

N° d'ordre : 3501

THESE

En vue de l'obtention du : **DOCTORAT**

Centre de recherche : Centre de Recherches Mathématiques et Applications de Rabat

Structure de Recherche : Laboratoire de Mathématiques, Statistique et Applications

Discipline : Mathématiques Appliquées

Spécialité : Statistique

Présentée et soutenue le : 15/07/2021 par :

Imane EL WAHLI

Les séries chronologiques à mémoire longue : Problème d'estimation et application aux données réelles

JURY

Nezha AMMOR	PES, Faculté des sciences, Université Mohammed V, Rabat.	Présidente
Mohammadine BELBACHIR	PES, Faculté des Sciences, Université Mohammed V, Rabat.	Rapporteur/Examineur
Abdellah OULDKHAL	PES, Faculté des Sciences, Université Mohammed V, Rabat.	Rapporteur/Examineur
Mostafa EL HACHLOUFI	PH, Faculté des sciences Aïn Chock, Université Hassan II, Casablanca.	Rapporteur/Examineur
Charaf BENSOUDA	PES, Faculté des sciences, Université Ibn Tofail, Kénitra.	Examineur
Zine EL Abidine GUENNOUN	PES, Faculté des Sciences, Université Mohammed V, Rabat.	Directeur de thèse

Année Universitaire : 2020 / 2021

DÉDICACES

À mes chers parents, mes sources éternelles d'inspiration, de soutien inconditionnel, de dévouement et de bénédiction. Mes maîtres de passion, de patience et de persévérance.

À mon frère et mes sœurs qui m'ont toujours encouragée et motivée durant ces années de thèse, un grand merci pour leur confiance à mon égard.

À mon mari, celui qui a partagé et embelli mon quotidien, et m'a constamment encouragée par sa présence, pour toutes ses attentions passées et celles à venir.

À toute ma famille et ma belle-famille Merci pour votre soutien, je vous dédie cette thèse.

AVANT PROPOS

Ce travail a été réalisé au département de mathématiques de la Faculté des Sciences de l'Université Mohammed V de Rabat, au sein du Laboratoire de Mathématiques, Statistique et Applications, sous la direction du professeur **Zine El Abidine GUENNOUN**.

Je tiens en premier lieu à remercier très chaleureusement mon directeur de thèse Monsieur **Zine EL Abidine GUENNOUN**, professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, pour son soutien tout au long de mes années de recherche et sa grande disponibilité à tout instant. Ses qualités humaines, son écoute, son exigence, son enthousiasme très communicatif, ses encouragements et ses critiques m'ont beaucoup aidée et renforcé ma motivation à poursuivre la recherche. Ma reconnaissance lui sera à jamais acquise pour tout ce temps qu'il m'a consacré ainsi que les opportunités qu'il m'a données au cours de ces années.

J'adresse tout d'abord toute mon estime et mes chaleureux remerciements au professeur **Nezha AMMOR**, professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

J'adresse mes remerciements et toute ma considération au professeur **Mohammadine BELBACHIR**, professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, qui m'honore par sa présence en tant que rapporteur et examinateur de ma thèse. Merci pour ses excellentes corrections, qui m'ont permis d'améliorer la qualité de mon travail.

Mes remerciements les meilleurs vont au professeur **Abdellah OULDKHAL**, professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, de m'avoir honoré en acceptant d'être examinateur et rapporteur de ma thèse. Merci pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour ses remarques constructives et ses corrections tout à fait pertinentes et exactes.

Je souhaite exprimer mes sincères remerciements et ma reconnaissance au professeur **Mostafa ELHACHLOUFI**, professeur habilité à la Faculté des Sciences Aïn Chock de Casablanca, d'avoir accepté d'être rapporteur et examinateur de ma thèse.

Mes remerciements sincères et toute ma gratitude vont au professeur **Charaf BENSOUDA**, professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté des Sciences de Kénitra, pour avoir accepté volontiers d'être examinateur de ma thèse. Je porte à son égard la plus grande estime pour ce qu'il a toujours été : ingénieux et rigoureux à toute épreuve, dans l'humilité spontanée et la bienveillance perspicace.

Je voudrais aussi remercier chaleureusement les personnes avec lesquelles j'ai beaucoup collaboré durant mes années de recherche : Docteur **Amine AMAR** et Docteur **Youness LAAROUSSI**, je pense avoir énormément appris à leur contact, j'ai sincèrement apprécié de travailler avec eux et je leur suis profondément reconnaissante pour le temps qu'ils m'ont consacré.

Je remercie toutes les personnes dont j'aurai oublié le nom et qui auraient contribué d'une manière ou d'une autre à la réalisation de ce travail

RÉSUMÉ

Plusieurs recherches empiriques sur des données des marchés financiers ont révélé un certain nombre de propriétés des séries chronologiques dont essentiellement le comportement de mémoire longue, au sens de la décroissance hyperbolique des autocorrélations. Cette thèse s'est alors focalisée sur l'estimation de la persistance dans les séries chronologiques et la compréhension de sa dynamique.

La contribution effective de cette thèse couvre différents axes. Premièrement, nous avons mis en avant l'intérêt du concept de la mémoire longue en introduisant une classe de processus qui représentent de tels comportements.

Après avoir présenté le concept de la longue dépendance, nous exposons dans la deuxième partie différentes méthodes d'estimation du paramètre de mémoire. Une étude de simulation a été effectuée pour comparer la performance de certaines méthodes d'estimation de l'exposant de Hurst. Les résultats de cette simulation montrent la supériorité de la méthode d'ondelettes dans l'estimation de la mémoire longue des séries temporelles de taux de change marocain.

Par l'intermédiaire de l'exposant de Hurst, la troisième partie s'articule autour des implications de la mémoire longue en finance tant dans un contexte méthodologique sur la détection et l'identification de la nature de la structure de dépendance que dans celui empirique sur l'efficacité des marchés boursiers.

Mots clés : séries chronologiques, mémoire longue, estimation, ondelettes, taux de change, exposant de Hurst, efficacité.

(114 pages)

ABSTRACT

Several empirical researches on financial market data have revealed many properties of time series, mainly the behavior of long memory, in the sense of hyperbolic decay of autocorrelation. This thesis then focused on the estimation and modelling of persistence in time series and understanding its dynamics.

The actual contribution of this thesis covers different axes. First, we highlighted the value of the concept of long memory by introducing a class of processes that represent such behavior.

After presenting the long dependence concept, we expounded in the second part of different methods of estimation of the memory parameter and a simulation study was carried out to compare the performance of some methods of estimation of the Hurst exponent, the results of which show the superiority of the wavelet method in the estimation of the long memory of time series in the context of the Moroccan exchange rate.

Through the Hurst Exhibitor, the third part focuses on the implications of long memory in financing both on a methodological context on the detection and identification of the nature of the dependency structure and an empirical context on the efficiency of stock markets.

Keywords: time series, long memory, estimation, wavelets, exchange rate, Hurst exponent, efficiency.

(114 pages)

Table des matières

DÉDICACES	i
AVANT PROPOS	ii
RÉSUMÉ	iii
ABSTRACT	iv
Liste des figures	vii
Liste des tableaux	vii
INTRODUCTION GÉNÉRALE.....	1
1- Motivation et Contexte.....	1
2- Plan de la thèse	6
CHAPITRE 1 : REVUE DE LA LITTÉRATURE	8
1- Introduction.....	9
2- Généralités sur les séries chronologiques.....	9
2-2- Processus stochastique.....	9
2-3- Stationnarité	10
2-4- Propriétés statistiques d'une série chronologique	11
2-5- Notion de non-stationnarité-Tests de détection	13
3- Concept et origine de la mémoire longue.....	15
3-1- Processus à mémoire courte.....	16
3-2- Processus à mémoire longue	18
3-3- Le Mouvement Brownien fractionnaire.....	19
3-4- Les processus fractionnaires de type ARFIMA	20
3-5- Bruit gaussien fractionnaire	24
3-6- Processus ARFIMA et lien avec l'exposant de Hurst	26
3-7- La longue dépendance dans les séries chronologiques.....	27
3-8- Signification de l'exposant de Hurst et son apport dans l'estimation de la mémoire longue.....	28
4- Analyse par ondelette.....	29
4-1- De l'analyse de Fourier à l'analyse par ondelettes	29
4-2- Décomposition en ondelettes : analyse multi-résolution (AMR)	30
4-3- L'application de la décomposition en ondelettes à l'analyse des séries temporelles : Estimation de dépendance de long terme	32
5- Conclusion	34

CHAPITRE 2 : ESTIMATION DU PARAMÈTRE DE HURST ET MISE EN ÉVIDENCE DES MODÈLES ARFIMA.....	35
1- Introduction.....	36
2- Méthodologie	36
2-1- Méthodes d'estimation du paramètre de Hurst.....	36
2-2- Evaluation de la qualité des estimateurs	47
3- Application empirique sur des données réelles avec des historiques pratiquement longues.....	51
3-1- Données et analyse préliminaire :	51
3-2- Elaboration des tests de stationnarité :	55
3-3- Analyse de la mémoire longue par une modélisation ARFIMA :	56
4- Conclusion	59
CHAPITRE 3 : IMPLICATIONS DE LA MÉMOIRE LONGUE SUR L'EFFICIENCE DES INDICES BOURSIERS.....	60
1- Introduction.....	61
2- Identification des caractéristiques des séries chronologiques.....	64
2-1- Mémoire longue et dépendance à long terme	64
2-2- Etude empirique et discussion	65
2-3- Implémentation d'un indice de classification	70
3- Conclusion	76
CONCLUSION GÉNÉRALE.....	77
BIBLIOGRAPHIE.....	81
ANNEXES	91

Liste des figures

Figure 1.1 :	Simulation de processus stationnaire (X_t) et non stationnaire (Y_t)	11
Figure 1.2 :	Tendance déterministe versus tendance stochastique	14
Figure 1.3 :	Corrélogramme processus ARMA(1,1)	17
Figure 1.4 :	Simulation d'un processus ARFIMA(1,0.4,0) : Chronique et ACF	23
Figure 1.5 :	Simulation d'un processus ARFIMA(1,-0.4,0) : chronique et ACF	24
Figure 1.6 :	Simulation d'un processus ARFIMA (0,0.3,0) : Chronique et ACF	27
Figure 2.1 :	Évolution journalière des séries de taux de change (Euro/MAD) et USD/MAD)	53
Figure 2.2 :	Corrélogramme des séries du taux de change USD/MAD et EURO/MAD	53
Figure 2.3 :	Evolution journalière du taux de change (EURO/MAD) en logarithme ...	54
Figure 2.4 :	Evolution journalière du taux de change USD/MAD en logarithme	54
Figure 2.5 :	Statistiques descriptives de la série DLOG(EURO/MAD)	56
Figure 2.6 :	Statistiques descriptives de la série DLOG(USD/MAD)	56
Figure 2.7 :	Corrélogramme des séries DLOG(USD/MAD) et DLOG(EURO/MAD)	57
Figure 3.1 :	Evolution de l'indice boursier (SSEC) étudié de Février 2010 à Février 2019	66
Figure 3.2 :	Evolution de l'indice boursier (MXX) étudié de Février 2010 à Février 2019	66
Figure 3.3 :	Evolution de l'indice boursier (CAC40) étudié de Février 2010 à Février 2019	67
Figure 3.4 :	Evolution de l'indice boursier (XU100) étudié de Février 2010 à Février 2019	67
Figure 3.5 :	Evolution de l'indice boursier (BSVP) étudié de Février 2010 à Février 2019	68
Figure 3.6 :	Évolution des rendements des indices boursiers de Février 2010 à Février 2019	69

Liste des tableaux

Tableau 2.1 :	Erreur quadratique moyenne des estimateurs	50
Tableau 2.2 :	Test de Dickey Fuller Augmenté.....	55
Tableau 2.3 :	Test de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS).....	55
Tableau 2.4 :	Résultat de l'analyse des deux séries par le modèle ARFIMA.....	58
Tableau 3.1 :	Résultat du test de stationnarité KPSS.....	68
Tableau 3.2 :	Résultat du calcul de l'exposant de Hurst.....	69
Tableau 3.3 :	Indice d'efficience et caractéristiques des marchés boursiers étudiés.....	74

INTRODUCTION GÉNÉRALE

1- Motivation et Contexte

La théorie des séries chronologiques constitue une branche de l'économétrie dont l'objet est l'analyse statistique des variables régulièrement espacées dans le temps. La particularité de l'analyse d'une série chronologique, qui la distingue des autres analyses statistiques, est précisément dans l'importance accordée à l'ordre dans lequel les observations sont exécutées.

Contrairement à l'économétrie classique, l'objectif de l'analyse des séries chronologiques n'est pas de relier des variables entre elles, mais de s'intéresser à la dynamique d'une variable. D'une part, cette dernière est en fait essentielle pour relier les variables qui exhibent des propriétés similaires. D'autre part, les propriétés mathématiques des modèles permettant d'estimer la corrélation entre deux variables dépendent de leurs dynamiques.

Les méthodes statistiques classiques exigent souvent que les variables traitées soient stochastiquement indépendantes et observées plusieurs fois. En séries chronologiques, la dépendance temporelle entre les variables crée la source principale de l'information, et l'objectif crucial est d'identifier et modéliser cette structure de dépendance. Des corrélations significatives pour de faibles retards peuvent être détectées et des processus à mémoire courte tels que les processus autorégressifs moyenne mobile ARMA¹ (Voir Box et Jenkins 1970 [30]) peuvent suffire à modéliser la structure de dépendance des séries. Or, ces processus ne peuvent pas modéliser des phénomènes à effet 'mémoire longue' au sens où les autocorrélations de la chronique présente une décroissance hyperbolique qui conduit à des problèmes délicats de statistique et la plupart des résultats classiques ne peuvent plus s'appliquer facilement. En s'appuyant sur la nature de la décroissance des autocorrélations, les séries temporelles peuvent être donc classées en deux catégories : **processus à mémoire courte** et **processus à**

¹ AutoRegressive Moving Average

mémoire longue. Les processus à mémoire courte (Voir Box et Jenkins 1976 [29] et Brockwell et Davis 1996 [32]), sont définis par une fonction d'autocorrélation absolument sommable ou qui décroît de manière exponentielle, ce qui veut dire que l'effet d'un choc à un instant donné n'est pas durable et n'affecte pas l'évolution future de la série. Quant au processus à mémoire longue, il est défini par une décroissance hyperbolique des autocorrélations, bien que les autocorrélations entre les observations éloignées du processus soient petites, elles ne sont pas négligeables, c'est-à-dire que l'effet d'un choc est permanent et peut influencer sur l'ensemble des valeurs futures de la série étudiée.

L'investigation statistique du concept de la mémoire longue ou la dépendance à long terme a débuté vers les années 1951 en hydrologie avec Hurst [69], et a été développée par les probabilités, grâce aux travaux précurseurs de Mandelbrot depuis les années 1965 [89], puis ceux de Taqqu dès les années 1970 [125], Beran 1994 [18], Baillie 1996 [13] et Doukhan et al. 2003 [44].

De nombreux processus assurent une telle définition, comme les mouvements browniens fractionnaires (noté fbm) développés par Mandelbrot et Van Ness 1968 [96]. Ces processus ont beaucoup de succès grâce à leur autosimilarité qui en favorise l'analyse. Il s'agit d'une sorte de processus très considérable à propos des applications, principalement à cause de son caractère à mémoire longue. Pour être précis, ce type de processus est distingué par un paramètre réel H appelé indice de Hurst. Ce dernier doit son nom à l'hydrologue H.E. Hurst qui a analysé pour la première fois la présence du comportement de mémoire longue dans les processus stochastiques, ce qui a permis de classifier les séries chronologiques selon la nature de leur structure de dépendance. En outre H , l'exposant Hurst, décrit la forme globale de la fonction d'autocorrélation du processus. Pour $1/2 < H < 1$, le processus exhibe une autocorrélation positive et une dépendance à long terme.

Une seconde classe d'outils derrière la popularité des modèles à mémoire longue est constituée des processus ARFIMA², construits par Granger et

² Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average

Joyeux 1980 [58] et Hosking 1981[68]. Ces processus permettent d'étendre la notion des processus $ARIMA^3(p,d,q)$ usuels et fournissent ainsi une gamme flexible de processus linéaires à mémoire longue, où le paramètre de différenciation d peut prendre des valeurs réelles, et non plus seulement des valeurs entières. Par ailleurs, ces processus visent à identifier le comportement de mémoire longue des séries chronologiques, et se distinguent des mouvements browniens par la prise en compte conjointe de la dynamique de court terme. Ces processus sont liés à l'indice de Hurst à travers une relation entre le paramètre d'intégration fractionnaire d et le paramètre H (voir Doukhan et al. 2003 [44]).

Ce mémoire de thèse met l'accent sur les méthodes de détection d'une éventuelle présence de mémoire longue dans les séries temporelles étudiées, notamment le problème d'estimation du paramètre de Hurst H qui permet de prendre en considération les propriétés liées à la mémoire longue. Ce qui signifie que le paramètre de Hurst peut être utilisé comme un bon indicateur de mémoire longue dans les séries temporelles qui entraînent un tel comportement de tendance. C'est pour cette raison que l'estimation de H est devenue une question de recherche majeure depuis 1951. Le point de départ a été centré sur la dépendance à long terme avec une étude des étendues normalisées basée sur la statistique R/S . Celle-ci a été élaborée par HURST 1951 [69] lors d'une analyse de 900 séries chronologiques qui est en partie motivé par le désir de comprendre la persistance des données d'écoulement des eaux du Nil. Par la suite plusieurs techniques d'estimation ont été proposées, qui peuvent être regroupées en deux grandes catégories : des méthodes temporelles telles que la méthode des variances agrégées [126] et la méthode d'analyse des moyennes mobiles redressées (DMA) [7], et des méthodes spectrales qui s'appuient sur le comportement de la densité spectrale autour de zéro telle que celle du log périodogramme (GPH) (voir Gewek et Porter Hudak 1983 [55]).

Notons qu'il existe d'autres méthodes d'estimation de l'indice de Hurst. On peut par exemple citer la méthode des valeurs absolues de la variance agrégée, la

³ Autoregressive Integrated Moving Average

méthode des résidus ou encore la procédure de Higuchi 1988 [67] basée sur l'utilisation de la dimension fractale. Une présentation détaillée de ces techniques se trouve dans Taqqu, Teverovsky et Willinger 1995 [127].

Plus récemment, une nouvelle classe d'outils mathématiques basée sur l'utilisation de la méthode des ondelettes, s'est révélée être un outil très important en statistique et en traitement des séries chronologiques, en particulier les chroniques à mémoire longue générées par des processus fortement corrélés (Voir Flandrin 1992 [54], Wornell 1993 [134], Abry et Veitch 1998 [5], Abry et al. 2000 [2] et Abry et al. 2003 [4]).

L'analyse des ondelettes a été élaborée pour capturer toutes les informations localisées à la fois en temps et en fréquence, ce qui nous produit un outil idéal pour étudier des séries temporelles non stationnaires. Cette analyse, basée sur une décomposition temps-échelle des observations aide à extraire des informations à la fois temporelles et fréquentielles. L'utilité de cette décomposition est que les ondelettes peuvent s'adapter parfaitement à toutes les fluctuations présentes dans un signal, qu'elles soient de basses ou hautes fréquences. En d'autres termes, les ondelettes sont capables de décrire tous les détails du signal traité ; les détails fins seront décrits avec des ondelettes peu dilatées et les détails plus grossiers le seront avec des ondelettes plus dilatées. Cette démarche est appelée l'analyse multi-résolution (AMR). Elle consiste à construire une ondelette de base ou ondelette mère de telle sorte que les ondelettes déduites par des translations et des dilatations forment une base de $L^2(\mathbb{R})$ et permettent ainsi de décomposer toute fonction ou signal de carré intégrable dans cette base.

L'utilisation des ondelettes pour l'estimation du coefficient de mémoire de processus stationnaires s'est imposée comme une bonne alternative aux méthodes de Fourier classiques pour pallier à des problèmes rencontrés dans certaines situations, notamment si la série étudiée n'est pas stationnaire au second ordre ou si son spectre est marqué par certaines singularités. Ainsi les méthodes de Fourier ne peuvent pas rendre compte des particularités du signal. Une seconde limitation majeure est qu'elles sont incapables de localiser les segments du signal à fluctuations rapides (hautes fréquences), ni ceux où elles

sont lentes (basses fréquences). Cette nouvelle méthode d'estimation du paramètre de Hurst a été adoptée au traitement des séries temporelles (voir Vialar 2009 [129]), à l'évaluation des persistances des indices boursiers (voir Matteo 2007 [41], NyoNyo et al. 2006 [108] et Pei et al. 2012 [109]) et à l'analyse des taux d'intérêts (voir Karuppiyah et Los 2005 [74] et Zieba et al. 2009 [137]).

Depuis les années 1980, et grâce aux travaux pionniers de Granger et Joyeux [58], la mémoire longue est devenue, un centre d'intérêt de l'économétrie et de la finance (voir Hosking 1981 [68], Porter-Hudak 1983 [55], Robinson 1995 [116] et Abry et al. 1998 [5]). Cependant l'économétrie, ce domaine de connexion entre la statistique mathématique, et la théorie économique est devenue un outil primordial de l'analyse économique.

L'étude des séries temporelles, qui occupe aujourd'hui un rôle clé dans de nombreuses analyses dynamiques, s'est avérée une science à part entière très performante depuis plus de deux décennies. Notamment en finance, ce domaine très dynamique de la recherche en économie de marché, a émis de sérieuses réserves, sur l'efficacité des marchés financiers, nationaux et internationaux. Plus précisément, la présence d'une structure de dépendance à long terme a d'importantes implications sur la théorie financière moderne (voir Lo 1991 [83]) et notamment sur la théorie d'efficacité des marchés financiers.

Conformément à la définition basique élaborée par FAMA 1970 [50], l'efficacité informationnelle d'un marché représente une situation où les prix des actifs financiers reflètent toujours toute l'information disponible. Cela implique que les séries de rentabilité boursière sont caractérisées par une absence de mémoire, dans le sens où c'est impossible de prévoir les variations futures à partir de celles passées (voir Fama 1991 [49]). En d'autres termes, les cours boursiers suivent un processus de marche aléatoire et les séries de rentabilité boursière présentent un processus de bruit blanc. Or l'existence d'une structure de dépendance à long terme dans les séries boursières assure que les observations distantes présentent des autocorrélations significatives. De ce fait, la connaissance de l'information passée contribue à la prévision des valeurs futures. En d'autres termes, les rentabilités ne sont pas indépendantes au cours du temps, ce qui est en contradiction avec le concept d'efficacité. D'autre part,

un marché peut être efficient si le prix observé sur le marché est égal à sa valeur fondamentale qui est définie par la somme actualisée des anticipations rationnelles des dividendes futurs (voir Samuelson 1965 [119]). Cette définition de l'efficience remet en cause la présence de la mémoire longue car elle entraîne un écart durable entre le prix et sa valeur fondamentale, par suite, la mémoire longue a d'importantes implications en théorie financière.

En se basant sur des acquis théoriques ce travail se donne pour but d'appliquer une approche d'analyse empirique des phénomènes qui rendent le marché imparfait dont notamment l'existence de la mémoire longue. Cette approche impose le recours à une panoplie de méthodes tant en statistique (test de stationnarité, modèle ARFIMA, ...) qu'en mathématique (exposant de Hurst, ondelette, ...) pour tester et valider l'existence d'un tel phénomène sur les marchés de change et les marchés boursiers.

2- Plan de la thèse

Après avoir exposé notre motivation théorique, ce document vise à explorer l'application d'une variété de méthodologies basées sur l'estimation du paramètre à mémoire longue, pour analyser la structure de dépendance à long terme. Plus précisément nous étudions la propriété de mémoire longue des séries temporelles. Cela signifie que le paramètre de Hurst peut être utilisé comme un bon indicateur de la caractéristique de la mémoire longue du marché, qui à son tour entraîne un tel comportement de tendance. Ainsi la présente thèse sera structurée comme suit :

Dans le premier chapitre de cette thèse nous présentons les principes fondamentaux des processus à mémoire longue ainsi que l'analyse par ondelettes. Celle-ci est présentée comme outil d'estimation du paramètre de mémoire, dans le but d'établir un cadre théorique afin d'étudier notre objectif dans les chapitres suivants.

Le chapitre 2 et 3 constituent la partie empirique de la thèse. La première partie du deuxième chapitre montre des méthodes bien détaillées visant à estimer la mémoire longue caractérisée par l'exposant de Hurst H . En appliquant ces méthodes sur des données simulées, nous sommes en mesure de

confirmer que l'estimateur basé sur la méthode des ondelettes est meilleur que les autres estimateurs fournis par les différentes méthodes utilisées. Pour illustrer l'utilité de l'exposant de Hurst, et en s'appuyant sur l'estimation de ce paramètre par la méthode la plus performante, on s'intéresse dans la seconde partie de ce chapitre à analyser l'évolution des séries de taux de change marocain par rapport à l'Euro et au Dollar américain dans l'objectif de déterminer si les séries de taux de change marocain sont caractérisées par une structure de mémoire de long terme.

Le troisième chapitre de notre thèse sera consacré entièrement à l'étude de l'efficacité des marchés financiers en mettant en évidence notre objet d'étude de la mémoire longue, et ce en évaluant la structure de dépendance de l'évolution des indices boursiers étudiés en référence à l'hypothèse de l'efficacité. Ensuite, on procède à la construction d'un indice composite de classification des marchés, selon leur efficacité. Cet indice exploite la mémoire longue, comme comportement caractérisant les séries chronologiques ainsi que, la rugosité et l'imprévisibilité qui peuvent aussi être cause de l'inefficacité des marchés financiers.

La dernière partie de la thèse présente les conclusions de ce travail, ainsi que différentes extensions possibles, nous discutons aussi la possibilité d'approfondir l'analyse de mémoire longue.

Certains travaux présentés dans ce travail de thèse ont fait l'objet d'articles publiés dans des différents volumes du journal *Applied Economic Sciences* (JAES) dont le détail est le suivant :

- 1- Fractal Analysis of Moroccan Dirham Exchange Rate: Theory and Comparative Results (2016).
- 2- Hurst Parameter Estimation Methods: Comparative Study and Application (2018).
- 3- Efficiency Classification of Stock Market Indices: Construction of an Indicator Using Fractal and Long Memory Characterization (2018).

CHAPITRE 1 : REVUE DE LA LITTÉRATURE

1- Introduction

2- Généralités sur les séries chronologiques

- 2-1- Définition
- 2-2- Processus stochastique
- 2-3- Stationnarité
- 2-4- Propriétés statistiques d'une série chronologique
 - 2-4-1- Notion de la moyenne et la variance
 - 2-4-2- Notion de dépendance
 - 2-4-2-1- Fonction d'autocovariance
 - 2-4-2-2- Fonction d'autocorrélation
 - 2-4-3- Coefficient d'asymétrie (Skewness) et d'aplatissement (Kurtosis)
- 2-5- Notion de non-stationnarité-Tests de détection
 - 2-5-1- Description des processus TS et DS
 - 2-5-1-1- Le processus TS
 - 2-5-1-2- Le processus DS
 - 2-5-2- Test de la racine unitaire

3- Concept de la mémoire longue

- 3-1- Processus à mémoire courte
- 3-2- Processus à mémoire longue
- 3-3- Le Mouvement Brownien fractionnaire
- 3-4- Les processus fractionnaires de type ARFIMA
- 3-5- Bruit gaussien fractionnaire
- 3-6- Processus ARFIMA et lien avec l'exposant de Hurst
- 3-7- La longue dépendance dans les séries chronologiques
- 3-8- Signification de l'exposant de Hurst et son apport dans l'estimation de la mémoire longue

4- Analyse par ondelette

- 4-1- De L'analyse de Fourier à l'analyse par ondelettes
- 4-2- Décomposition en ondelettes : Analyse Multi-Résolution (AMR)
- 4-3- L'application de la décomposition en ondelettes à l'analyse des séries temporelles : l'estimation de dépendance de long terme

5- Conclusion

1- Introduction

Ce chapitre de synthèse sera consacré à la présentation des rappels et introduit les fondements théoriques des principaux concepts qui seront utilisés dans les chapitres suivants. Nous présentons une propriété de certains processus stochastiques, la mémoire longue, qui est réputée pour avoir un impact important dans la modélisation de nombreuses données. L'étude des processus stochastiques ayant un tel comportement a reçu une attention considérable dans la communauté scientifique ces dix dernières années. En particulier, l'étude de la dépendance de long terme via des mesures telles que l'indice de Hurst, intéresse les économistes, car elle met en cause le rejet de modèle de marche aléatoire, et permet donc une possibilité de prédire l'évolution des cours boursiers.

Nous présentons les principes fondamentaux de quelques processus typiques pour étudier la notion de la mémoire longue et discutons la signification du paramètre clé de ce comportement, afin de fournir un cadre théorique pour étudier notre principal objectif de l'estimation dans les prochaines sections. L'analyse par ondelettes est présentée dans ce chapitre comme alternative à l'analyse de Fourier dans l'estimation du paramètre de mémoire longue et son application dans les séries temporelles et particulièrement la classe des processus à long mémoire.

2- Généralités sur les séries chronologiques

2-1- Définition

Une série chronologique encore appelée chronique ou série temporelle notée $\{Y_t; t = 1 \dots T\}$, constitue une série d'observations ordonnées chronologiquement d'une variable statistique. Par rapport aux autres types de données statistiques, la particularité des séries chronologiques tient à la présence d'une liaison d'antériorité qui ordonne l'ensemble des informations. Elles se rencontrent naturellement dans une grande variété de domaines : l'économie, la finance, l'écologie, le transport, la démographie...

L'objectif de l'analyse des séries chronologiques est d'appréhender les phénomènes qui déterminent ces variations, d'élaborer un modèle statistique et de prévoir les valeurs futures en se basant sur les observations présentes et passées.

2-2- Processus stochastique

Un processus aléatoire ou stochastique est une suite de variables aléatoires ordonnées dans le temps. Si Y désigne une variable aléatoire continue, on la note par $Y(t)$, et si elle est discrète, on la note par Y_t . Un processus stochastique est donc une famille de

variables aléatoires Y dont on va observer des valeurs réelles issues de l'espace S des échantillons selon une certaine loi de probabilité. Pour chaque point s de l'espace des échantillons S , la fonction qui à t associe $Y_t(s)$ est appelée la trajectoire (ou réalisation⁴) du processus. Les observations successives forment l'histoire du processus.

2-3- Stationnarité

Un type de processus stochastiques qui a reçu beaucoup d'attention par les analystes des séries temporelles est le processus stochastique stationnaire. Pour travailler avec des données temporelles, elles doivent maintenir une distribution constante dans le temps.

De ce fait, si nos variables passées sont similaires à nos variables futures, on peut utiliser le passé pour tenter de prédire le futur. En revanche si nos données ne sont pas stationnaires, on peut se retrouver avec un biais de prévision ou une prévision inefficace et par conséquent une mauvaise inférence.

De manière générale, un processus stochastique est dit stationnaire, si sa moyenne et sa variance sont constantes dans le temps et la valeur de la covariance entre deux périodes ne dépend que de la distance ou l'écart entre ces deux périodes, et non le temps réel au cours duquel la covariance est calculée.

Il existe en effet deux types de processus stationnaires, les processus stationnaires au sens large (stationnarité du second ordre) et les processus stationnaires au sens strict (stationnarité forte). Et comme dans la pratique on se limite généralement à requérir la stationnarité au second ordre, on va se contenter d'étudier juste ce dernier.

