REMERCIEMENTS

Tout au long de ces années j'ai pu bénéficier de l'attention, de l'aide ou du soutien de nombreuses personnes aux quelles je tiens à exprimer ma sympathie.

J'adresse tout d'abord mes remerciements les plus sincères à mon professeur E. Elqorachi. qui m'a proposé ce sujet de thèse. C'est grâce à sa haute compétence, ses qualités humaines, son grand intérêt pour la recherche et l'assistance qu'il n'a cessé de m'apporter, que ce travail a vu le jour.

Je tiens ensuite à remercier les membres du jury pour leur partcipation.

Je remercie vivement M. Akkouchi, Professeur à l'université Cadi Ayyad qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse, ainsi que pour sa collaboration scientifique.

Que les professeurs My. H. Lalaoui Rhali, S. Kabbaj et A. Redouani trouvent ici mes vifs remerciements pour leur travail de rapporteur et pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de partciper au jury de cette thèse.

Mes remerciements les plus sincères s'adressent également aux professeurs B. Bouikhalene qui m'a honoré en acceptant d'examiner ce travail.

Je pense aussi à tous les autres enseignants, que j'ai côtoyé dans la 'tour des maths', et plus précisèment ceux par la qualité de leur enseignement m'ont confirmé mon goût pour les mathématiques et m'ont ensuite initiés à la recherche.

Enfin, j'exprime ma reconnaissance et mes remerciements aux membres de ma famille et mes amis qui m'ont énormèment soutenu durant ce travail.

RÉSUMÉ DE LA THÈSE

Dans cette thèse, nous traitons deux aspects de la théorie des équations fonctionnelles : résolution et étude de stabilité, au sens de Hyers-Ulam, et, au sens de Hyers-Ulam-Rassias, d'une classe d'équations fonctionnelles.
Pour la résolution des équations fonctionnelles, nous donnons toutes les solutions de l'équation matricielle d'ordre 3 de d'Alembert et de Wilson dans le chapitre 1.
Concernant la stabilité des équations fonctionnelles, nous étudions dans le chapitre 2, la stabilité, au sens de Hyers-Ulam, de l'équation fonctionnelle σ-quadratique, en adoptant une nouvelle preuve, plus simple, puis nous caractérisons la même équation ayant des valeurs dans un espace muni d'un produit scalaire.
Le chapitre 3 examine la stabilité, au sens de Hyers-Ulam, en utilisant la méthode du point fixe de l'équation fonctionnelle K-quadratique et de l'équation fonctionnelle K-Jensen.
Dans le chapitre 4 nous établissons de nouveaux théorèmes de stabilité, au sens de Hyers-Ulam, de l'équation fonctionnelle σ-quadratique et de l'équation fonctionnelle σ-Jensen, dans les domaines non bornés.
Le chapitre 5 se focalise sur l'étude de l'équation fonctionnelle généralisée des quadratiques. Nous déterminons la solution de cette équation fonctionnelle, et nous prouvons la stabilité, au sens de Hyers-Ulam-Rassias, dans les espaces de Banach et dans les domaines non bornés, en adoptant la méthode directe et la méthode du point fixe.
La stabilité de l'équation fonctionnelle σ-Drygas dans les semi-groupes moyennables, est le résultat principale du chapitre 6.
Le chapitre 7 est consacré à l'étude de la stabilité, au sens de Hyers-Ulam, dans les espaces β-Banach, des équations fonctionnelles, de type σ-Jensen et ce, en nous basant sur la méthode directe.

Discipline : Mathématique et Application.

Mots-Clés : Résolution des équations fonctionnelles, Stabilité au sens de Hyers-Ulam, Stabilité au sens de Hyers-Ulam-Rassias, Equation matricielle de d'Alembert, Equation matricielle de Wilson, Equation σ-quadratique, Equation σ-Jensen, Equation σ-Drygas.

Laboratoire ou les travaux ont été réalisés : Laboratoire d'Analyse Mathématiques et Applications, Faculté des Sciences, Université Ibn Zohr.

Principales publications auxquelles ce travail a donné lieu :

1. E. Elqorachi, Y. Manar and Th. M. Rassias. *Hyers-Ulam stability of the quadratic functional equation*. Functional Equations in Mathematical Analysis, Springer optimization and its applications, V **52** (2012), 97-105.

http://www.springerlink.com/content/n52444658585314g/

2. E. Elqorachi, Y. Manar and Th. M. Rassias. Hyers-Ulam stability of the quadratic and Jensen functional equations on unbounded domains. *J. Math. Sci. Advances and Application*, **4** (2) (2010), 287-303.
http://scientificadvances.co.in/index.php?cmd=abstract&j=1&su=23&artical=276

3. E. Elqorachi, Y. Manar and Th. M. Rassias. Hyers-Ulam stability of the quadratic functional equation. *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.*, **1** (2) (2010), 11-20.
http://journals.semnan.ac.ir/ijnaa/browse.php?mag_id=2\&slc_lang=en\&sid=1

4. Y. Manar, E. Elqorachi and B. Bouikhalene. Fixed points and Hyers-Ulam-Rassias stability of the quadratic and Jensen functional equations. *NonLinear. Func. Anal. appl.*, **15** (2) (2010), 273-284.
http://www.zentralblatt-math.org/zmath/en/search?q=an:pre06000662\&format=complete

5. Y. Manar, E. Elqorachi and Th. M. Rassias. Hyers-Ulam stability of the Jensen functional equation in quasi-Banach spaces. *Nonlinear Funct. Anal. Appl.*, **15** (4) (2010), 581-603.
http://www.zentralblatt-math.org/zmath/en/search/?q=an:pre06000812\&format=complete

6. Y. Manar, E. Elqorachi and Th. M. Rassias. On the Hyers-Ulam stability of the quadratic and Jensen functional equations on a restricted domain. *Nonlinear Funct. Anal. Appl.*, **15** (4) (2010), 647-655.
http://www.zentralblatt-math.org/zmath/en/search/?q=an:pre06000817\&format=complete

7. B. Bouikhalene, E. Elqorachi and Y. Manar. *Wilson's functional equations for vector and* 3×3 *matrix valued functions*. Inequality Theory and Applications, Vol **6**, 2010.
https://www.novapublishers.com/catalog/product_info.php?products_id=13293

8. E. Elqorachi and Y. Manar. *Fixed points approach to the stability of the quadratic functional equation*. Nonlinear Analysis, Stability, Approximation, and Inequalities, Springer Optimization and Its Applications, V **68** (2012), 259-278.

9. E. Elqorachi and Y. Manar. Hyers-Ulam stability of the Drygas functional equation in amenable semigroups. (submitted for publication).

10. E. Elqorachi and Y. Manar. On the paper by A. Najati and S.-M. Jung : the Hyers-Ulam stability of approximately quadratic mapping on restricted domains. *J. Nonlinear Anal. Appl.*, **2012**, (2012) Article ID jnaa-00127, 10 Pages doi :10.5899/2012/jnaa-00127.
http://www.ispacs.com/journals/jnaa/2012/jnaa-00127/

Table des matières

Introduction Générale

Les équations fonctionnelles forment une branche des mathématiques modernes. Elles sont apparues à la même époque que les définitions modernes des fonctions. De 1747 à 1750, J. d'Alembert a publié trois papiers, ces derniers étant les premiers concernant les équations fonctionnelles. La première croissance significative de la discipline des équations fonctionnelles a été stimulée par le problème de la loi du parallélogramme des forces (Aczél (1966)). En 1769, d'Alembert réduit ce problème pour trouver des solutions de l'équation fonctionnelle $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$. Beaucoup de mathématiciens célèbres, notamment N. H. Abel, A. L. Cauchy, J. Bolyai, J. d'Alembert, L. Euler, F. C. Gauss, M. Frechet, J. L. Jensen, A. N. Kolmogorov, N. I. Lobaceveskkii, J. V. Pexider et S. D. Poisson, ont étudié les équations fonctionnelles en raison de leur apparente simplicité et de leur nature harmonique.

Bien que l'étude moderne des équations fonctionnelles a commencé il ya plus de 250 ans, la croissance effective de cette discipline date du dernier demi-siècle. En 1900, David Hilbert a suggéré, dans le cadre de son cinquième problème, que si la théorie des équations différentielles fournit des techniques élégantes et puissantes pour résoudre les équations fonctionnelles, les hypothèses de dérivabilité ne sont pas « intrinsèquement » nécessaires. Motivés par Hilbert, les chercheurs ont suggéré de nombreux traitements de différentes équations fonctionnelles, sans supposer toutes les hypothèses de régularité. Ces efforts ont donné naissance à la théorie moderne des équations fonctionnelles. Les ouvrages de S. Pincherle (1906, 1912), E. Picard (1928), G. H. Hardy, J. E. Liittlewood, G. Polya (1934), M. Ghermanescu (1960), J. Aczél (1966), et M. Kuczma (1968) ont également fait progresser, d'une manière considérable la discipline des équations fonctionnelles. Les livres récents de J. Dhombres (1979), M. Kuczma (1985), J. Aczél (1987), J. Smital (1988), J. Aczél, J. Dhombres (1989), M. Kuczma, B. Choczewski, R. Allemagne (1990), L. Székelyhidi (1991), E. Castillo, M. Ruiz-Cobo (1992), B. R. Ebanks, P. K. Sahoo, W. Sander (1998), P. K. Sahoo, T. Riedel (1998), D. H. Hyers, G. Isac, Th. M. Rassias (1998), S.-M. Jung (2001), S. Czerwik (2002), et I. Risteski, V. Covachev (2002) ont contribué de manière significative à l'avancement de cette discipline.

La notion de stabilité des équations fonctionnelles à plusieurs variables remonte à plus d'un demi-siècle quand, d'une part, S. M. Ulam a posé le problème fondamentale et, d'autre

part, D. H. Hyers en a donné en 1941 la première solution partielle mais significative. La théorie de la stabilité des équations fonctionnelles a été révisée et développée par un nombre important de mathématiciens au cours des deux dernières décennies.
En 1940, S. M. Ulam a donné une conférence de grande importance, devant le Club des mathématiques de l'Université de Wisconsis, dans laquelle il a examiné un certain nombre de problèmes « ouverts ». Parmi ces problèmes, figure celui de la stabilité d'homomorphisme de groupe :

> *Etant donnés un groupe métrique (G, d), un nombre $\epsilon > 0$ et une application $f : G \longrightarrow G$ satisfaisant $d(f(x \cdot y), f(x) \cdot f(y)) \leq \epsilon$ pour tout $x, y \in G$, existe-il un homomorphisme $a : G \longrightarrow G$ et une constante $k > 0$, dépendant seulement de G, tels que $d(a(x), f(x)) \leq k\epsilon$ pour tout $x \in G$?*

Si la réponse est positive, l'équation des homomorphismes : $a(x \cdot y) = a(x) \cdot a(y)$ est dite stable.
En essayant de résoudre des problèmes analogues, la plupart des auteurs ont privilégié les homomorphismes entre différentes structures topologiques de groupes ou d'espaces vectoriels.
La première réponse positive donnée par D. H. Hyers en 1941, est formulée dans le résultat suivant :

Théorème 0.0.1 *[77] Soit $f : E_1 \to E_2$ une application entre les espaces de Banach E_1 et E_2, qui vérifie*

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \epsilon \ \textit{ pour tout } x, y \in E_1$$

pour $\epsilon > 0$. Alors, il existe exactement une seule application additive $a : E_1 \to E_2$

$$a(x+y) = a(x) + a(y) \ \textit{ pour tout } x, y \in E_1$$

vérifiant

$$\|f(x) - a(x)\| \leq \epsilon \ \textit{ pour tout } x, y \in E_1,$$

donnée par la formule

$$a(x) = \lim_{n \to +\infty} 2^{-n} f(2^n x), \quad x \in E_1.$$

De plus, si la fonction $t \to f(tx)$ est continue en t pour chaque $x \in E_1$ fixé, alors a est une application linéaire.

La méthode adoptée par Hyers pour trouver la formule $a(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} 2^{-n} f(2^n x)$ est appelée par la suite : méthode directe.
Les oeuvres de D. H. Hyers ont initié une grande partie de la recherche actuelle en théorie de la stabilité des équations fonctionnelles.
On peut généraliser la notion de stabilité introduite dans [77] par Hyers en liaison avec le problème posé par Ulam : soit l'équation $G(g) = D(g)$ (E). « Si le membre de gauche $G(g)$ de l'équation (E) n'est pas « loin » du membre de droite $D(g)$, alors il existe une solution f

de l'équation (E) qui n'est pas « loin » de la fonction g ». Pour un grand nombre de théorème concernant la stabilité des équations fonctionnelles, la solution f est unique. Mais il existe dans la littérature des équations qui sont stables mais non uniquement. Nous admettons la définition suivante :

Définition 0.0.1 *L'équation $G(g) = D(g)$ est dite stable si pour chaque $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si pour chaque g : $d(G(g), D(g)) < \delta$ pour toute variable dans l'équation, alors il existe une solution f de cette équation telle que $d(g, f) < \epsilon$ pour toute variable dans g et f. L'équation $G(g) = D(g)$ est dite stable uniquement si elle est stable et la solution f est unique.*

T. Aoki [10] et Th. M. Rassias [130] ont démontré une généralisation du Théorème de Hyers pour les applications additives et les applications linéaires.

Théorème 0.0.2 *[130] Soit $f : E_1 \to E_2$ une application de l'espace vectoriel normé E_1 dans un espace de Banach E_2. Supposons qu'il existe $\theta > 0$ et $p < 1$ vérifiant*

$$\|f(x + y) - f(x) - f(y)\| \leq \theta(\|x\|^p + \|y\|^p)$$

pour tout $x, y \in E_1$, (pour tout $x, y \in E_1 \backslash \{0\}$ si $p < 0$). Alors, la limite :

$$a(x) = \lim_{n \to +\infty} 2^{-n} f(2^n x)$$

existe pour tout $x \in E_1$ et $a : E_1 \to E_2$ est l'unique application additive telle que :

$$\|f(x) - a(x)\| \leq \frac{2\theta}{2 - 2^p} \|x\|^p$$

pour tout $x \in E_1$, (pour tout $x \in E_1 \backslash \{0\}$ si $p < 0$). Aussi, si pour chaque $x \in E_1$ (fixé) la fonction $t \to f(tx)$ est continue, alors a est $\mathbb{R}$-linéaire.

Débutant vers l'année 1980, le thème de l'approximation d'homomorphisme, ou la stabilité de l'équation d'homomorphisme, a été repris par un certain nombre de mathématiciens. En général, ces auteurs ont utilisé un espace vectoriel, voir un groupe ou semi-groupe pour le domaine de l'application approximativement additive. Cependant, F. Skof a étudié le problème de la stabilité des applications définies sur des domaines « restreints ».

Donnons, à présent, une description de notre contribution. Le chapitre 1 donne la résolution des équations fonctionnelles matricielles d'ordre 3 de d'Alembert et de Wilson. Les chapitres 2 à 7 traitent les différents aspects de la stabilité, au sens de Hyers-Ulam, et, de Hyers-Ulam-Rassias, de certaines équations fonctionnelles et ce, en utilisant plusieurs méthodes comme la méthode directe, la méthode du point fixe, et la méthode des moyennes invariantes.

Dans le chapitre 1, nous considérons les équations fonctionnelles matricielles d'ordre 3 de d'Alembert et de Wilson. Dans ce chapitre, nous résolvons l'équation matricielle d'ordre 3 de d'Alembert :

$$\begin{cases} \Phi(x+y)+\Phi(x+\sigma(y))=2\Phi(x)\Phi(y), & x,y\in G \\ \Phi(e)=I, \end{cases} \tag{1}$$

pour $\Phi : G \longrightarrow M_3(\mathbb{C})$ et σ une involution de G, i.e., $\sigma(x+y)=\sigma(x)+\sigma(y)$ et $\sigma(\sigma(x))=x$ $\forall x,y\in G$. Nous donnons aussi toutes les solutions de l'équation d'ordre 3 de Wilson :

$$g(x+y)+g(x+\sigma(y))=2\Phi(y)g(x), \quad x,y\in G, \tag{2}$$

où la fonction inconnue $g : G \longrightarrow \mathbb{C}^3$ est un vecteur à valeur fonctionnelle (vecteur colonne). Nous traitons deux cas, le cas où les composantes de g sont linéairement indépendantes, qui correspond au cas où Φ vérifie l'équation (1), le second cas est le cas où les composantes de g sont linéairement dépendantes. Dans ce cas $\Phi(e)\neq I$, et $\Phi(e)$ est alors une projection de dimension 1, 2 ou 0. Comme application des résultats obtenus, nous explorons l'équation fonctionnelle trigonométrique ainsi que l'équation de Levi-Citiviá avec involution puis nous déterminons les solutions de ces mêmes équations.
Plus précisément, nous avons obtenu les résultats suivants :

Théorème 0.0.3 *Soit $\Phi : G \rightarrow M_3(\mathbb{C})$ une solution de l'équation fonctionnelle matricielle de d'Alembert (1), alors il existe une matrice $C\in GL(3,\mathbb{C})$ telle que Φ prend l'une des formes suivantes :*
1.

$$\Phi = C\begin{pmatrix} (\gamma_1+\gamma_1\circ\sigma)/2 & 0 & 0 \\ 0 & (\gamma_2+\gamma_2\circ\sigma)/2 & 0 \\ 0 & 0 & (\gamma_3+\gamma_3\circ\sigma)/2 \end{pmatrix}C^{-1},$$

où $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\in\mathcal{M}(G)$.
2.

$$\Phi = C\begin{pmatrix} \gamma^+ & \gamma^+(a^++s^-) & 0 \\ 0 & \gamma^+ & 0 \\ 0 & 0 & (\gamma_3+\gamma_3\circ\sigma)/2 \end{pmatrix}C^{-1},$$

où $\gamma_3\in\mathcal{M}(G)$, $\gamma^+\in\mathcal{M}^+(G)$, $a^+\in\mathcal{A}^+(G)$, $s^-\in\mathcal{S}^-(G)$ et $\gamma^+(a^++s^-)\neq 0$.
3.

$$\Phi = C\begin{pmatrix} \dfrac{\gamma+\gamma\circ\sigma}{2} & \dfrac{\gamma+\gamma\circ\sigma}{2}a^+ + \dfrac{\gamma-\gamma\circ\sigma}{2}a^- & 0 \\ 0 & \dfrac{\gamma+\gamma\circ\sigma}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\gamma_3+\gamma_3\circ\sigma}{2} \end{pmatrix}C^{-1},$$

où $\gamma, \gamma_3 \in \mathcal{M}(G)$, $\gamma \circ \sigma \neq \gamma$, $a^+ \in \mathcal{A}^+(G)$ *et* $a^- \in \mathcal{A}^-(G)$.

4.

$$\Phi = C \begin{pmatrix} \gamma^+ & 0 & \gamma^+(a_1^+ + s_1^-) \\ 0 & \gamma^+ & \gamma^+(a_2^+ + s_2^-) \\ 0 & 0 & \gamma^+ \end{pmatrix} C^{-1},$$

où $\gamma^+ \in \mathcal{M}^+(G)$, $a_1^+, a_2^+ \in \mathcal{A}^+(G)$ *et* $s_1^- s_2^- \in \mathcal{S}^-(G)$.

5.

$$\Phi = C \begin{pmatrix} \gamma^+ & \gamma^+(a_2^+ + s_2^-) & \gamma^+(a_1^+ + s_1^-) \\ 0 & \gamma^+ & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^+ \end{pmatrix} C^{-1},$$

où $\gamma^+ \in \mathcal{M}^+(G)$, $a_1^+, a_2^+ \in \mathcal{A}^+(G)$ *et* $s_1^-, s_2^- \in \mathcal{S}^-(G)$.

6.

$$\Phi = C \begin{pmatrix} \gamma^+ & d^{-1}\gamma^+(a^+ + (a^-)^2) & \gamma^+(\dfrac{(a^+)^2}{2} + a^+(a^-)^2 + \dfrac{(a^-)^4}{6} + a_1^+ + s^-) \\ 0 & \gamma^+ & d\gamma^+(a^+ + (a^-)^2) \\ 0 & 0 & \gamma^+ \end{pmatrix} C^{-1},$$

où $\gamma^+ \in \mathcal{M}^+(G)$, $a^+, a_1^+ \in \mathcal{A}^+(G)$, $a^- \in \mathcal{A}^-(G)$, $s^- \in \mathcal{S}^-(G)$ *et* $d \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

7.

$$\Phi = C \begin{pmatrix} \dfrac{\gamma + \gamma \circ \sigma}{2} & \dfrac{\lambda_1}{2}(\dfrac{\gamma + \gamma \circ \sigma}{2}a^+ + \dfrac{\gamma - \gamma \circ \sigma}{2}a^-) & * \\ 0 & \dfrac{\gamma + \gamma \circ \sigma}{2} & \dfrac{\lambda_2}{2}(\dfrac{\gamma + \gamma \circ \sigma}{2}a^+ + \dfrac{\gamma - \gamma \circ \sigma}{2}a^-) \\ 0 & 0 & \dfrac{\gamma + \gamma \circ \sigma}{2} \end{pmatrix} C^{-1},$$

avec $* = \dfrac{\gamma + \gamma \circ \sigma}{2}a_1^+ + \dfrac{\gamma - \gamma \circ \sigma}{2}a_1^- + \dfrac{1}{4}(\gamma(a^+ + a^-)^2 + \gamma \circ \sigma(a^+ - a^-)^2)$, $\gamma \in \mathcal{M}(G)$, $\gamma \circ \sigma \neq \gamma$, $a^+, a_1^+ \in \mathcal{A}^+(G)$, $z \neq 0$, $z^2 = \lambda_1\lambda_2$ *et* $a^-, a_1^- \in \mathcal{A}^-(G)$.

8.

$$\Phi = C \begin{pmatrix} \dfrac{\gamma + \gamma \circ \sigma}{2} & 0 & \dfrac{\gamma + \gamma \circ \sigma}{2}a_1^+ + \dfrac{\gamma - \gamma \circ \sigma}{2}a_1^- \\ 0 & \dfrac{\gamma + \gamma \circ \sigma}{2} & \dfrac{\gamma + \gamma \circ \sigma}{2}a_2^+ + \dfrac{\gamma - \gamma \circ \sigma}{2}a_2^- \\ 0 & 0 & \dfrac{\gamma + \gamma \circ \sigma}{2} \end{pmatrix} C^{-1},$$

où $\gamma \in \mathcal{M}(G)$, $\gamma \circ \sigma \neq \gamma$, $a_1^+, a_2^+ \in \mathcal{A}^+(G)$ *et* $a_1^-, a_2^- \in \mathcal{A}^-(G)$.

9.

$$\Phi = C \begin{pmatrix} \dfrac{\gamma + \gamma \circ \sigma}{2} & \dfrac{\gamma + \gamma \circ \sigma}{2}a_2^+ + \dfrac{\gamma - \gamma \circ \sigma}{2}a_2^- & \dfrac{\gamma + \gamma \circ \sigma}{2}a_1^+ + \dfrac{\gamma - \gamma \circ \sigma}{2}a_1^- \\ 0 & \dfrac{\gamma + \gamma \circ \sigma}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\gamma + \gamma \circ \sigma}{2} \end{pmatrix} C^{-1},$$

où $\gamma \in \mathcal{M}(G)$, $\gamma \circ \sigma \neq \gamma$, $a_1^+, a_2^+ \in \mathcal{A}^+(G)$ et $a_1^-, a_2^- \in \mathcal{A}^-(G)$.

Théorème 0.0.4 *Si $\Phi : G \to M^3(\mathbb{C})$ et $g : G \to \mathbb{C}^3$ avec $g \in \mathcal{F}$ sont des solutions de l'équation (2), alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^3$ et $C \in GL(3, \mathbb{C})$ tels que*

$$g = C(E\alpha + E \circ \sigma\beta) \text{ et } \Phi = C(\frac{E + E \circ \sigma}{2})C^{-1},$$

où $E : G \to M_3(\mathbb{C})$ prend l'une des formes suivantes avec $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathcal{M}(G)$, $\gamma_1^+, \gamma_2^+, \gamma_3^+ \in \mathcal{M}^+(G)$, $a^+, a_1^+, a_2^+, a_3^+, a_4^+, a_0^+ \in \mathcal{A}^+(G)$, $a^-, a_1^-, a_2^-, a_3^-, a_4^-, a_0^- \in \mathcal{A}^-(G)$, $s^- \in \mathcal{S}^-(G)$ et $c, c_1, c_2, c_3, c_4, \lambda_1, \lambda_2, \mu \in \mathbb{C}$.

$$E_1 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3(1 + a_3^-) \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} \gamma_1(1 + a_1^-) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2(1 + a_2^-) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} \gamma_1(1 + a_1^-) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2(1 + a_2^-) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3(1 + a_3^-) \end{pmatrix},$$

$$E_5 = \begin{pmatrix} \gamma_1^+ & \gamma_1^+(a^+ + a_1^- + s^-) & 0 \\ 0 & \gamma_1^+ & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix}, E_6 = \begin{pmatrix} \gamma_1^+ & \gamma_1^+(a^+ + a^- + s^-) & 0 \\ 0 & \gamma_1^+ & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3(1 + a_3^-) \end{pmatrix},$$

$$E_7 = \begin{pmatrix} \gamma_1^+(1 + a_2^-) & \gamma_1^+(c(a_2^-)^3 + 3c(a_2^-)^2 + a^+ + a^+a_2^- + a_1^-) & 0 \\ 0 & \gamma_1^+(1 + a_2^-) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix},$$

$$E_8 = \begin{pmatrix} \gamma_1^+(1 + a_2^-) & \gamma_1^+(c(a_2^-)^3 + 3c(a_2^-)^2 + a^+ + a^+a_2^- + a_1^-) & 0 \\ 0 & \gamma_1^+(1 + a_2^-) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3(1 + a_3^-) \end{pmatrix},$$

$$E_9 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_1(a^+ + a^-) & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix}, E_{10} = \begin{pmatrix} \gamma+ & 0 & \gamma^+(a^+ + a_1^- + s^-) \\ 0 & \gamma+ & \gamma^+(a_2^+ + a_2^- + s_2^-) \\ 0 & 0 & \gamma^+ \end{pmatrix},$$

$$E_{11} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_1(a^+ + a^-) & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3^+(1 + a_3^-) \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} \gamma+ & 0 & \gamma^+(a^+ + a^- + s^-) \\ 0 & \gamma+ & \gamma^+(a_2^+ + a_2^- + s_2^-) \\ 0 & 0 & \gamma^+ \end{pmatrix},$$

$$E_{13} = \begin{pmatrix} \gamma_1^+(1 + a_3^-) & 0 & \gamma^+(c(a_3^-)^3 + 3c(a_3^-)^2 + a^+ + a^+a_3^- + a_1^-) \\ 0 & \gamma_1^+(1 + a_3^-) & \gamma^+(c^{'}(a_3^-)^3 + 3c^{'}(a_3^-)^2 + a_2^+ + a_2^+a_3^- + a_4^-) \\ 0 & 0 & \gamma_1^+(1 + a_3^-) \end{pmatrix},$$

$$E_{14} = \begin{pmatrix} \gamma+ & \gamma^+(a_2^+ + s_2^-) & \gamma^+(a^+ + s^- + a_4^-) \\ 0 & \gamma+ & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^+ \end{pmatrix},$$

$$E_{15} = \begin{pmatrix} \gamma^+ & * & ** \\ 0 & \gamma^+(\lambda_1 a_1^- + 1) & \gamma^+\lambda_1 a_1^- \\ 0 & \gamma^+\lambda_1 a_1^- & \gamma^+(\lambda_2 a_1^- + 1) \end{pmatrix},$$

où

$$* = \gamma^+ \frac{1}{3}\{c_2(a_1^-)^3 + r_1 c_2(a_1^-)^2 + \lambda_2(a_4^+ + s_4^-) + a_1^+ a_1^- + r_1 a_1^+\},$$

$$** = \gamma^+ \frac{1}{3}\{c_2(a_1^-)^3 + r_2 c_2(a_1^-)^2 - \lambda_1(a_4^+ + s_4^-) + a_1^+ a_1^- + r_2 a_1^+ + a_0^-\}.$$

$$E_{16} = \begin{pmatrix} \gamma^+ & \gamma^+ * & \gamma^+ ** \\ 0 & \gamma^+(a_2^- + 1) & \gamma^+ a_2^- \\ 0 & 0 & \gamma^+(a_3^- + 1) \end{pmatrix},$$

où

$$* = \frac{\alpha_1}{3}(a_2^-)^3 + \frac{\beta_2}{3}(a_3^-)^3 + \alpha_2 a_2^-(a_3^-)^3 + \alpha_1(a_2^-)^2 + \alpha_2(a_3^-)^2 + 2\beta_2 a_2^- a_3^- + a_2^+,$$

$$** = \frac{\alpha_1}{3}(a_2^-)^3 + \frac{\beta_2}{3}(a_3^-)^3 + \alpha_2 a_2^-(a_3^-)^3 + \beta_1(a_2^-)^2 a_3^- + \beta_1(a_2^-)^2 + \beta_2(a_3^-)^2$$
$$+ 2\alpha_2 a_2^- a_3^- + a^+ + a_2^- a_2^+ + a_3^- a^+ + a_0^-.$$

$$E_{17} = \begin{pmatrix} \gamma^+ & * & ** \\ 0 & \gamma^+(a_4^- + 1) & \gamma^+ d(a^+ + (a^-)^{2)} \\ 0 & 0 & \gamma^+ \end{pmatrix},$$

où

$$* = \gamma^+[d^{-1}\{(a^+ + \frac{1}{3}(a^-)^2)a_4^- + a^+ + (a^-)^2)\} + a_2^-]$$

$$** = \gamma^+[\{\frac{1}{2}(a^+)^2 + a^+(a^-)^2 + \frac{1}{6}a^-)^4\} + a_1^+ + s_1^-].$$

$$E_{18} = \begin{pmatrix} \gamma^+ & * & ** \\ 0 & \gamma^+(\frac{d}{3}(a^-)^3 + a^- + 1) & (\frac{d}{3}(a^-)^3 + d(a^-)^2 + da^+a^- + da^+ \\ 0 & \gamma^+ a^- & \gamma^+(a^- + 1) \end{pmatrix},$$

où

$$* = \gamma^+\{\frac{1}{30}(a^-)^5 + (d^{-1} + k)(a^-)^3 + d^{-1}(a^-)^2 +$$
$$\frac{1}{2}(a^+)^2 a^- + \frac{1}{2}a^+(a^-)^3 + d^{-1}a^+a^- + d^{-1}a^+ + \frac{1}{\mu}a_4^-\},$$

$$** = \gamma^+\{\frac{1}{30}(a^-)^5 + \frac{1}{6}(a^-)^4 + k(a^-)^3 + a^+(a^-)^2 +$$
$$\frac{1}{2}a^+(a^-)^3 + \frac{1}{2}(a^+)^2 a^- + k(a^-)^2 + \frac{1}{2}(a^+)^2 + \frac{1}{\mu}a_4^-\}.$$

$$E_{19}=\left(\begin{array}{ccc}\gamma^{+} & * & ** \\ 0 & \gamma^{+}(\frac{d}{3}(a^{-})^{3}+da^{+}a^{-}+\frac{1}{\mu}a_{0}^{-}+1) & \gamma^{+}d((a^{-})^{2}+a^{+}) \\ 0 & \gamma^{+}a^{-} & \gamma^{+}\end{array}\right),$$

où

$$*=\gamma^{+}\{\frac{1}{30}(a^{-})^{5}+\beta_{3}\frac{1}{3}(a^{-})^{3}+d^{-1}(a^{-})^{2}+d^{-1}a^{+}$$
$$+\frac{1}{3}a^{+}(a^{-})^{3}+a^{+}a_{0}^{-}+a_{1}^{+}a^{-}+\frac{1}{2}(a^{+})^{2}a^{-}+\frac{1}{\mu}a_{0}^{-}a^{+}\frac{1}{\mu}a_{0}^{-}(a^{-})^{2}+\frac{1}{\mu}a_{4}^{-}\},$$
$$**=\gamma^{+}\{\frac{1}{6}(a^{-})^{5}+\frac{d}{3}(a^{-})^{3}+\beta_{2}(a^{-})^{2}$$
$$+2d^{-1}\mu^{-1}a_{0}^{-}a^{-}+\frac{1}{2}(a^{+})^{2}+a^{+}(a^{-})^{2}+a_{1}^{+}+\frac{1}{6}(a^{-})^{4}\}.$$
$$E_{20}=\left(\begin{array}{ccc}\gamma & \lambda_{1}\gamma a & \gamma(\frac{\lambda_{1}\lambda_{2}}{2}a^{2}+a_{0}) \\ 0 & \gamma & \lambda_{2}\gamma a \\ 0 & \gamma^{+}a^{-} & \gamma\end{array}\right).$$

Réciproquement, n'importe quelle paire $\{g,\Phi\}$ *décrite ci-dessus est solution de l'équation fonctionnelle matricielle de Wilson (2).*

Théorème 0.0.5 *Toutes les solutions* $(g,\Phi)\in C(G,\mathbb{C}^{3})\times C(G,M_{3}(\mathbb{C}))$ *de l'équation fonctionnelle de Wilson (2) sont données comme suit :*
1- Les solutions décrites dans le Théorème 0.0.4.
2- Il existe $C_{1}\in GL(3,\mathbb{C})$, $\gamma\in\mathcal{M}(G)$ *avec* $\gamma\neq\gamma\circ\sigma$, *et* $\alpha_{1},\beta_{1}\in\mathbb{C}$ *tels que :*

$$C_{1}^{-1}g=\gamma\left(\begin{array}{c}\alpha_{1}\\0\\0\end{array}\right)+\gamma\circ\sigma\left(\begin{array}{c}\beta_{1}\\0\\0\end{array}\right),$$

$$C_{1}^{-1}\Phi C_{1}=\frac{1}{2}(\gamma+\gamma\circ\sigma)I+\left(\begin{array}{ccc}0 & \psi_{1} & \xi_{1}\\0 & \psi_{2} & \xi_{2}\\0 & \psi_{3} & \xi_{3}\end{array}\right),$$

où $\psi_{i},\xi_{i}\in C(G)$, $(i=1,2,3)$ *sont des fonctions arbitraires.*
3- Il existe $C_{1}\in GL(3,\mathbb{C})$, $\gamma^{+}\in\mathcal{M}^{+}(G)$, $a^{-}\in\mathcal{A}^{-}(G)$ *et* $c\in\mathbb{C}$ *tels que :*

$$C_{1}^{-1}g=(c+a^{-})\gamma^{+}\left(\begin{array}{c}1\\0\\0\end{array}\right),\quad C_{1}^{-1}\Phi C_{1}=\gamma^{+}I+\left(\begin{array}{ccc}0 & \varphi_{1} & \theta_{1}\\0 & \varphi_{2} & \theta_{2}\\0 & \varphi_{3} & \theta_{3}\end{array}\right),$$

où $\varphi_{i},\theta_{i}\in C(G)$ $(i=1,2,3)$ *sont arbitraires.*
4- Il existe $C_{2}\in GL(3,\mathbb{C})$, $\gamma_{1},\gamma_{2}\in\mathcal{M}(G)$ *avec* $\gamma_{i}\neq\gamma_{i}\circ\sigma$, *et* $\alpha_{1},\beta_{1},\alpha_{2},\beta_{2}\in\mathbb{C}$ *vérifiant*

$$C_{2}^{-1}g=\left(\begin{array}{c}\alpha_{1}\gamma_{1}+\beta_{1}\gamma_{1}\circ\sigma\\0\\0\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}0\\\alpha_{2}\gamma_{2}+\beta_{2}\gamma_{2}\circ\sigma\\0\end{array}\right),$$

$$C_2^{-1}\Phi C_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_1\circ\sigma) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\gamma_2+\gamma_2\circ\sigma) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\gamma_3+\gamma_3\circ\sigma) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \psi_1 \\ 0 & 0 & \psi_2 \\ 0 & 0 & \psi_3 \end{pmatrix},$$

où $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in C(G)$ sont arbitraires.
5- Il existe $C_2 \in GL(3,\mathbb{C})$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{M}(G)$ avec $\gamma_1 \neq \gamma_1\circ\sigma$ et $\gamma_2 = \gamma_2\circ\sigma = \gamma_2^+$, $a_2^- \in \mathcal{A}^-(G)$ et $\alpha_1, \beta_1, c_1^{'} \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$ tels que :

$$C_2^{-1}g = \begin{pmatrix} \alpha_1\gamma_1+\beta_1\gamma_1\circ\sigma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2^+(c_1^{'}+a_2^-) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$C_2^{-1}\Phi C_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_1\circ\sigma) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \psi_1 \\ 0 & 0 & \psi_2 \\ 0 & 0 & \psi_3 \end{pmatrix},$$

où $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in C(G)$ sont arbitraires.
6- Il existe $C_2 \in GL(3,\mathbb{C})$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{M}(G)$ avec $\gamma_1 = \gamma_1\circ\sigma = \gamma_1^+$ et $\gamma_2 \neq \gamma_2\circ\sigma$, $a_1^- \in \mathcal{A}^-(G)$, $\alpha_2, \beta_2, c_1 \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$ de telle sorte que :

$$C_2^{-1}g = \begin{pmatrix} \gamma_1^+(c_1+a_1^-) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2\gamma_2+\beta_2\gamma_2\circ\sigma \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$C_2^{-1}\Phi C_2 = \begin{pmatrix} \gamma_1^+ & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\gamma_2+\gamma_2\circ\sigma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \psi_1 \\ 0 & 0 & \psi_2 \\ 0 & 0 & \psi_3 \end{pmatrix},$$

où $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in C(G)$ sont arbitraires.
7- Il existe $C_2 \in GL(3,\mathbb{C})$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{M}(G)$ avec $\gamma_1 = \gamma_1\circ\sigma = \gamma_1^+$, $\gamma_2 = \gamma_2\circ\sigma = \gamma_2^+$, $a_1^-, a_2^- \in \mathcal{A}^-(G)$ et $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ vérifiant

$$C_2^{-1}g = \begin{pmatrix} \gamma_1^+(c_1+a_1^-) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2^+(c_2+a_2^-) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$C_2^{-1}\Phi C_2 = \begin{pmatrix} \gamma_1^+ & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \psi_1 \\ 0 & 0 & \psi_2 \\ 0 & 0 & \psi_3 \end{pmatrix},$$

où $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in C(G)$ sont arbitraires.
8- $g = 0$ et Φ arbitraire dans $C(G, M_3(\mathbb{C}))$. Inversement, chacune des paires (g, Φ) décrite, en vertu de (1)-(8), est solution de l'équation fonctionnelle de Wilson (2).

Dans le chapitre 2, nous redémontrons la stabilité, au sens de Hyers-Ulam, de l'équation fonctionnelle σ-quadratique :

$$f(x+y)+f(x+\sigma(y))=2f(x)+2f(y),\ x,y\in G, \tag{3}$$

où G est un groupe et $\sigma : G \to G$ une involution de G. La démonstration est basée sur l'utilisation des sous-groupes de G notés : $G_+ = \{z \in G : \sigma(z) = z\}$, $G_- = \{z \in G : \sigma(z) = -z\}$ et sur les résultats de la stabilité obtenus pour l'équation fonctionnelle σ-quadratique avec $\sigma = I$ et $\sigma = -I$.

Théorème 0.0.6 *Soient G un groupe abélien, E un espace de Banach et $f : G \to E$ une application satisfaisant l'inégalité*

$$\|f(x+y)+f(x+\sigma(y))-2f(x)-2f(y)\|\leq\delta$$

pour $\delta \geq 0$ et pour tout $x, y \in G$. Alors, il existe une unique application $Q : G \to E$, solution de l'équation (3), vérifiant

$$\|f(x)-Q(x)\|\leq\frac{3}{4}\delta$$

pour tout $x \in G$.

Dans ce chapitre, nous prouvons aussi, que pour les fonctions $f : G \to E$ définies de G, un groupe abélien 2-divisible (i.e., $2x = a$, $x \in G$ admet une solution dans G), dans un espace $(E, < \cdot >)$ muni du produit scalaire $< \cdot >$, l'inégalité :

$$\|2f(x)+2f(y)-f(x+\sigma(y))\|\leq\|f(x+y)\|,\ x,y\in G$$

entraine que f est solution de l'équation fonctionnelle σ-quadratique :

$$f(x+y)+f(x+\sigma(y))=2f(x)+2f(y),\ x,y\in G.$$

Le chapitre 3 examine la stabilité, au sens de Hyers-Ulam-Rassias, en utilisant l'alternative du point fixe, de l'équation fonctionnelle K-quadratique :

$$\frac{1}{|K|}\sum_{k\in K}f(x+k\cdot y)=f(x)+f(y),\ x,y\in E_1 \tag{4}$$

et de l'équation fonctionnelle K-Jensen :

$$\frac{1}{|K|}\sum_{k\in K}f(x+k\cdot y)=f(x),\ x,y\in E_1, \tag{5}$$

où E_1 est un espace vectoriel, E_2 un espace β-normé complet avec $0 < \beta \leq 1$ (i.e., E_2 est un espace complet muni de la norme $\|\cdot\|_\beta$), K un sous-groupe fini et commutatif de $Aut(E_1)$ (le groupe des automorphismes de E_1) et $|K|$ désigne le cardinal de K.
Nos résultats sont formulés dans les théorèmes suivants :

Théorème 0.0.7 *Soient E_1 un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et E_2 un espace β-normé complet sur $\mathbb{K}$, où β est un nombre réel fixé avec $0 < \beta \leq 1$. Soient K un sous-groupe fini commutatif du groupe des automorphismes du groupe abélien $(E_1, +)$ et $f : E_1 \longrightarrow E_2$ une application pour laquelle il existe une fonction $\varphi : E_1 \times E_1 \to \mathbb{R}^+$ et une constante L, $0 < L < 1$, telles que*

$$\|\frac{1}{|K|}\sum_{k\in K} f(x + k \cdot y) - f(x) - f(y)\|_\beta \leq \varphi(x, y),$$

$$\sum_{k\in K} \varphi(x + k \cdot x, y + k \cdot y) \leq (2|K|)^\beta L\varphi(x, y)$$

pour tout $x, y \in E_1$. Alors, il existe une unique solution $q : E_1 \longrightarrow E_2$ de l'équation (4) vérifiant

$$\|f(x) - q(x)\|_\beta \leq \frac{1}{2^\beta}\frac{1}{1 - L}\varphi(x, x)$$

pour tout $x \in E_1$.

Théorème 0.0.8 *Soient E_1 un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, E_2 un espace β-normé complet sur $\mathbb{K}$, où β est un nombre réel fixé avec $0 < \beta \leq 1$, K un sous-groupe fini commutatif du groupe des automorphismes du groupe abélien $(E_1, +)$ et $f : E_1 \longrightarrow E_2$ une application pour laquelle il existe une fonction $\varphi : E_1 \times E_1 \to \mathbb{R}^+$ et une constante L, $0 < L < 1$, telles que*

$$\|\frac{1}{|K|}\sum_{k\in K} f(x + k \cdot y) - f(x)\|_\beta \leq \varphi(x, y),$$

$$\sum_{k\in K} \varphi(x - k \cdot x, y - k \cdot y) \leq |K|^\beta L\varphi(x, y)$$

pour tout $x, y \in E_1$. Alors, il existe une unique solution $j : E_1 \longrightarrow E_2$ de l'équation (5) qui vérifie

$$\|f(x) - j(x)\|_\beta \leq \frac{1}{1 - L}\varphi(x, x)$$

pour tout $x \in E_1$.

Dans le chapitre 4 nous établissons de nouveaux théorèmes de la stabilité, au sens de Hyers-Ulam, de l'équation fonctionnelle σ-quadratique :

$$f(x + y) + f(x + \sigma(y)) = 2f(x) + 2f(y),\ x, y \in E, \tag{6}$$

dans les domaines non bornés : $\mathcal{A} = \{(x, y) \in E^2 : \|y\| \geq d\}$; $\mathcal{B} = \{(x, y) \in E^2 : \|x\| \geq d\}$ où $d \geq 0$ et $\mathcal{C} = \{(x, y) \in E^2 : \|x\|^p + \|y\|^p \geq M^p\}$, où $M \geq 0$.

Théorème 0.0.9 *Soient $d > 0$ et $\delta > 0$ donnés. Supposons que l'application $f : E \to F$ vérifie l'inégalité*

$$\|f(x+y) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x) - 2f(y)\| \leq \delta$$

pour tout $x, y \in E$ avec $\|y\| \geq d$. Alors, il existe une unique application $q : E \to F$, solution de l'équation (6) qui vérifie

$$\|f(x) - q(x)\| \leq \frac{7}{2}\delta$$

pour tout $x \in E$.

Théorème 0.0.10 *Soient $d > 0$, $\delta > 0$ et $\gamma \geq 0$ des constantes données. Supposons que l'application $f : E \to F$ satisfait les inégalités*

$$\|f(x+y) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x) - 2f(y)\| \leq \delta,$$

$$\|f(x) - f(\sigma(x))\| \leq \gamma$$

pour tout $x, y \in E$ avec $\|x\| \geq d$. Alors, il existe une unique application $q : E \longrightarrow F$, solution de l'équation (6), vérifiant

$$\|f(x) - q(x)\| \leq \frac{5\delta}{2} + \frac{5\gamma}{2}$$

pour tout $x \in E$.

Théorème 0.0.11 *Soient E un espace normé réel et F un espace de Banach. Soient $M > 0$, $\theta \geq 0$ et p avec $0 < p < 1$ des constantes données. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application qui satisfait*

$$\|f(x+y) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x) - 2f(y)\| \leq \theta(\|x\|^p + \|y\|^p)$$

pour tout $x, y \in E$ avec $\|x\|^p + \|y\|^p \geq M^p$. Alors, il existe une unique application $Q : E \longrightarrow F$, solution de l'équation (6), vérifiant

$$\begin{aligned} \|f(x) - Q(x)\| \leq\ & \frac{\theta}{2}\|x\|^p + \frac{\theta}{8}(\|x+\sigma(x)\|^p + \|x-\sigma(x)\|^p) + \frac{\theta}{2-2^p}\|x+\sigma(x)\|^p \\ & + \frac{\theta}{2}(4 \times 2^p + 2 \times 3^p + 1)M^p + \frac{\theta}{2(4-2^p)}\|x-\sigma(x)\|^p \\ & + \frac{\theta}{24}[16^p + 4 \times 9^p + 8 \times 4^p]M^p \end{aligned}$$

pour tout $x \in E$ avec $\|x\| \geq \dfrac{M}{2}$.

Dans la deuxième partie du même chapitre, nous donnons les résultats de stabilité, au sens de Hyers-Ulam, des équations fonctionnelles de type σ-Jensen :

$$f(x+y)+f(x+\sigma(y))=2f(x),\ x,y\in E \tag{7}$$

et

$$f(x+y)-f(x+\sigma(y))=2f(y),\ x,y\in E \tag{8}$$

dans les domaines non bornés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

Théorème 0.0.12 *Soient $d>0$ et $\delta>0$ deux constantes données. Supposons que l'application $f:E\to F$ satisfait l'inégalité*

$$\|f(x+y)+f(x+\sigma(y))-2f(x)\|\leq\delta$$

pour tout $x,y\in E$ avec $\|y\|\geq d$. Alors, il existe une unique application $J:E\longrightarrow F$, solution de l'équation (7), vérifiant $J(\sigma(x))=-J(x)$ et

$$\|f(x)-f(0)-J(x)\|\leq 3\delta$$

pour tout $x\in E$.

Théorème 0.0.13 *Soient $d>0$, $\delta>0$ et $\gamma\geq 0$ donnés. Supposons que l'application $f:E\to F$ satisfait les inégalités*

$$\|f(x+y)+f(x+\sigma(y))-2f(x)\|\leq\delta,$$

$$\|f(x)+f(\sigma(x))\|\leq\gamma$$

pour tout $x,y\in E$ avec $\|x\|\geq d$. Alors, il existe une unique application $J:E\longrightarrow F$, solution de l'équation (7), vérifiant $J(\sigma(x))=-J(x)$ et

$$\|f(x)-f(0)-J(x)\|\leq 12\delta+9\gamma$$

pour tout $x\in E$.

Théorème 0.0.14 *Soient $d>0$ et $\delta>0$ donnés. Supposons que l'application $f:E\to F$ satisfait l'inégalité*

$$\|f(x+y)-f(x+\sigma(y))-2f(y)\|\leq\delta$$

pour tout $x,y\in E$ avec $\|x\|\geq d$. Alors, il existe une unique application $j:E\longrightarrow F$, solution de l'équation (8), vérifiant $j(\sigma(x))=-j(x)$ et

$$\|f(x)-j(x)\|\leq 3\delta$$

pour tout $x\in E$.

En outre, nous appliquons les résultats obtenus pour montrer le comportement asymptotique des équations fonctionnelles ci-dessus.

Le chapitre 5 se focalise sur l'étude de l'équation fonctionnelle généralisée des quadratiques :

$$f(kx+y)+f(kx+\sigma(y)) = 2k^2 f(x) + 2f(y),\ x, y \in E, \tag{9}$$

où k est une constante fixée avec $k \geq 2$. Dans la section 2 de ce chapitre, nous déterminons la solution générale de cette équation fonctionnelle. Dans la section 3, nous montrons la stabilité, au sens de Hyers-Ulam-Rassias, de l'équation fonctionnelle généralisée des quadratiques (9) dans les espaces de Banach en adoptant la méthode directe. La preuve de la stabilité, à l'aide de la méthode du point fixe, est exposée dans la section 4. La section 5 de ce chapitre traite la stabilité, au sens de Hyers-Ulam, de l'équation généralisée des quadratiques (9) dans les domaines non bornés : $\{(x, y) \in E^2 : \|x\| + \|y\| \geq d\}$ et $\{(x, y) \in E^2 : \|x\|^p + \|y\|^p \geq M^p\}$. Nos résultats sont formulés dans les théorèmes suivants :

Théorème 0.0.15 *Soit $k \in \mathbb{N}$ $(k \geq 2)$. Soient E et F deux espaces vectoriels. L'application $f : E \to F$ satisfait l'équation fonctionnelle*

$$f(kx+y)+f(kx+\sigma(y)) = 2k^2 f(x) + 2f(y),\ x, y \in E$$

si et seulement si, $f : E \to F$ vérifie

$$f(x+y)+f(x+\sigma(y)) = 2f(x) + 2f(y) \ \text{ et } \ f(x+\sigma(x)) = 0$$

pour tout $x, y \in E$.

Théorème 0.0.16 *Soient E un groupe abélien, F un espace de Banach et $f : E \to F$ une application vérifiant l'inégalité*

$$\|f(kx+y)+f(kx+\sigma(y)) - 2k^2 f(x) - 2f(y)\| \leq \delta$$

pour tout $x, y \in E$ et pour $\delta \geq 0$ (fixé). Alors, il existe une unique application $q : E \to F$, solution de (9), satisfaisant

$$\|f(x) - q(x)\| \leq \frac{k^2+1}{2k^2(k^2-1)}\delta$$

pour tout $x \in E$.

Théorème 0.0.17 *Soient E un espace vectoriel et F un espace de Banach. Supposons que l'application $f : E \to F$ satisfait l'inégalité*

$$\|f(kx+y)+f(kx+\sigma(y)) - 2k^2 f(x) - 2f(y)\| \leq \theta(\|x\|^p + \|y\|^p)$$

pour $\theta \geq 0$, $p \in]0,2[$ (fixés) et pour tout $x, y \in E$. Alors, il existe une unique application $q : E \to F$, solution de l'équation fonctionnelle (9) telle que

$$\|f(x) - q(x)\| \leq \frac{\theta}{2(k^2 - k^p)}\|x\|^p$$

pour tout $x \in E$.

Théorème 0.0.18 *Soient E_1 un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et E_2 un espace β-normé complet sur $\mathbb{K}$, où β est un nombre réel fixé avec $0 < \beta \leq 1$. Supposons que $\varphi : E_1 \times E_1 \to \mathbb{R}^+$ est une fonction donnée et qu'il existe une constante L, $0 < L < 1$, telles que*

$$\varphi(kx, 0) \leq k^{2\beta} L \varphi(x, 0)$$

pour tout $x \in E_1$. De plus, soit $f : E_1 \longrightarrow E_2$ une fonction avec $f(0) = 0$ satisfaisant

$$\|f(kx + y) + f(kx + \sigma(y)) - 2k^2 f(x) - 2f(y)\| \leq \varphi(x, y)$$

pour tout $x, y \in E_1$. Si φ satisfait de plus

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\varphi(k^n x, k^n y)}{k^{2n\beta}} = 0$$

pour tout $x, y \in E_1$. Alors, il existe une unique application $q : E_1 \to E_2$, solution de (9), vérifiant

$$\|f(x) - q(x)\|_\beta \leq \frac{1}{2^\beta k^{2\beta}} \frac{1}{1 - L} \varphi(x, 0)$$

pour tout $x \in E_1$.

Théorème 0.0.19 *Soient E_1 un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et E_2 un espace β-normé complet sur $\mathbb{K}$, où β est un nombre réel fixé $0 < \beta \leq 1$. Supposons $\varphi : E_1 \times E_1 \to \mathbb{R}^+$ une fonction donnée et qu'il existe une constante L, $0 < L < 1$, telles que*

$$\varphi(x, 0) \leq \frac{L}{k^{2\beta}} \varphi(kx, 0)$$

pour tout $x \in E_1$. De plus, soit $f : E_1 \longrightarrow E_2$ une fonction avec $f(0) = 0$ qui vérifie

$$\|f(kx + y) + f(kx + \sigma(y)) - 2k^2 f(x) - 2f(y)\| \leq \varphi(x, y)$$

pour tout $x, y \in E_1$. Si φ satisfait de plus

$$\lim_{n \to +\infty} k^{2n\beta} \varphi(\frac{x}{k^n}, \frac{y}{k^n}) = 0$$

pour tout $x, y \in E_1$, alors il existe une unique application $q : E_1 \to E_2$, solution de (9), vérifiant

$$\|f(x) - q(x)\|_\beta \leq \frac{1}{2^\beta k^{2\beta}} \frac{L}{(1 - L)} + \varphi(x, 0)$$

pour tout $x \in E_1$.

Théorème 0.0.20 *Soit $d > 0$ donné. Supposons que l'application $f : E \to F$ satisfait l'inégalité*

$$\|f(kx+y) + f(kx+\sigma(y)) - 2k^2 f(x) - 2f(y)\| \leq \delta$$

pour tout $x, y \in E$ avec $\|x\| + \|y\| \geq d$. Alors, il existe une unique application $Q : E \to F$, solution de l'équation (9), vérifiant

$$\|f(x) - Q(x)\| \leq \frac{2(k^2+1)}{k^2(k^2-1)}\delta$$

pour tout $x \in E$.

Théorème 0.0.21 *Soient E_1 un espace normé réel, E_2 un espace de Banach réel, $M > 0$, $\epsilon > 0$ et prenons p, k avec $< p < 2$ et $k \geq 2$. Soit $f : E_1 \longrightarrow E_2$ une application avec $f(0) = 0$ satisfaisant*

$$\|f(kx+y) + f(kx+\sigma(y)) - 2k^2 f(x) - 2f(y)\| \leq \delta + \epsilon(\|x\|^p + \|y\|^p)$$

pour tout $x, y \in E_1$ avec $\|x\|^p + \|y\|^p \geq M^p$. Alors, il existe une unique application $Q : E_1 \longrightarrow E_2$, solution de l'équation (9), vérifiant

$$\|f(x) - Q(x)\| \leq \frac{\delta}{2(k^2-1)} + \frac{\epsilon}{2(k^2-k^p)}\|x\|^p$$

pour tout $x \in E_1$ avec $\|x\| \geq M$.

La stabilité de l'équation fonctionnelle σ-Drygas :

$$f(xy) + f(x\sigma(y)) = 2f(x) + f(y) + f(\sigma(y)) \tag{10}$$

dans les semi-groupes moyennables, est le résultat principal du chapitre 6. Ici nous considérons la fonction f approximativement centrale (i.e., $\|f(xy) - f(yx)\| \leq \delta$). Cette condition peut être remplacée par la condition plus faible :

$$\|f(xy) + f(x\sigma(y)) - f(yx) - f(\sigma(y)x)\| \leq \gamma.$$

Nos résultats sont donnés comme suit :

Théorème 0.0.22 *Soient G un semi-groupe moyennable et E un espace de Banach. Supposons que $f : G \to E$ est une fonction qui satisfait les inégalités*

$$\|f(xy) + f(x\sigma(y)) - 2f(x) - f(y) - f(\sigma(y))\| \leq \delta$$

et

$$\|f(xy) - f(yx))\| \leq \mu$$

pour tout $x, y \in G$ et pour $\delta, \mu \geq 0$ (données). Alors, il existe une unique solution $g = Q + D$ de l'équation fonctionnelle σ-Drygas (10), avec Q solution de l'équation fonctionnelle σ-quadratique et D solution de l'équation fonctionnelle σ-Jensen, vérifiant

$$\|f(x) - g(x)\| \leq \delta + \mu$$

pour tout $x \in G$.

Théorème 0.0.23 *Soient G un semi-groupe moyennable et E un espace de Banach. Supposons que $f : G \to E$ est une fonction satisfaisant aux inegalités*

$$\|f(xy) + f(x\sigma(y)) - 2f(x) - f(y) - f(\sigma(y))\| \leq \delta$$

et

$$\|f(xy) + f(x\sigma(y)) - f(yx) - f(\sigma(y)x)\| \leq \gamma$$

pour tout $x, y \in G$ et pour $\delta, \gamma \geq 0$ (données). Alors, il existe une unique solution $g = Q + D$ de l'équation fonctionnelle σ-Drygas (10), avec Q solution de l'équation fonctionnelle σ-quadratique et D solution de l'équation fonctionnelle σ-Jensen, vérifiant

$$\|f(x) - g(x)\| \leq \delta + \frac{\gamma}{2}$$

pour tout $x \in G$.

Le chapitre 7 est consacré à l'étude de la stabilité, au sens de Hyers-Ulam-Rassias, dans les espaces β-Banach, des équations fonctionnelles de type σ-Jensen, considérées au chapitre 4 et ce, en se basant sur la méthode directe.

