\langle By(t), y(t)\rangle|^2}{\|y(t)\|^2} - 2|\langle Ny(t), y(t)\rangle| - \langle Ry(t), y(t)\rangle, \tag{5.18}$$

ce qui donne,

$$\int_0^t 2\,\rho\,\frac{|\langle By(s),y(s)\rangle|^2}{\|y(s)\|^2}+2|\langle Ny(s),y(s)\rangle|+\langle Ry(s),y(s)\rangle ds\le\|y_0\|^2,\forall t,s\ge 0;s\le t. \tag{5.19}$$

l'inégalité (5.19) iest vérifié $\forall y_0\in\mathcal{H}$, Puisque $y_0\longrightarrow S(.)y_0$ est continue de $\mathcal{H}$ vers $L^2\big((0,t);\mathcal{H}\big)$.

Alors $v^*\in V_{ad}^r$ et $V_{ad}^r\neq\phi$.

Soit $y(.)$ la solution correspondante de (5.1).

Pour $y_0\in\mathcal{D}(A)$ et $s\in[0,t]$, nous avons $y(s)\in\mathcal{D}(A)$ et $y(s)$ est différentiable (voir [BS79]).

Utilisation de la dérivation de l'énergie $E(t)=\|y(t)\|^2$, On obtient :

$$\frac{d\|y(t)\|^2}{dt}=\frac{\|y(t)\|^2}{\rho}\left|v(t)+\rho\,\frac{\langle By(t),y(t)\rangle}{\|y(t)\|^2}\right|^2-\frac{\|y(t)\|^2}{\rho}\left(\frac{|\rho\,\langle By(t),y(t)\rangle|^2}{\|y(t)\|^4}+v(t)^2\right)-2|\langle y(t),Ny(t)\rangle|-\langle Ry(t),y(t)\rangle,$$

ce qui donne,

$$\begin{aligned}&\int_0^t\frac{\|y(s)\|^2}{\rho}\Big(\frac{|\rho\,\langle By(s),y(s)\rangle|^2}{\|y(s)\|^4}+|v(s)|^2\Big)ds+\int_0^t 2|\langle y(s),Ny(s)\rangle|+\langle Ry(s),y(s)\rangle ds+\|y(s)\|^2-\|y_0\|^2\\&=\int_0^t\frac{\|y(t)\|^2}{\rho}|v(s)+\frac{|\rho\,\langle By(s),y(s)\rangle|}{\|y(s)\|^2}|^2ds.\end{aligned}$$

Cette relation peut être obtenue en utilisant un argument d'approximation dans [Bal78]. En laissant $t\longrightarrow+\infty$ dans la dernière équation, nous obtenons :

$$Q(v)-\|y_0\|^2=\int_0^\infty\frac{\|y(s)\|^2}{\rho}|v(s)+\rho\,\frac{|\langle By(s),y(s)\rangle|}{\|y(s)\|^2}|^2ds,$$

ce qui implique que (5.6) est la solution du problème (5.15) et que

$$Q(v)\ge Q(v^*)=\|y_0\|^2.$$

5.4.2 Robustesse de la stabilisation optimale

Pour un opérateur linéaire positif auto-adjoint R, on justifie que le contrôle (5.6) est la solution du problème suivant :

$$\begin{cases}\min Q(v)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\rho\,\|y(t)\|^2(\|v(t)\|^2+\frac{|\langle y(t),By(t)\rangle|^2}{\|y(t)\|^4})dt+\int_0^{+\infty}2|\langle y(t),Ny(t)\rangle|+\langle Ry(t),y(t)\rangle dt,\\ v\in V_{ad}^r=\Big\{v(t),\ |v(t)|\le r,\forall t>0\ et\ Q(v)<\infty\Big\},\quad \text{où}\quad \rho,r>0.\end{cases} \tag{5.20}$$

Soit

$$\tilde{\Lambda}=\big\{b\in\mathcal{L}(H);\|b^*\|\le\frac{\alpha(B)}{2T\|B^*\|}\big\},$$

Nous obtenons donc le résultat suivant :

Théorème 5.3:

Sous les hypothèses suivantes,

- $b\in\tilde{\Lambda}$ tel que $\langle by,y\rangle+\langle By,y\rangle=0$.
- l'opérateur B est linéaire et (A_3) est vérifié.

