ROYAUME DU MAROC
Université Mohammed V - RABAT -
جامعة محمد الخامس - الرباط -
Faculté des sciences
كلية العلوم
CENTRE D'ÉTUDES DOCTORALES - SCIENCES ET TECHNOLOGIES

N° d'ordre : 3944

THÈSE

en vue de l'obtention du : **DOCTORAT**

Centre de Recherche : (LAMA).
Structure de Recherche : A.F.T.O de ENS de RABAT.
Discipline : Mathématiques.
Spécialité : Analyse fonctionnelle.

Présentée et Soutenue le : 13 / 07 / 2024

par :

Mohamed MAZIGHI

CALCULS FONCTIONNELS SIMULTANES CONTINU ET DE BAIRE ET APPLICATIONS

Devant le JURY :

Chafik NACIR	PES	ENSAM de Rabat, Université Mohammed V	Président/ Rapporteur
Aziz IFZARNE	PH	ENSA, Université Sultan Moulay Slimane	Rapporteur/ Examinateur
Rachid CHOUKRI	PES	École Normale Supérieure, Université. Mohammed V	Rapporteur/ Examinateur
Lahcen BOUCHIKHI	PH	École Normale Supérieure, Université. Mohammed V	Rapporteur/ Examinateur
Hamid EZZAHRAOUI	PH	Faculté des Sciences Université Mohammed V	Examinateur
Abdellah EL KINANI	PES	Ecole Normale Supérieure, Université Mohamed V	Directeur de thèse

Année Universitaire : 2023 - 2024

✉ Faculté des Sciences, avenue Ibn Battouta, BP. 1014 RP, Rabat –Maroc
☎ 00212 (05) 37 77 18 76 🖷 00212(05) 37 77 42 61; http://www. fsr.um5.ac.ma

Dédicace

Tout d'abord, je tiens à exprimer mes remerciements à notre groupe de recherche ≪ L.A.M.A, A.F.T.O de ENS ≫ dérigé par le Pr. Abdellah EL Kinani pour l'organisation des séminaires, ainsi qu'à tous ses membres, en particulier à mes collègues, docteurs et doctorants, Sara EL Kinani, Abderahim Ouhmidou, Driss Boukasmi, Hamid EL Atif et le Professeur Rachid Choukri et le professeur Lahcen Bouchikhi ont tous contribué au développement de différentes études de recherche mathématique et à l'avancement de notre esprit critique.

Je suis très reconnaissant au Professeur Mohamed Elghomari, ainsi qu'à mes amis et anciens collègues, Rachid Chakir, Rachid Semmami, Chaimae Assila, Abderrazzak Echaryfy et Brahim El Alaoui. Ils étaient tous disponibles lorsque j'avais besoin.

Enfin, je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude à ma mère et ma sœur pour leur soutien, leurs conseils et leur croyance en mon potentiel intellectuel et mental tout au long du chemin. Je voudrais également remercier le reste de la famille, en particulier ma grand-parent et mon oncle qui ont cru en moi jusqu'à la fin.

Remerciements

Le travail presenté dans ce mémoire de thèse a été réalisé au sein de l'equipe de l'analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs A.F.T.O de l'école normale superieure de Rabat. J'adresse ici tous mes remerciements à tous les membres l'équipe dirigeante.

Je tiens d'abord à exprimer ma profonde gratitude envers Monsieur **Abdellah EL KINANI**, Professeur à l'École Normale Supérieure de Rabat, pour son soutien inestimable et son encadrement exceptionnel tout au long de ce projet. Sans sa bienveillance, ses conseils avisés, sa rigueur exemplaire et sa disponibilité constante, ce travail n'aurait pas atteint une telle richesse et une telle qualité.

Je remercie vivement Monsieur **Chafik NACIR**, éminent Professeur à l'École Nationale Supérieure des Arts et Métiers, pour l'intérêt certain qu'il a accordé à ce travail et l'honneur qu'il me fait de présider le jury de cette thèse.

Je tiens à exprimer ma gratitude au Professeur **Aziz IFZARNE** de l'École Nationale des Sciences appliquées de khouribga d'avoir accepté de rapporter mon travail. Sa présence et son évaluation précieuse ont été très appréciées.

Je remercie Monsieur **Rachid CHOUKRI** de l'École Normale Supérieure de Rabat, pour avoir bien voulu accepter de rapporter ce travail.

Monsieur **Lahcen BOUCHIKHI**. Professeur de l'École Normale Supérieure de Rabat, m'a fait l'honneur de rapporter ce travail et de siéger au jury. Je lui exprime toute ma reconnaissance.

Je tiens également à exprimer ma sincère gratitude envers Monsieur **Hamid EZZAHRAOUI**. Professeur à Faculté des Sciences Université Mohammed V de Rabat, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'examiner ce travail.

Résume

Ce travail est formé essentiellement de deux parties. Dans la première, on construit et on étudie un calcul fonctionnel continu, dit simultané, dans le cadre des C*-algèbres m-convexes. Ce calcul étend ceux de J. Dixmier, R. Dautray, J. L. Lions, et H. Buchwalter, H. D. Tarral. Beaucoup de propriétés sont dégagées dont le "Spectral Mapping Theorem" et le bon comportement avec la composition.
Par ailleurs, nous avons obtenu deux applications importantes, dans deux champs totalement différents. La première, dans le cadre des algèbres à poids, constitue une version continue multi-dimension, d'un théorème de P. levy. La seconde, dans le cadre des espaces localement Hilbert, traîte sur l'existence d'une base orthonormée en relation avec certains vecteurs propres liés à une famille d'opérateurs normaux.
Dans la seconde partie, il est question du calcul fonctionnel simultané de Baire dans L(H), l'algèbre des opérateurs bornés d'un espace localement Hilbert H. Via une approche inspirée de G.R. Allan et celle de H. Bouchwalter, D. traval, on construit le calcul cité ci-dessus, pour une famille d'opérateurs normaux de H. De bonnes propriétés sont obtenues, dont une forme du "Spectral Mapping Theorem". Egalement, pour ce nouveau calcul, nous avons obtenu deux applications. La première établit une décomposition d'un opérateur normal en produit d'un opérateur positif et d'un opérateur unitaire. La deuxième concerne le problème du "sous-espace invariant".

Mots-clefs (5) : C*-algèbre-C*a.l.m.c – calcul fonctionnel continu simultané - algèbre a poids – Espace localement Hilbert– fonction de Baire – calcul fonctionnel de Baire simultané

Abstract

This work consists essentially of two parts. In the first part, a continuous functional calculus, called simultaneous, is constructed and studied within the framework of m-convex C*-algebras. This calculus extends those of J. Dixmier, R. Dautray, J. L. Lions, and H. Buchwalter, H. D. Tarral. Many properties are elucidated, including the Spectral Mapping Theorem and its good behavior under composition.
Furthermore, we have obtained two important applications, in two different fields. The first, within the framework of weighted algebras, constitutes a multi-dimensional continuous version of a theorem by P. Levy. The second, within the framework of locally Hilbert spaces, deals with the existence of an orthonormal basis in relation to certain eigenvectors associated with a family of normal operators.
In the second part, the simultaneous Baire functional calculus in L(H) is discussed, where H is the algebra of bounded operators of a locally Hilbert space H. Using an approach inspired by G.R. Allan and that of H. Buchwalter, D. Traval, the calculus cited above is constructed for a family of normal operators of H. Good properties are obtained, including a form of the Spectral Mapping Theorem.
Additionally, for this new calculus, two applications have been obtained. The first establishes a decomposition of a normal operator into the product of a positive operator and a unitary operator. The second concerns the problem of "invariant subspaces."

Keywords (5) : C*-algebra-C*a.l.m.c-Simultaneous continuous functional calculus-Weighted algebra -Locally Hilbert space- Baire function - Simultaneous Baire functional calculus •

Liste des publications

1) M.MAZIGHI. A. EL KINANI. Some applications of simultaneous continuous functional calculus, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2 (2023) 72:1629–1638.

2) Mohamed Mazighi. Abdellah El Kinani. Baire functional calculus for bounded-locally operators Bol. Soc. Mat. Mex. (2023) 29:23

Liste des communications

1) Calcul fonctionnel continu simultané dans une C*algèbre, Conférence nationale de Mathématiques et Applications 22 Mai 2022, Faculté des Sciences de Kénitra.

2) Simultaneous continuous calculus and applications, Journées Scientifiques du LAMA, 20 ,21 Mai 2022, Faculté des Sciences de Rabat.

3) Baire functional calculs for bounded-locally operators. Of the doctoral Days of the Center for Doctoral Studies in Science and Technology. From May 15 to 20, 2023.

Table de matières

Dédicase i

Remerciements ii

Résume iii

Abstract iv

Liste des publications v

Liste des communications vi

Introduction générale 1

Chapitre 1: Préliminaires....6

Introduction 6
I. Algèbre de Banach 6
II. C*-algèbres 8
III. Calcul fonctionnel continu 9
IV. Fonctions de Baire....15
V. Calcul fonctionnel de Baire pour un opérateur normal sur un espace de Hilbert 17
VI. C*-algèbre localement convexe....18
VII. L'algèbre $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, où $\mathcal{H}$ un espace localement Hilbert....21
Références....25

Chapitre 2: Calcul fonctionnel continu simultané et applications....27
Introduction....27
I. Calcul fonctionnel continu simultané dans les C*-algèbres....29
1. Notations et définitions....29
2. Lemme préparatoires....30
3.Construction du calcul fonctionnel continu simultané....32
4. Comportement de C.F.C.S....40
5. C*-algèbre presque de dimension finie 43
6. Cas non nécessairement complet....46

II. Applications..47
A. Première application...47
1. Poids..48
2. Espaces à poids..49
3. Application..51
B. Deuxième application...53
1. Lemmes 53
2. Deuxième application...54
III. Calcul fonctionnel continu dans les C*-a.l.m.c..56
1. Notations et définitions..57
2. Résultats préparatoires..57
Réfèrences...61

Chapitre 3 : Calcul fonctionnel de Baire et applications 64
Introduction...64
I. Calcul fonctionnel de Baire simultané dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert...66
II. Calcul fonctionnel de Baire simultané dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, où $\mathcal{H}$ est un espace localement Hilbert..75
II.1. Calcul fonctionnel de Baire pour un opérateur s.c.normal 77
II.2. Propriétés...81
II.3 Ouelques applications du calcul fonctionnel de Baire..83
II.5.1 Décomposition polaire..84
II.5.2 Sous-espaces invariants...85
III. Calcul fonctionnel de Baire pour un opérateur normal...86
Références...92

INTRODUCTION GENERALE

Ce travail contient entre autres plusieurs extensions et applications de deux calculs fonctionnels dans les C^*-algèbres localement m-convexes. Le premier est le calcul fonctionnel continu. Quant à l'autre, c'est le calcul fonctionnel de Baire.

Nous construisons et étudions le calcul fonctionnel continu dit "simultané" tout en présentant ses diverses applications. Ce calcul fonctionnel consiste à donner un sens à $f(a)$, où $a = (a_i)_{i \in I}$ est une famille commutative d'éléments normaux d'une C^*-algèbre localement m-convexe unitaire et f est une fonction complexe, définie et continue sur le spectre simultané de a. Nous montrons que le calcul fonctionnel continu pour un opérateur normal sur un espace de Hilbert reste valable dans l'algèbre des opérateurs bornés $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, où $\mathcal{H}$ est un espace localement Hilbert. Nous faisons de même pour le calcul fonctionnel de Baire. Nous étudions ensuite les applications de ces deux calculs fonctionnels. Nous présentons des applications qui généralisent celles déjà bien connues et nous donnons d'autres tout à fait nouvelles.

Le calcul fonctionnel continu pour un élément normal d'une C^*-algèbre consiste à donner un sens à $f(a)$, où a est un élément normal d'une C^*-algèbre A et f est une fonction complexe, définie et continue sur le spectre de a. Il étend ainsi le morphisme canonique $\mathbb{C}[X] \longrightarrow A$ appliquant tout polynôme $P(X)$ sur l'élément $P(a)$ de A. Pour une famille finie $T_1, ..., T_r$ d'opérateurs bornés normaux commutant deux à deux, d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, le calcul fonctionnel continu qui consiste à définir $f(T_1, ..., T_r)$, où f décrivant une certaine algèbre de fonctions continues, étend le morphisme canonique $\mathbb{C}[X_1, ..., X_r] \longrightarrow A$ appliquant tout polynôme $P(X_1, ..., X_r)$ sur l'élément $P(T_1, ..., T_r)$ de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ des opérateurs bornés de $\mathcal{H}$. Plus généralement, pour une famille $a = (a_i)_{i \in I}$ d'éléments normaux, d'une C^*-algèbre unitaire, commutative dans le sens où chaque élément a_i commute avec chaque a_j et chaque a_j^*, le calcul fonctionnel continu consiste à donner un sens à $f(a)$, où f est une fonction continue sur le spectre simultané de $a = (a_i)_{i \in I}$. Notre calcul fonctionnel continu simultané constitue une extension des calculs fonctionnels que nous avons cités ci-haut. Il étend également le morphisme naturel $\mathbb{C}[(X_i)_{i \in I}] \longrightarrow A$ appliquant tout polynôme $P((X_i)_{i \in I})$ sur l'élément $P((a_i)_{i \in I})$ de A. Le calcul fonctionnel continu simultané consiste à donner un sens à $f(a)$, où $a = (a_i)_{i \in I}$ est une famille commutative d'éléments normaux d'une C^*-algèbre localement m-convexe unitaire et f est une fonction complexe, définie et continue sur le spectre simultané de a. Notons que la famille $a = (a_i)_{i \in I}$ considérée ici est seulement supposée normale c'est à dire formée d'éléments normaux d'une C^*-algèbre localement m-convexe.

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ l'algèbre des opérateurs bornés sur $\mathcal{H}$ et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur normal. Soient $\mathcal{C}\left(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(T)\right)$ l'algèbre des fonctions complexes continues sur $Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(T)$ et $Ba(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(T))$ celle des fonctions complexes de Baire sur $Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(T)$. Le calcul fonctionnel continu

$$\varphi_T : \mathcal{C}\left(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(T)\right) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

se prolonge à $Ba(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(T))$ et donne naissance à ce qu'on appelle calcul fonctionnel de Baire:

$$\Psi_T : Ba(Sp_{_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}}(T)) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Suivant une approche inspirée de G. R. Allan et celle de H. Buchwalter et D. Traval, nous étendons et étudions le calcul fonctionnel de Baire aux espaces localement Hilbertiens, qui ne sont pas nécessairement de Hilbert.

De façon générale, ce travail est constitué de deux parties. L'une traîte les deux calculs fonctionnels continu et de Baire, pour une famille commutative d'éléments normaux d'une C^*-algèbre localement m-convexe. Quant à l'autre partie, on y étudie les diverses applications dans les espaces localement Hilbert et plus généralement dans les C^*-algèbres localement m-convexes.

Le plan de notre travail est le suivant:

Au chapitre 1, considéré comme préalable aux autres chapitres, nous présentons des définitions, des rappels et quelques résultats utiles pour la lecture de cette thèse. Nous commençons par donner les éléments les plus importants de la théorie spectrale de Gel'fand dans les algèbres de Banach et dans les C^*-algèbres. Nous établissons ensuite le calcul fonctionnel continu pour un élément normal d'une C^*-algèbre ainsi que ses principales applications. Puis, nous présentons le calcul fonctionnel de Baire pour un opérateur normal sur un espace de Hilbert. Ce chapitre contient aussi les propriétés fondamentales des C^*-algèbres localement convexes ainsi que leur théorème de structure. Il contient également les propriétés les plus significatives de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, où $\mathcal{H}$ est un espace localement Hilbert.

Au chapitre 2, on construit et on étudie un calcul fonctionnel continu, dit simultané, dans le cadre des C^*-algèbres localement m-convexes tout en présentant ses différentes applications. Ce calcul fonctionnel consiste à donner un sens à $f(a)$, où $a = (a_i)_{i\in I}$ est une famille commutative d'éléments normaux d'une C^*-algèbre localement m-convexe unitaire et f est une fonction complexe, définie et continue sur le spectre simultané de a. Notons que ce calcul fonctionnel constitue une extension des calculs fonctionnels que nous avons cités ci-haut.

L'importance de l'existence d'un calcul fonctionnel le plus riche possible demeure dans l'éfficacité et la force de ses applications. A ce propos, nous présentons des applications importantes de ce calcul fonctionnel dans des directions tout à fait différentes. La première concerne certaines algèbres à poids. Il s'agit d'une version continue multi-dimensionnelle d'un théorème de P. Lévy et une version généralisée multi-dimensionnelle d'un résultat de N. Wiener. Quant à la deuxième, elle concerne les espaces localement Hilbert. Elle traîte de l'existence d'une certaine base orthonormée liée aux vecteurs propres d'une famille d'opérateurs.

Au chapitre 3, il est question du calcul fonctionnel simultané de Baire dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, où $\mathcal{H}$ est un espace localement Hilbert non nécessairement de Hilbert. On s'intéresse d'abord au calcul fonctionnel de Baire simultané pour une famille commutative d'opérateurs normaux $\mathbf{T} = (T_i)_{i\in I}$ d'un espace de Hilbert. Il consiste à donner un sens à $f(\mathbf{T})$, où f est une fonction complexe de Baire sur le spectre simultané $Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T})$ de $\mathbf{T}$.

Par une approche inspirée de G. R. Allan et celle de H. Buchwalter et D. Traval, nous montrons que le calcul fonctionnel continu simultané $\Phi_\mathbf{T}$: $\mathcal{C}(Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T})) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$, construit et étudié au chapitre 2, s'étend à une classe plus large de fonctions. Il s'agit de l'algèbre des fonctions complexes de Baire $Ba(Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T}))$. Plus précisement, nous montrons que $\Phi_\mathbf{T}$ s'étend en un $*$-morphisme continu: $\Psi_\mathbf{T} : Ba(Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T})) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ qu'on appelle calcul fonctionnel de Baire simultané pour $\mathbf{T}$. Nous prouvons que $\Psi_\mathbf{T}$ est complètement caractérisée par l'égalité:

$$\langle \Psi_\mathbf{T}(f)(x), y\rangle = \int_{Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T})} f d\mu_{x,y}, \text{ pour toute } f \in Ba(Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T})),\ x, y \in \mathcal{H},$$

où $\mu_{x,y}$ est une mesure de Radon complexe sur $Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T})$. Nous montrons également que $\Psi_\mathbf{T}$ est unique sous la condition suivante:

"Pour toute suite $(f_n)_n \in Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T}))$, bornée telle que $f_n \longrightarrow 0$ simplement, on a: $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \Psi_{\mathbf{T}}(f_n)(x) = 0$, pour tout $x \in \mathcal{H}$."

Nous établissons ensuite une forme du théorème de l'application spectrale à savoir:

$$Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(\Psi_{\mathbf{T}}(f)) \subset \overline{f\left((Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T}))\right)}, \text{ pour toute } f \in Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})).$$

Dans ce même chapitre, nous établissons un résultat sur le comportement du calcul fonctionnel de Baire simultané avec la composition et un autre qui exprime une certaine compatibilité de ce calcul fonctionnel simultané avec les morphismes d'algèbres.

Dans le deuxième paragraphe de ce chapitre, on se place dans un espace $\mathcal{H}$ localement Hilbert qui n'est pas nécessairent de Hilbert. Ici, $Sp(T)$, où $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, n'est pas nécessairement compact. Il n'est même pas localement compact en général. Comme les fonctions de Baire opèrent sur un espace compact. Ceci nous amème à introduire la notion d'opérateur normal spectralement compact (s.c-normal en abrégé). Ensuite, on se place dans un espace localement Hilbert vérifiant la propriété du "lemme de Dieudonné-Schwartz". Dans un tel espace, on construit un calcul fonctionnel de Baire, pour un opérateur s.c-normal, donné par:

$$\Psi_T : Ba(Sp(T)) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}),$$

où Ψ_T est un morphisme déterminé par l'égalité suivante:

$$\langle \Psi_T(f)(x), y\rangle = \int_{Sp(T)} f d\mu_{x,y}, \text{ pour tous } f \in Ba(Sp(T)), \, x, y \in \mathcal{H}.$$

Comme dans le cas hilbertien, on montre que ce calcul fonctionnel est unique sous une condition supplémentaire donnée par:

"Pour toute suite $(f_n)_n \in Ba(Sp(T))$, telle que $|f_n| \leq 1$ et $f_n \longrightarrow 0$ simplement, on a $\Psi_T(f_n)x \longrightarrow 0$, pour tout $x \in \mathcal{H}$, dans le sens où pour tout $\gamma \in \Lambda$ tel que $x \in \mathcal{H}_\gamma$ et $\Psi_T(f_n)(x) \in \mathcal{H}_\gamma$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|\Psi_T(f_n)x\|_\gamma \longrightarrow 0$."

Nous prouvons également que ce calcul fonctionnel vérifie une inclusion du "Spectral Mapping Theorem":

$$Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(\Psi_T(f)) \subset \overline{f(Sp(T))}, \text{ pour toute } f \in Ba(Sp(T)).$$

Nous obtenons que, pour tout opérateur s.c-normal U sur $\mathcal{H}$ tel que $Sp(U) \subset \Gamma$, où Γ est le cercle unité, s'écrit $U = e^{iQ}$, où $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un opérateur hermitien. Puis, nous montrons que $\Psi_T(\chi_U) \neq 0$, pour tout ouvert non vide U de $Sp\,(T)$.

On termine ce paragraphe par quelques applications du calcul fonctionnel de Baire dans le cadre des espaces localement Hilbert. Nous établissons une forme de la décomposition polaire. Puis, nous étudions le problème des sous-espaces invariants. Nous montrons que, si $\dim \mathcal{H} \geq 2$, alors tout opérateur s.c-normal $T \neq \mathbb{C} I_{\mathcal{H}}$ admet un sous espace propre invariant.

Dans le dernier paragraphe de ce chapitre, on construit un calcul fonctionnel de Baire pour un opérateur normal quelconque. Pour ce faire, on définit l'algèbre $Ba(Sp(T))$ des fonctions de Baire sur $Sp(T)$ comme suit:

$$Ba(Sp(T)) = \varprojlim Ba(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)}(T_\lambda)).$$

Puis, on construit un calcul fonctionnel de Baire pour l'opérateur T comme limite projective $\Psi_T = \varprojlim \Psi_{T_\lambda},\ \lambda \in \Lambda$, des calculs fonctionnels

$$\Psi_{T_\lambda} : Ba(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)}(T_\lambda)) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda),\ \lambda \in \Lambda.$$

CHAPITRE 1

Préliminaires

Ce chapitre, que nous considérons comme préalable aux autres chapitres, a pour objectif de présenter les bases nécéssaires pour la lecture de cette thèse. Il se compose principalement de définitions et de rappels. Nous commençons par présenter les éléments les plus importants de la théorie spectrale de Gel'fand dans les algèbres de Banach et dans les C^*-algèbres.

Nous donnons le théorème de Gelfand-Naimark qui constitue un outil clé du calcul fonctionnel continu. Ce théorème établit une correspondance significative entre les C^*-algèbres commutatives unitaires et l'algèbre des fonctions complexes continues sur un espace compact. Nous établissons ensuite le calcul fonctionnel continu pour un élément normal d'une C^*-algèbre ainsi que ses principales applications. Signalons que ce calcul fonctionnel continu constitue un outil important dans notre travail. Par ailleurs, nous présentons l'algèbre des fonctions de Baire ainsi que le calcul fonctionnel de Baire pour un opérateur normal sur un espace de Hilbert.

Ce chapitre contient aussi les propriétés fondamentales des C^*-algèbres localement convexes ainsi que le théorème de structure de Michael. Notons que ce dernier constitue un outil puissant dans l'étude des C^*-algèbres localement convexes. En général, il permet de ramener l'étude aux cas des C^*-algèbres. Ce chapitre contient également les propriétés des espaces localement Hilbert et les résultats les plus significatifs de l'algèbre des opérateurs bornés sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, où $\mathcal{H}$ est un espace localement Hilbert.

I. Algèbres de Banach

Dans la suite, $(A, \|.\|)$ est une algèbre de Banach complexe avec élément unité e.

(i) Soit $a \in A$. On appelle spectre de a, noté $Sp_A(a)$, l'ensemble:

$$Sp_A(a) = \{z \in \mathbb{C} : ze - a \text{ non inversible dans } A\}.$$

(ii) Le rayon spectral de a est le nombre:

$$\rho(a) = \sup\{|z| : z \in Sp_A(a)\}.$$

Pour tout $a \in A$, $Sp_A(a)$ est un compact non vide de $\mathbb{C}$ et on a:

$$\rho(a) = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\|a^n\|} = \inf_n \|a^n\| \leq \|a\|, \text{ pour tout } a \in A.$$

(iii) Si de plus A est commutative, on appelle caractère de A, toute forme linéaire multiplicative sur A. L'ensemble des caractères non nuls de A, noté $Sp(A)$, s'appelle le spectre de Gel'fand de A. On a alors:

a) Tout caractère non nul χ est continu. De plus, $\|\chi\| = \chi(e) = 1$.
b) Le spectre de tout $x \in A$ s'exprime en fonction des caractères comme suit:

$$Sp_A(x) = \{\chi(x) : \chi \in Sp(A)\}.$$

(iiv) L'application $\mathcal{G} : a \longmapsto \widehat{a}$, dite transformation de Gel'fand, opère de A dans $\mathcal{C}(Sp(A))$, l'algèbre de Banach des fonctions complexes continues sur le compact $Sp(A)$. Elle est définie par:

$$\widehat{a}(\chi) = \chi(x), \text{ pour tout } \chi \in Sp(A).$$

L'application $\widehat{a}$ est continue sur $Sp(A)$ muni de la topologie faible induite par celle du dual topologique A' de A. De plus, la transformation de Gel'fand $\mathcal{G}$ est un morphisme d'algèbres unitaire de A dans $\mathcal{C}(Sp(A))$. De façon plus précise, on a:

1) $\|\widehat{a}\| = \rho(a) \leq \|a\|$, pour tout $a \in A$.
2) Pour tout $a \in A$, on a:

$$Sp_A(a) = \widehat{a}(Sp(A)) = \{\chi(a) : \chi \in Sp(A)\}).$$

3) Un élément a de A est inversible si, et seulement, si $\widehat{a}$ ne s'annule pas sur $Sp(A)$. Le noyau de $\mathcal{G}$ est donné par:

$$ker\mathcal{G} = \bigcap_{\chi \in Sp(A)} ker\chi.$$

C'est donc l'intersection de tous les idéaux maximaux de A. On l'appelle le radical de Jacobson de A, et on le note $Rad(A)$. Si $Rad(A) = \{0\}$, on dit que A est semi-simple. Ainsi $\mathcal{G}$ est injective si, et seulement, si A est semi-simple.

Pour plus de détails sur la théorie spectrale des algèbres de Banach, voir ([1], [5], [11], [15] et [16]).

II. C^*-algèbres

On appelle C^*-algèbre toute algèbre de Banach unitaire $(A, \|.\|)$ munie d'une involution d'algèbre $x \longmapsto x^*$ vérifiant la C^*-propriété i.e.,

$$\|x^*x\| = \|x\|^2, \text{ pour tout } x \in A.$$

Un élément $a \in A$ est dit normal si $aa^* = a^*a$. Pour tout élément normal $a \in A$, on a $\rho(a) = \|a\|$, ce qui fait partie de la puissance de la C^*-propriété. Ainsi, dans une C^*-algèbre $(A, \|.\|)$, on a:

$$\|x\| = \sqrt{\rho(x^*x)}, \text{ pour tout } x \in A.$$

Un élément $h \in A$ est dit hermitien si $h = h^*$. Pour tout élément hermitien $h \in A$, on a $Sp_A(h) \subset \mathbb{R}$. De plus, tout caractère χ de A est hermitien c'est à dire que:

$$\chi(x^*) = \overline{\chi(x)}, \text{ pour tout } x \in A.$$

Signalons également que tout isomorphisme de C^*-algèbres unitaires est une isométrie et que toutes les sous-algèbres involutives fermées d'une C^*-algèbre unitaire sont pleines. Signalons aussi que, pour tout élément normal a d'une C^*-algèbre unitaire A, l'application

$$\widehat{a} : Sp(\overline{\mathbb{C}[a, a^*]}) \longrightarrow Sp_A(a) : \chi \longmapsto \chi(a)$$

est un homéomorphisme, où $\overline{\mathbb{C}[a, a^*]}$ désigne est la sous-algèbre unitaire involutive fermée engendrée par a.

L'un des résultats les plus puissants des C^*-algèbres est donné par ce qui suit:

Théorème II.1 (Gel'fand-Naimark commutatif). Soit $(A, ||.||)$ une C^*-algèbre commutative unitaire. Alors la transformation de Gel'fand $\mathcal{G}$ est un $*$-isomorphisme isométrique de A sur $\mathcal{C}(Sp(A))$.

Preuve. Soit $\chi \in Sp(A)$. Alors, pour tout $a \in A$, on a:

$$\widehat{a^*}(\chi) = \chi(a^*) = \overline{\chi(a)} = \overline{\widehat{a}(\chi)}.$$

Ainsi la transformation de Gel'fand $\mathcal{G}$ est un $*$-homomorphisme. De plus, pour tout élément $a \in A$, on a:

$$\sup_{\chi \in Sp(A)} |\widehat{a}(\chi)| = \rho(a)$$

et que
$$\rho(a) = ||a||, \text{ pour tout élément normal } a \in A.$$
Donc $\mathcal{G}$ est une isométrie. Il s'ensuit que $\mathcal{G}(A)$ est une sous-algèbre fermée de $\mathcal{C}\,(Sp\,(A))$ qui contient les constantes. De plus, $\mathcal{G}(A)$ sépare les points de $Sp\,(A)$ et il est stable par la conjugaison. Par le théorème de Stone-Weierstrass, $\mathcal{G}(A) = \mathcal{C}\,(Sp\,(A))$.

Pour plus de détails sur la théorie des C^*-algèbres (voir ([1], [5], [7], [11], [16] et [17])).

III. Calcul fonctionnel continu

Le calcul fonctionnel holomorphe pour un élément a d'une algèbre de Banach A consiste à donner un sens à $f(a)$, où $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ est une fonction holomorphe sur un voisinage Ω de a contenant $Sp_A(a)$. De plus, l'application Θ_a de $\mathcal{H}(\Omega)$ dans A est l'unique morphisme d'algèbres telle que $\Theta_a(z) = a$, où z est l'application identité $\lambda \mapsto \lambda$ sur $Sp_A(a)$.