Chapitre 1

Equations fonctionnelles matricielles d'ordre 3 de d'Alembert et de Wilson

1.1 Introduction

Soient G un groupe topologique abélien et $\sigma : G \longrightarrow G$ une involution de G c'est-à-dire σ est un homomorphisme de G vérifiant $\sigma \circ \sigma = I$, où I désigne l'application identité. Nous considérons l'équation fonctionnelle :

$$f(x+y) + f(x+\sigma(y)) = 2g_1(x)h_1(y) + 2g_2(x)h_2(y) + 2g_3(x)h_3(y),\ x, y \in G. \tag{1.1}$$

Avec $\sigma = I$ (resp., $\sigma = -I$), (1.1) devient l'équation fonctionnelle de Levi-Civitá :

$$f(x+y) = g_1(x)h_1(y) + g_2(x)h_2(y) + g_3(x)h_3(y),\ x, y \in G, \tag{1.2}$$

(resp., l'équation fonctionnelle de type de d'Alembert :

$$f(x+y) + f(x-y) = 2g_1(x)h_1(y) + 2g_2(x)h_2(y) + 2g_3(x)h_3(y),\ x, y \in G). \tag{1.3}$$

Ces deux équations ont été largement étudiées, dans diverses conditions, par de nombreux auteurs. L'extension des résultats de d'Alembert de $\mathbb{R}$ à un groupe G quelconque a été réalisée par Pl. Kannappan [93] et J. A. Baker [12]. Ils ont établi que les solutions non-nulles, continues de l'équation fonctionnelle de d'Alembert :

$$f(xy) + f(x\sigma(y)) = 2f(x)f(y),\ x, y \in G, \tag{1.4}$$

satisfaisant la condition de Kannappan : $f(xyz) = f(yxz)$, $x, y, z \in G$, sont des fonctions de la forme $f(x) = \dfrac{\gamma(x) + \gamma(\sigma(x))}{2}$, où γ est un homomorphisme de G dans $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$.
J. Aczél, J. K. Chung et T. C. Ng [4] ont résolu l'équation fonctionnelle :

$$f(xy) + f(xy^{-1}) = 2f(x) + 2g(x)h(y),\ \ x, y \in G \tag{1.5}$$

sous la condition de Kannappan. J. K. Chung, B. R. Ebanks et P. K. Sahoo [34] ont trouvé des formules explicites pour les solutions de l'équation :

$$f(x+y)+f(x-y)=p(x)+q(y)+g(x)h(y), \ \ x,y\in G. \tag{1.6}$$

L'article de J. K. Chung, Pl. Kannappan et T. C. Ng [32] traite l'équation fonctionnelle :

$$f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x)+h(x)h(y), \ x,y\in G. \tag{1.7}$$

H. Stetkær [161]-[167] a étudié de nombreuses équations fonctionnelles sous la forme :

$$f(x+y)+f(x+\sigma(y))=\sum_{i=1}^{2}g_i(x)h_i(y), \ x,y\in G. \tag{1.8}$$

P. Peter de Place et H. Stetkær [39] ont donné les solutions de l'équation fonctionnelle :

$$f(x+y)+f(x+\sigma(y))=2f(x)g(y)+2f(y)g(x)+2h(x)h(y), \ x,y\in G. \tag{1.9}$$

Récemment, P. Sinopoulos [153, 154] a résolu l'équation fonctionnelle :

$$f(x+y)+f(x-y)=2g_1(x)h_1(y)+2g_2(x)h_2(y)+2g_3(x)h_3(y), \ x,y\in G \tag{1.10}$$

sous la condition : G un groupe 2-divisible abélien, i.e., $G=2G$.

Dans ce chapitre, nous suivons la méthode réalisée par H. Stetkær [165] pour les équations fonctionnelles matricielles d'ordre 2 de d'Alembert :

$$\begin{cases} \Phi(x+y)+\Phi(x+\sigma(y))=2\Phi(x)\Phi(y), \ \ x,y\in G \\ \Phi(e)=I, \end{cases} \tag{1.11}$$

et de Wilson :

$$g(x+y)+g(x+\sigma(y))=2\Phi(y)g(x), \ \ x,y\in G, \tag{1.12}$$

où la fonction inconnue $g:G\longrightarrow\mathbb{C}^2$ est un vecteur à valeur fonctionnelle (vecteur colonne) et l'autre fonction inconnue $\Phi:G\longrightarrow M_2(\mathbb{C})$ une matrice à valeur fonctionnelle.

Nous considérons les équations fonctionnelles matricielles d'ordre 3 de d'Alembert et de Wilson. La concrétisation de ces résultats est dûe au travail de P. Sinopoulos [154], où l'équation fonctionnelle matricielle d'ordre 3 de Wilson est étudiée dans le cas où $\sigma=-I$ et $2G=G$.

Dans ce chapitre, nous donnons un raisonnement différent de celui des groupes 2-divisibles pour les homomorphismes involutifs σ. Notre discussion ne comprend pas alors seulement $\sigma=\pm I$, mais aussi des exemples comme les réflexions dans un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ et les involutions pour le groupe additif des matrices 3×3. Dans les expressions des solutions, nous tenons compte des homomorphismes $\gamma:G\longrightarrow\mathbb{C}^\star$ pour lequels $\gamma=\gamma\circ\sigma$. Lorsque G est

2-divisible et $\sigma = -I$ le seul homomorphisme, dans ce, cas est alors $\gamma = 1$.
Notre but est de résoudre l'équation fonctionnelle d'ordre 3 (1.12) dans le cas où G est un groupe abélien et σ un homomorphisme involutif de G. Les résultats présentés dans ce chapitre sont étroitement liés à ceux de [154] et [165], la formulation étant la même. Il est intéressant de noter que les méthodes développées dans [154] et [165] concernent aussi notre travail.

Les résultats de ce chapitre sont organisés comme suit. Dans la section 2 de ce chapitre, nous donnons les solutions de l'équation fonctionnelle matricielle d'ordre 3 de d'Alembert

$$\begin{cases} \Phi(x+y) + \Phi(x+\sigma(y)) = 2\Phi(x)\Phi(y), \quad x, y \in G \\ \Phi(e) = I, \end{cases} \tag{1.13}$$

pour $\Phi : G \longrightarrow M_3(\mathbb{C})$. Les solutions sont décrites dans le Théorème 1.2.2.

Dans la section 3, nous résolvons l'équation fonctionnelle de Wilson (1.12) pour les vecteurs d'ordre 3 à valeurs fonctionnelles. Nous traitons deux cas, le cas où les composantes de g sont linéairement indépendantes, qui correspond au cas où Φ vérifie l'équation (1.13), le second cas est le cas où les composantes de g sont linéairement dépendantes. Dans ce cas $\Phi(e) \neq I$, et $\Phi(e)$ est alors une projection de dimension 1, 2 ou 0. Dans la section 4, nous déterminons les solutions de l'équation fonctionnelle trigonométrique

$$f(x+y) + f(x+\sigma(y)) = 2g_1(x)h_1(y) + 2g_2(x)h_2(y) + 2g_3(x)h_3(y), \quad x, y \in G. \tag{1.14}$$

Dans la dernière section, nous présentons, comme application des résultats obtenus dans ce chapitre, les solutions de l'équation fonctionnelle de Levi-Civitá.

Notation

En plus de la terminologie introduite ci-dessus, nous aurons besoin des notations suivantes : e désigne l'élément neutre du groupe topolgique abélien $(G, +)$, $M_3(\mathbb{C})$ l'ensemble de toutes les matrices 3×3 sur $\mathbb{C}$, $GL(3, \mathbb{C})$ dénote l'ensemble des matrices 3×3 inversibles et $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fonctions vectorielles dans G avec des composantes linéairement indépendantes. Soit $\mathcal{M}(G)$ l'ensemble des homomorphismes continus $\gamma : G \longrightarrow (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ et notons $\mathcal{M}^+(G) = \{\gamma \in \mathcal{M}(G) : \gamma \circ \sigma = \gamma\}$. Soit $\mathcal{A}(G)$ l'ensemble de toutes les applications additives de G dans $(\mathbb{C}, +)$, et soit $\mathcal{A}^{\pm}(G) = \{a \in \mathcal{A}(G) : a \circ \sigma = \pm a\}$. Désignons par $\mathcal{S}(G)$ l'ensemble des applications $S : G \longrightarrow \mathbb{C}$ de la forme $S(x) = q(x, x)$, $x \in G$, où $q : G \times G \longrightarrow \mathbb{C}$ est une application bi-additive symétrique et soit $\mathcal{S}^-(G)$ le sous-ensemble pour lequel q satisfait $q(\sigma(x), y) = -q(x, y)$, $x, y \in G$. La transposée de la matrice A est notée A^t et l'adjointe par A^*.

Comme signalé par H. Stetkær dans [165], dans le cas « classique » où, $\sigma = -I$, il y a quelques simplifications : $\mathcal{A}^+(G) = \{0\}$, $\mathcal{A}^-(G) = \mathcal{A}(G)$ et $\mathcal{S}^-(G) = \mathcal{S}(G)$. Si, de plus, $2G = G$ alors $\mathcal{M}^+(G) = \{1\}$.

1.2 Equation fonctionnelle matricielle d'ordre 3 de d'Alembert

W. Chojnacki [29] a prouvé, d'une part en passant de $\mathbb{R}$ à un groupe abélien G et, d'autre part, en se basant sur les méthodes d'analyse harmonique, que tout opérateur faiblement continu $\Phi : G \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$, solution de l'équation fonctionnelle du cosinus

$$\begin{cases} \Phi(x+y) + \Phi(x-y) = 2\Phi(x)\Phi(y), & x, y \in G \\ \Phi(e) = I, \end{cases} \tag{1.15}$$

a la forme $\Phi(x) = \dfrac{\mathcal{U}(x) + \mathcal{U}(x^{-1})}{2}$, où $\mathcal{U}$ est une représentation unitaire fortement continue de G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Récemment, ce résultat a été étendu par H. Stetkær [167] en considérant un opérateur K-sphérique à valeur fonctionnelle.

L'équation (1.15) a été résolue pour les matrices par L. Székelyhidi [170] et A. L. Rukhin [147] pour les groupes 2-divisible. L'équation (1.13) pour les matrices 2×2, (resp., pour les matrices 2×2 avec $\sigma = -I$ et $2G = G$) a été complètement résolue par H. Stetkær [165] (resp., par P. Sinopoulos [153]). Plus tard, la détermination des solutions de l'équation (1.13) a été étendue, par P. Sinopolous [154] pour les matrices 3×3, à un groupe 2-divisible abélien.

Le but de cette section est de déterminer les solutions de l'équation matricielle d'ordre 3 de d'Alembert (1.13).

Proposition 1.2.1 *Si $\Phi : G \to M_3(\mathbb{C})$ satisfait l'équation de d'Alembert (1.13), alors $\Phi = \Phi \circ \sigma$ et $\Phi(x)\Phi(y) = \Phi(y)\Phi(x)$ pour tout $x, y \in G$.*

Preuve. Prenons $x = 0$ dans (1.13), nous voyons que $\Phi = \Phi \circ \sigma$. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \Phi(x)\Phi(y) &= \frac{1}{2}\{\Phi(y+x) + \Phi(y+\sigma(x))\} \\ &= \frac{1}{2}\{\Phi(x+y) + \Phi \circ \sigma(x+\sigma(y))\} \\ &= \frac{1}{2}\{\Phi(x+y) + \Phi(x+\sigma(y))\} \\ &= \Phi(y)\Phi(x). \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve de la proposition. ♠

Théorème 1.2.2 *Soit $\Phi : G \to M_3(\mathbb{C})$ une solution de l'équation fonctionnelle matricielle (1.13), alors il existe une matrice $C \in GL(3, \mathbb{C})$ telle que Φ est de la forme :*
1.

$$\Phi = C \begin{pmatrix} (\gamma_1 + \gamma_1 \circ \sigma)/2 & 0 & 0 \\ 0 & (\gamma_2 + \gamma_2 \circ \sigma)/2 & 0 \\ 0 & 0 & (\gamma_3 + \gamma_3 \circ \sigma)/2 \end{pmatrix} C^{-1}, \tag{1.16}$$

où $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathcal{M}(G)$.
2.

$$\Phi = C \begin{pmatrix} \gamma^+ & \gamma^+(a^+ + s^-) & 0 \\ 0 & \gamma^+ & 0 \\ 0 & 0 & (\gamma_3 + \gamma_3 \circ \sigma)/2 \end{pmatrix} C^{-1}, \tag{1.17}$$

où $\gamma_3 \in \mathcal{M}(G)$, $\gamma^+ \in \mathcal{M}^+(G)$, $a^+ \in \mathcal{A}^+(G)$, $s^- \in \mathcal{S}^-(G)$ *et* $\gamma^+(a^+ + s^-) \neq 0$.
3.

$$\Phi = C \begin{pmatrix} \frac{\gamma + \gamma \circ \sigma}{2} & \frac{\gamma + \gamma \circ \sigma}{2} a^+ + \frac{\gamma - \gamma \circ \sigma}{2} a^- & 0 \\ 0 & \frac{\gamma + \gamma \circ \sigma}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma_3 + \gamma_3 \circ \sigma}{2} \end{pmatrix} C^{-1}, \tag{1.18}$$

où $\gamma, \gamma_3 \in \mathcal{M}(G)$, $\gamma \circ \sigma \neq \gamma$, $a^+ \in \mathcal{A}^+(G)$ *et* $a^- \in \mathcal{A}^-(G)$.
4.

$$\Phi = C \begin{pmatrix} \gamma^+ & 0 & \gamma^+(a_1^+ + s_1^-) \\ 0 & \gamma^+ & \gamma^+(a_2^+ + s_2^-) \\ 0 & 0 & \gamma^+ \end{pmatrix} C^{-1}, \tag{1.19}$$

où $\gamma^+ \in \mathcal{M}^+(G)$, $a_1^+, a_2^+ \in \mathcal{A}^+(G)$ *et* $s_1^- s_2^- \in \mathcal{S}^-(G)$.
5.

$$\Phi = C \begin{pmatrix} \gamma^+ & \gamma^+(a_2^+ + s_2^-) & \gamma^+(a_1^+ + s_1^-) \\ 0 & \gamma^+ & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^+ \end{pmatrix} C^{-1}, \tag{1.20}$$

où $\gamma^+ \in \mathcal{M}^+(G)$, $a_1^+, a_2^+ \in \mathcal{A}^+(G)$ *et* $s_1^-, s_2^- \in \mathcal{S}^-(G)$.
6.

$$\Phi = C \begin{pmatrix} \gamma^+ & d^{-1}\gamma^+(a^+ + (a^-)^2) & \gamma^+(\frac{(a^+)^2}{2} + a^+(a^-)^2 + \frac{(a^-)^4}{6} + a_1^+ + s^-) \\ 0 & \gamma^+ & d\gamma^+(a^+ + (a^-)^2) \\ 0 & 0 & \gamma^+ \end{pmatrix} C^{-1},$$

où $\gamma^+ \in \mathcal{M}^+(G)$, $a^+, a_1^+ \in \mathcal{A}^+(G)$, $a^- \in \mathcal{A}^-(G)$, $s^- \in \mathcal{S}^-(G)$ *et* $d \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
7.

$$\Phi = C \begin{pmatrix} \frac{\gamma + \gamma \circ \sigma}{2} & \frac{\lambda_1}{2}(\frac{\gamma + \gamma \circ \sigma}{2} a^+ + \frac{\gamma - \gamma \circ \sigma}{2} a^-) & * \\ 0 & \frac{\gamma + \gamma \circ \sigma}{2} & \frac{\lambda_2}{2}(\frac{\gamma + \gamma \circ \sigma}{2} a^+ + \frac{\gamma - \gamma \circ \sigma}{2} a^-) \\ 0 & 0 & \frac{\gamma + \gamma \circ \sigma}{2} \end{pmatrix} C^{-1}, \tag{1.21}$$

avec $* = \dfrac{\gamma+\gamma\circ\sigma}{2}a_1^+ + \dfrac{\gamma-\gamma\circ\sigma}{2}a_1^- + \dfrac{1}{4}(\gamma(a^+ + a^-)^2 + \gamma\circ\sigma(a^+ - a^-)^2)$, $\gamma \in \mathcal{M}(G)$, $\gamma\circ\sigma \neq \gamma$, $a^+, a_1^+ \in \mathcal{A}^+(G)$, $z \neq 0$, $z^2 = \lambda_1\lambda_2$ *et* $a^-, a_1^- \in \mathcal{A}^-(G)$.

8.

$$\Phi = C\begin{pmatrix} \dfrac{\gamma+\gamma\circ\sigma}{2} & 0 & \dfrac{\gamma+\gamma\circ\sigma}{2}a_1^+ + \dfrac{\gamma-\gamma\circ\sigma}{2}a_1^- \\ 0 & \dfrac{\gamma+\gamma\circ\sigma}{2} & \dfrac{\gamma+\gamma\circ\sigma}{2}a_2^+ + \dfrac{\gamma-\gamma\circ\sigma}{2}a_2^- \\ 0 & 0 & \dfrac{\gamma+\gamma\circ\sigma}{2} \end{pmatrix}C^{-1}, \tag{1.22}$$

où $\gamma \in \mathcal{M}(G)$, $\gamma\circ\sigma \neq \gamma$, $a_1^+, a_2^+ \in \mathcal{A}^+(G)$ *et* $a_1^-, a_2^- \in \mathcal{A}^-(G)$.

9.

$$\Phi = C\begin{pmatrix} \dfrac{\gamma+\gamma\circ\sigma}{2} & \dfrac{\gamma+\gamma\circ\sigma}{2}a_2^+ + \dfrac{\gamma-\gamma\circ\sigma}{2}a_2^- & \dfrac{\gamma+\gamma\circ\sigma}{2}a_1^+ + \dfrac{\gamma-\gamma\circ\sigma}{2}a_1^- \\ 0 & \dfrac{\gamma+\gamma\circ\sigma}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\gamma+\gamma\circ\sigma}{2} \end{pmatrix}C^{-1}, \tag{1.23}$$

où $\gamma \in \mathcal{M}(G)$, $\gamma\circ\sigma \neq \gamma$, $a_1^+, a_2^+ \in \mathcal{A}^+(G)$ *et* $a_1^-, a_2^- \in \mathcal{A}^-(G)$.

Preuve. Il est facile de vérifier que les solutions, présentées dans le Théorème 1.2.2, sont des solutions de l'équation (1.13). Réciproquement, supposons $\Phi : G \to M_3(\mathbb{C})$ solution de (1.12). En utilisant la Proposition 1.2.1, $\Phi = \Phi\circ\sigma$ et $\Phi(x)\Phi(y) = \Phi(y)\Phi(x)$ pour tout $x, y \in G$. D'où, par (Lemme 1, [154]), il existe une matrice de passage $C \in GL(3,\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ vérifiant

$$\Phi(x) = C\begin{pmatrix} \phi_1(x) & \lambda_1\phi(x) & \phi_0(x) \\ 0 & \phi_2(x) & \lambda_2\phi(x) \\ 0 & 0 & \phi_3(x) \end{pmatrix}C^{-1}, \tag{1.24}$$

où $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi : G \to \mathbb{C}$ sont des fonctions, telles que :

$$\phi_i(x+y) + \phi_i(x+\sigma(y)) = 2\phi_i(y)\phi_i(x), i = 1, 2, 3, \tag{1.25}$$

$$\lambda_1\phi(x+y) + \lambda_1\phi(x+\sigma(y)) = 2\lambda_1\phi_1(x)\phi(y) + 2\lambda_1\phi_2(y)\phi(x), \tag{1.26}$$

$$\phi_0(x+y) + \phi_0(x+\sigma(y)) = 2\phi_1(x)\phi_0(y) + 2\lambda_1\lambda_2\phi(x)\phi(y) + 2\phi_3(y)\phi_0(y), \tag{1.27}$$

$$\lambda_2\phi(x+y) + \lambda_2\phi(x+\sigma(y)) = 2\lambda_2\phi_2(x)\phi(y) + 2\lambda_2\phi_3(y)\phi(x). \tag{1.28}$$

Par Conséquent, d'après [12] et [163], ϕ_i peut s'écrire comme suit : $\phi_i = (\gamma_i + \gamma_i\circ\sigma)/2$, $i = 1, 2, 3$, où $\gamma_i : G \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ sont des homomorphismes.
Discutons, à présent, les possibilités suivantes :

Cas 1. Si $\phi_1 \neq \phi_2 \neq \phi_3$, donc nous pouvons choisir $\lambda_i\phi = 0$ et $\phi_0 = 0$. C'est le cas 1 du Théorème 1.2.2.

Cas 2. Si $\phi_1 = \phi_2 \neq \phi_3$, alors nous pouvons choisir $\phi_0 = \lambda_2\phi = 0$ et $\lambda_1\phi \neq 0$.

Sous-Cas 2.1. $\gamma_1 \circ \sigma = \gamma_1$, alors $\lambda_1\phi$ satisfait l'équation fonctionnelle

$$\lambda_1\phi(x+y) + \lambda_1\phi(x+\sigma(y)) = 2\lambda_1\gamma_1(x)\phi(y) + 2\lambda_1\gamma_1(y)\phi(x), x, y \in G. \tag{1.29}$$

Donc, par [163], $\lambda_1\phi = \gamma_1^+(a^+ + s^-)$, où $\gamma_1^+ \in \mathcal{M}^+(G)$, $a^+ \in \mathcal{A}^+(G)$ et $s^- \in \mathcal{S}^-(G)$. C'est le Cas 2 du Théorème 1.2.2.

Sous-Cas 2.2. $\gamma_1 \circ \sigma \neq \gamma_1$. En utilisant [163] et l'équation (1.27), nous obtenons le cas 3 du Théorème 1.2.2.

Cas 3. Si $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \dfrac{(\gamma + \gamma \circ \sigma)}{2}$, alors nous discutons les sous-cas suivants :

Sous-Cas 3.1. si $\gamma \circ \sigma = \gamma$, alors $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \gamma^+$. D'après [163], nous avons :

Sous-Cas 3.1.1. si $\lambda_1 = 0$, alors $\phi_0 = \gamma^+(a_1^+ + s_1^-)$ et $\lambda_2\phi(x) = \gamma^+(a_2^+ + s_2^-)$, où $\gamma_1^+ \in \mathcal{M}^+(G)$, $a_1^+, a_2^+ \in \mathcal{A}^+(G)$ et $s_1^-, s_2^- \in \mathcal{S}^-(G)$. C'est le cas 4 du Théorème 1.2.2.

Sous-Cas 3.1.2. Si $\lambda_2 = 0$, alors $\phi_0 = \gamma^+(a_1^+ + s_1^-)$, $\lambda_1\phi(x) = \gamma^+(a_2^+ + s_2^-)$ où $\gamma_1^+ \in \mathcal{M}^+(G)$ $a_1^+, a_2^+ \in \mathcal{A}^+(G)$ et $s_1^-, s_2^- \in \mathcal{S}^-(G)$. C'est le cas 5 du Théorème 1.2.2.

Sous-Cas 3.1.3. Si $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, en utilisant [164], nous déduisons que $\lambda_1\phi = d^{-1}\gamma^+(a^+ + (a^-)^2)$, $\lambda_2\phi = d\gamma^+(a^+ + (a^-)^2)$, où $\gamma_1^+ \in \mathcal{M}^+(G)$, $a+ \in \mathcal{A}^+(G)$, $a- \in \mathcal{A}^-(G)$ et $d \in \mathbb{C}$. Divisons l'équation (1.27) par $\gamma^+(x+y) = \gamma^+(x+\sigma(y)) = \gamma^+(x)\gamma^+(y)$, nous obtenons pour $\phi_0^{'} = \dfrac{\phi_0}{\gamma^+}$:

$$\phi_0^{'}(x+y) + \phi_0^{'}(x+\sigma(y)) = 2\phi_0^{'}(x) + 2\phi_0^{'}(y) + 2(a^+ + (a^-)^2)(x)(a^+ + (a^-)^2)(y), \tag{1.30}$$

i.e., $\phi_0^{'}$ satisfait l'équation fonctionnelle de Swiatak (voir [164]), donc

$$\phi_0 = \gamma^+(\frac{(a^+)^2}{2} + a^+(a^-)^2 + \frac{(a^-)^4}{6} + a_1^+ + s_1^-).$$

C'est le cas 6 du Théorème 1.2.2.

Sous-Cas 3.2. Si $\gamma \circ \sigma \neq \gamma$, alors $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \dfrac{\gamma + \gamma \circ \sigma}{2}$. D'après [163], nous avons les cas suivants :

Sous-Cas 3.2.1. si $\lambda_1 = 0$ alors

$$\lambda_2\phi = \frac{\gamma + \gamma \circ \sigma}{2}a_2^+ + \frac{\gamma - \gamma \circ \sigma}{2}a_2^-,$$

$$\phi_0 = \frac{\gamma + \gamma \circ \sigma}{2}a_1^+ + \frac{\gamma - \gamma \circ \sigma}{2}a_1^-,$$

où $a_1^+, a_2^+ \in \mathcal{A}^+(G)$ et $a_1^-, a_2^- \in \mathcal{A}^-(G)$. C'est le cas 8 du Théorème 1.2.2.

Sous-Cas 3.2.2. Si $\lambda_2 = 0$ alors

$$\lambda_1\phi = \frac{\gamma + \gamma \circ \sigma}{2}a_2^+ + \frac{\gamma - \gamma \circ \sigma}{2}a_2^-,$$

$$\phi_0 = \frac{\gamma + \gamma \circ \sigma}{2} a_1^+ + \frac{\gamma - \gamma \circ \sigma}{2} a_1^-,$$

où $a_1^+, a_2^+ \in \mathcal{A}^+(G)$, $a_1^-, a_2^- \in \mathcal{A}^-(G)$. C'est le cas 9 du Théorème 1.2.2.

Sous-Cas 3.2.3. Si $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = \lambda_1\lambda_2$. En utilisant [163], nous avons pour $i \in \{1, 2\}$

$$\lambda_i \phi = \frac{\lambda_i}{z}(\frac{\gamma + \gamma \circ \sigma}{2} a_1^+ + \frac{\gamma - \gamma \circ \sigma}{2} a_1^-).$$

Par un calcul direct, nous trouvons que :

$$\frac{1}{4}(\gamma(a^+ + a^-)^2 + \gamma \circ \sigma(a^+ - a^-)^2)$$

est une solution particulière de

$$\phi_0(x+y) + \phi_0(x+\sigma(y)) = 2\phi_1(x)\phi_0(y) + 2\lambda_1\lambda_2\phi(x)\phi(y) + 2\phi_3(y)\phi_0(y), x, y \in G. \quad (1.31)$$

Alors, la solution complète est donnée par

$$\frac{\gamma + \gamma \circ \sigma}{2} a_1^+ + \frac{\gamma - \gamma \circ \sigma}{2} a_1^- + \frac{1}{4}(\gamma(a^+ + a^-)^2 + \gamma \circ \sigma(a^+ - a^-)^2).$$

C'est le cas 7 du Théorème 1.2.2. Ce qui achève la preuve du Théorème 1.2.2. ♠

1.3 Equation fonctionnelle matricielle d'ordre 3 de Wilson

Dans cette section, nous résolvons l'équation matricielle d'ordre 3 de Wilson

$$g(x + y) + g(x + \sigma(y)) = 2\Phi(y)g(x), \ x, y \in G, \quad (1.32)$$

où la fonction inconnue $g : G \to \mathbb{C}^3$ est une fonction vectorielle et l'autre inconnue $\Phi : G \to M^3(\mathbb{C})$ une matrice à valeurs fonctionnelles.

Dans le théorème suivant, nous donnons la généralisation du Lemme 2 de [154].

Théorème 1.3.1 *Soient $\Phi : G \to M^n(\mathbb{C})$ et $g = \{g_1, ..., g_n\}^t : G \to \mathbb{C}^n$ avec $g \in \mathcal{F}$. Supposons qu'il existe $x_0 \in G$ telle que la matrice $\Phi(2x_0) - \Phi(x_0 + \sigma(x_0))$ soit inversible et que Φ, g vérifient l'équation (1.32). Alors, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^n$ et $C \in GL(n, \mathbb{C})$ tels que :*

$$g = C(E\alpha + E \circ \sigma\beta), \ \ \Phi = C(\frac{E + E \circ \sigma}{2})C^{-1},$$

où $E : G \to M_n(\mathbb{C})$ est une matrice triangulaire supérieure, solution de l'équation fonctionnelle $E(x + y) = E(x)E(y)$ pour tout $x, y \in G$.

Preuve. D'après [165], nous obtenons que Φ est solution de l'équation fonctionnelle matricielle de d'Alembert (1.13). Pour $x_0 \in G$, la matrice $\Phi(2x_0) - \Phi(x_0 + \sigma(x_0))$ est inversible, alors par [163], il existe un homomorphisme continu $E : G \to GL(n, \mathbb{C})$ tel que

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}(E(x) + E(\sigma(x))), \ \ x \in G.$$

Maintenant, pour trouver g, nous adoptons un raisonnement similaire à celui établi par Sinopoulos dans ([154], page 166-167). Soit $h(x) = \dfrac{g(x) - g(\sigma(x))}{2}$, pour tout $x \in G$. Nous pouvons facilement vérifier que h est solution de l'équation : $h(x+y)+h(x+\sigma(y)) = 2\Phi(y)h(x)$, pour tout $x, y \in G$. Alors $h(\sigma(x)) = -h(x)$, $h(x + \sigma(x)) = 0$ et $h(2x) = 2\Phi(y)h(x)$. En plus, pour tout $x, y \in G$, nous avons

$$\begin{aligned}
&2[\Phi(2x) - \Phi(x + \sigma(x))]h(y) \\
&\qquad = 2\Phi(2x)h(y) - 2\Phi(x + \sigma(x))h(y) \\
&\qquad = h(y + 2x) + h(y\sigma(2x)) - h(y + x + \sigma(x)) - h(y + x + \sigma(x)) \\
&\qquad = h(y + 2x) + h(y\sigma(2x)) - 2h(y + x + \sigma(x)) \\
&\qquad = h(y + 2x) + h(y\sigma(2x)) + 2h(x + \sigma(x) + \sigma(y)) \\
&\qquad = h(2x + y) + 2h(x + \sigma(x) + \sigma(y)) - h(2x + \sigma(y)) \\
&\qquad = 2[h(2x + y) + 2h(x + \sigma(x) + \sigma(y))] - [h(2x + y) + h(2x + \sigma(y))] \\
&\qquad = [4\Phi(x + y) - 4\Phi(y)\Phi(x)]h(x) = [E(x) - E(\sigma(x))][E(y) - E(\sigma(y))]h(x).
\end{aligned}$$

Tenant compte du fait que la matrice $\Phi(2x_0) - \Phi(x_0 + \sigma(x_0))$ est inversible, nous obtenons $h(y) = [E(y) - E(\sigma(y))]\gamma$ pour tout $y \in G$ et pour $\gamma \in \mathbb{C}^3$; alors $g(y) - g(\sigma(y)) = [E(y) - E(\sigma(y))]\gamma$.
Enfin, en prenant $x = e$ dans (1.32), nous obtenons $g(y) + g(\sigma(y)) = [E(y) + E(\sigma(y))]g(e)$, ce qui implique le résultat voulu, i.e., $g(y)$ peut s'écrire comme suit :

$$g(y) = E(y)\alpha + E(\sigma(y))\beta, \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}^3.$$

Vu que $\mathbb{C}$ est un corps scindé, nous pouvons choisir $C \in GL(3, \mathbb{C})$ telle que $CE(x)C^{-1}$ soit triangulaire supérieure pour tout $x \in G$. Ce qui complète la preuve du théorème. ♠

Proposition 1.3.2 *Soient $\Phi : G \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ et $g = \{g_1, ..., g_n\}^t : G \to \mathbb{C}^n$ des solutions de l'équation*

$$g(x + y) + g(x + \sigma(y)) = 2\Phi(y)g(x), \ x, y \in G. \tag{1.33}$$

Alors

1) $\Phi(y)\{vect\{g(x) \in \mathbb{C}^n/ \ x \in G\} \subseteq vect\{g(x) \in \mathbb{C}^n/ \ x \in G\}$ pour tout $x \in G$, et la restriction Ψ de Φ à $vect\{g(x) \in \mathbb{C}^n/ \ x \in G\}$ est solution de l'équation matricielle de d'Alembert

$$\Psi(x + y) + \Psi(x + \sigma(y)) = 2\Psi(y)\Psi(x), \ x, y \in G, \tag{1.34}$$

avec $\Psi(e) = I$. L'équation (1.34) détermine complètement Φ dans le sous-espace engendré par g, i.e., $vect\{g(x) \in \mathbb{C}^n / \ x \in G\}$.

2) Si les composantes $g_1, ..., g_n$ de g sont linéairement indépendantes (ce qui est équivalent à $vect\{g(x) \in \mathbb{C}^n \backslash x \in G\}$ est de dimension n), alors Φ est solution de l'équation (1.34).

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant :

Théorème 1.3.3 *Si $\Phi : G \to M^3(\mathbb{C})$ et $g : G \to \mathbb{C}^3$ avec $g \in \mathcal{F}$, sont des solutions de l'équation (1.32), alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^3$ et $C \in GL(3, \mathbb{C})$ tels que :*

$$g = C(E\alpha + E \circ \sigma\beta) \text{ et } \Phi = C(\frac{E + E \circ \sigma}{2})C^{-1}, \tag{1.35}$$

où $E : G \to M_3(\mathbb{C})$ prend l'une des formes suivantes avec $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathcal{M}(G)$, $\gamma_1^+, \gamma_2^+, \gamma_3^+ \in \mathcal{M}^+(G)$, $a^+, a_1^+, a_2^+, a_3^+, a_4^+, a_0^+ \in \mathcal{A}^+(G)$, $a^-, a_1^-, a_2^-, a_3^-, a_4^-, a_0^- \in \mathcal{A}^-(G)$, $s^- \in \mathcal{S}^-(G)$ et $c, c_1, c_2, c_3, c_4, \lambda_1, \lambda_2, \mu \in \mathbb{C}$.

$$E_1 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3(1 + a_3^-) \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} \gamma_1(1 + a_1^-) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2(1 + a_2^-) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} \gamma_1(1 + a_1^-) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2(1 + a_2^-) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3(1 + a_3^-) \end{pmatrix},$$

$$E_5 = \begin{pmatrix} \gamma_1^+ & \gamma_1^+(a^+ + a_1^- + s^-) & 0 \\ 0 & \gamma_1^+ & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix}, E_6 = \begin{pmatrix} \gamma_1^+ & \gamma_1^+(a^+ + a^- + s^-) & 0 \\ 0 & \gamma_1^+ & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3(1 + a_3^-) \end{pmatrix},$$

$$E_7 = \begin{pmatrix} \gamma_1^+(1 + a_2^-) & \gamma_1^+(c(a_2^-)^3 + 3c(a_2^-)^2 + a^+ + a^+a_2^- + a_1^-) & 0 \\ 0 & \gamma_1^+(1 + a_2^-) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix},$$

$$E_8 = \begin{pmatrix} \gamma_1^+(1 + a_2^-) & \gamma_1^+(c(a_2^-)^3 + 3c(a_2^-)^2 + a^+ + a^+a_2^- + a_1^-) & 0 \\ 0 & \gamma_1^+(1 + a_2^-) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3(1 + a_3^-) \end{pmatrix},$$

$$E_9 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_1(a^+ + a^-) & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix}, E_{10} = \begin{pmatrix} \gamma+ & 0 & \gamma^+(a^+ + a_1^- + s^-) \\ 0 & \gamma+ & \gamma^+(a_2^+ + a_2^- + s_2^-) \\ 0 & 0 & \gamma^+ \end{pmatrix},$$

$$E_{11} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_1(a^+ + a^-) & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3^+(1 + a_3^-) \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} \gamma+ & 0 & \gamma^+(a^+ + a^- + s^-) \\ 0 & \gamma+ & \gamma^+(a_2^+ + a_2^- + s_2^-) \\ 0 & 0 & \gamma^+ \end{pmatrix},$$

$$E_{13} = \left(\begin{array}{ccc} \gamma_1^+(1+a_3^-) & 0 & \gamma^+(c(a_3^-)^3 + 3c(a_3^-)^2 + a^+ + a^+a_3^- + a_1^-) \\ 0 & \gamma_1^+(1+a_3^-) & \gamma^+(c^{'}(a_3^-)^3 + 3c^{'}(a_3^-)^2 + a_2^+ + a_2^+a_3^- + a_4^-) \\ 0 & 0 & \gamma_1^+(1+a_3^-) \end{array} \right),$$

$$E_{14} = \left(\begin{array}{ccc} \gamma+ & \gamma^+(a_2^+ + s_2^-) & \gamma^+(a^+ + s^- + a_4^-) \\ 0 & \gamma+ & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^+ \end{array} \right),$$

$$E_{15} = \left(\begin{array}{ccc} \gamma^+ & * & ** \\ 0 & \gamma^+(\lambda_1 a_1^- + 1) & \gamma^+\lambda_1 a_1^- \\ 0 & \gamma^+\lambda_1 a_1^- & \gamma^+(\lambda_2 a_1^- + 1) \end{array} \right),$$

où

$$* = \gamma^+\frac{1}{3}\{c_2(a_1^-)^3 + r_1c_2(a_1^-)^2 + \lambda_2(a_4^+ + s_4^-) + a_1^+a_1^- + r_1a_1^+\},$$

$$** = \gamma^+\frac{1}{3}\{c_2(a_1^-)^3 + r_2c_2(a_1^-)^2 - \lambda_1(a_4^+ + s_4^-) + a_1^+a_1^- + r_2a_1^+ + a_0^-\}.$$

$$E_{16} = \left(\begin{array}{ccc} \gamma^+ & \gamma^+* & \gamma^+ ** \\ 0 & \gamma^+(a_2^- + 1) & \gamma^+a_2^- \\ 0 & 0 & \gamma^+(a_3^- + 1) \end{array} \right),$$

où

$$* = \frac{\alpha_1}{3}(a_2^-)^3 + \frac{\beta_2}{3}(a_3^-)^3 + \alpha_2 a_2^-(a_3^-)^3 + \alpha_1(a_2^-)^2 + \alpha_2(a_3^-)^2 + 2\beta_2 a_2^- a_3^- + a_2^+.$$

$$** = \frac{\alpha_1}{3}(a_2^-)^3 + \frac{\beta_2}{3}(a_3^-)^3 + \alpha_2 a_2^-(a_3^-)^3 + \beta_1(a_2^-)^2 a_3^- + \beta_1(a_2^-)^2 + \beta_2(a_3^-)^2$$
$$+ 2\alpha_2 a_2^- a_3^- + a^+ + a_2^- a_2^+ + a_3^- a^+ + a_0^-.$$

$$E_{17} = \left(\begin{array}{ccc} \gamma^+ & * & ** \\ 0 & \gamma^+(a_4^- + 1) & \gamma^+ d(a^+ + (a^-)^2) \\ 0 & 0 & \gamma^+ \end{array} \right),$$

où

$$* = \gamma^+[d^{-1}\{(a^+ + \frac{1}{3}(a^-)^2)a_4^- + a^+ + (a^-)^2)\} + a_2^-]$$

$$** = \gamma^+[\{\frac{1}{2}(a^+)^2 + a^+(a^-)^2 + \frac{1}{6}a^-)^4\} + a_1^+ + s_1^-].$$

$$E_{18} = \left(\begin{array}{ccc} \gamma^+ & * & ** \\ 0 & \gamma^+(\frac{d}{3}(a^-)^3 + a^- + 1) & (\frac{d}{3}(a^-)^3 + d(a^-)^2 + da^+a^- + da^+ \\ 0 & \gamma^+a^- & \gamma^+(a^- + 1) \end{array} \right),$$

où

$$* = \gamma^+\{\frac{1}{30}(a^-)^5 + (d^{-1} + k)(a^-)^3 + d^{-1}(a^-)^2$$

$$+\frac{1}{2}(a^+)^2a^- + \frac{1}{2}a^+(a^-)^3 + d^{-1}a^+a^- + d^{-1}a^+ + \frac{1}{\mu}a_4^-\},$$

$$** = \gamma^+\{\frac{1}{30}(a^-)^5 + \frac{1}{6}(a^-)^4 + k(a^-)^3 + a^+(a^-)^2 +$$

$$\frac{1}{2}a^+(a^-)^3 + \frac{1}{2}(a^+)^2a^- + k(a^-)^2 + \frac{1}{2}(a^+)^2 + \frac{1}{\mu}a_4^-\}.$$

$$E_{19} = \begin{pmatrix} \gamma^+ & * & ** \\ 0 & \gamma^+(\frac{d}{3}(a^-)^3 + da^+a^- + \frac{1}{\mu}a_0^- + 1) & \gamma^+d((a^-)^2 + a^+) \\ 0 & \gamma^+a^- & \gamma^+ \end{pmatrix},$$

où

$$* = \gamma^+\{\frac{1}{30}(a^-)^5 + \beta_3\frac{1}{3}(a^-)^3 + d^{-1}(a^-)^2 + d^{-1}a^+$$

$$+\frac{1}{3}a^+(a^-)^3 + a^+a_0^- + a_1^+a^- + \frac{1}{2}(a^+)^2a^- + \frac{1}{\mu}a_0^-a^+\frac{1}{\mu}a_0^-(a^-)^2 + \frac{1}{\mu}a_4^-\},$$

$$** = \gamma^+\{\frac{1}{6}(a^-)^5 + \frac{d}{3}(a^-)^3 + \beta_2(a^-)^2$$

$$+2d^{-1}\mu^{-1}a_0^-a^- + \frac{1}{2}(a^+)^2 + a^+(a^-)^2 + a_1^+ + \frac{1}{6}(a^-)^4\}.$$

$$E_{20} = \begin{pmatrix} \gamma & \lambda_1\gamma a & \gamma(\frac{\lambda_1\lambda_2}{2}a^2 + a_0) \\ 0 & \gamma & \lambda_2\gamma a \\ 0 & \gamma^+a^- & \gamma \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, n'importe quelle paire $\{g, \Phi\}$ décrite ci-dessus est solution de l'équation fonctionnelle de Wilson (1.32).

Preuve. Substituons les expressions de Φ et g données par (1.35) dans (1.32) ; nous obtenons :

$$\left[\frac{E(x+y)+E(x+\sigma(y))}{2} - \frac{E(y)+E(\sigma(y))}{2}E(x)\right]\alpha$$

$$+\left[\frac{E(\sigma(x)+y)+E(\sigma(x)+\sigma(y))}{2} - \frac{E(y)+E(\sigma(y))}{2}E(\sigma(y))\right]\beta = 0.$$

Il est facile de vérifier que les fonctions E_i pour $i = 1, 2, \ldots, n$ satisfont l'équation fonctionnelle

$$\frac{E_i(x+y)+E_i(x+\sigma(y))}{2} = \frac{E_i(y)+E_i(\sigma(y))}{2}E_i(x),\ x, y \in G;$$

nous laissons de côté la vérification.

Maintenant, nous prouvons que n'importe quelle solution de (1.32) peut s'écrire sous la forme donnée par le Théorème 1.3.3. A partir de (Proposition 3.1, Proposition 2.1, [165]), Φ

est solution de l'équation (1.13), $\Phi \circ \sigma = \Phi$ et $\Phi(x)\Phi(y) = \Phi(y)\Phi(x)$, pour tout $x, y \in G$. Ainsi, par (Lemme 1, [154]), il existe $C \in GL(3, \mathbb{C})$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ telles que

$$\Psi(x) = C^{-1}\Phi(x)C = \begin{pmatrix} \phi_1(x) & \lambda_1\phi(x) & \phi_0(x) \\ 0 & \phi_2(x) & \lambda_2\phi(x) \\ 0 & 0 & \phi_3(x) \end{pmatrix}, \tag{1.36}$$

où $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \lambda_1\phi, \lambda_2\phi : G \to \mathbb{C}$ sont solutions des équations (1.25), (1.26), (1.27), (1.28), (1.29) et (1.30).
En utilisant l'équation (1.32), la nouvelle fonction $G = \{G_1, G_2, G_3\}^t = C^{-1}g$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$G(x + y) + G(x + \sigma(y)) = 2\Psi(y)G(x),\ x, y \in G. \tag{1.37}$$

Les composantes de g sont linéairement indépendantes, ce qui implique que G_i, $i = 1, 2, 3$ satisfont

$$G_1(x+y)+G_1(x+\sigma(y)) = 2\phi_1(y)G_1(x)+2\lambda_1\phi(y)G_2(x)+2\phi_0(y)G_3(x),\ x, y \in G, \tag{1.38}$$

$$G_2(x + y) + G_2(x + \sigma(y)) = 2\phi_2(y)G_2(x) + 2\lambda_2\phi(y)G_3(x),\ x, y \in G, \tag{1.39}$$

et

$$G_3(x + y) + G_3(x + \sigma(y)) = 2\phi_3(y)G_3(x),\ x, y \in G. \tag{1.40}$$

Dans la suite, nous déterminons la solution générale G de (1.37) puis nous choisissons la fonction $E : G \to M(3, \mathbb{C})$ et les constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^3$ satisfaisant $\dfrac{E(x) + E(\sigma(x))}{2} = \Psi(x)$, $E(x)\alpha + E(\sigma(x))\beta = G(x)$ et $\dfrac{E(x + y) + E(x + \sigma(y))}{2} = \dfrac{E(y) + E(\sigma(y))}{2}E(x)$ pour tout $x, y \in G$.

Cas 1. Si

$$\Psi = \begin{pmatrix} \dfrac{\gamma_1 + \gamma_1 \circ \sigma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\gamma_2 + \gamma_2 \circ \sigma}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\gamma_3 + \gamma_3 \circ \sigma}{2} \end{pmatrix},$$

où $\gamma_i : G \to \mathcal{M}(G)$, dans ce cas, nous obtenons que G_i pour $i = 1, 2, 3$ satisfait l'équation de Wilson scalaire et ainsi, selon [163], nous obtenons :

$$G_i = c_1^i \frac{\gamma_i + \gamma_i \circ \sigma}{2} + c_2^i \frac{\gamma_i - \gamma_i \circ \sigma}{2},\ \text{si } \gamma_i \neq \gamma_i \circ \sigma \tag{1.41}$$

et

$$G_i = \gamma_i(c_1^i + a_i^-),\ \text{si } \gamma_i = \gamma_i \circ \sigma, \tag{1.42}$$

où $c_1^i, c_2^i \in \mathbb{C}, a_i^- \in \mathcal{A}^-(G)$ pour $i \in \{1,2,3\}$. Cela nous couduit aux combinaisons suivantes :

si $\gamma_1 \neq \gamma_1 \circ \sigma$, $\gamma_2 \neq \gamma_2 \circ \sigma$ et $\gamma_3 \neq \gamma_3 \circ \sigma$, alors nous pouvons donner E_1,

$$\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_1^1 + c_2^1 \\ c_1^2 + c_2^2 \\ c_1^3 + c_2^3 \end{pmatrix} \ et \ \beta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_1^1 - c_2^1 \\ c_1^2 - c_2^2 \\ c_1^3 - c_2^3 \end{pmatrix}.$$

Si $\gamma_1 \neq \gamma_1 \circ \sigma$, $\gamma_2 \neq \gamma_2 \circ \sigma$ et $\gamma_3 = \gamma_3 \circ \sigma$, alors nous donnons E_2,

$$\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_1^1 + c_2^1 \\ c_1^2 + c_2^2 \\ c_1^3 + 1 \end{pmatrix} \ et \ \beta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_1^1 - c_2^1 \\ c_1^2 - c_2^2 \\ c_1^3 - 1 \end{pmatrix}.$$

Si $\gamma_1 = \gamma_1 \circ \sigma$, $\gamma_2 = \gamma_2 \circ \sigma$ et $\gamma_3 \neq \gamma_3 \circ \sigma$, alors nous pouvons donner E_3,

$$\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_1^1 + 1 \\ c_1^2 + 1 \\ c_1^3 + c_2^3 \end{pmatrix} \ et \ \beta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_1^1 - 1 \\ c_1^2 - 1 \\ c_1^3 - c_2^3 \end{pmatrix}.$$

Si $\gamma_1 = \gamma_1 \circ \sigma$, $\gamma_2 = \gamma_2 \circ \sigma$ et $\gamma_3 = \gamma_3 \circ \sigma$, alors nous pouvons écrire E_4,

$$\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_1^1 + 1 \\ c_1^2 + 1 \\ c_1^3 + 1 \end{pmatrix} \ et \ \beta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_1^1 - 1 \\ c_1^2 - 1 \\ c_1^3 - 1 \end{pmatrix}.$$

Cas 2. Si

$$\Psi = \begin{pmatrix} \gamma_1^+ & \gamma_1(a^+ + s^-) & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\gamma_3 + \gamma_3 \circ \sigma}{2} \end{pmatrix},$$

où $\gamma_1^+ \in \mathcal{M}^+(G)$, $\gamma_3 \in \mathcal{M}(G)$, $a^+ \in \mathcal{A}^+(G)$, $s^- \in \mathcal{S}^-(G)$ et $a^+ + s^- \neq 0$. Tenant compte de (1.38), (1.39) et (1.40) nous avons :

$$G_1(x+y) + G_1(x+\sigma(y)) = 2\gamma_1^+(y)G_1(x) + 2\gamma_1^+(a^+ + s^-)(y)G_2(x), \tag{1.43}$$

$$G_2(x+y) + G_2(x+\sigma(y)) = 2\gamma_1^+(y)G_2(x), \tag{1.44}$$

$$G_3(x+y) + G_3(x+\sigma(y)) = 2\frac{\gamma_3 + \gamma_3 \circ \sigma}{2}(y)G_3(x). \tag{1.45}$$

D'après [163], nous avons

$$G_3 = c_1^3\frac{\gamma_3 + \gamma_3 \circ \sigma}{2} + c_2^3\frac{\gamma_3 - \gamma_3 \circ \sigma}{2}, \text{ si } \gamma_3 \circ \sigma \neq \gamma_3$$

$$G_3 = \gamma_3^+(c_1^3 + a_3^-), \text{ si } \gamma_3 \circ \sigma = \gamma_3,$$

$$G_2 = \gamma_1^+(c_1^2 + a_2^-),$$

où $c_1^3, c_2^3, c_1^2 \in \mathbb{C}$ et $a_2^-, a_3^- \in \mathcal{M}^-(G)$.
Divisons l'équation (1.43) par $\gamma_1^+(x+y) = \gamma_1^+(x)\gamma_1^+(y) = \gamma_1^+(x+\sigma(y))$, nous avons, pour $G_1' = \dfrac{G_1}{\gamma_1^+}$ et $G_2' = \dfrac{G_2}{\gamma_1^+}$, que G_1' satisfait l'équation fonctionnelle de différence symétrique

$$G_1'(x+y) + G_1'(x+\sigma(y)) = 2G_1'(x) + 2(a^+ + s^-)(y)G_2'(x),\ x, y \in G, \tag{1.46}$$

qui a été résolue dans [163].
Si $c_1^2 + a_2^- = 0$, alors $G_2 = 0$ et, à partir de [163], nous obtenons $G_1 = \gamma_1^+(c_1^1 + a_1^-)$, où $c_1^1 \in \mathbb{C}$, $a_1^- \in \mathcal{A}^-(G)$. Nous pouvons écrire E_5,

$$\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_1^1 \\ 1 \\ c_1^3 + c_2^3 \end{pmatrix},\ \beta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_1^1 \\ -1 \\ c_1^3 - c_2^3 \end{pmatrix},$$

si $\gamma_3 \circ \sigma \neq \gamma_3$ et, dans le cas où $\gamma_3 \circ \sigma = \gamma_3$, nous pouvons donner E_6,

$$\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_1^1 \\ 1 \\ c_1^3 + 1 \end{pmatrix},\ \beta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_1^1 \\ -1 \\ c_1^3 - 1 \end{pmatrix}.$$

Si $c_1^2 + a_2^-$ est une constante, alors $a_2^- = 0$; si $G_2 = c_1^2\gamma_1^+$ et par [163], nous obtenons $G_1 = \gamma_1^+(c_1^2(a^+ + s^-) + a^- + c)$, où $c \in \mathbb{C}$, $a^- \in \mathcal{A}^-(G)$. Nous pouvons donner E_5,

$$\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c \\ c_1^2 + 1 \\ c_1^3 + c_2^3 \end{pmatrix},\ \beta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c \\ c_1^2 - 1 \\ c_1^3 - c_2^3 \end{pmatrix},$$

si $\gamma_3 \circ \sigma \neq \gamma_3$, et nous écrivons E_6,

$$\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c \\ c_1^2 + 1 \\ c_1^3 + 1 \end{pmatrix},\ \beta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c \\ c_1^2 - 1 \\ c_1^3 - 1 \end{pmatrix}$$

si $\gamma_3 \circ \sigma = \gamma_3$. Pour le dernier cas, en utilisant encore [163], $s^- = 3c(a_2^-)^2$, $G_2 = \gamma_1^+(c_1^2 + a_2^-)$ et $G_1 = \gamma_1^+(c_1^2 a^+ + 3c_1^2 c(a_2^-)^2 + a^+ a_2^- + c(a_2^-)^3 + a_1^- + c_1)$.
Si $\gamma_3 \circ \sigma \neq \gamma_3$, nous donnons E_7,

$$\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_1^2 + 1 \\ c_1^3 + c_2^3 \end{pmatrix},\ \beta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_1^2 - 1 \\ c_1^3 - c_2^3 \end{pmatrix}.$$

Si $\gamma_3 \circ \sigma = \gamma_3$, nous écrivons E_8,

$$\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_1^2 + 1 \\ c_1^3 + 1 \end{pmatrix}, \ \beta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_1^2 - 1 \\ c_1^3 - 1 \end{pmatrix}.$$

Cas 3. Si

$$\Psi = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1 + \gamma_1 \circ \sigma}{2} & \frac{\gamma_1 + \gamma_1 \circ \sigma}{2}a^+ + \frac{\gamma_1 - \gamma_1 \circ \sigma}{2}a^- & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_1 + \gamma_1 \circ \sigma}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma_3 + \gamma_3 \circ \sigma}{2} \end{pmatrix},$$

où $\gamma_1, \gamma_3 \in \mathcal{M}(G)$ tel que $\gamma_1 \circ \sigma \neq \gamma_1$. Dans ce cas, G_i, $i = 1, 2, 3$ satisfait

$$G_1(x + y) + G_1(x + \sigma(y)) \tag{1.47}$$

$$= 2(\frac{\gamma_1 + \gamma_1 \circ \sigma_1}{2})(y)G_1(x) + 2(\frac{\gamma_1 + \gamma_1 \circ \sigma_1}{2}a^+ + \frac{\gamma_1 - \gamma_1 \circ \sigma_1}{2}a^-)(y)G_2(x),$$

$$G_2(x + y) + G_2(x + \sigma(y)) = 2(\frac{\gamma_1 + \gamma_1 \circ \sigma}{2})(y)G_2(x), \tag{1.48}$$

$$G_3(x + y) + G_3(x + \sigma(y)) = 2(\frac{\gamma_3 + \gamma_3 \circ \sigma}{2})(y)G_3(x). \tag{1.49}$$

D'après [165], nous obtenons

$$G_1 = c_2\frac{\gamma_1 + \gamma_1 \circ \sigma}{2}a^+ + c_2'\frac{\gamma_1 - \gamma_1 \circ \sigma}{2}a^+ + c_2\frac{\gamma_1 + \gamma_1 \circ \sigma}{2}a^-$$

$$+c_2'\frac{\gamma_1 + \gamma_1 \circ \sigma}{2}a^- + d_1\frac{\gamma_1 + \gamma_1 \circ \sigma}{2} + d_2\frac{\gamma_1 - \gamma_1 \circ \sigma}{2},$$

$$G_2 = c_2\frac{\gamma_1 + \gamma_1 \circ \sigma}{2} + c_2'\frac{\gamma_1 - \gamma_1 \circ \sigma}{2},$$

$$G_3 = c_3\frac{\gamma_3 + \gamma_3 \circ \sigma}{2} + c_3'\frac{\gamma_3 - \gamma_3 \circ \sigma}{2}, \text{ si } \gamma_3 \circ \sigma \neq \gamma_3,$$

$$G_3 = \gamma_3(c_3 + a_3^-), \text{ si } \gamma_3 \circ \sigma = \gamma_3,$$

où $c_2, c_3, c_2', c_3', d_1, d_2 \in \mathbb{C}$, $a^- \in \mathcal{A}^-(G)$ et $a^+ \in \mathcal{A}^+(G)$. Si $\gamma_3 \circ \sigma \neq \gamma_3$, nous pouvons écrire E_9,

$$\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} d_1 + d_2 \\ c_1 + c_1' \\ c_3 + c_3' \end{pmatrix}, \ \beta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} d_1 - d_2 \\ c_1 - c_1' \\ c_3 - c_3' \end{pmatrix}$$

et pour le cas $\gamma_3 \circ \sigma = \gamma_3$, nous donnons E_{11}

$$\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} d_1 + d_2 \\ c_1 + c_1' \\ c_3 + 1 \end{pmatrix}, \ \beta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} d_1 - d_2 \\ c_1 - c_1' \\ c_3 - 1 \end{pmatrix}.$$

Cas 4. Si

$$\Psi = \begin{pmatrix} \gamma^+ & 0 & \gamma^+(a^+ + s^-) \\ 0 & \gamma^+ & \gamma^+(a_2^+ + s_2^-) \\ 0 & 0 & \gamma^+ \end{pmatrix},$$

où $\gamma^+ \in \mathcal{M}^+(G), a^+, a_2^+ \in \mathcal{A}^+(G)$ et $s^-, s_2^- \in \mathcal{S}^-(G)$. Donc G_i, $i = 1, 2, 3$ sont des solutions des équations fonctionnelles

$$G_1(x+y) + G_1(x+\sigma(y)) = 2\gamma^+(y)G_1(x) + 2\gamma^+(a^+ + s^-)(y)G_3(x), \tag{1.50}$$

$$G_2(x+y) + G_2(x+\sigma(y)) = 2\gamma^+(y)G_2(x) + 2\gamma^+(a_2^+ + s_2^-)(y)G_3(x), \tag{1.51}$$

$$G_3(x+y) + G_3(x+\sigma(y)) = 2\gamma^+(y)G_3(x). \tag{1.52}$$

La dernière équation donne :

$$G_3 = \gamma^+(c_3 + a_3^-),$$

où $c_3 \in \mathbb{C}$ et $a_3^- \in \mathcal{M}^-(G)$. Divisons les équations (1.50) et (1.51) par $\gamma^+(x+y) = \gamma^+(x)\gamma^+(y) = \gamma^+(x+\sigma(y))$, nous obtenons pour $G_1' = \dfrac{G_1}{\gamma^+}$ et $G_2' = \dfrac{G_2}{\gamma^+}$:

$$G_1'(x+y) + G_1'(x+\sigma(y)) = 2G_1'(x) + 2(c_3 + a_3^-)(x)(a^+ + s^-)(y), \tag{1.53}$$

$$G_2'(x+y) + G_2'(x+\sigma(y)) = 2G_2'(x) + 2(c_3 + a_3^-)(x)(a_2^+ + s_2^-)(y). \tag{1.54}$$

Les solutions de ces équations sont données dans [163].

