

THÈSE

En vue de l'obtention du : **DOCTORAT**

Centre de Recherche : Centre de Recherche en Énergie

Structure de Recherche : Equipe de Modélisation et Simulation en Mécanique et Energétique

Discipline : Physique

Spécialité : Mécanique des Fluides et énergétique

Présentée et soutenue le 04/07/2022 par :

Mustapha EL HAMMA

Étude analytico-numérique de la convection thermosolutale induite par l'effet Soret et Dufour dans une cavité cylindrique poreuse remplie d'un nano fluide

JURY

Bennasser BAHRAR	PES, Université Hassan II, Ecole normale supérieure de l'enseignement technique-Mohammadia	Président
Mohammed CHERRAJ	PH, Université Mohammed V, Faculté des Sciences -Rabat	Rapporteur/Examineur
Mohamed SAMMOUDA	PH, Université Sultan Moulay Slimane, Faculté polydisciplinaire -Beni Mellal	Rapporteur /Examineur
Mohammed DRIOUICH	PH, Université Sultan Moulay Slimane, Faculté polydisciplinaire -Beni Mellal	Rapporteur /Examineur
Kamal GUERAOU	PES, Expert, Université Mohammed V, Faculté des Sciences -Rabat	Examineur
Ahmed RTIBI	PH, Université Mohammed V, Faculté des Sciences -Rabat	Co-Directeur de Thèse
Mohammed TAIBI	PH, Université Hassan II, Faculté des Sciences- Aïn Chock - Casablanca	Directeur de Thèse

Année Universitaire : 2021/2022

Dédicace

À

Mes parents,

Mes frères

Mes sœurs,

Tous mes proches,

Tous mes amis,

Tous ceux qui sont chers,

Tous ceux qui m'ont aidé et encouragé.

Je dédie cette Thèse

Remerciements

J'aimerais tout d'abord remercier tous les membres de la Structure de Recherche « Modélisation et Simulation en Mécanique et Energétique », à l'Université Mohammed V, Faculté des Sciences de Rabat et tout particulièrement mon Directeur de Thèse, **Mohammed TAIBI**, Professeur de l'Enseignement Supérieur, à la Faculté des Sciences Aïn Chock de Casablanca, pour m'avoir accepté de diriger ce travail de Thèse pour son aide et ses conseils constructifs tout au long de la réalisation de ce travail. Qu'il trouve ici l'expression de mes sincères gratitudee.

J'aimerais remercier mon Co- Directeurs de Thèse, **Ahmed RTIBI**, Professeur de l'Enseignement Supérieur, à la Faculté des Sciences de Rabat, pour m'avoir accepté de Co-diriger ce travail de Thèse. Qu'il trouve ici l'expression de mes sincères gratitudee.

Mes remerciements vont également à Monsieur **Bennasser BAHRAR**, Professeur de l'Enseignement Supérieur à l'Université Hassan II de Casablanca, ENSET Mohammadia d'avoir accepté de présider le Jury de cette Thèse. Qu'il trouve ici l'expression de mes sincères gratitudee.

Je tiens à remercier Monsieur **Mohammed CHERRAJ**, Professeur de l'Enseignement Supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, d'avoir accepté d'être parmi les Jurys de cette Thèses en tant que rapporteur-examineur.

Je souhaite exprimer ma gratitude à Monsieur **Mohammed SAMMOUDA**, Professeur de l'Enseignement Supérieur à la Faculté Polydisciplinaire de Beni Mellal, de m'avoir soutenue tout au long de la réalisation de ce travail et d'avoir accepté de participer au Jury en tant que rapporteur-examineur

Je remercie aussi Monsieur **Mohammed DRIOUICH**, Professeur de l'Enseignement Supérieur, à la Faculté Polydisciplinaire de Beni Mellal d'avoir accepté de participer au Jury en tant que rapporteur-examineur

Je tiens, aussi à remercier Monsieur **Kamal GUERAOU**, Professeur de l'Enseignement Supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, pour le temps qui m'a consacré pour répondre à toutes mes questions sur ce travail dont il a suivi son déroulement de près. Nos discussions m'ont été bénéfiques pour la réalisation de ce travail. Sans oublier de le remercier encore une fois d'avoir accepté d'examiner ce travail de Thèse.

Finalement je tiens à remercier mes amis et mes collègues qui sont toujours à côté de moi. Qu'ils trouvent ici l'expression de mes sincères remerciements.

Résumé

Dans la présente Thèse, nous présentons une étude théorique et une simulation numérique des phénomènes du transfert combiné de chaleur et de masse (Convection Thermosolutale), dans un milieu poreux, isotrope et saturé rempli d'un nanofluide (nanoparticules d'aluminium) en équilibre thermique avec un fluide de base binaire dans une enceinte cylindrique. Le processus d'écoulement du nanofluide dans les couches poreuses est décrit par la loi de DARCY étendue de BRINKMAN - FORCHHEIMER et en utilisant l'approximation de BOUSSINESQ. Les parois latérales de l'enceinte sont rigides, imperméables et adiabatiques tandis que les parois horizontales sont maintenues à température et à concentration uniformes. Les équations modélisant le phénomène étudié sont celles qui traduisent la conservation de la quantité de mouvement, de l'énergie et de la concentration.

Ces équations n'admettent pas de solution analytique et par conséquent un recours aux méthodes numériques s'impose. Pour cela nous avons opté pour la méthode des volumes finis pour procéder à la discrétisation de telles équations. Nous avons ainsi étudié l'effet des différents paramètres sur le taux de transfert de chaleur et de concentration.

Mots clés :

Nanofluides, Milieux poreux, Thermosolutale, Convection, Effet SORET et DUFOUR.

Abstract

In this thesis, we present a theoretical study and a numerical simulation of the phenomena of combined heat and mass transfer (thermosolutal convection), in a porous, isotropic and saturated medium filled with a nanofluid (aluminum nanoparticles) in equilibrium. thermal with a binary base fluid in a cylindrical chamber. The nanofluid flow occurring in the porous layers is described by Brinkman-FORCHHEIMER'S extended DARCY'S law using the BOUSSINESQ approximation. The side walls of the enclosure are rigid, impermeable and adiabatic while the horizontal walls are maintained at uniform temperature and concentration. The equations modeling the phenomenon studied are those which translate the conservation of momentum, energy and concentration.

These equations do not admit of an analytical solution and therefore recourse to numerical methods is essential. For this we opted for the method of finite volumes to proceed to the discretization of such equations. We thus studied the effect of the various parameters heat transfer and concentration.

Keywords:

Nanofluid, Porous media, Thermosolutal, Convection, SORET and DUFOUR effects.

Liste des Publications

1. **M. El Hamma**, A. Rtibi, M. Taibi, K. Gueraoui and M. Bernatchou « *Theoretical and Numerical Study of Thermosolutal Convection in a Cylindrical Porous Cavity Filled with a Nanofluid and Taking into Account Soret and Dufour Effects* ». International Journal on Engineering Applications (I.R.E.A.), Vol. 10, N°1, 2022.
2. **M. El Hamma**, M. Taibi, A. Rtibi, K. Gueraoui and M. Bernatchou « *Effect of magnetic field on thermosolutal convection in a cylindrical cavity filled with nanofluid, taking into account soret and dufour effects* ». JP Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 26, pp. 1-26, 2022.
3. M. Bernatchou, K. Gueraoui, A. Rtibi, M. Cherraj and **M. El Hamma** « *Effect of magnetic field on double diffusive natural convection in an inclined cavity filled with nanofluid considering the soret effect* ». JP Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 25, pp. 1-25, 2022.
4. M. Bernatchou, A. Rtibi, K. Gueraoui, **M. El Hamma**, and M. Cherraj « *Study of thermosolutal natural convection of cu-water nanofluid in an inclined cavity* ». JP Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 27, pp. 37-56, 2022.

Liste des Communications

5. **M. El Hamma**, M. Taibi , A. Rtibi, K. Gueraoui and H. Rachid, « *Modélisation théorique et simulation numérique de phénomène de la convection thermosolutale, tenant compte de l'effet Soret et Dufour, dans une cavité poreuse cylindrique remplie d'un nanofluide* ». 15^{ème} Congrès de Mécanique, FSAC, Université Hassan II de Casablanca, du 24-27 Mai 2022.

Liste des symboles

$A = \frac{L}{R}$: Rapport d'aspect géométrique
B_0	: Intensité du champ magnétique, $Kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
C^*	: Concentration, $Kg \cdot m^{-3}$
C_{inf}^*	: Concentration à la paroi inférieure, $Kg \cdot m^{-3}$
C_{sup}^*	: Concentration à la paroi supérieure, $Kg \cdot m^{-3}$
C	: Concentration adimensionnelle
C_F	: Coefficient de FORCHHEIMER
D	: Diffusivité massique, $m^2 \cdot s^{-1}$
Da	: Nombre de DARCY
Du	: Nombre de DUFOUR
Ha	: Nombre de HARTMANN
K	: Perméabilité, m^2
k_{CT}	: Coefficient de SORET, $Kg \cdot m^{-1} \cdot K^{-1} \cdot s^{-1}$
k_{TC}	: Coefficient de DUFOUR, $m^5 \cdot K \cdot Kg^{-1} \cdot s^{-1}$
Le	: Nombre de LEWIS
L	: Hauteur de cylindre, m
R	: Rayon de cylindre, m
r^*	: Coordonnée radiale
r	: Coordonnée radiale adimensionnelle
z^*	: Coordonnée axiale
z	: Coordonnée axiale adimensionnelle
N	: Rapport des poussées
Nu	: Nombre de NUSSELT moyen
Pr	: Nombre de PRANDTL
Q	: Nombre de Chandrasekhar
R_T	: Nombre de RAYLEIGH thermique
Sh	: Nombre de SHERWOOD moyen
Sr	: Nombre de SORET
T^*	: Température, K

T	: Température adimensionnelle
U^*	: Composante radiale de la vitesse (m/s)
U	: Composante radiale adimensionnelle de la vitesse
W^*	: Composante axiale de la vitesse (m/s)
W	: Composante axiale adimensionnelle de la vitesse
β_T	: Coefficient d'expansion thermique, K^{-1}
β_s	: Coefficient d'expansion solutale, $Kg.mol.l^{-1}$
ρ_0	: Masse volumique de référence, $Kg.m^{-3}$
μ_{nf}	: viscosités dynamiques du nanofluide, $kg.m^{-1}.s^{-1}$
$\widetilde{\mu}_{nf}$: viscosités dynamiques effective du nanofluide
ν_{nf}	: Viscosité cinématique du nanofluide, $m^2.s^{-1}$
$(\rho c)_{nf}$: Capacité calorifique du nanofluide, $W.K^{-1}$
$(\rho c)_s$: Capacité calorifique du nanoparticule solide, $W.K^{-1}$
φ	: Fraction volumique des nanoparticules
Ω^*	: Composante du vecteur rotationnel des vitesses
Ω	: Composante du vecteur rotationnel des vitesses adimensionnelle
ψ^*	: Fonction de courant
ψ	: Fonction de courant adimensionnelle
ε	: Porosité du milieu poreux
λ_{nf}	: Conductivité thermique du nanofluide, $W.m^{-1}.K^{-1}$
λ_e	: Conductivité thermique du milieu poreux, $W.m^{-1}.K^{-1}$
$\bar{\lambda}$: Rapport des conductivités thermiques
α	: Diffusivité thermique du milieu poreux saturé, $m^2.s^{-1}$
α_{nf}	: Diffusivité thermique du nanofluide, $m^2.s^{-1}$
σ_{nf}	: Conductivité électrique du nanofluide, $A^2.s^3.m^{-3}.Kg^{-1}$
σ_f	: Conductivité électrique du fluide, $A^2.s^3.m^{-3}.Kg^{-1}$
σ_s	: Conductivité électrique du nanoparticule solide, $A^2.s^3.m^{-3}.Kg^{-1}$
i_{max}	: Nombre maximale des nœuds dans la direction radiale
j_{max}	: Nombre maximale des nœuds dans la direction axiale
g	: Accélération de la pesanteur
$\Delta r ; \Delta z$: Pas discrétisation, respectivement suivant la direction radiale et axiale
Δt	: Pas du temps

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Résumé	iii
Abstract	iv
Liste des Publications	v
Liste des Communications.....	v
Liste des symboles.....	vi
Introduction générale.....	1
Chapitre 1 : Synthèse Bibliographique	4
Introduction	4
I. Synthèse bibliographique	4
II. Propriétés thermo-physiques des nano fluides	12
II.1. La masse volumique d'un nanofluide [51]	12
II.2. Les différents modèles de viscosités.....	13
II.3. Capacité calorifique de nanofluide [54].....	14
II.4. La porosité	15
II.5. La viscosité effective	15
II.6. La conductivité thermique [56].....	15
III. Les propriétés thermo physique des nano fluides eaux-aluminium	16
Conclusion.....	16
Chapitre 2 : Formulation Mathématique du problème	18
Partie I :	18
Modélisation théorique et simulation numérique de phénomène de la convection thermosolutale, tenant compte de l'effet Soret et Dufour, dans une cavité poreuse cylindrique remplie d'un nano fluide.....	18
Introduction.....	18
II. Configuration géométrique et Position du problème	18
III. Hypothèses simplificatrices.....	19
IV. Équations gouvernantes.....	19
IV.1. Équation de continuité.....	20
IV.2. Équation de conservation de la quantité de mouvement en milieu poreux	20
V. Conditions aux limites	24
V.1. Conditions aux limites thermiques	24
V.2. Conditions aux limites solutales.....	25

V.3. Conditions aux limites dynamiques.....	25
V.4. Les expressions de Thom pour la vorticité.....	26
VI. Adimensionnalisation des équations	27
Partie II : Modélisation de la convection naturelle conjuguée sous l'effet d'un champ magnétique (Magneto convection)	30
I. Géométrie de l'écoulement	30
II. Formulation mathématique du problème	31
III. Conditions aux limites adimensionnelles.....	32
Conclusion	35
Chapitre 3 : Méthode de Résolution	37
Introduction.....	37
I. Maillage du domaine d'étude	37
II. Discrétisation de l'équation de transport	38
A. Premier balayage	39
II.1. Equation de l'énergie	39
II.2. Equation de la concentration.....	42
II.3. Equation de la vorticité	44
B. Deuxième balayage	48
II.4. Equation de l'énergie	48
II.5. Equation de la concentration	50
II.6. Equation de la vorticité	53
II.7. Equation de la fonction de courant.....	56
III. Conditions aux limites	59
III.1. Conditions aux limites thermiques.....	59
III.2. Conditions aux limites solutales	59
III.3. Conditions aux limites dynamiques.....	60
IV. Conditions initiales	61
V. Tests de convergence	62
Discrétisation des équations qui gouvernent la Magnéto -convection	63
C. Premier balayage.....	63
D. Deuxième balayage	66
Conclusion	70
Chapitre 4 : Résultats et Discussion	71
Introduction.....	71
Résultats de la première partie de l'étude.....	71
II. Influence des paramètres.....	71

II.1. Influence du nombre de RAYLEIGH thermique, RT	71
II.2. Influence du nombre de PRANDTL, Pr	75
II.3. Influence du nombre de rapport des poussées, N	77
II.4. Influence du nombre de SORET et DUFOUR, Sr et Du	79
II.5. Influence de rapport d'aspect géométrique, A	80
II.6. Influence de la fraction volumique des nanoparticules, φ	83
II.7. Influence de la hauteur, z , sur les profils de la température, de la concentration et de la vorticité	84
Conclusion	85
Résultats relatifs à la deuxième partie de l'étude.....	87
Introduction.....	87
II. Influences des paramètres	87
II.1. Effet de la variation du nombre de HARTMANN, Ha	87
II.2. Effet du nombre de DARCY, Da	89
II.3. Effet des nombres de SORET et de DUFOUR	92
II.4. Effet du nombre de RAYLEIGH thermique, RT	93
II.5. Effet de la variation du rapport de poussée, N	95
II.6. Influence du nombre PRANDTL, Pr	97
II.7. Effet de la variation de la fraction volumique des nanoparticules, φ	100
II.8. Effet de la variation de rapport d'aspect géométrique, A	101
Conclusion	103
Conclusion générale et perspectives.....	104
Références bibliographiques.....	106

Introduction générale

Les écoulements convectifs à double diffusion ou convectifs thermo solutale dans les géométries poreuses est un sujet qui a intéressé beaucoup de chercheurs ces dernières années, et ce, en raison de sa large gamme d'applications dans l'industrie alimentaire, la métallurgie, les procédés pétrochimiques, la migration de l'humidité dans les isolants fibreux, le stockage des déchets nucléaires et échangeurs thermiques, etc. [1].

La convection flottante dans une géométrie annulaire conçue à partir de deux tubes coaxiaux a de nombreuses applications importantes, telles que les systèmes de transfert de chaleur, les réacteurs nucléaires et les processus de croissance cristalline [1,2].

En milieu poreux, lorsqu'un fluide ou nano fluide saturant multi-composants est soumis à des gradients de densité provoqués par des variations locales de température et de concentration, les forces de densité dues aux champs de gravité induisent un mouvement convectif : c'est la convection thermosolutale naturelle. La convection naturelle dans les milieux poreux a une importance fondamentale et trouve des applications dans de nombreux domaines (astrophysique, océanographie, géophysique, pollution atmosphérique, diffusion souterraine de polluants, enfouissement souterrain de déchets radioactifs, isolation thermique, métallurgie, extraction pétrolière, exploitation géothermique et stockage de certains produits agricoles) [2, 3, 4].

Dans la présente étude nous avons étudié le phénomène de transfert combiné de chaleur et de masse (thermosolutale), dans un milieu poreux, isotrope, saturé et rempli d'un nano fluide (nanoparticules d'aluminium) en équilibre thermique avec un fluide de base binaire dans une enceinte cylindrique.

Les parois latérales de l'enceinte sont rigides, imperméables et adiabatique tandis que les parois horizontales sont maintenues à température et concentration uniformes. L'écoulement des nano fluides dans les couches poreuses est décrit par la loi de DARCY étendue de BRINKMAN-FORCHHEIMER. La masse volumique variable est exprimée en utilisant l'approximation de BOUSSINESQ. La méthode des volumes finis a été utilisée pour discrétiser

les équations décrivant le phénomène, à savoir les équations de quantité de mouvement, d'énergie et de concentration.

Dans notre étude, nous nous sommes intéressés à la convection thermosolutale sous l'effet du phénomène de la thermo-diffusion (Effet SORET et DUFOUR) et un champ magnétique suivant deux directions. Notre intérêt porte essentiellement sur l'étude des effets ainsi engendrés par la géométrie cylindrique et l'intensité de l'écoulement sur les transferts de chaleur (Nombre de NUSSELT) et sur le transfert de la masse (Nombre de SHERWOOD) à la paroi active de la cavité.

Le manuscrit est composé, outre une introduction générale et une conclusion générale, de quatre chapitres :

Le premier chapitre, est un contexte bibliographique sur la convection thermosolutale dans les milieux poreux et sur les phénomènes de la thermo-diffusion. Ainsi on a passé en revue de rappeler certains travaux antérieurs de recherche effectués dans ce domaine. Cette revue bibliographique nous a permis de situer notre travail.

Le deuxième chapitre, qui comporte deux parties, porte sur la formulation mathématique de notre problème étudié. Un tel modèle mathématique est basé sur les équations de conservation. De telles équations sont alors écrites sous forme dimensionnelles et adimensionnelles auxquelles on adjoint les conditions aux limites.

Dans le troisième chapitre, la résolution analytique des équations précédemment établies s'avère impossible vu la complexité du modèle et le couplage ainsi que la non linéarité des équations et par conséquent la résolution par voie numérique s'impose. Pour cela, on a opté pour la méthode de volume finis qui nous a servi pour transformer toutes nos équations de leurs formes différentielles à une forme algébrique. On a ensuite proposé les méthodes itératives pour résoudre le système algébrique. Dans le cadre de notre étude, nous avons choisi la méthode SOR (Simultaneous Over Relaxation) [71].

Le quatrième chapitre a fait l'objet de la présentation des résultats obtenus ainsi que leur interprétation. Ce chapitre se compose par deux parties :

La première partie présentera les résultats sur la convection thermosolutale dans une cavité poreuse cylindrique remplie d'un nano fluide avec prise en compte des effets SORET et DUFOUR.

La deuxième partie de ce chapitre portera sur l'effet d'un champ magnétique sur la convection thermosolutale dans une cavité cylindrique remplie d'un nano fluide avec prise en compte des effets SORET et DUFOUR.

Le manuscrit est achevé par une liste bibliographique et par conclusion générale dans laquelle on a résumé l'essentiel des résultats obtenus, en mettant l'accent sur l'influence de certains paramètres sur le phénomène étudié. Aussi on a présenté quelques perspectives qui pourraient constituer une suite intéressante à cette étude.

Chapitre 1 : Synthèse Bibliographique

Introduction

Le terme convection est utilisé pour définir les mouvements dus à l'agitation thermique engendrant des différences de densités entre les molécules d'un fluide. Un fluide est le terme désignant un liquide ou un gaz : corps pur ou mélange dont les molécules ont assez de liberté pour se mouvoir les unes par rapports aux autres. On parle de convection naturelle lorsqu'il s'agit d'agitations induites dans le fluide par des forces (de volume ou de surface) agissant à l'intérieur du volume étudié. Les mouvements générés sont dus aux variations locales de la masse volumique du fluide en fonction de la température et/ou de la concentration pour le cas de la convection naturelle d'origine thermique et/ou massique.

La convection forcée concerne les mouvements convectifs qui apparaissent sous l'action d'une source externe, telle qu'une pompe ou le déplacement d'un objet dans le fluide, i.e. les mouvements induits par une différence de pression sont des mouvements de convection forcée où l'écoulement persiste même en l'absence de gradient de température. Quand la convection est due aux effets couplés cités précédemment, on parle alors de convection mixte.

Les instabilités hydrodynamiques se développant dans un milieu confiné ou semi confiné bénéficient d'une attention inégalée chez les scientifiques, mécaniciens qu'ils soient ou mathématiciens ou industriels, depuis l'époque de RAYLEIGH. La raison est simple ; il s'agit de phénomènes dont les applications abondent. Dans ce qui suivra on va passer en revue une étude bibliographique sur un tel phénomène.

I. Synthèse bibliographique

La convection thermique naturelle et l'échange de masse appelé la convection thermosolutale ou double diffusive en milieu poreux ou dans une cavité poreuse confinée reste d'une grande attention en raison de l'intérêt croissant pour de multiples applications industrielles et environnementales, comme le procédé chimique, les procédés de filtration, le transport en milieu chimique réacteurs, stockage de déchets nucléaires, isolation thermique, installations de stockage de céréales, stockage de gaz, pollution des nappes phréatiques, industrie alimentaire, océanographie, géophysique, solidification, procédés pétrochimiques et certains produits agricoles, etc. [3, 4, 5, 6].

À cet effet les chercheurs font beaucoup de recherche sur la modélisation du phénomène de la convection de double diffusion en milieux poreux.

BECKERMANN et al. [6] ont étudié la convection naturelle conjuguée dans des enceintes verticales contenant une couche fluide et une couche poreuse. L'équation de DARCY étendue de BRINKMAN-FORCHHEIMER est utilisée pour modéliser l'écoulement dans la couche poreuse. Les résultats numériques sont vérifiés en réalisant plusieurs expériences pour différentes tailles de cellules contenant des billes de verre sphériques comme couche poreuse et de l'eau et de la glycérine comme fluides clairs. Les auteurs ont constaté que la pénétration du flux de fluide dans la couche poreuse dépend du produit des nombres de RAYLEIGH et de DARCY qui doit être supérieur à 50 environ. De plus, pour un produit des nombres de RAYLEIGH et de DARCY supérieur à 50, la convection naturelle dans un milieu partiellement poreux montre une différence significative par rapport à une enceinte entièrement poreuse.

J. A. WEAVER et AL [7] ont effectué une étude de l'influence de l'inter diffusion des espèces, des effets SORET et DUFOUR sur le transfert de chaleur et de masse par convection naturelle dans une cavité en raison des gradients combinés de température et de concentration.

Rosenberg et Spera [8] ont effectué une étude du phénomène de transfert de masse et de chaleur au sein d'une cavité remplie par une matrice poreuse soumise à un gradient de température vertical. Ce travail montre que le transfert de masse et de chaleur dépend fortement du rapport des poussées des forces solutale et thermique pour des nombres de RAYLEIGH et de Lewis constants.

H. KHARE et al [9] se sont intéressés à la convection thermosolutale dans une couche fluide hétérogène en milieu poreux en présence d'un champ magnétique.

Adrian POSTELNICU [10] a effectué une étude de l'influence du champ magnétique sur le transfert de chaleur et de masse en convection naturelle à partir de surfaces verticales en milieu poreux en tenant compte des effets SORET et DUFOUR.

SUNIL et AL [11] ont étudié l'effet de la viscosité en présence du champ magnétique sur la convection thermosolutale dans un fluide ferromagnétique.

M.S. MALASHETTY et AL [12] ont effectué une étude analytique de la double convection diffusible linéaire et non linéaire avec effet Soret dans des liquides à couple de contraintes.

M. MAGHERBI [13] a étudié l'influence des effets de diffusion croisés sur la production d'entropie en convection par double diffusion.

RETIEL et H. BOUGURRA [14] ont étudié le phénomène de la convection thermosolutale dans une cavité demi cylindrique horizontale fermée, chauffée et salée par la paroi horizontale qui coupe le cylindre verticalement en deux. L'influence du nombre de RAYLEIGH thermique et du nombre de LEWIS sur la structure de l'écoulement et sur la distribution de la température et de concentration a été faite. Les auteurs ont remarqué que les profils de température et de concentration varient considérablement en fonction des nombres de RAYLEIGH thermique et du nombre de Lewis.

M. C. RAJU et AL [15] a effectué une étude de effets Soret dus à la convection naturelle entre deux plaques inclinées chauffées en présence d'un champ magnétique.

URVASHI GUPTA et AL [16] ont effectué une étude de l'instabilité thermosolutale d'un fluide compressible de Rivlin-Erickson en présence de courants de rotation et de Hall saturant un milieu poreux.

S. BENISSAAD et AL [17] se sont intéressés à la convection naturelle thermosolutale dans une enceinte inclinée. Le modèle de DARCY- BRINKMAN- FORSCHHEIMER a été utilisé dans ce travail. Les auteurs ont montré l'effet des nombres de DARCY, de LEWIS et de RAYLEIGH ainsi que l'effet de l'angle d'inclinaison de l'enceinte sur les transferts de chaleur et de masse dans un milieu poreux saturé par un fluide binaire.

A. HOUSHANG [18] s'est intéressé à l'étude numérique du refroidissement par convection naturelle d'une source de chaleur fixée horizontalement à la paroi verticale gauche d'une cavité remplie de nanofluide cuivre-eau. La paroi verticale gauche est maintenue à température constante, tandis que les autres sont maintenues adiabatiques. L'approche numérique est basée sur la méthode des volumes finis avec un maillage colocalisé. L'algorithme SIMPLEX est utilisé pour gérer le couplage pression-vitesse. Dans cette étude, l'influence de certains paramètres effectifs tels que : le nombre de RAYLEIGH, l'emplacement et la géométrie de la source de chaleur et la concentration solide sont étudiés et discutés. Les résultats sont

présentés sous forme de lignes de courant, d'isothermes et de nombre de NUSSELT moyen. Les résultats montrent que la dimension de la source de chaleur est un paramètre important affectant le modèle d'écoulement et le champ de température, de sorte que le nombre de NUSSELT moyen diminue avec une augmentation de la longueur du réchauffeur. Les auteurs ont observé également qu'à un nombre de RAYLEIGH donné et à une géométrie de source de chaleur définie, le nombre de NUSSELT moyen augmente linéairement avec l'augmentation de la fraction volumique solide du nanofluide. L'augmentation des nombres de RAYLEIGH renforce les flux de convection naturelle ce qui conduit à la diminution de la température de la source de chaleur. L'algorithme et le code informatique ont également été comparés à des résultats numériques afin de vérifier et de valider le modèle proposé.

N. AHMED [19] a effectué une étude de la convection MHD avec effets SORET et DUFOUR dans un écoulement tridimensionnel à travers une plaque poreuse verticale et infinie.

RAJESH SHARMA et AL [20] ont analysé numériquement le transfert de chaleur et de masse par convection MHD instable au-delà d'une plaque mobile poreuse verticale semi-infinie à l'aide de la méthode GALERKIN.

RAZLI MEHDAOUI et AL. [5] ont étudié l'effet de l'interface horizontale de forme ondulée sur la double convection naturelle diffusive dans une cavité. Les équations qui décrivent l'écoulement du fluide et le transfert de chaleur et de masse sont décrites par les équations de Navier Stokes (région fluide), et par l'équation de DARCY-BRINKMAN (région poreuse). L'écoulement de fluide, le transfert de chaleur et de masse ont été étudiés pour différentes valeurs de l'amplitude et du nombre d'onde de l'interface et du rapport de flottabilité. Les résultats obtenus sous la forme des isothermes, des lignes de courant, des iso concentrations et des nombres de NUSSELT et de SHERWOOD ; montrent que l'interface ondulée a un effet significatif sur l'écoulement et sur le transfert de chaleur et de masse.

A. POSTELNICU [21] a effectué une étude de transfert de chaleur et de masse par convection naturelle à un point de stagnation en milieu poreux en tenant compte des effets SORET et DUFOUR.

BASAK et AL. [22] ont effectué une étude de la convection naturelle dans les enceintes trapézoïdales poreuses. La paroi inférieure est uniformément ou non uniformément chauffée.

M. BHUVANESWARI et AL [23] ont effectué une étude numérique sur la double convection mixte diffusive avec effet Soret dans une cavité à couvercle à deux côtés. Les auteurs ont montré que les taux de transfert de chaleur et de masse sont réduits si les deux parois se déplacent dans la même direction, tandis que les taux de transfert de chaleur et de masse sont améliorés si les parois se déplacent dans la direction opposée.

SHAOWEI WANG et AL [24] a effectué une analyse de stabilité de la convection Soret-double diffusion du fluide de MAXWELL en milieu poreux.

HADIDI et AL [25] ont étudié la convection thermosolutale dans une cavité rectangulaire poreuse renfermant deux couches poreuses disposées verticalement. Les deux couches sont homogènes, isotropes et saturées par un même fluide binaire. Dans cette étude, l'effet Soret et l'effet Dufour ont été négligés.

HAMMID et AL. [26] ont examiné l'effet de la perméabilité du milieu poreux et du nombre de RAYLEIGH sur le transfert de chaleur et sur la structure du fluide à l'intérieur d'une cavité annulaire verticale partiellement poreuse à l'aide du modèle Darcy – Brinkman – Forchheimer. Ils ont constaté que l'augmentation du nombre de RAYLEIGH et du nombre de Darcy améliore la convection dans les compartiments fluides de la cavité et dans la couche poreuse, respectivement.

K. Al-Farhany et AL [27] ont étudié le phénomène de transfert de chaleur et de masse par convection naturelle bidimensionnelle à double diffusion dans un milieu poreux rectangulaire incliné. Deux parois opposées de la cavité sont maintenues à des températures et concentrations fixes mais différentes ; tandis que les deux autres parois sont adiabatiques. Il a été trouvé que le nombre de Nusselt augmente lorsque le taux de flottabilité augmente pour ($N \geq -1$) et aussi lorsqu'il diminue pour ($N \leq -1$). C'est le même comportement pour le nombre de Sherwood. De plus, le nombre de Nusselt diminue lorsque le nombre de Lewis augmente et le nombre de Sherwood augmente lorsque le nombre de Lewis augmente.

Ching-Chang Cho et AL [28] ont effectué une étude de transfert de chaleur par convection naturelle dans une cavité fermée remplie de nanofluide. Les parois gauche et droite de la cavité ont une géométrie ondulée complexe et sont maintenues respectivement à haute et basse température. Pendant ce temps, les parois supérieure et inférieure de la cavité sont à la fois plates et isolées. Le nanofluide comprend des nanoparticules d' Al_2O_3 en suspension dans

de l'eau pure. Lors de l'exécution de l'analyse, les équations gouvernantes sont formulées à l'aide de l'approximation de BOUSSINESQ et la surface ondulée complexe est modélisée comme la superposition de deux fonctions sinusoïdales. Les simulations examinent les effets de la fraction volumique des nanoparticules, du nombre de RAYLEIGH et des paramètres de géométrie complexe de surface ondulée sur les lignes de courant d'écoulement, la distribution des isothermes et le nombre de NUSSELT dans la cavité. Les résultats montrent que pour toutes les valeurs du nombre de RAYLEIGH, le nombre de NUSSELT augmente à mesure que la fraction volumique des nanoparticules augmente. De plus, il est démontré que les performances de transfert de chaleur peuvent être optimisées en ajustant les paramètres de géométrie de surface ondulée conformément au nombre de RAYLEIGH.

M. SANKAR et AL [29] ont étudié la convection double diffusion dans un anneau vertical rempli d'un milieu poreux saturé de fluide. Il s'agit d'une étude numérique dans le but de comprendre les effets d'une source discrète de chaleur et de soluté sur l'écoulement du fluide et les taux de transfert de chaleur et de masse. L'anneau poreux est soumis à des flux de chaleur et de masse provenant d'une partie de la paroi interne, tandis que la paroi externe est maintenue à une température et une concentration uniformes. Dans la formulation du problème, le modèle de DARCY-BRINKMAN est adopté pour l'écoulement du fluide dans l'anneau poreux. L'influence des principaux paramètres de contrôle, tels que le nombre de RAYLEIGH thermique, le nombre de DARCY, le nombre de LEWIS, le rapport de flottabilité et le rapport de rayon, est étudiée sur les modèles d'écoulement et sur les taux de transfert de chaleur et de masse pour différents emplacements de la source de chaleur et de soluté.

K. SRIVASTAVA et AL [30] ont réalisé une étude de l'instabilité thermique dans un milieu poreux saturé de fluide, en présence du coefficient de SORET. Le milieu poreux est confiné entre deux surfaces horizontales, et soumis à un champ magnétique vertical constant. L'écoulement dans le milieu poreux est régi par le modèle de DARCY généralisé, qui inclut le terme dérivé du temps. En effectuant une analyse de stabilité linéaire et non linéaire, l'effet du champ magnétique sur la stabilité de l'écoulement à travers un milieu poreux a été étudié.

P. BERA et AL [31] ont étudié l'approche de non-équilibre thermique sur la convection naturelle double-diffusive dans une cavité carrée en milieu poreux.

SHEREMET et AL [32] ont étudié la convection mixte à double diffusion dans un espace poreux ouvert. La cavité est remplie d'un nanofluide (le nanofluide de base est un fluide binaire

tel que l'eau salée) et des nanoparticules. L'influence du nombre de REYNOLD, de nombre de LEWIS et de nombre de RAYLEIGH a été étudiée.

N. HADIDI et AL [33] ont effectué une étude transfert de chaleur et de masse par convection naturelle thermosolutale bidimensionnelle dans une enceinte poreuse bi-couche et inclinée.

M. RASHIDI [34] a analysé le transfert de chaleur et de masse pour un écoulement de fluide viscoélastique MHD sur une feuille d'étirement vertical en tenant compte des effets SORET et DUFOR.

ABYASACHI MONDAL et AL. [35] ont étudié les effets du rapport de flottabilité sur la convection naturelle à double diffusion instationnaire dans une cavité remplie de milieu poreux avec des conditions aux limites uniformes et non uniformes.

M. BORHAN UDDINONTET AL. [36] étudié l'Effet du rapport de flottabilité sur la convection combinée thermosolutale instable dans une enceinte trapézoïdale entraînée par un couvercle en présence d'un champ magnétique.

MIROSHNICHENKO et AL. [37] ont étudié la convection naturelle MHD dans une cavité trapézoïdale partiellement ouverte remplie d'un nanofluide.

MIKHAIL A.SHEREMET AL. [38] ont étudié l'effet du champ magnétique sur la convection naturelle instationnaire dans une cavité à paroi ondulée remplie d'un nanofluide : modèle mathématique de BUONGIORNO.

M. HATAMI et AL. [39] ont effectué une étude de l'optimisation d'une cavité ondulée circulaire remplie de nanofluide dans les conditions de transfert de chaleur par convection naturelle.

ALSABERY et AL. [40] ont étudié numériquement, en utilisant la méthode des différences finies, l'effet de la température sinusoïdale variable à travers deux parois latérales opposées sur le flux de convection naturelle d'un nano fluide dans une enceinte carrée inclinée avec une couche poreuse partiellement saturée.

La convection naturelle à l'intérieur d'une cavité poreuse avec une paroi froide droite ondulée et un chauffage sinusoïdal de la paroi gauche et la présence d'une génération/absorption de chaleur interne ont été examinées numériquement par CHEONG et AL. [40].

OJELA et AL. [41] ont étudié numériquement l'influence d'un champ magnétique externe et d'un rayonnement dans un écoulement de fluide JEFFREY convectif libre entre des plaques poreuses parallèles en présence d'effets SORET et DUFOUR.

HUIJIN Xu et AL. [42] ont étudié numériquement la convection naturelle pour des nanofluides dans une cavité en mousse métallique. Un modèle de réseau de BOLTZMANN pour la convection naturelle des nanofluides dans un milieu poreux a été établi en utilisant la méthode de calcul de la moyenne des volumes. Les champs de vitesse et de température ont été obtenus, et les caractéristiques d'écoulement de la convection du nanofluide dans un milieu poreux ont été présentées. Les effets du nombre de RAYLEIGH, du nombre de Darcy, de la porosité, de la conductivité thermique solide du milieu poreux, de la conductivité thermique des nanoparticules et de la concentration des nanoparticules sur la convection naturelle ont été examinés. La vitesse moyenne a été avancée pour évaluer l'effet de convection et l'apparition de la convection naturelle a également été discutée. Les auteurs montrent que le nombre de NUSSELT de la convection naturelle augmente avec l'augmentation du nombre de DARCY, du nombre de RAYLEIGH, de la porosité et de la conductivité thermique effective.

Q.Y. Zhu et AL. [43] ont effectué une étude numérique tridimensionnelle sur la convection thermosolutale de fluide à loi de puissance dans des milieux poreux anisotropes.

FILAHY et AL [44] ont analysé l'effet SORET et DUFOUR sur la convection naturelle à double diffusion (transfert de chaleur et de masse) dans une couche poreuse BRINKMAN.

DURGESH KUSHAWAHA et AL. [45] ont étudié la convection naturelle thermosolutale avec les lignes de chaleur et de masse dans une enceinte rectangulaire uniformément chauffée et solutée pour fluides à faible nombre de PRANDTL. L'influence du nombre de RAYLEIGH, du nombre de PRANDTL, de nombre de Lewis et le taux de transfert total de chaleur et de soluté a été étudiée.

UMAVATHI et AL. [46] ont étudié l'instabilité convective thermosolutale linéaire et non linéaire (double diffusion) dans un milieu poreux horizontal saturé par un couple nanofluide de contraintes, chauffé par le bas et refroidi par le haut. Et ils ont conclu que le paramètre de

contrainte de couple améliore la stabilité du système dans les deux modes de convection stationnaire et oscillatoire. Le rapport de viscosité et le rapport de conductivité à la fois améliore le transfert de chaleur et de masse et le nombre de NUSSELT transitoire est oscillatoire lorsque le temps est petit. Cependant, lorsque le temps devient très grand, les trois valeurs de nombre de NUSSELT transitoires s'approche de leurs valeurs d'état stationnaire.

M. ALY et AL. [47] ont étudié l'effets du mouvement circulaire uniforme sur la convection naturelle dans une cavité remplie d'un nanofluide à l'aide de la méthode SPH. Igor V.