Dans les C^*-algèbres, on a même plus. On a le calcul fonctionnel continu pour les éléments normaux. Il consiste à donner un sens à $f(a)$, où $f \in \mathcal{C}(Sp_A\,(a)\,)$ est une fonction continue sur $Sp_A\,(a)$ et a un élément normal de la C^*-algèbre. Ce calcul fonctionnel donne naissance à une application $\varphi_a : \mathcal{C}(Sp_A\,(a)\,) \longrightarrow A$ qui est un morphisme isométrique unique tel que $\varphi_a(z) = a$, en notant $z : \lambda \mapsto \lambda$ sur $Sp_A(a)$. De plus, son image $\varphi_a\,[\mathcal{C}(Sp_A\,(a)\,)]$ est la sous-C^*-algèbre unitaire de A engendrée par a, donc composée d'éléments normaux.

Théorème III.1. (Calcul fonctionnel continu). Soit A une C^*-algèbre unitaire et a un élément normal de A. Alors il existe un unique $*$-homomorphisme continu unitaire
$$\varphi_a : \mathcal{C}(Sp_A(a)) \longrightarrow A$$
tel que $\varphi_a(z) = a$, où $z : \lambda \mapsto \lambda$ sur $Sp_A(a)$. De plus, on a:
(i) φ_a est une isométrie.
(ii) Pour toute $f \in \mathcal{C}(Sp_A\,(a))$, on a
$$a\varphi_a(f) = \varphi_a(f)a.$$
(iii) L'image $\varphi_a\,[\mathcal{C}(Sp_A\,(a)\,)]$, de $\mathcal{C}(Sp_A\,(a)\,)$ par φ_a, est la sous C^*-algèbre commutative engendrée par a.

Preuve. Posons B la sous-algèbre, de A, unitaire involutive fermée engendrée par a. Alors B est une sous- C^*-algèbre commutative et unitaire de A. Donc

$$Sp_A(a) = Sp_B(a).$$

Montrons d'abord l'existence de φ_a. On a déja vu que l'application:

$$\widehat{a} : Sp(B) \longrightarrow Sp_A(a) : \chi \longmapsto \chi(a)$$

est un homéomorphisme et que l'application:

$$\mathcal{G} : B \longrightarrow \mathcal{C}(Sp(B)) : a \longmapsto \hat{a}$$

est un isomorphisme isométrique. Pour toute $f \in \mathcal{C}(Sp_A(a))$, on a $f \circ \hat{a} \in \mathcal{C}(Sp_A(a))$, ce qui donne naissance à l'isomorphisme isométrique suivant:

$$\theta : \mathcal{C}(Sp_A(a)) \longrightarrow \mathcal{C}(Sp(B)) : a \longmapsto f \circ \hat{a}.$$

En notant i l'injection canonique de $B \longrightarrow A$, on voit que le morphisme d'algèbres

$$\varphi_a = i \circ \mathcal{G}^{-1} \circ \theta$$

convient. Ainsi

$$\varphi_a : \mathcal{C}(Sp_{\mathcal{A}}(a)) \longrightarrow A : f \longmapsto \varphi_a(f).$$

On vérifie facilement que φ_a est un morphisme d'algèbres. Montrons que φ_a est involutif. Soient $f \in \mathcal{C}(Sp_A(a))$. Alors, on a:

$$\varphi_a(\overline{f}) = i \circ \mathcal{G}^{-1}(\bar{f} \circ \hat{a}) = \mathcal{G}^{-1}(\overline{f \circ} \hat{a}) = \left(i \circ \mathcal{G}^{-1}(f \circ \hat{a})\right)^* = \varphi_a(f)^*,$$

ce qui montre que φ_a est involutif. Ensuite, montrons que φ_a est une isométrie. Soit $f \in \mathcal{C}(Sp_A(a))$. On a:

$$\begin{aligned} \|\varphi_a(f)\| &= i \circ \mathcal{G}^{-1}(f \circ \hat{a}) = \|f \circ \hat{a}\|_\infty \\ &= \sup_{\chi \in \mathcal{S}p(A)} |f(\chi(a))| \\ &= \sup_{\lambda \in Sp_A(a)} |f(\lambda)| \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|\varphi_a(f)\| = \|f\|_\infty \,, \text{ pour toute } f \in \mathcal{C}(Sp_A(a), \text{ où } \|f\|_\infty = \sup_{\lambda \in Sp_A(a)} |f(\lambda)| \,.$$

On a donc prouvé que φ_a est un morphisme involutif et isométrique de $\mathcal{C}(Sp_A(a))$ sur A. Montrons maintenant que $\varphi_a(\mathbf{1}) = e$ et que $\varphi_a(\mathbf{z}) = a$, où

$\mathbf{1}$ et $\mathbf{z}$ sont les fonctions définies sur $Sp_A(a)$, par: $\mathbf{1} : \lambda \longmapsto 1$ et $\mathbf{z} : \lambda \longmapsto \lambda$.
Tout d'abord , pour tout $\chi \in Sp(A)$, on a:

$$\mathcal{G}(e)\,(\chi) = \widehat{e}\,(\chi) = \chi(e) = 1.$$

Donc

$$\varphi_a(\mathbf{1}) = \mathcal{G}^{-1}(\mathbf{1} \circ \widehat{a}) = \mathcal{G}^{-1}(\mathbf{1}) = e$$

et

$$\varphi_a(\mathbf{z}) = \mathcal{G}^{-1}(\mathbf{z} \circ \hat{a}) = \mathcal{G}^{-1}(\hat{a}) = a.$$

Pour finir, il reste à montrer l'unicité de φ_a. Soit $\psi : \mathcal{C}(Sp_A(a)) \longrightarrow A$ un autre morphisme d'algèbres involutif tel que:

$$\psi(\mathbf{1}) = e \text{ et } \psi(\mathbf{z}) = a.$$

En tenant compte du fait que ψ et ϕ sont des morphismes involutifs, on obtient:

$$\psi(P\,(z, \overline{z})) = \varphi_a(P\,(z, \overline{z})\,,\ \text{pour tout polynôme } P \in \mathbb{C}[X, Y].$$

On en déduit, par le théorème de Stone-Weierstrass, que:

$$\psi(f) = \varphi_a\,(f)\,,\ \text{pour tout } f \in \mathcal{C}(Sp_A(a)).$$

Par conséquent $\psi = \varphi_a$.

Définition III.2. Soit A une C^*-algèbre unitaire, a un élément normal de A et f une fonction continue sur $Sp_A(a)$. L'élément $\varphi_a\,(f)$ du théorème III.1 se note $f(a)$.

Cette notation permet de respecter le symbolisme classique. Ainsi, par exemple, le fait que φ_a est un morphisme involutif isométrique se traduit par ce qui suit, où $f, g \in \mathcal{C}(Sp_A(a))$:

$$\begin{array}{rcl} (f+g)\,(a) & = & f(a) + g(a) \\ (fg)\,(a) & = & f(a)g(a), \\ \overline{f}(a) & = & f(a)^* \\ \|f(a)\| & = & \|f\| \end{array}$$

Voici maitenant l'une des propriétés les plus puissantes du calcul fonctionnel continu.

Théorème III.3. (Spectral mapping theorem). Soit A et a vérifiant les hypothèses du théorème III.1. Pour toute $f \in \mathcal{C}(Sp_A(a))$, on a:

$$Sp_A(f(a)) = f(Sp_A(a)).$$

Preuve: En tenant compte du fait que la sous-algèbre unitaire involutive fermée B engendrée par a est pleine dans A, on voit que:

$$Sp_A(f(a)) = Sp_B(f(a)) = \{\chi\,(f(a)) : \chi \in Sp(B)\}$$

et

$$f\,(Sp_A(a)) = \{f(\chi\,(a)) : \chi \in Sp(B)\}\,.$$

Comme, pour tout $\chi \in Sp(B)$, $\chi\,(f(a)) = f(\chi\,(a))$, on obtient:

$$Sp_A(f(a)) = f(Sp_A(a).$$

Remarque III.4. Les fonctions holomorphes sont des fonctions continues particulières. Il est donc naturel de se demander si l'expression de $\Theta_a(f)$ donnée par le calcul fonctionnel holomorphe (cf. [5]) coïncide avec $\varphi_a(f)$ donnée par le calcul fonctionnel continu. La réponse est positive. En effet, soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, où Ω est un ouvert contenant $Sp_A\,(a)$. Alors $f/_{Sp_A(a)} \in \mathcal{C}(Sp_A\,(a))$. Par le calcul fonctionnel continu, on a:

$$\varphi_a(f) = i \circ \mathcal{G}^{-1}\,(f \circ \widehat{a})\,,$$

où $i : B \longmapsto A$ étant l'injection canonique, B est la C^*-algèbre unitaire engendrée par a, $\mathcal{G}$ la transformation de Gel'fand et $\widehat{a}$ la transformée de Gel'fand de a. Or $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, donc

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial E} f(z')(z'e - z)^{-1}dz',$$

où E est une enveloppe domaine de Cauchy de $(Sp_A\,(a)\,, \mathbb{C})$ (cf. [5], Proposition 4 p. 29). Soit $\chi \in Sp(B)$. Alors:

$$\begin{aligned} f \circ \widehat{a}\,(\chi) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial E} f(z')(z'e - \chi(a))^{-1}dz' \\ &= \chi\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial E} f(z')(z'e - a)^{-1}dz'\right] \\ &= \chi\,(\Theta_a(a))\,. \end{aligned}$$

Ainsi $f \circ \widehat{a} = \widehat{\Theta_a(a)}$. Et comme $i \circ \mathcal{G}^{-1}\,(f \circ \widehat{a}) = \varphi_a(f)$, on a $\varphi_a(f) = \Theta_a(a)$.

Remarque III.5. Pour $A = \mathcal{L}(\mathcal{H})$, l'algèbre des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, un opérateur normal, on a:

i) $f(T)$ est un opérateur normal sur $\mathcal{H}$, pour toute $f \in \mathcal{C}(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(T))$.

ii) $\|f(T)\| = \sup\limits_{\lambda \in Sp(T))} |f(\lambda)|$, pour toute $f \in \mathcal{C}(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(T))$.

Corollaire III.6. Soient A une C^*-algèbre unitaire et a un élément normal de A. Soit $f \in \mathcal{C}(Sp_A(a))$. Alors $f(a)$ est un élément normal de A et, pour toute $g \in \mathcal{C}(Sp_A(f(a))$, on a $g(f(a)) \in A$. De plus,

$$g(f(a)) = (g \circ f)(a).$$

Preuve. On pose $b = f(a)$. Alors $gof \in \mathcal{C}(Sp_A(b))$. L'application Ψ : $g \longmapsto (g \circ f)(a)$ est un $*$-morphisme unitaire de $\mathcal{C}(Sp_A(b))$ dans A tel que

$$\Psi(\mathbf{z}) = f(a), \text{ où } \mathbf{z} : \lambda \longmapsto \lambda$$

Avec l'unicité du calcul fonctionnel continu, on obtient

$$\Psi(g) = (g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Proposition III.7. Soient A et B deux C^*-algèbres unitaires, $\theta : A \longrightarrow B$ un $*$-homomorphisme unitaire et a un élément normal de A. Alors:
(i) $f(\theta(a)) = \theta(f(a))$, pour toute $f \in \mathcal{C}(Sp_A(a)))$.
(ii) Dans le cas où θ est injective, on a:

$$Sp_B(\theta(a)) = Sp_A(a),$$

l'application θ est isométrique et $\theta(A)$ est une C^*-sous-algèbre de B.

Preuve: Montrons **(i)**. Puisque $\theta : A \to B$ un $*$-homomorphisme unitaire, on a:

$$Sp_B(\theta(a)) \subseteq Sp_A(a).$$

Posons $C = \mathcal{C}(Sp_A(a))$. Alors $\theta \circ \varphi_a$ et la restriction $\varphi_{\theta(a)}$ à C sont deux $*$-homomorphismes de C dans B qui coïncident sur l'algèbre engendrée par $\{\mathbf{1}, \mathbf{z}, \overline{\mathbf{z}}\}$, et donc, par l'unicité du calcul fonctionnel continu, on a: $\theta \circ \varphi_a = \varphi_{\theta(a)}$ sur C. Ainsi

$$f(\theta(a)) = \theta(f(a)), \text{ pour toute } f \in \mathcal{C}(Sp_A(a))).$$

D'où le résultat. Montrons maintenant **(ii)**. Tout d'abord, on a:

$$Sp_B\left(\theta\left(a\right)\right) \subset Sp_A\left(a\right).$$

Pour l'autre inclusion, supposons par l'absurde qu'il existe $\lambda \in Sp_A(a) \backslash Sp_B(\theta(a))$. Soit $f \in \mathcal{C}\left(Sp_A(a)\right)$ tel que $f(\lambda) = 1$ et $f/_{Sp_B(\theta(a))} = 0$. Alors $f(a) \neq 0$, mais $\theta(f(a)) = 0$, ce qui contredit le fait que θ est injective. Ainsi,

$$Sp_B\left(\theta(a)\right) = Sp_A\left(a\right).$$

Pour chaque $b \in A$, l'élément b^*b est normal. Il en résulte, d'après ce qui précède, que:

$$\rho_B\left(\left(\theta\left(b\right)\right)^*\left(\theta\left(b\right)\right)\right) = \rho_A\left(b^*b\right).$$

Donc

$$||\left(\theta\left(b\right)\right)^*\left(\theta\left(b\right)\right)|| = ||b^*b||.$$

D'où

$$||\left(\theta\left(b\right)\right)|| = ||b||.$$

Alors θ est une isométrie. Il est alors immédiat que $\theta(A)$ est une sous-C^*-algèbre de B.

Soit a un élément d'une C^*-algèbre A. On dit que a est positif et on note $a \geq 0$ si a est hermitien et si son spectre est inclu dans $\mathbb{R}^+$. L'ensemble des éléments positifs de la C^*-algèbre A est noté A^+. On écrit $a \geq b$, pour deux éléments hermitiens a, b de A si $a - b \geq 0$.

Dans une C^*-algèbre, tout élément positif admet une unique racine carrée hermitienne comme le montre ce qui suit:

Proposition III.8. Soient $(A, \|.\|)$ une C^*-algèbre et a un élément hermitien de A. Alors a est positif si, et seulement, s'il existe un unique élément hermitien b de A tel que $a = b^2$.

Preuve: Supposons que $a = b^2$ pour un certain élément hermitien b. Alors a est hermitien et on a:

$$Sp_A(a) = \{\lambda^2 : \lambda \in Sp_A(b)\}.$$

Donc $a \geq 0$. Inversement, supposons que $a \geq 0$. Alors la fonction racine carrée: $z^{\frac{1}{2}} : \lambda \longmapsto \lambda^{\frac{1}{2}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$. Donc $z^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{C}(Sp_A(a))$. Par le calcul fonctionnel continu, l'élément $b = z^{\frac{1}{2}}(a)$ est hermitien et satisfait $b^2 = a$. Notons également que:

$$Sp_A(b) = z^{\frac{1}{2}}(Sp_A(a)) \subset \mathbb{R}^+.$$

D'où $b \geq 0$. Montrons l'unicité de b. Soit c un autre élément hermitien tel que $c^2 = a$. Alors c commute avec a, donc aussi avec b. Soit B la sous-C^*-algèbre commutative de A, engendrée par b et c. Alors on a:

$$Sp_B(x) = Sp_A(x), \text{ pour tout } x \in B.$$

En appliquant le théorème de Gel'fand-Naimark dans l'algèbre B, on voit que $\widehat{c}$ et $\widehat{b}$ sont deux racines carées de $\widehat{a}$ dans $\mathcal{C}(Sp(B))$. Il s'ensuit alors que $\widehat{b} = \widehat{c}$, avec $b, c \in A^+$ et $\widehat{c}, \widehat{b} \in \mathcal{C}(Sp(B))$. Donc $b = c$. D'où l'unicité de b.

Pour plus de détails sur le calcul fonctionnel continu, voir ([6], [7] et [16]).

IV. Fonctions de Baire

Soit K un espace compact non vide. Rappelons qu'une partie S de K est un G_δ si S est une intersection dénombrable d'ouverts de K. Rappelons également que la tribu de Baire ([6]) sur K, notée $ba(K)$, est la tribu engendrée par les compacts G_δ de K. Les éléments de $ba(K)$ sont dits Bairiens.

Remarque IV.1. En général $ba(K) \subset bo(K)$, où $bo(K)$ désigne la tribu de Borel (tribu engendrée par la topologie de K).

Dans le cas métrisable, $bo(K) \subset ba(K)$. En fait, tout fermé de K, et donc tout compact de K, est un G_δ comme le montre ce qui suit:

Proposition IV.2. Soit (K, d) un compact métrisable. Alors $bo(K) \subset ba(K)$ et donc $ba(K) = bo(K)$.

Preuve: Soit S un fermé de K. Donc S est compact. Posons:

$$G_n = \left\{ x \in K : d(x, S) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Alors G_n est un ouvert et $S = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} G_n$. Donc S est un G_δ.

Une classe $\mathcal{M}$ de fonctions est dite uniformément b-stable (*u.b-s.* en abrégé) si pour toute suite uniformément bornée $(f_n)_n \subset \mathcal{M}$, convergeant simplement vers une fonction f, on a: $f \in \mathcal{M}$. Soit $\mathcal{C}(K)$ l'algèbre des fonctions continues sur K. Notons par $Ba(K)$ la classe *u.b-s.* engendrée par $\mathcal{C}(K)$. Une fonction $f \in Ba(K)$ est dite de Baire ou bairienne. Il est clair que $Ba(K)$ est une sous-C^*-algèbre de $B(K)$, la C^*-algèbre (pour l'involution $f^* = \overline{f}$) de toutes les fonctions bornées sur K. Par ([6], Proposition 2.1.5, p.

27), $Ba(K) \subset B(K)$.

Signalons que $Ba(K)$ est sous-C^*-algèbre de $B(K)$ (donc pleine) de la C^*-algèbre $B(K)$.

Définition IV.3. ([6], Définition 2.1.6, p.28). On dit qu'une fonction $f : K \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite Baire-mesurable si elle est mesurable lorsqu'on place sur K la tribu de Baire $ba(K)$ et sur $\mathbb{C}$ la tribu borélienne c'est à dire que la fonction:

$$f : (K, ba(K)) \longrightarrow (\mathbb{C}, bo(\mathbb{C}))$$

est mesurable.

Remarquons que pour qu'une fonction $f : (K, ba(K)) \longrightarrow (\mathbb{C}, bo(\mathbb{C})$ soit Baire-mesurable, il suffit que l'on ait: $f^{-1}(S) \in ba(K)$, pour tout compact S de $\mathbb{C}$.

Soit $B_m(K)$ l'ensemble des fonctions Baire-mesurables sur K. Nous allons voir que $\mathcal{C}(K) \subset B_m(K)$. De plus, $B_m(K)$ est une classe *u.b-s.* comme le montre ce qui suit:

Proposition IV.4. $B_m(K)$ est une classe *u.b-s.* contenant $\mathcal{C}(K)$.

Preuve: Remarquons tout d'abord, que tout compact de $\mathbb{C}$ est un G_δ. Soit $f \in \mathcal{C}(K)$. Soit S un compact de $\mathbb{C}$. Alors S est un G_δ et $f^{-1}(S)$ est un fermé, donc un compact de K qui est aussi un G_δ. Donc $f^{-1}(S) \in ba(K)$, et ceci pour tout compact S de $\mathbb{C}$. Ainsi $f \in B_m(K)$.

Remarque IV.5. Par la proposition IV.4, on a $Ba(K) \subset B_m(K)$. Par ailleurs, $Ba(K)$ est sous-C^*-algèbre de $B(K)$ de $B(K)$. Donc

$$Ba(K) \subset B_m(K) \cap B(K).$$

Plus précisement, on a:

Proposition IV.6 ([6], Proposition 2.1.7, p. 28). Soit K un espace compact. On a:
a) Pour une partie S de K, on a les équivalences suivantes:
i) $A \in ba(S)$, **ii)** $\chi_A \in Ba(K)$,
iii) $\chi_A \in B_m(K)$, où χ_A désigne la fonction indicatrice de A.
b) Les fonctions de Baire sont exactement les fonction mesurables et bonées.

Proposition IV.7 Soit V un sous ensemble de $Ba(K)$ vérifiant les assertions suivantes:
i) $C(K) \subset V$, **ii)** Pour tout suite $(f_n) \subset V$ tel que $\sup_{n \in \mathbb{N}} ||f_n||_\infty < \infty$ et, pour tout $t \in K$, $f(t) = \lim_{\infty} f_n(t)$ existe, implique que $f \in V$. Alors $V = Ba(K)$.

Preuve: Par hypothèse, on a $V \subset Ba(K)$. Ensuite les deux assertions **i)** et **ii)** montrent que V est une classe *u.b-s.* contenant $\mathcal{C}(K)$.Comme $Ba(K)$ est la plus petite classe *u.b-s.* contenant $\mathcal{C}(K)$, on a $Ba(K) \subset V$. D'où l'égalité $V = Ba(K)$.

Pour plus de détails concernant les propriétés fondamentales des fonctions de Baire voir ([6] et [4]).

V. Calcul fonctionnel de Baire pour un opérateur normal sur un espace de Hilbert.

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ l'algèbre des opérateurs bornés sur $\mathcal{H}$ et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur normal. Le calcul fonctionnel continu donne naissance à un unique $*$-morphisme continu

$$\varphi_T : \mathcal{C}\left(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(T)\right) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

involutif qui est aussi une isométrie. De plus, ce calcul fonctionnel continu vérifie la formule de l'application spectrale "Spectral mapping theorem" à savoir que:

$$f(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(T)) = Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(f(T)), \text{ pour toute } f \in \mathcal{C}(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(T)).$$

Dans cette section, nous allons voir que φ_T se prolonge à $Ba(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(T))$. Soit $x, y \in \mathcal{H}$. Alors l'application $\phi_{x,y} : \mathcal{C}\left(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(T)\right) \longrightarrow \mathbb{C}$ definie par:

$$\phi_{x,y}(f) = \langle \varphi_T(f)(x), y \rangle \text{ , pour toute } f \in \mathcal{C}\left(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(T)\right)$$

est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}\left(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(T)\right)$. Par ([18], théorème 6.19, p.131), il existe alors une mesure de Radon complexe $\mu_{x,y}$ telle que:

$$\phi_{x,y}(f) = \int_{Sp(T)} f d\mu_{x,y}, \text{ pour tout } f \in \mathcal{C}(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(T)).$$

Soit maintenant f une fonction de Baire sur K. Alors f est Baire-mesurable et bornée et donc $\mu_{x,y}$-integrable. Ceci nous permet de prolonger φ_T à $Ba(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(T))$ en un $*$-homomorphisme:

$$\Psi_T : Ba(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(T)) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

qu'on appelle un calcul fonctionnel de Baire pour l'opérateur T donné par le résultat suivant:

Théorème V.1. ([6], corollaire 2.2.9, p.36). Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, T un opérateur normal sur $\mathcal{H}$ et soit

$$\varphi_T : \mathcal{C}\left[Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(T)\right] \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

le morphisme involutif, unitaire et continu qui définit le calcul fonctionnel continu pour l'opérateur T. Alors φ_T se prolonge en un morphisme involutif

$$\Psi_T : Ba(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(T)) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

tel que $\|\Psi_T\| = \|\varphi_T\|$. De plus, Ψ_T est déterminé par les égalités suivantes suivantes:

1) Ψ_T est déterminé par l'égalité suivante:

$$\langle \Psi_T(f)(x), y\rangle = \int_{Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(T)} f d\mu_{x,y}, \text{ pour toute } f \in Ba\left(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(T)\right), \ x, y \in \mathcal{H}.$$

2) Ψ_T est unique sous la condition suivante: Pour toute suite $(f_n)_n \in Ba(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(T))$, telle que $|f_n| \leq 1$ et $f_n \longrightarrow 0$, simplement, on a $\Psi_T(f_n)x \longrightarrow 0$, pour la topologie simple-forte de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.
3) Pour tout $x \in \mathcal{H}$, la mesure de Radon $\mu_{x,x}$ est positive et:

$$\|\Psi_T(f)x\|^2 = \int |f|^2 d\mu_{x,x}.$$

4) Pour toute $f \in Ba(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(T))$, l'opérateur $\Psi_T(f)$ est normal.
5) Ψ_T vérifie une forme de "Spectral mapping theorem" à savoir:

$$Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(\Psi_T(f)) \subset \overline{f\left(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(T)\right)}, \text{ pour toute } f \in Ba(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(T)).$$

Comme pour le calcul fonctionnel continu, on utilise aussi la notation $f(T)$ pour $\Psi_T(f)$ si $f \in Ba\left(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(T)\right)$.

Pour plus de détails sur le calcul fonctionnel de Baire pour un opérateur normal sur un espace de Hilbert, voir ([6] et [4]).

VI. C^*-algèbre localement convexe

Une algèbre A est dite localement convexe (*a.l.c.* en abrégé) si elle est munie d'une topologie τ d'espace vectoriel localement convexe pour laquelle le produit est séparement continu, c'est à dire que, pour tout $y \in A$, les applications de A dans A données par $x \longmapsto xy$ et $x \longmapsto yx$ sont continues. Si l'application $A \times A \longrightarrow A$, $(x, y) \longmapsto xy$ est continue, on dit que A est à produit continu.

Soit (A, τ) une *a.l.c.* Une famille de semi-normes $(p_i)_{i \in I}$ sur A est dite sous-multiplicative si, et seulement si, pour tout $i \in I$,

$$p_i\,(xy) \leq p_i(x)p_i(y), \text{ pour tous } x, y \in A.$$

L'algèbre (A, τ) est dite m-convexe ou multiplicativement convexe (*a.l.m.c.* en abrégé) si, et seulement si, sa topologie peut être définie par une famille de semi-normes sous-multiplicatives. Une *a.l.m.c.* complète est dite algèbre d'Arens-Michael.

Dans toute la suite, on suppose que l'ensemble I est filtrant croissant. Soit $\left(A, (p_i)_{i \in I}\right)$ une algèbre d'Arens-Michael. Posons $N_i = \ker(p_i)$. Alors N_i est un idéal fermé de $\left(A, (p_j)_{j \in I}\right)$. Soit $A_i = (\widehat{A/_{N_i}, \overline{p_i}})$ la complétée de l'algèbre normée $(A/_{N_i}, \overline{p_i})$, où

$$\overline{p_i}\,(\overline{x}) = \inf_{u \in \overline{x}} p_i\,(u)\,.$$

Comme $|p_i\,(u) - p_i\,(v)| \leq p_i\,(u - v)$, on a $\overline{p_i}\,(\overline{x}) = p_i\,(u)$, pour tout $u \in \overline{x}$ et donc

$$\overline{p_i}\,(\overline{x}) = p_i\,(x)\,.$$

Soit maintenant

$$\pi_i : (A, p_i) \longrightarrow A_i : x \longmapsto \pi_i(x) = \overline{x}.$$

Alors, on a:

$$\overline{p_i}\,(\pi_i(x)) = p_i\,(x)\,, \text{ pour tout } i \in I \text{ et tout } x \in A.$$

Posons $\widetilde{A} = \prod\limits_i A_i$ avec les opérations usuelles et la topologie produit. Alors l'application

$$\pi : A \longrightarrow \pi(A) \subset \prod_i A_i : x \longrightarrow \pi(x) = (\pi_i(x))_i$$

est un morphisme d'algèbres. De plus π est injectif car

$$\begin{aligned}\pi(x) &= \pi(x') \Longleftrightarrow \pi_i(x) = \pi_i(x'), \text{ pour tout } i \\ &\Longleftrightarrow \pi_i(x-x') = 0, \text{ pour tout } i \\ &\Longleftrightarrow p_i(x-x') = 0, \text{ pour tout } i \\ &\Longleftrightarrow x = x'.\end{aligned}$$

Par ailleurs, la continuité de chaque π_i et le fait que $\overline{p_i}\left(\pi_i(x)\right) = p_i\left(x\right)$ montre que π est bicontinue. Ainsi l'algèbre A est homéomorphe à une sous-algèbre d'un produit d'algèbres de Banach. Donc la sous-algèbre en question est fermée.

Rappelons également que, par un résultat d'Arens (cf. [13]), toute algèbre d'Arens-Michael $\left(A, (p_i)_{i\in I}\right)$ est isomorphe à une limite projective d'algèbres de Banach:

$$A = \underset{\longleftarrow}{\lim} A_i$$

En effet

$$\pi\left(A\right) = \left[\left(\pi_i(x)\right)_i\right]_{x\in A} \subset \underset{\longleftarrow}{\lim} A_i = \widetilde{A}.$$

Comme A est homéomorphe à $\pi\left(A\right)$, on a $A \simeq \pi\left(A\right) \subset \underset{\longleftarrow}{\lim} A_i$. Par ailleurs, $A/_{N_i}$ est dense dans A_i, pour tout i. Donc $A \simeq \pi\left(A\right)$ est dense dans $\widetilde{A}$. Comme $\pi\left(A\right)$ est fermée, on a $A \simeq \underset{\longleftarrow}{\lim} A_i$. Ainsi, dans une algèbre d'Arens-Michael $\left(A, (p_i)_{i\in I}\right)$, on a, pour tout $x = (x_i)_{i\in I} \in A$,

$$Sp_A(x) = \bigcup_i Sp_{A_i}\left(x_i\right) \quad \text{et} \quad \rho_A(x) = \sup_i \rho_{A_i}\left(x_i\right).$$

Soit maintenant $\left(A, (p_i)_{i\in I}\right)$ une algèbre d'Arens-Michael munie d'une involution d'algèbre $x \longmapsto x^*$ telle que, pour tout $i \in I$, on a:

$$p_i\left(xx^*\right) = p_i\left(x\right)^2, \text{ pour tout } x \in A.$$

Alors $\overline{p_i}\left(\overline{xx^*}\right) = \overline{p_i}\left(\overline{x}\right)^2$, pour tout $\overline{x} \in A/_{N_i}$. De plus, par un résultat d'Apostol ([2]) $(A/_{N_i}, \overline{p_i})$ est une C^*-algèbre. Donc $A_i = (A/_{N_i}, \overline{p_i})$. Il s'ensuit alors que $\left(A, (p_i)_{i\in I}\right)$ est isomorphe à une limite projective de C^*-algèbres:

$$A = \underset{\longleftarrow}{\lim}\left(A/_{N_i}, \overline{p_i}\right).$$

Pour plus de détails sur les *a.l.m.c.*, voir ([13]). Concernant les C^*-*a.l.m.c.*, voir ([9] et [10]).