Si $c_3 + a_3^- = 0$, alors $G_3 = 0$, $G_1 = \gamma^+(c_1 + a_1^-)$ et $G_2 = \gamma^+(c_2 + a_2^-)$, où $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ et $a_1^-, a_2^- \in \mathcal{A}^-(G)$. Nous écrivons E_{10},

$$\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \beta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Si $c_3 + a_3^-$ est une constante alors $a_3^- = 0$, donc d'après [163], nous avons $G_3 = c_3\gamma^+$, $G_1 = \gamma^+(c_3(a^+ + s^-) + a^- + c)$ et $G_2 = \gamma^+(c_3(a_2^+ + s_2^-) + a_2^- + c')$, où $c, c' \in \mathbb{C}$ et $a^-, a_2^- \in \mathcal{A}^-(G)$. Pour ce cas, nous donnons E_{12},

$$\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c \\ c' \\ c_3 + 1 \end{pmatrix}, \ \beta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c \\ c' \\ c_3 - 1 \end{pmatrix}.$$

Pour le dernier cas, $G_3 = \gamma^+(c_3 + a_3^-)$, de [163], nous obtenons $s^- = 3c(a_3^-)^2$, $s_2^- = 3c'(a_3^-)^2$, $G_1 = \gamma^+(c_3a^+ + 3c_3c(a_3^-)^2 + a^+a_3^- + c(a_3^-)^3 + a_1^- + c_1)$ et $G_2 = \gamma^+(c_3a_2^+ + 3c_3c'(a_3^-)^2 + a_2^+a_3^- + c'(a_3^-)^3 + a_4^- + c_2)$. Nous écrivons E_{13},

$$\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3+1 \end{pmatrix},\ \beta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3-1 \end{pmatrix}.$$

Cas 5. Si

$$\Psi = \begin{pmatrix} \gamma^+ & \gamma^+(a_2^+ + s_2^-) & \gamma^+(a^+ + s^-) \\ 0 & \gamma^+ & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^+ \end{pmatrix},$$

où $\gamma^+ \in \mathcal{M}^+(G)$, $a_2^+, a^+ \in \mathcal{A}^+(G)$ et $s^-, s_2^- \in \mathcal{S}^-(G)$. Dans ce cas, G_i ($i = 1, 2, 3$) satisfait les équations fonctionnelles suivantes :

$$G_1(x+y)+G_1(x+\sigma(y)) = 2\gamma^+(y)G_1(x)+2\gamma^+(a_2^+ +s_2^-)(y)G_2(x)+2\gamma^+(a^+ +s^-)(y)G_3(x), \tag{1.55}$$

$$G_2(x+y) + G_2(x+\sigma(y)) = 2\gamma^+(y)G_2(x) \tag{1.56}$$

et

$$G_3(x+y) + G_3(x+\sigma(y)) = 2\gamma^+(y)G_3(x). \tag{1.57}$$

De [163], nous obtenons $G_2 = \gamma^+(c_2 + a_2^-)$ et $G_3 = \gamma^+(c_3 + a_3^-)$, où $c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ et $a_2^-, a_3^- \in \mathcal{A}^-(G)$. Divisons l'équation (1.55) par $\gamma^+(x + y) = \gamma^+(x)\gamma^+(y) = \gamma^+(x + \sigma(y))$ nous obtenons pour $G_1' = \dfrac{G_1}{\gamma^+}$:

$$G_1'(x+y)+G_1'(x+\sigma(y)) = 2G_1'(x)+2(a_2^+ +s_2^-)(y)(c_2+a_2^-)(x)+2(a^+ +s^-)(y)(c_3+a_3^-)(x). \tag{1.58}$$

Si a_2^- et a_3^- sont linéairement dépendants, i.e., $a_2^- = \lambda_1 a_1^-$ et $a_3^- = \lambda_2 a_1^-$, où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ et $a_1^- \in \mathcal{A}^-(G)$. L'équation (1.55) devient

$$G_1'(x+y) + G_1'(x+\sigma(y)) \tag{1.59}$$

$$= 2G_1'(x) + 2[c_2(a_2^+ + s_2^-) + c_3(a^+ + s^-)](y) + 2a_1^-(x)[\lambda_1(a_2^+ + s_2^-) + \lambda_2(a^+ + s^-)](y),$$

alors la fonction $F(x) = G_1'(x) - c_2(a_2^+ + s_2^-)(x) - c_3(a^+ + s^-)(x)$ satisfait l'équation fonctionnelle suivante :

$$F(x+y) + F(x+\sigma(y)) = 2F(x) + 2a_1^-(x)[\lambda_1(a_2^+ + s_2^-) + \lambda_2(a^+ + s^-)](y).$$

En tenant compte de [163], nous obtenons les cas suivants :
si $a_1^-(x) = 0$, alors $a_2^-(x) = 0$, $a_3^-(x) = 0$, pour tout $x \in G$ et $G_1(x) = \gamma^+(x)(c_2(a_2^+ + s_2^-) + c_3(a^+ + s^-) + a_4^- + c_4)(x)$, $G_2(x) = c_2\gamma^+(x)$ et $G_3(x) = c_3\gamma^+(x)$. Nous donnons E_{14},

$$\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_4 \\ c_2+1 \\ c_3+1 \end{pmatrix},\ \beta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_4 \\ c_2-1 \\ c_3-1 \end{pmatrix}.$$

Si $a_1^- \neq 0$, nous avons

$$G_1' = \frac{1}{3}c_2'(a_1^-)^3 + a_1^+a_1^- + c_2(a_2^+ + s_2^-) + c_3(a^+ + s^-) + a_0^- + c_4,$$

$$\lambda_1(a_2^+ + s_2^-) + \lambda_2(a^+ + s^-) = a_1^+ + c_2'(a_1^-)^2.$$

Dans la dernière équation nous pouvons choisir $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$, $a_4^- \in \mathcal{A}^-(G)$ et $s_4^- \in \mathcal{S}^-(G)$ tels que : $r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2 = 1$ et

$$a_2^+ + s_2^- = r_1(a_1^+ + c_2'(a_1^-)^2) + \lambda_2(a_4^+ + s_4^-),$$

$$a^+ + s^- = r_2(a_1^+ + c_2'(a_1^-)^2) - \lambda_1(a_4^+ + s_4^-).$$

Donc :

$$\begin{aligned} G_1 &= \gamma^+\{\frac{1}{3}c_2'(a_1^-)^3 + c_2'(c_2r_1 + c_3r_2)(a_1^-)^2 \\ &\quad + a_1^+a_1^- + (c_2r_1 + c_3r_2)a_1^+ + (\lambda_2c_2 - \lambda_1c_3)(a_4^+ + s_4^-) \\ &\quad + a_0^- + c_4\}, \end{aligned}$$

$$G_2 = \gamma^+(c_2 + \lambda_1a_1^-),$$
$$G_3 = \gamma^+(c_3 + \lambda_2a_1^-).$$

Nous pouvons écrire E_{15},

$$\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_4 \\ c_2 \\ c_3 + 1 \end{pmatrix},\ \beta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_4 \\ c_2 \\ c_3 - 1 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, si a_2^- et a_3^- sont linéairement indépendants, la fonction $F(x) = G_1'(x) - c_2(a_2^+ + s_2^-)(x) - c_3(a^+ + s^-)(x) - G_1'(0)$ satisfait $F(e) = 0$, $F(y) + F(\sigma(y)) = 0$, et

$$F(x+y) + F(x+\sigma(y)) = 2F(x) + 2a_2^-(x)(a_2^+ + s_2^-)(y) + 2a_3^-(x)(a^+ + s^-)(y),\ x, y \in G. \tag{1.60}$$

La somme de cette équation et de l'équation obtenue en interchangeant les rôles de x et de y dans (1.60), donne

$$\begin{aligned} F(x+y) &= F(x) + F(y) + a_2^-(x)(a_2^+ + s_2^-)(y) + a_3^-(x)(a^+ + s^-)(y) \\ &\quad + a_2^-(y)(a_2^+ + s_2^-)(x) + a_3^-(x)(a^+ + s^-)(x). \end{aligned}$$

En utilisant (Lemme 14.1, [3]) et quelques idées de [154], nous obtenons

$$s_2^- = \alpha_1(a_2^-)^2 + \alpha_2(a_3^-)^2 + 2\beta_1a_2^-a_3^-,$$

$$s^- = \beta_1(a_2^-)^2 + \beta_2(a_3^-)^2 + 2\alpha_2 a_2^- a_3^-,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{C}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} & F(x+y) + F(x+\sigma(y)) \\ = {} & 2F(x) + 2a_2^-(x)[\alpha_1((a_2)^-)^2 + \alpha_2(a_3^-)^2 + 2\beta_1 a_2^- a_3^- + a_2^+](y) \\ & +2a_3^-(x)[\beta_1(a_2^-)^2 + \beta_2(a_3^-)^2 + 2\alpha_2 a_2^- a_3^- + a^+](y). \end{aligned}$$

Un calcul direct montre que

$$F_0 = \frac{\alpha_1}{3}(a_2^-)^3 + \frac{\beta_2}{3}(a_3^-)^3 + \alpha_2(a_2)^-(a_3^-)^2 + \beta_1((a_2)^-)^2 a_3^- + a_2^- a_2^+ + a_3^- a^+$$

est une solution particulière de l'équation précédente, de sorte que la solution complète est $\frac{\alpha_1}{3}((a_2)^-)^3 + \frac{\beta_2}{3}(a_3^-)^3 + \alpha_2(a_2)^-(a_3^-)^2 + \beta_1((a_2)^-)^2 a_3^- + (a_2)^-(a_2)^+ + a_3^- a^+ + a_0^- + c$, où $a_0^- \in \mathcal{A}^-(G)$ et $c \in \mathbb{C}$. Donc :

$$\begin{aligned} G_1 = \gamma^+[& \frac{\alpha_1}{3}(a_2^-)^3 + \frac{\beta_2}{3}(a_3^-)^3 + \alpha_2 a_2^-(a_3^-)^2 + \beta_1(a_2^-)^2 a_3^- + (\alpha_1 c_2 + c_3\beta_1)(a_2^-)^2 \\ & + (\alpha_2 c_2 + c_3\beta_2)(a_3^-)^2 + (2\beta_1 c_2 + 2c_3\alpha_2)a_3^- a_2^- + a_2^- a_2^+ + a_3^- a^+ + c_2 a_2^+ + c_3 a^+ + a_0^- + c]. \end{aligned}$$

Nous donnons E_{16},

$$\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c \\ c_2 \\ c_3 + 1 \end{pmatrix}, \; \beta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c \\ c_2 \\ c_3 - 1 \end{pmatrix}.$$

Cas 6. Si

$$\Psi = \begin{pmatrix} \gamma^+ & d^{-1}\gamma^+(a^+ + (a^-)^2) & \gamma^+(\frac{1}{2}(a^+)^2 + a^+(a^-)^2 + \frac{1}{6}(a^-)^4 + a_1^+ + s_1^-) \\ 0 & \gamma^+ & d\gamma^+(a^+ + (a^-)^2) \\ 0 & 0 & \gamma^+ \end{pmatrix},$$

où $\gamma^+ \in \mathcal{M}^+(G)$, $a^+, a_1^+ \in \mathcal{A}^+(G)$, $a^- \in \mathcal{A}^-(G)$, $s_1^- \in \mathcal{S}^-(G)$ et $d \in \mathbb{C}^*$. Les composantes G_i, $i = 1, 2, 3$ vérifient les équations fonctionnelles suivantes :

$$\begin{aligned} G_1(x+y) + G_1(x+\sigma(y)) \;=\; & 2\gamma^+(y)G_1(x) + 2d^{-1}\gamma^+(a^+ + (a^-)^2)(y)G_2(x) \\ & +2\gamma^+(\frac{1}{2}(a^+)^2 + a^+(a^-)^2 + \frac{1}{6}(a^-)^4 + a_1^+ + s_1^-)(y)G_3(x), \end{aligned}$$

$$G_2(x+y) + G_2(x+\sigma(y)) = 2\gamma^+(y)G_2(x) + 2d\gamma^+(a^+ + (a^-)^2)(y)G_3(x) \qquad (1.61)$$

et

$$G_3(x+y) + G_3(x+\sigma(y)) = 2\gamma^+(y)G_3(x). \qquad (1.62)$$

D'après [163], nous avons $G_3 = \gamma^+(c_3 + a_3^-)$, où $c_3 \in \mathbb{C}$ et $a_3^- \in \mathcal{A}^-(G)$. Divisons l'équation (1.61) par $\gamma^+(x+y) = \gamma^+(x)\gamma^+(y) = \gamma^+(x+\sigma(y))$, nous obtenons pour $G_2' = \dfrac{G_2}{\gamma^+}$ que

$$G_2'(x+y) + G_2'(x+\sigma(y)) = 2G_2'(x) + 2d(c_3 + a_3^-)(x)(a^+ + (a^-)^2)(y), \qquad (1.63)$$

i.e., G_2' satisfait l'équation fonctionnelle de différence symétrique. La solution de cette équation est donnée par H. Stetkær [163].

Si $c_3 + a_3^-$ est une constante, i.e., $a_3^- = 0$, alors $G_3 = c_3\gamma^+$ et $G_2 = \gamma^+[dc_3(a^+ + (a^-)^2) + a_4^- + c_1]$. Divisons la première équation par $\gamma^+(x+y) = \gamma^+(x)\gamma^+(y) = \gamma^+(x+\sigma(y))$, nous avons pour $G_1' = \dfrac{G_1}{\gamma^+}$ que

$$\begin{aligned} &G_1'(x+y) + G_1'(x+\sigma(y)) \\ &= 2G_1'(x) + 2d^{-1}[dc_3(a^+ + (a^-)^2) + a_4^- + c_1](x)(a^+ + (a^-)^2)(y) \\ &\quad +2c_3[(\frac{1}{2}(a^+)^2 + a^+(a^-)^2 + \frac{1}{6}(a^-)^4 + a_1^+ + s_1^-)](y). \end{aligned} \qquad (1.64)$$

Un calcul direct nous donne : $c_3[\frac{1}{2}(a^+)^2 + a^+(a^-)^2 + \frac{1}{6}(a^-)^4] + d^{-1}(a^+ + \frac{1}{3}(a^-)^2)a_4^- + c_1 d^{-1}(a^+ + (a^-)^2) + c_3(a_1^+ + s_1^-)$, est solution particulière de l'équation (1.64). En tenant compte de [163], nous obtenons

$$G_1 = \gamma^+[c_3(\frac{1}{2}(a^+)^2 + a^+(a^-)^2 + \frac{1}{6}(a^-)^4) + d^{-1}(a^+ + \frac{1}{3}(a^-)^2)a_4^- + c_1 d^{-1}(a^+ + (a^-)^2) + c_3(a_1^+ + s_1^-) + a_2^- + c].$$

Dans ce cas, nous pouvons donner E_{17}, et

$$\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c \\ c_1 + 1 \\ c_3 \end{pmatrix}, \ \beta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c \\ c_1 - 1 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Si $a_3^- \neq 0$ alors $G_3 = \gamma^+(c_3 + a_3^-)$ et

$$G_2(x+y) + G_2(x+\sigma(y)) = 2\gamma^+(y)G_2(x) + 2d\gamma^+(a^+ + (a^-)^2)(y)\gamma^+(c_3 + a_3^-)(x). \quad (1.65)$$

Divisons l'équation (1.65) par $\gamma^+(x+y) = \gamma^+(x)\gamma^+(y) = \gamma^+(x+\sigma(y))$, nous obtenons pour $G_2' = \dfrac{G_2}{\gamma^+}$:

$$G_2'(x+y) + G_2'(x+\sigma(y)) = 2G_2'(x) + 2d(a^+ + (a^-)^2)(y)(c_3 + a_3^-)(x). \qquad (1.66)$$

D'après (Théorème IV.1, [163]), il s'ensuit que $(a^-)^2 = 3c(a_3^-)^2$, i.e., $a_3^- = \mu a^-$, ($\mu \neq 0$), où $\mu^2 = \dfrac{1}{3c}$ et

$$G_2 = \gamma^+(dc_3 a^+ + dc_3(a^-)^2 + d\mu a^+ a^- + d\mu\frac{1}{3}(a^-)^3 + a_0^- + c_2),$$

où $c_2 \in \mathbb{C}$ et $a_0^- \in \mathcal{A}^-(G)$. Divisons (1.61) par $\gamma^+(x+y) = \gamma^+(x)\gamma^+(y) = \gamma^+(x+\sigma(y))$, nous obtenons pour $G_1' = \frac{G_1}{\gamma^+}$:

$$G_1'(x+y) + G_1'(x+\sigma(y))$$

$$= 2G_1'(x) + 2d^{-1}(dc_3a^+ + dc_3(a^-)^2 + d\mu a^+a^- + d\mu\frac{1}{3}(a^-)^3 + a_0^- + c_2)(x)(a^+ + (a^-)^2)(y)$$
$$+2(c_3 + \mu a^-)(x)(\frac{1}{2}(a^+)^2 + a^+(a^-)^2 + \frac{1}{6}(a^-)^4 + (a_1^+ + s_1^-))(y).$$

Introduisons une nouvelle fonction F_0 définie par

$$F_0 = G_1' - c_2d^-a^+ - c_2d^{-1}(a^-)^2 - \frac{c_3}{2}(a^+)^2 - c_3a^+(a^-)^2 - \frac{\mu}{2}(a^+)^2a^- - \frac{\mu}{3}a^+(a^-)^3 - \frac{c_3}{6}(a^-)^4$$
$$- \frac{\mu}{30}(a^-)^5 - c_3(a_1^+ + s_1^-) - G_1'(e),$$

alors, pour tout $x, y \in G$, nous avons

$$F_0(x+y) + F_0(x+\sigma(y)) = 2F_0(x) + 2d^{-1}a_0^-(x)(a^+ + (a^-)^2)(y) + 2\mu a^-(x)(a_1^+ + s_1^-)(y). \tag{1.67}$$

Si a_0^- et a^- sont linéairement dépendants, i.e., $a_0^- = \lambda a^-$ nous avons

$$F_0(x+y)+F_0(x+\sigma(y)) = 2F_0(x)+2a^-(x)[d^{-1}\lambda a^+ + d^{-1}\lambda(a^-)^2 + \mu(a_1^+ + s_1^-)](y). \tag{1.68}$$

D'après [163], nous avons que $a_1^+ + s_1^- = k(a^-)^2$ et $F_0 = d^{-1}\lambda a^+a^- + (d^{-1}\lambda + \mu k)(a^-)^3 + a_4^- + c_4$, où $k, c_4 \in \mathbb{C}$ et $a_4^- \in \mathcal{A}^-(G)$. Alors

$$\begin{aligned} G_1 \quad = \quad & \gamma^+\{\frac{\mu}{30}(a^-)^5 + \frac{c_3}{6}(a^-)^4 \\ & +(d^{-1}\lambda + \mu k)(a^-)^3 + c_2d^{-1}a^+ + (c_2d^{-1} + c_3k)(a^-)^2 \\ & +\frac{c_3}{2}(a^+)^2 + c_3a^+(a^-)^2 + \frac{\mu}{2}(a^+)^2a^- \\ & +\frac{\mu}{3}a^+(a^-)^3 + d^{-1}\lambda a^+a^- + a_4^- + c_4\}, \end{aligned}$$

$$G_2 = \gamma^+(dc_3a^+ + dc_3(a^-)^2 + d\mu a^+a^- + d\mu\frac{1}{3}(a^-)^3 + \lambda a^- + c_2),$$
$$G_3 = \gamma^+(c_3 + \mu a^-).$$

Nous donnons E_{18},

$$\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_4 \\ c_2 + \lambda \\ c_3 + \mu - \lambda \end{pmatrix}, \ \beta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_4 \\ c_2 - \lambda \\ c_3 - \mu + \lambda \end{pmatrix}.$$

Si a_0^- et a^- sont linéairement indépendants. En utilisant des calculs similaires au Cas 5 pour l'équation fonctionnelle (1.67), il s'ensuit que

$$s_1^- = \beta_2(a^-)^2 + 2d^{-1}\mu^{-1}a_0^- a^-,$$

$$F_0 = \frac{\beta_2\mu^3}{3}(a^-)^3 + d^{-1}a_0^-(a^-)^2 + d^{-1}a^+a_0^- + \mu a_1^+a^- + a_4^- + c_4.$$

Donc nous obtenons

$$G_1 = \gamma^+[c_2d^{-1}a^+ + (c_2d^{-1} + c_3\beta_2)(a^-)^2 + \frac{c_3}{2}(a^+)^2 + c_3a^+(a^-)^2 + \frac{\mu}{2}(a^+)^2a^- + \frac{\mu}{3}a^+(a^-)^3$$

$$+\frac{c_3}{6}(a^-)^4+\frac{\mu}{30}(a^-)^5+c_3(a_1^+ +2d^{-1}\mu^{-1}a_0^-a^-)+\frac{\beta_2\mu^3}{3}(a^-)^3+d^{-1}a_0^-(a^-)^2+d^{-1}a^+a_0^-+\mu a_1^+a^-+a_4^-+c_4],$$

$$G_2 = \gamma^+(dc_3a^+ + dc_3(a^-)^2 + d\mu a^+a^- + d\mu\frac{1}{3}(a^-)^3 + a_0^- + c_2),$$

$$G_3 = \gamma^+(c_3 + \mu a^-).$$

Nous écrivons E_{19} avec

$$\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_4 \\ c_2+\mu \\ c_3 \end{pmatrix},\ \beta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_4 \\ c_2-\mu \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Cas 7. Si Φ prend l'une des formes 7, 8 et 9 du Théorème 1.2.2. Dans ce cas $\gamma \neq \gamma \circ \sigma$, alors il existe $x_0 \in G$ tel que $\Phi(2x_0) - \Phi(x_0 + \sigma(x_0))$ est inversible. D'après le Théorème 1.3.1, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^3$ et $E : G \longrightarrow M_3(\mathbb{C})$ qui vérifient $G(x) = E(x)\alpha + E(\sigma(x))\beta$, $\psi(x) = \dfrac{E(x) + E(\sigma(x))}{2}$, où $E(x)$ est de la forme suivante

$$E(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) & \lambda_1\phi(x) & \phi_0(x) \\ 0 & \phi_1(x) & \lambda_2\phi(x) \\ 0 & 0 & \phi_1(x) \end{pmatrix},$$

avec

$$E(x+y) = E(x)E(y),\ \ x, y \in G, \tag{1.69}$$

$$\phi_1(x+y) = \phi_1(x)\phi_1(y),\ \ x, y \in G, \tag{1.70}$$

$$\lambda_i\phi(x+y) = \lambda_i\phi_1(x)\phi(y) + \lambda_i\phi_1(y)\phi(x),\ \ x, y \in G,\ i = 1, 2, \tag{1.71}$$

$$\phi_0(x+y) = \phi_0(x)\phi_1(y) + \phi_0(y)\phi_1(x) + \lambda_1\lambda_2\phi(y)\phi(x),\ \ x, y \in G. \tag{1.72}$$

D'après (1.71), (1.69) et par l'indépendance linéaire du groupe des homomorphismes pour $\mathbb{C}^*$, il s'ensuit que $\phi_1 = \gamma$, où $\phi_1 = \gamma \circ \sigma$ et $\gamma \in \mathcal{M}(G)$.

Cas 1. Si $\phi_1 = \gamma$, d'après [163], nous avons $\phi = \gamma a$, où $a \in \mathcal{A}(G)$. Par conséquent, l'équation (1.72) devient

$$\phi_0(x+y) = \phi_0(x)\gamma(y) + \phi_0(y)\gamma(x) + \lambda_1\lambda_2\gamma(x)\gamma(y)a(x)a(y), x, y \in G. \qquad (1.73)$$

Divisons par $\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y)$, nous obtenons

$$\frac{\phi_0}{\gamma}(x+y) = \frac{\phi_0}{\gamma}(x) + \frac{\phi_0}{\gamma}(y) + \lambda_1\lambda_2 a(x)a(y), \ \ x, y \in G. \qquad (1.74)$$

Un calcul direct montre que $\frac{\lambda_1\lambda_2}{2}a^2$ est une solution particulière de (1.74), et la solution complète est donnée par $\frac{\lambda_1\lambda_2}{2}a^2 + a_0$, où $a_0 \in \mathcal{A}(G)$. Alors $\phi_0 = \gamma(\frac{\lambda_1\lambda_2}{2}a^2 + a_0)$ et par conséquent

$$E = \begin{pmatrix} \gamma & \lambda_1\gamma a & \gamma(\frac{\lambda_1\lambda_2}{2}a^2 + a_0) \\ 0 & \gamma & \lambda_2\gamma a \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Pour le second cas où, $\phi_1 = \gamma \circ \sigma$, nous obtenons de manière similaire :

$$E = \begin{pmatrix} \gamma\circ\sigma & \lambda_1 a\gamma\circ\sigma & \gamma\circ\sigma(\frac{\lambda_1\lambda_2}{2}a^2 + a_0) \\ 0 & \gamma\circ\sigma & \lambda_2 a\gamma\circ\sigma \\ 0 & 0 & \gamma\circ\sigma \end{pmatrix}.$$

Donc nous donnons E_{20}. Ce qui achève la preuve du théorème. ♠

Le Théorème 1.3.3 donne toutes les solutions de l'équation fonctionnelle matricielle de Wilson (1.33) pour lesquelles $vect\{g(x) \in \mathbb{C}^3 / x \in G\} = \mathbb{C}^3$ (voir (Proposition 1.3.2)). Cependant, la dimension de $vect\{g(x) \in \mathbb{C}^3 / x \in G\}$ n'est pas toujours égale à 3. Le théorème suivant décrit toutes les solutions de l'équation matricielle de Wilson (1.33), ainsi que les nouvelles.

Théorème 1.3.4 *Toutes les solutions $(g, \Phi) \in C(G, \mathbb{C}^3) \times C(G, M_3(\mathbb{C}))$ de l'équation fonctionnelle de Wilson (1.33) sont données comme suit :*
1- Les solutions décrites dans le Théorème 1.3.3.
2- Il existe $C_1 \in GL(3, \mathbb{C})$, $\gamma \in \mathcal{M}(G)$ avec $\gamma \neq \gamma\circ\sigma$, et $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{C}$ tels que :

$$C_1^{-1}g = \gamma \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma\circ\sigma \begin{pmatrix} \beta_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$C_1^{-1}\Phi C_1 = \frac{1}{2}(\gamma + \gamma\circ\sigma)I + \begin{pmatrix} 0 & \psi_1 & \xi_1 \\ 0 & \psi_2 & \xi_2 \\ 0 & \psi_3 & \xi_3 \end{pmatrix},$$

où $\psi_i, \xi_i \in C(G)$*,* $(i = 1, 2, 3)$ *sont des fonctions arbitraires.*
3- Il existe $C_1 \in GL(3, \mathbb{C})$*,* $\gamma^+ \in \mathcal{M}^+(G)$*,* $a^- \in \mathcal{A}^-(G)$ *et* $c \in \mathbb{C}$ *tels que :*

$$C_1^{-1} g = (c + a^-)\gamma^+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_1^{-1} \Phi C_1 = \gamma^+ I + \begin{pmatrix} 0 & \varphi_1 & \theta_1 \\ 0 & \varphi_2 & \theta_2 \\ 0 & \varphi_3 & \theta_3 \end{pmatrix},$$

où $\varphi_i, \theta_i \in C(G)$ $(i = 1, 2, 3)$ *sont arbitraires.*
4- Il existe $C_2 \in GL(3, \mathbb{C})$*,* $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{M}(G)$ *avec* $\gamma_i \neq \gamma_i \circ \sigma$ *et* $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{C}$*, vérifiant*

$$C_2^{-1} g = \begin{pmatrix} \alpha_1\gamma_1 + \beta_1\gamma_1 \circ \sigma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2\gamma_2 + \beta_2\gamma_2 \circ \sigma \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$C_2^{-1} \Phi C_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_1 \circ \sigma) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\gamma_2 + \gamma_2 \circ \sigma) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\gamma_3 + \gamma_3 \circ \sigma) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \psi_1 \\ 0 & 0 & \psi_2 \\ 0 & 0 & \psi_3 \end{pmatrix},$$

où $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in C(G)$ *sont arbitraires.*
5- Il existe $C_2 \in GL(3, \mathbb{C})$*,* $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{M}(G)$ *avec* $\gamma_1 \neq \gamma_1 \circ \sigma$ *et* $\gamma_2 = \gamma_2 \circ \sigma = \gamma_2^+$*,* $a_2^- \in \mathcal{A}^-(G)$ *et* $\alpha_1, \beta_1, c_1' \in \mathbb{C}$ *et* $c \in \mathbb{C}$ *tels que :*

$$C_2^{-1} g = \begin{pmatrix} \alpha_1\gamma_1 + \beta_1\gamma_1 \circ \sigma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2^+(c_1' + a_2^-) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$C_2^{-1} \Phi C_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_1 \circ \sigma) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \psi_1 \\ 0 & 0 & \psi_2 \\ 0 & 0 & \psi_3 \end{pmatrix},$$

où $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in C(G)$ *sont arbitraires.*
6- Il existe $C_2 \in GL(3, \mathbb{C})$*,* $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{M}(G)$ *avec* $\gamma_1 = \gamma_1 \circ \sigma = \gamma_1^+$ *et* $\gamma_2 \neq \gamma_2 \circ \sigma$*,* $a_1^- \in \mathcal{A}^-(G)$*,* $\alpha_2, \beta_2, c_1 \in \mathbb{C}$ *et* $c \in \mathbb{C}$ *de telle sorte que :*

$$C_2^{-1} g = \begin{pmatrix} \gamma_1^+(c_1 + a_1^-) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2\gamma_2 + \beta_2\gamma_2 \circ \sigma \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$C_2^{-1} \Phi C_2 = \begin{pmatrix} \gamma_1^+ & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\gamma_2 + \gamma_2 \circ \sigma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \psi_1 \\ 0 & 0 & \psi_2 \\ 0 & 0 & \psi_3 \end{pmatrix},$$

où $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in C(G)$ sont arbitraires.
7- Il existe $C_2 \in GL(3,\mathbb{C})$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{M}(G)$ avec $\gamma_1 = \gamma_1 \circ \sigma = \gamma_1^+$, $\gamma_2 = \gamma_2 \circ \sigma = \gamma_2^+$, $a_1^-, a_2^- \in \mathcal{A}^-(G)$ et $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, vérifiant

$$C_2^{-1}g = \begin{pmatrix} \gamma_1^+(c_1 + a_1^-) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2^+(c_2 + a_2^-) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$C_2^{-1}\Phi C_2 = \begin{pmatrix} \gamma_1^+ & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \psi_1 \\ 0 & 0 & \psi_2 \\ 0 & 0 & \psi_3 \end{pmatrix},$$

où $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in C(G)$ sont arbitraires.
8- $g = 0$ et Φ arbitraire dans $C(G, M_3(\mathbb{C}))$. Inversement, chacune des paires (g, Φ) décrite, en vertu de (1)-(8), est solution de l'équation fonctionnelle de Wilson (1.33).

Preuve. Il est facile de vérifier que toutes les paires (g, Φ) données de (1)-(8) sont des solutions de l'équation fonctionnelle (1.33), donc chaque solution g, Φ relève de l'une des formes (1)-(8).
Le cas 1 est prouvé dans le théorème précédent où $vect\{g(x) \in \mathbb{C}^3/x \in G\} = \mathbb{C}^3$, et (8) en découle aisément où $vect\{g(x) \in \mathbb{C}^3/x \in G\}$ a une dimension égale à 0 avec $g = 0$.
Pour le cas où $vect\{g(x) \in \mathbb{C}^3/x \in G\} = \mathbb{C}$, pour $e \in \mathbb{C}^3\backslash\{0\}$, nous écrivons $g(x) = f(x)e$, $x \in G$, où $f \in C(G)$.
Nous déduisons de l'équation (1.33) :

$$\Phi(y)vect\{g(x) \in \mathbb{C}^3/x \in G\} \subseteq vect\{g(x) \in \mathbb{C}^3/x \in G\}. \tag{1.75}$$

En particulier, il existe $\phi \in C(G)$ tel que $\Phi(y).e = \phi(y)e$ pour tout $y \in G$. Si nous substituons les expressions de g et Φ dans (1.33), nous obtenons l'équation fonctionnelle scalaire de Wilson ; alors il existe $\gamma \in \mathcal{M}(G)$ vérifiant $\phi = \dfrac{1}{2}(\gamma + \gamma \circ \sigma)$ si $\gamma \neq \gamma \circ \sigma$ et f est de la forme $f = c(\dfrac{\gamma + \gamma \circ \sigma}{2}) + d(\dfrac{\gamma - \gamma \circ \sigma}{2})$, où $c, d \in \mathbb{C}$. Si $\gamma = \gamma \circ \sigma \in \mathcal{M}^+(G)$, alors f est de la forme $f = \gamma(c + a^-)\gamma^+$, où $c \in \mathbb{C}$ et $a^- \in \mathcal{A}^-(G)$. Soit C_1 une matrice 3×3 inversible telle que $e = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, nous obtenons $C_1^{-1}g(x) = C_1^{-1}f(x)e = f(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors g prend la forme donnée par (2) et (3). D'après $\Phi(y).e = \phi(y)e$, nous déduisons :

$$C_1^{-1}\Phi(y)C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui implique la formule de $C_1^-\Phi C_1$.
Si $vect\{g(x) \in \mathbb{C}^3/x \in G\} = \mathbb{C}(u, v)$ pour un $(u, v) \in (\mathbb{C}^3/\{0\})^2$, g est alors de la forme

$g(x) = f(x)u + h(x)v$, $x \in G$, où $f, h \in C(G) \backslash \{0\}$. En particulier, nous déduisons de (1.75), l'existence de $\phi_1, \phi_2 \in C(G)$ telles que $\Phi(y)u = \phi_1(y)u$ et $\Phi(y)v = \phi_2(y)v$, pour tout $y \in G$. Si nous remplaçons les expressions de g et de Φ dans l'équation (1.33), nous obtenons

$$[f(x+y) + f(x+\sigma(y)) - 2\phi_1(y)f(x)]u + [h(x+y) + h(x+\sigma(y)) - 2\phi_2(y)h(x)]v = 0.$$

Les vecteurs u, v sont linéairement indépendants, alors f et h satisfont l'équation fonctionnelle scalaire de Wilson et par suite, il existe $\gamma_i \in \mathcal{M}(G)$ $(i = 1, 2)$ tel que $\phi_i = \frac{1}{2}(\gamma_i + \gamma_i \circ \sigma)$ $(i = 1, 2)$, $a_1^-, a_2^- \in \mathcal{A}^-(G)$ et $c_1, c_2, c_1^{'}, c_2^{'} \in \mathbb{C}$, où $f = (\frac{c_1 + c_2}{2})\gamma_1 + (\frac{c_1 - c_2}{2})\gamma_1 \circ \sigma$ si $\gamma_1 \neq \gamma_1 \circ \sigma$, ou $f = \gamma_1^+(c_1 + a_1^-)$ si $\gamma_1 = \gamma_1 \circ \sigma = \gamma_1^+$ et $h = (\frac{c_1^{'} + c_2^{'}}{2})\gamma_2 + (\frac{c_1^{'} - c_2^{'}}{2})\gamma_2 \circ \sigma$ si $\gamma_2 \neq \gamma_2 \circ \sigma$, ou $h = \gamma_1^+(c_1^{'} + a_2^-)$ si $\gamma_2 = \gamma_2 \circ \sigma = \gamma_2^+$.

Soit C_2 une matrice 3×3 inversible telle que $u = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, nous avons :

$$C_2^{-1}g(x) = C_2^{-1}[f(x)u + h(x)v] = f(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + h(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'après $\Phi(y)u = \phi_1(y)u$ et $\Phi(y)v = \phi_2(y)v$, nous obtenons

$$C_2^{-1}\Phi C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C_2^{-1}\Phi C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui implique la formule de $C_2^{-1}\Phi C_2$ dans (4), (5), (6) et (7). ♠

1.4 Sur l'équation fonctionnelle trigonométrique avec involution

Dans cette section, nous résolvons l'équation fonctionnelle

$$f(x+y) + f(x+\sigma(y)) = 2g(x)h(y) = 2g_1(x)h_1(y) + 2g_2(x)h_2(y) + 2g_3(x)h_3(y), \ x, y \in G, \tag{1.76}$$

où nous utilisons les notations $g = (g_1, g_2, g_3)$ et $h = (h_1, h_2, h_3)^t$ pour tout $f, g_1, g_2, g_3,$ $h_1, h_2, h_3 \in C(G)$. Nous prenons pour $g(x)$ un vecteur ligne et $h(x)$ un vecteur colonne pour chaque $x \in G$.
Pour la solution de (1.76), nous considérons le triplet $\{f, g, h\}$, qui est une fonction continue satisfaisant (1.76).

Théorème 1.4.1 *Soient $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$, $g = \{g_1, g_2, g_3\} : G \longrightarrow \mathbb{C}^3$ et $h = \{h_1, h_2, h_3\}^t : G \longrightarrow \mathbb{C}^3$ avec $g, h \in \mathcal{F}$, satisfaisant l'équation fonctionnelle (1.76). Alors, il existe une solution $\Phi : G \longrightarrow M_3(\mathbb{C})$ de l'équation fonctionnelle matricielle de d'Alembert*

$$\begin{cases} \Phi(x+y) + \Phi(x+\sigma(y)) = 2\Phi(x)\Phi(y), \quad x, y \in G, \\ \Phi(e) = I, \end{cases} \tag{1.77}$$

et il existe un vecteur colonne $v_0 \in \mathbb{C}^3$ vérifiant :

$$h(x) = \Phi(x)v_0, \tag{1.78}$$

$$g(x+y) + g(x+\sigma(y)) = 2\Phi(y)^t g(x), \tag{1.79}$$

$$f(x) = g(x)v_0, \quad x \in G. \tag{1.80}$$

Preuve. Soit $V = vect\{h(x),\ x \in G\} \subseteq \mathbb{C}^3$. Pour chaque x fixé dans G, nous définissons une application $\Phi(x) : V \longrightarrow V$ par

$$\Phi(x)v = \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{h(x+y_i) + h(x+\sigma(y_i))}{2}, \quad x \in G,$$

où $v = \sum_{i=1}^{m} c_i h(y_i)$, pour tout $y_1, ..., y_m \in G$ et $c_1, ..., c_m \in \mathbb{C}$.

Nous prouvons d'abord que $\Phi(x)$ est bien définie. Pour cela, nous supposons qu'un élément $v \in V$ admet deux expressions

$$v = \sum_{i=1}^{m} c_i h(y_i) = \sum_{j=1}^{l} d_j h(z_j).$$

Alors, pour tout $x, y \in G$, nous avons

$$\begin{aligned} g(x)\sum_{i=1}^{m} c_i \frac{h(y+y_i) + h(y+\sigma(y_i))}{2} &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{m} c_i \{2g(x)h(y+y_i) + 2g(x)h(y+\sigma(y_i))\} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{m} c_i \{f(x+y+y_i) + f(x+\sigma(y)+\sigma(y_i)) \\ &\quad + f(x+y+\sigma(y_i)) + f(x+\sigma(y)+y_i)\} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{m} c_i \{2g(x+y) + 2g(x+\sigma(y))\} h(y_i) \\ &= \frac{g(x+y) + g(x+\sigma(y))}{2} \sum_{i=1}^{m} c_i h(y_i) \\ &= \frac{g(x+y) + g(x+\sigma(y))}{2} \sum_{j=1}^{l} d_j h(z_j) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{l} d_j\{(2g(x+y)h(z_j) + 2g(x+\sigma(y))h(z_j)\} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{l} d_j\{f(x+y+z_j) + f(x+\sigma(y)+\sigma(z_j)) \\
&\quad + f(x+y+\sigma(z_j)) + f(x+\sigma(y)+z_j)\} \\
&= g(x)\sum_{j=1}^{l} d_j \frac{h(y+z_j) + h(y+\sigma(z_j))}{2}.
\end{aligned}
$$

Comme $g \in \mathcal{F}$, il s'ensuit que $\Phi(x)(\sum_{i=1}^{m} c_i h(y_i)) = \Phi(x)(\sum_{j=1}^{l} d_j h(z_j))$ pour tout $x \in G$. De plus, comme $g \in \mathcal{F}$, nous pouvons facilement vérifier que $h \circ \sigma = h$. Par conséquent, nous obtenons que $\Phi(e) = I_V$.

Nous prouvons que Φ satisfait l'équation (1.77). Il est clair que, pour chaque $x \in G$, $\Phi(x)$ est une application linéaire dans V. De plus, pour tout $x, y \in G$ et $v \in V$, nous avons

$$
\begin{aligned}
[\Phi(x+y) + \Phi(x+\sigma(y))]v &= \Phi(x+y)v + \Phi(x+\sigma(y))v \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} c_i\{h(x+y+y_i) + h(x+y+\sigma(y_i)) \\
&\quad + h(x+\sigma(y)+y_i) + h(x+\sigma(y)+\sigma(y_i))\} \\
&= 2\Phi(x)(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} c_i h(y+y_i) + h(y+\sigma(y_i)) \\
&= 2\Phi(x)\Phi(y)v.
\end{aligned}
$$

D'après $h \in \mathcal{F}$, alors d'après (Lemme 14.1, [4]), nous avons $V = \mathbb{C}^3$ et nous obtenons (1.77). Pour tout $x, y \in G$ et $v \in V$,

$$
\begin{aligned}
2g(x)\Phi(y)v &= 2g(x)\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} c_i\{h(y+y_i) + h(y+\sigma(y_i))\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} c_i\{2g(x)h(y+y_i) + 2g(x)h(y+\sigma(y_i))\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} c_i\{f(x+y+y_i) + f(x+\sigma(y)+\sigma(y_i)) \\
&\quad + f(x+y+\sigma(y_i)) + f(x+\sigma(y)+y_i)\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} c_i\{2g(x+y) + 2g(x+\sigma(y))\}h(y_i) \\
&= \{g(x+y) + g(x+\sigma(y))\}v,
\end{aligned}
$$

ce qui implique (1.79).

Finalement, en posant $v_0 = h(e)$, nous obtenons $h(x) = \Phi(x)v_0$ pour tout $x \in G$, ce qui donne (1.78). Maintenant, en prenant $y = e$ dans (1.76), nous déduisons que $f(x) = g(x)h(e) = g(x)v_0$ pour tout $x \in G$. Ce qui complète la preuve du théorème. ♠

Remarque 1.4.1 *Si $g \notin \mathcal{F}$ ou $h \notin \mathcal{F}$, alors (1.76) se réduit à l'équation fonctionnelle de Wilson de 1 ou 2-dimension (voir [153], [154] et [165]). Par la suite, nous considérons les solutions qui vérifient $g, h \in \mathcal{F}$.*

Dans le théorème suivant, nous résolvons l'équation fonctionnelle (1.76).

Théorème 1.4.2 *Soit $\{f, g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, h_3\} : G \longrightarrow \mathbb{C}$ avec $g = \{g_1, g_2, g_3\}$, $h = \{h_1, h_2, h_3\}^t \in \mathcal{F}$, une solution de l'équation fonctionnelle (1.76). Alors, il existe $v_0, u, w \in \mathbb{C}^3$ et $A \in GL(3, \mathbb{C})$ qui vérifient*

$$h(x) = (A^{-1})^t \frac{E(x)^t + E(\sigma(x))^t}{2} A^t v_0, \tag{1.81}$$

$$g(x) = A(E(x)u + E(\sigma(x))w), \tag{1.82}$$

$$f(x) = A(E(x)u + E(\sigma(x)w)v_0, \quad x \in G, \tag{1.83}$$

où E est définie dans le Théorème 1.3.3.

Preuve. Soit $\{f, g, h\}$ une solution de (1.76). D'après le Théorème 1.4.1, il existe une solution $\Phi : G \longrightarrow M_3(\mathbb{C})$ de l'équation fonctionnelle de d'Alembert (1.77) qui vérifie $g(x + y) + g(x+\sigma(y)) = 2\Phi(y)^t g(x)$. Appliquons le Théorème 1.3.3 à cette équation, il existe $u, w \in \mathbb{C}^3$ et $A \in GL(3, \mathbb{C})$ qui satisfont $g(x) = A(E(x)u + E(\sigma(x))w))$ et $\Phi^t = A\dfrac{E + E \circ \sigma}{2}A^{-1}$, où E prend une seule forme dans le Théorème 1.3.3. Pour le reste de la preuve, nous tenons compte des formules (1.78) et (1.80) du Théorème 1.4.1. ♠

1.5 Applications

Dans cette section, nous illustrons de quelle manière la fonction matricielle d'ordre 3, définie ci-dessus, peut être utilisée pour résoudre l'équation fonctionnelle de Levi-Cività. Cette équation fonctionnelle est étudiée par T. A. O'Connor dans [114] et l'équation fonctionnelle de type de d'Alembert par Z. Gajda dans [64].

Corollaire 1.5.1 *Soit $\{f, g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, h_3\} : G \longrightarrow \mathbb{C}$ avec $g = \{g_1, g_2, g_3\}$, $h = \{h_1, h_2, h_3\}^t \in \mathcal{F}$, une solution de l'équation fonctionnelle de Levi-Cività*

$$f(x + y) = g_1(x)h_1(y) + g_2(x)h_2(y) + g_3(x)h_3(y), \quad x, y \in G. \tag{1.84}$$

Alors, il existe $v_0, w \in \mathbb{C}^3$ et $A \in GL(3, \mathbb{C})$ vérifiant

$$h(x) = (A^{-1})^t E(x)^t A^t v_0, \tag{1.85}$$

$$g(x) = AE(x)w, \tag{1.86}$$

$$f(x) = (AE(x)w)v_0, \quad x \in G, \tag{1.87}$$

où $E : G \longrightarrow M_3(G)$ prend l'une des formes suivantes :

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_1 a & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix},$$

$$\gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \gamma \begin{pmatrix} 1 & d^{-1}a & \dfrac{a^2}{2} \\ 0 & 1 & da \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma \begin{pmatrix} 1 & \lambda_2 a_2 + r_1 a_1 & r_2 a_1 - \lambda_1 a_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \gamma \begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 a & a \\ 0 & 1 & \lambda_2 a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \gamma \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 a & \dfrac{\lambda_1 \lambda_2}{2} a^2 \\ 0 & 1 & \lambda_2 a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 a & \dfrac{\lambda_1 \lambda_2}{2} a^2 + a_0 \\ 0 & 1 & \lambda_2 a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \gamma \begin{pmatrix} 1 & d^{-1}a_2 & \dfrac{a_2^2}{2} + a_1 \\ 0 & 1 & da_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dans lesquelles $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathcal{M}(G)$, $a, a_0, a_1, a_2 \in \mathcal{A}(G)$ et $d, \lambda_1, \lambda_2, r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ vérifient $r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2 = 1$.

Preuve. Comme $\sigma = I$, alors nous déduisons de la preuve du Théorème 1.3.3, avec les simplifications suivantes : $\mathcal{M}^+(G) = \mathcal{M}(G)$, $\mathcal{A}^+(G) = \mathcal{A}(G)$, $\mathcal{A}^-(G) = \{0\}$ et $\mathcal{S}^-(G) = \{0\}$, le corollaire précédent. ♠

Corollaire 1.5.2 *Soit $\{f, h_1, h_2, h_3\} : G \longrightarrow \mathbb{C}$ avec $h = \{h_1, h_2, h_3\}^t \in \mathcal{F}$ une solution de l'équation fonctionnelle*

$$f(x+y) = \overline{h_1(-x)}h_1(y) + \overline{h_2(-x)}h_2(y) + \overline{h_3(-x)}h_3(y), \quad x, y \in G. \tag{1.88}$$

Alors, il existe $v_0 \in \mathbb{C}^3$ et $A \in GL(3, \mathbb{C})$, vérifiant

$$h(x) = AE(x)A^{-1}v_0, \tag{1.89}$$

$$f(x) = v_0^* AE(x)A^{-1}v_0, \quad x \in G, \tag{1.90}$$

où $E : G \longrightarrow M_3(G)$ est de la forme

$$E = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

avec $\gamma_i \in \mathcal{M}(G)$ et $\gamma_i \neq \gamma_j$, pour $i \neq j$; $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Preuve. Nous nous référons aux notations utilisées dans la preuve du Théorème 1.4.1. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire dans $V = \mathbb{C}^3$. Pour tout $x \in G$ et $u = \sum_{i=1}^{n} c_i h(y_i)$, $v = \sum_{j=1}^{m} d_j h(z_j)$, nous avons

$$\begin{aligned} \langle \Phi(-x)u, v \rangle &= \langle \sum_{i=1}^{n} c_i h(-x + y_i), \sum_{j=1}^{m} d_j h(z_j) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_i \overline{d_j} \langle h(-x + y_i), h(z_j) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_i \overline{d_j} f(x - y_i + z_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_i \overline{d_j} \langle h(y_i), h(x + z_j) \rangle \\ &= \langle u, \Phi(x)v \rangle \\ &= \langle \Phi(x)^* u, v \rangle, \end{aligned}$$

ce qui implique que $\Phi(x)^* = \Phi(-x)$ pour tout $x \in G$. Maintenant, comme $\Phi(x)\Phi(y) = \Phi(y)\Phi(x)$ pour tout $x, y \in G$ et $\Phi(x)^* = \Phi(-x)$, il s'ensuit que $\Phi(x)$ peut être diagonalisée simultanément (voir Lemme 1, [154]). Alors, il existe $A \in GL(3, \mathbb{C})$ qui vérifie $\Phi(x) = AE(x)A^{-1}$ pour tout $x \in G$, où

$$E = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix},$$

avec $\gamma_i \in \mathcal{M}(G)$. Pour $h \in \mathcal{F}$ nous avons $\gamma_i \neq \gamma_j$, $(i \neq j)$. Posons $y = e$ dans (1.88), nous obtenons que $f(x) = \tilde{h}(x)v_0$, où $\tilde{h}(x) = \overline{h(-x)}$. Ce qui termine la preuve du corollaire. ♠

Dans le corollaire suivant, nous résolvons l'équation fonctionnelle de Gajda de type de d'Alembert [64] sans utiliser l'hypothèse imposée par Gajda à savoir qu'il existe un point $z_0 \in G$ qui vérifie $h(z_0) = 0$. Notons que ce résultat a été obtenu récemment par H. Stetkær dans [167].

Corollaire 1.5.3 *Soit* $\{f, h_1, h_2, h_3\} : G \longrightarrow \mathbb{C}$ *avec* $\{h_1, h_2, h_3\}^t \in \mathcal{F}$*, une solution de l'équation fonctionnelle de Gajda*

$$f(x+y)+f(x-y) = 2\overline{h_1(-x)}h_1(y) + 2\overline{h_2(-x)}h_2(y) + 2\overline{h_2(-x)}h_2(y),\ x, y \in G. \quad (1.91)$$

Alors, il existe $v_0 \in \mathbb{C}^3$ *et* $A \in GL(3, \mathbb{C})$*, vérifiant*

$$h(x) = A\frac{E(x)+E(-x)}{2}A^{-1}v_0, \quad (1.92)$$

$$f(x) = v_0^* A^{-1}\frac{E(x)+E(-x)}{2}A^{-1}v_0, \quad x \in G \quad (1.93)$$

où $E : G \longrightarrow M_3(G)$ *est de la forme*

$$E = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix},$$

où $\gamma_i \in \mathcal{M}(G)$ *avec* $\gamma_i \neq \gamma_j$*,* $(i \neq j)$*.*

Preuve. Comme dans la preuve du Corollaire 1.5.2, nous montrons que $\Phi^*(x) = \Phi(-x)$ et $\Phi(x)$ peut être diagonalisée simultanément (voir Lemme 1, [154]). Donc il existe $A \in GL(3, \mathbb{C})$ telle que

$$\Phi(x) = A\begin{pmatrix} \omega_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3(x) \end{pmatrix}A^{-1}.$$

De $\Phi(x+y) + \Phi(x-y) = 2\Phi(x)\Phi(y)$ pour tout $x, y \in G$, il s'ensuit que $\omega_i(x+y) + \omega_i(x-y) = 2\omega_i(x)\omega_i(y)$ pour tout $x, y \in G$ et $i \in \{1, 2, 3\}$. D'après [93], il existe $\gamma_i \in \mathcal{M}(G)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, tel que $\omega_i(x) = \dfrac{\gamma_i(x)+\gamma_i(-x)}{2}$ pour tout $x \in G$. Donc $\Phi(x) = A\dfrac{E(x)+E(-x)}{2}A^{-1}$, $E = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix}$, où $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sont tels que $\gamma_i \neq \gamma_j$.
Finalement, nous déduisons du Théorème 1.4.2 que $h(x) = \Phi(x)v_0$ pour tout $x \in G$ et en posant $y = e$ dans (1.91), nous obtenons $f(x) = \tilde{h}(x)v_0$ pour tout $x \in G$. Ce qui achève la preuve du corollaire. ♠

Remarque 1.5.1 *(H. Stetkær) « Une généralisation simple des résultats obtenus dans ce chapitre semble pratiquement impossible. Aussi, serait-il vain de vouloir étudier les équations matricielles d'ordre 4, de d'Alembert et de Wilson à l'aide des outils mathématiques développés dans ce même chapitre ? »*

Chapitre 2

Stabilité de l'équation fonctionnelle σ-quadratique au sens de Hyers-Ulam

2.1 Introduction

L'équation fonctionnelle des quadratiques classique

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y), \tag{2.1}$$

est d'une grande importance dans la théorie des équations fonctionnelles et joue un rôle essentiel dans la caractérisation des espaces munis d'un produit scalaire. Chaque solution de l'équation fonctionnelle des quadratiques (2.1) est appelée fonction quadratique. La stabilité, au sens de Hyers-Ulam, de l'équation généralisée des quadratiques (2.1)

$$f(x+y)+f(x+\sigma(y))=2f(x)+2f(y),\ x,y\in G, \tag{2.2}$$

où σ est une involution de G, a été prouvée par B. Bouikhalene et al. [19].
F. Skof [157], P. Cholewa [31] et S. Czerwik [37] ont établi la stabilité, au sens de Hyers-Ulam, de l'équation fonctionnelle des quadratiques (2.1).
Dans [105], Gy. Maksa et P. Volkmann ont montré que, pour les fonctions $f : G \longrightarrow E$ d'un groupe G dans un espace E muni d'un produit scalaire, l'inégalité

$$\|f(xy)\| \geq \|f(x)+f(y)\| \ \text{ pour tout } x,y\in G, \tag{2.3}$$

implique

$$f(xy)=f(x)+f(y), \ \text{ pour tout } x,y\in G. \tag{2.4}$$

Dans [71], A. Gilányi montre que si G est un groupe 2-divisible abélien, alors l'inégalité fonctionnelle

$$\|2f(x)+2f(y)-f(x-y)\| \leq \|f(x+y)\| \ \text{ pour tout } x,y\in G \tag{2.5}$$

entraine que f satisfait l'équation fonctionnelle des quadratiques classique

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y) \text{ pour tout } x,y\in G. \tag{2.6}$$

La commutativité de G peut être remplacée par la condition de Kannappan : $f(xyz) = f(xzy)$, pour tout $x,y,z\in G$ (voir [71]).
Dans [141], J. Rätz supprime l'hypothèse de la 2-divisibilité de G et discute les variantes des résultats de A. Gilányi [71].

Dans ce chapitre, nous donnons une démonstration, plus simple, du théorème concernant la stabilité de l'équation fonctionnelle σ-quadratique

$$f(x+y)+f(x+\sigma(y))=2f(x)+2f(y),\ x,y\in G, \tag{2.7}$$

où G est un groupe abélien. Nous prouvons aussi, que pour les fonctions $f: G\to E$ définies de G, un groupe 2-divisible abélien, dans un espace E muni d'un produit scalaire, l'inégalité

$$\|2f(x)+2f(y)-f(x+\sigma(y))\|\leq\|f(x+y)\|,\ x,y\in G$$

entraine

$$f(x+y)+f(x+\sigma(y))=2f(x)+2f(y),\ x,y\in G.$$

2.2 Stabilité de l'équation fonctionnelle σ-quadratique au sens de Hyers-Ulam

Dans cette section, nous donnons une nouvelle démonstration, plus simple, du théorème concernant la stabilité de l'équation fonctionnelle σ-quadratique (2.7), obtenue dans [19].

Théorème 2.2.1 *Soient G un groupe abélien, E un espace de Banach et $f: G\to E$ une application satisfaisant l'inégalité*

$$\|f(x+y)+f(x+\sigma(y))-2f(x)-2f(y)\|\leq\delta \tag{2.8}$$

pour $\delta\geq 0$ et pour tout $x,y\in G$. Alors, il existe une unique application $Q: G\to E$, solution de l'équation (2.7), vérifiant

$$\|f(x)-Q(x)\|\leq\frac{3}{4}\delta \tag{2.9}$$

pour tout $x\in G$.

Preuve. Pour $x\in G_+ := \{z\in G/\sigma(z)=z\}$ et $y\in G$, nous déduisons de (2.8) la nouvelle inégalité suivante :

$$\|f(x+y)-f(x)-f(y)\|=\frac{1}{2}\|f(y+x)+f(y+\sigma(x))-2f(y)-2f(x)\|\leq\frac{\delta}{2}. \tag{2.10}$$

Comme G_+ est un sous-groupe abélien de G, l'application de [77] assure l'existence d'une unique application additive $a : G_+ \longrightarrow E$ vérifiant

$$\|f(x) - a(x)\| \leq \frac{\delta}{2} \tag{2.11}$$

pour tout $x \in G_+$.
Maintenant, pour $x \in G_- := \{z \in G/\sigma(z) = -z\}$ et $y \in G$, nous déduisons de (2.8)

$$\|f(x+y)+f(y+\sigma(x))-2f(y)-2f(x)\| = \|f(x+y)+f(y-x)-2f(y)-2f(x)\| \leq \delta. \tag{2.12}$$

Comme G_- est un sous-groupe commutatif de G alors, en tenant compte de [31], il existe une unique application $q : G_- \longrightarrow E$, solution de l'équation

$$q(x + y) + q(x - y) = 2q(x) + 2q(y), \quad x, y \in G_-$$

telle que

$$\|f(x) - q(x)\| \leq \frac{\delta}{2} \tag{2.13}$$

pour tout $x \in G_-$.
D'autre part, en prenant $y = x$ dans (2.8) nous avons

$$\|4f(x) - f(x + \sigma(x)) - f(2x)\| \leq \delta. \tag{2.14}$$

En remplaçant x par $x - \sigma(x)$ et y par $x + \sigma(x)$ dans (2.8), nous obtenons

$$\|f(2x) - f(x + \sigma(x)) - f(x - \sigma(x))\| \leq \frac{\delta}{2}. \tag{2.15}$$

L'inégalité triangulaire, appliquée à la somme (2.14)+(2.15), donne :

$$\|4f(x) - 2f(x + \sigma(x)) - f(x - \sigma(x))\| \leq \frac{3\delta}{2} \tag{2.16}$$

et, par conséquent :

$$\begin{aligned}
&\|f(x) - \frac{1}{2}a(x + \sigma(x)) - \frac{1}{4}q(x - \sigma(x))\| \\
&\quad \leq \|f(x) - \frac{1}{2}f(x + \sigma(x)) - \frac{1}{4}f(x - \sigma(x))\| \\
&\qquad + \|\frac{1}{2}f(x + \sigma(x)) - \frac{1}{2}a(x + \sigma(x))\| + \|\frac{1}{4}f(x - \sigma(x)) - \frac{1}{4}q(x - \sigma(x))\| \\
&\quad \leq \frac{3\delta}{8} + \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{8},
\end{aligned}$$

d'où

$$\|f(x) - \frac{1}{2}a(x + \sigma(x)) - \frac{1}{4}q(x - \sigma(x))\| \leq \frac{3\delta}{4}. \tag{2.17}$$

Posons $Q(x) = \dfrac{1}{2}a(x + \sigma(x)) + \dfrac{1}{4}q(x - \sigma(x))$. Un calcul simple montre alors que Q est solution de l'équation fonctionnelle σ-quadratique (2.7). Pour l'unicité de Q, nous adoptons un raisonnement similaire à celui des preuves de [19]. ♠

2.3 Caractérisation de l'équation σ-quadratique ayant des valeurs dans un espace muni d'un produit scalaire

Dans cette section, nous prouvons que si la fonction f satisfait l'inégalité : $\|2f(x) + 2f(y) - f(x+\sigma(y))\| \leq \|f(x+y)\|$, alors f est solution de l'équation fonctionnelle σ-quadratique : $f(x+y) + f(x+\sigma(y)) = 2f(x) + 2f(y)$.

Théorème 2.3.1 *Soient G un groupe 2-divisible abélien, $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et $f : G \to E$ une fonction vérifiant l'inégalité fonctionnelle*

$$\|2f(x) + 2f(y) - f(x+\sigma(y))\| \leq \|f(x+y)\| \tag{2.18}$$

pour tout $x, y \in G$. Alors, f satisfait l'équation fonctionnelle σ-quadratique (2.7).

