



N° d'Ordre : 40 /2021

Formation Doctorale : Mathématiques et Applications

Discipline : Mathématiques

Spécialité : Analyse Fonctionnelle et Théorie Spectrale

Laboratoire : Sciences Mathématiques et Applications

THESE DE DOCTORAT

Présentée par

Abdelhak Razouki

Topologie Séquentielle et $\mathcal{I}$ -Convergence

Soutenue le 02 /10 / 2021 devant le jury composé de :

Pr. Mostapha Ech-Chérif El Kettani	FSDM Fès	Président
Pr. Rachid Ameziane Hassani	FSDM Fès	Invité
Pr. Mohamed Babahmed	FSZ Meknès	Rapporteur
Pr. Samir Kabbaj	FS Kénitra	Rapporteur
Pr. Hassane Zguitti	FSDM Fès	Rapporteur
Pr. Hakima Mouanis	FSDM Fès	Examineur
Pr. Mohamed Tahar Kadaoui Abbassi	FSDM Fès	Examineur
Pr. Aziz Blali	ENS Fès	Co- Directeur de thèse
Pr. Abdelkhalek El Amrani	FSDM Fès	Directeur de thèse



N° d'Ordre : 40 /2021

Formation Doctorale : Mathématiques et Applications

Discipline : Mathématiques

Spécialité : Analyse Fonctionnelle et Théorie Spectrale

Laboratoire : Sciences Mathématiques et Applications

THESE DE DOCTORAT

Présentée par

Abdelhak Razouki

Topologie Séquentielle et $\mathcal{I}$ -Convergence

Soutenue le 02 /10 / 2021 devant le jury composé de :

Pr. Mostapha Ech-Chérif El Kettani	FSDM Fès	Président
Pr. Rachid Ameziane Hassani	FSDM Fès	Invité
Pr. Mohamed Babahmed	FSZ Meknès	Rapporteur
Pr. Samir Kabbaj	FS Kénitra	Rapporteur
Pr. Hassane Zguitti	FSDM Fès	Rapporteur
Pr. Hakima Mouanis	FSDM Fès	Examineur
Pr. Mohamed Tahar Kadaoui Abbassi	FSDM Fès	Examineur
Pr. Aziz Blali	ENS Fès	Co- Directeur de thèse
Pr. Abdelkhalek El Amrani	FSDM Fès	Directeur de thèse

REMERCIEMENTS

Je souhaite remercier très vivement en premier lieu mes directeurs de thèse messieurs Rachid Ameziane Hassani, Abdelkhalek El Amrani et Aziz Blali, Professeurs de l'Université Sidi Mohammed Ben Abdellah de Fès, pour m'avoir accueilli au sein de leur équipe de recherche en analyse fonctionnelle et théorie spectrale et pour la confiance qu'ils m'ont accordée en me permettant de réaliser mon travail de thèse sous leur direction. Je leur suis également reconnaissant pour le temps conséquent qu'il m'ont donné, leurs qualités pédagogiques et scientifiques, leur franchise et leur sympathie. J'ai beaucoup appris d'eux et je leur adresse ma gratitude pour tout cela.

J'adresse de chaleureux remerciements à monsieur Mohamed Babahmed, Professeur de l'Université Moulay Ismail à Meknès, pour ses conseils avisés et son écoute. Je tiens également à le remercier de m'avoir fait l'honneur d'être rapporteur de cette thèse et membre de jury de soutenance.

Ma gratitude va à monsieur le professeur Mustapha Ech-Cherif El Kettani pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de cette thèse. Je voudrais remercier aussi les rapporteurs messieurs les Professeurs Samir Kabbaj et Hassan Zguiti pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Mes remerciements vont également aux Professeurs Hakima Mouanis et Mohamed Tahar Kadaoui Abbassi pour l'honneur qu'ils ont donné à ce travail en acceptant d'être membres de jury.

Enfin, je dédie cette thèse à mes parents, qui m'ont amené à ce niveau d'étude, ma famille et mes amis qui m'ont soutenu pendant la conception de ce travail, et pour lesquels je ressens un grand amour et un profond respect que je veux leur exprimer ici.

TABLE DES MATIÈRES

I	Topologies séquentielles et $\mathcal{I}$-séquentielles	17
1	Préliminaires	21
1.1	Convergence séquentielle dans un espace topologique	21
1.2	Topologie séquentielle	32
1.3	$\mathcal{I}$ -convergence	34
2	Limite inductive topologique séquentielle	36
2.1	Enveloppe localement convexe d'espaces localement convexes muni d'une topologie séquentielle	36
2.2	Limite inductive topologique séquentielle	39
3	Topologie $\mathcal{I}$-séquentielle	44
4	Groupe séquentiellement $\mathcal{I}$-topologique	49
5	Sur l'unicité des $\mathcal{I}$-limites des suites	55
5.1	Sous-ensembles séquentiellement $\mathcal{I}$ -compacts	55
5.2	Espaces $\mathcal{I}$ -séparés et unicité des $\mathcal{I}$ -limites des suites	57
II	Bornologie et dualité dans une topologie $\mathbb{K}$-vectorielle séquentielle	62
6	Préliminaires	65
7	Sur la topologie $\mathbb{K}$-vectorielle séquentielle	69
8	Bornologie et dualité dans les espaces séquentiels localement $\mathbb{K}$-convexes	76
8.1	Espaces polairement bornologiques et topologies inductives séquentielles	76
8.2	Equicontinuité et dualité dans les espaces séquentiels	78
8.2.1	Equicontinuité et dualité	78
8.2.2	Caractérisation de la topologie nulle séquentielle	80

III	Topologie séquentielle floue	84
9	Préliminaires	87
10	Topologie séquentielle floue	90

RÉSUMÉ

Dans ce travail nous étudions les espaces séquentiels et les topologies séquentielles. Nous donnons quelques résultats des limites inductives topologiques séquentielles d'une famille $(E_\alpha, \tau_\alpha^s, A_\alpha)_{\alpha \in I}$ où pour tout $\alpha \in I$, τ_α^s est la topologie séquentielle localement convexe associée à la topologie τ_α .

Puis, nous introduisons la notion de $\mathcal{I}$ -convergence des suites, dans un groupe topologique et dans un espace topologique, où $\mathcal{I}$ est un idéal de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. De plus, nous comparons la topologie usuelle τ avec la topologie $\mathcal{I}$ -séquentielle associée, et nous prouvons quelques propriétés de base de la notion de $\mathcal{I}$ -convergence des suites. Nous donnons également une étude approfondie des groupes séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologiques à l'aide de la $\mathcal{I}$ -continuité séquentielle de l'application multiplication par un scalaire et de l'application inverse. Notamment, nous présentons des résultats intéressants relatifs aux sous-ensembles $\mathcal{I}$ -ouverts et $\mathcal{I}$ -fermés d'un groupe séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologique, ainsi que certains résultats sur les applications séquentiellement $\mathcal{I}$ -continues. Nous étudions également la relation entre la $\mathcal{I}$ -séparation et l'unicité des $\mathcal{I}$ -limites des suites, de sorte que nous donnons une caractérisation de l'unicité des $\mathcal{I}$ -limites des suites par la fermeture des sous-ensembles séquentiellement $\mathcal{I}$ -compacts.

Ensuite, nous établissons la stabilité de la topologie $\mathbb{K}$ -vectorielle séquentielle associée à la topologie usuelle, où $\mathbb{K}$ est un corps valué non-archimédien, par l'intermédiaire de la continuité des applications addition et multiplication par un scalaire pour la topologie séquentielle. Aussi, nous présentons la stabilité de la $\mathbb{K}$ -convexité pour cette topologie séquentielle. Par ailleurs, nous caractérisons la fermeture séquentielle du noyau d'une forme linéaire et nous prouvons le théorème de Hahn-Banach géométrique dans une topologie $\mathbb{K}$ -vectorielle séquentielle.

Après, nous caractérisons les espaces séquentiels bornologiques et la limite inductive des espaces séquentiels. En outre, nous étudions l'équicontinuité et la dualité dans ces espaces séquentiels.

Enfin, Nous définissons la fermeture floue séquentielle et l'intérieur flou séquentiel

des sous-ensembles flous de $[0, 1]^X$, où X est un ensemble non vide quelconque, par la convergence des suites des points flous. Nous caractérisons également la topologie floue séquentielle par l'intermédiaire de la fermeture floue séquentielle. De plus, nous comparons cette topologie avec la topologie usuelle, et nous prouvons certaines propriétés de base de ces concepts.

Mots et phrases clés : Enveloppe localement convexe, topologie séquentielle de l'enveloppe, corps valué non-archimédien, sphériquement complet, codimension, hyperplan, limite inductive, limite inductive topologique séquentielle, limite inductive stricte séquentielle, topologie du quotient séquentiel, (LF^s) -espaces, convergence statistique, densité asymptotique, $\mathcal{I}$ -convergence, $\mathcal{I}$ -fermeture, $\mathcal{I}$ -continuité, $\mathcal{I}$ -topologie séquentielle, $\mathcal{I}$ -séparation, $\mathcal{I}$ -limite, $\mathcal{I}$ -compacité, $\mathcal{I}$ -compacité séquentielle, $\mathcal{I}$ -homéomorphisme, sous-groupe normal, $\mathcal{I}$ -homogénéité séquentielle, espaces bornologiques, $\mathbb{K}$ -convexe, équicontinuité, dualité, ensembles flous, points flous, voisinages flous, fermeture séquentielle floue, intérieur séquentiel flou, frontière séquentielle floue.

ABSTRACT

In this work we study sequential spaces and sequential topologies. We give some results on the sequential topological inductive limits of a family $(E_\alpha, \tau_\alpha^s, A_\alpha)_{\alpha \in I}$, where τ_α^s is the locally convex sequential topology associated to the topology τ_α , for any $\alpha \in I$.

After, we introduce the notion of $\mathcal{I}$ -convergence of sequences, in a topological group and in a topological space, where $\mathcal{I}$ is an ideal of the set $\mathbb{N}$ of positive integers. Moreover, we compare this usual topology with the associated $\mathcal{I}$ -sequential topology, and we prove some basic properties of the notion of $\mathcal{I}$ -convergence of sequences. We also give a further investigation of sequentially $\mathcal{I}$ -topological groups with the aid of sequentially $\mathcal{I}$ -continuity of multiplication mapping and inverse mapping. In particular, we present some interesting results related to $\mathcal{I}$ -open and $\mathcal{I}$ -closed subsets of a sequentially $\mathcal{I}$ -topological group, as well as some results on sequentially $\mathcal{I}$ -continuous mappings. We also study the relation between $\mathcal{I}$ -separation and the uniqueness of $\mathcal{I}$ -limits of sequences, so that we give a characterization of the uniqueness of $\mathcal{I}$ -limits of sequences by the closure of sequentially $\mathcal{I}$ -compact subsets.

On the other hand, we establish the stability of the sequential $\mathbb{K}$ -vector topology associated to the usual topology, where $\mathbb{K}$ is a non-archimedean valued field, through the continuity of the addition and scalar multiplication mappings for the sequential topology. Also, we present the stability of $\mathbb{K}$ -convexity for this sequential topology. Furthermore, we characterize the sequential closure of a kernel of a linear form and prove the geometric Hahn-Banach theorem in a sequential $\mathbb{K}$ -vector topology.

Next, we characterize the bornological sequential spaces and the inductive limit of sequential spaces. Furthermore, we study equicontinuity and duality in these sequential spaces.

Finally, we define the sequential fuzzy closure and sequential fuzzy interior of fuzzy subsets of $[0, 1]^X$, where X is a non empty set, by convergence of sequences of fuzzy points. We characterize the sequential fuzzy topology with the sequential fuzzy closure. Furthermore, we compare this topology with the usual topology, and prove some basic

properties of these concepts.

Key Words and phrases : Locally convex hull, sequential hull topology, non-Archimedean valued field, spherically complete, codimension, hyperplane, inductive limit, sequential topological inductive limit, sequential strict inductive limit, sequential quotient topology, (LF^s) -spaces, statistical convergence, asymptotic density, $\mathcal{I}$ -convergence, $\mathcal{I}$ -closed, $\mathcal{I}$ -continuity, $\mathcal{I}$ -sequential topology, $\mathcal{I}$ -separated, $\mathcal{I}$ -bounded, $\mathcal{I}$ -compactness, sequentially $\mathcal{I}$ -compact, $\mathcal{I}$ -homeomorphism, normal subgroup, sequentially $\mathcal{I}$ -homogenous, bornological spaces, $\mathbb{K}$ -convex, equicontinuity, duality, fuzzy sets, fuzzy points, fuzzy neighborhoods, fuzzy sequential closure, fuzzy sequential interior, fuzzy sequential boundary.

ملخص

في هذا العمل سنقوم بدراسة الفضاءات الطوبولوجية المتتالية. سنقدم بعض نتائج حول الطوبولوجية النهائية الاستقرائية المتتالية لأسرة $(E_\alpha, \tau_\alpha^s, A_\alpha)_{\alpha \in I}$ حيث أن τ_α^s هي الطوبولوجيا المتتالية المحدبة محليا المرتبطة ب τ_α لكل $\alpha \in I$.

بعد ذلك، سنتناول مفهوم $\mathcal{I}$ - تقارب المتتاليات في زمرة طوبولوجية و في فضاء طوبولوجي، حيث $\mathcal{I}$ نموذج مثالي في $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية. علاوة على ذلك، سنقارن الطوبولوجية الاعتيادية τ بالطوبولوجيا $\mathcal{I}$ - متتالية المرتبطة بها، ونثبت بعض الخصائص الأساسية لمفهوم $\mathcal{I}$ -تقارب المتتاليات. سنقدم أيضا دراسة دقيقة للزمر المتتالية $\mathcal{I}$ - طوبولوجيا بواسطة ال $\mathcal{I}$ - اتصال المتتالياتي لتطبيقي الضرب في معامل والتطبيق العكسي. وعلى وجه الخصوص سنقدم نتائج مهمة مرتبطة بالمجموعات الجزئية ال $\mathcal{I}$ -مفتوحة و ال $\mathcal{I}$ - مغلقة في زمرة متتالية $\mathcal{I}$ - طوبولوجيا بالإضافة إلى نتائج أخرى مرتبطة بالتطبيقات ال $\mathcal{I}$ - متصلة متتاليا. سندرس أيضا العلاقة بين التمثيل ووحدة $\mathcal{I}$ - نهايات المتتاليات، حيث سنقدم خاصية مميزة لوحدة $\mathcal{I}$ - نهايات المتتاليات بواسطة إغلاقية المجموعات الجزئية ال $\mathcal{I}$ - متراسة متتاليا.

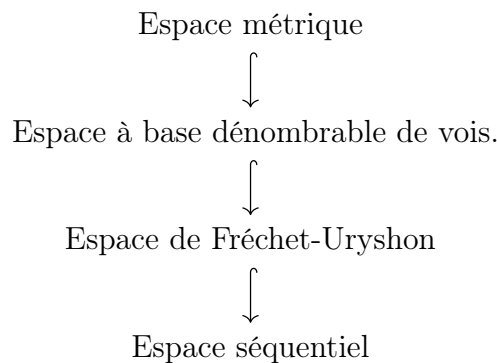
من ناحية أخرى، سنبرهن على استقرار الطوبولوجيا ال $\mathbb{K}$ - متجهية المتتالية المرتبطة بالطوبولوجيا الاعتيادية، حيث $\mathbb{K}$ جسم مزود بقيمة مطلقة لأرخميدي، من خلال اتصال تطبيقي الجمع والضرب في معامل بالنسبة للطوبولوجيا المتتالية. سنقدم أيضا استقرار ال $\mathbb{K}$ - تحذب لهذه الطوبولوجيا المتتالية. بالإضافة إلى ذلك، سنميز الإغلاق المتتالياتي لنواة شكل خطي وسنثبت نظرية هان باناخ الهندسية في الطوبولوجيا ال $\mathbb{K}$ - متجهية المتتالية.

بعد ذلك، سنميز الفضاءات المتتالية المحصورة والنهائية الاستقرار للفضاءات المتتالية. كما سندرس الاستمرارية والثنية في هذه الفضاءات المتتالية. أخيراً، سنحدد الاغلاقات الضبابي المتتالياتي والداخل الضبابي المتتالياتي لمجموعات جزئية ضبابية من $[0, 1]^X$ ، حيث X مجموعة غير فارغة، بواسطة تقارب متتايات النقط الضبابية. كما سنقدم خاصية مميزة للطوبولوجيات المتتالية الضبابية بواسطة الاغلاقات المتتالياتي الضبابي. علاوة على ذلك، سنقدم مقارنة لهذه الطوبولوجيات بالطوبولوجيا الاعتيادية، ونثبت بعض الخصائص الاساسية المرتبطة بهذه المفاهيم.

كلمات وجمل مفاتيح: ظرف محدب محلياً، طوبولوجية ظرف متتالياتي، جسم لا أرخميدي، متكامل فلكياً، مقابل البعد، مستوى متعالي، نهاية استقرارية، نهاية استقرارية طوبولوجية متتالية، نهاية استقرارية متتالية صارمة، طوبولوجية الحاصل المتتالياتي، (LF^s) - فضاءات، التقارب الإحصائي، الكثافة المقاربية، $\mathcal{I}$ - تقارب، $\mathcal{I}$ - انغلاق، $\mathcal{I}$ - اتصال، طوبولوجية $\mathcal{I}$ - متتالية، $\mathcal{I}$ - محصور، $\mathcal{I}$ - تمفصل، $\mathcal{I}$ - نهاية، $\mathcal{I}$ - تراص، $\mathcal{I}$ - تراص متتالياتي، $\mathcal{I}$ - تماثل، مجموعة فرعية طبيعية، $\mathcal{I}$ - تجانس متتالياتي، فضاءات انغلاقية، $\mathbb{K}$ - محدب، استمرارية، ثنوية، مجموعات ضبابية، نقط ضبابية، جوارات ضبابية، إنغلاق متتالياتي ضبابي، داخل ضبابي متتالياتي، حدود ضبابية متتالية.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le développement de la topologie a été dès le début lié à la recherche d'une bonne notion de convergence. Traditionnellement, la convergence signifie la convergence séquentielle (convergence des suites). On rappelle ici que la fermeture séquentielle d'un sous-ensemble A d'un espace topologique X est l'ensemble formé des limites des suites convergentes dans A . L'ensemble A est dit séquentiellement fermé si A coïncide avec sa fermeture séquentielle. Un espace topologique X est appelé un espace de Fréchet-Urysohn si la fermeture de tout sous-ensemble de X coïncide avec sa fermeture séquentielle. Un espace topologique X est dit séquentiel si tout sous-ensemble séquentiellement fermé $A \subset X$ est fermé. Bien entendu, tout espace de Fréchet-Urysohn est séquentiel. L'affirmation inverse est fausse (voir l'exemple 1.1.26). Dans [63], Franklin a donné une caractérisation de la classe des espaces topologiques qui peuvent être spécifiés complètement par la connaissance de leurs suites convergentes. Il a montré qu'il s'agissait de la classe des espaces séquentiels et a prouvé qu'un espace est séquentiel si et seulement si c'est le quotient par un espace métrique. Dans ces espaces séquentiels, la continuité coïncide avec la continuité séquentielle et la fermeture coïncide avec la fermeture séquentielle. Les espaces métrisables, les espaces à base dénombrable de voisinages et les espaces de Fréchet-Urysohn sont des espaces séquentiels comme le montre le diagramme suivant :



Dans les espaces topologiques séquentiels, on peut se limiter aux suites pour étudier la convergence et la continuité, ces espaces sont tous un quotient par un espace métrique. Cependant, en général, les suites ne sont pas suffisantes pour décrire la topologie, et la convergence des suites ne donne pas une information complète sur une topologie quelconque. En particulier, les suites sont inadéquates pour décrire certaines propriétés topologiques telles que la fermeture et la compacité. Par exemple, la topologie discrète et la topologie co-dénombrable sur un ensemble non dénombrable X ont les mêmes suites convergentes, à savoir les suites éventuellement constantes, mais la topologie discrète est strictement plus fine que la topologie co-dénombrable. La topologie discrète est séquentielle, mais la topologie co-dénombrable contient des ensembles séquentiellement ouverts qui ne sont pas ouverts. Ainsi, la théorie abstraite de la convergence séquentielle introduite par Maurice Fréchet [65] a été plus ou moins négligée, parce qu'elle semblait utile dans les espaces métriques et insuffisante ailleurs. Il est cependant facile de prouver que pour les espaces vectoriels localement convexes "bornologiques", un ensemble convexe "séquentiellement ouvert" est ouvert, de sorte qu'une application linéaire séquentiellement continue est continue [53, Théorème 6.1 et Théorème 6.3]. On sait que ce n'est pas vrai pour les applications bilinéaires (voir [85]) et comme Grothendieck l'a fait remarquer pour les duals de certains F -espaces [79, p. 101], la fermeture d'un ensemble n'est pas nécessairement obtenue en prenant toutes les limites des suites convergentes des éléments de l'ensemble. Pourtant, le langage séquentiel est utile comme alternative dans les espaces métriques, par exemple la suite convergente et sa limite forment un ensemble compact, alors que ce n'est pas vrai pour les suites généralisées. Il semble donc y avoir de nombreuses raisons pour étudier directement la convergence séquentielle.

Malgré que les suites ne donnent pas, en général, une caractérisation de la topologie, la fermeture séquentielle relative à une topologie τ donnée, fournit une méthode pour construire une nouvelle topologie τ^s , associée de manière naturelle à la topologie τ . Cette topologie, que nous appelons topologie séquentielle associée, est formée par les complémentaires des ensembles qui sont séquentiellement fermés relativement à la topologie de départ et est la plus fine des topologies ayant les mêmes suites convergentes que τ . Il est à noter que chaque fois que τ est à base dénombrable de voisinages, τ et τ^s sont équivalentes. Lorsque la famille des topologies sur l'ensemble X est considérée comme un treillis complet ordonné par l'inclusion, l'intervalle d'ordre $[\tau; \tau^s]$ est constitué de la sous-famille des topologies pour lesquelles toute suite convergente pour une de ces topologies est convergente pour les autres [17, Proposition 3.2].

Par le même procédé de construction de la topologie séquentielle τ^s , nous allons construire la topologie $\mathcal{I}$ -séquentielle associée à τ par le biais de la $\mathcal{I}$ -convergence, qui est plus générale que la convergence statistique et la convergence séquentielle usuelle. Ceci va nous conduire à une étude plus vaste des groupes $\mathcal{I}$ -topologiques et séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologiques et la caractérisation de l'unicité des $\mathcal{I}$ -limites des suites.

Dans un autre contexte épistémologique nous constatons que le concept d'incertitude est parmi les divers changements paradigmatiques intervenant dans les sciences et les mathématiques durant ces deux derniers siècles. Ce changement s'est manifesté par une

transition progressive du point de vue traditionnel, qui insiste sur le fait que l'incertitude est indésirable en science et doit être évitée par tous les moyens possibles, à un point de vue alternatif, qui tolère l'incertitude, considérée comme essentielle à la science. Zadeh [177], en 1965, a introduit l'idée fondamentale des ensembles flous en les définissant en termes d'applications d'un ensemble quelconque dans l'intervalle $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$. Les ensembles flous ont été introduits pour fournir des moyens de décrire des familles d'objets pour lesquelles il n'existe pas de critères d'appartenance précis. Les familles de ce type ont des limites vagues ou "floues". La théorie du flou est fréquemment confondue avec la théorie des probabilités, mais la particularité des ensembles flous est de donner l'idée d'appartenance partielle; ils peuvent donc être considérés comme une généralisation des ensembles classiques.

Ce sont les trois sujets cités précédemment que nous allons étudier dans cette thèse. Elle est donc divisée en trois parties. Dans la première partie, on présentera une étude de la topologie séquentielle et $\mathcal{I}$ -séquentielle, les espaces séquentiels et $\mathcal{I}$ -séquentiels dans le cas archimédien. Cependant, dans la deuxième partie on s'intéresse à la topologie $\mathbb{K}$ -vectorielle séquentielle, et aussi à la bornologie et la dualité par rapport à cette topologie $\mathbb{K}$ -vectorielle séquentielle dans le cas non-archimédien. Dans la dernière partie on donnera une étude des ensembles flous et la topologie floue, nous allons définir la fermeture séquentielle floue et la convergence des suites des points flous dans un espace topologique flou. Nous allons construire ainsi une nouvelle topologie floue appelée topologie séquentielle floue qui est plus fine que la topologie floue. En outre, nous allons prouver certaines propriétés de base de ces concepts.

NOTATIONS

$\mathcal{I}$	idéal de $\mathbb{N}$.
I, J, Δ	ensembles des indices.
I^X	ensemble des parties floues de X .
τ	topologie.
τ	topologie floue.
$\mathbb{K}$	corps valué non-archimédien.
(X, τ)	espace topologique.
(X, τ)	espace topologique flou (e.t.f).
$(E, \leq)$	un ensemble ordonné.
$(G, \circ, \tau)$	groupe topologique.
τ^s	topologie séquentielle associée à τ .
τ^s	topologie séquentielle floue.
$[\tau, \tau^s]$	intervalle d'ordre de τ à τ^s .
τ^{ind}	topologie finale ou inductive.
$(\tau^{ind})^s$	topologie séquentielle associée à τ^{ind} .
τ_q	topologie quotient.
τ^{ps}	topologie polaire séquentielle associée à τ .
$\tau_b(E^s, E)$	topologie forte sur E^s pour la dualité séparante $\langle E^s, E \rangle$.
$\tau_{\mathcal{I}}$	topologie $\mathcal{I}$ -séquentielle associée à τ ou topologie de $\mathcal{I}$ -convergence.
T^s	topologie $\mathbb{K}$ -convexe sur E définie par $\mathcal{P}_s$.
E^s	espace de toutes les formes linéaires séquentiellement τ -continues sur E .
F -espace	espace localement convexe métrisable complet.
B -espace	espace de Banach.
LB -espace	limite inductive topologique d'une suite strictement croissante de B -espaces.
LF -espace	limite inductive topologique d'une suite strictement croissante de F -espaces.

LF^s	limite inductive topologique séquentielle d'une suite strictement croissante de F -espaces.
$(\bigoplus_{\alpha} F_{\alpha})/H$	quotient de la somme directe des sous-espaces localement convexes F_{α} par un sous-espace fermé H .
H_0	engendrement linéaire dans $\bigoplus_{\alpha} F_{\alpha}$ des éléments $x_{\alpha} - A_{\beta\alpha}x_{\alpha}$.
$\varinjlim_{\alpha \in I} A_{\beta\alpha}(F_{\alpha})$	limite inductive topologique séquentielle des espaces F_{α} par rapport aux applications $A_{\beta\alpha}$.
K	homomorphisme canonique de $\bigoplus_{\alpha} F_{\alpha}$ sur $(\bigoplus_{\alpha} F_{\alpha})/H$.
K_{α}	restriction de K à F_{α} .
$K^{(0)}$	l'homomorphisme canonique de $\bigoplus_{\alpha} F_{\alpha}$ sur $(\bigoplus_{\alpha} F_{\alpha})/H_0$.
$K_{\alpha}^{(0)}$	restriction de $K^{(0)}$ à F_{α} .
ω_1, Ω	le premier ordinal non dénombrable.
βX	compactifié de Stone-Čech de X .
$\beta \mathbb{N}$	compactifié de Stone-Čech de $\mathbb{N}$.
$(x_n)_n$	suite d'éléments d'un espace topologique.
$p(x, t)$	point flou ou singleton flou.
$(p_n(x_n, t_n))$	suite des points flous.
A	partie d'un ensemble, ou application linéaire.
$\overline{A}$	fermeture de A .
$X \setminus A$	soustraction des ensembles.
$\overline{A}^s$	fermeture séquentielle de A .
$\overset{\circ}{A}^s$	ouverture séquentielle de A .
$\overline{A}^{\mathcal{I}}$	$\mathcal{I}$ -fermeture de A .
$\overset{\circ}{A}^{\mathcal{I}}$	$\mathcal{I}$ -intérieur de A .
μ, η, ν	sous-ensembles flous de X .
$1 - \mu$	complémentaire flou de μ noté aussi par μ^c .
μ_p	application d'appartenance.
$\overline{\mu}$	fermeture floue de μ .
$\overset{\circ}{\mu}$	intérieur (ouverture) flou de μ .
$\overline{\mu}^s$	fermeture séquentielle floue de μ .
$\partial_s(\mu)$	frontière séquentielle floue de μ .
$\bigoplus$	somme directe.
Δ	diagonale d'un ensemble.
$\mathcal{P}(X)$	ensemble des parties de X .
$\delta(A)$	densité asymptotique de A .
$F_{\mathcal{I}}$	filtre dual de $\mathcal{I}$.
$(E_{\alpha})_{\alpha \in I}, (F_{\alpha})_{\alpha \in I}$	familles des espaces localement convexes.
$(A_{\alpha})_{\alpha \in I}$	famille d'applications linéaires.
$\left(\sum_{\alpha} A_{\alpha}(F_{\alpha}), (\tau^{ind})^s \right)$	espace d'enveloppe séquentiel localement convexe de $(E_{\alpha}, \tau_{\alpha}^s, A_{\alpha})_{\alpha \in I}$.
$(x_{n_k})_k, (x_{\phi(n)})_n$	sous-suites de $(x_n)_n$.

$\mathcal{U}$	ensemble des voisinages séquentiels $\mathbb{K}$ -convexes de zéro.
$\mathcal{V}$	ensemble des sous-ensembles $\mathbb{K}$ -convexes A de E qui sont des voisinages de zéro dans (E, τ) polaires et séquentiels.
$\mathcal{P}(X)$	ensemble de points flous de X .
$\mathcal{N}_p^\tau$	ensemble des voisinages flous d'un point flou p dans un e.t.f (X, τ) .
$\mathcal{P}_s$	l'ensemble des semi-normes <i>n.a</i> séquentiellement τ -continues.
$B_p(0, \varepsilon)$	boule de centre 0 et de rayon ε .

Première partie

Topologies séquentielles et
 $\mathcal{I}$ -séquentielles

INTRODUCTION

Dans les articles [63] et [64] Franklin a donné quelques propriétés des espaces séquentiels, des exemples, et une relation avec les espaces de Fréchet-Urysohn. Ensuite Snipes, dans [153], a élaboré une nouvelle classe d'espaces appelée classe d'espaces T -séquentiels et sa relation avec les espaces séquentiels. Dans le même contexte, Webb [171] a introduit en 1968 la topologie de Hausdorff localement convexe τ^+ la plus fine définie sur un espace localement convexe donné (E, τ) telle qu'elle admet les mêmes suites convergentes que τ . En 1995, Katsaras [94], a utilisé la notion de chaîne introduite dans [1], il a construit la topologie vectorielle la plus fine qui a les mêmes suites convergentes que la topologie vectorielle d'origine et la topologie vectorielle la plus fine ayant les mêmes ensembles pré-compacts. En 2000, Ferrer [60] a étudié la convergence séquentielle sans conditions de convexité locale. Puis, en 2004, Goreham [77] a mené une étude sur la séquentialité et les sous-ensembles dénombrables dans un espace topologique.

En 2017, Babahmed [17] a donné les propriétés élémentaires de la topologie séquentielle associée en relation avec de nombreux concepts topologiques tels que la convergence, la continuité, la compacité et la densité. L'année suivante, El Amrani [56] a étudié, dans le cas non-archimédien, la topologie localement $\mathbb{K}$ -convexe séquentielle la plus fine sur E ayant les mêmes suites convergentes que la topologie d'origine.

La classe des (LF) -espaces strictes a été intensivement étudiée dans l'article classique de Dieudonné et Schwartz [52]. Les propriétés séquentielles des (LF) -espaces ont été examinées par Dudley dans [53], Webb dans [171] et aussi Kąkol et Saxon dans [92] ont caractérisé ces types d'espaces. Nous rappelons également que dans [76] Gómez et Kučera ont prouvé que si la limite inductive est séquentiellement complète et tous les sous-espaces $E_n, n \in \mathbb{N}$ du système inductif sont fermés, alors la limite inductive est α -régulière (c'est-à-dire, tout ensemble borné de la limite inductive est contenu dans un sous-espace borné E_n , du système inductive et y est borné).

Köthe [101] dans le chapitre 19 de son livre "Topological Vector Spaces I" a donné quelques résultats sur les topologies limites inductives, notamment : l'enveloppe localement convexe $\sum_{\alpha} A_{\alpha}(F_{\alpha})$ est topologiquement isomorphe au quotient $(\bigoplus_{\alpha} F_{\alpha})/H$ de la somme

localement convexe et la construction des enveloppes localement convexes est transitive. Il a donné aussi une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-ensemble d'une limite inductive stricte soit borné et une condition nécessaire et suffisante pour qu'une limite inductive topologique soit complète.

Dans un autre contexte, le concept de convergence statistique a été introduit par Fast [59] et Schoenberg [152], et il a été développé dans [59, 141, 142, 37, 38, 68, 40, 33, 75]. En 2000, P. Kostyrko et T. Šalát [100], ont donné une généralisation de la convergence statistique en utilisant la notion d'idéaux de sous-ensembles d'entiers positifs, appelée la $\mathcal{I}$ -convergence, et ils ont étudié certaines de ses propriétés fondamentales. Plusieurs résultats et propriétés [143, 144, 99, 61, 127, 43, 163, 42, 126, 44, 81, 136, 73, 137, 74] liés à la $\mathcal{I}$ -convergence ont été donnés dans différents espaces, comme l'espace des nombres réels, l'espace des matrices, les espaces n -normés, les espaces métriques, les espaces localement convexes, les espaces de Fréchet-Uryshon, les espaces normés probabilistes et les espaces des suites. Récemment, de 2005 à 2020, les auteurs de [108, 42, 131, 20, 178], ont étendu l'idée de $\mathcal{I}$ -convergence des suites à tout espace topologique et ont établi plusieurs propriétés de base. Il est bien connu que toute application continue est séquentiellement continue, c'est-à-dire que la continuité séquentielle est plus faible que la continuité. Mais, à l'inverse, dans le Théorème 4.0.3 une application séquentiellement $\mathcal{I}$ -continue peut être $\mathcal{I}$ -continue.

La propriété suivante est dite $\mathcal{I}$ -Fréchet-Urysohn ; soit $A \subset X$ et $x \in X$. $x \in \overline{A}^{\mathcal{I}}$ si et seulement si, il existe une suite $(x_n)_n$ de A qui est $\mathcal{I}$ -convergente vers x dans X , où $\overline{A}^{\mathcal{I}}$ est la $\mathcal{I}$ -fermeture de A . Un espace X est dit un espace de $\mathcal{I}$ -Fréchet-Urysohn s'il vérifie la propriété ci-dessus. Tout espace topologique (X, τ) muni de la $\mathcal{I}$ -topologie séquentielle vérifie la propriété de $\mathcal{I}$ -Fréchet-Urysohn. Nous rappelons qu'un espace X est un espace séquentiel si chaque sous-ensemble séquentiellement ouvert de X est ouvert. X est dit espace $\mathcal{I}$ -séquentiel si chaque sous-ensemble $\mathcal{I}$ -ouvert de X est ouvert. Dans le cas où $\mathcal{I}$ est un idéal admissible, nous avons le diagramme suivant [136] :

$$\begin{array}{ccc} \text{Espace de Fréchet-Urysohn} & \implies & \text{Espace de } \mathcal{I}\text{-Fréchet-Urysohn} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{Espace séquentiel} & \implies & \text{Espace } \mathcal{I}\text{-séquentiel} \end{array}$$

Suivant la proposition 1.1.16, si X est un espace à base dénombrable de voisinages, X est séparé (de Hausdorff) si et seulement si il a la propriété de l'unicité des limites des suites (si une suite admet une limite, elle est unique). En général, un espace topologique séparé X a la propriété de l'unicité des limites des suites, mais la réciproque n'est pas vraie. Dans [64], Franklin a présenté un exemple d'un espace de Fréchet qui n'est pas à base dénombrable ayant la propriété de l'unicité des limites des suites mais qui n'est pas séparé.

Nous allons rappeler, dans le deuxième chapitre, des préliminaires comportant des définitions et résultats fondamentaux pour les autres chapitres. Dans le chapitre trois, nous présentons une étude de la topologie séquentielle avec quelques exemples de raffinement strict entre une topologie quelconque et sa topologie séquentielle associée. Nous donnons

une caractérisation des enveloppes topologiques séquentielles localement convexes d'espaces localement convexes quotientés par une somme directe localement convexe d'espaces localement convexes, et plusieurs propriétés de la limite inductive topologique séquentielle des espaces localement convexes.

Dans le chapitre quatre, nous introduisons et étudions la topologie $\mathcal{I}$ -séquentielle. Dans un premier temps, nous rappelons la notion de convergence statistique et de $\mathcal{I}$ -convergence dans un espace topologique quelconque. Nous caractérisons après, la topologie $\mathcal{I}$ -séquentielle et nous la comparons à la topologie séquentielle. Ainsi, nous établissons quelques propriétés importantes liées à : point $\mathcal{I}$ -limite, $\mathcal{I}$ -continuité, séquentiellement $\mathcal{I}$ -continuité, espace $\mathcal{I}$ -compact et espace séquentiellement $\mathcal{I}$ -compact...etc

L'objectif du cinquième chapitre est d'approfondir l'étude des groupes séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologiques. Nous définissons ce type de groupes et établissons quelques propriétés importantes liées à la notion de sous-ensembles $\mathcal{I}$ -ouverts et $\mathcal{I}$ -fermés. Également, nous présentons quelques résultats sur les applications séquentiellement $\mathcal{I}$ -continues.

Dans le dernier chapitre de cette partie, nous étudions la relation entre la $\mathcal{I}$ -séparabilité et la propriété de l'unicité des $\mathcal{I}$ -limites des suites, nous prouvons également qu'un espace $\mathcal{I}$ -topologique X admet des uniques $\mathcal{I}$ -limites des suites si et seulement si chaque sous-ensemble séquentiellement $\mathcal{I}$ -compact de X est $\mathcal{I}$ -fermé.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

1.1 Convergence séquentielle dans un espace topologique

Définition 1.1.1. *Soit X un espace topologique :*

- a) X est à base dénombrable de voisinages si tout point x de X possède une base de voisinages dénombrable.*
- b) X est à base dénombrable si sa topologie admet une base dénombrable.*
- c) X est séquentiellement compact si toute suite dans cet espace possède au moins une sous-suite convergente.*
- d) X est dénombrablement compact si tout recouvrement de E par une famille dénombrable d'ouverts possède un sous-recouvrement fini.*

Il est bien connu que, dans les espaces métriques, les notions de fermeture, de compacité et de continuité peuvent être caractérisées en termes de convergence des suites. On rappelle ici des résultats vrais dans le cas des espaces métriques :

- (1) La fermeture d'un ensemble est constitué par les limites de toutes les suites convergentes de cet ensemble ;
- (2) L'espace est compact si et seulement si, il est séquentiellement compact ;
- (3) Une application d'un espace métrique dans un espace topologique est continue si, et seulement si, elle préserve les limites des suites convergentes.

Dans les espaces topologiques généraux, ces résultats ne sont plus vrai, comme le montre l'exemple [1.1.3](#).

On définit Le compactifié de Stone-Čech βX , d'un espace topologique X par le plus petit compact "engendré" par X . Plus rigoureusement.

Définition 1.1.2. *Soit X un espace topologique. Le compactifié de Stone-Čech de X , noté βX , est un espace compact Y , avec une application i de X vers Y , tel que pour tout*

espace compact Z et toute application continue f de X vers Z , il existe une application continue unique g de Y vers Z telle que $f = g \circ i$.

Exemple 1.1.3. [77] Soit $\beta\mathbb{N}$ le compactifié de Stone-Čech des nombres entiers naturels. Les seules suites convergentes de $\beta\mathbb{N}$ sont les constantes à partir d'un certain rang. On voit immédiatement que $\beta\mathbb{N}$ est un espace compact qui n'est pas séquentiellement compact, ce qui est un contre-exemple de la propriété (2) ci-dessus. Maintenant, soit x un point quelconque de $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Comme $\mathbb{N}$ est dense dans $\beta\mathbb{N}$, on voit que x appartient à $\overline{\mathbb{N}}$, la fermeture de $\mathbb{N}$. Toutefois, aucune suite de $\mathbb{N}$ ne converge vers x . Cela montre que la propriété (1) n'est pas vraie dans $\beta\mathbb{N}$. Enfin, soit Y l'ensemble des points de $\beta\mathbb{N}$ muni de la topologie discrète. Ensuite, la topologie de Y est strictement plus fine que celle de $\beta\mathbb{N}$, de sorte que l'application identité $\iota : \beta\mathbb{N} \rightarrow Y$ n'est pas continue. Cependant, étant donné que les seules suites convergentes dans $\beta\mathbb{N}$ sont les constantes à partir d'un certain rang, on voit que ι préserve les limites des suites. Ceci montre que la propriété (3) n'est pas vraie en générale.