VII. L'algèbre $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, où $\mathcal{H}$ est un espace localement Hilbert

Soit Λ un ensemble dirigé et $(\mathcal{H}_\lambda, < ., . >_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'espaces de Hilbert tels que, pour tous $\lambda \leq \upsilon$, on a:

$$\mathcal{H}_\lambda \subset \mathcal{H}_\upsilon \text{ et } < ., . >_\lambda = < ., . >_{\upsilon/\mathcal{H}_\lambda} .$$

Soit $i_{\upsilon,\lambda} : \mathcal{H}_\lambda \longrightarrow \mathcal{H}_\upsilon$ l'injection canonique de $\mathcal{H}_\lambda$ dans $\mathcal{H}_\upsilon$. Il s'ensuit que la famille $(\mathcal{H}_\lambda, i_{\upsilon,\lambda})$, $\lambda \leq \upsilon$, où $\lambda, \upsilon \in \Lambda$, est un système inductif d'espaces de Hilbert. Posons:

$$\mathcal{H} = \varinjlim \mathcal{H}_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{H}_\lambda.$$

On munit $\mathcal{H}$ de la topologie limite inductive. C'est la topologie localement convexe la plus fine rendant continue les injections naturelles:

$$i_\lambda : \mathcal{H}_\lambda \longrightarrow \mathcal{H},\ \lambda \in \Lambda.$$

L'espace $\mathcal{H}$ muni de cette topologie est appelé espace localement Hilbert. Signalons que, dans $\mathcal{H}$, une partie X est fermée, si et seulement, si $X = \mathcal{H}$ ou s'il existe $\alpha \in \Lambda$ tel que X soit un sous-ensemble fermé dans $\mathcal{H}_\alpha$ ([10]).

Sur $\mathcal{H}$, on définit un produit scalaire canonique, noté $< ., . >_\mathcal{H}$, en posant:

$$< h, k >_\mathcal{H} = < h, k >_{\mathcal{H}_\lambda},$$

où $\lambda \in \Lambda$ tel que $h, k \in \mathcal{H}_\lambda$. Ce produit scalaire est bien défini. Ainsi, l'application $\|.\|_\mathcal{H}$ définie par:

$$\|h\|_\mathcal{H} = \sqrt{< h, h >_\mathcal{H}}, \text{ pour tout } h \in \mathcal{H},$$

est une norme sur $\mathcal{H}$. Comme, pour tout $\lambda \in \Lambda$, les injections naturelles

$$i_\lambda : (\mathcal{H}_\lambda, < ., . >_\mathcal{H}) \longrightarrow (\mathcal{H}, < ., . >_\mathcal{H})$$

sont des isométries, la topologie de la norme sur $\mathcal{H}$ est moins fine que la topologie limite inductive de $\mathcal{H}$. Et par suite, la topologie limite inductive de $\mathcal{H}$ est séparée.

L'espace $(\mathcal{H}, < ., . >_\mathcal{H})$ est localement Hilbert. Son produit scalaire $< ., . >_\mathcal{H}$ définit une structure d'espace préhilbertien non complet et donc non de Hilbert comme le montre l'exemple suivant:

Exemple VII.1. Soit $\mathcal{H}_n = \{x = (x_k)_k \in \mathbb{C}^\mathbb{N} : x_k = 0, \text{ pour tout } k \geq n\}$.

Alors $(\mathcal{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système inductif stricte d'espaces de Hilbert. De plus sa limite inductive stricte:

$$\mathcal{H} = \varinjlim \mathcal{H}_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_n = \left\{x = (x_k)_k \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : supp\,(x) < \infty\right\}.$$

Soit $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}$ l'espace vectoriel complexe des suites complexes $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2$ est convergente. Alors le produit scalaire sur $\mathcal{H}$ est celui induit par celui de $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}$ i.e.;

$$< .,. >_{\mathcal{H}} = < .,. >_{\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}/\mathcal{H}}.$$

De plus $\widehat{\mathcal{H}} = \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}$, où $\widehat{\mathcal{H}}$ est le complété de $\mathcal{H}$. Il s'ensuit que l'espace préhilbertien $(\mathcal{H}, < .,. >_{\mathcal{H}})$ n'est pas un espace complet et donc non de Hilbert.

Une autre topologie sur $\mathcal{H}$ est la topologie faible. Elle est donnée par la famille de semi-normes $(|.|_k)_{k\in\mathbb{N}}$, où

$$|h|_k = |< h, h >_{\mathcal{H}}|\,, \text{ pour tout } h \in \mathcal{H}.$$

Cette topologie est également séparée.

Un espace localement Hilbert n'est pas nécessairement un espace de Hilbert. L'exemple suivant est un espace localement Hilbert qui ne peut être muni d'aucune structure d'espace de Hilbert:

Exemple VII.2. ([9], (ii), p. 108). Soit $(\mathcal{H}_n, < .,. >_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'espaces de Hilbert telle que:

$$< .,. >_n = < .,. >_{m/\mathcal{H}_n}\,, \text{ pour tout } n \leq m.$$

Alors l'espace localement Hilbert $\mathcal{H} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_n$ est une limite inductive stricte d'espaces de Banach. C'est donc un espace $L.F.$, c'est à dire $\mathcal{H}$ est une limite inductive stricte d'espaces de Fréchet. Par un résultat de Kôthe ([13], pp. 223. 225), $\mathcal{H}$ est un espace complet. D'autre part, on a un produit scalaire sur $\mathcal{H}$ dont la topologie de la norme associée est moins fine que la topologie de la limite inductive stricte de $\mathcal{H}$. Soit maintenant $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de C^*-algèbres telle que la suite précédente d'espaces de Hilbert $(\mathcal{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est exactement constituée des espaces de Hilbert pour lesquels chaque A_n est isométriquement isomorphe à une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

(théorème de Gel'fand-Naimark). Le produit cartésien $B = \prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$, muni de la topologie produit, est une C^*-*a.l.m.c.* de Fréchet ([9], Example 7. 6(2)), qui n'est pas une C^*-algèbre ([9], Remark 4. 27(1) et [13], p. 150, (7)). De plus, B s'injecte topologiquement dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, avec $\mathcal{H} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_n$. D'où, $\mathcal{H}$ n'est pas un espace de Hilbert.

Soit maintenant $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)$, pour tout $\lambda \in \Lambda$, la C^*-algèbre des opérateurs bornés sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\lambda$. Soit $\lambda, \upsilon \in \Lambda$ tel que $\lambda \leq \upsilon$, $T_\lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)$ et $T_\upsilon \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\upsilon)$. Alors, pour tous $\lambda, \upsilon \in \Lambda$ tel que $\lambda \leq \upsilon$, on a:

$$\left(T_{\upsilon/\mathcal{H}_\lambda} = T_\lambda\right) \Longleftrightarrow i_{\upsilon,\lambda} \circ T_\upsilon = T_\lambda \circ i_{\upsilon,\lambda}.$$

Ainsi, on a une unique application continue $T = \varinjlim T_\lambda : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ telle que: $T_{/\mathcal{H}_\lambda} = T_\lambda$, pour tout $\lambda \in \Lambda$. On définit donc l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ suivant:

$$\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \left\{T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} : T \text{ linéaire continue} : T = \varinjlim T_\lambda,\ T_\lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda),\ \lambda \in \Lambda\right\}$$

On vérifie facilement que $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est une algèbre complexe unitaire. Pour $T = \varinjlim T_\lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, soit T^*_λ l'adjoint T^*_λ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$. Soit $\lambda, \upsilon \in \Lambda$ tel que $\lambda \leq \upsilon$. Alors, pour tous $x, y \in \mathcal{H}_\lambda$, on a :

$$< T^*_\upsilon(x), y >_\upsilon = < x, T_\upsilon(y) >_\upsilon = < x, T_\lambda(y) >_\lambda$$

et

$$< x, T_\lambda(y) >_\lambda = < T^*_\lambda(x), y >_\lambda = < T^*_\lambda(x), y >_\upsilon,$$

où

$$T^*_{\upsilon/\mathcal{H}_\lambda} = T^*_\lambda, \text{ pour tout } \lambda \leq \upsilon \text{ dans } \Lambda.$$

Ceci nous permet de définir l'adjoint T^* de T par:

$$T^* = \varinjlim T^*_\lambda, \text{ tel que } T^*_{/\mathcal{H}_\lambda} = T^*_\lambda, \text{ pour tout } \lambda \in \Lambda.$$

Ainsi on a une involution d'algèbre $T \longmapsto T^*$ sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Soit maintenant $\|.\|_\lambda$ la C^*-norme de la C^*-algèbre $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)$:

$$\|S\|_\lambda = \sup\left\{\|S(x)\|_\lambda : \|x\|_\lambda \leq 1,\ x \in \mathcal{H}_\lambda\right\}.$$

Alors la fonction:

$$p_\lambda(T) = \|T_\lambda\|_\lambda, \text{ pour tout } T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),\ \lambda \in \Lambda.$$

est une C^*-semi-norme sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Soit τ la topologie, sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, définie par la famille de semi-normes $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Alors, on a ce qui suit:

Proposition VII.3. ([9], p.107)**.** L'algèbre $\left(\mathcal{L}(\mathcal{H}), (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\right)$ est une C^*-*a.l.m.c.*

Remarques VII.4. 1) Pour tout $\lambda \in \Lambda$, posons:

$$\mathcal{L}(\mathcal{H})_\lambda = \mathcal{L}(\mathcal{H})/_{N_\lambda}, \text{ où } N_\lambda = \ker p_\lambda$$

et

$$\left\|\overline{T}\right\|_\lambda = p_\lambda(T), \text{ pour tout } \overline{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_\lambda .$$

Alors, d'après ([2]), $\left(\mathcal{L}(\mathcal{H})_\lambda, \|.\|_\lambda\right)$ est complet. Et par suite:

$$\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \varprojlim \left(\mathcal{L}(\mathcal{H})_\lambda, \|.\|_\lambda\right).$$

2) Par la proposition 2.3. p. 62 de [8], l'algèbre $\left(\mathcal{L}(\mathcal{H})_\lambda, \|.\|_\lambda\right)$ est isométriquement isomorphe à une sous-algèbre involutive fermée de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)$, et ceci pour tout $\lambda \in \Lambda$.

Remarque VII.5. Dans ([9], Remark (i), p.107-108), il est montré que:

$$\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \varprojlim \mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda), \; \lambda \in \Lambda$$

par un $*$-isomorphisme topologique. Ce résultat est incorrect comme le montre l'exemple 2.4, p. 62-63 de [8].

Pour plus de détails sur les espaces localement Hilbert, voir ([3], [7] et [10]. Concernant l'algèbre $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, où $\mathcal{H}$ est un espace localement Hilbert, voir ([8], [9] et [10]).

Références

[**1**] Aupetit, B.: Propriétés Spectrales des Algèbres de Banach, Lecture Notes in Mathematics 735, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1979.

[**2**] Apostol, C.: b^*-algebras and their representation. J. London Math. Soc. (2) 3 (1971), 30-38.

[**3**] Aurelian, G.: On locally Hilbert spaces. Opuscula Math. 36, no. 6 (2016), 735747.

[**4**] Allan, G. R.: Introduction to Banach spaces and algebras. Oxford Graduate Texts in Mathematics, 20. Oxford University Press, Oxford (2011)

[**5**] Bonsall, F. F., Duncan. J.: Numerical Ranges, II, Cambridge University Press, 1973.

[**6**] Buchwalter, H., Tarral, D.: Théorie spectrale. Publ. Dép. Math. (Lyon) (N.S.) (1982).

[**7**] Dixmier, J.: Les C^*-algèbres et leurs représentations. North-Holland Publishing Company. Amsterdam. New York-Oxford (1977).

[**8**] Dinesh J. Karia and Yogita M. Parmar: Operators on locally Hilbert space. Proceedings of the International Conference on Geometric Function Theory and its Applications (ICGFTA-2014) Editors: B. Bhowmik, S. Ponnusamy and O. Roth. J. Analysis V. 23 (2015), 59-73.

[**9**] Fragouloupoulou, M.: Topological algebras with involution. North-Holland Mathematics Studies, 200. Elsevier Sience B.V., Amsterdam, 2005.

[**10**] Inoue, A.: locally C^*-algebra. (english), mem. fac. sci. kyushu univ. ser. a , vol. 25 (1971), pp. 197235.

[**11**] Kaniuth. E.: A Course in Commutative Banach Algebras, Springer, Graduate Texts in Mathematics, 246, 2009.

[**12**] Köthe, G.: Topological Vector Spaces. Springer-Verlag, Berlin, 1969.

[13] Mallios, A.: Topological algebras. Selected Topics. North-Holland, Amsterdam, 1986.

[14] Michael, E.: Locally multiplicatively-convex topological algebras. Mem. Amer. Math. Soc. 11 (1952), 79 pp.

[15] Naimark, M. A.: Normed Algebras, Wolters-Noordhoff Publ. Groningen, 1972.

[16] Palmer, T. W.: Banach Algebras and the General Theory of $*$-Algebras, Vol. 1 and 2, Encyclopedia Math. Appl. 49 and 79, Cambridge Univ. Press, 1994 and 2001.

[**17**] Rickart, C. E., General Theory of Banach Algebras, R. E. Krieger Publ. Co., Huntington, New York, 1974.

[18] Rudin, W.: Functional Analysis, Tata Mc Graw-Hill Publ. Co., TMH Edition, 1973.

CHAPITRE 2

Calcul fonctionnel continu simultané et applications

Introduction

Dans ce chapitre, on construit et on étudie un calcul fonctionnel continu, dit simultané (*C.F.C.S.* en abrégé), dans le cadre des C^*-algèbres localement m-convexes tout en présentant ses différentes applications. Ce calcul fonctionnel simultané étend ceux donnés dans [7], [8] et dans [5].

Le calcul fonctionnel donné dans [7] consiste à donner un sens à $f(a)$, où a est un élément normal d'une C^*-algèbre A et f est une fonction complexe, définie et continue sur le spectre de a. Il étend ainsi le morphisme canonique $\mathbb{C}[X] \longrightarrow A$ appliquant tout polynôme $P(X)$ sur l'élément $P(a)$ de A. Le calcul fonctionnel donné dans ([8]) donne un sens à $f(T_1, ..., T_r)$, où $T_1, ..., T_r$ sont des opérateurs bornés normaux, commutant deux à deux, d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et f décrivant une certaine algèbre de fonctions continues. Il étend donc le morphisme canonique $\mathbb{C}[X_1, ..., X_r] \longrightarrow A$ appliquant tout polynôme $P(X_1, ..., X_r)$ sur l'élément $P(T_1, ..., T_r)$ de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ des opérateurs bornés de $\mathcal{H}$. Pour le calcul fonctionnel donné dans ([5]), il consiste à définir $f(a)$, où $a = (a_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments normaux, d'une C^*-algèbre unitaire, commutative dans le sens où chaque élément a_i commute avec chaque a_j et chaque a_j^*.

Quant à notre calcul fonctionnel continu simultané, il consiste à donner un sens à $f(a)$, où $a = (a_i)_{i \in I}$ est une famille commutative d'éléments normaux d'une C^*-algèbre localement m-convexe unitaire et f est une fonction complexe, définie et continue sur le spectre simultané de a. Notons que la famille $a = (a_i)_{i \in I}$ considéreé ici est seulement supposée normale c'est à dire formée d'éléments normaux d'une C^*-algèbre localement m-convexe. Signalons également que ce calcul fonctionnel simultané étend le morphisme naturel $\mathbb{C}[(X_i)_{i \in I}] \longrightarrow A$ appliquant tout polynôme $P((X_i)_{i \in I})$ sur l'élément $P((a_i)_{i \in I})$ de A. De plus, il constitue une extension des calculs fonctionnels que nous avons cités ci-haut.

Les applications de tout calcul fonctionnel constituent son point fort et sa force essentielle. Elles reflètent également son degré d'importance. A ce propos, nous avons dégagé deux applications importantes de notre calcul fonctionnel et ceci étant dans deux cadres tout à fait différents. Le premier concerne certaines algèbres à poids. Notre application constitue une version continue multi-dimensionnelle d'un théorème de P. Lévy ([19]) et une version généralisée multi-dimensionnelle d'un résultat de N. Wiener ([27]). Le second cadre concerne les espaces localement Hilbert (cf VII. Chapitre 1). Il s'agit d'une classe d'espaces étendant celle des espaces de Hilbert et où il y a, également, présence d'un produit scalaire et d'une involution. Notre application traîte de l'existence d'une certaine base orthonormée liée aux vecteurs propres d'une famille d'opérateurs.

Ce chapitre est composé de trois parties.

La première partie, qui s'intitule "calcul fonctionnel continu simultané", est formée de six paragraphes. Au premier paragraphe, nous fixons certains outils et instruments utiles pour ce travail. Le second est constitué de trois lemmes préparatoires à la construction de notre calcul. Dans le premier, nous établissons une propriété topologique importante du spectre simultané. Dans le second et le troisième, une question de commutativité est traîtée dans le cadre des C^*-algèbres. Au paragraphe 3, nous procédons à la construction de notre calcul fonctionnel dans les C^*-algèbres. Des propriétés significatives sont dégagées. Le "Spectral mapping theorem" est également établi. Au paragraphe 4, nous étudions le comportement de notre calcul fonctionnel après permutation de la famille considérée ou une action d'un polynôme. Les algèbres de dimension finie modulo le radical de Jacobson font l'objet du paragraphe 5. Nous éablissons dans de telles algèbres, l'existence d'un certain calcul fonctionnel continu simultané. Au paragraphe 6, nous traîtons un cas où la complétude n'est pas exigée, moyennant une hypothèse à caractère algébrique, à savoir l'algébricité.

Dans la partie II, qui s'intitule "Applications", nous donnons deux applications de notre calcul et ceci dans deux cadres totalement différents. La première a pour objet une extension d'un théorème de P. Lévy ([19]) et d'un théorème de N. Wiener ([27]) dans certaines algèbres à poids. La seconde traîte de l'existence d'une certaine base orthonormée dans les espaces localement Hilbert.

Dans la partie III, qui s'intitule "calcul fonctionnel continu simultané dans les C^*-algèbres localement m-convexes, nous nous plaçons dans la classe des

C^*-algèbres localement m-convexes. Nous étendons dans cette classe, via la décomposition d'Arens-Michael (cf VI. Chapitre 1), notre propre calcul fonctionnel. Comme illustration, l'algèbre des opérateurs localement bornés d'un espace localement Hilbert.

I. Calcul fonctionnel continu simultané dans les C^*-algèbres.

Dans cette partie, nous exposons notre calcul fonctionnel continu simultané dans le cadre des C^*-algèbres unitaires. Des propriétés significatives de ce *C.F.C.S.* sont dégagées.

Nous commençons par fixer notre champ de travail ainsi que quelques résultats préparatoires.

1. Notations et définitions

Dans ce paragraphe, nous présentons quelques outils dont on aura besoin tout au long ce travail. On commence par quelques notations et définitions.

1.1. L'algèbre de Banach $(\mathcal{C}(K), \|.\|_K)$: Soit K un compact non vide. On note $\mathcal{C}(K)$ l'algèbre de Banach des fonctions complexes continues sur K. On munit $\mathcal{C}(K)$ de la norme $\|.\|_K$ de la convergence uniforme sur K. C'est une C^*-algèbre pour l'involution $f \longmapsto \overline{f}$, où $\overline{f}(z) = \overline{f(z)}$, pour tout $z \in K$.

Soit A une algèbre de Banach complexe unitaire d'unité e et soit $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de A. On dit que $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in I}$ est commutative si les a_i commutent deux à deux, c'est à dire:

$$a_i a_j = a_j a_i, \text{ pour tous } i,\ j \in I.$$

1.2. Spectre simultané: Soit $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments d'une algèbre commutative A. On posera:

$$Sp^s_A(\mathbf{a}) = \{(\chi(a_i))_{i\in I} : \chi \in Sp(A)\}.$$

C'est une partie de $\mathbb{C}^I$, appelée le spectre simultané de $\mathbf{a}$ (dans A). Il est clair que:

$$Sp^s_A(\mathbf{a}) \subset \prod_{i\in I} Sp_A(a_i).$$

L'inclusion est en général stricte, comme le montre l'exemple simple suivant, où le spectre simultané de $\mathbf{a}$ est "trop petit" comparé au produit des spectres des a_i.

Exemple 1.2.1. Considérons l'algèbre de Banach $B = \mathcal{C}([0,1])$ et $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ la famille réduite à deux points avec $a_1(t) = t$ et $a_2(t) = -t$, pour tout $t \in [0,1]$. On a:

$$Sp(a_1) = [0,1] \text{ et } Sp(a_2) = [-1,0].$$

Ainsi

$$Sp_B(a_1) \times Sp_B(a_2) = [0,1] \times [-1,0],$$

qui est un carré. Cependant,

$$Sp_B^s(\mathbf{a}) = \{(t,-t) : t \in [0,1]\},$$

est juste une diagonale du carré précédent.

Signalons que si la famille $(a_i)_{i\in I}$ est réduite à un point, alors le spectre simultané de a n'est autre que le spectre usuel de a.

1.3. Projections: Soit Λ une partie non vide de $\mathbb{C}^I$ et $j \in I$. La $j^{\text{ème}}$ projection de $\Lambda \longrightarrow \mathbb{C}$ est notée $\mathbf{z}_j$. Ainsi on a:

$$\mathbf{z}_j((\alpha_i)_{i\in I}) = \alpha_j, \text{ pour tout } (\alpha_i)_{i\in I} \in \not\supseteq.$$

1.4. Transformée de Gelfand généralisée: Soit A une algèbre de Banach commutative unitaire et $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de A. La transformée de Gel'fand généralisée de $\mathbf{a}$ dans A, notée encore $\widehat{\mathbf{a}}$, est l'application $\widehat{\mathbf{a}} : Sp(A) \longrightarrow \mathbb{C}^I$ définie par:

$$\widehat{\mathbf{a}}(\chi) = (\chi(a_i))_{i\in I}, \text{ pour tout } \chi \in Sp(A).$$

2. Lemmes préparatoires.

Ce paragraphe est formé de trois lemmes préparatoires utiles dans la construction de notre calcul fonctionnel. Ils sont aussi importants l'un que l'autre.

Comme c'est le cas pour le spectre d'un élément, le spectre simultané possède la bonne propriété topologique suivante, comme le montre le premier lemme.

Lemme 2.1. Soit A une algèbre de Banach commutative unitaire et $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de A. Alors $Sp^s_A(\mathbf{a})$ est une partie compacte de $\mathbb{C}^I$ ($\mathbb{C}^I$ étant muni de la topologie produit).

Preuve. Découle de l'égalité:

$$Sp^s_A(\mathbf{a}) = \widehat{\mathbf{a}}(Sp(A)),$$

de la continuité de l'application $\widehat{\mathbf{a}}$ et de la compacité de l'ensemble $Sp(A)$.

Le lemme suivant est en fait une généralisation d'un résultat de Fuglede, Putnam et Rosenburn (cf. [26]), établi pour les opérateurs bornés d'un espace de Hilbert.

Lemme 2.2. Soient A une C^*-algèbre unitaire, $x, y \in A$ deux éléments normaux et $z \in A$. Alors:

$$zx = yz \Longrightarrow y^*z = zx^*$$

Preuve. Remarquons tout d'abord que si a est un élément de A, alors $c = e^{i(a+a^*)}$ est un élément unitaire de A et donc $\|c\| = 1$. Par récurrence sur n, on a:

$$zx^n = y^n z, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

D'où $ze^x = e^y z$. Et donc $z = e^{-y}ze^x$. Comme l'hypothèse du lemme est également vraie pour les éléments $\overline{\lambda}iy$ et $\overline{\lambda}ix$, où $\lambda \in \mathbb{C}$, on a alors aussi

$$z = e^{-i\overline{\lambda}y}ze^{i\overline{\lambda}x}.$$

Soit maintenant $\varphi \in A'$ (le dual topologique de A) arbitraire et considérons l'application f définie par:

$$f(\lambda) = \varphi\left[\left(e^{-i\lambda y^*}ze^{-i\lambda x^*}\right)\right], \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Alors

$$f(\lambda) = \varphi\left(e^{-i\left(\lambda y^* + \overline{\lambda}y\right)}ze^{i\left(\overline{\lambda}x - \lambda x^*\right)}\right).$$

Puisque les dernières exponentielles sont des éléments unitaires de A, on a:

$$|f(\lambda)| \leq \|\varphi\| \|z\|, \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ainsi f est une fonction entière bornée. D'après le théorème de Liouville, f est une constante, donc sa dérivée est nulle. Mais cette dérivée est

$$i\varphi\left(y^*z - zx^*\right).$$

Comme $\varphi \in A'$ est arbitraire, le théorème de Hahn-Banach permet de conclure.

Signalons que dans notre travail, nous aurons besoin de ce lemme juste dans le cas particulier $x = y$. Dans ce cas, le lemme établit le résultat important suivant: Si z commute avec x alors z commute également avec son adjoint x^*.

Nous aurons également besoin du résultat du lemme suivant. En fait, la contribution de ce lemme pour notre calcul est capitale.

Lemme 2.3. Soit A une C^*-algèbre unitaire et $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in I} \subset A$ une famille commutative d'éléments normaux. Alors la sous-algèbre involutive fermée de A engendrée par la famille $\{e, a_i : i \in I\}$, notée A_a, est commutative.

Preuve. Les a_i commutent deux à deux. Par le lemme 2.2, chaque a_i commute avec chaque a_j^*, $i, j \in I$. Ainsi, la famille $\{e, a_i, a_i^* : i \in I\}$ est commutative. D'où le résultat.

Notons à propos de ce lemme 2.3, que la sous-algèbre fermée de A, non nécessairement involutive, engendrée par la famille

$$\{e, a_i : i \in I\}$$

est évidemment commutative. Ce n'est pas évident en exigeant la stabilité par l'involution. D'où l'importance capitale du lemme 2.3.

3. Construction du calcul fonctionnel continu simultané.

Nous présentons, dans ce paragraphe, notre calcul fonctionnel continu simultané dans les C^*-algèbres unitaires. La terminologie "simultané" vient du fait que les fonctions continues qu'on fait opérer sont définies sur le spectre simultané de la famille en question.

Signalons que les C^*-algèbres commutatives ont joué un rôle capital pour notre calcul fonctionnel. Des propriétés de ce calcul fonctionnel sont établies, dont, en particulier, le théorème de l'application spectrale dit aussi "Spectral mapping theorem" et beaucoup d'autres résultats.

Commençons d'abord, et sans aucune considération topologique, par le résultat algébrique suivant, où $\mathbb{C}[(X_i)_{i\in I}]$ désigne l'algèbre des polynômes en les indéterminées $(X_i)_{i\in I}$ à coefficients complexes.

Proposition 3.1. Soient A une algèbre unitaire et $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in I}$ une famille commutative d'éléments de A. Alors l'application

$$\varphi : \mathbb{C}[(X_i)_{i\in I}] \longrightarrow A$$

définie par:

$$\varphi(P) = P((a_i)_{i\in I}), \text{ pour tout } P \in \mathbb{C}[(X_i)_{i\in I}],$$

est un morphisme d'algèbres unitaire tel que:

$$\varphi(\mathbf{z}_i) = a_i, \text{ pour tout } i \in I,$$

où $\mathbf{z}_i$ est la $i^{ème}$ projection de $\mathbb{C}^I$ sur $\mathbb{C}$.

Preuve. Immédiate.

Voici maintenant l'énoncé de notre calcul fonctionnel. Il s'agit d'un morphisme d'algèbres, riche en propriétés et étendant le morphisme canonique défini dans la proposition 3.1. Il étend également le calcul fonctionnel continu donné dans [7], celui donné dans [8] et celui donné dans [5].

Théorème 3.2. Soient A une C^*-algèbre unitaire, $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in I}$ une famille commutative d'éléments normaux de A et $A_{\mathbf{a}}$ la sous-algèbre involutive fermée de A, engendrée par la famille

$$\{e, a_i : i \in I\}$$

Alors, il existe un unique morphisme d'algèbres, unitaire, involutif et continu:

$$\Phi_{\mathbf{a}} : \mathcal{C}(Sp^s_{A_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a})) \longrightarrow A$$

tel que:

$$\Phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{z}_i) = a_i,\ i \in I \qquad (*)$$

De plus, $\Phi_{\mathbf{a}}$ est une isométrie.

Preuve. Rappelons d'abord que $A_{\mathbf{a}}$ est une C^*-algèbre. De plus, elle est commutative par le lemme 2.3, (d'où l'importance de ce lemme dans la contribution du calcul fonctionnel continu). Par ailleurs, l'application,

$$\widehat{\mathbf{a}} : Sp(A_{\mathbf{a}}) \longrightarrow Sp^s_{A_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a})$$

est un homéomorphisme. En effet, elle est surjective par définition même de $Sp^s_{A_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a})$. Pour l'injection, considérons deux caractères χ et χ' de $A_{\mathbf{a}}$ tel que

$$\chi(a_i) = \chi'(a_i), \text{ pour tout } i \in I.$$

On a également

$$\chi(a_i^*) = \chi'(a_i^*), \text{ pour tout } i \in I,$$

vu que χ et χ' sont hermitiens. Il en résulte que les caractères χ et χ' coincident sur la sous-algèbre involutive de A, engendrée par la famille $\{e, a_i : i \in I\}$. Par la continuité des caractères, on a $\chi = \chi'$. La bi-continuité de $\widehat{\mathbf{a}}$ est claire. Cet homéomorphisme donne naîssance à l'isomorphisme d'algèbres, involutif isométrique:

$$\theta : \mathcal{C}(Sp^s_{A_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a})) \longrightarrow \mathcal{C}(Sp(A_{\mathbf{a}}))$$

défini par:

$$\theta(f) = f \circ \widehat{\mathbf{a}}.$$

Comme $A_{\mathbf{a}}$ est une C^*-algèbre commutative unitaire, la transformation de Gelfand:

$$\mathcal{G} : A_{\mathbf{a}} \longrightarrow \mathcal{C}(Sp(A_{\mathbf{a}}))$$

définie par: $\mathcal{G}(x) = \widehat{x}$, pour tout $x \in A_{\mathbf{a}}$ est un isomorphisme isométrique involutif. On voit donc que $\mathcal{G}^{-1} \circ \theta$ est un isomorphisme involutif isométrique de:

$$\mathcal{C}(Sp^s_{A_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a})) \longrightarrow A_{\mathbf{a}}$$

En notant i l'injection canonique $A_{\mathbf{a}} \longrightarrow A$, le morphisme d'algèbres

$$\Phi_{\mathbf{a}} = i \circ \mathcal{G}^{-1} \circ \theta$$

convient. Montrons maintenant l'unicité de $\Phi_{\mathbf{a}}$. Soit alors φ un autre morphisme d'algèbres vérifiant les propriétés du Théorème 3.2. Comme il s'agit d'un morphisme de C^*-algèbres, φ est automatiquement continu ([7]). Notons E la sous-algèbre de $\mathcal{C}(Sp^s_{A_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a}))$ engendrée par la famille

$$\{\mathbf{1}, \mathbf{z}_i, \overline{\mathbf{z}_i} : i \in I\}$$

Il est clair que l'algèbre unitaire E est stable par conjugaison et qu'elle sépare les points de $Sp^s_{A_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a})$. Par le théorème de Stone-Weistrass, E est dense dans l'algèbre de Banach $\mathcal{C}(Sp^s_{A_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a}))$. Mais les applications φ et $\Phi_{\mathbf{a}}$ sont continues et coincident sur E donc sont égales.