Preuve. Pour $y \in G_+ = \{z \in G/\sigma(z) = z\}$ et $x \in G$, l'inégalité (2.18) implique que

$$\|2f(x) + 2f(y) - f(y+x)\| \leq \|f(x+y)\|. \tag{2.19}$$

Puis, en utilisant l'inégalité triangulaire, nous obtenons

$$\|f(x) + f(y)\| \leq \|f(x+y)\| \tag{2.20}$$

pour tout $x, y \in G_+$. Donc, d'après [105], nous déduisons que $f : G_+ \longrightarrow E$ satisfait l'équation fonctionnelle additive

$$f(x) + f(y) = f(x+y),\ x, y \in G_+.$$

D'autre part, à l'aide de (2.18), nous obtenons pour tout $x \in G_- = \{z \in G/\sigma(z) = -z\}$ et $y \in G$

$$\|2f(x) + 2f(y) - f(y-x)\| \leq \|f(x+y)\|. \tag{2.21}$$

Par conséquent, d'après [71, 141], $f : G_- \longrightarrow E$ satisfait l'équation fonctionnelle des quadratiques classique

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y),\ x, y \in G_-.$$

Enfin, nous concluons que les nouvelles fonctions $a, q : G \longrightarrow E : x \longmapsto a(x) = f(x+\sigma(x))$, $x \longmapsto q(x) = f(x-\sigma(x))$ satisfont les équations fonctionnelles

$$a(x+y) = a(x) + a(y),\ x, y \in G$$

et

$$q(x+y) + q(x-y) = 2q(x) + 2q(y),\ x, y \in G.$$

En faisant $y = -x$ dans (2.18), nous obtenons : $\|2f(x) + 2f(-x) = f(x - \sigma(x))\| \leq 0$, ainsi

$$2f(x) + 2f(-x) = f(x - \sigma(x)) = q(x). \tag{2.22}$$

En remplaçant y par $y + \sigma(y)$ dans (2.18), nous obtenons

$$\|f(x) + f(y + \sigma(y))\| \leq \|f(x + y + \sigma(y))\|, \ x, y \in G. \tag{2.23}$$

Remplaçons x par $2x$ et y par $-x$ dans (2.23), nous avons

$$\|f(2x) - a(x)\|^2 = \|f(2x)\|^2 + \|a(x)\|^2 - 2\text{Re}\langle f(2x), a(x)\rangle \leq \|q(x)\|^2.$$

Soit, en changeant x en $\dfrac{x}{2}$:

$$\|f(x)\|^2 + \frac{1}{4}\|a(x)\|^2 - \text{Re}\langle f(x), a(x)\rangle \leq \frac{1}{4}\|f(x) + f(-x)\|^2.$$

L'utilisation de l'identité du parallélogramme, entraine que :

$$\|f(x)\|^2 + \frac{1}{4}\|a(x)\|^2 - \text{Re}\langle f(x), a(x)\rangle \leq \frac{1}{2}\|f(x)\|^2 + \frac{1}{2}\|f(-x)\|^2 - \frac{1}{4}\|f(x) - f(-x)\|^2. \tag{2.24}$$

Remplaçons x par $-x$ dans (2.24), nous obtenons :

$$\|f(-x)\|^2 + \frac{1}{4}\|a(x)\|^2 + \text{Re}\langle f(-x), a(x)\rangle \leq \frac{1}{2}\|f(x)\|^2 + \frac{1}{2}\|f(-x)\|^2 - \frac{1}{4}\|f(x) - f(-x)\|^2. \tag{2.25}$$

La somme des deux inégalité (2.24) et (2.25) donne :

$$\|f(x) - f(-x) - a(x)\|^2 = \|a(x)\|^2 + \|f(x) - f(-x)\|^2 - 2\text{Re}\langle f(x) - f(-x), a(x)\rangle \leq 0.$$

D'où

$$f(x) - f(-x) = a(x), \ \text{pour tout } x \in G. \tag{2.26}$$

Finalement, de (2.22) et (2.26) nous déduisons

$$f(x) = \frac{1}{2}a(x) + \frac{1}{4}q(x), \ x \in G.$$

Par un simple calcul, nous prouvons que f est solution de l'équation fonctionnelle σ-quadratique (2.7). Ce qui complète la preuve du Théorème 2.3.1. ♠

Remarque 2.3.1 *L'hypothèse de commutativité du groupe G, utilisée dans le Théorème 2.3.1, peut être remplacée par la condition de Kannappan : $f(xyz) = f(yxz), \ \forall x, y, z \in G$.*

2.4 Problème ouvert

Durant le $38^{ème}$ International Symposium on Functional Equations, K. Nikodem [113] a formulé le problème de stabilité suivant :
Supposons que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie l'inégalité

$$|f(x) + f(y)| \leq |f(x + y)| + \epsilon,\ x, y \in \mathbb{R} \tag{2.27}$$

avec $\epsilon \geq 0$ fixé. Alors, existe-il une constante c et une fonction additive $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui satisfait

$$|f(x) - a(x)| \leq c\epsilon,\ x \in \mathbb{R}?$$

Jacek Tabor et Jòsef Tabor [174] ont donné une réponse affirmative à cette question en supposant que si G est un groupe abélien et si la fonction $f : G \to \mathbb{R}$ vérifie (2.27) pour tout $x \in G$, alors il existe une unique fonction additive $a : G \to \mathbb{R}$ satisfaisant

$$|f(x) - a(x)| \leq 5\epsilon,\ x \in G.$$

A. Gilányi [72] a démontré le problème de Nikodem pour une fonction $f : G \to H$, définie d'un groupe abélien G divisible par 2 dans un espace de Hilbert H, qui vérifie

$$|f(x - y) - 2f(x) - 2f(y)| \leq |f(x + y)| + \epsilon,\ x, y \in G$$

pour $\epsilon \geq 0$. Il existe alors une unique fonction quadratique $q : G \to H$ vérifiant

$$|f(x) - q(x)| \leq \frac{5}{2}\epsilon,\ \ x \in G.$$

La question qui se pose à présent est : si une fonction $f : G \to H$, définie d'un groupe G dans un espace de Hilbert H, vérifiant l'inégalité

$$|f(x + \sigma(y)) - 2f(x) - 2f(y)| \leq |f(x + y)| + \epsilon,\ x, y \in G$$

pour $\epsilon \geq 0$ avec $\sigma : G \to G$ une involution de G, existe-il une constante c et une fonction $q : G \to H$, solution de l'équation fonctionnelle σ-quadratique

$$q(x + y) + q(x + \sigma(y)) = 2q(x) + 2q(y),\ \ x, y \in G,$$

vérifiant

$$|f(x) - q(x)| \leq c\epsilon,\ \ x \in G?$$

Chapitre 3

Points fixes et stabilité des équations fonctionnelles K-quadratique et K-Jensen au sens de Hyers-Ulam-Rassias

3.1 Introduction

Soient E_1 un espace vectoriel réel et E_2 un espace de Banach réel. Soit K un sous-groupe fini commutatif de $Aut(E_1)$ (le groupe des automorphismes de E_1), $|K|$ désigne l'ordre de K. Notons l'action de $k \in K$ sur $x \in G$ par $k \cdot x$; nous dirons qu'une fonction $f : E_1 \to E_2$ est solution de l'équation fonctionnelle K-quadratique, si

$$\frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} f(x + k \cdot y) = f(x) + f(y),\ x, y \in E_1 \tag{3.1}$$

et que f est solution de l'équation fonctionnelle K-Jensen, si

$$\frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} f(x + k \cdot y) = f(x),\ x, y \in E_1. \tag{3.2}$$

B. Bouikhalene et al. ont prouvé la stabilité, au sens de Hyers-Ulam-Rassias, de l'équation fonctionnelle K-quadratique (3.1) et de l'équation fonctionnelle K-Jensen (3.2) (voir [5], [27]) et [28] .
En 1991, J. A. Baker a appliqué la méthode du point fixe pour prouver la stabilité, au sens de Hyers-Ulam, d'une équation fonctionnelle non linéaire (voir [13]). V. Radu [125] a montré, en utilisant la méthode du point fixe, l'existence d'une solution de l'inégalité $\|f(x + y) - f(x) - f(y)\| \leq \delta$, et il a prouvé la stabilité, au sens de Hyers-Ulam, de l'équation de Cauchy additive.
En 1996, G. Isac et Th. M. Rassias [82] furent les premiers à fournir de nouveaux théorèmes

sur la stabilité des équations fonctionnelles en utilisant la théorie du point fixe.
Récemment, M. Akkouchi [7] a prouvé la stabilité de certaines équations fonctionnelles en se basant sur la méthode du point fixe de Ćirič (voir [35] et [36]), et dans [8], il a montré la stabilité, au sens de Hyers-Ulam-Rassias, de l'intégrale non-linéaire de Volterra en adoptant la méthode du point fixe.
Tout d'abord, nous rappelons deux résultats fondamentaux de la théorie du point fixe. Le lecteur peut se reporter au livre de D. H. Hyers, G. Isac et Th. M. Rassias [80] pour une étude détaillée de la théorie des points fixes avec plusieurs applications.

Théorème 3.1.1 *Soient (X, d) un espace métrique complet, et $J : X \to X$ une application strictement contractante, i.e.*

$$d(Jx, Jy) \leq Ld(x, y), \ \forall x, y \in X,$$

pour certain $0 < L < 1$ « constante de Lipshitz ». Alors :
***1.** l'application J a un, et un seul, point fixe $x^* = J(x^*)$;*
***2.** le point fixe x^* est globalement attractif et*

$$\lim_{n \to +\infty} J^n x = x^*$$

pour tout point de départ $x \in X$.
***3.** Nous avons les inégalités suivantes :*

$$d(J^n x, x^*) \leq L^n d(x, x^*)$$

$$d(J^n x, x^*) \leq \frac{1}{1-L} d(J^n x, J^{n+1} x)$$

$$d(x, x^*) \leq \frac{1}{1-L} d(x, Jx)$$

pour tout entier naturel n et pour tout $x \in X$.

Soit X un ensemble. Une fonction $d : X \times X \to [0, +\infty]$ est appelée *distance généralisée* sur X si d satisfait les conditions suivantes :
1. $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$ pour tout $x, y \in X$;
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pour tout $x, y, z \in X$.

Théorème 3.1.2 *(L'alternative du point fixe) [41] Supposons donné un espace (X, d) complet muni d'une métrique généralisée et une application strictement contractante $J : X \to X$, avec la constante de Lipshitz $0 < L < 1$. Alors, pour chaque $x \in X$; soit $d(J^n x, J^{n+1} x) = +\infty$ pour tout entier naturel n, soit $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :*
1. $d(J^n x, J^{n+1} x) < +\infty$, $\forall n \geq n_0$;
2. la suite $J^n x$ converge vers le point fixe y^* de J ;
3. y^* est l'unique point fixe de J dans l'ensemble $Y = \{y \in X : d(J^{n_0} x, y) < +\infty\}$;
4. $d(y, y^*) \leq \dfrac{1}{1-L} d(y, Jy)$ pour tout $y \in Y$.

Dans ce chapitre, nous fixons un nombre réel β avec $0 < \beta \leq 1$ et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Supposons E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. La fonction $\|.\|_\beta : E \longrightarrow [0, \infty)$ est appelée une β-norme si et seulement si elle satisfait :
1. $\|x\|_\beta = 0$ si et seulement si $x = 0$.
2. $\|\lambda x\|_\beta = |\lambda|^\beta \|x\|_\beta$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et pour tout $x \in E$.
3. $\|x + y\|_\beta \leq \|x\|_\beta + \|y\|_\beta$ pour tout $x, y \in E$.

3.2 Stabilité de l'équation fonctionnelle K-quadratique au sens de Hyers-Ulam-Rassias

Dans cette section, nous montrons la stabilité, au sens de Hyers-Ulam-Rassias, de l'équation fonctionnelle K-quadratique (3.1) en utilisant l'alternative du point fixe.

Théorème 3.2.1 *Soient E_1 un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et E_2 un espace β-normé complet sur $\mathbb{K}$, où β est un nombre réel fixé avec $0 < \beta \leq 1$. Soient K un sous-groupe fini commutatif du groupe des automorphismes du groupe abélien $(E_1, +)$ et $f : E_1 \longrightarrow E_2$ une application pour laquelle il existe une fonction $\varphi : E_1 \times E_1 \to \mathbb{R}^+$ et une constante L, $0 < L < 1$, telles que*

$$\|\frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} f(x + k \cdot y) - f(x) - f(y)\|_\beta \leq \varphi(x, y), \tag{3.3}$$

$$\sum_{k \in K} \varphi(x + k \cdot x, y + k \cdot y) \leq (2|K|)^\beta L \varphi(x, y) \tag{3.4}$$

pour tout $x, y \in E_1$. Alors, il existe une unique solution $q : E_1 \longrightarrow E_2$ de l'équation (3.1) satisfaisant

$$\|f(x) - q(x)\|_\beta \leq \frac{1}{2^\beta} \frac{1}{1 - L} \varphi(x, x) \tag{3.5}$$

pour tout $x \in E_1$.

Preuve. Considérons l'ensemble $X := \{g : E_1 \longrightarrow E_2\}$ et introduisons une *distance généralisée* dans X comme suit :

$$d(g, h) = \inf\{C \in [0, \infty] : \ \|g(x) - h(x)\|_\beta \leq C\varphi(x, x), \ \forall x \in E_1\}.$$

Soit $\{f_n\}_n$ une suite de Cauchy dans (X, d). Par définition d'une suite de Cauchy, il existe, pour $\epsilon > 0$, un entier positif N_ϵ tel que $d(f_n, f_m) \leq \epsilon$ pour tout $m, n \geq N_\epsilon$. De la définition de la distance généralisée d, nous obtenons

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \ \ \forall m, n \geq N_\epsilon \ \ \forall x \in E_1 : \|f_m(x) - f_n(x)\|_\beta \leq \epsilon \varphi(x, x). \tag{3.6}$$

Pour chaque $x \in E_1$, (3.6) entraine que $\{f_n\}_n$ est une suite de Cauchy dans E_2. Comme E_2 est complet, $\{f_n\}_n$ converge dans E_2 pour chaque $x \in E_1$. Par conséquent, nous pouvons définir la fonction $f : E_1 \to E_2$ telle que $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in E_1$.
En faisant tendre $n \to +\infty$, il s'ensuit de (3.6) que, pour $\epsilon > 0$, il existe un entier positif N_ϵ tel que $\|f_n(x) - f(x)\|_\beta \leq \epsilon\varphi(x,x)$ pour tout $n \geq N_\epsilon$. De ce fait nous concluons que $\{f_n\}_n$ converge dans (X,d) et alors (X,d) est un espace complet.

Maintenant, nous considérons l'application linéaire $J : X \to X$ définie par

$$(Jf)(x) = \frac{1}{2|K|}\sum_{k\in K} f(x + k\cdot x)$$

pour tout $x \in E_1$.
De [5], nous vérifions que

$$(J^n f)(x) = \frac{1}{(2|K|)^n}\sum_{k_1,\ldots,k_n\in K} f\left(x + \sum_{i_j<i_{j+1},k_{ij}\in\{k_1,\ldots,k_n\}} (k_{i_1}\ldots k_{i_p})\cdot x\right)$$

pour tout entier n.
Ensuite, nous prouvons que J est une contraction sur X avec *la constante de Lipschitz* L. En effet, pour g,h dans X et $C \geq 0$ une constante arbitraire, avec $d(g,h) \leq C$, nous avons :

$$\|g(x) - h(x)\|_\beta \leq C\varphi(x,x) \tag{3.7}$$

pour tout $x \in E_1$. Ainsi, à partir de (3.3), (3.4) et (3.7) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\|(Jg)(x) - (Jh)(x)\|_\beta &= \|\frac{1}{2|K|}\sum_{k\in K} g(x+k\cdot x) - \frac{1}{2|K|}\sum_{k\in K} h(x+k\cdot x)\|_\beta \\
&= \frac{1}{(2|K|)^\beta}\|\sum_{k\in K} g(x+k\cdot x) - h(x+k\cdot x)\|_\beta \\
&\leq \frac{1}{(2|K|)^\beta}\sum_{k\in K}\|g(x+k\cdot x) - h(x+k\cdot x))\|_\beta \\
&\leq \frac{1}{(2|K|)^\beta} C\sum_{k\in K}\varphi(x+k\cdot x, x+k\cdot x) \\
&\leq CL\varphi(x,x)
\end{aligned}$$

pour tout $x \in E_1$, soit, $d(Jg,Jh) \leq LC$. Cela signifie que $d(Jg,Jh) \leq Ld(g,h)$ pour tout $g,h \in X$.
Maintenant, en remplaçant y par x dans (3.3), nous obtenons

$$\|(Jf)(x) - f(x)\|_\beta = \frac{1}{2^\beta}\|\frac{1}{|K|}\sum_{k\in K} f(x+k\cdot x) - 2f(x)\|_\beta \leq \frac{1}{2^\beta}\varphi(x,x)$$

pour tout $x \in E_1$. Il s'ensuit alors que :

$$d(Jf, f) \leq \frac{1}{2^\beta} < \infty. \tag{3.8}$$

D'après le Théorème 3.1.2, nous déduisons l'existence d'un point fixe de J, qui est une fonction $q : E_1 \to E_2$ vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} d(J^n f, q) = 0$. Comme $d(J^n f, q) \to 0$ pour $n \to +\infty$, il existe une suite $\{C_n\}_n$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n = 0$ et $d(J^n f, q) \leq C_n$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, de la définition de d, nous obtenons

$$\|(J^n f)(x) - q(x)\|_\beta \leq C_n \varphi(x, x) \tag{3.9}$$

pour tout $x \in E_1$. Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} \|(J^n f)(x) - q(x)\|_\beta = 0 \tag{3.10}$$

pour un $x \in E_1$.
Prouvons, à présent, que la fonction q est solution de l'équation (3.1).
Tout d'abord, montrons, par récurrence sur n, l'inégalité suivante :

$$\|\frac{1}{|K|}\sum_{k\in K} J^n f(x + k\cdot y) - J^n f(x) - J^n f(y)\|_\beta \leq L^n \varphi(x, y). \tag{3.11}$$

Pour $n = 1$, en utilisant la définition de J, la commutativité de K et les inégalités (3.3) et (3.4), nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\|\frac{1}{|K|}\sum_{k\in K} Jf(x + k\cdot y) - Jf(x) - Jf(y)\|_\beta \\
&= \|\frac{1}{|K|}\sum_{k\in K}\frac{1}{2|K|}\sum_{k_1\in K} f(x + k\cdot y + k_1\cdot x + k_1 k\cdot y) - \frac{1}{2|K|}\sum_{k_1\in K} f(x + k_1\cdot x) \\
&\quad - \frac{1}{2|K|}\sum_{k_1\in K} f(y + k_1\cdot y)\|_\beta \\
&\leq \frac{1}{(2|K|)^\beta}\sum_{k_1\in K}\|\frac{1}{|K|}\sum_{k\in K} f(x + k_1\cdot x + k\cdot(y + k_1\cdot y)) - f(x + k_1\cdot x) - f(y + k_1\cdot y)\|_\beta \\
&\leq \frac{1}{(2|K|)^\beta}\sum_{k_1\in K}\varphi(x + k_1\cdot x, y + k_1\cdot y) \\
&\leq \frac{1}{(2|K|)^\beta}(2|K|)^\beta L\varphi(x, y) = L\varphi(x, y),
\end{aligned}$$

ce qui prouve que l'assertion (3.11) est vraie pour $n = 1$. Supposons (3.11) vraie à l'ordre n. En utilisant la définition de J, la commutativité de K, les inégalités (3.11) et (3.4), nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&\|\frac{1}{|K|}\sum_{k\in K} J^{n+1}f(x+k\cdot y)-J^{n+1}f(x)-J^{n+1}f(y)\|_\beta\\
=&\|\frac{1}{|K|}\sum_{k\in K}\frac{1}{2|K|}\sum_{k'\in K} J^n f(x+k\cdot y+k'\cdot x+k'k\cdot y)\\
&-\frac{1}{2|K|}\sum_{k'\in K} J^n f(x+k'\cdot x)-\frac{1}{2|K|}\sum_{k'\in K} J^n f(y+k'\cdot y)\|_\beta\\
\le& \frac{1}{(2|K|)^\beta}\sum_{k'\in K}\|\frac{1}{|K|}\sum_{k\in K} J^n f(x+k'\cdot x+k\cdot(y+k'\cdot y))-J^n f(x+k'\cdot x)-J^n f(y+k'\cdot y)\|_\beta\\
\le& \frac{1}{(2|K|)^\beta}\sum_{k'\in K} L^n\varphi(x+k'\cdot x, y+k'\cdot y)\le L^{n+1}\varphi(x,y),
\end{aligned}
$$

ce qui implique la validité de l'inégalité (3.11) pour $n+1$.
En faisant tendre n vers $+\infty$ dans (3.11), nous obtenons le résultat désiré, soit :

$$\frac{1}{|K|}\sum_{k\in K} q(x+k\cdot y)-q(x)-q(y)=0 \tag{3.12}$$

pour tout $x,y\in E_1$. Nous déduisons du Théorème 3.1.2 et de l'inégalité (3.8) :

$$d(f,q)\le\frac{1}{1-L}d(Jf,f)\le\frac{1}{2^\beta}\frac{1}{(1-L)}, \tag{3.13}$$

ce qui prouve l'inégalité (3.5).
Supposons que $q_1 : E_1 \to E_2$ soit une autre solution de (3.1) vérifiant (3.5). Alors q_1 est un point fixe de J. De la définition de d et de l'inégalité (3.5), l'assertion (3.13) reste vraie avec q_1 au lieu de q. En utilisant le Théorème 3.1.2 (3), nous obtenons l'unicité de q. Ce qui termine la preuve du Théorème 3.2.1. ♠

Les corollaires suivants découlent du Théorème 3.2.1. Avec une nouvelle condition (3.14), plus faible que la condition imposée par S.-M. Jung et Z.-H. Lee dans [90], nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.2 *[90] Soient E_1 un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et E_2 un espace β-normé complet sur $\mathbb{K}$, où β est un nombre réel fixé avec $0<\beta\le 1$. Soient $K=\{I,\sigma\}$, où σ est une involution du groupe $(E_1,+)$, et $f : E_1 \longrightarrow E_2$ une application pour laquelle il existe une fonction $\varphi : E_1\times E_1\to\mathbb{R}^+$ et une constante L, $0<L<1$, telles que*

$$\varphi(2x,2y)+\varphi(x+\sigma(x),y+\sigma(y))\le 4^\beta L\varphi(x,y) \tag{3.14}$$

pour tout $x, y \in E_1$. Supposons que $f : E_1 \to E_2$ satisfait l'inégalité

$$\|\frac{1}{2}[f(x+y) + f(x+\sigma(y))] - f(x) - f(y)\|_\beta \leq \varphi(x,y) \tag{3.15}$$

pour tout $x, y \in E_1$. Alors, il existe une unique solution $q : E_1 \longrightarrow E_2$ de l'équation

$$f(x+y) + f(x+\sigma(y)) = 2f(x) + 2f(y), \ \ x, y \in E_1 \tag{3.16}$$

vérifiant

$$\|f(x) - q(x)\|_\beta \leq \frac{1}{2^\beta}\frac{1}{(1-L)}\varphi(x,x) \tag{3.17}$$

pour tout $x \in E_1$.

On rappelle que la condition (3.14) utilisée dans [90] est :

$$\varphi(2x, 2y) \leq \frac{4^\beta}{2}L\varphi(x,y),$$

$$\varphi(x+\sigma(x), y+\sigma(y)) \leq \frac{4^\beta}{2}L\varphi(x,y)$$

pour tout $x, y \in E_1$.

Corollaire 3.2.3 *Soient E_1 un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, E_2 un espace β-normé complet sur $\mathbb{K}$ et K un sous-groupe fini commutatif du groupe des automorphismes du groupe $(E_1, +)$. Choisissons une constante p telle que $p < \beta + (\beta - 1)\frac{\log(|K|)}{\log(2)}$. Soit $f : E_1 \longrightarrow E_2$ une application telle que*

$$\|\frac{1}{|K|}\sum_{k\in K} f(x + k\cdot y) - f(x) - f(y)\|_\beta \leq \theta(\|x\|^p + \|y\|^p), \ x, y \in E_1 \tag{3.18}$$

avec $\|x + k\cdot x\|^p \leq 2^p\|x\|^p$ pour tout $k \in K$ et $x \in E_1$. Alors, il existe une unique solution $q : E_1 \longrightarrow E_2$ de l'équation (3.1) qui satisfait

$$\|f(x) - q(x)\|_\beta \leq \frac{2\theta|K|^\beta}{2^\beta|K|^\beta - 2^p|K|}\|x\|^p \tag{3.19}$$

pour tout $x \in E_1$.

3.3 Stabilité de l'équation fonctionnelle K-Jensen au sens de Hyers-Ulam-Rassias

Dans cette section, nous examinons, en utilisant la méthode des points fixes, la stabilité, au sens de Hyers-Ulam-Rassias, de l'équation fonctionnelle K-Jensen (3.2).

Théorème 3.3.1 *Soient E_1 un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, E_2 un espace β-normé complet sur $\mathbb{K}$, où β est un nombre réel fixé avec $0 < \beta \leq 1$, K un sous-groupe fini commutatif du groupe des automorphismes du groupe abélien $(E_1, +)$ et $f : E_1 \longrightarrow E_2$ une application pour laquelle il existe une fonction $\varphi : E_1 \times E_1 \to \mathbb{R}^+$ et une constante L, $0 < L < 1$, telles que*

$$\|\frac{1}{|K|}\sum_{k\in K} f(x + k \cdot y) - f(x)\|_\beta \leq \varphi(x, y), \tag{3.20}$$

$$\sum_{k\in K} \varphi(x - k \cdot x, y - k \cdot y) \leq |K|^\beta L\varphi(x, y) \tag{3.21}$$

pour tout $x, y \in E_1$. Alors, il existe une unique solution $j : E_1 \longrightarrow E_2$ de l'équation (3.2) qui vérifie

$$\|f(x) - j(x)\|_\beta \leq \frac{1}{1 - L}\varphi(x, x) \tag{3.22}$$

pour tout $x \in E_1$.

Preuve. Nous considérons l'application linéaire $J : X \to X$ telle que

$$(Jf)(x) = \frac{1}{|K|}\sum_{k\in K} f(x - k \cdot x) \tag{3.23}$$

pour tout $x \in E_1$. En tenant compte des fonctions $g, h \in X$, de la constante $C \in [0, \infty]$ et du fait que $d(g, h) \leq C$, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}
\|(Jg)(x) - (Jh)(x)\|_\beta &= \|\frac{1}{|K|}\sum_{k\in K} g(x - k \cdot x) - \frac{1}{|K|}\sum_{k\in K} h(x - k \cdot x)\|_\beta \\
&= \frac{1}{|K|^\beta}\|\sum_{k\in K}[g(x - k \cdot x) - h(x - k \cdot x)]\|_\beta \\
&\leq \frac{1}{|K|^\beta}\sum_{k\in K}\|g(x - k \cdot x) - h(x - k \cdot x)\|_\beta \\
&\leq CL\varphi(x, x)
\end{aligned}$$

pour tout $x \in E_1$, ce qui implique que J est un opérateur strictement contractif, avec $d(Jg, Jh) \leq Ld(g, h)$.
Avec $y = -x$ dans (3.20), nous obtenons

$$d(Jf, f) \leq 1. \tag{3.24}$$

D'après le Théorème 3.1.2, il existe une application $j : E_1 \to E_2$ qui vérifie ce qui suit :
(a) j est un point fixe de J, qui est

$$\frac{1}{|K|}\sum_{k\in K} j(x-k\cdot x) = j(x)$$

pour tout $x \in G$. L'application j est l'unique point fixe de J dans l'ensemble

$$Y = \{g \in X : \ d(f,g) < \infty\}.$$

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} d(J^n f, j) = 0$, tel que

$$j(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{|K|^n}\sum_{k_1,\ldots,k_n\in K} f\left(x + \sum_{i_j<i_{j+1},k_{ij}\in\{k_1,\ldots,k_n\}} [(-k_{i_1})\cdots(-k_{i_p})]\cdot x\right).$$

(c) $d(f,j) \leq \dfrac{1}{1-L} d(f,Jf)$, et l'inégalité (3.22) en résulte.
En adoptant un raisonnement similaire à celui de la preuve du Théorème 3.3.1, nous montrons, par récurrence, que :

$$\|\frac{1}{|K|}\sum_{k\in K} J^n f(x+k\cdot y) - J^n f(x)\|_\beta \leq L^n\varphi(x,y) \tag{3.25}$$

pour tout $x, y \in E_1$.
Enfin, en faisant tendre $n \to +\infty$ dans la formule (3.25), nous obtenons que j est solution de l'équation (3.2). L'unicité de j peut être démontrée en utilisant les mêmes arguments que ceux obtenus dans la démonstration du Théorème 3.2.1. Ce qui achève la preuve du Théorème 3.3.1. ♠

Corollaire 3.3.2 *Soient E_1 un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, E_2 un espace β-normé complet sur $\mathbb{K}$, K un sous-groupe fini commutatif du groupe des automorphismes du groupe abélien $(E_1,+)$ avec $|K| \geq 2$, et p une constante telle que $p < \dfrac{\beta\log(|K|)-\log(|K|-1)}{\log(2)}$. Soit $f : E_1 \longrightarrow E_2$ une application vérifiant*

$$\|\frac{1}{|K|}\sum_{k\in K} f(x+k\cdot y) - f(x)\|_\beta \leq \theta(\|x\|^p + \|y\|^p), \tag{3.26}$$

et $\|x+k\cdot x\|^p \leq 2^p\|x\|^p$ pour tout $k \in K$ et pour tout $x \in E_1$. Alors, il existe une unique solution $j : E_1 \longrightarrow E_2$ de l'équation (3.2) satisfaisant

$$\|f(x) - j(x)\|_\beta \leq \frac{2\theta|K|^\beta}{2^p + |K|^\beta - 2^p|K|}\|x\|^p \tag{3.27}$$

pour tout $x \in E_1$.

3.4 Problème ouvert

La stabilité des équations fonctionnelles

$$\frac{1}{|K|}\sum_{k\in K} f(x+k\cdot y) = g(x)+h(y) \tag{3.28}$$

et

$$\frac{1}{|K|}\sum_{k\in K} f(x+k\cdot y) = f(x), \tag{3.29}$$

au sens de Hyers-Ulam, pour K non forcément commutatif a été prouvée par B. Bouikhalene et al. [28].
Le problème de stabilité des équations (3.28) et (3.29), au sens de Hyers-Ulam-Rassias, pour K non forcément commutatif est encore une question ouverte.

En 1897, K. Hensel [75] a introduit un espace normé n'ayant pas la propriété d'Archimède. Il se trouve que les espaces non-archimédiens ont des applications nombreuses et importantes.

Définition 3.4.1 *Nous entendons par un corps $\mathbb{K}$ non-archimédien, un corps muni d'une fonction (d'évaluation) $|\cdot| : \mathbb{K} \to [0,+\infty)$ telle que, pour tout $r, s \in \mathbb{K}$, les conditions suivantes sont satisfaites :*
(1) $|r| = 0$ si et seulement si $r = 0$;
(2) $|rs| = |r||s|$;
(3) $|r+s| \leq \max\{|r|, |s|\}$.

Définition 3.4.2 *Soit X un espace vectoriel sur un corps de scalaires $\mathbb{K}$ non-archimédien muni d'une fonction (d'évaluation) $|\cdot|$. Une fonction $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ est une norme non-archimédienne si elle satisfait les conditions suivantes :*
(i) $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$;
(j) $\|rx\| = |r|\|x\|$ ($r \in \mathbb{K}$, $x \in X$) ;
(k) l'inégalité triangulaire forte, à savoir

$$\|x+y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}, \quad x, y \in X.$$

La paire $(X, \|\cdot\|)$ est appelée espace non-archimédien si $\|\cdot\|$ est une norme non-archimédienne. Il résulte de (k) que :

$$\|x_n - x_m\| \leq \max\{\|x_{j+1} + x_j\| : m \leq j \leq n-1\}$$

pour tout $x_n, x_m \in X$, où $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n > m$. Alors, une suite $\{x_n\}$ est de Cauchy dans l'espace non-archimédien $(X, \|\cdot\|)$ si et seulement si la suite $\{x_{n+1} - x_n\}$ converge vers zéro dans $(X, \|\cdot\|)$. Dans un espace non-archimédien complet, toute suite de Cauchy est convergente.

Les problèmes de stabilité de l'équation fonctionnelle de Cauchy et de l'équation fonctionnelle des quadratiques ont été étudiés par M. Moslehian et Th. M. Rassias [111] dans les espaces non-archimédiens.
Dans [112], A. Najati et Y.-J. Cho ont prouvé la stabilité de l'équation de Jensen

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x) + f(y),$$

et de l'équation fonctionnelle de Cauchy Pexider

$$f(x+y) = g(x) + h(y).$$

R. Saadati et al. [148] ont prouvé la stabilité, au sens de Hyers-Ulam, de l'équation fonctionnelle σ-Pexider

$$f_1(x+y) + f_2(x+\sigma(y)) = f_3(x) + f_4(y), \quad x, y \in E,$$

où E est un espace non-archimédien et $\sigma : E \to E$ une involution.
Les travaux portant sur l'équation fonctionnelle σ-Pexider nous ouvrent une nouvelle perspective, à savoir l'étude de la stabilité, au sens de Hyers-Ulam, de l'équation fonctionnelle K-Pexider

$$\frac{1}{|K|}\sum_{k\in K} f(x + k\cdot y) = g(x) + h(y), \quad x, y \in E,$$

où E est un espace non-archimédien et K un sous-groupe fini du groupe des automorphismes de E.

Chapitre 4

Stabilité des équations fonctionnelles σ-quadratique et de σ-Jensen au sens de Hyers-Ulam dans les domaines non bornés

4.1 Introduction

Concernant la stabilité des équations fonctionnelles, dans les domaines non bornés, F. Skof [157] est le premier mathématicien à avoir résolu le problème de Ulam pour les fonctions additives.
Etant donnés deux espaces vectoriels X et E, la fonction $f : X \to E$ satisfait l'équation fonctionnelle additive

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\ x, y \in X$$

si et seulement si,

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \to 0 \text{ quand } \|x\| + \|y\| \to +\infty.$$

Dans [79], D. H. Hyers, G. Isac et Th. M. Rassias ont considéré l'aspect asymptotique de la stabilité, au sens de Hyers-Ulam.
S.-M. Jung [85] a prouvé la stabilité, au sens de Hyers-Ulam, de l'équation fonctionnelle des quadratiques classique

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y),\ x, y \in E \tag{4.1}$$

dans le domaine non borné : $\{(x, y) \in E^2 : \|x\| + \|y\| \geq d\}$.

Théorème 4.1.1 *[85] Soient E un espace réel normé et F un espace de Banach. Soit $d, \delta \geq 0$ donnés. Supposons que l'application $f : E \to F$ vérifie l'inégalité*

$$\|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) - 2f(y)\| \leq \delta \tag{4.2}$$

pour tout $x, y \in E$, avec $\|x\| + \|y\| \geq d$. Alors, il existe une unique application $Q : E \to F$, solution de l'équation fonctionnelle des quadratiques (4.1), qui vérifie

$$\|f(x) - Q(x)\| \leq \frac{7}{2}\delta \tag{4.3}$$

pour tout $x \in E$.

J. M. Rassias et M. J. Rassias [129] ont examiné la stabilité des équations fonctionnelles de type de Jensen

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x), \; x, y \in E \tag{4.4}$$

et

$$f(x+y) - f(x-y) = 2f(y), \; x, y \in E, \tag{4.5}$$

dans le domaine non borné : $\{(x, y) \in E^2 : \|x\| + \|y\| \geq d\}$.

Dans ce chapitre, nous établissons de nouveaux théorèmes de stabilité, au sens de Hyers-Ulam, dans les domaines non bornés : $\{(x, y) \in E^2 : \|y\| \geq d\}$ et $\{(x, y) \in E^2 : \|x\| \geq d\}$, d'une part, de l'équation fonctionnelle σ-quadratique

$$f(x+y) + f(x+\sigma(y)) = 2f(x) + 2f(y), \; x, y \in E \tag{4.6}$$

et, d'autre part, de l'équation fonctionnelle de type σ-Jensen

$$f(x+y) + f(x+\sigma(y)) = 2f(x), \; x, y \in E, \tag{4.7}$$

$$f(x+y) - f(x+\sigma(y)) = 2f(y), \; x, y \in E \tag{4.8}$$

où $\sigma : E \to E$ est une involution de l'espace normé E.
En outre, nous appliquons les résultats obtenus pour examiner le comportement asymptotique des équations fonctionnelles ci-dessus.
Dans ce chapitre, E est un espace normé réel et F un espace de Banach.

4.2 Stabilité de l'équation fonctionnelle σ-quadratique au sens de Hyers-Ulam dans les domaines non bornés

Dans cette section, nous examinons la stabilité, au sens de Hyers-Ulam, de l'équation fonctionnelle σ-quadratique (4.6) dans les domaines non bornés : $\{(x, y) \in E^2 : \|y\| \geq d\}$ et $\{(x, y) \in E^2 : \|x\| \geq d\}$. Ci-dessous, nous présentons nos principaux résultats, sous forme de théorèmes.

Théorème 4.2.1 *Soient $d > 0$ et $\delta > 0$ donnés. Supposons que l'application $f : E \to F$ vérifie l'inégalité*

$$\|f(x+y) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x) - 2f(y)\| \leq \delta \tag{4.9}$$

pour tout $x, y \in E$ avec $\|y\| \geq d$. Alors, il existe une unique application $q : E \to F$, solution de l'équation (4.6), vérifiant

$$\|f(x) - q(x)\| \leq \frac{7}{2}\delta \tag{4.10}$$

pour tout $x \in E$.

Preuve. Soient $x, y \in E$ avec $\|y\| < d$. Si $y = 0$, alors nous avons

$$\begin{aligned}
&\|f(x+0) + f(x+\sigma(0)) - 2f(x) - 2f(0)\| \\
&\qquad = \|2f(0)\| \\
&\qquad = \|f(0+0) + f(0-0) - 2f(0) - 2f(0)\|.
\end{aligned}$$

Donc, d'après [85], nous obtenons

$$\|f(x+0) + f(x+\sigma(0)) - 2f(x) - 2f(0)\| \leq \frac{7}{2}\delta.$$

Si $y \neq 0$, nous choisissons $z = 2^n y$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Cas 1. $\sigma(y) \neq y$. Pour n assez grand, nous pouvons vérifier que

$$\begin{aligned}
\|z\| &= 2^n\|y\| \geq d \\
\|y + z - \sigma(z)\| &= 2^n\|\frac{y}{2^n} + y - \sigma(y)\| \geq d \\
\|y - \sigma(z)\| &= 2^n\|\frac{y}{2^n} - \sigma(y)\| \geq d.
\end{aligned}$$

Ainsi, de (4.9), l'inégalité triangulaire et de la décomposition suivante :

$$\begin{aligned}
&f(x+y) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x) - 2f(y) \\
&\quad = -[f(x+y+z-\sigma(z)) + f(x+\sigma(y)+\sigma(z)-z) - 2f(x) - 2f(y+z-\sigma(z))] \\
&\qquad + 2[f(x+z) + f(x+\sigma(z)) - 2f(x) - 2f(z)] \\
&\qquad + [f(x+y) + f(x+\sigma(z)+\sigma(y)-z) - 2f(x+\sigma(z)) - 2f(y-\sigma(z))] \\
&\qquad + [f(x+z+y-\sigma(z)) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x+z) - 2f(y-\sigma(z))] \\
&\qquad - 2[f(y-\sigma(z)+z) + f(y) - 2f(y-\sigma(z)) - 2f(z)],
\end{aligned} \tag{4.11}$$

nous déduisons

$$\|f(x+y) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x) - 2f(y)\| \leq 7\delta. \tag{4.12}$$

Cas 2. $\sigma(y) = y$. En utilisant (4.11), nous obtenons

$$\begin{aligned}
&2[f(x+y) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x) - 2f(y)] \\
&\quad = 2[f(x+z) + f(x+\sigma(z)) - 2f(x) - 2f(z)] \\
&\quad\quad + [f(x+y) + f(x+\sigma(z)+\sigma(y)-z) - 2f(x+\sigma(z)) - 2f(y-\sigma(z))] \\
&\quad\quad + [f(x+z+y-\sigma(z)) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x+z) - 2f(y-\sigma(z))] \\
&\quad\quad - 2[f(y-\sigma(z)+z) + f(y) - 2f(y-\sigma(z)) - 2f(z)].
\end{aligned}$$

Alors, d'après l'inégalité (4.9), l'inégalité triangulaire et pour n assez grand, nous avons

$$2\|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) - 2f(y)\| \leq 6\delta. \tag{4.13}$$

Finalement, l'inégalité (4.12) est vraie pour tout $x, y \in E$. En tenant compte du (Théorème 2.1, [19]), il existe une unique application $q : E \to F$, solution de l'équation (4.6) qui satisfait l'inégalité (4.10). Ce qui complète la preuve du Théorème 4.2.1. ♠

Les corollaires suivants sont une conséquence directe du Théorème 4.2.1.

Corollaire 4.2.2 *L'application $f : E \to F$ est solution de l'équation (4.6), si et seulement si*

$$\sup_{x\in E} \|f(x+y) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x) - 2f(y)\| \to 0, \tag{4.14}$$

quand $\|y\| \to +\infty$.

Preuve. Supposons que la condition asymptotique (4.14) est vérifiée, alors il existe une suite $(\delta_n)_n$ décroissante vers zéro telle que

$$\|f(x+y) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x) - 2f(y)\| \leq \delta_n \tag{4.15}$$

pour tout $x, y \in E$ avec $\|y\| \geq n$. D'après le Théorème 4.2.1, il existe une unique application $q_n : E \to F$, solution de l'équation (4.6), vérifiant

$$\|f(x) - q_n(x)\| \leq \frac{7}{2}\delta_n \tag{4.16}$$

pour tout $x \in E$.
Soient n et m deux entiers positifs tels que $m > n > 0$. Comme $(\delta_n)_n$ est décroissante, la solution q_m satisfait

$$\|f(x) - q_m(x)\| \leq \frac{7}{2}\delta_m \leq \frac{7}{2}\delta_n \tag{4.17}$$

pour tout $x \in E$. L'unicité de q_n entraine que $q_n = q_m$ pour tout $m, n \in \mathbb{N}$.
En faisant tendre $n \to +\infty$, nous obtenons que f est solution de l'équation fonctionnelle σ-quadratique (4.6). La réciproque est évidente. ♠

Corollaire 4.2.3 *L'application $f : E \to F$ est solution de l'équation (4.6), si et seulement si*

$$\|f(x+y) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x) - 2f(y)\| \to 0, \tag{4.18}$$

quand $\|x\| + \|y\| \to +\infty$.

Le résultat suivant est une généralisation du résultat obtenu par S.-M. Jung dans [85]. Notons ici que : $\{(x,y) \in E^2 : \|y\| \geq d\} \subset \{(x,y) \in E^2 : \|x\| + \|y\| \geq d\}$.

Corollaire 4.2.4 *($\sigma = -I$) Soient $d > 0$ et $\delta > 0$ donnés. Supposons que l'application $f : E \to F$ vérifie l'inégalité*

$$\|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) - 2f(y)\| \leq \delta \tag{4.19}$$

pour tout $x, y \in E$ avec $\|y\| \geq d$. Alors, il existe une unique application $q : E \to F$, solution de l'équation (4.1) qui vérifie

$$\|f(x) - q(x)\| \leq \frac{7}{2}\delta \tag{4.20}$$

pour tout $x \in E$.

Corollaire 4.2.5 *L'application $f : E \to F$ est solution de l'équation (4.1), si et seulement si*

$$\sup_{x \in E} \|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) - 2f(y)\| \to 0, \tag{4.21}$$

quand $\|y\| \to +\infty$.

Corollaire 4.2.6 *L'application $f : E \to F$ est solution de l'équation (4.1), si et seulement si*

$$\|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) - 2f(y)\| \to 0, \tag{4.22}$$

quand $\|x\| + \|y\| \to +\infty$.

Corollaire 4.2.7 *($\sigma = I$) Soient $d > 0$ et $\delta > 0$ donnés. Supposons que l'application $f : E \to F$ vérifie l'inégalité*

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \delta \tag{4.23}$$

pour tout $x, y \in E$ avec $\|y\| \geq d$. Alors, il existe une unique application additive $A : E \to F$ qui vérifie

$$\|f(x) - A(x)\| \leq 7\delta \tag{4.24}$$

pour tout $x \in E$.

Corollaire 4.2.8 *L'application $f : E \to F$ est additive, si et seulement si*

$$\sup_{x \in E} \|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \to 0, \tag{4.25}$$

quand $\|y\| \to +\infty$.

Corollaire 4.2.9 *L'application $f : E \to F$ est additive, si et seulement si*

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \to 0, \tag{4.26}$$

quand $\|x\| + \|y\| \to +\infty$.

Dans le théorème suivant, nous examinons la stabilité, au sens de Hyers-Ulam, de l'équation σ-quadratique (4.6) dans le domaine non borné : $\{(x, y) \in E^2 : \ \|x\| \geq d\}$.

Théorème 4.2.10 *Soient $d > 0$, $\delta > 0$ et $\gamma \geq 0$ des constantes données. Supposons que l'application $f : E \to F$ satisfait les inégalités*

$$\|f(x+y) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x) - 2f(y)\| \leq \delta, \tag{4.27}$$

$$\|f(x) - f(\sigma(x))\| \leq \gamma \tag{4.28}$$

pour tout $x, y \in E$ avec $\|x\| \geq d$. Alors, il existe une unique application $q : E \longrightarrow F$, solution de l'équation (4.6), vérifiant

$$\|f(x) - q(x)\| \leq \frac{5\delta}{2} + \frac{5\gamma}{2} \tag{4.29}$$

pour tout $x \in E$.

Preuve. D'abord, nous prouvons que la fonction $x \longmapsto \|f(x) - f(\sigma(x))\|$ est bornée dans E. Soit $x \in E$ avec $\|x\| < d$ et $\sigma(x) \neq x$ et soit $z = 2^n x$ avec n assez grand, alors $\|z\| > d$, $\|\sigma(z)\| > d$ et $\|x - z\| > d$.
En utilisant alors les inégalités (4.27), (4.28), l'inégalité triangulaire et la relation suivante :

$$\begin{aligned} f(x) - f(\sigma(x)) = &- [f(\sigma(z) + x - z) + f(\sigma(x)) - 2f(\sigma(z)) - 2f(x - z)] \\ &+ [f(z + \sigma(x) - \sigma(z)) + f(x) - 2f(z) - 2f(\sigma(x) - \sigma(z))] \\ &+ 2[f(z) - f(\sigma(z))] + 2[f(\sigma(z) + x - z) - f(z + \sigma(x) - \sigma(z))] \\ &+ 2[f(\sigma(x) - \sigma(z)) - f(x - z)], \end{aligned}$$

nous obtenons

$$\|f(x) - f(\sigma(x)\| \leq 2\delta + 5\gamma \tag{4.30}$$

pour tout $x \in E$.
Montrons que la fonction : $(x, y) \longmapsto \|f(x+y) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x) - 2f(y)\|$ est bornée dans E. Soient $x, y \in E$ avec $\|x\| < d$. Si $x = 0$, alors nous avons $\|f(0+y) + f(0+\sigma(y)) - 2f(0) - 2f(y)\| = \|f(\sigma(y)) - f(y)\| \leq 2\delta + 5\gamma + \|2f(0)\|$.
Pour $x \neq 0$, nous choisissons $z = 2^n x$, $n \in \mathbb{N}$ et nous discutons les cas suivants :

Cas 1. $\sigma(x) \neq -x$.
Avec n assez grand, nous avons $\|z\| > d$, $\|x + z\| > d$, $\|\sigma(x) + z\| > d$, $\|y + \sigma(z)\| > d$

et $\|z+\sigma(z)\| > d$. En utilisant (4.27), (4.28), l'inégalité triangulaire et la décomposition suivante :

$$\begin{aligned}
&2[f(x+y)+f(x+\sigma(y))-2f(x)-2f(y)]\\
&\quad=[f(x+z+y+\sigma(z))+f(x+z+\sigma(y)+z)-2f(x+z)-2f(y+z)]\\
&\qquad-[f(2z+x+\sigma(y))+f(2z+\sigma(x)+y)-2f(2z)-2f(x+\sigma(y))]\\
&\qquad+[f(\sigma(x)+z+y+z)+f(\sigma(x)+z+\sigma(y)+\sigma(z))-2f(\sigma(x)+z)-2f(y+z)]\\
&\qquad+2[f(z+x)+f(z+\sigma(x))-2f(z)-2f(x)]\\
&\qquad+2[f(z+y)+f(z+\sigma(y))-2f(z)-2f(y)]\\
&\qquad-2[f(2z)+f(z+\sigma(z))-2f(z)-2f(z)]+2[f(y+\sigma(z))-f(z+\sigma(y))]\\
&\qquad-[f(z+\sigma(z)+x+y)+f(z+\sigma(z)+\sigma(x)+\sigma(y))-2f(z+\sigma(z))-2f(x+y)],
\end{aligned}$$

nous obtenons

$$\|f(x+y)+f(x+\sigma(y))-2f(x)-2f(y)\| \leq 5\delta+\gamma. \tag{4.31}$$

Cas 2. $\sigma(x)=-x$.
Dans ce cas, nous utilisons la relation suivante :

$$\begin{aligned}
2[f(x+y)&+f(x+\sigma(y))-2f(x)-2f(y)]\\
&=-[f(2z+x+y)+f(2z-x+\sigma(y))-2f(2z)-2f(x+y)]\\
&\quad-[f(2z+x+\sigma(y))+f(2z-x+y)-2f(2z)-2f(x+\sigma(y))]\\
&\quad+[f(-x+2z+y)+f(-x+2z+\sigma(y))-2f(-x+2z)-2f(y)]\\
&\quad+[f(x+2z+y)+f(x+2z+\sigma(y))-2f(x+2z)-2f(y)]\\
&\quad+2[f(2z+x)+f(2z-x)-2f(2z)-2f(x)],
\end{aligned}$$

et nous obtenons

$$\|f(x+y)+f(x+\sigma(y))-2f(x)-2f(y)\| \leq 3\delta. \tag{4.32}$$

Si $x=y=0$, alors nous prenons $z\in E$ arbitraire avec $\|z\|=d$. Donc, en tenant compte de la décomposition ci-dessus (Cas 2), nous avons $\|2f(0)\|\leq 3\delta$.
Par conséquent, l'inégalité

$$\|f(x+y)+f(x+\sigma(y))-2f(x)-2f(y)\| \leq 5\delta+\gamma$$

est vraie pour tout $x,y\in E$. Le reste de la preuve résulte de [19]. ♠

Corollaire 4.2.11 *L'application $f: E\to F$ est solution de l'équation (4.6), si et seulement si*

$$\|f(x)-f(\sigma(x))\| \longrightarrow 0 \text{ et } \sup_{y\in E}\|f(x+y)+f(x+\sigma(y))-2f(x)-2f(y)\|\to 0, \tag{4.33}$$

quand $\|x\|\to+\infty$.

Preuve. Supposons que la condition asymptotique (4.33) est satisfaite, alors il existe deux suites $(\delta_n)_n$ et $(\gamma_n)_n$ décroissantes vers zéro telles que

$$\|f(x) - f(\sigma(x))\| \leq \gamma_n \text{ et } \|f(x+y) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x) - 2f(y)\| \leq \delta_n \tag{4.34}$$

pour tout $x, y \in E$ avec $\|x\| \geq n$. D'après le Théorème 4.2.10, il existe une unique application $q_n : E \to F$, solution de l'équation (4.6), vérifiant

$$\|f(x) - q_n(x)\| \leq \frac{5}{2}\gamma_n + \frac{5}{2}\delta_n \tag{4.35}$$

pour tout $x \in E$.
Soient n et m deux entiers positifs tels que $m > n > 0$. Les suites $(\gamma_n)_n$ et $(\delta_n)_n$ étant décroissantes, par conséquent la solution q_m satisfait

$$\|f(x) - q_m(x)\| \leq \frac{5}{2}\gamma_m + \frac{5}{2}\delta_m \leq \frac{5}{2}\gamma_n + \frac{5}{2}\delta_n \tag{4.36}$$

pour tout $x \in E$. L'unicité de q_n entraine que $q_n = q_m$ pour tout $m, n \in \mathbb{N}$.
En faisant tendre $n \to +\infty$, nous obtenons que f est solution de l'équation fonctionnelle σ-quadratique (4.6). La réciproque se découle d'une manière naturelle, ce qui achève la preuve du corollaire. ♠

Corollaire 4.2.12 *($\sigma = -I$) Soient $d > 0$, $\gamma \geq 0$ et $\delta > 0$ donnés. Supposons que l'application $f : E \to F$ vérifie l'inégalité*

$$\|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) - 2f(y)\| \leq \delta, \tag{4.37}$$

$$\|f(x) - f(-x)\| \leq \gamma \tag{4.38}$$

pour tout $x, y \in E$ avec $\|x\| \geq d$. Alors, il existe une unique application $q : E \longrightarrow F$, solution de l'équation des quadratiques classique (4.1), vérifiant

$$\|f(x) - q(x)\| \leq \frac{5\delta}{2} + \frac{\gamma}{2} \tag{4.39}$$

pour tout $x \in E$.

Corollaire 4.2.13 *L'application $f : E \to F$ est solution de (4.1), si et seulement si*

$$\|f(x) - f(-x)\| \longrightarrow 0 \textit{ et } \sup_{y \in E} \|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) - 2f(y)\| \to 0, \tag{4.40}$$

quand $\|x\| \to +\infty$.

Corollaire 4.2.14 *($\sigma = I$) Soient $d > 0$ et $\delta > 0$ données. Supposons que l'application $f : E \to F$ satisfait l'inégalité*

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \delta \tag{4.41}$$

pour tout $x, y \in E$ avec $\|x\| \geq d$. Alors, il existe une unique application additive $A : E \longrightarrow F$ telle que

$$\|f(x) - A(x)\| \leq 5\delta \tag{4.42}$$

pour tout $x \in E$.

Corollaire 4.2.15 *L'application $f : E \to F$ est additive, si et seulement si*

$$\sup_{y \in E} \|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \to 0, \tag{4.43}$$

quand $\|x\| \to +\infty$.

En utilisant la preuve du Théorème 4.2.10 et le Corollaire 4.2.11, nous obtenons les résultats suivants :

Corollaire 4.2.16 *L'application $f : E \to F$ est solution de l'équation (4.6), si et seulement si*

$$\|f(x+y) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x) - 2f(y)\| \to 0, \tag{4.44}$$

quand $\|x\| + \|y\| \to +\infty$.

Corollaire 4.2.17 *L'application $f : E \to F$ est solution de l'équation (4.1), si et seulement si*

$$\|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) - 2f(y)\| \to 0, \tag{4.45}$$

quand $\|x\| + \|y\| \to +\infty$.

Corollaire 4.2.18 *L'application $f : E \to F$ est additive, si et seulement si*

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \to 0, \tag{4.46}$$

quand $\|x\| + \|y\| \to +\infty$.

Dans la suite, la stabilité, au sens de Hyers-Ulam-Rassias, de l'équation fonctionnelle σ-quadratique (4.6), dans le domaine non borné : $\{(x, y) \in E^2 : \|x\|^p + \|y\|^p \geq M^p\}$, sera examinée.
Tout d'abord, nous montrons la stabilité, au sens de Hyers-Ulam-Rassias, de l'équation additive dans le domaine non borné : $\{(x, y) \in E^2 : \|x\|^p + \|y\|^p \geq M^p\}$.

Théorème 4.2.19 *Soient E un espace réel, F un espace de Banach, $M > 0$, $\theta \geq 0$ et p avec $0 < p < 1$ des constantes données. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application telle que*

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \theta(\|x\|^p + \|y\|^p) \tag{4.47}$$

pour tout $x, y \in E$ avec $\|x\|^p + \|y\|^p \geq M^p$. Alors, il existe une unique application additive $A : E \longrightarrow F$ qui vérifie

$$\|f(x) - A(x)\| \leq \theta(4 \times 2^p + 2 \times 3^p + 1)M^p + \frac{2\theta}{2 - 2^p}\|x\|^p \tag{4.48}$$

pour tout $x \in E$.

Preuve. Supposons que $\|x\|^p + \|y\|^p < M^p$. Si $x = y = 0$, nous choisissons $z \in E$ avec $\|z\| = M$ et nous avons

$$\|f(0) - f(0) - f(0)\| = \|f(z) - f(0) - f(z)\| \leq \theta M^p. \tag{4.49}$$

Sinon, soit

$$z = \begin{cases} (\|x\| + M)\dfrac{x}{\|x\|}, \text{ si } \|x\| \geq \|y\|; \\ \\ (\|y\| + M)\dfrac{y}{\|y\|}, \text{ si } \|y\| \geq \|x\|. \end{cases}$$

Il est alors évident que $\|z\| \geq M$ et

$$\|x + z\|^p + \|y - z\|^p \geq \max\{\|x + z\|^p, \|y - z\|^p\} \geq M^p,$$

$$\|y - z\|^p + \|z\|^p \geq \|z\|^p \geq M^p,$$

$$\min\{\|x\|^p + \|z\|^p, \|y\|^p + \|z\|^p\} \geq \|z\|^p \geq M^p.$$

De même

$$\max\{\|x + z\|, \|y - z\|\} < 3M, \; \|z\| < 2M.$$

De (4.47), des inégalités ci-dessus et de la relation :

$$\begin{aligned} &f(x+y) - f(x) - f(y) \\ &\qquad = [f(x+y) - f(x+z) - f(y-z)] + [f(x+z) - f(x) - f(z)] \\ &\qquad + [f(y-z) - f(-z) - f(y)] - [f(0) - f(-z) - f(z)] + [f(0)], \end{aligned}$$

nous avons

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \theta(4 \times 2^p + 2 \times 3^p + 1)M^p + \theta(\|x\|^p + \|y\|^p). \tag{4.50}$$

Des idées similaires à celles de Th. M. Rassias [130], permettent d'achever la preuve. ♠

Nous prouvons, à présent, à l'aide des résultats du Théorème 4.2.19, la stabilité, au sens de Hyers-Ulam-Rassias, de l'équation fonctionnelle σ-quadratique

$$f(x+y) + f(x+\sigma(y)) = 2f(x) + 2f(y),\ x, y \in E \tag{4.51}$$

dans le domaine non borné : $\{(x, y) \in E^2 : \|x\|^p + \|y\|^p \geq M^p\}$.

Théorème 4.2.20 *Soient E un espace normé réel et F un espace de Banach. Soient $M > 0$, $\theta \geq 0$ et p avec $0 < p < 1$ des constantes données. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application qui satisfait*

$$\|f(x+y) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x) - 2f(y)\| \leq \theta(\|x\|^p + \|y\|^p) \tag{4.52}$$

pour tout $x, y \in E$ avec $\|x\|^p + \|y\|^p \geq M^p$. Alors, il existe une unique application $Q : E \longrightarrow F$, solution de l'équation (4.51), vérifiant

$$\begin{aligned} \|f(x) - Q(x)\| \ \leq\ & \frac{\theta}{2}\|x\|^p + \frac{\theta}{8}(\|x+\sigma(x)\|^p + \|x-\sigma(x)\|^p) + \frac{\theta}{2-2^p}\|x+\sigma(x)\|^p \\ & + \frac{\theta}{2}(4\times 2^p + 2\times 3^p + 1)M^p + \frac{\theta}{2(4-2^p)}\|x-\sigma(x)\|^p \\ & + \frac{\theta}{24}[16^p + 4\times 9^p + 8\times 4^p]M^p \end{aligned} \tag{4.53}$$

pour tout $x \in E$ avec $\|x\| \geq \dfrac{M}{2}$.

