

THESE

En vue de l'obtention du : **DOCTORAT**

Structure de Recherche : Mathématiques, statistique et applications

Discipline : Mathématiques Appliquées

Spécialité : Statistiques et Mathématiques Actuarielles

Présentée et soutenue le : **(30/06/2018)** par :

EL ATTAR Abderrahim

L'Apport des approches statistiques aux modèles actuariels pour un choix optimal de la réassurance

JURY

SOUISSI Ali	PES, Université Mohammed V, Faculté des Sciences – Rabat (Président)
GUENNOUN Zine El Abidine	PES, Université Mohammed V, Faculté des Sciences – Rabat (directeur de thèse)
ZIANI Mohammed	PH, Université Mohammed V, Faculté des Sciences – Rabat (Rapporteur)
GRETETE Driss	PH, Université Ibn Tofaïl, Ecole Nationale des Sciences Appliquées – Kénitra (Rapporteur)
BENBACHIR Saâd	PES, Université Mohammed V, Faculté des Sciences Juridiques, Economiques et Sociales – Rabat (Examineur)
EL HACHLOUFI Mostafa	PH, Université Hassan II, Faculté des Sciences Juridiques, Economiques et Sociales – Ain Sebâa, Casablanca (Examineur)

Année Universitaire : 2017/2018



Résumé

Dans ce travail, nous avons mis en œuvre de nouvelles approches de l'optimisation de la réassurance basées sur les modèles actuariels en convention avec les outils statistiques et les algorithmes génétiques pour maximiser le profit d'une compagnie d'assurance. En effet, nous avons proposé des améliorations de résultats obtenus dans la littérature à l'égard des critères que se fixaient les assureurs telles que la maximisation de l'espérance de bénéfice technique sous contrainte de variance (moyenne-variance), la minimisation de probabilité de ruine et la minimisation des mesures de risque.

Pour le critère de la minimisation de la probabilité de ruine, nous avons proposé une approche permettant d'optimiser la réassurance par une stratégie fondée sur la maximisation du bénéfice technique de la cédante et sur la minimisation de la probabilité de la ruine à partir de l'approximation de Gramer-Lundberg, en cherchant à la fois les paramètres de traités de réassurance et le coefficient d'ajustement de Lundberg optimaux qui permettent de maximiser le bénéfice technique et minimiser le risque d'une compagnie d'assurance.

Concernant le critère de la minimisation de mesure de risque, nous avons proposé un nouveau modèle d'optimisation de la réassurance qui agit tant sur la Conditional Tail Expectation (CTE) que sur le bénéfice technique. Dans ce modèle, nous avons déterminé les paramètres de traités de la réassurance optimale qui minimisent la (CTE) sous contrainte du bénéfice technique qui doit être aussi maximal. Ainsi, nous avons proposé un autre modèle d'optimisation de la réassurance en utilisant une nouvelle mesure de risque cohérente inspirée du principe de la valeur espérée et de la Conditional Tail Variance (CTV). De plus, nous avons développé une procédure d'optimisation basée sur le Lagrangien augmenté et les algorithmes génétiques, afin de résoudre le programme d'optimisation de ce modèle.

Au niveau de l'optimisation dynamique de la réassurance en temps continu, nous avons proposé une application de contrôle optimal stochastique dans un environnement (moyenne-variance) en utilisant une approche de résolution basée sur la programmation dynamique stochastique à travers la résolution d'une équation aux dérivées partielles appelée équation d'Hamilton Jacobi Bellman (HJB).

Mots clés: Algorithmes génétiques ; Bénéfice technique; Conditional Tail Expectation; Conditional Tail Variance; Contrôle optimal; Lagrangien augmenté; Optimisation; Probabilité de ruine; Programmation dynamique; Réassurance.

Abstract

In this work we have implemented new approaches to reinsurance optimization, based on actuarial models in agreement with statistical tools and genetic algorithms to maximize the profit of an insurance company. We proposed improvements in the results obtained in the literature with regard to the criteria set by insurers, such as maximizing the expected technical benefit under variance constraint (mean-variance), minimizing the probability of ruin and minimizing the risk measures.

For the criterion of minimization of the probability of ruin, we proposed an approach to optimize reinsurance by a strategy based on the maximization of the technical benefit of the cedant and on the minimization of the probability of ruin from the Gramer-Lundberg approximation, by looking at both the reinsurance treaty parameters and the optimal Lundberg adjustment coefficient that maximize the technical benefit and minimize the risk of an insurance company.

Concerning the risk minimization criterion, we proposed a new optimization model for reinsurance, which acts on both the Conditional Tail Expectation (CTE) and the technical benefit. In this model, we have determined optimal reinsurance treaty parameters that minimize (CTE) under the constraint of technical benefit which must also be maximal. Thus, we proposed a different reinsurance optimization model using a new coherent risk measure based on the principle of expected value and Conditional Tail Variance (CTV). In addition, we have developed an optimization procedure based on the augmented Lagrangian and the genetic algorithms, in order to solve the optimization program of this model.

At the level of the dynamic optimization of reinsurance in continuous time when the technical benefit of the cedant is described using a stochastic diffusion, we proposed an optimal stochastic control application in an environment (mean-variance) using a resolution approach based on stochastic dynamic programming that determines the optimal risk management policy over a given period of time through the resolution of a partial differential equation called the Hamilton equation Jacobi Bellman (HJB).

Keywords: Conditional Tail Expectation; Conditional Tail Variance; Dynamic programming; Genetic algorithms; Increased Lagrangian; Optimization; Optimum control; Probability of ruin; Reinsurance; Technical benefit.

Avant propos

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué sous la direction de monsieur GUENNOUN Zine El Abidine dans le laboratoire Mathématiques, Statistique et Applications. Au sein du département de mathématiques de la Faculté des Sciences de Rabat.

Au terme de ce travail, je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse monsieur le professeur GUENNOUN Zine El Abidine qui m'a fait le grand honneur d'accepter de diriger cette thèse. Je lui demeure reconnaissant pour sa rigueur intellectuelle, ses conseils et surtout sa passion pour la recherche qu'il a su me communiquer tout au long de ces quatre années de recherche.

Je remercie vivement monsieur SOUISSI Ali, professeur d'Enseignement Supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, de l'honneur qu'il m'a fait d'avoir accepté de présider mon jury de thèse.

Je tiens à remercier chaleureusement monsieur ZIANI Mohammed, professeur à la Faculté des Sciences de Rabat, pour l'intérêt qu'il a porté à mes travaux en acceptant la tâche de rapporteurs et d'avoir accepté d'être membres du mon jury.

Je remercie aussi monsieur GRETETE Driss, professeur à l'Ecole Nationale des Sciences Appliquées de Kénitra, d'avoir accepté d'être rapporteur dans mon jury et d'avoir dégagé du temps pour l'évaluation de mon travail.

Je voudrais également présenter mes remerciements les plus chaleureux à monsieur BENBACHIR Saad, professeur d'Enseignement Supérieur à la Faculté des Sciences Juridiques, Economiques et Sociales de Rabat, d'avoir accepté d'être examinateur dans mon jury.

Un grand merci à monsieur EL HACHLOUFI Mostafa, professeur à la Faculté des Sciences Juridiques, Economiques et Sociales – Ain Sbâa de Casablanca, qui m'a beaucoup aidé, et m'a initié aux principes de la recherche, pour la qualité de ses conseils précieux et perspicaces, ainsi que sa participation à l'évaluation de cette thèse en faisant partie des membres du jury.

Je voudrais aussi remercier tout particulièrement les membres du personnel administratif de la Faculté des Sciences de Rabat. En particulier le personnel du Département des Mathématiques et du Centre d'Etudes Doctorales.

Merci également à mes amis et collègues pour leurs coopérations et leur soutien.

Enfin, je souhaite exprimer mes sincères remerciements à toute ma famille et plus particulièrement, ma chère mère Zohra pour son soutien tout au long de mes études, mes sœurs, mes frères, ma femme et ma petite fille Hiba.

Table des matières

Résumé.....	III
Abstract	IV
Avant propos	V
Table des matières	VI
Liste des figures	IX
Liste des tableaux	X
Notations et Acronymes	XI
Introduction générale	1
Chapitre 1. État de l'art d'optimisation de la réassurance	6
1.1. Introduction.....	6
1.2. Préliminaire	8
1.2.1. Formes de réassurance	8
1.2.2. Principes de primes.....	10
1.2.3. Chargement de sécurité	12
1.2.4. Bénéfice technique.....	12
1.3. Critère de moyenne-variance.....	13
1.3.1. Approche de Walhin & Lampaert (2005)	15
1.3.2. Approche de Hess (2000)	16
1.4. Critère de la minimisation de la probabilité de ruine.....	19
1.4.1. Probabilité de ruine	19
1.4.2. Approche de Schmidli (2004)	20
1.5. Critère de la minimisation des mesures de risques	25
1.5.1. Mesures de risque assurantiel	26
1.5.2. Cohérence de mesure de risque	26
1.5.3. Value at Risk (VaR) et Conditional Value at Risk (CVaR)	27
1.5.4. Conditional Tail Expectation (CTE).....	28
1.5.5. Approche de Cai & Tan (2007)	30

1.5.6. Approche de K.S Tan et al (2011).....	34
1.6. Conclusion.....	39
Chapitre 2. Optimisation de la réassurance à l'aide des algorithmes génétiques	41
2.1. Introduction.....	41
2.2. Algorithmes génétiques (AGs)	41
2.2.1. Codage de données et génération de la population initiale	42
2.2.2. Evaluation des individus	43
2.2.3. Principes de sélection.....	43
2.2.4. Opérateur de Croisement	44
2.2.5. Opérateur de mutation	45
2.3. Procédure d'optimisation.....	45
2.4. Moyenne-variance sous le principe d'espérance mathématique.....	46
2.4.1. Cas des traités en «quote part».....	46
2.4.2. Cas des traités en «surplus»	48
2.4.3. Cas des traités en «excédent de sinistre».....	52
2.4.4. Exemples et applications numériques	54
2.5. Moyenne-variance sous le principe de prime de risque ajusté.....	58
2.5.1. Principe du risque ajusté.....	58
2.5.2. Formulation du problème d'optimisation.....	58
2.5.3. Cas des traités en «quote part».....	59
2.5.4. Cas des traités en «excédent de sinistre».....	60
2.5.5. Exemple et application numérique	62
2.6. Conclusion.....	63
Chapitre 3. "Moyenne-probabilité de ruine" pour un choix optimal de la réassurance	65
3.1. Introduction.....	65
3.2. Formulation du problème d'optimisation	66
3.2.1. Cas des traités en «quote part».....	68
3.2.2. Cas des traités en «excédent de sinistre».....	70
3.2.3. Cas des traités en «excédent de perte»	72
3.3. Procédure d'optimisation par les algorithmes génétiques.....	73
3.4. Exemple et application numérique	75

3.5. Conclusion.....	77
Chapitre 4. Réassurance optimale et la minimisation des mesures de risque	78
4.1. Introduction.....	78
4.2. Présentation d'une mesure de risque cohérente	78
4.3. Formulation du problème d'optimisation	81
4.3.1. Cas des traités en «quote-part»	83
4.3.2. Cas des traités en «excédent de perte»	85
4.4. Procédure d'optimisation par le lagrangien augmenté et les algorithmes génétiques	87
4.5. Exemple et application numérique	88
4.6. Conclusion.....	92
Chapitre 5. Contrôle stochastique pour l'optimisation dynamique de la réassurance	94
5.1. Introduction.....	94
5.2. Rappel sur la théorie du contrôle stochastique dynamique.....	96
5.2.1. Contrôle optimal.....	96
5.2.2. Programmation dynamique	97
5.3. Contrôle optimal stochastique pour un choix optimal de réassurance.....	101
5.3.1. Cadre du travail.....	101
5.3.2. Formulation du problème de contrôle optimal stochastique	103
5.4. Résolution par la programmation dynamique.....	104
5.4.1. Equation d'Hamilton Jacobi	104
5.4.2. Résolution de l'équation d'HJB.....	105
5.4.3. Détermination de la stratégie de réassurance optimale	106
5.5. Conclusion.....	108
Conclusion général	109
Publications & communications	112
Références	115

Liste des figures

Figure 1: Trajectoire du surplus et d'excédent de sinistres au cours du temps.....	20
Figure 2: Organigramme d'un algorithme génétique.....	42
Figure 3: Les cinq niveaux d'organisation d'un algorithme génétique	43
Figure 4: Croisement avec un point.....	44
Figure 5: Croisement avec 2 points.....	44

Liste des tableaux

Tableau 1: Tableau relatif aux espérances et variances optimales	55
Tableau 2: Chargements de sécurité de chaque risque	55
Tableau 3: Les taux de cession optimaux par les algorithmes génétiques.....	56
Tableau 4: Les taux de cession optimaux par la méthode de Walhin & Lampaert.....	56
Tableau 5: Tableau de comparaison entre Walhin & Lampaert et notre approche	57
Tableau 6: Résultats relatifs au bénéfice technique et coefficient d'ajustement	76
Tableau 7: Tableau de comparaison entre notre approche et l'approche de Cai & Tan	90

Notations et sigles

Notations	Signification
B	: Bénéfice technique de la cédante, variable aléatoire ;
u	: Capital initial de la compagnie d'assurance ;
X^A	: Charge de sinistre totale pour la cédante après la réassurance, variable aléatoire ;
X	: Charge de sinistre totale, variable aléatoire ;
X_i^A	: Charge d'i-ème sinistre pour la cédante après la réassurance, variable aléatoire ;
X_i^R	: Charge d'i-ème sinistre pour le réassureur, variable aléatoire ;
X_i	: Charge d'i-ème sinistre, variable aléatoire ;
η	: Chargement de sécurité de l'assurance, donné ;
η^r	: Chargement de sécurité de la réassurance, donné ;
ρ	: Coefficient d'ajustement de Lundberg ;
$CTE_\theta(X)$	: Conditional Tail Expectation correspond au risque X avec un niveau de probabilité θ ;
$CTV_\theta(X)$	: Conditional Tail Variance correspond au risque X avec un niveau de probabilité θ ;
$CVaR_\theta(X)$	: Conditional Value at Risk correspond au risque X avec un niveau de probabilité θ ;
$\tilde{a}(t)$	: Contrôle réalisable ;
$Cov(X)$	: Covariance de X ;
(Ω, F)	: Espace mesurable ;
L_{F_t}	: Ensemble des variables aléatoires F_t -mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur $(\Omega, F, (F_t)_{t \geq 0}, P)$;
$(\Omega, F, F_{t \geq t}, P)$	: Espace de probabilité filtré ;

$A[0, T]$	: Espace des contrôles réalisables ;
A_{ad}	: Espace des contrôles admissibles ;
$E(X)$	: Espérance mathématique de X ;
$\{F_t, t \in I\}$	: Filtration ;
$F_{ex}(x)$	: Fonction d'excès moyen ;
f_X	: Fonction de densité de X ;
F_X	: Fonction de répartition de X ;
F_X^{-1}	: Fonction de répartition réciproque de X ;
S_X^{-1}	: Fonction de survie réciproque de X ;
G	: La fonction Lagrangienne ;
L	: Limite de rétention pour la réassurance de type non proportionnelle ;
$(X - L)_+$	: Maximum de 0 et $X - L$, $\max(0, X - L)$;
$(m_i > 0)_{i=1, \dots, N}$	: Montants maximaux de réclamation que la cédante souhaite assumer pour couvrir le risque ;
$\{W_t, t \geq 0\}$	: Mouvement brownien ;
θ	: Niveau de probabilité ;
N	: Nombre des sinistres ;
λ	: Paramètres de traité de la réassurance ;
C_a	: Taux de cotisation des primes chargées de l'assureur ;
C_r	: Taux de cotisation des primes chargées du réassureur ;
P	: Prime totale collectée ;
Π	: Principe de prime, mode de tarification ;
$\varphi(t)$	: Probabilité de ruine, cas dynamique ;
$\psi(t)$	: Probabilité de survie (non-ruine) ;
$(N(t))_{t \geq 0}$	: Processus de comptage des sinistres, cas dynamique ;
R_N	: Processus de surplus statique ;
C	: Taux cotisation de rentrée des primes ;

T	: Taux d'arrêt ;
$\alpha \in]0,1]$	: Taux de cession pour la réassurance de type proportionnelle ;
$(a_i > 0)_{i=1,\dots,N}$	: Valeurs fixes du plein de rétention que la cédante conserve à sa charge pour chaque risque ;
$VaR_\theta(X)$	: Value at Risk correspond au risque X avec un niveau de probabilité θ ;
$X \wedge L$	: Minimum de X et L , $\min(X, L)$;
$Var(X)$	: Variance de X ;

Sigles	Signification
AG	: Algorithme génétique ;
CS	: Coefficient de sécurité ;
EDS	: Equation différentielle stochastique ;
EDSR	: Equations différentielle stochastique rétrograde
HJB	: Hamilton-Jacobi-Bellman ;
i.i.d	: Indépendantes et identiquement distribuées ;
LA	: Lagrangien augmenté.

Introduction générale

Contexte du travail

Les activités d'assurance reposent sur la théorie de gestion de risques permettant d'identifier et d'évaluer les sources de risques dans le but de minimiser ceux-ci ou s'en protéger. Ces activités sont développées par les approches actuarielles afin de présenter les méthodes de calcul des primes, les charges des sinistres, et la solvabilité des compagnies d'assurance. Cette dernière consiste à déterminer le moment du défaut (ruine), le niveau des réserves et des fonds propres dont doit disposer l'assureur pour être solvable.

En outre, l'assureur doit protéger sa compagnie contre le risque de perte, en transférant une partie du risque à une deuxième compagnie d'assurance (réassureur). A son tour, le réassureur doit fournir une protection contre les grosses réclamations et réaliser un équilibre financier pour la compagnie d'assurance.

Le bon fonctionnement de l'activité de réassurance est donc crucial pour le secteur de l'assurance et constitue un facteur de stabilité. Toutefois, une question s'impose: quelle est la meilleure forme de la réassurance pour leur compagnie ? Il s'agit bel et bien d'une question récurrente dans l'assurance. En tentant d'y répondre, une autre question se substituant de la première s'impose aussi: pour un principe de prime donné, quelle est la forme de réassurance optimale que doit choisir la compagnie d'assurance pour maximiser son bénéfice technique et minimiser le risque ? Ce problème dépend évidemment de la stratégie adoptée par la compagnie d'assurance, laquelle diffère d'un assureur à un autre et dépend de plusieurs critères: le comportement des assurés, la distribution des montants des sinistres, la nature du portefeuille (type de l'assurance, forme de réassurance, ...etc.). On peut également tenir compte de l'expérience de l'assureur et des statistiques observées.

Dans ce contexte, nous sommes face à un problème d'optimisation de la réassurance qui suscite un intérêt particulier dans la recherche en mathématiques actuarielles. Le but principal est de trouver la structure optimale de la réassurance qui permet de maximiser le bénéfice technique espéré et de minimiser le risque sous certaines contraintes.

La littérature existante sur le choix de la structure optimale de la réassurance peut être sectionnée en deux groupes, en termes d'outils de résolution via un modèle statique ou dynamique. Le premier volet de la littérature qui utilise les approches statiques est initié par [De Finetti \[32\]](#) et développé ensuite par plusieurs auteurs comme [Borch \[17\]](#), [Arrow \[6\]](#), [Smith \[111\]](#), [Ohlin \[94\]](#), [Raviv \[100\]](#), [Moffet \[90\]](#), [Blazenko \[16\]](#), [Hess \[59\]](#), [Aase \[1\]](#), [Deelstra & Plantin \[33\]](#), [Krvavych \[75\]](#), [Walhin & Lampaert \[120\]](#), [Schmidli \[108\]](#), [Cai & Tan \[21\]](#) et [Tan & Chi \[117\]](#). Alors que ce groupe paraît utiliser un modèle statique commun, les outils auxquels ils font appel sont variés. Par exemple, ils utilisent des formes de traitées différentes ([De Finetti](#) a étudié la forme de réassurance proportionnelle de type «quote part» alors que [Borch \[17\]](#), [Ohlin \[94\]](#) et [Schmidli \[108\]](#) utilisent la forme de réassurance non proportionnelle de type «excédent de perte annuelle»). En outre, ils utilisent des mesures de risques différentes ainsi que des critères de choix variés telles que la maximisation de l'espérance de bénéfice technique sous contrainte de la variance (moyenne-variance), la minimisation de probabilité de ruine et la minimisation des mesures de risque.

Le deuxième volet de la littérature remet en cause l'aspect statique de la stratégie de réassurance et propose une vision plutôt dynamique. Les approches développées dans ce contexte prennent en considération la dimension temporelle et les contrats annuels peuvent être révisés d'une manière périodique en fonction des flux des sinistres dans le temps. La littérature dans ce domaine s'est inspirée du travail de [Merton \[86\]](#) qui a introduit la théorie du contrôle stochastique pour résoudre des problèmes de consommation et d'investissement en temps continu. Plusieurs autres travaux ont ultérieurement généralisé le modèle dynamique de [Merton \[86\]](#) pour des applications diverses. [Karatzas & al \[77\]](#), [Hipp & Taksar \[73\]](#), [Zhou & Lim \[131\]](#), [Zhou & Yin \[132\]](#) et d'autres auteurs l'ont amélioré en proposant des solutions pour les problèmes de consommation et d'investissement basés sur le critère de maximisation de la fonction de l'utilité.

Il en va de même pour le problème dynamique de stratégie d'investissement optimale et d'assurance, [Schmidli \[108\]](#), [Moore & Young \[91\]](#), [Dickson & Waters \[38\]](#), [Taksar & Loft \[114\]](#) et [Wang & Zhang \[121\]](#) ont étudié le problème de contrôle optimal en adoptant le critère de la minimisation de la probabilité de ruine pour trouver la politique optimale de réassurance et d'investissement. Ces dernières aideraient à maximiser la richesse terminale qui représente la valeur de liquidation de la société au moment de la faillite.

La génération récente comme [Zhuo & Wu \[133\]](#) a développé un modèle de jeu différentiel stochastique entre la compagnie d'assurance et le réassureur. Ces auteurs adoptent les stratégies de réassurance optimales pour réduire le risque en utilisant la programmation dynamique. Également, [Guan & Liang \[55\]](#), [Huiming & Yingchun \[65\]](#), entre autres, ont étudié le problème de réassurance optimale et d'investissement pour un assureur. Ils ont pris en compte le risque de taux d'intérêt et le risque d'inflation en employant la programmation dynamique stochastique pour trouver les stratégies de réassurance et d'investissement optimales sous le critère de la maximisation de la fonction d'utilité.

Motivation et contribution

Les différentes approches précédentes qui ont entamé la littérature du problème d'optimisation de la réassurance agissent soit sur le bénéfice technique (en le maximisant pour un risque donné), soit sur le risque (en le minimisant pour un bénéfice technique donné), mais elles n'agissent pas sur les deux en même temps d'une manière dynamique. En effet, l'utilisation des critères d'optimisation précédents (minimisation de risque ou bien maximisation du bénéfice) seuls ne permet pas d'aboutir en général à une décision rationnelle pour le choix de la réassurance optimale. C'est-à-dire la minimisation de risque n'implique pas toujours un bénéfice technique maximal, et inversement. Alors l'assureur ne doit pas choisir le traité de la réassurance optimale si celui-ci n'est pas bénéfique.

En outre, toutes les approches proposées dans les modèles précédents ne prennent pas en compte l'intérêt de liquidité des traités de la réassurance. C'est à dire l'assureur ne doit pas choisir le traité de la réassurance optimale si celui-ci n'est pas disponible sur le marché de la réassurance.

Donc il nous a paru primordial de réaliser des approches efficaces qui agissent à la fois sur le bénéfice technique et sur le risque et prendre en considération la liquidité des traités de la réassurance optimale. Ces approches présentent les mécanismes des algorithmes génétiques en décrivant les nouvelles possibilités offertes par ces derniers dans le domaine l'optimisation de la réassurance. En effet, les algorithmes génétiques n'utilisent que la valeur de la fonction étudiée, pas sa dérivée ni une autre connaissance auxiliaire, ce qui permet de faciliter leur mise en application et leur efficacité même pour des problèmes d'optimisation complexes.

C'est ainsi que nous avons développé un algorithme dynamique basé sur le Lagrangien augmenté et les algorithmes génétiques afin de l'appliquer en convention

avec les différents approches mathématiques et outils statistiques pour résoudre le problème d'optimisation de la réassurance avec contraintes. Il s'agit d'un algorithme d'optimisation performant capable à la fois de maximiser le bénéfice technique et de minimiser le risque d'une compagnie d'assurance sous certaines contraintes. Ceci a permis de résoudre facilement dans des temps très courts, des problèmes d'optimisation de plus en plus complexes avec plusieurs contraintes d'égalité et/ou d'inégalité, grâce notamment aux ordinateurs.

Il en va de même, pour le problème dynamique de la réassurance optimale, l'idée commune des travaux qui ont entamé la littérature montre que la stratégie utilisée pour déterminer un choix optimal de la réassurance repose aussi bien sur le modèle classique de [Cramer-Lundberg](#) (lorsque le surplus de la cédante est décrit à l'aide d'une diffusion stochastique) que sur l'approximation de la probabilité de ruine à partir de ce modèle. Cependant, cette approximation n'est toujours pas possible, en l'occurrence dans le cas des distributions à queues épaisses où la fonction génératrice des moments est indéterminée, et l'approximation du type [Cramer-Lundberg](#) n'existe pas pour la probabilité de ruine même dans le cas de réassurance ([Alex Bellos \[3\]](#)).

Par ailleurs, les approches dynamiques précédentes agissent seulement sur la probabilité de la ruine (en la minimisant) ou bien sur la maximisation de la fonction d'utilité, mais la compagnie d'assurance cherche toujours à maximiser son bénéfice technique. Dans ce cadre, [Ben Dbabis \[13\]](#) et plusieurs autres chercheurs ont vérifié que le critère de la minimisation de la probabilité de ruine seul ne permettait pas d'aboutir en général au bon bénéfice technique. Pour cette raison nous avons proposé un modèle d'optimisation dynamique qui agit aussi bien sur le bénéfice technique que sur le risque. Nous avons démontré également que notre méthode dynamique présente des solutions pratiques permettant de tirer les meilleurs résultats et d'aboutir à un meilleur choix des traités de la réassurance disponibles.

Organisation du travail

Ce mémoire s'articule autour de cinq chapitres, il est organisé comme suit :

Le premier chapitre est un état de l'art des méthodes adoptées dans le cadre de l'optimisation de la réassurance. Dans ce chapitre nous exposons les différentes formes de la réassurance en expliquant leurs formulations mathématiques, ainsi les différents principes de prime utilisés et leurs propriétés, puis nous allons relever les approches d'optimisation de la réassurance les plus importantes dans la littérature

actuarielle, en expliquant les diverses critiques adressées à chacune de ces approches ainsi que les avantages et les inconvénients de certaines d'entre elles.

Dans le deuxième chapitre, nous mettons en œuvre des applications de méthode d'algorithmes génétiques sur l'optimisation de la réassurance tout en développant notre contribution à l'égard du critère d'optimisation moyenne-variance en démontrant l'efficacité de nos modèles.

Au niveau du troisième chapitre, nous proposons une approche permettant d'optimiser la réassurance par une stratégie fondée sur la maximisation de bénéfice technique de la cédante sous le critère de la probabilité de ruine en utilisant les algorithmes génétiques en améliorant les résultats trouvés dans la littérature.

Concernant le quatrième chapitre, il se focalise sur un nouveau modèle d'optimisation sous contrainte pour un choix d'une forme de réassurance optimale en utilisant le critère de la minimisation de mesure de risque et en se basant sur les nouvelles mesures de risques à savoir, la Conditional Tail Expectation (CTE) et la Conditional Tail Variance (CTV). Dans ce chapitre, nous développons un nouvel algorithme d'optimisation de la réassurance basé sur les algorithmes génétiques et la Lagrangienne augmentée en convention avec les méthodes statistiques et les modèles actuariels.

Le chapitre cinq concerne l'optimisation stochastique en temps continu et son application en optimisation de la réassurance. Il est orchestré comme suit :

Nous donnons d'abord une formulation mathématique du problème de contrôle optimal stochastique dans un environnement (moyenne-variance). Ensuite, nous présentons une approche de résolution basée sur la programmation dynamique stochastique qui permettra la détermination de la stratégie de réassurance optimale sur une période donnée. Leur proposition implique la résolution de l'équation aux dérivées partielles d'[Hamilton Jacobi Bellman](#) (HJB).

Chapitre 1. État de l'art d'optimisation de la réassurance

1.1. Introduction

L'optimisation de la réassurance est un sujet important et innovant dans la recherche en mathématiques actuarielles. Le but principal d'un assureur est sans doute la maximisation du bénéfice technique espéré et la minimisation des risques.

A cet égard, plusieurs modèles ont été proposés pour déterminer un choix optimal de la réassurance dont le plus populaire est celui élaboré dans le cadre de l'approche moyenne-variance traitée pour la première fois dans les travaux de [De Finetti \[32\]](#). Cette approche repose sur le critère de la minimisation de la variance du bénéfice technique en gardant l'espérance mathématique du bénéfice technique maximal.

[De Finetti](#) a étudié le problème d'optimisation moyenne-variance dans le cas d'une forme de réassurance de type «quote part». [Borch \[17\]](#), de son côté, a développé la même stratégie de [De Finetti](#) sur la charge totale des sinistres de la cédante en utilisant la forme de réassurance non proportionnelle de type «excédent de perte annuelle». [Kann \[72\]](#) a traité le problème de [Borch](#) de manière différente en appliquant plusieurs types de transformations plus généralisés que ceux utilisés par [Borch \[17\]](#).

Dans ce cadre, on dispose d'un ensemble de papiers s'intéressant à l'approche Moyenne-variance et enrichissant la littérature actuarielle comme, [Arrow \[6\]](#), [Mossin \[92\]](#), [Smith \[111\]](#), [Ohlin \[94\]](#), [Raviv \[104\]](#), [Moffet \[100\]](#), [Blazenko \[16\]](#) et [Hess \[59\]](#)...etc.

Dans les approches précédentes, les auteurs ont appliqué un principe de prime (mode de tarification) basé sur l'espérance mathématique. [Gajesk & Zagrodny \[45\]](#) et [Kaluszka \[71\]](#) ont étudié la même approche en utilisant le principe de l'écart type, cette étude aboutit à un traité de la réassurance optimal qui mélange la «quote part» et le «excédent de sinistre» qui s'appelle «change-loss reinsurance». [Kaas & al \[68\]](#)

ont utilisé d'autres principes de prime basés sur la variance. Par conséquent, ils ont trouvé que la forme de réassurance optimale est la «quote part». [Krvavych \[75\]](#) et [Walhin & Lampaert \[120\]](#) ont appliqué l'approche moyenne-variance sur la forme de la réassurance proportionnelle de type «excédent de plein» appelé aussi «surplus».

Cependant, plusieurs critiques ont été adressées à ces modèles comme le choix de la variance en tant que mesure de risque et la charge du calcul (complexité des expressions algébriques)...etc. En effet, la variance de la distribution de bénéfice technique de la cédante décrit la dispersion mais ne mesure pas précisément la sévérité des valeurs extrêmes de la distribution du bénéfice.

L'approche moyenne-variance reste peu employée dans la pratique à cause de plusieurs limites à savoir, le caractère quadratique de la fonction objectif et la charge de calcul de la matrice de variance-covariance, la perception du risque n'est pas symétrique par rapport à la moyenne, alors que la variance prend en compte de la même manière les variations au dessous et en dessus du bénéfice espéré.

De plus, la mesure de risque introduite dans les modèles précédents n'est pas une mesure de risque cohérente c'est-à-dire elle ne satisfait pas les propriétés importantes d'[Azertner \[8\]](#) comme l'homogénéité et l'invariance par translation.

Ces critiques donnent lieu à une multitude de tentatives d'amélioration de ces modèles ou bien de développement de nouveaux modèles. Dans cette optique, bon nombre de chercheurs ont proposé de nouveaux critères de choix optimal de la réassurance. On en trouve, entre autres, [Dickson & Waters \[38\]](#), [Aase \[1\]](#), [Krvavych \[75\]](#), [Schmidli \[108\]](#) et [Deelstra & Plantin \[33\]](#) qui ont choisi d'aller chercher l'optimalité par le critère de la minimisation de la probabilité de ruine.

Cependant, plusieurs auteurs ont signalé que le critère de la minimisation de la probabilité de ruine seul ne permet pas d'aboutir à une décision rationnelle pour un choix optimal de la réassurance, car ce critère agit seulement sur le risque (en minimisant la probabilité de ruine), mais n'agit pas sur le bénéfice technique, c'est à dire l'assureur ne doit pas choisir le traité de la réassurance optimal si celui-ci n'est pas rentable.

Pour cette raison, plusieurs chercheurs ont introduit un nouveau critère du choix de la réassurance optimale basé sur la minimisation des mesures de risque, telles que la Value-at-Risk (VaR) et la Conditional Tail Expectation (CTE).

Cependant, les études récentes ont montré que la VaR manifeste plusieurs inconvénients, le plus marquant étant la non prise en compte du montant des pertes

excédant la VaR et la sous additivité, ce qui signifie qu'avec cette mesure, toute diversification n'implique pas un risque réduit. Pour corriger les faiblesses de la VaR, une nouvelle mesure de risque est adoptée. Elle est appelée la Conditional Tail Expectation (CTE) et définie comme étant la perte moyenne étant donnée que la perte est plus grande que la VaR.

Dans ce cadre [Cai & Tan \[21\]](#) ont proposé un critère basé sur la minimisation des mesures de risques telles que, la Value-at-Risk (VaR) et la Conditional Tail Expectation (CTE) en démontrant l'existence de rétention optimale explicite dans le cas des traités «excédent de perte annuelle». Cette approche a été généralisée ensuite par [Tan & al \[116\]](#) qui ont utilisé un modèle auxiliaire pour résoudre le problème de traité de la réassurance optimale grâce au modèle «CTE-minimisation». Ce modèle est exprimé par la richesse initiale de l'assureur et la richesse finale.

Ce premier chapitre est un état de l'art des méthodes adoptées dans le cadre de l'optimisation de la réassurance. Nous exposons les différentes formes de la réassurance, ainsi que les différents principes de prime utilisés et leurs propriétés. Puis nous allons relever les approches d'optimisation de la réassurance les plus importantes dans la littérature actuarielle, en expliquant les diverses critiques adressées à chacune de ces approches ainsi que les avantages et les inconvénients de certaines d'entre elles.

1.2. Préliminaire

1.2.1. Formes de réassurance

Soit un portefeuille composé de N variables aléatoires positives représentant les charges des sinistres (risques) $X_1, \dots, X_N$ correspondent aux primes respectives $P_1, \dots, P_N$ (les primes nettes collectées), où $P = \sum_{i=1}^N P_i$ est la prime totale nette collectée.

La réassurance est un outil par lequel la compagnie d'assurance direct de se décharger de tout ou partie de ses risques qu'il a souscrit auprès d'une autre compagnie appelée réassureur moyennant une tarification appelée prime de réassurance.

Pour un contrat de réassurance, les charges des sinistres $(X_i)_{i \in [1, \dots, N]}$ sont partagées de la manière suivante :

$$X_i = X_i^A + X_i^R, \quad \forall i \in [1, \dots, N] \quad (1.1)$$

où, les portions $(X_i^A)_{i=1,...,N}$ retenues par la cédante et la portion $(X_i^R)_{i=1,...,N}$ sont transférées au réassureur.

La charge du réassureur ne doit en aucun cas dépasser la charge des sinistres comme elle ne doit pas être négative, i.e. $0 < X_i^R \leq X_i, \forall i \in [1, ..., N]$.