Signalons que, grâce à la condition $(*)$, le morphisme $\Phi_{\mathbf{a}}$ étend le morphisme φ de la proposition 3.1.

Notation 3.3. Si $f \in \mathcal{C}(Sp^s_{A_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a}))$, et comme dans le cas d'un seul élément, il est tout à fait commode de noter l'élément $\Phi_{\mathbf{a}}(f)$ par $f(\mathbf{a})$. Ainsi, avec cette notation, on a pour toutes $f, g \in \mathcal{C}(Sp^s_{A_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a}))$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}(\alpha f + g)(\mathbf{a}) &= \alpha f(\mathbf{a}) + g(\mathbf{a}),\\ (fg)(\mathbf{a}) &= f(\mathbf{a})g(\mathbf{a})\end{aligned}$$

et

$$\overline{f}(\mathbf{a}) = (f(\mathbf{a}))^* \text{ et } \|f(\mathbf{a})\| = \|f\|_\infty .$$

Remarque 3.4. Par construction même, pour toute $f \in \mathcal{C}(Sp^s_{A_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a}))$, l'élément $f(\mathbf{a})$ est dans la sous-algèbre fermée $A_{\mathbf{a}}$, involutive engendrée par la famille $\{e, a_i : i \in I\}$. La proposition suivante donne plus de précisions.

Proposition 3.5. L'image du morphisme $\Phi_{\mathbf{a}}$ est égale à $A_{\mathbf{a}}$ i.e.;

$$Im\Phi_{\mathbf{a}} = \Phi_{\mathbf{a}}\left[\mathcal{C}(Sp^s_{A_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a}))\right] = A_{\mathbf{a}}.$$

Preuve. Le morphisme $\Phi_{\mathbf{a}}$ est une isométrie donc fermée. De plus, $Im\Phi_{\mathbf{a}}$ contient la famille $\{e, a_i, a_i^* : i \in I\}$. D'où le résultat.

Comme conséquence immédiate du Théorème 3.2, nous avons le résultat suivant dans le cas tout à fait particulier où la famille considérée est finie.

Corollaire 3.6. Soient A une C^*-algèbre unitaire, $\mathbf{a} = (a_i)_{1\leq i\leq n}$, où $a_1, ..., a_n$ sont des éléments normaux de A, commutant deux à deux et $A_{\mathbf{a}}$ la sous-algèbre involutive fermée de A, engendrée par la famille

$$\{e, a_1, ..., a_n\}.$$

Alors il existe un unique morphisme d'algèbres involutif unitaire continu:

$$\Phi_{\mathbf{a}} : \mathcal{C}(Sp^s_{A_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a})) \longrightarrow A$$

tel que:

$$\Phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{z}_i) = a_i, \text{ pour tout } i \in \{1, 2, ..., n\} .$$

De plus, $\Phi_{\mathbf{a}}$ est une isométrie.

Comme conséquences, on obtient ce qui suit:

Corollaire 3.7 (Théorème 1.5.1 de [7]). Soient A une C^*-algèbre unitaire et a un élément normal de A. Alors il existe un morphisme unitaire φ et un seul de $\mathcal{C}(Sp_A(a))$ dans A tel que $\varphi(\mathbf{z}) = a$, en notant $\mathbf{z}$ la fonction $z \longmapsto z$ sur $Sp_A(a)$. Ce morphisme est isométrique. Son image est la sous-C^*-algèbre de A engendrée par e et a, donc est composée d'éléments normaux.

Corollaire 3.8 (Théorème 1.3.10 p. 21-22 de [5]). Soit A une C^*-algèbre unitaire. A toute famille $\mathbf{a} = (a_i)_{1\leq i\leq n}$, d'éléments normaux de A, commutative dans le sens où chaque a_i commute avec chaque a_j et a_j^*, on peut associer un $*$-morphisme d'algèbres unitaires isométrique $\phi : \mathcal{C}(\sigma(\mathbf{a})) \longrightarrow A$, où $\sigma(\mathbf{a}) = Sp^s_{A_\mathbf{a}}(\mathbf{a})$. De plus, ϕ est unique sous la condition que $\phi(e_i) = a_i$ avec $e_i : z \longmapsto z_i$. L'image de ϕ est la sous-algèbre $B = PL(M \cup M^*)$ avec $M = (a_i)_{1\leq i\leq n}$, c'est à dire la sous-algèbre stellaire engendrée par les a_i dans A.

En particulier, dans le cas d'un espace de Hilbert, nous retrouvons le résultat de Dautray et Lions [8].

Corollaire 3.9. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $\mathbf{T} = (T_1, T_2, ..., T_n)$ une famille finie d'opérateurs normaux de $\mathcal{H}$, commutant deux à deux et $A_\mathbf{T}$ la sous-algèbre involutive fermée de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, engendrée par la famille $\{Id, T_1, ..., T_n\}$. Alors il existe un unique morphisme d'algèbres involutif unitaire continu

$$\Phi_\mathbf{T} : \mathcal{C}(Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T})) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

tel que

$$\Phi_T(\mathbf{z}_i) = T_i, \text{ pour tout } i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

De plus, $\Phi_\mathbf{T}$ est une isométrie ($\mathcal{L}(\mathcal{H})$ étant l'algèbre des opérateurs bornés de $\mathcal{H}$).

3.10. Deux cas particuliers:

Ici, nous traîtons deux familles particulières.

i) Premier cas: La famille $\mathbf{a}$ est réduite à deux éléments b et b^*, où b est un élément normal d'une C^*-algèbre unitaire A. Il est tout à fait naturel de se poser la question concernant l'existence d'une relation entre $\Phi_\mathbf{a}$ et φ_b, (φ_b étant le calcul fonctionnel continu associé à l'élément normal b ([7])).

Notons d'abord: $u : Sp_A(b) \longrightarrow Sp^s_{A_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a})$ l'application définie par:

$$u(\lambda) = (\lambda, \overline{\lambda}), \text{ pour tout } \lambda \in Sp_A(b).$$

et

$$\widetilde{u} : \mathcal{C}(Sp^s_{A_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a})) \longrightarrow Sp_A(b)$$

définie par: $\widetilde{u}(f) = f \circ u$. La réponse à la question précédente est donnée par le résultat suivant.

Proposition 1: Avec les notations précédentes, on a:

$$\Phi_{\mathbf{a}} = \varphi_b \circ \widetilde{u}$$

Preuve: On vérifie facilement que $\varphi_b \circ \widetilde{u}$ est un morphisme d'agèbres de $\mathcal{C}(Sp^s_{A_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a})) \longrightarrow A$, unitaire continu et involutif. De plus, $(\varphi_b \circ \widetilde{u})(\mathbf{z}_1) = b$ et $(\varphi_b \circ \widetilde{u})(\mathbf{z}_2) = b^*$. On conclut alors par l'unicité de $\Phi_{\mathbf{a}}$.

ii) Deuxième cas: Ici, nous nous plaçons dans une C^*-algèbre commutative unitaire et dans laquelle nous considérons une famille très particulière.

Considérons $A = \mathcal{C}(K)$, où K est un compact et $\mathbf{a} = (x)_{x\in A}$. On a:

$$Sp^s_A(\mathbf{a}) = \{(\chi(x))_{x\in A} : \chi \in Sp(A)\} = \{((x(t))_{x\in A} : t \in K\}.$$

On voit alors que l'application: $u : K \longrightarrow Sp^s_A(\mathbf{a})$ définie par:

$$u(t) = ((x(t))_{x\in A}$$

est un homéomorphisme.

Proposition 2: Pour toute $f \in \mathcal{C}(Sp^s_A(\mathbf{a}))$, on a:

$$f(\mathbf{a}) = f \circ u$$

Preuve: Elle est analogue à celle de la proposition 1.

Parmi les propriétés les plus puissantes de "tout calcul fonctionnel", le "Spectral mapping theorem" qui est en fait une généralisation de l'égalité spectrale algébrique classique suivante:

$$Sp(P(x)) = P(Sp(x)), \text{ pour tout polynôme } P.$$

Plus précisement, dans notre cas, nous avons:

Proposition 3.11: Soient A une C^*-algèbre unitaire, $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in I}$ une famille commutative d'éléments normaux de A et $f \in \mathcal{C}(Sp^s_{A_a}(\mathbf{a}))$. Alors on a:

$$Sp_A(f(\mathbf{a})) = f(Sp^s_{A_\mathbf{a}}(\mathbf{a})).$$

Preuve: D'abord, comme $A_\mathbf{a}$ est une sous-C^*-algèbre commutative unitaire de A, elle est pleine dans A ([7]) et donc

$$Sp_A(f(\mathbf{a})) = Sp^s_{A_\mathbf{a}}(f(\mathbf{a})).$$

D'autre part, on a:

$$Sp_{A_\mathbf{a}}(f(\mathbf{a})) = \{\chi(f(\mathbf{a}) : \chi \in Sp(A_\mathbf{a})\}.$$

Par ailleurs, pour tout $\chi \in Sp(A_\mathbf{a})$, on a :

$$\chi(f(\mathbf{a}) = \widehat{f(\mathbf{a})}(\chi) = f \circ \widehat{\mathbf{a}})(\chi) = f((\widehat{\mathbf{a}})(\chi)) = f((\chi(a_i))$$

Donc

$$Sp_{A_\mathbf{a}}(f(\mathbf{a})) = \{f((\chi(a_i)) : \chi \in Sp(A_\mathbf{a})\} = f(Sp^s_{A_\mathbf{a}}(\mathbf{a}))$$

Comme conséquence, nous avons le résultat suivant:

Corollaire 3.12: Avec les hypothèses de la proposition 3.11, on a:

$$f(\mathbf{a}) \text{ est inversible} \Longleftrightarrow f(t) \neq 0, \forall t \in Sp^s_{A_\mathbf{a}}(\mathbf{a}).$$

Et dans ce cas, on a:

$$(f(\mathbf{a}))^{-1} = \frac{1}{f}(\mathbf{a}).$$

Comme notre *C.F.C.S.* se fait pour une famille d'éléments, il est tout à fait commode d'examiner le "Spectral mapping theorem" pour une famille de fonctions. Pour cela, précisons quelques notations.

Notations 3.13: Soit $f = (f_j)_{j\in J}$ une famille d'éléments de $\mathcal{C}(Sp^s_{A_\mathbf{a}}(\mathbf{a}))$ et soit $\mathbf{b} = (f_j(\mathbf{a}))_{j\in J} = (b_j)_{j\in J}$ la famille d'éléments de A, qu'on note $f(\mathbf{a})$. Alors on a le résultat suivant établissant une relation entre le spectre simultané de $\mathbf{a}$ et celui de $f(\mathbf{a})$.

Proposition 3.14: Avec les notations précédentes, on a:

$$f(Sp^s_{A_\mathbf{a}}(\mathbf{a})) \subset Sp^s_{A_{\mathbf{f(a)}}}(f(\mathbf{a}))$$

Preuve: On a:

$$Sp^s_{A_{f(\mathbf{a})}}(f(\mathbf{a})) = \{(\chi(f_j(a)))_{j\in J} : \chi \in Sp(A_{f(\mathbf{a})})\}.$$

Mais $A_{f(\mathbf{a})} \subset A_{\mathbf{a}}$, donc:

$$Sp^s_{A_{f(\mathbf{a})}}(f(\mathbf{a})) \supset \{(\chi(f_j(a)))_{j\in J} : \chi \in Sp(A_{\mathbf{a}})\} = f(Sp^s_{A_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a}))$$

Le morphisme $\Phi_{\mathbf{a}}$ possède de bonnes propriétés algèbriques et topologiques. Comme autre propriété, son comportement avec la composition.

Proposition 3.15: Avec les hypothèses des notations précédentes et $g \in \mathcal{C}(Sp^s_{A_{\mathbf{b}}}(\mathbf{b}))$, on a:

$$g(f(\mathbf{a})) = (g \circ f)(\mathbf{a})$$

Preuve: Soit l'application: $\psi : \mathcal{C}(Sp^s_{A_{\mathbf{b}}}(\mathbf{b})) \longrightarrow A$ définie par:

$$\psi(f) = (g \circ f)(\mathbf{a})$$

C'est un morphisme d'algèbres, unitaire, involutif et vérifiant

$$\psi(z_j) = f_j(a)) = b_j$$

D'après l'unicité du morphisme $\Phi_{\mathbf{a}}$, on a

$$\psi(g) = g(\mathbf{b}) = g(f(\mathbf{a}))$$

Nous terminons ce paragraphe par établir que le calcul fonctionnel continu simultané se comporte bien avec le produit fini.

Soient $A_1, ...,\ A_r$ des C^*-algèbres unitaires, $A = A_1 \times ... \times A_2$ la C^*-algèbre produit et

$$\mathbf{a} = ((u_i^{(1)}, ..., (u_i^{(r)}))_{i\in I}$$

une famille commutative d'éléments normaux de A. Pour tout $k \in \{1, ..., r\}$, on pose: $v_k = (u_i^{(k)})_{i\in I}$. Il est clair que les familles v_k sont commutatives et composées d'éléments normaux. Le lemme suivant établit une relation entre le spectre simultané de $\mathbf{a}$ et ceux des v_k, $1 \leq k \leq r$.

Lemme 3.16:

$$Sp^s_{A_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a}) = \bigcup_{1\leq k\leq r} Sp^s_{B_{v_k}}(v_k)$$

Preuve. Découle de l'égalité

$$Sp(A_{\mathbf{a}}) = \bigcup_{1 \leq k \leq r} Sp(B_{v_k})$$

Le théorème suivant montre le bon comportement du calcul fonctionnel continu simultané dans le cas d'un produit fini.

Théorème 3.17: Pour toute $f \in \mathcal{C}(Sp^s_{A_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a}))$, on a:

$$\Phi_{\mathbf{a}}(f) = (\Phi_{v_1}(f_{/Sp^s_{B_{v_1}}(v_1)}), ..., \Phi_{v_r}(f_{/Sp^s_{B_{v_r}}(v_r)}))$$

Preuve. Soit

$$\varphi : \mathcal{C}(Sp^s_{A_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a})) \longrightarrow A$$

l'application définie par:

$$\varphi(f) = (\Phi_{v_1}(f_{/Sp^s_{B_{v_1}}(v_1)}), ..., \Phi_{v_r}(f_{/Sp^s_{B_{v_r}}(v_r)}))$$

L'application φ est un morphisme d'algèbres, unitaires, involutif, continu et vérifiant

$$\varphi(\mathbf{z}_i) = ((u_i^{(1)}, ..., (u_i^{(r)})), \text{ pour tout } i \in I.$$

D'où le résultat.

4. Comportement du *C.F.C.S.*

Dans ce paragraphe, nous étudions le comportement de notre calcul fonctionnel en effectuant une permutation de la famille considérée. Une question concernant le produit des spectres des éléments de la famille est examinée. L'action d'un polynôme sur notre calcul est traîtée.

a) Permutation de la famille: Soit $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in I}$ une famille commutative d'éléments normaux de A et σ une permutation de l'ensemble I. On considère la nouvelle famille définie comme suit:

$$\mathbf{a}_\sigma = (a_{\sigma(i)})_{i \in I}$$

Il est clair que $A_{\mathbf{a}} = A_{\mathbf{a}_\sigma}$. La question suivante est alors naturelle: Y a -t-il une relation entre les morphismes:

$$\Phi_{\mathbf{a}} \text{ et } \Phi_{\mathbf{a}_\sigma}?$$

La réponse est dans ce qui suivra:

On commence d'abord par le lemme suivant qui met en évidence un homéomorphisme important.

Lemme 4.1. Soit
$$\widetilde{\sigma} : Sp^s_A(\mathbf{a}) \longrightarrow Sp^s_A(\mathbf{a}_\sigma)$$
l'application définie par:

$$\widetilde{\sigma}((\alpha_i)_{i\in I}) = (\alpha_{\sigma(i)})_{i\in I}$$

Alors $\widetilde{\sigma}$ est un homéomorphisme.

Preuve. Claire.

La proposition suivante établit l'existence d'un morphisme d'algèbre intervenant dans la réponse à la question précédente.

Proposition 4.2. Soit

$$\varphi : \mathcal{C}(Sp^s_{A_\mathbf{a}}(\mathbf{a}_\sigma)) \longrightarrow \mathcal{C}(Sp^s_{A_\mathbf{a}}(\mathbf{a}))$$

l'application définie par: $\varphi(f) = f\circ\widetilde{\sigma}$. Alors φ est un isomorphisme d'algèbres, involutif. De plus, c'est une isométrie.

Preuve. Elle est immédiate.

Comme conséquence, nous avons la relation existante entre les morphismes $\Phi_\mathbf{a}$ et $\Phi_{\mathbf{a}_\sigma}$.

Corollaire 4.3. On a:
$$\Phi_{\mathbf{a}_\sigma} = \Phi_\mathbf{a} \circ \varphi.$$
Cela veut dire que,

$$f(\mathbf{a}_\sigma) = (f \circ \widetilde{\sigma})(\mathbf{a}),\ \text{pour toute}\ f \in \mathcal{C}(Sp^s_{A_\mathbf{a}}(\mathbf{a}_\sigma)).$$

b) Un certain morphisme. L'inclusion

$$Sp^s_{A_\mathbf{a}}(\mathbf{a}) \subset \prod_{i\in I} Sp_A(a_i)$$

donne naissance à un morphisme d'algèbres possédant toutes les propriétés du morphisme $\Phi_\mathbf{a}$, à l'exception de l'isométrie. Plus précisement, nous avons:

Théorème 4.4. L'application

$$\varphi_a : \mathcal{C}\left(\prod_{i\in I} Sp_A(a_i)\right) \longrightarrow A$$

définie par:

$$\varphi_{\mathbf{a}}(f) = \Phi_{\mathbf{a}}(f_{/Sp^s_{A_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a})})$$

est un morphisme d'algèbres unitaire, involutif continu et vérifiant

$$\varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{z}_i) = a_i,\ i \in I$$

Preuve. Elle est immédiate.

c) Action d'un polynôme: Si P est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, $P(\mathbf{a})$ a bien un sens (en regardant $\mathbf{a}$ comme élément de l'algèbre produit A^I). En fait, on a:

$$P(\mathbf{a}) = (P(a_i))_{i\in I}$$

Il s'agit alors d'une nouvelle famille d'éléments de A, qui est commutative et dont les éléments sont normaux. D'où la question: Y a -t-il une relation entre les morphismes

$$\Phi_{\mathbf{a}} \text{ et } \Phi_{\mathbf{P(a)}}?$$

Notons d'abord que:

$$P(Sp^s_{A_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a})) \subset Sp^s_{B_{\mathbf{P(a)}}}(\mathbf{P}(\mathbf{a}))$$

D'où l'application

$$\widetilde{P} : Sp^s_{A_a}(\mathbf{a}) \longrightarrow Sp^s_{A_{\mathbf{P(a)}}}(\mathbf{P}(\mathbf{a})),$$

appliquant tout λ sur $P(\lambda)$. On a alors le résultat suivant:

Proposition 4.5. Pour toute $f \in \mathcal{C}(Sp^s_{A_{\mathbf{P(a)}}}(\mathbf{P}(\mathbf{a}))$, on a:

$$\Phi_{\mathbf{P(a)}}(f) = \Phi_{\mathbf{a}}(f \circ \widetilde{P})$$

Cela veut dire que:

$$f(\mathbf{P}(\mathbf{a})) = (f \circ \widetilde{P})(\mathbf{a})$$

Preuve. Considérons $\Psi : Sp^s_{A_{\mathbf{P(a)}}}(\mathbf{P}(\mathbf{a})) \longrightarrow A : P \longmapsto (f \circ \widetilde{P})(\mathbf{a})$. On montre que Ψ est un morphisme d'algèbres, unitaire, involutive tel que $\Psi(\mathbf{z}_i) =$

$P(a_i)$, pour tout $i \in I$. Donc $\Psi = \Phi_{\mathbf{P}(\mathbf{a})}$. Et par suite $(f \circ \widetilde{P})(\mathbf{a}) = f(\mathbf{P}(\mathbf{a}))$, pour toute $f \in \mathcal{C}(Sp^s_{A_{\mathbf{P}(\mathbf{a})}}(\mathbf{P}(\mathbf{a}))$.

5. C^*-algèbre presque de dimension finie

Dans ce paragraphe, nous considérons une algèbre de Banach A presque de dimension finie c'est à dire de dimension finie modulo son radical de Jacobson. Bien que de telles algèbres ne sont pas nécessairement des C^*-algèbres, nous établissons l'existence d'un certain calcul fonctionnel continu simultané. Le théorème de Feldman (cf. [14]) a joué un rôle important dans la construction de ce calcul.

Le lemme suivant exprime une bonne propriété de l'algèbre quotient $A/Rad(A)$. En fait, il s'agit d'un résultat de structure.

Lemme 5.1. $A/Rad(A)$ est une C^*-algèbre.

Preuve: D'après ([1], Lemme 1, p.69), il existe $k_1, ..., k_r$ dans $\mathbb{N}^*$ tel que:

$$A/Rad(A) \simeq \mathcal{M}_{k_1}(\mathbb{C}) \times ... \times \mathcal{M}_{k_r}(\mathbb{C}),$$

où $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre k, à coefficients complexes. D'où le résultat.

Soit maintenant $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in I}$ une famille commutative d'éléments de A. On considère la nouvelle famille, d'éléments de $A/Rad(A)$, définie et notée comme suit: $\mathbf{b} = (s(a_i))_{i \in I}$, où s est la surjection canonique de A sur $A/Rad(A)$. On suppose que les éléments $s(a_i)$ sont normaux. On note $A_{\mathbf{a}}$ la sous-algèbre fermée de A engendrée par la famille $\{e, a_i : i \in I\}$ et $A_{\mathbf{b}}$ la sous-algèbre involutive fermée de $A/Rad(A)$ engendrée par la famille $\{s(e), s(a_i) : i \in I\}$.

Le résultat suivant met en évidence une relation entre le spectre simultané des deux familles $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$.

Lemme 5.2. On a:

$$Sp^s_{A_{\mathbf{b}}}(\mathbf{b}) \subset Sp^s_{A_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a})$$

Preuve. Si χ est un caractère de $A_{\mathbf{b}}$ alors $\chi \circ s$ est un caractère de $A_{\mathbf{a}}$. D'où l'inclusion demandée.

Nous énonçons maintenant le résultat concernant l'existence d'un certain $C.F.C.S.$ sur A.

Théorème 5.3. Il existe un morphisme d'algèbres

$$\varphi : Sp^s_{A_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a}) \longrightarrow A,$$

unitaire, continu tel que:

$$\varphi(\mathbf{z}_i) = a_i \text{ (modulo } Rad(A))$$

Preuve. Par le lemme 5.2, on a:

$$Sp^s_{A_{s(\mathbf{b})}}(s(\mathbf{b})) \subset Sp^s_{A_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a})$$

D'après (cf. [14]), il existe une sous-algèbre B de A tel que

$$A = Rad(A) \oplus B \text{ (somme directe vectorielle)}$$

et, de plus, $A/Rad(A)$ est isomorphe, en tant que algèbre, à B. Pour tout $i \in I$, considérons $r_i \in Rad(A)$ et $b_i \in B$ tel que $a_i = r_i + b_i$. D'autre part, considérons les morphismes:

$$v : \mathcal{C}(Sp^s_{A_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a})) \longrightarrow \mathcal{C}(Sp^s_{A_{\mathbf{b}}}(\mathbf{b})),$$

défini par:

$$v\,(f) = f_{/}Sp^s_{A_{\mathbf{b}}}(\mathbf{b})$$

et

$$\Phi_b : \mathcal{C}(Sp^s_{A_{\mathbf{b}}}(\mathbf{b})) \longrightarrow B$$

le $C.F.C.S.$ associé à $\mathbf{b}$ dans la C^*-algèbre $A/Rad(A)$,

$$u : A/Rad(A) \longrightarrow B$$

l'isomorphisme de Feldman et $i : B \longrightarrow A$ l'injection canonique. Alors le morphisme $i \circ u \circ \Phi_{\mathbf{b}} \circ v$ convient. (Signalons que l'algèbre B figurant dans la décomposition de A en somme directe contient nécessairement l'unité de A).

Remarque 5.4. Contrairement au cas de C^*-algèbres, le morphisme φ du théorème n'est pas nécessairement unique. Il dépend de la sous-algèbre B intervenant dans la décomposition de A ([14]) de A. Nous donnons un exemple simple d'une telle situation en dimension finie.

Exemple 5.5. Soit $\mathcal{T}$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 2, triangulaires supérieures. Il est facile de voir que:

$$Rad(\mathcal{T}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C} \right\}$$

et que $\mathcal{T}/Rad(\mathcal{T}) \simeq \mathbb{C}^2$. Considérons

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}$$

et

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}$$

Alors B et B' sont deux sous-algèbres (distinctes) de $\mathcal{T}$ vérifiant:

$$\mathcal{T} = Rad(A) \oplus B \text{ et } \mathcal{T} = Rad(A) \oplus B'$$

De plus,

$$B \simeq \mathbb{C}^2 \text{ et } B' \simeq \mathbb{C}^2.$$

Remarque 5.6. Le point central du théorème précédent est la décomposition de "type Wedderburn" de A. Ainsi, notre théorème s'étend aux C^*-algèbres possèdant cette décomposition. De telles algèbres ne sont pas nécessairement de dimension finie modulo le radical de Jacobson (cf. [14]).

Nous terminons ce paragraphe en nous plaçant dans le cas où A est une algèbre de Banach commutative unitaire de dimension finie. Nous obtenons un résultat plus fin que celui du théorème 5.3. Mais d'abord, le lemme suivant.

Lemme 5.7. Soit B une sous-algèbre d'une algèbre commutative unitaire E de dimension finie. Alors tout caractère χ de B se prolonge en un caractère de E.

Preuve. D'après ([18]), il existe un idéal maximal M de E tel que $\ker \chi = M \cap B$. Ainsi, E/M est une extension (qui est un corps) de $B/\ker \chi \simeq \mathbb{C}$, donc $E/M \simeq \mathbb{C}$. D'où le résultat.

Corollaire 5.8. On a:

$$Sp^s_{A_{\mathbf{b}}}(\mathbf{b}) = Sp^s_{A_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a})$$

Preuve. Pour tout $i \in I$, il existe $r_i \in Rad(A)$, $b_i \in B$ tel que: $a_i = r_i + b_i$. Notons E la sous-algèbre de A engendrée par la famille $\{e, a_i, b_i : i \in$

$I\}$. Considérons $\chi \in Sp(A_{\mathbf{a}})$. D'après le lemme 5.7, il existe $\chi' \in Sp(E)$ prolongeant χ. Pour conclure, il suffit de remarquer que:

$$\chi(a_i) = \chi'(a_i) = \chi'(b_i).$$

Théorème 5.9. Il existe un morphisme d'algèbres, unitaire continu, $\Phi : \mathcal{C}(Sp^s_{A_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a})) \longrightarrow A$ et vérifiant

$$\Phi(\mathbf{z}_i) = b_i,\ i \in I$$

De plus, Φ est une isométrie.

Preuve. Le morphisme du théorème 5.3 convient, l'isométrie découle du lemme 5.8.

Avant de passer aux applications, nous examinons un cadre où l'algèbre considérée n'est pas nécessairement complète. C'est l'objet du paragraphe suivant:

6. Cas non nécessairement complet.

Dans le calcul fonctionnel, la complétude est souvent nécessaire. C'est également le cas pour notre calcul simultané. Cependant, pour une famille finie, nous allons voir que pour une certaine classe d'algèbres, la situation est différente.

Commençons d'abord par la définition suivante:

Définition 6.1. Une algèbre complexe unitaire B est dite algébrique si tout élément de B est racine d'un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$.

Dans le résultat suivant, nous établissons l'existence de *C.F.C.S.*, pour toute famille finie sans exiger la complétue de l'algèbre considérée.

Proposition 6.2. Soit A une algèbre involutive normée possédant la C^*-propriété. On suppose que A est algébrique. On considère $\mathbf{a} = (a_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille commutative finie formée d'éléments normaux de A. Alors il existe un unique morphisme d'algèbres involutif unitaire continu: $\Phi_{\mathbf{a}} : \mathcal{C}(Sp^s_{A_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a})) \longrightarrow A$ tel que:

$$\Phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{z}_i) = a_i,\ 1 \leq i \leq n$$

De plus, $\Phi_{\mathbf{a}}$ est une isométrie.

Preuve. Comme les a_i sont algébriques, les a_i^* le sont aussi. Et d'après le lemme 2.2, chaque a_i commute avec chaque a_j^*. Il en résulte que $A_{\mathbf{a}} = C[e, a_1, ...a_n, a_1^*, ..., a_n^*]$ est de dimension finie. D'où le résultat.

Exemples 6.3. Comme exemples de la situation ci-haut, nous avons ce qui suit.
1) L'algèbre $\mathcal{S}$ des suites complexes stationnaires, munie de la norme " sup " et de l'involution naturelle. il est clair que l'algèbre $\mathcal{S}$ est algèbrique non complète.

2) Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert de dimension infinie et $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ l'algèbre des opérateurs bornés de $\mathcal{H}$. On considère B la sous-algèbre (l'idéal) de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ formée des opérateurs de rang fini. L'unitisée B^1 de B est notre second exemple. Egalement, ici, l'algèbre B^1 n'est pas complète mais elle est algèbrique. Notons ici que, contrairement au premier exemple, l'algèbre B^1 n'est pas commutative.

Remarque 6.4. Le résultat de la proposition 6.2 tombe en défaut pour une famille infinie, même dénombrable comme le montre l'exemple suivant:

Exemple **6.5.** Soit $\mathcal{S}$ l'algèbre considérée dans 1) de 6.3. Considérons la famille $\mathbf{a} = (a_k)_{k\geq 0}$, où $a_k = (\delta_{k,n})_{n\geq 0}$. Il est clair qu'il s'agit d'une famille commutative de $\mathcal{S}$, formée d'éléments normaux (En fait, ses éléments sont même hermitiens). De plus, la sous-algèbre involutive fermée de $\mathcal{S}$ engendrée par la famille $\{1, a_k : k \geq 0\}$ est $\mathcal{S}$ elle même. On ne peut alors avoir d'isométrie de $\mathcal{C}(Sp^s_{\mathcal{S}}(\mathbf{a}))$ vers $\mathcal{S}$, sinon, $\mathcal{S}$ sera complète ce qui n'est pas le cas (Notons ici que $\mathcal{S}$ est une Q-algèbre, c'est à dire son groupe des éléments inversibles est ouvert. Ceci assure la compacité du spectre global $Sp(\mathcal{S})$ et par suite la compacité du spectre simultané).

