

# THESE

En vue de l'obtention du : **DOCTORAT**

Structure de Recherche: Physique des Hautes Énergies - Modélisation et Simulation

Discipline : Physique

Spécialité : Physique des Hautes Énergies / Physique de la Matière et de rayonnement

Présentée et soutenue le 30/12/2021 à 10h30

Par :

**Mostafa BOUSDER**

## Modélisation de la Matière noire, Énergie noire et Trous noirs via la correspondance AdS-CFT

JURY.

Mohammed DAOUD	PES, Université Ibn Tofail – Kénitra, <b>Président</b> Faculté des Sciences.
Mostafa NASSIK	PES, Université Ibn Zohr - Agadir, <b>Rapporteur/Examineur</b> Faculté des Sciences.
Ahmed KASSOU OU ALI	PES, Université Mohammed V – Rabat, <b>Rapporteur/Examineur</b> Faculté des Sciences.
Rachid AHL LAAMARA	PH, Université Mohammed V – Rabat, <b>Rapporteur/Examineur</b> Faculté des Sciences
Taoufik OUALI	PES, Université Mohammed Premier - Oujda, <b>Examineur</b> Faculté des Sciences.
Lalla Btissam DRISSI	PH, Université Mohammed V – Rabat, <b>Examinatrice</b> Faculté des Sciences.
Zoubida SAKHI	PH, Université Hassan II de Casablanca, <b>Examinatrice</b> Faculté des Sciences Ben M'Sik .
Mohamed BENNAI	PES, Université Hassan II de Casablanca, <b>Co-Directeur de thèse</b> Faculté des Sciences Ben M'Sik.
EL Hassan SAIDI	PES, Université Mohammed V – Rabat, <b>Directeur de thèse</b> Faculté des Sciences.

Année Universitaire : 2020/2021

# Table des matières

Remerciement	6
Résumé de la thèse	8
Liste des publications	9
Constantes et abréviations	10
Introduction générale	11
<b>1 De la gravitation vers la correspondance AdS-CFT</b>	<b>14</b>
1.1 Introduction à la Relativité Générale	14
1.1.1 Rappel historique de la gravitation	14
1.1.2 Introduction à la Relativité Générale	14
1.1.3 Relativité Générale sur une variété riemannienne	15
1.2 Modèles cosmologiques d'Univers	17
1.2.1 Introduction de la cosmologie	17
1.2.2 Friedmann et modèle standard	18
1.2.3 Espace-temps Anti-de Sitter	20
1.2.4 Univers en expansion	21
1.2.5 Modèle $\Lambda$ CDM	22
1.3 Généralité sur la matière noire et l'énergie noire	22
1.3.1 Matière noire	22
1.3.2 Énergie noire	23
1.4 Problèmes du modèle standard	24
1.4.1 Problème de $\Lambda$ CDM	24
1.4.2 Problème d'horizon	24
1.5 Passage conforme de la gravité modifiée	25
1.6 La dualité AdS/CFT	26
1.7 Horizon et ombre de trou noir	28
1.8 Conclusion	30
<b>2 Un nouveau modèle unifié de matière noire et d'énergie noire dans la gravité <math>f(\mathbf{R})</math></b>	<b>31</b>
2.1 Introduction	31

2.2	La gravitation $f(R, \phi)$ . . . . .	32
2.3	Gravité $f(R, \phi)$ topologique . . . . .	36
2.4	Densités dans la gravité $f(R, \phi)$ . . . . .	39
2.5	Les champs caméléons en gravité $R^2$ . . . . .	40
2.6	Couplage minimal à la gravité d'Einstein-Gauss-Bonnet . . . . .	43
2.7	Mécanisme caméléon . . . . .	45
2.8	Solutions de vide à symétrie maximale . . . . .	47
2.9	Conclusion . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Intrication des trous noirs d'Einstein-Gauss-Bonnet</b>	<b>50</b>
3.1	Introduction . . . . .	50
3.2	Intrication sur le trou noir Kerr-Newman . . . . .	50
3.3	Trou noir dans la gravité d'Einstein-Gauss-Bonnet . . . . .	53
3.4	Intrication des particules dans le trou noir EGB . . . . .	54
3.5	Ponts ER et informations quantiques . . . . .	57
3.6	Ombre de trou noir EGB . . . . .	59
3.7	Compressibilité en processus isobare . . . . .	62
3.8	Conduction thermique en processus isobare . . . . .	63
3.9	Conclusion . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Géométrisation de fond d'AdS dans la gravité quantique</b>	<b>67</b>
4.1	Introduction . . . . .	67
4.2	Gravité topologique et diagrammes de Penrose . . . . .	67
4.2.1	Champs de gravité . . . . .	67
4.2.2	Solution des équations de champ avec deux densités . . . . .	72
4.3	Deux CFTs dans le bulk AdS . . . . .	73
4.3.1	L'espace $AdS_2$ du trou noir . . . . .	75
4.4	Deux horizons dans la gravité quantique . . . . .	77
4.5	Projection stéréographique de CFT sur AdS . . . . .	78
4.6	Correspondance ER=EPR de fibration de Hopf . . . . .	79
4.7	Conclusion . . . . .	85
	<b>Conclusion générale</b>	<b>86</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>88</b>
	<b>Annexe</b>	<b>96</b>
4.8	Contribution I : Un nouveau modèle unifié de matière noire et d'énergie noire.	96
4.9	Contribution II : Particule-antiparticule dans le trou noir d'Einstein-Gauss-Bonnet chargé 4D. . . . .	114
4.10	Contribution III : Trou noir 4D Einstein-Gauss-Bonnet-AdS chargé dans processus isobare : conduction thermique, compressibilité et distribution Bose Einstein. . . . .	121
4.11	Contribution IV : Trou noir 4D Einstein-Gauss-Bonnet chargé : solutions de vide, Horizon de Cauchy, thermodynamique. . . . .	133

4.12 Contribution IV : Trou noir 4D Einstein-Gauss-Bonnet chargé : solutions de vide, Horizon de Cauchy, thermodynamique. . . . . 141

# Table des figures

1.1	Exemples d'ombres du trou noir Kerr-dS pour différents paramètres de rotation et angles d'inclinaison. Du panneau gauche au panneau droit, l'angle d'inclinaison prend respectivement $0$ , $\pi/4$ et $\pi/2$ . . . . .	30
2.1	$\omega = -\omega_{DE}$ vs $a$ . . . . .	35
2.2	$\omega = -\omega_{DE}$ vs temps . . . . .	36
2.3	La sphère de CFT existe dans le bulk d'AdS. L'existence des théories $f(R)$ et $F(R)$ respectivement dans AdS et CFT. . . . .	37
2.4	le potentiel effectif vs $\rho$ . . . . .	46
3.1	La sommation des charges $q_-$ qui sont placés sur l'horizon interne, avec les charges $q_+$ qui sont placés sur l'horizon externe. . . . .	56
3.2	Trou de ver entre deux trous noirs intriquées A et B. . . . .	58
3.3	Les trajectoires des photons à l'extérieur de trou noire. Le couleur jeune représente la sphère des photons. La résistance thermique existe entre l'horizon et la sphère des photons. . . . .	65
4.1	Diagramme de Penrose d'un trou noir de Schwarzschild. . . . .	68
4.2	Exemple de diagramme de Penrose pour la solution singulière du trou noir AdS-EGB, (modified gravity). . . . .	69
4.3	Diagramme de Penrose de la géométrie de Schwarzschild complète et analytiquement étendue. . . . .	69
4.4	Diagramme de Penrose d'un trou noir de Reissner-Nordström. . . . .	70
4.5	Diagramme de Penrose d'un trou noir de Kerr. . . . .	71
4.6	La figure représente la connexion entre le trou noir et matière noire. Il y a un transfert d'informations sur les trous noirs à travers le trou de ver, cette information s'accumule sous la forme d'une masse (matière noire) dans un région fermée et extrême du trou de ver. . . . .	83

# Remerciement

Ce mémoire a été effectué au sein du laboratoire de Physique des Hautes Énergies, Simulation et Modélisation à la Faculté des Sciences de Rabat sous la direction de Monsieur le Professeur **EL Hassan SAIDI**. Je souhaite remercier en quelques lignes tout ceux qui ont de loin ou de près contribué à l'aboutissement de ce travail.

Commençons par le Professeur **EL Hassan SAIDI** directeur du laboratoire de Physique des Hautes Énergies, Simulation et Modélisation que je veux remercier pour la grande liberté qu'il m'a laissée pour la réalisation de ce travail.

Je tiens également à remercier chaleureusement tout particulièrement mon encadrant le Professeur **Mohamed BENNAI**, pour son encadrement, son rigueur et son souci de clarté qui m'ont aidé à aller le plus loin possible. Grand merci de m'avoir aidé à faire mes premiers pas dans le monde de la recherche. Veuillez agréer, Monsieur, mes salutations distinguées et mon profond respect.

Je tiens aussi à remercier infiniment les membres de jury, pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à mon travail en acceptant de faire partie de ce jury. Un très grand merci à **Mohammed DAOUD** pour avoir accepté de présider ; à **Mostafa NASSIK**, **KASSOU OU ALI** et **Rachid AHL LAAMARA** pour avoir endossé le rôle de rapporteurs, et à **Taoufik OUALI**, **Lalla Btissam DRISSI** et **Zoubida SAKHI** pour être venus en tant qu'examineurs. Vous avez apparemment aimé lire mon manuscrit, ce qui fait énormément plaisir : merci à vous tous pour votre intérêt et vos questions, en espérant pouvoir interagir avec vous par la suite.

Mes remerciements s'étendent également à tous les membres de la communauté éducative du laboratoire de Physique des Hautes Énergies, Simulation et Modélisation.

J'ai également le plaisir de remercier très vivement **Zoubida SAKHI**. Je tiens aussi à remercier infiniment le Professeur **Rachid AHL LAAMARA**, pour ses conseils et ses encouragements tout au long de ce travail. Merci aussi pour le temps précieux que tu nous as consacré tout au long de ces années. Veuillez agréer, Monsieur, l'expression de ma profonde gratitude.

Je tiens également à remercier chaleureusement mon encadrant en Licence Monsieur le Professeur **Mostafa NASSIK**. J'adresse également mes sincères remerciements à Monsieur le

Professeur **M. Massaq**, Professeur de l'enseignement supérieure à la Faculté des Sciences Agadir, pour ses encouragements et sa sollicitude à mon égard.

Un grand merci à tous ceux qui m'ont accompagné, soutenu ou poussé, tout au long de cette aventure, aussi à tous ceux qui l'ont rendu plus agréable.

Quant à mes parents, c'est à vous que je dédie ce manuscrit : je crois que cela suffit à exprimer la faveur que je vous dois. Grand merci pour l'amour que vous m'avez apporté, votre sacrifice et la curiosité que vous m'avez toujours encouragée à cultivé.

# Résumé de la thèse

Ce manuscrit de thèse présente une construction analytique des modèles gravitationnels, qui permet d'étudier la partie sombre de l'Univers. Commenant par la matière noire, énergie noire puis les trous noirs. La technique d'analyse se divise en deux parties : La première concerne la gravité classique de type  $f(R)$  et de type EGB. Dans le cadre de  $f(R)$ , on va voir que la géométrisation de courbure causée par la présence de la matière noire est reliée avec l'expansion accélérée de l'Univers décrit par l'énergie noire. A ce niveau on arrive à modéliser une nouvelle unification théorique de la matière noire et énergie noire à 5 dimensions. La deuxième étude, qui analyse les singularités dans un espace AdS dual avec CFT par la gravité quantique. Cette étude va nous permettre d'étudier l'intrication des particules et antiparticules sur les horizons. L'étude de la géométrie et la topologie des horizons montre qu'il existe des connecteurs qui permettent de créer l'intrication. Dans ce cas, on arrive à identifier cette connexion comme un pont de ER, dans le cadre de la dualité ER=EPR. On va montrer un passage entre la gravité topologique EGB et la gravité quantique dans un espace-temps AdS avec des singularités. Ce passage est vu comme une projection stéréographique de CFT sur AdS, ce résultat est équivalent avec le principe holographique.

Mots clés : Matière noire, Énergie noire, Trou noirs, gravitation, Galaxies, Gravité quantique, le principe holographique, Gravité  $f(R)$ , Gravité EGB, Intrication quantique, ER=EPR.

# Liste des publications

Les travaux présentés dans cette thèse ont donné lieu à plusieurs articles de recherche dont voici la liste :

Bousder, M., Sakhi, Z., & Bennai, M. (2020). *A new unified model of dark matter and dark energy in 5-dimensional  $f(R, \phi)$  gravity*. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 17(13), 2050183.

Bousder, M., & Bennai, M. (2021). *Particle-antiparticle in 4D charged Einstein-Gauss-Bonnet black hole*. Physics Letters B, 817, 136343.

Bousder, M., & Bennai, M. (2021). *Charged 4D Einstein-Gauss-Bonnet-AdS black hole in isobaric process : Thermal conduction, compressibility and Bose Einstein distribution*. Nuclear Physics B, 969, 115476.

Bousder, M., El Bourakadi, K., & Bennai, M. (2021). *Charged 4D Einstein-Gauss-Bonnet black hole : Vacuum solutions, Cauchy horizon, thermodynamics*. Physics of the Dark Universe, 100839.

El Bourakadi, K., Bousder, M., Sakhi, Z., & Bennai, M. (2021). *Preheating and reheating constraints in supersymmetric braneworld inflation*. The European Physical Journal Plus, 136(8), 1-19.

# Constantes et abréviations

## Constantes fondamentales :

Constante de Newton :  $G_N = 6,6742 \cdot 10^{-17} N \cdot km^2 \cdot kg^{-2}$

Vitesse de la lumière :  $c = 3 \times 10^5 km/s$

Masse de soleil :  $M_{\odot} = 1,989 \times 10^{30} kg$

Constante de Planck  $\hbar = 6.62 \times 10^{-34} m^2 kg \cdot s^{-1}$

Constante de Boltzmann  $k_B = 1.38 \times 10^{-23} m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$

## Abréviations :

EGB : Einstein-Gauss-Bonnet

QFT : Conformal field theory

$\Lambda$ CDM : Lambda - matière noire froide

AdS : Espace anti de Sitter

ER : Einstein-Rosen

EPR : Einstein-Podolsky-Rosen

FLRW : Friedmann -Lemaitre -Robertson -Walker

EH : Einstein-Hilbert

RN : Reissner-Nordström

TFD : Thermofield Double State

EE : L'entropie d'intrication

JT : Jackiw-Teitelboim

BH : Bekenstein-Hawking

RT : Ryu-Takayanagi

# Introduction générale

La Mécanique quantique et la Relativité générale sont les deux piliers de la physique, mais elles ne sont pas conciliées. L'enjeu d'une gravitation quantique est en un sens celui de l'unification. Mais, plus profondément encore, c'est celui de la cohérence. Dans certaines circonstances, les petits trous noirs ou l'univers primordial, la physique convoquée doit être à la fois quantique et relativiste. Dans ces situations, le recours à une théorie quantique de l'espace-temps n'est pas un luxe lié au fantasme unificateur, mais une nécessité conceptuelle. Il existe de nombreuses approches pour tenter de résoudre ce problème extraordinairement difficile. Les observations de la rotation des galaxies et de mirage gravitationnel, indiquent la présence d'une nouvelle masse cachée dans les galaxies. Elle n'interagit ni avec les rayonnements ni avec la matière, mais peut être détectée par ses effets gravitationnels, cette masse est appelée matière noire (DM). Le modèle  $\Lambda$ CDM (ou bien le modèle standard du Big Bang) désigne un modèle cosmologique, paramétré par une constante cosmologique  $\Lambda$  associée à la matière noire froide, c'est le modèle le plus efficace qui rend compte des propriétés du cosmos : la structure à grande échelle de l'Univers observable et la distribution des galaxies, l'abondance des éléments légers (hydrogène, hélium et lithium) et l'expansion de l'univers. Le modèle  $\Lambda$ CDM suppose que la théorie de la relativité générale décrit correctement la gravité à l'échelle cosmologique. Cependant, le modèle  $\Lambda$ CDM présente plusieurs problèmes, comme la valeur de la constante cosmologique, le problème d'horizon et le problème densité d'énergie de vide [1]. La cosmologie standard basée sur la relativité générale est une description très réussie de l'Univers que nous observons

De nombreuses théories alternatives en cosmologie et en physique des particules ont été élaborées pour résoudre ces deux problèmes : Matière noire et énergie noire. Certaines théories introduisent un champ scalaire dans le cadre de la modification de la relativité générale, pour expliquer l'expansion accélérée de l'Univers. , bien que des solutions cosmologiques ont été étudiées aussi dans les théories alternatives de la gravité. Cependant, la nécessité de résoudre le problème d'horizon, pour trouver un mécanisme viable pour générer des fluctuations de densité évoluant dans les structures que nous voyons aujourd'hui (galaxies, amas, supers-amas et vide...), ont motivé la recherche au-delà du big bang [2]. Les formalismes  $f(R)$  dérivant l'équation du champ gravitationnel de l'action. Il existe d'autres types de gravité  $f(R)$ , par exemple les modèles  $f(R)$  braneworld [3] et aussi la gravité holographique  $f(R)$  [4].

La relativité générale implique que l'information pourrait fondamentalement disparaître dans un trou noir, suite à l'évaporation de l'information [5]. Cette perte d'information implique une non-réversibilité (un même état peut provenir de plusieurs états différents), et une évolution non unitaire des états quantiques, en contradiction fondamentale avec les postulats de la mécanique quantique [6]. En 2019, Penington a découvert une classe de géométries

spatio-temporelles semi-classiques qui avaient été négligée par Hawking et les chercheurs ultérieurs [7, 8]. Penington et al. ont calculé l'entropie à l'aide de l'astuce du repère, et ont montré que pour des trous noirs suffisamment anciens, il faut considérer des solutions dans lesquelles les répliques sont reliées par des trous de ver. L'inclusion de ces géométries des trous de ver empêche l'entropie d'augmenter indéfiniment [9, 10]. À ce jour, plusieurs études ont étudié la théorie holographique [11, 12]. Cela a été essentiellement trouvé en se souvenant de l'entropie d'un trou noir : la formule de Bekenstein-Hawking  $S_{BH} = \frac{Area(\Sigma)}{4G_N}$ . On rappelle la formule d'entropie d'intrication holographique introduite par Ryu et Takayanagi [13] :  $S_{EE} = \min \frac{Area(\gamma)}{4G_N^{d+1}}$ , où  $\Sigma$  est l'horizon,  $\gamma$  est la surface de bulk et  $G_N$  est la constante de

Newton. Ryu et Takayanagi ont proposés que l'entropie d'intrication associée à une région spatiale dans un CFT holographique est donnée par la surface minimale particulière dans la géométrie double. Selon cette formule, les degrés de liberté contenus dans une certaine région de gravité sont proportionnels à son aire de l'horizon des événements au lieu du volume. Cette correspondance entre une quantité géométrique et une donnée microscopique est le concept clé de l'holographie. La correspondance AdS/CFT [14] est une conjecture proposée par J. Maldacena reliant deux types de théories : les théories conformes des champs (CFT) occupent un côté de la correspondance ; ce sont des théories quantiques des champs qui incluent des théories similaires à celles de Yang-Mills qui décrivent des particules élémentaires. D'autre part, les espaces anti-de-sitters (AdS) sont des théories de la gravité quantique, formulées en termes de théorie des cordes (ou théorie M). Plus récemment, la notion d'entropie d'intrication holographique étendue propose de relier le QFT holographique aux modèles  $f(R)$  [15, 16].

Dans les développements récents de l'extension non triviale de la théorie de Lovelock, la théorie d'Einstein-Gauss-Bonnet (EGB) [17], fournit de nouvelles informations sur la théorie de la gravité à 4 dimensions [18]. Leur idée est qu'avant de prendre la limite  $D \rightarrow 4$ , ils ont multipliés le terme GB par le facteur  $1/(D-4)$ . Le facteur divergent  $1/(D-4)$  est annulé par les contributions nulles de GB, ce qui conduit à une théorie de la gravité avec seulement deux degrés de liberté dynamique, ce qui est en contradiction avec le théorème de Lovelock [19] qui décrit la gravité à  $D \geq 5$ . Lorsque la gravité est prise en considération, les vides sont ceux avec des espaces à symétrie maximale, à savoir les espaces-temps de de-Sitter, Minkowski et anti-de Sitter. La gravité EGB admet deux solutions de vide à symétrie maximale comme le vide d'Einstein en  $\alpha \rightarrow 0$ , et le vide de Gauss-Bonnet en  $\alpha$  [20, 21]. Dans les premières études [22], incluant l'effet de la variation de la constante cosmologique. Juan Maldacena et Leonard Susskind, ont conçu une théorie reliant deux phénomènes tous deux découverts par Einstein [23] : les ponts Einstein-Rosen (ou trous de ver) et l'intrication quantique. Cette théorie éclaire un problème appelé le paradoxe EPR qui met en évidence la non-localité de la mécanique quantique, qu'il oppose au principe de localité qui est à la base de la théorie de la relativité. Cependant, cette correspondance ER=EPR n'est démontrée que dans un modèle avec un champ gravitationnel en l'absence de masse. La gravité d'Einstein ne permet pas d'expliquer des phénomènes physiques comme la matière et l'énergie noire. Le premier objectif de cette thèse est d'essayer d'interpréter la matière noire et l'énergie noire dans le cadre des modèles qui modifient la relativité générale. Le modèle le plus utilisé dans ce cas est la théorie de la gravité  $f(R)$ . On suppose que la constante de Boltzmann  $k_B$ , la constante

de Planck réduite  $\hbar$ , la onstante de Newton  $G_N$  et la vitesse de la lumière  $c$ , sont telles que :  
 $k_B = \hbar = G_N = c = 1$ .

# Chapitre 1

## De la gravitation vers la correspondance AdS-CFT

### 1.1 Introduction à la Relativité Générale

#### 1.1.1 Rappel historique de la gravitation

La force gravitationnelle attire tous les objets massifs les uns vers les autres. Les interactions gravitationnelles sont supposées aller très loin et voyager avec la vitesse la plus rapide disponible, c'est la vitesse de la lumière. Cela signifie que la gravité doit être propagée par des particules sans masse, appelées gravitons [26]. Deux galaxies séparées par un univers entier ressentent l'attraction gravitationnelle de l'autre, due au champ gravitationnel présent partout. La gravitation est décrite par la théorie de la relativité générale d'Einstein. Lorsque nous vivons dans trois dimensions spatiales et que nous ajoutons la dimension temporelle. Selon Einstein, cet espace-temps n'est plus une sorte d'arrière-plan absolu, dans lequel nous pouvons placer des particules massives et ensuite calculer les interactions entre elles alors que l'espace-temps lui-même est inchangé. Au contraire, c'est la distribution de masse qui déforme l'espace-temps. Les équations d'Einstein nous disent que la géométrie, ou courbure, de l'espace-temps est proportionnelle à sa distribution de masse. Pour une distribution de masse donnée, nous devons trouver la géométrie d'espace-temps correspondante selon les équations d'Einstein.

#### 1.1.2 Introduction à la Relativité Générale

La relativité générale (GR) peut être considérée comme une théorie géométrique de la gravitation à partir de laquelle on peut étudier la géométrie de l'espace-temps de l'univers. En relativité restreinte, nous limitons aux systèmes de coordonnées correspondant aux référentiels inertiels. Les lois de la physique devraient présenter une covariance particulière, c'est-à-dire prendre la même forme (c'est le principe de la relativité). La procédure suivante peut être utilisée pour convertir ces lois de la physique en lois généralement covariantes : 1. Remplacez la métrique de Minkowski par une métrique courbe de l'espace-temps. 2. Remplacer les dérivées partielles par des dérivés covariants (associés à Connexion Civita). Cette règle

est appelée couplage minimal en analogie avec un règle similaire pour les champs chargés en électrodynamique. 3. Remplacer les indices de base de coordonnées etc. (se référant à un cadre inertiel) avec indices abstraits  $\alpha; \beta$  etc.

### 1.1.3 Relativité Générale sur une variété riemannienne

Soit  $(M_4, g)$  une variété riemannienne munie d'une métrique  $g$  qui représente notre espace temps en 4 dimension qui ressemble localement à  $\mathbb{R}^{1,3}$  supposée différentiable.

Une courbe  $\mathcal{C}$  sur  $(M_4, g)$  est l'image d'une application différentiable :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow (M_4, g) \\ t &\longrightarrow P = \varphi(t) \in \mathcal{C} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Etant donné un paramétrage  $\varphi$  définit dans un système de coordonnées  $\{x^\mu; \mu = 0, \dots, 3\}$ , tel que

$$t \longrightarrow x^\mu = X^\mu(t). \quad (1.2)$$

Soit  $\phi : (M_4, g) \longrightarrow \mathbb{R}$  un champ scalaire définit en chaque point  $P$ . on définit le vecteur tangent

$$\frac{d\phi}{dt} \frac{d}{d\mathcal{C}} = \frac{\partial x^\mu}{\partial t} \frac{d\phi}{dx^\mu} \frac{d}{d\mathcal{C}}. \quad (1.3)$$

On pose  $\frac{d}{dt} \frac{d}{d\mathcal{C}} := X$  On prend  $\frac{\partial x^\mu}{\partial t} = X^\mu$  comme des composantes locales de  $X$  dans la base  $\{e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu; \mu = 0, \dots, 3\}$ , de tout façon quelque soit le champ scalaire  $\phi$ , on peut écrire :

$$X = X^\mu \partial_\mu, \quad (1.4)$$

Dans cette base on peut définir :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad ; (\mu, \nu) = 0, \dots, 3, \quad (1.5)$$

avec  $g_{\mu\nu}$  est la métrique de  $M_4$ . A partir de cette métrique on peut définir les symboles de Christoffel :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda l} (\partial_\mu g_{\nu l} + \partial_\nu g_{\mu l} - \partial_l g_{\mu\nu}). \quad (1.6)$$

On défini aussi le tenseur de courbure ou tenseur de Riemann (noté aussi *Riem.*)

$$R_{\mu\beta\nu}^\alpha = \partial_\beta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\sigma.$$

Le tenseur de Ricci

$$R_{\mu\nu} := R_{\mu\alpha\nu}^\alpha = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda. \quad (1.7)$$

A partir de ce tenseur on eput définir le scalaire de courbure ou le scalaire de Ricci  $R$  obtenu par contraction du tenseur

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.8)$$

Le principe de moindre action  $I$  permet d'établir les équations du champ gravitationnel. L'action générale pour décrire notre Univers avec la matière et la gravitation est tout simplement l'addition d'actions de la matière  $I_m$  et d'actions d'Einstein-Hilbert  $I_{HE}$  :

$$I = I_m + I_{HE}, \quad (1.9)$$

$$I_m = \int d^4x \sqrt{-g} L_m(g^{\mu\nu}, \Psi), \quad (1.10)$$

avec  $\Psi$  est le champ de matière, et

$$I_{HE} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (1.11)$$

avec  $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} (m^{-1} \cdot Kg^{-1} \cdot s^2)$  est une constante qui est reliée à la constante  $G = 6.673 \times 10^{-11} N \cdot m^2 Kg^{-1}$  de la gravitation universelle.

Principe de moindre action consiste à évaluer une variation de l'action  $\delta I$  lorsque les  $\delta g_{\mu\nu}$  varient, et à trouver une relation sur les  $g_{\mu\nu}$  qui rend cette action stationnaire  $\delta I = 0$ , soit

$$\delta I = \delta I_{HE} + \delta I_m = 0, \quad (1.12)$$

$$\delta I = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x (\sqrt{-g} \delta R + R \delta \sqrt{-g}) + \int d^4x \delta (\sqrt{-g} L_m). \quad (1.13)$$

On a tout d'abord

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}. \quad (1.14)$$

D'après le théorème de Stokes

$$J = \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}. \quad (1.15)$$

A partir de (1.7) on peut écrire

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \delta \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma - \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \delta \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda. \quad (1.16)$$

En utilisant la définition de la dérivée covariante associé à la connexion de Levi-Civita de la métrique

$$D_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \partial_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \delta \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda, \quad (1.17)$$

$$D_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda = \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma \delta \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda - \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda - \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma. \quad (1.18)$$

En exprime (1.17) et (1.18) sur (1.16) on trouve

$$\delta R_{\mu\nu} = D_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - D_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda. \quad (1.19)$$

La connexion d'une métrique est nulle :

$$D_\lambda g^{\mu\nu} = 0. \quad (1.20)$$

Selon (1.19) et (1.20), la partie (1.15) devient

$$J = \int d^4x \sqrt{-g} [D_\lambda(g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - D_\nu(g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\lambda}^\nu)]. \quad (1.21)$$

Généralement on a pour tout champ de vecteurs  $A^\mu$ , sa dérivée covariante s'exprime

$$D_\mu(A^\mu) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu(\sqrt{-g} A^\mu). \quad (1.22)$$

Remplaçant (1.22) dans (1.21) :

$$J = \int d^4x \partial_\lambda [\sqrt{-g}(g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\lambda} \delta\Gamma_{\mu\sigma}^\sigma)]$$

En intégrant sur le volume  $\Omega$  puis sur le bord  $\partial\Omega$  de  $\Omega$

$$J = \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \int_\Omega d^4x \partial_\lambda(\sqrt{-g} V^\lambda) = \oint_{\partial\Omega} d\Sigma_\lambda \sqrt{-g} V^\lambda = 0. \quad (1.23)$$

Puisque les variations s'annulent sur le bord  $\partial\Omega$

On a encore

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (1.24)$$

En remplaçant (2.54) et (1.24) dans (1.13) :

$$\delta I = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} x \delta g^{\mu\nu} \left[ (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) + \frac{2\kappa^2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g} L_m(g^{\mu\nu}, \Psi)) \right], \quad (1.25)$$

avec  $\kappa^2 = 8\pi G_N$  pour le système ou  $c = 1$ .

Et  $T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} L_m(g^{\mu\nu}, \Psi))}{\delta g^{\mu\nu}}$  est le tenseur impulsion-énergie.

$$\delta I = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} x \delta g^{\mu\nu} \left[ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \kappa^2 T_{\mu\nu} \right]. \quad (1.26)$$

Pour  $\delta I = 0$  on trouve les équations du champ gravitationnel s'écrivent

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa^2 T_{\mu\nu}. \quad (1.27)$$

C'est la forme la plus générale de l'équation d'Einstein.

## 1.2 Modèles cosmologiques d'Univers

### 1.2.1 Introduction de la cosmologie

La cosmologie, en termes simples, peut être considérée comme l'étude de l'univers dans son ensemble : son histoire, son état actuel et son avenir. Il cherche à répondre aux questions

les plus anciennes de l'humanité : comment l'univers est-il né? De quoi est fait l'univers? Que va-t-il nous arriver dans le futur? Il y a encore beaucoup de questions sans réponse qui restent sujettes à d'autres recherches scientifiques et à des débats philosophiques. Après tout, l'univers est richement texturé, avec des structures sur une vaste gamme d'échelles ; les planètes tournent autour des étoiles, les étoiles sont rassemblées dans les galaxies, les galaxies sont liées par gravitation en amas de galaxies, et même les amas de galaxies sont trouvés dans de plus grands superamas. Compte tenu de la richesse et de la complexité de l'univers, la seule façon de condenser son histoire en un livre unique est un processus de simplification impitoyable. Ce n'est que vers la fin du livre que nous examinerons comment des objets relativement petits, tels que les galaxies, les amas et les superamas, se forment à mesure que l'univers évolue. Il est amusant de noter, dans ce contexte, les mots «cosmologie» [28] proviennent de la racine grecque : le mot «kosmos», qui signifie harmonie ou ordre.

### 1.2.2 Friedmann et modèle standard

Tout au long de ce programme de recherche, l'univers est considéré comme un univers spatialement plat, homogène et isotrope, appelé univers Friedmann -Lemaître -Robertson -Walker (FLRW).

On définit tout d'abord un système de coordonnées  $(i = r, \theta, \phi)$ .

Pour résoudre (1.27) il y a plusieurs chemins, nous poursuivrons par les solutions cosmologiques de Friedmann-Lemaître qui sont à la base de la cosmologie moderne, décrit par la métrique suivante :

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (1.28)$$

avec  $a(t)$  représente le facteur d'échelle. et  $k$  prend les valeurs suivantes :

$$k = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ pour } \mathbb{S}^3, \\ 0 \text{ pour } \mathbb{R}^3, \\ -1 \text{ pour } \mathbb{H}^3. \end{array} \right\}, \quad (1.29)$$

A partir de cette métrique on peut calculer les symboles de Christoffel et du tenseur de Ricci, ainsi que la courbure scalaire :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}); \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.30)$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{\dot{a}}{a} g_{ij}; \quad \Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i, \quad (1.31)$$

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a}; \quad R_{00} = - \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2 \frac{k}{a^2} \right]. \quad (1.32)$$

De même manière, on obtient le tenseur d'Einstein

$$G_{00} = -3 \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right), \quad (1.33)$$

$$G_{ij} = \frac{2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k}{a^2} g_{ij} \quad i = j \neq 0. \quad (1.34)$$

A partir de ces données, on peut construire l'équation d'Einstein pour les coordonnées 00 et ij

$$00 : 3 \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) = 8\pi G_N \rho, \quad (1.35)$$

$$ij : \frac{2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k}{a^2} = -8\pi G_N p. \quad (1.36)$$

On définit le paramètre de Hubble  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  (le paramètre de Hubble est liée au facteur d'échelle  $a > 0$ ) pour écrire (1.35) et (1.36) sous la forme des équations plus connus sous le nom d'équations de Friedmann :

$$00 : H^2 = \frac{8\pi G_N}{3} \rho - \frac{k}{a^2}, \quad (1.37)$$

$$ij : 2\dot{H}^2 + 3H^2 = -8\pi G_N p - \frac{k}{a^2}. \quad (1.38)$$

L'équation de Friedmann (1.37) relie explicitement l'évolution du facteur d'échelle  $a(t)$  au contenu énergétique  $\rho$  de l'Univers. On définit l'équation d'état  $\omega(z)$  ( $z$  est le décalage spectral, ou redshift) par

$$p = \omega(z)\rho. \quad (1.39)$$

Dans ce cas on distingue trois cas particuliers :

1- La matière non relativiste n'exerce pas de pression sur son milieu extérieur :

$$\omega(z) = 0 \implies p_m = 0. \quad (1.40)$$

2- La matière relativiste exerce une pression sur son milieu de valeur

$$\omega(z) = 1/3 \implies p_{rad} = \frac{\rho_{rad}}{3}. \quad (1.41)$$

3- Pour la constante cosmologique  $\Lambda$  (le modèle  $\Lambda$ CDM) à une densité d'énergie

$$\omega(z) = -1 \implies p_\Lambda = -\rho_\Lambda. \quad (1.42)$$

On peut régler le paramètre de Hubble par l'équation d'état comme suite

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{2}{3(1+\omega)t}. \quad (1.43)$$

Le paramètre de densité (paramètre sans dimension) est défini comme

$$\Omega(t) = \frac{8\pi G \rho(t)}{3H^2(t)} \text{ et } \Omega_\Lambda(t) = \frac{\Lambda}{3H^2(t)}. \quad (1.44)$$

Dans ce cas la première équation de Friedmann se réécrit

$$\Omega + \Omega_\Lambda + \frac{k}{a^2 H^2} = 1. \quad (1.45)$$

On en déduit que la courbure de l'espace :

$$\begin{aligned}\Omega + \Omega_\Lambda &> 1 \text{ pour } \mathbb{S}^3, \\ \Omega + \Omega_\Lambda &= 1 \text{ pour } \mathbb{R}^3, \\ \Omega + \Omega_\Lambda &< 1 \text{ pour } \mathbb{H}^3.\end{aligned}\tag{1.46}$$

Durant l'évolution de l'univers, les paramètres cosmologiques sont estimés pour l'univers actuel ainsi :  $\Omega_m = \Omega_{\text{baryons}} + \Omega_{DM} = 0,3$ , avec  $\Omega_{\text{baryons}} = 0,03$  représente le paramètre de la matière classique et  $\Omega_{DM} = 0,27$  est le paramètre de densité de la matière noire. Pour le paramètre de l'énergie noire ou constante cosmologique  $\Omega_\Lambda = 0,68$ .

### 1.2.3 Espace-temps Anti-de Sitter

Un espace-temps est dit au maximum symétrique si et seulement s'il est spatialement homogène et isotrope et il a le maximum nombre  $n(n+1)/2$  de vecteurs de Killing [54]. L'espace-temps Anti-de Sitter (AdS) est précisément l'espace-temps à symétrie maximale avec une courbure négative constante. C'est la solution de l'équation d'Einstein du vide à constante cosmologique négative

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\Lambda g_{\mu\nu}, \quad \Lambda < 0.\tag{1.47}$$

La propriété de courbure constante implique que son tenseur de Riemann  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ , son tenseur de Ricci  $R_{\mu\nu}$ , son scalaire de Ricci  $R$  et la constante cosmologique  $\Lambda$ , ont les formes suivantes

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -\frac{1}{l^2}(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}),\tag{1.48}$$

$$R_{\mu\nu} = -\frac{D-1}{l^2}g_{\mu\nu},\tag{1.49}$$

$$R = -\frac{D(D-1)}{l^2},\tag{1.50}$$

$$\Lambda = -\frac{(D-1)(D-2)}{2l^2},\tag{1.51}$$

avec  $l$  est le rayon AdS et  $D$  est la dimension d'espace-temps. Une manière systématique de construire des espace-temps à symétrie maximale avec une courbure négative constante est de considérer l'immersion isométrique d'un hyperboloïde dans un espace-temps plat  $D+1$  avec deux directions et dont la métrique :

$$ds_{D+1}^2 = -dt_0^2 - dt_1^2 + \sum_{i=1}^{D-1} dX_i^2.\tag{1.52}$$

s'identifie alors à la quadrique d'équation  $-t_0^2 - t_1^2 + \sum_{i=1}^{D-1} X_i^2 = -l^2$ .

### 1.2.4 Univers en expansion

L'une des méthodes permettant de déterminer l'expansion de l'univers consiste à calculer l'effet Doppler d'objets distants. En 1929, Hubble découvrit à titre d'observation que les galaxies éloignées s'éloignaient de la terre et que la vitesse de recul était proportionnelle à la distance relative de l'objet [31]. Cela devient connu sous le nom de loi de Hubble et est exprimé comme

$$v = H_0 d \quad (1.53)$$

où  $v$  est la vitesse de l'objet en retrait,  $H_0$  est la constante de Hubble (l'indice 0 fait référence à la valeur actuelle de la quantité  $H$  (1.43)) et  $d$  est la distance relative.

Les objets se dirigeant vers l'observateur produiraient des longueurs d'onde décalées en bleu, tandis que ceux qui s'éloigneraient de l'observateur seraient décalés en rouge dans le spectre. Le décalage spectral, ou redshift  $z$  des objets qui s'éloignent de l'observateur peut être exprimé

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda} \quad (1.54)$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde émise et  $\lambda_0$  est la longueur d'onde reçue.

Le décalage spectral est directement lié à une grandeur expérimentale directement mesurable sur le spectre d'émission des objets distants. En effet, en regardant la position des raies d'absorption et d'émission des objets lointains, on peut en déduire leurs décalages spectraux par rapport aux mêmes éléments chimiques situés sur Terre, au repos. Aux tout premiers instants, l'univers est constitué d'un gaz extrêmement chaud et dense. La matière telle que nous la connaissons aujourd'hui existait à l'époque sous une forme totalement dissociée.

La majeure partie de la matière lumineuse contenue dans l'Univers se trouve dans les étoiles qui forment les structures plus complexes comme les galaxies. Les observations astronomiques ont montrés que les galaxies forment une structure beaucoup plus grandes connues sous le nom de groupes de galaxies. Il y a des indices sur l'existence de méga-grappes de galaxies, mais l'existence de méga-méga-grappes et ainsi de suite. Bien que sur de petites échelles (le système solaire, les galaxies à proximité) la distribution de la matière est non uniforme, on pense qu'à l'échelle d'ensemble Univers la distribution de la matière est très uniforme, c'est-à-dire que l'univers est homogène.

Qui dit que l'Univers est identique dans toutes les directions!. Ces deux propriétés d'homogénéité et d'isotropie forment le *principe cosmologique* qui dit : à tout moment, l'Univers ressemble de toutes les positions dans l'espace, et de toutes les directions dans l'espace en tout point sont équivalents. Toutes les observations cosmologiques faites jusqu'à présent nous disent que l'Univers dans lequel nous vivons est celui dans lequel se trouve le principe cosmologique. Cependant, il y avait des modèles dans lesquels le principe cosmologique est violé, il y a aussi une proposition [29] pour un univers de type fractal.

Dans le modèle cosmologique le plus général, l'Univers est en même temps, avec la matière et le rayonnement, et la constante cosmologique (non nulle). Ainsi, nous considérerons que notre liquide cosmologique contient trois composants : la matière, le rayonnement et une constante cosmologique. Nous supposerons également que les trois composantes n'interagissent pas entre eux, ce qui est une hypothèse raisonnable valable pour la quasi-totalité de l'histoire de l'Univers. Cependant, au début de l'Univers, il y avait une interaction entre la matière et le

rayonnement.

D'autre part, ce que les physiciens peuvent demander, c'est comment notre univers s'est développé et comment tout cela va se terminer. Lorsque Hubble en 1929 a mesuré que les galaxies qui nous entourent s'éloignent de nous, la possibilité d'un univers dynamique a été révélée. Depuis lors, les questions sur le passé, le présent et l'avenir de l'univers ont été posées. Ce genre de questions que les cosmologistes essaient de répondre. La base de tout cela sont les équations d'Einstein. Les modèles Big Bang sont au cœur du modèle cosmologique standard actuel. Le big bang est l'événement qui a lancé notre ère du temps. À cette époque, il y a peut-être 13 milliards d'années, une sorte d'explosion a déclenché l'expansion de l'espace-temps. On pense que l'expansion initiale a été si forte que même aujourd'hui, l'univers continue de se développer. L'espace lui-même éloigne les galaxies situées à différents points de l'espace.

### 1.2.5 Modèle $\Lambda$ CDM

L'accélération pourrait aussi être due à la constante cosmologique  $\Lambda$ , dans les équations de champ d'Einstein (voir l'Eq (1.55)). La constante cosmologique a été introduite par Einstein et incluse dans les équations du champ pour maintenir l'univers statique, mais ensuite été abandonnée. En réalité, l'univers semble loin d'être statique, il subit en effet une expansion accélérée, positive et suffisamment grande !.

On voit que l'introduction d'une constante cosmologique revient à ajouter un nouveau fluide parfait à densité constante  $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G_N}$  et pression négative  $p_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G_N}$ . Nous pouvons voir cela comme une certaine densité d'énergie de vide constante présente dans tout l'univers, même si aucune autre matière n'est présente. Cette énergie de vide est seulement observable par son effet gravitationnel. Un univers dominé par cette énergie de vide aura une accélération positive. Puisque les observations de CMB suggèrent une spatialisation dans la cosmologie,  $k$  est mis à zéro [25]. Les équations de Friedmann (1.35) et (1.36) peuvent à nouveau être facilement résolues [27]. Ce nouveau modèle standard de l'univers, appelé le modèle  $\Lambda$ CDM, peut décrire toutes les observations cosmologiques que nous avons aujourd'hui [27]. Cependant, comme nous n'avons aucune explication physique de cette énergie de vide ou de cette constante cosmologique, plusieurs autres descriptions de l'énergie sombre ont été suggérées.

## 1.3 Généralité sur la matière noire et l'énergie noire

### 1.3.1 Matière noire

Au cours des 70 dernières années, un nouveau paradigme est apparu dans lequel le visible pour nous dans les télescopes actuels ne représente qu'une petite fraction du total quantité présente dans l'univers. La majeure partie de la question semble plutôt être dans une forme qui n'émet pas de lumière, ou du moins très peu. C'est ce qui est dénommé matière noire. À ce jour, la nature de cette composante insaisissable de l'Univers reste un mystère. La première détection de matière noire est attribuée à Zwicky (1933), qui a mesuré la dispersion de vitesse des galaxies dans le groupe Coma et ont trouvé leur les vitesses dépassent

de loin celles qui pourraient être attribuées à la matière lumineuse dans les galaxies elles-mêmes. Le travail de Zwicky en Coma a suivi par Smith (1936) pour le groupe de galaxies de la Vierge. Encore une fois, les vitesses de ses galaxies constituantes indiquent un rapport masse / lumière étonnamment élevé. Babcock (1939) a utilisé la spectroscopie optique pour mesurer la rotation du Galaxie d'Andromède (M31). De la vitesse de la voie lactée et de la M31 l'une à l'autre, Kahn & Woltjer (1959) a estimé la masse du groupe local de galaxies (dans lequel la Voie Lactée et M31 sont les membres dominants). En comparant cela estimer à celle attendue de la matière lumineuse dans ces deux objets, ils ont conclu que la majeure partie de la masse du groupe local devait être sombre. Dans les années 1970, la matière noire est devenue un concept reconnu. Les preuves de la matière noire dans M31 se sont renforcées (par exemple, Rubin & Ford 1970; Roberts & Whitehurst 1975) et les investigations cinématiques d'autres grands disques galactique (Einasto et al. 1974; Ostriker et al. 1974) ont donné des résultats similaires. Les observations ont indiqué que la matière noire était une caractéristique commune parmi les galaxies, mais n'a pas contraint sa distribution spatiale. Ostriker & Peebles (1973) ont montré que les disques galactiques eux-mêmes seraient instables et ont suggérés qu'ils peuvent être entourés par des halos massifs et sphériques. Par conséquent, l'important de concept de halos noirs, que l'on pense être aujourd'hui commun à toutes les galaxies, était né. La dépendance temporelle de la métrique implique que l'univers change sa taille. Des observations récentes ont montré que l'Univers était à la fois plat et accéléré. Cependant, les observations montrent que la vitesse est à peu près constante lorsque la distance du centre de rotation augmente. La matière observable d'une galaxie n'est pas suffisante pour produire les effets de rotation que nous observons. Si une idée de matière noire est prise en compte, cette divergence peut être supprimée. Cette matière noire agit comme un halo, soutenant la galaxie.

### 1.3.2 Énergie noire

D'après des données d'observation récentes de Supernovae Type Ia (SNIa) en 1998 [30], il semble probable que notre Univers à connu une expansion accélérée [31]. Cette découverte, qui a par la suite mené à l'attribution du prix Nobel 2011, a soulevé beaucoup d'autres questions passionnantes. D'où viendrait l'énergie nécessaire pour conduire cette possible expansion accélérée?. L'une des explications est qu'une sorte d'énergie, appelée énergie noire, pourrait en être la cause. Puisque l'énergie noire n'a été ni détectée ni bien compris, il reste hypothétique et constitue un domaine de recherche en cours pour les cosmologistes. On pense que l'énergie noire conduit l'univers à une expansion accélérée au mépris des propriétés attractives gravitationnelles connues du contenu en matière de l'univers.

Il y a quelques candidats pour la nature de l'énergie sombre : l'énergie du vide, la gravité modifiée et les champs scalaires. La gravité modifiée, modifie le modèle gravitationnel d'Einstein, dans le but de marier des observations avec des prédictions, sans avoir à invoquer une matière exotique. Cependant, ce réglage est incroyablement difficile à faire et le dosage fonctionne aussi bien. L'énergie du vide découle du principe d'incertitude de Heisenberg et de son importance pour pour une tranche des particules virtuelles à des distances inférieures à celles de l'échelle de Planck. La somme des états d'énergie pour les particules virtuelles est non nulle. Un effet de ceci peut être observé en plaçant deux plaques avec un potentiel

électrique énorme entre elles, très proches les unes des autres. On observe qu'un courant «sort du vide». Ceci est connu comme l'effet Casimir. Cependant, l'énergie du vide produit des solutions de 60 ordres de grandeur et n'est pas sérieusement considérée comme un candidat.

## 1.4 Problèmes du modèle standard

### 1.4.1 Problème de $\Lambda$ CDM

Le modèle le plus simple qui correspond adéquatement aux nouvelles observations décrites, est le modèle  $\Lambda$ CDM ( $\Lambda$ -Cold Dark Matter) généralement basé sur un champ scalaire appelé inflaton. Cependant, ce modèle n'explique pas l'origine ou la nature de la matière noire et d'énergie noire. La modification la plus simple de (1.9) est d'introduire la constante cosmologique  $\Lambda$  aux équations d'Einstein, en nous donnant

$$I_{\Lambda CDM} = -\frac{M_p^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + I_m. \quad (1.55)$$

Ce modèle introduit pour expliquer l'accélération d'expansion d'univers par l'ajoute d'une constante  $\Lambda$  dans l'action d'Einstein-Hilbert et on fait les calculs en utilisant les résultats de WMAP, on trouve

$$\rho_\Lambda = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \approx 10^{-47} \text{GeV}^4. \quad (1.56)$$

D'autre part, dans le cadre de la théorie quantique des champs

$$\rho_{vac} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{m_p} dk \cdot k^2 \sqrt{k^2 + m^2} \approx 10^{74} \text{GeV}^4. \quad (1.57)$$

L'énergie du vide a été suggérée comme une explication physique de la constante cosmologique. Interpréter la densité d'énergie constante  $\rho_\Lambda$  comme une énergie de vide de champ quantique. L'action classique est conservée (1.9), mais lorsque la théorie physique fondamentale sous-jacente est quantifiée, nous obtenons une densité d'énergie de vide constante. Le seul problème est que cette densité d'énergie de vide est infiniment grande :  $\rho_{vac} \gg \rho_\Lambda$ . Ce modèle avec succès décrit presque toute l'histoire cosmique. Cependant, il souffre de plusieurs problèmes théoriques.

### 1.4.2 Problème d'horizon

L'horizon particulière  $D_H$  est la distance parcourue par la lumière depuis le début de l'univers à l'instant  $t = t_0$  et est définie comme

$$D_H = a \cdot d_H. \quad (1.58)$$

avec

$$d_H = \int_{t_0}^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (1.59)$$

Dans les époques dominées par la radiation que par la matière, il existe des horizons de particules et il existe des régions qui ne peuvent pas interagir. D'autre part, le rayonnement de fond diffus cosmologique (CMB) est presque homogène, c'est-à-dire qu'il a à peu près la même distribution de température dans toutes les directions du ciel. Ce sont les régions qui n'ont pas pu interagir avant la recombinaison (La recombinaison fait référence à une époque où les électrons et les nucléons se combinent pour former des atomes. Avant cela, l'univers était trop chaud pour que les noyaux atomiques se forment). La question se pose donc de savoir comment il est possible d'atteindre l'équilibre thermique en l'absence d'interaction entre ces régions. Un tel problème est appelé problème d'horizon.

## 1.5 Passage conforme de la gravité modifiée

De nombreuses théories de haute énergie et de nombreuses théories gravitationnelles classiques sont formulées en utilisant une transformation conforme mettant en correspondance le référentiel de Jordan (JF) avec le référentiel d'Einstein (EF). L'utilisation de techniques de transformation conformes est devenue largement répandue dans la littérature sur les théories gravitationnelles, sur la cosmologie, et sur les champs scalaires non-couplés. Typiquement, la transformation dans le référentiel d'Einstein est générée par un champ scalaire fondamental déjà présent dans la théorie. La formulation d'une théorie dans le cadre conforme conduit à des départs de la gravité canonique Einstein. Si  $(M_4, g_{\mu\nu})$  est un espace-temps de 4-dimension, elle affecte les longueurs et la norme d'intervalles du temps (espace), mais il laisse les cônes de lumière inchangés : les espaces-temps  $(M_4, g_{\mu\nu})$  et  $(M_4, \tilde{g}_{\mu\nu})$  ont la même *structure causale*.

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x)g_{\mu\nu} \quad (1.60)$$

En notant  $g$  le déterminant  $\det(g_{\mu\nu})$ . Il sera utile de transformation des symboles de Christoffel, tenseur de Riemann et Ricci, et de la courbure de Ricci...(Synge 1955, Birrell et Davies 1982, Wald 1984) :

$$\tilde{g} = \Omega^8(x)g, \quad (1.61)$$

où

$$\Omega(x) = e^\omega, \quad (1.62)$$

est une fonction régulière, non nulle, appelée Weyl ou conforme transformation. le facteur conforme  $\Omega(x)$  de la transformation est aussi une fonction de dilaton  $\phi$ .

Dans le référentiel de Jordan, le champ scalaire provenant de la présence des dimensions supplémentaires avec une énergie cinétique négative ou infinie et un spectre d'énergie non borné, ce qui implique que l'état fondamental est instable (Maeda 1986a; Pang 1986, Sokolowski et Carr 1986, Sokolowski et Golda 1987). Ces défauts sont éliminés par la mise à l'échelle conforme (1.60) de la métrique, L'exigence selon laquelle le système en 4 dimensions doit avoir une énergie positive définie (un argument purement classique) spécifie un facteur conforme unique.

Dans JF la transformation des symboles de Christoffel

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{(\mu\nu)}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\mu}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}). \quad (1.63)$$

De même dans EF

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \longrightarrow \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{\lambda l}(\partial_{\mu}\tilde{g}_{\nu l} + \partial_{\nu}\tilde{g}_{\mu l} - \partial_l\tilde{g}_{\mu\nu}). \quad (1.64)$$

On remplace (1.60) dans (1.64) et on trouve

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \frac{1}{2}g^{\lambda l}\Omega^{-2}(g_{\nu l}\partial_{\mu}\Omega^2 + g_{\mu l}\partial_{\nu}\Omega^2 - g_{\mu\nu}\partial_l\Omega^2), \quad (1.65)$$

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \frac{1}{2}\delta_{\nu}^{\lambda}\Omega^{-2}\partial_{\mu}\Omega^2 + \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\lambda}\Omega^{-2}\partial_{\nu}\Omega^2 - g_{\mu\nu}\Omega^{-2}\partial^{\lambda}\Omega^2. \quad (1.66)$$

D'après (1.62) on a

$$\Omega^{-2}\partial_k\Omega^2 = 2\partial_k \ln \Omega = 2\partial_k\omega. \quad (1.67)$$

En remplaçant (1.67) dans (1.66) et on trouve

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \delta_{\nu}^{\lambda}\partial_{\mu}\omega + \delta_{\mu}^{\lambda}\partial_{\nu}\omega - g_{\mu\nu}\partial^{\lambda}\omega. \quad (1.68)$$

On prend  $\delta_{\nu}^{\lambda}\partial_{\mu}\omega + \delta_{\mu}^{\lambda}\partial_{\nu}\omega = 2\delta_{(\mu}^{\lambda}\partial_{\nu)}\omega$  et

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \Theta_{\mu\nu}^{\lambda}, \quad (1.69)$$

avec

$$\Theta_{\mu\nu}^{\lambda} = 2\delta_{(\mu}^{\lambda}\partial_{\nu)}\omega - g_{\mu\nu}\partial^{\lambda}\omega. \quad (1.70)$$

De même on calcule le tenseur de Ricci (1.7) dans EF par

$$R_{\mu\nu} \longrightarrow \tilde{R}_{\mu\nu} = \partial_{\lambda}\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} + \partial_{\nu}\tilde{\Gamma}_{\mu}^{\lambda} - \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}\tilde{\Gamma}_{\lambda\sigma}^{\sigma} - \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^{\sigma}\tilde{\Gamma}_{\sigma\nu}^{\lambda}. \quad (1.71)$$

On trouve finalement

$$\tilde{R} = e^{-2\omega}(R - 6\nabla^2\omega - 6\nabla_{\mu}\omega.\nabla^{\mu}\omega). \quad (1.72)$$

De nombreuses théories de haute énergie et de nombreuses théories gravitationnelles classiques sont formulées en utilisant une transformation conforme mettant en correspondance le cadre de Jordan avec le cadre d'Einstein. Les théories classiques de la gravité dans lequel le secteur gravitationnel de la théorie se réduit à la forme canonique d'Einstein, la reformulation de la théorie dans un nouveau cadre conforme conduit à une théorie différente, physiquement équivalente.

