

N° d'ordre: 3959

# THÈSE

En vue de l'obtention du **DOCTORAT**

**Centre de Recherche :** Centre de Recherche Mathématiques et Applications de Rabat (CeReMAR)

**Structure de Recherche :** Laboratoire de Mathématiques, Statistique et Applications (LMSA)

**Discipline :** Mathématiques

**Spécialité :** Analyse Fonctionnelle et Applications

Présentée et soutenue le 20/07/2024

par

**Issam ABOUTAIB**

**Étude de quelques propriétés dans certains espaces de suites vectorielles**

## JURY

Nadia BOUDI	PES	Faculté des Sciences, Université Mohammed V, Rabat	Président
Zine El Abidine ABDELALI	PES	Faculté des Sciences, Université Mohammed V, Rabat	Rapporteur/Examinateur
Bouchra AHARMIM	PH	Faculté des Sciences Ben M'sick, Université Hassan II, Casablanca	Rapporteur/Examinateur
Hamza BOUJEMAA	PES	Faculté des Sciences, Université Mohammed V, Rabat	Rapporteur/Examinateur
Abdelghani SALHI	PH	École Normale Supérieure, Université Mohammed V, Rabat	Examinateur
Lahbib OUBBI	PES	École Normale Supérieure, Université Mohammed V, Rabat	Directeur de thèse

**Année Universitaire : 2023 - 2024**

# ÉTUDE DE QUELQUES PROPRIÉTÉS DANS CERTAINS ESPACES DE SUITES VECTORIELLES

Thèse de doctorat en Mathématiques par

**Issam ABOUTAIB**

Sous la direction de

**Pr : Lahbib OUBBI (UM5)**

# DEDICACES

À ma femme, Meryem El Attar,

Ton amour, ton soutien et ta patience ont été mes plus grands soutiens dans cette aventure. Je te dédie ce travail avec tout mon amour et ma gratitude.

À mes enfants, Israe, Issa et Assia Aboutaib,

Votre présence et votre amour ont illuminé chacun de mes jours. Que cette thèse soit un témoignage de mon engagement envers vous.

À mes parents,

Pour votre soutien indéfectible et vos sacrifices, je vous dédie ce travail avec une profonde reconnaissance.

À toute ma famille et à mes amis,

Votre soutien et vos encouragements ont été une source constante d'inspiration. Cette thèse est autant la vôtre que la mienne. Merci pour tout.

# Remerciement

Les travaux présentés dans cette thèse ont été réalisés au sein du laboratoire de Mathématiques, Statistiques et Applications de la Faculté des Sciences de Rabat. Je tiens à exprimer ma gratitude à Monsieur **Abdelhak ZOGLAT**, directeur du laboratoire, ainsi qu'à tous les membres du laboratoire pour leur soutien.

Je souhaite exprimer ma gratitude à mon directeur de thèse, Monsieur **Lahbib OUBBI**, Professeur de l'enseignement supérieur à l'École Normale Supérieure de Rabat, pour avoir dirigé cette thèse avec rigueur et professionnalisme. Il n'a jamais ménagé son temps ni ses compétences pour m'aider, me guider et m'encourager tout au long de mes travaux, et plus particulièrement durant les moments difficiles.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Madame **Nadia BOUDI**, Professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, pour l'honneur qu'elle m'a fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

Je remercie chaleureusement Monsieur **Zine El Abidine ABDELALI**, Professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, pour son aide précieuse, son encouragement et sa disponibilité. Je lui suis très reconnaissant pour le temps qu'il a consacré à ce travail, ainsi que pour toutes ses remarques et suggestions.

Je remercie vivement Madame **Bouchra AHARMIM**, Professeur habilité à la Faculté des Sciences Ben M'sick de Casablanca, d'avoir accepté d'être l'un des rapporteurs de ma thèse et d'avoir honoré ma soutenance par sa participation au jury.

Je suis également reconnaissant envers Monsieur **Hamza BOUJEMAA**, Professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, pour l'intérêt constant qu'il a porté à ce travail, le rapport qu'il a accepté de rédiger et sa participation au jury de ma thèse. Veuillez accepter ici l'expression de mes remerciements les plus sincères.

Je voudrais également exprimer ma reconnaissance à Monsieur **Abdelghani SALHI**, Professeur habilité à l'École Normale Supérieure de Rabat, pour avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse et pour l'honneur qu'il m'a fait en examinant ce travail.

Enfin, je remercie du fond du cœur ma famille et mes amis pour leur soutien et leurs encouragements constants, qu'ils soient assurés de ma reconnaissance et de mon affection.

## Publications

Pendant la préparation de cette thèse, nous avons publiés deux articles dans des revues internationales indexées par Scopus :

1. I. Aboutaib, C. Benzarouala, J. Brzdęk, Z. Leśniak, L. Oubbi, *Ulam Stability of a General Linear Functional Equation in Modular Spaces*. *Symmetry*. **14** (2022), 2468.
2. I. Aboutaib, J. Brzdęk, L. Oubbi, *Barrelled Weakly Köthe-Orlicz Summable Sequence Spaces*. *Mathematics*. **12**(1), (2024), 88.

# Résumé

Dans cette thèse, nous nous concentrons sur diverses notions liées à la dualité dans des espaces de suites sommables à valeurs vectorielles, avec des poids dans le  $\alpha$ -dual d'un espace de suites scalaire normal  $\Lambda$ . Nous explorons des concepts tels que la réflexivité, le tonnelage et la distinguéité. Une nouvelle notion de distinguéité est introduite et caractérisée dans certains des espaces de suites considérés, avec un exemple illustratif distinguant cette notion de celle classique. Nous examinons également les suites faiblement Köthe-Orlicz sommables dans un espace localement convexe séparé, avec une fonction d'Orlicz  $\varphi$  et un espace de suite normal  $\Lambda$ . Nous déterminons le dual topologique de l'espace  $\Lambda_\varphi[E]$  muni d'une topologie localement convexe séparé, en termes de suites fortement Köthe-Orlicz sommables à valeurs dans le dual topologique  $E'$  de  $E$ ; ce qui nous a permis de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que  $\Lambda_\varphi[E]$  soit tonnelé ou quasi-tonnelé, nous contribuons ainsi à la compréhension des différents espaces de suites à valeurs vectorielles et de leurs propriétés topologiques. De plus, dans cette thèse, nous traitons deux notions de duales d'espace de suites de Köthe-Orlicz sommables à valeurs dans un espace localement convexe, définie par une fonction d'Orlicz  $\varphi$  et un espace de suites parfait  $\Lambda$ . Nous explorons les propriétés de l'espace vectoriel de toutes ces suites muni d'une topologie localement convexe séparée. Sous certaines conditions, nous décrivons les formes linéaires continues sur  $\Lambda_\varphi\{E\}$ , déterminant ainsi son dual topologique. Les résultats obtenus améliorent certains travaux antérieurs et sont soutenus par des exemples tout au long de cette thèse.

**Mots-clés :** Espace de suites, sommabilité, propriété AK, dualité, réflexivité, espace tonnelé, espace distingué.

# Abstract

In this thesis, we focus on various notions related to duality in vector-valued summable sequence spaces, with weights in the  $\alpha$ -dual of a normal scalar sequence space  $\Lambda$ . We explore concepts such as reflexivity, barrelledness, and distinguishedness. A new notion of distinguishedness is introduced and characterized in some of the sequence spaces considered, with an illustrative example distinguishing this notion from the classical one. We also examine weakly Köthe-Orlicz summable sequences in a separated locally convex space, with an Orlicz function  $\varphi$  and a normal sequence space  $\Lambda$ . We determine the topological dual of the space  $\Lambda_\varphi[E]$  endowed with a separated locally convex topology, in terms of strongly Köthe-Orlicz summable sequences valued in the topological dual  $E'$  of  $E$ ; this allowed us to provide necessary and sufficient conditions for  $\Lambda_\varphi[E]$  to be barrelled or quasi-barrelled, thus contributing to the understanding of different vector-valued sequence spaces and their topological properties. Moreover, in this thesis, we address two notions of duals of Köthe-Orlicz summable sequence spaces valued in a locally convex space, defined by an Orlicz function  $\varphi$  and a perfect sequence space  $\Lambda$ . We explore the properties of the vector space of all such sequences endowed with a separated locally convex topology. Under certain conditions, we describe the continuous linear forms on  $\Lambda_\varphi\{E\}$ , thereby determining its topological dual. The results obtained improve upon some previous works and are supported by examples throughout this thesis.

**Keywords :** Sequence space, summability, AK property, duality, reflexivity, barrelled space, distinguished space.

# Table des matières

Dédicaces	i
Remerciement	ii
Résumé	iv
Abstract	v
Introduction	1
<b>1 Préliminaires</b>	<b>5</b>
1.1 Espace vectoriel topologique localement convexe . . . . .	5
1.1.1 Généralités . . . . .	5
1.1.2 Dualité et topologies polaires . . . . .	7
1.1.3 Espace réflexif . . . . .	10
1.1.4 Quelques théorèmes généraux . . . . .	13
1.2 Espaces de suites . . . . .	14
1.2.1 Espaces de suites scalaires . . . . .	14
1.2.2 Espaces de suites vectorielles . . . . .	16
1.2.3 Espaces de suites d'Orlicz . . . . .	20
<b>2 Quelques propriétés dans certains espaces de suites vectorielles</b>	<b>22</b>
2.1 Espaces tonnelés de suites vectorielles . . . . .	22
2.2 Réflexifs dans les espaces de suites vectorielles . . . . .	29
2.3 Espaces distingués de suites vectorielles . . . . .	32
<b>3 Espaces tonnelés de suites faiblement Köthe-Orlicz sommables</b>	<b>35</b>
3.1 Espaces de suites faiblement Köthe-Orlicz Sommables . . . . .	35
3.2 Dual topologique de $\Lambda_\varphi[E]$ . . . . .	40
<b>4 Espaces de suites absolument Köthe-Orlicz sommables</b>	<b>50</b>
4.1 Espace de suites absolument Köthe-Orlicz $\Lambda$ -sommables . . . . .	50

4.2 Dual topologique de $\Lambda_\varphi\{E\}$ . . . . .	52
4.3 Quelques propriétés de $\Lambda_\varphi\{E\}$ . . . . .	59
<b>Références bibliographiques</b>	<b>64</b>

# Introduction

L'étude des suites et des transformations linéaires associées, ou sommabilité, a connu une évolution importante depuis la fin du XIXe siècle. Ce domaine a commencé à se développer en 1890 avec les travaux de Cesàro, qui s'intéressait à la multiplication des séries. Depuis lors, l'étude des espaces de suites s'est étendue à de nombreuses disciplines de l'analyse fonctionnelle.

Au début du XXe siècle, Hilbert a établi les propriétés principales de l'espace  $\ell_2$ , tandis que Fréchet a introduit dans sa thèse des concepts topologiques clés liés aux suites. Les contributions de Fischer, Schmidt, Riesz et Helly ont approfondi la compréhension des espaces  $\ell_p$  et  $L_p$ . Les travaux de Banach, Köthe et Toeplitz ont enrichi la théorie avec des exemples et des contre-exemples importants. Ils ont aussi étudié la dualité ( $\alpha$ -dualité) entre les espaces de suites scalaires.

L'intérêt pour les espaces de suites a été ravivé par des travaux et des résultats théoriques tout au long du XXe siècle. En particulier, le théorème de Shur sur la convergence dans l'espace  $\ell_1$  a permis à Köthe et Toeplitz de démontrer que les faiblement bornés et fortement bornés sont les mêmes pour le  $\alpha$ -dual (un espace de suites parfait). Ces travaux ont influencé Mackey à introduire des concepts de dualité et des topologies polaires associées et von Neumann à définir des espaces localement convexes. Les espaces échelonnés introduits par Köthe et les résultats sur les espaces de suites normés comme  $c_0$  et  $\ell_p$  ( $1 \leq p \leq +\infty$ ) ont montré l'importance des espaces de suites scalaires dans diverses branches de l'analyse fonctionnelle.

Les progrès dans l'étude des espaces de suites à valeurs vectorielles ont ouvert de nouvelles perspectives passionnantes en mathématiques. Des chercheurs comme Dvoretzky, Rogers, Grothendieck et Pietsch ont jeté les bases de ces développements en explorant des concepts tels que la nucléarité et les topologies tensorielles. Le travail de Waelbroeck sur les espaces bornologiques convexes complets, également connus sous le nom de "b-espaces", à travers des espaces de familles sommables appropriées, a élargi notre compréhension de cette théorie.

L'étude de l'espace  $\Lambda\{E\}$  des suites absolument  $\Lambda$ -sommables à valeurs dans un espace

localement convexe séparé  $E$  vise à généraliser la théorie de Köthe pour les espaces de suites scalaires et à explorer les propriétés héritées des espaces de départ  $\Lambda$  et  $E$ . Des travaux dans ces directions ont été menés par D. A. Gregory (1969), N. De Grande-De Kimpe (1971), Ronald C. Rosier (1973) et d'autres, mettant en lumière des propriétés importantes comme la  $\alpha$ -dualité, les parties bornées, relativement compactes et équicontinues et la caractérisation de la nucléarité.

En relation avec la nucléarité d'un espace localement convexe séparé  $E$ , A. Pietsch a introduit les espaces  $\ell_1[E]$ ,  $\ell_1(E)$ ,  $\ell_1\{E\}$  et  $\ell_1\langle E \rangle$ , respectivement des suites faiblement  $\ell_1$ -sommables,  $\ell_1$ -sommables, absolument  $\ell_1$ -sommables et fortement  $\ell_1$ -sommables dans  $E$ . Il a également introduit et étudié l'espace  $\Lambda(E)$  des suites  $\Lambda$ -sommables dans  $E$ ,  $\Lambda$  étant un espace de suites parfait au sens de Köthe, muni de sa topologie normale. La thèse de Pedro J. Paúl (1985) ainsi que ses recherches en collaboration avec M. Florêncio sur les diverses notions de tonnage, les conditions qu'ils ont établies pour que ces espaces soient bornologiques ou (DF), ainsi que les applications de leurs résultats sur plusieurs types d'espaces de fonctions, illustrent l'importance attribuée à l'espace  $\Lambda(E)$  des suites  $\Lambda$ -sommables.

Plus tard, dans le cas où  $\Lambda$  est équipé d'une topologie polaire générale, M. Florencio et P. J. Paúl ont étudié  $\Lambda(E)$  et ont obtenu des résultats intéressants, tels que la caractérisation de la propriété  $AK$  et la relation avec la complétion du produit tensoriel injectif  $\Lambda \otimes_\varepsilon E$ . Les mêmes auteurs ont décrit dans [13] et [14] des conditions assurant le tonnage de  $\Lambda\{E\}$  ou qui en font un espace distingué.

Dans [25], L. Oubbi et M. A. Ould Sidaty ont donné une définition de l'espace  $\Lambda\langle E \rangle$  des suites fortement  $\Lambda$ -sommables. Dans le cas où  $\Lambda(E)$  est un  $AK$ -espace, ils ont obtenu une caractérisation du dual topologique de  $\Lambda(E)$  en termes de suites fortement  $\Lambda^*$ -sommables dans  $E'$ ,  $\Lambda^*$  étant le  $\alpha$ -dual de  $\Lambda$  et  $E'$  le dual topologique de  $E$ . Cela leur a permis de caractériser dans [26] la réflexivité de l'espace localement convexe  $\Lambda(E)$ . Des résultats et propriétés supplémentaires sur  $\Lambda(E)$  ont été obtenus dans [26, 27, 37]. Récemment, Ould Sidaty a étudié dans [38] la nucléarité, en tant qu'espace bornologique convexe, de  $\Lambda_b(E)$ , l'espace de toutes les suites totalement  $\Lambda$ -sommables, dans le cadre défini par [13], où  $E$  représente un espace bornologique convexe.

Ghosh et Srivastava ont examiné dans [19] la notion d'espace de suites absolument  $\Lambda$ -sommables en utilisant une fonction d'Orlicz  $\varphi$ . Ils ont introduit et étudié l'espace  $F(E, \varphi)$ , constitué de suites  $(x_n)_n$  dans un espace de Banach  $E$  qui satisfont la condition  $\left(\varphi\left(\frac{\|x_n\|_E}{\rho}\right)\right)_n \in F$  pour certains  $\rho > 0$ , où  $F$  représente un espace de suites normal.

Il convient de noter que plusieurs types d'espaces de suites ont été étudiés dans la littérature. Certains reposent sur des matrices de Köthe infinies  $(a_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ , d'autres sur des opérateurs de Cesàro et d'autres sur différents types de convergence ou de sommabilité (voir [1, 3, 4, 5, 12, 13, 14, 17, 19, 21, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 32, 37, 38, 39]). Bien sûr,

les fonctions d'Orlicz donnent naturellement des espaces de suites dans le cas scalaire. Elles sont également utilisées pour construire des espaces de suites à valeurs vectorielles (voir par exemple [17, 19, 31] et les références qui y sont mentionnées). La caractérisation du dual topologique ou du dual de Köthe-Toeplitz est l'un des principaux problèmes qui intéressent les auteurs (voir par exemple [8]). Mais avant cela, une topologie doit être définie sur l'espace de suites considéré. Notre travail est une contribution à l'étude de divers espaces de suites pondérément sommables dans un espace localement convexe  $E$ , avec des poids dans une espace parfait de suites scalaire, munis de topologies appropriées. Nous nous intéressons en particulier à la détermination des duals topologiques de ces espaces et à en caractériser ceux qui sont (quasi-) tonnelés, (semi-) réflexifs ou (quasi-) distingués. Notons que la notion de quasi-distingué telle qu'elle est définie ici a été introduite par nous-mêmes. Un joli exemple est présenté pour la distinguer des notions déjà existantes.

Cette thèse est constituée de quatre chapitres.

Nous posons dans le premier chapitre, "Préliminaires", les fondations théoriques nécessaires pour aborder les sujets développés dans les chapitres suivants. Nous commençons par préciser la terminologie et les notations utilisées tout au long de la thèse, couvrant des concepts clés de la théorie des espaces vectoriels topologiques localement convexes, ainsi que des espaces de suites. En particulier, nous explorons des notions telles que les espaces bornologiques, tonnelés, réflexifs et distingués. Dans ce chapitre, nous nous appuyons sur des ouvrages de référence en analyse fonctionnelle, notamment ceux de Köthe, Robertson et Robertson, Pietsch, et Jarchow. Les théorèmes fondamentaux et les définitions sont présentés pour établir une base solide pour les discussions ultérieures sur les espaces de suites et leurs propriétés.

Dans le deuxième chapitre, nous proposons un aspect assez différent de l'étude des espaces de suites, dans l'esprit de [13, 25, 26, 27, 37, 32]. Nous explorons différentes notions liées à la dualité, telles que la réflexivité, le tonnelage et distingué dans les espaces de suites sommables à valeurs vectorielles en général. Les espaces réflexifs se distinguent par leur géométrie intéressante et les espaces tonnelés partagent certaines propriétés importantes avec les espaces de Banach telles que le théorème de Banach-Steinhaus et ses conséquences. De plus, la réflexivité est liée à la fois au tonnelage et à la distingué. Dans cette thèse, nous étudions ces notions dans différents espaces de suites sommables à valeurs vectorielles. Plus précisément, nous nous intéressons aux propriétés de (quasi-) tonnelage, de (semi-) réflexivité et la distingué dans les espaces  $\Lambda(E)$ ,  $\Lambda[E]$ ,  $\Lambda\{E\}$  et  $\Lambda\langle E\rangle$  des suites  $\Lambda$ -sommables, faiblement  $\Lambda$ -sommables, absolument  $\Lambda$ -sommables et fortement  $\Lambda$ -sommables dans  $E$ , respectivement. Nous améliorons et/ou étendons plusieurs résultats connus. Nous obtenons également de nouveaux résultats en lien avec la bornitude, les duals topologiques et les ensembles équicontinus dans le dual de ces espaces. Plus

précisément, nous donnons les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces espaces soient (quasi-) tonnelés, (semi-) réflexifs ou distingués. Enfin, nous introduisons une nouvelle notion d'espace distingué, plus faible que la notion classique. Nous justifions cette introduction par un exemple permettant de distinguer cette notion des notions existantes et nous étudions cette notion dans les espaces  $\Lambda(E)_r$  et  $\Lambda\{E\}_r$ .

Pour une fonction d'Orlicz  $\varphi$  et un espace localement convexe  $E$ , nous introduisons dans le troisième chapitre la notion de suite faiblement  $(\varphi, \Lambda)$ -sommable  $(x_n)_n$  dans  $E$  et nous examinons certaines propriétés de l'espace vectoriel  $\Lambda_\varphi[E]$ , constitué de toutes de telles suites (voir [2]). Nous équipons d'abord  $\Lambda_\varphi[E]$  d'une topologie localement convexe séparée, puis nous étudions la complétude et la continuité des projections de l'espace localement convexe ainsi obtenu. Nous établissons ainsi que  $E$  est un sous-espace complété de  $\Lambda_\varphi[E]$ . Pour étudier le dual topologique de  $\Lambda_\varphi[E]$ , nous sommes amenés à introduire l'espace  $\Lambda_\varphi\langle E \rangle$  de suites fortement  $(\varphi, \Lambda)$ -sommables. En fait, nous prouvons que, chaque fois que  $\Lambda_\varphi[E]$  est  $AK$ , son dual topologique est donné en termes de suites fortement  $(\varphi^*, \Lambda^*)$ -sommables dans  $E'$ . Ensuite, nous caractérisons le tonnelage dans  $\Lambda_\varphi[E]$ . Pour ce faire, nous étudions des ensembles équicontinus du dual topologique de  $\Lambda_\varphi[E]$ .

Dans le dernier chapitre nous nous concentrons sur les formes linéaires continues définies sur les espaces de suites absolument Köthe-Orlicz sommables, notés  $\Lambda_\varphi\{E\}$ . Nous commençons par une définition formelle de ces espaces, nous les munissons d'une topologie localement convexe séparée et nous donnons certaines de leurs propriétés en relation avec les mêmes propriétés dans  $E$ . Ensuite, nous examinons certaines propriétés de  $\Lambda_\varphi\{E\}$  et  $\Lambda_\varphi\{E\}_r$ , le sous-ensemble de  $\Lambda_\varphi\{E\}$  constitué des suites qui sont limite de leurs sections finies. Nous montrons par exemple que les projections  $(x_n)_n \mapsto x_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sont continues, que  $E$  est un sous-espace complété dans  $\Lambda_\varphi\{E\}$  et dans  $\Lambda_\varphi\{E\}_r$  et que  $\Lambda_\varphi\{E\}$  est complet si et seulement si  $E$  est complet. Ensuite, nous nous concentrons sur la description du dual topologique de  $\Lambda_\varphi\{E\}_r$ , ce qui nous amène à introduire l'espace  $\Lambda_\varphi|E|$  de suites fortement absolument Köthe-Orlicz sommables. A la fin du chapitre nous présentons diverses propriétés de  $\Lambda_\varphi\{E\}$ , fournissant des théorèmes et des propositions qui enrichissent la compréhension de ces espaces.

Dans cette introduction, nous avons tenté de brosser un tableau d'ensemble de l'évolution de l'étude des espaces de suites et de leurs transformations linéaires, en soulignant les contributions clés et les développements théoriques qui ont façonné ce domaine de recherche. Les chapitres suivants détailleront plus précisément les résultats de notre étude, en apportant de nouvelles perspectives et en approfondissant la compréhension des propriétés dans certains espaces de suites vectorielles.

# Préliminaires

Ce chapitre vise à préciser la terminologie et les diverses notations utilisées dans cette thèse, qui sont liées à la théorie générale des espaces localement convexes, aux espaces de suites scalaires et vectorielles, ainsi qu'aux espaces d'Orlicz. Nous allons utiliser ces notations et théorèmes généraux d'Analyse Fonctionnelle comme outils de démonstration. Ces extraits proviennent principalement des ouvrages de Köthe [23], Robertson et Robertson [33], E. Pietsch [30] et de celui de Hans Jarchow [20]. Tout au long de ce travail, les espaces vectoriels considérés sont définis sur le corps  $\mathbb{K}$ , où  $\mathbb{K}$  représente le corps des réels  $\mathbb{R}$  ou des complexes  $\mathbb{C}$ .

## 1.1 Espace vectoriel topologique localement convexe

### 1.1.1 Généralités

Dans toute la suite  $E$  désigne un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

**Définition 1.1.1.** *Soit  $A$  une partie de  $E$ . On dit que :*

- $A$  est dite équilibrée si pour tout  $x \in A$  et tout  $|\lambda| \leq 1$ , on a  $\lambda x \in A$ .
- $A$  est absolument convexe (ou disquée ou encore un disque), si  $A$  est à la fois équilibrée et convexe.
- $A$  absorbante, si pour tout  $x \in E$ , il existe  $\lambda > 0$ , tel que  $\mu x \in A$  pour chaque  $|\mu| \leq \lambda$ .

**Définition 1.1.2.** *On dit que  $E$  est un espace vectoriel topologique (e.v.t), si  $E$  est muni d'une topologie  $\tau$  rendant continues les applications suivantes :*

$$\begin{array}{ll}
 E \times E \longrightarrow E & \text{et} \quad \mathbb{K} \times E \longrightarrow E \\
 (x, y) \longmapsto x + y & (\lambda, x) \longmapsto \lambda x
 \end{array}$$

**Remarque 1.1.3.** 1. Grâce à la continuité des applications ci-dessus, dans un espace vectoriel topologique, les voisinages d'un point  $x \in E$  sont exactement les translations des voisinages de zéro. Ils sont de la forme  $x + V$ , où  $V$  est un voisinage de 0.

2. Un espace vectoriel topologique admet toujours un système fondamental de voisinages de 0 formé d'équilibrés. Ainsi tout voisinage de zéro  $U$ , il existe un voisinage de zéro équilibré  $V$  tel que  $V \subset U$ .
3. Pour tout voisinage de zéro  $U$ , il existe un voisinage de zéro équilibré  $V$  tel que  $V + V \subset U$ .

Dans toute la suite lorsque  $(E, \tau)$  est un e.v.t., on notera par  $\mathcal{V}_0^E$  un système fondamental quelconque de 0. Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, on écrira  $\mathcal{V}_0$  au lieu de  $\mathcal{V}_0^E$ .

**Proposition 1.1.4.** (cf. I.3 de [33]) Soient  $(E, \tau)$  un espace vectoriel topologique et  $A$  une partie de  $E$ . La fermeture de  $A$  est  $\overline{A} = \bigcap \{A + V, V \in \mathcal{U}\}$ ,  $\mathcal{U}$  étant un système fondamental de voisinages de 0.

Dans la suite, nous nous concentrerons sur une catégorie importante et spécifique d'espaces vectoriels topologiques, à savoir les espaces localement convexes.

**Définition 1.1.5.** Un espace vectoriel topologique  $(E, \tau)$ ,  $\tau$  étant la topologie sur  $E$ , est un espace localement convexe (e.l.c.), si l'origine admet un système fondamental de voisinages convexes.

**Proposition 1.1.6.** Dans tout espace localement convexe  $(E, \tau)$  zéro admet un système fondamental de voisinages  $\mathcal{U}$  formés de disques tels que :

1. Pour tous  $U, V \in \mathcal{U}$ , il existe  $W \in \mathcal{U}$ , tel que  $W \subset U \cap V$ .
2. Pour tout  $U \in \mathcal{U}$  et tout  $\alpha \neq 0$ , on a  $\alpha U \in \mathcal{U}$ .

Réciproquement, si  $\mathcal{U}$  est une famille de disques absorbants vérifiant 1 et 2, alors il existe une topologie localement convexe sur  $E$ , qui est la moins fine des topologies localement convexes sur  $E$  rendant les éléments de  $\mathcal{U}$  des voisinages de 0. On la note  $\tau_{\mathcal{U}}$ .

**Proposition 1.1.7.** (cf. I.3 de [33]) Dans un espace localement convexe, l'adhérence d'une partie équilibrée (convexe, disquée) est du même type.

**Proposition 1.1.8.** (cf. I.4 de [33])

Soit  $P$  une semi-norme sur  $E$ . La boule ouverte  $B_P(0, r) := \{x \in E : P(x) < r\}$  et la boule fermée  $\overline{B}_P(0, r) := \{x \in E : P(x) \leq r\}$  sont des disques absorbants.

Réciproquement, si  $A$  est un disque absorbant, alors la jauge  $J_A : x \mapsto \inf\{\alpha > 0 : x \in \alpha A\}$  est une semi-norme sur  $E$ .

**Remarque 1.1.9.** .

1. Soit  $U$  un disque absorbant et  $P = J_U$  sa jauge. Alors :

$$B_P(0, 1) \subset U \subset \overline{B}_P(0, 1).$$

2. Si  $A$  est un disque (non nécessairement absorbant), alors  $J_A$  est une semi-norme sur l'espace vectoriel  $E_A$  engendré par  $A$ , a savoir  $E_A := \bigcup_{\lambda > 0} \lambda A$ .

**Proposition 1.1.10.** (cf. I.4 de [33])

Soit  $U$  un disque absorbant dans  $E$ . Alors  $J_U$  est continue si et seulement si  $U$  est un voisinage de 0.

**Définition 1.1.11.** Soit  $\mathbb{P}$  une famille de semi-normes sur  $E$ . Alors il existe une topologie localement convexe  $\tau_{\mathbb{P}}$  sur  $E$  qui est la moins fine de toutes les topologies localement convexes qui rendent continues les éléments de  $\mathbb{P}$ , elle est dite topologie associée à  $\mathbb{P}$ , ou définie par  $\mathbb{P}$ .

Un système fondamental de voisinages de 0 pour  $\tau_{\mathbb{P}}$  est donné par l'ensemble de toutes les intersections finies du type :

$$\bigcap_{i=1}^n B_{P_i}(0, \varepsilon_i),$$

où  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P_i \in \mathbb{P}$  et  $\varepsilon_i > 0$ .

**Remarque 1.1.12.** La topologie  $\tau_{\mathbb{P}}$  est séparée si et seulement si pour tout  $x \in E$ ,  $x \neq 0$ , il existe  $P \in \mathbb{P}$  tel que  $P(x) \neq 0$ .

**Définition 1.1.13.** On dit qu'un espace vectoriel topologique  $(E, \tau)$  est métrisable (resp. normable) s'il est séparé et s'il existe une distance  $d$  (resp. une norme  $\|\cdot\|$ ) telle que la topologie  $\tau_d = \tau$  (resp.  $\tau_{\|\cdot\|} = \tau$ ).

On dit que  $(E, \tau)$  est un espace de Fréchet si  $(E, \tau)$  un espace localement convexe métrisable complet.

**Proposition 1.1.14.** (cf. I.4 de [33])

Un espace vectoriel topologique est métrisable si et seulement s'il admet un système fondamental dénombrable de voisinages de 0.

## 1.1.2 Dualité et topologies polaires

Une paire duale est la donnée de deux espaces vectoriels  $E$  et  $F$  sur  $\mathbb{K}$  et d'une forme bilinéaire  $B : E \times F \rightarrow \mathbb{K}$  tels que :

$$B_1 : [(\forall f \in F) : B(x, f) = 0] \iff x = 0.$$

$$B_2 : [(\forall x \in E) : B(x, f) = 0] \iff f = 0.$$

Si  $(E, F)$  est une paire duale dont la dualité est relative à la forme bilinéaire  $B$ , alors les applications :

$$\begin{array}{ccc} B_x : F \longrightarrow \mathbb{K} & \text{et} & B_f : E \longrightarrow \mathbb{K} \\ f \longmapsto f(x) & & x \longmapsto f(x) \end{array}$$

sont des formes linéaires et :

$$\begin{array}{ccc} \theta : E \longrightarrow F^* & \text{et} & v : F \longrightarrow E^* \\ x \longmapsto B_x & & f \longmapsto B_f \end{array}$$

sont des injections, de sorte que  $E$  (resp,  $F$ ) peut-être considéré comme sous-espace vectoriel du dual algébrique  $F^*$  de  $F$  (resp,  $E^*$  de  $E$ ).