II. Applications:

Cette partie est composée de deux sections comprenant respectivement la première et la deuxième application de notre calcul fonctionnel continu simultané. Il s'agit d'applications dans deux cadres différents.

A. Première application.

Un théorème classique de N. Wiener montre que si $f(t) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{int}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, est une série de Fourier complexe absolument convergente qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, alors la fonction inverse $\dfrac{1}{f}$ se développe, elle aussi, en une série de Fourier absolument convergente. La preuve originale qu'en a donnée N. Wiener en 1932 est longue, calculatoire et fait appel à des techniques d'analyses réelle et complexe. Et I. M. Gel'fand en a donnée une preuve qui est souvent citée comme l'un des premiers succès de la théorie spectrale des algèbres de Banach.

Dans cette section, nous exposons une application ayant pour objet les théorèmes de P. Levy et N. Weiner. En fait, en utilisant le calcul fonctionnel continu simultané, nous obtenons une version généralisée multi-dimensionalle du théorème de P. Lévy et N. Wiener pour les séries de Fourier p, ω-absolument convergentes.

Pour cette application, nous aurons besoin des préliminaires suivants dont le but est de construire une C^*-algèbre qui fera l'objet de notre première application.

1. Poids.

Dans ce paragraphe, nous rappelons la définition de poids. Nous distinguons deux types de poids. Ceux m-convolutifs et ceux réguliers.

Définition 1.1. Soit $p \in \,]1, +\infty[$ et $\omega : \mathbb{Z}^k \longrightarrow [1, +\infty[$, $k \in \mathbb{N}^*$, une application sur $\mathbb{Z}^k$. On dit que ω est un poids si:

$$c(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^k} \omega\,(n)^{\frac{1}{1-p}} < +\infty.$$

La m-convolution d'un poids est définie comme suit:

1.2. Poids m-convolutif. Un poids ω sur $\mathbb{Z}^k$ est dit m-convolutif s'il existe $\gamma = \gamma(\omega) > 0$ tel que :

$$\omega^{\frac{1}{1-p}} * \omega^{\frac{1}{1-p}} \leq \gamma \omega^{\frac{1}{1-p}},$$

où $*$ désigne le produit de convolution.

La régularité d'un poids est définie comme suit:

1.3. Poids régulier. Le poids ω est dit régulier si:

$$\lim_{|m| \longrightarrow +\infty} \omega(m)^{\frac{1}{m_j}} = 1, \text{ pour chaque } j = 1, \ldots, k,$$

où $|m| = |m_1| + \cdots + |m_k|$ désigne la longueur de $m = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{Z}^k$.

Nous terminons ce paragraphe par donner des exemples de poids ayant les propriétés citées ci-haut.

1.4. Exemple d'un poids m-convolutif et régulier.

En fait, nous donnons deux familles de poids m-convolutifs et réguliers.

a) Pour tout $p > 1$ et $s > \frac{p-1}{2}$, on pose:

$$\omega_{p,s}(n) = (1 + n^2)^s,\ n \in \mathbb{N}$$

b) Pour tout $p > 1$ et $\alpha \in]0, 1[$,

$$\omega_{p,\alpha}(n) = e^{|n|^\alpha},\ n \in \mathbb{Z}^k$$

2. Espaces à poids.

Dans ce paragraphe, nous établissons que la m-convolution et la régularité d'un poids donnent naîssance à une algèbre qui va jouer un rôle important pour notre application.

2.1. Notation. Pour $m = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{Z}^k$ et $t = (t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k$, nous utiliserons la notation:

$$(m, t) = m_1 t_1 + \cdots + m_k t_k$$

2.2. Espaces à poids. On considère $l^p_\omega\left(\mathbb{Z}^k\right)$ l'espace de toutes les suites complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^k}$, telle que:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^k} |a_n|^p\, \omega\,(n) < +\infty.$$

Moyennant le théorème de Jordan-Hölder, on montre pour toute $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^k} \in l^p_\omega\left(\mathbb{Z}^k\right)$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^k} a_n e^{i(n,t)}$ est absolument convergente. D'où l'espace à poids suivant :

$$\mathcal{A}^p_k\,(\omega) = \left\{ f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{C} : f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^k} a_n e^{i(n,t)} : (a_n)_{n\in\mathbb{Z}^k} \in l^p_\omega\left(\mathbb{Z}^k\right) \right\}$$

muni de la norme $\|.\|_{p,\omega}$ définie par:

$$\|f\|_{p,\omega} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^k} |a_n|^p \, \omega(n) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

La m-convolution assure la structure d'algèbre sur l'espace $\mathcal{A}_k^p(\omega)$ comme le montre la proposition suivante:

Proposition 2.3. On suppose que le poids ω est m-convolutif. Alors $\mathcal{A}_k^p(\omega)$ est une algèbre (pour la multiplication ponctuelle classique) de Banach commutative semi-simple unitaire d'unité $\widehat{e}$ définie par $\widehat{e}(t) = 1$, $\left(t \in \mathbb{R}^k\right)$.

Involution 2.4. On définit une involution $*$ sur l'algèbre $\mathcal{A}_k^p(\omega)$, en posant:

$$f^*(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^k} \overline{a_{-n}} e^{i(n,t)}, \text{ pour toute } f \in \mathcal{A}_k^p(\omega).$$

Moyennant une hypothèse supplémentaire sur le poids, la m-convolution et la régularité permettent à l'algèbre involutive $\mathcal{A}_k^p(\omega)$ d'avoir la bonne propriété suivante:

Proposition 2.5. On suppose que le poids ω est régulier et que:

$$\omega(n+m) \leq \omega(n)\,\omega(m), \; n, m \in \mathbb{Z}^k$$

Alors:
i) Tout caractère de $\mathcal{A}_k^p(\omega)$ est une évaluation en un point donné $t_0 \in \mathbb{R}^k$.
ii) $\left(\mathcal{A}_k^p(\omega), \|.\|_{p,\omega}\right)$ est une algèbre hermitienne.

Comme l'algèbre $\mathcal{A}_k^p(\omega)$ est commutative, sa fonction de Ptàk $p_{\mathcal{A}_k^p(\omega)}$ définie par :

$$p_{\mathcal{A}_k^p(\omega)}(f) = \rho_{\mathcal{A}_k^p(\omega)}(f^* f)^{1/2}, \text{ pour toute } f \in \mathcal{A}_k^p(\omega),$$

est une norme d'algèbre, sur $\mathcal{A}_k^p(\omega)$, telle que:

$$\rho_{\mathcal{A}_k^p(\omega)}(f^* f) = p_{\mathcal{A}_k^p(\omega)}(f)^2.$$

Ainsi, pour chaque $f \in \mathcal{A}_k^p(\omega)$, on a:

$$p_{\mathcal{A}_k^p(\omega)}(f) = \rho_{\mathcal{A}_k^p(\omega)}(f) = \sup_{t \in \mathbb{R}^k} |f(t)|.$$

Sa complétion $\widehat{\mathcal{A}}_k^p(\omega)$ avec la norme $\|.\|_\infty$ définie par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}^k} |f(t)|\,,\ f \in \widehat{\mathcal{A}}_k^p(\omega)\,,$$

est une C^*-algèbre. De plus, tout caractère de $\widehat{\mathcal{A}}_k^p(\omega)$ est une évaluation en un certain $t^0 \in \mathbb{R}^k$, où $t^0 = (t_1^0, ..., t_k^0)$ avec

$$0 \le t_j^0 < 2\pi,\ j = 1, ..., k$$

Ainsi, pour chaque $f \in \widehat{\mathcal{A}}_k^p(\omega)$, on a :

$$Sp_{\widehat{\mathcal{A}}_k^p(\omega)}(f) = \left\{ f(t) : t \in [0, 2\pi[^k \right\}.$$

3. Application

Voici maintenant notre application qui est en fait une version continue multi-dimension d'un théorème de P. Levy.

Théorème 3.1. Soit $p \in]1, +\infty[$ et ω un poids m-convolutif régulier sur $\mathbb{Z}^k$ satisfaisant

$$\omega(n+m) \le \omega(n)\omega(m),\ n, m \in \mathbb{Z}^k$$

Soit $\mathbf{f}(t) = (f_j(t))_{j\in I} : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{C}^I$ une famille de fonctions. Supposons que, pour $j \in I$, il existe une suite de fonctions périodiques

$$F_{m,j}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^k} a_{m,n,j} e^{i(n,t)}$$

telle que:

(i) Pour tout m,

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^k} |a_{m,n,j}|^p \,\omega(n) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \text{ pour tout } j \in I.$$

(ii) Pour tout $j \in I$,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^k} |F_{m,j}(t) - f_j(t)| \underset{m\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Soit $\Phi \in \mathcal{C}\left(Sp^s_{\widehat{\mathcal{A}}_k^p(\omega)}(\mathbf{f}) \right)$. Alors, il existe une suite de fonctions périodiques

$$G_m(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^k} b_{m,n} e^{i(n,t)}$$

telle que:

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^k}|b_{m,n}|^p\,\omega\,(n)\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty$$

et

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^k}|G_m(t)-\Phi\circ\mathbf{f}(t)|\underset{m\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Preuve. Remarquons tout d'abord que par **(i)** et **(ii)**, $f_j\in\widehat{\mathcal{A}}_k^p(\omega)$, pour chaque $j\in I$. Alors $\Phi(\mathbf{f})\in\widehat{\mathcal{A}}_k^p(\omega)$. Donc, par définition de notre calcul fonctionnel, $\widehat{\Phi(\mathbf{f})}=\Phi\circ\widehat{\mathbf{f}}$. Il s'ensuit que, pour tout $t\in[0,2\pi[^k$, on a :

$$\Phi(\mathbf{f})\,(t)=\chi_t\,[\Phi(\mathbf{f})]=\Phi\circ\widehat{\mathbf{f}}\,(\chi_t)=\Phi\circ\mathbf{f}\,(t)\,,$$

où χ_t est l'évaluation en t. Donc $\Phi(\mathbf{f})=\Phi\circ\mathbf{f}$ et le théorème s'ensuit.

Comme conséquence, le résultat suivant qui est une version généralisée multi-dimension, d'un résultat de N. Wiener.

Théorème 3.2. Soit $p\in\,]1,+\infty[$ et ω un poids m-convolutif et régulier sur $\mathbb{Z}^k$ satisfaisant

$$\omega(n+m)\le\omega(n)\omega(m),\ n,m\in\mathbb{Z}^k.$$

Soit $f(t)=(f_j(t))_{j\in I}:\mathbb{R}^k\longrightarrow\mathbb{C}^I$ une famille de fonctions. Supposons que, pour $j\in I$, il existe une suite de fonctions périodiques

$$F_{m,j}(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}^k}a_{m,n,j}e^{i(n,t)}$$

telle que:
(i) Pour chaque m,

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^k}|a_{m,n,j}|^p\,\omega\,(n)\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty,\text{ pour tout } j\in I.$$

(ii) Pour chaque $j\in I$,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^k}|F_{m,j}(t)-f_j(t)|\underset{m\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Soit $\Phi\in\mathcal{C}\left(Sp^s_{\widehat{\mathcal{A}}_k^p(\omega)}(\mathbf{f})\right)$ qui ne s'annule pas sur $Sp^s_{\widehat{\mathcal{A}}_k^p(\omega)}(\mathbf{f})$. Alors $\Phi\circ\mathbf{f}$ est inversible dans $\widehat{\mathcal{A}}_k^p(\omega)$. De plus, il existe une suite de fonctions périodiques:

$$G_m(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}^k}b_{m,n}e^{i(n,t)}$$

tels que:

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^k} |b_{m,n}|^p \,\omega\,(n)\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

et

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^k} \left|G_m(t) - (\Phi\circ\mathbf{f})^{-1}(t)\right| \underset{m\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve: Elle résulte du fait que:

$$Sp_{\widehat{\mathcal{A}}^p_k(\omega)}(\Phi(\mathbf{f})) = \Phi\left(Sp^s_{\widehat{\mathcal{A}}^p_k(\omega)}(\mathbf{f})\right)$$

et $\Phi(\mathbf{f}) = \Phi\circ\mathbf{f}$.

B. Deuxième application.

Dans cette section, nous présentons notre deuxième application dont le champ est totalement différent de celui de l'application précédente. Il s'agit du cadre des espaces localement Hilbert, dont nous rappelons ici l'essentiel pour nous.

Pour notre deuxième application, nous aurons besoin de résultats préliminaires que nous présentons sous forme de lemmes.

1. Lemmes.

Les deux lemmes suivants sont immédiats et utiles pour notre application. Le premier lemme établit l'équivalence entre la normalité d'un opérateur et celle de ses facteurs inductifs.

Lemme 1.1. L'opérateur $T = \underset{\overrightarrow{\lambda}}{\lim} T_\lambda$ est normale si, et seulement, si tous les T_λ le sont.

Le second lemme exprime un résultat concernant la commutativité. Plus précisément, on a:

Lemme 1.2. Si $T = \underset{\overrightarrow{\lambda}}{\lim} T_\lambda$ et $S = \underset{\longrightarrow}{\lim} S_\lambda$ et $TS = ST$, alors

$$T_\lambda S_\lambda = S_\lambda T_\lambda, \text{ pour tout } \lambda\in\Lambda$$

Le lemme suivant établit une propriété des algèbres de dimension finie.

Lemme 1.3. Soit A une algèbre commutative de dimension finie n. Alors A admet au plus n caractères non nuls (En particulier le nombre de caractères de A est fini).

Lemme 1.4. Soit $a = (a_i)_{i\in I}$ une famille commutative d'éléments normaux de A. Alors la sous-algèbre involutive fermée de A, engendrée par la famille $\{e, a_i : i \in I\}$ est commutative.

On peut maintenant énoncer la deuxième application du calcul fonctionnel simultané. Elle concerne l'existence d'une certaine base orthonormée d'un espace localement Hilbert. On se place dans le cas dénombrable c'est à dire $\Lambda = \mathbb{N}$.

2. Deuxième application.

Théorème 2.1. Soit $\mathcal{H} = \underset{\longrightarrow}{\lim}\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{N}$, un espace *localement* Hilbert dont les espaces de Hilbert associés $\mathcal{H}_n$, sont de dimension finie, $\mathbf{T} = (T_i)_{i\in I}$ une famille commutative d'éléments normaux de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Pour chaque $i \in I$, soit $T_{i,n} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, tel que $T_i = \underset{\longrightarrow}{\lim}T_{i,n}$. Alors il existe une base orthonormale de $\mathcal{H}$, dont les éléments sont des vecteurs propres des opérateurs $T_{i,n}$.

Preuve. Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons la famille $\mathbf{T}_n = (T_{i,n})_{i\in I}$ et B_n la sous-algèbre involutive fermée de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ engendrée par la famille

$$\{Id_n, T_{i,n},\ i \in I\}.$$

D'après le lemme 1.2, la famille $(T_{i,n})_{i\in I}$ est commutative. D'après le lemme 1.1, ses termes sont normaux. D'après le lemme 1.4, B_n est commutative. Par le lemme 1.3, B_n admet un nombre fini de caractères non nuls. Il en résulte que $Sp^s_{B_n}(\mathbf{T}_n)$ est fini. Posons:

$$Sp^s_{B_n}(\mathbf{T}_n) = \left\{\alpha_1^{(n)}, ..., \alpha_{p_n}^{(n)}\right\},$$

avec $\alpha_k^{(n)} = \left(\alpha_{i,k}^{(n)}\right)_{i\in I}$, pour chaque $1 \leq k \leq p_n$. On a :

$$1_{\left\{\alpha_k^{(n)}\right\}} \in \mathcal{C}(Sp^s_{B_n}(\mathbf{T}_n)) \text{ et } 1_{Sp(\mathbf{T}_n)} = \sum_{k=1}^{p_n} 1_{\left\{\alpha_k^{(n)}\right\}}$$

où 1_A désigne la fonction caractéristique (l'indicatrice) de la partie A. Par notre calcul fonctionnel continu simultané, on a:

$$Id_n = \Phi_{\mathbf{T}_n}\left(1_{Sp^s_{B_n}(\mathbf{T}_n)}\right) = \sum_{k=1}^{p_n} P_k^{(n)},$$

où

$$P_k^{(n)} = \Phi_{\mathbf{T}_n}\left(1_{\left\{\alpha_k^{(n)}\right\}}\right)$$

L'opérateur $P_k^{(n)}$, $k = 1, ..., p_n$, est un projecteur car l'indicatrice $1_{\left\{\alpha_k^{(n)}\right\}}$ l'est. De plus, il est hermitien vu que $1_{\left\{\alpha_k^{(n)}\right\}}$ l'est et $\Phi_{\mathbf{T}_n}$ est un morphisme involutif. Pour toute $f \in \mathcal{C}(Sp^s_{B_n}(\mathbf{T}_n))$,

$$f = \sum_{k=1}^{p_n} f(\alpha_k^n) 1_{\{\alpha_k^n\}} \text{ et } f(T_n) = \sum_{k=1}^{p_n} f(\alpha_k^n) P_k^{(n)}$$

En particulier,

$$\mathbf{z}_i(T_n) = \sum_{k=1}^{p_n} \mathbf{z}_i(\alpha_k^n) P_k^{(n)} \text{ et } T_{i,n} = \sum_{k=1}^{p_n} \alpha_{i,k}^{\lambda} P_k^{(n)}.$$

Par ailleurs, la restriction de $T_{i,n}$ à l'espace: $\mathcal{H}_k^{(n)} = P_k^{(n)}(\mathcal{H}_n)$ est une homothétie de rapport $\alpha_{i,k}^{(n)}$. En effet: Soit $x \in \mathcal{H}_k^{(n)}$, il existe $y \in \mathcal{H}_n$ tel que $x = P_k^{(n)}(y)$. On a alors

$$\begin{aligned}
T_{i,n}(x) &= \sum_{k'} \alpha_{i,k'}^{(n)} P_{k'}^{(n)}(x) = \sum_{k'} \alpha_{i,k'}^{(n)} P_{k'}^{(n)}(P_k^{(n)}(y)) \\
&= \sum_{k'} \alpha_{i,k'}^{(n)} (P_{k'}^{(n)} P_k^{(n)})(y) \\
&= \sum_{k'} \alpha_{i,k'}^{(n)} \Phi_{T_n}(1_{\{\alpha_{k'}^{(n)}\}}) \Phi_{T_n}(1_{\{\alpha_k^{(n)}\}})(y) \\
&= \sum_{k'} \alpha_{i,k'}^{(n)} \Phi_{T_n}(1_{\{\alpha_{k'}^{(n)}\} \cap \{\alpha_k^{(n)}\}})(y) \\
&= \alpha_{i,k}^{(n)} \Phi_{T_n}(1_{\{\alpha_k^{(n)}\}})(y) \\
&= \alpha_{i,k}^{(n)} x.
\end{aligned}$$

Pour la suite de la preuve, nous aurons besoin du lemme suivant:

Lemme 2.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:
i)
$$Sp(T_n^s) \subset Sp(T_{n+1}^s)$$
ii)
$$P_k^{(n)}(H_n) = P_k^{(n+1)}/H_n$$

Preuve. Soit χ un caractère de B_n. Considérons l'application $f : B_{n+1} \longrightarrow B_n$ appliquant f sur $f_{/\mathcal{H}_n}$. C'est un morphisme d'agèbres. Ainsi, $\chi \circ f$ est un caractère de B_{n+1}. D'où le résultat.

Suite de la preuve du théorème.
Ici, $n = 1$. Pour tout $k = 1, ..., p_1$, considérons $B_k^{(1)}$ une *bon* de $H_k^{(1)}$. Par ailleurs, pour tout $k = 1, ..., p_1$, $H_k^{(1)} \subset H_k^{(2)}$, on a:

$$H_k^{(2)} = H_k^{(1)} \oplus (H_k^{(1)})^{\perp} \text{ (l'orthogonalité dans } H_k^{(2)})$$

Considérons $(B_k^{(1)})'$ une *bon* de $(H_k^{(1)})^{\perp}$. Alors

$$B_k^{(1)} \cup (B_k^{(1)})' = B_k^{(2)}$$

est une *bon* de $H_k^{(2)}$. Ainsi,

$$B_1 = B_1^{(1)} \cup ... \cup B_{p_1}^{(1)}$$

est une *bon* de H_1 et
$$B_2 = B_1^{(2)} \cup ... \cup B_{p_1}^{(2)}$$
est une *bon* de H_2, de plus, $B_1 \subset B_2$. Un raisonnement analogue, de proche en proche, permet d'avoir une suite croissante (B_n) tel que pour tout n, B_n est une *bon* de H_n. La partie $B = \cup_n B_n$ est la base cherchée.

III. Calcul fonctionnel continu dans les C^*-a.l.m.c.

Dans cette partie, nous étendons notre propre calcul fonctionnel aux C^*-*a.l.m.c.*. La décomposition d'Arens-Michael [.] a joué un rôle important dans cette extension. Ce calcul est également basé sur le spectre simultané défini par analogie au cas Banach.

Soit $(A, ((p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une C^*-*a.l.m.c.* où Λ est filtrant croissant et, de plus,

$$\lambda \leq \mu \Longrightarrow p_\lambda \leq p_\mu$$

Considérons $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in I}$ une famille commutative d'éléments normaux de A.

1.1. Notations et définitions.

Nous commençons par les notations et les définitions suivantes: On considère
$$A_\lambda = (\widehat{A/\ker p_\lambda, p_\lambda})$$
la complétée de l'algèbre normée $(A/\ker p_\lambda, p_\lambda)$. C'est une C^*-algèbre. Ensuite, on note $\pi_\lambda : A \longrightarrow A_\lambda$ le morphisme canonique. On considère la famille associée à λ définie comme suit:
$$a_\lambda = (\pi_\lambda(a_i))_{i\in I}$$
On note
$$B_a = \overline{\mathbb{C}[e, a_i, a_i^* : i \in I]}$$
la sous-algèbre involutive fermée de A, engendrée par la famille $\{e, a_i : i \in I\}$. Comme dans le cas Banach, on définit le spectre simultané de la famille $(a_i)_{i\in I}$ comme suit:
$$Sp_{B_\mathbf{a}}(\mathbf{a}) = \{(\chi(a_i)_{i\in I} : \chi \text{ caractère continu non nul de } B_\mathbf{a}\}.$$
Signalons tout de suite que, contrairement au cas Banach, un tel spectre n'est pas nécessairement compact. Signalons, également, qu'on a exigé la continuité des caractères dans la définition de ce spectre (La continuité automatique des caractères dans les algèbres de Fréchet est un problème ouvert ([21]). On note
$$B_\lambda = \overline{\mathbb{C}[e, \pi_\lambda(a_i), \pi_\lambda(a_i^*) : i \in I]}$$
la sous-algèbre involutive fermée de A_λ, engendrée par la famille $\{e, \pi_\lambda(a_i) : i \in I\}$. C'est une C^*-algèbre.

2. Résultats préparatoires

Le premier lemme exprime le bon comportement du spectre simultané avec l'ordre.

Lemme 2.1. Soit $\lambda, \mu \in \Lambda$. Alors:
$$\lambda \leq \mu \Longrightarrow Sp^s_{B_\lambda}(a_\lambda) \subset Sp^s_{B_\mu}(a_\mu)$$
Preuve: Comme $p_\lambda \leq p_\mu$ alors $\ker p_\mu \subset \ker p_\lambda$ par suite $u_{\lambda,\mu} : B_\mu \longrightarrow B_\lambda$ appliquant $\pi_\mu(x)$ sur $\pi_\lambda(x)$ est bien définie et c'est un morphisme d'algèbres. Si $\chi \in Sp(B_\lambda)$ alors $\chi \circ u_{\lambda,\mu} \in Sp(B_\mu)$, d'où l'inclusion. Pour $\lambda \leq \mu$, on note:
$$\rho_{\lambda,\mu} : \mathcal{C}(Sp^s_{B_\mu}(a_\mu)) \longrightarrow \mathcal{C}(Sp^s_{B_\lambda}(a_\lambda))$$

l'application définie par

$$\rho_{\lambda,\mu}(f) = f_{/Sp^s_{B_\lambda}(a_\lambda)}$$

La partie $Sp^s_{B_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a})$ n'est pas nécessairement compacte. Cependant, elle s'exprime en fonction de certaines parties compactes importantes, intervenant dans l'extension de notre calcul fonctionnel. Précisement, on a:

Lemme 2.2.

$$Sp^s_{B_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a}) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Sp^s_{B_\lambda}(\mathbf{a}_\lambda)$$

Preuve: Soit $\chi \in Sp(B_a)$, il existe λ_0 tel que

$$\ker p_{\lambda_0} \cap B_a \subset \ker \chi.$$

Si $\overline{x} \in B_{\lambda_0}$, on pose: $\chi'(\overline{x}) = \chi(x)$. Alors χ' est bien défini et c'est un caractère de B_{λ_0}, ainsi

$$Sp^s_{B_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a}) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Sp^s_{B_\lambda}(\mathbf{a}_\lambda)$$

Réciproquement, soit $\lambda \in \Lambda$ et χ un caractère de B_λ. Alors $\chi \circ \pi_\lambda$ est un caractère de B_a, d'où l'inclusion inverse.

La famille des parties compactes du lemme 2.2 donne naissance à une topologie importante dans l'algèbre $\mathcal{C}(Sp^s_{B_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a}))$ des fonctions complexes, définies et continues sur $Sp^s_{B_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a})$ comme le montre le lemme suivant:

Lemme 2.3. L'algèbre $\mathcal{C}(Sp^s_{B_a}(\mathbf{a}))$ des fonctions complexes, définies et continues sur $Sp^s_{B_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a})$, munie de la topologie définie par la famille de semi-normes $(\|.\|_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, où

$$\|f\|_\lambda = \sup_{t\in Sp^s_{B_\lambda}(\mathbf{a}_\lambda)} |f(t)|$$

est une C^*-*a.l.m.c.* (cf. chapitre 1).

Notre dernier lemme exprime une représentation intéressante de l'algèbre $\mathcal{C}(Sp^s_{B_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a}))$.

Lemme 2.4.

$$\mathcal{C}(Sp^s_{B_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a})) = \varprojlim \mathcal{C}(Sp^s_{B_\lambda}(\mathbf{a}_\lambda)).$$

Preuve: Notons N_λ le noyau de la semi-norme $\|.\|_\lambda$ et $\mathcal{C}(Sp^s_{B_\mathbf{a}}(\mathbf{a}))_\lambda$ l'algèbre de Banach, complétée de l'algèbre normée $(\mathcal{C}(Sp^s_{B_\mathbf{a}}(\mathbf{a}))/N_\lambda, \|.\|_\lambda)$. L'application

$$\mathcal{C}(Sp^s_{B_\mathbf{a}}(\mathbf{a}))/N_\lambda, \|.\|_\lambda) \longrightarrow \mathcal{C}(Sp^s_{B_\mathbf{a}}(\mathbf{a}_\lambda))$$

appliquant $f+N_\lambda$ sur $f_{/Sp^s_{B_\lambda}(\mathbf{a}_\lambda)}$ est bien définie et est un morphisme d'algèbres involutif. Par Uryson, il est surjectif et, de plus, c'est une isométrie. Il en résulte que:

$$\mathcal{C}(Sp^s_{B_\mathbf{a}}(\mathbf{a}))_\lambda = \mathcal{C}(Sp^s_{B_\mathbf{a}}(\mathbf{a}_\lambda)).$$

Ainsi,

$$\mathcal{C}(Sp^s_{B_\mathbf{a}}(\mathbf{a})) = \varprojlim_\lambda \mathcal{C}(Sp^s_{B_\mathbf{a}}(\mathbf{a}))_\lambda = \varprojlim_\lambda \mathcal{C}(Sp^s_{B_\mathbf{a}}(\mathbf{a}_\lambda))$$

Nous présentons maintenant notre calcul fonctionnel continu simultané dans le cas des C^*-*a.l.m.c.*

Théorème 2.5. Il existe un unique morphisme d'algèbres,

$$\Phi_\mathbf{a} : \mathcal{C}(Sp^s_{B_\mathbf{a}}(\mathbf{a})) \longrightarrow A,$$

unitaire, involutif, continu tel que:

$$\Phi_\mathbf{a}(\mathbf{z}_i) = a_i$$

Preuve: Montrons d'abord l'existence de:

$$\Phi_\mathbf{a} : \mathcal{C}(Sp^s_{B_\mathbf{a}}(\mathbf{a})) \longrightarrow A.$$

D'après le théorème 3.1 de la partie I, il existe un morphisme d'algèbres

$$\Phi_\lambda : \mathcal{C}(Sp^s_{B_\lambda}(\mathbf{a}_\lambda)) \longrightarrow B_\lambda$$

unitaire, involutif, continu tel que:

$$\Phi_\lambda(\mathbf{z}_i) = \pi_\lambda(a_i)$$

Par ailleurs, on a:

$$u_{\lambda,\mu} \circ \Phi_{\mathbf{a}_\mu} = \Phi_{\mathbf{a}_{\lambda.}} \circ \rho_{\lambda,\mu}$$

Ceci montre que le système d'applications $(\Phi_{a_{\lambda.}})_\lambda$ est projectif. L'application $\Phi_{\mathbf{a}.} = \varprojlim_\lambda \Phi_{\mathbf{a}_{\lambda.}}$ est un morphisme d'algèbres qui convient. Plus précisement, on a pour toute $f \in \mathcal{C}(Sp^s_{B_\mathbf{a}}(\mathbf{a}))$ et pour tout $\lambda \in \Lambda$,

$$\pi_\lambda(\Phi_\mathbf{a}(f)) = \Phi_{\mathbf{a}_{\lambda.}}(f_{/Sp^s_{B_\lambda}(\mathbf{a}_\lambda)})$$

Unicité: Soit φ un morphisme d'algèbres vérifiant les propriétés du théorème. Considérons E la sous-algèbre de $\mathcal{C}(Sp^s_{B_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a}))$ par la famille $\{1, \mathbf{z}_i, \overline{\mathbf{z}_i} : i \in I\}$. D'après Stone Weistrass E est dense. D'où le résultat.