Alors, il existe $\rho>0$ tel que (5.6) est la solution de (5.20).

Preuve

En suivant les mêmes étapes que la démonstration précédente, il reste à montrer que $Q(v) \geq Q(v^*)$

Nous dérivons l'énergie $E(t) = \|y(t)\|^2$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{d\|y(t)\|^2}{dt} &= \frac{\|y(t)\|^2}{\rho}\left(\frac{|\rho\,\langle By(t),y(t)\rangle|^2}{\|y(t)\|^4} + v(t)^2\right) + 2v(t)\langle By(t), y(t)\rangle + 2v(t)\langle by(t), y(t)\rangle \\ &\quad - \frac{\|y(t)\|^2}{\rho}\left(\frac{|\rho\,\langle By(t),y(t)\rangle|^2}{\|y(t)\|^4} + v(t)^2\right) - 2|\langle Ny(t), y(t)\rangle| - \langle Ry(t), y(t)\rangle,\end{aligned}$$

ce qui donne,

$$\begin{aligned}&\int_0^t \frac{\|y(t)\|^2}{\rho}\left(\frac{|\rho\,\langle By(s),y(s)\rangle|^2}{\|y(s)\|^4} + |v(s)|^2\right)ds + \int_0^t 2|\langle y(s), Ny(s)\rangle| + \langle Ry(s), y(s)\rangle ds + \|y(s)\|^2 - \|y_0\|^2 \\ &= \int_0^t \frac{\|y(t)\|^2}{\rho}\left(\frac{|\rho\,\langle By(s),y(s)\rangle|^2}{\|y(s)\|^4} + v(s)|^2\right) + 2v(t)(\langle By(t), y(t)\rangle + \langle by(t), y(t)\rangle)ds.\end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$\begin{aligned}&\int_0^t \frac{\|y(s)\|^2}{\rho}\Big(\frac{|\rho\,\langle By(s), y(s)\rangle|^2}{\|y(s)\|^4} + v(s)|^2\Big)ds + \int_0^t 2|\langle y(s), Ny(s)\rangle| + \langle Ry(s), y(s)\rangle ds + \|y(s)\|^2 - \|y_0\|^2 \\ &= \int_0^t \frac{\|y(s)\|^2}{\rho}\Big(\frac{|\rho\,\langle By(s), y(s)\rangle|^2}{\|y(s)\|^4} + |v(s)|^2\Big)ds.\end{aligned}$$

Quand $t \longrightarrow +\infty$ dans la dernière équation, nous obtenons que $Q(v) \geq Q(v^*) = \|y_0\|^2$.

5.5 Applications et Simulation

Dans cette partie, nous donnerons un exemple illustrant les résultats obtenus.

5.5.1 Applications

Example 1 : Nous considérons l'équation de transport semi-linéaire suivante sur $\Omega =]0, +\infty[$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{\partial z(x,t)}{\partial x} - \dfrac{|y(t)|^2}{(1+|y(t)|^2)}\displaystyle\int_0^1 z(x)\sin(x)dx + v(t)z(x,t) & \Omega\times]0,+\infty[, \\ z(x,0) = z_0(x) & \Omega, \end{cases} \tag{5.21}$$

Ici $H = L^2(\Omega)$, $v(.) \in L^2(0,\infty)$ et $Az = -\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\mathcal{D}(A) = \{z \in \mathcal{H}^1(\Omega) \mid z(0) = 0,\ z(x) \to 0 \text{ as } x \to +\infty\}$.

Soit $\omega =]0, a[$ est une sous-région de Ω.