En général, il existe deux formes de réassurance: la réassurance proportionnelle et la réassurance non proportionnelle.

a. Réassurance proportionnelle

La forme de réassurance proportionnelle limite la responsabilité de la cédante à une proportion α du risque X_i , $\alpha \in]0,1]$, appelée le facteur de proportionnalité (taux de cession). Dans ce cas, le réassureur assume le risque $X_i^R = \alpha X_i$ et la portion $X_i^A = (1-\alpha)X_i$ retenue par la cédante. $\forall i \in [1, ..., N]$.

Dans le cas de la réassurance proportionnelle, on peut distinguer :

- **Réassurance en quote-part «quota share»:** c'est un contrat de réassurance proportionnel où le facteur de proportionnalité $\alpha \in]0,1]$ est constant pour tous les risques réassuré, tel que :

$$X_i^R = \alpha X_i \quad \text{et} \quad X_i^A = (1-\alpha) X_i, \quad \forall i \in [1, ..., N] \quad (1.2)$$

- **Réassurance en excédent de plein «surplus»:** à l'inverse des traités «*quote-part*», les «surplus» ont un taux de cession varie selon le montant maximal de réclamation et le plein de rétention qui correspond à un montant fixe que la cédante conserve à sa charge pour chaque risque.

$$X_i^A = \min(X_i, a_i) + \frac{a_i}{m_i} \max(0, X_i - a_i), \quad \forall i \in [1, ..., N] \quad (1.3)$$

et

$$X_i^R = \left(1 - \frac{a_i}{m_i}\right) \max(0, X_i - a_i), \quad \forall i \in [1, ..., N] \quad (1.4)$$

sachant que $(m_i > 0)_{i=1,...,N}$ sont les montants maximaux de réclamation et $(a_i > 0)_{i=1,...,N}$ sont les valeurs fixes du plein de rétention que la cédante conserve à sa charge pour chaque risque; où $m_i \geq a_i, \forall i \in [1, ..., N]$.

Dans ce cas, les taux de cession $(\alpha_i)_{i=1,...,N}$ sont donnés par la formule suivante :

$$\alpha_i = \frac{m_i - a_i}{m_i}, \quad \alpha_i \in]0,1], \quad \forall i \in [1, ..., N] \quad (1.5)$$

(Voir [Malinge 2013 \[82\]](#)).

b. Réassurance non proportionnelle

Le contrat de la réassurance non proportionnelle limite la responsabilité de la cédante à un montant $L > 0$ appelée limite de rétention, tel que :

L'assureur assume le risque $X_i^A = \min(X_i, L)$ et la portion $X_i^R = \max(0, X_i - L)$ transférées au réassureur ; $\forall i \in [1, \dots, N]$.

En pratique, la limite de rétention associée à ces traités est exprimée sous la forme d'un montant fixe ou d'un pourcentage des primes, tel que $L = \beta * P$, où P est la recette des primes collectée et $\beta \in]0, 1]$ est la proportion.

Dans le cas de la réassurance non proportionnelle, on peut distinguer :

- Réassurance en excédent de sinistre «excess of loss»:

C'est un contrat de réassurance non proportionnel où la limite de rétention $L > 0$ est applicable à chaque réclamation individuelle.

$$X^R = \sum_{i=1}^N \max(0, X_i - L) \quad \text{et} \quad X^A = \sum_{i=1}^N \min(X_i, L) \quad (1.6)$$

où, X^A est la charge de sinistre totale pour la cédante et X^R est la charge de sinistre totale pour le réassureur.

- Réassurance en excédent de perte annuelle «stop loss»:

C'est un contrat de réassurance non proportionnel où la limite de rétention $L > 0$ est applicable au total des réclamations, tel que :

$$X^R = \max\left(0, \sum_{i=1}^N X_i - L\right) \quad \text{et} \quad X^A = \min\left(\sum_{i=1}^N X_i, L\right) \quad (1.7)$$

1.2.2. Principes de primes

L'activité d'assurance repose sur le concept de transfert de risque moyennant une prime. Mesurer le risque assurantiel s'avère inévitable puisque cette information est nécessaire pour la tarification (principe de prime).

Soit V un ensemble non vide des variables aléatoires mesurables à valeurs réelles positives, et X est un élément de V représente la charge des sinistres.

La mesure de risque X est définie par une fonction Π présentée comme suit :

$$\begin{aligned} \Pi: V &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ X &\rightarrow \Pi(X) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Π est appelée aussi un principe de prime.

Les propriétés principales d'un principe de prime sont :

- Marge de sécurité positive : $\Pi(X) \geq E(X)$, tel que $E(X)$ est l'espérance mathématique de X ;
- Additivité : $\Pi(X + Y) = \Pi(X) + \Pi(Y)$, tels que X et Y sont deux risques indépendants ;
- Proportionnalité : $\Pi(aX) = a\Pi(X)$, $\forall a \geq 0$;
- Invariance par translation : $\Pi(X + a) = \Pi(X) + a$, $\forall a \geq 0$;
- Plafonnement : $\Pi(X) \leq X_{\max}$, la prime ne dépasse pas un montant maximal $X_{\max}$.

En général, il n'existe pas un principe de prime qui satisfait toutes les propriétés, plusieurs tentatives ont été faites pour créer un principe de prime qui satisfait au plus grand nombre de propriétés dont les plus importants :

❖ *Le principe de l'espérance mathématique*

Ce principe est basé sur le montant espéré des réclamations :

$$\Pi(X) = (1 + \eta) E(X) \quad (1.9)$$

où $\eta > 0$ est un nombre réel strictement positif.

❖ *Le principe de la variance*

Ce principe mélange l'espérance mathématique et la variance :

$$\Pi(X) = E(X) + \eta \text{Var}(X) \quad (1.10)$$

où $\eta > 0$ est un nombre réel positif.

❖ *Le principe de l'écart-type*

Ce principe mélange l'espérance mathématique et l'écart-type :

$$\Pi(X) = E(X) + \eta \sqrt{\text{Var}(X)} \quad (1.11)$$

où $\eta > 0$ est un nombre réel positif.

❖ *Le principe exponentiel*

Ce principe est présenté par :

$$\Pi(X) = \frac{1}{\eta} \ln E(\exp(-\eta X)) \quad (1.12)$$

où $\eta > 0$ est un nombre réel strictement positif.

Remarque: le paramètre $\eta > 0$ est significativement interprété comme le chargement de sécurité.

1.2.3. Chargement de sécurité

La notion de chargement de sécurité est étroitement liée à celle de tarification: un principe de prime contient un chargement de sécurité s'il conduit à exiger une prime supérieure à celle qui est exigée si la mutualisation des risques est parfaite.

Le chargement de sécurité permet à l'assureur de pouvoir résister à la volatilité naturelle des sinistres. (Besson & Partrat [14]).

Un mode de tarification Π contient un chargement de sécurité si pour tout risque X , on a $\Pi(X) \geq E(X)$, tel que $E(X)$ est l'espérance mathématique de X .

Dans la suite on note par $\eta > 0$ et $\eta^r > 0$ respectivement, les chargements de sécurité de l'assureur et du réassureur.

1.2.4. Bénéfice technique

Le bénéfice technique (ou résultat technique) est obtenu en soustrayant aux primes nettes collectées pendant une période donnée, les primes chargées de la réassurance et les charges de l'assureur.

Supposons que la compagnie d'assurance applique un principe de prime Π pour couvrir les charges de la réassurance avec les chargements de sécurité $(\eta_i^r)_{i=1, \dots, N} > 0$.

Le bénéfice technique de la cédante est une variable aléatoire définie par :

$$B = \sum_{i=1}^N [P_i - \Pi(X_i^R) - X_i^A] \quad (1.13)$$

Les portions $(X_i^A)_{i=1, \dots, N}$ et $(X_i^R)_{i=1, \dots, N}$ sont liées aux traités de la réassurance choisies par la compagnie d'assurance.

B dépend de la distribution des charges des sinistres et des paramètres de traités de réassurance suivants :

- Le facteur de proportionnalité dans le cas de la réassurance proportionnelle ;
- La limite de rétention dans le cas de la réassurance non proportionnelle ;

Noter $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ le vecteur des paramètres des traités de réassurance et

$X = (X_1, \dots, X_N)$ le vecteur des charges des sinistres.

Tel que $X_i^A = f(X_i, \lambda_i)$ et $X_i^R = g(X_i, \lambda_i)$, $\forall i \in [1, \dots, N]$, où f et g sont deux fonctions définies sur un ensemble non vide des variables aléatoires mesurables à valeurs réelles positives.

La fonction g doit vérifier $0 < g(X_i, \lambda_i) \leq X_i$, pour tout $\lambda_i > 0$, $\forall i \in [1, \dots, N]$, car les charges du réassureur doivent être inférieures à les charges des sinistres comme elles ne doivent pas être négatives. i.e. $0 < X_i^R \leq X_i$.

Le bénéfice technique est exprimé comme suit :

$$B(X, \lambda) = \sum_{i=1}^N [P_i - \Pi(g(X_i, \lambda_i)) - f(X_i, \lambda_i)]$$

Alors l'espérance mathématique de $B(X, \lambda)$ est donnée par :

$$E(B(X, \lambda)) = \sum_{i=1}^N [P_i - \Pi(g(X_i, \lambda_i)) - E(f(X_i, \lambda_i))] \quad (1.14)$$

où $P_1, \dots, P_N$ les primes nettes collectées.

1.3. Critère de moyenne-variance

Le problème d'optimisation moyenne-variance consiste à déterminer le vecteur des paramètres des traités de réassurance optimal λ^* qui permet de minimiser la variance du bénéfice technique de la compagnie d'assurance, tout en gardant un bénéfice technique espéré dans un niveau donné.

Le programme d'optimisation moyenne-variance est exprimé comme suit :

$$\begin{cases} \min_{\lambda} \langle \text{Var}(B(X, \lambda)) \rangle \\ \text{s.c. } E(B(X, \lambda)) = k \end{cases} \quad (1.15)$$

où k représente le bénéfice fixé par la compagnie d'assurance.

Le modèle moyenne-variance pour la détermination d'un choix optimal de la réassurance a été traité pour la première fois dans les travaux de [De Finetti \[32\]](#), il suppose que les risques sont indépendants et que chaque risque peut être protégé par une réassurance proportionnelle de type «quote part», tel que l'assureur supporte le risque $X_i^A = (1-\alpha)X_i$ et la portion $X_i^R = \alpha X_i$ est transférée au réassureur, $\forall i \in [1, \dots, N]$, le facteur de proportionnalité $\alpha \in]0, 1]$ est constant.

Dans ce cas, le paramètre des traités de la réassurance est représenté par le facteur de proportionnalité α .

[De Finetti \[32\]](#) a utilisé un mode de tarification Π basé sur le principe de l'espérance mathématique pour couvrir la charge de la réassurance, i.e.

$$\Pi(X_i^R) = (1 + \eta_i^r) E(X_i^R), \quad \forall i \in [1, \dots, N] \quad (1.16)$$

Soit f et g deux fonctions aléatoires mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ représentent la forme de réassurance choisie par la compagnie d'assurance. Tel que :

$$g(X_i, \alpha) = X_i^R = \alpha X_i \text{ et } f(X_i, \alpha) = X_i^A = (1 - \alpha) X_i, \forall i \in [1, \dots, N] \quad (1.17)$$

Le bénéfice technique de la cédante est donné par :

$$B(X, \alpha) = \sum_{i=1}^N [P_i - \Pi(X_i^R) - X_i] = \sum_{i=1}^N [P_i - \Pi(g(X_i, \alpha)) - f(X_i, \alpha)] \quad (1.18)$$

Alors

$$B(X, \alpha) = \sum_{i=1}^N [P_i - (1 + \eta_i^r) \alpha E(X_i) - (1 - \alpha) X_i] \quad (1.19)$$

L'espérance mathématique du $B(X, \alpha)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} E(B(X, \alpha)) &= E\left(\sum_{i=1}^N [P_i - (1 + \eta_i^r) \alpha E(X_i) - (1 - \alpha) X_i]\right) \\ &= \sum_{i=1}^N [P_i - (1 + \eta_i^r) \alpha E(X_i) - (1 - \alpha) E(X_i)] \end{aligned}$$

En simplifiant, on obtient alors

$$E(B(X, \alpha)) = \sum_{i=1}^N [P_i - (1 + \eta_i^r \alpha) E(X_i)] \quad (1.20)$$

La variance du $B(X, \lambda)$ est donnée par :

$$\text{Var}(B(X, \alpha)) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^N [P_i - (1 + \eta_i^r) \alpha E(X_i) - (1 - \alpha) X_i]\right)$$

Alors

$$\text{Var}(B(X, \alpha)) = \sum_{i=1}^N (1 - \alpha)^2 \text{Var}(X_i) \quad (1.21)$$

Donc le programme d'optimisation de [De Finetti](#) est réécrit comme suit :

$$\begin{cases} \min_{\alpha} \left\langle \sum_{i=1}^N (1 - \alpha)^2 \text{Var}(X_i) \right\rangle \\ \text{s.c.} \left\langle \sum_{i=1}^N (P_i - (1 + \eta_i^r \alpha) E(X_i)) \right\rangle = k \\ \alpha \in [0, 1]. \end{cases} \quad (1.22)$$

Ce programme d'optimisation consiste à déterminer le paramètre de traités de la réassurance (taux de cession) α^* optimal qui permet de minimiser la variance du

bénéfice technique sous contrainte de l'espérance mathématique du bénéfice technique qui doit être aussi égal à une espérance du gain minimale fixée par la compagnie d'assurance.

Pour résoudre le programme d'optimisation (1.22) et trouver les conditions nécessaires et suffisantes d'optimisation, [De Finetti](#) a utilisé la méthode de lagrangienne et le théorème de [Kuhn-Tucker](#).

La fonction lagrangienne est définie par :

$$G(\alpha, m) = \sum_{i=1}^N (1-\alpha)^2 \text{Var}(X_i) - m \left(\sum_{i=1}^N [P_i - (1+\eta_i^r \alpha) E(X_i)] - k \right) \quad (1.23)$$

Avec m le multiplicateur de Lagrange de la contrainte d'égalité.

D'après le théorème [Kuhn-Tucker](#), on obtient le programme d'optimisation suivant :

Trouver α tel que : $\frac{\partial}{\partial \alpha} G(\alpha, m) = 0$, sous les conditions suivantes:

$$\begin{cases} \alpha \in]0,1] \\ \sum_{i=1}^N [P_i - (1+\eta_i^r \alpha) E(X_i)] - k = 0 \end{cases}$$

Alors

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} G(\alpha, m) = 0 \Leftrightarrow 2 \sum_{i=1}^N (1-\alpha) \text{Var}(X_i) + \sum_{i=1}^N m \eta_i^r E(X_i) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(1-\alpha) \text{Var}(X_i) - m \eta_i^r E(X_i) = 0, \quad \forall i \in [1, \dots, N]$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 1 - \frac{m \eta_i^r E(X_i)}{2 \text{Var}(X_i)}, \quad \forall i \in [1, \dots, N]$$

Puisque $\alpha \in]0,1]$, on obtient une valeur optimale suivante pour le taux de cession (facteur de proportionnalité) :

$$\alpha^* = \max \left(0, 1 - \frac{m \eta_i^r E(X_i)}{2 \text{Var}(X_i)} \right), \quad \forall i \in [1, \dots, N] \quad (1.24)$$

1.3.1. Approche de Walhin & Lampaert (2005)

[Walhin & Lampaert \[120\]](#) ont généralisé le modèle d'optimisation de moyenne-variance de [De Finetti \[32\]](#) pour un autre type de forme de réassurance proportionnelle en considérant le cas des traités en «excédent de sinistre» sous les mêmes conditions de l'indépendance des risques.

Dans ce cas, les paramètres de traités de la réassurance (taux de cession) $(\alpha_i)_{i=1,\dots,N}$ sont variés selon le montant maximal de réclamation que la cédante souhaite assumer et le plein de rétention correspond à un montant fixe que la cédante conserve à sa charge pour chaque risque.

Walhin & Lampaert [120] ont redémontré le même résultat sous certaines conditions. Ils ont déterminé les taux de cession optimaux par la formule suivante :

$$\alpha_i^* = \max \left(0, 1 - \frac{m\eta_i^r E(X_i)}{2\text{Var}(X_i)} \right), \quad \forall i \in [1, \dots, N] \quad (1.25)$$

où m est le multiplicateur de Lagrange de la contrainte sur le bénéfice technique, et $(\eta_i^r)_{i=1,\dots,N}$ sont les chargements de sécurité de la réassurance pour chaque période.

1.3.2. Approche de Hess (2000)

Hess [59] a supposé dans son approche que la compagnie d'assurance applique un principe de prime basé sur l'espérance mathématique en considérant une forme de réassurance proportionnelle de type «excédent de sinistre».

Il détermine le vecteur $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ des paramètres des traités de la réassurance qui permet de maximiser le bénéfice espéré sous la contrainte suivante :

Le coefficient de sécurité doit être supérieur à une valeur fixée par la compagnie d'assurance.

Considérons un portefeuille composé de N risques (charges des sinistres) représentés par des variables $(X_1, \dots, X_N)$ aléatoires positives, indépendants et identiquement distribués (i.i.d) et indépendants de N .

Soit $S = \sum_{i=1}^N X_i$ la charge totale des sinistres.

L'espérance et la variance de S sont données respectivement par :

$$E(S) = \sum_{i=1}^N E(X_i) \text{ et } \text{var}(S) = \sum_{i=1}^N \text{var}(X_i)$$

Notons $R \geq 0$ le montant des réserves affectées aux risques tel que

$$R \geq -(\eta - \eta^r) E(S) \quad (1.26)$$

où η^r et η sont respectivement les chargements de sécurité du réassureur et de l'assureur.

Les charges de prime retenues par l'assureur sont données par :

$$P_i^a(X_i) = (1 + \eta) E(X_i), \forall i \in [1, \dots, N]$$

$P^a(S) = \sum_{i=1}^N P_i^a(X_i) = (1 + \eta) \sum_{i=1}^N E(X_i) = (1 + \eta) E(S)$ est le total des primes retenues par l'assureur.

Le coefficient de sécurité CS qui doit être supérieur à une valeur c souhaitée par l'assureur est défini par :

$$CS = \frac{R + \eta E(S)}{\sqrt{\text{var}(S)}} \quad (1.27)$$

Considérons le cas des traités de réassurance proportionnelle de type «excédent de sinistre», le bénéfice technique est donné par :

$$B(X, \alpha) = P^a(S) - \sum_{i=1}^N [(1 + \eta^r) \alpha_i E(X_i) - (1 - \alpha_i) X_i] \quad (1.28)$$

où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ est le vecteur des paramètres des traités de la réassurance (les taux de cession).

L'espérance et la variance du bénéfice technique sont données respectivement par :

$$\begin{aligned} E(B(X, \alpha)) &= P^a(S) - \sum_{i=1}^N [(1 + \eta^r) \alpha_i E(X_i) - (1 - \alpha_i) E(X_i)] \\ &= (1 + \eta) \sum_{i=1}^N E(X_i) - \sum_{i=1}^N (1 + \eta^r \alpha_i) E(X_i) \\ E(B(X, \alpha)) &= \sum_{i=1}^N (\eta - \alpha_i \eta^r) E(X_i) \end{aligned} \quad (1.29)$$

et

$$\text{Var}(B(X, \alpha)) = \sum_{i=1}^N (1 - \alpha_i)^2 \text{Var}(X_i) \quad (1.30)$$

Le problème d'optimisation consiste à déterminer le vecteur de paramètres de traités de la réassurance optimaux $\alpha^* = (\alpha_1^*, \dots, \alpha_N^*)$ qui permet de maximiser le bénéfice technique espéré $E(B(X, \alpha))$ sous la contraintes du coefficient de sécurité CS qui doit être supérieur à une valeur c souhaitée par l'assureur, tel que:

$$\begin{cases} CS = \frac{R + \eta E(S)}{\sqrt{\text{var}(S)}} \geq c \\ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in]0, 1]^N \end{cases} \quad (1.31)$$

Le programme d'optimisation est reformulé comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_N)} \left\langle E(B(X, \alpha)) = \sum_{i=1}^N (\eta - \alpha_i \eta^r) E(X_i) \right\rangle \\ sc \left\langle \begin{array}{l} \frac{R + \eta E(S)}{\sqrt{\text{var}(S)}} \geq c \\ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in]0, 1]^N ; \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.32)$$

où c une valeur fixée par la compagnie d'assurance.

Dans son modèle, [Hess](#) a démontré l'existence d'une solution optimale liée à la probabilité de ruine. En effet,

$$\begin{aligned} P_{\text{ruine}} &= P(R \leq S - P^a(S)) \\ &= P\left(\frac{R + \eta E(S)}{\sqrt{\text{var}(S)}} \leq \frac{S - P^a(S) + \eta E(S)}{\sqrt{\text{var}(S)}}\right) \\ &= P\left(\frac{R + \eta E(S)}{\sqrt{\text{var}(S)}} \leq \frac{S - (1 + \eta)E(S) + \eta E(S)}{\sqrt{\text{var}(S)}}\right) \\ &= P\left(\frac{R + \eta E(S)}{\sqrt{\text{var}(S)}} \leq \frac{S - E(S)}{\sqrt{\text{var}(S)}}\right) \\ &= 1 - P\left(\frac{S - E(S)}{\sqrt{\text{var}(S)}} \leq CS\right) \end{aligned} \quad (1.33)$$

Soit F_y la fonction de répartition de la variable aléatoire $y = \frac{S - E(S)}{\sqrt{\text{var}(S)}}$

Alors

$$P_{\text{ruine}} = 1 - F_{\frac{S - E(S)}{\sqrt{\text{var}(S)}}}(CS) \quad (1.34)$$

La probabilité de ruine est liée au coefficient de sécurité CS qui pourrait faire intervenir la probabilité de ruine comme un critère du choix d'une réassurance optimale.

1.4. Critère de la minimisation de la probabilité de ruine

La minimisation de probabilité de ruine est un critère crucial pour déterminer l'effet de la forme de la réassurance sur la richesse de la cédante et constitue un facteur très important du choix de la réassurance optimale ([Kaluszka & Okolewski \[70\]](#), [Luo & al \[80\]](#)). Ce critère a été élaboré dans les travaux de [Dickson & Waters \[38\]](#), [Aase \[1\]](#), [Deelstra Plantin \[33\]](#) et [Schmidli \[109\]](#).

1.4.1. Probabilité de ruine

La probabilité de ruine est la probabilité que la charge totale des sinistres excède l'encaissement correspondant sur une période donnée. La ruine survient lorsque les réserves descendent sous 0.

La réserve de la compagnie d'assurance à l'instant t est donnée par le processus aléatoire suivant :

$$R(u, t) = u + Ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \quad (1.35)$$

où

- u est le capital initial ;
- C est le taux de rentrée des primes (la recette de prime collectée à l'instant t) ;
- $(X_i)_{i \in [1, \dots, N]}$ sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées positives, de moyenne μ et indépendantes de $(N(t))_{t \geq 0}$;
- $(N(t))_{t \geq 0}$ est un processus de comptage des sinistres, $(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i = 0 \text{ si } N(t) = 0)$.

Le processus $S(u, t) = u - R(u, t)$ est appelé processus d'excédent de sinistres.

Le processus de comptage $(N(t))_{t \geq 0}$ est un processus stochastique à valeurs dans $\mathbb{N}$ (l'espace des entiers naturels). Il a pour vocation à modéliser un nombre entier aléatoire évoluant dans le temps. Le processus de comptage le plus classique est le processus de [Poisson](#).

On peut écrire la probabilité de ruine $\varphi(u, t)$ de la façon suivante :

$$\varphi(u, t) = P\left(\exists t > 0, R(u, t) = u + Ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i < 0\right) \quad (1.36)$$

On dit que la compagnie est ruinée à un instant t .

La probabilité de non-ruine (ou de survie) est donnée par :

$$\psi(u, t) = 1 - \varphi(u, t) = P\left(\forall t > 0, R(u, t) = u + Ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \geq 0\right) \quad (1.37)$$

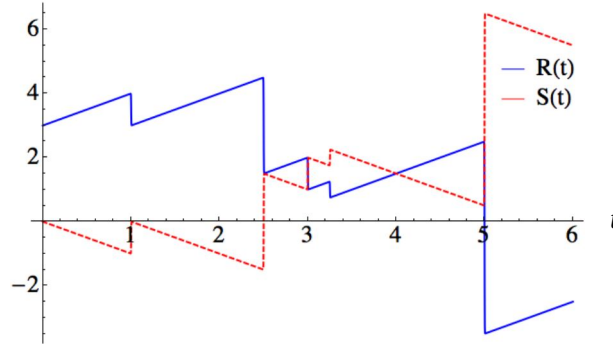


Figure 1: Trajectoire du surplus et d'excédent de sinistres au cours du temps

Remarque : Le processus de surplus peut être naturellement en temps continu, et peut aussi être considéré en temps discret.

1.4.2. Approche de Schmidli (2004)

Soit un portefeuille composé de N variables aléatoires $X_1, \dots, X_N$ continues, positives, indépendantes et identiquement distribuées, représentent les charges des sinistres.

Supposons aussi que les variables aléatoires $(X_i)_{i=1, \dots, N}$ sont indépendantes de N , de fonction de répartition F_{X_i} , de survie S_{X_i} et de densité f_{X_i} , avec $E(X_i) = \mu$. $\forall i \in [1, \dots, N]$.

Considérons le modèle de risque de Cramer-Lundberg (dans le cas statique) suivant :

$$R_N(u, \lambda) = u + NC(\lambda) - S_N^A \quad (1.38)$$

$R_N(u, \lambda)$ est la réserve de la compagnie d'assurance pour la période N .

Avec

- $S_N^A = \sum_{i=1}^N X_i^A$ est la somme des charges des sinistres de l'assureur ;
- $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ est le vecteur des paramètres de traité de réassurance ;
- $C(\lambda)$ est la recette de prime chargée de l'assureur après la réassurance pour une période.

Donc la probabilité de ruine notée par $\varphi(u, \lambda)$ est définie par :

$$\varphi(u, \lambda) = P(R_N(u, \lambda) < 0) \quad (1.39)$$

Schmidli [109] a démontré que la probabilité de ruine peut être majorée par une borne supérieure dite borne de Lundberg, tel que :

$$\varphi(u, \lambda) \leq e^{-\rho u} \quad (1.40)$$

où u est le capital initial.

Le paramètre ρ est appelé le coefficient d'ajustement de Lundberg est c'est l'unique racine pour l'équation suivante :

$$e^{-C\rho} E[e^{\rho X_i^A}] = 1, \quad \forall i \in [1, \dots, N] \quad (1.41)$$

(Voir Schmidli [109] et Willmot & Lin [125]).

Il est important de signaler que plus le coefficient d'ajustement est élevé, plus la probabilité de ruine est petite. En effet, la maximisation de ρ implique la minimisation de la probabilité de ruine $\varphi(u, \lambda)$. Donc, il est possible de baser le choix de la réassurance optimale sur le critère de la maximisation du coefficient d'ajustement de Lundberg.

– Cas du traité de réassurance en «quote-part»

Dans le cas de la forme de réassurance proportionnelle de type «quote part» avec un facteur de proportionnalité (taux de cession) $\alpha \in]0,1]$ constant, les charges de sinistres de l'assureur et du réassureur sont données respectivement par :

$$X_i^A = (1 - \alpha) X_i \text{ et } X_i^R = \alpha X_i, \quad \forall i \in [1, \dots, N].$$

Soit η et η^r respectivement les chargements de sécurité de l'assureur et du réassureur.

Supposons que le réassureur utilise un principe de prime basé sur l'espérance mathématique pour couvrir la part de la réassurance.

Alors la prime chargée du réassureur pour une période $i \in [1, \dots, N]$ est donnée par :

$$C_r(\alpha) = (1 + \eta^r) \alpha E(X_i) = (1 + \eta^r) \alpha \mu \quad (1.42)$$

La recette de prime chargée de l'assureur après la réassurance pour une période $i \in [1, \dots, N]$ est donnée par :

$$\begin{aligned} C(\alpha) &= (1 + \eta) E(X_i) - C_r(\alpha) = (1 + \eta) \mu - \alpha (1 + \eta^r) \mu \\ \Rightarrow C(\alpha) &= \mu ((1 + \eta) - \alpha (1 + \eta^r)) \end{aligned} \quad (1.43)$$

D'où le processus de surplus est présenté par la formule suivante :

$$\begin{aligned}
 R_N(u, \alpha) &= u + NC(\alpha) - S_N^A \\
 \Rightarrow R_N(u, \alpha) &= u + N\mu((1+\eta) - \alpha(1+\eta^r)) - \sum_{i=1}^N X_i^A \\
 R_N(u, \alpha) &= u + N\mu((1+\eta) - \alpha(1+\eta^r)) - (1-\alpha) \sum_{i=1}^N X_i
 \end{aligned} \tag{1.44}$$

Schmidli [109] a démontré qu'il existe un paramètre $\rho > 0$ (coefficient d'ajustement) tel que la probabilité de ruine $\varphi(u, \lambda)$ vérifie l'inégalité suivante:

$$\varphi(u, \lambda) \leq e^{-\rho u}$$

avec ρ est l'unique solution positive de l'équation suivant :

$$E(e^{\rho X_i^A}) e^{-C(\alpha)\rho} = 1, \quad \forall i \in [1, \dots, N] \tag{1.45}$$

L'équation (1.45) est équivalente de :

$$E(e^{\rho X_i^A}) e^{-C(\alpha)\rho} = 1 \Leftrightarrow (M_{X_i}(\rho) - 1) - \mu((1+\eta) - \alpha(1+\eta^r)) \frac{\rho}{1-\alpha} = 0, \quad \forall i \in [1, \dots, N] \tag{1.46}$$

où $M_{X_i}(\rho)$, est la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire X_i évaluée à ρ . (Voir Hald & Schmidli [56]).

Pour les raisons de sécurité, la réserve espérée de la compagnie d'assurance doit être supérieure au capital initial, i.e :

$$E(R_N(u, \alpha) - u) > 0 \Leftrightarrow N\mu((1+\eta) - \alpha(1+\eta^r)) > \sum_{i=1}^N X_i^A$$

Avec

$$\sum_{i=1}^N X_i^A = \sum_{i=1}^N (1-\alpha) X_i = (1-\alpha) N\mu > 0$$

Donc

$$\begin{aligned}
 E(R_N(u, \alpha) - u) > 0 &\Leftrightarrow \frac{N\mu((1+\eta) - \alpha(1+\eta^r))}{(1-\alpha)N\mu} > 1 \\
 &\Leftrightarrow \alpha < \frac{\eta}{\eta^r}
 \end{aligned} \tag{1.47}$$

Le programme d'optimisation est reformulé de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\alpha} \langle \rho(\alpha) \rangle \\ sc \left\{ \begin{array}{l} (M_{X_i}(\rho) - 1) - \mu((1+\eta) - \alpha(1+\eta^r)) \frac{\rho}{1-\alpha} = 0 \\ \alpha \in \left[0, \frac{\eta}{\eta^r} \right] \\ \rho > 0 \end{array} \right. , \quad \forall i \in [1, \dots, N] \end{array} \right. \quad (1.48)$$

Ce programme d'optimisation consiste à déterminer le facteur de proportionnalité (taux de cession) optimal α^* et le réglage maximal du coefficient d'ajustement $\rho(\alpha^*)$ qui satisfait l'équation (1.46) et la condition de sécurité (1.47).

– Cas du traité de réassurance en «excédent de sinistre»

Le contrat de traités en «excédent de sinistre» est un contrat de réassurance non proportionnelle où la limite de rétention $L > 0$ est applicable à chaque réclamation individuelle.

Dans ce cas, les charges des sinistres de l'assureur et du réassureur sont données respectivement par :

$$X^A = \sum_{i=1}^N X_i^A = \sum_{i=1}^N \min(X_i, L) \quad \text{et} \quad X^R = \sum_{i=1}^N X_i^R = \sum_{i=1}^N ((X_i - L)_+) \quad (1.49)$$

avec

$$S = \sum_{i=1}^N X_i = X^A + X^R$$

La prime chargée du réassureur pour une période $i \in [1, \dots, N]$ est donnée par :

$$C_r(L) = (1+\eta^r) E(X_i^R) = (1+\eta^r) E((X_i - L)_+) \quad (1.50)$$

Donc la recette de prime chargée de l'assureur après la réassurance pour une période $i \in [1, \dots, N]$ est donnée par :

$$C(L) = (1+\eta) E(X_i) - C_r(L) = (1+\eta) \mu - (1+\eta^r) E((X_i - L)_+) \quad (1.51)$$

La réserve de la compagnie d'assurance est donné par :

$$\begin{aligned} R_N(u, L) &= u + NC(L) - X^A \\ \Rightarrow R_N(u, L) &= u + \sum_{i=1}^N ((1+\eta) \mu - (1+\eta^r) E((X_i - L)_+)) - \sum_{i=1}^N \min(X_i, L) \end{aligned} \quad (1.52)$$

D'autre part, on sait que

$$E((X_i - L)_+) = \int_L^{\infty} (x - L) f_{X_i}(x) dx = E(X_i) - L - \int_0^L ((x - L) f_{X_i}(x)) dx$$

En appliquant l'intégration par parties, on obtient alors :

$$\begin{aligned} E((X_i - L)_+) &= E(X_i) - L - \left[(x - L) F_{X_i}(x) \right]_0^L - \int_0^L ((x - L)' F_{X_i}(x)) dx \\ &= E(X_i) - L + L F_{X_i}(0) + \int_0^L F_{X_i}(x) dx \end{aligned}$$

On a aussi

$$F_{X_i}(0) = P(X_i < 0) = 0$$

Donc

$$\begin{aligned} E(X_i^R) &= E((X_i - L)_+) = E(X_i) - L + \int_0^L F_{X_i}(x) dx \\ &= E(X_i) - \int_0^L (1 - F_{X_i}(x)) dx = \mu - \int_0^L S_{X_i}(x) dx \end{aligned} \quad (1.53)$$

Et puisque $X_i = X_i^A + X_i^R$, $\forall i \in [1, \dots, N]$ alors

$$E(X_i^A) = E[\min(X_i, L)] = E(X_i) - E(X_i^R) = \int_0^L S_{X_i}(x) dx, \quad \forall i \in [1, \dots, N] \quad (1.54)$$

Finalement la recette de prime chargée de l'assureur après la réassurance pour une période $i \in [1, \dots, N]$ est donnée par :

$$C(L) = N(1+\eta)\mu - N(1+\eta^r)E((X_i - L)_+) = (1+\eta)\mu - (1+\eta^r) \left(\mu - \int_0^L S_{X_i}(x) dx \right) \quad (1.55)$$

De plus, le coefficient d'ajustement de Lundberg ρ est toujours l'unique solution positive de l'équation suivant :

$$E(e^{\rho X_i^A}) e^{-C(L)\rho} = 1 \Leftrightarrow E(e^{\rho X_i^A}) e^{-\left[(1+\eta)\mu - (1+\eta^r) \left(\mu - \int_0^L S_{X_i}(x) dx \right) \right] \rho} = 1, \quad \forall i \in [1, \dots, N] \quad (1.56)$$

Alors le programme d'optimisation est reformulé de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_L \langle \rho(L) \rangle \\ sc \left\{ \begin{array}{l} E\left(e^{\rho X_i^A}\right) e^{-\left[(1+\eta)\mu - (1+\eta)r\right]\left(\mu - \int_0^L S_{X_i}(x) dx\right)} = 1, \quad \forall i \in [1, \dots, N] \\ L > 0 \\ \rho > 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.57)$$

Le problème (1.57) consiste à déterminer la limite de rétention optimale L^* et le réglage maximal du coefficient d'ajustement $\rho(L^*)$ sous certaines contraintes.

Schmidli [109] a vérifié que la meilleure solution pour le coefficient d'ajustement existe dans le cas du traité de réassurance en «quote part», ce qui implique que la probabilité de ruine est inférieure pour le traité en «quote part» à celle du traité en «excédent de sinistre». Cependant, Ben Dbabis [13] et plusieurs d'autres auteurs ont signalé que le critère de maximisation du coefficient d'ajustement de Lundberg seul ne permet pas d'aboutir au un bénéfice technique maximal, car ce critère agit seulement sur le risque (en minimisation la probabilité de la ruine). Pour cette raison, la génération récente des chercheurs ont introduit un nouveau critère du choix de la de la réassurance optimale basé sur la minimisation des mesures de risque, telles que la Value at Risk (VaR) et la Conditional Tail Expectation (CTE).

