



N° d'ordre : 3942

THÈSE

en vue de l'obtention du : DOCTORAT

Centre de Recherche : C.R.M.A.R

Structure de Recherche : A.F.T.O

Discipline : Mathématiques

Spécialité : Analyse fonctionnelle

Présentée et Soutenue le : 10/ 07 / 2024

par :

Driss EL BOUKASMI

Caractérisations des différents types d'algèbres par les fonctions qui opèrent sur elles

JURY

Abderrahmane EL HACHIMI	PES	Faculté des Sciences, Université Mohammed Rabat	Président
Samir EL KABBAJ	PES	Faculté des Sciences, Université Ibn Tofail Kénitra	Rapporteur/Examineur
Abdelghani SALHI	PH	E.N.S, Université Mohammed V Rabat	Rapporteur/Examineur
Lahcen BOUCHIKHI	PH	E.N.S, Université Mohammed V Rabat	Rapporteur/Examineur
Kaissar IDRISI	PH	Faculté des Sciences, Université Mohammed V Rabat	Examineur
Abdellah EL KINANI	PES	E.N.S, Université Mohammed V Rabat	Directeur de thèse

Année Universitaire : 2023 - 2024

Dédicace

À la mémoire de mes parents et ma soeur Faouszia

À mon frère et mes soeurs

À mes chères filles Kenza et Ghita

À mon petit-fils Youssef

À ma femme

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein de l'équipe d'analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs (A.F.T.O) de l'école Normale Supérieure de Rabat, Université Mohammed V, dirigée par Monsieur Abdellah EL KINANI, professeur d'enseignements supérieurs.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude au Professeur Abdellah EL KINANI qui a bien voulu prendre en charge la direction de cette thèse. Son talent de chercheur ainsi que ses qualités humaines ont largement contribué à l'aboutissement de ce travail. Qu'il trouve ici l'expression de mon profond respect.

Je remercie vivement Monsieur Abderrahmane EL HACHIMI, Professeur à la faculté des sciences de Rabat, pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury de cette thèse.

J'adresse mes remerciements les plus sincères à Monsieur Samir EL KABBAJ, Professeur à la faculté des sciences de Kénitra, pour sa lecture approfondie du manuscrit et pour la discussion qu'il m'a accordée. Sa présence dans le jury me fait un grand honneur.

Monsieur Lahcen BOUCHIKHI, Professeur habilité à l'école Normale Supérieure de Rabat m'honore en acceptant d'être rapporteur et de participer au jury de cette thèse. Qu'il me permette de lui exprimer mes vifs remerciements.

Monsieur Abdelghani SALHI, Professeur habilité à l'école Normale Supérieure de Rabat, me fait l'honneur de rapporter ce travail et de siéger au jury. Je lui exprime toute ma reconnaissance.

Ma reconnaissance et mes remerciements s'adressent aussi à Monsieur Kaissar IDRISSE, Professeur habilité à la faculté des sciences de Rabat, qui

a bien voulu examiner ce travail et siéger au jury.

Je tiens également à remercier chaleureusement Monsieur Miloud CHAH-BOUN pour l'aide qu'il m'a apportée lors de la rédaction de cette thèse.

Résumé

Ce travail porte sur la caractérisation des différents types d'algèbres par les fonctions qui opèrent sur elles.

La première partie trouve son origine dans les travaux de A. El Kinani qui prolongent, au cas des algèbres de Banach complexes unitaires, les résultats de Y. Katznelson obtenus dans le cas des algèbres de Banach complexes unitaires semi-simples et commutatives. Ainsi, nous examinons d'abord, l'opération spectrale, dans les algèbres complexes unitaires, non nécessairement topologiques. Nous abordons ensuite le cas des algèbres topologiques. En optant pour une démarche similaire à celle de l'opération spectrale, nous fournissons une étude de l'opération faible tout en comparant certains résultats obtenus. Nous avons examiné également l'opération au sens de Katznelson dans les algèbres localement convexes, et fourni un théorème de structure des algèbres m -convexes unitaires commutatives semi-simples complètes de dimension dénombrable.

La deuxième partie est consacrée à l'étude de la question suivante : Existe-t-il des classes d'algèbres où le résultat de I. Kaplansky suivant reste valide ? "Si A est une algèbre de Banach complexe dont le spectre de chaque élément est fini, alors A est de dimension finie modulo son radical de Jacobson ". Nous fournissons un exemple d'une Q -algèbre m -convexe unitaire commutative complète semi-simple spectralement finie dont le radical de Jacobson n'est pas de codimension finie. Ensuite, nous montrons que pour la classe des algèbres de Fréchet, la réponse à la question posée est positive. Puis, nous montrons que si A est une Q -algèbre de Fréchet unitaire spectralement finie sans éléments quasi-nilpotents non nuls, alors A est isomorphe à $\mathbb{C}^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$. On établit, également que toute algèbre complexe unitaire algébrique sans éléments nilpotents non nuls est commutative et semi-simple. Nous donnons à la fin, sous forme d'annexe, un résultat donnant la structure d'une Q -algèbre de Fréchet unitaire A vérifiant : $Ax^2 = Ax$, pour tout x dans A .

Mots-clefs (5) : Algèbres de Banach, Algèbres localement convexes, Q -algèbres, Algèbres de Fréchet, Algèbres spectralement finies.

Abstract

This work focuses on characterizing the different types of algebras through the functions that operate on them.

The first part is based on the work of A. El Kinani, which extends the results of Y. Katznelson to the case of complex unital Banach algebras. We examine the spectral operation first in complex unital algebras, which may not necessarily be topological. Then we move on the case of topological algebras. Following a similar approach to the spectral operation, we provide a study of the weak operation while comparing certain results obtained. We also examine the operation in the sense of Katznelson in locally convex algebras and a structure result concerning semi-simple commutative complete m -convex unital algebras of countable dimension is also given.

The second part is dedicated to studying the following question : Are there classes of algebras where I. Kaplansky's result, stating that "If A is a complex Banach algebra whose spectrum of each element is finite, then A is of finite dimension modulo its Jacobson radical" remains valid ? We provide an example of a complete spectrally finite commutative unital m -convex Q -algebra, whose Jacobson radical is not of finite codimension. Then, we showed for the Fréchet algebra class, the answer to the question posed is positive. Next, we show that if A is a unital Q -Fréchet algebra which is spectrally finite and without nonzero quasi-nilpotent elements, then A is isomorphic to $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Then, we establish that any unital algebraic complex algebra without nonzero nilpotent elements is commutative and semi-simple. Finally, we add as an appendix, the structure of unital Q -Fréchet algebra A satisfying : $Ax^2 = Ax$, for every x in A .

Keywords (5) : Banach algebras, Locally convex algebras, Q -algebras, Fréchet algebras, Spectral finite algebras.

Publications

- El Boukasmi, D. ; El Kinani, A. *Spectral operation in locally convex algebras*. Proyecciones 41 (2022), no. 3, 683–695.
- El Boukasmi, D. ; El Kinani, *On spectrally finite Fréchet algebras*. Surveys in Mathematics and its Applications Volume 17 (2022), 345-356.
- El Boukasmi, D. *Structure of unital Q -Fréchet algebras A satisfying : $Ax^2 = Ax$, for every $x \in A$* . Le Matematiche Volume 78 (2023), No. 2, 359-364.

Communications

Ci-après, les communications orales que j'ai prononcées, dans différentes manifestations scientifiques organisées par la Faculté des sciences de Rabat et la faculté des sciences de Kenitra.

20-21 mai 2022 : Communication dans les journées scientifiques du LAMA tenues les 20 et 21 mai 2022 à la faculté des sciences université Mohammed V de Rabat, intitulée : Spectral operation in locally convex algebras.

28 mai 2022 : Communication dans la conférence nationale de mathématiques et applications organisée à la faculté des sciences de Kenitra le 28 mai 2022, intitulée : On spectrally finite Fréchet algebras.

16-17 décembre 2022, : Conférence Internationale de Mathématiques et Applications, en l'honneur du Professeur Mohamed AKKAR, Université de Bordeaux, France. Faculté des Sciences Kenitra, les 16 et 17 décembre 2022, intitulée : Characterization of locally convex algebras by the functions that operate spectrally on them.

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Résumé	iv
Abstract	v
Publications	vi
Communications	vii
Introduction générale	1
1 Préliminaires.	9
1 Notions algébriques.	10
2 Algèbres de Banach.	14
3 Algèbres m -convexes et Q -algèbres.	15
4 Caractérisations des algèbres de Banach unitaires par les fonctions qui opèrent sur elles.	17
4.1 Cas des algèbres de Banach unitaires semi-simples et commutatives.	17
4.2 Cas des algèbres de Banach unitaires non nécessairement commutatives et semi-simples.	20
5 Caractérisation des algèbres de Banach spectralement finies.	29
6 Structure d'une algèbre de Banach unitaire A vérifiant : $Ax^2 = Ax$, pour tout $x \in A$	33
Références	34

2	Opération spectrale dans les algèbres localement convexes.	37
	Introduction	37
1	Opération spectrale dans les algèbres non nécessairement topologiques.	39
2	Opération spectrale dans les algèbres topologiques.	43
3	Opération au sens de Katznelson dans les algèbres localement convexes.	48
4	Structure de certaines algèbres de dimension dénombrable. . .	52
	Références	55
3	Opération faible dans les algèbres localement convexes.	57
	Introduction	57
1	Opération faible dans les algèbres unitaires non nécessairement topologiques.	59
2	Opération faible dans les Q -algèbres m -convexes unitaires. . .	61
	Références	64
4	Caractérisation des algèbres topologiques spectralement finies.	66
	Introduction	66
1	Cas commutatif.	67
2	Cas des algèbres de Fréchet.	68
	Références	78
5	Annexe : Structure d'une Q-algèbre de Fréchet unitaire B vérifiant :	
	$Bx^2 = Bx$, pour tout $x \in B$.	80
	Introduction	80
1	Structure d'une Q -algèbre de Fréchet unitaire B vérifiant :	
	$Bx^2 = Bx$, pour tout $x \in B$	81
	Références	84
	Bibliographie générale.	86

Introduction générale.

Dans ([23]), Y. Katznelson, en considérant une algèbre de Banach complexe unitaire commutative et semi-simple A , a défini la notion des fonctions qui opèrent sur A comme suit : soit D une partie de $\mathbb{C}$. On dit qu'une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ opère, au sens de Katznelson sur A , si pour tout $x \in A$, tel que $Sp_A(x) \subset D$, il existe un élément dans A , noté $f(x)$, tel que $f \circ \widehat{x} = \widehat{f(x)}$, où $\widehat{x}$ désigne la transformée de Fourier-Gelfand de x . Il a montré deux résultats. Le premier ([23], Théorème 1, p. 903)¹, donne la caractérisation suivante : si A est une algèbre de Banach complexe unitaire commutative et semi-simple, une condition nécessaire et suffisante pour que toute fonction opère au sens de Katznelson sur A , est que A soit de dimension finie. Il a également établi dans le deuxième ([23], Théorème 2, p. 903), que si A est une algèbre de Banach complexe unitaire commutative et semi-simple, une condition nécessaire et suffisante pour que toute fonction continue opère au sens de Katznelson sur A , est que A soit l'algèbre de toutes les fonctions continues sur son espace des caractères non nuls.

Dans le but d'étendre les deux résultats de Katznelson aux algèbres de Banach complexes unitaires qui ne sont pas nécessairement commutatives et semi-simples, A. El Kinani a introduit, dans ([16]), deux notions de fonctions qui opèrent. La première est la notion de fonction qui opère spectralement

1. Pour les références de cette thèse, le premier indique la référence, le deuxième indique le numéro du théorème ou proposition..., quand au troisième, il indique le numéro de la page.

définie comme suit : soit D une partie de $\mathbb{C}$. On dit qu'une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ opère spectralement sur une algèbre de Banach complexe unitaire A , si pour tout $x \in A$ dont le spectre est contenu dans D , il existe un élément dans A , noté $f(x)$ tel que :

$$Sp_A(f(x)) = f(Sp_A(x)).$$

Il a obtenu dans ce cadre le résultat suivant ([16], Théorème II.1, p. 58) : si A est une algèbre de Banach complexe unitaire, une condition nécessaire et suffisante pour que toute fonction opère spectralement sur A , est que $A/Rad(A)$ soit de dimension finie. Comme conséquence de ce résultat, il a obtenu deux corollaires. Le premier ([16], Corollaire II.2, p. 59), traite du cas commutatif. Ainsi, si A est une algèbre de Banach complexe unitaire et commutative, une condition nécessaire et suffisante pour que toute fonction opère spectralement sur A est que $A/Rad(A) \simeq \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Dans le deuxième corollaire ([16], Corollaire II.3, p. 59), il a retrouvé le premier résultat de Katznelson.

Afin d'étendre le deuxième résultat de Katznelson aux algèbres de Banach complexes unitaires qui ne sont pas nécessairement commutatives et semi-simples, A. El Kinani a défini la notion de fonctions qui opèrent faiblement, définie comme suit : soit D une partie de $\mathbb{C}$. On dit qu'une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ opère faiblement sur une algèbre de Banach complexe unitaire A , si pour tout $x \in A$ dont le spectre est contenu dans D , il existe un élément unique dans A , noté $f(x)$, contenu dans la bicommutante, notée $\Gamma(\Gamma(x))$, de $\{x\}$, dans A , tel que $\widehat{f(x)} = f \circ \widehat{x}$ sur $\mathcal{M}(\Gamma(\Gamma(x)))$, où $\mathcal{M}(\Gamma(\Gamma(x)))$ est l'ensemble des caractères non nuls de $\Gamma(\Gamma(x))$. Il a obtenu la caractérisation des algèbres de Banach unitaires sur lesquelles toute fonction opère faiblement. Ainsi, il a montré ([16], Théorème II.4, p. 59), que si A est une algèbre de Banach unitaire, une condition nécessaire et suffisante pour que toute fonction opère faiblement sur A , est que A soit isomorphe (algébriquement et topologiquement) à $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. En fait, il a obtenu ([16], Remarque II.5, p. 60), que les trois opérations sont équivalentes sur une algèbre de Banach complexe unitaire commutative et semi-simple. Ainsi, si A est une algèbre de Banach

complexe unitaire commutative et semi-simple, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est isomorphe à $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Toute fonction opère au sens de Katznelson sur A .
3. Toute fonction opère spectralement sur A .
4. Toute fonction opère faiblement sur A .

En se basant sur le fait que les fonctions continues opèrent faiblement sur les C^* algèbres unitaires et commutatives, A. El Kinani ([16]) a cherché à caractériser les algèbres de Banach unitaires sur lesquelles toute fonction continue opère. Il a montré le résultat suivant ([16], Théorème II.6, p. 60) : si A est une algèbre de Banach unitaire, une condition nécessaire et suffisante pour que toute fonction continue opère faiblement sur A , est que A soit une C^* algèbre commutative. Comme conséquence, il a retrouvé ([16], Corollaire II.7, p. 62), le deuxième résultat de Katznelson.

Les résultats de ([16]) et ([23]) cités ci-dessus sont à l'origine de notre travail qui fait l'objet de cette thèse. Nous avons examiné l'opération spectrale (Chapitre 2) et l'opération faible (Chapitre 3) dans les algèbres localement convexes. Dans les deux chapitres, nous avons commencé par traiter le cas des algèbres non nécessairement topologiques, puis le cas des algèbres topologiques. Dans le chapitre 2, nous avons également examiné l'opération au sens de Katznelson dans les algèbres localement convexes. Enfin nous avons donné la structure des algèbres m -convexes complètes unitaires commutatives semi-simples de dimension dénombrable.

Un résultat important qui nous a été d'une grande utilité est dû à Kaplansky ([22], Lemma 7, p. 376) : si A est une algèbre de Banach complexe dont le spectre de chaque élément est fini, alors A est de dimension finie modulo son radical de Jacobson. Dans le but d'étendre ce résultat, nous nous sommes posé la question suivante : Existe-t-il des classes d'algèbres où ce résultat reste valide ? On a montré dans le chapitre 4 (Théorème 2.1), que

c'est vrai pour la classe des algèbres de Fréchet.

Enfin, pour terminer ce travail, nous donnons un théorème de structure d'une Q -algèbre de Fréchet unitaire B vérifiant la condition : $Bx^2 = Bx$, pour tout $x \in B$. En fait, on montre que B est isomorphe à $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Le plan de notre travail est le suivant :

Le chapitre 1 est considéré comme préalable aux autres chapitres. Il contient des définitions et des rappels algébriques et topologiques, utiles à la lecture de cette thèse. Nous présentons aussi la caractérisation des algèbres de Banach unitaires par les fonctions qui opèrent sur elles. En premier lieu, on présente les deux théorèmes de Y. Katznelson ([23]), qui caractérisent les algèbres de Banach unitaires semi-simples et commutatives par les fonctions qui opèrent sur elles. Puis, les résultats de A. El Kinani ([16]), qui caractérisent les algèbres de Banach unitaires non nécessairement semi-simples et commutatives par les fonctions qui opèrent sur elles, en introduisant deux types d'opération, l'opération spectrale et l'opération faible. Les résultats obtenus par A. El Kinani ([16]) sont des prolongements des deux théorèmes de Y. Katznelson ([23]) aux algèbres de Banach unitaires non nécessairement semi-simples et commutatives. Nous terminons ce chapitre en présentant deux résultats. Le premier concerne la caractérisation des algèbres de Banach complexes spectralement finies avec la preuve fournie dans ([20]) par Hirschfeld, R. A et Johnson, B. E. Le deuxième est un résultat de J. Duncan et A. W. Tullo dans ([12]) donnant la structure d'une algèbre de Banach complexe unitaire A vérifiant : $Ax^2 = Ax$, pour tout $x \in A$.

Dans **le chapitre 2**, nous considérons l'opération spectrale dans un cadre plus général. Nous nous intéressons d'abord à l'opération spectrale dans toute algèbre complexe unitaire non nécessairement topologique. Ainsi, nous montrons (Proposition 1.1), que si A est une algèbre complexe unitaire, alors toute fonction opère spectralement sur A si, et seulement si, toute fonction opère spectralement sur $A/Rad(A)$. Nous caractérisons ensuite, en terme de spectre, l'opération spectrale. Nous montrons (Proposition 1.2), que si A est

une algèbre spectralement bornée, alors toute fonction opère spectralement sur A si, et seulement si, $Sp_A(x)$ est fini, pour tout $x \in A$. Également, nous montrons (Proposition 1.3), que contrairement au cas classique (l'opération au sens de Kaznelson), l'opération spectrale ne provient pas nécessairement d'un morphisme d'algèbre.

Dans la suite, nous examinons la notion d'opération spectrale dans les algèbres topologiques. Comme toute Q -algèbre est spectralement bornée, on obtient comme conséquence (Proposition 2.1), que si A est une Q -algèbre alors, toute fonction opère spectralement sur A si, et seulement si, $Sp_A(x)$ est fini, pour tout $x \in A$. En suite, on montre (Proposition 2.5), que si A est une Q -algèbre m -convexe unitaire et commutative, alors toute fonction opère spectralement sur A si, et seulement si, $A/RadA$ est algébrique. Si de plus (Théorème 2.8), A est une Q -algèbre m -convexe unitaire semi-simple commutative, qui est un espace de Baire, alors toute fonction opère spectralement sur A si, et seulement si, elle est isomorphe à $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Puis, nous considérons l'opération au sens de Katznelson ([23]) dans les algèbres localement convexes. Nous montrons (Proposition 3.1), que si A est une Q -algèbre m -convexe unitaire sur laquelle toute fonction opère au sens de Katznelson, alors A est algébrique semi-simple et commutative. Si de plus, A est un espace de Baire, alors A est de dimension finie. Comme conséquence de la proposition 3.1, nous obtenons (Corollaire 3.2), que si A est une Q -algèbre de Fréchet, toute fonction opère dans A au sens de Katznelson si, et seulement si, A est une algèbre semi-simple commutative de dimension finie.

On désigne par $E(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ entière}\}$. Munie de la famille des semi-normes $(p_k)_{k \geq 1}$ où $p_k(f) = \sup_{|z| \leq k} |f(z)|$, l'algèbre $E(\mathbb{C})$ devient une algèbre de Fréchet. Cette topologie est également définie par la famille des semi-normes $(q_k)_k$ donnée par :

$$q_k \left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n \right) = \sup_{|z| \leq k} \left(\sum_{n \geq 0} |a_n z^n| \right).$$

Soit (A, τ) une algèbre localement convexe unitaire. On dit qu'une fonction

entière $f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in E(\mathbb{C})$ opère dans (A, τ) , si pour tout $x \in A$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge dans (A, τ) . On montre en particulier (Théorème 4.3), que si (A, τ) est une algèbre localement convexe unitaire semi-simple commutative de dimension dénombrable, telle que $E(\mathbb{C})$ opère sur (A, τ) , qu'il existe une topologie m -convexe complète τ' sur A , plus fine que τ , telle que les algèbres (A, τ') et (S, τ_s) sont isomorphes, où (S, τ_s) est l'algèbre des suites complexes stationnaires et τ_s est la topologie localement convexe définie par le système inductif $(S_k)_{k \geq 1}$ avec :

$$S_k = \{(x_n)_n \in S : x_n = x_k, \text{ pour tout } n \geq k\}.$$

Comme conséquence, nous obtenons la structure d'une algèbre m -convexe complète unitaire commutative semi-simple de dimension dénombrable.

Dans **le chapitre 3**, nous considérons l'opération faible dans un cadre plus général. Nous nous intéressons d'abord à une algèbre complexe unitaire A qui n'est pas nécessairement topologique et nous procédons à une comparaison avec les résultats obtenus dans le cas de l'opération spectrale. Nous montrons que, contrairement à l'opération spectrale (chapitre 2), on peut définir un morphisme d'algèbre entre $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ et A sans aucune condition supplémentaire, où $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ est l'algèbre des fonctions complexes définies sur $\mathbb{C}$. Puis, nous montrons (Proposition 1.1), que si toute fonction opère faiblement sur une algèbre complexe unitaire A , alors elle est sans éléments quasi-nilpotents non nuls. Ceci permet de montrer qu'il existe une algèbre de dimension finie sur laquelle, l'assertion : "toute fonction opère faiblement" n'est plus valide. Par ailleurs, on sait (Chapitre 1, Proposition 1.1) que : toute fonction opère spectralement dans une algèbre complexe unitaire A si, et seulement si, toute fonction opère spectralement sur $A/Rad(A)$. Ce résultat n'est plus vrai dans le cas de l'opération faible (Proposition 1.3).

En se plaçant dans le cas des algèbres topologiques, nous montrons (Proposition 2.1), que si A est une Q -algèbre m -convexe unitaire, toute fonction qui opère faiblement, opère spectralement. Puis on déduit (Corollaire 2.2),

que si A est une Q -algèbre m -convexe unitaire, où toute fonction opère faiblement, alors A est algébrique semi-simple et commutative. Nous obtenons aussi (Proposition 2.3), que si A est une Q -algèbre m -convexe unitaire, qui est un espace de Baire où toute fonction opère faiblement, alors elle est isomorphe à $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. On établit également (Théorème 2.6), que si A est une Q -algèbre m -convexe unitaire sur laquelle toute fonction continue opère faiblement, alors A est une algèbre hermitienne commutative semi-simple à involution continue.

Le chapitre 4 est consacré à l'étude de la question suivante : Existe-t-il des classes d'algèbres où le résultat de Kaplansky ([22], Lemma 7, p. 376) reste valide ? Nous commençons par traiter le cas commutatif. Nous donnons un exemple (Exemple 1.1), qui montre que dans le cas d'une Q -algèbre m -convexe unitaire commutative complète semi-simple et spectralement finie, le radical de Jacobson n'est pas nécessairement de codimension finie. Ensuite, nous montrons (Proposition 1.2), que si A est une Q -algèbre m -convexe unitaire commutative, alors l'algèbre A est spectralement finie si, et seulement si, $A/\text{Rad}(A)$ est algébrique. Nous terminons l'étude du cas commutatif par le théorème 1.4 : si A est une Q -algèbre m -convexe unitaire commutative semi-simple et qui est un espace de Baire alors, A est spectralement finie si, et seulement si, $A \simeq \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans le cas général non nécessairement commutatif, on montre (Théorème 2.1), que si A est une algèbre de Fréchet spectralement finie, alors elle est de dimension finie modulo son radical de Jacobson. Pour la preuve de ce dernier résultat, nous avons suivi la démarche de la preuve donnée par R.A. Hirschfeld et B.E. Johnson ([20]). Nous avons gardé les résultats algébriques utilisés dans la preuve et adapté, sous forme de lemmes, des résultats topologiques au cas d'une algèbre de Fréchet. Ensuite, nous montrons (Proposition 2.7), que si A est une Q -algèbre de Fréchet unitaire spectralement finie sans éléments quasi-nilpotents non nuls, alors A est isomorphe à $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Enfin, on établit (Proposition 2.8), que toute algèbre complexe unitaire algébrique sans éléments nilpotents non nuls est commutative et semi-simple.

Le chapitre 5 traite de la structure d'une Q -algèbre de Fréchet unitaire B vérifiant la condition $Bx^2 = Bx$, pour tout $x \in B$. On montre qu'une telle algèbre (Théorème 1.2) est semi-simple commutative de dimension finie et par suite, elle est isomorphe à $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. La preuve de ce résultat suit la même démarche que celle donnée par J. Duncan et A. W. Tullo dans le cas des algèbres de Banach unitaires ([12], Theorem 1, p. 45).