Dans les espaces métriques nous pouvons caractériser une parties ouverte et une partie fermée en termes des suites par les deux propriétés suivantes :

- (4) Un sous-ensemble A de X est ouvert si et seulement si chaque fois que $(x_n)_n$ est une suite qui converge vers un point de A alors les éléments x_n sont éventuellement dans A .
- (5) Un sous-ensemble A de X est fermé si et seulement si, chaque fois que $(x_n)_n$ est une suite de A qui converge vers un point $x \in X$, alors x appartient à A .

On verra que les propriétés (4) et (5) sont équivalentes par passage au complémentaire. Il est surprenant, par conséquent qu'ils ne sont pas équivalentes à la propriété (1), dans laquelle les suites sont liées à la fermeture d'un opérateur. On constate (voir exemple 1.1.26) que la propriété (1) est strictement plus forte que les propriétés (4) et (5). Les espaces qui satisfont (1) sont les espaces de Fréchet-Urysohn.

À ce stade, on va définir chacune des principales classes d'espaces qui seront pris en considération dans les chapitres suivants.

Définition 1.1.4. Soit X un espace topologique. On dit que X est un espace à base dénombrable de voisinages, ou que X satisfait le premier axiome de dénombrabilité, si pour chaque point x de X , le système des voisinages de x admet une base dénombrable.

Il est clair que tout espace métrique X est un espace à base dénombrable de voisinages : une base de voisinages dénombrable d'un point x de X est l'ensemble $\{B(x, 1/n) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ de boules ouvertes de centre x et de rayon $1/n$.

Définition 1.1.5. Soit X un espace topologique. On dit que X est un espace de Fréchet-Urysohn, ou qu'il admet la propriété de Fréchet-Urysohn, si pour chaque sous-ensemble A de X , un point $x \in X$ appartient à $\overline{A}$ si et seulement si il existe une suite de A qui converge vers x .

Lemme 1.1.6. [77] Soit X un espace à base dénombrable de voisinages. Alors X est un espace de Fréchet-Urysohn.

Définition 1.1.7. Soit X un espace topologique, et soit A un sous-ensemble de X . On dit que A est séquentiellement ouvert si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ de X qui converge vers un point de A , il existe un entier naturel n_0 tel que x_n appartient à A dès que $n > n_0$. (on dit souvent que A contient presque tous les x_n , ou que $(x_n)_n$ est éventuellement dans A). De même, on dit que A est séquentiellement fermé si et seulement si, il contient les limites de toutes les suites d'éléments de A , c-à-d s'il existe une suite de A qui converge vers un point $x \in X$, alors x appartient à A .

De la définition de la convergence séquentielle dans un espace topologique, chaque ensemble ouvert est séquentiellement ouvert. De même tout ensemble fermé est séquentiellement fermé. Mais l'inverse de chacune de ces implications n'est pas vraie dans des espaces topologiques généraux. On note qu'une partie A de X est séquentiellement ouverte si et seulement si, $X \setminus A$ est séquentielle fermée.

Lemme 1.1.8. [77] Soit X un espace topologique. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Tout sous-ensemble séquentiellement ouvert de X est ouvert.
2. Tout sous-ensemble séquentiellement fermé de X est fermé.

Définition 1.1.9. Soit X un espace topologique. On dit que X est un espace séquentiel si chaque sous-ensemble séquentiellement ouvert de X est ouvert. Par le lemme précédent c'est la même chose de dire que chaque sous-ensemble séquentiellement fermé est fermé.

Remarque 1.1.10. On peut définir l'espace séquentiel et l'espace de Fréchet-Urysohn d'une autre manière : un espace X est séquentiel si pour chaque sous-ensemble non fermé A de X , il existe une suite de A convergente vers un point x dans $\overline{A} \setminus A$; un espace X est de Fréchet-Urysohn si pour chaque sous-ensemble A non fermé et chaque point x dans $\overline{A} \setminus A$, il existe une suite de A convergeante vers x . Pour un espace de Fréchet-Urysohn, on peut choisir le point x à l'avance, alors que pour un espace séquentiel on ne peut pas. Ainsi, chaque espace de Fréchet-Urysohn est séquentiel, mais la réciproque n'est pas vrai (voir exemple 1.1.26).

On a défini certaines classes d'espaces dans lesquels leurs topologies (en particulier, les ensembles fermés) peuvent être caractérisées par des suites. On considère maintenant des espaces dans lesquels les fermés peuvent être définis par des ensemble dénombrables.

Définition 1.1.11. Soit X un espace topologique. On dit que X admet une fermeture dénombrable, si à chaque fois qu'il existe une partie A de X qui contient la fermeture des sous-ensembles dénombrables, alors A est fermée.

Si on remplace "sous-ensembles dénombrables" par "suites" et "fermeture" par "limites" dans la définition ci-dessus, on obtient la définition de l'espace séquentiel. Par conséquent, chaque espace séquentiel et chaque espace à base dénombrable de voisinages ont la propriété de la fermeture dénombrable.

Lemme 1.1.12. [77] Soit X un espace topologique. Alors, X admet une fermeture dénombrable si et seulement si, pour tout point $x \in X$ appartenant à la fermeture de certain $A \subseteq X$, il existe un sous-ensemble dénombrable C de A tel que x appartient à $\overline{C}$.

Lemme 1.1.13. [77] *Chaque sous-espace d'un espace à base dénombrable de voisinages est aussi un espace à base dénombrable de voisinages.*

On va maintenant donner un exemple pour montrer que le produit d'espaces à base dénombrable de voisinages n'est pas nécessairement un espace à base dénombrable de voisinages.

Exemple 1.1.14. [77] On considère l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, c-à-d le produit de copies de la droite réelle muni de la topologie produit. Puisque $\mathbb{R}$ est un espace métrique, il est donc un espace à base dénombrable de voisinages ; on va montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ n'est pas un espace à base dénombrable de voisinages. Supposons par l'absurde qu'il existe $\mathcal{B} = \{U^{(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$ une base dénombrable de voisinages ouverts de 0 de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U^{(n)}$ est ouvert, alors il existe une base d'ensembles ouverts $\prod_{r \in \mathbb{R}} W_r^{(n)}$ tel que $0 \in \prod_{r \in \mathbb{R}} W_r^{(n)} \subseteq U^{(n)}$. Puisque $\prod_{r \in \mathbb{R}} W_r^{(n)}$ est une base d'ensembles ouverts, il existe un sous-ensemble fini $R^{(n)}$ de $\mathbb{R}$ tel que $W_r^{(n)} = \mathbb{R}$ pour tout $r \in \mathbb{R} \setminus R^{(n)}$. Maintenant, $R := \cup \{R^{(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un sous-ensemble propre dénombrable de $\mathbb{R}$; par conséquent, il existe $r \in \mathbb{R}$ avec $r \notin R$ tel que $W_r^{(n)} = \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier $W_r^{(n)} \not\subseteq [-1, 1]$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent :

$$(1) \quad \prod_{s \in \mathbb{R}} W_s^{(n)} \not\subseteq [-1, 1] \times \prod_{s \neq r} \mathbb{R} = \pi_r^{-1}[-1, 1],$$

il en résulte que $U^{(n)} \not\subseteq \pi_r^{-1}[-1, 1]$ pour chaque $U^{(n)} \in \mathcal{B}$. Mais $\pi_r^{-1}[-1, 1]$ est un voisinage ouvert de 0 de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, ce qui contredit le fait que $\mathcal{B}$ est une base de voisinages de 0. Cela montre que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ n'est pas un espace à base dénombrable de voisinages. $\square$

Cependant, le produit dénombrable d'espaces à base dénombrable de voisinages est un espace à base dénombrable de voisinages, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 1.1.15. [77] *Supposons que pour chaque n de $\mathbb{Z}$, X_n est un espace à base dénombrable de voisinages, et Soit X le produit $\prod_{n \in \mathbb{Z}} X_n$ muni de la topologie produit. Alors X est un espace à base dénombrable de voisinages.*

Proposition 1.1.16. [77] *Soit X un espace à base dénombrable de voisinages. Alors X est un espace de Hausdorff si et seulement si, les limites séquentielles dans X sont uniques, c-à-d chaque fois que $(x_n)_n$ converge vers x et y , alors $x = y$.*

Remarque 1.1.17. [77] Ce résultat ne peut pas être généralisé aux espaces de Fréchet-Urysohn (voir l'exemple 1.1.32)

On peut voir que la topologie des espaces à base dénombrable de voisinages est très largement déterminée par leurs suites convergentes. D'après le lemme 1.1.6 l'opération de fermeture peut être déterminée par les suites et chaque espace à base dénombrable de voisinages est séquentiel de sorte que les ensembles ouverts sont déterminés aussi par des suites convergentes. Dans le lemme 1.1.21, on verra que la continuité peut être caractérisée par des suites et la proposition précédente vient justement de prouver que cette caractérisation est vraie pour la propriété de Hausdorff. Ainsi, la plupart des propriétés des espaces à base dénombrable de voisinages sont déterminées par la connaissance de leurs suites convergentes.

Pour les espaces séquentiels de Hausdorff, la compacité séquentielle est équivalente à la compacité dénombrable (voir la proposition 1.1.23. En particulier, un espace de Hausdorff compact à base dénombrable de voisinages est séquentiellement compact. Cependant la réciproque de ce résultat n'est pas toujours vraie : un espace de Hausdorff séquentiellement compact à base dénombrable de voisinages n'est pas nécessairement compact. Comme le montre l'exemple suivant [125].

Définition 1.1.18. Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. On appelle intervalle ouvert (au sens de l'ordre) de E un intervalle de la forme $]x, y[$ pour deux éléments quelconques x et y de E tel que $x < y$, ou de la forme $]x, +\infty[$ ou $]-\infty, x[$ pour un élément quelconque x de E , ou encore $]-\infty, +\infty[$, où ces quatre notations désignent, par définition :

$$\begin{aligned}]x, y[&= \{t \in E \mid x < t < y\}, &]x, +\infty[&= \{t \in E \mid x < t\}, \\]-\infty, x[&= \{t \in E \mid t < x\}, &]-\infty, +\infty[&= E, \end{aligned}$$

($+\infty$ et $-\infty$ font donc partie des notations, et ne désignent aucun élément de E).

On appelle alors topologie de l'ordre sur E , la topologie engendrée par les intervalles ouverts, c'est-à-dire la topologie la moins fine sur E pour laquelle les intervalles sont ouverts. Elle admet comme pré-base (une pré-base A d'une topologie T sur un ensemble X est un ensemble de parties de X qui engendrent T , c'est-à-dire tel que T soit la plus petite topologie sur X pour laquelle les éléments de A sont des ouverts) les intervalles ouverts.

Lorsque $(E, \leq)$ est totalement ordonné, l'intersection de deux intervalles ouverts est toujours un intervalle ouvert. Par conséquent, les intervalles ouverts forment une base de la topologie, ainsi une partie de E est ouverte si et seulement si, elle est une réunion d'intervalles ouverts. Cette topologie est alors séparée.

Exemple 1.1.19. [77]

Soit ω_1 le plus petit nombre ordinal non dénombrable, et soit

$$W_0 := \{x \mid x \text{ est un ordinal et } x < \omega_1\}$$

Alors W_0 est un ensemble bien ordonné définissant l'ordinal ω_1 ; la topologie sur W_0 est la topologie de l'ordre. On va montrer que W_0 est un espace de Hausdorff séquentiellement compact à base dénombrable de voisinages qui n'est pas compact. Pour cela, on montre qu'il est un sous-espace propre dense d'un espace compact de Hausdorff :

Soit $W := W_0 \cup \{\omega_1\}$ muni de la topologie de l'ordre. D'abord on va considérer certaines notations. On note $-\infty := \min W$, et pour $x \in W$ on écrit $[-\infty, x[$, $]x, \omega_1]$ pour les ensembles $\{y \in W \mid y < x\}$, $\{y \in W \mid y > x\}$ respectivement.

Par définition ces ensembles forment une prébase (ensemble de parties de W qui engendrent la topologie de l'ordre) pour la topologie de l'ordre sur W . Lorsque $x < y$ on définit $]x, y[$, $[x, y[$, $]x, y]$ et $[x, y]$ de manière évidente. Notons que chaque fois que $x < y$ on a $]x, y] = [-\infty, y + 1[\cap]x, \omega_1]$, de telle sorte que $]x, y]$ est ouvert. Maintenant, chaque voisinage N de ω_1 contient un ensemble de la forme $]x, \omega_1]$ pour certains $x \in W_0$, donc N rencontre W_0 . Par conséquent $\omega_1 \in \overline{W_0}$, de sorte que W_0 est dense dans W . Pour montrer que W est quasi-compact, soit $\mathcal{E}$ un recouvrement d'ouverts de W et considérons l'ensemble

$$S := \{x \in W \mid [-\infty, x] \text{ admet un sous-recouvrement fini dans } \mathcal{E}\}.$$

Supposons, par l'absurde que $S \neq W$. Donc $W \setminus S$ est non vide, alors il existe au moins un élément $x \in W \setminus S$. Comme $\mathcal{E}$ est un recouvrement de W , il existe U_0 de $\mathcal{E}$ avec $x \in U_0$. Clairement $-\infty \in S$, alors $x \neq -\infty$. Puisque U_0 est un ouvert, on a $x \in [-\infty, y[\cap]z, \omega_1] \subseteq U_0$ pour certains $y, z \in W$, d'où $]z, x] \subseteq U_0$. Comme $z < x$ on a $z \in S$, alors $[-\infty, z]$ peut être recouvert par une sous-famille finie $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ de $\mathcal{E}$. Mais maintenant $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ est une sous-famille finie de $\mathcal{E}$ qui recouvre $[-\infty, x]$, ce qui contredit le fait que $x \notin S$. Par conséquent $S = W$, c-à-d W admet un sous-recouvrement fini dans $\mathcal{E}$. Ceci montre que W est quasi-compact.

Montrons que W est de Hausdorff : si x, y sont des points distincts de W , on peut supposer sans perdre de généralité que $x < y$. Ensuite, $U := [-\infty, x + 1[$ et $V :=]x, \omega_1]$ sont des ensembles ouverts disjoints avec $x \in U$ et $y \in V$, d'où W est un espace de Hausdorff. Ainsi W_0 est un sous-espace non fermé de l'espace compact W , donc W_0 n'est pas compact. En tant que sous-espace de W , W_0 est aussi un espace de Hausdorff.

Ensuite, on peut montrer que W_0 est un espace à base dénombrable de voisinages. Choisissons $x \in W_0$. Si $x = -\infty$ alors $\{x\}$ est une base de voisinages dénombrable. Dans le cas contraire, la famille $\mathcal{B} := \{]y, x] \mid y < x\}$ est dénombrable parce que $\mathcal{B}$ est bien ordonné par l'inclusion, elle définit l'ordinal x tel que $x < \omega_1$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de voisinages de x , cela montre que W_0 est un espace à base dénombrable de voisinages.

On veut montrer que W_0 est séquentiellement compact. Premièrement, on note dans ce qui suit que : Si C est un sous-ensemble dénombrable de W_0 , C admet un majorant dans W_0 ; car, si x est un élément de C tel que $x < \omega_1$, alors $[-\infty, x]$ est dénombrable. Donc l'ensemble $B := \bigcup_{x \in C} [-\infty, x]$ est une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables, donc dénombrable. Il en résulte que $B \neq W_0$, car W_0 n'est pas dénombrable. Par conséquent, il existe un certain $y \in W_0 \setminus B$. Comme $y \notin B$ on doit avoir $y > x$ pour tout $x \in C$, donc y est un majorant de C .

Pour montrer que W_0 est séquentiellement compact, soit $(x_n)_n$ une suite de W_0 . On considère l'ensemble

$$F := \{x_n \mid x_n \geq x_j \text{ chaque fois que } j \geq n\}.$$

Si $F = \emptyset$, on prend $I := \{1\}$. Sinon, on prend $x := \min F$ et $I := \{n \in \mathbb{N} \mid x_n = x\}$. Dans le cas où I est infini, on peut organiser I en une suite croissante $(n(r) \mid r \in \mathbb{N})$, et ensuite on voit que $(x_{n(r)})$ est constante, et donc une sous-suite convergente de $(x_n)_n$.

Il ne reste plus qu'à considérer le cas où I est fini. Ensuite, soit $n(1) := \max I + 1$, et on considère $x_{n(1)}$. Alors $x_{n(1)} \notin F$, donc il existe un certain entier naturel $n(2) > n(1)$ avec $x_{n(2)} > x_{n(1)}$. En continuant de cette façon, on peut choisir une sous-suite strictement croissante $(x_{n(r)})$ de $(x_n)_n$. L'ensemble $C = \{x_{n(r)} \mid r \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable, donc il est majoré dans W_0 . Ainsi, l'ensemble des majorants de C est non vide, soit y son plus petit élément et soit N un voisinage de y ; donc N contient $]z, y]$ pour un certain $z \in W_0$. Alors $z < y$, donc z n'est pas un majorant de C , Par conséquent $z < x_{n(s)} \leq y$ pour certains nombres naturels s . Comme la suite $(x_{n(r)})$ est croissante, il en résulte que $z < x_{n(r)} \leq y$, d'où $x_{n(r)} \in N$, chaque fois que $r > s$. Cela montre que $x_{n(r)} \rightarrow y$, donc

$(x_n)_n$ admet une sous-suite convergente. Par conséquent W_0 est séquentiellement compact.

Rappelons qu'une application continue $f : X \rightarrow Y$ est dite ouverte si l'image par f de tout ouvert de X est un ouvert de Y . Nous pouvons caractériser un espace à base dénombrable de voisinages par ce suit :

Théorème 1.1.20. [132] *Si f est une application ouverte d'un espace métrique X dans un espace topologique Y , alors Y est un espace à base dénombrable de voisinages. Inversement, si Y est un espace à base dénombrable de voisinages alors pour tout espace métrique X , il existe une application ouverte f de X sur Y .*

Notre objectif dans ce chapitre est le théorème 1.1.31, qui affirme que tout espace séquentiel peut être caractérisé par l'image d'un espace métrique par une application quotient. Ce théorème est tout à fait remarquable. Tout d'abord, les images des espaces métriques sont faciles à former. En second lieu, le théorème donne une caractérisation de la catégorie d'espaces séquentiels sans utilisation de la convergence séquentielle.

Lemme 1.1.21. [77] *Soient X un espace séquentiel, Y un espace topologique arbitraire et $f : X \rightarrow Y$ une application. Alors f est continue si et seulement si elle préserve les limites des suites, c-à-d, si $(x_n)_n$ est une suite convergente dans X vers x , alors $(f(x_n))_n$ converge dans Y vers $f(x)$.*

Définition 1.1.22. *Soit X un espace topologique (non supposé séparé). X est dit dénombrablement compact si tout recouvrement dénombrable de X par des ouverts possède un sous-recouvrement fini.*

En général, il n'y a aucune relation d'implication entre la compacité et la compacité séquentielle. On a donné un exemple (exemple 1.1.19) qui montre que, même pour les espaces de Hausdorff à base dénombrable de voisinages, la compacité séquentielle n'implique pas la compacité. L'espace $\beta\mathbb{N}$ est un exemple d'un espace de Hausdorff compact qui n'est pas séquentiellement compact. Cependant, un espace compact séquentiel est séquentiellement compact. Afin de prouver ceci on va montrer que, dans des espaces séquentiels, la compacité séquentielle est équivalente à la compacité dénombrable.

Proposition 1.1.23. [77] *Soit X un espace séquentiel. Alors X est séquentiellement compact si, et seulement si il est dénombrablement compact.*

Rappelons qu'une application continue surjective $f : X \rightarrow Y$ est appelée une application quotient si à chaque fois que $f^{-1}(V)$ est ouvert dans X (V un sous-ensemble de Y) alors V est ouvert dans Y . Par exemple l'application projection d'un espace produit sur l'un de ses espaces coordonnés est une application quotient. Cette définition sera utilisée dans l'exemple 1.1.26.

Lemme 1.1.24. [63, Prop. 1.2] *Soit X un espace séquentiel, et soit f une application quotient de X sur un espace topologique Y . Alors Y est un espace séquentiel.* $\square$

La preuve de cette proposition se fait en montrant que si U est séquentiellement ouvert dans Y , alors $f^{-1}(U)$ est séquentiellement ouvert dans X .

Définition 1.1.25. Une application continue d'un espace séparé dans un espace localement compact est dite propre si l'image réciproque de toute partie compacte de l'espace d'arrivée est compacte, ce qui est équivalent de dire que l'application est fermée et l'image réciproque par cette application de tout singleton est compacte.

A l'aide du lemme précédent, on peut donner un exemple d'un espace séquentiel qui n'est pas de Fréchet-Urysohn. Cela montre que, dans des espaces séquentiels, les suites ne caractérisent pas en général la fermeture d'un opérateur.

Exemple 1.1.26. [63] Soient $L := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ l'ensemble des nombres réels privé de 0, $M := \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ et $Y := (L \times \{0\}) \cup (M \times \{1\})$ un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie usuelle. En particulier, Y est un espace séquentiel.

Maintenant, soit $f : Y \rightarrow X$ la projection de Y sur la première coordonnée, c'est l'ensemble $X := \{0\} \cup L$. Remarquons que X est l'ensemble des nombres réels. La topologie sur X est la topologie usuelle ainsi que tous les ensembles de la forme $\{0\} \cup U$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}$ et il contient $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. Comme X est l'image de Y par l'application quotient alors il est séquentiel par le lemme précédent.

Maintenant, on va montrer que X n'est pas un espace de Fréchet-Urysohn. Soit $A := X \setminus M$. On montre que $0 \in \overline{A}$ mais aucune suite de A ne converge vers 0. Soit N un voisinage de 0. Ensuite, N contient un point $1/n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un $\delta > 0$ tel que $]1/n - \delta, 1/n + \delta[\subseteq N$. Maintenant, il existe quelques x irrationnels avec $|1/n - x| < \delta$. Alors $x \in N$ et, x étant irrationnel, $x \in A$. Par conséquent $A \cap N \neq \emptyset$. Comme cela est vrai pour tout voisinage de 0, cela montre que $0 \in \overline{A}$. Supposons maintenant que $(x_n)_n$ est une suite de A . Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n \neq 0$, et donc $\inf_{j \in \mathbb{N}^*} |x_n - 1/j| > 0$. Considérons la suite (δ_n) , où $\delta_n := \inf_{j \in \mathbb{N}^*} |x_n - 1/j|$, et soit

$$N := \{0\} \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}]1/n - \delta_n, 1/n + \delta_n[.$$

Alors N est un voisinage de 0 qui ne contient aucun des éléments de la suite $(x_n)_n$. Par suite $(x_n)_n$ ne peut éventuellement converger vers 0. Ceci montre qu'aucune suite de A ne converge vers 0, alors X n'est pas un espace de Fréchet-Urysohn. $\square$

Dans l'exemple 1.1.30 on va montrer que le produit de deux espaces séquentiels n'est pas nécessairement séquentiel. Maintenant, on donne un exemple d'un sous-espace non-séquentiel d'un espace séquentiel.

Exemple 1.1.27. [63] Soit X l'espace dans l'exemple 1.1.26, et soit A comme ci-dessus. Soit $Z := A \cup \{0\}$. On montre que Z est un sous-espace de X qui n'est pas séquentiel. Rappelons qu'aucune suite de A ne converge vers 0. Par conséquent les seules suites de Z qui convergent vers 0 sont les constantes. Donc l'ensemble $\{0\}$ est séquentiellement ouvert dans Z . Cependant, $\{0\}$ n'est pas ouvert dans Z , car $f^{-1}\{0\} = \{0\} \times \{1\}$ n'est pas ouvert dans Y (tout voisinage de $\{0\} \times \{1\}$ ne contient aucun point $(1/n, 1)$). Ainsi, Z n'est pas un espace séquentiel. $\square$

Néanmoins, on a le résultat suivant :

Lemme 1.1.28. [63, Prop. 1.9] Un sous-espace fermé d'un espace séquentiel est un espace séquentiel. $\square$

Notons que dans l'exemple 1.1.27, l'espace X est un espace séquentiel qui n'est pas de Fréchet-Urysohn. Ce n'est pas une coïncidence; en fait, tout espace qui n'est pas héréditairement séquentiel n'est pas un espace de Fréchet-Urysohn.

Lemme 1.1.29. [63, Prop. 7.2] *Soit X un espace séquentiel. Si chaque sous-espace de X est séquentiel, alors X est de Fréchet-Urysohn.* $\square$

Exemple 1.1.30. [77] Soit X un espace de Fréchet-Urysohn qui n'est pas de Hausdorff avec des limites séquentiels uniques (Par l'exemple 1.1.32 ci-dessous, cet espace X existe). On montre que l'espace $X \times X$ n'est pas séquentiel. Comme X n'est pas de Hausdorff, la diagonale $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ n'est pas fermé dans $X \times X$. D'autre part, Δ est séquentiellement fermé, car les limites séquentielles sont uniques. Donc $X \times X$ n'est pas un espace séquentiel. $\square$

On va maintenant caractériser un espace séquentiel par l'image d'un espace métrique par une application quotient.

Théorème 1.1.31. [63] *Si f est une application quotient d'un espace métrique X sur un espace topologique Y , alors Y est séquentiel. Inversement, si Y est un espace séquentiel, il existe un espace métrique X et une application quotient f de X dans Y .*

Nous avons vu dans le lemme 1.1.6 que chaque espace à base dénombrable de voisinages est un espace de Fréchet-Urysohn. Un exemple d'un espace de Fréchet-Urysohn qui n'est pas à base dénombrable de voisinages est l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la topologie $\{\mathbb{R} \setminus F \mid F \subseteq \mathbb{R}, F \text{ est fini}\}$. On veut définir un espace de Fréchet-Urysohn qui n'est pas de Hausdorff avec des limites séquentielles uniques. Cela montrera que le résultat de la proposition 1.1.16 ne se généralise pas aux espaces de Fréchet-Urysohn. Plus tard (Théorème 1.1.37) on donnera une caractérisation pour la classe des espaces de Fréchet-Urysohn de Hausdorff : Les espaces de Fréchet-Urysohn de Hausdorff sont précisément les images des espaces métriques par des pseudo-applications ouvertes. En particulier, l'image d'un espace métrique par une application fermée est un espace de Fréchet-Urysohn.

Exemple 1.1.32. [64] Soit X le produit $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ muni de la topologie usuelle (discrète), soient $p, q \notin X$ avec $p \neq q$. Soit $Y := X \cup \{p, q\}$, on définit une topologie sur Y , qui sera la plus fine, par une base construite de la topologie sur X et :

- (1) les ensembles $\{p\} \cup ((\mathbb{N} \setminus F) \times \mathbb{N})$, où F est un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$;
- (2) les ensembles $\{q\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\{n\} \times (\mathbb{N} \setminus F_n))$, où (F_n) est une suite de sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$.

Soient U, V des voisinages de p et q respectivement. Donc U contient toutes les parties non finies $\{n\} \times \mathbb{N}$, on peut choisir un nombre naturel n tel que $\{n\} \times \mathbb{N} \subseteq U$. V contient (n, j) pour un nombre infini des $j \in \mathbb{N}$, on peut donc choisir $j \in \mathbb{N}$ de telle sorte que (n, j) est dans V . Alors (n, j) est dans U aussi, donc $U \cap V \neq \emptyset$. Cela montre que chaque voisinage de p rencontre chaque voisinages de q , alors Y n'est pas de Hausdorff.

Ensuite, on montre qu'aucune suite de Y ne peut converger vers plus d'un point. Comme X est discret les seules suites convergentes vers des points de X sont les suites

éventuellement constantes. Ainsi on a seulement besoin étudier la possibilité qu'il pourrait exister une suite de Y convergeant à la fois vers p et q . En outre, il existe des voisinages de p qui ne contiennent pas q , et vice versa, donc il suffit de considérer le cas d'une suite $((n_r, j_r) \mid r \in \mathbb{N})$ de X . Comme $((n_r, j_r))$ converge vers p , chaque voisinage de p contient un nombre infini des points (n_r, j_r) . Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $Y \setminus (\{n\} \times \mathbb{N})$ est un voisinage de p , donc il existe seulement un nombre fini des r tel que $n_r = n$. Soit $F_n := \{j_r \mid n_r = n\}$. Comme (F_n) est une suite de sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$, l'ensemble

$$N := \{q\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\{n\} \times (\mathbb{N} \setminus F_n))$$

est un voisinage de q . Ceci est une contradiction, parce que N ne contient aucuns des points de la suite $((n_r, j_r) \mid r \in \mathbb{N})$ qui converge vers q . Donc il n'existe pas une telle suite. Ceci montre que les limites séquentielles de Y sont uniques.

Enfin, on va montrer que Y est un espace de Fréchet-Urysohn. Puisque X est discret, il est certainement de Fréchet-Urysohn. Il reste à prouver que, chaque fois que l'un des p, q se situe dans la fermeture d'un ensemble, alors il est la limite d'une suite dans cet ensemble. Considérons d'abord le point p . Supposons que A est un sous-ensemble de Y tel que $p \in \overline{A}$. Pour chaque entier naturel r , le complémentaire de l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid n < r\} \times \mathbb{N}$ est un voisinage de p . Il en résulte que pour chaque $r \in \mathbb{N}$ il existe un (i_r, j_r) de A avec $n_r \geq r$. Puis $n_r \rightarrow \infty$ si $r \rightarrow \infty$. Comme tout voisinage de p contient $\{n\} \times \mathbb{N}$, il doit contenir les points (n_r, j_r) . Ainsi $((n_r, j_r) \mid r \in \mathbb{N})$ est une suite de A qui converge vers p .

Considérons maintenant q . Soit B un sous-ensemble de Y avec $q \in \overline{B}$. Si $q \in B$, alors il n'y a rien à prouver. Supposons que $q \notin B$. Donc, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $F_n := \{j \in \mathbb{N} \mid (n, j) \in B\}$, et considérons la suite (F_i) des sous-ensembles de $\mathbb{N}$. Si chaque F_n est fini, alors l'ensemble

$$\{q\} \cup (X \setminus B) = \{q\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\{n\} \times (\mathbb{N} \setminus F_n))$$

est de la forme donnée en (2) ci-dessus, il est donc un voisinage de q qui ne rencontre pas B , ce qui contredit le fait $q \in \overline{B}$. Par conséquent, il existe un entier naturel n tel que F_n est infini. On classe les éléments de F_n dans une suite infinie $(j_r \mid r \in \mathbb{N})$. Maintenant tout voisinage de q contient tous les points de la partie $\{n\} \times \mathbb{N}$, en particulier il contient tous les points (n, j_r) . Ainsi $((n, j_r) \mid r \in \mathbb{N})$ est une suite de B qui converge vers q . Ceci montre que Y est un espace de Fréchet-Urysohn. $\square$

Lemme 1.1.33. [77] *Tout sous-espace d'un espace de Fréchet-Urysohn est lui-même un espace de Fréchet-Urysohn.* $\square$

Ce résultat fournit une réciproque du lemme 1.1.29; de sorte qu'on peut en déduire que les espaces de Fréchet-Urysohn sont les espaces héréditairement séquentiels.

Définition 1.1.34. Soient X, Y des espaces de Hausdorff et $f : X \rightarrow Y$ une application continue surjective. On dit que f est pseudo-ouverte si chaque fois que U est un ensemble ouvert dans X contenant un certain $f^{-1}\{y\}$ où $y \in Y$, alors $f(U)$ est un voisinage de y dans Y .

Il est clair que toute application ouverte surjective est pseudo-ouverte. Ainsi chaque application fermée surjective est pseudo-ouverte : car si $f : X \rightarrow Y$ est fermé, soit $y \in Y$.

On suppose que U est ouvert dans X avec $f^{-1}\{y\} \subseteq U$. Alors $X \setminus U$ est fermé dans X , donc $f(X \setminus U)$ est fermé dans Y . Comme $f^{-1}\{y\}$ est contenu dans U , il en résulte que y n'est pas un élément de $f(X \setminus U)$. Ainsi y appartient à l'ensemble ouvert $Y \setminus f(X \setminus U)$, qui est un sous-ensemble de $f(U)$ (parce que f est surjective). Ainsi $f(U)$ est un voisinage de y et f est pseudo-ouverte.

Proposition 1.1.35. [77] Soient X, Y des espaces de Hausdorff et $f : X \rightarrow Y$ pseudo-ouverte. Alors f est une application quotient.

Proposition 1.1.36. [12, Théorème.4] Soient X un espace de Hausdorff de Fréchet-Urysohn, Y un espace de Hausdorff et $f : X \rightarrow Y$ une application quotient. Alors, Y est un espace de Fréchet-Urysohn si et seulement si, f est pseudo-ouverte.

Théorème 1.1.37. [12] Si f est une application pseudo-ouverte d'un espace métrique X sur un espace de Hausdorff Y , alors Y est de Fréchet-Urysohn. Inversement, si Y est un espace de Hausdorff de Fréchet-Urysohn, alors pour un espace métrique X , il existe une application f pseudo-ouverte de X sur Y .

Un espace de fermeture dénombrable n'est pas toujours séquentiel comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 1.1.38. [64]

Soit $\beta\mathbb{N}$ le compactifié de Stone-Čech de l'ensemble des nombres entiers naturels. Soit $X := \beta\mathbb{N}$ et considérons la topologie sur X construite par la topologie sur $\beta\mathbb{N}$ et les ensembles $\{x\} \cup \mathbb{N}$ pour tout x dans $X \setminus \mathbb{N}$. On a déjà noté que les seules suites convergentes dans $\beta\mathbb{N}$ sont les constantes (Exemple 1.1.3). Il est clair que, dans une topologie plus fine le nombre des suites convergentes ne peut pas augmenter, de sorte que les seules suites convergentes de X sont celles qui sont constantes. Par conséquent, chaque sous-ensemble de X est séquentiellement ouvert, mais $X \setminus \mathbb{N}$ n'est pas ouvert, alors X n'est pas un espace séquentiel. Cependant, X est de fermeture dénombrable. Pour voir cela, soit A un sous-ensemble de X . On note que tout sous-ensemble de X contenant $\mathbb{N}$ est ouvert, donc un sous-ensemble qui est disjoint de $\mathbb{N}$ est fermé. Donc :

$$(3) \quad \overline{A} = \overline{(A \setminus \mathbb{N})} \cup \overline{(A \cap \mathbb{N})} = (A \setminus \mathbb{N}) \cup \overline{(A \cap \mathbb{N})} \subseteq A \cup \overline{(A \cap \mathbb{N})}.$$

Maintenant, si A contient la fermeture de tous ses sous-ensembles dénombrables alors en particulier il contient la fermeture de $A \cap \mathbb{N}$. Donc (3) montre que $\overline{A} = A$, c-à-d, A est fermé. Cela montre que X est de fermeture dénombrable. $\square$

En utilisant le dernier exemple, on peut montrer qu'il n'y a pas de généralisation du lemme 1.1.21 aux espaces de fermeture dénombrable.

Exemple 1.1.39. [77] Soit X l'espace de l'exemple précédent, et soit Y le même ensemble ($\beta\mathbb{N}$) muni de la topologie discrète. Alors, la topologie de Y est strictement plus fine que la topologie sur X , de sorte que l'application identité $\iota : X \rightarrow Y$ n'est pas continue. Cependant, les seules suites convergentes de X sont les constantes, par conséquent ι conserve les limites des suites. $\square$

Lemme 1.1.40. [77] Soit X un espace topologique de fermeture dénombrable, et soit Y un sous-espace de X . Alors Y admet la fermeture dénombrable. $\square$

Lemme 1.1.41. [13, Prop. 3] Soit X un espace topologique de fermeture dénombrable, et supposons que $f : X \rightarrow Y$ est une application quotient alors Y admet la fermeture dénombrable.

Théorème 1.1.42. [117, Theorem. 4] Soient X, Y des espaces de Hausdorff de fermeture dénombrable, et supposons que Y est compact. Alors $X \times Y$ admet la fermeture dénombrable.

1.2 Topologie séquentielle

Soit (X, τ) un espace topologique. Nous rappelons ici qu'un sous-ensemble $F \subset X$ est dit séquentiellement fermé si F est fermé par rapport à la convergence des suites de F , c'est-à-dire que pour chaque suite $(x_n)_n$ de F convergente vers x , $x \in F$. Un sous-ensemble $U \subset X$ est dit séquentiellement ouvert si $X \setminus U$ est séquentiellement fermé. Il est évident qu'un sous-ensemble $U \subset X$ est séquentiellement ouvert si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ convergente vers un point $x \in U$, $(x_n)_n$ est éventuellement dans U (c'est-à-dire qu'il existe un certain $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $x_n \in U$). Soit τ^s le sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$ définie par :

$$\tau^s = \{U \in \mathcal{P}(X) / \forall (x_n)_n \subset U^c : x_n \rightarrow x \Rightarrow x \in U^c\}$$

c'est-à-dire l'ensemble des ensembles séquentiellement ouverts dans X . τ^s est dite la topologie séquentielle associée à τ ou tout simplement la topologie séquentielle s'il n'y a pas de confusion (ce qui est différent de la notion d'espace séquentiel). Il est évident que tout sous-ensemble ouvert est séquentiellement ouvert (c'est-à-dire τ^s -ouvert). Un espace X est un espace séquentiel si et seulement si, chaque sous-ensemble séquentiellement ouvert de X est ouvert ($\tau^s = \tau$). Tout espace à base dénombrable de voisinages est un espace séquentiel [129, Théorème 10.2.17]. La topologie séquentielle τ^s est plus fine que la topologie τ , mais ce raffinement peut être strict comme le montre les exemples suivants.

Exemple 1.2.1. Soit $X \neq \emptyset$ un ensemble non dénombrable et τ la topologie co-dénombrable sur X .

On montre que toutes les suites convergentes de X sont constantes : On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_n$ convergente vers un élément $x \in X$, mais non constante, on pose $N = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \setminus \{x\}$ qui est dénombrable, alors $X \setminus N$ est un sous-ensemble ouvert de X contenant x . Par conséquent, $X \setminus N$ est τ^s -ouvert contenant x , donc $(x_n)_n$ est évidemment dans $X \setminus N$, ce qui est absurde, donc $(x_n)_n$ est constante.

On en déduit que tous les sous-ensembles de X sont τ^s -ouverts, mais le singleton $\{x\}$, $x \in X$, n'est pas ouvert, c'est-à-dire $\tau < \tau^s$ (raffinement strict).

Exemple 1.2.2. Rappelons que Ω désigne le premier ordinal non dénombrable avec l'ordre usuel τ_Ω . Soit $[0, \Omega]$ l'espace topologique tel que ses sous-ensembles ouverts sont $[0, \lambda[= \{\alpha / \alpha < \lambda\}$. Toute suite d'ordinaux dénombrables a une limite dénombrable ω (premier ordinal infini). Mais il n'existe pas de suite d'ordinaux dénombrables qui converge vers Ω (la seule suite qui converge vers Ω est Ω elle-même). On considère la suite $(x_n)_n \subset [0, \Omega]$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \Omega \in \{\Omega\}$, donc $\{\Omega\}$ est τ_Ω^s -ouvert, mais $\{\Omega\}$ n'est pas τ_Ω -ouvert car son complémentaire dans $[0, \Omega]$ est un sous-ensemble ouvert, c'est-à-dire $\{\Omega\}^c = [0, \Omega[$, d'où $\tau_\Omega < \tau_\Omega^s$.

Nous avons l'équivalence suivante entre la convergence et la convergence séquentielle.

Théorème 1.2.3. [17] Soient (X, τ_X) un espace topologique, $(x_n)_n$ une suite de X et $x \in X$. Alors, $(x_n)_n$ est τ_X -convergente vers x si et seulement si, elle est τ_X^s -convergente vers x .

Nous avons également l'équivalence entre la continuité et la continuité séquentielle par le théorème suivant.

Théorème 1.2.4. [17] Soient (X, τ_X) , (Y, τ_Y) deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est (τ_X, τ_Y) séquentiellement continue ;
- (ii) f est (τ_X^s, τ_Y^s) -continue.

Étant donné un ensemble X et une famille $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ d'espaces topologiques avec des applications $f_i : X_i \rightarrow X$ pour tout $i \in I$. La topologie limite inductive (ou finale ou inductive) τ^{ind} , est la topologie la plus fine sur X telle que chaque application $f_i : (X_i, \tau_i) \rightarrow (X, \tau^{ind})$ est continue. Explicitement, $\tau^{ind} = \{U \subset X / (\forall i \in I) f_i^{-1}(U) \in \tau_i\}$.