3. Illustration.

Reprenons les notations de 1) B). Soit $(\mathcal{H}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'espaces de Hilbert, où Λ est un ensemble dirigé, et soit $\mathcal{H}$ la limite inductive suivante:

$$\mathcal{H} = \lim_{\overrightarrow{\lambda}} \mathcal{H}_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{H}_\lambda.$$

Soit

$$\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \{T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} : \text{ linéaire continu tel que } T_{/\mathcal{H}_\lambda} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)\},$$

où $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)$ est la C^*-algèbre des opérateurs bornés de $\mathcal{H}_\lambda$. D'après (Remarque VIII. 4 du chapitre 1), on a:

$$\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \lim_{\longleftarrow} \mathcal{L}(\mathcal{H})_\lambda\,,$$

où, pour tout $\lambda \in \Lambda$,

$$\mathcal{L}(\mathcal{H})_\lambda = \mathcal{L}(\mathcal{H})\,/_{N_\lambda}, \text{ où } N_\lambda = \ker p_\lambda.$$

Il en résulte que $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est une C^*-*a.l.m.c.* D'où le résultat suivant:

Théorème. Soit $\mathbf{T} = (T_i)_{i\in I}$ une famille commutative d'opérateurs normaux de $\mathcal{H}$ et B la sous-algèbre involutive fermée de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, engendrée par la famille $\{I, T_i, i \in I\}$. Alors il existe un unique morphisme d'algèbres

$$\Phi_T : \mathcal{C}(Sp^s_B(\mathbf{T})) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

unitaire, involutif continu et vérifiant:

$$\Phi_T(\mathbf{z}_i) = T_i, \;\; i \in I$$

Références

[**1**] Aupetit, B.: Propriétés Spectrales des Algèbres de Banach, Lecture Notes in Mathematics 735, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1979.

[**2**] Aurelian, G.: On locally Hilbert spaces. Opuscula Math. 36, no. 6 (2016), 735747.

[**3**] El Atef, H.; El Kinani, A. Real analytic calculus for several variables and applications. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 70 (2021), no. 2, 653–663.

[**4**] Bonsall, F. F., Duncan. J.: Numerical Ranges, II, Cambridge University Press, 1973.

[**5**] Buchwalter, H., Tarral, D.: Théorie spectrale. Publ. Dép. Math. (Lyon) (N.S.) (1982).

[**6**] S. J, Bhatt, H. V, Dedania. Beurling algebra analogues of the classical theorems of Wiener and Lévy on absolutely convergent Fourier series. Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 113 (2003), no. 2, 179-182.

[**7**] Dixmier, J.: Les C^*-algèbres et leurs représentations. North-Holland Publishing Company. Amsterdam. New York-Oxford (1977).

[**8**] R. Dautray and J. L. Lions, "Analyse Mathématique et Calcul Numérique Pour les Sciences et les Techniques," Vol. 3, Masson, Paris, 1985.

[**9**] Dinesh J. Karia and Yogita M. Parmar: Operators on locally Hilbert space. Proceedings of the International Conference on Geometric Function Theory and its Applications (ICGFTA-2014) Editors: B. Bhowmik, S. Ponnusamy and O. Roth. J. Analysis V. 23 (2015), 59-73.

[**10**] A, El Kinani. A version of Wiener's and Lévy's theorems. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 57 (2008), no. 3, 343–352.

[**11**] A, El Kinani, L. Bouchikhi. Corrigendum and addendum to "Wiener's and Lévy's theorems for some weighted power series". Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 66 (2017), no. 3, 429-437.

[**12**] A, El Kinani, L. Bouchikhi. Wiener's and Lévy's theorems for some weighted power series. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 63 (2014), no. 2, 301-309.

[**13**] A, El Kinani, L. Bouchikhi. A weighted algebra analogues of Wiener's and Lévy's theorems. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 61 (2012), no. 3, 331-341.

[**14**] Feldman, C.: The Wedderburn principal theorem in Banach algebras. Proc. Amer. Math. 2 (1951), 771-777.

[**15**] Fragouloupoulou, M.: Topological algebras with involution. North-Holland Mathematics Studies, 200. Elsevier Sience B.V., Amsterdam, 2005.

[**16**] Inoue, A.: locally C^*-algebra. (english), mem. fac. sci. kyushu univ. ser. a , vol. 25 (1971), pp. 197235.

[**17**] Kaniuth. E.: A Course in Commutative Banach Algebras, Springer, Graduate Texts in Mathematics, 246, 2009.

[**18**] Lafon,J. P.: Algèbre commutative, langages algébrique et géométrique, Hermann, Paris, 1977.

[**19**] Levy. P.: Sur la convergence absolue des séries de Fourier. Compositio Math. 1 (1935), 1-14.

[**20**] Mallios, A.: Topological algebras. Selected Topics. North-Holland, Amsterdam, 1986.

[**21**] Michael, E.: Locally multiplicatively-convex topological algebras. Mem. Amer. Math. Soc. 11 (1952), 79 pp.

[**22**] Mazighi, M.; Kinani, A. El. Some applications of simultaneous continuous functional calculus. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 72 (2023), no. 3, 1629-1638.

[**23**] Naimark, M. A.: Normed Algebras, Wolters-Noordhoff Publ. Groningen, 1972.

[**24**] Palmer, T. W.: Banach Algebras and the General Theory of $*$-Algebras, Vol. 1 and 2, Encyclopedia Math. Appl. 49 and 79, Cambridge Univ. Press, 1994 and 2001.

[**25**] Rickart, C. E., General Theory of Banach Algebras, R. E. Krieger Publ. Co., Huntington, New York, 1974.

[**26**] Rudin, W.: Functional Analysis, Tata Mc Graw-Hill Publ. Co., TMH Edition, 1973.

[**27**] Wiener, N.: A note on Tauberian theorems. Ann. of Math. (2) 33 (1932), no. 4, 787.

CHAPITRE 3

Calcul fonctionnel de Baire et applications

Introduction

On sait qu'il existe un calcul fonctionnel de Baire dans les algèbres des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert (cf. [1] et [2]). Ce calcul permet de donner un sens à $f(T)$, où T est un opérateur borné normal sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et f est une fonction de Baire sur $Sp(T)$.

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $\mathbf{T} = (T_i)_{i\in I}$ une famille commutative d'opérateurs normaux et $A_{\mathbf{T}}$ la sous-algèbre fermée commutative unitaire engendrée par $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}^*$ et soit $Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})$ le spectre simultané de $\mathbf{T} = (T_i)_{i\in I}$. Suivant une approche inspirée de [1] et [2], on construit un calcul fonctionnel de Baire simultané pour une famille commutative d'opérateurs normaux $\mathbf{T} = (T_i)_{i\in I}$. Il consiste à donner un sens à $f(\mathbf{T})$, où f est une fonction complexe de Baire sur le spectre simultané $Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})$ de $\mathbf{T}$.

Soit $\Phi_{\mathbf{T}} : \mathcal{C}(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ le calcul fonctionnel continu simultané construit et étudié au chapitre 2. Nous montrons que $\Phi_{\mathbf{T}}$ s'étend à une classe plus large de fonctions. Il s'agit de celle des fonctions complexes de Baire $Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T}))$. Plus précisement, nous montrons que $\Phi_{\mathbf{T}}$ s'étend en un $*$-morphisme continu

$$\Psi_{\mathbf{T}} : Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

qu'on appelle un calcul fonctionnel de Baire simultané. Nous montrons que $\Psi_{\mathbf{T}}$ est caractérisé par les propriétés suivantes:

1) $\Psi_{\mathbf{T}}$ est déterminé par les égalités :

$$\langle \Psi_{\mathbf{T}}(f)(x), y\rangle = \int_{Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})} f d\mu_{x,y}, \text{ pour toute } f \in Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})),\ x, y \in \mathcal{H},$$

où $\mu_{x,y}$ est une mesure de Radon complexe sur $Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})$.

2) $\Psi_{\mathbf{T}}$ est unique sous la condition suivante: "Pour toute suite $(f_n)_n \in Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T}))$, bornée telle que $f_n \longrightarrow 0$, simplement, on a: $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \Psi_{\mathbf{T}}(f_n)(x) = 0$, pour tout $x \in \mathcal{H}$.". Nous établissons ensuite une forme du théorème de l'application spectrale à savoir:

$$Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(\Psi_{\mathbf{T}}(f)) \subset \overline{f\left((Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T}))\right)}, \text{ pour toute } f \in Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})).$$

Puis, nous donnons un résultat sur le comportement du calcul fonctionnel de Baire simultané avec la composition et un autre qui exprime une certaine compatibilité de ce calcul fonctionnel simultané avec les morphismes d'algèbres.

Dans le deuxième paragraphe de ce chapitre, on se place dans un espace localement Hilbert $\mathcal{H}$ qui n'est pas nécessairement de Hilbert. Dans ce cas $Sp(T)$, où $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, est une reunion de compacts. Il n'est pas nécessairement compact. Il n'est même pas localement compact en général. Comme les fonctions de Baire sont considérées ici sur un espace compact. Ceci nous amème à introduire la notion d'opérateur normal spectralement compact (s.c-normal en abrégé). On commence par traîter quelques exemples d'opérateurs s.c-normaux. Puis, on se place dans un espace localement Hilbert vérifiant la propriété du "lemme de Dieudonné-Schwartz". Dans un tel espace, on construit un calcul fonctionnel de Baire, pour un opérateur s.c-normal, donné par:

$$\Psi_T : Ba(Sp(T)) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}),$$

où Ψ_T est un morphisme déterminé par l'égalité suivante:

$$\langle \Psi_T(f)(x), y \rangle = \int_{Sp(T)} f d\mu_{x,y}, \text{ pour tous } f \in Ba(Sp(T)), \ x, y \in \mathcal{H}.$$

On montre que ce calcul fonctionnel est unique sous la condition supplémentaire à savoir: "Pour toute suite $(f_n)_n \in Ba(Sp(T))$, telle que $|f_n| \leq 1$ et $f_n \longrightarrow 0$ simplement, on a $\Psi_T(f_n)x \longrightarrow 0$, pour tout $x \in \mathcal{H}$, dans le sens suivant "Pour tout $\gamma \in \Lambda$ tel que $x \in \mathcal{H}_\gamma$ et $\Psi_T(f_n)(x) \in \mathcal{H}_\gamma$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$\|\Psi_T(f_n)x\|_\gamma \longrightarrow 0."$$

Nous établissons aussi que ce calcul fonctionnel vérifie une forme du "Spectral Mapping Theorem" donnée par:

$$Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(\Psi_T(f)) \subset \overline{f(Sp(T))}, \text{ pour toute } f \in Ba(Sp(T)).$$

Nous prouvons également que ce calcul fonctionnel de Baire est compatible avec la composition. Comme conséquence, nous obtenons que, pour tout opérateur s.c-normal U sur $\mathcal{H}$ tel que $Sp(U) \subset \Gamma$, où Γ est le cercle unité, s'écrit $U = e^{iQ}$, où $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un opérateur hermitien. Par ailleurs, nous prouvons que ce calcul fonctionnel de Baire possède une propriété fondamentale qui dit que $\Psi_T(\chi_U) \neq 0$, pour chaque sous ensemble ouvert non vide U de $Sp\,(T)$.

On termine ce paragraphe par quelques applications du calcul fonctionnel de Baire dans le cadre de cette classe des espaces localement Hilbert. Nous établissons une forme de la décomposition polaire. Puis, nous étudions le problème des sous-espaces invariants. Nous montrons que, si $\dim \mathcal{H} \geq 2$, alors tout opérateur s.c-normal $T \neq \mathbb{C}I_{\mathcal{H}}$ admet un sous espace propre invariant.

Dans le dernier paragraphe de ce chapitre, on construit un calcul fonctionnel de Baire pour un opérateur normal non nécessairement s.c-normal sur un espace localement Hilbert quelconque. Pour ce faire, on définit l'algèbre $Ba(Sp(T))$ des fonctions de Baire sur $Sp(T)$ comme suit:

$$Ba(Sp(T)) = \varprojlim Ba(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)}(T_\lambda)).$$

Puis, on construit un calcul fonctionnel de Baire pour l'opérateur T comme limite projective $\Psi_T = \varprojlim \Psi_{T_\lambda},\ \lambda \in \Lambda$, des calculs fonctionnels

$$\Psi_{T_\lambda} : Ba(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)}(T_\lambda)) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda),\ \lambda \in \Lambda.$$

I. Calcul fonctionnel de Baire simultané dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert

Comme pour le cas du calcul fonctionnel continu, il est tout à fait naturel de se poser la question concernant l'existence d'un calcul fonctionnel de Baire simultané. La réponse est positive et montre encore une fois de plus le caractère spécial des espaces de Hilbert. Là également, le calcul est explicite et est défini à partir du produit scalaire.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $\mathbf{T} = (\mathbf{T}_i)_{i \in I}$ une famille commutative d'opérateurs normaux de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Soit $A_{\mathbf{T}}$ la sous-algèbre involutive fermée de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ engendrée par Id et la famille $(\mathbf{T}_i)_{i \in I}$ et soit $Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})$ le spectre simultanée de $\mathbf{T}$. Par le lemme 2.1 du chapitre 2, $Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})$ est une partie compacte de $\mathbb{C}^I$ ($\mathbb{C}^I$ étant muni de la topologie produit).

Soit maintenant $\Phi_{\mathbf{T}} : \mathcal{C}\left[Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})\right] \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ l'unique morphisme continu unitaire involutif qui définit un calcul fonctionnel continu simultané pour $\mathbf{T}$, introduit et étudié au chapitre 2. Pour tout $x \in \mathcal{H}$, l'application $\phi_x : \mathcal{C}\left(Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T})\right) \longrightarrow \mathcal{H}$ défini par:

$$\phi_x(g) = \Phi_\mathbf{T}(g)(x), \text{ pour toute } g \in \mathcal{C}\left(Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T})\right)$$

est un morphisme d'espace de Banach. Pour tout $y \in \mathcal{H}$, l'application

$$(\phi_x)_y(f) = \langle \phi_x(f), y\rangle, \text{ pour toute } f \in \mathcal{C}\left(Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T})\right)$$

est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}\left(Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T})\right)$. Par le théorème de Riesz, il existe une mesure de Radon complexe $\mu_{x,y}$ telle que:

$$(\phi_x)_y(f) = \int_{Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T})} f d\mu_{x,y}, \text{ pour tout } f \in \mathcal{C}\left(Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T})\right).$$

Par ailleurs, si f est une fonction de Baire sur $Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T})$, alors elle est mesurable au sens de Baire. De plus elle est bornée. Elle est donc $\mu_{x,y}$-intégrable. Par suite, pour toute $f \in Ba(Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T}))$, l'intégrale

$$\int_{Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T})} f d\mu_{x,y} \text{ existe, pour tous } x, y \in \mathcal{H}.$$

Ceci nous permet de prolonger $\Phi_\mathbf{T}$ en une application, notée Ψ_T, de $Ba(Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T}))$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, déterminée par l'égalité suivante:

$$\langle \Psi_\mathbf{T}(f)(x), y\rangle = \int_{Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T})} f d\mu_{x,y}, \text{ pour toute } f \in Ba(Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T})),\ x, y \in \mathcal{H}.$$

L'application $\Psi_T : Ba(Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T})) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est appelée calcul fonctionnel de Baire simultané pour $\mathbf{T}$.

Remarque I.1. Pour tous $x, y \in \mathcal{H}$, $\mu_{x,y}$ désigne la mesure de Radon complexe: $f \longmapsto \langle \Phi_\mathbf{T}(f)(x), y\rangle$. Il s'ensuit que pour toute $g \in \mathcal{C}(Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T}))$, on a:

$$\mu_{\Phi_\mathbf{T}(g)(x),y} = g\mu_{x,y}, \text{ pour tous } \ x, y \in \mathcal{H}.$$

En effet, pour toute $f \in \mathcal{C}(Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T}))$, $\mu_{\Phi_\mathbf{T}(f)(x),y}$ désigne la mesure de Radon:

$$f \longmapsto \langle \Phi_\mathbf{T}(f)\Phi_\mathbf{T}(g)(x), y\rangle = \langle \Phi_\mathbf{T}(fg)(x), y\rangle$$

de sorte que

$$\int_{Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T})} f\mu_{\Phi_\mathbf{T}(f)(x),y} = \int_{Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T})} fg\mu_{x,y}.$$

De même, on a:

$$\mu_{x,\Phi_{\mathbf{T}}(g)(y)} = \overline{g}\mu_{x,y}, \text{ pour tous } x, y \in \mathcal{H}.$$

Les derniers résultats restent encore valable pour les fonctions de $Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T}))$.

Voici les premières propriétés de ce calcul fonctionnel de Baire simultané:

Théorème I.2. Soit $\mathbf{T} = (\mathbf{T}_i)_{i \in I}$ une famille commutative d'opérateurs bornés et normaux sur $\mathcal{H}$, et soit

$$\Phi_{\mathbf{T}} : \mathcal{C}\left(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})\right) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

le calcul fonctionnel continu simultané pour $\mathbf{T}$. Alors $\Phi_{\mathbf{T}}$ s'étend à un $*$-homomorphisme continu:

$$\Psi_{\mathbf{T}} : Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

qui satisfait satisfait les propriétés suivantes:

1) $\Psi_{\mathbf{T}}$ est déterminé par les égalités :

$$\langle \Psi_{\mathbf{T}}(f)(x), y \rangle = \int_{Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})} f d\mu_{x,y}, \text{ pour toute } f \in Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})),\ x, y \in \mathcal{H}.$$

2) $\Psi_{\mathbf{T}}$ est unique sous la condition suivante: Pour toute suite $(f_n)_n \in Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T}))$, bornée telle que $f_n \longrightarrow 0$ simplement, on a

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \Psi_{\mathbf{T}}(f_n)(x) = 0, \text{ pour tout } x \in \mathcal{H}.$$

Comme pour le calcul fonctionnel continu simultané, nous écrirons aussi $f(\mathbf{T})$ comme notation pour $\Psi_{\mathbf{T}}(f)$, pour toute $f \in Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T}))$.

Preuve: 1) Montrons d'abord que:

$$\Psi_{\mathbf{T}}(f)^* = \Psi_{\mathbf{T}}(\overline{f}), \text{ pour toute } f \in Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})).$$

Pour cela, posons:

$$\mathcal{M} = \left\{ f \in Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})) : \Psi_{\mathbf{T}}(f)^* = \Psi_{\mathbf{T}}(\overline{f}) \right\}.$$

Pour toute $f \in \mathcal{C}(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T}))$, on a:

$$\Psi_{\mathbf{T}}(f)^* = \Phi_{\mathbf{T}}(f)^* = \Phi_{\mathbf{T}}(\overline{f}) = \Psi_{\mathbf{T}}(\overline{f}).$$

Donc $\mathcal{C}(Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T})) \subset \mathcal{M}$. Montrons maintenant que $\mathcal{M}$ est une classe $u.b$-s. Soit $(f_n)_n$ une suite uniformément bornée de $\mathcal{M}$ telle que $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f. Soit $x \in \mathcal{H}$. Alors, par le théorème de la convergence dominée, $\Psi_\mathbf{T}(\overline{f}_n)(x)$ converge faiblement vers $\Psi_\mathbf{T}(\overline{f})(x)$. De plus,

$$\langle \Psi_\mathbf{T}(f_n)^* (x), y\rangle = \langle x, \Psi_\mathbf{T}(f_n)(y)\rangle = \int_{Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T})} d\mu_{x,\Psi_\mathbf{T}(f_n)(y)}$$

Comme $\mu_{x,\Psi_\mathbf{T}(g)(y)} = \overline{g}\mu_{x,y}$, pour tous $x, y \in \mathcal{H}$, on obtient

$$\langle \Psi_\mathbf{T}(f_n)^* (x), y\rangle = \int_{Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T})} \overline{f_n} d\mu_{x,y} \longrightarrow \int_{Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T})} \overline{f} d\mu_{x,y}$$

Par ailleurs,

$$\langle \Psi_\mathbf{T}(f)^* (x), y\rangle = \int_{Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T})} \overline{f} d\mu_{x,y}$$

Donc $\Psi_\mathbf{T}(f_n)^*(x)$ converge faiblement vers $\Psi_\mathbf{T}(f)^*(x)$. D'où $\Psi_\mathbf{T}(f)^*(x) = \Psi_\mathbf{T}(\overline{f})(x)$, et ceci pour tout $x \in \mathcal{H}$. Ainsi $\Psi_\mathbf{T}(f)^* = \Psi_\mathbf{T}(\overline{f})$. Montrons ensuite que $\Psi_\mathbf{T}$ est multiplicatif:

$$\Psi_\mathbf{T}(fg) = \Psi_\mathbf{T}(f)\Psi_\mathbf{T}(g), \text{ pour tous } f, g \in Ba(Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T}))$$

Pour ce faire, considérons la classe des fonctions suivantes:

$$\mathcal{N} = \left\{ f \in Ba(Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T})) : \Psi_\mathbf{T}(fg) = \Psi_\mathbf{T}(f)\Psi_\mathbf{T}(g), \text{ pour toute } g \in \mathcal{C}(Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T})) \right\}.$$

Il est claire que $\mathcal{N}$ contient $\mathcal{C}(Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T}))$. Montrons que $\mathcal{N}$ est une classe $u.b$-s. Soit $(f_n)_n$ une suite uniformément bornée de $\mathcal{N}$ telle que $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f. Alors

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \langle \Psi_\mathbf{T}(f_n)(x), y\rangle = \int_{Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T})} f d\mu_{x,y} = \langle \Psi_\mathbf{T}(f)(x), y\rangle, \ x, y \in \mathcal{H}.$$

Donc $\Psi_\mathbf{T}(f_n)(x)$ converge faiblement vers $\Psi_\mathbf{T}(f)(x)$. Ensuite, par le théorème de la convergence dominée, on a

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \langle \Psi_\mathbf{T}(f_n g)(x), y\rangle = \int_{Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T})} fg d\mu_{x,y} = \langle \Psi_\mathbf{T}(fg)(x), y\rangle, \ x, y \in \mathcal{H}.$$

Donc $\Psi_\mathbf{T}(f_n g)(x)$ converge faiblement vers $\Psi_\mathbf{T}(fg)(x)$. Par ailleurs,

$$\Psi_\mathbf{T}(f_n g) = \Psi_\mathbf{T}(g)\Psi_\mathbf{T}(f_n) \qquad \mathbf{(1)}$$

Comme $\Psi_{\mathbf{T}}(f_n)\,(x)$ converge faiblement vers $\Psi_{\mathbf{T}}(f)\,(x)$, on a $\Psi_{\mathbf{T}}(g)\Psi_{\mathbf{T}}(f_n)(x)$ converge faiblement vers $\Psi_{\mathbf{T}}(g)\Psi_{\mathbf{T}}(f)\,(x)$. En effet, pour tout $y \in \mathcal{H}$, la forme linéaire $L : \mathcal{L}\,(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{C}$: donnée par $L(x) = \langle \Psi_{\mathbf{T}}(g)(x), y\rangle$ est continue donc il existe $v \in \mathcal{H}$ telle que $\langle \Psi_{\mathbf{T}}(g)(x), y\rangle = \langle x, v\rangle$, pour tout $x \in \mathcal{H}$. Ainsi

$$\langle \Psi_{\mathbf{T}}(g)\left(\Psi_{\mathbf{T}}(f_n)(x) - \Psi_{\mathbf{T}}(f)(x)\right), y\rangle = \langle \Psi_{\mathbf{T}}(f_n)(x) - \Psi_{\mathbf{T}}(f)(x), v\rangle \longrightarrow 0.$$

Donc $\Psi_{\mathbf{T}}(g)\Psi_{\mathbf{T}}(f_n)\,(x)$ converge faiblement vers $\Psi_{\mathbf{T}}(g)\Psi_{\mathbf{T}}(f)\,(x)$. Il s'ensuit que $\Psi_{\mathbf{T}}(fg)(x) = \Psi_{\mathbf{T}}(f)\Psi_{\mathbf{T}}(g)(x)$. Ainsi $Ba\left(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})\right) \subset \mathcal{M}$ de sorte que

$$\Psi_{\mathbf{T}}(fg) = \Psi_{\mathbf{T}}(f)\Psi_{\mathbf{T}}(g), \text{ pour toute } f{\in}Ba\left(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})\right) \text{ et } g{\in}\mathcal{C}\left(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})\right).$$

Considérons maintenant

$$\mathcal{M}' = \left\{f : \Psi_{\mathbf{T}}(fg) = \Psi_{\mathbf{T}}(f)\Psi_{\mathbf{T}}(g), \text{ pour toute } g{\in}Ba\left(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})\right)\right\}.$$

On a $\mathcal{C}\left(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})\right) \subset \mathcal{M}'$. De manière analogue que pour $\mathcal{M}$, on montre que $\mathcal{M}'$ est aussi une classe *u.b-s*. D'où

$$\Psi_{\mathbf{T}}(fg) = \Psi_{\mathbf{T}}(f)\Psi_{\mathbf{T}}(g), \text{ pour toutes } f, g \in Ba\left(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})\right).$$

Et donc $\Psi_{\mathbf{T}}$ est multiplicatif.

2) Commençons d'abord par montrer que l'application $\Psi_{\mathbf{T}}$ vérifie bien la condition citée. En effet, tout d'abord $\mu_{x,x}$ est une mesure positive car si f est une fonction continue et positive, alors il existe une fonction g tel que

$$f = |g|^2 = g\overline{g}.$$

Alors, on a:

$$\int_{Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})} f du_{x.x} =< \Psi_{\mathbf{T}}(g\overline{g})x, x >= ||\Psi_{\mathbf{T}}(g)x||^2 \geq 0.$$

Montrons maintenant que Ψ_T vérifie bien la condition **2)**. Soit $(f_n)_n \in Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T}))$, bornée telle que $f_n \longrightarrow 0$. Montrons que:

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \Psi_{\mathbf{T}}(f_n)(x) = 0, \text{ pour tout } x \in \mathcal{H}.$$

Pour chaque $x \in \mathcal{H}$, on a:

$$\left\|\Psi_T\left(f_n\right)x\right\|^2 = \int_{Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})} f_n^2 d\mu_{x,x}.$$

Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$\int_{Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})} f_n^2 d\mu_{x,x} \longrightarrow 0.$$

D'où

$$\|\Psi_{\mathbf{T}}(f_n)\, x\| \longrightarrow 0.$$

Montrons que $\Psi_{\mathbf{T}}$ est unique sous la condition **2)**. Soit $\Theta_{\mathbf{T}}$ une autre extension de $\Phi_{\mathbf{T}}$ satisfaisant **2).** Il s'ensuit que, pour toute suite $(f_n)_n \in Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T}))$, bornée telle que $f_n \longrightarrow 0$, on a:

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \Theta_{\mathbf{T}}(f_n)(x) = 0, \text{ pour tout } x \in \mathcal{H}.$$

Montrons que $\Theta_{\mathbf{T}} = \Psi_{\mathbf{T}}$. Pour cela, posons:

$$\mathcal{N} = \{f \in Ba\left(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})\right) : \Theta_{\mathbf{T}}(f) = \Psi_{\mathbf{T}}(f)\}.$$

Evidemment $\mathcal{C}(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})) \subset \mathcal{N}$. Montrons que $\mathcal{N}$ est une classe $u.b$-s. Soit $(f_n)_n \subset \mathcal{N}$ une suite uniformément bornée convergeant simplement vers une fonction f. Montrons que $f \in \mathcal{N}$. Posons**:** $g_n = f_n - f$. Alors la suite $(g_n) \in Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T}))$, bornée telle que $g_n \longrightarrow 0$. Donc on a:

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \Theta_{\mathbf{T}}(g_n)(x) = 0, \text{ pour tout } x \in \mathcal{H}.$$

D'où

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \Theta_{\mathbf{T}}(f_n)(x) = \Theta_{\mathbf{T}}(f)(x), \text{ pour tout } x \in \mathcal{H}.$$

De même, on a

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \Psi_{\mathbf{T}}(f_n)(x) = \Psi_{\mathbf{T}}(f)(x), \text{ pour tout } x \in \mathcal{H}.$$

Comme $(f_n)_n \subset \mathcal{N}$, on a,

$$\Theta_{\mathbf{T}}(f_n) = \Psi_{\mathbf{T}}(f_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Il s'ensuit que:

$$\Theta_{\mathbf{T}}(f)(x) = \Psi_{\mathbf{T}}(f)(x), \text{ pour tout } x \in \mathcal{H}.$$

La continuité de $\Psi_{\mathbf{T}}$ résulte du fait que $Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T}))$ et $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ sont des C^*-algèbres et $\Psi_{\mathbf{T}}$ est un morphisme d'algèbres.

Remarque I.3. Le morphisme $\Psi_{\mathbf{T}}$ opère effectivement de $Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T}))$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. En effet, pour $x \in \mathcal{H}$, posons:

$$\mathcal{K}_x = \{f : \Psi_{\mathbf{T}}(f)(x) \in \mathcal{H}\}.$$

Comme $\Psi_{\mathbf{T}} = \Phi_{\mathbf{T}}$ sur $\mathcal{C}\left[Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})\right]$, on a $\mathcal{C}(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})) \in \mathcal{K}_x$. Montrons que $\mathcal{K}_x$ est une classe *u.b-s*. Soit $(f_n)_n \subset \mathcal{K}_x$ une suite uniformément bornée convergeant simplement vers une fonction f. Montrons que $f \in \mathcal{K}_x$. On a $\Psi_{\mathbf{T}}(f_n)(x) \in \mathcal{H}$. De plus, pour tout $y \in \mathcal{H}$, la suite $(\langle \Psi_{\mathbf{T}}(f_n)(x), y\rangle)_n$ est convergente. Alors, par le théorème 2.2.2 de [2], il existe $x' \in \mathcal{H}$ tel que

$$\langle \Psi_{\mathbf{T}}(f_n)(x), y\rangle \longrightarrow \langle x', y\rangle, \text{ pour tout } y \in \mathcal{H}.$$

Comme

$$\langle \Psi_{\mathbf{T}}(f_n)(x), y\rangle \longrightarrow \langle \Psi_{\mathbf{T}}(f)(x), y\rangle, \text{ pour tout } y \in \mathcal{H}.$$

on a $\Psi_{\mathbf{T}}(f)(x) = x' \in \mathcal{H}$.