Chapitre 1

Préliminaires.

Ce chapitre est considéré comme préalable aux autres chapitres. Il contient des définitions et des rappels utiles à la lecture de cette thèse. Elle précise en outre les notations. Nous présentons aussi les deux théorèmes de Y. Katznelson ([23]), qui caractérisent les algèbres de Banach unitaires semi-simples commutatives par les fonctions qui opèrent sur elles. Puis, les résultats de A. El Kinani ([16]), qui caractérisent les algèbres de Banach unitaires qui ne sont pas nécessairement commutatives et semi-simples par les fonctions qui opèrent sur elles, en introduisant deux types d'opération : l'opération spectrale et l'opération faible. Nous terminons ce chapitre en présentant deux résultats. Le premier concerne la caractérisation des algèbres de Banach complexes spectralement finies avec la preuve fournie dans ([20]) par Hirschfeld, R. A et Johnson, B. E. Le deuxième est un résultat de J. Duncan et A. W. Tullo dans ([12]) donnant la structure d'une algèbre de Banach complexe unitaire A vérifiant : $Ax^2 = Ax$, pour tout $x \in A$.

Pour les notions abordées dans ce chapitre concernant les notions algébriques, les algèbres de Banach, les algèbres m -convexes et les Q -algèbres, le lecteur est invité à consulter les références suivantes : [2], [5], [19], [27], [28], [31].

Dans toute la suite, les algèbres considérées seront associatives et complexes.

1 Notions algébriques.

Le commutant d'une partie d'une algèbre.

Définition 1.1. Soient A une algèbre et X une partie non vide de A . On appelle commutant de X dans A , noté $\Gamma(X)$, l'ensemble défini par :

$$\Gamma(X) = \{a \in A : ax = xa, \text{ pour tout } x \in X\}.$$

L'ensemble $\Gamma(\Gamma(X))$ est dit bicommutant de X dans A .

Soient A une algèbre et X une partie non vide de A . Le commutant de X dans A vérifie les propriétés suivantes.

1. $\Gamma(X)$ est une sous algèbre de A .
2. $X \subset \Gamma(\Gamma(X))$.
3. X est une partie commutative de A si, et seulement si, $X \subset \Gamma(X)$ si, et seulement si, $\Gamma(\Gamma(X))$ est commutative.

Sous algèbre pleine d'une algèbre unitaire.

Définition 1.2. Soit A une algèbre unitaire. On appelle sous algèbre pleine de A une sous algèbre B de A telle que tout élément de B qui est inversible dans A est inversible dans B .

Si A est une algèbre unitaire on a :

1. Le commutant d'une partie de A dans A est une sous algèbre pleine de A .
2. Une sous algèbre commutative maximale de A est une sous algèbre pleine de A .

Spectre d'un élément.

Définition 1.3. Soient A une algèbre unitaire d'unité e et $x \in A$. On appelle spectre de x dans A , qu'on note $Sp_A(x)$, l'ensemble défini par :

$$Sp_A(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \text{ est non inversible dans } A\}.$$

Le spectre d'un élément d'une algèbre unitaire vérifie en particulier les propriétés suivantes.

1. Soient A une algèbre unitaire et $x \in A$ tel que $Sp_A(x) \neq \emptyset$.
 - (a) Si x est inversible, $Sp_A(x^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in Sp_A(x)\}$.
 - (b) Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(Sp_A(x)) = Sp_A(P(x))$.
2. Soient A une algèbre unitaire et $x, y \in A$. Alors on a :

$$Sp_A(xy) \setminus \{0\} = Sp_A(yx) \setminus \{0\}.$$

Autrement dit, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on a : $\lambda \in Sp_A(xy) \Leftrightarrow \lambda \in Sp_A(yx)$.

3. Soient A, B deux algèbres unitaires et φ un morphisme d'algèbre unitaire de A dans B , alors $Sp_B(\varphi(x)) \subset Sp_A(x)$, pour tout $x \in A$. En particulier, si B est une sous algèbre de A , alors $Sp_A(x) \subset Sp_B(x)$, pour tout $x \in B$.
4. Soient A une algèbre unitaire et B une sous algèbre pleine de A . Alors on a : $Sp_A(x) = Sp_B(x)$, pour tout $x \in B$.

Définition 1.4. *On dit qu'une algèbre A est spectralement bornée si le spectre de chaque élément de A est borné.*

Il existe d'autres formulations équivalentes du concept **spectralement borné** données par le théorème suivant.

Théorème 1.5. *([19], Proposition 4.4, p. 45).*

Soit A une algèbre unitaire d'unité e . Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. $Sp_A(x)$ est borné, pour tout $x \in A$.
2. $Sp_A(x)$ est fermé, pour tout $x \in A$ et $Sp_A(x) \subsetneq \mathbb{C}$.
3. $Sp_A(x)$ est compact, pour tout $x \in A$.

Preuve. Il suffit de montrer que **(1)** $\iff$ **(2)**.

1) $\implies$ 2) Supposons qu'il existe un élément $x \in A$ tel que $Sp_A(x)$ est non fermé. Il existe alors un complexe $\lambda \in \overline{Sp_A(x)} \setminus Sp_A(x)$. Soit $(\lambda_n)_n$ une suite

d'éléments de $Sp_A(x)$, telle que $\lim \lambda_n = \lambda$. Comme $x - \lambda e$ est inversible, alors :

$$Sp_A((x - \lambda e)^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\mu - \lambda} : \mu \in Sp_A(x) \right\}.$$

On a $\frac{1}{\lambda_n - \lambda} \in Sp_A((x - \lambda e)^{-1})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $\lim \frac{1}{\lambda_n - \lambda} = \infty$, alors $Sp_A((x - \lambda e)^{-1})$ est non borné, ce qui contredit **(1)**.

2) $\implies$ 1) Supposons qu'il existe un élément $x \in A$, tel que $Sp_A(x)$ est non borné. Il existe alors une suite $(\lambda_n)_n$ dans $Sp_A(x)$, telle que $\lambda_n \rightarrow \infty$. Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus Sp_A(x)$. L'élément $x - \lambda e$ est inversible dans A , donc $0 \notin Sp_A(x - \lambda e)$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{\lambda_n - \lambda} \in Sp_A((x - \lambda e)^{-1})$ et $\lim \frac{1}{\lambda_n - \lambda} = 0$. Donc $0 \in \overline{Sp_A((x - \lambda e)^{-1})} \setminus Sp_A((x - \lambda e)^{-1})$. D'où $Sp_A((x - \lambda e)^{-1})$ est non fermé, ce qui contredit **(2)**. ■

Définition 1.6. Une algèbre unitaire A est dite *spectralement finie* si le spectre de chaque élément est fini.

Il est à remarquer que les algèbres unitaires de dimension finie sont des algèbres spectralement finies. Comme le montre la proposition suivante.

Proposition 1.7. Si A une algèbre unitaire de dimension finie, alors pour tout $x \in A$, $Sp_A(x)$ est fini.

Preuve. Soit A une algèbre unitaire d'unité e de dimension finie. Posons $\dim A = n$. Soit x un élément de A . La famille $(e, x, x^2, \dots, x^n)$ est liée. Donc il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$, tel que $\sum_{i=0}^n \lambda_i x^i = 0$. Il existe

alors un polynôme $P = \sum_{i=0}^n \lambda_i X^i \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$, tel que $P(x) = 0$. On a : $P(Sp_A(x)) = Sp_A(P(x)) = \{0\}$. Donc $Sp_A(x)$ est inclus dans l'ensemble des racines de P qui est fini. D'où $Sp_A(x)$ est fini. ■

Rayon spectral d'un élément.

Définition 1.8. Soient A une algèbre unitaire et $x \in A$. On appelle rayon spectral de x dans A , noté $\rho_A(x)$, le réel défini par :

$$\rho_A(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in Sp_A(x)\}.$$

Par convention, dans le cas où $Sp_A(x) = \emptyset$, $\rho_A(x) = -\infty$. Et si $Sp_A(x)$ est non borné, $\rho_A(x) = +\infty$.

Rappelons quelques propriétés du rayon spectral d'un élément d'une algèbre unitaire A .

1. $\rho_A(\lambda x) = |\lambda|\rho_A(x)$, pour tout $x \in A$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.
2. $\rho_A(x^n) = (\rho_A(x))^n$, pour tout $x \in A$ et $n \in \mathbb{N}$.
3. $\rho_A(xy) = \rho_A(yx)$, pour tout $x, y \in A$.

Radical de Jacobson d'une algèbre unitaire.

Définition 1.9. On appelle radical de Jacobson d'une algèbre unitaire A , qu'on note $Rad(A)$, l'intersection des idéaux maximaux à gauche (ou l'intersection des idéaux maximaux à droite) de A . L'algèbre A est dite semi-simple si $Rad(A) = \{0\}$.

Le radical de Jacobson d'une algèbre unitaire A d'unité e vérifie, entre autres, ce qui suit :

1. $Rad(A) = \{x \in A : e + yx \text{ est inversible dans } A, \text{ pour tout } y \in A\}$.
2. $Rad(A) = \{x \in A : e + xy \text{ est inversible dans } A, \text{ pour tout } y \in A\}$.
3. $Rad(A)$ est un idéal de A .
4. $A/Rad(A)$ est semi-simple.
5. $Rad(A) \subset \{x \in A : \rho_A(x) = 0\}$.
6. $Rad(A) = \{x \in A : \rho_A(xy) = 0, \text{ pour tout } y \in A\}$.

Caractères d'une algèbre.

Définition 1.10. *Un caractère φ d'une algèbre A , est une forme linéaire sur A , non identiquement nulle, vérifiant :*

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y),$$

pour tous $x \in A$ et $y \in A$.

L'ensemble des caractères d'une algèbre peut être vide. Il suffit de considérer l'algèbre des matrices carrées d'ordre $n \geq 2$ à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Si φ est un caractère d'une algèbre A , alors le noyau de φ est un idéal maximal de A . Et si de plus A est une algèbre unitaire d'unité e , alors $\varphi(e) = 1$.

Notons par $\mathcal{M}^*(A)$ l'ensemble des caractères de A et par $\mathcal{M}(A)$ l'ensemble des caractères continus de A .

Soit A une algèbre et soit $x \in A$. L'application définie de $\mathcal{M}^*(A)$ dans $\mathbb{C}$, notée $\widehat{x}$ donnée pour tout $\varphi \in \mathcal{M}^*(A)$ par :

$$\widehat{x}(\varphi) = \varphi(x),$$

est dite transformée de Fourier-Gelfand de x .

L'application $\mathcal{G}$ de A dans $\mathcal{F}(\mathcal{M}^*(A), \mathbb{C})$ l'ensemble des applications de $\mathcal{M}^*(A)$ dans $\mathbb{C}$ définie par $\mathcal{G}(x) = \widehat{x}$ qui est un morphisme d'algèbres est dite transformation de Gelfand. Son image est une sous algèbre de $\mathcal{F}(\mathcal{M}^*(A), \mathbb{C})$ que l'on note $\widehat{A}$.

Soient A est une algèbre unitaire et $x \in A$. On a :

$$Im(\widehat{x}) \subset Sp_A(x).$$

2 Algèbres de Banach.

Soit A une algèbre de Banach unitaire d'unité e . Rappelons les résultats suivants :

1. Pour tout $a \in A$, $Sp_A(a)$ est un compact non vide de $\mathbb{C}$.

2. **Théorème de Gelfand-Mazur** : Si A est un corps, alors A est isométriquement isomorphe à $\mathbb{C}$.
3. Tout caractère χ de A est continu. De plus $\|\chi\| = \chi(e) = 1$ et $\chi(x) \neq 0$, pour tout x inversible dans A .
4. Pour tout $a \in A$, $\rho_A(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\|a^n\|} = \inf_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Pour une algèbre de Banach commutative et unitaire A d'unité e , on a ce qui suit :

1. Tout idéal maximal de A est fermé.
2. Tout idéal maximal de A est le noyau d'un caractère de A .
3. Le spectre de tout élément $a \in A$ s'exprime en fonction des caractères comme suit :

$$Sp_A(a) = \{\chi(a) : \chi \in \mathcal{M}(A)\}$$

4. Le spectre de A , $\mathcal{M}(A)$ est non vide.
5. Il y a bijection entre $\mathcal{M}(A)$ et l'ensemble des idéaux maximaux de A .
6. Tout élément $x \in A$ est inversible si, et seulement si, $\chi(x) \neq 0$, pour tout $\chi \in \mathcal{M}(A)$.
7. Pour tout $x \in A$, on a : $|\chi(x)| \leq \rho_A(x) \leq \|x\|$, pour tout $\chi \in \mathcal{M}(A)$.
8. Le spectre de A , $\mathcal{M}(A)$ est $\sigma(A', A)$ -compact.
9. La transformation de Gelfand $\mathcal{G} : x \mapsto \widehat{x}$ est un morphisme d'algèbres unitaires de A dans $\mathcal{C}(\mathcal{M}(A))$ vérifiant, pour tout $x \in A$, $\|\widehat{x}\| = \rho_A(x) \leq \|x\|$. Ce qui assure la continuité de la transformation de Gelfand. De plus, pour tout $x \in A$, $Sp_A(x) = \widehat{x}(\mathcal{M}(A)) = \{\chi(x) : \chi \in \mathcal{M}(A)\}$. Le noyau de la transformation de Gelfand est l'intersection des idéaux maximaux de A , c'est donc le radical de Jacobson de A . Ainsi, la transformation de Gelfand est injective si, et seulement si, A est semi-simple.

3 Algèbres m -convexes et Q -algèbres.

Définition 3.1. Soit A une algèbre. On appelle semi-norme sur A , toute application $p : A \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

1. $p(x) \geq 0$, pour tout $x \in A$.
2. $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$, pour tout $x \in A$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.
3. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, pour tous $x, y \in A$.

Si de plus, on a : $p(xy) \leq p(x)p(y)$, pour tous $x, y \in A$, alors p est dite une m -semi-norme sur A . Dans ce cas, A est appelée une algèbre m -semi-normée.

Définition 3.2. Une algèbre topologique A est une algèbre munie d'une topologie compatible avec sa structure d'espace vectoriel et pour laquelle la multiplication est séparément continue.

Si τ est la topologie de l'espace vectoriel topologique sous-jacent de A , on notera l'algèbre topologique A par (A, τ) . Une algèbre topologique (A, τ) est dite localement convexe, si τ peut être définie par une famille de semi-normes $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Si la famille $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est sous-multiplicatives, alors A est dite une algèbre m -convexe. Si de plus, A est métrisable et complète, elle est dite algèbre de Fréchet.

Une algèbre topologique unitaire est dite une Q -algèbre si l'ensemble des éléments inversibles est ouvert.

Remarque 3.3. Si (A, τ) est une algèbre de Fréchet, alors il existe une suite croissante de m -semi-normes définissant la topologie τ .

Précisons à présent, dans le cas des algèbres m -convexes et dans le cas des Q -algèbres, quelques propriétés relatives au spectre d'un élément, au rayon spectral d'un élément, au radical de Jacobson et aux caractères.

1. Soit A une algèbre m -convexe dont la topologie est définie par la famille des m -semi-normes $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. On a alors les résultats suivants :

- $Sp_A(x)$ est non vide, pour tout $x \in A$.
- **Théorème de Gelfand-Mazur** : Si A est une algèbre de division, alors A est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Si de plus, l'algèbre A est complète, on a :

- $\rho_A(x) = \sup_{\lambda} \lim_{n \rightarrow \infty} (p_\lambda(x^n))^{1/n}$, pour tout $x \in A$.
- $\rho_A(x + y) \leq \rho_A(x) + \rho_A(y)$, pour tous $x, y \in A$, tels que $xy = yx$.

- $\rho_A(xy) \leq \rho_A(x)\rho_A(y)$, pour tous $x, y \in A$, tels que $xy = yx$.
- 2. Si A est une algèbre m -convexe unitaire commutative, alors $\mathcal{M}(A)$ est non vide.
- 3. Si A est une algèbre m -convexe unitaire commutative complète, alors on a :
 - $Sp_A(x) = \widehat{x}(\mathcal{M}(A))$, pour tout $x \in A$.
 - $\rho_A(x) = \sup\{|\chi(x)| : \chi \in \mathcal{M}(A)\}$, pour tout $x \in A$.
- 4. Si A est une algèbre m -convexe commutative complète, on a :

$$Rad(A) = \{x \in A : \rho_A(x) = 0\}.$$

- 5. Dans le cas d'une Q -algèbre A , les propriétés suivantes sont vérifiées.
 - $Sp_A(x)$ (qui peut être vide) est un compact de $\mathbb{C}$, pour tout $x \in A$.
 - $\rho_A(x)$ est fini, pour tout $x \in A$.
 Si de plus, $\mathcal{M}(A)$ est non vide, alors on a :
 - Chaque idéal maximal à gauche de A est fermé.
 - Chaque caractère de A est continu.
 - Si A est unitaire, alors $\mathcal{M}(A)$ est $\sigma(A', A)$ compact.
- 6. Dans le cas d'une Q -algèbre m -convexe commutative unitaire A , on a :
 - $Rad(A) = \{x \in A : \rho_A(x) = 0\} = \bigcap \{ker(\chi) : \chi \in \mathcal{M}(A)\}$.
 - $Sp_A(x) = \widehat{x}(\mathcal{M}(A))$, pour tout $x \in A$.
 - $\rho_A(x) = \sup\{|\chi(x)| : \chi \in \mathcal{M}(A)\}$, pour tout $x \in A$.

4 Caractérisations des algèbres de Banach unitaires par les fonctions qui opèrent sur elles.

4.1 Cas des algèbres de Banach unitaires semi-simples et commutatives.

Dans le but de caractériser les algèbres de Banach unitaires semi-simples commutatives par les fonctions qui opèrent sur elles, Y. Katznelson a défini

la notion des fonctions qui opèrent comme suit : soit D une partie de $\mathbb{C}$. On dit qu'une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ opère au sens de Katznelson ([23]) sur une algèbre de Banach complexe unitaire commutative semi-simple A , si pour tout $x \in A$, tel que $Sp_A(x) \subset D$, il existe un élément dans A , noté $f(x)$, tel que $f \circ \widehat{x} = \widehat{f(x)}$, où $\widehat{x}$ désigne la transformée de Fourier-Gelfand de x . Ainsi, dans ([23]), il a montré les deux théorèmes suivants.

Théorème 4.1. (*Premier théorème ([23], Théorème 1, p. 903)*).

Soit A une algèbre de Banach unitaire semi-simple commutative. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. *Toute fonction opère au sens de Katznelson sur A .*
2. *A est de dimension finie.*

Théorème 4.2. (*Deuxième théorème ([23], Théorème 2, p. 903)*).

Soit A une algèbre de Banach unitaire semi-simple et commutative. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. *Toute fonction continue opère au sens de Katznelson sur A .*
2. *A est l'algèbre de toutes les fonctions continues sur son espace des caractères.*

Remarque 4.3. *La preuve du premier théorème de Y. Katznelson, telle qu'elle a été donnée dans ([23]), est la suivante : **L'espace $\mathcal{M}$ des idéaux maximaux doit être compact et discret.***

Nous allons proposer une preuve détaillée de ce théorème.

Preuve. **1) $\Rightarrow$ 2)** Supposons que toute fonction opère au sens de Katznelson sur A . On montre d'abord que $Sp_A(x)$ est fini, pour tout $x \in A$. Supposons qu'il existe $x \in A$ tel que $Sp_A(x)$ est infini. Soit $(\lambda_n)_n$ une suite d'éléments deux à deux distincts de $Sp_A(x)$. Considérons l'application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = \begin{cases} n & \text{si } z = \lambda_n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme f opère au sens de Katznelson ([23]) sur A , il existe alors un élément $f(x)$ dans A tel que $f \circ \widehat{x} = \widehat{f(x)}$. On a $Sp_A(x) = \{\chi(x) : \chi \in \mathcal{M}(A)\}$, où $\mathcal{M}(A)$ est l'ensemble des caractères de A . Donc

$$\begin{aligned} f(Sp_A(x)) &= \{f(\chi(x)) : \chi \in \mathcal{M}(A)\} \\ &= \{\chi(f(x)) : \chi \in \mathcal{M}(A)\} \\ &= Sp_A(f(x)). \end{aligned}$$

Comme $n = f(\lambda_n) \in f(Sp_A(x)) = Sp_A(f(x))$, alors $n \in Sp_A(f(x))$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient ainsi $\mathbb{N} \subset Sp_A(f(x))$. Ce qui contredit le fait que $Sp_A(f(x))$ est borné. Donc $Sp_A(x)$ est fini, pour tout $x \in A$. D'après le résultat de Kaplansky ([22], Lemma 7, p. 376), A est de dimension finie.

2) $\Rightarrow$ 1) Supposons que A est de dimension finie. L'algèbre A étant unitaire commutative et semi-simple, elle est donc isomorphe à $\mathbb{C}^n$, où $n = \dim A$. Désignons par $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Les caractères de $\mathbb{C}^n$ sont exactement $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ tels que $\chi_i(e_j) = \delta_{ij}$. Soient maintenant $a \in \mathbb{C}^n$ et f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{C}$ tel que $Sp_{\mathbb{C}^n}(a) \subset D$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbb{C}$ tels que $a = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. On pose $f(a) = \sum_{i=1}^n f(\chi_i(a)) e_i$ qui est un élément de $\mathbb{C}^n$. Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \widehat{f(a)}(\chi_j) &= \chi_j(f(a)) \\ &= \chi_j\left(\sum_{i=1}^n f(\chi_i(a)) e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n f(\chi_i(a)) \delta_{ij} \\ &= f(\chi_j(a)) \\ &= f \circ \widehat{a}(\chi_j). \end{aligned}$$

Donc $\widehat{f(a)} = f \circ \widehat{a}$. Ainsi f opère au sens de Katznelson sur $\mathbb{C}^n$.

Montrons maintenant que f opère au sens de Katznelson sur A . Soit φ un

isomorphisme d'algèbre de A dans $\mathbb{C}^n$. Soit $x \in A$ tel que $Sp_A(x) \subset D$. On pose $a = \varphi(x) \in \mathbb{C}^n$. On a d'abord $Sp_{\mathbb{C}^n}(a) = Sp_{\mathbb{C}^n}(\varphi(x)) \subset Sp_A(x) \subset D$. Soit χ un caractère non nul de A . Remarquons d'abord que $\chi \circ \varphi^{-1}$ est un caractère non nul de $\mathbb{C}^n$. On a :

$$\begin{aligned}
f \circ \widehat{x}(\chi) &= f(\chi(x)) \\
&= f(\chi(\varphi^{-1}(a))) \\
&= f \circ \widehat{a}(\chi \circ \varphi^{-1}) \\
&= \widehat{f(a)}(\chi \circ \varphi^{-1}) \\
&= \chi(f(x)) \\
&= \widehat{f(x)}(\chi),
\end{aligned}$$

avec $f(x) = \varphi^{-1}(f(a)) \in A$. Donc $f \circ \widehat{x} = \widehat{f(x)}$. Ainsi, f opère au sens de Katznelson sur A . ■

4.2 Cas des algèbres de Banach unitaires non nécessairement commutatives et semi-simples.

Dans le but d'étendre les deux résultats de Katznelson aux algèbres de Banach unitaires qui ne sont pas nécessairement commutatives et semi-simples, A. El Kinani a introduit dans ([16]), deux types d'opérations : l'opération spectrale et l'opération faible.

L'opération spectrale.

Soit D une partie de $\mathbb{C}$. On dit qu'une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ opère spectralement sur une algèbre de Banach unitaire A , si pour tout $x \in A$ tel que $Sp_A(x) \subset D$, il existe un élément dans A , noté $f(x)$ tel que :

$$Sp_A(f(x)) = f(Sp_A(x)).$$

Il est à remarquer que l'on a le résultat suivant.

Lemme 4.4. *Soit A une algèbre de Banach unitaire. Les propositions sui-*

vantes sont équivalentes.

1. Toute fonction opère spectralement sur A .
2. Toute fonction opère spectralement sur $A/\text{Rad}A$.

Preuve. Pour tout $x \in A$, on a d'abord,

$$Sp_A(x) = Sp_{A/\text{Rad}(A)}(s(x)),$$

où $s : A \longrightarrow A/\text{Rad}(A)$ est la surjection canonique.

1) $\implies$ 2) : Soient $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application et $a \in A/\text{Rad}(A)$ tel que $Sp_{A/\text{Rad}(A)}(a) \subset D$. Il existe $x \in A$ tel que $a = s(x)$, donc $Sp_A(x) = Sp_{A/\text{Rad}(A)}(a) \subset D$. Comme f opère spectralement sur A , il existe $f(x) \in A$ tel que $f(Sp_A(x)) = Sp_A(f(x))$. D'où $f(Sp_{A/\text{Rad}(A)}(a)) = Sp_A(f(x)) = Sp_{A/\text{Rad}(A)}(s(f(x)))$. Ainsi, il existe $f(a) = s(f(x)) \in A/\text{Rad}(A)$ tel que $f(Sp_{A/\text{Rad}(A)}(a)) = Sp_{A/\text{Rad}(A)}(f(a))$.