Comme exemples de topologies inductives, nous rappelons la topologie quotient, la topologie de somme directe et la topologie de la limite inductive directe. Nous considérons sur X la topologie séquentielle associée $(\tau^{ind})^s$. D'autre part, pour tout $i \in I$, nous considérons la topologie séquentielle associée $(\tau_i)^s$ sur X_i , et la topologie limite inductive $(\tau^s)^{ind}$ par rapport à la famille $(X_i, \tau_i^s)_{i \in I}$ d'espaces topologiques avec les fonctions $f_i : X_i \rightarrow X$ pour tout $i \in I$.

La topologie séquentielle est dite stable sous la transformation topologique inductive si $(\tau^{ind})^s = (\tau^s)^{ind}$: Malheureusement, ce n'est pas le cas en général. Mais on a le résultat suivant :

Théorème 1.2.5. [17] $(\tau^{ind})^s \leq (\tau^s)^{ind}$:

Remarque 1.2.6. Comme la topologie quotient est une topologie inductive, nous avons aussi $(\tau_q^{ind})^s \leq (\tau_q^s)^{ind}$.

Le raffinement du théorème précédent peut être strict comme le montre les exemples suivants.

Exemple 1.2.7. Soit $X = \mathbb{R}^{[0,1]}$ muni de la topologie produit τ^ω de la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ et Y le sous-espace de X de toutes les fonctions f telles que $Supp(f)$ est dénombrable. Soit $\psi \in X$ tel que $Supp(\psi)$ est non dénombrable, et considérons $Z = Y + \mathbb{R}.\psi$, le sous-espace de X engendré par Y et ψ . Y est clairement dense dans Z . Par conséquent la topologie quotient τ_q par rapport à l'application canonique du quotient $\pi : (Z, \tau^\omega) \rightarrow (Z/Y, \tau_q)$ est grossière. La topologie séquentielle $(\tau_q)^s$ est aussi grossière puisqu'aucun sous-ensemble propre du quotient ne peut être séquentiellement fermé, du fait que toute suite convergente de Z/Y converge vers tout point de Z/Y . D'autre part, soit $(\tau^s)_q$ la topologie du quotient par rapport à l'application quotient canonique $\pi : (Z, (\tau_Z^\omega)^s) \rightarrow (Z/Y, (\tau^s)_q)$, donc la topologie $(\tau^s)_q$ sur l'espace Z/Y n'est pas grossière.

1.3 $\mathcal{I}$ -convergence

Rappelons ici la notion de convergence statistique dans un espace topologique X (Voir [27, 28, 66]). Pour chaque sous-ensemble A de $\mathbb{N}$, si la suite $\frac{1}{n}\text{card}\{k \in A : k \leq n\}$ est convergente, sa limite dans $[0, 1]$ est dite la densité asymptotique de A , notée $\delta(A)$. On rappelle également que $\delta(\mathbb{N} \setminus A) = 1 - \delta(A)$ pour chaque $A \subset \mathbb{N}$.

Une suite $(x_n)_n$ de X converge statistiquement vers un point $x \in X$ si pour chaque voisinage U de x de X , $\delta(\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U\}) = 0$ [48] c'est-à-dire $\delta(\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\}) = 1$, qui est noté par $s - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ou $x_n \xrightarrow{s} x$.

Pour une suite $(x_n)_n$ et un sous-ensemble U de X , soit $A_U(x_n) = \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U\}$, que l'on note A_U s'il n'y a pas confusion. Il est facile de voir qu'une suite $(x_n)_n$ dans un espace topologique X converge statistiquement vers un point $x \in X$ si et seulement si, pour tout voisinage U de x de X , on a $\delta(A_U) = 0$ [178].

Soit $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble des sous-ensembles de $\mathbb{N}$. Un idéal $\mathcal{I}$ de $\mathbb{N}$ est un ensemble de sous-ensembles de $\mathbb{N}$ qui est héréditaire par inclusion (Pour tout $A \subset \mathbb{N}$ et $B \in \mathcal{I}$, $A \subseteq B \Rightarrow A \in \mathcal{I}$) et stable par réunion finie (Pour tout $(A, B) \in \mathcal{I}^2$, $A \cup B \in \mathcal{I}$) [100]. Un idéal $\mathcal{I}$ est dit non trivial, si $\mathcal{I} \neq \emptyset$ et $\mathbb{N} \notin \mathcal{I}$. Un idéal non trivial $\mathcal{I}$ est dit admissible si $\mathcal{I}$ contient tout sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ ($\{\{n\} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{I}$). Clairement, tout idéal non trivial $\mathcal{I}$ définit un filtre dual $F_{\mathcal{I}} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{I}\}$ sur $\mathbb{N}$ [178].

Soit $\mathcal{I}_f$ l'ensemble des sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$. Alors $\mathcal{I}_f$ est un idéal admissible de $\mathbb{N}$. Soit $\mathcal{I}_\delta$ l'ensemble des sous-ensembles $A \subseteq \mathbb{N}$ avec $\delta(A) = 0$ c'est-à-dire $\mathcal{I}_\delta = \{A \subseteq \mathbb{N} : \delta(A) = 0\}$. Alors $\mathcal{I}_\delta$ est un idéal admissible, et son filtre dual est $F_{\mathcal{I}_\delta} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \delta(A) = 1\}$ [143].

Tout au long de cette partie, $\mathcal{I}$ est un idéal non trivial admissible de $\mathbb{N}$.

Définition 1.3.1. [178, Définition 2.1] Une suite $(x_n)_n$ dans un espace topologique X est dite $\mathcal{I}$ -convergente vers un point $x \in X$ si pour tout voisinage U de x on a $A_U \in \mathcal{I}$, qui est noté par $\mathcal{I} - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ou $x_n \xrightarrow{\mathcal{I}} x$; le point x est dit la $\mathcal{I}$ -limite de la suite $(x_n)_n$.

- Remarque 1.3.2.** (i) $\mathcal{I} = \emptyset$ si et seulement si, chaque suite constante $x, x, \dots, x, \dots$ de X n'est pas $\mathcal{I}$ -convergente vers le point $x \in X$ [178].
- (ii) Si $\mathbb{N} \in \mathcal{I}$ alors $\mathcal{I} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, et chaque suite de X est $\mathcal{I}$ -convergente vers tout point de X [178].
- (iii) Si $\mathcal{I} = \{\emptyset\}$, alors toute suite $\mathcal{I}$ -convergente $(x_n)_n$ est constante.

Lemme 1.3.3. [178, Lemma 2.5] Soient $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ deux idéaux de $\mathbb{N}$. Si $(x_n)_n$ est une suite dans un espace topologique X telle que $x_n \xrightarrow{\mathcal{I}} x$, alors $x_n \xrightarrow{\mathcal{J}} x$.

Proposition 1.3.4. Soit $(x_n)_n$ une suite dans un espace topologique X . Si (x_n) est convergente vers x dans X , alors elle est aussi $\mathcal{I}$ -convergente vers x .

Démonstration. Puisque $\mathcal{I}$ est admissible, alors $\mathcal{I}_f \subset \mathcal{I}$ et par le Lemme 1.3.3 le résultat est vrai. $\square$

La réciproque de la proposition précédente est fausse comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1.3.5. Soit X un espace topologique de Hausdorff contenant au moins deux points distincts x et y . Soit $(x_n)_n$ la suite de X définie par

$$x_n = \begin{cases} x, & \text{si } n \text{ est un carré} \\ y & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par définition 1.3.1 $(x_n)_n$ est $\mathcal{I}_\delta$ -convergente vers y ; en effet, pour tous les voisinages U de y , on a $A_U \subset A$, où $A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ est un carré}\}$, et $A \in \mathcal{I}_\delta$ (car $\delta(A) = 0$). Mais $(x_n)_n$ ne converge pas vers y .

CHAPITRE 2

LIMITE INDUCTIVE TOPOLOGIQUE SÉQUENTIELLE

Dans ce chapitre nous allons prendre en considération dans les résultats que les sous-ensembles ouverts, fermés et bornés sont ouverts, fermés et bornés par rapport à la topologie séquentielle. Aussi, les applications continues, ouvertes et fermées sont continues, ouvertes et fermées par rapport aux deux topologies séquentielles correspondantes.

2.1 Enveloppe localement convexe d'espaces localement convexes muni d'une topologie séquentielle

Les sommes directes et les produits topologiques localement convexes d'espaces localement convexes sont des cas particuliers d'idées plus générales que nous considérons ici.

Soient I un ensemble d'indices préordonné filtrant à droite et $\mathbb{F}$ un espace vectoriel. Si un espace vectoriel E est l'engendrement linéaire de certains sous-espaces vectoriels $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ de $\mathbb{F}$, on écrit $E = \sum_{\alpha} E_\alpha$. On s'intéresse, particulièrement, au cas où chaque E_α est donné comme l'image linéaire $A_\alpha(F_\alpha)$ d'un espace vectoriel F_α de $\mathbb{F}$ [101]. Un cas particulier de cet engendrement linéaire est la somme directe $E = \bigoplus_{\alpha} E_\alpha$.

Soit $(F_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille d'espaces localement convexes. La topologie la plus fine sur $E = \sum_{\alpha} A_\alpha(E_\alpha)$ qui rend les applications $A_\alpha : (F_\alpha, \tau_\alpha) \rightarrow \left(\sum_{\alpha} A_\alpha(F_\alpha), \tau^{ind} \right)$ continues, est une topologie localement convexe qu'on note τ^{ind} (topologie finale). Notons τ_α^s la topologie séquentielle associée à τ_α et $(\tau^{ind})^s$ la topologie séquentielle associée à τ^{ind} . Suivant [56, Proposition 3, p.7] $(\tau^{ind})^s$ est la moins fine topologie de toutes les topologies localement convexes séquentielles sur E plus fine que τ^{ind} . Dans un autre sens, $(\tau^s)^{ind}$ est la topologie la plus fine sur $\sum_{\alpha} A_\alpha(F_\alpha)$ qui rend les applications $A_\alpha : (F_\alpha, \tau_\alpha^s) \rightarrow \left(\sum_{\alpha} A_\alpha(F_\alpha), (\tau^s)^{ind} \right)$ continues.

continue. Selon le théorème 1.2.5, pour tout $\alpha \in I$, les applications

$$A_\alpha : (F_\alpha, \tau_\alpha^s) \rightarrow \left(\sum_\alpha A_\alpha(F_\alpha), (\tau^{ind})^s \right)$$

sont également continues. Un sous-ensemble absolument convexe U de $\sum_\alpha A_\alpha(F_\alpha)$ est alors un $(\tau^{ind})^s$ -voisinage de zéro si $A_\alpha^{-1}(U) = U_\alpha$ est un τ_α^s -voisinage de zéro dans F_α , pour chaque $\alpha \in I$. Les enveloppes absolument convexes $\Gamma(A_\alpha(U_\alpha))$ de $A_\alpha(U_\alpha)$ tels que chaque U_α est un τ_α^s -voisinage de zéro dans F_α , forment une base de voisinages absolument convexes de zéro de $(E, (\tau^{ind})^s)$. En effet, soit U un $(\tau^{ind})^s$ -voisinage de zéro absolument convexe. Comme $A_\alpha^{-1}(U) = U_\alpha$, alors U contient l'ensemble $A_\alpha(U_\alpha)$, pour tout α , ce qui implique que $\Gamma(A_\alpha(F_\alpha)) \subset U$.

La topologie τ^{ind} n'est pas toujours séparée, la même chose pour la topologie $(\tau^{ind})^s$. Mais si $(\tau^{ind})^s$ est séparée, elle s'appelle la topologie de l'enveloppe séquentielle sur E et $\left(\sum_\alpha A_\alpha(F_\alpha), (\tau^{ind})^s \right)$ est dit un espace d'enveloppe séquentiel localement convexe de $(E_\alpha, \tau_\alpha^s, A_\alpha)_\alpha$.

Lemme 2.1.1. Soient (X, τ_X) et (Y, τ_Y) deux espaces localement convexes, toute application linéaire continue $\psi : (X, \tau_X^s) \rightarrow (Y, \tau_Y^s)$ s'écrit sous la forme :

$$\underbrace{(X, \tau_X^s) \xrightarrow{K} (X/Ker\psi, (\tau_q^{ind})^s) \xrightarrow{\hat{\psi}} (\psi(X), \tau_Y^s) \xrightarrow{J} (Y, \tau_Y^s)}_{\psi = J \circ \hat{\psi} \circ K}$$

où (X, τ_X^s) et (Y, τ_Y^s) sont des espaces localement convexes munis de la topologie séquentielle, K est l'homomorphisme canonique, $\hat{\psi}$ est une application linéaire continue ouverte bijective et J est une application linéaire injective continue ouverte.

Démonstration. Désignons par $(\tau^s)_q^{ind}$ la topologie quotient sur $X/Ker\psi$ qui rend K continue et par $(\tau_q^{ind})^s$ la topologie de l'enveloppe séquentielle sur $X/Ker\psi$. Comme $(\tau_q^{ind})^s \leq (\tau^s)_q^{ind}$, alors K est continue et ouverte. $\hat{\psi}$ est évidemment injective et surjective. Puisque ψ est continue, alors $\hat{\psi}$ est aussi continue.

Soit $\hat{U} \in (\tau_q^{ind})^s$, alors $\hat{\psi}(\hat{U}) = \psi(K^{-1}(\hat{U})) = \psi(U)$. Comme ψ est ouvert, alors $\hat{\psi}$ est aussi ouvert. J est évidemment une application linéaire injective continue ouverte. $\square$

Proposition 2.1.2. L'espace $\left(\sum_\alpha A_\alpha(F_\alpha), (\tau^{ind})^s \right)$ est topologiquement isomorphe à un espace $\left((\oplus_\alpha F_\alpha)/H, (\tau_q^{ind})^s \right)$ où H est un sous-espace fermé de $\oplus_\alpha F_\alpha$ convenablement choisi. $\sum_\alpha A_\alpha(F_\alpha)$ est dit l'enveloppe séquentielle localement convexe de $(E_\alpha, \tau_\alpha^s, A_\alpha)_\alpha$ et $(\tau^{ind})^s$ est dite sa topologie de l'enveloppe séquentielle.

Démonstration. Pour toutes les $\alpha \in I$, les A_α sont continues, alors l'application

$$A : \bigoplus_{\alpha} F_{\alpha} \rightarrow \sum_{\alpha} A_{\alpha}(F_{\alpha})$$

$$\sum_{\alpha} x_{\alpha} \rightarrow A \left(\sum_{\alpha} x_{\alpha} \right) = \sum_{\alpha} A_{\alpha}(x_{\alpha})$$

est continue. Comme les A_{α} sont surjectives, alors elles sont ouvertes. Par conséquent A est ouverte car $A \left(\Gamma_{\alpha}(U_{\alpha}) \right) = \Gamma_{\alpha}(A_{\alpha}(U_{\alpha}))$. Ainsi, A est une application linéaire continue ouverte. Selon le lemme précédent $\hat{\psi}$ est un isomorphisme topologique de $(\bigoplus_{\alpha} F_{\alpha})/H$ sur $E = \sum_{\alpha} A_{\alpha}(F_{\alpha}) = A \left(\sum_{\alpha} F_{\alpha} \right)$, où $A = \psi$ et H est le noyau fermé de A . □

Proposition 2.1.3. *Tout espace $\left((\bigoplus_{\alpha} F_{\alpha})/H, (\tau_q^{ind})^s \right)$ où H est un sous-espace fermé de $\bigoplus_{\alpha} F_{\alpha}$, est topologiquement isomorphe à un espace $\left(\sum_{\alpha} K_{\alpha}(F_{\alpha}), (\tau^{ind})^s \right)$, avec K_{α} est la restriction à F_{α} de la surjection canonique K de $\bigoplus_{\alpha} F_{\alpha}$ sur $(\bigoplus_{\alpha} F_{\alpha})/H$.*

Démonstration. Conformément à [101, proposition (2), p.215] et la définition de K nous avons $(\bigoplus_{\alpha} F_{\alpha})/H = \sum_{\alpha} K_{\alpha}(F_{\alpha}) = K(\bigoplus_{\alpha} F_{\alpha})$. Considérons l'application identité suivante $i : \left((\bigoplus_{\alpha} F_{\alpha})/H, (\tau_q^{ind})^s \right) \rightarrow \left(\sum_{\alpha} K_{\alpha}(F_{\alpha}), (\tau^{ind})^s \right)$. Soit U un sous-ensemble de $\sum_{\alpha} K_{\alpha}(F_{\alpha})$ tel que $U \in (\tau^{ind})^s$. Alors, $U = \Gamma_{\alpha}(K_{\alpha}(U_{\alpha})) = K \left(\Gamma_{\alpha}(U_{\alpha}) \right)$, donc $K \left(\Gamma_{\alpha}(U_{\alpha}) \right) \in (\tau_q^{ind})^s$ c'est-à-dire $i^{-1}(U) \in (\tau_q^{ind})^s$. Par conséquent, i est continue. Soit U_q un sous-ensemble de $(\bigoplus_{\alpha} F_{\alpha})/H$ tel que $U_q \in (\tau_q^{ind})^s$. Alors, $U_q = K \left(\Gamma_{\alpha}(U_{\alpha}) \right) \in (\tau^{ind})^s$, donc $i(U_q) \in (\tau^{ind})^s$. D'où, i est ouverte. □

Remarque 2.1.4. Par la proposition précédente, un espace quotient $(E/H, (\tau_q^{ind})^s)$ peut être considéré comme un espace d'enveloppe séquentiel localement convexe $E/H = K(E)$ tel que K est l'homomorphisme canonique de E sur E/H , et H est un sous-espace fermé.

Proposition 2.1.5. *Soient $E = \sum_{\alpha} A_{\alpha}(F_{\alpha}) = \sum_{\beta} B_{\beta}(G_{\beta})$, $(\tau_F^{ind})^s$ la topologie d'enveloppe séquentielle correspondante à $\sum_{\alpha} A_{\alpha}(F_{\alpha})$ et $(\tau_G^{ind})^s$ la topologie d'enveloppe séquentielle correspondante à $\sum_{\beta} B_{\beta}(G_{\beta})$. Si pour tout $\alpha \in I$ il existe un certain $\beta \in I$ tel que $A_{\alpha}(F_{\alpha}) \subset B_{\beta}(G_{\beta})$ et la topologie définie sur $B_{\beta}(G_{\beta})$ par B_{β} induit une topologie moins fine, sur $A_{\alpha}(F_{\alpha})$, que la topologie définie sur $A_{\alpha}(F_{\alpha})$ par A_{α} , alors $(\tau_G^{ind})^s$ est moins fine que $(\tau_F^{ind})^s$ sur E .*

Démonstration. Soit τ_{α}^s la topologie séquentielle sur F_{α} , τ_{β}^s la topologie séquentielle sur G_{β} et V un $(\tau_G^{ind})^s$ -voisinage absolument convexe de zéro. Alors, il existe un τ_{β}^s -voisinage U_{β} de zéro tel que $V \cap B_{\beta}(G_{\beta}) = B_{\beta}(U_{\beta})$. Par hypothèse, il existe un τ_{α}^s -voisinage U_{α} de zéro tel que $A_{\alpha}(U_{\alpha}) \subset B_{\beta}(U_{\beta}) = V \cap B_{\beta}(G_{\beta})$. Par conséquent, V est aussi un $(\tau_F^{ind})^s$ -voisinage de zéro, c'est-à-dire que $(\tau_G^{ind})^s \subset (\tau_F^{ind})^s$. □

Proposition 2.1.6. *Une application linéaire B d'un espace d'enveloppe séquentiel localement convexe $\left(E = \sum_{\alpha} A_{\alpha}(E_{\alpha}), (\tau^{ind})^s\right)$ vers un espace localement convexe (F, τ^s) est continue si et seulement si toutes les applications BA_{α} sont continues de E_{α} vers F .*

Démonstration. Considérons la composition suivante :

$$\underbrace{(E_{\alpha}, \tau_{\alpha}^s) \xrightarrow{A_{\alpha}} \left(E = \sum_{\alpha} A_{\alpha}(E_{\alpha}), (\tau^{ind})^s\right)}_{BA_{\alpha}} \xrightarrow{B} (F, \tau^s).$$

Comme A_{α} et B sont continues, alors BA_{α} est aussi continue. Inversement, supposons que BA_{α} est continue. Soit V un voisinage absolument convexe de zéro de F et $\alpha \in I$, alors il existe un τ_{α}^s -voisinage de zéro avec $BA_{\alpha}(U_{\alpha}) \subset V$. Par conséquent, $B\left(\Gamma_{\alpha}(A_{\alpha}(U_{\alpha}))\right) \subset V$, donc B est continue. $\square$

2.2 Limite inductive topologique séquentielle

Soient $(F_{\alpha}, \tau_{\alpha})_{\alpha \in I}$ une famille d'espaces localement convexes, I est un ensemble d'indices pré-ordonné filtrant à droite. Pour tout couple (α, β) d'indices de I tels que $\alpha < \beta$, soit $A_{\beta\alpha}$ une application linéaire de F_{α} vers F_{β} . On suppose que les $A_{\beta\alpha}$ vérifient les conditions suivantes :

- Les relations $\alpha < \beta < \gamma$ entraînent $A_{\gamma\alpha} = A_{\gamma\beta}A_{\beta\alpha}$.
- Pour tout α de I , $A_{\alpha\alpha}$ est l'application identique de F_{α} .

On désigne par H_0 l'engendrement linéaire dans $\bigoplus_{\alpha} F_{\alpha}$ des éléments $x_{\alpha} - A_{\beta\alpha}x_{\alpha}$, tels que $x_{\alpha} \in F_{\alpha}$ et $\alpha < \beta$. Si H est un sous-espace vectoriel de $\bigoplus_{\alpha} F_{\alpha}$ tel que $H_0 \subset H$ et si K est l'homomorphisme canonique de $\bigoplus_{\alpha} F_{\alpha}$ sur $(\bigoplus_{\alpha} F_{\alpha})/H$, alors $\bigoplus_{\alpha} F_{\alpha} = \sum_{\alpha} K_{\alpha}(F_{\alpha})$, tel que K_{α} est la restriction de K à F_{α} [101, p.218]. Si $H = H_0$, l'espace $(\bigoplus_{\alpha} F_{\alpha})/H_0 = \sum_{\alpha} K_{\alpha}^{(0)}(F_{\alpha})$, uniquement déterminé à isomorphisme près, est dit la limite inductive des espaces F_{α} par rapport aux applications $A_{\beta\alpha}$ noté par $\varinjlim_{\alpha \in I} A_{\beta\alpha}(F_{\alpha})$, $K^{(0)}$ est l'homomorphisme canonique de $\bigoplus_{\alpha} F_{\alpha}$ sur $(\bigoplus_{\alpha} F_{\alpha})/H_0$ [101, p.219].

Munissons F_{α} de la topologie séquentielle τ_{α}^s associée à τ_{α} . Si H_0 est fermé dans $\bigoplus_{\alpha} F_{\alpha}$, alors la topologie de l'enveloppe séquentielle (respectivement la topologie quotient séquentielle) sur $\varinjlim_{\alpha \in I} A_{\beta\alpha}(F_{\alpha}) = \sum_{\alpha} K_{\alpha}^{(0)}(F_{\alpha})$ (respectivement sur $(\bigoplus_{\alpha} F_{\alpha})/H$) est séparée, puisqu'elles sont isomorphes.

L'espace $\varinjlim_{\alpha \in I} A_{\beta\alpha}(F_{\alpha}) = \sum_{\alpha} K_{\alpha}^{(0)}(F_{\alpha})$ muni de la topologie $(\tau^{ind})^s$ est dit la limite inductive topologique séquentielle des espaces F_{α} par rapport aux applications $A_{\beta\alpha}$. Une enveloppe localement convexe $\sum_{\alpha} E_{\alpha}$, telle que $E_{\alpha} \subset E_{\beta}$ pour $\alpha \leq \beta$, est une limite inductive

topologique séquentielle notée $\varinjlim I_{\beta\alpha}(E_\alpha)$ si, et seulement si, τ_β^s induit une topologie plus faible que τ_α^s sur E_α pour $\alpha \leq \beta$ (en raison de la continuité de $I_{\beta\alpha} : (E_\alpha, \tau_\alpha^s) \rightarrow (E_\beta, \tau_\beta^s)$).

En particulier, l'enveloppe localement convexe $\sum_{i=1}^{\infty} E_n$ d'une suite croissante $E_1 \subset E_2 \subset \dots$, est la limite inductive topologique séquentielle des espaces E_n si et seulement si, pour chaque n la topologie τ_{n+1}^s induit une topologie plus faible que celle de τ_n^s sur E_n . Nous rappelons aussi qu'un sous-ensemble Δ , d'un ensemble d'indices I filtrante à droite, est co-final si pour tout $\alpha \in I$, il existe $\delta \in \Delta$ tel que $\delta \geq \alpha$.

Proposition 2.2.1. *Soit $E = \varinjlim_{\alpha \in I} A_{\beta\alpha}(F_\alpha)$ une limite inductive topologique séquentielle d'espaces localement convexes F_α et Λ un sous-ensemble co-final de I . Alors, la limite inductive topologique séquentielle $E_1 = \varinjlim_{\gamma \in \Lambda} A_{\delta\gamma}(F_\gamma)$ est topologiquement isomorphe à E .*

Démonstration. Comme E est une limite inductive topologique séquentielle des espaces localement convexes F_α alors $E = \sum_{\alpha \in I} K_\alpha^{(0)}(F_\alpha)$. Vu que Δ est un sous-ensemble pré-ordonné filtrant à droite, alors par la même construction de E on peut écrire $E_1 = \sum_{\gamma \in \Delta} K_\gamma'^{(0)}(F_\gamma)$. Comme Δ est co-final, donc pour chaque $\alpha \in I$ il existe un $\gamma \geq \alpha$ tel que $E = \sum_{\alpha \in I} K_\alpha^{(0)}(F_\alpha) \subset \sum_{\gamma \in \Delta} K_\gamma^{(0)}(F_\gamma)$. Par conséquent, $E = \sum_{\gamma \in \Delta} K_\gamma^{(0)}(F_\gamma)$. Ainsi, on correspond chaque élément $\sum_{i=1}^n K_{\gamma_i}^{(0)} x_{\gamma_i} \in E$ à l'élément $\sum_{i=1}^n K_{\gamma_i}'^{(0)} x_{\gamma_i} \in E_1$ (c'est-à-dire que l'application identité $i : E_1 \rightarrow E$ est surjective). Selon la [101, proposition (8), p.219], l'élément $\sum_{i=1}^n K_{\gamma_i}^{(0)} x_{\gamma_i}$ est égale à 0 si, et seulement si, il existe un $\beta \geq \gamma_i$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\sum_{i=1}^n A_{\beta\gamma_i}^{(0)} x_{\gamma_i} = 0$ dans $\oplus_\alpha F_\alpha$. Soit δ un élément de Δ tel que $\delta \geq \beta$, alors $\delta \geq \gamma_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $\sum_{i=1}^n A_{\delta\gamma_i}^{(0)} x_{\gamma_i} = 0$. En conséquence, selon la [101, proposition (8), p.219] une fois de plus, $\sum_{i=1}^n K_{\gamma_i}^{(0)} x_{\gamma_i} \in E$ est égale à 0 si et seulement si, l'élément correspondant $\sum_{i=1}^n K_{\gamma_i}'^{(0)} x_{\gamma_i}$ s'annule. Pour cette raison, l'application de E sur E_1 est un isomorphisme algébrique. Pour prouver que cet isomorphisme est topologique, il suffit de démontrer que pour tout $\alpha \in I$, $K_\alpha^{(0)}$ est continue si et seulement si, pour tout $\gamma \in \Delta$, $K_\gamma^{(0)}$ est continue. Supposons que pour tout $\alpha \in I$, $K_\alpha^{(0)}$ est continue, alors pour tout $\gamma \in \Delta$, $K_\gamma^{(0)}$ est continue (car Δ est un sous-ensemble de I). Inversement, supposons que pour tout $\gamma \in \Delta$, $K_\gamma^{(0)}$ est continue. Selon la [101, proposition (5), p.218], pour tout α de I tel que $\alpha < \gamma$, $K_\alpha^{(0)} = K_\gamma^{(0)} A_{\gamma\alpha}$. Comme les applications $A_{\gamma\alpha}$ sont continues, alors $K_\alpha^{(0)}$ est continue. D'où, E et E_1 sont topologiquement isomorphes. $\square$

Une limite inductive topologique séquentielle $E = \sum_\alpha E_\alpha$ est dite stricte si $E_\alpha \subset E_\beta$ pour $\alpha < \beta$ et si la topologie induite par τ_β^s sur le sous-espace E_α de E_β est égale à τ_α^s . En particulier, toute somme directe séquentielle localement convexe $E = \oplus_\alpha E_\alpha$ est la limite inductive séquentielle stricte de ses sommes partielles finies. Kōmura [98] a donné

un exemple qui montre que la topologie τ_α^s n'est jamais induite par $(\tau^{ind})^s$ dans le cas non dénombrable. Cependant, dans le cas dénombrable, on a :

Proposition 2.2.2. *Soit E la réunion d'une suite strictement croissante $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ d'espaces localement convexes E_n séparé, et supposons que pour tout $n \geq 1$, τ_{n+1}^s induit la topologie τ_n^s sur E_n . Si E est la limite inductive séquentielle stricte des espaces E_n alors, la topologie $(\tau^{ind})^s$ est séparée. En outre, $(\tau^{ind})^s$ induit la topologie τ_n^s sur chaque E_n .*

Démonstration. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et V_k un voisinage absolument convexe de zéro de E_k . Par le [101, lemme (2), p.222], il existe une suite de voisinages absolument convexes de zéro telle que $V_{k+1} \subset V_{k+2} \subset \dots$, où V_{k+m} est un τ_{k+m}^s -voisinage de zéro de E_{k+m} , tel que $V_{k+m} \cap E_k = V_k$. Soit U un $(\tau^{ind})^s$ -voisinage de 0, alors $U = \bigcap_{m=1}^{\infty} (V_{k+m}) = \bigcup_{m=1}^{\infty} V_{k+m}$, on a alors $U \cap E_k = V_k$ (*). Ceci montre que $(\tau^{ind})^s$ induit la topologie τ_k^s sur E_k . Chaque x non nul de E se trouve dans un certain E_k , et donc il existe V_k un voisinage absolument convexe de zéro tel que $x \notin V_k$. Selon (*), $x \notin U$ pour un voisinage U de zéro construit de cette manière, et donc la topologie de l'enveloppe séquentielle est séparée. $\square$

Proposition 2.2.3. *Soit $E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$ une limite inductive séquentielle stricte telle que pour chaque entier naturel k , E_k est un sous-espace fermé propre de E_{k+1} . Un sous-ensemble B de E est $(\tau^{ind})^s$ -borné si et seulement si il se trouve dans un certain E_k et y est τ_k^s -borné.*

Démonstration. Soit B un sous-ensemble borné de E_k . Par la proposition précédente, B est également borné dans E .

Réciproquement, supposons qu'il existe un ensemble borné B dans E qui n'est contenu dans aucun E_n . Alors il existe une suite $(x_i) \subset B$ et une suite (n_i) avec $x_i \in E_{n_i} \setminus E_{n_{i-1}}$. Puisque $E_{n_{i-1}}$ est fermé dans E_{n_i} , alors il existe par le [101, lemme (3), p.222] une suite de voisinages absolument convexes V_{n_i} de zéro de E_{n_i} telle que $V_{n_i} \cap E_{n_{i-1}} = V_{n_{i-1}}$ et $\frac{1}{i}x_i \notin V_{n_i}$. Par conséquent, $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_{n_i}$ est un $(\tau^{ind})^s$ -voisinage absolument convexe de zéro de E qui ne contient pas de $\frac{1}{i}x_i$, ce qui est une contradiction avec la bornitude de la suite (x_i) . $\square$

Un espace localement convexe E est dit un (LF^s) -espace (*strict*) s'il peut être représenté par une limite inductive topologique séquentielle (*strict*) d'une suite strictement croissante $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n \dots$ de F -espaces. Nous rappelons aussi qu'un filtre $\mathcal{F}$ est dit de Cauchy si pour tout voisinage U , $\mathcal{F}$ contient un ensemble F petit d'ordre U c'est à dire pour tous $x, y \in F$ nous avons $x - y \in U$ [138].

Proposition 2.2.4. *Soit $(E, (\tau^{ind})^s)$ la limite inductive topologique séquentielle d'une suite strictement croissante $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ d'espaces localement convexes. Alors, pour chaque $(\tau^{ind})^s$ -filtre de Cauchy $\mathcal{F}$, il existe un $(\tau^{ind})^s$ -filtre de Cauchy $\mathcal{F}'$ moins fin que $\mathcal{F}$ et un entier naturel k pour lequel $\mathcal{F}' \cap E_k$ est un $(\tau^{ind})^s$ -filtre de Cauchy sur E_k .*

Démonstration. Cette preuve est une simple adaptation de la preuve donnée par Köthe dans [101, p.224] avec quelques modifications :

Soient F un élément d'une base de filtre de $\mathcal{F}$ et W un voisinage de zéro absolument convexe de E , alors les ensembles $F + W$ forment une base d'un filtre de Cauchy $\mathcal{F}'$ sur E , qui est moins fine que $\mathcal{F}$. Si F est petit d'ordre W donc $F + W$ est petit d'ordre $2W$, de sorte que la famille des ensembles $F + W$ contient des ensembles arbitrairement petits. En outre, l'ensemble $(F_1 + W_1) \cap (F_2 + W_2)$ contient l'ensemble $F_3 + (W_1 \cap W_2)$ si $F_3 \subset F_1 \cap F_2$.

S'il existe un certain k pour lequel tous les ensembles $(F + W) \cap E_k$ sont non vides, alors la proposition est établie. On suppose que ce n'est pas le cas, alors il existe une suite $W_1 \supset W_2 \dots$ de $(\tau^{ind})^s$ -voisinages de zéro absolument convexes. Soit F_k un élément petit d'ordre W_k , de sorte que les ensembles $(F_k + W_k) \cap E_k$ sont vides, pour $k = 1, 2, \dots$

On pose $W_k^{(n)} = W_k \cap E_n$ qui est un τ_n^s -voisinage absolument convexe de zéro. Par conséquent, les sous-ensembles $V_k = \Gamma \left(\frac{1}{2}W_1^{(1)} \cup \frac{1}{2}W_2^{(2)} \cup \dots \cup \frac{1}{2}W_{k-1}^{(k-1)} \cup \frac{1}{2}W_k \right)$ sont des $(\tau^{ind})^s$ -voisinages de zéro, pour $k = 1, 2, \dots$

Soit $F_k' \in \mathcal{F}$ un élément petit d'ordre V_k . Montrons que $(F_k' + V_k) \cap E_k$ est aussi vide. Comme $F_k' \cap F_k$ n'est pas vide, alors il existe $x_0 \in F_k \cap F_k'$. Par conséquent, les éléments y de F_k' et les éléments z de $F_k' + F_k$ prennent la forme $y = x_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i$,

$$z = x_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^k \alpha'_i x'_i \text{ (car } F + W \text{ forment une base du filtre de Cauchy } F_k' \text{ sur } E \text{)}$$

tels que $x_i, x'_i \in \frac{1}{2}W_i^{(i)}$ pour $i < k$; $x_k, x'_k \in \frac{1}{2}W_k$; $\sum |\alpha_i| \leq 1, \sum |\alpha'_i| \leq 1$. Maintenant on a $\alpha_k x_k + \alpha'_k x'_k \in \frac{1}{2}W_k + \frac{1}{2}W_k = W_k$. Comme $x_0 \in F_k$ et que $(F_k + W_k) \cap E_k$ est vide, alors l'élément $x_0 + \alpha_k x_k + \alpha'_k x'_k \in F_k + W_k$ n'appartient pas à E_k . D'autre part, $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^k \alpha'_i x'_i$

est dans E_{k-1} , donc z n'est pas dans E_k , car sinon, on a $z = x_0 + \alpha_k x_k + \alpha'_k x'_k + \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i +$

$\sum_{i=1}^k \alpha'_i x'_i$. Alors, $z \in E_k$ et $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^k \alpha'_i x'_i \in E_{k-1} \subset E_k$ donc $x_0 + \alpha_k x_k + \alpha'_k x'_k \in E_k$ ce qui est une contradiction. Donc $(F_k' + V_k) \cap E_k$ est vide.

Nous construisons maintenant le voisinage de zéro $\bigcap_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}W_k^{(k)} \right)$. Vu que $W_{k'}^{(k')} \subset W_k$ pour chaque $k' \geq k$, alors $U \subset V_k$ pour chaque k , on peut trouver un sous-ensemble $F_0 \in \mathcal{F}$ qui est petit d'ordre U . Soit y_0 un élément de F_0 , alors y_0 est dans un certain E_k (car $\mathcal{F}$ est un $(\tau^{ind})^s$ -filtre de Cauchy).

Soit $y \in F_k'$, $y + V_k$ ne contient aucun élément de E_k (parce que $(F_k' + V_k) \cap E_k$ est vide); alors $y - y_0$ n'appartient pas à $V_k \supset U$ (sinon $y_0 \in y + V_k$), cela signifie que y n'est pas dans $y_0 + U$, ainsi y n'appartient pas à F_0 (car F_0 est petit d'ordre U). Ainsi $F_k' \cap F_0 = \emptyset$, ce qui contredit les propriétés du filtre ($F_0, F_k' \in \mathcal{F}$ implique $F_0 \cap F_k' \neq \emptyset$). Donc il existe un certain k pour lequel $(F + W) \cap E_k \neq \emptyset$. $\square$

Le critère de complétude suivant est une conséquence simple de la proposition précédente.

Proposition 2.2.5. *Soit E la limite inductive topologique séquentielle d'une suite strictement croissante $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ d'espaces localement convexes. Alors*

E est complet si et seulement si, pour tout n , chaque $(\tau^{ind})^s$ -filtre de Cauchy sur E_n admet une limite dans E et cette limite est dans un certain E_{n+k} .

Dans un cas particulier, on a

Proposition 2.2.6. *Soit E la limite inductive topologique séquentielle stricte de la suite strictement croissante $E_1 \subset E_2 \subset \dots$. Si chaque E_k est complet, alors E est complète.*

En particulier, tout (LF^s) -espace strict est complet.

Suivant le théorème de Baire nous rappelons qu'un espace métrisable n'est pas la réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide.

Proposition 2.2.7. *Soit A une application linéaire continue d'un (F) -espace F sur (LF^s) -espace $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Il existe un k tel que $A(F) \subset E_k$ et A est une application continue de F sur E_k .*

Démonstration. Soit H_n l'ensemble de toutes les paires $(y, Ay) \in F \times E_n$, avec $Ay \in E_n$. H_n est un sous-espace fermé de $F \times E_n$ (par la continuité de A), il est donc un (F) -espace (produit de deux F -espaces). Soit P_n l'application continue telle que $P_n(y, Ay) = y$ de H_n vers F , $P_n(H_n)$ est l'ensemble des y avec $Ay \in E_n$. Selon le théorème de Baire, il résulte de $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_n(H_n)$ qu'un certain $P_k(H_k)$ est d'intérieur non vide dans F . Il découle du théorème de l'application ouverte (Banach-Schauder) que $F = P_k(H_k)$, de sorte que $A(F) \subset E_k$. Le graphe H_k de l'application A de F vers E_k est fermé (car H_k est un sous-espace dans $F \times E_n$, par la continuité de $A : F \rightarrow E$). Ainsi, par le théorème du graphe fermé, A est continue de F vers (E_k, τ_k^s) . $\square$

Proposition 2.2.8. *Tout sous-ensemble M complet, borné et absolument convexe d'un (LF^s) -espace $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_n$ est un sous-ensemble borné d'un certain E_k .*

Démonstration. Le sous-espace vectoriel E_M de E engendré par M est un (B) -espace avec une boule unitaire M . Si l'on applique la proposition 2.2.7 avec $F = E_M$ et A égal à l'application injective continue de E_M dans E , on obtient le résultat. $\square$

CHAPITRE 3

TOPOLOGIE $\mathcal{I}$ -SÉQUENTIELLE

Définition 3.0.1. Soient $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathbb{N}$ et X un espace topologique.

(i) Pour chaque sous-ensemble A de X , on définit $\overline{A}^{\mathcal{I}}$, la $\mathcal{I}$ -fermeture de A par :

$$\overline{A}^{\mathcal{I}} = \{x \in X / \exists (x_n)_n \subset A : x_n \xrightarrow{\mathcal{I}} x\},$$

il est clair que $\overline{\emptyset}^{\mathcal{I}} = \emptyset$ et $A \subset \overline{A}^{\mathcal{I}}$ pour tout $A \subset X$.