Comme pour le cas d'un seul opérateur, le calcul de Baire simultané vérifie une forme du "Spectral mapping theorem" suivante:

Proposition I.4. "Spectral mapping theorem". Sous les hypothèses du théorème I.2, on a:

$$Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(\Psi_{\mathbf{T}}(f)) \subset \overline{f\left((Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T}))\right)}, \text{ pour toute } f \in Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})).$$

Preuve: Soit $f \in Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T}))$. Alors, on a:

$$Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(\Psi_{\mathbf{T}}(f)) \subset Sp_{Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T}))}(f).$$

Ensuite, pour tout $f \in Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T}))$, on a:

$$f\left(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})\right) \subset Sp_{Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T}))}(f)$$

car, pour tout $x \in Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})$, l'application δ_x donnée par: $\delta_x(f) = f(x)$ est un caractère de $Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T}))$. Comme $Sp_{Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T}))}(f)$ est compact, on a:

$$\overline{f\left(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})\right)} \subset Sp_{Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T}))}(f).$$

Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\overline{f\left(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})\right)}$. Alors la fonction $(\lambda - f) \in Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T}))$ est inversible dans $B(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T}))$. Comme $Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T}))$ est pleine dans $B(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T}))$, l'inverse $(\lambda - f)^{-1} \in Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T}))$ et donc $\lambda \notin Sp_{Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T}))}(f)$. Ainsi

$$Sp_{Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T}))}(f) = \overline{f\left(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})\right)}.$$

D'où

$$Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\left(\Psi_{\mathbf{T}}\left(f\right)\right) \subset Sp_{Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T}))}\left(f\right) = \overline{f\left(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}\left(\mathbf{T}\right)\right)}$$

Egalement, ici, le calcul fonctionnel de Baire simultané se comporte bien avec la composition. Plus précisement, nous avons:

Proposition I.5. Soit $\mathbf{T} = (\mathbf{T}_i)_{i\in I}$ une famille commutative d'opérateurs bornés et normaux sur $\mathcal{H}$. Alors, pour toute $g \in Ba\left(\overline{f\left(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}\left(\mathbf{T}\right)\right)}\right)$ et $f \in Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T}))$, on a:

$$(g \circ f)\left(\mathbf{T}\right) = g(f(\mathbf{T})). \qquad \textbf{(2)}$$

Preuve. L'égalité **(2)** est vérifiée lorsque g est un polynôme en $\mathbf{z}$ et $\overline{\mathbf{z}}$ et $f \in Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T}))$. Par le théorème d'approximation uniforme de Weierstrass sur $\overline{f(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T}))}$, l'égalité **(2)** est vérifiée lorsque $g \in \mathcal{C}(\overline{f(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T})})$ et $f \in Ba(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}(\mathbf{T}))$. De plus, les deux applications $g \longmapsto (g\circ f)(\mathbf{T})$ et $g \longmapsto g(f(\mathbf{T}))$ de $Ba\left(\overline{f\left(Sp^s_{A_{\mathbf{T}}}\left(\mathbf{T}\right)\right)}\right)$ dans $\mathcal{L}\left(\mathcal{H}\right)$ vérifie 2) du théorème I.2. D'où le résultat par l'unicité du calcul fonctionnel simultané de Baire.

Le résultat suivant exprime une certaine compatibilité du calcul fonctionnel de Baire simultané avec les morphismes d'algèbres.

Proposition I.6. Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert, $\Phi : \mathcal{L}(\mathcal{H}_1) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ un $*$-morphisme continu et $\mathbf{T} = (T_i)_{i\in I}$ une famille commutative d'opérateurs normaux de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$. On note $S = Sp^s_{\mathcal{L}(E)}(\mathbf{T})$, $S' = Sp^s_{\mathcal{L}(F)}(\Phi(T))$ et $f \in Ba(S)$. Alors:

$$\Phi(f(T)) = f(\Phi(T)).$$

Preuve. Les deux algèbres $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ et $\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ sont des C^*-algèbres unitaires. Comme $S' \subset S$, on considère l'injection canonique $j : Ba(S) \longrightarrow Ba(S')$. C'est un $*$-morphisme continu. Soient

$$\Psi_{\mathbf{T}} : Ba(S) \longrightarrow \mathcal{L}\left(\mathcal{H}_1\right) \quad \text{et} \quad \widetilde{\Psi}_{\mathbf{T}} : Ba(S') \longrightarrow \mathcal{L}\left(\mathcal{H}_2\right).$$

Les deux $*$-morphismes unitaires du calcul fonctionnel simultané Bairien déduite du théorème I.2. Puis, on considère les deux morphisme suivants:

$$\Phi \circ \Psi_{\mathbf{T}} : Ba(S) \longrightarrow \mathcal{L}\left(\mathcal{H}_2\right) : f \mapsto \Phi(\Psi_{\mathbf{T}}(f)) = \Phi(f(T)),$$

$$\widetilde{\Psi_{\mathbf{T}}} \circ j : Ba(S') \longrightarrow \mathcal{L}\left(\mathcal{H}_2\right) : f \mapsto \widetilde{\Psi_{\mathbf{T}}}(j(f)) = f(\Phi(T)).$$

Montrons que:

$$\Phi \circ \Psi_{\mathbf{T}}(f) = \widetilde{\Psi_{\mathbf{T}}} \circ j(f), \text{ pour toute } f \in Ba(S).$$

Pour cela, considérons la classe de fonctions suivantes:

$$\mathcal{L} = \left\{ f \in Ba(S) : \Phi \circ \Psi_{\mathbf{T}})(f) = (\widetilde{\Psi_{\mathbf{T}}} \circ j)(f) \right\}.$$

L'ensemble $\mathcal{L}$ contient $\mathcal{C}(S)$. En effet, si $f \in \mathcal{C}(S)$, on sait que $\Phi \circ \Psi_{\mathbf{T}}$ et $\widetilde{\Psi_{\mathbf{T}}} \circ j$ sont deux $*$-morphismes continus qui coïncident en 1, id_S et id_S^*. Par le théorème de Stone-Weirstrass ([8])

$$\Phi \circ \Psi_{\mathbf{T}})(f) = (\widetilde{\Psi_{\mathbf{T}}} \circ j)(f), \text{ pour toute } f \in \mathcal{C}(S).$$

Montrons que $\mathcal{L}$ est une classe *u.b-s*. Soit $(f_n)_n \subset \mathcal{L}$ une suite uniformément bornée convergeant simplement vers une fonction f. Montrons que $f \in \mathcal{L}$. Alors

$$\Phi \circ \Psi_{\mathbf{T}}(f_n) = \widetilde{\Psi_{\mathbf{T}}} \circ j(f_n), \text{ pour toute } f \in Ba(S).$$

Pour tous $x, y \in \mathcal{H}_2$, on a S'

$$\left\langle \widetilde{\Psi_{\mathbf{T}}} \circ j(f_n)(x), y \right\rangle = \int_{S'} j(f_n) d\mu_{x,y} \longrightarrow \int_{S'} j(f) d\mu_{x,y} = \left\langle \widetilde{\Psi_{\mathbf{T}}} \circ j(f)(x), y \right\rangle$$

Donc $\widetilde{\Psi_{\mathbf{T}}} \circ j(f_n)$ converge faiblement vers $\widetilde{\Psi_{\mathbf{T}}} \circ j(f)$. De plus,

$$|\langle \Phi\left[\Psi_{\mathbf{T}}(f_n) - \Psi_{\mathbf{T}}(f_n)\right](x), y\rangle| \leq \|\Phi\| \, |\langle \Psi_{\mathbf{T}}(f_n) - \Psi_{\mathbf{T}}(f_n)(x), y\rangle| \longrightarrow 0$$

Donc $\Phi \circ \Psi_{\mathbf{T}}(f_n)$ converge faiblement vers $\Phi \circ \Psi_{\mathbf{T}}(f)$. Par l'unicité de la limite, on a,

$$\Phi \circ \Psi_{\mathbf{T}}(f) = \widetilde{\Psi_{\mathbf{T}}} \circ j(f).$$

Ainsi $\mathcal{L} = Ba(S)$. D'où le résultat.

Corollaire I.7. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $\mathbf{T} = (T_i)_{i \in I}$ une famille commutative d'opérateurs bornés et normaux sur $\mathcal{H}$. Soit $f \in \mathcal{C}(Sp^s_{\mathcal{L}(H)}(\mathbf{T}))$ et notons:

$$S = f(Sp^s_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(\mathbf{T})) = Sp^s_{\mathcal{L}(H)}(f(T))$$

et

$$\Phi_T : Ba(Sp^s_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(\mathbf{T})) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

le morphisme du calcul fonctionnel déduit par le théorème II.2. Soit Φ' un $*$-morphisme injectif de $Ba(S)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Alors:

$$\Phi'(g) = g(f(T)) = (g \circ f)(T) = \Phi(g \circ f), \text{ pour toute } g \in Ba(S).$$

Preuve. On pose:

$$\mathcal{J} = \{g \in Ba(S) : g(f(T)) = (g \circ f)(T)\}.$$

Comme l'égalité est vérifiée pour le calcul fonctionnel continu simultané, on a $\mathcal{C}(S) \subset \mathcal{J}$. Montrons maintenant que $\mathcal{J}$ est une classe $u.b$-s. Soit $(h_n)_n$ une suite uniformément bornée de $\mathcal{J}$ telle que $(h_n)_n$ converge simplement vers une fonction h. Alors,

$$h_n(f(T)) = (h_n \circ f)(T), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Montrons que $h \in \mathcal{J}$. Pour tous $x, y \in \mathcal{H}$, on a:

$$\langle (h_n \circ f)(T)x, y\rangle = \int_{Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T})} h_n \circ f d\mu_{x,y} \longrightarrow \int_{Sp^s_{A_\mathbf{T}}(\mathbf{T})} h \circ f d\mu_{x,y} = \langle (h \circ f)(T)x, y\rangle$$

Donc $(h_n \circ f)(T)(x)$ converge faiblement vers $(h \circ f)(T)(x)$. De même,

$$\langle (h_n(f(T)) - h(f(T))(x), y)\rangle = \left\langle \Psi_{f(\mathbf{T})}(h_n - h)(x), y\right\rangle = \int_S (h_n - h) d\mu_{x,y} \longrightarrow 0$$

Donc $h_n(f(T))(x)$ converge faiblement vers $h(f(T))(x)$. Ainsi $h(f(T))(x) = (h \circ f)(T)(x)$ et donc

$$h(f(T)) = (h \circ f)(T).$$

Et par suite $h \in \mathcal{J}$. D'où $\mathcal{J} = Ba(S)$.

II. Calcul fonctionnel de Baire dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, où $\mathcal{H}$ est un espace localement Hilbert

Dans tout ce qui suit, $\mathcal{H}$ est un espace localement Hilbert, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ l'algèbre des opérateurs localement bornés de $\mathcal{H}$ (voir chapitre 1). Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, on notera $Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(T)$, ou tout simplement $Sp(T)$ s'il n'y a pas de confusion possible, le spectre de T dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Par 1) de la remarque VII. 4 du chapitre 1, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est une C^*-algèbre localement multiplicativement convexe. Donc, pour tout $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $Sp(T)$ est une reunion de compacts. Ainsi $Sp(T)$ n'est pas nécessairement compact. Il n'est même pas localement compact en général. Comme les fonctions de Baire sont considérées ici sur un espace compact. Ceci nous amème à poser la définition suivante:

Définition II.1. Soit $\mathcal{H}$ est un espace localement Hilbert et soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

On dit que T est normal spectralement compact (s.c-normal en abrégé) s'il est normal et $Sp(T)$ est compact.

Voici quelques exemples d'opérateurs s.c-normaux.

II.2. Exemples

Exemple 1. Si $\mathcal{H}$ est un espace Hilbert et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur normal. Alors $Sp(T)$ est compact. Ainsi tout opérateur normal sur $\mathcal{H}$ est s.c-normal.

Exemple 2. Soit $\mathcal{H}_n = \{x = (x_k)_k \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : x_k = 0, \text{ pour tout } k \geq n\}$ et soit

$$\mathcal{H} = \varinjlim \mathcal{H}_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n = \left\{x = (x_k)_k \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : supp\,(x) < \infty\right\}$$

l'espace localement Hilbert de l'exempe VII.1 du chapitre 1. Soit $(c_n)_n$ une suite bornée de nombres complexes, et soit $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ l'opérateur défini par:

$$T(x) = (c_n x_n)_n \,, \text{ pour tout } x = (x_n)_n \in \mathcal{H}.$$

Alors T est continu car, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la restriction $T_n : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n$, de T à $\mathcal{H}_n$, est continu. On montre que l'adjoint T^* de l'opérateur T est défini par:

$$T^*(x) = (\overline{c_n} x_n)_n \,, \text{ pour tout } x = (x_n)_n \in \mathcal{H}.$$

De plus T est normal car, pour tout $x = (x_n)_n \in \mathcal{H}$, on a:

$$T^*T(x) = (\overline{c_n}\,(c_n x_n))_n = (c_n\,(\overline{c_n} x_n))_n = TT^*(x).$$

Déterminons maintenant $Sp(T)$. Tout d'abord,

$$\{c_n : n \in \mathbb{N}^*\} \subset Sp(T)$$

car, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $T(e_n) = c_n e_n$, où $e_n = (0, ...0, 1, 0, , ...)$ est la suite dont tous les termes sont nuls sauf celui de rang n qui vaut 1. Soit maintenant $\lambda \notin \overline{\{c_n : n \in \mathbb{N}^*\}}$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que $|c_n - \lambda| > \delta$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit alors $S : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ l'opérateur défini par:

$$S(x) = \left(\frac{1}{c_n - \lambda} x_n\right)_n \,, \text{ pour tout } x = (x_n)_n \in \mathcal{H}.$$

Alors $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. De plus, on a:

$$S(T - \lambda I) = (T - \lambda I)S = I.$$

Il s'ensuit que $\lambda \notin Sp(T)$. Ainsi

$$\{c_n : n \in \mathbb{N}^*\} \subset Sp(T) \subset \overline{\{c_n : n \in \mathbb{N}^*\}}.$$

Si la suite $(c_n)_n$ est stationnaire, alors $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un opérateur s.c.normal à spectre fini: De même si la suite $(c_n)_n$ est une suite qui tend vers zéro avec $c_0 = 0$, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un opérateur s.c-normal à spectre infini. Dans les deux cas, on a:

$$Sp(T) = \{c_n : n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Signalons que l'espace $\mathcal{H}$ est localement Hilbert non Hilbert (cf. chapitre 1).

Exemple 3. Soit $\mathcal{H} = \varinjlim \mathcal{H}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, un espace localement Hilbert et soit P un projecteur normal non trivial de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Alors P est un opérateur s.c-normal ($Sp(P) = \{0,1\}$). Soit $\lambda \in \Lambda$. Alors, par le lemme 3.1 p. 742 de [2], on a $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\lambda \oplus \mathcal{H}_\lambda^\perp$. En particulier, il existe une unique projection hermitienne $P_\lambda : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ telle que $Im\,(P_\lambda) = \mathcal{H}_\lambda$. Donc, pour tout $\lambda \in \Lambda$, P_λ est un opérateur s.c-normal.

Dans le reste de ce paragraphe, on suppose que l'espace localement Hilbert vérifie la propriété du lemme de Dieudonné-Schwartz à savoir que:

DS: "Pour tout borné A de $\mathcal{H}$, il existe $\lambda \in \Lambda$, tel que $A \subset \mathcal{H}_\lambda$.

Signalons que cette propriété est vérifiée si la limite inductive $\mathcal{H} = \varinjlim \mathcal{H}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, est régulière, c'est la cas par exemple si $\mathcal{H}$ est un espace L.F.

Remarquons que si $\mathcal{H}$ vévifie la propriété DS, alors toute suite de Cauchy faible dans $\mathcal{H}$ est faiblement convergente dans un certain $\mathcal{H}_\lambda$. En effet, soit $(x_n)_n$ une suite dans $\mathcal{H}$, de Cauchy faible, alors $(x_n)_n$ est faiblement bornée. Elle est donc fortement bornée. Il existe alors $\lambda \in \Lambda$, tel que $(x_n)_n \in \mathcal{H}_\lambda$. Par ailleurs, pour tout $y \in \mathcal{H}_\lambda$, la forme linéaire: $x \longmapsto \langle x, y\rangle$, pour tout $x \in \mathcal{H}$, est continue sur $\mathcal{H}$. Donc la $(x_n)_n$ est de Cauchy faible dans $\mathcal{H}_\lambda$. Alors, par le théorème 2.2.2 de [2], la suite $(x_n)_n$ est faiblement convergente dans $\mathcal{H}_\lambda$. Il existe alors $x_\lambda \in \mathcal{H}_\lambda$ tel que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x_\lambda, y\rangle, \text{ pour tout } y \in \mathcal{H}_\lambda.$$

II.3. Calcul fonctionnel de Baire pour un opérateur s.c.normal.

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, T un opérateur normal de $\mathcal{H}$ et B la sous-algèbre unitaire involutive fermée de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, engendrée par T. Par le calcul fonctionnel continu, il existe un unique morphisme d'algèbres

$$\Phi_T : \mathcal{C}(Sp_B(T)) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

unitaire, involutif continu et vérifiant:

$$\Phi_T(\mathbf{z}) = T, \text{ où } \mathbf{z} : Sp_B(T) \longrightarrow \mathbb{C}, \, \lambda \longmapsto \lambda$$

Ce calcul fonctionnel continu fait opérer des fonctions continues sur le spectre de l'opérateur normal T. Nous allons voir que le calcul fonctionnel de Baire élargit la classe des fonctions opérantes dans le cas où l'opérateur est s.c-normal. Cette classe est exactement $Ba(Sp(T))$.

Remarque II.3.1. Par définition de $Ba(Sp(T))$, on a:

$$\mathcal{C}(Sp(T)) \subset Ba(Sp(T)).$$

Cette inclusion est en général stricte. En effet, plaçons nous dans $Ba([0,1])$. La suite (f_n) définie par $f_n(t) = t^n$, est uniformément bornée et converge simplement vers l'indicatrice $\chi_{\{1\}}$. Donc $\chi_{\{1\}} \in Ba([0,1])$ et $\chi_{\{1\}} \notin \mathcal{C}([0,1])$. Par ailleurs, comme $Sp(T)$ est un compact de $\mathbb{C}$, on a $ba(S) = bo(S)$ et D'après la Proposition IV.6 du chapitre 1, $\chi_A \in Ba(Sp(T))$, pour tout $A \in bo(Sp(T))$. De plus, en utilisant le fait que $Ba\,([0,1])$ est exactement les fonctions mesurables bornées (cf. chapitre 1), on voit que $Ba\,([0,1])$ contient même des fonctions nulles part continues comme c'est le cas de la fonction $\chi_{Q\cap[0,1]}$.

Pour l'énoncé de notre calcul fonctionnel de Baire, nous aurons besoin du lemme suivant qui exprime, en particulier, l'importance de la présence d'un produit scalaire pour notre calcul fonctionnel de Baire.

Lemme II.3.2. Soit $\mathcal{H}$ un espace localement Hilbert et soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur s.c-normal. Pour tous $x, y \in \mathcal{H}$, il existe une mesure de Radon $\mu_{x,y}$ tel que:

$$\langle \Phi_T\,(f)\,(x), y\rangle = \int_{Sp(T)} f d\mu_{x,y}, \text{pour toute } f \in \mathcal{C}\,(Sp\,(T))$$

Preuve: Pour toute $f \in \mathcal{C}\,(Sp\,(T))$, posons:

$$\varphi_{x,y}\,(f) = \langle \Phi_T\,(f)\,(x), y\rangle\,.$$

On vérifie facilement que $\varphi_{x,y}$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}\,(Sp\,(T))$. On conclût par théorème classique de représentation de Riesz.

Ceci nous permet d'étendre le morphisme Φ_T comme suit:

Théorème II.3.3. Le morphisme Φ_T se prolonge en un morphisme continu involutif d'algèbres:

$$\Psi_T : Ba(Sp\,(T)) \longrightarrow \mathcal{L}\,(\mathcal{H})$$

déterminée par l'égalité suivante:

$$\langle \Psi_T(f)\,(x)\,, y\rangle = \int_{Sp(T)} f d\mu_{x,y}, \text{ pour tous } f \in Ba\,(Sp\,(T))\,,\, x, y \in \mathcal{H}.$$

Preuve: Par la remarque IV.5 du chapitre 1, on a:

$$Ba(Sp\,(T)) \subset B_m(Sp\,(T)) \cap B(Sp\,(T)).$$

Il en résulte que si $f \in Ba(Sp\,(T))$, alors f est Baire-mesurable et bornée. Donc elle est $\mu_{x,y}$-intégrable. Ainsi, pour toute $f \in Ba\,(Sp\,(T))$, $\int_{Sp(T)} f d\mu_{x,y}$ existe. Ceci nous permet de prolonger l'opérateur Φ_T en une application, notée Ψ_T, comme suit:

$$\langle \Psi_T(f)\,(x)\,, y\rangle =_{Sp(T)} f d\mu_{x,y}, \text{ pour tous } f \in Ba\,(Sp\,(T))\,,\, x, y \in \mathcal{H}.$$

Montrons que $\Psi_T(f) \in \mathcal{L}\,(\mathcal{H})$. Comme pour la remarque I.3, montrons que le morphisme $\Psi_{\mathbf{T}}$ opère effectivement de $Ba(Sp\,(\mathbf{T}))$ dans $\mathcal{L}\,(\mathcal{H})$. Pour tout $x \in \mathcal{H}$, posons:

$$\mathcal{K}_x = \{f : \Psi_{\mathbf{T}}\,(f)\,(x) \in \mathcal{H}\}.$$

Comme $\Psi_{\mathbf{T}} = \Phi_{\mathbf{T}}$ sur $\mathcal{C}\,[Sp\,(\mathbf{T})]$, on a $\mathcal{C}(Sp\,(\mathbf{T})) \subset K_x$. Montrons que K_x est une classe *u.b-s*. Soit $(f_n)_n \subset K_x$ une suite uniformément bornée convergeant simplement vers une fonction f. Montrons que $f \in K_x$. Comme $(f_n)_n \subset K_x$, on a $\Psi_{\mathbf{T}}\,(f_n)\,(x) \in \mathcal{H}$. De plus, pour tout $y \in \mathcal{H}$, la suite $(\langle \Psi_{\mathbf{T}}\,(f_n)\,(x), y\rangle)_n$ est convergente donc de Cauchy faible dans $\mathcal{H}$. Comme $\mathcal{H}$ vérifie la propriété DS, la suite $(\Psi_{\mathbf{T}}\,(f_n))_n$ est faiblement convergente dans un certain $\mathcal{H}_\lambda$.Donc, il existe $x_\lambda \in \mathcal{H}_\lambda$ tel que

$$\langle \Psi_{\mathbf{T}}\,(f_n)\,(x), y\rangle \longrightarrow \langle x_\lambda, y\rangle\,, \text{ pour tout } y \in \mathcal{H}_\lambda.$$

Comme

$$\langle \Psi_{\mathbf{T}}\,(f_n)\,(x), y\rangle \longrightarrow \langle \Psi_{\mathbf{T}}\,(f)\,(x), y\rangle\,, \text{ pour tout } y \in \mathcal{H}.$$

on a $\Psi_{\mathbf{T}}\,(f)\,(x) = x_\lambda \in \mathcal{H}_\lambda$. Il s'ensuit que $\Psi_{\mathbf{T}}\,(f)\,(x) \in \mathcal{H}$ et donc $f \in K_x$.

Comme dans le premier paragraphe, on montre que Ψ_T est un morphisme involutif d'algèbres. De plus, par le théorème 17.3 [4], Ψ_T est continu.

Définition II.3.4. Le morphisme Ψ_T est appelé calcul fonctionnel de Baire pour l'opérateur s.c-normal T.

Nous avons établi au chapitre 2 que l'image de Φ_T est exactement la sous-algèbre unitaire fermée involutive B engendrée par T. Qu'en est t-il pour l'image de Ψ_T?

La proposition suivante présente une réponse à la question. Elle montre en plus que l'élargissement de la classe des fonctions opérantes nécessite l'élargissement de l'image.

Proposition II.3.5. Notons B^{cc} le bi-commutant de B dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Alors:

$$B \subset \Psi_T\left(Ba(Sp\,(T))\right) \subset B^{cc} \subset B^c.$$

Preuve: L'inclusion $B \subset \Psi_T\left(Ba(Sp\,(T))\right)$ est claire. Celle ci $B^{cc} \subset B^c$ découle de la commutativité de B. Etablissons l'inclusion restante. Pour cela, montrons que:

$$\mathcal{M} = \{f \in Ba(Sp\,(T)), : \Psi_T\,(f) \in B^{cc}\}$$

est une classe *u.b-s*. Soit $(f_n)_n \subset \mathcal{M}$ une suite uniformément bornée, convergeant simplement vers une fonction f. Alors f est mesurable bornée et donc appartient à $Ba(Sp\,(T))$. De plus, par le théorème de la convergence dominée, on a:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \langle \Psi_T(f_n)\,(x)\,, y\rangle = \int_{Sp(T)} f d\mu_{x,y} = \langle \Psi_T(f)\,(x)\,, y\rangle\,,\ x, y \in \mathcal{H}.$$

$\Psi_T(f_n)$ converge faiblement vers $\Psi_T\,(f)$. Et comme B^{cc} est fermée pour la convergence faible des opérateurs et $\Psi_T(f_n) \in B^{cc}$, on a $\Psi_T\,(f) \in B^{cc}$.

Evidemment la question d'unicité de prolongement du morphisme Φ_T se pose elle aussi. Moyennant une hypothèse supplémentaire, nous avons l'unicité comme le montre le théorème suivant:

Théorème II.3.6. Le morphisme Ψ_T est unique sous la condition suivante: Pour toute suite $(f_n)_n \in Ba(Sp\,(T))$, telle que $|f_n| \leq 1$ et $f_n \longrightarrow 0$, on a $\Psi_T\,(f_n)\,x \longrightarrow 0$, pour tout $x \in \mathcal{H}$, dans le sens suivant:

"Pour tout $\gamma \in \Lambda$ tel que $x \in \mathcal{H}_\gamma$ et $\Psi_T(f_n)(x) \in \mathcal{H}_\gamma$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$\left\| \Psi_T(f_n)\, x \right\|_\gamma \longrightarrow 0."$$

Preuve: Commençons d'abord par montrer que l'application Ψ_T vérifie bien la condition citée. En effet, pour chaque $x \in \mathcal{H}_\gamma$ et

$$\left\| \Psi_T(f_n)\, x \right\|_\gamma = \int_{Sp(T_\gamma)} f_n^2 d\mu_{x,x}.$$

Maintenant, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$\int_{Sp(T_\gamma)} f_n^2 d\mu_{x,x} \longrightarrow 0.$$

D'où $\left\| \Psi_T(f_n)\, x \right\|_\gamma \longrightarrow 0$. Montrons maintenant que Ψ_T est unique sous la condition supplémentaire**.** Soit Θ_T une autre extension de Φ_T satisfaisant la condition supplémentaire précédente. Alors, pour tout $\gamma \in \Lambda$ tel que $x \in \mathcal{H}_\gamma$ et $\Theta_T(f_n)(x) \in \mathcal{H}_\gamma$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$\left\| \Theta_T(f_n)(x) \right\|_\gamma \longrightarrow 0.$$

Posons:

$$\mathcal{W} = \{f \in Ba(Sp(T) : \Theta_T(f) = \Psi_T(f)\}$$

En appliquant 2) du théorème I.2, dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\gamma)$, on obtient

$$\Theta_T(f)(x) = \Psi_T(f)(x), \text{ pour tout } x \in \mathcal{H}_\gamma$$

et donc $\Theta_T(f) = \Psi_T(f)$ sur $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\gamma)$, pour tout $\gamma \in \Lambda$. D'où $\Theta_T(f) = \Psi_T(f)$ sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Ainsi $\mathcal{W} = Ba(Sp(T)$ et donc $\Theta_T(f) = \Psi_T(f)$ sur $Ba(Sp(T)$.

II.3.7. Notation: Comme pour le calcul fonctionnel continu, on adopte également ici la notation $f(T)$ pour $\Psi_T(f)$ pour toute $f \in Ba(Sp(T))$.

II.4. Propriétés.

L'application spectrale ou "Spectral Mapping Theorem" constitue l'un des points forts de tout calcul fonctionnel. Qu'en est-il pour notre calcul fonctionnel de Baire? Comme dans le cas Hilbert, on n'a pas l'égalité classique représentant le "Spectral Mapping Theorem". Cependant, elle est présente sous-une certaine forme comme le montre le résultat suivant:

Théorème II.4.1. Le morphisme Ψ_T vérifie une forme de "Spectral Mapping Theorem" donnée par:

$$Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\left(\Psi_T\left(f\right)\right) \subset \overline{f\left(Sp\left(T\right)\right)},\ \text{pour toute } f \in Ba(Sp\left(T\right)).$$

Preuve: Elle est analogue à celle de la proposition I.4 du premier paragraphe.

Remarque II.4.2. 1) Remarquons que même si f ne s'annule pas sur le spectre, l'opérateur $\Psi_T(f)$ n'est pas nécessairement inversible. En fait, on a l'inversibilité avec la condition plus forte à savoir $\inf |f| > 0$.

Contrairement au "Spectral Mapping Theorem" qui n'est pas nécessairement preservé, le calcul fonctionnel de Baire est compatible avec la composition comme le montre la proposition suivante:

Proposition II.4.3. Soit $\mathcal{H}$ un espace localement Hilbert et T un opérateur s.c-normal sur $\mathcal{H}$. Alors, pour toute $g \in Ba\left(\overline{f\left(Sp\left(T\right)\right)}\right)$ et $f \in Ba(Sp\left(T\right))$, on a:

$$\left(g \circ f\right)\left(T\right) = g(f(T)) \qquad \textbf{(3)}$$

Preuve: Elle est analogue à celle de la proposition I.5. du premier paragraphe.

Comme conséquence, on a ce qui suit:

Corollaire II.4.4. Soit $\mathcal{H}$ un espace localement Hilbert et U un opérateur s.c-normal sur $\mathcal{H}$. Si $Sp(U) \subset \Gamma$, où Γ est le cercle unité, alors il existe $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, hermitien tel que $U = e^{iQ}$.

Preuve: Remarquons tout d'abord que pour tout $z \in \Gamma$, le cercle unité, on a $e^{i\arg z} = z$. Soit $f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R} : z \longmapsto f(z) = \arg(z)$. Tout élément $z \in \Gamma$ peut être repéré par son angle t (qui varie dans $\mathbb{R}$) avec l'axe des réels. L'application $t \longmapsto e^{it}$ est un homomorphisme surjectif du groupe additif $\mathbb{R}$ sur Γ. Considérons la fonction réelle 2π-périodique σ est définie sur $[0, 2\pi[$, par:

$$\sigma(t) = \arg(e^{it}) : [0, 2\pi[\,.$$

Alors la fonction σ est continue sur $]0, 2\pi[$, et donc la fonction f est continue sut $\Gamma / \{1\}$. De plus, elle vérifie:

$$e^{if(z)} = z,\ \text{pour tout } z \in \Gamma.$$

Posons $g : z \longmapsto e^{iz}$. Alors $g \circ f(z) = z$, pour tout $z \in \Gamma$. Par la proposition 7.4 de [1], fonction $f \in Ba(\Gamma)$. Posons

$$Q = \Psi_T(f) = f(U).$$

Comme f est réelle, l'opérateur Q est hermitien vu que:

$$Q^* = \Psi_T(f)^* = \Psi_T(\overline{f}) = \Psi_T(f) = Q.$$

Maintenant par $(*)$ de la proposition 1.4.3, on a:

$$U = (g \circ f)(U) = g\left(f(U)\right) = e^{iQ}.$$

D'où $e^{iQ} = U$.

Le calcul fonctionnel de Baire possède la propriété fondamentale suivante. Celle ci jouera un rôle important dans l'une de nos applications.