Preuve. Pour $y \in E^+ := \{z \in E/\sigma(z) = z\}$ et $x \in E$, il résulte de (4.52), l'inégalité

$$\begin{aligned} \|f(x+y) - f(x) - f(y)\| &= \frac{1}{2}\|f(x+y) + f(x+\sigma(y)) - 2f(y) - 2f(x)\| \\ &\leq \frac{\theta}{2}(\|x\|^p + \|y\|^p) \end{aligned} \tag{4.54}$$

pour tout $x, y \in E^+$ avec $\|x\|^p + \|y|^p \geq M^p$.
E^+ étant un sous-groupe abélien de E alors, d'après le Théorème 4.2.19, il existe une unique application additive $a : E \longrightarrow F$ satisfaisant l'inégalité

$$\|f(x) - a(x)\| \leq \theta(4\times 2^p + 2\times 3^p + 1)M^p + \frac{2\theta}{2-2^p}\|x\|^p \tag{4.55}$$

pour tout $x \in E^+$.
Pour $y \in E^- = \{z \in E/\sigma(z) = -z\}$ et $x \in E$, nous obtenons, de (4.52), l'inégalité

$$\|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) - 2f(y)\| = \|f(x+y) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x) - 2f(y)\| \leq \theta(\|x\|^p + \|y\|^p) \tag{4.56}$$

pour tout $x, y \in E^-$ avec $\|x\|^p + \|y\|^p \geq M^p$.
Il est clair que E^- est un sous-groupe abélien de E donc, en utilisant [126], il existe une unique application quadratique $q : E \longrightarrow F$ vérifiant

$$\|f(x) - q(x)\| \leq \frac{\theta}{6}[16^p + 4 \times 9^p + 8 \times 4^p]M^p + \frac{2\theta}{4 - 2^p}\|x\|^p \tag{4.57}$$

pour tout $x \in E^-$.
En prenant $x = y$ dans (4.52), nous avons

$$\|4f(x) + f(x + \sigma(x)) - f(2x)\| \leq 2\theta\|x\|^p \tag{4.58}$$

pour tout $x \in E$ avec $\|x\| \geq \dfrac{M}{2^{\frac{1}{p}}}$.
De l'inégalité

$$\|x\|^p + \|y\|^p \geq (\|x\| + \|y\|)^p \geq \|x + y\|^p \tag{4.59}$$

pour tout $x, y \in E$ et en remplaçant x par $x - \sigma(x)$ et y par $x + \sigma(x)$ dans (4.59), nous tirons

$$\|x + \sigma(x)\|^p + \|x - \sigma(x)\|^p \geq 2^p\|x\|^p. \tag{4.60}$$

Alors, de (4.52), nous obtenons

$$\|f(2x) - f(x + \sigma(x)) - f(x - \sigma(x))\| \leq \frac{\theta}{2}(\|x + \sigma(x)\|^p + \|x - \sigma(x)\|^p) \tag{4.61}$$

pour tout $x \in E$ avec $\|x\| \geq \dfrac{M}{2}$.
La somme (4.58)+(4.61) donne :

$$\|4f(x) - 2f(x + \sigma(x)) - f(x - \sigma(x))\| \leq 2\theta\|x\|^p + \frac{\theta}{2}(\|x + \sigma(x)\|^p + \|x - \sigma(x)\|^p) \tag{4.62}$$

pour tout $x \in E$ avec $\|x\| \geq \dfrac{M}{2}$.
En tenant compte de (4.62), (4.55) et (4.57), nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\|f(x) - \frac{1}{2}a(x + \sigma(x)) - \frac{1}{4}q(x - \sigma(x))\| \\
&\quad \leq \|f(x) - \frac{1}{2}f(x + \sigma(x)) - \frac{1}{4}f(x - \sigma(x))\| + \frac{1}{2}\|f(x + \sigma(x)) - a(x - \sigma(x))\| \\
&\quad\quad + \frac{1}{4}\|f(x - \sigma(x)) - q(x - \sigma(x))\| \\
&\quad \leq \frac{\theta}{2}\|x\|^p + \frac{\theta}{8}(\|x + \sigma(x)\|^p + \|x - \sigma(x)\|^p) + \frac{\theta}{2 - 2^p}\|x + \sigma(x)\|^p \\
&\quad\quad + \frac{\theta}{2}(4 \times 2^p + 2 \times 3^p + 1)M^p + \frac{\theta}{2(4 - 2^p)}\|x - \sigma(x)\|^p \\
&\quad\quad + \frac{\theta}{24}[16^p + 4 \times 9^p + 8 \times 4^p]M^p
\end{aligned}$$

pour tout $x \in E$ avec $\|x\| \geq \frac{M}{2}$.

Posons $Q(x) = \frac{1}{2}a(x + \sigma(x)) + \frac{1}{4}q(x - \sigma(x))$. Un calcul simple montre alors que Q est solution de l'équation (4.51). Pour l'unicité de Q, nous appliquons les mêmes arguments que ceux utilisés dans [19] et [21]. Ce qui termine la preuve de Théorème 4.2.20. ♠

4.3 Stabilité de l'équation fonctionnelle σ-Jensen au sens de Hyers-Ulam dans les domaines non bornés

Dans cette section, nous examinons la stabilité, au sens de Hyers-Ulam, de l'équation fonctionnelle σ-Jensen (4.7) dans les domaines non bornés.

Théorème 4.3.1 *Soient $d > 0$ et $\delta > 0$ deux constantes données. Supposons que l'application $f : E \to F$ satisfait l'inégalité*

$$\|f(x+y) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x)\| \leq \delta \tag{4.63}$$

pour tout $x, y \in E$ avec $\|y\| \geq d$. Alors, il existe une unique application $J : E \longrightarrow F$, solution de l'équation (4.7), vérifiant $J(\sigma(x)) = -J(x)$ et

$$\|f(x) - f(0) - J(x)\| \leq 3\delta \tag{4.64}$$

pour tout $x \in E$.

Preuve. Soient $x, y \in E$ avec $0 < \|y\| < d$ et $z = 2^n y$, où n est un entier assez grand ; alors $\|z\| \geq d$, $\|z + y\| \geq d$ et $\|\sigma(z) + y\| \geq d$.
De (4.63), l'inégalité triangulaire et l'équation :

$$\begin{aligned}
&2[f(x+y) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x)] \\
&\quad = -[f(x+y+z) + f(x+y+\sigma(z)) - 2f(x+y)] \\
&\qquad - [f(x+\sigma(y)+z) + f(x+\sigma(y)+\sigma(z)) - 2f(x+\sigma(y))] \\
&\qquad + [f(x+y+z) + f(x+\sigma(y)+\sigma(z)) - 2f(x)] \\
&\qquad + [f(x+y+\sigma(z)) + f(x+\sigma(y)+z) - 2f(x)],
\end{aligned}$$

nous déduisons

$$\|f(x+y) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x)\| \leq 2\delta. \tag{4.65}$$

Finalement, l'inégalité (4.65) est satisfaite pour tout $x, y \in E$. Tenant compte de [95], le reste de la preuve s'ensuit. ♠

Corollaire 4.3.2 *L'application $f - f(0) : E \to F$ est solution de l'équation (4.7), si et seulement si la condition asymptotique*

$$\sup_{x\in E} \|f(x+y) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x)\| \to 0 \ \textit{quand} \ \|y\| \to +\infty, \tag{4.66}$$

est vérifiée.

Preuve. En adoptant les mêmes techniques que celles de la preuve du Corollaire 4.2.2, la preuve du corollaire s'ensuit. ♠

Corollaire 4.3.3 *L'application $f - f(0) : E \to F$ est solution de l'équation (4.7), si et seulement si*

$$\|f(x+y) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x)\| \to 0, \tag{4.67}$$

quand $\|x\| + \|y\| \to +\infty$.

Corollaire 4.3.4 *($\sigma = -I$) Soient $d > 0$ et $\delta > 0$ donnés. Supposons que l'application $f : E \to F$ satisfait l'inégalité*

$$\|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)\| \leq \delta \tag{4.68}$$

pour tout $x, y \in E$ avec $\|y\| \geq d$. Alors, il existe une unique application $J : E \longrightarrow F$, solution de l'équation σ-Jensen (4.7) avec $\sigma(x) = -x$, vérifiant $J(-x) = -J(x)$ et

$$\|f(x) - f(0) - J(x)\| \leq 3\delta \tag{4.69}$$

pour tout $x \in E$.

Corollaire 4.3.5 *L'application $f - f(0) : E \to F$ est solution de l'équation (4.7) avec $\sigma(x) = -x$, si et seulement si*

$$\sup_{x\in E} \|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)\| \to 0, \tag{4.70}$$

quand $\|y\| \to +\infty$.

Corollaire 4.3.6 *L'application $f - f(0) : E \to F$ est solution de l'équation (4.7) avec $\sigma(x) = -x$, si et seulement si*

$$\|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)\| \to 0, \tag{4.71}$$

quand $|x\| + \|y\| \to +\infty$.

Dans le théorème suivant, nous prouvons la stabilité, au sens de Hyers-Ulam, de l'équation fonctionnelle σ-Jensen (4.7) dans le domaine non borné : $\{(x, y) \in E^2 : \ \|x\| \geq d\}$.

Théorème 4.3.7 *Soient $d > 0$, $\delta > 0$ et $\gamma \geq 0$ donnés. Supposons que l'application $f : E \to F$ satisfait les inégalités*

$$\|f(x+y) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x)\| \leq \delta, \tag{4.72}$$

$$\|f(x) + f(\sigma(x))\| \leq \gamma \tag{4.73}$$

pour tout $x, y \in E$ avec $\|x\| \geq d$. Alors, il existe une unique application $J : E \longrightarrow F$, solution de l'équation (4.7), vérifiant $J(\sigma(x)) = -J(x)$, et

$$\|f(x) - f(0) - J(x)\| \leq 12\delta + 9\gamma \tag{4.74}$$

pour tout $x \in E$.

Preuve. Montrons que la fonction $x \longmapsto \|f(x) + f(\sigma(x))\|$ est bornée dans E. Pour $x \in E$, avec $0 < \|x\| < d$ et pour $z = 2^n x$ avec n assez grand, nous avons

Cas 1. $\sigma(x) \neq x$.
De $\|z\| > d$, $\|\sigma(z)\| > d$, $\|x + \sigma(z) - z\| > d$, des inégalités (4.72), (4.73), de l'inégalité triangulaire et de l'équation suivante :

$$\begin{aligned} f(x) + f(\sigma(x)) =& [f(\sigma(z) + x - z) + f(\sigma(x)) - 2f(\sigma(z))] \\ &+ [f(z + \sigma(x) - \sigma(z)) + f(z + x - z) - 2f(z)] \\ &+ 2[f(z) + f(\sigma(z))] - [f(\sigma(z) + x - z) - f(z + \sigma(x) - \sigma(z))], \end{aligned}$$

nous déduisons

$$\|f(x) + f(\sigma(x)\| \leq 2\delta + 3\gamma. \tag{4.75}$$

Cas 2. $\sigma(x) = x$.
D'après la relation :

$$\begin{aligned} f(x) + f(\sigma(x)) =& [f(z + x - z) + f(z + \sigma(x) - z) - 2f(z)] \\ &+ [f(z) + f(\sigma(z))], \end{aligned}$$

nous obtenons

$$\|f(x) + f(\sigma(x)\| \leq \delta + \gamma. \tag{4.76}$$

Par conséquent, nous avons

$$\|f(x) + f(\sigma(x)\| \leq 2\delta + 3\gamma \tag{4.77}$$

pour tout $x \in E\backslash\{0\}$.
Montrons que la fonction : $(x, y) \longmapsto \|f(x+y) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x)\|$ est bornée dans E.
Soit $x, y \in E$ avec $\|x\| < d$. Si $x = 0$ alors, en utilisant (4.77), nous obtenons

$$\|f(0+y) + f(0+\sigma(y)) - 2f(0)\| \leq 2\delta + 3\gamma + \|2f(0)\|. \tag{4.78}$$

Pour $x \neq 0$, nous choisissons $z = 2^n x$, $n \in \mathbb{N}$ et nous discutons les cas suivants :

Cas 1. $\sigma(x) \neq x$.

Pour n assez grand, nous pouvons facilement vérifier que $\|x - z\| \geq d$, $\|x - \sigma(z)\| \geq d$, $\|x - z + \sigma(z)\| \geq d$ et $\|x - \sigma(z) + y + z\| \geq d$.

Donc, de (4.72), (4.73), l'inégalité triangulaire et de la relation suivante :

$$\begin{aligned}
f(x+y) &+ f(x+\sigma(y)) - 2f(x) \\
&= [f(x+y) + f(x - z + \sigma(y) + \sigma(z)) - 2f(x-z)] \\
&\quad + [f(x - \sigma(z) + y + z) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x - \sigma(z))] \\
&\quad - [f(x) + f(x - z + \sigma(z)) - 2f(x-z)] \\
&\quad - [f(x) + f(\sigma(x) - \sigma(z) + z) - 2f(z)] \\
&\quad - [f(x - z + \sigma(y) + \sigma(z)) + f(\sigma(x) + y) - 2f(\sigma(z))] \\
&\quad + [f(\sigma(x) + y) + f(\sigma(x) - z + \sigma(y) + \sigma(z)) - 2f(\sigma(x) - z)] \\
&\quad + 2[f(x - \sigma(z)) + f(\sigma(x) - z)] - 2[f(z) + f(\sigma(z))] \\
&\quad + [f(x - z + \sigma(z)) + f(\sigma(x) - \sigma(z) + z)] \\
&\quad - [f(x - \sigma(z) + y + z) + f(\sigma(x) - z + \sigma(y) + \sigma(z))],
\end{aligned}$$

nous avons

$$\|f(x+y) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x)\| \leq 6\delta + 6\gamma. \tag{4.79}$$

Cas 2. $\sigma(x) = x$.

En utilisant (4.72), (4.73) et la décomposition suivante :

$$\begin{aligned}
f(x+y) &+ f(x+\sigma(y)) - 2f(x) \\
&= [f(x - z + y + z) + f(x - z + \sigma(y) + z) - 2f(x-z)] \\
&\quad - [f(-z + x + z) + f(-z + \sigma(x) + z) - 2f(-z)] \\
&\quad + [f(-z + x) + f(-z + x) - 2f(-z)],
\end{aligned}$$

nous obtenons

$$\|f(x+y) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x)\| \leq 3\delta. \tag{4.80}$$

Si $x = 0 = y$, nous choisissons alors un élément $z \in E$ arbitraire avec $\|z\| = d$. L'utilisation de la décomposition ci-dessus (Cas 2) entraine que : $\|f(0)\| \leq 3\delta$.

Finalement, l'inégalité

$$\|f(x+y) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x)\| \leq 8\delta + 6\gamma \tag{4.81}$$

est vraie pour tout $x, y \in E$. De [95], nous déduisons l'existence d'une unique application $J : E \longrightarrow F$, vérifiant l'inégalité (4.74). En plus, $J(\sigma(x)) = -J(x)$ pour tout $x \in E$, ce qui achève la preuve du théorème. ♠

Corollaire 4.3.8 *L'application $f - f(0) : E \to F$ est solution de l'équation (4.7), si et seulement si*

$$\|f(x) + f(\sigma(x))\| \longrightarrow 0 \textit{ et } \sup_{y \in E} \|f(x+y) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x)\| \to 0, \tag{4.82}$$

quand $\|x\| \to +\infty$.

Preuve. En utilisant les mêmes techniques que celles de la preuve du Corollaire 4.2.11, la preuve s'ensuit. ♠

Corollaire 4.3.9 *($\sigma = -I$) Soient $d > 0$, $\gamma \geq 0$ et $\delta > 0$ donnés. Supposons que l'application $f : E \to F$ satisfait les inégalités*

$$\|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)\| \leq \delta, \tag{4.83}$$

$$\|f(x) + f(-x)\| \leq \gamma \tag{4.84}$$

pour tout $x, y \in E$ avec $\|x\| \geq d$. Alors, il existe une unique application $J : E \longrightarrow F$, solution de l'équation fonctionnelle σ-Jensen (4.7) avec $\sigma(x) = -x$, vérifiant $J(-x) = -J(x)$ et

$$\|f(x) - f(0) - J(x)\| \leq 12\delta + 9\gamma \tag{4.85}$$

pour tout $x \in E$.

Corollaire 4.3.10 *L'application $f - f(0) : E \to F$ est solution de (4.7) avec $\sigma(x) = -x$, si et seulement si*

$$\|f(x) + f(-x)\| \longrightarrow 0 \textit{ et } \sup_{y \in E} \|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)\| \to 0, \tag{4.86}$$

quand $\|x\| \to +\infty$.

Corollaire 4.3.11 *L'application $f - f(0) : E \to F$ est solution de (4.7), si et seulement si*

$$\|f(x+y) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x)\| \to 0, \tag{4.87}$$

quand $\|x\| + \|y\| \to +\infty$.

Dans le théorème suivant, nous examinons la stabilité de l'équation fonctionnelle σ-Jensen (4.8) dans le domaine non borné : $\{(x, y) \in E^2 : \ \|x\| \geq d\}$.

Théorème 4.3.12 *Soient $d > 0$ et $\delta > 0$ donnés. Supposons que l'application $f : E \to F$ satisfait l'inégalité*
$$\|f(x+y) - f(x+\sigma(y)) - 2f(y)\| \leq \delta \tag{4.88}$$
pour tout $x, y \in E$ avec $\|x\| \geq d$. Alors, il existe une unique application $j : E \longrightarrow F$, solution de l'équation (4.8), vérifiant $j(\sigma(x)) = -j(x)$ et
$$\|f(x) - j(x)\| \leq 3\delta \tag{4.89}$$
pour tout $x \in E$.

Preuve. Soit $x, y \in E$ avec $0 < \|x\| < d$. Nous choisissons $z = 2^n x$, où n est assez grand, alors $\|z\| \geq d$, $\|x+z\| \geq d$ et $\|z+\sigma(x)\| \geq d$. De (4.88), l'inégalité triangulaire et de la décomposition suivante :
$$\begin{aligned}2[f(x+y)-&f(x+\sigma(y)) - 2f(y)]\\ &= -[f(z+x+y) - f(z+\sigma(x)+\sigma(y)) - 2f(x+y)]\\ &\quad + [f(z+x+\sigma(y)) - f(z+\sigma(x)+y) - 2f(x+\sigma(y))]\\ &\quad + [f(x+z+y) - f(x+z+\sigma(y)) - 2f(y)]\\ &\quad + [f(z+\sigma(x)+y) - f(z+\sigma(x)+\sigma(y)) - 2f(y)],\end{aligned}$$
nous obtenons
$$\|f(x+y) - f(x+\sigma(y)) - 2f(y)\| \leq 2\delta \tag{4.90}$$
pour tout $x, y \in E$ avec $x \neq 0$. Si $x = 0$ alors la relation suivante, où $z \in E$ vérifie $\|z\| = d$:
$$\begin{aligned}2[f(0+y)-&f(0+\sigma(y)) - 2f(y)]\\ &= -[f(z+x+y) - f(z+\sigma(y)) - 2f(y)]\\ &\quad + [f(z+\sigma(y)) - f(z+y) - 2f(\sigma(y))]\\ &\quad + [f(z+y) - f(z+\sigma(y)) - 2f(y)],\end{aligned}$$
implique que
$$\|f(0+y) - f(0+\sigma(y)) - 2f(y)\| \leq 2\delta$$
pour tout $y \in E$. Par conséquent,
$$\|f(x+y) - f(x+\sigma(y)) - 2f(y)\| \leq 2\delta$$
pour tout $x, y \in E$. Donc, de [107], il existe une unique application $j : E \longrightarrow F$ vérifiant $j(\sigma(x)) = -j(x)$ et $\|f(x) - j(x)\| \leq 3\delta$, ce qui complète la preuve du théorème. ♠

Corollaire 4.3.13 *L'application $f : E \to F$ est solution de l'équation (4.8), si et seulement si*
$$\sup_{y \in E} \|f(x+y) - f(x+\sigma(y)) - 2f(y)\| \to 0, \tag{4.91}$$
quand $\|x\| \to +\infty$.

Corollaire 4.3.14 *($\sigma = -I$) Soient $d > 0$ et $\delta > 0$ donnés. Supposons que l'application $f : E \to F$ satisfait l'inégalité*

$$\|f(x+y) - f(x-y) - 2f(y)\| \leq \delta \tag{4.92}$$

pour tout $x, y \in E$ avec $\|x\| \geq d$. Alors, il existe une unique application $j : E \longrightarrow F$, solution de l'équation fonctionnelle σ-Jensen (4.8) avec $\sigma(x) = -x$, vérifiant $j(-x) = -j(x)$ et

$$\|f(x) - j(x)\| \leq 3\delta \tag{4.93}$$

pour tout $x \in E$.

Corollaire 4.3.15 *L'application $f : E \to F$ est solution de l'équation (4.8), si et seulement si*

$$\sup_{y \in E} \|f(x+y) - f(x-y) - 2f(y)\| \to 0, \tag{4.94}$$

quand $\|x\| \to +\infty$.

Chapitre 5

Stabilité de l'équation fonctionnelle généralisée des quadratiques au sens de Hyers-Ulam-Rassias

5.1 Introduction

Soient E_1 un espace vectoriel, E_2 un espace normé complet et k un entier positif fixé. Dans ce chapitre, nous considérons l'équation fonctionnelle généralisée des quadratiques

$$f(kx+y)+f(kx+\sigma(y))=2k^2f(x)+2f(y),\ x,y\in E_1, \tag{5.1}$$

où $\sigma : E_1 \to E_1$ est une involution. Il est clair que l'équation fonctionnelle (5.1) est une extension de l'équation correspondant à $\sigma=-I$

$$f(kx+y)+f(kx-y)=2k^2f(x)+2f(y),\ x,y\in E_1 \tag{5.2}$$

et de l'équation fonctionnelle σ-quadratique

$$f(x+y)+f(x+\sigma(y))=2f(x)+2f(y),\ x,y\in E_1. \tag{5.3}$$

Le problème de stabilité de l'équation (5.2) a été prouvé par J. R. Lee et al. [103]. De plus, ils ont démontré que l'application $f : E_1 \to E_2$ satisfait l'équation (5.2) si et seulement si, f est solution de l'équation fonctionnelle des quadratiques classique

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y),\ x,y\in E_1. \tag{5.4}$$

En se basant sur la méthode du point fixe, C.-G. Park et al. [116] ont prouvé la stabilité, au sens de Hyers-Ulam, de l'équation fonctionnelle des quadratiques (5.2) pour $k=2$

$$f(2x+y)+f(2x-y)=8f(x)+2f(y),\ x,y\in E_1. \tag{5.5}$$

Récemment, A. Rahimi et al. [126] ont montré la stabilité, au sens de Hyers-Ulam-Rassias, de l'équation fonctionnelle des quadratiques (5.5) dans les domaines non bornés.

Le but du présent chapitre est d'étendre les résultats obtenus par J. R. Lee et al. [103] et par A. Rahimi et al. [126] à l'équation fonctionnelle généralisée des quadratiques (5.1). Alors, dans ce chapitre nous considérons le cas où $k \geq 2$.

Nos résultats sont organisés comme suit : Dans la section 2, nous déterminons la solution générale de l'équation fonctionnelle (5.1). Dans la section 3, nous montrons la stabilité, au sens de Hyers-Ulam-Rassias, de l'équation (5.1) dans les espaces de Banach en adoptant la méthode directe. La preuve de la stabilité, à l'aide de la méthode du point fixe, est exposée dans la section 4. La section 5 de ce chapitre traite la stabilité, au sens de Hyers-Ulam, de l'équation (5.1) dans les domaines non bornés.

5.2 Solution générale de l'équation fonctionnelle généralisée des quadratiques

Dans cette section, nous résolvons l'équation fonctionnelle (5.1) par moyen des solutions de l'équation fonctionnelle σ-quadratique (5.3).

Théorème 5.2.1 *Soit $k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Soient E et F deux espaces vectoriels. L'application $f : E \to F$ satisfait l'équation fonctionnelle*

$$f(kx+y)+f(kx+\sigma(y)) = 2k^2 f(x) + 2f(y), \ x, y \in E \tag{5.6}$$

si et seulement si, $f : E \to F$ vérifie

$$f(x+y)+f(x+\sigma(y)) = 2f(x)+2f(y) \ \ et \ \ f(x+\sigma(x)) = 0 \tag{5.7}$$

pour tout $x, y \in E$.

Preuve. Prenons $x = 0$ et $y = 0$ dans (5.6), nous trouvons : $f(0) = 0$.
Posons $y = 0$ dans (5.6), nous obtenons

$$f(kx) = k^2 f(x) \tag{5.8}$$

pour tout $x \in E$. Posons $x = 0$ dans (5.6), nous avons $f(\sigma(y)) = f(y)$ pour tout $y \in E$.
Nous pouvons maintenant démontrer la première partie de (5.7)

$$f(kx+y)+f(kx+\sigma(y)) = 2k^2 f(x)+2f(y) = 2f(kx)+2f(y) \tag{5.9}$$

pour tout $x, y \in E$. Ainsi, l'application f satisfait (5.4).
Montrons, à présent, que f satisfait $f(x+\sigma(x)) = 0$ pour tout $x \in E$. Par un raisonnement par récurrence, nous pouvons montrer

$$f(n(x+\sigma(x))) = nf(x+\sigma(x)) \tag{5.10}$$

pour tout $x \in E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Remplaçons x et y par $x+\sigma(x)$ dans (5.4), nous déduisons $f(2(x+\sigma(x))) = 2f(x+\sigma(x))$. Ecrivons $n(x+\sigma(x))$ au lieu de x et $x+\sigma(x)$ au lieu de y dans (5.4), nous obtenons

$$\begin{aligned} 2f((n+1)(x+\sigma(x))) &= 2f(n(x+\sigma(x))) + 2f(x+\sigma(x)) \\ &= 2nf(x+\sigma(x)) + 2f(x+\sigma(x)) \\ &= 2(n+1)f(x+\sigma(x)). \end{aligned}$$

Ce qui prouve la validité de (5.10) pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En utilisant (5.8) et (5.10), nous obtenons $k^2 f(x+\sigma(x)) = kf(x+\sigma(x))$ pour tout $x \in E$, étant donné $k \geq 2$ alors, nous déduisons $f(x+\sigma(x)) = 0$ pour tout $x \in E$.
Prouvons maintenant la réciproque. Soit $f : E \to F$ une solution de l'équation (5.7). Remplaçons x par $(n-1)x$ et y par $x+\sigma(x)$ dans (5.7), nous obtenons

$$f(nx+\sigma(x)) = f((n-1)x) \tag{5.11}$$

pour tout $x \in E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrons, par récurrence sur n, l'égalité suivante :

$$f(nx) = n^2 f(x),\ n \in \mathbb{N}. \tag{5.12}$$

En prenant $x = y$ dans (5.7), nous obtenons (5.12) pour $n = 2$. Supposons (5.12) vraie à l'ordre n. En utilisant (5.11) et (5.4), nous obtenons

$$\begin{gathered} f(nx+x) + f(nx+\sigma(x)) = 2f(nx) + 2f(x) \\ f((n+1)x) + f(nx+\sigma(x)) = 2n^2 f(x) + 2f(x) \\ f((n+1)x) + f((n-1)x) = 2n^2 f(x) + 2f(x) \\ f((n+1)x) + (n-1)^2 f(x) = 2n^2 f(x) + 2f(x). \end{gathered}$$

Finalement, nous déduisons

$$f((n+1)x) = (n+1)^2 f(x),\ \text{prouvant (5.12).}$$

En utilisant (5.4) et (5.12) nous montrons que f est solution l'équation (5.1)

$$f(kx+y) + f(kx+\sigma(y)) = 2f(kx) + 2f(y) = 2k^2 f(x) + 2f(y),\ x, y \in E.$$

Ce qui achève la preuve du Théorème 5.2.1. ♠

Corollaire 5.2.2 *[103] Soit $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Soient E et F deux espaces vectoriels. L'application $f : E \to F$ satisfait l'équation fonctionnelle*

$$f(kx+y) + f(kx-y) = 2k^2 f(x) + 2f(y),\ x, y \in E \tag{5.13}$$

si et seulement si, $f : E \to F$ vérifie l'équation fonctionnelle des quadratiques classique

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y),\ x, y \in E. \tag{5.14}$$

Corollaire 5.2.3 *Soit $k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Soient E et F deux espaces vectoriels. L'application $f : E \to F$ satisfait l'équation fonctionnelle*

$$f(kx+y) = k^2 f(x) + f(y), \quad x, y \in E \tag{5.15}$$

si et seulement si $f \equiv 0$.

5.3 Stabilité de l'équation fonctionnelle généralisée des quadratiques au sens de Hyers-Ulam-Rassias

Dans cette section, nous examinons la stabilité, au sens de Hyers-Ulam, et, au sens de Hyers-Ulam-Rassias, de l'équation fonctionnelle (5.1).

Théorème 5.3.1 *Soient E un groupe abélien, F un espace de Banach et $f : E \to F$ une application vérifiant l'inégalité*

$$\|f(kx+y) + f(kx+\sigma(y)) - 2k^2 f(x) - 2f(y)\| \leq \delta \tag{5.16}$$

pour $\delta \geq 0$ et pour tout $x, y \in E$. Alors, il existe une unique application $q : E \to F$, solution de (5.1), satisfaisant

$$\|f(x) - q(x)\| \leq \frac{k^2+1}{2k^2(k^2-1)}\delta \tag{5.17}$$

pour tout $x \in E$.

Preuve. En prenant $y = 0$ (resp., $x = y = 0$) dans (5.16), nous obtenons respectivement

$$\|f(x) - \frac{1}{k^2}\{f(kx) - f(0)\}\| \leq \frac{\delta}{2k^2}, \quad x \in E, \tag{5.18}$$

$$\|f(0)\| \leq \frac{\delta}{2k^2}, \ x \in E. \tag{5.19}$$

Par l'inégalité triangulaire, nous déduisons

$$\|f(x) - \frac{1}{k^2}\{f(kx)\}\| \leq \frac{\delta}{2k^2} + \frac{\delta}{2k^4}, \quad x \in E. \tag{5.20}$$

Par récurrence sur n, nous prouvons

$$\|f(x) - \frac{1}{k^{2n}}\{f(k^n x)\}\| \leq \frac{\delta}{2k^2}(1+\frac{1}{k^2})[1+\frac{1}{k^2}+\ldots+\frac{1}{k^{2(n-1)}}] \tag{5.21}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. De (5.20), il s'ensuit que (5.21) est vraie pour $n = 1$. Supposons (5.21) vraie à l'ordre n. De l'inégalité triangulaire et de (5.21), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|f(x)-&\frac{1}{k^{2(n+1)}}\{f(k^{n+1}x)\}\| \\
&\leq \|f(x) - \frac{1}{k^{2n}}\{f(k^n x)\}\| + \frac{1}{k^{2n}}\|f(k^n x) - \frac{1}{k^2}\{f(k^{n+1}x)\}\| \\
&\leq \frac{\delta}{2k^2}(1 + \frac{1}{k^2})[1 + \frac{1}{k^2} + \ldots + \frac{1}{k^{2(n-1)}}] + \frac{1}{k^{2n}}\frac{\delta}{2k^2}(1 + \frac{1}{k^2}) \\
&= \frac{\delta}{2k^2}(1 + \frac{1}{k^2})[1 + \frac{1}{k^2} + \ldots + \frac{1}{k^{2n}}],
\end{aligned}$$

ce qui prouve la validité de l'inégalité (5.21).
Nous définissons la suite des fonctions

$$f_n(x) = \frac{1}{k^{2n}}\{f(k^n x)\}, \ \ x \in E, \ n \in \mathbb{N}.$$

Nous montrons : $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour chaque $x \in E$. En effet, à l'aide de (5.20) nous tirons

$$\begin{aligned}
\|f_{n+1}(x) - f_n(x)\| =& \|\frac{1}{k^{2(n+1)}}\{f(k^{n+1}x)\} - \frac{1}{k^{2n}}\{f(k^n x)\}\| \\
=& \frac{1}{k^{2n}}\|f(k^n x) - \frac{1}{k^2}\{f(k^{n+1}x)\}\| \\
\leq& \frac{\delta}{2k^2}(1 + \frac{1}{k^2})\frac{1}{k^{2n}}.
\end{aligned}$$

Etant donné $\frac{1}{k} < 1$, il s'ensuit que $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour chaque $x \in E$. Comme F est un espace complet, alors la fonction limite $q(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ existe pour chaque $x \in E$.
Nous prouvons, à présent, q est solution de l'équation (5.1).
Soient x et y deux éléments de E. De (5.16) et de la définition de la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, il en résulte que

$$\begin{aligned}
\|f_n(kx + y)+&f_n(kx + \sigma(y)) - 2k^2 f_n(x) - 2f_n(y)\| \\
&= \frac{1}{k^{2n}}\|f(kk^n x + k^n y) + f(kk^n x + \sigma(k^n y)) - 2k^2 f(k^n x) - 2f(k^n y)\| \\
&\leq \frac{\delta}{k^{2n}}.
\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, nous obtenons l'égalité

$$q(kx + y) + q(kx + \sigma(y)) = 2k^2 q(x) + 2q(y), \ x, y \in E.$$

Supposons qu'il existe deux applications $q_i : E \to F$ $(i = 1, 2)$ satisfaisant (5.1) et (5.17). Par récurrence sur n, nous pouvons facilement vérifier

$$q_i(k^n x) = k^{2n} q_i(x), \ (i = 1, 2). \tag{5.22}$$

Pour tout $x \in E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\|q_1(x) - q_2(x)\| &= \frac{1}{k^{2n}}\|q_1(k^n x) - q_2(k^n x)\| \\ &\leq \frac{1}{k^{2n}}\|q_1(k^n x) - f(k^n x)\| + \frac{1}{k^{2n}}\|q_2(k^n x) - f(k^n x)\| \\ &\leq \frac{k^2+1}{k^{2(n+1)}(k^2-1)}\delta.\end{aligned}$$

Si $n \longrightarrow +\infty$, nous avons $q_1(x) = q_2(x)$ pour tout $x \in E$, ce qui complète la preuve du théorème. ♠

En utilisant le Théorème 5.3.1 et le Corollaire 5.2.2, nous obtenons le résultat suivant :

Corollaire 5.3.2 *[103] Soient E un espace vectoriel, F un espace de Banach et $f : E \to F$ une application vérifiant l'inégalité*

$$\|f(kx + y) + f(kx - y) - 2k^2 f(x) - 2f(y)\| \leq \delta \tag{5.23}$$

pour $\delta \geq 0$ et pour tout $x, y \in E$. Alors, il existe une unique application $q : E \to F$, solution de (5.2), vérifiant

$$\|f(x) - q(x)\| \leq \frac{\delta}{2k^2}\frac{k^2+1}{k^2-1}, \ \ x \in E. \tag{5.24}$$

Théorème 5.3.3 *Soient E un espace vectoriel et F un espace de Banach. Supposons que l'application $f : E \to F$ satisfait l'inégalité*

$$\|f(kx + y) + f(kx + \sigma(y)) - 2k^2 f(x) - 2f(y)\| \leq \theta(\|x\|^p + \|y\|^p) \tag{5.25}$$

pour $\theta \geq 0$, $p \in]0, 2[$ et pour tout $x, y \in E$. Alors, il existe une unique application $q : E \to F$, solution de l'équation fonctionnelle (5.1) telle que

$$\|f(x) - q(x)\| \leq \frac{\theta}{2(k^2 - k^p)}\|x\|^p \tag{5.26}$$

pour tout $x \in E$.

Preuve. Supposons que f satisfait l'inégalité (5.25). Posons $x = y = 0$ dans (5.25), nous avons $f(0) = 0$. Prenons $y = 0$ dans (5.25), nous obtenons

$$\|2f(kx) - 2k^2 f(x)\| \leq \theta\|x\|^p \tag{5.27}$$

pour tout $x \in E$. Alors
$$\|f(x) - \frac{1}{k^2} f(kx)\| \leq \frac{\theta}{2k^2} \|x\|^p \tag{5.28}$$
pour tout $x \in E$.
Par récurrence sur n nous vérifions
$$\|f(x) - \frac{1}{k^{2n}} f(k^n x)\| \leq \frac{\theta}{2k^2} [1 + \frac{1}{k^{2-p}} + \ldots + \frac{1}{k^{(n-1)(2-p)}}] \|x\|^p, \tag{5.29}$$
est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ensuite, nous montrons que la suite des fonctions $f_n(x) = \frac{1}{k^{2n}} f(k^n x)$ est une suite de Cauchy pour chaque $x \in E$. En utilisant l'inégalité (5.28), nous déduisons
$$\begin{aligned}
\|f_{n+1}(x) - f_n(x)\| &= \|\frac{1}{k^{2(n+1)}} f(k^{n+1}x) - \frac{1}{k^{2n}} f(k^n x)\| \\
&= \frac{1}{k^{2n}} \|f(k^n x) - \frac{1}{k^2} f(k^{n+1} x)\| \\
&\leq \frac{1}{k^{n(2-p)}} \frac{\theta}{2k^2} \|x\|^p.
\end{aligned}$$
Par conséquent, $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour chaque $x \in E$. Comme F est un espace complet, la fonction limite $q(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existe pour chaque $x \in E$.
Montrons, à présent, que q est solution de l'équation (5.1). En effet,
$$\begin{aligned}
&\|f_n(kx+y) + f_n(kx+\sigma(y)) - 2k^2 f_n(x) - 2f_n(y)\| \\
&\qquad = \frac{1}{k^{2n}} \|f(kk^n x + k^n y) + f(kk^n x + \sigma(k^n y)) - 2k^2 f(k^n x) - 2f(k^n y)\| \\
&\qquad \leq \frac{\theta}{k^{n(2-p)}} (\|x\|^p + \|y\|^p).
\end{aligned}$$
En faisant tendre $n \to +\infty$, nous obtenons le résultat désiré.
L'unicité de l'application q peut être prouvée en utilisant des arguments similaires à ceux de la preuve du théorème précédent. Ce qui achève la preuve du théorème. ♠

Corollaire 5.3.4 *[103] Soient E un espace normé et F un espace de Banach. Supposons que la fonction $f : E \to F$ satisfait l'inégalité*
$$\|f(kx+y) + f(kx-y) - 2k^2 f(x) - 2f(y)\| \leq \theta(\|x\|^p + \|y\|^p) \tag{5.30}$$
pour $\theta \geq 0$, $p \in]0, 2[$ et pour tout $x, y \in E$. Alors, il existe une unique application $q : E \to F$, solution de l'équation fonctionnelle des quadratiques (5.2), vérifiant l'inégalité
$$\|f(x) - q(x)\| \leq \frac{\theta}{2(k^2 - k^p)} \|x\|^p \tag{5.31}$$
pour tout $x \in E$.

Théorème 5.3.5 *Soient E un espace normé, F un espace de Banach et $f : E \to F$ une application qui vérifie l'inégalité (5.25) pour $\theta \geq 0$, $p > 2$ (données) et pour tout $x, y \in E$. Alors, il existe une unique application $q : E \to F$, solution de l'équation fonctionnelle (5.1) et qui satisfait*

$$\|f(x) - q(x)\| \leq \frac{\theta}{2(k^p - k^2)}\|x\|^p \tag{5.32}$$

pour tout $x \in E$.

Corollaire 5.3.6 *[103] Soient E un espace normé et F un espace de Banach. Supposons que la fonction $f : E \to F$ satisfait l'inégalité*

$$\|f(kx + y) + f(kx - y) - 2k^2 f(x) - 2f(y)\| \leq \theta(\|x\|^p + \|y\|^p) \tag{5.33}$$

pour $\theta \geq 0$, $p > 2$ et pour tout $x, y \in E$. Alors, il existe une unique application $q : E \to F$, solution de l'équation fonctionnelle (5.2), vérifiant

$$\|f(x) - q(x)\| \leq \frac{\theta}{2(k^p - k^2)}\|x\|^p \tag{5.34}$$

pour tout $x \in E$.

5.4 Stabilité de l'équation généralisée des quadratiques en utilisant l'alternative du point fixe

Soient $k \geq 2$ un entier positif fixé et $\sigma : E_1 \to E_1$ une involution. En se basant sur l'alternative du point fixe, nous prouvons la stabilité, au sens de Hyers-Ulam-Rassias, de l'équation fonctionnelle (5.1).

Théorème 5.4.1 *Soient E_1 un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et E_2 un espace β-normé complet sur $\mathbb{K}$, où β est un nombre réel fixé avec $0 < \beta \leq 1$. Supposons que $\varphi : E_1 \times E_1 \to \mathbb{R}^+$ est une fonction donnée et qu'il existe une constante L, $0 < L < 1$, telles que*

$$\varphi(kx, 0) \leq k^{2\beta} L\varphi(x, 0) \tag{5.35}$$

pour tout $x \in E_1$. De plus, soit $f : E_1 \longrightarrow E_2$ une fonction avec $f(0) = 0$ satisfaisant

$$\|f(kx + y) + f(kx + \sigma(y)) - 2k^2 f(x) - 2f(y)\|_\beta \leq \varphi(x, y) \tag{5.36}$$

pour tout $x, y \in E_1$. Si φ satisfait

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\varphi(k^n x, k^n y)}{k^{2n\beta}} = 0 \tag{5.37}$$

pour tout $x, y \in E_1$. Alors, il existe une unique application $q : E_1 \to E_2$, solution de (5.1), vérifiant

$$\|f(x) - q(x)\|_\beta \leq \frac{1}{2^\beta k^{2\beta}} \frac{1}{1-L} \varphi(x, 0) \tag{5.38}$$

pour tout $x \in E_1$.

Preuve. Définissons l'ensemble X par : $X := \{g : E_1 \longrightarrow E_2\}$ et introduisons une distance généralisée dans X comme suit :

$$d(g, h) = \inf\{C \in [0, \infty) : \|g(x) - h(x)\|_\beta \leq C\varphi(x, 0),\ \forall x \in E_1\}.$$

Nottons que (X, d) est un espace complet (voir Théorème 3.2.1, Chapitre 3).
Maintenant, nous définissons l'opérateur $J : X \longrightarrow X$ qui vérifie

$$Jh(x) = \frac{1}{k^2} f(kx) \tag{5.39}$$

pour tout $x \in E_1$, et nous affirmons que J est un opérateur strictement contractif sur X avec la constante de Lipschitz L. Soient $g, h \in X$ et $C \in [0, \infty)$ une constante avec $d(g, h) \leq C$ telles que

$$\|g(x) - h(x)\|_\beta \leq C\varphi(x, 0) \tag{5.40}$$

pour tout $x \in E_1$. Il en résulte de (5.40) et (5.35) :

$$\begin{aligned}
\|(Jg)(x) - (Jh)(x)\|_\beta &= \frac{1}{k^{2\beta}} \|g(kx) - h(kx)\|_\beta \\
&\leq \frac{C}{k^{2\beta}} \varphi(kx, 0) \\
&\leq LC\varphi(x, 0)
\end{aligned}$$

pour tout $x \in E_1$. Alors, $d(Jg, Jh) \leq LC$, c'est pourquoi nous concluons que $d(Jg, Jh) \leq Ld(g, h)$ pour tout $g, h \in X$.
Maintenant, en remplaçant y par 0 dans (5.36) et en divisant les deux côtés de la nouvelle inégalité par $2k^2$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^\beta k^{2\beta}} \|2f(kx) - 2f(k^2 x)\|_\beta &= \|\frac{1}{k^2} f(kx) - f(x)\|_\beta \\
&= \|(Jf)(x) - f(x)\|_\beta \\
&\leq \frac{1}{2^\beta k^{2\beta}} \varphi(x, 0)
\end{aligned}$$

pour tout $x \in E_1$ et nous affirmons que

$$d((Jf)(x), f) \leq \frac{1}{2^\beta k^{2\beta}} < \infty. \tag{5.41}$$

D'après le Théorème 3.1.2, il existe une application $q : E_1 \longrightarrow E_2$ vérifiant :

i) q est un point fixe de J, tel que $q(kx) = k^2 q(x)$ pour tout $x \in E_1$. L'application q est l'unique point fixe de J dans l'ensemble $Y = \{g \in X : d(Jf, g) < \infty\}$.

ii) $d(J^n f, q) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Ce qui implique l'existence d'une suite C_n telle que $C_n \to 0$ quand $n \to +\infty$ avec

$$\|J^n f(x) - q(x))\|_\beta \leq C_n \varphi(x, 0) \tag{5.42}$$

pour tout $x \in E_1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, nous obtenons

$$q(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{k^{2n}} f(k^n x) \tag{5.43}$$

pour tout $x \in E_1$.

iii)

$$d(f, q) \leq \frac{1}{1-L} d(Jf, f) \leq \frac{1}{2^\beta k^{2\beta}} \frac{1}{1-L}, \tag{5.44}$$

ce qui prouve l'inégalité (5.38).

Maintenant, nous prouvons que q est solution de l'équation fonctionnelle généralisée des quadratiques (5.1). Il résulte de (5.36), (5.43) et de (5.37)

$$\begin{aligned}
&\|q(kx+y) + q(kx+\sigma(y)) - 2k^2 q(x) - 2q(y)\|_\beta \\
&\quad = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{k^{2n\beta}} \|f(kk^n x + k^n y) + f(kk^n x + \sigma(k^n y)) - 2k^2 f(k^n x) - 2f(k^n y)\|_\beta \\
&\quad \leq \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{k^{2n\beta}} \varphi(k^n x, k^n y) = 0
\end{aligned}$$

pour tout $x, y \in E_1$, ce qui implique le résultat souhaité.

Supposons que $q_1 : E_1 \longrightarrow E_2$ est une autre solution de (5.1) satisfaisant (5.38), en particulier, q_1 satisfait $q_1(kx) = k^2 q(x)$, alors q_1 est un point fixe de J. De la définition de la distance d et de l'inégalité (5.38), l'assertion (5.44) est encore vraie avec q_1 à la place de q. En utilisant le Théorème 3.1.2, nous obtenons l'unicité de q. Ce qui complète la preuve du théorème. ♠

Corollaire 5.4.2 *([116], $k = 2$ et $\sigma = -I$) Soient E_1 un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et E_2 un espace β-normé complet sur $\mathbb{K}$, où β est un nombre réel fixé avec $0 < \beta \leq 1$. Supposons que $\varphi : E_1 \times E_1 \to \mathbb{R}^+$ est une fonction donnée et qu'il existe une constante L, $0 < L < 1$, vérifiant*

$$\varphi(2x, 0) \leq 2^{2\beta} L \varphi(x, 0) \tag{5.45}$$

pour tout $x \in E_1$. De plus, soit $f : E_1 \longrightarrow E_2$ une fonction avec $f(0) = 0$ qui satisfait

$$\|f(2x+y) + f(2x-y) - 8f(x) - 2f(y)\|_\beta \leq \varphi(x, y) \tag{5.46}$$

pour tout $x, y \in E_1$. *Si* φ *satisfait*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\varphi(2^n x, 2^n y)}{2^{2n\beta}} = 0 \tag{5.47}$$

pour tout $x, y \in E_1$, *alors il existe une unique application* $q : E_1 \to E_2$, *solution de l'équation (5.2), vérifiant*

$$\|f(x) - q(x)\|_\beta \leq \frac{1}{2^\beta 2^{2\beta}} \frac{1}{1-L} \varphi(x, 0) \tag{5.48}$$

pour tout $x \in E_1$.

Corollaire 5.4.3 *Soient* $0 < p < 2$ *et* $\theta \geq 0$ *des nombres réels positifs et prenons une constante* β *avec* $0 < \dfrac{p}{2} < \beta \leq 1$. *Soient* E_1 *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *et* E_2 *un espace* β*-normé complet sur* $\mathbb{K}$. *Si* $f : E_1 \longrightarrow E_2$ *est une application vérifiant*

$$\|f(kx + y) + f(kx + \sigma(y)) - 2k^2 f(x) - 2f(y)\|_\beta \leq \theta(\|x\|^p + \|y\|^p) \tag{5.49}$$

pour tout $x, y \in E_1$, *alors il existe une unique application* $q : E_1 \longrightarrow E_2$, *solution de l'équation (5.1) qui satisfait*

$$\|f(x) - q(x)\|_\beta \leq \frac{\theta}{2^\beta(k^{2\beta} - k^p)} \|x\|^p \tag{5.50}$$

pour tout $x \in E_1$.

Preuve. Si nous fixons $L = \dfrac{k^p}{k^{2\beta}}$ alors, $0 < L < 1$ et nous prenons

$$\varphi(x, y) = \theta(\|x\|^p + \|y\|^p) = k^{2\beta-p} L\theta(\|x\|^p + \|y\|^p),\ x, y \in E_1.$$

En prenant $x = 0$ et $y = 0$ dans (5.49), nous avons $\|2k^2 f(0)\|_\beta \leq 0$ alors, $f(0) = 0$. Selon le Théorème 5.4.1, il existe une unique solution $q : E_1 \longrightarrow E_2$ de l'équation (5.1) où (5.50) est vérifiée pour tout $x \in E_1$ et la preuve du corollaire est achevée. ♠

Dans ce qui suit, nous supprimons l'hypothèse : $f(0) = 0$.

Théorème 5.4.4 *Soient* E_1 *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *et* E_2 *un espace* β*-normé complet sur* $\mathbb{K}$, *où* β *est un nombre réel fixé* $0 < \beta \leq 1$. *Supposons que* $\varphi : E_1 \times E_1 \to \mathbb{R}^+$ *une fonction et L une constante avec* $\dfrac{1}{k^{2\beta}} \leq L < 1$, *telles que*

$$\varphi(kx, 0) \leq k^{2\beta} L\varphi(x, 0) \tag{5.51}$$

pour tout $x \in E_1$. *De plus, soit* $f : E_1 \longrightarrow E_2$ *une fonction qui satisfait*

$$\|f(kx + y) + f(kx + \sigma(y)) - 2k^2 f(x) - 2f(y)\|_\beta \leq \varphi(x, y) \tag{5.52}$$

pour tout $x, y \in E_1$. Si φ vérifie

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\varphi(k^n x, k^n y)}{k^{2n\beta}} = 0 \tag{5.53}$$

pour tout $x, y \in E_1$, alors il existe une unique application $q : E_1 \to E_2$, solution de (5.1), vérifiant

$$\|f(x) - q(x) - f(0)\|_\beta \leq \frac{1}{2^\beta k^{2\beta}} \frac{1}{1-L} (\varphi(0,0) + \varphi(x,0)) \tag{5.54}$$

pour tout $x \in E_1$.

Preuve. Si nous prenons $x = 0$ et $y = 0$ dans (5.52), alors nous obtenons $\|2k^2 f(0)\|_\beta \leq \varphi(0,0)$. Par l'utilisation des nouvelles fonctions $g(x) = f(x) - f(0)$ et $\psi(x,y) = \varphi(x,y) + \varphi(0,0)$, nous déduisons

$$\|g(kx+y) + g(kx+\sigma(y)) - 2k^2 g(x) - 2g(y)\| \leq \psi(x,y),\ x, y \in E_1.$$

$\psi(kx,0) = \varphi(0,0) + \varphi(kx,0) \leq \varphi(0,0) + k^{2\beta} L\varphi(x,0) \leq k^{2\beta} L(\varphi(0,0) + \varphi(x,0)) = k^{2\beta} L\psi(x,0)$, car $1 \leq k^{2\beta} \leq L$. De plus, $\dfrac{\psi(k^n x, k^n y)}{k^{2n\beta}} \to 0$ quand $n \to +\infty$. D'après le Théorème 5.4.1, nous obtenons le reste de la preuve. ♠

Par une preuve similaire, en se basant sur l'alternative du point fixe, nous pouvons prouver le théorème suivant :

Théorème 5.4.5 *Soient E_1 un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et E_2 un espace β-normé complet sur $\mathbb{K}$, où β est un nombre réel fixé $0 < \beta \leq 1$. Supposons $\varphi : E_1 \times E_1 \to \mathbb{R}^+$ une fonction et une constante L, $0 < L < 1$, telles que*

$$\varphi(x,0) \leq \frac{L}{k^{2\beta}} \varphi(kx,0) \tag{5.55}$$

pour tout $x \in E_1$. De plus, soit $f : E_1 \longrightarrow E_2$ une fonction avec $f(0) = 0$ qui vérifie

$$\|f(kx+y) + f(kx+\sigma(y)) - 2k^2 f(x) - 2f(y)\|_\beta \leq \varphi(x,y) \tag{5.56}$$

pour tout $x, y \in E_1$. Si φ satisfait

$$\lim_{n\to+\infty} k^{2n\beta} \varphi\left(\frac{x}{k^n}, \frac{y}{k^n}\right) = 0 \tag{5.57}$$

pour tout $x, y \in E_1$, alors il existe une unique application $q : E_1 \to E_2$, solution de (5.1), vérifiant

$$\|f(x) - q(x)\|_\beta \leq \frac{1}{2^\beta k^{2\beta}} \frac{L}{(1-L)} + \varphi(x,0) \tag{5.58}$$

pour tout $x \in E_1$.

Preuve. Nous utilisons les mêmes définitions de l'ensemble X et de la distance d comme dans la preuve du Théorème 5.4.1. Ainsi, (X, d) est un espace complet. En outre, nous définissons l'opérateur $J : X \to X$ par

$$Jh(x) = k^2 f(\frac{x}{k}) \tag{5.59}$$

pour tout $x \in E_1$. Par récurrence sur n, nous montrons

$$J^n f(x) = k^{2n} f(\frac{x}{k^n}) \tag{5.60}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En appliquant les mêmes arguments que ceux de la preuve du Théorème 5.4.1, nous déduisons que J est un opérateur strictement contractif. En plus, nous prouvons

$$d(Jf, f) \leq \frac{L}{2^\beta k^{2\beta}}. \tag{5.61}$$

D'après le Théorème 3.1.2, il existe une fonction $q : E_1 \to E_2$, point fixe de J, vérifiant

$$q(x) = \lim_{n\to+\infty} k^{2n} f(\frac{x}{k^n}) \tag{5.62}$$

pour tout $x \in E_1$. D'une manière similaire à la preuve du Théorème 5.4.1, nous montrons que q est solution de l'équation (5.1).
En utilisant le Théorème 3.1.2 (4) et l'inégalité (5.61), nous obtenons

$$d(f, q) \leq \frac{1}{2^\beta k^{2\beta}} \frac{L}{1-L}, \tag{5.63}$$

ce qui implique la validité de (5.58). L'unicité de q peut être obtenue en utilisant des arguments similaires à ceux de la preuve du Théorème 5.4.1. Ce qui complète la preuve du théorème. ♠

Corollaire 5.4.6 *([116], k=2, $\sigma = -I$) Soient E_1 un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et E_2 un espace β-normé complet sur $\mathbb{K}$, où β est un nombre fixé $0 < \beta \leq 1$. Supposons que $\varphi : E_1 \times E_1 \to \mathbb{R}^+$ est une fonction et L une constante avec $0 < L < 1$, telles que*

$$\varphi(x, 0) \leq \frac{L}{2^{2\beta}} \varphi(2x, 0) \tag{5.64}$$

pour tout $x \in E_1$. De plus, soit $f : E_1 \longrightarrow E_2$ une fonction avec $f(0) = 0$ qui vérifie

$$\|f(2x + y) + f(2x - y) - 8f(x) - 2f(y)\|_\beta \leq \varphi(x, y) \tag{5.65}$$

pour tout $x, y \in E_1$. Si φ satisfait

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{2n\beta} \varphi(\frac{x}{2^n}, \frac{y}{2^n}) = 0 \tag{5.66}$$

pour tout $x, y \in E_1$, alors il existe une unique application $q : E_1 \to E_2$, solution de (5.5), vérifiant

$$\|f(x) - q(x)\|_\beta \leq \frac{L}{8-8L}\varphi(x,0) \tag{5.67}$$

pour tout $x \in E_1$.

Corollaire 5.4.7 *Soient $p > 2$, $\theta \geq 0$ des nombres réels positifs et β une constante telle que $0 < \beta < \frac{p}{2}$. Soient E_1 un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et E_2 un espace β-normé complet sur $\mathbb{K}$. Si $f : E_1 \longrightarrow E_2$ une application qui satisfait*

$$\|f(kx+y) + f(kx+\sigma(y)) - 2k^2 f(x) - 2f(y)\|_\beta \leq \theta(\|x\|^p + \|y\|^p) \tag{5.68}$$

pour tout $x, y \in E_1$. Alors, il existe une unique solution $q : E_1 \longrightarrow E_2$ de l'équation (5.1), vérifiant

$$\|f(x) - q(x)\|_\beta \leq \frac{\theta}{2^\beta(k^p - k^{2\beta})}\|x\|^p \tag{5.69}$$

pour tout $x \in E_1$.

5.5 Stabilité de l'équation généralisée des quadratiques au sens de Hyers-Ulam dans les domaines non bornés

Dans cette section, nous examinons la stabilité, au sens de Hyers-Ulam, de l'équation (5.1) dans les domaines non bornés : $\{(x,y) \in E^2 : \|x\| + \|y\| \geq d\}$ et $\{(x,y) \in E^2 : \|x\|^p + \|y\|^p \geq M^p\}$.

Théorème 5.5.1 *Soit $d > 0$ donné. Supposons que l'application $f : E \to F$ satisfait l'inégalité*

$$\|f(kx+y) + f(kx+\sigma(y)) - 2k^2 f(x) - 2f(y)\| \leq \delta \tag{5.70}$$

pour tout $x, y \in E$ avec $\|x\| + \|y\| \geq d$. Alors, il existe une unique application $Q : E \to F$, solution de l'équation (5.1), vérifiant

$$\|f(x) - Q(x)\| \leq \frac{2(k^2+1)}{k^2(k^2-1)}\delta \tag{5.71}$$

pour tout $x \in E$.

Preuve. Soit $x, y \in E$ avec $0 < \|x\| + \|y\| < d$. Nous choisissons $z = 2^n x$ si $x \neq 0$, ou $z = 2^n y$ si $y \neq 0$, avec n assez grand.
De toute évidence, nous voyons que

$$\|\frac{z}{k}\| + \|kx+y\| \geq d, \ \|\frac{z}{k}\| + \|kx+\sigma(y)\| \geq d, \ \|x\| + \|z+\sigma(y)\| \geq d,$$

$$\|x\|+\|y+z\|\geq d,\ \|\frac{z}{k}\|+\|y\|\geq d,\ \|kx+y+\sigma(z)\|\geq d,\ \|kx+\sigma(y)+\sigma(z)\|\geq d.$$

De l'inégalité (5.70), l'inégalité trianglaire et de l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
&2[f(kx+y)+f(kx+\sigma(y))-2k^2f(x)-2f(y)]\\
&=-\,[f(z+kx+y)+f(z+\sigma(kx)+\sigma(y))-2k^2f(\frac{z}{k})-2f(kx+y)]\\
&\quad-[f(z+kx+\sigma(y))+f(z+\sigma(kx)+y)-2k^2f(\frac{z}{k})-2f(kx+\sigma(y))]\\
&\quad+[f(kx+z+\sigma(y))+f(kx+\sigma(z)+y)-2k^2f(x)-2f(z+\sigma(y))]\\
&\quad+[f(kx+y+z)+f(kx+\sigma(y)+\sigma(z))-2k^2f(x)-2f(y+z)]\\
&\quad+2[f(z+y)+f(z+\sigma(y))-2k^2f(\frac{z}{k})-2f(y)]\\
&\quad+[f(z+\sigma(kx)+\sigma(y))-f(kx+y+\sigma(z))]-2k^2f(0)\\
&\quad+[f(\sigma(kx)+z+y)-f(kx+\sigma(y)+\sigma(z))]+2k^2f(0),
\end{aligned}$$

nous obtenons

$$\|f(kx+y)+f(kx+\sigma(y))-2k^2f(x)-2f(y)\|\leq 4\delta$$

pour tout $x,y\in E$ avec $x\neq 0$ et $y\neq 0$.
Si $x=y=0$, nous prenons $z\in E$ tel que $\|z\|=kd$ et de l'équation :

$$\begin{aligned}
&2[f(0)+f(0)-2k^2f(0)-2f(0)]\\
&\qquad=[f(z)+f(\sigma(z))-2k^2f(0)-2f(z)]\\
&\qquad\quad+[f(z)-f(\sigma(z))-2k^2f(0)],
\end{aligned}$$

nous déduisons

$$\|2k^2f(0)\|\leq\delta.$$

D'où, l'inégalité

$$\|f(kx+y)+f(kx+\sigma(y))-2k^2f(x)-2f(y)\|\leq 4\delta \tag{5.72}$$

est vérifiée pour tout $x,y\in E$. Par conséquent, en utilisant le Théorème 5.3.1, le reste de la preuve s'ensuit. ♠

Corollaire 5.5.2 *($\sigma=-I$) Soit $d>0$ donné. Supposons que l'application $f:E\to F$ satisfait l'inégalité*

$$\|f(kx+y)+f(kx-y)-2k^2f(x)-2f(y)\|\leq\delta \tag{5.73}$$

pour tout $x,y\in E$ avec $\|x\|+\|y\|\geq d$. Alors, il existe une unique application $Q:E\to F$, solution de l'équation (5.2), vérifiant

$$\|f(x)-Q(x)\|\leq\frac{2(k^2+1)}{k^2(k^2-1)}\delta \tag{5.74}$$

pour tout $x\in E$.