Nous avons

$$\langle \chi_\omega^* \chi_\omega Az, z\rangle = -\int_0^a z'(x)z(x)dx \tag{5.22}$$

$$= -\frac{z^2(a)}{2} \leq 0, \tag{5.23}$$

Ainsi, l'hypothèse (A_1) est vérifié. L'opérateur A génère le semi-groupe de contractions suivant

$$S(t)z_0(x) = \begin{cases} (S(t)z_0)(x) = z_0(x-t) & if\ x \geq t \\ 0 & if\ x < t \end{cases}$$

Pour $T = 1$, nous avons

$$\int_0^1 \langle \chi_\omega^* \chi_\omega S(t)z_0, S(t)z_0\rangle dt = \int_0^1 \int_0^{a-t} |z_0(x)|^2 dxdt \geq \|\chi_\omega z_0\|^2,$$

donc (5.9) est vérifié, $Ny(t) = -\frac{|y(t)|^2}{(1+|y(t)|^2)} \int_0^1 z(x)sin(x)dx$ qui est localement Lipschitzien. Nous concluons par le théorème (5.2) que le le système (5.21) est fortement partiellement stabilisable par le contrôle (5.6).

Example 2 : Nous considérons l'équation d'onde semi-linéaire suivante et $\Omega =]0, 1[$ et $C = I$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} = \Delta y(t) - \dfrac{|y(t)|^2 y(t)}{\zeta} + v(t)\dfrac{\partial y(t)}{\partial t}, & in\ \Omega\times]0, +\infty[, \\ y(0) = y_0, y_t(0) = y_1, & on\ \partial\Omega\times]0, +\infty[, \end{cases} \tag{5.24}$$

$H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et les opérateurs A et B sont définis par $A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ qui A génèrent un semigroupe $S(t)$ d'isométries où $\Delta y(t) = \dfrac{\partial^2 y(t)}{\partial x^2}$ avec $\mathcal{D}(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$.

Dans [CZ12], nous considérons l'opérateur $A_1 z = \Delta z$ sur $H = L^2(\Omega)$, (Ω est un ensemble ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$) et le domaine $\mathcal{D}(A_1) = \{z \in L^2(\Omega)\ z$ est absulement contiue, $\Delta z \in L^2(\Omega)$ et $z = 0$ sur $\partial\Omega\}$, nous avons $\overline{\mathcal{D}(A_1)} = L^2(\Omega)$, $A_1^* = A_1$ et $\mathcal{R}e(\langle A_1 z, z\rangle) = -\|\nabla z\|^2 \leq 0$.

Alors A_1 est dissipatif, et par conséquent A l'est aussi mais A n'est pas nécessairement dissipatif.

Il convient de noter que dans la condition dite de contrôle géométrique (GCC) (voir [BLR92]), que nous avons pour $T = 2$, que (A_3) est valable.

nous prenons $Ny = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{|y(t)|^2 y(t)}{\zeta} \end{pmatrix}$, qui est dissipatif et localement Lipschitzien, avec $\zeta > \dfrac{8}{\alpha}$. Alors le contrôle (5.6) stabilise fortement et partiellement les systèmes (5.24) et minimise le coût de performance suivant :

$$\begin{cases} \min Q(v) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \|y(t)\|^2 (\frac{1}{\eta}|v(t)|^2 + \eta + \frac{2|y(t)|^2}{\zeta} + 4)dt \\ v \in V_{ad}^r(\Omega) = \{v(t),\ |v(t)| \leq r, \forall t > 0\ et\ Q(v) < \infty\} \quad \text{où} \quad R = 4\,I \quad \text{et} \quad 0 < \eta \leq r. \end{cases} \tag{5.25}$$

Example 3 : Nous considérons l'équation de Schrödinger semi-linéaire suivante et $\Omega =]0, 1[$:

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial y(t)}{\partial t} = \Delta y(t) - \dfrac{y(t)}{\gamma(1 + y^2(t))} + v(t)\chi_\omega y(t), & in\ \Omega\times]0, +\infty[, \\ y(0) = y_0, \quad y_t(0) = y_1, & on\ \partial\Omega\times]0, +\infty[, \end{cases} \tag{5.26}$$

où ω est un sous-ensemble ouvert de Ω qui indique le sous-domaine où le contrôle est pris en charge, χ_ω indique l'opérateur de restriction sur ω ($i \in \mathbb{C}, i^2 = -1$). Ici, l'espace d'état $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$ est menu d'un produit scalaire complexe naturel, l'opérateur A est défini par $Ay = -i\Delta$, avec A génère un semi-groupe $S(t)$ d'isométries.