1.5. Critère de la minimisation des mesures de risques

Cai & Tan [19] ont proposé deux modèles d'optimisation de la réassurance en développant un nouveau critère basé sur la minimisation des mesures de risque tels que la Value at Risk (VaR) et la Conditional Tail Expectation (CTE). Ils ont déterminé deux solutions explicites pour la rétention optimale pour la forme de réassurance de type «excédent de perte» en utilisant un principe de prime basé sur l'espérance mathématique, avec un chargement de sécurité donnée.

Cai & Tan [21] ont déterminé les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des rétentions optimales. Ils ont démontré que sous ces conditions d'optimalité, les solutions optimales de leurs modèles «*VaR-optimisation*» et «*CTE-optimisation*» donnent la même rétention optimale qui est dépend uniquement de la répartition des montants des sinistres et du chargement de sécurité du réassureur.

L'approche de Cai & Tan [21] a été généralisée ensuite par Tan & Chi [117]. Ces derniers ont proposé un modèle auxiliaire pour résoudre le problème de rétention

optimale grâce au modèle «*CTE-optimisation*». Ils ont montré que le traité en «excédent de perte» est toujours l'une des solutions optimales.

1.5.1. Mesures de risque assurantiel

Une mesure de risque est une fonction ρ associant à un risque X , un réel positif $\rho(X)$, tel que:

$$\begin{aligned}\rho: V &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ X &\rightarrow \rho(X)\end{aligned}$$

où V est un ensemble non vide de variables aléatoires mesurables à valeurs réelles. $\rho(X)$ permet de quantifier le montant que la compagnie d'assurance doit disposer pour faire face à une perte financière de montant X .

1.5.2. Cohérence de mesure de risque

Une mesure de risque est dite cohérente au sens d'Artzner [8] si elle vérifie les propriétés suivantes :

P1. Invariance par translation

Cette propriété montre que pour tout risque X et pour toute constante c , on a :

$$\rho(X + c) = \rho(X) + c$$

C'est-à-dire que si on ajoute une quantité c à un portefeuille assurantiel, le risque du portefeuille se réduit par c .

P2. Sous-additivité

Cette propriété montre que pour tous les risques X et Y , on a :

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

C'est à dire que, si on a deux portefeuilles assurantiels séparés, le risque agrégé du portefeuille combiné est inférieur à la somme du risque individuel composant ce portefeuille.

P3. Homogénéité positive

Cette propriété signifie que pour tout risque X et pour tout constant c on a :

$$\rho(cX) = c\rho(X)$$

La multiplication de chaque risque par un facteur positif augmente la mesure de risque par le même facteur.

P4. Monotonie

Cette propriété indique que pour tous les risques X et Y on a :

$$\rho(X \leq Y) = 1 \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$$

Elle exprime que si un risque est supérieur à un autre, la mesure de risque pour le premier est supérieure à celle pour le deuxième.

1.5.3. Value at Risk (VaR) et Conditional Value at Risk (CVaR)

La Value at Risk (VaR) est une mesure de risque proposée pour la première fois par la Banque américaine [JP-Morgan en 1994](#), elle est introduite comme une mesure de risque du marché.

La VaR au niveau θ est la valeur de x telle que la probabilité que X soit inférieure ou égale à x est θ .

Il s'agit de la fonction quantile de la variable aléatoire X , i.e.

$$VaR_\theta[X] = F_X^{-1}(\theta) \quad (1.58)$$

où $F_X(\theta)$ est la fonction de répartition correspond à la variable aléatoire X au niveau θ et $F_X^{-1}(\theta)$ est sa fonction réciproque.

Supposons que la variable aléatoire X est continue sur tout son domaine alors

$$F_X^{-1}(\theta) = \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) = \theta\}$$

Par conséquent,

$$F_X(VaR_\theta[X]) = \theta \quad (1.59)$$

Soit $F_{ex}(x)$ la fonction d'excès moyen tel que,

$$F_{ex}(x) = E[X - x | X \geq x] \quad (1.60)$$

La Conditional Value-at-Risk (CVaR) correspond au risque X avec un niveau de probabilité $\theta \in]0,1[$ est donnée par:

$$CVaR_\theta(X) = F_{ex}(VaR_\theta(X)) = E[X - VaR_\theta(X) | X \geq VaR_\theta(X)] \quad (1.61)$$

Remarque. La VaR n'est pas une mesure de risque cohérente au sens d'[Artzner \[8\]](#) car elle ne satisfait pas la propriété de sous-additivité. C'est à dire, qu'il peut exister des risques tels que $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ (Voir [Denuit \[35\]](#)).

1.5.4. Conditional Tail Expectation (CTE)

La Conditional Tail Expectation (CTE_θ) est une mesure de risque correspondre à la variable aléatoire X au niveau de probabilité $\theta \in]0,1[$, il s'agit de perte moyenne étant donnée que la perte est plus grande que la VaR.

La $CTE_\theta(X)$ est définie par :

$$CTE_\theta(X) = E[X | X \geq VaR_\theta(X)] \quad (1.62)$$

La $CTE_\theta(X)$ considère la queue de la distribution à droite de la $VaR_\theta(X)$ qui permet de corriger la principale faiblesse de la Value at Risk.

Proposition. 1.1. Lorsque X est continue alors on a l'expression équivalente suivante :

$$CTE_\theta(X) = \frac{1}{1-\theta} \int_\theta^1 VaR_\kappa(X) d\kappa \quad \text{où } \kappa \in]0,1[\quad (1.63)$$

$\frac{1}{1-\theta} \int_\theta^1 VaR_\kappa(X) d\kappa$ signifie la moyenne arithmétique des $VaR_\theta(X)$ au-dessus de θ notée $TVaR_\theta(X)$.

Proposition.1.2. En général, la Conditional Tail Expectation (CTE) n'est pas une mesure cohérente. Mais elle est cohérente lorsque les risques sont continus où (la TVaR et la CTE coïncident). **i.e :**

Si X est continue sur tout son domaine alors :

$$CTE_\theta(X) = TVaR_\theta(X) = \frac{1}{1-\theta} \int_{VaR_\theta(X)}^\infty x f_X(x) dx \quad (1.64)$$

avec f_X est la fonction densité de la variable aléatoire X .

Preuve :

Il suffit de noter que si la fonction de répartition de X est continue alors :

$$F_X(VaR_\theta(X)) = \theta \quad \text{et} \quad \bar{F}_X(VaR_\theta(X)) = 1-\theta$$

Dans ce cas, la CTE et la TVaR coïncident : $CTE_\theta(X) \equiv TVaR_\theta(X)$

Tel que

$$TVaR_\theta(X) = \frac{1}{1-\theta} \int_\theta^1 VaR_\kappa(X) d\kappa$$

(Voir le document de référence: Mesures de risque, [Charpentier \[27\]](#)).

- *Invariante par translation :*

De plus, la $TVaR$ est invariante par translation et homogène. En effet, comme la VaR est invariante par translation, on a :

$$\begin{aligned} TVaR_{\theta}(X + a) &= \frac{1}{1-\theta} \int_{\theta}^1 VaR_{\kappa}(X + a) d\kappa \\ &= \frac{1}{1-\theta} \int_{\theta}^1 (VaR_{\kappa}(X) + a) d\kappa, \quad \forall a \geq 0 \\ &= \frac{1}{1-\theta} \int_{\theta}^1 VaR_{\kappa}(X) d\kappa + \frac{1}{1-\theta} \int_{\theta}^1 a d\kappa \\ &= TVaR_{\theta}(X) + a \end{aligned}$$

- *Homogène positive :*

De la même manière, l'homogénéité de la VaR garantit l'homogénéité de la $TVaR$.

- *Sous-additivité :*

Soit X et Y deux risques

$$\begin{aligned} TVaR_{\theta}(X + Y) &= E(X | X + Y > VaR_{\theta}(X + Y)) \\ &\quad + E(Y | X + Y > VaR_{\theta}(X + Y)) \\ &\geq E(X | X + Y > VaR_{\theta}(X)) \\ &\quad + E(Y | X + Y > VaR_{\theta}(Y)) \\ &= TVaR_{\theta}(X) + TVaR_{\theta}(Y) \end{aligned}$$

- *Monotone :*

La $TVaR$ est monotone, puisque lorsque $P[X \leq Y] = 1$, on a :

$$\begin{aligned} TVaR_{\theta}(Y) &= E(Y | Y > VaR_{\theta}(Y)) \\ &\geq E(Y | X > VaR_{\theta}(X)) \\ &\geq E(X | X > VaR_{\theta}(X)) \\ &= TVaR_{\theta}(X) \end{aligned}$$

Par conséquent, $CTE_{\theta}(X) \equiv TVaR_{\theta}(X)$ une mesure de risque cohérente, car elle satisfasse les propriétés de cohérence d'[Artzner \[8\]](#).

1.5.5. Approche de Cai & Tan (2007)

Soit X une variable aléatoire qui désigne la charge totale des sinistres, de fonction de répartition $F_X(x)$, de survie $S_X(x)$ et d'espérance $E(X) = \mu > 0$.

Pour un contrat de réassurance, le risque X est partagé de la manière suivante :

$$X = X^A + X^R$$

tel que X^A est la charge des sinistres de l'assureur et la portion X^R transférée au réassureur.

Dans le cas de la réassurance non proportionnelle de type «excédent de perte» de limite de rétention L , les charges des sinistres de l'assureur et du réassureur sont données respectivement par :

$$X^A = f(X, L) = \min(X, L) \text{ et } X^R = g(X, L) = \max(0, X - L) = (X - L)_+$$

où f et g sont deux fonctions aléatoires mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Supposons que la compagnie d'assurance utilise un mode de tarification Π basé sur le principe de l'espérance mathématique pour couvrir le risque de perte, tel que :

$$\Pi(X^R) = (1 + \eta^r) E(X^R)$$

où η^r est le chargement de sécurité de la réassurance.

Cai & Tan [21] ont cherché à choisir la rétention optimale L^* qui minimise de façon optimale le risque du coût total du cédant. Ils ont défini le coût total T dans le cas d'une forme de réassurance de type «excédent de perte» comme la somme de deux composantes: la charge de l'assureur et la prime de réassurance, i.e :

$$T(X, L) = X^A + \Pi(X^R) = f(X, L) + \Pi(g(X, L)) \quad (1.65)$$

Pour obtenir la limite de rétention optimale de la réassurance de type «excédent de perte», Cai & Tan [21] ont défini deux programmes d'optimisation basés sur les mesures de risque (VaR) et (CTE) :

VaR-optimisation :

$$\min_{L>0} \left\langle \text{VaR}_\theta(T(X, L)) = \text{VaR}_\theta(X^A + \Pi(X^R)) = \text{VaR}_\theta(f(X, L) + \Pi(g(X, L))) \right\rangle \quad (1.66)$$

CTE-optimisation :

$$\min_{L>0} \left\langle \text{CTE}_\theta(T(X, L)) = \text{CTE}_\theta(X^A + \Pi(X^R)) = \text{CTE}_\theta(f(X, L) + \Pi(g(X, L))) \right\rangle \quad (1.67)$$

La détermination de la rétention optimale L :

VaR-optimisation :

Nous présentons tout d'abord la formule de $VaR_\theta(T(X, L))$:

On sait que la mesure de risque VaR_θ vérifie la propriété d'invariance par translation.

Alors d'après cette propriété on a :

$$VaR_\theta(T(X, L)) = VaR_\theta(X^A) + \Pi(X^R) = VaR_\theta(f(X, L)) + \Pi(g(X, L)) \quad (1.68)$$

D'autre part, on a :

$$E(X^A) = f(X, L) = E[\min(X, L)] = \int_0^L S_X(x) dx$$

et

$$E(X^R) = E(g(X, L)) = E(X) - E(X^A) = \mu - \int_0^L S_X(x) dx \quad (1.69)$$

Alors

$$\Pi(X^R) = (1 + \eta^r) E(X^R) = (1 + \eta^r) E(g(X, L)) = (1 + \eta^r) \left(\mu - \int_0^L S_X(x) dx \right) \quad (1.70)$$

La fonction de survie de la part de l'assureur est donnée par :

$$S_{X^A}(x) = P(X^A = \min(X, L) > x) = \begin{cases} S_X(x), & 0 \leq x < L \\ 0, & x \geq L \end{cases} \quad (1.71)$$

On a aussi

$$VaR_\theta(X^A) = VaR_\theta(f(X, L)) = S_{X^A}^{-1}(\theta) = S_{f(X, L)}^{-1}(\theta)$$

Noter que

$$0 < \theta \leq S_X(L) \Rightarrow S_X^{-1}(\theta) \geq S_X^{-1}(S_X(L)) > 0 \text{ est équivalent à } 0 < L \leq S_X^{-1}(\theta)$$

Dans ce cas on a

$$VaR_\theta(X^A) = VaR_\theta(f(X, L)) = L$$

Si $\theta > S_X(L)$ ou de la manière équivalente $L > S_X^{-1}(\theta)$, alors

$$VaR_\theta(X^A) = VaR_\theta(f(X, L)) = S_X^{-1}(\theta).$$

Donc la $VaR_\theta(X^A) = VaR_\theta(f(X, L))$ est présentée par la formule suivante :

$$VaR_\theta(X^A) = VaR_\theta(f(X, L)) = \begin{cases} L, & 0 < L \leq S_X^{-1}(\theta) \\ S_X^{-1}(\theta), & L > S_X^{-1}(\theta) \end{cases} \quad (1.72)$$

Ainsi

$$VaR_{\theta}(T(X, L)) = VaR_{\theta}(f(X, L)) + \Pi(g(X, L)) = \begin{cases} L + \Pi(g(X, L)), & 0 < L \leq S_X^{-1}(\theta) \\ S_X^{-1}(\theta) + \Pi(g(X, L)), & L > S_X^{-1}(\theta) \end{cases} \quad (1.73)$$

En remplaçant (1.70) dans (1.73), on obtient alors :

$$VaR_{\theta}(T(X, L)) = \begin{cases} L + (1 + \eta^r) \left(\mu - \int_0^L S_X(x) dx \right), & 0 < L \leq S_X^{-1}(\theta) \\ S_X^{-1}(\theta) + (1 + \eta^r) \left(\mu - \int_0^L S_X(x) dx \right), & L > S_X^{-1}(\theta) \end{cases} \quad (1.74)$$

Nous donnons maintenant le résultat du programme d'optimisation de [Cai & Tan \[21\]](#) présenté dans (1.66) pour rechercher le niveau optimal de la rétention L^* .

Le théorème suivant indique les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une rétention optimale de l'optimisation de la réassurance basée sur la VaR.

Théorème 1.1. ([Cai & Tan \[21\]](#))

La rétention optimale L^* existe pour le programme «*VaR-optimisation*» si et seulement si :

$$\theta \leq \eta_1^r < S_X(0) \text{ et } S_X^{-1}(\theta) \geq S_X^{-1}(\eta_1^r) + \Pi(S_X^{-1}(\eta_1^r)) \quad (1.75)$$

avec

$$\eta_1^r = \frac{1}{1 + \eta^r} \quad (1.76)$$

De plus, lorsque la rétention optimale L^* existe, alors L^* est déterminée par:

$$L^* = S_X^{-1}(\eta_1^r) \quad (1.77)$$

CTE-optimisation :

Nous considérons maintenant le programme «*CTE-optimisation*» pour un choix optimal de la limite de rétention.

[Cai & Tan \[21\]](#) ont déterminé une expression pour la $CTE_{\theta}(T(X, L))$.

L'expression de $CTE_{\theta}(T(X, L))$ est donné par la proposition suivante:

Proposition.1.3. Pour $L > 0$ et $0 < \theta < S_X(0)$. La $CTE_{\theta}(T(X, L))$ est formulée de la manière suivante :

$$CTE_{\theta}(T(X, L)) = \begin{cases} L + (1 + \eta^r) \left(\mu - \int_0^L S_X(x) dx \right), & 0 < L \leq S_X^{-1}(\theta) \\ S_X^{-1}(\theta) + (1 + \eta^r) \left(\mu - \int_0^L S_X(x) dx \right) + \frac{1}{\theta} \int_{S_X^{-1}(\theta)}^{\infty} S_X(x) dx, & L > S_X^{-1}(\theta) \end{cases} \quad (1.78)$$

Démonstration :

On a

$$CTE_{\theta}(T(X, L)) = CTE_{\theta}(X^A) + \Pi(X^R) = CTE_{\theta}(f(X, L)) + (1 + \eta^r) E((X - L)_+)$$

Calculons la $CTE_{\theta}(f(X, L))$:

$$\begin{aligned} CTE_{\theta}(X^A) &= E[X^A | X^A \geq VaR_{\theta}(X^A)] \\ CTE_{\theta}(X^A) &= CTE_{\theta}(f(X, L)) \\ &= E[VaR_{\theta}(f(X, L)) + f(X, L) - VaR_{\theta}(f(X, L)) | f(X, L) \geq VaR_{\theta}(f(X, L))] \end{aligned} \quad (1.79)$$

Alors

$$CTE_{\theta}(X^A) = CTE_{\theta}(f(X, L)) = VaR_{\theta}(f(X, L)) + \frac{\int_{VaR_{\theta}(f(X, L))}^{\infty} S_{f(X, L)}(x) dx}{\Pr(f(X, L) \geq VaR_{\theta}(f(X, L)))} \quad (1.80)$$

On a aussi

$$\Pr(f(X, L) \geq VaR_{\theta}(f(X, L))) = \Pr(f(X, L) = VaR_{\theta}(f(X, L))) + S_{f(X, L)}(VaR_{\theta}(f(X, L)))$$

Si $L > S_X^{-1}(\theta)$ alors on a :

$$\Pr(f(X, L) \geq VaR_{\theta}(f(X, L))) = \Pr(f(X, L) = S_X(\theta)) + S_{f(X, L)}(S_X^{-1}(\theta)) = S_X(S_X^{-1}(\theta)) = \theta$$

Dans ce cas on a :

$$\begin{aligned} CTE_{\theta}(X^A) &= CTE_{\theta}(f(X, L)) = VaR_{\theta}(f(X, L)) + \frac{\int_{VaR_{\theta}(f(X, L))}^{\infty} S_{f(X, L)}(x) dx}{\Pr(f(X, L) \geq VaR_{\theta}(f(X, L)))} \\ &= S_X^{-1}(\theta) + \frac{1}{\theta} \int_{S_X^{-1}(\theta)}^{\infty} S_{f(X, L)}(x) dx \end{aligned} \quad (1.81)$$

Si $0 < L \leq S_X^{-1}(\theta)$ on a :

$$\int_{VaR_{\theta}(f(X, L))}^{\infty} S_{f(X, L)}(x) dx = \int_{VaR_{\theta}(f(X, L))}^L S_X(x) dx = 0$$

Alors

$$\begin{aligned}
 CTE_{\theta}(X^A) &= CTE_{\theta}(f(X, L)) = VaR_{\theta}(f(X, L)) + \frac{\int_{VaR_{\theta}(f(X, L))}^{\infty} S_{f(X, L)}(x) dx}{\Pr(f(X, L) \geq VaR_{\theta}(f(X, L)))} \\
 &= VaR_{\theta}(f(X, L)) = L
 \end{aligned} \tag{1.82}$$

On a

$$CTE_{\theta}(T(X, L)) = CTE_{\theta}(X^A) + \Pi(X^R) = CTE_{\theta}(f(X, L)) + \Pi(g(X, L))$$

Finalement, on combine (1.67), (1.70), (1.81) et (1.82), on obtient alors :

$$CTE_{\theta}(T(X, L)) = \begin{cases} L + (1 + \eta^r) \left(\mu - \int_0^L S_X(x) dx \right), & 0 < L \leq S_X^{-1}(\theta) \\ S_X^{-1}(\theta) + \frac{1}{\theta} \int_{S_X^{-1}(\theta)}^{\infty} S_X(x) dx + (1 + \eta^r) \left(\mu - \int_0^L S_X(x) dx \right), & L > S_X^{-1}(\theta) \end{cases} \tag{1.83}$$

De manière similaire, Cai & Tan [21] ont démontré les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une rétention optimale pour le programme «CTE-optimisation».

Le théorème suivant énonce les conditions nécessaires et suffisantes pour que la rétention optimale puisse exister :

Théorème 1.2. La rétention optimale L^* existe pour le programme «CTE-optimisation» si et seulement si :

$$\theta \leq \eta_1^r < S_X(0) \text{ où } \eta_1^r = \frac{1}{1 + \eta^r} \tag{1.84}$$

De plus, lorsque la rétention optimale L^* existe, alors L^* est déterminée par :

$$L^* = S_X^{-1}(\eta_1^r) \tag{1.85}$$

Remarquons que la condition d'optimalité pour le modèle «CTE-optimisation» est moins restrictive comparé au modèle «VaR-optimisation». Cependant, les deux critères d'optimisation donnent le même résultat. Cela offre un avantage supplémentaire en adoptant le critère CTE par rapport à la VaR (Cai & Tan [21]).

1.5.6. Approche de K.S Tan et al (2011)

Pour le problème de choix de la réassurance optimale, Tan & Chi [117] ont généralisé le modèle de Cai & Tan [21] en formulant un modèle d'optimisation sous contrainte dans le cadre du critère de minimisation de mesure du risque basé sur l'espérance conditionnelle (CTE). Ils ont montré que le traité de la réassurance en «excédent de perte» est toujours l'une des solutions optimales.

Soit X est une variable aléatoire non négative représente la charge totale des sinistres, tel que :

$$X = X^A + X^R$$

Sachant que X^A et X^R sont respectivement, les charges des sinistres de l'assureur et du réassureur.

Tan & Chi [117] ont utilisé un modèle auxiliaire pour résoudre le problème de traité de la réassurance optimale grâce au modèle «CTE-optimisation». Ce modèle est exprimé par la richesse initiale de l'assureur W_0 et la richesse finale W . Ils ont considéré un principe de prime basé sur l'espérance mathématique $\Pi(X^R)$, avec η^r le chargement de sécurité du réassureur, tel que:

$$\Pi(X^R) = (1 + \eta^r) E(X^R)$$

La richesse finale W du réassureur est donnée par :

$$W = W_0 + (1 + \eta^r) E(X^R) - X^A \quad (1.86)$$

La portion X^R est exprimée par une fonction g définie sur un ensemble non vide de variables aléatoires mesurable à valeurs réelle positives.

g représente la forme de la réassurance choisie par la compagnie d'assurance. Tel que $X^R = g(X)$.

La fonction g doit vérifier $0 < g(X) \leq X$, pour tout $X > 0$ car la charge du réassureur ne doit en aucun cas dépasser la charge totale des sinistres comme elle ne doit pas être négative. i.e. $0 < X^R \leq X$.

Posons

$$\begin{aligned} T_g &= (W - W_0) = (1 + \eta^r) E(X^R) - X^A \\ &= (1 + \eta^r) E(g(X)) - (X - g(X)) \end{aligned} \quad (1.87)$$

T_g est interprété comme le résultat de la compagnie d'assurance.

Le modèle «CTE-optimisation» de Tan & Chi [117] consiste à minimiser la mesure de risque : Conditional Tail Expectation $CTE_\theta(T_g)$ correspond au risque T_g avec un niveau de probabilité $\theta \in]0,1[$.

Le programme d'optimisation est formulé de la manière suivante:

$$\begin{cases} \min_g \left\langle CTE_\theta(T_g) = CTE_\theta\left((1+\eta^r)E(g(X)) - (X - g(X))\right) \right\rangle \\ sc \left\langle \begin{aligned} 0 < g(X) \leq X \\ E(g(X)) \in \left[0, \frac{\pi}{1+\eta^r}\right] \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (1.88)$$

où π est une constante non liée à θ satisfait : $(1+\eta^r)E(g(X)) \leq \pi$.

$\left[0, \frac{\pi}{1+\eta^r}\right]$ est interprété comme l'intervalle de la liquidité des traités de réassurance.

Il s'agit d'un modèle d'optimisation plus général qui implique la recherche d'une fonction optimale au lieu des valeurs optimales d'un nombre fini de paramètres.

Reconnaissant que la résolution du programme d'optimisation (1.88) directement peut être très difficile. Pour cette raison [Tan & Chi \[117\]](#) ont résolu ce programme par intermédiaire d'un modèle auxiliaire beaucoup plus traitable que le modèle de réassurance d'origine.

Ils ont considéré les deux cas suivants :

Cas de déliaison où $E(g(X)) \in \left[0, \frac{\pi}{1+\eta^r}\right]$, et cas avec liaison où $E(g(X)) = \frac{\pi}{1+\eta^r}$.

Modèle auxiliaire dans le cas de déliaison :

Pour décrire ses modèles auxiliaires, [Tan & Chi \[117\]](#) ont introduit la fonction suivante :

$G_\theta(\xi, g) : \mathbb{R} \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$G_\theta(\xi, g) = \xi + \frac{1}{\theta} E \left[\left((1+\eta^r)E(g(X)) + X - g(X) - \xi \right)_+ \right] \quad (1.89)$$

où Γ est un ensemble non vide des fonctions g , et θ est la même constante associée à la mesure de risque CTE dans le modèle d'origine.

La signification de l'introduction de $G_\theta(\xi, g)$ est déduite du Lemme 1.1 suivant :

Lemme 1.1. ([Tan & Chi \[117\]](#)). La minimisation de $CTE_\theta(T_g)$ par rapport à $g \in \Gamma$ est équivalente à la minimisation de $G_\theta(\xi, g)$ sur tout $(\xi, g) \in \mathbb{R} \times \Gamma$, i.e :

Le modèle suivant :

$$\begin{cases} \min_{g \in \Gamma} \{CTE_\theta(T_g)\} \\ sc \left\langle E(g(X)) \in \left[0, \frac{\pi}{1+\eta^r}\right] \right. \end{cases} \quad (1.90)$$

est équivalent du modèle auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} \min_{(\xi, g) \in \mathbb{R} \times \Gamma} \{G_\theta(\xi, g)\} \\ sc \left\langle E(g(X)) \in \left[0, \frac{\pi}{1+\eta^r}\right[\right. \end{cases} \quad (1.91)$$

De plus, si $(\xi^*, g^*) \in \mathbb{R} \times \Gamma$ est une solution de problème de (1.91), alors g^* est une solution de problème (1.88).

Pour résoudre son problème auxiliaire, [Tan & Chi \[117\]](#) ont utilisé une stratégie basée sur la méthode lagrangienne et sur les dérivées directionnelles car le théorème de [Kuhn-Tucker](#) largement utilisé n'est pas utile pour résoudre ce problème puisque le problème a de dimension infinie.

[Tan & Chi \[117\]](#) ont considéré un contrat de la réassurance de type «excédent de perte», tel que la prime chargée du réassureur est donnée par :

$$\pi_{\eta^r} = (1 + \eta^r) E(g(X)) \quad (1.92)$$

où η^r est le chargement de sécurité de la réassurance.

Avec

$$X^R = g(X) = (X - d_{\eta^r})_+ \text{ et } d_{\eta^r} = \inf \left\{ d : \Pr(X > d) \leq \frac{1}{1 + \eta^r} \right\} \quad (1.93)$$

Dans la suite, les notations π_q et d_q sont définies de façon analogue comme (1.92) et (1.93).

[Tan & Chi \[117\]](#) ont réparti la solution de leurs modèle en trois cas, selon le niveau de la prime de réassurance π , il ont démontré une résolution du modèle (1.88) pour les différents cas suivants : $\pi \in [0, \pi_q]$, $\pi \in [\pi_q, \pi_{\eta^r}]$ et $\pi \in [\pi_{\eta^r}, \infty[$.

La résolution du programme d'optimisation est déterminée comme suit :

- Dans le cas où $\pi \in [0, \pi_q]$, si $q \leq \frac{1}{1 + \eta^r}$, alors toutes les fonctions de perte cédées g^* de la forme suivante sont des solutions optimales du modèle (1.88):

$$g^*(X) = \begin{cases} 0, & \text{si } X < \hat{d} \\ l(X), & \text{si } X \geq \hat{d} \end{cases} \quad (1.94)$$

où la rétention $\hat{d}$ est déterminée par la formule suivante :

$$E(g^*(X)) = E(l(X) \cdot 1_{X \geq \hat{d}}) = \frac{\pi}{1 + \eta^r} \quad (1.95)$$

et la fonction $l(X)$ satisfait la condition suivante : $0 \leq l(X) < X - d_q$, pour $X \geq d_q$.

– Dans le cas où $\pi \in [\pi_q, \pi_{\eta^r}]$, pour un risque aléatoire X , si elle existe une constante positive d^* tel que,

$$\pi = (1 + \eta^r) E((X - d^*)_+)$$

et

$$Pr(X \geq d^*) \leq \frac{1}{1 + \eta^r} \quad \text{et} \quad Pr(X \geq d^*) > q \quad (1.96)$$

Alors $g^*(X) = ((X - d^*)_+)$ est une fonction optimale de perte cédée au modèle de réassurance (1.88).

– Dans le cas où $\pi \in [\pi_{\eta^r}, \infty[$,

si $q \leq \frac{1}{1 + \eta^r}$ alors $g^*(X) = ((X - d^*)_+)$ est une fonction optimale de perte cédée au modèle de réassurance (1.88).

Modèle auxiliaire dans le cas de liaison :

Dans ce cas, le modèle de la réassurance de [Tan & Chi \[117\]](#) est reformulé comme suit:

$$\begin{cases} \min_{g \in \Gamma} \langle CTE_\theta(T_g) = CTE_\theta((1 + \eta^r)E(g(X)) - (X - g(X))) \rangle \\ 0 < g(X) \leq X \\ sc \langle E(g(X)) = \frac{\pi}{1 + \eta^r} \end{cases} \quad (1.97)$$

où π est une constante non liée à θ satisfait : $\pi = (1 + \eta^r) g^*(X) = (1 + \eta^r) E((X - d^*)_+)$.

De manière similaire, ils ont proposé la reformulation auxiliaire suivante :

$$\begin{cases} \min_{(\xi, g) \in \mathbb{R} \times \Gamma} \{G_\theta(\xi, g)\} \\ sc \langle E(g(X)) = \frac{\pi}{1 + \eta^r} \end{cases} \quad (1.98)$$

avec $G_\theta(\xi, g) : \mathbb{R} \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$,

$$G_\theta(\xi, g) = \xi + \frac{1}{\theta} E\left[\left((1 + \eta^r)E(g(X)) + X - g(X) - \xi\right)_+\right] \quad (1.99)$$

où Γ est un ensemble non vide des fonctions g , et θ est la même constante associée à la mesure de risque CTE dans le modèle d'origine.

Pour résoudre le problème (1.98), Tan & Chi [117] ont utilisé la même technique mathématique utilisée dans le cas de déliaison, ils ont démontré le lemme suivant :

Lemme 1.2. Si (ξ^*, g^*) est la solution du modèle (1.99), alors g^* est la solution du modèle (1.98).

Tan & Chi [117] ont s'intéressé à résoudre le problème d'optimisation dans le cas où $\pi \in [0, \pi_x]$, avec $\pi_x = (1 + \eta^r) E(X)$.

Le programme d'optimisation est résolu comme suit :

En supposant qu'elle existe une constante d^* telle que :

$$\pi = (1 + \eta^r) E((X - d^*)_+)$$

Si $\theta \leq \frac{1}{1 + \eta^r}$, alors le traité de réassurance de type «excédent de perte» est une solution optimale du modèle (1.98), tel que

$$g^*(X) = ((X - d^*)_+)$$
(1.100)

1.6. Conclusion

Dans cet état de l'art, nous avons présenté les différents critères d'optimisation de la réassurance existants dans la littérature actuarielle, en exposant les approches d'optimisation de la réassurance les plus importantes.

Sur la base de cet état de l'art, nous avons signalé que l'idée commune de ces approches réside dans le fait que la stratégie utilisée agit soit sur le bénéfice technique (en le maximisant pour un risque donné), soit sur le risque (en le minimisant pour un bénéfice technique donné), mais elle n'agit pas sur les deux en même temps d'une manière dynamique.

En effet, l'utilisation des critères d'optimisation précédents (minimisation de risque ou bien maximisation du bénéfice) seuls ne permet pas d'aboutir à une décision rationnelle pour un choix optimal de la réassurance. En outre, tous les modèles proposés dans les approches précédentes ne prennent pas en compte l'intérêt de liquidité des traités de la réassurance. C'est à dire l'assureur ne doit pas choisir le traité de la réassurance optimal si celui-ci n'est pas bénéfique et disponible sur le marché de la réassurance.

Donc il nous a paru utile de réaliser des approches qui agissent à la fois sur le bénéfice technique et sur le risque, en développant des améliorations de chaque critère d'optimisation de la réassurance. L'objectif est sans doute d'optimiser avec l'efficacité et la facilité de calcul en utilisant les algorithmes génétiques. Ces derniers contrairement aux méthodes déterministes (Lagrangien classique et théorème de [Kuhn-Tucker](#)) n'utilisent que la valeur de la fonction étudiée, pas sa dérivée ni une autre connaissance auxiliaire, ce qui permet de faciliter leur mise en application et leur efficacité même pour des problèmes complexes.

C'est ainsi que nous avons développé un algorithme itératif basé sur le Lagrangien augmenté et les algorithmes génétiques, afin de l'appliquer en convention avec les différentes approches mathématiques et les outils statistiques, pour résoudre le problème d'optimisation de la réassurance de plus en plus complexes avec plusieurs contraintes d'égalité et/ou d'inégalité, grâce notamment aux ordinateurs.

Le chapitre suivant présente une amélioration de critère d'optimisation de type moyenne-variance, en utilisant de nouvelle stratégie d'optimisation de la réassurance basée sur les algorithmes génétiques. Cette stratégie conduit à un profit de gain plus élevé et un risque plus bas par rapport à celui du portefeuille de base (non amélioré), et permet à la réduction des charges de calcul avec performance.

Chapitre 2. Optimisation de la réassurance à l'aide des algorithmes génétiques

2.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons de nouvelles stratégies d'optimisation de la réassurance en utilisant les algorithmes génétiques. Ces stratégies consistent à réaliser un choix optimal des paramètres de traités de réassurance qui permettent de déterminer une allocation optimale d'un contrat de réassurance.

Nous nous fixons un double objectif : le premier consiste à trouver les modèles de la réassurance optimale qui agissent à la fois sur le bénéfice technique (en le maximisant) et sur le risque (en le minimisant). Ces modèles se basent sur les formes de réassurance et les principes de prime, et en tenant compte également de l'intérêt de liquidité des traités de la réassurance (c'est-à-dire ces traités optimaux doit être disponibles sur le marché de la réassurance).

Le deuxième objectif est d'optimiser avec la facilité du calcul en utilisant les algorithmes génétiques que nous avons choisies pour leurs simplicités et leurs mécanismes qui ne s'appuient que sur la fonction (objectif) étudiée, pas sa dérivée, ou une autre connaissance auxiliaire, ce qui facilitera leur mise en application et leur efficacité même face aux problèmes d'optimisation les plus complexes algébriquement.

2.2. Algorithmes génétiques (AGs)

Les algorithmes génétiques (AGs) sont des méthodes d'optimisation introduites initialement de manière formelle par [John Holland en 1975](#), puis développées par [Goldberg \[52\]](#). Ce sont des algorithmes d'optimisation fondés sur les mécanismes de la sélection naturelle et de la génétique.