2) $\implies$ 1) : Soient $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application et $x \in A$ tel que $Sp_A(x) \subset D$. On a $Sp_{A/\text{Rad}(A)}(s(x)) = Sp_A(x) \subset D$. Comme f opère spectralement sur $A/\text{Rad}(A)$, il existe $f(s(x)) \in A/\text{Rad}(A)$ tel que $f(Sp_{A/\text{Rad}(A)}(s(x))) = Sp_{A/\text{Rad}(A)}(f(s(x)))$. En prenant $f(x) \in A$ tel que $f(s(x)) = s(f(x))$, on a $f(Sp_A(x)) = Sp_{A/\text{Rad}(A)}(f(s(x))) = Sp_A(f(x))$. Ainsi, il existe $f(x) \in A$ tel que $f(Sp_A(x)) = Sp_A(f(x))$. ■

Théorème 4.5. ([16], Théorème II.1, p. 58)

Soit A une algèbre de Banach unitaire. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. Toute fonction opère spectralement sur A .
2. $A/\text{Rad}A$ est de dimension finie.

Preuve. **1) $\implies$ 2)** On va montrer que $Sp_A(x)$ est fini, pour tout $x \in A$. Supposons qu'il existe $x \in A$ tel que $Sp_A(x)$ est infini. Soit $(\lambda_n)_n$ une suite d'éléments deux à deux distincts de $Sp_A(x)$. Considérons l'application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = \begin{cases} n & \text{si } z = \lambda_n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme f opère spectralement sur A , il existe $f(x) \in A$ tel que :

$$f(Sp_A(x)) = Sp_A(f(x)).$$

On a $n = f(\lambda_n) \in f(Sp_A(x)) = Sp_A(f(x))$, alors $n \in Sp_A(f(x))$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient ainsi $\mathbb{N} \subset Sp_A(f(x))$. Ce qui contredit le fait que $Sp_A(f(x))$ est borné. Donc $Sp_A(x)$ est fini, pour tout $x \in A$. D'après le résultat de Kaplansky ([22], Lemma 7, p. 376), A est de dimension finie.

2) $\Rightarrow$ 1) Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ et $a \in A$ tel que $Sp_A(a) \subset D$. On a $A/RadA$ est de dimension finie, donc $Sp_{A/RadA}(s(a))$ est fini où $s : A \longrightarrow A/RadA$ est la surjection canonique. Comme $Sp_A(a) = Sp_{A/RadA}(s(a))$, il existe alors $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que $Sp_A(a) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. D'après le théorème d'interpolation de Lagrange, il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\lambda_i) = f(\lambda_i)$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Comme

$$\begin{aligned} f(Sp_A(x)) &= \{f(\lambda_i) : 1 \leq i \leq n\} \\ &= \{P(\lambda_i) : 1 \leq i \leq n\} \\ &= P(Sp_A(x)) \\ &= Sp_A(P(x)), \end{aligned}$$

on prend alors $f(x) = P(x) \in A$. Ainsi, il existe $f(x) \in A$ tel que :

$$f(Sp_A(x)) = Sp_A(f(x)).$$

Et donc f opère spectralement sur A . ■

Comme conséquence, nous avons les deux corollaires suivants.

Corollaire 4.6. ([16], Corollaire II.2, p. 59)

Soit A une algèbre de Banach commutative et unitaire. Une condition nécessaire et suffisante pour que toute fonction opère spectralement sur A est que $A/RadA \simeq \mathbb{C}^n$, où $n \in \mathbb{N}^$.*

Preuve. On a $A/RadA$ est une algèbre de Banach unitaire commutative et semi-simple. D'après le lemme 4.4, toute fonction opère spectralement sur

A si, et seulement si, toute fonction opère spectralement sur $A/\text{Rad}A$ si, et seulement si, $A/\text{Rad}A$ est de dimension finie (théorème 4.5) si, et seulement si, $A/\text{Rad}A \simeq \mathbb{C}^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$. ■

Dans le résultat qui suit, on retrouve le premier théorème de Y. Katznelson.

Corollaire 4.7. ([16], Corollaire II.3, p. 59)

Soit A une algèbre de Banach commutative unitaire et semi-simple. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. *Toute fonction opère au sens de Katznelson ([23]) sur A .*
2. *L'algèbre A est de dimension finie.*

Preuve. **1) $\implies$ 2)** : Nous allons montrer d'abord que toute fonction qui opère, au sens de Katznelson ([23]) sur A , opère spectralement sur A . En effet : Soient $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ et $x \in A$ tel que $Sp_A(x) \subset D$. Si f opère au sens de Katznelson ([23]) sur A , il existe un élément $f(x)$ dans A tel que $f \circ \widehat{x} = \widehat{f(x)}$. On a $Sp_A(x) = \{\chi(x) : \chi \in \mathcal{M}(A)\}$, où $\mathcal{M}(A)$ est l'ensemble des caractères de A . Donc $f(Sp_A(x)) = \{f(\chi(x)) : \chi \in \mathcal{M}(A)\} = \{\chi(f(x)) : \chi \in \mathcal{M}(A)\} = Sp_A(f(x))$, et par suite f opère spectralement sur A . Donc si toute fonction opère au sens de Katznelson ([23]) sur A , elle opère spectralement sur A , et par suite $A/\text{Rad}A$ est de dimension finie. Comme A est semi-simple, A est de dimension finie.

2) $\implies$ 1) : C'est la même preuve que celle donnée dans le théorème 4.1 pour l'implication **2) $\implies$ 1)**. ■

L'opération faible.

Soit D une partie de $\mathbb{C}$. On dit qu'une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ opère faiblement sur une algèbre de Banach unitaire A , si pour tout $x \in A$ dont le spectre est contenu dans D , il existe un élément unique dans A , noté $f(x)$, contenu dans la bicommutante, notée $\Gamma(\Gamma(x))$, de $\{x\}$, dans A , tel que $\widehat{f(x)} = f \circ \widehat{x}$ sur $\mathcal{M}(\Gamma(\Gamma(x)))$, où $\mathcal{M}(\Gamma(\Gamma(x)))$ est l'ensemble des caractères non nuls de $\Gamma(\Gamma(x))$.

Il est à remarquer d'abord que, toute fonction qui opère faiblement sur une algèbre de Banach unitaire A , opère spectralement sur A . En effet : Soit $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction qui opère faiblement sur A et soit $x \in A$. Il existe un unique élément $f(x) \in \Gamma(\Gamma(x))$, tel que $\widehat{f(x)} = f \circ \widehat{x}$ sur $\mathcal{M}(\Gamma(\Gamma(x)))$. L'algèbre $\Gamma(\Gamma(x))$ est une sous algèbre pleine de A , donc $Sp_A(x) = Sp_{\Gamma(\Gamma(x))}(x)$. On a :

$$\begin{aligned}
f(Sp_A(x)) &= f(Sp_{\Gamma(\Gamma(x))}(x)) \\
&= f(\{\widehat{x}(\chi) : \chi \in \mathcal{M}(\Gamma(\Gamma(x)))\}) \\
&= \{f \circ \widehat{x}(\chi) : \chi \in \mathcal{M}(\Gamma(\Gamma(x)))\} \\
&= \{\widehat{f(x)}(\chi) : \chi \in \mathcal{M}(\Gamma(\Gamma(x)))\} \\
&= Sp_{\Gamma(\Gamma(x))}(f(x)) \\
&= Sp_A(f(x)).
\end{aligned}$$

Donc f opère spectralement sur A .

Lemme 4.8. *Soit A une algèbre. Si la fonction identité de $\mathbb{C}$, $Id_{\mathbb{C}}$, opère faiblement sur A , alors A est sans éléments quasi-nilpotents non nuls, et par suite, elle est semi-simple.*

Preuve. Soient A une algèbre dans laquelle la fonction $Id_{\mathbb{C}}$ opère faiblement et $x \in A$ tel que $\rho_A(x) = 0$. Il existe alors un unique élément $Id_{\mathbb{C}}(x)$ dans $\Gamma(\Gamma(x))$, la bicommutante de $\{x\}$ dans A , tel que $Id_{\mathbb{C}} \circ \widehat{x} = \widehat{Id_{\mathbb{C}}(x)}$ dans $\mathcal{M}(\Gamma(\Gamma(x)))$. Comme $\rho_A(x) = 0$, alors $Sp_A(x) = \{0\}$. La sous algèbre $\Gamma(\Gamma(x))$ de A étant pleine, donc $Sp_A(x) = Sp_{\Gamma(\Gamma(x))}(x)$. Ainsi, $Sp_{\Gamma(\Gamma(x))}(x) = \{0\}$. Comme pour tout $\chi \in \mathcal{M}(\Gamma(\Gamma(x)))$, $\chi(x) \in Sp_{\Gamma(\Gamma(x))}(x) = \{0\}$, on obtient, $\widehat{x} = \widehat{0}$, et par suite $Id_{\mathbb{C}} \circ \widehat{x} = \widehat{0}$ dans $\mathcal{M}(\Gamma(\Gamma(x)))$. On a aussi $Id_{\mathbb{C}} \circ \widehat{x} = \widehat{x}$ dans $\mathcal{M}(\Gamma(\Gamma(x)))$. D'après l'unicité de l'élément $Id_{\mathbb{C}}(x)$ dans $\Gamma(\Gamma(x))$, on a $x = Id_{\mathbb{C}}(x) = 0$. ■

Le théorème suivant prouvé par A.El.Kinani donne la caractérisation des algèbres de Banach unitaires sur lesquelles toute fonction opère faiblement.

Théorème 4.9. ([16], Théorème II.4, p. 59)

Soit A une algèbre de Banach unitaire. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. Toute fonction opère faiblement sur A .
2. A est isomorphe (algébriquement et topologiquement) à $\mathbb{C}^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Preuve. 1) $\implies$ 2). On suppose que toute fonction opère faiblement sur A . Donc toute fonction opère spectralement sur A . D'après le théorème 4.5, $A/\text{Rad}(A)$ est de dimension finie. Donc A est de dimension finie, vu que A est semi-simple d'après le lemme 4.8. Ainsi la boule unité de A est compacte. On a l'application $x \mapsto \|x^2\|$ est continue sur A . Donc il existe $k > 0$ tel que $\inf_{\|x\|=1} \|x^2\| = \frac{1}{k}$. On a pour tout $x \in A$, $x \neq 0$, $\frac{x}{\|x\|} \in S(0, 1)$ la sphère unité de A , donc $\left\| \left(\frac{x}{\|x\|} \right)^2 \right\| \geq \frac{1}{k}$. Ce qui donne, $\|x\|^2 \leq k\|x^2\|$ pour tout $x \in A$, $x \neq 0$. Cette inégalité est vérifiée pour $x = 0$. Donc il existe $k > 0$ tel que, pour tout $x \in A$, $\|x\|^2 \leq k\|x^2\|$. Soit $x \in A$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, considérons la proposition suivante : $\|x\|^{2^n} \leq k^{2^n-1}\|x^{2^n}\|$. Cette proposition est vérifiée pour $n = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons la proposition vraie à l'ordre n et montrons la à l'ordre $n + 1$. On a :

$$\begin{aligned}
\|x\|^{2^{n+1}} &= (\|x\|^{2^n})^2 \\
&\leq (k^{2^n-1}\|x^{2^n}\|)^2 \\
&\leq k^{2^{n+1}-2}\|x^{2^n}\|^2 \\
&\leq k^{2^{n+1}-2}k\|x^{2^{n+1}}\| \\
&\leq k^{2^{n+1}-1}\|x^{2^{n+1}}\|.
\end{aligned}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in A$, $\|x\|^{2^n} \leq k^{2^n-1}\|x^{2^n}\|$. D'où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in A$, $\|x\| \leq k k^{-1/2^n} \|x^{2^n}\|^{1/2^n}$. En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\|x\| \leq k\rho_A(x)$. D'après ([26]), A est commutative. Donc A est une algèbre de Banach unitaire semi-simple commutative de dimension finie. Ainsi A est isomorphe à $\mathbb{C}^n$, où $n = \dim(A)$. Comme $\mathbb{C}^n$ ne possède qu'une seule topologie d'algèbre de Banach, $A \simeq \mathbb{C}^n$ (algébriquement et topologiquement).

2) $\implies$ 1). Soient f une fonction définie dans une partie D de $\mathbb{C}$ et $a \in A$ tel que $Sp_A(a) \subset D$. Le raisonnement du théorème 4.1 pour montrer **2)** implique **1)** dans l'algèbre $\Gamma(\Gamma(a))$, montre qu'il existe un élément $f(a)$ dans $\Gamma(\Gamma(a))$ tel que $\widehat{f(a)} = f \circ \widehat{a}$ sur $\mathcal{M}(\Gamma(\Gamma(a)))$. L'unicité de $f(a)$ découle du fait que l'algèbre $\Gamma(\Gamma(a))$ est semi-simple vu que A est sans éléments quasi-nilpotents. ■

Remarque 4.10. *Dans une algèbre de Banach unitaire commutative et semi-simple, les trois modes d'opérations sont équivalents comme le montre ce qui suit.*

Proposition 4.11. *Soit A une algèbre de Banach unitaire commutative et semi-simple. les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *A est isomorphe à $\mathbb{C}^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$*
2. *Toute fonction opère au sens de Katznelson sur A .*
3. *Toute fonction opère spectralement sur A .*
4. *Toute fonction opère faiblement sur A .*

Preuve. On a **(1) $\iff$ (2)**, d'après le théorème 4.1.

On a **(1) $\iff$ (3)**, d'après le corollaire 4.6, vu que A est semi-simple.

On a **(1) $\iff$ (4)**, d'après le théorème 4.9. ■

On sait d'après ([10], 1.5, p. 10) que les fonctions continues opèrent faiblement sur les $\mathbb{C}^*$ -algèbres unitaires commutatives. Ces dernières sont exactement les algèbres de Banach unitaires sur lesquelles toute fonction opère faiblement comme le montre le théorème suivant.

Théorème 4.12. ([16], Théorème II.6, p. 60)

Soit A une algèbre de Banach. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. *Toute fonction continue opère faiblement sur A .*
2. *(A, ρ) est une $\mathbb{C}^*$ -algèbre commutative.*

Preuve. Il reste à montrer **1) $\implies$ 2)**. Montrons tout d'abord que A est hermitienne. En effet soit $a \in A$. Comme la fonction $\bar{z} : \lambda \mapsto \bar{\lambda}$ opère faiblement sur A , il existe alors un élément unique $\bar{z}(a)$, contenu dans $\Gamma(\Gamma(a))$, tel que

$\widehat{\bar{z}(a)} = \bar{z} \circ \widehat{a}$ sur $\mathcal{M}(\Gamma(\Gamma(a)))$. On a donc une application $*$ de A dans A définie par $a \mapsto a^* = \bar{z}(a)$. L'application $*$ est une involution sur A . De plus, pour tout $\chi \in \mathcal{M}(\Gamma(\Gamma(a)))$, on a $\chi(x^*) = \widehat{\bar{z}(x)}(\chi) = \overline{\chi(x)}$. Si maintenant h est un élément hermitien de A , alors :

$$Sp_A(h) = Sp_{\Gamma(\Gamma(h))}(h) \subset \mathbb{R}.$$

Ainsi A est hermitienne.

Montrons que A est commutative. On a par définition de x^* , $x^* \in \Gamma(\Gamma(x))$, pour tout $x \in A$. Ainsi tous les éléments de A sont normaux. Soient a, b deux éléments hermitiens de A . On a $(a + ib)^*(a + ib) = (a + ib)(a + ib)^*$, ce qui nous donne $ab = ba$. Soient $x, y \in A$ tels que $x = a + ib$ et $y = c + id$ avec a, b, c, d sont des éléments hermitiens. Comme les éléments hermitiens commutent, on obtient que $xy = yx$. Ainsi A est commutative. L'application $Id_{\mathbb{C}} : z \mapsto z$ est continue, donc opère faiblement sur A . D'après le lemme 4.8, A est semi-simple. Par conséquent, A est une algèbre de Banach hermitienne, commutative et semi-simple.

Soit $a \in A$, et soit $h \in C(Sp_A(a))$, où $C(Sp_A(a))$ est l'ensemble des fonctions continues sur $Sp_A(a)$. h opère faiblement sur A , donc il existe un unique $h(a) \in A$, tel que $h \circ \widehat{a} = \widehat{h(a)}$. Ainsi on définit une application Φ_a de $C(Sp_A(a))$ dans A par $\Phi_a(h) = h(a)$. Ainsi $\widehat{\Phi_a(h)} = h \circ \widehat{a}$. La linéarité de la transformation de Gelfand et le fait que A est semi-simple, nous donne que Φ_a est un morphisme d'algèbres.

Montrons que Φ_a est continu. Pour cela, montrons que son graphe est fermé. Soit $(g_n)_n$ une suite d'éléments de $C(Sp_A(a))$ telle que $g_n \rightarrow g$ uniformément dans $C(Sp_A(a))$ et $g_n(a) \rightarrow y$. On pose $h_n = g_n - g$. On a $\|h_n\| \rightarrow 0$ et $\|h_n\| = \sup_{z \in Sp_A(a)} |h_n(z)| = \sup_{z \in Im(\widehat{a})} |h_n(z)| = \sup_{\chi \in \mathcal{M}(A)} |(h_n \circ \widehat{a})(\chi)| = \|h_n \circ \widehat{a}\|$, donc $h_n \circ \widehat{a} \rightarrow 0$. Or $h_n \circ \widehat{a} = \widehat{h_n(a)}$. Donc $\widehat{h_n(a)} \rightarrow 0$, d'où $\widehat{g_n(a)} \rightarrow \widehat{g(a)}$. Comme $g_n(a) \rightarrow y$ et la transformation de Gelfand est continue, on obtient que $\widehat{g_n(a)} \rightarrow \widehat{y}$. Ainsi $\widehat{y} = \widehat{g(a)}$. Puisque A est semi-simple, alors $y = g(a)$.

$$\widehat{a} : \mathcal{M}(PL(a, a^*)) \rightarrow Sp_A(a)$$

définit, par transposition, un $*$ -morphisme d'algèbres unitaires, isométrique et surjectif

$$\psi : C(Sp_A(a)) \rightarrow C(\mathcal{M}(PL(a, a^*)))$$

donné par $\psi(f) = f \circ \widehat{a}$. Par ailleurs la transformation de Gelfand

$$J_a : PL(a, a^*) \rightarrow C(\mathcal{M}(PL(a, a^*)))$$

est $*$ -morphisme d'algèbres. Elle est injective du fait que $PL(a, a^*)$ est semi-simple. Montrons qu'elle est surjective. Pour $g \in C(\mathcal{M}(PL(a, a^*)))$, il existe une suite de polynômes $(p_n(z, \bar{z}))_n$ telle que $f = \lim_n p_n$ uniformément sur $Sp_A(a)$. D'où, d'après ce qui précède, $\lim_n p_n(a, a^*) = f(a)$. Par ailleurs $(p_n(a, a^*))_n \subset PL(a, a^*)$ car $PL(a, a^*)$ est fermé. De plus, pour tout $\chi \in \mathcal{M}(PL(a, a^*))$, on a $g(\chi) = \chi(f(a))$. D'où $g = J_a(f(a))$, et par suite $PL(a, a^*) = C(\mathcal{M}(PL(a, a^*)))$. Ainsi $(PL(a, a^*), \rho)$ est une $\mathbb{C}^*$ -algèbre. Il s'ensuit que, pour tout élément hermitien h de A , il existe une constante $M_h > 0$ telle que $\|k\| \leq M_h \rho(h)$, pour tout k élément hermitien de $PL(h)$. D'où pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout k hermitien de $PL(h)$, on a

$$\|e^{itk}\| \leq M_h \rho(e^{itk}) = M_h.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$H_n = \{h \in Sym(A) : \|e^{ith}\| \leq n, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}\},$$

où $Sym(A)$ désigne l'ensemble des éléments hermitiens de A . Alors $(H_n)_n$ est une suite de fermés de $Sym(A)$. D'où, d'après le théorème de Baire, il existe n_0 tel que l'intérieur de H_{n_0} est non vide, et par conséquent contient une boule de centre h_0 et de rayon r . Soit maintenant h un élément hermitien de A . Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\|e^{itr \frac{h}{\|h\|+1}}\| \leq \|e^{it(r \frac{h}{\|h\|+1} + h_0)}\| \|e^{-ith_0}\| \leq n_0^2;$$

donc en particulier

$$\|e^{ih}\| \leq n_0^2; \text{ pour tout } h \in \text{Sym}(A).$$

D'où, d'après ([30]), la norme $\|\cdot\|$ est équivalente, sur A , à une norme de $\mathbb{C}^*$ -algèbre. Cette dernière norme est exactement ρ puisque A est commutative. ■

Comme conséquence, nous avons le résultat suivant.

Corollaire 4.13. ([16], Corollaire II.7, p. 62)

Soit $(A, \|\cdot\|)$ une algèbre de Banach commutative et semi-simple. Une condition nécessaire et suffisante pour que toute fonction continue opère au sens de Katznelson, sur A , est que A soit l'algèbre de toutes les fonctions continues sur son espace des caractères(non nuls).

5 Caractérisation des algèbres de Banach spectralement finies.

I. Kaplansky dans ([22]), R.A. Hirschfeld et B.E. Johnson dans ([20]), ont montré séparément le théorème suivant.

Théorème 5.1. ([22], Lemma 7, p. 376)

Si A est une algèbre de Banach dont le spectre de tout élément est fini, alors A est de dimension finie modulo son radical de Jacobson.

Preuve. (donnée par R.A. Hirschfeld et B.E. Johnson dans [20]).

Sans perdre de généralité, on peut supposer que A est semi-simple et unitaire d'élément unité e .

Soit $E \subset A$ un ensemble maximal d'idempotents non nuls qui commutent entre eux. L'existence de E est garantie par le Lemme de Zorn, et on a $e \in E$. Nous allons montrer que E est fini. Soit $(f_n)_n$ une suite infinie d'éléments de E . Posons :

$$g_1 = f_1 \quad ; \quad g_2 = \sup(f_1, f_2) = f_1 + f_2 - f_1 f_2 \quad ; \quad g_{n+1} = \sup(g_n, f_{n+1}).$$

Chaque g_n est un élément idempotent et commute avec tous les éléments de E , et par conséquent, il appartient à E . Il en va de même pour leurs différences :

$$h_n = g_{n+1} - g_n,$$

pour laquelle, on a la relation d'orthogonalité suivante :

$$h_n h_m = 0 \quad n \neq m,$$

de plus $h_n \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Que l'on a $\sup \|h_n\| < \infty$ ou non, on peut toujours prendre une suite $(\lambda_n)_n$ de nombres complexes non nuls tels que $\sum |\lambda_n| \|h_n\| < \infty$. Par conséquent :

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n h_n$$

appartient à A . Puisque $ah_m = \lambda_m h_m$, il vient que $h_m \in Sp_A(a)$ et par suite $Sp_A(a)$ est infinie, ce qui contredit le fait que A est spectralement finie. Donc E est fini.

On considère, sur E , l'ordre partiel suivant :

$$f \leq g \iff fg = gf = f.$$

Comme E est fini, notons alors par $e_1, \dots, e_n$ les éléments de E minimaux par rapport à cet ordre. En utilisant le fait que $e_i e_j \leq e_i$ et $e_i e_j \leq e_j$ et par la propriété de minimalité qui précède, on a $e_i e_j = 0$ si $i \neq j$. De plus, chaque idempotent x de E est somme d'éléments minimaux. En particulier,

$$e_1 + \dots + e_n = e.$$

En effet, soient $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$ les éléments minimaux qui sont inférieurs ou égaux à x . On pose $e' = x - (e_{i_1} + \dots + e_{i_k})$. Cet élément vérifie la propriété $e_i e' = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Ce qui donne $e' = 0$.

La décomposition de l'identité conduit à :

$$A = Ae_1 + \dots + Ae_n,$$

mais Ae_i n'étant pas facilement manipulable, nous continuons alors à décomposer :

$$A = (e_1 + \dots + e_n)Ae_1 + \dots + (e_1 + \dots + e_n)Ae_n = \sum_{i,j=1}^n e_i Ae_j.$$

Le reste de la preuve consiste à montrer que les facteurs $e_i Ae_j$ sont de dimensions finies, pour $i, j = 1, \dots, n$.

L'algèbre $e_i Ae_i$ est de Banach avec e_i comme unité et chaque élément $a \in e_i Ae_i$ possède un spectre fini du fait de l'égalité bien connue ([31], p. 35, Theorem. (1.6.15)).

$$Sp_{e_i Ae_i}(a) \cup \{0\} = Sp_A(a).$$

De plus, chaque élément a dans $e_i Ae_i$ est de spectre réduit à un singleton. En effet, si $Sp_{e_i Ae_i}(a)$ contient deux points λ et μ , en intégrant le long d'un petit cercle autour de λ , avec μ à l'extérieur, on obtient un idempotent

$$p = -\frac{1}{2\pi i} \oint (a - \xi e)^{-1} d\xi$$

dans $e_i Ae_i$ différent de 0 et de e_i , ce qui contredit la minimalité de e_i .

Par conséquent, chaque élément $a \in e_i Ae_i$ est de la forme :

$$a = \lambda e_i + q,$$

où λ est le seul élément du $Sp_{e_i Ae_i}(a)$ et q est un élément quasi-nilpotent dans $e_i Ae_i$.