Définition :

Un processus $\{Y_t\}$ est stationnaire au second ordre (au sens large) si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} 1. E(Y_t^2) < \infty \quad \forall t \in \mathbb{Z} \\ 2. E(Y_t) = \mu \quad \forall t \in \mathbb{Z} \\ 3. cov(Y_t, Y_{t-k}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-k} - \mu)] = \gamma(k) \quad \forall t \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^* \end{cases}$$

La première condition garantit l'existence des moments d'ordre deux. La seconde condition porte sur les moments d'ordre un et signifie que les variables aléatoires Y_t doivent avoir la même espérance (moyenne) quelle que soit la date t , autrement dit, l'espérance du processus Y_t doit être indépendant du temps. La troisième condition porte sur les moments d'ordre

⁴ Une série chronologique peut se définir comme étant une réalisation finie d'un processus stochastique.

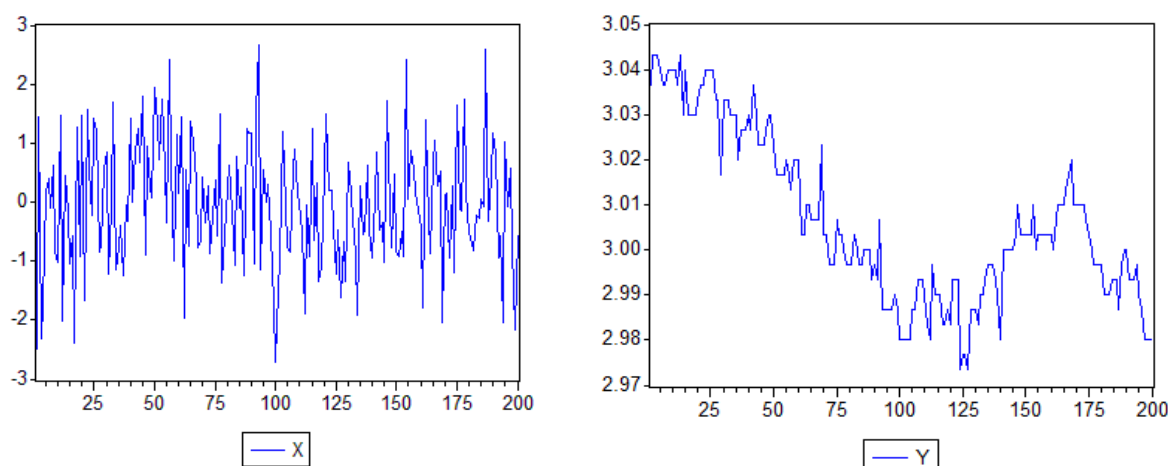
deux résumée par la fonction d'autocovariance $\gamma(k)$, elle implique que ces moments dépendent uniquement de l'ordre de retard k .

En résumé un processus est stationnaire au second ordre si l'ensemble de ces moments sont indépendants du temps.

Exemple :

Une simulation de deux processus, l'un est stationnaire et l'autre est non stationnaire.

Figure 1.1 : Simulation de processus stationnaire (X_t) et non stationnaire (Y_t)



2-4- Propriétés statistiques d'une série chronologique

2-4-1- Notion de moyenne et variance

On note souvent les expressions de la moyenne et de la variance d'une série chronologique $\{X_t; t = 1 \dots T\}$ comme suit :

- Moyenne : $E(X_t) = \mu(t) = \frac{\sum_{i=1}^T x_i}{T}$
- Variance : $Var(X_t) = \sigma^2(t) = \frac{\sum_{i=1}^T (x_i - E(X_i))^2}{T}$

2-4-2- Notion de dépendance

2-4-2-1- Fonction d'autocovariance

Soit $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus stationnaire avec variance finie, nous allons utiliser par la suite les notations suivantes :

$$\gamma_X(h) = Cov(X_t, X_{t+h}) = Cov(X_0, X_h), h \in \mathbb{Z} \quad (1.1)$$

La fonction $\gamma_X: h \rightarrow \gamma_X(h)$, est appelée la fonction d'auto covariance de délai h du processus X_t . Cette fonction fournit des informations sur la variation de la série et les liaisons temporelles existantes entre les différentes composantes de la série.

2-4-2-2- Fonction d'autocorrélation

On considère :

$$\rho_X(h) = \text{Corr}(X_0, X_h) = \frac{\gamma_X(h)}{\text{Var}(X)} \quad (1.2)$$

$\rho: h \rightarrow \rho_X(h)$ est la fonction d'autocorrélation de délai h notée ACF du processus X_t .

2-4-3- Coefficient d'asymétrie (Skewness) et d'aplatissement (Kurtosis)

❖ Coefficient d'asymétrie ou de skewness :

On appelle skewness le coefficient d'asymétrie de la distribution de la série autour de sa moyenne. Il est défini par :

$$S = \frac{\left[\frac{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^3}{T} \right]^2}{\left[\frac{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2}{T} \right]^3} = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} \quad (1.3)$$

Où $\bar{X}$ est la moyenne de la série X_t , $t = 1, \dots, T$, et les μ_i sont les moments centrés d'ordre i .

Un skewness positif signifie que la distribution a une queue étendue à droite et le skewness négatif signifie que la distribution a une queue étendue à gauche. Dans le cas d'une distribution normale, le coefficient de skewness (S) -ou coefficient d'asymétrie- est égale à zéro, donc la distribution est symétrique.

❖ Coefficient d'aplatissement ou Kurtosis :

On appelle Kurtosis le coefficient qui permet de mesurer le caractère pointu ou plat de la distribution de la série. Ce coefficient est défini par :

$$K = \frac{\frac{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^4}{T}}{\left[\frac{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2}{T} \right]^2} = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} \quad (1.4)$$

Si le Kurtosis est supérieur à 3, la distribution est plutôt pointue relativement à la normale on parle d'une distribution *leptokurtique*. S'il est inférieur à 3, la distribution est plutôt plate relativement à la normale, dans ce cas la distribution est dite *platikurtique*.

2-5- Notion de non-stationnarité-Tests de détection

La plupart des chroniques sont rarement des réalisations de processus stochastiques stationnaires. La non stationnarité des processus peut impliquer aussi bien le moment du premier ordre (espérance mathématique), que celui du second ordre (variance et covariance du processus). Il n'existait pas avant les années 1980 des tests permettant de détecter cette non-stationnarité. De ce fait, les transformations utilisées étaient les filtres aux différences et la formule de Box Cox. Depuis les travaux de Nelson et Plosser 1982 [106], les cas classiques de non stationnarité sont étudiés à partir de deux types de processus :

- Les processus de type TS (Trend Stationary) qui représentent une non stationnarité de type déterministe.
- Les processus de type DS (Differency Stationary).

2-5-1- Description des processus TS et DS

2-5-1-1- Le processus TS

On dit que le processus $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est caractérisé par une non stationnarité déterministe, s'il peut s'écrire sous la forme :

$$Y_t = f(t) + \varepsilon_t$$

Où $f(t)$ est une fonction polynomiale du temps, et ε_t un processus stationnaire. Il est clair que ce processus est non stationnaire car il ne satisfait pas la première condition de stationnarité et $E(Y_t)$ dépend du temps. Pour stationnariser un processus de type TS, il faut enlever la composante déterministe $f(t)$ en régressant la série Y_t .

2-5-1-2- Le processus DS

On dit que le processus $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est caractérisé par une non stationnarité stochastique, si le processus différencié d fois, $(1 - L)^d Y_t$ est stationnaire. On parle aussi de processus intégré d'ordre d, on note $Y_t \sim I(d)$:

$$(1 - L)^d Y_t = \varepsilon_t, \text{ où } \varepsilon_t \text{ un processus stationnaire.}$$

Pour stationnariser un processus de type DS d'ordre d, il suffit d'appliquer le filtre $(1 - L)^d$.

Définition : l'opérateur de retard B

Dans la pratique on aura à considérer une variable en fonction de son passé. Il est donc évident de définir un opérateur qui transforme la variable Y_t en sa valeur passé.

L'opérateur de retard est défini comme suit :

$$B^p Y_t = Y_{t-p}, \quad p \in \mathbb{N}$$

Définition : l'opérateur de différence ∇

L'opérateur ∇ est défini comme suit :

$$\nabla = I - B$$

Par exemple :

$$\nabla Y_t = (I - B)Y_t = Y_t - Y_{t-1}$$

Cet opérateur permet d'éliminer la tendance de la série, et il est peut-être répéter plusieurs fois si la tendance n'est pas linéaire.

Le nombre de fois où on applique ∇ est appelé ordre de différenciation.

Remarque :

Le développement binomial de l'opérateur de différence fractionnaire est donné par :

$$\nabla^d = (1 - B)^d = 1 - dB - \frac{d(1-d)}{2!}B^2 - \frac{d(1-d)(2-d)}{3!}B^3 - \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i B^i \quad (1.5)$$

$$\text{où } \pi_i = \frac{d(1-d) \dots (i-1-d)}{i!}$$

On sait que pour un entier n on a :

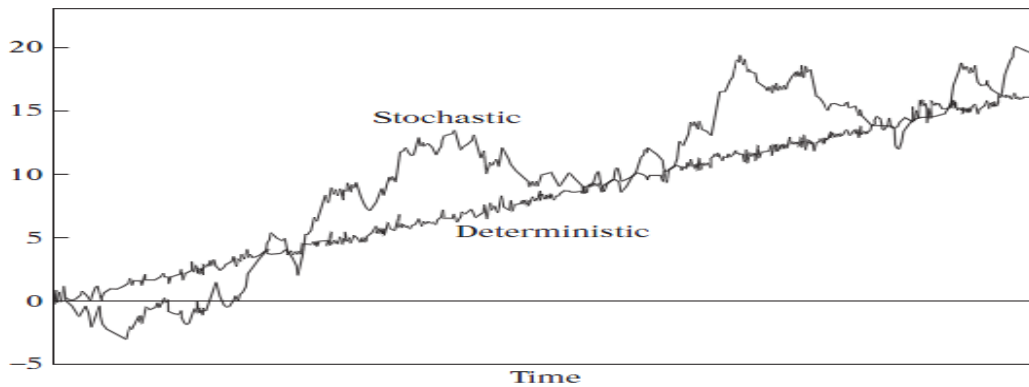
$$\Gamma(n-d) = -d(1-d) \dots (n-1-d)\Gamma(-d) \text{ et } \Gamma(n+1) = n! \quad (1.6)$$

d'où $\pi_i = \frac{\Gamma(i-d)}{\Gamma(i+1)\Gamma(-d)}$, $i \geq 0$ (Voir Baillie (1996) [13] pour les détails des simplifications)

Où $\Gamma(x)$ est la fonction Gamma définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \text{ si } x > 0 \quad (1.7)$$

Figure 1.2 : Tendance déterministe versus tendance stochastique



Source : Charemza et al. op., cit., p.91

2-5-2- Test de la racine unitaire

Un test de stationnarité ou (non stationnarité) qui est devenu considérablement populaire est le test de la racine unité. Parmi les tests les plus appliqués en raison de leur simplicité on a le test de Dickey Fuller Augmenté noté ADF [40], dont l'hypothèse nulle est celle de la présence d'une racine unitaire (non stationnarité) et le test de Kwiatkowski et al. 1992 [78] noté KPSS qui est un test de stationnarité. Autrement dit, on teste l'hypothèse nulle de stationnarité contre l'hypothèse alternative de non stationnarité. Contrairement au test ADF qui sont des tests de non stationnarité.

Tous les modèles des tests susmentionnés sont estimés par la méthode des moindres carrées ordinaires et seront élaborés directement dans l'étude empirique à l'aide du logiciel Eviews 9.

3- Concept et origine de la mémoire longue

Le paradigme de mémoire longue ou de dépendance à long terme ne découle pas de la littérature économique, mais d'autres domaines tels que l'hydrologie, la géophysique et autres sciences naturelles, (voir Hurst 1951 [69], Mandelbrot et Wallis 1969 [97], Mandelbrot (1972) [92] et McLeod et Hipel 1978 [98]). Hurst a en fait accordé son nom au coefficient quantifiant la mémoire longue, l'exposant de Hurst. Théoriquement, ce comportement de longue dépendance a été constaté pour la première fois par Hurst lors de son évaluation des séries hydrologiques, en montrant la présence d'une corrélation entre un événement présent et un événement futur, autrement dit, un fait causé aujourd'hui peut avoir un impact sur le long terme. Pour détecter ce comportement, multiples méthodes pourraient être exploitées (fonction d'autocorrélation, densité spectrale, paramètre de mémoire longue, etc.). Heuristiquement, le comportement de mémoire longue peut être illustré par des comportements de persistance dans les données, par une décroissance lente de la fonction d'autocorrélation (dans le domaine temporel) ou par une divergence de la densité spectrale à l'origine (dans le domaine fréquentiel). La mémoire longue en finance a été l'objet de nombreux travaux de recherche depuis le début des années 80 et les articles de Granger 1980 [56] et de Granger et Joyeux 1980 [58]. Bien qu'il y ait une littérature abondante sur la mémoire longue, aussi bien théorique ([35], [43], [56], [58], [68]), qu'empirique ([27], [65], [70], [128]), très peu d'articles discutent de ce que traduit véritablement ce phénomène. Di Matteo, Aste, et Dacorogna (voir Di Matteo, Aste, & Dacorogna 2005 [42]) montraient un lien fort entre l'exposant de mémoire longue des indices boursiers et l'état du marché correspondant. Pour cela, ils étudient plusieurs marchés financiers ayant des états de développement différents (des marchés matures et

très liquides, et des marchés émergents et moins liquides). Leurs résultats leur permettent de conclure que le paramètre de mémoire longue d'un marché mature est plus petit que celui d'un marché émergent.

3-1- Processus à mémoire courte

Un processus $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ est dit à mémoire courte si sa fonction d'autocorrélation $\rho(k)$ est sommable :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n |\rho(k)| < \infty \quad (1.8)$$

Ainsi les processus autorégressifs moyenne mobile (ARMA) sont les processus classiques de mémoire courte.

Définition :

Un processus $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ est dite autorégressif moyenne mobile d'ordre (p,q) noté ARMA(p,q) s'il existe des paramètres réels $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ et $\theta_1, \dots, \theta_q$ indépendants du temps tels que :

$$X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \dots - \varphi_p X_{t-p} = C + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}, \forall t \in \mathbb{Z}$$

avec ε_t un bruit blanc et C une constante.

En utilisant l'opérateur de retard on obtient :

$$\Phi(B)X_t = C + \Theta(B)\varepsilon_t, \forall t \in \mathbb{Z}$$

où

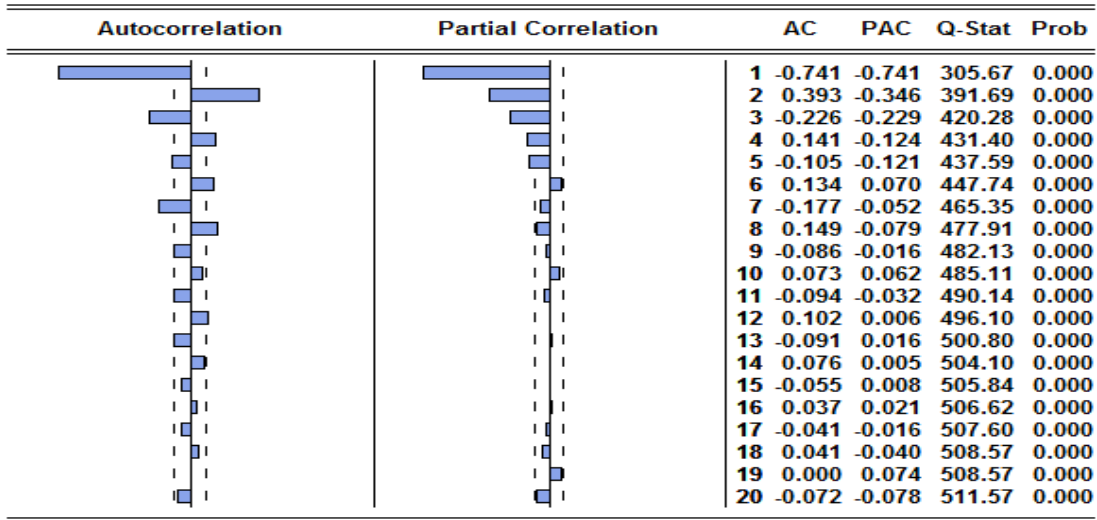
$$\Phi(B) = 1 - \varphi_1 B - \dots - \varphi_p B^p, \quad \varphi_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1 \dots p$$

et
$$\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q, \quad \theta_{1_i} \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1 \dots q$$

Dans la figure ci-dessous nous observons la fonction d'autocorrélation d'un processus à mémoire courte simulé.

Figure 1.3 : Corrélogramme processus ARMA(1,1)

Sample: 13/10/2009 25/11/2011
Included observations: 554



Les processus ARMA ne peuvent être estimés que sur des processus stationnaires. Si $\{X_t\}$ est une série non stationnaire, il convient d'utiliser des processus ARIMA(p,d,q) (Autoregressive Integrated Moving Average) où d est un entier positif appelé ordre de différenciation, qui sont obtenus par l'application du filtre de différence dans le cas d'un processus DS détecté par le test de Dickey Fuller.

L'estimation des modèles ARIMA(p,d,q) suppose que l'on travaille sur une série stationnaire. La meilleure méthode d'éliminer toute tendance est de différencier. Une série temporelle qui a besoin d'être différenciée pour atteindre la stationnarité est considérée comme une version intégrée d'une série stationnaire (d'où le terme Integrated).

Définition :

On dit qu'un processus $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus ARIMA(p,d,q) s'il vérifie la relation suivante:

$$\Phi(B)(1 - B)^d X_t = C + \Theta(B)\varepsilon_t, \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

3-2- Processus à mémoire longue

- **Dans le domaine temporel :**

Un processus $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ est dit à mémoire longue si sa fonction d'autocorrélation $\rho(k)$ n'est pas sommable (voir McLeod et Hipel 1978 [98]) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n |\rho(k)| = \infty \quad (1.9)$$

En d'autres termes la fonction d'autocorrélation décroît comme une fonction puissance du retard k :

$$\rho(k) \sim Ck^{-\alpha}$$

où $C > 0$ et $0 < \alpha < 1$.

Ceci s'oppose aux processus à mémoire courte, qui possèdent une corrélation exponentiellement décroissante. La mémoire longue implique que les données sont corrélées sur une période infiniment grande, c'est-à-dire que la corrélation entre deux variables aléatoires X_t et X_s du processus, arbitrairement éloignées, ne peut pas être négligée. Il n'existe pas de temps caractéristique à partir duquel on peut considérer que les variables aléatoires du processus ne sont plus corrélées.

La propriété de mémoire longue peut aussi être vue dans la densité spectrale de puissance. Le fait que la somme de la covariance diverge implique en effet que sa représentation fréquentielle diverge à l'origine des fréquences.

- **Dans le domaine spectral :**

Nous commençons par un rappel de la définition de la densité spectrale d'un processus $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$:

Définition :

La densité spectrale d'un processus stationnaire $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ vérifiant :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n |\gamma(k)| < \infty \quad (1.10)$$

où $\gamma(k)$ est sa fonction d'auto-covariance, est donnée par :

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda h} \gamma(h)$$

Définition :

Un processus discret et stationnaire $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ est dit à mémoire longue s'il existe un réel $\beta \in]0,1[$ et une constante $c_f > 0$ tels que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} |\lambda|^\beta f(\lambda) = c_f$$

où $f(\lambda)$ est une fonction de densité spectrale.

Les premiers processus à mémoire longue ont été élaborés par Mandelbrot & Van Ness 1968 [96] qui ont adopté une généralisation du mouvement brownien ordinaire, appelée mouvement brownien fractionnaire, afin de tenir compte de la dépendance de long terme entre les observations. Ces processus sont caractérisés par un exposant de mémoire, appelé exposant de Hurst, qui permet de capturer la longue dépendance. Donc pour une meilleure compréhension de l'exposant de Hurst, une brève explication du concept du mouvement brownien est nécessaire.

3-3- Le Mouvement Brownien fractionnaire

Dans la modélisation du marché financier, notamment les marchés boursiers, le mouvement brownien fractionnaire joue un rôle important dans la construction d'un modèle statistique. Ce processus a été le premier processus à mémoire longue développé par Mandelbrot et Van Ness 1986 [96], comme étant une généralisation du mouvement brownien ordinaire, afin de tenir compte du fait de la mémoire longue. Ce processus est paramétré par l'exposant H de Hurst ($0 < H < 1$).

Définition :

Un mouvement Brownien fractionnaire de paramètre $H \in]0,1[$ est le processus Gaussien réel centré noté $\{B^H(t) : t \in \mathbb{R}\}$, vérifiant les conditions suivantes :

- $B^H(0) = 0$
- $\mathbb{E} \left[(B^H(t))^2 \right] = |t|^{2H}, \forall t \in \mathbb{R}$
- $B^H(\cdot)$ a des accroissements stationnaires

Le mouvement brownien fractionnaire de paramètre H est défini par :

$$B^H(t, \cdot) = \frac{1}{\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right)} \left\{ \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB(s, \cdot) \right\}$$

(1.12)

H étant le paramètre de Hurst, et $B(s, \cdot)$ est le mouvement brownien ordinaire.

On considère le processus Y_t des incréments du mouvement brownien fractionnaire défini par : $Y_t = B^H(t, \cdot) - B^H(t - 1, \cdot)$

C'est un bruit gaussien stationnaire (voir Mandelbrot et Wallis 1969 [97]) dont la fonction d'autocovariance est définie par :

$$\gamma(k) = E(Y_t Y_{t+k}) = \frac{1}{2} [|k+1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k-1|^{2H}]$$

d'où $\gamma(k) \sim H(2H-1)k^{2H-2}$ quand $k \rightarrow \infty$

(1.13)

Dès lors on peut faire une classification selon les valeurs prise par l'exposant H :

- Si $H = 1/2$: le mouvement brownien fractionnaire se réduit au mouvement brownien ordinaire. La corrélation est nulle et le processus ne présente donc aucune dépendance à long terme.
- Si $1/2 < H < 1$: on est face à un processus à mémoire longue. Ainsi, la corrélation est positive et il y a une persistance.
- Si $0 < H < 1/2$: la corrélation est négative. Le processus présente ce que Mandelbrot a appelé l'anti-persistance. Ce phénomène s'interprète par des périodes de hausse qui ont tendance à être suivies par des périodes de baisse.

3-4- Les processus fractionnaires de type ARFIMA

Une seconde catégorie d'outils, utile pour appréhender la mémoire longue, est constituée des processus ARFIMA (Auto-regressive Fractionnaly Integrated Moving Average). Granger-Joyeux 1980[58] et Hosking 1981 [68] se placent dans le cadre des processus autorégressifs moyenne mobile intégré (ARIMA) introduits par Box-Jenkins 1970 [30] et développent une classe de processus ARIMA fractionnaires ou ARIFMA (ARIMA Fractionnaire) définis par :

$$(1 - B)^d \Phi(B) Y_t = \Theta(B) \varepsilon_t, \quad d \in] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} [.$$

(1.14)

où d est le coefficient d'intégration fractionnaire appelé aussi paramètre de mémoire longue et ε_t est un bruit blanc d'espérance nulle et de variance σ^2 . $\Phi(B)$ et $\Theta(B)$ désignent respectivement les polynômes autorégressifs et moyennes mobiles du processus, et qui sont premiers entre eux tels que:

$$\Phi(B) = 1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_p B^p,$$

$$\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$$

et où $(1 - B)^d$ est un opérateur de différences fractionnaires.

Ce processus est stationnaire si :

$d < \frac{1}{2}$ et les racines de $\Phi(B)$ sont supérieures en module à 1.

Il est inversible si :

$d > -\frac{1}{2}$ et les racines de $\Theta(B)$ sont supérieures en module à 1.

Les processus à mémoire longue peuvent être caractérisés par des propriétés de leur fonction d'autocorrélation.

On dit qu'un processus est à mémoire longue si $\sum_{k=0}^{\infty} |\rho(k)| = +\infty$.

Bien que l'autocorrélation entre les observations éloignées du processus soit petite, elle n'est pas négligeable, autrement dit, l'effet d'un choc est permanent et peut influencer sur l'ensemble des valeurs futures de la série temporelle.

Par contre un processus à mémoire courte est caractérisé par la propriété suivante :

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\rho(k)| < +\infty$$

C'est-à-dire que l'effet d'un choc à un instant donné n'est pas durable et n'affecte pas l'évolution future de la série.

On remarque que les processus classiques ARMA(p,q) et ARIMA(p,d,q) sont des cas particuliers des processus ARFIMA dans lesquels, respectivement $d=0$ et d est un entier. La raison pour laquelle on choisit cette famille de processus à des fins modélisatrices est que l'effet du paramètre d sur les observations distantes décline hyperboliquement à mesure que les retards augmentent, alors que les effets des paramètres φ et θ décroissent de manière exponentielle. Donc d peut être choisi pour décrire les corrélations dans la structure d'une série temporelle avec d'importants retards alors que φ et θ sont choisis pour décrire la structure de corrélation de court terme.

Dans la modélisation d'une série temporelle par des modèles ARMA(p,q) standards d'ordre élevé on peut décrire la décroissance hyperbolique d'une série fractionnairement intégrée, mais le nombre très élevé de paramètres nécessaires conduit à des mauvais critères d'information Akaike et Schwarz (voir annexe C). Or un modèle fractionnaire intégré ARFIMA(p,d,q) a l'intérêt de représenter la décroissance lente des coefficients d'autocorrélations avec un seul paramètre d.

Suivant la valeur prise par le paramètre fractionnaire d on peut faire une classification des séries chronologiques selon la nature de leurs structures de dépendance :

- Si $0 < d < \frac{1}{2}$ le processus ARFIMA est à mémoire longue. Les autocorrélations sont positives et décroissent hyperboliquement vers 0, ainsi que la densité spectrale tend vers l'infini quand la fréquence tend vers 0. Dans ce cas on dit que le processus sous-jacent de la série étudiée est persistant.
- Si $d = 0$, le processus se réduit au processus ARMA usuel et ne présente aucune structure de longue dépendance.
- Si $-\frac{1}{2} < d < 0$, le processus est anti-persistant, (des phases de hausses ont tendance à être suivies par des phases de baisses).

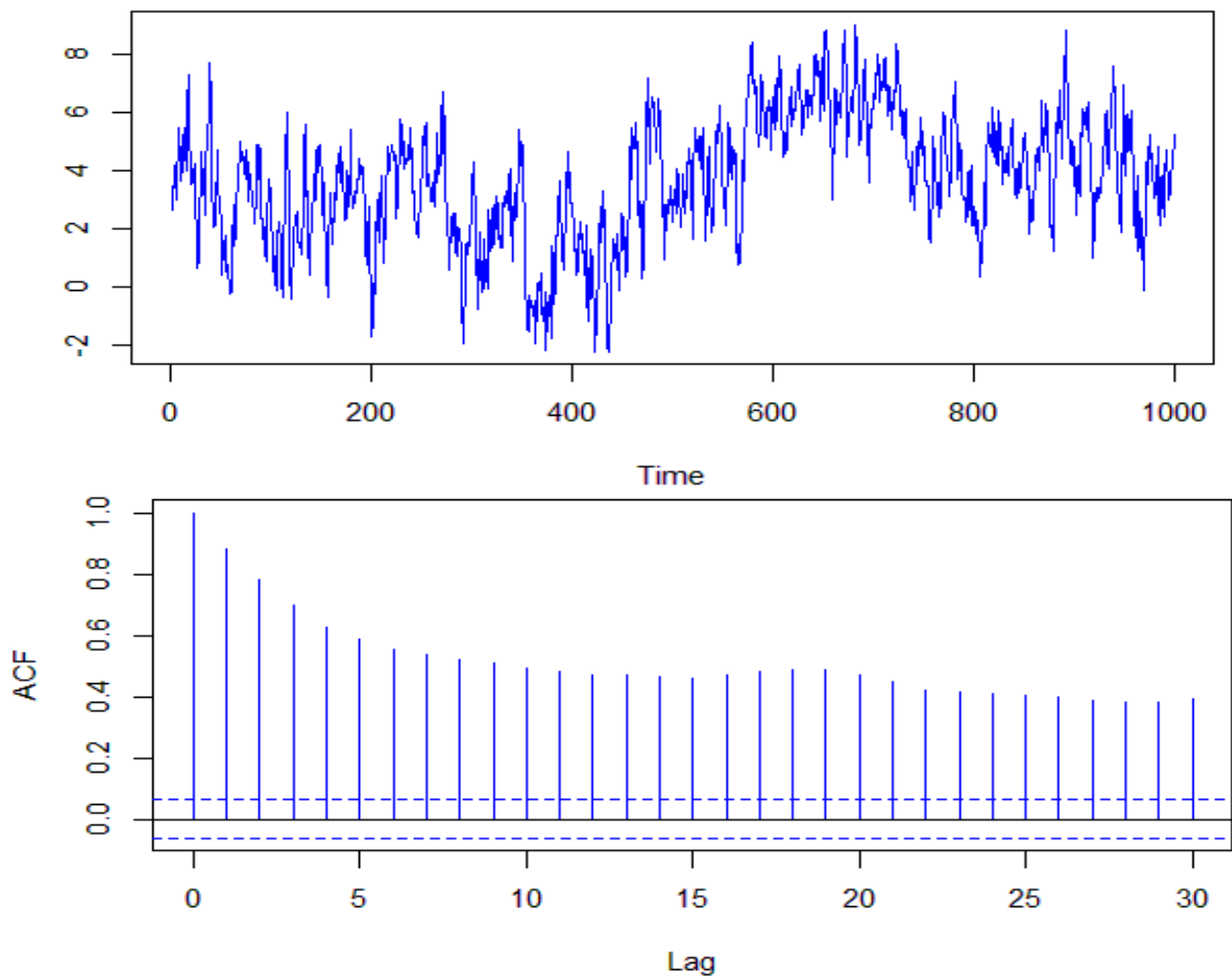
Exemples :

A titre d'illustration, on a simulé des exemples du modèle à mémoire longue ARFIMA(1,0.4,0) et ARFIMA(1,-0.4,0) :

Soit le modèle à mémoire longue suivant :

$$(1 - B)^{0.4}(1 + 0.5B)Y_t = \varepsilon_t \quad (1.15)$$

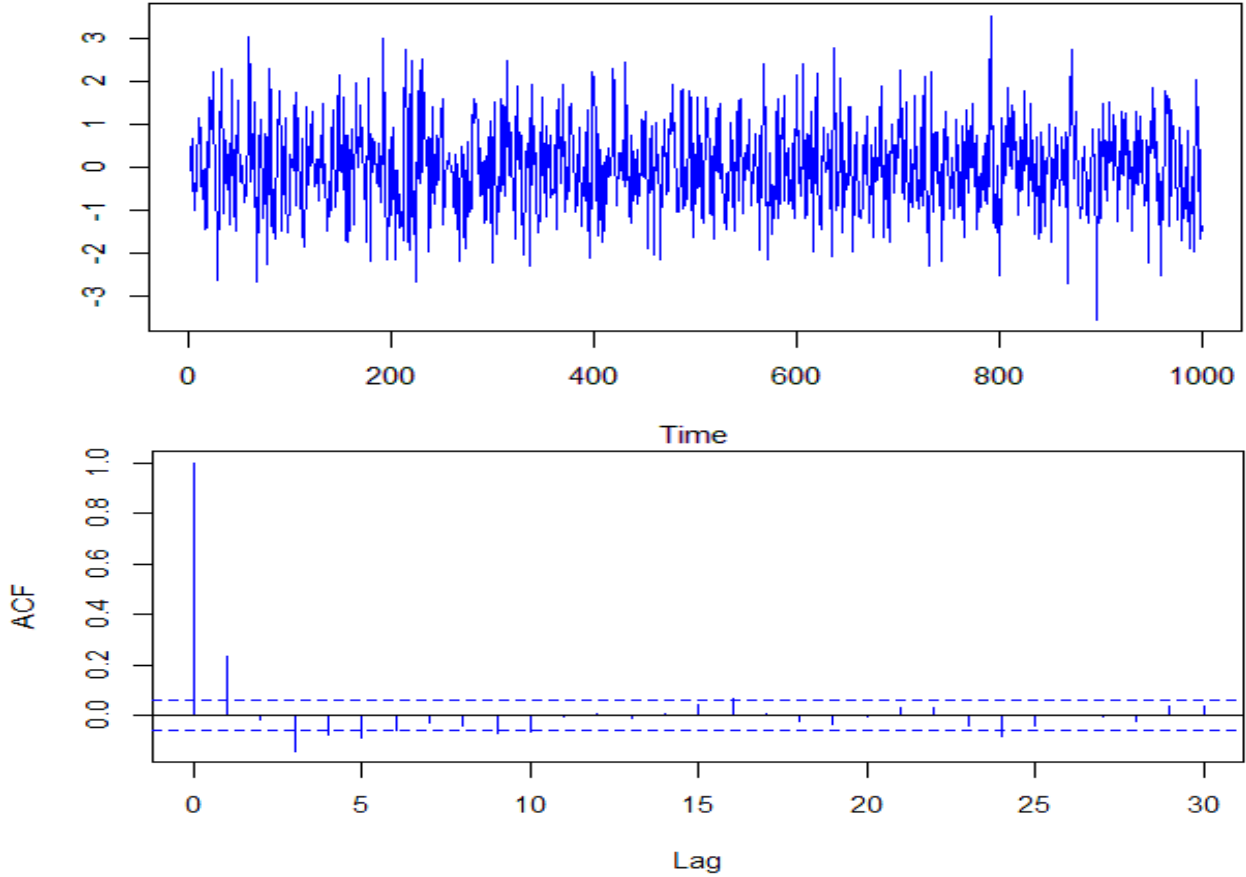
Figure 1.4 : Simulation d'un processus ARFIMA(1,0.4,0) : Chronique et ACF



Soit le processus à mémoire anti-persistant suivant :

$$(1 - B)^{-0.4}(1 + 0.5B)Y_t = \varepsilon_t \quad (1.16)$$

Figure 1.5 : Simulation d'un processus ARFIMA(1,-0.4,0) : chronique et ACF



On remarque d'après les figures (1.4) et (1.5) que tous les chroniques fluctuent autour de zéro, en plus le modèle ARFIMA(1,-0.4,0) fluctue plus rapidement que le modèle à mémoire longue ARFIMA(1,0.4,0). Ajoutons à ceci que les fonctions d'autocorrélations du modèle ARIMA décroissent d'une manière exponentielle, alors que celle du modèle ARFIMA à mémoire longue persiste et décroît lentement.