Les algorithmes génétiques fonctionnent de la manière suivante :

On commence par une population de solutions potentielles (chromosomes) initiales arbitrairement choisies. Chaque chromosome est constitué d'un ensemble d'éléments

appelés gènes. Ce chromosome représente le codage d'une solution potentielle au problème à résoudre. On évalue leur fitness relative en calculant la force de chaque chromosome ce qui permet de retenir les individus les plus forts lors de la sélection. Sur la base de ces fitness, on crée une nouvelle population de solutions potentielles en utilisant des opérateurs évolutionnaires simples: la sélection, le croisement et la mutation. On recommence ce cycle jusqu'à ce que l'on trouve une solution satisfaisante.

Les différentes opérations qui interviennent dans un algorithme génétique de base sont :

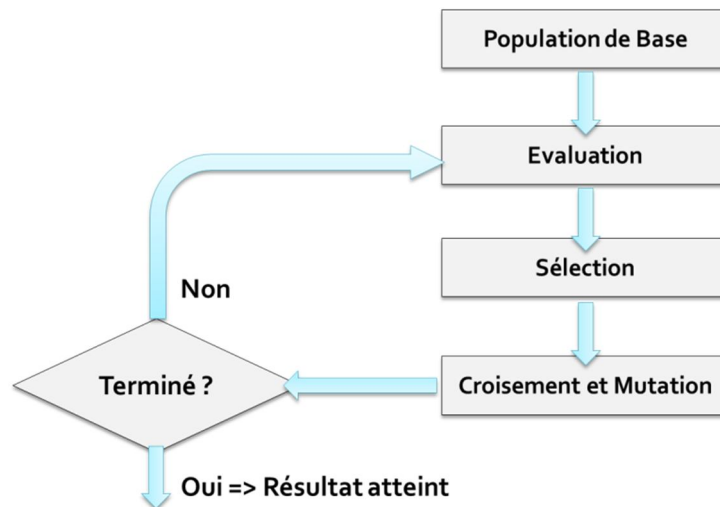


Figure 2: Organigramme d'un algorithme génétique

2.2.1. Codage de données et génération de la population initiale

Le codage des données est une opération qui consiste à associer à chaque individu de l'espace de points une structure de données sous forme des chaînes de bits contenant toutes les informations nécessaires pour la description de ce point.

Il existe trois principaux types de codage : binaire, gray et réel. Nous pouvons facilement passer d'un codage à l'autre. (Voir [Michalewicz \[87\]](#) et [Goldberg \[52\]](#)).

Les niveaux d'organisation d'un algorithme génétique sont représentés dans la figure suivante :

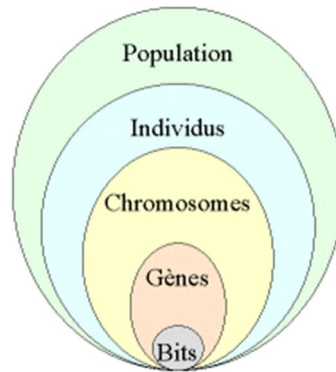


Figure 3: Les cinq niveaux d'organisation d'un algorithme génétique

La transformation la plus simple (fonction de décodage d) d'une chaîne binaire $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ en nombre entier x est désormais largement utilisée : elle s'opère par la règle suivante :

$$d(A) = \sum_{i=1}^n a_i 2^{i-1}$$

(La taille du chromosome n dépendant de la précision voulue).

2.2.2. Evaluation des individus

Au niveau de cette étape, on évalue la force de chaque chromosome pour retenir les individus les plus forts lors de la sélection.

Soit $C(x)$ la valeur du critère à optimiser pour l'individu x . La fonction force $F(x)$ de l'individu x proposée par [Goldberg \[52\]](#) est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} C_{\max} - C(x), & \text{si } C(x) \geq 0 \\ 0, & \text{si } C(x) < 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

$C_{\max}$ désigne la plus grande valeur observée de $C(x)$.

2.2.3. Principes de sélection

L'objectif de la sélection est d'identifier les meilleurs individus d'une population et d'éliminer les mauvais. Dans la littérature, il existe un nombre important de méthodes de sélection plus ou moins adaptées aux problèmes qu'elles traitent, dont la plus populaire est la méthode de sélection par la roulette. (Voir [Davis \[30\]](#)).

Cette méthode consiste à affecter à chaque individu x_i une force relative appelée probabilité d'apparition donnée par :

$$p(x_i) = \frac{F(x_i)}{\sum_{k=1}^n F(x_k)} \quad (2.2)$$

où n étant le nombre d'individu dans la population.

La sélection d'un individu se déroule comme suit :

Soient $q_i = \sum_{k=1}^i p(x_k)$ la probabilité d'apparition cumulée d'un individu x_i et r le nombre aléatoire compris entre 0 et 1.

L'individu retenu est x_1 si $q_1 \leq r$ et x_i si $q_{i-1} \leq r \leq q_i$. Ce processus est répété n fois.

2.2.4. Opérateur de Croisement

Le croisement est une opération qui permet de combiner deux individus quelconques dits (parents) pour en ressortir deux autres individus dits "enfants".

Le croisement est effectué en tirant aléatoirement une position appelée "site de croisement" dans chacun des parents, puis on échange les deux sous-chaînes terminales de chacun des deux chromosomes, ce qui donne lieu à deux enfants.

Le croisement peut être en un point, en deux points ou en plusieurs points:

Pour le croisement en un point, on choisit au hasard un point de croisement, pour chaque couple (le croisement s'effectue au niveau binaire). (Voir [Amédée & François \[4\]](#)).

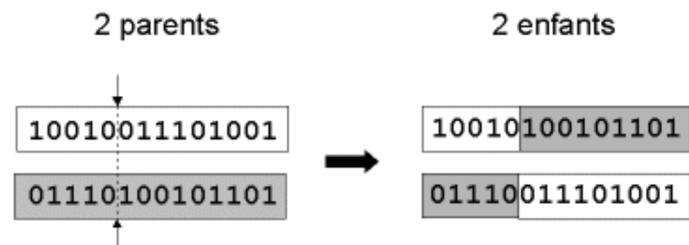


Figure 4: Croisement avec un point

Le croisement en deux points : on choisit au hasard deux points de croisement.

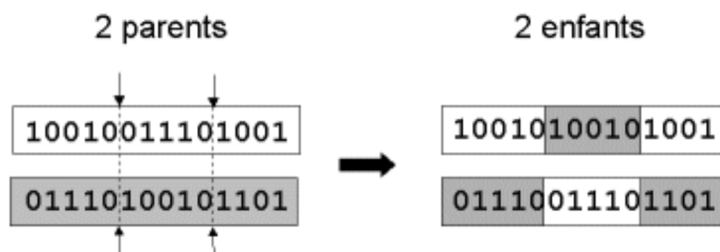


Figure 5: Croisement avec 2 points

En effet, plus le nombre de points de croisements est grand (c'est-à-dire la probabilité de croisement est élevée) plus il y aura d'échange de paramètres et d'informations, et inversement.

2.2.5. Opérateur de mutation

L'opérateur de mutation est un opérateur qui permet à un algorithme génétique d'atteindre tous les points de l'espace d'état sans les parcourir tous dans le processus de résolution.

L'algorithme génétique est terminé par un critère d'arrêt défini comme le nombre maximum d'itérations (ou le nombre de générations détectant les optimums locaux). Ce qui permet ensuite la convergence des algorithmes génétiques vers l'optimum global. (Voir [Lutton \[81\]](#)).

2.3. Procédure d'optimisation

Soit un portefeuille des charges des sinistres composé de N variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) $X_1, \dots, X_N$ de fonction de répartition F_{X_i} , de survie S_{X_i} et de fonction densité f_{X_i} , correspondent aux primes respectives $P_1, \dots, P_N$. Posons $E(X_i) = \mu$ et $Var(X_i) = \sigma^2$. $\forall i \in [1, \dots, N]$.

Supposons que chaque risque X_i peut être protégé par la réassurance, tel que :

$$X_i = X_i^A + X_i^R, \quad \forall i \in [1, \dots, N]$$

avec la portion $X_i^A = f(X_i, \lambda_i)$ retenue par la cédante et la portion $X_i^R = g(X_i, \lambda_i)$ transférée au réassureur, où f et g sont deux fonctions positives définies sur un ensemble non vide de variables aléatoires mesurables à valeurs réelles positives et représentent la forme de la réassurance choisie par la compagnie d'assurance, et $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ est le vecteur des paramètres des traités de la réassurance.

La fonction g doit vérifier $0 < g(X_i, \lambda_i) \leq X_i$ pour tout $\lambda_i > 0$, $\forall i \in [1, \dots, N]$, c'est-à-dire la charge du réassureur ne doit en aucun cas dépasser la charge totale des sinistres comme elle ne doit pas être négative: $0 \leq X_i^R \leq X_i$, $\forall i \in [1, \dots, N]$.

Posons $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ et $X = (X_1, \dots, X_N)$.

Le bénéfice technique de la cédante est défini par :

$$B(X, \lambda) = \sum_{i=1}^N [P_i - \Pi(X_i^R) - X_i^A] = \sum_{i=1}^N [P_i - \Pi(g(X_i, \lambda_i)) - f(X_i, \lambda_i)] \quad (2.3)$$

avec Π est le principe de prime choisi par la compagnie d'assurance pour couvrir les traités de la réassurance.

L'espérance mathématique du bénéfice technique est donnée par :

$$E(B(X, \lambda)) = \sum_{i=1}^N [P_i - \Pi(g(X_i, \lambda_i)) - E(f(X_i, \lambda_i))] \quad (2.4)$$

Soit $Z(X, \lambda)$ une fonction définie par :

$$Z(X, \lambda) = E[B(X, \lambda)] - \pi(B(X, \lambda)) \quad (2.5)$$

où π une mesure de risque.

La maximisation de la fonction $Z(X, \lambda)$ permet de maximiser le bénéfice technique espéré et de minimiser le risque sous certaines contraintes.

On considère le programme d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \max_{\lambda} \langle Z(X, \lambda) = E[B(X, \lambda)] - \pi(B(X, \lambda)) \rangle \\ \text{sc } \lambda \in [\lambda^-, \lambda^+]^N \end{cases} \quad (2.6)$$

où les valeurs $\lambda^- \in]0,1]$ et $\lambda^+ \in]0,1]$ sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure des paramètres des traités de la réassurance.

Pour résoudre le programme d'optimisation (2.6) nous avons utilisé les algorithmes génétiques en nous basant sur le "GASolver" sous MATLAB. On procédera de la manière suivante :

- Déterminer la distribution empirique de $(X_i)_{i \in [1, \dots, N]}$;
- Evaluer la fonction objectif Z ;
- Appliquer le programme de résolution proposée par "GASolver";
- Déterminer les valeurs optimales des traités de réassurance qui maximisent la fonction Z .

2.4. Moyenne-variance sous le principe d'espérance mathématique

2.4.1. Cas des traités en «quote part»

Dans le cas de la réassurance proportionnelle de type «quote part» avec un facteur de proportionnalité constant $\alpha \in]0,1]$, l'assureur supporte la charge $X_i^R = (1-\alpha)X_i$ et la portion $X_i^R = \alpha X_i$ transférée au réassureur, $\forall i \in [1, \dots, N]$.

On définit une fonction $Z(X, \alpha)$ comme suit :

$$Z(X, \alpha) = E[B(X, \alpha)] - \text{Var}[B(X, \alpha)] \quad (2.7)$$

où $E[B(X, \alpha)]$ et $\text{Var}[B(X, \alpha)]$ sont respectivement le bénéfice technique espéré et la variance du bénéfice technique.

L'objectif est de réaliser un choix optimal du paramètre des traités α qui maximise la fonction $Z(X, \alpha)$ permettant de maximiser à la fois le bénéfice technique espéré et de minimiser le risque.

On a alors le programme d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \max_{\alpha} \langle Z(X, \alpha) = E[B(X, \alpha)] - \text{Var}[B(X, \alpha)] \rangle \\ \text{s.c. } \alpha \in [\alpha^-, \alpha^+] \end{cases} \quad (2.8)$$

où $\alpha^- \in]0, 1]$ et $\alpha^+ \in]0, 1]$ sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de facteur de proportionnalité α .

Supposons que la prime de réassurance est déterminée selon le principe de l'espérance mathématique, i.e. $\Pi(X_i^R) = (1 + \eta^r) E(X_i^R)$, $\forall i \in [1, \dots, N]$.

Le paramètre $\eta^r > 0$ est la charge de sécurité du réassureur.

L'espérance mathématique du bénéfice technique est donnée par :

$$E(B(X, \alpha)) = E\left(\sum_{i=1}^N [P_i - \Pi(g(X_i, \alpha)) - f(X_i, \alpha)]\right)$$

Les fonctions $f(X_i, \alpha) = X_i^A = (1 - \alpha) X_i$ et $g(X_i, \alpha) = X_i^R = \alpha X_i$ sont respectivement les charges de l'assureur et du réassureur. $\forall i \in [1, \dots, N]$.

Alors

$$E(B(X, \alpha)) = \sum_{i=1}^N [P_i - (1 + \eta^r \alpha) E(X_i)] = P - N\mu(1 + \alpha\eta^r) \quad (2.9)$$

où $P = \sum_{i=1}^N P_i$ est la prime totale collectée.

La variance du bénéfice technique est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{Var}(B(X, \alpha)) &= \text{Var}\left(\sum_{i=1}^N [P_i - \Pi(g(X_i, \alpha)) - f(X_i, \alpha)]\right) \\ &= \text{Var}\left(\sum_{i=1}^N [P_i - (1 + \eta^r) \alpha E(X_i) - (1 - \alpha) X_i]\right) \end{aligned}$$

Alors

$$\text{Var}(B(X, \alpha)) = \sum_{i=1}^N (1 - \alpha)^2 \text{Var}(X_i) = N(1 - \alpha)^2 \sigma^2 \quad (2.10)$$

Par suite, le programme d'optimisation (2.9) est réécrit comme suit :

$$\begin{cases} \max_{\alpha} \langle Z(\alpha) = P - N\mu(1 + \alpha\eta^r) - N(1 - \alpha)^2 \sigma^2 \rangle \\ \text{sc } \alpha \in [\alpha^-, \alpha^+] \end{cases} \quad (2.11)$$

2.4.2. Cas des traités en «surplus»

Dans cette section, nous proposons une approche qui permet de déterminer une allocation optimale de la réassurance proportionnelle de type «surplus».

Les facteurs de proportionnalité (taux de cession) sont multiples et variés, ils dépendent des montants de réclamation maximaux que l'assureur souhaite assumer et les valeurs maximales des rétentions que la cédante conserve à sa charge pour chaque période.

Pour la forme de réassurance proportionnelle de type «surplus», les charges de l'assureur et du réassureur sont données respectivement par :

$$X_i^A = \min(X_i, a_i) + \frac{a_i}{m_i} \max(0, X_i - a_i) \quad \text{et} \quad X_i^R = \left(1 - \frac{a_i}{m_i}\right) \max(0, X_i - a_i), \quad \forall i \in [1, \dots, N] \quad (2.12)$$

où $(m_i > 0)_{i=1, \dots, N}$ sont les montants maximaux de réclamation que la cédante souhaite assumer et $(a_i > 0)_{i=1, \dots, N}$ sont les valeurs fixes du plein de rétention que la cédante conserve à sa charge pour chaque période; où $m_i \geq a_i \quad \forall i \in [1, \dots, N]$.

Les facteurs de proportionnalité $(\alpha_i)_{i=1, \dots, N}$ sont donnés par la formule suivante :

$$\alpha_i = \frac{m_i - a_i}{m_i}, \quad \forall i \in [1, \dots, N] \quad (2.13)$$

Posons $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$.

On définit la fonction $Z(X, \alpha)$ comme suit :

$$Z(X, \alpha) = E(B(X, \alpha)) - \text{Var}[B(X, \alpha)] \quad (2.14)$$

où

$E(B(X, \alpha))$ et $\text{Var}[B(X, \alpha)]$ sont respectivement le bénéfice technique espéré et la variance du bénéfice technique.

Le but principal est de réaliser un choix optimal des paramètres des traités $(\alpha_i)_{i=1, \dots, N}$ qui maximisent la fonction $Z(X, \alpha)$, et celui-ci est réalisé par la détermination des paramètres $(m_i)_{i=1, \dots, N}$ et $(a_i)_{i=1, \dots, N}$ à partir de la formule suivante :

$$\alpha_i = \frac{m_i - a_i}{m_i}, \quad \forall i \in [1, \dots, N]$$

Soit le programme d'optimisation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\left[(a_i)_{i=1, \dots, N}, (m_i)_{i=1, \dots, N} \right]} \left\langle Z(X, \alpha) = E(B(X, \alpha)) - \text{Var}[B(X, \alpha)], \text{ où } \alpha_i = \frac{m_i - a_i}{m_i}, \forall i \in [1, \dots, N] \right\rangle \\ \text{sc} \left\langle \begin{array}{l} a_i \leq m_i \\ m_i > 0, \end{array} \quad \forall i \in [1, \dots, N] \right\rangle \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Ce programme d'optimisation consiste à déterminer les couples $\left[(a_i^*)_{i=1, \dots, N}, (m_i^*)_{i=1, \dots, N} \right]$ optimaux qui maximisent la fonction $Z(X, \alpha)$, ce qui conduit ensuite de déterminer les facteurs de proportionnalité (taux de cession) optimaux permettant de maximiser à la fois le bénéfice technique espéré et de minimiser le risque.

Le bénéfice technique est donné par :

$$\begin{aligned} B(X, \alpha) &= \sum_{i=1}^N [P_i - \Pi(X_i^R) - X_i^A] \\ &= \sum_{i=1}^N [P_i - \Pi(g(X_i, \alpha_i)) - f(X_i, \alpha_i)] \end{aligned}$$

Le bénéfice technique espéré est donné par :

$$E(B(X, \alpha)) = \sum_{i=1}^N [P_i - \Pi(X_i^R) - E(X_i^A)]$$

Calcul de l'espérance et la variance du bénéfice technique :

On a

$$\begin{aligned} E(X_i^A) &= E \left[\min(X_i, a_i) + \frac{a_i}{m_i} \max(0, X_i - a_i) \right], \quad \forall i \in [1, \dots, N] \\ &= E(\min(X_i, a_i)) + \frac{a_i}{m_i} E(\max(0, X_i - a_i)) \end{aligned}$$

La prime chargée par le réassureur pour la période i est donnée par :

$$\Pi(X_i^R) = (1 + \eta_i^r) E(X_i^R) = (1 + \eta_i^r) \left(1 - \frac{a_i}{m_i} \right) E[\max(0, X_i - a_i)], \quad \forall i \in [1, \dots, N]$$

où $(\eta_i^r)_{i \in [1, \dots, N]}$ sont les chargements de sécurité de la réassurance.

Le bénéfice technique espéré est obtenu alors par :

$$E(B(X, \alpha)) = \sum_{i=1}^N \left[P_i - (1 + \eta_i^r) E \left(\left(1 - \frac{a_i}{m_i} \right) \max(0, X_i - a_i) \right) - E \left(\min(X_i, a_i) + \frac{a_i}{m_i} \max(0, X_i - a_i) \right) \right] \quad (2.16)$$

où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ et $\alpha_i = \frac{m_i - a_i}{m_i}$, $\forall i \in [1, \dots, N]$.

Et puisque

$$X_i = X_i^A + X_i^R = \min(X_i, a_i) + \frac{a_i}{m_i} \max(0, X_i - a_i) + \left(1 - \frac{a_i}{m_i}\right) \max(0, X_i - a_i)$$

$$\Rightarrow \min(X_i, a_i) = X_i - \max(0, X_i - a_i), \quad \forall i \in [1, \dots, N]$$

Alors

$$E(B(X, \alpha)) = \sum_{i=1}^N \left[P_i - E(X_i) - \eta_i^r \left(1 - \frac{a_i}{m_i}\right) E(\max(0, X_i - a_i)) \right] \quad (2.17)$$

où $\alpha_i = \frac{m_i - a_i}{m_i}$, $\forall i \in [1, \dots, N]$

D'autre part, on sait que

$$E(\max(0, X_i - a_i)) = \int_{a_i}^{\infty} (x - a_i) f_{X_i}(x) dx = E(X_i) - \int_0^{a_i} S_{X_i}(x) dx, \quad \forall i \in [1, \dots, N]$$

Alors le bénéfice technique espéré est donné par:

$$E(B(X, \alpha)) = \sum_{i=1}^N \left[P_i - E(X_i) - \eta_i^r \left(1 - \frac{a_i}{m_i}\right) E(\max(0, X_i - a_i)) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^N \left[P_i - E(X_i) - \eta_i^r \left(1 - \frac{a_i}{m_i}\right) \left(E(X_i) - \int_0^{a_i} S_{X_i}(x) dx \right) \right] \quad (2.18)$$

où $\alpha_i = \frac{m_i - a_i}{m_i}$, $\forall i \in [1, \dots, N]$.

Calculons maintenant la variance :

$$Var(B(X, \alpha)) = Var \left(\sum_{i=1}^N \left[P_i - (1 + \eta_i^r) E \left(\left(1 - \frac{a_i}{m_i}\right) \max(0, X_i - a_i) \right) - \left(\min(X_i, a_i) + \frac{a_i}{m_i} \max(0, X_i - a_i) \right) \right] \right) \quad (2.19)$$

$$= Var \left(\sum_{i=1}^N \left[\min(X_i, a_i) + \frac{a_i}{m_i} \max(0, X_i - a_i) \right] \right)$$

Et puisque

$$\max(0, X_i - a_i) = X_i - \min(X_i, a_i), \quad \forall i \in [1, \dots, N] \quad (2.20)$$

Alors en remplaçant (2.20) dans (2.19), on obtient :

$$Var(B(X, \alpha)) = Var\left(\sum_{i=1}^N \left[\left(1 - \frac{a_i}{m_i}\right) \min(X_i, a_i) + \frac{a_i}{m_i} X_i \right]\right) \quad (2.21)$$

où $\alpha_i = \frac{m_i - a_i}{m_i}$, $\forall i \in [1, \dots, N]$.

D'où

$$Var(B(X, \alpha)) = \sum_{i=1}^N \left[\left(1 - \frac{a_i}{m_i}\right)^2 Var(\min(X_i, a_i)) + \left(\frac{a_i}{m_i}\right)^2 Var(X_i) + 2 \left(\frac{a_i}{m_i}\right) \left(1 - \frac{a_i}{m_i}\right) Cov(X_i, \min(X_i, a_i)) \right] \quad (2.22)$$

En remplaçant, on obtient :

$$Var(B(X, \alpha)) = \sum_{i=1}^N \left[\left(1 - \left(\frac{a_i}{m_i}\right)^2\right) Var(\min(X_i, a_i)) + \left(\frac{a_i}{m_i}\right)^2 Var(X_i) \right] \quad (2.23)$$

avec $\alpha_i = \frac{m_i - a_i}{m_i}$, $\forall i \in [1, \dots, N]$.

Calculons maintenant $Var(\min(X_i, a_i))$:

On a

$$E[\min(X_i, a_i)] = E(X_i) - \left(E(X_i) - \int_0^{a_i} S_{X_i}(x) dx \right) = \int_0^{a_i} S_{X_i}(x) dx, \quad \forall i \in [1, \dots, N]$$

et

$$E[(\min(X_i, a_i))^2] = \int_0^{a_i} x^2 dF_{X_i}(x) + a_i^2 S_{X_i}(x), \quad \forall i \in [1, \dots, N]$$

En utilisant l'intégration par parties, on obtient :

$$E[(\min(X_i, a_i))^2] = \int_0^{a_i} 2x S_{X_i}(x) dx, \quad \forall i \in [1, \dots, N]$$

On a alors

$$Var[\min(X_i, a_i)] = \int_0^{a_i} 2x S_{X_i}(x) dx - \left(\int_0^{a_i} S_{X_i}(x) dx \right)^2, \quad \forall i \in [1, \dots, N] \quad (2.24)$$

En remplaçant (2.24) dans (2.23), on obtient la variance par la formule suivante :

$$Var(B(X, \alpha)) = \sum_{i=1}^N \left[\left(1 - \left(\frac{a_i}{m_i} \right)^2 \right) \left(\int_0^{a_i} 2x S_{X_i}(x) dx - \left(\int_0^{a_i} S_{X_i}(x) dx \right)^2 \right) + \left(\frac{a_i}{m_i} \right)^2 \sigma^2 \right] \quad (2.25)$$

Finalement le programme d'optimisation est formulé comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\left[(a_i)_{i=1, \dots, N}, (m_i)_{i=1, \dots, N} \right]} \left\langle Z(X, \alpha) = E(B(X, \alpha)) - Var[B(X, \alpha)], \text{ où } \alpha_i = \frac{m_i - a_i}{m_i}, \forall i \in [1, \dots, N] \right\rangle \\ sc \left\langle \begin{array}{l} m_i > 0 \\ a_i \geq m_i, \forall i \in [1, \dots, N] \end{array} \right. \\ avec \\ E(B(X, \alpha)) = \sum_{i=1}^N \left[P_i - \mu - \eta^r \left(1 - \frac{a_i}{m_i} \right) \left(\mu - \int_0^{a_i} S_X(x) dx \right) \right] \\ Var(B(X, \alpha)) = \sum_{i=1}^N \left[\left(1 - \left(\frac{a_i}{m_i} \right)^2 \right) \left(\int_0^{a_i} 2x S_X(x) dx - \left(\int_0^{a_i} S_X(x) dx \right)^2 \right) + \left(\frac{a_i}{m_i} \right)^2 \sigma^2 \right] \end{array} \right. \quad (2.26)$$

2.4.3. Cas des traités en «excédent de sinistre»

Pour une forme de réassurance non proportionnelle de type «excédent de sinistre» avec une limite de rétention L applicable à chaque réclamation individuelle, les charges de l'assureur et du réassureur sont données respectivement par:

$$X^A = \sum_{i=1}^N X_i^A = \sum_{i=1}^N \min(X_i, L) \text{ et } X^R = \sum_{i=1}^N X_i^R = \sum_{i=1}^N \max(0, X_i - L)$$

avec $X_i = X_i^A + X_i^R, \forall i \in [1, \dots, N]$.

On construit le programme d'optimisation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_L \left\langle Z(X, L) = E[B(X, L)] - Var[B(X, L)] \right\rangle \\ sc \\ L \in [L^-, L^+] \end{array} \right. \quad (2.27)$$

où $L^- > 0$ et $L^+ > 0$ sont deux paramètres qui représentent respectivement les bornes inférieure et supérieure de la limite de rétention L selon le marché la réassurance.

Ce programme d'optimisation consiste à trouver le paramètre de traité de réassurance (limite de rétention L^*) qui permet à la fois de maximiser le bénéfice technique et de minimiser le risque, et donner ensuite une allocation optimale de la réassurance de type «excédent de sinistres».

La prime de réassurance est déterminée toujours sous le principe de l'espérance mathématique. i.e. $\Pi(X_i^R) = (1 + \eta_i^r) E(X_i^R), \forall i \in [1, \dots, N]$.

Calcul du bénéfice technique espéré :

Le bénéfice technique espéré est donné par :

$$E(B(X, L)) = \sum_{i=1}^N [P_i - \Pi(X_i^R) - E(X_i^A)] = \sum_{i=1}^N [P_i - (1 + \eta_i^r) E(\max(0, X_i - L)) - E(\min(X_i, L))] \quad (2.28)$$

On a

$$E(X_i^A) = E[\min(X_i, L)] = \int_0^L S_{X_i}(x) dx, \quad \forall i \in [1, \dots, N] \quad (2.29)$$

et

$$E(X_i^R) = E(X_i) - E(X_i^A) = \mu - \int_0^L S_{X_i}(x) dx, \quad \forall i \in [1, \dots, N] \quad (2.30)$$

D'où

$$E(B(X, L)) = P - \sum_{i=1}^N \left[(1 + \eta_i^r) \left(\mu - \int_0^L S_{X_i}(x) dx \right) + \int_0^L S_{X_i}(x) dx \right] \quad (2.31)$$

où $P = \sum_{i=1}^N P_i$ est la prime totale collectée pendant la période N .

Calculons la variance :

On a

$$E\left((X_i^A)^2\right) = E\left[(\min(X_i, L))^2\right] = \int_0^L x^2 dF_{X_i}(x) + L^2 S_{X_i}(L) = \int_0^L 2x S_{X_i}(x) dx, \quad \forall i \in [1, \dots, N] \quad (2.32)$$

Alors

$$\text{Var}(X_i^A) = \int_0^L 2x S_{X_i}(x) dx - \left(\int_0^L S_{X_i}(x) dx \right)^2, \quad \forall i \in [1, \dots, N] \quad (2.33)$$

D'où

$$\text{Var}(B(X, L)) = \sum_{i=1}^N \text{Var}(X_i^A) = \sum_{i=1}^N \left(\int_0^L 2x S_{X_i}(x) dx - \left(\int_0^L S_{X_i}(x) dx \right)^2 \right) \quad (2.34)$$

Finalement, le programme d'optimisation est reformulé comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_L \left\langle Z(X, L) = P - N \left((1 + \eta^r) \left(\mu - \int_0^L S_X(x) dx \right) - \int_0^L S_X(x) dx \right) \right. \\ \left. - N \left(\int_0^L 2x S_X(x) dx - \left(\int_0^L S_X(x) dx \right)^2 \right) \right\rangle \\ sc \quad L \in [L^-, L^+] \end{array} \right. \quad (2.35)$$

2.4.4. Exemples et applications numériques

Notre approche se base sur la distribution des charges des sinistres et sur les algorithmes génétiques.

Rappelons que les lois les plus courantes utilisées pour modéliser la charge d'un sinistre sont : la loi Uniforme, la normale & la loi log-normale, la loi exponentielle & les lois gamma et la loi de Pareto (Besson & Partrat (2004) [14], Denuit & Charpentier (2004) [35]).

– Cas des traités en «quote part»

Supposons que les montants des sinistres $(X_i)_{i \in [1, \dots, N]}$ suivent une distribution normale, avec $E(X_i) = 398$ et $Var(X_i) = 15^2$, à l'horizon de 9 ans ($N = 9$).

La recette des primes collectées est égale $P = 6089,4$;

Le chargement de sécurité de la réassurance est égale $\eta^r = 0,7$;

L'intervalle de liquidité des paramètres de traités de la réassurance est :

$$[\alpha^-, \alpha^+] = \left[\frac{1}{5}, 1 \right].$$

Alors dans ce cas on a le programme d'optimisation (de maximisation) suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\alpha} \left\langle Z(\alpha) = 6089,4 - 3582(1 + 0,7\alpha) - 2025(1 - \alpha)^2 \right\rangle \\ sc \quad \alpha \in \left[\frac{1}{5}, 1 \right] \end{array} \right. \quad (2.36)$$

Nous avons utilisé le solveur des algorithmes génétiques "GASolver" développé par le logiciel "Matlab" récent.

Après l'exécution du programme d'optimisation, on obtient le résultat suivant:

La valeur optimale pour les taux de cession (facteur de proportionnalité) est égale :

$$\alpha^* = 0,381.$$

D'autre part, la résolution du problème d'optimisation moyenne-variance par l'approche de [Walhin & Lampaert \[120\]](#) a fourni les valeurs optimales suivantes :

$$\alpha = \min(1, \max(0, \phi))$$

$$\phi = \frac{\eta^r E(X_i)}{2\text{Var}(X_i)}$$

On a alors le taux de cession optimal suivant: $\alpha^* = 0,619$.

Nous résumons le résultat dans le tableau suivant :

	Walhin & Lampaert	Algorithmes génétiques
α^*	0,619	0,381
$Z(\alpha^*)$	661,368375	776,179575
$\text{Var}(B(\alpha^*))$	293,951025	775,901025
$E(B(\alpha^*))$	955,3194	1552,0806

Tableau 1: Tableau relatif aux espérances et variances optimales

D'après le tableau 1, nous constatons que le bénéfice technique espéré obtenu par l'approche des algorithmes génétiques est plus élevé que celui obtenu par l'approche de [Walhin & Lampaert \[120\]](#). Nous remarquons dans cet exemple que notre technique a donné des résultats améliorés, y compris la facilité des charges de calcul à l'égard des objectifs que se fixaient les assureurs telles que la maximisation de son bénéfice technique et la minimisation du risque.

– Cas des traités en «surplus»

Supposons que les montants des sinistres $(X_i)_{i=1, \dots, N}$ suivent une loi Uniforme $U[0, 2]$; de fonction de survie S_{X_i} . $E(X_i) = 1$ et $\text{Var}(X_i) = \frac{1}{3}$. $\forall i \in [1, \dots, N]$.

Soit un horizon de 9 ans ($N = 9$).

La somme des primes collectés est égale $P = \sum_{i=1}^N P_i = 25,71$.

Les chargements de sécurité de la réassurance sont donnés dans le tableau suivant:

η_i^r	0,80	0,88	1,02	1,20	0,89	0,20	1,37	0,28	3,07
------------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Tableau 2: Chargements de sécurité de chaque risque

On cherche à résoudre le programme d'optimisation (2.26).

On a

$$\int_0^{a_i} S_X(x) dx = \int_0^{a_i} \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx = a_i - \frac{a_i^2}{4}$$

$$\int_0^{a_i} 2x S_X(x) dx = 2x - x^2 = a_i^2 - \frac{a_i^3}{3}$$

En remplaçant, on obtient le problème d'optimisation suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{[(a_i)_{i=1,\dots,9}, (m_i)_{i=1,\dots,9}]} \left\langle Z(a, m) = \sum_{i=1}^N \left[P_i - 1 - \eta_i^r \left(1 - \frac{a_i}{m_i}\right) \left(1 - a_i + \frac{a_i^2}{4}\right) \right] \right. \\ \quad \left. - \sum_{i=1}^N \left[\left(1 - \left(\frac{a_i}{m_i}\right)^2\right) \left(\left(\frac{a_i^3}{6} - \frac{a_i^4}{16}\right)\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{a_i}{m_i}\right)^2 \right] \right\rangle \\ sc \quad \left\langle \begin{array}{l} m_i > 0 \\ a_i \geq m_i \end{array}, \quad \forall i \in (1, \dots, 9) \right. \end{array} \right. \quad (2.37)$$

Après l'exécution du programme d'optimisation, on obtient le résultat suivant :

a_i^*	m_i^*	$\alpha_i^* = \frac{m_i^* - a_i^*}{m_i^*}$
0,005	0,8771	0,9943
0,931	1,3168	0,293
0,602	1,6584	0,637
0,211	0,3688	0,428
0,891	1,4727	0,395
0,309	1,36725	0,774
0,602	13,6818	0,956
0,919	2,6637	0,655
0,852	0,9659	0,118

Tableau 3: Les taux de cession optimaux par les algorithmes génétiques

D'autre part, les valeurs optimales des taux de cession (facteurs de proportionnalité) trouvées par l'approche de [Walhin & Lampaert \[120\]](#) sont données dans le tableau suivant :

α^*	1	1	1	1	1	0,3	1	0,42	1
------------	---	---	---	---	---	-----	---	------	---

Tableau 4: Les taux de cession optimaux par la méthode de Walhin & Lampaert

Nous résumons la comparaison dans le tableau suivant:

	Walhin & Lampaert	Algorithmes génétiques
$Var(B(\alpha^*))$	0,2754	0,2527
$E(B(\alpha^*))$	6,302	11,045

Tableau 5: Tableau de comparaison entre Walhin & Lampaert et notre approche

D'après le tableau 5 qui donne les résultats relatifs à l'espérance et à la variance optimales du bénéfice technique, nous constatons que la variance obtenue par l'approche des algorithmes génétiques est inférieure avec un bénéfice technique espéré plus élevé par rapport à celle obtenue par l'approche de Walhin & Lampaert [120]. Alors l'amélioration pour le problème moyenne-variance existe et devient claire dans cet exemple.

– **Cas des traités en «excédent de sinistre»**

Supposons que $(X_i)_{i=1,\dots,N}$ suivent la loi exponentielle de paramètre 1, $X_i \sim \text{Exp}(1)$, de fonction de survie $S_{X_i} \cdot \forall i \in [1, \dots, N]$.

Posons $\eta^r = 1,2$ et $P = \sum_{i=1}^N P_i = 66,8$.