Nous allons montrer à présent que $e_i Ae_i$ ne possède pas d'éléments quasi-nilpotents non nuls, donc $e_i Ae_i = \mathbb{C}e_i$ et par suite $\dim(e_i Ae_i) = 1$. Nous faisons cela en prouvant que tout élément quasi-nilpotent q dans $e_i Ae_i$ doit appartenir au $Rad(A)$. Ce dernier étant nul par semi-simplicité, ce qui im-

plique que $q = 0$. Il faut donc vérifier l'égalité

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(qa)^n\|^{1/n} = 0, \quad \forall a \in A.$$

En utilisant que $q = e_i q = q e_i = e_i q e_i$, nous peut écrire :

$$\begin{aligned} (qa)^n &= (q e_i a)(e_i q e_i a)(e_i q e_i a) \dots (e_i q e_i a)(e_i q a) \\ &= (e_i q e_i a)(e_i q e_i a) \dots (e_i q e_i a)(qa) \\ &= (q e_i a e_i)^{n-1}(qa) \\ &= (qb)^{n-1}(qa). \end{aligned}$$

L'élément $b = e_i a e_i$ appartient à $e_i A e_i$, donc le problème est réduit de A à $e_i A e_i$. Donc, il suffit de montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(qb)^n\|^{1/n} = 0, \quad \forall b \in e_i A e_i.$$

Autrement dit, il reste à prouver que tout élément quasi-nilpotent $q \in e_i A e_i$ appartient au radical de Jacobson de $e_i A e_i$. Remarquons d'abord que tout élément singulier de $e_i A e_i$ de spectre égal à $\{0\}$ est quasi-nilpotent. En partant d'un élément régulier $b \in e_i A e_i$, on voit que bq , est produit d'un élément régulier et d'un élément singulier, donc singulier, et par conséquent quasi-nilpotent. Ensuite, si b est singulier ou quasi-nilpotent dans $e_i A e_i$, nous obtenons un élément régulier $b_\lambda = \lambda e_i + b$, $\forall \lambda \neq 0$, pour lequel qb_λ est singulier par l'argument précédent. L'ensemble de tous les éléments singuliers étant fermé dans une algèbre de Banach, on en déduit que $qb = \lim_{\lambda \rightarrow 0} qb_\lambda$ est singulier ou quasi-nilpotent. Ce qui montre finalement que $\dim(e_i A e_i) = 1$.

Considérons maintenant l'espace de Banach $e_i A e_j$, $i \neq j$. Si $e_i A e_j = \{0\}$, $\dim(e_i A e_j) = 0$. Si $e_i A e_j \neq \{0\}$, on montre qu'il existe un isomorphisme linéaire R_j^i de $e_i A e_i$ dans $e_i A e_j$, et d'après ce qui précède $\dim(e_i A e_j) = 1$. Soit $u \neq 0$ un élément de $e_i A$. Montrons que $uA = e_i A$. D'une part, on peut écrire $u = e_i v$, donc $uA = e_i v A \subset e_i A$. D'autre part, on montre que $e_i A \subset uA$ de la manière suivante. On suppose que $ute_i = 0$ pour tout $t \in A$.

Donc, $(ut)^2 = utut = (ute_i)vt = 0$, par suite ut est nilpotent pour tout $t \in A$, d'où $u \in \text{Rad}(A) = \{0\}$. Contradiction avec le fait que $u \neq 0$. Par conséquent, il existe $w \in A$ tel que $uwe_i \neq 0$. Cet élément $uwe_i = e_i v w e_i$ appartient à $e_i A e_i = \mathbb{C} e_i$, et par suite, il s'écrit sous la forme $uwe_i = \lambda e_i$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$. Donc $e_i = u(\lambda^{-1} w e_i)$ et par suite $e_i A = u(\lambda^{-1} w e_i) A \subset uA$. Ainsi $uA = e_i A$.

Supposons que $e_i A e_j$ contient un élément non nul a , donc a est un élément non nul de $e_i A$, d'où $e_i A = aA$ d'après ce qui précède. Donc $e_i \in aA$. Il existe alors $a_0 \in A$ tel que $e_i = a a_0$. Nous pouvons écrire $a = e_i t e_j$, $t \in A$, ce qui donne $e_i = (e_i t e_j)(e_j a_0 e_j) = a a'$, où $a' = e_j a_0 e_i$ est un élément non nul de $e_j A e_i$. On répète cet argument avec a' à la place de a , il existe donc $b \in e_i A e_j$ tel que $a' b = e_j$. Nous avons :

$$a = a e_j = a a' b = e_i b = b.$$

Ce qui nous donne que :

$$e_i a = a e_j.$$

Considérons l'application R_j^i sur $e_i A e_i$ définie par $R_j^i(x) = x a$. Comme $R_j^i(x) = R_j^i(x e_i) = x e_i a = x a e_j = e_i x a e_j$, l'application R_j^i prend alors ses valeurs dans $e_i A e_j$, de plus elle est linéaire. De la même façon on définit l'application linéaire R_i^j de $e_i A e_j$ dans $e_i A e_i$ par $R_i^j(x) = x a'$. Les deux applications linéaires vérifient : $R_j^i R_i^j = \text{Id}_{e_i A e_j}$ et $R_i^j R_j^i = \text{Id}_{e_i A e_i}$, ce qui montre que R_j^i est un isomorphisme. Donc $\dim(e_i A e_j) = 1$. Comme $A = \sum_{i,j} e_i A e_j$, il vient que $\dim(A) \leq n^2$. ■

6 Structure d'une algèbre de Banach unitaire A vérifiant : $Ax^2 = Ax$, pour tout $x \in A$.

J. Duncan et A. W. Tullo ont montré dans ([12]) le théorème suivant.

Théorème 6.1. ([12], Theorem 1, p. 45)

Soit A une algèbre de Banach unitaire d'unité e vérifiant : $Ax^2 = Ax$, pour

tout $x \in A$. Alors A est semi-simple, commutative et de dimension finie.

Preuve. (donnée par J. Duncan et A. W. Tullo dans ([12]))

L'algèbre A est semi-simple et commutative d'après ([22]). Supposons que A n'a pas d'idempotents propres. Soit $x \in A$, $x \neq 0$, il existe alors $y \in A$, tel que $yx^2 = x$. Donc yx est un élément idempotent. D'où $yx = e$. Par suite A est une algèbre de division. Ainsi, $A = \mathbb{C}e$.

L'algèbre A ne peut avoir une suite infinie d'idempotents deux à deux orthogonaux. En effet, soit (e_n) une telle suite. Choisissons $\lambda_n > 0$ tel que :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \in A,$$

et soit $y \in A$ tel que $yx^2 = x$. Alors

$$y \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n.$$

Par suite, pour chaque n , $\lambda_n y e_n = e_n$,

$$1 = \rho_A(e_n) = \lambda_n \rho_A(y e_n) \leq \lambda_n \rho_A(y) \rho_A(e_n) = \lambda_n \rho_A(y),$$

ce qui est impossible.

Soit $\{e_1, \dots, e_m\}$ une famille d'idempotents non nuls deux à deux orthogonaux. Pour chaque $j \in \{1, \dots, m\}$, soit Ae_j n'a pas idempotent propre soit il existe des idempotents non nuls $p_j, q_j \in Ae_j$ tels que $e_j = p_j + q_j, p_j q_j = 0$. Puisque A n'admet pas de suite infinie d'idempotents deux à deux orthogonaux, on peut supposer que $\{e_1, \dots, e_m\}$ est choisi de tel sorte que Ae_j n'a pas d'idempotents propres pour chaque j et que $e = e_1 + \dots + e_m$. Pour chaque j , $Ae_j = \mathbb{C}e_j$. Donc A est de dimension m . ■

Références

- [2] F. F. Bonsall, J. Duncan : *Complete normed algebras*. Ergebnisse der

Mathematik, Band 80. Springer Verlag, (1973).

[3] Bourbaki, N., *Espaces vectoriels topologiques*. Chapitres 1 à 5. Masson, Paris, 1981.

[5] Bourbaki, N., *Éléments de mathématiques. Théories spectrales*. Chapitres 1 et 2. Springer, 2006.

[10] Dixmier, Jacques ; *Les C^* -algèbres et leurs représentations*. (French) Deuxième édition Cahiers Scientifiques, Fasc. XXIX Gauthier-Villars Éditeur, Paris 1969

[12] J. DUNCAN, A. W. TULLO : Finite dimensionality, nilpotents and quasinilpotents, Colloq. Math. 37 (1977), 81-82.

[16] A. El Kinani, *Sur deux théorèmes de Katznelson*, Rev. Academia de Ciencias ; Zaragoza, 56 (2001).

[19] Fragouloupoulou, Maria. *Topological algebras with involution*. North-Holland Mathematics Studies, 200. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2005. xvi+495 pp. ISBN : 0-444-52025-2.

[22] Kaplansky, I., *Ring isomorphisms of Banach algebras*. Canad. J. Math. 6 (1954), 374-381.

[23] Y. Katznelson, *Algèbres caractérisées par les fonctions qui opèrent sur elles*. C. R. Acad. Sc. , Paris, A-B 247(1958), 903-905.

[24] Köthe, G., *Topological Vector Spaces I*. Second printing, revised, Spring-Verlag Berlin Heidelberg New York 1983.

[26] Le Page, Claude. *Sur quelques conditions entraînant la commutativité dans les algèbres de Banach*. (French) C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 265

(1967), A235–A237.

[27] Mallios, Anastasios ; *Topological algebras. Selected topics*. North-Holland Mathematics Studies, 124. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 109. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1986. xx+535 pp. ISBN : 0-444-87966-8.

[28] Michael, E. A., *Locally multiplicatively convex topological algebra*. Mem. Amer. Math. Soc. 11, Providence (1952).

[30] Pták, Vlastimil. Banach algebras with involution. Manuscripta Math. 6 (1972), 245–290

[31] Rickart, C. E., *General theory of Banach algebras*. Van Nostrand, New York, (1960).

Chapitre 2

Opération spectrale dans les algèbres localement convexes.

Introduction.

Dans ce chapitre, nous étudions l'opération spectrale dans les algèbres localement convexes. Nous examinons d'abord le cas des algèbres unitaires non nécessairement topologiques. Ainsi, nous montrons (Proposition 1.1), que si A est une algèbre unitaire, toute fonction opère spectralement sur A si, et seulement si, toute fonction opère spectralement sur $A/Rad(A)$. Nous caractérisons ensuite, en terme de spectre, l'opération spectrale. Nous montrons (Proposition 1.2), que si A est une algèbre spectralement bornée, alors toute fonction opère spectralement sur A si, et seulement si, $Sp_A(x)$ est fini, pour tout $x \in A$. Également, nous montrons (Proposition 1.3), que contrairement au cas classique (l'opération au sens de Kaznelson), l'opération spectrale ne provient pas nécessairement d'un morphisme d'algèbre.

Nous examinons ensuite, la notion d'opération spectrale dans les algèbres localement convexes. Comme toute Q -algèbre est spectralement bornée, on obtient comme conséquence (Proposition 2.1), que si A est une Q -algèbre alors, toute fonction opère spectralement sur A si, et seulement si, $Sp_A(x)$ est fini, pour tout $x \in A$. Nous montrons (Proposition 2.5), que si A est une Q -algèbre m -convexe unitaire et commutative, alors toute fonction opère

spectralement sur A si, et seulement si, $A/RadA$ est algébrique. Si de plus (Théorème 2.8), A est une Q -algèbre m -convexe unitaire semi-simple commutative, qui est de Baire, alors toute fonction opère spectralement sur A si, et seulement si, $A \simeq \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Puis, nous considérons l'opération au sens de Katznelson ([23]) dans les algèbres localement convexes. Nous montrons (Proposition 3.1), que si A est une Q -algèbre m -convexe unitaire sur laquelle toute fonction opère, alors A est algébrique semi-simple et commutative. Si de plus, A est de Baire, alors A est de dimension finie. Comme conséquence de la proposition 3.1, nous obtenons (Corollaire 3.2), que si A est une Q -algèbre de Fréchet, toute fonction opère dans A si, et seulement si, A est une algèbre semi-simple commutative de dimension finie.

On désigne par $E(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ entière} \}$. Munie de la famille des semi-normes $(p_k)_{k \geq 1}$ où $p_k(f) = \sup_{|z| \leq k} |f(z)|$, l'algèbre $E(\mathbb{C})$ devient une algèbre de Fréchet. Cette topologie est également définie par la famille des semi-normes $(q_k)_k$ donnée par :

$$q_k \left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n \right) = \sup_{|z| \leq k} \left(\sum_{n \geq 0} |a_n z^n| \right).$$

Soit (A, τ) une algèbre localement convexe unitaire. On dit qu'une fonction entière $f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in E(\mathbb{C})$ opère dans (A, τ) , si pour tout $x \in A$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge dans (A, τ) . On montre en particulier (Théorème 4.3), que si (A, τ) est une algèbre localement convexe unitaire semi-simple commutative de dimension dénombrable, telle que $E(\mathbb{C})$ opère sur (A, τ) , qu'il existe une topologie m -convexe complète τ' sur A , plus fine que τ , telle que les algèbres (A, τ') et (S, τ_s) sont isomorphes, où (S, τ_s) est l'algèbre des suites complexes stationnaires et τ_s est la topologie localement convexe définie par le système inductif $(S_k)_{k \geq 1}$ avec :

$$S_k = \{(x_n)_n \in S : x_n = x_k, \forall n \geq k\}.$$

Comme conséquence, nous obtenons la structure d'une algèbre m -convexe

complète unitaire commutative semi-simple de dimension dénombrable.

1 Opération spectrale dans les algèbres non nécessairement topologiques.

Nous nous intéressons, dans cette partie, à l'opération spectrale dans une algèbre qui n'est pas forcément topologique. Le résultat suivant permet de considérer le cas semi-simple.

Proposition 1.1. *Soit A une algèbre. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Toute fonction opère spectralement sur A .*
2. *Toute fonction opère spectralement sur $A/\text{Rad}(A)$.*

Preuve. C'est la même preuve que celle donnée dans le chapitre 1 (Lemme 4.4). ■

Nous caractérisons dans la proposition suivante, en terme de spectre, l'opération spectrale.

Proposition 1.2. *Soit A une algèbre spectralement bornée. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Toute fonction opère spectralement sur A .*
2. *$Sp_A(a)$ est fini, pour tout $a \in A$.*

Preuve. **1) $\implies$ 2)** : Supposons qu'il existe $a \in A$ tel que $Sp_A(a)$ est infini. Soit $(\alpha_n)_n$ une suite d'éléments de $Sp_A(a)$, deux à deux distincts. Considérons l'application $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$g(z) = \begin{cases} n & \text{si } z = \alpha_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme g opère spectralement sur A , alors il existe $g(a) \in A$ tel que :

$$g(Sp_A(a)) = Sp_A(g(a)).$$

On a : $n = g(\alpha_n) \in g(Sp_A(a)) = Sp_A(g(a))$, donc $n \in Sp_A(g(a))$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient ainsi $\mathbb{N} \subset Sp_A(g(a))$, ce qui contredit le fait que $Sp_A(g(a))$ est borné.

2) $\implies$ 1) : Supposons que $Sp_A(a)$ est fini pour tout $a \in A$. Soient $g : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application et $a \in A$ tel que : $Sp_A(a) \subset D$.

- Si $Sp_A(a) = \emptyset$, on prend $g(a) = a$.
- Si $Sp_A(a) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. D'après le théorème d'interpolation de Lagrange : il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que : $Q(\alpha_i) = g(\alpha_i)$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
Comme

$$\begin{aligned} g(Sp_A(a)) &= \{g(\alpha_i) : 1 \leq i \leq n\} \\ &= \{Q(\alpha_i) : 1 \leq i \leq n\} \\ &= Q(Sp_A(a)) \\ &= Sp_A(Q(a)), \end{aligned}$$

on prend alors, $g(a) = Q(a) \in A$. Ainsi, il existe $g(a) \in A$ tel que :

$$g(Sp_A(a)) = Sp_A(g(a)).$$

D'où g opère spectralement sur A . ■

Considérons l'opération au sens de Katznelson. Soient A une algèbre de Banach unitaire semi-simple commutative et $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ l'algèbre de toutes les fonctions complexes définies sur $\mathbb{C}$. On dit que $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ opère au sens de Katznelson sur A en un point $x \in A$ si :

$$\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{C}) \quad , \quad \exists f(x) \in A \quad \text{tel que} \quad f \circ \widehat{x} = \widehat{f(x)}.$$

Soit $x \in A$. L'application φ_x de $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ dans A définie par : $\varphi_x(f) = f(x)$ est un morphisme d'algèbre unitaire. En effet, l'application φ_x est bien définie. Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi_x(\alpha f + g)} &= (\alpha f + g) \circ \widehat{x} = \alpha \widehat{\varphi_x(f)} + \widehat{\varphi_x(g)} = \alpha \varphi_x(f) + \varphi_x(g). \\ \widehat{\varphi_x(fg)} &= (fg) \circ \widehat{x} = \widehat{\varphi_x(f) \varphi_x(g)} = \varphi_x(f) \varphi_x(g). \end{aligned}$$

L'algèbre A est semi simple, donc $\varphi_x(\alpha f + g) = \alpha \varphi_x(f) + \varphi_x(g)$ et $\varphi_x(fg) = \varphi_x(f)\varphi_x(g)$.

De plus $\varphi_x(1) = e$, où 1 est l'unité de $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ et e est l'unité de A . Donc φ_x est un morphisme d'algèbre unitaire.

Considérons maintenant l'opération spectrale. On dit que $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ opère spectralement sur A en un point $x \in A$ si :

$$\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{C}) \quad , \quad \exists f(x) \in A \quad \text{tel que} \quad f(Sp_A(x)) = Sp_A(f(x)).$$

Si $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ opère spectralement sur A en un point $x \in A$, alors il n'existe pas forcément de morphisme d'algèbre unitaire φ_x de $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ dans A tel que $\varphi_x(f) = f(x)$. La proposition suivante fournit quelques éléments de réponse à ce fait.

Proposition 1.3. *Soit A une algèbre commutative unitaire d'unité e et sans diviseur de zéro. Soit x un élément de A tel que $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ opère spectralement dans A au point x . S'il existe un morphisme d'algèbre unitaire φ_x de $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ dans A tel que :*

$$\varphi_x(f) = f(x), \quad \forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{C}),$$

alors $Sp_A(x)$ est un singleton $\{\lambda\}$. De plus $\varphi_x(f) = f(\lambda)e, \forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$.

Preuve. On a φ_x est un morphisme d'algèbre unitaire de $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ dans A , alors l'algèbre $\mathcal{F}(\mathbb{C})/Ker(\varphi_x)$ est isomorphe à la sous algèbre $Im \varphi_x$ de A . Donc $\mathcal{F}(\mathbb{C})/Ker(\varphi_x)$ est une algèbre commutative sans diviseur de zéro. Par suite, $Ker(\varphi_x)$ est un idéal premier.

Montrons que $Ker(\varphi_x)$ est un idéal maximal. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$ et $f \notin Ker(\varphi_x)$. Montrons que :

$$Ker(\varphi_x) + \mathcal{F}(\mathbb{C})f = \mathcal{F}(\mathbb{C}).$$

Considérons l'application $g \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$ définie par :

$$g(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(z) = 0 \\ \frac{1}{f(z)} & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $(1 - gf)f = 0$ où 1 est l'application constante égale à 1 définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Donc $(1 - gf)f \in \text{Ker}\varphi_x$ qui est un idéal premier. Comme $f \notin \text{Ker}\varphi_x$, alors $(1 - gf) \in \text{Ker}\varphi_x$. Par conséquent $1 \in \text{Ker}\varphi_x + \mathcal{F}(\mathbb{C})f$. Donc $\text{Ker}(\varphi_x) + \mathcal{F}(\mathbb{C})f = \mathcal{F}(\mathbb{C})$. Ainsi $\text{Ker}\varphi_x$ est un idéal maximal de $\mathcal{F}(\mathbb{C})$.

Montrons que $Sp_A(x)$ est non vide. On a φ_x est un morphisme d'algèbre unitaire, donc $\varphi_x(1) = e$ où 1 est l'application constante égale à 1. Donc $1(Sp_A(x)) = Sp_A(e) = \{1\}$, ainsi $Sp_A(x)$ est non vide.

Soit $\lambda \in Sp_A(x)$. Considérons l'application ψ de $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ définie par $\psi(f) = f(\lambda)$. On a ψ est un morphisme d'algèbre. Soit $f \in \text{Ker}(\varphi_x)$. On a $f(\lambda) \in f(Sp_A(x)) = Sp_A(f(x)) = \{0\}$, donc $f(\lambda) = 0$. Ainsi $\text{Ker}\varphi_x \subset \text{Ker}(\psi) \subsetneq \mathcal{F}(\mathbb{C})$. Comme $\text{Ker}\varphi_x$ est un idéal maximal, alors $\text{Ker}\varphi_x = \text{Ker}(\psi)$. L'application ψ est une forme linéaire non nulle, donc $\text{Ker}\varphi_x = \text{Ker}(\psi)$ est un hyperplan de $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ et par suite de codimension 1. Ainsi $\text{Im}\varphi_x = \text{Vect}(\varphi_x(1)) = \text{Vect}(e)$. Donc pour tout $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$, il existe $\alpha(f) \in \mathbb{C}$ tel que, $f(x) = \varphi_x(f) = \alpha(f)e$. On a $f(\lambda) \in f(Sp_A(x)) = Sp_A(f(x)) = Sp_A(\alpha(f)e) = \{\alpha(f)\}$, donc $f(\lambda) = \alpha(f)$, ainsi pour tout $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$, $\varphi_x(f) = f(\lambda)e$. Soit $\gamma \in Sp_A(x)$. De la même façon, on montre que pour tout $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$, $\varphi_x(f) = f(\gamma)e$, donc pour tout $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$, $f(\gamma) = f(\lambda)$. En particulier pour $f = \text{Id}_{\mathbb{C}}$, on obtient $\lambda = \gamma$. Donc $Sp_A(x)$ est un singleton. En posant $Sp_A(x) = \{\lambda\}$, on obtient pour tout $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$, $\varphi_x(f) = f(\lambda)e$. ■

Remarque 1.4. *Le résultat de la proposition précédente n'est plus valide dans le cas où l'hypothèse "l'algèbre A est sans diviseur de zéro" n'est pas vérifiée.*

En effet : Considérons l'algèbre $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ et un élément $x \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$ pour lequel le spectre est égal à $\mathbb{C}$. (Cet élément existe bien , il suffit de prendre un élément $x \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$ surjectif). Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$. On a $Sp_{\mathcal{F}(\mathbb{C})}(f) = f(\mathbb{C})$. D'autre part $Sp_{\mathcal{F}(\mathbb{C})}(x) = \mathbb{C}$, donc $f(Sp_{\mathcal{F}(\mathbb{C})}(x)) = f(\mathbb{C})$. En prenant $f(x) = f$, on obtient que $f(Sp_{\mathcal{F}(\mathbb{C})}(x)) = Sp_{\mathcal{F}(\mathbb{C})}(f(x))$, par suite $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ opère sur lui-même

au point x et on voit que ni le spectre de x n'est réduit à un seul point, ni le morphisme associé à cette opération qui est égal à l'identité, n'est de la forme donnée par la proposition **1.3**.

2 Opération spectrale dans les algèbres topologiques.

Dans ce qui suit, nous examinons la notion d'opération spectrale dans les algèbres topologiques.

Comme toute Q -algèbre est spectralement bornée, on obtient le résultat suivant qui est conséquence de la proposition **1.2**.

Proposition 2.1. *Soit A une Q -algèbre. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Toute fonction opère spectralement sur A .*
2. *$Sp_A(x)$ est fini, pour tout $x \in A$.*

En conséquence, on retrouve le résultat de A. El kinani ([16], Théorème II.1, p. 58) qui caractérise les algèbres de Banach unitaires par les fonctions qui opèrent spectralement sur elles. Ce qui montre que, l'opération spectrale considérée dans les algèbres de Banach est une notion forte.

Corollaire 2.2. *Soit A une algèbre de Banach unitaire. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Toute fonction opère spectralement sur A .*
2. *$\dim(A/Rad(A))$ est finie.*

Preuve. *1) $\implies$ 2) :* On suppose que toute fonction opère spectralement sur A . Comme toute algèbre de Banach est une Q -algèbre, alors d'après la proposition précédente $Sp_A(x)$ est fini, pour tout $x \in A$. D'après ([22], Lemma 7, p. 376), on obtient que $\dim(A/Rad(A))$ est finie.

2) $\implies$ 1) : On suppose que $\dim(A/Rad(A))$ est finie. Donc $Sp_{A/RadA}(x)$ est fini, pour tout élément x de $A/RadA$. Comme $A/Rad(A)$ est une Q -algèbre, alors toute fonction opère spectralement sur $A/Rad(A)$. D'après la proposition **1.1**, toute fonction opère spectralement sur A . ■

Enfin, on retrouve le résultat de Y. Katznelson ([23], Théorème 1, p. 903) qui caractérise les algèbres de Banach unitaires semi-simples commutatives par les fonctions qui opèrent sur elles.

Une Q -algèbre m -convexe complète commutative unitaire semi-simple dans laquelle toute fonction opère spectralement n'est pas nécessairement de dimension finie modulo son radical de Jacobson, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2.3. Soit S l'algèbre des suites complexes stationnaires.