3-5- Bruit gaussien fractionnaire

Le processus $\{X_H = X_H(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ de paramètre H est un processus gaussien, centré et stationnaire, défini comme étant un cas particulier du processus ARFIMA.

Un bruit fractionnaire est défini comme suit :

$$(1 - B)^d Y_t = \varepsilon_t \quad (1.17)$$

Où ε_t est un bruit et où le paramètre fractionnaire d peut être non entier. Si $d=0$ alors Y_t est un bruit blanc.

Propriétés :

- 1) Le processus Y_t est stationnaire si $d < \frac{1}{2}$ et admet une représentation moyenne mobile d'ordre infini :

$$Y_t = (1 - B)^{-d} \varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i} \quad (1.18)$$

Où

$$\psi_i = \frac{(-d)(-d-1) \dots (-d-i+1)}{i!} (-1)^i, \quad i = 0, 1, \dots \quad (1.19)$$

Pour tout entier n on a :

$$\Gamma(d+n) = d(d+1) \dots (d+n-1)\Gamma(d)$$

D'où :

$$\psi_i = \frac{\Gamma(i+d)}{\Gamma(d)\Gamma(i+1)} \quad \text{et} \quad \psi_i = \frac{d+i-1}{i} \psi_{i-1}, \quad i \geq 0 \quad (1.20)$$

- 2) Le processus Y_t est inversible si $d > -\frac{1}{2}$, et on peut définir une représentation autorégressive d'ordre infini du processus bruit blanc fractionnaire par :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i Y_{t-i} = \varepsilon_t, \quad \text{où} \quad \pi_i = \frac{\Gamma(i-d)}{\Gamma(i+1)\Gamma(-d)}, \quad i \geq 0 \quad (1.21)$$

C'est le comportement de ψ_k et π_k au voisinage de l'infini qui nous intéresse. On utilise alors l'approximation de Stirling selon laquelle :

$$\frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k+b)} \sim k^{a-b} \quad (1.22)$$

et on en déduit que pour $d \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$,

$$\psi_k \sim \frac{k^{d-1}}{\Gamma(d)} \quad \text{et} \quad \pi_k \sim \frac{k^{-d-1}}{\Gamma(-d)}. \quad (1.23)$$

3) On peut conclure que le processus bruit blanc fractionnaire est stationnaire et inversible

si $-\frac{1}{2} < d < \frac{1}{2}$.

4) Fonction d'autocovariance :

$$\text{Pour } k \geq 0, \text{ on a : } \gamma(k) = E(Y_t Y_{t+k}) - E(Y_t)E(Y_{t+k}). \quad (1.24)$$

Le processus Y_t est de moyenne nulle d'où :

$$\begin{aligned} \gamma(k) &= E(Y_t Y_{t+k}) = E\left(\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}\right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t+k-j}\right) \\ &= \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+k} \\ &= \sigma^2 \frac{\Gamma(k+d)\Gamma(1-2d)}{\Gamma(k+1-d)\Gamma(1-d)\Gamma(d)} \end{aligned}$$

Et la fonction d'autocorrélation est donnée par :

$$\rho_k = \frac{\Gamma(k+d)\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)\Gamma(k+1-d)} \sim \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)} k^{2d-1}. \quad (1.25)$$

3-6- Processus ARFIMA et lien avec l'exposant de Hurst

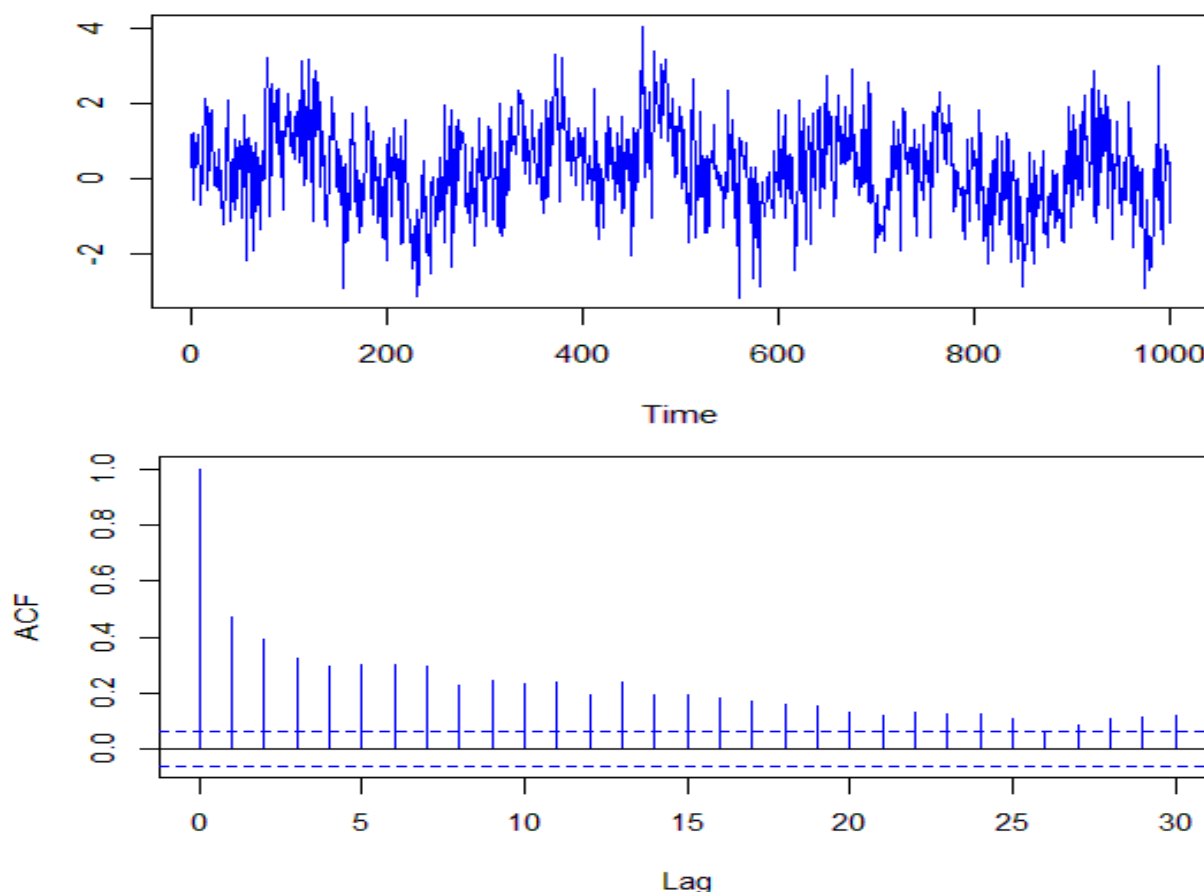
En comparant dans les expressions (1.11) et (1.25) la limite asymptotique des fonctions d'autocovariance des deux processus, on peut établir une relation entre le paramètre fractionnaire d du processus ARFIMA et le coefficient de Hurst. On remarque que la puissance de décroissance hyperbolique des deux fonctions sont identiques alors (voir Hosking (1981) [68] et Lo (1991) [83]). Par conséquent, en égalisant les deux exposants $2H - 2 = 2d - 1$ et on obtient :

$$H = d + \frac{1}{2} \quad (1.26)$$

Exemple :

On va simuler et présenter un exemple simple de chronique de longueur 1000 issues, satisfaisant le modèle de bruit blanc gaussien fractionnaire ARFIMA(0,0.3,0) :

Figure 1.6 : Simulation d'un processus ARFIMA (0,0.3,0) : Chronique et ACF



On observe dans le premier graphe de la figure 1.6 que la série présente des cycles de différentes périodes, bien qu'elle semble globalement être stationnaire.

On observe également dans le deuxième graphe, une décroissance lente de la fonction d'autocorrélation du processus.

3-7- La longue dépendance dans les séries chronologiques

Hurst [69] a inspiré Mandelbrot et van Ness [96] à introduire du bruit gaussien fractionnaire pour modéliser les phénomènes de mémoire longue. On observe une mémoire longue ou une dépendance à long terme dans les séries chronologiques financières contemporaines. De nombreuses études ont traité la question de la persistance des rendements des actifs financiers.

Une série chronologique présente une mémoire longue lorsqu'il existe une dépendance significative entre les observations séparées par une longue période de temps. Les caractéristiques d'une série temporelle de mémoire longue sont une fonction d'autocorrélation ρ_k qui décroît hyperboliquement jusqu'à zéro et une fonction de densité spectrale $f_X(\lambda)$ qui est illimitée au voisinage de la fréquence nulle. Ce trait est caractéristique de la présence de la mémoire longue dans la série chronologique traitée, en opposition à une décroissance rapide de type exponentiel, synonyme de mémoire courte. En termes simples, cela signifie qu'en présence d'une longue dépendance, l'information dans un jour j peut avoir un impact sur les données après six mois, alors qu'en présence de mémoire courte, l'impact disparaît parfaitement, généralement au plus une dizaine de jours.

3-8- Signification de l'exposant de Hurst et son apport dans l'estimation de la mémoire longue

Le paramètre de Hurst associé à un processus à mémoire longue a une histoire très riche. Hurst (1951) a été le premier à proposer une méthode pour détecter et estimer la dépendance à longue portée sous la forme de la statistique $(R/S)_n$ ⁵ (Rescaled Range) où n représente la taille de l'échantillon. En supposant que le processus générant les données empiriques est un processus à mémoire longue, cette méthode vise à déduire l'exposant H de la relation suivante :

$$\mathbb{E}[(R/S)_n] \sim C n^H \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.27)$$

où C est une constante positive indépendante de n . Cette analyse sera développée plus en détail dans le chapitre suivant.

Cette statistique a permis d'examiner la présence de la dépendance de long terme dans les séries chronologiques. Il est important de comprendre que cette méthode (R/S) ne fait aucune hypothèse préalable sur les distributions sous-jacentes, elle nous indique simplement comment le système évolue en fonction du temps. En outre, l'exposant de Hurst H décrit la forme globale de la fonction d'autocorrélation du processus. Alors, comment interprétons-nous l'exposant de Hurst ?

⁵ Le symbole R/S est utilisé pour représenter la statistique des étendues normalisées (Rescaled Range)

L'information fournie par l'exposant de Hurst permet de faire une classification sur la nature des séries temporelles.

En effet, si les observations sont générées à partir d'un processus dépendant à court terme, alors $H = \frac{1}{2}$. Dans ce cas il n'y a pas de dépendance à long terme et les séries chronologiques générées par un tel processus ne peuvent pas être prévues à partir des informations passées. Ceci est analogue au cas où les cours des actions suivent un mouvement brownien, avec des réalisations discrètes suivant un modèle de marche aléatoire.

Le cas $0 < H < 1/2$ indique une anti-persistance, où les observations passées et présentes sont corrélées négativement. Cela signifie que le comportement des observations suivantes contredit celui des observations précédentes, ce qui cause une tendance à se renverser vers la valeur moyenne. Ces séries chronologiques présentent le phénomène du 'retour à la moyenne' connu dans la littérature financière sous le nom de « mean-reversion ». La tendance devient significative lorsque H s'approche de zéro.

Lorsque $1/2 < H < 1$, le processus présente une autocorrélation positive et une dépendance à long terme. Ce qui entraîne que la série chronologique persistante, caractérisée par des corrélations positives. Théoriquement, ce qui se passe aujourd'hui aura finalement un effet durable sur l'avenir. Ceci était le cas de la série chronologique annuelle du débit de Nil dans le document original de Hurst où l'analyse R/S (Rescaled Range) a détecté un degré élevé de persistance dans cette série, avec un indice $H = 0,91$. De tel processus présentent un comportement de tendance. L'étude de mémoire longue et son utilisation en finance pour tester l'hypothèse de marche aléatoire des cours boursiers, prient source dans les initiatives de Mandelbrot lorsqu'il commença à s'intéresser à la statistique de Hurst.

4- Analyse par ondelette

Dans cette partie nous allons introduire la notion d'ondelettes et relater leurs applications à l'analyse statistique des séries temporelles. Les ondelettes fournissent un outil mathématique très intéressant pour répondre à certaines lacunes rencontrées dans l'analyse de Fourier classique.

4-1- De l'analyse de Fourier à l'analyse par ondelettes

L'analyse par ondelettes a été introduite il y a plusieurs décennies dans un contexte d'analyse du signal par J. Morlet dans les années 1980 [101], pour faire apparaître simultanément des informations temporelles et fréquentielles, contribuant à l'identification

des caractéristiques physiques de la source du signal. D'autres pionniers, apportés dans de nombreux domaines de recherche, ont utilisé eux aussi, des outils fort similaires aux petites ondes de Morlet.

Les ondelettes n'ont depuis lors cessé de se développer et de trouver de nouveaux domaines d'application dont tout récemment en statistique. Elles devinrent très rapidement un puissant outil d'analyse mathématique et de traitement du signal. C'est dans ce domaine, réservé jusque-là à l'analyse de Fourier, que les ondelettes ont connu un développement fulgurant et aussi de nombreuses applications.

L'analyse par ondelettes est caractérisée par l'utilisation d'ondelettes élémentaires : copies conformes d'une ondelette mère qui ne diffèrent que par leur taille, s'adaptent parfaitement bien et automatiquement à la forme et à la taille des caractéristiques qu'elles recherchent afin d'assurer une représentation temps-échelle du signal déterministe ou de réaliser un processus stochastique. Elle consiste à construire une ondelette de base ou ondelette mère de sorte que les ondelettes élémentaires déduites par des translations et des dilatations forment une base de l'espace $L^2(\mathbb{R})$ permettant de décomposer toute fonction ou signal de carré intégrable dans cette base (voir Abry & Vitch 1998 [5]). Cette procédure qualifiée de microscope mathématique porte le nom d'analyse multi-résolution.

4-2- Décomposition en ondelettes : analyse multi-résolution (AMR)

L'idée de l'analyse multirésolution d'un signal, qui a permis de construire une base (orthonormée) d'ondelettes consiste en fait à représenter un signal comme une limite de ses approximations successives, où chaque approximation est une version lissée de la précédente. Les approximations successives sont présentées à différentes résolutions d'où le nom de multirésolution. Une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ consiste en une suite $(V_j)_{(j \in \mathbb{Z})}$ de sous-espaces vectoriels fermés de $L^2(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t - 2^j k) \in V_j,$$

$$\forall j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j+1},$$

$$\forall j \in \mathbb{Z}, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right) \in V_{j+1},$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} V_j = \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\},$$

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = \overline{\left(\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j \right)} = L^2(\mathbb{R})$$

Il existe θ une fonction de V_0 appelée fonction d'échelle, telle que le système $\{\theta(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ soit une base orthonormale de V_0

Cette définition a pour conséquence qu'à chaque niveau de résolution j , la famille de fonction $\left\{ \theta_{j,k} : x \rightarrow 2^{\frac{j}{2}} \theta(2^j x - k) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée de l'espace V_j pour la norme L^2 . Comme θ appartient à V_0 qui est inclus dans V_1 , il en résulte que θ peut s'exprimer comme combinaison linéaire de $\{\theta_{1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Autrement dit, il existe une suite de réels $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ telle que :

$$\theta(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \theta(2x - n) \quad (1.28)$$

Dès lors, il est intéressant de savoir obtenir une fonction d'ondelette lorsqu'on a une AMR $\{V_j\}$ de $L^2(\mathbb{R})$ avec la fonction d'échelle θ . On procède de la manière suivante :

Soit W_j un sous espace de $L^2(\mathbb{R})$, On introduit alors les espaces de détails :

Passer d'une résolution j à une résolution $j + 1$ revient à ajouter des détails, compris dans l'espace W_j complémentaire de V_j dans V_{j+1} ; pour tout $j \in \mathbb{Z}$, W_j est défini par :

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad V_j \perp W_j \quad \forall j$$

Une conséquence immédiate de cette définition est que pour tout j appartenant à $\mathbb{Z}$, l'espace $L^2(\mathbb{R})$ vérifie :

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus \sum_{j \in \mathbb{Z}} W_j \quad (1.29)$$

Il existe une fonction ψ telle que $\{x \mapsto \psi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ soit une base orthonormée de W_0 . La fonction ψ est alors appelée ondelette. De même que précédemment, à tout niveau de résolution $j \in \mathbb{Z}$, la famille $\left\{ \psi_{j,k} : x \mapsto 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée de

l'espace W_j . De plus, de manière similaire, une relation à deux échelles peut être établie : comme W_0 est inclus dans V_1 , il existe une suite de réels $(g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi(x) = \sum_k g_k \psi(2x - k) \text{ (voir Wojtaszczyk 1997 [133])}.$$

Un exemple simple d'analyse multi-résolution est celle de l'ondelette de Haar, générée par la fonction d'échelle $\theta = \mathbb{I}_{[0,1]}$ et l'ondelette $\psi = \mathbb{I}_{[\frac{1}{2},1]} - \mathbb{I}_{[0,\frac{1}{2}]}$

Ayant définies les fonctions θ et ψ , nous définissons maintenant ce que nous appelons transformée en ondelette à temps discret et l'utilisons pour calculer les coefficients d'ondelettes et les coefficients d'échelle d'une série chronologique X .

4-3- L'application de la décomposition en ondelettes à l'analyse des séries temporelles : Estimation de dépendance de long terme

Considérons une séquence de valeurs réelles $X = \{X_k, k \in \mathbb{Z}\}$. Nous voulons construire un processus à temps continu à partir d'un processus à temps discret. En utilisant la fonction d'échelle θ , on commence par associer à la séquence X les fonctions continues suivantes :

$$X_n(t) = \sum_{k=1}^n X_k \theta(t - k), \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.30)$$

et

$$X(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X_k \theta(t - k), \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.31)$$

La définition de la fonction X_n n'exige que la connaissance des valeurs $X_1, \dots, X_n$; à l'opposé, la définition de la fonction X requiert la connaissance de toute la trajectoire du processus $\{X_k, k \in \mathbb{Z}\}$. Sans perte de généralité, nous supposons que les supports des fonctions d'échelle θ et d'ondelette ψ sont respectivement inclus dans $[-T, 0]$ et $[0, T]$ pour n'importe quel entier $T \geq 1$.

Ceci implique que $X_n(t) = X(t)$ pour tout $t \in [0, n - T + 1]$ et que les supports de $\theta_{j,k}$ et $\psi_{j,k}$ sont inclus dans les intervalles $[2^j k, 2^j(k + T)]$ et $[2^j k - T, 2^j k]$ respectivement.

Les coefficients d'ondelettes $d_X(j, k)$ appelés aussi coefficients de détail, (respectivement les coefficients d'échelles $e_X(j, k)$) à l'échelle j et en position k , en évaluant le produit

scalaire de la fonction $t \mapsto X(t)$ et des fonctions $t \mapsto \psi_{j,k}(t)$, (respectivement de la fonction $t \mapsto X(t)$ et des fonction $t \mapsto \theta_{j,k}(t)$), ont donnés par :

$$d_X(j, k) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \psi_{j,k}(t) dt \quad (1.32)$$

$$et e_X(j, k) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \theta_{j,k}(t) dt,$$

Remarquons que pour tout $j \geq 0$ et $k \in \mathbb{Z}$ on a:

$$d_X(j, k) = \int_{-\infty}^{\infty} X_n(t) \psi_{j,k}(t) dt \quad (1.33)$$

Quand $[2^j k, 2^j(k+T)] \subseteq [0, n-T+1]$, i.e. pour tout $(j, k) \in I_n$, où

$$I_n = \{(j, k): j \geq 0, 0 \leq k \leq n_j\},$$

avec $n_j = 2^{-j}(n-T+1) - T + 1$.

De même

$$e_X(j, k) = \int_{-\infty}^{\infty} X_n(t) \theta_{j,k}(t) dt \quad (1.34)$$

quand $[2^j k - T, 2^j k] \subseteq [0, n-T+1]$, i.e. pour tout $(j, k) \in I_m$, où

$$I_m = \{(j, k): j \geq 0, 0 \leq k \leq m_j\},$$

avec $m_j = 2^{-j}(n-T+1) - T + 1$.

En d'autres termes, I_n et I_m désignent l'ensemble des indices (j, k) pour lesquelles les coefficients d'ondelettes $d_X(j, k)$ et les coefficients d'échelle $e_X(j, k)$, dépendent uniquement des observations $X_1, \dots, X_n$. Si le nombre d'observations n augmente, ces coefficients restent inchangés et de nouveaux coefficients sont calculés. Par conséquent, la définition des coefficients d'ondelettes et d'échelle ne dépend pas du nombre d'observations disponibles.

Seul le nombre de coefficients effectivement calculables dépend du nombre d'observations. Ceci est un avantage par rapport à l'analyse de Fourier, où la définition des coefficients de Fourier discrets à une fréquence donnée, change quand le nombre d'observation augmente. Ainsi les coefficients $d_X(j, k)$ peuvent être évalués comme les réalisations d'un processus stochastique X , dont les propriétés peuvent être reliées à celles du processus. En particulier,

si le processus X a pour spectre $\Gamma_X(s)$, et l'ondelette mère $\psi_{0,0}(n)$ a pour spectre $\psi_{0,0}(s)$ on peut montrer que :

$$\mathbb{E}(|d_X(j, k)|^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_X(s) 2^j |\psi_0(2^j s)|^2 ds, \quad (1.35)$$

tel que $\mathbb{E}(|d_X(j, k)|^2)$ représente le moment d'ordre 2 du processus $\{d_X(j, k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ à j fixé. Si le processus possède une mémoire longue de paramètre H , alors le spectre diverge aux alentours de l'origine, et on peut montrer que (voir Abry & Vitch 1998 [5]) :

$$\forall j, \exists c > 0, \quad \mathbb{E}(|d_X(j, k)|^2) = c(2^j)^{2H} = c2^{(2jH)}, \quad (1.36)$$

Ce qui permet de comprendre comment le paramètre de mémoire longue peut être estimé. Ceci sera discuté en détail dans le chapitre suivant.

5- Conclusion

Nous avons dans ce chapitre, introduit les différentes notions mathématiques cruciales, que nous allons utiliser dans les chapitres suivants dans le cadre de l'estimation et l'interprétation de la longue dépendance dans de nombreuses séries temporelles. Il est nécessaire d'en tenir compte afin de faire une modélisation pertinente. On a présenté le concept de la longue dépendance ainsi que l'indice de Hurst, le paramètre crucial traduisant ce comportement. La signification et le rôle de ce paramètre dans l'estimation ont été aussi discutés.

Le problème de l'estimation du paramètre de mémoire longue est traité et discuté en détail dans le chapitre suivant.

CHAPITRE 2 : ESTIMATION DU PARAMÈTRE DE HURST⁶ ET MISE EN ÉVIDENCE DES MODÈLES ARFIMA

1- Introduction

2- Méthodologie

2-1- Méthodes d'estimation du paramètre de Hurst

2-1-1- Méthodes temporelles

2-1-1-1- L'analyse des étendues normalisées : R/S Analysis

2-1-1-2- La variance quadratique généralisée : GQV

2-1-1-3- Méthode des variances agrégées

2-1-1-4- Detrending Moving Average Algorithm: (DMA)

2-1-2- Méthodes spectrales

2-1-2-1- Méthode de Geweke et Porter-Hudak : (GPH log periodogramme Regression)

2-1-2-2- La variante de Lobato et Robinson

2-1-3- Méthode temps-échelle : Décomposition en ondelettes

2-1-4- Méthode géométrique basée sur la dimension fractale

2-2- Evaluation de la qualité des estimateurs

2-2-1- Critères de comparaison

2-2-1-1- Biais d'un estimateur

2-2-1-2- Variance d'un estimateur

2-2-1-3- Erreur quadratique moyenne

2-2-2- Etude par simulation

3- Application empirique sur des données réelles avec des historiques pratiquement longues

3-1- Données et analyse préliminaire

3-2- Elaboration des tests de stationnarité

3-3- Analyse de la mémoire longue par une modélisation ARFIMA

4- Conclusion

⁶ Une partie de ce chapitre a été publiée dans : El Wahli, I., Amar, A., Guennoun, Z., Laaroussi, Y. 2018. "Hurst Parameter Estimation Methods: Comparative Study and Application. *Journal of Applied Economic Sciences*, Volume XIII, Spring 2(56): 326-336."

1- Introduction

Après avoir illustré le concept de la dépendance à long terme et présenté dans un cadre théorique ses propriétés dans le chapitre précédent, il est nécessaire de souligner les façons dont elle peut être estimée. L'objet de la première partie de ce chapitre est d'estimer par différentes méthodes l'exposant de Hurst, paramètre principal qui caractérise les processus à mémoire longue. En effet, nous nous intéressons particulièrement dans un premier temps à l'estimation du coefficient de Hurst et nous exposerons et discuterons d'une manière détaillée une pléthore de méthodes visant à estimer ce paramètre. Ensuite, nous proposons une analyse comparative des méthodes d'estimation proposées que nous appliquons sur des données simulées. Les résultats empiriques montrent la pertinence de la méthode d'estimation par les ondelettes qui contribue à une meilleure estimation de H . Pour illustrer l'utilité de l'exposant de Hurst, et en s'appuyant sur l'estimation de ce paramètre par la méthode la plus performante, nous nous intéressons, dans la seconde partie, à analyser l'évolution des séries de taux de change marocain par rapport à l'Euro et au Dollar américain. L'objectif étant de déterminer si les séries de taux de change marocain sont caractérisées par la présence d'une structure de mémoire de long terme qui ouvre la voie à une modélisation fractionnaire via les modèles de type ARFIMA.

2- Méthodologie

Depuis les travaux originaux de Granger et Joyeux 1980[58] et Hosking 1981 [68], plusieurs méthodes d'estimation du paramètre de mémoire longue ont été développées. Dans un premier lieu, cette partie s'attèlera à donner un aperçu sur les différentes méthodes les plus couramment utilisées dans la littérature pour estimer le paramètre de mémoire longue H , locales et globales tant dans le domaine temporel que spectral.

2-1- Méthodes d'estimation du paramètre de Hurst

2-1-1- Méthodes temporelles

2-1-1-1- L'analyse des étendues normalisées : R/S Analysis

Initiée par l'hydrologue anglais Harold Edwin (Hurst 1951 [69]), puis utilisée et affinée par (Mandelbrot 1972 [92], 1975 [93]), (Mandelbrot & Taqqu 1979 [95]) et puis par (Lo 1991 [83]), l'analyse des étendues normalisées R/S (Rescaled Range Analysis) est certainement la méthode la plus célèbre de l'estimation de H . Son objectif fut la résolution du problème lié à la façon de contrôler l'écoulement de l'eau dans le Nil. Hurst a introduit une procédure qui consiste à estimer, pour un intervalle donné, le rapport entre l'étendue

R des sommes partielles des écarts d'une série à sa moyenne et l'écart-type S de la série originale.

La statistique R / S consiste à diviser l'étendue R des valeurs d'une série centrée et intégrée $Y(k) = \sum_{j=1}^k (X_j - \bar{X})$, $k = 1, \dots, n$ par l'écart type :

$$S = \left[\frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2}{n} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.1)$$

$$R = \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^k (X_j - \bar{X}) - \min_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^k (X_j - \bar{X}) \quad (2.2)$$

Soit :

$$Q = \frac{R}{S} = \frac{\max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^k (X_j - \bar{X}) - \min_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^k (X_j - \bar{X})}{\left[\frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2}{n} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.3)$$

Cependant, Hurst souligne que ce calcul ne doit pas être effectué une seule fois pour une série donnée, c'est-à-dire qu'il ne suffit pas de diviser l'étendue totale de cette série par son écart-type. Il est nécessaire de diviser la série en petites séries et, pour chacune de ces subdivisions, de calculer l'étendue et de la diviser par les écarts-types respectifs. Cela donnera une valeur de la statistique R / S pour chaque subdivision de la série. L'auteur a observé une relation entre la statistique R / S et la taille de l'échantillon, de sorte que la statistique R / S est égale au nombre d'observations élevé à un exposant, appelé exposant de Hurst :

$$\frac{R}{S} \sim n^H$$

Le calcul des statistiques R / S et de l'exposant de Hurst devrait suivre les étapes suivantes :

Soit X_t la série étudiée de taille n, on considère une série de subdivisions de taille τ , dont $\tau < n$; pour chaque subdivision la statistique R/S est calculée comme suit :

A- L'échantillon N est divisé en n blocs de τ éléments dont la moyenne est :

$$\bar{X}_\tau = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} X(t)$$

(2.4)

B- On calcule la statistique R/S pour chaque bloc τ :

- 1- On centralise les données, en leur soustrayant la moyenne locale. Puis on établit une série de valeurs cumulées à l'intérieur de chaque période ; on ajoute à chaque donnée la somme des valeurs centrées qui la précède :

$$X(t, \tau) = \sum_{k=1}^t (X(k) - \bar{X}_\tau)$$

- 2- On calcule ensuite l'étendue R qui est la différence entre le minimum et le maximum de $X(t, \tau)$:

$$R_\tau = \max_{1 \leq t \leq n} X(t, \tau) - \min_{1 \leq t \leq n} X(t, \tau) \quad (2.5)$$

- 3- On normalise ensuite cette étendue, tout en divisant par l'écart-type local et on obtient :

$$Q_\tau = (R/S)_\tau = \frac{\max_{1 \leq t \leq n} X(t, \tau) - \min_{1 \leq t \leq n} X(t, \tau)}{\left[\frac{\sum_{t=1}^{\tau} (X_t - \bar{X})^2}{\tau} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.6)$$

- 4- On obtient l'exposant de Hurst dans la relation :

$$(R/S)_\tau = a\tau^H \quad (2.7)$$

Où a est une constante positive.