Dans ce cas nous avons le programme d'optimisation (2.35):

On a :

- $S_X(x) = 1 - (1 - e^{-x}) = e^{-x}$
- $\int_0^L S_X(x) dx = \int_0^L e^{-x} dx = -e^{-L} + 1$
- $\int_0^L 2x S_X(x) dx = \int_0^L 2xe^{-x} dx = 2(1-L)e^{-L} - 2$

En remplaçant, on obtient le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \max_L \langle Z(X, L) = 10,8 - 9*(2,2e^{-L} - 1) - 9*(2(1-L)e^{-L} - 2) - (1 - e^{-L})^2 \rangle \\ sc \quad \langle L > 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

De même, en utilisant le "GASolver", on trouve le résultat suivant:

- La fonction objectif optimale, $Z(L^*) = 37,348$;
- La limite de rétention optimale, $L^* = 3,492$;
- Le bénéfice technique espéré optimal, $E(B(L^*)) = 18,92$.

2.5. Moyenne-variance sous le principe de prime de risque ajusté

Dans le cadre d'amélioration du modèle moyenne-variance, nous présentons dans cette section une approche permettant de maximiser le bénéfice technique d'une compagnie d'assurance et de minimiser le risque en se basant sur le principe de risque ajusté défini à partir des lois probabilistes. Cette approche consiste à réaliser un choix optimal du couple (chargement de sécurité et paramètre de traités de réassurance) qui permet de maximiser à la fois l'espérance mathématique du bénéfice technique et de minimiser la variance en même temps et d'une manière dynamique en utilisant une méthode d'optimisation basé sur les algorithmes génétiques.

2.5.1. Principe du risque ajusté

Soit S_X la fonction de survie du risque X .

On considère une fonction $\rho_g(X)$ présentée par :

$$\begin{aligned} \rho_g : V &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ X &\rightarrow \rho_g(X) = \int_0^{+\infty} g(S_X(t)) dt \end{aligned} \quad (2.39)$$

avec V est un ensemble non vide de variables aléatoires mesurables à valeurs réelles, et $g : [0,1] \rightarrow [0,1]$ une fonction croissante et concave telle que $g(0)=0$ et $g(1)=1$.

La fonction g est appelée l'opérateur de distorsion et la fonction $\rho_g(X)$ est définie comme une mesure du risque X fondée sur l'opérateur de distorsion g .

Cette mesure de risque respecte les propriétés de cohérence d'Artzner [8], donc ρ_g est une mesure de risque cohérente.

Ainsi Wang [122] a défini un principe de prime basé sur la mesure de l'opérateur de distorsion, tel que $g(x)=x^r, r \in]0,1]$. Ce principe s'écrit alors sous la forme suivante:

$$\Pi(X) = \int_0^\infty S_X(t)^r dt, 0 < r \leq 1 \quad (2.40)$$

Il est appelé principe du risque ajusté.

2.5.2. Formulation du problème d'optimisation

Supposons que la compagnie d'assurance choisit à appliquer un mode de tarification basé sur le principe de risque ajusté tel que :

$$\begin{aligned} \Pi(X_i^R) &= \int_0^\infty S_{X_i^R}(t)^r dt, \text{ avec } r \in]0,1] \text{ et } S_{X_i^R} \text{ désigne la fonction de survie de } X_i^R. \\ \forall i &\in [1, \dots, N]. \end{aligned}$$

Le paramètre r est interprété comme le chargement de sécurité de la réassurance. Notre problème d'optimisation consiste à trouver les valeurs optimales du couple (le chargement de sécurité r^* et le paramètre des traités de réassurance λ^*) qui permettent de maximiser à la fois le bénéfice technique espéré et de minimiser le risque.

Le problème d'optimisation est reformulé comme suit:

$$\begin{cases} \max_{(\lambda, r)} \langle Z(X, \lambda, r) = E(B(X, \lambda, r)) - Var(B(X, \lambda, r)) \rangle \\ \text{sc} \quad \begin{cases} \lambda \in [\lambda^-, \lambda^+] \\ r \in]0, 1] \end{cases} \end{cases} \quad (2.41)$$

où $\lambda^- \in]0, 1]$ et $\lambda^+ \in]0, 1]$ sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure des paramètres des traités de la réassurance.

$E(B(X, \lambda, r))$ et $Var[B(X, \lambda, r)]$ sont respectivement le bénéfice technique espéré et la variance du bénéfice technique.

Dans la section suivante, nous allons traiter notre problème d'optimisation dans les deux cas suivants: cas des traités en «quote part» et cas des traités en «excédent de sinistres» afin de choisir la meilleure forme de la réassurance adoptée.

2.5.3. Cas des traités en «quote part»

Dans le cas de la réassurance proportionnelle de type «quote part» avec un facteur de proportionnalité (taux de cession) $\alpha \in]0, 1]$ constant, l'assureur supporte la charge $X_i^A = (1 - \alpha) X_i$ et la portion $X_i^R = \alpha X_i$ transférée au réassureur. $\forall i \in [1, \dots, N]$.

Le bénéfice technique est donné par :

$$B(X, \alpha, r) = \sum_{i=1}^N \left[P_i - \Pi(X_i^R) - X_i^A \right] \quad (2.42)$$

où $\Pi(X_i^R) = \int_0^{+\infty} (S_{\alpha X_i}(x))^r dx$ est la prime chargée par le réassureur pour la période i .

alors le bénéfice technique espéré est donné par :

$$\begin{aligned}
 E(B(X, \alpha, r)) &= \sum_{i=1}^N \left[P_i - \Pi(X_i^R) - E(X_i^A) \right] \\
 &= \sum_{i=1}^N \left[P_i - \int_0^{+\infty} (S_{\alpha X_i}(x))^r dx - (1-\alpha)E(X_i) \right]
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

La variance du bénéfice technique est donnée par :

$$\text{Var}(B(X, \alpha)) = \text{Var} \left(\sum_{i=1}^N \left[P_i - \int_0^{+\infty} (S_{\alpha X_i}(x))^r dx - (1-\alpha)X_i \right] \right) = \sum_{i=1}^N (1-\alpha)^2 \text{Var}(X_i)$$

Alors la fonction objectif à optimiser est donnée par :

$$Z(X, \alpha, r) = \sum_{i=1}^N \left[P_i - \int_0^{+\infty} (S_{\alpha X_i}(x))^r dx - (1-\alpha)E(X_i) \right] - \sum_{i=1}^N (1-\alpha)^2 \text{Var}(X_i) \tag{2.44}$$

On a

$$\begin{aligned}
 S_{X_i^R}(x) &= S_{\alpha X_i}(x) = P(\alpha X_i > x) \\
 &= P\left(X_i > \frac{x}{\alpha}\right) = S_{X_i}\left(\frac{x}{\alpha}\right), \quad \forall i \in [1, \dots, N]
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

On aura donc

$$Z(X, \alpha, r) = \sum_{i=1}^N \left[P_i - (1-\alpha)E(X_i) - (1-\alpha)^2 \text{Var}(X_i) \right] - \sum_{i=1}^N \left[\int_0^{+\infty} \left(S_{X_i}\left(\frac{x}{\alpha}\right) \right)^r dx \right] \tag{2.46}$$

Finalement, le programme d'optimisation est reformulé comme suit:

$$\begin{cases} \max_{(\alpha, r)} \left\langle Z(X, \alpha, r) = \sum_{i=1}^N \left[P_i - (1-\alpha)E(X_i) - (1-\alpha)^2 \text{Var}(X_i) \right] - \sum_{i=1}^N \left[\int_0^{+\infty} \left(S_{X_i}\left(\frac{x}{\alpha}\right) \right)^r dx \right] \right\rangle \\ \text{sc} \quad \begin{cases} \alpha \in [\alpha^-, \alpha^+] \\ r \in]0, 1] \end{cases} \end{cases} \tag{2.47}$$

2.5.4. Cas des traités en «excédent de sinistre»

Dans le cas de la réassurance non proportionnelle de type «excédent de sinistre» de limite de rétention $L > 0$, l'assureur supporte la charge:

$X^A = \sum_{i=1}^N X_i^A = \sum_{i=1}^N \min(X_i, L)$ et la portion $X^R = \sum_{i=1}^N X_i^R = \sum_{i=1}^N \max(0, X_i - L)$ transférée au réassureur.

Le bénéfice technique espéré est donné par:

$$E(B(X, L, r)) = \sum_{i=1}^N \left[P_i - \Pi(X_i^R) - E(X_i^A) \right] \quad (2.48)$$

La prime chargée par le réassureur pour la période i est donnée par :

$$\Pi(X_i^R) = \int_0^{+\infty} (S_{X_i^R}(x))^r dx = \int_0^{+\infty} (S_{\max(0, X_i - L)}(x))^r dx \quad (2.49)$$

On a

$$E(X_i^A) = E(\min(X_i, L)) = \int_0^L S_{X_i}(x) dx \quad (2.50)$$

On a aussi

$$\begin{aligned} S_{X_i^R}(x) &= S_{\max(0, X_i - L)}(x) = 1 - P(\max(0, X_i - L) \leq x) \\ S_{X_i^R}(x) &= 1 - P(X_i \leq x + L) = S_{X_i}(x + L) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Alors

$$\Pi(X_i^R) = \int_0^{+\infty} (S_{X_i^R}(x))^r dx = \int_0^{+\infty} (S_{X_i}(x + L))^r dx \quad (2.52)$$

En remplaçant (2.50) et (2.52) dans (2.48), on obtient alors l'espérance mathématique du bénéfice technique :

$$E(B(X, L, r)) = \sum_{i=1}^N \left[P_i - \int_0^{+\infty} (S_{X_i}(x + L))^r dx - \int_0^L S_{X_i}(x) dx \right] \quad (2.53)$$

D'autre part, la variance du bénéfice technique est donnée par :

$$Var(B(X, L)) = Var\left(\sum_{i=1}^N [P_i - \Pi(X_i^R) - X_i^A]\right) = \sum_{i=1}^N Var(X_i^A)$$

On a

$$E(X_i^A) = \int_0^L S_{X_i}(x) dx \quad \text{et} \quad E[(X_i^A)^2] = E[(\min(X_i, L))^2] = \int_0^L 2x S_{X_i}(x) dx \quad (2.54)$$

Alors

$$Var(X_i^A) = \int_0^L 2x S_{X_i}(x) dx - \left(\int_0^L S_{X_i}(x) dx \right)^2 \quad (2.55)$$

Donc

$$Var(B(X, L, r)) = \sum_{i=1}^N Var(X_i^A) = \sum_{i=1}^N \left(\int_0^L 2x S_{X_i}(x) dx - \left(\int_0^L S_{X_i}(x) dx \right)^2 \right) \quad (2.56)$$

Finalement, nous concluons à travers de (2.53) et (2.56) la fonction objectif suivante :

$$Z(X, L, r) = \sum_{i=1}^N \left[P_i - \int_L^{+\infty} (S_{X_i}(x+L))^r dx - \int_0^L S_{X_i}(x) dx \right] - \sum_{i=1}^N \left(\int_0^L 2x S_{X_i}(x) dx - \left(\int_0^L S_{X_i}(x) dx \right)^2 \right) \quad (2.57)$$

Le programme d'optimisation est réécrit alors sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \max_{(L, r)} \left\langle Z(X, L, r) = P - \sum_{i=1}^N \left[\int_L^{+\infty} (S_{X_i}(x+L))^r dx + \int_0^L S_{X_i}(x) dx \right] - \sum_{i=1}^N \left(\int_0^L 2x S_{X_i}(x) dx - \left(\int_0^L S_{X_i}(x) dx \right)^2 \right) \right\rangle \\ sc \left\langle \begin{array}{l} L \in [L^-, L^+] \\ r \in]0, 1] \end{array} \right. \end{cases} \quad (2.58)$$

où $P = \sum_{i=1}^N P_i$ est la prime totale collectée pendant la période N .

2.5.5. Exemple et application numérique

Supposons que les charges de sinistres $(X_i)_{i \in [1, \dots, N]}$ suivent la loi exponentielle de paramètre 1, $X_i \sim \text{Exp}(1)$. $\forall i \in [1, \dots, N]$.

Soit $S_{X_i}(x) = e^{-x}$ et $f_{X_i}(x) = e^{-x}$ respectivement la fonction de survie et la fonction de densité de X_i , $\forall i \in [1, \dots, N]$.

On considère une période de 9 ans ($N = 9$).

Supposons que la recette totale des primes collectées est égale $P = \sum_{i=1}^N P_i = 57$.

– Cas des traités en «quote part»

Dans ce cas on a le programme d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \max_{(\alpha, r)} \left\langle Z(\alpha, r) = 57 - 9 * \left((1-\alpha) + (1-\alpha)^2 + \frac{\alpha}{r} \right) \right\rangle \\ sc \left\langle \begin{array}{l} \alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \\ r \in]0, 1] \end{array} \right. \end{cases} \quad (2.59)$$

Après l'exécution du programme des algorithmes génétiques, on obtient le résultat suivant:

- La fonction objectif optimale, $Z(\alpha^*, r^*) = 47,999$;
- Le taux de cession optimal, $\alpha^* = 1$;
- Le chargement de sécurité optimal, $r^* = 1$.

– **Cas des traités en «excédent de sinistre»**

Dans ce cas on a le programme d'optimisation suivant:

$$\begin{cases} \max_{(L,r)} \left\langle Z(L,r) = 57 - 9 * \left(\frac{e^{-2rL}}{r} - e^{-L} + 1 \right) - 9 * \left(-2(L-1)e^{-L} + 2 - (1-e^{-L})^2 \right) \right\rangle \\ \text{sc} \begin{cases} L > 0 \\ r \in]0,1] \end{cases} \end{cases} \quad (2.60)$$

De façon similaire, après l'exécution du solveur des algorithmes génétiques, on obtient le résultat suivant:

- La fonction objectif optimale, $Z(L^*, r^*) = 40,477$;
- La limite de rétention optimale, $L^* = 2,499$;
- Le chargement de sécurité optimal, $r^* = 1$.

2.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une amélioration pour le problème moyenne-variance en proposant deux approches d'optimisation de la réassurance. Dans la première, nous avons déterminé un choix optimal de paramètres de traités de la réassurance qui maximisent le bénéfice technique espéré et minimisent la variance du bénéfice technique simultanément, en utilisant un mode de tarification basé sur l'espérance mathématique. Dans la deuxième approche, nous avons opté pour une nouvelle stratégie de l'optimisation de la réassurance, qui consiste à déterminer un choix optimal du couple (paramètre de traités de la réassurance, chargement de sécurité) qui permet de maximiser à la fois le bénéfice technique espéré et de minimiser le risque, en se basant sur le principe de prime de risque ajusté défini à partir des lois probabilistes. Nous avons utilisé également une procédure d'optimisation basée sur les algorithmes génétiques qui permettent d'obtenir une meilleure solution pour le problème d'optimisation de la réassurance. Nous avons comparé nos résultats avec ceux obtenus par l'approche de [Walhin & Lampaert \[120\]](#). Notre technique a montré son efficacité, soit au niveau des résultats obtenus (optimisation améliorée) soit en termes de sa simplicité (utilisation des mécanismes de l'algorithme génétique qui sont faciles à exécuter).

Cependant, et malgré toutes ces améliorations, le modèle moyenne-variance reste pratiquement limité et cela revient à plusieurs considérations déjà mentionnées dans le premier chapitre.

Par la suite, notre amélioration va s'orienter vers le critère de la minimisation de la probabilité de ruine qui constitue un facteur très important du choix de la réassurance optimale, et qui est considéré comme un outil crucial pour déterminer l'effet de la réassurance sur l'évolution de la richesse d'une compagnie d'assurance.

Chapitre 3. "Moyenne-probabilité de ruine" pour un choix optimal de la réassurance

3.1. Introduction

L'objectif de la réassurance diffère d'un assureur à un autre dans la mesure où un assureur peut choisir la réassurance pour minimiser la variance de son bénéfice technique ([De Finetti \[32\]](#)), ou minimiser les mesures de risques comme la Value-at-Risk (VaR) et la Conditional Tail Expectation (CTE) ([Cai & Tan \[21\]](#)), alors qu'un autre assureur choisit la réassurance qui lui permet de minimiser sa probabilité de ruine ([Schmidli \[108\]](#)). En effet, le critère de la minimisation de la probabilité de ruine constitue un facteur très important du choix de la réassurance optimale, elle a un impact significatif sur la stabilisation et la richesse terminale de la compagnie d'assurance.

Dans ce cadre, plusieurs études ont été élaborées pour étudier l'effet de la probabilité de ruine sur le choix optimal de la réassurance. [Centeno \[24\]](#) a utilisé l'algorithme de [Panjer](#) pour calculer la probabilité de ruine afin d'optimiser la réassurance. [Dickson & Waters \[38\]](#), [Aase \[1\]](#), [Krvavych \[75\]](#), [Schmidli \[108\]](#), [Deelstra & Plantin \[33\]](#) ont choisi d'aller chercher l'optimalité par le critère de la minimisation de la probabilité de ruine en utilisant une stratégie basée sur le modèle classique de [Cramer-Lundberg](#) que sur l'approximation de la probabilité de ruine à partir de ce modèle.

En outre, [Schmidli \[108\]](#) et plusieurs autres auteurs ont considéré les traités de la réassurance comme optimaux si et seulement s'ils permettent de maximiser le coefficient d'ajustement de [Lundberg](#) à partir de l'approximation de type [Cramer-Lundberg](#).

Dans ces approches, les auteurs agissent seulement sur la minimisation de la probabilité de la ruine via la maximisation du coefficient d'ajustement de [Lundberg](#) pour déterminer les paramètres de traités de la réassurance optimale. Cependant, plusieurs auteurs, exemple [Ben Dbabis \[13\]](#), ont signalé que la maximisation du

coefficient d'ajustement seule ne permet pas d'aboutir en général à une décision rationnelle pour un choix optimal de la réassurance, car ce critère agit seulement sur le risque, mais pas sur le bénéfice technique, c'est à dire l'assureur ne doit pas choisir le traité de la réassurance optimal si celui-ci n'est pas rentable.

Donc il doit également faire référence à une nouvelle méthode qui agit sur la minimisation de la probabilité de la ruine (en maximisant le coefficient d'ajustement) et sur la maximisation du bénéfice technique, les deux en même temps, en cherchant à la fois les paramètres de traités de réassurance et le coefficient d'ajustement de [Lundberg](#) optimaux qui permettent de maximiser le bénéfice technique et de minimiser le risque d'une compagnie d'assurance.

Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle stratégie d'optimisation de la réassurance qui permet de maximiser le bénéfice technique d'une compagnie d'assurance tout en maintenant un niveau minimal pour la probabilité de ruine en utilisant les algorithmes génétiques.

L'organisation de ce chapitre est comme suit :

Dans la première section, nous formulons le problème d'optimisation pour les différents cas de traités de la réassurance. Puis dans la deuxième section, nous présentons la procédure de résolution en utilisant les algorithmes génétiques. Enfin, dans la dernière section nous illustrons notre méthode par un exemple d'application.

3.2. Formulation du problème d'optimisation

On considère un portefeuille des charges des sinistres représenté par N variables aléatoires $X_1, \dots, X_N$ (i.i.d), correspondent aux primes respectives $P_1, \dots, P_N$,

$$P = \sum_{i=1}^N P_i .$$

La réserve de la compagnie d'assurance dans le cas statique est définie par :

$$R_N(u, \lambda) = u + C(\lambda)N - \sum_{i=1}^N X_i^A \quad (3.1)$$

où

- X_i^A est la charge d'i-ème sinistre pour la cédante après la réassurance ;
- λ est le paramètre de traités de la réassurance ;

- u est le capital initial ;
- $C(\lambda)$ est la recette de prime chargée de l'assureur après la réassurance pour une période i , $\forall i \in [1, \dots, N]$.

La probabilité de ruine notée par $\psi(u, \lambda)$ est définie par :

$$\psi(u, \lambda) = P(R_N(u, \lambda) < 0)$$

Comme nous avons signalé dans le chapitre 1, [Schmidli \[108\]](#) a démontré que la probabilité de ruine $\psi(u, \lambda)$ peut être majorée par une borne supérieure dite borne de [Lundberg](#), tel que :

$$\psi(u, \lambda) = P(R_N(u, \lambda) < 0) \leq e^{-\rho u} \quad (3.2)$$

avec $\rho > 0$ est le coefficient d'ajustement de [Lundberg](#) et c'est l'unique racine pour l'équation suivante :

$$e^{-C(\lambda)\rho} E[e^{\rho X_i^A}] = e^{-C(\lambda)\rho} M_{X_i^A}(\rho) = 1, \quad \forall i \in [1, \dots, N] \quad (3.3)$$

où $M_{X_i^A}$, est la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire X_i^A .

Selon l'inégalité de [Lundberg](#), la probabilité de ruine est minimale si le coefficient d'ajustement est maximal.

[Schmidli \[108\]](#) a déterminé un choix optimal de la réassurance en se basant sur le critère de la maximisation du coefficient d'ajustement de [Lundberg](#). Cependant, la compagnie d'assurance cherche toujours à réaliser des bénéfices plus élevés. Donc pour prendre une bonne décision, on doit la fonder sur le critère de la rentabilité (en maximisant le bénéfice technique espéré) tout en gardant la condition du coefficient d'ajustement qui doit être aussi maximal.

On construit alors le programme d'optimisation suivant qui permet de maximiser à la fois le bénéfice technique espéré de la cédante et de minimiser sa probabilité de ruine (via le réglage maximal du coefficient d'ajustement):

$$\begin{cases} \max_{(\lambda, \rho)} \langle Z(X, \lambda) = E(B(X, \lambda)) \rangle \\ \text{sc} \begin{cases} e^{-C(\lambda)\rho} E[e^{\rho X_i^A}] = 1 \\ \lambda \in [\lambda^-, \lambda^+] \\ \rho > 0 \end{cases} \end{cases}, \quad \forall i \in [1, \dots, N] \quad (3.4)$$

où $E(B(X, \lambda))$ est le bénéfice technique espéré ; $X = (X_1, \dots, X_N)$ est le vecteur des charges des sinistres; λ^- et λ^+ sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de paramètre des traités de la réassurance.

Soient $\eta^r > 0$ et $\eta > 0$ respectivement la charge de sécurité du réassureur et la charge de sécurité de l'assureur, tel que $\eta^r > \eta$.

Dans la suite de ce chapitre, nous supposons que la compagnie d'assurance choisit un mode de tarification basé sur le principe de l'espérance mathématique pour couvrir les charges de la réassurance, i.e.

$$\Pi(X_i^R) = (1 + \eta^r) E(X_i^R), \quad \forall i = [1, \dots, N]$$

Nous allons traiter le problème d'optimisation (3.4) dans des différents cas de formes de la réassurance.

3.2.1. Cas des traités en «quote part»

Dans le cas d'une forme de réassurance proportionnelle de type «quote part» avec un facteur de proportionnalité (taux de cession) $\alpha \in]0, 1]$ constant, les charges de l'assureur et du réassureur respectivement sont partagés de la manière suivante :

$$X_i^A = (1 - \alpha) X_i \text{ et } X_i^R = \alpha X_i$$

tel que $X_i = X_i^A + X_i^R$, $\forall i \in [1, \dots, N]$.

Posons $E(X_i) = \mu$, $\forall i \in [1, \dots, N]$.

La prime chargée du réassureur pour une période i est donnée par :

$$C_r(\alpha) = \Pi(X_i^R) = (1 + \eta^r) \alpha E(X_i) = (1 + \eta^r) \alpha \mu, \quad \forall i \in [1, \dots, N] \quad (3.5)$$

Alors la recette de prime chargée de l'assureur après la réassurance pour une période est donnée par :

$$C(\alpha) = (1 + \eta) E(X_i) - C_r(\alpha) = \mu((1 + \eta) - \alpha(1 + \eta^r)), \quad \forall i \in [1, \dots, N] \quad (3.6)$$

La réserve de la compagnie d'assurance est donnée par :

$$\begin{aligned} R_N(u, \alpha) &= u + C(\alpha)N - \sum_{i=1}^N X_i^A \\ &= u + \mu N((1 + \eta) - \alpha(1 + \eta^r)) - \sum_{i=1}^N X_i^A \end{aligned} \quad (3.7)$$

Donc la réserve espérée est donnée par :

$$\begin{aligned}
 E(R_N(u, \alpha)) &= u + \mu N \left((1+\eta) - \alpha(1+\eta^r) \right) - E \left(\sum_{i=1}^N X_i^A \right) \\
 &= u + \mu N \left((1+\eta) - \alpha(1+\eta^r) \right) - N(1-\alpha)\mu \\
 &= u + \mu N (\eta - \alpha\eta^r)
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Le facteur de proportionnalité α doit vérifier la condition de sécurité suivante :

$$E(R_N(u, \alpha) - u) > 0 \Leftrightarrow \alpha < \frac{\eta}{\eta^r} \tag{3.9}$$

Le coefficient d'ajustement ρ de [Lundberg](#) est toujours la solution positive de l'équation suivante :

$$e^{-C(\lambda)\rho} M_{X_i^A}(\rho) = 1 \Leftrightarrow (M_{X_i}(\rho) - 1) - \mu \left((1+\eta) - \alpha(1+\eta^r) \right) \frac{\rho}{1-\alpha} = 0, \quad \forall i \in [1, \dots, N] \tag{3.10}$$

où $M_{X_i} < \infty$ est la fonction génératrice des moments correspond à la variable aléatoire X_i . ([Hald & Schmidli \[56\]](#)).

Calculons maintenant l'espérance mathématique du bénéfice technique :

Le bénéfice technique est donné par :

$$B(X, \alpha) = \sum_{i=1}^N [P_i - \Pi(X_i^R) - X_i^A]$$

Alors l'espérance mathématique du bénéfice technique est donnée par:

$$\begin{aligned}
 E(B(X, \alpha)) &= \sum_{i=1}^N [P_i - \Pi(X_i^R) - E(X_i^A)] \\
 &= \sum_{i=1}^N [P_i - (1+\eta^r)\alpha E(X_i) - (1-\alpha)E(X_i)] \\
 &= P - N(1+\eta^r\alpha)\mu
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Finalement, le programme d'optimisation (3.4) est reformulé dans ce cas comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{(\alpha, \rho)} \langle E(B(X, \alpha)) = P - N(1+\eta^r\alpha)\mu \rangle \\ sc \left\langle \begin{array}{l} \left(M_{X_i^A}(\rho) - 1 \right) - \mu \left((1+\eta) - \alpha(1+\eta^r) \right) \frac{\rho}{1-\alpha} = 0, \quad \forall i \in [1, \dots, N] \\ \alpha \in \left] 0, \frac{\eta}{\eta^r} \right[\\ \rho > 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{3.12}$$

3.2.2. Cas des traités en «excédent de sinistre»

Dans le cas d'une forme de réassurance non proportionnelle de type «excédent de sinistre», l'assureur couvre chaque réclamation individuelle jusqu'à un certain niveau de rétention $L > 0$. Dans ce cas la charge totale de l'assureur et la charge totale du réassureur sont données par :

$$X^A = \sum_{i=1}^N X_i^A = \sum_{i=1}^N \min(X_i, L) \text{ et } X^R = \sum_{i=1}^N X_i^R = \sum_{i=1}^N ((X_i - L)_+)$$

tel que $S = \sum_{i=1}^N X_i = X^A + X^R$.

La prime chargée de la réassurance pour une période i , est donnée par :

$$C_r(L) = \Pi(X_i^R) = (1 + \eta^r) E((X_i - L)_+), \quad \forall i \in [1, \dots, N] \quad (3.13)$$

Alors la recette de prime chargée de l'assureur après la réassurance pour une période est donnée par :

$$C(L) = (1 + \eta) E(X_i) - C_r(L) = (1 + \eta) \mu - (1 + \eta^r) E((X_i - L)_+), \quad \forall i \in [1, \dots, N] \quad (3.14)$$

On sait que :

$$E(X_i^A) = E[\min(X_i, L)] = \int_0^L x dF_{X_i}(x) + L S_{X_i}(L) = \int_0^L S_{X_i}(x) dx, \quad \forall i \in [1, \dots, N] \quad (3.15)$$

et

$$E(X_i^R) = E((X_i - L)_+) = E(X_i) - E(X_i^A) = \mu - \int_0^L S_{X_i}(x) dx, \quad \forall i \in [1, \dots, N] \quad (3.16)$$

Alors la recette de prime pour chaque période est donnée par :

$$\begin{aligned} C(L) &= (1 + \eta) \mu - (1 + \eta^r) E((X_i - L)_+) \\ &= (1 + \eta) \mu - (1 + \eta^r) \left(\mu - \int_0^L S_{X_i}(x) dx \right), \quad \forall i \in [1, \dots, N] \\ &= (\eta - \eta^r) \mu + (1 + \eta^r) \int_0^L S_{X_i}(x) dx \end{aligned} \quad (3.17)$$

La réserve de la compagnie d'assurance est donnée par la formule suivante:

$$\begin{aligned} R_N(u, L) &= u + C(L)N - X^A \\ &= u + N \left[(\eta - \eta^r) \mu + (1 + \eta^r) \int_0^L S_{X_i}(x) dx \right] - \sum_{i=1}^N X_i^A \end{aligned} \quad (3.18)$$

Donc la réserve espérée est donnée par :

$$\begin{aligned}
 E(R_N(u, L)) &= u + N \left[(\eta - \eta^r) \mu + (1 + \eta^r) \int_0^L S_{X_i}(x) dx \right] - \sum_{i=1}^N X_i^A \\
 &= u + N \left[(\eta - \eta^r) \mu + (1 + \eta^r) \int_0^L S_{X_i}(x) dx \right] - N \int_0^L S_{X_i}(x) dx \\
 &= u + N \left[(\eta - \eta^r) \mu + \eta^r \int_0^L S_{X_i}(x) dx \right]
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Calculons maintenant l'espérance mathématique du bénéfice technique :

Le bénéfice technique espéré est donné par :

$$\begin{aligned}
 E(B(X, L)) &= E \left(\sum_{i=1}^N [P_i - \Pi(X_i^R) - X_i^A] \right) \\
 &= \sum_{i=1}^N [P_i - (1 + \eta^r) E((X_i - L)_+) - E(X_i^A)] \\
 &= P - \sum_{i=1}^N \left[(1 + \eta^r) \left(\mu - \int_0^L S_{X_i}(x) dx \right) + \int_0^L S_{X_i}(x) dx \right]
 \end{aligned}$$

D'où le bénéfice technique espéré est donné par :

$$E(B(X, L)) = P - \sum_{i=1}^N \left[(1 + \eta^r) \mu - \eta^r \int_0^L S_{X_i}(x) dx \right] \tag{3.20}$$

D'autre part, le coefficient d'ajustement de **Lundberg** ρ est toujours l'unique racine pour l'équation suivant :

$$e^{-C(L)\rho} E \left[e^{\rho X_i^A} \right] = 1, \quad \forall i \in [1, \dots, N] \tag{3.21}$$

Alors le programme d'optimisation (3.4) est reformulé dans ce cas comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{(L, \rho)} \left\langle E(B(X, L)) = P - \sum_{i=1}^N \left[(1 + \eta^r) \mu - \eta^r \int_0^L S_{X_i}(x) dx \right] \right\rangle \\ \text{sc} \left\langle \begin{array}{l} e^{-\left((\eta - \eta^r) \mu + (1 + \eta^r) \int_0^L S_{X_i}(x) dx \right) \rho} M_{X_i^A}(\rho) = 1, \quad \forall i \in [1, \dots, N] \\ L \in [L^-, L^+] \\ \rho > 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{3.22}$$

où $L^- > 0$ et $L^+ > 0$ sont deux paramètres représentent respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de la limite de rétention L selon le marché de la réassurance.

3.2.3. Cas des traités en «excédent de perte»

La réassurance non proportionnelle de type «excédent de perte annuelle» fonctionne de façon similaire à la réassurance «excédent de sinistre». Dans ce cas la limite de rétention L est applicable au total des réclamations.

L'assureur supporte le risque $X^A = \min\left(\sum_{i=1}^N X_i, L\right)$ et la portion $X^R = \left(\sum_{i=1}^N X_i - L\right)_+$ transférée au réassureur, tel que $S = \sum_{i=1}^N X_i = X^A + X^R$.

La prime chargée du réassureur pour la période N est donnée par :

$$C_r(L) = \Pi(X^R) = (1 + \eta^r) E((S - L)_+) \quad (3.23)$$

On sait que

$$E(X^A) = E[\min(S, L)] = \int_0^L S_S(x) dx$$

et

$$E(X^R) = E((S - L)_+) = E(S) - E(X^A) = E(S) - \int_0^L S_S(x) dx$$

Alors

$$C_r(L) = (1 + \eta^r) \left[E(S) - \int_0^L S_S(x) dx \right] \quad (3.24)$$

Ainsi, la recette de prime chargée de l'assureur après la réassurance pour une période est donnée par :

$$\begin{aligned} C(L) &= (1 + \eta) E(S) - C_r(L) = (1 + \eta) E(S) - (1 + \eta^r) \left[E(S) - \int_0^L S_S(x) dx \right] \\ C(L) &= (\eta - \eta^r) E(S) + (1 + \eta^r) \int_0^L S_S(x) dx \end{aligned} \quad (3.25)$$

Le processus de surplus dans ce cas est donné par :

$$R_N(u, L) = u + C(L) - X^A \quad (3.26)$$

Donc la réserve espérée est donnée par :

$$\begin{aligned} E(R_N(u, L)) &= u + C(L) - E(X^A) \\ &= u + (\eta - \eta^r) E(S) + \eta^r \int_0^L S_S(x) dx \end{aligned} \quad (3.27)$$

Calculons maintenant le bénéfice technique espéré :

On a

$$\begin{aligned} E(B(S, L)) &= P - \Pi(X^R) - E(X^A) \\ &= P - (1 + \eta^r) \left(E(S) - \int_0^L S_S(x) dx \right) - \int_0^L S_S(x) dx \end{aligned}$$

En simplifiant, on trouve alors :

$$E(B(S, L)) = P - \left((1 + \eta^r) E(S) - \eta^r \int_0^L S_S(x) dx \right) \quad (3.28)$$

Le coefficient d'ajustement ρ est l'unique racine pour l'équation suivante :

$$e^{-C(L)\rho} E[e^{\rho X^A}] \equiv e^{-C(L)\rho} M_{X^A}(\rho) = 1 \Rightarrow e^{-\left((\eta - \eta^r)E(S) + (1 + \eta^r) \int_0^L S_S(x) dx\right)\rho} M_{X^A}(\rho) = 1 \quad (3.29)$$

Alors le programme d'optimisation (3.4) est reformulé dans ce cas comme suit :

$$\begin{cases} \max_{(L, \rho)} \left\langle E(B(S, L)) = P - \left((1 + \eta^r) E(S) - \eta^r \int_0^L S_S(x) dx \right) \right\rangle \\ \text{sc} \begin{cases} e^{-\left((\eta - \eta^r)E(S) + (1 + \eta^r) \int_0^L S_S(x) dx\right)\rho} M_{X^A}(\rho) = 1 \\ L \in [L^-, L^+] \\ \rho > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (3.30)$$

3.3. Procédure d'optimisation par les algorithmes génétiques

La procédure d'optimisation consiste à maximiser le bénéfice technique espéré et à minimiser la probabilité de ruine (en maximisant le coefficient d'ajustement de Lundberg) sous certaines contraintes.

On se base sur les algorithmes génétiques pour résoudre notre problème d'optimisation. Néanmoins, l'utilisation de ces derniers est conditionnée par certaines caractéristiques par exemple: les instructions du programme d'optimisation doivent être réalisables¹.

Pour rendre notre programme réalisable, nous avons transformé le problème d'optimisation avec contrainte en un problème d'optimisation sans contrainte en utilisant le multiplicateur de Lagrange.