Pour tout $k \geq 1$, on définit S_k par :

$$S_k = \{(x_n)_n \in S : x_n = x_k, \forall n \geq k\}.$$

$(S_k)_k$ est une suite croissante de sous algèbre de dimension finie de S et on a :

$$S = \bigcup_{k \geq 1} S_k$$

On munit S de la topologie localement convexe τ_S définie par le système inductif $(S_k)_k$. La topologie τ_S est la topologie la plus fine qui rend continues les injections $i_k : S_k \longrightarrow S$. Chaque S_k est complète et d'après ([24], Proposition 9, p. II. 35), S est complète. Chaque S_k est tonnelée et par suite S est tonnelée. L'algèbre S est une algèbre commutative qui est limite inductive d'une famille dénombrable d'algèbres localement convexes, d'après ([1], Proposition 12, p. 349), S est alors une algèbre m -convexe. Pour tout $x \in S$, il existe $k \geq 1$ tel que $x \in S_k$. Comme $Sp_S(x) \subset Sp_{S_k}(x)$ et l'algèbre S_k est de dimension finie, alors $Sp_S(x)$ est borné. L'algèbre S est unitaire commutative m -convexe qui est tonnelée et vérifiant pour tout $x \in S$, $Sp_S(x)$ est borné, et d'après ([34], Corollary 3, p. 296), S est une Q -algèbre. Si $x = (x_n)_n \in \text{Rad}(S)$, alors $\rho_S(x) = 0$. Comme $(x_n)_n$ est stationnaire et $Sp_S(x) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$; il s'ensuit que $x = 0$. Donc S est semi-simple. L'algèbre S est une Q -algèbre vérifiant : pour tout $x \in S$, $Sp_S(x)$ est fini, donc toute fonction opère spectralement sur S . Soit $x = (x_n)_n \in S$, il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n = x_N$ pour tout $n \geq N$. Posons $e = (1, 1, 1, \dots)$ l'unité de S . Considérons le po-

polynôme $P(X) = \prod_{k=1}^N (X - x_k)$. On a $P(x = (x_n)_n) = \prod_{k=1}^N (x - x_k \cdot e) = 0$. Donc S est algébrique.

L'algèbre de l'exemple **2.4** est une Q -algèbre m -convexe complète commutative unitaire semi-simple sur laquelle toute fonction opère spectralement et qui n'est pas de dimension finie modulo son radical de Jacobson, mais elle est algébrique. Ainsi nous avons le résultat suivant.

Proposition 2.4. *Soit A une Q -algèbre m -convexe commutative et unitaire. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Toute fonction opère spectralement sur A .*
2. *L'algèbre $A/\text{Rad}(A)$ est algébrique.*

Preuve. **1) $\implies$ 2)** Sans perte de généralité, on peut supposer que A est semi-simple quitte à remplacer A par $A/\text{Rad}A$ si nécessaire, ce qui ne change pas le spectre ([5], 8), p. 3). Soit $a \in A$, on a $Sp_A(a) \neq \emptyset$. Comme A est une Q -algèbre et que toute fonction opère spectralement sur A , alors $Sp_A(a)$ est fini. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les valeurs spectrales de a . Posons $b = \prod_{i=1}^n (a - \alpha_i e)$, où e

est l'unité de A . Considérons le polynôme $Q = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$. On a $Sp_A(b) = Sp_A(Q(a)) = Q(Sp_A(a)) = \{Q(\alpha_i) : 1 \leq i \leq n\} = \{0\}$. Donc $\rho_A(b) = 0$. Comme A est une Q -algèbre m -convexe commutative, alors $b \in \text{Rad}(A) = \{0\}$ puisque A est semi-simple. D'où $Q(a) = 0$. Ainsi A est algébrique.

2) $\implies$ 1) Soit $a \in A$. Il existe un polynôme non nul $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(a) = 0$. Comme $Q(Sp_A(a)) = Sp_A(Q(a)) = \{0\}$, alors $Sp_A(a)$ est fini vu qu'un polynôme complexe non nul admet un nombre fini de racines. Donc d'après la proposition **2.1** toute fonction opère spectralement sur A . ■

Remarque 2.5. *Dans la proposition précédente, la Q propriété ne peut pas être supprimée de l'hypothèse, comme le montre l'exemple suivant.*

Soit A l'algèbre des suites complexes $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ munie de la topologie produit. C'est une algèbre de Fréchet commutative semi-simple unitaire, dans laquelle toute fonction opère spectralement, mais elle n'est pas algébrique. En effet :

Soient $x = (x_n)_n \in A$ et $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application telle que $Sp_A(x) \subset D$. On a $Sp_A(x) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ et $f(Sp_A(x)) = \{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\} = Sp_A((f(x_n)_n))$, ainsi f opère spectralement sur A .

Supposons que A est algébrique. Soit $x = (x_n)_n \in A$ tel que : $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$. Il existe un polynôme non nul $P = \sum_{k=0}^N a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$P(x) = 0$. On a $P(x) = 0 \iff \left(\sum_{k=0}^N a_k x_n^k\right)_n = 0$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$\sum_{k=0}^N a_k x_n^k = 0$. D'où $P(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi P admet une infinité de racines et par suite $P = 0$, ce qui contredit le fait que P est non nul. Donc A n'est pas algébrique.

Remarque 2.6. Dans la proposition 2.5, la m -convexité n'est pas une hypothèse superflue, comme le montre l'algèbre des fractions rationnelles $\mathbb{C}(X)$. Munie de la topologie de Williamson ([33], 3., p. 731), c'est une Q algèbre localement convexe métrisable à un produit continu, mais elle n'est pas m -convexe. Elle vérifie l'assertion 1 mais pas l'assertion 2 de la proposition 2.5.

En effet : Montrons que toute fonction opère spectralement sur $\mathbb{C}(X)$. Soit $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ et soit $R \in \mathbb{C}(X)$ tel que $Sp_{\mathbb{C}(X)}(R) \subset D$.

Si $R \in \mathbb{C}(X) \setminus \mathbb{C}$, alors $Sp_{\mathbb{C}(X)}(R) = \emptyset$. En prenant $f(R) = R$, on aura $f(Sp_{\mathbb{C}(X)}(R)) = \emptyset = Sp_{\mathbb{C}(X)}(f(R))$.

Si $R \in \mathbb{C}$, alors $Sp_{\mathbb{C}(X)}(R) = \{R\}$. Comme $f(R) \in \mathbb{C}$, alors $f(Sp_{\mathbb{C}(X)}(R)) = \{f(R)\} = Sp_{\mathbb{C}(X)}(f(R))$. Donc toute fonction opère spectralement sur $\mathbb{C}(X)$.

Montrons que $\mathbb{C}(X)/Rad(\mathbb{C}(X))$ n'est pas algébrique. Soit $x \in \mathbb{C}(X) \setminus \mathbb{C}$. On a d'abord $Sp_{\mathbb{C}(X)}(x) = \emptyset$. Notons par s la surjection canonique de $\mathbb{C}(X)$ dans $\mathbb{C}(X)/Rad(\mathbb{C}(X))$, qui est un morphisme d'algèbre surjectif. Supposons que $\mathbb{C}(X)/Rad(\mathbb{C}(X))$ est algébrique, il existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(s(x)) = 0$. Or $P(s(x)) = s(P(x))$, donc $P(x) \in Rad(\mathbb{C}(X))$, d'où $Sp_{\mathbb{C}(X)}(P(x)) = \{0\}$, ce qui est absurde car $Sp_{\mathbb{C}(X)}(x) = \emptyset$. Ainsi $\mathbb{C}(X)/Rad(\mathbb{C}(X))$ n'est pas algébrique.

Une Q -algèbre m -convexe commutative unitaire semi-simple sur laquelle toute fonction opère spectralement, n'est pas nécessairement de dimension finie. Mais si de plus, l'algèbre est un espace de Baire, on a le résultat suivant :

Théorème 2.7. *Soit A une Q -algèbre m -convexe commutative unitaire semi-simple de Baire. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Toute fonction opère spectralement sur A .*
2. *$A \simeq \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.*

Preuve. 1) $\implies$ 2) : Supposons que toute fonction opère spectralement sur A . Comme A est une Q -algèbre, $Sp_A(a)$ est fini, pour tout $a \in A$. Montrons que A admet un nombre fini de caractères. Supposons qu'il existe une suite $(\varphi_n)_n$ de caractères non nuls deux à deux distincts de A . Pour $n \neq m$, posons :

$$B_{n,m} = \{x \in A : \varphi_n(x) = \varphi_m(x)\} = Ker(\varphi_n - \varphi_m).$$

L'ensemble $B_{n,m}$ est un sous espace vectoriel de A . Comme φ_n et φ_m sont continus, alors $B_{n,m}$ est fermé. Ainsi $B_{n,m}$ est un sous espace vectoriel fermé de A .

Montrons que $\bigcup_{n \neq m} B_{n,m} = A$. Soit $x \in A$. On a $Sp_A(x) = \widehat{x}(\mathcal{M}(A)) = \{\chi(x) : \chi \in \mathcal{M}(A)\}$, où $\mathcal{M}(A)$ est le spectre global de A . Comme $Sp_A(x)$ est fini, il existe $n \neq m$, tel que $\varphi_n(x) = \varphi_m(x)$, donc $x \in B_{n,m}$. D'où $A = \bigcup_{n \neq m} B_{n,m}$.

On a $A = \bigcup_{n \neq m} B_{n,m}$ et $B_{n,m}$ est un sous espace vectoriel fermé de A .

Comme A est de Baire, il existe n, m tels que $int(B_{n,m}) \neq \emptyset$. Comme $B_{n,m}$ est un sous espace vectoriel de A , alors $A = B_{n,m}$. Donc, pour tout $x \in A$, $\varphi_n(x) = \varphi_m(x)$, d'où $\varphi_n = \varphi_m$. Contradiction avec le fait que les φ_n sont deux à deux distincts. Ainsi A admet un nombre fini de caractères non nuls. Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ les caractères non nuls de A . On a pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $i \neq j$, $ker(\varphi_i)$ et $ker(\varphi_j)$ sont étrangers ($A = ker(\varphi_i) + ker(\varphi_j)$). D'après ([4], Proposition 5, p. 72), on obtient :

$$A / \bigcap_{i=1}^n Ker(\varphi_i) \simeq \prod_{i=1}^n A / Ker(\varphi_i).$$

Or $A/Ker(\varphi_i) \simeq Im(\varphi_i) = \mathbb{C}$. Donc,

$$A/\bigcap_{i=1}^n Ker(\varphi_i) \simeq \mathbb{C}^n.$$

L'algèbre A une Q -algèbre m -convexe commutative unitaire semi-simple, donc,

$$\{0\} = Rad(A) = \bigcap_{i=1}^n Ker(\varphi_i).$$

Finalement :

$$A \simeq \mathbb{C}^n.$$

2) $\implies$ 1) Si $A \simeq \mathbb{C}^n$, alors A est de dimension finie. Donc, pour tout $x \in A$, $Sp_A(x)$ est fini. Comme A est une Q -algèbre, toute fonction opère spectralement sur A . ■

Remarque 2.8. *Le résultat du théorème précédent n'est pas vrai sans l'hypothèse de "Baire". En effet, l'algèbre considérée dans l'exemple 2.4 est une Q -algèbre m -convexe commutative unitaire semi simple sur laquelle toute fonction opère spectralement et qui est de dimension infinie.*

3 Opération au sens de Katznelson dans les algèbres localement convexes.

Nous nous intéressons dans cette partie à l'étude de l'opération au sens de Katznelson ([23]), dans les algèbres localement convexes.

Proposition 3.1. *Soit A une Q -algèbre m -convexe unitaire dans laquelle toute fonction opère. Alors, on a :*

1. *A est algébrique, semi-simple et commutative.*
2. *Si de plus A est un espace de Baire, alors A est de dimension finie.*

Preuve. 1) Montrons que A est semi-simple. L'algèbre A est sans élément quasi-nilpotent non nul. En effet, soit $x \in A$ tel que $\rho_A(x) = 0$. La fonction $Z : \lambda \longrightarrow \lambda$ opère sur A , il existe alors un élément unique $Z(x) \in A$ tel que $Z \circ \widehat{x} = \widehat{Z(x)}$. On a $\rho_A(x) = 0$, donc $Sp_A(x) = \{0\}$ et par suite $Im(\widehat{x}) = \{0\}$. D'où $Z \circ \widehat{x} = \widehat{0}$. D'autre part $Z \circ \widehat{x} = \widehat{x}$. D'après l'unicité de l'élément $Z(x)$ de A , on a $0 = Z(x) = x$, donc $x = 0$. Ainsi, A est sans élément quasi-nilpotent non nul et par suite A est semi-simple.

Montrons que A est algébrique. Commençons par montrer que pour tout $x \in A$, $Sp_A(x)$ est fini. Soit $x \in A$ tel que $Sp_A(x)$ est infini. Comme $Im(\widehat{x}) \cup \{0\} = Sp_A(x) \cup \{0\}$, on a l'ensemble $Im(\widehat{x})$ est infini. Soit $(\lambda_n)_n$ une suite d'éléments deux à deux distincts de $Im(\widehat{x})$. Considérons l'application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = \begin{cases} n & \text{si } z = \lambda_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'application f opère sur A , alors il existe un unique élément $f(x) \in A$ tel que $f \circ \widehat{x} = \widehat{f(x)}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n = f(\lambda_n) \in f(Im(\widehat{x})) = Im(\widehat{f(x)}) \subset Sp_A(f(x))$. Donc $\mathbb{N} \subset Sp_A(f(x))$. Ce qui contredit le fait que l'algèbre A est spectralement bornée, vu qu'elle est une Q -algèbre. Ainsi, pour tout $x \in A$, $Sp_A(x)$ est fini.

Soit $x \in A$. Posons $Sp_A(x) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Considérons le polynôme $P(X) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$. On a $Sp_A(P(x)) = P(Sp_A(x)) = \{0\}$, donc $\rho_A(P(x)) = 0$. Comme A est sans élément quasi-nilpotent non nul, alors $P(x) = 0$. Ainsi, A est algébrique.

Montrons que A est commutative. Soit $x \in A$, $x \neq 0$. Comme A est algébrique, il existe un polynôme non nul $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(x) = 0$. Si le terme constant du polynôme Q est non nul, tout entier $n \geq 1$ vérifie $x^n Q(x) = 0$. Si le terme constant du polynôme Q est nul, dans ce cas, en posant $Q = a_m X^m + \dots + a_n X^n = X^n P(X)$, on obtient $x^n P(x) = 0$ avec le terme constant de P non nul. Donc Il existe un entier $n \geq 1$ et un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ à élément constant non nul tel que $x^n P(x) = 0$. Considérons le

plus petit entier naturel n vérifiant l'égalité :

$$x^n P(x) = 0.$$

Montrons que $n = 1$. Supposons $n \geq 2$. On a $(x^{n-1}P(x))^2 = x^{n-2}P(x)x^n P(x) = 0$, donc $x^{n-1}P(x)$ est un élément nilpotent de A et par conséquent c'est un élément quasi-nilpotent de A . Comme A est sans élément quasi-nilpotent non nul, alors $x^{n-1}P(x) = 0$. Ceci constitue une contradiction avec le fait que n est le plus petit entier naturel satisfaisant l'égalité, $x^n P(x) = 0$. Donc $xP(x) = 0$. Posons $P(x) = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0 e$ avec $a_0 \neq 0$. On a :

$$xP(x) = 0 \iff x = -((a_m/a_0)x^{m-1} + \dots + (a_1/a_0)e)x^2.$$

Donc

$$x = ax^2 \text{ avec } a \in A.$$

Montrons que $xA \subset Ax$, pour tout $x \in A$. Soit $y \in A$. En utilisant l'égalité : $yx = yax^2$, on obtient : $(xy - xyax)^2 = 0$. Donc $xy = xyax \in Ax$, pour tout $y \in A$. Ainsi $xA \subset Ax$. Soit M un idéal maximal à gauche de A . Comme $xA \subset Ax$, pour tout $x \in A$, alors $MA \subset AM \subset M$. Donc M est un idéal maximal à droite de A et par suite c'est un idéal maximal de A . Donc A/M est un corps. Mais A/M est algébrique et $\mathbb{C}$ est un corps algébriquement clos, alors $A/M \simeq \mathbb{C}$ et par suite $A/Rad(A)$ est commutative. Comme A est semi-simple, il vient que A est commutative.

2) L'algèbre A est une Q -algèbre m -convexe sur laquelle toute fonction opère. D'après **1)**, l'algèbre A est commutative et semi-simple. Montrons que toute fonction opère spectralement sur A . Soient $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ et $x \in A$ tel que $Sp_A(x) \subset D$. L'application f opère sur A , alors il existe un unique élément $f(x)$ dans A tel que $f \circ \widehat{x} = \widehat{f(x)}$. On a $Sp_A(x) = \{\chi(x) : \chi \in \mathcal{M}(A)\}$, où $\mathcal{M}(A)$ est l'ensemble des caractères de A . Donc $f(Sp_A(x)) = \{f(\chi(x)) : \chi \in \mathcal{M}(A)\} = \{\chi(f(x)) : \chi \in \mathcal{M}(A)\} = Sp_A(f(x))$. Par suite f opère spectralement sur A . Si de plus A est un espace de Baire, d'après le Théorème **2.8**, $A \simeq \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, A est de dimension finie. ■

Comme conséquence de la proposition **3.1**, nous obtenons dans le cas d'une algèbre de Fréchet, le résultat suivant.

Corollaire 3.2. *Soit A une Q -algèbre de Fréchet. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Toute fonction opère dans A .*
2. *A est une algèbre semi-simple commutative de dimension finie.*

Preuve. **1) $\implies$ 2)** Si A est une Q -algèbre de Fréchet, alors A est une Q -algèbre m -convexe qui est aussi un espace de Baire. Donc si toute fonction opère sur A , d'après la proposition précédente, l'algèbre A est semi-simple commutative de dimension finie.

2) $\implies$ 1) L'algèbre A étant de dimension finie, donc pour tout $x \in A$, $Sp_A(x)$ est fini. Comme A est une Q -algèbre, d'après la proposition **2.1**, toute fonction opère spectralement sur A . On a : A est une Q -algèbre m -convexe commutative semi-simple qui est un espace de Baire sur laquelle, toute fonction opère spectralement. D'après le théorème **2.8**, $A \simeq \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Désignons par $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Les caractères de $\mathbb{C}^n$ sont exactement $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ tels que $\chi_i(e_j) = \delta_{ij}$. Soient maintenant $a \in \mathbb{C}^n$ et f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{C}$ telle que $Sp_{\mathbb{C}^n}(a) \subset D$. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbb{C}$ tels que $a = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. On pose $f(a) = \sum_{i=1}^n f(\chi_i(a)) e_i$ qui est un élément de $\mathbb{C}^n$. Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned}
 \widehat{f(a)}(\chi_j) &= \chi_j(f(a)) \\
 &= \chi_j\left(\sum_{i=1}^n f(\chi_i(a)) e_i\right) \\
 &= \sum_{i=1}^n f(\chi_i(a)) \delta_{ij} \\
 &= f(\chi_j(a)) \\
 &= f \circ \widehat{a}(\chi_j).
 \end{aligned}$$

Donc $\widehat{f(a)} = f \circ \widehat{a}$. Ainsi, f opère sur $\mathbb{C}^n$.

Montrons maintenant que f opère sur A . Soit φ un isomorphisme d'algèbres de A dans $\mathbb{C}^n$. Soit $x \in A$ tel que $Sp_A(x) \subset D$. On pose $a = \varphi(x) \in \mathbb{C}^n$. On a d'abord $Sp_{\mathbb{C}^n}(a) = Sp_{\mathbb{C}^n}(\varphi(x)) \subset Sp_A(x) \subset D$. Soit χ un caractère non nul de A . En remarquant d'abord que $\chi \circ \varphi^{-1}$ est un caractère non nul de $\mathbb{C}^n$, on a :

$$\begin{aligned} f \circ \widehat{x}(\chi) &= f(\chi(x)) \\ &= f(\chi(\varphi^{-1}(a))) \\ &= f \circ \widehat{a}(\chi \circ \varphi^{-1}) \\ &= \widehat{f(a)}(\chi \circ \varphi^{-1}) \\ &= \chi(f(x)) = \widehat{f(x)}(\chi), \end{aligned}$$

avec $f(x) = \varphi^{-1}(f(a)) \in A$. Donc $f \circ \widehat{x} = \widehat{f(x)}$. Ainsi, f opère sur A . ■

4 Structure de certaines algèbres de dimension dénombrable.

On désigne par $E(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ entière}\}$. Munie de la famille des semi-normes $(p_k)_{k \geq 1}$ où $p_k(f) = \sup_{|z| \leq k} |f(z)|$, l'algèbre $E(\mathbb{C})$ devient une algèbre de Fréchet. Cette topologie est également définie par la famille des semi-normes $(q_k)_k$ donnée par :

$$q_k \left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n \right) = \sup_{|z| \leq k} \left(\sum_{n \geq 0} |a_n z^n| \right).$$

Soit (A, τ) une algèbre localement convexe unitaire. On dit qu'une fonction entière $f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in E(\mathbb{C})$ opère dans (A, τ) , si pour tout $x \in A$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge dans (A, τ) .

Remarque 4.1. Soit (A, τ) une algèbre localement convexe unitaire. Si $E(\mathbb{C})$ opère au point $x \in A$, c'est-à-dire, pour toute fonction $f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in E(\mathbb{C})$,

la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge dans (A, τ) , alors l'application ψ_x définie de $E(\mathbb{C})$ dans A par :

$$\psi_x \left(f = \sum a_n z^n \right) = f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

est un morphisme d'algèbre unitaire.

L'algèbre des suites complexes stationnaires S donnée par l'exemple **2.4**, est une Q -algèbre m -convexe complète unitaire semi-simple et de dimension dénombrable. Elle n'est pas de dimension finie modulo son radical de Jacobson et dans laquelle toute fonction opère spectralement.

On serait tenté de chercher d'autres exemples. En fait, l'algèbre S , à un isomorphisme près, est la seule algèbre semi-simple unitaire complète commutative m -convexe de dimension dénombrable.

Le résultat suivant nous donne une propriété algébrique fondamentale d'algèbre localement convexe de dimension dénombrable, sur laquelle les séries entières opèrent.

Proposition 4.2. *Soit (A, τ) une algèbre localement convexe unitaire non nécessairement commutative de dimension dénombrable. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Toute série entière opère sur A .*
2. *A est algébrique.*

Preuve. 1) $\implies$ 2) On suppose que toute série entière opère sur A . Soit $x \in A$. Considérons l'application ψ_x de $E(\mathbb{C})$ dans A définie par :

$$\psi_x(f) = f(x).$$

L'application ψ_x est un morphisme d'algèbre. Donc $E(\mathbb{C})/Ker(\psi_x) \simeq Im\psi_x$. Montrons maintenant que ψ_x est continu. Soit $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ la famille des seminormes définissant la topologie τ . D'après ([18], Lemma, p. 686), on a pour tout $x \in A$,

$$M_\lambda(x) = \sup_n [p_\lambda(x^n)]^{\frac{1}{n}} < +\infty, \forall \lambda \in \Lambda.$$

Soient $\lambda \in \Lambda$ et $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n \in E(\mathbb{C})$. On a :

$$p_\lambda(f(x)) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} p_\lambda(\alpha_k x^k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |\alpha_k| M_\lambda^k \leq q_r(f),$$

où $r \in \mathbb{N}$ tel que $r > M_\lambda$. D'où la continuité de ψ_x et par suite $\text{Ker}(\psi_x)$ est un idéal fermé de $E(\mathbb{C})$. Munie de la topologie quotient, l'algèbre $E(\mathbb{C})/\text{Ker}(\psi_x)$ est une algèbre m -convexe métrisable complète, donc nécessairement de dimension finie, puisque A est de dimension dénombrable. Par conséquent $\text{Im}(\psi_x)$ qui contient $\mathbb{C}[x]$ est de dimension finie. D'où A est algébrique.

2) $\implies$ 1) Supposons A algébrique. Alors $\mathbb{C}[x]$ est de dimension finie, pour tout $x \in A$. On sait que les fonctions entières opèrent dans les algèbres de Banach, par conséquent, elles opèrent au point x dans $\mathbb{C}[x]$ et par suite dans A . ■

Théorème 4.3. *Soit (A, τ) une algèbre commutative unitaire semi-simple localement convexe de dimension dénombrable. On suppose que A a une topologie tel que $E(\mathbb{C})$ opère sur A . Alors on a :*

1. *Il existe un isomorphisme continu entre (S, τ_S) et (A, τ) .*
2. *Il existe une topologie τ' complète m -convexe sur A plus fine que τ telle que les deux topologies (A, τ') et (S, τ_S) soient isomorphes.*

Preuve. **1)** D'après la proposition précédente, A est algébrique. Considérons une base de Hamel, $(e_n)_{n \geq 1}$ de A . Pour tout $n \geq 1$, posons : $A_n = \mathbb{C}[e_1, \dots, e_n]$, la sous algèbre de A engendrée par la famille $\{e_1, \dots, e_n\}$. Comme A est algébrique et commutative, la sous algèbre A_n est de dimension finie et on a de plus $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$. L'algèbre A_n est commutative semi-simple de dimension finie, donc il existe $k_n \in \mathbb{N}^*$, tel que $A_n \simeq \mathbb{C}^{k_n}$. Soit φ_n un isomorphisme de A_n dans $\mathbb{C}^{k_n}$. Comme $\mathbb{C}^{k_n} = \mathbb{C}[u_n]$ où $u_n = (1, 2, \dots, k_n)$, alors $A_n = \mathbb{C}[v_n]$ où $v_n = \varphi_n^{-1}(u_n)$. Considérons l'injection i_n de $\mathbb{C}^{k_n}$ dans S définie par : $i_n(x_1, \dots, x_{k_n}) = (x_1, \dots, x_{k_n}, x_{k_n}, \dots)$. Posons $\psi_n = i_n \circ \varphi_n$. l'application ψ_n est un morphisme d'algèbre de A_n dans S . De plus, la restriction de ψ_{n+1}

à A_n est ψ_n . D'où l'existence d'un morphisme d'algèbre ψ de (A, τ) dans (S, τ_S) qui est bijective. Comme τ_S est la topologie la plus fine des topologies localements convexes sur S , l'isomorphisme ψ_n^{-1} est continu.