## 1.6 La dualité AdS/CFT

### La conjecture

AdS/CFT est une dualité de couplage fort/faible, c'est-à-dire la théorie de jauge est fortement couplée à une théorie des cordes faiblement couplée [55]. Fondamentalement, Cette dualité est basé sur la gravité quantique et les théories quantiques des champs. Un point fondamental de la correspondance est l'énoncé suivant :

■ *Théories gravitationnelles relativistes dans AdS.* On introduit sur AdS un champ de fond  $h$  à D dimensions qui est associé à un opérateur dans le CFT avec les mêmes nombres

quantiques. On peut supposer que leur interaction est décrite par l'action  $S_{AdS}(g_{\mu\nu}, A_\mu, \phi, \dots)$ . Nous avons inclus la métrique  $g_{\mu\nu}$ , les champs de jauge  $A_\mu$  et les scalaires  $\phi, \dots$ .

■ *Théories des champs conformes (CFT) en D-dimensions.* Pour calculer les fonctions de corrélation, on utilise l'opérateur fonctionnel  $\mathcal{W}$  et pour les fonctions de corrélation connectées par  $\langle \mathcal{O} \dots \mathcal{O} \rangle = \delta^n \mathcal{W}(h(\mathbf{x})) / \delta h^n$ .

Selon AdS/CFT, il existe une correspondance entre la gravité quantique (AdS) et une théorie des champs quantique non gravitationnelle ordinaire (ou théorie de jauge). Chaque opérateur  $\mathcal{O}$  peut être associé à une source de fond  $h$  par

$$I_{CFT} + \int d^D x h \mathcal{O}. \quad (1.73)$$

On introduit la condition à la limite d'AdS est de la forme  $\hat{h}(y, x) = h(y) h(x)$ , avec  $y$  représente la dimension supplémentaire sur AdS. L'énoncé fondamental de la correspondance AdS/CFT est désormais

$$e^{\mathcal{W}(h(x))} = \left\langle e^{\int h \mathcal{O}} \right\rangle_{QFT} = e^{S_{AdS}(\hat{h})}. \quad (1.74)$$

L'équation des mouvements dans AdS est du second ordre. Tout d'abord, nous ne pouvons pas simplement définir  $\hat{h}(y, \text{frontière}) = h(\text{frontière}) h(x)$ . Par exemple : Euclide, AdS<sub>5</sub> est une boule et le centre de l'espace n'est qu'un point.

## Température de trou noir dans AdS-CFT

Dans le contexte de la conjecture AdS-CFT, l'espace-temps bulk AdS héberge un trou noir de température  $T$ . Le système quantique dual est également à cette température. D'un autre côté, un espace-temps de bulk sans trou noir a une température indéfinie ou nulle, et le système dual ne peut également être qu'à une température nulle. Une procédure simple pour déterminer la température d'un trou noir est la suivante :

La métrique du trou noir prend la forme

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (1.75)$$

où  $t$  est une coordonnée temporelle et  $r$  une coordonnée radiale. On utilise la transformation du temps euclidien  $t_E = it$  et on trouve

$$ds^2 = f(r)dt_E^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (1.76)$$

L'horizon se situe aux coordonnées  $r_H$  telle que  $f(r_H) = 0$ . Près de l'horizon, on peut donc approximer  $f(r)$  par

$$f(r) \approx f'(r_H)(r - r_H), \quad (1.77)$$

telle que la métrique près d'horizon (NH) s'écrit

$$ds^2 = f'(r_H)(r - r_H)dt_E^2 + \frac{1}{f'(r_H)(r - r_H)}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (1.78)$$

Nous pouvons rendre cette expression plus propre par un changement de variables :

$$\rho^2 = 4 \frac{r - r_H}{f'(r_H)} \quad , \quad d\rho^2 = \frac{1}{f'(r_H)(r - r_H)} dr^2 \quad (1.79)$$

la métrique près d'horizon NH devient

$$ds^2 = \rho^2 d \left( \frac{f'(r_H)}{2} t_E \right)^2 + d\rho^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1.80)$$

Cela ressemble maintenant à une géométrie plate régulière en coordonnées polaires  $ds^2 = \rho^2 d\theta^2 + d\rho^2 + \dots$ . Cela signifie que le temps euclidien est nécessairement périodique avec  $4\pi/f'(r_H)$ -périodique. En physique statistique des systèmes quantiques, la périodicité du temps euclidien est connue pour être liée à la température  $T$  dans l'ensemble canonique, c'est la condition dite de Kubo-Martin-Schwinger (KMS) [56]. Ce qui montre que

$$T = \frac{f'(r_H)}{4\pi}, \quad (1.81)$$

est la température de trou noir.

## 1.7 Horizon et ombre de trou noir

Les trous noirs jouent un rôle central dans la physique gravitationnelle depuis plus de 40 ans. Au début, ils étaient en grande partie de la relativité mathématique et c'est dans les années 1960 et 1970 leurs propriétés classiques ont été étudiées. Celles-ci comprenaient à la fois des études détaillées de la géométrie et de la physique des solutions exactes stationnaires ainsi que des preuves de résultats généraux, l'unicité et théorèmes d'augmentation de surface.

### Théorème de calvitie

Théorème de calvitie ou bien No-hair theorem, montre qu'une solution d'un trou noir peut être caractérisée seulement par trois paramètres observables : la masse  $M$ , la charge électrique  $Q$  et le moment cinétique  $J$ . Dans le contexte d'un espace-temps à quatre dimensions et en présence de champs électromagnétiques. Le théorème de No-hair est formulé pour les trous noirs obéissant à l'équation de champ d'Einstein de la relativité générale avec une constante cosmologique, des champs scalaires et champs de vecteurs massifs...

La **métrique Schwarzschild**, décrit le champ gravitationnel à l'extérieur d'horizon d'une masse,

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.82)$$

avec  $r_s = 2GM$  est le rayon de Schwarzschild.

La **métrique Reissner–Nordström** [89] s'écrit

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.83)$$

tel que  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ .

L'ansatz de la métrique prend la forme à symétrie sphérique

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.84)$$

La solution Schwarzschild est

$$f_S(r) = 1 - \frac{2M}{r}. \quad (1.85)$$

La solution Reissner-Nordström (RN)

$$f_{RN}(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{l^2}. \quad (1.86)$$

La solution Einstein-Gauss-Bonnet (EGB) est

$$f_{EGB}(r) \approx 1 + \frac{r^2}{2\alpha} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{4\alpha}{r^2} \left( \frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2} - \frac{r^2}{l^2} \right)} \right). \quad (1.87)$$

La métrique Kerr-Newman (KN) pour les coordonnées sphériques  $(t, r, \theta, \varphi)$  est

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + J^2/M^2) d\varphi - a dt]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad (1.88)$$

avec  $\Delta \equiv r^2 - r_s r + a^2 + Q^2/4$ ,  $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$  et  $J = aM$  est le moment cinétique.

L'ombre de trou noir est une zone sombre bidimensionnelle dans la sphère céleste causée par la forte gravité du trou noir. Il a été étudié pour la première fois par Synge en 1966 pour un trou noir de Schwarzschild. Plus tard, une formule pour le rayon angulaire de l'ombre a été donnée par Luminet. Les calculs théoriques de l'ombre du trou noir ont commencé avec Synge [53] qui a à l'origine introduit le concept de cône d'échappement qui est aujourd'hui connu comme le complément de l'ombre du trou noir de Schwarzschild. Il a souligné que le bord de l'ombre est arrondi et a également donné la formule du rayon angulaire pour un observateur statique à l'infini. Les points de la sphère de rayon  $M$  et de centre  $O$  peut être paramétré par

$$\begin{cases} p^{(r)} = p \cos \alpha \cos \beta \\ p^{(\theta)} = p \sin \alpha \\ p^{(\phi)} = p \cos \alpha \sin \beta \end{cases}. \quad (1.89)$$

Les angles d'observation  $(\alpha, \beta)$ ;  $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$  comme latitude et  $\beta \in [-\pi, \pi]$ . De plus, on peut introduire les coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  pour la position apparente sur le plan du ciel de l'observateur par

$$x = -r_O \beta, \quad y = -r_O \alpha. \quad (1.90)$$

La courbe limite de l'ombre correspond aux géodésiques nulles qui s'approchent asymptotiquement de la région des photons. Ces géodésiques nulles sont donc caractérisées par les deux constantes de mouvement, On obtient alors la courbe limite de l'ombre sur le ciel de l'observateur paramétrée avec le rayon de la région photonique.

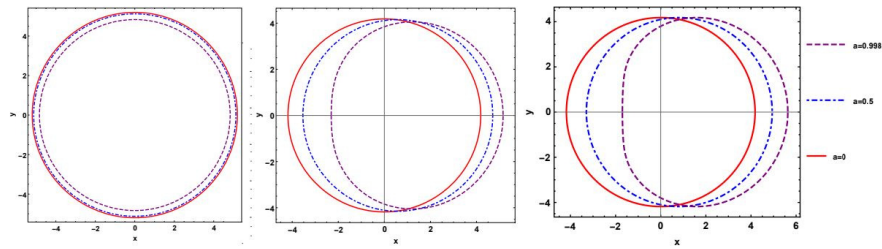


FIGURE 1.1 – Exemples d’ombres du trou noir Kerr-dS pour différents paramètres de rotation et angles d’inclinaison. Du panneau gauche au panneau droit, l’angle d’inclinaison prend respectivement  $0$ ,  $\pi/4$  et  $\pi/2$ .

Dans le cas sans rotation, l’ombre est un cercle. Cependant en présence de la rotation, la forme n’est plus un cercle, elle ne peut donc pas être trivialement caractérisée par un seul rayon angulaire.

## 1.8 Conclusion

La relativité générale est si riche en applications, que l’astrophysique et la cosmologie modernes n’existeraient pas sans elle. Cependant, la découverte que le taux d’expansion de l’Univers semble s’accélérer [25] pose un problème sérieux à la cosmologie standard. Quelle est l’origine de la composante d’énergie noire perçue qui entraîne l’accélération ? La matière noire et l’énergie noire sont deux des plus importantes énigmes non résolues de la physique et de la cosmologie modernes.

# Chapitre 2

## Un nouveau modèle unifié de matière noire et d'énergie noire dans la gravité $f(R)$

### 2.1 Introduction

La majeure partie en valeur énergétique dans l'univers est "sombre", environ 95%. Le mot sombre signifie qu'il n'émet aucune forme de rayonnement électromagnétique. L'univers sombre est résumé en deux mots : Matière noire et Énergie noire. La *matière noire* est déduite indirectement par ses effets gravitationnels. Par exemple, les observations des mouvements des étoiles et du gaz dans les galaxies, les vitesses radiales des galaxies en amas et la lentille gravitationnelle des galaxies. Les vitesses radiales observées (par Fritz Zwicky) des amas de galaxies suggèrent des masses d'amas basées sur la dynamique qui sont des facteurs de 10 ou plus supérieurs à ceux déduits en additionnant le contenu de masse d'amas observé (étoiles, gaz, poussière). La matière noire représente environ 26,8% de la densité masse-énergie totale de l'univers. Le contributeur dominant est l'énergie noire, et une petite quantité est due aux atomes ou à la matière baryonique [57].

La découverte de l'accélération de l'expansion de l'Univers [58], a été réalisée en mesurant la distance de luminosité d'étoiles dont la magnitude absolue est supposée connue : les supernovas de type Ia [59]. Afin d'expliquer ce phénomène, l'énergie noire a été introduite en tant que composant sombre mystérieux avec une pression négative qui entraîne l'expansion accélérée. De nombreux modèles d'énergie noire sont apparus depuis pour tenter d'expliquer sa nature et son origine. Un autre ensemble de modèles provient de la prise en compte de l'énergie noire dynamique, unifiant entre l'inflation précoce et l'accélération tardive en introduisant un potentiel de champ scalaire qui se désintègre dans la forme actuelle d'énergie noire. De tels modèles, principalement connus sous le nom de quintessence, K-essence, énergie fantôme, ect [60].

L'*énergie noire* représente environ 68% de la densité masse-énergie totale de l'univers, est le nom de ce qui cause cette expansion accélérée. Elle ne semble donc correspondre à aucun phénomène physique que nous ayons encore rencontré. L'effet de l'énergie noire semble être de s'opposer à la gravité [61].

## 2.2 La gravitation $f(R, \phi)$

### Gravité $f(R, \phi)$ généralisée

Considérons l'action générale de la gravité  $f(R, \phi)$  [62]

$$S = \int d^4x \left( \frac{1}{2\kappa^2} f(R, \phi) - 2\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + L_m \right), \quad (2.1)$$

avec  $\kappa^2 = 8\pi G$ ,  $\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$  est le terme cinétique,  $L_m$  est la densité Lagrangienne de la matière. Ici  $R$  est le scalaire de Ricci. Le couplage à la courbure de Ricci inclut également le terme cinétique du champ scalaire  $\phi$  qui est couplé de façon non minimale à la gravité. La variation de l'action (2.1) par rapport à la métrique  $g_{\mu\nu}$  donne l'équation de champ suivante :

$$FG_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (RF - f) g_{\mu\nu} - \nabla_\nu F_{,\mu} + g_{\mu\nu} \square F - \frac{1}{2} f_{,\phi} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} = T_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

avec

$$\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right),$$

sachant que  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$  et  $g^{\mu\nu}$  comme composantes tensorielles métriques. Par la variation de l'action par rapport à la  $\phi$  nous trouvons

$$\nabla_\mu (f_{,\phi} \phi^{,\mu}) + f_{,\phi} = 0, \quad (2.3)$$

où  $F = \partial f / \partial R$ ,  $T_{\mu\nu}$  est le tenseur énergie-impulsion de matière donné par

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} L_m)}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.4)$$

Considérons l'action (2.1) dans le cadre de la formulation métrique de la gravité  $f(R)$ . La métrique d'un Univers homogène et isotrope spatialement plat dans le modèle FLRW est donnée par :

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [dx^2 + dy^2 + dz^2] \quad (2.5)$$

où  $a(t)$  est un facteur d'échelle sans dimension, à partir duquel nous définissons le scalaire de Ricci

$$R = 6\dot{H} + 12H^2 \quad (2.6)$$

$H = \dot{a}/a$  est le paramètre de Hubble. Selon (2.2) et (2.3), la densité d'énergie et la pression (équations FRW) sont données par

$$3FH^2 = \frac{1}{2} (RF - f) - 3H\dot{F} + \kappa^2 \rho_m \quad (2.7)$$

$$-2F\dot{H} = \ddot{F} - H\dot{F} + \kappa^2 (\rho_m + p_m) \quad (2.8)$$

A partir de (2.7) et (2.8), la densité d'énergie et la pression sont données par

$$\kappa^2 \rho_{DE} = \frac{1}{2} (RF - f) - 3H\dot{F} + 3H^2 (1 - F) \quad (2.9)$$

$$\kappa^2 p_{DE} = \ddot{F} + 2H\dot{F} - \frac{1}{2}(RF - f) - (2\dot{H} + 3H^2)(1 - F) \quad (2.10a)$$

l'équation d'état de l'énergie noire définie par  $\omega_{DE} = p_{DE}/\rho_{DE}$ . En combinant (2.9) et (2.10a), on obtient

$$\omega_{DE} = \frac{\ddot{F} + 2H\dot{F} - \frac{1}{2}(RF - f) - 3H^2\left(1 + \frac{2\dot{H}}{3H^2}\right)(1 - F)}{\frac{1}{2}(RF - f) - 3H\dot{F} + 3H^2(1 - F)} \quad (2.11)$$

Dans ce qui suit, nous étudierons un cas particulier de la forme  $f(R, \phi)$ .

## Gravité $f(R, \phi)$ avec le type de Brans–Dicke

On peut aussi réécrire la gravité  $f(R)$  sous la forme scalaire-tenseur [63], avec le champ auxiliaire  $\phi$  de l'action(2.1) sous la forme suivante

$$f(R, \phi) = \gamma(\phi)R, \quad (2.12)$$

avec  $\gamma$  est la fonction propre du scalaire auxiliaire  $\phi$ . Nous considérons  $\phi = \phi(R)$  [64]. L'équation du champ peut être dérivée en faisant varier l'action (2.1) par rapport à  $g_{\mu\nu}$  :

$$\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\gamma(\phi)R + R_{\mu\nu}\gamma(\phi) - \nabla_\mu\nabla_\nu\gamma(\phi) + g_{\mu\nu}\square F = \frac{1}{2}\kappa^2 T_{\mu\nu}. \quad (2.13)$$

Remplaçant l'équation Eq.(2.12) par Eq.(2.14) et on obtient la pression et la densité d'énergie dues au champ scalaire

$$\kappa^2 \rho_m = 3H^2\gamma(\phi) + 3H\frac{d\gamma(\phi)}{dt}, \quad (2.14)$$

$$\kappa^2 (\rho_m + p_m) = -2\dot{H}\gamma(\phi) - \frac{d^2\gamma(\phi, X)}{dt^2} + H\frac{d\gamma(\phi)}{dt}. \quad (2.15)$$

Remplaçant le lagrangien (2.12) par Eq.(2.9), on trouve les quantités  $\rho_{DE}$  et  $p_{DE}$

$$\kappa^2 \rho_{DE} = -3H\dot{\gamma} + 3H^2(1 - \gamma), \quad (2.16)$$

$$\kappa^2 p_{DE} = \ddot{\gamma} + 2H\dot{\gamma} - (2\dot{H} + 3H^2)(1 - \gamma). \quad (2.17)$$

En combinant (2.14) et (2.15), on trouve

$$\frac{d^2\gamma(t)}{dt^2} + 2H\frac{d\gamma(t)}{dt} + (2\dot{H} + 3H^2)\gamma(t) = 0, \quad (2.18)$$

avec  $\gamma(\phi) = \gamma(t)$ . Dans la section suivante, nous résoudrons cette équation avec une condition, pour décrire l'évolution des paramètres cosmologiques en fonction du temps.

## Solution pure de de Sitter

Considérons d'abord une solution de Sitter pure pour  $H = H_0$ , dans ce cas l'Eq.(2.18) se réduit à

$$\frac{d^2\gamma(t)}{dt^2} + 2H_0 \frac{d\gamma(t)}{dt} + 3H_0^2\gamma(t) = 0. \quad (2.19)$$

Les solutions de l'équation différentielle (2.19) sont

$$\gamma(t) = \alpha e^{-H_0 t} \cos \sqrt{2}H_0 (t - t_0), \quad (2.20)$$

où  $(\alpha, t_0)$  sont des constantes d'intégration. Dans l'Univers dominé par l'énergie noire, l'évolution du facteur d'échelle est obtenue par  $a(t) = a_0 e^{H_0 t}$ . Si nous supposons que  $\alpha = a_0^{-1}$ ,  $\gamma(t)$  peut être exprimé comme

$$\gamma(t) = \frac{1}{a(t)} \cos \sqrt{2}H_0 (t - t_0), \quad (2.21)$$

avec  $\gamma(t)$  est également un facteur d'échelle dans le type de Brans–Dicke. Pour simplifier les calculs nous posons  $\theta(t) = \sqrt{2}H_0 (t - t_0)$  :  $\gamma(t) = \cos \theta(t)/a(t)$ . Cette fois, nous pouvons choisir cette valeur  $\alpha = e^{H_0 t_0}$  pour écrire le facteur d'échelle sous cette forme  $a(t) = e^{H_0(t-t_0)}$ . Dans ce cas on obtient  $a(t) = e^{\theta(t)/\sqrt{2}}$  ou bien  $\gamma = \frac{1}{a} \cos(\sqrt{2} \ln a)$ . Si nous choisissons  $a \sim 1$ , on aura  $\gamma = \frac{1}{a} = 1 + z$ , avec  $z$  est le décalage vers le rouge [63]. Dans ce cas on peut écrire  $f(R, z) = (1 + z) R$  (2.12). Substituant cette relation en Eq.(2.16) et Eq.(2.17) on obtient

$$\rho_{DE} = 3\kappa^{-2}H^2 + 3\sqrt{2}\kappa^{-2}\frac{H_0 H}{a} \sin \theta, \quad (2.22)$$

$$p_{DE} = \frac{2}{a}\kappa^{-2} \left( H^2 - H_0^2 + \dot{H} \right) \cos \theta - 2\kappa^{-2}\dot{H} - 3\kappa^{-2}H^2. \quad (2.23)$$

La loi de la conservation dans l'Univers dominé par l'énergie noire est donnée par

$$\dot{\rho}_{DE} + 3H(\rho_{DE} + p_{DE}) = 0. \quad (2.24)$$

Considérons l'équation d'état de l'énergie noire  $\omega_{DE} = p_{DE}/\rho_{DE}$ . Selon Eq.(2.20) et Eq.(2.21) on obtient

$$\omega_{DE} = \frac{2 \left( 1 - H_0^2/H^2 + \dot{H}/H^2 \right) \cos \theta - 2\dot{H}a/H^2 - 3a}{3a + 3\sqrt{2} \sin \theta H_0/H}. \quad (2.25)$$

Pour une solution pure de Sitter  $H = H_0$ , on obtient  $\rho_{DE} = 3\kappa^{-2}H_0^2 \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{a} \sin \theta \right)$  (2.22),  $p_{DE} = -3\kappa^{-2}H_0^2$  (2.23). La densité d'énergie critique  $\rho_c$  est donnée par la relation suivante  $\rho_c = 3\kappa^{-2}H^2$ , qui vérifie  $\rho_c(H = H_0) = -p_{DE}$ . L'équation du paramètre d'état de l'énergie noire dans la cosmologie de Brans-Dicke peut être réécrite comme

$$\omega_{DE} = -\frac{1}{1 + \frac{\sqrt{2}}{a} \sin \theta} \quad (2.26)$$

les valeurs de  $\omega_{DE}(t)$  dépend de la variations de  $a(t)$  [65]. Nous avons déjà proposé que

$\theta = \sqrt{2} \ln a$  pour Eq.(2.21), l'équation d'état de l'énergie noire peut être exprimée sous la forme  $\omega_{DE} \approx -1 + \frac{2}{a} \ln a$ , et à partir de (2.24), on obtient  $\omega_{DE} = -1 - \frac{1}{3} \frac{d \ln \rho_{DE}}{d \ln a}$ . À partir de ces dernières équations, on montre que  $\rho_{DE} = \rho_0 e^{\frac{6}{a}(1+\ln a)}$ , avec  $\rho_0$  est une constante d'intégration. On a  $\rho_{DE} \sim (ae)^{\frac{6}{a}}$  avec  $e \approx 2,718$ . Pour tracer la variation de  $\omega_{DE}$  en tant que fonction de  $a$  et  $t$ , on écrit  $\omega_{DE}$  sous la forme

$$\omega_{DE} = -\frac{1}{1 + \frac{\sqrt{2}}{a} \sin \sqrt{2} \ln a}, \quad \omega_{DE} = -\frac{1}{1 + \sqrt{2} e^{-H_0(t-t_0)} \sin \sqrt{2} H_0 (t - t_0)}. \quad (2.27)$$

À partir de Eq.(2.26), le paramètre de densité d'énergie noire défini par  $\Omega_{DE} = \rho_{DE}/\rho_c$  peut être réécrit comme

$$\Omega_{DE} = \frac{\rho_{DE}}{\rho_c} = \frac{H_0^2}{H^2} \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{a} \sin \theta \right), \quad (2.28)$$

qui conduit à

$$\omega_{DE} = -\frac{H_0^2}{\Omega_{DE} H^2}. \quad (2.29)$$

Pour  $H = H_0$  on a  $\omega_{DE} = -\frac{1}{\Omega_{DE}}$ . En utilisant  $\Omega_{DE} = 0.73$  [66], on obtient  $\omega_{DE} = -1,37 \prec -1$ . Ce résultat est en bon accord avec les nouvelles données d'observation : indiquent que  $\omega_{DE} \prec -0,76$  [67].

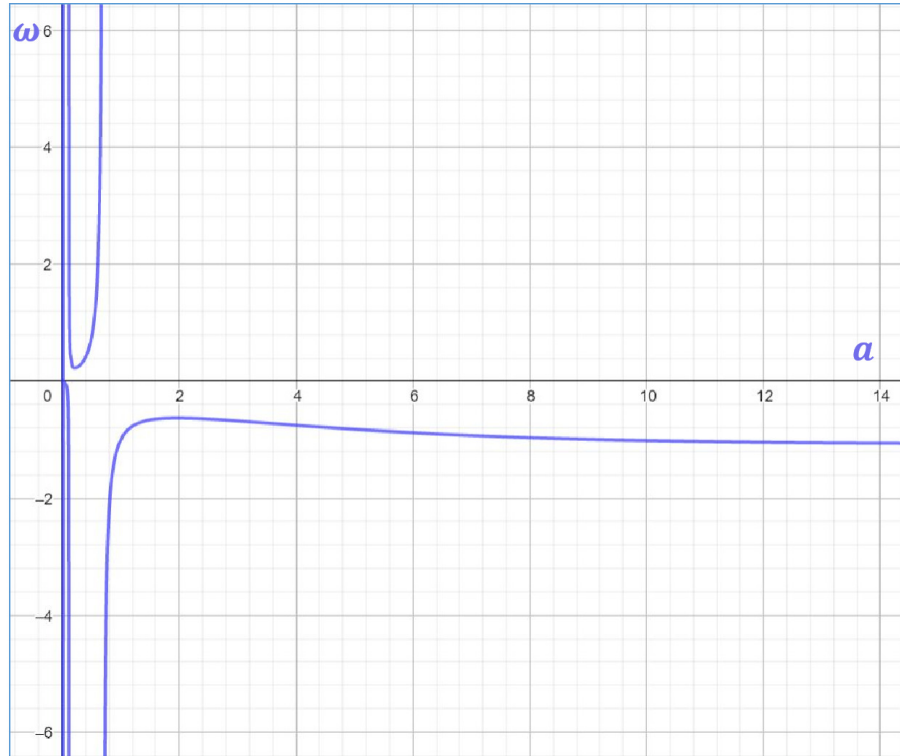
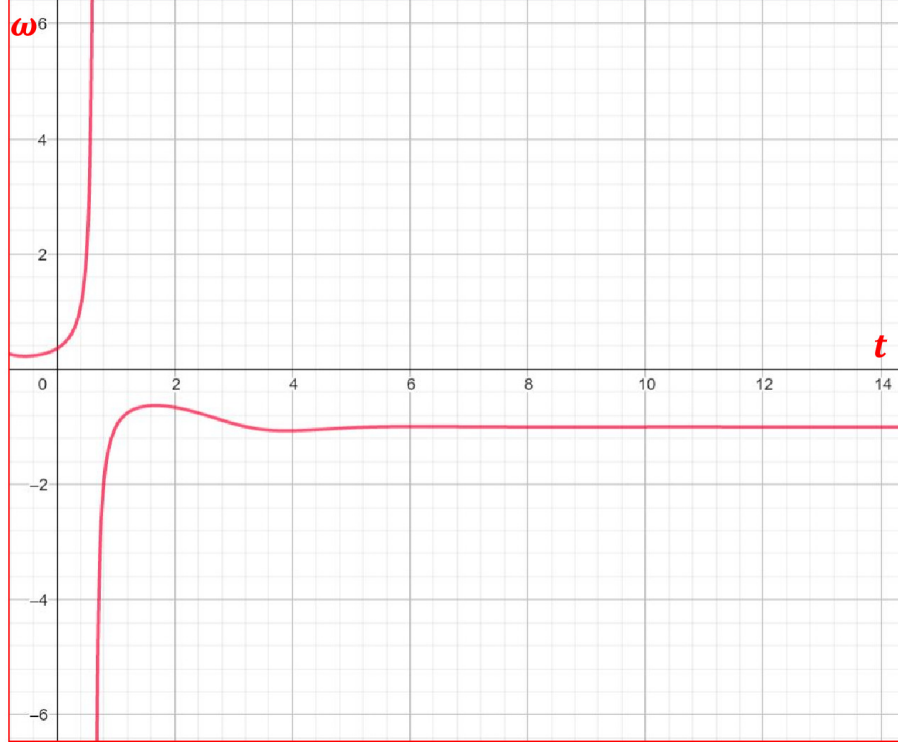


FIGURE 2.1 –  $\omega = -\omega_{DE}$  vs  $a$


 FIGURE 2.2 –  $\omega = -\omega_{DE}$  vs temps

Voici quelques résultats des données d'observations Planck+WP+BAO :  $\omega_{DE}^0 = -1,13_{-0,25}^{+0,24}$  ; Planck+WP+SNLS :  $\omega_{DE}^0 = -1,13_{-0,14}^{+0,13}$  ; Planck+WP +  $H_0$  :  $\omega_{DE}^0 = -1,24_{-0,19}^{+0,18}$  [68]. La différence entre les données d'observation et le résultat théorique est  $\omega_{DE}^0 - \omega_{DE} = 0,13 \rightarrow 0,24$ . On revient à l'expression (2.25), et cette fois au lieu de choisir la solution du gardien, nous calculerons  $\omega_{DE}$  selon redshift : L'évolution cosmologique du modèle  $\Lambda$ CDM peut être exprimée par le paramètre de Hubble suivant :

$$\frac{H_0^2}{H^2} = (1 + \Omega_m (1 + z)^3 - \Omega_m)^{-1}. \quad (2.30)$$

On utilise le redshift  $1 + z = \frac{1}{a}$ .  $H_0$  est le paramètre de Hubble évalué à  $z = 0$  ;  $\omega_{DE}$  (2.25) peut être écrit en termes de paramètre de décélération  $q = -\left(1 + \dot{H}/H^2\right)$  comme 
$$\omega_{DE} = \frac{2(1 - H_0^2/H^2 + \dot{H}/H^2) \cos \theta - 2\dot{H}a/H^2 - 3a}{3a + 3\sqrt{2} \sin \theta H_0/H}.$$

## 2.3 Gravité $f(R, \phi)$ topologique

### Braneworld $f(R, \phi)$ gravité

Nous avons choisi la fonction  $f(R, \phi)$  de la forme suivante [99] :  $f(R, \phi) = \frac{M_P^2}{2} R e^{-\phi R}$ , avec le scalaire de Ricci  $R$  ( $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ ;  $\mu, \nu = (0, 1, 2, 3)$ ) couplé à un champ scalaire  $\phi$  par un facteur exponentiel qui décrira la perturbation autour de la courbure  $R$ . On peut

décrire à la fois la DM et DE par l'action suivante  $I := \frac{M_P^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} R e^{-\phi R} + I_m$ , avec  $I_m$  est l'action de la matière. Nous pouvons alors définir le volume à cinq dimensions comme  $M_5 = M_4 \times Y$ , avec  $M_4$  est 3-brane et  $Y$  est une grande dimension compacte.  $M_5$  est défini par un déterminant métrique (une transformation conforme) :  $g_{(5)} = g e^{-2\phi R}$ . L'action  $I_4$  peut s'écrire sous la forme suivante  $I_4 = \frac{M_5^3}{2} \int_{M_4} d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{\phi} e^{-\phi R} \int_0^{\phi R L} dy + I_m$ . On définit le paramètre  $x^5 = y = LR\phi$  de la cinquième dimension, avec  $L$  est le rayon de la grande dimension compacte. D'après le modèle ADD, on peut relier la masse de Planck  $M_p$  en 4 dimensions (4d) à la masse de Planck  $M_5$  en 5 dimensions (5d) ; défini par  $M_p^2 = M_5^3 L$ . La rotation  $R\phi$  crée une transition entre 3-brane et le bulk. Si  $R\phi$  est nulle, la gravitation ne sera limitée qu'à 3-brane, c'est-à-dire que nous n'avons que la gravité d'Einstein, et l'action  $I_4$  sera l'action d'Einstein-Hilbert.

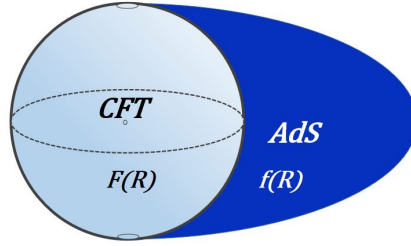


FIGURE 2.3 – La sphère de CFT existe dans le bulk d'AdS. L'existence des théories  $f(R)$  et  $F(R)$  respectivement dans AdS et CFT.

Le volume géométrique en 3-brane  $M_4$  est  $Vol_{M_4} = \int_{M_4} d^4x \sqrt{-g}$ . Le volume géométrique en grande dimension compacte  $Y$ , est  $Vol_Y = e^{-\phi R} \int_Y dy$ . On peut écrire l'action  $I_4$  sous la forme géométrique par  $I_4 = Vol_{M_4} (\frac{1}{\phi} Vol_Y) \neq \frac{1}{\phi} Vol_Y (Vol_{M_4})$ , ce qui nous montre que la structure de 3-brane dépend exactement de comportement des grandes dimensions supplémentaires. Ce résultat montre que notre brane est immergée dans cette grande dimension supplémentaire (ex : dans la théorie de Randall-Sundrum) et non comme dans la très petite dimension (ex : dans la théorie de Kaluza-Klein). Dans ce cas, l'action  $I_4$  devient  $I_5 = \frac{M_5^3}{2} \int_{M_5} d^5x \sqrt{-g_{(5)}} \frac{1}{\phi} + I_m$ . En calculant la variation d'action  $I_5$  on trouve  $\delta I_5 = \frac{M_5^3}{2} \int_{M_5} d^5x \delta(\sqrt{-g_{(5)}}) \frac{1}{\phi} + \sqrt{-g_{(5)}} \delta(\frac{1}{\phi}) + I_m$ , ce qui conduit aux équations de champ :  $\frac{\delta \phi}{\delta g_{(5)}^{MN}} + \frac{1}{2} g_{(5)MN} \phi = -\frac{1}{M_5^3} \phi^2 T_{MN}$ , ( $M, N = 0, 1, 2, 3, 4$ ). Cette équation peut décrire le champ scalaire  $\phi$  dans la masse à 5 dimensions.

### Gravité $f(R, \phi)$ sur le bulk

Dans cette sous-section, on va étudier  $M_d$  dans la dimension  $(d-4)$  sur le bulk  $\mathbf{M}_d$  :  $\mathbf{M}_d = M_d \times Y^{d-4}$ . Le volume géométrique en  $M_d$  est  $Vol_{M_d} = \int_{M_d} d^d x \sqrt{-g_{(d)}}$ , avec  $g_{(d)} = g_{(4)} e^{-2(d-4)\phi R}$  est le déterminant métrique à  $M_d$ . Le volume de forme standard en large dimension compacte  $Y$  est  $Vol_Y = e^{-\phi R} \int_0^{L\phi R} dy$ . La masse de Planck  $M_p$  is  $M_p^2 = M_d^{d-2} L^{d-4}$ ,

avec  $M_d$  est la masse de Planck à  $d$  dimension. Dans  $\mathbf{M}_d$ , l'action  $I_4$  peut être exprimé comme

$$I = \frac{M_d^{d-2}}{2} \int_{M_d} d^d x \sqrt{-g_{(d)}} \frac{R}{(\phi R)^{d-4}} e^{-(d-4)\phi R} \left( \int_0^{L\phi R} dy \right)^{d-4} + I_m. \quad (2.31)$$

Par conséquent, nous obtenons la forme générale de gravité  $f(R, \phi)$  comme  $f_d(R, \phi) = \frac{M_d^{d-2}}{2} \phi^{4-d} R^{5-d}$ , défini par l'action suivante

$$I_d = \frac{M_d^{d-2}}{2} \int_{M_d} d^d x \sqrt{-g_{(d)}} \phi^{4-d} R^{5-d} + I_m. \quad (2.32)$$

On voit que les champs  $(\phi, R)$  décrivent une dimension exceptionnelle, sont  $d = (4, 5)$ . De plus, le scalaire de Ricci  $R$  décrit la gravité à 4d, et le champ  $\phi$  décrit la gravité à 5d [62]. Selon l'action (2.32) on peut écrire  $I_4$  et  $I_5$  comme

$$I_4 = \frac{M_p^2}{2} \int_{M_4} d^4 x \sqrt{-g_{(4)}} R + I_m \quad (2.33)$$

$$I_5 = \frac{M_5^3}{2} \int_{M_5} d^5 x \sqrt{-g_{(5)}} \frac{1}{\phi} + I_m. \quad (2.34)$$

avec  $d = (4, 5)$  décrivent les champs  $(\phi, R)$  sans accouplement. Pour toutes les dimensions  $d \neq (4, 5)$  nous aurons toujours un couplage entre  $\phi$  et  $R$ . En calculant la variation d'action (2.32) on peut obtenir

$$\delta I_d = \frac{M_d^{d-2}}{2} \int_{M_d} d^d x \delta (\sqrt{-g_{(d)}}) \phi^{4-d} R^{5-d} + \sqrt{-g_{(d)}} \delta (\phi^{4-d} R^{5-d}) + \delta I_m. \quad (2.35)$$

Considérons que  $\delta(\sqrt{-g_{(d)}}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g_{(d)}} g_{(d)MN} \delta g_{(d)}^{MN}$ , qui conduit à

$$\delta I_d = \frac{M_d^{d-2}}{2} \int_{M_d} d^d x \delta g_{(d)}^{MN} \sqrt{-g_{(d)}} \left( \frac{\delta (\phi^{4-d} R^{5-d})}{\delta g_{(d)}^{MN}} - \frac{g_{(d)MN}}{2} \phi^{4-d} R^{5-d} - \frac{T_{MN}^{(d)}}{M_d^{d-2}} \right), \quad (2.36)$$

avec  $T_{MN}$  est le tenseur énergie-impulsion de la matière (matière noire et matière ordinaire) donné par  $T_{MN}^{(d)} = \frac{-2}{\sqrt{-g_{(d)}}} \frac{\delta (\sqrt{-g_{(d)}} L_m [g^{\mu\nu}, \Psi])}{\delta g_{(d)}^{MN}}$ , ( $M, N = 0, 1, 2, \dots, d$ ). Le tenseur énergie-impulsion est défini par la variation du Lagrangien de la matière  $L_m [g^{\mu\nu}, \Psi]$  par rapport à la métrique  $g_{(d)MN}$  sur le bulk  $\mathbf{M}_d$ .  $\Psi$  est le champ de matière sur 3-brane. On obtient donc les équations de champ :

$$\frac{\delta (\phi^{4-d} R^{5-d})}{\delta g_{(d)}^{MN}} - \frac{1}{2} g_{(d)MN} \phi^{4-d} R^{5-d} = \frac{1}{M_d^{d-2}} T_{MN}^{(d)}. \quad (2.37)$$

Nous récrivons les équations de champ dans  $d = 4$  on obtient l'équation du mouvement du champ  $R$  :  $R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R = \frac{1}{M_p^2} T_{MN}$ , cette équation décrit la gravité d'Einstein. Dans  $d = 5$  on obtient l'équation du mouvement du champ  $\phi$  :  $\frac{\delta \phi}{\delta g_{(5)}^{MN}} + \frac{1}{2} g_{(5)MN} \phi = -\frac{1}{M_5^3} \phi^2 T_{MN}$ , cette équation décrit la matière noire et l'énergie noire [62]. On remarque, à partir de ces deux équations de champ, que on peut représenter la gravité en 3-brane par deux équations de champ duales.

## 2.4 Densités dans la gravité $f(R, \phi)$

Dans cette section, nous considérons une approche pour résoudre les équations de champ. Eq.(2.37) s'écrit comme

$$(4-d) \frac{g_{(d)}^{MN} \delta \phi}{\phi \delta g_{(d)}^{MN}} + (5-d) \frac{g_{(d)}^{MN} \delta R}{R \delta g_{(d)}^{MN}} = \frac{g_{(d)}^{MN} T_{MN}^{(d)}}{\phi^{4-d} R^{5-d} M_d^{d-2}} + \frac{d}{2}. \quad (2.38)$$

Nous définissons une métrique d'un espace plat, qui s'écrit comme une somme directe de la métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) et de la composante de la cinquième dimension donnée par le déterminant métrique à  $\mathbf{M}_d$  dans Eq. (2.32), comme ça

$$ds_{(5)}^2 = -dt^2 + a^2(t) d\mathbf{x}^2 + \sum_{k=5}^{d-4} e^{-\phi R} dy_k^2, \quad (2.39)$$

sachant que  $a(t)$  est le facteur d'échelle. Cette métrique décrit l'Univers homogène à grande structure. On multiplie alors  $g_{(5)}^{MN}$  par  $T_{MN}$ , on trouve

$$T_d \equiv g_{(d)}^{MN} T_{MN}^{(d)} = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} + \sum_{K=5}^d g_{(d)}^{KK} T_{KK}, \quad (2.40)$$

avec  $g_{(d)}^{KK} = e^{-2\phi R}$ . Dans notre article [62], nous avons décrit la densité de la matière noire  $\rho_{DM}$  comme composant  $T_{55}$  du tenseur énergie-impulsion de la matière à 5ème dimension ( $\rho_{DM} = T_{55}$ ). le champ  $R$  se trouve dans la 3-brane et le 5d-bulk contient le champ  $\phi$ . Les dimensions  $d \neq (4, 5)$  n'ont pas des champs propres (2.32). Par conséquent, la densité de masse de champ  $\phi$  est équivalent à  $T_{55}$  à la 5ème dimension. La masse de  $\phi$  représente la matière noire, dans ce cas on peut décrire  $\rho_{DM}$  uniquement dans le volume à 5 dimensions  $M_5$  par la composante  $T_{55}$ . Eq.(2.40) peut être exprimé comme

$$T_d = -\rho_m + e^{-2\phi R} \rho_{DM} + e^{-2\phi R} \sum_{K=6}^d \rho_{DK}, \quad (2.41)$$

avec  $g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \equiv -\rho_m$  et  $\rho_{DK} = g_{(d)}^{KK} T_{KK}$  sont les densités de couplage pour  $K = (6, \dots, d)$ . Si  $d \leq 5$  nous aurons  $\rho_{DK} = 0$ . Eq.(2.40) peut nous aider à tester le nombre de dimensions  $d$  dans l'Univers. Ensuite, nous allons définir une série de densités :  $\rho_D = \sum_{K=5}^d \rho_{DK}$ . On peut résoudre l'équation (2.41), on obtient

$$T_d = d \left( \frac{C}{2} \frac{M_d^{d-2}}{\sqrt{g_{(d)}}} - f_d(R, \phi) \right). \quad (2.42)$$

Par conséquent, nous pouvons tester certaines fluctuations de la densité de la matière noire par les données d'observation. De plus, la densité  $\rho_D$  peut représenter par plusieurs hypothèses : Si la dimension du volume  $\mathbf{M}_d$  augmente avec le temps, on peut dire que  $\rho_D$  représente la densité d'énergie noire. Mais il est difficile d'accepter l'idée d'évolution des dimensions de l'Univers. Nous proposons dans ce cas, que  $\rho_D$  représente la densité d'énergie du vide [62]. L'idée de  $\rho_D$  est la densité d'énergie du vide, semble un peu logique.

## 2.5 Les champs caméléons en gravité $R^2$

Dans cette section, nous proposons une description de la matière noire dans le contexte de l'Univers sombre caméléon [69]. En introduisant un champ scalaire de caméléon  $\chi$ , qui décrira la matière noire. Nous commençons par l'action suivante dans la gravité  $f(R)$

$$I = \frac{M_p^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + I_m, \quad (2.43)$$

où  $I_m$  est l'action de la matière,  $M_p^2 = \frac{c^4}{8\pi G} \approx 2 \times 10^{18} [GeV]$ ,  $R$  est le scalaire de Ricci. Pour obtenir les équations d'Einstein, on suppose que  $f(R) = R$ . Nous proposons une fonction générale dans le cadre de la gravité  $R^2$  [70], qui dépend d'un champ caméléon  $\chi$  par

$$f(R, \chi) = \alpha R + \frac{1}{6} \beta \chi R^2, \quad (2.44)$$

avec  $\alpha$  est un paramètre sans unité,  $\beta$  est un terme de couplage. L'unité de  $\chi$  est une unité de surface. Pour ( $\alpha = 1, \beta = 0$ ), on obtient les équations d'Einstein. Pour le cas ( $\alpha = -1, \beta = 1$ ), on obtient cette forme [70] :

$$f(R) = -R + \frac{1}{6m_\chi^2} R^2 + \dots \quad (2.45)$$

Autre forme de la gravité  $R^2$  peut être obtenue par ( $\alpha = +1, \beta = \gamma$ ) [71] :

$$f(R) = +R + \zeta R^2 + \dots \quad (2.46)$$

avec  $\zeta$  est un paramètre. Nous suggérons que la variation des valeurs de ( $\alpha, \beta$ ) indique la nature caméléon de la matière noire. Selon Eq.(2.44) et Eq.(2.45) on peut définir la masse du champ caméléon  $\chi$  par

$$m_\chi^2 = \frac{1}{\chi}. \quad (2.47)$$

A partir de l'équation Eq.(2.44), on peut obtenir

$$\beta \chi R = 3(\partial_R f(R, \chi) - \alpha). \quad (2.48)$$

Le champ scalaire caméléon  $\chi$  est alors défini comme la dérivée seconde de  $f(R, \chi)$  par rapport à  $R$  :

$$\chi = \frac{3}{\beta} \partial_R^2 f(R, \chi). \quad (2.49)$$

D'autre part, on peut aussi obtenir l'expression suivante

$$R^2 = \frac{6}{\beta} \partial_\chi f(R, \chi). \quad (2.50)$$

La variation de l'action  $I$  (2.43) peut être exprimé comme

$$\delta I = \frac{M_p^2}{2} \int_\Omega d^4x (f(R, \chi) \delta \sqrt{-g} + \sqrt{-g} (\delta R \partial_R + \delta \chi \partial_\chi) f(R, \chi)). \quad (2.51)$$

Ici  $\Omega$  est une région de  $\mathbb{R}^4$ . Dans la suite, nous choisissons  $\delta x^\mu \partial_\mu \partial_R^2 f(R) = 0$  (2.49), il est intéressant de remarquer que

$$\int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \delta \chi \partial_\chi f(R, \chi) = \frac{3}{\beta} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \partial_\chi f(R, \chi) \delta \partial_R^2 f(R, \chi) = 0. \quad (2.52)$$

La variation de l'action Eq.(2.43) par rapport à la métrique  $g_{\mu\nu}$ , conduit à l'équation de mouvement suivante

$$\partial_R f(R, \chi) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R, \chi) g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) \partial_R f(R, \chi) = M_p^{-2} T_{\mu\nu}, \quad (2.53)$$

où  $T_{\mu\nu}$  est le tenseur énergie-impulsion. En prenant  $\square \partial_R f(R) = 0$  (plus de détails sur ce sujet peuvent être trouvés dans [75]) nous arrivons à

$$2f(R, \chi) - R \partial_R f(R, \chi) + M_p^{-2} T = 0, \quad (2.54)$$

où  $T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$  est la trace du tenseur énergie-impulsion. Rappelons également que la densité de potentiel effective pour le champ caméléon est définie par [72] :

$$V_{eff}(R, \chi) = V(R, \chi) + \frac{(1 - 3\omega) \rho}{4 (\partial_R f(R, \chi))^2}, \quad (2.55)$$

avec la pression  $p = \omega \rho$  et  $\omega$  est l'équation d'état. La dérivée seconde du potentiel effectif par rapport à  $\chi$ , est donné par

$$\frac{\partial^2}{\partial \chi^2} V_{eff}(R, \chi) = \frac{1}{3 \partial_R^2 f(R, \chi)} \left( 1 - \frac{R \partial_R^2 f(R, \chi)}{\partial_R f(R, \chi)} \right). \quad (2.56)$$

Dans la subsection suivante, nous utiliserons cette équation pour déterminer la masse du scalaire.

## La masse du scalaron

Récemment, il y a eu un regain d'intérêt pour la relation entre la matière noire et la masse du scalaron (c'est-à-dire la masse des champs  $\chi$ ) [73, 74]. Nous étudierons par la suite la masse du scalaron  $m_\chi$  qui décrira la matière noire. Pour décrire la masse de tout champ scalaire, nous utilisons l'équation de Klein-Gordon

$$\square \chi = m_\chi^2 \chi. \quad (2.57)$$

Rappelons que, dans le mécanisme caméléon [72], le potentiel effectif dépend du champ scalaire selon

$$\square \chi = \frac{\partial}{\partial \chi} V_{eff}(R, \chi). \quad (2.58)$$

A partir d'Eq.(2.57) et d'Eq.(2.58), on peut obtenir

$$m_\chi^2 = \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} V_{eff}(R, \chi), \quad (2.59)$$

où  $V_{eff}(\chi)$  est le potentiel effectif du scalaire.

A partir des Eqs.(2.56), (2.47), (2.48) et (2.49), la masse scalaire  $m_\chi$  est évaluée comme [75]

$$3m_\chi^2 = \frac{1}{\partial_R^2 f(R, \chi)} - \frac{R}{\partial_R f(R, \chi)}. \quad (2.60)$$

Notez ici que  $R$  est déterminé par Eq.(2.54).

La masse du scalaire change en fonction de la trace du tenseur énergie-impulsion. Substitution Eq.(2.48) et Eq.(2.49) en Eq.(2.60), on obtient

$$m_\chi^2 = \frac{1}{\beta\chi} - \frac{R}{3\alpha + \beta\chi R}. \quad (2.61)$$

Ainsi,

$$m_\chi^2 = \frac{\beta^2}{\alpha(1-\beta)} \frac{R}{3}. \quad (2.62)$$

Pour la limite de grande courbure [72], on a

$$R = M_p^{-2} \rho, \quad (2.63)$$

avec  $\rho$  est la densité d'énergie de la matière. On peut alors exprimer la masse du scalaire  $m_\chi^2$  en fonction de la densité d'énergie de la matière

$$m_\chi^2 = \frac{\beta^2}{\alpha(1-\beta)} \frac{\rho}{3M_p^2}. \quad (2.64)$$

La masse du scalaron dépend directement de la densité d'énergie de la matière, ce qui explique la nature caméléonique du champ  $\chi$  [69]. On remarque que dans le cas où le terme de couplage  $\beta$  entre le champ scalaire caméléon  $\chi$  et le champ de Ricci est nul (c'est-à-dire  $\beta = 0$ ), qui est similaire aux spins des dilatons [76], la masse de matière noire disparaît. On considère maintenant l'équation (2.64) pour déterminer les valeurs de  $\chi$  Eq.(2.47) :

$$\chi = \frac{\alpha(1-\beta)}{\beta^2} \frac{3M_p^2}{\rho}. \quad (2.65)$$

On remarque la relation entre le champ  $\chi$  avec le paramètre de densité de la matière ( $\Omega_m = \frac{8\pi G\rho}{3H^2}$ ) et le paramètre Hubble  $H$  par

$$\chi = \frac{c^2}{\Omega_m H^2} \frac{\alpha(1-\beta)}{\beta^2}. \quad (2.66)$$

Pour  $\alpha = 0$ , on obtient  $\chi = 0$ ; et selon Eq.(2.44), nous pouvons voir que lorsque le paramètre  $\alpha$  (du scalaire de Ricci) est nul, il y a disparition complète du champ scalaire caméléon  $\chi$ . Cela signifie que le champ de Ricci crée le champ scalaire caméléon  $\chi$ . On peut donc conclure que la matière noire n'est qu'un effet supplémentaire de la courbure de l'espace-temps par la présence de matière (densité énergétique de la matière  $\rho$ ). On remarque aussi que le champ caméléon  $\chi$  est important dans les régions où il y a peu de densité d'énergie de matière.

En revanche, la masse de  $\chi$  est important dans les régions où il y a plus que la densité énergétique de la matière. Cela montre que la diminution des champs  $\chi$  génère sa masse. Notons qu'il suffit de traiter le cas où  $\frac{m_\chi^2}{\rho} \geq 0$  :

$$\begin{cases} \alpha \succeq 0 \text{ et } \beta \prec 1 \\ \quad \quad \quad \text{ou} \\ \alpha \preceq 0 \text{ et } \beta \succ 1 \end{cases} . \quad (2.67)$$

Pour  $\beta = 0$ , on a  $\alpha \geq 0$ ; parmi ces valeurs, nous avons  $\alpha = 1$ , dans ce cas, l'action Eq.(2.43) devient l'action d'Einstein-Hilbert. Pour obtenir une intuition de la valeur limite du terme de couplage  $\beta$ , il est utile de penser à  $\alpha$  comme un point essentiel pour déterminer les valeurs de  $\beta$ , plus précisément ;  $\alpha$  influence sur la nature de la gravité  $R^2$ .