(ii) Un sous-ensemble $F \subseteq X$ est dit $\mathcal{I}$ -fermé si $\overline{F}^{\mathcal{I}} = F$.

(iii) Un sous-ensemble $U \subseteq X$ est dit $\mathcal{I}$ -ouvert si $X \setminus U$ est $\mathcal{I}$ -fermé.

Proposition 3.0.2. Soit U un sous-ensemble d'un espace topologique X . Si U est un sous-ensemble ouvert alors il est aussi un $\mathcal{I}$ -ouvert.

Démonstration. Soit U un sous-ensemble ouvert de X . Supposons, par l'absurde que U n'est pas $\mathcal{I}$ -ouvert c'est-à-dire que U^c n'est pas $\mathcal{I}$ -fermé. Soit $(x_n)_n$ une suite de U^c telle que $x_n \xrightarrow{\mathcal{I}} x$ et $x \in U$. Alors pour tout voisinage V de x , $\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin V\} \in \mathcal{I}$ (Définition 1.3.1). Pour $V = U$, $\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U\} = \mathbb{N} \in \mathcal{I}$. Ce qui est une contradiction, car $\mathcal{I}$ n'est pas trivial. D'où U est $\mathcal{I}$ -ouvert. $\square$

Définition 3.0.3. Soit A un sous-ensemble de X . Le $\mathcal{I}$ -intérieur de A est l'ensemble $\overset{\circ}{A}^{\mathcal{I}} = A \setminus (\overline{X \setminus A})^{\mathcal{I}}$.

Proposition 3.0.4. Soit A un sous-ensemble de X . Alors

A est $\mathcal{I}$ -ouvert si et seulement si, $\overset{\circ}{A}^{\mathcal{I}} = A$.

Démonstration. Si A est $\mathcal{I}$ -ouvert, alors $X \setminus A$ est $\mathcal{I}$ -fermé. Par conséquent $\overset{\circ}{A}^{\mathcal{I}} = A \setminus (X \setminus A)$. Ainsi $\overset{\circ}{A}^{\mathcal{I}} = A$. Inversement, si $A = \overset{\circ}{A}^{\mathcal{I}}$, alors $A = A \setminus (\overline{X \setminus A})^{\mathcal{I}}$. Donc $A \cap (\overline{X \setminus A})^{\mathcal{I}} = \emptyset$ en conséquence $\overline{X \setminus A}^{\mathcal{I}} \subset X \setminus A$. Ainsi $\overline{X \setminus A}^{\mathcal{I}} = X \setminus A$ c'est-à-dire que $X \setminus A$ est $\mathcal{I}$ -fermé. D'où A est $\mathcal{I}$ -ouvert. $\square$

Théorème 3.0.5. Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique X . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) A est $\mathcal{I}$ -fermé ;
- (ii) $A = \cap \{F/F \text{ est } \mathcal{I}\text{-fermé et } A \subset F\}$.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) C'est évident.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons que $A = \cap \{F/F \text{ est } \mathcal{I}\text{-fermée et } A \subset F\}$. Montrons que $\overline{A}^{\mathcal{I}} \subset A$. Soit $x_0 \notin A$, alors il existe un sous-ensemble $\mathcal{I}$ -fermé F contenant A tel que $x_0 \notin F$. Supposons, par l'absurde que $x_0 \in \overline{A}^{\mathcal{I}}$, alors il existe $(x_n)_n$ de A tel que $x_n \xrightarrow{\mathcal{I}} x_0$. Puisque $A \subset F$, alors $(x_n)_n$ est dans F ; donc $x_0 \in \overline{F}^{\mathcal{I}} = F$, ce qui est une contradiction. Donc $x_0 \notin \overline{A}^{\mathcal{I}}$. $\square$

Théorème 3.0.6. *Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique X . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) A est $\mathcal{I}$ -ouvert ;
- (ii) $A = \cup \{U/U \text{ est } \mathcal{I}\text{-ouvert et } U \subset A\}$.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) C'est évident.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons que $A = \cup \{U/U \text{ est } \mathcal{I}\text{-ouvert et } U \subset A\}$ et montrons que A est $\mathcal{I}$ -ouvert. Il suffit de prouver que $A \subset \overset{\circ}{A}^{\mathcal{I}}$. Soit $x_0 \notin \overset{\circ}{A}^{\mathcal{I}}$, supposons, par l'absurde, que $x_0 \in A$, alors il existe un sous-ensemble $\mathcal{I}$ -ouvert U de A tel que $x_0 \in U$. Comme $U \subset A$, alors $x_0 \in \overset{\circ}{U}^{\mathcal{I}}$; ce qui est une contradiction. Ainsi, $A \subset \overset{\circ}{A}^{\mathcal{I}}$ c'est-à-dire A est $\mathcal{I}$ -ouvert. $\square$

Remarque 3.0.7. On peut aussi prouver la Proposition ci-dessus par passage au complémentaire dans la Proposition 3.0.5.

En utilisant le lemme de Zorn, on peut montrer que dans l'ensemble des idéaux admissibles $\mathcal{I}$ de $\mathbb{N}$, il existe un idéal maximal (par rapport à l'inclusion). Si $\mathcal{I}$ est un idéal maximal de $\mathbb{N}$, alors pour chaque $A \subset \mathbb{N}$ on a ou bien $A \in \mathcal{I}$, ou bien $A \in \mathbb{N} \setminus \mathcal{I}$ [100].

Définition 3.0.8. [178, Définition 3.15] Soient $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathbb{N}$, et U un sous-ensemble de X . Une suite $(x_n)_n$ de X est $\mathcal{I}$ -éventuellement dans U , s'il existe $E \in \mathcal{I}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus E$, $x_n \in U$.

Proposition 3.0.9. [178, Proposition 3.16] Soient $\mathcal{I}$ un idéal maximal de $\mathbb{N}$ et X un espace topologique. Alors, $U \subseteq X$ est $\mathcal{I}$ -ouvert si et seulement si, toute suite $\mathcal{I}$ -convergente dans X , vers un point de U , est $\mathcal{I}$ -éventuellement dans U .

Théorème 3.0.10. [178, Théorème 3.17] Soient $\mathcal{I}$ un idéal maximal de $\mathbb{N}$ et X un espace topologique. Si U et V sont deux sous-ensembles $\mathcal{I}$ -ouverts de X , alors $U \cap V$ est $\mathcal{I}$ -ouvert.

Nous disposons de la caractérisation suivante de $\mathcal{I}$ -convergence d'une suite.

Théorème 3.0.11. Soient $\mathcal{I}$ un idéal maximal de $\mathbb{N}$ et X un espace topologique. Une suite $(x_n)_n$ de X est $\mathcal{I}$ -convergente vers un élément $x \in X$ si et seulement si, pour tout sous-ensemble $\mathcal{I}$ -ouvert U de X avec $x \in U$, il existe $E \in \mathcal{I}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus E$, $x_n \in U$.

Démonstration. La nécessité découle de la Proposition 3.0.9.

Inversement, soit U un sous-ensemble ouvert de X avec $x \in U$. Par la Proposition 3.0.2, U est $\mathcal{I}$ -ouvert; par conséquent et selon les hypothèses, il existe $E \in \mathcal{I}$ avec pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus E$, $x_n \in U$, alors $\mathbb{N} \setminus E \subset \{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\}$, d'où $\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U\} \subset E$ et $E \in \mathcal{I}$. Donc $x_n \xrightarrow{\mathcal{I}} x$. $\square$

Théorème 3.0.12. Soient $\mathcal{I}$ un idéal maximal de $\mathbb{N}$ et X un espace topologique. La famille $\tau_{\mathcal{I}} = \{U \in \mathcal{P}(X) / U \text{ est } \mathcal{I}\text{-ouvert}\}$ est une topologie sur X . Nous l'appelons la topologie $\mathcal{I}$ -séquentielle ou la topologie de $\mathcal{I}$ -convergence.

Démonstration. Il est évident que $\emptyset \in \tau_{\mathcal{I}}$. $X \in \tau_{\mathcal{I}}$ car $\emptyset$ est un sous-ensemble fermé de X et son complémentaire est X qui est $\mathcal{I}$ -ouvert. Soient U et $V \in \tau_{\mathcal{I}}$, par le théorème 3.0.10, $U \cap V \in \tau_{\mathcal{I}}$. Soit $(U_{\alpha})_{\alpha \in \Delta}$ une famille d'éléments de $\tau_{\mathcal{I}}$. Puisque $(\bigcup_{\alpha \in \Delta} U_{\alpha})^c = \bigcap_{\alpha \in \Delta} U_{\alpha}^c$, il suffit de prouver que $\bigcap_{\alpha \in \Delta} U_{\alpha}^c$ est $\mathcal{I}$ -fermé, c'est-à-dire que $\overline{\bigcap_{\alpha \in \Delta} U_{\alpha}^c}^{\mathcal{I}} = \bigcap_{\alpha \in \Delta} U_{\alpha}^c$. Il est évident que $\overline{\bigcap_{\alpha \in \Delta} U_{\alpha}^c}^{\mathcal{I}} \supset \bigcap_{\alpha \in \Delta} U_{\alpha}^c$. Inversement, supposons que $x \in \overline{\bigcap_{\alpha \in \Delta} U_{\alpha}^c}^{\mathcal{I}}$. Alors il existe une suite $(x_n)_n$ dans $\bigcap_{\alpha \in \Delta} U_{\alpha}^c$ avec $x_n \xrightarrow{\mathcal{I}} x$. Par conséquent, pour tout $\alpha \in \Delta$, (x_n) est dans U_{α}^c avec $x_n \xrightarrow{\mathcal{I}} x$. Comme U_{α}^c est $\mathcal{I}$ -fermé, alors pour tout $\alpha \in \Delta$, $x \in U_{\alpha}^c$; par conséquent $x \in \bigcap_{\alpha \in \Delta} U_{\alpha}^c$. Ainsi $\bigcap_{\alpha \in \Delta} U_{\alpha}^c$ est $\mathcal{I}$ -fermé $\square$

Dans ce qui suit, nous distinguons la topologie séquentielle de la topologie $\mathcal{I}$ -séquentielle sur un espace topologique X .

Remarque 3.0.13. (i) Définissons la topologie séquentielle comme l'ensemble des sous-ensembles séquentiellement ouverts de X . Désignons la par

$$\tau^s = \{U \in \mathcal{P}(X) / (\forall (x_n)_n \subset U^c) \ x_n \rightarrow x \Rightarrow x \in U^c\}.$$

De la même manière, on peut définir la topologie $\tau_{\mathcal{I}}$ par

$$\tau_{\mathcal{I}} = \{U \in \mathcal{P}(X) / (\forall (x_n)_n \subset U^c) \ x_n \xrightarrow{\mathcal{I}} x \Rightarrow x \in U^c\},$$

ce qui est équivalent à la notation du théorème 3.0.12.

- (ii) Une suite $(x_n)_n$ de X est convergente vers un élément x si, et seulement si, elle est τ^s -convergente vers x (Voir Théorème 1.2.3). Cependant, cette propriété n'est pas vraie pour la topologie $\tau_{\mathcal{I}}$ par l'exemple 1.3.5.

Les exemples suivants montrent qu'un sous-ensemble $\mathcal{I}$ -ouvert peut ne pas être ouvert.

Exemple 3.0.14. Soient $X \neq \emptyset$ un ensemble non dénombrable, τ la topologie co-dénombrable sur X et $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathbb{N}$. Toutes les suites convergentes de $\mathcal{I}$ dans X sont constantes.

Supposons, au contraire, qu'il existe une suite non constante $(x_n)_n$ de X qui est $\mathcal{I}$ -convergente vers un élément $x \in X$. On pose $N = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \setminus \{x\}$ qui est dénombrable;

alors $X \setminus N$ est un sous-ensemble ouvert de X qui contient x . Par la définition 1.3.1 de $\mathcal{I}$ -convergence, $\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin X \setminus N\} = \mathbb{N}$, mais $\mathbb{N} \notin \mathcal{I}$ (non trivial), ce qui n'est pas le cas. Donc $(x_n)_n$ est constante.

Tous les sous-ensembles de X sont $\mathcal{I}$ -ouverts; en effet, soient A un sous-ensemble de X et $(x_n)_n$ une suite de A qui est $\mathcal{I}$ -convergente vers un élément $x \in X$, alors $(x_n)_n$ est constante, donc x est dans A . Ainsi, par la définition 3.0.1 A est $\mathcal{I}$ -fermé. Donc A est aussi $\mathcal{I}$ -ouvert. Nous en déduisons que tous les sous-ensembles de X sont à la fois $\mathcal{I}$ -fermés et $\mathcal{I}$ -ouverts. Mais le singleton $\{x\}$ n'est pas ouvert.

Exemple 3.0.15. Rappelons que Ω désigne le premier ordinal non dénombrable avec l'ordre usuel. Soit $[0, \Omega]$ l'espace topologique tel que ses sous-ensembles ouverts sont $[0, \lambda[= \{\alpha / \alpha < \lambda\}$ où $\lambda \leq \Omega$ (la topologie de l'ordre). Toutes les suites d'ordinaux dénombrables ont une limite dénombrable ω (premier ordinal infini). Mais, il n'existe pas de suite d'ordinaux dénombrables qui converge vers Ω . Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathbb{N}$ et Soit $(x_n)_n$ une suite de $[0, \Omega[$ qui est $\mathcal{I}$ -convergente vers x , alors $x \in [0, \Omega[$ car Ω est le premier ordinal non dénombrable. Ainsi, $[0, \Omega[$ est $\mathcal{I}$ -fermé, mais $[0, \Omega[$ n'est pas un sous-ensemble fermé de $[0, \Omega]$, i.e., $\{\Omega\}$ est un sous-ensemble $\mathcal{I}$ -ouvert qui n'est pas ouvert.

Théorème 3.0.16. Soient $\mathcal{I}$ un idéal maximal de $\mathbb{N}$ et X un espace topologique. Alors $\tau \leq \tau_{\mathcal{I}} \leq \tau^s$.

Démonstration. D'après la proposition 3.0.2, un sous-ensemble ouvert de X est $\mathcal{I}$ -ouvert. Soit maintenant U un sous-ensemble $\mathcal{I}$ -ouvert de X . Montrons que U est un τ^s -ouvert. Supposons, par l'absurde que U n'est pas un τ^s -ouvert, alors $X \setminus U$ n'est pas τ^s -fermé; il existe donc une suite $(x_n)_n$ de $X \setminus U$ avec $x_n \xrightarrow{\tau^s} x \in U$. Par la remarque précédente, on a $x_n \xrightarrow{\tau} x$; puisque $\mathcal{I}$ est admissible, alors $x_n \xrightarrow{\mathcal{I}} x$ et $x \in U$ (Proposition 1.3.4). Ainsi $X \setminus U$ n'est pas $\mathcal{I}$ -fermé c'est-à-dire U n'est pas $\mathcal{I}$ -ouvert, ce qui est absurde. Donc U est τ^s -ouvert. $\square$

Le raffinement $\tau \leq \tau_{\mathcal{I}}$ est strict par l'exemple 3.0.14 et l'exemple 3.0.15. Le raffinement $\tau_{\mathcal{I}} \leq \tau^s$ est également strict par l'exemple suivant.

Exemple 3.0.17. Soient $\mathcal{I}$ un idéal maximal de $\mathbb{N}$ et $[0, 1]$ l'intervalle unitaire de $\mathbb{R}$ avec la topologie suivante

$$\tau = \{U \subset [0, 1] : 0 \notin U \text{ ou } \text{card}([0, 1] \setminus U) \text{ est dénombrable}\}.$$

$]0, 1]$ est τ^s -fermé car il n'y a pas de suite de $]0, 1]$ convergeante vers 0. Supposons, par l'absurde qu'il existe une suite $(x_n)_n$ de $]0, 1]$ convergeante vers 0, alors pour tout voisinage U de zéro, il existe un certain $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$, $x_n \in U$. Considérons $U = [0, 1] \setminus \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ qui appartient à τ car $\text{card}([0, 1] \setminus ([0, 1] \setminus \{x_n : n \in \mathbb{N}\}))$ est dénombrable. Mais, par construction de U , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \notin U$, ce qui n'est pas le cas. Ainsi $]0, 1]$ est τ^s -fermé, c'est-à-dire que $\overline{]0, 1]}^{\tau^s} =]0, 1]$.

Supposons, par l'absurde que $\tau_{\mathcal{I}} = \tau^s$, c'est-à-dire que pour tout sous-ensemble A de $[0, 1]$, $\overline{A}^{\mathcal{I}} = \overline{A}^{\tau^s}$. Choisissons $A =]0, 1]$ qui est τ^s -fermé par ce qui précède. Puisque $\tau_{\mathcal{I}} \leq \tau^s$,

alors $]0, 1]$ est aussi $\mathcal{I}$ -fermé. Considérons la suite

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $x_n \xrightarrow{\mathcal{I}_\delta} 0$ (voir exemple 1.3.5). Alors $\overline{]0, 1]}^{\mathcal{I}} = [0, 1]$, par conséquent $\overline{]0, 1]}^{\mathcal{I}} \neq \overline{]0, 1]}^s$. Donc $\tau^s > \tau_{\mathcal{I}}$.

Théorème 3.0.18. *Soient $\mathcal{I}$ un idéal maximal de $\mathbb{N}$ et X un espace topologique à base dénombrable de voisinages. Alors $\tau_{\mathcal{I}} = \tau$.*

Démonstration. Un sous-ensemble ouvert est toujours $\mathcal{I}$ -ouvert par la Proposition 3.0.2. Soit U un sous-ensemble $\mathcal{I}$ -ouvert de X , c'est-à-dire que U^c est un sous-ensemble $\mathcal{I}$ -fermé de X . Montrons maintenant que U^c est fermé. Supposons, au contraire, que U^c n'est pas fermé, c'est-à-dire qu'il existe $x \in \overline{U^c} \setminus U^c$. Soit (V_n) une suite décroissante de base de voisinages de x . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U^c \cap (V_n \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ (car $x \notin U^c$). Soit $(x_n)_n$ une suite de $U^c \cap V_n$ avec $x_n \neq x$. Soit W un voisinage de x , alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ avec $V_{n_0} \subset W$; ainsi pour $n \geq n_0$, $V_n \subset W$. Donc, pour tout $n \geq n_0$, $x_n \in W$. Ainsi, $x_n \rightarrow x$ in X . Suivant la proposition 1.3.4, $x_n \xrightarrow{\mathcal{I}} x$; par conséquent $x \in U^c$ car U^c est $\mathcal{I}$ -fermé, ce qui n'est pas le cas. Donc U^c est fermé. $\square$

Définition 3.0.19. *Soient $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathbb{N}$, (X, τ) et (Y, ρ) deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application :*

- (i) *f est dite $\mathcal{I}$ -continue si pour tout $\mathcal{I}$ -ouvert U dans Y , $f^{-1}(U)$ est un $\mathcal{I}$ -ouvert de X .*
- (ii) *f est dite séquentiellement $\mathcal{I}$ -continue si pour toute suite $(x_n)_n$ de X telle que $x_n \xrightarrow{\mathcal{I}} x$, la suite $f(x_n) \xrightarrow{\mathcal{I}} f(x)$.*

Rappelons ici qu'un point $x \in X$ est dit un point $\mathcal{I}$ -limite de $A \subset X$ si et seulement si, il existe une suite $(x_n)_n$ de $A \setminus \{x\}$, telle que $\mathcal{I} - \lim x_n = x$ [23].

On va prouver, d'une autre manière, le théorème 2 [108] en utilisant la maximalité de $\mathcal{I}$.

Théorème 3.0.20. *Soient $\mathcal{I}$ un idéal maximal, A un sous-ensemble d'un espace topologique X et $(x_n)_n$ une suite d'éléments distincts de A , qui est $\mathcal{I}$ -convergente vers x où $x \notin A$, alors x est un point $\mathcal{I}$ -limite de A .*

Démonstration. Soit U un sous-ensemble ouvert de X qui contient x ; comme $\mathcal{I} - \lim x_n = x$, alors il existe $E \in \mathcal{I}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus E$, $x_n \in U$. Choisissons $n_0 \in \mathbb{N} \setminus E$ avec $x_{n_0} \neq x$, alors $x_{n_0} \in U \cap (A \setminus \{x\})$. Ce qui prouve le résultat. $\square$

CHAPITRE 4

GROUPE SÉQUENTIELLEMENT $\mathcal{I}$ -TOPOLOGIQUE

Définition 4.0.1. Soient (G, τ) , (G', ρ) deux groupes topologiques, $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathbb{N}$ et $f : G \rightarrow G'$ une application .

- (i) $f : G \rightarrow G'$ est dite $\mathcal{I}$ -ouverte (respectivement $\mathcal{I}$ -fermée) si l'image de tout sous-ensemble $\mathcal{I}$ -ouvert (respectivement $\mathcal{I}$ -fermé) de G , est $\mathcal{I}$ -ouvert (respectivement $\mathcal{I}$ -fermé) de G' .
- (ii) f est dite $\mathcal{I}$ -continue si pour tout $\mathcal{I}$ -ouvert U de G' , $f^{-1}(U)$ est $\mathcal{I}$ -ouvert dans G .
- (iii) $f : G \rightarrow G'$ est séquentiellement $\mathcal{I}$ -continue en un point x si pour toute suite $(x_n)_n$ de G qui est $\mathcal{I}$ -convergente vers x , $f(x_n)$ est $\mathcal{I}$ -convergente vers $f(x)$.
- (iv) f est dite séquentiellement $\mathcal{I}$ -continue si pour toute suite $(x_n)_n$ de G telle que $x_n \xrightarrow{\mathcal{I}} x$, $f(x_n) \xrightarrow{\mathcal{I}} f(x)$.

Définition 4.0.2. Soit $(G, \circ, \tau)$ un groupe topologique. On dit que G est un groupe séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologique (respectivement groupe $\mathcal{I}$ -topologique) si l'application multiplication $m : G \times G \rightarrow G$, $(x, y) \rightarrow x \circ y$ et l'application inverse $i : G \rightarrow G$, $x \rightarrow x^{-1}$ sont séquentiellement $\mathcal{I}$ -continues (respectivement $\mathcal{I}$ -continues). Ce qui est équivalent au fait que l'application $G \times G \rightarrow G$, $(x, y) \rightarrow x \circ y^{-1}$ est séquentiellement $\mathcal{I}$ -continue (respectivement $\mathcal{I}$ -continue).

Théorème 4.0.3. Soient (G, τ) , (G', ρ) deux groupes topologiques et $f : G \rightarrow G'$ une application. Si f est séquentiellement $\mathcal{I}$ -continue, alors f est $\mathcal{I}$ -continue.

Démonstration. Soit $V \in \rho_{\mathcal{I}}$; supposons par l'absurde que $f^{-1}(V) \notin \tau_{\mathcal{I}}$; alors, il existe une suite $(x_n)_n$ de $[f^{-1}(V)]^c$ telle que $x_n \xrightarrow{\mathcal{I}} x$ dans G et $x \in f^{-1}(V)$. Comme f est séquentiellement $\mathcal{I}$ -continue, $f(x_n) \xrightarrow{\mathcal{I}} f(x)$ dans G' ; par conséquent $(f(x_n))_n$ est dans V^c . Donc $f(x) \in V^c$, ce qui n'est pas le cas. D'où $f^{-1}(V) \in \tau_{\mathcal{I}}$, c'est-à-dire que f est $\mathcal{I}$ -continue. $\square$

Remarque 4.0.4. Comme pour toute application séquentiellement $\mathcal{I}$ -continue est $\mathcal{I}$ -continue, par le théorème précédent, alors un groupe séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologique est un groupe $\mathcal{I}$ -topologique.

Dans ce qui suit, un espace muni d'une topologie $\mathcal{I}$ -séquentielle n'est pas toujours un groupe séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologique.

Exemple 4.0.5. Nous rappelons que la droite de Sorgenfrey est la droite réelle, et que sa base d'ensembles ouverts est l'ensemble formé des intervalles ouverts à droite, fermés à gauche : ensembles de la forme $[a, b[$ où $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Comme $\mathbb{R}$ est un espace topologique à base dénombrable, alors la topologie sur $\mathbb{R}$ et sa topologie $\mathcal{I}$ -séquentielle coïncident. Mais $\mathbb{R}$ n'est pas un groupe séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologique car l'opération inverse i n'est pas séquentiellement $\mathcal{I}$ -continue. En effet, considérons la suite définie par

$$u_n = \begin{cases} 1/n, & \text{si } n \neq 0 \\ 1, & \text{si } n = 0 \end{cases}.$$

Si on suppose que l'application inverse est séquentiellement $\mathcal{I}$ -continue, alors $(-u_n)_n$ est $\mathcal{I}$ -convergente vers 0, c'est-à-dire, pour tout voisinage U de zéro, $\{n \in \mathbb{N} : -u_n \notin U\} \in \mathcal{I}$. Mais, si $U = [0, 1[$, alors $\{n \in \mathbb{N} : -u_n \notin [0, 1[\} = \mathbb{N} \in \mathcal{I}$, ce qui est une contradiction, puisque $\mathcal{I}$ n'est pas trivial.

Proposition 4.0.6. *Un sous-groupe d'un groupe séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologique est aussi un groupe séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologique.*

Démonstration. Soient G un groupe séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologique et H un sous-groupe de G . Comme l'application multiplication et l'application inverse sont séquentiellement $\mathcal{I}$ -continues, alors les restrictions de ces applications à H sont séquentiellement $\mathcal{I}$ -continues. Ainsi H est un sous-groupe séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologique de G . $\square$

Théorème 4.0.7. *Soient G un groupe séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologique et A un sous-ensemble de G . Alors $\overline{A^{-1}}^{\mathcal{I}} = (\overline{A}^{\mathcal{I}})^{-1}$.*

Démonstration. Soit $a \in \overline{A^{-1}}^{\mathcal{I}}$, alors il existe une suite $(x_n)_n$ de A^{-1} telle que $x_n \xrightarrow{\mathcal{I}} a$, d'où $(i(x_n))$ est dans $i(A^{-1})$ et $i(x_n) \xrightarrow{\mathcal{I}} i(a)$, car l'application i est séquentiellement $\mathcal{I}$ -continue ; par conséquent (x_n^{-1}) est dans A et $x_n^{-1} \xrightarrow{\mathcal{I}} a^{-1}$. Ainsi $a^{-1} \in \overline{A}^{\mathcal{I}}$, c'est-à-dire, $a \in (\overline{A}^{\mathcal{I}})^{-1}$. Donc $\overline{A^{-1}}^{\mathcal{I}} \subset (\overline{A}^{\mathcal{I}})^{-1}$.

Inversement, soit $a \in (\overline{A}^{\mathcal{I}})^{-1}$, alors $a^{-1} \in \overline{A}^{\mathcal{I}}$; par conséquent il existe une suite $(x_n)_n$ de A telle que $x_n \xrightarrow{\mathcal{I}} a^{-1}$, alors $(i(x_n))$ est dans $i(A)$ et $i(x_n) \xrightarrow{\mathcal{I}} i(a^{-1})$ parce que l'application i est séquentiellement $\mathcal{I}$ -continue, c'est-à-dire que (x_n^{-1}) est dans A^{-1} et $x_n^{-1} \xrightarrow{\mathcal{I}} a$. Ainsi $a \in \overline{A^{-1}}^{\mathcal{I}}$. Donc $(\overline{A}^{\mathcal{I}})^{-1} \subset \overline{A^{-1}}^{\mathcal{I}}$. $\square$

Théorème 4.0.8. *Soient G un groupe séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologique et A un sous-ensemble de G . Alors, A est $\mathcal{I}$ -ouvert si et seulement si, A^{-1} est $\mathcal{I}$ -ouvert.*

Démonstration. Soit A un sous-ensemble $\mathcal{I}$ -ouvert de G , alors $G \setminus A$ est $\mathcal{I}$ -fermé. Soit $(x_n)_n$ une suite de $G \setminus A^{-1}$ telle que $x_n \xrightarrow{\mathcal{I}} x$, alors $(x_n)_n$ n'est pas dans A^{-1} , c'est-à-dire que $(i(x_n))$ n'est pas dans $i(A^{-1})$; donc $(i(x_n))$ n'est pas dans A , c'est-à-dire que $(i(x_n))$ est dans $G \setminus A$. Puisque i est séquentiellement $\mathcal{I}$ -continue et $G \setminus A$ est $\mathcal{I}$ -fermé, alors $i(x_n)_n \xrightarrow{\mathcal{I}} i(x)$ et $i(x) \in G \setminus A$. Supposons par l'absurde que $x \in A^{-1}$, alors $i(x) \in i(A^{-1})$, c'est-à-dire $i(x) \in A$, ce qui n'est pas le cas. Donc A^{-1} est $\mathcal{I}$ -ouvert. L'implication inverse se fait de la même manière. $\square$

Proposition 4.0.9. *Soit G un groupe séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologique.*

Un sous-ensemble U de G est un voisinage $\mathcal{I}$ -ouvert d'un élément x de G si, et seulement si, U^{-1} est un voisinage $\mathcal{I}$ -ouvert de x^{-1} .

Démonstration. Soit U un voisinage $\mathcal{I}$ -ouvert d'un élément x de G . Montrer que $\overline{G \setminus U^{-1}}^{\mathcal{I}} = G \setminus U^{-1}$ et $x^{-1} \notin \overline{G \setminus U^{-1}}^{\mathcal{I}}$.

Par le théorème précédent, U^{-1} est un sous-ensemble $\mathcal{I}$ -ouvert de G , alors $\overline{G \setminus U^{-1}}^{\mathcal{I}} = G \setminus U^{-1}$. Supposons, par l'absurde que $x^{-1} \in \overline{G \setminus U^{-1}}^{\mathcal{I}}$, alors $x^{-1} \in G \setminus U^{-1}$ c'est-à-dire que $x \in G \setminus U$, ce qui n'est pas le cas. Donc $x^{-1} \notin \overline{G \setminus U^{-1}}^{\mathcal{I}}$.

L'implication inverse se fait de la même manière. $\square$

Théorème 4.0.10. *Soient G un groupe séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologique et A un sous-ensemble de G . Alors $A^{-1} = (\overset{\circ \mathcal{I}}{A})^{-1}$.*

Démonstration. Soit $x \in A^{-1}$, par le théorème 3.0.6, il existe un voisinage $\mathcal{I}$ -ouvert de x tel que $x \in U \subset A^{-1}$; selon la proposition précédente U^{-1} est un voisinage $\mathcal{I}$ -ouvert de x^{-1} et $U^{-1} \subset A$. Et d'après le théorème 3.0.6, encore une fois, $x^{-1} \in \overset{\circ \mathcal{I}}{A}$, c'est-à-dire, $x \in (\overset{\circ \mathcal{I}}{A})^{-1}$. D'où $A^{-1} \subset (\overset{\circ \mathcal{I}}{A})^{-1}$.

L'implication inverse se fait de la même manière. $\square$

Théorème 4.0.11. *Soient G un groupe séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologique, A un sous-ensemble $\mathcal{I}$ -ouvert de G et g un élément de G . Alors $A \circ g$ est $\mathcal{I}$ -ouvert.*

Démonstration. Soit (y_n) une suite de $G \setminus A \circ g$ telle que $y_n \xrightarrow{\mathcal{I}} y$. Supposons par l'absurde que $y \in A \circ g$, alors (y_n) n'est pas dans $A \circ g$, c'est-à-dire que $(y_n \circ g^{-1})$ n'est pas dans A ; d'où $(y_n \circ g^{-1})$ est dans $G \setminus A$. Puisque $y \in A \circ g$ et $y_n \xrightarrow{\mathcal{I}} y$, alors $y_n \circ g^{-1} \xrightarrow{\mathcal{I}} y \circ g^{-1}$ et $y \circ g^{-1} \in A$, ce qui contredit le fait que $y \circ g^{-1} \in G \setminus A$ car $G \setminus A$ est $\mathcal{I}$ -fermé. $\square$

Corollaire 4.0.12. *Soient G un groupe séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologique et A et B deux sous-ensembles de G . Alors*

Si A et B sont $\mathcal{I}$ -ouverts, $A \circ B$ est $\mathcal{I}$ -ouvert.

Définition 4.0.13. *Soit G un groupe séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologique. On dit qu'un sous-ensemble $F \subset G$ est séquentiellement $\mathcal{I}$ -compact si toute suite $(x_n)_n$ de F admet une sous-suite $\mathcal{I}$ -convergente $(x_{n_k})_k$ avec $\mathcal{I} - \lim x_{n_k} \in F$.*

Théorème 4.0.14. *Soient G un groupe séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologique et A et B deux sous-ensembles de G . Alors*

Si A et B sont séquentiellement $\mathcal{I}$ -compacts, $A \circ B$ est séquentiellement $\mathcal{I}$ -compact.

Démonstration. Soient A et B deux sous-ensembles séquentiellement $\mathcal{I}$ -compacte, $(x_n \circ y_n)$ une suite de $A \circ B$. Comme A et B sont séquentiellement $\mathcal{I}$ -compacts, alors il existe une sous-suite (x_{n_k}) de $(x_n)_n$ qui est $\mathcal{I}$ -convergente vers x dans A . La suite (y_{n_k}) admet aussi une sous-suite (y_{n_j}) qui est $\mathcal{I}$ -convergente vers y dans B . Puisque (x_{n_j}) est une sous-suite de (x_{n_k}) , elle est aussi $\mathcal{I}$ -convergente vers x . Ainsi, $x_{n_j} \circ y_{n_j} \xrightarrow{\mathcal{I}} x \circ y$. Donc $x \circ y \in A \circ B$. D'où $A \circ B$ est séquentiellement $\mathcal{I}$ -compact. $\square$

Par l'exemple suivant, si A et B sont fermés dans un groupe topologique alors $A \circ B$ n'est pas nécessairement fermé. Cependant, le théorème suivant prouve que $\overline{A}^{\mathcal{I}} \circ \overline{B}^{\mathcal{I}}$ est un sous-ensemble de $\overline{A \circ B}^{\mathcal{I}}$.

Exemple 4.0.15. Comme $(\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe topologique à base dénombrable, alors chaque sous-ensemble $\mathcal{I}$ -fermé de $\mathbb{R}^2$ est fermé. Soient A l'axe des y et B l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$. A et B sont tous les deux des sous-ensembles fermés de $(\mathbb{R}^2, +)$. Mais, $A + B$ n'est pas fermé car pour tout voisinage U du point $(0, 0)$, $U \cap (A + B) \neq \emptyset$, c'est-à-dire, $(0, 0) \in \overline{A + B}$, mais $(0, 0) \notin A + B$.

Théorème 4.0.16. Soit G un groupe séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologique. Alors, pour tous sous-ensembles A et B de G , $\overline{A}^{\mathcal{I}} \circ \overline{B}^{\mathcal{I}} \subset \overline{A \circ B}^{\mathcal{I}}$.

Démonstration. Soit $x \in \overline{A}^{\mathcal{I}} \circ \overline{B}^{\mathcal{I}}$, alors, il existe a et b de $\overline{A}^{\mathcal{I}}$ et $\overline{B}^{\mathcal{I}}$ respectivement tels que $x = a \circ b$; il existe donc des suites $(a_n) \in A$ et $(b_n) \in B$ qui sont $\mathcal{I}$ convergentes vers a et b respectivement. Puisque $m : G \times G \xrightarrow{\mathcal{I}} G$ est séquentiellement $\mathcal{I}$ -continue, alors $m(a_n, b_n) = a_n \circ b_n$ et $a_n \circ b_n \xrightarrow{\mathcal{I}} a \circ b$. Ainsi $(a_n \circ b_n)$ est une suite de $A \circ B$ qui est $\mathcal{I}$ -convergente vers x , c'est-à-dire que $x \in \overline{A \circ B}^{\mathcal{I}}$. $\square$

Proposition 4.0.17. Soient G et G' deux groupes séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologiques. Si une application $f : G \rightarrow G'$ est séquentiellement $\mathcal{I}$ -continue. Alors, pour tout sous-ensemble A de G , $f(\overline{A}^{\mathcal{I}}) \subset \overline{f(A)}^{\mathcal{I}}$.

Démonstration. Soient $f : G \rightarrow G'$ une application, $A \subset G$ et $x \in \overline{A}^{\mathcal{I}}$. Alors, il existe une suite $(x_n)_n$ de points de A telle que $\mathcal{I}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$; puisque f est séquentiellement $\mathcal{I}$ -continue en x , alors $\mathcal{I}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$; d'où $f(x) \in \overline{f(A)}^{\mathcal{I}}$. $\square$

Définition 4.0.18. Soient G et G' deux groupes séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologiques. Une application $f : G \rightarrow G'$ est dite séquentiellement $\mathcal{I}$ -homéomorphisme si f est bijective et f et f^{-1} sont séquentiellement $\mathcal{I}$ -continues.

Définition 4.0.19. Un groupe séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologique G est dit séquentiellement $\mathcal{I}$ -homogène si pour tous $(x, y) \in G^2$, il existe une application f séquentiellement $\mathcal{I}$ -homéomorphisme sur G telle que $f(x) = y$.

Proposition 4.0.20. Tout groupe séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologique est séquentiellement $\mathcal{I}$ -homogène.

Démonstration. Soient x et y deux éléments d'un groupe séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologique G . Pour deux éléments quelconques a et b de G , l'application $f : z \rightarrow a^{-1} \circ b \circ z$ est bijective et séquentiellement $\mathcal{I}$ -continue (par définition du groupe séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologique). Si on choisit $b = a \circ y \circ x^{-1}$, alors $f(x) = y$. Donc G est séquentiellement $\mathcal{I}$ -homogène. $\square$

Proposition 4.0.21. *Soient G et G' deux groupes séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologiques. Une application $f : G \rightarrow G'$ est $\mathcal{I}$ -fermée si et seulement si, pour tout sous-ensemble A de G , $\overline{f(A)}^{\mathcal{I}} \subset f(\overline{A}^{\mathcal{I}})$.*

Démonstration. Soit $A \subset G$, alors $f(A) \subset f(\overline{A}^{\mathcal{I}})$ implique $\overline{f(A)}^{\mathcal{I}} \subset \overline{f(\overline{A}^{\mathcal{I}})}^{\mathcal{I}}$. Comme f est $\mathcal{I}$ -fermé, on déduit que $\overline{f(A)}^{\mathcal{I}} \subset f(\overline{A}^{\mathcal{I}})$.

Réciproquement, supposons que $\overline{f(A)}^{\mathcal{I}} \subset f(\overline{A}^{\mathcal{I}})$ pour tout sous-ensemble A de G . Soit F un sous-ensemble fermé de G , alors $f(\overline{F}^{\mathcal{I}}) = f(F)$, d'où $\overline{f(F)}^{\mathcal{I}} \subset f(F)$. Donc f est $\mathcal{I}$ -fermé. $\square$

Proposition 4.0.22. *Soient G et G' deux groupes séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologiques. Si une application $f : G \rightarrow G'$ est un homomorphisme. Alors f est séquentiellement $\mathcal{I}$ -continue à l'origine si et seulement si f est séquentiellement $\mathcal{I}$ -continue en tout point $x \in G$.*

Démonstration. Soit $f : G \rightarrow G'$ un homomorphisme qui est séquentiellement $\mathcal{I}$ -continue à l'origine e . Soient $x \in G$ et $(x_n)_n$ une suite de G avec $\mathcal{I}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, alors la suite $(x_n \circ x^{-1})$ est $\mathcal{I}$ -convergente vers l'origine e ; d'où par hypothèse $(f(x_n \circ x^{-1}))$ est $\mathcal{I}$ convergente et $\mathcal{I}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n \circ x^{-1}) = f(e)$. Puisque f est un homomorphisme, alors $\mathcal{I}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \circ f(x^{-1}) = f(e)$, donc $\mathcal{I}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$.

L'implication inverse est évidente. $\square$

Corollaire 4.0.23. *Soient G et G' deux groupes séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologiques. Alors pour tout $a \in G$, l'application $f_a : G \rightarrow G'$, $x \rightarrow a \circ x$ est séquentiellement $\mathcal{I}$ -continue, $\mathcal{I}$ -fermée et $\mathcal{I}$ -ouverte.*

Démonstration. Soient x un élément de G et $(x_n)_n$ une suite de G tels que $\mathcal{I}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, alors la suite $(a \circ x_n)$ est $\mathcal{I}$ -convergente vers $a \circ x$; par conséquent $\mathcal{I}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f_a(x)$. Ainsi f_a est séquentiellement $\mathcal{I}$ -continue. Suivant le théorème 4.0.11 f_a est $\mathcal{I}$ -fermée et $\mathcal{I}$ -ouverte. $\square$

Corollaire 4.0.24. *Soient G un groupe séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologique et A et B deux sous-ensembles de G . Alors*

Si l'un des ensembles A et B est $\mathcal{I}$ -ouvert, $A \circ B$ l'est aussi.