**Notation :** On note simplement  $\langle x, f \rangle$  ou  $f(x)$  au lieu de  $B(x, f)$ .

**Définition 1.1.15.** Soit  $(E, F)$  une paire duale. La topologie faible, notée  $\sigma(E, F)$ , définie sur  $E$  par  $F$  est la topologie localement convexe la moins fine sur  $E$  rendant continues les  $B_f, f \in F$ .

La topologie faible  $\sigma(E, F)$  est définie par les semi-normes :

$$P_A(x) := \sup\{|f(x)|, f \in A, A \subset F \text{ fini}\}.$$

Un système fondamental de voisinages de 0 pour  $\sigma(E, F)$  est donc donné par les ensembles de la forme :

$$V_{A,\varepsilon} = \bigcap_{f \in A} \overline{B}_{P_f(0,\varepsilon)} = \{x \in E : |f(x)| \leq \varepsilon, f \in A\}, \quad \varepsilon > 0, \quad A \subset F \text{ fini}.$$

**Définition 1.1.16.** Une topologie  $\tau$  localement convexe séparée sur un espace vectoriel  $E$  est dite compatible avec la dualité  $(E, F)$  si  $(E, F)$  est une paire duale et le dual topologique  $(E, \tau)'$  de  $(E, \tau)$  égale  $F$ .

**Définition 1.1.17.** Soit  $(E, F)$  une paire duale,  $A$  une partie de  $E$  et  $B$  une partie de  $F$ .  
1. Le polaire de  $A$  dans  $F$  est l'ensemble

$$A^\circ := \{f \in F : |f(x)| \leq 1, \forall x \in A\}.$$

2. L'antipolaire de  $B$  dans  $E$  est l'ensemble

$$B^\bullet := \{x \in E : |f(x)| \leq 1, \forall f \in B\}.$$

Des fois on l'appelle l'antipolaire de  $B$  surtout dans le cas d'une paire duale formé d'un e.l.c.  $E$  et de son dual continu.

**Proposition 1.1.18.** (cf. II.4 de [33])

Soit  $(E, F)$  une paire duale,  $A$  et  $C$  des parties de  $E$  et  $B$  et  $D$  des parties de  $F$ . Alors :

1.  $A^\circ$  est un disque  $\sigma(F, E)$ -fermé et  $B^\bullet$  est un disque  $\sigma(E, F)$ -fermé.
2. Pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ ,  $(\lambda A)^\circ = \frac{1}{|\lambda|} A^\circ = \frac{1}{\lambda} A^\circ$  et  $(\lambda B)^\bullet = \frac{1}{|\lambda|} B^\bullet = \frac{1}{\lambda} B^\bullet$ .
3. Si  $A \subset C$ , alors  $C^\circ \subset A^\circ$  et si  $B \subset D$ , alors  $D^\bullet \subset B^\bullet$ .
4. Si  $(A_i)_i$  est une famille quelconque de parties de  $E$ , alors  $(\bigcup_i A_i)^\circ = \bigcap_i A_i^\circ$ .
5. Si  $(A_i)_i$  est une famille de disques  $\sigma(F, E)$ -fermés, alors  $(\bigcap_i A_i)^\circ = \overline{\Gamma(\bigcup_i A_i^\circ)}$ , où  $\Gamma(A)$  désigne l'enveloppe disquée de la partie  $A$  (le plus petit disque contenant  $A$ ).

**Théorème 1.1.19.** (cf. 8.2.2 de [20])

Soit  $(E, \tau)$  un espace localement convexe séparé et  $A$  une partie de  $E$ . Alors  $A^{\circ\circ} = \overline{\Gamma(A)}$ .  
En particulier, si  $A$  est un disque fermé de  $E$ , alors  $A^{\circ\circ} = A$ .

**Définition 1.1.20.** Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ . On dit que  $A$  absorbe  $B$  s'il existe  $\lambda > 0$  tel que pour tout  $|\mu| \geq \lambda$ , on a  $B \subset \mu A$ .

Remarquons que si  $A$  est équilibré, alors  $A$  absorbe  $B$  s'il existe  $\lambda \neq 0$  tel que  $B \subset \lambda A$ .

**Définition 1.1.21.** Soient  $(E, \tau)$  un espace vectoriel topologique et  $A$  une partie de  $E$ . On dit que  $A$  est bornée si  $A$  est absorbée par tout voisinage de 0. C'est à dire :

$$\forall V \in \mathcal{V}_0, \exists \lambda > 0 : \forall \mu \in \mathbb{K}, (|\mu| > \lambda) \implies (A \subset \mu V).$$

Un disque  $B$  de  $E$  est dit bornivore s'il absorbe toute partie bornée de  $E$ .

**Remarque 1.1.22.** 1. Si  $V$  est équilibré, il suffit qu'il existe  $\lambda > 0$  tel que  $A \subset \lambda V$ .  
2. Si  $\mathbb{P}$  est une famille de semi-normes, alors  $A$  est borné si et seulement si pour tout  $P \in \mathbb{P}$ ,  $P(A)$  est un borné de  $\mathbb{R}^+$ , i.e.  $\sup\{P(x); x \in A\} < +\infty$ .

**Proposition 1.1.23.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels topologiques et  $f : E \longrightarrow F$  une application linéaire continue. Si  $A$  est une partie bornée de  $E$ , alors  $f(A)$  est bornée dans  $F$ .

**Lemme 1.1.24.** Soient  $(E, F)$  une paire duale et  $A$  une partie de  $E$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $A$  est  $\sigma(E, F)$ -bornée.
2. L'application  $f \mapsto P_A(f) := \sup\{|f(x)| : x \in A\}$  est une semi-norme sur  $F$ .
3.  $A^\circ$  est absorbant dans  $F$ .

**Remarque 1.1.25.** Un disque  $B$  est  $\sigma(F, E)$ -bornée si et seulement si  $B^\bullet$  est absorbant dans  $E$ .

Ainsi, si  $\mathcal{A}$  est une famille de parties faiblement bornées, les  $(P_A)_{A \in \mathcal{A}}$  définissent une topologie sur  $F$ .

**Définition 1.1.26.** Soit  $(E, F)$  une paire duale. On dit qu'une famille  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$  formée de parties  $\sigma(E, F)$ -bornées est topologisante si elle vérifie les propriétés suivantes :

$B_1$ . Si  $A, B \in \mathcal{A}$ , il existe  $D \in \mathcal{A}$  tel que  $A \cup B \subset D$ .

$B_2$ . Si  $A \in \mathcal{A}$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , alors  $\lambda A \in \mathcal{A}$ .

$B_3$ .  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = E$ .

On appelle topologie polaire associée à  $\mathcal{A}$  ou topologie de la  $\mathcal{A}$ -convergence ou de la convergence uniforme sur les éléments de  $\mathcal{A}$ , la topologie définie sur  $F$  par les semi-normes  $P_A$ , où  $A$  décrit  $\mathcal{A}$ . On la note par  $\tau_{\mathcal{A}}$ .

Un système fondamental de voisinages de 0 pour  $\tau_{\mathcal{A}}$  est donné par les polaires des éléments de  $\mathcal{A}$ . Comme le polaire d'un ensemble  $A$  est le même que celui de son enveloppe disquée fermée, on peut toujours supposer qu'une famille topologisante est formée de disques faiblement bornés et faiblement fermés.

**Exemple 1.1.27.** 1. Si  $\mathcal{A} = \mathcal{F}$ , l'ensemble de toutes les parties finies de  $E$ , alors  $\tau_{\mathcal{A}} = \sigma(F, E)$ .

2. Si  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ , l'ensemble de tous les disques  $\sigma(E, F)$ -bornés fermés de  $E$ , la topologie  $\tau_{\mathcal{B}}$  est la plus fine de toutes topologies polaires. Elle est notée  $\beta(F, E)$  et dite la topologie forte sur  $F$  associée à la dualité  $(E, F)$ .

Dans le cas où  $(E, \tau)$  est un e.l.c. séparé et  $E'$  son dual topologique, par le théorème de Hahn-Banach,  $(E, E')$  est une paire duale. Dans ce cas, l'espace  $E', \beta(E', E)$  s'appelle le dual fort de  $E$  et est, par fois, noté  $E'_{\beta}$ .

3. Soit  $(E, F)$  une paire duale. On appelle topologie de Mackey sur  $E$ , notée  $\mu(E, F)$ , la topologie de la convergence uniforme sur tous les disques  $\sigma(F, E)$ -compacts de  $F$ . C'est la topologie localement convexe séparée la plus fine sur  $E$  compatible avec la dualité  $(E, F)$ .

### 1.1.3 Espace réflexif

Ce paragraphe à pour but d'introduire les notions importantes d'espaces tonnelés, d'espaces bornologiques, d'espaces distingués ou d'espaces réflexifs. Nous en ferons usage dans la suite.

Ici  $(E, \tau)$  désigne un espace localement convexe séparé et  $E'$  son dual topologique. On notera par  $E^{\times}$  le dual bornologique de  $E$ , c'est à dire l'ensemble des formes linéaires bornées de  $E$ . On a donc  $E' \subset E^{\times} \subset E^*$ .

**Définition 1.1.28.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces localement convexes et  $M$  une partie de  $(E, F)$ , l'espace vectoriel des applications linéaires continues de  $E$  dans  $F$ . On dit que  $M$  est équicontinue sur  $E$  si

$$\forall V \in \mathcal{V}_0^F, \exists U \in \mathcal{V}_0^E : f(U) \subset V, \quad f \in M.$$

Il en résulte qu'une partie  $M$  de  $E'$  est équicontinue si et seulement si son antipolaire est un voisinage de 0 dans  $E$ . Ainsi on a :

**Proposition 1.1.29.** (cf. III.3.5 de [6])

Soit  $M$  une partie de  $E'$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

1.  $M$  est équicontinue.
2.  $M$  est contenue dans le polaire d'un voisinage de 0 dans  $E$ .
3. l'antipolaire  $M^{\bullet}$  de  $M$  est un voisinage de 0 dans  $E$ .

**Proposition 1.1.30.** (cf. III.3.5 de [6])

Soient  $(E, \tau)$  un espace localement convexe séparé et  $\mathcal{M}$  la famille de toutes les parties disquées,  $\sigma(E', E)$ -fermées et équicontinues de  $E'$ . Alors  $\tau = \tau_{\mathcal{M}}$ .

**Théorème 1.1.31. (Banach-Alaoglu)**

Soit  $(E, \tau)$  un espace localement convexe séparé et  $E'$  son dual topologique. Si  $U$  est un voisinage de zéro, alors  $U^\circ$  est  $\sigma(E', E)$ -compact dans  $E'$ .

**Corollaire 1.1.32.** Soit  $(E, \tau)$  un espace localement convexe séparé et  $A$  une partie de  $E'$ . Si  $A$  est équicontinue, alors  $A$  est relativement  $\sigma(E', E)$ -compact.

**Définition 1.1.33.** Dans un e.l.c.  $(E, \tau)$ ,

1. on appelle Tonneau toute partie  $T$  de  $E$  convexe, équilibrée, fermée et absorbante. L'espace  $E$  est dit tonnelé (resp. bornologique) si tout tonneau (resp. tout disque bornivore) de  $E$  est un voisinage de 0.
2. On dit qu'un disque borné  $B \subset E$  est complétant, si l'espace  $E_B = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda B$ , muni de la jauge de  $B$ , est un espace de Banach. On dit aussi que  $B$  est un disque de Banach.
3. Un espace localement convexe séparé est dit localement complet, si tout disque fermé borné est complétant.
4. L'espace  $(E, \tau)$  est dit quasi-tonnelé si tout tonneau bornivore de  $E$  est un voisinage de 0.
5. On dit que  $(E, \tau)$  est quasi-complet si tout fermé borné est complet.

**Proposition 1.1.34.** (cf. III.4.1 de [6])

Soient  $(E, \tau)$  un espace localement convexe séparé et  $E'$  son dual topologique.

1.  $(E, \tau)$  est tonnelé si et seulement si toute partie  $\sigma(E', E)$ -bornée de  $E'$  est équicontinue.
2. Si  $(E, \tau)$  est tonnelé, alors il est quasi-tonnelé.
3. Si  $(E, \tau)$  est quasi-tonnelé complet, alors il est tonnelé.
4. Tout disque compact est complétant.
5. Si  $T$  est un tonneau de  $E$  et  $B$  est un disque borné complétant, alors  $T$  absorbe par  $B$ .

Maintenant, nous donnons une caractérisation des espaces bornologiques à l'aide de la continuité des applications linéaires bornées et des semi-normes bornées.

**Proposition 1.1.35.** Soit  $(E, \tau)$  un espace localement convexe séparé. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $E$  est bornologique.
2. Toute semi-norme bornée sur les bornés est continue.
3. Toute forme linéaire bornée sur les bornés est continue et  $(E, \tau) = (E, \mu(E, E'))$ .
4. Pour tout espace localement convexe  $F$  et toute application linéaire bornée  $f : E \rightarrow F$ ,  $f$  est continue.

**Remarque 1.1.36.** Tout espace bornologique est quasi-tonnelé et tout espace localement convexe métrisable est bornologique.

**Proposition 1.1.37.** Soit  $(E, \tau)$  un espace localement convexe séparé bornologique. Alors le dual fort  $(E', \beta(E', E)) := E'_\beta$  de  $E$  est complet.

La topologie  $\beta(E', E)$  n'est pas en général compatible avec la dualité  $(E', E)$ , autrement dit, la topologie forte  $\beta(E', E)$  est plus fine que la topologie de Mackey  $\mu(E', E)$  et en général ne coïncide pas avec celle-ci.

Le bidual de  $E$ , noté  $E''$  est le dual topologique de l'espace localement convexe  $E'_\beta := (E', \beta(E', E))$ . L'espace  $(E, \tau)$  s'injecte isomorphiquement dans  $E''$  lorsque ce dernier est muni de la topologie polaire  $\tau_M$ . L'injection dite canonique est donnée par l'application  $j_E : x \mapsto \tilde{x}$ , où pour tout  $f \in E'$ ,  $\tilde{x}(f) := f(x)$ . L'application  $j_E$  est aussi un isomorphisme (sur son image) lorsque  $E$  et  $E''$  sont les deux munis respectivement des topologies  $\sigma(E, E')$  et  $\sigma(E'', E')$  ou de  $\beta(E, E')$  et  $\beta(E'', E')$ .

Puisque tout ensemble équicontinu de  $E'$  est fortement borné, la  $\mathcal{M}$ -topologie est moins fine que la topologie induite sur  $E$  par  $\beta(E'', E')$ . Ces deux topologies coïncident si  $E$  est bornologique ou tonnelé, puisque dans ce cas les parties équicontinues de  $E'$  coïncident avec les parties fortement bornées.

En particulier, si  $E$  est un espace localement convexe métrisable, il est bornologique, donc son bidual fort  $E''_\beta$  est un espace de Fréchet. De plus,  $E$  est un sous-espace vectoriel topologique de  $E''_\beta$  fermé dans  $E''_\beta$  si  $E$  est lui-même un espace de Fréchet.

**Définition 1.1.38.** *Un espace localement convexe séparé  $E$  est dit semi-réflexif si l'injection canonique  $j_E$  est bijective, autrement dit si, en tant qu'espaces vectoriels,  $E$  et  $E''$  coïncident.*

*L'espace  $E$  est semi-réflexif si, et seulement si la topologie  $\beta(E', E)$  est compatible avec la dualité  $(E', E)$ , c'est-à-dire si  $\beta(E', E) = \mu(E', E)$ .*

*On dit que  $E$  est réflexif si l'application canonique  $j_E : E \rightarrow (E'_\beta)'_\beta$  est un isomorphisme, i.e.,  $(E, \tau) = (E'', \beta(E'', E'))$ , l'égalité étant algébrique et topologique.*

Notons que si  $E$  est semi-réflexif, les deux topologies faibles  $\sigma(E', E)$  et  $\sigma(E', E'')$  coïncident.

**Proposition 1.1.39** (cf. IV.3.3 de [6]). *Soit  $(E, \tau)$  un e.l.c. séparé.*

1. *Si  $(E, \tau)$  est métrisable, alors  $(E'', \beta(E'', E'))$  est un espace de Fréchet.*
2. *Si  $E$  est réflexif, alors  $E'_\beta$  est réflexif.*
3. *Un sous-espace fermé d'un espace semi-réflexif est semi-réflexif.*

La proposition suivante donne une caractérisation des espaces localement convexes semi-réflexifs.

**Proposition 1.1.40.** *Soit  $E$  un espace localement convexe séparé. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  *$E$  est semi-réflexif.*
2.  *$E'_\beta$  est tonnelé et  $\beta(E', E) = \mu(E', E)$ .*
3. *toute partie bornée de  $E$  est relativement  $\sigma(E, E')$ -compacte.*
4.  *$(E, \sigma(E, E'))$  est quasi-complet.*

La proposition suivante donne une caractérisation des espaces localement convexes réflexifs.

**Proposition 1.1.41.** *Soit  $(E, \tau)$  un espace localement convexe séparé. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $E$  est réflexif.
2.  $E$  est semi-réflexif et tonnelé.
3.  $E$  est semi-réflexif et quasi-tonnelé.
4.  $E$  est quasi-tonnelé et toute partie bornée de  $E$  est relativement  $\sigma(E, E')$ -compacte.
5.  $E$  est quasi-tonnelé et  $(E, \sigma(E, E'))$  est quasi-complet.
6.  $\tau = \mu(E, E')$  et  $(E, \tau)$  et  $(E', \mu(E', E))$  sont tonnelés.

**Définition 1.1.42.** *Soit  $E$  un espace localement convexe séparé. On dit que  $E$  est distingué si pour toute partie  $\sigma(E'', E')$ -bornée  $B$  de  $E''$ , il existe une partie bornée  $A$  de  $E$  telle que  $B \subset \overline{A}^{\sigma(E'', E')}$ .*

*En d'autres termes,  $E$  est distingué si pour toute partie  $\sigma(E'', E')$ -bornée  $B$  de  $E''$ , il existe une partie  $A$  bornée de  $E$  telle que  $B \subset A^\circ$ , le bipolaire étant pris dans  $E''$ .*

Lorsque tout borné d'un espace vectoriel topologique  $E$  est contenu dans l'adhérence d'un borné d'un sous-espace vectoriel topologique  $G$  de  $E$ , on dit que  $G$  est large dans  $E$ . Ainsi  $(E, \tau)$  est distingué si  $(E, \sigma(E, E'))$  est large dans  $(E'', \sigma(E'', E'))$ .

**Remarque 1.1.43.** (cf. 32.7.(1) de [23])

Tout espace localement convexe semi-réflexif est distingué.

La proposition suivante donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace localement convexe soit distingué.

**Proposition 1.1.44.** *Soit  $E$  un espace localement convexe séparé. Alors  $E$  est distingué si et seulement si  $E'_\beta$  est tonnelé.*

### 1.1.4 Quelques théorèmes généraux

Ici nous rappelons quelques théorèmes fondamentaux de l'analyse fonctionnelle.

**Proposition 1.1.45.** *Soient  $(X, \|\cdot\|)$  un espace normé et  $F$  un sous-espace vectoriel fermé de  $X$ . Alors le dual  $(X/F)'$  de l'espace normé quotient  $X/F$  est isométriquement isomorphe à  $F^\perp$ , où  $F^\perp := \{f \in F' : f(x) = 0, \forall x \in F\}$ ; ce dernier étant muni de la topologie induite par la norme duale de  $X'$ .*

**Proposition 1.1.46.** *Soit  $M \in \mathcal{M}$ . L'espace de Banach  $(E'_M, \|\cdot\|_M)$  est isométriquement isomorphe au dual topologique  $(E/M^\perp)'$  de  $E/M^\perp$ , où  $E/M^\perp$  est muni de la norme quotient  $\overline{P}_M : x + M^\perp \mapsto P_M(x)$  et  $(E/M^\perp)'$  de la norme duale correspondante.*

Rappelons maintenant le théorème suivant dont nous aurons besoin dans la suite.

**Théorème 1.1.47 (Principe de la réflexivité locale, [10]).** *Soient  $X$  un espace de Banach,  $A$  et  $B$  deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies respectivement de  $X''$*

et  $X'$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un morphisme injective  $T : A \rightarrow X$  tel que :

1.  $\|T\| \leq 1 + \varepsilon$  et  $\|T^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon$ .
2.  $x'(Tx'') = x''(x')$ ,  $\forall x' \in B$ ,  $\forall x'' \in A$ .
3.  $Tx'' = x''$ ,  $\forall x'' \in A \cap X$ .

**Théorème 1.1.48 (Graphe fermé, [23]).** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Fréchet et  $f$  une application linéaire de  $X$  dans  $Y$ . Si le graphe de  $f$ , défini comme  $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in X\}$  est fermé dans le produit topologique  $X \times Y$ , alors  $f$  est continue. En d'autres termes,  $f$  est continue, dès que pour toute suite  $(x_n)_n$  convergeant vers 0 dans  $X$ , la condition  $(f(x_n))_n$  converge vers  $y \in Y$  implique  $y = 0$ .

**Théorème 1.1.49 (Banach-Steinhaus, [23]).** Soient  $X$  un espace de Fréchet et  $Y$  un espace localement convexe séparé. Alors toute suite d'applications linéaires de  $X$  dans  $Y$  qui est simplement bornée est équicontinue.

En fait ce résultat est vrai lorsque  $X$  est seulement tonnelé.

## 1.2 Espaces de suites

### 1.2.1 Espaces de suites scalaires

Nous désignerons par  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  l'espace de toutes les suites réelles ou complexes et par  $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$  son sous-espace vectoriel des suites  $(x_n)_n$  dont les termes sont tous nuls sauf un nombre fini. Ce sont les suites à support fini.

On note  $e_n := (0, 0, \dots, \underset{n^{\text{ème}}}{1}, 0, \dots)$ , et pour tout  $x = (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ , la  $k^{\text{ème}}$  section de  $x$  est  $x^{(k)} := (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, 0, \dots) = \sum_{i=1}^k x_i e_i$ .

Un espace de suites scalaires (ou simplement un espace de suites) est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  contenant  $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$  et muni d'une topologie localement convexe séparée.

On appelle  $\alpha$ -dual (ou dual de Köthe) d'un espace de suites  $\Lambda$  l'espace :

$$\Lambda^* := \{x = (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n y_n| < +\infty, \quad y = (y_n)_n \in \Lambda\}.$$

On dit que  $\Lambda$  est un espace parfait lorsque  $\Lambda = \Lambda^{**} := (\Lambda^*)^*$ .

Une partie  $A$  de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  est dite normale (ou solide) si pour tout  $x \in A$  et tout  $y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ , la condition  $|y_n| < |x_n|$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , implique que  $y$  appartient à  $A$ .

L'enveloppe normale d'une partie  $A$  de  $\Lambda$  est l'ensemble :

$$N(A) := \bigcup_{\beta \in A} \{\alpha = (\alpha_n)_n \in \Lambda : |\alpha_n| \leq |\beta_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

C'est le plus petit ensemble normal qui contient  $A$ .

Les espaces  $\Lambda$  et  $\Lambda^*$  sont en dualité par la forme bilinéaire canonique  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \Lambda \times \Lambda^* \longrightarrow \mathbb{K}$   
 $(x, y) \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n$ .

**Proposition 1.2.1.** *Soient  $\Lambda$  et  $\Gamma$  deux espaces de suites.*

1. Si  $\Lambda \subset \Gamma$ , alors  $\Gamma^* \subset \Lambda^*$ .
2. Le  $\alpha$ -dual  $\Lambda^*$  de  $\Lambda$  est parfait. En fait  $\Lambda^{**}$  est le plus petit espace parfait contenant  $\Lambda$ .
3. Si  $\Lambda$  est parfait, alors  $\Lambda$  est normal et contient  $\varphi$ .

**Proposition 1.2.2.** 1.  $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}})^* = \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ , et  $(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})})^* = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .

2.  $(\ell^\infty)^* = \ell^1$  et  $(\ell^1)^* = \ell^\infty$ .

3.  $(\ell^p)^* = \ell^q$ , pour tous  $p > 1$  et  $q > 1$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

4.  $\ell^\infty$  et  $\ell^p$ , pour  $p \geq 1$ , sont parfaits, donc normaux.

Soient  $\Lambda$  un espace normal de suites et  $\Lambda^*$  son  $\alpha$ -dual. Alors  $(\Lambda, \Lambda^*)$  est une paire duale par la forme bilinéaire canonique :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Lambda \times \Lambda^* \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(\alpha, \beta) \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \beta_n$$

Ainsi, la topologie faible  $\sigma(\Lambda, \Lambda^*)$  est définie par les semi-normes :

$$|\langle \alpha, \beta \rangle| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \beta_n \right|, \quad \beta \in \Lambda.$$

Une topologie localement convexe  $\mathfrak{S}$  sur un espace normal de suites  $\Lambda$  est dite normale si elle admet un système fondamental de voisinages normaux de 0.

Un espace normal de suites  $\Lambda$  admet une topologie normale canonique dite de Köthe et notée  $\mathfrak{S}_K$  ou  $\tau_N$  (). Elle est définie par les semi-normes :

$$P_\alpha(x) = \langle x, \alpha \rangle_K := \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n x_n|, \quad x \in \Lambda, \quad \alpha \in \Lambda^*.$$

Soit  $\mathcal{S}$  une famille topologisante formée de disques  $\sigma(\Lambda^*, \Lambda)$ -fermées normaux et  $\sigma(\Lambda^*, \Lambda)$ -bornés de  $\Lambda^*$ . La  $\tau_{\mathcal{S}}$ -topologie est une topologie normale sur  $\Lambda$ . Elle est définie par les semi-normes :

$$P_S(x) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n x_n| \mid \alpha \in S \right\}, \quad x \in \Lambda \quad S \in \mathcal{S}$$

et parfois notée  $\mathfrak{S}_{\mathcal{S}}$ .

Remarquer que si  $\mathcal{N}$  est la famille de toutes les enveloppes normales  $N(\alpha)$  des éléments  $\alpha \in \Lambda^*$ , alors  $\tau_{\mathcal{N}} = \mathfrak{S}_K$ .

- Proposition 1.2.3.** 1. Si  $S$  est une partie normale  $\sigma(\Lambda^*, \Lambda)$ -bornée de  $\Lambda^*$ , alors  $S^\circ$  coïncide avec l'ensemble  $\left\{ \alpha \in \Lambda, \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n \beta_n| \leq 1, \beta \in S \right\}$ .
2. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la projection  $\pi_k : \Lambda \rightarrow \mathbb{K}, \pi_k((\alpha_n)_n) = \alpha_k$  est continue.
3. Si  $\Lambda$  est parfait, alors il est complet pour toute les topologie normales  $\tau_S$ . En particulier, il est complet pour la topologie de Köthe  $\mathfrak{S}_K$  ou la topologie forte  $\beta(\Lambda, \Lambda^*)$ .
4. Si  $\Lambda$  est parfait, alors toutes les topologies du type  $\tau_S$  ont les mêmes bornés.

**Lemme 1.2.4.** 1. Soient  $S \in \mathcal{S}, \Lambda_S^*$  l'espace vectoriel engendré par  $S$  et  $\alpha \in (\Lambda_S^*)^*$ . Alors :

$$P_S(\alpha) := \sup \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n \beta_n| : (\beta_n)_n \in S \right\} < +\infty.$$

Donc  $P_S$  définit une semi-norme sur  $(\Lambda_S^*)^*$ .

2. L'espace  $\lambda_S := \{ \alpha \in (\Lambda_S^*)^* : \alpha_n = 0, \forall n \in \mathbb{N} : e_n \notin \Lambda_S^* \}$  est un espace normal de suites et  $(\lambda_S, P_S)$  est un espace de Banach.

## 1.2.2 Espaces de suites vectorielles

Ce paragraphe présente les principaux résultats des divers espaces de suites sommables d'un espace localement convexe  $E$  définis par un espace de suites scalaires  $\Lambda$ . Dans ce qui suit on désigne par  $E$  un espace localement convexe séparé et par  $\mathcal{M}$  la famille de toutes les parties disquées,  $\sigma(E', E)$ -fermées et équicontinues de  $E'$ . La topologie polaire  $\tau_{\mathcal{M}}$  associée à  $\mathcal{M}$  est définie par la famille des semi-normes  $(P_M)_{M \in \mathcal{M}}$ , où  $P_M$  est la jauge du polaire de  $M$  dans  $E$ . i.e.,

$$P_M(x) = \sup\{|f(x)|, f \in M\}, \quad x \in E.$$

On désigne par  $\Lambda$  un espace normal de suites scalaires, par  $\Lambda^*$  son  $\alpha$ -dual et par  $\mathcal{S}$  une famille de disques  $\sigma(\Lambda^*, \Lambda)$ -fermés normaux et  $\sigma(\Lambda^*, \Lambda)$ -bornés de  $\Lambda^*$  vérifiant les conditions  $B_1, B_2$  et  $B_3$  de définition 1.1.26. On considère la topologie polaire  $\mathfrak{S}_{\mathcal{S}}$  ( $\tau_{\mathcal{S}}$ -topologie) sur  $\Lambda$ . Celle-ci est définie, comme on a vu, par les semi-normes :

$$P_S(x) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n x_n| \mid \alpha \in S \right\}, \quad x \in \Lambda \quad \text{et} \quad S \in \mathcal{S}.$$

Remarquons que le dual algébrique de  $(\Lambda, \tau_{\mathcal{S}})$  n'est pas nécessairement  $\Lambda^*$ , il peut le contenir strictement.