## 2.6 Couplage minimal à la gravité d'Einstein-Gauss-Bonnet

Considérons maintenant la gravité EGB en 4 dimensions [77, 78] couplé avec un champ scalaire  $\phi$  par

$$I = \int \sqrt{-g} d^D x \left( \frac{M_p^2}{2} R + \alpha(\phi) \mathcal{G} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right) + I_m, \quad (2.68)$$

avec  $I_m$  est l'action de la matière,  $M_p^2 = \frac{c^4}{8\pi G} \approx 2 \times 10^{18} [GeV]$ ,  $R$  est le scalaire de Ricci,  $\alpha = \alpha(\phi)$  est un couplage de Gauss-Bonnet sans dimension fini et non nul ont des dimensions de  $[length]^2$ , qui représentent les corrections ultraviolettes (UV) de la théorie d'Einstein. On définit l'invariant de Gauss-Bonnet comme

$$\mathcal{G} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (2.69)$$

La variation par rapport au champ  $\phi$  nous donne l'équation du mouvement pour le champ scalaire

$$\square\phi - \partial_\phi V(\phi) + \mathcal{G}\partial_\phi\alpha(\phi) = 0. \quad (2.70)$$

La variation de l'action sur la métrique  $g_{\mu\nu}$  simplifiée par l'identité Bianchi, donne

$$\begin{aligned} 0 = & M_p^2 \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) + \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \partial_\rho \phi \partial^\rho \phi + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (-V(\phi) + \alpha(\phi) \mathcal{G}) \\ & \alpha(\phi) \left( -2RR^{\mu\nu} + R^\mu{}_\rho R^{\nu\rho} - 2R^{\mu\rho\sigma\tau} R^\nu{}_{\rho\sigma\tau} + 4R^{\mu\rho\sigma\tau} R^\nu{}_{\rho\sigma\tau} \right) \\ & + (2R\nabla^\mu \nabla^\nu - 2g^{\mu\nu} R \nabla^2 - 4R^{\nu\rho} \nabla_\rho \nabla^\mu - 4R^{\mu\rho} \nabla_\rho \nabla^\nu) (\alpha(\phi)) \\ & + 4(\nabla^2 \alpha(\phi)) R^{\mu\nu} + 4g^{\mu\nu} (\nabla_\rho \nabla_\sigma \alpha(\phi)) R^{\rho\sigma} - 4(\nabla_\rho \nabla_\sigma \alpha(\phi)) R^{\mu\rho\nu\sigma}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

La métrique d'un univers homogène et isotrope spatialement plat dans le modèle FLRW est donnée par :

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2, \quad (2.72)$$

avec  $a(t)$  est un facteur d'échelle sans dimensions, à partir duquel nous définissons le scalaire de Ricci  $R$  et l'invariant GB  $\mathcal{G}$  dans la géométrie FLRW comme

$$R = 6 \left( 2H^2 + \dot{H} \right) \quad \mathcal{G} = 24H^2 \left( \dot{H} + H^2 \right). \quad (2.73)$$

En considérant  $\phi = \phi(t)$ . Donc Eq.(3.21) s'écrit comme

$$\dot{\phi}^2 - 2 \left( 24H^3 \frac{\alpha'(\phi)}{D-4} \right) \dot{\phi} + 2V(\phi) - 6M_p^2 H^2 = 0, \quad (2.74)$$

avec  $\dot{\phi} = \partial_t \phi$ ,  $\alpha'(\phi) = \partial_\phi \alpha(\phi)$  et  $H = \dot{a}/a$  est le paramètre de Hubble. La solution est alors évaluée comme

$$\dot{\phi}_\pm = 24H^3 \alpha'(\phi) \pm H \sqrt{24\alpha'(\phi) + 6M_p^2 - \frac{2V(\phi)}{H^2}}. \quad (2.75)$$

Eq.(2.70) peut être écrit comme l'équation de Klein Gordon sous une forme simple

$$\ddot{\phi} + 3H \left[ \dot{\phi} - 8\alpha'(\phi) H \left( \dot{H} + H^2 \right) \right] + V'(\phi) = 0. \quad (2.76)$$

$$\ddot{\phi} + 3H \left[ \dot{\phi} - \frac{8\alpha'(\phi) \mathcal{G}}{24H} \right] + V'(\phi) = 0.$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) - \alpha'(\phi) \mathcal{G} = 0.$$

Notez que dans la gravité EGB, la densité de potentiel du champ scalaire et le couplage de Gauss-Bonnet, sont donnés comme

$$V(\phi) = V_0 e^{-2R_0 \phi} ; \quad \alpha(\phi) = \alpha_0 e^{2R_0 \phi}. \quad (2.77)$$

avec les paramètres constants  $V_0$ ,  $\alpha_0$  et  $R_0$  Ref.[77, 79]. Dans ce cas, le terme harmonique domine dans le potentiel, on peut donc approximer l'équation du mouvement pour trouver l'oscillation harmonique d'amortissement.  $R_0$  est considérée comme une échelle d'énergie typique, où l'action gravitationnelle s'écarte de l'action d'Einstein-Hilbert. Le facteur d'échelle est donné par  $a(t) \equiv a_0 t^{h_0}$  (loi de puissance), et le paramètre de Hubble  $H$  est défini par  $H = \dot{a}/a \equiv h_0/t$ . Nous exigeons  $\phi \equiv \phi_0 \ln t/t_0$  Ref.[77], avec  $t_0$  est le temps présent. Puis selon l'Eq.(2.77) on obtient

$$\alpha = \alpha_0 \left( \frac{h_0}{H t_0} \right)^{2R_0 \phi_0}. \quad (2.78)$$

L'équation du paramètre d'état  $\omega$  est donné par [77]

$$\omega = -1 + \frac{2}{3h_0}, \quad (2.79)$$

on trouve que

$$\omega = -1 + \frac{2}{3H t_0} \left( \frac{\alpha_0}{\alpha} \right)^{1/2R_0 \phi_0}. \quad (2.80)$$

Notez que cette formule peut être écrite en termes de couplage de Gauss-Bonnet. On considère le cas où  $R_0 \phi_0 \rightarrow \infty$ , ce qui donne l'équation standard du paramètre d'état de l'énergie

noire, qui ne dépend pas de  $\alpha$ . On considère le cas où  $R_0\phi_0 = k$ , avec  $k \in \mathbb{N}^*$ , dans ce cas l'Eq.(2.80) est valable pour  $\alpha \neq 0$  et que  $(\alpha_0, \alpha)$  qu'ils ont le même signe. Lorsque  $\alpha > 0$ , on a  $\omega > -1$ . En revanche, si  $\alpha < 0$ , on obtient  $\omega < -1$ . Plusieurs choix pour  $R_0\phi_0$  peut être faite, cependant, dans ce travail nous nous intéressons au choix de  $R_0\phi_0 = 1/2k$ . Par exemple, considérons le cas où  $R_0\phi_0 = 1/2$  au moment présent  $t_0$  (c'est-à-dire  $H = H_0$ ), on obtient  $\omega \sim -1 + 2\alpha_0/3\alpha$ , il y a deux solutions, correspondant à quand  $\alpha < \alpha_0$ , on a  $\omega < -1/3$  et quand  $\alpha > \alpha_0$ , on a  $\omega > -1/3$ .

## 2.7 Mécanisme caméléon

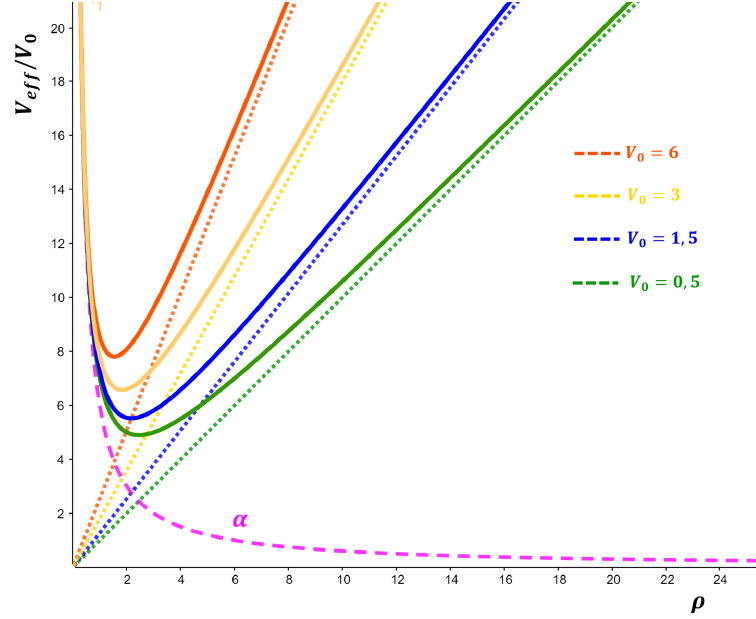
Récemment, il y a eu un regain d'intérêt pour la relation entre la matière noire et la masse du scalaron (c'est-à-dire la masse des champs  $\phi$ ) [73]. Nous étudierons plus tard la masse scalaire  $m_\phi$  qui décrira la matière noire. Pour décrire la masse de tout champ scalaire, nous utilisons l'équation de Klein-Gordon. Nous proposons une description de la matière noire dans le contexte de l'univers sombre caméléon [69], en introduisant un champ scalaire caméléon  $\phi$ . Rappelons que dans le mécanisme caméléon [72], le potentiel effectif du champ scalaron doit satisfaire

$$\square\phi = \partial_\phi V_{eff}(\phi), \quad (2.81)$$

noter que l'Eq.(2.70) donne la même forme que dans la dernière équation. Depuis  $G$  dans Eq.(2.70), ne dépend pas de  $\phi$ , dans ce cas, le potentiel effectif est évalué comme suit

$$V_{eff}(\phi) = V(\phi) - \alpha(\phi) \frac{G}{D-4}. \quad (2.82)$$

Nous remarquons que le potentiel effectif du scalaron inclut le couplage de Gauss-Bonnet et l'invariant de Gauss-Bonnet. En d'autres termes, le terme de Gauss-Bonnet affecte la structure potentielle du scalaron; ainsi, la masse du scalaron dépend de la contribution de matière.


 FIGURE 2.4 – le potentiel effectif vs  $\rho$ .

Les particules du champ  $\phi$  viennent de la fluctuation autour du minimum du potentiel effectif  $V_{eff}(\phi)$ . La masse de petites fluctuations sur  $\phi_{\min}$  est Eq.(2.81), la masse du scalaire est déterminée comme

$$m_\phi^2 = \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} V_{eff}(\phi_{\min}), \quad (2.83)$$

où  $V_{eff,\min}$  comme valeur minimale du potentiel effectif du scalaire  $V_{eff}$ . Le minimum du potentiel à  $\phi = \phi_{\min}$  devrait satisfaire

$$\partial_\phi V_{eff}(\phi_{\min}) = 0. \quad (2.84)$$

Dans le cas  $D \rightarrow 4$ , Eq.(2.84) s'écrit

$$\frac{\alpha_0 G}{D-4} = -V_0 e^{-4R_0 \phi_{\min}}. \quad (2.85)$$

La masse du scalaire peut alors être exprimée sous la forme

$$m_\phi = 2\sqrt{2V_0} R_0 e^{-R_0 \phi_{\min}}. \quad (2.86)$$

Les champs scalaires peuvent expliquer l'abondance de matière noire. La masse du scalaire change en fonction de la trace du tenseur énergie-impulsion [75]. Dans la limite de grande courbure [72]  $R_0 \phi_{\min} = 1$ , on trouve

$$R \rightarrow R_0 = 1/\phi_{\min} \equiv M_p^{-2} \rho, \quad (2.87)$$

avec  $\rho$  est la densité d'énergie de la matière. On peut alors exprimer la masse du scalaire  $m_\phi$  en fonction de la densité d'énergie de la matière

$$m_\phi = \frac{2\sqrt{2V_0}}{eM_p^2} \rho. \quad (2.88)$$

Le champ de scalaron  $\phi$  devient dynamique dans l'environnement à faible densité d'énergie à l'échelle cosmologique. Depuis la masse  $m_\phi$  dépend de la densité de matière  $\rho$ , ainsi, le scalaron devient lourd dans la région de haute densité de la matière. Cette caractéristique s'appelle le mécanisme caméléon qui est l'un des mécanismes de filtrage dans la gravité modifiée [80]. Nous savons que le mécanisme caméléon défini comme la masse du scalaron dépend de l'environnement entourant le champ du scalaron. Le scalaron  $\phi$  est considérée comme une matière noire dynamique et peut être une matière noire candidate. Il est montré que les champs scalaires peuvent expliquer l'abondance de matière noire. Des sujets similaires ont été étudiés dans de nombreuses littératures [80, 81].

## 2.8 Solutions de vide à symétrie maximale

Dans cette section, nous étudierons le statut des vides de Gauss-Bonnet et leur significations physiques. Dans l'espace à symétrie maximale, la courbure scalaire de l'espace de Sitter est donnée par

$$R = \frac{2D}{D-2}\Lambda, \quad (2.89)$$

avec  $\Lambda$  est la constante cosmologique. Dans le cas de positive  $\Lambda$ , nous avons la solution de Sitter. A la grande limite, on obtient  $1/\phi_{\min} = \frac{2D}{D-2}\Lambda_0$ . Dans le vide de dimension  $D$ , l'équation du mouvement a une solution pour  $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$ , implique que  $R = 4\Lambda$ . Le problème de la singularité [82] Correspond à  $R_0 \rightarrow \infty$  (la singularité de courbure) ou  $\phi_{\min} = 0$ . Selon l'Eq.(2.86) et Eq.(2.89), on obtient

$$2\phi_{\min} \left( \frac{D}{D-2} \right)^2 \Lambda^2 - \frac{D}{D-2}\Lambda + \frac{m_\phi}{4\sqrt{2V_0}} = 0. \quad (2.90)$$

Dans les solutions du vide à symétrie maximale, il existe deux branches de solutions pour la constante cosmologique effective,

$$\Lambda_{\pm} = \frac{D-2}{4D\phi_{\min}} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{2m_\phi}{\sqrt{2V_0}}\phi_{\min}} \right), \quad (2.91)$$

dans le cas de hiérarchie  $m_\phi\phi_{\min} \ll \sqrt{2V_0}$  et pour  $D = 4$ , la courbure scalaire de l'espace de Sitter est donnée par

$$\Lambda_+ = \Lambda_0 (1 - 4\phi_{\min}\Lambda_-) \quad \text{and} \quad \Lambda_- = \frac{m_\phi}{8\sqrt{2V_0}} = \frac{\rho}{4eM_p^2}. \quad (2.92)$$

Commentons maintenant les deux solutions ci-dessus. La constante cosmologique  $\Lambda_+$  est équivalent à celui trouvé par [84], d'autre part, la deuxième branche  $\Lambda_-$  dépend de la densité de matière. La constante cosmologique  $\Lambda_+$  est proportionnel à la masse du champ scalaire (matière noire caméléonique [75]). Si  $\rho$  diminue avec le temps, la valeur de  $\Lambda_+$  augmente pour atteindre  $\Lambda_0$ . Un seul vide sera sélectionné, lorsque les deux racines ( $\Lambda_-, \Lambda_+$ ) ont des signes opposés. La gravité EGB ne peut admettre qu'un vide spécifique, qui se justifie par le même signe de  $\Lambda_-$  et  $\Lambda_+$ . Nous remarquons que  $\Lambda_+ > 0$  et  $\Lambda_- > 0$ , au lieu d'étudier le

faux vide se formant à l'intérieur du vrai vide dans la géométrie de la bulle [84]. Les deux racines  $(\Lambda_-, \Lambda_+)$  peuvent représenter deux faces du vrai vide. Dans le vide sans matière, le mécanisme caméléon sera nul, ce qui correspond à l'énergie noire  $(\Lambda_+ = \Lambda_0)$ . Le mécanisme caméléon apparaît quand il y a la matière Eq.(2.88), les vides (vacua) sont ceux avec  $\Lambda_-$ . Le vide de Gauss-Bonnet devient caméléon s'il y a de la matière, ce qui résout le problème du vide de Gauss-Bonnet souffrant d'une instabilité fantôme perturbative [85]. Ce qui justifie aussi que la matière ait un impact sur le vide, c'est que les deux vides sont séparés par une paroi de domaine, composée de matière ordinaire dans l'approximation de paroi mince [84]. Nous remarquons que  $\Lambda_- \ll \Lambda_+$ , ce qui équivaut au pourcentage de matière noire et d'énergie noire dans l'Univers. En particulier, la limite de grande courbure  $1/\phi_{\min} = R_0 = 4\Lambda_0$ , doit satisfaire  $\Lambda_0 = \rho/4M_p^2$ , on peut montrer que  $\Lambda_+ + \Lambda_- = \Lambda_0$ , qui correspond à  $\Lambda_- \approx 0,37\Lambda_0$  (la matière noire) et  $\Lambda_+ \approx 0,63\Lambda_0$  (l'énergie noire) (voir [86]). Il est intéressant de noter que le 37% du vide obtient une masse dans une région occupée par la matière. Les deux racines coïncident en fait si  $2\Lambda_+ = \Lambda_0$ , c'est ce qu'on appelle la limite de Chern-Simons [83].

A partir des corrections de Gauss-Bonnet pour la branche de Gauss-Bonnet, la limite de Chern-Simons est connue sous le nom  $\Lambda_0 = -3/2\alpha$  or  $\alpha R_0 = -6$  [84]. Si  $\alpha > 0$ , qui correspond à l'espace de Sitter (dS). En revanche, si  $\alpha < 0$ , cela correspond à un espace anti de Sitter (AdS). Dans la grande limite de courbure, nous trouvons que le couplage de Gauss-Bonnet se simplifié à

$$|\alpha| = \frac{6M_p^2}{\rho}, \quad (2.93)$$

ou

$$|\alpha| = \frac{2}{H_0^2 \Omega_b}, \quad (2.94)$$

où  $\Omega_b \approx 0,02237$  est la densité baryonique de l'Univers et  $H_0 \approx 0,679_{-1,3}^{+1,2} \times 100 \text{ Km.s}^{-1} . \text{Mpc}^{-1}$  est le taux d'expansion de Hubble actuel [86], on trouve  $\alpha \approx 5,296 \times 10^{-69} \text{ eV}^{-2}$ . Ce résultat vérifie la limite  $0 \leq \alpha \leq 2,57 \times 10^{21} \text{ eV}^{-2}$  Ref.[87]. Nous traçons le couplage Gauss-Bonnet sur la figure 2 avec un paramètre fixe ( $M_p^2 \equiv 1$ ). Cette équation démontre que la gravité d'Einstein apparaît près de la matière. En revanche, la gravité EGB sera plus dominante pour les régions à faible densité de matière. Eq.(2.93) conduit naturellement à un grand mélange entre le vide. Il convient également de mentionner que nous avons  $|\alpha| = 6\phi_{\min}$ , ce qui équivaut à  $m_\phi \phi_{\min} \ll \sqrt{2V_0}$ . Ensuite, nous nous intéressons aux transitions entre les deux branches  $(\Lambda_-, \Lambda_+)$  en gravité de Gauss-Bonnet. Si  $R_0 \phi_0 = 1$ , Eq.(2.80) peut alors s'exprimer en temps actuelle  $t_0$  comme  $\omega \sim \sqrt{\rho}$ . Dans le cas  $R_0 \phi_0 = -1$  on a  $\omega \sim 1/\sqrt{\rho}$ . Cela signifie que le paramètre  $\omega$  peut changer avec les valeurs de  $R_0 \phi_0$ . Ensuite, nous ajoutons la contribution du couplage de Gauss-Bonnet Eq.(2.93), discuter du potentiel effectif du scalaron tel que défini dans Eq.(2.82).

$$V_{eff}/V_0 = \frac{\alpha_0}{6M_p^2} \rho + \frac{6M_p^2}{\alpha_0 \rho} e^{-4R_0 \phi_{\min}}. \quad (2.95)$$

Puisque  $V_{eff}$  dépend explicitement de la densité de matière locale  $\rho$ , la masse scalaire  $m_\phi$  et la valeur du champ au minimum dépendent à la fois de  $\rho$ . Décrivons le potentiel effectif dans un environnement qui entoure la matière. A la faible densité d'énergie de la matière, le

potentiel effectif peut être approché par  $\alpha$ . Dans la région de haute densité,  $V_{eff}$  s'approchant de  $\Lambda_-$ . Le potentiel effectif a le minimum dans la grande région de courbure ( $\rho \neq 0$ ), ce qui signifie que la masse  $m_\phi$  apparaît lorsque  $\Lambda_- \sim \alpha$ . En d'autres termes,  $\Lambda_-$  c'est juste un potentiel. Pour être plus précis, la masse des petites fluctuations est une fonction croissante de la densité. De plus, dans les régions de forte densité, le caméléon se confond avec son environnement et devient essentiellement invisible.

## 2.9 Conclusion

L'évolution des champs scalaires dans les théories  $f(R)$  peut déterminer à la fois la nature de la matière et l'énergie noire. La masse du champ scalaire représente les effets de la matière noire. Par contre son évolution dans le temps décrit l'accélération d'expansion d'univers ce qui représente l'énergie noire.

# Chapitre 3

## Intrication des trous noirs d'Einstein-Gauss-Bonnet

### 3.1 Introduction

La métrique à symétrie sphérique décrit la géométrie de l'espace-temps vide autour d'un trou noir avec un horizon des événements sous forme sphérique. Lorsque le trou noir a une charge électrique, la solution de Schwarzschild n'est plus valable. Un trou noir non tournant correspond à un trou noir isotrope de masse  $M$  et de charge  $Q$ , qui décrit par la métrique Reissner–Nordström. Pour un trou noir chargé avec  $|Q| \ll M$  sont similaires aux trous noirs de Schwarzschild. Les trous noirs de Reissner–Nordström ont deux horizons, le plus interne est un horizon de Cauchy. Les trous noirs avec  $|Q| > M$  n'existent pas dans la nature, puisqu'elles contiendraient une singularité nue. Leur existence serait en contradiction avec le principe de censure cosmique du Roger Penrose [88].

### 3.2 Intrication sur le trou noir Kerr-Newman

En exprimant la **métrique de Kerr–Newman** en coordonnées sphériques  $(t, r, \theta, \varphi)$  par

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} (dt - J/M \sin^2 \theta d\phi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + J^2/M^2) d\phi - J/M dt]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad (3.1)$$

avec

$$\Delta \equiv r^2 - r_s r + J^2/M^2 + Q^2/4, \quad (3.2)$$

$$\rho^2 = r^2 + J^2/M^2 \cos^2 \theta. \quad (3.3)$$

La métrique Kerr-Newman décrit un trou noir si et seulement si [90]

$$J^2 \leq (M^2 - Q^2) M^2. \quad (3.4)$$

Le cas  $J^2 \leq M^4 - Q^2 M^2$  décrit un trou noir extrême. Pour  $(Q = 0, J \neq 0)$ , nous aurons une métrique noire de Kerr. Pour  $(Q \neq 0, J \neq 0)$ , nous obtenons un trou noir Kerr-Newman. Si

( $Q \neq 0, J = 0$ ), nous obtenons un trou noir Reissner–Nordström. Enfin pour ( $Q = 0, J = 0$ ), on obtient une métrique de Schwarzschild. On peut réécrire Eq.(3.4) sous une forme plus générale :

$$J^2 \lesssim -\frac{r_s^2}{4} Q^2 e^{-\frac{r_s^2}{4Q^2}} \quad (3.5)$$

l'objectif derrière cette forme générale, est de faire apparaître les coordonnées Kruskal–Szekeres pour couvrir la totalité de l'espace-temps autour de l'horizon. Nous prenons  $u = -\frac{r_s^2}{4Q^2}$ , on peut donc obtenir

$$J^2/Q^4 \lesssim ue^u \quad (3.6)$$

le terme  $ue^u$  est la coordonnée de Kruskal, où

$$u = -M^2/Q^2 \equiv -r/2M \quad (3.7)$$

cette dernière équation permet de trouver la charge des particules tournant dans l'horizon

$$Q_{\pm} = \pm M \quad (3.8)$$

chaque particule sur l'horizon a une charge qui dépend directement de la masse du trou noir ; si la masse du trou noir est plus grande, la charge de particule dans l'horizon sera plus importante. Cette équation montre qu'il existe deux types de particules en rotation sur l'horizon. Chaque particule de la charge  $Q_+ = +M$ , est intriquée avec une autre antiparticule de la charge  $Q_- = -M$ . La particule et l'antiparticule ont des charges électriques opposées  $Q_+$  et  $Q_-$ , i.e. *CPT* s'oppose aux charges. La somme de toutes les charges des particules de l'horizon est nulle. Si on considère que le nombre de particules d'horizon  $N \rightarrow \infty$ , nous aurons

$$\sum Q_{r_s} = M \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = M/2 \quad (3.9)$$

Alors la charge de l'horizon du trou noir est

$$Q_H = M/2 \quad (3.10)$$

Cette charge correspond exactement à un horizon d'événement physique, car (3.10) vérifié la condition d'existence de l'horizon des événements :  $2Q_H \prec r_s$ . La notion d'horizon de trou noir chargé électriquement, est déjà trouvée par [91]. Par conséquent, l'Eq.(3.4) devient

$$J^2 \leq \frac{3}{4} M^4 \quad (3.11)$$

le terme  $J$  dans la dernière équation représente un état classique. Dans le cadre quantique, on prend  $\hat{J}$  et en tant qu'opérateur  $J$  avec ses valeurs propres dans les états  $\{|\varphi_{\pm}\rangle\}$

$$|J| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} M^2, \quad (3.12)$$

avec  $|J|$  décrire les particules en rotation qui sont piégées dans l'horizon. Pour un trou noir 4d Kerr extrême, l'Eq.(3.12) devient deux équations, sont donnés par

$$J_- = -\frac{\sqrt{3}}{2} M^2 \text{ or } J_+ = +\frac{\sqrt{3}}{2} M^2. \quad (3.13)$$

Donc le trou noir extrême est un ensemble de deux particules intriquées de masse faible  $M$ . Cette équation indique que les deux particules intriquées à l'horizon sont créées à partir du point  $O$ , et tourner dans des directions opposées alors c'est l'annihilation particule-antiparticule sur un autre point  $O'$  sur l'horizon. Par conséquent, le trou noir extrême est considéré comme un accélérateur de particules. La rotation des deux particules intriquées (particule et antiparticule) crée un trou noir équivalent à la production de paires. Cela nécessite qu'il y ait suffisamment d'énergie disponible dans le centre de masse pour créer la paire. Dans ce cas on suppose que toute l'énergie absorbée par un trou noir est transformée en énergie cinétique des particules-antiparticules de l'horizon. La masse et le moment angulaire de l'ADM dépendent de la taille de l'horizon  $a$

$$M \equiv a. \quad (3.14)$$

Les horizons d'événements pour l'équation d'espace-temps Eq.(1.83) sont situés où  $\frac{1}{g_{rr}} = 0$ . Ces horizons d'événements concentriques deviennent dégénérés pour (3.8), qui correspond à un trou noir extrême, ce qui explique le résultat trouvé par (3.13), c'est-à-dire que le trou noir est un ensemble de deux particules intriquées, l'une tourne par rapport à l'autre. Cette comparaison ouvre une description d'un trou noir avec des particules intriquées (particule et antiparticule) (3.8) sur l'horizon (3.1) par deux les métriques Eq.(1.83) et Eq.(3.1). Mais nous avons un problème, la métrique Kerr-Newman Eq.(3.1) décrit un trou noir en rotation, d'autre part, la métrique Reissner–Nordström Eq.(1.83) décrit un trou noir sans rotation. Pour unifier les deux métriques, nous proposons que les horizons d'événements concentriques décrits par le moment angulaire de l'horizon  $J_H = 0$  et moment cinétique  $J_{\pm} \neq 0$  du système intriqué particule-antiparticule à l'horizon. L'ensemble  $\{J_H, J_{\pm}\}$  est décrit par la métrique de Reissner–Nordström et la métrique de Kerr–Newman en même temps. Quand on a une annihilation entre la particule et antiparticule dans l'horizon, on aura  $J_H = 0$ . D'autre part,  $J_{\pm}$  décrit l'horizon avec la création de ces particules intriquées. Ce qui signifie que la géométrie de l'espace-temps près de l'horizon change en fonction de la dynamique des particules intriquées. Ce qui signifie que les deux horizons  $r_{\pm}$  sont un mirage créé par le système particule-antiparticule. Dans ce cas, nous proposons que la singularité ne tourne pas. La rotation et la charge ne sont présentes qu'à l'horizon. Pour trouver l'intersection entre ces deux métriques, nous utiliserons une technique. Pour  $Q = Q_H$  (3.10), on peut utiliser les deux moments cinétiques (3.13) dans Eq.(1.83), et on obtient

$$r_{\pm} = M + \frac{J_{\pm}}{M}, \quad (3.15)$$

avec  $r_{\pm}$  sont deux horizons Reissner-Nordström, cela dépend de  $J_{\pm}$ . Selon notre modèle,  $r_{\pm}$  sont des horizons virtuels ou des horizons mirages, car il y a des résultats de rotation de plusieurs particules-antiparticules intriquées sur l'horizon réel ( $Q_H = M/2$ ,  $J_H = 0$ ,  $r = r_s$ ). Puisque  $r_{\pm}$  dépend de  $J_{\pm}$ , donc  $r_{\pm}$  décrivent les deux particules. Par conséquent, nous proposons de remplacer  $r_s$  dans Eq.(3.1) par les dernières valeurs de  $|r_{\pm}|$ . Pour trouver une métrique décrivant l'espace-temps autour de l'horizon avec la présence des particules intriquées, nous proposons d'abord cette nouvelle métrique

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{M}{r} + \frac{M^2}{r^2} - \frac{|J_{\pm}|}{rM} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{M}{r} + \frac{M^2}{r^2} - \frac{|J_{\pm}|}{rM} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\omega^2 \quad (3.16)$$

on part d'une région proche de la singularité  $0 \lesssim r \preceq r_s$ , dans ce cas nous proposons d'utiliser la série de Taylor pour cette métrique :

$$|J_{\pm}| \equiv \frac{M^4}{r^2} - \frac{M^5}{r^3} + \dots + O\left(\pm \frac{M^{n+2}}{r^n}\right) \quad (3.17)$$

cette dernière expression explique la présence de l'intrication dans l'horizon.

### 3.3 Trou noir dans la gravité d'Einstein-Gauss-Bonnet

Commençant par l'expression standard de l'action pour la théorie chargée d'Einstein-Gauss-Bonnet en dimensions  $D$  avec une constante cosmologique négative [77, 78]

$$I = \frac{1}{16\pi} \int d^D x \sqrt{-g} [R - 2\Lambda + \alpha (R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}) - F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}], \quad (3.18)$$

avec  $\alpha$  est un couplage de Gauss-Bonnet fini non nul ont des dimensions de  $[L]^2$ , qui représentent les corrections ultraviolettes (UV) de la théorie d'Einstein,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  est le tenseur de Maxwell associé au quadri-potential électromagnétique  $A_\mu(r)$ ,

$$R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (3.19)$$

est l'invariant de Gauss-Bonnet, avec  $R$ ,  $R_{\mu\nu}$ ,  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$  sont respectivement le scalaire de Ricci, le tenseur de Ricci et le tenseur de Riemann et  $\Lambda = -(D-1)(D-2)/2l^2$ , avec  $l$  est le rayon AdS. En prenant la transformation  $\alpha \rightarrow \alpha/(D-4)$ . En résolvant l'équation de champ par la métrique du trou noir [79] :

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.20)$$

Prendre la limite  $D \rightarrow 4$ , on obtient la solution exacte sous forme fermée

$$-g_{00} = f(r) \approx 1 + \frac{r^2}{2\alpha} \left( 1 - \sqrt{1 + 4\alpha \left( \frac{2M}{r^3} - \frac{Q^2}{r^4} - \frac{1}{l^2} \right)} \right). \quad (3.21)$$

Cette dernière solution pourrait être obtenue directement à partir de la dérivation faite dans [138]. L'horizon des événements dans l'espace-temps peut être localisé en résolvant l'équation métrique :  $f(r) = 0$ . Les solutions montrent que l'horizon des événements se situe à

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2 - \alpha}. \quad (3.22)$$

Nous remarquons que lorsque  $\alpha \sim 0$ , la solution se comporte comme la solution de Reissner-Norström (RN). L'horizon des événements du trou noir est  $r_+$  et  $r_-$  est l'horizon de Cauchy [141].

## 3.4 Intrication des particules dans le trou noir EGB

### Potentiel électrique du trou noir EGB

L'horizon des événements dans l'espace-temps peut être localisé en résolvant l'équation métrique :  $g_{00} = 0$ . Les solutions montrent que l'horizon des événements se situe à [92] :

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2 - \alpha}, \quad (3.23)$$

On remarque que la solution se comporte comme la métrique Reissner-Norström (RN). L'horizon des événements du trou noir est la plus grande racine de l'équation ci-dessus,  $r_+$  est l'horizon du trou noir. Cependant, le rayon  $r_-$  représente un horizon, qui peut être un horizon mirage ou un horizon virtuel. Pour expliquer la présence de deux horizons  $r_{\pm}$ , nous supposons que nous pouvons représenter l'horizon  $r_-$  comme un reflet symétrique de l'horizon  $r_+$ . On peut représenter le trou noir de Schwarzschild par deux visions : Si  $r_- = 0$ , le trou noir de Schwarzschild consiste en une singularité chargée négativement ( $Q_- = -M$ ) et un horizon chargé positivement ( $Q_+ = M$ ), par conséquent, si le nombre de particules et d'antiparticules est limité, la charge totale du trou noir de Schwarzschild est nulle, ce cas est similaire à un atome d'antimatière. Si  $r_- = 2M$  (l'horizon dégénère), le trou noir de Schwarzschild est constitué d'une singularité neutre et de charges positives et négatives sur l'horizon ( $Q_- = -M$ ;  $Q_+ = M$ ), donc, pour que l'horizon de Schwarzschild soit neutre; le nombre de charges positives doit être égal au nombre de charges négatives à l'horizon. Ce résultat montre que le trou noir de Schwarzschild, se comporte comme atome neutre, mais qu'il contient des charges positives et négatives. Le trou noir de Schwarzschild contient une singularité chargée négativement  $Q_-$  et un horizon chargé positivement  $Q_+$ . Nous pouvons exprimer les potentiels électriques des charges négatives et positives dans le trou noir de Schwarzschild par [93]

$$\Phi_+(r) = \frac{M}{|r| \left| 1 - \frac{2M}{r} \right|} \quad \Phi_-(r) = -\frac{M}{|r|}. \quad (3.24)$$

Puisque l'étude du trou noir chargé d'Einstein Gauss-Bonnet montre une propriété similaire à celle du trou noir RN, ce qui montre que le paramètre  $\alpha$  crée un passage entre le trou noir de Schwarzschild et le trou noir RN. Nous pouvons réécrire la métrique de Schwarzschild comme

$$ds^2 = \frac{\Phi_-}{\Phi_+} dt^2 - \frac{\Phi_+}{\Phi_-} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.25)$$

La métrique de Schwarzschild dépend du potentiel des particules et des antiparticules. Dans le trou noir de Schwarzschild,  $N$  est limité et nous écrivons

$$Q_S = q_+ \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n = 0. \quad (3.26)$$

Pour que ces deux relations ci-dessus soient valides, le nombre  $N$  doit être pair, c'est-à-dire que le nombre de particules est égal au nombre d'antiparticules. Mais si  $N$  est impair, on obtient  $Q = Q_+$  ou  $Q = Q_-$ , c'est en contradiction avec un trou noir de Schwarzschild

non chargé. Ce qui montre que le nombre de particules à l'horizon est égal au nombre d'antiparticules dans la singularité du trou noir de Schwarzschild. Dans le trou noir EGB, quand  $N \rightarrow \infty$ , la suite analytique de la fonction zêta de Riemann de 0 ( $\zeta(0) = 1/2$ ) donne

$$Q_{EGB} = q_{\pm} \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n = \pm \frac{1}{2} \sqrt{M^2 - \alpha}. \quad (3.27)$$

Cette charge correspond exactement à un horizon d'événement physique, car  $Q_{EGB}$  vérifié la condition d'existence de l'horizon des événements :  $2Q_{EGB} < r_s$ . On peut également décrire la charge du trou noir EGB dans le cas de  $N \neq \infty$ , avec  $N$  est impaire, c'est à dire  $Q_{EGB} = \pm Q_+$ . Les valeurs de la charge de  $Q_{EGB}$  sont quantifiées selon les valeurs constantes de  $M$  et  $\alpha$ . Nous représentons cette quantification par la charge totale d'un trou noir d'Einstein Gauss-Bonnet est [127]

$$Q_{EGB} = m\sqrt{M^2 - \alpha} \quad m = \{-1, -1/2, 0, 1/2, 1\}. \quad (3.28)$$

Remplacez l'équation Eq.(3.28) par Eq.(3.22) et on obtient

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{(1 - m^2)(M^2 - \alpha)}. \quad (3.29)$$

L'horizon du trou noir EGB est quantifié selon les valeurs de  $m$ ,  $r_+$  et  $r_-$  sont l'horizon des événements et le rayon de l'horizon de Cauchy du trou noir EGB [92]. Ensuite, nous voulons donner une interprétation physique aux solutions des deux horizons. Pour un trou noir extrême, on obtient  $r_+ = r_-$  (solution dégénérée) et  $|Q_{EGB}| = \sqrt{M^2 - \alpha}$ . Premièrement on introduit les charges de particules et et antiparticules dans l'horizon

$$q_{\pm} = \pm \sqrt{M^2 - \alpha}. \quad (3.30)$$

La charge de chaque particule (ou antiparticule) à proximité de l'horizon dépend directement de la masse du trou noir et du couplage Gauss-Bonnet. Chaque particule de la charge  $q_+ = +\sqrt{M^2 - \alpha}$ , est intriqué avec une autre antiparticule de la charge  $q_- = -\sqrt{M^2 - \alpha}$  par l'état intriqué  $|\psi\rangle$  dans la base  $\{|+\rangle_L, |-\rangle_L\}$  de l'horizon de Cauchy  $\mathcal{H}_L$ , et  $\{|+\rangle_R, |-\rangle_R\}$  une base de l'horizon des événements  $\mathcal{H}_R$ . L'état intriqué  $|\psi\rangle$  peut être exprimé comme  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_L |-\rangle_R \pm |-\rangle_L |+\rangle_R)$ . Nous pouvons simplifier les équations (3.22) et (3.8) par

$$(r_{\pm} - M)^2 = q_{\pm}^2 - Q_{EGB}^2. \quad (3.31)$$

Nous remarquons que  $q_{\pm}^2 \geq Q_{EGB}^2$ . Les charges  $q_+$  sont situés sur le  $\mathcal{H}_R$ , d'autre part, les charges d'antiparticules  $q_-$  sont situées sur le  $\mathcal{H}_L$ . L'Eq.(3.11) se comporte comme des dipôles gravitationnels virtuels dans le cadre de la répulsion gravitationnelle entre matière et antimatière [95]. Si nous supposons qu'il y a une disparition complète d'un trou noir AdS ( $\alpha < 0$ ), on obtient la position des deux charges  $r_{\pm} = q_{\pm} = \pm\sqrt{-\alpha}$ . Le problème du rayon négatif  $r_- = -\sqrt{-\alpha}$ , indique une disparition des antiparticules avec la disparition de la singularité du trou noir, par contre, les particules échappent à la singularité. Cet aspect est équivalent à la position des deux horizons ; l'horizon  $r_-$  existe sur la singularité et  $r_+$  est le bord du trou noir. Ce qui est en accord avec la violation de la symétrie CP entre matière et antimatière [96]. Cette disparition complète des antiparticules ressemble à un scénario de disparition de l'antimatière après le big bang.

## Deux trous noirs EGB intriqués par ER=EPR

On considère que la charge du trou noir EGB est la somme des charges des paires de deux manières différentes, donnée par  $Q_{EGB} = q_+ + q_- + q_+ + \dots$  or  $Q_{EGB} = q_- + q_+ + q_- + \dots$ , ou équivalent

$$Q_{EGB} = \pm q_+ \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k, \quad (3.32)$$

avec  $N$  désigne le nombre de particules et antiparticules. Si  $N = 2k$ , on obtient  $Q_{EGB} = 0$  (trou noir de Schwarzschild), ce qui montre que le nombre de particules sur  $\mathcal{H}_R$  est égal au nombre d'antiparticules dans la singularité du trou noir de Schwarzschild, ce qui correspond exactement à la proposition de paires intriquées. Si  $N = 2k + 1$  on trouve  $Q_{EGB} = \pm q_+$  et si  $N = \infty$ , on obtient  $Q_{EGB}^{N \rightarrow \infty} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{M^2 - \alpha}$ .

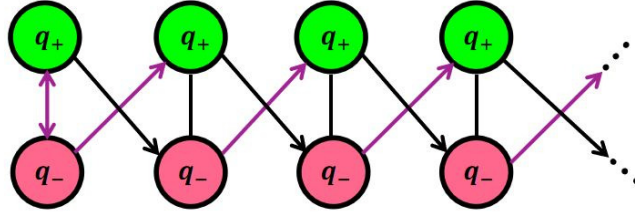


FIGURE 3.1 – La sommation des charges  $q_-$  qui sont placés sur l’horizon interne, avec les charges  $q_+$  qui sont placés sur l’horizon externe.

Le calcul a déjà été effectué en détail dans [97]. Cette procédure peut représenter par la quantification de la charge totale d’un trou noir EGB selon  $Q_{EGB}$ . La charge  $Q_{EGB}$  est quantifiée en termes de  $M$  et  $\alpha$ . Cette charge vérifie la condition d’existence de  $\mathcal{H}_R$  :  $2Q_{EGB} < r_s$  et vérifie l’état Eq.(3.11). D’après cette dernière équation, même  $r_+$ ,  $M$  et  $\alpha$  sont quantifiés par la relation  $(r_{\pm} - M)^2 = (1 - n^2)(M^2 - \alpha)$ . Pour le trou noir RN on obtient  $Q_{RN} = nM$ . Le trou noir EGB se transforme en trou noir de Schwarzschild si les particules ont une charge nulle ( $q_+ = 0$ ). La formule de Bekenstein-Hawking (BH) avec terme logarithmique supplémentaire [98] est donné par

$$S = \frac{A}{4} + 2\pi\alpha \log \frac{A}{A_0}, \quad (3.33)$$

avec  $A \equiv 4\pi r_+^2$  est l’aire de l’horizon des événements du trou noir, qui peut être étendu en deux termes logarithmiques supplémentaires par l’utilisation de la charge ci-dessus [97]. La prescription Eq.(3.33) est équivalente à l’entropie généralisée de la surface extrême quantique si  $S_{bulk} = 2\pi\alpha \log A/A_0$ . L’entropie de Von Neumann des champs en bulk est représentée par l’entropie en bulk  $S_{bulk}$  dans la région frontière.

### 3.5 Ponts ER et informations quantiques

Pour décrire le comportement de certaines particules sous l'opération de symétrie de conjugaison de charges, nous introduisons deux opérateurs  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{C}$ , le premier représente l'opérateur de charge et le second est l'opérateur de charge-conjugaison. L'opération  $\mathcal{C}$  transforme une particule en antiparticule. Notez que  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{Q}$  obéissent à la relation anticommulative :  $\mathcal{C}\mathcal{Q} + \mathcal{Q}\mathcal{C} = 0$ , et généralement ne possèdent pas le même état propre, où  $\mathcal{C}|q\rangle = |\bar{q}\rangle$  et  $\mathcal{Q}|q\rangle = q_+|q\rangle$  (qui nécessite  $\mathcal{Q}|\bar{q}\rangle = q_-|\bar{q}\rangle$ ), ce qui signifie que  $\{|q\rangle, |\bar{q}\rangle\}$  sont des états propres de  $\mathcal{Q}$ . L'opérateur de parité satisfait  $\mathcal{P}|q\rangle = -|q\rangle$  et  $\mathcal{C}\mathcal{P}|q\rangle = -|\bar{q}\rangle$ . L'état de vide est invariant sous l'opérateur de charge-conjugaison  $\mathcal{C}|0\rangle = |0\rangle$ . Maintenant,  $|q\rangle$  désigne l'état quantique d'un système de  $N_+$  particules à valeur propre  $q_+$ . De la même manière,  $|\bar{q}\rangle$  est l'état quantique de  $N_-$  antiparticules à valeur propre  $q_-$ . Y compris l'opérateur de conjugaison de charges qui respecte  $\mathcal{C}^k|q\rangle = (-1)^k|q\rangle$ . Notez que  $Q_{EGB} = nq_+$ , qui conduit à  $\pm n|q\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{C}^k|q\rangle = N_+|q\rangle + N_-|\bar{q}\rangle$ . Ensuite, les états correspondants générés par

$$|q\rangle = \frac{-N_-}{N_+ - n} |\bar{q}\rangle \quad \text{ou} \quad |q\rangle = \frac{-N_-}{N_+ + n} |\bar{q}\rangle, \quad (3.34)$$

Par conséquent, l'état d'une particule est formulé en termes d'état d'antiparticule. La raison principale est que cette relation donne un aspect de trou de ver entre les deux états. Il a été explicitement confirmé par les ponts ER [118]. Précisons que pour obtenir les états normalisables  $\langle q|q\rangle = 1$  et  $\langle \bar{q}|\bar{q}\rangle = 1$ , on pourrait prendre  $n = \{(N_+ - N_-); N\}$  ou  $n = \{-N; (N_- - N_+)\}$ , où  $N = N_- + N_+$ . Maintenant, considérons les deux solutions  $n = -N$  et  $n = N$ . Selon l'état Eq.(??), est impossible que  $n \succ 1$ , ce qui signifie que pour ces deux cas  $N = 1$ . Pour les cas  $n = \pm(N_+ - N_-)$ , en utilisant la même condition, on montre que  $N_{\mp} - 1 \leq N_{\pm} \leq N_{\mp} + 1$ . Cela signifie que  $n = 0$ . Par conséquent, suivant Eq.(3.34) on introduit

$$|q\rangle = -|\bar{q}\rangle \implies n = \pm(N_+ - N_-) = 0, \quad (3.35)$$

$$|q\rangle = +|\bar{q}\rangle \implies n = \pm N = \pm 1. \quad (3.36)$$

Dans le cas  $|q\rangle = -|\bar{q}\rangle$  où  $N_+ = N_-$ , on pourrait prendre une solution dégénérée correspondant à  $n = 0$ , qui décrit le trou noir de Schwarzschild. Par conséquent, cette solution est invariante sous la symétrie CP car  $\mathcal{C}\mathcal{P}|q\rangle = |q\rangle$ . Ensuite, considérons le cas  $|q\rangle = |\bar{q}\rangle$  (Majorana fermion!), qui correspond exactement à un trou noir extrême ( $n = N = 1$ ) et un trou noir anti-extrémal ( $n = -N = -1$ ). Dans ce cas, le fermion de Majorana sur les deux horizons conduit à la violation de la symétrie CP. Par conséquent, le trou noir EGB se comporte sous les états normalisables comme Schwarzschild ou trou noir extrême, également comme trou noir anti-extrémal (c'est-à-dire un trou noir délimité par des antiparticules près de l'horizon des événements). Si  $r_- \succ r_+$  nous obtenons un trou noir anti-EGB, c'est-à-dire qu'il y a une grande abondance d'antimatière. Par conséquent, les états des particules et des antiparticules sont invariants sous C-symétrie. De plus, les deux horizons  $\mathcal{H}_L$  et  $\mathcal{H}_R$  postule que cette purification décrit deux trous noirs avec une broche de pont ER dans l'espace-temps étendu. Les états  $|TFD\rangle$  ont évolué au cours du temps correspondant. De plus, l'information se transforme de  $\mathcal{H}_R$  vers  $\mathcal{H}_L$  par l'état pur de  $L \otimes R$ . Puisque cet état TFD est pur sur

$\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ , il est instructif d'écrire en termes de surface minimale. L'entropie d'intrication [119] du trou noir  $\mathcal{A}$  égal à l'entropie d'intrication du trou noir  $\mathcal{B}$  :  $S_E(\mathcal{A}) = S_E(\mathcal{B})$  (car  $\gamma_{\mathcal{A}} = \gamma_{\mathcal{B}}$ ) Eq.(2.83). Cette entropie est étroitement liée à l'EE holographique dans l'espace asymptotiquement AdS [119]. L'EE satisfait la sous-additivité :  $S_E(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \leq S_E(\mathcal{A}) + S_E(\mathcal{B})$ , la validité de cette inégalité montre la présence de ER = EPR [124].

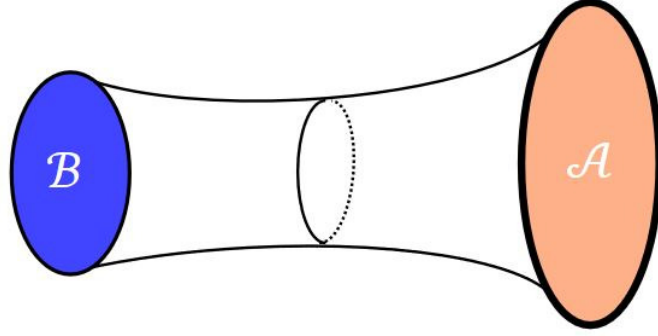


FIGURE 3.2 – Trou de ver entre deux trous noirs intriqués A et B.

Maintenant, considérons la limite  $N \rightarrow \infty$ , où  $N = 2N_+ = N = 2N_-$ , de même dans le cas de  $n = 0$ , on obtient  $|q\rangle = -|\bar{q}\rangle$ , qui exige que  $|q\rangle = (-1)^{1+\delta_N} |\bar{q}\rangle$ , où  $\delta_N(N=1) = 1$  et  $\delta_N(N \succ 1) = 0$ . Cette preuve algébrique montre que la connexion entre les deux horizons  $\mathcal{H}_L$  et  $\mathcal{H}_R$  vérifié la fonction de Möbius. Pare la suite on veut vérifier l'existence d'un pont Einstein-Rosen (ER) entre les particules près de l'horizon des événements  $\mathcal{H}_R (n \geq 0)$  et antiparticules près d'horizon de Cauchy  $\mathcal{H}_L (n \leq 0)$ . Il est alors raisonnable de considérer les deux horizons intriqués. On remarque qu'on peut écrire Eq.(3.35) comme suit  $|q\rangle_{RL} = (-1)^{1+n} |\bar{q}\rangle_{RL}$ . Nous introduisons l'état  $|\Psi\rangle_N$  d'un trou noir selon deux possibilités  $\{N=1, N \succ 1\}$ . Considérons la base  $|n\rangle \equiv \{|0\rangle, |1\rangle\}$ , où  $|1\rangle = (-1, 1)$  et  $|0\rangle = (0, 0)$ , ce qui signifie que le  $|\Psi\rangle_1 \sim |1\rangle$  et  $|\Psi\rangle_{N \succ 1} \sim |0\rangle$ . On prend donc deux horizons quelconques  $\mathcal{H}_L$  et  $\mathcal{H}_R$  qui sont intriqués pour être dans l'état double du champ thermique [121, 123]

$$|TFD(t)\rangle = \sum_n e^{-\left(\frac{\beta}{2} + 2it\right)E_n} |n\rangle_L \otimes |n\rangle_R, \quad (3.37)$$

où  $\beta = 1/T$  et  $|n\rangle_{LR}$  définis dans les théories microscopiques UV-complets, ils créent des états CFT avec de l'énergie [125]. L'état propre  $|n\rangle_L$  (ou  $|n\rangle_R$ ) de la  $CFT_L$  (ou  $CFT_R$ ) correspondant aux degrés de liberté dans  $\mathcal{H}_L$  (ou  $\mathcal{H}_R$ ), et  $|n\rangle_L$  est CPT conjugué d'état  $|n\rangle_R$ . Les  $TFD$  sont des états intriqués au maximum, qui représentent la purification formelle de l'état mixte thermique d'un horizon ( $\mathcal{H}_L$  ou  $\mathcal{H}_R$ ) [122], avec la matrice de densité réduite dans  $AdS/CFT$  par la formule de Ryu Takayanagi [119]. L'état mixte donné par la somme incohérente sur tous les états TFD généralisés  $\rho_{TMD} = (1/N) \sum_k |TFD\rangle_k \langle TFD|$  appelons le double thermo-mélangé, où  $N$  le nombre total d'états de base. La géométrie en vrac correspondante du trou de ver est formée par  $tr(\rho_{TMD}^2) = \sum_k e^{-2\beta E_k} / Z^2$ , où  $Z = \sum_k e^{-\beta E_k}$  est fonction de partition, le carré numéro 2 correspond aux deux horizons. Les états TFD généralisés sont orthogonaux  $\langle TFD | TFD \rangle \approx \delta_N$  [122] dans Eq.(??) donne  $\langle q | \bar{q} \rangle = (-1)^{1+\langle TFD | TFD \rangle}$ .

Dans ce point de vue, le trou noir EGB peut être considéré comme celui construit en collant convenablement deux trous noirs  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ . Le trou noir  $\mathcal{A}$  borné par l'horizon  $\mathcal{H}_R$  (la surface extrême quantique), qui est intriquée avec l'anti-trou noir  $\mathcal{B}$  borné par l'horizon  $\mathcal{H}_L$ . Si on considère que le trou noir absorbe la matière, l'anti-trou noir absorbe l'antimatière. De plus, les deux horizons  $\mathcal{H}_L$  et  $\mathcal{H}_R$  décrivent deux trous noirs avec un pont ER dans l'espace-temps étendu. Les états  $|TFD\rangle$  ont évolué au cours du temps. De plus, les informations transférées de  $\mathcal{H}_R$  à  $\mathcal{H}_L$  par l'état pur de  $L \otimes R$ . Puisque cet état TFD est pur sur  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ , il est instructif d'écrire en termes de surface minimale. L'entropie d'intrication (EE) [119] de trou noir  $\mathcal{A}$  égal à l'entropie d'intrication du trou noir  $\mathcal{B}$  :  $S_E(\mathcal{A}) = S_E(\mathcal{B})$  (puisque  $\gamma_{\mathcal{A}} = \gamma_{\mathcal{B}}$ ). Cette entropie est liée à l'EE holographique dans l'espace AdS asymptotique [119]. L'EE satisfait la sous-additivité :  $S_E(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \leq S_E(\mathcal{A}) + S_E(\mathcal{B})$ , la validité de cette inégalité montre la présence de ER = EPR [118]. L'information mutuelle entre les régions  $\mathcal{H}_L$  et  $\mathcal{H}_R$  est  $I_{LR} = 2S_E(\mathcal{A}) - S_E(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ .

### 3.6 Ombre de trou noir EGB

Ensuite, nous nous intéressons à l'évolution d'une particule libre en orbite autour de l'orbite équatoriale du trou noir le long d'une géodésique nulle, par le paramètre affine  $\lambda$ . Commençons par le lagrangien de la particule  $\mathcal{L} = (1/2) g_{\mu\nu} (dx^\mu/d\lambda) (dx^\nu/d\lambda)$ , peut être exprimé comme [137]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ -f(r)\dot{t}^2 + \frac{1}{f(r)}\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \right], \quad (3.38)$$

avec  $\dot{r} = \partial r / \partial \lambda$  et  $\dot{t} = \partial t / \partial \lambda$ . On obtient les impulsions généralisées  $p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . On obtient l'énergie  $E (= \text{constant})$  et moment angulaire orbital  $L (= \text{constant})$  du photon, qui lit

$$E = -p_t = f(r)\dot{t}^2 \text{ and } L = p_\phi = r^2\dot{\phi}, \quad (3.39)$$

avec  $p_r = \dot{r}/f(r)$ . L'hamiltonien le photon libre en mouvement peut être exprimé comme

$$\mathcal{H} = 2(p_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{L}) = -E\dot{t} + \frac{\dot{r}^2}{f(r)} + L\dot{\phi} = 0. \quad (3.40)$$

Résoudre Eqs.(3.39), on obtient facilement l'équation du mouvement radial  $\dot{r}^2 = -V_{eff}$ , où le potentiel effectif est

$$V_{eff} = \frac{f(r)}{r^2} L^2 - E^2, \quad (3.41)$$

avec  $V_0 = L^2/2\alpha$ . Nous analysons le comportement du potentiel effectif par rapport au paramètre  $\chi$  (illustrés sur la Fig.1). Lorsque le moment angulaire du photon libre augmente par rapport à son énergie, l'effet de  $\alpha$  et  $Q$  devient faible [132]. La sphère photonique satisfait la condition [128]

$$V_{eff} = \partial_r V_{eff} = 0 \text{ and } \partial_r^2 V_{eff} < 0, \quad (3.42)$$

avec  $\partial_r = \partial / \partial r$ . Il est immédiatement clair que le rayon de la sphère photonique  $r_{ps}$  peut dériver les conditions ci-dessus en résolvant  $\partial_r V_{eff} = 0$ . Deuxièmement, il faut résoudre

$V_{eff} = 0$  pour un trou noir à symétrie sphérique, donc le rayon de l'ombre est

$$r_S^2 = \frac{r_{ps}^2}{f(r_{ps})}, \quad (3.43)$$

$$A_S = 4\pi r_S^2 \quad A_{ps} = 4\pi r_{ps}^2. \quad (3.44)$$

On peut obtenir l'expression suivante

$$\frac{8\pi\alpha}{A_S} - \frac{8\pi\alpha}{A_{ps}} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\alpha 2M}{r_{ps}^3} - \frac{4\alpha Q^2}{r_{ps}^4} - \frac{4\alpha}{l^2}}, \quad (3.45)$$

$$\frac{8\pi\alpha}{A_S} - \frac{8\pi\alpha}{A_{ps}} = 1 \pm \sqrt{1 + 2\frac{8\pi\alpha}{A_{ps}} \left( \frac{2M}{r_{ps}} - \frac{Q^2}{r_{ps}^2} - \frac{A_{ps}}{4\pi l^2} \right)}. \quad (3.46)$$

Dans la limite GR ( $\alpha \rightarrow 0$ ), le rayon de l'ombre peut être très bien approximé par deux branches de solutions :

$$\frac{1}{A_S} \approx \frac{1}{A_{ps}} \left[ 1 + \frac{2M}{r_{ps}} - \frac{Q^2}{r_{ps}^2} \right] + \frac{1}{4\pi l^2}, \quad (3.47)$$

$$\frac{1}{4\pi\alpha} \approx \frac{1}{A_S} + \frac{1}{A_{ps}} \left[ \frac{Q^2}{r_{ps}^2} - \frac{2M}{r_{ps}} - 1 \right] + \frac{1}{4\pi l^2}. \quad (3.48)$$

Eq.(3.47) et Eq.(3.48) correspondent respectivement à la branche d'Einstein et à la branche de Gauss-Bonnet. Cependant, la branche Eq.(3.48), ne converge pas vers GR. Pour générer cela, on doit écrire les equations en terme de  $r_{ps}$  :

$$\frac{1}{\alpha} \approx \frac{f(r_{ps}) - g(r_{ps})}{r_{ps}^2} + \frac{1}{l^2}, \quad (3.49)$$

avec  $g(r_{ps}) = 1 + \frac{2M}{r_{ps}} - \frac{Q^2}{r_{ps}^2}$ . Dans la limite  $l \rightarrow \infty$ , le couplage de Gauss-Bonnet devient  $\alpha \approx \frac{r_{ps}^2}{f(r_{ps}) - g(r_{ps})}$ . Le paramètre d'impact critique  $b_c$  de mouvement pour cette sphère de photons est donnée par

$$b_c = \frac{r_{ps}^2}{f(r_{ps})} = \frac{L^2}{E^2}.$$

En utilisant l'ansatz  $b_g = r_{ps}^2/g(r_{ps})$ , le paramètre d'impact critique obéit à l'équation suivante

$$\frac{1}{\alpha} \approx \frac{1}{b_c} - \frac{1}{b_g} + \frac{1}{l^2}.$$

Dans la limite ( $\alpha \rightarrow 0, l \rightarrow \infty$ ), la surface de l'ombre devient

$$\frac{1}{2\pi\alpha} = \frac{4}{A_S} - \frac{4}{A_{ps}}. \quad (3.50)$$

La constante cosmologique est considérée comme un paramètre dynamique, donnant une pression [130]. On définit la pression [131] de la constante cosmologique par

$$P = -M_p^2 \Lambda \text{ or } 8\pi P = 3l^{-2} = -\Lambda, \quad (3.51)$$

avec  $M_p^2 = \frac{c^4}{8\pi G} \approx 2 \times 10^{18} [GeV] \equiv 1$ . La température du trou noir correspond à la tangente du potentiel de Newton à l'horizon des événements [134]. La température de Hawking  $T = \beta^{-1}$  du trou noir peut être calculée comme suit [98]

$$T = \frac{1}{4\pi} f'(r_+). \quad (3.52)$$

On trouve la température du trou noir de Schwarzschild dans la limite de ( $\alpha = 0, Q = 0$  et  $l^{-2} = 0$ ), dans ce cas  $T = 1/4\pi r_+$  comme prévu. Pour  $Q > 0, T > T_{Sch}$ , avec  $T_{Sch}$  est la température du trou noir de Schwarzschild. Au contraire, à  $Q < 0, T < T_{Sch}$ . Pour le trou noir EGB-AdS, la masse d'un trou noir est plus appropriée interprétée comme l'enthalpie  $H$ . La première loi du trou noir s'écrit [131]

$$dM = \Phi_E dQ + Ad\alpha + TdS + VdP, \quad (3.53)$$

avec  $A \equiv 4\pi r_+^2$  est l'aire de l'horizon des événements du trou noir. Les paramètres  $V$  et  $A$  sont les quantités conjuguées de la pression  $P$  et le paramètre de couplage GB  $\alpha$ , respectivement [136]. Si nous fixons  $P$  et  $\alpha$  Eq.(3.53), la formule de Bekenstein-Hawking est alors donnée par

$$S = \int \frac{dM}{T} = \frac{A}{4} + 2\pi\alpha \log \frac{A}{A_0}, \quad (3.54)$$

avec  $A_0$  est une constante avec les unités de surface. Une justification importante de ce nouveau terme logarithmique dans l'équation.(3.54), en utilisant la surface d'ombre, donne  $2\pi\alpha = A_S/4$ , ce qui signifie que le terme logarithmique (ajouté par la gravité EGB) dépend de l'ombre du trou noir. Nous pouvons exprimer l'entropie du trou noir EGB en termes de surface d'ombre Eq.(3.50) dans la limite ( $\alpha \rightarrow 0, l \rightarrow \infty$ ), on obtient,

$$S = \frac{A}{4} + \frac{\log \frac{A}{A_0}}{\frac{4}{A_S} - \frac{4}{A_{ps}}}. \quad (3.55)$$

Cette enquête révèle une relation potentielle entre l'entropie et l'ombre du trou noir. Ces résultats peuvent être généralisés à l'entropie du trou noir 4D Hayward-EGB [137]. Plus loin dans la limite GR ( $\alpha \rightarrow 0$ ), on obtient l'entropie obéissant à la loi des aires (ex : le trou noir de Schwarzschild) [138], pareil si  $A \rightarrow A_0$ . Eq.(3.77) est basé sur le fait que, en tant que systèmes thermodynamiques, les trous noirs doivent obéir à la première loi de la thermodynamique. Afin de déterminer l'équation des gaz parfaits à partir de l'équation de Van der Waals, on peut obtenir une équation des gaz parfaits

$$PV \sim \frac{A}{6} T. \quad (3.56)$$

Ensuite, le potentiel électrique peut être exprimé sous forme exponentielle comme [129]

$$\Phi \sim e^{-\frac{\alpha}{2r_+^2}}, \quad (3.57)$$

Cette forme exponentielle permet de simplifier les calculs. Étudions d'abord les effets de  $\alpha$  sur  $\phi$ . Le potentiel électrique à la distance  $r$  mesurée par rapport à l'infini radial

$$A_\mu(r) dx^\mu = -\phi(r) dt, \quad (3.58)$$

L'horizon des événements du trou noir satisfait  $\phi(r_+) \equiv \Phi$ , pour simplifier, on posera

$$\phi(r) \sim e^{-\frac{\alpha}{2r^2}}, \quad (3.59)$$

Nos résultats sont facilement étendus pour inclure les Cas  $\Phi$ . Cette expression va nous permettre d'étudier le transfert de chaleur du trou noir EGB-AdS. Nous pouvons écrire PV en fonction de T à partir de l'équation

$$Pv \sim \left(\frac{r}{r_+}\right)^2 T, \quad (3.60)$$

dans le cas où  $r \rightarrow r_+$ , l'équation ci-dessus vérifie exactement la loi des gaz parfaits [133]. Comme en dehors du trou noir, il y a plus de particules de matière, le terme  $r/r_+$  représente la quantité de substance ou le nombre de particules  $N$ . Eq.(3.60) contribue au facteur de compressibilité  $Z$  [139] en termes de volume spécifique

$$Z = \frac{Pv}{T} \sim \left(\frac{r}{r_+}\right)^2, \quad (3.61)$$

nous remarquons que  $Z > 0$ .

Pour la région  $r < r_+$ , le facteur de compressibilité est  $Z < 1$ , cela montre qu'il y a une grande interaction entre les particules de gaz dans la singularité. Les pressions sont plus faibles, les particules sont libres de se déplacer. Dans ce cas, les forces attractives dominent. Pour la région  $r = r_+$ , le facteur de compressibilité est  $Z = 1$ , cela montre que le gaz près de l'horizon du trou noir EGB-AdS, se comporte comme un gaz parfait.

Pour la région  $r > r_+$ , le facteur de compressibilité est  $Z > 1$ , cela montre qu'en dehors du trou noir EGB-AdS, les particules entrent en collision plus souvent. Cela permet aux forces de répulsion entre les molécules d'avoir un effet notable. Dans la section suivante, nous essaierons de montrer la relation entre  $Z$  et  $\alpha$ .

### 3.7 Compressibilité en processus isobare

Ensuite, nous voulons étudier la différence entre la température de l'horizon avec les paramètres  $(P_h = P', v_h = v', T_h, A)$  et d'une sphère de rayon  $r$  de paramètres  $(P_r, v_r, T_r, A_r)$ . A partir d'Eq.(3.60) et pour  $r = r_+$  on a  $P_h v_h = T_h$  et en  $r > r_+$  on a  $P_r v_r \sim \frac{A_r}{A} T_r$ , où  $T_h$  est la température à l'horizon et  $T_r$  est la température à distance  $r$  du trou noir, on obtient

$$\frac{v_r}{v_h} = Z \frac{T_r}{T_h}. \quad (3.62)$$

on trouve

$$\frac{v_h - v_r}{v_r} = \ln \Phi^4, \quad (3.63)$$

et

$$P_h - P_r = \frac{8\pi}{A^2 v_r^2} (1 - \Phi^2 + \ln \Phi^2). \quad (3.64)$$

Si  $\Lambda$  est vraiment constant,  $P$  ne peut pas être varié de l'horizon à une région  $A_r$ , le système est en processus isobare, ce qui conduit à  $P_h = P_r$ . En conséquence, nous trouvons  $\ln \Phi^2 = \Phi^2 - 1$ , cette expression est donnée par une série de Taylor convergente, si

$$\Phi^2 \sim 1. \quad (3.65)$$

Utiliser les expressions Eqs.(3.62,3.63), on peut obtenir dans la compressibilité isobare

$$Z = \frac{T_h}{T_r} \frac{1}{1 + \ln \Phi^4}, \quad (3.66)$$

mène à

$$\frac{T_h}{Z T_r} + \frac{8\pi\alpha}{A} = 1, \quad (3.67)$$

cette dernière équation montre que,  $\alpha$  peut varier en fonction de la distance du trou noir. De Eq.(3.67), on obtien

$$Z = \frac{T_h}{T_r} \frac{1}{1 - \frac{8\pi\alpha}{A}}, \quad (3.68)$$

Nous voulons étudier la région proche de l'horizon ou pour un processus isotherme, dans ce cas nous considérons  $T_r \approx T_h$ . On peut enfin réécrire  $Z$  en fonction du couplage Gauss-Bonnet comme

$$Z \sim 1 + \frac{8\pi\alpha}{A}. \quad (3.69)$$

Pour la région  $r \prec r_+$ , sur la singularité, le couplage Gauss-Bonnet vérifié  $\alpha \prec 0$ , les forces attractives dominent.

Pour la région  $r = r_+$ , près de l'horizon du trou noir EGB-AdS, le couplage Gauss-Bonnet vérifie  $\alpha = 0$ , qui conduit à  $\Phi \sim 1$ , qui correspond exactement à la valeur du potentiel électrique à l'horizon Eq.(3.65) dans le processus isobare.

Pour la région  $r \succ r_+$ , en extérieur trou noir EGB-AdS, le couplage Gauss-Bonnet vérifie  $\alpha \succ 0$ .

A partir de ces trois cas possibles de  $\alpha$ , on peut représenter le diagramme de l'évolution du champ électromagnétique de la singularité jusqu'à un point extérieur au trou noir.

La discontinuité de  $\phi$  dans la pointe  $r_+$ , ne représente pas une grande différence entre la droite et la gauche de  $r_+$ . Puisque nous avons montré que  $\Phi \sim 1$ , on peut annuler cette discontinuité. Si  $\alpha \prec 0$  la solution reste un espace AdS, si  $\alpha \succ 0$  la solution est un espace de Sitter (dS), [140]. Comme analysé ci-dessus, la gravité EGB avec  $\alpha \prec 0$  (espace AdS). Ceci montre que le trou noir EGB existe sur une géométrie espace-temps de type espace dS, mais la singularité elle-même modifie la structure de cet espace-temps dans l'espace AdS.

## 3.8 Conduction thermique en processus isobare

Nous considérons que l'horizon du trou noir EGB-AdS sépare deux régions, la singularité et l'extérieur du trou noir. Nous voulons étudier les mouvements thermiques de l'horizon

vers l'extérieur de la région. La quantité de chaleur qui traverse une surface  $A$  par unité de temps, nous avons introduit le débit de chaleur

$$\varphi = -\lambda \oint_{A_r} \frac{\partial T}{\partial r} dA_r, \quad (3.70)$$

où  $\lambda$  est la conductivité thermique du trou noir,  $A_r = 4\pi r^2$  est la surface d'une sphère entoure le trou noir de surface  $A = 4\pi r_+$ . La température à l'horizon du trou noir est  $T_h$ , et la température dans une région  $r$  près du trou noir est  $T_r$ . En utilisant l'équation de Fourier, la conduction à travers une coquille sphérique produit

$$\varphi \int_{r_+}^r \frac{dr'}{A_r'} = -\lambda \int_{T_h}^{T_r} dT. \quad (3.71)$$

L'expression du taux de flux de chaleur d'un trou noir entre le flux de chaleur entrant et le flux de chaleur sortant à une distance  $r$  est

$$\varphi_{h \rightarrow r} = 4\pi\lambda \frac{T_h - T_r}{1/r_+ - 1/r}. \quad (3.72)$$

La résistance thermique est donnée par

$$R_{th} = \frac{T_h - T_r}{\varphi_{h \rightarrow r}} = \frac{1/r_+ - 1/r}{4\pi\lambda}, \quad (3.73)$$

on utilise l'approximation Eq.(3.69), on obtient

$$R_{th} \approx \frac{\alpha}{\lambda r_+ A}. \quad (3.74)$$

Cette équation montre que le coefficient  $\alpha$  représente une résistance thermique. En régime permanent et dans le cas du flux de chaleur surfacique traversant une surface isotherme d'une paroi plane de  $e = \alpha/r_+$  épaisseur soumise à une différence de température. On néglige les effets de bord en les supposant très grands par rapport à son épaisseur

$$\varphi_{h \rightarrow r} = \frac{\lambda r_+ A}{\alpha} (T_h - T_r), \quad (3.75)$$

est la puissance qui traverse une surface  $A$  pendant le transfert de chaleur. Le mouvement interne des particules sous l'effet de la différence de température  $T_h - T_r$ . Pour un débit à température  $T_r$  autour d'une structure à température de surface uniforme  $T_h$  et la région  $A$ . L'expression du flux de chaleur convectif  $\varphi_{h \rightarrow r}$  est donnée par la loi de Newton, dans ce cas on peut décrire à la fois la conduction thermique et la convection, pour cela on réécrit Eq.(3.75) as  $\varphi_{h \rightarrow r} = hA(T_h - T_r)$ , où  $h$  est le coefficient de transfert de chaleur :

$$h = \frac{\lambda r_+}{\alpha}. \quad (3.76)$$

Ici,  $h$  est utilisé pour indiquer la facilité avec laquelle l'énergie thermique passe l'horizon du trou noir.

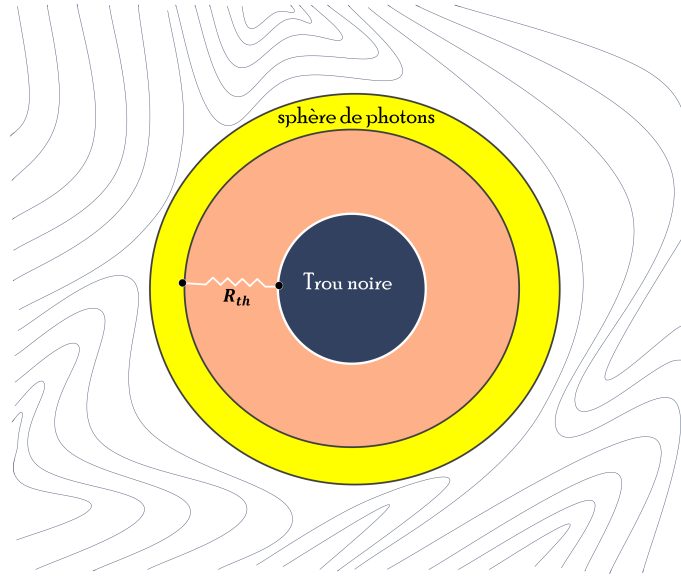


FIGURE 3.3 – Les trajectoires des photons à l’extérieur de trou noir. Le couleur jaune représente la sphère des photons. La résistance thermique existe entre l’horizon et la sphère des photons.

Nous avons déjà montré que  $\alpha(r_+) = 0$ , ce qui montre que près de l’horizon nous avons  $h \rightarrow \infty$ , ce qui augmente le flux de chaleur dans cette région, d’autre part, la résistance thermique diminue, ce qui montre qu’il y a un grand échange de chaleur sur l’horizon EGB-AdS. Le coefficient de convection dépend de la surface (géométrie). De plus, en examinant Eq.(3.69), la variation de  $\alpha$  à droite et à gauche de l’horizon, conduit à une discontinuité de  $h$  sur l’horizon ( $\alpha = 0$ ), par contre, la résistance sera nulle. Près de l’horizon, le processus n’est pas adiabatique, par contre, le système subit un processus isobare pour une constante  $\Lambda$ .

### Le petit horizon d’événements du vide AdS

Quand  $M = Q = 0$ , nous obtenons un trou noir EGB non chargé et sans masse. L’horizon des événements du vide AdS ( $\alpha < 0$ ) peut être réécrit comme

$$r_+ = \sqrt{-\alpha}. \quad (3.77)$$

Selon Eq.(3.21) on obtien

$$f(r_+) = 1 + \frac{r_+^2}{2\alpha} \left( 1 + \sqrt{1 + 4\alpha} \right),$$

et

$$T = \frac{r_+}{4\pi\alpha} \left( 1 + \sqrt{1 + 4\alpha} \right).$$

Dans ce cas le première loi du trou noir se lit [140]

$$dS = -\frac{Ad\alpha}{T},$$

où  $A = -4\pi\alpha$  est la zone de l'horizon des événements de vide AdS.

$$S = -\pi\alpha + 2\pi\alpha \log \frac{-4\pi\alpha}{A_0}, \quad (3.78)$$

c'est l'entropie d'un trou noir avec petit horizon.

### 3.9 Conclusion

Dans la théorie de EGB il est possible de donner une signification physique à l'horizon interne et l'évaporation du trou noir. Cette possibilité est donnée par l'intrication quantique entre des particules sur l'horizon des événements et des antiparticules sur l'horizon interne. Suivant ce principe, on a étudié la thermodynamique et l'électromagnétisme du trou noir EGB.

# Chapitre 4

## Géométrisation de fond d'AdS dans la gravité quantique

### 4.1 Introduction

La correspondance AdS/CFT suggère que certaines définitions fondamentales de théories quantiques correspondent à la gravité. Chaque état quantique a une interprétation gravitationnelle double ; il encode de manière asymptotique à l'espace-temps AdS dont la géométrie limite est équivalente à l'espace-temps. L'espace-temps devrait satisfaire les contraintes dynamiques de la théorie gravitationnelle correspondante ; au niveau classique, ce sont les équations d'Einstein ou d'autres équations gravitationnelles covariantes. Pour décrire un espace-temps avec l'énergie noire-matière noire par la gravité  $f(R)$  et les trous noirs dans la gravité EGB, il faut tout d'abord géométriser la structure d'espace-temps. En tenant compte la description unitaire de l'horizon et le fond d'AdS.

### 4.2 Gravité topologique et diagrammes de Penrose

#### 4.2.1 Champs de gravité

Le terme  $d + (-1)^\delta$  dans Eq.(2.18) égal à  $d - 1$  pour ces deux valeurs  $\delta = \{-1, 1\}$ , c'est-à-dire pour la valeur  $\delta = -1$ , on obtient  $U(d - 1) = S_{d-1}^A$  qui a une interprétation physique. On veut alors étudier le cas où  $\delta = -1$  et on compare le résultat de cette valeur avec celui de  $\delta = 1$ . Si on prend une symétrie  $U(d - 1, \delta = 1) = U(d - 1, \delta = -1)$ , et l'état  $\partial_R \partial_R^{-1} = 1$ , on trouve cette équation différentielle  $\partial_R^2 f(R) - \frac{M^2}{(4\pi)^2} f(R) = 0$ , sa solution est de la forme

$$f(R) = f^+ e^{\frac{RM^2}{4\pi}} + f^- e^{-\frac{RM^2}{4\pi}}, \quad (4.1)$$

où  $(f^-, f^+)$  sont des constantes d'intégration, et  $M$  est un paramètre de masse. Il est évident que pour les petits  $R$  la fonction  $f(R)$  dépend plus considérablement de  $(f^-, f^+)$ , c'est-à-dire que la gravité dans une solution plate de Ricci n'est pas nulle :  $f(R_0) = R_0 = f^+ + f^-$ . Cette solution nous montre que  $f^+ + f^-$  représente la gravité  $f(R)$  dans le vide. Pour  $AdS_{d+1}$  espace-temps ( $R \leq 0$ ), quand  $R \rightarrow -\infty$ , la fonction diverge comme  $f(R) \sim f^- e^{-\frac{RM^2}{4\pi}}$ .

Quand  $R \rightarrow +\infty : f(R) \sim f^+ e^{\frac{RM^2}{4\pi}}$ . Nous examinons la nature du couple  $(f^+, f^-)$ . Parlons maintenant des différentes formes de  $f(R)$  (4.1) : Cette valeur est très proche du choix de  $f(R)$  pour la transition entre 4d et 5d [99]. On peut remarquer que  $f(R)$  (4.1) est exprimé en coordonnées Kruskal [100] :  $(U \equiv -e^{-\frac{RM^2}{4\pi}}, V = e^{\frac{RM^2}{4\pi}})$  avec  $V = -U^{-1}$ . Cette dernière condition est équivalente à

$$T^2 - X^2 = -1 \prec 1. \quad (4.2)$$

On transforme les coordonnées sous la forme  $T = \frac{1}{2}(U + V)$ ;  $X = \frac{1}{2}(V - U)$ . On peut donc exprimer les caractéristiques géométriques de  $f(R)$  dans des diagrammes conformes (diagrammes de Penrose). Nous choisissons les coordonnées de cette façon  $U = -e^{-\frac{RM^2}{4\pi}}$ ,  $V = e^{\frac{RM^2}{4\pi}}$  et on suppose que  $M$  est le paramètre de masse de Schwarzschild [101].

$$f(R) = f^+ V - f^- U. \quad (4.3)$$

L'équation ci-dessus est écrite avec les coordonnées de Kruskal-Szekeres sur le collecteur en bulk  $M_{d+1}$  sont définis, à partir des coordonnées de Schwarzschild, en remplaçant  $(t, x_1, \dots, x_d)$  par une nouvelle coordonnée temporelle  $T$  et une nouvelle coordonnée spatiale  $X \in M^c$ , avec  $M^c$  est la variété conforme de  $M_{d+1}$  dans  $2d$ .

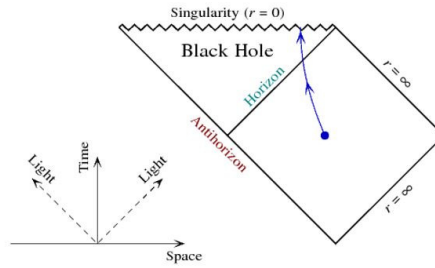


FIGURE 4.1 – Diagramme de Penrose d'un trou noir de Schwarzschild.

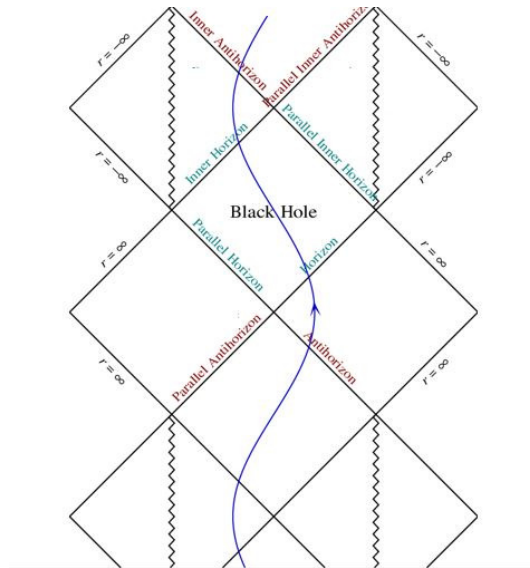


FIGURE 4.2 – Exemple de diagramme de Penrose pour la solution singulière du trou noir AdS-EGB, (modified gravity).

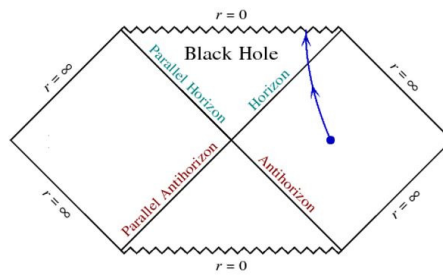


FIGURE 4.3 – Diagramme de Penrose de la géométrie de Schwarzschild complète et analytiquement étendue.

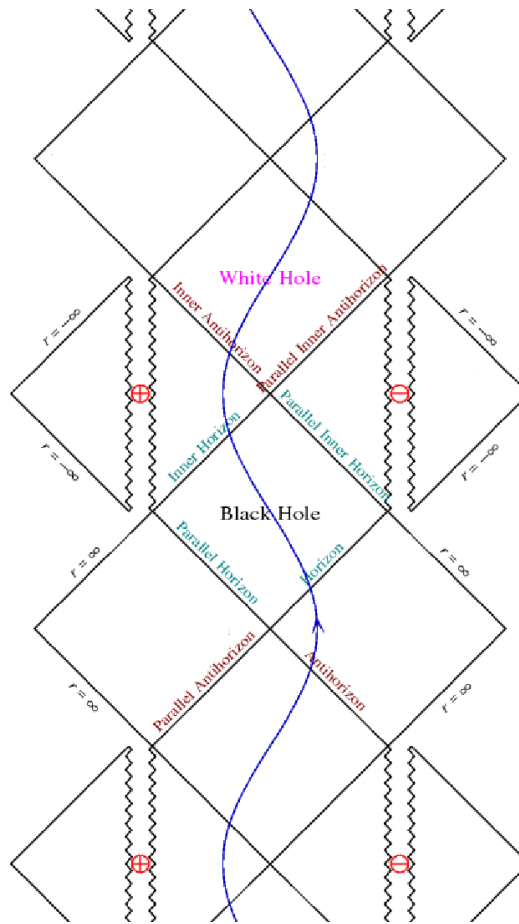


FIGURE 4.4 – Diagramme de Penrose d'un trou noir de Reissner-Nordström.

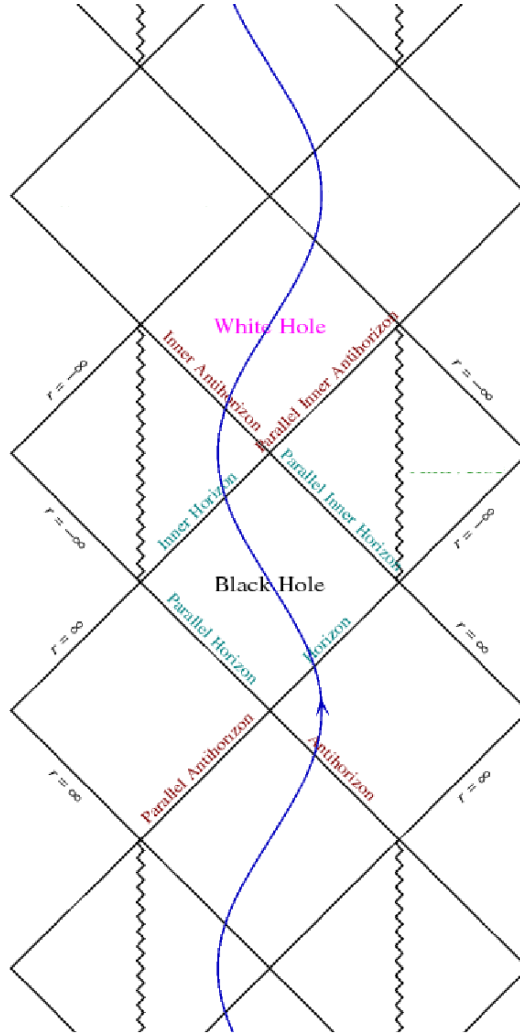


FIGURE 4.5 – Diagramme de Penrose d’un trou noir de Kerr.

Les coordonnées de Kruskal-Szekeres, ont l’avantage de couvrir tout l’espace-temps de la solution de Schwarzschild étendu au maximum et se comportent bien partout en dehors de la singularité physique. Eq.(4.3) implique que

$$f(R) = (f^+ - f^-) T + (f^+ + f^-) X. \quad (4.4)$$

Nous avons déjà montré dans la solution plate de Ricci (dans le vide de  $M_{d+1}$ ) que :  $R_0 = f^+ + f^-$ . On veut écrire  $f(R)$  dans le vide. De (4.4) C’est évident que

$$f(R) \sim \frac{\chi(T, X)}{R_0} + R_0, \quad (4.5)$$

où  $\chi(T, X)$  est fonction de  $T$  et  $X$ . Cette dernière équation est équivalente à la forme de  $f(R)$  proposé dans [102]. Selon [103], le terme  $1/R_0$  représente l’évolution de l’énergie noire. La solution plate Ricci  $R_0$  décrit la gravité dans le vide, c’est-à-dire  $R_0$  décrit la gravité de la matière.

### 4.2.2 Solution des équations de champ avec deux densités

Dans cette sous-section, nous considérerons la fonction (4.1), pour calculer l'action (2.12) et l'entropie (2.5). Ensuite, nous utilisons deux transformations conformes dans le déterminant métrique

$$g_\sigma \longrightarrow g_\sigma^\pm = g_\sigma e^{\pm \frac{RM^2}{2\pi}}, \quad (4.6)$$

où  $\sigma = \{(d-1) \text{ or } (d+1)\}$ . Les deux transformations conformes conduisent à

$$I_{d+1} = \frac{1}{2} M_{d+1}^{d-1} \int_{M_{d+1}} d^{d+1}x \left( \sqrt{g_{d+1}^-} f^- + \sqrt{g_{d+1}^+} f^+ \right), \quad (4.7)$$

$$S_{d-1}^A = \frac{1}{2} M_{d+1}^{d-1} \int_{A_{d-1}} d^{d-1}x \left( \sqrt{g_{d-1}^-} f^- - \sqrt{g_{d-1}^+} f^+ \right). \quad (4.8)$$

Ces deux formules, montre qu'il y a deux termes essentiels dans l'intrication holographique la gravité  $f(R)$  : les deux champs  $(f^-, f^+)$ , décrit la gravité dans  $M_{d+1}$  et  $A_{d-1}$ . Ces deux champs remplacent le scalaire de Ricci dans l'action d'Einstein Hilbert pour une gravité élevée. Les champs de gravité classiques dans Eqs.(4.7,4.8) sont similaires au champ d'opérateur quantique en gravité quantique, cette vision nous aidera plus tard à décrire la gravité dans le cadre quantique et classique. Eqs.(4.7,4.8) se compose de deux parties essentielles :  $I_{d+1} = I^- + I^+$  et  $S_{d-1}^A = S^- - S^+$  ; la première équation décrit la gravité induite sur  $M_{d+1}$  par doubles copies d'action, ce qui correspond à la gravité dual [104]. La dernière égalité est un cas particulier de l'inégalité classique d'Araki-Lieb [105]. Calculons maintenant les équations de champ à partir de (4.7) :

$$\delta I_{d+1} \sim \sum_{\sigma=-,+} \delta g^{\sigma MN} \sqrt{g_{d+1}^\sigma} \left( \frac{\delta f^\sigma}{\delta g^{\sigma MN}} - \frac{1}{2} g_{MN(d+1)}^\sigma f^\sigma \right). \quad (4.9)$$

Nous supposons que l'action  $I_{d+1}$  est la somme de deux sous-actions  $I_{d+1} = I^- + I^+$ , i.e.  $\delta I^- = \delta I^+ = 0$ . Puisque  $f^\pm$  ne dépend pas de  $R$  (4.1), alors le terme  $\frac{\delta f^\pm}{\delta g^{\pm MN}}$  doit être nul. Ainsi, les équations de champ sont données par

$$T_{MN}^\pm = -\frac{1}{2} M_{d+1}^{d-1} g_{MN(d+1)}^\pm f^\pm, \quad (4.10)$$

qui conduit à

$$\rho^\pm = g^{\pm MN} T_{MN}^\pm = -\frac{d+1}{2} M_{d+1}^{d-1} f^\pm, \quad (4.11)$$

avec  $\rho^\pm$  représente la masse de densité de matière-énergie. En partant de la solution statique ci-dessus, nous remarquons que la conséquence ci-dessus a montré que la distribution de la matière est liée aux champs  $(f^-, f^+)$  et le nombre de dimensions d'espace-temps. De plus, on a deux distributions de matière  $(\rho^-, \rho^+)$ . Puisque Eq.(4.1) est une solution de gravité sur collecteur de la variété  $M_{d+1}$ , ce qui implique que les champs  $f^\pm$  existent en masse. D'autre part, on peut écrire  $\rho^\pm = \rho_{dbrane}^\pm + \rho_{bulk}^\pm$ . Cette relation, nous montre que la matière présente

dans  $d$ -brane ( $\rho_{dbrane}^\pm$ ), mais il y a aussi une autre densité en dehors de la  $d$ -brane, c'est-à-dire qu'il y a un problème étrange dans la masse ( $\rho_{bulk}^\pm$ ), ça peut être la matière noire. En utilisant Eq.(4.11) on peut obtenir

$$(d+1)L = (\rho^- - \rho^+)T - (\rho^- + \rho^+)X. \quad (4.12)$$

Cela montre qu'il y a une symétrie remarquable ; le lagrangien  $L$  est invariant sous la symétrie suivante :

$$\rho^- \longleftrightarrow T ; \rho^+ \longleftrightarrow X. \quad (4.13)$$

En utilisant Eq.(4.12), on voit que le lagrangien dépendant consiste en un lagrangien spatial  $L_X \sim -(\rho^- + \rho^+)X$  et un lagrangien temporel  $L_T \sim (\rho^- - \rho^+)T$ . Dans la section suivante, nous déterminerons la nature des densités ( $\rho^-, \rho^+$ ).

### 4.3 Deux CFTs dans le bulk AdS

Notre objectif dans cette section, est de déterminer l'aspect quantique de l'action (4.7) et l'entropie (4.8), car ils ressemblent à des champs quantiques écrits. Selon Eqs.(4.7) et (4.8), on remarque que la conséquence ci-dessus peut montrée que  $I_{d+1}$  est invariant sous les transformations  $(g^-, f^-)_{d+1} \longrightarrow (g^+, (-1)^\delta f^+)_{d+1}$  pour  $\delta = 0$ . L'entropie  $S_{d-1}^A$  est invariant sous les transformations :  $(g^-, f^-)_{d-1} \longrightarrow (g^+, (-1)^\delta f^+)_{d-1}$  pour  $\delta = 1$ . En utilisant l'écriture complexe, on peut obtenir

$$f_{d\pm 1}^- \longrightarrow e^{i\pi\delta} f_{d\pm 1}^+, \quad (4.14)$$

Ce qui implique une invariance de l'entropie et d'action sous une transformation  $U(1)$  (groupe de jauge). Le champ  $f^+$  est juste une rotation de l'angle de phase du champ  $f^-$ , avec une rotation particulière déterminée par la constante  $\pi\delta$ . Ce qui est le résultat de la propriété d'auto-dualité du  $U(1)$  [106]. Donc, champ  $f^+$  est le double de champ  $f^-$  dans le contexte de la gravité double. Selon  $\phi = \pi\delta$  et Eq.(2.18) nous n'avons que deux valeurs de  $\phi$  : sont  $\phi = 0$  et  $\phi = \pi$ . Ces valeurs correspondent exactement à l'emplacement de deux 3-branes dans le modèle Randall-Sundrum (modèle RS) [107]. Cela montre qu'il y a deux  $d$ -brane  $B_d$  dans le bulk  $M_{d+1}$ , ce qui explique pourquoi nous avons des champs de gravité doubles ( $f^-, f^+$ ) dans le vide. Les champs  $f^-$  et  $f^+$  existent principalement dans  $d$ -branes situé à  $\phi = 0$  et  $\phi = \pi$  respectivement. Nous pouvons avoir les champs ( $f^-, f^+$ ) dans le bulk, avec  $0 \preceq \phi \preceq \pi$ . Ainsi,  $\phi$  est la coordonnée d'une dimension supplémentaire. On remarque une la symétrie orbifold :  $\phi \longrightarrow -\phi$  et des points fixes orbifold à  $\phi = 0, \phi = \pi$ . Selon le modèle RS, nous pouvons exprimer les métriques de la  $d$ -branes  $g_{d-1}^-, g_{d-1}^+$  selon les métriques de bulk  $g_{d+1}^-, g_{d+1}^+$  comme

$$g_{\mu\nu(d-1)}^{-,hid}(x^\mu) = g_{\mu\nu(d+1)}^-(x^\mu, \phi = 0), \quad (4.15)$$

$$g_{\mu\nu(d-1)}^{+,vis}(x^\mu) = g_{\mu\nu(d+1)}^+(x^\mu, \phi = \pi). \quad (4.16)$$

puisqu nous avons deux métriques dans le bulk qui est l'union de deux copies de sous-variété  $M_{d+1} = M_{d+1}^- \cup M_{d+1}^+$ . Cette dernière équation peut nous aider à identifier les densités (4.11) :  $\rho^- = \rho_{hid} + \rho_{bulk}$ , où  $\rho^{hid}$  représente la densité de matière dans la  $d$ -brane cachée ou la densité

de matière noire (DM) et  $\rho^+ = \rho_{vis} + \rho_{bulk}$ , où  $\rho^{vis}$  représente la densité de matière dans notre d-brane et  $\rho_{bulk}$  est la densité apparente ou densité d'énergie sombre (DE). Généralement, on écrit

$$\rho_{vis} = \rho_{matter} \quad \rho_{hid} = \rho_{DM} \quad \rho_{bulk} = \rho_{DE}. \quad (4.17)$$

La densité dans la d-brane visible liée au volume de la partie spatiale  $X$  :  $\rho_{vis} \sim T$ . D'autre part, la densité dans la d-brane cachée liée à la partie temporelle  $T$  :  $\rho_{hid} \sim X$ . Nous pouvons voir que le temps est une propriété de la d-brane cachée. Il est difficile d'imaginer que le temps est une dimension qui n'appartient pas à la d-brane visible. Peut-être que la notion de temps n'existe pas dans notre d-brane est la réponse à cette question : si le temps est une dimension dans la d-brane visible, pourquoi ne pouvons-nous pas nous déplacer librement dans le temps comme les dimensions spatiales ?. Nous proposons dans ce cas que le temps est une propriété externe de la d-brane visible. La plupart des equations physiques sont des dérivés dans le temps, ce qui signifie que les quantités physiques sont des connexions entre la partie spatiale visible (d-brane visible) et la partie temporelle cachée (d-brane cachée). Car la mesure en d-brane visible se fait par rapport au référentiel de d-brane caché. De plus, les mesures dans la d-brane cachée sont effectuées par rapport à l'espace de la d-brane visible. Dans ce scénario Eq.(4.2) devient  $X^2 + (iT)^2 = 1$ . Le terme complexe  $iT$ , montre que le temps est une dimension cachée. Car si on prend un phénomène physique décrit par un nombre complexe  $z = x + iy$ , la partie réelle  $x$  représente la face visible de  $z$ , et la face cachée décrite par la partie imaginaire  $y$ . On peut voir cette logique, en physique, comme ça : La relativité générale décrit les phénomènes cosmiques (visibles) dans un cadre de nombres réels. Et que la mécanique quantique décrit l'échelle microscopique (cachée) par des nombres complexes. Avec le même principe, le temps existe dans la d-brane cachée, et que la présence du temps dans notre Univers est une projection holographique du temps réel dans la d-brane cachée sur la d-brane visible. Faites-nous savoir  $I_{d+1} = I^- + I^+$ ; et  $I^- = I_d^{hid} + I_{d+1}^{bulk}$ ,  $I^+ = I_d^{vis} + I_{d+1}^{bulk}$ . Hence,  $I_{d+1} = I_d^{hid} + I_d^{vis} + 2I_{d+1}^{bulk}$ . La symétrie orbitale de  $\phi$  implique que  $g_{\mu\nu(d+1)}^-(x^\mu, \phi = 0) = g_{\mu\nu(d+1)}^+(x^\mu, \phi = \pi)$  dans  $\phi = \pi/2$ ; c'est à dire  $M_{d+1}$  avoir des conditions aux limites périodiques dans  $\phi = \pi/2$ . De plus, la théorie des cordes décrit le graviton par la métrique, ce qui implique que la dernière condition décrit la corde fermée [108]. Par conséquent, notre modèle décrit parfaitement les gravitons  $g_{\mu\nu}$  (cordes fermées) dans la région  $\phi = \pi/2$ . Dans  $M_{d+1}(\phi = \pi/2)$ , les deux géométries en vrac doivent être identiques; nous aurons  $g_{d+1}^- = g_{d+1}^+$ ;  $f^- = f^+$ , ce qui implique que  $S_{d-1}^A(\phi = \pi/2) \sim M_{d+1}^{d-1}$  et  $I_{d+1}(\phi = \pi/2) \sim S_{d-1}^A Vol_{d+1} f^+$ . Selon [107]; la coordonnée extra-dimensionnelle  $z$  est exprimée en fonction du rayon de compactification  $r_c$  et de la coordonnée angulaire  $\phi$  par  $z = r_c \phi$ . Les formules de Lorentz permettent d'exprimer les coordonnées  $(t_+, \mathbf{x}_+^{d-1}, z)$  d'un événement donné dans le référentiel caché d-brane "supposé fixe" en fonction des coordonnées  $(t_-, \mathbf{x}_-^{d-1}, z)$  de l'événement dans la d-brane visible "mobile". Une des formules de Lorentz peut s'écrire sous la forme

$$t_- - t_+ \sim z. \quad (4.18)$$

Ce résultat montre que le temps est le déplacement de la d-brane visible par rapport à la d-brane cachée, chaque point dans  $B_d^+$  dépend d'un autre point de  $B_d^-$ . De plus, la présence de deux champs gravitationnels ( $f^-, f^+$ ) De plus, la présence de deux champs gravitationnels (4.1), est très similaire à l'expression lagrangienne en double gravité [109, 110]. Selon notre

modèle;  $f^+ \in d$ -brane visible et  $f^- \in d$ -brane caché. Si nous supposons que  $f^+$  est un graviton alors  $f^-$  est un graviton double [111]. Le dual du graviton prédit par certaines formulations de  $SO(8)$  supergravité dans le cadre de la dualité électrique-magnétique a émergé dans le  $E_{11}$  en onze dimensions, en tant que S-dualité. Selon la théorie de la double gravité [112], il n'y a pas de couplage local entre graviton et graviton double. Ce qui correspond exactement à l'expression lagrangienne (4.1); on voit qu'il n'y a pas de couplage entre  $f^+$  et  $f^-$ . On applique la symétrie (4.13) sur Eq.(4.11), il est utile de réécrire la transformation de symétrie :  $(f^-, f^+) \sim (T, X)$ . Ce résultat nous montre que le double champ de gravité occupe l'espace-temps d-brane par un champ spatial  $f^+$  et un autre champ de temps  $f^-$ . Nous proposons qu'une proportion (ex : temps) de la d-brane visible avec les coordonnées  $(t_+, \mathbf{x}_+^{d-1}, z)$  sont l'intrication holographique d'une proportion de la d-brane cachée avec les coordonnées  $(x_-, \mathbf{t}_-^{d-1}, z)$ , nous supposons que  $t_+$  est une projection holographique de  $\mathbf{t}_-^{d-1}$  dans le d-brane visible, où  $\mathbf{t}_-^{d-1} \equiv \mathbf{x}_-^{d-1}$  sont les dimensions  $d-1$  de temps et  $x_-$  est une direction sur la d-brane cachée et  $\mathbf{x}_+^{d-1}$  sont les coordonnées spatiales de la d-brane visible. Nous avons décrit la projection holographique, et le type et la géométrie de cette projection.

### 4.3.1 L'espace $AdS_2$ du trou noir

Dans cette sous-section on va géométriser le concept de la projection holographique à partir de  $\mathbf{t}_-^{d-1}$  vers  $t_+$ , nous étudierons la base  $(\mathbf{t}_-^{d-1}, t_+)$  proche de la singularité du trou noir avec un espace AdS en 2 dimensions, cet espace nécessite deux temps :  $(t_-, t_+)$ , pour cela il suffit de choisir un  $t_-$  parmi  $\mathbf{t}_-^{d-1}$ . L'espace  $AdS_2$  doit être considéré comme un espace rigide dont l'espace-temps physique réel est un patch [113]. De plus, l'expression (4.4) dans  $M^c$  nécessite que la métrique à deux dimensions soit localement :

$$ds^2 = -\frac{dt^2 - dz^2}{z^2}. \quad (4.19)$$

Prenons la formule de Lorentz (4.18) dans cette dernière équation. Tout d'abord, nous choisissons un temps  $t$  dans l'espace  $AdS_2$ , qui équivaut au temps  $t_+$  dans la brane visible ( $B_d^{+,vis}$ ) :  $t_+ = t$ . Ce qui implique que la métrique de  $AdS_2$  associé à la d-brane cachée ( $B_d^{-,hid}$ ) exprimer par  $ds^2 = -\frac{1}{z}(dt_-^2 - 2dzdt_-)$ . Ensuite, nous choisissons le temps  $t$  dans l'espace  $AdS_2$ , ce qui équivaut à deux temps  $(t_-, t_+)$

$$ds^2 = -\frac{dt_- - dz}{z} \frac{dt_+ + dz}{z}. \quad (4.20)$$

Selon (4.18), on a  $t_{\pm} = t_{\mp} \mp z$ , on peut exprimer la métrique  $AdS_2$  avec les coordonnées de Poincaré :

$$ds^2 = -\frac{dt_- dt_+}{(t_- - t_+)^2}. \quad (4.21)$$

Cette expression en accord avec la métrique locale d' $AdS_2$  dans [114]. Puisque  $f(R) \in M_{d+1}$ , nous voulons par la suite étudier la partie de  $f(R)$  dans la base  $(t_-, t_+)$ , si on suppose que  $X \equiv z$  et  $T \equiv t_{\pm}$ . Donc, Eqs.(4.4,4.12) mènent à

$$f(R) = f^+ t_- - f^- t_+, \quad (4.22)$$

$$L(AdS_2) \equiv 3L = \rho^- t_+ - \rho^+ t_- . \quad (4.23)$$

On définit la frontière de  $AdS_2$ , quand  $t_- = t_+$ . Cela signifie qu'à la frontière, nous avons  $f(R) = (f^+ - f^-) t_+$  et  $L(AdS_2) = (\rho^- - \rho^+) t_+$ . Cela montre que la gravité classique à la frontière ne s'exprime que sur la direction de  $t_+$  pour  $B_d^{+,vis}$ . Dans un trou noir en évaporation dans la gravité JT couplée à de la matière conforme, l'énergie ADM de l'espace-temps [115], est défini comme la charge de Noether sous les traductions temporelles physiques  $t_- \rightarrow t_- + \delta t_-$ . D'après notre modèle, il existe une équivalence entre le temps propre au bord  $u$  de l'espace-temps rigide  $AdS_2$  et  $t_-$ . Les isométries du  $AdS_2$  est un difféomorphisme  $h$  donnant le temps de Poincaré  $t_+$  en termes de temps propre aux frontières  $t_- : t_+ = h(t_-)$ . Il est évident que la forme de la fonction  $f(R)$  est similaire à l'énergie ADM [115]. Habituellement, la fonction  $f(R)$  est le Lagrangien de la gravité classique (énergie). Commencer par la solution Eqs.(4.1)et (4.22), nous remarquons que

$$t_- \equiv e^{\frac{RM^2}{4\pi}}, t_+ \equiv -e^{-\frac{RM^2}{4\pi}}, \quad (4.24)$$

$$t_- t_+ = -1 \quad \text{or} \quad h(t_-) = -1/t_- . \quad (4.25)$$

Dans la gravité JT, il n'y a pas d'interaction entre les limites gauche et droite de  $AdS_2$ , un trou de ver traversable violerait la causalité limite [116]. Notre objectif est d'étudier un en temps réel  $t_-$  dans temps de d-1 dimension de  $B_d^{-,hid}$  et le temps holographique  $t_+$  dans  $B_d^{+,vis}$ , par la métrique  $AdS_2$ . Les coordonnées  $(t_-, t_+)$  sont utiles pour décrire la préparation de notre état en (2.85), on peut aussi en déduire que

$$\frac{t_- + t_+}{t_- - t_+} = \tanh\left(\frac{RM^2}{4\pi}\right), \quad (4.26)$$

qui représente un trou noir éternel avec deux frontières asymptotiques et température  $T = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{4\pi M}$ . Nous voulons prendre en compte les termes de temps dans (2.85) par (4.25), on peut obtenir le temps euclidien  $it_+$ . Pour résoudre le problème de inconsistance à la frontière, on choisit une description en temps euclidien  $it_+$ , puisqu'il n'y a pas de notion distincte du temps en gravité. Ce qui signifie que les vraies métriques lorentziennes sont nappées à de vraies métriques euclidiennes. Ainsi, Eq.(2.85) devient

$$z = t_- - it_+, \quad (4.27)$$

Cette formule a lié la coordonnée  $z$  avec le temps réel  $t_-$  et temps holographique  $t_+$ . C'est évident que  $z\bar{z} = t_-^2 + t_+^2$ , avec  $\bar{z}$  est conjugué complexe de  $z$ . Cela montre que la projection de holographique de  $t_-$  vers  $t_+$  se fait par une forme sphérique  $\mathbb{S}^1$ . L'argument est très simple, mais n'a apparemment pas été présenté dans la littérature auparavant. Depuis  $\alpha = \tanh\left(\frac{RM^2}{4\pi}\right) \in R^+$ , il est évident que Eq.(4.26) représente la projection stéréographique  $(-t_+) - t_- = \alpha(t_+ - t_-)$ . La projection holographique de  $(t_-, t_+)$  est simplement une projection stéréographique par une fonction qui envoie des points  $t_-$  on  $\mathbb{S}^1$  de  $B_d^{-,hid}$  aux points sur la chronologie  $t_+$  de  $B_d^{+,vis}$ . Sur l'espace  $AdS_2$ , la projection du passé  $(-t_+)$  par rapport à  $t_-$ , se déroule sur la chronologie. La géométrie du temps dans un trou noir est représentée par la sphère  $\mathbb{S}^1$ , dont tous les points passent sur la timeline, sont enregistrés sur la mémoire de  $\mathbb{S}^1$ . Ce qui implique que l'information du trou noir du temps, se résume en  $\mathbb{S}^1$ , qui est équivalent au temps sur l'horizon des événements [117].

## 4.4 Deux horizons dans la gravité quantique

Dans ce qui suit, nous allons diviser la géométrie de bulk en deux espace  $AdS_{L(D+1)}$  and  $AdS_{R(D+1)}$ , qui correspond aux deux métriques  $(g_{(L)\mu\nu}, g_{(R)\mu\nu})$ , et  $CFT_{L(D)}, CFT_{R(D)}$  avec la dimension  $D$ . En effet, les trous noirs existent sur  $CFT_{L(D)}$  et les événements sont mémorisés sur le  $\mathbb{S}^1$  qui existe dans  $B_d^{-,hid}$ . Les particules sur  $CFT_R$  sont intriquées avec les particules dans  $CFT_L$ , et cela est en accord avec ER = EPR [125]. Selon [125], les particules intriqués sont reliées par un trou de ver. De plus, pour l'état pur de  $L \otimes R$ , les informations transférées de  $R$  vers  $L$  sous forme de rayonnement de Hawking, est le résultat de la projection holographique  $CFT_L$  sur  $CFT_R$ . La connection entre  $CFT_L$  and  $CFT_R$  est l'origine de l'état pur de  $L \otimes R$ . L'évolution temporelle est ascendante des deux côtés avec l'hamiltonien  $H = H_L + H_R$ . L'intrication est représentée en identifiant les horizons intriqués et en remplissant l'espace-temps avec des régions intérieures derrière les horizons des trous noirs [125]. Pour décrire le trou noir éternel, on peut utiliser les états propres correspondants :  $|+\rangle$  et  $|-\rangle$  par deux états intriqués

$$|\Psi_{\pm}\rangle \sim |+\rangle|-\rangle \pm |-\rangle|+\rangle, \quad (4.28)$$

ici, nous soulignons que le processus suivi pour trouver l'action-entropie dans Eqs.(4.7) et (4.8) est similaire à Eq.(4.28) introduit par J. Maldacena and L. Susskind [125]. L'éternel trou noir est décrit par l'état intriqué

$$|\Psi\rangle = \sum_n e^{-\frac{\beta E_n}{2}} |n\rangle_+ \otimes |n\rangle_-, \quad (4.29)$$

avec  $\beta$  est l'inverse de la température du trou noir. L'évolution de la mécanique quantique avec les états d'image de Schrödinger est

$$|\Psi(t)\rangle \equiv \sum_n e^{-\frac{\beta E_n}{2}} e^{-2iE_n t} |n\rangle_+ \otimes |n\rangle_-. \quad (4.30)$$

Dans cette dernière équation, on considère  $t$  en tant que paramètre étiquetant des états alternatifs à un instant commun. Dans chacun de ces états au moment  $t$ , il existe un opérateur de projection  $P_t = |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)|$ . Selon [125], deux états intriqués avec des valeurs différentes de  $t$  sont liés par l'évolution temporelle vers l'avant des deux côtés. Notez que l'opérateur de projection est exprimé en termes de  $(t = t_L + t_R)$ . On suppose que le système de deux états intriqués est formé par l'état  $|\Psi_{\pm}\rangle$  qui dépend du temps  $t_{\pm}$ .

$$|\Psi_{\pm}\rangle = |\Psi_{\pm}(t_{\pm})\rangle \quad (4.31)$$

cette approche montre que  $|\Psi_L\rangle$  l'état vivant dans  $CFT_L$ , d'autre part l'état  $|\Psi_R\rangle$  existe dans  $CFT_R$ . Nous prétendons que nous devrions penser que la projection du temps  $t_L$  vers  $t_R$ , crée l'intrication entre les états  $|\Psi_L\rangle$  et  $|\Psi_R\rangle$ . Dans ce cas on trouve

$$P_{t,n} \sim e^{2(-\frac{\beta}{4}-it)E_n}. \quad (4.32)$$

Nous comparons cette dernière équation avec Eq.(4.27), on obtient

$$t_L = -\frac{\beta}{4}, \quad P_{t,n} \sim e^{2zE_n}. \quad (4.33)$$

Remarquons que  $P_{t,n}$  dépend de la coordonnée extra-dimensionnelle  $z$ . Ce qui montre que l'évolution des états correspond au chemin  $z$  dans le bulk. La valeur de  $t_L$  est très proche de celui trouvé par [125] pour une solution de stationnarité de l'entropie généralisée (pour petit horizon).