Corollaire 5.5.3 *L'application $f : E \to F$ est solution de l'équation (5.1), si et seulement si*

$$\|f(kx+y) + f(kx+\sigma(y)) - 2k^2 f(x) - 2f(y)\| \to 0, \tag{5.75}$$

quand $\|x\| + \|y\| \to +\infty$.

Preuve. Supposons que la condition asymptotique (5.75) est vérifiée, alors il existe $(\delta_n)_n$ une suite décroissante vers zéro telle que

$$\|f(kx+y) + f(kx+\sigma(y)) - 2k^2 f(x) - 2f(y)\| \leq \delta_n \tag{5.76}$$

pour tout $x, y \in E$ avec $\|x\| + \|y\| \geq n$. D'après le Théorème 5.5.1, il existe une unique application $Q_n : E \to F$ solution de l'équation (5.1), vérifiant

$$\|f(x) - Q_n(x)\| \leq \frac{2(k^2+1)}{k^2(k^2-1)}\delta_n \tag{5.77}$$

pour tout $x \in E$.
Soient n et m deux entiers positifs tels que $m > n > 0$. Comme $(\delta_n)_n$ est décroissante, la solution Q_m satisfait

$$\|f(x) - Q_m(x)\| \leq \frac{2(k^2+1)}{k^2(k^2-1)}\delta_m \leq \frac{2(k^2+1)}{k^2(k^2-1)}\delta_n \tag{5.78}$$

pour tout $x \in E$. L'unicité de Q_n entraine que $Q_n = Q_m$ pour tout $m, n \in \mathbb{N}$.
En faisant tendre $n \to +\infty$, nous obtenons que f est solution de l'équation généralisée des quadratiques (5.1). La réciproque se déduit d'une manière évidente, ce qui complète la preuve du corollaire. ♠

Corollaire 5.5.4 *L'application $f : E \to F$ est solution de l'équation (5.2), si et seulement si*

$$\|f(kx+y) + f(kx-y) - 2k^2 f(x) - 2f(y)\| \to 0, \tag{5.79}$$

quand $\|x\| + \|y\| \to +\infty$.

Corollaire 5.5.5 *[85] L'application $f : E \to F$ est solution de l'équation (5.4), si et seulement si*

$$\|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) - 2f(y)\| \to 0, \tag{5.80}$$

quand $\|x\| + \|y\| \to +\infty$.

En tenant compte de quelques idées utilisées dans les travaux réalisés par F. Skof [158], D. H. Hyers et al. [79] et A. Rahimi et al. [126], la stabilité, au sens de Hyers-Ulam-Rassias, de l'équation fonctionnelle généralisée des quadratiques (5.1) sera étudiée dans le domaine non borné : $\{(x, y) \in E^2 : \|x\|^p + \|y\|^p \geq M^p\}$.

Théorème 5.5.6 *Soient un espace normé réel E_1, un espace de Banach réel E_2, $M > 0$, $\epsilon > 0$ et prenons p, k avec $< p < 2$ et $k \geq 2$. Soit $f : E_1 \longrightarrow E_2$ une application avec $f(0) = 0$ satisfaisant*

$$\|f(kx + y) + f(kx + \sigma(y)) - 2k^2 f(x) - 2f(y)\| \leq \delta + \epsilon(\|x\|^p + \|y\|^p) \tag{5.81}$$

pour tout $x, y \in E_1$ avec $\|x\|^p + \|y\|^p \geq M^p$. Alors, il existe une unique application $Q : E_1 \longrightarrow E_2$, solution de l'équation (5.1), vérifiant

$$\|f(x) - Q(x)\| \leq \frac{\delta}{2(k^2 - 1)} + \frac{\epsilon}{2(k^2 - k^p)}\|x\|^p \tag{5.82}$$

pour tout $x \in E_1$ avec $\|x\| \geq M$.

Preuve. Prenons $y = 0$ dans (5.81), nous obtenons

$$\|f(kx) - k^2 f(x)\| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\epsilon}{2}\|x\|^p \tag{5.83}$$

pour tout $x \in E_1$ avec $\|x\| \geq M$. Si nous remplaçons x par $k^n x$ dans (5.83) et nous divisons les deux côtés de cette inégalité par $k^{2(n+1)}$, nous déduisons

$$\|\frac{f(k^{n+1}x)}{k^{2(n+1)}} - \frac{f(k^n x)}{k^{2n}}\| \leq \frac{1}{k^{2(n+1)}}\frac{\delta}{2} + \frac{\epsilon}{2k^2}k^{n(p-2)}\|x\|^p \tag{5.84}$$

pour tout $x \in E_1$ avec $\|x\| \geq M$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, nous tirons

$$\|\frac{f(k^{n+1}x)}{k^{2(n+1)}} - \frac{f(k^m x)}{k^{2m}}\| \leq \sum_{j=m}^{n} \|\frac{f(k^{j+1}x)}{k^{2(j+1)}} - \frac{f(k^j x)}{k^{2j}}\| \leq \frac{\delta}{2}\frac{1}{k^2}\sum_{j=m}^{n}\frac{1}{k^{2j}} + \frac{\epsilon}{2k^2}\|x\|^p \sum_{j=m}^{n} k^{j(p-2)} \tag{5.85}$$

pour tout $x \in E_1$ avec $\|x\| \geq M$ et pour tout entier $n \geq m \geq 0$. De (5.85), nous déduisons que le suite $\{k^{-2n} f(k^n x)\}_n$ converge pour tout $x \in E_1$ avec $\|x\| \geq M$, et cette limite $\psi(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(k^n x)}{k^{2n}}$ existe lorsque $\|x\| \geq M$.
Il est facile de vérifier que

$$\psi(kx) = k^2\psi(x), \text{ quand } \|x\| \geq M. \tag{5.86}$$

Prenons $m = 0$ et $n \to +\infty$ dans (5.85), nous obtenons

$$\|f(x) - \psi(x)\| \leq \frac{\delta}{2(k^2 - 1)} + \frac{1}{k^2 - k^p}\frac{\epsilon}{2}\|x\|^p \tag{5.87}$$

pour tout $x \in E_1$ avec $\|x\| \geq M$.
Supposons que $\|x\|$, $\|y\|$, $\|kx + y\|$ et $\|kx + \sigma(y)\|$ sont tous supérieures à M. Alors, de (5.81) et de la définition de ψ, nous avons

$$\psi(kx + y) + \psi(kx + \sigma(y)) = 2k^2\psi(x) + 2\psi(y). \tag{5.88}$$

En utilisant [79], [158] et [126], nous pouvons étendre ψ sur tout l'espace E_1. Soient $x \in E_1$ avec $0 < \|x\| < M$, et $s = s(x)$ désigne le plus grand entier tel que $M \leq k^s\|x\| < k^{\frac{2}{p}}M$. Définissons l'application $Q : E_1 \longrightarrow E_2$ comme suit :

$$\begin{cases} Q(0) = 0, \\ \dfrac{\psi(k^s x)}{k^{2s}}, \text{ pour } 0 < \|x\| < M \text{ avec } s = s(x), \\ \psi(x), \text{ pour } \|x\| \geq M. \end{cases} \tag{5.89}$$

Soient $x \in E_1$ avec $0 < \|x\| < M$ et $s = s(x)$. nous avons deux cas :

Cas 1. Si $k\|x\| \geq M$, nous déduisons de (5.86)

$$Q(kx) = \psi(kx) = \frac{\psi(k^2 x)}{k^2} = k^2\frac{\psi(k^s x)}{k^{2s}} = k^2 Q(x). \tag{5.90}$$

Cas 2. Si $0 < k\|x\| < M$, alors $s-1$ est le plus grand entier tel que $M \leq k^{s-1}\|x\| < k^{\frac{2}{p}}M$

$$Q(kx) = \frac{\psi(k^s x)}{k^{2(s-1)}} = k^2\frac{\psi(k^s x)}{k^{2s}} = k^2 Q(x) \tag{5.91}$$

et nous déduisons $Q(kx) = k^2 Q(x)$ pour tout $x \in E_1$ avec $0 < \|x\| < M$. De (5.86) et de la définition de Q, il s'ensuit que $Q(kx) = k^2 Q(x)$ pour tout $x \in E_1$.

Etant donné $x \in E_1$ avec $x \neq 0$, et choisissons un entier positif m tel que $\|k^m x\| \geq M$. De la définition de Q, nons obtenons

$$Q(x) = \frac{Q(k^m x)}{k^{2m}} = \frac{\psi(k^m x)}{k^{2m}}, \tag{5.92}$$

et de la définition de ψ, nous déduisons

$$Q(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{f(k^{m+n}x)}{k^{2(m+n)}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{f(k^n x)}{k^{2n}} \tag{5.93}$$

pour tout $x \in E_1$ avec $x \neq 0$. Comme $Q(0) = 0$ alors, (5.93) est vraie pour $x = 0$.

Soient $x, y \in E_1$ avec $x \neq 0$, $y \neq 0$. D'après (5.81) et (5.93), nous obtenons

$$Q(kx + y) + Q(kx + \sigma(y)) = 2k^2 Q(x) + 2Q(y). \tag{5.94}$$

Si nous remplaçons y par $\sigma(x)$ dans (5.94), nous avons $Q(x) = Q(\sigma(x))$ pour tout $x \in E_1$ avec $x \neq 0$. Comme $Q(0) = 0$, il en est de même pour $x = 0$. Ce qui implique que (5.94) est vraie pour tout $x, y \in E_1$.

Soit $T : E_1 \longrightarrow E_2$ une autre application, solution de (5.94), satisfaisant (5.82). Soit $x \in E_1$ avec $x \neq 0$ et choisissons un entier positif m tel que $\|k^m x\| \geq M$. Alors

$$\begin{aligned} \|Q(x) - T(x)\| &= \frac{1}{k^{2n}}\|Q(k^n x) - T(k^n x)\| \\ &\leq \|Q(k^n x) - f(k^n x)\| + \|T(k^n x) - f(k^n x)\| \\ &\leq \frac{1}{k^{2n}}\frac{\delta}{k^2 - 1} + \frac{\epsilon}{k^2 - k^p}k^{n(p-2)}\|x\|^p \end{aligned}$$

pour tout $n \geq m$. En faisant tendre $n \to +\infty$, nous avons $Q(x) = T(x)$ pour tout $x \in E_1$ avec $x \neq 0$. Comme $Q(0) = 0$, il en est de même pour $x = 0$. Ce qui achève la preuve du Théorème 5.5.6. ♠

Dans le théorème suivant, nous supprimons l'hypothèse : $f(0) = 0$. Dans ce cas, nous supposons que σ est une involution continue, i.e., $\sigma(rx) = r\sigma(x)$ pour tout $r \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in E_1$.

Théorème 5.5.7 *Soient E_1 un espace normé réel, E_2 un espace de Banach réel, $M \geq 0$, $\epsilon \geq 0$, $\delta \geq 0$ et $p, k > 0$ des constantes telles que $0 < p < 2$ et $k \geq 2$. Soit $f : E_1 \longrightarrow E_2$ une application qui satisfait (5.81), pour tout $x, y \in E_1$ avec $\|x\|^p + \|y\|^p \geq M^p$, alors il existe une unique application $Q : E_1 \longrightarrow E_2$, solution de (5.1) qui vérifie*

$$\|f(x) - Q(x)\| \leq \frac{1}{2k^2(k^2-1)}[(k^2+1)\delta + \epsilon M^p] + \frac{\epsilon}{2(k^2-k^p)}\|x\|^p \tag{5.95}$$

pour tout $x \in E_1$ avec $\|x\| \geq M$.

Preuve. Prenons $y = 0$ dans (5.81), nous obtenons

$$\|f(kx) - k^2 f(x) - f(0)\| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\epsilon}{2}\|x\|^p \tag{5.96}$$

pour tout $x \in E_1$ avec $\|x\| \geq M$. Posons $x = 0$ dans (5.81), nous avons deux cas :

Cas 1. $\sigma = -I$. Nous choisissons $z \in E_1$ avec $\|z\| = M$ et nous obtenons

$$\|f(z) + f(-z) - k^2 f(0) - 2f(z)\| \leq \delta + \epsilon M^p. \tag{5.97}$$

Si nous remplaçons z par $-z$ dans (5.97), nous avons

$$\|f(-z) + f(z) - k^2 f(0) - 2f(-z)\| \leq \delta + \epsilon M^p. \tag{5.98}$$

Faisons la somme (5.97)+(5.98), nous déduisons

$$\|f(0)\| \leq \frac{1}{2k^2}(\delta + \epsilon M^p). \tag{5.99}$$

Cas 2. $\sigma \neq -I$. Alors, il existe $z_0 \in E_1 \setminus \{0\}$ tel que $z_0 + \sigma(z_0) \neq 0$ et nous prenons $z = \dfrac{z_0 + \sigma(z_0)}{\|z_0 + \sigma(z_0)\|}M$. De (5.96), (5.99) et de l'inégalité triangulaire, nous obtenons

$$\|f(kx) - k^2 f(x)\| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\epsilon}{2}\|x\|^p + \frac{[\delta + \epsilon M^p]}{2k^2}. \tag{5.100}$$

Le reste de la preuve s'obtient d'une manière similaire à celle du théorème précédent. ♠

5.6 Problème ouvert

Stabilité dans les domaines non bornés des équations fonctionnelles suivantes :

$$\frac{1}{|K|}\sum_{k\in K} f(x+k\cdot y) = g(x)+h(y),\ x,y\in G,$$

où K est un sous-groupe fini du $Aut(G)$ (le groupe des automorphismes de G), est encore un problème ouvert.

Chapitre 6

Stabilité de l'équation fonctionnelle σ-Drygas au sens de Hyers-Ulam dans les semi-groupes moyennables

6.1 Introduction

Soient G un semi-groupe et E un espace de Banach. Une application $f : G \to E$ est appelée solution de l'équation fonctionnelle σ-Drygas si elle vérifie

$$f(xy) + f(x\sigma(y)) = 2f(x) + f(y) + f(\sigma(y)),\ x, y \in G, \tag{6.1}$$

où $\sigma : G \to G$ est une involution de G.
L'équation fonctionnelle (6.1) est une généralisation de l'équation fonctionnelle de Drygas classique

$$f(xy) + f(xy^{-1}) = 2f(x) + f(y) + f(y^{-1}),\ x, y \in G \tag{6.2}$$

introduite par H. Drygas [43].
L'équation fonctionnelle (6.2) a été étudiée par Gy. Szabo [168], B. R. Ebanks et al. [44] et V. A. Faǐziev et P. K. Sahoo [54]. Les solutions de l'équation (6.1) dans un groupe abélien sont obtenues par H. Stetkær [164].
La stabilité de l'équation fonctionnelle de Drygas (6.2) est obtenue par S.-M. Jung et P. K. Sahoo [92] où G est un espace vectoriel, et par D. L. Yang [179] si G est un groupe abélien.
Récemment, V. A. Faǐziev et P. K. Sahoo [55, 56] ont prouvé la stabilité de l'équation (6.2) sous une condition déduite de la centralilté de la fonction.
Li. L. S, D. Kim et J. Chung [104] ont obtenu la stabilité de l'équation (6.2) dans un espace des fonctions plus générales.
B. Bouikhalene, E. Elqorachi et Th. M. Rassias [21] ont prouvé la stabilité de l'équation (6.1) dans un groupe abélien. Dans la même année, ils ont prouvé [23] la stabilité de l'équation (6.1) dans un groupe non abélien, où σ est un automorphisme involutif de G, i.e., $\sigma \circ \sigma(x) = x$ et

$\sigma(xy)=\sigma(x)\sigma(y)$ pour tout $x,y\in G$.
L. Székelyhidi [171] a donné une extension du résultat de Hyers dans un semi-groupe moyennable en remplaçant la preuve basée sur la méthode directe, donnée par Hyers, par une nouvelle basée sur les moyennes invariantes.
Dans [62], G. L. Forti et J. Sikorska ont prouvé la stabilité de l'équation fonctionnelle de Drygas classique

$$f(xy)+f(xy^{-1})=2f(x)+f(y)+f(y^{-1}),\ x,y\in G$$

dans un groupe G moyennable, sous la condition : f approximativement centrale (i.e., $|f(xy)-f(yx)|\leq\delta$).

Dans ce présent chapitre, nous examinons la stabilité de l'équation fonctionnelle σ-Drygas (6.1), où le domaine G est un semi-groupe moyennable et la fonction f est approximativement centrale.
Les résultats de ce chapitre peuvent être comparer avec ceux obtenus par G. L. Forti et J. Sikorska [62] parce que nous les formulerons de la même manière : Par contre, nous travaillons avec une involution générale σ du semi-groupe G.

Rappellons qu'un semi-groupe G est dit moyennable, s'il existe une fonction linéaire réelle m dans $\mathcal{B}(G,\mathbb{R})$, l'espace des fonctions bornées de G dans $\mathbb{R}$ doté de la norme $\|f\|_\infty=\sup\{|f(x)|,\ x\in G\}$, vérifiant

$$\inf f(G)\leq m(f)\leq\sup f(G),\ f\in\mathcal{B}(G,\mathbb{R}),$$

et m est invariante, i.e.,

$$m(f_a)=m(f)\ \text{ et }\ m({}_af)=m(f) \tag{6.3}$$

pour tout $f\in\mathcal{B}(G,\mathbb{R})$ et $a\in G$, où $f_a(x)=f(xa)$ et ${}_af(x)=f(ax)$ pour tout $x\in G$ (pour les principaux résultats voir, par exemple, [73]).
La notion ci-dessus peut être étendue pour le cas des applications à valeurs vectorielles et l'existence d'une moyenne invariante appropriée est déja prouvé. En effet, si $(E,\|\cdot\|)$ un espace de Banach réel qui est soit réflexif ou soit il possède la propriété de l'extension de Hahn-Banach, alors il existe un opérateur linéaire continu $m:\mathcal{B}(G,E)\to E$ vérifiant (6.3) tel que $m(c)=c$ et $\|m\|=1$ (voir (Corollaire 2.2, [66]), (Théorème 4, [11]) et (Théorème 16, [68])).

Dans ce chapitre, f^o et f^e désigne la partie impaire et paire de f, respectivement, i.e., $f^o(x)=\dfrac{f(x)-f(\sigma(x))}{2}$, $f^e(x)=\dfrac{f(x)+f(\sigma(x))}{2}$ pour tout $x\in G$.

6.2 Stabilité de l'équation fonctionnelle σ-Drygas au sens de Hyers-Ulam dans les semi-groupes moyennables

Le lemme suivant nous sera utile pour démontrer le résultat principal du présent chapitre.

Lemme 6.2.1 *Soient G un semi-groupe et E un espace de Banach. Soit $f : G \to E$ une fonction pour laquelle il existe g une solution de l'équation fonctionnelle σ-Drygas (6.1) vérifiant $\|f(x) - g(x)\| \leq \delta$ pour tout $x \in G$ et pour certain $\delta \geq 0$. Alors*

$$\begin{aligned} g(x) & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (6.4) \\ = \lim_{n\to+\infty} 2^{-2n} & \left\{ f^e(x^{2^n}) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\left[f^e((x^{2^{n-k}}\sigma(x)^{2^{n-k}})^{2^{k-1}}) + f^e((\sigma(x)^{2^{n-k}}x^{2^{n-k}})^{2^{k-1}})\right]\right\} \\ + 2^{-n} & \left\{ f^o(x^{2^n}) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[f^e((x^{2^{k-1}}\sigma(x)^{2^{k-1}})^{2^{n-k}}) - f^e((\sigma(x)^{2^{k-1}}x^{2^{k-1}})^{2^{n-k}})\right]\right\}, \end{aligned}$$

où f^e, f^o désigne la partie paire et impaire de f, respectivement.

Preuve. En utilisant l'équation fonctionnelle σ-Drygas (6.1), nous avons

$$[g^e(xy) + g^e(x\sigma(y)) - 2g^e(x) - 2g^e(y)] + [g^o(xy) + g^o(x\sigma(y)) - 2g^o(x)] = 0. \tag{6.5}$$

En prenant $x = y$ dans (6.5) et en tenant compte que $g^o(x\sigma(x)) = g^o(\sigma(x)x) = 0$, nous obtenons

$$[g^e(x^2) + g^e(x\sigma(x)) - 4g^e(x)] + [g^o(x^2) - 2g^o(x)] = 0. \tag{6.6}$$

Changeons x par $\sigma(x)$ dans (6.6), nous avons

$$[g^e(x^2) + g^e(\sigma(x)x) - 4g^e(x)] + [-g^o(x^2) + 2g^o(x)] = 0. \tag{6.7}$$

En faisant la somme et la différence de (6.6) et (6.7), nous obtenons

$$g^e(x^2) + \frac{1}{2}[g^e(x\sigma(x)) + g^e(\sigma(x)x)] = 4g^e(x) \tag{6.8}$$

respectivement,

$$g^o(x^2) + \frac{1}{2}[g^e(x\sigma(x)) - g^e(\sigma(x)x)] = 2g^o(x). \tag{6.9}$$

De (6.8), nous déduisons

$$g^e(x^2) + g^e(x\sigma(x)) - 4g^e(x) = \frac{1}{2}[g^e(x\sigma(x)) - g^e(\sigma(x)x)] \tag{6.10}$$

$$= \frac{1}{2}[g(x\sigma(x)) - g(\sigma(x)x)] = c(x),$$

où $c(x) = \dfrac{1}{2}[g(x\sigma(x)) - g(\sigma(x)x)]$.
Par récurrence sur n, nous prouvons l'équation suivante :

$$g^e(x^{2^n}) = 4^n g^e(x) - \sum_{k=1}^{n} 4^{k-1}\left[g^e(x^{2^{n-k}}\sigma(x)^{2^{n-k}}) - c(x^{2^{n-k}})\right]. \tag{6.11}$$

L'équation (6.10) prouve que l'assertion (6.11) est vraie pour $n = 1$. Maintenant, supposons que (6.11) est vraie à l'ordre n.
De (6.10) et (6.11), nous obtenons

$$\begin{aligned}
g^e(x^{2^{n+1}}) &= 4g^e(x^{2^n}) - g^e(x^{2^n}\sigma(x)^{2^n}) + c(x^{2^n}) \\
&= 4\left[4^n g^e(x) - \sum_{k=1}^{n} 4^{k-1}\left[g^e(x^{2^{n-k}}\sigma(x)^{2^{n-k}}) - c(x^{2^{n-k}})\right]\right] \\
&\quad - g^e(x^{2^n}\sigma(x)^{2^n}) + c(x^{2^n}) \\
&= 4^{n+1}g^e(x) - \sum_{k=1}^{n+1} 4^{k-1}\left[g^e(x^{2^{n+1-k}}\sigma(x)^{2^{n+1-k}}) - c(x^{2^{n+1-k}})\right].
\end{aligned}$$

Ce qui prouve la validité de (6.11) à l'ordre $n + 1$.
Si nous remplaçons x par $x\sigma(x)$ dans (6.10), nous tirons

$$4g^e(x\sigma(x)) = 2g^e((x\sigma(x))^2),\ x \in G. \tag{6.12}$$

Appliquons le raisonnement par récurrence ainsi, nous obtenons

$$4^n g^e(x\sigma(x)) = 2^n g^e((x\sigma(x))^{2^n}) \tag{6.13}$$

pour n un entier positif. De (6.12), il s'ensuit que (6.13) est vraie pour $n = 1$. Montrons que l'hypothèse de récurrence est encore vraie pour $n + 1$, qui est

$$4^{n+1}g^e(x\sigma(x)) = 4[2^n g^e((x\sigma(x))^{2^n})] = 2^n \times 2g^e((x\sigma(x))^{2^{n+1}}) = 2^{n+1}g^e((x\sigma(x))^{2^{n+1}}).$$

Ce qui prouve la validité de l'équation (6.13).
Par l'hypothèse : $f = g + b$, où b est une fonction bornée. Donc, nous avons

$$f^e = g^e + b^e \text{ et } f^o = g^o + b^o. \tag{6.14}$$

La première relation de (6.14) donne :

$$4^{-n}f^e(x^{2^n}) = 4^{-n}g^e(x^{2^n}) + 4^{-n}b^e(x^{2^n}).$$

En utilisant (6.11) et (6.13), nous obtenons

$$\begin{aligned}
4^{-n}f^e(x^{2^n}) &= 4^{-n}\left[4^n g^e(x) - \sum_{k=1}^{n} 4^{k-1}\left[g^e(x^{2^{n-k}}\sigma(x)^{2^{n-k}}) - c(x^{2^{n-k}})\right]\right] + 4^{-n}b^e(x^{2^n}) \\
&= g^e(x) - 4^{-n}\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} g^e((x^{2^{n-k}}\sigma(x)^{2^{n-k}})^{2^{k-1}}) + 4^{-n}\sum_{k=1}^{n} 4^{k-1}c(x^{2^{n-k}}) \\
&\quad + 4^{-n}b^e(x^{2^n}).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
&4^{-n}\left[f^e(x^{2^n}) + \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} f^e((x^{2^{n-k}}\sigma(x)^{2^{n-k}})^{2^{k-1}})\right] \qquad (6.15)\\
&= g^e(x) + 4^{-n}\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\left[f^e((x^{2^{n-k}}\sigma(x)^{2^{n-k}})^{2^{k-1}}) - g^e((x^{2^{n-k}}\sigma(x)^{2^{n-k}})^{2^{k-1}})\right] \\
&\quad + 4^{-n}\sum_{k=1}^{n} 4^{k-1}c(x^{2^{n-k}}) + 4^{-n}b^e(x^{2^n}).
\end{aligned}$$

La fonction c est impaire ($c(\sigma(x)) = -c(x)$), alors en substituant x par $\sigma(x)$ dans (6.14), et en faisant la somme du nouveau résultat à (6.14), nous obtenons

$$\begin{aligned}
&4^{-n}\left[f^e(x^{2^n}) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\left[f^e((x^{2^{n-k}}\sigma(x)^{2^{n-k}})^{2^{k-1}}) + f^e((\sigma(x)^{2^{n-k}}x^{2^{n-k}})^{2^{k-1}})\right]\right] \\
&= g^e(x) + \frac{1}{2}4^{-n}\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\left[f^e((x^{2^{n-k}}\sigma(x)^{2^{n-k}})^{2^{k-1}}) - g^e((x^{2^{n-k}}\sigma(x)^{2^{n-k}})^{2^{k-1}})\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}4^{-n}\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\left[f^e((\sigma(x)^{2^{n-k}}x^{2^{n-k}})^{2^{k-1}}) - g^e((\sigma(x)^{2^{n-k}}x^{2^{n-k}})^{2^{k-1}})\right] + 4^{-n}b^e(x^{2^n}).
\end{aligned}$$

Donc, nous déduisons

$$\begin{aligned}
&\|g^e(x) - 4^{-n}\left[f^e(x^{2^n}) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\left[f^e((x^{2^{n-k}}\sigma(x)^{2^{n-k}})^{2^{k-1}}) + f^e((\sigma(x)^{2^{n-k}}x^{2^{n-k}})^{2^{k-1}})\right]\right]\| \qquad (6.16)\\
&\leq \frac{1}{2}4^{-n}\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\|f^e((x^{2^{n-k}}\sigma(x)^{2^{n-k}})^{2^{k-1}}) - g^e((x^{2^{n-k}}\sigma(x)^{2^{n-k}})^{2^{k-1}})\| \\
&\quad + \frac{1}{2}4^{-n}\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\|f^e((\sigma(x)^{2^{n-k}}x^{2^{n-k}})^{2^{k-1}}) - g^e((\sigma(x)^{2^{n-k}}x^{2^{n-k}})^{2^{k-1}})\| + 4^{-n}\|b^e(x^{2^n})\|
\end{aligned}$$

$$\leq 4^{-n}\delta\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}+4^{-n}\|b^e(x^{2^n})\|\leq\frac{2^n-1}{4^n}\delta+4^{-n}\|b^e(x^{2^n})\|.$$

Alors, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans (6.16), nous obtenons

$$g^e(x)=\lim_{n\to+\infty}4^{-n}\left\{f^e(x^{2^n})+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}\left[f^e((x^{2^{n-k}}\sigma(x)^{2^{n-k}})^{2^{k-1}})+f^e((\sigma(x)^{2^{n-k}}x^{2^{n-k}})^{2^{k-1}})\right]\right\}.$$

Considérons, à présent, la partie impaire de la fonction f. D'abord, nous montrons par récurrence sur n :

$$g^o(x^{2^n})=2^ng^o(x)-\sum_{k=1}^{n}2^{n-k}c(x^{2^{k-1}}) \tag{6.17}$$

pour tout $x\in G$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$.
De (6.9) il s'ensuit que (6.17) est vraie pour $n=1$. Maintenant, supposons que (6.17) est vraie pour n. Utilisons (6.9) (en remplaçant x par x^{2^n}), l'équation (6.17) et la définition de la fonction c, nous déduisons

$$\begin{aligned}g^o(x^{2^{n+1}})&=2g^o(x^{2^n})-c(x^{2^n})\\&=2\left[2^ng^o(x)-\sum_{k=1}^{n}2^{n-k}c(x^{2^{k-1}})\right]-c(x^{2^n})\\&=2^{n+1}g^o(x)-\sum_{k=1}^{n+1}2^{n+1-k}c(x^{2^{k-1}}).\end{aligned}$$

Ce qui prouve la validité de (6.17).
En utilisant (6.13), (6.17) et la définition de la fonction c, nous obtenons

$$\begin{aligned}2^{-n}f^o(x^{2^n})&=2^{-n}g^o(x^{2^n})+2^{-n}b^o(x^{2^n})\\&=2^{-n}\left[2^ng^o(x)-\sum_{k=1}^{n}2^{n-k}c(x^{2^{k-1}})\right]+2^{-n}b^o(x^{2^n})\\&=g^o(x)-2^{-n}\left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}g^e((x^{2^{k-1}}\sigma(x)^{2^{k-1}})^{2^{n-k}})-g^e((\sigma(x)^{2^{k-1}}x^{2^{k-1}})^{2^{n-k}})\right]\\&\quad+2^{-n}b^o(x^{2^n}).\end{aligned}$$

D'où

$$\|g^o(x)-2^{-n}\left\{f^o(x^{2^n})+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}f^e((x^{2^{k-1}}\sigma(x)^{2^{k-1}})^{2^{n-k}})-f^e((\sigma(x)^{2^{k-1}}x^{2^{k-1}})^{2^{n-k}})\right\}\| \tag{6.18}$$

$$\leq 2^{-n}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\|f^e((x^{2^{k-1}}\sigma(x)^{2^{k-1}})^{2^{n-k}})-g^e((x^{2^{k-1}}\sigma(x)^{2^{k-1}})^{2^{n-k}})\|$$
$$+\|f^e((\sigma(x)^{2^{k-1}}x^{2^{k-1}})^{2^{n-k}})-g^e((\sigma(x)^{2^{k-1}}x^{2^{k-1}})^{2^{n-k}})\|+2^{-n}\|b^o(x^{2^n})\|$$
$$\leq 2^{-n}[\frac{1}{2}n\delta+\frac{1}{2}n\delta]+2^{-n}\|b^o(x^{2^n})\|=2^{-n}n\delta+2^{-n}\|b^o(x^{2^n})\|.$$

Si $n\to+\infty$ dans (6.18), nous obtenons

$$g^o(x)=\lim_{n\to+\infty}2^{-n}\left\{f^o(x^{2^n})+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[f^e((x^{2^{k-1}}\sigma(x)^{2^{k-1}})^{2^{n-k}})-f^e((\sigma(x)^{2^{k-1}}x^{2^{k-1}})^{2^{n-k}})\right]\right\}.$$

Ainsi, comme $g(x)=g^e(x)+g^o(x)$, le reste de la preuve s'ensuit. ♠

Remarque 6.2.1 *Soient G un groupe, $\sigma=-I$ et E un espace de Banach. Soit $f:G\to E$ une fonction pour laquelle il existe une solution g de l'équation fonctionnelle de Drygas (6.2) qui vérifie $\|f(x)-g(x)\|\leq\delta$ pour tout $x\in G$ et pour $\delta\geq 0$. Alors nous obtenons le résultat prouvé dans [62] :*

$$g(x)=\lim_{n\to+\infty}2^{-2n}f^e(x^{2^n})+2^{-n}f^o(x^{2^n}).$$

Remarque 6.2.2 *Dans le Lemme 6.2.1, si la fonction g est solution de l'équation fonctionnelle de Drygas :*

$$g(xy)+g(\sigma(x)y)=2g(y)+g(x)+g(\sigma(x)),\ x,y\in G \tag{6.19}$$

avec $\|f(x)-g(x)\|\leq\delta$ pour tout $x\in G$ et pour $\delta\geq 0$. Alors

$$g(x)$$
$$=\lim_{n\to+\infty}2^{-2n}\left\{f^e(x^{2^n})+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}\left[f^e((x^{2^{n-k}}\sigma(x)^{2^{n-k}})^{2^{k-1}})+f^e((\sigma(x)^{2^{n-k}}x^{2^{n-k}})^{2^{k-1}})\right]\right\}$$
$$+2^{-n}\left\{f^o(x^{2^n})-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[f^e((x^{2^{k-1}}\sigma(x)^{2^{k-1}})^{2^{n-k}})-f^e((\sigma(x)^{2^{k-1}}x^{2^{k-1}})^{2^{n-k}})\right]\right\}.$$

Remarque 6.2.3 *Si f satisfait l'équation fonctionnelle σ-Drygas (6.1) avec f centrale ($f(xy)=f(yx),\ \forall x,y\in G$), alors la partie paire et (resp., impaire) de f satisfait l'équation fonctionnelle σ-quadratique*

$$f^e(xy)+f^e(x\sigma(y))=2f^e(x)+2f^e(y),\ x,y\in G, \tag{6.20}$$

(resp., l'équation fonctionnelle σ-Jensen

$$f^o(xy)+f^o(x\sigma(y))=2f^o(x),\ x,y\in G). \tag{6.21}$$

Réciproquement, (6.20) et (6.21) entrainent que f est solution de l'équation fonctionnelle σ-Drygas (6.1).

Plus tard, nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 6.2.2 *Soient G un semi-groupe et E un espace de Banach. Supposons que $f : G \to E$ est une fonction paire $(f(\sigma(x)) = f(x))$ qui satisfait l'inégalité*

$$\|f(xy) + f(x\sigma(y)) - 2f(x) - 2f(y)\| \leq \delta \tag{6.22}$$

pour $\delta \geq 0$ et pour tout $x \in G$. Alors, pour chaque $x \in G$, la limite

$$q(x) = \lim_{n \to +\infty} 2^{-2n}\{f(x^{2^n}) + (2^n - 1)f(x^{2^{n-1}}\sigma(x)^{2^{n-1}})\} \tag{6.23}$$

existe. En plus, l'application q vérifie

$$\|f(x) - q(x)\| \leq \frac{11}{6}\delta \tag{6.24}$$

pour tout $x \in G$.

Preuve. Dans la preuve, nous utilisons quelques idées de B. Bouikhalene et al. [23].
En interchangeant les rôles de x et de y dans (6.22), nous obtenons avec $f(x\sigma(y)) = f(y\sigma(x))$:

$$\|f(xy) - f(yx)\| \leq 2\delta. \tag{6.25}$$

De (6.22) nous obtenons

$$\|2f(x^{2^{n-1}}\sigma(x)^{2^{n-1}}\sigma(x)^{2^{n-1}}x^{2^{n-1}}) - 2f(x^{2^{n-1}}\sigma(x)^{2^{n-1}}) - 2f(\sigma(x)^{2^{n-1}}x^{2^{n-1}})\| \leq \delta. \tag{6.26}$$

Comme

$$\|f(x^{2^{n-1}}\sigma(x)^{2^{n-1}}) - f(\sigma(x)^{2^{n-1}}x^{2^{n-1}})\| \leq 2\delta \tag{6.27}$$

et

$$\|f(x^{2^{n-1}}\sigma(x)^{2^n}x^{2^{n-1}}) - f(x^{2^n}\sigma(x)^{2^n})\| \leq 2\delta. \tag{6.28}$$

Alors

$$\|2f(x^{2^{n-1}}\sigma(x)^{2^n}x^{2^{n-1}}) - 4f(x^{2^{n-1}}\sigma(x)^{2^{n-1}})\| \leq 5\delta \tag{6.29}$$

et

$$\begin{aligned}\|2f(x^{2^n}\sigma(x)^{2^n}) - 4f(x^{2^{n-1}}\sigma(x)^{2^{n-1}})\| &\leq \|2f(x^{2^{n-1}}\sigma(x)^{2^n}x^{2^{n-1}}) - 2f(x^{2^n}\sigma(x)^{2^n})\| \\ &\quad + \|2f(x^{2^{n-1}}\sigma(x)^{2^n}x^{2^{n-1}}) - 4f(x^{2^{n-1}}\sigma(x)^{2^{n-1}})\| \\ &\leq 9\delta.\end{aligned} \tag{6.30}$$

Nous prouvons par récurrence sur n :

$$\|f(x) - \frac{1}{2^{2n}}\{f(x^{2^n}) + (2^n - 1)f(x^{2^{n-1}}\sigma(x)^{2^{n-1}})\}\| \leq \frac{11}{6}\delta + (\frac{8}{3}\frac{1}{2^{2n}} - \frac{9}{2}\frac{1}{2^n})\delta. \tag{6.31}$$

En posant $x = y$ dans (6.22), nous avons

$$\|f(x^2) + f(x\sigma(x)) - 4f(x)\| \leq \delta, \tag{6.32}$$

d'où

$$\|f(x) - \frac{1}{2^2}\{f(x^2) + (2-1)f(x\sigma(x))\}\| \leq \frac{\delta}{2^2}. \tag{6.33}$$

Cela prouve (6.31) pour $n = 1$. L'hypothèse de récurrence doit être démontrer qu'elle est encore vraie pour $n + 1$, qui est

$$\begin{aligned}
&\|f(x) - \frac{1}{2^{2(n+1)}}\{f(x^{2^{n+1}}) + (2^{n+1} - 1)f(x^{2^n}\sigma(x)^{2^n})\}\| \\
&\quad\leq \frac{1}{2^{2(n+1)}}\|f(x^{2^{n+1}}) + f(x^{2^n}\sigma(x)^{2^n}) - 4f(x^{2^n})\| \\
&\qquad + \frac{1}{2^{2(n+1)}}\|2(2^n - 1)f(x^{2^n}\sigma(x)^{2^n}) - 4(2^n - 1)f(x^{2^{n-1}}\sigma(x)^{2^{n-1}})\| \\
&\qquad + \frac{1}{2^{2(n+1)}}\|4f(x^{2^n}) + 4(2^n - 1)f(x^{2^{n-1}}\sigma(x)^{2^{n-1}}) - 2^{2(n+1)}f(x)\| \\
&\quad\leq \frac{\delta}{2^{2(n+1)}} + \frac{(2^n - 1)}{2^{2(n+1)}}9\delta + \|f(x) - \frac{1}{2^{2n}}\{f(x^{2^n}) + (2^n - 1)f(x^{2^{n-1}}\sigma(x)^{2^{n-1}})\}\| \\
&\quad\leq \frac{9\delta}{2^2}\frac{1}{2^n} - \frac{2\delta}{2^{2n}} + \frac{11}{6}\delta + (\frac{8}{3}\frac{1}{2^{2n}} - \frac{9}{2}\frac{1}{2^n})\delta = \frac{11}{6}\delta + (\frac{8}{3}\frac{1}{2^{2(n+1)}} - \frac{9}{2}\frac{1}{2^{n+1}})\delta.
\end{aligned}$$

Cela complète la preuve de la récurrence (6.31).
Maintenant, définissons

$$q_n(x) = \frac{1}{2^{2n}}\{f(x^{2^n}) + (2^n - 1)f(x^{2^{n-1}}\sigma(x)^{2^{n-1}})\} \tag{6.34}$$

pour tout entier positif n et pour tout $x \in G$.
De (6.34), (6.22) et (6.29), nous déduisons

$$\begin{aligned}
&\|q_{n+1}(x) - q_n(x)\| \\
&= \frac{1}{2^{2(n+1)}}\|f(x^{2^{n+1}}) + (2^{n+1} - 1)f(x^{2^n}\sigma(x)^{2^n}) - 4f(x^{2^n}) - 4(2^n - 1)f(x^{2^{n-1}}\sigma(x)^{2^{n-1}})\| \\
&\leq \frac{1}{2^{2(n+1)}}\|f(x^{2^{n+1}}) + f(x^{2^n}\sigma(x)^{2^n}) - 4f(x^{2^n})\| \\
&\quad + \frac{1}{2^{2(n+1)}}\|2(2^n - 1)f(x^{2^n}\sigma(x)^{2^n}) - 4(2^n - 1)f(x^{2^{n-1}}\sigma(x)^{2^{n-1}})\| \\
&\leq \frac{\delta}{2^{2(n+1)}} + 9\delta\frac{(2^n - 1)}{2^{2(n+1)}} \leq \frac{5}{2^{n+3}}\delta.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\{q_n(x)\}_n$ est une suite de Cauchy pour chaque $x \in G$ fixé. Comme E est complet, nous pouvons définir $q(x) = \lim_{n\to+\infty} q_n(x)$ pour tout $x \in G$. De (6.31), nous vérifions que q satisfait l'inégalité (6.24). Ce qui achève la preuve du lemme. ♠

Dans le théorème suivant, nous obtenons la stabilité partielle de l'équation fonctionnelle σ-quadratique et de l'équation fonctionnelle σ-Jensen dans les semi-groupes moyennables.

Théorème 6.2.3 *Soient G un semi-groupe moyennable et E un espace de Banach. Supposons que $f : G \to E$ est une fonction qui satisfait les inégalités suivantes :*

$$\|f^e(xy) + f^e(x\sigma(y)) - 2f^e(x) - 2f^e(y)\| \leq \delta \tag{6.35}$$

$$\|f^o(xy) + f^o(x\sigma(y)) - 2f^o(x)\| \leq \gamma \tag{6.36}$$

pour tout $x, y \in G$ et pour $\delta, \gamma \geq 0$. Alors, il existe une unique solution $g = Q + D$ de l'équation fonctionnelle σ-Drygas (6.1), avec Q solution de l'équation fonctionnelle σ-quadratique

$$Q(xy) + Q(x\sigma(y)) = 2Q(x) + 2Q(y)$$

et D solution de l'équation fonctionnelle σ-Jensen

$$D(xy) + D(x\sigma(y)) = 2D(x),$$

vérifiant

$$\|f(x) - g(x))\| \leq \frac{1}{2}(\delta + \gamma) \tag{6.37}$$

pour tout $x \in G$.

Preuve. Nous suivons les idées et les calculs réalisés dans [23] et [179].
En utilisant (6.35) nous obtenons

$$\|f^e((xy)^n) - f^e((yx)^n)\| = \|f^e([(xyxy...xy)x]y) - f^e(y[(xyxy...xy)x])\| \leq 2\delta. \tag{6.38}$$

De (6.35), (6.38) et de l'inégalité triangulaire nous déduisons

$$\begin{aligned} &\|f^e((xy)^{2^n}(\sigma(xy)^{2^n})) - f^e((yx)^{2^n}(\sigma(yx)^{2^n}))\| \\ &\leq \|f^e((xy)^{2^n}(\sigma(xy)^{2^n})) + f^e((xy)^{2^n}(xy)^{2^n}) - 4f^e((xy)^{2^n})\| \\ &\quad + \|f^e((yx)^{2^n}(\sigma(yx)^{2^n})) + f^e((yx)^{2^n}(yx)^{2^n}) - 4f^e((yx)^{2^n})\| \\ &\quad + \|f^e((xy)^{2^n}(xy)^{2^n}) - f^e((yx)^{2^n}(yx)^{2^n})\| + 4\|f^e((xy)^{2^n}) - f^e((yx)^{2^n})\| \\ &\leq \delta + \delta + 2\delta + 8\delta = 12\delta. \end{aligned} \tag{6.39}$$

Du Lemme 6.2.2, pour chaque $x \in G$, la limite

$$q(x) = \lim_{n\to+\infty} 2^{-2n}\{f^e(x^{2^n}) + (2^n - 1)f^e(x^{2^{n-1}}\sigma(x)^{2^{n-1}})\} \tag{6.40}$$

existe et

$$\|f^e(x) - q(x)\| \leq \frac{11}{6}\delta. \tag{6.41}$$

En plus, d'après (6.38) et (6.38), nous tirons

$$\begin{aligned}
&\|q(xy) - q(yx)\| \\
&\quad = \lim_{n\to+\infty} 2^{-2n}\|f^e((xy)^{2^n}) + (2^n - 1)f^e((xy)^{2^{n-1}}\sigma(xy)^{2^{n-1}}) \\
&\qquad\qquad - f^e((yx)^{2^n}) - (2^n - 1)f^e((yx)^{2^{n-1}}\sigma(yx)^{2^{n-1}})\| \\
&\quad \leq \lim_{n\to+\infty} 2^{-2n}\|f^e((xy)^{2^n}) - f^e((yx)^{2^n})\| \\
&\qquad\qquad + \frac{(2^n - 1)}{2^{2n}}\|f^e((xy)^{2^{n-1}}\sigma(xy)^{2^{n-1}}) - f^e((yx)^{2^{n-1}}\sigma(yx)^{2^{n-1}})\| \\
&\quad \leq \lim_{n\to+\infty} 2^{-2n+1}\delta + 12\frac{(2^n - 1)}{2^{2n}}\delta = 0.
\end{aligned}$$

Alors, q satisfait la relation (q est centrale)

$$q(xy) = q(yx), \quad x, y \in G \tag{6.42}$$

et de (6.41) et (6.35), q vérifie l'inégalité

$$\|q(xy) + q(x\sigma(y)) - 2q(x) - 2q(y)\| \leq 12\delta \tag{6.43}$$

pour tout $x, y \in G$.
Par conséquent, pour tout $y \in G$ fixé, la fonction $x \to q(xy) + q(x\sigma(y)) - 2q(x)$ est bornée. Comme G est moyennable, il existe une moyenne invariante m sur l'espace des fonctions bornées, ce qui donne

$$\begin{aligned}
m\{{}_{zy}q +_{\sigma(z)y} q - 2_y q\} &= m\{{}_y({}_z q +_{\sigma(z)} q - 2q)\} = m\{{}_z q +_{\sigma(z)} q - 2q\}, \\
m\{q_{yz} + q_{y\sigma(z)} - 2q_y\} &= m\{(q_z + q_{\sigma(z)} - 2q)_y\} = m\{q_z + q_{\sigma(z)} - 2q\},
\end{aligned}$$

où $q_y(z) = q(zy)$, $z \in G$.
Définissons

$$\Psi(y) = m\{q_y + q_{\sigma(y)} - 2q\} \tag{6.44}$$

pour tout $y \in G$.
En utilisant (6.44) et (6.42), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\Psi(zy) + \Psi(\sigma(z)y) &= m\{q_{zy} + q_{\sigma(y)\sigma(z)} - 2q\} + m\{q_{\sigma(z)y} + q_{\sigma(y)z} - 2q\} \\
&= m\{{}_{zy}q +_{\sigma(z)y} q - 2_y q\} + m\{q_{\sigma(y)\sigma(z)} + q_{\sigma(y)z} - 2q_{\sigma(y)}\} \\
&\quad + m\{2q_y + 2q_{\sigma(y)} - 4q\} \\
&= m\{{}_z q +_{\sigma(z)} q - 2q\} + m\{q_{\sigma(z)} + q_z - 2q\} \\
&\quad + 2m\{q_y + q_{\sigma(y)} - 2q\} \\
&= 2\Psi(z) + 2\Psi(y).
\end{aligned}$$

Donc, $Q(y) = \Psi(y)/2$ satisfait l'équation fonctionnelle

$$Q(xy) + Q(\sigma(x)y) = 2Q(x) + 2Q(y), \quad x, y \in G \tag{6.45}$$

et l'inégalité

$$\begin{aligned} \|Q(y) - q(y)\| &= \frac{1}{2}\|m\{q_y + q_{\sigma(y)} - 2q - 2q(y)\}\| \\ &\leq \sup_{x \in G} \frac{1}{2}\|q(xy) + q(x\sigma(y)) - 2q(x) - 2q(y)\| \\ &\leq 6\delta. \end{aligned} \tag{6.46}$$

Si nous prenons $y = e$ dans (6.45), nous obtenons que Q est une application paire et par un simple calcul nous déduisons que $Q(xy) = Q(yx)$ pour tout $x, y \in G$.
Par conséquent, il existe une application Q qui satisfait l'équation fonctionnelle σ-quadratique

$$Q(xy) + Q(x\sigma(y)) = 2Q(x) + 2Q(y), \quad x, y \in G \tag{6.47}$$

et l'inégalité $\|f^e(y) - Q(y)\| \leq \dfrac{47}{6}\delta$.
Supposons, à présent, qu'il existe une autre application $H : G \to E$ solution de l'équation σ-quadratique (6.47) qui vérifie $\|f^e(x) - H(x)\| \leq \dfrac{47}{6}\delta$ pour tout $x \in G$.
Prouvons par récurrence

$$Q(x) = 2^{-2n}\left\{Q(x^{2^n}) + \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}Q((x^{2^{n-k}}\sigma(x)^{2^{n-k}})^{2^{k-1}})\right\} \tag{6.48}$$

pour un entier n. En posant $x = y$ dans (6.47) nous obtenons

$$Q(x^2) + Q(x\sigma(x)) = 2^2 Q(x). \tag{6.49}$$

Ce qui prouve (6.48) pour $n = 1$. Substituons x par $x\sigma(x)$ dans (6.49), nous avons

$$2Q((x\sigma(x))^2) = 4Q(x\sigma(x)). \tag{6.50}$$

En tenant compte de (6.49) et de (6.50), nous obtenons (6.48) pour $n = 2$, qui est :

$$\begin{aligned} Q(x^{2^2}) + Q(x^2\sigma(x)^2) + 2Q((x\sigma(x))^2) &= 2^2[Q(x^2) + Q(x\sigma(x))] \\ &= 2^4 Q(x). \end{aligned}$$

Supposons que (6.48) est vraie pour n. En utilisant (6.50) et (6.49), nous avons

$$Q(x^{2^{n+1}}) + \sum_{k=1}^{n+1} 2^{k-1}Q((x^{2^{n+1-k}}\sigma(x)^{2^{n+1-k}})^{2^{k-1}})$$

$$= Q(x^{2^{n+1}}) + Q(x^{2^n}\sigma(x)^{2^n}) + \sum_{k=2}^{n+1} 2^{k-1} Q((x^{2^{n+1-k}}\sigma(x)^{2^{n+1-k}})^{2^{k-1}})$$
$$= 2^2 Q(x^{2^n}) + \sum_{k=2}^{n+1} 2^{k-1} Q((x^{2^{n+1-k}}\sigma(x)^{2^{n+1-k}})^{2^{k-1}})$$
$$= 2^2 \left[Q(x^{2^n}) + \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} Q((x^{2^{n-k}}\sigma(x)^{2^{n-k}})^{2^{k-1}}) \right]$$
$$= 2^{2(n+1)} Q(x).$$

Ce qui termine la preuve de la récurrence.
De (6.48), nous obtenons

$$\|Q(x) - H(x)\|$$
$$= 2^{-2n} \|Q(x^{2^n}) - H(x^{2^n}) + \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} \left[Q((x^{2^{n-k}}\sigma(x)^{2^{n-k}})^{2^{k-1}}) - H((x^{2^{n-k}}\sigma(x)^{2^{n-k}})^{2^{k-1}}) \right] \|$$
$$\leq 2^{-2n} \|Q(x^{2^n}) - f^e(x^{2^n})\| + 2^{-2n} \|H(x^{2^n}) - f^e(x^{2^n})\|$$
$$+ 2^{-2n} \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} \|Q((x^{2^{n-k}}\sigma(x)^{2^{n-k}})^{2^{k-1}}) - f^e((x^{2^{n-k}}\sigma(x)^{2^{n-k}})^{2^{k-1}})\|$$
$$+ 2^{-2n} \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} \|H((x^{2^{n-k}}\sigma(x)^{2^{n-k}})^{2^{k-1}}) - f^e((x^{2^{n-k}}\sigma(x)^{2^{n-k}})^{2^{k-1}})\|$$
$$\leq 2^{-2n} \frac{94}{6} \delta + 2^{-n} \frac{94}{6} \delta.$$

En faisant $n \to +\infty$, nous avons $Q = H$, ce qui prouve l'unicité de l'application Q.
Maintenant, nous définissons par récurrence, la suite des fonctions $f_0^e(x) = f^e(x)$ et

$$f_n^e(x) = 2^{-n} \left\{ f^e(x^{2^n}) + \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} f^e((x^{2^{n-k}}\sigma(x)^{2^{n-k}})^{2^{k-1}}) \right\}$$

pour tout $n \geq 1$.
Par un calcul direct, nous pouvons facilement vérifier que $f_n^e(x) = \frac{1}{2}[f_{n-1}^e(x^2) + f_{n-1}^e(x\sigma(x))]$ pour $n \geq 1$.
Si $x = y$ dans (6.35) nous déduisons

$$\|\frac{1}{2}[f^e(x^2) + f^e(x\sigma(x))] - 2f^e(x)\| \leq \frac{\delta}{2}, \tag{6.51}$$

alors

$$\|f_1^e(x) - 2f_0^e(x)\| \leq \frac{\delta}{2} \tag{6.52}$$

pour tout $x \in G$.
Dans la suite, nous prouvons par récurrence les inégalités

$$\|f_n^e(x) - 2f_{n-1}^e(x)\| \leq \frac{\delta}{2}, \tag{6.53}$$

$$\|f_n^e(x) - 2^n f^e(x)\| \leq \frac{(2^n - 1)}{2}\delta \tag{6.54}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in G$. De (6.52) nous avons (6.53) pour $n = 1$. Nous prouvons que l'hypothèse de récurrence est encore vraie à l'ordre $n + 1$, qui est :

$$\begin{aligned}\|f_{n+1}^e(x) - 2f_n^e(x)\| &= \frac{1}{2}\|f_n^e(x^2) - 2f_n^e(x\sigma(x))\| + 2\frac{1}{2}\|f_{n-1}^e(x^2) - 2f_{n-1}^e(x\sigma(x))\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|f_n^e(x^2) - 2f_{n-1}^e(x^2)\| + \frac{1}{2}\|f_n^e(x\sigma(x)) - 2f_{n-1}^e(x\sigma(x))\| \\ &\leq \frac{1}{2}[\frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2}] = \frac{\delta}{2}.\end{aligned}$$

Ce qui prouve que (6.53) est vraie pour tout entier naturel n.
Maintenant, en utilisant l'inégalité

$$\|f_n^e(x) - 2^n f^e(x)\| \leq \|f_n^e(x) - 2f_{n-1}^e(x)\| + 2\|f_{n-1}^e(x) - 2^{n-1}f^e(x)\|, \tag{6.55}$$

nous vérifions que (6.54) est satisfaite pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Définissons

$$g_n(x) = \frac{f_n^e(x)}{2^n} = 2^{-2n}\left\{f^e(x^{2^n}) + \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} f^e((x^{2^{n-k}}\sigma(x)^{2^{n-k}})^{2^{k-1}})\right\}$$

pour tout entier positif n et pour tout $x \in G$.
En utilisant (6.48) et l'inégalité $\|f^e(x) - Q(x)\| \leq \frac{47}{6}\delta$, nous prouvons

$$Q(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x).$$

De (6.54), nous vérifions que Q satisfait $\|f^e(x) - Q(x)\| \leq \frac{\delta}{2}$ pour tout $x \in G$.
En considérant (6.36), nous obtenons

$$\|f^o(yx) - f^o(x\sigma(y)) - 2f^o(y)\| = \|f^o(yx) + f^o(y\sigma(x)) - 2f^o(y)\| \leq \gamma. \tag{6.56}$$

D'où, pour chaque $y \in G$, la fonction $x \to f^o(yx) - f^o(x\sigma(y))$ est bornée.
De (6.36) et (6.56), nous déduisons

$$\begin{aligned}&\|f^o(yx) + f^o(\sigma(y)x) - 2f^o(x)\| \qquad (6.57)\\ &\leq \|f^o(yx) - f^o(x\sigma(y)) - 2f^o(y)\| + \|f^o(\sigma(y)x) + f^o(\sigma(y)\sigma(x)) - 2f^o(\sigma(y))\| \\ &\quad + \|f^o(xy) + f^o(x\sigma(y)) - 2f^o(x)\| \\ &\leq 3\gamma.\end{aligned}$$

La fonction $x \to f^o(yx) + f^o(\sigma(y)x) - 2f^o(x)$ est bornée. Donc, nous avons

$$m\{_{zy}f^o +_{\sigma(z)y} f^o - 2_y f^o\} = m\{_y(_z f^o +_{\sigma(z)} f^o - 2f^o)\} = m\{_z f^o +_{\sigma(z)} f^o - 2f^o\},$$

$$m\{f^o_{\sigma(y)\sigma(z)} + f^o_{\sigma(y)z} - 2f^o_{\sigma(y)}\} = m\{(f^o_{\sigma(z)} + f^o_z - 2f^o)_{\sigma(y)}\} = m\{f^o_{\sigma(z)} + f^o_z - 2f^o\}.$$

Définissons

$$\varphi(y) = m\{_y f^o - f^o_{\sigma(y)}\},\ y \in G. \tag{6.58}$$

Par conséquent, nous trouvons

$$\begin{aligned}
\varphi(zy) + \varphi(\sigma(z)y) &= m\{_{zy}f^o - f^o_{\sigma(y)\sigma(z)}\} + m\{_{\sigma(z)y}f^o - f^o_{\sigma(y)z}\} \\
&= m\{_{zy}f^o +_{\sigma(z)y} f^o - 2(_y f^o)\} - m\{f^o_{\sigma(y)\sigma(z)} + f^o_{\sigma(y)z} - 2f^o_{\sigma(y)}\} \\
&\quad + 2m\{_y f^o - f^o_{\sigma(y)}\} \\
&= m\{_z f^o +_{\sigma(z)} f^o - 2f^o\} - m\{f^o_{\sigma(z)} + f^o_z - 2f^o\} \\
&\quad + 2m\{_y f^o - f^o_{\sigma(y)}\} \\
&= m\{_z f^o - f^o_{\sigma(z)}\} + m\{_{\sigma(z)}f^o - f^o_z\} + 2m\{_y f^o - f^o_{\sigma(y)}\} \\
&= \varphi(z) + \varphi(\sigma(z)) + 2\varphi(y).
\end{aligned}$$

Donc, φ est solution de l'équation fonctionnelle de Drygas (6.19). Définissons $D(y) = \varphi(y)/2$ qui est aussi solution de l'équation fonctionnelle de Drygas (6.19). En plus, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|D(y) - f^o(y)\| = \frac{1}{2}\|\varphi(y) - 2f^o(y)\| &= \frac{1}{2}\|m\{_y f^o - f^o_{\sigma(y)} - 2f^o(y)\}\| \qquad (6.59) \\
&\le \frac{1}{2}\sup_{x\in G}\|f^o(yx) - f^o(x\sigma(y)) - 2f^o(y)\}\| \\
&\le \frac{1}{2}\gamma.
\end{aligned}$$

Donc D est solution de (6.19) vérifiant (6.59). Alors, d'après la Remarque 6.2.2, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
D(x) = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} & 2^{-2n}\{f^o(x^{2^n}) + f^o(\sigma(x^{2^n})) \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\left[f^o((x^{2^{n-k}}\sigma(x)^{2^{n-k}})^{2^{k-1}}) + f^o((\sigma(x)^{2^{n-k}}x^{2^{n-k}})^{2^{k-1}})\right] \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\left[f^o(\sigma((x^{2^{n-k}}\sigma(x)^{2^{n-k}})^{2^{k-1}})) + f^o(\sigma((\sigma(x)^{2^{n-k}}x^{2^{n-k}})^{2^{k-1}}))\right]\} \\
&+ 2^{-n}\{f^o(x^{2^n}) - f^o(\sigma(x^{2^n})) \\
&- \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[f^o((x^{2^{k-1}}\sigma(x)^{2^{k-1}})^{2^{n-k}}) + f^o((\sigma(x)^{2^{k-1}}x^{2^{k-1}})^{2^{n-k}})\right]
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Big[f^o(\sigma((x^{2^{k-1}}\sigma(x)^{2^{k-1}})^{2^{n-k}}))+f^o(\sigma((\sigma(x)^{2^{k-1}}x^{2^{k-1}})^{2^{n-k}}))\Big]\}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}2^{-n}f^o(x^{2^n}).$$

Alors, la fonction D est impaire et satisfait l'équation suivante :

$$D(xy)+D(\sigma(x)y)=2D(y),\ x,y\in G. \tag{6.60}$$

Ce qui donne

$$-D(\sigma(y)\sigma(x))-D(\sigma(y)x)=-2D(\sigma(y)), \tag{6.61}$$

d'où D est solution de l'équation fonctionnelle σ-Jensen

$$D(xy)+D(x\sigma(y))=2D(x),\ x,y\in G. \tag{6.62}$$

Puisque D est impaire, nous obtenons par un simple calcul que $D(x\sigma(x))=0$ pour tout $x\in G$.
Montrons l'unicité de l'application D. D'abord, il est facile de prouver par récurrence sur n :

$$D(x^{2^n})=2^nD(x),\ n\in\mathbb{N},\ x\in G. \tag{6.63}$$

Supposons qu'il existe une autre application $J:G\to E$ solution de l'équation fonctionnelle σ-Jensen (6.62) vérifiant $\|J(x)-f^o(x)\|\leq\frac{1}{2}\gamma$ pour tout $x\in G$.
De (6.63), nous obtenons

$$\begin{aligned}\|D(x)-J(x)\|&=2^{-n}\|D(x^{2^n})-J(x^{2^n})\|\\&\leq 2^{-n}\|D(x^{2^n})-f^o(x^{2^n})\|+2^{-n}\|J(x^{2^n})-f^o(x^{2^n})\|\\&\leq 2^{-n}\gamma.\end{aligned}$$

En faisant tendre $n\to+\infty$, nous déduisons que $D=J$, ce qui prouve l'unicité de l'application D. Enfin, nous concluons que $g=Q+D$ est l'unique solution de l'équation fonctionnelle σ-Drygas (6.1) vérifiant (6.37). Ce qui achève la preuve du théorème. ♠

Maintenant, nous sommes en mesure de prouver le résultat principal du présent chapitre.