A. OUAHOAH et AL. [48] ont étudié la convection naturelle dans une cavité chauffée de manière non uniforme remplie en partie d'un nanofluide.

RATNADEEP NATH et AL. [49] ont étudié la convection mixte diffusive dans un nanofluide Cu-Al₂O₃/eau rempli d'un canal à marches orienté vers l'arrière avec champ magnétique incliné et conditions de charge de chauffage partiel.

ZHENTIAN et AL. [50] ont étudié les caractéristiques de transfert de chaleur en convection naturelle dans des cavités sinusoïdales remplies de nanofluides. Les auteurs ont montré que la convection s'amorce avec un rouleau dans le sens trigonométrique dans la région fluide-milieu poreux pour une interface horizontale. Lorsque le facteur A augmente la structure présente un écoulement multicellulaire avec un changement de sens pour quelques cellules. Le taux de transfert thermique et solutale (NUSSELT et SHERWOOD respectivement) s'améliore sur la paroi active de la cavité avec l'augmentation du facteur A .

II. Propriétés thermo-physiques des nano fluides

Les propriétés thermo physiques (masse volumique, chaleur spécifique, coefficients d'expansions volumique, thermique et massique, viscosité dynamique, conductivité thermique, etc.) des solutions sont sensibles à l'ajout des nanoparticules. Dans ce travail on suppose que les nanoparticules sont en équilibres thermiques avec le fluide de base. Les propriétés thermo physiques du nano fluide seront approximées par différentes relations tirées de la littérature.

II.1. La masse volumique d'un nanofluide [51]

L'expression donnant la masse volumique d'un nano fluide est donnée par la relation :

$$\rho_{nf} = \varphi \rho_s + (1 - \varphi) \rho_f$$

Avec :

$$\varphi = \frac{\text{volume solide}}{\text{volume total de nanofluide}} = \frac{V_s}{V_T} = \frac{V_s}{V_f + V_s}$$

- ρ_{nf} : La masse volumique du nanofluide ;
- φ : La fraction volumique du nanoparticule ;
- ρ_s : La masse volumique du nanoparticule solide ;
- ρ_f : La masse volumique du fluide de base.

II.2. Les différents modèles de viscosités

La relation de D'EINSTEIN [55]

$$\mu_{nf} = \mu_f (1 + 2.5 \varphi)$$

Avec :

- μ_{nf} : viscosités dynamiques du nanofluide ;
- μ_f : viscosités dynamiques du fluide de base ;
- φ : la fraction volumique des nanoparticules ;
- Cette relation n'est valable que pour $\varphi < 0.03$.

La relation de BRINKMAN [53]

La viscosité dynamique d'un nano fluide est donnée par la loi de BRINKMAN suivante :

$$\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1 - \varphi)^{2.5}}$$

On remarque que pour les faibles fractions volumiques, la relation de BRINKMAN conduit exactement à celle D'EINSTEIN. Ces relations n'intègrent pas les effets du mouvement BROWNIEN ni ceux de la taille des particules.

La relation de BATCHELOR [53]

Il a montré que la viscosité n'est pas seulement une fonction linéaire de φ , comme l'indique la relation d'Einstein mais une fonction non linéaire de φ avec la présence d'un terme en φ^2 :

$$\mu_{nf} = \mu_f(1 + 6,2\varphi^2 + 2,5\varphi)$$

Cette équation permet le calcul de la viscosité de la suspension de nanoparticules avec : $\varphi > 0.1$

II.3. Capacité calorifique de nanofluide [54]

La chaleur spécifique est définie comme étant la capacité calorifique par unité de masse d'une substance ou d'un système homogène. Elle est donnée par :

$$c_p = \frac{dQ}{m dT}$$

Pour la détermination de la chaleur spécifique d'un nano fluide, on a les deux relations suivantes données par XUAN et ROETZEL [54] :

$$(\rho c)_{nf} = (1 - \varphi) (\rho c)_f + \varphi(\rho c)_s$$

Où :

- $(\rho c)_{nf}$: Chaleur spécifique du nanofluide ;
- $(\rho c)_s$: Chaleur spécifique de la nanoparticule solide ;
- $(\rho c)_f$: Chaleur spécifique du fluide de base.

Approximation de BOUSSINESQ

L'étude de phénomène de la convection naturelle tient compte de la variation de la densité sous l'effet d'un gradient de la température et de la concentration qui engendre les mouvements convectifs dans le milieu considéré. Ainsi ces variations sont approximées par un développement de Taylor à l'ordre un, donc l'approximation de BOUSSINESQ s'écrit :

$$\rho_f = \rho_0[1 - \beta_T(T^* - T_0^*) - \beta_S(C^* - C_0^*)]$$

Donc pour un nano fluide : $\rho_{nf} = (1 - \varphi) \rho_f + \varphi \rho_s$

$$\rho_{nf} = \rho_0(1 - \varphi)[1 - \beta_T(T^* - T_0^*) - \beta_S(C^* - C_0^*)] + \varphi \rho_s$$

La masse volumique de référence d'un nanofluide est donnée par :

$$\rho_{0nf} = \rho_0(1 - \varphi) + \varphi \rho_s$$

Avec :

- ρ_0 , T_0^* et C_0^* sont respectivement la densité de référence du fluide de base , la température de référence et la concentration de référence.
- β_T et β_S sont respectivement les coefficients d'expansion volumique thermique et le coefficient d'expansion solutale définie comme suit :

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{P,V} \quad \text{et} \quad \beta_S = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_{P,V}$$

II.4. La porosité

$$\varepsilon = \frac{\text{volume des pores}}{\text{volume total du milieu poreux}} = \frac{V_{pore}}{V_{total}}$$

II.5. La viscosité effective

La viscosité effective dépend de la viscosité de nano fluide :

$$\frac{\widetilde{\mu}_{nf}}{\mu_{nf}} = \frac{1}{\varepsilon}$$

II.6. La conductivité thermique [56]

En supposant que les particules sont séparées d'une distance suffisante conduisant à l'absence d'interaction mutuelle entre elles, pas de contact entre les particules [Modèle de MAXWELL].

$$\lambda_{nf} = \lambda_f \left(\frac{\lambda_s + 2\lambda_f - 2\varphi(\lambda_f - \lambda_s)}{\lambda_s + 2\lambda_f + \varphi(\lambda_f - \lambda_s)} \right)$$

Avec :

- λ_{nf} : La conductivité thermique du nanofluide ;
- λ_f : La conductivité thermique du fluide de base ;
- λ_s : La conductivité thermique de la nanoparticule.

III. Les propriétés thermo physique des nano fluides eaux-aluminium

Dans notre travail on a utilisé un nano fluide métallique qui se compose de l'eau comme fluide de base et des nanoparticules d'aluminium. La fraction volumique est de : $\varphi = 5\%$.

Propriété physique	H_2O	Al
$\rho(Kg.m^{-3})$	997,1	2698
$c(J.Kg^{-1}.K^{-1})$	4179	897
$(\rho c) (KJ.K^{-1} m^{-3})$	4166,9	2420,1
$\lambda (Wm^{-1} K^{-1})$	0,613	237

Les propriétés physiques de l'Eau et d'Aluminium sont regroupées sur le tableau suivant [22, 39, 34].

Nano fluide ($\varphi = 5\%$)	$\rho_{onf}(Kg/m^3)$	$\lambda_{nf}(W/m K)$ [Maxwell]	$(\rho c)_{onf} (KJ/K m^3)$ [Xuan et Roetzel]
$H_2O - Al$	1082,1	0,71	4079 ,5

Conclusion

À la suite de cette revue bibliographique on a pu situer notre travail par rapport aux travaux antérieurs. Ainsi peu de chercheurs ont tenu compte de couplage entre d'une part l'effet SORET et DUFOUR et d'autre part la prise en compte de la nature de milieu poreux rempli d'un nano fluide.

Notre intérêt s'est focalisé sur l'étude de la convection mixte d'origine thermosolutale sous l'influence de l'effet SORET et DUFOUR dans un cylindre vertical rempli d'un nano fluide

et soumis à un gradient de température. Dans le chapitre suivant on va proposer un modèle mathématique très détaillé qui gouverne un tel phénomène.

Chapitre 2 : Formulation Mathématique du problème

Partie I :

Modélisation théorique et simulation numérique de phénomène de la convection thermosolutale, tenant compte de l'effet SORET et DUFOR, dans une cavité poreuse cylindrique remplie d'un nano fluide

Introduction

Dans le présent chapitre, nous allons présenter le modèle qui régit le phénomène de la convection naturelle et thermosolutale en milieux poreux isotrope rempli d'un nano fluide en équilibre thermique avec la matrice solide. L'effet Soret et Dufour sont prises en compte. Le régime est laminaire et stationnaire et la matrice poreuse est de forme cylindrique et à parois rigides.

II. Configuration géométrique et Position du problème

On considère les mouvements de convection naturelle laminaire et stationnaire dans une enceinte cylindrique droite de hauteur L , de rayon R , cette cavité est remplie par un milieu poreux DARCIEN isotrope et saturé par un nano fluide en équilibre thermique avec fluide de base l'eau et des nanoparticules d'aluminium. La densité volumique varie avec la température selon l'approximation de BOUSSINESQ. Les bases inférieure et supérieure de la cavité sont maintenues à température et concentration respectivement $(T_C ; T_F)$ et $(C_{inf} ; C_{sup})$ Avec $T_C > T_F$ (Figure 1).

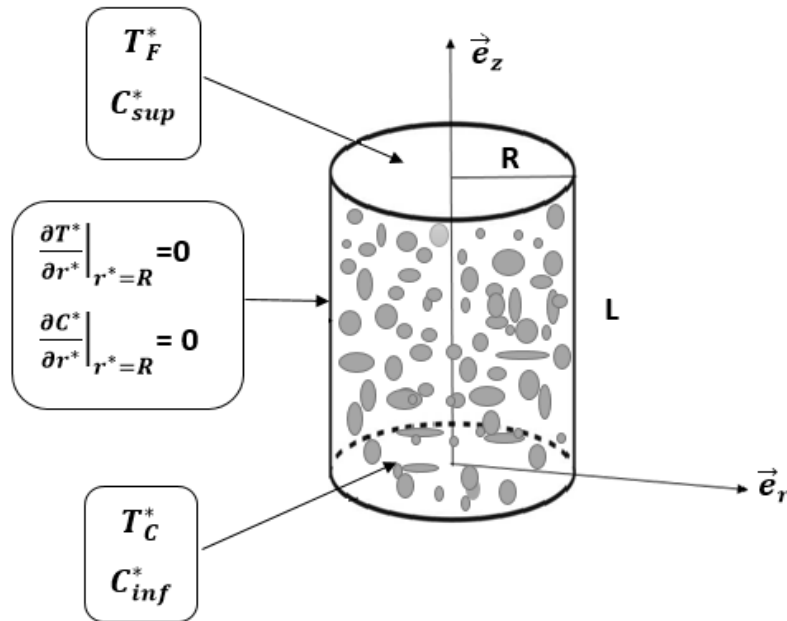


Figure 1: Géométrie physique considérée

III. Hypothèses simplificatrices

Les hypothèses simplificatrices retenues dans cette étude sont les suivantes :

- Le fluide de base utilisé est un fluide visqueux newtonien, incompressible et qui satisfait l'hypothèse de BOUSSINESQ ;
- Le nanofluide est supposé incompressible et l'écoulement est laminaire, stationnaire et bidimensionnel ;
- Les propriétés thermo physiques du nanofluide sont constantes, sauf pour la variation de la masse volumique, qui est estimée par l'hypothèse de BOUSSINESQ ;
- L'extension de BRINKMAN- FORCHHEIMER de la loi de DARCY a été adoptée pour décrire le mouvement du nanofluide dans la matrice poreuse.

IV. Équations gouvernantes

Le transfert de chaleur et de la matière à travers un milieu poreux est régi par les équations de conservations de la masse ou équation de continuité, les équations de conservation de la quantité de mouvement (Darcy- Brinkman- Forchheimer), l'équation de conservation de l'énergie et finalement l'équation de diffusion (transfert de la matière).

IV.1. Équation de continuité

L'équation de conservation de la masse dans un milieu poreux est donnée par :

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{V}^*) = 0 \quad (1)$$

Où : ε est la porosité du milieu et $\vec{V}^* = U^* \vec{e}_r + W^* \vec{e}_z$ est le vecteur vitesse d'écoulement de fluide.

Dans le cas d'un fluide incompressible cette équation devient : $\text{div}(\vec{V}^*) = 0$

IV.2. Équation de conservation de la quantité de mouvement en milieu poreux

L'équation de mouvement dans un milieu poreux est basée sur une loi d'origine empirique (Loi de Henry Darcy 1854). Dans le but d'élargir son domaine de validité, on utilise des corrections qui ont été proposées pour tenir compte de l'effet des parois ou effet visqueux (Extension de Brinkman) et des effets d'inerties (Extension de Forchheimer).

- *Loi de Darcy*

La loi de Darcy pour un écoulement laminaire stationnaire dans un milieu poreux homogène, isotrope est donnée par :

$$\vec{V}^* = \frac{K}{\mu} (\rho \vec{g} - \vec{\nabla}P)$$

Où ρ étant la masse volumique du fluide, \vec{g} est l'accélération de pesanteur, et P la pression dans le milieu fluide et K est la perméabilité du milieu en fonction de diamètre de grains D_g et de la porosité ε du milieu.

Dans notre travail on utilise la relation de Carman-Kozeny qui est donnée par [52] :

$$K = \frac{\varepsilon^2 D_g^2}{180(1 - \varepsilon)^2}$$

- *Équation de Brinkman*

Dans le but de prendre en considération l'effet des contraintes visqueuses ou effet de la paroi, BRINKMAN a proposé la relation donnée par :

$$\vec{\nabla}P = - \frac{\mu_{nf}}{K} \vec{V}^* + \rho_{nf} \vec{g} + \widetilde{\mu}_{nf} \Delta \vec{V}^*$$

Où : μ_{nf} : est la viscosité dynamique de nanofluide, $\widetilde{\mu}_{nf}$: la viscosité dynamique effective de nanofluide et $\Delta \vec{V}^*$: étant le laplacien du vecteur vitesse.

- *Équation de Forchheimer*

La loi de Darcy est une loi linéaire pour un nombre de REYNOLDS petit donc la vitesse d'infiltration petite. Si la vitesse augmente, le nombre de Reynolds augmente, on observe une déviation de la linéarité de la loi de Darcy cette déviation du régime Darcien en régime non-Darcien est due aux effets d'inerties qui apparaissent avec l'augmentation de la vitesse. Dans le but de prendre en considération les effets d'inerties, la loi linéaire de DARCY a été corrigée par FORCHHEIMER en ajoutant un terme non-linéaire, cette équation est donnée par [52] :

$$\vec{\nabla}P = - \frac{\mu_{nf}}{K} \vec{V}^* + \rho_{nf} \vec{g} - \frac{C_F}{K^{1/2}} \rho_{nf} |\vec{V}^*| \vec{V}^*$$

Où C_F représente une constante adimensionnelle, c'est une modification d'une équation qui porte le nom de Dupuit (1863), Forchheimer (1901) et See Lage (1998) [52]. Ce paramètre, C_F , dépend de la nature du milieu poreux, dans notre travail, on a utilisé l'expression :

$$C_F = \frac{180}{\varepsilon^{-3/2}}$$

IV.2.1. Extension de Brinkman- Forchheimer de la loi de Darcy

Brinkman a ajouté un terme à l'équation de Darcy pour prendre en compte les effets de contraintes visqueuse et Forchheimer de sa part a ajouté des termes pour tenir compte des effets d'inertie pour un écoulement à grand nombre de REYNOLD (grande vitesse). En ajoutant les deux termes à la loi de Darcy pour élargir le domaine de validité cette loi, alors l'extension de BRINKMAN-FORCHHEIMER de la loi de DARCY s'écrit :

$$\rho_{nf} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} (\vec{V}^* \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}^* \right) = -\frac{\mu_{nf}}{K} \vec{V}^* + \rho_{nf} \vec{g} - \vec{\nabla} P + \widetilde{\mu}_{nf} \Delta \vec{V}^* - \frac{C_F}{K^{1/2}} \rho_{nf} |\vec{V}^*| \vec{V}^*$$

La variation de la densité du nanofluide est négligeable à l'exception du terme de poussé donc où cette variation suit la loi de BOUSSINESQ. Dans ce cas la dernière équation s'écrit comme :

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} (\vec{V}^* \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}^* = -\frac{\mu_{nf}}{\rho_{0nf} K} \vec{V}^* + \frac{\rho_{nf}}{\rho_{0nf}} \vec{g} - \frac{1}{\rho_{0nf}} \vec{\nabla} P + \frac{\widetilde{\mu}_{nf}}{\rho_{0nf}} \Delta \vec{V}^* - \frac{C_F}{K^{1/2}} |\vec{V}^*| \vec{V}^* \quad (2)$$

IV.2.2. Formulation vorticité fonction de courant

Dans le cas des problèmes à deux dimensions il est intéressant de transformer le système d'équations des variables primitives (P, V) aux variables vorticité - fonction de courant (Ω, ψ) . Cette formulation consiste à remplacer les variables primitives vitesse- pression par la composante Ω du vecteur rotationnel de la vitesse et la fonction de courant ψ . Donc pour éliminer la pression et faire apparaître le vecteur Ω on applique l'opérateur rotationnel à l'équation (2) et avec l'utilisation des relations issues de calcul vectoriel suivantes :

$$\begin{aligned} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} &= \vec{\nabla} \left(\frac{A^2}{2} \right) + \overrightarrow{rot} \vec{A} \wedge \vec{A} \\ - \overrightarrow{rot} (\vec{A} \wedge \vec{B}) &= \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \\ - \overrightarrow{rot} (f \cdot \vec{A}) &= f \cdot \overrightarrow{rot} \vec{A} + \vec{\nabla} (f) \wedge \vec{A} \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{\Omega}^*}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} \vec{\nabla} \wedge (\vec{\Omega}^* \wedge \vec{V}^*) \right) \\ &= -\frac{\mu_{nf}}{K \rho_{0nf}} \vec{\Omega}^* - \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\rho_{nf}}{\rho_{0nf}} \right) \vec{g} + \frac{\widetilde{\mu}_{nf}}{\rho_{0nf}} \Delta \vec{\Omega}^* - \frac{C_F}{K^{1/2}} |\vec{V}^*| \vec{\Omega}^* + \frac{C_F}{K^{1/2}} \vec{V}^* \wedge \vec{\nabla} |\vec{V}^*| \end{aligned}$$

IV.2.3. Equation de l'énergie

L'équation de l'énergie est établie à la base du premier principe de la thermodynamique dans un milieu poreux. Ainsi :

- L'équation de l'énergie dans le milieu solide s'écrit comme :

$$(1 - \varepsilon)(\rho c)_p \frac{\partial T_s^*}{\partial t} = (1 - \varepsilon)\nabla(\lambda_p \nabla T_s^*) \quad (3)$$

- L'équation de nanofluide s'écrit :

$$\varepsilon(\rho C)_{nf} \frac{\partial T_{nf}^*}{\partial t} + \varepsilon(\rho C)_{nf} \mathbf{v} \cdot \nabla T_{nf}^* = \varepsilon \nabla(\lambda_{nf} \nabla T_{nf}^*) + \varepsilon(\rho C)_{nf} k_{TC} \nabla^2 C^* \quad (4)$$

Avec :

$$(\rho c)_{nf} = (1 - \varphi)(\rho c)_f + \varphi(\rho c)_s$$

On suppose que il y a équilibre thermique entre la phase solide (matrice poreuse sèche) et la phase nanofluide et que il n'y a pas de transfert thermique entre les deux phases. En adoptant l'hypothèse mentionné avec : $T_{nf}^* = T_s^* = T^*$ et avec la sommation terme à terme des équations (3) et (4), on obtient l'équation de conservation de l'énergie suivante :

$$(\rho c)_m \frac{\partial T^*}{\partial t} + (\rho c)_{nf} \mathbf{V} \cdot \nabla T_{nf}^* = \lambda_e \nabla^2 T^* + \varepsilon(\rho c)_{nf} k_{TC} \nabla^2 C^* \quad (5)$$

Où :

- $(\rho c)_m$: Chaleur spécifique du milieu poreux ;
- $(\rho c)_p$: Chaleur spécifique du matrice poreuse sèche ;
- λ_p : La conductivité thermique du matrice poreuse sèche ;
- λ_e : La conductivité thermique du milieu poreux ;
- k_{TC} : Coefficient de Dufour $Kg.m^{-1}.K^{-1}.s^{-1}$.

Avec :

$$(\rho c)_m = (\varepsilon(\rho c)_{nf} + (1 - \varepsilon)(\rho c)_p) = (\varepsilon(1 - \varphi)(\rho c)_f + \varphi\varepsilon(\rho c)_s + (1 - \varepsilon)(\rho c)_p)$$

$$\lambda_e = \left((1 - \varepsilon)\lambda_p + \varepsilon\lambda_{nf} \right) = \left((1 - \varepsilon)\lambda_p + \varepsilon\lambda_f \left(\frac{\lambda_s + 2\lambda_f - 2\varphi(\lambda_f - \lambda_s)}{\lambda_s + 2\lambda_f + \varphi(\lambda_f - \lambda_s)} \right) \right)$$

IV.2.4. Équation de la concentration

La diffusion de la matière dans la matrice poreuse est régie par l'équation suivante :

$$\varepsilon \frac{\partial C^*}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} C^* = D \varepsilon \vec{\nabla}^2 C^* + \varepsilon k_{CT} \vec{\nabla}^2 T^* \quad (6)$$

Avec :

- C^* et ε : Sont respectivement la concentration et la porosité du milieu poreux ;
- D : Etant la diffusivité massique ;
- T^* : Etant la température ;
- k_{CT} : Coefficient de Soret $m^5 \cdot K \cdot Kg^{-1} \cdot s^{-1}$.

V. Conditions aux limites

Pour résoudre les équations précédemment établies, on ajoute les conditions aux limites suivantes :

V.1. Conditions aux limites thermiques

L'introduction d'un coefficient d'homotopie γ ; $0 \leq \gamma \leq 1$, [winter,1988] [59] permet de tenir compte de la conductivité à la paroi. La condition au limite thermique est de type Fourier et s'écrit :

$$\gamma \frac{\partial T_{paroi}^*}{\partial r^*} + (1 - \gamma) \left[T_{paroi}^* - T_C^* + (T_C^* - T_F^*) \frac{z^*}{L} \right] = 0$$

- i) Cas d'une paroi parfaitement conductrice ($\gamma=0$), dans ce cas la condition donne une distribution linéaire de la température le long de la paroi soit en ($r^* = R$) :

$$T_{paroi}^* = T_C^* - (T_C^* - T_F^*) \frac{z^*}{L}$$

- ii) Cas d'une paroi parfaitement adiabatique ($\gamma = 1$)

$$\left. \frac{\partial T_{paroi}^*}{\partial r^*} \right|_{r^*=R} = 0$$

iii) Condition de symétrie ($r^* = 0$)

L'hypothèse de l'axisymétrie de l'écoulement sur l'axe de la conduite, résulte pour le champ thermique de la condition au limite suivante :

$$\left. \frac{\partial T_{axe}^*}{\partial r^*} \right|_{r^*=0} = 0$$

iv) Condition d'isothermie sur les bases du cylindre :

$$T^* = T_C \quad \text{pour } z^* = 0 \quad \text{et} \quad T^* = T_F \quad \text{pour } z^* = L$$

V.2. Conditions aux limites solutales

Les bases inférieure et supérieure de cylindre sont maintenues à des concentrations constantes et uniformes telles que :

$$C^* = C_{inf}^* \quad \text{pour} \quad z^* = 0$$

$$C^* = C_{sup}^* \quad \text{pour} \quad z^* = L$$

✓ Les parois latérales sont isolantes ($r^* = 0$)

$$\left. \frac{\partial C_{paroi}^*}{\partial r^*} \right|_{r^*=R} = 0$$

✓ La concentration est maximale sur l'axe ($r^* = 0$) (l'hypothèse d'axisymétrie) donc :

$$\left. \frac{\partial C_{axe}^*}{\partial r^*} \right|_{r^*=0} = 0$$

V.3. Conditions aux limites dynamiques

Les parois étant rigides et imperméables, le champ des vitesses est nul et les conditions aux frontières associées à la fonction de courant sont alors exprimées par :

$$\psi^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial r^*} = \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} = 0 \quad \text{en} \quad z^* = 0 ; z^* = L ; r^* = R$$

Pour admettre un écoulement bidimensionnel dans une cavité cylindrique on suppose une symétrie axiale de l'écoulement. Cette condition est traduite par la relation suivante :

$$\left. \frac{\partial}{\partial r^*} \right|_{r^*=0} = 0$$

Donc $\psi_{axe}^* = cte$, on prend la fonction de courant nulle sur l'axe puisqu'elle est nulle sur les parois rigides :

$$\psi_{axe}^* = 0 \quad \text{pour} \quad r^* = 0$$

V.4. Les expressions de Thom pour la vorticité

i. Vorticité à la paroi latérale :

$$\Omega_{r^*=R}^* = \frac{2}{dr^{*2}} \psi_{r^*=R-dr^*}^*$$

ii. Vorticité aux parois inférieure et supérieure :

$$\Omega_{z^*=0}^* = \frac{1}{r^*} \frac{2}{dz^{*2}} \psi_{z^*=dz^*}^* \quad \Omega_{z^*=L}^* = \frac{1}{r^*} \frac{2}{dz^{*2}} \psi_{z^*=L-dz^*}^*$$

Récapitulatif :

Les équations sous forme dimensionnelles sont :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* u^* \Omega^*)}{\partial r^*} + \frac{\partial(w^* \Omega^*)}{\partial z^*} - \frac{u^* \Omega^*}{r^*} \right) \\ & = - \frac{\mu_{nf}}{K \rho_{0nf}} \Omega^* - \frac{\rho_0(1-\varphi)}{\rho_{0nf}} \beta_T g \frac{\partial T^*}{\partial r^*} - \frac{\rho_0(1-\varphi)}{\rho_{0nf}} \beta_s g \frac{\partial C^*}{\partial r^*} \\ & + \frac{\widetilde{\mu}_{nf}}{\rho_{0nf}} \left(\frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \Omega^*}{\partial r^*} + \frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial z^{*2}} - \frac{\Omega^*}{r^{*2}} \right) - \frac{C_F}{K^{\frac{1}{2}}} |\vec{V}^*| \Omega^* \\ & + \frac{C_F}{K^{\frac{1}{2}}} \left(w^* \frac{\partial |\vec{V}^*|}{\partial r^*} - u^* \frac{\partial |\vec{V}^*|}{\partial z^*} \right) \end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial(u^*T^*)}{\partial r^*} + \frac{\partial(w^*T^*)}{\partial z^*} + \frac{u^*T^*}{r^*} \right) \\ & = \alpha \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial r^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) + \varepsilon k_{TC} \left(\frac{\partial^2 C^*}{\partial r^{*2}} + \frac{\partial^2 C^*}{\partial z^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial C^*}{\partial r^*} \right) \end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial(u^*C^*)}{\partial r^*} + \frac{\partial(w^*C^*)}{\partial z^*} + \frac{u^*C^*}{r^*} \right) \\ & = D \varepsilon \left(\frac{\partial^2 C^*}{\partial r^{*2}} + \frac{\partial^2 C^*}{\partial z^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial C^*}{\partial r^*} \right) + \varepsilon k_{CT} \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial r^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

Avec :

- $\alpha = \frac{\lambda_e}{(\rho C)_{nf}}$
- $u^* = \frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*}$ et $w^* = -\frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial r^*}$
- $\Omega^* = \frac{1}{r^*} \left(\Delta \psi^* - \frac{2}{r^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} \right)$ ou $\vec{\Omega}^* = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \frac{1}{r^*} \left(\Delta \psi^* - \frac{2}{r^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} \right) = \Omega^* \vec{e}_\theta$
- Avec α : La diffusivité thermique du milieu poreux

VI. Adimensionnalisation des équations

Les grandeurs caractéristiques de l'adimensionnalisation sont définies comme suit :

- R : pour les longueurs ;
- $\frac{\alpha}{R}$: pour les vitesses ;
- $\frac{\alpha}{R^2}$: pour le vecteur rotationnel de vitesses ;
- $R \alpha$: pour la fonction de courant ;
- $\Delta T = T_C - T_F$: écart de température de référence ;
- $\Delta C = C_{inf} - C_{sup}$.

Le système d'équations scalaire gouvernant le problème après l'introduction des variables adimensionnelles s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial(UT)}{\partial r} + \frac{\partial(WT)}{\partial z} + \frac{UT}{r} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \varepsilon Du \left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} \right) \quad (10)$$

$$\frac{\partial(UC)}{\partial r} + \frac{\partial(WC)}{\partial z} + \frac{UC}{r} = \frac{\varepsilon}{Le} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{\varepsilon}{Le} Sr \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rU\Omega)}{\partial r} + \frac{\partial(W\Omega)}{\partial z} - \frac{U\Omega}{r} \right) \\ &= -\bar{\lambda} \frac{Pr}{Da} \Omega - \bar{\lambda}^2 R_T Pr \left(\frac{\partial T}{\partial r} + N \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{\bar{\lambda} Pr}{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} - \frac{\Omega}{r^2} \right) \\ & - \frac{C_F}{\sqrt{Da}} |\vec{V}| \Omega + \frac{C_F}{\sqrt{Da}} \left(W \frac{\partial |\vec{V}|}{\partial r} - U \frac{\partial |\vec{V}|}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

$$U = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (13)$$

$$W = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (14)$$

$$\Omega = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (15)$$

Il s'introduit les nombres sans dimensions suivants :

- Le nombre de RAYLEIGH thermique pour le nanofluide : $R_T = \frac{\rho_0(1-\varphi)g \beta_T \Delta T R^3}{\mu_{nf} \alpha_{nf}}$
- Le nombre de PRANDTL pour le nanofluide : $Pr = \frac{\nu_{nf}}{\alpha_{nf}}$
- Le nombre de DARCY : $Da = \frac{K}{R^2}$
- Le rapport des poussées : $N = \frac{\beta_s \Delta C}{\beta_T \Delta T}$
- Le nombre de LEWIS : $Le = \frac{\alpha}{D}$
- Coefficient de DUFOUR : $Du = \frac{k_{TC} \Delta C}{\alpha \Delta T}$

- Coefficient de Soret : $S_r = \frac{k_{CT} \Delta T}{D \Delta C}$
- Le rapport des conductivités : $\bar{\lambda} = \frac{\lambda_{nf}}{\lambda_e}$

Dans la partie suivante, intitulée Modélisation de la convection naturelle conjuguée sous l'effet d'un champ magnétique (Magneto convection), on va s'intéresser à la modélisation mathématique de la convection naturelle avec l'introduction d'un champ magnétique.

Partie II : Modélisation de la convection naturelle conjuguée sous l'effet d'un champ magnétique (Magneto convection)

I. Géométrie de l'écoulement

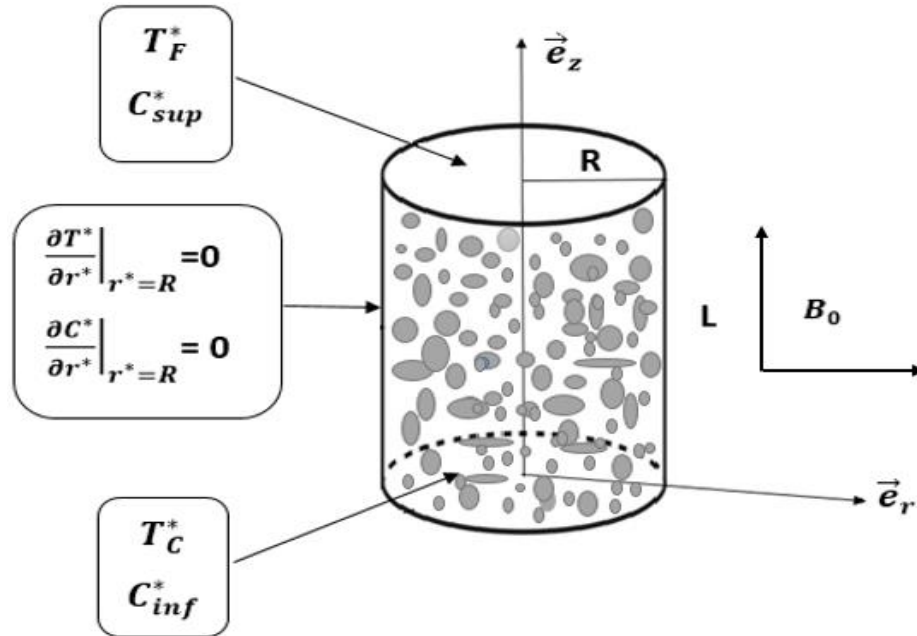


Figure 2 : Configuration physique du problème 2

Le mouvement d'un nano fluide électriquement conducteur en présence d'un champ magnétique extérieur uniforme et orienté arbitrairement dans plans (r, z) induit un courant électrique de densité \vec{j} et la force électromagnétique de Lorentz \vec{F}_{EM} . Le vecteur de champ magnétique \vec{B} , donné par [58] :

$$\vec{B} = B_0 \vec{e}_r + B_0 \vec{e}_z$$

Le vecteur densité de courant électrique \vec{j} est défini par application de la loi d'Ohm :

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + (\vec{V} \wedge \vec{B}))$$

Avec :

- σ : Conductivité électrique ;
- \vec{E} : Le champ électrique ;
- La force électromagnétique ou force de Lorentz est donnée par : $\vec{F}_{EM} = \vec{j} \wedge \vec{B}$.

II. Formulation mathématique du problème

Le mouvement de fluide est régi par l'équation de conservation de la quantité de mouvement donnée par :

$$\begin{aligned} \rho_{nf} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} (\vec{V}^* \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}^* \right) \\ = -\frac{\mu_{nf}}{K} \vec{V}^* + \rho_{nf} \vec{g} - \vec{\nabla} P + \widetilde{\mu}_{nf} \Delta \vec{V}^* - \frac{C_F}{K^{\frac{1}{2}}} \rho_{nf} |\vec{V}^*| \vec{V}^* + (\vec{J} \wedge \vec{B}) \end{aligned}$$

La variation de la densité du nano fluide est négligeable à l'exception du terme de poussée :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} (\vec{V}^* \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}^* \right) \\ = -\frac{\mu_{nf}}{\rho_{0nf} K} \vec{V}^* + \frac{\rho_{nf}}{\rho_{0nf}} \vec{g} - \frac{1}{\rho_{0nf}} \vec{\nabla} P + \frac{\widetilde{\mu}_{nf}}{\rho_{0nf}} \Delta \vec{V}^* - \frac{C_F}{K^{\frac{1}{2}}} |\vec{V}^*| \vec{V}^* + \frac{1}{\rho_{0nf}} (\vec{J} \wedge \vec{B}) \end{aligned}$$

On applique l'opérateur rotationnel sur l'équation précédente :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} \vec{\nabla} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{V}) \right) = -\frac{\mu_{nf}}{K \rho_{0nf}} \vec{\Omega} - \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\rho_{nf}}{\rho_{0nf}} \right) \vec{g} + \frac{\widetilde{\mu}_{nf}}{\rho_{0nf}} \Delta \vec{\Omega} - \frac{C_F}{K^{1/2}} |\vec{V}| \vec{\Omega} + \frac{C_F}{K^{1/2}} \vec{V} \wedge \\ \vec{\nabla} |\vec{V}| + \frac{1}{\rho_{0nf}} \vec{\nabla} \wedge (\vec{J} \wedge \vec{B}) \end{aligned}$$

Les équations sous forme dimensionnelles sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial (r^* u^* \Omega^*)}{\partial r^*} + \frac{\partial (w^* \Omega^*)}{\partial z^*} - \frac{u^* \Omega^*}{r^*} \right) \\ = -\frac{\mu_{nf}}{K \rho_{0nf}} \Omega^* - \frac{\rho_0 (1 - \varphi)}{\rho_{0nf}} \beta_T g \frac{\partial T^*}{\partial r^*} - \frac{\rho_0 (1 - \varphi)}{\rho_{0nf}} \beta_s g \frac{\partial C^*}{\partial r^*} \\ + \frac{\widetilde{\mu}_{nf}}{\rho_{0nf}} \left(\frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \Omega^*}{\partial r^*} + \frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial z^{*2}} - \frac{\Omega^*}{r^{*2}} \right) - \frac{C_F}{K^{\frac{1}{2}}} |\vec{V}^*| \Omega^* \\ + \frac{C_F}{K^{\frac{1}{2}}} \left(w^* \frac{\partial |\vec{V}^*|}{\partial r^*} - u^* \frac{\partial |\vec{V}^*|}{\partial z^*} \right) - \frac{1}{\rho_{0nf}} \sigma_{nf} B_0^2 \Omega^* \end{aligned}$$

Avec :

- B_0 : Intensité du champ magnétique ;
- σ_{nf} : Conductivité électrique de nanofluide ;
- $\sigma_{nf} = (1 - \varphi) \sigma_f + \varphi \sigma_s$.

L'équation adimensionnelle s'écrit comme :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rU\Omega)}{\partial r} + \frac{\partial(W\Omega)}{\partial z} - \frac{U\Omega}{r} \right) \\
& = -\bar{\lambda} \frac{Pr}{Da} \Omega - \bar{\lambda}^2 R_T Pr \left(\frac{\partial T}{\partial r} + N \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{\bar{\lambda} Pr}{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} - \frac{\Omega}{r^2} \right) \\
& - \frac{C_F}{\sqrt{Da}} |\vec{V}| \Omega + \frac{C_F}{\sqrt{Da}} \left(W \frac{\partial |\vec{V}|}{\partial \bar{r}} - U \frac{\partial |\vec{V}|}{\partial \bar{z}} \right) - \bar{\lambda} Pr Ha^2 \Omega
\end{aligned} \tag{16}$$

Avec :

$$Ha = \left(\frac{\sigma_{nf} R^2 B_0^2}{\mu_{nf}} \right)^{1/2} \text{ est le nombre de HARTMANN.}$$

III. Conditions aux limites adimensionnelles

Aux équations (10), (11), (12), (13), (14), (15) et (16) précédemment établies on ajoute les conditions aux limites suivantes :

III.1. Condition aux limites thermiques

- ✓ Paroi parfaitement adiabatique en ($r = 1$):

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=1} = 0$$

- ✓ Cas d'une paroi parfaitement conductrice ($r = 1$):

$$T = 1 - \frac{z}{A}$$

- ✓ La température sur l'axe (l'hypothèse d'axisymétrie) est maximale ($r = 1$):

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$$

- ✓ Les bases inférieure et supérieure de cylindre :

$$T = 1 \quad \text{en} \quad z = 0, \quad T = 0 \quad \text{en} \quad z = A$$

Avec : $A = L/R$

III.2. Condition aux limites solutales

Les bases inférieure et supérieure du cylindre sont maintenues à des concentrations constantes et uniformes telles que :

$$C = 1 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad , \quad C = 0 \quad \text{en} \quad z = A$$

Les parois latérales sont isolantes :

$$\left. \frac{\partial C}{\partial r} \right|_{r=1} = 0$$

La concentration est continue suivant l'axe (l'hypothèse d'axisymétrie) :

$$\left. \frac{\partial C}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$$

III.3. Condition aux limites dynamiques

Les parois sont rigides et imperméables alors :

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad , \quad z = A \quad , \quad r = 1$$

Condition de symétrie de l'écoulement :

$$\psi = 0 \quad \text{en} \quad r = 0$$

Pour la vorticité

Sur la paroi latérale :

$$\Omega_{r=1} = \frac{2}{\Delta r^2} \psi_{r=1-\Delta r}$$

Pour les parois inférieures et supérieures :

$$\Omega_{z=0} = \frac{1}{r} \frac{2}{\Delta z^2} \psi_{z=\Delta z} \qquad \Omega_{z=A} = \frac{1}{r} \frac{2}{\Delta z^2} \psi_{z=A-\Delta z}$$

Sur l'axe $\Omega_{r=0} = 0$.