De [Leb92] on peut déduire : pour $\omega \subset]0, 1[$ la mesure $0 < |\omega| < 1$, (A_3) est vérifié.

Le domaine de A est $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}^2(0, 1) \cap \mathcal{H}_0^1(0, 1)$. Ici, $B = \chi_\omega$, B est linéaire. $Ny = -\dfrac{y(t)}{\gamma(1 + y^2(t))}$ qui est dissipative et localement Lipschitzienne avec $\gamma > \dfrac{2T^2}{\alpha}$.

Alors le contrôle (5.6) stabilise fortement les systèmes (5.26), sa solution au problème (5.15) avec $-i\Delta$ est auto-adjoint ce qui donne $Re(< Ay, y >) = 0$, alors nous avons $R = 0$.

5.5.2 Simulations

Dans cette partie, la prise en compte du système (5.21), $B = I$, $y_0(x) = x^2(1 - x^3)^2$ et $Ny(t) = -\frac{y(t)}{1+\|y(t)\|^2}$, $\forall t \geq 0$ avec $v(t) = u_{\rho,u}(t)$, $\forall t \geq 0$, où $\rho = 0.99$ et $\Omega =]0, 1[$, Nous obtenons alors les résultats présentés dans les figures 1-3.

Interprétation des figures :

Dans la figure 1, les résultats de la simulation montrent l'état du système numérique non contrôlé.

Dans la figure 2, les résultats de la simulation montrent la stabilisation du système par le contrôle considéré.

Dans la figure 3, la commande de stabilisation.

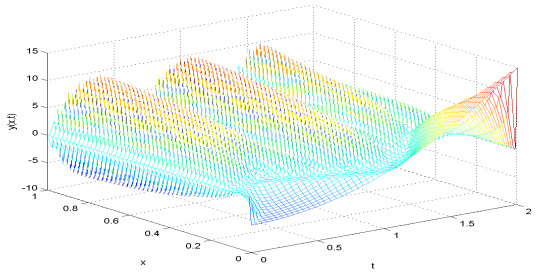


FIGURE 5.1 – L'État libre

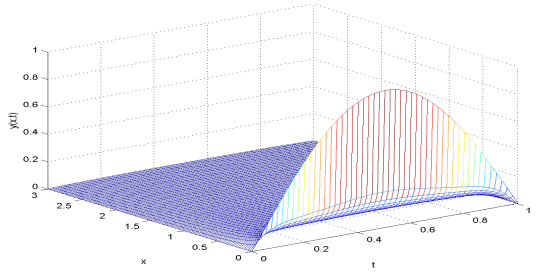


FIGURE 5.2 – L'état stabilisé.

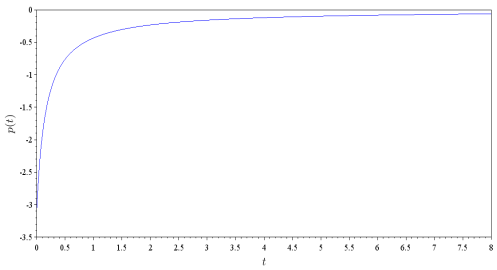


FIGURE 5.3 – La commande de stabilisation $u(t)$

5.6 Conclusion

Dans ce travail, nous avons développé la stabilisation forte partielle en utilisant l'hypothèse d'observabilité pour certains problèmes semi-linéaires. L'idée de la robustesse de la stabilisation optimale est très intéressante et constitue une nouvelle question dans les applications. En outre, le contrôle considéré est le contrôle qui minimise le coût choisi, alors que le problème reste ouvert pour d'autres types de fonctions de coût.