On trace la droite $\log(Q_\tau) \sim \log(a) + H \log(\tau)$. La méthode des moindres carrés ordinaires nous donne alors une estimation des coefficients a et H ; le paramètre de Hurst

est $H \sim \frac{\log\left(\left(\frac{R}{S}\right)_\tau\right)}{\log(\tau)}$.

L'avantage de cette analyse est qu'elle permet d'obtenir un estimateur qui possède des bonnes propriétés de robustesse (voir Mandelbrot & Taqqu 1979 [80]). Cependant le premier problème, posé par cette méthode, est le choix de τ . On ne sait pas encore déterminer une valeur convenable de τ , qui puisse correspondre au comportement asymptotique de H . Un autre inconvénient majeur discuté par Davis et Harte 1987 [38] concerne la sensibilité à la dépendance de court terme et de plus, au niveau de la distribution théorique de la statistique R/S qui reste inconnue donc on ne peut pas la considérer comme un test.

La méthode de Lo : « R/S modifiée »

Pour apporter une solution à ces deux problèmes de la statistique R/S proposée par Hurst, Lo 1989 [83]) a suggéré une statistique "R/S modifiée". Sa distribution limite est invariante aux différentes formes des processus à mémoire courte. Cette technique permet de fournir un test dont l'hypothèse nulle est l'absence de dépendance de long terme. La statistique R/S modifiée de Lo, notée $\widetilde{Q}_n$, inclut non seulement l'écart-type de la série mais aussi les auto-covariances pondérées. Et elle est de la forme suivante :

$$\widetilde{Q}_n = \frac{R}{\hat{\sigma}_n(q)}, \quad (2.8)$$

où

$$\hat{\sigma}_n(q) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)^2 + 2/n \sum_{j=1}^q w_j(q) \left[\sum_{i=j+1}^n (X_i - \bar{X}_n)(X_{i-j} - \bar{X}_n) \right] \quad (2.9)$$

avec les poids $w_j(q) = 1 - \frac{j}{q+1}$, $q < n$, qui ont été proposés par Newey et West (1987) [23]⁷.

La distribution limite de la statistique R/S modifiée est connue et la statistique V définie par : $V = \frac{\widetilde{Q}_n}{\sqrt{n}}$ est convergente. Il est possible d'effectuer un test statistique dont l'hypothèse nulle est la mémoire courte et l'hypothèse alternative la mémoire longue, en se référant à la table de valeurs critiques suggérée par Lo 1991[83] (voir Mignon 1998 [99]).

Malheureusement la généralisation de Lo fait intervenir un paramètre supplémentaire q qui rend l'estimation de H très sensible (voir Teverovsky et al. 1999 [132]). De plus Lo & Mackinlay 1989 [84] et Andrews 1991 [9] ont prouvé par simulations que si q est relativement grand par rapport à la taille de l'échantillon, l'estimateur est biaisé. Par conséquent, pour notre étude nous avons seulement recours à la statistique R/S classique.

⁷ Andrews (1991) a proposé une règle pour le choix de q.

2-1-1-2- La variance quadratique généralisée : GQV

Soit la trajectoire observée d'un processus X à N temps régulièrement espacés $\frac{K}{N}$ pour $K = 0, \dots, N-1$, par convention nous supposons que N est pair. Comme l'indice de Hurst H peut évaluer la rugosité de la trajectoire d'un FBM, il est évident de le mesurer moyennant la variation quadratique (Bertrand et al. 2010 [20]) :

$$V_N^{(1)} = \sum_{K=0}^{N-1} \left(X\left(\frac{K+1}{N}\right) - X\left(\frac{K}{N}\right) \right)^2 \quad (2.10)$$

ce qui implique :

$$\mathbb{E} \left(\left| X\left(\frac{K+1}{N}\right) - X\left(\frac{K}{N}\right) \right|^2 \right) = C \times \left(\frac{1}{N}\right)^{2H} \quad (2.11)$$

La variation quadratique moyenne correspond à la variance empirique des incréments et tenant compte de la stationnarité des incréments, on peut déduire que $V_N^{(1)}$ est équivalent à $C \times \left(\frac{1}{N}\right)^{2H}$ quand N tend vers l'infini. L'estimateur $\hat{H}_N$ est défini par :

$$\hat{H}_N = \frac{1}{2} \left(1 + \log_2 \frac{V_N^{(1)}}{\frac{2}{V_N^{(1)}}} \right) \quad (2.12)$$

converge vers le paramètre H (voir Benassi et al. 1998 [17]).

En considérant la distribution limite des variations quadratiques, Guyon & Leon 1989 [62] ont prouvé qu'on peut distinguer deux cas :

1. $0 < H < \frac{3}{4}$, la variation quadratique satisfait le Théorème Centrale Limite (TCL) avec un taux de convergence $N^{-1/2}$.
2. $\frac{3}{4} < H < 1$, la variation quadratique ne satisfait plus le (TCL) et c'est un inconvénient majeur. C'est pour cette raison qu'elle a été remplacée par les variations quadratiques généralisées (voir Istas & Lang 1997 [71]) :

$$V_N^{(2)} = \sum_{K=1}^N \left| X\left(\frac{K+1}{N}\right) - 2X\left(\frac{K}{N}\right) + X\left(\frac{K-1}{N}\right) \right|^2 \quad (2.13)$$

qui satisfait (TCL) avec un taux de convergence $N^{-1/2}$.

2-1-1-3- Méthode des variances agrégées

La méthode des variances agrégées DE Willinger & Taqu 1999 [132] est une méthode simple qui permet d'estimer le paramètre de Hurst H en plusieurs étapes :

i) Pour m donné et sous certaines conditions, on divise la série d'origine

$$X = \{X_i, i \geq 1\} \text{ en } T/m \text{ sous séries, chacune étant de taille } m.$$

ii) Pour chaque sous série, on calcule $X^m(k)$ et $var(X^m(k))$ où :

$$X^m(k) = \frac{1}{m} \sum_{i=(k-1)m+1}^{km} X_i, \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, \frac{T}{m} \quad (2.14)$$

$$var(X^m(k)) = \frac{1}{T/m} \sum_{k=1}^{T/m} (X^m(k))^2 - \left(\frac{1}{T/m} \sum_{k=1}^{T/m} X^m(k) \right)^2 \quad (2.15)$$

iii) Enfin, d'après la relation asymptotique suivante : $var(X^m(k)) \sim c \cdot m^{2H-2}$

où c est une constante (Mignon 1998 [99]), on estime alors par les moindres carrés ordinaires la pente $b = 2H - 2$ dans le modèle (voir Beran 1994 [18]) :

$$\log(var(X^m(k))) \sim \log c + b \log(m) \quad (2.16)$$

Il est important de noter que m et T doivent être assez grands pour que la longueur de chaque sous-série et le nombre des sous-séries soient grands. Taqu et al. 1995 [127] ont suggéré de choisir les valeurs m de telle manière qu'elles soient équidistantes sur une échelle logarithmique, c'est-à-dire de choisir les valeurs $\{m_1, m_2, \dots\}$ de sorte que $\frac{m_{i+1}}{m_i} = \delta$, où δ est une constante qui dépend de la longueur de la série.

2-1-1-4- L'Algorithme (DMA): Detrending Moving Average Algorithm

L'algorithme DMA (Detrending Moving Average) a été largement utilisé dans la littérature pour caractériser les corrélations à longue portée des signaux et des ensembles aléatoires dans le temps ou dans l'espace [7], [11], [34]. Dans cette partie, nous allons mettre l'accent sur le fonctionnement de cet algorithme pour l'estimation de notre paramètre de mémoire longue, l'exposant H . Cependant, il convient de résumer les éléments de base pour cette analyse :

Etant donnée une série temporelle $\{X_t\}$ de taille N , l'ingrédient principal de l'analyse DMA est la variance σ_{DMA}^2 de la série $\{X_t\}$ définie par :

$$\sigma_{DMA}^2(n) = \frac{1}{N-n} \sum_{t=n}^N [X(t) - \tilde{X}_n(t)]^2 \quad (2.17)$$

où $X(t)$ la valeur de la série à la date t et $\tilde{X}_n(t)$ est défini comme une fonction moyenne mobile d'ordre n de $X(t)$ donnée par :

$$\tilde{X}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n X(t-k), \quad (2.18)$$

Pour obtenir une estimation de l'exposant de Hurst H , l'idée de base de cet algorithme est la suivante :

On va effectuer le calcul des moyennes mobiles $\tilde{X}_n(t)$ de la série X_t pour différentes valeurs de n , où $2 \leq n \leq N$. La valeur de σ_{DMA} est ainsi calculée pour tout $2 \leq n \leq N$. Ensuite, la valeur de σ_{DMA} correspondant à chaque $\tilde{X}_n(t)$, est tracée en fonction de n sur des axes log-log.

Or d'après la relation de dépendance en loi de puissance, pour les processus aléatoires de type mouvement brownien fractionnaire de paramètre H , on a $\sigma_{DMA} \sim n^H$, la courbe obtenue doit avoir une pente qui est égale à l'exposant H .

2-1-2- Méthodes spectrales

2-1-2-1- Méthode de Gewek et Porter-Hudak (GPH-Régression par le log périodogramme)

La méthode de régression (ci-après GPH), est une méthode très connue parmi celles appliquées dans le domaine fréquentiel tenant en compte de l'estimation de H . Elle s'appuie particulièrement sur le comportement du spectre autour de zéro voire qu'elle est basée sur le fait que la densité spectrale des séries temporelles à mémoire longue diverge au voisinage de 0.

Par définition la densité spectrale d'un processus X_t à mémoire longue de paramètre H est proportionnelle à $|\lambda|^{1-2H}$:

$$f_X(\lambda) \sim c|\lambda|^{1-2H} \text{ quand } \lambda \rightarrow 0 \quad (2.19)$$

où $\lambda \in (-\pi, \pi)$ et c une constante positive.

Rappelons que le périodogramme pour la fréquence λ d'une série temporelle

$\{X_t, t = 1, \dots, T\}$ est défini par l'expression : $I(\lambda) = |TF_X|^2$, $|TF_X|$ étant la transformée de Fourier discrète, qui est définie par :

$$TF_X(\lambda) = (2\pi T)^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^T X_t e^{-it\lambda} \quad (2.20)$$

D'où :

$$I(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} \left| \sum_{t=1}^T X_t e^{-it\lambda} \right|^2 \quad (2.21)$$

Le périodogramme est un estimateur asymptotiquement sans biais de la densité spectrale pour tout $\lambda \neq 0$ i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[I(\lambda)] = f(\lambda)$ (voir Brossier 2006 [33]).

La méthode GPH consiste à effectuer une régression du logarithme du périodogramme aux harmoniques $\lambda_t = \frac{2\pi}{T}, t = 1, \dots, \frac{T}{2}$, autour des basses fréquences, donc d'après (2.19) le périodogramme doit être proportionnel à $|\lambda|^{1-2H}$, de ce fait cette régression a pour coefficient de régression égale à $1 - 2H$.

2-1-2-2- La variante de Labato et Robinson

En notant $F(\lambda) = \int_0^\lambda f(\theta)d\theta$, où f désigne la densité spectrale.

Soit $q \in]0,1[$, on obtient, $\frac{F(q\lambda)}{F(\lambda)} \sim q^{2-2H}$ quand $|\lambda| \rightarrow 0$. En estimant $F(\lambda)$ par :

$$\hat{F}(\lambda) = \frac{2\pi}{n} \sum_{j=1}^{\lfloor n\lambda/2\pi \rfloor} I(\lambda_j), \quad (2.23)$$

où $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière de t .

En supposant que $\frac{1}{m} + \frac{m}{n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ pour une séquence de valeurs entières

$m = m_n$, Robinson (1995) [116] a montré que $\frac{\hat{F}(\lambda_m)}{F(\lambda_m)} \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow \infty$ et proposé l'estimateur suivant pour H :

$$\hat{H}_n(q) = 1 - \frac{1}{2 \log(q)} \log \left\{ \frac{\hat{F}(q\lambda_m)}{\hat{F}(\lambda_m)} \right\}. \quad (2.24)$$

Pour $1/2 < H < 3/4$, Lobato and Robinson (1996) ont présenté une valeur optimale pour q via des simulations. Notons que si l'on choisit m comme précédemment, on peut obtenir la convergence asymptotique suivante :

$$m^{\frac{1}{2}}(\hat{H}_q - H) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{(1+q^{-1}-2q^{1-2H})(1-H)^2}{(\log q)^2 (3-4H)}\right) \text{ quand } n \rightarrow \infty \text{ (voir Coeurjolly 2000 [36])}^8.$$

2-1-3- Méthode temps-échelle : Décomposition en ondelettes

Soit $\{\psi_{j,k}(t) = 2^{-j}\psi(2^{-j}t - k), j = 1, 2, \dots, J, k \in \mathbb{Z}\}$ la famille d'ondelettes générées à partir d'une ondelette mère ψ , associée à une fonction d'échelle φ et soient $d_X(j, k)$ les coefficients de la décomposition du processus en ondelettes donnés par :

$$d_X(j, k) = \langle X(t), \psi_{j,k}(t) \rangle = 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) \psi(2^{-j}t - k) dt \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (2.25)$$

L'ondelette mère ψ doit satisfaire la condition suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$$

⁸ On pourra se reporter à Robinson 1995 [116] et Labato & Robinson 1996 [85] pour plus de détails et d'approfondissements.

Alors pour une résolution donnée 2^J , on a :

$$X(t) = \sum_{j=-\infty}^{j=J} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \varphi_{j,k} \quad (2.26)$$

$$X(t) = \sum_{j=-\infty}^{j=J} 2^{-\frac{j}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_X(j, k) \psi(2^{-j}t - k) + 2^{-\frac{j}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_X(j, k) \varphi(2^{-j}t - k), \quad (2.27)$$

avec $c_X(j, k) = 2^{-\frac{j}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) \varphi(2^{-j}t - k) dt \quad j, k \in \mathbb{Z}.$ (2.28)

Une raison qui explique l'utilisation de la décomposition en ondelettes pour l'identification du mouvement brownien fractionnaire (voir Coeurjolly 2000 [36]), est l'autosimilarité des coefficients d'ondelettes : l'autosimilarité du Mouvement brownien fractionnaire garantit que la variance des coefficients d'ondelettes peut être écrite sous la forme suivante (Flandrin 1992 [54]) :

$$\text{var}(d_X(j, k)) = \frac{\sigma^2}{2} V_\varphi(H) (2^j)^{2H+1}, \quad (2.29)$$

où $V_\varphi(H)$ est une constante qui dépend du choix de l'ondelette et du paramètre H , elle est définie par :

$$V_\varphi(H) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_\varphi(\tau) |\tau|^{2H} d\tau, \quad (2.30)$$

tel que : $\gamma_\varphi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) \psi(t - \tau) dt.$

Ainsi, on remarque la linéarité en H de $\log_2(\text{var}(d_X(j, k)))$.

L'équation suivante représente l'estimation de l'exposant de Hurst en utilisant la décomposition en ondelettes :

$$\log_2(\text{var}(d_X(j, k))) = j(2H + 1) + \text{constante}. \quad (2.31)$$

Il suffit alors d'estimer $\text{var}(d_X(j, k))$ en utilisant le moment empirique d'ordre 2 :

$$\mu_j = 2^{-j} \sum_{k=0}^{2j-1} d_X(j, k)^2. \quad (2.32)$$

Ensuite déduire un estimateur de H en régressant $\{\log_2(\text{var}(d_X(j, k)))\}_{j_1 \leq j \leq j_2}$ sur $\{j\}_{j_1 \leq j \leq j_2}$, où $[j_1, j_2]$ représente la gamme de résolutions utilisées (voir Coeurjolly 2000 [36] et Veitch & Abry 1999 [130]).

2-1-4- Méthode géométrique basée sur la dimension fractale

Parallèlement aux méthodes précédemment exposées, une procédure alternative consiste à utiliser un concept issu du domaine déterministe c'est la dimension fractale (cf. Annexe). En effet, la trajectoire temporelle d'un processus auto-affine de paramètre d'auto-affinité H a une dimension fractale D donnée par $D=2-H$ (voir Mandelbrot 1985 [94], Peitgen & Saupe 1988 [110] et Abraham-Frois et al., 1996 [6]). De ce fait, l'estimation de la dimension fractale d'un tel processus permet la déduction de H . De façon similaire à la méthode des variances agrégées énoncée auparavant, Higuchi 1988 [67] a développé une méthode permettant le calcul de la dimension fractale D . Elle consiste à calculer, pour une série à mémoire longue $\{X_t, t = 1, \dots, T\}$, les sommes partielles

$$Y_j = \sum_{i=1}^j X_i \quad j = 1, \dots, n,$$

et à déterminer la quantité :

$$L(m) = \frac{T-1}{m^3} \sum_{i=1}^m \left\lfloor \frac{m}{T-i} \right\rfloor \sum_{k=1}^{\lfloor (T-i)/m \rfloor} |Y(i+km) - Y(i+(k-1)m)|, \quad (2.33)$$

où m est la longueur d'une sous-série et $\lfloor x \rfloor$ dénote la partie entière de x . La longueur $L(m)$ est ainsi proportionnelle à $c \cdot m^{-D}$ (Higuchi 1988 [67]) où c est une constante et D est la dimension fractale de la trajectoire temporelle d'un processus de paramètre d'auto-affinité H : $D = 2 - H$. Par conséquent, si $\log(L(m))$ est tracé par rapport à $\log(m)$, la droite résultante aura une pente $D = 2 - H$ et qui peut être estimée par exemple par la régression des moindres carrées.

Cette méthode laisse également une question ouverte quant à la meilleure valeur de m . (Higuchi 1988 [67]) a utilisé des valeurs de $m = 1, 2, 3, 4$ et $m = \lfloor 2^{(j-1)/4} \rfloor, j = 11, 12, 13, \dots$, pour $m > 4$; mais la motivation derrière ces choix de m n'est pas claire.

2-2- Evaluation de la qualité des estimateurs

L'estimation du paramètre de Hurst, la caractéristique principale de dépendance à long terme des processus stochastiques, s'avère nécessaire. Ainsi, plusieurs procédures sont proposées pour estimer la valeur la plus exacte de H . L'objectif de cette partie est de mener une analyse comparative de cinq estimateurs de H par les méthodes précédemment détaillées, ceux les plus utilisées : la méthode R/S, l'algorithme DMA, la variance quadratique généralisée (GQV), le log-périodogramme (GPH) et la méthode basée sur les ondelettes. Ainsi, pour évaluer expérimentalement la qualité des différents estimateurs, on doit les appliquer à des processus stochastiques auto-similaires de valeur de H connue. Pour ce faire, nous avons synthétisé des mouvements Brownien fractionnaires (notés FBM), en utilisant la méthode suggérée par Abry & Sellan, 1996 [3]. Cette méthode est basée sur le fait qu'un FBM est dérivé par intégration fractionnaire d'un bruit blanc gaussien ; l'idée est alors de partir de la décomposition d'un bruit blanc sur une analyse multi-résolution. Ainsi, ils ont montré que cette méthode de synthèse du FBM assure, par construction, les propriétés théoriques d'un mouvement Brownien fractionnaire (gaussianité, autosimilarité, corrélation, etc.). En outre, l'analyse multi-résolution qui sous-tend cette technique aboutit à un algorithme d'application rapide et efficace.

2-2-1- Critères de comparaison

Afin d'évaluer la qualité des estimations résultantes pour chacune des méthodes considérées, on utilise alors différentes statistiques telles que le biais, la variance et l'erreur quadratique moyenne.

2-2-1-1- Biais d'un estimateur

On appelle biais d'un estimateur $\hat{H}$ d'un paramètre H , la différence entre sa valeur moyenne et la vraie valeur que l'on veut estimer :

$$B_{\hat{H}} = \mathbb{E}(\hat{H}) - H \quad (2.34)$$

On dit que l'estimateur $\hat{H}$ de H est sans biais (ou non biaisé) si et seulement si son biais est nul.

2-2-1-2- Variance d'un estimateur

La variance d'un estimateur $\hat{H}$ d'un paramètre H mesure la fluctuation aléatoire de H autour de sa moyenne.

$$Var_{\hat{H}} = \mathbb{E}(\hat{H}^2) - (\mathbb{E}(\hat{H}))^2 \quad (2.35)$$

2-2-1-3- Erreur quadratique moyenne

$$EQ_{\hat{H}} = \sqrt{Var(\hat{H}) + B^2_{\hat{H}}} . \quad (2.36)$$

L'évolution de ces statistiques en fonction des tailles nous permet de mesurer la performance des estimateurs mis en jeu, en particulier s'ils ont tendance à sur- ou sous-estimer le paramètre de long mémoire H .

2-2-2- Etude par simulation

Les estimateurs de H considérés dans cette partie ont issus de trois classes principales de techniques d'estimation de H : les techniques basées sur l'analyse des données dans le domaine temporel, celles basées sur l'analyse des données dans le domaine fréquentiel et les techniques basées sur les transformées en ondelettes. Pour déterminer l'efficacité de chaque méthode indépendamment des caractéristiques de la série générée, nous essayons de balayer plusieurs combinaisons possibles des valeurs que peut prendre H et celles de la taille de la série. D'abord, nous simulons 30 signaux tests, pour chaque valeur de l'exposant de Hurst allant de 0.1 à 0.9 avec un pas de 0.1, et pour chaque taille allant de 500 à 10000 avec un pas de 150. Ensuite, nous calculons pour chaque série temporelle générée les estimations de H en utilisant les méthodes suivantes : la méthode des étendues normalisées (R/S), la méthode DMA, La variance quadratique généralisée (GQV), le log-périodogramme (GPH) et la méthode basée sur les ondelettes. Enfin, nous comparons les caractéristiques statistiques de chaque estimateur à savoir le biais et la variance (Amar et al. 2016 [8]).

Les résultats de notre simulation (voir annexe B) donnent les biais et les variances des différents estimateurs de l'exposant de Hurst d'un fBm synthétique dont la taille de la série est relativement petite. On remarque clairement que l'estimation donnée par la méthode basée sur les ondelettes, l'estimateur GQV et la méthode DMA donnent de bons résultats pour cette classe. C'est à dire que ces trois estimateurs ont les biais et les variances les plus

faibles par rapport aux autres estimateurs, alors que ceux obtenus par la méthode R/S et la méthode GPH sont les plus biaisés.

Pour des séries variantes de 2900 à 5150 observations, on remarque toujours que la méthode GQV et celle basée sur les ondelettes donnent toujours les meilleurs résultats et ce pour toutes les valeurs de H . La méthode DMA fournit aussi un bon estimateur pour les séries à mémoires courtes, i.e. dont les valeurs de l'exposant de Hurst sont inférieures à 0.5. Ces trois estimateurs ont aussi une faible variance, ce qui confirme leurs performances. Toutefois, l'estimation de H par la méthode GPH donne de mauvais résultats, avec un biais moyen 0.55, qui reste un peu grand vu que H est compris entre 0 et 1.

Les résultats se confirment pour les séries dont la taille varie entre [5300 ; 7750] observations et même pour [7700 ; 9950] observations. Ainsi, on remarque que l'estimateur basé sur l'analyse multi résolution (la méthode basée sur les ondelettes) et la méthode GQV sont les meilleures. Les deux méthodes fournissent des estimateurs dont les valeurs du biais et la variance sont minimales. Cependant, la méthode R/S est celle qui donne l'estimation la moins précise (ANNEXE B).

En calculant l'erreur quadratique moyenne pour toutes les tailles des séries simulées, le tableau suivant confirme l'avantage que prennent les deux méthodes GQV et la méthode basée sur l'analyse en ondelettes par rapport aux autres méthodes estimant le paramètre de Hurst.

Tableau 2.1 : Erreur quadratique moyenne des estimateurs

H	Ondelette	DMA	R/S	GPH	GQV
0.2	0.0018	0.0021172	0.8505	0.2975276	0.0019
0.3	0.00057	0.0029137	0.7308	0.3130112	0.0059
0.4	0.00028	0.0035495	0.6441	0.3968198	0.0029
0.5	0.00020	0.0043575	0.5106	0.5446546	0.0019
0.6	0.00022	0.0044292	0.4215	0.5300844	0.0018
0.7	0.00027	0.0053388	0.3128	0.3821193	0.0019
0.8	0.0003	0.0053033	0.2746	0.3300534	0.0002
0.9	0.0003	0.0089149	0.2484	0.2701849	0.0002

Pour l'estimation des différents paramètres, l'erreur quadratique moyenne est dominée par la variance, ce qui montre que les estimateurs utilisés ne sont pas biaisés.

Résultats :

En conclusion, nos considérations analytiques et nos simulations numériques montrent que l'estimateur obtenu par la méthode des ondelettes et celui fourni par la méthode des variations quadratiques généralisées (GQV) donnent systématiquement des estimations plus exactes pour H, pour différentes tailles des séries avec un exposant de Hurst variant entre 0.2 et 0.9.

Puisque le biais et la variance tendent vers 0 à mesure que la taille augmente, l'estimation est bonne, et il n'y a pas de biais d'estimation.

Néanmoins, même pour H proche de 1, le biais et la variance de l'estimation restent relativement faibles pour les séries assez longues.

Par conséquent, en se basant sur les résultats de notre simulation et les travaux de Bertrand et al. 2010 [20] dont l'objectif était de comparer les performances de plusieurs estimateurs de l'indice de Hurst pour le mouvement Brownien fractionnaire, à savoir l'estimateur des Variations Quadratiques Généralisées, l'estimateur d'ondelette et l'estimateur de log-régression des GQV et qui ont montré que l'estimateur d'ondelettes fournit des résultats numériques plus exacts que ceux obtenus par GQV. Nous allons choisir pour notre analyse la méthode des ondelettes pour calculer l'exposant de Hurst H.

3- Application empirique sur des données réelles avec des historiques pratiquement longues

3-1- Données et analyse préliminaire :

La base de données considérée dans notre partie application examine l'évolution quotidienne de deux séries importantes qui ont un impact significatif sur l'économie marocaine. Il s'agit des séries de valeurs de clôture du taux de change marocain (MAD) vis-à-vis de l'Euro et du Dollar américain couvrant la période du 14 Décembre 2000 au 14 Décembre 2017 sur un total de 6210 observations pour chaque série. Elles proviennent de la plateforme (www.oanda.com) et (www.finance.yahoo.com).

Le taux de change a été l'un des domaines de recherche économique les plus actifs au cours des dernières années. Il occupe une position centrale dans la politique monétaire d'un pays, et il est défini comme étant le cours ou le prix de la monnaie d'un pays exprimé par rapport à celle d'un autre pays. On distingue entre le taux de change nominal et le taux de change réel.

Le taux de change nominal qui indique le nombre d'unités monétaires d'un certain pays que l'on peut obtenir en échange d'une unité de monnaie d'un autre pays. Il est utilisé comme indicateur de prix relatif entre pays qui indique le prix qui garantit à moyen terme la réalisation simultanée de l'équilibre interne et de l'équilibre externe (voir Borowski et al. 1998 [26]). Néanmoins le taux de change nominal ne tient pas compte des différences de pouvoir d'achat qui existent entre les monnaies. L'entreprise, qui achète une monnaie étrangère s'intéresse à ce qu'elle peut acheter avec cette dernière. Est-il plus propice de payer en dollars ou en euros, par exemple ? C'est ici qu'intervient le Taux de change réel. Ce taux permet en effet de comparer la valeur des biens d'un certain pays par rapport à ceux d'un autre pays, d'un groupe de pays, ou du reste du monde, en fonction du taux de change nominal en vigueur. Il est calculé en multipliant le taux de change nominal par le ratio des prix entre les deux pays.

La dynamique du taux de change, considéré comme un indicateur macroéconomique clé, est entièrement déterminée par un large éventail de facteurs économiques, financiers, politiques et sociaux. Ce fait n'a pas été sans effet sur la stabilité du système bancaire, les prix et la compétitivité. Pour atteindre ces objectifs, les autorités monétaires peuvent adopter divers régimes de taux de change. Le Maroc, par exemple, utilise un taux fixe depuis le 25 avril 2001. Il a adopté le principe de l'ancrage du Dirham par rapport à un

panier monétaire constitué uniquement des devises des principaux partenaires économiques l'Euro et le Dollar avec des pondérations respectives de 80% et 20% en donnant plus d'importance à l'Euro au détriment du Dollar afin de mieux refléter l'ancrage du pays à la Zone Euro. Autrement dit, l'affaiblissement de la compétitivité-prix et l'augmentation du service de la dette extérieure ont conduit les autorités à réajuster les pondérations des devises de référence (Esmak 2016 [47]). En 2014, un réaménagement du panier a été opéré, limitant sa combinaison à l'euro et au dollar américain avec des pondérations respectives de 60% et 40%. L'objectif était d'atténuer la fluctuation de la monnaie nationale à l'égard de la monnaie de son premier partenaire commercial l'Union européenne. Ce régime arrive à préserver la stabilité du taux de change nominal du Dirham, il lui a même permis d'améliorer sa position vis-à-vis des devises qui composent son panier d'ancrage. Au moment où le taux MAD/EUR est resté globalement stable, le Dirham s'est considérablement apprécié face au dollar (figure 1).

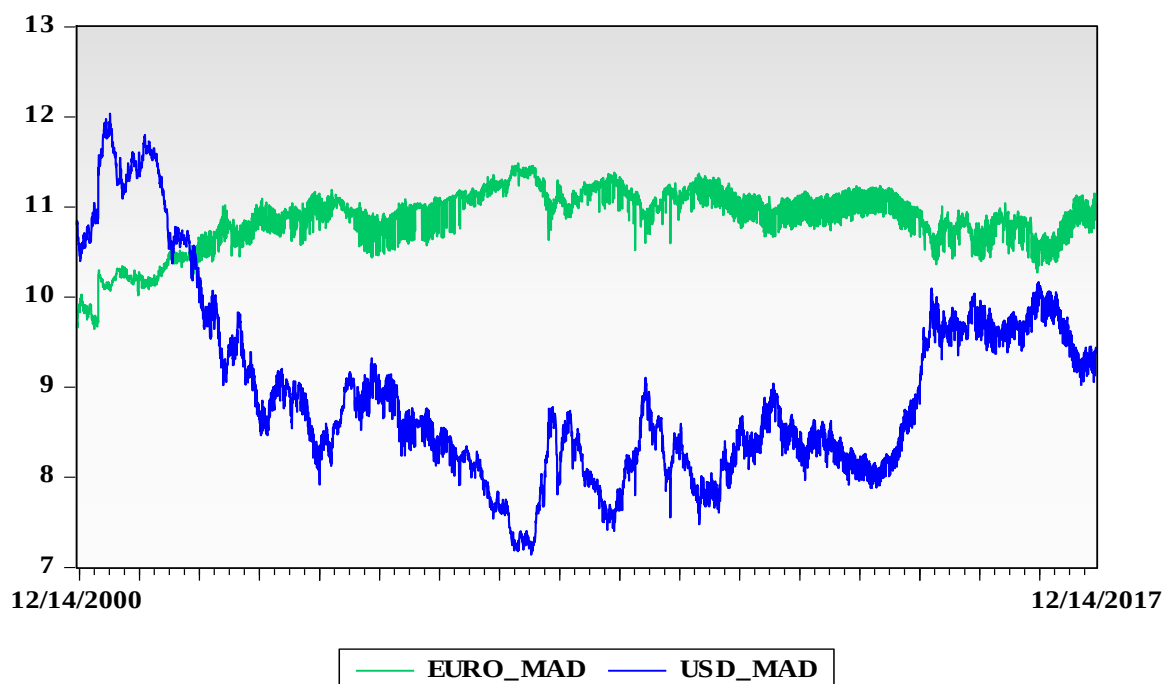
Par conséquent, l'étude du comportement des taux de change semble être d'une grande importance. À cet égard, de nombreux chercheurs ont essayé d'ajuster plusieurs modèles, parmi lesquels nous trouvons le mouvement brownien fractionnaire (FBM), qui nécessite l'estimation de l'exposant de Hurst, le paramètre crucial pour tester l'existence de la mémoire longue.