III.4. Transfert de chaleur et de masse (Nombre de Nusselt et Sherwood)

Le nombre de NUSSELT caractérise le transfert de chaleur au niveau des parois. Le théorème de Buckingham [Yao & GHOSH MOULIC,1994] [59] implique que le nombre de NUSSELT peut être exprimé comme une fonction des paramètres adimensionnels. On définit le nombre de NUSSELT local en un point M pris sur un élément de surface ds par la relation suivante :

$$Nu_l = \frac{\text{flux de chaleur total à travers } ds}{\text{flux de chaleur conductif à travers } ds} = \frac{\varphi_t}{\varphi_{cond}}$$

Avec :

$$\varphi_t : \rho_0 c_p (T - T_0) \vec{V} \vec{n} ds - \lambda \frac{\partial T}{\partial z} ds$$

$$\varphi_{cond} : -\lambda \frac{\partial T_{cond}}{\partial z} ds$$

Où : T_{cond} est la température pour un transfert parfaitement conductif.

En introduisant les grandeurs adimensionnelles, on trouve :

$$\varphi_t = \lambda \frac{\Delta T}{R} \left(W T - \frac{\partial T}{\partial z} \right) ds$$

$$\varphi_{cond} = -\lambda \frac{\Delta T}{R} \frac{\partial T_{cond}}{\partial z}$$

$$Nu_l = \frac{\left(W T - \frac{\partial T}{\partial z} \right)}{\frac{\partial T_{cond}}{\partial z}}$$

$$T_{cond} = 1 - \frac{z}{A}$$

$$Nu_l = A \left(W T - \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

Pour le transfert de masse (nombre de SHERWOOD) :

$$Sh_l = A L_e \left(W C - \frac{\partial C}{\partial z} \right)$$

On en déduit alors les expressions des nombres de NUSSELT locaux sur les surfaces horizontales inférieure Nu_i et supérieure Nu_s :

$$Nu_i = -A \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0}$$

$$Nu_s = +A \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=A}$$

Et les nombres de SHERWOOD :

$$Sh_i = -A \left. \frac{\partial C}{\partial z} \right|_{z=0}$$

$$Sh_s = +A \left. \frac{\partial C}{\partial z} \right|_{z=A}$$

Les nombres de NUSSELT et de Sherwood locaux seront calculés sur la surface inférieure et supérieure. La valeur moyenne du nombre de NUSSELT le long de la paroi horizontale de la cavité est donnée par :

$$\overline{Nu}_i = -2A \int_0^1 \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} dr$$

$$\overline{Nu}_s = +2A \int_0^1 \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=RA} dr$$

La valeur moyenne du nombre de SHERWOOD est donnée par :

$$\overline{Sh}_i = -2A \int_0^1 \left. \frac{\partial C}{\partial z} \right|_{z=0} dr$$

$$\overline{Sh}_s = +2A \int_0^1 \left. \frac{\partial C}{\partial z} \right|_{z=A} dz$$

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons établi les équations de la convection naturelle et thermosolutale dans une enceinte cylindrique, ainsi que les conditions aux limites associées. Les équations de la convection thermosolutale sont non linéaires et couplées donc elles

n'admettent pas de solution analytique sauf dans des cas simples et particuliers. Donc un recours aux méthodes numérique s'impose. Pour cela nous avons opté pour l'utilisation de la méthode des volumes finies. C'est l'objet du prochain chapitre.

Chapitre 3 : Méthode de Résolution

Introduction

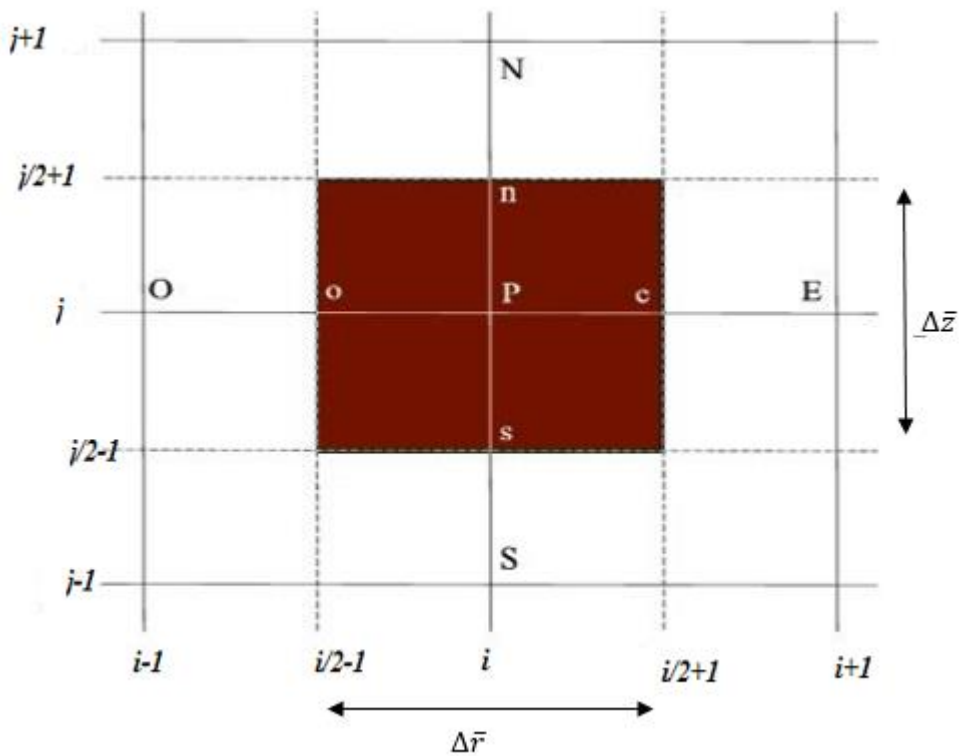
Les équations qui gouvernent le problème de convection thermosolutale n'admettent pas de solution analytique, alors un recours aux méthodes numériques s'impose. Il existe plusieurs méthodes numériques, à savoir la méthode des différences finis ; la méthode des éléments finis, la méthode des volumes finis et la méthode de caractéristique. Nous avons opté pour l'utilisation de la méthode des volumes finis. Cette méthode est très largement utilisée pour la résolution problèmes qui sont régis par des équations aux dérivées partielles (équation de mouvement, de transfert l'énergie, de transfert de masse, etc.)

Chaque méthode numérique passe par deux étapes importantes : Etape de maillage et étape de discrétisation. L'étape de maillage consiste à diviser le domaine d'étude en des petits volumes appelés volumes contrôle et l'étape de discrétisation c'est la transformation des équations continues à des équations discrètes.

I. Maillage du domaine d'étude

Dans le cas d'une étude à deux dimensions de l'espace, le maillage est constitué de rectangle subdivisé en un nombre fini de petits rectangles réguliers. Ceux-ci constituent les volumes de contrôle dans le cas bidimensionnel. Nous donnons, ci-dessous, le maillage adopté à notre problème.

Notons par Δr et Δz les pas de discrétisation respectivement dans la direction radiale et axiale, les point $E, O, N, et S$ sont respectivement le pôle Est, Ouest, Nord et Sud. Finalement notons par « i » et « j » les indices de discrétisation. Ainsi le nœud P , a pour coordonnées (i, j) dans l'espace à deux dimensions.



II. Discrétisation de l'équation de transport

Les équations de transfert de l'énergie, de la température et de la concentration peuvent s'écrire sous une forme générale comme suit :

$$\frac{1}{\alpha_{FR}} \frac{\partial f}{\partial t} = \xi_{pr} \frac{\partial(Uf)}{\partial r} + \xi_{pz} \frac{\partial(Wf)}{\partial z} + \xi_{sr} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \xi_{sz} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \xi_r \frac{\partial f}{\partial r} + \xi_z \frac{\partial f}{\partial z} + \xi f + S$$

Où :

- α_{FR} : Facteur de relaxation nécessaire pour la stabilité de la solution ;
- Et ξ_{pr} , ξ_{pz} , ξ_{sr} , ξ_{sz} , ξ_r , ξ_z , ξ et S sont définis dans le tableau (III.1).

	f	ξ_{pr}	ξ_{pz}	ξ_{sr}	ξ_{sz}	ξ_r	ξ_z	ξ	S
Equation d'énergie	T	-1	-1	1	1	$\frac{1}{r}$	0	$-\frac{U}{r}$	$\varepsilon Du \left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} \right)$
Equation de concentration	C	-1	-1	$\frac{\varepsilon}{L_e}$	$\frac{\varepsilon}{L_e}$	$\frac{\varepsilon}{L_e} \frac{1}{r}$	0	$-\frac{U}{r}$	$\frac{\varepsilon}{L_e} Sr \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right)$
Equation de mouvement	Ω	$-\frac{1}{\varepsilon^2}$	$-\frac{1}{\varepsilon^2}$	$\frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon}$	$\frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon}$	$\frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon} \frac{1}{r}$	0	$-\left(\frac{\bar{\lambda} P_r}{D_a} + \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon r^2} + \frac{C_F}{\sqrt{D_a}} \right) \vec{V} $	$-\bar{\lambda}^2 R_T P_r \left(\frac{\partial T}{\partial \bar{r}} + N \frac{\partial C}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{C_F}{\sqrt{D_a}} \left(W \frac{\partial \vec{V} }{\partial \bar{r}} - U \frac{\partial \vec{V} }{\partial \bar{z}} \right)$

Tableau III.1 : Schéma résumant différents coefficients de la méthode numérique

A. Premier balayage

Ce premier balayage consiste à regrouper les termes en f à l'instant : $t + \frac{\Delta t}{2}$, on obtient alors la forme discrète implicite en r et explicite dans la direction z :

$$A_i f_{i+1,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}} + B_i f_{i,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}} + C_i f_{i-1,j}^{t+\frac{\Delta t}{2}} = D_i$$

II.1. Equation de l'énergie

A partir de Tableau (III.1) l'équation de l'énergie en fonction de la température s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\alpha_{FR}} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial(UT)}{\partial r} - \frac{\partial(WT)}{\partial z} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{UT}{r} + \varepsilon D_u \left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} \right)$$

L'intégration de cette équation sur le volume de contrôle conduit à :

$$\iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{1}{\alpha_{FR}} \frac{\partial T}{\partial t} r dr dz dt = \frac{1}{\alpha_{FR}} (T_p^{t+\Delta t/2} - T_p^t) r_p \Delta r \Delta z$$

$$\begin{aligned}
& - \iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{\partial(UT)}{\partial r} r dr dz dt \\
& \quad = -r_p \left(\left(U_E^t T_E^{t+\Delta t/2} - U_p^t T_p^{t+\Delta t/2} \right) - \left(U_p^t T_p^{t+\Delta t/2} - U_0^t T_0^{t+\Delta t/2} \right) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2}
\end{aligned}$$

$$- \iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{\partial(WT)}{\partial z} r dr dz dt = -r_p \left((W_N^t T_N^t - W_p^t T_p^t) - (W_p^t T_p^t - W_S^t T_S^t) \right) \Delta r \frac{\Delta t}{2}$$

$$\iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} r dr dz dt = r_p \left(\left(\frac{T_E^{t+\Delta t/2} - T_p^{t+\Delta t/2}}{\Delta r} \right) - \left(\frac{T_p^{t+\Delta t/2} - T_0^{t+\Delta t/2}}{\Delta r} \right) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2}$$

$$\iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} r dr dz dt = r_p \left(\left(\frac{T_N^t - T_p^t}{\Delta z} \right) - \left(\frac{T_p^t - T_S^t}{\Delta z} \right) \right) \Delta r \frac{\Delta t}{2}$$

$$\iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} r dr dz dt = \left(\left(T_E^{t+\Delta t/2} - T_p^{t+\Delta t/2} \right) - \left(T_p^{t+\Delta t/2} - T_0^{t+\Delta t/2} \right) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2}$$

$$- \iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{UT}{r} r dr dz dt = -U_p^t T_p^{t+\Delta t/2} \Delta r \Delta z \frac{\Delta t}{2}$$

$$\varepsilon D_u \iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} r dr dz dt = \varepsilon D_u r_p \left(\left(\frac{C_E^t - C_p^t}{\Delta r} \right) - \left(\frac{C_p^t - C_0^t}{\Delta r} \right) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2}$$

$$\varepsilon D_u \iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} r dr dz dt = \varepsilon D_u r_p \left(\left(\frac{C_N^t - C_p^t}{\Delta z} \right) - \left(\frac{C_p^t - C_S^t}{\Delta z} \right) \right) \Delta r \frac{\Delta t}{2}$$

$$\varepsilon D_u \iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} r dr dz dt = \varepsilon D_u \left((C_E^t - C_p^t) - (C_p^t - C_0^t) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2}$$

Alors l'équation s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\alpha_{FR}} \frac{T_p^{t+\Delta t/2} - T_p^t}{\Delta t/2} \\
&= - \frac{U_E^t T_E^{t+\Delta t/2} - 2U_p^t T_p^{t+\Delta t/2} + U_o^t T_o^{t+\Delta t/2}}{\Delta r} - \frac{W_N^t T_N^t - 2W_p^t T_p^t + W_S^t T_S^t}{\Delta z} \\
&+ \frac{T_E^{t+\Delta t/2} - 2T_p^{t+\Delta t/2} + T_o^{t+\Delta t/2}}{(\Delta r)^2} + \frac{T_N^t - 2T_p^t + T_S^t}{(\Delta z)^2} + \frac{T_E^{t+\Delta t/2} - 2T_p^{t+\Delta t/2} + T_o^{t+\Delta t/2}}{r_p \Delta r} \\
&- \frac{U_p^t T_p^{t+\Delta t/2}}{r_p} + \varepsilon D_u \frac{C_E^t - 2C_p^t + C_o^t}{(\Delta r)^2} + \varepsilon D_u \frac{C_N^t - 2C_p^t + C_S^t}{(\Delta z)^2} + \varepsilon D_u \frac{C_E^t - 2C_p^t + C_o^t}{r_p \Delta r}
\end{aligned}$$

Finalement, on peut mettre cette équation sous la forme :

$$A_E T_E^{t+\Delta t/2} + B_p T_p^{t+\Delta t/2} + C_o T_o^{t+\Delta t/2} = D$$

Avec les coefficients suivants :

$$A_E = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{U_E^t}{\Delta r} - \frac{1}{(\Delta r)^2} - \frac{1}{r_p \Delta r} \right)$$

$$A_i = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{U_{i+1,j}^t}{\Delta r} - \frac{1}{(\Delta r)^2} - \frac{1}{r_{i,j} \Delta r} \right)$$

$$B_p = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{2}{\alpha_{FR} \Delta t} - \frac{2U_p^t}{\Delta r} + \frac{2}{(\Delta r)^2} + \frac{2}{r_p \Delta r} + \frac{U_p^t}{r_p} \right)$$

$$B_i = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{2}{\alpha_{FR} \Delta t} - \frac{2U_{i,j}^t}{\Delta r} + \frac{2}{(\Delta r)^2} + \frac{2}{r_{i,j} \Delta r} + \frac{U_{i,j}^t}{r_{i,j}} \right)$$

$$C_o = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{U_o^t}{\Delta r} - \frac{1}{(\Delta r)^2} - \frac{1}{r_p \Delta r} \right)$$

$$C_i = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{U_{i-1,j}^t}{\Delta r} - \frac{1}{(\Delta r)^2} - \frac{1}{r_{i,j} \Delta r} \right)$$

Et :

$$\begin{aligned}
D = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} & \left(\frac{2}{\alpha_{FR} \Delta t} T_p^t - \frac{W_N^t T_N^t - 2W_p^t T_p^t + W_S^t T_S^t}{\Delta z} + \frac{T_N^t - 2T_p^t + T_S^t}{(\Delta z)^2} + \varepsilon D_u \frac{C_E^t - 2C_p^t + C_o^t}{(\Delta r)^2} \right. \\
& \left. + \varepsilon D_u \frac{C_N^t - 2C_p^t + C_S^t}{(\Delta z)^2} + \varepsilon D_u \frac{C_E^t - 2C_p^t + C_o^t}{r_p \Delta r} \right)
\end{aligned}$$

$$D = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{2}{\alpha_{FR} \Delta t} T_{ij}^t - \frac{W_{ij+1}^t T_{ij+1}^t - 2W_{ij}^t T_{ij}^t + W_{ij-1}^t T_{ij-1}^t}{\Delta z} \right. \\ \left. + \frac{T_{ij+1}^t - 2T_{ij}^t + T_{ij-1}^t}{(\Delta z)^2} + \varepsilon D_u \frac{C_{i+1,j}^t - 2C_{ij}^t + C_{i-1,j}^t}{(\Delta r)^2} + \varepsilon D_u \frac{C_{i,j+1}^t - 2C_{i,j}^t + C_{i,j-1}^t}{(\Delta z)^2} \right. \\ \left. + \varepsilon D_u \frac{C_{i+1,j}^t - 2C_{ij}^t + C_{i-1,j}^t}{r_{i,j} \Delta r} \right)$$

II.2. Equation de la concentration

L'équation de la concentration est donnée par :

$$\frac{1}{\alpha_{FR}} \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial(UC)}{\partial r} - \frac{\partial(WC)}{\partial z} + \frac{\varepsilon}{L_e} \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{\varepsilon}{L_e} \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \frac{\varepsilon}{L_e} \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} - \frac{UC}{r} + \frac{\varepsilon}{L_e} S_r \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

L'intégration de cette équation sur le volume de contrôle conduit à :

$$\iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{1}{\alpha_{FR}} \frac{\partial C}{\partial t} r dr dz dt = \frac{1}{\alpha_{FR}} (C_p^{t+\Delta t/2} - C_p^t) r_p \Delta r \Delta z$$

$$- \iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{\partial(UC)}{\partial r} r dr dz dt \\ = -r_p \left(\left(U_E^t C_E^{t+\Delta t/2} - U_p^t C_p^{t+\Delta t/2} \right) - \left(U_p^t C_p^{t+\Delta t/2} - U_0^t C_0^{t+\Delta t/2} \right) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2}$$

$$- \iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{\partial(WC)}{\partial z} r dr dz dt = -r_p \left((W_N^t C_N^t - W_p^t C_p^t) - (W_p^t C_p^t - W_S^t C_S^t) \right) \Delta r \frac{\Delta t}{2}$$

$$\frac{\varepsilon}{L_e} \iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} r dr dz dt = \frac{\varepsilon}{L_e} r_p \left(\left(\frac{C_E^{t+\Delta t/2} - C_p^{t+\Delta t/2}}{\Delta r} \right) - \left(\frac{C_p^{t+\Delta t/2} - C_0^{t+\Delta t/2}}{\Delta r} \right) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2}$$

$$\frac{\varepsilon}{L_e} \iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} r dr dz dt = \frac{\varepsilon}{L_e} r_p \left(\left(\frac{C_N^t - C_p^t}{\Delta z} \right) - \left(\frac{C_p^t - C_S^t}{\Delta z} \right) \right) \Delta r \frac{\Delta t}{2}$$

$$\frac{\varepsilon}{L_e} \iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} r dr dz dt = \frac{\varepsilon}{L_e} \left(\left(C_E^{t+\Delta t/2} - C_p^{t+\Delta t/2} \right) - \left(C_p^{t+\Delta t/2} - C_0^{t+\Delta t/2} \right) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2}$$

$$- \iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{UC}{r} r dr dz dt = -U_p^t C_p^{t+\Delta t/2} \Delta r \Delta z \frac{\Delta t}{2}$$

$$\frac{\varepsilon}{L_e} S_r \iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} r dr dz dt = \frac{\varepsilon}{L_e} S_r r_p \left(\left(\frac{T_E^t - T_p^t}{\Delta r} \right) - \left(\frac{T_p^t - T_O^t}{\Delta r} \right) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2}$$

$$\frac{\varepsilon}{L_e} S_r \iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} r dr dz dt = \frac{\varepsilon}{L_e} S_r r_p \left(\left(\frac{T_N^t - T_p^t}{\Delta z} \right) - \left(\frac{T_p^t - T_S^t}{\Delta z} \right) \right) \Delta r \frac{\Delta t}{2}$$

$$\frac{\varepsilon}{L_e} S_r \iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} r dr dz dt = \frac{\varepsilon}{L_e} S_r \left((T_E^t - T_p^t) - (T_p^t - T_O^t) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2}$$

Alors l'équation s'écrit :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha_{FR}} \frac{C_p^{t+\Delta t/2} - C_p^t}{\Delta t/2} \\ &= - \frac{U_E^t C_E^{t+\Delta t/2} - 2U_p^t C_p^{t+\Delta t/2} + U_O^t C_O^{t+\Delta t/2}}{\Delta r} - \frac{W_N^t C_N^t - 2W_p^t C_p^t + W_S^t C_S^t}{\Delta z} \\ &+ \frac{\varepsilon}{L_e} \left(\frac{C_E^{t+\Delta t/2} - 2C_p^{t+\Delta t/2} + C_O^{t+\Delta t/2}}{(\Delta r)^2} \right) + \frac{\varepsilon}{L_e} \left(\frac{C_N^t - 2C_p^t + C_S^t}{(\Delta z)^2} \right) \\ &+ \frac{\varepsilon}{L_e} \left(\frac{C_E^{t+\Delta t/2} - 2C_p^{t+\Delta t/2} + C_O^{t+\Delta t/2}}{r_p \Delta r} \right) - \frac{U_p^t C_p^{t+\Delta t/2}}{r_p} + \frac{\varepsilon}{L_e} S_r \left(\frac{T_E^t - 2T_p^t + T_O^t}{(\Delta r)^2} \right) \\ &+ \frac{\varepsilon}{L_e} S_r \left(\frac{T_N^t - 2T_p^t + T_S^t}{(\Delta z)^2} \right) + \frac{\varepsilon}{L_e} S_r \left(\frac{T_E^t - 2T_p^t + T_O^t}{r_p \Delta r} \right) \end{aligned}$$

Cette équation peut se mettre sous la forme suivante :

$$A_E C_E^{t+\Delta t/2} + B_P C_P^{t+\Delta t/2} + C_O C_O^{t+\Delta t/2} = D$$

Avec :

$$A_E = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{U_E^t}{\Delta r} - \frac{\frac{\varepsilon}{L_e}}{(\Delta r)^2} - \frac{\frac{\varepsilon}{L_e}}{r_p \Delta r} \right)$$

$$\begin{aligned}
A_{i+1,j} &= \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{U_{i+1,j}^t}{\Delta r} - \frac{\frac{\varepsilon}{L_e}}{(\Delta r)^2} - \frac{\frac{\varepsilon}{L_e}}{r_{i,j} \Delta r} \right) \\
B_P &= \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{2}{\alpha_{FR} \Delta t} - \frac{2U_P^t}{\Delta r} + \frac{2\frac{\varepsilon}{L_e}}{(\Delta r)^2} + \frac{2\frac{\varepsilon}{L_e}}{r_p \Delta r} + \frac{U_P^t}{r_p} \right) \\
B_{i,j} &= \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{2}{\alpha_{FR} \Delta t} - \frac{2U_{i,j}^t}{\Delta r} + \frac{2\frac{\varepsilon}{L_e}}{(\Delta r)^2} + \frac{2\frac{\varepsilon}{L_e}}{r_{i,j} \Delta r} + \frac{U_{i,j}^t}{r_{i,j}} \right) \\
C_O &= \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{U_o^t}{\Delta r} - \frac{\frac{\varepsilon}{L_e}}{(\Delta r)^2} - \frac{\frac{\varepsilon}{L_e}}{r_p \Delta r} \right) \\
C_{i-1,j} &= \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{U_{i-1,j}^t}{\Delta r} - \frac{\frac{\varepsilon}{L_e}}{(\Delta r)^2} - \frac{\frac{\varepsilon}{L_e}}{r_{i,j} \Delta r} \right) \\
D &= \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{2}{\alpha_{FR} \Delta t} C_p^t - \frac{W_N^t C_N^t - 2W_p^t C_p^t + W_S^t C_S^t}{\Delta z} + \left(\frac{\varepsilon}{L_e} \right) \frac{C_N^t - 2C_p^t + C_S^t}{(\Delta z)^2} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\varepsilon}{L_e} S_r \right) \frac{T_E^t - 2T_p^t + T_O^t}{(\Delta r)^2} + \left(\frac{\varepsilon}{L_e} S_r \right) \frac{T_N^t - 2T_p^t + T_S^t}{(\Delta z)^2} + \left(\frac{\varepsilon}{L_e} S_r \right) \frac{T_E^t - 2T_p^t + T_O^t}{r_p \Delta r} \right) \\
D &= \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{2}{\alpha_{FR} \Delta t} C_{i,j}^t - \frac{W_{i,j+1}^t C_{i,j+1}^t - 2W_{i,j}^t C_{i,j}^t + W_{i,j-1}^t C_{i,j-1}^t}{\Delta z} + \left(\frac{\varepsilon}{L_e} \right) \frac{C_{i,j+1}^t - 2C_{i,j}^t + C_{i,j-1}^t}{(\Delta z)^2} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\varepsilon}{L_e} S_r \right) \frac{T_{i+1,j}^t - 2T_{i,j}^t + T_{i-1,j}^t}{(\Delta r)^2} + \left(\frac{\varepsilon}{L_e} S_r \right) \frac{T_{i,j+1}^t - 2T_{i,j}^t + T_{i,j-1}^t}{(\Delta z)^2} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\varepsilon}{L_e} S_r \right) \frac{T_{i+1,j}^t - 2T_{i,j}^t + T_{i-1,j}^t}{r_{i,j} \Delta r} \right)
\end{aligned}$$

II.3. Equation de la vorticité

L'équation au dérivée partielle donnant la vorticité s'écrit comme :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha_{FR}} \frac{\partial \Omega}{\partial t} &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial (U\Omega)}{\partial r} - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial (W\Omega)}{\partial z} - \bar{\kappa} \frac{P_r}{D_a} \Omega - \bar{\kappa}^2 R_T P_r \left(\frac{\partial T}{\partial r} + N \frac{\partial C}{\partial r} \right) \\
&\quad + \frac{\bar{\kappa} P_r}{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} - \frac{\Omega}{r^2} \right) - \frac{C_F}{\sqrt{Da}} |\vec{V}| \Omega + \frac{C_F}{\sqrt{Da}} \left(W \frac{\partial |\vec{V}|}{\partial r} - U \frac{\partial |\vec{V}|}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

L'intégration de cette dernière équation sur le volume de contrôle conduit à :

$$\iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{1}{\alpha_{FR}} \frac{\partial \Omega}{\partial t} r dr dz dt = \frac{1}{\alpha_{FR}} (\Omega_p^{t+\Delta t/2} - \Omega_p^t) r_p \Delta r \Delta z$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\varepsilon^2} \iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{\partial(U\Omega)}{\partial r} r dr dz dt \\ = -\frac{1}{\varepsilon^2} r_p \left(\left(U_E^t \Omega_E^{t+\Delta t/2} - U_p^t \Omega_p^{t+\Delta t/2} \right) - \left(U_p^t \Omega_p^{t+\Delta t/2} - U_0^t \Omega_0^{t+\Delta t/2} \right) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2} \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2} \iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{\partial(W\Omega)}{\partial z} r dr dz dt = -\frac{1}{\varepsilon^2} r_p \left((w_N^t \Omega_N^t - W_p^t \Omega_p^t) - (W_p^t \Omega_p^t - W_S^t \Omega_S^t) \right) \Delta r \frac{\Delta t}{2}$$

$$-\bar{\kappa} \frac{P_r}{D_a} \iint_t^{t+\Delta t/2} \Omega r dr dz dt = -\bar{\kappa} \frac{P_r}{D_a} r_p \Omega_p^{t+\Delta t/2} \Delta r \Delta z \frac{\Delta t}{2}$$

$$-\bar{\kappa}^2 R_a P_r \iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{\partial T}{\partial r} r dr dz dt = -\bar{\kappa}^2 R_T P_r r_p \left((T_E^t - T_p^t) - (T_p^t - T_0^t) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2}$$

$$-\bar{\kappa}^2 R_a P_r N \iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{\partial C}{\partial r} r dr dz dt = -\bar{\kappa}^2 R_T P_r r_p \left((C_E^t - C_p^t) - (C_p^t - C_0^t) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2}$$

$$\frac{\bar{\kappa} P_r}{\varepsilon} \iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} r dr dz dt = \frac{\bar{\kappa} P_r}{\varepsilon} r_p \left(\left(\frac{\Omega_E^{t+\Delta t/2} - \Omega_p^{t+\Delta t/2}}{\Delta r} \right) - \left(\frac{\Omega_p^{t+\Delta t/2} - \Omega_0^{t+\Delta t/2}}{\Delta r} \right) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2}$$

$$\frac{\bar{\kappa} P_r}{\varepsilon} \iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} r dr dz dt = \frac{\bar{\kappa} P_r}{\varepsilon} \left(\left(\Omega_E^{t+\Delta t/2} - \Omega_p^{t+\Delta t/2} \right) - \left(\Omega_p^{t+\Delta t/2} - \Omega_0^{t+\Delta t/2} \right) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2}$$

$$\frac{\bar{\kappa} P_r}{\varepsilon} \iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} r dr dz dt = \frac{\bar{\kappa} P_r}{\varepsilon} r_p \left(\left(\frac{\Omega_N^t - \Omega_p^t}{\Delta z} \right) - \left(\frac{\Omega_p^t - \Omega_S^t}{\Delta z} \right) \right) \Delta r \frac{\Delta t}{2}$$

$$-\frac{\bar{\kappa} P_r}{\varepsilon} \iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{\Omega}{r^2} r dr dz dt = -\frac{\bar{\kappa} P_r}{\varepsilon} \frac{\Omega_p^{t+\Delta t/2}}{r_p} \Delta r \Delta z \frac{\Delta t}{2}$$

$$-\frac{C_F}{\sqrt{Da}} \iint_t^{t+\Delta t/2} |\vec{V}| \Omega r dr dz dt = -\frac{C_F}{\sqrt{Da}} |\vec{V}|_P^t \Omega_p^{t+\Delta t/2} r_p \Delta r \Delta z \frac{\Delta t}{2}$$

$$\frac{C_F}{\sqrt{Da}} \iint_t^{t+\Delta t/2} W \frac{\partial |\vec{V}|}{\partial r} r dr dz dt = \frac{C_F}{\sqrt{Da}} r_p W_p^t \left((|\vec{V}|_E^t - |\vec{V}|_P^t) - (|\vec{V}|_P^t - |\vec{V}|_O^t) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2}$$

$$-\frac{C_F}{\sqrt{Da}} \iint_t^{t+\Delta t/2} U \frac{\partial |\vec{V}|}{\partial z} r dr dz dt = -\frac{C_F}{\sqrt{Da}} r_p U_p^t \left((|\vec{V}|_N^t - |\vec{V}|_P^t) - (|\vec{V}|_P^t - |\vec{V}|_S^t) \right) \Delta r \frac{\Delta t}{2}$$

Alors l'équation s'écrit :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha_{FR}} \frac{\Omega_p^{t+\Delta t/2} - \Omega_p^t}{\Delta t/2} \\ &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\left(U_E^t \Omega_E^{t+\Delta t/2} - 2U_p^t \Omega_p^{t+\Delta t/2} + U_O^t \Omega_O^{t+\Delta t/2} \right)}{\Delta r} \\ & - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\left(W_N^t \Omega_N^t - 2W_p^t \Omega_p^t + W_S^t \Omega_S^t \right)}{\Delta z} - \bar{\lambda} \frac{P_r}{D_a} \Omega_p^{t+\Delta t/2} - \bar{\lambda}^2 R_T P_r \frac{(T_E^t - 2T_p^t + T_O^t)}{\Delta r} \\ & - \bar{\lambda}^2 R_T P_r N \frac{(C_E^t - 2C_p^t + C_O^t)}{\Delta r} + \frac{\bar{\lambda} P_r \Omega_E^{t+\Delta t/2} - 2\Omega_p^{t+\Delta t/2} + \Omega_O^{t+\Delta t/2}}{\varepsilon (\Delta r)^2} \\ & + \frac{\bar{\lambda} P_r \Omega_E^{t+\Delta t/2} - 2\Omega_p^{t+\Delta t/2} + \Omega_O^{t+\Delta t/2}}{\varepsilon r_p \Delta r} + \frac{\bar{\lambda} P_r \Omega_N^t - 2\Omega_p^t + \Omega_S^t}{\varepsilon (\Delta z)^2} - \frac{\bar{\lambda} P_r \Omega_p^{t+\Delta t/2}}{\varepsilon r_p^2} \\ & - \frac{C_F}{\sqrt{Da}} |\vec{V}|_P^t \Omega_p^{t+\Delta t/2} + \frac{C_F}{\sqrt{Da}} W_p^t \frac{\left(|\vec{V}|_E^t - 2|\vec{V}|_P^t + |\vec{V}|_O^t \right)}{\Delta r} \\ & - \frac{C_F}{\sqrt{Da}} U_p^t \frac{\left(|\vec{V}|_N^t - 2|\vec{V}|_P^t + |\vec{V}|_S^t \right)}{\Delta z} \end{aligned}$$

Cette dernière équation peut se mettre sous forme :

$$A_E \Omega_E^{t+\Delta t/2} + B_P \Omega_P^{t+\Delta t/2} + C_O \Omega_O^{t+\Delta t/2} = D$$

Avec :

$$A_E = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{U_E^t}{\varepsilon^2 \Delta r} - \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon (\Delta r)^2} - \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon r_p \Delta r} \right)$$

$$A_{i+1,j} = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{U_{i+1,j}^t}{\varepsilon^2 \Delta r} - \frac{\bar{\Lambda} P_r}{\varepsilon (\Delta r)^2} - \frac{\bar{\Lambda} P_r}{\varepsilon r_{i,j} \Delta r} \right)$$

$$B_P = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{2}{\alpha_{FR} \Delta t} - \frac{2U_p^t}{\varepsilon^2 \Delta r} + \bar{\Lambda} \frac{P_r}{D_a} + \frac{2\bar{\Lambda} P_r}{\varepsilon (\Delta r)^2} + \frac{2\bar{\Lambda} P_r}{\varepsilon r_p \Delta r} + \frac{\bar{\Lambda} P_r}{\varepsilon r_p^2} + \frac{C_F}{\sqrt{D_a}} |\vec{V}|_P^t \right)$$

$$B_{i,j} = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{2}{\alpha_{FR} \Delta t} - \frac{2U_{i,j}^t}{\varepsilon^2 \Delta r} + \bar{\Lambda} \frac{P_r}{D_a} + \frac{2\bar{\Lambda} P_r}{\varepsilon (\Delta r)^2} + \frac{2\bar{\Lambda} P_r}{\varepsilon r_{i,j} \Delta r} + \frac{\bar{\Lambda} P_r}{\varepsilon r_{i,j}^2} + \frac{C_F}{\sqrt{D_a}} |\vec{V}|_{i,j}^t \right)$$

$$C_O = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{U_O^t}{\varepsilon^2 \Delta r} - \frac{\bar{\Lambda} P_r}{\varepsilon (\Delta r)^2} - \frac{\bar{\Lambda} P_r}{\varepsilon r_p \Delta r} \right)$$

$$C_{i-1,j} = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{U_{i-1,j}^t}{\varepsilon^2 \Delta r} - \frac{\bar{\Lambda} P_r}{\varepsilon (\Delta r)^2} - \frac{\bar{\Lambda} P_r}{\varepsilon r_{i,j} \Delta r} \right)$$

$$D = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{2}{\alpha_{FR} \Delta t} \Omega_p^t - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{(w_N^t \Omega_N^t - 2W_p^t \Omega_p^t + W_S^t \Omega_S^t)}{\Delta z} - \bar{\Lambda}^2 R_T P_r \frac{(T_E^t - 2T_p^t + T_O^t)}{\Delta r} \right. \\ \left. - \bar{\Lambda}^2 R_T P_r N \frac{(C_E^t - 2C_p^t + C_O^t)}{\Delta r} + \frac{\bar{\Lambda} P_r}{\varepsilon} \left(\frac{\Omega_N^t - 2\Omega_p^t + \Omega_S^t}{(\Delta z)^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{C_F}{\sqrt{D_a}} W_p^t \frac{(|\vec{V}|_E^t - 2|\vec{V}|_P^t + |\vec{V}|_O^t)}{\Delta r} - \frac{C_F}{\sqrt{D_a}} U_p^t \frac{(|\vec{V}|_N^t - 2|\vec{V}|_P^t + |\vec{V}|_S^t)}{\Delta z} \right)$$

$$D = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{2}{\alpha_{FR} \Delta t} \Omega_{i,j}^t - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{(w_{i,j+1}^t \Omega_{i,j+1}^t - 2W_{i,j}^t \Omega_{i,j}^t + W_{i,j-1}^t \Omega_{i,j-1}^t)}{\Delta z} \right. \\ \left. - \bar{\Lambda}^2 R_T P_r \frac{(T_{i+1,j}^t - 2T_{i,j}^t + T_{i-1,j}^t)}{\Delta r} - \bar{\Lambda}^2 R_T P_r N \frac{(C_{i+1,j}^t - 2C_{i,j}^t + C_{i-1,j}^t)}{\Delta r} \right. \\ \left. + \frac{\bar{\Lambda} P_r}{\varepsilon} \left(\frac{\Omega_{i,j+1}^t - 2\Omega_{i,j}^t + \Omega_{i,j-1}^t}{(\Delta z)^2} \right) + \frac{C_F}{\sqrt{D_a}} W_{i,j}^t \frac{(|\vec{V}|_{i+1,j}^t - 2|\vec{V}|_{i,j}^t + |\vec{V}|_{i-1,j}^t)}{\Delta r} \right. \\ \left. - \frac{C_F}{\sqrt{D_a}} U_{i,j}^t \frac{(|\vec{V}|_{i,j+1}^t - 2|\vec{V}|_{i,j}^t + |\vec{V}|_{i,j-1}^t)}{\Delta z} \right)$$

B. Deuxième balayage

Cette étape consiste à écrire les termes en f à l'instant $t + \Delta t$. En utilisant une discrétisation implicite suivant la direction z et explicite dans la direction r , on obtient alors la forme discrète suivante :

$$A_j f_{i,j+1}^{t+\Delta t} + B_j f_{i,j}^{t+\Delta t} + C_j f_{i,j-1}^{t+\Delta t} = D_i$$

II.4. Equation de l'énergie

A partir de tableau (III.1) l'équation de l'énergie en fonction de la température s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\alpha_{FR}} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial(UT)}{\partial r} - \frac{\partial(WT)}{\partial z} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{UT}{r} + \varepsilon D_u \left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} \right)$$