## 4.5 Projection stéréographique de CFT sur AdS

Ici, au lieu de travailler sur un temps réel, on prend un ensemble de vrais diemensions tomporielles  $\mathbf{t}_-^{d-1}$  sur  $B_d^{-,hid}$ . Nous étudierons la projection holographique à partir de la base  $(\mathbf{t}_-^{d-1}, t_+)$  en bulk  $M_{d+1}$ . La sphère  $\mathbb{S}^{d-2}$  par un sous-espace topologique de dimension  $d-1$ , défini par

$$\mathbb{S}^{d-2} = \left\{ (t_-^1, t_-^2, \dots, t_-^{d-1}) \in R^{d-1}; \sum_{k=1}^{d-1} (t_-^k)^2 = 1 \right\}. \quad (4.34)$$

On définit deux pôles sur  $\mathbb{S}^{d-2}$  : pôle nord du point  $N = (0, \dots, 0, 1)$  et le pôle sud du point  $S = (0, \dots, 0, -1)$ . La sphère peut être couverte par deux paramétrages stéréographiques ; le premier ouvert qui couvre la partie nord de la sphère par l'application  $\varphi_N = \varphi_- : \mathbb{S}^{d-2} - \{N\} \rightarrow R^{d-2}$ . Le second ouvert qui couvre la partie sud de la sphère par la projection stéréographique  $\varphi_S = \varphi_+ : \mathbb{S}^{d-2} - \{S\} \rightarrow R^{d-2}$  :

$$\varphi_{\pm} (t_-^1, \dots, t_-^{d-1}) = \left( \frac{t_-^1}{1 \pm kt_-^{d-1}}, \dots, \frac{t_-^{d-2}}{1 \pm kt_-^{d-1}} \right), \quad (4.35)$$

avec  $k$  est une constante. Ce résultat est la généralisation de l'expression trouvée par A. Almheiri et al. [125], lorsque l'extrémisme l'entropie généralisée dans le  $\partial^+$  la direction est nulle. Tel que  $t_+ \equiv \frac{t_-^1}{1-kt_-^{d-1}}$ , dans le contexte de la surface extrémale quantique. Cela montre que le choix de  $\varphi_-$  sera préférable, c'est-à-dire la projection stéréographique du temps, définie par une transformation d'une sphère de temps sur  $B_d^{-,hid}$ , vers la chronologie sur l'espace-temps plat de Minkowski  $R^{1,d-1} \equiv B_d^{+,vis}$ . on a

$$\varphi_- (\mathbf{t}_-^k, t_-^{d-1}) = \frac{\mathbf{t}_-^k}{1 - kt_-^{d-1}} \quad 1 \leq k \leq d-2. \quad (4.36)$$

Cette équation est plus générale qui présente tous les temps holographiques  $t_+^k = \varphi_- (\mathbf{t}_-^k, t_-^{d-1})$   $1 \leq k \leq d-2$ , par une projection stéréographique. Ensuite, nous choisissons  $d=4$ . De Eq.(4.36) on obtient deux temps holographiques sur  $B_4^{+,vis}$  ( or  $CFT_4$ )

$$t_+^1 t_-^2 = t_-^1 t_+^2. \quad (4.37)$$

Le nouvel horizon correspond à

$$t_{\infty} = \frac{\beta}{\pi} + \frac{k\beta^2}{4\pi^2} + O(k^2).$$

La solution de gravité bidimensionnelle est localement  $AdS_2$ , décrite par la métrique de Poincaré

$$ds_{AdS}^2 = -\frac{L_{AdS}^2}{(x^+ - x^-)^2} dx^+ dx^-$$

avec  $L_{AdS}$  est l'échelle de courbure d'AdS. Cet état peut être nappé au vide du CFT dans AdS par un transformation locale de Weyl

$$ds_{AdS}^2 \rightarrow \Omega_{+-}^2 ds_{AdS}^2 = \frac{dz d\bar{z}}{\epsilon^2}.$$

L'entropie généralisée en gravité JT peut se simplifié par

$$S_{gen}(x_+, x_-) = \frac{\phi}{4G_N} + S_{bulk},$$

avec  $\phi$  est une fonction JT. Notez que toutes les entropies d'intrication que nous calculons sont divergentes UV. Dans la description holographique, ces divergences UV apparaissent en raison de la longueur infinie lorsque des géodésiques d'espace-temps à cause de la coupure UV. Ces divergences sont associées à une renormalisation du couplage au terme topologique d'Einstein dans l'action JT.

## 4.6 Correspondance ER=EPR de fibration de Hopf

### Pont Einstein Rosen

Les rayons lumineux émis par la source S sont déviés par la lentille L, puis observés par l'observateur O, sous forme de deux images  $S_1$  et  $S_2$  de la source. Si la source observée est parfaitement alignée avec la corps céleste agissant comme une lentille gravitationnelle par rapport à l'observateur, le mirage peut prendre la forme d'un anneau d'Einstein par le rayon d'Einstein est

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4G_N M}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_L D_S}}, \quad (4.38)$$

où  $D_L$ ,  $D_S$ ,  $D_{LS}$  sont la distance entre  $O$  et  $L$ , et la distance entre  $O$ ,  $S$  et la distance entre  $L$  and  $S$ , respectivement. L'angle de courbure que nous voudrions souligner ici est que l'angle de déviation, est donné comme

$$\tilde{\alpha}(\xi) = \frac{4G_N M_\xi}{c^2} \frac{1}{\xi}, \quad (4.39)$$

où  $M_\xi$  est la masse à l'intérieur d'un rayon  $\xi$ . Nous prenons deux régions intriquées; la région A représente la surface du trou noir, une région fermée invisible  $B$  de rayon  $\xi$  et une surface  $A_\xi$ , qui supporte également une courbure de Ricci positive constante. Dans un premier temps, nous associons à chaque région un état quantique de deux particules.

$$|\Psi_A\rangle \sim |+\rangle |-\rangle + |-\rangle |+\rangle, \quad (4.40)$$

$$|\Psi_B\rangle \sim |+\rangle |-\rangle - |-\rangle |+\rangle. \quad (4.41)$$

L'intrication entre les états  $|\Psi_A\rangle$  et  $|\Psi_B\rangle$  décrit l'intrication entre deux particules. La première particule est sur la surface du trou noir et la seconde particule est sur la surface de la région fermée. L'intrication entre les deux particules décrit une information quantique, qui passe de l'horizon du trou noir A à l'horizon de la région fermée B. Nous supposons que l'information de la surface du trou noir se transforme en un trou de ver, vers une masse dans une région extrême de trou de ver qui existe dans une dimension compacte. Puisque la matière noire peut être détectée dans de nombreux endroits de l'Univers. Nous proposons que les régions fermées existent en 5 dimensions ; avec 4 dimensions d'espace-temps et une dimension compacte. Cette région est une sous-variété de l'espace-temps, qui est fermée sur la 5ème dimension. Le pont Einstein Rosen entre le trou noir et la région fermée est créé par des corrélations EPR entre les micro-états  $|\Psi_A\rangle$  et  $|\Psi_B\rangle$ . Si Bob traverse l'horizon, il peut envoyer un message à Alice sur la région fermée. Alice peut tirer avec une onde de choc à très haute énergie qui se propage à travers le trou de ver, qui informera Bob par le passage de l'énergie. En cas de contact causal, les informations ne peuvent pas être transmises à travers le pont. L'entropie de Bekenstein-Hawking est égale à

$$S_{BH} = \frac{k_{BC}^3}{4\hbar G_N} A. \quad (4.42)$$

On peut représenter géométriquement l'entropie par la surface  $A = 4\pi r^2$  de rayon  $r$ . On suppose que la région  $A$  a diminué au cours du temps, et qu'il y a une transformation de la surface à chaque instant vers la région fermée. La surface de la région fermée augmente aux dépens de la surface du trou noir. A chaque instant  $t$  on définit une surface de trou noir  $A(t) = A_\xi(t) + \delta A_\xi$ , avec  $\delta A_\xi$  est une partie de la surface qui transforme de  $A$  à  $A_\xi \sim 4\pi\xi^2$  à  $t$ . La surface infinitésimale  $\delta A_\xi$  dépend de la variation de la masse  $M_\xi$  dans la région du rayon  $\xi$ . Nous prenons  $\delta A_\xi$  en tant que produit vectoriel de deux vecteurs dans la région fermée avec l'angle de déviation  $\tilde{\alpha}$  ( $\sin \tilde{\alpha} \approx \tilde{\alpha}$ ). Pour exprimer cette variation, nous utiliserons l'angle de déviation

$$\delta A_\xi \equiv \tilde{\alpha} A_\xi = 16\pi M_\xi \xi. \quad (4.43)$$

Eq.(4.42) peut être réécrit comme

$$S_{BH} = \pi\xi^2 + 4\pi M_\xi \xi, \quad (4.44)$$

à ce stade, on peut définir la condition :  $M_\xi \succeq -\xi/4$ . Selon cette condition, la masse  $M_\xi$  est toujours supérieur à une valeur minimale. Par comparaison avec le rayon de Schwarzschild, la condition est équivalente à

$$M_\xi \equiv M - \xi/2, \quad (4.45)$$

où  $M$  est la masse du trou noir. Il y a autre chose à remarquer à propos de l'équation (4.45) ; lorsque la masse  $M$  est nulle, la masse de la région fermée peut être nulle ou non. Dans le cas où il y a absorption totale de la masse du trou noir, la masse  $M_\xi$  ne sera pas nul. Par contre, si on suppose qu'il n'y a pas de trou noir dans le départ ; la question est, pouvons-nous avoir des régions fermées avec des masses  $M_\xi = -\xi/2 \succ 0$  ? On peut utiliser Eq.(4.45) pour chercher par la méthode des lentilles gravitationnelles une région  $(\xi, M_\xi)$  qui sont reliés par

la masse du trou noir. Exprimons maintenant  $S_{BH}$  en tant que fonction de  $M_\xi$  et  $M$

$$S_{BH} = 4\pi [M^2 - M_\xi^2]. \quad (4.46)$$

L'entropie du trou noir est proportionnelle à la masse de la région fermée. Si nous supposons que la masse de la région fermée est nulle, alors nous obtenons une entropie  $S_{BH}$  seulement pour un trou noir. L'entropie  $S_{BH}$  relie chaque trou noir de la masse  $M$  à une région fermée de la masse  $M_\xi$ . Par conséquent, il n'y a pas de perte d'information dans un trou noir, mais il y a une transformation de l'information pendant un trou de ver vers la région fermée, l'information est enregistrée sur la région fermée en tant que masse  $M_\xi$ . Selon l'entropie (4.46), lorsque la masse du trou noir se transforme entièrement en région fermée, l'entropie du trou noir sera nulle. La masse  $M_\xi$  décrit la matière noire dans la région fermée. La masse dans les régions fermées n'interagit pas avec les ondes électromagnétiques, car ces régions sont fermées et fermées sur elles-mêmes, rien ne peut entrer ou sortir, sauf par les trous de ver qui sont ouverts du côté du trou noir. L'endroit pour tester la présence de la matière noire dans les régions fermées sont les trous noirs. Cependant, la matière noire n'existe pas à l'intérieur des trous noirs, mais les trous noirs sont des portes qui peuvent nous aider à décrire les régions fermées. Nous proposons que la matière noire émette des rayonnements de Hawking qui traversent le trou de ver pour qu'il émette depuis le trou noir. Pour cela nous proposons d'utiliser la notion de rayonnement de Hawking pour étudier la matière noire. Même si nous avons déjà indiqué que nous pouvions détecter les régions fermées par la lentille gravitationnelle loin des trous noirs. Mais le but de ce travail est de relier en même temps la lentille gravitationnelle dans les régions fermées avec le rayonnement de Hawking. En effet, l'équation (4.46), indique que  $M \succeq M_\xi$ . Mais si le contraire se produit, c'est-à-dire  $M \prec M_\xi$ , dans ce cas une partie de la masse  $M_\xi$  se transforme en une énergie qui émet un rayonnement (radiation de Hawking supposée). Ce principe est toujours répété s'il y a de petits changements :  $M_\xi = M + \epsilon$ , où  $\epsilon \sim 0$ . Les petites variations de la masse représentent l'énergie du rayonnement de Hawking. La majeure partie de cette énergie reste sur la région fermée puisque les dimensions de la région fermée sont de 5. Mais parfois, nous pouvons avoir un rayonnement de Hawking qui sort du trou noir.

## Fibration de Hopf quaternionique du trou de ver

IL y a plusieurs méthodes pour géométriser l'ensemble {trou noir et région fermée}, par exemple une surface non orientable comme la bouteille de Klein, la projection stéréographique ou la sphère de Bloch. Ici, nous proposons que la surface du trou noir et la région fermée est topologiquement équivalentes à une sphère spatio-temporelle. Le trou noir est topologiquement équivalent à une sphère spatio-temporelle  $S^3$ . D'autre part, la surface de la région fermée est équivalente à la sphère spatio-temporelle  $S^4$ , puisque nous ne pouvons pas voir directement les régions fermées. Pour sortir de la sphère  $S^3$  (trou noir) à  $S^4$  (région fermée), il existe une technique mathématique appelée fibration de Hopf. On définit la fibration de Hopf  $\pi$  par une carte qui transporte chaque élément de  $S^4$  à un élément de  $S^3 \cong SU(2)$ . Par le théorème d'Adams [144] il n'y a que 4 chemins possibles pour faire une fibration de Hopf. Par conséquent, il n'y a qu'une seule possibilité de passer de  $S^3$  vers  $S^4$  : l'espace fibre  $S^3$

est intégré dans l'espace total  $S^7$ , et la fibration de Hopf  $\pi$  commence à partir de  $S^7$  vers  $S^4$

$$S^3 \hookrightarrow S^7 \xrightarrow{\pi} S^4. \quad (4.47)$$

On suppose que la fibration de Hopf est la transformation de l'information entre le trou noir et la région fermée. Selon la métamorphose (4.47), on peut remarquer que la géométrie  $S^7$  équivaut à un trou de ver qui passe à travers  $S^3$  à  $S^4$  et les informations sont enregistrées sur  $S^4$  en masse. Nous savons que la topologie d'une paire de systèmes à deux niveaux intriqués [142] est donnée par la fibration de Hopf de Eq.(4.47).

On prend un espace des quaternions  $\mathbb{H}$ , on sait que  $S^4 \cong PH$  (espace projectif des quaternions). Le vecteur de l'espace-temps de Minkowski  $(t, x, y, z) \in R^{1,3}$ , est interprété comme un quaternion  $q = t + ix + jy + kz \in H$ . La fibration de Hopf  $\pi : S^7 \longrightarrow S^4$ , sa forme explicite peut s'écrire :

$$\pi(p, q) = \frac{1}{\left|\frac{q}{p}\right|^2 + 1} \left( 2\frac{q}{p}, \left|\frac{q}{p}\right|^2 - 1 \right) = (2pq, |q|^2 - |p|^2), \quad (4.48)$$

où  $p, q \in H$ ,  $|q| = \sqrt{t^2 + x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $\bar{q} = t + ix + jy + kz$ . Eq.(4.48) peut être réécrit comme

$$\pi(p, q) = (X_0, X_1, X_2, X_3, X_5), \quad (4.49)$$

où

$$X_0 = p\bar{q} + q\bar{p}, \quad (4.50)$$

$$iX_1 + jX_2 + kX_3 = p\bar{q} - q\bar{p}, \quad (4.51)$$

$$X_5 = \delta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu - \delta_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta = |q|^2 - |p|^2. \quad (4.52)$$

Le champ  $X_5$  est le seul parmi les autres qui soit réel. La fibration de Hopf crée une géométrie espace-temps de Minkowski et quatre états quantiques. Les champs Eq.(4.50,4.51) sont équivalents à des états intriqués Eq.(4.40,4.41). L'état pur dans un système à deux qubits est décrit par des rayons qui représentent des vecteurs d'état dans l'espace de Hilbert complexe modulo une phase  $U(1)$  est explicitement donnée par

$$|\Psi_A\rangle \sim |p\rangle_+ |q\rangle_- + |q\rangle_+ |p\rangle_-, \quad (4.53)$$

$$|\Psi_B\rangle \sim |p\rangle_+ |q\rangle_- - |q\rangle_+ |p\rangle_-. \quad (4.54)$$

L'intrication entre  $|\Psi_A\rangle$  et  $|\Psi_B\rangle$ , montre que le champ  $X_0$  existe à la fois sur le trou noir et la région fermée et les champs  $(X_1, X_2, X_3)$  existent sur la région fermée. On peut décrire les champs  $(X_1, X_2, X_3)$  par l'état  $|\Psi_B\rangle$ , cet état est intriqué avec l'état  $|\Psi_A\rangle$  qui décrit le domaine  $X_0$ .

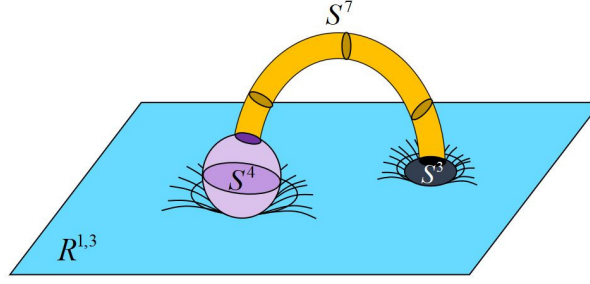


FIGURE 4.6 – La figure représente la connexion entre le trou noir et matière noire. Il y a un transfert d'informations sur les trous noirs à travers le trou de ver, cette information s'accumule sous la forme d'une masse (matière noire) dans un région fermée et extrême du trou de ver.

La fibration de Hopf (4.49) résume les informations stockées sur la région fermée. La région fermée apparaît comme un champ de surface unique  $X_5$  dans l'espace-temps. Par contre les quatre autres dimensions de la région fermée sont cachées à l'échelle quantique sous la forme des champs  $(X_0, X_1, X_2, X_3)$ . Ces quatre champs sont des quaternions. On peut représenter ces quaternions par la matrice  $SU(1, 1)$

$$\begin{pmatrix} X_0 + iX_1 & X_2 + iX_3 \\ -X_2 + iX_3 & X_0 - iX_1 \end{pmatrix}. \quad (4.55)$$

Par la suite, on veut étudier la transformation de la masse sur le trou de ver par la fibration de Hopf. Nous remarquons dans Eq.(4.44) que l'entropie  $S_{BH}$  est proportionnel au paramètre spatial  $\xi^2$  (surface), et puisque le champ  $X_5$  Eq.(4.52) représente également une surface sur l'espace-temps. Cela montre qu'il y a une équivalence entre  $S_{BH}$  et  $X_5$ . En comparant Eq.(4.46) et Eq.(4.48), on peut écrire une seconde fibration de Hopf par rapport aux masses

$$X_0 = m_\xi \bar{m} + m \bar{m}_\xi, \quad (4.56)$$

$$iX_1 + jX_2 + kX_3 = m_\xi \bar{m} - m \bar{m}_\xi, \quad (4.57)$$

$$S_{BH}/4\pi \equiv X_5 = M^2 - M_\xi^2, \quad (4.58)$$

avec  $|m| = M$  et  $|m_\xi| = M_\xi$ . Faisons en sorte que  $H$  agit sur  $C^2 \approx H$  par multiplication à gauche, cette action est  $C$ -linéaire. Il est également fidèle, définit ainsi un morphisme d'algèbres injectives  $H \hookrightarrow \text{End}_C(H) \approx M_2(C)$ . La matrice associée au quaternion sera équivalente à la matrice (4.55), qui contient des matrices unitaires, qui sont la base de l'algèbre de Lie du groupe  $SU(2)$ . En effet, on peut représenter les 5 champs par une seule écriture

$$(m + m_\xi)(\bar{m} + \bar{m}_\xi) = M^2 + M_\xi^2 + X_0, \quad (4.59)$$

$$(m + m_\xi)(\bar{m} - \bar{m}_\xi) = X_5 + iX_1 + jX_2 + kX_3. \quad (4.60)$$

Le problème ici est qu'on ne peut pas décrire les 5 champs par une seule écriture avec un produit du quaternion. On définit une autre surface dans l'espace-temps  $X_6 = M^2 + M_\xi^2$ . Ce champ remplacera le champ  $X_5$  dans Eq.(4.60) pour avoir une équivalence entre les états

intriqués sur des surfaces équivalentes. Nous avons connecté  $X_5$  et l'entropie du trou noir, pour cela on peut relier les deux dernières équations, pour avoir une seule description

$$|m + m_\xi|^2 |\bar{m} + \bar{m}_\xi|^2 = |X_6 + X_0|^2, \quad (4.61)$$

$$|m + m_\xi|^2 |\bar{m} - \bar{m}_\xi|^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_5^2. \quad (4.62)$$

On utilise la sous-additivité de la quantité ci-dessus  $|X_6 + X_0|^2 \preceq |X_6|^2 + |X_0|^2$ , et on choisit la valeur maximale de la quantité Eq.(4.61), on peut obtenir

$$F |X_6|^2 = -F |X_0|^2 + \frac{1}{F} (X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_5^2), \quad (4.63)$$

où  $F = \left| \frac{\bar{m} - \bar{m}_\xi}{\bar{m} + \bar{m}_\xi} \right| \in R$  est une fonction. Si nous acceptons que le premier membre de Eq.(4.63) est une métrique, il faut d'abord définir le terme  $F |X_6|^2$ . On sait que la fibration de Hopf (4.49) génère 5 dimensions par 8 dimensions, tous les champs ( $X_0, X_1, X_2, X_3, X_5$ ) sont donc représente les dimensions de l'espace-temps de la région fermée. On remarque aussi que le deuxième membre de l'équation(4.63) ressemble à la métrique de Schwarzschild et la métrique  $AdS$ . Ensuite, le terme  $F |X_6|^2$  représente la métrique de la région fermée. La correspondance  $X_5^2 \equiv S_{BH} \sim \xi^2$ , montre que  $\frac{1}{F} X_5^2$  est la 5ème dimension de la région fermée, puisque  $\xi$  est un paramètre qui décrit la région fermée. Par conséquent, le premier membre de Eq.(4.63) décrit le passage de l'information à travers le trou noir vers la région fermée. Nous pouvons représenter la métrique de la région fermée par les coordonnées  $(t, r, \theta, \varphi_1, \varphi_2)$  comme

$$ds^2 = -F dt^2 + \frac{1}{F} dr^2 + r^2 d\Omega_4^2, \quad (4.64)$$

où  $d\Omega_4^2 = d\Omega_4^2(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ .

selon cette métrique, la géométrie de la région fermée est une copie de la géométrie du trou noir. Le copier coller de l'information influence la géométrie de la région fermée. Si nous ne prenons que 4 dimensions de la région fermée, nous remarquons que la géométrie de la région fermée est une symétrie de réflexion de la géométrie du trou noir. Nous pouvons voir cette transformation différemment ; si les informations sur la géométrie du trou noir représentent un visage, la géométrie de la région fermée sera un miroir qui copie les informations de la géométrie du trou noir. De la métamorphose (4.47), on ne peut pas parler de la géométrie de la région fermée, à moins qu'il n'y ait une fibration de Hopf (transformation de l'information). Avec cette conjecture, nous pouvons comparer cette transition à la prescription Ryu-Takayanagi [143], est donnée par l'aire d'une surface minimale avec moins d'aire que les horizons. L'holographie prétend que les degrés de liberté dans la gravité quantique en  $(d + 2)$  dimensions sont comparables à ceux d'un système quantique en  $(d + 1)$  dimensions. Puisque l'information voyage de 4 dimensions à 5 dimensions. La fonction  $F$  s'exprime par

$$F(r) = \sqrt{\frac{X_6 - 2L(r)}{X_6 + 2L(r)}}, \quad (4.65)$$

où  $L$  est une fonction locale, dans le cas de la métrique  $AdS$   $L \equiv r^2$ . L'expression de  $F$ , montrer qu'il n'y a pas de singularité sur la région fermée. Nous remarquons de Eq.(4.65)

que  $X_6 \succeq 2L$ . Pour  $X_6 \gg 2L$ , on obtient

$$F(r) = \frac{X_6 - L(r)}{X_6 + L(r)}. \quad (4.66)$$

La fonction  $F$  montre que la métrique (4.64) est une unification de  $AdS_5$  métrique et la métrique de Schwarzschild. Pour bien voir cette généralisation, on peut utiliser l'approximation :

$$F^{-1}(r) \sim 1 + \frac{L(r)}{X_6}. \quad (4.67)$$

Eq.(4.67) est équivalent à l'inverse du facteur présent dans la métrique  $AdS$ . Il y a une remarque très importante, l'approximation de  $F$  Eq.(4.66), n'est pas équivalent au facteur temps de la métrique AdS, mais il est équivalent au terme spatial du  $AdS$  métrique. Ce qui montre qu'il y a un changement entre l'espace et le temps sur la région fermée. D'autre part, si  $L(r)/X_6 = 2M/r$ , l'approximation (4.67), représente le facteur temporel de la métrique de Schwarzschild. La généralisation de  $AdS_5$  métrique et la métrique de Schwarzschild par la métrique de la région fermée, montrent que la région fermée se comporte comme une géométrie caméléon, qui peut changer en fonction du changement de la géométrie du trou noir. Pour obtenir le  $AdS_5$  métrique et la métrique de Schwarzschild de Eq.(4.64), la masse de la région fermée doit être nulle, cela montre que l'ensemble {trou noir et région fermée} généralise la notion de trou noir.

## 4.7 Conclusion

La dualité ER=EPR permet d'étudier la structure topologique et géométrique d'espace-temps. Cette description est valable s'il y a deux copie de CFT et deux copies d'AdS. Ce résultat a permis d'interpréter l'existence de deux horizons dans un trou noir EGB et de deux bords dans la théorie holographique.

# Conclusion générale

Les modèles de gravité modifiés affectent l'évolution de l'Univers à la fois au fond d'espace-temps et à la perturbation. Il existe principalement deux approches différentes utilisées pour contraindre les modèles alternatifs de la gravité : l'approche de la gravité modifiée paramétrée et la théorie des champs effectifs. Nous avons montré que l'action est un dual de l'entropie du point de vue holographique. Par conséquent, nous avons obtenu une forme plus générale de gravité  $f(R)$  selon notre modèle, qui correspond exactement à la plupart des choix de gravité  $f(R)$  dans la littérature. Pour vérifier que le Lagrangien est invariant sous une nouvelle symétrie générale, nous avons montré la gravité  $f(R)$  en coordonnées de Kruskal. Cette symétrie décrit directement la géométrie de la variété de bulk.

Dans ce rapport on a traité l'effet de couplage entre le champ scalaire et l'action gravitationnelle 4D d'Einstein-Gauss-Bonnet. Nous avons montré que la masse du scalaron dépend de la densité de matière (le mécanisme du caméléon). Il peut être utilisé pour démontrer la relation entre la constante cosmologique et la densité de matière. De plus, nous avons étudié le vide dans les solutions à symétrie maximale, et nous avons trouvé deux branches de solutions, c'est-à-dire qu'il y a deux tels vides. La première solution correspond à l'énergie noire et la seconde représente le vide caméléonique ou matière noire. Nous avons trouvé un fort mélange entre les deux vides, qui est présenté par le mécanisme caméléon. Nous avons également discuté l'équation du paramètre d'état dans le modèle du champ scalaire couplé au minimum de la gravité EGB, également dans l'espace à symétrie maximale. Dans le vide caméléonique, le potentiel effectif est la somme du potentiel.

Durant cette thèse, nous avons ainsi développé le modèle permettant de tenir compte des trous noirs 4D EGB-AdS chargés comme substance de travail. Nous avons étudié la relation entre les charges positives et négatives dans le trou noir EGB à 4D sur la base des travaux de Glavan & Lin. Nous avons supposé une forme particulière des charges présentes sur le trou noir par une solution dégénérée. Nous avons calculé les potentiels électriques des particules et des antiparticules pour le trou noir EGB. Nous avons montré que la charge d'un trou noir de Schwarzschild est nulle. Nous avons adopté que le trou noir EGB est une généralisation du trou noir de Schwarzschild. Nous avons trouvé dans ce cas une charge simplifiée de trou noir EGB qui prend des valeurs de district. En utilisant ce potentiel, on peut trouver deux corrections logarithmiques à l'entropie. La deuxième correction dépend des valeurs discrètes de la charge du trou noir EGB et dépend également de la constante cosmologique. Pour  $A \geq 8\pi\alpha$ , on peut obtenir l'entropie BH avec une seule correction à partir de celle avec deux corrections. Dans ce cas, nous avons étudié la thermodynamique des trous noirs AdS-EGB, cette étude permet d'obtenir l'équation de Van der Waals. Nous avons étudié la thermodynamique du trou noir EGB-AdS. Nous avons montré l'équation d'état pour un gaz parfait et un gaz

de Van der Waals. Pour  $A \geq 8\pi\alpha$ , nous avons obtenu une expression du potentiel électrique qui dépend du rayon  $r_+$ , puis nous avons généralisé ce potentiel pour chaque distance  $r$ , ce qui conduit à calculer le facteur de compressibilité en fonction de la distance au centre du trou noir et en fonction de la Couplage Gauss Bonnet. On a déduit alors l'interaction entre les particules de gaz dans la singularité, l'horizon et l'extérieur du trou noir. Nous avons indiqué que le terme de Gauss-Bonnet joue un rôle dans la thermodynamique du trou noir EGB-AdS. Pour le processus isobare, on peut écrire tous les paramètres thermodynamiques en fonction du couplage de Gauss-Bonnet. Selon des conditions, la statistique d'un trou noir EGB-AdS subissent celle de Bose-Einstein. La singularité ne contient aucune particule, par contre, il y a plus de particules à l'horizon qu'à la région externe. Alors le choix du processus isobarique conduit à une résistance thermique du trou noir. La reconstruction de la résistance thermique à l'intérieur de la zone d'ombre implique un circuit thermique parallèle.

# Bibliographie

- [1] Del Popolo, Antonino, and Morgan Le Delliou. "Small scale problems of the  $\Lambda$ CDM model : a short review." *Galaxies* 5.1 (2017) : 17.
- [2] Sotiriou, T. P., & Faraoni, V. (2010).  $f(R)$  theories of gravity. *Reviews of Modern Physics*, 82(1), 451.
- [3] Gu, B. M., Liu, Y. X., & Zhong, Y. (2018). Stable Palatini  $f(R)$  braneworld. *Physical Review D*, 98(2), 024027.
- [4] Li, M. (2004). A model of holographic dark energy. *Physics Letters B*, 603(1-2), 1-5.
- [5] Hawking, S. W. (1974). Black hole explosions?. *Nature*, 248(5443), 30-31.
- [6] Mathur, S. D. (2009). The information paradox : a pedagogical introduction. *Classical and Quantum Gravity*, 26(22), 224001.
- [7] Penington, G. (2020). Entanglement wedge reconstruction and the information paradox. *Journal of High Energy Physics*, 2020(9), 1-84.
- [8] Penington, G., Shenker, S. H., Stanford, D., & Yang, Z. (2019). Replica wormholes and the black hole interior. *arXiv preprint arXiv :1911.11977*.
- [9] Almheiri, A., Hartman, T., Maldacena, J., Shaghoulian, E., & Tajdini, A. (2020). Replica wormholes and the entropy of Hawking radiation. *arXiv preprint arXiv :1911.12333*.
- [10] Amoretti, A., Areán, D., Goutéraux, B., & Musso, D. (2018). Effective holographic theory of charge density waves. *Physical Review D*, 97(8), 086017.
- [11] Nakayama, Y. (2019). Holographic dual of conformal field theories with very special  $TJ^-$  deformations. *Physical Review D*, 100(8), 086011.
- [12] Bekenstein, J. D. (1973). Black holes and entropy. *Physical Review D*, 7(8), 2333.
- [13] Nishioka, T., Ryu, S., & Takayanagi, T. (2009). Holographic entanglement entropy : an overview. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 42(50), 504008.
- [14] Maldacena, J. (1999). The large-N limit of superconformal field theories and supergravity. *International journal of theoretical physics*, 38(4), 1113-1133.
- [15] Ryu, S., & Takayanagi, T. (2006). Aspects of holographic entanglement entropy. *Journal of High Energy Physics*, 2006(08), 045.
- [16] Pourhasan, R. (2014). Spacetime entanglement with  $f(R)$  gravity. *Journal of High Energy Physics*, 2014(6), 4.

- 
- [17] D. Glavan, & C. Lin, Einstein-Gauss-Bonnet Gravity in Four-Dimensional Spacetime, Phys. Rev. Lett. 124(8) (2020) , 081301.
- [18] Easson, D. A., Manton, T., & Svesko, A. (2020). D $\rightarrow$ 4 Einstein-Gauss-Bonnet gravity and beyond. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2020(10), 026.
- [19] D. Lovelock, The four-dimensionality of space and the Einstein tensor, J. Math. Phys. 13(6) (1972), 874-876.
- [20] Charmousis, C., & Padilla, A. (2008). The instability of vacua in Gauss-Bonnet gravity. Journal of High Energy Physics, 2008(12), 038.
- [21] Ma, L., & Lü, H. (2020). Vacua and exact solutions in lower-D limits of EGB. The European Physical Journal C, 80(12), 1-10.
- [22] Panah, B. E., Jafarzade, K., & Hendi, S. H. (2020). Charged 4D Einstein-Gauss-Bonnet-AdS black holes : shadow, energy emission, deflection angle and heat engine. Nuclear Physics B, 961, 115269.
- [23] Maldacena, J., & Susskind, L. (2013), Cool horizons for entangled black holes, Fortschritte der Phys., 61(9), 781-811.
- [24] Relativité générale, Relativité Générale (2013) - LUTH - Observatoire de Paris.
- [25] J. Neveu, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris 6, (2014).
- [26] I. K. Wehus, Thesis submitted for the degree of Doctor Scientiarum, University of Oslo, (2006).
- [27] A. Hammami, Thesis submitted for the degree of Master of Science in Astronomy, Institute of Theoretical Astrophysics University of Oslo (2012).
- [28] B. Ryden, Introduction to Cosmology, The Ohio State University (2006).
- [29] G. Calcagni, Physical review letters, (2010).
- [30] *Supernova Cosmology Project Collaboration*, S. Perlmutter et al., “Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae,” Astrophys. J. 517-565–586, (1999).
- [31] E. Hubble, Proceedings of the National Academy of Sciences, 15-168–173, (1929).
- [32] *Cosmology and fundamental physics with the Euclid satellite* : Living Rev Relativ (2018).
- [33] L. Amendola, D. Polarski, and S. Tsujikawa, PhysRevLett. 98, 131302 (2007).
- [34] J. A. R. Cembranos, PhysRevLett. 102, 141301 (2009).
- [35] Zheng-Quan Cui, Yu-Xiao Liu, Bao-Min Gu, and L. Zhao, arXiv :1802.01454v1 (2018).
- [36] B. Mukhopadhyaya, S. Sen and S. SenGupta, Phys. Rev. D 79, 124029 (2009).
- [37] B.-M. Gu, Y.-X. Liu, Y. Zhong, arXiv :1804.00271v1 (2018).
- [38] R. Zarrouki and M. Bennai, Phys. Rev. D 82, 123506 (2010).
- [39] T. Katsuragawa, and S. Matsuzaki, Phys. Rev. D 97, 064037 (2018).
- [40] G. Koutsoumbas, K. Ntrekis, E. Papantonopoulos, and E. N. Saridakis, J. Cosmol. Astropart. Phys (2018).
-

- 
- [41] N.A.Hamed, S. Dimopoulos, et G. Dvali, Phys. Lett. B 429, 263 (1998).
- [42] L.Randall and R. Sundrum, PhysRevLett.83,3370 (1999).
- [43] Sean M. Carroll, Vikram Duvvuri, Mark Trodden, and Michael S. Turner, Phys. Rev. D 70, 043528 (2004).
- [44] E. Almaraz, A. de la Macorra, Journal of Modern Physics, 9, 302-313, (2018).
- [45] Planck Collaboration, Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters, p. 67 (2013),arXiv :1303.5076. Astron and Astrophys 571, A16 (2014).
- [46] M. Bennai and E.H Saidi, Physics Letters B 550, 108–116 (2002).
- [47] F. M. Haehl, E. Hijano, O. Parrikar, C. Rabideau, PhysRevLett 120, 201602 (2018).
- [48] A.A. Starobinsky, Journal of Experimental and Theoretical Physics, (2001).
- [49] L. Amendola and C. Quercellini, Phys. Rev. D 68, 023514, (2003).
- [50] T. Katsuragawa and S. Matsuzaki. Phys. Rev. D 95, 044040 (2017).
- [51] A. A. Starobinsky, JETP Lett. 86, 157 (2007).
- [52] Narlikar, J. V. (2002). An introduction to cosmology. Cambridge University Press.
- [53] J. L. Synge, “The Escape of Photons from Gravitationally Intense Stars,” Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 131, no. 3, 463 (1966).
- [54] R. M. Wald. General relativity. 1984. 36, 273
- [55] Maldacena, J. (1999). The large-N limit of superconformal field theories and supergravity. International journal of theoretical physics, 38(4), 1113-1133.
- [56] R. Kubo. Statistical-Mechanical Theory of Irreversible Processes. I. Journal of the Physical Society of Japan, 12 :570–586, June 1957. 71
- [57] Zwicky, F. (1937). On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae. The Astrophysical Journal, 86, 217.
- [58] Perlmutter, Saul, et al. ”Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 high-redshift supernovae.” The Astrophysical Journal 517.2 (1999) : 565.
- [59] Riess, Adam G., et al. ”Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant.” The Astronomical Journal 116.3 (1998) : 1009.
- [60] Clifton, Timothy, et al. ”Modified gravity and cosmology.” Physics reports 513.1-3 (2012) : 1-189.
- [61] Copeland, Edmund J., Mohammad Sami, and Shinji Tsujikawa. ”Dynamics of dark energy.” International Journal of Modern Physics D 15.11 (2006) : 1753-1935.
- [62] Bousder, M., Sakhi, Z., & Bennai, M. (2020). A new unified model of dark matter and dark energy in 5-dimensional  $f(R, \phi)$  gravity. arXiv preprint arXiv :2012.12358.
- [63] Nojiri, Shin’ichi, and Sergei D. Odintsov. ”Unified cosmic history in modified gravity : from  $F(R)$  theory to Lorentz non-invariant models.” Physics Reports 505.2-4 (2011) : 59-144.
- [64] Amendola, L., Polarski, D., & Tsujikawa, S. (2007). Are  $f(R)$  dark energy models cosmologically viable?. Physical review letters, 98(13), 131302.
-

- 
- [65] Srivastava, S. K. "Scale factor dependent equation of state for curvature inspired dark energy, phantom barrier and late cosmic acceleration." *Physics Letters B* 643.1 (2006) : 1-4.
- [66] Ade, P. A., Aghanim, N., Arnaud, M., Ashdown, M., Aumont, J., Baccigalupi, C., ... & Battaner, E. (2016). Planck 2015 results-xiii. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 594, A13.
- [67] Riess, A. G., Strolger, L. G., Tonry, J., Casertano, S., Ferguson, H. C., Mobasher, B., ... & Chornock, R. (2004). Type Ia supernova discoveries at  $z > 1$  from the Hubble Space Telescope : Evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution. *The Astrophysical Journal*, 607(2), 665.
- [68] Jawad, A., Rani, S., & Hussain, M. H. (2020). Cosmological implications and thermodynamics of some reconstructed modified gravity models. *Physics of the Dark Universe*, 27, 100409.
- [69] Khoury, Justin, and Amanda Weltman. "Chameleon cosmology." *Physical Review D* 69.4 (2004) : 044026.
- [70] Cembranos, Jose AR. "Dark matter from  $R^2$  gravity." *Physical review letters* 102.14 (2009) : 141301.
- [71] Addazi, Andrea, and Maxim Yu Khlopov. "Dark matter and inflation in  $R + \zeta R^2$  supergravity." *Physics Letters B* 766 (2017) : 17-22.
- [72] Gannouji, Radouane, M. Sami, and I. Thongkool. "Generic  $f(R)$  theories and classicality of their scalarons." *Physics Letters B* 716.2 (2012) : 255-259.
- [73] Pi, Shi, et al. "Scalaron from  $R^2$ -gravity as a heavy field." *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2018.05 (2018) : 042.
- [74] Rubin, Vera C., and W. Kent Ford Jr. "Rotation of the Andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions." *The Astrophysical Journal* 159 (1970) : 379.
- [75] Katsuragawa, Taishi, and Shinya Matsuzaki. "Cosmic history of chameleonic dark matter in  $F(R)$  gravity." *Physical Review D* 97.6 (2018) : 064037.
- [76] Goldberger, Walter D., Jingping Li, and Siddharth G. Prabhu. "Spinning particles, axion radiation, and the classical double copy." *Physical Review D* 97.10 (2018) : 105018.
- [77] Easson, D. A., Manton, T., & Svesko, A. (2020).  $D \rightarrow 4$  Einstein-Gauss-Bonnet gravity and beyond. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2020(10), 026.
- [78] Nojiri, S. I., Odintsov, S. D., & Sasaki, M. (2005). Gauss-Bonnet dark energy. *Physical Review D*, 71(12), 123509.
- [79] Glavan, D., & Lin, C. (2020). Einstein-Gauss-Bonnet Gravity in Four-Dimensional Spacetime. *Physical Review Letters*, 124(8), 081301.
- [80] Katsuragawa, T., & Matsuzaki, S. (2018). Cosmic history of chameleonic dark matter in  $F(R)$  gravity. *Physical Review D*, 97(6), 064037.
- [81] Choudhury, S., Sen, M., & Sadhukhan, S. (2016). Can dark matter be an artifact of extended theories of gravity ?. *The European Physical Journal C*, 76(9), 1-24.
-

- 
- [82] Frolov, A. V. (2008). Singularity problem with  $f(R)$  models for dark energy. *Physical review letters*, 101(6), 061103.
- [83] Crisostomo, J., Troncoso, R., & Zanelli, J. (2000). Black hole scan. *Physical Review D*, 62(8), 084013.
- [84] Shu, F. W. (2020). Vacua in novel 4D Einstein-Gauss-Bonnet gravity : Pathology and instability ?. *Physics Letters B*, 811, 135907.
- [85] Elder, B., Khoury, J., Haslinger, P., Jaffe, M., Müller, H., & Hamilton, P. (2016). Chameleon dark energy and atom interferometry. *Physical Review D*, 94(4), 044051.
- [86] Aghanim, N., Akrami, Y., Ashdown, M., Aumont, J., Baccigalupi, C., Ballardini, M., ... & Roudier, G. (2020). Planck 2018 results-VI. Cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 641, A6.
- [87] García-Aspeitia, M. A., & Hernández-Almada, A. (2021). Einstein–Gauss–Bonnet gravity : Is it compatible with modern cosmology ?. *Physics of the Dark Universe*, 100799.
- [88] Hawking, S. W., & Penrose, R. (1970), The singularities of gravitational collapse and cosmology, *Proc. Math. Phys. Eng. Sci.*, 314(1519), 529-548, <https://doi.org/10.1098/rspa.1970.0021>.
- [89] Das, P., Sk, R., & Ghosh, S. (2017), Motion of charged particle in Reissner–Nordström spacetime : a Jacobi-metric approach, *EPJC*, 77(11), 735, <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-017-5295-6>.
- [90] Zhang, J., & Zhao, Z. (2005), New coordinates for Kerr–Newman black hole radiation, *Phys. Lett. B*, 618(1-4), 14-22, <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2005.05.024>.
- [91] Gubser, S. S. (2008), Breaking an Abelian gauge symmetry near a black hole horizon, *Phys. Rev. D*, 78(6), 065034, <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.78.065034>.
- [92] Glavan, D., & Lin, C. (2020), Einstein-Gauss-Bonnet Gravity in Four-Dimensional Spacetime, *Phys. Rev. Lett.*, 124(8), 081301.
- [93] Bousder, M., & Bennai, M. (2021). Particle-antiparticle in 4D charged Einstein-Gauss-Bonnet black hole. *Physics Letters B*, 817, 136343.
- [94] Bousder, M., & Bennai, M. (2021). Charged 4D Einstein-Gauss-Bonnet-AdS black hole in isobaric process : Thermal conduction, compressibility and Bose Einstein distribution. *Nuclear Physics B*, 115476.
- [95] Hajdukovic, D. S. (2014), Virtual gravitational dipoles : The key for the understanding of the Universe ?, *Phys. Dark Universe*, 3, 34-40.
- [96] Pascoli, Silvia, and Jessica Turner (2020), Matter–antimatter symmetry violated, *Nature*, 323-324.
- [97] Aoki, K., Gorji, M. A., & Mukohyama, S. (2020), A consistent theory of  $D \rightarrow 4$  Einstein-Gauss-Bonnet gravity, *Phys. Lett. B*, 135843.
- [98] Fernandes, P. G. (2020), Charged black holes in AdS spaces in 4D Einstein Gauss-Bonnet gravity, *Phys. Lett. B*, 135468.
- [99] Bousder, M., Sakhi, Z., & Bennai, M. (2020). A new unified model of dark matter and dark energy in 5-dimensional  $f(R, \phi)$  gravity. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 17(13), 2050183.
-

- 
- [100] Seahra, S. S., & Wesson, P. S. (2003). Universes encircling five-dimensional black holes. *Journal of Mathematical Physics*, 44(12), 5664-5680.
- [101] Mitra, A. (1999). Kruskal coordinates and mass of Schwarzschild black holes. arXiv preprint astro-ph/9904162.
- [102] Flanagan, E. E. (2004). Palatini form of  $1/R$  gravity. *Physical review letters*, 92(7), 071101.
- [103] Amendola, L., Polarski, D., & Tsujikawa, S. (2007). Are  $f(R)$  dark energy models cosmologically viable?. *Physical review letters*, 98(13), 131302.
- [104] Nakamura, S., Ooguri, H., & Park, C. S. (2010). Gravity dual of spatially modulated phase. *Physical Review D*, 81(4), 044018.
- [105] Lieb, E. H., & Ruskai, M. B. (2002). A Fundamental Property of Quantum-Mechanical Entropy. In *Inequalities* (pp. 59-61). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [106] Narain, G., & Anishetty, R. (2013). Charge renormalization due to graviton loops. *Journal of High Energy Physics*, 2013(7), 106.
- [107] Randall, L., & Sundrum, R. (1999). Large mass hierarchy from a small extra dimension. *Physical review letters*, 83(17), 3370.
- [108] Nishioka, T., & Takayanagi, T. (2007). AdS bubbles, entropy and closed string tachyons. *Journal of High Energy Physics*, 2007(01), 090.
- [109] Boulanger, N., & Hohm, O. (2008). Nonlinear parent action and dual gravity. *Physical Review D*, 78(6), 064027.
- [110] de Haro, S. (2009). Dual gravitons in  $AdS_4/CFT_3$  and the holographic Cotton tensor. *Journal of High Energy Physics*, 2009(01), 042.
- [111] Henneaux, M., Lekeu, V., & Leonard, A. (2019). A note on the double dual graviton. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 53(1), 014002.
- [112] Garcia-Compean, H., Obregon, O., Ramirez, C., & Sabido, M. (2003). Noncommutative self-dual gravity. *Physical Review D*, 68(4), 044015.
- [113] Maldacena, J., Stanford, D., & Yang, Z. (2016). Conformal symmetry and its breaking in two-dimensional nearly anti-de Sitter space. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2016(12).
- [114] Engelsöy, J., Mertens, T. G., & Verlinde, H. (2016). An investigation of AdS 2 backreaction and holography. *Journal of High Energy Physics*, 2016(7), 139.
- [115] Almheiri, A., & Kang, B. (2016). Conformal symmetry breaking and thermodynamics of near-extremal black holes. *Journal of High Energy Physics*, 2016(10), 52.
- [116] Faulkner, T., Leigh, R. G., Parrikar, O., & Wang, H. (2016). Modular Hamiltonians for deformed half-spaces and the averaged null energy condition. *Journal of High Energy Physics*, 2016(9), 38.
- [117] Frolov, V. P. (2014). Information loss problem and a ‘black hole’ model with a closed apparent horizon. *Journal of High Energy Physics*, 2014(5), 49.
- [118] Akal, I., Kusuki, Y., Shiba, N., Takayanagi, T., & Wei, Z. (2021). Entanglement Entropy in a Holographic Moving Mirror and the Page Curve, *Phys. Rev. Lett.*, 126(6), 061604.
-

- 
- [119] Ryu, S., & Takayanagi, T. (2006), Holographic derivation of entanglement entropy from the anti-de Sitter space/conformal field theory correspondence, *Phys. Rev. Lett.*, 96(18), 181602.
- [120] Maldacena, J. (2003). Eternal black holes in anti-de Sitter. *J. High Energy Phys*, 2003(04), 021.
- [121] Remmen, G. N., Bao, N., & Pollack, J. (2016), Entanglement conservation, ER= EPR, and a new classical area theorem for wormholes, *J. High Energy Phys*, 2016(7), 1-15.
- [122] Verlinde, H. (2020), ER= EPR revisited : on the entropy of an Einstein-Rosen bridge, arXiv preprint arXiv :2003.13117.
- [123] Dai, D. C., Minic, D., Stojkovic, D., & Fu, C. (2020), Testing the ER= EPR conjecture, *Phys. Rev. D*, 102(6), 066004.
- [124] Gharibyan, H., & Penna, R. F. (2014), Are entangled particles connected by wormholes? Evidence for the ER= EPR conjecture from entropy inequalities, *Phys. Rev. D*, 89(6), 066001.
- [125] Penington, G. (2020), Entanglement wedge reconstruction and the information paradox, *J. High Energy Phys*, 2020(9), 1-84.
- [126] Hajdukovic, D. S. (2014), Virtual gravitational dipoles : The key for the understanding of the Universe ?, *Phys. Dark Universe*, 3, 34-40.
- [127] Bousder, M., & Bennai, M. (2021). Particle-antiparticle in 4D charged Einstein-Gauss-Bonnet black hole. *Physics Letters B*, 817, 136343.
- [128] Bousder, M., El Bourakadi, K., & Bennai, M. (2021). Charged 4D Einstein-Gauss-Bonnet black hole : Vacuum solutions, Cauchy horizon, thermodynamics. *Physics of the Dark Universe*, 100839.
- [129] Bousder, M., & Bennai, M. (2021). Charged 4D Einstein-Gauss-Bonnet-AdS black hole in isobaric process : Thermal conduction, compressibility and Bose Einstein distribution. *Nuclear Physics B*, 969, 115476.
- [130] Ghosh, A., & Bhamidipati, C. (2019), Contact geometry and thermodynamics of black holes in AdS spacetimes, *Phys. Rev. D*, 100(12), 126020.
- [131] Wei, S. W., & Liu, Y. X. (2020), Extended thermodynamics and microstructures of four-dimensional charged Gauss-Bonnet black hole in AdS space, *Phys. Rev. D*, 101(10), 104018.
- [132] Wei, S. W., & Liu, Y. X. (2018), Photon orbits and thermodynamic phase transition of d-dimensional charged AdS black holes, *Phys. Rev. D*, 97(10), 104027.
- [133] Jusufi, K. (2020), Quasinormal modes of black holes surrounded by dark matter and their connection with the shadow radius, *Phys. Rev. D*, 101(8), 084055.
- [134] Capela, F., & Tinyakov, P. G. (2011), Black hole thermodynamics and massive gravity, *J. High Energy Phys.*, 2011(4), 42.
- [135] Kubizňák, D., Mann, R. B., & Teo, M. (2017), Black hole chemistry : thermodynamics with Lambda, *Class. Quantum Gravity*, 34(6), 063001.

- [136] Fernandes, P. G. (2020), Charged black holes in AdS spaces in 4D Einstein Gauss-Bonnet gravity, *Phys. Lett. B*, 135468.
- [137] Kumar, A., & Ghosh, S. G. (2020), Hayward black holes in the novel 4 D Einstein-Gauss-Bonnet gravity. arXiv preprint arXiv :2004.01131.
- [138] Kumar, A., Singh, D. V., & Ghosh, S. G. (2020), Hayward black holes in Einstein-Gauss-Bonnet gravity, *Ann. Phys.*, 419, 168214.
- [139] Astefanesei, D., Mann, R. B., & Rojas, R. (2019), Hairy black hole chemistry, *J. High Energy Phys.*, 2019(11),43.
- [140] Cvetič, M., Nojiri, S. I., & Odintsov, S. D. (2002), Black hole thermodynamics and negative entropy in de Sitter and anti-de Sitter Einstein-Gauss-Bonnet gravity, *Nucl. Phys. B*, 628(1-2), 295-330.
- [141] Ghosh, A., & Bhamidipati, C. (2019), Contact geometry and thermodynamics of black holes in AdS spacetimes, *Phys. Rev. D*, 100(12), 126020.
- [142] Adams, J. F. (1960). On the non-existence of elements of Hopf invariant one. *Annals of Mathematics*, 20-104.
- [143] Ryu, S., & Takayanagi, T. (2006). Holographic derivation of entanglement entropy from the anti-de sitter space/conformal field theory correspondence. *Physical review letters*, 96(18), 181602.
- [144] Adams, J. F. (1960). On the non-existence of elements of Hopf invariant one. *Annals of Mathematics*, 20-104.

# Annexe

## 4.8 Contribution I : Un nouveau modèle unifié de matière noire et d'énergie noire.

### Résumé

Nous proposons un nouveau modèle unifié qui décrit l'énergie noire et la matière noire dans le contexte de la gravité  $f(R, \phi)$  en utilisant un champ scalaire massif en cinq dimensions. Le champ scalaire est considéré dans le volume qui entoure le modèle à 3 branes dans branworld. Nous montrons que pour un choix spécifique de la fonction  $f(R, \phi)$ , nous pouvons décrire la gravitation d'Einstein dans l'espace-temps à 4 dimensions. On obtient une relation entre la vitesse d'expansion de l'univers et la vitesse d'expansion de la masse. Nous proposons également que la matière noire soit représentée par la masse du champ scalaire et que l'énergie noire est une énergie cinétique de ce champ. Enfin, nous montrons que, d'après conditions, on peut obtenir les pourcentages de densité de matière noire et les densité de la matière ordinaire

## Accepted Manuscript

### International Journal of Geometric Methods in Modern Physics

Article Title: A new unified model of dark matter and dark energy in 5-dimensional  $f(R, \phi)$  gravity

Author(s): M. Bousder, Z. Sakhi, M. Bennai

DOI: 10.1142/S0219887820501832

Received: 04 April 2020

Accepted: 25 August 2020

To be cited as: M. Bousder, Z. Sakhi, M. Bennai, A new unified model of dark matter and dark energy in 5-dimensional  $f(R, \phi)$  gravity, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, doi: 10.1142/S0219887820501832

Link to final version: <https://doi.org/10.1142/S0219887820501832>

This is an unedited version of the accepted manuscript scheduled for publication. It has been uploaded in advance for the benefit of our customers. The manuscript will be copyedited, typeset and proofread before it is released in the final form. As a result, the published copy may differ from the unedited version. Readers should obtain the final version from the above link when it is published. The authors are responsible for the content of this Accepted Article.

# A new unified model of dark matter and dark energy in 5-dimensional $f(R, \phi)$ gravity

M. Bousder<sup>2</sup>, Z. Sakhi<sup>1</sup>, M. Bennai<sup>1,2\*</sup>

<sup>1</sup>Physics and Quantum Technology Team, LPMC, Faculty of Science Ben M'sik,  
Casablanca Hassan II University, Morocco

<sup>2</sup>Lab of High Energy Physics, Modeling and Simulations,  
Faculty of Science, University Mohammed V-Agdal, Rabat, Morocco

August 20, 2020

## Abstract

We propose a new unified model that describes dark energy and dark matter in the context of  $f(R, \phi)$  gravity using a massive scalar field in five dimensions. The scalar field is considered in the bulk that surrounds the 3-brane in braneworld model. We show that for a specific choice of the  $f(R, \phi)$  function, we can describe the Einstein gravitation in 4-dimensional space-time. We obtain a relationship between the speed of the universe's expansion and the speed of the bulk's expansion. We also propose that the dark matter is represented by the scalar field mass and that the dark energy is a kinetic energy of this field. Finally, we show that, according to conditions, one can obtain the percentages of density of dark matter and the density of ordinary matter.

**Keywords:** Modified gravity, dark energy and dark matter.

PACS numbers: 98.70.Vc, 04.30. w, 98.80.Cq

## Contents

1	Introduction	3
2	$f(R, \phi)$ modified gravity	4

---

\*Corresponding authors: mdbennai@yahoo.fr, mohamed.bennai@univh2c.ma

<b>3</b>	<b>Braneworld <math>f(R, \phi)</math> modified gravity</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>The scalaron mass</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>A unified model of dark energy and dark matter in 5D</b>	<b>10</b>
5.1	Dark matter density . . . . .	10
5.2	Matter dominated era 12	
5.3	Dark energy dominated era . . . . .	13
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>14</b>

ACCEPTED MANUSCRIPT

# 1 Introduction

Recently, various models of modified gravity have been proposed in order to solve the problem of dark energy (DE) and dark matter (DM) [1], using a function  $f(R)$  which depends essentially on the Ricci scalar  $R$  [2]. Various models of  $f(R)$  modified gravity were proposed, as  $R^2$  inflation [3], which can describe the cosmic acceleration of the universe and also inflation, the Brans-Dicke theory, depending on the coupling constant  $\omega$  [4], which is a model with a scalar field describing the gravitation, or the  $1/R$  gravity [5] which can explain the acceleration of the Universe's expansion.