La présence de la mémoire longue dans les taux de change a été documentée dans de nombreux articles, par exemple [21], [34], [53] et [131]. Beaucoup d'efforts ont été déployés en termes de problème de l'estimation lors de l'étude de la propriété de la mémoire longue sur des séries de données réelles non stationnaires.

Par conséquent, dans cette contribution, notre objectif est d'estimer l'exposant de Hurst afin de déterminer si les séries de taux de change marocain sont caractérisées par une mémoire de long terme.

L'examen visuel de la figure 1 montre que les deux chroniques ont connu une multitude de tendances haussières que baissières au cours de la période d'étude. D'ailleurs, le comportement du Dirham vis-à-vis du Dollar est caractérisé par une tendance assez volatile contrairement à celui du Dirham par rapport à l'Euro, qui reste relativement stable.

Figure 2.1 : Évolution journalière des séries de taux de change (Euro/MAD) et (USD/MAD)



Une simple lecture du corrélogramme, nous permet de remarquer que presque tous les pics sont pratiquement à l'extérieur de l'intervalle de confiance et diminuent très lentement, le corrélogramme partiel est marqué par la présence des pics sortant au retard 1, d'où les deux séries sont donc générées par un processus non stationnaire.

Figure 2.2 : Corrélogramme des séries du taux de change USD/MAD et EURO/MAD

Sample: 12/14/2000 12/14/2017
Included observations: 6210

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.995	0.995	6156.0	0.000
		2	0.992	0.151	12274.	0.000
		3	0.991	0.222	18375.	0.000
		4	0.990	0.125	24465.	0.000
		5	0.989	0.148	30551.	0.000
		6	0.990	0.216	36645.	0.000
		7	0.991	0.156	42748.	0.000
		8	0.988	-0.235	48822.	0.000
		9	0.986	-0.099	54865.	0.000
		10	0.984	-0.008	60892.	0.000
		11	0.983	0.031	66909.	0.000
		12	0.983	0.042	72922.	0.000
		13	0.984	0.122	78945.	0.000
		14	0.984	0.070	84973.	0.000
		15	0.982	-0.150	90974.	0.000
		16	0.979	-0.059	96946.	0.000
		17	0.978	-0.004	102902.	0.000
		18	0.977	-0.000	108848.	0.000
		19	0.976	0.015	114788.	0.000
		20	0.977	0.081	120737.	0.000
		21	0.977	0.067	126692.	0.000
		22	0.975	-0.118	132619.	0.000
		23	0.973	-0.039	138518.	0.000
		24	0.971	-0.003	144401.	0.000

Corrélogramme de la série USD/MAD

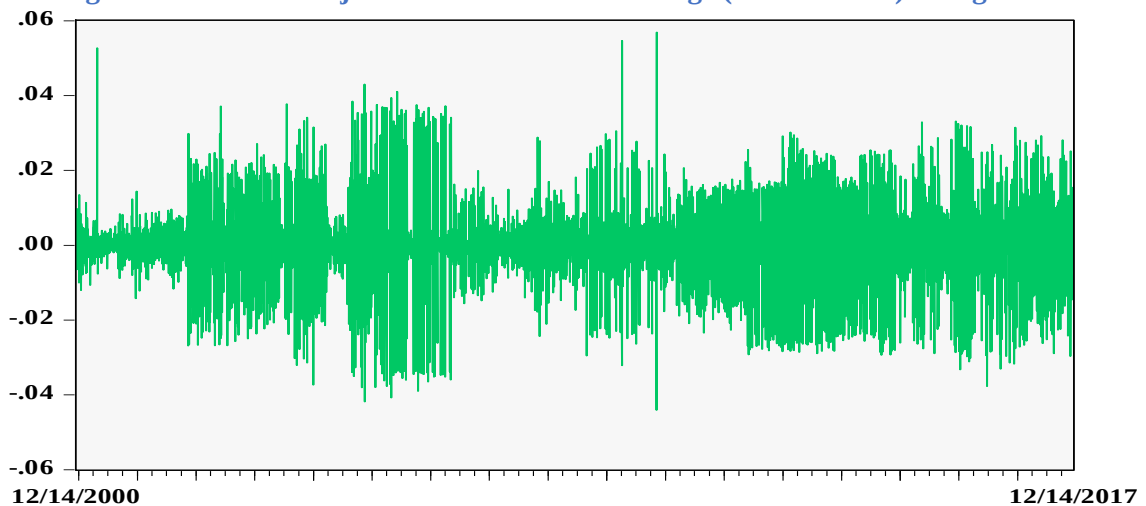
Sample: 12/14/2000 12/14/2017
Included observations: 6210

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1 0.946	0.946	5564.7	0.000
		2 0.914	0.177	10757.	0.000
		3 0.906	0.259	15855.	0.000
		4 0.903	0.177	20925.	0.000
		5 0.907	0.209	26038.	0.000
		6 0.925	0.335	31363.	0.000
		7 0.944	0.346	36909.	0.000
		8 0.923	-0.098	42205.	0.000
		9 0.899	-0.073	47234.	0.000
		10 0.890	-0.025	52167.	0.000
		11 0.890	0.017	57096.	0.000
		12 0.895	0.036	62078.	0.000
		13 0.913	0.136	67264.	0.000
		14 0.928	0.150	72632.	0.000
		15 0.909	-0.085	77775.	0.000
		16 0.887	-0.049	82676.	0.000
		17 0.879	-0.012	87494.	0.000
		18 0.878	-0.020	92295.	0.000
		19 0.882	-0.001	97143.	0.000
		20 0.900	0.083	102190.	0.000
		21 0.916	0.116	107416.	0.000
		22 0.896	-0.084	112420.	0.000
		23 0.875	-0.037	117191.	0.000
		24 0.867	-0.019	121882.	0.000

Corrélogramme de la série EURO/MAD

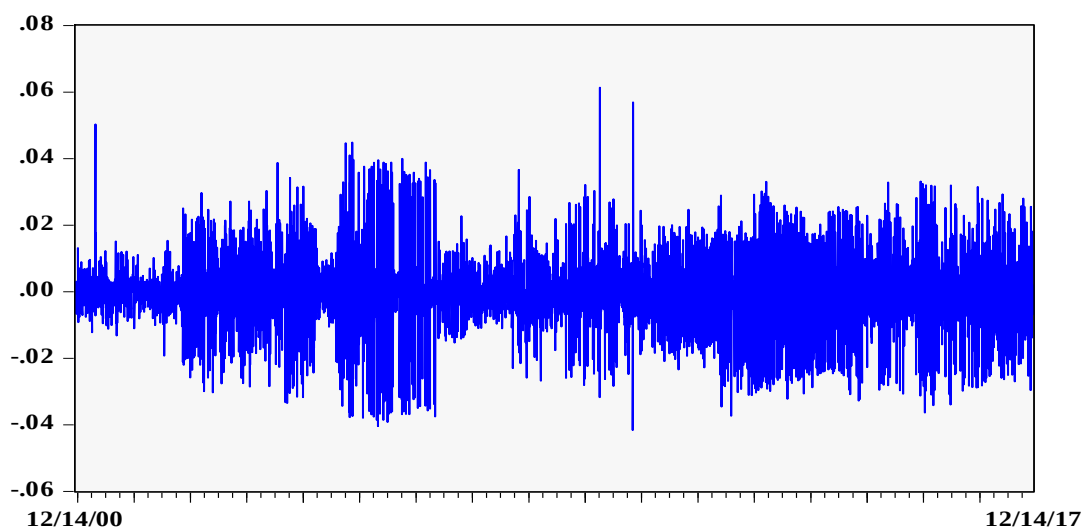
Pour répondre à des exigences théoriques, l'estimation de l'exposant de Hurst nécessite que la série analysée soit stationnaire afin d'éviter qu'une valeur élevée de H ne soit due à une éventuelle non stationnarité de la série. C'est pour cette raison que nos données seront transformées en première différence logarithmique, car cette transformation nous permet d'obtenir des données avec une tendance linéaire et une variabilité constante.

Figure 2.3 : Evolution journalière du taux de change (EURO/MAD) en logarithme



DLOG(EURO_MAD)

Figure 2.4 : Evolution journalière du taux de change USD/MAD en logarithme



DLOG_USD_MAD

3-2- Elaboration des tests de stationnarité :

Afin d'affirmer ou infirmer la stationnarité des séries en question, un recours aux tests de la racine unitaire semble nécessaire.

Tableau 2.2 : Test de Dickey Fuller Augmenté

Hypothèse nulle : Taux de change possède une racine unitaire			
Taux de change	T-Statistic	Probabilité critique	Décision
DLOG(EURO/MAD)	-81.43372	0.0001	Absence d'une racine unitaire
DLOG(USD/MAD)	-76.61173	0.0001	Absence d'une racine unitaire

D'après les résultats du tableau 2.2 on remarque que les T-statistiques de student sont toutes inférieures au valeur critique -2.861 donnée par la table de Dickey Fuller et on peut confirmer ceci via la probabilité critique qui est inférieure au seuil de signification 0.05. Donc on peut rejeter l'hypothèse nulle et conclure que les deux séries sont stationnaires.

Rappelons que le test de KPSS est un test de stationnarité. Autrement dit, on teste l'hypothèse nulle de stationnarité contre l'hypothèse alternative de non stationnarité. Contrairement au test ADF qui sont des tests de non stationnarité car l'hypothèse nulle est celle de présence d'une racine unitaire et l'hypothèse alternative est celle de stationnarité.

Tableau 2.3: Test de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS)

Hypothèse nulle : Taux de change est stationnaire			
Taux de change	LM Statistic	Probabilité critique	Décision
DLOG(EURO/MAD)	16.97878	0.4630	Stationnarité
DLOG(USD/MAD)	14.10852	0.4630	Stationnarité

D'après les résultats du tableau 2.3, la statistique LM est supérieur à la valeur critique 0.4630 pour les deux séries de taux de change, alors on accepte l'hypothèse nulle de stationnarité pour les deux séries étudiées.

Figure 2.5 : Statistiques descriptives de la série DLOG(EURO/MAD)

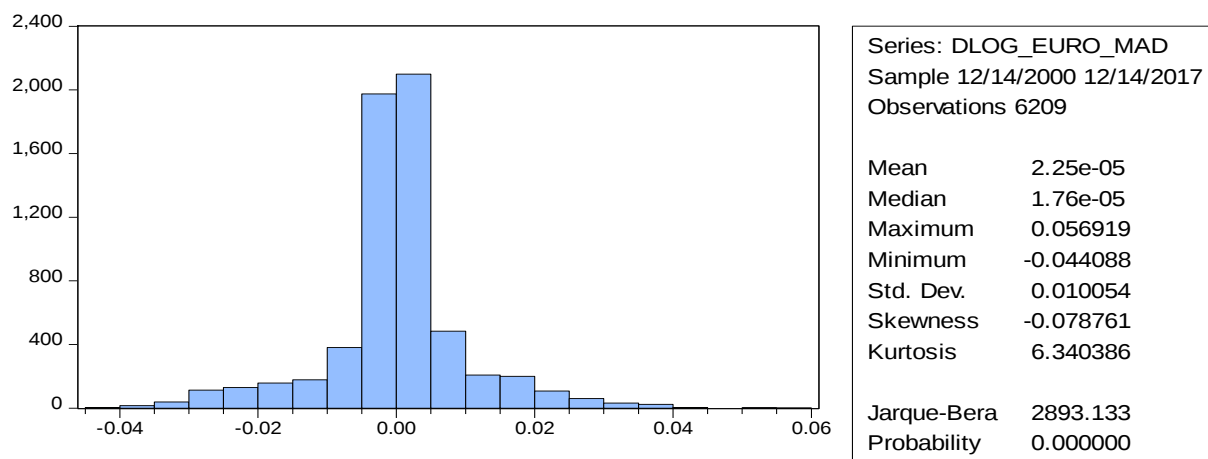
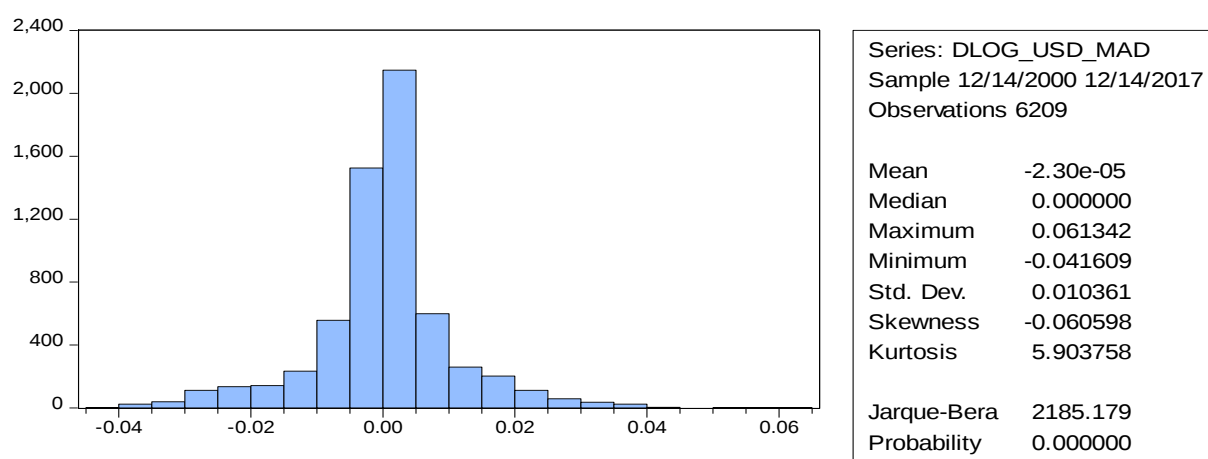


Figure 2.6 : statistique descriptive de la série DLOG(USD/MAD)



D'après les tableaux ci-haut on remarque que :

- La statistique de Jarque-Bera = 2185.179 est supérieure à $\chi^2_{1-\alpha}(2) = 5.991$ de plus la probabilité associée est inférieure à 0.05. (Jarque & Bera 1987 [73]).
- Le coefficient d'asymétrie est significativement négatif, alors la distribution est non symétrique et étalée vers la gauche pour les deux séries étudiées.
- Le coefficient d'aplatissement est positif et supérieur à 3.

On peut conclure que la loi normale n'est pas compatible avec nos données, ce qui ouvre la voie vers une modélisation fractionnaire de type ARFIMA.

3-3- Analyse de la mémoire longue par une modélisation ARFIMA :

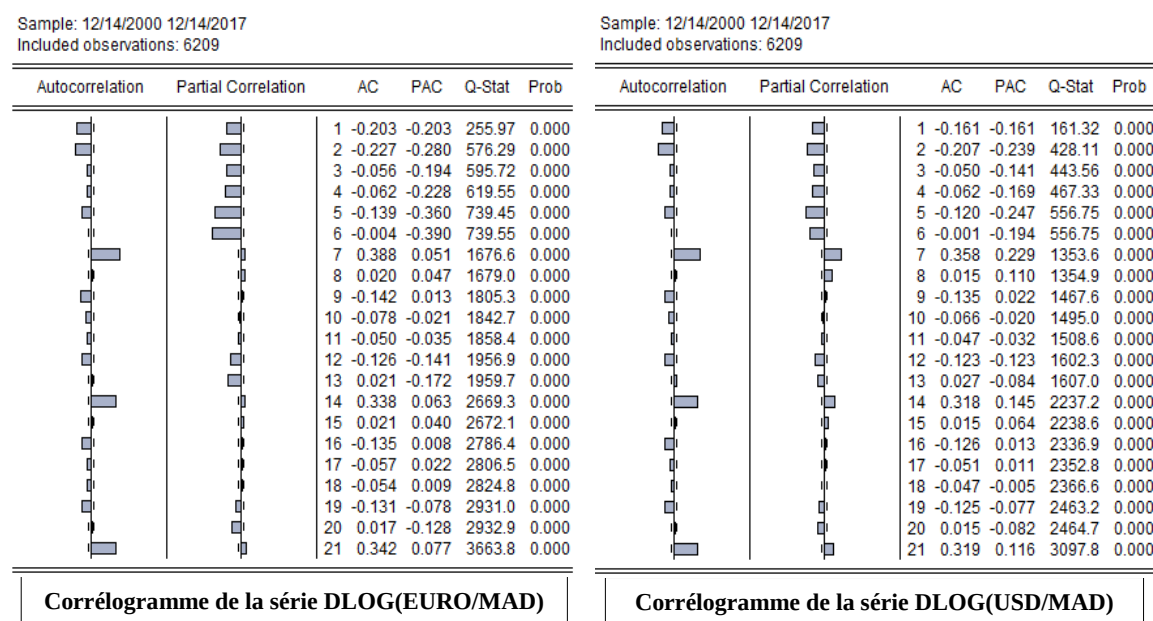
Rappelons que l'exposant de Hurst est lié à la structure de dépendance des incréments du processus. Si $H = 0.5$, les incréments sont indépendants. Sinon, lorsque $H > 0.5$, les incréments sont fortement corrélés et lorsque $H < 0.5$, on parle de l'anti-persistance.

Les résultats de notre estimation de l'exposant de Hurst par la méthode des ondelettes en se prévalant de la fonction $H_{EST} = wfbmesti(X)$ du logiciel MATLAB du $LOG(USD/MAD)$ et $LOG(Euro/MAD)$ sont 0.8940 et 0.8757 respectivement. Ces valeurs de H nous prouvent que les taux de change USD/MAD et $Euro/MAD$ présentent une persistance, étant donné que la valeur de H est supérieure à 0.5. Il en résulte que les séries du taux de change traitées sont des processus de mémoire longue, ce qui signifie qu'il y a de fortes corrélations entre les valeurs présentes et futures desdites séries.

En se servant de la relation entre le paramètre de Hurst H et le paramètre d des processus ARFIMA : $H = d + \frac{1}{2}$ (voir Hosking (1981) [68] et Lo (1991) [83]), il est possible d'établir une classification des séries en fonction du paramètre d selon le même concept que par le paramètre de Hurst.

- Si $\frac{1}{2} < H < 1 \Rightarrow 0 < d < \frac{1}{2}$, le processus est à mémoire longue ou persistant.
- Si $H = \frac{1}{2} \Rightarrow d = 0$, le processus se réduit à un processus de mémoire courte
- Si $0 < H < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < d < 0$, alors le processus est anti-persistant (des phases de hausse ont tendance à être suivies par des phases de baisse).

Figure 2.7 : Corrélogramme des séries DLOG(USD/MAD) et DLOG(EURO/MAD)



Nous remarquons la présence de valeurs significatives dans le corrélogramme partiel en 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Aussi dans le corrélogramme nous constatons qu'il existe des coefficients significatifs. Mais pour être sûr, on a utilisé la fonction *auto.arima* du package *forecast* dans le logiciel **R**, cette fonction conforte plusieurs modèles différents et nous retourne celui qui minimise le critère d'Akaike : c'est le modèle **ARMA (2,2)** pour nos deux séries. Le tableau 2.4 résume les résultats de cette modélisation.

Tableau 2. 4 : Résultat de l'analyse des deux séries par le modèle ARFIMA

	LOG(EURO/MAD)	LOG(USD/MAD)
La constante	2.3712	2.2320
Le paramètre fractionnaire d	0.3756	0.3949
AR (2)	0.9982	0.9881
MA (2)	-0.9730	-0.9158
R²	0.9194	0.9919
Durbin-Watson	1.7425	1.6443

Résultats et discussion :

D'après la modélisation ARFIMA du comportement des deux séries sous étude, on remarque que le paramètre fractionnaire d est positif et statistiquement différent de 0 et compris entre 0 et 0.5 soit respectivement **0.3756** pour la série LOG(USD/MAD) et **0.3949** pour la série LOG(EURO/MAD). Ceci conduit à confirmer les résultats obtenus par le paramètre de Hurst, et à ressortir des conclusions importantes telles que les deux séries présentent une sorte de persistance positive ? témoin de l'existence du phénomène de la mémoire longue.

Cependant, nous pouvons conclure que le taux de change "USD/MAD" présente un comportement plus erratique que celui du taux de change "Euro/MAD". Cela peut s'expliquer par les politiques monétaires adoptées par le Maroc concernant le choix du régime de change, qui se caractérise par un régime fixe plutôt que par un système flexible. Dans le cadre de l'analyse du régime du taux de change des taux au Maroc et son impact sur la compétitivité de l'économie Marocaine, Ezzahid & Maouhoub, 2014 [48] ont mentionné que les valeurs de la fonction de perte des autorités monétaires sous régime de

taux du change flexible, restent inférieures aux valeurs sous le régime du taux de change fixe pour un degré d'ouverture supérieur à 40%. Le régime flexible est donc un choix optimal dans la politique de change (Amar et al. 2016 [8]). En effet, la flexibilité du taux de change permet d'améliorer la compétitivité de l'économie extérieure du pays.

4- Conclusion

La dépendance à mémoire longue des séries du taux de change a fait l'objet d'une très grande panoplie d'études empiriques. En effet, Booth et al. 1982 [23] ont conclu qu'en régime de change fixes, les taux de change du Dollar Américain par rapport au Mark allemand, Livre anglaise et Franc français sont caractérisés par un phénomène d'anti-persistance ($H < \frac{1}{2}$) tandis que qu'en régimes de change flottants, ils présentent une mémoire de long terme positive. Également en appliquant la méthode GPH, Cheung 1993 [34] a montré, la présence d'une structure de mémoire longue dans une panoplie des séries de taux de change.

Dans le même cadre, l'étude de la structure de dépendance de long terme dans les séries financières est extrêmement intéressante dans le sens où elle peut être évidemment reliée à la théorie de l'efficience des marchés financiers. Conformément à ce principe, un marché est efficient si l'ensemble des informations pertinentes à l'évaluation des actifs financiers qui y sont cotés se trouve instantanément reflété dans les cours. La présence de mémoire longue dans les séries boursières constitue un sujet très important auprès de l'efficience des marchés financiers. Ceci est lié à la définition proposée par Fama (1970 [50], 1991[49]) de l'efficience au sens faible qui suppose que les séries boursières sont caractérisées par une absence absolue de mémoire « $d=0$ », c'est-à-dire que l'on ne peut pas prévoir les informations futures à partir de celles passées. En outre, plusieurs ouvrages proposent d'utiliser la valeur de l'exposant de Hurst comme mesure du degré d'imperfection d'un marché (voir Mandelbrot 1971 [91] et Mignon 1998 [84]). Plus un marché est liquide moins il y a de mémoire longue (d est faible) ; autrement dit, sur des marchés absolument efficients il n'y a pas du tout de mémoire longue. Dans le chapitre suivant nous allons mettre en exergue les implications de la mémoire longue du point de vue de la théorie financière tout en se basant sur l'exposant de Hurst comme étant un critère d'efficience de marché.

CHAPITRE 3 : IMPLICATIONS DE LA MÉMOIRE LONGUE SUR L'EFFICIENCE DES INDICES BOURSIERS⁹

1- Introduction :

2- Identification des caractéristiques des séries chronologiques

2-1- Mémoire longue et dépendance à long terme

- 2-1-1- Définition usuelle de la mémoire longue
- 2-1-2- L'Exposant de Hurst et le rejet de l'efficiency

2-2- Etude empirique et discussion

- 2-1-3- Description des données
- 2-1-4- Interprétation des résultats

2-3- Implémentation d'un indice de classification

- 2-3-1- Irrégularité des séries chronologiques
- 2-3-2- Imprévisibilité des séries chronologiques
- 2-3-3- Discussion

3- Conclusion

⁹ Une première version de ce chapitre a été publiée dans : EL WAHLI, I., AMAR, A., & LAAROUSSI, Y. (2018). "Efficiency Classification of Stock Market Indices: Construction of an Indicator Using Fractal and Long Memory Characterization. *Journal of Applied Economic Sciences*, 13(5)."

1- Introduction

L'hypothèse d'efficience des marchés financiers (EMH) représente depuis 1970 un concept central de la théorie financière moderne (FAMA 1970 [50]). Si les marchés sont efficients, cela signifie qu'aucune stratégie d'investissement ne peut permettre de dégager, pour un niveau de risque donné, un profit anormal. Pour le dire plus simplement, cela signifie qu'il est impossible de "*battre le marché*" sur le long terme !

Le concept sous-jacent de l'EMH a été introduit pour la première fois par Samuelson 1965 [119] qui, dans cet article fondamental, a donné naissance à l'idée d'efficience grâce à son intérêt pour les modèles de tarification temporelle des produits stockables qui ont été investis et soumis à la dégradation. Samuelson a noté que si un marché est efficace sur le plan de l'information, toute variation de prix, si elle est correctement anticipée, devrait être imprévisible. En d'autres termes, les prix incluraient toutes les informations et les attentes de tous les participants du marché.

Conformément à la définition donnée par FAMA, 1970 [50] pour qui : « *Un marché financier sera efficient s'il intègre simultanément et complètement toute l'information disponible et pertinente* », l'efficience des marchés représente une situation où les prix des actifs financiers reflètent toujours toute l'information disponible. Au terme de cette hypothèse, les prix des actifs financiers (actions, obligations) égalisent les valeurs fondamentales, soit du fait de la rationalité des investisseurs, soit en vertu des arbitrages qui feraient disparaître toute anomalie de prix.

Les économistes soulignent l'importance d'évaluer l'efficience de l'information sur le marché, car lorsqu'un marché est efficient, les investisseurs sont en mesure de déterminer le risque et les rendements de leurs investissements car leur actif ne serait ni sous-évalué ni surévalué.

À ce propos, l'importance de l'efficience des marchés boursiers réside dans les avantages qu'elle offre aux décideurs afin d'éviter une mauvaise affectation des ressources qui aurait un impact négatif sur la croissance économique à long terme.

En outre, Fama a établi plusieurs niveaux de caractérisation des marchés efficients qui diffèrent selon la nature de l'information considérée. Il distingue alors trois formes d'efficience à savoir : une efficience de forme faible, une efficience de forme semi-forte et une efficience de forme forte (voir Stachowiak 2004 [123]) :

- ***Un marché faiblement efficient***

Il prend comme information les informations contenues dans l'historique des prix passés. En effet cette forme souligne que les cours des actions reflètent déjà toutes les informations pouvant être obtenues sur le marché, telles que les données passées, le volume des transactions ou les intérêts à court terme, ce qui implique que l'analyse des tendances serait redondante.

- ***Un marché d'efficience semi forte***

Sur un tel marché il est impossible d'atteindre des profits supérieurs en utilisant une stratégie tenant compte des cours passés de l'actif et de toute l'information publique disponible.

- ***Un marché fortement efficient***

Il prend en compte toutes les informations y compris des informations qui ne seraient disponibles que pour les dirigeants de l'entreprise. FAMA avait considéré la version sous forme forte comme une référence par rapport à laquelle d'autres formes d'efficience du marché seraient jugées.

Cette distinction originelle de FAMA a fait l'objet de plusieurs recherches et critiques. Ce qui a créé un pas vers une large testabilité. Le problème de savoir s'il est possible ou non de battre le marché va être en fait lié étroitement au problème concernant le comportement des investisseurs. Ces derniers sont-ils rationnels, ou bien au contraire existe-t-il une irrationalité générale de leur part dont il est possible de profiter ?

Lors d'une simple modélisation de la dynamique des séries financières, les tests sur l'efficience ont pu être établis sans problème. Cependant le traitement et l'analyse de certains comportements particuliers exigent l'intégration d'autres outils statistiques pour mieux expliquer les propriétés empiriques des marchés financiers.

En effet, auparavant, l'intérêt était focalisé sur la dépendance à court terme comme indicateur d'une anomalie du marché (voir FAMA 1965 [51]). Or il peut exister une dépendance à long terme qui remet plus fortement en cause l'efficience des marchés financiers. Cependant, une autre voie de recherche sur la théorie financière permet d'aborder une analyse déterministe des marchés financiers dans laquelle la géométrie des phénomènes importe plus que les caractéristiques statistiques des séries temporelles. Cela

n'a été rendu possible que depuis les travaux de Rulle & Takens 1971 [118] qui introduisent le chaos déterministe qui permettra de modéliser l'évolution imprévisible des cours et ceux de Mandelbrot 1975 [93] qui définit la notion d'objets fractals.

Par conséquent, compte tenu de l'importance d'un marché efficient, le présent chapitre a pour objectif dans un premier temps d'évaluer la structure de dépendance de l'évolution des indices boursiers en référence à l'hypothèse de l'efficience et en s'interrogeant sur la persistance des processus sous-jacents des indices étudiés et ce en testant l'existence d'une mémoire longue dans ces processus en adoptant l'analyse R/S. Ensuite, en utilisant la longue dépendance et en intégrant d'autres caractéristiques des séries chronologiques qui peuvent être cause de l'inefficience des marchés, à savoir le degré de rugosité, la variation de la régularité et l'imprévisibilité des marchés, nous construisons une mesure de classification. A cette fin, nous procédons dans une première étape à la détection de la mémoire longue, par l'intermédiaire de l'exposant de Hurst. La deuxième étape consiste à caractériser le degré de rugosité, traduit par la dimension fractale et dans la troisième étape, on étudie le degré d'imprévisibilité des séries étudiées en recourant à la mesure de l'entropie.

Cette méthodologie sera appliquée pour étudier et classer, selon leurs efficacités, cinq indices boursiers des marchés financiers correspondant à cinq pays du Groupe des vingt (G20)¹⁰, il s'agit de : la Turquie (XU100), la France (CAC40), le Brésil (BSVP), le Mexique (MXX) et la Chine (SSEC).

¹⁰ Le **Groupe des vingt (G20)** est un groupe composé de dix-neuf pays et de l'Union européenne dont les ministres, les chefs des banques centrales et les chefs d'État se réunissent annuellement. Il a été créé en 1999, après la succession de crises financières dans les années 1990. Il vise à favoriser la concertation internationale, en intégrant le principe d'un dialogue élargi tenant compte du poids économique croissant pris par un certain nombre de pays. Le G20 représente 85 % du commerce mondial, les deux tiers de la population mondiale et plus de 90 % du produit mondial brut (somme des PIB de tous les pays du monde).

2- Identification des caractéristiques des séries chronologiques

Des recherches empiriques sur les données des marchés financiers ont révélé un certain nombre de propriétés des séries chronologiques qui sont considérées comme des « faits stylisés », qui constituent un apport important à l'étude du comportement des marchés financiers et qui ont des implications économiques importantes.

Cependant, en réalité, nous sommes généralement confrontés à des caractéristiques qui rendent l'utilisation des séries chronologiques très difficile. Ces faits nécessitent une étude préalable et détaillée des caractéristiques de la série. Dans ce chapitre consacré à l'étude des indices financiers liés à l'efficacité des marchés, nous nous intéressons particulièrement à la détection de la mémoire longue dans la série présentée. Il convient de noter que pour un marché efficient, la structure de corrélation de la série ne doit révéler ni la mémoire longue, ni la persistance ou l'anti-persistance locale.

Ainsi, la caractéristique susmentionnée peut être considérée comme signe d'efficacité et permet donc d'offrir un outil d'évaluation du paradigme de l'efficacité.

2-1- Mémoire longue et dépendance à long terme

2-1-1- Définition usuelle de la mémoire longue

On dit qu'un processus aléatoire stationnaire est à mémoire longue, si sa fonction d'autocorrélation $\rho(k)$ décroît comme une fonction puissance du retard k :

$$\rho(k) \sim Ck^{-\alpha}, \text{ quand } k \rightarrow \infty,$$

où $C > 0$ et $0 < \alpha < 1$.