1. On dit qu'une suite  $x = (x_n)_n$  est faiblement  $\Lambda$ -sommable, si, pour tout  $f \in E'$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n f(x_n)| < +\infty$ , pour tout  $\alpha \in \Lambda^*$ . L'ensemble des suites faiblement  $\Lambda$ -sommables

est noté par  $\Lambda[E]$ . i.e.,

$$\begin{aligned}\Lambda[E] &:= \left\{ x = (x_n)_n \subset E : \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n f(x_n)| < +\infty, \forall f \in E', \forall \alpha \in \Lambda^* \right\}. \\ &= \{x = (x_n)_n \subset E : (f(x_n))_n \in \Lambda^{**}, \forall f \in E'\}.\end{aligned}$$

2. On dit qu'une suite  $x = (x_n)_n \subset E$  est  $\Lambda$ -sommable si la série  $\sum \alpha_n x_n$  converge dans  $E$  pour tout  $\alpha \in \Lambda^*$ . On note par  $\Lambda(E)$  l'ensemble de telles suites. On a donc :

$$\Lambda(E) := \left\{ x = (x_n)_n \in E^{\mathbb{N}} : \sum \alpha_n x_n \text{ converge } \forall \alpha \in \Lambda^* \right\}.$$

3. On dit qu'une suite  $x = (x_n)_n \subset E$  est absolument  $\Lambda$ -sommable, si la série  $\sum \alpha_n x_n$  est absolument convergente dans  $E$ , pour tout  $\alpha = (\alpha_n)_n \in \Lambda^*$ . On note par  $\Lambda\{E\}$  l'ensemble de telles suites. On a donc :

$$\Lambda\{E\} = \{x = (x_n)_n \subset E : (P_M(x_n))_n \in \Lambda^{**}, \forall M \in \mathcal{M}\}.$$

4. On dit qu'une suite  $x = (x_n)_n$  est fortement  $\Lambda$ -sommable si pour tout  $M \in \mathcal{M}$  et pour tout  $(f_n)_n \in \Lambda^*[E'_M]$ , la série  $\sum f_n(x_n)$  est absolument convergente. On note :

$$\begin{aligned}\Lambda\langle E \rangle &= \bigcap_{M \in \mathcal{M}} \{(x_n)_n \subset E : \sum_n f_n(x_n) \text{ converge absolument}, \forall (f_n)_n \in \Lambda^*[E'_M]\}. \\ &= \bigcap_{M \in \mathcal{M}} \{(x_n)_n \subset E : (f_n(x_n))_n \in \ell^1, \forall (f_n)_n \in \Lambda^*[E'_M]\}.\end{aligned}$$

Ces quatre espaces sont tous des espaces vectoriels par rapport aux opérations usuelles. De plus, les inclusions  $\Lambda\langle E \rangle \subset \Lambda\{E\}$  et  $\Lambda(E) \subset \Lambda[E]$  sont toujours vérifiées. Si de plus  $E$  est séquentiellement complet, on a également  $\Lambda\{E\} \subset \Lambda(E)$  (voir [27]).

Pour tout  $S \in \mathcal{S}$  et  $M \in \mathcal{M}$ , définissons, comme dans [25], une semi-norme  $\varepsilon_{S,M}$  sur  $\Lambda[E]$  par

$$\varepsilon_{S,M}((x_n)_n) := \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n f(x_n)|, \alpha \in S, f \in M \right\}.$$

Dans la suite de cette thèse, les espaces  $\Lambda(E)$  et  $\Lambda[E]$  seront équipés de la  $\varepsilon$ -topologie  $\varepsilon_{\mathcal{S},\mathcal{M}}$ , où  $S$  parcourt  $\mathcal{S}$  et  $M$  parcourt  $\mathcal{M}$ . Avec cette topologie,  $\Lambda(E)$  est un sous-ensemble fermé de  $\Lambda[E]$  (voir [16] et [25] pour plus de détails).

Remarquer que, si  $B$  est un disque borné dans  $E$  et  $R$  est un disque borné normal dans  $\Lambda$ , on peut définir la semi-norme  $\varepsilon_{R^\circ, B^\circ}$  sur  $\Lambda_R[E_B] \subset \Lambda[E]$  comme pour  $S$  et  $M$  ci-dessus. Ici, le polaire de  $R$  est dans  $\Lambda^*$  et celui de  $B$  dans l'espace de Banach  $(E_B)'$ .

L'espace  $\Lambda\{E\}$  sera équipé de ce qu'on appelle la  $\pi$ -topologie  $\pi_{\mathcal{S},\mathcal{M}}$ , définie par la famille

$(\pi_{S,M})_{S \in \mathcal{S}, M \in \mathcal{M}}$  de semi-normes (voir [32]), où

$$\pi_{S,M}((x_n)_n) := \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| P_M(x_n), \quad \alpha \in S \right\}, \quad (x_n)_n \in \Lambda\{E\}.$$

L'espace  $\Lambda\langle E \rangle$  sera équipé de la  $\sigma$ -topologie  $\sigma_{\mathcal{S},\mathcal{M}}$  engendrée par la famille  $(\sigma_{S,M})_{S \in \mathcal{S}, M \in \mathcal{M}}$  de semi-normes, où pour chaque  $(x_n)_n \in \Lambda\langle E \rangle$ ,

$$\sigma_{S,M}((x_n)_n) := \sup \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(x_n)|, \quad a = (a_n)_n \in \Lambda_S^*[E'_M], \varepsilon_{S^\circ, M^\circ}(a) \leq 1 \right\}.$$

Nous désignerons par  $\Lambda(E)_r$  (resp.  $\Lambda[E]_r, \Lambda\{E\}_r, \Lambda\langle E \rangle_r$ ) le sous-espace de  $\Lambda(E)$  (resp.  $\Lambda[E], \Lambda\{E\}, \Lambda\langle E \rangle$ ) composé de ces suites  $x = (x_n)_n$  qui sont limites, dans  $(\Lambda(E), \varepsilon_{\mathcal{S},\mathcal{M}})$  (resp.  $(\Lambda[E], \varepsilon_{\mathcal{S},\mathcal{M}}), (\Lambda\{E\}, \pi_{\mathcal{S},\mathcal{M}}), (\Lambda\langle E \rangle, \sigma_{\mathcal{S},\mathcal{M}})$ ) de leurs sections finies

$$x^{(k)} := (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots).$$

Maintenant, pour chaque  $t \in E$ , nous définissons  $te_n := (0, 0, \dots, \underset{\text{position } n^{\text{me}}}{t}, 0, \dots)$ , alors

$$x^{(k)} := \sum_{n=1}^k x_n e_n.$$

En général, un espace de suites, muni d'une topologie linéaire, est dit un  $AK$ -espace, ou vérifier la propriété  $AK$ , si chacun de ses éléments est limite de ses sections finies.

Noter que si  $E$  et  $(\Lambda, \tau_{\mathcal{S}})$  sont métrisables, alors  $\Lambda[E]$  est métrisable. De plus, si  $E$  et  $(\Lambda, \tau_{\mathcal{S}})$  sont des espaces de Fréchet, alors  $\Lambda[E], \Lambda(E)$  et leurs sous-espaces fermés correspondants  $\Lambda(E)_r$  et  $\Lambda[E]_r$  le sont également. Il se trouve que l'égalité  $\Lambda(E)_r = \Lambda[E]_r$  est toujours vérifiée.

**Proposition 1.2.5.** *Soit  $\Lambda$  un espace de suites parfait. Alors*

$$(\Lambda(E)_r)^* = (\Lambda(E))^* = (\Lambda[E])^*.$$

*Démonstration.* Puisque  $\Lambda(E)_r \subset \Lambda(E) \subset \Lambda[E]$ , Il est clair que  $(\Lambda[E])^* \subset (\Lambda(E))^* \subset (\Lambda(E)_r)^*$ . Inversement, si  $(a_n)_n \in (\Lambda(E)_r)^*$ , la série  $\sum a_n(x_n)$  converge absolument pour chaque  $(x_n)_n \in \Lambda(E)_r$ . Par le lemme 1 de [26], pour tout  $\gamma = (\gamma_n)_n \in c_0$  arbitraire et  $(x_n)_n \in \Lambda[E]$ ,  $(\gamma_n x_n)_n$  appartient à  $\Lambda(E)_r$ . Par conséquent, la série  $\sum a_n(\gamma_n x_n) = \sum \gamma_n a_n(x_n)$  converge absolument. Puisque  $\gamma$  est arbitraire dans  $c_0$ , la série  $\sum a_n(x_n)$  converge absolument. Ainsi,  $(a_n)_n \in (\Lambda[E])^*$ .  $\square$

Le théorème suivant résume certaines propriétés du duals topologiques de  $\Lambda(E)_r$  et  $\Lambda\langle E \rangle_r$ .

**Théorème 1.2.6** ([25] and [26]). *Soit  $F$  une forme linéaire continue sur  $\Lambda(E)$  (ou sur  $\Lambda(E)_r$ ) et pour chaque  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in E$ ,  $a_n(t) := F(te_n)$ . Alors,*

1. Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \in E'$ .

2. Pour chaque  $x \in \Lambda(E)_r$ ,  $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x_n)$ .

3. La suite  $(a_n)_n \in (\Lambda(E))^*$ .

4. Les égalités

$$(\Lambda(E)_r)' = \bigcup_{S \in \mathcal{S}, M \in \mathcal{M}} \Lambda_S^* \langle E'_M \rangle$$

et

$$(\Lambda \langle E \rangle_r)' = \bigcup_{S \in \mathcal{S}, M \in \mathcal{M}} \Lambda_S^* [E'_M].$$

ont lieu algébriquement.

Maintenant, si  $\mathcal{B}'$  est l'ensemble de tous les disques fermés et faiblement bornés dans  $E'$  et  $\mathcal{R}'$  est l'ensemble de tous les disques fermés,  $\sigma(\Lambda^*, \Lambda)$ -bornés et normaux dans  $\Lambda^*$ , nous définissons, pour chaque  $B' \in \mathcal{B}'$  et  $R' \in \mathcal{R}'$ .

$$\begin{aligned} K_{R', B'} &:= \{(f_n)_n \in \Lambda[(E'_{B'})'] : \forall a \in B', (f_n(a))_n \in R'^{\circ}\} \\ &:= \left\{ (f_n)_n \in \Lambda[(E'_{B'})'] : \forall a \in B', \forall \alpha \in R', \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n f_n(a)| \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

et

$$R' \langle B' \rangle = \left\{ (a_n)_n \in (\Lambda(E)_r)' : \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(a_n)| \leq 1, \forall (f_n)_n \in K_{R', B'} \right\}.$$

Nous avons alors le théorème suivant :

**Théorème 1.2.7** ([25]). *Les ensembles  $S \langle M \rangle$  forment un système fondamental de parties équicontinues de  $(\Lambda(E)_r)'$ ,  $S$  parcourant  $\mathcal{S}$  et  $M$  parcourant  $\mathcal{M}$ .*

Si  $\mathcal{B}$  désigne l'ensemble de tous les disques fermés et bornés de  $E$ , et  $\mathcal{R}$  l'ensemble de tous les disques fermés, bornés et normaux de  $\Lambda$ , alors les ensembles

$$\begin{aligned} R[B] &:= \{(x_n) \in \Lambda[E] : (x'(x_n))_n \in R, \forall x' \in B^{\circ}\} \\ &= \{(x_n) \in \Lambda[E] : \sum \alpha_n x_n \in B, \forall \alpha \in R^{\circ}\}, \\ R\{B\} &:= \{(x_n) \in \Lambda\{E\} : (x_n)_n \subset E_B \text{ and } (P_{B^{\circ}}(x_n))_n \in R\}, \\ &= \{(x_n) \in \Lambda\{E_B\} : (\|x_n\|_B)_n \in R\}, \end{aligned}$$

et  $R(B) := R[B] \cap \Lambda(E)$

sont des sous-ensembles fermés bornés de  $\Lambda[E]$ ,  $\Lambda\{E\}$  et  $\Lambda(E)$ , respectivement,  $B$  parcourant  $\mathcal{B}$  et  $R$  parcourant  $\mathcal{R}$ . Il convient de souligner que  $R[B]$  (resp.  $R(B)$ ) n'est rien d'autre que la boule unité de la semi-norme  $\epsilon_{R^{\circ}, B^{\circ}}$  dans  $\Lambda_R[E_B] \subset \Lambda[E]$  (resp. dans  $\Lambda_R(E_B) \subset \Lambda(E)$ ) lorsque  $B$  est un disque borné dans  $E$  et  $R$  est un disque borné normal dans  $\Lambda$ .

### 1.2.3 Espaces de suites d'Orlicz

Une fonction d'Orlicz  $\varphi$  est une fonction  $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty]$  qui est convexe, nulle en 0 et non constante (voir [17]). Si  $\varphi$  est une fonction d'Orlicz, sa fonction complémentaire ou fonction conjuguée est la fonction définie par  $\varphi^* : x \mapsto \sup\{xy - \varphi(y), y \in [0, +\infty)\}$ . Donc nous avons l'inégalité de Young :

$$xy \leq \varphi(x) + \varphi^*(y), \quad x, y \geq 0.$$

La classe de suites d'Orlicz associée à  $\varphi$  est définie comme suit :

$$\tilde{\ell}_\varphi = \{x = (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \delta_\varphi(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(|x_n|) < +\infty\}$$

et l'espace de suites d'Orlicz associé à  $\varphi$  est défini comme suit :

$$\ell_\varphi = \{x := (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n \geq 1} x_n y_n \text{ converge pour tout } y \in \tilde{\ell}_{\varphi^*}\}.$$

Dans ce cas, pour toute suite  $(x_n)_n \in \ell_\varphi$ , on pose

$$\begin{aligned} \|x\|_\varphi &= \sup \left\{ \left| \sum_{n \geq 1} x_n y_n \right| : \delta_{\varphi^*}(y) \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum_{n \geq 1} |x_n y_n| : \delta_{\varphi^*}(y) \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi  $\ell_\varphi$ , muni de cette norme, est un espace de Banach (voir [21]).

Voici quelques exemples de fonctions d'Orlicz et les espaces correspondants  $\ell_\varphi$

**Exemple 1.2.8.** ([21])

1. Pour tout  $p \geq 1$ , soit  $\varphi_p$  la fonction  $x \mapsto \frac{x^p}{p}$ . Alors l'espace  $\ell_{\varphi_p}$  n'est rien d'autre que l'espace  $\ell_p$  des suites  $p$ -sommables.  
Si  $p > 1$  et  $q > 1$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , alors  $\varphi_p^* = \varphi_q$ .
2. Soit  $\varphi_\infty$  la fonction d'Orlicz définie par  $\varphi_\infty(x) := +\infty$  si  $x > 1$  et  $\varphi_\infty(x) := 0$  si  $0 \leq x \leq 1$ . Alors  $\ell_{\varphi_\infty} = \ell_\infty$  et  $\varphi_\infty^* = \varphi_1$ .

D'après [21], si  $x \in \ell_\varphi$  et  $\|x\|_\varphi \leq 1$ , alors  $x \in \tilde{\ell}_\varphi$  et  $\delta_\varphi(x) \leq \|x\|_\varphi$ .

Il se trouve que l'espace d'Orlicz peut être défini aussi comme suit (voir [21]) :

$$\ell_\varphi = \{x := (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \exists \rho > 0, \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi\left(\frac{|x_n|}{\rho}\right) < +\infty\}$$

La norme (dite de Luxemburg) définie par :

$$\|x\|_{(\varphi)} = \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi\left(\frac{|x_n|}{\rho}\right) \leq 1 \right\}$$

fait aussi de  $\ell_\varphi$  un espace de Banach et les deux normes sont équivalentes et vérifient :

$$\|x\|_{(\varphi)} \leq \|x\|_\varphi \leq 2\|x\|_{(\varphi)}, \quad x \in \ell_\varphi.$$

## Quelques propriétés dans certains espaces de suites vectorielles

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à quelques propriétés topologiques dans  $\Lambda(E)$  et  $\Lambda\langle E \rangle$ . Nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour que  $\Lambda(E)_r$  (resp.  $\Lambda\langle E \rangle_r$ ), le sous-espace de  $\Lambda(E)$  (resp. de  $\Lambda\langle E \rangle_r$ ) des suites qui sont limites de leurs sections finies dans  $\Lambda(E)$  (resp. dans  $\Lambda\langle E \rangle_r$ ), soit tonnelé ou quasi-tonnelé. Nous utilisons nos résultats pour caractériser les espaces distingués  $\Lambda(E)_r$  (resp.  $\Lambda\langle E \rangle_r$ ) puis nous introduisons et caractérisons une nouvelle classe d'espaces localement convexes dits quasi-distingués. Nous fournissons ensuite un exemple permettant de distinguer cette notion de la notion classique d'espace distingué. Nous donnons en outre des conditions nécessaires et suffisantes pour que  $\Lambda(E)_r$  (resp.  $\Lambda\langle E \rangle_r$ ) satisfasse une telle propriété.

### 2.1 Espaces tonnelés de suites vectorielles

Dans cette section, nous nous intéressons aux conditions sous lesquelles l'un des espaces de suites introduits ici est tonnelé (resp. quasi-tonnelé). Nous commençons avec la proposition suivante concernant les parties bornées dans  $\Lambda(E)$  et dans  $\Lambda[E]$  à l'instar d'un résultat de [[32] 3. (4)] donné dans l'espace  $\Lambda\{E\}$ .

**Proposition 2.1.1.** *Soit  $B$  une partie de  $\Lambda[E]$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1.  $B$  est borné dans  $(\Lambda[E], \varepsilon_{\mathcal{N}, \mathcal{M}})$ .
2. L'enveloppe normale  $N(B)$  de  $B$  est bornée dans  $(\Lambda[E], \varepsilon_{\mathcal{N}, \mathcal{M}})$ .
3.  $B$  est borné dans  $(\Lambda[E], \varepsilon_{\mathcal{S}, \mathcal{M}})$ .
4.  $N(B)$  est bornée dans  $(\Lambda[E], \varepsilon_{\mathcal{S}, \mathcal{M}})$ .
5. Pour chaque  $M \in \mathcal{M}$ ,  $A_M := \{(f(x_n))_n : x \in B, f \in M\}$  est borné dans  $(\Lambda, \tau_{\mathcal{N}})$ .
6. Pour chaque  $M \in \mathcal{M}$ ,  $A_M$  est borné dans  $(\Lambda, \tau_{\mathcal{S}})$ .

*Démonstration.* Il est facile de voir que  $1 \iff 2$  et  $3 \iff 4$ . De plus, d'après [30, Satz 1.4] ou [32, 3 (5)], une partie  $A$  de  $\Lambda$  est  $\tau_{\mathcal{S}}$ -bornée si et seulement si elle est  $\tau_{\mathcal{N}}$ -bornée. Il

en résulte que 5 et 6 sont équivalentes.

1  $\Leftrightarrow$  5 : Comme  $B$  est  $\tau_N$ -borné dans  $\Lambda[E]$ , pour chaque  $M \in \mathcal{M}$  et  $\alpha \in \Lambda^*$ , il existe une constante  $c > 0$  telle que  $\varepsilon_{\alpha, M}((x_n)_n) := \sup_{f \in M} \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n f(x_n)| \right\} < c$  pour tout  $x = (x_n)_n \in B$ .

Par conséquent,

$$\sup_{f \in M} \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n f(x_n)| = \sup \{ P_\alpha(f(x_n)), f \in M, x = (x_n)_n \in B \} < c.$$

Ce qui donne que  $A_M$  est borné dans  $(\Lambda, \tau_S)$ .

De manière similaire, nous obtenons 3  $\Leftrightarrow$  6. □

La propriété (B) de Pietsch [30] peut être naturellement étendue aux espaces  $\Lambda(E)$  et  $\Lambda[E]$  comme suit (voir la thèse d'Ould Sidaty et [26]) :

**Définition 2.1.2.** *Un espace localement convexe  $E$  est dit fondamentalement (resp. faiblement fondamentalement, absolument fondamentalement)  $\Lambda$ -borné, si pour chaque disque borné  $\mathbb{B}$  de  $\Lambda(E)$  (resp.  $\Lambda[E]$ ,  $\Lambda\{E\}$ ), il existe  $B \in \mathcal{B}$  et  $R \in \mathcal{R}$  tels que  $\mathbb{B} \subset R(B)$  (resp.  $\mathbb{B} \subset R[B]$ ,  $\mathbb{B} \subset R\{B\}$ ).*

*Nous dirons que  $E$  a (ou satisfait) la propriété  $(F\Lambda)$  (resp.  $(WFA)$ ,  $(AFA)$ ), s'il est fondamentalement (resp. faiblement fondamentalement, absolument fondamentalement)  $\Lambda$ -borné.*

Remarquer que si  $E$  vérifie  $(WFA)$ , alors il vérifie aussi  $(F\Lambda)$ . De plus, si  $E$  est séquentiellement complet et satisfait  $(F\Lambda)$ , alors il satisfait aussi  $(AFA)$ .

La proposition suivante donne une définition alternative des semi-normes  $\sigma_{S, M}$ .

**Proposition 2.1.3.** *Soit  $S \in \mathcal{S}$  et  $M \in \mathcal{M}$ . Alors pour tout  $x = (x_n)_n \in \Lambda\langle E \rangle$ , on a*

$$\sigma_{S, M}(x) := \sup \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x_n)|, f = (f_n)_n \in S[M] \right\}.$$

*Démonstration.* Fixons  $S \in \mathcal{S}$ ,  $M \in \mathcal{M}$  et  $f = (f_n)_n \in S'$ . Alors :

$$\begin{aligned} f = (f_n)_n \in S[M] &\iff \forall t \in M^\circ, (f_n(t))_n \in S \\ &\iff \forall t \in M^\circ, \sup_{(\alpha_n)_n \in S^\circ} \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n f_n(t)| \right\} \leq 1 \\ &\iff \varepsilon_{S^\circ, M^\circ}(f) \leq 1. \end{aligned}$$

Par Proposition 1 de [26], nous avons  $S[M] \subset \Lambda_S^*[E'_M]$ . Donc

$$(f_n)_n \in S[M] \iff (f_n)_n \in \Lambda_S^*[E'_M] \quad \text{et} \quad \varepsilon_{S^\circ, M^\circ}(f) \leq 1.$$

Ainsi, pour tout  $x = (x_n)_n \in \Lambda\langle E \rangle$ , nous avons :

$$\sigma_{S,M}((x_n)_n) := \sup \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x_n)|, f = (f_n)_n \in S[M] \right\},$$

ce qu'il fallait démontrer □

Dans [32], Rosier a obtenu la description du dual topologique de l'espace  $\Lambda\{E\}_r$ . Avant de rappeler son résultat, rappelons qu'un espace localement convexe  $E$  est dit  $\sigma$ -quasi-tonnelé ou  $\sigma$ -infratonnelé si toute partie dénombrable fortement bornée de  $E'$  est équicontinue.

**Théorème 2.1.4** ([32] 5.(4)). *Supposons que  $E$  soit  $\sigma$ -quasi-tonnelé.*

1. *Si  $E'$  est absolument fondamentalement  $\Lambda^*$ -borné (c'est-à-dire que  $E'$  a  $(AF\Lambda^*)$ ), alors  $(\Lambda\{E\}_r)' = \Lambda^*\{E'\}$ .*
2. *De plus, si  $E$  satisfait  $(AF\Lambda)$ , alors le dual fort de  $\Lambda\{E\}_r$  est  $(\Lambda^*\{E'\}, \pi_{\mathcal{S},\mathcal{B}})$ .*

La proposition suivante fournit l'analogie du Théorème 1.2.7 pour  $(\Lambda\{E\}_r)'$ .

**Proposition 2.1.5.** *Lorsque  $S$  parcourt  $\mathcal{S}$  et  $M$  parcourt  $\mathcal{M}$ , les ensembles  $S\{M\}$  forment un système fondamental de parties  $\pi_{\mathcal{S},\mathcal{M}}$ -équicontinues de  $(\Lambda\{E\}_r)'$ .*

*Démonstration.* Nous commençons par prouver l'égalité :

$$S\{M\} = \{(\alpha_n a_n)_n : (\alpha_n)_n \in S, (a_n)_n \subset M\}.$$

Soit  $(f_n)_n = (\alpha_n a_n)_n$  avec  $(\alpha_n)_n \in S$  et  $(a_n)_n \subset M$ . Alors clairement  $(f_n)_n \subset E'_M$  et

$$P_{M^\circ}(f_n) = |\alpha_n| P_{M^\circ}(a_n) \leq |\alpha_n|.$$

Puisque  $(\alpha_n)_n \in S$ , par la normalité de  $S$ ,  $(P_{M^\circ}(f_n))_n \in S$ . Donc  $(f_n)_n \in S\{M\}$ .

Inversement, soit  $(f_n)_n \in S\{M\}$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n \in E'_M$  et  $(P_{M^\circ}(f_n))_n \in S$ . Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $\alpha_n \in \mathbb{K}$  et  $a_n \in M$  tels que  $f_n = \alpha_n a_n$ .

Puisque  $(P_{M^\circ}(f_n))_n \in S$ , pour tout  $(\beta_n)_n \in S$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} |\beta_n| P_{M^\circ}(f_n) \leq 1$ , de sorte que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n| P_{M^\circ}(\beta_n a_n) \leq 1. \text{ Par la normalité de } S \text{ et le fait que } (\beta_n)_n \in S, (P_{M^\circ}(\beta_n a_n))_n \in S.$$

Par conséquent  $(\alpha_n)_n \in S$  et donc  $S\{M\} = \{(\alpha_n a_n)_n : (\alpha_n)_n \in S, (a_n)_n \subset M\}$ . En utilisant le point 4. (6) dans [32], il s'ensuit que  $S\{M\}$  fournit un système fondamental de parties  $\pi_{\mathcal{S},\mathcal{M}}$ -équicontinues de  $(\Lambda\{E\}_r)'$ . □

**Proposition 2.1.6** ([25, 26]). *Si  $E$  satisfait  $(F\Lambda)$ , alors la topologie forte sur  $(\Lambda(E)_r)'$  est plus fine que celle induite par  $\Lambda^*\langle E'_\beta \rangle$ . De plus,  $\Lambda^*\langle E'_\beta \rangle \subset (\Lambda(E))^*$ . Si de plus  $E$  est semi-réflexif, alors les deux topologies coïncident sur  $(\Lambda(E)_r)'$ .*

Dans [18], Fourie a introduit la propriété  $(\Lambda B)$  en lien avec l'espace  $\Lambda\{E\}$ . La Proposition 2.1.6 motive l'introduction d'une propriété similaire en lien avec  $\Lambda(E)$ . Nous adopterons la notation  $(\Lambda B)$  pour notre nouvelle propriété et désignerons celle de Fourie par  $(A\Lambda B)$ .

**Définition 2.1.7.** *Un espace localement convexe  $E$  est dit satisfaire la propriété  $(\Lambda B)$  si la topologie forte de  $(\Lambda(E)_r)'$  coïncide avec la topologie induite par  $\sigma_{\mathcal{R},\mathcal{B}}$  de  $\Lambda^*\langle E'_\beta \rangle$ .*

Le résultat suivant établit une relation entre les propriétés  $(F\Lambda)$  et  $(\Lambda B)$ .

**Proposition 2.1.8.** *Si  $\Lambda(E)$  est un espace  $AK$  et si  $E$  satisfait la propriété  $(\Lambda B)$ , alors  $E$  satisfait aussi la propriété  $(F\Lambda)$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathbb{B}$  un disque borné dans  $\Lambda(E) = \Lambda(E)_r$ . Alors le polaire  $\mathbb{B}^\circ$  de  $\mathbb{B}$  est un voisinage de 0 dans  $\Lambda(E)'_\beta = (\Lambda(E)_r)'_\beta$ . Puisque  $E$  satisfait la propriété  $(\Lambda B)$ , il existe  $R \in \mathcal{R}$  et  $B \in \mathcal{B}$  tels que

$$V_{R,B} := \{a \in (\Lambda(E)_r)' : \sigma_{R,B}(a) \leq 1\} \subset \mathbb{B}^\circ.$$

Soit  $a = (a_n)_n \in (R(B))^\circ$ , alors

$$|\langle (a_n)_n, (x_n)_n \rangle| \leq 1, \quad (\forall x \in R(B)).$$

En d'autres termes, pour tout  $x = (x_n)_n \in \Lambda(E)$  tel que  $\varepsilon_{R^\circ, B^\circ}(x) \leq 1$ , nous avons  $|\sum a_n(x_n)| \leq 1$ . Ainsi,  $a \in V_{R,B}$  et donc  $(R(B))^\circ \subset \mathbb{B}^\circ$ . Par conséquent  $\mathbb{B} \subset R(B)$ , donc  $E$  satisfait la propriété  $(F\Lambda)$ .  $\square$

**Remarque 2.1.9.** Avec la même démonstration, on obtient que si  $E$  satisfait la propriété  $(\Lambda B)$ , alors il admet aussi  $(F\Lambda_r)$ , c'est-à-dire que toute disque borné  $\mathbb{B}$  de  $\Lambda(E)_r$  est contenu dans  $R(B)_r := R(B) \cap \Lambda(E)_r$  pour certains  $B \in \mathcal{B}$  et  $R \in \mathcal{R}$ .

On peut se demander quelle est la relation entre le dual topologique  $\Lambda'$  de  $(\Lambda, \tau_s)$  et son dual de Köthe  $\Lambda^*$ . Dans [22], T. Kōmura et Y. Kōmura ont considéré la fermeture  $\Lambda_r^\beta$  de  $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$  dans  $\Lambda$  par rapport à la topologie forte  $\beta(\Lambda, \Lambda^*)$  et ont montré (Théorème 1.1.) que si  $\Lambda$  est parfait, alors  $(\Lambda_r^\beta)' = (\Lambda_r^\beta)^* = \Lambda^*$ . Par conséquent,  $\Lambda_r^\beta$  est tonnelé pour  $\beta((\Lambda_r^\beta), (\Lambda_r^\beta)^*)$ . Le lemme suivant montre que l'égalité reste valable pour  $\Lambda_r$ , la  $\tau_s$ -fermeture de  $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ .

**Lemme 2.1.10.** *Le dual topologique  $\Lambda'_r$  de  $\Lambda_r$  coïncide avec son dual de Köthe  $\Lambda_r^*$  ( $= \Lambda^*$ ). En particulier, si  $(\Lambda, \tau_s)$  est un espace  $AK$ , alors  $\Lambda' = \Lambda^*$ .*

*Démonstration.* Il est clair que pour tout  $\alpha \in \Lambda^*$ , l'application linéaire  $\varphi_\alpha$  définie de  $\Lambda$  dans  $\mathbb{K}$  par  $\varphi_\alpha((\beta_n)_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \beta_n$  est continue. Par conséquent,  $\Lambda^* \subset \Lambda'$ .

Réciproquement, si  $a \in (\Lambda, \tau_s)'$ , alors pour tout  $\beta \in \Lambda_r$ , nous avons :

$$a(\beta) = a\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n a(e_n) = \varphi_{(a(e_n))_n}(\beta).$$

Puisque  $\sum_{n=1}^{+\infty} |\beta_n a(e_n)| < +\infty$ , la suite  $(a(e_n))_n$  est dans  $\Lambda^*$ , ce qui implique  $\Lambda' = \Lambda^*$ .  $\square$

Il est démontré dans [25] que  $E$  et  $\Lambda$  sont des sous-espaces fermés de  $\Lambda(E)$ . Le lemme suivant améliore ce résultat.

**Lemme 2.1.11.** *L'espace  $E$  est complémenté dans chacun des espaces  $\Lambda[E]$ ,  $\Lambda(E)$ ,  $\Lambda\{E\}$ ,  $\Lambda\langle E \rangle$ ,  $\Lambda[E]_r$ ,  $\Lambda(E)_r$ ,  $\Lambda\{E\}_r$  et  $\Lambda\langle E \rangle_r$ .*

*De plus,  $\Lambda$  est complémenté dans  $\Lambda[E]$ ,  $\Lambda(E)$ ,  $\Lambda\{E\}$  et  $\Lambda\langle E \rangle$ .*

*Si, en plus,  $(\Lambda, \tau_S)$  est un espace AK, alors  $\Lambda$  est également complémenté dans  $\Lambda[E]_r$ ,  $\Lambda(E)_r$ ,  $\Lambda\{E\}_r$  et  $\Lambda\langle E \rangle_r$ .*

*Démonstration.* Nous donnons la preuve pour  $\Lambda(E)$ , les autres cas, similaires, seront omis. Définissons  $\Lambda(E)^1 := \{te_1 : t \in E\}$  et considérons l'application  $p : \Lambda(E) \rightarrow \Lambda(E)^1$  définie pour tout  $(x_n)_n \in \Lambda(E)$  par  $p((x_n)_n) = x_1 e_1$ . Pour tout  $(x_n)_n \in \Lambda(E)$ , nous avons

$$p^2((x_n)_n) = p(x_1 e_1) = x_1 e_1 = p((x_n)_n).$$

Comme

$$\forall (x_n)_n \in \Lambda(E), \quad \forall (S, M) \in \mathcal{S} \times \mathcal{M}, \quad \varepsilon_{S,M}(p((x_n)_n)) \leq \varepsilon_{S,M}((x_n)_n),$$

l'application  $p$  est une projection linéaire continue. Par conséquent,  $\Lambda(E)^1$  est complémenté dans  $\Lambda(E)$ . Maintenant, définissons une application linéaire  $\phi$  de  $E$  dans  $\Lambda(E)^1$  par  $\phi(t) = te_1$ . Alors  $\phi$  est un isomorphisme linéaire bicontinu, car pour tout  $t \in E$  et tout  $(S, M) \in \mathcal{S} \times \mathcal{M}$ ,

$$P_S(e_1)P_M(t) = \varepsilon_{S,M}(te_1).$$

Par conséquent, les espaces  $\Lambda(E)^1$  et  $E$  sont topologiquement isomorphes. Par suite  $E$  est complémenté dans  $\Lambda(E)$ .