There are several ways to choose the form of the function  $f(R)$ . Note that, only a few models that can describe dark energy, dark matter or inflation, and conditions for the cosmological viability of dark energy models were introduced [6]. Recall that the modified gravity theories are considered as a perturbation theories around the Ricci scalar in the context of the Jordane frame or depending on a Ricci scalar and a new scalar field  $\phi$  coupling in the Einstein frame [1, 7].

On the other hand, there are other more generalized modified gravity depending on a scalar field whose the coupling with the Ricci scalar is described by a certain function  $f(R, \phi)$  [8, 9]. While the other models of  $f(R)$ -brane [11] or  $f(R, \phi)$ -brane [12], describe modified gravity in the braneworld scenario in five-dimensional space-time [13].

In the present work, we propose a new unified model that describes dark energy and dark matter in the context of  $f(R, \phi)$  gravity using a massive scalar field in five dimensions. The scalar field is considered in a bulk that surrounds the 3-brane in braneworld model. We study the evolution of a scalar fields  $\phi$  in modified gravity in 5-dimensional braneworld model. We have supposed that DM and DE are only the interactions of the field  $\phi$  and the 3-brane [14]. For this reason, we will describe the modified gravity in 4-dimensional by the braneworld models [15]. Recall that, the scalar field density on 3-brane depends on the curvature of space-time.

In the second section, we recall some aspects of the  $f(R)$  modified gravity and introduce a particular form of  $f(R, \phi)$  gravity, with a non-minimally coupling of the Ricci scalar  $R$  to the scalar field  $\phi$ . We study the potential field  $\phi$  by using a rotation transformation. In the third section, we present the braneworld  $f(R)$  modified gravity and we derive, analytically, the field  $\phi$  equations in 5-dimensions to obtain the evolution equation of the field  $\phi$ . We focus mainly on the solutions in 5-dimensional braneworld model, by the integration on the angular quantity  $R\phi$ . The solutions of this equation give as the density of the ordinary matter OM and DM. In the section four, we will compare the field  $\phi$  mass with the scalaron mass [16]. We analyze the density of matter in chronology of the Universe. In section five, a unified description of the DE and DM and several models

of modified gravity have been introduced. This unification can be realized by using the extra-dimensions [13, 18], or by modification of a 4-dimensional Einstein gravitational theory [19]. We show that the field  $\phi$  describes both the accelerating expansion of the Universe and the dark matter. However, for the some reasons, we have shown that the bulk is also expanding. Thus, the expansion of the Universe depends on bulk expansion. The DE is then defined as the variation of a large values of the scalar field  $\phi$  and the DM is described as a minimal values of the field  $\phi$ . Note that, in the ( $\Lambda$ CDM) cosmological model, the energy density in the present Universe of OM and DM, that we obtain, is in good agreement with the Planck data [20]. The last section is devoted to conclusion.

## 2 $f(R, \phi)$ modified gravity

We propose a description of the field  $\phi$  in 5-dimensional (the bulk) and a description of Ricci scalar  $R$  at 4-dimensional (3-brane), such that the curvature of 3-brane depends on the variation of  $R$  and  $\phi$ . If we propose that field  $\phi$  describe also the gravitation, the large extra-dimension is purely gravitational. We start with the description of the gravitation on the 3-brane scale, the potential on the 3-brane is then described by the expression [1]

$$V(\phi, R) = \frac{M_P^2}{2F(R, \phi)} \left( R - \frac{f(R, \phi)}{F(R, \phi)} \right), \quad (2.1)$$

where the function  $F(R, \phi) = \frac{df(R, \phi)}{dR}$ .

Note that, in the Einstein frame, the energy is conserved and can be transferred by the field  $\phi$  outside the 3-brane, and can not be physically observed. To solve this problem, we propose to introduce a more general function  $f(R, \phi)$  depending on the two fields  $\phi$  and  $R$ . This will allow us to explain simultaneously the DM, the DE and the Einstein gravitation. We chose the function  $f(R, \phi)$  of the following form:  $f(R, \phi) = Re^{-\phi R}$ . This function represents the Ricci scalar by an exponential factor, which will describe the perturbation around the curvature  $R$ , describing both DM and DE by the following action

$$I := \frac{M_P^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} R e^{-\phi R} + I_m, \quad (2.2)$$

where  $I_m$  is the matter action.

To find the expression of  $F(R, \phi)$  in the Einstein frame, we replace the Ricci scalar by a constant value  $R_p = \frac{2}{\sqrt{6}} \frac{1}{M_p}$ , which is equivalent to  $F(\phi) = e^{-\phi R_p}$ , which is equivalent with the choice of the conformal transformation for  $f(R)$  gravity in [10]. Note that the action Eq.(2.2) generalizes the Einstein Hilbert action.

The choice of an exponential function which couples  $R$  with the field  $\phi$ , is, in effect, a

conformal transformation normalization to conjugate with standard  $f(R)$  gravity. The action Eq.(2.2) can be written in the following form

$$I = \frac{M_P^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} R \phi \left( \frac{1}{2} \phi R^2 + \frac{1}{\phi} - R + \dots \right) + I_m, \quad (2.3)$$

The term  $R^2$  introduces a new spin-zero mode [7] which corresponds to the scalar field  $\phi$  in the bulk. To obtain the kinetic term ( $\frac{1}{2} \phi R^2$ ), we rewrite the Eq. (2.3) by considering the quantity  $R\phi$  as an angle of transformation. Thus, the lagrangian is

$$L(R, \phi) = \frac{M_P^2}{4} \phi R^2 - \frac{M_P^2}{2} \left( R - \frac{1}{\phi} \right), \quad (2.4)$$

such as a kinetic energy  $T(R, \phi) \equiv \frac{M_P^2}{4} \phi R^2$  is also a non-minimal coupling of the field  $\phi$  and  $R$ . The inverse of the field  $\phi$  is equivalent to a cosmological constant in the context of ( $\Lambda$ CDM) model. This allows us to obtain the potential

$$V(R, \phi) \equiv \frac{M_P^2}{2} \left( R - \frac{1}{\phi} \right). \quad (2.5)$$

Using Eq.(2.1), we find

$$\tilde{V}(R, \phi) = \frac{M_P^2}{2(1 - \phi R)} \left( R - \frac{R}{1 - \phi R} \right) e^{\phi R}. \quad (2.6)$$

or

$$\tilde{V}(R, \phi) = \frac{M_P^2}{2} \mu_{\phi R} \left( R - \frac{\eta_{\phi R}}{\phi} \right), \quad (2.7)$$

where

$$\mu_{\phi R} = \frac{e^{\phi R}}{1 - \phi R} ; \quad \eta_{\phi R} = \frac{\phi R}{1 - \phi R}, \quad (2.8)$$

One can find a similar form of the potential Eq.(2.5):  $\tilde{V}(R, \phi) = e^{\phi R} V(R, \phi)$  with a  $e^{\phi R}$  factor in Einstein frame. This factor represents the rotation transformation from Jordan frame to Einstein frame, then the term  $R\phi$  can be considered as an transformation angle.

### 3 Braneworld $f(R, \phi)$ modified gravity

In this section, we propose a description of modified gravity in 5-dimensional space-time, such as the bulk is compact. The additional dimension, which we note  $Y$ , is depending on both  $R$  and  $\phi$ , which means that the large extra-dimension changes according to the parameters  $R$  and  $\phi$ . Note that the action Eq.(2.2) can describe both the 3-brane and the bulk, only by the above choice of the function of  $f(R, \phi)$ . This new technique connecting

4d to 5d by a function  $f(R, \phi) = Re^{-\phi R}$ , the transition between 4d and 5d is already covered in [17] will allow us to describe the gravity, simultaneously, on the 3-brane and on the bulk, by a single term of Lagrangian Eq.(2.2). There is also the standard method of describing the gravity, by summing a term which describes the gravity in 4d and the other term which describes gravity in 5d in the Lagrangian. Thus, the action Eq.(2.2) can be written in the following form

$$I = \frac{M_P^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (R\phi) \frac{1}{\phi} e^{-\phi R} + I_m, \quad (3.1)$$

The rotation  $R\phi$ , allows us to go from 3-brane to a five-dimensional bulk. If this angle is zero, the gravitation will be limited only to 3-brane. In other words, we have only the Einstein's gravity, and the action (2.2) will be the Einstein-Hilbert action. To rid of  $R\phi$  in Eq. (3.1), it is assumed that this term is a result of integration on the fifth dimension. If we define the parameter  $x^5 = y = LR\phi$  of the fifth dimension, with  $L$  is the radius of the large compact dimension, according to the model ADD [18], we can connect the Planck mass  $M_p$  in 4-dimensional to Planck mass  $M_5$  in 5-dimensional, defined by  $M_p^2 = M_5^3 L$ . Thus the action becomes as

$$I = \frac{M_5^3}{2} \int_{M_4} d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{\phi} e^{-\phi R} \int_0^{\phi R} dy + I_m, \quad (3.2)$$

The geometric volume in 3-brane  $M_4$  is  $Vol_{M_4} = \int_{M_4} d^4x \sqrt{-g}$ , and the standard form volume, in large compact dimension,  $Y$  is  $Vol_Y = e^{-\phi R} \int_Y dy$ . We can then define the five-dimensional bulk as  $M_5 = M_4 \times Y$ , which is defined by metric determinant (a conformal transformation)

$$g_{(5)} = ge^{-2\phi R}, \quad (3.3)$$

In this case, we can write the action (3.2) in geometrical form by  $I = Vol_{M_4} (\frac{1}{\phi} Vol_Y) \neq Vol_Y (Vol_{M_4})$ , which shows us that the structure of 3-brane depends exactly on the behavior of the large extra dimensions. This result shows that our brane is immersed in this large extra dimensions (like in Randall-Sundrum theory) and not like the very small dimension (like in Kaluza-Klein theory). We can also say that scalar field  $\phi$  lives outside the brane and the interaction between this field with 3-brane can generate invisible physical phenomena (DM and DE..). According to Eq. (3.3), we can define

$$\omega_\phi := -R\phi, \quad (3.4)$$

We introduce the FLRW metric  $ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\mathbf{x}^2$  of a flat space, which allows us to write  $R = 6(\dot{H} + 2H^2)$  to find Eq. (3.4) in the Jordan frame. We then study various

Universe eras by considering scale factor  $a \propto t^q$ , where  $q$  is the deceleration parameter. That implies the Hubble parameter is  $H = \frac{q}{t}$ , so one can get

$$\phi = \frac{-\omega_\phi}{6q(2q-1)} t^2, \quad (3.5)$$

Since the field  $\phi$  depends on the square of time. Then Eq. (3.5) led to an accelerating expansion of the Universe or accelerating contraction of the Universe, according to the parameter  $\omega_\phi$ , then

$$\begin{aligned} \omega_\phi < 0 &\implies \phi \succ 0 \implies \text{acceleration}, \\ \omega_\phi > 0 &\implies \phi \prec 0 \implies \text{contraction}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

For a positive value ( $\omega_\phi > 0$ ), the Universe have a contraction period, which corresponds to a very strong gravitation or the gravitational effects of dark matter.

The negative value of parameter ( $\omega_\phi < 0$ ) implies that the field  $\phi$  exerts a repulsion on the 3-brane, which corresponds exactly to the accelerating expansion of the Universe. This case represents the dark energy.

To have a Universe in an accelerating expansion, we must have  $\omega_\phi = -R\phi < 0$ . In the present work, we consider the condition  $\omega_\phi = -1$ . Thus the Eq.(3.4) leads to  $\phi R = 1$ , and Eq.(3.5) is

$$\phi R = 1 \implies \phi = \frac{t^2}{6q(2q-1)}, \quad (3.7)$$

We will calculate later all the parameters of the model from this relation. The field  $\phi$  and time are equivalent, and we note that the objective of Eq (3.7) is to show that time play an important role in cosmic history of the Universe. Recall that, in 4-dimensional  $f(R)$  gravity models, it was shown that the field  $\phi = t$  [22]. Here, since we are working on  $f(R)$  gravity in 5-dimensional, we will show that  $\phi \sim t^2$ . Thus, the scalar field is equivalent to square of time, which is compatible with the accelerated expansion of the Universe [23].

Injecting Eq.(3.3) in Eq.(3.2), one can find the action describing the coupling between the Ricci scalar and the scalar field in 5 dimensions:

$$I = \frac{M_5^3}{2} \int_{M_5} d^5x \sqrt{-g_{(5)}} \frac{1}{\phi} + I_m. \quad (3.8)$$

Eq.(3.8) shows the existence of a field  $\phi$  in 5-dimensional braneworld. Note that this action depends on the scalar field  $\phi$ , what is different from the general action of the ref. [12].

By calculating the variation of action Eq.(3.8) we find

$$\delta I = \frac{M_5^3}{2} \int_{M_5} d^5x \delta(\sqrt{-g_{(5)}}) \frac{1}{\phi} + \sqrt{-g_{(5)}} \delta\left(\frac{1}{\phi}\right) + I_m$$

Let us consider that  $\delta(\sqrt{-g_{(5)}}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g_{(5)}}g^{(5)MN}\delta g_{(5)MN}$ , which leads to

$$\delta I = -\frac{M_5^3}{2} \int_{M_5} d^5x \sqrt{-g_{(5)}} \delta g_{(5)MN} \left( \frac{1}{\phi^2} \frac{\delta \phi}{\delta g_{(5)MN}} + \frac{1}{2\phi} g^{(5)MN} \right) + I_m$$

We then obtain the equation of motion of  $\phi$

$$\frac{\delta \phi}{\delta g_{(5)MN}} + \frac{1}{2} g_{(5)MN} \phi = -\frac{1}{M_5^3} \phi^2 T_{MN}. \quad (3.9)$$

Eq.(3.9) looks like the equation of general relativity, and can describe well the scalar field  $\phi$  in the 5-dimensions. We can simplify Eq.(3.9) by

$$(g_{(5)}^{MN} \frac{\delta}{\delta g_{(5)}^{MN}} + \frac{5}{2} + \frac{g_{(5)}^{MN} T_{MN}}{M_5^3} \phi) \phi = 0, \quad (3.10)$$

$\frac{\delta \phi}{\delta g_{(5)}^{MN}}$  is the scalar field variation on the manifold  $M_5$  and  $T_{MN}$  is the energy-momentum tensor of matter given by

$$T_{MN} = \frac{-2}{\sqrt{-g_{(5)}}} \frac{\delta (\sqrt{-g_{(5)}} L_m [g^{\mu\nu}, \Psi])}{\delta g_{(5)}^{MN}}, \quad (M, N = 0, 1, 2, 3, 5) \quad (3.11)$$

The energy-momentum tensor is defined by the variation of the lagrangian of matter  $L_m [g^{\mu\nu}, \Psi]$  in accordance to the metric  $g_{(5)MN}$  on the manifold  $M_5$ (the bulk).  $\Psi$  is the matter field on 3-brane.

We define a new metric of a flat space, that is written as a direct sum of Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) metric and the fifth dimension component given by the Eq. (3.3), with a scale factor  $a(t)$ , like that

$$ds_{(5)}^2 = -dt^2 + a^2(t) d\mathbf{x}^2 + e^{-\phi R} dy^2 \quad (3.12)$$

This metric describes the homogeneous Universe in large structure. We then multiply  $g_{(5)}^{MN}$  to  $T_{MN}$  to obtain

$$g_{(5)}^{MN} T_{MN} = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} + g_{(5)}^{55} T_{55}; \quad (3.13)$$

Let us consider that  $g_{(5)}^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = (3\omega - 1) \rho_m [1]$ , where  $\rho_m$  is the energy density of matter and  $\omega$  is the equation of state of matter.

From Eq.(3.12), we have  $g_{(5)}^{55} = e^{\phi R}$ , and one can obtain

$$g_{(5)}^{MN} T_{MN} = (3\omega - 1) \rho_m + T_{55} e^{\phi R}, \quad (3.14)$$

We will consider that the component of the energy-momentum tensor  $T_{55}$  describes the dark matter, by the relation

$$T_{55} := \rho_{DM} \quad (3.15)$$

From Eq.(3.10) and Eq.(3.14), one can obtain

$$(g_{(5)}^{MN} \frac{\delta}{\delta g_{(5)}^{MN}} + \frac{\rho_{DM} \phi e^{\phi R}}{M_5^3} + (3\omega - 1) \frac{\rho_m \phi}{M_5^3} + \frac{5}{2}) \phi = 0, \quad (3.16)$$

To get a equation analogue to the Klein-Gordon equation:  $(\square + m^2) \phi = 0$ , we postulate that:

$$\square := g_{(5)}^{MN} \frac{\delta}{\delta g_{(5)}^{MN}} + \frac{\rho_{DM} \phi e^{\phi R}}{M_5^3}, \quad (3.17)$$

$$m^2 = (3\omega - 1) \frac{\rho_m \phi}{M_5^3} + \frac{5}{2}. \quad (3.18)$$

These two relations, Eq.(3.17) and Eq.(3.18), will allow us to describe the evolution of the density of OM, the density of DM and the density of DE.

## 4 The scalaron mass

In the previous section, we have introduced a form of correspondence between the motion equation of the field  $\phi$  and the Klein-Gordon equation. This correspondence will allow us to find the scalar field properties like the masse  $m = m_\phi$  of the mass of field  $\phi$ . Then, Eq.(3.18) in the approximation Eq.(3.7), can be immediately written

$$\rho_m = M_5^3 \frac{(m_\phi^2 - \frac{5}{2})}{t^2} \frac{6q(2q-1)}{(3\omega-1)}, \quad (4.1)$$

we begin by studing first the Eq.(3.18) in the chronology of the universe in each era:

*In the radiation-dominated era* ( $\omega = \frac{1}{3}$ ): we then find the mass of scalar field as

$$m_\phi = 2.22 \times 10^{-24} [eV]. \quad (4.2)$$

This mass satisfies the condition of the current scalaron mass [24]. Note that the scalar field  $\phi$  is a scalaron, we thus calculate the value of this mass from the radiation-dominated era. If we replace this mass (Eq.(4.2)) on the density Eq.(4.1), we will have always a vanishing density matter. To solve this problem, we have used the notion of chameleonic dark matter [24], in other words, the mass of the field  $\phi$  (4.2) changes over time.

*In the matter-dominated era* ( $\omega = 0$ ), one can have

$$\rho_m \phi \leq \frac{5M_5^3}{2}, \quad (4.3)$$

In the dark-energy-dominated era ( $\omega = -1$ )

$$\rho_m \phi \leq \frac{5M_5^3}{8}, \quad (4.4)$$

According to Eq.(3.7), Eq.(4.3) and Eq.(4.4), we obtain:

In the radiation-dominated era ( $q = \frac{1}{2}$ )

$$\rho_m = 0,$$

In the matter-dominated era ( $q = \frac{2}{3}$ )

$$\rho_m \leq \frac{10M_5^3}{3} \frac{1}{t^2}, \quad (4.5)$$

This relationship shows us that the maximum value of the energy density of matter is

$$\rho_{m(\max)} = \frac{10M_5^3}{3} \frac{1}{t^2}. \quad (4.6)$$

The energy density of matter decreases over the square of time, this is because of the accelerated expansion of the Universe [23].

## 5 A unified model of dark energy and dark matter in 5D

### 5.1 Dark matter density

In this section, we will study the variations of the dark matter density. To closely study the dark matter density, we return to Eq.(3.17), and calculate the density of dark matter with respect to the field  $\phi$ , we find

$$\rho_{DM} = \frac{M_5^3}{e^{\phi R} \phi^2} \left( \square \phi - g_{(5)}^{MN} \frac{\delta \phi}{\delta g_{(5)}^{MN}} \right), \quad (5.1)$$

Using the approximation Eq.(3.7), we obtain

$$\rho_{DM} = \frac{12q(2q-1)M_5^3}{et^2} \left( -tg_{(5)}^{MN} \frac{\delta t}{\delta g^{MN}} + \partial_\mu t \partial^\mu t + t \square t \right), \quad (5.2)$$

We must first, calculate each term of this density.

From Eq.(3.7) and Eq.(3.12), one can obtain

$$g_{(5)}^{MN} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

we have also

$$g_{(5)}^{MN} \frac{\delta}{\delta g_{(5)}^{MN}} = 3g^{11} \frac{\delta}{\delta g^{11}} = \frac{-3a\delta}{2\delta a}, \quad (5.4)$$

or, equivalently

$$g_{(5)}^{MN} \frac{\delta t}{\delta g_{(5)}^{MN}} = \frac{-3a}{2\dot{a}} = \frac{-3}{2H}. \quad (5.5)$$

On the other hand

$$\partial_\mu t \partial^\mu t = -1 + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{a^2 v_i^2} + \frac{e}{v_y^2}, \quad (5.6)$$

with  $v_y$  is the speed of field  $\phi$  according to the dimension  $Y$  and  $v_i$  are the field speeds according to the dimension of space. We have also

$$\square t = 0, \quad (5.7)$$

From Eq.(5.5), Eq.(5.6) and Eq.(5.7), the expression of the density of dark matter (5.2) become

$$\rho_{DM} = \frac{12q(2q-1)M_5^3}{et^2} \left[ \frac{3t}{2H} - 1 + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{a^2 v_i^2} + \frac{e}{v_y^2} \right],$$

or

$$\rho_{DM} = \frac{12q(2q-1)M_5^3}{et^2} \left[ \frac{3t}{2H} - 1 + \frac{1}{a^2} \frac{1}{v_x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{1}{v_y^2} + \frac{1}{a^2} \frac{1}{v_z^2} + e \frac{1}{v_y^2} \right], \quad (5.8)$$

From this relation, we can see that the density of dark matter is inversely proportional to the speed of the Universe's expansion and time, which means, that the density of dark matter decreases over time.

If we suppose that the Universe is homogeneous and isotropic, then the speed of cosmic expansion is  $v = v_x = v_y = v_z$ , in this case we have

$$\rho_{DM} = \frac{12q(2q-1)M_5^3}{et^2} \left[ \frac{3t}{2H} - 1 + \frac{3}{av^2} + \frac{e}{v_y^2} \right]. \quad (5.9)$$

Thus, the density of dark matter Eq.(5.9), depends inversely on the speed of expansion of the Universe and the time. We observe also that the density depends inversely on the speed of expansion in the dimension  $Y$ , which cannot cancel, in order to have a real density of dark matter. Thus, it is possible to explain, at the same-time, the cosmic acceleration (Eq.(3.7)) and the choice of the geometry Eq.(3.2). We can conclude

that, the expansion of the Universe in 4-dimensions is a result of another expansion of 5-dimensional space-time, and that the large compact dimension  $Y$  is accelerating expansion.

For  $t = 0$ , we can define the initial speed of the universe's expansion (3-brane)  $v(t = 0) = v_0$ , and the initial speed of the bulk's expansion  $v_y(t = 0) = v_{y0}$ . Eq.(5.9) becomes

$$\frac{3}{av_0^2} + \frac{e}{v_{y0}^2} = 1 \quad (5.10)$$

This equation shows us exactly, the relationship between the initial speed of the Universe's expansion and the initial speed of the bulk's expansion. In addition, we cannot determine their values, because this equation is with three variables ( $v_0, v_{y0}, a$ ). Since the field  $\phi$  occupies all the space in the bulk, we can propose that the kinetic energy of the scalar field, is responsible for the bulk's expansion, which can be explained the 3-brane's expansion.

## 5.2 Matter dominated era

In this section, we calculate the scale factor value from the above model. We consider the matter dominated era ( $\omega = 0, q = \frac{2}{3}$ ). Eq.(3.7) leads to

$$\phi = \frac{3t^2}{4}, \quad (5.11)$$

Note that, the obtained value of scalar field  $\phi$  is equivalent to the Ricci tensor value [21], To study the energy density of the Universe, we use the approximation Eq.(3.7), in the matter dominated era. Thus

$$\frac{2\delta t}{\delta g_{(5)}^{MN}} + \frac{g_{(5)MN}}{2}t + \frac{T_{MN}}{4M_5^3}t^3 = 0, \quad (5.12)$$

We have considered the vacuum without matter  $T_{MN} = 0$ .

Let us consider that  $g_{(5)MN}\delta g_{(5)}^{MN} = -g_{(5)}^{MN}\delta g_{(5)MN}$ , to find

$$\frac{\delta \ln t}{\delta x^\mu} - \frac{1}{4}g_{(5)}^{MN}\frac{\delta g_{(5)MN}}{\delta x^\mu} = 0, \quad (5.13)$$

The Christoffel symbols is given by:  $\Gamma_{\mu N}^N = \frac{1}{2}g_{(5)}^{MN}\frac{\delta g_{(5)MN}}{\delta x^\mu}$ , so

$$\Gamma_{\mu N}^N = 2\frac{\delta \ln t}{\delta x^\mu}, \quad (5.14)$$

The metric determinat for flat spacetime Eq.(5.3) is calculated and we have

$$g = -\frac{a^6}{e}, \quad (5.15)$$

Or  $\Gamma_{\mu N}^N = \frac{1}{2} \frac{\delta \ln g}{\delta x^\mu}$  and according to Eq.(5.14), one can find

$$g = g_0 t^4, \quad (5.16)$$

We compare the two equations Eq.(5.15) and Eq.(5.16), and they correspond to

$$a^6 = -e g_0 t^4, \quad (5.17)$$

we obtain then the scale factor

$$a(t) = (-e g_0)^{\frac{1}{6}} t^{\frac{2}{3}}, \quad (5.18)$$

This relationship is consistent with the results of  $a \propto t^{\frac{2}{3}}$  [21], and this model can have cosmological interpretations. We solve now the Eq.(3.9) in an Universe without matter and without dark matter ( $T_{MN} = 0$ ), according to the metric Eq.(5.3), and we find

$$\frac{\delta \phi}{\phi} = \frac{3 \delta a}{a}, \quad (5.19)$$

We then immediately obtain the following relations

$$a(t) = \frac{\chi}{(6q(2q-1))^{\frac{1}{3}}} t^{\frac{2}{3}}. \quad (5.20)$$

with  $\chi$  is the integration constant.

We observe that, even if we chose the condition of a Universe without matter ( $T_{MN} = 0$ ) and by the general equation Eq.(3.9), we find also the result  $a \propto t^{\frac{2}{3}}$ . This comes from the choice of metric; Eq.(5.3) and the condition; Eq.(3.7). These two conditions describes well the matter-dominated era.

### 5.3 Dark energy dominated era

We study now the field properties in the dark energy dominated era. Since this field represents the accelerating expansion of the Universe, we propose that the values  $\phi \rightarrow \infty$  are equivalent to the dark energy dominated era.

We now propose to solve Eq.(3.9) without the condition Eq.(3.7)

$$\frac{g_{(5)}^{MN} \delta}{\delta g_{(5)}^{MN}} \frac{1}{\phi} - \frac{5}{2\phi} = \frac{1}{M_5^3} g_{(5)}^{MN} T_{MN} \quad (5.21)$$

Using Eq.(5.4) and Eq.(3.14), we obtain

$$\frac{(3\omega - 1)}{M_5^3} \rho_m + \frac{1}{M_5^3} e^{\phi R} \rho_{DM} + \frac{3}{2\phi^2} \frac{a \delta \phi}{\delta a} = \frac{5}{2\phi} \quad (5.22)$$

Consider now the dark-energy-dominated era ( $\omega = -1$ ), by assuming an acceleration which tends towards infinity, in other words  $\phi \rightarrow \infty$ . In this case, Eq.(5.22) reduces to

$$\phi = \frac{1}{R} \ln\left(\frac{4\rho_m}{\rho_{DM}}\right) \quad (5.23)$$

Note that, one can obtain the equation (3.7) from Eq(5.23) if  $\rho_{DM} = \frac{4}{c}\rho_m$ .

In 3-brane model, we propose that the scalar field is zero, this indicates that  $\rho_{DM} = 4\rho_m$ , and this result is almost equivalent to the percentages of the density of dark matter (DM) and the density of ordinary matter (OM) in the Universe [20]:  $\rho_{DM} = 80\%$  ;  $\rho_m = 20\%$ . On the other hand, since  $\phi \rightarrow \infty$ , this is equivalent to  $\rho_{DM} \lll 4\rho_m$ . This result indicates that, when the acceleration increases, the density of dark matter decreases, which means that, the mass of the field  $\phi$  transforms to kinetic energy, and we can suggest then that dark matter can be transformed to dark energy.

## 6 Conclusion

In this paper, we have studied the evolution of the scalar field  $\phi$  on the 3-brane and in the bulk, through a passage that transforms all parameters of 4-dimensional model to 5-dimensional one. The 5-dimensional theory depends on the field  $\phi$ . We have shown that the description of dark energy, dark matter and ordinary matter is obtained by the evolution equation of the scalar field  $\phi$ . We found a relation between the density of DM and the speed of the universe's expansion. The expansion speed on the 3-brane depends on the expansion speed of bulk. Note that the mass of field  $\phi$  creates dark matter, which changes over time. This is called chameleonic dark matter. On the other hand, we have shown that, the kinetic energy of scalar field, is responsible for the bulk's expansion, which means that, the bulk generates an accelerating expansion of the Universe. The decrease of the scalar field mass with the acceleration of Universe expansion, shows that the mass of the field  $\phi$  is transformed to an energy (dark energy).

## References

- [1] Amendola, L., Polarski, D., & Tsujikawa, S. (2007). Are f (R) dark energy models cosmologically viable?. *Physical review letters*, *98(13)*, 131302.
- [2] Sotiriou, T. P., & Faraoni, V. (2010). f (R) theories of gravity. *Reviews of Modern Physics*, *82(1)*, 451.

- [3] Odintsov, S. D., Gómez, D. S. C., & Sharov, G. S. (2019). Testing logarithmic corrections to R<sup>2</sup>-exponential gravity by observational data. *Physical Review D*, *99*(2), 024003.
- [4] Avilez, A., & Skordis, C. (2014). Cosmological constraints on Brans-Dicke theory. *Physical review letters*, *113*(1), 011101.
- [5] Flanagan, E. E. (2004). Palatini form of 1/R gravity. *Physical review letters*, *92*(7), 071101.
- [6] Amendola, L., Gannouji, R., Polarski, D., & Tsujikawa, S. (2007). Conditions for the cosmological viability of f(R) dark energy models. *Physical Review D*, *75*(8), 083504.
- [7] Cembranos, J. A. (2009). Dark matter from R<sup>2</sup> gravity. *Physical review letters*, *102*(14), 141301.
- [8] Farajollahi, H., Setare, M., Milani, F., & Tayebi, F. (2011). Cosmic dynamics in f(R,  $\phi$ ) gravity. *General Relativity and Gravitation*, *43*(6), 1657-1669.
- [9] Capozziello, Salvatore, et al. Constraining extended gravity models by S2 star orbits around the Galactic Centre. *Physical Review D* *90.4* (2014): 044052.
- [10] Stabile, A., and S. Capozziello. Galaxy rotation curves in f(R,  $\phi$ ) gravity. *Physical Review D* *87.6* (2013): 064002.
- [11] Zhong, Y., Liu, Y. X., & Yang, K. (2011). Tensor perturbations of f(R)-branes. *Physics Letters B*, *699*(5), 398-402.
- [12] Cui, Z. Q., Liu, Y. X., Gu, B. M., & Zhao, L. (2018). Linear stability of f(R,  $\phi$ , X) thick branes: tensor perturbations. *Journal of High Energy Physics*, *2018*(11), 83.
- [13] Randall, L., & Sundrum, R. (1999). Large mass hierarchy from a small extra dimension. *Physical review letters*, *83*(17), 3370.
- [14] Gu, B. M., Liu, Y. X., & Zhong, Y. (2018). Stable Palatini f(R) braneworld. *Physical Review D*, *98*(2), 024027.
- [15] Zarrouki, R., & Bennai, M. (2010). Chaplygin gas braneworld inflation according to WMAP7 data. *Physical Review D*, *82*(12), 123506.
- [16] Gannouji, R., Sami, M., & Thongkool, I. (2012). Generic f(R) theories and classicality of their scalarons. *Physics Letters B*, *716*(2), 255-259.

- [17] Capozziello, Salvatore, Giuseppe Basini, and Mariafelicia De Laurentis. Deriving the mass of particles from Extended Theories of Gravity in LHC era. *The European Physical Journal C* 71.6 (2011): 1679.
- [18] Antoniadis, I., Arkani-Hamed, N., Dimopoulos, S., & Dvali, G. (1998). New dimensions at a millimeter to a Fermi and superstrings at a TeV. *Physics Letters B*, 436(3-4), 257-263.
- [19] Nojiri, S. I., & Odintsov, S. D. (2007). Introduction to modified gravity and gravitational alternative for dark energy. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 4(01), 115-145.
- [20] P.Collaboration, P. A. R.Ade, , N.Aghanim, , & C. Armitage-Caplan, (2014). *Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters*. Astron. Astrophys, 571, A16.
- [21] AA. Starobinsky, (2007). Disappearing cosmological constant in f(R) gravity. Springer, JETP letters.
- [22] Setare, M. R. "Holographic modified gravity." *International Journal of Modern Physics D* 17.12 (2008): 2219-2228.
- [23] Riess, Adam G., et al. "Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant." *The Astronomical Journal* 116.3 (1998): 1009.
- [24] TKatsuragawa, T., & Matsuzaki, S. (2018). Cosmic history of chameleonic dark matter in F (R) gravity. *Physical Review D*, 97(6), 064037.

---

## 4.9 Contribution II : Particule-antiparticule dans le trou noir d'Einstein-Gauss-Bonnet chargé 4D.

### Résumé

Nous étudions la charge du trou noir 4D-Einstein-Gauss-Bonnet par une charge négative et une charge positive d'un couple particule-antiparticule sur les horizons  $r_-$  et  $r_+$ , respectivement. Nous montrons qu'il existe deux types de trou noir de Schwarzschild. Nous montrons également que la charge du trou noir d'Einstein-Gauss-Bonnet a des valeurs quantifiées. On obtient la formule de Hawking-Bekenstein avec deux corrections logarithmiques, la seconde correction dépend de la constante cosmologique et la charge du trou noir. Enfin, nous étudions la thermodynamique du trou noir EGB-AdS.



# Particle-antiparticle in 4D charged Einstein-Gauss-Bonnet black hole

M. Bousder<sup>a,\*</sup>, M. Bennai<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Lab of High Energy Physics, Modeling and Simulations, Faculty of Science, Mohammed V University, Rabat, Morocco

<sup>b</sup> Quantum Physics and Applications Team, LPMC, Faculty of Science Ben M'sik, Casablanca Hassan II University, Morocco



## ARTICLE INFO

### Article history:

Received 25 December 2020

Received in revised form 13 April 2021

Accepted 3 May 2021

Available online 6 May 2021

Editor: M. Trodden

### Keywords:

Black hole

Entropy

Einstein-Gauss-Bonnet gravity

## ABSTRACT

We study the charge of the 4D-Einstein-Gauss-Bonnet black hole by a negative charge and a positive charge of a particle-antiparticle pair on the horizons  $r_-$  and  $r_+$ , respectively. We show that there are two types of the Schwarzschild black hole. We show also that the Einstein-Gauss-Bonnet black hole charge has quantified values. We obtain the Hawking-Bekenstein formula with two logarithmic corrections, the second correction depends on the cosmological constant and the black hole charge. Finally, we study the thermodynamics of the EGB-AdS black hole.

© 2021 The Author(s). Published by Elsevier B.V. This is an open access article under the CC BY license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>). Funded by SCOAP<sup>3</sup>.

## 1. Introduction

It's well known that the Gauss-Bonnet gravity is introduced only in case  $D > 4$  or more. In four-dimensional spacetime, the GB term does not make contributions to the gravitational dynamics, which makes the 4-dimensional minimally coupled GB gravity is hard to obtain. Recently, D. Glavan and C. Lin [1] proposed a novel 4-dimensional Einstein-Gauss-Bonnet (EGB) gravity, which has attracted great attention. An intriguing idea of D. Glavan and C. Lin is to multiply the GB term by the factor  $1/(D - 4)$  before taking the limit. Offers a new 4-dimensional gravitational theory with only two dynamical degrees of freedom by taking the  $D \rightarrow 4$  limit of the Einstein-Gauss-Bonnet gravity in  $D > 4$  dimensions [2], which is in contradiction with Lovelock theorem [3]. The four-dimensional symmetrical static and spherical black hole solution in EGB gravity were obtained [4], also, solutions of a charged black hole [5]. There has been lots of discussions about the self-consistency of the 4D EGB gravity. It was shown in several papers that perhaps the  $D > 4$  limit is not clearly defined, and several ideas have been proposed to remedy this in-consistency [6–8]. Many researchers have studied particles in the geometry of a black hole, precisely, the EGB black hole [9,10]. Juan Maldacena and Leonard Susskind devised a theory linking two phenomena

both discovered by Einstein: “Einstein-Rosen bridges” (or worm-holes) and quantum entanglement [11]. According to them, if we move the two entangled particles apart would amount to digging an ER bridge around a single particle which would manifest its properties in several places in space-time. This theory sheds light on the problem of the EPR paradox which highlights the non-locality of quantum mechanics, which he opposes to the principle of the locality which is the basis of the theory of relativity. However, this  $ER = EPR$  correspondence is only demonstrated in a very simplified universe model, where gravity is generated in the absence of mass. The Hawking radiation of a black hole is a scrambled cloud of radiation entangled with the black hole. The connection between the laws of black hole mechanics with the corresponding laws of ordinary thermodynamic systems has been one of the remarkable achievements of theoretical physics [12]. In fact, the consideration of a black hole as a thermodynamic system with a physical temperature and entropy provides a deep insight to understand its microscopic structure. The study of EGB gravity becomes very important because it provides a broader setup to explore many conceptual questions related to gravity. This theory of gravity similar to Einstein's gravity only benefits from the first and second order derivatives of the metric function in field equations. There is also a great connection between EGB gravity and the AdS/CFT demonstration correspondence [13].

Throughout the paper, we use the unit system where the speed of light  $c =$  the gravitational constant  $G_N =$  the vacuum permittivity  $4\pi \epsilon_0 = 1$ .

\* Corresponding author.

E-mail addresses: [mostafa.bousder@gmail.com](mailto:mostafa.bousder@gmail.com) (M. Bousder), [mohamed.bennai@univh2c.ma](mailto:mohamed.bennai@univh2c.ma) (M. Bennai).

## 2. Charged Einstein-Gauss-Bonnet black hole

Consider now the charged Einstein-Gauss-Bonnet theory in  $D$ -dimensions with a negative cosmological constant [5,14]

$$l = \frac{1}{16\pi} \int d^D x \left( R - 2\Lambda + \frac{\alpha}{D-4} G - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \quad (2.1)$$

where  $\alpha$  is a finite non-vanishing dimensionless Gauss-Bonnet coupling have dimensions of  $[length]^2$ , that represent ultraviolet (UV) corrections to Einstein theory,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  is the Maxwell tensor and  $l$  is the AdS radius and

$$G = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (2.2)$$

$$\Lambda = -\frac{(D-1)(D-2)}{2l^2} \quad (2.3)$$

by solving the field equation we obtain the black hole solution

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.4)$$

Taking the limit  $D \rightarrow 4$ , we obtain the exact solution in closed form

$$-g_{00} = f(r) \approx 1 + \frac{r^2}{2\alpha} \left( 1 - \sqrt{1 + 4\alpha \left( \frac{2M}{r^3} - \frac{Q^2}{r^4} - \frac{1}{l^2} \right)} \right) \quad (2.5)$$

this last solution could be obtained directly from the derivation done in [15]. In the large  $r$  limit, for two branches of solutions. In the limit of vanishing mass and charge [16], for  $(l^{-2} \sim 0)$  we find

$$-g_{00} = 2 \frac{r^2 - 2Mr + Q^2 + \alpha}{r^2 + 2\alpha + \sqrt{r^4 + 4\alpha(2Mr - Q^2)}} \quad (2.6)$$

with  $2M$  is the Schwarzschild radius. From this expression, we notice that, in the limit  $\alpha \rightarrow 0$ , the metric reduce to the Reissner-Nordström black hole solution. If  $\alpha < 0$  the solution is still an AdS space, if  $\alpha > 0$  the solution is a de Sitter space, [5]. The event horizon in spacetime can be located by solving the metric equation:  $g_{00} = 0$ . To find the black hole horizon we have to solve this equation

$$r^2 - 2Mr + Q^2 + \alpha = 0 \quad (2.7)$$

The solutions show that the event horizon is located at:

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2 - \alpha} \quad (2.8)$$

we notice that the solution behaves like the Reissner-Nordström (RN) solution. The black hole event horizon is the largest root of the equation above,  $r_+$  is the black hole horizon [1]. However, the radius  $r_-$  represents a horizon, which can be a horizon mirage or virtual horizon. Therefore, to explain the presence of two horizon  $r_{\pm}$ , we assume that we can represent the horizon  $r_-$  as a reflection symmetric of the horizon  $r_+$  [11]. There is only one case where the horizon  $r_+$  corresponds to the horizon  $r_-$ , this case is equivalent to the degenerate solution into a singularity when  $|Q| = \sqrt{M^2 - \alpha}$ , which corresponding to an extremal black hole, and this type of black hole which has a very low mass. We choose the same charge to describe particle-antiparticle pair in the EGB black hole horizons. In this paper, we propose that the two extremal entangled black holes are particles and antiparticles which are placed just on the horizon of the EGB black hole. The particle located near horizon  $r_+$ . On the other hand, the antiparticle is the reflection of the

particle on the horizon  $r_-$ . If the particle and antiparticle are connected by a bridge (by an Einstein-Rosen bridge), then the area of the bridge smaller than the area of the black hole horizon. First, we define two charges of a particle-antiparticle pair in the horizon

$$q_{\pm} = \pm \sqrt{M^2 - \alpha} \quad (2.9)$$

we will show later with a particular condition that the proposition of the charges  $q_{\pm}$  leads to an EGB entropy already obtained by other models. Every particle on the horizon has a charge which depends directly on the black hole mass; if the black hole mass larger, the charge of a horizon particle will be more important. Each particle of the charge  $q_+ = +\sqrt{M^2 - \alpha}$ , is entangled with another antiparticle of the charge  $q_- = -\sqrt{M^2 - \alpha}$ . The particle and antiparticle have opposite electric charges  $q_+$  and  $q_-$ , i.e.  $CPT$  anticommutates with the charges. If the number of particles  $N$  on the horizon  $r_+$  is limited, the horizon charge will be  $Q_H = 0$ . If we take that the number of horizon particles  $N \rightarrow \infty$ , the charge of the black hole is  $Q_H \neq 0$ . From Eqs. (2.8), (2.9)

$$(r_{\pm} - M)^2 = q_{\pm}^2 - Q^2 \quad (2.10)$$

according to this formula, the charges  $q_+$  are located on the real horizon, on the other hand, the charges of antiparticles  $q_-$  are located on a virtual horizon near the singularity. We also notice that  $q_{\pm}^2 \geq Q^2$ . In the framework of the gravitational repulsion between matter and antimatter, Eq. (2.10) behaves like virtual gravitational dipoles [17] in a black hole. If we assume that there is a complete disappearance of an AdS black hole ( $\alpha < 0$ ), we obtain the position of the two charges

$$r_{\pm} = q_{\pm} = \pm \sqrt{-\alpha} \quad (2.11)$$

the problem of the negative radius  $r_-$  indicates a disappearance of the antiparticles with the disappearance of the black hole singularity, on the other hand, the particles escape the singularity. This aspect is equivalent to the position of the two horizons; the horizon  $r_-$  exists on the singularity and  $r_+$  is the edge of the black hole. Which agrees with the violation of CP symmetry between matter and antimatter [18]. This complete disappearance of the antiparticles looks like a scenario of the disappearance of antimatter after the big bang. The relation (2.11) is valid only for an AdS black hole, this may indicate that the disappearance of the antiparticles is done on the second copy of AdS in other dimensions. The electric potentials  $\Phi_+$  and  $\Phi_-$  arising from the charge  $q_+$  and  $q_-$  respectively, at a distance  $r$  from the charge given by

$$\Phi_+(r) = \frac{q_+}{|r - r_+|} \quad \Phi_-(r) = \frac{q_-}{|r - r_-|} \quad (2.12)$$

$\Phi_+$  and  $\Phi_-$  are the conjugate (gauge independent) potentials for the electric (and magnetic)  $U(1)$  charges. Two opposite charges  $q_{\pm}$  have a potential of the electric dipole  $\Phi_+ + \Phi_-$  from

$$\Phi_+(r) = \frac{\sqrt{M^2 - \alpha}}{\left| r - M - \sqrt{M^2 - Q^2 - \alpha} \right|} \quad (2.13)$$

$$\Phi_-(r) = \frac{-\sqrt{M^2 - \alpha}}{\left| r - M + \sqrt{M^2 - Q^2 - \alpha} \right|}$$

In the extremal case  $M^2 = Q^2 + \alpha$ , we obtain  $\Phi_+(r) = \Phi_-(r)$ . The two potential is canceled out for  $M^2 = \alpha$ .

### 3. Electric potential of EGB black hole

Last papers proposed to study charged particles near the Schwarzschild black hole, or charged particle motion around magnetized Schwarzschild black holes [19–22]. We are also interested in studying the particles (2.9) in the Schwarzschild horizon. We know that the Schwarzschild metric is a solution for a black hole without electric charge and angular momentum. In what follows we will use the previous results to show that the Schwarzschild black hole is not charged ( $Q = 0$ ). we assume that the radius  $r_+$  is equal to the Schwarzschild radius  $2M$ , given by

$$q_{\pm} = \pm M \tag{3.1}$$

in this case, according to Eqs. (2.10), (2.9) one can obtain

$$r_- = M \pm M \tag{3.2}$$

according to the two expressions (3.1), (3.2), we can represent the Schwarzschild black hole by two visions:

If  $r_- = 0$ , the Schwarzschild black hole consists of a negatively charged singularity ( $q_- = -M$ ) and a positively charged horizon ( $q_+ = M$ ), therefore, if the number of particle and antiparticle is limited, the total Schwarzschild black hole charge is zero, this case is similar to an antimatter atom. If  $r_- = 2M$  (the horizon degenerates), the Schwarzschild black hole consists of a neutral singularity and positive and negative charges on the horizon ( $q_- = -M$ ;  $q_+ = M$ ), therefore, for the Schwarzschild horizon to be neutral; the number of positive charges must be equal to the number of negative charges on the horizon. This result shows that the Schwarzschild black hole, behaves like the neutral atom, but it contains positive and negative charges. The Schwarzschild black hole contains a negatively charged singularity  $q_-$  and a positively charged horizon  $q_+$ . We can express the electric potentials of negative and positive charges in the Schwarzschild black hole by

$$\Phi_+(r) = \frac{M}{|r| \left| 1 - \frac{2M}{r} \right|} \quad \Phi_-(r) = -\frac{M}{|r|} \tag{3.3}$$

if we take  $\alpha = 0$  in Eq. (2.13), we also find the same potentials above, what was mentioned by [10]. Since the study of the charged Einstein Gauss-Bonnet black hole shows a property similar to that of RN black hole, like Eq. (2.8), which shows that the parameter  $\alpha$  creates a passage between the Schwarzschild black hole and RN black hole. We can rewrite the Schwarzschild metric as

$$ds^2 = \frac{\Phi_-}{\Phi_+} dt^2 - \frac{\Phi_+}{\Phi_-} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \tag{3.4}$$

the Schwarzschild metric depends on the potentials of particles and antiparticles. In the Schwarzschild black hole,  $N$  is limited and we write

$$Q_S = q_+ \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n = 0 \tag{3.5}$$

for these two relations above to be valid, the number  $N$  must be even, i.e. the number of particles equal to the number of antiparticles. But if  $N$  is odd, we get  $Q = q_+$  or  $Q = q_-$ , this is at odds with an uncharged Schwarzschild black hole. This shows that the number of particles on the horizon is equal to the number of antiparticles in the Schwarzschild black hole singularity, which corresponds exactly with the proposition (2.9) of entangled particles with antiparticles, one can't have on black hole particles which are not entangled. Since the formula (2.8) is a generalization of

the RN black hole horizons, this shows that the EGB black hole charge is the generalization of charge of RN black hole (for  $\alpha = 0$ ) and zero charges of the Schwarzschild black hole. In the EGB black hole, when  $N \rightarrow \infty$ , the analytic continuation of the Riemann zeta function of 0 ( $\zeta(0) = 1/2$ ) gives

$$Q_{EGB} = q_{\pm} \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n = \pm \frac{1}{2} \sqrt{M^2 - \alpha} \tag{3.6}$$

this charge corresponds exactly with a physical event horizon because  $Q_{EGB}$  check the condition of existence of the event horizon:  $2Q_{EGB} < r_s$ . We can also describe the charge of EGB black hole in the case of  $N \neq \infty$ , with  $N$  being odd, i.e.  $Q_{EGB} = \pm q_+$ . Usually, we get all values above of the black hole charge verify condition (2.10). In the case where the charge  $q_+ = 0$  is zero, the EGB black hole is transformed into a Schwarzschild black hole. The values of the charge of  $Q_{EGB}$  are quantified according to the constant values of  $M$  and  $\alpha$ . We represent this quantification by the total charge of an Einstein Gauss-Bonnet black hole is

$$Q_{EGB} = m \sqrt{M^2 - \alpha} \quad m = \{-1, -1/2, 0, 1/2, 1\} \tag{3.7}$$

Substitute Eq. (3.7) into Eq. (2.8) and we obtain

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{(1 - m^2)(M^2 - \alpha)} \tag{3.8}$$

the EGB black hole horizon is quantified according to the values of  $m$ . We want to calculate the electric potential of the EGB black hole on the horizon ( $r = r_+$ ) from its charge (3.7) in the horizon  $r_+$  (3.8), we obtain

$$\Phi_{EGB} = \frac{Q_{EGB}}{r_+} = \frac{m \sqrt{M^2 - \alpha}}{\sqrt{(1 - m^2)(M^2 - \alpha)} + M} \tag{3.9}$$

for the case where  $m = 0$ , this potential becomes zero, which corresponds exactly to the Schwarzschild black hole.

### 4. EGB-AdS black hole thermodynamics

#### 4.1. The black hole first law

We define the pressure [14] of the cosmological constant (2.3) for  $D \rightarrow 4$

$$8\pi P = 3l^{-2} ; \quad \Lambda = -3l^{-2} \tag{4.1}$$

We can express the ADM mass  $M$  of the black hole in terms of  $r_{\pm}$  by solving Eq. (2.7) for  $r = r_+$  resulting in

$$M = \frac{l^{-2} r_+^4 + r_+^2 + Q_{EGB}^2 + \alpha}{2r_+} \tag{4.2}$$

The Hawking temperature is easy to give by calculating surface gravity at the horizon

$$T^2 = -\frac{1}{8\pi^2} \nabla_{\mu} \xi_{\nu} \nabla^{\mu} \xi^{\nu} = \frac{1}{16\pi^2} f'^2(r_+) \tag{4.3}$$

where  $\xi^{\mu}$  is a killing vector, which for a static, spherically symmetric case takes the form  $\xi^{\mu} = \partial_t^{\mu}$ .  $\xi_{\mu}$  satisfies the Killing equation

$$\nabla_{\mu} \xi_{\nu} + \nabla_{\nu} \xi_{\mu} = 0 \tag{4.4}$$

The Hawking temperature of the black hole can be calculated as

$$T = \frac{3l^{-2} r_+^4 + r_+^2 - Q_{EGB}^2 - \alpha}{8\pi \alpha r_+ + 4\pi r_+^3} \tag{4.5}$$

if we suppose that the charges  $q_+$  and  $q_-$  are behaved like a gas on the black hole. The black hole first law reads [14]

$$dM = TdS + \Phi_{EGB}dQ_{EGB} + VdP + Ad\alpha \tag{4.6}$$

The parameters  $V$  and  $A$  are the conjugate quantities of the pressure  $P$  and GB coupling parameter  $\alpha$ , respectively.

If we fix  $P$  and  $\alpha$  the Hawking-Bekenstein formula is then given by

$$S = \int \frac{dM}{T} - \int \frac{\Phi_{EGB}}{T}dQ_{EGB} \tag{4.7}$$

to describe the entropy according to the charges of the particles and antiparticles present on the black hole, we have not fixed the charge  $Q_{EGB}$  of the black hole. The solution of the first part of Eq. (4.7) already computed by [5,14] as

$$\int \frac{dM}{T} = \int_0^{r_+} \frac{1}{T} \left( \frac{\partial M}{\partial r'} \right) dr' = \pi r_+^2 + 2\pi\alpha \log r_+^2 + S_0 \tag{4.8}$$

where  $S_0$  is an integration constant. Next, we use (3.9) to calculate the second term in Eq. (4.7). We write the potential  $\Phi_{EGB}$  as a function of  $Q_{EGB}$  for a fixed position  $r = r_+$  we obtain

$$\int \frac{\Phi_{EGB}}{T}dQ_{EGB} = \int \frac{Q_{EGB}}{Tr_+}dQ_{EGB} \tag{4.9}$$

we substitute Eq. (4.5) into the last equation

$$\int \frac{\Phi_{EGB}}{T}dQ_{EGB} = \int \frac{(8\pi\alpha + 4\pi r_+^2) Q_{EGB}}{(3l^{-2}r_+^4 + r_+^2 - \alpha) - Q_{EGB}^2}dQ_{EGB} \tag{4.10}$$

we consider that the expression  $Q_{EGB}$  (3.7) is defined on a fixed horizon (3.8)

$$\begin{aligned} \int \frac{\Phi_{EGB}}{T}dQ_{EGB} &= -2 \left( 2\pi\alpha + \pi r_+^2 \right) \log \left| Q_{EGB}^2 - \left( 3l^{-2}r_+^4 + r_+^2 - \alpha \right) \right| + S_1 \\ &\tag{4.11} \end{aligned}$$

with  $S_1$  is an integration constant. Therefore, substitute Eqs. (4.8), (4.11) into Eqs. (4.7) we obtain

$$\begin{aligned} S &= \frac{A}{4} + 2\pi\alpha \log \frac{A}{A_0} \\ &+ \left( \frac{A}{2} + 4\pi\alpha \right) \log \left| \frac{m^2}{A_1} (M^2 - \alpha) - \frac{1}{4\pi A_1} (A - \Lambda A^2 - 4\pi\alpha) \right| \\ &\tag{4.12} \end{aligned}$$

where  $A_0$  and  $A_1$  are some constants with units of area,  $A \equiv 4\pi r_+^2$  is the area of the event horizon of the black hole. This equation generalizes the Hawking-Bekenstein (HB) formula by a two supplementary logarithmic term [23], instead of just one additional logarithmic form [5,14]:

$$S = \frac{A}{4} + 2\pi\alpha \log \frac{A}{A_0} \tag{4.13}$$

If we fix the EGB black hole charge we find the entropy according to the model [5]. We remark that the second entropy correction contains the term  $m$  which describes the states of the charge  $Q_{EGB}$ . We also remark that there is the presence of the cosmological constant  $\Lambda$  in the second logarithmic term. Contrary to the model [5], the entropy above described also by the cosmological constant with the charges  $Q_{EGB}$ , this comes after varying  $S$  with respect to  $Q_{EGB}$ . We calculated the electric potential of EGB black hole, and by using this potential we write the entropy with two logarithmic corrections.