Conclusion générale

La recherche présentée dans cette thèse est centrée sur l'amélioration des techniques de stabilisation par feedback des systèmes dynamiques semi-linéaires. L'une de ses principales contributions est l'introduction d'un nouveau type de contrôle stabilisant qui n'a jamais été utilisé dans la littérature et qui peut être considéré comme une extension du contrôle quadratique. Dans le but d'améliorer les conditions de stabilité, des hypothèses d'observation approximative plus générales ont été incorporées, ce qui permet au contrôle proposé d'assurer une stabilité forte et exponentielle du système à une vitesse significativement plus rapide que le contrôle quadratique. Ce résultat est obtenu grâce à une estimation de la décroissance qui conduit à une convergence plus rapide. L'application de cette nouvelle méthode de contrôle permet de stabiliser l'équation de Schrödinger non linéaire, ce qui souligne son potentiel d'application pratique dans le traitement des systèmes dynamiques complexes.

L'étude des systèmes non homogènes, telle qu'elle est présentée dans cette thèse, n'a pas suscité autant d'attention que les systèmes homogènes de la part des chercheurs. Par conséquent, dans la deuxième phase de cette recherche, nous avons tenté de faire la lumière sur la stabilisation des systèmes semi-linéaires non homogènes, afin de déterminer si nous pouvions obtenir des résultats similaires en s'appuyant sur des techniques et des méthodes précédemment utilisés dans les cas homogènes. Nos résultats nous ont amenés à conclure que les principes régissant la stabilisation dans les cas linéaires et bilinéaires homogène s'appliquent également aux cas semi-linéaires non homogènes, et de nombreux résultats peuvent également s'appliquer aux systèmes semi linéaires non homogènes, bien qu'avec des variations dans les hypothèses sous-jacentes, qui peuvent parfois être plus simples et d'autres fois plus complexes. Bien que nous soyons parvenus à de nouveaux résultats qui n'avaient pas été obtenus auparavant. Cette étude a également dévoilé de nouvelles perspectives et soulevé d'importantes questions qui nécessitent une étude plus approfondie. Il est essentiel de noter que tous les systèmes analysés dans cette recherche reposent sur l'hypothèse que l'opérateur de contrôle est borné. Malgré leur importance, ces systèmes présentent certaines limites. En réalité, la majorité des phénomènes sont typiquement modélisés par des équations comportant un opérateur de contrôle non borné. Le défi que représente la stabilisation de ces systèmes est abordé, ce qui nous encourage à envisager de l'incorporer dans nos futurs travaux de recherche. Une autre piste potentielle consiste à examiner les mêmes problèmes de stabilisation dans un espace de Banach plutôt que dans un espace de Hilbert. En outre, nous souhaitons explorer le problème de la stabilisation des systèmes stochastiques à l'aide d'une approche similaire.

Bibliographie

[AB03] Mohamed Akkouchi and Abdellah Bounabat. Weak stabilizability of a nonautonomous and non-linear system. *Mathematica Pannonica*, 14(1) :56–61, 2003.

[Bal77] John M Ball. Strongly continuous semigroups, weak solutions, and the variation of constants formula. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 63(2) :370–373, 1977.

[Bal78] John M Ball. On the asymptotic behavior of generalized processes, with applications to nonlinear evolution equations. *Journal of differential equations*, 27(2) :224–265, 1978.

[Bal12] Alampallam V Balakrishnan. *Applied Functional Analysis : A*, volume 3. Springer Science & Business Media, 2012.

[BCA23] M Baddi, M Chqondi, and Y Akdim. Exponential and strong stabilization for inhomogeneous semilinear control systems by decomposition method. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 23(1) :1–13, 2023.

[Ben78] Claude D Benchimol. A note on weak stabilizability of contraction semigroups. *SIAM journal on Control and Optimization*, 16(3) :373–379, 1978.

[Ber99] Larbi Berrahmoune. Stabilization and decay estimate for distributed bilinear systems. *Systems & control letters*, 36(3) :167–171, 1999.

[Ber00] Luc Bergé. Soliton stability versus collapse. *Physical Review E*, 62(3) :R3071, 2000.

[BH99] H Bounit and H Hammouri. Feedback stabilization for a class of distributed semilinear control systems. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 37(8) :953–969, 1999.