La même preuve montre que  $E$  est complémenté dans  $\Lambda(E)_r$ .

Maintenant, considérons  $f \in E'$  et  $M_0 \in \mathcal{M}$ , tels que  $f \in M_0$  et  $f(t) = 1$  pour certains  $t \in E$ . Posons  $\Lambda t := \{(\alpha_n t)_n : (\alpha_n)_n \in \Lambda\}$  et définissons l'application  $q_f$  de  $\Lambda(E)$  dans  $\Lambda t$  par  $q_f((x_n)_n) = (f(x_n)t)_n$ . Puisque  $(\alpha_n t)_n \in \Lambda(E)$  pour tout  $(\alpha_n)_n \in \Lambda$ ,  $q_f$  est surjective. De plus, il est clair que, pour tout  $(x_n)_n \in \Lambda(E)$ , on a

$$q_f^2((x_n)_n) = q_f((f(x_n)t)_n) = (f(x_n)t)_n = q_f((x_n)_n).$$

De plus, pour chaque  $S \in \mathcal{S}$  et  $M \in \mathcal{M}$ ,

$$\varepsilon_{S,M}((f(x_n)t)_n) = P_M(t)P_S((f(x_n))_n) \leq P_M(t)\varepsilon_{S,M_0}((x_n)_n).$$

Alors l'application  $q_f$  est une projection linéaire continue. Par conséquent,  $\Lambda t$  est complémenté dans  $\Lambda(E)$ . Maintenant, définissons un isomorphisme linéaire  $h$  de  $\Lambda$  sur  $\Lambda t$  par

$h((\alpha_n)_n) = (\alpha_n t)_n$ . Pour tout  $\alpha \in \Lambda$  et tout  $(S, M) \in \mathcal{S} \times \mathcal{M}$ , nous avons

$$P_S((\alpha_n)_n) = \frac{1}{P_M(t)} \varepsilon_{S,M}((\alpha_n t)_n).$$

Donc,  $h$  est un isomorphisme linéaire bicontinu, et  $\Lambda$  est complémenté dans  $\Lambda(E)$ .

Si  $(\Lambda, \tau_S)$  est un espace AK, la restriction de l'application  $q_f$  à  $\Lambda(E)_r$  est toujours surjective. Donc  $\Lambda t$  est complémenté dans  $\Lambda(E)_r$ , par suite  $\Lambda$  est complémenté dans  $\Lambda(E)_r$ .  $\square$

Nous obtenons une caractérisation des propriétés de tonnelage et de quasi-tonnelage dans  $\Lambda(E)_r$ .

**Proposition 2.1.12.** *L'espace  $\Lambda(E)_r$  est tonnelé (resp. quasi-tonnelé) si*

1.  $E$  et  $\Lambda$  sont tonnelés (resp. quasi-tonnelés), et
2. pour chaque disque faiblement borné (resp. fortement borné)  $\mathbb{B}$  de  $(\Lambda(E)_r)'$ , il existe  $B' \in \mathcal{B}'$  et  $R' \in \mathcal{R}'$  tels que  $\mathbb{B} \subset R' \langle B' \rangle$ .

*La réciproque est vraie lorsque  $(\Lambda, \tau_S)$  est AK.*

*Démonstration.* Soit  $T$  un tonneau (resp. un tonneau bornivore) dans  $\Lambda(E)_r$ . Alors  $T^\circ$  est faiblement borné (resp. fortement borné) dans  $(\Lambda(E)_r)'$ . Par *ii*), il existe  $R' \in \mathcal{R}'$  et  $B' \in \mathcal{B}'$  tels que  $T^\circ \subset R' \langle B' \rangle$ . Puisque  $E$  est tonnelé (resp. quasi-tonnelé),  $B'$  est équicontinu, donc contenu dans un certain  $M \in \mathcal{M}$ . De même, puisque  $\Lambda$  est tonnelé (resp. quasi-tonnelé), il existe  $S \in \mathcal{S}$  tel que  $R' \subset S$ . Par conséquent,  $T^\circ \subset R' \langle B' \rangle \subset S \langle M \rangle$ . D'où,  $T^\circ$  est équicontinu, puis  $T$  est un voisinage de 0 dans  $\Lambda(E)_r$ .

Maintenant, supposons que  $\Lambda(E)_r$  est tonnelé. Par Lemme 2.1.11, les espaces  $\Lambda$  et  $E$  sont complémentés dans  $\Lambda(E)_r$ . Par conséquent,  $E$  et  $\Lambda$  sont tonnelés (resp. quasi-tonnelés), donc 1. est satisfait. De plus, soit  $\mathbb{B}$  disque faiblement borné (resp. fortement borné) de  $(\Lambda(E)_r)'$ . Alors  $\mathbb{B}$  est un disque équicontinu de  $(\Lambda(E)_r)'$ . Par Théorème 1.2.7, il existe  $S \in \mathcal{S}$  et  $M \in \mathcal{M}$  tels que  $\mathbb{B} \subset S \langle M \rangle$ . Ainsi, 2. est également satisfait.  $\square$

**Remarque 2.1.13.** *La condition " $(\Lambda, \tau_S)$  est un espace AK" dans la Proposition 2.1.12 n'intervient pas dans la conclusion 2. Elle est utilisée uniquement pour conclure que  $\Lambda$  est tonnelé.*

Avec des preuves similaires, nous obtenons les propositions suivantes :

**Proposition 2.1.14.** *L'espace  $\Lambda(E)_r$  est tonnelé (resp. quasi-tonnelé) si*

1.  $E$  et  $\Lambda$  sont tonnelés (resp. quasi-tonnelés), et
2. pour tout disque faiblement borné (resp. fortement borné)  $\mathbb{B}$  de  $(\Lambda(E)_r)'$ , il existe  $B' \in \mathcal{B}'$  et  $R' \in \mathcal{R}'$  tels que  $\mathbb{B} \subset R' [B']$ .

*La réciproque est vraie si  $(\Lambda, \tau_S)$  est un espace AK.*

*Démonstration.* Soit  $T$  un tonneau (resp. tonneau bornivore) de  $\Lambda(E)_r$ . Alors  $T^\circ$  est un disque faiblement borné (resp. fortement borné) de  $(\Lambda(E)_r)'$ , par *ii*) il existe  $R' \in \mathcal{R}'$

et  $B' \in \mathcal{B}'$  tels que  $T^\circ \subset R'[B']$ . Puisque  $E$  est tonnelé (resp. quasi-tonnelé),  $B'$  est équicontinu donc il existe  $M \in \mathcal{M}$  tel que  $M = B'$ . Puisque  $\Lambda$  est tonnelé (resp. quasi-tonnelé),  $R^\circ$  est un voisinage de 0 dans  $\Lambda$ , donc il existe  $S \in \mathcal{S}$  tel que  $R' \subset S$ . Par conséquent :

$$T^\circ \subset R'[B'] \subset S[M]$$

Par conséquent  $T$  est un voisinage de 0 dans  $\Lambda\langle E \rangle_r$  et donc  $\Lambda\langle E \rangle_r$  est tonnelé (resp. quasi-tonnelé).

Réciproquement, supposons que  $(\Lambda, \tau_S)$  est un espace  $AK$  et que  $\Lambda\langle E \rangle_r$  est tonnelé (resp. quasi-tonnelé). Nous allons d'abord montrer que  $E$  et  $\Lambda$  sont tonnelés. D'après le Lemme 2.1.11, les deux espaces  $\Lambda$  et  $E$  sont complémentés dans  $\Lambda\langle E \rangle_r$  donc  $E$  et  $\Lambda$  sont tonnelés (resp. quasi-tonnelés).

Soit  $\mathcal{B}$  un disque faiblement borné (resp. fortement borné) de  $(\Lambda\langle E \rangle_r)'$ . Alors  $\mathcal{B}$  est un disque équicontinu de  $(\Lambda\langle E \rangle_r)'$ , il existe donc  $S \in \mathcal{S}$  et  $M \in \mathcal{M}$  tels que  $\mathcal{B} \subset S[M]$ . □

**Proposition 2.1.15.** *L'espace  $\Lambda\{E\}_r$  est tonnelé (resp. quasi-tonnelé) si*

1.  *$E$  et  $\Lambda$  sont tonnelés (resp. quasi-tonnelés), et*
2. *pour chaque disque faiblement borné (resp. fortement borné)  $\mathbb{B}$  de  $(\Lambda\{E\}_r)'$ , il existe  $B' \in \mathcal{B}'$  et  $R' \in \mathcal{R}'$  tels que  $\mathbb{B} \subset R'\{B'\}$ .*

*La réciproque est vraie chaque fois que  $(\Lambda, \tau_S)$  est un espace  $AK$ .*

*Démonstration.* 1. Supposons que  $\Lambda\{E\}_r$  est tonnelé. D'après Lemme 2.1.11, les espaces  $\Lambda$  et  $E$  sont complémentés dans  $\Lambda\{E\}_r$ . Par conséquent,  $E$  et  $\Lambda$  sont tonnelés (resp. quasi-tonnelés).

2. Soit  $\mathbb{B}$  une partie disquée faiblement bornée (resp. fortement bornée) de  $(\Lambda\{E\}_r)'$ . Alors  $\mathbb{B}$  est équicontinue de  $(\Lambda\{E\}_r)'$ . Par la Proposition 4.2.12, il existe  $S \in \mathcal{S}$  et  $M \in \mathcal{M}$  tels que  $\mathbb{B} \subset S\{M\}$ .

Réciproquement, soit  $T$  un tonneau (resp. tonneau bornivore) dans  $\Lambda\{E\}_r$ . Alors  $T^\circ$  est un faiblement borné (resp. fortement borné) de  $(\Lambda\{E\}_r)'$ , par (ii) il existe  $R' \in \mathcal{R}'$  et  $B' \in \mathcal{B}'$  tels que

$$T^\circ \subset R'\{B'\}.$$

Puisque  $E$  est tonnelé (resp. quasi-tonnelé),  $B'$  est équicontinu, donc contenu dans un certain  $M \in \mathcal{M}$ . De même, puisque  $\Lambda$  est tonnelé (resp. quasi-tonnelé), il existe  $S \in \mathcal{S}$  tel que  $R' \subset S$ . Par conséquent,

$$T^\circ \subset R'\{B'\} \subset S\{M\}.$$

Par suite  $T$  est un voisinage de 0 dans  $\Lambda\{E\}_r$  et donc  $\Lambda\{E\}_r$  est tonnelé (resp. quasi-tonnelé). □

Dans [13], M. Florencio et Pedro J. Paúl ont donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que  $\Lambda_r^\beta\{E\}$  soit tonnelé (resp. quasi-tonnelé),  $\Lambda_r^\beta$  désignant à nouveau la

$\beta(\Lambda, \Lambda^*)$ -fermeture  $\overline{\mathbb{K}(\mathbb{N})}^{\beta(\Lambda, \Lambda^*)}$  de  $\mathbb{K}(\mathbb{N})$  dans  $\Lambda$ . Le corollaire suivant donne une caractérisation de la propriété quasi-tonnelé dans  $\Lambda\{E\}_r$  en termes de la même propriété dans  $\Lambda$  et  $E$ .

**Corollaire 2.1.16.** *Si  $(\Lambda, \tau_S)$  est un espace AK,  $E$  satisfait  $(AF\Lambda)$ , et  $E'_\beta$  satisfait  $(AF\Lambda^*)$ , alors  $\Lambda\{E\}_r$  est quasi-tonnelé si et seulement si  $E$  et  $\Lambda$  sont quasi-tonnelés.*

*Démonstration.* Si  $\Lambda\{E\}_r$  est quasi-tonnelé, alors par Lemme (2.1.11),  $E$  et  $\Lambda$  sont quasi-tonnelés.

Inversement, puisque  $E$  et  $E'_\beta$  satisfont respectivement  $(AF\Lambda)$  et  $(AF\Lambda^*)$ , et puisque  $E$  est quasi-tonnelé, l'égalité  $(\Lambda\{E\}_r)'_\beta = (\Lambda^*\{E'_\beta\}, \pi_{\mathcal{R}, \mathcal{B}})$  est vérifiée par *ii*) du Théorème 2.1.4. Donc, pour chaque disque fortement borné  $\mathbb{B}$  de  $(\Lambda\{E\}_r)'$ , il existe  $B' \in \mathcal{B}'$  et  $R' \in \mathcal{R}'$  tels que  $\mathbb{B} \subset R'\{B'\}$ . Par conséquent,  $\Lambda\{E\}_r$  est quasi-tonnelé.  $\square$

## 2.2 Réflexifs dans les espaces de suites vectorielles

Dans [32], Rosier donne des conditions suffisantes pour que les égalités  $(\Lambda\{E\})^* = \Lambda^*\{E'\}$  et  $(\Lambda\{E\}_r)' = \Lambda^*\{E'\}$  soient vérifiées algébriquement. La proposition suivante établit une relation entre le dual topologique et le dual de Köthe de  $\Lambda(E)_r$ .

Rappelons qu'un espace localement convexe est dit  $C$ -tonnelé si chaque suite faible\* de Cauchy dans son dual topologique est équicontinue (voir [42]). Nous obtenons alors le résultat suivant.

**Proposition 2.2.1.** *1. L'espace  $\Lambda(E)$  est un AK-espace si et seulement si  $(\Lambda(E))' \subset (\Lambda(E))^*$ .*

*2. Si  $\Lambda(E)_r$  est  $C$ -tonnelé, alors l'égalité  $(\Lambda(E)_r)' = (\Lambda(E))^*$  est vraie algébriquement.*

*Démonstration.* 1. Nécessité : Soit  $F \in (\Lambda(E))'$  et  $a := (a_n)_n$  la suite donnée par la deuxième partie de la preuve de Théorème 4.2.8. Alors  $(a_n)_n \in (\Lambda(E))^*$  d'après le même théorème. Comme  $\Lambda(E)$  est un AK-espace, pour tout  $x \in \Lambda(E) = \Lambda(E)_r$ ,

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x_n). \text{ Par conséquent } (\Lambda(E))' \subset (\Lambda(E))^*.$$

Suffisance : Supposons qu'il existe une suite  $(x_n)_n \in \Lambda(E)$  qui n'appartient pas à  $\Lambda(E)_r$ . Alors, par le théorème de Hahn-Banach, nous pouvons trouver un  $F \in (\Lambda(E))'$  tel que  $F((x_n)_n) = 1$  et  $F$  s'annule identiquement sur  $\Lambda(E)_r$ . Comme  $(\Lambda(E))' \subset (\Lambda(E))^*$ ,  $F$  appartient à  $(\Lambda(E))^*$ . Par conséquent, il existe une suite  $(b_n)_n \subset E'$  telle que  $F(y) =$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(y_n) \text{ pour tout } y := (y_n)_n \in \Lambda(E). \text{ En particulier } F((x_n)_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(x_n) = 1. \text{ Mais}$$

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x_n) = \lim_{p \rightarrow \infty} F((x_n)_n^{(p)}) = 0, \text{ pour } (x_n)_n^{(p)} = (x_1, \dots, x_p, 0, \dots) \in \Lambda(E)_r. \text{ Cette contradiction montre que } (x_n)_n \in \Lambda(E)_r \text{ et donc que } \Lambda(E) = \Lambda(E)_r.$$

2. D'après Théorème 4.2.8, nous avons  $(\Lambda(E)_r)' \subset (\Lambda(E))^*$ . Montrons que  $(\Lambda(E))^* \subset (\Lambda(E)_r)'$ . Choisissons un  $(a_n)_n$  arbitraire dans  $(\Lambda(E))^*$ . Alors pour tout  $(x_n)_n \in \Lambda(E)_r$ , la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x_n)$  converge. Ensuite, considérons sur  $(\Lambda(E)_r)$  les formes linéaires  $F_a$  et  $F_{a,n}$ , définies par

$$F_a : (x_k)_k \longmapsto \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x_k) \quad \text{et} \quad F_{a,n} : (x_k)_k \longmapsto \sum_{k=1}^n a_k(x_k), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Il est clair que, pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_{a,n}$  est une forme linéaire continue sur  $(\Lambda(E)_r)$  et que pour tout  $x := (x_k)_k \in \Lambda(E)_r$ ,  $(F_{a,n}(x))_n$  converge vers  $F_a(x)$ . Ainsi, la suite  $(F_{a,n})_n$  est faible\* de Cauchy dans  $(\Lambda(E)_r)'$ . Comme  $\Lambda(E)_r$  est  $C$ -tonnelé,  $(F_{a,n})_n$  est équicontinue. Par conséquent,  $F_a$  est continue, car  $F_a(x) = \lim_n F_{a,n}(x)$  pour tout  $x \in \Lambda(E)_r$ . Ainsi  $(\Lambda(E)_r)' = (\Lambda(E))^*$ .  $\square$

**Lemme 2.2.2.** *Si  $\Lambda(E)_r$  est  $C$ -tonnelé et si  $E$  satisfait  $(F\Lambda)$ , alors l'égalité  $(\Lambda(E)_r)' = \Lambda^*\langle E'_\beta \rangle$  est vraie algébriquement. De plus, si  $E$  possède également la propriété  $(\Lambda B)$ , alors l'égalité est aussi topologique, lorsque  $\Lambda^*$  est muni de la topologie forte  $\beta(\Lambda^*, \Lambda)$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $\Lambda(E)_r$  soit  $C$ -tonnelé et que  $E$  soit fondamentalement borné par  $\Lambda$ . Alors, par la Proposition 2.2.1 *ii*), l'égalité  $(\Lambda(E)_r)' = \Lambda(E)^*$  est vraie algébriquement et par la Proposition 2.1.6, on a  $\Lambda^*\langle E'_\beta \rangle \subset \Lambda(E)^*$ . Par conséquent,  $(\Lambda(E)_r)' \subset \Lambda^*\langle E'_\beta \rangle \subset \Lambda(E)^* = (\Lambda(E)_r)'$ , ce qui implique  $(\Lambda(E)_r)' = \Lambda^*\langle E'_\beta \rangle$ . De nouveau, par la Proposition 2.1.6, la topologie forte sur  $(\Lambda(E)_r)'$  est plus fine que celle de  $\Lambda^*\langle E'_\beta \rangle$ . Maintenant, si  $E$  possède la propriété  $(\Lambda B)$ , alors les deux topologies coïncident.  $\square$

Le résultat suivant caractérise la semi-réflexivité de  $\Lambda(E)$  dans le cas où  $\Lambda(E)$  est  $C$ -tonnelé.

**Théorème 2.2.3.** *Si  $\Lambda(E)$  est  $C$ -tonnelé et si  $E$  satisfait  $(F\Lambda)$ , alors  $\Lambda(E)$  est semi-réflexif si et seulement si :*

1.  $E$  et  $\Lambda$  sont semi-réflexifs.
2.  $\Lambda(E)$  et  $\Lambda^*\langle E'_\beta \rangle$  sont tous deux des espaces  $AK$ .

*Démonstration.* Nécessité : Supposons que  $\Lambda(E)$  soit semi-réflexif. Puisque  $E$ ,  $\Lambda$  et  $\Lambda(E)_r$  sont des sous-espaces fermés de  $\Lambda(E)$ , ils sont tous semi-réflexifs. En particulier,  $\Lambda(E)_r$  est faiblement quasi-complet [20], puis également faiblement séquentiellement complet. Maintenant, pour tout  $x = (x_n)_n \in \Lambda(E)$ , la suite  $(x^{(p)})_p$  est faiblement de Cauchy dans  $\Lambda(E)_r$ . En effet, si  $F \in (\Lambda(E)_r)'$ , alors il existe une suite  $(a_n)_n$  dans  $E'$  comme dans la preuve de la Proposition 2.2.1, telle que la série  $\sum a_n(x_n)$  converge. Par conséquent,  $\left( F(x^{(p)}) \right)_p = \left( \sum_{k=1}^p a_n(x_n) \right)_p$  est une suite de Cauchy. Ainsi,  $(x^{(p)})_p$  converge faiblement vers une limite  $y = (y_n)_n \in \Lambda(E)_r$ , qui n'est autre que  $(x_n)_n$ . Par conséquent,  $\Lambda(E)$  est un espace  $AK$ . Comme  $\Lambda(E) = \Lambda(E)_r$  est  $C$ -tonnelé et que  $E$  satisfait  $(F\Lambda)$ ,  $(\Lambda(E)_r)' =$

$\Lambda^*\langle E'_\beta \rangle$  est séquentiellement complet pour la topologie  $\sigma(\Lambda^*\langle E'_\beta \rangle, \Lambda(E)_r)$ . Soit  $a = (a_n)_n \in \Lambda^*\langle E'_\beta \rangle$ . Alors  $(a^{(k)})_k \in \Lambda^*\langle E'_\beta \rangle_r$  et elle est  $\sigma(\Lambda^*\langle E'_\beta \rangle, \Lambda(E)_r)$ -Cauchy. En effet, considérons  $x = (x_n)_n \in \Lambda(E)_r$ . Alors  $\langle (a_n)_n, (x_n)_n \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x_n)$ .

Par conséquent,  $\left( \sum_{n=1}^k a_n(x_n) \right)$  est une suite de Cauchy, donc  $(a^{(k)})_k$  converge vers  $b = (b_n)_n$  dans  $(\Lambda^*\langle E'_\beta \rangle_r, \sigma(\Lambda^*\langle E'_\beta \rangle_r, \Lambda(E)_r))$ . Fixons  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in E$ . En appliquant la forme linéaire  $l_{n,t}$  définie sur  $\Lambda^*\langle E'_\beta \rangle_r$  par  $l_{n,t}((a_i)_i) = a_n(t)$ , nous obtenons  $(a_n)_n = (b_n)_n$ . Ainsi,  $\Lambda^*\langle E'_\beta \rangle$  est un espace  $AK$ .

Réciproquement, supposons que *i*) et *ii*) soient satisfaits. Alors :

$$\begin{aligned}
 \text{par 2} \quad \Lambda(E)'' &= (\Lambda(E)_r)'' \\
 &= (\Lambda^*\langle E'_\beta \rangle)' \\
 \text{par 2} \quad &= (\Lambda^*\langle E'_\beta \rangle_r)' \\
 \text{par [26]} \quad &= \bigcup_{\mathcal{R}, \mathcal{B}} \Lambda_R[(E'_\beta)'_{B^{\circ\circ}}] \\
 \text{par 1} \quad &= \bigcup_{\mathcal{R}, \mathcal{B}} \Lambda_R[E_B] \\
 &\subset \Lambda[E].
 \end{aligned}$$

Montrons que  $\Lambda[E] = \Lambda(E)$ . Soit  $\alpha = (\alpha_n)_n \in \Lambda^*$ ,  $(R, B) \in \mathcal{R} \times \mathcal{B}$ ,  $\beta = (\beta_n)_n \in R$  et  $x \in B$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $f_n = \beta_n x$ , alors  $f = (f_n)_n \in \Lambda_R[(E'_\beta)'_{B^{\circ\circ}}] = \Lambda_R[E_B]$  et  $\varepsilon_{R^{\circ}, B^{\circ}}(f) \leq 1$ . Ainsi pour tout  $a \in E'$ ,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n \beta_n a(x)| = \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n f_n(a)| \leq \sigma_{R, B}((\alpha_n a)_n).$$

Alors

$$P_R((\alpha_n)_n) |a(x)| \leq \sigma_{R, B}((\alpha_n a)_n).$$

Puisque  $(\Lambda^*\langle E'_\beta \rangle, \sigma_{\mathcal{R}, \mathcal{B}})$  est un espace  $AK$ ,  $(\Lambda^*, \tau_{\mathcal{R}}) = (\Lambda^*, \beta(\Lambda^*, \Lambda))$  est un espace  $AK$ . Par conséquent, d'après ([23], 30. 7. (4)),  $(\Lambda, \tau_{\mathcal{N}})$  est semi-réflexif. En raison du Corollaire 1.4 de [16], nous avons  $\Lambda[E] = \Lambda(E)$ , donc  $\Lambda(E)$  est semi-réflexif.  $\square$

Le résultat principal de [26] affirme que si  $E$  et  $\Lambda$  sont des espaces de Fréchet, alors  $\Lambda(E)$  est réflexif si, et seulement si,  $E$  et  $\Lambda$  sont réflexifs, et les deux espaces  $\Lambda(E)$  et  $\Lambda^*\langle E'_\beta \rangle$  sont tous  $AK$ . Comme corollaire direct du Théorème 2.2.3, nous obtenons une amélioration de ce résultat.

**Théorème 2.2.4.** *Si  $\Lambda(E)$  est tonnelé et  $E$  est fondamentalement  $\Lambda$ -borné, alors  $\Lambda(E)$  est réflexif si et seulement si :*

1.  $E$  et  $\Lambda$  sont réflexifs.
2.  $\Lambda(E)$  et  $\Lambda^*\langle E'_\beta \rangle$  sont tous deux des espaces  $AK$ .

Une autre généralisation du même résultat est la suivante :

**Théorème 2.2.5.** *Si  $E$  est fondamentalement  $\Lambda$ -borné, alors  $\Lambda(E)$  est réflexif si et seulement si :*

1.  $E$  et  $\Lambda$  sont réflexifs.
2.  $\Lambda(E)$  et  $\Lambda^*\langle E'_\beta \rangle$  sont tous deux des espaces  $AK$ .
3. Pour tout disque borné  $\mathbb{B}$  de  $\Lambda^*\langle E'_\beta \rangle$ , il existe  $B' \in \mathcal{B}'$ ,  $R' \in \mathcal{R}'$  tels que  $\mathbb{B} \subset R'\langle B' \rangle$ .

*Démonstration.* Si  $\Lambda(E)$  est réflexif, alors il est semi-réflexif et tonnelé, donc il est semi-réflexif et  $C$ -tonnelé. Par Théorème 2.2.3 1.,  $E$  et  $\Lambda$  sont semi-réflexifs, puis réflexifs car  $E$  et  $\Lambda$  sont tonnelés, en tant que sous-espaces complétés de  $\Lambda(E)$ . Maintenant, par 2. du même théorème,  $\Lambda(E)$  et  $\Lambda^*\langle E'_\beta \rangle$  sont des espaces  $AK$ . Puisque  $\Lambda(E)_r = \Lambda(E)$  est tonnelé, par Théorème 2.1.12 2. et Remarque 2.1.13, pour chaque ensemble faiblement borné (resp. fortement borné)  $\mathbb{B}$  de  $(\Lambda(E)_r)' = \Lambda^*\langle E'_\beta \rangle$ , il existe  $B' \in \mathcal{B}'$  et  $R' \in \mathcal{R}'$  tels que  $\mathbb{B} \subset R'\langle B' \rangle$ .

Réciproquement, par *i*) et *iii*), l'espace  $\Lambda(E)_r$  est tonnelé (resp. quasi-tonnelé) et par *i*) et *ii*),  $\Lambda(E)$  est semi-réflexif. Alors  $\Lambda(E)$  est réflexif. □

## 2.3 Espaces distingués de suites vectorielles

Un espace localement convexe  $E$  est dit distingué si son dual fort  $(E', \beta(E', E))$  est tonnelé. Comme le dual fort d'un espace localement convexe bornologique (et donc aussi d'un espace métrisable) est complet, il est tonnelé si et seulement s'il est quasi-tonnelé. Il est alors naturel de se demander si le dual fort d'un espace localement convexe est toujours tonnelé dès qu'il est quasi-tonnelé. Comme nous le verrons plus tard, ce n'est pas le cas. Nous introduisons donc la définition suivante.

**Définition 2.3.1.** *Un espace localement convexe séparé  $E$  est dit quasi-distingué si son dual fort  $(E', \beta(E', E))$  est quasi-tonnelé.*

En fait, l'appellation "quasi-distingué" a déjà été utilisée dans la littérature, mais avec un sens différent [41].

Chaque espace distingué est bien sûr quasi-distingué. En particulier, tous les espaces semi-réflexifs et tous les espaces normés sont quasi-distingués.

Le résultat suivant donne une caractérisation des espaces quasi-distingués.

**Proposition 2.3.2.** *Un espace localement convexe  $E$  est quasi-distingué si et seulement si, pour chaque disque borné  $B$  de  $(E'', \beta(E'', E'))$ , il existe un disque borné  $A$  de  $E$  tel que  $B$  soit contenu dans la  $\sigma(E'', E')$ -fermeture de  $A$  dans  $E''$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $E$  soit quasi-distingué, alors  $(E', \beta(E', E))$  est quasi-tonnelé. Soit  $B$  un disque borné de  $(E'', \beta(E'', E'))$ . Alors le polaire  $B^\circ$  de  $B$  dans  $E'$  est un tonneau bornivore. Comme  $E'_\beta$  est quasi-tonnelé,  $B^\circ$  est un voisinage de 0 dans  $(E', \beta(E', E))$ . Par

conséquent, il existe un disque borné  $A$  dans  $E$ , dont le polaire  $A^\circ$  dans  $E'$  est contenu dans  $B^\circ$ . En prenant les polaires dans  $E''$ , nous obtenons  $B \subset A^{\circ\circ} = \overline{A}^{\sigma(E'', E')}$ .

Réciproquement, soit  $T$  un tonneau bornivore dans  $(E', \beta(E', E))$ . Alors  $T^\circ$  est absorbé par  $B^\circ$  pour chaque disque borné de  $(E', \beta(E', E))$ , les polaires étant prises dans  $E''$ . Cela signifie que  $T^\circ$  est borné dans  $(E'', \beta(E'', E'))$ . Par hypothèse, il existe un ensemble borné  $A$  de  $E$  tel que  $T^\circ \subset \overline{A}^{\sigma(E'', E')} = A^{\circ\circ}$ . En prenant à nouveau les polaires dans  $E'$ , nous obtenons  $A^\circ = (A^{\circ\circ})^\circ \subset T$ , ce qui signifie que  $T$  est un voisinage de 0 dans  $(E', \beta(E', E))$ .  $\square$

Rappelons qu'un espace de Fréchet n'est pas nécessairement quasi-distingué.

**Exemple 2.3.3.** Dans [40], Taskinen montre que l'espace de Fréchet  $E = C(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$  avec la topologie générée par les semi-normes

$$\|f\|_n = \max \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt, \sup\{|f(t)|, |t| \leq n\} \right), \quad n \in \mathbb{N},$$

n'est pas distingué. Comme il est métrisable,  $E$  n'est pas quasi-distingué.

Maintenant, nous fournissons un exemple d'un espace quasi-distingué qui n'est pas distingué.