L'intégration de cette équation sur le volume de contrôle conduit à :

$$\begin{aligned} \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{1}{\alpha_{FR}} \frac{\partial T}{\partial t} r dr dz dt &= \frac{1}{\alpha_{FR}} \left(T_p^{t+\Delta t} - T_p^{t+\Delta t/2} \right) r_p \Delta r \Delta z \\ &- \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{\partial(UT)}{\partial r} r dr dz dt \\ &= -r_p \left(\left(U_E^t T_E^{t+\Delta t/2} - U_p^t T_p^{t+\Delta t/2} \right) - \left(U_p^t T_p^{t+\Delta t/2} - U_0^t T_0^{t+\Delta t/2} \right) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2} \\ - \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{\partial(WT)}{\partial z} r dr dz dt &= -r_p \left((W_N^t T_N^{t+\Delta t} - W_p^t T_p^{t+\Delta t}) - (W_p^t T_p^{t+\Delta t} - W_S^t T_S^{t+\Delta t}) \right) \Delta r \frac{\Delta t}{2} \\ \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} r dr dz dt &= r_p \left(\left(\frac{T_E^{t+\Delta t/2} - T_p^{t+\Delta t/2}}{\Delta r} \right) - \left(\frac{T_p^{t+\Delta t/2} - T_0^{t+\Delta t/2}}{\Delta r} \right) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2} \\ \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} r dr dz dt &= r_p \left(\left(\frac{T_N^{t+\Delta t} - T_p^{t+\Delta t}}{\Delta z} \right) - \left(\frac{T_p^{t+\Delta t} - T_S^{t+\Delta t}}{\Delta z} \right) \right) \Delta r \frac{\Delta t}{2} \\ \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} r dr dz dt &= \left(\left(T_E^{t+\Delta t/2} - T_p^{t+\Delta t/2} \right) - \left(T_p^{t+\Delta t/2} - T_0^{t+\Delta t/2} \right) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2} \\ - \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{UT}{r} r dr dz dt &= -U_p^t T_p^{t+\Delta t} \Delta r \Delta z \frac{\Delta t}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon D_u \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} r dr dz dt &= \varepsilon D_u r_p \left(\left(\frac{C_E^t - C_p^t}{\Delta r} \right) - \left(\frac{C_p^t - C_O^t}{\Delta r} \right) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2} \\ \varepsilon D_u \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} r dr dz dt &= \varepsilon D_u r_p \left(\left(\frac{C_N^t - C_p^t}{\Delta z} \right) - \left(\frac{C_p^t - C_S^t}{\Delta z} \right) \right) \Delta r \frac{\Delta t}{2} \\ \varepsilon D_u \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} r dr dz dt &= \varepsilon D_u \left((C_E^t - C_p^t) - (C_p^t - C_O^t) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2} \end{aligned}$$

Alors l'équation peut se mettre comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_{FR}} \frac{T_p^{t+\Delta t} - T_p^{t+\Delta t/2}}{\Delta t/2} &= - \frac{U_E^t T_E^{t+\Delta t/2} - 2U_p^t T_p^{t+\Delta t/2} + U_O^t T_O^{t+\Delta t/2}}{\Delta r} - \frac{W_N^t T_N^{t+\Delta t} - 2W_p^t T_p^{t+\Delta t} + W_S^t T_S^{t+\Delta t}}{\Delta z} \\ &+ \frac{T_E^{t+\Delta t/2} - 2T_p^{t+\Delta t/2} + T_O^{t+\Delta t/2}}{(\Delta r)^2} + \frac{T_N^{t+\Delta t} - 2T_p^{t+\Delta t} + T_S^{t+\Delta t}}{(\Delta z)^2} \\ &+ \frac{T_E^{t+\Delta t/2} - 2T_p^{t+\Delta t/2} + T_O^{t+\Delta t/2}}{r_p \Delta r} - \frac{U_p^t T_p^{t+\Delta t}}{r_p} + \varepsilon D_u \frac{C_E^t - 2C_p^t + C_O^t}{(\Delta r)^2} \\ &+ \varepsilon D_u \frac{C_N^t - 2C_p^t + C_S^t}{(\Delta z)^2} + \varepsilon D_u \frac{C_E^t - 2C_p^t + C_O^t}{r_p \Delta r} \end{aligned}$$

Ou encore sous la forme suivante :

$$A_N T_N^{t+\Delta t} + B_p T_p^{t+\Delta t} + C_S T_S^{t+\Delta t} = D$$

Avec :

$$\begin{aligned} A_N &= \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{W_N^t}{\Delta z} - \frac{1}{(\Delta z)^2} \right) \\ A_{i,j+1} &= \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{W_{i,j+1}^t}{\Delta z} - \frac{1}{(\Delta z)^2} \right) \\ B_p &= \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{2}{\alpha_{FR} \Delta t} - \frac{2W_p^t}{\Delta z} + \frac{2}{(\Delta z)^2} + \frac{U_p^t}{r_p} \right) \\ B_{i,j} &= \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{2}{\alpha_{FR} \Delta t} - \frac{2W_{i,j}^t}{\Delta z} + \frac{2}{(\Delta z)^2} + \frac{U_{i,j}^t}{r_{i,j}} \right) \\ C_S &= \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{W_S^t}{\Delta z} - \frac{1}{(\Delta z)^2} \right) \end{aligned}$$

$$C_{i,j-1} = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{W_{ij-1}^t}{\Delta z} - \frac{1}{(\Delta z)^2} \right)$$

$$D = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{2}{\alpha_{FR} \Delta t} T_p^{t+\Delta t/2} - \frac{U_E^t T_E^{t+\Delta t/2} - 2U_p^t T_p^{t+\Delta t/2} + U_O^t T_O^{t+\Delta t/2}}{\Delta r} \right. \\ \left. + \frac{T_E^{t+\Delta t/2} - 2T_p^{t+\Delta t/2} + T_O^{t+\Delta t/2}}{(\Delta r)^2} + \frac{T_E^{t+\Delta t/2} - 2T_p^{t+\Delta t/2} + T_O^{t+\Delta t/2}}{r_p \Delta r} \right. \\ \left. + \varepsilon D_u \frac{C_E^t - 2C_p^t + C_O^t}{(\Delta r)^2} + \varepsilon D_u \frac{C_N^t - 2C_p^t + C_S^t}{(\Delta z)^2} + \varepsilon D_u \frac{C_E^t - 2C_p^t + C_O^t}{r_p \Delta r} \right)$$

$$D = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{2}{\alpha_{FR} \Delta t} T_{ij}^{t+\Delta t/2} - \frac{U_{i+1,j}^t T_{i+1,j}^{t+\Delta t/2} - 2U_{ij}^t T_{ij}^{t+\Delta t/2} + U_{i-1,j}^t T_{i-1,j}^{t+\Delta t/2}}{\Delta r} \right. \\ \left. + \frac{T_{i+1,j}^{t+\Delta t/2} - 2T_{ij}^{t+\Delta t/2} + T_{i-1,j}^{t+\Delta t/2}}{(\Delta r)^2} + \frac{T_{i+1,j}^{t+\Delta t/2} - 2T_{ij}^{t+\Delta t/2} + T_{i-1,j}^{t+\Delta t/2}}{r_{i,j} \Delta r} \right. \\ \left. + \varepsilon D_u \frac{C_{i+1,j}^t - 2C_{ij}^t + C_{i-1,j}^t}{(\Delta r)^2} + \varepsilon D_u \frac{C_{i,j+1}^t - 2C_{ij}^t + C_{i,j-1}^t}{(\Delta z)^2} \right. \\ \left. + \varepsilon D_u \frac{C_{i+1,j}^t - 2C_{ij}^t + C_{i-1,j}^t}{r_{i,j} \Delta r} \right)$$

II.5. Equation de la concentration

L'équation décrivant l'évolution de la concentration est donnée par :

$$\frac{1}{\alpha_{FR}} \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial(UC)}{\partial r} - \frac{\partial(WC)}{\partial z} + \frac{\varepsilon}{L_e} \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{\varepsilon}{L_e} \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \frac{\varepsilon}{L_e r} \frac{\partial C}{\partial r} - \frac{UC}{r} + \frac{\varepsilon}{L_e} S_r \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

L'intégration sur le volume de contrôle conduit à :

$$\iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{1}{\alpha_{FR}} \frac{\partial C}{\partial t} r dr dz dt = \frac{1}{\alpha_{FR}} \left(C_p^{t+\Delta t} - C_p^{t+\Delta t/2} \right) r_p \Delta r \Delta z$$

$$\begin{aligned}
& - \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{\partial(UC)}{\partial r} r dr dz dt \\
& = -r_p \left(\left(U_E^t C_E^{t+\Delta t/2} - U_p^t C_p^{t+\Delta t/2} \right) - \left(U_p^t C_p^{t+\Delta t/2} - U_0^t C_0^{t+\Delta t/2} \right) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2}
\end{aligned}$$

$$- \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{\partial(WC)}{\partial z} r dr dz dt = -r_p \left((W_N^t C_N^{t+\Delta t} - W_p^t C_p^{t+\Delta t}) - (W_p^t C_p^{t+\Delta t} - W_S^t C_S^{t+\Delta t}) \right) \Delta r \frac{\Delta t}{2}$$

$$\frac{\varepsilon}{L_e} \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} r dr dz dt = \frac{\varepsilon}{L_e} r_p \left(\left(\frac{C_E^{t+\Delta t/2} - C_p^{t+\Delta t/2}}{\Delta r} \right) - \left(\frac{C_p^{t+\Delta t/2} - C_0^{t+\Delta t/2}}{\Delta r} \right) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2}$$

$$\frac{\varepsilon}{L_e} \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} r dr dz dt = \frac{\varepsilon}{L_e} r_p \left(\left(\frac{C_N^{t+\Delta t} - C_p^{t+\Delta t}}{\Delta z} \right) - \left(\frac{C_p^{t+\Delta t} - C_S^{t+\Delta t}}{\Delta z} \right) \right) \Delta r \frac{\Delta t}{2}$$

$$\frac{\varepsilon}{L_e} \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} r dr dz dt = \frac{\varepsilon}{L_e} \left(\left(C_E^{t+\Delta t/2} - C_p^{t+\Delta t/2} \right) - \left(C_p^{t+\Delta t/2} - C_0^{t+\Delta t/2} \right) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2}$$

$$- \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{UC}{r} r dr dz dt = -U_p^t C_p^{t+\Delta t} \Delta r \Delta z \frac{\Delta t}{2}$$

$$\frac{\varepsilon}{L_e} S_r \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} r dr dz dt = \frac{\varepsilon}{L_e} S_r r_p \left(\left(\frac{T_E^t - T_p^t}{\Delta r} \right) - \left(\frac{T_p^t - T_0^t}{\Delta r} \right) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2}$$

$$\frac{\varepsilon}{L_e} S_r \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} r dr dz dt = \frac{\varepsilon}{L_e} S_r r_p \left(\left(\frac{T_N^t - T_p^t}{\Delta z} \right) - \left(\frac{T_p^t - T_S^t}{\Delta z} \right) \right) \Delta r \frac{\Delta t}{2}$$

$$\frac{\varepsilon}{L_e} S_r \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} r dr dz dt = \frac{\varepsilon}{L_e} S_r \left((T_E^t - T_p^t) - (T_p^t - T_0^t) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2}$$

Ce qui conduit donc à :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\alpha_{FR}} \frac{C_p^{t+\Delta t} - C_p^{t+\Delta t/2}}{\Delta t/2} \\
&= - \frac{U_E^t C_E^{t+\Delta t/2} - 2U_p^t C_p^{t+\Delta t/2} + U_o^t C_o^{t+\Delta t/2}}{\Delta r} - \frac{W_N^t C_N^{t+\Delta t} - 2W_p^t C_p^{t+\Delta t} + W_S^t C_S^{t+\Delta t}}{\Delta z} \\
&+ \frac{\varepsilon}{L_e} \frac{C_E^{t+\Delta t/2} - 2C_p^{t+\Delta t/2} + C_o^{t+\Delta t/2}}{(\Delta r)^2} + \frac{\varepsilon}{L_e} \frac{C_N^{t+\Delta t} - 2C_p^{t+\Delta t} + C_S^{t+\Delta t}}{(\Delta z)^2} \\
&+ \frac{\varepsilon}{L_e} \frac{C_E^{t+\Delta t/2} - 2C_p^{t+\Delta t/2} + C_o^{t+\Delta t/2}}{r_p \Delta r} - \frac{U_p^t C_p^{t+\Delta t}}{r_p} + \frac{\varepsilon}{L_e} S_r \frac{T_E^t - 2T_p^t + T_o^t}{(\Delta r)^2} \\
&+ \frac{\varepsilon}{L_e} S_r \frac{T_N^t - 2T_p^t + T_S^t}{(\Delta z)^2} + \frac{\varepsilon}{L_e} S_r \frac{T_E^t - 2T_p^t + T_o^t}{r_p \Delta r}
\end{aligned}$$

Cette dernière équation peut se mettre sous la forme suivante :

$$A_N C_N^{t+\Delta t} + B_P C_P^{t+\Delta t} + C_S C_S^{t+\Delta t} = D$$

Avec :

$$\begin{aligned}
A_N &= \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{W_N^t}{\Delta z} - \frac{\varepsilon}{(\Delta z)^2} \right) \\
A_{i,j+1} &= \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{W_{i,j+1}^t}{\Delta z} - \frac{\varepsilon}{(\Delta z)^2} \right) \\
B_P &= \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{2}{\alpha_{FR} \Delta t} - \frac{2W_P^t}{\Delta z} + \frac{2\varepsilon}{(\Delta z)^2} + \frac{U_P^t}{r_p} \right) \\
B_{i,j} &= \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{2}{\alpha_{FR} \Delta t} - \frac{2W_{i,j}^t}{\Delta z} + \frac{2\varepsilon}{(\Delta z)^2} + \frac{U_{i,j}^t}{r_{i,j}} \right) \\
C_S &= \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{W_S^t}{\Delta z} - \frac{\varepsilon}{(\Delta z)^2} \right) \\
C_{i,j-1} &= \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{W_{i,j-1}^t}{\Delta z} - \frac{\varepsilon}{(\Delta z)^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D &= \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{2}{\alpha_{FR} \Delta t} C_p^{t+\Delta t/2} - \frac{U_E^t C_E^{t+\Delta t/2} - 2U_p^t C_p^{t+\Delta t/2} + U_0^t C_0^{t+\Delta t/2}}{\Delta r} \right. \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{L_e} \frac{C_E^{t+\Delta t/2} - 2C_p^{t+\Delta t/2} + C_0^{t+\Delta t/2}}{(\Delta r)^2} + \frac{\varepsilon}{L_e} \frac{C_E^{t+\Delta t/2} - 2C_p^{t+\Delta t/2} + C_0^{t+\Delta t/2}}{r_p \Delta r} \\
&\quad \left. + \frac{\varepsilon}{L_e} S_r \frac{T_E^t - 2T_p^t + T_0^t}{(\Delta r)^2} + \frac{\varepsilon}{L_e} S_r \frac{T_N^t - 2T_p^t + T_S^t}{(\Delta z)^2} + \frac{\varepsilon}{L_e} S_r \frac{T_E^t - 2T_p^t + T_0^t}{r_p \Delta r} \right) \\
D &= \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{2}{\alpha_{FR} \Delta t} C_{i,j}^{t+\Delta t/2} - \frac{U_{i+1,j}^t C_{i+1,j}^{t+\Delta t/2} - 2U_{i,j}^t C_{i,j}^{t+\Delta t/2} + U_{i-1,j}^t C_{i-1,j}^{t+\Delta t/2}}{\Delta r} \right. \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{L_e} \frac{C_{i+1,j}^{t+\Delta t/2} - 2C_{i,j}^{t+\Delta t/2} + C_{i-1,j}^{t+\Delta t/2}}{(\Delta r)^2} + \frac{\varepsilon}{L_e} \frac{C_{i+1,j}^{t+\Delta t/2} - 2C_{i,j}^{t+\Delta t/2} + C_{i-1,j}^{t+\Delta t/2}}{r_{i,j} \Delta r} \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{L_e} S_r \frac{T_{i+1,j}^t - 2T_{i,j}^t + T_{i-1,j}^t}{(\Delta r)^2} + \frac{\varepsilon}{L_e} S_r \frac{T_{i,j+1}^t - 2T_{i,j}^t + T_{i,j-1}^t}{(\Delta z)^2} \\
&\quad \left. + \frac{\varepsilon}{L_e} S_r \frac{T_{i+1,j}^t - 2T_{i,j}^t + T_{i-1,j}^t}{r_{i,j} \Delta r} \right)
\end{aligned}$$

II.6. Equation de la vorticité

L'équation de la vorticité est donnée par :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha_{FR}} \frac{\partial \Omega}{\partial t} &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial(U\Omega)}{\partial r} - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial(W\Omega)}{\partial z} - \bar{\kappa} \frac{P_r}{D_a} \Omega - \bar{\kappa}^2 R_T P_r \left(\frac{\partial T}{\partial r} + N \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) \\
&\quad + \frac{\bar{\kappa} P_r}{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} - \frac{\Omega}{r^2} \right) - \frac{C_F}{\sqrt{D_a}} |\vec{V}| \Omega + \frac{C_F}{\sqrt{D_a}} \left(W \frac{\partial |\vec{V}|}{\partial r} - U \frac{\partial |\vec{V}|}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

L'intégration sur le volume de contrôle conduit à :

$$\begin{aligned}
\iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{1}{\alpha_{FR}} \frac{\partial \Omega}{\partial t} r dr dz dt &= \frac{1}{\alpha_{FR}} \left(\Omega_p^{t+\Delta t} - \Omega_p^{t+\Delta t/2} \right) r_p \Delta r \Delta z \\
-\frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{\partial(U\Omega)}{\partial r} r dr dz dt &= -\frac{1}{\varepsilon^2} r_p \left(\left(U_E^t \Omega_E^{t+\Delta t/2} - U_p^t \Omega_p^{t+\Delta t/2} \right) - \left(U_p^t \Omega_p^{t+\Delta t/2} - U_0^t \Omega_0^{t+\Delta t/2} \right) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\varepsilon^2} \iint_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(W\Omega)}{\partial z} r dr dz dt \\
& \quad = -\frac{1}{\varepsilon^2} r_p \left((W_N^t \Omega_N^{t+\Delta t} - W_p^t \Omega_p^{t+\Delta t}) - (W_p^t \Omega_p^{t+\Delta t} - W_S^t \Omega_S^{t+\Delta t}) \right) \Delta r \frac{\Delta t}{2} \\
& \quad - \bar{\kappa} \frac{P_r}{D_a} \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \Omega r dr dz dt = -\bar{\kappa} \frac{P_r}{D_a} r_p \Omega_p^{t+\Delta t} \Delta r \Delta z \frac{\Delta t}{2} \\
& -\bar{\kappa}^2 R_a P_r \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial r} r dr dz dt = -\bar{\kappa}^2 R_T P_r r_p \left((T_E^t - T_p^t) - (T_p^t - T_o^t) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2} \\
& -\bar{\kappa}^2 R_a P_r N \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{\partial C}{\partial r} r dr dz dt = -\bar{\kappa}^2 R_T P_r r_p \left((C_E^t - C_p^t) - (C_p^t - C_o^t) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2} \\
& \frac{\bar{\kappa} P_r}{\varepsilon} \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} r dr dz dt = \frac{\bar{\kappa} P_r}{\varepsilon} r_p \left(\left(\frac{\Omega_E^{t+\Delta t/2} - \Omega_p^{t+\Delta t/2}}{\Delta r} \right) - \left(\frac{\Omega_p^{t+\Delta t/2} - \Omega_o^{t+\Delta t/2}}{\Delta r} \right) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2} \\
& \frac{\bar{\kappa} P_r}{\varepsilon} \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} r dr dz dt = \frac{\bar{\kappa} P_r}{\varepsilon} \left(\left(\Omega_E^{t+\Delta t/2} - \Omega_p^{t+\Delta t/2} \right) - \left(\Omega_p^{t+\Delta t/2} - \Omega_o^{t+\Delta t/2} \right) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2} \\
& \frac{\bar{\kappa} P_r}{\varepsilon} \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} r dr dz dt = \frac{\bar{\kappa} P_r}{\varepsilon} r_p \left(\left(\frac{\Omega_N^{t+\Delta t} - \Omega_p^{t+\Delta t}}{\Delta z} \right) - \left(\frac{\Omega_p^{t+\Delta t} - \Omega_S^{t+\Delta t}}{\Delta z} \right) \right) \Delta r \frac{\Delta t}{2} \\
& -\frac{\bar{\kappa} P_r}{\varepsilon} \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{\Omega}{r^2} r dr dz dt = -\frac{\bar{\kappa} P_r}{\varepsilon} \frac{\Omega_p^{t+\Delta t}}{r_p} \Delta r \Delta z \frac{\Delta t}{2} \\
& -\frac{C_F}{\sqrt{Da}} \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} |\vec{V}| \Omega r dr dz dt = -\frac{C_F}{\sqrt{Da}} |\vec{V}|_p^t \Omega_p^{t+\Delta t} r_p \Delta r \Delta z \frac{\Delta t}{2} \\
& \frac{C_F}{\sqrt{Da}} \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} W \frac{\partial |\vec{V}|}{\partial r} r dr dz dt = \frac{C_F}{\sqrt{Da}} r_p W_p^t \left((|\vec{V}|_E^t - |\vec{V}|_p^t) - (|\vec{V}|_p^t - |\vec{V}|_o^t) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2}
\end{aligned}$$

$$-\frac{C_F}{\sqrt{Da}} \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} U \frac{\partial |\vec{V}|}{\partial z} r dr dz dt = -\frac{C_F}{\sqrt{Da}} r_p U_p^t \left((|\vec{V}|_N^t - |\vec{V}|_P^t) - (|\vec{V}|_P^t - |\vec{V}|_S^t) \right) \Delta r \frac{\Delta t}{2}$$

Alors l'équation devient comme suit :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha_{FR}} \frac{\Omega_p^{t+\Delta t} - \Omega_p^{t+\Delta t/2}}{\Delta t/2} \\ &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\left(U_E^t \Omega_E^{t+\Delta t/2} - 2U_P^t \Omega_P^{t+\Delta t/2} + U_O^t \Omega_O^{t+\Delta t/2} \right)}{\Delta r} \\ & - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\left(W_N^t \Omega_N^{t+\Delta t} - 2W_P^t \Omega_P^{t+\Delta t} + W_S^t \Omega_S^{t+\Delta t} \right)}{\Delta z} - \bar{\lambda} \frac{P_r}{D_a} \Omega_p^{t+\Delta t} \\ & - \bar{\lambda}^2 R_T P_r \frac{(T_E^t - 2T_P^t + T_O^t)}{\Delta r} - \bar{\lambda}^2 R_T P_r N \frac{(C_E^t - 2C_P^t + C_O^t)}{\Delta r} \\ & + \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon} \left(\frac{\Omega_E^{t+\Delta t/2} - 2\Omega_P^{t+\Delta t/2} + \Omega_O^{t+\Delta t/2}}{(\Delta r)^2} \right) + \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon} \left(\frac{\Omega_E^{t+\Delta t/2} - 2\Omega_P^{t+\Delta t/2} + \Omega_O^{t+\Delta t/2}}{r_p \Delta r} \right) \\ & + \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon} \left(\frac{\Omega_N^{t+\Delta t} - 2\Omega_P^{t+\Delta t} + \Omega_S^{t+\Delta t}}{(\Delta z)^2} \right) - \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon} \frac{\Omega_p^{t+\Delta t}}{r_p^2} - \frac{C_F}{\sqrt{Da}} |\vec{V}|_P^t \Omega_p^{t+\Delta t} \\ & + \frac{C_F}{\sqrt{Da}} W_p^t \frac{(|\vec{V}|_E^t - 2|\vec{V}|_P^t + |\vec{V}|_O^t)}{\Delta r} - \frac{C_F}{\sqrt{Da}} U_p^t \frac{(|\vec{V}|_N^t - 2|\vec{V}|_P^t + |\vec{V}|_S^t)}{\Delta z} \end{aligned}$$

Cette dernière équation peut se mettre sous la forme suivante :

$$A_N \Omega_N^{t+\Delta t} + B_P \Omega_P^{t+\Delta t} + C_S \Omega_S^{t+\Delta t} = D$$

Avec :

$$A_N = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{W_N^t}{\varepsilon^2 \Delta z} - \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon (\Delta z)^2} \right)$$

$$A_{i,j+1} = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{W_{ij+1}^t}{\varepsilon^2 \Delta z} - \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon (\Delta z)^2} \right)$$

$$B_P = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{2}{\alpha_{FR} \Delta t} - \frac{2W_P^t}{\varepsilon^2 \Delta z} + \bar{\lambda} \frac{P_r}{D_a} + \frac{2\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon (\Delta z)^2} + \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon r_p^2} + \frac{C_F}{\sqrt{Da}} |\vec{V}|_P^t \right)$$

$$B_{i,j} = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{2}{\alpha_{FR} \Delta t} - \frac{2W_{ij}^t}{\varepsilon^2 \Delta z} + \bar{\lambda} \frac{P_r}{D_a} + \frac{2\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon (\Delta z)^2} + \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon r_{i,j}^2} + \frac{C_F}{\sqrt{Da}} |\vec{V}|_{ij}^t \right)$$

$$\begin{aligned}
C_S &= \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{W_S^t}{\varepsilon^2 \Delta Z} - \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon (\Delta Z)^2} \right) \\
C_{i,j-1} &= \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{W_{ij-1}^t}{\varepsilon^2 \Delta Z} - \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon (\Delta Z)^2} \right) \\
D &= \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{2}{\alpha_{FR} \Delta t} \Omega_p^{t+\Delta t/2} - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\left(U_E^t \Omega_E^{t+\Delta t/2} - 2U_p^t \Omega_p^{t+\Delta t/2} + U_O^t \Omega_O^{t+\Delta t/2} \right)}{\Delta r} \right. \\
&\quad - \bar{\lambda}^2 R_T P_r \frac{(T_E^t - 2T_p^t + T_O^t)}{\Delta r} - \bar{\lambda}^2 R_T P_r N \frac{(C_E^t - 2C_p^t + C_O^t)}{\Delta r} \\
&\quad + \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon} \left(\frac{\Omega_E^{t+\Delta t/2} - 2\Omega_p^{t+\Delta t/2} + \Omega_O^{t+\Delta t/2}}{(\Delta r)^2} \right) \\
&\quad + \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon} \left(\frac{\Omega_E^{t+\Delta t/2} - 2\Omega_p^{t+\Delta t/2} + \Omega_O^{t+\Delta t/2}}{r_p \Delta r} \right) + \frac{C_F}{\sqrt{Da}} W_p^t \frac{(|\vec{V}|_E^t - 2|\vec{V}|_p^t + |\vec{V}|_O^t)}{\Delta r} \\
&\quad \left. - \frac{C_F}{\sqrt{Da}} U_p^t \frac{(|\vec{V}|_N^t - 2|\vec{V}|_p^t + |\vec{V}|_S^t)}{\Delta z} \right) \\
&= \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{2}{\alpha_{FR} \Delta t} \Omega_{ij}^{t+\Delta t/2} - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\left(U_{i+1,j}^t \Omega_E^{t+\Delta t/2} - 2U_{ij}^t \Omega_{ij}^{t+\Delta t/2} + U_{i-1,j}^t \Omega_{i-1,j}^{t+\Delta t/2} \right)}{\Delta r} \right. \\
&\quad - \bar{\lambda}^2 R_T P_r \frac{(T_{i+1,j}^t - 2T_{ij}^t + T_{i-1,j}^t)}{\Delta r} - \bar{\lambda}^2 R_T P_r N \frac{(C_{i+1,j}^t - 2C_{ij}^t + C_{i-1,j}^t)}{\Delta r} \\
&\quad + \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon} \left(\frac{\Omega_{i+1,j}^{t+\Delta t/2} - 2\Omega_{ij}^{t+\Delta t/2} + \Omega_{i-1,j}^{t+\Delta t/2}}{(\Delta r)^2} \right) \\
&\quad + \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon} \left(\frac{\Omega_{i+1,j}^{t+\Delta t/2} - 2\Omega_{ij}^{t+\Delta t/2} + \Omega_{i-1,j}^{t+\Delta t/2}}{r_{i,j} \Delta r} \right) + \frac{C_F}{\sqrt{Da}} W_{ij}^t \frac{(|\vec{V}|_{i+1,j}^t - 2|\vec{V}|_{ij}^t + |\vec{V}|_{i-1,j}^t)}{\Delta r} \\
&\quad \left. - \frac{C_F}{\sqrt{Da}} U_p^t \frac{(|\vec{V}|_{i,j+1}^t - 2|\vec{V}|_{ij}^t + |\vec{V}|_{i,j-1}^t)}{\Delta z} \right)
\end{aligned}$$

II.7. Equation de la fonction de courant

La méthode de résolution de l'équation de la fonction de courant est différente de la méthode qu'on utilise pour résoudre les équations de transport. Dans notre étude nous avons opté pour la méthode SOR (Simultaneous Over Relaxation) [52, 59].

L'équation de la fonction de courant s'écrit sous la forme suivante :

$$\Omega = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

On intègre chaque terme de l'équation de la fonction de courant sous le volume de contrôle :

$$\begin{aligned} \iint_t^{t+\Delta t} \Omega r dr dz dt &= r_p \Omega_p^{t+\Delta t} \Delta r \Delta z \Delta t \\ \iint_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} r dr dz dt &= \left(\left(\frac{\psi_E^{t+\Delta t} - \psi_p^{t+\Delta t}}{\Delta r} \right) - \left(\frac{\psi_p^{t+\Delta t} - \psi_O^{t+\Delta t}}{\Delta r} \right) \right) \Delta z \Delta t \\ - \iint_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} r dr dz dt &= -\frac{1}{r_p} \left(\left(\psi_E^{t+\Delta t} - \psi_p^{t+\Delta t} \right) - \left(\psi_p^{t+\Delta t} - \psi_O^{t+\Delta t} \right) \right) \Delta z \Delta t \\ \iint_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} r dr dz dt &= \left(\left(\frac{\psi_N^{t+\Delta t} - \psi_p^{t+\Delta t}}{\Delta z} \right) - \left(\frac{\psi_p^{t+\Delta t} - \psi_S^{t+\Delta t}}{\Delta z} \right) \right) \Delta r \Delta t \end{aligned}$$

Alors :

$$r_p \Omega_p^{t+\Delta t} = \frac{\psi_E^{t+\Delta t} - 2\psi_p^{t+\Delta t} + \psi_O^{t+\Delta t}}{\Delta r^2} - \frac{1}{r_p} \frac{\psi_E^{t+\Delta t} - 2\psi_p^{t+\Delta t} + \psi_O^{t+\Delta t}}{\Delta r} + \frac{\psi_N^{t+\Delta t} - 2\psi_p^{t+\Delta t} + \psi_S^{t+\Delta t}}{\Delta z^2}$$

Qui peut être écrite sous la forme suivante :

$$\psi_p^{t+\Delta t} = A_1(\psi_E^{t+\Delta t} + \psi_O^{t+\Delta t}) + A_2(\psi_N^{t+\Delta t} + \psi_S^{t+\Delta t}) - A_3 \Omega_p^{t+\Delta t}$$

Avec :

$$A_1 = \frac{(1 - \Delta r) \Delta z^2}{(\Delta z^2 - 2\Delta r \Delta z^2 + \Delta r^2)}$$

$$A_2 = \frac{\Delta r}{(\Delta z^2 - 2\Delta r \Delta z^2 + \Delta r^2)}$$

$$A_3 = \frac{r_p \Delta r \Delta z^2}{(\Delta z^2 - 2\Delta r \Delta z^2 + \Delta r^2)}$$

La méthode de surrelaxation successive (S.O.R) par point donne directement la valeur de la fonction de courant ψ à l'instant $t + \Delta t$ au nœud considéré par la relation suivante :

$$\psi_{i,j}^{t+\Delta t} = (1 - \omega) \psi_{i,j}^t + \omega \bar{\psi}_{i,j}^{t+\Delta t}$$

ω : Est le facteur optimal de surrelaxation successive (S.O.R) qui peut définir par :

$$\omega = \frac{2}{1 + \frac{3,015}{N_d}}$$

N_d : Représenté le nombre des nœuds du domaine d'infiltration.

Champ des vitesses :

Les vitesses radiale et axiale sont respectivement données par :

$$U = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad W = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$\iint_t^{t+\Delta t} U r dr dz dt = r_p U_p^{t+\Delta t} \Delta r \Delta z \Delta t$$

$$\iint_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} r dr dz dt = \left((\psi_N^{t+\Delta t} - \psi_p^{t+\Delta t}) - (\psi_p^{t+\Delta t} - \psi_S^{t+\Delta t}) \right) \Delta r \Delta t$$

Alors :

$$U_p^{t+\Delta t} = \frac{\psi_N^{t+\Delta t} - 2\psi_p^{t+\Delta t} + \psi_S^{t+\Delta t}}{r_p \Delta z}$$

Ou bien :

$$U_{i,j}^{t+\Delta t} = \frac{\psi_{i,j+1}^{t+\Delta t} - 2\psi_{i,j}^{t+\Delta t} + \psi_{i,j-1}^{t+\Delta t}}{r_{i,j} \Delta z}$$

Et,

$$\iint_t^{t+\Delta t} W r dr dz dt = r_p W_p^{t+\Delta t} \Delta r \Delta z \Delta t$$

$$-\iint_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} r dr dz dt = -\left((\psi_E^{t+\Delta t} - \psi_p^{t+\Delta t}) - (\psi_p^{t+\Delta t} - \psi_O^{t+\Delta t}) \right) \Delta z \Delta t$$

Alors :

$$W_p^{t+\Delta t} = -\frac{\psi_E^{t+\Delta t} - 2\psi_p^{t+\Delta t} + \psi_o^{t+\Delta t}}{r_p \Delta r}$$

Ou bien :

$$W_{i,j}^{t+\Delta t} = -\frac{\psi_{i+1,j}^{t+\Delta t} - 2\psi_{i,j}^{t+\Delta t} + \psi_{i-1,j}^{t+\Delta t}}{r_{i,j} \Delta r}$$

III. Conditions aux limites

Pour obtenir une solution physique de notre problème, on adjoint aux équations précédemment établies les conditions aux limites, sous forme discrétisée, de types : Thermique, solutale et dynamique.

III.1. Conditions aux limites thermiques

- ✓ Paroi latérale parfaitement adiabatique ($r = 1$)

$$T_{imax,j} = T_{imax-1,j} \quad 1 \leq j \leq jmax$$

- ✓ Paroi latérale parfaitement conductrice ($r = 1$)

$$T_{imax,j} = 1 - \frac{z_j}{A} \quad 1 \leq j \leq jmax$$

- ✓ pour l'axe de cylindre (condition de symétrie) ($r = 0$)

$$T_{1,j} = T_{2,j} \quad 1 \leq j \leq jmax$$

- ✓ Pour Les base de cylinder inférieur et supérieur : ($z = 0$ et $z = A$)

$$T_{i,1} = 1 \quad 1 \leq i \leq i max$$

$$T_{i,jmax} = 0 \quad 1 \leq i \leq i max$$

III.2. Conditions aux limites solutales

- ✓ Sur les Parois latérales ($r = 1$)

$$C_{imax,j} = C_{imax-1,j} \quad 1 \leq j \leq jmax$$

✓ Sur l'axe de cylindre (condition d'axisymétrie) ($r = 0$)

$$C_{1,j} = C_{2,j} \quad 1 \leq j \leq jmax$$

✓ Sur les bases du cylindre inférieure et supérieure ($z = 0$ et $z = A$)

$$C_{i,1} = 1 \quad \text{et} \quad C_{i,jmax} = 0 \quad 1 \leq i \leq imax$$

III.3. Conditions aux limites dynamiques

✓ Calcul la fonction de courant sur les frontières :

$$\begin{aligned} \psi_{1,j} = \psi_{imax,j} &= 0 & 1 \leq j \leq jmax \\ \psi_{i,1} = \psi_{1,jmax} &= 0 & 1 \leq i \leq imax \end{aligned}$$

✓ Calcul de la vorticité sur les frontières :

Sur l'axe de la cavité la condition de nullité de la vitesse radiale donne une valeur nulle de la vorticité :

$$\Omega_{1,j} = 0 \quad 1 \leq j \leq jmax$$

Pour l'autre condition aux limites, nous avons utilisé la méthode d'approximation de Thom.

– Sur les parois latérales ($r = 1$)

$$\Omega_{imax,j} = \frac{2}{\Delta r^2} \psi_{imax-1,j} \quad 1 \leq j \leq jmax$$

– Sur les bases du cylindre :

○ Paroi inférieure ($z = 0$)

$$\Omega_{i,1} = \frac{1}{r_i} \frac{2}{\Delta z^2} \psi_{i,2} \quad 2 \leq i \leq imax$$

- Paroi supérieure ($z = A$)

$$\Omega_{i,jmax} = \frac{1}{r_i} \frac{2}{\Delta z^2} \psi_{i,jmax} \quad 2 \leq i \leq i_{max}$$

En vue de réduire les instabilités susceptibles d'être engendrées par la perte de précision due à l'évaluation du rotationnel sur les limites. La valeur du vecteur rotationnel aux frontières est estimée par une formule de pondération comme suit.

$$\Omega^{t+\Delta t}_{i,j} = (1 - \bar{u})\Omega^t_{i,j} + \bar{u}\check{\Omega}^{t+\Delta t}_{i,j}$$

Où \bar{u} et $\check{\Omega}$ sont respectivement le coefficient de pondération et la valeur de rotationnel calculée par l'une des expressions susmentionnées. Le coefficient de pondération sert à ralentir l'évolution du rotationnel devant le transport de chaleur, ce coefficient ne doit pas être trop faible pour éviter des fausses convergences, qui correspondraient à une stagnation du processus. Nous prendrons ce coefficient compris entre 0,5 et 0,1.

IV. Conditions initiales

La résolution des équations étant basée sur la technique pseudo-transitoire, le processus de calcul consiste à initier le programme par un champ initial. Ce champ initial est arbitraire seulement il faut qu'il vérifie les conditions aux limites que nous avons considérées. Pour cela on a opté pour un profil initial : Le champ dynamique initial est nul, par contre pour la température et la concentration, ce champ initial est choisi sous forme suivante [52, 57, 58, 59] :

- ✓ Pour la température :

$$T = (1 - \frac{z}{A}) \left[1 - \vartheta (\cos \frac{3\pi}{2} r)^2 \sin(\pi \frac{z}{A}) \right]$$

- ✓ Pour la concentration :

$$C = (1 - \frac{z}{A}) \left[1 - \vartheta (\cos \frac{3\pi}{2} r)^2 \sin(\pi \frac{z}{A}) \right]$$

ϑ : Est un coefficient numérique donné.

V. Tests de convergence

Le test de convergence sur le temps est terminé quand le critère de convergence suivant est satisfait :

$$\frac{\sum_i \sum_j |f_{i,j}^{t+\Delta t} - f_{i,j}^t|}{\sum_i \sum_j |f_{i,j}^{t+\Delta t}|} \leq \vartheta_1$$

Dans le cas où il s'avère nécessaire d'effectuer des itérations internes pour la fonction de courant, un critère de convergence suivant doit être satisfait :

$$\frac{\text{Max}|\psi^{l+1} - \psi^l|}{\text{Min}|\psi^{l+1}| + \text{Max}|\psi^l|} \leq \vartheta_2$$

Avec :

- l : Est le numéro de l'itération interne ;
- f : Représente la température, la concentration ou la vorticité ;
- ϑ_1 et ϑ_2 : Sont des constantes fixées à l'avance.