Démonstration. Supposons que B soit un sous-ensemble $\mathcal{I}$ -ouvert et que A soit un sous-ensemble quelconque de G , par le corollaire précédent $a \circ B$ est $\mathcal{I}$ -ouvert pour tout $a \in A$. Comme $A \circ B = \bigcup_{a \in A} (a \circ B)$ et selon le théorème 3.0.12, donc $A \circ B$ est $\mathcal{I}$ -ouvert. $\square$

Conformément au théorème 4.0.3, toute application séquentiellement $\mathcal{I}$ -continue $f : G \rightarrow G'$ est $\mathcal{I}$ -continue, c'est-à-dire que l'image réciproque par f de tout sous-ensemble $\mathcal{I}$ -fermé de G' est un sous-ensemble $\mathcal{I}$ -fermé de G . Cependant, la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 4.0.25. Soient $id : (\mathbb{R}, +, \tau_u) \rightarrow (\mathbb{R}, +, \tau_d)$ l'application d'identité tel que τ_u est la topologie usuelle et τ_d est la topologie discrète. Le sous-ensemble $F = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$ est $\mathcal{I}$ -fermé par rapport aux deux topologies (les sous-ensembles fermés et $\mathcal{I}$ -fermé coïncident puisque $\mathbb{R}$ est un groupe topologique à base dénombrable de voisinages). Mais id n'est pas séquentiellement $\mathcal{I}$ -continue, car la suite $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ n'est pas constante dans $(\mathbb{R}, +, \tau_d)$.

Proposition 4.0.26. Soient G un groupe séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologique et $f : G \rightarrow G$ une application séquentiellement $\mathcal{I}$ -continue. Alors $H = \{x \in G / f(x) = e\}$, le noyau de f , est un sous-ensemble $\mathcal{I}$ -fermé de G .

Démonstration. Soient G un groupe séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologique et $f : G \rightarrow G$ une application séquentiellement $\mathcal{I}$ -continue. Soit $(x_n)_n$ une suite de H , telle que $x_n \xrightarrow{\mathcal{I}} x$. Par hypothèse, $f(x_n) \xrightarrow{\mathcal{I}} f(x)$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = e$, alors $f(x) = e$, c'est-à-dire $x \in H$. $\square$

Corollaire 4.0.27. Soient G un groupe séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologique, $f, g : G \rightarrow G$ des applications séquentiellement $\mathcal{I}$ -continues. Alors $H = \{x \in G / f(x) = g(x)\}$ est un sous-ensemble $\mathcal{I}$ -fermé de G .

Les sous-groupes normaux sont utiles pour construire des groupes quotients.

Définition 4.0.28. Un sous-groupe H d'un groupe G est dit normal si pour tout $g \in G$, $g \circ H \circ g^{-1} = H$, c'est-à-dire $g \circ H = H \circ g$.

Théorème 4.0.29. Soient G un groupe séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologique et H un sous-groupe normal de G . Alors G/H est un groupe séquentiellement $\mathcal{I}$ -topologique.

Démonstration. On doit montrer que $\psi_1 : G/H \times G/H \rightarrow G/H$, $(x_1, y_1) \rightarrow x_1 \circ y_1^{-1}$ est séquentiellement $\mathcal{I}$ -continue. Considérons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\pi \times \pi} & G/H \times G/H \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi_1 \\ G & \xrightarrow{\pi} & G/H \end{array}$$

On a $\pi\psi = \psi_1(\pi \times \pi)$; la surjection canonique π est continue, elle est aussi séquentiellement $\mathcal{I}$ -continue par [108, théorème 3]; Comme π et ψ sont séquentiellement $\mathcal{I}$ -continues, alors $\pi\psi$ est séquentiellement $\mathcal{I}$ -continue, donc $\psi_1(\pi \times \pi)$ est séquentiellement $\mathcal{I}$ -continue. Puisque $\pi \times \pi$ est continue, il est séquentiellement $\mathcal{I}$ -continue suivant [108, théorème 3] encore une fois. Donc ψ_1 est séquentiellement $\mathcal{I}$ -continue. $\square$

CHAPITRE 5

SUR L'UNICITÉ DES $\mathcal{I}$ -LIMITES DES SUITES

5.1 Sous-ensembles séquentiellement $\mathcal{I}$ -compacts

Définition 5.1.1. Soient $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathbb{N}$ et (X, τ) un espace topologique :

- (i) X est dit $\mathcal{I}$ -séparé si pour tous deux points distincts $x, y \in X$ il existe deux sous-ensembles $\mathcal{I}$ -ouverts U et V contenant respectivement x et y tels que $U \cap V = \emptyset$.
- (ii) Un sous-ensemble F de X est dit $\mathcal{I}$ -compact si pour tout recouvrement de F par des $\mathcal{I}$ -ouverts il existe un sous-recouvrement fini de F .
- (iii) Un sous-ensemble $F \subset X$ est dit séquentiellement compact (respectivement, séquentiellement $\mathcal{I}$ -compact) si toute suite de F admet une sous-suite convergente (respectivement, $\mathcal{I}$ -convergente) vers un point dans F .
- (iv) On dit que X est dénombrablement $\mathcal{I}$ -compact si tout recouvrement dénombrable de X par des $\mathcal{I}$ -ouverts admet un sous-recouvrement fini.

Théorème 5.1.2. Tout sous-ensemble séquentiellement compact d'un espace topologique est séquentiellement $\mathcal{I}$ -compact.

Démonstration. C'est évident par la Proposition 1.3.4. □

Un espace topologique séquentiellement $\mathcal{I}$ -compact n'est pas toujours $\mathcal{I}$ -compact comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 5.1.3. On prend la même hypothèse que dans l'exemple 3.0.15. Soit $\mathcal{E} = \{[0, \alpha[\mid \alpha < \Omega\}$ le recouvrement ouvert de Ω . Toute union finie $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de $\mathcal{E}$ est un ordinal dénombrable qui a un successeur dans $[0, \alpha[$. Par conséquent, $\mathcal{E}$ n'est pas recouvert par $\mathcal{F}$, c'est-à-dire que Ω n'est pas $\mathcal{I}$ -compact. D'autre part, toutes les suites d'ordinaux dénombrables ont une limite dénombrable ω (premier ordinal infini). Ainsi Ω est séquentiellement $\mathcal{I}$ -compact mais n'est pas $\mathcal{I}$ -compact.

Théorème 5.1.4. *Soit Y un sous-espace d'un espace topologique X . Si Y est $\mathcal{I}$ -compact (resp. dénombrablement $\mathcal{I}$ -compact), alors Y est compact (resp. dénombrablement compact).*

Démonstration. Tout recouvrement (resp. recouvrement dénombrable) de Y par des ensembles ouverts est aussi un recouvrement (resp. recouvrement dénombrable) de Y par des ensembles $\mathcal{I}$ -ouverts suivant la Proposition 3.0.2. Le sous-recouvrement fini donnée par la $\mathcal{I}$ -compacité est alors un sous-recouvrement fini d'ensembles ouverts. $\square$

Définition 5.1.5. [144, Définition 4.1]. *Soit X un espace normé. Une suite $(x_n)_n$ de X est $\mathcal{I}$ -bornée s'il existe un nombre réel $M > 0$ tel que $\{n \in \mathbb{N} : \|x_n\| > M\} \in \mathcal{I}$.*

Théorème 5.1.6. *Toute suite bornée dans un espace normé est $\mathcal{I}$ -bornée.*

Démonstration. Soit $(x_n)_n$ une suite bornée dans un espace normé X . Alors, il existe un nombre réel $M > 0$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| < M$. Donc $\{n \in \mathbb{N} : \|x_n\| > M\} = \emptyset$, par conséquent $\{n \in \mathbb{N} : \|x_n\| > M\} \in \mathcal{I}$. Ainsi, $(x_n)_n$ est $\mathcal{I}$ -bornée. $\square$

Théorème 5.1.7. *Soient (X, τ) un espace topologique, $\mathbb{R}$ la droite réelle sous sa topologie usuelle et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une application séquentiellement $\mathcal{I}$ -continue. Si A est un sous-ensemble séquentiellement $\mathcal{I}$ -compact de X , alors $f(A)$ est $\mathcal{I}$ -bornée.*

Démonstration. Supposons, par l'absurde que $f(A)$ n'est pas $\mathcal{I}$ -bornée. Alors il existe une suite (y_n) de $f(A)$ telle que pour tout nombre réel $M > 0$, $\{n \in \mathbb{N} : |y_n| > M\} \notin \mathcal{I}$. Par conséquent, il existe une suite $(x_n)_n$ de A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = y_n$. Comme A est séquentiellement $\mathcal{I}$ -compact, alors la suite $(x_n)_n$ admet une sous-suite $(x_{n_k})_k$ $\mathcal{I}$ -convergente vers un élément x_0 de A . Ainsi, $f(x_{n_k}) \xrightarrow{\mathcal{I}} f(x_0)$; alors pour tout voisinage U de $f(x_0)$, $\{n \in \mathbb{N} : f(x_n) \notin U\} \in \mathcal{I}$, c'est-à-dire qu'il existe un nombre réel $M > 0$ tel que $\{n \in \mathbb{N} : |f(x_n)| > M\} \in \mathcal{I}$, ce qui n'est pas le cas. Donc $f(A)$ est $\mathcal{I}$ -bornée. $\square$

Théorème 5.1.8. *Soit X un espace topologique. Si X est séquentiellement $\mathcal{I}$ -compact et Y est un sous-ensemble $\mathcal{I}$ -fermé de X , alors Y est séquentiellement $\mathcal{I}$ -compact.*

Démonstration. Soit (y_n) une suite de Y . Par la $\mathcal{I}$ -compacité séquentielle de X , (y_n) admet une sous-suite qui est $\mathcal{I}$ -convergente vers un certain y dans X . Puisque Y est $\mathcal{I}$ -fermé, alors $y \in Y$. $\square$

Théorème 5.1.9. *Soient X et Y deux espaces topologiques. Si X est séquentiellement $\mathcal{I}$ -compact et $f : X \rightarrow Y$ est une application séquentiellement $\mathcal{I}$ -continue, alors $f(X)$ est séquentiellement $\mathcal{I}$ -compacte.*

Démonstration. Soit (y_n) une suite quelconque de $f(X)$, alors il existe une suite $(x_n)_n$ de X telle que $y_n = f(x_n)$; par la compacité $\mathcal{I}$ -séquentielle de X , il existe une sous-suite $\mathcal{I}$ -convergente (x_{n_k}) vers x , alors $(f(x_{n_k}))$ est une sous-suite de (y_n) qui est $\mathcal{I}$ -convergente vers $f(x)$. $\square$

5.2 Espaces $\mathcal{I}$ -séparés et unicité des $\mathcal{I}$ -limites des suites

Proposition 5.2.1. *Soit (X, τ) un espace topologique séparé. Alors X est $\mathcal{I}$ -séparé.*

Démonstration. C'est évident par la Proposition 3.0.2. $\square$

Théorème 5.2.2. *Soit (X, τ) un espace séquentiel. Si $\mathcal{I}$ est maximal, alors X est $\mathcal{I}$ -séparé si et seulement si, X est séparé.*

Démonstration. Comme (X, τ) est séquentiel, alors $\tau = \tau^s$, alors par le théorème 3.0.18, $\tau_{\mathcal{I}} = \tau$. Ainsi X est $\mathcal{I}$ -séparé si et seulement si, X est séparé. $\square$

Grâce à l'exemple suivant, il existe un espace topologique X qui est $\mathcal{I}$ -séparé mais non séparé.

Exemple 5.2.3. Prenons la même hypothèse que dans l'exemple 3.0.14. X est $\tau_{\mathcal{I}}$ séparé mais non séparé. En effet, soient $x, y \in X$, avec $x \neq y$ et soient U et V deux voisinages ouverts de x et y respectivement. Alors $U = X \setminus U'$ et $V = X \setminus V'$ avec U' et V' sont des sous-ensembles dénombrables de X ; par conséquent $U \cap V = (X \setminus U') \cap (X \setminus V') = X \setminus (U' \cup V')$. Puisque X est non dénombrable et que $U' \cup V'$ est dénombrable, alors $X \setminus (U' \cup V') \neq \emptyset$. Ainsi X n'est pas séparé. D'autre part, $G = \{x\}$ et G^c sont des sous-ensembles ouverts de X tels que $x \in G$ et $y \in G^c$. Puisque $G \cap G^c = \emptyset$, alors X est $\mathcal{I}$ -séparé.

Théorème 5.2.4. *Soit (X, τ) un espace topologique $\mathcal{I}$ -séparé. Si $\mathcal{I}$ est maximal, alors toute suite $\mathcal{I}$ -convergente dans X admet une $\mathcal{I}$ -limite unique.*

Démonstration. Supposons, par l'absurde, que $(x_n)_n$ est une suite de X , $\mathcal{I}$ -convergente vers x et y telle que $x \neq y$. Selon le théorème 3.0.11, pour tout sous-ensemble $\mathcal{I}$ -ouvert U de X avec $x \in U$, il existe $E_1 \in \mathcal{I}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus E_1$, $x_n \in U$. De même, pour tout sous-ensemble $\mathcal{I}$ -ouvert V de X tel que $y \in V$, il existe $E_2 \in \mathcal{I}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus E_2$, $x_n \in V$. Alors, $\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U\} \subset E_1$ et $\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin V\} \subset E_2$. Puisque $\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U\} = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in U^c\}$ et $\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin V\} = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in V^c\}$, alors $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U^c\} \cup \{n \in \mathbb{N} : x_n \in V^c\} \subset E_1 \cup E_2$. On peut choisir U et V tels que $U \cap V = \emptyset$ (X est $\mathcal{I}$ -séparé). Donc $U^c \cup V^c = X$, alors $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U^c\} \cup \{n \in \mathbb{N} : x_n \in V^c\} = \mathbb{N}$. Par conséquent $\mathbb{N} \subset E_1 \cup E_2$. Comme $E_1 \in \mathcal{I}$ et $E_2 \in \mathcal{I}$ alors $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{I}$. Donc $\mathbb{N} \in \mathcal{I}$, ce qui est une contradiction car $\mathcal{I}$ n'est pas trivial. Donc $x = y$. $\square$

Théorème 5.2.5. *Soient $\mathcal{I}$ un idéal maximal et (X, τ) un espace topologique $\mathcal{I}$ -séparé. Si A est un sous-ensemble séquentiellement $\mathcal{I}$ -compact de X , alors A est $\mathcal{I}$ -fermé.*

Démonstration. Soit $(x_n)_n$ une suite de A telle que $x_n \xrightarrow{\mathcal{I}} x$. A étant séquentiellement $\mathcal{I}$ -compact, il existe $(x_{n_k})_k$ une sous-suite de $(x_n)_n$ telle que $x_{n_k} \xrightarrow{\mathcal{I}} y$ avec $y \in A$. Conformément au théorème précédent, on a $y = x$, donc $x \in A$. Ainsi A est $\mathcal{I}$ -fermé. $\square$

Théorème 5.2.6. *Soit (X, τ) un espace topologique à base dénombrable de voisinages et $\mathcal{I}$ un idéal maximal. Si chaque suite $\mathcal{I}$ -convergente dans X admet une $\mathcal{I}$ -limite unique, alors X est séparé.*

Démonstration. Soient x et y deux points distincts d'un espace topologique à base dénombrable de voisinages (X, τ) . Soient $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(V_j)_{j \in \mathbb{N}}$ deux bases de voisinages de x et y respectivement ($\tau_x = \tau$, puisque X est à base dénombrable de voisinages, Théorème 3.0.18). Supposons, par l'absurde, que X n'est pas séparé. Alors l'intersection de tout voisinage de x et de tout voisinage de y est non vide. Posons $W_1 = U_1$, $W_2 = U_1 \cap V_1$, $W_3 = U_1 \cap V_1 \cap U_2$, $\dots$, $W_{2n} = U_1 \cap V_1 \cap V_n \cap U_n$, $W_{2n+1} = U_1 \cap V_1 \cap V_n \cap U_n \cap U_{n+1}$ pour chaque n de $\mathbb{N}$; par conséquent, $W_1 \supset W_2 \supset \dots \supset W_n \supset \dots$. Considérons la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ telle que x_n est dans W_n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soient G_1 un ensemble ouvert contenant x , et G_2 un ensemble ouvert contenant y ; il existe un entier naturel N , tel que pour tout $n > N$, $W_n \subset G_1$ et $W_n \subset G_2$, alors $\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin G_1\}$ et $\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin G_2\}$ sont finis. Puisque $\mathcal{I}$ est admissible et par la Proposition 3.0.2, $x_n \xrightarrow{\mathcal{I}} x$ et $x_n \xrightarrow{\mathcal{I}} y$, ce qui n'est pas le cas. Ainsi X est séparé. $\square$

Lemme 5.2.7. *Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathbb{N}$. Toute sous-suite d'une suite $\mathcal{I}$ -convergente dans un espace topologique est également $\mathcal{I}$ -convergente.*

Démonstration. Soit $(x_n)_n$ une suite $\mathcal{I}$ -convergente vers x , dans un espace topologique X . Alors, pour tout voisinage U de x , $\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U\} \in \mathcal{I}$. Soit $(x_{\varphi(n)})$ une sous-suite de $(x_n)_n$; comme $\{\varphi(n) \in \mathbb{N} : x_{\varphi(n)} \notin U\} \subset \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U\}$, alors $\{\varphi(n) \in \mathbb{N} : x_{\varphi(n)} \notin U\} \in \mathcal{I}$. Ainsi $x_{\varphi(n)} \xrightarrow{\mathcal{I}} x$. $\square$

Théorème 5.2.8. *Soient $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathbb{N}$, X un espace topologique et $(x_n)_n$ une suite de X avec $x_n \xrightarrow{\mathcal{I}} x$ dans X . Alors $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est un sous-ensemble séquentiellement $\mathcal{I}$ -compact de X .*

Démonstration. Soit (y_n) une suite de A . Si $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ est fini, alors il existe un élément y_{n_0} de $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ tel que $\{n \in \mathbb{N} : y_n = y_{n_0}\}$ est infini. Alors (y_n) a une sous-suite convergente, qui est $\mathcal{I}$ -convergente par la Proposition 1.3.4.

Si $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ est infini, on peut construire une sous-suite (y_{β_n}) de (y_n) comme suit : Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \min\{n \in \mathbb{N} : x_n \in \{y_n : n \in \mathbb{N}\}\} \text{ et } \beta_1 = \max\{n \in \mathbb{N} : x_{\alpha_1} = y_n\} \\ \alpha_2 &= \min\{n \in \mathbb{N} : x_n \in \{y_n : n > \beta_1\}\} \text{ et } \beta_2 = \max\{n \in \mathbb{N} : x_{\alpha_2} = y_n, n > \beta_1\} \\ &\vdots \\ \alpha_p &= \min\{n \in \mathbb{N} : x_n \in \{y_n : n > \beta_{p-1}\}\} \text{ et } \beta_p = \max\{n \in \mathbb{N} : x_{\alpha_p} = y_n, n > \beta_{p-1}\} \end{aligned}$$

Tous les sous-ensembles $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in \{y_n : n > \beta_{p-1}\}\}$ ne sont pas vides, car $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas fini. Alors, clairement, cette suite (y_{β_n}) est une sous-suite de (y_n) et aussi une sous-suite de $(x_n)_n$. Par le lemme 5.2.7, $y_{\beta_n} \xrightarrow{\mathcal{I}} x$ car $x_n \xrightarrow{\mathcal{I}} x$. Ainsi, A est un sous-ensemble séquentiellement $\mathcal{I}$ -compact de X . $\square$

Dans [90], A. J. Insel a montré qu'un espace à base dénombrable de voisinages X est séparé si et seulement si, chaque sous-ensemble compact de X est fermé. Cette équivalence n'est pas valable pour les espaces non dénombrables comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 5.2.9. Prenons la même hypothèse que dans l'exemple 5.2.3. On a vu que X n'est pas séparé. Observons ensuite que les seuls sous-ensembles compacts de X sont les sous-ensembles finis. Pour cela, soit K un sous-ensemble infini quelconque de X , alors, il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments distincts de K . Pour chaque entier positif n , on définit $U_n = X \setminus \{x_j : j > n\}$; alors la famille $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ est un recouvrement d'ouverts de K qui n'admet pas de sous-recouvrement fini. Comme tout sous-ensemble fini de X est dénombrable et donc fermé. Ainsi, tout sous-ensemble compact de X est fermé.

Théorème 5.2.10. *Soit (X, τ) un espace topologique. Alors, X admet des $\mathcal{I}$ -limites uniques des suites si et seulement si, tout sous-ensemble séquentiellement $\mathcal{I}$ -compact de X est $\mathcal{I}$ -fermé.*

Démonstration. Supposons que tout sous-ensemble séquentiellement $\mathcal{I}$ -compact de X est $\mathcal{I}$ -fermé. Supposons, par l'absurde, qu'il existe une suite $(x_n)_n$ de X telle que $x_n \xrightarrow{\mathcal{I}} x$ et $x_n \xrightarrow{\mathcal{I}} y$ avec $x \neq y$. Si $\{n \in \mathbb{N} : x_n = x\}$ ou $\{n \in \mathbb{N} : x_n = y\}$ sont infinis. Alors, la sous-suite constante (x) est une sous-suite de $(x_n)_n$ qui converge vers x et y . Suivant la Proposition 1.3.4, (x) est $\mathcal{I}$ -convergente vers x et y . Comme $\{x\}$ est séquentiellement $\mathcal{I}$ -compact, alors $\{x\}$ est $\mathcal{I}$ -fermé. Donc $\{x\} = \overline{\{x\}}^{\mathcal{I}}$, ce qui contredit le fait que $x \neq y$.

Si $\{n \in \mathbb{N} : x_n = x\}$ et $\{n \in \mathbb{N} : x_n = y\}$ sont finis. Alors, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ de $(x_n)_n$ telle que $x_{\varphi(n)} \neq x$ et $x_{\varphi(n)} \neq y$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $(x_n)_n$ converge vers x et y , alors $(x_{\varphi(n)})$ est convergente vers x et y , alors elle est $\mathcal{I}$ -convergente vers x et y selon la Proposition 1.3.4. Soit $A = \{x_{\varphi(n)} : n \in \mathbb{N}\}$; conformément au lemme précédent, $A \cup \{x\}$ est séquentiellement $\mathcal{I}$ -compact. Par hypothèse, $A \cup \{x\}$ est $\mathcal{I}$ -fermé, c'est-à-dire que $A \cup \{x\} = \overline{A \cup \{x\}}^{\mathcal{I}}$; il s'ensuit que $y \notin \overline{A \cup \{x\}}^{\mathcal{I}}$ et donc il n'existe pas de suite (y_n) dans $A \cup \{x\}$ telle que $y_n \xrightarrow{\mathcal{I}} y$, ce qui contredit le fait que la suite $(x_{\varphi(n)})$ de A est $\mathcal{I}$ -convergente vers x et y avec $x \neq y$. Ainsi, X admet des $\mathcal{I}$ -limites uniques des suites.

Inversement, supposons que X admet des $\mathcal{I}$ -limites des suites uniques et soit A un sous-ensemble séquentiellement $\mathcal{I}$ -compact de X . Il suffit de montrer que $\overline{A}^{\mathcal{I}} \subset A$. Soit $x \in \overline{A}^{\mathcal{I}}$; conformément à la propriété $\mathcal{I}$ -Fréchet-Urysohn, il existe une suite $(x_n)_n$ de A telle que $x_n \xrightarrow{\mathcal{I}} x$. Puisque A est séquentiellement $\mathcal{I}$ -compact, alors toute suite de A admet une sous-suite $\mathcal{I}$ -convergente qui est convergente vers un point dans A . Par unicité de la $\mathcal{I}$ -limite, on a $x \in A$. Donc A est $\mathcal{I}$ -fermé. $\square$

Corollaire 5.2.11. *Soient $\mathcal{I}$ un idéal maximal et X un espace à base dénombrable de voisinages. Alors X est $\mathcal{I}$ -séparé, si et seulement si, chaque sous-ensemble séquentiellement $\mathcal{I}$ -compact de X est $\mathcal{I}$ -fermé.*

Démonstration. Soit X un espace à base dénombrable de voisinages. Comme $\mathcal{I}$ est un idéal maximal admissible, alors selon le théorème 5.2.4, le théorème 5.2.6 et la proposition 5.2.1, X est $\mathcal{I}$ -séparé si et seulement si, X admet des points $\mathcal{I}$ -limites uniques. Donc, suivant le théorème précédent, X est $\mathcal{I}$ -séparé si et seulement si, chaque sous-ensemble séquentiellement $\mathcal{I}$ -compact de X est $\mathcal{I}$ -fermé. $\square$

Lemme 5.2.12. *Soient X et Y deux espaces topologiques. Alors X et Y sont séquentiellement $\mathcal{I}$ -compacts si et seulement si, $X \times Y$ l'est.*

Démonstration. Supposons que X et Y soient séquentiellement $\mathcal{I}$ -compacts. Si (x_n, y_n) est une suite de $X \times Y$, alors il existe une sous-suite (x_{n_k}) de $(x_n)_n$ qui est $\mathcal{I}$ -convergente vers x dans X . Pour la suite (y_{n_k}) , il existe également une sous-suite (y_{n_j}) qui est $\mathcal{I}$ -convergente vers y dans Y . Puisque (x_{n_j}) est une sous-suite de (x_{n_k}) , elle est également $\mathcal{I}$ -convergente vers x . Ainsi, $(x_{n_j}, y_{n_j}) \xrightarrow{\mathcal{I}} (x, y)$.

Inversement, Soient $p_X : X \times Y \rightarrow X$ et $p_Y : X \times Y \rightarrow Y$ les deux projections sur $X \times Y$. Par le théorème 5.1.9, $p_X(X \times Y)$ et $p_Y(X \times Y)$ sont séquentiellement $\mathcal{I}$ -compacts, c'est-à-dire, X et Y sont séquentiellement $\mathcal{I}$ -compacts. $\square$

Théorème 5.2.13. *Soient (X, τ) un espace topologique et $\mathcal{I}$ un idéal maximal. Si X est $\mathcal{I}$ -séparé, alors l'ensemble diagonal de $X \times X$ est $\mathcal{I}$ -fermé.*

Démonstration. Soient (X, τ) un espace topologique $\mathcal{I}$ -séparé, $\mathcal{I}$ un idéal maximal et Δ l'ensemble diagonal de $X \times X$. Par le théorème 5.2.4, X a des $\mathcal{I}$ -limites uniques des suites. Supposons, par l'absurde, que Δ n'est pas $\mathcal{I}$ -fermé. Alors il existe une suite (x_n, x_n) de Δ qui est $\mathcal{I}$ -convergente vers (x, y) avec $(x, y) \notin \Delta$, c'est-à-dire $x_n \xrightarrow{\mathcal{I}} x$ et $x_n \xrightarrow{\mathcal{I}} y$ tels que $x \neq y$, ce qui contredit le fait que X possède des $\mathcal{I}$ -limites uniques des suites. Ainsi, Δ est $\mathcal{I}$ -fermé. $\square$

Théorème 5.2.14. *Soit (X, τ) un espace topologique. Si l'ensemble diagonal de $X \times X$ est $\mathcal{I}$ -fermé, alors X possède des $\mathcal{I}$ -limites uniques des suites.*

Démonstration. Soit Δ l'ensemble diagonal de $X \times X$. Supposons, par l'absurde, qu'il existe une suite $(x_n)_n$ de X telle que $x_n \xrightarrow{\mathcal{I}} x$ et $x_n \xrightarrow{\mathcal{I}} y$ avec $x \neq y$. Alors (x_n, x_n) $\mathcal{I}$ -converge vers (x, y) avec $(x, y) \notin \Delta$, ce qui contredit le fait que Δ est $\mathcal{I}$ -fermé. Ainsi, X possède des $\mathcal{I}$ -limites uniques des suites. $\square$

Théorème 5.2.15. *Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ et $g : X \rightarrow Y$ deux applications séquentiellement $\mathcal{I}$ -continues. Si Y est $\mathcal{I}$ -séparé, alors $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ est $\mathcal{I}$ -fermé.*

Démonstration. Supposons, par l'absurde, que A n'est pas $\mathcal{I}$ -fermé. Alors conformément à la propriété $\mathcal{I}$ -Fréchet-Urysohn, il existe une suite $(x_n)_n$ de A qui est $\mathcal{I}$ -convergente vers x avec $x \notin A$. Comme $f : X \rightarrow Y$ et $g : X \rightarrow Y$ sont séquentiellement $\mathcal{I}$ -continues, alors $f(x_n) \rightarrow f(x)$ et $g(x_n) \rightarrow g(x)$. Selon le théorème 5.2.4, X admet des $\mathcal{I}$ -limites uniques des suites, par conséquent $f(x) = g(x)$ et $x \in A$, ce qui n'est pas le cas. Ainsi A est $\mathcal{I}$ -fermé. $\square$

Lemme 5.2.16. [178, Théorème 4.2] *Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application. Si f est continue, alors f est séquentiellement $\mathcal{I}$ -continue.*

Théorème 5.2.17. *Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ et $g : X \rightarrow Y$ deux applications séquentiellement $\mathcal{I}$ -continues. Si $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ est $\mathcal{I}$ -fermé, alors Y admet des $\mathcal{I}$ -limites uniques des suites.*

Démonstration. Nous remplaçons X par $Y \times Y$, et nous remplaçons f et g par les deux projections continues sur $Y \times Y$, qu'elles sont aussi séquentiellement $\mathcal{I}$ -continues suivant le lemme précédent. Alors, $\{(x, y) \in Y \times Y : f(x) = g(y)\}$ est le sous-ensemble diagonal de $Y \times Y$, qui est $\mathcal{I}$ -fermé par hypothèse. Par conséquent Y admet des $\mathcal{I}$ -limites uniques des suites, par le théorème 5.2.14. $\square$

Deuxième partie

Bornologie et dualité dans une topologie $\mathbb{K}$ -vectorielle séquentielle

INTRODUCTION

Dans [166], Venkataramen a posé le problème de la caractérisation de « la classe des espaces topologiques qui peuvent être déterminés complètement par la connaissance de leurs suites convergentes ». Plusieurs auteurs ont mis en évidence une solution basée sur le concept d'espaces séquentiels. Dans [63] et [64] Franklin a révélé quelques propriétés des espaces séquentiels et des espaces de Fréchet-Urysohn et des exemples intéressants. Ensuite, Snipes dans [154], a étudié une nouvelle classe d'espaces appelée espaces T -séquentiels et leurs relations avec les espaces séquentiels. Dans [24], Boone et Siwiec ont donné une caractérisation des espaces séquentiels par des applications quotients séquentiels. Dans [31], Cueva et Vinagre ont étudié les espaces K - c -séquentiels et les espaces K - s -bornologiques et ont adapté les résultats établis par Snipes en utilisant des applications linéaires. Puis, Katsaras et Benekas, dans [94], partant d'un espace vectoriel topologique ($t.v.s.$) (E, τ) , ont construit, la plus fine des topologies sur E ayant les mêmes suites convergentes que τ , et la plus fine des topologies sur E ayant les mêmes précompacts que τ , en utilisant le concept des chaînes (cette étude est une généralisation de l'étude menée par Weeb [171] dans le cas des espaces localement convexes). Dans [60], Ferrer, Morales et Ruiz, ont reproduit les travaux précédents en introduisant le concept de la topologie séquentielle maximale. Goreham, dans [77], a mené une étude liant la séquentialité avec les sous-ensembles dénombrables dans un espace topologique.

Dans leurs travaux, R.M. Dudley [53], J. H. Webb [171] et A. El. Amrani [56] ont prouvé la stabilité $(\tau \times \tau)^s = \tau^s \times \tau^s$ pour une topologie localement convexe sur un corps valué $\mathbb{K}$ (archimédien ou non-archimédien) qui nous ont permis d'avoir la $(\tau^s \times \tau^s) - \tau^s$ -continuité de l'application addition $A : E \times E \rightarrow E$, et aussi la $(\tau_{\mathbb{K}}^s \times \tau^s) - \tau^s$ -continuité de l'application multiplication par scalaire $M : \mathbb{K} \times E \rightarrow E$, où $\tau_{\mathbb{K}}^s = \tau_{\mathbb{K}}$ est la topologie du corps des scalaires $\mathbb{K}$ ($(\mathbb{K}, |.|)$ est un espace vectoriel topologique métrisable, il est donc séquentiel). Mais Dans le cas d'une topologie quelconque, M.Babahmed [17] a prouvé que $\tau^s \times \tau^s \leq (\tau \times \tau)^s$.

De plus, R. F. Snipes [157] a donné une version séquentielle du théorème de Hahn-Banach pour un espace vectoriel topologique S -localement convexe sur le corps des réel ou des complexes en utilisant des notions simples de convergence séquentielle. Il a obtenu

une forme géométrique de ce théorème au moyen des ensembles convexes séquentiellement ouverts et des hyperplans affines séquentiellement fermés. Comme les espaces vectoriels topologiques localement convexes qui ont la propriété : tout voisinage ouvert de zéro contient un voisinage ouvert convexe de zéro, sont les espaces vectoriels topologiques les plus utiles et les plus importants. Snipes a défini la notion d'espace vectoriel topologique localement convexe séquentiel (*S-Local Convex Topological Vector Space*) comme espace vérifiant la propriété : tout voisinage de zéro séquentiellement ouvert contient un voisinage de zéro convexe séquentiellement ouvert.

Nous allons rappeler, dans le huitième chapitre, des préliminaires comportant des définitions et résultats fondamentaux pour les autres chapitres. Dans le neuvième chapitre nous étudions la stabilité de la topologie séquentielle en passant à la topologie $\mathbb{K}$ -vectorielle séquentielle et aussi la stabilité de la $\mathbb{K}$ -convexité locale. Pour cela, nous démontrons l'inégalité $\tau^s \times \tau^s \geq (\tau \times \tau)^s$. En utilisant les propriétés de cette topologie séquentielle nous prouvons quelques résultats, notamment la caractérisation de la fermeture séquentielle du noyau d'une forme linéaire, la séquentialité de la somme d'un sous-espace séquentiel fermé et d'un sous-espace de dimension finie. Également nous établissons la version géométrique du théorème de Hahn-Banach pour une topologie $\mathbb{K}$ -vectorielle non-archimédienne séquentielle en utilisant les résultats de W. H. Schikhof [151].

Dans [56] A. El amrani a examiné, pour un espace localement $\mathbb{K}$ -convexe E dans le cas non-archimédien, la topologie séquentielle localement $\mathbb{K}$ -convexe la plus fine sur E ayant les mêmes suites convergentes que la topologie d'origine. Dans le chapitre dix, nous poursuivons cette étude en caractérisant les espaces séquentiels bornologiques et la limite inductive des espaces séquentiels. De plus, nous étudions l'équicontinuité et la dualité dans les espaces séquentiels. Nous tenons à préciser qu'il y a une grande différence entre un espace séquentiel et un espace des suites. Ces espaces ont été étudiés dans [25] et [78] dans le cas classique ou dans [45],[3] et [4] dans le cas non-archimédien.

CHAPITRE 6

PRÉLIMINAIRES

Dans toute cette partie, $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ est un corps valué non-archimédien (n.a) à valeur absolue non triviale, et son anneau de valuation $B(0, 1) = \{\lambda \in K : |\lambda| \leq 1\}$. On sait qu'il existe $\varrho \in \mathbb{R}$ avec $\varrho > 1$ tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ il existe $\lambda_n \in \mathbb{K}$ vérifiant $|\lambda_n| = \varrho^n$, voir [165, p.251]. Le corps $\mathbb{K}$ est dit sphériquement complet si toute suite décroissante de boules fermées de $\mathbb{K}$ admet une intersection non vide. Pour les notions et propriétés de bases concernant les $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels topologiques, nous renvoyons le lecteur à [150] et [168] et celles concernant les espaces localement $\mathbb{K}$ -convexes, nous renvoyons le lecteur à [121] ou [165] si $\mathbb{K}$ est sphériquement complet et à [150] si $\mathbb{K}$ n'est pas sphériquement complet. Cependant, nous rappelons ce qui suit :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et A un sous-ensemble non vide de E .
 A est dit $\mathbb{K}$ -convexe si et seulement si, pour tout $(x, y, z) \in A^3$ et tout $(\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{K}^3$ tels que $|\lambda| \leq 1$, $|\mu| \leq 1$, $|\gamma| \leq 1$ et $\lambda + \mu + \gamma = 1$, on a $\lambda x + \mu y + \gamma z \in A$.
 A est dit absolument $\mathbb{K}$ -convexe si et seulement si, pour tout $(x, y) \in A^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tels que $|\lambda| \leq 1$, $|\mu| \leq 1$, on a $\lambda x + \mu y \in A$. L'enveloppe absolument $\mathbb{K}$ -convexe $\Gamma(A)$ de A est le plus petit ensemble absolument $\mathbb{K}$ -convexe qui contient A . Si A est un ensemble fini, $A = \{x_1, \dots, x_n\}$, on écrit parfois $\Gamma(x_1, \dots, x_n)$ au lieu de $\Gamma(A)$. Une topologie sur un espace $\mathbb{K}$ -vectoriel E est dite localement $\mathbb{K}$ -convexe (*lKcs*) s'il existe dans E un système fondamental de voisinages de zéro constitué de sous-ensembles absolument $\mathbb{K}$ -convexes de E .

Soit E un espace localement $\mathbb{K}$ -convexe muni d'une topologie τ . Nous désignons par E' , E^* , $\sigma(E, E')$ et $\sigma(E', E)$ le dual topologique, le dual algébrique, la topologie faible sur E et la topologie faible sur E' respectivement. Nous désignons également par $\mathcal{P}_E$ (ou par $\mathcal{P}$ s'il n'y pas de confusion) un ensemble de semi-normes déterminant la topologie τ de E . Nous supposons toujours que (E, τ) est un espace de Hausdorff. Si A est un sous-ensemble de E , nous désignons par $[A]$ le sous-espace vectoriel de E engendré par A . Nous remarquons ici que si A est absolument $\mathbb{K}$ -convexe, alors $[A] = \mathbb{K}A$. On désigne par p_A la fonction de Minkowski sur $[A]$ pour A un sous-ensemble de E absolument $\mathbb{K}$ -convexe, c'est-à-dire si $x \in [A]$, $p_A(x) = \inf \{|\lambda| : x \in \lambda A\}$. Si A est borné, alors p_A est une norme

sur $[A]$. On note alors par E_A l'espace $[A]$ muni de la norme p_A . Un sous-ensemble A d'un espace localement $\mathbb{K}$ -convexe E est dit totalement C -borné si et seulement si, pour chaque voisinage U de 0 il existe $x_1, x_2, \dots, x_n$ de E tels que $A \subset U + \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Soit $\langle, \rangle$ une dualité entre E et F où E et F sont deux espaces $\mathbb{K}$ -vectoriels (voir [2] pour plus de détails), si A est un sous-ensemble de E , le polaire de A est le sous-ensemble de F défini par $A^\circ = \{y \text{ dans } F / (\text{pour tout } x \text{ dans } A) |\langle x, y \rangle| \leq 1\}$. Nous définissons également le polaire d'un sous-ensemble B de F de la même manière. Un sous-ensemble A de E est dit polaire si $A^{\circ\circ} = A$ ($A^{\circ\circ}$ est la bipolaire de A). Une semi-norme continue p sur E est dite une semi-norme polaire si et seulement si, le voisinage de zéro correspondant $B_p(0, 1) = \{x \in E : p(x) \leq 1\}$ est un ensemble polaire. L'espace E est dit polaire s'il existe $\mathcal{P}_E$ tel que pour tout $p \in \mathcal{P}_E$, p est polaire. Si E est un espace polaire, alors la topologie faible $\sigma(E, E')$ est de Hausdorff [150, Proposition 5.6]. Dans ce cas, nous avons un couple dual (E, E') . La valeur de la forme bilinéaire sur $E \times E'$ (et de même sur $E' \times E$) est notée par $\langle x, a \rangle$, $x \in E$, $a \in E'$. Pour plus d'informations sur les polaires et les espaces polaires voir [150]. Si E est un espace polaire et p est une semi-norme continue sur E , on note par E_p l'espace vectoriel $E/\text{Ker}(p)$ et par π_p la surjection canonique $\pi_p : E \longrightarrow E_p$. L'espace E_p est un espace normé dont la norme est définie par $(\forall x \in E) \quad \|\pi_p(\bar{x})\|_p = p(x)$. Sa boule unité est $\pi_p(U)$, où $U = \{x \in E : p(x) \leq 1\}$. Son complété est noté par $\widehat{E_p}$.