Théorème 6.2.4 *Soient G un semi-groupe moyennable et E un espace de Banach. Supposons que $f:G\to E$ une fonction qui satisfait les inégalités*

$$\|f(xy)+f(x\sigma(y))-2f(x)-f(y)-f(\sigma(y))\|\leq\delta \tag{6.64}$$

et

$$\|f(xy)-f(yx))\|\leq\mu \tag{6.65}$$

pour tout $x, y \in G$ et pour $\delta, \mu \geq 0$. Alors, il existe une unique solution $g = Q + D$ de l'équation fonctionnelle σ-Drygas (6.1), avec Q solution de l'équation σ-quadratique (6.47) et D solution de l'équation σ-Jensen (6.62), vérifiant

$$\|f(x) - g(x)\| \leq \delta + \mu \tag{6.66}$$

pour tout $x \in G$.

Preuve. De (6.64) et (6.65), nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\|f^e(xy) + f^e(x\sigma(y)) - 2f^e(x) - 2f^e(y)\| \\
&= \frac{1}{2}\|f(xy) + f(\sigma(y)\sigma(x)) + f(x\sigma(y)) + f(y\sigma(x)) - 2f(x) - 2f(\sigma(x)) - 2f(y) - 2f(\sigma(y))\| \\
&\leq \frac{1}{2}\|f(xy) + f(x\sigma(y)) - 2f(x) - f(y) - f(\sigma(y))\| \\
&\quad + \frac{1}{2}\|f(\sigma(x)y) + f(\sigma(x)\sigma(y)) - 2f(\sigma(x)) - f(y) - f(\sigma(y))\| \\
&\quad + \frac{1}{2}\|f(\sigma(y)\sigma(x)) - f(\sigma(x)\sigma(y))\| + \frac{1}{2}\|f(y\sigma(x)) - f(\sigma(x)y)\| \\
&\leq \delta + \mu,
\end{aligned}$$

et par une approche analogue nous déduisons

$$\|f^o(xy) + f^o(x\sigma(y)) - 2f^o(x)\| \leq \delta + \mu \tag{6.67}$$

pour tout $x, y \in G$. Ainsi, d'après le Théorème 6.2.3, nous obtenons notre résultat principal. ♠

Corollaire 6.2.5 *[62] Soient G un semi-groupe moyennable et E un espace de Banach. Supposons que $f : G \to E$ une fonction satisfaisant aux inégalités*

$$\|f(xy) + f(xy^{-1}) - 2f(x) - f(y) - f(y^{-1})\| \leq \delta \tag{6.68}$$

et

$$\|f(xy) - f(yx))\| \leq \mu \tag{6.69}$$

pour tout $x, y \in G$ et pour $\delta, \mu \geq 0$. Alors, il existe une unique solution $g = Q + D$ de l'équation fonctionnelle de Drygas (6.2), avec Q quadratique et D Jensen, vérifiant

$$\|f(x) - g(x)\| \leq \delta + \mu \tag{6.70}$$

pour tout $x \in G$.

Corollaire 6.2.6 *[171] Soient G un semi-groupe moyennable et E un espace de Banach. Supposons que $f : G \to E$ une fonction qui satisfait l'inégalité*

$$\|f(xy) - f(x) - f(y)\| \leq \delta \tag{6.71}$$

pour tout $x, y \in G$ et pour $\delta \geq 0$. Alors, il existe une unique application additive $a : G \to E$, vérifiant

$$\|f(x) - a(x)\| \leq \frac{\delta}{2} \tag{6.72}$$

pour tout $x \in G$.

En fait, à partir de la preuve du Théorème 6.2.4, nous voyons qu'au lieu de la condition $\|f(xy) - f(yx))\| \leq \mu$, nous supposons une condition plus faible et qui découle de l'approximation centrale, à savoir

$$\|f(xy) + f(x\sigma(y)) - f(yx) - f(\sigma(y)x)\| \leq \gamma, \ \ x, y \in G.$$

Corollaire 6.2.7 *Soient G un semi-groupe moyennable et E un espace de Banach. Supposons que $f : G \to E$ une fonction satisfaisant aux inegalités suivantes :*

$$\|f(xy) + f(x\sigma(y)) - 2f(x) - f(y) - f(\sigma(y))\| \leq \delta \tag{6.73}$$

et

$$\|f(xy) + f(x\sigma(y)) - f(yx) - f(\sigma(y)x)\| \leq \gamma \tag{6.74}$$

pour tout $x, y \in G$ et pour $\delta, \gamma \geq 0$. Alors, il existe une unique solution $g = Q + D$ de l'équation fonctionnelle σ-Drygas (6.1), avec Q solution de l'équation σ-quadratique (6.47) et D solution de l'équation σ-Jensen (6.62), vérifiant

$$\|f(x) - g(x)\| \leq \delta + \frac{\gamma}{2} \tag{6.75}$$

pour tout $x \in G$.

Dans [180], D. Yang a présenté quelques idées riches sur la stabilité de l'équation fonctionnelle de Jensen

$$f(xy) + f(xy^{-1}) = 2f(x), \ \ x, y \in G \tag{6.76}$$

dans les groupes moyennables. Toutefois, la preuve de son résultat est incorrecte : La fonction ψ définie par l'équation (11) dans [180] satisfait l'équation fonctionnelle de Drygas, la déduction que la partie impaire $\psi_\circ$ de la fonction ψ satisfait l'équation fonctionnelle de Jensen (6.76) n'est pas vraie. Dans ce qui suit, nous corrigeons l'erreur dans la preuve de (Proposition 2, [180]).

Corollaire 6.2.8 *Soit G un semi-groupe moyennable avec e son élément neutre. Soit $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction qui satisfait l'inégalité*

$$| \, f(xy) + f(xy^{-1}) - 2f(x) \, | \leq \delta \tag{6.77}$$

pour tout $x, y \in G$ et pour $\delta \geq 0$. Alors, il existe une unique solution g de l'équation fonctionnelle de Jensen (6.76), vérifiant

$$| \, f(x) - g(x) - f(e) \, | \leq 3\delta \tag{6.78}$$

pour tout $x \in G$.

Preuve. Dans la preuve nous utilisons quelques idées de Yang [180] et Forti, Sikorska [62]. Prenons $x = e$ dans (6.77) nous obtenons

$$| f^e(y) - f(e) | \leq \frac{\delta}{2} \tag{6.79}$$

pour tout $y \in G$.
Les inégalités (6.77), (6.79) et l'inégalité triangulaire donne

$$\begin{aligned} &| f(xy) + f(yx) - 2f(x) - 2f(y) + 2f(e) | \qquad (6.80)\\ \leq &| f(xy) + f(xy^{-1}) - 2f(x) | + | f(yx) + f(yx^{-1}) - 2f(y) |\\ &+ | 2f(e) - f(xy^{-1}) - f(yx^{-1}) |\\ &\leq 3\delta. \end{aligned}$$

Ainsi, de (6.77), (6.79) et (6.80) nous déduisons

$$\begin{aligned} | f(yx) + f(y^{-1}x) - 2f(x) | \leq &| f(yx) + f(xy) - 2f(y) - 2f(x) + 2f(e) | \qquad (6.81)\\ &+ | f(y^{-1}x) + f(xy^{-1}) - 2f(y^{-1}) - 2f(x) + 2f(e) |\\ &+ | -f(xy) - f(xy^{-1}) + 2f(x) | + | 2f(y) + 2f(y^{-1}) - 4f(e) | \leq 9\delta \end{aligned}$$

Maintenant, d'après (6.77) et (6.81) nous avons

$$\begin{aligned} &| f(yx) - f(x^{-1}y^{-1}) + f(yx^{-1}) - f(xy^{-1}) - 2(f(y) - f(y^{-1})) | \qquad (6.82)\\ \leq &| f(yx) + f(yx^{-1}) - 2f(y) | + | f(xy^{-1}) + f(x^{-1}y^{-1}) - 2f(y^{-1}) |\\ &\leq 10\delta. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons

$$| f^o(yx) + f^o(yx^{-1}) - 2f^o(y) | \leq 5\delta \tag{6.83}$$

pour tout $x, y \in G$. En se basant sur la preuve du Théorème 6.2.3, le reste de la preuve s'ensuit. ♠

Nous terminons en montrant la non stabilité sur le groupe libre $\mathcal{F}(a, b)$, engendré par deux éléments a et b (voir [60]).

Exemple 6.2.1 *($\sigma = -I$) Soit $f : \mathcal{F}(a,b) \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = r(x) - s(x)$ pour $x \in \mathcal{F}(a,b)$, où $r(x)$ est le nombre des paires ab dans x et $s(x)$ est le nombre des paires $b^{-1}a^{-1}$ dans x. Alors*

$$|f(xy) + f(xy^{-1}) - 2f(x) - f(y) - f(y^{-1})| \leq 2$$

et, pour chaque solution g de l'équation de Drygas classique (6.2), la fonction $f(x) - g(x)$ est non bornée.

En effet, il est bien connu (voir [60]) que

$$f(xy) - f(x) - f(y) \in \{1, 0, 1\} \text{ et } f(xy^{-1}) - f(x) - f(y^{-1}) \in \{1, 0, 1\},$$

alors

$$f(xy) + f(xy^{-1}) - 2f(x) - f(y) - f(y^{-1}) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}.$$

Supposons qu'il existe une fonction g, solution de l'équation de Drygas classique (6.2) telle que $f(x) - g(x)$ soit bornée. D'après le Lemme 6.2.1 ($\sigma = -I$), nous avons

$$g(x) = \lim_{n\to+\infty} 4^{-n} f^e(x^{2^n}) + 2^{-n} f^o(x^{2^n}).$$

f est une fonction impaire, nous obtenons

$$g(x) = \lim_{n\to+\infty} 2^{-n} f^o(x^{2^n}).$$

Comme $f(a^{2^n}) = f(b^{2^n}) = f(b^{-2^n}) = 0$, $f([ab]^{2^n}) = 2^n$ et $f([ab]^{-2^n}) = 0$, nous obtenons : $g(a) = g(b) = g(ab^{-1}) = 0$ et $g(ab) = 1$, donc g n'est pas une solution de l'équation de Drygas (6.2), contradiction.

6.3 Problème ouvert

Considérons l'équation fonctionnelle de Pexider :

$$f_1(xy) + f_2(x\sigma(y)) = f_3(x) + f_4(y),\ x, y \in G \tag{6.84}$$

où $f_i : G \to E$ ($i = 1, 2, 3, 4$) sont des fonctions définies d'un groupe moyennable G non nécessairement commutatif dans un espace de Banach E et $\sigma : G \to G$ une involution de G. Sous quelles conditions sur les fonctions f_i, l'équation fonctionnelle de Pexider (6.84) est-elle stable ?

Chapitre 7

Stabilité des équations fonctionnelles de type σ-Jensen au sens de Hyers-Ulam-Rassias dans les espaces quasi-Banach

7.1 Introduction

Nous rappelons quelques faits de base concernant les espaces quasi-Banach et quelques résultats préliminaires.

Définition 7.1.1 *Soient E un espace vectoriel et K un nombre réel tel que $K \geq 1$. Une quasi-norme généralisée est une fonction à valeurs réelles sur E qui satisfait aux propriétés suivantes :*
$\|x\|_K \geq 0$ *pour tout* $x \in E$ *et* $\|x\|_K = 0$ *si et seulement si* $x = 0$.
$\|\lambda x\|_K = |\lambda|\|x\|_K$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et pour tout* $x \in E$.

$$\|\sum_{j=1}^{\infty} x_j\|_K \leq K \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_K \tag{7.1}$$

pour tout $x_1, x_2, \ldots \in E$ *avec* $\sum_{j=1}^{\infty} x_j \in E$.

La paire $(E, \|\cdot\|_K)$ est appelée un espace quasi-normé généralisé si $\|\cdot\|_K$ est une quasi-norme dans E. Il se peut que K soit appelé le module de concavité de $\|\cdot\|_K$.
Un espace quasi-Banach généralisé est un espace quasi-normé complet.

Définition 7.1.2 *Soient E un espace linéaire et p un nombre réel tel que $0 < p \leq 1$. La fonction $\|\cdot\|_p : E \to \mathbb{R}$ est une p-norme si elle vérifie :*
$\|x\|_p = 0$ *pour tout* $x \in E$ *si et seulement si* $x = 0$.

$\|\lambda x\|_p = |\lambda| \|x\|_p$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et pour tout* $x \in E$.
$\|x+y\|_p^p \leq \|x\|_p^p + \|y\|_p^p$ *pour tout* $x, y \in E$.

T. Aoki [9] a prouvé l'equivalence entre la quasi-norme et la p-norme.

Définition 7.1.3 *Soient* E *un espace linéaire et* β *un nombre réel tel que* $0 < \beta \leq 1$. *Une* β*-norme est une fonction* $\|\cdot\|_\beta : E \to \mathbb{R}$ *vérifiant :*
$\|x\|_\beta = 0$ *pour tout* $x \in E$ *si et seulement si* $x = 0$.
$\|\lambda x\|_\beta = |\lambda|^\beta \|x\|_\beta$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et pour tout* $x \in E$.
$\|x+y\|_\beta \leq \|x\|_\beta + \|y\|_\beta$ *pour tout* $x, y \in E$.

La paire $(E, \|\cdot\|_\beta)$ est appelée un espace β-normé si $\|\cdot\|_\beta$ est une β-norme dans E. Un espace β-Banach est un espace β-normé complet.
Signalons qu'on peut prouver l'equivalence entre les espaces quasi-Banach et les espaces β-Banach.

Dans ce chapitre, nous considérons les équations fonctionnelles de type σ-Jensen

$$f(x+y) + f(x+\sigma(y)) = 2f(x), \ x, y \in E_1 \tag{7.2}$$

et

$$f(x+y) - f(x+\sigma(y)) = 2f(y), \ x, y \in E_1. \tag{7.3}$$

7.2 Stabilité de l'équation fonctionnelle σ-Jensen (7.2) pour $p < 1$ et $p > 1$ au sens de Hyers-Ulam-Rassias

Dans cette section, nous montrons la stabilité, au sens de Hyers-Ulam-Rassias, de l'équation fonctionnelle σ-Jensen (7.2).

Théorème 7.2.1 *Soient* E_1 *un espace normé,* E_2 *un espace* β*-Banach et* $f : E_1 \longrightarrow E_2$ *une application qui vérifie l'inégalité*

$$\|f(x+y) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x)\|_{E_2} \leq \theta(\|x\|^p + \|y\|^p) \tag{7.4}$$

pour $\theta \geq 0$, $p > 1$ *et pour tout* $x, y \in E_1$. *Alors, il existe une unique application* $J : E_1 \longrightarrow E_2$*, définie par*

$$J(x) = \lim_{n \to +\infty} 2^n \{f(\frac{x}{2^n}) + (\frac{1}{2^n} - 1) f(\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{\sigma(x)}{2^{n+1}})\}, \tag{7.5}$$

solution de l'équation fonctionnelle σ*-Jensen (7.2), vérifiant*

$$\|f(x) - J(x)\|_{E_2} \leq \frac{2K\theta}{2^p - 2}\|x\|^p + \frac{K\theta}{(2^p-1)(2^p-2)}\|x+\sigma(x)\|^p \tag{7.6}$$

pour tout $x \in E_1$*, où* K *est le module de concavité de* $\|\cdot\|_{E_2}$.

Preuve. Supposons que f vérifie l'inégalité (7.4). En remplaçant x et y par $\frac{x}{2^n}$, (resp., par $\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{\sigma(x)}{2^{n+1}}$), nous obtenons

$$\|f(\frac{x}{2^n} + \frac{x}{2^n}) + f(\frac{x}{2^n} + \frac{\sigma(x)}{2^n}) - 2f(\frac{x}{2^n})\|_{E_2} \leq \frac{2\theta}{2^{np}}\|x\|^p \tag{7.7}$$

respectivement,

$$\|2f(\frac{x}{2^n} + \frac{\sigma(x)}{2^n}) - 2f(\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{\sigma(x)}{2^{n+1}})\|_{E_2} \leq \frac{2\theta}{2^{(n+1)p}}\|x + \sigma(x)\|^p. \tag{7.8}$$

Faisons l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
&\|f(x) - 2^n\{f(\frac{x}{2^n}) + (\frac{1}{2^n} - 1)f(\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{\sigma(x)}{2^{n+1}})\}\|_{E_2} \\
&\qquad \leq \frac{2\theta K}{2^p}\|x\|^p[1 + 2^{1-p} + \ldots + 2^{(n-1)(1-p)}] + \frac{2\theta K}{2^{2p}}\|x + \sigma(x)\|^p[(1 - \frac{1}{2}) \\
&\qquad\qquad +(1 - \frac{1}{2^2})2^{1-p} + \ldots + (1 - \frac{1}{2^n})2^{(n-1)(1-p)}].
\end{aligned} \tag{7.9}$$

Pour $n = 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\|f(x) - 2\{f(\frac{x}{2}) + (\frac{1}{2} - 1)f(\frac{x}{2^2} + \frac{\sigma(x)}{2^2})\}\|_{E_2} \\
&\qquad \leq K\|f(x) + f(\frac{x}{2} + \frac{\sigma(x)}{2}) - 2f(\frac{x}{2})\|_{E_2} + K\|f(\frac{x}{4} + \frac{\sigma(x)}{4}) - f(\frac{x}{2} + \frac{\sigma(x)}{2})\|_{E_2} \\
&\qquad \leq K\frac{2\theta}{2^p}\|x\|^p + K\frac{\theta}{2^{2p}}\|x + \sigma(x)\|^p \\
&\qquad \leq \frac{2\theta K}{2^p}\|x\|^p + \frac{2\theta K}{2^{2p}}\|x + \sigma(x)\|^p(1 - \frac{1}{2}).
\end{aligned}$$

Donc (7.9) est vraie pour $n = 1$. Nous montrons que l'hypothèse de récurrence (7.9) est vraie pour n remplacé par $n + 1$.

$$\begin{aligned}
&\|f(x) - 2^{n+1}\{f(\frac{x}{2^{n+1}}) + (\frac{1}{2^{n+1}} - 1)f(\frac{x}{2^{n+2}} + \frac{\sigma(x)}{2^{n+2}})\}\|_{E_2} \\
&\quad = \|f(x) - 2^n\{f(\frac{x}{2^n}) + (\frac{1}{2^n} - 1)f(\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{\sigma(x)}{2^{n+1}})\} \\
&\qquad +2^n\{f(\frac{x}{2^n}) + f(\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{\sigma(x)}{2^{n+1}}) - 2f(\frac{x}{2^{n+1}})\} \\
&\qquad +2^{n+1}(\frac{1}{2^{n+1}} - 1)\{f(\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{\sigma(x)}{2^{n+1}}) - f(\frac{x}{2^{n+2}} + \frac{\sigma(x)}{2^{n+2}})\}\|_{E_2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \|f(x) - 2^{n-1}\{f(\frac{x}{2^{n-1}}) + (\frac{1}{2^{n-1}} - 1)f(\frac{x}{2^n} + \frac{\sigma(x)}{2^n})\} \\
&\quad +2^{n-1}\{f(\frac{x}{2^{n-1}}) + f(\frac{x}{2^n} + \frac{\sigma(x)}{2^n}) - 2f(\frac{x}{2^n})\} \\
&\quad +2^n(\frac{1}{2^n} - 1)\{f(\frac{x}{2^n} + \frac{\sigma(x)}{2^n}) - f(\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{\sigma(x)}{2^{n+1}})\} \\
&\quad +2^n\{f(\frac{x}{2^n}) + f(\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{\sigma(x)}{2^{n+1}}) - 2f(\frac{x}{2^{n+1}})\} \\
&\quad +2^{n+1}(\frac{1}{2^{n+1}} - 1)\{f(\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{\sigma(x)}{2^{n+1}}) - f(\frac{x}{2^{n+2}} + \frac{\sigma(x)}{2^{n+2}})\}\|_{E_2} \\
&= \|\{f(x) + f(\frac{x}{2} + \frac{\sigma(x)}{2}) - 2f(\frac{x}{2})\} + \{f(\frac{x}{4} + \frac{\sigma(x)}{4}) - f(\frac{x}{2} + \frac{\sigma(x)}{2})\} \\
&\quad +2\{f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x}{2^2} + \frac{\sigma(x)}{2^2}) - 2f(\frac{x}{2^2})\} + 2^2(\frac{1}{2^2} - 1)\{f(\frac{x}{2^2} + \frac{\sigma(x)}{2^2}) - f(\frac{x}{2^3} + \frac{\sigma(x)}{2^3})\} \\
&\quad +2^2\{f(\frac{x}{2^2}) + f(\frac{x}{2^3} + \frac{\sigma(x)}{2^3}) - 2f(\frac{x}{2^3})\} + 2^3(\frac{1}{2^3} - 1)\{f(\frac{x}{2^3} + \frac{\sigma(x)}{2^3}) - f(\frac{x}{2^4} + \frac{\sigma(x)}{2^4})\} \\
&\quad + \ldots + 2^{n-1}\{f(\frac{x}{2^{n-1}}) + f(\frac{x}{2^n} + \frac{\sigma(x)}{2^n}) - 2f(\frac{x}{2^n})\} \\
&\quad +2^n(\frac{1}{2^n} - 1)\{f(\frac{x}{2^n} + \frac{\sigma(x)}{2^n}) - f(\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{\sigma(x)}{2^{n+1}})\} \\
&\quad +2^n\{f(\frac{x}{2^n}) + f(\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{\sigma(x)}{2^{n+1}}) - 2f(\frac{x}{2^{n+1}})\} \\
&\quad +2^{n+1}(\frac{1}{2^{n+1}} - 1)\{f(\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{\sigma(x)}{2^{n+1}}) - f(\frac{x}{2^{n+2}} + \frac{\sigma(x)}{2^{n+2}})\}\|_{E_2} \\
&\leq \frac{2\theta K}{2^p}\|x\|^p[1 + 2^{1-p} + \ldots + 2^{n(1-p)}] \\
&\quad + \frac{2\theta K}{2^{2p}}\|x + \sigma(x)\|^p[(1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{2^2})2^{1-p} + \ldots + (1 - \frac{1}{2^{n+1}})2^{n(1-p)}].
\end{aligned}
$$

D'où, l'inégalité (7.9) est prouvée pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Ensuite, nous prouvons que la suite des fonctions

$$
J_n(x) = 2^n\{f(\frac{x}{2^n}) + (\frac{1}{2^n} - 1)f(\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{\sigma(x)}{2^{n+1}})\} \tag{7.10}
$$

est une suite de Cauchy pour chaque $x \in E_1$.
Combinons (7.7) avec (7.8) et utilisons l'inégalité triangulaire (7.1) pour montrer :

$$\begin{aligned}\|J_{n+1}(x) - J_n(x)\|_{E_2} &= \|2^{n+1}\{f(\frac{x}{2^{n+1}}) + (\frac{1}{2^{n+1}} - 1)f(\frac{x}{2^{n+2}} + \frac{\sigma(x)}{2^{n+2}})\} \\ &\quad - 2^n\{f(\frac{x}{2^n}) + (\frac{1}{2^n} - 1)f(\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{\sigma(x)}{2^{n+1}})\}\|_{E_2} \\ &\leq 2^n K\|f(\frac{x}{2^n}) + f(\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{\sigma(x)}{2^{n+1}}) - 2f(\frac{x}{2^{n+1}})\|_{E_2} \\ &\quad + 2^{n+1}K(1 - \frac{1}{2^{n+1}})\|f(\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{\sigma(x)}{2^{n+1}}) - f(\frac{x}{2^{n+2}} + \frac{\sigma(x)}{2^{n+2}})\|_{E_2} \\ &\leq 2^n K\frac{2\theta}{2^{(n+1)p}}\|x\|^p + 2^n K(1 - \frac{1}{2^{n+1}})\frac{2\theta}{2^{(n+2)p}}\|x + \sigma(x)\|^p \\ &\leq 2^{n(1-p)}\frac{2\theta K}{2^p}[\|x\|^p + \frac{1}{2^p}\|x + \sigma(x)\|^p].\end{aligned}$$

Comme $2^{1-p} < 1$, la conclusion souhaitée s'ensuit. Cependant, E_2 est un espace quasi-Banach, il en résulte que la suite des fonctions $\{J_n(x)\}_n$ converge vers une fonction $J(x)$ pour tout $x \in E_1$.
Montrons que J est solution de l'équation fonctionnelle σ-Jensen (7.2).
En effet ;

$$\begin{aligned}&\|J_n(x + y) + J_n(x + \sigma(y)) - 2J_n(x)\|_{E_2} \\ &= \|2^n\{f(\frac{x + y}{2^n}) + (\frac{1}{2^n} - 1)f(\frac{x + y}{2^{n+1}} + \frac{\sigma(x) + \sigma(y)}{2^{n+1}})\} \\ &\quad + 2^n\{f(\frac{x + \sigma(y)}{2^n}) + (\frac{1}{2^n} - 1)f(\frac{x + \sigma(x)}{2^{n+1}} + \frac{y + \sigma(y)}{2^{n+1}})\} \\ &\quad - 2^{n+1}\{f(\frac{x}{2^n}) + (\frac{1}{2^n} - 1)f(\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{\sigma(x)}{2^{n+1}})\}\|_{E_2} \\ &\leq 2^n K\|f(\frac{x + y}{2^n}) + f(\frac{x + \sigma(y)}{2^n}) - 2f(\frac{x}{2^n})\|_{E_2} \\ &\quad + 2^n K(1 - \frac{1}{2^n})\|f(\frac{x + \sigma(x)}{2^{n+1}} + \frac{y + \sigma(y)}{2^{n+1}}) + f(\frac{x + \sigma(x)}{2^{n+1}} + \frac{y + \sigma(y)}{2^{n+1}}) - 2f(\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{\sigma(x)}{2^{n+1}})\}\|_{E_2} \\ &\leq 2^{n(1-p)}K\theta[\|x\|^p + \|y\|^p + \frac{1}{2^p}\|x + \sigma(x)\|^p + \frac{1}{2^p}\|y + \sigma(y)\|^p].\end{aligned}$$

Comme $2^{1-p} < 1$ et en faisant $n \to +\infty$, nous obtenons que J est solution de l'équation fonctionnelle σ-Jensen (7.2).
Supposons, à présent, qu'il existe deux fonctions $J_i : E_1 \longrightarrow E_2$ $(i = 1, 2)$, solutions de l'équation (7.2) vérifiant l'inégalité (7.6).
Tout d'abord, nous prouvons par récurrence sur n :

$$J_i(\frac{x}{2^n}) + (\frac{1}{2^n} - 1)J_i(\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{\sigma(x)}{2^{n+1}}) = \frac{1}{2^n}J_i(x). \tag{7.11}$$

De l'équation (7.2), il s'ensuit si nous remplaçons x et y par $\dfrac{x}{2^{n+2}}+\dfrac{\sigma(x)}{2^{n+2}}$, que :

$$J_i(\frac{x}{2^{n+1}}+\frac{\sigma(x)}{2^{n+1}})=J_i(\frac{x}{2^{n+2}}+\frac{\sigma(x)}{2^{n+2}})$$

pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Alors, l'hypothèse de récurrence est vraie pour $n=1$

$$J_i(\frac{x}{2})-\frac{1}{2}J_i(\frac{x}{4}+\frac{\sigma(x)}{4})=J_i(\frac{x}{2})-\frac{1}{2}J_i(\frac{x}{2}+\frac{\sigma(x)}{2})=\frac{1}{2}J_i(x).$$

Ce qui prouve (7.11) pour $n=1$. Nous démontrons que l'hypothèse de récurrence est encore vraie à l'ordre $n+1$, qui est :

$$\begin{aligned}
&J_i(\frac{x}{2^{n+1}})+(\frac{1}{2^{n+1}}-1)J_i(\frac{x}{2^{n+2}}+\frac{\sigma(x)}{2^{n+2}})\\
&\quad=\frac{1}{2}[J_i(\frac{x}{2^n})+(\frac{1}{2^n}-1)J_i(\frac{x}{2^{n+1}}+\frac{\sigma(x)}{2^{n+1}})]+J_i(\frac{x}{2^{n+1}})-\frac{1}{2}J_i(\frac{x}{2^n})-\frac{1}{2}J_i(\frac{x}{2^{n+1}}+\frac{\sigma(x)}{2^{n+1}})\\
&\quad=\frac{1}{2}[\frac{1}{2^n}J_i(x)]+0=\frac{1}{2^{n+1}}J_i(x).
\end{aligned}$$

Par conséquent, la relation (7.11) est vraie pour tout entier naturel n. Maintenant, nous sommes en mesure de prouver l'unicité de la fonction J.
Pour tout $x\in E_1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\|J_1(x)-J_2(x)\|_{E_2}\\
&\quad=2^n\|J_1(\frac{x}{2^n})+(\frac{1}{2^n}-1)J_1(\frac{x}{2^{n+1}}+\frac{\sigma(x)}{2^{n+1}})-J_2(\frac{x}{2^n})-(\frac{1}{2^n}-1)J_2(\frac{x}{2^{n+1}}+\frac{\sigma(x)}{2^{n+1}})\|_{E_2}\\
&\quad\leq 2^nK\|J_1(\frac{x}{2^n})-f(\frac{x}{2^n})\|_{E_2}+2^nK\|J_2(\frac{x}{2^n})-f(\frac{x}{2^n})\|_{E_2}\\
&\qquad+2^nK(1-\frac{1}{2^n})\|J_1(\frac{x}{2^{n+1}}+\frac{\sigma(x)}{2^{n+1}})-f(\frac{x}{2^{n+1}}+\frac{\sigma(x)}{2^{n+1}})\|_{E_2}\\
&\qquad+2^nK(1-\frac{1}{2^n})\|J_2(\frac{x}{2^{n+1}}+\frac{\sigma(x)}{2^{n+1}})-f(\frac{x}{2^{n+1}}+\frac{\sigma(x)}{2^{n+1}})\|_{E_2}\\
&\quad\leq 2K^2\theta 2^{n(1-p)}[\frac{2}{2^p-1}\|x\|^p+\frac{1}{(2^p-2)(2^p-1)}\|x+\sigma(x)\|^p]\\
&\qquad+2K^2\theta 2^{n(1-p)}[\frac{2}{2^p(2^p-2)}\|x\|^p+\frac{1}{(2^p-2)(2^p-1)}\|x+\sigma(x)\|^p]\\
&\quad\leq 2^{n(1-p)}4K^2\theta[\frac{1}{2^p-1}\|x\|^p+(\frac{1}{(2^p-1)(2^p-2)}+\frac{1}{2^p(2^p-2)})\|x+\sigma(x)\|^p].
\end{aligned}$$

Finalement, en faisant tendre n vers $+\infty$, nous obtenons $J_1(x)=J_2(x)$ pour tout $x\in E_1$. Ce qui complète la preuve du Théorème 7.2.1. ♠

Dans le théorème suivant, nous démontrons un résultat de stabilité, au sens de Hyers-Ulam-Rassias, de l'équation fonctionnelle σ-Jensen (7.2) pour le cas où $p < 1$.

Théorème 7.2.2 *Soient E_1 un espace normé et E_2 un espace β-Banach. Si une fonction $f : E_1 \longrightarrow E_2$ vérifie l'inégalité*

$$\|f(x+y) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x)\|_{E_2} \leq \theta(\|x\|^p + \|y\|^p) \tag{7.12}$$

pour $\theta \geq 0$, $p < 1$ et pour tout $x, y \in E_1$. Alors, il existe une unique fonction $j : E_1 \longrightarrow E_2$, solution de l'équation fonctionnelle σ-Jensen (7.2), vérifiant $j(e) = f(e)$ et

$$\|f(x) - j(x) - f(e)\|_{E_2} \leq K\theta[\|x\|^p + \frac{1}{2-2^p}\|x - \sigma(x)\|^p], \; x \in E_1. \tag{7.13}$$

Si $p < 0$, alors l'inégalité (7.12) est vraie pour $x, y \neq 0$ et (7.13) pour $x \neq 0$ et $x - \sigma(x) \neq 0$.

Preuve. Soit $f : E_1 \longrightarrow E_2$ vérifie l'inégalité (7.12), alors aussi $f - f(e)$ satisfait (7.12). Sans perte de généralité, nous supposons que $f(e) = 0$.
Posons $y = -x$ dans (7.12), nous obtenons

$$\|f(x) - \frac{1}{2}f(x - \sigma(x))\|_{E_2} \leq \theta\|x\|^p. \tag{7.14}$$

Maintenant, en remplaçant x et y par $2^{n-1}x - 2^{n-1}\sigma(x)$, nous déduisons

$$\|f(2^n x - 2^n\sigma(x)) - 2f(2^{n-1}x - 2^{n-1}\sigma(x))\|_{E_2} \leq 2\theta 2^{(n-1)p}\|x - \sigma(x))\|^p. \tag{7.15}$$

En appliquant le raisonnement par récurrence sur n, nous obtenons pour $n \geq 2$:

$$\|f(x) - \frac{1}{2^n}f(2^{n-1}x - 2^{n-1}\sigma(x))\|_{E_2} \leq K\theta\|x\|^p + K\frac{\theta}{2}\|x - \sigma(x))\|^p[1 + 2^{p-1} + 2^{2(p-1)} + \ldots + 2^{(n-2)(p-1)}]. \tag{7.16}$$

Pour $n+1$, nous trouvons :

$$\begin{aligned}
&\|f(x) - \frac{1}{2^{n+1}}f(2^n x - 2^n\sigma(x))\|_{E_2} \\
&= \|\{f(x) - \frac{1}{2^n}f(2^{n-1}x - 2^{n-1}\sigma(x))\} + \frac{1}{2^{n+1}}\{2f(2^{n-1}x - 2^{n-1}\sigma(x)) - f(2^n x - 2^n\sigma(x))\}\|_{E_2} \\
&= \|\{f(x) - \frac{1}{2^{n-1}}f(2^{n-2}x - 2^{n-2}\sigma(x))\} + \frac{1}{2^n}\{2f(2^{n-2}x - 2^{n-2}\sigma(x)) \\
&\quad - f(2^{n-1}x - 2^{n-1}\sigma(x))\} + \frac{1}{2^{n+1}}\{2f(2^{n-1}x - 2^{n-1}\sigma(x)) - f(2^n x - 2^n\sigma(x))\}\|_{E_2}
\end{aligned}$$

$$= \|\{f(x) - \frac{1}{2}f(x-\sigma(x))\} + \frac{1}{2^2}\{2f(x-\sigma(x)) - f(2x-2\sigma(x))\}$$
$$+ \ldots + \frac{1}{2^n}\{2f(2^{n-2}x - 2^{n-2}\sigma(x)) - f(2^{n-1}x - 2^{n-1}\sigma(x))\}$$
$$+\frac{1}{2^{n+1}}\{2f(2^{n-1}x - 2^{n-1}\sigma(x)) - f(2^n x - 2^n\sigma(x))\}\|_{E_2}$$
$$\leq K[\theta\|x\|^p + \frac{2\theta}{2^2}\|x-\sigma(x)\|^p + \ldots + \frac{2^{(n-1)p}}{2^{n+1}}2\theta\|x-\sigma(x)\|^p]$$
$$\leq K\theta\|x\|^p + \frac{\theta K}{2^p}2^{p-1}\|x-\sigma(x))\|^p[1 + 2^{(p-1)} + \ldots + 2^{(n-1)(p-1)}]$$
$$\leq K\theta\|x\|^p + \frac{\theta K}{2}\|x-\sigma(x))\|^p[1 + 2^{(p-1)} + \ldots + 2^{(n-1)(p-1)}].$$

Ce qui prouve la validité de l'inégalité (7.16).
Prenons pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$j_n(x) = \frac{1}{2^n}f(2^{n-1}x - 2^{n-1}\sigma(x)), \ x \in E_1. \tag{7.17}$$

D'après (7.15), nous obtenons pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $x \in E_1$

$$\begin{aligned}\|j_{n+1}(x) - j_n(x)\|_{E_2} &= \|\frac{1}{2^{n+1}}f(2^n x - 2^n\sigma(x)) - \frac{1}{2^n}f(2^{n-1}x - 2^{n-1}\sigma(x))\|_{E_2} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\|f(2^n x - 2^n\sigma(x)) - 2f(2^{n-1}x - 2^{n-1}\sigma(x))\|_{E_2} \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}}2^{(n-1)p}2\theta\|x-\sigma(x)\|^p \\ &\leq 2^{n(p-1)}\frac{\theta}{2^p}\|x-\sigma(x)\|^p.\end{aligned}$$

Comme $2^{p-1} < 1$, alors $\{j_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour chaque $x \in E_1$. Cependant, E_2 est un espace quasi-Banach. Par conséquent, définissons $j(x) = \lim_{n\to+\infty} j_n(x)$ pour tout $x \in E_1$. Montrons que j est solution de l'équation fonctionnelle σ-Jensen (7.2).
Pour tout $x, y \in E_1$, nous déduisons

$$\|j_n(x+y) + j_n(x+\sigma(y)) - 2j_n(x)\|_{E_2}$$
$$= \frac{1}{2^n}\|f(2^{n-1}x + 2^{n-1}y - 2^{n-1}\sigma(x) - 2^{n-1}\sigma(y)) + f(2^{n-1}x + 2^{n-1}\sigma(y) - 2^{n-1}\sigma(x) - 2^{n-1}y)$$
$$-2f(2^{n-1}x - 2^{n-1}\sigma(x))\|_{E_2}$$
$$= \frac{1}{2^n}\|f(2^{n-1}(x-\sigma(x)) + 2^{n-1}(y-\sigma(y))) + f(2^{n-1}(x-\sigma(x)) + 2^{n-1}\sigma(y-\sigma(y)))$$

$$-2f(2^{n-1}(x-\sigma(x)))\|_{E_2}$$

$$\leq \frac{\theta}{2^p}2^{n(p-1)}[\|x-\sigma(x)\|^p+\|y-\sigma(y)\|^p].$$

Par conséquent, comme $2^{p-1} < 1$, il s'ensuit que j est solution de l'équation fonctionnelle σ-Jensen (7.2).

Il reste à prouver l'unicité de la solution de l'équation fonctionnelle σ-Jensen (7.2) satisfaisant (7.13). Au contraire, supposons qu'il existe deux solutions telles que, par exemple, j_1 et j_2 vérifiant $j_1(e) = j_2(e) = 0$.

Premièrement, nous pouvons facilement vérifier par récurrence sur n :

$$j_i(2^{n-1}x - 2^{n-1}\sigma(x)) = 2^n j_i(x), (i = 1, 2). \tag{7.18}$$

Pour tout $x \in E_1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous tirons

$$\begin{aligned}
\|j_1(x)-j_2(x)\|_{E_2} &= \frac{1}{2^n}\|j_1(2^{n-1}x-2^{n-1}\sigma(x)) - j_2(2^{n-1}x-2^{n-1}\sigma(x))\|_{E_2} \\
&\leq K\frac{1}{2^n}\|j_1(2^{n-1}x-2^{n-1}\sigma(x)) - f(2^{n-1}x-2^{n-1}\sigma(x))\|_{E_2} \\
&+ K\frac{1}{2^n}\|j_2(2^{n-1}x-2^{n-1}\sigma(x)) - f(2^{n-1}x-2^{n-1}\sigma(x))\|_{E_2} \\
&\leq 2K^2\theta(\frac{1}{2^p}+\frac{2^p}{2-2^p})2^{n(p-1)}\|x-\sigma(x)\|^p.
\end{aligned}$$

Si nous faisons tendre $n \to +\infty$, nous obtenons $j_1(x) = j_2(x)$ pour tout $x \in E_1$. Ce qui complète la preuve du Théorème 7.2.2. ♠

7.3 Stabilité de l'équation fonctionnelle σ-Jensen (7.3) pour $p < 1$ et $p > 1$ au sens de Hyers-Ulam-Rassias

Dans cette section, nous examinons la stabilité, au sens de Hyers-Ulam-Rassias, de l'équation fonctionnelle σ-Jensen (7.3).

Le principal résultat est le suivant :

Théorème 7.3.1 *Soient E_1 un espace normé et E_2 un espace quasi-Banach. Si une fonction $f : E_1 \longrightarrow E_2$ vérifie l'inégalité*

$$\|f(x+y) - f(x+\sigma(y)) - 2f(y)\|_{E_2} \leq \delta \tag{7.19}$$

pour $\delta \geq 0$ et pour tout $x, y \in E_1$, alors il existe une unique fonction $g : E_1 \longrightarrow E_2$, définie par

$$g(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}f(2^n x), \tag{7.20}$$

solution de l'équation σ-Jensen (7.3), vérifiant

$$\|f(x) - g(x)\|_{E_2} \leq \frac{3}{2}K^2\delta \tag{7.21}$$

pour tout $x \in E_1$.

Preuve. Remplaçons $x = y = x + \sigma(x)$, respectivement $x = y = x$ dans (7.19), nous obtenons

$$\|f(x + \sigma(x))\|_{E_2} \leq \frac{\delta}{2} \tag{7.22}$$

et

$$\|f(2x) - f(x + \sigma(x)) - 2f(x)\|_{E_2} \leq \delta \text{ ou } \|f(2x) - 2f(x)\|_{E_2} \leq \delta + \|f(x + \sigma(x))\|_{E_2},$$

$$\text{ou } \|f(x) - \frac{1}{2}f(2x)\|_{E_2} \leq \frac{3}{2}K\delta(1 - \frac{1}{2}). \tag{7.23}$$

Montrons par récurrence sur n :

$$\|f(x) - \frac{1}{2^n}f(2^n x)\|_{E_2} \leq \frac{3}{2}K^2\delta(1 - \frac{1}{2^n}). \tag{7.24}$$

De (7.23), il s'ensuit que (7.24) est vraie pour $n = 1$. Nous démontrons que l'hypothèse de récurrence (7.24) est vraie avec n remplacé par $n + 1$.

$$\begin{aligned}
&\|f(x) - \frac{1}{2^{n+1}}f(2^{n+1}x)\|_{E_2} \\
&\quad = \|[f(x) - \frac{1}{2^n}f(2^n x)] + \frac{1}{2^{n+1}}[2f(2^n x) - f(2^{n+1}x)]\|_{E_2} \\
&\quad = \|[f(x) - \frac{1}{2^{n-1}}f(2^{n-1}x)] + \frac{1}{2^n}[2f(2^{n-1}x) - f(2^n x)] + \frac{1}{2^{n+1}}[2f(2^n x) - f(2^{n+1}x)]\|_{E_2} \\
&\quad = \|[f(x) - \frac{1}{2}f(2x)] + \frac{1}{2^2}[2f(2x) - f(4x)] + \ldots + \frac{1}{2^n}[2f(2^{n-1}x) - f(2^n x)] \\
&\qquad + \frac{1}{2^{n+1}}[2f(2^n x) - f(2^{n+1}x)]\|_{E_2} \\
&\quad \leq K^2[(1 - \frac{1}{2})\frac{3}{2}\delta + (1 - \frac{1}{2})\frac{3}{4}\delta + \ldots + (1 - \frac{1}{2})\frac{1}{2^{n-1}}\frac{3}{2}\delta + (1 - \frac{1}{2})\frac{1}{2^n}\frac{3}{2}\delta] \\
&\quad \leq K^2\frac{3}{2}\delta(1 - \frac{1}{2})[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}] \\
&\quad \leq K^2\frac{3}{2}\delta(1 - \frac{1}{2^{n+1}}).
\end{aligned}$$

Ce qui prouve la validité de l'inégalité (7.24). Ensuite, nous montrons que la suite des fonctions

$$g_n(x) = \frac{1}{2^n} f(2^n x) \tag{7.25}$$

est une suite de Cauchy pour chaque $x \in E_1$.
En utilisant l'inégalité (7.23), nous obtenons

$$\|g_{n+1}(x) - g_n(x)\|_{E_2} = \frac{1}{2^n}\|f(2^n x) - \frac{1}{2} f(2^{n+1}x)\|_{E_2} \leq \frac{1}{2^n}\frac{3}{4}K\delta.$$

Il s'ensuit facilement que $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour chaque $x \in E_1$. E_2 est un espace complet, nous pouvons définir $g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x)$ pour tout $x \in E_1$.
Montrons, à présent, que g est solution de l'équation (7.3).
En effet ;

$$\begin{aligned}
&\|g_n(x+y) - g_n(x+\sigma(y)) - 2g_n(y)\|_{E_2} \\
&\quad = \frac{1}{2^n}\|f(2^n x + 2^n y) - f(2^n x + 2^n \sigma(y)) - 2f(2^n y)\|_{E_2} \\
&\quad \leq \frac{1}{2^n}\delta.
\end{aligned}$$

En faisant $n \to +\infty$, nous obtenons le résultat désiré.
Supposons qu'il existe deux fonctions $g_i : E_1 \longrightarrow E_2$ $(i = 1, 2)$, solutions de l'équation σ-Jensen (7.3) avec $\|f(x) - g_i(x)\|_{E_2} \leq \frac{3}{2}K^2\delta$ pour tout $x \in E_1$.
En premier, nous prouvons par récurrence sur n :

$$g_i(2^n x) = 2^n g_i(x),\ x \in E_1,\ n \in \mathbb{N}. \tag{7.26}$$

Prenons $y = x$ dans l'équation (7.3), nous obtenons (7.26) pour $n = 1$. Supposons que l'hypothèse de récurrence (7.26) est vraie pour n. Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}
g_i(2^{n+1}x) &= g_i(2^{n+1}x) - g_i(2^n x + 2^n\sigma(x)) - 2g_i(2^n x) + 2g_i(2^n x) \\
&= 0 + 2^{n+1}g_i(x) = 2^{n+1}g_i(x).
\end{aligned}$$

Alors, la relation (7.26) est vraie pour tout entier naturel n. Nous prouvons l'unicité de la fonction g. Pour tout $x \in E_1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|g_1(x) - g_2(x)\|_{E_2} &= \frac{1}{2^n}\|g_1(2^n x) - g_2(2^n x)\|_{E_2} \\
&\leq \frac{K}{2^n}[\|g_1(2^n x) - f(2^n x)\|_{E_2} + \|g_2(2^n x) - f(2^n x)\|_{E_2}] \\
&\leq \frac{3K^3\delta}{2^n}.
\end{aligned}$$

Si $n \to +\infty$, nous déduisons que $g_1(x) = g_2(x)$ pour tout $x \in E_1$. Ce qui achève la preuve du théorème. ♠

Théorème 7.3.2 *Soient E_1 un espace normé et E_2 un espace quasi-Banach. Si une fonction $f : E_1 \longrightarrow E_2$ vérifie l'inégalité*

$$\|f(x+y) - f(x+\sigma(y)) - 2f(y)\|_{E_2} \leq \theta(\|x\|^p + \|y\|^p) \tag{7.27}$$

pour $\theta \geq 0$, $p > 1$ et pour tout $x, y \in E_1$. Alors, il existe une unique fonction $S : E_1 \longrightarrow E_2$, définie par

$$S(x) = \lim_{n\to+\infty} 2^n f(\frac{x}{2^n}), \tag{7.28}$$

solution de l'équation fonctionnelle σ-Jensen (7.3), vérifiant

$$\|f(x) - S(x)\|_{E_2} \leq \frac{2\theta K^2}{2^p - 2}\|x\|^p + \frac{K^2\theta}{2(2^p-2)}\|x + \sigma(x)\|^p \tag{7.29}$$

pour tout $x \in E_1$.

Preuve. Supposons que f satisfait l'inegalité (7.27). Prenons $x = 0$ et $y = \frac{x}{2} + \frac{\sigma(x)}{2}$ dans (7.27), nous obtenons

$$\|f(\frac{x}{2} + \frac{\sigma(x)}{2})\|_{E_2} \leq \frac{\theta}{2^{p+1}}\|x + \sigma(x)\|^p. \tag{7.30}$$

Ainsi, remplaçons x et y par $\frac{x}{2}$ dans (7.27), nous obtenons

$$\|f(x) - 2f(\frac{x}{2})\|_{E_2} \leq \frac{2\theta K}{2^p}\|x\|^p + \frac{\theta K}{2^{p+1}}\|x + \sigma(x)\|^p. \tag{7.31}$$

Montrons par récurrence sur n :

$$\begin{aligned}\|f(x) - 2^n f(\frac{x}{2^n})\|_{E_2} \leq \frac{2\theta K^2}{2^p}&\|x\|^p[1 + 2^{1-p} + \ldots + 2^{(n-1)(1-p)}] \\ &+\frac{\theta K^2}{2^{p+1}}\|x + \sigma(x)\|^p[1 + 2^{1-p} + \ldots + 2^{(n-1)(1-p)}].\end{aligned} \tag{7.32}$$

De (7.31) il s'ensuit que (7.32) est vraie pour $n = 1$, et prouvons la validité de l'inégalité (7.32) pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}&\|f(x) - 2^n f(\frac{x}{2^n})\|_{E_2} \\ &\quad = \|[f(x) - 2^{n-1}f(\frac{x}{2^{n-1}})] + 2^{n-1}[f(\frac{x}{2^{n-1}}) - 2f(\frac{x}{2^n})]\|_{E_2} \\ &\quad = \|[f(x) - 2^{n-2}f(\frac{x}{2^{n-2}})] + 2^{n-2}[f(\frac{x}{2^{n-2}}) - 2f(\frac{x}{2^{n-1}})] + 2^{n-1}[f(\frac{x}{2^{n-1}}) - 2f(\frac{x}{2^n})]\|_{E_2}\end{aligned}$$

$$= \|f(x) - 2f(\frac{x}{2})] + [f(\frac{x}{2}) - 2f(\frac{x}{4})] + \ldots + 2^{n-2}[f(\frac{x}{2^{n-2}}) - 2f(\frac{x}{2^{n-1}})]$$
$$+2^{n-1}[f(\frac{x}{2^{n-1}}) - 2f(\frac{x}{2^n})]\|_{E_2}$$
$$\leq K[\frac{2\theta K}{2^p}\|x\|^p + \frac{\theta K}{2^{p+1}}\|x+\sigma(x)\|^p + \frac{4\theta K}{2^{2p}}\|x\|^p + \frac{2\theta K}{2^{2p+1}}\|x+\sigma(x)\|^p$$
$$+ \ldots + 2^{n-2}\frac{2\theta K}{2^p}\frac{1}{2^{(n-2)p}}\|x\|^p + 2^{n-2}\frac{\theta K}{2^{p+1}}\frac{1}{2^{(n-2)p}}\|x+\sigma(x)\|^p$$
$$+2^{n-1}\frac{2\theta K}{2^p}\frac{1}{2^{(n-1)p}}\|x\|^p + 2^{n-1}\frac{\theta K}{2^{p+1}}\frac{1}{2^{(n-1)p}}\|x+\sigma(x)\|^p]$$
$$\leq \frac{2\theta K^2}{2^p}\|x\|^p[1 + 2^{1-p} + \ldots + 2^{(n-1)(1-p)}]$$
$$+\frac{\theta K^2}{2^{p+1}}\|x+\sigma(x)\|^p[1 + 2^{1-p} + \ldots + 2^{(n-1)(1-p)}].$$

Ce qui prouve la validité de l'inégalité (7.32) pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Définissons la suite des fonctions suivante :

$$S_n(x) = 2^n f(\frac{x}{2^n}),\ x \in E_1,\ n \in \mathbb{N}. \tag{7.33}$$

Nous vérifions que $\{S_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour chaque $x \in E_1$.
En effet, en tenant compte de l'inégalité (7.31), nous obtenons pour tout entier naturel n :

$$\|S_{n+1}(x) - S_n(x)\|_{E_2} = \|2^{n+1}f(\frac{x}{2^{n+1}}) - 2^n f(\frac{x}{2^n})\|_{E_2}$$
$$\leq 2^{n(1-p)}K[\frac{2\theta}{2^p}\|x\|^p + \frac{\theta}{2^{p+1}}\|x+\sigma(x)\|^p].$$

Comme $2^{1-p} < 1$, le résultat désiré s'ensuit. Cependant, E_2 est un espace quasi-Banach, ainsi nous pouvons définir $S(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)$ pour tout $x \in E_1$. Considérons l'expression

$$\|S_n(x+y) - S_n(x+\sigma(y)) - 2S_n(y)\|_{E_2} = 2^n\|f(\frac{x}{2^n}+\frac{y}{2^n}) - f(\frac{x}{2^n}+\frac{\sigma(y)}{2^n}) - 2f(\frac{y}{2^n})\|_{E_2}$$
$$\leq 2^{n(1-p)}K\theta[\|x\|^p + \|y\|^p].$$

Comme $2^{1-p} < 1$, nous déduisons que S est solution de l'équation (7.3).
Supposons, maintenant, qu'il existe deux fonctions $S_i : E_1 \longrightarrow E_2$ $(i = 1, 2)$ qui sont solutions de (7.3), vérifiant l'inégalité (7.29).
Tout d'abord, nous prouvons par récurrence sur n :

$$S_i(\frac{x}{2^n}) = \frac{1}{2^n}S_i(x). \tag{7.34}$$

Pour $n = 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned}S_i(\frac{x}{2}) &= \frac{1}{2}[2S_i(\frac{x}{2}) + S_i(\frac{x}{2} + \frac{\sigma(x)}{2}) - S_i(x)] + \frac{1}{2}S_i(x)\\ &= 0 + \frac{1}{2}S_i(x) = \frac{1}{2}S_i(x).\end{aligned}$$

Ce qui prouve (7.34) pour $n = 1$. Maintenant, la relation de récurrence doit être démontré qu'elle est encore vraie pour l'entier $n + 1$, qui est :

$$\begin{aligned}S_i(\frac{x}{2^{n+1}}) &= \frac{1}{2}[S_i(\frac{x}{2^n}) + S_i(\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{\sigma(x)}{2^{n+1}}) - S_i(\frac{x}{2^n})] + \frac{1}{2}S_i(\frac{x}{2^n})\\ &= 0 + \frac{1}{2^{n+1}}S_i(x) = \frac{1}{2^{n+1}}S_i(x).\end{aligned}$$

Ce qui prouve la validité de l'égalité (7.34). Montrons, à présent, l'unicité de la fonction S. Pour tout $x \in E_1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\|S_1(x) - S_2(x)\|_{E_2} &= 2^n\|S_1(\frac{x}{2^n}) - S_2(\frac{x}{2^n})\|_{E_2}\\ &\leq 2^nK\|S_1(\frac{x}{2^n}) - f(\frac{x}{2^n})\|_{E_2} + 2^nK\|S_2(\frac{x}{2^n}) - f(\frac{x}{2^n})\|_{E_2}\\ &\leq 2^{n(1-p)}\frac{K^3\theta}{2^p - 2}[4\|x\|^p + \|x + \sigma(x)\|^p].\end{aligned}$$

Finalement, en faisant tendre $n \to +\infty$, nous obtenons que $S_1(x) = S_2(x)$ pour tout $x \in E_1$, ce qui complète la preuve du Théorème 7.3.2. ♠

Théorème 7.3.3 *Soient E_1 un espace normé et E_2 un espace quasi-Banach. Si une fonction $f : E_1 \longrightarrow E_2$, vérifie l'inégalité*

$$\|f(x + y) - f(x + \sigma(y)) - 2f(y)\|_{E_2} \leq \theta(\|x\|^p + \|y\|^p) \tag{7.35}$$

pour $\theta \geq 0$, $p < 1$ et pour tout $x, y \in E_1$. Alors, il existe une unique fonction $h : E_1 \longrightarrow E_2$, solution de l'équation fonctionnelle σ-Jensen (7.3), satisfaisant

$$\|f(x) - h(x)\|_{E_2} \leq \frac{2K^2\theta}{2 - 2^p}[\|x\|^p + \frac{1}{2}\|x + \sigma(x)\|^p] \tag{7.36}$$

pour tout $x \in E_1$.