Discrétisation des équations qui gouvernent la Magnéto - convection

L'équation de mouvement tenant compte d'un champ magnétique s'écrit sous la forme suivante :

	f	ξ_{pr}	ξ_{pz}	ξ_{sr}	ξ_{sz}	ξ_r	ξ_z	ξ	S
Equation de mouvement avec un champ magnétique	Ω	$-\frac{1}{\varepsilon^2}$	$-\frac{1}{\varepsilon^2}$	$\frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon}$	$\frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon}$	$\frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon} \frac{1}{r}$	0	$-\left(\bar{\lambda} \frac{P_r}{Da} + \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon r^2} + \frac{C_F}{\sqrt{Da}}\right) \vec{V} - \frac{C_F}{\bar{\lambda} P_r Ha^2}$	$-\bar{\lambda}^2 R_a P_r \left(\frac{\partial T}{\partial \bar{r}} + N \frac{\partial C}{\partial r}\right) + \frac{C_F}{\sqrt{Da}} \left(W \frac{\partial \vec{V} }{\partial \bar{r}} - U \frac{\partial \vec{V} }{\partial \bar{z}}\right)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_{FR}} \frac{\partial \Omega}{\partial t} = & -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial(U\Omega)}{\partial r} - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial(W\Omega)}{\partial z} - \bar{\lambda} \frac{P_r}{Da} \Omega - \bar{\lambda}^2 R_T P_r \left(\frac{\partial T}{\partial r} + N \frac{\partial C}{\partial r}\right) \\ & + \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \bar{z}^2} - \frac{\Omega}{r^2}\right) - \frac{C_F}{\sqrt{Da}} |\vec{V}| \Omega + \frac{C_F}{\sqrt{Da}} \left(W \frac{\partial |\vec{V}|}{\partial r} - U \frac{\partial |\vec{V}|}{\partial z}\right) \\ & - \bar{\lambda} P_r Ha^2 \Omega \end{aligned}$$

C. Premier balayage

$$\iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{1}{\alpha_{FR}} \frac{\partial \Omega}{\partial t} r dr dz dt = \frac{1}{\alpha_{FR}} \left(\Omega_p^{t+\Delta t/2} - \Omega_p^t\right) r_p \Delta r \Delta z$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\varepsilon^2} \iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{\partial(U\Omega)}{\partial r} r dr dz dt \\ = -\frac{1}{\varepsilon^2} r_p \left(\left(U_E^t \Omega_E^{t+\Delta t/2} - U_p^t \Omega_p^{t+\Delta t/2}\right) - \left(U_p^t \Omega_p^{t+\Delta t/2} - U_0^t \Omega_0^{t+\Delta t/2}\right) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2} \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2} \iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{\partial(W\Omega)}{\partial z} r dr dz dt = -\frac{1}{\varepsilon^2} r_p \left(\left(W_N^t \Omega_N^t - W_p^t \Omega_p^t\right) - \left(W_p^t \Omega_p^t - W_S^t \Omega_S^t\right) \right) \Delta r \frac{\Delta t}{2}$$

$$-\bar{\Lambda} \frac{P_r}{D_a} \iint_t^{t+\Delta t/2} \Omega r dr dz dt = -\bar{\Lambda} \frac{P_r}{D_a} r_p \Omega_p^{t+\Delta t/2} \Delta r \Delta z \frac{\Delta t}{2}$$

$$-\bar{\Lambda}^2 R_a P_r \iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{\partial T}{\partial r} r dr dz dt = -\bar{\Lambda}^2 R_T P_r r_p \left((T_E^t - T_p^t) - (T_p^t - T_o^t) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2}$$

$$-\bar{\Lambda}^2 R_a P_r N \iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{\partial C}{\partial r} r dr dz dt = -\bar{\Lambda}^2 R_T P_r N r_p \left((C_E^t - C_p^t) - (C_p^t - C_o^t) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2}$$

$$\frac{\bar{\Lambda} P_r}{\varepsilon} \iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} r dr dz dt = \frac{\bar{\Lambda} P_r}{\varepsilon} r_p \left(\left(\frac{\Omega_E^{t+\Delta t/2} - \Omega_p^{t+\Delta t/2}}{\Delta r} \right) - \left(\frac{\Omega_p^{t+\Delta t/2} - \Omega_o^{t+\Delta t/2}}{\Delta r} \right) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2}$$

$$\frac{\bar{\Lambda} P_r}{\varepsilon} \iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} r dr dz dt = \frac{\bar{\Lambda} P_r}{\varepsilon} \left(\left(\Omega_E^{t+\Delta t/2} - \Omega_p^{t+\Delta t/2} \right) - \left(\Omega_p^{t+\Delta t/2} - \Omega_o^{t+\Delta t/2} \right) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2}$$

$$\frac{\bar{\Lambda} P_r}{\varepsilon} \iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} r dr dz dt = \frac{\bar{\Lambda} P_r}{\varepsilon} r_p \left(\left(\frac{\Omega_N^t - \Omega_p^t}{\Delta z} \right) - \left(\frac{\Omega_p^t - \Omega_S^t}{\Delta z} \right) \right) \Delta r \frac{\Delta t}{2}$$

$$-\frac{\bar{\Lambda} P_r}{\varepsilon} \iint_t^{t+\Delta t/2} \frac{\Omega}{r^2} r dr dz dt = -\frac{\bar{\Lambda} P_r}{\varepsilon} \frac{\Omega_p^{t+\Delta t/2}}{r_p} \Delta r \Delta z \frac{\Delta t}{2}$$

$$-\frac{C_F}{\sqrt{D_a}} \iint_t^{t+\Delta t/2} |\vec{V}| \Omega r dr dz dt = -\frac{C_F}{\sqrt{D_a}} |\vec{V}|_p^t \Omega_p^{t+\Delta t/2} r_p \Delta r \Delta z \frac{\Delta t}{2}$$

$$\frac{C_F}{\sqrt{D_a}} \iint_t^{t+\Delta t/2} W \frac{\partial |\vec{V}|}{\partial r} r dr dz dt = \frac{C_F}{\sqrt{D_a}} r_p W_p^t \left((|\vec{V}|_E^t - |\vec{V}|_p^t) - (|\vec{V}|_p^t - |\vec{V}|_o^t) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2}$$

$$-\frac{C_F}{\sqrt{D_a}} \iint_t^{t+\Delta t/2} U \frac{\partial |\vec{V}|}{\partial z} r dr dz dt = -\frac{C_F}{\sqrt{D_a}} r_p U_p^t \left((|\vec{V}|_N^t - |\vec{V}|_p^t) - (|\vec{V}|_p^t - |\vec{V}|_S^t) \right) \Delta r \frac{\Delta t}{2}$$

$$-\bar{\lambda} P_r H a^2 \iint_t^{t+\Delta t/2} \Omega r dr dz dt = -\bar{\lambda} P_r H a^2 r_p \Omega_p^{t+\Delta t/2} \Delta r \Delta z \frac{\Delta t}{2}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha_{FR}} \frac{\Omega_p^{t+\Delta t/2} - \Omega_p^t}{\Delta t/2} \\ &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\left(U_E^t \Omega_E^{t+\Delta t/2} - 2U_p^t \Omega_p^{t+\Delta t/2} + U_o^t \Omega_o^{t+\Delta t/2} \right)}{\Delta r} \\ & - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\left(W_N^t \Omega_N^t - 2W_p^t \Omega_p^t + W_S^t \Omega_S^t \right)}{\Delta z} - \bar{\lambda} \frac{P_r}{D_a} \Omega_p^{t+\Delta t/2} - \bar{\lambda}^2 R_T P_r \frac{(T_E^t - 2T_p^t + T_o^t)}{\Delta r} \\ & - \bar{\lambda}^2 R_T P_r N \frac{(C_E^t - 2C_p^t + C_o^t)}{\Delta r} + \frac{\bar{\lambda} P_r \Omega_E^{t+\Delta t/2} - 2\Omega_p^{t+\Delta t/2} + \Omega_o^{t+\Delta t/2}}{\varepsilon (\Delta r)^2} \\ & + \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon} \left(\frac{\Omega_E^{t+\Delta t/2} - 2\Omega_p^{t+\Delta t/2} + \Omega_o^{t+\Delta t/2}}{r_p \Delta r} \right) + \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon} \left(\frac{\Omega_N^t - 2\Omega_p^t + \Omega_S^t}{(\Delta z)^2} \right) - \frac{\bar{\lambda} P_r \Omega_p^{t+\Delta t/2}}{\varepsilon r_p^2} \\ & - \frac{C_F}{\sqrt{D_a}} |\vec{V}|_p^t \Omega_p^{t+\Delta t/2} + \frac{C_F}{\sqrt{D_a}} W_p^t \frac{(|\vec{V}|_E^t - 2|\vec{V}|_p^t + |\vec{V}|_o^t)}{\Delta r} \\ & - \frac{C_F}{\sqrt{D_a}} U_p^t \frac{(|\vec{V}|_N^t - 2|\vec{V}|_p^t + |\vec{V}|_S^t)}{\Delta z} - \bar{\lambda} P_r H a^2 \Omega_p^{t+\Delta t/2} \end{aligned}$$

Cette équation peut se mettre sous forme :

$$A_E \bar{\Omega}_E^{t+\Delta t/2} + B_P \bar{\Omega}_P^{t+\Delta t/2} + C_o \bar{\Omega}_o^{t+\Delta t/2} = D$$

Avec :

$$A_E = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{U_E^t}{\varepsilon^2 \Delta r} - \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon (\Delta r)^2} - \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon r_p \Delta r} \right)$$

$$A_{i+1,j} = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{U_{i+1,j}^t}{\varepsilon^2 \Delta r} - \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon (\Delta r)^2} - \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon r_{i,j} \Delta r} \right)$$

$$B_P = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{2}{\alpha_{FR} \Delta t} - \frac{2U_p^t}{\varepsilon^2 \Delta r} + \bar{\lambda} \frac{P_r}{D_a} + \frac{2\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon (\Delta r)^2} + \frac{2\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon r_p \Delta r} + \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon r_p^2} + \frac{C_F}{\sqrt{D_a}} |\vec{V}|_p^t + \bar{\lambda} P_r H a^2 \right)$$

$$\begin{aligned} B_{i,j} = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{2}{\alpha_{FR} \Delta t} - \frac{2U_{i,j}^t}{\varepsilon^2 \Delta r} + \bar{\lambda} \frac{P_r}{D_a} + \frac{2\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon (\Delta r)^2} + \frac{2\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon r_{i,j} \Delta r} + \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon r_{i,j}^2} + \frac{C_F}{\sqrt{D_a}} |\vec{V}|_{i,j}^t \right. \\ \left. + \bar{\lambda} P_r H a^2 \right) \end{aligned}$$

$$C_o = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{U_o^t}{\varepsilon^2 \Delta r} - \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon (\Delta r)^2} - \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon r_p \Delta r} \right)$$

$$C_{i-1,j} = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{U_{i-1,j}^t}{\varepsilon^2 \Delta r} - \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon (\Delta r)^2} - \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon r_{i,j} \Delta r} \right)$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{2}{\alpha_{FR} \Delta t} \Omega_p^t - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{(W_N^t \Omega_N^t - 2W_p^t \Omega_p^t + W_S^t \Omega_S^t)}{\Delta z} - \bar{\lambda}^2 R_a P_r \frac{(T_E^t - 2T_p^t + T_o^t)}{\Delta r} \right. \\ &\quad - \bar{\lambda}^2 R_a P_r N \frac{(C_E^t - 2C_p^t + C_o^t)}{\Delta r} + \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon} \left(\frac{\Omega_N^t - 2\Omega_p^t + \Omega_S^t}{(\Delta z)^2} \right) \\ &\quad \left. + \frac{C_F}{\sqrt{Da}} W_p^t \frac{(|\vec{V}|_E^t - 2|\vec{V}|_p^t + |\vec{V}|_o^t)}{\Delta r} - \frac{C_F}{\sqrt{Da}} U_p^t \frac{(|\vec{V}|_N^t - 2|\vec{V}|_p^t + |\vec{V}|_S^t)}{\Delta z} \right) \\ &= \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{2}{\alpha_{FR} \Delta t} \Omega_{ij}^t - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{(W_{ij+1}^t \Omega_{ij+1}^t - 2W_{ij}^t \Omega_{ij}^t + W_{ij-1}^t \Omega_{ij-1}^t)}{\Delta z} \right. \\ &\quad - \bar{\lambda}^2 R_T P_r \frac{(T_{i+1,j}^t - 2T_{ij}^t + T_{i-1,j}^t)}{\Delta r} - \bar{\lambda}^2 R_T P_r N \frac{(C_{i+1,j}^t - 2C_{ij}^t + C_{i-1,j}^t)}{\Delta r} \\ &\quad + \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon} \left(\frac{\Omega_{ij+1}^t - 2\Omega_{ij}^t + \Omega_{ij-1}^t}{(\Delta z)^2} \right) + \frac{C_F}{\sqrt{Da}} W_{ij}^t \frac{(|\vec{V}|_{i+1,j}^t - 2|\vec{V}|_{ij}^t + |\vec{V}|_{i-1,j}^t)}{\Delta r} \\ &\quad \left. - \frac{C_F}{\sqrt{Da}} U_{ij}^t \frac{(|\vec{V}|_{ij+1}^t - 2|\vec{V}|_{ij}^t + |\vec{V}|_{ij-1}^t)}{\Delta z} \right) \end{aligned}$$

D. Deuxième balayage

$$\iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{1}{\alpha_{FR}} \frac{\partial \Omega}{\partial t} r dr dz dt = \frac{1}{\alpha_{FR}} \left(\Omega_p^{t+\Delta t} - \Omega_p^{t+\Delta t/2} \right) r_p \Delta r \Delta z$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{\partial (U\Omega)}{\partial r} r dr dz dt \\ &= - \frac{1}{\varepsilon^2} r_p \left(\left(U_E^t \Omega_E^{t+\Delta t/2} - U_p^t \Omega_p^{t+\Delta t/2} \right) - \left(U_p^t \Omega_p^{t+\Delta t/2} - U_o^t \Omega_o^{t+\Delta t/2} \right) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\varepsilon^2} \iint_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(W\Omega)}{\partial z} r dr dz dt \\
& \quad = -\frac{1}{\varepsilon^2} r_p \left((w_N^t \Omega_N^{t+\Delta t} - W_p^t \Omega_p^{t+\Delta t}) - (W_p^t \Omega_p^{t+\Delta t} - W_S^t \Omega_S^{t+\Delta t}) \right) \Delta r \frac{\Delta t}{2} \\
& \quad \quad - \bar{\kappa} \frac{P_r}{D_a} \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \Omega r dr dz dt = -\bar{\kappa} \frac{P_r}{D_a} r_p \Omega_p^{t+\Delta t} \Delta r \Delta z \frac{\Delta t}{2} \\
& -\bar{\kappa}^2 R_a P_r \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial r} r dr dz dt = -\bar{\kappa}^2 R_T P_r r_p \left((T_E^t - T_p^t) - (T_p^t - T_0^t) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2} \\
& -\bar{\kappa}^2 R_a P_r N \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{\partial C}{\partial r} r dr dz dt = -\bar{\kappa}^2 R_T P_r N r_p \left((C_E^t - C_p^t) - (C_p^t - C_0^t) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2} \\
& \frac{\bar{\kappa} P_r}{\varepsilon} \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} r dr dz dt = \frac{\bar{\kappa} P_r}{\varepsilon} r_p \left(\left(\frac{\Omega_E^{t+\Delta t/2} - \Omega_p^{t+\Delta t/2}}{\Delta r} \right) - \left(\frac{\Omega_p^{t+\Delta t/2} - \Omega_0^{t+\Delta t/2}}{\Delta r} \right) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2} \\
& \frac{\bar{\kappa} P_r}{\varepsilon} \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} r dr dz dt = \frac{\bar{\kappa} P_r}{\varepsilon} \left(\left(\Omega_E^{t+\Delta t/2} - \Omega_p^{t+\Delta t/2} \right) - \left(\Omega_p^{t+\Delta t/2} - \Omega_0^{t+\Delta t/2} \right) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2} \\
& \frac{\bar{\kappa} P_r}{\varepsilon} \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} r dr dz dt = \frac{\bar{\kappa} P_r}{\varepsilon} r_p \left(\left(\frac{\Omega_N^{t+\Delta t} - \Omega_p^{t+\Delta t}}{\Delta z} \right) - \left(\frac{\Omega_p^{t+\Delta t} - \Omega_S^{t+\Delta t}}{\Delta z} \right) \right) \Delta r \frac{\Delta t}{2} \\
& \quad - \frac{\bar{\kappa} P_r}{\varepsilon} \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \frac{\Omega}{r^2} r dr dz dt = -\frac{\bar{\kappa} P_r}{\varepsilon} \frac{\Omega_p^{t+\Delta t}}{r_p} \Delta r \Delta z \frac{\Delta t}{2} \\
& \quad - \frac{C_F}{\sqrt{D_a}} \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} |\vec{V}| \Omega r dr dz dt = -\frac{C_F}{\sqrt{D_a}} |\vec{V}|_p^t \Omega_p^{t+\Delta t} r_p \Delta r \Delta z \frac{\Delta t}{2} \\
& \frac{C_F}{\sqrt{D_a}} \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} W \frac{\partial |\vec{V}|}{\partial r} r dr dz dt = \frac{C_F}{\sqrt{D_a}} r_p W_p^t \left((|\vec{V}|_E^t - |\vec{V}|_p^t) - (|\vec{V}|_p^t - |\vec{V}|_0^t) \right) \Delta z \frac{\Delta t}{2}
\end{aligned}$$

$$-\frac{C_F}{\sqrt{Da}} \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} U \frac{\partial |\vec{V}|}{\partial z} r dr dz dt = -\frac{C_F}{\sqrt{Da}} r_p U_p^t \left((|\vec{V}|_N^t - |\vec{V}|_P^t) - (|\vec{V}|_P^t - |\vec{V}|_S^t) \right) \Delta r \frac{\Delta t}{2}$$

$$-\bar{\lambda} P_r Ha^2 \iint_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} \Omega r dr dz dt = -\bar{\lambda} P_r Ha^2 r_p \Omega_p^{t+\Delta t} \Delta r \Delta z \frac{\Delta t}{2}$$

Cette équation s'écrit :

$$\frac{1}{\alpha_{FR}} \frac{\Omega_p^{t+\Delta t} - \Omega_p^{t+\Delta t/2}}{\Delta t/2}$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\left(U_E^t \Omega_E^{t+\Delta t/2} - 2U_P^t \Omega_P^{t+\Delta t/2} + U_O^t \Omega_O^{t+\Delta t/2} \right) \Delta r}{\varepsilon^2}$$

$$- \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\left(W_N^t \Omega_N^{t+\Delta t} - 2W_P^t \Omega_P^{t+\Delta t} + W_S^t \Omega_S^{t+\Delta t} \right) \Delta z}{\varepsilon^2} - \bar{\lambda} \frac{P_r}{Da} \Omega_p^{t+\Delta t}$$

$$- \bar{\lambda}^2 R_T P_r \frac{(T_E^t - 2T_P^t + T_O^t) \Delta r}{\Delta r} - \bar{\lambda}^2 R_T P_r N \frac{(C_E^t - 2C_P^t + C_O^t) \Delta r}{\Delta r}$$

$$+ \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon} \left(\frac{\Omega_E^{t+\Delta t/2} - 2\Omega_P^{t+\Delta t/2} + \Omega_O^{t+\Delta t/2}}{(\Delta r)^2} \right) + \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon} \left(\frac{\Omega_E^{t+\Delta t/2} - 2\Omega_P^{t+\Delta t/2} + \Omega_O^{t+\Delta t/2}}{r_p \Delta r} \right)$$

$$+ \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon} \left(\frac{\Omega_N^{t+\Delta t} - 2\Omega_P^{t+\Delta t} + \Omega_S^{t+\Delta t}}{(\Delta z)^2} \right) - \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon} \frac{\Omega_p^{t+\Delta t}}{r_p^2} - \frac{C_F}{\sqrt{Da}} |\vec{V}|_P^t \Omega_p^{t+\Delta t}$$

$$+ \frac{C_F}{\sqrt{Da}} W_P^t \frac{(|\vec{V}|_E^t - 2|\vec{V}|_P^t + |\vec{V}|_O^t) \Delta r}{\Delta r} - \frac{C_F}{\sqrt{Da}} U_P^t \frac{(|\vec{V}|_N^t - 2|\vec{V}|_P^t + |\vec{V}|_S^t) \Delta z}{\Delta z}$$

$$- \bar{\lambda} P_r Ha^2 \Omega_p^{t+\Delta t}$$

Soit finalement :

$$A_N \Omega_N^{t+\Delta t} + B_P \Omega_P^{t+\Delta t} + C_S \Omega_S^{t+\Delta t} = D$$

Avec :

$$A_N = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{W_N^t}{\varepsilon^2 \Delta z} - \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon (\Delta z)^2} \right)$$

$$A_{i,j+1} = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{W_{ij+1}^t}{\varepsilon^2 \Delta z} - \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon (\Delta z)^2} \right)$$

$$B_P = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{2}{\alpha_{FR} \Delta t} - \frac{2W_P^t}{\varepsilon^2 \Delta z} + \bar{\lambda} \frac{P_r}{Da} + \frac{2\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon (\Delta z)^2} + \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon r_p^2} + \frac{C_F}{\sqrt{Da}} |\vec{V}|_P^t + \bar{\lambda} P_r Ha^2 \right)$$

$$B_{i,j} = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{2}{\alpha_{FR} \Delta t} - \frac{2W_{ij}^t}{\varepsilon^2 \Delta z} + \bar{\lambda} \frac{P_r}{D_a} + \frac{2\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon (\Delta z)^2} + \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon r_{i,j}^2} + \frac{C_F}{\sqrt{Da}} |\vec{V}|_{ij}^t + \bar{\lambda} P_r Ha^2 \right)$$

$$C_S = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{W_S^t}{\varepsilon^2 \Delta z} - \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon (\Delta z)^2} \right)$$

$$C_{i,j-1} = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{W_{ij-1}^t}{\varepsilon^2 \Delta z} - \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon (\Delta z)^2} \right)$$

$$D = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{2}{\alpha_{FR} \Delta t} \Omega_p^{t+\Delta t/2} - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\left(U_E^t \Omega_E^{t+\Delta t/2} - 2U_p^t \Omega_p^{t+\Delta t/2} + U_O^t \Omega_O^{t+\Delta t/2} \right)}{\Delta r} \right. \\ - \bar{\lambda}^2 R_T P_r \frac{(T_E^t - 2T_p^t + T_O^t)}{\Delta r} - \bar{\lambda}^2 R_T P_r N \frac{(C_E^t - 2C_p^t + C_O^t)}{\Delta r} \\ + \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon} \left(\frac{\Omega_E^{t+\Delta t/2} - 2\Omega_p^{t+\Delta t/2} + \Omega_O^{t+\Delta t/2}}{(\Delta r)^2} \right) \\ + \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon} \left(\frac{\Omega_E^{t+\Delta t/2} - 2\Omega_p^{t+\Delta t/2} + \Omega_O^{t+\Delta t/2}}{r_p \Delta r} \right) + \frac{C_F}{\sqrt{Da}} W_p^t \frac{(|\vec{V}|_E^t - 2|\vec{V}|_p^t + |\vec{V}|_O^t)}{\Delta r} \\ \left. - \frac{C_F}{\sqrt{Da}} U_p^t \frac{(|\vec{V}|_N^t - 2|\vec{V}|_p^t + |\vec{V}|_S^t)}{\Delta z} \right)$$

$$D = \frac{\alpha_{FR} \Delta t}{2} \left(\frac{2}{\alpha_{FR} \Delta t} \Omega_{ij}^{t+\Delta t/2} - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\left(U_{i+1,j}^t \Omega_E^{t+\Delta t/2} - 2U_{ij}^t \Omega_{ij}^{t+\Delta t/2} + U_{i-1,j}^t \Omega_{i-1,j}^{t+\Delta t/2} \right)}{\Delta r} \right. \\ - \bar{\lambda}^2 R_T P_r \frac{(T_{i+1,j}^t - 2T_{ij}^t + T_{i-1,j}^t)}{\Delta r} - \bar{\lambda}^2 R_T P_r N \frac{(C_{i+1,j}^t - 2C_{ij}^t + C_{i-1,j}^t)}{\Delta r} \\ + \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon} \left(\frac{\Omega_{i+1,j}^{t+\Delta t/2} - 2\Omega_{ij}^{t+\Delta t/2} + \Omega_{i-1,j}^{t+\Delta t/2}}{(\Delta r)^2} \right) \\ + \frac{\bar{\lambda} P_r}{\varepsilon} \left(\frac{\Omega_{i+1,j}^{t+\Delta t/2} - 2\Omega_{ij}^{t+\Delta t/2} + \Omega_{i-1,j}^{t+\Delta t/2}}{r_{i,j} \Delta r} \right) + \frac{C_F}{\sqrt{Da}} W_{ij}^t \frac{(|\vec{V}|_{i+1,j}^t - 2|\vec{V}|_{ij}^t + |\vec{V}|_{i-1,j}^t)}{\Delta r} \\ \left. - \frac{C_F}{\sqrt{Da}} U_p^t \frac{(|\vec{V}|_{i,j+1}^t - 2|\vec{V}|_{ij}^t + |\vec{V}|_{i,j-1}^t)}{\Delta z} \right)$$

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons procédé à la discrétisation de toutes les équations qui gouvernent le phénomène étudié et ce, en utilisant la méthode des volumes finis. Les équations algébriques ainsi obtenues sont résolues à l'aide des méthodes itératives (ADI, double balayage de CHOLESKI, etc.). Pour ce faire, nous avons rédigé un code numérique en Langage Fortran et les résultats obtenus seront exposés et interprétés dans le chapitre suivant.

Chapitre 4 : Résultats et Discussion

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats qu'on a obtenus lors de la résolution du problème sur le phénomène de la convection thermosolutale (Transfert combiné de chaleur et de masse). Ce chapitre comporte deux parties : Dans la première partie nous avons étudié la convection thermosolutale, en tenant compte de l'effet SORET et DUFOUR, dans une cavité poreuse, isotrope de forme cylindrique remplie d'un nanofluide (nanoparticules d'aluminium). La deuxième partie que nous avons étudiée, tient en compte de l'effet du champ magnétique sur la convection thermosolutale dans une cavité poreuse cylindrique remplie d'un nano fluide électriquement conducteur. L'effet SORET et DUFOUR est pris en compte.

Nous avons ainsi étudié l'effet des différents paramètres tels que le nombre de RAYLEIGH, le nombre de SORET, le nombre de DUFOUR, le nombre de PRANDTL, le rapport des poussées, le rapport d'aspect géométrique et la fraction volumique des nanoparticules sur le taux de transfert de chaleur et de concentration.

Résultats de la première partie de l'étude

II. Influence des paramètres

Dans cette partie, nous allons étudier l'influence de certains paramètres qui gouvernent notre phénomène à savoir l'effet de : RAYLEIGH thermique, nombre de PRANDTL, rapport de poussée, nombre de NUSSELT, etc., sur la convection thermosolutale.

II.1. Influence du nombre de RAYLEIGH thermique, R_T

Les figures 3 et 4, montrent l'influence du nombre de RAYLEIGH thermique, R_T , sur le transfert de chaleur et de masse, pour trois valeurs du paramètre de forme A et pour : $N = 1$, $Le = 1$, $Pr = 1$, $Da = 0.001$, $Sr = 1$, $\varphi = 0.05$ et $Du = 1$.

D'après les courbes représentées sur cette figure, on remarque que le taux de transfert thermique et solutale est resté inchangé pour $R_T < 5 \times 10^2$. Quand le nombre de RAYLEIGH Thermique dépasse ce seuil $R_T \in [5 \times 10^2 - 10^4]$ on constate une augmentation des nombres de nusselt moyen et Sherwood moyen avec l'augmentation de R_T . Cette augmentation résulte de l'élévation de force volume thermique en raison de l'augmentation de R_T . On peut également noter que le transfert de chaleur est favorisé par l'augmentation du rapport d'aspect (Fig. 3) pour toute valeur du nombre de RAYLEIGH comprise dans l'intervalle $[10, 10^4]$. Ce n'est pas le cas pour le numéro de Sherwood à moins que R_T ne dépasse la valeur 5×10^2 . Cette différence est due à l'effet de thermo-diffusion.

Le tableau 1 illustre la variation absolue et relative du nombre NUSSELT moyen et de SHERWOOD moyen pour R_T allant de : $R_T = 10$ à $R_T = 10^4$ pour trois valeurs de paramètre de forme géométrique A .

La valeur des variations absolue et relative est positive pour les trois valeurs de A . Une telle augmentation de A provoque une augmentation des taux de transfert thermique et massique.

Sur les figures 5 et 6, on a illustré les isothermes et les iso-concentrations pour différents nombres de RAYLEIGH thermique $R_T = 10$ et $R_T = 10^6$. À partir de ces deux figures, on remarque que lorsque le nombre RAYLEIGH thermique augmente ceci conduit à une augmentation de la température et de la concentration pour les lignes proches de la paroi supérieure et une diminution de ces grandeurs pour les lignes proches de la paroi inférieure. On dit que l'augmentation du nombre de RAYLEIGH thermique favorise l'accélération de phénomène de convection.

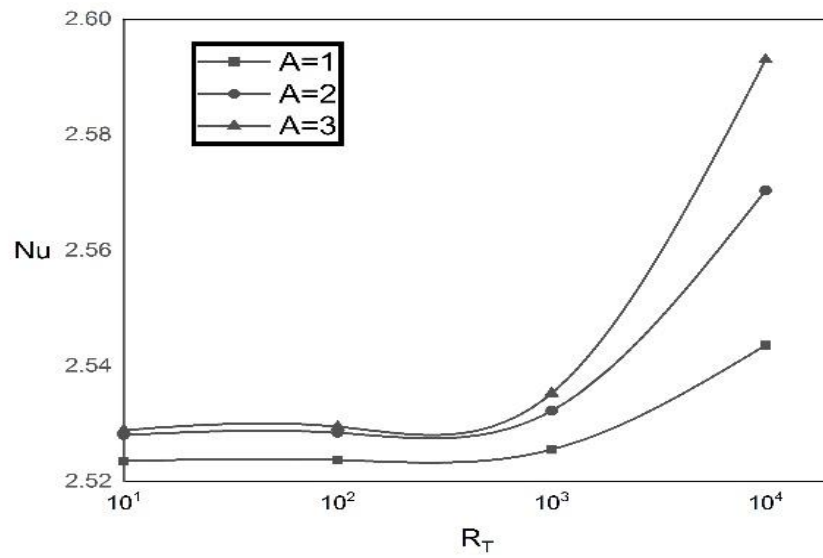


Figure 3: Influence de R_T sur Nu pour : $N = 1$, $Pr = 1$, $Le = 1$, $\varphi = 0.05$, $Da = 0.001$, $Sr = 1$, $Du = 1$

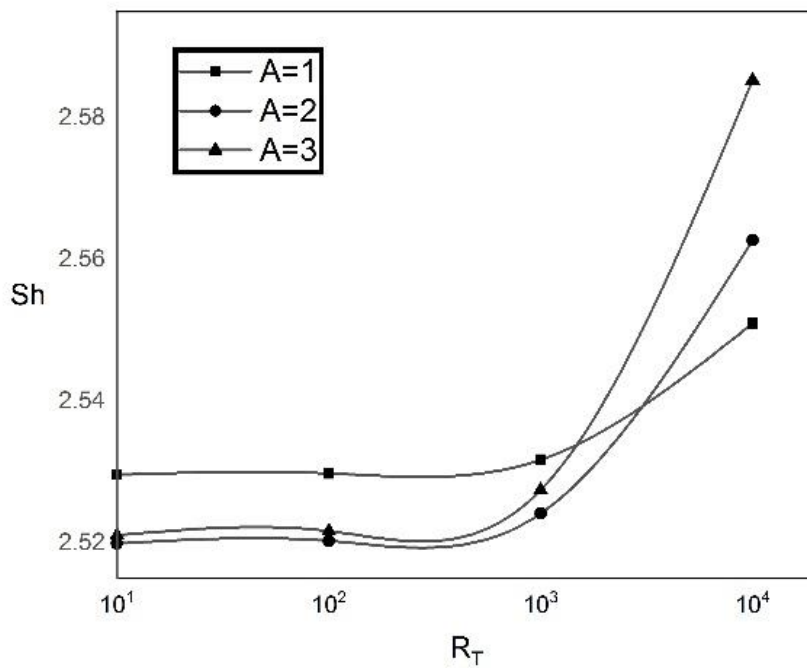
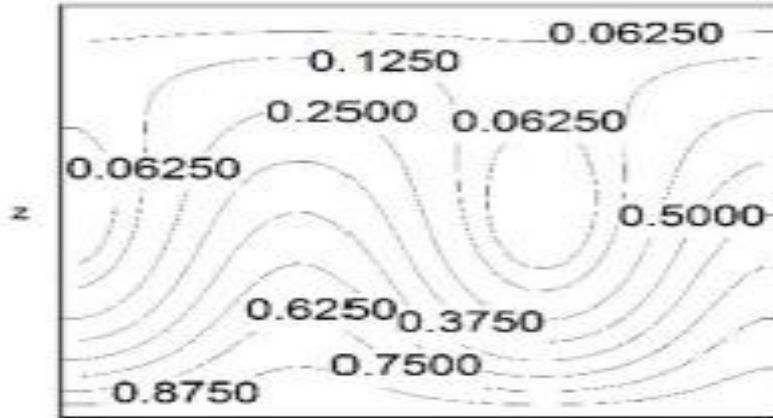


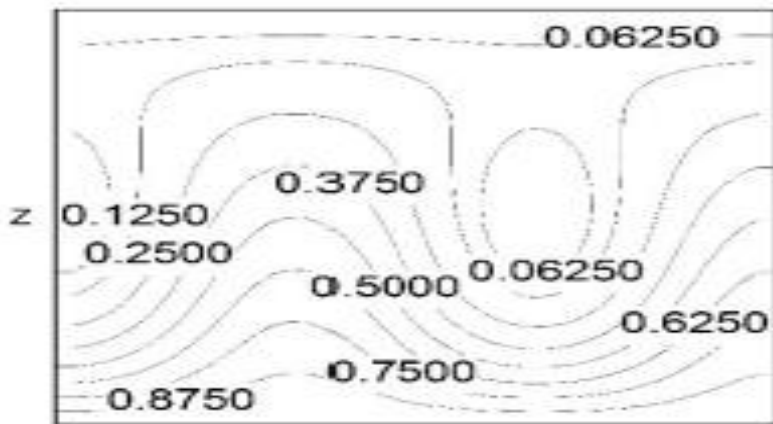
Figure 4 : Influence de R_T sur Sh pour $N = 1$, $Pr = 1$, $Le = 1$, $\varphi = 0.05$, $Da = 0.001$, $Sr = 1$, $Du = 1$

Rapport d'aspect géométrique A	1	2	3
Variation absolue de $Nu_{R_T=10}$ à $Nu_{R_T=10^4}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$4,2 \cdot 10^{-2}$	$6,4 \cdot 10^{-2}$
Variation relative de $Nu_{R_T=10}$ à $Nu_{R_T=10^4}$	$8 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$2,5 \cdot 10^{-2}$
Variation absolue de $Sh_{R_T=10}$ à $Sh_{R_T=10^4}$	$2,1 \cdot 10^{-2}$	$4,3 \cdot 10^{-2}$	$6,4 \cdot 10^{-2}$
Variation relative de $Sh_{R_T=10}$ à $Sh_{R_T=10^4}$	$8,4 \cdot 10^{-3}$	$1,7 \cdot 10^{-2}$	$2,5 \cdot 10^{-2}$

Table 1: Variation absolue et relative de NUSSELT moyen et de SHERWOOD moyen pour $R_T = 10$ à $R_T = 10^4$



(a)



(b)

Figure 5 : Isothermes (a) et iso-concentrations (b) : $A = 3$, $N = 1$, $R_T = 10$, $Pr = 1$, $Le = 1$, $\varphi = 0.05$, $Da = 0.001$, $Sr = 1$, $Du = 1$

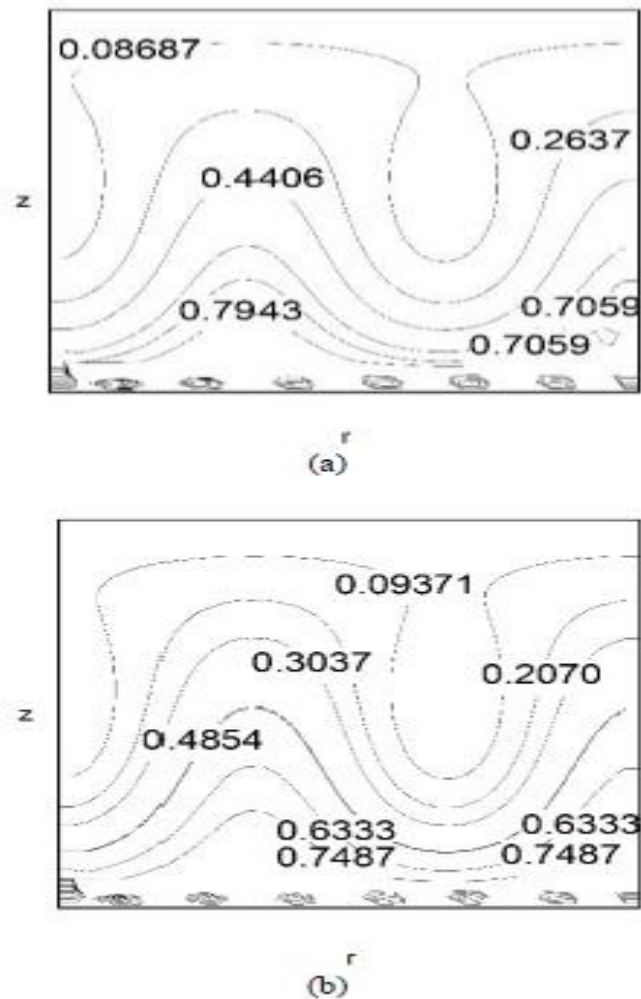


Figure 6 : Isothermes (a) et iso-concentrations(b) : $A = 3$, $N = 1$, $R_T = 10^6$, $Pr = 1$, $Le = 1$, $\varphi = 0.05$, $Da = 0.001$, $Sr = 1$ et $Du = 1$

II.2. Influence du nombre de PRANDTL, Pr

Pour mettre en évidence l'effet du nombre de PRANDTL sur le phénomène de convection on a visualisé cette influence pour des valeurs du nombre de PRANDTL variant entre 0,71 et 2,5 et pour trois valeurs du nombre RAYLEIGH thermique R_T .

Les figures 7 et 8 montrent l'effet du nombre de PRANDTL sur le transfert de chaleur et de masse pour $N = 1$, $Le = 1$, $A = 3$, $\varphi = 0.05$, $Da = 0.001$, $Sr = 1$, $Du = 1$. On constate sur cette figure, que les valeurs de NUSSELT moyen et de SHERWOOD moyen augmentent lorsque le nombre de RAYLEIGH thermique R_T augmente.

Le nombre de NUSSELT moyen et de SHERWOOD moyen augmente d'une façon monotone avec l'augmentation du nombre de PRANDTL. En effet, quand Pr augmente ceci conduit à l'augmentation des forces de volume thermique et solutale.

Nombre de RAYLEIGH thermique R_T	10^3	$5 \cdot 10^3$	10^4
Variation absolue de $Nu_{Pr=0.71}$ à $Nu_{Pr=2.5}$	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-2}$	$15 \cdot 10^{-2}$
Variation relative de $Nu_{Pr=0.71}$ à $Nu_{Pr=2.5}$	$6 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-2}$
Variation absolue de $Sh_{Pr=0.71}$ à $Sh_{Pr=2.5}$	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-2}$	$15 \cdot 10^{-2}$
Variation relative de $Sh_{Pr=0.71}$ à $Sh_{Pr=2.5}$	$6 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-2}$

Table 2 : Variation absolue et relative de NUSSELT moyen et de SHERWOOD moyen pour : $Pr = 0,71$ à $Pr = 2,5$

La table 2, donne la variation absolue et relative du nombre de NUSSELT moyen et de SHERWOOD moyen pour : $Pr = 0,71$ à $Pr = 2,5$ et pour trois valeurs de R_T . La valeur des variations absolue et relative est positive quand R_T augmente. Une augmentation de ce dernier nombre s'accompagne d'une augmentation de taux de transfert thermique et massique.