Definitions 6.0.1. [56]

1. Soient E un espace localement $\mathbb{K}$ -convexe et V un sous-ensemble de E .
 V est dit voisinage séquentiel (S -voisinage) de 0 si chaque suite nulle de E se trouve éventuellement dans V , c'est-à-dire : $(\forall (x_n)_n \in C_0) (\exists N_0 \in \mathbb{N}) : (\forall n \geq N_0), x_n \in V$.
2. Un espace localement $\mathbb{K}$ -convexe E est dit espace séquentiel si tout voisinage $\mathbb{K}$ -convexe séquentiel de 0 est un voisinage de 0.

Remarque 6.0.2. [56] Tout voisinage séquentiel de 0 est absorbant et contient 0.

On note par $\mathcal{U}$ l'ensemble des voisinages séquentiels $\mathbb{K}$ -convexes de zéro dans (E, τ) et par $\mathcal{V}$ l'ensemble des voisinages de zéro $\mathbb{K}$ -convexes dans (E, τ) , polaires et séquentiels. Par conséquent $\mathcal{U}$ est une base de voisinages de zéro pour une topologie localement $\mathbb{K}$ -convexe sur E notée τ^s et $\mathcal{V}$ est une base de voisinages de zéro pour une topologie localement $\mathbb{K}$ -convexe sur E notée τ^{ps} . On rappellera que τ^s est toujours plus fine que τ ($\tau \leq \tau^s$), puisque tout voisinage de zéro est un voisinage séquentiel de zéro [56].

Proposition 6.0.3. [56] Si V est un sous-ensemble absolument $\mathbb{K}$ -convexe et absorbant d'un espace E localement $\mathbb{K}$ -convexe, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) V est un S -voisinage de 0 ;
- (ii) p_V est séquentiellement continue, où p_V est la fonctionnelle de Minkowski associée à V .

Proposition 6.0.4. [56] Pour un espace localement $\mathbb{K}$ -convexe E , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) E est un espace séquentiel ;
- (ii) Toute semi-norme séquentiellement continue sur E est continue ;
- (iii) Pour tout espace F localement $\mathbb{K}$ -convexe, toute application linéaire séquentiellement continue de E dans F est continue ;
- (iv) Pour tout espace F de Banach, toute application linéaire séquentiellement continue de E dans F est continue.

Soient (E, τ) un espace localement $\mathbb{K}$ -convexe et $\mathcal{P}_s$ la famille des semi-normes *n.a* séquentiellement τ -continues sur E . $\mathcal{P}_s$ définit une topologie $\mathbb{K}$ -convexe sur E notée T^s . Une base de voisinages de 0 pour T^s est constituée par les boules $B_p(0, \varepsilon)$ où $\varepsilon > 0$ et p est une semi-norme *n.a* séquentiellement τ -continue. L'ensemble $B_p(0, \varepsilon)$ est un voisinage séquentiel de 0, car pour toute suite $(x_n)_n$ convergente vers zéro dans (E, τ) , il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $(n \geq n_0)$, $p(x_n) < \varepsilon$ ($p(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$).

Remarque 6.0.5. [56] La topologie T^s est séquentielle.

Proposition 6.0.6. [56] La topologie τ^s est la moins fine de toutes les topologies séquentielles localement $\mathbb{K}$ -convexes sur E plus fines que τ .

Proposition 6.0.7. [56] τ est séquentielle si et seulement si, $\tau = \tau^s$.

Lemme 6.0.8. [56] Pour toute suite $(x_n)_n$ de (E, τ) , $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ pour $\tau \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ pour τ^s .

Lemme 6.0.9. [56] Supposons que ϱ est une topologie localement $\mathbb{K}$ -convexe sur E telle que pour toute suite nulle pour τ est une suite nulle pour ϱ , alors $\tau^s \geq \varrho$.

Proposition 6.0.10. [56] τ^s est la topologie localement $\mathbb{K}$ -convexe la plus fine sur E ayant les mêmes suites convergentes que τ .

Remarque 6.0.11. [56] τ^s est aussi la topologie la plus fine sur E ayant les mêmes suites nulles que τ .

Lemme 6.0.12. [56] Soient (E, τ) un espace localement $\mathbb{K}$ -convexe et A un sous-ensemble de E alors, A est τ -borné si et seulement si, pour toute suite nulle $(\lambda_n)_n$ de $\mathbb{K}$ et toute suite $(x_n)_n$ de A ; la suite $(\lambda_n x_n)_n$ converge vers zéro dans (E, τ) c'est-à-dire que $(\lambda_n x_n)_n$ est une suite nulle de (E, τ) .

Proposition 6.0.13. [56] Soit (E, τ) un espace localement $\mathbb{K}$ -convexe, alors τ et τ^s ont les mêmes sous-ensembles bornés.

Proposition 6.0.14. [56] Soit (F, τ') un espace localement $\mathbb{K}$ -convexe et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire, alors : f est τ^s -continue si et seulement si, f est séquentiellement τ -continue.

Lemme 6.0.15. [56] Pour tout U de $\mathcal{U}$, p_U est une semi-norme *n.a* séquentiellement τ -continue.

Proposition 6.0.16. [56] $\tau^s = T^s$.

Lemme 6.0.17. [56] *Supposons que $\mathbb{K}$ soit sphériquement complet et A soit un sous-ensemble de E absolument $\mathbb{K}$ -convexe et τ -fermé, alors :*

1. *Si $\mathbb{K}$ est discret, alors $A^{\circ\circ} = A$.*
2. *Si $\mathbb{K}$ est dense, alors $(\forall \alpha \in \mathbb{K}), |\alpha| > 1, A^{\circ\circ} \subset \alpha A$, où $A^{\circ\circ}$ est le bipolaire de A par rapport à la dualité $\langle E, E' \rangle$.*

Lemme 6.0.18. [56] *Si $\mathbb{K}$ est sphériquement complet, alors τ^{ps} est une topologie séquentielle.*

Proposition 6.0.19. [56] *Si $\mathbb{K}$ est sphériquement complet, alors $\tau^{ps} \geq \tau$.*

Remarque 6.0.20. [56] *Si $\mathbb{K}$ est sphériquement complet, alors $\tau^{ps} \geq \tau$; mais τ^s est la moins fine de toutes les topologies séquentielles localement $\mathbb{K}$ -convexes plus fines que τ et puisque τ^{ps} est séquentiel, alors $\tau^{ps} \geq \tau^s$, et donc $\tau^{ps} = \tau^s$.*

Proposition 6.0.21. [56] *Soit (E, τ) un espace localement $\mathbb{K}$ -convexe. Alors τ^{ps} est la plus fine de toutes les topologies polaires localement $\mathbb{K}$ -convexes δ sur E telles que toute suite sur E qui est τ -convergente est δ -convergente.*

Corollaire 6.0.22. [56] *Si τ est polaire, alors $\tau^{ps} \geq \tau$, τ^{ps} et τ ont les mêmes suites convergentes.*

Lemme 6.0.23. [56] *Soient p une semi-norme n.a sur E , $A = \{x \in E : p(x) < 1\}$ et $B = \{x \in E : p(x) \leq 1\}$. Alors $A^\circ = B^\circ$.*

Proposition 6.0.24. [56] *τ^{ps} coïncide avec la topologie localement $\mathbb{K}$ -convexe engendrée par toutes les semi-normes n.a séquentiellement τ -continues et polaires.*

Proposition 6.0.25. [56] *τ^{ps} est la plus fine de toutes les topologies polaires localement $\mathbb{K}$ -convexes qui sont moins fines que τ^s .*

Lemme 6.0.26. [56] *Soient E et F deux espaces localement $\mathbb{K}$ -convexes et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue, alors pour tout sous-ensemble V de F , si V est polaire dans F , $f^{-1}(V)$ est polaire dans E .*

Proposition 6.0.27. [56] *Soit (E, τ) et (F, τ_1) deux espaces localement $\mathbb{K}$ -convexes. Si $f : (E, \tau) \longrightarrow (F, \tau_1)$ est une application linéaire continue, alors f est (τ^s, τ_1^s) -continue et (τ^{ps}, τ_1^{ps}) -continue.*

Proposition 6.0.28. [56] *Soit $(E, \tau) = \prod_{k=1}^n (E_k, \tau_k)$, alors :*

- (i) $\tau^s = \prod_{k=1}^n \tau_k^s$;
- (ii) $\tau^{ps} = \prod_{k=1}^n \tau_k^{ps}$.

CHAPITRE 7

SUR LA TOPOLOGIE $\mathbb{K}$ -VECTORIELLE SÉQUENTIELLE

La topologie produit est une topologie projective par rapport à l'ensemble des applications projections, on a le raffinement suivant :

Théorème 7.0.1 (Théorème 4.2 [17]). *Soit Z un espace produit d'un espace topologique (X, τ) . Alors $\tau^s \times \tau^s \times \dots \times \tau^s \leq (\tau \times \tau \times \dots \tau)^s$.*

Le raffinement du théorème précédent peut être strict, comme le montre les deux exemples suivants.

Exemple 7.0.2. Soient ω le premier ordinal infini et Ω le premier ordinal non dénombrable. Considérons l'espace ordinal $X = [0, \omega] \times [0, \Omega]$ muni de la topologie d'ordre produit $\tau_\omega \times \tau_\Omega$. D'une part la suite $(n, \Omega)_n$ est convergente vers (ω, Ω) , donc le point $(\omega, \Omega) \notin (\tau_\omega \times \tau_\Omega)^s$ parce que $(\omega, \Omega)^c$ n'est pas $(\tau_\omega \times \tau_\Omega)^s$ -fermé, puisque $(n, \Omega)_n \subset (\omega, \Omega)^c$ et $(n, \Omega)_n \rightarrow (\omega, \Omega) \notin (\omega, \Omega)^c$. Donc pour $X' = X \setminus \{(n, \Omega) : n < \omega\}$, $(\omega, \Omega) \notin (\tau_\omega \times \tau_\Omega)^s_{/X'}$. D'autre part, dans le sous-espace X' , le point $(\omega, \Omega) \in (\tau_\omega^s \times \tau_\Omega^s)_{/X'}$ puisque aucune suite de X' ne peut converger vers (ω, Ω) , donc

$$(\tau_\omega^s \times \tau_\Omega^s)_{/X'} < (\tau_\omega \times \tau_\Omega)^s_{/X'}.$$

Exemple 7.0.3. Soit $X = \mathbb{R}^{[0,1]}$ muni de la topologie produit, que nous notons tout simplement ici τ . Soit $B_0 = C([0; 1])$ le sous-espace de $\mathbb{R}^{[0;1]}$ de toutes les applications continues $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et B_1 le sous-espace de $\mathbb{R}^{[0;1]}$ de toutes les applications $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ avec un nombre au plus dénombrable de points de discontinuité. La fonction $\phi = 1_{[0;1] \cap \mathbb{Q}}$ admet un nombre non dénombrable de points de discontinuité, donc $\phi \notin B_1$. Pour tout sous-ensemble fini A dans $[0; 1]$, $1_A \in B_1$. Soient $(r_i)_{i \in I}$ l'ensemble des rationnels dans $[0; 1]$, $A_n = \{r_i : 1 \leq i \leq n\}$ pour tout $n > 1$ et $\phi_n = 1_{A_n} \subset B_1$, alors $\phi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n$. Soit $Y = B_0 \cup \phi$ un sous-ensemble de X . Puisque B_0 est $(\tau_Y)^s$ -fermé dans Y , donc ϕ est $(\tau_Y)^s$ -ouvert. Mais ϕ n'est pas τ_Y^s -ouvert, car ce n'est pas une restriction d'un τ^s -ouvert dans X , puisque le complément dans X du singleton $\{\phi\}$ n'est pas τ^s -fermé. D'où $(\tau_Y)^s < \tau_Y^s$.

Pour un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel topologique, on a le théorème de stabilité suivant.

Théorème 7.0.4. *Soit (E, τ) un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel topologique, alors $\tau^s \times \tau^s = (\tau \times \tau)^s$.*

Démonstration. Par le théorème précédent, $\tau^s \times \tau^s \leq (\tau \times \tau)^s$ est toujours vérifiée. Inversement, soit $j_k : (E, \tau) \rightarrow (E \times E, \tau \times \tau)$ ($k = 1, 2$) l'injection canonique continue, donc j_k est séquentiellement continue. Suivant le théorème 1.2.4 j_k est $\tau^s - (\tau \times \tau)^s$ -continue. Soit V un $(\tau \times \tau)^s$ -voisinage de zéro, ainsi l'existence de $V_k = j_k^{-1}(V) \in \tau^s$. Montrons que $V_1 \times V_2 \subset V$; Sinon, il existe $(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2$ et $(x_1, x_2) \notin V$. Alors $(x_1, x_2) \in V^C$, ensuite $x_k \in j_k^{-1}(V^C) = (j_k^{-1}(V))^C = (V_k)^C$, ce qui contredit le fait $x_k \in V_k$. D'où la stabilité $\tau^s \times \tau^s = (\tau \times \tau)^s$. $\square$

En utilisant le théorème de stabilité précédent, on obtient le résultat suivant.

Théorème 7.0.5. *Soit (E, τ) un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel topologique alors (E, τ^s) est aussi un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel topologique.*

Démonstration. Selon la stabilité précédente, on a également $\tau_{\mathbb{K}}^s \times \tau^s = (\tau_{\mathbb{K}} \times \tau)^s$.

Puisque (E, τ) est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel topologique, alors l'application d'addition $A : E \times E \rightarrow E$ est $(\tau \times \tau) - \tau$ -continue, et l'application de multiplication par un scalaire $M : \mathbb{K} \times E \rightarrow E$ est aussi $(\tau_{\mathbb{K}} \times \tau) - \tau$ -continue, donc A et M sont séquentiellement continues. Ainsi, suivant le théorème 1.2.4 A est $(\tau \times \tau)^s - \tau^s$ -continue et M est $(\tau_{\mathbb{K}} \times \tau)^s - \tau^s$ -continue. Par conséquent, par le théorème de stabilité précédent, A est $(\tau^s \times \tau^s) - \tau^s$ -continue et M est $(\tau_{\mathbb{K}}^s \times \tau^s) - \tau^s$ -continue. D'où, (E, τ^s) est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel topologique qui admet un système fondamental de voisinage de zéro selon [148, théorème 1.2]. $\square$

Remarque 7.0.6. Soit W un τ^s -voisinage de zéro de E , par l'application M de démonstration précédente, il existe U un τ^s -voisinage de zéro et un $\epsilon > 0$ tels que $\lambda U \subset W$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, et $|\lambda| \leq \epsilon$. Posons $V = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq \epsilon} \{\lambda U\}$; c'est un τ^s -voisinage de zéro contenu dans W qui est équilibré. Donc, l'ensemble des τ^s -voisinages de zéro équilibrés constitue une base de τ^s -voisinages de zéro.

Définition 7.0.7. *Soit A un sous-ensemble de E , on considère les notations suivantes :*

$$\overline{A} = \{x \in E / \text{pour tout } V \in v(x), V \cap A \neq \emptyset\}$$

$$\overline{A}^s = \{x \in E / \text{il existe } (x_n)_n \subset A, x_n \rightarrow x\}$$

$$\mathring{A} = \{x \in E / \text{il existe } V \in v(x), V \subset A\}$$

$$\mathring{A}^s = \{x \in E / (\text{pour tout } (x_n)_n \subset E \text{ avec } x_n \rightarrow x), (\text{il existe } N \in \mathbb{N}), (\text{pour tout } n > N, x_n \in A)\}$$

$\overline{A}^s$ s'appelle la fermeture séquentielle de A et $\mathring{A}^s$ l'ouverture séquentielle de A .

Proposition 7.0.8. *Soit (E, τ) un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel topologique, A un sous-ensemble de E et τ^s la topologie séquentielle associée à τ . Alors :*

$$\mathring{A} \subset \mathring{A}^s \subset \overline{A}^s \subset \overline{A}.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathring{A}$, alors il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que $V \subset A$. Soit $(x_n)_n \subset E$ avec $x_n \rightarrow x$, donc $\forall U \in \mathcal{V}(x), \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, x_n \in U$. Ensuite, pour $U = V$, $(x_n)_n$ est éventuellement contenue dans V ($\subset A$) ce qui confirme que $x \in \mathring{A}^s$.

Il est évident que $\mathring{A}^s \subset \overline{A}^s$. Maintenant, soit $x \in \overline{A}^s$ puis $\exists (x_n)_n \subset A$ avec $x_n \rightarrow x$. D'où $(\forall V \in \mathcal{V}(x)), (\exists N \in \mathbb{N}) : (\forall n > N, x_n \in V)$. Ainsi, $A \cap V \neq \emptyset$ c'est-à-dire $x \in \overline{A}$. $\square$

Notons que si A est τ -fermé alors A est τ^s -fermé (parce que $\tau \leq \tau^s$) alors $\overline{A}^s = A = \overline{A} = (\overline{A})^s$ (la fermeture séquentielle de la fermeture de A).

Proposition 7.0.9. *Soient (E, τ) un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel topologique, τ^s sa topologie séquentielle. Soit A un sous-ensemble non vide de E , si A est $\mathbb{K}$ -convexe contenant zéro et $\mathring{A}^s \neq \emptyset$, alors $\mathring{A}^s$ est aussi $\mathbb{K}$ -convexe.*

Démonstration. Soient $x \in \mathring{A}^s$ et $U \in v^s(0)$ (τ^s -voisinages de zéro) tels que $x + U \subset A$. Soit $y \in A$, comme $y - x \in A$ (par la $\mathbb{K}$ -convexité de A) et $x + U \subset A$, alors $y + U = y - x + x + U \subset A + y - x$. Par la $\mathbb{K}$ -convexité de A , encore une fois, $A + y - x \subset A$, en conséquence $y + U \subset A$. Comme $y + U$ est τ^s -ouvert voisinage de y , donc $y + U \subset \mathring{A}^s$, c'est-à-dire $y \in \mathring{A}^s$ d'où $A = \mathring{A}^s$. $\square$

Théorème 7.0.10. *Soit (E, τ) un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel topologique localement $\mathbb{K}$ -convexe. Alors (E, τ^s) est aussi un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel topologique localement $\mathbb{K}$ -convexe.*

Démonstration. On a déjà vu que (E, τ^s) est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel topologique. Montrer que (E, τ^s) admet un système fondamental de voisinages $\mathbb{K}$ -convexe de zéro. Soit $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un système fondamental de voisinages $\mathbb{K}$ -convexe de zéro de (E, τ) . Soit W un τ^s -voisinage zéro de E , alors, selon la proposition 10.0.12, $\mathring{W} \subset \mathring{W}^s \subset W$. Comme $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ est un système fondamental $\mathbb{K}$ -convexe de voisinages de zéro de (E, τ) , alors $\exists \alpha \in I$ avec $V_\alpha \subset \mathring{W} \subset \mathring{W}^s \subset W$, donc $\mathring{V}_\alpha^s \subset \mathring{W}^s \subset W$. Puisque $\mathring{V}_\alpha^s$ est $\mathbb{K}$ -convexe par la proposition de précédent, donc $\{\mathring{V}_\alpha^s\}_{\alpha \in I}$ est un système fondamental de voisinages $\mathbb{K}$ -convexe de zéro de (E, τ^s) . $\square$

Proposition 7.0.11. *Soit (E, τ) un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel topologique. Soit $\mathcal{B} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un système fondamental de voisinages de zéro de τ . Alors (E, τ) est séquentiel si, et seulement si pour tous les $\alpha \in I$, $\mathring{V}_\alpha^s = V_\alpha$.*

Démonstration. c'est évident. $\square$

Lemme 7.0.12. *Soient (E, τ) un espace vectoriel topologique sur un corps valué complet $\mathbb{K}$ et M un sous-espace séquentiellement fermé. Pour $e \in E \setminus M$, soit $M' = M \oplus \mathbb{K}e$. Alors on a les deux propriétés suivantes :*

- (i) *Soit (z_n) une suite de M' convergente de E telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = x_n + r_n e$ (avec $x_n \in M$ et $r_n \in \mathbb{K}$). Alors, $(x_n)_n$ est convergente dans M et $(r_n e)$ est convergente dans $\mathbb{K}e$.*
- (ii) *M' est séquentiellement fermé.*

Démonstration. (i) Il suffit d'établir que la suite (r_n) est convergente.

- ◇ Si (z_n) converge vers 0. Alors pour tout $V \in \mathcal{V}(0)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $(\forall n > N)$ $x_n + r_n e \in V$. Supposons que (r_n) n'est pas convergente vers zéro, il existe donc $\epsilon > 0$ et une sous-suite (r_{n_k}) de (r_n) telle que pour tout $k \geq 1$, $|r_{n_k}| \geq \epsilon$. Alors, pour tout $k \geq 1$ et pour tout $V \in \mathcal{V}(0)$, $r_{n_k}(r_{n_k}^{-1}x_{n_k} + e) \in V$ c'est-à-dire pour tout $k \geq 1$ et pour tout $V \in \mathcal{V}(0)$, $(r_{n_k}^{-1}x_{n_k} + e) \in r_{n_k}^{-1}V$; selon le théorème 7.0.5 l'application $E \rightarrow E, x \rightarrow r_{n_k}^{-1}x$ est un $(\tau^s - \tau^s)$ -homéomorphisme, donc $r_{n_k}^{-1}V$ sont des voisinages de zéro. Donc $(r_{n_k}^{-1}x_{n_k} + e)$ converge vers zéro c'est-à-dire

$$r_{n_k}^{-1}x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} -e$$

ce qui contredit l'hypothèse $e \in E \setminus M$ et M est séquentiellement fermé. Ainsi, (r_n) converge vers zéro.

- ◇ (z_n) converge vers $z \neq 0$. Alors, $(z_{n+1} - z_n)$ converge vers 0. Selon le premier cas $(r_{n+1} - r_n)$ converge vers 0. Comme $\mathbb{K}$ est complet, donc (r_n) est convergente.
- (ii) Il découle de (i) puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = x + re \in M'$.

□

Corollaire 7.0.13. Soit (E, τ) un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel topologique sur un corps valué complet $\mathbb{K}$. Si M est un sous-espace τ^s -fermé de E et N est un sous-espace de dimension finie, alors $M + N$ est τ^s -fermé.

Démonstration. On peut supposer que $M \cap N = \{0\}$ (parce que si $M \cap N = N' (\neq \{0\})$ nous considérons l'intersection $M \cap (N \setminus N') = \{0\}$, alors nous ajoutons le sous-espace fini N' à la fin). On écrit $M \oplus N = M \oplus \text{vect}\{e_1, e_2, \dots, e_{\dim N}\}$, le cas $\dim(N) = 1$ est vérifié selon le lemme précédent. Si le résultat est supposé vrai pour $M \oplus N = M \oplus \text{vect}\{e_1, e_2, \dots, e_{\dim(N)-1}\}$, alors par le lemme précédent il est vrai pour $M \oplus N = M \oplus \text{vect}\{e_1, e_2, e_{\dim(N)}\}$, donc $M + N$ est τ^s -fermé par récurrence.

□

Corollaire 7.0.14. Soient (E, τ) un espace vectoriel topologique sur un corps valué complet $\mathbb{K}$ et M un sous-espace séquentiellement fermé. Pour $e \in E \setminus M$, Soit $M' = M \oplus \mathbb{K}e$. Alors, les projections $P_M : M' \rightarrow M$ et $P_e : M' \rightarrow \mathbb{K}e$ sont τ^s -continues.

Démonstration. Soit (z_n) une suite de M' convergeante vers $z \in E$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = x_n + r_n e$ (avec $x_n \in M$ et $r_n \in \mathbb{K}$), donc par le lemme précédent $z = x + re$. Par conséquent, la suite $P_M(z_n) = (x_n)$ converge vers $P_M(z) = x$, et $P_e(z_n) = (r_n e)$ converge vers $P_e(z) = re$.

□

Théorème 7.0.15. Soient (E, τ) un espace vectoriel topologique sur un corps valué complet $\mathbb{K}$ et $f \in E^*$. Alors $\ker(f)$ est τ^s -fermé si et seulement si, f est τ^s -continue.

Démonstration. Considérons l'hyperplan (homogène) $H = \{z \in E; f(z) = 0\} = \ker(f)$. Supposons que H est τ^s -fermé et soit (z_n) une suite de E convergeante vers z . Choisissons $e \in E \setminus H$ de sorte que $f(e) = 1$. Le terme général de la suite (z_n) s'écrit d'une manière unique sous la forme $x_n + r_n e$, tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in H$ et $r_n \in \mathbb{K}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(z_n) = f(x_n + r_n e) = 0 + r_n f(e) = r_n$ ce qui montre que

$f = \psi \circ P_e$, où $\psi: \mathbb{K}e \rightarrow \mathbb{K}$ est un isomorphisme topologique selon le théorème 3.1 [148], P_e est la projection du corollaire 7.0.14. Par conséquent ψ et P_e sont τ^s -continues ; ainsi que f .

Inversement, supposons que f soit τ^s -continue. Si $(x_n)_n$ est une suite de H qui est τ -convergente vers x . Montrons que $x \in H$. La suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$ par hypothèse. Mais, $(f(x_n))$ est la suite nulle, donc $f(x) = 0$, par conséquent $x \in \ker(f) = H$. D'où $\ker(f)$ est τ^s -fermé. $\square$

Corollaire 7.0.16. *Soient (E, τ) un espace vectoriel topologique sur un corps valué complet $\mathbb{K}$, $f \in E^*$ et $H = \{z \in E : f(z) = \alpha\}$ tels que $\alpha \neq 0$. Alors l'hyperplan non homogène H est τ^s -fermé si et seulement si, f est τ^s -continue.*

Démonstration. Considérons l'hyperplan homogène $H_0 = \{z \in E : f(z) = 0\}$. Par le théorème 7.0.15, H_0 est τ^s -fermé si et seulement si, f est τ^s -continue. Par la continuité séquentielle de l'application addition dans la preuve du théorème 7.0.5, H_0 est τ^s -fermé si et seulement si, H est τ^s -fermé. $\square$

Corollaire 7.0.17. *Soient (E, τ) un espace vectoriel topologique sur un corps valué complet $\mathbb{K}$ et M un sous-espace τ^s -fermé de codimension finie dans E . Alors, chaque projection $P : E \rightarrow M$ est τ^s -continue.*

Démonstration. Si M a la codimension n dans E , où $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une base $(e_j)_{1 \leq j \leq n}$ de cardinal n qui engendre un espace complémentaire à M , soit $N = \text{vect}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ un tel espace. Alors $E = M \oplus N = (M \oplus \text{vect}\{e_2, e_3, \dots, e_n\}) \oplus \text{vect}\{e_1\}$. Selon le corollaire 7.0.13, l'espace $M \oplus \text{vect}\{e_2, e_3, \dots, e_n\}$ est τ^s -fermé, d'où par le corollaire 7.0.14 la projection $P_1 : E \rightarrow M \oplus \text{vect}\{e_2, e_3, \dots, e_n\}$ est τ^s -continue. Définissons la projection P_i par induction

$$P_i : (M \oplus \text{vect}\{e_{i+1}, e_{i+2}, \dots, e_n\}) \oplus \text{vect}\{e_i\} \rightarrow M \oplus \text{vect}\{e_{i+1}, e_{i+2}, \dots, e_n\}$$

Puisque la somme $M \oplus \text{vect}\{e_{i+1}, e_{i+2}, \dots, e_n\}$ est toujours τ^s -fermé donc P_i est τ^s -continue Pour tout $1 \leq i \leq n$. $P = P_n \circ P_{n-1} \circ \dots \circ P_1$ est une composition d'applications τ^s -continue qui est également τ^s -continue, ce qui établit le résultat. $\square$

Lemme 7.0.18. *Soient (E, τ) un espace localement $\mathbb{K}$ -convexe sur un corps valué sphériquement complet $\mathbb{K}$, M un sous-espace affine de E et A un sous-ensemble ouvert non vide $\mathbb{K}$ -convexe de E qui ne rencontre pas M . Il existe alors un hyperplan fermé de E , contenant M et ne rencontrant pas A .*

Démonstration. Par hypothèse $A \cap M = \emptyset$, il existe alors $x \in A$ et $x \notin M$. Par le théorème 4.1. 8 [151] il existe $f \in E'$ tel que $f(x) \notin f(M)$. Posons $f(x) = \lambda$, alors $f^{-1}(\{\lambda\}) \cap M = \emptyset$, d'où l'existence d'un hyperplan fermé de E (par continuité de f) $H = f^{-1}(\{\lambda\})$, et par maximalité de H , $M \subset H$ et $H \cap A = \emptyset$. $\square$

Théorème 7.0.19 (Théorème géométrique de Hahn-Banach). *Soit (E, τ) un espace vectoriel topologique sur un corps valué sphériquement complet $\mathbb{K}$ et M un sous-espace affine de E . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) M est contenu dans un hyperplan séquentiellement fermé ;
- (ii) Il existe un sous-ensemble non vide τ^s -ouvert et $\mathbb{K}$ -convexe qui ne rencontre pas M .

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii)

Supposons que $M \subset H$ où $H = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$ avec $f \in E^*$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et H est τ^s -fermé.

$B_{\mathbb{K}}(0, |\alpha|)$ est $\tau_{\mathbb{K}}^s$ -ouvert, parce que $\tau_{\mathbb{K}} = \tau_{\mathbb{K}}^s$. Selon le corollaire 7.0.16, le sous-ensemble $f^{-1}(B_{\mathbb{K}}(0, |\alpha|))$ est une boule τ^s -ouverte. $f^{-1}(B_{\mathbb{K}}(0, |\alpha|))$ est donc un sous-ensemble $\mathbb{K}$ -convexe par l'image inverse d'une application linéaire. On a donc $f^{-1}(B_{\mathbb{K}}(0, |\alpha|)) \cap H = \emptyset$, sinon $f^{-1}(B_{\mathbb{K}}(0, |\alpha|)) \cap f^{-1}(\{\alpha\}) \neq \emptyset$ puis $f^{-1}(B_{\mathbb{K}}(0, |\alpha|) \cap \{\alpha\}) \neq \emptyset$ c'est-à-dire $B_{\mathbb{K}}(0, |\alpha|) \cap \{\alpha\} \neq \emptyset$, ce qui donne $|\alpha| < |\alpha|$ ce qui est une contradiction.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Soit U un sous-ensemble non vide τ^s -ouvert $\mathbb{K}$ -convexe qui ne rencontre pas M . Sans perte de généralité, supposons $0 \in U$ (Si $0 \notin U$, $\forall y \in U$, $0 \in (U - y)$ et $(U - y) \cap (M - y) = \emptyset$), alors U est absolument $\mathbb{K}$ -convexe, absorbant et équilibré.

Soit $\mathcal{N} = \{\lambda U / \lambda \in B_{\mathbb{K}}(0, 1)\}$ un ensemble de sous-ensembles τ^s -ouverts, absolument $\mathbb{K}$ -convexes, absorbants et équilibrés.

Montrons que l'ensemble $\mathcal{N}$ satisfait les hypothèses du théorème 1.2 [148] de la caractérisation de l'espace $\mathbb{K}$ -vectoriel topologique :

- (a) les sous-ensembles de $\mathcal{N}$ sont absolument $\mathbb{K}$ -convexes alors $U + U \subset U$, donc $\lambda U + \lambda U \subset \lambda U$.
- (b) Tous les éléments de $\mathcal{N}$ sont τ^s -ouverts, équilibrés et absorbants.
- (c) Fixons $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ tel que $0 < |\lambda_0| < 1$. Soit $\lambda U \in \mathcal{N}$, Comme λU est équilibré, alors $\lambda_0 \lambda U \in \mathcal{N}$.

En outre, $\mathcal{N}$ est une base de voisinages de zéro, car si $U_1, U_2 \in \mathcal{N}$, on a $U_3 \in \mathcal{N}$ avec $U_3 \subset U_1 \cap U_2$.

En fin de compte, l'ensemble $\mathcal{N}$ est un système fondamental de voisinages de zéro d'une topologie localement $\mathbb{K}$ -convexe notée $\mathfrak{T}$. Selon le lemme précédent, il existe un hyperplan $\mathfrak{T}$ -fermé de E contenant le sous-espace affine M . Comme $U \in \tau^s, \mathcal{N} \subset \tau^s$. Alors τ^s est plus fine que $\mathfrak{T}$ et l'hyperplan $\mathfrak{T}$ -fermé est τ^s -fermé, ce qui prouve le résultat. $\square$

Corollaire 7.0.20. *Soit (E, τ) un espace vectoriel topologique sur un corps valué sphériquement complet $\mathbb{K}$. Alors, il existe une forme linéaire non nulle séquentiellement continue sur E si et seulement si, il existe un sous-ensemble non vide τ^s -ouvert propre $\mathbb{K}$ -convexe de E .*

Démonstration. Supposons que $f(\neq 0)$ est une forme linéaire τ^s -continue sur E . L'ensemble $B = \{x \in E : |f(x)| < 1\}$ est clairement un sous-ensemble non vide τ^s -ouvert propre $\mathbb{K}$ -convexe sur E .

Inversement, soit U un sous-ensemble non vide propre τ^s -ouvert et $\mathbb{K}$ -convexe de E . Soit $\mathfrak{T}$ la topologie localement $\mathbb{K}$ -convexe construite à partir de U comme dans la preuve précédente du théorème 7.0.19.

Soit $y \in U^C$. Selon le lemme précédent, il existe un $\mathfrak{T}$ -hyperplan fermé H , qui contient y et ne rencontre pas U . Nous pouvons écrire H sous la forme $H = \{x \in E; f(x) = \alpha\}$, où $f \in E^*$ et $f \neq 0$. Comme H est $\mathfrak{T}$ -fermé, il est τ^s -fermé, et par conséquent f est séquentiellement continue par le théorème 7.0.15. $\square$

Corollaire 7.0.21. Soient (E, τ) un espace vectoriel topologique sur un corps valué sphériquement complet $\mathbb{K}$, F un sous-espace de E et $f : F \rightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire τ^s -continue. Alors, il existe une extension linéaire τ^s -continue $g : E \rightarrow \mathbb{K}$ de f si et seulement si, il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ et un sous-ensemble U non vide τ^s -ouvert et $\mathbb{K}$ -convexe, tel que $U \cap f^{-1}(\{\alpha\}) = \emptyset$.

Démonstration. Supposons qu'il existe une extension linéaire τ^s -continue g de f . Choisissons $\alpha \in \mathbb{K}$, suivant la τ^s -continuité de g , $g^{-1}(\{\alpha\})$ est un hyperplan τ^s -fermé. Selon le théorème 7.0.19, il existe U un sous-ensemble, non vide, τ^s -ouvert et $\mathbb{K}$ -convexe qui ne rencontre pas $g^{-1}(\{\alpha\})$. Mais, $f^{-1}(\{\alpha\}) \subset g^{-1}(\{\alpha\})$, donc $U \cap f^{-1}(\{\alpha\}) = \emptyset$.

Inversement, supposons que U est un sous-ensemble non vide τ^s -ouvert et $\mathbb{K}$ -convexe, de sorte que $U \cap f^{-1}(\alpha) = \emptyset$ pour un $\alpha \in \mathbb{K}$.

Si $\alpha = 0$, $f^{-1}(\{0\})$ est un sous-espace de E et par le théorème 7.0.19 encore une fois, $f^{-1}(\{0\})$ est contenu dans un hyperplan séquentiellement fermé H , qui ne rencontre pas U . Soit $H = \{x \in E : g(x) = \beta\}$. Selon le corollaire 7.0.16, g est τ^s -continue. l'application g induit l'hyperplan $g_{/F}^{-1}(\{\beta\})$ de F . Montrons que $\beta = 0$. Certainement, $g_{/F}^{-1}(\{\beta\})$ est un hyperplan de F qui contient l'hyperplan $f^{-1}(\{0\})$. Alors, $g_{/F}^{-1}(\{\beta\}) = f^{-1}(\{0\})$. Suivant la linéarité de g on a $0 \in g_{/F}^{-1}(\{\beta\})$, ce qui implique que $g(0) = 0$, donc $\beta = 0$ et f est une restriction linéaire de g à F .

Si $\alpha \neq 0$, de la même manière qu'auparavant on a $g_{/F}^{-1}(\{\beta\}) = f^{-1}(\{\alpha\})$ et on sait que $f^{-1}(\{\alpha\}) = f^{-1}(\{0\}) + x_\alpha$, tel que $f(x_\alpha) = \alpha$ et $g_{/F}^{-1}(\{\beta\}) = g_{/F}^{-1}(\{0\}) + x_\beta$, avec $g_{/F}(x_\beta) = \beta$. Comme $g_{/F}^{-1}(\{0\}) = f^{-1}(\{0\})$, alors $x_\alpha - x_\beta \in f^{-1}(\{0\})$ et $x_\beta - x_\alpha \in g_{/F}^{-1}(\{0\})$, par conséquent $f(x_\alpha) = g_{/F}(x_\beta)$ c'est-à-dire $\alpha = \beta$. D'où f est une restriction linéaire de g à F . $\square$

CHAPITRE 8

BORNOLOGIE ET DUALITÉ DANS LES ESPACES SÉQUENTIELS LOCALEMENT $\mathbb{K}$ -CONVEXES

8.1 Espaces polairement bornologiques et topologies inductives séquentielles

On dit que (E, τ) est bornologique si tout ensemble absolument $\mathbb{K}$ -convexe U , qui absorbe tous les ensembles bornés de E , est voisinage de zéro. Dans ce qui suit, nous définissons l'espace polairement bornologique.

Définition 8.1.1. Soit E un espace localement $\mathbb{K}$ -convexe. On dit que E est polairement bornologique (ou simplement P -bornologique) si tout ensemble polaire qui absorbe tout ensemble borné est un voisinage de 0.

Proposition 8.1.2. E est P -bornologique si et seulement si, toute semi-norme $n.a$ polaire qui est bornée sur chaque ensemble borné de E est continue.

Démonstration. Supposons que E est P -bornologique. Soit p une semi-norme $n.a$ polaire qui est bornée sur tout sous-ensemble borné de E . Montrons que $p : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ est continue. Il suffit de montrer que $A = B_p(0, 1)$ est un voisinage de zéro de E . Puisque p est polaire, alors A est polaire [150, Proposition 3.4]. Soit B un sous-ensemble borné de E , alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\sup_{x \in B} p(x) \leq |\lambda|$ ou $\sup_{x \in \frac{1}{\lambda}B} p(x) \leq 1$, d'où $\frac{1}{\lambda}B \subset A$ ou $B \subset \lambda A$. Donc A absorbe B et donc c'est un voisinage de zéro.

Inversement, supposons que toute semi-norme $n.a$, polaire qui est bornée sur les ensembles bornés de E est continue. Soit B un sous-ensemble polaire de E qui absorbe tous les ensembles bornés de E , alors p_B est une semi-norme polaire $n.a$ sur E . Soit D un sous-ensemble borné de E , donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $D \subset \lambda B$. Alors, $\sup_{x \in D} p_B(x) \leq |\lambda|$.

ou p_B est borné sur D . Par conséquent, p_B est borné sur tout ensemble borné de E . Donc p_B est continue de sorte que B est un voisinage de zéro. D'où E est P -bornologique. $\square$

Proposition 8.1.3. *Si (E, τ) est bornologique, alors $\tau = \tau^s$.*

Démonstration. L'inégalité $\tau \leq \tau^s$ est toujours vraie. Soit U un ensemble séquentiel absolument $\mathbb{K}$ -convexe, qui absorbe tous les ensembles τ^s bornés de E . Par la proposition 6.0.13 tout ensemble B , τ^s -borné de (E, τ) est τ -borné. Comme E est bornologique, U est un voisinage de zéro de (E, τ) . Ainsi $\tau \geq \tau^s$. $\square$

Proposition 8.1.4. *Si (E, τ) est P -bornologique, alors $\tau^{ps} \leq \tau$.*

Démonstration. Supposons que (E, τ) est P -bornologique. Soit U un voisinage $\mathbb{K}$ -convexe, séquentiel et polaire de zéro et soit B un sous-ensemble τ -borné de E . Supposons que B n'est pas absorbé par U . Soit $(\lambda_n)_n$ une suite de $\mathbb{K}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\lambda_n| = +\infty$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B \not\subset \lambda_n U$ d'où il existe une suite $(x_n)_n$ de B telle que $x_n \notin \lambda_n U$. Puisque $(\frac{1}{\lambda_n})_n$ converge vers 0 et $(x_n)_n$ est borné, alors $(\frac{1}{\lambda_n} x_n)_n$ converge vers zéro dans (E, τ) et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{\lambda_n} x_n \notin U$ ce qui n'est pas le cas car U est un voisinage séquentiel de zéro. Alors B est absorbé par U qui est donc un voisinage de zéro. Ainsi, $\tau^{ps} \leq \tau$. $\square$

Soient $E, (E_\alpha)_{\alpha \in I}$ des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, $f_\alpha : E_\alpha \rightarrow E$ ($\alpha \in I$) des applications linéaires et τ_α est la topologie localement $\mathbb{K}$ -convexe sur E_α . La topologie inductive sur E relative à la famille $(E_\alpha, \tau_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in I}$ est la topologie localement $\mathbb{K}$ -convexe la plus fine rendant f_α continue pour tout $\alpha \in I$. Notons cette topologie par τ^{ind} . Une base de voisinage de zéro pour τ^{ind} est donnée par les sous-ensembles absorbants, absolument $\mathbb{K}$ -convexes U sur E tels que pour tout $\alpha \in I$, $f_\alpha^{-1}(U)$ est un voisinage de zéro de (E_α, τ_α) .