Ou d'une autre manière on peut dire selon McLeod & Hipel 1978 [98] que la série des autocorrélations du processus est absolument divergente i.e :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n |\rho_K| = \infty \quad (3.1)$$

2-1-2- L'exposant de Hurst et le rejet de l'efficacité :

On va tester la présence de la mémoire longue en se basant sur l'exposant de Hurst noté H et qui est compris entre 0 et 1. Un exposant différent de 0.5, révèle des phénomènes de mémoire longue, c'est-à-dire que l'évolution de la série continue à suivre des tendances. Si la série a augmenté précédemment, la probabilité qu'il continue à le faire est forte. Les

séries persistantes ont une mémoire à long terme, c'est-à-dire qu'il existe une corrélation à long terme entre les événements actuels et les événements futurs dans le sens où chaque observation porte la mémoire des événements qui l'ont précédée. Contrairement aux processus à mémoire courte où la corrélation entre deux événements parfaitement éloignés est nulle. Par la suite l'exposant de Hurst sera calculé par l'analyse R/S développée précédemment, qui permet de mettre en évidence la longue dépendance et de conclure à la nature de dépendance de la chronique considérée. De ce fait, la connaissance du passé des séries, fournira une aide remarquable en ce qui concerne la prévision des informations futurs. Une telle conclusion jette un doute sur l'hypothèse d'efficacité des marchés financiers, puisque selon la définition de l'efficacité, un marché est informationnellement efficace si l'ensemble des informations pertinentes à l'évaluation des actifs financiers qui y sont cotés se trouve instantanément reflété dans les cours. Il est alors impossible de prévoir les variations futures des prix puisque, les variations logarithmiques sont indépendantes au cours du temps. En conclusion l'existence d'une structure de dépendance de long terme, produit une source d'inefficacité des marchés.

Si la signification définie de l'efficacité vise l'indépendance des variations des séries, l'hypothèse d'efficacité sera-t-elle acceptée à l'égard de l'analyse des indices sous étude ?

2-2- Etude empirique et discussion

2-2-1- Description des données

Dans ce travail, nous examinons les valeurs réelles observées mensuellement entre 02/2010 et 02/2019, recueillies auprès de la base de données publiée par Yahoo Finance, des 5 indices boursiers choisis. Il s'agit de : XU100 (la Turquie), CAC40 (la France), BSVP (le Brésil), MXX (le Mexique) et SSEC (la Chine).

Cette période a été caractérisée par un funeste enchaînement mondial entre crise financière et récession économique notamment la crise de 2008 survenue aux États-Unis et qui a fortement affecté l'économie mondiale de 2008 à 2014.

Les figures ci-dessous représentent l'évolution de nos indices boursiers étudiés ; au premier regard nous pouvons remarquer que sur toute la période d'analyse considérée, les 5 indices utilisés représentent des comportements non stationnaires.

Figure 3.1 : Evolution de l'indice boursier (SSEC) étudié de Février 2010 à Février 2019

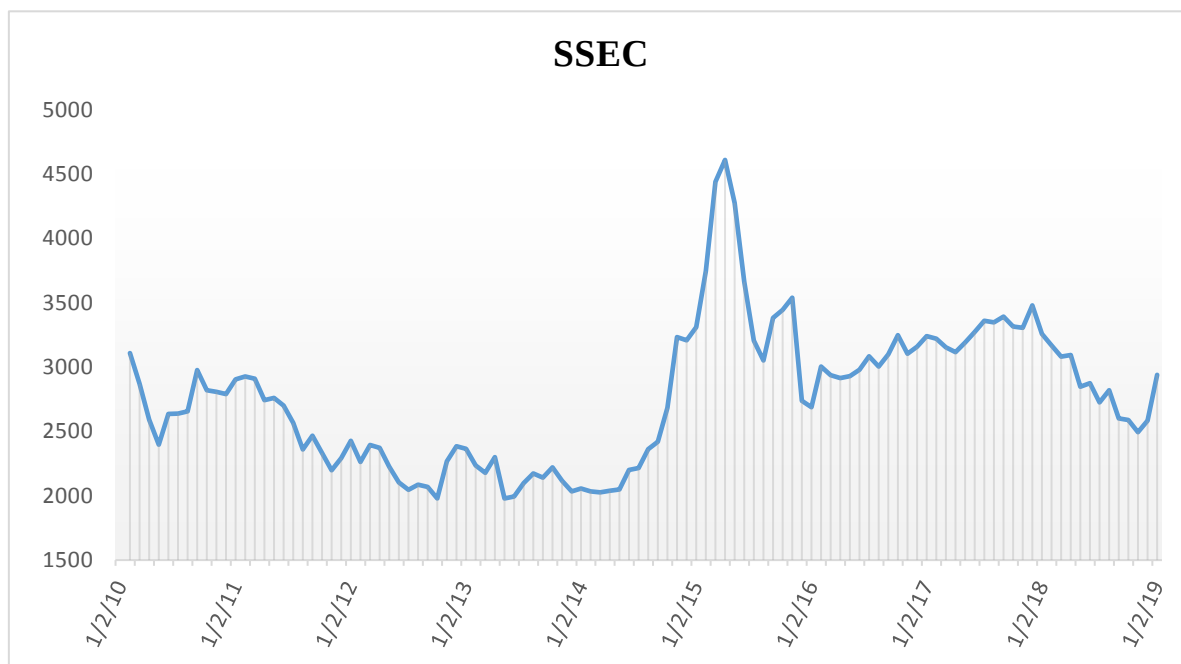


Figure 3.2 : Evolution de l'indice boursier (MXX) étudié de Février 2010 à Février 2019

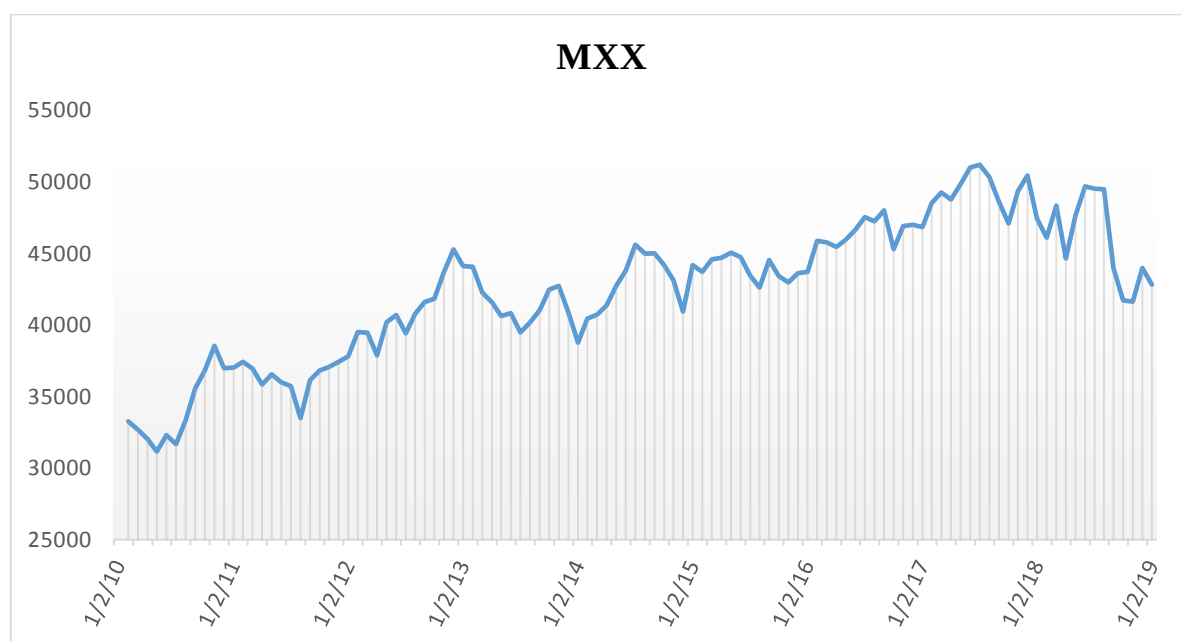


Figure 3.3 : Evolution de l'indice boursier (CAC40) étudié de Février 2010 à Février 2019

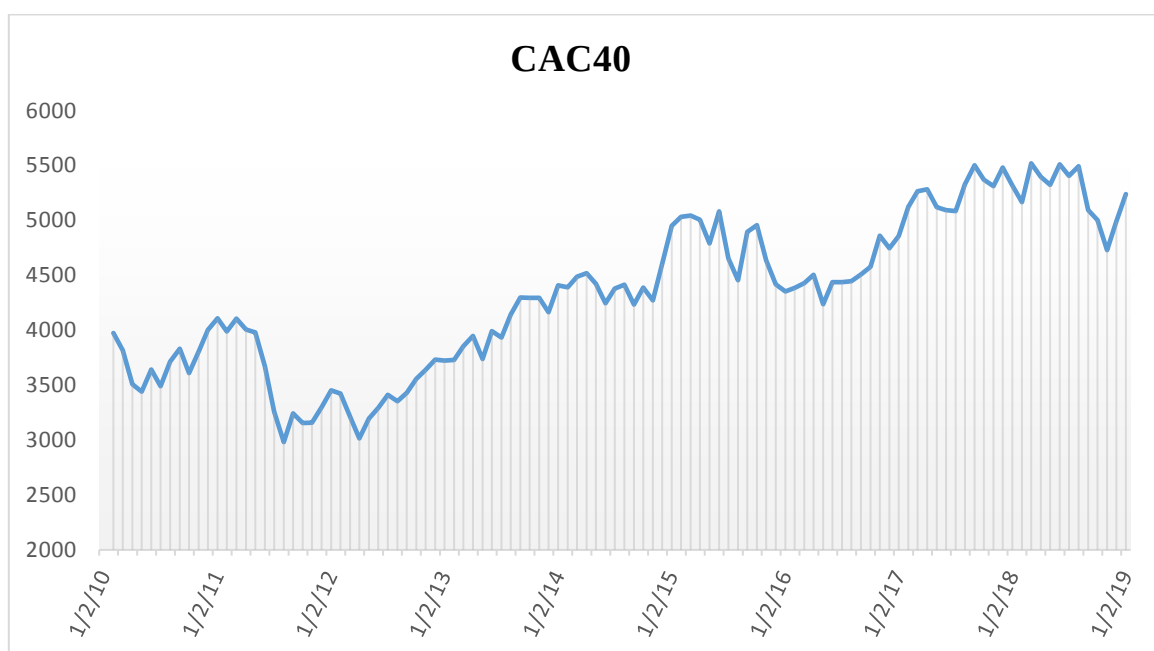


Figure 3.4 : Evolution de l'indice boursier (XU100) étudié de Février 2010 à Février 2019

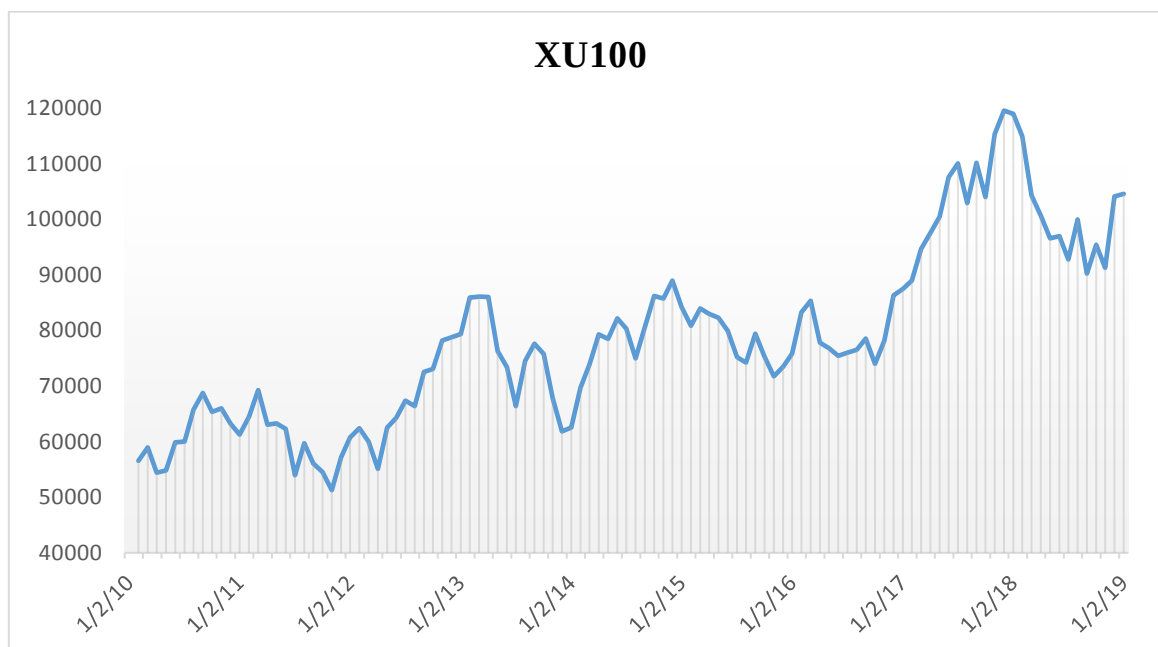
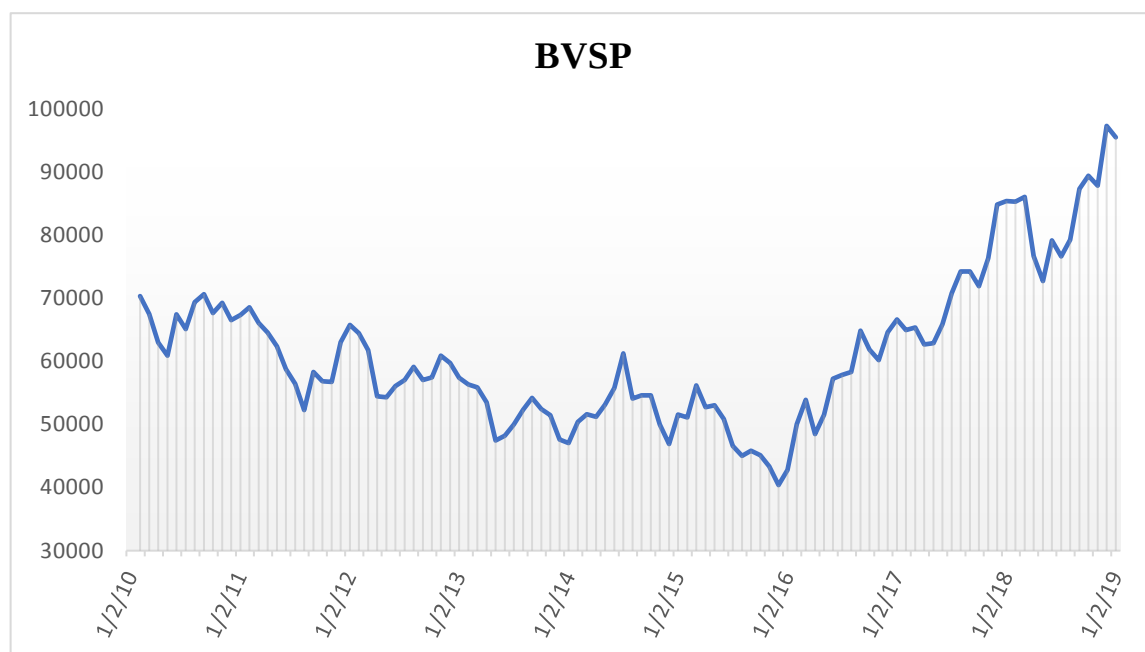


Figure 3.5 : Evolution de l'indice boursier (BSVP) étudié de Février 2010 à Février 2019

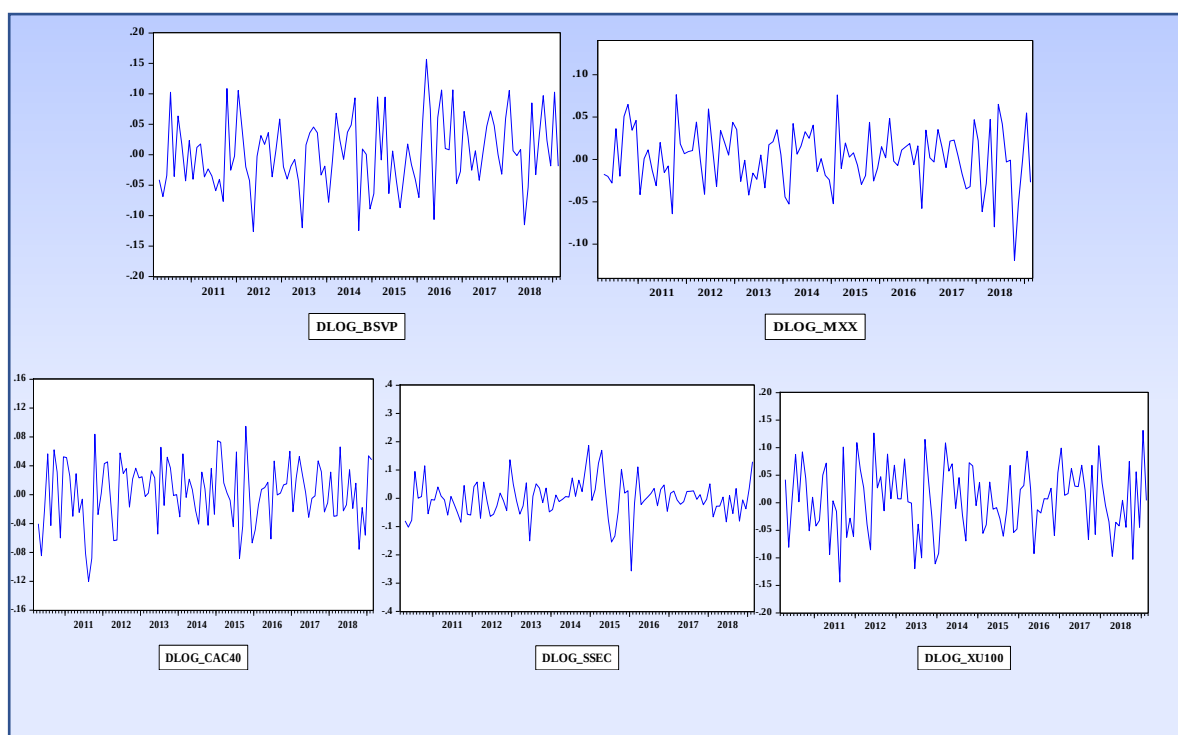


Dans le but de répondre aux considérations théoriques de la stationnarité, nous effectuerons la transformation logarithmique des séries sous étude de manière à affaiblir leur variation. Nous allons raisonner désormais sur les rendements logarithmiques de ces indices qui, selon le test KPSS, sont asymptotiquement stationnaires, car la LM-statistique est supérieure à la valeur critique du test 0,4630 pour toutes les séries en rendement logarithmique, ce qui favorise l'acceptation de l'hypothèse nulle de la stationnarité.

Tableau 3.1 : Résultat du test de stationnarité KPSS

Indice boursier	LM-statistique	Valeur critique	Conclusion
BSVP	0.4763	0.4630	Stationnaire
CAC40	0.5000	0.4630	Stationnaire
SSEC	0.5408	0.4630	Stationnaire
MXX	0.5761	0.4630	Stationnaire
XU100	0.5000	0.4630	Stationnaire

Figure 3.6 : Évolution des rendements des indices boursiers de Février 2010 à Février 2019



2-2-2- Interprétation des résultats

Tableau 3.2 : Résultat du calcul de l'exposant de Hurst

L'indice boursier	Exposant de Hurst
BSVP	0.5541
SSEC	0.5518
CAC40	0.4935
MXX	0.4640
XU100	0.4182

D'après les résultats de l'estimation du coefficient de Hurst par la méthode R/S, on constate que dans le cas des indices BSVP et SSEC sa valeur est nettement supérieure à 0.5, ce qui se traduit par l'existence de la mémoire longue positive et une persistance dans les variations logarithmiques de ces deux séries. En ce qui concerne les autres indices la valeur de H est inférieure à 0.5, ce qui confirme l'existence d'une corrélation négative et ces séries

présentent une sorte d'anti persistance. On pourrait donc conclure à la présence de mémoire longue dans les cinq séries sous étude.

En conclusion, le phénomène de mémoire longue pourrait être présent dans les indices boursiers étudiés, résultat qui est incompatible avec l'hypothèse d'efficience fondamentale de Fama 1965 [51], [52].

La première partie, a été donc consacrée à étudier l'existence de dépendance de long terme d'une série chronologique. Comme nous l'avons déjà précisé, l'intérêt à l'égard de l'hypothèse d'efficience est double. D'une part, si la série dispose d'une structure de dépendance à long terme, alors les informations passées et présentes peuvent être utiles pour prédire les informations futures, ce qui peut remettre en cause l'efficience d'un marché qui se caractérise par un tel comportement. D'autre part, la présence de la mémoire longue a pour conséquence le fait que s'il se produit un choc, la série va retourner vers sa valeur moyenne de long terme beaucoup plus lentement qu'en l'absence d'une telle mémoire. De ce fait, le cours observé n'est plus égal à chaque instant à sa valeur fondamentale. Les tests de mémoire longue permettent ainsi d'apporter des conclusions plus claires que les tests classiques.

2-3- Implémentation d'un indice de classification

Il nous paraît nécessaire, avant de continuer, de définir exactement l'indice d'efficience proposé par L. Kristoufek & M. Vosvrda, 2013[76], 2014 [77]. En plus de la caractéristique de la mémoire à long terme, cet indice intègre la dimension fractale et l'entropie, dans l'objectif de contrôler les différents types de corrélation et de complexité en utilisant une seule mesure. Nous allons exposer un rapide aperçu de la littérature concernant ces mesures.

2-3-1- Irrégularité des séries chronologiques

De nombreux phénomènes naturels en particulier l'irrégularité des séries sont mieux décrits en utilisant une dimension entre deux nombres entiers, c'est-à-dire une fraction. Ainsi, une courbe fractale peut avoir une dimension comprise entre un et deux contrairement à la ligne droite unidimensionnelle. Ainsi, la dimension fractale mesure le degré de complexité répété à chaque échelle.

Il peut aussi être utilisé comme mesure de rugosité, et contrairement à la caractérisation de la mémoire longue, il mesure la persistance locale de la série (Kristoufek & Vorsvrda 2013 [76]).

Selon Hausdorff, la dimension fractale est définie comme étant la valeur unique,

$$d = \dim_H(X) \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\} \text{ tel que } \mu_{d'}(X) = 0 \text{ si } d' > d \text{ et } \mu_{d'}(X) = \infty \text{ si } d' < d \quad (3.2)$$

où :

$$\mu_d(X) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_i (\text{diam}(U_i))^d \quad (3.3)$$

est la mesure de Hausdorff d-dimensionnelle d'un sous-ensemble X dans un espace métrique. L'infimum est pris sur toutes les couvertures dénombrables U_i de X telles que $\text{diam}(U_i) < \varepsilon$.

Le principal problème de la dimension Hausdorff est le fait qu'elle est assez difficile à calculer en général. Ainsi, d'autres notions de dimension ont été développées qui sont plus faciles à estimer, principalement la dimension de comptage de boîtes définie comme suit,

$$\dim_B(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \quad (3.4)$$

En pratique, on utilise un algorithme de comptage de boîtes, intuitif et facile à appliquer (Laaroussi et al. 2015 [79]).

Soit une suite (ε_n) décroissante et tendant vers 0 assez lentement (comme une suite géométrique, par exemple). L'objet fractal (E) est recouvert d'un carré de réseau maillé de côté (ε_n) et comprend le nombre (Ω_n) du point de rencontre du carré E.

$$D(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\log(\Omega_n)}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon_n}\right)} \right] \quad (3.5)$$

Pour une série univariée, on considère que $1 \leq D \leq 2$.

En général, $D = 1,5$ est valable pour une série aléatoire sans tendance locale ou sans anti-corrélation locale. Pour une dimension fractale basse ($D < 1,5$), la série est localement moins grossière et ressemble donc à une persistance locale. Inversement, une dimension fractale élevée ($D > 1,5$) informe sur des séries plus rugueuses avec anti-persistance locale.

La notion de fractale a été utilisée dans de nombreux domaines (voir Sugihara & May 1990 [124], Molz et al. 2004 [100] et (Losa 2012 [86]) qui présentent une contribution des

fractales à la biologie et à la médecine. Cependant, la finance reste l'application la plus cruciale et dominante de la géométrie fractale à l'heure actuelle, depuis que Mandelbrot a publié son travail original en économétrie et modèles financiers, appliquant des idées de mise à l'échelle et d'auto similarité aux tableaux de données générées par les analyses financières. Après cela, de nombreux chercheurs se sont intéressés aux objets fractals sur des applications en finance, par exemple Azar 2014 [12].

Sur les marchés réels, les tendances à court terme sont généralement présentes et sont liées aux marchés dits "baissiers" et "haussiers". Ces périodes à court terme sur le marché ne se reflètent pas dans ses caractéristiques globales, celles-ci disparaissent rapidement en raison du potentiel d'arbitrage. Néanmoins, les épisodes entraînent un épaississement de la série, qui se traduit par un écart de D de 1,5. Si le marché se caractérise par une "local persistance", c'est-à-dire les tendances sont à court terme, la dimension fractale doit être inférieure à 1,5.

Inversement, si le marché est dominé par une "anti-persistance locale", la dimension fractale doit être supérieure à 1,5, la structure de la série étant plus grossière. Bien entendu, ces effets peuvent être tous deux présents sur le marché.

2-3-2- Imprévisibilité des séries chronologiques

L'entropie, qui mesure le caractère aléatoire est un outil très important pour modéliser l'évolution imprévisible d'une série chronologique. Elle a été introduite comme une mesure de l'efficacité.

Selon Shannon 1948 [120], l'entropie satisfait les propriétés principales d'une bonne mesure de l'incertitude. Soient $p_1, \dots, p_n$, les probabilités d'apparition d'un ensemble d'événements. L'entropie pour les distributions discrètes est donnée par :

$$H(X) = - \sum_i p_i \log p_i \quad (3.6)$$

Pour les distributions continues, où $p_X(x)$ est la fonction de densité de la variable aléatoire X, l'entropie est donnée par :

$$H(X) = - \int p_X(x) \log p_X(x) dx \quad (3.7)$$

L'application de l'entropie en finance peut être considérée comme l'extension de l'entropie d'information et de l'entropie de probabilité. Philippatos & Wilson 1972 [111] ont été les deux premiers chercheurs à appliquer le concept d'entropie à la sélection de portefeuille. Dans leur thèse, une approche à entropie moyenne a été proposée et comparée aux méthodes traditionnelles en construisant tous les portefeuilles efficaces possibles à partir d'un échantillon de prix de clôture mensuels, choisis au hasard sur 50 titres sur une période de 14 ans. Ils ont constaté que les portefeuilles d'entropie moyenne étaient compatibles avec les modèles de covariance totale de Markowitz et de Sharpe. Depuis lors, de nombreux autres chercheurs ont enrichi la théorie de la sélection de portefeuilles avec des concepts d'entropie. On peut citer par exemple l'article de Jana et al. 2007 [72] qui, après avoir proposé un modèle de variance moyenne-asymétrie pour la sélection de portefeuille, ont ajouté la fonction objective d'entropie afin de générer un portefeuille d'actifs bien diversifié dans le cadre d'une allocation d'actifs optimale. De plus, l'entropie a été appliquée dans la détermination du prix des options, comme dans la théorie de la tarification par entropie (EPT) introduite par Gulko 1999 [61]. L'entropie peut également être utilisée comme une approche alternative pour la prévision des séries chronologiques financières.

Les systèmes à entropie élevée peuvent être caractérisés par l'absence d'informations et sont donc aléatoires et inversement, la série à entropie faible peut être considérée comme déterministe. Le marché efficace peut alors être considéré comme celui qui présente une entropie maximale. Moins l'entropie est faible, moins le marché est efficace.

Selon Kristoufek & Vosvrda, 2014 [77], l'indice de classification des marchés financiers selon leur efficacité est construit comme suit :

$$EI = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\hat{M}_i - M_i^*}{R_i} \right)^2}, \quad (3.8)$$

avec,

$\hat{M}_i$: La valeur estimée de la $i^{\text{ème}}$ mesure de l'efficacité (l'exposant de Hurst, la dimension fractale et l'entropie).

M_i^* : La valeur théorique de la $i^{\text{ème}}$ mesure de l'efficacité.

R_i : L'étendue de la $i^{\text{ème}}$ mesure de l'efficacité.

n : Le nombre des mesures.

L'indice d'efficacité EI, ainsi défini, est considéré comme un outil de classification des marchés boursiers selon leur efficacité, tout en calculant la distance entre l'état actuel du marché boursier et celle d'un marché efficace idéal. On sait que l'exposant de Hurst pour les séries stationnaires est défini sur l'intervalle $[0,1]$ et la dimension fractale est définie sur $[1,2]$. On définit, ainsi les valeurs théoriques de l'efficacité de chaque mesure comme le centre de son support, c'est-à-dire $H = 0,5$ et $D = 1,5$. Dans notre cas, afin de quantifier l'efficacité du marché nous considérons trois mesures :

- ❖ L'exposant de Hurst H avec une valeur attendue de 0,5 pour un marché efficace ($M_H^* = 0,5$).
- ❖ La dimension fractale D avec une valeur attendue de 1,5 ($M_D^* = 1,5$).
- ❖ L'entropie avec une valeur attendue de 1 ($M_E^* = 1$).

2-3-3- Discussion

Dans cette partie, nous allons essayer de décliner les résultats empiriques, liés aux séries des rendements de nos 5 indices boursiers. Nous avons auparavant mis l'accent sur le coefficient de Hurst pour tester le phénomène de mémoire longue qui peut remettre en cause l'efficacité des séries. Pour évaluer l'efficacité des marchés par le biais de l'indice de l'efficacité EI, nous allons utiliser parallèlement, la dimension fractale pour analyser la dépendance locale et l'entropie en tant que caractéristique de l'imprévisibilité des séries. Le tableau ci-dessous résume le résultat de calcul de l'indice d'efficacité par l'intermédiaire des trois mesures pour chacune des caractéristiques susmentionnées.

Tableau 3.3 : Indice d'efficacité et caractéristiques des marchés boursiers étudiés

	Indice boursier				
	SSEC	CAC 40	MXX	XU100	BSVP
Exposant de Hurst	0.5518	0.4935	0.4640	0.4182	0.5541
Dimension fractale	1.4009	1.5201	1.57102	1.5218	1.5958
Entropie	0.0002	0.0013	0.0008	0.0020	0.0557
Indice d'Efficacité	0.5178	0.5010	0.5093	0.4997	0.5001

Etant donné que 0.5 est considéré comme la valeur de référence pour l'exposant de Hurst, ce qui traduit par l'absence de mémoire longue positive ou mémoire longue négative. Alors si le coefficient de Hurst est plus grand (plus petit) que 0.5, le processus à mémoire longue positive (respectivement négative). On peut remarquer que les valeurs trouvées de H comprises entre (0.4182 et 0.5541) semblent donc bien dues à une dépendance à long terme, de plus l'indice BSVP Brésilien et celui de la Chine (SSEC) ont une mémoire longue positive avec une valeur de $H= 0.5541$ et $H= 0.5518$ respectivement contrairement aux autres indices.

Quant à la valeur référence de la dimension fractale c'est 1.5, ce qui signifie l'absence du comportement de persistance locale ou d'anti-persistance locale. Ainsi, si la dimension fractale est plus grande (plus petite) que 1.5, cela signifie qu'il existe une persistance locale (respectivement) anti-persistance. Par conséquent, le comportement de la série est plus rigoureux (moins rigoureux) que celui observé pour la valeur de référence. Mis à part l'indice SSEC, un résultat notable cependant apparaît d'après le tableau ci-dessus pour tous les indices étudiés, pour lesquelles on décèle un phénomène d'anti-persistance, ça signifie que les séries temporelles représentant ces indices ont des comportements plus irréguliers ; ceci se traduit par le fait qu'une valeur faible sera suivie par une valeur plus grande et vice versa, ce qui nous semble jeter un sérieux doute sur l'efficacité de ces marchés. Parmi ces indices, le BSVP a la plus grande valeur de la dimension fractale (1.59), ce qui permet de conclure sa grande fluctuation par rapport aux autres indices.