En effet, notre programme d'optimisation est sous la forme générale suivante :

¹ https://fr.wikipedia.org/wiki/algorithmes_génétiques.

$$\begin{cases} \text{Min}_{\lambda, \rho} Z(\lambda) \\ K(\lambda, \rho) = 0 \\ \lambda^{\min} \leq \lambda \leq \lambda^{\max} \\ \rho > 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

où

- $Z(\lambda)$ est la fonction objectif ;
- $K(\lambda, \rho)$ est la fonction de la contrainte d'égalité ;
- $\lambda \in [\lambda^{\min}, \lambda^{\max}]$ et $\rho > 0$ sont les contraintes de domaine qui bornent les variations des inconnues λ et ρ .

La fonction **Lagrangienne** $G(\lambda, \rho, m)$ est définie comme suit:

$$G(\lambda, \rho, m) = Z(\lambda) - mK(\lambda, \rho) \quad (3.32)$$

où m est le multiplicateur de **Lagrange**.

Le principe de la méthode consiste à résoudre de façon itérative, le problème sous contraintes de domaine qui minimise la fonction **Lagrangienne** $G(\lambda, \rho, m)$.

$G(\lambda, \rho, m)$ doit être minimisée par rapport à λ et à ρ .

Nous avons développée une procédure itérative qui combine le multiplicateur de **Lagrange** et les algorithmes génétiques pour résoudre notre problème d'optimisation.

Algorithme 3.1. L'algorithme de résolution

1. Créer la fonction Lagrangienne $G(\lambda, \rho, m)$;
 2. Initialiser le multiplicateur de **Lagrange** $m = m_0$;
 3. Initialiser le couple $(\lambda, \rho) = (\lambda_0, \rho_0)$;
 4. $i=0$;
 5. Tant que le critère d'arrêt n'est pas vérifié, i.e. $\nabla G_i(\lambda_i, \rho_i, m_i) > \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$;
 - a. $i \leftarrow i+1$;
 - b. Créer la fonction objectif $G_i(\lambda_i, \rho_i, m_i)$;
 6. Exécuter GA classique qui minimise la fonction $G_i(\lambda_i, \rho_i, m_i)$;
 7. Mettre à jour le triple (λ^*, ρ^*, m^*) qui minimise la fonction $G_i(\lambda_i, \rho_i, m_i)$;
 8. Retourner le résultat (λ^*, ρ^*) .
-

3.4. Exemple et applications numérique

Supposons que les charges individuelles des sinistres $(X_i)_{i=1,\dots,N}$ suivent la loi Uniforme $U[0,1]$.

Avec $E(X_i)=0,5$, $M_{X_i}(\rho)=E(e^{\rho X_i})=\int_0^1 e^{\rho x} dx = \frac{e^{\rho}-1}{\rho}$ et $S_{X_i}(x)=1-x$, $\forall i \in [1,\dots,N]$.

Soit les données suivantes:

- ✓ $N=9$ (un horizon de 9 ans) ;
- ✓ $\eta^r=2$ et $\eta=1$ sont respectivement le chargement de sécurité du réassureur et le chargement de sécurité de l'assureur ;
- ✓ Le capital initial est égal à $u=786$;
- ✓ La prime totale collectée est égale $P=\sum_{i=1}^N P_i=20$.

– Cas des traités en «quote part»

Dans le cas d'un traité de réassurance de type «quote part» avec un facteur de proportionnalité α . On a le programme d'optimisation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{(\alpha,\rho)} \langle E(B(X,\alpha))=15,5-9\alpha \rangle \\ sc \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{e^{\rho}-1}{\rho} - 1 \right) - \frac{(2-3\alpha)}{2} \rho = 1 \\ \alpha \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[\\ \rho > 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Nous avons appliqué notre algorithme de résolution en utilisant le solveur des algorithmes génétiques (AGs) développé par le logiciel MATLAB récent. Le résultat obtenu est le suivant :

- La fonction objectif optimale, $E(B(X,\alpha^*))=15,5$;
- Le taux de cession optimal, $\alpha^*=2,354.10^{-8}$;
- La meilleure solution pour le coefficient d'ajustement, $\rho^*=23,319$.

– Cas des traités en «excédent de sinistre»

Dans le cas d'une forme de la réassurance de type «excédent de sinistre» de limite de rétention L , on a:

$$M_{X_i^A}(\rho)=E(e^{\rho X_i^A})=\int_0^L e^{\rho x} dx + \int_L^1 e^{\rho L} dx = \frac{e^{\rho L}-1}{\rho} + e^{\rho L}(1-L)$$

Alors le coefficient d'ajustement est la solution positive de l'équation suivante :

$$e^{-\left((\eta-\eta^r)\mu+(1+\eta^r)\int_0^L S_{X_i}(x)dx\right)\rho} M_{X_i^A}(\rho) = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{e^{\rho L}-1}{\rho} + e^{\rho L}(1-L)\right) e^{-\rho\left(1-\frac{3(L-1)^2}{2}\right)} = 1$$

Le bénéfice technique est donné par :

$$E(B(X, L)) = P - N\left[\left(1+\eta^r\right)\left(\mu - \int_0^L S_{X_i}(x)dx\right) + \int_0^L S_{X_i}(x)dx\right] = 6,5 + 18\left(L - \frac{L^2}{2}\right)$$

On a alors le programme d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \max_{(L, \rho)} \left\langle E(B(X, L)) = 6,5 + 18\left(L - \frac{L^2}{2}\right) \right\rangle \\ \text{sc} \left\langle \begin{cases} \left(\frac{e^{\rho L}-1}{\rho} + e^{\rho L}(1-L)\right) e^{-\rho\left(1-\frac{3(L-1)^2}{2}\right)} = 1 \\ L > 0 \\ \rho > 0 \end{cases} \right\rangle \end{cases}$$

Le résultat obtenu par l'algorithme de résolution est le suivant:

- La fonction objectif optimale, $E(B(X, L^*)) = 15,499$;
- La limite de rétention optimale, $L^* = 1$;
- La meilleure solution pour le coefficient d'ajustement, $\rho^* = 0,0001$.

Nous résumons les résultats relatifs au bénéfice technique et coefficient d'ajustement pour les deux formes de réassurance dans le tableau suivant:

	Quote part	Excédent de sinistre
Bénéfice technique maximal	15,5	15,499
Paramètre des traités de réassurance optimale	$\alpha^* = 2,354.10^{-8}$	$L^* = 1$
Coefficient d'ajustement maximal ρ^*	23,319	0,0001

Tableau 6: Résultats relatifs au bénéfice technique et coefficient d'ajustement

D'après le tableau 6, on remarque que le coefficient d'ajustement de Lundberg est plus élevé dans le cas de la réassurance proportionnelle de type «quote part» par rapport au cas de la réassurance non proportionnelle de type «excédent de sinistre» avec un bénéfice technique espéré relativement supérieur.

Or, la compagnie d'assurance doit choisir la forme de réassurance qui lui permet de minimiser sa probabilité de ruine et de maximiser le bénéfice technique. Cependant, plus le coefficient d'ajustement est élevé, plus la possibilité de ruine est faible.

Alors on peut conclure, d'après cet exemple, que la forme de réassurance optimale adoptée est le traité proportionnel de type «quote part».

3.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une nouvelle stratégie du choix de la réassurance optimale sous le critère de la minimisation de la probabilité de ruine en utilisant les algorithmes génétiques. Cette approche permet à la fois de maximiser le bénéfice technique et de minimiser la probabilité de ruine (en maximisant le coefficient d'ajustement de Lundberg).

Cette stratégie est efficace car elle agit sur le bénéfice technique et sur le risque en même temps, y compris la facilité des charges de calcul et l'exécution plus accélérée.

Cependant, cette approche et comme toutes les autres approches ayant entamé la littérature traitant le problème d'optimalité de la réassurance via le critère de la minimisation de la probabilité de ruine, a rencontré pratiquement quelques difficultés, car elle repose sur l'approximation de type Cramer-Lundberg. En outre, cette approximation n'est pas toujours possible pour la probabilité de ruine même dans le cas de réassurance, et plus précisément dans le cas des distributions à queues épaisses où la fonction génératrice des moments est indéterminée (Alex Bellos [3]). Donc une telle approche est quelquefois relativement difficile à mettre en œuvre dans la pratique.

Chapitre 4. Réassurance optimale et la minimisation des mesures de risque

4.1. Introduction

La génération récente de la recherche en optimisation de la réassurance repose sur le critère de la minimisation de risque assurantiel. Ce critère a été introduit pour la première fois dans les travaux de [Cai & Tan \[21\]](#) qui ont proposé deux modèles d'optimisation de la réassurance basés sur la minimisation des mesures de risque telles que la Value-at-Risk (VaR) et la Conditional Tail Expectation (CTE). Dans leurs modèles, [Cai & Tan \[21\]](#) ont démontré l'existence de rétention optimale dans le cas de la forme de la réassurance de type «excédent de perte». Ce résultat a été amélioré ensuite par [Balbas & al \[12\]](#), [Tan & al \[116\]](#).

Cependant, le critère de la minimisation des mesures de risques s'intéresse seulement au risque et ne prend pas en considération la rentabilité de la cédante. Ledit critère est primordial dans le choix de réassurance car un assureur n'est motivé par l'achat de réassurance que s'il espère avoir une espérance de gain positive après le recours à la réassurance. C'est à dire l'assureur ne doit pas choisir le traité de la réassurance optimal si celui-ci n'est pas rentable.

Dans ce cadre, nous avons proposé de nouvelles stratégies de choix optimal de la réassurance qui agissent à la fois sur le risque (en le minimisant à partir d'une nouvelle mesure de risque cohérente qui mélange l'espérance mathématique et la Conditional Tail Variance (CTV)) et sur le bénéfice technique (en le maximisant). De plus, nous avons développé un programme d'optimisation basé sur le Lagrangien augmenté et les algorithmes génétiques afin de résoudre le problème d'optimisation de la réassurance de notre modèle.

4.2. Présentation d'une mesure de risque cohérente

Définition 4.1. La Conditional Tail Variance correspond au risque X avec un niveau de probabilité $\theta \in]0,1[$ notée $CTV_{\theta}(X)$ est définie par :

$$CTV_{\theta}(X) = Var \left[X \mid X \geq VaR_{\theta}(X) \right] \quad (4.1)$$

Il est clair que la CTV ne satisfait pas la propriété de l'homogénéité, car la variance n'est pas homogène. Alors CTV n'est pas une mesure de risque cohérente.

Proposition 4.1. Soit la mesure de risque suivante :

$$\pi_{\theta}(X) = \mu_X + q\sqrt{CTV_{\theta}(X)}, q > 0 \quad (4.2)$$

où μ_X est l'espérance mathématique de X .

π_{θ} est une mesure de risque cohérente, i.e. elle satisfait les propriétés de cohérences d'Artzner [8].

Propriétés de cohérence de π_{θ} :

P1 : non négativité :

Car $CTV_{\theta}(X) = Var \left[X \mid X \geq VaR_{\theta}(X) \right] \geq 0$

P2 : homogène positive :

On considère une variable aléatoire $Y = \beta X$, pour tout β réel positif.

Posons $x_{\theta} = VaR_{\theta}(X)$ et $y_{\theta} = VaR_{\theta}(Y)$.

Alors $y_{\theta} = VaR_{\theta}(Y) = VaR_{\theta}(\beta X) = \beta VaR_{\theta}(X) = \beta x_{\theta}$ (homogénéité de la VaR).

Soit μ_Y l'espérance mathématique de Y .

On a aussi $\mu_Y = \beta \mu_X$ (homogénéité de l'espérance mathématique).

La Conditional Tail Variance de Y correspond au risque X avec un niveau de probabilité θ est égale :

$$\begin{aligned} CTV_{\theta}(Y) &= Var \left[Y - \mu_Y \mid Y > y_{\theta} \right] \\ &= Var \left[\beta (X - \mu_X) \mid X > x_{\theta} \right] \\ &= \frac{1}{1-\theta} \int_{x_{\theta}}^{\infty} \beta^2 (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx \\ &= \beta^2 \frac{1}{1-\theta} \int_{x_{\theta}}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx \\ &= \beta^2 CTV_{\theta}(X) \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \pi_{\theta}(Y) &= \mu_Y + q\sqrt{CTV_{\theta}(Y)} = \beta \mu_X + q\sqrt{\beta^2 CTV_{\theta}(X)} \\ &= \beta \left(\mu_X + q\sqrt{CTV_{\theta}(X)} \right) = \beta \pi_{\theta}(X) \end{aligned} \quad (4.3)$$

P3 : invariante par translation :

On considère la variable aléatoire $Y = X + \beta$, pour tout β réel positif.

Alors $y_\theta = VaR_\theta(Y) = VaR_\theta(X + \beta) = VaR_\theta(X) + \beta = x_\theta + \beta$. (invariante par translation de la VaR).

On a aussi $\mu_Y = \mu_X + \beta$ (invariante par translation de l'espérance mathématique).

La Conditional Tail Variance de Y correspondre au niveau de probabilité θ est égale :

$$\begin{aligned} CTV_\theta(Y) &= Var[Y - \mu_Y | Y > y_\theta] \\ &= Var[(X + \beta - \mu_X - \beta) | X + \beta > x_\theta + \beta] \\ &= CTV_\theta(X) \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \pi_\theta(Y) &= \mu_Y + q\sqrt{CTV_\theta(Y)} \\ &= \mu_X + \beta + q\sqrt{CTV_\theta(X)} \\ &= \beta + \pi_\theta(X) \end{aligned} \tag{4.4}$$

P4 : sous-additivité

Soit X et Y deux risques, on a alors :

$$\pi_\theta(X + Y) \leq \pi_\theta(X) + \pi_\theta(Y) \tag{4.5}$$

En effet,

Soit $S = X + Y$

La moyenne de S est $\mu_S = \mu_X + \mu_Y$

On note s_θ la quantile de S tel que $s_\theta = VaR_\theta(S) = VaR_\theta(X + Y)$

On a

$$\begin{aligned} CTV_\theta(S) &= Var[S - \mu_S | S > s_\theta] \\ &= Var[X + Y - \mu_X - \mu_Y | S > s_\theta] \\ &= Var[(X - \mu_X) + (Y - \mu_Y) | S > s_\theta] \\ &= Var[(X - \mu_X) | S > s_\theta] + Var[(Y - \mu_Y) | S > s_\theta] \\ &\quad + 2Cov[(Y - \mu_Y) | S > s_\theta, (Y - \mu_Y) | S > s_\theta] \\ &\leq Var[(X - \mu_X) | S > s_\theta] + Var[(Y - \mu_Y) | S > s_\theta] \\ &\quad + 2Var[(Y - \mu_Y) | S > s_\theta] var[(Y - \mu_Y) | S > s_\theta] \\ &= (Var[(X - \mu_X) | S > s_\theta] + Var[(Y - \mu_Y) | S > s_\theta])^2 \end{aligned}$$

D'où

$$CTV_{\theta}(S) \leq (CTV_{\theta}(X) + CTV_{\theta}(Y))^2 \quad (4.6)$$

La sous-additivité de $CTV_{\theta}(S)$ a garanti la sous-additivité de π_{θ} .

4.3. Formulation du problème d'optimisation

Soit un portefeuille des charges des sinistres représentées par N variables aléatoires $X_1, \dots, X_N$, non nulles (i.i.d) et indépendants de N , correspondent aux primes respectives $P_1, \dots, P_N$, avec $P = \sum_{i=1}^N P_i$.

Soit $X = \sum_{i=1}^N X_i$ une variable aléatoire qui désigne la charge totale des sinistres, de fonction de répartition F_X et de survie S_X .

La charge globale des sinistres est partagée comme suit :

$$X = X^A + X^R$$

avec

$$X^A = \sum_{i=1}^N X_i^A, \quad X^R = \sum_{i=1}^N X_i^R \quad \text{et} \quad 0 \leq X^R \leq X$$

où X^A est la charge totale de l'assureur et X^R la charge totale transférée au réassureur.

Supposons que la compagnie utilise un principe de prime de réassurance basé sur l'espérance mathématique, avec une charge de sécurité η^r , i.e. $\Pi(X^R) = (1 + \eta^r)E(X^R)$.

Soient f et g deux fonctions aléatoires mesurables à valeurs réelles positives $\mathbb{R}^+$. Tel que :

$$X^A = f(X, \lambda) \quad \text{et} \quad X^R = g(X, \lambda)$$

où λ est le paramètre de traités de la réassurance qui représente le «taux de cession» dans le cas de la réassurance proportionnelle, et la «limite de rétention» dans le cas de la réassurance non proportionnelle.

Le bénéfice technique de la cédante est défini par :

$$B(X, \lambda) = P - \Pi(X^R) - X^A = P - \Pi(g(X, \lambda)) - f(X, \lambda) \quad (4.7)$$

L'espérance mathématique du bénéfice technique est donnée par :

$$E(B(X, \lambda)) = P - (1 + \eta^r)E(g(X, \lambda)) - E(f(X, \lambda)) \quad (4.8)$$

Nous supposons que l'assureur cherche à obtenir une forme de réassurance optimale qui minimise le risque en gardant l'espérance mathématique du bénéfice technique dans un niveau maximal.

Soit la mesure de risque suivante :

$$\pi_{\theta}(X) = E(X) + \sqrt{CTV_{\theta}(X)}$$

où $E(X)$ est l'espérance mathématique de X .

D'après les propriétés de la cohérence (l'invariante par translation et l'homogène positive), la Conditional Tail Expectation (CTE) et la π_{θ} -mesure de $B(X, \lambda)$ sont présentées respectivement par :

$$\begin{aligned} CTE_{\theta}(B(X, \lambda)) &= CTE_{\theta}(P - \Pi(g(X, \lambda)) - f(X, \lambda)) \\ &= P - \Pi(g(X, \lambda)) - CTE_{\theta}(f(X, \lambda)) \end{aligned} \quad (4.9)$$

et

$$\begin{aligned} \pi_{\theta}(B(X, \lambda)) &= \pi_{\theta}(P - \Pi(g(X, \lambda)) - f(X, \lambda)) \\ &= P - \Pi(g(X, \lambda)) + \pi_{\theta}(-f(X, \lambda)) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Alors

$$\min_{\lambda} \{CTE_{\theta}(B(X, \lambda))\} \equiv -\min_{\lambda} \{CTE_{\theta}(f(X, \lambda)) + \Pi(g(X, \lambda))\} \quad (4.11)$$

et

$$\min_{\lambda} \{\pi_{\theta}(B(X, \lambda))\} \equiv \min_{\lambda} \{\pi_{\theta}(-f(X, \lambda)) - \Pi(g(X, \lambda))\} \quad (4.12)$$

On construit alors les deux programmes d'optimisation suivants :

(CTE)-optimisation:

$$\begin{cases} \min_{\lambda} \{Z(\lambda) = -(CTE_{\theta}(f(X, \lambda)) + \Pi(g(X, \lambda)))\} \\ sc \langle P - \Pi(g(X, \lambda)) - E(f(X, \lambda)) \geq k \end{cases} \quad (4.13)$$

(CTV)-optimisation:

$$\begin{cases} \min_{\lambda} \{Z(\lambda) = \pi_{\theta}(-f(X, \lambda)) - \Pi(g(X, \lambda)) = -E(f(X, \lambda)) + \sqrt{CTV_{\theta}(f(X, \lambda))} - \Pi(g(X, \lambda))\} \\ sc \langle P - \Pi(g(X, \lambda)) - E(f(X, \lambda)) \geq k \end{cases} \quad (4.14)$$

tel que k est l'espérance de gain minimale, qu'elle a fixée par la compagnie d'assurance pour d'être protégée contre la faillite.

Les problèmes (4.13) et (4.14) consistent à déterminer les paramètres de traités de réassurance optimaux qui minimisent le risque en maintenant l'espérance mathématique du bénéfice technique à un niveau élevé.

Nous allons traiter les deux problèmes d'optimisation (4.13) et (4.14) dans des deux cas différents. Dans le premier cas, nous allons traiter le *(CTV)-optimisation* pour une forme de la réassurance proportionnelle de type «quote part» en utilisant la loi probabiliste de Pareto pour la distribution des charges de sinistres. Et dans le deuxième cas, nous allons traiter le *(CTE)-optimisation* pour une forme de la réassurance non proportionnelle de type «excédent de perte» en utilisant la loi probabiliste d'Exponentielle.

4.3.1. Cas des traités en «quote-part»

– *(CTV)-optimisation*

Dans le cas de la réassurance proportionnelle de type «quote part» avec un facteur de proportionnalité (taux de cession) $\alpha \in]0,1]$, la charge totale de l'assureur et la charge totale du réassureur sont données respectivement par :

$$X^A = f(X, \alpha) = (1 - \alpha)X \quad \text{et} \quad X^R = g(X, \alpha) = \alpha X$$

où f et g sont deux fonctions aléatoires mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Tel que :

$$X = X^A + X^R, \quad X^A = \sum_{i=1}^N X_i^A \quad \text{et} \quad X^R = \sum_{i=1}^N X_i^R$$

D'après la propriété de l'invariance par translation de π_θ nous avons :

$$\pi_\theta(X) = \pi_\theta(X^A) + \Pi(X^R) = \pi_\theta(f(X, \alpha)) + \Pi(g(X, \alpha)) \quad (4.15)$$

On aussi d'après la propriété de l'homogénéité de π_θ :

$$\begin{aligned} \pi_\theta(X^A) &= \pi_\theta(f(X, \alpha)) = \pi_\theta((1 - \alpha)X) = (1 - \alpha)\pi_\theta(X) \\ &= (1 - \alpha)\left(E(X) + \sqrt{CTV_\theta(X)}\right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

et

$$\begin{aligned} \Pi(X^R) &= \Pi(g(X, \alpha)) = (1 + \eta^r)E(g(X, \alpha)) \\ &= (1 + \eta^r)E(\alpha X) = \alpha(1 + \eta^r)E(X) \end{aligned} \quad (4.17)$$

La fonction objectif à optimiser est représentée comme suit :

$$Z(X, \alpha) = \pi_\theta(-X^A) - \Pi(X^R) = \pi_\theta(-f(X, \alpha)) - \Pi(g(X, \alpha))$$

D'après (4.16) et (4.17), on obtient l'expression de la fonction objectif:

$$Z(X, \alpha) = (1 - \alpha) \left(-E(X) + \sqrt{CTV_\theta(X)} \right) - \alpha(1 + \eta^r) E(X) \quad (4.18)$$

D'après (4.8), l'espérance mathématique du bénéfice technique est donnée par :

$$\begin{aligned} E(B(X, \alpha)) &= P - \Pi(g(X, \alpha)) - E(f(X, \alpha)) \\ &= P - \alpha(1 + \eta^r) E(X) - (1 - \alpha) E(X) \\ &= P - (1 + \eta^r \alpha) E(X) \end{aligned} \quad (4.18)$$

En remplaçant (4.18) et (4.19) dans (4.14), on obtient alors le programme d'optimisation suivant :

(CTV)-optimisation

$$\begin{cases} \min_{\alpha} \left\{ Z(X, \alpha) = (1 - \alpha) \left(-E(X) + \sqrt{CTV_\theta(X)} \right) - \alpha(1 + \eta^r) E(X) \right\} \\ \text{sc} \left\{ \begin{array}{l} P - (1 + \eta^r \alpha) E(X) \geq k \\ \alpha \in]0, 1] \end{array} \right. \end{cases} \quad (4.20)$$

tel que k est l'espérance de gain minimale, qu'elle a fixée par la compagnie d'assurance pour d'être protégée contre la faillite.

Nous calculons maintenant $CTV_\theta(X)$:

Le calcul de la $CTV_\theta(X)$ est donné par le théorème suivant :

Théorème 4.1. Soit X une variable aléatoire désigne un risque assurantiel d'espérance mathématique $E(X)$ et de fonction de survie S_X .

Alors

$$CTV_\theta(X) = (VaR_\theta(X) - E(X))^2 + 2E[X - VaR_\theta(X) | X \geq VaR_\theta(X)] \cdot (E(X^*) - E(X)) \quad (4.21)$$

avec X^* est une nouvelle variable aléatoire admet la fonction de densité suivante :

$$f_{X^*}(x) = \frac{S_X(x)}{E((X - VaR_\theta(X))_+)} , \quad x > VaR_\theta(X) \quad (4.22)$$

(La démonstration de ce théorème est détaillée dans [Emiliano & Valdez \[42\]](#)).

Nous avons

$$VaR_\theta(X) = S_X^{-1}(1 - \theta) \quad (4.23)$$

On a aussi

$$\begin{aligned} E[X - VaR_\theta(X) | X \geq VaR_\theta(X)] &= E[X - S_X^{-1}(1-\theta) | X \geq S_X^{-1}(1-\theta)] \\ &= \frac{1}{1-\theta} E\left[\left(X - S_X^{-1}(1-\theta)\right)_+\right] \end{aligned} \quad (4.24)$$

Alors

$$CTV_\theta(X) = \left(S_X^{-1}(1-\theta) - E(X)\right)^2 + \frac{2}{1-\theta} E\left[\left(X - S_X^{-1}(1-\theta)\right)_+\right] \cdot (E(X^*) - E(X)) \quad (4.25)$$

En remplaçant (4.25) dans (4.20), on obtient le programme d'optimisation suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_\alpha \left\{ \begin{array}{l} Z(X, \alpha) = (1-\alpha) \left(-E(X) + \sqrt{\left(S_X^{-1}(1-\theta) - E(X)\right)^2 + \frac{2}{1-\theta} E\left[\left(X - S_X^{-1}(1-\theta)\right)_+\right] \cdot (E(X^*) - E(X))} \right) \\ -\alpha(1+\eta^r)E(X) \end{array} \right\} \\ \text{sc} \left\{ \begin{array}{l} P - (1+\eta^r)\alpha E(X) \geq k \\ \alpha \in]0, 1] \end{array} \right\} \end{array} \right. \quad (4.26)$$

4.3.2. Cas des traités en «excédent de perte»

– (CTE)-optimisation

Nous considérons le cas d'une forme de réassurance non proportionnelle de type «excédent de perte». Dans ce cas, la limite de rétention L est applicable au total des réclamations, tel que, l'assureur supporte la charge $X^A = f(X, L) = \min(X, L)$ et la proportion $X^R = g(X, L) = \max(0, X - L)$ transférée au réassureur.

où f et g sont deux fonctions aléatoires mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Tel que :

$$X = \sum_{i=1}^N X_i = X^A + X^R = \sum_{i=1}^N X_i^A + \sum_{i=1}^N X_i^R$$

On a

$$E(X^A) = E(f(X, L)) = \min(X, L) = E(X) - E(X^R) = \int_0^L S_X(x) dx$$

et

$$E(X^R) = E(g(X, L)) = E(\max(0, X - L)) = E(X) - \int_0^L S_X(x) dx$$

L'espérance mathématique du bénéfice technique est donnée par :

$$B(X, L) = P - \Pi(X^R) - E(X^A) = P - \Pi(g(X, L)) - E(f(X, L))$$

tel que Π est le principe de prime appliqué pour couvrir la charge de la réassurance, avec :

$$\Pi(X^R) = (1 + \eta^r) E(X^R) = (1 + \eta^r) E(g(X, L)) = (1 + \eta^r) \left(E(X) - \int_0^L S_X(x) dx \right) \quad (4.27)$$

Alors le bénéfice technique espéré est donné par:

$$\begin{aligned} E(B(X, L)) &= P - (1 + \eta^r) \left(E(X) - \int_0^L S_X(x) dx \right) - \int_0^L S_X(x) dx \\ &= P - (1 + \eta^r) E(X) + \eta^r \left(\int_0^L S_X(x) dx \right) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Calculons maintenant $CTE_\theta(X^A)$:

$$\begin{aligned} CTE_\theta(X^A) &= CTE_\theta(f(X, L)) = E[f(X, L) | f(X, L) \geq VaR_\theta(f(X, L))] \\ CTE_\theta(X^A) &= E[VaR_\theta(f(X, L)) + f(X, L) - VaR_\theta(f(X, L)) | f(X, L) \geq VaR_\theta(f(X, L))] \end{aligned} \quad (4.29)$$

Alors

$$CTE_\theta(X^A) = CTE_\theta(f(X, L)) = VaR_\theta(f(X, L)) + \frac{\int_{VaR_\theta(f(X, L))}^{\infty} S_{f(X, L)}(x) dx}{\Pr(f(X, L) \geq VaR_\theta(f(X, L)))} \quad (4.30)$$

On a aussi

$$VaR_\theta(f(X, L)) = VaR_\theta(\min(X, L)) = S_X^{-1}(1 - \theta) \quad (4.31)$$

et

$$\int_{VaR_\theta(f(X, L))}^{\infty} S_{f(X, L)}(x) dx = \int_{VaR_\theta(f(X, L))}^L S_X(x) dx = \int_{S_X^{-1}(1-\theta)}^L S_X(x) dx \quad (4.32)$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \Pr(f(X, L) \geq VaR_\theta(f(X, L))) &= \Pr(f(X, L) = VaR_\theta(f(X, L))) + S_{f(X, L)}(VaR_\theta(f(X, L))) \\ &= \Pr(f(X, L) = S_X^{-1}(1 - \theta)) + S_{f(X, L)}(S_X^{-1}(1 - \theta)) = S_X(S_X^{-1}(1 - \theta)) = 1 - \theta \end{aligned} \quad (4.33)$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} CTE_\theta(X^A) &= CTE_\theta(f(X, L)) = VaR_\theta(f(X, L)) + \frac{1}{1 - \theta} \int_{S_X^{-1}(1-\theta)}^L S_X(x) dx \\ &= S_X^{-1}(1 - \theta) + \frac{1}{1 - \theta} \int_{S_X^{-1}(1-\theta)}^L S_X(x) dx \end{aligned} \quad (4.34)$$

Finalement, en remplaçant les formules de (4.31), (4.32), (4.33) et (4.34) dans (4.13), on obtient le programme d'optimisation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_L \left\{ Z(X, L) = - \left(S_X^{-1}(1-\theta) + \frac{1}{1-\theta} \int_{S_X^{-1}(1-\theta)}^L S_X(x) dx + (1+\eta^r) \left(E(X) - \int_0^L S_X(x) dx \right) \right) \right\} \\ \text{sc} \left\{ \begin{array}{l} P - (1+\eta^r) E(X) + \eta^r \left(\int_0^L S_X(x) dx \right) \geq k \\ L > S_X^{-1}(1-\theta) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.35)$$

4.4. Procédure d'optimisation par le lagrangien augmenté et les algorithmes génétiques

Pour résoudre les deux problèmes d'optimisation précédemment reformulés dans (4.26) et (4.35), nous allons utiliser une méthode de résolution basée sur le Lagrangien augmenté et les algorithmes génétiques. Il s'agit d'une procédure simple qui permet de transformer un problème d'optimisation avec contrainte en un problème ou en une suite de sous problèmes d'optimisation sans contrainte.

Dans le Lagrangien augmenté, si le programme est soumis à des contraintes d'inégalité, il suffit d'introduire une variable d'écart pour transformer ces contraintes en contraintes d'égalité.

Remarque: Dans le cas des problèmes comportant uniquement des contraintes d'égalité, on retrouve bien une pénalisation du Lagrangien classique.

Alors le programme d'optimisation est réécrit sous la forme équivalente suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\lambda} \{ Z(\lambda) \} \\ \text{sc} \{ E(B(\lambda)) \geq k \} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \min_{\lambda} \{ Z(\lambda) \} \\ \text{sc} \{ E(B(\lambda)) - k - \varepsilon = 0 \} \end{array} \right. \quad \varepsilon \geq 0 \quad (4.36)$$

La fonction de Lagrangienne augmentée $G(\lambda, m, r)$ est définie comme suit :

$$G(\lambda, m, r, \varepsilon) = Z(\lambda) - m(h(\lambda) - \varepsilon) - r(h(\lambda) - \varepsilon)^2 \quad (4.37)$$

avec

- $Z(\lambda)$: fonction objectif à optimiser ;
- λ est le paramètre de traités de la réassurance ;
- $h(\lambda) = E(B(\lambda)) - k$: contrainte d'inégalité ;
- m est le multiplicateur de Lagrange et $r > 0$ est le paramètre de pénalité.

Le principe de la méthode consiste à résoudre de façon itérative, le problème sans contraintes qui minimise la fonction Lagrangienne augmentée $G(\lambda, m, r, \varepsilon)$.

$G(\lambda, m, r, \varepsilon)$ doit être minimisée par rapport à λ et à ε , où $\varepsilon \geq 0$ est la variable d'écart.

La minimisation par rapport à ε , pour λ fixé, peut être effectuée analytiquement pour ε . En effet, on a

$$\frac{\partial G}{\partial \varepsilon} = m + 2r(h(\lambda) - \varepsilon) = 0 \text{ avec } r > 0. \quad (4.38)$$

Ainsi, le minimum est atteint pour $\varepsilon^* = h(\lambda) + \frac{m}{2r}$, $\varepsilon^* > 0$.

On se ramène donc à un problème ne dépendant que de variables (λ, m, r) :

$$G(\lambda, m, r) = Z(\lambda) - \frac{m^2}{4r} \text{ avec } r > 0 \text{ et } \lambda > 0. \quad (4.39)$$

En outre, nous avons développée une procédure de résolution itérative qui combine le Lagrangien augmenté et les algorithmes génétiques pour résoudre les problèmes d'optimisation de notre modèle.

Algorithme 4.1. L'algorithme de résolution

1. Créer la fonction Lagrangienne augmentée $G(\lambda, m, r)$;
 2. Initialiser le multiplicateur et le facteur de pénalisation $(m, r) = (m_0, r_0)$;
 3. Initialiser $\lambda = \lambda_0$;
 4. $i=0$;
 5. Tant que le critère d'arrêt n'est pas vérifié, i.e. $\nabla G(\lambda, m, r) > \varepsilon'$, avec $\varepsilon' > 0$;
 - a. $i \leftarrow i+1$;
 - b. Créer la fonction objectif $G_i(\lambda_i, m_i, r_i)$;
 6. Exécuter GA classique qui minimise la fonction $G_i(\lambda_i, m_i, r_i)$;
 7. Mettre à jour le triple (λ^*, m^*, r^*) qui minimise la fonction $G_i(\lambda_i, m_i, r_i)$;
 8. Retourner le résultat : λ^* .
-

4.5. Exemple et application numérique

– (CTE)-optimisation

Supposons que la charge totale des sinistres X suit la loi exponentielle de paramètre δ , i.e. : $X \sim \text{Exp}(\delta)$, tel que la fonction de répartition, de survie et de densité sont respectivement données par:

$$F_X(x) = 1 - e^{-\delta x}, \quad S_X(x) = e^{-\delta x} \quad \text{et} \quad f_X(x) = \delta e^{-\delta x}.$$

Nous avons

- $\text{Var}(X) = \frac{1}{\delta^2}$ et $E(X) = \frac{1}{\delta}, \delta > 0$;
- $\text{VaR}_\theta[X] = S_X^{-1}(1-\theta) = -\frac{\ln(1-\theta)}{\delta}$;
- $\int_0^L S_X(x) dx = \int_0^L e^{-\delta x} dx = -\frac{1}{\delta}(e^{-\delta L} - 1)$;
- $\int_{S_X^{-1}(1-\theta)}^L S_X(x) dx = \int_{-\frac{\ln(1-\theta)}{\delta}}^L S_X(x) dx = -\frac{1}{\delta}(e^{-\delta L} - (1-\theta))$.

Dans le cas d'une forme de réassurance non proportionnelle de type «excédent de perte», la fonction objectif est donnée par :

$$Z(L) = \frac{\ln(1-\theta)}{\delta} + \frac{(e^{-\delta L} - (1-\theta))}{\delta(1-\theta)} - (1+\eta^r) \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta}(e^{-\delta L} - 1) \right)$$

et la fonction contrainte est donnée par :

$$h(L) = P - (1+\eta^r)E(X) + \eta^r \left(\int_0^L S_X(x) dx \right) = P - \frac{(1+\eta^r)}{\delta} - \frac{\eta^r}{\delta}(e^{-\delta L} - 1)$$

D'où on obtient un programme ne dépend que de L , tel que les paramètres θ, η^r, δ et P sont données.