**Exemple 2.3.4.** Soit  $\mathcal{P}$  l'ensemble de tous les nombres premiers (positifs) et pour chaque  $p \in \mathcal{P}$ ,  $A_p = \{p^n : n \in \mathbb{N}\}$ . Définissons pour chaque  $p \in \mathcal{P}$  la suite  $(x_{p,n})_n \in \ell^\infty$  par  $x_{p,n} = 1$  si  $n \in A_p$  et  $x_{p,n} = 0$  sinon. Soit  $G$  le sous-espace vectoriel engendré par  $\{(x_{p,n})_n : p \in \mathcal{P}\}$  et  $D := G \oplus c_0$ . Alors, par un résultat de [35],  $(D, \|\cdot\|_\infty)$  est un sous-espace non tonnelé de  $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ . Maintenant, considérons l'espace localement convexe  $E = (\ell^1, \sigma(\ell^1, D))$ . Alors  $E' = D$ . De plus,  $c_0 \subset D \subset \ell^\infty$ . Alors, par le théorème de Banach-Steinhaus, un disque  $A \subset E$  est  $\sigma(\ell^1, D)$ -borné si et seulement si  $A$  est  $\|\cdot\|_1$ -borné dans  $\ell^1$ . Par conséquent, la topologie forte  $\beta(D, \ell^1)$  coïncide avec celle de la norme induite par  $\|\cdot\|_\infty$  de  $\ell^\infty$ . Ainsi,  $(E', \beta(E', E))$  étant égal à  $(D, \beta(D, \ell^1))$  est un espace non-tonnelé quasi-tonnelé. Par conséquent,  $E$  est un espace quasi-distingué mais non distingué.

La classe des espaces quasi-distingués et celle des espaces distingués sont donc très proches l'une de l'autre. En fait, si  $E'_\beta$  est fast-tonnelé et que  $E$  est quasi-distingué, alors  $E$  est distingué. En effet, par la proposition 7 de [24], chaque tonneau  $T$  dans  $E'_\beta$  est bornivore. Alors  $T$  est un voisinage de 0. En particulier, si  $E$  est un espace bornologique complet, alors  $E$  est quasi-distingué si et seulement si, il est distingué.

Le résultat suivant caractérise les espaces  $\Lambda(E)_r$  distingués.

**Théorème 2.3.5.** Supposons que  $\Lambda(E)_r$  est  $C$ -tonnelé et que  $E$  satisfait les propriétés  $(FA)$  et  $(\Lambda B)$ . Alors  $\Lambda(E)_r$  est distingué si et seulement si :

1.  $E$  et  $\Lambda$  sont distingués.
2.  $\Lambda^*\langle E'_\beta \rangle$  est un espace  $AK$ .
3. pour chaque disque  $\sigma(\Lambda^*\langle E'_\beta \rangle', \Lambda^*\langle E'_\beta \rangle)$ -borné  $\mathbb{B}$  de  $(\Lambda^*\langle E'_\beta \rangle)'$ , il existe  $B \in \mathcal{B}$  et  $R \in \mathcal{R}$ , tels que  $\mathbb{B} \subset R[B^{\circ\circ}]$ .

*Démonstration.* Supposons que  $\Lambda(E)_r$  est distingué. Alors  $(\Lambda(E)_r)'_\beta$  est tonnelé. Comme  $\Lambda(E)_r$  est  $C$ -tonnelé, par le lemme 2.2.2, l'égalité  $(\Lambda(E)_r)'_\beta = (\Lambda^*\langle E'_\beta \rangle, \sigma_{\mathcal{R}, \mathcal{B}})$  est vraie algébriquement et topologiquement. Par conséquent  $(\Lambda^*\langle E'_\beta \rangle, \sigma_{\mathcal{R}, \mathcal{B}})$  est tonnelé. Par la Proposition 2.1.14 1., les deux espaces  $E'_\beta$  et  $(\Lambda^*, \tau_{\mathcal{R}}) = \Lambda'_\beta$  sont tonnelés. Ainsi  $E$  et  $\Lambda$  sont distingués. Comme  $\Lambda(E)_r$  est  $C$ -tonnelé,  $(\Lambda(E)_r)' = \Lambda^*\langle E'_\beta \rangle$  est faiblement séquentiellement complet et donc les arguments de la preuve du Théorème 2.2.3 fonctionnent toujours pour prouver que l'espace  $\Lambda^*\langle E'_\beta \rangle$  est un espace  $AK$ . Par conséquent, par la Proposition 2.1.14 2., pour chaque disque faiblement borné  $\mathbb{B}$  de  $(\Lambda^*\langle E'_\beta \rangle)'$ , il existe  $B \in \mathcal{B}$  et  $R \in \mathcal{R}$  tels que  $\mathbb{B} \subset R[B^{\circ\circ}]$ .

Réciproquement, supposons que 1., 2. et 3. sont satisfaits. Alors, une application de la Proposition 2.1.14 donne que  $(\Lambda^*\langle E'_\beta \rangle, \sigma_{\mathcal{R}, \mathcal{B}})$  est tonnelé, donc  $(\Lambda(E)_r)'_\beta$  est tonnelé. Par conséquent,  $\Lambda(E)_r$  est distingué.  $\square$

Avec une preuve similaire, nous obtenons le théorème suivant :

**Théorème 2.3.6.** *Supposons que  $\Lambda(E)_r$  est  $C$ -tonnelé et que  $E$  satisfait les propriétés  $(F\Lambda)$  et  $(\Lambda B)$ . Alors  $\Lambda(E)_r$  est quasi-distingué si et seulement si :*

1.  $E$  et  $\Lambda$  sont quasi-distingués,
2.  $\Lambda^*\langle E'_\beta \rangle$  est un espace  $AK$ , et
3. pour chaque disque fortement borné  $\mathbb{B}$  de  $(\Lambda^*\langle E'_\beta \rangle)'$ , il existe  $B \in \mathcal{B}$  et  $R \in \mathcal{R}$ , tels que  $\mathbb{B} \subset R[B^{\circ\circ}]$ .

Maintenant, nous étendons au cas général des espaces localement convexes absolument fondamentalement  $\Lambda$ -bornés Théorème 3.22 de [13] donné dans le cas où  $E$  et  $\Lambda$  sont des espaces de Fréchet.

**Théorème 2.3.7.** *Supposons que  $E$  est  $\sigma$ -quasi-tonnelé,  $(\Lambda^*, \tau_{\mathcal{R}})$  est un espace  $AK$ ,  $E'' := (E'_\beta)'_\beta$  a la propriété  $(AF\Lambda)$  et  $E'_\beta$  a la propriété  $(AF\Lambda^*)$ . Alors  $\Lambda\{E\}_r$  est quasi-distingué si et seulement si  $E$  est quasi-distingué, et  $\Lambda^*\{E'_\beta\}$  est un espace  $AK$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $\Lambda\{E\}_r$  est quasi-distingué. Alors  $(\Lambda\{E\}_r)'_\beta$  est quasi-tonnelé. Comme  $E''$  est absolument fondamentalement  $\Lambda$ -borné,  $E$  est absolument fondamentalement  $\Lambda$ -borné. Alors, par 5.(4).(b) de [32],  $(\Lambda\{E\}_r)'_\beta = (\Lambda^*\{E'_\beta\}, \pi_{\mathcal{R}, \mathcal{B}})$ , donc  $(\Lambda^*\{E'_\beta\}, \pi_{\mathcal{R}, \mathcal{B}})$  est quasi-tonnelé. Par le Corollaire 2.1.16, les deux espaces  $E'_\beta$  et  $(\Lambda^*, \tau_{\mathcal{R}}) = \Lambda'_\beta$  sont quasi-tonnelés, donc  $E$  et  $\Lambda$  sont quasi-distingués. Puisque  $(\Lambda^*, \tau_{\mathcal{R}})$  est un espace  $AK$  et par 3. (7). (b) de [32], l'espace  $\Lambda^*\{E'_\beta\}$  est également  $AK$ .

Réciproquement, supposons que  $E$  est quasi-distingué. Alors  $E'_\beta$  est quasi-tonnelé. Puisque  $(\Lambda^*, \tau_{\mathcal{R}})$  est  $AK$ , l'espace  $\Lambda^*$  est quasi-tonnelé. Par le Corollaire 2.1.16,  $(\Lambda^*\{E'_\beta\}_r, \pi_{\mathcal{R}, \mathcal{B}})$  est quasi-tonnelé. Par conséquent,  $(\Lambda\{E\}_r)'_\beta = (\Lambda^*\{E'_\beta\}, \pi_{\mathcal{R}, \mathcal{B}})$  est quasi-tonnelé, donc  $\Lambda\{E\}_r$  est quasi-distingué.  $\square$

# Espaces tonnelés de suites faiblement Köthe-Orlicz sommables

Dans ce chapitre, pour une fonction d'Orlicz  $\varphi$  et un espace localement convexe  $E$ , nous introduisons la notion de suite faiblement  $(\varphi, \Lambda)$ -sommable  $(x_n)_n$  dans  $E$  et examinons certaines propriétés de l'espace vectoriel  $\Lambda_\varphi[E]$  constitué de toutes ces suites. En fait, les suites faiblement  $(\varphi, \Lambda)$ -sommables et les espaces de suites correspondants ont été étudiés dans [37] pour un espace de Banach  $E$ . Dans ce qui suit, on donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que  $\Lambda_\varphi[E]$  soit réflexif. La situation dans un espace localement convexe est assez compliquée, car la topologie n'est plus donnée par une seule norme mais par une famille de semi-normes. En fait il se peut qu'aucun voisinage borné de 0 n'existe.

Les résultats de ce chapitre étendent et améliorent certains résultats dans la littérature, notamment ceux de [37]. Nous équipons d'abord  $\Lambda_\varphi[E]$  d'une topologie localement convexe séparé, puis nous étudions la complétude et la continuité des projections de l'espace localement convexe ainsi obtenu. Nous plongeons  $E$  dans  $\Lambda_\varphi[E]$  en tant qu'espace complété. Pour étudier le dual topologique de  $\Lambda_\varphi[E]$ , nous définissons la notion de suites fortement  $(\varphi, \Lambda)$ -sommables et l'espace  $\Lambda_\varphi\langle E \rangle$  de toutes ces suites. En fait, nous prouvons que chaque fois que  $\Lambda_\varphi[E]$  est  $AK$ , son dual topologique peut être donné en termes de suites fortement sommables. Ensuite, nous caractérisons la propriété de tonnage dans  $\Lambda_\varphi[E]$ . Pour aborder cette question, nous examinons des ensembles équicontinus de l'espace dual de  $\Lambda_\varphi[E]$ .

## 3.1 Espaces de suites faiblement Köthe-Orlicz Sommables

Dans cette section, nous introduisons la notion de suites faiblement Köthe-Orlicz sommables dans un espace localement convexe  $E$  et examinons quelques propriétés de l'espace vectoriel de toutes ces suites.

**Définition 3.1.1.** *Une suite  $x = (x_n)_n \subset E$  est dite faiblement Köthe-Orlicz sommable*

par rapport à  $\varphi$  et  $\Lambda$  (abrégé en faiblement  $(\varphi, \Lambda)$ -sommable) si  $(\alpha_n f(x_n))_n \in \ell_\varphi$  pour chaque  $f \in E'$  et chaque  $\alpha \in \Lambda^*$ . L'ensemble de toutes ces suites est noté  $\Lambda_\varphi[E]$ .

Puisque  $\Lambda^* = (\Lambda^{**})^*$ , nous supposons sans perte de généralité que  $\Lambda$  est parfait, c'est-à-dire  $\Lambda = \Lambda^{**}$ .

Voici quelques exemples de fonctions d'Orlicz et des espaces  $\Lambda_\varphi[E]$  correspondants.

**Exemple 3.1.2.** 1. Soit  $\varphi$  la fonction identité  $x \mapsto x$ . Alors  $\Lambda_\varphi[E]$  coïncide avec l'espace  $\Lambda[E]$  des suites faiblement sommables dans  $E$  (voir, par exemple, [25]).

2. Supposons que  $\Lambda = \ell^1$  et  $E = \mathbb{K}$ . Alors  $\Lambda_\varphi[E]$  n'est autre que l'espace classique des suites Orlicz  $\ell_\varphi$ .

3. Soit  $\varphi$  la fonction d'Orlicz définie par  $\varphi(x) := +\infty$  si  $x > 1$  et  $\varphi(x) := 0$  si  $0 \leq x \leq 1$ ,  $\Lambda = c_0$ , l'espace des suites scalaires nulles à l'infini, et  $E$  un espace localement convexe. Nous affirmons que  $(c_0)_\varphi[E] = c_b(E)$  est l'ensemble de toutes les suites bornées dans  $E$ . En effet, puisque  $(c_0)^{**} = \ell^\infty$ ,  $(c_0)_\varphi[E] = \ell^\infty[E]$ . Soit  $x \in \ell^\infty_\varphi[E]$ . Alors, pour chaque  $f \in E'$  et  $\alpha \in \ell^1 := (\ell^\infty)^*$ , nous avons  $(\alpha_n f(x_n))_n \in \ell_\varphi := \ell^\infty$ . Puisque  $\alpha$  est arbitraire dans  $\ell^1$ , la suite  $(f(x_n))_n$  appartient à  $\ell^\infty$ . Cela signifie que la suite  $(x_n)_n$  est faiblement bornée dans  $E$ , car  $f$  est arbitraire dans  $E'$ . Par conséquent,  $(x_n)_n$  appartient à  $c_b(E)$ . L'inclusion inverse  $c_b(E) \subset \ell^\infty_\varphi[E]$  est triviale.

Remarquez que si pour chaque  $\alpha \in \Lambda^*$  et  $f \in E'$ ,  $\psi_{\alpha,f}$  est l'endomorphisme de  $E^{\mathbb{N}}$  défini par  $\psi_{\alpha,f}((x_n)_n) = (\alpha_n f(x_n))_n$ , alors

$$\Lambda_\varphi[E] = \bigcap \{ \psi_{\alpha,f}^{-1}(\ell_\varphi), \alpha \in \Lambda^*, f \in E' \}.$$

Cela montre que  $\Lambda_\varphi[E]$  est un espace vectoriel.

**Lemme 3.1.3.** Pour chaque  $x = (x_n)_n \in \Lambda_\varphi[E]$  et  $S \in \mathcal{S}$ , l'ensemble  $A_S^\varphi$  ci-dessous est borné dans  $E$ .

$$A_S^\varphi = \left\{ \sum_{n=1}^p \alpha_n y_n x_n : \alpha \in S, y \in \tilde{B}_{\varphi^*}, p \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ainsi, pour chaque  $S \in \mathcal{S}$  et  $M \in \mathcal{M}$ , une semi-norme  $\varepsilon_{S,M}^\varphi$  est définie sur  $\Lambda_\varphi[E]$ , où

$$\varepsilon_{S,M}^\varphi(x) := \sup_{\alpha \in S, f \in M} \|(\alpha_n f(x_n))_n\|_\varphi, \quad x = (x_n)_n \in \Lambda_\varphi[E].$$

*Démonstration.* Soit  $x = (x_n)_n \in \Lambda_\varphi[E]$ ,  $\alpha \in S$ ,  $y \in \tilde{B}_{\varphi^*}$ ,  $p \in \mathbb{N}$  et  $f \in E'$ . Alors

$$\left| f \left( \sum_{n=1}^p \alpha_n y_n x_n \right) \right| = \left| \sum_{n=1}^p \alpha_n y_n f(x_n) \right| \leq \|(\alpha_n f(x_n))_n\|_\varphi.$$

Nous définissons une application linéaire  $g_f : \Lambda_S^* \rightarrow \ell_\varphi$  par  $g_f(\beta) = (\beta_n f(x_n))$ . Puisque  $\Lambda_S^*$  est un espace de Banach ([25], Lemme 3),  $g_f$  est continue par le théorème du graphe

fermé. Par conséquent, elle est bornée sur  $S$  par la norme  $\|g_f\|$  de  $g_f$ . C'est-à-dire

$$\left| f \left( \sum_{n=1}^p \alpha_n y_n x_n \right) \right| \leq \|(\alpha_n f(x_n))_n\|_\varphi \leq \|g_f\|.$$

Puisque  $f$  était arbitraire dans  $E'$ ,  $A_S^\varphi$  est faiblement borné. Il est donc également borné dans  $E$ . Le reste est trivial.  $\square$

Nous notons par  $\varepsilon_{S,M}^\varphi$  la topologie localement convexe définie sur  $\Lambda_\varphi[E]$  par la famille  $(\varepsilon_{S,M}^\varphi)_{\substack{S \in \mathcal{S}, \\ M \in \mathcal{M}}}$  de semi-normes.

La topologie  $\varepsilon_{S,M}^\varphi$  est séparé. De plus :

1. Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , la projection  $\mathcal{J}_n : x := (x_k)_k \mapsto x_n$  est une application continue de  $\Lambda_\varphi[E]$  dans  $E$ .
2.  $\Lambda_\varphi[E]_r$  est un sous-espace fermé de  $\Lambda_\varphi[E]$ .

*Démonstration.* Il est facile de voir que  $\varepsilon_{S,M}^\varphi$  est de Hausdorff. Pour le montrer :

1. Fixons  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M \in \mathcal{M}$  et choisissons  $S \in \mathcal{S}$  tel que  $e_n \in S$ . Pour tout  $x = (x_n)_n \in \Lambda_\varphi[E]$ , nous avons

$$P_M(\mathcal{J}_n(x)) = P_M(x_n) = \frac{1}{\|e_n\|_\varphi} \|P_M(x_n)e_n\|_\varphi \leq \frac{1}{\|e_n\|_\varphi} \varepsilon_{S,M}^\varphi(x).$$

Alors  $\mathcal{J}_n$  est continue.

2. Soit  $x \in \overline{\Lambda_\varphi[E]_r}$ . Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $M \in \mathcal{M}$  et  $S \in \mathcal{S}$ , il existe  $y \in \Lambda_\varphi[E]_r$  tel que  $\varepsilon_{S,M}^\varphi(x - y) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ . Comme  $y \in \Lambda_\varphi[E]_r$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $i \geq n_0$ ,  $\varepsilon_{S,M}^\varphi(y^{(i)} - y) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ . Donc pour tout  $i \geq n_0$  :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{S,M}^\varphi(x^{(i)} - x) &\leq \varepsilon_{S,M}^\varphi(x^{(i)} - y^{(i)}) + \varepsilon_{S,M}^\varphi(y^{(i)} - y) + \varepsilon_{S,M}^\varphi(x - y) \\ &\leq \varepsilon_{S,M}^\varphi((x - y)^{(i)}) + \varepsilon_{S,M}^\varphi(y^{(i)} - y) + \varepsilon_{S,M}^\varphi(x - y) \\ &\leq 2\varepsilon_{S,M}^\varphi(x - y) + \varepsilon_{S,M}^\varphi(y^{(i)} - y) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Alors  $\Lambda_\varphi[E]_r$  est fermé.  $\square$

**Remarque 3.1.4.** Selon la preuve ci-dessus, pour chaque  $S \in \mathcal{S}$ , l'ensemble  $\{I_n, e_n \in S\}$  est même équicontinu. En particulier, si  $\Lambda$  est un espace normé tel que  $\|e_n\|_{\Lambda^*} \leq 1$  pour chaque  $n$ , alors  $\{I_n, n \in \mathbb{N}\}$  est équicontinu et est alors également équiborné. Un exemple où cela se produit est lorsque  $\Lambda = \ell^p$ .

Le lemme suivant montre que non seulement  $E$  est un sous-espace de  $\Lambda_\varphi[E]$ , mais il y est aussi complémenté.

**Lemme 3.1.5.** *L'espace  $E$  est complémenté dans les deux espaces  $\Lambda_\varphi[E]$  et  $\Lambda_\varphi[E]_r$ .*

*Démonstration.* Définissons  $[E] := \{te_1 : t \in E\}$  et considérons l'application  $p : \Lambda_\varphi[E] \rightarrow [E]$  définie pour tout  $(x_n)_n \in \Lambda_\varphi[E]$  par  $p((x_n)_n) = x_1e_1$ . C'est une projection, et puisque

$$\varepsilon_{S,M}^\varphi(p((x_n)_n)) \leq \varepsilon_{S,M}^\varphi((x_n)_n), \quad (x_n)_n \in \Lambda_\varphi[E], \quad (S, M) \in \mathcal{S} \times \mathcal{M},$$

$p$  est continue. Par conséquent,  $[E]$  est complété dans  $\Lambda_\varphi[E]$ . Maintenant, l'application  $\phi : t \mapsto te_1$  est un isomorphisme

linéaire bicontinu de  $E$  dans  $[E]$  car pour tout  $t \in E$  et tout  $(S, M) \in \mathcal{S} \times \mathcal{M}$ ,

$$\varepsilon_{S,M}^\varphi(te_1) = \|e_1\|_\varphi P_S(e_1)P_M(t).$$

En identifiant  $E$  et  $[E]$ ,  $E$  est complété dans  $\Lambda_\varphi[E]$ .

La même preuve fonctionne également pour  $\Lambda_\varphi[E]_r$ . □

Le théorème suivant montre quand  $\Lambda_\varphi[E]$  est complet ou séquentiellement complet.

**Théorème 3.1.6.** *L'espace  $\Lambda_\varphi[E]$  est (séquentiellement) complet si et seulement si  $E$  est (séquentiellement) complet.*

*Démonstration.* La nécessité découle du Lemme 4.1.4. En ce qui concerne la suffisance, supposons que  $E$  soit complet, et soit  $(x^i)_{i \in I}$  une suite généralisée (ou encore un réseau) de Cauchy dans  $\Lambda_\varphi[E]$ ,  $(I, \leq)$  étant un ensemble ordonné filtrant croissant. La continuité de la projection  $\mathcal{J}_n$  implique que  $(x_n^i)_i$  est une suite généralisée de Cauchy dans  $E$  pour tout  $n$ . Par conséquent, il converge vers un certain  $x_n \in E$ .

Nous affirmons que  $x := (x_n)_n$  appartient à  $\Lambda_\varphi[E]$ . Pour tout  $S \in \mathcal{S}$ ,  $M \in \mathcal{M}$ , et  $\varepsilon > 0$ , choisissons  $k \in I$  tel que pour tout  $i, j > k$ ,  $\varepsilon_{S,M}^\varphi(x^i - x^j) < \varepsilon$ . Ensuite, par la normalité de  $\ell_\varphi$ , pour tout  $\alpha \in S$ ,  $f \in M$ , et  $i, j > k$ , on a

$$\|(\alpha_n f(x_n^i) - \alpha_n f(x_n^j))_n\|_\varphi \leq \varepsilon_{S,M}^\varphi(x^i - x^j) < \varepsilon.$$

Par conséquent,  $(\alpha_n f(x_n^i))_i$  est une suite généralisée de Cauchy dans l'espace de Banach  $\ell_\varphi$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $\gamma := (\gamma_n)_n$  sa limite dans  $\ell_\varphi$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous avons

$$\alpha_n f(x_n) = \alpha_n f(\lim_i x_n^i) = \lim_i \alpha_n f(x_n^i) = \gamma_n.$$

Mais pour  $i, j \geq k$ ,  $\alpha \in \mathcal{S}$ , et  $N \in \mathbb{N}$ , nous avons

$$\sup_{\delta(y, \varphi^*) \leq 1} \sum_{n=1}^N |y_n \alpha_n f(x_n^i - x_n^j)| \leq \|(\alpha_n f(x_n^i - x_n^j))_n\|_\varphi \leq \varepsilon_{S,M}^\varphi(x^i - x^j) < \varepsilon.$$

En passant à la limite sur  $j$ , nous obtenons pour tout  $N \geq n_0$

$$\sup_{\delta(y, \varphi^*) \leq 1} \sum_{n=1}^N |y_n \alpha_n f(x_n^i - x_n)| \leq \varepsilon,$$

et donc  $\varepsilon_{S,M}^\varphi(x^i - x) \leq \varepsilon$  pour tout  $i \geq k$ . Cela montre à la fois que  $x$  appartient à  $\Lambda_\varphi[E]$  et que  $(x^i)_{i \in I}$  converge vers  $x$  dans  $\Lambda_\varphi[E]$ .

Avec une preuve similaire, on montre que  $\Lambda_\varphi[E]$  est séquentiellement complet si et seulement si  $E$  est séquentiellement complet.  $\square$

Le Lemme 4.1.4 et Théorème 3.1.6 montrent que si les trois espaces  $E$ ,  $\Lambda_\varphi[E]$  et  $\Lambda_\varphi[E]_r$  sont simultanément complets ou non.

**Proposition 3.1.7.** *Si  $E$  est fast-tonnellé, alors*

$$\Lambda_\varphi[E'_\beta] = \{a = (a_n)_n \subset E' : (\alpha_n a_n(x))_n \in \ell_\varphi, x \in E, \alpha \in \Lambda^*\}.$$

De plus, la topologie de  $\Lambda_\varphi[E'_\beta]$  est donnée par les semi-normes

$$\varepsilon_{S,B}^\varphi(a) = \sup_{\alpha \in S, x \in B} \|(\alpha_n a_n(x))_n\|_\varphi,$$

où  $S$  parcourt  $\mathcal{S}$ , et  $B$  parcourt la collection  $\mathcal{B}$  de tous les disques fermés et bornés dans  $E$ .

*Démonstration.* Si  $\Delta := \{a = (a_n)_n \subset E' : (\alpha_n a_n(x))_n \in \ell_\varphi, x \in E, \alpha \in \Lambda^*\}$ , alors clairement,  $\Lambda_\varphi[E'_\beta] \subset \Delta$ .

Inversement, considérons  $a := (a_n)_n \in \Delta$ ,  $f \in (E'_\beta)'$ ,  $y \in \tilde{B}_{\varphi^*}$ , et  $\beta \in \Lambda^*$ . Choisissons  $x \in E$ . Alors

$$\left| \sum_{n=1}^p y_n \beta_n a_n(x) \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |y_n \beta_n a_n(x)| < +\infty, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent,  $A := \left\{ \sum_{n=1}^p y_n \beta_n a_n, p \in \mathbb{N} \right\}$  est  $\sigma(E', E)$ -borné. Comme  $E$  est fast-tonnellé,  $A$  est borné dans  $E'_\beta$ . Par conséquent, il existe  $K > 0$  tel que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |y_n \beta_n f(a_n)| \leq K.$$

Par conséquent,  $a \in \Lambda_\varphi[E'_\beta]$ .

Maintenant, soit  $M$  un disque fermé et équicontinu dans  $(E'_\beta)'$ . Alors le polaire  $M^\circ$  de  $M$  est un voisinage de 0 dans  $E'_\beta$ . Si  $B$  est le polaire dans  $E$  de  $M^\circ$ , alors  $B$  est un disque fermé et borné dans  $E$  tel que

$$M = M^{\circ\circ} \subset B^{\circ\circ} = \overline{B}^{\sigma(E'', E')}.$$

Alors pour tout  $a \in E'$ , nous avons

$$\sup_{f \in M} |f(a)| \leq \sup_{x \in B^{\circ\circ}} |a(x)| \leq \sup_{x \in B} |a(x)|.$$

En particulier, pour  $a = \sum_{n=1}^p \alpha_n y_n a_n \in E'$  avec  $y \in \tilde{B}_{\varphi^*}$ ,  $\alpha \in S$  et  $a \in \Lambda_{\varphi} [E'_{\beta}]$ , nous avons

$$\sup_{f \in M} \left| \sum_{n=1}^p \alpha_n y_n f(a_n) \right| \leq \sup_{x \in B^{\circ\circ}} \left| \sum_{n=1}^p \alpha_n y_n a_n(x) \right| \leq \sup_{x \in B} \left| \sum_{n=1}^p \alpha_n y_n a_n(x) \right|.$$

En passant au sup sur  $p$  d'abord, sur  $y \in \tilde{B}_{\varphi^*}$  puis sur  $\alpha \in S$ , nous obtenons

$$\varepsilon_{S,M}^{\varphi}(a) \leq \varepsilon_{S,B}^{\varphi}(a),$$

ce qui complète la preuve. □

### 3.2 Dual topologique de $\Lambda_{\varphi}[E]$

Dans la littérature, plusieurs types de duals ont été considérés lorsqu'il s'agit d'espaces de suites : principalement le dual de Köthe ou le  $\alpha$ -dual, le  $\beta$ -dual, le dual de Köthe-Toeplitz, le dual algébrique et chaque fois que l'espace de suites est équipé d'une topologie localement convexe, le dual continu (voir [8, 25, 37]). Pour déterminer l'espace dual continu de  $\Lambda_{\varphi}[E]$ , nous introduisons la notion de suites fortement Köthe-Orlicz-sommables.

**Définition 3.2.1.** *Une suite  $x = (x_n) \subset E$  est dite fortement Köthe-Orlicz-sommable par rapport à  $\varphi$  et  $\Lambda$  (abrégé en fortement  $(\varphi, \Lambda)$ -sommable), si pour chaque  $M \in \mathcal{M}$  et chaque  $a = (a_n)_n \in (\Lambda^*)_{\varphi^*}[E'_M]$ , la suite  $(a_n(x_n))_n$  appartient à  $\ell^1$ .*

*L'ensemble de toutes les suites fortement  $(\varphi, \Lambda)$ -sommables est noté  $\Lambda_{\varphi} \langle E \rangle$ .*

**Proposition 3.2.2.** *Soit  $S \in \mathcal{S}$  et  $M \in \mathcal{M}$ . Alors :*

1. *L'espace  $(\Lambda_S^*)_{\varphi^*}[E'_M]$  est un espace de Banach pour la norme  $\varepsilon_{S^{\circ},M^{\circ}}^{\varphi^*}$  définie par*

$$\varepsilon_{S^{\circ},M^{\circ}}^{\varphi^*}(a) := \sup_{f \in M^{\circ}, \alpha \in S^{\circ}} \|(\alpha_n f(a_n))_n\|_{\varphi^*}, \quad a := (a_n)_n \in (\Lambda_S^*)_{\varphi^*}[E'_M],$$

*$S^{\circ}$  étant le polaire de  $S$  dans  $\Lambda$ . De plus, les projections  $(a_n)_n \mapsto a_n$  sont continues.*

2. *La fonction  $\sigma_{S,M}^{\varphi}$  est une semi-norme sur  $\Lambda_{\varphi} \langle E \rangle$ , où pour tout  $x \in \Lambda_{\varphi} \langle E \rangle$ ,*

$$\sigma_{S,M}^{\varphi}(x) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(x_n)|; a = (a_n)_n \in (\Lambda_S^*)_{\varphi^*}[E'_M], \varepsilon_{S^{\circ},M^{\circ}}^{\varphi^*}(a) \leq 1 \right\}.$$

*Démonstration.* 1. Si  $S' := \{rS', r \geq 0\}$ , où  $S'$  désigne la fermeture  $\sigma((\Lambda_S^*)^*, \Lambda_S^*)$  de  $S^{\circ}$  dans  $(\Lambda_S^*)^*$ , alors la topologie de norme de  $\Lambda_S^*$  n'est autre que la  $S'$ -topologie. Par conséquent, selon Théorème 3.1.6,  $(\Lambda_S^*)_{\varphi^*}[E'_M]$  est un espace de Banach. De plus, d'après Lemme 2.1.11, les projections sont continues.