En ce qui concerne l'entropie, qui peut être considérée comme une mesure de l'imprévisibilité des séries chronologiques, on peut en comparer les valeurs obtenues de telle sorte que, plus l'entropie est grande, plus le caractère aléatoire est grand. Ainsi, le BSVP est le plus aléatoire tandis que le SSEC est le moins aléatoire.

Pour pouvoir commenter simultanément les résultats évoqués sur les marchés boursiers en termes d'efficacité, on va se baser sur les résultats obtenus de l'indice d'efficacité, représenté dans le tableau 3.3.

Pour les mesures utilisées (exposant de Hurst, dimension fractale et entropie), nous présentons les écarts absolus par rapport aux valeurs censées à la comparaison. Pour les estimations de l'exposant de Hurst, nous observons une petite diversité. En effet, 0.41 (pour XU100 du Mexique) et pratiquement 0.55 (pour BSVP du Brésil). Mis à part l'indice chinois SSEC les résultats pour la dimension fractale varient de façon rigoureuse entre les

indices boursiers. L'écart le plus élevé est observé pour le BSVP Brésilien et le plus bas pour le SSEC chinois. Quant à la mesure d'entropie on constate des valeurs qui varient de façon considérable. Il en résulte que l'indice BSVP a les valeurs les plus élevées pour les trois mesures au moment où les plus petites valeurs sont observées pour l'indice SSEC.

Pour l'indice d'efficience, nous pouvons constater certaines divergences entre les indices en termes d'écarts, mais ils ne sont pas énormes. Ceci est principalement dû à l'effet de compensation induit par le fait que l'indice d'efficience est construit comme agrégation (somme quadratique) des trois caractéristiques. Les valeurs de l'indice d'efficience, présentées dans le tableau 3.3 permettent, ainsi de classer les marchés considérés selon leur efficience. Par conséquent, le marché boursier le plus efficient est l'indice XU100 Turc suivi par le BSVP Brésilien et délicatement par le CAC40 Français. Les marchés les moins efficients sont l'indice MXX Mexicain et le SSEC Chinois.

3- Conclusion

L'analyse de l'efficience des marchés fournit des informations essentielles aux régulateurs et aux investisseurs mondiaux pour les stratégies d'investissement. La littérature actuelle fournit des preuves concluantes sur le lien qui existe entre les marchés boursiers et l'état économique, les marchés boursiers devenant les principaux indicateurs de l'économie du pays. Dans ce sens et vue l'importance de la propriété de l'efficience, ce chapitre tente dans un premier temps d'étudier la structure de dépendance des marchés financiers et essaie de montrer la pertinence des tests de la dépendance de long terme dans l'analyse de l'efficience afin de conclure les implications de la mémoire longue sur l'efficience des marchés de telle sorte que si la mémoire longue est discernable dans le processus sous-jacent du marché elle constitue une sorte d'inefficience qui permet en se basant sur l'analyse de ces corrélations (mémoire longue) de battre ce marché. Dans un second temps, nous avons étudié de manière empirique la classification des cinq indices boursiers selon leur efficience, qui se réfèrent à cinq marchés ayant des structures différentes (taille, devises, ...). L'approche développée est appuyée sur la construction d'un indice composite qui combine trois caractéristiques importantes des données financières, notamment la mémoire longue de la série, évaluée par l'exposant de Hurst, la rugosité liée à la dimension fractale et l'imprévisibilité mesurée par l'intermédiaire de l'entropie.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Les travaux de recherches abordés dans ce travail de thèse, s'inscrivent dans le cadre d'analyse des caractéristiques des séries financières. Nous avons étudié principalement les propriétés de la longue dépendance dont la fonction d'autocorrélation varie régulièrement à l'infini avec un coefficient appelé paramètre de mémoire. Le principal outil que nous avons utilisé pour interpréter ce comportement est l'exposant de Hurst qui possède la propriété importante de décrire la structure de dépendance dans les séries chronologiques. Après avoir présenté le concept de la mémoire longue et les moyens de les estimer, nous avons mis en évidence l'utilité des ondelettes dans l'estimation de la mémoire longue à travers la comparaison de cinq estimateurs les plus exploitées dans la littérature de l'indice de Hurst H . Cette comparaison a été opérée sur des signaux théoriquement exacts obtenus par la simulation basée sur la décomposition en ondelettes d'un mouvement brownien fractionnaire. Les résultats empiriques montrent la pertinence de la méthode d'estimation par les ondelettes qui contribue à une meilleure estimation de H . Pour illustrer l'utilité de l'exposant de Hurst, et en s'appuyant sur l'estimation de ce paramètre par la méthode la plus performante, nous nous sommes intéressés à analyser l'évolution des séries de taux de change marocain par rapport à l'Euro et au Dollar américain, l'objectif est de déterminer si les séries de taux de change marocain présentent le caractère de mémoire longue. Les résultats de notre estimation de l'exposant de Hurst par la méthode des ondelettes du $LOG (USD/MAD)$ et $LOG (Euro/MAD)$ sont 0.8940 et 0.8757 respectivement. Ces valeurs de H nous prouvent que les taux de change USD/MAD et $Euro/MAD$ présentent une persistance, étant donné que la valeur de H est supérieure à 0.5. Il en résulte que les séries du taux de change traitées sont des processus de mémoire longue, ce qui signifie qu'il y a de fortes corrélations entre les valeurs présentes et futures des dites séries. Ceci peut valider les résultats empiriques trouvés dans la littérature qui confirme que les séries de taux de change possèdent une structure de dépendance de long terme (voir Booth et al. 1982 [23] et Cheung 1993 [34]).

L'exposant de Hurst, qui était initialement consacré à l'étude des faits naturels de l'écoulement des eaux fluviales, est désormais étendu à l'analyse du comportement des marchés financiers. Notre attention s'est ainsi focalisée, dans la deuxième partie de notre étude empirique sur l'analyse de la propriété de mémoire longue dans les séries de marchés financiers. Nous avons utilisé les données de cinq séries d'indices boursiers. Il a été constaté que la valeur de l'exposant H de la plupart des séries d'indices est proche de 0.5 comme prévu pour un processus indépendant. Ceci indique une mémoire longue dans la série temporelle, dans ce cas la valeur future dépendra partiellement des valeurs passées de la série, résultat traduisant une sorte d'inefficience des marchés étudiés. Il est donc possible, à partir des informations disponibles, de réaliser des profits anormaux. Il est par conséquent possible de prévoir leur évolution. Dans un second temps, nous avons étudié de manière empirique la classification des cinq indices boursiers selon leur efficience, en se référant à cinq marchés ayant des structures différentes. L'approche développée est appuyée sur la construction d'un indice composite qui combine trois caractéristiques importantes des données financières : la mémoire longue de la série, évaluée par l'exposant de Hurst, la rugosité liée à la dimension fractale et l'imprévisibilité mesurée par l'intermédiaire de l'entropie.

En guise de conclusion, nous pouvons résumer les résultats obtenus comme suit :

- 1- Le modèle ARFIMA, dans lequel le paramètre différenciant d peut supposer des valeurs non intégrées, fournit un cadre direct et pratique pour étudier à la fois le comportement mémoire courte et longue. Ce modèle suggère également des alternatives intéressantes à la mémoire longue à l'hypothèse racine unitaire.
- 2- Nous trouvons des preuves de mémoire longue dans les données de changement de taux de change.
- 3- La connaissance des propriétés des séries chronologiques des taux de change ou des indices boursiers a des implications économiques importantes, de sorte que la présence de la mémoire longue dans les cours

constitue une source d'inefficience du marché. Cette présence se manifeste dans une série chronologique par une autocorrélation qui décroît hyperboliquement à mesure que le retard augmente.

- 4- Il est nécessaire de souligner que l'exposant de Hurst peut être utilisé comme un outil permettant d'exploiter les informations contenues dans l'historique des cours, en les extrapolant pour prédire le futur. L'exposant Hurst peut agir comme une sorte « d'indice de peur », qui reflète les conditions actuelles du marché, l'orientation de son développement futur et le niveau approprié d'incertitude. Une valeur élevée de l'exposant de Hurst montre une sorte d'inefficience du marché, et inversement plus l'exposant est bas plus le marché est efficient.

Certes, ces résultats jettent un doute sur l'efficience des marchés boursiers sous étude, et la question qui se pose est la suivante : les tests usuels de détection de la mémoire longue peuvent-ils absolument juger de l'efficience ou de l'inefficience du marché ?

En plus, et suite aux travaux menés dans cette thèse, nous remarquons que l'exposant de Hurst est utile pour classifier les données selon la persistance et affirmons que cet exposant est un bon indicateur pour tester la présence d'une mémoire longue. Mais il serait intéressant de s'interroger sur la cause qui est à l'origine de cette mémoire longue dans les données financières. Ce qui ouvre la voie à de nombreuses pistes de recherche susceptibles d'élucider la source de ce phénomène. Plusieurs suppositions ont été proposées dans la littérature pour expliquer l'origine de la mémoire longue dont notamment une théorie établie par Granger 1980 [56] qui attribue son existence à l'agrégation des variables de telle façon qu'une série de variables présentant une mémoire longue ne peut être que l'agrégation d'un très grand nombre de micro-variables contenant de la mémoire courte. Ensuite, Ming Liu 2000 [87], a montré que des ruptures occasionnelles génèrent des autocorrélations à décroissance hyperbolique et suppose que la mémoire longue observée est une conséquence du changement de régime. Certains résultats théoriques appuyés par des simulations montrent qu'il n'est pas facile de faire la distinction entre la

propriété de mémoire longue du processus de rupture occasionnelle et celle du processus fractionnaire. Ce qui veut dire qu'une série chronologique peut exhiber une mémoire longue, non pas parce que son processus sous-jacent est un processus fractionnaire ou à mémoire longue, mais plutôt à cause des changements structuraux occasionnels qui ont été négligés dans la série financière étudiée (Granger & Hyung 2004 [57]). Toutes ces idées constitueront entre autres, les prochains points de notre programme de recherche.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **Abry, P., Flandrin, P., Taqqu, M. S., & Veitch, D.** (2003): “Self-similarity and long-range dependence through the wavelet lens”. *Theory and applications of long-range dependence*, 527-556.
- [2] **Abry, P. Flandrin, M. S. Taqqu, & D. Veitch.** (2000): “Wavelets for the analysis, estimation and synthesis of scaling data”. In K. Park and W. Willinger, editors, *Self-Similar Network Traffic and Performance Evaluation*, pages 39–88, New York.
- [3] **Abry P. & Sellan F.** (1996): “The wavelet-based synthesis for fractional Brownian motion proposed by F. Sellan and Y. Meyer: remarks and fast implementation”. *Applied and computational harmonic analysis* 3, pp. 377–383.
- [4] **Abry P., M.S. Taqqu & D. Veitch** (2003): “On the automatic selection of the onset of scaling”. *Fractals*, Vol. 11, 377-390.
- [5] **Abry, P., & Veitch, D.** (1998): “Wavelet analysis of long-range-dependent traffic”. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 44(1), 2-15.
- [6] **Abraham-Frois G., Lardic S. & Mignon V.,** (1996): “Mémoire, fractales et chaos ». *Actes du colloque Théorie et Méthodes de la Macroéconomie*, Paris.
- [7] **Alessio, E., Carbone, A., Castelli, G., & Frappietro, V.** (2002): “Second-order moving average and scaling of stochastic time series”. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 27(2), 197-200.
- [8] **Amar A., El wahli I., Guennoun Z. & Laaroussi Y.** (2016): “Fractal analysis of Moroccan dirham exchange rate: theory and comparative results”, *JAES* 11,
- [9] **Andrews D.,** (1991): “Heteroskedasticity and autocorrelation consistent matrix estimation”, *Econometrica*, vol 59, pp. 817-858.
- [10] **Andrews, D. W., & Sun, Y.** (2004): “Adaptive Local Polynomial Whittle Estimation of Long-range Dependence”. *Econometrica*, 72(2), 569-614.
- [11] **Arianos, S., Carbone, A., & Türk, C.** (2011): “Self-similarity of higher-order moving averages”. *Physical Review E*, 84(4), 046113.
- [12] **Azar, K. G.** (2014): “Estimation of Fractal Parameters of Tehran Stock Market Groups Time Series Using Discrete Wavelet Transform”. *Munich Personal RePEc Archive*.

- [13] **Baillie, R.T.** (1996): “Long memory processes and fractional integration in econometrics”. *Journal of Econometrics*, 73(1):5–59.
- [14] **Bardet, J.M.** (2002): “Statistical study of the wavelet analysis of fractional Brownian Motion”. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 48(4): 991–999. ISSN 0018- 9448.
- [15] **Bardet J.M., H. Bibi & A. Jouini** (2008): “Adaptive wavelet-based estimator of the memory parameter for stationary gaussian processes”, *Bernoulli*, 14, 691-724.
- [16] **Bardet, J.M., Lang, G., Moulines, E., & Soulier, P.** (2000) : “Wavelet estimator of long-range dependent processes”. *Stat. Inference Stoch. Process.*, 3(1-2) : 85–99, ISSN 1387-0874. 19th Rencontres Franco-Belges de Statisticiens (Marseille, 1998).
- [17] **Benassi, A., Cohen, S., & Istas, J.** (1998): “Identifying the multifractal function of a Gaussian process”. *Statistical and Probability Letters*, 39: 337–345.
- [18] **Beran, J.**, (1994): “Statistics for long-memory processes, volume 61 of *Monographs on Statistics and Applied Probability*”. Chapman and Hall, New York. ISBN 0-412-04901-5.
- [19] **Beran, J., & Terrin, N.** (1996): “Testing for a change of the long-memory parameter”. *Biometrika*, 83(3), 627-638.
- [20] **Bertrand, P.R., Hamdouni, A., & Khadhraoui, K.** (2010): “Modelling NASDAQ Series by Sparse Multifractional Brownian motion”. *Methodology and Computing in Applied Probability*.
- [21] **Bisaglia, L. Guégan, D.** (1998): “A comparison of techniques of estimation in long memory processes: application to intra-day data”. *Comput. Stat. Data Anal.* 27, 61-81.
- [22] **Black F. & Scholes M.** (1973): “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.
- [23] **Booth G.G., Kaen F.R. & Koveos P.E.,** (1982): “R/S Analysis of Foreign Exchange Rate under Two International Monetary Regimes”, *Journal of Monetary Economics*, pp.407-415.
- [24] **Boutahar, M., Marimoutou, V., & Nour, L.** (2007): “Estimation methods of the long memory parameter: Monte Carlo analysis and application”. *Journal of Applied Statistics*, 34(3), 261-301.
- [25] **Bourbonnais, R., & Terraza, M.** (1998) : “Analyse des séries temporelles en économie”. FeniXX.

- [26] **Borowski, D., & Couharde, C.,** (1998) : “Parité euro/dollar et ajustements macroéconomiques : que révèle une analyse en termes de change d'équilibre ?”. *Revue d'économie financière*, 155-169.
- [27] **Bos, C., Franses, P., & Ooms M.,** (2002): “Inflation, forecast intervals and long memory regression models,” *International Journal of Forecasting*, 18, 243–264.
- [28] **Box G. E.P., Jenkins, G.M. & Reinsel.G. C.,** (2011): “Time series analysis: forecasting and control, volume 734. John Wiley & Sons”.
- [29] **Box G. E.P., & Jenkins, G.M.,** (1976): “Time Series Analysis: Forecasting and Control”. Holden day, San Francisco.
- [30] **Box G. E.P., & Jenkins, G.M.,** (1970): “Time Series Analysis: Forecasting and Control”
- [31] **Box, G. E., & Pierce, D. A.,** (1970): “Distribution of residual autocorrelations in autoregressive-integrated moving average time series models”. *Journal of the American statistical Association*, 65(332), 1509-1526.
- [32] **Brockwell, P. J. & Davis, R. A.** (1996): “Introduction to time series analysis”. *Texts in Statistics*. Springer-Verlag N.Y.
- [33] **Brossier J.M.,** (2006) : “Analyse spectrale”
- [34] **Carbone A., Castellia G. & Stanley H.E.,** (2004): “Time-dependent Hurst exponent in financial time series”, *Physica A* 344, pp. 267–271,
- [35] **Cheung, Y., & F. Diebold** (1994): “On maximum likelihood estimation of the differencing parameter of fractionally integrated noise with unknown mean,” *Journal of Econometrics*, 62, 301–316.
- [36] **Coeurjolly, J.F.** (2000): “Simulation and identification of the fractional brownian motion: a bibliographical and comparative study”. *Journal of Statistical Software*, 5(7): 1-53.
- [37] **Coulon, J.** (2012). *Mémoire longue, volatilité et gestion de portefeuille* (Doctoral dissertation, Université Claude Bernard-Lyon I).
- [38] **Davis R.B., & Harte D.S.** (1987): “Test for hurst effect”. *Biometrika*. Vol.74. pp. 95-102.
- [39] **Diebold, F., & A. Inoue,** (2001): “Long memory and regime switching,” *Journal of Econometrics*, 105, 131–159.

- [40] **Dickey, D. A., & Fuller, W. A.** (1981): “Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root”. *Econometrica: journal of the Econometric Society*, 1057-1072.
- [41] **Di Matteo, T.** (2007): “Multi-scaling in finance”. *Quantitative Finance*, 7(1) :21–36,
- [42] **Di Matteo, T., Aste, T., & Dacorogna, M. M.** (2005): “Long-term memories of developed and emerging markets: Using the scaling analysis to characterize their stage of development”. *Journal of Banking & Finance*, 29(4), 827-851.
- [43] **Dittman, I., & Granger, C.** (2002): “Properties of nonlinear transformations of fractionally integrated processes,” *Journal of Econometrics*, 110, 113–133
- [44] **Doukhan, P., Oppenheim, G. & Taqqu M. S.** (2003): “Theory and Applications of long-range dependence”. Birkhauser Boston. ISBN 0-8176-4168-8.
- [45] **El wahli, I., El khchine, R., Guennoun, Z. & Laaroussi, Y.** (2018): “Hurst Parameter Estimation Methods: Comparative Study and Application”. *Journal of Applied economic sciences*, Volume XIII, Spring 2(56): 326-336.
- [46] **El wahli, I., Amar, A., Guennoun, Z. & Laaroussi, Y.** (2018): “Efficiency Classification of Stock Market Indices: Construction of an Indicator Using Fractal and Long Memory characterization”. *Journal of Applied economic sciences*, Volume XIII, Fall 5(59):1325 - 1332.
- [47] **Esmak H.,** (2016) : “Les perspectives d’un régime de change au Maroc : vers une plus grande flexibilité”, *IOSR Journal of Economics and Finance (IOSR-JEF)*, Volume 7, Issue 4. Ver. III, pp: 120-136.
- [48] **Ezzahid E. & Maouhoub B.,** (2014): “Capital Account Liberalization and Exchange Rate Flexibility: Scenarios for the Moroccan Case”, *Economics*.
- [49] **Fama E.F.** (1991) "Efficient Capital Markets: II", *Journal of Finance*, n° 5, pp. 1575-1617.
- [50] **Fama E.F.** (1970): "Efficient Capital Markets: A Review of theory and empirical work"; *journal of finance*, n°2, pp.383-417
- [51] **Fama, E.F.** (1965): “Random walks in stock market prices”. *Financial Analysts Journal*,21(5),55– 9.
- [52] **Fama, E.F.** (1965): “The behavior of stock market prices”. *Journal of Business*, 38(1), 34–105.
- [53] **Ferrara, L.,** (2000) : “Processus Longue Mémoire Généralisés”. *Estimation, Prévision et Applications*. Ph.D. dissertation, University Paris 13.

- [54] **Flandrin, P.**, (1992): "Wavelet analysis and synthetic of fractional brownian Motion". IEEE transf. Inform. theory, v. 38, pp. 910-917.
- [55] **Geweke J. & Porter-Hudak, S.**, (1983): "The estimation and application of long-memory time series models", Journal of Time Series Analysis, 4, 221-238.
- [56] **Granger, C. W.** (1980): "Long memory relationships and the aggregation of dynamic models," Journal of Econometrics, 14(2), 227–238.
- [57] **Granger, C. W., & Hyung, N.** (2004): "Occasional structural breaks and long memory with an application to the S&P 500 absolute stock returns".
- [58] **Granger C.W.J. & Joyeux, R.**, (1980): "An introduction to long-memory time series models and fractional differencing," Journal of Time Series Analysis, 1, 15–30.
- [59] **Greene M.T., & Fielitz B.D.**, (1977): "Long-term Dependence in Common Stock returns", Journal of Financial Economics, vol. 4, pages 339-349
- [60] **Guasoni P., Rásonyi M. & Schachermayer W.**, (2008): "The Fundamental Theorem of Asset Pricing for Continuous Processes under Small Transaction Costs", Forthcoming in Annals of Finance.
- [61] **Gulko, B.**, (1999): "The entropy pricing theory".
- [62] **Guyon, X. Leon, G.** (1989) : "Convergence en loi des H-variations d'un processus gaussien stationnaire sur $\mathbb{R}$ ". Ann Inst Poincaré, 25 : 265–282.
- [63] **Hall, P.**, (1997): "Defining and measuring long-range dependence, in Nonlinear Dynamics and Time Series", (Fields Institute Commun. American Math. SOC.), Providence, RI, Montreal, PQ, 19951, (FTPH 11), 153-160.
- [64] **Hardle, W., Kerkyacharian, G., Picard, D. & Tsybakov, A.** (1998): "Wavelets approximation and statistical applications". (Vol. 129). Springer Verlag, Lecture Notes in Statistics.
- [65] **Hassler, U., & J. Wolters** (1995): "Long memory in inflation rates: international evidence", Journal of Business and Economic Statistics, 13, 37–45.
- [66] **Hidane A.**, (2003): "Calcul du taux de change effectif nominal et réel du dirham", Document du travail n°86. Ministère de l'économie et des finances, Maroc.
- [67] **Higuchi T.** (1988): "Approach to an Irregular Time Series on the Basis of the Fractal Theory", Physica, 31D, pp. 277-283.
- [68] **Hosking, J. R. M.** (1981): "Fractional differencing". Biometrika 68 165–176. Mathematical Reviews (MathSciNet): MR614953 Zentralblatt MATH, 464.

- [69] **Hurst, H.E.** (1951): “long-terme storage capacity of reservoirs”, Transactions of the American Society Civil Engineers, Vol. 116, 770-799.
- [70] **Hyung, N., & Franses, P.** (2001): “Structural breaks and long-memory in US inflation rates: do they matter for forecasting?” Working Paper, Erasmus University.
- [71] **Istas, J. & Lang, G.** (1997): “Quadratic variations and estimation of the local Hölder index of a Gaussian process”. Annales de l'Institut Henri Poincare (B) Probability and Statistics, 33(4): 407–436.
- [72] **Jana, P., Roy, T. K., & Mazumder, S. K.** (2007): “Multi-objective mean-variance-skewness model for portfolio optimization”. Advanced Modeling and Optimization, 9(1), 181-193
- [73] **Jarque, C. M. & Bera, A. K.** (1987): “A test for normality of observations and regression residuals”, International Statistical Review 55, pp. 163–172.
- [74] **Karuppiah, J., & Los, C. A.** (2005): “Wavelet multiresolution analysis of high-frequency Asian FX rates, Summer 1997”. International Review of Financial Analysis, 14(2), 211-246.
- [75] **Krese, B., Marzen, S., Metzigg, C., Qiao, Z. & Veetil, V. P.** (2014): “Fractals and Scaling in Finance: a comparison of two models”. Santa Fe Institute.
- [76] **Kristoufek, L., & Vosvrda, M.** (2013): “Measuring capital market efficiency: Global and local correlations structure”. Physica A, 392, 184–193.
- [77] **Kristoufek, L., & Vosvrda, M.** (2014): “Commodity futures and market efficiency”. EnergyEconomics, 42, 50–57.
- [78] **Kwiatkowski, D., Phillips, P. C., Schmidt, P., & Shin, Y.** (1992): “Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root: How sure are we that economic time series have a unit root?”. Journal of econometrics, 54(1-3), 159-178.
- [79] **Laaroussi Y., Guennoun Z. & Amar A.,** (2015): “Extreme value theory for Dynamical Systems: Analysis of stability Behavior in Delayed Kaldor-Kalecki Model”, Intenational Journal of Mathematical Analysis, vol.9, n°43, pp.2139-2155.
- [80] **Lardic S. & Mignon V.,** (1999) : “La mémoire longue en économie : une revue de la littérature”, Journal de la société française de statistique, tome 140, n°2, pp.5-48.
- [81] **Lenskiy, A. A. & Seol, S.** (2012): “The Analysis of R/S Estimation Algorithm with Applications to WiMAX Network Traffic”. International Journal of Multimedia and Ubiquitous Engineering 7(3).

- [82] **Ljung, G. M., & Box, G. E.** (1978): "On a measure of lack of fit in time series models". *Biometrika*, 65(2), 297-303.
- [83] **Lo, A.W.** (1991), "Long-term memory in stock market prices", *Econometrica*, Vol. 59, pp.1279-1313.
- [84] **Lo, A & Mackinlay, C.** (1989): "The Size and Power of the Variance Ratio Test in Finite Samples: A Monte Carlo Investigation". *Journal of Econometrics*, 4 : 230-238.
- [85] **Lobato I., & Robinson P.M.,** (1996): "Average periodogram estimation of long memory", *Journal of econometrics*, Vol. 73, p. 303-324.
- [86] **Losa E., I., M., & Becerro de Bengoa Vallejo, R.** (2012): "Conflict resolution styles in the nursing profession". *Contemporary nurse*, 43(1), 73-80.
- [87] **Liu, M.** (2000): "Modeling long memory in stock market volatility, " *Journal of Econometrics*, 99, 139–171.
- [88] **Mallat, S.** (1999): "A wavelet tour on signal processing". (2 ed.). Academic Press.
- [89] **Mandelbrot, B. B.** (1965): "Self-similar error clusters in communication systems and the concept of conditional stationarity". *IEEE Transactions on Communication Technology*, 13(1), 71-90.
- [90] **Mandelbrot, B.B** (1970): "Statistical dependence in prices and interest rates". In *Second World Congress of the Econometric Society*, Cambridge, England.
- [91] **Mandelbrot, B.B.,** (1971): "When can Price be arbitrated Efficiently? A Limit to the Validity of the Random Walk and Martingale Models", *Review of Economics and Statistics*, vol. 53, pages 225-236.
- [92] **Mandelbrot, B. B.** (1972): "Statistical Methodology for Nonperiodic Cycles from Covariance to R/S Analysis". *Annals of Economic and Social Measurement*, 259-290.
- [93] **Mandelbrot, B. B.** (1975): "Les objets fractals: forme, hasard et dimension".
- [94] **Mandelbrot. B. B,** (1985): "Self-Affine Fractals and Fractal Dimension", *Physica Scripta*, vol. 32, pp. 257-260.
- [95] **Mandelbrot, B. & Taqqu, M.S.** (1979): "Robust R/S analysis of long-run serial correlation". *Bulletin of the International Statistical Institute*, 48: 69-99.
- [96] **Mandelbrot B.B. & Van Ness, J.W.** (1968): "Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications", *SIAM Review*, Vol. 10, n° 4, pp. 422-437.

- [97] **Mandelbrot, B. B., & Wallis, J. R.** (1969): “Computer experiments with fractional Gaussian noises: Part 1, averages and variances”. *Water resources research*, 5(1), 228-241.
- [98] **McLeod, A. & Hipel, K.** (1978): “Preservation of the rescaled adjusted range 1. A reassessment of the Hurst phenomenon”. *Water Resource Research*, 14: 491-508.
- [99] **Mignon, V.**, (1998) : “Méthode d’estimation de l’exposant de Hurst, application aux rentabilités boursières”. *Economie & prévision*, pages 193-214.
- [100] **Molz, F. J., Rajaram, H., & Lu, S.** (2004): “Stochastic fractal-based models of heterogeneity in subsurface hydrology: Origins, applications, limitations, and future research questions”. *Reviews of Geophysics*, 42(1).
- [101] **Morlet, J.** (1983): “Sampling theory and wave propagation”. In *Issues in acoustic Signal image processing and recognition* (pp. 233-261). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [102] **Moulines E., F. Roueff & M.S. Taqqu**, (2007): “On the spectral density of the wavelet coefficients of long memory time series with application to the log-regression estimation of the memory parameter”. *J. Time Ser. Anal.*, 28, 155-187.
- [103] **Moulines, E., Roueff, F., & Taqqu, M. S.** (2008): “A wavelet whittle estimator of the memory parameter of a nonstationary Gaussian time series”. *The Annals of Statistics*, 1925-1956.
- [104] **Moulines E. & Soulier, Ph.** (2003): “Semiparametric spectral estimation for fractional processes, 251-301.
- [105] **Nawrocki, D.** (1995): “R/S Analysis and LongTerm Dependence in Stock Market Indices”. *Managerial Finance*, 21(7), 78-91.
- [106] **Nelson, C. R., & Plosser, C. R.** (1982): “Trends and random walks in macroeconomic time series: some evidence and implications”. *Journal of monetary economics*, 10(2), 139-162.
- [107] **Newey, W., West K.**, (1987): “A simple positive definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix”, *Econometrica*, 55(3), p. 703-708.
- [108] **NyoNyo, A. K, Cornelis A. Los, & Sijing, Z.**, (2006): “Persistence characteristics of latin american financial markets”. *Journal of Multinational Financial Management*, 16(3) :269 – 290.
- [109] **Pei P. T., Galagedera, U.A. & Maharaj, E. A.**, (2012): “A wavelet based investigation of long memory in stock returns”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 391(7) :2330 – 2341.

- [110] **Peitgen H.O. & Saupe D.**, (1988): "The Science of Fractal Images", Springer Verlag.
- [111] **Philippatos, G. C. and Wilson, C. J.** (1972): "Entropy, market risk, and the selection of efficient portfolios", *Applied Economics*, 4(3), 209-220.
- [112] **Phillips, P. C., & Perron, P.** (1988): "Testing for a unit root in time series regression". *Biometrika*, 75(2), 335-346.
- [113] **Phillips, P. C., & Shimotsu, K.** (2004): "Local Whittle estimation in nonstationary and unit root cases". *The Annals of Statistics*, 32(2), 656-692.
- [114] **Pierce, D. A.** (1975): "On trend and autocorrelation". *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 4(2), 163-175.
- [115] **Robinson P.M.**, (1994): "Semi parametric analysis of log memory time series", *Annals of statistics* 22, p. 515-539.
- [116] **Robinson P.M.** (1995): "Gaussian semiparametric estimation of long-range dependence", *The Annals of Statistics*, Vol. 23, 1630-1661.
- [117] **Robinson P.M.** (1995): "Log-periodogram regression of time series with long range dependence", *The Annals of Statistics*, Vol. 23, 1048-1072.
- [118] **Ruelle, D., & Takens, F.** (1971): "On the nature of turbulence". *Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg-RCP25*, 12, 1-44.
- [119] **Samuelson P.A.** (1965): "Proof that properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly", *Industrial Management Review*, Vol.6, pp. 41-49.
- [120] **Shannon, C. E.** (1948): "A Mathematical Theory of Communication". **Bell Labs Technical Journal**, 27(3), 379-423.
- [121] **Shimotsu, K.** (2010): "Exact local Whittle estimation of fractional integration with unknown mean and time trend". *Econometric Theory*, 26(02), 501-540.
- [122] **Shimotsu, K., & Phillips, P. C.** (2006): "Local Whittle estimation of fractional integration and some of its variants". *Journal of Econometrics*, 130(2), 209-233.
- [123] **Stachowiak, C.** (2004): "Prévisibilité des rentabilités boursières". *Economie prevision*, (5), 71-85.
- [124] **Sugihara, G., & May, R. M.** (1990): "Applications of fractals in ecology". *Trends in Ecology & Evolution*, 5(3), 79-86.
- [125] **Taqqu, M.** (1970): "Note on evaluations of R/S for fractional noises and geophysical records". *Water Resources Research*, 6(1), 349-350.