Théorème 8.1.5. *Soit $(E_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille d'espaces localement $\mathbb{K}$ -convexes, E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille d'applications linéaires. Si pour chaque $\alpha \in I$, E_α est séquentiel, alors E muni de la topologie inductive τ^{ind} est séquentiel.*

Démonstration. Soit V un voisinage $\mathbb{K}$ -convexe et séquentiel de zéro dans (E, τ^{ind}) , alors pour tout $\alpha \in I$, $f_\alpha^{-1}(V)$ est $\mathbb{K}$ -convexe. Soit $(x_n)_n$ une suite qui converge vers zéro dans (E_α, τ_α) où $\alpha \in I$. Alors, la continuité de $f_\alpha : (E_\alpha, \tau_\alpha) \rightarrow (E, \tau^{ind})$ implique que la suite $(f_\alpha(x_n))_n$ converge vers zéro dans (E, τ^{ind}) c'est-à-dire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $f_\alpha(x_n) \in V$, ou encore pour tout $n \geq n_0$, $x_n \in f_\alpha^{-1}(V)$. C'est pourquoi, $f_\alpha^{-1}(V)$ est un voisinage séquentiel de zéro de (E_α, τ_α) de sorte que $f_\alpha^{-1}(V)$ est un voisinage de zéro de (E_α, τ_α) . Alors V est un voisinage de zéro de (E, τ^{ind}) . D'où, (E, τ^{ind}) est séquentiel. $\square$

Corollaire 8.1.6. *L'espace quotient et les espaces somme directe des espaces séquentiels localement $\mathbb{K}$ -convexes sont séquentiels.*

Démonstration. La topologie quotient et la topologie somme directe sont des topologies inductives. $\square$

8.2 Equicontinuité et dualité dans les espaces séquentiels

8.2.1 Equicontinuité et dualité

Définition 8.2.1. Soit (E, τ) un espace localement $\mathbb{K}$ -convexe.

- (i) Soit B un sous-ensemble de E^* , B est dit séquentiellement τ -équicontinu si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ convergente vers zéro dans (E, τ) et pour tout f de B , la suite $(f(x_n))_n$ converge uniformément vers zéro sur B ; c'est-à-dire que la suite $\sup_{f \in B} (|f(x_n)|)_n$ converge vers zéro.
- (ii) E^s est l'espace de toutes les formes linéaires séquentiellement τ -continues sur E .
- (iii) $\tau_b(E^s, E)$ est la topologie forte sur E^s pour la dualité séparante $\langle E^s, E \rangle$.

Remarque 8.2.2. 1. Si B est séquentiellement τ -équicontinu, alors $B \subset E^s$:
 $f \in B \Rightarrow f$ est séquentiellement τ -continue $\Rightarrow f \in E^s$.
 2. $E^s = (E, \tau^s)'$ (Proposition 6.0.14).
 3. $\tau_b(E^s, E)$ admet comme base des voisinages de zéro les ensembles A° où A est un sous-ensemble de E qui est $\sigma(E, E')$ -borné.

Lemme 8.2.3. Soit B un sous-ensemble de E^* . Si B est séquentiellement τ -équicontinu, alors $B^{\circ\circ}$ est séquentiellement τ -équicontinu.

Démonstration. Nous pouvons supposer que $\mathbb{K}$ est dense. Montrons que pour tous les $a \in E$

$$\sup_{f \in B^{\circ\circ}} |f(a)| = \sup_{f \in B} |f(a)|$$

Soit a un élément de E , alors $\sup_{f \in B^{\circ\circ}} |f(a)| \geq \sup_{f \in B} |f(a)|$. Supposons que $\sup_{f \in B^{\circ\circ}} |f(a)| > \sup_{f \in B} |f(a)|$. Donc, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\sup_{f \in B^{\circ\circ}} |f(a)| > |\lambda| > \sup_{f \in B} |f(a)|$ ($\mathbb{K}$ est dense). Soit g un élément de $B^{\circ\circ}$, alors $\forall f \in B$ $|f(\frac{a}{\lambda})| = \frac{|f(a)|}{|\lambda|}$ pour cette raison $|f(\frac{a}{\lambda})| < 1$ et par conséquent $\frac{a}{\lambda} \in B^\circ$ tel que $|g(\frac{a}{\lambda})| \leq 1$ ou encore $|g(a)| \leq |\lambda|$, donc $\sup_{f \in B^{\circ\circ}} |f(a)| \leq |\lambda|$ ce qui n'est pas le cas. D'où, $\sup_{f \in B^{\circ\circ}} |f(a)| = \sup_{f \in B} |f(a)|$. $\square$

Proposition 8.2.4. Si τ est polaire, alors tout sous-ensemble H de E^s séquentiellement τ -équicontinu est $\tau_b(E^s, E)$ -borné.

Démonstration. Soit H un sous-ensemble séquentiellement τ -équicontinu de E^s . Montrons que H est absorbé par n'importe quel voisinage de zéro de $(E^s, \tau_b(E^s, E))$.

Soit A un $\sigma(E, E^s)$ -borné de E . Puisque $E' \subset E^s$ alors A est $\sigma(E, E')$ -borné, donc A est τ -borné car τ est polaire [150, Corollaire 7.7].

Supposons que H n'est pas absorbé par A° . Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $H \not\subset \lambda A^\circ$. Soit $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{K}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\lambda_n| = +\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H \not\subset \lambda_n A^\circ$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $f_n \in H$ tel que $f_n \notin \lambda_n A^\circ$, par conséquent il existe $x_n \in A$ tel que

$|f_n\left(\frac{x_n}{\lambda_n}\right)| > 1$. Comme A est τ -borné et que la suite $\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)_n$ converge vers zéro, alors la suite $\left(\frac{x_n}{\lambda_n}\right)_n$ converge vers zéro dans (E, τ) , ainsi la suite $\left(\sup_{f \in H} \left|f\left(\frac{x_n}{\lambda_n}\right)\right|\right)_n$ converge vers zéro, ce qui n'est pas le cas parce que $\sup_{f \in H} \left|f\left(\frac{x_n}{\lambda_n}\right)\right| \geq \sup_{m \in \mathbb{N}} \left|f_m\left(\frac{x_n}{\lambda_n}\right)\right| \geq 1$. D'où H est $\tau_b(E^s, E)$ -borné. $\square$

Proposition 8.2.5. $E^s = (E, \tau^{ps})'$.

Démonstration. On sait que $E^s = (E, E^s)'$ et $\tau^{ps} \leq \tau^s$ d'où $(E, \tau^{ps})' \subset E^s$. Soit $f \in E^s$, alors $f : (E, \tau^s) \rightarrow K$ est continue. Soit $U \in \mathcal{U}$ tel que $|f(U)| \leq 1$, on pose $V = U^{\circ\circ}$, alors V est un voisinage de zéro qui est $\mathbb{K}$ -convexe, séquentiel et polaire, ainsi $V \in \mathcal{V}$. Supposons qu'il existe $y \in V$ tel que $|f(y)| > 1$; soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $1 \leq |\lambda| < |f(y)|$, donc pour tout $x \in U$ on a :

$$\begin{aligned} \left|\left(\frac{1}{\lambda}f\right)(x)\right| &= \frac{1}{|\lambda|} |f(x)| \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|} \\ &\leq 1, \end{aligned}$$

ainsi $\frac{1}{\lambda}f \in U^\circ$. Mais $y \in V$ et $V = U^{\circ\circ}$ par conséquent $\left|\left(\frac{1}{\lambda}f\right)(y)\right| \leq 1$ ou encore $|f(y)| \leq |\lambda|$ ce qui n'est pas le cas. Donc $|f(V)| \leq 1$. Pour cette raison, $f \in (E, \tau^{ps})'$ puisque V est un voisinage de zéro pour τ^{ps} . D'où, $(E, \tau^{ps})' = E^s$. $\square$

Proposition 8.2.6. τ^{ps} coïncide avec la topologie de convergence uniforme sur les sous-ensembles séquentiellement τ -équicontinus de E^s .

Démonstration. Soit ϱ la topologie de convergence uniforme sur les sous-ensembles séquentiellement τ -équicontinus dans E^s . Un système fondamental de voisinages de zéro pour ϱ est constitué des ensembles A° où A est séquentiellement τ -équicontinu dans E^s . Si A est un ensemble séquentiellement τ -équicontinu dans E^s , alors A° est $\mathbb{K}$ -convexe et polaire. Si $(x_n)_n$ est une suite qui converge vers zéro dans (E, τ) , alors la suite $\sup_{f \in A} |f(x_n)|_n$ converge vers zéro, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\begin{aligned} (\forall n \geq n_0) \sup_{f \in A} |f(x_n)| \leq 1 &\Rightarrow (\forall f \in A) (\forall n \geq n_0) |f(x_n)| \leq 1 \\ &\Rightarrow (\forall n \geq n_0) x_n \in A^\circ. \end{aligned}$$

Ensuite A° est un voisinage séquentiel de zéro. Donc A° est un voisinage de zéro pour τ^{ps} . Ainsi $\tau^{ps} \geq \varrho$.

Soit V un voisinage de zéro de (E, τ) , qui est $\mathbb{K}$ -convexe, polaire et séquentiel. On pose $A = V^\circ$, c'est-à-dire $A^\circ = V$. Montrons que A est séquentiellement τ -équicontinu. Soit $(x_n)_n$ une suite qui converge vers zéro dans (E, τ) , alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$

tel que $0 < |\lambda| \leq \varepsilon$ et la suite $(\frac{1}{\lambda}x_n)_n$ converge vers zéro dans (E, τ) . Par conséquent, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned} (\forall n \geq n_0) \frac{1}{\lambda}x_n \in V &\Rightarrow (\forall f \in A) (\forall n \geq n_0) |f\left(\frac{1}{\lambda}x_n\right)| \leq 1 \\ &\Rightarrow (\forall n \geq n_0) \sup_{f \in A} |f(x_n)| \leq |\lambda| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Pour cette raison, $\sup_{f \in A} (|f(x_n)|)_n$ converge vers zéro, de sorte que A est séquentiellement τ -équicontinu. Alors $V = A^\circ$ est un voisinage de zéro de E pour la topologie ϱ . Ainsi $\varrho \geq \tau^{ps}$. Donc $\varrho = \tau^{ps}$. $\square$

8.2.2 Caractérisation de la topologie nulle séquentielle

Soit (E, τ) un espace localement $\mathbb{K}$ -convexe. Désignons par E^b l'espace des formes linéaires bornées sur les ensembles τ -bornés de E . La topologie τ^0 sur E^b est la topologie de la convergence uniforme sur les suites τ -nulles de E ; elle admet comme base de voisinages de zéro les polaires des suites τ -nulles.

Lemme 8.2.7. *Soit H un sous-ensemble $\mathbb{K}$ -convexe de E^s . Alors :*

$$(\forall x \in E) p_{H^\circ}(x) = \sup_{f \in H} |f(x)|.$$

Démonstration. On sait que pour tout $x \in E$, $p_{H^\circ}(x) = \inf \{|\lambda| : x \in \lambda H^\circ\}$ et

$$\{x \in E : p_{H^\circ}(x) < 1\} \subset H^\circ \subset \{x \in E : p_{H^\circ}(x) \leq 1\}.$$

Le résultat est trivialement vérifié si $x = 0$. Soit $x \in E \setminus \{0\}$, alors pour tout $f \in H$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x \in \lambda H^\circ$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda}x \in H^\circ &\Rightarrow |f\left(\frac{1}{\lambda}x\right)| \leq 1 \quad (\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}) \\ &\Rightarrow |f(x)| \leq |\lambda|. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\sup_{f \in H} |f(x)| \leq \inf \{|\lambda| : x \in \lambda H^\circ\}.$$

Supposons que $\sup_{f \in H} |f(x)| < p_{H^\circ}(x)$. Alors il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\sup_{f \in H} |f(x)| \leq |\mu| < p_{H^\circ}(x).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} (\forall f \in H) |f(x)| \leq |\mu| &\Rightarrow |f\left(\frac{1}{\mu}x\right)| \leq 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{\mu}x \in H^\circ \\ &\Rightarrow x \in \mu H^\circ \\ &\Rightarrow p_{H^\circ}(x) \leq |\mu|, \end{aligned}$$

ce qui n'est pas le cas. Donc, $p_{H^\circ}(x) = \sup_{f \in H} |f(x)|$. $\square$

Lemme 8.2.8. *Si H est séquentiellement τ -équicontinu dans E^s , alors H° est un voisinage de zéro séquentiel et p_{H° est séquentiellement τ -équicontinu.*

Démonstration. Soit $(x_n)_n$ une suite qui converge vers zéro dans (E, τ) , alors la suite $\left(\sup_{f \in H} |f(x_n)|\right)_n$ converge vers zéro dans $\mathbb{R}^+$, d'où il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\sup_{f \in H} |f(x_n)| \leq 1$. Donc pour tout $n \geq n_0$, $x_n \in H^\circ$.

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $0 < |\lambda| \leq \varepsilon$. La suite $(\frac{1}{\lambda}x_n)_n$ converge vers zéro dans (E, τ) , d'où il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\frac{1}{\lambda}x_n \in H^\circ$. Par conséquent, $\forall n \geq n_0$, $p_{H^\circ}(\frac{1}{\lambda}x_n) \leq 1$ ou encore $\forall n \geq n_0$, $p_{H^\circ}(x_n) \leq |\lambda| \leq \varepsilon$. Ainsi, la suite $(p_{H^\circ}(x_n))_n$ converge vers zéro. $\square$

Rappelons qu'une suite $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ dans un espace localement $\mathbb{K}$ -convexe E est t -orthogonale par rapport à la semi-norme p , où $t \in]0, 1]$, si pour chaque $k \in \mathbb{N}$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ on a

$$p\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i\right) \geq t \max_{1 \leq i \leq k} (p(\lambda_i x_i)).$$

Théorème 8.2.9. *Soit H un sous-ensemble absolument $\mathbb{K}$ -convexe de E^s , alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) H est séquentiellement τ -équicontinu ;
- (ii) H est τ^0 -totalement C -borné.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons que H est séquentiellement τ -équicontinu. Soit $A = \{(x_n) \text{ dans } E : \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0 \text{ dans } (E, \tau)\}$. Alors, la suite $(p_{H^\circ}(x_n))_n$ converge vers zéro. Si on pose $p = p_{H^\circ}$, alors p est une semi-norme $n.a$ polaire (Lemme 8.2.7) qui est séquentiellement τ -continue (Lemme 8.2.8). Par conséquent, pour tout $x \in E$, $p(x) = \sup_{f \in H} |f(x)|$ (Lemme 8.2.7). Soit $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $0 < |\mu| < 1$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$, $p(x_n) \leq |\mu|^2$. Soit $F = [x_0, x_1, \dots, x_N]$. Soit $B = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ une $|\mu|$ -base orthogonale de (F, p) . Supposons que $|\mu| \leq p(z_k) \leq p(z_{k-1}) \leq \dots \leq p(z_1) \leq 1$. Soit $B' = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ la base duale de B , c'est-à-dire que pour tous les $(i, j) \in (\{1, 2, \dots, k\})^2$, $g_i \in F'$ et $g_i(z_j) = \delta_{ij}$.

Soit $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i z_i$ un élément de F tel que $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq k} \subset \mathbb{K}$. Alors

$$p(x) \geq |\mu| \max_{1 \leq i \leq k} (|\lambda_i| p(z_i)) \geq \max_{1 \leq i \leq k} (|\lambda_i| \mu^2).$$

Ensuite, pour tous les $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $|g_i(x)| = |\lambda_i|$, d'où $|g_i(x)| \leq \frac{1}{|\mu^2|} p(x)$. Comme p est polaire, alors il existe $f_i \in E'$ tel que $f_i|_F = g_i$ et pour tout $|f_i(x)| \leq \frac{1}{|\mu^2|} p(x)$ [150, Proposition 5. 6], et puisque p est séquentiellement τ -continue et polaire, alors pour tout $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $f_i \in E^{ps} \subset E^s$ [150].

Soit $f \in H$, on pose $h = \sum_{i=1}^k f(z_i) f_i$ et $g = f - h$. Alors, pour tout $x \in F$ on a :

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{i=1}^k f(z_i) f_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^k f(z_i) \lambda_i \\ &= f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i z_i\right) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $h = f$ sur F et $|f| \leq p$ car $f \in H$. Donc, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $|f(z_i)| \leq p(z_i) \leq 1$. Ainsi, $h \in \Gamma(f_1, f_2, \dots, f_k)$. En outre, pour tout $n > N$, on a $|f(x_n)| \leq p(x_n) \leq 1$, et pour tout $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $|f_i(x_n)| \leq \frac{1}{|\mu|^2} p(x_n) \leq 1$, ce qui implique que,

$$\begin{aligned} \text{pour tout } n > N, |h(x_n)| &= \left| \sum_{i=1}^k f(z_i) f_i(x_n) \right| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq k} (|f(z_i)| |f_i(x_n)|) \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \text{pour tout } n > N, |g(x_n)| &= |f(x_n) - h(x_n)| \\ &\leq \max(|f(x_n)|, |h(x_n)|) \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|g(x_n)| \leq 1$ ce qui implique que $g \in A^\circ$. Donc $f \in \Gamma(f_1, f_2, \dots, f_k) + \mu A^\circ$ ($f = g + h$). Donc $H \subset \Gamma(f_1, f_2, \dots, f_k) + \mu A^\circ$. Ce qui montre que H est τ^0 -totalement C -borné.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Soit $(x_n)_n$ une suite convergente vers zéro de (E, τ) et soit $A = \{(x_n) \text{ dans } E : \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0 \text{ dans } (E, \tau)\}$. Si $\varepsilon > 0$ et $\mu \in \mathbb{K}$ tels que $0 < |\mu| \leq \varepsilon$, A° est un voisinage de zéro de (E, τ°) . Soit $(f_i)_{1 \leq i \leq k} \subset E^s$ tel que

$$H \subset \Gamma(f_1, f_2, \dots, f_k) + \mu A^\circ.$$

On a pour les $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ la suite $(f_i(x_n))_n$ converge vers zéro. Pour cette raison, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$, et tout $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ $|f_i(x_n)| \leq |\mu|$. Soit $f \in H$, alors il existe $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq k} \subset K$ tel que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $|\lambda_i| \leq 1$ et il existe $g \in A^\circ$

tel que $f = \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i + \mu g$. Donc

$$\text{pour tout } n > N, |f(x_n)| \leq \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq k} (|\lambda_i| |f_i(x_n)|, |\mu g(x_n)|) \right\} \\ \leq |\mu|.$$

Ainsi, pour tout $n > N$, $\sup_{f \in H} |f(x_n)| \leq |\mu| \leq \varepsilon$.

Par conséquent, la suite $\left(\sup_{f \in H} |f(x_n)| \right)_n$ converge vers zéro de sorte que H est séquentiellement τ -équicontinu. $\square$

Troisième partie

Topologie séquentielle floue

INTRODUCTION

Le concept de topologie floue a été défini pour la première fois par Chang [35], puis redéfini de manière un peu différente par Lowen [110], Hutton et Reilly [89] et d'autres. Plusieurs auteurs ont développé largement la théorie des ensembles flous et ses applications et de nombreuses structures abstraites ont été généralisées à l'aide d'ensembles flous. Les espaces topologiques flous, les espaces uniformes flous, les espaces de proximité flous, les groupes flous, les groupes topologiques flous et les espaces vectoriels topologiques flous ont été présentés respectivement dans [35], [109], [93], [139], [62], [95]. Ces structures ont été étudiées plus en détail par Azad [15, 16], Hutton [87, 88], Lowen [111], Warren [169, 170], Weiss [172] et Wong [175].

La topologie floue et la continuité floue ont été étudiées pour la première fois dans [35]. Depuis, de nombreuses recherches ont été menées dans ce domaine, comme dans [103, 135]. Différents types de continuité floue ont été définis par de nombreux auteurs adoptant différentes approches, dont certaines peuvent être trouvées dans [16, 35, 57, 102, 110, 140, 146, 169, 177]. La fermeture et l'intérieur sont des approches alternatives aux ensembles fermés et ouverts en topologie. Ainsi, de nombreux chercheurs ont étudié ces notions. Les notions de δ -fermeture floue et de θ -fermeture floue d'un ensemble flou dans un espace topologique flou ont été introduites par Ganguly et Saha [72], et Mukherjee et Sinha [124], respectivement. De plus, la notion de δ -continuité forte a été étudiée dans [54] et le concept de δ -continuité sur les espaces des fonctions dans [71].

La notion de convergence est l'une des notions de base en analyse. M.A. De Prada Vicente [47] a introduit la convergence des filtres flous dans un espace topologique flou. Elle et M. Macho Stadler [159] ont défini la N -convergence des réseaux flous et ont étudié la relation entre ces deux types de convergence. La Q -convergence [133], a été définie comme une convergence des suites généralisées flous par rapport aux Q -voisinages au lieu des voisinages. Comme on le voit dans [159], la N -convergence et la Q -convergence peuvent caractériser la topologie floue de la même manière que les suites généralisées et les filtres caractérisent la topologie classique. La théorie des suites de nombres flous a été introduite pour la première fois par Matloka [119] qui a étudié certaines de leurs propriétés et a montré que toute suite convergente de nombres flous est bornée. Dès lors, l'étude des

suites de nombres flous a suscité un intérêt croissant (voir [18, 14, 29, 49, 58, 80, 106, 107, 119, 19, 128, 161, 162]).

Dans le cadre des espaces topologiques généraux, les suites ne sont pas suffisantes pour décrire la topologie et la convergence des suites ne donne pas une information complète sur la topologie. C'est pourquoi les mathématiciens ont fait recours aux suites généralisées et aux filtres. La fermeture séquentielle relative à une topologie donnée τ fournit une méthode pour construire une nouvelle topologie τ^s associée de manière naturelle à la topologie usuelle. Cette topologie, qu'on appelle topologie séquentielle, est formée par des sous-ensembles ouverts dont leurs complémentaires sont séquentiellement fermés [5].

Dans cette partie, nous définissons la fermeture séquentielle floue et nous étudions ses propriétés en utilisant la convergence des suites des points flous dans un espace topologique flou. Nous construisons une nouvelle topologie floue appelée topologie séquentielle floue qui est plus fine que la topologie floue. En outre, nous prouvons certaines propriétés de base de ces concepts.

CHAPITRE 9

PRÉLIMINAIRES

Tout au long de cette partie I est l'intervalle $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$ et X est un ensemble quelconque.

Définition 9.0.1. [159, Definition 1.1] Un ensemble flou de X est une application de X dans I , c'est-à-dire un élément de I^X .

Définition 9.0.2. [159, Definition 1.3] Soit $\mu, \nu \in I^X$. On dit que ν est inclus dans μ (on écrit $\nu \subset \mu$) si $\nu \leq \mu$ (c'est-à-dire que $(\forall x \in X), \nu(x) \leq \mu(x)$).

Définition 9.0.3. [146, 158]

Un point flou $p(x_0, t)$ (brièvement p) de X , où $x_0 \in X$ et $t \in]0, 1[$, est une application $\mu_p : X \rightarrow [0, 1]$ définie par :

$$\mu_p(x) = \begin{cases} t, & \text{pour } x = x_0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

t est dite la valeur de p et x_0 son support. On note par $\mathcal{P}_f(X)$ l'ensemble des points flous de X . On dit que p appartient à μ ($p \in \mu$) si $\mu_p(x) < \mu(x), \forall x \in X$.

Définition 9.0.4. [159, Definition 1.4] Soit $\mu, \nu \in I^X$. On définit :

- (i) $\mu \wedge \nu \in I^X$, par $(\mu \wedge \nu)(x) = \min\{\mu(x), \nu(x)\}$ pour tout x de X .
- (ii) $\mu \vee \nu \in I^X$, par $(\mu \vee \nu)(x) = \max\{\mu(x), \nu(x)\}$ pour tout x de X .
- (iii) $\mu^c \in I^X$, par $\mu^c(x) = 1 - \mu(x)$ pour tout x de X .
- (iv) $p' \in \mathcal{P}(X)$, par $p'(x, t') = p(x, 1 - t)$.
- (v) $c_t \in I^X$, par $c_t(x) = t$ pour tout $x \in X$ et $t \in I$.

Proposition 9.0.5. [114] Soient μ et η des sous-ensembles flous de X et $(\mu_i)_{i \in J}$ une famille de sous-ensembles flous de X . Alors :

- (i) $c_0^c = c_1$ et $c_1^c = c_0$.
- (ii) $(\mu^c)^c = \mu$.

- (iii) $\mu \leq \eta \implies \eta^c \leq \mu^c$.
- (iv) $(\bigvee_{i \in J} \mu_i)^c = \bigwedge_{i \in J} \mu_i^c$.
- (v) $(\bigwedge_{i \in J} \mu_i)^c = \bigvee_{i \in J} \mu_i^c$.
- (vi) $\mu(x) \vee \mu^c(x) \geq \frac{1}{2}$, pour tout $x \in X$.
- (vii) $\mu(x) \wedge \mu^c(x) \leq \frac{1}{2}$, pour tout $x \in X$.

Remarque 9.0.6. Le complémentaire flou μ^c d'un ensemble flou μ est le complémentaire de Zadeh [177] et ce n'est pas un complémentaire au sens usuel. Car $\mu \vee (1 - \mu) \neq c_1$ et $\mu \wedge (1 - \mu) \neq c_0$. Pour cela, nous pouvons considérer l'ensemble flou constant

$$\mu : X \rightarrow I : x \rightarrow \frac{1}{2}$$

alors $\mu^c = \mu$, $\mu \vee (1 - \mu) \neq c_1$ et $\mu \wedge (1 - \mu) \neq c_0$, ce qui est bien sûr une situation inhabituelle du point de vue de la théorie classique des ensembles. Il faut donc être prudent quant à l'interprétation de ce pseudo-complémentaire [114].

Définition 9.0.7. [159, Definition 1.5] Soit $\tau \subset I^X$ le sous-ensemble satisfaisant les conditions suivantes :

- (i) $c_0, c_1 \in \tau$.
- (ii) Si $\mu_1, \mu_2 \in \tau$, alors $\mu_1 \wedge \mu_2 \in \tau$.
- (iii) Si $\{\mu_j : j \in J\} \subset \tau$, alors $\bigvee_{j \in J} \mu_j \in \tau$.

τ est dite une topologie floue sur X et (X, τ) est dit un espace topologique flou (ou e.t.f. en abréviation). Les éléments de τ sont appelés ensembles flous-ouverts de X .

Définition 9.0.8. [159, Definition 1.6] Soient $p \in \mathcal{P}(X)$ et (X, τ) un e.t.f. $\nu \in I^X$ est dit un voisinage flou de p , s'il existe $\mu \in \tau$ tel que $p \in \mu$ et $\mu \subset \nu$. l'ensemble des voisinages flous d'un point flou p dans un e.t.f. (X, τ) est notée par $\mathcal{N}_p^\tau$. Un ensemble $\mathcal{B}_p^\tau$ de sous-ensembles de $\mathcal{N}_p^\tau$ est dite une base locale de p si pour tout $\nu \in \mathcal{N}_p^\tau$, il existe $\mu \in \mathcal{B}_p^\tau$ tel que $\mu \subset \nu$.

Théorème 9.0.9. [158, Theorem 2.4] Un ensemble flou de (X, τ) est ouvert si c'est un voisinage flou de chacun de ses points flous.

Définition 9.0.10. [159, Definition 1.7] Soient (X, τ) et (Y, γ) deux e.t.f. et f une application de X dans Y . On dit que f est une application floue-continue si pour tout $p \in \mathcal{P}(X)$ et tout $\nu \in \mathcal{N}_{f(p)}^\gamma$, il existe $\mu \in \mathcal{N}_p^\tau$ tel que $f(\mu) \subset \nu$.

Théorème 9.0.11. [159, Theorem 1.1 (5)] Soient (X, τ) et (Y, γ) deux e.t.f et f une application de X dans Y . Alors f est une application floue-continue si pour chaque $\nu \in \gamma$, on a $f^{-1}(\nu) \in \tau$.

Définition 9.0.12. [159, Definition 1.8] Soient (X, τ) un e.t.f, $p(x, t) \in \mathcal{P}(X)$ et $\mu \in I^X$. On dit que p est une valeur d'adhérence de μ si pour tout $\nu \in \mathcal{N}_p^\tau$, alors $\nu \not\subset \mu^c$.

Proposition 9.0.13. [145, Proposition 1.2] $\bar{\mu} = \bigvee \{p : p \text{ est un point d'adhérence de } \mu\}$.

Définition 9.0.14. [105, Definition 3.1] Un espace topologique flou (X, τ) est dit séparé (ou T_2) si et seulement si pour tous $p_1(x_1, \lambda_1)$, $p_2(x_2, \lambda_2)$ deux points flous de X , avec $x_1 \neq x_2$, il existe deux ouverts flous μ et η de X tels que $p_1 \in \mu$, $p_2 \in \eta$ et $(\mu \wedge \eta)(z) = 0$ pour tout $z \in X$.

Définition 9.0.15. [41] Soient X et Y deux ensembles non-vides quelconques, $f : X \rightarrow Y$ une application et μ un sous-ensemble flou de X . Alors $f(\mu)$ est un sous-ensemble flou de Y défini par

$$f(\mu)(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu(x) & \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si η est un sous-ensemble flou de Y , alors le sous-ensemble flou $f^{-1}(\eta)$ de X est défini par $f^{-1}(\eta)(x) = \eta(f(x))$ pour tout $x \in X$.

CHAPITRE 10

TOPOLOGIE SÉQUENTIELLE FLOUE

Définition 10.0.1. Soit $(p_n(x_n, t_n))$ (brièvement, (p_n)) une suite de points flous dans un e.t.f. (X, τ) avec des supports (x_n) et des valeurs (t_n) . Soit $p(x, t)$ (brièvement, p) un point flou de support x et de valeur t . Alors p_n est dite convergente vers p , noté $p_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} p$, si pour tout μ de τ avec $p \in \mu$, il existe $m \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n > m$, $p_n \in \mu$. Dans ce cas $p(x, t)$ est noté $\lim(p_n)$.

Remarque 10.0.2. [174, page (321)]

- (i) En général, $p_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} p$ n'implique pas $t_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} t$. En fait, si $p_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} p$, alors $p_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} q$ pour tous les points flous q de support x et de valeur $s \geq t$.
- (ii) p est un point limite unique flou de (p_n) , si $t = \inf\{s \in I : p_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} p(x, s)\}$.

Les propriétés suivantes sont les propriétés de convergence les plus utilisés (voir [120]) :

- (a) Toute suite constante (p_n) (i.e. $(\forall n \in \mathbb{N}) p_n = p$.) converge vers p .
- (b) Si une suite $(p_n)_n$ admet la limite p , alors chacune de ses sous-suites admet la même limite.
- (c) Si toute sous-suite de la suite (p_n) admet une sous-suite qui converge vers p , alors (p_n) converge vers p .
- (d) Toute suite est non convergente vers deux points flous avec deux supports différents.

Proposition 10.0.3. La convergence des suites dans un espace topologique flou (X, τ) satisfait (a), (b) et (c). De plus, il satisfait d si X est séparé.

Démonstration. La preuve de (a) et (b) est simple.

- (c) Supposons, par l'absurde que (p_n) n'est pas convergente vers p . Alors, il existe $\mu \in \tau$, tel que $p \in \mu$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $m > n$ et $p_m \notin \mu$. L'ensemble $M = \{m \in \mathbb{N} : p_m \notin \mu\}$ est infini. Soit $M = \{m_1 < m_2 < \dots < m_k < \dots\}$. La suite (p_{m_k}) est une sous-suite de (p_n) qui n'admet pas une sous-suite convergente vers p , ce qui n'est pas le cas.

- (d) Supposons, par l'absurde qu'une suite (p_n) de points flous converge vers deux points flous différents $p_1(x_1, t_1)$ et $p_2(x_2, t_2)$ ($x_1 \neq x_2$). Comme $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p_1$ et $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p_2$, alors

$$\forall \mu \in \tau \text{ with } p_1 \in \mu, \exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ such that, } p_n \in \mu, \forall n > N_1.$$

$$\forall \eta \in \tau \text{ with } p_2 \in \eta, \exists N_2 \in \mathbb{N} \text{ such that, } p_n \in \eta, \forall n > N_2.$$

Par conséquent $\mu \wedge \eta \neq c_0$, ce qui est absurde puisque X est un espace séparé flou. $\square$

Définition 10.0.4. Soit X un espace topologique flou.

- (i) Pour tout sous-ensemble flou μ de X , on définit la fermeture floue séquentielle de μ par :

$$\bar{\mu}^s = \{p \in X : \exists (p_n) \subset \mu \text{ et } p'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p'\}.$$

On note $\bar{\mu}^s = \bar{\eta}^s$ où $\eta = \mu$ pour tout μ de X . On définit l'opérateur de fermeture floue séquentielle comme suit : $-s : I^X \rightarrow I^X$, $\mu \rightarrow \bar{\mu}^s$.

- (ii) Un sous-ensemble $\mu \in I^X$ est dit séquentiellement flou-fermé (*s-flou-fermé*) si $\bar{\mu}^s = \mu$.
- (iii) Un sous-ensemble $\nu \in I^X$ est dit séquentiellement flou-ouvert (*s-flou-ouvert*) si $1 - \nu$ est séquentiellement flou-fermé.

Proposition 10.0.5. Soit μ un sous-ensemble flou de X alors,

$$(i) \mu \leq \bar{\mu}^s \leq \bar{\mu}.$$

$$(ii) \bar{c}_0^s = c_0 \text{ et } \bar{c}_1^s = c_1.$$

Démonstration. (i) Soient $p(x, t) \in \mu$ et $p_n(x_n, t_n) = p(x, t)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Il est évident que $p'_n(x_n, 1 - t_n) = p'(x, 1 - t)$. Puisque $p'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p'$, alors $p \in \bar{\mu}^s$. Maintenant, si $p \in \bar{\mu}^s$, alors il existe une suite $(p_n)_n$ de μ telle que $p'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p'$ c'est-à-dire que pour tout $\nu \in \mathcal{N}_{p'}^{\tau}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $p'_n \in \nu$, $\forall n > N$. Donc, pour tout $n > N$, $t_n < \mu(x_n)$ et $1 - t_n < \nu(x_n)$. Par conséquent, $\nu(x_n) > 1 - \mu(x_n)$ ($\nu \not\leq \mu^c$). Donc, par Définition 9.0.12 on a $p \in \bar{\mu}$.

- (ii) C'est simple. $\square$

On a également les propriétés suivantes :

Proposition 10.0.6. Soient μ et η des sous-ensembles flous de X et $(\mu_i)_{i \in J}$ un ensemble de sous-ensembles flous de X . On a les relations suivantes :

$$(i) \mu \leq \eta \Rightarrow \bar{\mu}^s \leq \bar{\eta}^s.$$

$$(ii) \bigwedge_{i \in J} \bar{\mu}_i^s \leq \bar{\bigwedge_{i \in J} \mu_i}^s.$$

$$(iii) \bigvee_{i \in J} \bar{\mu}_i^s \leq \overline{\bigvee_{i \in J} \mu_i}^s.$$

$$(iv) \bar{\mu}^s \vee \bar{\eta}^s = \overline{\mu \vee \eta}^s.$$

Démonstration. (i) Soit p un point flou de $\bar{\mu}^s$, alors il existe une suite (p_n) de μ avec $p'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p'$, c'est-à-dire que pour tout élément ζ de τ avec $p' \in \zeta$, il existe un nombre m , tel que pour tout $n > m$, p'_n est dans ζ . Comme $\mu \leq \eta$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n est dans η . Alors p est dans $\bar{\eta}^s$.

(ii) C'est simple d'après (i).

(iii) C'est simple d'après (i).

(iv) Par (ii), $\bar{\mu}^s \vee \bar{\eta}^s \leq \overline{\mu \vee \eta}^s$. Inversement, soit p un point flou de $\overline{\mu \vee \eta}^s$, alors il existe une suite (p_n) de $\mu \vee \eta$ telle que $p'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p'$. Supposons, par l'absurde que $\{n \in \mathbb{N} : p_n \in \eta\}$ et $\{n \in \mathbb{N} : p_n \in \mu\}$ sont finis. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$, $p_n \notin \mu \vee \eta$ ce qui n'est pas le cas. Supposons que $M = \{n \in \mathbb{N} : p_n \in \mu\}$ soit infini et que $M' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots \text{ tel que } n_k \in M\}$, par conséquent p_{n_k} est une sous-suite de p_n ; par la proposition 10.0.3 $p'_{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p'$ c'est-à-dire $p \in \bar{\mu}^s$. Donc $p \in \bar{\mu}^s \vee \bar{\eta}^s$. □

Définition 10.0.7. Soit μ un sous-ensemble flou de X . L'intérieur flou séquentiel de μ est l'ensemble

$$\overset{\circ}{\mu}^s = \mu \wedge (1 - \overline{1 - \mu}^s).$$

Proposition 10.0.8. Soient μ et η des sous-ensembles flous de X et $(\mu_i)_{i \in J}$ un ensemble de sous-ensembles flous de X . On a les relations suivantes :

(i) $\mu \leq \eta \Rightarrow \overset{\circ}{\mu}^s \leq \overset{\circ}{\eta}^s$.

(ii) $\overset{\circ}{\mu}^s \vee \overset{\circ}{\eta}^s \leq \mu \overset{\circ}{\vee} \eta$.

(iii) $\overset{\circ}{\mu}^s \wedge \overset{\circ}{\eta}^s = \mu \overset{\circ}{\wedge} \eta$.

Démonstration. (i) Comme $\mu \leq \eta$, alors $\overline{1 - \eta}^s \leq \overline{1 - \mu}^s$, c'est-à-dire $1 - \overline{1 - \mu}^s \leq 1 - \overline{1 - \eta}^s$; donc $\min(\mu(x), 1 - \overline{1 - \mu}^s(x)) \leq \min(\eta(x), 1 - \overline{1 - \eta}^s(x))$ pour tout $x \in X$, c'est-à-dire $\mu - \overline{1 - \mu}^s \leq \eta - \overline{1 - \eta}^s$. Ainsi $\overset{\circ}{\mu}^s \leq \overset{\circ}{\eta}^s$.

(ii) On a $\overset{\circ}{\mu}^s \leq \mu \overset{\circ}{\vee} \eta$ et $\overset{\circ}{\eta}^s \leq \mu \overset{\circ}{\vee} \eta$. Par conséquent $\overset{\circ}{\mu}^s \vee \overset{\circ}{\eta}^s \leq \mu \overset{\circ}{\vee} \eta$.

(iii) Puisque $1 - \mu \wedge \eta = (1 - \mu) \vee (1 - \eta)$, alors $\overline{1 - \mu \wedge \eta}^s = \overline{(1 - \mu) \vee (1 - \eta)}^s$; par la proposition 10.0.6 $\overline{1 - \mu \wedge \eta}^s = \overline{1 - \mu}^s \vee \overline{1 - \eta}^s$, par conséquent $1 - (\overline{1 - \mu \wedge \eta}^s) = 1 - (\overline{1 - \mu}^s \vee \overline{1 - \eta}^s)$ c'est-à-dire $1 - (\overline{1 - \mu \wedge \eta}^s) = (1 - \overline{1 - \mu}^s) \wedge (1 - \overline{1 - \eta}^s)$, d'où

$$(\mu \wedge \eta) \wedge [1 - (\overline{1 - \mu \wedge \eta}^s)] = (\mu \wedge \eta) \wedge [(1 - \overline{1 - \mu}^s) \wedge (1 - \overline{1 - \eta}^s)] = [\mu \wedge (1 - \overline{1 - \mu}^s)] \wedge [\eta \wedge (1 - \overline{1 - \eta}^s)].$$

Donc $\overset{\circ}{\mu}^s \wedge \overset{\circ}{\eta}^s = \mu \overset{\circ}{\wedge} \eta$. □

Définition 10.0.9. Soit ν un sous-ensemble de X .