2. Il suffit de montrer que  $\sigma_{S,M}^\varphi(x)$  est finie pour tout  $x \in \Lambda_\varphi \langle E \rangle$ . Fixons alors un tel  $x$  et définissons une application linéaire  $T_x$  de  $(\Lambda_S^*)_{\varphi^*} [E'_M]$  dans  $\ell^1$  par  $T_x((a_n)_n) = (a_n(x_n))_n$ . Supposons que  $(a^i)_i \in (\Lambda_S^*)_{\varphi^*} [E'_M]$  converge vers  $a := (a_n)_n$  et que  $(T_x(a^i))_i$  converge dans  $\ell^1$  vers  $(\gamma_n)_n$ . Par continuité des projections,  $(a_n^i)_i$  converge dans  $E'_M$  vers  $a_n$  pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $(a_n^i(x_n))_i$  converge également vers  $a_n(x_n)$ . Il s'ensuit que  $(a_n(x_n))_n = (\gamma_n)_n$ , d'où la fermeture du graphe de  $T_x$ . Par conséquent,  $T_x$  est continue et est alors bornée sur la boule unité de  $(\Lambda_S^*)_{\varphi^*} [E'_M]$ . Cela donne  $\sigma_{S,M}^\varphi(x) < +\infty$ . □

Le lemme suivant peut être démontré à l'aide d'un argument standard. Sa démonstration est donc omise.

**Lemme 3.2.3.** *Si  $\gamma := (\gamma_n)_n \in c_0$ , alors  $\gamma x = (\gamma_n x_n)_n \in \Lambda_\varphi [E]_r$  pour tout  $x = (x_n)_n \in \Lambda_\varphi [E]$ .*

Pour une forme linéaire continue  $F$  sur  $\Lambda_\varphi [E]$  (ou sur  $\Lambda_\varphi [E]_r$ ), soit  $F_n(t) := F(te_n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in E$ . Le lemme suivant montre que, d'une certaine manière, l'espace dual topologique de  $\Lambda_\varphi [E]_r$  est contenu dans  $(\Lambda_\varphi [E])^*$ .

**Lemme 3.2.4.** *Soit  $F$  un forme linéaire continue sur  $\Lambda_\varphi [E]$ . Alors*

1. *il existe  $M \in \mathcal{M}$  tel que  $(F_n)_n \in E'_M$ .*
2. *la suite  $(F_n)_n$  appartient à  $(\Lambda_\varphi [E])^*$ .*

*De plus, si la famille  $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$  est  $\tau_S$ -bornée, alors  $(F_n)_n$  est équicontinue.*

*Démonstration.* Par continuité de  $F$ , pour tout  $x \in \Lambda_\varphi [E]_r$ , nous avons

$$F(x) = F\left(\sum_{n \geq 1} x_n e_n\right) = \sum_{n \geq 1} F(x_n e_n) = \sum_{n \geq 1} F_n(x_n).$$

De plus, il existe  $S \in \mathcal{S}$  et  $M \in \mathcal{M}$  tels que  $|F(x)| \leq \varepsilon_{S,M}^\varphi(x)$  pour tout  $x \in \Lambda_\varphi \{E\}$ . Fixons  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in E$ . Nous avons

$$|F_n(t)| = |F(te_n)| \leq \varepsilon_{S,M}^\varphi(te_n) = \|e_n\|_\varphi P_S(e_n) P_M(t). \quad (3.1)$$

Il en découle que  $F_n$  appartient à  $E'_M$  et donc la Condition 1 est prouvée.

Pour la Condition 2, soit  $x \in \Lambda_\varphi [E]$  arbitraire. Pour tout  $\gamma \in c_0$ ,  $\gamma x \in \Lambda_\varphi [E]_r$ . Choisissons une séquence scalaire  $\lambda = (\lambda_n)_n$  telle que  $|\lambda_n| = 1$  et  $|\gamma_n F_n(x_n)| = \lambda_n \gamma_n F_n(x_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Puisque  $\gamma \lambda x \in \Lambda_\varphi [E]_r$ , nous avons

$$\sum_{n \geq 1} |\gamma_n F_n(x_n)| = \sum_{n \geq 1} \gamma_n \lambda_n F_n(x_n) = \sum_{n \geq 1} F_n(\gamma_n \lambda_n x_n) = F(\lambda \gamma x) < +\infty.$$

Puisque  $\gamma$  dans  $c_0$  était arbitraire, cela montre que  $\sum_{n \geq 1} |F_n(x_n)| < +\infty$ . Ainsi,  $(F_n)_n \in (\Lambda_\varphi[E])^*$ .

Maintenant, si de plus, la famille  $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$  est  $\tau_S$ -bornée, choisissons  $s > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_S(e_n) \leq s$ ,  $\|e_n\|_\varphi \leq s$ . Nous obtenons alors

$$|F_n(t)| \leq \|e_n\|_\varphi P_M(t) P_S(e_n) \leq s^2 P_M(t).$$

Par conséquent,  $(F_n)_n$  est équicontinu.  $\square$

Maintenant, nous donnons une meilleure description des formes continues sur  $\Lambda_\varphi[E]$ .

**Théorème 3.2.5.** *Si  $F$  est une forme linéaire continue sur  $\Lambda_\varphi[E]$ , alors il existe  $M \in \mathcal{M}$  et  $S \in \mathcal{S}$  tels que la séquence  $(F_n)_n$  soit fortement  $(\varphi^*, \Lambda_S^*)$ -sommable dans  $E'_M$ , c'est-à-dire que  $(F_n)_n \in (\Lambda_S^*)_{\varphi^*} \langle E'_M \rangle$ .*

*Démonstration.* Soit  $S \in \mathcal{S}$  et  $M \in \mathcal{M}$  tels que

$$|F(x)| \leq \varepsilon_{S,M}^\varphi(x), \quad x = (x_n)_n \in \Lambda_\varphi[E].$$

Par Lemme 4.2.2,  $(F_n)_n \subset E'_M$ .

Maintenant, fixons  $(f_n)_n \in (\Lambda_S^*)_{\varphi^*} [(E'_M)']$ . Nous affirmons que  $(f_n(F_n))_n$  appartient à  $\ell^1$ . En effet, prenons un  $k \in \mathbb{N}$  arbitraire et  $\delta > 0$ , et désignons par  $X$  la complétion de l'espace normé  $(E/M^\perp, \overline{P_M})$  et par  $B_k$  le sous-espace vectoriel engendré par  $\{F_1, F_2, \dots, F_k\}$ . Ici,  $M^\perp$  est l'annulateur de  $M$  dans  $E'$ , et comme d'habitude,  $\overline{P_M}(x + M^\perp) := P_M(x)$ .

Puisque  $E'_M$  est isométriquement isomorphe à  $(E/M^\perp)' = X'$ , nous avons  $B_k \subset X'$ . Mais  $(f_n)_n \in (\Lambda_S^*)_{\varphi^*} [(E'_M)']$ , donc  $(f_n)_n \subset (E'_M)' = X''$ .

Soit  $A_k$  le sous-espace vectoriel engendré par  $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ . Par le principe de réflexivité locale, il existe un opérateur continu  $T_k : A_k \rightarrow X$  tel que :

1.  $\|T_k\| \leq 1 + \delta$  avec  $\|T_k\| = \sup_{f \in M^\circ} \|T_k(f)\|_X$  ;
2.  $F_n(T_k f_n) = f_n(F_n)$ ,  $n \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

Puisque  $E/M^\perp$  est dense dans  $X$ , pour tout  $0 < \delta_n \leq \frac{\delta}{k(1 + \|e_n\|_\varphi P_S(e_n))}$ , il existe  $x_n \in E$  tel que :

$$\overline{P_M}(x_n + M^\perp - T_k f_n) \leq \delta_n.$$

Ensuite, (3.1) implique que  $\|F_n\|_M \leq \|e_n\|_\varphi P_S(e_n)$ . Par conséquent, comme  $F_n$  est continue, nous avons :

$$\begin{aligned} |F_n(x_n + M^\perp - T_k f_n)| &\leq \|F_n\|_M P_M(x_n - T_k f_n) \\ &\leq \|e_n\|_\varphi P_S(e_n) \frac{\delta}{k(1 + \|e_n\|_\varphi P_S(e_n))} \\ &\leq \frac{\delta}{k}. \end{aligned}$$

Choisissons  $\lambda_n$  dans le cercle complexe unitaire tel que  $|F(x_n e_n)| = \lambda_n F(x_n e_n)$ . Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k |f_n(F_n)| &= \sum_{n=1}^k |F_n(T_k f_n)| \\ &\leq \sum_{n=1}^k |F_n(x_n + M^\perp - T_k f_n)| + \left| F\left(\sum_{n=1}^k \lambda_n x_n e_n\right) \right| \\ &\leq \delta + \varepsilon_{S,M}^\varphi((x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots)) \\ &= \delta + \sup \left\{ \left| \sum_{n=1}^k y_n \alpha_n a(x_n) \right| : (\alpha_n)_n \in S, a \in M, y \in \tilde{B}_{\varphi^*} \right\}. \end{aligned}$$

Mais pour tout  $(\alpha_n)_n \in S$ ,  $y \in \tilde{B}_{\varphi^*}$ , et  $a \in M$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^k y_n \alpha_n a(x_n) \right| &\leq \left| \sum_{n=1}^k y_n \alpha_n a(x_n + M^\perp - T_k f_n) \right| + \left| \sum_{n=1}^k y_n \alpha_n a(T_k f_n) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^k |y_n \alpha_n| |a(x_n + M^\perp - T_k f_n)| + \left| a\left(T_k\left(\sum_{n=1}^k y_n \alpha_n f_n\right)\right) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^k |y_n \alpha_n| \|a\|_M \delta_n + \|a\|_M \|T_k\| \sup_{x' \in M} \left\{ \left| \sum_{n=1}^k y_n \alpha_n f_n(x') \right| \right\} \\ &\leq \delta + (1 + \delta) \varepsilon_{S,M}^\varphi((f_n)_n). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=1}^k |f_n(F_n)| \leq 2\delta + (1 + \delta) \varepsilon_{S,M}^\varphi((f_n)_n), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ainsi,  $(f_n(F_n))_n$  appartient à  $\ell^1$ . □

**Remarque 3.2.6.** *Puisque dans la démonstration du Théorème 4.3.1,  $\delta$  est arbitraire, il en résulte que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(F_n)| \leq \varepsilon_{S,M}^\varphi((f_n)_n).$$

En utilisant le théorème de Hahn-Banach, nous obtenons :

**Corollaire 3.2.7.** *Si  $F$  est une forme linéaire continue sur  $\Lambda_\varphi[E]_r$ , alors il existe  $M \in \mathcal{M}$  et  $S \in \mathcal{S}$  tels que  $(F_n)_n \in (\Lambda_S^*)_{\varphi^*} \langle E'_M \rangle$ .*

La proposition suivante est intéressante en elle-même.

**Proposition 3.2.8.** *Soient  $S \in \mathcal{S}$  et  $M \in \mathcal{M}$ . Si  $(a_n)_n \in (\Lambda_S^*)_{\varphi^*} \langle E'_M \rangle$ , alors  $(\|y_n a_n\|_M)_n \in \Lambda_S^*$  pour tout  $y \in \tilde{B}_{\varphi^*}$ .*

*Démonstration.* Fixons  $(a_n)_n \in (\Lambda_S^*)_{\varphi^*} \langle E'_M \rangle$  et  $y \in \tilde{B}_{\varphi^*}$ , et soit  $(\alpha_n)_n \in \Lambda$  et  $\varepsilon > 0$  donnés. Nous avons

$$\|y_n \alpha_n a_n\|_M = \sup_{t \in M^\circ} |y_n \alpha_n a_n(t)|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $t_n \in M^\circ \subset E$  tel que

$$\|y_n \alpha_n a_n\|_M \leq \frac{\varepsilon}{2^n} + |y_n \alpha_n a_n(t_n)|.$$

Fixons  $n \in \mathbb{N}$  et  $a \in E'_M$  et définissons  $f_n(a) := \alpha_n a(t_n)$ . Alors

$$|f_n(a)| = |\alpha_n a(t_n)| \leq \|a\|_M P_M(t_n) |\alpha_n| \leq \|a\|_M |\alpha_n|.$$

Puisque  $a \in E'_M$ , il existe  $\mu > 0$  tel que  $a \in \mu M$ . Par conséquent,  $|y_n f_n(a)| \leq \mu \|y\|_\infty |\alpha_n|$ , et comme  $\Lambda$  est normal,  $(y_n f_n(a))_n \in \Lambda$ . Par conséquent,  $(y_n f_n(a))_n \in (\Lambda_S^*)^*$  car  $\Lambda \subset (\Lambda_S^*)^*$ . En utilisant la proposition 3.1.7, nous obtenons

$$(f_n)_n \in (\Lambda_S^*)_{\varphi}^* [(E'_M)'].$$

De plus, comme  $(a_n)_n \in (\Lambda_S^*)_{\varphi^*} \langle E'_M \rangle$ , la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(a_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n a_n(t_n)$$

est absolument convergente. Puisque

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|y_n \alpha_n a_n\|_M \leq \varepsilon + \sum_{n=1}^{+\infty} |y_n \alpha_n a_n(t_n)| \leq \varepsilon + \|y\|_\infty \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(a_n)|,$$

la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n| \|y_n a_n\|_M$$

est convergente. Ainsi,  $(\|y_n a_n\|_M)_n \in \Lambda^*$  car  $\alpha$  était arbitraire dans  $\Lambda$ .

Maintenant, si  $(\alpha_n)_n \in S^\circ \subset \Lambda$ , d'après Remarque 3.2.6, nous avons :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |y_n \alpha_n a_n(t_n)| \leq \|y\|_\infty \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(a_n)| \leq \|y\|_\infty \varepsilon_{S,M}^{\varphi}((f_n)_n).$$

Mais

$$\begin{aligned} \varepsilon_{S,M}^{\varphi}((f_n)_n) &= \sup \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} |z_n \beta_n f_n(a)| : (\beta_n)_n \in S, a \in M, z \in \tilde{B}_{\varphi^*} \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \|a\|_M t_{\varphi^*} \sum_{n=1}^{+\infty} |\beta_n \alpha_n| : (\beta_n)_n \in S, a \in M \right\} \\ &\leq t_{\varphi^*}, \end{aligned}$$

où  $t_{\varphi^*} := \sup \{t \in [0; +\infty), \varphi^*(t) \leq 1\}$ . Par conséquent,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |y_n \alpha_n a_n(t_n)| \leq \|y\|_{\infty} t_{\varphi^*},$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|y_n \alpha_n a_n\|_M \leq \|y\|_{\infty} t_{\varphi^*} + \varepsilon.$$

Cela signifie que

$$(\|y_n a_n\|_M)_n \in (\|y\|_{\infty} t_{\varphi^*} + \varepsilon) S^{\circ\circ} = (\|y\|_{\infty} t_{\varphi^*} + \varepsilon) S;$$

ainsi  $(\|y_n a_n\|_M)_n \in \Lambda_S^*$ . □

**Proposition 3.2.9.** *Pour tout  $S \in \mathcal{S}$ ,  $M \in \mathcal{M}$  et  $a = (a_n)_n \in (\Lambda_S^*)_{\varphi^*} \langle E'_M \rangle$ , l'application*

$$f_a : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x_n)$$

définit une forme linéaire continue sur  $\Lambda_{\varphi}[E]$ .

*Démonstration.* Fixons arbitrairement  $S \in \mathcal{S}$ ,  $M \in \mathcal{M}$ , et  $a = (a_n)_n \in (\Lambda_S^*)_{\varphi^*} \langle E'_M \rangle$ , et pour tout  $t \in E$ , désignons par  $\hat{t}$  l'application linéaire continue sur  $E'_M$  définie par  $\hat{t}(f) := f(t)$ . Ensuite, pour  $x = (x_n)_n \in \Lambda_{\varphi}[E]$ ,  $u \in E'_M \subset E'$ , et  $y \in \tilde{B}_{\varphi}$ , nous avons

$$(y_n \hat{x}_n(u))_n = (y_n u(x_n))_n \in \Lambda \subset (\Lambda_S^*)^*.$$

Ainsi, en utilisant la Proposition 3.1.7, nous obtenons

$$(\hat{x}_n)_n \in (\Lambda_S^*)^*_{\varphi} [(E'_M)'_{\beta}].$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{x}_n(a_n)$$

est convergente, et donc,  $f_a$  est bien définie.

De plus, remarquons également que l'application  $\psi_a : (\Lambda_S^*)^*_{\varphi} [(E'_M)'] \longrightarrow \ell^1$ , définie par

$$(f_n)_n \longmapsto \psi_a((f_n)_n) = (f_n(a_n))_n,$$

est bien définie. En effet, soit  $(f_n)_n \in (\Lambda_S^*)^*_{\varphi} [(E'_M)']$  donné. Puisque  $a = (a_n)_n \in (\Lambda_S^*)_{\varphi^*} \langle E'_M \rangle$ , la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(a_n)$$

est absolument convergente; donc,  $(f_n(a_n))_n \in \ell^1$ . Puisque  $(\Lambda_S^*)^*$  est parfait et  $(E'_M)'$  est

un espace de Banach,  $((\Lambda_S^*)'_\varphi [(E'_M)'], \varepsilon_{S,M}^\varphi)$  est également un espace de Banach. De plus, supposons que  $((f_n)_n^i)_i$  est une suite qui tend vers 0 à l'infini dans  $(\Lambda_S^*)'_\varphi [(E'_M)']$  telle que  $(\psi_a((f_n)_n^i))_i$  converge dans  $\ell^1$  vers  $(\alpha_n)_n$ . Comme les projections  $(f_n)_n \mapsto f_n$  sont continues,  $(f_n)_n$  converge dans  $(E'_M)'$  vers 0 pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Par conséquent, la suite  $(\psi_a((f_n)_n^i))_i = ((f_n^i(a_n))_n)_i$  converge vers 0, d'où  $\alpha_n = 0$  pour tout  $n$ . Par le théorème du graphe fermé,  $\varphi_a$  est continue. Par conséquent, il existe  $K > 0$  tel que pour tout  $(f_n)_n \in (\Lambda_S^*)'_\varphi [(E'_M)']$ , nous avons l'inégalité

$$\|\psi_a((f_n)_n)\|_1 \leq K \varepsilon_{S,M}^\varphi((f_n)_n),$$

ce qui signifie que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(a_n)| \leq K \varepsilon_{S,M}^\varphi((f_n)_n).$$

Mais  $(\hat{x}_n)_n \in (\Lambda_S^*)'_\varphi [(E'_M)']$ ; donc,

$$|f_a(x)| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{x}_n(a_n) \right| \leq K \varepsilon_{S,M}^\varphi((\hat{x}_n)_n) \leq K \varepsilon_{S,M}^\varphi(x).$$

Par conséquent,  $f_a$  est continue. □

**Théorème 3.2.10.** *L'égalité suivante est valide :*

$$(\Lambda_\varphi[E]_r)' = \bigcup_{S \in \mathcal{S}, M \in \mathcal{M}} (\Lambda_S^*)_{\varphi^*} \langle E'_M \rangle.$$

*Démonstration.* Par la Proposition 4.2.7, pour chaque  $S \in \mathcal{S}$ ,  $M \in \mathcal{M}$ , et  $(a_n)_n \in (\Lambda_S^*)_{\varphi^*} \langle E'_M \rangle$ , nous avons  $f_a \in (\Lambda_\varphi[E]_r)'$ . Par conséquent, la fonction

$$\phi : \bigcup_{S \in \mathcal{S}, M \in \mathcal{M}} (\Lambda_S^*)_{\varphi^*} \langle E'_M \rangle \longrightarrow (\Lambda_\varphi[E]_r)'$$

définie par

$$a \longmapsto f_a,$$

est bien définie. Clairement,  $\phi$  est injective.

De plus, remarquons également que si  $F \in (\Lambda_\varphi[E]_r)'$ , alors Corollaire 3.2.7 implique qu'il existe  $S \in \mathcal{S}$ ,  $M \in \mathcal{M}$  tels que la suite  $a := (F_n)_n$  appartient à  $(\Lambda_S^*)_{\varphi^*} \langle E'_M \rangle$ . Ensuite, pour chaque  $x \in \Lambda_\varphi[E]_r$ , puisque  $f$  est continue, nous avons

$$\begin{aligned} F(x) &= \lim_k F(x^{(k)}) = \lim_k \sum_{n=1}^k F(x_n e_n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(x_n) = f_a(x). \end{aligned}$$

Cela signifie que  $\phi$  est également surjective. Par conséquent,  $\phi$  est un isomorphisme.  $\square$

Dans ce qui suit, nous décrivons une base fondamentale d'ensembles équicontinus de  $(\Lambda_\varphi[E]_r)'$ . Pour ce faire, considérons pour  $S \in \mathcal{S}$  et  $M \in \mathcal{M}$ ,

$$K_{S,M}^\varphi := \left\{ (f_n)_n \in \Lambda_\varphi[(E'_M)'] : (y_n f_n(a))_n \in S^\circ, \quad a \in M, \quad y \in \tilde{B}_{\varphi^*} \right\}.$$

**Théorème 3.2.11.** *La famille des ensembles de la forme*

$$S_\varphi \langle M \rangle = \left\{ (a_n)_n \in (\Lambda_S^*)_{\varphi^*} \langle E'_M \rangle : \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(a_n)| \leq 1, \quad (f_n)_n \in K_{S,M}^\varphi \right\}$$

est un système fondamentale des parties équicontinues de  $(\Lambda_\varphi[E]_r)'$ ,  $S$  parcourant  $\mathcal{S}$  et  $M$  parcourant  $\mathcal{M}$ .

*Démonstration.* Montrons d'abord que  $S_\varphi \langle M \rangle$  est équicontinu. Si  $x = (x_n)_n \in \Lambda_\varphi[E]$  est tel que  $\varepsilon_{S,M}^\varphi(x) \leq 1$ , alors, comme dans la démonstration de Proposition 4.2.7, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |y_n \alpha_n \hat{x}_n(u)| = \sum_{n=1}^{+\infty} |y_n \alpha_n u(x_n)| \leq \varepsilon_{S,M}^\varphi(x) \leq 1,$$

pour tout  $y \in \tilde{B}_{\varphi^*}$ ,  $u \in M$  et  $\alpha \in S$ . Par conséquent,

$$(y_n \hat{x}_n(u))_n \in S^\circ.$$

Ainsi,  $(\hat{x}_n)_n \in K_{S,M}^\varphi$ . De plus, si  $a = (a_n)_n \in S_\varphi \langle M \rangle$ , alors

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{x}_n(a_n) \right| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x_n) \right| \leq 1.$$

Par conséquent,  $S_\varphi \langle M \rangle$  est équicontinu.

Maintenant, si  $\mathbb{H} \subset (\Lambda_\varphi[E]_r)'$  est équicontinu, alors il existe  $S \in \mathcal{S}$  et  $M \in \mathcal{M}$  tels que :

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x_n) \right| \leq \varepsilon_{S,M}^\varphi(x)$$

pour tout  $x = (x_n)_n \in \Lambda_\varphi[E]_r$  et  $a = (a_n)_n \in \mathbb{H}$ . Soit  $f = (f_n)_n \in K_{S,M}^\varphi$ . Alors  $\varepsilon_{S,M}^\varphi(f) \leq 1$ , et par Remarque 3.2.6, nous avons :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(a_n)| \leq \varepsilon_{S,M}^\varphi(f) \leq 1.$$

Par conséquent,  $\mathbb{H} \subset S_\varphi \langle M \rangle$ .  $\square$

Considérons les ensembles suivants :

$$\begin{aligned}\mathcal{B}' &:= \{B' \subset E' : B' \text{ est un disque fermé borné faiblement}^*\}, \\ \mathcal{R} &:= \{R \subset \Lambda : R \text{ est un disque fermé borné et normal}\}, \\ \mathcal{R}' &:= \{R' \subset \Lambda^* : R' \text{ est un disque fermé borné faiblement}^* \text{ et normal}\},\end{aligned}$$

et pour chaque  $R' \in \mathcal{R}'$  et  $B' \in \mathcal{B}'$ , les ensembles suivants :

$$\begin{aligned}K_{R',B'} &:= \left\{ (f_n)_n \in \Lambda_\varphi[(E'_{B'})'] : (y_n f_n(a))_n \in (R')^\circ, \quad a \in B', \quad y \in \tilde{B}_{\varphi^*} \right\}, \\ R'_\varphi \langle B' \rangle &:= \left\{ (a_n)_n \in (\Lambda_\varphi[E]_r)' : \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(a_n)| \leq 1, \quad (f_n)_n \in K_{R',B'} \right\}.\end{aligned}$$

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour que l'espace  $\Lambda_\varphi[E]_r$  soit tonnellé ou quasi-tonnellé.

**Théorème 3.2.12.** *Supposons que  $\Lambda$  est tonnellé (quasi-tonnellé). Alors  $\Lambda_\varphi[E]_r$  est tonnellé (resp. quasi-tonnellé) si et seulement si l :*

1.  $E$  est tonnellé (resp. quasi-tonnellé).
2. Pour chaque disque borné faiblement\* (resp. fortement borné)  $\mathbb{B}$  de  $(\Lambda_\varphi[E]_r)'$ , il existe  $B' \in \mathcal{B}'$  et  $R' \in \mathcal{R}'$  tels que  $\mathbb{B} \subset R'_\varphi \langle B' \rangle$ .

*Démonstration.* Soit  $T$  un tonneau (resp. tonneau bornivore) dans  $\Lambda_\varphi[E]_r$ . Alors  $T^\circ$  est un disque faiblement borné (resp. fortement borné) de  $(\Lambda_\varphi[E]_r)'$ . Par (ii), il existe  $R' \in \mathcal{R}'$  et  $B' \in \mathcal{B}'$  tels que  $T^\circ \subset R'_\varphi \langle B' \rangle$ . Puisque  $E$  est tonnellé (resp. quasi-tonnellé),  $B'$  est équicontinu. Par conséquent, il est contenu dans un certain  $M \in \mathcal{M}$ .

De même, puisque  $\Lambda$  est tonnellé (resp. quasi-tonnellé), il existe  $S \in \mathcal{S}$  tel que  $R' \subset S$ . Ainsi,  $T^\circ \subset R'_\varphi \langle B' \rangle \subset S_\varphi \langle M \rangle$ . Par conséquent,  $T^\circ$  est équicontinu et par conséquent  $T$  est un voisinage de 0 dans  $\Lambda_\varphi[E]_r$ .

Maintenant, supposons que  $\Lambda_\varphi[E]_r$  est tonnellé. Par Lemme 4.1.4,  $E$  est complété dans  $\Lambda_\varphi[E]_r$ . Par conséquent,  $E$  est un espace tonnellé (resp. quasi-tonnellé), donc (i) est satisfaite. De plus, soit  $\mathbb{B}$  un disque faiblement borné (resp. fortement borné) de  $(\Lambda_\varphi[E]_r)'$ . Alors  $\mathbb{B}$  est un sous-ensemble équicontinu de  $(\Lambda_\varphi[E]_r)'$ . Par Théorème 3.2.11, il existe  $S \in \mathcal{S}$  et  $M \in \mathcal{M}$  tels que  $\mathbb{B} \subset S_\varphi \langle M \rangle$ . Ainsi, (ii) est également satisfaite.  $\square$

**Exemple 3.2.13.**

1. Si  $\varphi$  est l'identité de  $\mathbb{R}_+$ , le dual continu de  $\Lambda_\varphi[E]_r$  est tel que donné dans [25].
2. Dans le cas où  $\Lambda = \ell^1$  et  $E = \mathbb{K}$ , le dual continu de  $\Lambda_\varphi[E]_r$  est  $\ell_{\varphi^*}$ .
3. Lorsque  $\varphi = \varphi_\infty$ , le dual continu de  $(c_0)_\varphi[E]_r := c_b(E)_r$  est  $\bigcup_{M \in \mathcal{M}} \ell^1 \langle E'_M \rangle$ .

Afin de donner d'autres exemples comme applications de nos résultats, nous déterminons le dual topologique de certains espaces de suites concrets et y caractérisons le

tonnelage. Pour cela, soit  $p \geq 1$  un nombre réel et  $q$  son conjugué c'est-à-dire,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  si  $p \neq 1$  et  $q = +\infty$  si  $p = 1$ , et soit  $(E, \|\cdot\|_E)$  un espace normé. Alors la topologie de  $\ell_{\varphi^*}^q \langle E' \rangle$  est définie par la norme  $\sigma_{R', B'}^{\varphi^*}$ ; elle est également notée par  $\sigma_{q, E'}^{\varphi^*}$ . Ici,  $R'$  et  $B'$  sont les boules unitaires fermées de  $\ell^q$  et  $E'$ , respectivement.

Nous avons la proposition suivante :

**Proposition 3.2.14.** *Le dual topologique de  $\ell_{\varphi}^p[E]_r$  est  $\ell_{\varphi^*}^q \langle E' \rangle$ . De plus,  $\ell_{\varphi}^p[E]_r$  est tonnelé si et seulement si  $E$  est tonnelé.*

*Démonstration.* La première assertion résulte immédiatement de Théorème 4.3.4.

Pour la deuxième, remarquer que puisque  $\ell^p$  est un espace de Banach, il est tonnelé. Comme  $\ell_{\varphi^*}^q \langle E' \rangle$  est un espace de Banach, il suffit de montrer que si  $E$  est tonnelé, alors la boule unité  $\mathbb{B}$  de  $\ell_{\varphi^*}^q \langle E' \rangle$  est contenue dans  $R'_{\varphi} \langle B' \rangle$ , où  $R'$  et  $B'$  sont les boules unitaires de  $\ell^q$  et  $E'$ , respectivement. Choisissons donc  $(a_n)_n \in \mathbb{B}$  et  $(f_n)_n \in K_{R', B'}$ . Alors  $(y_n f_n(b)) \in (R')^{\circ}$  pour tout  $b \in B'$  et tout  $y \in \tilde{B}_{\varphi^*}$ , ce qui implique que

$$\sup_{\alpha \in R', b \in B'} \sup_{\delta(y, \varphi^*) \leq 1} \sum_{n \geq 1} |y_n \alpha_n f_n(b)| \leq 1.$$

Cela montre que

$$\varepsilon_{p, E''}^{\varphi}(f) := \varepsilon_{R', B'}^{\varphi}(f) \leq 1.$$

Ainsi,

$$\sum_{n \geq 1} |f_n(a_n)| \leq \sigma_{q, E'}^{\varphi^*}((a_n)_n) \leq 1$$

, et par conséquent,  $(a_n)_n \in R'_{\varphi} \langle B' \rangle$ . □

Dans le cas particulier où  $\varphi$  est l'identité  $x \mapsto x$ , l'espace  $\ell_{\varphi}^p[E]_r$  n'est autre que l'espace  $\ell^p[E]$  introduit par H. Apiola [3]. Nous obtenons alors une caractérisation du tonnelage de tels espaces.

**Corollaire 3.2.15.**  *$\ell^p[E]_r$  est tonnelé si et seulement si  $E$  est tonnelé.*

# Espaces de suites absolument Köthe-Orlicz sommables

Dans ce chapitre,  $\mathcal{M}$  désignera la famille de tous les disques équicontinus  $\sigma(E', E)$ -fermés dans  $E'$  et  $\mathcal{S}$  une famille de disques normaux  $\sigma(\Lambda^*, \Lambda)$ -fermés bornés de  $\Lambda^*$  et  $\varphi$  sera une fonction d'Orlicz. Nous introduisons l'espace  $\Lambda_\varphi\{E\}$  de toutes les suites absolument  $(\varphi, \Lambda)$ -sommables dans  $E$ . Nous l'étudions en tant qu'espace localement convexe séparé. Ensuite, nous caractérisons ses formes linéaires continues, donc son dual topologique.