#### 4.2. Pressure, volume and temperature

It is also possible to calculate the entropy (4.12) at finite temperature  $T = \beta^{-1}$ , by the use of expression (4.5) which is also written as

$$S = \frac{A}{4} + 2\pi\alpha \log A + \frac{1}{2} (A + 8\pi\alpha) \log \frac{B}{A_1} + S_0 - S_1 \tag{4.14}$$

we define a new area

$$B = |\beta^{-1}r_+ (A + 8\pi\alpha)| \tag{4.15}$$

we show that

$$S = 2\pi\alpha \log Ae^{\frac{A}{8\pi\alpha}} B^{\frac{A+8\pi\alpha}{4\pi\alpha}} + S_0 - S_1 \tag{4.16}$$

we study two different types of charged EGB-AdS black holes, allow for a first order small-black-hole/large-black-hole (SBH/LBH), we choose for SBH a surface of the form  $A \ll 8\pi\alpha$ , we choose for LBH a surface of the form  $A \gg 8\pi\alpha$ , because the values of  $\alpha$  included in the interval  $[-1, 1]$  [13].

First, we assume that  $A \ll 8\pi\alpha$ , i.e. a space difference of AdS space (since  $\alpha > 0$ ). The entropy can be rewritten into the following simple form

$$S = 2\pi\alpha \log AB^2 + S_0 - S_1 \text{ and } B = 8\pi\alpha\beta^{-1}r_+ \tag{4.17}$$

we obtain a case where the subadditivity inequality is saturated for  $S_0 \leq S_1$ :

$$S \equiv S(AB) \leq S(A) + S(B) \tag{4.18}$$

where

$$S(A) = 2\pi\alpha \log A \text{ and } S(B) = 4\pi\alpha \log B \tag{4.19}$$

Next, we assume that  $A \gg 8\pi\alpha$ , from Eq. (4.16) the entropy can be rewritten into the following form

$$S = \frac{A}{2} \log \frac{\sqrt{e}Ar_+}{\beta A_1} + 2\pi\alpha \log \frac{A}{A_0} \tag{4.20}$$

According to AdS/CFT correspondence, gravitational theories on  $AdS_{2+1}$  space of radius  $R$  are dual to  $CFT_2$ .

for  $r_+A = \beta A_1$ , we obtain the same entropy in the EGB black hole framework (4.13).

Next, we assume that  $A \sim 8\pi\alpha$

$$S = A \log \frac{2e^{1/4}Ar_+}{\beta A_1} + \frac{A}{4} \log \frac{A}{A_0} \tag{4.21}$$

for  $2r_+A = \beta A_1$ , we obtain the same entropy in the EGB black hole framework (4.13). According to the last two cases, we can transform the two entropies (4.20), (4.21) into (4.13), which shows that there is a possibility of return entropy with two logarithmic corrections (4.12) to entropy with a single correction. Therefore, we can find the entropy (4.13) anyway by using the hypothesis (2.9) for the condition of  $A \geq 8\pi\alpha$ . This condition is also valid for an AdS-EGB black hole:  $\alpha \lesssim 0$ . Let us consider an asymptotically AdS-EGB black hole spacetime ( $\Lambda < 0$ ), the cosmological constant corresponds to thermodynamic pressure with  $8\pi P = -\Lambda$ , and the conjugate variable of  $P$  corresponds to thermodynamic volume [24]

$$V = \left( \frac{\partial M}{\partial P} \right)_{S, Q, \alpha} = \frac{1}{3} r_+ A \tag{4.22}$$

this conjugate variable was interpreted geometrically as an effective volume for the region outside the EGB-AdS black hole horizon

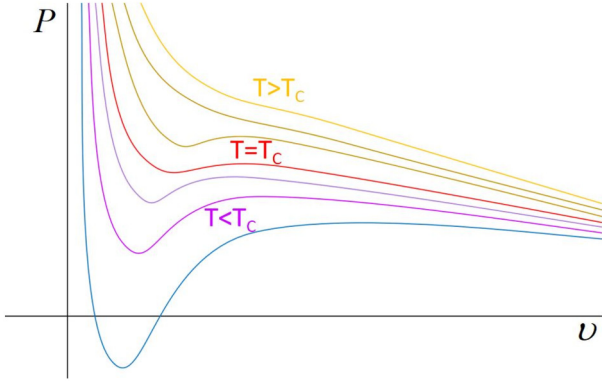


Fig. 1. Curves of some values  $P - V$  isotherms of the van der Waals equation of state.

[25]. For the static black holes, the thermodynamic volume is only a function of the event horizon. From (4.20), (4.21) we can introduce this condition

$$A \geq 8\pi\alpha \iff \frac{1}{6}\beta A_1 \leq V \leq \frac{1}{3}\beta A_1 \quad (4.23)$$

the condition concerning the temperature is

$$\frac{A_1}{3V} \leq T \leq \frac{A_1}{6V} \quad (4.24)$$

the volume of AdS-EGB black hole checks the above relationship. Whether the black hole surface checks  $A \geq 8\pi\alpha$ , the maximum and minimum values of the black hole volume depend on  $\beta$ . Therefore, the temperature (4.5) is expressed as a function of the pressure (4.1) and  $V$

$$T = \frac{6PV}{A + 8\pi\alpha} + \frac{r_+^2 - Q_{EGB}^2 - \alpha}{(A + 8\pi\alpha)r_+} \quad (4.25)$$

we substitute Eqs. (3.7), (3.8) into the last equation, we get a corresponding fluid equation of state:

$$PV = \frac{A + 8\pi\alpha}{6}T - \frac{1}{3}\sqrt{(1 - m^2)(M^2 - \alpha)} \quad (4.26)$$

which leads to

$$PV = \frac{A + 8\pi\alpha}{6}T - \frac{1 - m^2}{m^2} \frac{Q_{EGB}^2}{3(r_+ - M)} \quad (4.27)$$

this equation is in good agreement with the equation  $P = f(T, V)$  found by [25] for a charged AdS black holes ( $\alpha = 0$ ). We use the specific volume  $v = 2r_+l_p^2 \equiv 2r_+ = 6V/N$ , where  $l_p = \sqrt{\hbar G/c^3} \equiv 1$  is the Planck length and  $N = A/l_p^2$  is the number of states associated with the horizon [25].

$$P = \left(1 + \frac{8\pi\alpha}{A}\right) \frac{T}{v} - \frac{1 - m^2}{m^2} \frac{4Q_{EGB}^2}{\left(1 - \frac{2M}{v}\right) v^2 N} \quad (4.28)$$

Note that for  $m = \pm 1$ , we obtain the ideal gas law. We can show the Van der Waals equation for  $A \gg 8\pi\alpha$ :

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = T \quad (4.29)$$

These curves are interpreted as follows (Fig. 1):

for a temperature  $T > T_c$  the fluid is only stable under one phase: the supercritical fluid;

for a temperature  $T < T_c$  the fluid is stable under a single-phase, gas or liquid, or presents simultaneously in two phases in equilibrium, gas and liquid. The formula (4.29) yields

Table 1

The possible values of the EGB black hole charge as a function of the charge of a particle.

	$N \neq \infty$	$N \rightarrow \infty$
$Q_{EGB}^-$	$-q_+$	$-q_+/2$
$Q_S$	0	0
$Q_{EGB}^+$	$q_+$	$q_+/2$

$$a = \frac{4q_+r_+}{N} \sqrt{1 - m^2} \geq 0 \quad \frac{b}{v} = \frac{8\pi\alpha}{A} \quad (4.30)$$

where the parameter  $a$  measures the attraction between particles and the parameter  $b$  corresponds to the volume of fluid of particles. We notice that  $b$  is less than  $v$  because  $A \gg 8\pi\alpha$ . When  $N \rightarrow \infty$ , the attraction between particles in the fluid will be zero  $a = 0$ . If there is a non-minimal coupling between particle-antiparticle pair, the attraction will be zero for  $N \rightarrow \infty$ . For an EGB-AdS black hole with  $N \neq \infty$  (Table 1), the parameter  $a$  will be zero.

### 5. Conclusion

In this paper, we have considered charged 4D EGB-AdS black holes as a working substance. We studied the relationship between positive and negative charges with the black hole in 4D EGB theory based on the work of Glavan & Lin [1]. We have assumed a particular shape of the charges present on the black hole by the degenerate solution. We calculated the electric potentials of particles and antiparticles for the EGB black hole, then we deduce the potentials of these charges for the Schwarzschild black hole. We have shown that the charge of a Schwarzschild black hole is zero. We have adopted that the EGB black hole is a generalization of the Schwarzschild black hole. We have found in this case a simplified charge of EGB black hole which takes discrete values. By using this potential we write the HB formula with two logarithmic corrections. The second correction depends on the discrete values of the EGB black hole charge also depends on the cosmological constant. For  $A \geq 8\pi\alpha$ , we can obtain the HB entropy with a single correction from that with two corrections. In this case, we studied the AdS-EGB black hole thermodynamics, this study allows obtaining the Van der Waals equation.

### Declaration of competing interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

### References

- [1] D. Glavan, C. Lin, Einstein-Gauss-Bonnet gravity in four-dimensional spacetime, Phys. Rev. Lett. 124 (8) (2020) 081301.
- [2] K. Aoki, M.A. Gorji, S. Mukohyama, A consistent theory of  $D \rightarrow 4$  Einstein-Gauss-Bonnet gravity, Phys. Lett. B 810 (2020) 135843.
- [3] D. Lovelock, The Einstein tensor and its generalizations, J. Math. Phys. 12 (3) (1971) 498–501.
- [4] R.A. Konoplya, A.F. Zinhailo, Quasinormal modes, stability and shadows of a black hole in the 4D Einstein-Gauss-Bonnet gravity, Eur. Phys. J. C 80 (11) (2020) 1–13.
- [5] P.G. Fernandes, Charged black holes in AdS spaces in 4D Einstein Gauss-Bonnet gravity, Phys. Lett. B 805 (2020) 135468.
- [6] M. Gürses, T.Ç. Şişman, B. Tekin, Comment on Einstein-Gauss-Bonnet gravity in four-dimensional spacetime, Phys. Rev. Lett. 125 (14) (2020) 149001.
- [7] D. Wang, D. Mota, 4D Gauss-Bonnet gravity: cosmological constraints, H<sub>0</sub> tension and large scale structure, arXiv preprint, arXiv:2103.12358, 2021.
- [8] C.H. Wu, Y.P. Hu, H. Xu, Hawking evaporation of Einstein-Gauss-Bonnet AdS black holes in  $D \geq 4$  dimensions, arXiv preprint, arXiv:2103.00257, 2021.
- [9] P. Das, R. Sk, S. Ghosh, Motion of charged particle in Reissner-Nordström spacetime: a Jacobi-metric approach, Eur. Phys. J. C 77 (11) (2017) 735.

- [10] A. Abdujabbarov, J. Rayimbaev, B. Turimov, F. Atamurotov, Dynamics of magnetized particles around 4-D Einstein Gauss–Bonnet black hole, *Phys. Dark Universe* 30 (2020) 100715.
- [11] J. Maldacena, L. Susskind, Cool horizons for entangled black holes, *Fortschr. Phys.* 61 (9) (2013) 781–811.
- [12] J.M. Bardeen, B. Carter, S.W. Hawking, The four laws of black hole mechanics, *Commun. Math. Phys.* 31 (2) (1973) 161–170.
- [13] B.E. Panah, K. Jafarzade, S.H. Hendi, Charged 4D Einstein–Gauss–Bonnet–AdS black holes: shadow, energy emission, deflection angle and heat engine, *Nucl. Phys. B* 115269 (2020).
- [14] S.W. Wei, Y.X. Liu, Extended thermodynamics and microstructures of four-dimensional charged Gauss–Bonnet black hole in AdS space, *Phys. Rev. D* 101 (10) (2020) 104018.
- [15] M. Cvetič, S.I. Nojiri, S.D. Odintsov, Black hole thermodynamics and negative entropy in de Sitter and anti-de Sitter Einstein–Gauss–Bonnet gravity, *Nucl. Phys. B* 628 (1–2) (2002) 295–330.
- [16] S.J. Yang, J.J. Wan, J. Chen, J. Yang, Y.Q. Wang, Weak cosmic censorship conjecture for the novel 4D charged Einstein–Gauss–Bonnet black hole with test scalar field and particle, arXiv preprint, arXiv:2004.07934, 2020.
- [17] D.S. Hajdukovic, Virtual gravitational dipoles: the key for the understanding of the Universe?, *Phys. Dark Universe* 3 (2014) 34–40.
- [18] Silvia Pascoli, Jessica Turner, Matter–antimatter symmetry violated, *Nature* (2020) 323–324.
- [19] V.P. Frolov, A.A. Shoom, Motion of charged particles near a weakly magnetized Schwarzschild black hole, *Phys. Rev. D* 82 (8) (2010) 084034.
- [20] P. Pavlović, A. Saveliev, M. Sossich, Influence of the vacuum polarization effect on the motion of charged particles in the magnetic field around a Schwarzschild black hole, *Phys. Rev. D* 100 (8) (2019) 084033.
- [21] R. Pánis, M. Kološ, Z. Stuchlík, Determination of chaotic behaviour in time series generated by charged particle motion around magnetized Schwarzschild black holes, *Eur. Phys. J. C* 79 (6) (2019) 479.
- [22] J. Rayimbaev, A. Abdujabbarov, M. Jamil, B. Ahmedov, W.B. Han, Dynamics of test particles around renormalization group improved Schwarzschild black holes, *Phys. Rev. D* 102 (8) (2020) 084016.
- [23] R.G. Cai, L.M. Cao, N. Ohta, Black holes in gravity with conformal anomaly and logarithmic term in black hole entropy, *J. High Energy Phys.* 2010 (4) (2010) 82.
- [24] M. Cvetič, G.W. Gibbons, D. Kubizňák, C.N. Pope, Black hole enthalpy and an entropy inequality for the thermodynamic volume, *Phys. Rev. D* 84 (2) (2011) 024037.
- [25] D. Kubizňák, R.B. Mann, M. Teo, Black hole chemistry: thermodynamics with Lambda, *Class. Quantum Gravity* 34 (6) (2017) 063001.

---

## 4.10 Contribution III : Trou noir 4D Einstein-Gauss-Bonnet-AdS chargé dans processus isobare : conduction thermique, compressibilité et distribution Bose Einstein.

### Résumé

Dans cet article, nous étudions le trou noir d'Einstein-Gauss-Bonnet (EGB) dans les espaces-temps 4D anti-de Sitter (AdS). Nous exprimons tous les paramètres thermodynamiques en fonction du couplage de Gauss-Bonnet  $\alpha$ . La thermodynamique des trous noirs peut être comprise dans le cadre du processus isobare, dans ce cas, nous montrons le flux de chaleur et la résistance thermique pour la conduction thermique. Les aspects physiques de ce résultat sont que représente la résistance thermique du trou noir. En tant qu'application, nous construisons des statistiques du trou noir EGB-AdS soumises aux statistiques de Bose-Einstein.



# Charged 4D Einstein-Gauss-Bonnet-AdS black hole in isobaric process: Thermal conduction, compressibility and Bose Einstein distribution

M. Bousder<sup>a</sup>, M. Bennai<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> *Lab of High Energy Physics, Modeling and Simulations, Faculty of Science, University Mohammed V-Agdal, Rabat, Morocco*

<sup>b</sup> *Quantum Physics and Applications Team, LPMC, Faculty of Science Ben M'sik, Casablanca Hassan II University, Morocco*

Received 31 January 2021; received in revised form 14 April 2021; accepted 26 June 2021

Available online 1 July 2021

Editor: Clay Córdova

## Abstract

In this paper, we study Einstein-Gauss-Bonnet (EGB) black hole in 4D anti-de Sitter (AdS) spacetimes. We express all the thermodynamic parameters as a function of the GaussBonnet coupling  $\alpha$ . The thermodynamics of black holes can be understood within the framework of the isobaric process, in this case, we show the heat flow and the thermal resistance for the thermal conduction. The physical aspects of this result is that  $\alpha$  represents the thermal resistance of the black hole. As an application, we construct statistics of the EGB-AdS black hole undergo the Bose-Einstein statistics.

© 2021 Published by Elsevier B.V. This is an open access article under the CC BY license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>). Funded by SCOAP<sup>3</sup>.

## 1. Introduction

According to Lovelock theorem [1], the Gauss-Bonnet gravity is introduced only in case  $D > 4$  or more. In four-dimensional spacetime, the GB term does not make contributions to the gravitational dynamics. Recently, there has been renewed interest in the Gauss-Bonnet gravity, D. Glavan and C. Lin [2] proposed a novel 4-dimensional Einstein-Gauss-Bonnet (EGB)

*E-mail addresses:* [mostafa.bousder@gmail.com](mailto:mostafa.bousder@gmail.com) (M. Bousder), [mohamed.bennai@univh2c.ma](mailto:mohamed.bennai@univh2c.ma) (M. Bennai).

<https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2021.115476>

0550-3213/© 2021 Published by Elsevier B.V. This is an open access article under the CC BY license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>). Funded by SCOAP<sup>3</sup>.

gravity, which has attracted great attention. The idea of D. Glavan and C. Lin is to multiply the GB term by the factor  $1/(D - 4)$  before taking the limit. Offers a new 4-dimensional gravitational theory with only two dynamical degrees of freedom by consider the  $D \rightarrow 4$  limit of the Einstein-Gauss-Bonnet gravity in  $D > 4$  dimensions [3], which is in contradiction with Lovelock theorem. A considerable literature has grown up around the theme of the four-dimensional symmetrical static and spherical black hole solution in EGB gravity [4,5], also, solutions of a charged black hole [6]. Black hole activities in AdS space-times, create interesting phase transitions, such as the Hawking-Page transition [7]. Recent evidence of the first law of black hole mechanics, suggests a new working terms  $PdV$  with the proposal to treat the cosmological constant  $\Lambda$  as dynamic and as pressure [8]. There is also the application for an ideal gas, van der Waals fluids, etc [9,10]. Recently, Letters treated the thermal conduction of the black hole [11,12].

The objective of this paper is to set up a framework for understanding the thermodynamics of EGB black holes and the effects of the GaussBonnet coupling on the thermodynamic parameters (pressure, volume, temperature,...). For simplicity, throughout the paper, we adopt the following units  $c = G_N = 4\pi \epsilon_0 = k_B = 1$ .

The plan of this paper is as follows: Section 2 of this paper will examine the charged Einstein-Gauss-Bonnet black hole In section 3, we study the results of the previous section, in relationship with AdS space. Section 4, discusses the black-hole equation of state and deals with the thermodynamic potentials and we introduce the compressibility. In section 5 and 6, the discussion is extended to compressibility and thermal conduction, respectively, in isobaric process. Section 7, deals the Bose–Einstein distribution for the EGB-AdS black hole. Finally section 8 summarizes the main points.

## 2. Charged Einstein-Gauss-Bonnet black hole

Beginning with the standard expression of action for charged Einstein-Gauss-Bonnet theory in D-dimensions with a negative cosmological constant [13,14]

$$I = \frac{1}{16\pi} \int d^D x \left( R - 2\Lambda + \frac{\alpha}{D - 4} G - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right), \tag{2.1}$$

where  $\alpha$  is a finite non-vanishing dimensionless GaussBonnet coupling, have dimensions of  $[length]^2$ , that represent ultraviolet (UV) corrections to Einstein theory,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  is the Maxwell tensor associated to the electromagnetic four-potential  $A_\mu(r)$

$$G = R^2 - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}, \tag{2.2}$$

and

$$\Lambda = -\frac{(D - 1)(D - 2)}{2l^2}, \tag{2.3}$$

where  $l$  is the AdS radius,  $R$ ,  $R_{\mu\nu}$ ,  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$  are the Ricci scalar, the Ricci tensor, and the Riemann tensor, respectively. By solving the field equation, we obtain the black hole metric

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 \left( d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \tag{2.4}$$

Taking the limit  $D \rightarrow 4$ , we obtain the exact solution in closed form

$$-g_{00} = f(r) \approx 1 + \frac{r^2}{2\alpha} \left( 1 - \sqrt{1 + 4\alpha \left( \frac{2M}{r^3} - \frac{Q^2}{r^4} - \frac{1}{l^2} \right)} \right), \tag{2.5}$$

this last solution solution could be obtained directly from the derivation done in [15]. In the large limit ( $l^{-2} \sim 0$ ) and for two branches of vanishing mass and charge [16], we obtain

$$-g_{00} = 2 \frac{r^2 - 2Mr + Q^2 + \alpha}{r^2 + 2\alpha + \sqrt{r^4 + 4\alpha(2Mr - Q^2)}}, \quad (2.6)$$

where  $2M$  is the Schwarzschild radius. From this expression, we notice that, in the limit  $\alpha \rightarrow 0$ , the metric reduce to the Reissner–Nordström black hole solution. If  $\alpha < 0$  the solution is still an AdS space, if  $\alpha > 0$  the solution is a de Sitter space [14]. The event horizon in spacetime can be located by solving the metric equation:  $g_{00} = 0$ . To find the black hole horizon we have to solve the following equation

$$r^2 - 2Mr + Q^2 + \alpha = 0. \quad (2.7)$$

The solutions show that the event horizon is located at:

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2 - \alpha}. \quad (2.8)$$

We notice that the solution behaves like the Reissner–Nordström (RN) solution, when  $\alpha \sim 0$ , this solution returns to the RN black hole. The black hole event horizon is the largest root of the equation above,  $r_+$  is the black hole horizon [2]. For a non-vanishing cosmological constant the expression for  $r_+$  is complicated a not particularly elucidative [14].

### 3. EGB-AdS black hole thermodynamics

We investigate the shadow behavior of the EGB-AdS black hole and examine the influence of the area of the event horizon and the GB coupling parameter of the black hole on the Bekenstein–Hawking (BH) formula. The pressure  $P$  [17] is expressed in terms of the cosmological constant (2.3) for  $D \rightarrow 4$

$$8\pi P = 3l^{-2} ; \quad \Lambda = -3l^{-2}. \quad (3.1)$$

We can express the ADM mass  $M$  of the black hole in terms of  $r_{\pm}$  by solving Eq. (2.7) for  $r = r_+$  resulting in

$$M = \frac{l^{-2}r_+^4 + r_+^2 + Q_{EGB}^2 + \alpha}{2r_+}. \quad (3.2)$$

The Hawking temperature  $T = \beta^{-1}$  of the black hole can be calculated as [14]

$$T = \frac{1}{4\pi} f'(r_+) = \frac{3l^{-2}r_+^4 + r_+^2 - Q^2 - \alpha}{8\pi\alpha r_+ + 4\pi r_+^3}, \quad (3.3)$$

for EGB-AdS black hole, the mass of a black hole is more appropriately interpreted as enthalpy  $H$ . The black hole first law [17] of thermodynamics for semiclassical black holes reads

$$dM = TdS + \Phi dQ + VdP + Ad\alpha. \quad (3.4)$$

The parameters  $V$  and  $A$  are the conjugate quantities of the pressure  $P$  and GB coupling parameter  $\alpha$ , respectively.

If we fix  $P$  and  $\alpha$ , the Bekenstein–Hawking (BH) formula with a supplementary logarithmic term [14,17] is then given by

$$S = \int \frac{dM}{T} = \frac{A}{4} + 2\pi\alpha \ln \frac{A}{A_0}, \tag{3.5}$$

where  $A_0$  is some constant with units of area,  $A \equiv 4\pi r_+^2$  is the area of the event horizon of the black hole. This equation generalizes the BH formula by a supplementary logarithmic term [18]. The logarithmic term of  $S$  described the number of microscopic states realizing a given macroscopic state [19].

#### 4. Black hole equation of state

##### 4.1. Equation of state by transformation method

A key concept in understanding EGB black hole thermodynamics is the relation between the thermodynamic parameters and the GaussBonnet coupling. The comparison between  $A$  and  $\alpha$  will be important in what follows. In the case where the logarithmic correction Eq. (3.5) will be very weak compared to  $A/4$ , we introduce the following condition

$$A \gg 8\pi\alpha, \tag{4.1}$$

consequently, we can rewrite Eq. (3.3) as Van der Waals equation:

$$\left( P + 2\pi \frac{1 - \Phi^2 - \alpha r_+^{-2}}{9V^2} \right) \left( V - \frac{8\pi\alpha}{3} r_+ \right) = \frac{A}{6} T, \tag{4.2}$$

where  $\Phi = Q/r_+$  is the electric potential evaluated at the horizon of the EGB-AdS black hole. This equation is in good agreement with the equation  $P = f(T, V)$  found by [20] for a charged AdS black holes ( $\alpha = 0$ ). We use the specific volume  $v = 2r_+ l_P^2 \equiv 2r_+ = 6V/N$ , where  $l_P = \sqrt{\hbar G/c^3} \equiv 1$  is the Planck length and  $N = A/l_P^2$  is the number of states associated to the horizon [20]. The volume and pressure are the only two nonconserved thermodynamic variables that evolve as

$$V' = V - \frac{8\pi\alpha}{3} r_+, \tag{4.3}$$

$$P' = P + 2\pi \frac{1 - \Phi^2 - \alpha r_+^{-2}}{9V^2}, \tag{4.4}$$

$P'$  and  $V'$  represent the ideal pressure and the ideal volume, respectively, as well as  $P$  and  $V$ , are the real pressure and the real volume, respectively. The ideal volume of the equation of state of ideal gas, corresponding to the total volume of the enclosure since the particles therein are assumed to be of zero volume. One can obtain the equation of the state of a black hole in terms of the specific volume

$$P' v' = T, \tag{4.5}$$

according to this equation, black holes admit a thermodynamic behavior treated from the same point of view as an ideal gas [9].

##### 4.2. Equation of state by approximation method

In order to determine the ideal gas equation from Van der Waals equation, we take the condition Eq. (4.1), one can obtain a ideal gas equation

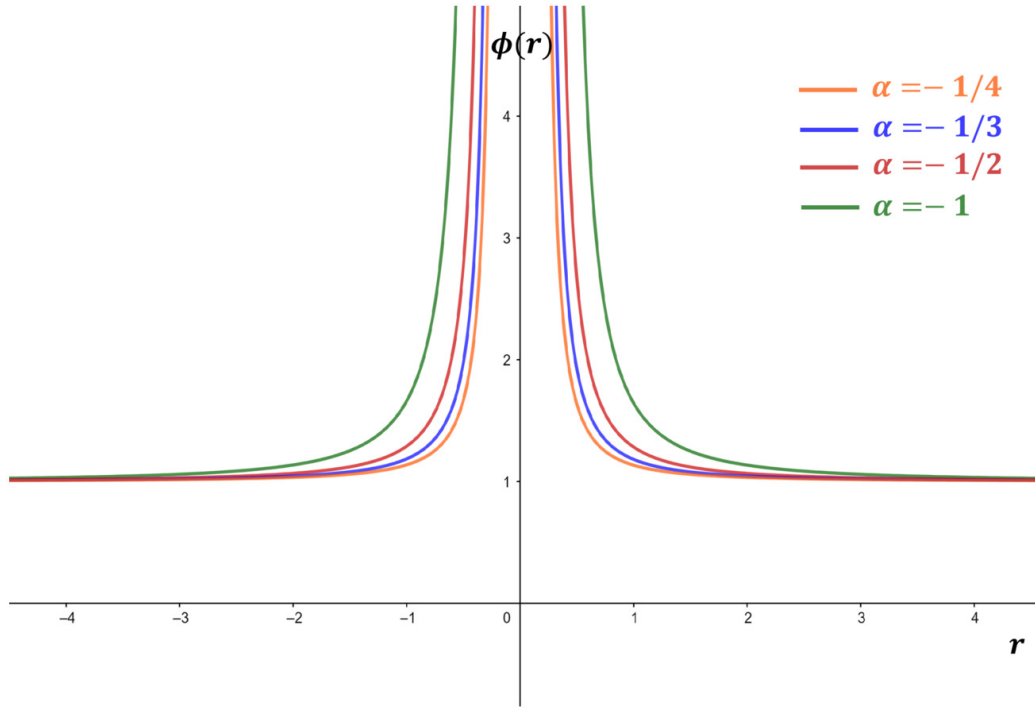


Fig. 1.  $\phi$  vs.  $r$ , for a negative values of  $\alpha$ .

$$PV \sim \frac{A}{6}T. \tag{4.6}$$

Then the electric potential can be expressed in exponential form as

$$\Phi \sim e^{-\frac{\alpha}{2r_+^2}}, \tag{4.7}$$

this potential is similar to the electric potential found by [21]. This exponential form allows simplifying the calculations. Let us first study the effects of  $\alpha$  on  $\phi$ . The electric potential at the distance  $r$  measured concerning radial infinity

$$A_\mu(r) dx^\mu = -\phi(r) dt. \tag{4.8}$$

By taking the condition Eq. (4.1), the event horizon of the black hole satisfies  $\phi(r_+) \equiv \Phi$ , for simplicity, we shall set

$$\phi(r) \sim e^{-\frac{\alpha}{2r^2}}. \tag{4.9}$$

Our results are easily extended to include the  $\Phi$  case. This expression will allow us to study the heat transfer of the EGB-AdS black hole (see Figs. 1 and 2).

According to these curves, the potential has a minimum if  $\alpha$  takes only positive values, which leads to  $0 < \phi < 1$ .

Replacing Eq. (4.7) in Eq. (4.6), we can write  $PV$  as a function of  $T$  from equation

$$PV \sim -\frac{\pi\alpha}{3 \ln \Phi} T. \tag{4.10}$$

If we consider the change  $\Phi = \phi(r_+) \longrightarrow \phi(r)$  we get

$$PV \sim \left(\frac{r}{r_+}\right)^2 T, \tag{4.11}$$

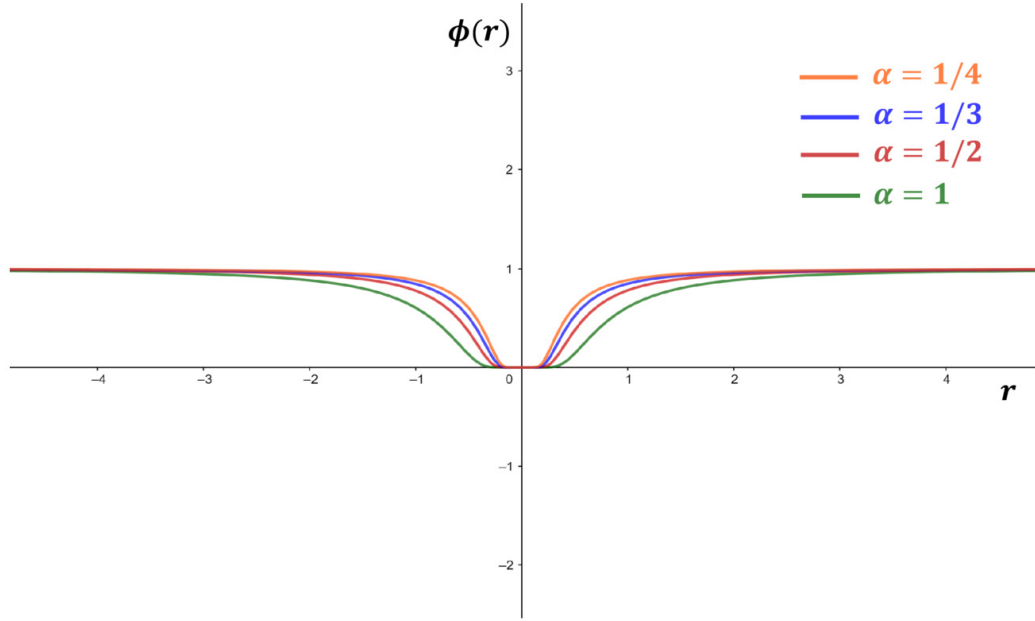


Fig. 2.  $\phi$  vs.  $r$ , for a positive values of  $\alpha$ .

in the case where  $r \rightarrow r_+$ , the equation above verified exactly the ideal gas law [9]. Since outside the black hole there are more particles of matter, the term  $r/r_+$  represents the amount of substance or the number of particles  $N$ . Eq. (4.11) gives a contribution to compressibility factor  $Z$  [10] in terms of the specific volume

$$Z = \frac{Pv}{T} \sim \left(\frac{r}{r_+}\right)^2, \tag{4.12}$$

we notice that  $Z > 0$ .

For the region  $r < r_+$ , the compressibility factor is  $Z < 1$ , this shows that there is a great interaction between the gas particles in the singularity. The pressures are lower, the particles are free to move. In this case, the attractive forces dominate.

For the region  $r = r_+$ , the compressibility factor is  $Z = 1$ , this shows that the gas near the horizon of the EGB-AdS black hole, behaves like an ideal gas. In this case, Eq. (4.5) represents the equation of state in the horizon.

For the region  $r > r_+$ , the compressibility factor is  $Z > 1$ , this shows that outside EGB-AdS black hole, the particles collide more often. This allows the repulsive forces between molecules to have a noticeable effect. In the next section, we will try to show the relation between  $Z$  and  $\alpha$ .

### 5. Compressibility in isobaric process

Next, we want to study the difference between the temperature of the horizon with the parameters  $(P_h = P', v_h = v', T_h, A)$  and of a sphere of radius  $r$  with the parameters  $(P_r, v_r, T_r, A_r)$ . From Eq. (4.11) we get in  $r = r_+$  we have  $P_h v_h = T_h$  and in  $r > r_+$  we have  $P_r v_r \sim \frac{A_r}{A} T_r$ , where  $T_h$  is the temperature on the horizon and  $T_r$  is the temperature at a distance  $r$  from the black hole, we get

$$\frac{v_r}{v_h} = Z \frac{T_r}{T_h}. \tag{5.1}$$

From Eq. (4.7) we can rewrite Eqs. (4.3), (4.4) as

$$\frac{\nu_h - \nu_r}{\nu_r} = \ln \Phi^4, \quad (5.2)$$

$$P_h - P_r = \frac{8\pi}{A^2 \nu_r^2} \left(1 - \Phi^2 + \ln \Phi^2\right). \quad (5.3)$$

If  $\Lambda$  is truly constant,  $P$  cannot be varied from the horizon to a region  $A_r$ , the system is in isobaric process, which leads to  $P_h = P_r$ . Consequently, we find  $\ln \Phi^2 = \Phi^2 - 1$ , this expression is given by a convergent Taylor series, if

$$\Phi^2 \sim 1. \quad (5.4)$$

Using the expressions Eqs. (5.1), (5.2), one can obtain in the isobaric compressibility

$$Z = \frac{T_h}{T_r} \frac{1}{1 + \ln \Phi^4}, \quad (5.5)$$

leads to

$$\frac{T_h}{Z T_r} + \frac{8\pi\alpha}{A} = 1, \quad (5.6)$$

which is in agreement with the condition Eq. (4.1). Also this last equation shows that,  $\alpha$  can vary depending on distance from the black hole. From Eq. (5.6), we obtain

$$Z = \frac{T_h}{T_r} \frac{1}{1 - \frac{8\pi\alpha}{A}}. \quad (5.7)$$

We want to study the region close to the horizon or for isothermal process, in this case we consider  $T_r \approx T_h$ . We can finally rewrite  $Z$  as a function of the GaussBonnet coupling as

$$Z \sim 1 + \frac{8\pi\alpha}{A}. \quad (5.8)$$

For the region  $r < r_+$ , in the singularity, the GaussBonnet coupling checks  $\alpha < 0$ , the attractive forces dominate.

For the region  $r = r_+$ , near the horizon of the EGB-AdS black hole, the GaussBonnet coupling checks  $\alpha = 0$ , which leads to  $\Phi \sim 1$ , which corresponds exactly with the value of electric potential on the horizon Eq. (5.4) in the isobaric process.

For the region  $r > r_+$ , in outside EGB-AdS black hole, the GaussBonnet coupling checks  $\alpha > 0$ . From these three possible cases of  $\alpha$ , we can represent the diagram of the evolution of the electromagnetic field of the singularity up to a point outside the black hole (see Fig. 3).

The discontinuity of  $\phi$  in the point  $r_+$ , does not represent a large difference between the right and left of  $r_+$ . Since we have shown that  $\Phi \sim 1$ , we can cancel this discontinuity. If  $\alpha < 0$  the solution is still an AdS space, if  $\alpha > 0$  the solution is a de Sitter space (dS), [6]. As analyzed above, the EGB gravity with  $\alpha < 0$  (AdS space). This shows that the EGB black hole exists on a space-time geometry of type dS space, but the singularity itself changes the structure of this space-time in AdS space.

## 6. Thermal conduction in isobaric process

We consider that the horizon of EGB-AdS black hole separates two regions, the singularity and the black hole exterior. We want to study thermal motion from the horizon to outside region. The amount of heat that passes through a surface  $A$  per unit of time, we introduced the rate of heat flow

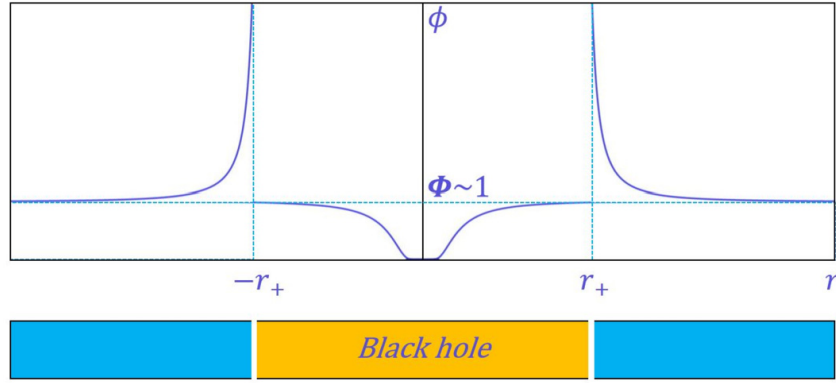


Fig. 3. In the region  $r < r_+$ , the electric potential has a minimum. In region  $r > r_+$  the potential decreases to  $\Phi \sim 1$ .

$$\varphi = \frac{\delta Q}{\delta t} = -\lambda \oint_{A_r} \frac{\partial T}{\partial r} dA_r, \tag{6.1}$$

where  $\lambda$  is the black hole thermal conductivity,  $A_r = 4\pi r^2$  is the surface of a sphere surround the black hole of surface  $A = 4\pi r_+$ . The temperature at the black hole horizon is  $T_h$ , and the temperature at a region  $r$  near black hole is  $T_r$ . Using Fourier's equation, the conduction through a spherical shell produces

$$\varphi \int_{r_+}^r \frac{dr'}{A'_r} = -\lambda \int_{T_h}^{T_r} dT. \tag{6.2}$$

The expression of rate of heat flow of a black hole between the incoming heat flow and the outgoing heat flow at a distance  $r$  as

$$\varphi_{h \rightarrow r} = 4\pi\lambda \frac{T_h - T_r}{1/r_+ - 1/r}. \tag{6.3}$$

The thermal resistance is given by

$$R_{th} = \frac{T_h - T_r}{\varphi_{h \rightarrow r}} = \frac{1/r_+ - 1/r}{4\pi\lambda}, \tag{6.4}$$

we use the approximation Eq. (5.8), we obtain

$$R_{th} \approx \frac{\alpha}{\lambda r_+ A}. \tag{6.5}$$

This equation show, that the coefficient  $\alpha$  represents a thermal resistance. In steady state and in the case of the surface heat flux passing through an isothermal surface of a plane wall of  $e = \alpha/r_+$  thickness subjected to a temperature difference. By taking the condition Eq. (4.1),  $e$  neglects the edge effects by supposing that are very large compared to its thickness

$$\varphi_{h \rightarrow r} = \frac{\lambda r_+ A}{\alpha} (T_h - T_r), \tag{6.6}$$

is the power that passes through a surface  $A$  during heat transfer. The internal movement of the particles under the effect of the temperature difference  $T_h - T_r$  (see Fig. 4).

For a flow at temperature  $T_r$  around a structure at uniform surface temperature  $T_h$  and area  $A$ . The expression of the convective heat flow  $\varphi_{h \rightarrow r}$  is given by Newton's law, in this case we can

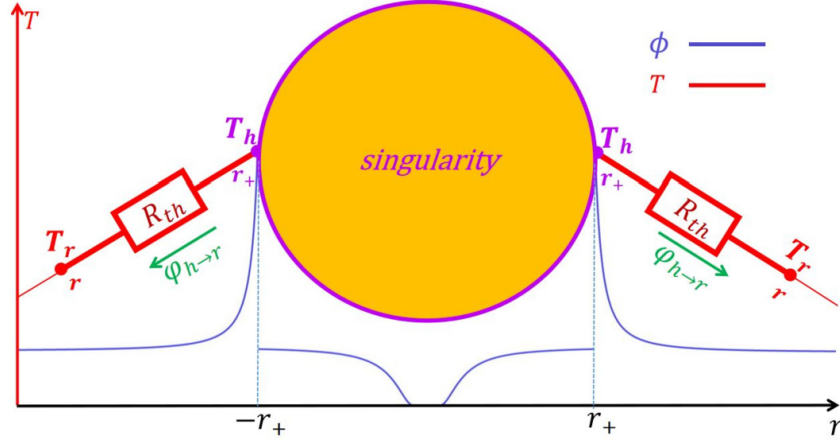


Fig. 4. The variation of temperature and electric field in the singularity, the horizon and the exterior of a EGB-AdS black hole. (For interpretation of the colors in the figure(s), the reader is referred to the web version of this article.)

describe at the same time the thermal conduction and the convection, for that we rewrite Eq. (6.6) as  $\varphi_{h \rightarrow r} = h A (T_h - T_r)$ , where  $h$  is the heat transfer coefficient:

$$h = \frac{\lambda r_+}{\alpha}. \tag{6.7}$$

Let us first study the effects of  $\alpha$  on the heat transfer.  $h$  is used to indicate the ease with which thermal energy passes the black hole horizon. We have already shown that  $\alpha(r_+) = 0$ , which shows that near the horizon we have  $h \rightarrow \infty$ , which increases the heat flow in this region, on the other hand, the thermal resistance decreases, which shows that there is great heat exchange over the EGB-AdS horizon. The convection coefficient depends on the surface (geometry). Furthermore, by examining Eq. (5.8), the variation of  $\alpha$  to the right and to the left of the horizon, leads to a discontinuity of  $h$  on the horizon ( $\alpha = 0$ ), on the other hand, the resistance will be zero. Near the horizon, the process is not adiabatic, on the other hand, the system undergoes an isobaric process for a constant  $\Lambda$ .

### 7. EGB-AdS Bose–Einstein distribution

We will show below this section, that the statistics of an EGB-AdS black hole undergo the Bose-Einstein statistics. In order to calculate the number of states  $N = A/l_p^2$  associated to the horizon [20], we first consider Eq. (5.7), and we write  $A$  as a function of  $Z$  then as a function of  $\Phi$  by Eq. (5.5), we find

$$N \equiv A = -4\pi\alpha \frac{1 + \ln \Phi^4}{\ln \Phi^2}. \tag{7.1}$$

Using the convergence Eqs. (5.4) in Eq. (7.1), the number of states  $N$  is expressed as

$$N = -4\pi\alpha \frac{2\Phi^2 - 1}{\Phi^2 - 1}. \tag{7.2}$$

Statistically, from Eqs. (5.1), (5.4), (7.2), at thermodynamic equilibrium,

$$N \sim -\frac{4\pi\alpha}{e^{-\frac{4\pi\alpha}{A}} - 1} > 0, \tag{7.3}$$

where  $\pm 4\pi\alpha/l_p^2$  is the degeneration of the energy level  $E = \pm 4\pi\alpha T$ , namely the number of states having this energy.

This last equation determines the validity of the Bose-Einstein statistics only in the regions  $r \geq r_+$  ( $\alpha < 0$ ) the number  $N$  of energy particles  $E$  is

*Singularity* ( $r < r_+$ ,  $\alpha \ll 0$ ,  $A \gg 8\pi\alpha$ ) (AdS space), the number of states is  $N_s \approx 0$ , this shows that the singularity does not contain particles.

*Near the horizon* ( $r = r_+$ ,  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $A \gg 8\pi\alpha$ ), the number of states is  $N_h \sim A$ , particles of a black hole are concentrated on the horizon.

*Outside EGB-AdS black hole* ( $r > r_+$ ,  $\alpha \gg 0$ ,  $A \gg 8\pi\alpha$ ), the number of states is  $N_\alpha \sim 4\pi\alpha \ll N_h$ , this shows that there are more particles on the black hole horizon than the region near horizon, what exactly corresponds with entropy Eq. (3.5). The logarithmic part in Eq. (3.5) represents a correction of  $N_h/4$ , which proves why  $N_\alpha \ll N_h$ . We obviously have  $N = \sum_k N_k$ , where  $N_k$  is the number of particles in the same state. We take a system of  $N$  particles composed of  $N_k$  identical bosons. We can build a totally symmetrical state  $|\varphi_S\rangle$  only by from a linear combination of all symmetric states  $|\varphi_k\rangle$

$$|\varphi_S\rangle = \sqrt{\frac{N_1!N_2!\dots}{N!}} \sum_k |\varphi_k\rangle. \quad (7.4)$$

Identical particles cannot be differentiated from each other. This concept takes on its full meaning in quantum mechanics, where particles do not have a well-defined trajectory that would allow them to be distinguished from one another.

## 8. Conclusion

In this paper, we have considered charged 4D EGB black holes as a working substance based on the work of Glavan & Lin [2]. We have studied the thermodynamics of the EGB-AdS black hole. We have shown the equation of state for an ideal gas and Van der Waals gas. For  $A \geq 8\pi\alpha$ , we got an expression of electric potential which depends on the radius  $r_+$ , then we generalized this potential for each distance  $r$ , which leads to calculating the compressibility factor as a function of the black hole center distance and depending on the GaussBonnet coupling. Then we deduce the interaction between the gas particles in the singularity, the horizon and outside of the black hole. We have indicated that the Gauss-Bonnet term plays a role in the thermodynamics of the EGB-AdS black hole. For the isobaric process, we can write all the thermodynamic parameters as a function of the GaussBonnet coupling  $\alpha$ . Hence, we can express the thermal resistance according to  $\alpha$ , which shows that this parameter is responsible for the conduction of the black hole. We have to show with conditions that the statistics of an EGB-AdS black hole undergo the Bose-Einstein statistics. The singularity does not contain any particles, on the other hand, there are more particles on the horizon than the outer region.

## CRedit authorship contribution statement

The authors contribute equally to this work.

## Declaration of competing interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

## Data availability

The data that supports the findings of this study are available within the article.

## References

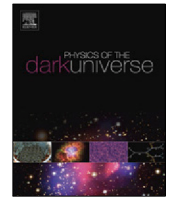
- [1] D. Lovelock, The Einstein tensor and its generalizations, *J. Math. Phys.* 12 (3) (1971) 498–501.
- [2] D. Glavan, C. Lin, Einstein-Gauss-Bonnet gravity in four-dimensional spacetime, *Phys. Rev. Lett.* 124 (8) (2020) 081301.
- [3] K. Aoki, M.A. Gorji, S. Mukohyama, A consistent theory of  $D \rightarrow 4$  Einstein-Gauss-Bonnet gravity, *Phys. Lett. B* (2020) 135843.
- [4] R.A. Konoplya, A.F. Zinhailo, Quasinormal modes, stability and shadows of a black hole in the 4D Einstein-Gauss-Bonnet gravity, *Eur. Phys. J. C* 80 (11) (2020) 1–13.
- [5] M. Guo, P.C. Li, Innermost stable circular orbit and shadow of the 4 D Einstein-Gauss-Bonnet black hole, *Eur. Phys. J. C* 80 (6) (2020) 1–8.
- [6] P.G. Fernandes, Charged black holes in AdS spaces in 4D Einstein Gauss-Bonnet gravity, *Phys. Lett. B* (2020) 135468.
- [7] S.W. Hawking, D.N. Page, Thermodynamics of black holes in anti-de Sitter space, *Commun. Math. Phys.* 87 (4) (1983) 577–588.
- [8] M. Henneaux, C. Teitelboim, The cosmological constant as a canonical variable, *Phys. Lett. B* 143 (4–6) (1984) 415–420.
- [9] A. Ghosh, C. Bhamidipati, Contact geometry and thermodynamics of black holes in AdS spacetimes, *Phys. Rev. D* 100 (12) (2019) 126020.
- [10] D. Astefanesei, R.B. Mann, R. Rojas, Hairy black hole chemistry, *J. High Energy Phys.* 2019 (11) (2019) 43.
- [11] R. Kannan, M. Vogelsberger, C. Pfrommer, R. Weinberger, V. Springel, L. Hernquist, et al., Increasing black hole feedback-induced quenching with anisotropic thermal conduction, *Astrophys. J. Lett.* 837 (2) (2017) L18.
- [12] G.M. Voit, M. Donahue, G.L. Bryan, M. McDonald, Regulation of star formation in giant galaxies by precipitation, feedback and conduction, *Nature* 519 (7542) (2015) 203–206.
- [13] S.W. Wei, Y.X. Liu, Extended thermodynamics and microstructures of four-dimensional charged Gauss-Bonnet black hole in AdS space, *Phys. Rev. D* 101 (10) (2020) 104018.
- [14] P.G. Fernandes, Charged black holes in AdS spaces in 4D Einstein Gauss-Bonnet gravity, *Phys. Lett. B* (2020) 135468.
- [15] M. Cvetič, S.I. Nojiri, S.D. Odintsov, Black hole thermodynamics and negative entropy in de Sitter and anti-de Sitter Einstein-Gauss-Bonnet gravity, *Nucl. Phys. B* 628 (1–2) (2002) 295–330.
- [16] S.J. Yang, J.J. Wan, J. Chen, J. Yang, Y.Q. Wang, Weak cosmic censorship conjecture for the novel 4D charged Einstein-Gauss-Bonnet black hole with test scalar field and particle, arXiv preprint, arXiv:2004.07934, 2020.
- [17] S.W. Wei, Y.X. Liu, Extended thermodynamics and microstructures of four-dimensional charged Gauss-Bonnet black hole in AdS space, *Phys. Rev. D* 101 (10) (2020) 104018.
- [18] R.G. Cai, L.M. Cao, N. Ohta, Black holes in gravity with conformal anomaly and logarithmic term in black hole entropy, *J. High Energy Phys.* 2010 (4) (2010) 82.
- [19] K.A. Meissner, Black-hole entropy in loop quantum gravity, *Class. Quantum Gravity* 21 (22) (2004) 5245.
- [20] D. Kubizňák, R.B. Mann, M. Teo, Black hole chemistry: thermodynamics with Lambda, *Class. Quantum Gravity* 34 (6) (2017) 063001.
- [21] H. Culetu, On a regular charged black hole with a nonlinear electric source, *Int. J. Theor. Phys.* 54 (8) (2015) 2855–2863.

---

## 4.11 Contribution IV : Trou noir 4D Einstein-Gauss-Bonnet chargé : solutions de vide, Horizon de Cauchy, thermodynamique.

### Résumé

Dans cet article, nous étudions le trou noir d'Einstein-Gauss-Bonnet à quatre dimensions. Les variables thermodynamiques et les équations d'état des trous noirs sont obtenues en fonction d'une nouvelle paramétrisation. Nous discutons d'une formulation de l'équation de van der Waals en étudiant les effets de la température sur les isothermes P-V. Nous montrons l'influence de l'horizon de Cauchy sur les paramètres thermodynamiques. Nous prouvons par différentes méthodes, que l'entropie du trou noir obéit à la loi des aires (plus un terme logarithmique qui dépend du couplage de Gauss-Bonnet  $\alpha$ ). Nous proposons une signification physique pour la correction logarithmique de la loi des aires. Ce travail peut être étendu au trou noir EGB extrême, dans ce cas, nous étudions la relation entre le facteur de compressibilité, la chaleur spécifique et le couplage  $\alpha$ . EGB-AdS.



# Charged 4D Einstein–Gauss–Bonnet black hole: Vacuum solutions, Cauchy horizon, thermodynamics

M. Bousder<sup>a,\*</sup>, K. El Bourakadi<sup>b</sup>, M. Bennai<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> LPHE-MS Laboratory, Department of physics, Faculty of Science, Mohammed V University in Rabat, Rabat, Morocco

<sup>b</sup> Physics and Quantum Technology team, LPMC, Ben M'sik Faculty of Sciences, Hassan II de Casablanca University, Morocco

## ARTICLE INFO

### Article history:

Received 18 April 2021

Received in revised form 25 May 2021

Accepted 26 May 2021

### Keywords:

Black hole

Entropy

Einstein–Gauss–Bonnet gravity

Van der Waals fluid

## ABSTRACT

In this paper, we investigate the four-dimensional Einstein–Gauss–Bonnet black hole. The thermodynamic variables and equations of state of black holes are obtained in terms of a new parameterization. We discuss a formulation of the van der Waals equation by studying the effects of the temperature on  $P - V$  isotherms. We show the influence of the Cauchy horizon on the thermodynamic parameters. We prove by different methods, that the black hole entropy obey area law (plus logarithmic term that depends on the Gauss–Bonnet coupling  $\alpha$ ). We propose a physical meaning for the logarithmic correction to the area law. This work can be extended to the extremal EGB black hole, in that case, we study the relationship between compressibility factor, specific heat and the coupling  $\alpha$ .

© 2021 Elsevier B.V. All rights reserved.

## 1. Introduction

The study of Einstein–Gauss–Bonnet gravity (EGB) is very important as it offers a more comprehensive set up to explore many gravity-related conceptual problems. EGB gravity is a major, higher dimensional generalization of Einstein gravity. Lovelock's theorem [1], suggests that Einstein's general relativity is a theory of gravity that respects various aspects such as spacetime is 4-dimensional. Recently, Glavan and Lin in Ref. [2], introduced a general covariant modified theory of gravity in 4-spacetime dimensions which propagates only the massless graviton and also bypasses Lovelock's theorem. The case of 4-dimensional EGB gravity is noteworthy because the Euler–Gauss Bonnet term becomes a topological invariant, whereby the equations of motion and the gravitational dynamics are not affected. The intriguing idea of D. Glavan and C. Lin was to multiply the GB term by the factor  $1/(D - 4)$  before taking the limit  $D \rightarrow 4$ . This technique offers a new 4D gravitational theory with only two dynamical degrees of freedom [3]. For example, it might solve the singularity problem of black holes [4]. Indeed, by considering 4D EGB gravity in the static and spherically symmetric black holes, Boulware and Deser [5,6] obtained the first black hole solution in the 5D EGB gravity, and since then steady attentions have

been devoted to black hole solutions, including their formation, stability, and thermodynamics [7]. The shadows of spherically symmetric [8,9], spinning [10,11], and charged EGB black holes in AdS space [12,13], and other works devoted to novel 4D EGB black holes have been published. However, it was shown in several papers that perhaps the idea of the limit  $D \rightarrow 4$  is not clearly defined, and several ideas have been proposed to remedy this inconsistency, as well as the absence of proper action [14–17]. There are, indeed, some correct limits or procedures, that can lead to the same black hole solutions as naive 4D Gauss–Bonnet gravity, and different constructions were proposed, [18,19]. In  $D \geq 5$  spacetime dimensions, BH-solutions were obtained for vacuum [20], anti-de Sitter (AdS) spaces [21], and attempts to build rotating solutions have taken place [22,23] in the context of Einstein–Gauss–Bonnet model [24]. This paper aims to show the influence of the Cauchy horizon by presenting the 4D EGB black hole solution in terms of new parameterization. We use the unit system where  $c = G_N = 4\pi\epsilon_0 = \hbar = k_B = 1$ .

This work is organized as follows. In Section 2, we study the solution for the charged EGB black hole in maximally symmetric vacuum and for a free photon orbiting around along a null geodesic. Section 3, discusses the black-hole equation of state and deals with the thermodynamic parameters, starting with the van der Waals equation to the black hole first law. In Section 4, the discussion is extended to Extremal EGB black hole and we introduce the compressibility for the extremal case. We conclude in the final section.