CTE-optimisation:

$$\begin{cases} \min_L \left\{ Z(L) = \frac{\ln(1-\theta)}{\delta} + \frac{(e^{-\delta L} - (1-\theta))}{\delta(1-\theta)} - (1+\eta^r) \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta}(e^{-\delta L} - 1) \right) \right\} \\ \text{sc} \left\{ \begin{aligned} P - \frac{(1+\eta^r)}{\delta} - \frac{\eta^r}{\delta}(e^{-\delta L} - 1) &\geq k \\ L &> -\frac{\ln(1-\theta)}{\delta} \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (4.40)$$

Remarque. Cai & Tan [21] ont déterminé une solution optimale pour le problème d'optimisation (4.35) en minimisant la Conditional Tail Expectation, mais sans la contrainte du bénéfice technique. Ils ont démontré que dans le cas d'une forme de réassurance non proportionnelle de type «excédent de perte» la rétention optimale existe si et seulement si: $L^* = S_X^{-1}(\eta_1^r)$, $\eta_1^r = \frac{1}{1+\eta}$ sous les conditions d'optimalité suivantes: $\theta \leq \eta_1^r < S_X(0)$ et $S_X^{-1}(\theta) \geq S_X^{-1}(\eta_1^r) + \Pi(S_X^{-1}(\eta_1^r))$.

Application numérique

Prenons les données suivantes :

$$\theta = 0,05, \eta^r = 2, \delta = 1, P = 57 \text{ et } k = 55, 2.$$

Après l'exécution du programme d'optimisation, on obtient le résultat suivant :

	Notre Approche	Approche de Cai & Tan
L^*	0,9162	0,693
$CTE_{0,05}(L^*)$	55,169	54,974
$E(B(L^*))$	55,208	55
$E(B(L^*)) - CTE_{0,05}(L^*)$	0,039	0,026

Tableau 7: Tableau de comparaison entre notre approche et l'approche de Cai & Tan

D'après le tableau 7, on constate que le bénéfice technique espéré est supérieur, pour notre approche, à celui obtenu par l'approche de Cai & Tan [21]. Par conséquent, on peut conclure que notre approche a un avantage clair en termes de réalisation des objectifs de la compagnie d'assurance, à savoir la maximisation de son bénéfice technique.

(CTV)-optimisation

Supposons que la charge totale des sinistres X suit une loi de Pareto $X \sim \text{Pareto}(a, x_0)$ de paramètres $a, x_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

$$f_X(x, a, x_0) = \begin{cases} \frac{ax_0^a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geq x_0 \\ 0 & \text{si } x_0 < x \end{cases}$$

La fonction de répartition et la fonction de survie sont données respectivement par :

$$F_X(x, x_0, a) = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^a \text{ et } S_X(x, x_0, a) = \left(\frac{x_0}{x}\right)^a \text{ avec } x \geq x_0 > 0$$

L'espérance et la variance de X sont données respectivement par :

$$E[X] = \frac{x_0 a}{a-1}, \text{ si } a > 1 \text{ et } \sigma^2[X] = \frac{x_0^2 a}{(a-2)(a-1)}, \text{ si } a > 2$$

Nous avons d'après le théorème 4.1:

$$CTV_\theta(X) = (x_\theta - E(X))^2 + \frac{2}{1-\theta} E((X - x_\theta)_+) \cdot (E(X^*) - E(X))$$

avec X^* est une nouvelle variable aléatoire admet la fonction de densité suivante :

$$f_{X^*}(x) = \frac{S_X(x)}{E((X - x_\theta)_+)} , \quad x > x_\theta$$

Soit le θ -th quantile tel que $x_\theta = VaR_\theta(X)$

$$S_X(x_\theta) = S_X(VaR_\theta(X)) = S_X(S_X^{-1}(1 - \theta)) = 1 - \theta$$

Ce qui implique que

$$\left(\frac{x_0}{x_\theta}\right)^a = 1 - \theta$$

Alors

$$E((X - x_\theta)_+) = \int_{x_\theta}^{\infty} S_X(x) dx = \int_{x_\theta}^{\infty} \left(\frac{x_0}{x}\right)^a dx = \frac{x_\theta}{a-1} \left(\frac{x_0}{x_\theta}\right)^a$$

D'où

$$\frac{2}{1-q} E((X - x_\theta)_+) = 2 \frac{1}{1-\theta} \frac{x_\theta}{a-1} \left(\frac{x_0}{x_\theta}\right)^a = 2 \left(\frac{x_0}{x_\theta}\right)^{-a} \frac{x_\theta}{a-1} \left(\frac{x_0}{x_\theta}\right)^a = \frac{2x_\theta}{a-1}$$

Nous calculons maintenant la fonction de densité de la nouvelle variable aléatoire X^* :

$$f_{X^*}(x) = \frac{S_X(x)}{E((X - x_\theta)_+)} = \frac{\left(\frac{x_0}{x}\right)^a}{\frac{x_\theta}{a-1} \left(\frac{x_0}{x_\theta}\right)^a} = (a-1) x^{-a} x_\theta^{a-1} = \frac{(a-1) x_\theta^{a-1}}{x^{(a-1)+1}} \quad x > x_\theta$$

C'est la densité de loi de Pareto $X^* \sim \text{Pareto}(a-1, x_\theta)$ de paramètres $(a-1, x_\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, tel que,

$$E[X^*] = \frac{x_\theta(a-1)}{a-2}, \quad \text{si } a > 2$$

Il résulte que

$$CTV_\theta(X) = \left(x_\theta - \frac{x_0 a}{a-1}\right)^2 + \frac{2x_\theta}{a-1} \cdot \left(\frac{x_\theta(a-1)}{a-2} - \frac{x_0 a}{a-1}\right)$$

Alors le programme «CTV-optimisation» est donné par la reformulation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\alpha} \left\{ Z(\alpha) = (1-\alpha) \left(-\frac{x_0 a}{a-1} + \sqrt{\left(x_{\theta} - \frac{x_0 a}{a-1} \right)^2 + \frac{2x_{\theta}}{a-1} \cdot \left(\frac{x_{\theta}(a-1)}{a-2} - \frac{x_0 a}{a-1} \right)} \right) - (1+\eta^r) \alpha \frac{x_0 a}{a-1} \right\} \\ \text{sc} \left\{ \begin{array}{l} P - (1+\eta^r) \alpha \frac{x_0 a}{a-1} \geq k \\ \alpha \in]0,1] \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.41)$$

Application numérique

Prenons les données suivantes :

$\theta = 0,05$, $\eta^r = 2$, $a = 3$, $x_0 = 1$, $P = 57$ et $k = 53$.

On a

$$\left(\frac{x_0}{x_{\theta}} \right)^a = 1 - \theta$$

Alors

$$(x_{\theta})^{-3} = 0,95 \Rightarrow x_{\theta} = (0,95)^{-\frac{1}{3}}$$

En remplaçant les données dans (4.41) et en exécutant de programme d'optimisation, on obtient le résultat suivant :

- le taux de session optimal, $\alpha^* = 0,667$;
- La fonction objectif optimale, $Z(\alpha^*) = -0,146$;
- La π_{θ} -mesure minimale du bénéfice technique, $\pi_{\theta}(B(\alpha^*)) = P + Z(\alpha^*) = 56,853$;
- Le bénéfice technique espéré, $\pi_{\theta}(B(\alpha^*)) = 53,499$.

4.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé deux modèles d'optimisation de réassurance basés sur la Conditional Tail Expectation (CTE) et la Conditional Tail Variance (CTV) permettant à la fois de maximiser le bénéfice technique et de minimiser le risque d'une compagnie d'assurance. Ces modèles dépendent de la distribution des charges de sinistres, du seuil de probabilité et du coefficient de chargement de la sécurité.

Nous avons développé ainsi un algorithme de résolution basé sur la méthode de Lagrangien augmenté et les algorithmes génétiques pour résoudre les programmes d'optimisation de nos modèles. Ces derniers ont montré leur efficacité (car ils

agissent à la fois sur le risque et sur le bénéfice technique), et particulièrement pour les problèmes d'optimisation très difficiles à résoudre algébriquement.

Le chapitre suivant concerne l'optimisation stochastique en temps continu et son application en réassurance. On s'intéresse ici à un problème d'optimisation de la réassurance qui permet de déterminer la stratégie de réassurance optimale lorsque le bénéfice technique de la cédante est décrit à l'aide d'une diffusion stochastique, en utilisant la théorie du contrôle optimal stochastique.

Chapitre 5. Contrôle stochastique pour l'optimisation dynamique de la réassurance

5.1. Introduction

Toutes les approches précédemment entamées reposent sur la stratégie de réassurance statique qui ne prend pas en compte la dimension temporelle et omettent de ce fait le flux des sinistres dans le temps. Cependant, on sait que les traités de réassurance sont des contrats annuels qui peuvent être révisés de manière périodique en fonction du temps. Donc l'idée de déterminer une approche dynamique paraît logique, le but est de déterminer la politique de gestion de risque optimale qui permet de prévoir l'allocation optimale de la réassurance où l'assureur peut réajuster sa réassurance d'une manière dynamique.

Dans ce cadre, de nombreux chercheurs ont proposé des modèles dynamiques pour résoudre les problèmes d'optimisation en temps continu dans le monde de l'assurance, l'intérêt est souvent porté sur la théorie du contrôle stochastique.

Merton [86] a été le premier qui a appliqué cette théorie dans le domaine de l'assurance pour résoudre les problèmes d'optimisation de la réassurance et d'investissement en temps continu. Le modèle de Merton [86] a été généralisé plus tard par Karatzas & al [73], ensuite, par Zhou & Lim [131] et Zhou & Yin [132], qui l'ont amélioré en se basant sur le critère de maximisation de l'utilité.

Il en va de même pour le problème dynamique de stratégie d'investissement optimale et de réassurance. Schmidli [108] a étudié le modèle de diffusion pour le processus de surplus en se basant sur le modèle de Cramer-Lundberg qui permet d'aboutir à une approximation de la probabilité de ruine Willmot & Lin [125]. L'optimisation de cette approximation va lui permettre de retrouver la stratégie optimale de la réassurance et d'investissement à partir de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Dans le même sens, les générations récentes en modélisation du problème de la réassurance sont proposées dans les travaux de Chikodza & Esunge [28] et d'autres plusieurs auteurs comme Huiming & Yingchun [65]. Ces chercheurs ont étudié le

problème de contrôle optimal pour une compagnie d'assurance en adoptant le critère de minimisation de la probabilité de ruine pour trouver la politique optimale de réassurance et d'investissement. Ces dernières aideraient à maximiser la richesse terminale qui représente la valeur de liquidation de la société au moment de la faillite.

Cependant, ces approches agissent seulement sur la probabilité de la ruine (en la minimisant), mais la compagnie d'assurance cherche aussi à maximiser son bénéfice technique. [Ben Dbabis \[13\]](#) ont vérifié que le critère de la minimisation de la probabilité de ruine seul ne permettait pas d'aboutir en général à un bénéfice technique maximal.

Pour toutes les considérations mentionnées ci-dessus nous avons proposé un modèle d'optimisation qui agit à la fois sur le bénéfice technique et sur le risque d'une manière dynamique. Notre modèle d'optimisation diffère de ceux considérés dans la littérature. En effet, pour prendre une bonne décision pour le problème d'optimisation de la réassurance, on doit la fonder sur le critère de la rentabilité (en maximisant le bénéfice technique espéré) tout en gardant la condition de risque qui doit être aussi minimale.

Notre modèle répond à la question suivante : quelle est la trajectoire du paramètre des traités de la réassurance optimale à adopter dans une compagnie d'assurance qui lui permettra de maximiser le bénéfice technique espéré et de minimiser le risque sur une période donnée? Un tel problème est lié au contrôle optimal stochastique qui contrôle le risque par l'achat de réassurance.

Dans notre modèle, nous proposons une solution explicite et pratique au problème du contrôle optimal pour un choix optimal de la réassurance en déterminant la politique de gestion de risque adéquate qui permet de minimiser le risque et de maximiser l'espérance mathématique du bénéfice technique de la cédante.

Pour résoudre le problème général du contrôle stochastique, il existe deux principaux outils de résolution, le premier est la programmation dynamique qui se résume à la résolution de l'équation d'[Hamilton Jacobi Bellman \(HJB\)](#) et le deuxième est le principe du maximum stochastique qui recourt à la notion d'équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSRs). La complexité survient lorsque cette dernière n'admet pas de solutions ([Wilson \[127\]](#)). Dans ce cas la manipulation est impossible.

5.2. Rappel sur la théorie du contrôle stochastique dynamique

5.2.1. Contrôle optimal

Définition 5.1. Système contrôlé

Soit un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ sur lequel est défini un mouvement brownien standard $W(t)_{t \geq 0}$ et $T > 0$ un temps terminal fixe tel que $t \in [0, T]$.

Soit $a(t)$ un paramètre appartenant à un ensemble de fonctions localement intégrables définies sur $[0, T]$ à valeurs dans un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\begin{aligned} a: [0, T] &\mapsto A \\ t &\mapsto a(t) \end{aligned}$$

Considérons l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX(t) = \mu(X(t), a(t), t)dt + \sigma(X(t), a(t), t)dW(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}, \quad t \in [0, T] \quad (5.1)$$

où $\mu: \mathbb{R}^n \times A \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\sigma: \mathbb{R}^n \times A \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont deux fonctions continues.

L'équation différentielle (5.1) est appelé un système contrôlé (ou commandé).

Tout élément $a(t)$ de $A[0, T] = \{a: [0, T] \times \Omega \rightarrow A \mid a(\cdot) \text{ est } \{\mathcal{F}_t\} \text{-adapté}\}$ est appelé contrôle réalisable, et représente la décision prise par le contrôleur.

Définition 5.2. Contrôle optimal

Le problème de contrôle optimal permet de déterminer le contrôle d'un système qui minimise (ou maximise) un critère de performance (le critère à optimiser), éventuellement sous certaines contraintes. Il se décompose en deux parties : il faut d'abord savoir ce contrôle est accessible. C'est le problème de contrôlabilité. Ensuite, une fois ce problème résolu, il faut chercher parmi tous les contrôles possibles ceux qui le font en la fonctionnelle de coût optimale.

On rappelle que $L_{\mathcal{F}_t}^p$ désigne l'ensemble des variables aléatoires $\mathcal{F}_t$ -mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $E(|X|^p) < \infty$. $L_{\mathcal{F}_t}^p$ est définie sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$.

La fonctionnelle de coût (le critère à optimiser) est défini par:

$$J(X(t), a(t)) = E\left(\int_0^T f(X(t), a(t), t)dt\right) \quad (5.2)$$

telle que f est une fonction localement intégrable sur $[0, T]$ et mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}$, i.e : $f : \mathbb{R}^n \times A \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in L^p_{F_t}$.

Soit $a(t) \in A[0, T]$ un contrôle réalisable.

Le couple $(X(t), a(t))$ est dit une paire admissible si :

$a(t) \in A[0, T]$, et $X(t)$ est l'unique solution de l'équation (5.1).

Dans la suite, on note par A_{ad} l'ensemble de tous les contrôles admissibles.

Le problème du contrôle optimal consiste à minimiser la fonctionnelle $J(X(t), a(t))$ sur tous les contrôles admissibles A_{ad} , c'est-à-dire, chercher le *contrôle optimal*. $\tilde{a}(t) \in A_{ad}$ tel que :

$$J(\tilde{X}(t), \tilde{a}(t)) = \text{Opt}_{a(t) \in A_{ad}} \{J(X(t), a(t))\} \quad (5.3)$$

avec $\tilde{X}(t)$ est l'unique solution de l'équation (5.1).

5.2.2. Programmation dynamique

La programmation dynamique est une technique mathématique développée par [Richard Bellman \[102\]](#) pour résoudre des problèmes d'optimisation, c'est à dire des problèmes où l'on doit prendre les meilleures décisions possibles à chaque date pour un critère de performance donné.

La programmation dynamique repose sur une technique que [Bellman](#) appela «principe d'optimalité». Ce principe général stipule que la solution d'un problème global peut être obtenue en décomposant le problème en sous-problèmes plus simples à résoudre. Ces derniers se résument à la résolution de l'équation aux dérivées partielles du second ordre (l'équation d'[Hamilton-Jacobi-Bellman \(HJB\)](#)).

[Bellman](#) a travaillé sur la théorie du contrôle optimal pour traiter le principe d'optimalité de la programmation dynamique permettant de trouver une stratégie de contrôle pour un système donné de manière à satisfaire un critère d'optimalité faisant appel à une fonctionnelle de cout dépendant de variables d'état et de contrôle. Les étapes de la méthode de programmation dynamique pour déterminer le contrôle optimal sont :

Étape 1: Vérifier l'existence du contrôle optimal

La procédure de la programmation dynamique commence par l'étape d'existence du contrôle optimal.

Le problème du contrôle optimal consiste à chercher $\tilde{a}(t) \in A_{ad}$ tel que

$$J(\tilde{X}(t), \tilde{a}(t)) = \min_{a(t) \in A_{ad}} \left\{ J(X(t), a(t)) = E \left(\int_0^T f(X(t), a(t), t) dt \right) \right\} \quad (5.4)$$

sous la dynamique suivante :

$$\begin{cases} dX(t) = \mu(X(t), a(t), t) dt + \sigma(X(t), a(t), t) dW(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (5.5)$$

où

$\mu: \mathbb{R}^n \times A \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\sigma: \mathbb{R}^n \times A \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont deux fonctions continues, avec $\tilde{X}(t)$ est l'unique solution de l'équation (5.5).

Nous allons maintenant énoncer le théorème d'existence du contrôle optimal.

Théorème 5.1. *Existence du contrôle optimal*

On considère les conditions suivantes:

S1 : (A, d) est un espace polonais (espace métrique complet séparable) ;

S2 : Les fonctions $\mu: \mathbb{R}^n \times A \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\sigma: \mathbb{R}^n \times A \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont uniformément continues en $x \in \mathbb{R}^n$ et mesurables;

S3 : Il existe $L > 0$ et une fonction $M: [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ tel que pour $\varpi = \mu$ et σ :

$$\begin{cases} |\varpi(x, a, t) - \varpi(\hat{x}, \hat{a}, t)| \leq L|x - \hat{x}| + M(d(a, \hat{a})) \\ \varpi(0, a, t) \leq L \end{cases} \quad (5.6)$$

$$\forall (x, a, t) \in \mathbb{R}^n \times A \times [0, T], \quad (\hat{x}, \hat{a}, t) \in \mathbb{R}^n \times A \times [0, T].$$

Si les conditions S1, S2 et S3 sont satisfaites alors le problème (5.4) admet un contrôle optimal. (Voir [Wilson \[127\]](#)).

Étape 2 : Résoudre l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman et calculer ainsi la fonction de valeur.

On s'intéresse ici au problème de minimisation, et on procédera de la manière suivante :

❖ On définit la fonction valeur

Définition 5.3. La fonction valeur est définie comme suit :

$$\begin{cases} V(t, x) = \min_{a(t) \in A_{ad}} \left\{ J(x(t), a(t)) = E \left(\int_0^T f(x(t), a(t), t) dt \right) \right\}, & \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \\ V(T, x(T)) = h(x(T)) \end{cases} \quad (5.7)$$

où les fonctions $f: \mathbb{R}^n \times A \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont uniformément continues en $x \in \mathbb{R}^n$.

La fonction valeur doit être bien définie, c'est-à-dire: il faudrait que les fonctions f, μ, σ et h satisfassent la condition (S3)' suivante :

Il existe $L > 0$ tel que pour $\varpi = f, \mu, \sigma$ et h :

$$\begin{cases} |\varpi(x, a, t) - \varpi(\hat{x}, \hat{a}, t)| \leq L|x - \hat{x}| \\ \varpi(0, a, t) \leq L \end{cases} \quad (5.8)$$

$$\forall (x, a, t) \in \mathbb{R}^n \times A \times [0, T], \quad (\hat{x}, \hat{a}, t) \in \mathbb{R}^n \times A \times [0, T].$$

❖ On applique le principe d'optimalité de [Bellman](#) pour évaluer la fonction valeur.

Le principe de [Bellman](#) est présenté par le théorème suivant :

Théorème 5.2. Principe de Bellman

Si les conditions (S2) et (S3)' sont vérifiées, alors la fonction valeur satisfait l'équation suivant :

$$V(t, x) = \min_{a(t) \in A_{ad}} \left\{ E \left(\int_0^T J(x(t), a(t)) dt \right) + V(T, x(T)) \right\}, \quad (5.9)$$

$$\forall (x(t), a(t)) \in \mathbb{R}^n \times A.$$

(Pour la démonstration de ce théorème, voir [Yong & Zhou \[128\]](#)).

❖ On détermine la dérivation formelle de l'équation de [Hamilton-Jacobi Bellman](#), puis on évalue la fonction valeur en résolvant l'équation d'HJB aux dérivées partielles de second ordre en se basant sur le théorème suivant :

Théorème 5.3. Supposons que toutes les conditions pour que l'équation ait une solution unique sont satisfaites :

Si $V(t, x(t))$ est deux fois continuellement différentiable sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ alors $V(t, x(t))$

vérifie le Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), suivant :

$$\begin{cases} \min_{a(t) \in A} \left(-\frac{1}{2} \sigma^2(t, x(t), a(t)) V''(t, x(t)) - \mu(t, x(t), a(t)) V'(t, x(t)) + \frac{dV(t, x(t))}{dt} \right) = 0 \\ V(T, x(T)) = h(x(T)) \end{cases} \quad (5.10)$$

(Pour la démonstration, voir [Wilson \[127\]](#)).

Étape 3 : Déterminer le contrôle optimal en fonction de dérivées partielles de la fonction valeur

Cette étape présente les solutions de l'équation integro-différentielle (Lakshmikantham & Rao [76]) sous les différentes hypothèses pour déterminer le contrôle optimal $\tilde{a}(t)$ en fonction de dérivées partielles de la fonction valeur, i.e.

$$\tilde{a}(t) = g(V'(t, x(t)), V''(t, x(t))) \quad (5.11)$$

où $g : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow A$ est une fonction continue.

Tout d'abord, l'équation integro-différentielle est transformée en une forme plus facilement résoluble. Puis nous déterminons la fonction valeur $V(t, x(t))$ et leurs dérivées partielles. En remplaçant les expressions de $V'(t, x(t))$ et $V''(t, x(t))$ dans (5.11), on trouve le *contrôle optimal*.

Étape 4 : Vérification

Dans cette dernière étape nous allons énoncer le théorème de vérification qui permet de tester qu'une paire admissible $(\tilde{x}(t), \tilde{a}(t)) \in \mathbb{R}^n \times A_{ad}$ est optimale.

Théorème 5.4.

Soit $V(t, x(t))$ est deux fois continuellement différentiable sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n$. Tel que, $\tilde{V}(t, \tilde{x}(t))$ une solution de l'équation de [Hamilton-Jacobi-Bellman \(HJB\)](#) (5.11).

On a alors :

$$\tilde{V}(t, \tilde{x}(t)) \leq J(x(t), a(t)), \forall (t, x, a(t)) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times A \quad (5.12)$$

De plus, une paire admissible $(\tilde{x}(t), \tilde{a}(t)) \in \mathbb{R}^n \times A_{ad}$ est optimale pour le problème (5.10) si et seulement si :

$$\begin{aligned} \min_{a(t) \in A_{ad}} & \left(-\frac{1}{2} \sigma^2(t, x(t), a(t)) V''(t, x(t)) - \mu(t, x(t), a(t)) V'(t, x(t)) + \frac{dV(t, x(t))}{dt} \right) \\ & = \left(-\frac{1}{2} \sigma^2(t, \tilde{x}(t), \tilde{a}(t)) V(t, \tilde{x}(t)) - \mu(t, \tilde{x}(t), \tilde{a}(t)) V(t, \tilde{x}(t)) + \frac{dV(t, \tilde{x}(t))}{dt} \right) \end{aligned} \quad (5.13)$$

(Pour la démonstration, voir [Wilson \[127\]](#)).

5.3. Contrôle optimal stochastique pour un choix optimal de réassurance

5.3.1. Cadre du travail

Considérons un problème d'optimisation dynamique de la réassurance dont le but de la cédante est de trouver l'allocation optimale de la réassurance et la stratégie qui lui permettront de minimiser le risque et de maximiser son bénéfice technique sur une période donnée, et pour un principe de prime déterminé à l'avance.

Pour modéliser un tel problème, nous considérons une suite de variables aléatoires $(Y_i)_{i \in [1, \dots, N(t)]}$, positives indépendantes et identiquement distribuées, représentant les charges des sinistres, avec une fonction de distribution F_{Y_i} , d'espérance $E(Y_i) = m > 0$ et de volatilité $E(Y_i)^2 = \sigma^2$.

$(N(t))_{t \geq 0}$ est un processus de comptage des sinistres suit le modèle de Poisson de paramètre κ (que l'on suppose égal à 1), et indépendant de $(Y_i), \forall i \in [1, \dots, N(t)]$, tel que $E(N(t)) = t$; Tel que la somme $\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ est nulle si $N(t) = 0$;

Pour un contrat de réassurance, les charges des sinistres $(Y_i)_{i \in [1, \dots, N(t)]}$ sont partagées de la manière suivante : $Y_i = Y_i^A + Y_i^R, \forall i \in [1, \dots, N(t)]$, où la portion Y_i^A retenue par la cédante et la portion Y_i^R est transférée au réassureur.

Soit $P(t) = \mu t$ la prime totale collectée à l'instant t , où μ est un paramètre positif.

Le bénéfice technique de la compagnie d'assurance est donné par la fonction aléatoire dynamique suivante:

$$X(t) = P(t) - \sum_{i=1}^{N(t)} (\Pi(Y_i^R) + Y_i^A) \quad (5.14)$$

où $\Pi(Y_i^R)$ est la prime chargée du réassureur pour le i -ème sinistre.

Soit un espace de probabilité complet $(\Omega; \mathcal{F}; (F_t)_{t \geq 0}; P)$ muni de la filtration $(F_t)_{t \geq 0}$.

Considérons que la compagnie utilise un contrat de réassurance proportionnelle de type «quote-part» de taux de cession espéré $\alpha(t) \in]0, 1]$.

où $\alpha: [0, T] \rightarrow]0, 1]$ est un processus $(F_t)_{t \geq 0}$ -adapté.

Dans ce cas, le contrat de réassurance permet à la compagnie d'assurance de conserver juste une proportion $(1-\alpha(t))\%$ du montant des primes, donc de reverser $\alpha(t)\%$ au réassureur tel que, l'assureur supporte le risque $Y_i^A(t) = (1-\alpha(t))Y_i$ et la portion $Y_i^R(t) = \alpha(t)Y_i$ transférée au réassureur, $\forall i \in [1, \dots, N(t)]$.

Supposons que la compagnie utilise un principe de prime Π basé sur l'espérance mathématique pour couvrir la part de la réassurance tel que:

$$\Pi(Y_i^R) = (1+\eta)E(Y_i^R) = (1+\eta)\alpha(t)E(Y_i) = (1+\eta)\alpha(t)m, \quad \forall i \in [1, \dots, N(t)] \quad (5.15)$$

où $\eta > 0$ est le chargement de sécurité de la réassurance qui est donné par : $\eta = \frac{\mu}{m} - 1$.

Le bénéfice technique de la compagnie d'assurance est donné par:

$$X(t) = P(t) - \Pi\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i^R\right) - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i^A \quad (5.16)$$

On a

$$\Pi\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i^R\right) = \Pi\left(\alpha(t) \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i\right) = (1+\eta)\alpha(t)E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i\right) = (1+\eta)\alpha(t)mt$$

et

$$E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i^A\right) = E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} (1-\alpha(t))Y_i\right) = (1-\alpha(t))E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i\right) = (1-\alpha(t))mt$$

Alors le processus du bénéfice technique espéré à l'instant t est donné par :

$$\begin{aligned} E(X(t)) &= P(t) - E\left[\Pi\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i^R\right) + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i^A\right] \\ &= (1+\eta)mt - (1+\eta)\alpha(t)mt - (1-\alpha(t))mt \\ &= (1-\alpha(t))\eta mt \end{aligned} \quad (5.17)$$

La variance du bénéfice technique à l'instant t est donnée par :

$$\begin{aligned} Var(X(t)) &= Var\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i^A\right) = Var\left(\sum_{i=1}^{N(t)} (1-\alpha(t))Y_i\right) \\ &= (1-\alpha(t))^2 Var\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i\right) \\ &= (1-\alpha(t))^2 \left(E(N(t)) \cdot Var(Y_i) + Var(N(t)) \cdot (E(Y_i))^2\right) \\ &= (1-\alpha(t))^2 \left(t \cdot Var(Y_i) + t \cdot (E(Y_i))^2\right) \\ &= t(1-\alpha(t))^2 (E(Y_i)^2) = (1-\alpha(t))^2 \sigma^2 t \end{aligned} \quad (5.18)$$

5.3.2. Formulation du problème de contrôle optimal stochastique

Le problème d'optimisation consiste à déterminer la stratégie de la réassurance optimale qui permet de minimiser le risque et de maximiser le bénéfice technique espéré sous le critère moyenne-variance dans un environnement dynamique.

Soit $\{W_t, t \geq 0\}$ un mouvement brownien standard.

On a :

$$E(X(t)) = (1 - \alpha(t)) \eta m t$$

et

$$Var(X(t)) = (1 - \alpha(t))^2 \sigma^2 t$$

Alors le bénéfice technique $X(t)$ peut être approximé par un mouvement brownien $(W_t)_{t \geq 0}$ de dérivé de diffusion $(1 - \alpha(t)) \eta m$, et de coefficient de diffusion $(1 - \alpha(t)) \sigma$ (il traduit la volatilité du processus). (Voir [Grandell \[54\]](#), p. 16)).

[Grandell \[54\]](#) a démontré qu'une telle approximation ne peut être appliquée que dans le cas de larges portefeuilles d'assurance dans la mesure où un sinistre est largement inférieur au montant de bénéfice technique.

Alors la dynamique de $X(t)$ est donnée par :

$$\begin{cases} dX(t) = (1 - \alpha(t)) \eta m dt + (1 - \alpha(t)) \sigma dW(t) \\ X(0) = x_0 \end{cases} \quad (5.19)$$

Le problème d'optimisation consiste à déterminer la stratégie de la réassurance optimale qui permet de minimiser le risque d'une compagnie d'assurance telle que la valeur espérée de son bénéfice technique est égale une valeur donné. i.e :

On cherche à minimiser $Var(X(T))$ sous contrainte de $E(X(T)) = d_T > 0$.

On se place à l'instant t en considérant le problème suivant :

$$\begin{cases} \min_{\alpha(t) \in [0,1]} \langle Var(X(t)) \rangle \\ \text{sc} \\ E(X(t)) = d_t > 0 \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} Var(X(t)) &= E(X(t)^2) - E(X(t))^2 \\ &= E(X(t)^2) - d_t^2 \end{aligned} \quad (5.20)$$

Alors, minimiser $Var(X(t))$ devient à minimiser $E(X(t)^2)$.

Notre problème se ramène donc à minimiser $E(X(t)^2)$ sous la contrainte : $E(X(t)) = d_t$.

Nous utilisons la méthode du multiplicateur de Lagrange.

En introduisant le multiplicateur λ_t (dépend du temps t).

Alors notre problème se ramène donc à minimiser:

$$E(X(t)^2) + \lambda_t (E(X(t)) - d_t) = E\left(\left(X(t) + \frac{\lambda_t}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{\lambda_t}{2}\right)^2 - \frac{\lambda_t}{2} d_t \quad (5.21)$$

Le problème (5.21) est équivalent au problème de minimisation suivant :

$$\min_{\alpha(t) \in [0,1]} \left\{ E\left(\left(X(t) + \frac{\lambda_t}{2}\right)^2\right) \right\} \quad (5.22)$$

Le problème (5.22) est lié au contrôle optimal stochastique qui contrôle l'achat de réassurance, il consiste à trouver le contrôle optimal $\alpha^*(t)$ appartenant à l'espace des contrôles admissibles A_{ad} qui minimise la fonctionnelle J sur tous les contrôles admissibles, tels que:

$$\min_{\alpha(t) \in A_{ad}} J(X(t), \alpha(t)) = \min_{\alpha(t) \in A_{ad}} E\left(\left(X(t) + \frac{\lambda_t}{2}\right)^2\right) \quad (5.23)$$

sous l'équation d'état associée suivante :

$$\begin{cases} dX(t) = (1 - \alpha(t))\eta m dt + (1 - \alpha(t))\sigma dW(t) \\ X(0) = x_0 \end{cases} \quad (5.24)$$

5.4. Résolution par la programmation dynamique

5.4.1. Equation d'Hamilton Jacobi

La fonction valeur du problème est donnée par :

$$V(t, X(t)) = \min_{\alpha(t) \in A_{ad}} J(X(t), \alpha(t)) = \min_{\alpha(t) \in A_{ad}} E\left(\left(X(t, \alpha(t)) + \frac{\lambda_t}{2}\right)^2\right) \quad (5.25)$$

D'après le théorème 5.3, $V(t, X(t))$ vérifie le [Hamilton-Jacobi-Bellman \(HJB\)](#) suivant :

$$\begin{cases} \min_{\alpha(t) \in A} \left[\frac{1}{2} \left((1 - \alpha(t))^2 \sigma^2 \right) V''(t, X(t)) + ((1 - \alpha(t))\eta m) V'(t, X(t)) - \frac{dV(t, X(t))}{dt} \right] = 0 \\ V(T, X(T)) = \left(X(T) + \frac{\lambda_T}{2} \right)^2 \end{cases} \quad (5.26)$$

5.4.2. Résolution de l'équation d'HJB

Nous allons déterminer une solution de (5.26) de la forme suivante :

$$V(t, X(t)) = \left(f(t) X(t) + g(t) \frac{\lambda_T}{2} \right)^2 \quad (5.27)$$

Les fonctions f et g sont deux fois continuellement différentiables telles que :

$$f(T) = 1 \text{ et } g(T) = 1.$$

Les dérivées partielles de $V(t, X(t))$ donnent les égalités suivantes :

$$\frac{dV(t, X(t))}{dt} = 2 \left(f'(t) X(t) + g'(t) \frac{\lambda_T}{2} \right) \left(f(t) X(t) + g(t) \frac{\lambda_T}{2} \right) \quad (5.28)$$

$$V'(t, X(t)) = 2 f(t) \left(f(t) X(t) + g(t) \frac{\lambda_T}{2} \right) \quad (5.29)$$

$$V''(t, X(t)) = 2 f(t)^2 \quad (5.30)$$

La quantité en accolades du problème (5.26) est minimisée en $\alpha^*(t)$ par :

$$1 - \alpha^*(t) = - \frac{\eta m V'(t, X(t))}{\sigma^2 V''(t, X(t))} \Rightarrow \alpha^*(t) = 1 + \frac{\eta m V'(t, X(t))}{\sigma^2 V''(t, X(t))} \quad (5.31)$$

En remplaçant l'expression de $\alpha^*(t)$ dans (5.26), on obtient l'équation suivante:

$$\begin{cases} \min_{\alpha(t) \in A} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{(\eta m)^2 V'(t, X(t))^2}{\sigma^2 V''(t, X(t))} \right) - \left(\frac{\eta m V'(t, X(t))}{\sigma^2 V''(t, X(t))} \right) \eta m V'(t, X(t)) + \frac{dV(t, X(t))}{dt} \right) = 0 \\ V(T, x(T)) = \left(x(T) + \frac{\lambda_T}{2} \right)^2 \end{cases} \quad (5.32)$$

avec

$$\frac{V'(t, X(t))^2}{V''(t, X(t))} = 2 \left(f(t) X(t) + g(t) \frac{\lambda_T}{2} \right)^2 \quad (5.33)$$

En simplifiant l'expression (5.32), on aboutit à l'équation suivante :

$$\left(2 f'(t) - \frac{(\eta m)^2}{\sigma^2} f(t) \right) X(t) + 2 \left(g'(t) \frac{\lambda_T}{2} - \frac{(\eta m)^2}{\sigma^2} g(t) \frac{\lambda_T}{2} \right) = 0 \quad (5.34)$$

Nous pouvons alors choisir $f(t)$ et $g(t)$ de manière à satisfaire les deux équations différentielles ordinaires (EDOs) suivantes:

$$\begin{cases} f'(t) - \frac{(\eta m)^2}{2\sigma^2} f(t) = 0 \\ f(T) = 1 \end{cases} \quad (5.35)$$

et

$$\begin{cases} g'(t) - \frac{(\eta m)^2}{2\sigma^2} g(t) = 0 \\ g(T) = 1 \end{cases} \quad (5.36)$$

On trouve facilement les solutions de (5.35) et (5.36) suivantes :

$$f(t) = g(t) = e^{-\frac{(\eta m)^2}{2\sigma^2}(T-t)} \quad (5.37)$$

En remplaçant dans (5.27), on obtient alors l'expression de $V(t, X(t))$:

$$V(t, X(t)) = \left(e^{-\frac{(\eta m)^2}{2\sigma^2}(T-t)} X(t) + \frac{\lambda_T}{2} e^{-\frac{(\eta m)^2}{2\sigma^2}(T-t)} \right)^2 \quad (5.38)$$

5.4.3. Détermination de la stratégie de réassurance optimale

En remplaçant les dérivées partielles de $V(t, X(t))$ dans l'égalité (5.31), on obtient alors l'expression de $\alpha^*(t)$:

$$\alpha^*(t) = 1 + \frac{\eta m \left(e^{-\frac{(\eta m)^2}{2\sigma^2}(T-t)} X^*(t) + \frac{\lambda_T}{2} e^{-\frac{(\eta m)^2}{2\sigma^2}(T-t)} \right)}{\sigma^2 e^{-\frac{(\eta m)^2}{2\sigma^2}(T-t)}} = 1 + \frac{\eta m}{\sigma^2} \left(X^*(t) + \frac{\lambda_T}{2} \right) \quad (5.39)$$

C'est la stratégie efficiente par l'application du théorème 5.4 (de vérification) tel que $(X^*(t), \alpha^*(t))$ est la paire optimale.