[BLR92] Claude Bardos, Gilles Lebeau, and Jeffrey Rauch. Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary. *SIAM journal on control and optimization*, 30(5) :1024–1065, 1992.

[BM19] Abdelaziz Benzaza and Ouzahra Mohamed. Weak and strong stabilisation of bilinear systems in a banach space. *International Journal of Control*, 92(12) :2784–2790, 2019.

[BS79] John M Ball and M Slemrod. Feedback stabilization of distributed semilinear control systems. *Applied Mathematics and Optimization*, 5(1) :169–179, 1979.

[CBA24] M Chqondi, M Baddi, and Y Akdim. Stabilization with decay estimate for inhomogeneous semilinear control systems using unbounded controls. *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*, 13(03) :439–448, 2024.

[CCTA24] M Chqondi, S Chqondi, K Tigma, and Y Akdim. A new feedback control for exponential and strong stability of semi-linear systems with general decay estimates. 2024.

[CDKP87] Goong Chen, Mi C Delfour, AM Krall, and G Payre. Modeling, stabilization and control of serially connected beams. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 25(3) :526–546, 1987.

[Che98] Min-Shin Chen. Exponential stabilization of a constrained bilinear system. *Automatica*, 34(8) :989–992, 1998.

[CZ12] Ruth F Curtain and Hans Zwart. *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*, volume 21. Springer Science & Business Media, 2012.

[DS73] Constantine M Dafermos and Marshall Slemrod. Asymptotic behavior of nonlinear contraction semigroups. *Journal of Functional Analysis*, 13(1) :97–106, 1973.

[ECA21] A Elalami, M Chqondi, and Y Akdim. Partial strong stabilization of semi-linear systems and robustness of optimal control. *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*, 10(03) :369–380, 2021.

[EFC04] Nael H El-Farra and Panagiotis D Christofides. Coordinating feedback and switching for control of spatially distributed processes. *Computers & chemical engineering*, 28(1-2) :111–128, 2004.

[FW03] Gadi Fibich and Xiao-Ping Wang. Stability of solitary waves for nonlinear schrödinger equations with inhomogeneous nonlinearities. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 175(1-2) :96–108, 2003.

[Gil00] Tarsem Singh Gill. Optical guiding of laser beam in nonuniform plasma. *Pramana*, 55 :835–842, 2000.

[GS08] François Genoud and Charles A Stuart. Schrodinger equations with a spatially decaying nonlinearity : existence and stability of standing waves. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 21(1) :137, 2008.

[GS10] Martin Gugat and Mario Sigalotti. Stars of vibrating strings : switching boundary feedback stabilization. *Networks and Heterogeneous Media*, 5(2) :299–314, 2010.

[GT11] Martin Gugat and Marius Tucsnak. An example for the switching delay feedback stabilization of an infinite dimensional system : The boundary stabilization of a string. *Systems & Control Letters*, 60(4) :226–233, 2011.

[GT15] Martin Gugat and Fredi Tröltzsch. Boundary feedback stabilization of the schlögl system. *Automatica*, 51 :192–199, 2015.

[Gug08] Martin Gugat. Optimal switching boundary control of a string to rest in finite time. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik : Applied Mathematics and Mechanics*, 88(4) :283–305, 2008.

[HABS17] I El Harraki, A El Alami, Ali Boutoulout, and M Serhani. Regional stabilization of semi-linear parabolic systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 34(3) :961–971, 2017.

[Har91] Alain Haraux. Systemes dynamiques dissipatifs et applications. *(No Title)*, 1991.

[HO18] Z Hamidi and Mohamed Ouzahra. Partial stabilisation of non-homogeneous bilinear systems. *International Journal of Control*, 91(6) :1251–1258, 2018.

[Hua85] Falun Huang. Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in hilbert spaces. *Ann. of Diff. Eqs.*, 1 :43–56, 1985.

[Hua93] Falun Huang. Strong asymptotic stability of linear dynamical systems in banach spaces. *Journal of Differential Equations*, 104(2) :307–324, 1993.