## 4.1 Espace de suites absolument Köthe-Orlicz $\Lambda$ -sommables

Dans cette section, nous introduisons la notion de suites absolument Köthe-Orlicz sommables dans un espaces localement convexes, et en examinons quelques premières propriétés.

**Définition 4.1.1.** *Une suite  $x = (x_n) \subset E$  est dite absolument Köthe-Orlicz  $\Lambda$ -sommable (ou encore absolument  $(\varphi, \Lambda)$ -sommable), si pour tout  $M \in \mathcal{M}$  et tout  $S \in \mathcal{S}$ , on a*

$$\pi_{S,M}^\varphi(x) := \sup_{\alpha \in S} \|(P_M(\alpha_n x_n))_n\|_\varphi < +\infty.$$

L'ensemble de toutes ces suites est noté par  $\Lambda_\varphi\{E\}$ .

**Exemple 4.1.2.** 1. Si  $\varphi = \text{Id}_{\mathbb{R}_+}$ , alors  $\Lambda_\varphi\{E\}$  n'est autre que l'espace  $\Lambda\{E\}$  des suites absolument  $\Lambda$ -sommables dans  $E$  donné par Rosier dans [32].

2. Si  $\varphi = \varphi_\infty$  et  $\Lambda \in \{\ell_p, \ell_\infty, c_0, c\}$ , alors  $\Lambda_\varphi\{E\}$  est simplement  $\ell_\infty(E)$  de toutes les suites bornées dans  $E$ .

3. Si  $E = \mathbb{K}$  et  $\Lambda = \ell^1$ , alors  $\Lambda_\varphi\{E\}$  coïncide avec l'espace de suites d'Orlicz classique  $\ell_\varphi$ .

Il est facile de voir que  $\Lambda_\varphi\{E\}$  est un espace vectoriel sur lequel  $\pi_{S,M}^\varphi$  est une semi-norme. Nous l'équipons de la topologie localement convexe  $\pi_{S,M}$  définie par la famille  $(\pi_{S,M}^\varphi)_{\substack{M \in \mathcal{M} \\ S \in \mathcal{S}}}$  de semi-normes.

Quelques premières propriétés de  $\Lambda_\varphi\{E\}$  sont données dans le lemme suivant.

**Lemme 4.1.3.** 1- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la projection  $\mathcal{J}_n : \Lambda_\varphi\{E\} \longrightarrow E$  est continue.  
 $(x_k)_k \longmapsto x_n$

2-  $\Lambda_\varphi\{E\}_r$  est fermé dans  $\Lambda_\varphi\{E\}$ .

*Démonstration.* 1- Fixons  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M \in \mathcal{M}$  et choisissons  $S \in \mathcal{S}$  tel que  $e_n \in S$ . Pour tout  $x = (x_n)_n \in \Lambda_\varphi\{E\}$ , nous avons

$$\begin{aligned} P_M(\mathcal{J}_n(x)) &= P_M(x_n) = \frac{1}{\|e_n\|_\varphi} \|P_M(x_n)e_n\|_\varphi \\ &\leq \frac{1}{\|e_n\|_\varphi} \pi_{S,M}^\varphi(x). \end{aligned}$$

Cela montre la continuité de  $I_n$ .

2- Choisissons  $x$  arbitrairement dans la fermeture  $\overline{\Lambda_\varphi\{E\}_r}$  de  $\Lambda_\varphi\{E\}_r$ . Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $M \in \mathcal{M}$  et  $S \in \mathcal{S}$ , il existe  $y \in \Lambda_\varphi\{E\}_r$  tel que  $\pi_{S,M}^\varphi(x - y) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ . Puisque  $y \in \Lambda_\varphi\{E\}_r$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $i \geq n_0$ ,  $\pi_{S,M}^\varphi(y^{(i)} - y) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ . Ainsi pour tout  $i \geq n_0$  :

$$\begin{aligned} \pi_{S,M}^\varphi(x^{(i)} - x) &\leq \pi_{S,M}^\varphi(x^{(i)} - y^{(i)}) + \pi_{S,M}^\varphi(y^{(i)} - y) + \pi_{S,M}^\varphi(x - y) \\ &\leq \pi_{S,M}^\varphi((x - y)^{(i)}) + \pi_{S,M}^\varphi(y^{(i)} - y) + \pi_{S,M}^\varphi(x - y) \\ &\leq 2\pi_{S,M}^\varphi(x - y) + \pi_{S,M}^\varphi(y^{(i)} - y) \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi  $\Lambda_\varphi\{E\}_r$  est fermé. □

L'espace  $E$  est (identifié comme) un sous-espace complété de  $\Lambda_\varphi\{E\}$  comme le montre le lemme ci-dessous.

**Lemme 4.1.4.**  $E$  est complété à la fois dans les espaces  $\Lambda_\varphi\{E\}$  et  $\Lambda_\varphi\{E\}_r$ .

*Démonstration.* Définissons  $\{E\} := \{te_1 : t \in E\}$  et considérons l'application  $p : \Lambda_\varphi\{E\} \rightarrow \{E\}$  définie pour tout  $(x_n)_n \in \Lambda_\varphi\{E\}$  par  $p((x_n)_n) = x_1e_1$ . Pour tout  $(x_n)_n \in \Lambda_\varphi\{E\}$ , on a

$$p^2((x_n)_n) = p(x_1e_1) = x_1e_1 = p((x_n)_n).$$

Puisque

$$\pi_{S,M}^\varphi(p((x_n)_n)) \leq \pi_{S,M}^\varphi((x_n)_n), \quad (x_n)_n \in \Lambda_\varphi\{E\}, \quad (S, M) \in \mathcal{S} \times \mathcal{M},$$

l'application  $p$  est une projection linéaire continue. Par conséquent,  $\{E\}$  est complété dans  $\Lambda_\varphi\{E\}$ . Maintenant, définissons une application linéaire  $\phi$  de  $E$  dans  $\{E\}$  en posant

$\phi(t) = te_1$ ,  $t \in E$ . Alors  $\phi$  est un isomorphisme linéaire bi-continu, car pour tout  $t \in E$  et tout  $(S, M) \in \mathcal{S} \times \mathcal{M}$ ,

$$\pi_{S,M}^\varphi(te_1) = \|e_1\|_\varphi P_S(e_1)P_M(t).$$

Par conséquent, les espaces  $\{E\}$  et  $E$  sont topologiquement isomorphes. Par suite,  $E$  est complémenté dans  $\Lambda_\varphi\{E\}$ .

La même preuve montre que  $E$  est complémenté dans  $\Lambda_\varphi\{E\}_r$ . □

En ce qui concerne la complétude de  $\Lambda_\varphi\{E\}$ , nous obtenons le théorème suivant.

**Théorème 4.1.5.** *L'espace  $\Lambda_\varphi\{E\}$  est (séquentiellement) complet si, et seulement si,  $E$  est (séquentiellement) complet.*

*Démonstration.* La nécessité découle du Lemme 4.1.4. En ce qui concerne la suffisance, supposons que  $E$  est complet, et soit  $(x^i)_{i \in I}$  une suite de Cauchy dans  $\Lambda_\varphi\{E\}$ ,  $(I, \leq)$  étant un ensemble ordonné. La continuité de la projection  $\mathcal{J}_n$  implique que  $(x_n^i)_i$  est un réseau de Cauchy dans  $E$  pour tout  $n$ . Il converge donc vers un élément  $x_n \in E$ . Nous affirmons que  $x := (x_n)_n$  appartient à  $\Lambda_\varphi\{E\}$ . En effet, pour  $S \in \mathcal{S}$ ,  $M \in \mathcal{M}$  et  $\varepsilon > 0$ , il existe  $k \in I$  tel que pour tout  $i, j > k$ ,  $\pi_{S,M}^\varphi(x^i - x^j) < \varepsilon$ . Ainsi, pour tout  $\alpha \in S$ ,  $M \in \mathcal{M}$ ,  $i, j > k$  et  $N \in \mathbb{N}$ , on a

$$\sup_{\delta(y, \varphi^*) \leq 1} \sum_{n=1}^N |y_n \alpha_n| P_M(x_n^i - x_n^j) \leq \|(\alpha_n P_M(x_n^i - x_n^j))_n\|_\varphi \leq \pi_{S,M}^\varphi(x^i - x^j) < \varepsilon.$$

En passant à la limite sur  $j$ , nous obtenons pour tout  $N \in \mathbb{N}$

$$\sup_{\delta(y, \varphi^*) \leq 1} \sum_{n=1}^N |y_n \alpha_n| P_M(x_n^i - x_n) < \varepsilon.$$

et donc  $\pi_{S,M}^\varphi(x^i - x) \leq \varepsilon$ , pour tout  $i \geq k$ . Ceci achève la preuve.

Avec une preuve similaire, on montre que  $\Lambda_\varphi\{E\}$  est séquentiellement complet si, et seulement si,  $E$  est séquentiellement complet. □

## 4.2 Dual topologique de $\Lambda_\varphi\{E\}$

Dans cette section, nous déterminerons l'espace dual topologique de  $\Lambda_\varphi\{E\}_r$ , donc de  $\Lambda_\varphi\{E\}$ , lorsque ce dernier est un  $AK$ -espace.

**Lemme 4.2.1.** *Si  $\gamma := (\gamma_n)_n \in c_0$ , alors  $\gamma x = (\gamma_n x_n)_n \in \Lambda_\varphi\{E\}_r$ , pour tout  $x = (x_n) \in \Lambda_\varphi\{E\}$ .*

*Démonstration.* Soit  $S \in \mathcal{S}$ ,  $M \in \mathcal{M}$ ,  $\alpha \in S$ ,  $p \in \mathbb{N}$  et  $\lambda \in \widetilde{\ell}_{\varphi^*}$  tel que  $\delta(\lambda, \varphi^*) \leq 1$ . Alors

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq p+1} |\lambda_n| P_M(\alpha_n \gamma_n x_n) &\leq \sup_{n \geq p+1} |\gamma_n| \sum_{n \geq p+1} |\lambda_n \alpha_n| P_M(x_n) \\ &\leq \sup_{n \geq p+1} |\gamma_n| \pi_{S,M}^\varphi(x). \end{aligned}$$

Cela montre que  $(\gamma_n x_n)_n^{(p)}$  converge vers  $\gamma x$  lorsque  $p \rightarrow +\infty$ , donc  $\gamma x \in \Lambda_\varphi\{E\}_r$ .  $\square$

Afin de décrire l'espace dual topologique  $(\Lambda_\varphi\{E\}_r)'$  de  $\Lambda_\varphi\{E\}_r$ , introduisons d'abord une notation : Pour toute forme linéaire continue  $F$  sur  $\Lambda_\varphi\{E\}$  (ou sur  $\Lambda_\varphi\{E\}_r$ ), notons  $F_n$  la forme linéaire sur  $E$ , définie par  $F_n(t) := F(te_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in E$ . Nous obtenons d'abord que, d'une certaine manière,  $\Lambda_\varphi\{E\}'$  est un sous-espace vectoriel de  $\Lambda_\varphi\{E\}^*$ .

**Lemme 4.2.2.** *Soit  $F$  une forme linéaire continue sur  $\Lambda_\varphi\{E\}$ . Alors*

1. *Il existe  $M \in \mathcal{M}$  tel que  $(F_n)_n \subset E'_M$ . Si de plus la famille  $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$  est  $\tau_S$ -bornée, alors  $(F_n)_n$  est équicontinu dans  $E'$ .*
2. *La suite  $(F_n)_n$  appartient à  $\Lambda_\varphi\{E\}^*$ .*
3. *L'application  $\theta : \Lambda_\varphi\{E\}'_r \rightarrow \Lambda_\varphi\{E\}^*$ ,  $F \mapsto (F_n)_n$  est un plongement.*

*Démonstration.* Par continuité de  $F$ , il existe  $S \in \mathcal{S}$  et  $M \in \mathcal{M}$  tels que

$$|F(x)| \leq \pi_{S,M}^\varphi(x), \quad x \in \Lambda_\varphi\{E\}.$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in E$ , nous avons

$$|F_n(t)| = |F(te_n)| \leq \pi_{S,M}^\varphi(te_n) = \|e_n\|_\varphi P_M(t) P_S(e_n).$$

Alors  $(F_n)_n \subset E'_M$ . Si en plus la famille  $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$  est  $\tau_S$ -bornée, il existe  $r > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_S(e_n) \leq r$  et  $\|e_n\|_\varphi \leq r$ . Par conséquent,  $|F_n(t)| \leq r^2 P_M(t)$ . Ainsi,  $(F_n)_n$  est équicontinu et le point 1. est prouvé.

Pour 2., remarquons d'abord que, pour tout  $x \in \Lambda_\varphi\{E\}_r$ ,

$$F(x) = F\left(\sum_{n \geq 1} x_n e_n\right) = \sum_{n \geq 1} F(x_n e_n) = \sum_{n \geq 1} F_n(x_n),$$

Maintenant, si  $x \in \Lambda_\varphi\{E\}$  et  $\gamma := (\gamma_n)_n \in c_0$ , alors

$\gamma x \in \Lambda_\varphi\{E\}_r$ . Choisissons une séquence  $\lambda = (\lambda_n)_n$  dans le cercle unité  $\Gamma$  de  $\mathbb{K}$ , de sorte que  $|\gamma_n F_n(x_n)| = \lambda_n \gamma_n F_n(x_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Comme  $\gamma \lambda x \in \Lambda_\varphi\{E\}_r$ , nous avons

$$\sum_{n \geq 1} |\gamma_n F_n(x_n)| = \sum_{n \geq 1} \gamma_n \lambda_n F_n(x_n) = \sum_{n \geq 1} F_n(\gamma_n \lambda_n x_n) = F(\lambda \gamma x) < +\infty.$$

Comme  $\gamma \in c_0$  est arbitraire,  $\sum_{n \geq 1} |F_n(x_n)| < +\infty$ . Ainsi,  $(F_n)_n \in (\Lambda_\varphi\{E\})^*$ .

Pour 3. Supposons que  $\theta(F) = 0$  pour un certain  $F \in \Lambda_\varphi\{E\}'_r$ . Alors  $F(te_n) = 0$  pour tout  $t \in E$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Cela conduit à  $F_n = 0$  pour tout  $n$ , puis à  $F = 0$ .  $\square$

La fonction  $\theta$  dans la preuve ci-dessus n'a pas besoin d'être injective en tant qu'application de  $\Lambda_\varphi\{E\}'$  dans  $\Lambda_\varphi\{E\}^*$ , comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple 4.2.3.** Si  $\varphi = \varphi_\infty$ ,  $\Lambda = \ell_1$  et  $E = \mathbb{K}$ , ou si  $\varphi = \varphi_1$ ,  $\Lambda = \ell_\infty$  et  $E = \mathbb{K}$ , de sorte que  $\Lambda_\varphi\{E\} = \ell_\infty$ , alors l'évaluation  $F : x := (x_n)_n \mapsto \tilde{a}(x)$  en un point  $a$  dans la compactification de Stone-Čech  $\beta\mathbb{N}$  de  $\mathbb{N}$ , est un caractère continu sur  $\ell_\infty$ . Alors  $F$  appartient au dual continu  $\ell'_\infty$  de  $\ell_\infty$ . Si  $a$  n'appartient pas à  $\mathbb{N}$ , alors la restriction à  $\ell_0 := (\ell_\infty)_r$  de  $F$  est la l'application identiquement nulle. Par conséquent, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_n$  est l'application nulle. Cependant,  $\delta_F$  n'est pas nul.

Maintenant, nous introduisons une autre notion de sommabilité.

**Définition 4.2.4.** Une suite  $(x_n)_n \subset E$  est dite fortement absolument  $(\varphi, \Lambda)$ -sommable si, pour chaque  $M \in \mathcal{M}$ ,  $(a_n(x_n))_n \in \ell^1$  pour tout  $(a_n)_n \in (\Lambda^*)_{\varphi^*}\{E'_M\}$ .

L'espace de toutes ces suites sera noté  $\Lambda_\varphi|E|$

**Proposition 4.2.5.** Soit  $S \in \mathcal{S}$  et  $M \in \mathcal{M}$ .

1. L'espace  $(\Lambda_S^*)_{\varphi^*}\{E'_M\}$ , muni de la norme  $\pi_{S^\circ, M^\circ}^{\varphi^*}$  ci-dessous, est un espace de Banach.

$$\pi_{S^\circ, M^\circ}^{\varphi^*}(a) := \sup_{\alpha \in S^\circ} \|(\alpha_n P_{M^\circ}(a_n))_n\|_{\varphi^*}, \quad a := (a_n)_n \in (\Lambda_S^*)_{\varphi^*}\{E'_M\},$$

où  $S^\circ$  désigne le polaire de  $S$  dans  $\Lambda$ .

De plus, les projections  $(a_n)_n \mapsto a_n$  sont continues.

2. L'application  $\Pi_{S, M}^\varphi$  est une semi-norme sur  $\Lambda_\varphi|E|$ , où, pour tout  $x \in \Lambda_\varphi|E|$ ,

$$\Pi_{S, M}^\varphi(x) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(x_n)|; a = (a_n)_n \in (\Lambda_S^*)_{\varphi^*}\{E'_M\}, \pi_{S^\circ, M^\circ}^{\varphi^*}(a) \leq 1 \right\}.$$

*Démonstration.* 1. Si  $S' := \{rS', r \geq 0\}$ , où  $S'$  désigne la  $\sigma((\Lambda_S^*)^*, \Lambda_S^*)$ -fermeture de  $S^\circ$  dans  $(\Lambda_S^*)^*$ , alors la topologie de norme de  $\Lambda_S^*$  n'est autre que la  $S'$ -topologie. Par conséquent, d'après Théorème 4.1.5, l'espace  $(\Lambda_S^*)_{\varphi^*}\{E'_M\}$  est un espace de Banach. De plus, par Lemme 4.1.3, les projections sont continues.

2. Établir la finitude de  $\Pi_{S, M}^\varphi(x)$  pour chaque  $x \in \Lambda_\varphi|E|$  est suffisant pour nos besoins. Fixons donc un tel  $x$  et définissons une application linéaire  $T_x$  de  $(\Lambda_S^*)_{\varphi^*}\{E'_M\}$  dans  $\ell^1$  par  $T_x((a_n)_n) = (a_n(x_n))_n$ . Supposons que  $(a^i)_i \in (\Lambda_S^*)_{\varphi^*}\{E'_M\}$  converge vers  $a := (a_n)_n$  et que  $(T_x(a^i))_i$  converge dans  $\ell^1$  vers  $(\gamma_n)_n$ . Par continuité des projections,  $(a_n^i)_i$  converge dans  $E'_M$  vers un certain  $a_n$  pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ . Ensuite,  $(a_n^i(x_n))_i$  converge vers  $a_n(x_n)$  également. Il s'ensuit que  $(a_n(x_n))_n = (\gamma_n)_n$ , d'où la fermeture du graphe de  $T_x$ . Par conséquent,  $T_x$  est continue, et donc bornée sur la boule unité de  $(\Lambda_S^*)_{\varphi^*}\{E'_M\}$ . Cela entraîne  $\Pi_{S, M}^\varphi(x) < +\infty$ .  $\square$

**Proposition 4.2.6.** *Soit  $F$  une forme linéaire continue sur  $\Lambda_\varphi\{E\}$ . Alors il existe  $M \in \mathcal{M}$  et  $S \in \mathcal{S}$  tels que la suite  $(F_n)_n$  soit fortement absolument  $(\varphi^*, \Lambda_S^*)$ -sommable dans  $E'_M$ , c'est-à-dire  $(F_n)_n \in (\Lambda_S^*)_{\varphi^*}|E'_M|$ .*

*Démonstration.* Par la preuve du Lemme 4.2.2, il existe  $S \in \mathcal{S}$  et  $M \in \mathcal{M}$  tels que  $(F_n) \subset E'_M$  et  $|F_n(t)| \leq \pi_{S,M}^\varphi(te_n) = P_S(e_n)\|e_n\|_\varphi P_M(t)$ . Pour montrer que  $(F_n)_n \in (\Lambda_S^*)_{\varphi^*}|E'_M|$ , soit  $(f_n)_n \in (\Lambda_S^*)_{\varphi^*}\{(E'_M)'\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  et  $\varepsilon > 0$ . Désignons par  $E(M)$  l'espace quotient de  $E$  par l'annulateur  $M^\perp$  de  $P_M$  et par  $X$  la complétion de  $E(M)$ . Comme  $X' = (E(M))'$  est isométriquement isomorphe à  $E'_M$ , grâce au principe de réflexivité locale, il existe un opérateur continu  $T_k : \text{Span}\{f_1, f_2, \dots, f_k\} \rightarrow X$  tel que :

1.  $\|T_k\| \leq 1 + \delta$ , avec  $\|T_k\| = \sup_{f \in M^\circ} \|T_k f\|$ , et
2.  $F_n(T_k f_n) = f_n(F_n)$ ,  $n \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

Puisque  $E(M)$  est dense dans  $X$ , pour tout  $0 < \delta_n \leq \frac{\delta}{k(1 + \|e_n\|_\varphi P_S(e_n))}$ , il existe  $x_n \in E$  tel que :

$$\overline{P_M}(x_n + M^\perp - T_k f_n) \leq \delta_n.$$

Par Lemme 4.2.2, on a  $\|F_n\|_M \leq \|e_n\|_\varphi P_S(e_n)$ . Par conséquent, comme  $F_n$  est continue,

$$\begin{aligned} |F_n(x_n + M^\perp - T_k f_n)| &\leq \|F_n\|_M P_M(x_n - T_k f_n) \\ &\leq \|e_n\|_\varphi P_S(e_n) \frac{\delta}{k(1 + \|e_n\|_\varphi P_S(e_n))} \\ &\leq \frac{\delta}{k}. \end{aligned}$$

En choisissant  $\lambda_n$  dans le cercle complexe unitaire, de sorte que  $|F(x_n e_n)| = \lambda_n F(x_n e_n)$ , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k |f_n(F_n)| &= \sum_{n=1}^k |F_n(T_k f_n)| \\ &\leq \sum_{n=1}^k |F_n(x_n + M^\perp - T_k f_n)| + \left| F\left(\sum_{n=1}^k \lambda_n x_n e_n\right) \right| \\ &\leq \delta + \pi_{S,M}^\varphi((x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots)) \\ &= \delta + \sup \left\{ \left| \sum_{n=1}^k y_n \alpha_n P_M(x_n) \right| : (\alpha_n)_n \in S, y \in \tilde{B}_{\varphi^*} \right\}. \end{aligned}$$

Or, pour tout  $(\alpha_n)_n \in S$  et  $y \in \tilde{B}_{\varphi^*}$ ,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^k y_n \alpha_n P_M(x_n) \right| &\leq \left| \sum_{n=1}^k y_n \alpha_n P_M(x_n + M^\perp - T_k f_n) \right| + \left| \sum_{n=1}^k y_n \alpha_n P_M(T_k f_n) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^k |y_n \alpha_n| \delta_n + \left| \sum_{n=1}^k y_n \alpha_n \|T_k\| P_{M^\circ\circ}(f_n) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^k \frac{\delta}{k} + \|T_k\| \left| \sum_{n=1}^k y_n \alpha_n P_M(f_n) \right| \\ &\leq \delta + (1 + \delta) \pi_{S,M}^\varphi((f_n)_n). \end{aligned}$$

On a donc

$$\sum_{n=1}^k |f_n(F_n)| \leq 2\delta + (1 + \delta) \pi_{S,M}^\varphi((f_n)_n), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Alors  $(f_n(F_n))_n$  appartient à  $\ell^1$ . □

**Proposition 4.2.7.** *Pour tout  $S \in \mathcal{S}$ ,  $M \in \mathcal{M}$  et  $a = (a_n)_n \in (\Lambda_S^*)_{\varphi^*}|E'_M|$ , l'application*

$$f_a : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x_n)$$

définit un forme linéaire continu sur  $\Lambda_\varphi[E]$ .

*Démonstration.* Commençons par montrer que  $f_a$  est bien défini. Fixons arbitrairement  $S \in \mathcal{S}$ ,  $M \in \mathcal{M}$  et  $a = (a_n)_n \in (\Lambda_S^*)_{\varphi^*}|E'_M|$  et, pour tout  $x \in E$ , désignons par  $\hat{x}$  l'application linéaire continue sur  $E'_M$ , définie par  $\hat{x}(f) := f(x)$ . Ensuite, pour  $x = (x_n)_n \in \Lambda_\varphi\{E\}$  et  $y \in \tilde{B}_\varphi$ , nous avons

$$\begin{aligned} \pi_{S^\circ\circ, M^\circ\circ}^\varphi((\hat{x}_n)_n) &= \pi_{S, M^\circ\circ}^\varphi((\hat{x}_n)_n) \\ &= \sup_{\alpha \in S} \sup_{\delta(y, \varphi^*) \leq 1} \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n y_n| P_{M^\circ\circ}(\hat{x}_n) \\ &\leq \sup_{\alpha \in S} \sup_{\delta(y, \varphi^*) \leq 1} \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n y_n| P_M(x_n) \\ &\leq \pi_{S, M}^\varphi((x_n)_n) < +\infty. \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons  $(\hat{x}_n)_n \in (\Lambda_S^*)_{\varphi^*}\{(E'_M)'\}_\beta$ . Par conséquent,  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{x}_n(a_n)$  converge et  $f_a$  est donc bien défini. En outre, considérons l'application  $\psi_a$ , définie par

$$\begin{aligned} \psi_a : (\Lambda_S^*)_{\varphi^*}\{(E'_M)'\} &\longrightarrow \ell^1 \\ (f_n)_n &\longmapsto \psi_a((f_n)_n) = (f_n(a_n))_n, \end{aligned}$$

Soit  $(f_n)_n \in (\Lambda_S^*)_\varphi^*\{(E'_M)'\}$  donné. Comme  $a = (a_n)_n \in (\Lambda_S^*)_{\varphi^*}|E'_M|$ , la série  $\sum f_n(a_n)$  est absolument convergente. Alors  $(f_n(a_n))_n \in \ell^1$ , donc  $\psi_a$  est bien défini. Comme  $(\Lambda_S^*)^*$  est parfait et  $(E'_M)'$  est un espace de Banach,  $((\Lambda_S^*)_\varphi^*\{(E'_M)'\}, \pi_{S,M}^\varphi)$  est également un espace de Banach. De plus, supposons que  $((f_n)_n^i)_i$  est une suite nulle dans  $(\Lambda_S^*)_\varphi^*\{(E'_M)'\}$ , telle que  $(\psi_a((f_n)_n^i))_i$  converge dans  $\ell^1$  vers  $(\alpha_n)_n$ . Comme les projections  $(f_n)_n \mapsto f_n$  sont continues,  $(f_n^i)_i$  converge dans  $(E'_M)'$  vers 0, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Alors la suite  $(\psi_a((f_n)_n^i))_i = ((f_n^i(a_n))_n)_i$  converge vers 0, donc  $\alpha_n = 0$  pour tout  $n$ . Par le théorème du graphe fermé,  $\varphi_a$  est continue. Par conséquent, il existe  $K > 0$ , tel que pour tout  $(f_n)_n \in (\Lambda_S^*)_\varphi^*\{(E'_M)'\}$ ,

$$\|\psi_a((f_n)_n)\|_1 \leq K\pi_{S,M}^\varphi((f_n)_n) \quad \text{i.e.,} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(a_n)| \leq K\pi_{S,M}^\varphi((f_n)_n).$$

Mais  $(\hat{x}_n)_n \in (\Lambda_S^*)_\varphi^*\{(E'_M)'\}$ , alors

$$|f_a(x)| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{x}_n(a_n) \right| \leq K\pi_{S,M}^\varphi((\hat{x}_n)_n) \leq K\pi_{S,M}^\varphi(x).$$

Ainsi,  $f_a$  est continue. □

**Théorème 4.2.8.** *L'égalité suivante est algébrique :*

$$(\Lambda_\varphi\{E\}_r)' = \bigcup_{S \in \mathcal{S}, M \in \mathcal{M}} (\Lambda_S^*)_{\varphi^*}|E'_M|.$$

*Démonstration.* Par la Proposition 4.2.7, pour chaque  $S \in \mathcal{S}$ ,  $M \in \mathcal{M}$  et  $(a_n)_n \in (\Lambda_S^*)_{\varphi^*}|E'_M|$ , nous avons  $f_a \in (\Lambda_\varphi\{E\}_r)'$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} \phi : \bigcup_{S \in \mathcal{S}, M \in \mathcal{M}} (\Lambda_S^*)_{\varphi^*}|E'_M| &\longrightarrow (\Lambda_\varphi\{E\}_r)' \\ a &\longmapsto f_a. \end{aligned}$$

est bien défini. De plus,  $\phi$  est évidemment injective. De plus, si  $F \in (\Lambda_\varphi\{E\}_r)'$ , par le Corollaire 4.2.6, il existe  $S \in \mathcal{S}$ ,  $M \in \mathcal{M}$  tels que la suite  $a := (F_n)_n$  appartient à  $(\Lambda_S^*)_{\varphi^*}|E'_M|$ . Mais pour tout  $x \in \Lambda_\varphi\{E\}_r$ , nous avons

$$\begin{aligned} &= \lim_k F(x^{(k)}) \quad (\text{la continuité de } F) \\ &= \lim_k \sum_{n=1}^k F(x_n e_n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(x_n) \\ &= f_a(x). \end{aligned}$$

Par conséquent,  $\phi$  est également surjective. □

**Définition 4.2.9.** Soit  $R$  un disque borné normal de  $\Lambda$  et soit  $B$  un disque borné absolument convexe fermé de  $E$ . Définissons  $R_\varphi\{B\} = \{x \in \Lambda_\varphi\{E\} : \pi_{R^\circ, B^\circ}^\varphi(x) \leq 1\}$ .

Considérons les collections suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}' &:= \{B' \subset E', B' \text{ est un disque faiblement borné fermé}\} \\ \mathcal{R} &:= \{R \subset \Lambda, R \text{ est un disque borné et normal fermé}\} \\ \mathcal{R}' &:= \{R' \subset \Lambda^*, R' \text{ est un disque faiblement borné et normal fermé}\}, \end{aligned}$$

Les propositions suivantes découlent directement de cette définition.

**Proposition 4.2.10.** 1.  $R_\varphi\{B\}$  est un disque borné de  $\Lambda_\varphi\{E\}$ .  
2. Si  $R \subset R'$  et  $B \subset B'$ , alors  $R_\varphi\{B\} \subset R'_\varphi\{B'\}$

**Définition 4.2.11.** Un espace localement convexe  $E$  est dit absolument fondamentalement  $(\Lambda, \varphi)$ -borné, si pour tout disque borné  $\mathbb{B}$  de  $\Lambda_\varphi\{E\}$ , il existe  $B \in \mathcal{B}$  et  $R \in \mathcal{R}$  tels que  $\mathbb{B} \subset R_\varphi\{B\}$ . Nous disons alors que  $E$  a la propriété  $(AF\Lambda_\varphi)$ .

**Proposition 4.2.12.** Lorsque  $S$  parcourt  $\mathcal{S}$  et  $M$  parcourt  $\mathcal{M}$ , les ensembles  $S_{\varphi^*}\{M\}$  constituent un système fondamental des parties  $\pi_{\mathcal{S}, \mathcal{M}}^\varphi$ -équicontinues de  $(\Lambda_\varphi\{E\}_r)'$ .