Mais le multiplicateur de Lagrange λ_T est inconnu, nous allons donc le déterminer :

On se place dans la stratégie optimale et nous écrivons de nouveau l'équation qui modélise le bénéfice technique espéré. Dans ce cas on a :

$$dE(X(t)) = (1 - \alpha^*(t)) \eta m dt + E((1 - \alpha^*(t)) \sigma dW(t)) \quad (5.40)$$

En remplaçant $\alpha^*(t)$ par son expression, on trouve alors :

$$dE(X(t)) = \left(-\frac{(\eta m)^2}{\sigma^2} E(X(t)) - \frac{\lambda_T}{2} \eta m \right) dt + E \left(\left(-\frac{\eta m}{\sigma^2} X(t) - \frac{\lambda_T}{2} \right) \sigma dW(t) \right) \quad (5.41)$$

Sachant que $W(t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard. i.e. $E(W(t)) = 0$.

On arrive alors à l'équation suivante:

$$dE(X(t)) = \left(-\frac{(\eta m)^2}{\sigma^2} E(X(t)) - \frac{\lambda_T}{2} \eta m \right) dt \quad (5.42)$$

Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre avec second membre de la forme suivante:

$$y' + ay = b \quad (5.43)$$

Elle est résolue comme suite :

$$y(t) = y(0)e^{A(0)-A(t)} + \int_0^t b(s)e^{A(s)-A(t)} ds \quad (5.44)$$

Avec $A(t)$ est une primitive de a

On a :

$$a = \frac{(\eta m)^2}{\sigma^2} \text{ et } b = -\frac{\lambda_T}{2} \eta m \quad (5.45)$$

Alors la résolution de l'équation (5.42) a abouti à l'expression explicite de $E(X(t))$:

$$E(X(t)) = E(X(0))e^{\frac{(\eta m)^2}{\sigma^2}t} + \frac{\lambda_T}{2} \frac{\sigma^2}{\eta m} e^{\frac{(\eta m)^2}{\sigma^2}t} \left(e^{\frac{(\eta m)^2}{\sigma^2}t} - 1 \right) \quad (5.47)$$

où

$$E(X(0)) = x_0.$$

Nous avons besoin que de λ_T , on se place alors dans $t=T$.

Sachant que $E(X(T)) = d_T$, on a alors l'équation suivante :

$$d_T = x_0 e^{\frac{(\eta m)^2}{\sigma^2}T} + \frac{\lambda_T}{2} \frac{\sigma^2}{\eta m} e^{\frac{(\eta m)^2}{\sigma^2}T} \left(e^{\frac{(\eta m)^2}{\sigma^2}T} - 1 \right)$$

On déduit finalement l'expression de λ_T :

$$\lambda_T = \frac{2\eta m \left(d_T - x_0 e^{\frac{(\eta m)^2}{\sigma^2} T} \right)}{\sigma^2 \left(1 - e^{\frac{(\eta m)^2}{\sigma^2} T} \right)} \quad (5.48)$$

Ainsi, en remplaçant λ_T dans (5.39), on obtient alors la stratégie de la réassurance optimale suivante :

$$\alpha^*(t) = 1 + \frac{\eta m}{\sigma^2} \left(X^*(t) + \frac{\eta m \left(d_T - x_0 e^{\frac{(\eta m)^2}{\sigma^2} T} \right)}{\left(1 - e^{\frac{(\eta m)^2}{\sigma^2} T} \right)} \right). \quad (5.49)$$

Cette stratégie (trajectoire optimale) dépend des informations disponibles à la compagnie d'assurance à tout instant, à savoir : le bénéfice technique initial x_0 , le chargement de sécurité η , la distribution de la charge des sinistres et la période de l'exercice T .

5.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une approche visant l'optimisation dynamique de la réassurance pour trouver une allocation optimale de réassurance qui devrait être choisie par la compagnie d'assurance et la stratégie qui lui permet de minimiser le risque et de maximiser le bénéfice technique dans une période donnée.

Notre méthodologie fait référence à la théorie du contrôle optimal. En effet, nous avons utilisé la programmation dynamique qui se base sur les équations différentielles partielles (équations de Hamilton-Jacobi-Bellman) pour résoudre le problème du contrôle optimal de notre modèle qui contrôle le risque par l'achat de réassurance.

Conclusion générale

Dans ce projet de thèse, nous nous sommes intéressés à la maximisation du profit d'une compagnie d'assurance en utilisant la réassurance comme outil de richesse. L'objectif de ce travail était de mettre en évidence le bon fonctionnement de la détermination des traités de la réassurance optimale. Celui-là répond aux critères que se fixaient les assureurs telles que la maximisation de l'espérance de bénéfice technique sous contrainte de variance, la minimisation de probabilité de ruine et la minimisation des mesures de risque. A cet égard, notre étude se présente comme une amélioration desdits critères (statiques ou dynamiques).

Pour les modèles statiques, nous les avons améliorés par le biais de stratégies qui agissent aussi bien sur le risque que sur le bénéfice technique, en utilisant les outils statistiques et les modèles actuariels en convention avec les algorithmes génétiques qui peuvent résoudre le programme d'optimisation de la réassurance efficacement, rapidement et avec précision.

Concernant le critère moyenne-variance, nous avons présenté notre contribution en proposant deux approches d'optimisation de la réassurance. Au niveau de la première, nous avons déterminé un choix optimal de paramètres de traités de la réassurance en rapport avec deux objectifs : maximiser le bénéfice technique espéré et minimiser la variance du bénéfice technique en utilisant un mode de tarification basé sur l'espérance mathématique. Dans la deuxième approche, nous avons proposé une nouvelle stratégie de l'optimisation de la réassurance, laquelle consiste à déterminer un choix optimal du couple (paramètre de traités de la réassurance, chargement de sécurité) qui permet de maximiser le bénéfice technique espéré et de minimiser le risque en même temps, en nous basant sur le principe de prime de risque ajusté défini à partir des lois probabilistes.

En ce qui se rapporte au critère de la minimisation de la probabilité de ruine, nous avons présenté une nouvelle stratégie du choix de la réassurance optimale qui permet, simultanément, de maximiser le bénéfice technique et de minimiser la probabilité de ruine (en maximisant le coefficient d'ajustement de Lundberg).

Ainsi, dans le cadre d'amélioration de nouveau critère de la minimisation des mesures de risque, nous avons développé deux modèles d'optimisation de

réassurance basés sur la Conditional Tail Expectation (*CTE*) et la Conditional Tail Variance (*CTV*) permettant à la fois de maximiser le bénéfice technique et de minimiser le risque d'une compagnie d'assurance. Dans ces modèles, nous avons pu déterminer les paramètres de traités de la réassurance optimale qui minimisent respectivement la (*CTE*) et la (*CTV*) sous contrainte du bénéfice technique qui doit être aussi maximal. De plus, nous avons combiné les algorithmes génétiques avec le Lagrangien augmenté pour développer un nouvel algorithme itératif visant à résoudre les programmes d'optimisation avec contraintes d'égalité et/ou d'inégalité. Nous avons pu résoudre à partir de cet algorithme le problème de nos modèles.

Pour les modèles dynamiques, nous avons proposé une approche permettant de trouver une allocation optimale de la réassurance et la stratégie qui lui permet de minimiser le risque et de maximiser le profit d'une compagnie d'assurance sur une période donnée (où la cédante a ajusté sa stratégie de réassurance d'une manière dynamique) en utilisant le contrôle stochastique. Nous avons utilisé la programmation dynamique comme outil de résolution qui se base sur les équations aux dérivées partielles (équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman).

Le résultat obtenu par nos modèles a montré son efficacité par rapport à ceux dans la littérature, à l'égard des objectifs que se fixaient les assureurs (car ils agissent à la fois sur le risque et sur la rentabilité) et en termes de simplicité (efficace pour les problèmes d'optimisation qui sont difficiles à résoudre algébriquement).

Dans tous les exemples que nous avons abordés précédemment, nous avons remarqué que notre résultat donne lieu en général à une valeur de bénéfice technique supérieure à celle obtenue dans les approches précédentes et à un risque inférieur à celui obtenu précédemment.

Néanmoins, il faudra signaler qu'il n'existe pas une recette idéale pour tous les problèmes d'optimisation de la réassurance. En effet, chaque problème illustre ses propres caractéristiques. Le choix d'une méthode d'optimisation efficace dépend évidemment de la stratégie adoptée par la compagnie d'assurance (type de l'assurance, forme de réassurance, ...etc.), laquelle diffère d'un assureur à un autre et répond à plusieurs facteurs : la nature du portefeuille (la distribution des montants des sinistres, l'indépendance d'occurrence des sinistres, ... etc.). On peut également tenir compte des hypothèses initiales et des statistiques observées par la compagnie d'assurance.

Il paraît enfin que notre problème est convenablement abordable et est étroitement lié aux hypothèses mentionnées au début de ce travail. Notons que ces études ne sont valables que dans les hypothèses qui sont vérifiées. Si l'une de ces hypothèses est non réalisable, alors notre méthodologie sera inutile.

Notre étude laisse cependant ouvertes diverses questions qui feront l'objet de recherches futures. Par exemple, il serait intéressant, dans le cadre d'une première extension possible, d'étudier le problème de l'optimisation de la réassurance dans le cas où la distribution des charges des sinistres est inconnue. Il est également possible d'étudier l'impact de la dépendance d'occurrence des sinistres sur le profit de la compagnie d'assurance. D'où le caractère ouvert de la présente recherche.

Publications & Communications

Publications

- 1) Abderrahim El Attar¹, Mostafa Elhachloufi² et Z. A. Guennoun³, "*Optimization of surplus reinsurance treaty using the Conditional Tail Expectation*", Pakistan Journal of Statistics and Operation Research, Vol. 14, Issue 01, 2018.

<http://www.pjsor.com/index.php/pjsor/issue/archive>

- 2) Abderrahim El Attar¹, Mostafa Elhachloufi² et Z. A. Guennoun³, "*Optimal reinsurance through minimizing new risk measures under technical benefit constraints*", International Journal of Engineering Research in Africa, Vol. 34, 2018.

<https://www.scientific.net/JERA.35>

- 3) Abderrahim El Attar¹, Mostafa Elhachloufi² et Z. A. Guennoun³, "*An Inclusive Criterion For An Optimal Choice Of Reinsurance*", Vol. 12, Issue 04, 2017, Annals of Financial Economics (World Scientific).

<http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S201049521750018X>

- 4) Abderrahim El Attar¹, Mostafa Elhachloufi² et Z. A. Guennoun³, "*The Optimization of Reinsurance by the Maximization of Technical Benefits and Minimization of Probability of Ruin Using Genetic Algorithms*", International Review on Modelling and Simulations (IREMOS), Vol. 9, No 1, 2016.

<http://www.praiseworthyprize.org/jsm/index.php?journal=iremos&page=article&op=view&path%5B%5D=18362>

- 5) Abderrahim El Attar¹, Mostafa Elhachloufi² et Z. A. Guennoun³, "*Optimal Choice of Security Loading and The Parameters of Reinsurance Treaties for Maximizing the Technical Benefits of Insurance Company*", International Journal of Applied Mathematics and Statistics, Vol. 55, Issue 2, 2016.

<http://www.ceser.in/ceserp/index.php/ijamas/article/view/4383>

- 6) Abderrahim El Attar¹, Mostafa Elhachloufi² et Z. A. Guennoun³, "*Optimizing the Technical Benefits of the Insurance Company Using Genetic Algorithms*", Applied Mathematical Sciences, Vol. 9, No 150, 2015.

<http://www.m-hikari.com/ams/ams-2015/ams-149-152-2015/510676.html>

L'article suivant est soumis pour la publication dans un journal international :

- 1) Abderrahim El Attar¹, Mostafa Elhachloufi² et Z. A. Guennoun³, "*Optimality of Reinsurance Treaties under a "Mean - Ruin probability" criterion*".

Soumettre le 24-06-2017, Statistics, Optimization and Information Computing an international journal.

Décision de l'éditeur: Révisions requises.

Communications

- 1) Abderrahim El Attar¹, Mostafa Elhachloufi² et Z. A. Guennoun³, "*Statistical method in Actuarial model for an Choice Optimal of Reinsurance*", International Conference on Technology, Engineering & Mathematics (TEM'18), 26-27, March 2018, ENSA, Kenitra.
- 2) Abderrahim El Attar¹, Mostafa Elhachloufi² et Z. A. Guennoun³, "*Optimal reinsurance under CTV risk measure*", Mathematics for Smart Cities MCS'17, 26, Octobre 2017, Tanger.
- 3) Abderrahim El Attar¹, Mostafa Elhachloufi² et Z. A. Guennoun³, "*Optimization of reinsurance under the criterion of the minimization of probability of ruin*", The Second International Conference on Modeling and Scientific Computing in Mathematical Engineering (MOCASIM2017), 17-20, April 2017, Marrakech.
- 4) Abderrahim El Attar¹, Mostafa Elhachloufi² et Z. A. Guennoun³, "*Optimization of reinsurance treaties to maximize the technical benefit of an insurance company*", 5ème Congrès International de la Société Marocaine de Mathématiques Appliquées (SM2A), 16-18, Mars 2017, Meknès.
- 5) Abderrahim El Attar¹, Mostafa Elhachloufi² et Z. A. Guennoun³, "*Optimisation du chargement de sécurité et paramètre de traités de la réassurance pour maximiser le bénéfice technique d'une compagnie d'assurance*", 1er Colloque National sur les Techniques Economiques Décisionnelles (TED'2016), 14 mai 2016, Meknès.
- 6) Abderrahim El Attar¹, Mostafa Elhachloufi² et Z. A. Guennoun³, "*Optimization of reinsurance under the principle of risk-adjusted to maximize technical benefit of insurance company*", International Meeting on Applied Mathematics, IMAME'2016, 9-12, May 2016, Errachidia.
- 7) Abderrahim El Attar¹, Mostafa Elhachloufi² et Z. A. Guennoun³, "*Maximizing the technical benefits of an insurance company constrained of ruin probability using the augmented lagrangian and genetic algorithm*", International conference «Numerical Analysis and Optimization Days (JANO11)», 27-28-29 Avril 2016, Beni mellal.
- 8) Abderrahim El Attar¹, Mostafa Elhachloufi² et Z. A. Guennoun³, "*Allocation optimale de la réassurance pour maximiser le bénéfice technique d'une compagnie d'assurance*", Colloque Eco-Maths'16, 14 Avril 2016, Kenitra.

-
- 9) Abderrahim El Attar¹, Mostafa Elhachloufi² et Z. A. Guennoun³, "*Optimisation de la réassurance pour maximiser le bénéfice technique d'une compagnie d'assurance en utilisant les algorithmes génétiques*", La deuxième édition de la conférence internationale «Journées Scientifiques en Sciences Appliquées (JSSA'16)», 25-26, Mars 2016, Larache.

Références

- [1] Aase (2002), *Perspectives of risk sharing*, Scandinavian Actuarial Journal, Vol 2.
- [2] Acerbi & al (2002), *On the Coherence of Expected Shortfall*, Journal of Banking and Finance Vol 26, Iss 7.
- [3] Alex Bellos (2011), *Alex au pays des chiffres*, Robert Laffont.
- [4] Amédée & Francois (2004), *Algorithme génétique*, TE de fin d'année Tutorat de Philippe Audebaud.
- [5] Andreani & al (2007), *On augmented Lagrangian methods with general lower-level constraint*. SIAM Journal on Optimization, 18, 1286–1302.
- [6] Arrow (1963), *Uncertainty and the welfare economics of medical care*, American Economic Review.
- [7] Artzner & Delbaen (1997), *Definition of coherent measures of risk*, European Finance Association, Symposium August 27-30.
- [8] Artzner (1999), *Application of coherent risk measures to capital requirements in insurance*, North American Actuarial Journal, April 1999 Vol 3, N° 2.
- [9] Asmussen & Abrehcer (2010), *Ruin probabilities*, vol 14, World scientific.
- [10] Asmussen (1992), *Ruin probabilities*, Vol. 2, World Scientific Publishing Co. Ltd. London, 11, 86.
- [11] Asmussen.S (2000), *Ruin Probabilities*, World Scientific, Singapore.
- [12] Balbas & al (2009), *Optimal reinsurance with general risk measures*, Insurance: Mathematics and Economics 44.
- [13] Ben Dbabis (2012), *Modèles et méthodes actuarielles pour l'évaluation quantitative des risques en environnement Solvabilité II*, Thèse de doctorat, Université Paris Dauphine.
- [14] Besson & Partrat (2004), *Assurance non-vie: Modélisation, simulation*, Collection : Assurance - Audit – Actuariat, Economica.
- [15] Birgin, Castillo & Martínez (2005), *Numerical comparison of augmented Lagrangian algorithms for nonconvex problems*, Computational Optimization and Applications, 31.

-
- [16] Blazenko (1985), *Optimal insurance policies*, Insurance: Mathematics and Economics, Vol 4.
- [17] Borch (1960), *An attempt to determine the optimum amount of stop loss reinsurance*, Transactions of the 16th International Congress of Actuaries, 597-610.
- [18] Borch (1960), *Reciprocal reinsurance treaties*, The Astin Bulletin, Vol 1.
- [19] Borch (1969), *The optimal reinsurance treaty*, Astin Bulletin, vol 5, no 2, 293-297.
- [20] Browne (1995), *Optimal investment policies for a firm with a random risk process: exponential utility and minimizing the probability of ruin*, Mathematics of Operations Research 20, 937-958.
- [21] Cai & Tan (2007), *Optimal Retention for a Stop-Loss Reinsurance Under the VaR and CTE Risk Measures*, Astin Bulletin.
- [22] Cantu Paz (2000), *Efficient and Accurate Parallel Genetic Algorithms*, Kluwer Academic Publishers.
- [23] Centeno (1995), *Excess of loss reinsurance and the probability of ruin in finite time*, Astin Bull 27.
- [24] Centeno (2002a), *Excess of loss reinsurance and gerber's inequality in the sparre Anderson model*, Insurance: Mathematics and Economics 31.
- [25] Centeno (2002b), *Measuring the effects of reinsurance by the adjustment coefficient in the sparre anderson model*, Insurance: Mathematics and Economics 30, 37.
- [26] Centeno (2005), *Dependent risks and excess of loss reinsurance*, Insurance: Mathematics and Economics 37.
- [27] Charpentier (2014), *Approches statistiques du risque, chapitre 3: Mesures de risque*, Éditions Technip, Paris.
- [28] Chikodza & Esunge (2014), *Optimal Combined Dividend and Proportional Reinsurance Policy*, Communications on Stochastic Analysis Vol. 8, No. 1, Serials Publications.
- [29] Christian (2001), *Analyse d'un système de sécurité cohérent et optimal pour une compagnie d'assurance IARD*, XXXIIème Colloque Astin 8-11.
- [30] Davis (1991), *The genetic Algorithm Handbook*, Ed. New- York: Van Nostrand Reinhold, ch.17.
- [31] Daykin & Pesonen (1994), *Practical Risk Theory for Actuaries*, Chapman & Hall, London.
- [32] De Finetti (1940), *Il problema dei pieni*, Giorn. Ist. Ital. Attuari, Vol 1.

-
- [33] Deestra & Plantin (2004), *La réassurance*, Economica.
- [34] Denault (2001), *Coherent Allocation of Risk Capital*, Journal of Risk 4, 1-34.
- [35] Denuit & Charpentier (2004), *Mathématiques de l'assurance non vie, tome 1: Principes fondamentaux de théorie du risqué*, Economica.
- [36] Dhaene & al (2002a), *The Concept of Comonotonicity in Actuarial Science and Finance: Theory*, Insurance: Mathematics & Economics 31, 3-33.
- [37] Dhaene & al (2002b), *The Concept of Comonotonicity in Actuarial Science and Finance: Applications*, Insurance: Mathematics & Economics 31, 133-161.
- [38] Dickson & Waters (1996), *Reinsurance and Ruin*, Insurance: Mathematics and Economics, Vol 19.
- [39] Dickson (1992), *On the distribution of surplus prior to ruin*, Insurance: Mathematics and Economics 11.
- [40] El Hachloufi, Guennoun & F.Hamza (2012), *Optimization of Stocks Portfolio Using Genetic Algorithms and Value at Risk*, International Journal of Mathematics and Computation, Vol. 20.
- [41] El Hachloufi, Guennoun & Hamza (2012), *Stocks Portfolio Optimization Using Classification and Genetic Algorithms*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 6, N° 94, pp. 4673 – 4684.
- [42] Emiliano & Valdez (2004), *On Tail Conditional Variance and Tail Covariances*, Faculty of Commerce & Economics, The University of New South Wales Sydney, AUSTRALIA.
- [43] Enteno (2002b), *Measuring the effects of reinsurance by the adjustment coefficient in the sparre anderson model*, Insurance: Mathematics and Economics 30, 37-49.
- [44] Fleming & Soner (1993), *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, New York: Springer - Verlag,.
- [45] Gajeck & Zagrodny (2000), *Insurer's optimal reinsurance strategies*, Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 27.
- [46] Gerber & Dufresnes (1991b), *Three methods to calculate the probability of ruin*, Astin Bull. 19(1), 71/90.
- [47] Gerber & Shiu (1998), *On the time value of ruin*, North American Actuarial Journal 2, 48.
- [48] Gerber & Shiu (2005), *The time value of ruin in a sparre andersen model*, North American Actuarial Journal 9.

-
- [49] Gerber (1979), *An introduction to mathematical risk theory*, S.S. Huebner Foundation Monographs, University of Pennsylvania 13
 - [50] Glineur & Walhin (2004), *De Finetti's Retention Problem for Proportional Reinsurance Revisited*, Unpublished manuscript.
 - [51] Goffard (2015), *Approximations polynomiales de densités de probabilité et applications en assurance*, Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille.
 - [52] Goldberg (1989), *Genetic Algorithms in search, optimization and Machine learning*, Addison-Wesley.
 - [53] Gould (1969), *The expected utility hypothesis and the selection of optimal deductibles for a given insurance policy*, Journal of Business, Vol 42.
 - [54] Grandell (1991), *Aspects of Risk Theory*, Springer - Verlag, New York.
 - [55] Guan & Liang (2014), *Optimal reinsurance and investment strategies for insurer under interest rate and inflation risks*, Insurance: Mathematics and Economics.
 - [56] Hald & Schmidli (2004), *On the maximisation of the adjustment coefficient under proportional reinsurance*, Astin Bulletin, 34, 75 - 83.
 - [57] Hancock, Huber & Koch (2001), *Value Creation in the Insurance Industry*, Risk Management and Insurance Review 4, 1-9.
 - [58] Haussmann (1981), *Some examples of optimal stochastic controls or: The stochastic maximum principle at work*, SIAM Review. , Vol. 23, N° 3.
 - [59] Hess (2000), *Méthodes actuarielles de l'assurance vie*, Economica.
 - [60] Hipp & Christian (2000), *Optimal Investment for Investors with State Dependent Income*, and for Insurers, Working paper No. 82, Centre for Actuarial Studies, University of Melbourne.
 - [61] Hipp & Taksar (2000), *Optimal Investment for Insurers*, Insurance: Mathematics and Economics 27, 215–28.
 - [62] Hojgaard & Taksar (1998), *Optimal proportional reinsurance policies for diffusion models*, Scandinavian Actuarial Journal 2, 166-180.
 - [63] Hong & Elshahat (2004), *Conditionnal Tail Variance and Conditionnal Tail Skewness in Finance and Insurance*, Bradley University.
 - [64] Hu.Y & Zhou (2005), *Constrained Stochastic LQ Control with Random Coefficients, and Application to Portfolio Selection*, SIAM Journal on Contrai and Optimization. vol. 44, no 2, p. 444 -466.

-
- [65] Huiming & Yingchun (2015), *Optimal reinsurance and investment problem for an insurer with counterparty risk*, Insurance: Mathematics and Economics, Volume 61, 6687.
- [66] Iglehart (1969), *Diffusion approximations in collective risk theory*, J. Appl. Prob. 6, 285 à 292.
- [67] Ignatove, Kaishev & Krachunov (2004), *Optimal retention levels, given the joint survival of cedent and reinsurer*, Scandinavian Actuarial Journal 6.
- [68] Kaas & al (2001), *Modern Actuarial Risk Theory*, Boston, Dordrecht, London, Kluwer Academic Publishers 28.
- [69] Kaishev, Dimitrova & Shreve (2008), *Operational risk and insurance: a ruin-probabilistic reserving approach*, The Journal of Operational Risk vol 3.
- [70] Kaluszka & Okolewski (2008), *An Extension of Arrow's Result on Optimal Reinsurance Contract*, The Journal of Risk and Insurance, Vol. 75, No. 2, 275-288.
- [71] Kaluszka (2001), *Optimal reinsurance under mean-variance premium principles*, Insurance: Mathematics and Economics 28, 61-67.
- [72] Kann (1961), *Some remarks on a recent paper by borch*, The ASTIN Bulletin, Vol 1.
- [73] Karatzas & al (1991), *Martingale and duality methods for utility maximization in in complete markets*, SIAM Journal on Control and Optimization 29, 702-730.
- [74] Kleiber & Kotz (2003), *Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences*, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- [75] Krvavych (2005), *Insurer Risk Management and Optimal Reinsurance*, PhD Thesis, The University Of New South Wales.
- [76] Lakshmikantham & Rao (1995), *Theory of Integro-Differential Equations*, CRC Press.
- [77] Lampaert & Walhin (2005), *On the Optimality of Proportional Reinsurance*, Casualty Actuarial Society Forum, Spring.
- [78] Landsman, Emiliano & Valdez (2004), *Tail Conditional Expectations for Exponential Dispersion Models*, University of New South Wales, Sydney, AUSTRALIA.
- [79] Lim & Zhou (2005), *Mean-variance portofolio selection with random parameters*, Mathematics of Operations Rescarch , vol. 27, Iss. 1, p. 101-121.
- [80] Luo, Taksarb & Tsoib (2008), *On reinsurance and investment for large insurance portfolios*, Insurance: Mathematics and Economics 42 (2008) 434–444.

-
- [81] Lutton (1999), *Algorithmes génétiques et Fractales*, Dossier d'habilitation à diriger des recherches, Université Paris XI Orsay.
- [82] Malinge (2013), *Optimisation d'un portefeuille de réassurance non-vie : L'exemple du Property & Casualty*, Mémoire présenté devant l'Institut de Science Financière et d'Assurances pour l'obtention du diplôme d'Actuaire de l'Université de Lyon.
- [83] Marceau (2007), *On a general class of compound renewal risk models with dependence*, research funded by the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada and the chaire en actuariat de l'université Laval.
- [84] Mathieu Boudreault (2010), *Mathématiques du risque*, Document de référence, Département de mathématiques, Université du Québec à Montréal.
- [85] Mélanie & Darmaillac (2015), *Les probabilités de Ruine sous le modèle classique de Gramer-Lundberg et sous le modèle ARMA*, Available from: Yves Darmaillac, publications on ResearchGate.
- [86] Merton (1969), *Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous case*, The Review of Economics and Statistics, v. 51, n. 3, p. 247-257.
- [87] Michalewicz (1996), *Genetic Algorithms et Data Structures: Evolutionary Programs*, Springer, 3ème Ed.
- [88] Mikosch (2004), *Non-Life Insurance Mathematics: An Introduction with Stochastic Processes Heidelberg*, Springer-Verlag.
- [89] Minkova (2002), *A generalization of the classical discrete distributions*, Comm. Statist. Theory and Methods, 31, 871- 888.
- [90] Moffet (1979), *The risk sharing problem*, Geneva Papers on Risk and Insurance, 4, 5-13.
- [91] Moore & Young (2006), *Optimal insurance in a continuous-time model*, Insurance: Mathematics and Economics 39.
- [92] Mossin (1968), *Aspects of rational insurance purchasing*, Journal of Political Economy, Vol 79.
- [93] Nteukam & Planchet (2012), *Stochastic evaluation of life insurance contracts: Model point on asset trajectories and measurements of the error related to aggregation*, Insurance: Mathematics and Economics, Vol 51, N° 3.
- [94] Ohlin (1969), *A generalization of a result by Borch and Kahn on the optimal properties of stop-loss reinsurance*, The ASTIN Bulletin, Vol 5.
- [95] Oksendal & Sulem (2005), *Applied Stochastic Control of Jump Diffusions*, Springer.

-
- [96] Panjer (2002), *Measurement of Risk, Solvency Requirements, and Allocation of Capital within Financial Conglomerates*, Research Report 01-14.
- [97] Patrick (2004), *Reinsurance*, Encyclopedia of Actuarial Science, Wiley, 1400-1403.
- [98] Perera (2010), *Optimal consumption, investment and insurance with insurable risk for an investor in a Lévy market*, Insurance: Mathematics and Economics 46, 479-484.
- [99] Petauton, Kessler & Bellando (2002), *Théorie et pratique de l'assurance vie : manuel et exercices corrigés*, Dunod.
- [100] Raviv (1979), *The design of an optimal insurance policy*, American Economic Review, Vol 69.
- [101] Renders (1995), *Algorithmes génétiques et Réseaux de Neurones*, Editions HERMES.
- [102] Richard Bellman (1957), *Dynamic Programming*, Princeton University Press. Réimpression 2003, Dover Publication, Mineola, New-York.
- [103] Rockafellar & Uryasev (2000), *Optimization of conditional value-at-risk*, Journal of Risk, 2, 21-42.
- [104] Rolski, Schmidli & Teugels (1999), *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, John Wiley & Sons, Chichester.
- [105] Ross (2007), *Introduction to Probability Models*, 9th edition, Elsevier Inc.
- [106] Rytgaard (2004), *Stop-loss reinsurance*, Encyclopedia of Actuarial Science, Wiley.
- [107] Sang & Hailiang (2004), *optimal investment for an insurer to minimize its probability of ruin*, North American Actuarial Journal, Volume 8, Issue 2.
- [108] Schmidli (2001), *Optimal proportional reinsurance policies in a dynamic setting*, Scandinavian Actuarial Journal, Vol 1.
- [109] Schmidli (2005), *Asymptotics of Ruin Probabilities for Risk Processes under Optimal Reinsurance and Investment Policies: the Large Claim Case*, Scand Actuarial J.
- [110] Serfozo (2009), *Basic of Applied Stochastic Processes*, Springer.
- [111] Smith (1968), *Optimal insurance coverage*, Journal of Political Economy, Vol 76.
- [112] Stein (2012), *Stochastic Optimal Control and the U.S. Financial Debt Crisis*, Springer.
- [113] Szergö (2002), *No more VaR*, Journal of Banking & Finance, 26, pp. 1247-1252.
- [114] Taksar & Loft (2007), *The influence of bankruptcy value on optimal risk control for diffusion models with proportional reinsurance*, Insurance Mathematics & Economics, 311-321.

-
- [115] Taksar (2000), *Optimal risk and dividend distribution control models for an insurance company*, Mathematical Methods of Operations Research, 51.
- [116] Tan & al (2011), *Optimality of general reinsurance contracts under CTE risk measure*, Insurance: Mathematics and Economics, 49(2), 175–187.
- [117] Tan & Chi (2011), *Optimal reinsurance under VaR and CVaR risk measures: A simplified approach*, ASTIN Bulletin, 41(2), 487-509.
- [118] Valdez (2005), *Tail conditional variance for elliptically contoured distributions*, Belgian Actuarial Bulletin, 5, 26-36.
- [119] W.Cui, J.Yang & L.Wu (2013), *Optimal reinsurance minimizing the distortion risk measure under general reinsurance premium principles*, Insurance: Mathematics and Economics 53, 74-85.
- [120] Walhin & Lampaert (2005), *On the Optimality of Proportional Reinsurance*, Scandinavian Actuarial Journal, vol 3.
- [121] Wang & Zhang (2007), *Optimal investment for an insurer: The martingale approach*, Insurance: Mathematics and Economics 40, 322-334.
- [122] Wang (1996), *Premium calculation by transforming the layer premium density*, ASTIN Bulletin 26, 71-92.
- [123] Watier (2002), *Optimisation stochastique dans le cadre de la gestion de portefeuilles*, Thèse de doctorat, Sherbrooke, Université de Sherbrooke.
- [124] Weng (2009), *Optimal reinsurance designs: from an insurer's perspective*, Ph.D. Thesis. University of Waterloo.
- [125] Willmot & Lin (2001), *Lundberg Approximations for Compound Distributions with Insurance Applications*, Lecture Notes in Statistics, Volume 156, publisher Springer.
- [126] Willmot & Lin (2001), *Lundberg Approximations for Compound Distributions with Insurance Applications*, Springer.
- [127] Wilson (2010), *Optimisation stochastique et application financière*, mémoire de la maîtrise en mathématique, Université du Québec à Montréal, Service des bibliothèques.
- [128] Yong & Zhou (1999), *Stochastic Contrais: Hamiltonian Systems and HJB Equations. Coll « Applications of Mathematics »*, Vol 43, New York: Springer.
- [129] Zheng & W.Cui (2014), *Optimal reinsurance with premium constraint under distortion risk measures*, Insurance: Mathematics and Economics 59, 109-120.

- [130] Zheng, W.Cui & J.Yang (2015), *Optimal reinsurance under distortion risk measures and expected reinsurance premium*, Journal of Systems Science and Complexity 28, 122-143.
- [131] Zhou & Lim (2002), *Dynamic mean-variance portfolio selection with no-shorting constraints*, Journal of Finance, Vol 40, N° 5, p. 1540-1555.
- [132] Zhou & Yin (2004), *Markowitz's Mean-Variance Portfolio Selection with Regime Switching: A Continuous-Time Model*, SIAM Journal on Control and Optimization 42, 1466-1482.
- [133] Zhuo & Wu (2013), *Optimal reinsurance strategies in regimes witching jump diffusion models: Stochastic differential game formulation and numerical methods*, Insurance: Mathematics and Economics 53(3), 733-746.