- [126] **Taqqu, M.S, Teverovsky, V., & Willinger, W.,** (1995): “Estimators for long range dependance: An empirical study”. *Fractals*. Vol. 3. pp. 785-798.
- [127] **Taqqu, M.S., Teverovsky, V. & Willinger, W.,** (1995): "Estimators of Long-Range Dependence: An Empirical Study", Preprint, Boston University, 18 pages.
- [128] **Van Dijk, D., Franses, P., & Paap, R.** (2002): “A nonlinear long-memory model, with an application to US unemployment,” *Journal of Econometrics*, 110, 135–165.
- [129] **T. Vialar.** (2009): “Complex and Chaotic Nonlinear Dynamics: Advances in Economics and Finance”. *Mathematics and Statistics*. Springer.
- [130] **Veitch D. & Abry P.,** (1999): “A wavelet-based joint estimator of the parameters of long-range dependence”, *IEEE Trans. Inf. Theory* 45, 878897.
- [131] **Velasco, C.,** (1999): “Gaussian semiparametric estimation of non-stationary time series”. *J. Time Ser. Anal.* 20(1), 87-127.
- [132] **Willinger, W., Taqqu, M.S, & Teverovsky, V.,** (1999): “Stock market price and long-range dependence”, *Finance and statistics*, 1: 1-14.
- [133] **Wojtaszczyk, P.,** (1997): “A mathematical introduction to wavelets” (No. 37). Cambridge University Press.
- [134] **Wornell, G.W.,** (1993): “Wavelet-based representations for the 1/f family of fractal processes”. *Proceedings of the IEEE*, 81:1428–1450.
- [135] **Xiaolu, L. Wenfeng, Z. Wang, D. Lirong, Y. & Zhengtong, Y.,** (2015): “The Application Of R/S Analysis For The Earthquake Prediction In Sichuan, China”. *Computer Modelling & New Technologies*, 19(2d), 18-22.
- [136] **Zhang, W. G. Liu, Y. J., & Xu, W. J.** (2012): “A possibilistic mean-semivariance-entropy model for multiperiod portfolio selection with transaction costs”. *European Journal of Operation Research*. 222(2), 341-349.
- [137] **Zieba J. Beres H., & Beres K.** (2009): “A wavelet analysis of the exchange rate of the zloty (kurs zlotego w swietle analizy falkowej)”. *Gospodarka Narodowa* (National Economy), ISSN 0867-0005, 20 :61–88.

ANNEXES

Annexe A : Définitions

Processus auto-similaire :

Un processus $X(t)$ est auto-similaire si, pour tout r positif, la dimension en échantillon fini de $X(rt)$ est la même que celle de $rX(t)$: $X(rt) \equiv_d rX(t)$. $\equiv_d$, représente l'égalité en distribution.

Processus auto-affine :

Un processus $X(t)$ est dite auto-affine de paramètre d'auto-affinité H ($0 < H < 1$), si pour tout r positif la distribution en échantillon fini de $X(rt)$ est la même que celle de $r^H X(t)$: $X(rt) \equiv_d r^H X(t)$

Dimension fractale :

La dimension fractale permet de quantifier les notions d'autosimilarité ou d'auto-affinité. Contrairement à la dimension euclidienne classique, la dimension fractale peut prendre des valeurs non entières. Cette dimension, qui caractérise le degré d'irrégularité d'une série temporelle, mesure la façon dont une série remplit son espace. Il existe de nombreuses définitions de la dimension fractale (voir Mandelbrot, 1985), une des plus utilisées étant la suivante.

Soit un ensemble compact A et soit $N(\varepsilon)$ le nombre minimal de cubes de côté ε nécessaire pour recouvrir A . La dimension fractale D est alors définie par :

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)}$$

On peut alors montrer (Mandelbrot, 1985) que pour des processus auto-affines de paramètre d'auto-affinité H , on a la relation suivante : $D=2-H$. par conséquent :

Si $1 < D < \frac{3}{2}$, soit $\frac{1}{2} < H < 1$, la série présente une mémoire longue.

Si $\frac{3}{2} < D < 2$, soit $0 < H < \frac{1}{2}$, la série est anti-persistante.

Si $D = \frac{3}{2}$, soit $H = \frac{1}{2}$, la série ne présente pas une structure de dépendance à long terme.

Mouvement Brownien Fractionnaire :

Un mouvement brownien fractionnaire d'exposant H , noté $B_H(t)$, a pour expression :

$$B_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left[\int_0^1 (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB(s) \right]$$

où $0 < H < 1$, est l'exposant de Hurst et $B(s)$ le mouvement brownien ordinaire, Γ désigne la fonction Gamma telle que $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \exp(-x) dx$. Le mouvement brownien fractionnaire est un processus auto-affine de paramètre d'auto-affinité H .

Si $H = \frac{1}{2}$, le mouvement brownien fractionnaire se réduit au mouvement brownien standard. Dans ce cas, le processus étudié est un processus à mémoire courte. Lorsque H est différent de $\frac{1}{2}$, le mouvement brownien est un processus persistant si $H > \frac{1}{2}$ et anti-persistant si $H < \frac{1}{2}$.

Annexe B : Biais et variance des estimateur de H (résultat de l'étude par simulation)

	H	Ondelette		DMA		R/S		GPH		GQV	
		$ E(\hat{H}) - H $	$Var(\hat{H})$	$ E(\hat{H}) - H $	$Var(\hat{H})$	$ E(\hat{H}) - H $	$Var(\hat{H})$	$ E(\hat{H}) - H $	$Var(\hat{H})$	$ E(\hat{H}) - H $	$Var(\hat{H})$
Taille des séries entre 500 et 2750	0.2	0.0454	0.0009	0.0441	0.0011	0.8592	0.0684	0.5262	0,0207	0.0467	0.0011
	0.3	0.0319	0.0007	0.0480	0.0013	0.8185	0.0770	0.5485	0.0362	0.0326	0.0008
	0.4	0.0292	0.0006	0.0529	0.0015	0.7543	0.0693	0.6017	0.0870	0.0289	0.0005
	0.5	0.0303	0.0006	0.0588	0.0019	0.6912	0.0703	0.6322	0.0974	0.0284	0.0005
	0.6	0.0312	0.0006	0.0574	0.0018	0.5925	0.0562	0.6032	0.0893	0.0291	0.0005
	0.7	0.0325	0.0006	0.0600	0.0021	0.4943	0.0550	0.5395	0.0783	0.0267	0.0004
	0.8	0.0343	0.0008	0.0615	0.0027	0.4365	0.0698	0.4889	0.0761	0.0271	0.0005
	0.9	0.0328	0.0008	0.0581	0.0023	0.3263	0.0642	0.4167	0.0755	0.0250	0.0004
Tailles des séries entre 2900 et 5150	0.2	0.0410	0.0004	0.0367	0.0008	0.8828	0.0620	0.5299	0.0097	0.0419	0.0004
	0.3	0.0244	0.0003	0.0422	0.0010	0.8129	0.0652	0.5305	0.0128	0.0245	0.0003
	0.4	0.0190	0.0002	0.0533	0.0017	0.7362	0.0703	0.5931	0.0621	0.0195	0.0002
	0.5	0.0186	0.0002	0.0576	0.0020	0.6680	0.0586	0.6372	0.0868	0.0180	0.0002
	0.6	0.0190	0.0002	0.0559	0.0019	0.6009	0.0669	0.6447	0.0936	0.0170	0.0002
	0.7	0.0190	0.0002	0.0595	0.0022	0.4991	0.0643	0.5654	0.0732	0.0162	0.0001
	0.8	0.0199	0.0002	0.0610	0.0025	0.4518	0.0812	0.4983	0.0633	0.0158	0.0001
	0.9	0.0205	0.0002	0.0682	0.0031	0.3678	0.0971	0.4343	0.0777	0.0146	0.0001

Taille des séries entre 5300 et 7550											
	0.2	0.0405	0.0002	0.0339	0.0007	0.8668	0.0837	0.5295	0.0073	0.0408	0.0003
	0.3	0.0214	0.0002	0.0444	0.0013	0.8037	0.0667	0.5474	0.0151	0.0228	0.0002
	0.4	0.0154	0.0001	0.0514	0.0016	0.7338	0.0626	0.5748	0.0479	0.0159	0.0001
	0.5	0.0141	0.0001	0.0539	0.0016	0.6569	0.0590	0.6771	0.0957	0.0130	0.0001
	0.6	0.0147	0.0001	0.0620	0.0022	0.5818	0.0607	0.6333	0.0767	0.0127	0.0001
	0.7	0.0162	0.0001	0.0580	0.0020	0.4926	0.0549	0.5682	0.0720	0.0139	0.0001
	0.8	0.0159	0.0001	0.0607	0.0024	0.4273	0.0793	0.4965	0.0667	0.0133	0.0001
	0.9	0.0160	0.0002	0.0811	0.0039	0.3473	0.0859	0.4298	0.0776	0.0122	0.0001
Tailles des séries entre 7700 et 9950											
	0.2	0.0405	0.0002	0.0364	0.0008	0.8790	0.0779	0.5390	0.0070	0.0410	0.0003
	0.3	0.0203	0.0002	0.0424	0.0011	0.8105	0.0739	0.5432	0.0180	0.0205	0.0002
	0.4	0.0135	0.0001	0.0464	0.0014	0.7599	0.0667	0.5895	0.0493	0.0139	0.0001
	0.5	0.0112	0.0001	0.0510	0.0018	0.6666	0.0662	0.6713	0.0941	0.0105	0.0001
	0.6	0.0116	0.0001	0.0529	0.0016	0.5952	0.0672	0.6681	0.0837	0.0106	0.0001
	0.7	0.0128	0.0001	0.0579	0.0020	0.4941	0.0687	0.5684	0.0590	0.0109	0.0001
	0.8	0.0136	0.0001	0.0557	0.0022	0.4372	0.0834	0.5113	0.0686	0.0114	0.0001
	0.9	0.0136	0.0001	0.0763	0.0031	0.3832	0.1015	0.4428	0.0741	0.0106	0.0001

Annexe C : Critères de comparaison

✓ Critère d'information d'Akaike (1974)

Akaike a montré que le meilleur modèle ARMA(p,q) est celui qui minimise la statistique :

$$AIC(p, q) = N \times LOG(\sigma^2) + 2(P + q)$$

où p est l'ordre de la partie AR, q est l'ordre de la partie MA et N est le nombre d'observations.

✓ Critère d'information de Schwarz (1978)

Le modèle ARMA(p,q) optimal est celui qui minimise la statistique :

$$SIC(p, q) = N \times LOG(\sigma^2) + (p + q) \times LOG(N)$$

Plus la valeur de ces critères d'information est faible plus le modèle estimé est plus proche des observations et par conséquent on choisit celui qui les minimise.

Annexe D : Programmes utilisés

******* Programme pour calculer l'exposant de Hurst *******

```
load donnee3.wf1 ' *****chargement du fichier contenant nos données

series x=dlog_BSVP

scalar T=@obs(x) ' ***** le nombre d'observations

vector (T) y=x      ' *** création d'un vecteur y pour stocker les données

vector (T) som      ' *** création d'un vecteur Som pour stocker les valeurs des
                    ' *** sommations pour k allant de 1 jusqu'à T, et pour j allant
                    ' ***de 1 jusqu'à k.

scalar y_mean= @mean(y) ' *** calcul de la moyenne

scalar Sn=@sqrt(@var(y)) ' *** calcul de l'écart_type

for !k=1to T      '*** 2 boucles for imbriquées pour calculer les sommations

    scalar s=0

    for !j=1 to !k
        s=s+(y(!j) - y_mean)
    Next
    som (!k)=s
Next

scalar som_max = @max(som) ' *** la valeur maximale des sommations
                    ' *** pour tout k
scalar som_min = @min(som) ' *** la valeur minimale des sommations
                    ' *** pour tout k

scalar RS=(som_max-som_min)*(1/Sn) ' *** calcul de la statistique R/Sn

scalar H=log(RS)/log(T)      ' ***** calcul d'exposant de Hurst H
```

Code R :

*****Pour choisir le modèle ARIMA (p,d,q) qui minimise le critère d'Akaike*****

```
mydata= read.table ("C://Users/IMANE/Desktop/données.txt",header=TRUE)
mydata
dataframe<-data.frame (mydata)
X1<-dataframe [, 2]
X1
r<-diffseries(X1,1)
auto.arima(r,max.p=5,max.q=5,d=0,trace=FALSE,test="adf",stationary=F)
```

*****Pour faire une modélisation ARFIMA*****

```
mydata= read.table ("C://Users/IMANE/Desktop/données.txt",header=TRUE)
mydata
dataframe<-data.frame (mydata)
X1<-dataframe [, 2]
r<- diffseries(X1, 0.3075)
adf.test(r) 'faire le test de Dickey-Fuller'
model <- auto.arima (r,max.p=5, max.q=5,d=0,trace=FALSE,test="adf",stationary=F)
model
residuals(model)->res
acf (res, col="green3"); pacf (res, col="green3")
predict(model,n.ahead=31)
```

Codes EViews:

***** Code de la simulation d'un processus AR(2) *****

```
create d 01/01/2009 30/12/2017 ' déclaration de la date pour indexer la série par le
                                temps (création de l'espace du travail : Workfile).
series eps = nrnd                ' Génération de la série  $X_t$  bruit blanc gaussien.
series AR2 = 0.9/(1-0.4-0.3)     ' Initialisation de la série AR2 qui suit un
                                processus AR(2) par la valeur moyenne.

smpl @first+2 @last
genr AR2 = 0.9 + 0.4*AR2(-1) + 0.3*AR2(-2) + eps ' Génération de la série AR2 qui
                                suit un processus AR(2).

AR2.correl(36,P)                 ' Commande d'affichage du corrélogramme de la
                                série AR2 avec 36 retards.

AR2.line                         ' Commande d'affichage du graphe de la série AR2.
```

***** Code de la simulation d'un processus MA(1) *****

```
create d 12/10/2009 26/11/2017 ' déclaration de la date pour indexer la série par le
                                temps (création de l'espace du travail : Workfile).
series eps = nrnd                ' Génération et initialisation de la série  $\varepsilon_t$  bruit
                                blanc gaussien.
series MA1 = 0.5                 ' Initialisation de la série MA1 qui suit un
                                processus MA(1) par la valeur moyenne.
smpl @first+1 @last
genr MA1 = 0.5 - 0.7*eps(-1) + eps ' Génération de la série MA1 qui suit un
                                processus MA(1).
MA1.correl(36,P)                 ' Commande d'affichage du corrélogramme de la
                                série MA1 avec 36 retards.
MA1.line                         ' Commande d'affichage du graphe de la série MA1.
```

***** Code de la simulation d'un processus ARMA(2,1) *****

```
create d 01/01/2009 30/12/2018 ' déclaration de la date pour indexer la série par le
                                temps (création de l'espace du travail : Workfile).
series eps = nrnd                ' Génération et initialisation de la série  $\varepsilon_t$  bruit
                                blanc gaussien.
series AR1=rnd                   ' Initialisation de la série AR1 qui suit un
                                processus AR(1) par valeurs aléatoires.
smpl @first+1 @last
genr AR1= 0.5*AR1(-1) + eps      ' Génération de la série MA1 qui suit un
                                processus AR(1).
smpl @first+2 @last
genr MA2 = 0.7*eps(-1) - 0.8*eps(-2)+ eps ' Génération de la série MA2 qui suit un
                                processus MA(2).
smpl @first+2 @last
genr ARMA12 = 0.5*AR1(-1) + 0.7*eps(-1) - 0.8*eps(-2)+ eps ' Génération de la série
                                ARMA12 qui suit un
```

processus ARMA(1,2).

ARMA12.correl(36,P)

' Commande d'affichage du corrélogramme de la série ARMA12 avec 36 retards.

plot ARMA12

' Commande d'affichage du graphe de la série ARMA(1,2).

*****Simulation d'un ARIMA(1,1,0)*****

```
ts.sim <- arima.sim (list(order = c(1,1,0), ar = 0.7), n = 100)
plot(ts.sim)
acf(ts.sim)
```

*****Simulation d'un ARFIMA(0,0.3,0)*****

```
r <- fracdiff.sim(n=1000, ar=0, d= 0.3, ma=0)
plot(as.ts(r$series))
acf(r)
```

*****Simulation d'un ARFIMA(1,0.4,0)*****

```
r <- fracdiff.sim(n=1000, ar=1, d= 0.4, ma=0)
plot(as.ts(r$series))
acf(r)
```

*****Simulation d'un ARFIMA(1,-0.4,0)*****

```
r <- fracdiff.sim(n=1000, ar=1, d= -0.4, ma=0)
plot(as.ts(r$series))
acf(r)
```

Annexe E : Sorties des applications empiriques :

Test de Stationnarité KPSS :

Pour la série DLOG USD MAD :

Null Hypothesis: DLOG_USD_MAD is stationary				
Exogenous: Constant				
Bandwidth: 108 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel				
				LM-Stat.
Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test statistic				14.10852
Asymptotic critical values*:		1% level		0.739000
		5% level		0.463000
		10% level		0.347000
*Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (1992, Table 1)				
Residual variance (no correction)				0.000107
HAC corrected variance (Bartlett kernel)				2.04E-05
KPSS Test Equation				
Dependent Variable: DLOG_USD_MAD				
Method: Least Squares				
Sample (adjusted): 12/15/2000 12/14/2017				
Included observations: 6209 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-2.30E-05	0.000131	-0.174754	0.8613
R-squared	0.000000	Mean dependent var		-2.30E-05
Adjusted R-squared	-0.000000	S.D. dependent var		0.010361
S.E. of regression	0.010361	Akaike info criterion		-6.301309
Sum squared resid	0.666475	Schwarz criterion		-6.300224
Log likelihood	19563.41	Hannan-Quinn criter.		-6.300933
Durbin-Watson stat	2.322273			

Pour la série DLOG EURO MAD :

Null Hypothesis: DLOG_EURO_MAD is stationary				
Exogenous: Constant				
Bandwidth: 1.01e+003 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel				
				LM-Stat.
Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test statistic				16.97878
Asymptotic critical values*:	1% level			0.739000
	5% level			0.463000
	10% level			0.347000
*Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (1992, Table 1)				
Residual variance (no correction)				0.000101
HAC corrected variance (Bartlett kernel)				1.85E-06
KPSS Test Equation				
Dependent Variable: DLOG_EURO_MAD				
Method: Least Squares				
Sample (adjusted): 12/15/2000 12/14/2017				
Included observations: 6209 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.25E-05	0.000128	0.176531	0.8599
R-squared	0.000000	Mean dependent var		2.25E-05
Adjusted R-squared	0.000000	S.D. dependent var		0.010054
S.E. of regression	0.010054	Akaike info criterion		-6.361509
Sum squared resid	0.627537	Schwarz criterion		-6.360424
Log likelihood	19750.30	Hannan-Quinn criter.		-6.361133
Durbin-Watson stat	2.405959			

Test de Dickey Fuller Augmenté ADF :

Pour la série DLOG USD MAD :

Null Hypothesis: DLOG_USD_MAD has a unit root				
Exogenous: Constant				
Lag Length: 1 (Automatic - based on AIC, maxlag=1)				
			t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic			-76.61173	0.0001
Test critical values:	1% level		-3.431224	
	5% level		-2.861811	
	10% level		-2.566956	
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(DLOG_USD_MAD)				
Method: Least Squares				
Date: 10/05/20 Time: 00:29				
Sample (adjusted): 12/17/2000 12/14/2017				
Included observations: 6207 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
DLOG_USD_MAD(-1)	-1.439122	0.018785	-76.61173	0.0000
D(DLOG_USD_MAD(-1))	0.239406	0.012327	19.42199	0.0000
C	-3.28E-05	0.000126	-0.260175	0.7947
R-squared	0.604611	Mean dependent var		-4.09E-07
Adjusted R-squared	0.604483	S.D. dependent var		0.015792
S.E. of regression	0.009932	Akaike info criterion		-6.385708
Sum squared resid	0.611941	Schwarz criterion		-6.382454
Log likelihood	19821.05	Hannan-Quinn criter.		-6.384580
F-statistic	4743.437	Durbin-Watson stat		2.067706
Prob(F-statistic)	0.000000			

Pour la série DLOG EURO MAD :

Null Hypothesis: DLOG_EURO_MAD has a unit root				
Exogenous: Constant				
Lag Length: 1 (Automatic - based on AIC, maxlag=1)				
			t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic			-81.43372	0.0001
Test critical values:	1% level		-3.431224	
	5% level		-2.861811	
	10% level		-2.566956	
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(DLOG_EURO_MAD)				
Method: Least Squares				
Date: 10/05/20 Time: 00:31				
Sample (adjusted): 12/17/2000 12/14/2017				
Included observations: 6207 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
DLOG_EURO_MAD(-1)	-1.539620	0.018906	-81.43372	0.0000
D(DLOG_EURO_MAD(-1))	0.279809	0.012189	22.95626	0.0000
C	3.33E-05	0.000120	0.277634	0.7813
R-squared	0.632704	Mean dependent var		-3.38E-08
Adjusted R-squared	0.632586	S.D. dependent var		0.015598
S.E. of regression	0.009454	Akaike info criterion		-6.484187
Sum squared resid	0.554550	Schwarz criterion		-6.480933
Log likelihood	20126.67	Hannan-Quinn criter.		-6.483059
F-statistic	5343.509	Durbin-Watson stat		2.108740
Prob(F-statistic)	0.000000			

Sortie de la Modélisation ARFIMA :

Pour la série LOG USD MAD :

Dependent Variable: LOG_USD_MAD_ Method: ARMA Maximum Likelihood (OPG - BHHH) Date: 12/03/19 Time: 05:25 Sample: 12/14/2000 12/14/2017 Included observations: 6210 Failure to improve objective (non-zero gradients) after 16 iterations Coefficient covariance computed using outer product of gradients				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.232072	28.97692	0.077029	0.9386
D	0.394977	0.003148	158.6869	0.0000
AR(2)	0.988101	0.002823	350.0646	0.0000
MA(2)	-0.915840	0.006932	-132.1463	0.0000
SIGMASQ	9.97E-05	1.38E-06	72.34774	0.0000
R-squared	0.991969	Mean dependent var		2.187267
Adjusted R-squared	0.991964	S.D. dependent var		0.111410
S.E. of regression	0.009987	Akaike info criterion		-6.372282
Sum squared resid	0.618942	Schwarz criterion		-6.366860
Log likelihood	19790.94	Hannan-Quinn criter.		-6.370402
F-statistic	191601.6	Durbin-Watson stat		1.644261
Prob(F-statistic)	0.000000			
Inverted AR Roots	.99	-.99		
Inverted MA Roots	.96	-.96		

Pour la série LOG EURO MAD :

Dependent Variable: LOG_EURO_MAD_ Method: ARMA Maximum Likelihood (OPG - BHHH) Date: 09/23/20 Time: 05:23 Sample: 12/14/2000 12/14/2017 Included observations: 6210 Convergence achieved after 39 iterations Coefficient covariance computed using outer product of gradients				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.371245	0.039294	60.20416	0.0000
D	0.375637	0.008851	46.02767	0.0000
AR(2)	0.998263	0.001255	794.7620	0.0000
MA(2)	-0.973029	0.003582	-273.4902	0.0000
SIGMASQ	7.86E-05	1.10E-06	71.45959	0.0000
R-squared	0.919441	Mean dependent var		2.386793
Adjusted R-squared	0.918488	S.D. dependent var		0.031057
S.E. of regression	0.008867	Akaike info criterion		-6.611196
Sum squared resid	0.487841	Schwarz criterion		-6.605774
Log likelihood	20532.76	Hannan-Quinn criter.		-6.609316
F-statistic	17492.06	Durbin-Watson stat		1.742579
Prob(F-statistic)	0.000000			
Inverted AR Roots	1.00	-1.00		
Inverted MA Roots	.99	-.99		

Test KPSS pour les indices boursiers sous études :

Null Hypothesis: DLOG_BSVP is stationary				
Exogenous: Constant				
Bandwidth: 5 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel				
		LM-Stat.		
Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test statistic		0.476362		
Asymptotic critical values*:	1% level	0.739000		
	5% level	0.463000		
	10% level	0.347000		
*Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (1992, Table 1)				
Residual variance (no correction)		0.003401		
HAC corrected variance (Bartlett kernel)		0.002868		
KPSS Test Equation				
Dependent Variable: DLOG_BSVP				
Method: Least Squares				
Date: 12/04/19 Time: 06:47				
Sample (adjusted): 2010M04 2019M02				
Included observations: 107 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.002862	0.005664	0.505234	0.6144
R-squared	0.000000	Mean dependent var		0.002862
Adjusted R-squared	0.000000	S.D. dependent var		0.058592
S.E. of regression	0.058592	Akaike info criterion		-2.827149
Sum squared resid	0.363895	Schwarz criterion		-2.802170
Log likelihood	152.2525	Hannan-Quinn criter.		-2.817023
Durbin-Watson stat	1.880597			

Null Hypothesis: DLOG_MXX is stationary				
Exogenous: Constant				
Bandwidth: 11 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel				
		LM-Stat.		
Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test statistic		0.576121		
Asymptotic critical values*:	1% level	0.739000		
	5% level	0.463000		
	10% level	0.347000		
*Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (1992, Table 1)				
Residual variance (no correction)		0.001181		
HAC corrected variance (Bartlett kernel)		0.000563		
KPSS Test Equation				
Dependent Variable: DLOG_MXX				
Method: Least Squares				
Date: 12/04/19 Time: 06:56				
Sample (adjusted): 2010M04 2019M02				
Included observations: 107 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.002360	0.003338	0.706981	0.4811
R-squared	0.000000	Mean dependent var		0.002360
Adjusted R-squared	0.000000	S.D. dependent var		0.034533
S.E. of regression	0.034533	Akaike info criterion		-3.884476
Sum squared resid	0.126411	Schwarz criterion		-3.859496
Log likelihood	208.8195	Hannan-Quinn criter.		-3.874349
Durbin-Watson stat	2.084310			

Null Hypothesis: DLOG_CAC40 is stationary				
Exogenous: Constant				
Bandwidth: 5 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel				
				LM-Stat.
Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test statistic				0.500089
Asymptotic critical values*:	1% level			0.739000
	5% level			0.463000
	10% level			0.347000
*Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (1992, Table 1)				
Residual variance (no correction)				0.001862
HAC corrected variance (Bartlett kernel)				0.001577
KPSS Test Equation				
Dependent Variable: DLOG_CAC40				
Method: Least Squares				
Date: 12/04/19 Time: 07:07				
Sample (adjusted): 2010M04 2019M02				
Included observations: 107 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.002585	0.004191	0.616870	0.5386
R-squared	0.000000	Mean dependent var		0.002585
Adjusted R-squared	0.000000	S.D. dependent var		0.043355
S.E. of regression	0.043355	Akaike info criterion		-3.429483
Sum squared resid	0.199244	Schwarz criterion		-3.404503
Log likelihood	184.4773	Hannan-Quinn criter.		-3.419356
Durbin-Watson stat	1.964756			

Null Hypothesis: DLOG_SSEC is stationary				
Exogenous: Constant				
Bandwidth: 0 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel				
				LM-Stat.
Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test statistic				0.540819
Asymptotic critical values*:		1% level		0.739000
		5% level		0.463000
		10% level		0.347000
*Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (1992, Table 1)				
Residual variance (no correction)				0.004267
HAC corrected variance (Bartlett kernel)				0.004267
KPSS Test Equation				
Dependent Variable: DLOG_SSEC				
Method: Least Squares				
Date: 12/04/19 Time: 07:08				
Sample (adjusted): 2010M04 2019M02				
Included observations: 107 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.000520	0.006345	-0.081900	0.9349
R-squared	0.000000	Mean dependent var		-0.000520
Adjusted R-squared	0.000000	S.D. dependent var		0.065630
S.E. of regression	0.065630	Akaike info criterion		-2.600259
Sum squared resid	0.456577	Schwarz criterion		-2.575279
Log likelihood	140.1138	Hannan-Quinn criter.		-2.590132
Durbin-Watson stat	1.639318			

Null Hypothesis: DLOG_XU100 is stationary				
Exogenous: Constant				
Bandwidth: 13 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel				
		LM-Stat.		
Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test statistic		0.500048		
Asymptotic critical values*:	1% level	0.739000		
	5% level	0.463000		
	10% level	0.347000		
*Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (1992, Table 1)				
Residual variance (no correction)		0.003709		
HAC corrected variance (Bartlett kernel)		0.002156		
KPSS Test Equation				
Dependent Variable: DLOG_XU100				
Method: Least Squares				
Date: 12/04/19 Time: 07:14				
Sample (adjusted): 2010M04 2019M02				
Included observations: 107 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.005743	0.005915	0.970986	0.3338
R-squared	0.000000	Mean dependent var		0.005743
Adjusted R-squared	0.000000	S.D. dependent var		0.061186
S.E. of regression	0.061186	Akaike info criterion		-2.740484
Sum squared resid	0.396839	Schwarz criterion		-2.715504
Log likelihood	147.6159	Hannan-Quinn criter.		-2.730357
Durbin-Watson stat	2.095342			

Résumé

Plusieurs recherches empiriques sur des données des marchés financiers ont révélé un certain nombre de propriétés des séries chronologiques dont essentiellement le comportement de mémoire longue, au sens de la décroissance hyperbolique des autocorrélations. Cette thèse s'est alors focalisée sur l'estimation de la persistance dans les séries chronologiques et la compréhension de sa dynamique.

La contribution effective de cette thèse couvre différents axes. Premièrement, nous avons mis en avant l'intérêt du concept de la mémoire longue en introduisant une classe de processus qui représentent de tels comportements.

Après avoir présenté le concept de la longue dépendance, nous exposons dans la deuxième partie différentes méthodes d'estimation du paramètre de mémoire. Une étude de simulation a été effectuée pour comparer la performance de certaines méthodes d'estimation de l'exposant de Hurst. Les résultats de cette simulation montrent la supériorité de la méthode d'ondelettes dans l'estimation de la mémoire longue des séries temporelles de taux de change marocain.

Par l'intermédiaire de l'exposant de Hurst, la troisième partie s'articule autour des implications de la mémoire longue en finance tant dans un contexte méthodologique sur la détection et l'identification de la nature de la structure de dépendance que dans celui empirique sur l'efficacité des marchés boursiers.

Mots clés : séries chronologiques, mémoire longue, estimation, ondelettes, taux de change, exposant de Hurst, efficacité.

Abstract

Several empirical researches on financial market data have revealed many properties of time series, mainly the behavior of long memory, in the sense of hyperbolic decay of autocorrelation. This thesis then focused on the estimation and modelling of persistence in time series and understanding its dynamics.

The actual contribution of this thesis covers different axes. First, we highlighted the value of the concept of long memory by introducing a class of processes that represent such behavior.

After presenting the long dependence concept, we expounded in the second part of different methods of estimation of the memory parameter and a simulation study was carried out to compare the performance of some methods of estimation of the Hurst exponent, the results of which show the superiority of the wavelet method in the estimation of the long memory of time series in the context of the Moroccan exchange rate.

Through the Hurst Exhibitor, the third part focuses on the implications of long memory in financing both on a methodological context on the detection and identification of the nature of the dependency structure and an empirical context on the efficiency of stock markets.

Keywords: time series, long memory, estimation, wavelets, exchange rate, Hurst exponent, efficiency.