[Kat13] Tosio Kato. *Perturbation theory for linear operators*, volume 132. Springer Science & Business Media, 2013.

[Leb92] Gilles Lebeau. Contrôle de l'équation de schrödinger. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 71(3) :267–291, 1992.

[LT93] Irena Lasiecka and Daniel Tataru. Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping. 1993.

[LT94] CS Liu and VK Tripathi. Laser guiding in an axially nonuniform plasma channel. *Physics of plasmas*, 1(9) :3100–3103, 1994.

[Mer96] Franck Merle. Nonexistence of minimal blow-up solutions of equations $iu_t = -\delta u - k(x)|u|^{4/N}u$ in $\mathbb{R}^n$. In *Annales de l'IHP Physique théorique*, volume 64, pages 33–85, 1996.

[MJ85] Robert H Martin Jr. A. pazy, semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. 1985.

[NFBK10] Béla Sz Nagy, Ciprian Foias, Hari Bercovici, and László Kérchy. *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*. Springer Science & Business Media, 2010.

[OTB12] Mohamed Ouzahra, Azzeddine Tsouli, and Ali Boutoulout. Stabilisation and polynomial decay estimate for distributed semilinear systems. *International journal of Control*, 85(4) :451–456, 2012.

[Ouz07] Mohamed Ouzahra. Stabilization with decay estimate for a class of distributed bilinear systems. *European journal of control*, 5(13) :509–515, 2007.

[Ouz08] Mohamed Ouzahra. Strong stabilization with decay estimate of semilinear systems. *Systems & control letters*, 57(10) :813–815, 2008.

[Ouz09] Mohamed Ouzahra. Stabilisation of infinite-dimensional bilinear systems using a quadratic feedback control. *International Journal of Control*, 82(9) :1657–1664, 2009.

[Ouz10] Mohamed Ouzahra. Exponential and weak stabilization of constrained bilinear systems. *SIAM journal on control and optimization*, 48(6) :3962–3974, 2010.

[Ouz13] Mohamed Ouzahra. Partial stabilisation of semilinear systems using bounded controls. *International Journal of Control*, 86(12) :2253–2262, 2013.

[Paz12] Amnon Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44. Springer Science & Business Media, 2012.

[PZ81] Anthony J Pritchard and Jerzy Zabczyk. Stability and stabilizability of infinite-dimensional systems. *Siam Review*, 23(1) :25–52, 1981.

[Qui80] John P Quinn. Stabilization of bilinear systems by quadratic feedback controls. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 75(1) :66–80, 1980.

[RM05] Venkatarao Ryali and Kannan M Moudgalya. Practical stability analysis of uncertain nonlinear systems. In *Proceedings of the National Conference on Control and Dynamic Systems*, 2005.

[RS11] Pierre Raphaël and Jeremie Szeftel. Existence and uniqueness of minimal blow-up solutions to an inhomogeneous mass critical nls. *Journal of the American Mathematical Society*, 24(2) :471–546, 2011.

[Rus75] David Russell. Decay rates for weakly damped systems in hilbert space obtained with control-theoretic methods. *Journal of differential Equations*, 19(2) :344–370, 1975.

[Sle89] Marshall Slemrod. Feedback stabilization of a linear control system in hilbert space with an a priori bounded control. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 2 :265–285, 1989.

[TM02] Isaac Towers and Boris A Malomed. Stable (2+ 1)-dimensional solitons in a layered medium with sign-alternating kerr nonlinearity. *JOSA B*, 19(3) :537–543, 2002.

[Tri75] Roberto Triggiani. On the stabilizability problem in banach space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 52(3) :383–403, 1975.

[Tri89] Roberto Triggiani. Lack of uniform stabilization for noncontractive semigroups under compact perturbation. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 105(2) :375–383, 1989.

[ZEA20] Rabie Zine and Abdessamad El Alami. Strong and weak stabilization of semi-linear parabolic systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 37(1) :50–63, 2020.

[ZO07] E Zerrik and M Ouzahra. Output stabilisation for distributed semilinear systems. *IET Control Theory and Applications*, 1(3) :838–843, 2007.