2) Notons par τ' , la topologie limite inductive localement convexe sur A , définie par le système inductif $(A_n)_{n \geq 1}$. L'algèbre A est une algèbre commutative qui est limite inductive d'une famille dénombrable d'algèbres localement convexes, d'après ([1], Proposition 12, p. 349), l'algèbre A est une algèbre m -convexe. De plus, elle est complète, d'après ([24], Proposition 9, p. II. 35), puisque les algèbres A_n sont de dimension finie. Donc ψ est un isomorphisme (algébrique et topologique) entre (A, τ') et (S, τ_S) . ■

Comme conséquence, nous avons le résultat suivant.

Corollaire 4.4. *Soit (A, τ) une algèbre m -convexe complète commutative unitaire semi-simple de dimension dénombrable, alors il existe une topologie m -convexe complète τ' plus fine que τ , tel que les deux algèbres topologiques (A, τ') et (S, τ_S) soient isomorphes.*

Références

- [1] Arosio, A., *Locally convex inductive limits of normed algebras*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 51 (1974), 339-356.
- [3] Bourbaki, N., *Espaces vectoriels topologiques*. Chapitres 1 à 5. Masson, Paris, 1981.
- [13] El Boukasmi, D. ; El Kinani, A. *Spectral operation in locally convex algebras*. Proyecciones 41 (2022), no. 3, 683–695.
- [16] A. El Kinani, *Sur deux théorèmes de Katznelson*, Rev. Academia de Ciencias ; Zaragoza, 56 (2001).

[17] El Kinani, A., Oudadess, M., *m-convex properties in locally convex algebras*. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 7 (2000), no.2, 285-290.

[18] A. El Kinani, M. Oudadess, *Entire functions and m-convex structure in commutative Baire algebras*. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 4 (1997), no. 5, 685-687.

[22] Kaplansky, I., *Ring isomorphisms of Banach algebras*. Canad. J. Math. 6 (1954), 374-381.

[23] Y. Katznelson, *Algèbres caractérisées par les fonctions qui opèrent sur elles*. C. R. Acad. Sc. , Paris, A-B 247(1958), 903-905.

[24] Köthe, G., *Topological Vector Spaces I*. Second printing, revised, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1983.

[25] J. P. Lafon, *Algèbre commutative*, Paris, 1977.

[26] Michael, E. A., *Locally multiplicatively convex topological algebra*. Mem. Amer. Math. Soc. 11, Providence (1952).

[32] M. Roitman, Y. Sternfeld, *When is a linear functional multiplicative ?* Trans. Amer. Math. Soc. 267 (1981), no. 1, 111-124.

[33] Williamson, J. H., *On topologising the field $C(t)$* . Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954), 729-734.

[34] Zelazko, W., *On maximal ideals in commutative m-convex algebras*. Studia Math. 58 (1976), no. 3, 291-298.

Chapitre 3

Opération faible dans les algèbres localement convexes.

Introduction.

Dans ([23]), Y. Katznelson a montré le résultat suivant : Soit A est une algèbre de Banach unitaire commutative et semi-simple. Une condition nécessaire et suffisante pour que toute fonction continue opère au sens de Katznelson ([23]), sur A , est que A soit l'algèbre de toutes les fonctions continues sur son espace des caractères (non nuls). Dans ([16]), A. El Kinani a prolongé le résultat précédent à une algèbre de Banach unitaire non nécessairement commutative et semi-simple. Pour cela, il a introduit la notion d'opération faible suivante : Soit D une partie de $\mathbb{C}$. On dit qu'une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ opère faiblement sur une algèbre de Banach unitaire A , si pour tout $x \in A$ dont le spectre est contenu dans D , il existe un élément unique dans A , noté $f(x)$, contenu dans la bicommutante, notée $\Gamma(\Gamma(x))$, de $\{x\}$, dans A , tel que $\widehat{f(x)} = f \circ \widehat{x}$ sur $\mathcal{M}(\Gamma(\Gamma(x)))$, où $\mathcal{M}(\Gamma(\Gamma(x)))$ est l'ensemble des caractères non nuls de $\Gamma(\Gamma(x))$. Il a obtenu la caractérisation des algèbres de Banach unitaires sur lesquelles toute fonction opère faiblement. Ainsi, il a montré le résultat suivant : Si A est une algèbre de Banach unitaire, une condition nécessaire et suffisante pour que toute fonction opère faiblement sur A , est que A soit isomorphe (algébriquement et topologiquement) à $\mathbb{C}^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

En se basant sur le fait que les fonctions continues opèrent faiblement sur les C^* algèbres unitaires et commutatives, A. El Kinani ([16]) a cherché à caractériser les algèbres de Banach unitaires sur lesquelles toute fonction continue opère. Il a montré le résultat suivant : Si A est une algèbre de Banach unitaire, une condition nécessaire et suffisante pour que toute fonction continue opère faiblement sur A , est que A soit une C^* algèbre commutative. Comme conséquence, il a retrouvé le résultat de Katznelson.

Dans ce chapitre, nous considérons l'opération faible dans un cadre plus général. Nous nous intéressons d'abord à une algèbre unitaire A qui n'est pas nécessairement topologique et nous procédons à une comparaison avec les résultats obtenus dans le cas de l'opération spectrale. Nous montrons, contrairement à l'opération spectrale (chapitre 2), que l'on peut définir un morphisme d'algèbre entre $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ et A sans aucune condition supplémentaire. Puis, on montre que si toute fonction opère faiblement sur une algèbre unitaire A , alors elle est sans élément quasi-nilpotent non nul. Ceci permet de montrer qu'il existe une algèbre de dimension finie sur laquelle on n'a pas toute fonction opère faiblement. Par ailleurs, on sait que : Toute fonction opère spectralement dans une algèbre unitaire A si, et seulement si, toute fonction opère spectralement sur $A/Rad(A)$. Ce résultat n'est plus vrai dans le cas de l'opération faible.

En se plaçant dans le cas des algèbres topologiques, nous montrons que si A est une Q -algèbre m -convexe unitaire, toute fonction qui opère faiblement, opère spectralement. Puis on en déduit que si A est une Q -algèbre m -convexe unitaire où toute fonction opère faiblement, alors A est algébrique semi-simple et commutative. On obtient aussi que si A est une Q -algèbre m -convexe unitaire qui est un espace de Baire où toute fonction opère faiblement, alors elle est isomorphe à $\mathbb{C}^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. On établit également que si A est une Q -algèbre m -convexe unitaire sur laquelle toute fonction continue opère faiblement, alors A est une algèbre hermitienne commutative semi-simple à involution continue.

1 Opération faible dans les algèbres unitaires non nécessairement topologiques.

Soient A une algèbre unitaire et D une partie de $\mathbb{C}$. On dit qu'une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ opère faiblement sur A , si pour tout $x \in A$ dont le spectre est contenu dans D , il existe un élément unique dans A , noté $f(x)$, contenu dans la bicommutante, notée $\Gamma(\Gamma(x))$, de $\{x\}$, dans A , tel que $\widehat{f(x)} = f \circ \widehat{x}$ sur $\mathcal{M}^*(\Gamma(\Gamma(x)))$, où $\mathcal{M}^*(\Gamma(\Gamma(x)))$ est l'ensemble des caractères de $\Gamma(\Gamma(x))$.

On note par $\mathcal{F}(\mathbb{C})$, l'algèbre des fonctions complexes définies sur $\mathbb{C}$. Soient A une algèbre unitaire d'unité e et x un élément de A . On dit que $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ opèrent faiblement au point x , si pour tout $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$, il existe un unique élément $f(x)$ dans $\Gamma(\Gamma(x))$, tel que $f \circ \widehat{x} = \widehat{f(x)}$ sur $\mathcal{M}^*(\Gamma(\Gamma(x)))$. On a ainsi, un morphisme d'algèbre unitaire φ_x de $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ à valeurs dans A , $f \mapsto \varphi_x(f) = f(x)$. En effet, pour tous $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, on a :

$$\varphi_x(\widehat{f+g}) = (f+g) \circ \widehat{x} = f \circ \widehat{x} + g \circ \widehat{x} = \widehat{\varphi_x(f)} + \widehat{\varphi_x(g)} = \widehat{\varphi_x(f) + \varphi_x(g)}.$$
 D'après l'unicité, on a $\varphi_x(f+g) = \varphi_x(f) + \varphi_x(g)$. De même on a $\varphi_x(\alpha f) = \alpha \varphi_x(f)$, $\varphi_x(fg) = \varphi_x(f)\varphi_x(g)$ et $\varphi_x(1_{\mathcal{F}(\mathbb{C})}) = e$. Donc φ_x est un morphisme d'algèbre unitaire.

On a obtenu ainsi un morphisme d'algèbre unitaire de $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ dans A sans conditions supplémentaires sur A , contrairement au cas de l'opération spectrale ([13], Proposition 3.4, p. 687).

D'après ([13], Proposition 3.2, p. 686), si A est une algèbre de dimension finie (donc spectralement bornée), toute fonction opère spectralement dans A , car pour tout $x \in A$, $Sp_A(x)$ est fini. Ce n'est pas le cas pour l'opération faible, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 1.1. *Soit A une algèbre unitaire dans laquelle la fonction identité de $\mathbb{C}$, $Id_{\mathbb{C}}$, opère faiblement, alors A est sans élément quasi-nilpotent non nul.*

Preuve. Soient A une algèbre unitaire dans laquelle la fonction $Id_{\mathbb{C}}$ opère faiblement et $x \in A$ tel que $\rho_A(x) = 0$. L'application $Id_{\mathbb{C}}$ opère faiblement dans A , donc il existe un unique élément $Id_{\mathbb{C}}(x)$ dans $\Gamma(\Gamma(x))$, la bicommutante de $\{x\}$, dans A , tel que $Id_{\mathbb{C}} \circ \widehat{x} = \widehat{Id_{\mathbb{C}}(x)}$ dans $\mathcal{M}^*(\Gamma(\Gamma(x)))$. D'autre

part $\rho_A(x) = 0$ implique $Sp_A(x) = \{0\}$. Comme $\Gamma(\Gamma(x))$ est une sous algèbre pleine de A , on a $Sp_A(x) = Sp_{\Gamma(\Gamma(x))}(x)$. D'où $Sp_{\Gamma(\Gamma(x))}(x) = \{0\}$. Puisque pour tout $\chi \in \mathcal{M}^*(\Gamma(\Gamma(x)))$, $\chi(x) \in Sp_{\Gamma(\Gamma(x))}(x)$, on obtient que $\chi(x) = 0$ pour tout $\chi \in \mathcal{M}^*(\Gamma(\Gamma(x)))$. Et par suite $Id_{\mathbb{C}} \circ \widehat{x} = \widehat{0}$ dans $\mathcal{M}^*(\Gamma(\Gamma(x)))$. Or $Id_{\mathbb{C}} \circ \widehat{x} = \widehat{x}$ dans $\mathcal{M}^*(\Gamma(\Gamma(x)))$, et d'après l'unicité de l'élément $Id_{\mathbb{C}}(x)$ dans $\Gamma(\Gamma(x))$, on a $x = Id_{\mathbb{C}}(x) = 0$ ■

L'exemple suivant met en évidence une algèbre de dimension finie dans laquelle l'assertion **toute fonction opère faiblement** n'est plus valide.

Exemple 1.2. *L'algèbre des matrices carrées d'ordre 2 est une algèbre de dimension finie admettant des éléments quasi-nilpotents non nuls (elle contient des éléments nilpotents non nuls donc quasi-nilpotents non nuls), et par suite la fonction $Id_{\mathbb{C}}$ n'opère pas faiblement sur cette algèbre.*

Nous savons ([13], Proposition 3.1, p. 686) que si A est une algèbre, alors toute fonction opère spectralement sur A si, et seulement si, elle opère spectralement sur $A/Rad(A)$.

Pour l'opération faible, nous donnons, dans le cas commutatif, le résultat suivant.

Proposition 1.3. *Soit A une algèbre commutative et unitaire. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Pour tout $x \in A$ et pour tout $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$, il existe $f(x) \in A$, tel que $\chi(f(x)) = f(\chi(x))$, pour tout $\chi \in \mathcal{M}^*(A)$.*
2. *$\mathcal{F}(\mathbb{C})$ opère faiblement dans l'algèbre $A/Rad(A)$.*

Preuve. Rappelons que dans le cas commutatif, $Rad(A)$ est l'intersection des noyaux des caractères non nuls de A .

1) $\implies$ 2) : Notons $s : A \longrightarrow A/Rad(A)$ la surjection canonique. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$. Montrons que f opère faiblement sur $A/Rad(A)$. Soit $x \in A$. D'après 1), il existe $f(x) \in A$, tel que $\chi(f(x)) = f(\chi(x))$, pour tout $\chi \in \mathcal{M}^*(A)$. Posons $f(s(x)) = s(f(x))$. L'élément $f(s(x))$ ne dépend pas du représentant de la classe $s(x)$ de x . En effet : Soit $y \in A$, tel que $s(x) = s(y)$. On a $x - y \in Rad(A)$ et par suite, pour tout $\chi \in \mathcal{M}^*(A)$, $\chi(x) = \chi(y)$.

Donc pour tout $\chi \in \mathcal{M}^*(A)$, $f(\chi(x)) = f(\chi(y))$, ce qui est équivalent à $\chi(f(x)) = \chi(f(y))$ pour tout $\chi \in \mathcal{M}^*(A)$. Donc $f(x) - f(y) \in \text{Rad}(A)$, ce qui donne $s(f(x)) = s(f(y))$. Soit χ un caractère non nul de $A/\text{Rad}(A)$. L'application $\chi \circ s$ est un caractère non nul de A . Donc $(\chi \circ s)(f(x)) = f((\chi \circ s)(x))$ et par suite $\chi(s(f(x))) = f(\chi(s(x)))$. Finalement, il existe un élément $s(f(x)) \in A/\text{Rad}(A) = \Gamma(\Gamma(s(x)))$, tel que $f \circ \widehat{s(x)} = \widehat{s(f(x))}$ sur $\mathcal{M}^*(A/\text{Rad}(A))$. L'unicité est immédiate vu que $A/\text{Rad}(A)$ est semi-simple.

2) $\implies$ 1) : Soient $x \in A$ et $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$. L'application f opère faiblement sur $A/\text{Rad}(A)$, il existe alors $y \in A$ tel que $f(\chi(s(x))) = \chi(s(y))$ pour tout $\chi \in \mathcal{M}^*(A/\text{Rad}(A))$. Posons $f(x) = y$ et soit $\chi \in \mathcal{M}^*(A)$. Pour tout $x \in A$, posons $\chi'(s(x)) = \chi(x)$. Si $s(x) = s(x')$, alors $x - x' \in \text{Rad}(A)$ et donc $\chi(x) = \chi(x')$. Par suite χ' définit bien une application qui est de plus un caractère non nul de $A/\text{Rad}(A)$. Finalement, on a : $f(\chi(x)) = f(\chi'(s(x))) = \chi'(s(y)) = \chi(y) = \chi(f(x))$. Donc f opère faiblement sur A . ■

2 Opération faible dans les Q -algèbres m -convexes unitaires.

On sait que dans une algèbre de Banach unitaire A , si une fonction opère faiblement, elle opère spectralement ([16], Remarque 1.4, p. 2)). Nous allons établir un résultat analogue dans le cas des Q -algèbres m -convexes unitaires.

Proposition 2.1. *Dans une Q -algèbre m -convexe unitaire, toute fonction qui opère faiblement, opère spectralement.*

Preuve. Soient A une Q -algèbre m -convexe unitaire et f une fonction qui opère faiblement dans A . Soit $x \in A$. Il existe un unique élément $f(x) \in \Gamma(\Gamma(x))$, tel que $\chi(f(x)) = f(\chi(x))$, pour tout $\chi \in \mathcal{M}(\Gamma(\Gamma(x)))$. L'algèbre $\Gamma(\Gamma(x))$ est une sous algèbre commutative pleine de A qui est une Q -algèbre m -convexe unitaire. Donc $\Gamma(\Gamma(x))$ est une Q -algèbre m -convexe unitaire com-

mutative. Par suite,

$$\begin{aligned}
Sp_A(f(x)) &= Sp_{\Gamma(\Gamma(x))}(f(x)) \\
&= \{\chi(f(x)) : \chi \in \mathcal{M}(\Gamma(\Gamma(x)))\} \\
&= \{f(\chi(x)) : \chi \in \mathcal{M}(\Gamma(\Gamma(x)))\} \\
&= f(Sp_{\Gamma(\Gamma(x))}(x)) \\
&= f(Sp_A(x)).
\end{aligned}$$

Donc f opère spectralement dans A . ■

Comme conséquence de la proposition précédente, nous obtenons le résultat suivant.

Corollaire 2.2. *Si A est une Q -algèbre m -convexe unitaire dans laquelle toute fonction opère faiblement, alors A est algébrique commutative et semi-simple.*

Preuve. Soit A une Q -algèbre m -convexe unitaire dans laquelle toute fonction opère faiblement. D'après la proposition précédente, toute fonction opère spectralement dans A . De plus, d'après ([13], Proposition 3.7, p. 688), le spectre de tout élément est fini. Soit $x \in A$. Posons : $Sp_A(x) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Considérons le polynôme $P = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$. On a $P(Sp_A(x)) = \{0\}$, donc $Sp_A(P(x)) = P(Sp_A(x)) = \{0\}$ et par suite $P(x)$ est un élément quasi-nilpotent de A . Comme toute fonction opère faiblement dans A , d'après la Proposition 1.1, A est sans élément quasi-nilpotent non nul, donc $P(x) = 0$. Ainsi, A est algébrique. D'après la Proposition 1.1, A est sans éléments nilpotent non nuls (un élément nilpotent est quasi-nilpotent) et comme elle est algébrique, d'après ([14], Proposition 13, p. 354), A est commutative et semi-simple. ■

Proposition 2.3. *Soit A une Q -algèbre m -convexe unitaire qui est un espace de Baire. Si toute fonction opère faiblement dans A , alors A est isomorphe à $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.*

Preuve. D'après le Corollaire 2.2, A est commutative et semi-simple. D'après

la Proposition **2.1**, toute fonction opère spectralement dans A et d'après ([13], Théorème 3.14, p. 690), A est isomorphe à $\mathbb{C}^n$. ■

Remarque 2.4. *La proposition 2.3 n'est plus vraie sans l'hypothèse "Q-algèbre". En effet : l'algèbre $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ des suites complexes muni de la topologie produit ([19], exemple 6, p. 26) est une algèbre de Fréchet m -convexe commutative semi-simple de dimension infinie, sur laquelle toute fonction opère faiblement. Par conséquent, on en déduit que l'algèbre de Fréchet $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ n'est pas une Q-algèbre.*

Remarque 2.5. *La proposition 2.3 n'est plus vraie sans l'hypothèse "espace de Baire". En effet : L'algèbre S des suites complexes stationnaires (exemple 2.4, chapitre 2, p. 43) est une Q-algèbre m -convexe complète semi-simple unitaire commutative sur laquelle toute fonction opère faiblement et qui est de dimension infinie.*

Théorème 2.6. *Soit A une Q-algèbre m -convexe et unitaire. Si toute fonction continue opère faiblement sur A , alors A est une algèbre hermitienne commutative semi-simple à involution continue.*

Preuve. Supposons que toute fonction continue opère faiblement sur A . L'application $Id_{\mathbb{C}}$ est continue. Elle opère donc faiblement sur A . D'après la Proposition **1.1**, l'algèbre A est sans éléments quasi-nilpotent, elle est alors semi simple. Montrons que A est hermitienne. Soit $a \in A$. On a l'application $\bar{z}$ définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, $\lambda \mapsto \bar{z}(\lambda) = \bar{\lambda}$ est continue et par suite, elle opère faiblement sur A . Il existe alors un unique élément $\bar{z}(a) \in \Gamma(\Gamma(a))$, tel que pour tout $\chi \in \Gamma(\Gamma(a))$,

$$\bar{z}(\chi(a)) = \chi(\bar{z}(a)).$$

Considérons maintenant l'application I définie de A dans A et donnée pour tout $a \in A$ par :

$$I(a) = a^* = \bar{z}(a).$$

L'application I est une involution sur A . De plus, pour tout $\chi \in \Gamma(\Gamma(a))$, $\overline{\chi(a)} = \chi(a^*)$. Si maintenant h est un élément hermitien de A , alors :

$$Sp_A(h) = Sp_{\Gamma(\Gamma(a))}(h) \subset \mathbb{R}.$$

Ainsi A est hermitienne. Montrons que A est commutative. On a par définition de x^* , $x^* \in \Gamma(\Gamma(x))$, pour tout $x \in A$. Ainsi tous les éléments de A sont normaux. Soient a, b deux éléments hermitiens de A . On a $(a + ib)^*(a + ib) = (a + ib)(a + ib)^*$, ce qui donne après calcul $ab = ba$. Soit $x, y \in A$ tels que, $x = a + ib$ et $y = c + id$ avec a, b, c, d sont des éléments hermitiens. Comme les éléments hermitiens commutent, on obtient que $xy = yx$, et par conséquent A est commutative. On a donc A une algèbre hermitienne commutative et semi-simple. Montrons maintenant que l'involution I est continue. Pour cela, montrons que son graphe est fermé. Soient $a \in A$ et (a_n) une suite d'éléments de A , tels que $a_n \rightarrow a$ et $I(a_n) \rightarrow b$, Montrons que $b = a^*$. Soit χ un caractère de A . Comme χ est continu, alors $\chi(a_n) \rightarrow \chi(a)$. L'application $\overline{\chi} : \lambda \mapsto \overline{\lambda}$ est continue, d'où $\overline{\chi(a_n)} \rightarrow \overline{\chi(a)}$, ou encore $\chi(a_n^*) \rightarrow \chi(a^*)$. Par ailleurs, $a_n^* \rightarrow b$, donc $\chi(a_n^*) \rightarrow \chi(b)$. Il en résulte que $\chi(a^*) = \chi(b)$. Ceci est vraie pour tout $\chi \in \mathcal{M}(A)$. Donc

$$a^* - b \in \bigcap_{\chi \in \mathcal{M}(A)} \text{Ker}(\chi) = \text{Rad}(A) = \{0\},$$

et par suite $a^* = b$, d'où la continuité de l'involution. D'après ([6], Theorem 3.2, p. 7), la topologie de A peut être définie par une famille de $*$ -semi-normes. Ainsi, A est une Q -algèbre m^* -convexe unitaire hermitienne commutative et semi-simple. ■

Références

- [1] Arosio, A., *Locally convex inductive limits of normed algebras*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 51 (1974), 339-356.
- [3] Bourbaki, N., *Espaces vectoriels topologiques*. Chapitres 1 à 5. Masson, Paris, 1981.
- [5] Bourbaki, N., *Éléments de mathématiques. Théories spectrales*. Chapitres 1 et 2. Springer, 2006.

- [6] Brooks, R. M. *On locally m -convex $*$ -algebras*. Pacific J. Math. 23 (1967), 5–23.
- [13] El Boukasmi, D. ; El Kinani, A. *Spectral operation in locally convex algebras*. Proyecciones 41 (2022), no. 3, 683–695.
- [14] El Boukasmi, D. ; El Kinani, *On spectrally finite Fréchet algebras*. Surveys in Mathematics and its Applications Volume 17 (2022), 345–356.
- [16] A. El Kinani, *Sur deux théorèmes de Katznelson*, Rev. Academia de Ciencias ; Zaragoza, 56 (2001).
- [19] Fragouloupoulou, Maria. *Topological algebras with involution*. North-Holland Mathematics Studies, 200. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2005. xvi+495 pp. ISBN : 0-444-52025-2.
- [22] Kaplansky, I., *Ring isomorphisms of Banach algebras*. Canad. J. Math. 6 (1954), 374–381.
- [23] Y. Katznelson, *Algèbres caractérisées par les fonctions qui opèrent sur elles*. C. R. Acad. Sc. , Paris, A-B 247(1958), 903–905.
- [24] Köthe, G., *Topological Vector Spaces I*. Second printing, revised, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1983.
- [28] Michael, E. A., *Locally multiplicatively convex topological algebra*. Mem. Amer. Math. Soc. 11, Providence (1952).
- [34] Zelazko, W., *On maximal ideals in commutative m -convex algebras*. Studia Math. 58 (1976), no. 3, 291–298.

Chapitre 4

Caractérisation des algèbres topologiques spectralement finies.

Introduction.

Le résultat suivant, dû à Kaplansky ([22], Lemma 7, p. 376), nous a été d'une grande utilité : Si B est une algèbre de Banach dont le spectre de chaque élément est fini, alors $\dim(B/\text{Rad}(B)) < +\infty$. Nous nous sommes alors posés la question suivante : Existe-t-il, des classes d'algèbres où le lemme ([22], Lemma 7, p. 376) reste valide. Nous commençons par traiter le cas commutatif. Nous donnons un exemple qui montre que dans le cas d'une Q -algèbre m -convexe commutative complète unitaire semi-simple spectralement finie, le radical de Jacobson n'est pas nécessairement de codimension finie. On montre ensuite que si B est une Q -algèbre m -convexe unitaire commutative semi-simple et qui est de Baire alors, B est spectralement finie si, et seulement si, $B \simeq \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans le cas général non nécessairement commutatif, on montre que si A est une algèbre de Fréchet spectralement finie, alors $\dim(A/\text{Rad}(A)) < +\infty$. Pour la preuve, on a suivi la même démarche de la preuve donnée dans ([20]), en adaptant, en particulier, des résultats topologiques donnés sous formes de lemmes au cas d'une algèbre de Fréchet. Ensuite, nous montrons que si B est une Q -algèbre de Fréchet unitaire spectralement finie sans éléments

quasi-nilpotents non nuls, alors $B \simeq \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Enfin, on établit, que toute algèbre unitaire algébrique sans éléments nilpotents non nuls est commutative et semi-simple.