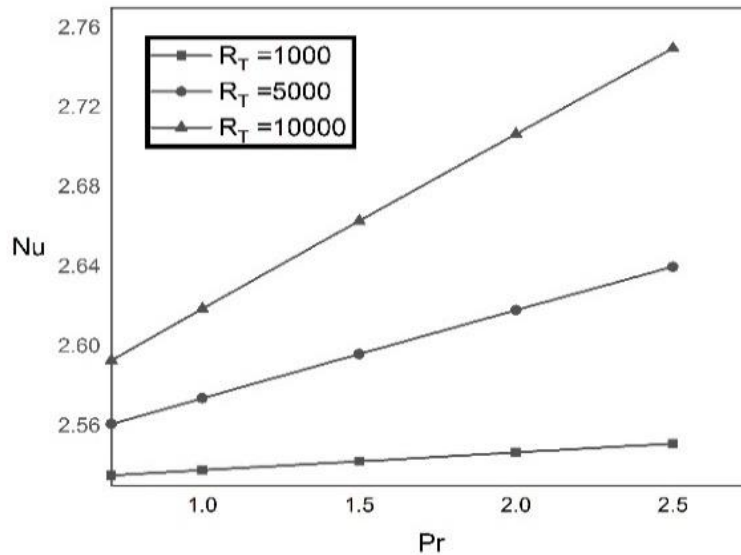


Figure 7 : Influence de Pr sur Nu : $N = 1$, $A = 3$, $Le = 1$, $\varphi = 0,05$, $Da = 0,001$, $Sr = 1$, $Du = 1$

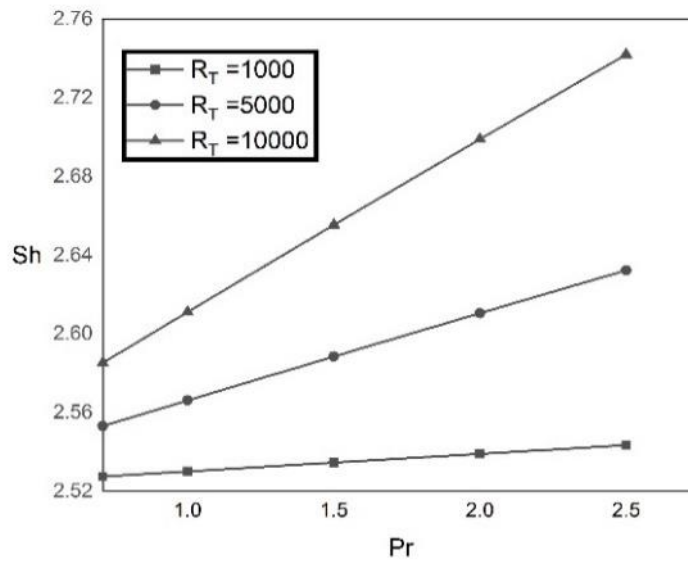


Figure 8 : Influence de Pr sur Sh , pour : $N = 1$, $A = 3$, $Le = 1$, $\varphi = 0,05$, $Da = 0,001$, $Sr = 1$, $Du = 1$

II.3. Influence du nombre de rapport des poussées, N

Les figures 9 et 10 montrent l'influence de rapport des poussées N sur le transfert de chaleur et de masse pour trois valeurs du nombre de RAYLEIGH thermique et pour les autres grandeurs fixées comme suit : $Le = 1$, $Pr = 1$, $A = 3$, $\varphi = 0,05$, $Da = 0,001$, $Sr = 1$, $Du = 1$ et N variant entre 1 et 10. On remarque que la valeur de NUSSELT moyen et de SHERWOOD moyen garde une valeur positive au fur et à mesure que le nombre de RAYLEIGH thermique augmente.

Les nombres de NUSSELT moyen et SHERWOOD moyen évoluent d'une façon monotone avec l'augmentation du nombre de rapport des poussées. Cette augmentation résulte de l'augmentation des forces volumiques.

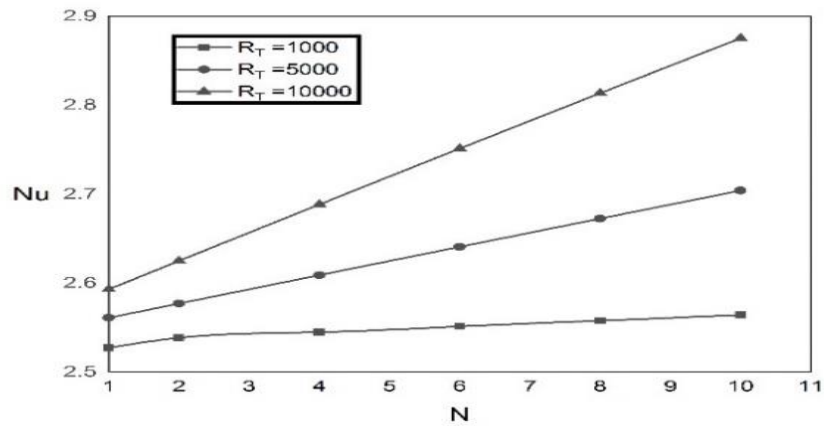


Figure 9 : Influence de N sur Nu avec : $A=3$, $Le=1$, $\varphi = 0.05$, $Pr = 1$, $Da = 0.001$, $Sr = 1$, $Du = 1$

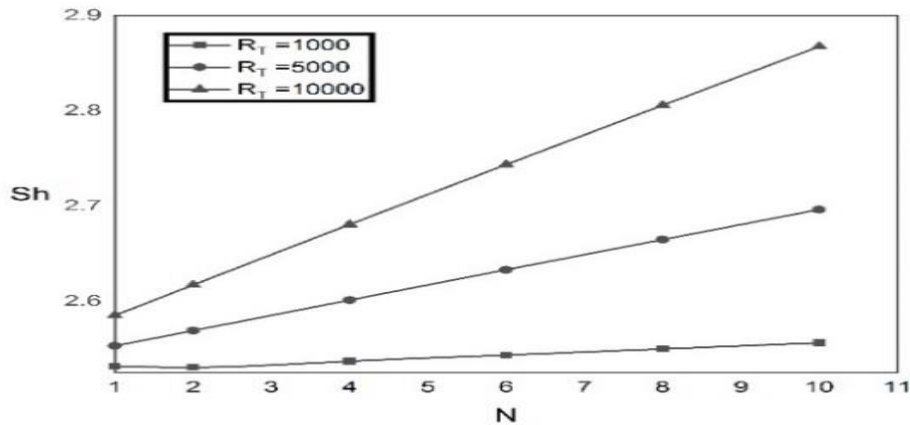


Figure 10 : Influence de N sur Sh : $A=3$, $Le=1$, $\varphi = 0.05$, $Pr = 1$, $Da = 0.001$, $Sr = 1$, $Du = 1$

Nombre de RAYLEIGH thermique R_T	10^3	5.10^3	10^4
Variation absolue de $Nu_{N=1}$ à $Nu_{N=10}$	$3,6 \cdot 10^{-2}$	0.14	0.28
Variation relative de $Nu_{N=1}$ à $Nu_{N=10}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$5,5 \cdot 10^{-2}$	0.1
Variation absolue de $Sh_{N=1}$ à $Sh_{N=10}$	$2,4 \cdot 10^{-2}$	0.14	0.28
Variation relative de $Sh_{N=1}$ à $Sh_{N=10}$	10^{-2}	$5,6 \cdot 10^{-2}$	0.11

Table 3 : Variation absolue et relative de NUSSELT moyen et de SHERWOOD moyen pour $N = 1$ à $N = 10$

Sur le tableau 3, on a montré la variation absolue et relative de NUSSELT moyen et de SHERWOOD moyen pour $N = 1$ à $N = 10$. Quand le nombre R_T augmente, on remarque que la

variation absolue et relative est positive. Donc l'augmentation de R_T favorise l'augmentation du taux de transfert de chaleur et de masse.

II.4. Influence du nombre de SORET et DUFOUR, Sr et Du

Les figures 11 et 12 montrent respectivement l'effet du nombre de SORET sur le transfert de masse et l'effet du nombre de DUFOUR sur le transfert de chaleur pour différentes valeurs du rapport de poussés N . Les courbes de la Figure 7 montrent pour toutes les valeurs de N que le nombre moyen de Sherwood diminue lorsque le nombre de SORET augmente. En fait, le coefficient de SORET représente le phénomène de thermos-diffusion, donc en augmentant ce paramètre conduit à la diminution du taux de transfert massique.

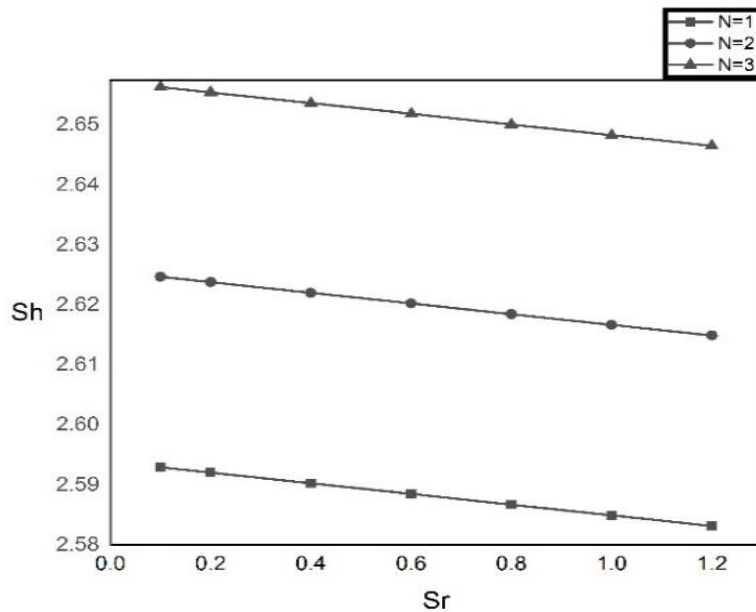


Figure 11: Influence de Sr sur Sh pour : $A = 3$, $R_T = 10^4$, $Le = 1$, $\varphi = 0,05$, $Pr = 1$, $Da = 0,001$, $Du = 1$ et pour trois valeurs de N

Rapport des Poussées N	1	2	3
Variation absolue de $Sh_{Sr=0.1}$ à $Sh_{Sr=1.2}$	$-9 \cdot 10^{-3}$	$-9,7 \cdot 10^{-3}$	$-9,8 \cdot 10^{-3}$
Variation relative de $Sh_{Sr=0.1}$ à $Sh_{Sr=1.2}$	$-3,7 \cdot 10^{-3}$	$-3,7 \cdot 10^{-3}$	$-3,7 \cdot 10^{-3}$

Table 4 : Variation absolue et relative de SHERWOOD moyen pour : $Sr = 0,1$ à $Sr = 1,2$

Le tableau 4 montre la variation absolue et relative de SHERWOOD moyen pour $Sr = 0,1$ à $Sr = 1,2$. On remarque que la valeur des variations absolue et relative est négative et constante. On note aucune influence de N sur le taux de transfert de masse quand le nombre de SORET varie.

D'après la figure 8, représentant l'effet du nombre de Dufour sur le nombre de Nusselt, on peut voir que le nombre de Nusselt moyen augmente lorsque la porosité augmente, et l'augmentation du nombre de Dufour entraîne une diminution du nombre de Nusselt moyen. En fait, ce nombre représente la thermo-diffusion. L'augmentation de ce paramètre entraîne une diminution du taux de transfert de chaleur. Ces résultats sont en accord avec ceux obtenus par V représentant les variations absolues et relatives du nombre de Nusselt qui sont négatives et diminuent lorsque la porosité augmente, par conséquent, l'augmentation de Du désavantage le taux de transfert de chaleur.

Porosité ϵ	0.3	0.4	0.5
Variation absolue de $Nu_{Du=0.1}$ à $Nu_{Du=1.2}$	$-2,4. 10^{-4}$	$-3,2. 10^{-4}$	$-4. 10^{-4}$
Variation relative de $Nu_{Du=0.1}$ à $Nu_{Du=1.2}$	$2,2. 10^{-5}$	$-1,2. 10^{-4}$	$-1,54. 10^{-4}$

Table 5 : Variation absolue et relative de NUSSELT moyen pour : $Du = 0,1$ à $Du = 1,2$

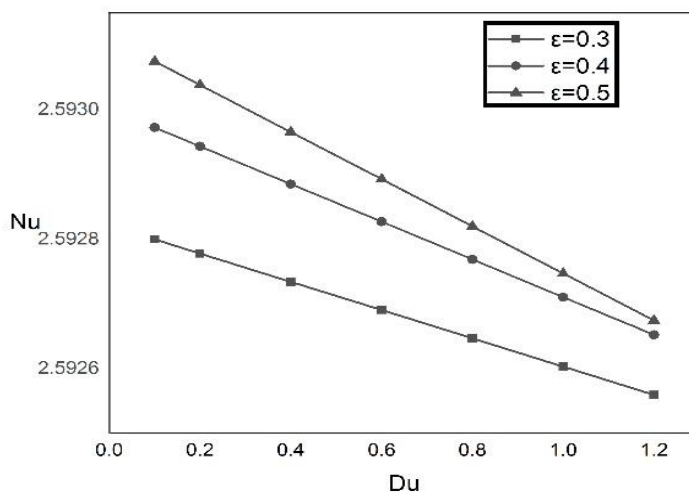


Figure 12 : : Influence de Du sur Nu pour : $A = 3$, $R_T = 10^4$, $Le = 1$, $\varphi = 0,05$, $Pr = 1$, $Da = 0,001$, $Sr = 1$ et pour trois valeurs de porosité

II.5. Influence de rapport d'aspect géométrique, A

Pour différentes valeurs du nombre de RAYLEIGH thermique et des valeurs fixes pour tous les autres paramètres de commande du système à l'exception du rapport d'aspect, les Figures 13 et 14 illustrent l'évolution du taux de transfert de chaleur et de masse en fonction de ce dernier paramètre. Les courbes représentées sur ces figures montrent que les nombres moyens de

Nusselt et de Sherwood augmentent de manière monotone avec le rapport d'aspect géométrique A . En fait, le régime convectif est plus important lorsque le rapport d'aspect est suffisamment grand et que les forces volumiques thermo-solutale sont plus intenses.

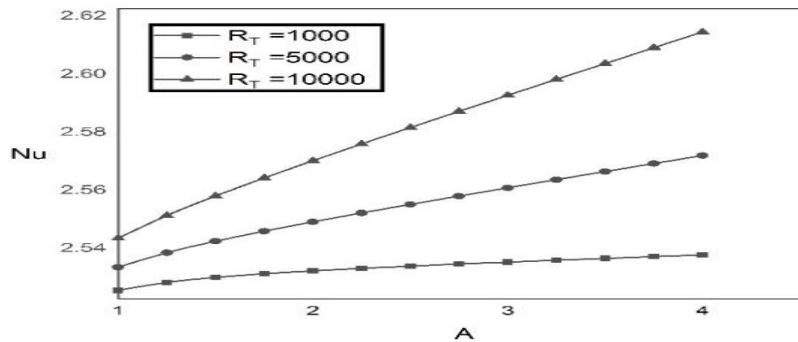


Figure 13: Influence de A sur Nu pour : $N = 1$, $Le = 1$, $\varphi = 0,05$, $Pr = 1$, $Da = 0,001$, $Sr = 1$, $Du = 1$ et pour trois valeurs de R_T

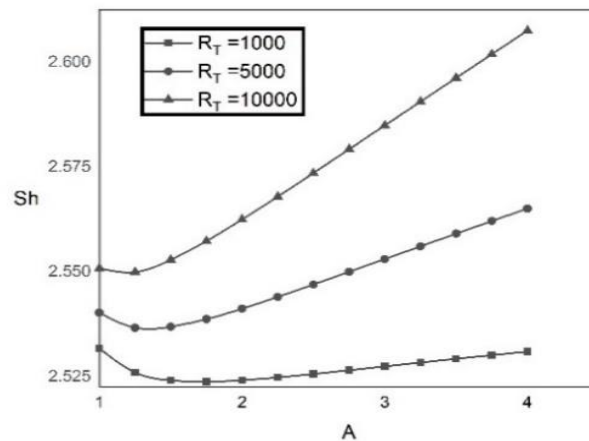


Figure 14: Influence de A sur Sh pour : $N = 1$, $Le = 1$, $\varphi = 0,05$, $Pr = 1$, $Da = 0,001$, $Sr = 1$, $Du = 1$ et pour trois valeurs de R_T

La variation absolue et relative des nombres moyens de Nusselt et de Sherwood pour différentes valeurs de R_T ($10^3, 5 \times 10^3, 10^4$) est illustrée sur le tableau VI. La variation absolue de Nu et Sh augmente avec l'augmentation du nombre de Rayleigh thermique.

Pour $R_T = 10^3$, la variation de Sh est négative à cause de la diminution de Sh , pour le rapport d'aspect de la cavité entre 1 et 2. Pour la variation relative, on voit qu'elle augmente, et prend une valeur négative pour le cas de $R_T = 10^3$. Ceci est dû à la diminution de Sh pour $R_T = 10^3$.

À partir des résultats ci-dessus, on peut conclure que le taux de transfert de chaleur peut être amélioré pour $R_T > 5 \times 10^3$.

Nombre de RAYLEIGH thermique R_T	10^3	$5 \cdot 10^3$	10^4
Variation absolue de $Nu_{A=1}$ à $Nu_{A=4}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$3,8 \cdot 10^{-2}$	$7,1 \cdot 10^{-2}$
Variation relative de $Nu_{A=1}$ à $Nu_{A=4}$	$4,8 \cdot 10^{-3}$	$1,5 \cdot 10^{-2}$	$2,8 \cdot 10^{-2}$
Variation absolue de $Sh_{A=1}$ à $Sh_{A=4}$	$-7,4 \cdot 10^{-4}$	$2,4 \cdot 10^{-2}$	$5,6 \cdot 10^{-2}$
Variation relative de $Sh_{A=1}$ à $Sh_{A=4}$	$-2,9 \cdot 10^{-4}$	10^{-2}	$2,2 \cdot 10^{-2}$

Table 6 : Variation absolue et relative de NUSSELT moyen et SHERWOOD moyen pour différent A

La figure 10 illustre les isothermes et les iso-concentrations pour différents paramètres de forme géométrique : (a, $A = 1$) et (b, $A = 20$) et (c, $A = 40$) et (d, $A = 60$). On remarque que l'influence de paramètre de forme géométrique A sur les isothermes et les iso-consommations ne commence qu'à partir de $A = 60$.

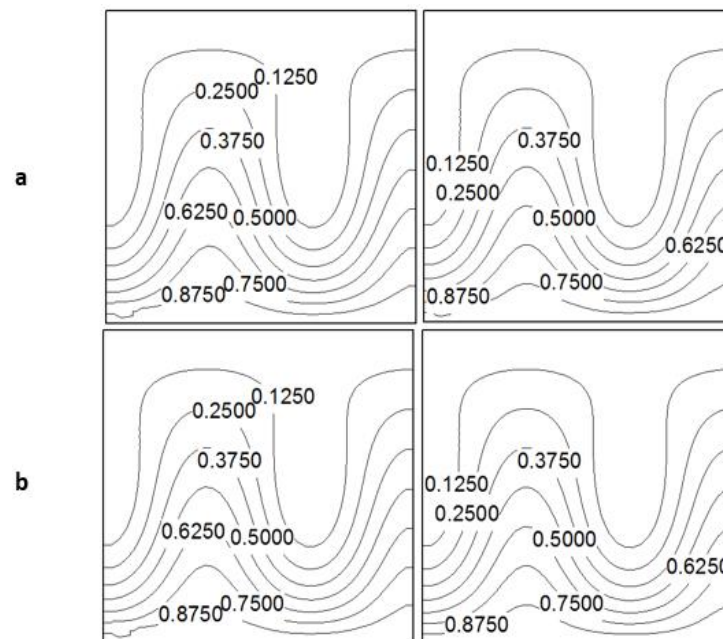


Figure 15 : Isothermes et iso-concentrations pour (a, $A = 1$),
(b, $A = 20$) $R_T = 10^4$, $N = 1$, $Pr = 1$, $Le = 1$, $\varphi = 0,05$, $Da = 0,001$, $Du = 1$ et $Sr = 1$

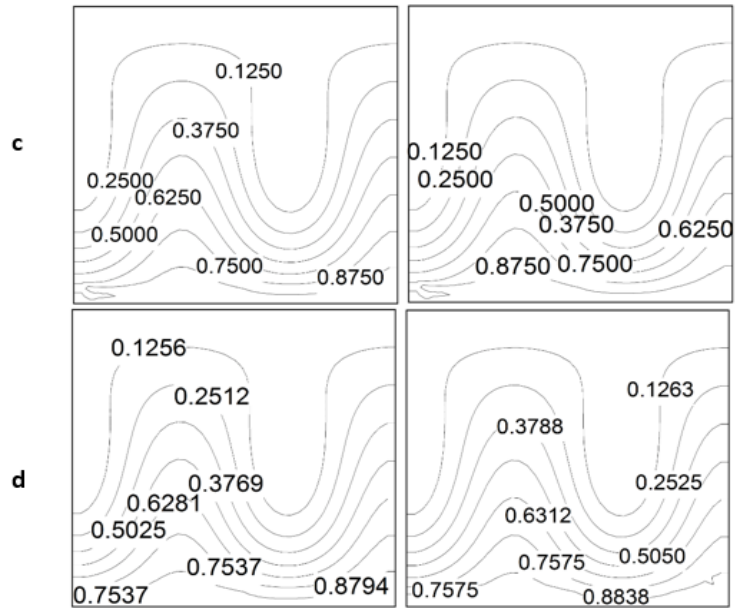
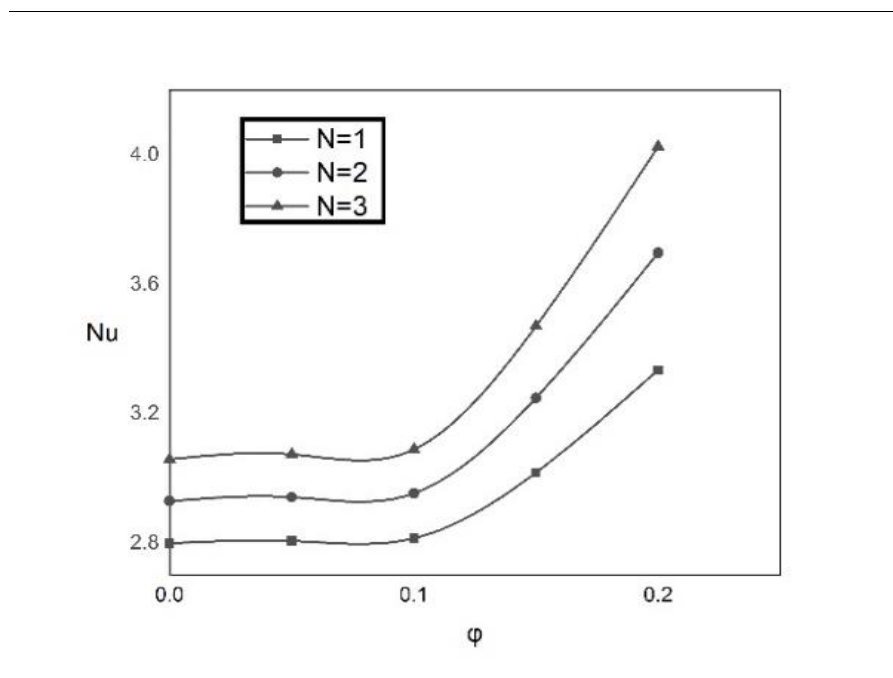


Figure 16 : Isothermes et iso-concentrations pour (c, $A = 40$) ,
 (d, $A = 60$), $R_T = 10^4$, $N = 1$, $Pr = 1$, $Le = 1$, $\varphi = 0,05$, $Da = 0,001$, $Du = 1$ et $Sr = 1$

II.6. Influence de la fraction volumique des nanoparticules, φ

La figure 17 montre l'influence de la fraction volumique des nanoparticules φ sur le nombre de NUSSELT moyen pour trois valeurs du rapport poussées N . On remarque sur cette figure, que le nombre de NUSSELT moyen augmente quand φ varie entre 0% et 20%. Cette augmentation résulte de l'augmentation de la conductivité thermique.



À partir de la figure 17, l'augmentation de Nu causée par la variation de la fraction volumique (entre 0% à 20%) est donné par le tableau suivant :

Rapport des Poussées N	1	2	3
Variation absolue de $Nu_{\varphi=0}$ à $Nu_{\varphi=0.2}$	0.53	0.76	0.96
Variation relative de $Nu_{\varphi=0}$ à $Nu_{\varphi=0.2}$	0.19	0.26	0.31

Table 7 : Variation absolue et relative de Nusselt moyen pour $\varphi = 0$ à $\varphi = 0.2$

À partir du tableau 7, on remarque que la variation absolue de NUSSELT moyen pour des fractions volumiques variant de $\varphi = 0$ à $\varphi = 0.2$ est positive et ceux pour les trois valeurs de N . L'augmentation de N favorise l'augmentation du taux de transfert thermique.

II.7. Influence de la hauteur, z , sur les profils de la température, de la concentration et de la vorticité

Les figures 18 et 19 montrent respectivement l'influence de la hauteur sur l'évolution de la température avec la vorticité et la concentration avec la vorticité pour : $A = 1$, $R_T = 10^4$, $Pr = 1$, $Le = 1$, $Da = 0,001$, $Sr = 1$ et $Du = 1$.

La température et la concentration diminuent quand la hauteur augmente. Cette augmentation provoque une diminution de la vorticité, alors que la diminution de cette dernière provoque la diminution de la température et de la concentration.

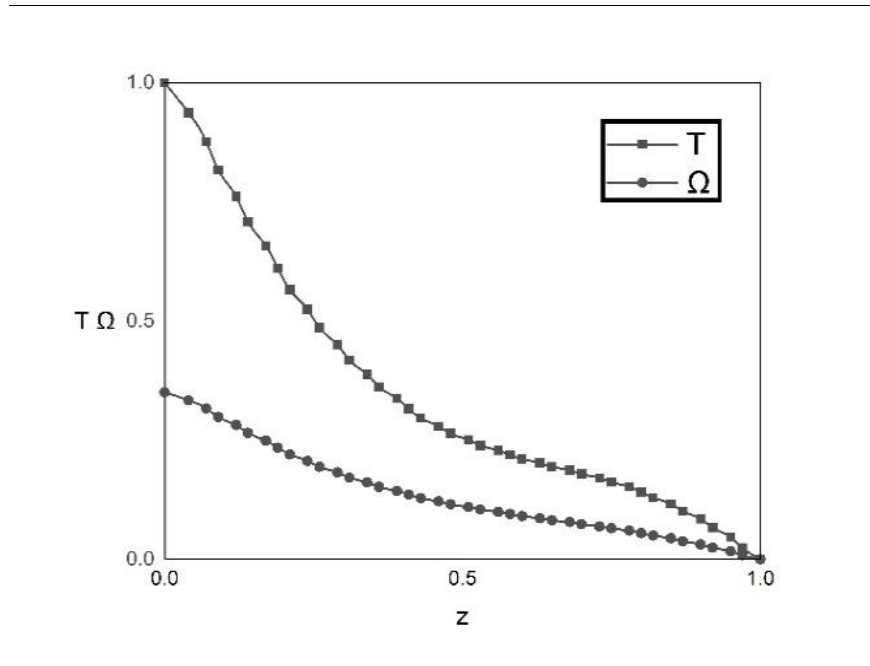


Figure 18 : Influence de la hauteur z sur l'évolution de la température et de la vorticité pour : $A = 1$, $N = 1$, $Pr = 1$, $Le = 1$, $\varphi = 0.05$, $R_T = 10^4$, $Da = 0.001$, $Sr = 1$, $Du = 1$

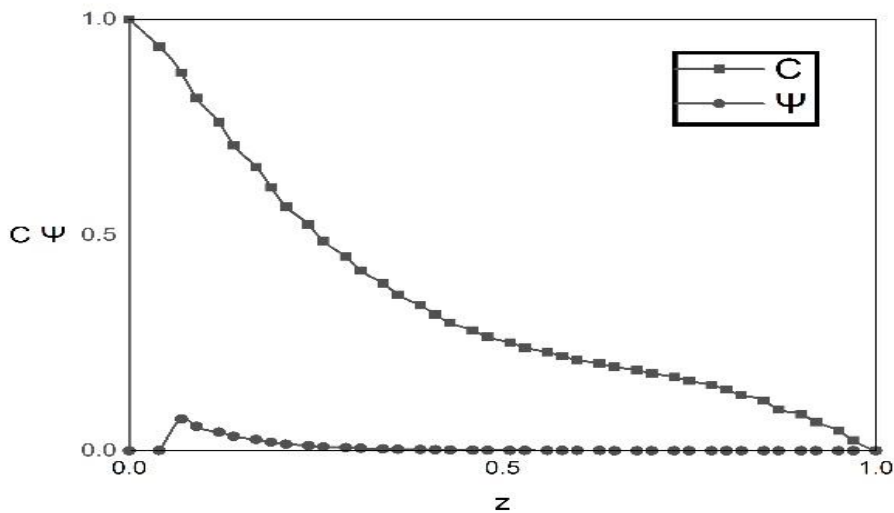


Figure 19 : Influence de la hauteur z sur l'évolution de la fonction du courant et de la vorticité pour : $A = 1$, $N = 1$, $Pr = 1$, $Le = 1$, $\varphi = 0.05$, $R_T = 10^4$, $Da = 0.001$, $Sr = 1$, $Du = 1$

Conclusion

La présente étude qui a porté sur la convection naturelle thermosolutale dans une cavité cylindrique a permis d'aboutir aux conclusions suivantes :

Les nombres de NUSSELT et de SHERWOOD moyens augmentent avec l'augmentation du nombre de RAYLEIGH. Ceci est expliqué par l'importance de l'intensité de l'écoulement avec l'augmentation du nombre de RAYLEIGH, et par conséquent l'augmentation des nombres des NUSSELT et de SHERWOOD moyens. Cette croissance est plus importante pour des valeurs élevées du nombre de rapport d'aspect géométrique.

Le nombre de NUSSELT moyen diminue avec l'augmentation du nombre de DUFOUR, l'augmentation du phénomène de thermo-diffusion. Quant au nombre de SHERWOOD moyen, il diminue pour des valeurs plus importantes du nombre de SORET à l'augmentation du phénomène de thermo-diffusion.

Les nombres de NUSSELT et de SHERWOOD moyens augmentent avec le nombre de PRANDTL, sous l'effet de l'évolution des forces de volumes thermique et solutale.

La variation du nombre de rapport des poussées provoque l'augmentation des forces de volume dans l'équation de la quantité de mouvement, et par conséquent, augmentation des nombres de NUSSELT et de SHERWOOD moyens. Le nombre de NUSSELT moyen augmente avec l'augmentation du nombre de fraction volumique d'une nanoparticule φ à cause de l'augmentation de la conductivité thermique. En augmentant la hauteur du cylindre, les grandeurs telle que la température, la concentration et la vorticité diminuent.

Résultats relatifs à la deuxième partie de l'étude

Introduction

Dans cette partie nous allons traiter la magnétoconvection dans un cylindrique rempli d'un milieu poreux saturé par un nanofluide métallique se composant de nanoparticules d'aluminium et de fluide de base binaire. Les parois latérales de l'enceinte sont rigides, imperméables et adiabatiques, tandis que les parois horizontales sont maintenues à températures et à concentrations uniformes.

L'écoulement du nanofluide au niveau des couches poreuses est décrit par la loi de Darcy étendue de BRINKMAN-FORSCHHEIMER et par l'approximation de BOUSSINESQ. L'influence des nombres de Hartmann, de RAYLEIGH, de DARCY, de SORET, de Dufour, de PRANDTL, du rapport des poussées et du rapport d'aspect géométrique sur les vitesses axiale et radiale d'une part et sur le transfert de chaleur et de masse d'autre part a été étudié.

II. Influences des paramètres

Dans cette partie, on va étudier l'influence de certains paramètres à savoir : le nombre de HARTMANN, Ha , Les nombres de DUFOUR et de SORET, le paramètre géométrique, le nombre de RAYLEIGH, le nombre de poussée, etc., sur les transferts thermiques et de masse ainsi que sur les vitesses axiale et radiale.

II.1. Effet de la variation du nombre de HARTMANN, Ha

Les figures 20 et 21 illustrent l'effet de la variation du nombre de HARTMANN sur le transfert de chaleur et de masse, pour différentes valeurs du nombre de DARCY. Les nombres de NUSSELT et de SHERWOOD moyens diminuent avec l'augmentation du nombre de Ha en raison de la diminution de la convection thermosolutale qui est dû à l'augmentation de la force de LORENTZ. L'augmentation de la force de LORENTZ est dûe à l'augmentation de l'intensité du champ magnétique.

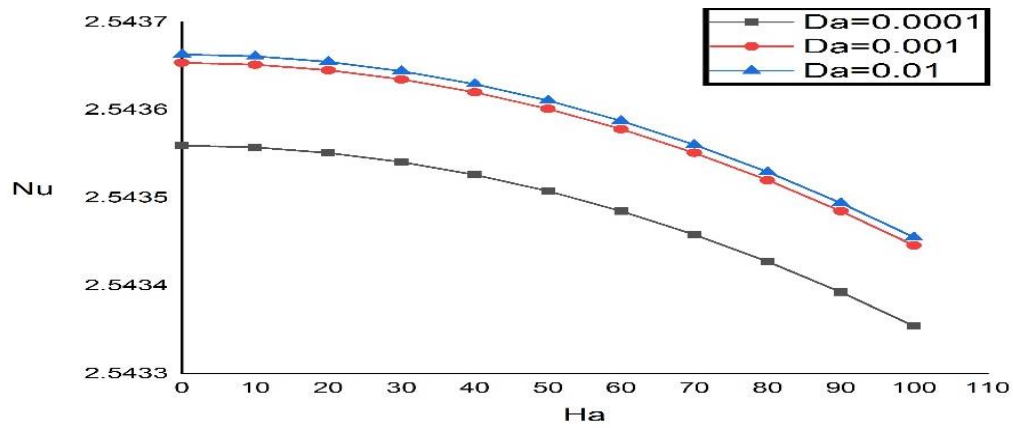


Figure 20 : Effet de Ha sur Sh pour : $A=2, N=1, Le=1, Pr=1, Sr=1, Du=1, R_T = 10^4, \varphi = 0.05$

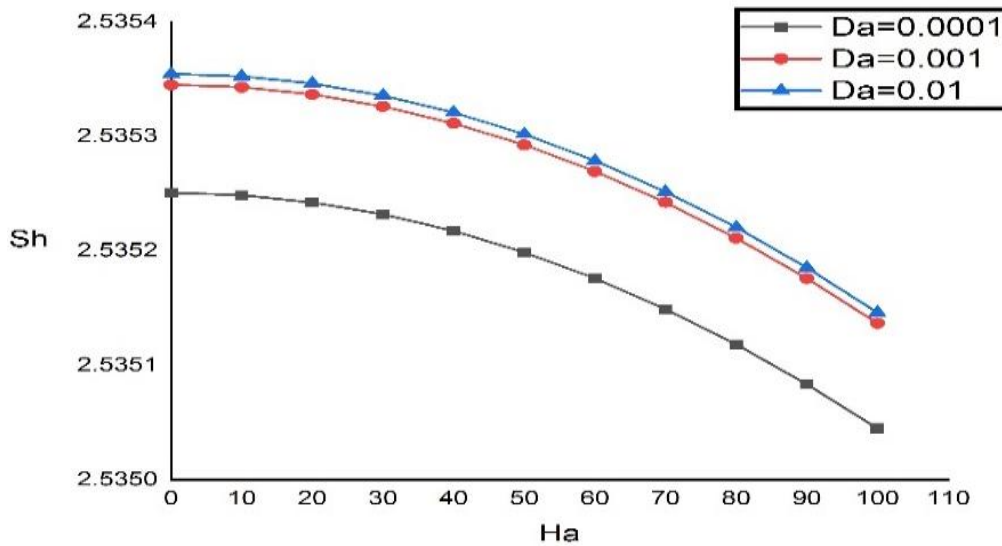


Figure 21: Effet de Ha sur Sh pour : $A = 2, N = 1, Le = 1, Pr = 1, Sr = 1, Du = 1, R_T = 10^4, \varphi = 0.05$

L'effet du nombre de Hartmann, Ha sur les profils des vitesses axiale et radiale lorsque le nombre de Darcy varie, est illustré dans les figures 22 et 23. Ces vitesses diminuent avec l'augmentation du nombre Ha et ceci est dû à l'augmentation de la force de Lorentz d'une part. D'autre part, la diminution des vitesses axiale et radiales défavorise la convection thermosolutale.

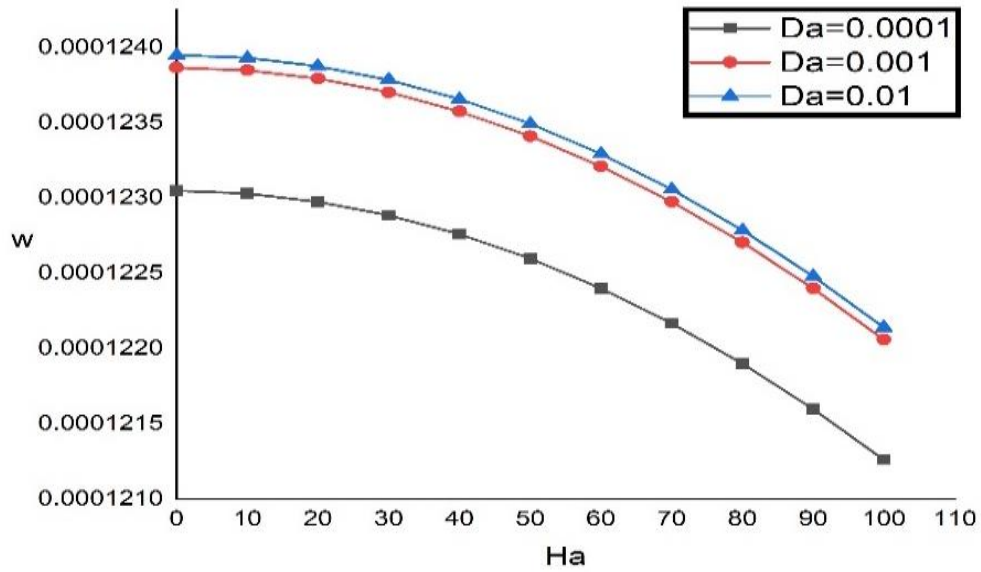


Figure 22 : Effet de Ha sur la vitesse axiale pour : $A=2, N=1, Le=1, Pr=1, Sr=1, Du=1, R_T = 10^4, \varphi = 0.05, r = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}$

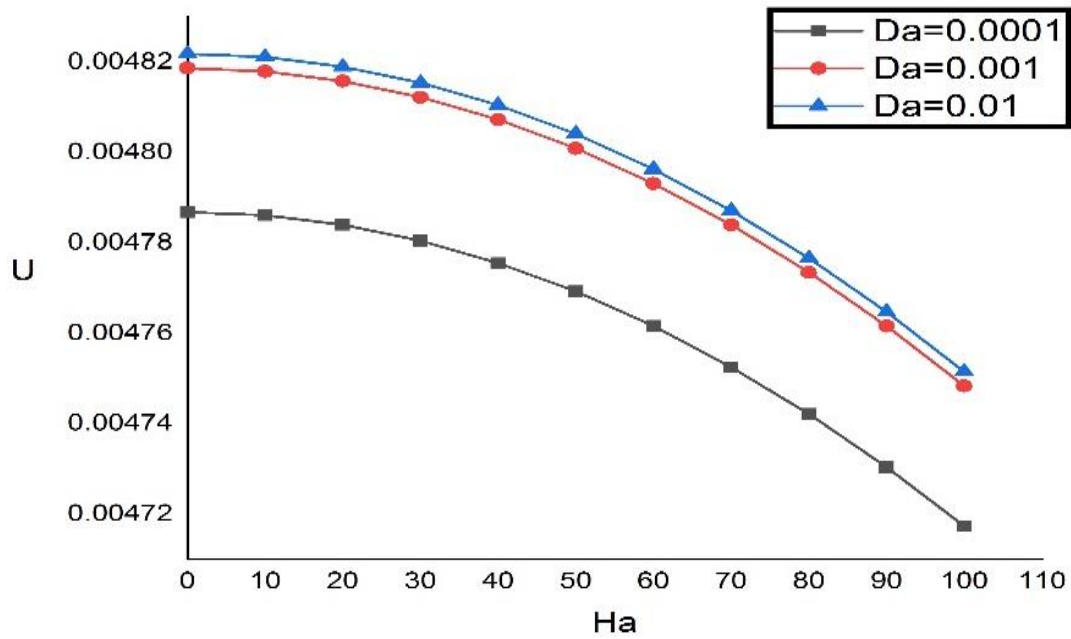


Figure 23 : Effet de Ha sur la vitesse radiale pour : $A=2, N=1, Le=1, Pr=1, Sr=1, Du=1, R_T = 10^4, \varphi = 0.05, r = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}$

II.2. Effet du nombre de DARCY, Da

L'effet de la perméabilité sur l'écoulement du nano fluide, sur le transfert de chaleur, sur le transfert de la masse ainsi que sur les profils des vitesses axiale et radiale a été analysé à l'aide du nombre de DARCY et le résultat est illustré sur les figures 24, 25, 26 et 27.