Preuve. Si nous remplaçons x et y par $x + \sigma(x)$, nous obtenons

$$\|f(x + \sigma(x))\|_{E_2} \leq \theta\|x + \sigma(x)\|^p. \tag{7.37}$$

Prenons $x = y = x$ dans (7.35), nous déduisons

$$\|f(x) - \frac{1}{2}f(2x)\|_{E_2} \leq K\theta[\|x\|^p + \frac{1}{2}\|x + \sigma(x)\|^p]. \tag{7.38}$$

Montrons par récurrence sur n :

$$\|f(x) - \frac{1}{2^n}f(2^n x)\|_{E_2} \leq K^2\theta\|x\|^p[1 + 2^{p-1} + \ldots + 2^{(n-1)(p-1)}] \tag{7.39}$$

$$+\frac{K^2\theta}{2}\|x + \sigma(x))\|^p[1 + 2^{p-1} + \ldots + 2^{(n-1)(p-1)}].$$

Pour $n + 1$ nous tirons

$$\begin{aligned}
&\|f(x) - \frac{1}{2^{n+1}}f(2^{n+1}x)\|_{E_2} \\
&\quad = \|[f(x) - \frac{1}{2^n}f(2^n x)] + \frac{1}{2^n}[f(2^n x) - \frac{1}{2}f(2^{n+1}x)]\|_{E_2} \\
&\quad = \|[f(x) - \frac{1}{2^{n-1}}f(2^{n-1}x)] + \frac{1}{2^{n-1}}[f(2^{n-1}x) - \frac{1}{2}f(2^n x)] + \frac{1}{2^n}[f(2^n x) - \frac{1}{2}f(2^{n+1}x)]\|_{E_2} \\
&\quad = \|[f(x) - \frac{1}{2}f(2x)] + \frac{1}{2}[f(2x) - \frac{1}{2}f(4x))] + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}[f(2^{n-1}x) - \frac{1}{2}f(2^n x)] \\
&\qquad + \frac{1}{2^n}[f(2^n x) - \frac{1}{2}f(2^{n+1}x)]\|_{E_2} \\
&\quad \leq K[\theta K\|x\|^p + \frac{\theta K}{2}\|x + \sigma(x)\|^p + \frac{2^p\theta K}{2}\|x\|^p + \frac{2^p\theta K}{4}\|x + \sigma(x)\|^p + \ldots + \frac{2^{(n-1)p}}{2^{n-1}}\theta K\|x\|^p \\
&\qquad + \frac{2^{(n-1)p}}{2^{n-1}}\frac{\theta K}{2}\|x + \sigma(x)\|^p + \frac{2^{np}}{2^n}\theta K\|x\|^p + \frac{2^{np}}{2^n}\frac{\theta K}{2}\|x + \sigma(x)\|^p] \\
&\quad \leq K^2\theta\|x\|^p[1 + 2^{p-1} + \ldots + 2^{n(p-1)}] \\
&\qquad + \frac{K^2\theta}{2}\|x + \sigma(x)\|^p[1 + 2^{p-1} + \ldots + 2^{n(p-1)}],
\end{aligned}$$

ce qui prouve la validité de l'inégalité (7.39).
Soit, pour $n \geq 1$

$$h_n(x) = \frac{1}{2^n}f(2^n x), \; x \in E_1. \tag{7.40}$$

De (7.38), nous avons pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in E_1$

$$\begin{aligned}
\|h_{n+1}(x) - h_n(x)\|_{E_2} &= \|\frac{1}{2^{n+1}} f(2^{n+1}x) - \frac{1}{2^n} f(2^n x)\|_{E_2} \\
&= \frac{1}{2^n}\|f(2^n x) - \frac{1}{2} f(2^{n+1}x)\|_{E_2} \\
&\leq 2^{n(p-1)}\theta K[\|x\|^p + \frac{1}{2}\|x + \sigma(x)\|^p.
\end{aligned}$$

Comme $2^{p-1} < 1$, par conséquent, $\{h_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour chaque $x \in E_1$.
Cependant, E_2 est un espace quasi-Banach, donc, définissons :

$$h(x) = \lim_{n\to+\infty} h_n(x),\ x \in E_1.$$

Montrons, à présent, que h est solution de l'équation σ-Jensen (7.3). Soient x et y deux éléments de E_1. De (7.35), il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&\|h_n(x + y) - h_n(x + \sigma(y)) - 2h_n(y)\|_{E_2} \\
&\qquad = \frac{1}{2^n}\|f(2^n x + 2^n x) - f(2^n x + 2^n\sigma(y)) - 2f(2^n y)\|_{E_2} \\
&\qquad \leq 2^{n(p-1)}\theta[\|x\|^p + \|y\|^p].
\end{aligned}$$

En faisant tendre $n \to +\infty$, nous obtenons le résultat désiré.
Supposons, à présent, qu'il existe deux fonctions $h_i : E_1 \to E_2$ ($i = 1, 2$), solutions de l'équation (7.3) vérifiant (7.36).
Il est facile de montrer par récurrence :

$$2^n h_i(x) = h_i(2^n x). \tag{7.41}$$

Maintenant, nous sommes en mesure de prouver l'unicité de la fonction h.
Pour tout $x \in E_1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|h_1(x) - h_2(x)\|_{E_2} &= \frac{1}{2^n}\|h_1(2^n x) - h_2(2^n x)\|_{E_2} \\
&\leq K\frac{1}{2^n}[\|h_1(2^n x) - f(2^n x)\|_{E_2} + \|h_2(2^n x) - f(2^n x)\|_{E_2}] \\
&\leq \frac{4K^3\theta}{2 - 2^p} 2^{n(p-1)}[\|x\|^p + \frac{1}{2}\|x + \sigma(x)\|^p].
\end{aligned}$$

Si $n \to +\infty$, nous déduisons que $g_1(x) = g_2(x)$ pour tout $x \in E_1$. Ce qui achève la preuve du théorème. ♠

7.4 Stabilité des équations fonctionnelles σ-Jensen au sens de Hyers-Ulam-Rassias dans les espaces β-Banach

Théorème 7.4.1 *Soient E_1 un espace normé, E_2 un espace β-Banach et $f : E_1 \longrightarrow E_2$ une application qui vérifie l'inégalité*

$$\|f(x+y) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x)\| \leq \theta(\|x\|^p + \|y\|^p) \tag{7.42}$$

pour $\theta \geq 0$, $p > 1$ et pour tout $x, y \in E_1$. Alors, il existe une unique application $J : E_1 \longrightarrow E_2$, définie par

$$J(x) = \lim_{n\to+\infty} 2^n f(\frac{x}{2^n}), \tag{7.43}$$

solution de l'équation fonctionnelle σ-Jensen (7.2), vérifiant

$$\|f(x) - J(x)\| \leq \frac{2\theta}{(2^{\beta p} - 2^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}}\|x\|^p + \frac{\theta}{2(2^{\beta p} - 2^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}}\|x + \sigma(x)\|^p \tag{7.44}$$

pour tout $x \in E_1$.

Preuve. Remplaçons $x = 0$ et $y = \frac{x}{2} + \frac{\sigma(x)}{2}$ dans (7.42), nous trouvons

$$\|f(\frac{x}{2} + \frac{\sigma(x)}{2})\| \leq \frac{\theta}{2^{p+1}}\|x + \sigma(x)\|^p. \tag{7.45}$$

Ainsi, substituons x et y par $\frac{x}{2}$ dans (7.42), nous obtenons

$$\|f(x) - 2f(\frac{x}{2})\| \leq \frac{2\theta}{2^p}\|x\|^p + \frac{\theta}{2^{p+1}}\|x + \sigma(x)\|^p \tag{7.46}$$

pour tout $x \in E_1$.
Maintenant, on montre par récurrence sur n l'inégalité suivante :

$$\|f(x) - 2^n f(\frac{x}{2^n})\|^\beta \leq \frac{2^\beta\theta^\beta}{2^{\beta p}}\|x\|^{\beta p}[1 + 2^{\beta(1-p)} + \ldots + 2^{\beta(n-1)(1-p)}] \tag{7.47}$$

$$+\frac{\theta^\beta}{2^{\beta(p+1)}}\|x + \sigma(x)\|^{\beta p}[1 + 2^{\beta(1-p)} + \ldots + 2^{\beta(n-1)(1-p)}].$$

De (7.46), il s'ensuit que (7.47) est vraie à l'ordre $n = 1$. Supposons que (7.47) est vraie à l'ordre n et montrons qu'elle est encore vraie à l'ordre $n + 1$.

$\|f(x) - 2^{n+1}f(\frac{x}{2^{n+1}})\|^\beta$

$$= \|[f(x) - 2^n f(\frac{x}{2^n})] + 2^n[f(\frac{x}{2^n}) - 2f(\frac{x}{2^{n+1}})]\|^\beta$$
$$\leq \|f(x) - 2^n f(\frac{x}{2^n})\|^\beta + 2^{\beta n}\|f(\frac{x}{2^n}) - 2f(\frac{x}{2^{n+1}})]\|^\beta$$
$$\leq \frac{2^\beta\theta^\beta}{2^{\beta p}}\|x\|^{\beta p}[1 + 2^{\beta(1-p)} + \ldots + 2^{\beta(n-1)(1-p)}] + \frac{\theta^\beta}{2^{\beta(p+1)}}\|x+\sigma(x)\|^{\beta p}[1+$$
$$+ \ldots + 2^{\beta(n-1)(1-p)}] + \frac{2^{n\beta}}{2^{n\beta p}}\frac{2^\beta\theta^\beta}{2^{\beta p}}\|x\|^{\beta p} + \frac{2^{n\beta}}{2^{n\beta p}}\frac{\theta^\beta}{2^{\beta(p+1)}}\|x+\sigma(x)\|^{\beta p}$$
$$\leq \frac{2^\beta\theta^\beta}{2^{\beta p}}\|x\|^{\beta p}[1 + 2^{\beta(1-p)} + \ldots + 2^{\beta n(1-p)}] + \frac{\theta^\beta}{2^{\beta(p+1)}}\|x+\sigma(x)\|^{\beta p}[1+$$
$$+ \ldots + 2^{\beta n(1-p)}].$$

Ce qui prouve la validité de l'inégalité (7.47).
Ensuite, nous montrons que la suite des fonctions

$$J_n(x) = 2^n f(\frac{x}{2^n}),\ x \in E_1,\ n \in \mathbb{N}, \tag{7.48}$$

est une suite de Cauchy pour chaque $x \in E_1$.
En utilisant (7.46), nous avons

$$\begin{aligned}\|J_{n+1}(x) - J_n(x)\| &= \|2^{n+1}f(\frac{x}{2^{n+1}}) - 2^n f(\frac{x}{2^n})\| \\ &\leq 2^{n(1-p)}[\frac{2\theta}{2^p}\|x\|^p + \frac{\theta}{2^{p+1}}\|x+\sigma(x)\|^p].\end{aligned}$$

Comme $2^{1-p} < 1$, la conclusion désiré s'ensuit. Cependant, E_2 est un espace quasi-normé complet, ce qui donne que $J_n(x)$ est une suite convergente vers la fonction $J(x)$ pour tout $x \in E_1$. Montrons que J est solution de l'équation fonctionnelle σ-Jensen (7.3).
En effet ;

$$\begin{aligned}\|J_n(x+y) + J_n(x+\sigma(y)) - 2J_n(x)\| &= 2^n\|f(\frac{x}{2^n} + \frac{y}{2^n}) + f(\frac{x}{2^n} + \frac{\sigma(y)}{2^n}) - 2f(\frac{x}{2^n})\| \\ &\leq 2^{n(1-p)}\theta[\|x\|^p + \|y\|^p].\end{aligned}$$

Comme $2^{1-p} < 1$, et en faisant tendre $n \to +\infty$, nous obtenons que J est solution de l'équation (7.2). L'unicité de l'application J peut être prouvé en utilisant des calculs similaires à ceux de la preuve du Théorème 7.2.2, ce qui complète la preuve du Théorème 7.4.1. ♠

Théorème 7.4.2 *Soient E_1 un espace normé, E_2 un espace β-Banach et $f : E_1 \longrightarrow E_2$ une application qui satisfait l'inégalité*

$$\|f(x+y) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x)\| \leq \theta(\|x\|^p + \|y\|^p) \tag{7.49}$$

pour $\theta \geq 0$, $p \in [0,1[$ et pour tout $x, y \in E_1$. Alors, il existe une unique application $j : E_1 \longrightarrow E_2$, solution de l'équation fonctionnelle σ-Jensen (7.2), vérifiant

$$\|f(x) - j(x)\| \leq \frac{\theta}{(2^\beta - 2^{\beta p})^{\frac{1}{\beta}}}\|x\|^p + \frac{\theta}{2(2^\beta - 2^{\beta p})^{\frac{1}{\beta}}}\|x + \sigma(x)\|^p \tag{7.50}$$

pour tout $x \in E_1$.

Preuve. Prenons $x = 0$ et $y = x + \sigma(x)$ dans (7.49), nous trouvons

$$\|f(x + \sigma(x))\| \leq \frac{\theta}{2}\|x + \sigma(x)\|^p. \tag{7.51}$$

Ainsi, remplaçons x et y par x dans (7.49), nous obtenons

$$\|f(x) - \frac{1}{2}f(2x)\|^\beta \leq \theta^\beta\|x\|^{\beta p} + (\frac{\theta}{4})^\beta\|x + \sigma(x)\|^{\beta p} \tag{7.52}$$

pour tout $x \in E_2$.
Par récurrence sur n, nous obtenons pour $n \geq 1$:

$$\|f(x) - \frac{1}{2^n}f(2^n x)\|^\beta \leq \theta^\beta\|x\|^{\beta p}[1 + 2^{\beta(1-p)} + \ldots + 2^{\beta(n-1)(1-p)}] \tag{7.53}$$

$$+(\frac{\theta}{4})^\beta\|x + \sigma(x)\|^{\beta p}[1 + 2^{\beta(1-p)} + \ldots + 2^{\beta(n-1)(1-p)}].$$

Supposons que (7.52) est vraie pour n et montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$. Nous avons

$$\begin{aligned}
&\|f(x) - \frac{1}{2^{n+1}}f(2^{n+1}x)\|^\beta \\
&\quad = \|[f(x) - \frac{1}{2^n}f(2^n x)] + \frac{1}{2^n}[f(2^n x) - \frac{1}{2}f(2^{n+1}x)]\|^\beta \\
&\quad \leq \theta^\beta\|x\|^{\beta p}[1 + 2^{\beta(1-p)} + \ldots + 2^{\beta(n-1)(1-p)}] + (\frac{\theta}{4})^\beta\|x + \sigma(x)\|^{\beta p}[1+ \\
&\qquad +2^{\beta(1-p)} + \ldots + 2^{\beta(n-1)(1-p)}] + \frac{\theta^\beta}{2^{n\beta}}2^{n\beta p}\|x\|^{\beta p} + \frac{1}{2^{n\beta}}(\frac{\theta}{4})^\beta 2^{n\beta p}\|x + \sigma(x)\|^{\beta p}. \\
&\quad \leq \theta^\beta\|x\|^{\beta p}[1 + 2^{\beta(1-p)} + \ldots + 2^{\beta n(1-p)}] + (\frac{\theta}{4})^\beta\|x + \sigma(x)\|^{\beta p}[1+ \\
&\qquad +2^{\beta(1-p)} + \ldots + 2^{\beta n(1-p)}].
\end{aligned}$$

Ce qui prouve la validité de l'inégalité (7.52).
Définissons la suite de fonctions

$$j_n(x) = \frac{1}{2^n}f(2^n x),\ x \in E_1,\ n \in \mathbb{N}. \tag{7.54}$$

De (7.52), nous obtenons pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in E_1$

$$\begin{aligned}\|j_{n+1}(x) - j_n(x)\|^\beta &= \|\frac{1}{2^{n+1}} f(2^{n+1}x) - \frac{1}{2^n} f(2^n x)\|^\beta \\ &= \frac{1}{2^{n\beta}} \|f(2^n x) - \frac{1}{2} f(2^{n+1}x)\|^\beta \\ &\leq 2^{n\beta(p-1)} \theta^\beta [\|x\|^{\beta p} + \frac{1}{4^\beta} \|x + \sigma(x)\|^{\beta p}].\end{aligned}$$

Du fait que $2^{p-1} < 1$, nous déduisons, que $\{j_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour chaque $x \in E_1$. Cependant, E_2 est un espace quasi-Banach, donc la fonction suivante $j(x) = \lim_{n \to +\infty} j_n(x)$ existe pour chaque x fixé dans E_1.
Soient x et y deux éléments de E_1. De (7.49), il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\|j_n(x+y) + j_n(x + \sigma(y)) - 2j_n(x)\| &= \frac{1}{2^n} \|f(2^n x + 2^n x) + f(2^n x + 2^n \sigma(y)) - 2f(2^n x)\| \\ &\leq 2^{n(p-1)} \theta [\|x\|^p + \|y\|^p].\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, nous déduisons que j est solution de l'équation fonctionnelle σ-Jensen (7.2). L'unicité de l'application j peut être prouver en utilisant les mêmes arguments que ceux de la preuve du Théorème 7.3.2. Ce qui achève la preuve du théorème. ♠

Théorème 7.4.3 *Soient E_1 espace normé, E_2 un espace β-Banach et $f : E_1 \longrightarrow E_2$ une application qui satisfait l'inégalité*

$$\|f(x+y) + f(x + \sigma(y)) - 2f(x)\| \leq \theta(\|x\|^p + \|y\|^p) \tag{7.55}$$

pour $\theta \geq 0$, $p < 0$ et pour tout $x, y \in E_1$. Alors, il existe une unique application $h : E_1 \longrightarrow E_2$, définie par

$$h(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \{f(2^n x) + (2^n - 1) f(2^{n-1}x + 2^{n-1}\sigma(x))\}, \tag{7.56}$$

solution de l'équation fonctionnelle σ-Jensen (7.2), vérifiant

$$\|f(x) - h(x)\| \leq \frac{\theta}{(1 - 2^{\beta p})^{\frac{1}{\beta}}} [\|x\|^p + \|x + \sigma(x)\|^p] \tag{7.57}$$

pour tout $x \in E_1$.

Preuve. Remplaçons x et y par 2^n, (resp., par $2^{n-1}x + 2^{n-1}\sigma(x)$), nous obtenons

$$\|f(2^{n+1}x) + f(2^n x + 2^n \sigma(x)) - 2f(2^n x)\| \leq 2\theta 2^{np} \|x\|^p \tag{7.58}$$

respectivement,

$$\|f(2^nx+2^n\sigma(x))-f(2^{n-1}x+2^{n-1}\sigma(x))\|\leq\theta 2^{(n-1)p}\|x+\sigma(x)\|^p \tag{7.59}$$

pour tout $n\geq 1$.
Montrons par récurrence sur l'entier n que

$$\|f(x)-\frac{1}{2^n}\{f(2^nx)+(2^n-1)f(2^{n-1}x+2^{n-1}\sigma(x))\}\|^\beta \tag{7.60}$$

$$\leq\theta^\beta\|x\|^p[1+2^{\beta p}+\ldots+2^{(n-1)\beta p}]+\frac{\theta^\beta}{2^{\beta p}}\|x+\sigma(x)\|^{\beta p}[2^{\beta p}+2^{2\beta p}+\ldots+2^{(n-1)\beta p}].$$

La propriété pour $n=1$ découle de l'inégalité (7.58). Supposons que (7.60) est vraie pour n et montrons qu'elle est vraie pour $n+1$.

$$\begin{aligned}
&\|f(x)-\frac{1}{2^{n+1}}\{f(2^{n+1}x)+(2^{n+1}-1)f(2^nx+2^n\sigma(x))\}\|^\beta\\
&\quad=\|\frac{1}{2^n}\{f(2^nx)+(2^n-1)f(2^{n-1}x+2^{n-1}\sigma(x))\}-f(x)\\
&\quad+\frac{1}{2^{n+1}}[f(2^{n+1}x)+f(2^nx+2^n\sigma(x))-2f(2^nx)]\\
&\quad+\frac{2(2^n-1)}{2^{n+1}}[f(2^nx+2^n\sigma(x))-f(2^{n-1}x+2^{n-1}\sigma(x))]\|^\beta\\
&\quad\leq\|f(x)-\frac{1}{2^n}\{f(2^nx)+(2^n-1)f(2^{n-1}x+2^{n-1}\sigma(x))\}\|^\beta\\
&\quad+\frac{1}{2^{\beta(n+1)}}\|f(2^{n+1}x)+f(2^nx+2^n\sigma(x))-2f(2^nx)\|^\beta\\
&\quad+\|f(2^nx+2^n\sigma(x))-f(2^{n-1}x+2^{n-1}\sigma(x))\|^\beta\\
&\quad\leq\theta^\beta\|x\|^p[1+2^{\beta p}+\ldots+2^{(n-1)\beta p}]+(\frac{\theta}{2^p})^\beta\|x+\sigma(x)\|^{\beta p}[2^{\beta p}+\ldots+2^{(n-1)\beta p}]\\
&\quad+\frac{2^\beta\theta^\beta}{2^{(n+1)\beta}}2^{n\beta p}\|x\|^{\beta p}+\theta^\beta 2^{(n-1)\beta p}\|x+\sigma(x)\|^{\beta p}\\
&\quad\leq\theta^\beta\|x\|^p[1+2^{\beta p}+\ldots+2^{n\beta p}]+\frac{\theta^\beta}{2^{\beta p}}\|x+\sigma(x)\|^{\beta p}[2^{\beta p}+2^{2\beta p}+\ldots+2^{n\beta p}],
\end{aligned}$$

ce qui prouve la validité de l'inégalité (7.60).
Nous définissons par la suite, la suite de fonctions suivante :

$$h_n(x)=\frac{1}{2^n}\{f(2^nx)+(2^n-1)f(2^{n-1}x+2^{n-1}\sigma(x))\}$$

pour tout entier naturel positif n et $x \in E_1$.
Montrons que $\{h_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour chaque $x \in E_1$.

$$\begin{aligned}\|h_{n+1}(x) - h_n(x)\| &= \|\frac{1}{2^{n+1}}[f(2^{n+1}x) + (2^{n+1} - 1)f(2^n x + 2^n\sigma(x))] \\ &\quad - \frac{1}{2^n}[f(2^n x) + (2^n - 1)f(2^{n-1}x + 2^{n-1}\sigma(x))]\| \\ &\le \|f(2^{n+1}x) + f(2^n x + 2^n\sigma(x)) - 2f(2^n x)\| \\ &\quad + \|f(2^n x + 2^n\sigma(x)) - f(2^{n-1}x + 2^{n-1}\sigma(x))\| \\ &\le 2^{np}\theta[\|x\|^p + \frac{1}{2^p}\|x + \sigma(x)\|^p].\end{aligned}$$

Comme $2^p < 1$, la conclusion désirée s'ensuit. Cependant, E_2 est un espace quasi-Banach, donc nous pouvons définir

$$h(x) = \lim_{n\to+\infty} h_n(x) \tag{7.61}$$

pour tout $x \in E_1$.
Montrons que h est solution de l'équation (7.2). Considérons $x, y \in E_1$. Alors ;

$$\begin{aligned}&\|h_n(x+y) + h_n(x+\sigma(y)) - 2h_n(x)\| \\ &\quad = \frac{1}{2^n}\|f(2^n x + 2^n y) + (2^n - 1)f(2^{n-1}x + 2^{n-1}y + 2^{n-1}\sigma(x) + 2^{n-1}\sigma(y)) \\ &\qquad + f(2^n x + 2^n\sigma(y)) + (2^n - 1)f(2^{n-1}x + 2^{n-1}\sigma(y) + 2^{n-1}\sigma(x) + 2^{n-1}y) \\ &\qquad - 2[f(2^n x) + (2^n - 1)f(2^{n-1}x + 2^{n-1}\sigma(x))]\| \\ &\quad \le \frac{1}{2^n}\|f(2^n x + 2^n y) + f(2^n x + 2^n\sigma(y)) - 2f(2^n x)\| \\ &\qquad + \frac{(2^n - 1)}{2^n}\|f(2^{n-1}(x+\sigma(x)) + 2^{n-1}(y+\sigma(y))) + f(2^{n-1}(x+\sigma(x)) + 2^{n-1}\sigma(y+\sigma(y))) \\ &\qquad - 2f(2^{n-1}(x+\sigma(x)))\| \\ &\quad \le 2^{np}\{\|x\|^p + \|y\|^p + \frac{1}{2^p}[\|x+\sigma(x)\|^p + \|y+\sigma(y)\|^p]\}.\end{aligned}$$

Ce qui donne que h est solution de l'équation (7.2). Supposons, à présent, qu'il existe deux fonctions $h_i : E_1 \longrightarrow E_2$ $(i = 1, 2)$, solutions de (7.2), et satisfont l'inégalité (7.57).
Tout d'abord, nous prouvons par récurrence :

$$h_i(2^n x) + (2^n - 1)h_i(2^{n-1}x + 2^{n-1}\sigma(x)) = 2^n h_i(x). \tag{7.62}$$

Prenons $y = x$ dans (7.55), nous obtenons (7.62) pour $n = 1$. Supposons que (7.62) est vraie pour n et montrons qu'elle est encore vraie pour $n + 1$, nous avons :

$$h_i(2^{n+1}x) + (2^{n+1} - 1)h_i(2^n x + 2^n\sigma(x))$$

$$= h_i(2^{n+1}x) + h_i(x)(2^n x + 2^n\sigma(x)) - 2h_i(2^n x)$$

$$+(2^n-1)[2h_i(2^{n-1}x+2^{n-1}\sigma(x)+2^{n-1}x+2^{n-1}\sigma(x))-2h_i(2^{n-1}x+2^{n-1}\sigma(x))]$$

$$+2[h_i(2^n x) + (2^n-1)h_i(2^{n-1}x + 2^{n-1}\sigma(x))]$$

$$= 0 + 0 + 2^{n+1}h_i(x)$$

$$= 2^{n+1}h_i(x).$$

D'où, l'inégalité (7.62) est vraie pour tout entier naturel n. Montrons maintenant l'unicité de l'application h. Pour tout $x \in E_1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\|h_1(x) - h_2(x)\| \\
&\quad = \frac{1}{2^n}[\|h_1(2^n x) + (2^n-1)h_1(2^{n-1}x + 2^{n-1}\sigma(x)) - h_2(2^n x) - (2^n-1)h_2(2^{n-1}x + 2^{n-1}\sigma(x))\| \\
&\quad \leq \frac{1}{2^n}\|h_1(2^n x) - f(2^n x)\| + (2^n-1)\|h_1(2^{n-1}x + 2^{n-1}\sigma(x)) - f(2^{n-1}x + 2^{n-1}\sigma(x))\|] \\
&\qquad + \frac{1}{2^n}[\|h_2(2^n x) - f(2^n x)\| + (2^n-1)\|h_2(2^{n-1}x + 2^{n-1}\sigma(x)) - f(2^{n-1}x + 2^{n-1}\sigma(x))\|] \\
&\quad \leq 2^{np}2\theta(1-2^{\beta p})^{-\frac{1}{\beta}}[\|x\|^p + 2\|x+\sigma(x)\|^p + 2^{-p}\|x+\sigma(x)\|^p].
\end{aligned}$$

Si $n \to +\infty$, on obtient $h_1(x) = h_2(x)$ pour tout $x \in E_1$. Ce qui complète la preuve du théorème. ♠

Théorème 7.4.4 *Soient E_1 un espace normé et E_2 un espace β-Banach. Si la fonction f : $E_1 \longrightarrow E_2$ satisfait l'inégalité*

$$\|f(x+y) - f(x+\sigma(y)) - 2f(y)\| \leq \theta(\|x\|^p + \|y\|^p) \tag{7.63}$$

pour $\theta \geq 0$, $p > 1$ et pour tout $x, y \in E_1$. Alors, il existe une unique application $S : E_1 \longrightarrow E_2$, définie par

$$S(x) = \lim_{n\to+\infty} 2^n f(\frac{x}{2^n}), \tag{7.64}$$

solution de l'équation fonctionnelle σ-Jensen (7.3), vérifiant

$$\|f(x) - S(x)\| \leq \frac{2\theta}{(2^{\beta p} - 2^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}}\|x\|^p + \frac{\theta}{2(2^{\beta p} - 2^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}}\|x+\sigma(x)\|^p \tag{7.65}$$

pour tout $x \in E_1$.

Théorème 7.4.5 *Soient E_1 un espace normé et E_2 un espace β-Banach. Si la fonction $f : E_1 \longrightarrow E_2$ satisfait l'inégalité*

$$\|f(x+y) - f(x+\sigma(y)) - 2f(y)\| \leq \theta(\|x\|^p + \|y\|^p) \tag{7.66}$$

pour $\theta \geq 0$, $p < 1$ et pour tout $x, y \in E_1$. Alors, il existe une unique application $g : E_1 \longrightarrow E_2$, définie par

$$g(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} f(2^n x), \tag{7.67}$$

solution de l'équation fonctionnelle σ-Jensen (7.3), vérifiant

$$\|f(x) - g(x)\| \leq \frac{2\theta}{(2^\beta - 2^{\beta p})^{\frac{1}{\beta}}} [\|x\|^p + \frac{1}{2}\|x + \sigma(x)\|^p] \tag{7.68}$$

pour tout $x \in E_1$.

7.5 Problème ouvert

R. Ger et J. Sikorska [69] se sont intéressés à la stabilité de l'équation fonctionnelle de Cauchy orthogonale :

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\ x \perp y$$

Théorème 7.5.1 *Soient $(X, \perp)$ un espace orthogonal et Y un espace de Banach. Soit $f : X \to Y$ une fonction satisfaisant*

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \epsilon$$

pour tout $x, y \in X$ avec $x \perp y$ et $\epsilon > 0$. Alors, il existe une unique application additive orthogonale $a : X \to Y$ vérifiant

$$\|f(x) - a(x)\| \leq \frac{16}{3}\epsilon$$

pour tout $x \in X$.

L'équation orthogonale des quadratiques :

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y),\ x \perp y$$

a été examinée, pour la première fois, par F. Vajzović [176] avec X un espace de Hilbert, Y corps des scalaires, f continue et $\perp$ désignant l'othogonalité dans l'espace de Hilbert. Ce résultat a été, ensuite, généralisé par H. Drljević [42], M. Fochi [59], M. Moslehian [109, 110] et G. Szabó [169].

On pourrait considérer, à présent, le problème suivant : soient $(X, \perp)$ un espace orthogonal normé, Y un espace de Banach et $f : X \to Y$ une fonction vérifiant l'inégalité

$$\|f(x+y) + f(x+\sigma(y)) - 2f(x) - 2f(y)\| \leq \epsilon$$

pour tout $x, y \in X$ avec $x \perp y$ et $\sigma : X \to X$ une involution de X. Existe-il une constante c et une fonction $q : X \to Y$, solution de l'équation fonctionnelle orthogonale σ-quadratiques :

$$f(x+y) + f(x+\sigma(y)) = 2f(x) + 2f(y),\ x \perp y$$

satisfaisant

$$\|f(x) - q(x)\| \leq c\epsilon$$

pour tout $x \in X$?
On pourra encore poser le même problème pour les équations fonctionnelles suivantes :

$$\frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} f(x + k \cdot y) = f(x) + f(y),\ x, y \in X$$

et

$$\frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} f(x + k \cdot y) = f(x),\ x, y \in X.$$

Bibliographie

[1] J. Aczél. *Lectures on Functional Equations and Their Applications*. Academic Press, New York-London, 1966.

[2] J. Aczél. *A Short Course on Functional Equations*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1987.

[3] J. Aczél and J. Dhombres. *Functional equations in several variables*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[4] J. Aczél, J. K. Chung and C. T. Ng. *Symmetric second differences in product form on groups*. Topics in Mathematical Analysis, World Scientific Publ. Co., 1989, 1-22.

[5] M. Ait Sibaha, B. Bouikhalene and E. Elqorachi. Hyers-Ulam-Rassias stability of the K-quadratic functional equation. *J. Inequal. Pure and Appl. Math.*, **8** (2007), Article 89.

[6] M. Ait Sibaha, B. Bouikhalene and E. Elqorachi. Ulam-Gavruta-Rassias stability of a linear functional equation. *Int. J. Appl. Math. Stat.*, **7** (Fe07) (2007), 157-166.

[7] M. Akkouchi. Stability of certain functional equations via a fixed point of Ćirić. Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niš, Serbia, **25** (2) (2011), 121-127.

[8] M. Akkouchi. Hyers-Ulam-Rassias stability of nonlinear Volterra integral equations via a fixed points approach. *Acta Universitatis Apulensis*, **26** (2011), 257-266.

[9] T. Aoki. Locally bounded linear topological spaces. *Math. Inst., Tohoku Imperial University, Sendei*, **18** (1942), 588-594.

[10] T. Aoki. On the stability of the linear transformation in Banach spaces. *J. Math. Soc. Japan*, **2** (1950), 64-66.

[11] R. Badora. On some generalized invariant means and their application to the stability of the Hyers-Ulam type. *Ann. Polon. Math.*, **58** (1993), 147-159.

[12] J. A. Baker. The stability of the cosine equation. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **80** (1980), 411-416.

[13] J. A. Baker. The stability of certain functional equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **112** (3) (1991), 729-732.

[14] J. A. Baker and K. R. Davidson. Cosine, exponential and quadratic functions. *Glasnik Matematički*, **16** (36) (1981), 269-274.

[15] B. Bouikhalene and E. Elqorachi. On Stetkær type functional equations and Hyers-Ulam stability. *Publ. Math. Debrecen*, **69** (1-2) (2006), 95-120.

[16] B. Bouikhalene and E. Elqorachi. On the Hyers-Ulam-Rassias stability of the Cauchy linear functional equation. *Tamsui Oxf. J. Math. Sci.*, **23** (4) (2007), 449-459.

[17] B. Bouikhalene and E. Elqorachi. Ulam-Gavruta-Rassias stability of the Pexider functional equation. *Int. J. Appl. Math. Stat.*, **7** (Fe07) (2007), 27-39.

[18] B. Bouikhalene, E. Elqorachi and Y. Manar. *Wilson's functional equations for vector and* 3×3 *matrix valued functions*. Inequality Theory and Applications, Vol **6**, 2010. https://www.novapublishers.com/catalog/product_info.php?products_id=13293

[19] B. Bouikhalene, E. Elqorachi and Th. M. Rassias. On the generalized Hyers-Ulam stability of the quadratic functional equation with a general involution. *Nonlinear Funct. Anal. Appl.*, **12** (2) (2007), 247-262.

[20] B. Bouikhalene, E. Elqorachi and Th. M. Rassias. On the generalized Hyers-Ulam stability of Swiatak's functional equation. *J. Math. Inequal.*, **1** (2) (2007), 291-300.

[21] B. Bouikhalene, E. Elqorachi and Th. M. Rassias. On the Hyers-Ulam stability of approximately Pexider mappings. *Math. Inequal. Appl.*, **11** (2008), 805-818.

[22] B. Bouikhalene, E. Elqorachi and J. M. Rassias. The superstability of d'Alembert's functional equation on the Heisenberg group. *Appl. Math. Lett.*, **23** (1) (2010), 105-109.

[23] B. Bouikhalene, E. Elqorachi and A. Redouani. Hyers-Ulam stability on the generalized quadratic functional equation in amenable semigroups. *Jipam*, **8** (2007) Issue 2, Article 56, 18 pp.

[24] E. Castillo and M. R. Ruiz-Cobo. *Functional Equations and Modelling in Science and Engineering*. Marcel Dekker, New York, 1992.

[25] L. Cădariu and V. Radu. Fixed points and the stability of Jensens functional equation. *J. Inequal. Pure and Appl. Math.*, **4** (2003), article 4.

[26] L. Cădariu and V. Radu. On the stability of the Cauchy functional equation : A fixed point approach. *Grazer Math. Ber.*, **346** (2004), 43-52.

[27] A. Charifi, B. Bouikhalene and E. Elqorachi. Hyers-Ulam-Rassias stability of a generalized Pexider functional equation. *Banach J. Math. Anal.*, **1** (2) (2007), 176-185.

[28] A. Charifi, B. Bouikhalene, E. Elqorachi and A. Redouani. Hyers-Ulam-Rassias stability of a generalized Jensen functional equation. *Aust. J. Math. Anal. Appl.*, **6** (1) (2009), 1-16.

[29] W. Chojnacki. Fonctions cosinus hilbertiennes bornées dans les groupes commutatifs localement compacts. *Compositio Math.*, **57** (1986), 15-60.

[30] W. Chojnacki. Group representations of bounded cosine functions. *J. Reine Angew. Math.*, **478** (1996), 61-84.

[31] P. W. Cholewa. Remarks on the stability of functional equations. *Aequationes Math.*, **27** (1984), 76-86.

[32] J. K. Chung, Pl. Kannappan and C. T. Ng. A generalization of the cosine-sine functional equation on groups. *Linear Algebra Appl.*, **66** (1985), 259-277.

[33] J. K. Chung, Pl. Kannappan and C. T. Ng. On two trigonometric functional equations. *Mathematics Reports Toyama University*, **11** (1988), 153-165.

[34] J. K. Chung, B. R. Ebanks, C. T. Ng and P. K. Sahoo. On a quadratic trigonometric functional equation and some applications. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **347** (1995), 1131-1161.

[35] L. B. Ćirič. Generalized contractions and fixed-point theorems, *Publ. L'Inst. Math.*, 12, **26** (1971), 19-26.

[36] L. B. Ćirič. On a family of contractive maps and fixed points, *Publ. L'Inst. Math.*, **17** (1974), 45-51.

[37] S. Czerwik. On the stability of the quadratic mapping in normed spaces. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **62** (1992), 59-64.

[38] S. Czerwik. *Functional Equations and Inequalities in Several Variables*. World Scientific, Singapore, 2002.

[39] P. De Place Friis and H. Stetkær. On the cosine-sine functional equation on groups. *Aequationes Math.*, **64** (2002), 145-164.

[40] J. Dhombres. *Some Aspects of Functional Equations*. Chulalongkorn University, Department of Mathematics, Bankok, 1979.

[41] J. B. Diaz and B. Margolis. A fixed point theorem of the alternative, for contractions on a generalized complete metric space. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **74** (1968), 305-309.

[42] F. Drljević. On a functional which is quadratic on A-orthogonal vectors. *Publ. Inst. Math. (Beograd)*, **54** (1986), 63-71.

[43] H. Drygas. Quasi-inner products and their applications. In *Advances in Multivariate Statistical Analysis, D. Reidel Publishing Co.*, **0** (1987), 13-30.

[44] B. R. Ebanks. Pl. Kannappan and P. K. Sahoo. A common generalization of functional equations characterizing normed and quasi-inner product spaces. *Canad. Math. Bull.*, **35** (3) (1992), 321-327.

[45] B. R. Ebanks, P. K. Sahoo and W. Sander. *Characterizations of Information Measures*. World Scientific, Singapore, 1998.

[46] E. Elqorachi. *Etude d'une classe d'équations fonctionnelles dans un groupe topologique localement compact*. Doctorat d'Etat Es-Sciences Mathématiques, 2004, Faculté des Sciences Semlalia, Marrakech.

[47] E. Elqorachi and M. Akkouchi. On Cauchy-type functional equations, *Internat. J. Math and Math. Sci.*, **16** (2004), 847-859.

[48] E. Elqorachi and Y. Manar. *Fixed points approach to the stability of the quadratic functional equation*. Nonlinear Analysis, Stability, Approximation, and Inequalities, Springer Optimization and Its Applications, V **68** (2012), 259-278.

[49] E. Elqorachi and Y. Manar. Hyers-Ulam stability of the Drygas functional equation in amenable semigroups. *Acta. Math. Sinica*, (submitted for publication).

[50] E. Elqorachi and Y. Manar. On the paper by A. Najati and S.-M. Jung : the Hyers-Ulam stability of approximately quadratic mapping on restricted domains. *J. Nonlinear Anal. Appl.* **2012**, (2012) Article ID jnaa-00127, 10 Pages doi :10.5899/2012/jnaa-00127. http://www.ispacs.com/journals/jnaa/2012/jnaa-00127/

[51] E. Elqorachi, Y. Manar and Th. M. Rassias. Hyers-Ulam stability of the quadratic functional equation. *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.*, **1** (2) (2010), 11-20. http://journals.semnan.ac.ir/ijnaa/browse.php?mag_id=2\&slc_lang=en\&sid=1

[52] E. Elqorachi, Y. Manar and Th. M. Rassias. Hyers-Ulam stability of the quadratic and Jensen functional equations on unbounded domains. *J. Math. Sci. Advances and Application*, **4** (2) (2010), 287-303. http://scientificadvances.co.in/index.php?cmd=abstract&j=1&su=23&artical=276

[53] E. Elqorachi, Y. Manar and Th. M. Rassias. *Hyers-Ulam stability of the quadratic functional equation*. Functional Equations in Mathematical Analysis, Springer Optimization and Its Applications, V **52** (2012), 97-105. http://www.springerlink.com/content/n52444658585314g/

[54] V. A. Faǐziev and P. K. Sahoo. On Drygas functional equation on groups. *Int. J. Appl. Math. Stat.*, **7** (2007), 59-69.

[55] V. A. Faǐziev and P. K. Sahoo. Stability of Drygas functional equation on T (3, R). *Int. J. Appl. Math. Stat.*, **7** (2007), 70-81.

[56] V. A. Faǐziev and P. K. Sahoo. On the stability of Drygas functional equation on groups. *Banach J. Math.*, **1** (2007), 1-18.

[57] V. A. Faǐziev, Th. M. Rassias and P. K. Sahoo. The space of (ϕ,ã)-additive mappings on semigroups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **354** (11) (2002), 4455-4472.

[58] H. O. Fattorini. Uniformly bounded cosine functions in Hilbert space. *Indiana Univ. Math. J.*, **20** (1970), 411-425.

[59] M. Fochi. Functional equations in A-orthogonal vectors. *Aequationes Math.*, **38** (1989), 28-40.

[60] G. L. Forti. The stability of homomorphisms and amenability, with applications to functional equations. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **57** (1987), 215-226.

[61] G. L. Forti. Hyers-Ulam stability of functional equations in several variables. *Aequationes Math.*, **50** (1995), 143-190.

[62] G. L. Forti and J. Sikorska. Variations on the Drygas equation and its stability. *Nonlinear Analysis*, **74** (2011), 343-350.

[63] W. Förg-Rob and J. Schwaiger. A generalization of the cosine equation to n summands. *Grazer Math. Ber.*, **316** (1992), 219-226.

[64] Z. Gajda. Unitary representations of topological groups and functional equations. *J. Math. Anal. Appl.*, **152** (1990), 6-19.

[65] Z. Gajda. On stability of additive mappings. *Internat. J. Math. Math. Sci.*, **14** (1991), 431-434.

[66] Z. Gajda. Invariant means and representations of semigroups in the theory of functional equations. *Prace Naukowe Uniwersytetu Slaskiego, Katowice*, 1992.

[67] P. Găvruta. A generalization of the Hyers-Ulam-Rassias stability of approximately additive mappings. *J. Math. Anal. Appl.*, **184** (1994), 431-436.

[68] R. Ger. The singular case in the stability behaviour of linear mappings. *Grazer Math. Ber.*, **316** (1992), 59-70.

[69] R. Ger and J. Sikorska. Stability of the orthogonal additivity. *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, **43** (1995), 143-151.

[70] M. Ghermănescu. *Ecuatii functionale (Romanian)*. Editura Academiei Republicii Populare Romine, Bucharest, 1960.

[71] A. Gilányi. Eine zur Parallelogrammgleichung aquivalente ungleichung. *Aequationes Math.*, **62** (2001), 303-309.

[72] A. Gilányi. On a problem by K. Nikodem. *Math. Ineq. Appl.*, **5** (4) (2002), 707-710.

[73] F. P. Greenleaf. *Invariant Means on Topological Groups and there applications*. Van Nostrand, New York, 1969.

[74] G. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge University Press, Cambridge, 1934.

[75] K. Hensel. Ubereine news Begrundung der Theorie der algebraischen Zahlen. *Jahresber. Deutsch. Math. Verein*, **6** (1897), 83-88.

[76] D. Hilbert. Mathematical Problems, Lecture delivered before the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **8** (1902), 437-479

[77] D. H. Hyers. On the stability of the linear functional equation. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **27** (1941), 222-224.

[78] D. H. Hyers and Th. M. Rassias. Approximate homomorphisms. *Aequationes Math.*, **44** (1992), 125-153.

[79] D. H. Hyers, G. Isac and Th. M. Rassias. On the asymptoticity aspect of Hyers-Ulam stability of mappings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **126** (1998), 425-430.

[80] D. H. Hyers, G. Isac and Th. M. Rassias. *Stability of Functional Equations in Several Variables*. Birkhäuser, Basel, 1998.

[81] G. Isac and Th. M. Rassias. On the Hyers-Ulam stability of ϕ-additive mappings. *J. Approx. Theory*, **72** (1993), 131-137.

[82] G. Isac and Th. M. Rassias. Stability of ψ-additive mappings : Applications to nonlinear analysis. *Internat. J. Math. Math. Sci.*, **19** (1996), 219-228.

[83] K.-W. Jun and Y.-H. Lee. A generalization of the Hyers-Ulam-Rassias stability of Jensen's equation. *J. Math. Anal. Appl.*, **238** (1999), 305-315.

[84] S.-M. Jung. Hyers-Ulam stability of Jensens equation and its applications. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **126** (11) (1998), 3137-3143.

[85] S.-M. Jung. On the Hyers-Ulam stability of the functional equation that have the quadratic property. *J. Math. Anal. Appl.*, **222** (1998), 126-137.

[86] S.-M. Jung. Stability of the quadratic equation of Pexider type. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **70** (2000), 175-190.

[87] S.-M. Jung. *Hyers-Ulam-Rassias Stability of Functional Equations in Mathematical Analysis*. Hadronic Press, Florida, 2001.

[88] S.-M. Jung. *Hyers-Ulam-Rassias Stability of Functional Equations in Mathematical Analysis*. Hadronic Press, Florida, 2003.

[89] S.-M. Jung and B. Kim. Local stability of the additive functional equation and its applications. *IJMMS*, (2003), 15-26.

[90] S.-M. Jung and Z.-H. Lee. A fixed point approach to the stability of quadratic functional equation with involution. *Fixed Point Theory and Applications*, V **2008** (2008), Article ID 732086, 11 pages.

[91] S.-M. Jung and P. K. Sahoo. Hyers-Ulam-Rassias stability of the quadratic equation of Pexider type. *J. Korean Math. Soc.*, **38** (2001), 645-656.

[92] S.-M. Jung and P. K. Sahoo. Stability of a functional equation of Drygas. *Aequationes Math.*, **64** (3) (2002), 263-273.

[93] Pl. Kannappan. The functional equation $f(xy)+f(xy^{-1}) = 2f(x)f(y)$ for groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **19** (1968), 69-74.

[94] G. H. kim. The stability of d'Alembert and Jensen type functional equations. *J. Math. Anal. Appl.*, **325** (2007), 237-248.

[95] G. H. Kim and S. H. Lee. Stability of the d'Alembert type functional equations. *Nonlinear. Funct. Anal. Appl.*, **9** (2004), 593-604.

[96] J. Kisyński. On operator-valued solutions of d'Alembert's functional equation, I. *Colloq. Math.*, **23** (1971), 107-114.

[97] J. Kisyński. On operator-valued solutions of d'Alembert's functional equation, II. *Studia. Math.*, **42** (1972), 43-66.

[98] M. Kuczma. *Functional Equations in a Single Variable*. Monografie Mat. 46. Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1968.

[99] M. Kuczma. *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*. Uniwersytet Slaski, Warszawa-Krakow-Katowice, 1985.

[100] M. Kuczma, B. Choczewski and R. Ger. *Iterative Functional Equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[101] S. Kurepa. A cosine functional equation in Banach algebra. *Acta Sci. Math.*, (Szeged) **23** (1962), 255-267.

[102] S. Kurepa. Uniformly bounded cosine function in a Banach space. *Math. Balkanica*, **2** (1972), 109-115.

[103] J.-R. Lee, J.-S. An and C.-Park. On the stability of quadratic functional equations. *Abs. Appl. Anal.*, doi : 10.1155/2008/628178.

[104] Li. L. S, D. Kim and J. Chung. Stability of functional equations of Drygas in the space of Schwartz distributions. *J. Math. Anal. Appl.*, **320** (1) (2006), 163-173.

[105] Gy. Maksa and P. Volkmann. Caracterization of group homomorphisms having values in an inner product space. *Publ. Math.*, **56** (2000), 197-200.

[106] Y. Manar, E. Elqorachi and B. Bouikhalene. Fixed points and Hyers-Ulam-Rassias stability of the quadratic and Jensen functional equations. *Nonlinear Func. Anal. appl.*, **15** (2) (2010), 273-284.
http://www.zentralblatt-math.org/zmath/en/search?q=an:pre06000662\&format=complete

[107] Y. Manar, E. Elqorachi and Th. M. Rassias. Hyers-Ulam stability of the Jensen functional equation in quasi-Banach spaces. *Nonlinear Funct. Anal. Appl.*, **15** (4) (2010), 581-603.
http://www.zentralblatt-math.org/zmath/en/search/?q=an:pre06000812\&format=complete

[108] Y. Manar, E. Elqorachi and Th. M. Rassias. On the Hyers-Ulam stability of the quadratic and Jensen functional equations on a restricted domain. *Nonlinear Funct. Anal. Appl.*, **15** (4) (2010), 647-655.
http://www.zentralblatt-math.org/zmath/en/search/?q=an:pre06000817\&format=complete

[109] M. S. Moslehian. On the orthogonal stability of the Pexiderized quadratic equation. *J. Differ. Equations Appl.*, **11** (2005), 999-1004.

[110] M. S. Moslehian. On the stability of the orthogonal Pexiderized Cauchy equation. *J. Math. Anal. Appl.*, **318** (2006), 211-223.

[111] M. S. Moslehian and Th. M. Rassias. Stability of functional equations in non-Archimedian spaces. *Applicable Anal. and Discrete Math.*, **1** (2) (2007), 325-334.

[112] A. Najati and Y. J. Cho. Generalized Hyers-Ulam stability of the Pexiderized Cauchy functional equation in non-Archimedean spaces. *Fixed Point Theory and Appl.*, **2011**, Article ID 309026, 11 pages doi :10.1155/2011/309026.

[113] K. Nikodem. 7. Problem, Report of Meeting. *Aequations Math.*, **61** (2001), 301.

[114] T. A. O'Connor. A solution of the functional equation $\phi(x-y) = \Sigma_1^n a_j(x)\overline{a_j(y)}$, on a locally compact Abelian group. *J. Math. Anal. Appl.*, **60** (1977), 120-122.

[115] C.-G. Park. On the stability of the linear mapping in Banach modules. *J. Math. Anal. Appl.*, **275** (2002), 711-720.

[116] C.-G. Park and J.-H. Kim. The stability of a quadratic functional equation with the fixed point alternative. *Abs. Appl. Anal.*, doi : 10.1155/2009/907167.

[117] C.-G. Park and Th. M. Rassias. Hyers-Ulam-Rassias stability of a generalized Apollonius type quadratic mapping. *J. Math. Anal. Appl.*, **322** (2006), 371-381.

[118] C.-G. Park and Th. M. Rassias. Stability of homomorphisms in JC^*-algebras. *Pacific-Asian J. Math.*, **1** (1) (2007), 1-17.

[119] C.-G. Park and Th. M. Rassias. Homomorphisms in C^*-ternary algebras and JB^*-triples. *J. Math. Anal. Appl.*, **337** (2008), 13-20.

[120] C.-G. Park and Th. M. Rassias. Homomorphisms and derivations in proper JCQ^*-triples. *J. Math. Anal. Appl.*, **337** (2008), 1404-1414.

[121] R. C. Penney and A. L. Rukhin. D'Alembert's functional equation on groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **77** (1979), 73-80.

[122] E. Picard. *Leçons sur quelques équations fonctionnelles avec des applications à divers problèmes d'analyse et de physique mathématique*. Gauthier-Villars, Paris, 1928.

[123] S. Pincherle. *Funktionaloperationen und Gleichungen. In Encyklopadie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, Vol. II.1.2. Teubner, Leipzig, (1906), 761-781.

[124] T. A. Poulsen and H. Stetkær. On the trigonometric subtraction and addition formulas. *Aequationes Math.*, **59** (2002), 84-92.

[125] V. Radu. The fixed point alternative and the stability of functional equations. *Fixed Point Theory*, **4** (1) (2003), 91-96.

[126] A. Rahimi, A. Najati and J.-H. Bae. On the asymptoticity aspect of Hyers-Ulam stability of quadratic mappings. *J. Ineq. Appl.*, **2010** Article ID 454875, 14 pages, 2010.

[127] J. M. Rassias. On approximation of approximately linear mappings by linear mappings. *J. Funct. Anal.*, **46** (1982), 126-130.

[128] J. M. Rassias. On approximation of approximately linear mappings by linear mappings. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, **108** (1984), 445-446.

[129] J. M. Rassias and M. J. Rassias. On the Ulam stability of Jensen and Jensen type mappings on restricted domains. *J. Math. Anal. Appl.*, **281** (2003), 516-524.

[130] Th. M. Rassias. On the stability of linear mapping in Banach spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **72** (1978), 297-300.

[131] Th. M. Rassias. On a modified Hyers-Ulam sequence. *J. Math. Anal. Appl.*, **158** (1991), 106-113.

[132] Th. M. Rassias. The problem of S. M. Ulam for approximately multiplicative mappings. *J. Math. Anal. Appl.*, **246** (2000), 352-378.

[133] Th. M. Rassias. On the stability of the functional equations and a problem of Ulam. *Acta Applicandae Mathematicae*, **62** (2000), 23-130.

[134] Th. M. Rassias. On the stability of functional equations in Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, **251** (2000), 264-284.

[135] Th. M. Rassias. *Functional Equations and Inequalities*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2001.

[136] Th. M. Rassias. *Functional Equations, Inequalities and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordercht, Boston, London, 2003.

[137] Th. M. Rassias. On the stability of minimum points. *Mathematica*, **45** (68) (1) (2003), 93-104.

[138] Th. M. Rassias and P. Šemrl. On the behavior of mappings which do not satisfy Hyers-Ulam stability. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **114** (1992), 989-993.

[139] Th. M. Rassias and P. Šemrl. On the Hyers-Ulam stability of linear mappings. *J. Math. Anal. Appl.*, **173** (1993), 325-338.

[140] Th. M. Rassias and J. Tabor. *Stability of Mappings of Hyers-Ulam Type*. Hardronic Press, Florida, 1994.

[141] J. Rätz. On inequality associated with the Jordan-von Neumann functional equation. *Aequationes Math.*, **54** (2003), 191-200.

[142] A. Redouani. *Contribution à l'étude de la stabilité d'une classe d'équations fonctionnelles dans une structure de groupe*. Doctorat d'Etat Es-Sciences Mathématiques, 2007, Faculté des Sciences d'Agadir.

[143] A. Redouani, E. Elqorachi and B. Bouikhalene. Hyers-Ulam-Rassias stability of the quadratic mapping. *Nonlinear Funct. Anal. Appl.*, **13** (3) (2008), 431-445.

[144] A. Redouani, E. Elqorachi and Th. M. Rassias. The superstability of d'Alembert's functional equation on step 2 nilpotent groups. *Aequationes Math.*, **74** (3) (2007), 226-241.

[145] I. Risteski and V. Covachev. *Complex Vector Functional Equations*. World Scientific, Singapore, 2002.

[146] A. L. Rukhin. The solution of the functional equation of d'Alembert's for commutative groups. *Mimeograph Series*, Dept. of Statistics, Purdue University, (1979), 79-83.

[147] A. L. Rukhin. The solution of the functional equation of d'Alembert's type for commutative groups. *Internat. J. Math. Sci.*, **5** (1982), 315-335.

[148] R. Saadati, S. M. Vaezpour and Z. Sadeghi. On the stability of pexider functional equation in non-archimedean spaces. *J. Ineq. and appl.*, **17** (2011), pp 11.

[149] P. K. Sahoo and T. Riedel. *Mean Value Theorems and Functional Equations*. World Scientific, Singapore, 1998.

[150] J. Schwaiger. The functional equation of homogeneity and its stability properties. *Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur, Kl, Sitzungsber. Abt.* **II** (1996), 205, 3-12.

[151] P. Sinopoulos. Generalized sine equations I. *Aequationes Math.*, **48** (1994), 171-193.

[152] P. Sinopoulos. Generalized sine equations II. *Aequationes Math.*, **49** (1995), 122-152.

[153] P. Sinopoulos. Wilson's functional equation for vector and matrix functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125** (1997), 1089-1094.

[154] P. Sinopoulos. Wilson's functional equation in dimension 3. *Aequationes Math.*, **66** (2003), 164-179.

[155] F. Skof. Sull' approssimazione delle applicazioni localmente δ-additive. *Atti. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, **117** (1983), 377-389.

[156] F. Skof. Local properties and approximations of operators. *Rend. Sem. Math. Fis. Milano.*, **53** (1983), 113-129.

[157] F. Skof. Approssimazione di funzioni δ-quadratic su dominio restretto. *Atti. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, **118** (1984), 58-70.

[158] F. Skof. On the stability of functional equations on a restricted domains and related topics, In *Stability of Mappings of Hyers-Ulam type*. Hardronic Press, Palm Harbor, Florida, 1994, 141-151.

[159] F. Skof. About a remarkable functional equation on some restricted domain, *Functional Equations Results and Advances*. Klu. Acad. publ., (2002), 242-262.

[160] J. Smital. *On Functions and Functional Equations*. Adam Hilger, Bristol and Philadelphia, 1988.

[161] H. Stetkær. D'Alembert's equation and spherical functions. *Aequationes Math.*, **48** (1994), 164-179.

[162] H. Stetkær. Wilson's functional equation on groups. *Aequationes Math.*, **49** (1995), 252-275.

[163] H. Stetkær. Functional equations on abelian groups with involution. *Aequationes Math.*, **54** (1997), 144-172.

[164] H. Stetkær. Functional equations on abelian groups with involution II. *Aequationes Math.*, **55** (1998), 227-240.

[165] H. Stetkær. D'Alembert's and Wilson's functional equations for vector and 2×2 matrix valued functions. *Math. Scand.*, **87** (2000), 115-132.

[166] H. Stetkær. Operator-valued spherical functions. *J. Funct. Anal.*, **224** (2005), 338-351.

[167] H. Stetkær. Functional equations and matrix-valued spherical functions. *Aequationes Math.*, **69** (2005), 271-292.

[168] Gy. Szabó. Some functional equations related to quadratic functions. *Glasnik Math.*, **38** (1983), 107-118.

[169] Gy. Szabó. Sesquilinear-orthogonally quadratic mappings. *Aequationes Math.*, **40** (1990), 190-200.

[170] L. Székelyhidi. Functional equation on Abelian groups. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **37** (1981), 235-243.

[171] L. Székelyhidi. Note on a stability theorem. *Canad. Math. Bull.*, **25** (1982), 500-501.

[172] L. Székelyhidi. On the Levi-Civitá functional equation. *Berichte der Math. Stat. Sektion der Forschungsgesellschaft Joanneum-Graz*, **301** (1988), 23 pp.

[173] L. Székelyhidi. *Convolution Type Functional Equations on Topological Groups*. World Scientific, Singapore, 1991.

[174] J. Tabor and J. Tabor. Solution of the 7. Problem posed by K. Nikodem, Report of Meeting. *Aequationes Math.*, **61** (2001), 307-309.

[175] S. M. Ulam. *A Collection of Mathematical Problems*. Interscience Publ. New York, 1961. *Problems in Modern Mathematics*. Wiley, New York, 1964.

[176] F. Vajzović. Über das Funktional H mit der Eigenschaft : $(x, y) = 0 \Rightarrow H(x + y) + H(x - y) = 2H(x) + 2H(y)$. *Glasnik Mat. Ser.*, **III 2** (22) (1967), 73-81.

[177] E. Vincze. Eine allgemeinere Methode in der Theorie der Funktionalgleichunge II. *Publ. Math. Debrecen*, **9** (1962), 314-323.

[178] W. H. Wilson. On a certain related functional equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **26** (1919-20), 300-312.

[179] D. L. Yang. Remarks on the stability of Drygas' equation and the Pexider-quadratic equation. *Aequationes Math.*, **68** (2004), 108-116.

[180] D. L. Yang. The stability of Jensen's functional equation on locally compact groups. *Result. Math.*, **46** (2004), 381-388.