1 Cas commutatif.

Nous commençons par donner un exemple d'une Q -algèbre m -convexe complète commutative unitaire semi-simple spectralement finie, dans laquelle le radical de Jacobson n'est pas nécessairement de codimension finie.

Exemple 1.1. *L'algèbre S des suites complexes stationnaires (exemple 2.4, chapitre 2, p. 43) est une Q -algèbre m -convexe complète semi-simple unitaire commutative spectralement finie et qui est de dimension infinie.*

Nous avons montré (Proposition 2.1, chapitre 2, p. 43), que si B est une Q -algèbre alors, toute fonction opère spectralement sur B si, et seulement si, B est spectralement finie. Donc d'après la proposition 2.5 chapitre 2, on obtient la proposition suivante.

Proposition 1.2. *Soit B une Q -algèbre m -convexe commutative et unitaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. B est spectralement finie.
2. $B/\text{Rad}(B)$ est algébrique.

Remarque 1.3. *Dans la Proposition 1.2, l'hypothèse de m -convexité est nécessaire pour obtenir l'équivalence entre l'assertion 1) et l'assertion 2), comme le montre l'algèbre des fractions rationnelles $\mathbb{C}(X)$ munie de la topologie de Williamson ([33], 3. p. 731). C'est une Q -algèbre qui n'est pas m -convexe. Cette algèbre satisfait l'assertion 1) de la proposition 1.2, mais pas l'assertion 2).*

Également, on obtient d'après le théorème 2.8 chapitre 2, le théorème suivant.

Théorème 1.4. *Soit B une Q -algèbre m -convexe unitaire commutative semi-simple et qui est de Baire. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. B est spectralement finie.

2. $B \simeq \mathbb{C}^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 1.5. *Le résultat du théorème précédent n'est pas vrai sans l'hypothèse de "Baire". En effet, l'algèbre considérée dans l'exemple 1.1 est une Q -algèbre m -convexe unitaire spectralement finie semi-simple commutative complète et qui est de dimension infinie.*

2 Cas des algèbres de Fréchet.

Voici maintenant le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 2.1. *Si A est une algèbre de Fréchet spectralement finie alors, $\dim(A/\text{Rad}(A)) < +\infty$.*

Pour la preuve de ce théorème, nous aurons besoin de plusieurs résultats intermédiaires que nous présentons sous formes de lemmes. Le premier est la version du Lemme 2.3.8. p. 58 de [31] dans le cas d'une algèbre de Fréchet unitaire.

Lemme 2.2. *Soient $(A, (p_k)_k)$ une algèbre de Fréchet unitaire d'unité e et $q_0 \in \text{Rad}(A)$. Alors l'équation $x^2 - x + q_0 = 0$ admet une solution q_1 dans A . De plus, pour tout $x \in A$, on a l'implication :*

$$(xq_0 = q_0x) \implies (xq_1 = q_1x).$$

On rappelle que pour une algèbre m -convexe, le rayon de régularité $\beta(x)$ d'un élément $x \in A$ est défini par :

$$\beta(x) = \inf \{ r > 0 : (r^{-1}x)^n, n \in \mathbb{N}^*, \text{ est bornée} \},$$

avec $\inf \emptyset = +\infty$.

Preuve. Il est à remarquer d'abord que, pour tout $x \in A$, on a $\rho_A(x) = \beta(x)$ ([17], Proposition 2.1, p. 286) et que toute série absolument convergente est convergente. Soit $B = \overline{\{P(q_0)(Q(q_0))^{-1}, P, Q \in \mathbb{C}[X], Q(q_0) \text{ inversible dans } A\}}$

la sous algèbre pleine fermée engendrée par q_0 . Alors B est une algèbre de Fréchet commutative. On a $q_0 \in \text{Rad}(A)$ et comme $\text{Rad}(A)$ est un idéal de A , alors $q_0x \in \text{Rad}(A)$, pour tout $x \in A$. D'où $\rho_A(q_0x) = 0$, pour tout $x \in A$. Le fait que la sous algèbre B engendrée par q_0 soit pleine entraîne que $\rho_B(q_0x) = \rho_A(q_0x) = 0$, pour tout $x \in B$. D'où $q_0 \in \text{Rad}(B)$. Considérons la série infinie :

$$-\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4q_0)^n,$$

où les coefficients sont des coefficients binomiaux généralisés. Puisque $q_0 \in \text{Rad}(B)$, $\rho_B(-4q_0) = 0$. Donc $\beta(-4q_0) = 0$. Or ici :

$$\beta(x) = \sup \left\{ \limsup_n \sqrt[n]{p_k(x^n)} : k \in \mathbb{N} \right\},$$

et donc la série converge absolument vers un élément $q_1 \in A$. Puisque $\text{Rad}(B)$ est fermé, alors $q_1 \in \text{Rad}(B)$. Comme dans le cas des séries numériques, on obtient la relation formelle $e - \sqrt{e - 4q_0} = 2q_1$ qui donne l'égalité $q_1^2 - q_1 + q_0 = 0$. Enfin, par la définition de q_1 , on en déduit que q_1 commute avec tout élément de A qui commute avec q_0 . ■

Théorème 2.3. *Soient B une algèbre de Fréchet unitaire d'unité e et u un élément de B qui est idempotent modulo $\text{Rad}(B)$. Il existe alors, dans B un idempotent v qui est égal à u modulo $\text{Rad}(B)$.*

Preuve. Puisque u est idempotent modulo $\text{Rad}(B)$, il existe $q \in \text{Rad}(B)$ tel que, $u^2 = u - q$. Chercher v dans B , vérifiant $v = u$ modulo $\text{Rad}(B)$ et $v^2 = v$, revient à trouver une solution z dans $\text{Rad}(B)$ de l'équation :

$$(u + z)^2 = u + z.$$

En partant d'une solution z qui commute avec u , cette équation se réduit à

$$z^2 + (2u - e)z - q = 0.$$

On pose $z = -(2u - e)x$. En remplaçant z par sa valeur, on obtient l'équation

en x , suivante :

$$(2u - e)^2(x^2 - x) - q = 0.$$

On a $(2u - e)^2 = e - 4q$. Comme $q \in \text{Rad}(B)$, alors $e - 4q$ est inversible dans B . Par suite la dernière équation en x devient :

$$x^2 - x - q(e - 4q)^{-1} = 0.$$

On a $\text{Rad}(B)$ est un idéal de B et comme $q \in \text{Rad}(B)$, alors $q(e - 4q)^{-1} \in \text{Rad}(B)$. D'après le lemme **2.2**, il existe q_1 dans B solution de l'équation $x^2 - x - q(e - 4q)^{-1} = 0$. On a u commute avec q , donc commute avec $q(e - 4q)^{-1}$ et par suite u commute avec q_1 . Finalement $z = -(2u - e)q_1$ est solution de l'équation $(u + z)^2 = u + z$. Donc l'élément idempotent cherché est $v = u - (2u - e)q_1$. ■

Lemme 2.4. *Soit B une algèbre unitaire d'unité e . Si $\text{Sp}_B(b)$ est un singleton, pour tout $b \in B$ alors, $B/\text{Rad}(B) \simeq \mathbb{C}$.*

Preuve. On a B admet un seul idéal maximal à gauche. En effet : Soient I et I' deux idéaux maximaux à gauche de B , $I \neq I'$. Alors $I + I'$ est un idéal à gauche de B vérifiant, $I + I' \neq I$ et $I \subset I + I' \subset B$. Donc $I + I' = B$. Considérons $a \in I$ et $a' \in I'$ tel que $a + a' = e$. On a $a' = e - a$ est non inversible, donc $1 \in \text{Sp}_B(a)$. Mais a est non inversible donc $0 \in \text{Sp}_B(a)$. Il s'ensuit que $\text{Sp}_B(a)$ contient au moins deux éléments, ce qui est impossible. Soit maintenant I l'unique idéal maximal à gauche de B . De la même façon, on montre que B admet un unique idéal maximal à droite I' . Si $I \neq I'$, alors il existe $a \in I$, $a \notin I'$. On a $I' \subsetneq I' + (a) \subseteq B$, donc $B = I' + (a)$. D'où, il existe $b \in B$, $a' \in I'$ tels que $e - a' = ba$ qui est non inversible, donc $1 \in \text{Sp}_B(a')$. l'élément a' est non inversible, ainsi $0 \in \text{Sp}_B(a')$, donc le spectre de a' contient deux éléments, ce qui est impossible. Donc B admet un unique idéal maximal I . Soit $b \in B$, posons $\text{Sp}_B(b) = \{\alpha\}$. On a $b - \alpha e$ est non inversible, donc $b - \alpha e \in I$, d'où $b \in I + \mathbb{C}e$. Ainsi $B = I \oplus \mathbb{C}e$, et donc I est de codimension 1. Ceci achève la preuve. ■

Lemme 2.5. *Soit A une algèbre de Fréchet unitaire d'unité e , semi-simple dans laquelle le spectre de tout élément est fini. Si A est de dimension ≥ 2 ,*

peut-être infinie, alors A admet un idempotent autre que 0 et e .

Preuve. D'après le Lemme 2.4, il existe $x \in A$ dont le spectre contient au moins deux éléments. Notons par B la sous algèbre commutative maximal de A contenant x . Donc B est une sous algèbre pleine de A . Par suite, pour tout élément b dans B , $Sp_A(b) = Sp_B(b) = Sp_{B/Rad(B)}(s(b))$, où $s : B \rightarrow B/Rad(B)$, la surjection canonique. Alors le spectre de tout élément de $C = B/Rad(B)$ est fini. Donc C admet un nombre fini de caractères non nuls continus $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. De plus $\bigcap_{i=1}^n \ker \varphi_i = \{0\}$, puisque C est semi-simple.

Considérons maintenant l'application $\psi : C \rightarrow \prod_{i=1}^n C/\ker \varphi_i$ définie par :

$$\psi(x) = (s_1(x), \dots, s_n(x)),$$

où s_i est l'homomorphisme naturel de C dans $C/\ker \varphi_i$. Il est clair que ψ est un homomorphisme d'algèbre et que $\ker(\psi) = \bigcap_{i=1}^n \ker \varphi_i$. On a $\ker \varphi_i + \ker \varphi_j = C$, pour tout $i \neq j$. D'après ([4], Proposition 5, p. 72) on a :

$$C/\bigcap_{i=1}^n \ker \varphi_i \simeq \prod_{i=1}^n C/\ker \varphi_i.$$

D'où $C \simeq \prod_{i=1}^n C/\ker \varphi_i$. De plus, pour chaque $i = 1, \dots, n$, $C/\ker \varphi_i$ est une algèbre de division de Fréchet. Il s'ensuit, d'après ([28], Proposition 2.9. b), p. 13), que $C/\ker \varphi_i \simeq \mathbb{C}$. D'où $B/Rad(B)$ est isomorphe à $\mathbb{C}^n$, avec $n \geq 2$, puisque $card(Sp_A(x)) \geq 2$ et $Sp_A(x) = \{\varphi_i(x); i = 1, \dots, n\}$. Soit $v \in B/Rad(B)$ un idempotent non trivial. D'après le Théorème 2.3, il existe dans B un idempotent non trivial u tel que $v = s(u)$, où s est la surjection canonique de B dans $B/Rad(B)$. D'où le résultat. ■

Lemme 2.6. Soit $(B, (q_k)_k)$ une algèbre de Fréchet unitaire et semi-simple. Si B admet une suite infinie d'idempotents non nuls mutuellement orthogonaux, alors B contient un élément de spectre infini.

Preuve. Soit $(e_n)_n$ une suite infinie d'idempotents non nuls mutuellement

orthogonaux de B . Nous allons construire un élément b de B de spectre infini.

Pour $n = 1$, il existe k_1 tel que $q_{k_1}(e_1) \neq 0$. Posons $\alpha_1 = \frac{1}{q_{k_1}(e_1)}$.

Pour $n = 2$, il existe $k_2 > k_1$ tel que $q_{k_2}(e_2) \neq 0$ et il existe $m_2 > 1$ tel que $\frac{1}{2^{m_2} q_{k_2}(e_2)} < \alpha_1$. On pose $\alpha_2 = \frac{1}{2^{m_2} q_{k_2}(e_2)}$. Ainsi, par récurrence, on obtient deux suites strictement croissantes $(k_n)_{n \geq 1}$ et $(m_n)_{n \geq 1}$ telles que :

(i) $q_{k_n}(e_n) \neq 0$, pour tout n ,

(ii) la suite $(\alpha_n)_n$, où :

$$\alpha_n = \frac{1}{n^{m_n} q_{k_n}(e_n)}, \text{ pour tout } n \geq 1,$$

est strictement décroissante.

Montrons maintenant que la série $\sum_n \alpha_n e_n$ est absolument convergente dans B . Soit $N \geq 1$. Alors :

$$\sum_{n \geq 1} q_N(\alpha_n e_n) = \sum_{1 \leq n \leq N-1} |\alpha_n| q_N(e_n) + \sum_{n \geq N} |\alpha_n| q_N(e_n).$$

Comme la suite $(q_n)_n$ est croissante, on a :

$$\sum_{n \geq N} |\alpha_n| q_N(e_n) \leq \sum_{n \geq N} |\alpha_n| q_n(e_n).$$

La suite $(q_n)_n$ étant croissante et $k_n \geq n$, on obtient :

$$\sum_{n \geq N} |\alpha_n| q_n(e_n) \leq \sum_{n \geq N} |\alpha_n| q_{k_n}(e_n).$$

En utilisant (ii), on a :

$$\sum_{n \geq N} |\alpha_n| q_{k_n}(e_n) \leq \sum_{n \geq N} \frac{1}{n^{m_n}} < \infty.$$

Il en résulte que la série $\sum_n \alpha_n e_n$ est convergente dans $(B, (q_k)_k)$. Par consé-

quent, $b = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e_n \in B$. Puisque $b e_m = \alpha_m e_m$ alors, $\alpha_m \in Sp_B(b)$. Donc $Sp_B(b)$ est infini. ■

Notons que pour la construction de l'élément a à spectre infini, les auteurs de ([20], Theorem, p. 19) n'ont pas justifié que la suite construite $(\lambda_n)_n$ dans $Sp_A(a)$, est infinie, afin de prouver que le spectre de a est infini.

Présentons maintenant la preuve du théorème principal : Théorème 2.1.

Preuve. Sans perte de généralité, on peut supposer que l'algèbre A est unitaire. En effet : Soit A^1 l'unitisée de A . Alors, d'après([29], Corollary I.3.54, p. 93), $Rad(A) = Rad(A^1)$ et donc $A/Rad(A) \subset A^1/Rad(A^1)$. Considérons donc que l'algèbre A est unitaire d'unité e . Dans ce cas, la preuve est menée dans le même esprit suivi dans ([20], Theorem, p. 19), en utilisant les résultats préparatoires précédents. Sans perte de généralité, on peut supposer aussi que A est semi-simple. Soit $E \subset A$ un ensemble maximal d'idempotents non nuls qui commutent entre eux. L'existence de E est garantie par le Lemme de Zorn et on a $e \in E$. Il résulte, du Lemme 2.6, que E est un ensemble fini. En effet : Si E contient une suite infinie d'éléments d'idempotents non nuls qui commutent, alors on peut construire comme dans ([20]), une suite infinie d'éléments idempotents non nuls mutuellement orthogonaux et d'après le lemme 2.6, il existe un élément de spectre infini, ce qui contredit la fait que $(A, (p_k)_k)$ est une algèbre de Fréchet spectralement finie. On considère, sur E , l'ordre partiel donné par :

$$a \leq b \text{ si } ab = ba = a.$$

Soient $e_1, \dots, e_n$ les éléments de E minimaux par rapport à cet ordre. En utilisant le fait que $e_i e_j \leq e_i$ et $e_i e_j \leq e_j$ et par la propriété de minimalité qui précède, on a $e_i e_j = 0$ si $i \neq j$. Posons

$$e' = e - (e_1 + e_2 + \dots + e_n).$$

On a $e_i e' = 0$, pour tout $i = 1, \dots, n$. e' est un élément idempotent qui commute avec tous les éléments de E , de plus $e' \neq e_i$, pour tout $i = 1, \dots, n$. Si $e' \neq 0$, alors $e' \in E$, et par suite il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $e_i \leq e'$ et donc $0 = e_i e' = e' e_i = e_i$, contradiction avec le fait que e_i est non nul. Donc

$e' = 0$ et par suite,

$$e_1 + e_2 + \dots + e_n = e.$$

De plus, chaque élément x de E est somme d'éléments minimaux. En effet, soient $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$ les éléments minimaux qui sont inférieurs ou égaux à x . On pose $e' = x - (e_{i_1} + \dots + e_{i_k})$. Cet élément vérifie la propriété $e_i e' = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Ce qui donne $e' = 0$.

La décomposition de e conduit à

$$A = eAe = \sum_{i,j=1}^n e_i A e_j.$$

Le reste de la preuve consiste à montrer que les facteurs $e_i A e_j$ sont de dimensions finies.

Pour $i, j = 1, \dots, n$, posons :

$$A_{ij} = e_i A e_j.$$

Traitons d'abord le cas où $i = j$. Dans ce cas, A_{ii} est une algèbre m -convexe de Fréchet avec e_i comme unité. Chaque $a \in A_{ii}$ a un spectre fini du fait de l'égalité connue ([31], Théorème 1.6.15, p. 35),

$$Sp_{A_{ii}}(a) \cup \{0\} = Sp_A(a).$$

Montrons que A_{ii} est semi-simple. Soit $c \in Rad(A_{ii})$ et $a \in A$. En utilisant le fait que $c = e_i c = c e_i = e_i c e_i$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} (ca)^n &= (ce_i a)(e_i c e_i a)(e_i c e_i a) \dots (e_i c e_i a)(e_i c a) \\ &= (e_i c e_i a)(e_i c e_i a) \dots (e_i c e_i a)(ca) \\ &= (ce_i a e_i)^{n-1}(ca) \\ &= (cb)^{n-1}(ca). \end{aligned}$$

L'élément $b = e_i a e_i$ appartient à $e_i A e_i$. Comme $cb \in Rad(A_{ii})$, $(cb)^{n-1} \rightarrow 0$ alors $(ca)^n \rightarrow 0$. Ceci étant pour tout $a \in A$, il résulte que $c \in Rad(A) =$

$\{0\}$. L'algèbre de Fréchet A_{ii} n'admet pas d'idempotents autres que 0 et e_i . En effet : Soit $u \in e_i A e_i$ un idempotent non nul. Remarquons que $ue_i = e_i u$ et $ue_j = e_j u = 0$, pour chaque $j \neq i$. Ainsi u commute avec tout e_j , par suite commute avec toute somme de e_j et donc commute avec tout élément de E , puisque chaque élément de E est somme d'éléments minimaux. Donc $u \in E$, étant donné le caractère maximum de ce dernier. Par ailleurs, $u \leq e_i$. Et comme e_i est minimal dans E , on obtient $u = e_i$. Il résulte du Lemme 2.5 appliqué à l'algèbre de Fréchet A_{ii} , que $\dim A_{ii} = 1$.

Considérons maintenant l'espace $e_i A e_j$, $i \neq j$. Si $e_i A e_j = \{0\}$, $\dim(e_i A e_j) = 0$. Si $e_i A e_j \neq \{0\}$, on montre comme dans la preuve donnée aux pages 32 et 33, qu'il existe un isomorphisme linéaire R_j^i de $e_i A e_i$ dans $e_i A e_j$, et d'après ce qui précède $\dim(e_i A e_j) = 1$. Comme $A = \sum_{i,j} e_i A e_j$, il vient que $\dim(A) \leq n^2$. ■

Soit A une algèbre topologique vérifiant les hypothèses du théorème 2.1. Si de plus, c'est une Q -algèbre sans éléments quasi-nilpotents non nuls, alors elle est semi-simple, commutative et donc isomorphe à $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, comme le montre le résultat suivant :

Proposition 2.7. *Soit A une Q -algèbre de Fréchet unitaire spectralement finie. Si A est sans éléments quasi-nilpotents non nuls, alors $A \simeq \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.*

Preuve. Montrons que A est algébrique. Par hypothèse, on a $Sp_A(a) \neq \emptyset$ pour tout $a \in A$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les valeurs spectrales de a . Posons $b = Q(a)$, où $Q(X) = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$. Alors $Sp_A(b) = Sp_A(Q(a)) = Q(Sp_A(a)) = \{0\}$. D'où $\rho_A(b) = 0$. Puisque A est sans éléments quasi-nilpotents non nuls, alors $b = 0$. Et par suite $Q(a) = 0$. Ceci qui montre que A est algébrique.

On a A est sans éléments quasi-nilpotents non nuls, donc A est semi-simple.

Montrons que A est commutative. Soit $x \in A$, $x \neq 0$. Comme A est algébrique, il existe un polynôme non nul $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(x) = 0$. Si le terme constant du polynôme Q est non nul, tout entier $n \geq 1$ vérifie $x^n Q(x) = 0$. Si le terme constant du polynôme Q est nul, dans ce cas, en

posant $Q = a_m X^m + \dots + a_n X^n = X^n P(X)$, on obtient $x^n P(x) = 0$ avec le terme constant de P non nul. Donc Il existe un entier $n \geq 1$ et un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ à élément constant non nul tel que $x^n P(x) = 0$. Considérons le plus petit entier naturel n vérifiant l'égalité :

$$x^n P(x) = 0.$$

Montrons que $n = 1$. Supposons $n \geq 2$. On a $(x^{n-1} P(x))^2 = x^{n-2} P(x) x^n P(x) = 0$, donc $x^{n-1} P(x)$ est un élément nilpotent de A et par conséquent c'est un élément quasi-nilpotent de A . Comme A est sans élément quasi-nilpotent non nul, alors $x^{n-1} P(x) = 0$. Ceci constitue une contradiction avec le fait que n est le plus petit entier naturel satisfaisant l'égalité, $x^n P(x) = 0$. Donc $xP(x) = 0$. Posons $P(x) = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0 e$ avec $a_0 \neq 0$. On a :

$$xP(x) = 0 \iff x = -((a_m/a_0)x^{m-1} + \dots + (a_1/a_0)e)x^2.$$

Donc

$$x = ax^2 \text{ avec } a \in A.$$

Montrons que $xA \subset Ax$, pour tout $x \in A$. Soit $y \in A$. En utilisant l'égalité : $yx = yax^2$, on obtient : $(xy - xyax)^2 = 0$. Donc $xy = xyax \in Ax$, pour tout $y \in A$. Ainsi $xA \subset Ax$. Soit M un idéal maximal à gauche de A . Comme $xA \subset Ax$, pour tout $x \in A$, alors $MA \subset AM \subset M$. Donc M est un idéal maximal à droite de A et par suite c'est un idéal maximal de A . Donc A/M est un corps. Mais A/M est algébrique et $\mathbb{C}$ est un corps algébriquement clos, alors $A/M \simeq \mathbb{C}$ et par suite $A/Rad(A)$ est commutative. Comme A est semi-simple, il vient que A est commutative.

L'algèbre A est une Q -algèbre de Fréchet semi-simple commutative unitaire spectralement finie. Donc d'après le théorème **1.4**, $A \simeq \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ ■

La preuve de la proposition **2.7**, montre que la semi-simplicité et la commutativité proviennent seulement du fait que l'algèbre est algébrique et sans éléments nilpotents non nuls. Ainsi, on a le résultat suivant :

Proposition 2.8. *Toute algèbre algébrique complexe unitaire sans éléments*

nilpotents non nuls est commutative et semi-simple.

Preuve. Montrons que A est semi-simple. Soit $x \in \text{Rad}(A)$. Comme A est algébrique, il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$, $Q \neq 0$ tel que $Q(x) = 0$. Si le terme constant de Q est non nul, tout entier $n \geq 1$ vérifie $x^n Q(x) = 0$, car $Q(x) = 0$. Si le terme constant de Q est nul, posons $Q = a_m X^m + \dots + a_n X^n = X^n P(X)$, donc $x^n P(x) = 0$ et le terme constant de P est non nul. Donc Il existe $n \geq 1$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ avec coefficient constant non nul, tel que $x^n P(x) = 0$. Si $P \in \mathbb{C}^*$ alors $P(x) = a_0 e$ est inversible où e est l'unité de A . Si $\deg(P) \geq 1$, posons $P = a_m X^m + \dots + a_1 X + a_0$ avec $a_0 \neq 0$. Donc $P = a_0(b_m X^m + \dots + b_1 X + 1)$ avec $b_i = a_i/a_0$. Ainsi $P(x) = a_0(e + yx)$ avec $y = b_m x^{m-1} + \dots + b_1 e \in A$. Comme $x \in \text{Rad}(A)$, alors $e + yx$ est inversible et par suite $P(x)$ est inversible. Dans les deux cas $P(x)$ est inversible et par suite $x^n = 0$. Donc x est nilpotent. Comme A est sans éléments nilpotents non nuls, alors $x = 0$. Ainsi A est semi-simple.