Sur les figures 24 et 25, nous remarquons que le nombre de Nusselt moyen et de SHERWOOD moyen augmente pour : $Da \in [10^{-5}, 10^{-3}]$. Pour $Da \in [10^{-3}, 1]$, Nu et Sh est presque fixe. Ceci au dû au fait que la perméabilité prend des valeurs élevées à cause de l'augmentation du nombre de DARCY. Nous remarquons également que le nombre de Nu diminue avec l'augmentation du nombre Ha , indépendamment du nombre de DARCY.

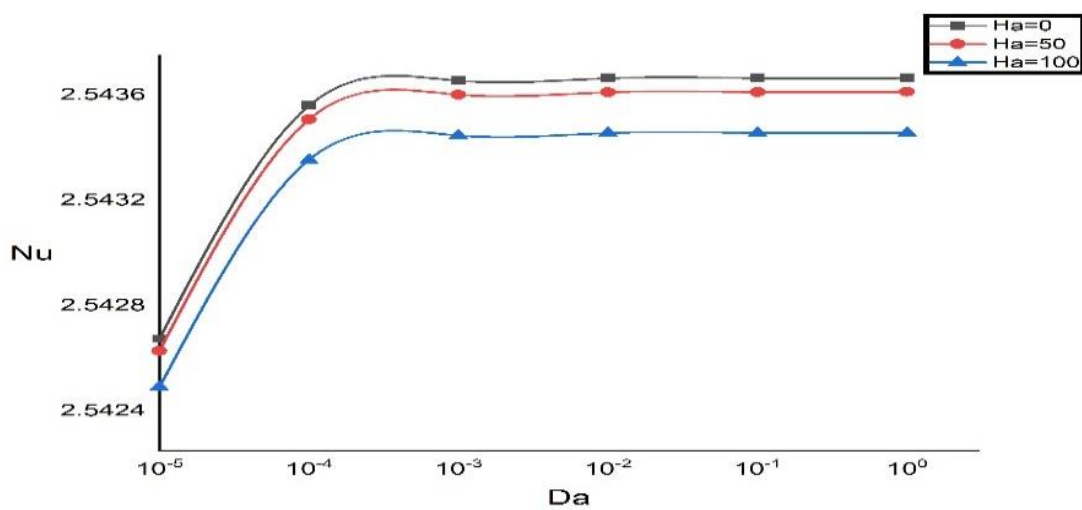


Figure 24: Effet de Da sur Nu pour : $A = 2, N = 1, Le = 1, Pr = 1, Sr = 1, Du = 1, R_T = 10^4$ et $\varphi = 0.05$

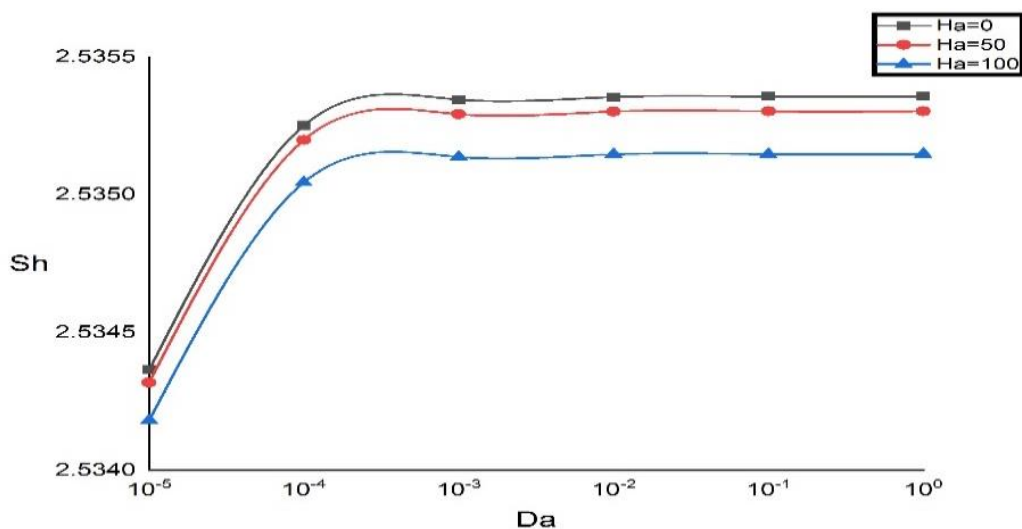


Figure 25 : Effet de Da sur Sh pour : $A = 2, N = 1, Le = 1, Pr = 1, Sr = 1, Du = 1, R_T = 10^4$ et $\varphi = 0.05$

Les figures 26 et 27 montrent l'effet du nombre de DARCY sur les profils de la vitesse axiale et radiale pour différentes valeurs du nombre de HARTMANN, Ha . On remarque que la valeur des vitesses augmente avec l'augmentation du nombre de DARCY : $Da \in [10^{-5}, 10^{-3}]$. Pour la gamme des valeurs de Da : $Da \in [10^{-3}, 1]$, U et W restent constants. Nous remarquons également que les vitesses axiale et radiale diminuent quand le nombre Ha augmente. Finalement on note que : $\forall Da \in [10^{-5}, 1] \Rightarrow U > W$.

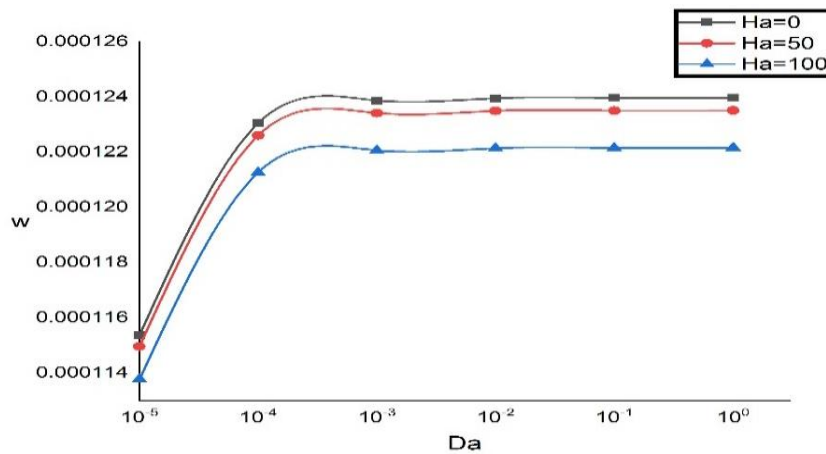


Figure 26 : Effet de Da sur la vitesse axiale pour : $A = 2, N = 1, Le = 1, Pr = 1, Sr = 1, Du = 1, R_T = 10^4, \varphi = 0,05, r = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}$

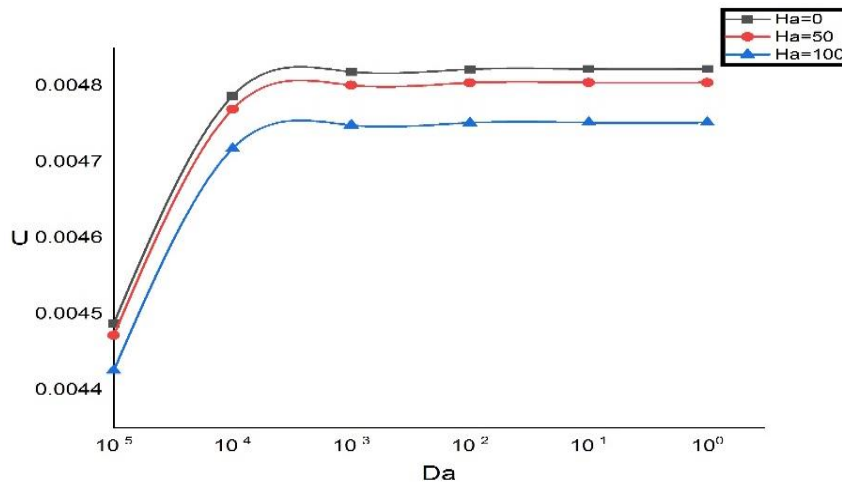


Figure 27 : Effet de Da sur la vitesse radiale pour : $A = 2, N = 1, Le = 1, Pr = 1, Sr = 1, Du = 1, R_T = 10^4, \varphi = 0,05, r = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}$

II.3. Effet des nombres de SORET et de DUFOUR

Les figures 28 et 29 montrent respectivement l'effet du nombre de SORET sur le transfert de masse et du nombre de DUFOUR sur le transfert de l'énergie.

Sur la figure 28 nous remarquons que le nombre de Sherwood moyen diminue quand le nombre de SORET augmente : $Sr \in [0-1,2]$. L'augmentation du nombre de SORET, qui décrit le phénomène de la thermo-diffusion, provoque une diminution de transfert massique. D'autre part, l'augmentation du nombre de Ha conduit à une diminution du transfert massique.

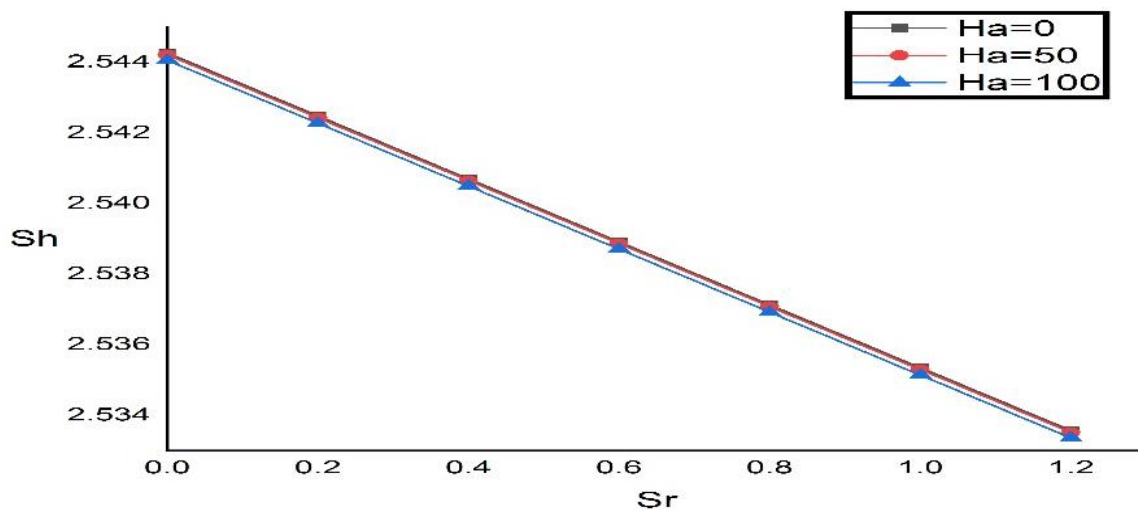


Figure 28 : Effet de Sr sur Sh pour $A = 2$, $N = 1$, $Le = 1$, $Pr = 1$, $Du = 1$, $Da = 0,001$, $R_T = 10^4$ et $\varphi = 0,05$

Sur la figure 29, on a représenté l'influence de nombre de DUFOUR sur le transfert thermique. On constate sur cette figure, que la valeur de NUSSELT moyen diminue lorsque le nombre de HARTMANN augmente. Sur cette même figure, on note que l'augmentation du nombre de DUFOUR pour $Du \in [0 ; 1,2]$ conduit à une diminution du nombre de NUSSELT moyen. En fait, ce nombre représente la thermo - diffusion. L'augmentation de ce paramètre conduit à une diminution du taux de transfert de chaleur.

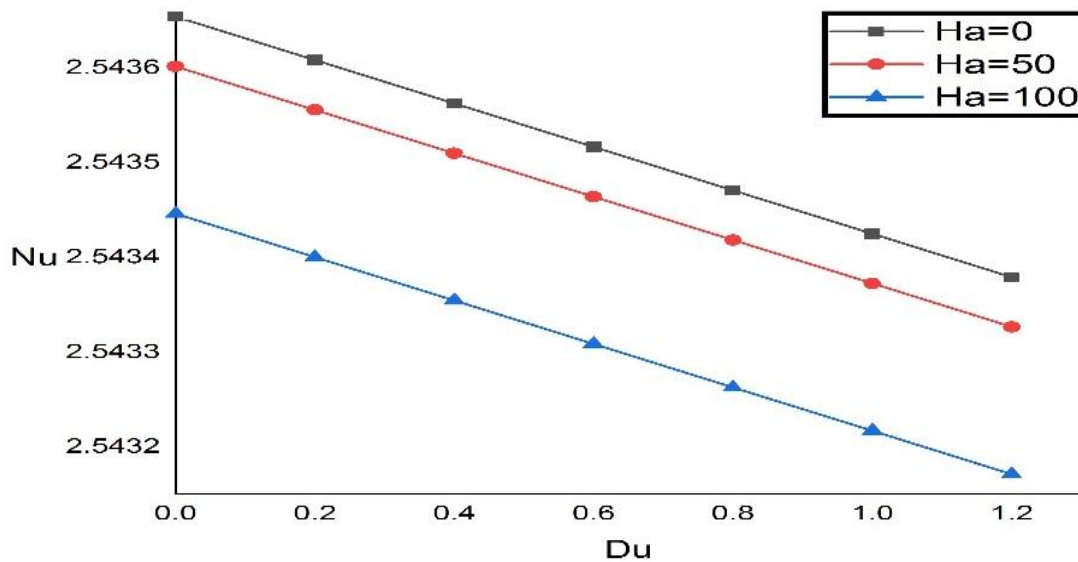


Figure 29 : Effet de Du sur Nu pour : $A = 2, N = 1, Le = 1, Pr = 1, Sr = 1, Da = 0.001, R_T = 10^4$ et $\varphi = 0.05$

II.4. Effet du nombre de RAYLEIGH thermique, R_T

Les figures 30 et 31 montrent respectivement l'effet du nombre de RAYLEIGH thermique sur les phénomènes du transfert de chaleur et de masse. On remarque sur ces figures que le nombre de NUSSELT moyen et SHERWOOD moyen restent inchangés pour : $R_T \in [10, 5 \times 10^2]$.

Alors, quand le nombre de RAYLEIGH thermique dépasse ce seuil $R_T \in [5 \times 10^2, 10^4]$, on constate une augmentation des nombres de NUSSELT moyen et SHERWOOD moyen. Cette augmentation résulte de l'élévation de force volume thermique en raison de l'augmentation de R_T . D'autre part, on constate une augmentation de nombre de NUSSELT moyen quand A augmente. Cette augmentation est faible pour : $R_T \in [10-5 \times 10^2]$.

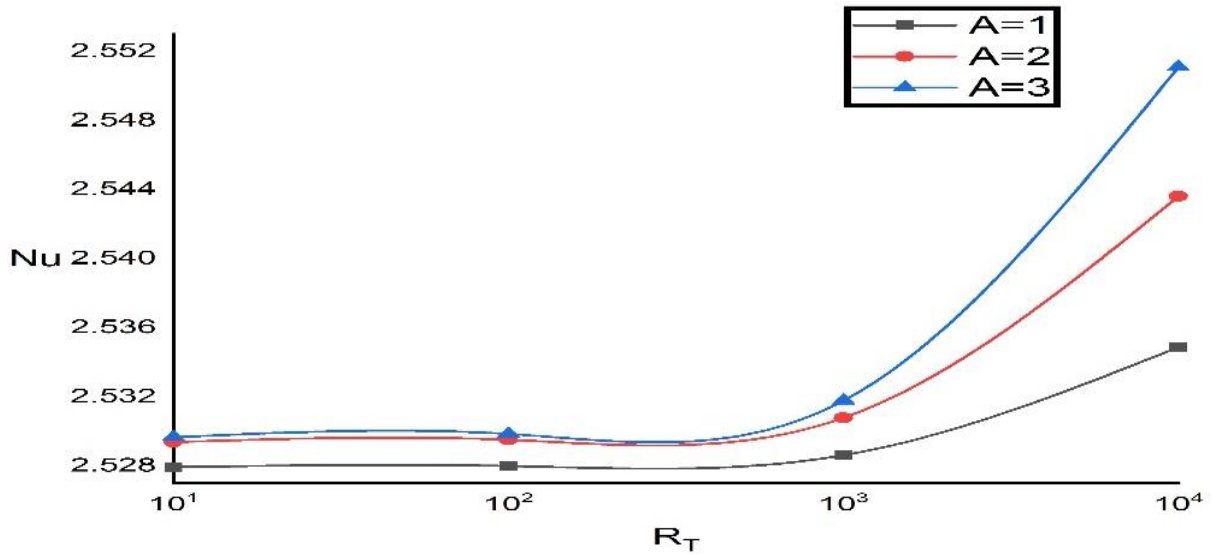


Figure 30 : Effet de R_T sur Nu pour : $N = 1, Le = 1, Pr = 1, Du = 1, Sr = 1, Da = 0.001, Ha = 50$ et $\varphi = 0.05$

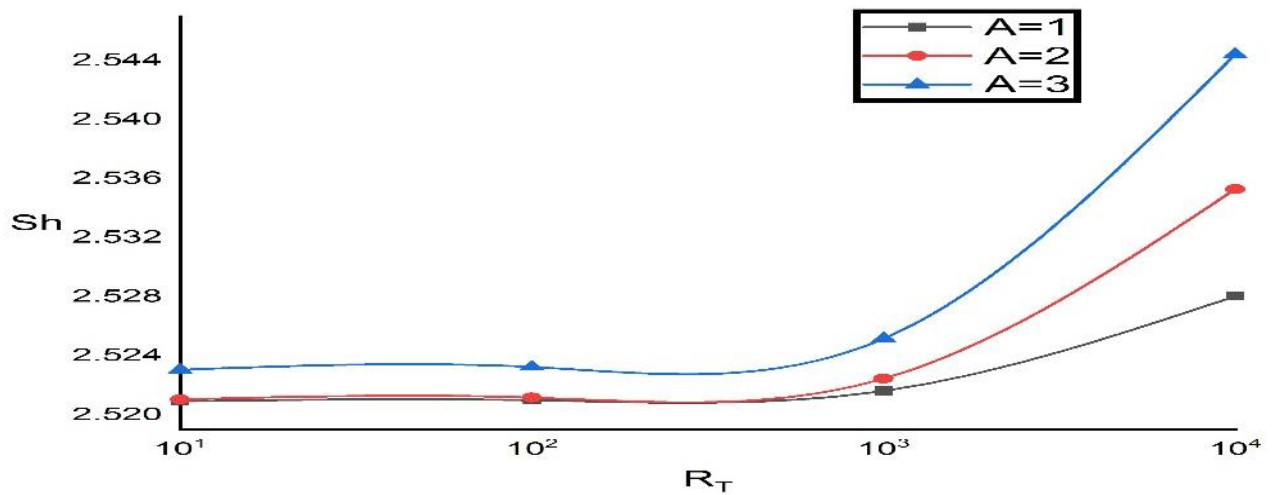


Figure 31 : Effet de R_T sur Sh pour : $N = 1, Le = 1, Pr = 1, Du = 1, Sr = 1, Da = 0.001, Ha = 50$ et $\varphi = 0.05$

Les figures 32 et 33 montrent l'effet du nombre de RAYLEIGH thermique sur les vitesses axiale et radiale. On remarque sur les deux courbes que les vitesses axiale et radiale pour $R_T \in [10, 5 \times 10^2]$ restent constantes quand R_T augmente et ce, quel que soit la valeur de A . Alors quand R_T dépasse ce seuil $R_T = 5 \times 10^2$ et pour des valeurs croissantes de A , on constate l'augmentation des vitesses axiale et radiale. D'autre part, on constate que, $\forall R_T \in [10, 10^4]$ on a : $U > W$.

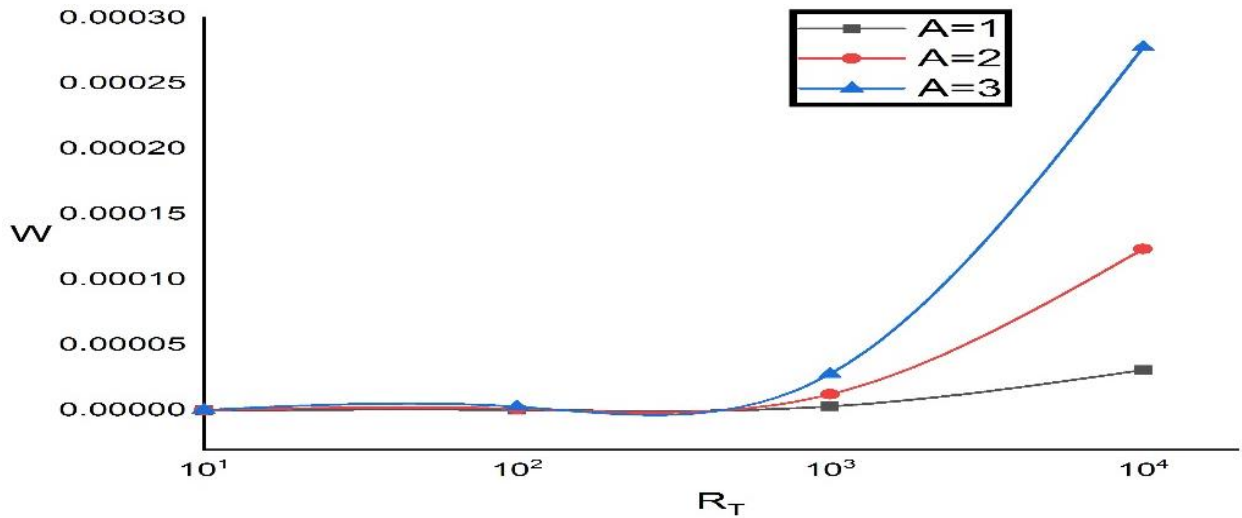


Figure 32 : Effet de R_T sur la vitesse axiale pour : $N = 1, Le = 1, Pr = 1, Du = 1, Sr = 1, Da = 0.001, Ha = 50, \varphi = 0.05, r = \frac{1}{2}$ et $z = \frac{1}{2}$

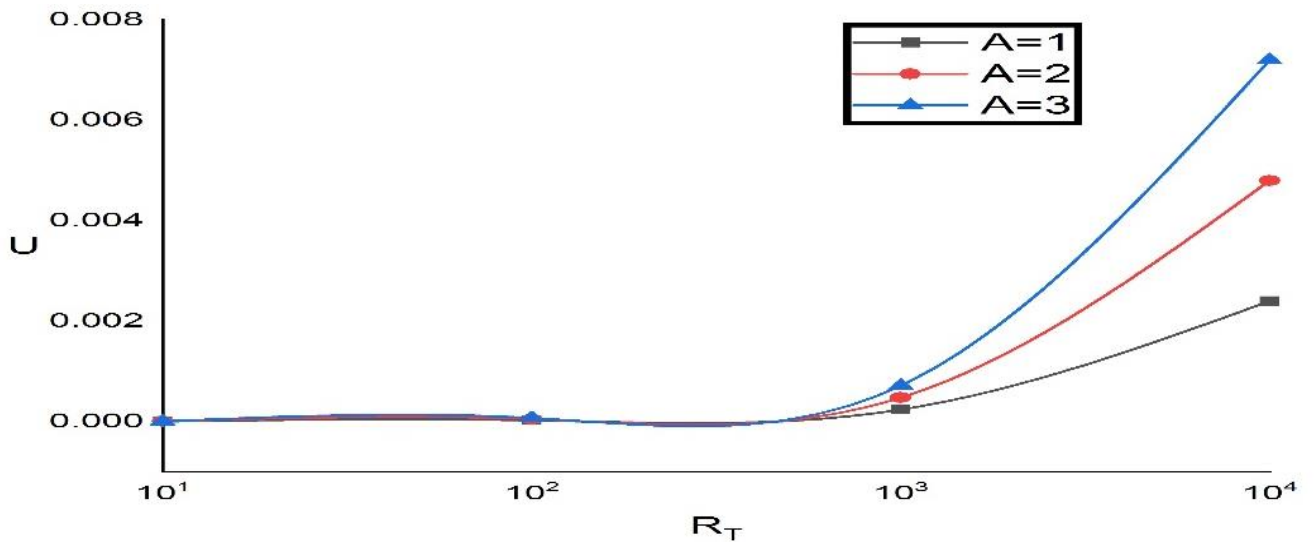


Figure 33 : Effet de R_T sur la vitesse radiale pour : $N = 1, Le = 1, Pr = 1, Du = 1, Sr = 1, Da = 0.001, Ha = 50, \varphi = 0.05, r = \frac{1}{2}$ et $z = \frac{1}{2}$

II.5. Effet de la variation du rapport de poussée, N

Les figures 34 et 35 montrent l'effet de rapport de poussée sur le transfert de chaleur et de masse pour trois valeurs du A . Lorsque le taux de flottabilité augmente, le flux à l'intérieur de l'enceinte sera entraîné par l'effet mixte des forces de flottabilité thermique et de concentration qui entraînent une nette augmentation de la valeur moyenne des nombres de NUSSELT et de SHERWOOD.

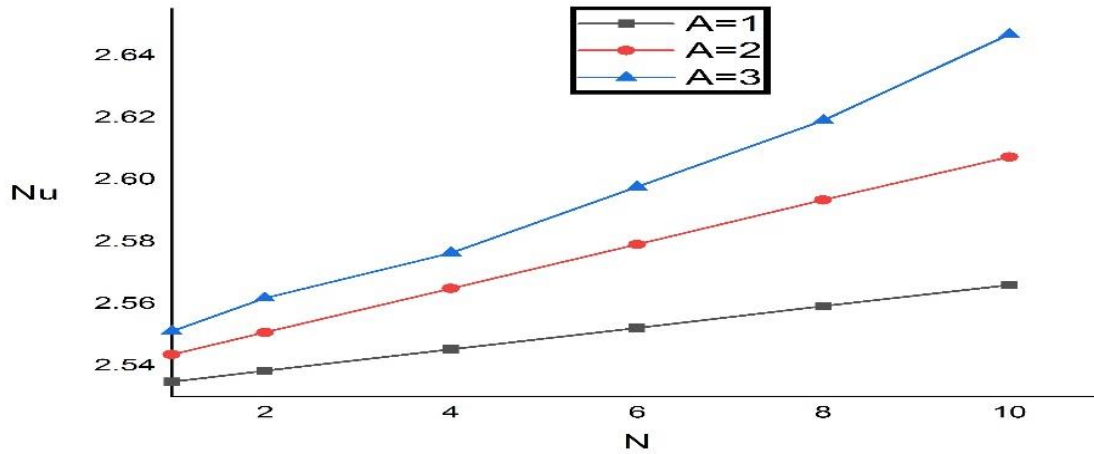


Figure 34 : Effet de N sur Nu pour : $Le = 1, Pr = 1, Sr = 1, Du = 1, Da = 0.001, R_T = 10^4, Ha = 50$ et $\varphi = 0.05$

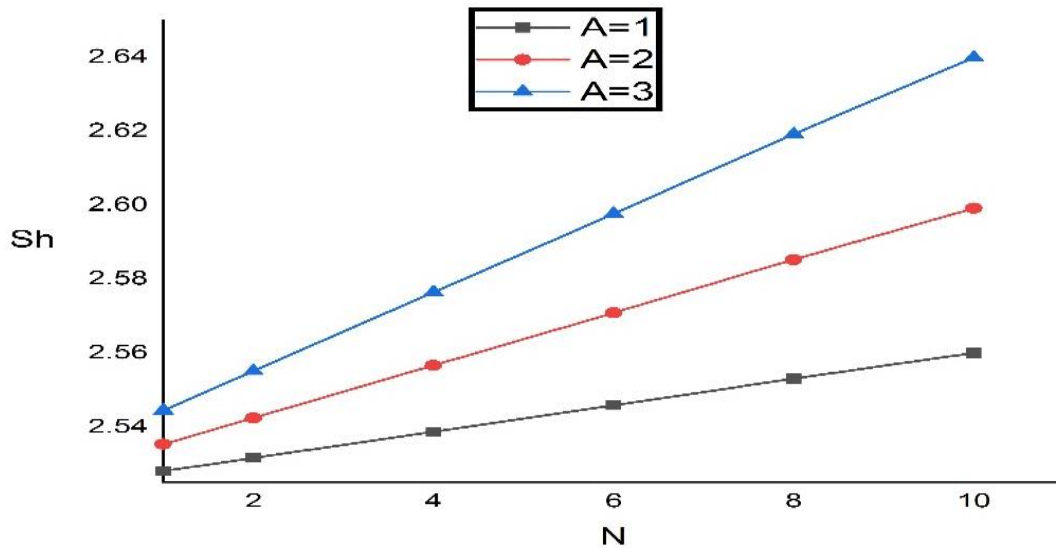


Figure 35 : Effet de N sur Sh pour : $Le = 1, Pr = 1, Sr = 1, Du = 1, Da = 0.001, R_T = 10^4, Ha = 50$ et $\varphi = 0.05$

Les figures 36 et 37 montrent l'effet du rapport de poussée sur les profils des vitesses axiale et radiale pour différentes valeurs du nombre de A . On constate que ces vitesses évoluent d'une façon monotone lorsque le rapport de poussée : $N \in [1, 10]$. Nous remarquons également que les vitesses axiale et radiale augmentent avec l'augmentation du nombre A et que : $\forall N \in [1, 10]$ la valeur de la vitesse radiale reste supérieure à celle de la vitesse axiale, $U > W$.

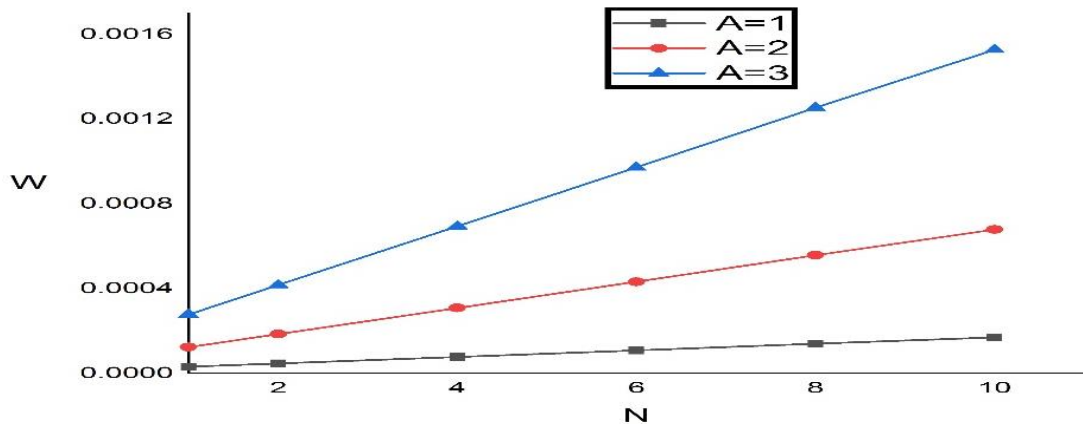


Figure 36 : Effet de N sur la vitesse axiale pour : $Le = 1$, $Pr = 1$, $Sr = 1$, $Du = 1$, $Da = 0,001$, $R_T = 10^4$, $Ha = 50$, $\varphi = 0,05$, $r = \frac{1}{2}$ et $z = \frac{1}{2}$

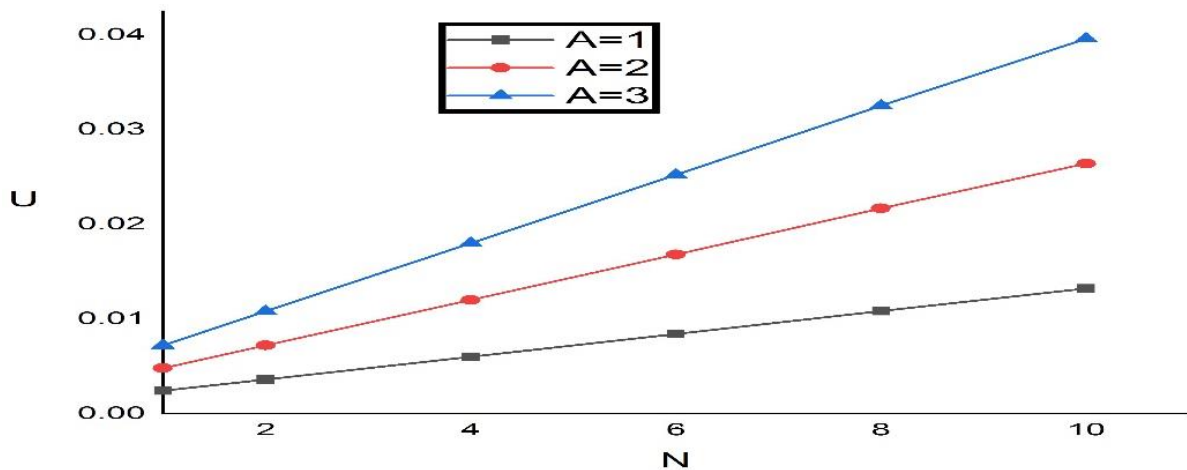


Figure 37 : Effet de N sur la vitesse radiale pour : $Le = 1$, $Pr = 1$, $Sr = 1$, $Du = 1$, $Da = 0,001$, $R_T = 10^4$, $Ha = 50$, $\varphi = 0,05$, $r = \frac{1}{2}$ et $z = \frac{1}{2}$

II.6. Influence du nombre PRANDTL, Pr

Les figures 38 et 39 montrent l'effet du nombre de PRANDTL sur le phénomène de convection thermo-solutale. Nous avons représenté l'évolution de Nu et Sh pour Pr variant de 0,71 à 3 et ce, pour trois valeurs du rapport d'aspect géométrique. À partir des courbes des figures 38 et 39, nous pouvons remarquer que les valeurs des nombres moyens de Nusselt et Sherwood augmentent lorsque le rapport d'aspect géométrique passe de $A = 1$ à $A = 3$. De plus, ces fonctions augmentent de manière monotone avec l'augmentation du nombre de PRANDTL. En effet, lorsque Pr augmente, cela entraîne une augmentation des forces thermiques et volumiques du soluté.

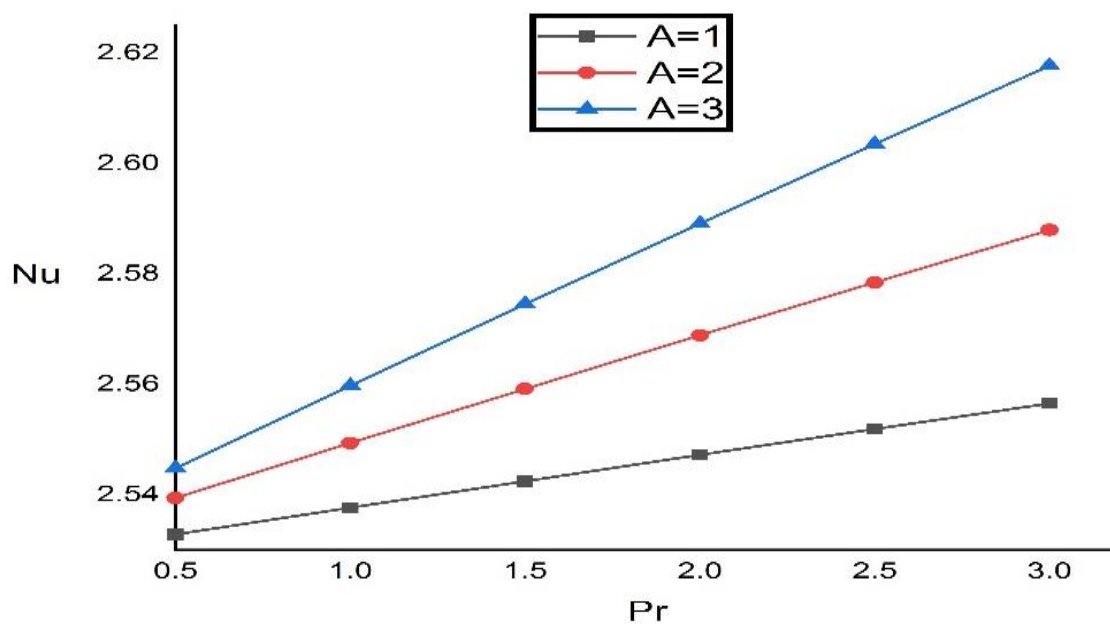


Figure 38 : Effet de Pr sur Nu pour : $N = 1$, $Le = 1$, $Sr = 1$, $Du = 1$, $Da = 0,001$, $R_T = 10^4$, $Ha = 50$ et $\varphi = 0,05$

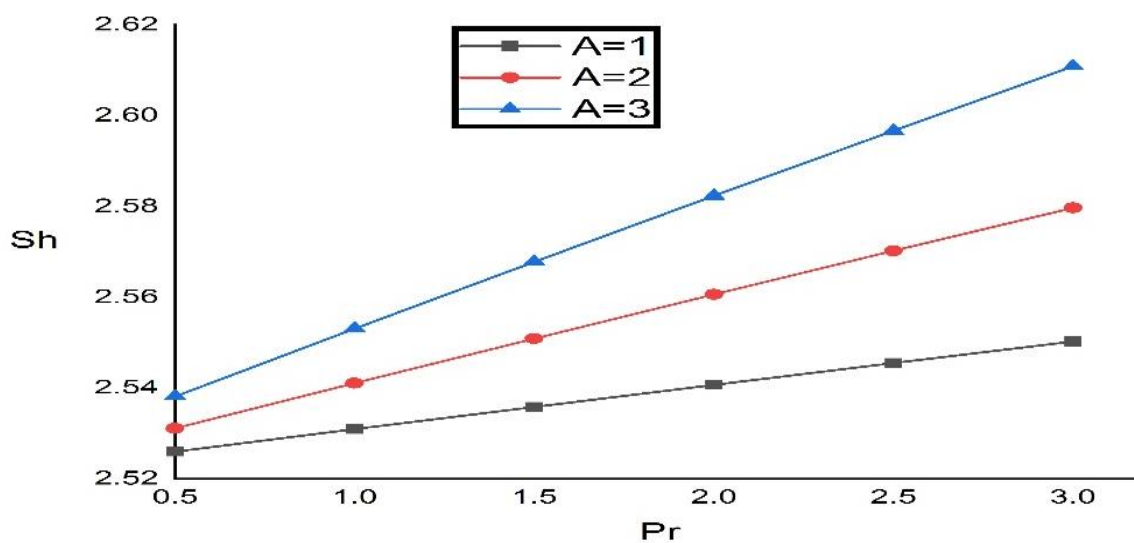


Figure 39 : Effet de Pr sur Sh pour : $N = 1$, $Le = 1$, $Sr = 1$, $Du = 1$, $Da = 0,001$, $R_T = 10^4$, $Ha = 50$ et $\varphi = 0,05$

Les figures 40 et 41, montre l'effet du nombre de PRANDTL sur les profils de la vitesse axiale et radiale pour différentes valeurs du nombre A . Ces vitesses évoluent d'une façon monotone avec l'augmentation du nombre de PRANDTL pour $Pr \in [0,5 ; 3]$. Nous remarquons

également que les vitesses axiale et radiale augmentent avec l'augmentation de A. On note aussi que $\forall Pr \in [0.5 ; 3]$, la vitesse radiale reste supérieure à la vitesse axiale ($U > W$).