On dit que ν est un s -voisinage flou de $p(x, t)$, s'il existe un sous-ensemble s -flou-ouvert μ tel que $p \in \mu$ et $\mu \leq \nu$.

Proposition 10.0.10. (i) Chaque ensemble flou-fermé (resp. flou-ouvert) est s -flou-fermé (resp. s -flou-ouvert). La réciproque n'est pas vraie en général.

(ii) μ est s -flou-ouvert si et seulement si, $\overset{\circ}{\mu}^s = \mu$.

Démonstration. (i) Soit μ un sous-ensemble flou-fermé de X , par la proposition 10.0.5 $\mu \leq \bar{\mu}^s \leq \bar{\mu}$. Comme $\bar{\mu} = \mu$, alors $\bar{\mu}^s = \mu$, c'est-à-dire que μ est s -fermé. Si μ est un sous-ensemble flou-ouvert de I^X , alors $1 - \mu$ est flou-fermé, c'est-à-dire s -flou-fermé. Donc μ est s -ouvert.

(ii) μ est s -flou-ouvert est équivalent à $1 - \mu$ est s -flou-fermé, c'est-à-dire que $\overset{\circ}{\mu}^s = \mu \wedge (1 - \overline{1 - \mu}^s)$ implique que $\overset{\circ}{\mu}^s = \mu \wedge (1 - (1 - \mu))$; par la proposition 9.0.5 (ii), $\overset{\circ}{\mu}^s = \mu$.

Inversement, $\overset{\circ}{\mu}^s = \mu = \mu \wedge (1 - \overline{1 - \mu}^s)$, alors

$$\begin{aligned} 1 - \mu &= 1 - [\mu \wedge (1 - \overline{1 - \mu}^s)] \\ &= (1 - \mu) \vee [1 - (1 - \overline{1 - \mu}^s)] \\ &= (1 - \mu) \vee \overline{1 - \mu}^s. \end{aligned}$$

Par conséquent $\overline{1 - \mu}^s \leq 1 - \mu$. Donc $\overline{1 - \mu}^s = 1 - \mu$, c'est-à-dire que μ est s -flou-ouvert. $\square$

Remarque 10.0.11. Un sous-ensemble flou ν de X est s -flou-ouvert si et seulement si, ν est un s -voisinage flou de chacun de ses points.

Proposition 10.0.12. Soit μ un sous-ensemble flou de X . Alors on a les inclusions suivantes :

$$\overset{\circ}{\mu} \leq \overset{\circ}{\mu}^s \leq \mu \leq \bar{\mu}^s \leq \bar{\mu}.$$

Démonstration. Pour $\mu \leq \bar{\mu}^s \leq \bar{\mu}$ voir Proposition 10.0.5. On a

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mu} \leq \mu &\implies 1 - \mu \leq 1 - \overset{\circ}{\mu} \\ &\implies \overline{1 - \mu}^s \leq \overline{1 - \overset{\circ}{\mu}}^s \\ &\implies 1 - \overline{1 - \overset{\circ}{\mu}}^s \leq 1 - \overline{1 - \mu}^s \\ &\implies \overset{\circ}{\mu} \wedge (1 - \overline{1 - \overset{\circ}{\mu}}^s) \leq \mu \wedge (1 - \overline{1 - \mu}^s) \\ &\implies \overset{\circ}{\mu} \leq \overset{\circ}{\mu}^s, \end{aligned}$$

de plus, par définition de $\overset{\circ}{\mu}^s$, $\overset{\circ}{\mu}^s \leq \mu$. Donc $\overset{\circ}{\mu} \leq \overset{\circ}{\mu}^s \leq \mu \leq \bar{\mu}^s \leq \bar{\mu}$. $\square$

Proposition 10.0.13. Soit μ un sous-ensemble flou de X . Alors,

$$\overset{\circ}{\mu}^s = \{p(x, t) \in I^X / p \in \mu \text{ et il n'existe aucune suite dans } 1 - \mu \text{ convergente vers } p'\}.$$

Démonstration. L'équivalence suivante prouve le résultat.

$$\begin{aligned} p \in \mu \wedge (1 - \overline{1 - \mu}^s) &\iff t < \mu(x) \text{ et } t < 1 - \overline{1 - \mu}^s \\ &\iff t < \mu(x) \text{ et } \overline{1 - \mu}^s < 1 - t \\ &\iff t < \mu(x) \text{ et pour toute suite } (p_n)_n \text{ in } 1 - \mu, \\ &\quad (p_n)_n \text{ n'est pas convergente vers } p' \end{aligned}$$

$\square$

Proposition 10.0.14. *Soit μ un sous-ensemble flou de I^X . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) μ est s -flou-fermé .
- (ii) $\mu = \bigwedge \{ \kappa / \kappa \text{ est } s\text{-flou-fermé et } \mu \leq \kappa \}$.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) C'est évident.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons que $\mu = \bigwedge \{ \kappa / \kappa \text{ est } s\text{-flou-fermé et } \mu \leq \kappa \}$. Montrons que $\bar{\mu}^s \leq \mu$. Soit $p(x, t)$ un point flou qui n'est pas dans μ , alors il existe un sous-ensemble s -flou-fermé κ tel que $\mu \leq \kappa$ et $p \notin \kappa$. Si $p \in \bar{\mu}^s$, il existe une suite $(p_n)_n$ de μ tel que $p'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p'$. Comme $\mu \leq \kappa$, alors $(p_n)_n$ est dans κ . Ainsi $p \in \kappa^s = \kappa$, ce qui est une contradiction. Donc $p \in \bar{\mu}^s$. $\square$

Proposition 10.0.15. *Soit μ un sous-ensemble flou de X . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) μ est s -flou-ouvert ;
- (ii) $\mu = \bigvee \{ \zeta / \zeta \text{ est } s\text{-flou-ouvert et } \zeta \leq \mu \}$.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) C'est évident.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons que $\mu = \bigvee \{ \zeta / \zeta \text{ est } s\text{-flou-ouvert et } \zeta \leq \mu \}$ et montrons que μ est s -flou-ouvert. Il suffit de prouver que $\mu \leq \bar{\mu}^s$. Soit $p(x, t)$ un point flou qui n'est pas dans $\bar{\mu}^s$ et supposons que $p \in \mu$. Alors il existe un sous-ensemble s -flou-ouvert ζ tel que $p \in \zeta$. Comme $\zeta \leq \mu$, alors $p \in \bar{\mu}^s$, ce qui est absurde. Donc $\mu \leq \bar{\mu}^s$. Ainsi μ est s -flou-ouvert. $\square$

Remarque 10.0.16. On peut également prouver la Proposition 10.0.15 par passage au complémentaire flou dans la Proposition 10.0.14.

Définition 10.0.17. *Soit μ un sous-ensemble flou de X . La frontière floue séquentielle de μ est l'ensemble $\partial_s(\mu) = \bar{\mu}^s \wedge (1 - \overline{1 - \mu}^s)$.*

La proposition suivante est facile à vérifier.

Proposition 10.0.18. *Soient μ et η deux sous-ensembles flous de X . On a les deux relations suivantes :*

- (i) $\partial_s(\mu) = \partial_s(1 - \mu)$.
- (ii) $\partial_s(\mu \vee \eta) \leq \partial_s \mu \vee \partial_s \eta$.

Proposition 10.0.19. *Soit τ^s le sous-ensemble de I^X définie par*

$$\tau^s = \{ \mu \in I^X / \text{pour toute suite } (p_n)_n \text{ in } 1 - \mu \text{ telle que } p'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p' \text{ alors } p \text{ est dans } 1 - \mu \},$$

c'est-à-dire que τ^s est l'ensemble des ensembles s -flous-ouverts de X , c'est une topologie floue sur X avec $\tau^s \geq \tau$. On l'appelons la topologie séquentielle floue.

Démonstration. Soient $\mu, \eta \in \tau^s$ et $(\mu_i)_{i \in I}$ une famille dans τ^s . Il est évident que $c_0, c_1 \in \tau^s$. Comme $(\mu \vee \eta)^c = \mu^c \vee \eta^c$, alors par la Proposition 10.0.6 et la Proposition 10.0.14 $\mu^c \vee \eta^c$ est s -flou-fermé, donc $\mu \wedge \eta \in \tau^s$. D'autre part $(\bigvee_{i \in I} \mu_i)^c = \bigwedge_{i \in I} \mu_i^c$. Par les mêmes propositions, encore une fois, $\bigwedge_{i \in I} \mu_i^c$ est s -flou-fermé, donc $\bigvee_{i \in I} \mu_i \in \tau^s$. Par conséquent τ^s est une topologie floue sur X .

Maintenant, si $\mu \in \tau$, μ^c est un flou-fermé de X . Par la Proposition 10.0.10, μ^c est aussi s -flou-fermé, c'est-à-dire $\mu \in \tau^s$. Alors $\tau^s \geq \tau$. $\square$

Proposition 10.0.20. Soient (p_n) une suite de points flous de X et p un point flou de X . Si la suite (p_n) est τ^s -convergente vers p , alors elle est aussi τ -convergente vers p .

Démonstration. Comme $\tau^s \geq \tau$, le résultat en découle alors. $\square$

Théorème 10.0.21. Soient (X, τ) , (Y, ρ) deux espaces topologiques flous et $f : X \rightarrow Y$ une fonction. Si f est floue-continue, alors f est séquentiellement floue-continue.

Démonstration. Supposons que f est floue-continue. Soit (p_n) une suite de points flous de X telle que $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p$ dans (X, τ) . Montrons que $f(p_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(p)$ dans (X, ρ) . Soit $\mu \in \rho$ tel que $f(p) \in \mu$, alors $f^{-1}(\mu) = \eta \in \tau$ et $p \in f^{-1}(\mu) = \eta$ (sinon $t > f^{-1}(\mu)(x) = \mu(f(x))$ ce qui implique que $f(p) \notin \mu$). D'autre part, pour tous les $y \in Y$

$$\begin{aligned} f(\eta)(y) &= \sup_{x \in f^{-1}(y)} \eta(x) \\ &= \sup_{x \in f^{-1}(y)} f^{-1}(\mu)(x) \\ &= \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu(f(x)) \\ &= \begin{cases} \mu(y), & \text{si } y = f(x) \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Alors $f(\eta)(y) \leq \mu(y)$, pour tout $y \in Y$. Donc $f(\eta) \leq \mu$. Par hypothèse $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p$, c'est-à-dire il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$, $p_n \in \eta$. De plus, on a $f(\eta)(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \eta(x)$, alors, pour tout $n > N$, $f(\eta)(f(x_n)) = \sup_{z \in f^{-1} \circ f(x_n)} \eta(z)$, d'où pour tout $n > N$, $f(\eta)(f(x_n)) > 0$, et par suite pour tout $n > N$, $f(p_n) \in f(\eta) \leq \mu$, c'est-à-dire $f(p_n) \in \mu$, pour tout $n > N$. Ainsi $f(p_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(p)$ dans (X, τ) . $\square$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. Adasch, B. Ernst, and D. Keim. *Topological vector spaces : the theory without convexity conditions*, volume 639. Springer, 2006.
- [2] R. Ameziane Hassani and M. Babahmed. Topologies polaires compatibles avec une dualité séparante sur un corps valué non-archimédien. *Proyecciones*, 20(2) :217–241, 2001.
- [3] R. Ameziane Hassani, M. Babahmed, and A. El Amrani. Topologies on sequence spaces in non-Archimedean analysis. *J. Math. Sci. Adv. Appl.*, 6(2) :193–214, 2010.
- [4] R. Ameziane Hassani, M. Babahmed, and A. El Amrani. Polar topologies on sequence spaces in non-Archimedean analysis. *Proyecciones*, 31(2) :103–123, 2012.
- [5] R. Ameziane Hassani, M. Babahmed, A. El Amrani, and A. Razouki. On the $\mathbb{K}$ -vector sequential topology on a non-Archimedean valued field. *p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, 12(3) :177–184, 2020.
- [6] R. Ameziane Hassani, M. Babahmed, A. El Amrani, and A. Razouki. Bornology and duality in locally $\mathbb{K}$ -convex sequential spaces. *Novi Sad Journal Of Mathematics*, <https://doi.org/10.30755/NSJOM.12697>, 2021.
- [7] R. Ameziane Hassani, M. Babahmed, A. El Amrani, and A. Razouki. Sequential topological inductive limit. *Revue Roumaine De Mathématiques Pures Et Appliquées*, 0(0) :0–0, Submitted–2020.
- [8] R. Ameziane Hassani, A. Blali, A. El Amrani, and A. Razouki. On the uniqueness of $\mathcal{I}$ -limits of sequences. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 18(2) :744–757, 2021.
- [9] R. Ameziane Hassani, A. Blali, A. El Amrani, and A. Razouki. On the $\mathcal{I}$ -sequential topology. *Functiones et Approximatio, Commentarii Mathematici*, 0(0) :0–0, Submitted–2020.
- [10] R. Ameziane Hassani, A. Blali, A. El Amrani, and A. Razouki. Fuzzy sequential topology. *Fuzzy Sets and Systems*, Submitted–2021.
- [11] R. Ameziane Hassani, A. Blali, A. El Amrani, and A. Razouki. On sequentially $\mathcal{I}$ -topological group. *Thai Journal of Mathematics*, 0(0) :0–0, Submitted–2021.

- [12] A. V. Arkhangel'skii. Some types of factor mappings and the relations between classes of topological spaces. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 153 :743–746, 1963.
- [13] A. V. Arkhangel'skii and V. I. Ponomarev. Dyadic bicompecta. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 182 :993–996, 1968.
- [14] S. Aytar and S. Pehlivan. Statistical convergence of sequences of fuzzy numbers and sequences of α -cuts. *Int. J. Gen. Syst.*, 37(2) :231–237, 2008.
- [15] K. K. Azad. Fuzzy grills and a characterization of fuzzy proximity. *J. Math. Anal. Appl.*, 79(1) :13–17, 1981.
- [16] K. K. Azad. On fuzzy semicontinuity, fuzzy almost continuity and fuzzy weakly continuity. *J. Math. Anal. Appl.*, 82(1) :14–32, 1981.
- [17] M. Babahmed. Sequential sets and sequential topologies. *ResearchGate, January*, 2017.
- [18] M. Başarir and Y. M. Et. On some generalized difference sequences of fuzzy numbers. *Kuwait J. Sci. Engrg.*, 34(1A) :1–14, 2007.
- [19] M. Başarir et al. On some new sequence spaces of fuzzy numbers. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 34(9) :1351–1357, 2003.
- [20] A. K. Banerjee and A. Banerjee. $\mathcal{I}$ -convergence classes of sequences and nets in topological spaces. *arXiv preprint arXiv :1608.03381*, 2016.
- [21] R. G. Bartle. Nets and filters in topology. *Amer. Math. Monthly*, 62 :551–557, 1955.
- [22] K. D. Bierstedt, R. G. Meise, and W. H. Summers. Köthe sets and Köthe sequence spaces. In *Functional analysis, holomorphy and approximation theory (Rio de Janeiro, 1980)*, volume 71 of *North-Holland Math. Stud.*, pages 27–91. North-Holland, Amsterdam-New York, 1982.
- [23] A. Boccuto, P. Das, X. Dimitriou, N. Papanastassiou, et al. Ideal exhaustiveness, weak convergence and weak compactness in banach spaces. *Real Analysis Exchange*, 37(2) :389–410, 2011.
- [24] J. R. Boone and F. Siwiec. Sequentially quotient mappings. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 26(2) :174–182, 1976.
- [25] J. Boos and T. Leiger. Dual pairs of sequence spaces. *Int. J. Math. Math. Sci.*, 28(1) :9–23, 2001.
- [26] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fasc. X. Première partie. Livre III : Topologie générale. Chapitre 10 : Espaces fonctionnels*. Actualités Sci. Indust., No. 1084. Hermann, Paris, 1961. Deuxième édition, entièrement refondue.
- [27] R. C. Buck. The measure theoretic approach to density. *American Journal of Mathematics*, 68(4) :560–580, 1946.
- [28] R. C. Buck. Generalized asymptotic density. *American journal of mathematics*, 75(2) :335–346, 1953.
- [29] M. Burgin. Theory of fuzzy limits. *Fuzzy Sets and Systems*, 115(3) :433–443, 2000.
- [30] H. Çakallı. On g-continuity. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(2) :313–318, 2011.

- [31] M. Caldas Cueva and C. T. Maia Vinagre. Sequences in non-Archimedean locally convex spaces. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 25(9) :955–962, 1994.
- [32] H. Cartan. Théorie des filtres. *CR Acad. Sci. Paris*, 205 :595–598, 1937.
- [33] J. Červeňanský. Statistical convergence and statistical continuity. *Zborník vedeckých prác MtF STU*, 6 :207–212, 1998.
- [34] K. Chandrasekharan. Topological preliminaries. In *A Course on Topological Groups*, pages 1–18. Springer, 1996.
- [35] C. L. Chang. Fuzzy topological spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 24 :182–190, 1968.
- [36] A. Choubey and A. K. Srivastava. On α -compact fuzzy topological spaces. *J. Fuzzy Math.*, 1(2) :321–326, 1993.
- [37] J. Connor. The statistical and strong p -cesaro convergence of sequences. *Analysis*, 8(1-2) :47–64, 1988.
- [38] J. Connor. Two valued measures and summability. *Analysis*, 10(4) :373–386, 1990.
- [39] J. Connor and K. G. Grosse-Erdmann. Sequential definitions of continuity for real functions. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, pages 93–121, 2003.
- [40] J. Connor and J. Kline. On statistical limit points and the consistency of statistical convergence. *Journal of mathematical analysis and applications*, 197(2) :392–399, 1996.
- [41] N. R. Das and P. Das. Fuzzy topology generated by fuzzy norm. *Fuzzy Sets and systems*, 107(3) :349–354, 1999.
- [42] P. Das. Some further results on ideal convergence in topological spaces. *Topology and its Applications*, 159(10-11) :2621–2626, 2012.
- [43] P. Das, P. Kostyrko, W. Wilczyński, and P. Malik. $\mathcal{I}$ and $\mathcal{I}^*$ -convergence of double sequences. *Mathematica Slovaca*, 58(5) :605–620, 2008.
- [44] P. Das and E. Savaş. On $\mathcal{I}$ -convergence of nets in locally solid riesz spaces. *Filomat*, 27(1) :89–94, 2013.
- [45] N. De Grande-De Kimpe. Perfect locally K -convex sequence spaces. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 74=Indag. Math.*, 33 :471–482, 1971.
- [46] M. A. De Prada Vicente and M. Macho Stadler. t -prefilter theory. *Fuzzy Sets and Systems*, 38(1) :115–124, 1990.
- [47] M. A. De Prada Vicente and M. Saralegui Aranguren. Fuzzy filters. *J. Math. Anal. Appl.*, 129(2) :560–568, 1988.
- [48] G. Di Maio and L. D. R. Kočinac. Statistical convergence in topology. *Topology and its Applications*, 156(1) :28–45, 2008.
- [49] P. Diamond and P. Kloeden. Metric spaces of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 35(2) :241–249, 1990.
- [50] S. Dierolf and J. Kakol. On S -barrelled spaces. *Results Math.*, 28(1-2) :40–48, 1995.
- [51] J. Dieudonné. Sur le separation des ensembles convexes dans un espace de banach. *Rev. Sci.*, 81 :642–643, 1941.
- [52] J. Dieudonné and L. Schwartz. La dualité dans les espaces $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{LF})$. *Annales de l’Institut Fourier*, 1 :61–101, 1949.

- [53] R. M. Dudley. On sequential convergence. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 112 :483–507, 1964.
- [54] K. Dutta and S. Ganguly. On strongly δ -continuous functions. *Carpathian J. Math.*, 19(1) :51–66, 2003.
- [55] P. Eklund and W. Gähler. Fuzzy filter functors and convergence. In *Applications of category theory to fuzzy subsets (Linz, 1989)*, volume 14 of *Theory Decis. Lib. Ser. B Math. Statist. Methods*, pages 109–136. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992.
- [56] A. El Amrani. Sequentially spaces and the finest locally $\mathbb{K}$ -convex of topologies having the same onvergent sequences. *Proyecciones*, 37(1) :153–169, 2018.
- [57] A. Esi and M. Acikgoz. On almost λ -statistical convergence of fuzzy numbers. *Acta Scientiarum. Technology*, 36(1) :129–133, 2014.
- [58] J. Fang and H. Huang. On the level convergence of a sequence of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 147(3) :417–435, 2004.
- [59] H. Fast. Sur la convergence statistique. In *Colloquium mathematicae*, volume 2, pages 241–244, 1951.
- [60] J. R. Ferrer, I. Morales, and L. M. Sánchez Ruiz. Sequential convergence in topological vector spaces. *Topology Appl.*, 108(1) :1–6, 2000.
- [61] R. Filipów, N. Mrozek, I. Reclaw, and P. Szuca. Ideal convergence of bounded sequences. *The Journal of Symbolic Logic*, 72(2) :501–512, 2007.
- [62] D. H. Foster. Fuzzy topological groups. *J. Math. Anal. Appl.*, 67(2) :549–564, 1979.
- [63] S. P. Franklin. Spaces in which sequences suffice I. *Fund. Math.*, 57 :107–115, 1965.
- [64] S. P. Franklin. Spaces in which sequences suffice II. *Fund. Math.*, 61 :51–56, 1967.
- [65] M. Fréchet. Sur la notion de voisinage dans les ensembles abstraits. *Bull. Sci. Math*, 42 :138–156, 1918.
- [66] A. Freedman and J. Sember. Densities and summability. *Pacific Journal of Mathematics*, 95(2) :293–305, 1981.
- [67] W. Freedman. Convergence preserving mappings on topological groups. *Topology and its Applications*, 154(6) :1089–1096, 2007.
- [68] J. Fridy. Statistical limit points. *Proceedings of the American mathematical society*, 118(4) :1187–1192, 1993.
- [69] S. Gabrielyan. Topological properties of strict (LF) -spaces and strong duals of Montel strict (LF) -spaces. *Monatsh. Math.*, 189(1) :91–99, 2019.
- [70] W. Gähler. The general fuzzy filter approach to fuzzy topology. I, II. *Fuzzy Sets and Systems*, 76(2) :205–224, 225–246, 1995.
- [71] S. Ganguly and K. Dutta. Strongly δ -continuous functions and topologies on function spaces. volume 18, pages 39–52. 2002. Dedicated to Costică Mustăța on his 60th anniversary.
- [72] S. Ganguly and S. Saha. A note on δ -continuity and δ -connected sets in fuzzy set theory. *Simon Stevin*, 62(2) :127–141, 1988.
- [73] D. N. Georgiou, S. D. Iliadis, A. C. Megaritis, and G. A. Prinos. Ideal-convergence classes. *Topology and its Applications*, 222 :217–226, 2017.

- [74] D. N. Georgiou, A. C. Megaritis, and G. A. Prinos. A study on convergence and ideal convergence classes. *Topology Appl.*, 241 :38–49, 2018.
- [75] D. N. Georgiou, A. C. Megaritis, G. A. Prinos, and F. Sereti. On statistical convergence of sequences of closed sets in metric spaces. *Math. Slovaca*, 71(2) :409–422, 2021.
- [76] C. Gómez and J. Kučera. Sequential completeness of inductive limits. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 24, 2000.
- [77] A. Goreham. Sequential convergence in topological spaces. *arXiv preprint math/0412558*, 2004.
- [78] D. A. Gregory. *Vector sequence spaces*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1967. Thesis (Ph.D.)—University of Michigan.
- [79] A. Grothendieck. *Sur les espaces (F) et (DF)* . Instituto de Matemática Pura e Aplicada do Conselho Nacional de Pesquisas, 1954.
- [80] J. Hančl, L. Mišík, and J. T. Tóth. Cluster points of sequences of fuzzy real numbers. *Soft Computing*, 14(4) :399, 2010.
- [81] B. Hazarika and A. Esi. Some ideal-convergent generalized difference sequences in a locally convex space defined by a musielak-orlicz function. *Mathematical studies*, (42,№ 2) :195–208, 2014.
- [82] S. Hernández and J. M. Mazón. On the sequential spaces of continuous functions. *Simon Stevin*, 60(4) :323–328, 1986.
- [83] T. Hirai, H. Shimomura, N. Tatsuuma, E. Hirai, et al. Inductive limits of topologies, their direct products, and problems related to algebraic structures. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 41(3) :475–505, 2001.
- [84] W. C. Hong and S. H. Kweon. On the uniqueness of sequential limits in sequential convergence spaces. *East Asian mathematical journal*, 10(2) :271–277, 1994.
- [85] L. Hormander. On the range of convolution operators. *Annals of Mathematics*, pages 148–170, 1962.
- [86] C. M. Hu. Theory of convergence in fuzzy topological spaces. *J. Fuzzy Math.*, 1(1) :1–12, 1993.
- [87] B. Hutton. Normality in fuzzy topological spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 50 :74–79, 1975.
- [88] B. Hutton. Uniformities on fuzzy topological spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 58(3) :559–571, 1977.
- [89] B. Hutton and I. Reilly. Separation axioms in fuzzy topological spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 3(1) :93–104, 1980.
- [90] A. J. Insel. A note on the hausdorff separation property in first countable spaces. *The American Mathematical Monthly*, 72(3) :289–290, 1965.
- [91] B. Josefson. Weak sequential convergence in the dual of a banach space does not imply norm convergence. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 81(1) :166–168, 1975.
- [92] J. Kąkol, W. Kubiś, and Manuel López-Pellicer. *Descriptive topology in selected topics of functional analysis*, volume 24. Springer Science & Business Media, 2011.

- [93] A. K. Katsaras. Fuzzy proximity spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 68(1) :100–110, 1979.
- [94] A. K. Katsaras and V. Benekas. Sequential convergence in topological vector spaces. *Georgian Math. J.*, 2(2) :151–164, 1995.
- [95] A. K. Katsaras and D. B. Liu. Fuzzy vector spaces and fuzzy topological vector spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 58(1) :135–146, 1977.
- [96] A. K. Katsaras, C. Petalas, and T. Vidalis. Non archimedean sequential spaces and the finest locally convex topology with the same compactoid sets. *Acta Math. Univ. Comenianae*, 63(1) :55–75, 1994.
- [97] J. Kisiński. Convergence du type L. In *Colloquium Mathematicum*, volume 2, pages 205–211, 1960.
- [98] Y. Kōmura. Some examples on linear topological spaces. *Mathematische Annalen*, 153(2) :150–162, 1964.
- [99] P. Kostyrko, M. Máčaj, T. Šalát, and M. Szeziak. $\mathcal{I}$ -convergence and extremal $\mathcal{I}$ -limit points. *Mathematica slovacica*, 55(4) :443–464, 2005.
- [100] P. Kostyrko, W. Wilczyński, T. Šalát, et al. $\mathcal{I}$ -convergence. *Real analysis exchange*, 26(2) :669–686, 2000.
- [101] G. Köthe. Topological vector spaces. In *Topological Vector Spaces I*, pages 123–201. Springer, 1983.
- [102] L. D. R. Kočinac. Selection properties in fuzzy metric spaces. *Filomat*, 26(2) :305–312, 2012.
- [103] L. D. R. Kočinac and M. H. M. Rashid. On ideal convergence of double sequences in the topology induced by a fuzzy 2-norm. *TWMS J. Pure Appl. Math.*, 8(1) :97–111, 2017.
- [104] A. Kriegl and P. W. Michor. *The convenient setting of global analysis*, volume 53. American Mathematical Soc., 1997.
- [105] S. V. Krishna and K. K. M. Sarma. Separation of fuzzy normed linear spaces. *Fuzzy sets and systems*, 63(2) :207–217, 1994.
- [106] V. Kumar and K. Kumar. On the ideal convergence of sequences of fuzzy numbers. *Inform. Sci.*, 178(24) :4670–4678, 2008.
- [107] J. S. Kwon. On statistical and p -Cesaro convergence of fuzzy numbers. *Korean J. Comput. Appl. Math.*, 7(1) :195–203, 2000.
- [108] B. K. Lahiri and P. Das. $\mathcal{I}$ and $\mathcal{I}^*$ -convergence in topological spaces. *Mathematica bohemia*, 130(2) :153–160, 2005.
- [109] R. Lowen. Topologies floues. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, 278 :925–928, 1974.
- [110] R. Lowen. Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness. *J. Math. Anal. Appl.*, 56(3) :621–633, 1976.
- [111] R. Lowen. Initial and final fuzzy topologies and the fuzzy Tychonoff theorem. *J. Math. Anal. Appl.*, 58(1) :11–21, 1977.
- [112] R. Lowen. Convergence in fuzzy topological spaces. *General Topology Appl.*, 10(2) :147–160, 1979.

- [113] R. Lowen. The relation between filter and net convergence in fuzzy topological spaces. *Fuzzy Math.*, 3(4) :41–52, 1983.
- [114] R. Lowen. *Fuzzy set theory*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996. Basic concepts, techniques and bibliography.
- [115] M. Macho Stadler and M. A. De Prada Vicente. Fuzzy t -net theory. *Fuzzy Sets and Systems*, 37(2) :225–235, 1990.
- [116] M. Macho Stadler and M. A. De Prada Vicente. t^* -fuzzy topological concepts. *Portugal. Math.*, 49(1) :85–108, 1992.
- [117] V. I. Malyhin. The tightness and Suslin number in $\exp X$ and in a product of spaces. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 203 :1001–1003, 1972.
- [118] J. L. K. Manuel. *General Topology*. Verlag New York Inc, 1975.
- [119] M. Matloka. Sequences of fuzzy numbers. *Busefal*, 28(1) :28–37, 1986.
- [120] P. Mikusiński. Axiomatic theory of convergence. *Uniw. Śląski w Katowicach Prace Nauk.-Prace Mat.*, (12) :13–21, 1982.
- [121] A. F. Monna. *Analyse non-archimédienne*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 56.
- [122] E. H. Moore and H. L. Smith. A General Theory of Limits. *Amer. J. Math.*, 44(2) :102–121, 1922.
- [123] O. Mucuk and T. Şahan. On g -sequential continuity. *arXiv preprint arXiv :1201.1795*, 2011.
- [124] M. N. Mukherjee and S. P. Sinha. On some near-fuzzy continuous functions between fuzzy topological spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 34(2) :245–254, 1990.
- [125] J. R. Munkres. *Topology : a first course*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.
- [126] M. Mursaleen and S. Mohiuddine. On ideal convergence in probabilistic normed spaces. *Mathematica slovac*, 62(1) :49–62, 2012.
- [127] A. Nabiev, S. Pehlivan, M. Gürdal, et al. On $\mathcal{I}$ -cauchy sequences. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 11(2) :569–576, 2007.
- [128] F. Nuray and E. Savaş. Statistical convergence of sequences of fuzzy numbers. *Math. Slovaca*, 45(3) :269–273, 1995.
- [129] M. O’Searcoid. *Elements of abstract analysis*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [130] H. H. Ostmann. *Additive Zahlentheorie : Erster Teil Allgemeine Untersuchungen*, volume 7. Springer-Verlag, 2013.
- [131] S. K. Pal. $\mathcal{I}$ -sequential topological spaces. *Appl. Math. E-Notes*, 14 :236–241, 2014.
- [132] V. Ponomarev. Axioms of countability and continuous mappings. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys.*, 8 :127–134, 1960.
- [133] P. M. Pu and Y. M. Liu. Fuzzy topology I : Neighborhood structure of a fuzzy point and Moore-Smith convergence. *J. Math. Anal. Appl.*, 76(2) :571–599, 1980.
- [134] P. M. Pu and Y. M. Liu. Fuzzy topology II : Product and quotient spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 77(1) :20–37, 1980.

- [135] M. H. M. Rashid and L. D. R. Kočinac. Ideal convergence in 2-fuzzy 2-normed spaces. *Hacet. J. Math. Stat.*, 46(1) :149–162, 2017.
- [136] V. Renukadevi and B. Prakash. $\mathcal{I}$ -fréchet-urysohn spaces. *Mathematica Moravica*, 20(2) :87–97, 2016.
- [137] V. Renukadevi and P. Vijayashanthi. On $\mathcal{I}$ -fréchet-urysohn spaces and sequential $\mathcal{I}$ -convergence groups. *Mathematica Moravica*, 23(1) :119–129, 2019.
- [138] A. P. Robertson and W. Robertson. *Topological vector spaces*, volume 53 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge-New York, second edition, 1980.
- [139] A. Rosenfeld. Fuzzy groups. *J. Math. Anal. Appl.*, 35 :512–517, 1971.
- [140] S. Saha. Fuzzy δ -continuous mappings. *J. Math. Anal. Appl.*, 126(1) :130–142, 1987.
- [141] T. Šalát. On statistically convergent sequences of real numbers. *Mathematica slovacica*, 30(2) :139–150, 1980.
- [142] T. Šalát and R. Tijdeman. On density measures of sets of positive integers. In *Topics in Classical Number Theory. Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai*, volume 34, pages 1445–1457, 1981.
- [143] T. Šalát, B. C. Tripathy, and M. Ziman. On some properties of $\mathcal{I}$ -convergence. *Tatra Mt. Math. Publ.*, 28(2) :274–286, 2004.
- [144] T. Šalát, B. C. Tripathy, and M. Ziman. On $\mathcal{I}$ -convergence field. *Ital. J. Pure Appl. Math.*, 17(5) :1–8, 2005.
- [145] M. Saralegui and M. A. de Prada Vicente. Una nota sobre convergencia en espacios topologicos fuzzy. pages 763–766, 1982.
- [146] M. Sarkar. On fuzzy topological spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 79(2) :384–394, 1981.
- [147] R. D. Sarma and N. Ajmal. Fuzzy nets and their application. *Fuzzy Sets and Systems*, 51(1) :41–51, 1992.
- [148] H. H. Schaefer. Locally convex topological vector spaces. In *Topological Vector Spaces*, pages 36–72. Springer, 1971.
- [149] H. H. Schaefer. *Topological vector spaces*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971. Third printing corrected, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 3.
- [150] W. H. Schikhof. Locally convex spaces over nonspherically complete valued fields. I, II. *Bull. Soc. Math. Belg. Sér. B*, 38(2) :187–207, 208–224, 1986.
- [151] W. H. Schikhof. *Locally convex spaces over non-Archimedean valued fields*. Cambridge University Press, 2010.
- [152] I. J. Schoenberg. The integrability of certain functions and related summability methods. *Amer. Math. Monthly*, 66 :361–375, 1959.
- [153] R. Snipes et al. Vector topologies on spaces of sequentially continuous linear transformations. 1978.
- [154] R. F. Snipes. T -sequential topological spaces. *Fund. Math.*, 77(2) :95–98, 1972.
- [155] R. F. Snipes. c -sequential and s -bornological topological vector spaces. *Mathematische Annalen*, 202(4) :273–283, 1973.

- [156] R. F. Snipes. S-barreled topological vector spaces. *Canad. Math. Bull.*, 21(2), 1979.
- [157] R. F. Snipes. Sequential separation theorems and s-locally convex topological vector spaces. *Mathematische Nachrichten*, 107(1) :73–85, 1982.
- [158] R. Srivastava, S. N. Lal, and A. K. Srivastava. Fuzzy hausdorff topological spaces. *Journal of mathematical analysis and applications*, 81(2) :497–506, 1981.
- [159] M. M. Stadler and M. A. de Prada Vicente. On n-convergence of fuzzy nets. *Fuzzy sets and Systems*, 51(2) :203–217, 1992.
- [160] P. L. Strong. Quotient and pseudo-open images of separable metric spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 33(2) :582–586, 1972.
- [161] Ö. Talo and F. Başar. On the space $bv_p(F)$ of sequences of p -bounded variation of fuzzy numbers. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 24(7) :1205–1212, 2008.
- [162] B. C. Tripathy and A. J. Dutta. On fuzzy real-valued double sequence space ${}_2l_F^p$. *Math. Comput. Modelling*, 46(9-10) :1294–1299, 2007.
- [163] B. C. Tripathy, M. Sen, and S. Nath. $\mathcal{I}$ -convergence in probabilistic n -normed space. *Soft computing*, 16(6) :1021–1027, 2012.
- [164] M. Valdivia. *Topics in locally convex spaces*. Elsevier, 1982.
- [165] J. Van Tiel. Espaces localement $\mathbb{K}$ -convexes, I-III. *Indag. Math.*, 27 :249–289, 1965.
- [166] M. Venkataraman. Directed sets in topology. *Math. Student*, 30 :99–100, 1962.
- [167] G. J. Wang. A new fuzzy compactness defined by fuzzy nets. *J. Math. Anal. Appl.*, 94(1) :1–23, 1983.
- [168] S. Warner. *Topological fields*, volume 157 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 126.
- [169] R. H. Warren. Continuity of mapping of fuzzy topological spaces. In *Notices of The American Mathematical Society*, volume 21, pages A451–A451. Amer Mathematical Soc 201 Charles ST, Providence, RI 02940-2213, 1974.
- [170] R. H. Warren. Neighborhoods, bases and continuity in fuzzy topological spaces. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, pages 459–470, 1978.
- [171] J. H. Webb. Sequential convergence in locally convex spaces. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 64 :341–364, 1968.
- [172] M. D. Weiss. Fixed points, separation, and induced topologies for fuzzy sets. *J. Math. Anal. Appl.*, 50 :142–150, 1975.
- [173] A. Wilansky. *Modern methods in topological vector spaces*. Courier Corporation, 2013.
- [174] C. K. Wong. Fuzzy points and local properties of fuzzy topology. *J. Math. Anal. Appl.*, 46 :316–328, 1974.
- [175] C. K. Wong. Fuzzy topology : product and quotient theorems. *J. Math. Anal. Appl.*, 45 :512–521, 1974.
- [176] S. Yamamuro. *Differential calculus in topological linear spaces*, volume 374. Springer, 1974.

- [177] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8 :338–353, 1965.
- [178] X. Zhou, L. Liu, and S. Lin. On topological spaces defined by $\mathcal{I}$ -convergence. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 46(3) :675–692, 2020.

ARTICLES, COMMUNICATIONS ET FORMATIONS

1. R. Ameziane Hassani, M. Babahmed, A. El Amrani, and A. Razouki. On the $\mathbb{K}$ -vector sequential topology on a non-Archimedean valued field. *p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, 12(3) :177–184, 2020.
2. R. Ameziane Hassani, A. Blali, A. El Amrani, and A. Razouki. On the uniqueness of $\mathcal{I}$ -limits of sequences. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 18(2) :744–757, 2021.
3. R. Ameziane Hassani, M. Babahmed, A. El Amrani, and A. Razouki. Bornology and duality in locally $\mathbb{K}$ -convex sequential spaces. *Novi Sad Journal Of Mathematics*. <https://doi.org/10.30755/NSJOM.12697>, 2021.
4. R. Ameziane Hassani, M. Babahmed, A. El Amrani, and A. Razouki. Sequential topological inductive limit. *Revue Roumaine De Mathématiques Pures Et Appliquées*, 0(0) :0–0, Submitted–2020.
5. R. Ameziane Hassani, A. Blali, A. El Amrani, and A. Razouki. On the $\mathcal{I}$ -sequential topology. *Functiones et Approximatio, Commentarii Mathematici*, 0(0) :0–0, Submitted–2020.
6. R. Ameziane Hassani, A. Blali, A. El Amrani, and A. Razouki. On sequentially $\mathcal{I}$ -topological group. *Thai Journal of Mathematics*, 0(0) :0–0, Submitted–2021.
7. R. Ameziane Hassani, A. Blali, A. El Amrani, and A. Razouki. Fuzzy sequential topology. *Fuzzy Sets and Systems*, Submitted–2021.
8. A. Razouki. Communication au Colloque. Les Quatrièmes Journées Internationales d’Analyse Fonctionnelles et de la théorie Spectrale. le 25 et 26 Octobre 2019 à la Faculté des Sciences Dhar El Mahraz Fès.
9. A. Razouki. Communication au conférence. The 2nd International Conference on Fixed Point Theory and Applications . Faculty of Sciences and Technologies Mohammedia on November 30, 2019.