Proposition II.4.5. Sous les conditions du théorème précédent, on a

$$\Psi_T(\chi_U) \neq 0,$$

pour chaque sous ensemble ouvert non vide U de $Sp\,(T)$.

Preuve: Soit U un sous ensemble ouvert non vide de $Sp\,(T)$. Alors, d'après le lemme d'Uryshon, il existe une fonction non nulle $h \in \mathcal{C}(Sp\,(T))$ avec

$$0 \leq h \leq 1 \text{ sur } Sp\,(T) \text{ et } \; h(x) = 0, \text{ pour tout } x \in Sp(T)\backslash U.$$

Donc $0 \leq h \leq \chi_U$. Comme $Ba(Sp\,(T))$ est une C^*-algèbre, il existe une fonction réelle $g \in Ba(Sp\,(T))$ telle que $\chi_U - h = g^2$.

$$Sp\,(\Psi_T(\chi_U - h)) \subset Sp(\chi_U - h) = Sp(g^2) \subset \mathbb{R}^+.$$

Il s'ensuit que: $\Psi_T(\chi_U - h) \geq 0$, et donc $\Psi_T(\chi_U) \geq \Psi_T(h)$.

$$\Psi_T(\chi_U) \geq \Psi_T(h) = \Phi_T(h) > 0.$$

II.5. Quelques applications du calcul fonctionnel de Baire.

Dans cette section, nous présentons deux applications du calcul fonctionnel de Baire défini et étudié dans la section précédente. Nous obtenons une décomposition polaire d'un opérateur s.c-normal, similaire à celle présentée dans le cas hilbertien (voir [1]). Ensuite, nous montrons l'existence d'un sous-espace hyper-invariant propre. Cette propriété, identique à celle du cas hilbertien, est établie sans aucune perte de généralité.

Il convient de noter que la preuve de ces applications est analogue est celle obtenue dans [1] avec les modifications nécessaires.

II.5.1. Décomposition polaire.

Nous établissons que tout opérateur borné s.c-normal est composé d'un opérateur positif et d'un opérateur unitaire.

Théorème 1. Soit $\mathcal{H}$ une espace localement Hilbert et soit T un opérateur borné et s.c-normal sur $\mathcal{H}$. Alors il existe un opérateur borné positif R sur $\mathcal{H}$ et un opérateur borné unitaire U sur $\mathcal{H}$ tels que R, U, et T commutent mutuellement et $T = RU$.

Preuve: Soit $a \in Sp(T)$ et soit $U = Sp(T)\backslash\{a\}$. Alors, par la proposition ([2], 2.1.8), la fonction caractéristique $\chi_{\{a\}}$, de $\{a\}$, est une fonction de Baire sur $Sp(T)$. De plus, $\chi_U \in Ba(Sp(T))$. Il s'ensuit que, si $f \in B(Sp(T)) \cap \mathcal{C}(U)$, alors

$$f = f(a)\chi_{\{a\}} + \chi_U f$$

est une fonction de Baire sur $Sp(T)$. Maintenant, comme dans le cas classique, on considère les fonctions bornées r et u, sur $Sp(T)$, données par:

$$r(\lambda) = |\lambda| \quad \text{et} \quad u(\lambda) = \frac{\lambda}{|\lambda|}, \; (\lambda \neq 0) \text{ avec } u(0) = 1.$$

Alors $r \in \mathcal{C}(Sp(T))$ et $u \in Ba(Sp(T))$ de sorte que $ru = z$, où z désigne la fonction $\lambda \longmapsto \lambda$ sur $Sp(T)$. Soit

$$R = \Phi_T(r) = r(T) \quad \text{et} \quad U = \Psi_T(u) = u(T).$$

Alors R est un opérateur positif sur $\mathcal{H}$, U est unitaire sur $\mathcal{H}$. De plus $T = RU$, avec R, U, et T commutent entre eux.

Remarque 2. Dans la décomposition $T = RU$ du théorème précédent, l'opérateur R est s.c-normal. En effet, on a:

$$Sp\,(R) = Sp\,(\Phi_T(r)) = Sp\,(r(T)) = r\,(Sp(T))$$

Comme r est continue et $Sp(T)$ est compact vue que T est s.c-normal, on a $Sp\,(R)$ est compact. Pour l'opérateur U, on a:

$$Sp\,(U) = Sp(\Psi_T(u)) \subset \overline{u\,(Sp\,(T))} = \overline{\left\{\frac{\lambda}{|\lambda|} : \lambda \in Sp\,(T) \setminus \{0\}\right\} \cup \{0\}}$$

II.5.2. Sous-espaces invariants

"Le problème du sous-espace invariant" est l'objet de notre deuxième application. Notre calcul fonctionnel de Baire permet de montrer que la réponse à ce problème est positive pour un opérateur s.c-normal d'un espace localement Hilbert. Plus précisement, nous avons le résultat suivant:

Théorème 1. Soit $\mathcal{H} = \lim\limits_{\longrightarrow}\mathcal{H}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, un espace localement hilbertien avec $\dim \mathcal{H} \geq 2$ et soit T un opérateur localement borné s.c-normal sur $\mathcal{H}$ avec $T \notin \mathbb{C}I_{\mathcal{H}}$. Alors il existe un sous-espace hyper-invariant pour T.

Pour la preuve, nous aurons besoin du lemme suivant:

Lemme 2. Soit $\mathcal{H} = \lim\limits_{\leftarrow}\mathcal{H}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, est un espace localement hilbertien et soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur localement borné s.c-normal sur $\mathcal{H}$. Supposons que λ est un point isolé de $Sp(T)$. Alors λ est une valeur propre de T.

Preuve: Puisque l'algèbre $\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \lim\limits_{\leftarrow}\mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, est une C^*-algèbre localement multiplicativement convexe, elle admet un calcul fonctionnel holomorphe. En utilisant ce dernier calcul fonctionnel, on montre, comme dans le cas classique ([1], Corollary 4.97), qu'il existe une projection hermitienne non nulle $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ telle que $PT = TP$ et

$$Sp_{\mathcal{L}(P(\mathcal{H}))}(T_{P(\mathcal{H}))}) = \{\gamma\}.$$

Il s'ensuit que $PT^* = T^*P$ et TP est normal. Alors $(T - \gamma I_{\mathcal{H}})P$ est normal et

$$\rho_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}((T - \gamma I_{\mathcal{H}})P) = 0.$$

Maintenant, puisque

$$\rho_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}((T - \gamma I_{\mathcal{H}})P) = \sup_{\lambda}(T_\lambda - \gamma I_{\mathcal{H}_\lambda})P_\lambda),$$

on a:

$$(T_\lambda - \gamma I_{\mathcal{H}_\lambda})P_\lambda))P_\lambda = 0.$$

pour tout $\lambda \in \Lambda$. Donc $TP = \gamma P$, et donc γ est une valeur propre de T.

Preuve du théorème 1. Supposons d'abord que $Sp(T)$ possède un point isolé. Alors, par le lemme II.2.2, T possède une valeur propre γ, et l'espace propre correspondant $E(\gamma)$ est un sous-espace propre (étant donné que $T \notin \mathbb{C}I_H$) hyper-invariant pour T.

Supposons maintenant que $Sp(T)$ n'a pas de points isolés. Soit U un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $U \cap Sp(T)$ et $Sp(T) \setminus \bar{U}$ sont non vides. Alors

$$P = \Psi_T(\chi_U)$$

est un opérateur localement borné auto-adjoint tel que $P^2 = P$. Soit $f \in \mathcal{C}\,(Sp(T))$ une fonction non nulle telle que

$$0 \leq f \leq 1 \text{ sur } Sp(T) \text{ et } f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in Sp(T)\backslash\bar{U}.$$

Alors $0 \leq f \leq \chi_U$. Cela implique que:

$$\Psi_T\,(\chi_U) \geq \Phi_T\,(f) > 0$$

puisque Φ_T est isométrique et préserve l'ordre. Il s'ensuit que $P \neq 0$ et $P \neq I_{\mathcal{H}}$ et $F = P(\mathcal{H})$ est donc un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$, avec $F \neq 0$ et $F \neq \mathcal{H}$. De plus $P \in B^{cc}$. Supposons que $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ avec $ST = TS$. Alors, par le théorème de Fuglede, Putnam et Rosenblum ([7], Theorem 12.16, p. 315), on a:

$$ST^* = T^*S \text{ et } S \in B^{cc}.$$

Ainsi $SP = PS$ et donc S. Ceci montre que F est un sous-espace hyper-invariant propre pour T.

III. Calcul fonctionnel de Baire pour un opérateur normal

Soit $\mathcal{H} = \underrightarrow{\lim}\mathcal{H}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, un espace localement Hilbert et soient

$$A = \underleftarrow{\lim}\mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda), \lambda \in \Lambda \quad \text{et} \quad T = (T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in A.$$

Comme A est une C^*-a.l.m.c, on a:

$$Sp\,(T) = \bigcup_\lambda Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)}\,(T_\lambda)\,.$$

Le calcul fonctionnel continu ([6]), lorsque T est normal, consiste à donner un sens à $f(T)$, pour tout $f \in \mathcal{C}(Sp(T))$. Plus précisement, si B_T désigne la sous C^*-algèbre m-convexe unitaire engendrée par T, alors il existe un unique $*$-morphisme injectif $\Phi_T : \mathcal{C}(Sp(T)) \longrightarrow A = \underleftarrow{\lim}\mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)$ tel que

$$\Phi_T\,(\mathbf{1}) = Id \quad \text{et} \quad \Phi_T\left(Id_{Sp(T)}\right) = T$$

où $\mathbf{1}$ est la fonction constante égale 1 et $Id_{Sp(T)}$ est l'application identité de $Sp(T)$. Comme

$$\mathcal{C}(Sp(T)) = \varprojlim \mathcal{C}\left(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)}(T_\lambda)\right) \text{ et } \Phi_T = \varprojlim \Phi_{T_\lambda},$$

où, pour tout $\lambda \in \Lambda$,

$$\Phi_{T_\lambda} : \mathcal{C}\left(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)}(T_\lambda)\right) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)$$

est le calcul fonctionnel continu pour l'opérateur T_λ sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\lambda$ donné par le théorème III.1 du chapitre 1. Ce morphisme φ_{T_λ} se prolonge à $Ba(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)}(T_\lambda))$ en un $*$-homomorphisme:

$$\Psi_{T_\lambda} : Ba(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)}(T_\lambda)) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)$$

qu'on appelle un calcul fonctionnel de Baire pour l'opérateur T_λ donné par le théorème V.1 du chapitre 1. Rappelons que Ψ_{T_λ}est déterminé par les égalités

$$\langle \Psi_{T_\lambda}(f)(x), y\rangle = \int_{Sp(T_\lambda)} f d\mu_{x,y,\lambda}, \text{ pour toute } f \in Ba(Sp\,(T_\lambda)),\ x, y \in \mathcal{H}_\lambda,$$

où $\mu_{x,y,\lambda}$ désigne la mesure de Radon complexe: $f \longmapsto \langle \Phi_{T_\lambda}(f)(x), y\rangle$ sur $\mathcal{C}(Sp\,(T_\lambda))$. De plus, Ψ_{T_λ} est unique sous la condition suivante: "Pour toute suite, $(f_n)_n \in Ba(Sp\,(T_\lambda))$, bornée telle que $f_n \longrightarrow 0$, on a

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \Psi_{T_\lambda}(f_n)(x) = 0, \text{ pour tout } x \in \mathcal{H}_\lambda.$$

Il est donc naturel de se demander sur la possibilité de définir un calcul fonctionnel de Baire pour un opérateur normal non nécessairement s.c-normal d'un espace localement Hilbert $\mathcal{H}$. Une manière naturelle est de considérer

$$\Psi_T = \varprojlim \Psi_{T_\lambda},\ \lambda \in \Lambda.$$

Soit maintenant $\alpha, \beta \in \Lambda$ tel que $\alpha \leq \beta$. Alors, par le lemme 2.1 du chapitre, on a

$$Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\alpha)}(T_\alpha) \subset Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\beta)}(T_\beta).$$

Ensuite, on considère l'application

$$\rho_{\alpha,\beta} : Ba(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\beta)}(T_\beta)) \longrightarrow Ba(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\alpha)}(T_\alpha))$$

définie par:

$$\rho_{\alpha,\beta}\,(f)) = f/Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\alpha)}(T_\alpha).$$

Soit $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Pour toute $f \in Ba(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\gamma)}(T_\gamma))$, on a:

$$\rho_{\alpha,\beta} \circ \rho_{\beta,\gamma}(f) = \rho_{\alpha,\beta}\left[f/Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\beta)}(T_\beta)\right] = f/Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\alpha)}(T_\alpha) = \rho_{\alpha,\gamma}(f)$$

Donc

$$\rho_{\alpha,\beta} \circ \rho_{\beta,\gamma} = \rho_{\alpha,\gamma}$$

de sorte que $\left(Ba(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)}(T_\lambda)), \rho_{\lambda,\mu}\right)_{\lambda,\mu\in\Lambda}$ est un système projectif. Ceci nous amène à considérer la définition suivante:

Definition III.1. Soit $\mathcal{H} = \varinjlim \mathcal{H}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, un espace localement Hilbert et soit $T = (T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \varprojlim \mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, soit $Ba(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)}(T_\lambda))$ l'algèbre des fonctions de Baire sur $Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)}(T_\lambda)$. On pose:

$$Ba(Sp(T)) = \varprojlim Ba(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)}(T_\lambda)).$$

Une fonction $f \in Ba(Sp(T))$ est dite de Baire ou Bairienne sur $Sp(T)$.

Remarque III.2. 1) On a :

$$Ba(Sp(T)) = \left\{ (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} Ba(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)}(T_\lambda) : \rho_{\lambda,\mu}(f_\mu) = f_\lambda \text{ si } \lambda \leq \mu \right\}.$$

2) Pour tout $\lambda \in \Lambda$, on a:

$$\mathcal{C}(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)}(T_\lambda)) \subset Ba(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)}(T_\lambda)).$$

Et comme $\mathcal{C}(Sp(T)) = \varprojlim \mathcal{C}(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)}(T_\lambda))$, on a:

$$\mathcal{C}(Sp(T)) \subset Ba(Sp(T)).$$

Soit maintenant $T = (T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \varprojlim \mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, un opérateur normal localement borné sur $\mathcal{H}$. Soit $\lambda, \mu \in \Lambda$ tel que $\lambda \leq \mu$. Alors $\mathcal{H}_\lambda \subset \mathcal{H}_\mu$ et soit

$$u_{\lambda,\mu} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_\mu) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda) : u_{\lambda,\mu}(S) = S/\mathcal{H}_\lambda.$$

Alors $u_{\lambda,\mu}$ est bien définie et c'est un morphisme qu'est une isométrie. Considérons les morphismes d'algèbres:

$$\Psi_{T_\lambda} : Ba(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)}(T_\lambda)) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)$$

et

$$\Psi_{T_\mu} : Ba(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\mu)}(T_\mu)) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_\mu)$$

Comme

$$u_{\lambda,\mu} \circ \Psi_{T_\mu} = \Psi_{T_\lambda} \circ \rho_{\lambda,\mu},$$

le système d'applications $(\Psi_{T_\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ est projectif. Il en résulte que l'application

$$\Psi_T = \varprojlim \Psi_{T_\lambda}, \ \lambda \in \Lambda$$

est un morphisme d'algèbres:

$$\Psi_T : \varprojlim \ Ba(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)}(T_\lambda)) \longrightarrow \varprojlim \ \mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)$$

ou encore

$$\Psi_T : B(Sp(T)) \longrightarrow A$$

Déterminée par:

$$\Psi_T = \varprojlim \Psi_{T_\lambda} : Ba(Sp(T)) \longrightarrow A : \Psi_T / Ba(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)}(T_\lambda) = \Psi_{T_\lambda}, \forall \lambda \in\in \Lambda$$

L'opérateur Ψ_T défini ce qu'on appelle un calcul fonctionnel de Baire pour l'opérateur T qui est donné par ce qui suit:

Théorème III.3. Soit $\mathcal{H} = \varinjlim \mathcal{H}_\lambda, \ \lambda \in \Lambda$, un espace localement Hilbert et soit $A = \varprojlim \ \mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda), \ \lambda \in \Lambda$, la C^*-algèbre localement m-convexe associée à la famille de C^*-algèbres $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda), \ \lambda \in \Lambda$. Soit $T = (T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un élément normal de A. Alors il existe un $*$-homomorphisme

$$\Psi_T : B(Sp(T)) \longrightarrow A$$

qui prolonge le morphisme

$$\Phi_T : \mathcal{C}(Sp(T)) \longrightarrow A$$

De plus Ψ_T est déterminé par les propriétés suivantes:

1) Pour tout $\lambda \in \Lambda$,

$$\langle \Psi_{T_\lambda}(f)(x), y \rangle = \int_{Sp(T_\lambda)} f d\mu_{x,y,\lambda}, \text{ pour toute } f \in Ba(Sp\,(T_\lambda)), \ x, y \in \mathcal{H}_\lambda.$$

2) Ψ_T est unique sous la condition suivante: Pour tout $\lambda \in \Lambda$ et pour toute suite, $(f_n)_n \in Ba(Sp\,(T_\lambda))$, bornée telle que $f_n \longrightarrow 0$, on a:

$$\lim_{n\longrightarrow +\infty} \Psi_{T_\lambda}(f_n)(x) = 0, \text{ pour tout } x \in \mathcal{H}_\lambda.$$

Comme pour le calcul fonctionnel continu, nous écrirons aussi $f(T)$ comme notation pour $\Psi_T(f)$, pour toute $f \in Ba(Sp(T))$.

Preuve du théorème III.3. Comme $\Psi_T = \varprojlim \Psi_{T_\lambda} : B(Sp(T)) \longrightarrow A$ tel que:

$$\Psi_T/Ba(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)}(T_\lambda) = \Psi_{T_\lambda}, \forall \lambda \in\in \Lambda,$$

Ψ_T vérifie les condition du théorème III.2. Il reste à montrer l'unicité de Ψ_T sous la condition 2). Soit $\Theta_{\mathbf{T}}$ une autre extension de Φ_T satisfaisant **2).** Alors $\Theta_T = \varprojlim \Theta_{T_\lambda} : Ba(Sp(T)) \longrightarrow A$ tel que:

$$\Theta_T/Ba(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)}(T_\lambda) = \Theta_{T_\lambda}, \forall \lambda \in\in \Lambda.$$

Par le théorème I.2 du premier paragraphe, on a

$$\Theta_{T_\lambda} = \Psi_{T_\lambda}, \forall \lambda \in\in \Lambda.$$

D'où

$$\Theta_T = \varprojlim \Theta_{T_\lambda} = \varprojlim \Psi_{T_\lambda} = \Psi_T.$$

Comme pour le calcul fonctionnel de Baire précédent, ce calcul fonctionnel vérifie également la formule du 'Spectral mapping theorem" comme le montre ce qui suit:

Théorème III.4. "Spectral mapping theorem). Le morphisme Ψ_T vérifie:

$$Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(\Psi_T(f)) \subset \overline{f(Sp(T))}, \text{ pour toute } f \in Ba(Sp(T)).$$

Preuve: Comme $BaSp(T)) = \varprojlim Ba(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)}(T_\lambda))$, on a:

$$Ba(Sp(T)) = \left\{ (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} Ba(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)}(T_\lambda) : \rho_{\lambda,\mu}(f_\mu) = f_\lambda \text{ si } \lambda \leq \mu \right\}.$$

Soit $f = (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Posons:

$$Sp(f) = Sp_{Ba(Sp(T))}(f), \quad Sp_\lambda(T_\lambda) = Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)}(T_\lambda)$$

et

$$Sp_{Ba(Sp(T_\lambda))}(f_\lambda) = Sp_\lambda(f_\lambda)$$

On a alors

$$Sp(f) = \bigcup_\lambda Sp_\lambda(f_\lambda)$$

et

$$f(Sp(T) = f\left(\bigcup_{\lambda} Sp(T_\lambda)\right) = \bigcup_{\lambda} f_\lambda\left(Sp_\lambda(T_\lambda)\right)$$

Donc

$$\overline{f(Sp(T)} = \overline{\bigcup_{\lambda} f_\lambda\left(Sp_\lambda(T_\lambda)\right)}$$

et comme

$$\Psi_T = \varprojlim \Psi_{T_\lambda} : Ba(Sp(T)) \longrightarrow A : \Psi_T / Ba(Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)}(T_\lambda) = \Psi_{T_\lambda}, \forall \lambda \in \Lambda,$$

on a $\Psi_T = \left(\Psi_{T_\lambda}\right)_\lambda$ et donc

$$\Psi_T(f) = \left(\Psi_{T_\lambda}(f_\lambda)\right)_\lambda .$$

D'où

$$\begin{aligned} Sp\Psi_T(f) &= \bigcup_{\lambda} Sp_{\lambda}(\Psi_{T_\lambda}(f_\lambda) \subset \bigcup_{\lambda} \overline{f_\lambda\left(Sp_\lambda(T_\lambda)\right.} \\ &\subset \overline{\bigcup_{\lambda} f_\lambda\left(Sp_\lambda(T_\lambda)\right)} = \overline{f(Sp(T)}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a:

$$Sp_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\left(\Psi_T\left(f\right)\right) \subset \overline{f\left(Sp\left(T\right)\right)}, \text{ pour toute } f \in Ba(Sp\left(T\right)).$$

Références

[**1**] Allan, G. R.: Introduction to Banach spaces and algebras. Oxford Graduate Texts in Mathematics, 20. Oxford University Press, Oxford (2011).

[**2**] Buchwalter, H., Tarral, D.: Théorie spectrale. Publ. Dép. Math. (Lyon) (N.S.) (1982).

[**3**] Dixmier, J.: C^*-algebras. North-Holland, Amsterdam, 1981.

[**4**] Fragoulopoulou, M.:*Topological Algebras with Involution.* North-Holland Mathematics Studies, 200. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2005.

[**5**] Gillman, L. and Jerison, J.: Rings of Continuous Functions. Van Nostrand, Princeton, 1960.

[**6**] Inoue. A.: Locally C -algebra. Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser.A 25 (1971), 197-235.

[**7**] Michael, E.: Locally multiplicatively-convex topological algebras. Mem. Amer. Math. Soc. 11 (1952), 79 pp.

[**8**] Mazighi, M. and El Kinani, A.: Some applications of simultaneous continuous functional calculus. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 72 (2023), no. 3, 1629-1638.

[**9**] Mazighi, M. and El Kinani, A.: Baire functional calculus for bounded-locally operators. Bol. Soc. Mat. Mex. (3) 29 (2023), no. 1, Paper No. 23, 13 pp.

[**10**] Nachbin, L.: Elements of Approximation Theory, Van Nostrand, Princeton, 1967.

[**11**] Rudin, W.: Functional Analysis. McGraw-Hill, New York (1973).

[**12**] Rudin, W.: Real and complex analysis, 3rd edn. McGraw-Hill Book Co., New York (1987).

BIBLIOGRAPHIE GÉNÉRALE

[**1**] Allan, G. R.: Introduction to Banach spaces and algebras. Oxford Graduate Texts in Mathematics, 20. Oxford University Press, Oxford (2011)

[**2**] Apostol, C.: b^*-algebras and their representation. J. London Math. Soc. (2) 3 (1971), 30-38.

[**3**] Aupetit, B.: Propriétés Spectrales des Algèbres de Banach, Lecture Notes in Mathematics 735, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1979.

[**4**] Aurelian, G.: On locally Hilbert spaces. Opuscula Math. 36, no. 6 (2016), 735747.

[**5**] El Atef, H.; El Kinani, A. Real analytic calculus for several variables and applications. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 70 (2021), no. 2, 653–663.

[**6**] Bonsall, F. F., Duncan. J.: Numerical Ranges, II, Cambridge University Press, 1973.

[**7**] Buchwalter, H., Tarral, D.: Théorie spectrale. Publ. Dép. Math. (Lyon) (N.S.) (1982).

[**8**] S. J, Bhatt, H. V, Dedania. Beurling algebra analogues of the classical theorems of Wiener and Lévy on absolutely convergent Fourier series. Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 113 (2003), no. 2, 179-182.

[**9**] Dixmier, J.: Les C^*-algèbres et leurs représentations. North-Holland Publishing Company. Amsterdam. New York-Oxford (1977).

[**10**] R. Dautray and J. L. Lions, "Analyse Mathématique et Calcul Numérique Pour les Sciences et les Techniques," Vol. 3, Masson, Paris, 1985.

[**11**] Dinesh J. Karia and Yogita M. Parmar: Operators on locally Hilbert space. Proceedings of the International Conference on Geometric Function Theory and its Applications (ICGFTA-2014) Editors: B. Bhowmik, S. Ponnusamy and O. Roth. J. Analysis V. 23 (2015), 59-73.

[**12**] A, El Kinani. A version of Wiener's and Lévy's theorems. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 57 (2008), no. 3, 343–352.

[**13**] A, El Kinani, L. Bouchikhi. Corrigendum and addendum to "Wiener's and Lévy's theorems for some weighted power series". Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 66 (2017), no. 3, 429-437.

[**14**] A, El Kinani, L. Bouchikhi. Wiener's and Lévy's theorems for some weighted power series. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 63 (2014), no. 2, 301-309.

[**15**] A, El Kinani, L. Bouchikhi. A weighted algebra analogues of Wiener's and Lévy's theorems. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 61 (2012), no. 3, 331-341.

[**16**] Feldman, C.: The Wedderburn principal theorem in Banach algebras. Proc. Amer. Math. 2 (1951), 771-777.

[**17**] Fragouloupoulou, M.: Topological algebras with involution. North-Holland Mathematics Studies, 200. Elsevier Sience B.V., Amsterdam, 2005.

[**18**] Gillman, L. and Jerison, J.: Rings of Continuous Functions. Van Nostrand, Princeton, 1960.

[**19**] Inoue, A.: locally C^*-algebra. (english), mem. fac. sci. kyushu univ. ser. a , vol. 25 (1971), pp. 197235.

[**20**] Kaniuth. E.: A Course in Commutative Banach Algebras, Springer, Graduate Texts in Mathematics, 246, 2009.

[**21**] Lafon,J. P.: Algèbre commutative, langages algébrique et géométrique, Hermann, Paris, 1977.

[**22**] Levy. P.: Sur la convergence absolue des séries de Fourier. Compositio Math. 1 (1935), 1-14.

[**23**] Mallios, A.: Topological algebras. Selected Topics. North-Holland, Amsterdam, 1986.

[**24**] Michael, E.: Locally multiplicatively-convex topological algebras. Mem. Amer. Math. Soc. 11 (1952), 79 pp.

[**25**] Mazighi, M.; Kinani, A. El. Some applications of simultaneous continuous functional calculus. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 72 (2023), no. 3,

1629-1638.

[**26**] Naimark, M. A.: Normed Algebras, Wolters-Noordhoff Publ. Groningen, 1972.

[**27**] Nachbin, L.: Elements of Approximation Theory, Van Nostrand, Princeton, 1967.

[**28**] Palmer, T. W.: Banach Algebras and the General Theory of $*$-Algebras, Vol. 1 and 2, Encyclopedia Math. Appl. 49 and 79, Cambridge Univ. Press, 1994 and 2001.

[**29**] Rickart, C. E., General Theory of Banach Algebras, R. E. Krieger Publ. Co., Huntington, New York, 1974.

[**30**] Rudin, W.: Functional Analysis, Tata Mc Graw-Hill Publ. Co., TMH Edition, 1973.

[**31**] Wiener, N.: A note on Tauberian theorems. Ann. of Math. (2) 33 (1932), no. 4, 787.

ROYAUME DU MAROC
Université Mohammed V - RABAT - جامعة محمد الخامس - الرباط -
Faculté des sciences
كلية العلوم

Résumé

Ce travail est formé essentiellement de deux parties. Dans la première, on construit et on étudie un calcul fonctionnel continu, dit simultané, dans le cadre des C*-algèbres m-convexes. Ce calcul étend ceux de J. Dixmier, R. Dautray, J. L. Lions, et H. Buchwalter, H. D. Tarral. Beaucoup de propriétés sont dégagées dont le "Spectral Mapping Theorem" et le bon comportement avec la composition.

Par ailleurs, nous avons obtenu deux applications importantes, dans deux champs totalement différents. La première, dans le cadre des algèbres à poids, constitue une version continue multi-dimension, d'un théorème de P. levy. La seconde, dans le cadre des espaces localement Hilbert, traîte sur l'existence d'une base orthonormée en relation avec certains vecteurs propres liés à une famille d'opérateurs normaux.

Dans la seconde partie, il est question du calcul fonctionnel simultané de Baire dans L(H), l'algèbre des opérateurs bornés d'un espace localement Hilbert H. Via une approche inspirée de G.R. Allan et celle de H. Bouchwalter, D. traval, on construit le calcul cité ci-dessus, pour une famille d'opérateurs normaux de H. De bonnes propriétés sont obtenues, dont une forme du "Spectral Mapping Theorem".

Egalement, pour ce nouveau calcul, nous avons obtenu deux applications. La première établit une décomposition d'un opérateur normal en produit d'un opérateur positif et d'un opérateur unitaire. La deuxième concerne le problème du "sous-espace invariant".

Mots-clefs (5) : C*-algèbre-C*a.l.m.c – calcul fonctionnel continu simultané - algèbre a poids – Espace localement Hilbert– fonction de Baire – calcul fonctionnel de Baire simultané

Abstract

This work consists essentially of two parts. In the first part, a continuous functional calculus, called simultaneous, is constructed and studied within the framework of m-convex C*-algebras. This calculus extends those of J. Dixmier, R. Dautray, J. L. Lions, and H. Buchwalter, H. D. Tarral. Many properties are elucidated, including the Spectral Mapping Theorem and its good behavior under composition. Furthermore, we have obtained two important applications, in two different fields. The first, within the framework of weighted algebras, constitutes a multi-dimensional continuous version of a theorem by P. Levy. The second, within the framework of locally Hilbert spaces, deals with the existence of an orthonormal basis in relation to certain eigenvectors associated with a family of normal operators. In the second part, the simultaneous Baire functional calculus in L(H) is discussed, where H is the algebra of bounded operators of a locally Hilbert space H. Using an approach inspired by G.R. Allan and that of H. Buchwalter, D. Traval, the calculus cited above is constructed for a family of normal operators of H. Good properties are obtained, including a form of the Spectral Mapping Theorem. Additionally, for this new calculus, two applications have been obtained. The first establishes a decomposition of a normal operator into the product of a positive operator and a unitary operator. The second concerns the problem of "invariant subspaces."

Keywords (5) : C*-algebra-C*a.l.m.c-Simultaneous continuous functional calculus-Weighted algebra -Locally Hilbert space- Baire function - Simultaneous Baire functional calculus ·