Montrons que A est commutative. Considérons le plus petit entier naturel n vérifiant l'égalité :

$$x^n P(x) = 0.$$

Montrons que $n = 1$. Supposons $n \geq 2$. On a $(x^{n-1} P(x))^2 = x^{n-2} P(x) x^n P(x) = 0$, donc $x^{n-1} P(x)$ est un élément nilpotent de A . Comme A est sans éléments nilpotents non nuls, alors $x^{n-1} P(x) = 0$. Ceci constitue une contradiction avec le fait que n est le plus petit entier naturel satisfaisant l'égalité : $x^n P(x) = 0$. Donc $xP(x) = 0$. Posons $P(x) = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0 e$ avec $a_0 \neq 0$.

$$xP(x) = 0 \iff x = -((a_m/a_0)x^{m-1} + \dots + (a_1/a_0)e)x^2 \text{ donc,}$$

$$x = ax^2 \text{ avec } a \in A.$$

Montrons que $xA \subset Ax$, pour tout $x \in A$. Soit $y \in A$. En utilisant l'égalité : $yx = yax^2$, on obtient : $(xy - xyax)^2 = 0$. Donc $xy = xyax \in Ax$, pour tout $y \in A$. Ainsi $xA \subset Ax$. Soit M un idéal à gauche maximal de A . En utilisant le fait que $xA \subset Ax$, pour tout $x \in A$, on obtient que $MA \subset AM \subset A$. Donc M est idéal maximal à droite de A et par suite c'est un idéal maximal

de A . Donc A/M est un corps. Mais A/M est algébrique et $\mathbb{C}$ est un corps algébriquement clos, d'où $A/M \simeq \mathbb{C}$. Par suite, $A/\text{Rad}(A)$ est commutative. Comme A est semi-simple, alors A est commutative. ■

Remarque 2.9. *Remarquons que, d'après ([21], Theorem 9, p. 702), toute algèbre algébrique sans éléments nilpotents non nuls, sur un corps fini, est commutative. Ici, dans la proposition 2.8, l'algèbre est sur le corps des complexes $\mathbb{C}$. Notre approche montre que l'algèbre est aussi semi-simple.*

Références

- [1] Arosio, A., *Locally convex inductive limits of normed algebras*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 51 (1974), 339-356.
- [3] Bourbaki, N., *Espaces vectoriels topologiques*. Chapitres 1 à 5. Masson, Paris, 1981.
- [4] Bourbaki, N., *Algèbre commutative, éléments de mathématique*. Chapitres 1 à 4. Reprint. Masson, Paris, 1985.
- [5] Bourbaki, N., *Éléments de mathématiques. Théories spectrales*. Chapitres 1 et 2. Springer, 2006.
- [14] El Boukasmi, D.; El Kinani, *On spectrally finite Fréchet algebras*. Surveys in Mathematics and its Applications Volume 17 (2022), 345-356.
- [17] El Kinani, A., Oudadess, M., *m-convex properties in locally convex algebras*. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 7 (2000), no.2, 285-290.
- [20] Hirschfeld, R. A., Johnson, B. E., *Spectral characterization of finite-dimensional algebras*. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 75=Indag. Math. 34 (1972), 19-23.

- [21] Jacobson, N., *Structure theory for algebraic algebras of bounded degree*. Ann. of Math. (2) 46 (1945), 695-707.
- [22] Kaplansky, I., *Ring isomorphisms of Banach algebras*. Canad. J. Math. 6 (1954), 374-381.
- [24] Köthe, G., *Topological Vector Spaces I*. Second printing, revised, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1983.
- [25] J. P. Lafon, *Algèbre commutative*, Paris, 1977.
- [28] Michael, E. A., *Locally multiplicatively convex topological algebra*. Mem. Amer. Math. Soc. 11, Providence (1952).
- [29] Palmer, T. W., *Banach algebras and the general theory of *-algebras*. Vol. I. *Algebras and Banach algebras*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 49. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [31] Rickart, C. E., *General theory of Banach algebras*. Van Nostrand, New York, (1960).
- [32] M. Roitman, Y. Sternfeld, *When is a linear functional multiplicative?* Trans. Amer. Math. Soc. 267 (1981), no. 1, 111-124.
- [33] Williamson, J. H., *On topologising the field $C(t)$* . Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954), 729-734.
- [34] Zelazko, W., *On maximal ideals in commutative m -convex algebras*. Studia Math. 58 (1976), no. 3, 291-298.

Chapitre 5

Annexe : Structure d'une Q -algèbre de Fréchet unitaire B vérifiant :
 $Bx^2 = Bx$, pour tout $x \in B$.

Introduction.

Soit B une algèbre vérifiant la condition :

$$Bx^2 = Bx, \text{ pour tout } x \in B \quad (Q_1)$$

Dans ([12], Theorem 1, p. 45), les auteurs ont montré que si B est une algèbre de Banach unitaire vérifiant la condition Q_1 , alors elle est semi-simple commutative et de dimension finie. Ce type d'algèbres a été étudié plus tard dans [7], où les auteurs ont montré que si B est une algèbre vérifiant la condition Q_1 alors, elle est semi-simple ([7], Proposition 3.1, ii), p. 386). Si de plus B est une algèbre m -convexe à unité approchée à gauche (ou à droite) vérifiant la condition Q_1 alors, B est commutative ([7], Proposition 3.6, 2), p. 388). Dans [9], les auteurs ont considéré les algèbres vérifiant :

$$xBx = Bx, \text{ pour tout } x \in B \quad (Q_2)$$

Si l'algèbre B est commutative, les deux conditions Q_1 et Q_2 sont équivalentes. Si B est une Q -algèbre de Fréchet unitaire vérifiant la condition Q_2 , alors elle est algébriquement et topologiquement isomorphe à un produit fini de F -algèbres qui sont des corps ([9], Théorème 2.1, p. 58). Dans cette annexe, le but est de prouver avec une approche différente de celle donnée dans [9] que : si B est une Q -algèbre de Fréchet unitaire vérifiant $Bx^2 = Bx$ pour tout $x \in B$, alors elle est semi-simple commutative de dimension finie et donc isomorphe à $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Il convient de souligner que notre preuve est similaire dans son esprit à celle donnée dans ([12], Theorem 1, p. 45) pour le cas des algèbres de Banach unitaires.

1 Structure d'une Q -algèbre de Fréchet unitaire B vérifiant : $Bx^2 = Bx$, pour tout $x \in B$.

Lemme 1.1. *Soit $(B, (q_k)_k)$ une algèbre de Fréchet unitaire. Si B admet une suite infinie $(e_n)_n$ d'idempotents non nuls mutuellement orthogonaux, il existe alors, une suite infinie de nombres complexes (α_n) , $\alpha_n > 0$, telle que la série $\sum_{n \geq 1} \alpha_n e_n$ converge dans $(B, (q_k)_k)$.*

Preuve. Soit $(e_n)_n$ une suite infinie d'idempotents non nuls mutuellement orthogonaux de B . Nous allons construire une suite infinie de nombres complexes (α_n) , telle que la série $\sum_n \alpha_n e_n$ converge dans $(B, (q_k)_k)$.

Pour $n = 1$, il existe k_1 tel que $q_{k_1}(e_1) \neq 0$. Posons $\alpha_1 = \frac{1}{q_{k_1}(e_1)}$.

Pour $n = 2$, il existe $k_2 > k_1$ tel que $q_{k_2}(e_2) \neq 0$ et il existe $m_2 > 1$ tel que $\frac{1}{2^{m_2} q_{k_2}(e_2)} < \alpha_1$. On pose $\alpha_2 = \frac{1}{2^{m_2} q_{k_2}(e_2)}$. Ainsi, par récurrence, on obtient deux suites strictement croissantes $(k_n)_{n \geq 1}$ et $(m_n)_{n \geq 1}$ telles que :

- (i) $q_{k_n}(e_n) \neq 0$, pour tout n ,
- (ii) la suite $(\alpha_n)_n$, où :

$$\alpha_n = \frac{1}{n^{m_n} q_{k_n}(e_n)}, \text{ pour tout } n \geq 1,$$

est strictement décroissante.

Montrons maintenant que la série $\sum_n \alpha_n e_n$ est absolument convergente dans B . Soit $N \geq 1$. Alors :

$$\sum_{n \geq 1} q_N(\alpha_n e_n) = \sum_{1 \leq n \leq N-1} |\alpha_n| q_N(e_n) + \sum_{n \geq N} |\alpha_n| q_N(e_n).$$

Comme la suite $(q_n)_n$ est croissante, on a :

$$\sum_{n \geq N} |\alpha_n| q_N(e_n) \leq \sum_{n \geq N} |\alpha_n| q_n(e_n).$$

La suite $(q_n)_n$ étant croissante et $k_n \geq n$, on obtient :

$$\sum_{n \geq N} |\alpha_n| q_n(e_n) \leq \sum_{n \geq N} |\alpha_n| q_{k_n}(e_n).$$

En utilisant (ii), on a :

$$\sum_{n \geq N} |\alpha_n| q_{k_n}(e_n) \leq \sum_{n \geq N} \frac{1}{n^{m_n}} < \infty.$$

Il en résulte que la série $\sum_n \alpha_n e_n$ est convergente dans $(B, (q_k)_k)$. Par conséquent, $b = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e_n$ est un élément de B . ■

Théorème 1.2. *Si B est une Q -algèbre de Fréchet unitaire d'unité e vérifiant :*

$$Bx^2 = Bx, \text{ pour tout } x \in B,$$

elle est alors, semi-simple commutative de dimension finie et donc isomorphe à $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}^$.*

Preuve. Notons d'abord que d'après ([7], Proposition 3.1, ii), p. 386), B est semi-simple. Puis d'après ([7], Proposition 3.6, 2), p. 388), B est commutative. Nous allons maintenant montrer que B est de dimension finie. Supposons que B n'admet pas d'idempotents propres. Soit $x \in B$, $x \neq 0$, il existe alors $y \in B$, tel que : $yx^2 = x$. On a $(yx)^2 = yyx^2 = yx$, donc yx est un élément idempotent de B . Comme $yx \neq 0$, alors $yx = e$. Ainsi x est inversible dans

B et par suite, B est une algèbre de division. D'après ([28], Proposition 2.9, b), p. 13), B est isomorphe à $\mathbb{C}$. L'algèbre B ne peut avoir une suite infinie d'idempotents deux à deux orthogonaux. En effet, soit $(e_n)_n$ une telle suite. D'après le lemme 1.1, il existe une suite de nombres complexes $(\alpha_n)_n$, $\alpha_n > 0$ telle que, la série $\sum_{n \geq 1} \alpha_n e_n$ converge dans B . Posons $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n e_n$, $x \in B$. L'algèbre B est une Q -algèbre, alors d'après ([19], Theorem 6.18, p. 85), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < \alpha_n \leq \alpha_n \rho_B(e_n) \leq \alpha_n q_N(e_n)$, $N \in \mathbb{N}^*$. Donc la suite (α_n) tend vers 0. Soit $y \in B$ tel que $yx^2 = x$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $xe_n = (\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e_k) e_n = \alpha_n e_n$, ce qui donne $\alpha_n e_n = xe_n = yx^2 e_n = \alpha_n^2 y e_n$. Or $\alpha_n \neq 0$, donc $e_n = \alpha_n y e_n$. L'algèbre B est une algèbre m -convexe complète commutative, donc d'après ([28], Corollary 5.7, p. 23), $\rho_B(y e_n) \leq \rho_B(y) \rho_B(e_n)$. Ce qui nous donne, $1 = \rho_B(e_n) = \alpha_n \rho_B(y e_n) \leq \alpha_n \rho_B(y) \rho_B(e_n) \leq \alpha_n \rho_B(y)$. Finalement, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq \alpha_n \rho_B(y)$, ce qui impossible. Soit $\{e_1, \dots, e_m\}$ une famille d'idempotents non nuls deux à deux orthogonaux. Pour chaque $j \in \{1, \dots, m\}$, soit Be_j n'a pas d'éléments idempotents propres, soit il existe p_j un élément idempotent non nul de Be_j . Posons $q_j = e_j - p_j$. On a $p_j q_j = p_j(e_j - p_j) = p_j - p_j^2 = 0$. De plus $q_j^2 = (e_j - p_j)^2 = e_j^2 - p_j - p_j + p_j^2 = e_j - p_j = q_j$. Donc p_j et q_j sont deux éléments idempotents non nuls dans Be_j , vérifiant $e_j = p_j + q_j$ et $p_j q_j = 0$. Puisque B n'admet pas de suite infinie d'éléments idempotents deux à deux orthogonaux, on peut supposer que $\{e_1, \dots, e_m\}$ est choisie de sorte que pour chaque $j \in \{1, \dots, m\}$, Be_j n'admet pas d'éléments idempotents propres et que $e = e_1 + \dots + e_m$. Ainsi $B = Be_1 + \dots + Be_m$. On a pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, pour tout $x \in Be_j$, $Be_j x^2 = Bx^2 e_j = Bx e_j = Be_j x$, donc l'algèbre Be_j vérifie la condition Q_1 . D'après ce qui précède Be_j est isomorphe à $\mathbb{C}$. Ainsi B est de dimension inférieure ou égale à m . L'algèbre B est de dimension finie, alors B admet un nombre fini de caractères non nuls. Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ les caractères non nuls de B . On a pour tous $i \neq j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\ker(\varphi_i)$ et $\ker(\varphi_j)$ sont étrangers ($B = \ker(\varphi_i) + \ker(\varphi_j)$). D'après ([4], Proposition 5, p. 72),

on obtient :

$$B / \bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(\varphi_i) \simeq \prod_{i=1}^n B / \text{Ker}(\varphi_i).$$

Or $B / \text{Ker}(\varphi_i) \simeq \text{Im}(\varphi_i) = \mathbb{C}$. Donc :

$$B / \bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(\varphi_i) \simeq \mathbb{C}^n.$$

B étant une Q -algèbre de Fréchet commutative semi-simple unitaire, donc :

$$\{0\} = \text{Rad}(B) = \bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(\varphi_i).$$

Finalement :

$$B \simeq \mathbb{C}^n.$$

■

Remarque 1.3. *Le résultat du Théorème 1.2 précédent n'est pas vrai si l'algèbre B ne vérifie pas la Q -propriété. En effet l'algèbre $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ des suites complexes munie de la famille des semi-normes $(q_n)_n$ où $q_n((a_k)_k) = |a_n|$, est une algèbre de Fréchet unitaire commutative vérifiant la condition Q_1 , mais elle n'est pas de dimension finie.*

Références

[4] Bourbaki, N., *Algèbre commutative, éléments de mathématique*. Chapitres 1 à 4. Reprint. Masson, Paris, 1985.

[7] Cheikh, O. H. ; El Kinani, A. ; Oudadess, M. Critères de Le Page et commutativité dans les algèbres m -convexes. (French) [[Le Page criteria and commutativity in m -convex algebras]] Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 6 (1999), no. 3, 383–390.

[8] Choukri, Rachid ; El Kinani, Abdellah ; Oudadess, Mohamed. Étude des algèbres topologiques A vérifiant $Ax = Ax^2$ ou $xAx = x^2Ax^2$. (French) [[Study of topological algebras A that satisfy $Ax = Ax^2$ or $xAx = x^2Ax^2$]] General topological algebras (Tartu, 1999), 59–71, Math. Stud. (Tartu), 1, Est. Math. Soc., Tartu, 2001.

[9] Choukri, Rachid ; El Kinani, Abdellah. Structure des Q - F -algèbres A vérifiant $Ax = xAx$, pour tout $x \in A$. (French) [[Structure of Q - F -algebras A satisfying $Ax = xAx$, for all $x \in A$]] Matematiche (Catania) 63 (2008), no. 2, 57–61 (2009).

[12] J. DUNCAN, A. W. TULLO : Finite dimensionality, nilpotents and quasiniptents, Colloq. Math. 37 (1977), 81-82.

[14] El Boukasmi, D. ; El Kinani, A. On spectrally finite Fréchet algebras. Surv. Math. Appl. 17 (2022), 345–356.

[15] El Boukasmi, D. *Structure of unital Q -Fréchet algebras A satisfying : $Ax^2 = Ax$, for every $x \in A$* . Le Matematiche Volume 78 (2023), No. 2, 359-364.

[19] Fragouloupoulou, Maria Topological algebras with involution. North-Holland Mathematics Studies, 200. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2005. xvi+495 pp. ISBN : 0-444-52025-2.

[28] Michael, E. A., *Locally multiplicatively convex topological algebra*. Mem. Amer. Math. Soc. 11, Providence (1952).

Bibliographie générale.

[1] Arosio, A., *Locally convex inductive limits of normed algebras*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 51 (1974), 339-356.

[2] F. F. Bonsall, J. Duncan : *Complete normed algebras*. Ergebnisse der Mathematik, Band 80. Springer Verlag, (1973).

[3] Bourbaki, N., *Espaces vectoriels topologiques*. Chapitres 1 à 5. Masson, Paris, 1981.

[4] Bourbaki, N., *Algèbre commutative, éléments de mathématique*. Chapitres 1 à 4. Reprint. Masson, Paris, 1985.

[5] Bourbaki, N., *Éléments de mathématiques. Théories spectrales*. Chapitres 1 et 2. Springer, 2006.

[6] Brooks, R. M. *On locally m -convex $*$ -algebras*. Pacific J. Math. 23 (1967), 5-23.

[7] Cheikh, O. H. ; El Kinani, A. ; Oudadess, M. Critères de Le Page et commutativité dans les algèbres m -convexes. (French) [[Le Page criteria and commutativity in m -convex algebras]] Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 6 (1999), no. 3, 383-390.

[8] Choukri, Rachid ; El Kinani, Abdellah ; Oudadess, Mohamed. Étude des algèbres topologiques A vérifiant $Ax = Ax^2$ ou $xAx = x^2Ax^2$. (French) [[Study of topological algebras A that satisfy $Ax = Ax^2$ or $xAx = x^2Ax^2$]] General topological algebras (Tartu, 1999), 59–71, Math. Stud. (Tartu), 1, Est. Math. Soc., Tartu, 2001.

[9] Choukri, Rachid ; El Kinani, Abdellah. Structure des Q - F -algèbres A vérifiant $Ax = xAx$, pour tout $x \in A$. (French) [[Structure of Q - F -algebras A satisfying $Ax = xAx$, for all $x \in A$]] Matematiche (Catania) 63 (2008), no. 2, 57–61 (2009).

[10] Dixmier, Jacques ; *Les C^* -algèbres et leurs représentations*. (French) Deuxième édition Cahiers Scientifiques, Fasc. XXIX Gauthier-Villars Éditeur, Paris 1969

[11] Dixon, P. G., *Locally finite Banach algebras*. J. London Math. Soc. (2) 8 (1974), 325–328.

[12] J. DUNCAN, A. W. TULLO : Finite dimensionality, nilpotents and quasiniptotents, Colloq. Math. 37 (1977), 81–82.

[13] El Boukasmi, D. ; El Kinani, A. *Spectral operation in locally convex algebras*. Proyecciones 41 (2022), no. 3, 683–695.

[14] El Boukasmi, D. ; El Kinani, *On spectrally finite Fréchet algebras*. Surveys in Mathematics and its Applications Volume 17 (2022), 345–356.

[15] El Boukasmi, D. *Structure of unital Q -Fréchet algebras A satisfying : $Ax^2 = Ax$, for every $x \in A$* . Le Matematiche Volume 78 (2023), No. 2, 359–364.

[16] A. El Kinani, *Sur deux théorèmes de Katznelson*, Rev. Academia de

Ciencias ; Zaragoza, 56 (2001).

[17] El Kinani, A., Oudadess, M., *m-convex properties in locally convex algebras*. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 7 (2000), no.2, 285-290.

[18] A. El Kinani, M. Oudadess, *Entire functions and m-convex structure in commutative Baire algebras*. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 4 (1997), no. 5, 685-687.

[19] Fragouloupoulou, Maria. *Topological algebras with involution*. North-Holland Mathematics Studies, 200. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2005. xvi+495 pp. ISBN : 0-444-52025-2.

[20] Hirschfeld, R. A., Johnson, B. E., *Spectral characterization of finite-dimensional algebras*. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 75=Indag. Math. 34 (1972), 19-23.

[21] Jacobson, N., *Structure theory for algebraic algebras of bounded degree*. Ann. of Math. (2) 46 (1945), 695-707.

[22] Kaplansky, I., *Ring isomorphisms of Banach algebras*. Canad. J. Math. 6 (1954), 374-381.

[23] Y. Katznelson, *Algèbres caractérisées par les fonctions qui opèrent sur elles*. C. R. Acad. Sc. , Paris, A-B 247(1958), 903-905.

[24] Köthe, G., *Topological Vector Spaces I*. Second printing, revised, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1983.

[25] J. P. Lafon, *Algèbre commutative*, Paris, 1977.

[26] Le Page, Claude. *Sur quelques conditions entraînant la commutativité dans les algèbres de Banach*. (French) C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 265

(1967), A235–A237.

[27] Mallios, Anastasios ; *Topological algebras. Selected topics*. North-Holland Mathematics Studies, 124. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 109. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1986. xx+535 pp. ISBN : 0-444-87966-8.

[28] Michael, E. A., *Locally multiplicatively convex topological algebra*. Mem. Amer. Math. Soc. 11, Providence (1952).

[29] Palmer, T. W., *Banach algebras and the general theory of *-algebras*. Vol. I. *Algebras and Banach algebras*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 49. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[30] Pták, Vlastimil. Banach algebras with involution. Manuscripta Math. 6 (1972), 245–290

[31] Rickart, C. E., *General theory of Banach algebras*. Van Nostrand, New York, (1960).

[32] M. Roitman, Y. Sternfeld, *When is a linear functional multiplicative ?* Trans. Amer. Math. Soc. 267 (1981), no. 1, 111-124.

[33] Williamson, J. H., *On topologising the field $C(t)$* . Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954), 729-734.

[34] Zelazko, W., *On maximal ideals in commutative m -convex algebras*. Studia Math. 58 (1976), no. 3, 291-298.

Résumé

Ce travail porte sur la caractérisation des différents types d'algèbres par les fonctions qui opèrent sur elles.

La première partie trouve son origine dans les travaux de A. El Kinani qui prolongent, au cas des algèbres de Banach complexes unitaires, les résultats de Y. Katznelson obtenus dans le cas des algèbres de Banach complexes unitaires semi-simples et commutatives. Ainsi, nous examinons d'abord, l'opération spectrale, dans les algèbres complexes unitaires, non nécessairement topologiques. Nous abordons ensuite le cas des algèbres topologiques. En optant pour une démarche similaire à celle de l'opération spectrale, nous fournissons une étude de l'opération faible tout en comparant certains résultats obtenus. Nous avons examiné également l'opération au sens de Katznelson dans les algèbres localement convexes, et fourni un théorème de structure des algèbres m -convexes unitaires commutatives semi-simples complètes de dimension dénombrable.

La deuxième partie est consacrée à l'étude de la question suivante : Existe-t-il des classes d'algèbres où le résultat de I. Kaplansky suivant reste valide ? « Si A est une algèbre de Banach complexe dont le spectre de chaque élément est fini, alors A est de dimension finie modulo son radical de Jacobson ».

Nous fournissons un exemple d'une Q -algèbre m -convexe unitaire commutative complète semi-simple spectralement finie dont le radical de Jacobson n'est pas de codimension finie. Ensuite, nous montrons que pour la classe des algèbres de Fréchet, la réponse à la question posée est positive. Puis, nous montrons que si A est une Q -algèbre de Fréchet unitaire spectralement finie sans éléments quasi-nilpotents non nuls, alors A est isomorphe à C^n où n est un entier naturel non nul. On établit, également que toute algèbre complexe unitaire algébrique sans éléments nilpotents non nuls est commutative et semi-simple. Nous donnons à la fin, sous forme d'annexe, un résultat donnant la structure d'une Q -algèbre de Fréchet unitaire A vérifiant : $Ax^2=Ax$, pour tout x dans A .

Mots-clefs (5) : Algèbres de Banach, Algèbres localement convexes, Q -algèbres, Algèbres de Fréchet, Algèbres spectralement finies.

Abstract

This work focuses on characterizing the different types of algebras through the functions that operate on them.

The first part is based on the work of A. El Kinani, which extends the results of Y. Katznelson to the case of complex unital Banach algebras. We examine the spectral operation first in complex unital algebras, which may not necessarily be topological. Then we move on the case of topological algebras. Following a similar approach to the spectral operation, we provide a study of the weak operation while comparing certain results obtained. We also examine the operation in the sense of Katznelson in locally convex algebras and a structure result concerning semi-simple commutative complete m -convex unital algebras of countable dimension is also given.

The second part is dedicated to studying the following question: Are there classes of algebras where I. Kaplansky's result, stating that "If A is a complex Banach algebra whose spectrum of each element is finite, then A is of finite dimension modulo its Jacobson radical" remains valid? We provide an example of a complete spectrally finite commutative unital m -convex Q -algebra, whose Jacobson radical is not of finite codimension. Then, we showed for the Fréchet algebra class, the answer to the question posed is positive. Next, we show that if A is a unital Q -Fréchet algebra which is spectrally finite and without nonzero quasi-nilpotent elements, then A is isomorphic to C^n where n is a nonzero natural integer. Then, we establish that any unital algebraic complex algebra without nonzero nilpotent elements is commutative and semi-simple. Finally, we add as an appendix, the structure of unital Q -Fréchet algebra A satisfying: $Ax^2=Ax$, for every x in A .

Keywords (5) : Banach algebras, Locally convex algebras, Q -algebras, Fréchet algebras, Spectral finite algebras.