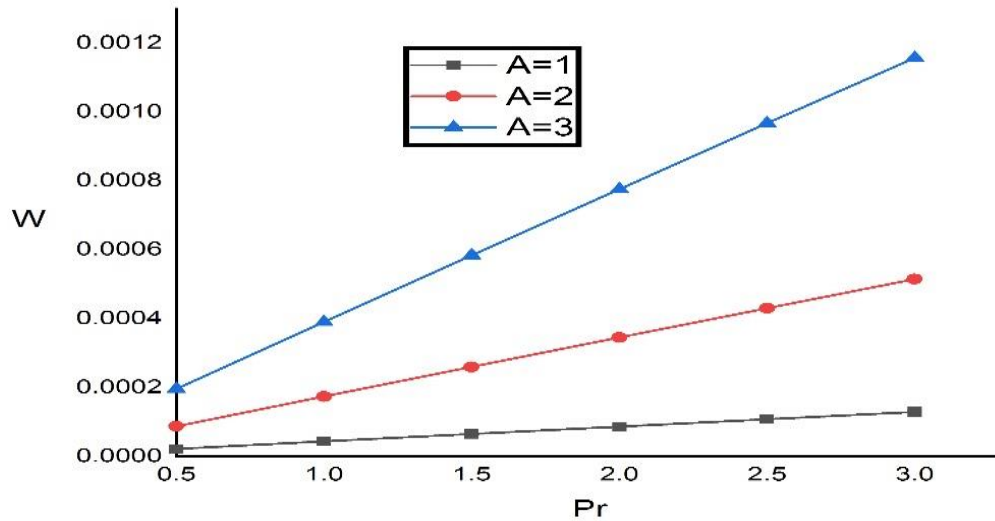


Figure 40 : Effet de Pr sur la vitesse axiale pour : $N = 1, Le = 1, Sr = 1, Du = 1, Da = 0,001, R_T = 10^4, Ha = 50, \varphi = 0,05, r = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}$

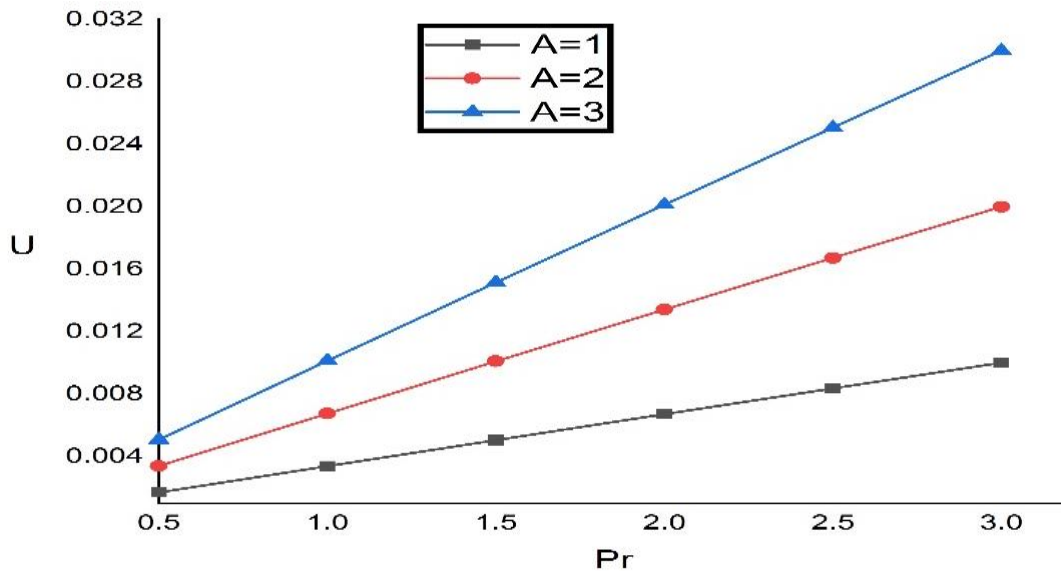


Figure 41 : Effet de Pr sur la vitesse radiale pour : $N = 1, Le = 1, Sr = 1, Du = 1, Da = 0,001, R_T = 10^4, Ha = 50, \varphi = 0,05, r = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}$

II.7. Effet de la variation de la fraction volumique des nanoparticules, φ

La figure 42 montre l'effet de la fraction volumique des nanoparticules sur le transfert de chaleur. On constate que le nombre de NUSSELT moyen reste presque fixe pour $\varphi \in [0, 0.1]$. Quand la fraction volumique des nanoparticules dépasse ce seuil $\varphi \in [0.1 ; 0.2]$, on constate une augmentation des nombres de NUSSELT moyen. Cette augmentation résulte de l'élévation de la conductivité thermique en raison de l'augmentation de φ . D'autre part, on constate une diminution de nombre de NUSSELT moyen avec l'augmentation de, cette diminution est faible pour $\varphi \in [0, 0.1]$.

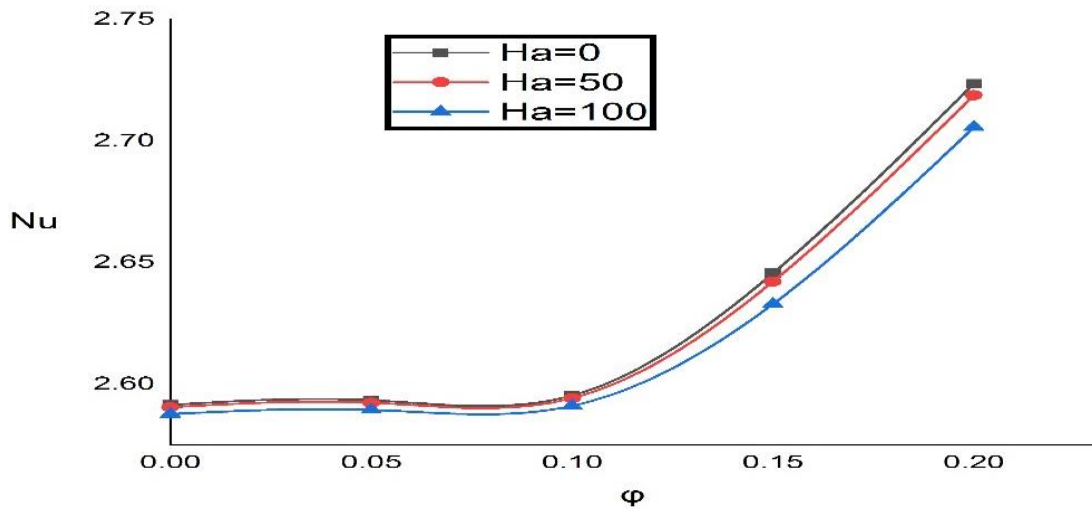


Figure 42 : Effet de φ sur Nu pour : $Le = 1, Pr = 1, Sr = 1, Du = 1, Da = 0.001, R_T = 10^4$ et $N = 1$

Les figures 43 et 44 montrent l'effet du nombre de la fraction volumique des nanoparticules sur les vitesses axiale et radiale. On remarque une faible diminution des vitesses axiale et radiale avec l'augmentation de Ha pour $\varphi \in [0, 0.1]$ et reste presque constante avec l'augmentation de φ . Quand φ dépasse ce seuil $\varphi = 0,1$ on constate une augmentation des vitesses axiale et radiale avec l'augmentation de φ et a d'autre part on constate $\forall \varphi \in [0 ; 0.2] \Rightarrow U > W$.

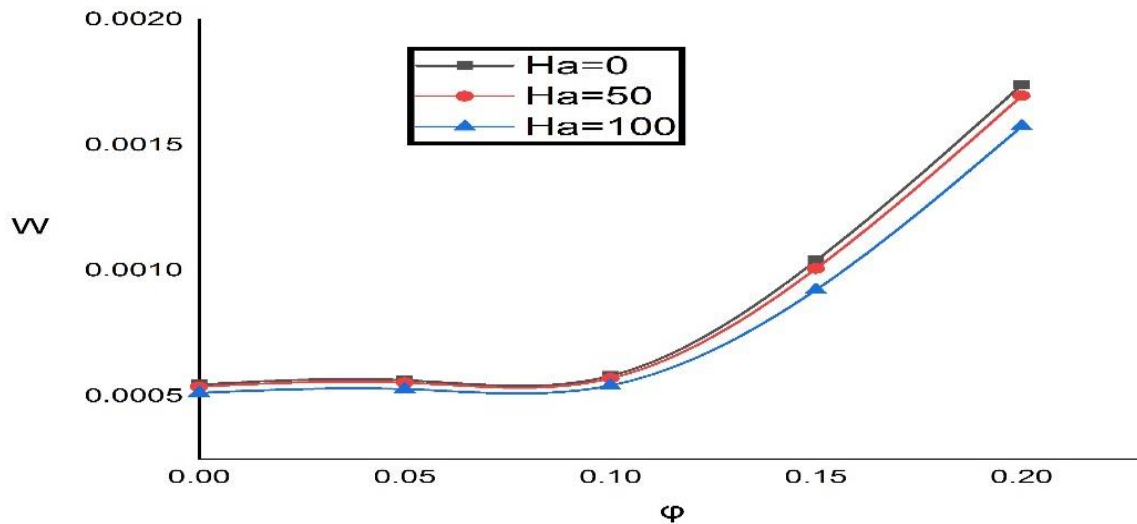


Figure 43 : Effet de ϕ sur la vitesse axiale pour pour : $Le = 1, Pr = 1, Sr = 1, Du = 1, Da = 0.001, R_T = 10^4, N = 1,$
 $r = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}$

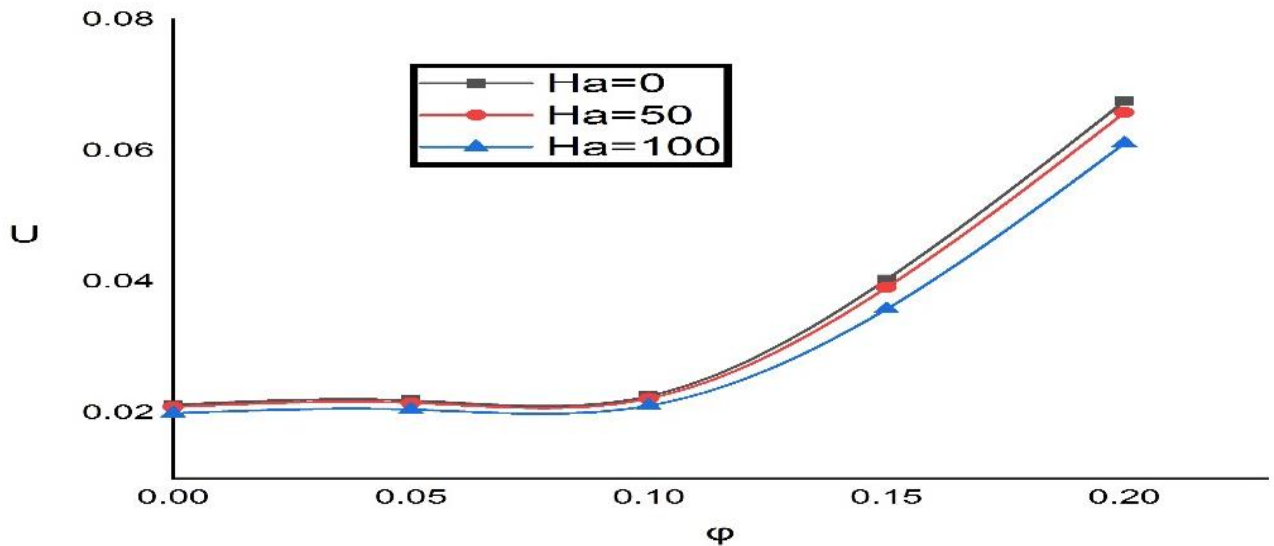


Figure 44 : Effet de ϕ sur la vitesse radiale pour : $Le = 1, Pr = 1, Sr = 1, Du = 1, Da = 0.001, R_T = 10^4, N = 1, r = \frac{1}{2},$
 $z = \frac{1}{2}$

II.8. Effet de la variation de rapport d'aspect géométrique, A

Les figures 45, 46 montrent l'effet du rapport d'aspect géométrique sur le transfert de chaleur et de masse. On remarque sur les figures 27 et 28 que le nombre de NUSSELT moyen et Sherwood moyen augmentent d'une façon monotone avec le rapport d'aspect géométrique $A \in [1, 4]$. Cette augmentation résulte de l'élévation de force de volume thermosolutale et d'autre part on constate une augmentation de nombre de NUSSELT moyen et SHERWOOD moyen avec l'augmentation de RAYLEIGH thermique.

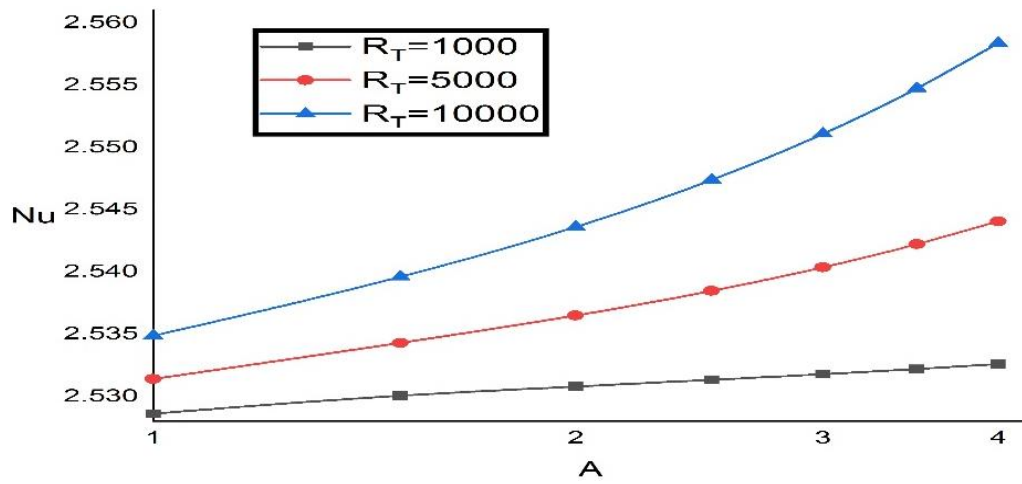


Figure 45 : Effet de A sur Nu pour : $N = 1$, $Pr = 1$, $Le = 1$, $Da = 0,001$, $Sr = 1$, $Du = 1$ et $\varphi = 0,05$

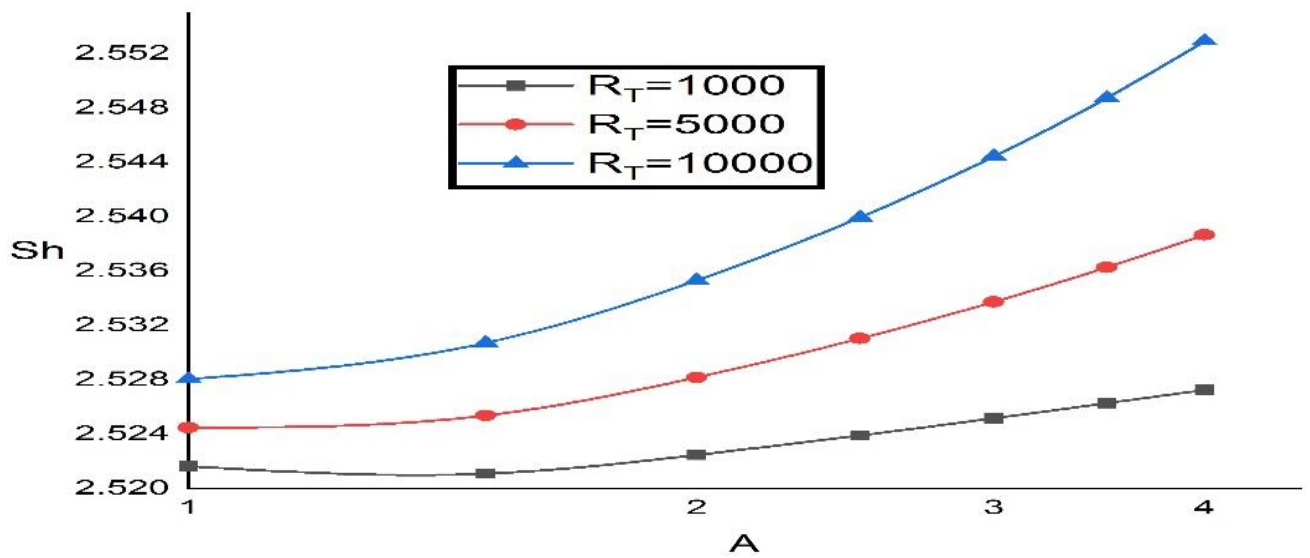


Figure 46 : Effet de A sur Sh pour : $N = 1$, $Pr = 1$, $Le = 10$, $Da = 0,001$, $Sr = 1$, $Du = 1$ et $\varphi = 0,05$

Conclusion

La partie de cette étude qui a porté sur la magnéto convection thermosolutale dans une cavité cylindrique a permis d'aboutir aux conclusions suivantes :

Les nombres de Nusselt moyen et Sherwood moyen diminuent avec l'augmentation du nombre de HARTMANN en raison de l'augmentation de la force de LORENTZ. Les nombres de NUSSELT et de SHERWOOD moyens augmentent avec le nombre de DARCY pour $Da \in [10^{-5}, 10^{-3}]$. Pour $Da \in [10^{-3}, 1]$, Nu et Sh sont presque fixes en raison que la perméabilité qui prend des valeurs élevées à cause de l'augmentation du nombre de Darcy. Les nombres de Nusselt moyen et Sherwood moyen restent inchangés pour : $R_T < 5 \times 10^2$. Quand le nombre de RAYLEIGH Thermique dépasse le seuil : $R_T = 5 \times 10^2$, on constate une augmentation du transfert de chaleur et de masse.

Les nombres de SHERWOOD moyen et NUSSELT moyen diminuent respectivement avec l'augmentation du nombre de SORET et du nombre de DUFOUR. Les deux coefficients de SORET et DUFOUR décrivent le phénomène de la thermo diffusion. L'augmentation de ces deux paramètres est provoquée respectivement par la diminution de transfert massique et de chaleur.

D'autre part les transferts de chaleur et de masse augmentent avec l'augmentation du nombre de rapport des poussées en raison de l'augmentation des forces de flottabilité thermique et de concentration. On note aussi que les nombres de NUSSELT et de SHERWOOD moyens augmentent lorsque le nombre de PRANDTL croit. Ceci est justifié par le fait que l'augmentation des forces thermiques et volumiques du soluté implique l'augmentation de nombre de PRANDTL. Pour une fraction volumique, $\varphi < 10\%$, le nombre de NUSSELT moyens reste presque fixe.

Quand la fraction volumique, φ , des nanoparticules dépasse ce seuil : $\varphi = 10\%$, on constate une augmentation de nombre de NUSSELT moyen. Cette augmentation résulte de l'élévation de la conductivité thermique en raison de l'augmentation de φ . Le rapport d'aspect géométrique provoque l'augmentation des forces de volume thermosolutale, et par conséquent, l'augmentation des nombres de NUSSELT et de SHERWOOD moyens.

Conclusion générale et perspectives

Nous avons présenté dans ce mémoire de thèse une étude théorique et numérique sur les phénomènes du transfert combiné de chaleur et de masse (thermosolutale), dans un milieu poreux, isotrope et saturé rempli d'un nanofluide (nanoparticules d'aluminium) en équilibre thermique avec un fluide de base binaire dans une enceinte cylindrique. Les parois latérales de l'enceinte sont rigides, imperméables et adiabatiques tandis que les parois horizontales sont maintenues à température et à concentration uniformes. L'écoulement du nanofluide se produisant dans les couches poreuses est décrit par la loi de DARCY étendue de BRINKMAN-FORCHHEIMER en utilisant l'approximation de BOUSSINESQ.

La méthode des volumes finis a été utilisée pour discrétiser les équations modélisant le phénomène à savoir l'équation de conservation de la quantité de mouvement, de l'énergie et de la concentration. Ce travail a été divisé en deux parties. Une première partie consacrée à l'étude théorique et numérique de phénomène de la convection thermosolutale, tenant compte de l'effet SORET et DUFOUR, dans une cavité poreuse cylindrique remplie d'un nanofluide.

La deuxième partie a été consacrée à l'effet d'un champ magnétique sur la convection thermosolutale, tenant compte de l'effet SORET et DUFOUR, dans une cavité poreuse cylindrique remplie d'un nanofluide.

L'effet des nombres sans dimension tels que : le nombre de RAYLEIGH thermique, de Darcy, de PRANDTL, de SORET, de DUFOUR, de HARTMANN, le rapport d'aspect géométrique, le rapport de poussée et la fraction volumique des nanoparticules, sur le phénomène étudié a été analysé. Ainsi nous avons discuté l'effet du nombre de RAYLEIGH thermique sur le taux de transfert thermique et solutale. On a noté que qu'il est sans effet pour les valeurs $R_T < 5 \times 10^2$. Alors quand le nombre de RAYLEIGH thermique dépasse ce seuil $R_T \in [5 \times 10^2 - 10^4]$ on a constaté une augmentation des nombres de NUSSELT moyen et de SHERWOOD moyen. Cette augmentation résulte de l'élévation de force volume thermique quand R_T augmente. On peut également noter que le transfert de chaleur est favorisé par l'augmentation du rapport d'aspect.

Les vitesses axiale et radiale restent constantes pour : $R_T \in [10, 5 \times 10^2]$ alors que lorsque R_T dépasse cette zone on note l'augmentation des vitesses. D'autre part, on constate que $\forall R_T \in [10, 10^4]$ la vitesse radiale est supérieure à la vitesse axiale ($U > W$).

Pour le nombre de PRANDTL on remarque que les nombres de NUSSELT et de SHERWOOD moyens augmentent avec l'augmentation du nombre de PRANDTL en raison de l'augmentation des forces thermiques et volumiques du soluté. D'autre part les transferts de chaleur et de masse augmentent avec l'augmentation du nombre de rapport des poussées en raison de l'augmentation des forces de flottabilité thermique et de concentration. Nous remarquons que le nombre de SHERWOOD moyen et de NUSSELT moyen diminuent respectivement avec l'augmentation du nombre de SORET et du nombre de DUFOUR. Les deux coefficients de SORET et DUFOUR décrivent le phénomène de la thermo diffusion, donc l'augmentation de ces paramètres provoque respectivement une diminution de transfert massique et chaleur.

Les nombres de NUSSELT moyen et SHERWOOD moyen diminuent quand le nombre de HARTMANN augmente et ceci est dû à l'augmentation de la force de LORENTZ.

Les nombres de NUSSELT et de SHERWOOD moyens augmentent avec le nombre de DARCY pour $Da \in [10^{-5}, 10^{-3}]$. Pour $Da \in [10^{-3}, 1]$, Nu et Sh sont constants car la perméabilité prend des valeurs élevées à cause de l'augmentation du nombre de DARCY. Nous remarquons que le nombre de NUSSELT moyens reste presque fixe pour $\varphi < 10\%$. Quand la fraction volumique des nanoparticules dépasse ce seuil $\varphi = 10\%$, on constate une augmentation de NUSSELT moyen. Cette augmentation résulte de l'élévation de la conductivité thermique en raison de l'augmentation de φ .

Comme suite à ce travail, quelques points intéressants doivent être pris en compte dans de futurs travaux de recherche à savoir :

- ✓ Étudier le phénomène en considérant un champ de température variable suivant le rayon de cylindre ;
- ✓ Étudier le phénomène en considérant un champ de magnétique non uniforme ;
- ✓ Considérer une cavité cylindrique remplie d'un nanofluide hétérogène ;
- ✓ Considérer une paroi partiellement remplie par un milieu poreux à porosité variable et saturé par un nanofluide hétérogène.

Références bibliographiques

- [1] B. V Pushpa, M. Sankar, O.D. « *Makinde, optimization of thermosolutal convection in vertical porous annulus with a circular baffle* ». Thermal Science and Engineering Progress, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tsep.2020.100735>, 2020.
- [2] M.A. Sheremet, I. Pop and A. Ishak « *Double-diffusive mixed convection in a porous open cavity filled with a nanofluid using buongiorno's model* ». Transport in Porous media, Vol.109, N°1, pp.131-145, 2015.
- [3] N. Hadidi, R. Bennacer « *Heat and mass transfer by natural convection in a bi-Layered cubic enclosure with opposing temperature and concentration gradients* ». International Journal of Thermique Science, Vol. 132, pp. 534–51, 2018.
- [4] C.M. Mijajlovi, C. Vidojkovi « *Numerical simulation of fluid-structure interaction between fishing wobbler and water* ». Facta univ, series: Mechanics and Eng, Vol. 8, N°4, pp. 665–76, 2020.
- [5] R. Mehdaoui, M. El mir, A. Mojtabi « *Effect of the wavy permeable interface on double diffusive natural convection in a partially porous cavity* ». Int. Journal of Multiphysics, Vol. 4, N°3, 2010.
- [6] C. Beckermann, S. Ramadhyani and R. Viskanta “*Natural convection flow and heat transfer between a fluid layer and a porous layer inside a rectangular enclosure*”. Journal of Heat Transfer, Vol. 109, N°2, pp. 363-370, 1987.
- [7] J. A. Weaver and r. Viskanta. « *Natural convection due to horizontal temperature and concentration gradients-2. Species interdiffusion, Soret and Dufour effects*». Hr. J. Hear Mass Tmmfir, Vol. 34, N°12, pp. 3121-3133, 1991.
- [8] N. d. Rosenberg and F. J. Spera « *Thermohaline convection in a porous media heated from below* ». Int. Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 35, pp.1261-1273, 1992.
- [9] h. C. Khare and a. K. Sahai «*Thermosolutal convection in a heterogeneous fluid layer in porous medium in the presence of a magnetic field* ». In. 1. Engen. Sci., Printed in Great Britain, Vol. 31, N°. 11, pp. 1507-1517, 1993.

- [10] Adrian Postelnicu. « *Influence of a magnetic field on heat and mass transfer by natural convection from vertical surfaces in porous media considering Soret and Dufour effects* » International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 47, pp. 1467–1472, 2004.
- [11] Sunil, Anupama, R.C. Sharma. « *The effect of magnetic field dependent viscosity on thermosolutal convection in ferromagnetic fluid* ». Applied Mathematics and Computation, Vol. 163, pp. 1197–1214, 2005.
- [12] M.S. Malashetty , S.N. Gaikwad, Mahantesh Swamy. « *An analytical study of linear and non-linear double diffusive convection with Soret effect in couple stress liquids* ». International Journal of Thermal Sciences Vol. 45, pp. 897–907, 2006.
- [13] Mourad Magherbi, Nejib Hidouri, Ammar Ben Brahim « *Influence des effets de diffusion croisés sur la production d'entropie en convection par double diffusion* ». 13^{èmes} Journées Internationales de Thermique. Albi, France, 2007.
- [14] N. Retielet El-Hadi Bouguerra « *Effet du Nombre de Rayleigh Thermique et du Nombre de Lewis sur la Convection dans une Demi Cylindrique Horizontale* ». 13^{èmes} journées Internationales de Thermique, JITH, Albi : France 2007.
- [15] M.C.Raju, S.V.K.Varma, P.V. Reddy and Sumon Saha « *Soret effects due to natural convection between heated inclined plates with magnetic field* ». Journal of Mechanical Engineering, Vol. ME39, N°2, 2008.
- [16] Urvashi Gupta, Gaurav Sharma. « *Thermosolutal instability of a compressible Rivlin–Erickson fluid in the presence of rotation and Hall currents saturating a porous medium* » Applied Mathematics and Computation Vol. 196, pp.158–173, 2008.
- [17] S. Benissaad, A. Boumaraf, Djebli. « *Étude de la convection naturelle thermosolutale dans une enceinte inclinée* ». Séminaire International sur les Technologies Mécaniques, SITEM'2009, Université Abou-Beker Belkaid–Tlemcen, 2009.
- [18] Amir Houshang Mahmoudi, Mina Shahi, Abbas Honarbakhsh Raouf, Ali Ghasemian. « *Numerical study of natural convection cooling of horizontal heat source mounted in a*

- square cavity filled with nanofluid* ». International Communications in Heat and Mass Transfer, Vol 37, pp. 1135–1141, 2010.
- [19] N. Ahmed. «*MHD convection with Soret and Dufour effects in a three-dimensional flow past an infinite vertical porous plate* ». Can. J. Phys. Vol. 88, pp. 663–674, 2010.
- [20] Rajesh Sharma, R. Bhargava, Peeyush Bhargava. A «*Numerical solution of unsteady MHD convection heat and mass transfer past a semi-infinite vertical porous moving plate using element free Galerkin method* ». Computational Materials Science, Vol. 48. pp. 537–543, 2010.
- [21] Adrian Postelnicu «*Heat and mass transfer by natural convection at a stagnation point in a porous medium considering Soret and Dufour effects* ». Heat Mass Transfer, Vol. 46. pp. 831–840, DOI 10.1007/s00231-010-0633-3, 2010.
- [22] T. Basak, S. Roy, A. Matta, I. Pop «*Analysis of heat line for natural convection within porous trapezoidal enclosures: Effect of uniform and non-uniform heating of bottom wall* ». Int. Journal of Heat Mass Transfer, Vol. 53, pp. 5947–5961, 2010.
- [23] M. Bhuvaneshwari, S. Sivasankaran, and Y. J. Kim. «*Numerical study on double diffusive mixed convection with a solet effect in a two-sidedlid-driven cavity* » An International Journal of Computation and Methodology. Vol.59, pp. 543-560, DOI: 10.1080/10407782.2011.561077, 2011.
- [24] Shaowei Wang, Wenchang Tan. «*Stability analysis of Soret-driven double-diffusive convection of Maxwell fluid in a porous medium* ». International Journal of Heat and Fluid Flow, Vol. 32, pp. 88–94, 2011.
- [25] N. Hadidi, Y. Ould –Amer «*Convection thermosolutale bidimensionnelle dans une cavité poreuse renfermant deux couches poreuses disposées verticalement* ». Mécanique Appliquée et Théorique Vol. 2, N°4, pp. 385-396, 2011.
- [26] S. Hamimid, M. Guellal, A. Amroune and N. Zeraïbi “*Effect of a porous layer on the flow structure and heat transfer in a square cavity*”. Fdmp-Fluid Dynamics and Materials Processing, Vol. 8, N°1, pp. 69-90, 2011.

- [27] K. Al-Farhany, A. Turan “*Numerical study of double diffusive natural convective heat and mass transfer in an inclined rectangular cavity filled with porous medium*”. International Communications in Heat and Mass Transfer, Vol. 39, pp.174–181, 2012.
- [28] Ching Chang Cho, Chieh-LiChen, Cha'o-KuangChen. «*Natural convection heat transfer performance in complex-wavy-wall enclosed cavity filled with nanofluid*». International Journal of Thermal Sciences. Vol 60, 255-263, 2012.
- [29] M. Sankar, Beomseok Kim, J.M. Lopez, Younghae Do «*Thermosolutal convection from a discrete heat and solute source in a vertical porous annulus* ». International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.55, pp.4116–4128, 2012.
- [30] Atul K.Srivastava, B.S.Bhadauria, VinodK.Gupta « *Magneto-convection in an anisotropic porous layer with Soret effect* ». International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 4, pp. 426–438, 2012.
- [31] P. Bera, S. Pippal, A. K. Sharma “*A thermal non-equilibrium approach on double-diffusive natural convection in a square porous-medium cavity* “. International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.78, pp. 1080–1094, 2014.
- [32] N. Hadidi, R. Bennacer, Y. Ould-amer « *Two-dimensional thermosolutal natural convective heat and mass transfer in a bi-layered and inclined porous enclosure*». Energy, Vol. 93, pp. 2582-2592, 2015.
- [33] M. Rashidi, M. Ali, Behnam Rostami, Peyman Rostami, and Gong-Nan Xie « *Heat and Mass Transfer for MHD Viscoelastic Fluid Flow over a Vertical Stretching Sheet with Considering Soret and Dufour Effects* ». Mathematical Problems in Engineering, 2015.
- [34] Sabyasachi «*Mondal precious Sibanda. effects of buoyancy ratio on unsteady double-diffusive natural convection in a cavity filled with porous medium with non-uniform boundary conditions* ». International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 85, pp. 401–413, 2015.
- [35] M. Borhan Uddin M, M. Rahman, M.A.H. Khan, Talaat A. Ibrahim «*Effect of buoyancy ratio on unsteady thermosolutal combined convection in a lid driven trapezoidal enclosure in the presence of magnetic field* ». Computers & Fluids, Vol. 114, pp.284–296, 2015.

- [36] Igor V. Miroshnichenko, Mikhail A. Sheremet, Hakan F. Oztop, Khaled Al-Salem « MHD natural convection in a partially open trapezoidal cavity filled with a nanofluid ». *International Journal of Mechanical Sciences* <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.11.001>, 2016.
- [37] Mikhail A. Sheremet, Ioan Pop, Natalia C. Roşca, « *Magnetic field effect on the unsteady natural convection in a wavy-walled cavity filled with a nanofluid: Buongiorno's mathematical model.* ». *Journal of the Taiwan Institute of Chemical Engineers*, pp. 1–12, 2016.
- [38] M. Hatami, D. Song, D. Jing « *Optimization of a circular-wavy cavity filled by nanofluid under the natural convection heat transfer condition* ». *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 98, pp. 758–767, 2016.
- [39] A.I. Alsabery, A.J. Chamkha, H. Saleh and I. Hashim “*Natural convection flow of a nanofluid in an inclined square enclosure partially filled with a porous medium*”, *Scientific Reports*, Vol. 7, N°1, pp. 2357, 2017.
- [40] H.T. Cheong, S. Sivasankaran, and M. Bhuvaneshwari “*Natural convection in a wavy porous cavity with sinusoidal heating and internal heat generation*”. *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid flow*, Vol. 27, N°2, pp. 287-309, 2017.
- [41] Odelu Ojjela, Adigoppula Raju, Pravin Kashyap Kambhatla « *Influence of thermophoresis and induced magnetic field on chemically reacting mixed convective flow of Jeffrey fluid between porous parallel plates*». *Journal of Molecular Liquids*, Vol. 232, pp. 195-206, 2017.
- [42] Huijin Xu, Zhanbin Xing. «*The lattice Boltzmann modeling on the nanofluid natural convective transport in a cavity filled with a porous foam* ». *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 89, pp. 73–82, 2017.
- [43] Q.Y. Zhu, Y.J. Zhuang, H.Z. Yu. «*Three-dimensional numerical investigation on thermosolutal convection of power-law fluids in anisotropic porous media* ». *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 104, pp. 897–917, 2017.

- [44] I. Filahi, M. Bourich, M. Hasnaoui, A. Amahmid «*Analytical and numerical study of Soret and Dufour effects on thermosolutal convection in a horizontal Brinkman porous layer with a stress-free upper boundary*». *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 20, 2020.
- [45] D. Kushawaha, S. Yadav, D. K. Singh «*Thermo-solute natural convection with heat and mass lines in a uniformly heated and soluted rectangular enclosure for low Prandtl number fluids*». *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 148, 2020.
- [46] J.C. Umavathi, O. AnwarBég «*Modeling the onset of thermosolutal convective instability in a non-Newtonian nanofluid-saturated porous medium layer* » *Chinese Journal of Physics*, Vol. 68, pp.147-167, 2020.
- [47] Abdelraheem M.Aly Shreen El-Sapa «*Effects of Soret and Dufour numbers on MHD thermosolutal convection of a nanofluid in a finned cavity including rotating circular cylinder and cross shapes* ». *International Communications in Heat and Mass Transfer*. Vol. 130, 2022.
- [48] Asma Ouahouah, Nabila Labsi, Xavier Chesneau, Youb Khaled Benkahla, «*Natural convection within a non-uniformly heated cavity partly filled with a shear-thinning nanofluid and partly with air* ». *Journal of non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 289, pp. 104-490, 2022.
- [49] R. Nath, K. Murugesan. «*Double diffusive mixed convection in a Cu-Al₂O₃/water nanofluid filled backward facing step channel with inclined magnetic field and part heating load conditions*». *Journal of Energy Storage*. Vol. 47, 2022.
- [50] Zhen Tian, Zhibo Tang, Cong Qi, Lanqi Chen, Yuwei Wang «*Natural convection heat transfer characteristics of sinusoidal cavities filled with nanofluids* ». Vol. 648, N°5, 2022.
- [51] H. Salhi «*Etude Numérique de la Convection Naturelle dans les enceintes : Nanofluide* ». Thèse de doctorat, Université de Batna, 2015.
- [52] M. Sammouda «*Modélisation Théorique et Numérique du Phénomène de la Convection Naturelle et Thermosolutale dans les Milieux poreux à Porosité Variable* ». Thèse de Doctorat, Université Mohammed V, 2012.

- [53] F. Hakan et al. « *Numerical study of natural convection in partially heated rectangular enclosures filled with nanofluids* ». Vol 29, Issue 5, pp.1326-1336, 2008.
- [54] S. Kadri « *Simulation numérique de l'effet d'une excitation vibratoire sur la magnéto-convection dans une cavité remplie d'un nanofluide* ». Thèse de Doctorat, Université de Bechar, 2013.
- [55] B. Gladès « *Contribution à l'étude de la convection naturelle dans les nano fluides en configuration de Rayleigh-Bénard* ». Thèse de doctorat, L'Université Toulouse III- Paul Sabatier, 2010.
- [56] E. Abu-Nada et al. « *Effects of inclination angle on natural convection in enclosures filled with Cu–water nanofluid* ». International Journal of Heat and Fluid Flow, Vol. 30, N°4, pp. 669-678, 2009.
- [57] M. El Hamma, A. Rtibi, M. Taibi, K. Gueraoui and M. Bernatchou « *Theoretical and Numerical Study of Thermosolutal Convection in a Cylindrical Porous Cavity Filled with a Nanofluid and Considering Soret and Dufour Effects* ». International Journal on Engineering Applications (I.R.E.A.), Vol.10, N°1, pp. 56-65, 2022.
- [58] M. El Hamma, M. Taibi, A. Rtibi, K. Gueraoui and M. Bernatchou « *Effect of magnetic field on thermosolutal convection in a cylindrical cavity filled with nanofluid, considering Soret and Dufour effects* ». JP Journal of Heat and Mass Transfer. Vol. 26, pp. 1-26, 2022.
- [59] A. Mrabti. « *Simulation numérique d'écoulements de convection naturelle dans une géométrie cylindrique à axe vertical soumise à l'effet d'un champ magnétique ou d'un gradient solutal* ». Thèse de Doctorat, Université Mohammed V, Morocco, 1999.