*Démonstration.* Soit  $a = (a_n)_n \in S_{\varphi^*}\{M\}$  et  $x \in \Lambda_\varphi\{E\}_r$ . Alors

$$|f_a(x)| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x_n) \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(x_n)| \leq \pi_{S, M}^\varphi(x).$$

Par conséquent,  $S_{\varphi^*}\{M\}$  est équicontinu.

Inversement, soit  $H \subset (\Lambda_\varphi\{E\}_r)'$  équicontinu. Il existe donc  $S \in \mathcal{S}$  et  $M \in \mathcal{M}$  tels que pour tout  $x \in \Lambda_\varphi\{E\}_r$  et tout  $a = (a_n)_n \in H$ , nous avons :

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x_n) \right| \leq \pi_{S, M}^\varphi(x).$$

Soit  $a = (a_n)_n \in H$ ,  $\beta \in S^\circ$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $y \in \tilde{\ell}_\varphi$  tels que  $\delta(y, \varphi) \leq 1$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , puisque  $P_{M^\circ}(\beta_n y_n a_n) = \sup_{t \in M^\circ} |\beta_n y_n a_n(t)|$ , il existe  $t_n \in M^\circ$ , tel que  $P_{M^\circ}(\beta_n y_n a_n) \leq |\beta_n y_n a_n(t_n)| + \frac{\varepsilon}{2^n}$ . Donc,

$$\begin{aligned} \pi_{S^\circ, M^\circ}^{\varphi^*}((a_n)_n) &= \sup_{\beta \in S^\circ} \sup_{\delta(\lambda, \varphi) \leq 1} \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n \lambda_n P_M(a_n) \right| \\ &\leq \sup_{\beta \in S^\circ} \sup_{\delta(\lambda, \varphi) \leq 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ |\beta_n \lambda_n a_n(t_n)| + \frac{\varepsilon}{2^n} \right] \\ &\leq \sup_{\beta \in S^\circ} \sup_{\delta(\lambda, \varphi) \leq 1} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(\beta_n \lambda_n t_n)| + \varepsilon \end{aligned}$$

Maintenant, si  $\alpha \in S^\circ$  et  $\gamma \in \tilde{\ell}_\varphi$  tels que  $\delta(\gamma, \varphi^*) \leq 1$ , alors :

$$\pi_{S,M}^\varphi(\alpha\gamma t) \leq \sup_{\beta \in S} \sup_{\delta(\lambda, \varphi^*) \leq 1} \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n \beta_n \lambda_n \gamma_n P_M(t_n)| \leq 1,$$

et donc

$$\pi_{S^\circ, M^\circ}^{\varphi^*}((a_n)_n) \leq \sup_{\beta \in S^\circ} \sup_{\delta(\lambda, \varphi) \leq 1} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(\beta_n \lambda_n t_n)| + \varepsilon \leq \pi_{S,M}^\varphi(\alpha\gamma t) + \varepsilon \leq 1 + \varepsilon.$$

Par conséquent,  $\pi_{S^\circ, M^\circ}^{\varphi^*}((a_n)_n) \leq 1$ , donc  $H \subset S_{\varphi^*}\{M\}$ .  $\square$

**Proposition 4.2.13.** 1. Si l'espace  $\Lambda_\varphi\{E\}_r$  est tonnelé (resp. quasi-tonnelé) alors  $E$  est tonnelé (resp. quasi-tonnelé) et pour chaque disque faiblement borné (resp. fortement borné)  $\mathbb{B}$  de  $(\Lambda_\varphi\{E\}_r)'$ , il existe  $B' \in \mathcal{B}'$  et  $R' \in \mathcal{R}'$  tels que  $\mathbb{B} \subset R'_{\varphi}\{B'\}$ . 2. Réciproquement, si  $E$  et  $\Lambda$  sont tonnelés (resp. quasi-tonnelés) et pour chaque disque faiblement borné (resp. fortement borné)  $\mathbb{B}$  de  $(\Lambda_\varphi\{E\}_r)'$ , il existe  $B' \in \mathcal{B}'$  et  $R' \in \mathcal{R}'$  tels que  $\mathbb{B} \subset R'_{\varphi}\{B'\}$ , alors  $\Lambda_\varphi\{E\}_r$  est tonnelé (resp. quasi-tonnelé).

*Démonstration.* 1. Supposons que  $\Lambda_\varphi\{E\}_r$  soit tonnelé. Puisque  $E$  est complété dans  $\Lambda_\varphi\{E\}_r$ , alors  $E$  est tonnelé (resp. quasi-tonnelé).

Soit  $\mathbb{B}$  un disque faiblement borné (resp. fortement borné) de  $(\Lambda_\varphi\{E\}_r)'$ . Alors  $\mathbb{B}$  est équicontinu de  $(\Lambda\{E\}_r)'$ . Par la Proposition 4.2.12, il existe  $S \in \mathcal{S}$  et  $M \in \mathcal{M}$  tels que  $\mathbb{B} \subset S_{\varphi^*}\{M\}$ .

2. Réciproquement, soit  $T$  un tonneau (resp. un tonneau bornivore) dans  $\Lambda_\varphi\{E\}_r$ . Alors  $T^\circ$  est un disque faiblement borné (resp. fortement borné) de  $(\Lambda_\varphi\{E\}_r)'$ , donc il existe  $R' \in \mathcal{R}'$  et  $B' \in \mathcal{B}'$  tels que

$$T^\circ \subset R'_{\varphi^*}\{B'\}.$$

Puisque  $E$  est tonnelé (resp. quasi-tonnelé),  $B'$  est équicontinu, donc contenu dans un certain  $M \in \mathcal{M}$ . De même, puisque  $\Lambda$  est tonnelé (resp. quasi-tonnelé), il existe  $S \in \mathcal{S}$  tel que  $R' \subset S$ . Par conséquent,

$$T^\circ \subset R'_{\varphi^*}\{B'\} \subset S_{\varphi^*}\{M\}.$$

Donc,  $T$  est un voisinage de 0 dans  $\Lambda_\varphi\{E\}_r$  et ainsi  $\Lambda_\varphi\{E\}_r$  est tonnelé (resp. quasi-tonnelé).  $\square$

### 4.3 Quelques propriétés de $\Lambda_\varphi\{E\}$

Dans cette section, nous présentons quelques résultats et propriétés qui étendent ceux de Rosier dans [32]. Nous donnons une localisation supplémentaire des formes linéaires continues sur  $\Lambda_\varphi\{E\}$ .

**Proposition 4.3.1.** *Si  $F$  est une forme linéaire continue sur  $\Lambda_\varphi\{E\}$ , alors il existe  $M \in \mathcal{M}$  et  $S \in \mathcal{S}$ , tels que la suite  $(F_n)_n$  soit absolument  $(\varphi^*, \Lambda_S^*)$ -sommeable dans  $E'_M$ , c'est-à-dire  $(F_n)_n \in (\Lambda_S^*)_{\varphi^*}\{E'_M\}$ .*

*Démonstration.* Choisissons  $S \in \mathcal{S}$  et  $M \in \mathcal{M}$  tels que

$$|F(x)| \leq \pi_{S,M}^\varphi(x), \quad x = (x_n) \in \Lambda_\varphi\{E\}.$$

Par Lemme 4.2.2,  $(F_n)_n \subset E'_M$ . Choisissons  $\beta \in S^\circ$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $y \in \tilde{\ell}_\varphi$  tels que  $\delta(y, \varphi) \leq 1$ . Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , comme  $P_{M^\circ}(\beta_n y_n F_n) = \sup_{t \in M^\circ} |\beta_n y_n F_n(t)|$ , il existe  $t_n \in M^\circ$ , tel que  $P_{M^\circ}(\beta_n y_n F_n) \leq |\beta_n y_n F_n(t_n)| + \frac{\varepsilon}{2^n}$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned} \pi_{S^\circ, M^\circ}^{\varphi^*}((F_n)_n) &= \sup_{\beta \in S^\circ} \sup_{\delta(\lambda, \varphi) \leq 1} \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n \lambda_n P_M(F_n) \right| \\ &\leq \sup_{\beta \in S^\circ} \sup_{\delta(\lambda, \varphi) \leq 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ |\beta_n \lambda_n F_n(t_n)| + \frac{\varepsilon}{2^n} \right] \\ &\leq \sup_{\beta \in S^\circ} \sup_{\delta(\lambda, \varphi) \leq 1} \sum_{n=1}^{+\infty} |\beta_n \lambda_n| P_M(t_n) P_S(e_n) \|e_n\|_\varphi + \varepsilon \\ &\leq \sup_{\beta \in S^\circ} \sup_{\delta(\lambda, \varphi) \leq 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{\alpha \in S} |\beta_n \alpha_n| \|\lambda_n e_n\|_\varphi + \varepsilon \\ &\leq \sup_{\beta \in S^\circ} \sup_{\delta(\lambda, \varphi) \leq 1} \sum_{n=1}^{+\infty} P_S(\beta) \sup_{\delta(y, \varphi^*) \leq 1} |\lambda_n y_n| + \varepsilon \\ &\leq \sup_{\delta(\lambda, \varphi) \leq 1} \sup_{\delta(y, \varphi^*) \leq 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(|\lambda_n|) + \varphi^*(|y_n|) + \varepsilon \\ &\leq 2 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi,  $(F_n)_n \in (\Lambda_S^*)_{\varphi^*}\{E'_M\}$ . □

Remarquez que selon la Proposition 4.3.1,  $(\Lambda_\varphi\{E\}_r)'$  peut être identifié à un sous-espace de  $\ell_1$

l'union dirigée vers le haut  $\cup (\Lambda_S^*)_{\varphi^*}\{E'_M\}$ , lorsque  $S$  parcourt  $\mathcal{S}$  et  $M$  parcourt  $\mathcal{M}$ .

Le lemme ci-dessous donne une localisation de ces éléments de  $(\Lambda_\varphi\{E\})^*$  qui définissent des fonctionnels continus sur  $(\Lambda_\varphi\{E\})_r$ .

**Lemme 4.3.2.** *Si  $a := (a_n)_n \in (\Lambda_\varphi\{E\})^*$  définit une forme linéaire continue sur  $\Lambda_\varphi\{E\}_r$ , alors il existe  $M \in \mathcal{M}$  et  $S \in \mathcal{S}$ , tels que  $a_n \in E'_M$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et l'ensemble  $\{(\beta_n P_{M^\circ}(a_n))_n, \beta \in S^\circ\}$  est borné dans  $\ell_{\varphi^*}$ , la polaire de  $M$  étant prise dans  $(E'_M)'$ .*

*Démonstration.* Par continuité de  $a$ , il existe  $S \in \mathcal{S}$  et  $M \in \mathcal{M}$ , tels que

$$|a(x)| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x_n) \right| \leq \pi_{S,M}^\varphi(x), \quad x \in \Lambda_\varphi\{E\}_r.$$

Comme pour la Proposition 4.3.1,  $a_n \in E'_M$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Maintenant, fixons  $\varepsilon > 0$ ,  $\beta \in S^\circ$  et  $\lambda \in \tilde{\ell}_\varphi$ , tels que  $\delta(\lambda, \varphi) \leq 1$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $x_n \in M^\circ$  tel que

$$P_{M^\circ}(\beta_n y_n a_n) \leq |a_n(\beta_n \lambda_n x_n)| + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Comme  $(\lambda \beta x)^{(p)} \in \Lambda_\varphi\{E\}_r$ , pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^p a_n(\beta_n \lambda_n x_n) \right| &= |a((\lambda \beta x)^{(p)})| \leq \pi_{S, M, \varphi}((\lambda \beta x)^{(p)}) \\ &\leq \sup_{\alpha \in S} \sup_{\delta(y, \varphi^*) \leq 1} \left| \sum_{n=1}^p \alpha_n y_n P_M(\beta_n \lambda_n x_n) \right| \\ &\leq \sup_{\alpha \in S} \sup_{\delta(y, \varphi^*) \leq 1} \sum_{n=1}^p |\alpha_n \beta_n| |y_n \lambda_n| P_M(x_n) \\ &\leq \sup_{\alpha \in S} \sup_{\delta(y, \varphi^*) \leq 1} \sum_{n=1}^p |\alpha_n \beta_n| |y_n \lambda_n| \\ &\leq P_S(\beta) \sup_{\delta(y, \varphi^*) \leq 1} \sum_{n=1}^p |y_n \lambda_n| \\ &\leq \sup_{\delta(y, \varphi^*) \leq 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(|\lambda_n|) + \varphi^*(|y_n|) \leq 2. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'ensemble  $\{(\beta_n P_{M^\circ}(a_n))_n, \beta \in S^\circ\}$  est borné dans  $\ell_{\varphi^*}$ .  $\square$

Rappelons qu'un espace localement convexe est dit  $C$ -tonnelé si chaque suite faiblement\*-de Cauchy dans son dual topologique est équicontinue. Nous obtenons alors le résultat suivant.

**Lemme 4.3.3.** *L'espace  $\Lambda_\varphi\{E\}$  est un  $AK$ -espace si, et seulement si,  $(\Lambda_\varphi\{E\})' \subset (\Lambda_\varphi\{E\})^*$ . De plus, si  $\Lambda_\varphi\{E\}_r$  est  $C$ -tonnelé, alors l'égalité  $(\Lambda_\varphi\{E\}_r)' = (\Lambda_\varphi\{E\})^*$  est vérifiée algébriquement.*

*Démonstration.* Si  $F \in (\Lambda_\varphi\{E\})'$  et que  $(F_n)_n$  est la suite donnée par Lemme 4.2.2, alors  $(F_n)_n$  appartient à  $(\Lambda_\varphi\{E\})^*$ , par le même Lemme. Comme  $\Lambda_\varphi\{E\}$  est un  $AK$ -espace, pour tout  $x \in \Lambda_\varphi\{E\}$ ,  $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(x_n)$ . Par conséquent,  $(\Lambda_\varphi\{E\})' \subset (\Lambda_\varphi\{E\})^*$ .

Supposons qu'une certaine suite  $(x_n)_n \in \Lambda_\varphi\{E\}$  n'appartienne pas à  $\Lambda_\varphi\{E\}_r$ . Alors, par le théorème de Hahn-Banach, nous pouvons trouver un  $F \in (\Lambda_\varphi\{E\})'$  tel que  $F((x_n)_n) = 1$  et que  $F$  s'annule identiquement sur  $\Lambda_\varphi\{E\}_r$ . Comme  $(\Lambda_\varphi\{E\})' \subset (\Lambda_\varphi\{E\})^*$ ,  $F$  appartient à  $(\Lambda_\varphi\{E\})^*$ . Par conséquent, il existe une suite  $(b_n)_n \subset E'$  telle que  $F(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(y_n)$  pour tout  $y := (y_n)_n \in \Lambda_\varphi\{E\}$ . En particulier,  $F((x_n)_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(x_n) = 1$ .

Mais  $1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x_n) = \lim_{p \rightarrow \infty} F((x_n)_n^{(p)}) = 0$ , pour  $(x_n)_n^{(p)} = (x_1, \dots, x_p, 0, \dots) \in \Lambda_\varphi\{E\}_r$ .

Cette contradiction montre que  $(x_n)_n \in \Lambda_\varphi\{E\}_r$  et donc que  $\Lambda_\varphi\{E\} = \Lambda_\varphi\{E\}_r$ .

Maintenant, supposons que  $\Lambda_\varphi\{E\}_r$  est C-tonnelé. Par Lemme 4.2.2, nous avons  $(\Lambda_\varphi\{E\}_r)' \subset (\Lambda_\varphi\{E\})^*$ . Montrons alors que  $(\Lambda_\varphi\{E\})^* \subset (\Lambda_\varphi\{E\}_r)'$ . Choisissons  $(a_n)_n \in (\Lambda_S^*)_{\varphi^*}\{E'_M\}$ . Alors pour chaque  $(\alpha, \beta) \in \Lambda^* \times \Lambda$ , l'application

$$\psi_{\alpha, \beta, a} : x \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n a_n(x_n)$$

définit une forme linéaire continue sur  $\Lambda_\varphi\{E\}$ . De plus, la collection  $\{\psi_{\alpha, \beta, a}, \alpha \in S, \beta \in S^\circ\}$  est équicontinue.  $\square$

**Proposition 4.3.4.** *Soit  $S \in \mathcal{S}$ ,  $M \in \mathcal{M}$  et  $a = (a_n)_n \in (\Lambda_S^*)_{\varphi^*}\{E'_M\}$ . Alors pour chaque  $(\alpha, \beta) \in \Lambda^* \times \Lambda$ , l'application*

$$\psi_{\alpha, \beta, a} : x \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n a_n(x_n)$$

*définit une forme linéaire continue sur  $\Lambda_\varphi\{E\}$ . De plus, la collection  $\{\psi_{\alpha, \beta, a}, \alpha \in S, \beta \in S^\circ\}$  est équicontinue.*

*Démonstration.* Remplaçons, si nécessaire,  $\alpha$  par  $\frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n \beta_n|} \alpha$ , nous pouvons alors supposer que  $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n \beta_n| \leq 1$ . Soient  $S \in \mathcal{S}$ ,  $M \in \mathcal{M}$  et  $a = (a_n)_n \in (\Lambda_S^*)_{\varphi^*}\{E'_M\}$ . Alors pour chaque  $(\alpha, \beta) \in S \times S^\circ$ , l'application  $\psi_{\alpha, \beta, a}$  est évidemment linéaire et s'il advient que  $a = 0$ , il n'y a rien à démontrer. Supposons alors que  $a \neq 0$ . Pour tout  $x \in \Lambda_\varphi\{E\}$ , nous avons :

$$\begin{aligned} |\psi_{\alpha, \beta, a}((x_n)_n)| &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n \beta_n a_n(x_n)| \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n \beta_n| P_M(x_n) P_{M^\circ}(a_n) \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n| P_M(x_n) |\beta_n| P_{M^\circ}(a_n). \end{aligned}$$

Puisque  $\alpha \in S$  et  $\beta \in S^\circ$ , donc  $(P_M(\alpha_n x_n))_n \in \ell_\varphi$  et  $(P_{M^\circ}(\beta_n a_n))_n \in \ell_{\varphi^*}$ , prenons pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_n = \frac{|\beta_n| P_{M^\circ}(a_n)}{\pi_{S^\circ, M^\circ}^{\varphi^*}(a)}$ , alors  $\|\lambda\|_{\varphi^*} \leq 1$  et  $\lambda \in \ell_{\varphi^*}$ . Par la Proposition 8.11, page

302, de [21], nous avons  $\lambda \in \widetilde{\ell}_{\varphi^*}$  et  $\delta(\lambda, \varphi^*) \leq 1$ . Alors

$$\begin{aligned} |\psi_{\alpha,\beta,a}((x_n)_n)| &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n| P_M(x_n) |\beta_n| P_{M^\circ}(a_n). \\ &\leq \pi_{S^\circ, M^\circ}^{\varphi^*}(a) \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n \alpha_n| P_M(x_n) \\ &\leq \pi_{S^\circ, M^\circ}^{\varphi^*}(a) \pi_{S, M}^{\varphi}(x). \end{aligned}$$

d'où  $\psi_{\alpha,\beta,a}$  est continue.  $\square$

**Proposition 4.3.5.** *Si  $a := (a_n)_n \in (\Lambda_\varphi\{E\})^*$ , alors, pour tout disque borné  $B \subset E$  et pour tout  $\beta \in \Lambda$ , la suite  $(\beta_n P_B(a_n))_n$  appartient à  $\ell_{\varphi^*}$ .*

*Démonstration.* Soit  $a \in (\Lambda_\varphi\{E\})^*$ ,  $B$  un disque borné dans  $E$ ,  $\beta \in \Lambda$  et  $y \in \widetilde{\ell}_\varphi$  donné. Alors pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $x_n \in B$  tel que

$$P_B(\beta_n y_n a_n) \leq |\beta_n y_n a_n(x_n)| + \frac{1}{2^n} = |a_n(\beta_n y_n x_n)| + \frac{1}{2^n}. \quad (4.1)$$

Fixons arbitrairement  $M \in \mathcal{M}$ ,  $S \in \mathcal{S}$  et  $\lambda \in \widetilde{\ell}_{\varphi^*}$ , avec  $\delta(\lambda, \varphi^*) \leq 1$ . Puisque  $B$  est borné, il existe  $k_M > 0$ , tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_M(x_n) \leq k_M$ . Pour chaque  $\alpha \in S$ , nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} |\lambda_n \alpha_n| P_M(\beta_n y_n x_n) &= \sum_{n \geq 1} |\alpha_n \beta_n| |\lambda_n y_n| P_M(x_n) \\ &\leq k_M P_S(\beta) \|y\|_\varphi. \end{aligned}$$

Par conséquent,  $(\beta_n y_n x_n) \in \Lambda_\varphi\{E\}$ . Ainsi, par (4.1), nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} |y_n| P_B(\beta_n a_n) &\leq \sum_{n \geq 1} |a_n(\beta_n y_n x_n)| + \frac{1}{2^n} \\ &\leq \sum_{n \geq 1} |a_n(\beta_n y_n x_n)| < +\infty, \end{aligned}$$

d'où  $(\beta_n P_B(a_n))_n \in \ell_{\varphi^*}$ .  $\square$

# Références bibliographiques

- [1] I. Aboutaib, L. Oubbi, *Reflexivity in weighted vector-valued sequence spaces*. Matematiski Vesnik (2023), *accepted*.
- [2] I. Aboutaib, J. Brzdęk, L. Oubbi, *Barrelled Weakly Köthe-Orlicz Summable Sequence Spaces*. Mathematics. **12**(1), (2024), 88.  
<https://doi.org/10.3390/math12010088>
- [3] H. Apiola, *Duality between space of  $p$ -summing operators and characterization of nuclearity*. Math. Ann. **219** (1974), 53-64.
- [4] J. Bonet, A. Defant, *Projective tensor products of distinguished Fréchet spaces*. Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A **85**, (1985), 193-199.
- [5] J. Bonet, W. J. Ricker, *Operators acting in sequence spaces generated by dual Banach spaces of discrete Cesàro spaces*. Proc. Funct. Approx. Comment. Math. **64**, (2021), 109-39.
- [6] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Livre V. Espaces vectoriels topologiques*, Paris, Hermann, (1953, 1955).
- [7] P. P. Carreras, J. Bonet, *Barrelled Locally Convex Spaces*, North-Holland Mathematics Studies, 131, 1987.
- [8] P. Chandra, and B. C. Tripathy, *On generalized Köthe-Toeplitz duals of some sequence spaces*, Indian J. Pure Appl. Math, **33**, (2002), 1301–1306.
- [9] J. S. Cohen, *Absolutely  $p$ -summing,  $p$ -nuclear operators and their conjugates*. Math. Ann. **201**, (1973), 177-200.
- [10] D. W. Dean, *The equation  $L(E, X^{**}) = L(E, X)^{**}$  and the principle of the local reflexivity* Proc. Amer. Math. Soc., **40** (1973), 146-148.
- [11] N. De Grande-De Kimpe, *Generalized Sequence spaces*, Bull. Soc. Math. Belgique, **23** (1971), 123-166.
- [12] O. Duyar, *On some new vector valued sequence spaces  $E(X, \lambda, p)$* . AIMS Mathematics. **8**(6), (2023), 13306-13316. DOI : 10.3934/math.2023673.
- [13] M. Florencio, Pedro J. Paúl, *Barrelledness conditions on certain vector valued sequence spaces*, Arch. Math. (Basel) **48** (1987), 153-164.

- [14] M. Florencio, Pedro J. Paúl, *Una representacóin de ciertos  $\epsilon$ -productos tensoriales*, Actas de las Jornadas Matematicas Hispano Lusas. Murcia (1985), 191–203.
- [15] M. Florencio, Pedro J. Paúl, *La propiedad AK en ciertos espacios de sucesiones vectoriales*, Proc. Eleventh Spanish-Portuguese Conference on Mathematics. 1, Dep. Mat. Univ. Extremadura, **18** (1987), 197–203.
- [16] M. Florencio, Pedro J. Paúl, *A note on  $\lambda$ -multiplier convergent series*, Casopis Pest. Mat., **113** (1988), 421-428.
- [17] P. Foralewski, and J. Kończak, *Orlicz-Lorentz function spaces equipped with the Orlicz norm*, Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Físicas y Nat. Ser. A Mat. **117**, (2023) 120.
- [18] J. H. Fourie, *Barrelledness conditions on generalized sequence spaces*, South African J. Sci. **84** (1988), 346-348.
- [19] D. Ghosh, P. D. Srivastava, *On some vector valued sequence space using Orlicz function*. Glansk Matematicki. **34**, (1999), 253-261.
- [20] H. Jarchow, *Locally Convex Spaces*, B. G. Teuber Stuttgart (1981).
- [21] P. Kamthan, and M. Gupta, *Sequence Spaces and Series*; Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics; M. Dekker : New York, NY, USA, 1981.
- [22] T. Kōmura, Y. Kōmura, *Sur les espaces parfaits de suites et leurs généralisations*, J. Math. Soc. Japon, **15** (1963), 319-338.
- [23] G. Köthe, *Topological Vector Spaces I and II*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1979).
- [24] L. Oubbi, *Counter-examples to some assertions of C. Bosh and J. Kucera*, Pub. Math. E.N.S. (**5**)(1988-89), 39-43.
- [25] L. Oubbi, M. A. Ould Sidaty, *Dual space of certain locally convex spaces*, Revista de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza. **59** (2004), 79-88.
- [26] L. Oubbi, M. A. Ould Sidaty, *Reflexivity of spaces of weakly summable sequences*, Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat. Vol. **101** (1), (2007), pp. 5162.
- [27] M. A. Ould Sidaty, *Nuclearity of certain vector-valued sequence spaces* Revista de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza **62** (2007), 81-89.
- [28] M. A. Ould Sidaty, *Réflexivité et propriété AK dans certains espaces de suites sommables*, Thèse de doctorat d'Etat. Faculté des sciences Rabat (2005).
- [29] N. P. Pahari, *Some Classical Sequence Spaces and their Topological Structures*. em Journal of Advanced College of Engineering and Management. **1**, (2016), 59–65.
- [30] E. Pietsch, *Nuclear locally convex spaces*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1972).
- [31] K. Raj, A. Choudhry, *Köthe-Orlicz vector-valued weakly sequence spaces of difference operators*. Methods of Functional Analysis and Topology. **Vol 25 no. 2**, (2019), 161-176.

- [32] R. C. Rosier, *Dual space of certain vector sequence spaces*, Pacific J. Math., **46** (1973), 487–501.
- [33] A. P. Robertson and W. J. Robertson, *Topological Vector Spaces*, Cambridge University Press (1964).
- [34] W. Rudin, *Functional analysis*, Vol. 25 (First ed.). New York : McGraw-Hill, (1973).
- [35] S. Saxon, *Non-Barreled Dense  $\beta\varphi$  Subspaces*, J. Math. Anal. Appl. **196** (1995), 428-441.
- [36] H. H. Schaefer, *Topological Vector Spaces*, Springer-Verlag, Berlin (1971), 3rd print.
- [37] M. A. O. Sidaty, *Reflexivity of vector-valued Köthe-Orlicz sequence spaces*, Turk. J. Math. **42**, (2018), 911–923.
- [38] M. A. O. Sidaty, *Nuclearity of a Class of Vector-valued Sequence Spaces*. European Journal of Pure and Applied Mathematics. **16**(3), (2023),1762-1771.
- [39] R. Soualmia, D. Achour, E. Dahia, *Strongly  $(p, q)$ -Summable Sequences*. Filomat. **34 :11**, (2020), 3627-3637. <https://doi.org/10.2298/FIL2011627S>.
- [40] J. Taskinen, *Examples of non-distinguished F chet spaces*, Ann. Fenn. Math. **14** (1989), 75-88.
- [41] B. Tsirulnikov, *Quasi-distinguished and boundedly completed locally convex spaces*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. (Esp.) **75** (3) (1981), 635-646.
- [42] A. Wilansky, *Modern Methods in Topological Vector Spaces*, Dover Publications inc. Mileola. New York (2013).
- [43] Yau-Chuen Wong, *Schwartz Spaces, Nuclear Spaces and Tensor Products*, Lectures Notes 726. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1979).

## Résumé

Dans cette thèse, nous nous concentrons sur diverses notions liées à la dualité dans des espaces de suites sommables à valeurs vectorielles, avec des poids dans le  $\alpha$ -dual d'un espace de suites scalaire normal  $\Lambda$ . Nous explorons des concepts tels que la réflexivité, le tonnelage et les espaces distingués. Une nouvelle notion des espaces distingués est introduite et caractérisée dans certains des espaces de suites considérés, avec un exemple illustratif distinguant cette notion de celle classique.

Nous examinons également les suites faiblement Köthe-Orlicz sommables dans un espace localement convexe séparé, avec une fonction d'Orlicz  $\varphi$  et un espace de suite normal  $\Lambda$ . Nous déterminons le dual topologique de l'espace  $\Lambda_\varphi[E]$  muni d'une topologie localement convexe séparé, en termes de suites fortement Köthe-Orlicz sommables à valeurs dans le dual topologique  $E'$  de  $E$ ; ce qui nous a permis de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que  $\Lambda_\varphi[E]$  soit tonnelé ou quasi-tonnelé, nous contribuons ainsi à la compréhension des différents espaces de suites à valeurs vectorielles et de leurs propriétés topologiques.

De plus, dans cette thèse, nous traitons deux notions de duales d'espace de suites de Köthe-Orlicz sommables à valeurs dans un espace localement convexe, définie par une fonction d'Orlicz  $\varphi$  et un espace de suites parfait  $\Lambda$ . Nous explorons les propriétés de l'espace vectoriel de toutes ces suites muni d'une topologie localement convexe séparée. Sous certaines conditions, nous décrivons les formes linéaires continues sur  $\Lambda_\varphi\{E\}$ , déterminant ainsi son dual topologique. Les résultats obtenus améliorent certains travaux antérieurs et sont soutenus par des exemples tout au long de cette thèse.

**Mots-clefs** : Espace de suites, sommabilité, propriété AK, dualité, réflexivité, espace tonnelé, espace distingué.

## Abstract

In this thesis, we focus on various notions related to duality in vector-valued summable sequence spaces, with weights in the  $\alpha$ -dual of a normal scalar sequence space  $\Lambda$ . We explore concepts such as reflexivity, barrelledness, and distinguished spaces. A new notion of distinguished spaces is introduced and characterized in some of the sequence spaces considered, with an illustrative example distinguishing this notion from the classical one.

We also examine weakly Köthe-Orlicz summable sequences in a separated locally convex space, with an Orlicz function  $\varphi$  and a normal sequence space  $\Lambda$ . We determine the topological dual of the space  $\Lambda_\varphi[E]$  endowed with a separated locally convex topology, in terms of strongly Köthe-Orlicz summable sequences valued in the topological dual  $E'$  of  $E$ ; this allowed us to provide necessary and sufficient conditions for  $\Lambda_\varphi[E]$  to be barrelled or quasi-barrelled, thus contributing to the understanding of different vector-valued sequence spaces and their topological properties.

Moreover, in this thesis, we address two notions of duals of Köthe-Orlicz summable sequence spaces valued in a locally convex space, defined by an Orlicz function  $\varphi$  and a perfect sequence space  $\Lambda$ . We explore the properties of the vector space of all such sequences endowed with a separated locally convex topology. Under certain conditions, we describe the continuous linear forms on  $\Lambda_\varphi\{E\}$ , thereby determining its topological dual. The results obtained improve upon some previous works and are supported by examples throughout this thesis.

**Keywords** : Sequence space, summability, AK property, duality, reflexivity, barrelled space, distinguished space.