\* Corresponding author.

E-mail addresses: [mostafa.bousder@um5.ac.ma](mailto:mostafa.bousder@um5.ac.ma) (M. Bousder), [kelbourakadi@yahoo.com](mailto:kelbourakadi@yahoo.com) (K. El Bourakadi), [mohamed.bennai@univh2c.ma](mailto:mohamed.bennai@univh2c.ma) (M. Bennai).

## 2. Charged Einstein-Gauss-Bonnet black hole

### 2.1. Event horizon and Cauchy horizon

Consider now the charged Einstein-Gauss-Bonnet theory in  $D$ -dimensions with a negative cosmological constant [4,25]

$$I = \frac{1}{16\pi} \int d^D x \left( R - 2\Lambda + \frac{\alpha}{D-4} G - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right), \quad (2.1)$$

where  $\alpha$  is a finite non-vanishing dimensionless Gauss-Bonnet coupling have dimensions of  $[length]^2$ , that represent ultraviolet (UV) corrections to Einstein theory,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  is the Maxwell tensor and  $l$  is the AdS radius and we define the Gauss-Bonnet invariant as

$$G = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (2.2)$$

$$\Lambda = -\frac{(D-1)(D-2)}{2l^2}, \quad (2.3)$$

by solving the field equation we use the following spherically symmetric,

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (2.4)$$

where  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$  denotes the line element of the unit 3-sphere. Taking the limit  $D \rightarrow 4$ , we obtain the exact solution in closed form

$$f(r) = -g_{00} = 1 + \frac{r^2}{2\alpha} \left( 1 \pm \sqrt{1 + 4\alpha \left( \frac{2M}{r^3} - \frac{Q^2}{r^4} - \frac{1}{l^2} \right)} \right), \quad (2.5)$$

where  $2M$  is the Schwarzschild radius. This last solution could be obtained directly from the derivation done in [26]. The extremal case correspond to  $f(r_+) = 0$ . In the limit  $\alpha \rightarrow 0$ , we can only recover the Reissner-Nordström-AdS solution. In the limit  $r \rightarrow \infty$  with vanishing black hole charge, we asymptotically obtain the GR Schwarzschild solution. The event horizon in spacetime can be located by solving the metric equation:  $f(r) = 0$ . The solutions show that the event horizon is located at:

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2 - \alpha}. \quad (2.6)$$

We notice that the solution behaves like the Reissner-Nordström (RN) solution. The black hole event horizon is the largest root of the equation above,  $r_+$  is the black hole horizon radius [2]. However, the radius  $r_-$  represents the Cauchy horizon radius. To explain the presence of two horizon  $r_{\pm}$ , the mass of black holes can be rewritten as

$$M^2 = \Gamma + Q^2 + \alpha, \quad (2.7)$$

where  $\Gamma = (r_+ - r_-)^2/2 \geq 0$ , when  $\Gamma = 0$ , we get an extremal EGB black hole. For a non-charged EGB black hole, we find  $M = (r_+ - r_-)/\sqrt{2}$ . When a black hole has a horizon  $r_+ > r_-$ , the black hole is locally stable. Most papers on EGB black hole do not indicate the importance of the Cauchy horizon  $r_-$ . Our aim in this paper is show the influence of the Cauchy horizon radius  $r_-$  on the black hole thermodynamics, for that, it is necessary to study the term  $\Gamma$ .

### 2.2. Maximally symmetric vacuum solutions

We choose the gauge field, the electric potentials  $\Phi_E$  arising from the black hole charge  $Q$ , at the horizon  $r_+$  given by

$$A_\mu dx^\mu = \Phi_E(r) dt \quad \text{and} \quad \Phi_E(r) = Q/r. \quad (2.8)$$

Note that while the scalar field possesses a harmonic time dependence, the gauge and metric fields are static and the energy-momentum tensor will be static and spherically symmetric. The event horizon satisfies the inequality  $r_+ \geq M$ , which implies  $\Phi_E(r_+) \leq \Phi_E(M)$ . The cosmological constant is considered to be dynamical, giving pressure [27]. We define the pressure [28] of the cosmological constant Eq. (2.3) for  $D \rightarrow 4$

$$P = -M_p^2 \Lambda \text{ or } 8\pi P = 3l^{-2} = -\Lambda, \quad (2.9)$$

where  $M_p^2 = \frac{c^4}{8\pi G} \approx 2 \times 10^{18} [\text{GeV}] \equiv 1$ . In the limit of vanishing mass and charge one obtains two AdS solutions with effective cosmological constants. The metric function can be rewritten as

$$f(\chi) = 1 + \chi \pm \sqrt{(1 + \Phi_\Lambda) \chi^2 - (4\Phi_G + 2\Phi_E^2) \chi}, \quad (2.10)$$

where  $\Phi_G = -M/r$  is the gravitational potential at a distance. On this basis, we introduce a new order parameter

$\chi(r) = r^2/2\alpha$  (ex:  $\Gamma = \alpha\chi(r_+ - r_-)$ ), which makes it easier to calculate the thermodynamics of black holes. We introduce a new potential

$$\Phi_\Lambda = \frac{4\alpha}{3} \Lambda. \quad (2.11)$$

When  $\Phi_\Lambda = -1$ , the vacuum energy becomes zero. Indeed, we notice that  $\Phi_\Lambda = -2/\chi(l)$  describes the EGB vacuum. Later we will write all the formulas in term of  $(\chi, \Phi_\Lambda)$ . For AdS space, when increasing  $\alpha\Lambda$  we expect that the corresponding  $\Phi_\Lambda$  should decrease. We notice that, in the limit  $\alpha \rightarrow 0$  or GR limit ( $\Phi_G = \Phi_E = 0$ ), there exist two vacuum solutions:

$$f_-(r) = 1 + \frac{\chi(r)}{\chi(l)}, \quad (2.12)$$

$$f_+(r) = 1 - \frac{\chi(r)}{\chi(l)} + 2\chi(r). \quad (2.13)$$

Thus, the  $f_-$  branch corresponds to the standard solution, whereas the  $f_+$  branch reduces to the ds/AdS with an additional term ( $2\chi(r)$ ). The metric reduce to the Reissner-Nordström black hole solution. In maximally symmetric vacuum solutions, there are two branches of solutions for the effective cosmological constant [4]

$$\Lambda_{eff}^{\pm} = \frac{2\Lambda}{1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\alpha}{3}\Lambda}}, \quad (2.14)$$

If  $\alpha < 0$  the solution is still an AdS space, if  $\alpha > 0$  the solution is a de Sitter space, [4]. By evaluating the solution Eq. (2.14), we get

$$\Phi_{eff}^{\pm} = \frac{2\Phi_\Lambda}{1 \pm \sqrt{1 + \Phi_\Lambda}}, \quad (2.15)$$

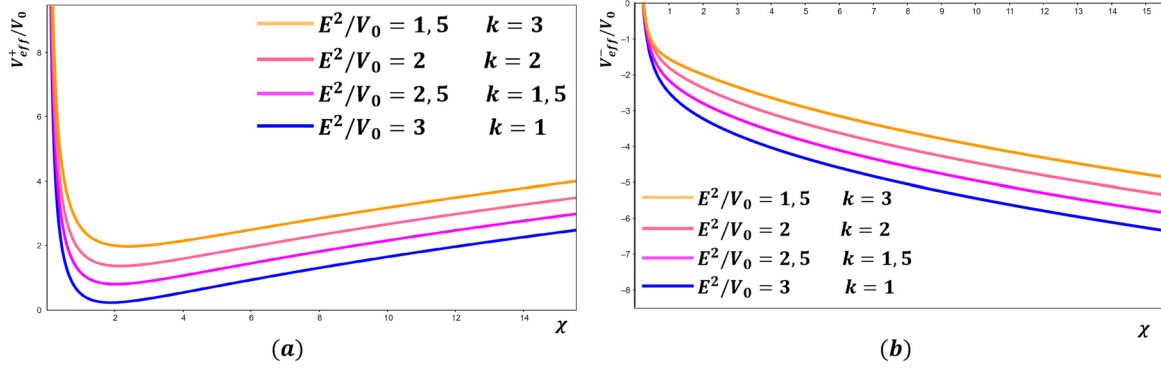
these two solutions coincide when  $\Phi_\Lambda = -1$ . The potential of the cosmological constant must obey  $\Phi_\Lambda \geq -1$ . Therefore, the Gauss-Bonnet coupling develops a minimum  $\alpha_{\min} = -3/4\Lambda$  at  $\Phi_{\Lambda \min} = -1$ . In the absence of a cosmological constant or  $\Phi_\Lambda = 0$ , one obtains the event horizon of EGB black hole Eq. (2.6).

### 2.3. Free photon and null geodesics solutions

Next, we analyse the evolution of a free photon orbiting around the equatorial orbit of the black hole along a null geodesic, by the affine parameter  $\lambda$ . The photon Lagrangian for this system can be expressed as [29]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ -f(r)\dot{t}^2 + \frac{1}{f(r)}\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \right], \quad (2.16)$$

with  $\dot{\phantom{x}} = \partial r/\partial \lambda$ . We get the generalized momenta  $p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . We obtain the energy  $E(= \text{constant})$  and



**Fig. 1.** Figure showing how the effective potential is plotted as a function of  $\chi$  described by Eq. (2.19). (a) and (b) denotes the (+) and (-) part of  $f(\chi)$  Eq. (2.10), respectively. Parameters are chosen as  $\Phi_A = 0, 25$  and  $k = (4\Phi_G + 2\Phi_E^2)$ .

orbital angular momentum  $L (= \text{constant})$  of the photon, which reads

$$E = -p_t = f(r)\dot{t}^2 \text{ and } L = p_\phi = r^2\dot{\phi}, \quad (2.17)$$

with  $p_r = \dot{r}/f(r)$ . The Hamiltonian the moving free photon can be expressed as

$$\mathcal{H} = 2(p_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{L}) = -E\dot{t} + \frac{\dot{r}^2}{f(r)} + L\dot{\phi} = 0. \quad (2.18)$$

Solving Eqs. (2.17), we easily get the equation of radial motion  $\dot{r}^2 = -V_{\text{eff}}$ , where the effective potential in terms of  $\chi$ -parameterization is

$$V_{\text{eff}}^\pm/V_0 = f(\chi)/\chi - E^2/V_0, \quad (2.19)$$

where  $V_0 = L^2/2\alpha$ . We analyse the behaviour of the effective potential vs the parameter  $\chi$  plots shown in Fig. 1

When the angular momentum of the free photon gets bigger in comparison to its energy, the effects of  $\alpha$  and  $Q$  become weak [12]. The circular unstable photon sphere satisfies the condition

$$V_{\text{eff}} = \partial_\chi V_{\text{eff}} = 0 \text{ and } \partial_\chi^2 V_{\text{eff}} < 0, \quad (2.20)$$

where  $\partial_\chi = \partial/\partial\chi$ . It is immediately clear that the radius of the photon sphere  $r_{ps}$  can be derived he above conditions by solving  $\partial_\chi V_{\text{eff}} = 0$ , one immediately obtains  $2f(\chi_{ps}) - \sqrt{2\alpha}\chi_{ps}\partial_\chi f(\chi_{ps}) = 0$ , where  $\chi_{ps} = r_{ps}^2/2\alpha$ . Secondly, solving  $V_{\text{eff}} = 0$  for a spherically symmetric black hole, the shadow radius is  $R_S = \sqrt{2\alpha}\chi_{ps}/f(\chi_{ps})$  [30]. From Eq. (2.10), we can obtain the following expression

$$R_S = \sqrt{2\alpha} \left( \frac{1 + \chi_{ps}}{\chi_{ps}} \pm \sqrt{1 + \Phi_A - \frac{2}{\chi_{ps}}(2\Phi_G + \Phi_E^2)} \right)^{-1/2}, \quad (2.21)$$

As an example, if  $\Phi_A = -1$  and  $2\Phi_G = -\Phi_E^2$ , in the GR limit ( $\alpha \rightarrow 0$ ), the radius of the shadow can be very well approximated by  $R_S \sim \sqrt{2\alpha}$ , that satisfies  $\chi(R_S) = 1$ . Within this limit, the surface of the shadow becomes

$$A_S \sim 8\pi\alpha. \quad (2.22)$$

To reach a maximum value of the shadow surface, using Eq. (2.6), we find  $A_{S_{\text{max}}} = 8\pi(M^2 - Q^2)$ , which means that for  $M = Q$ , we obtain a black hole without shadow. In the following, we would like to express logarithmic term of EGB entropy by  $A_S$ .

### 3. Thermodynamics of 4D EGB black hole

#### 3.1. The van der Waals equation

We first compute the mass, temperature and entropy of the EGB black hole [31], in order to analyse the validity of the second law of black hole thermodynamics. We can express the ADM mass  $M$  of the black hole in terms of  $r_+$ , by solving  $f(r) = 0$  for  $r = r_+$  resulting in

$$M = \frac{l^{-2}r_+^4 + r_+^2 + Q^2 + \alpha}{2r_+}. \quad (3.1)$$

The temperature of the black hole corresponds to the tangent of the Newton's potential at the event horizon [31]. The Hawking temperature  $T = \beta^{-1}$  of the black hole can be calculated as [4]

$$T = \frac{1}{4\pi} f'(r_+) = \frac{3l^{-2}r_+^4 + r_+^2 - Q^2 - \alpha}{8\pi\alpha r_+ + 4\pi r_+^3}. \quad (3.2)$$

One recovers the temperature of the Schwarzschild black hole in the limit of ( $\alpha = 0, Q = 0$  and  $l^{-2} = 0$ ), in which cas  $T = 1/4\pi r_+$  as expected. For  $Q > 0, T > T_{\text{Sch}}$ , where  $T_{\text{Sch}}$  is the temperature of Schwarzschild black hole. On the contrary, at  $Q < 0, T < T_{\text{Sch}}$ . We can express the Eq. (3.2) as

$$\frac{1 + \chi_+}{v\chi_+} T = \left( P + \frac{1}{16\pi\alpha\chi_+} \right) + \frac{\Gamma - M^2}{4\pi\alpha\chi_+ v^2}, \quad (3.3)$$

where  $\chi_+ = \chi(r_+) = A/8\pi\alpha$ . We introduce the thermodynamic volume  $V = (\partial M/\partial P)_{S,Q,\dots} = 4\pi r_+^3/3$ . We use the specific volume  $v = 2r_+ l_p^2 \equiv 2r_+ = 6V/N > 0$ , where  $l_p = \sqrt{\hbar G/c^3} \equiv 1$  is the Planck length and  $N = A/l_p^2$  is the number of states associated to the horizon [32]. Considering the transformations [33], the van der Waals equation can be obtained as

$$P_\chi = P + \frac{1}{16\pi\alpha\chi_+}, \quad a_\chi = \frac{M^2 - \Gamma}{4\pi\alpha\chi_+} \text{ and } b_\chi = \frac{v}{1 + \chi_+}. \quad (3.4)$$

The change of the black hole parameters are  $(P_\chi, a_\chi, b_\chi)$ . In this case, the equation of state takes the form

$$\left( P_\chi + \frac{a_\chi}{v^2} \right) (v - b_\chi) = T, \quad (3.5)$$

where the parameter  $a_\chi$  is the average attraction, which measures the attraction between particles. The parameter  $b_\chi$  corresponds to the volume of fluid of particles. From the last equation, by taking  $\Gamma = M^2$  and  $\chi_+ \sim 0$ , i.e. non-charged EGB black hole, we can easily recover the ideal gas equation  $P_\chi v = T$ . We notice that there is an appearance of term  $\Gamma$  in  $a_\chi$ . If  $\Gamma$  is very low, the attraction between particles will be very large. One concludes that  $\Gamma$  maps the interacting gas into an ideal gas of

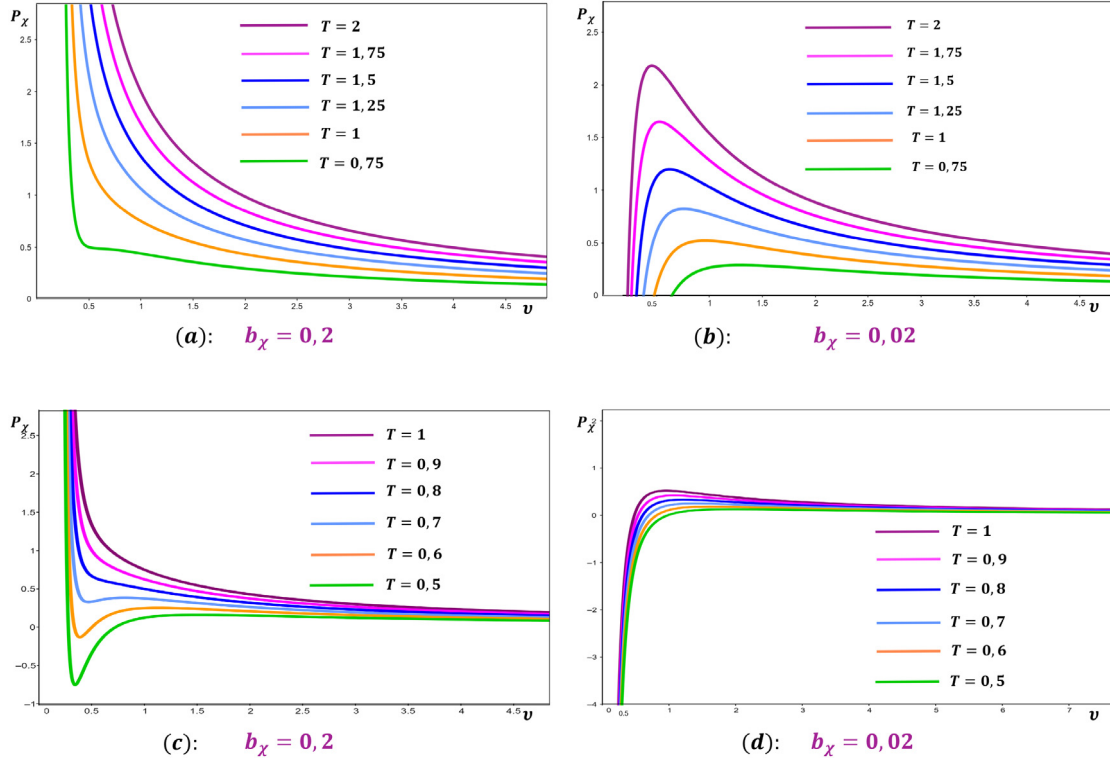


Fig. 2.  $P_\chi - \nu$  isotherms of the van der Waals equation of state, with fixed parameters  $a_\chi = 0,5$  and  $b_\chi = 0,2$  (left)  $b_\chi = 0,02$  (right).

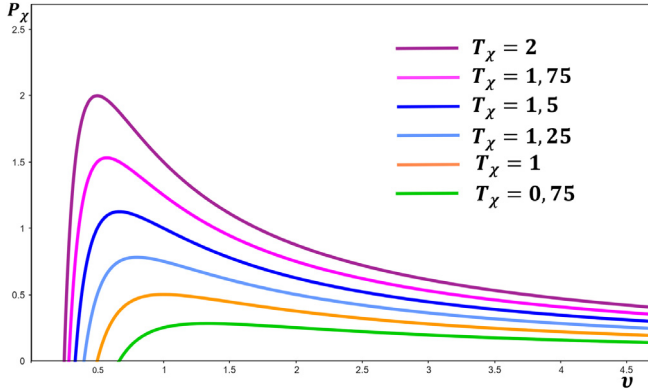


Fig. 3.  $P_\chi - \nu$  isotherms of the van der Waals equation of state.

point particles. The attraction corresponds to  $a_\chi > 0$  i.e.  $\Gamma < M^2$ . To show the effects of the temperature on  $P_\chi - \nu$  isotherms of the van der Waals equation of state, we have plotted Fig. 2.

For the choice of the transformations

$$P_\chi = P + \frac{1}{16\pi\alpha\chi_+}, \quad a_\chi = \frac{M^2 - \Gamma}{4\pi\alpha\chi_+} \quad \text{and} \quad T_\chi = \frac{1 + \chi_+}{\chi_+} T, \quad (3.6)$$

we get the equation of state Fig. 3

$$\left(P_\chi + \frac{a_\chi}{\nu^2}\right)\nu = T_\chi. \quad (3.7)$$

It is interesting that the existence of a first-order phase transition between small and large black hole corresponding to a liquid and gas phase transition that automatically terminates at a critical point  $(P_c, \nu_c, T_c)$  eventually satisfied  $(\partial_\nu P_\chi)_{T_c} = (\partial_\nu^2 P_\chi)_{T_c} = 0$  [33] (see Fig. 3).

We shall now describe the Joule–Thomson effect, which is entirely related to the difference between a real gas and an ideal

gas, especially the attraction and repulsion of the van der Waals forces. The Joule–Thomson coefficient  $\mu$  is defined as

$$\mu = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_M. \quad (3.8)$$

For an ideal gas,  $\mu$  is always equal to zero. The Joule–Thomson inversion temperature is the temperature for which the coefficient  $\mu$  changes sign. It is easy to see that the system will experience a cooling (heating) process with  $\mu > 0$  ( $\mu < 0$ ), caused by the change in pressure is always negative during expansion. Let us consider the case Eq. (3.5):

$$\mu_\chi = \frac{\chi_+}{1 + \chi_+} \nu. \quad (3.9)$$

If  $\mu_\chi > 0$ , which means  $\chi_+ > 0$  or  $\chi_+ < -1$ , then the gas temperature is below the inversion temperature. The interval  $-1 < \chi_+ < 0$ , implies that  $\mu_\chi < 0$ , then the gas temperature is above the inversion temperature. If we keep the specific volume fixed and vary the coefficient  $\chi_+$  near  $-1$  or  $0$ , then there is a inversion temperature similar to that of the phase transition. It can be explicitly verified that the inversion temperature corresponding to the evolution of the parameter  $\chi_+$ . Consider, for instance Eq. (3.7), it is immediately clear that  $\mu_\chi = \nu > 0$ . Then the gas temperature is above the inversion temperature. The important issue that requires attention is the role of  $\chi_+$  appears in Eq. (3.5), and not in Eq. (3.7). For that, in what follows we will study only the case Eq. (3.5). To study the effect of  $\chi_+$ , we have plotted Fig. 4.

To develop the average attraction  $a_\chi$  of the new parametric expressions  $(\chi_+, \Phi_\Lambda)$ , it is helpful to first review the evolution of the thermodynamic variables, based on Ref. [27].

$$a_\chi/4 = \left(P_\chi + \frac{3}{4} \frac{\Phi_\Lambda}{8\pi\alpha}\right)(M^2 - \Gamma), \quad (3.10)$$

this result is similar to that of the van der Waals equation. We imagine a scenario where the equation above represents a van

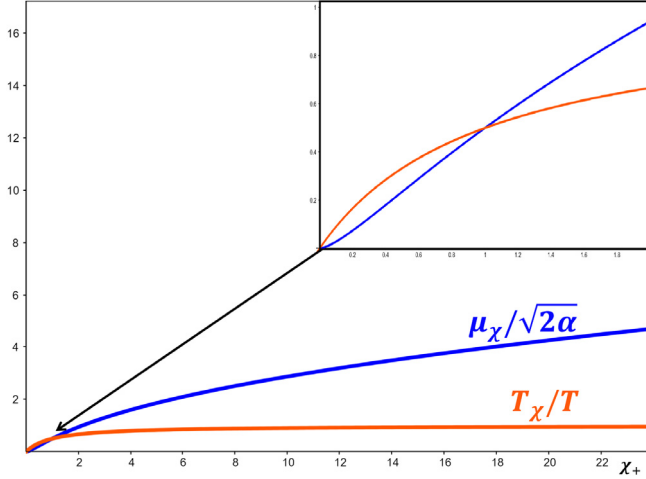


Fig. 4.  $\mu_\chi/\sqrt{2\alpha}$  and  $T_\chi/T$  vs  $\chi_+$ .

der Waals equation. For this, one must have  $8\pi\alpha \sim M^2$ . Then we can impose a new temperature  $T_a \propto a_\chi/4$ , which leaves only. Two-parameter equation of state induced by the transformations Eq. (3.4) of Ref. [27], which is the expression of van der Waals equation for the temperature  $T_a$ . The term  $M^2$  can be shown to be a specific volume and  $\Gamma$  can be a new volume excluded. Whereas, in asymptotic limit  $4P_\chi \ll \frac{3\Phi_A}{8\pi\alpha}$ , it is then clear that

$$\Gamma \sim M^2 - \frac{a_\chi}{4P_\chi}. \quad (3.11)$$

*Solution without particles:* First, let us investigate the ADM mass Eq. (3.1) given by

$$\Gamma = \left(M - \frac{\nu}{2}\right)^2 - \frac{NP\nu^2}{6}. \quad (3.12)$$

Indeed, if we compute  $N = 0$  (black hole without particles), in the limit  $\nu \ll 2M$ , the ideal gas equation can be done by comparing Eqs. (3.11), (3.12), at this point, we get  $T_{ideal} \equiv a_\chi/4M \sim P_\chi\nu$ . These results can be generalized to  $N \neq 0$  and without asymptotic limit. Consequently, Eq. (3.10) take the form of the van der Waals equation. This analysis, leads us to find,  $T_a \equiv a_\chi/4M$ .

### 3.2. The black hole first law

For EGB–AdS black hole, the mass of a black hole is more appropriately interpreted as enthalpy  $H$ . The black hole first law reads [28]

$$dM = \Phi_E dQ + Ad\alpha + TdS + VdP, \quad (3.13)$$

where  $A \equiv 4\pi r_+^2$  is the area of the event horizon of the black hole. The parameters  $V$  and  $A$  are the conjugate quantities of the pressure  $P$  and GB coupling parameter  $\alpha$ , respectively [34]. If we fix  $P$  and  $\alpha$  Eq. (3.13), the Bekenstein–Hawking formula is then given by

$$S = \int \frac{dM}{T} = \frac{A}{4} + 2\pi\alpha \log \frac{A}{A_0}, \quad (3.14)$$

where  $A_0$  is some constant with units of area. An important justification for this new logarithmic term in Eq. (3.14), came from the Eq. (2.22), on using shadow surface, yields  $2\pi\alpha = A_S/4$ , which means that the logarithmic term (added by EGB gravity) depends on the shadow of black hole. We can express the EGB black hole entropy in terms of the shadow surface, one gets

$$S = \frac{A}{4} + \frac{A_S}{4} \log \frac{A}{A_0}. \quad (3.15)$$

This investigation reveals a potential relationship between the entropy and the black hole shadow. These results can be generalized to the entropy of the 4D Hayward–EGB black hole [35]. Further in the GR limit ( $\alpha \rightarrow 0$ ), we get the entropy obeying area law (ex: the Schwarzschild black hole) [36], the same if  $A \rightarrow A_0$ . Eq. (2.7) is based on the fact that, as thermodynamic systems, black holes must obey the first law of thermodynamics

$$dM = \frac{Q}{M}dQ + \frac{1}{2M}d\alpha + \frac{1}{2M}d\Gamma, \quad (3.16)$$

where  $\Phi_E(r_+) \leq \Phi_E(M)$ . We now turn to determining the entropy of the resulting black hole by another method. This can be done by comparing Eqs. (3.13), (3.16), we find

$$dS = \frac{d\Gamma}{2MT}, \quad (3.17)$$

which results into the following relationship (3.11):

$$\frac{d\Gamma}{2MT} \sim \frac{dM}{T} - \frac{da_\chi}{8P_\chi MT} + \frac{a_\chi dP_\chi}{8P_\chi^2 MT}, \quad (3.18)$$

which turns into the expression of the entropy of 4D EGB black hole Eq. (3.14), when we fix  $P_\chi$  and  $a_\chi$  Eq. (3.4):  $S \sim \int dM/T$ . This means that  $\Gamma$  is a generator of the black hole entropy. Therefore, since  $\Gamma$  depends on the Cauchy horizon radius, this shows that  $r_-$  has a great effect on the thermodynamic parameters.

### 4. Extremal EGB black hole

We now describe as examples, the extremal EGB black hole. If we fix  $P$  and  $\alpha$  and by comparing Eq. (3.13) with Eq. (3.16), we indicate that

$$\Phi_E = \frac{Q}{M}, \quad \frac{d\Gamma}{2M} = TdS - PdV. \quad (4.1)$$

Next, we consider that  $\alpha$  is fixed. As is well known that, the electric permittivity  $\epsilon_S = (\partial Q/\partial \Phi_E)_S = M$  is relevant for stability in the grand canonical ensemble. Regarding this equation, we get an extremal black hole solution with degenerate horizon given by

$$r_+ = r_- = M = \sqrt{Q^2 + \alpha}. \quad (4.2)$$

In this case, the Hawking temperature reduces to

$$T = \frac{2Pr_+^3}{2\alpha + r_+^2} \quad (4.3)$$

The entropy for this black hole can be obtained as

$$S = \int \frac{P}{T} dV = \frac{A}{4} + 2\pi\alpha \log \frac{A}{A_0} \sim 2\pi\alpha \log \left[ \chi_+ \frac{1 + \chi_+}{\chi_0} \right], \quad (4.4)$$

where  $A_0$  and  $\chi_0$  are some constants with units of area. This expression coincides with the entropy formula in [34] (we have showed this entropy by a different method).  $P$  and  $\alpha$  are constant for an extremal black hole. This entropy led the study of black holes as a thermodynamical system. From Eq. (3.13), we get the equation of state for the extremal EGB black hole as follows

$$P\nu = \frac{1 + \chi_+}{\chi_+} T, \quad (4.5)$$

where  $\chi_+ = \chi(r_+) \neq 0$ . The extremal EGB black hole behaves like an ideal gas if  $\chi_+ = c$ . To determine the thermodynamic similarity class of different substances we use compressibility factor  $Z = P\nu/T > 0$  [37] in terms of the specific volume

$$Z = 1 + \frac{1}{\chi_+}, \quad (4.6)$$

we analyse in detail the thermodynamics and phase transitions for exact. The black holes *with*  $\chi_+ < 0$ , the compressibility factor

is  $Z < 1$ , this shows that there is a great interaction between the gas particles. The pressures are lower, the particles are free to move. In this case, the attractive forces dominate. In GR limits ( $\alpha = 0$ ):  $\chi_+ \rightarrow \infty$ , the compressibility factor is  $Z = 1$ , this shows that the gas behaves like an ideal gas. In this case, Eq. (4.5) represents the equation of state in the horizon. For  $\chi_+ > 0$ , the compressibility factor is  $Z > 1$ , the particles collide more often. This allows the repulsive forces between molecules to have a noticeable effect. It is then clear that the relation between  $Z$  and  $\alpha$  is expressed as  $Z - 1 = 2\alpha/r_+^2$ , this means that the parameter  $\alpha$  increased the repulsion between the particles. Therefore, this  $\alpha$  maps the ideal gas into a noninteracting gas. From Eqs. (4.3), we calculate the specific heat of 4D extremal EGB black hole by

$$C = \frac{\partial M}{\partial T} = \frac{3\Phi_A}{4\pi T} \frac{\chi_+^2}{3 + \chi_+}.$$

The thermodynamical systems is the locally stable if  $C > 0$  (or  $\chi_+ > -3$ ), and is unstable if  $C < 0$  (or  $\chi_+ < -3$ ). Making use of the explicit case  $\chi_+ > -3$ , signifies that the extremal black holes are thermodynamically stable against perturbations in the region. For a thermodynamical systems, The behaviour of specific heat leads to find the regions of local and global stability of the 4D extremal EGB black hole. The diverging specific heat from  $C < 0$  to  $C > 0$ , implies the existence of second-order phase transition [35].

## 5. Conclusion

First, we have considered the four-dimensional charged Einstein–Gauss–Bonnet theory. We also showed that the thermodynamic processes of black holes in AdS, can be modelled by the parameter  $\chi_+$ . The Joule–Thomson effect is entirely related to the difference between a real and an ideal gas, especially the attraction and repulsion of the van der Waals forces. To study the influence of the Cauchy horizon radius, we have introduced the parameter  $\Gamma$ , which depends at the same time on the Cauchy horizon radius and the event horizon radius. In other words, the term  $\Gamma$  maps the interacting gas into an ideal gas of point particles. It makes the attraction decrease between particles. The results showed that all the thermodynamic quantities depend on the GB coupling parameter. The coexistence curve in the  $P_\chi - \nu$  diagram was shown, which is similar to the van der Waals fluid. After considering the GR limit for the evolution of a free photon orbiting along a null geodesic, we found the shadow surface. They satisfy the simple relation  $A_S \sim 8\pi\alpha$ . Hence, we have obtained a relationship between the shadow surface and the black hole entropy. Finally, we investigated 4D extremal EGB black hole as a working substance and studied the entropy, the equation of state, compressibility and the diverging specific heat.

## Declaration of competing interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

## Funding

No funding was received for this work.

## Intellectual property

We confirm that we have given due consideration to the protection of intellectual property associated with this work and that there are no impediments to publication, including the timing of publication, with respect to intellectual property. In so doing we confirm that we have followed the regulations of our institutions concerning intellectual property.

## References

- [1] D. Lovelock, The Einstein tensor and its generalizations, *J. Math. Phys.* 12 (3) (1971) 498–501.
- [2] D. Glavan, C. Lin, Einstein–Gauss–Bonnet gravity in four-dimensional spacetime, *Phys. Rev. Lett.* 124 (8) (2020) 081301.
- [3] Katsuki Aoki, Mohammad Ali Gorji, Shinji Mukohyama, A consistent theory of  $D \rightarrow 4$  Einstein–Gauss–Bonnet gravity, *Phys. Lett. B* 810 (2020) 135843.
- [4] P.G. Fernandes, Charged black holes in AdS spaces in 4D Einstein–Gauss–Bonnet gravity, *Phys. Lett. B* (2020) 135468.
- [5] David G. Boulware, Stanley Deser, String-generated gravity models, *Phys. Rev. Lett.* 55 (24) (1985) 2656.
- [6] James T. Wheeler, Symmetric solutions to the Gauss–Bonnet extended Einstein equations, *Nuclear Phys. B* 268 (3–4) (1986) 737–746.
- [7] S.A.H. Mansoori, Thermodynamic geometry of the novel 4-D Gauss–Bonnet AdS black hole, *Phys. Dark Universe* 31 (2021) 100776.
- [8] Minyong Guo, Peng-Cheng Li, Innermost stable circular orbit and shadow of the 4 D Einstein–Gauss–Bonnet black hole, *Eur. Phys. J. C* 80 (6) (2020) 1–8.
- [9] R.A. Konoplya, A.F. Zinhailo, Quasinormal modes, stability and shadows of a black hole in the 4D Einstein–Gauss–Bonnet gravity, *Eur. Phys. J. C* 80 (11) (2020) 1–13.
- [10] Shao-Wen Wei, Yu-Xiao Liu, Testing the nature of Gauss–Bonnet gravity by four-dimensional rotating black hole shadow, 2020, arXiv preprint arXiv:2003.07769.
- [11] Rahul Kumar, Sushant G. Ghosh, Rotating black holes in the novel 4D Einstein–Gauss–Bonnet gravity, 2020, arXiv preprint arXiv:2003.08927.
- [12] B.E. Panah, K. Jafarzade, S.H. Hendi, Charged 4D Einstein–Gauss–Bonnet–AdS black holes: Shadow, energy emission, deflection angle and heat engine, *Nuclear Phys. B* (2020) 115269.
- [13] M. Bousder, M. Bennai, Particle–antiparticle in 4D charged Einstein–Gauss–Bonnet black hole, *Phys. Lett. B* (2021) 136343.
- [14] J. Bonifacio, K. Hinterbichler, L.A. Johnson, Amplitudes and 4D Gauss–Bonnet theory, *Phys. Rev. D* 102 (2) (2020) 024029.
- [15] M. Gürses, T.Ç. Şişman, B. Tekin, Comment on “Einstein–Gauss–Bonnet gravity in four-dimensional spacetime”, *Phys. Rev. Lett.* 125 (14) (2020) 149001.
- [16] D. Wang, D. Mota, 4D Gauss–Bonnet gravity: Cosmological constraints, H0 tension and large scale structure, *Phys. Dark Universe* (2021) 100813.
- [17] C.H. Wu, Y.P. Hu, H. Xu, Hawking evaporation of Einstein–Gauss–Bonnet AdS black holes in  $D \geq 4$  dimensions, *Eur. Phys. J. C* 81 (4) (2021) 1–9.
- [18] R.A. Hennigar, D. Kubizňák, R.B. Mann, C. Pollack, On taking the  $D \rightarrow 4$  limit of Gauss–Bonnet gravity: theory and solutions, *J. High Energy Phys.* 2020 (7) (2020) 1–18.
- [19] H. Lü, Y. Pang, Horndeski gravity as  $D \rightarrow 4$  limit of Gauss–Bonnet, *Phys. Lett. B* 809 (2020) 135717.
- [20] David G. Boulware, Stanley Deser, String-generated gravity models, *Phys. Rev. Lett.* 55 (24) (1985) 2656.
- [21] Rong-Gen Cai, Gauss–Bonnet black holes in AdS spaces, *Phys. Rev. D* 65 (8) (2002) 084014.
- [22] Yves Brihaye, Eugen Radu, Five-dimensional rotating black holes in Einstein–Gauss–Bonnet theory, *Phys. Lett. B* 661 (2–3) (2008) 167–174.
- [23] Andrés Anabalón, et al., Kerr–Schild ansatz in Einstein–Gauss–Bonnet gravity: an exact vacuum solution in five dimensions, *Class. Quantum Gravity* 26 (6) (2009) 065002.
- [24] Rong-Gen Cai, Gauss–Bonnet black holes in AdS spaces, *Phys. Rev. D* 65 (8) (2002) 084014.
- [25] S.W. Wei, Y.X. Liu, Extended thermodynamics and microstructures of four-dimensional charged Gauss–Bonnet black hole in AdS space, *Phys. Rev. D* 101 (10) (2020) 104018.
- [26] M. Cvetič, S.I. Nojiri, S.D. Odintsov, Black hole thermodynamics and negative entropy in de Sitter and anti-de Sitter Einstein–Gauss–Bonnet gravity, *Nuclear Phys. B* 628 (1–2) (2002) 295–330.
- [27] A. Ghosh, C. Bhamidipati, Contact geometry and thermodynamics of black holes in AdS spacetimes, *Phys. Rev. D* 100 (12) (2019) 126020.
- [28] S.W. Wei, Y.X. Liu, Extended thermodynamics and microstructures of four-dimensional charged Gauss–Bonnet black hole in AdS space, *Phys. Rev. D* 101 (10) (2020) 104018.
- [29] S.W. Wei, Y.X. Liu, Photon orbits and thermodynamic phase transition of d-dimensional charged AdS black holes, *Phys. Rev. D* 97 (10) (2018) 104027.
- [30] K. Jusufi, Quasinormal modes of black holes surrounded by dark matter and their connection with the shadow radius, *Phys. Rev. D* 101 (8) (2020) 084055.
- [31] F. Capela, P.G. Tinyakov, Black hole thermodynamics and massive gravity, *J. High Energy Phys.* 2011 (4) (2011) 42.
- [32] D. Kubizňák, R.B. Mann, M. Teo, Black hole chemistry: thermodynamics with Lambda, *Class. Quantum Gravity* 34 (6) (2017) 063001.
- [33] A. Rajagopal, D. Kubizňák, R.B. Mann, Van der Waals black hole, *Phys. Lett. B* 737 (2014) 277–279.

- [34] P.G. Fernandes, Charged black holes in AdS spaces in 4D Einstein Gauss–Bonnet gravity, *Phys. Lett. B* (2020) 135468.
- [35] A. Kumar, S.G. Ghosh, Hayward black holes in the novel 4 D Einstein–Gauss–Bonnet gravity, 2020, arXiv preprint [arXiv:2004.01131](https://arxiv.org/abs/2004.01131).
- [36] A. Kumar, D.V. Singh, S.G. Ghosh, Hayward black holes in Einstein–Gauss–Bonnet gravity, *Ann. Phys.* 419 (2020) 168214.
- [37] D. Astefanesei, R.B. Mann, R. Rojas, Hairy black hole chemistry, *J. High Energy Phys.* 2019 (11) (2019) 43.

---

## 4.12 Contribution IV : Trou noir 4D Einstein-Gauss-Bonnet chargé : solutions de vide, Horizon de Cauchy, thermodynamique.

### Résumé

Nous étudions l'évolution de l'Univers aux premiers stades, nous discutons également du préchauffage dans le cadre de l'inflation hybride du monde brane en fixant des conditions sur les constantes de couplage et  $g$  pour fabrication de particules. Considérant la phase entre le moment où les échelles CMB observables ont traversé l'horizon et le temps présent, nous écrivons les paramètres de réchauffage et de préchauffage  $N_{re}$ ,  $T_{re}$  et  $N_{pre}$  en termes d'indice spectral scalaire  $n_s$ , et prouvons que, contrairement au cas de réchauffage, la durée de préchauffage ne dépend pas des valeurs de l'équation d'état. Nous appliquons l'approximation du roulement lent dans la limite d'énergie élevée pour contraindre les paramètres du potentiel hybride à terme  $D$ .

# Preheating and Reheating Constraints in Supersymmetric Braneworld Inflation<sup>\*</sup>

K. El Bourakadi<sup>1a</sup>, M. Bousder<sup>2</sup>, Z. Sakhi<sup>1,2</sup> and M. Bennai<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Physics and Quantum Technology Team, LPMC, Ben M'sik Faculty of Sciences, Casablanca Hassan II University, Morocco

<sup>2</sup> LPHE-MS Laboratory department of Physics, Faculty of Science, Mohammed V University in Rabat, Morocco

Received: date / Revised version: date

**Abstract.** We study the evolution of the Universe at early stages, we discuss also preheating in the framework of hybrid braneworld inflation by setting conditions on the coupling constants  $\lambda$  and  $g$  for effective production of  $\chi$ -particles. Considering the phase between the time observable CMB scales crossed the horizon and the present time, we write reheating and preheating parameters  $N_{re}$ ,  $T_{re}$  and  $N_{pre}$  in terms of the scalar spectral index  $n_s$ , and prove that, unlike the reheating case, the preheating duration does not depend on the values of the equation of state  $\omega^*$ . We apply the slow-roll approximation in the high energy limit to constrain the parameters of D-term hybrid potential. We show also that some inflationary parameters, in particular, the spectral index  $n_s$  demand that the potential parameter  $\alpha$  is bounded as  $\alpha \geq 1$  to be consistent with *Planck*'s data, while the ratio  $r$  is in agreement with observation for  $\alpha \leq 1$  considering high inflationary e-folds. We also propose an investigation of the brane tension effect on the reheating temperature. Comparing our results to recent CMB measurements, we study preheating and reheating parameters  $N_{re}$ ,  $T_{re}$  and  $N_{pre}$  in the Hybrid D-term inflation model in the range  $0.8 \leq \alpha \leq 1.1$  and conclude that  $T_{re}$  and  $N_{re}$  require  $\alpha \leq 1$ , while for  $N_{pre}$  the condition  $\alpha \leq 0.9$  must be satisfied, to be compatible with *Planck*'s results.

**PACS.** PACS-key describing text of that key – PACS-key describing text of that key

## 1 Introduction

After the brane-world inflation, preheating and reheating are considered to be the stages at which elementary particles start populating the universe that leads to matter creation at later times. In the brane-world inflationary preheating scenario the four-dimensional Einstein equations deviate from the standard cosmology [1]. By the proposal of a certain type of compactification, the standard model particles are considered to be on the three-dimensional brane, which makes gravitons propagate in the extra dimension. This model indicates that we are living on the three-brane with a positive tension embedded in five-dimensional anti-de Sitter bulk, which appears in the Friedmann equation as an energy called brane tension. The modifications due to additional dimension which contain the brane may have implications on the reheating process. In the early stage of reheating "preheating" [2], the slow decreasing amplitude of inflaton field coupled to  $\chi$ -field, results a strong amplification of massless  $\chi$ -particles through the non-perturbative decay of the inflaton [3].

While the single-field inflation models cannot reproduce the observational data because they suffer from some fine-tuning problems on the parameters of their potentials, such as the mass and the coupling constants [7], the hybrid inflationary model produces the observed temperature fluctuations in the CMB, and show a great capacity to reproduce the experimental values of all inflationary perturbation spectrum [8]. The difficulties of the single-field inflation are also overcome in the context of hybrid supersymmetric (SUSY) models [13], since they agree with the observed power spectrum of density perturbations very well [7].

In the context of supersymmetric theories, the D-term inflation looks more promising since it avoids the problem associated with the inflaton mass [10], and can be successfully implemented in the framework of supergravity theories [11]. However, this type of inflation always ends with the formation of cosmic strings [12]. The cosmic strings were

<sup>\*</sup> Preheating and Reheating Constraints in Supersymmetric Braneworld Inflation

<sup>a</sup> Present address: k.elbourakadi@yahoo.com

analyzed in the braneworld model, and it's been shown that Fayet–Iliopoulos (FI) term  $\xi$  is responsible for this phenomenon [46]. As a consequence the choice of the right value of (FI) term will be very important to avoid the formation of the cosmic strings dominated in the conventional D-term inflation models [11].

After the supersymmetric inflation, a period that converts the stored energy density in the inflaton to the thermal bath (a plasma of relativistic particles) occurs [18]. This transition is known as reheating. During this period, ordinary matter is produced as a result of inflaton field energy loss. The scenario of reheating occurs when the inflaton oscillates around the minimum of its potential and decay into new particles at the radiation dominated period [19]. Along with this simple canonical reheating model, a short phase include the non-perturbative processes [19] called preheating occurs. This scenario refers to the initial stage of the reheating. Preheating is characterized by an exponential instability, this instability corresponds to an exponential growth of occupation number of quantum fluctuation, which is described by Mathieu equation. There are no direct cosmological observables that are traceable to the phases that follow inflation. However, one can consider the phase between the time observable CMB scales crossed the horizon and the present time, as a way to achieve information using indirect limits.

Since we are interested in pre/reheating stages after SUSY brane inflation, we are concerned to study the two phases durations quantified in terms of  $e$ -folds numbers  $N_{pre}$  and  $N_{re}$ , in a certain interval of the equation of state (EoS)  $\omega^*$ . It is obvious that the parameter  $\omega^*$  have values larger than  $-1/3$ , which is needed to end inflation [22]. This parameter is also assumed to be smaller than  $+1$  to not violate causality. On the other hand, its value at the beginning of the radiation dominated era must be  $+1/3$ . Knowing that reheating start at  $\omega^* \geq 0$  [24], therefore we will consider this parameter with the choice of different values in that interval. We also calculate preheating  $e$ -folds as a function of reheating temperature and analyze its effects on preheating, and use the expressions for the effective D-term potential to constrain pre/reheating parameters  $(T_{re}, N_{re}, N_{pre})$ , then compare the results with the observations using the recently released *Planck* – 2018 data [26]. Knowing that the FI term was considered as a problem of D-term since the CMB requires  $\xi^{\frac{1}{2}} \leq O(10^{15} - 10^{16}) \text{ GeV}$  [27]. Below this range, the formation of cosmic strings becomes more important. We conclude that the highest value possible of reheating temperature  $T_{re}$  can favor a much higher  $e$ -folds number of preheating. Considering the D-term hybrid model we study the pre/reheating durations, and take into account values of FI term that doesn't lead to cosmic strings formation.

Our paper is organized as follows: In the next section, we review the hybrid braneworld inflation and reheating, and briefly discuss the preheating mechanism in hybrid brane inflation. In section 3 we derive the reheating temperature and duration, we also derive the preheating duration in section 4, finally, we constrain the parameters of D-term SUSY model and the pre/reheating  $e$ -folds along with reheating temperature in section 5. The last section is devoted to a conclusion.

## 2 Braneworld Hybrid inflation and preheating

### 2.1 Formalisme of Braneworld inflation

According to the braneworld model, the  $(d+1)$ -dimensional anti-de Sitter space-time which we call the bulk, contains all the observable universe embedded in 3-brane along with gravity and particle fields. *RSII* model is an inflation scenario of the braneworld scenario with  $d = 4$ . This means that 3-brane is embedded in the five-dimensional *AdS* space [28], as a consequence the action of the field equation in *RSII* model are written as [30]:

$$S_{RSII} = \int dx^5 \sqrt{-g_5} \left[ \frac{M_5^3}{2} R_b + A_5 \right] + \int dx^4 \sqrt{-g_4} L_{brane}, \quad (1)$$

where

$$L_{brane} = L_{matter} + \tilde{T} = \frac{1}{2} |\partial\Phi|^2 - V + \tilde{T}. \quad (2)$$

$R_b$  is the bulk spacetime scalar curvature, with the bulk metric  $g_5$ ,  $M_5$  and  $A_5$  are the five-dimensional Planck mass and the cosmological constant. The second term of *RSII* action is the Lagrangian density of ordinary matter on the brane,  $V$  is the scalar potential, and  $\tilde{T}$  is the brane tension. In this cosmological scenario, the metric projected onto the brane is a spatially flat Friedmann–Robertson–Walker model, the Friedmann equation on the brane has the generalized form [29,30]:

$$H^2 = \frac{8\pi}{3M_p^2} \rho \left( 1 + \frac{\rho}{2\tilde{T}} \right). \quad (3)$$

During inflation and preheating the term  $\rho$  is expected to play important role in the evolution of the Universe. In order to have the inflationary dynamical equations leading to an accelerated expansion in the high energy limit, we approximate  $\rho \gg 2\dot{T}$ , this condition holds until the end of preheating, considering the slow-roll conditions the energy density can be approximated by  $\rho \approx V$ , and the Friedmann equation finally takes the form :

$$H^2 = \frac{4\pi}{3M_p^2} \frac{V^2}{\dot{T}}. \quad (4)$$

The inflaton field confined on the brane satisfies the Klein-Gordon equation given by

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (5)$$

with  $V'(\phi) = \partial V/\partial\phi$ , we may also write the spectral index  $n_s$  and the ratio of tensor to scalar perturbations  $r$  as functions of the slow-roll parameters  $\epsilon_k$  and  $\eta_k$  :

$$n_s = -6\epsilon + 2\eta + 1, \quad r \simeq 26\epsilon_k. \quad (6)$$

The previous equations are very important tools of the braneworld RSII model which have been used to solve some of the standard model problems.

## 2.2 Hybrid inflation and reheating

One reason to be interested in hybrid inflation is that it can be implemented in supersymmetric theories [32]. The hybrid inflation model which we study is defined by the potential [33]

$$V(\phi, \sigma) = \frac{1}{4\lambda} (M^2 - \lambda\sigma^2)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{2}g^2\phi^2\sigma^2. \quad (7)$$

The scalar fields  $\phi$  and  $\sigma$  have masses  $m$  and  $M$ , the potential has the symmetry  $\sigma \leftrightarrow -\sigma$  at large values of the field  $\phi$ . The potential has a maximum at  $\phi = \sigma = 0$ , when the field  $\phi$  value is small, and a global minimum at  $\phi = 0, \sigma = \sigma_0 = M/\sqrt{\lambda}$ , where the symmetry is broken. The equations of motion for the homogeneous fields are

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -(m^2 + g^2\sigma^2)\phi, \quad (8)$$

$$\ddot{\sigma} + 3H\dot{\sigma} = (M^2 - g^2\sigma^2 - \lambda\sigma^2)\phi, \quad (9)$$

with  $\dot{\phi} \equiv \partial\phi/\partial t$  and  $\ddot{\phi} \equiv \partial^2\phi/\partial t^2$ , at large  $\phi$  the motion begins, the effective mass of the  $\sigma$  field  $m_\sigma^2 = g^2\phi^2 + M^2$  get also large. After the slow-roll of the field  $\phi$ , and just before the end of inflation,  $\phi$  acquires the critical value  $\phi_c = M/g$ , and the field fluctuate at the minimum of the potential  $\sigma = 0$ , then the symmetry breaking phase transition caused by the massless  $\sigma$  field fluctuations ends inflation. This transition could either end instantaneously if the mass  $M$  of the  $\sigma$  field is larger than the rate of expansion  $H$ , or if  $M$  is of the order of  $H$ , the transition will be very slow which will make inflation have a few more  $e$ -folds after the phase transition [34].

At  $\sigma = 0$  the potential of inflaton field became  $V(\phi) = M^4/4\lambda + m^2\phi^2/2$ , considering the case where  $m^2 \ll g^2M^2/\lambda$  the vacuum energy will dominate and the Hubble constant at the time of the phase transition will be given by

$$H_0^2 = \frac{\pi}{3\lambda^2} \frac{M^8}{M_p^2} \frac{1}{\dot{T}}, \quad (10)$$

the slow-roll condition imposes the fact that we should neglect  $\ddot{\phi}$  in the inflaton equation of motion, to finally have  $3H\dot{\phi} \simeq -V'(\phi)$ . When the scalar field  $\phi$  decreases below  $\phi_c = M/g$  it prepares for the process of reheating.

**Reheating Mechanism** Reheating is an important phase that describes the production of standard model particles, it occurs at the end of preheating with a decay rate  $\Gamma = \Gamma(\phi \rightarrow \chi\chi) + \Gamma(\phi \rightarrow \psi\psi)$ , this means that the inflaton field  $\phi$  can decay into bosons and fermions particles. Using Eq.(3) and the expression of the energy density at the reheating epoch with  $\rho = \rho_{re}$  [24]:

$$\rho_{re} = \frac{\pi^2}{30} g_{re} T_{re}^4, \quad (11)$$

one should find

$$H^2 \simeq \frac{4\pi^5}{3 \times 30^2} \frac{g_{re}^2 T_{re}^8}{M_p^2 \tilde{T}}. \tag{12}$$

We introduce the ratio between the Hubble parameter at phase transition and the reheating phase given by

$$\left(\frac{H_0}{H}\right)^2 = \frac{30^2}{4\pi^4 \lambda^2} \frac{M^8}{g_{re}^2 T_{re}^8}, \tag{13}$$

this ratio depends inversely on the reheating temperature, knowing that according to [35] the minimal possible value of this temperature is bounded by ( $T_{\min, re} \geq 4MeV$ ).

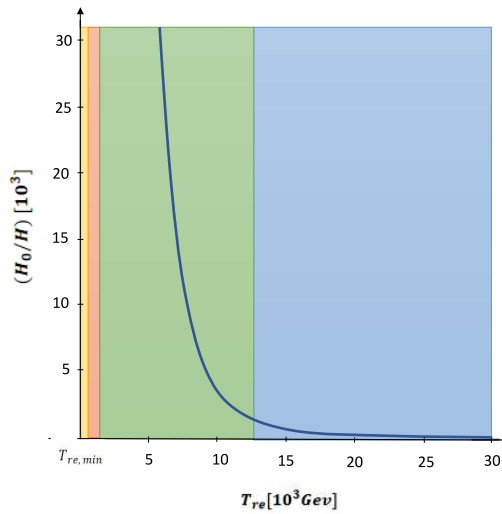


Fig. 1: Variation of the ratio  $H_0/H$  as a function of reheating temperature, the yellow region is ruled out by *BBN* (big bang nucleosynthesis) and the orange region represents  $100GeV$  of electroweak scale, the light green region represents the inflation at phase transition dominance, and light blue is the region of the reheating phase dominance.

Fig.1 shows that the ratio  $H_0/H$  decreases very rapidly when we consider higher temperatures of reheating. In other words, we can say that for lower values of reheating temperature where  $H_0/H > 1$ , the difference between  $H_0$  and  $H$  is considerably high, which means that the effect of inflation at the phase transition is dominant in this region. At  $H_0/H \leq 1$  we realize that reheating effects became much more important, for that reason we suppose that this condition is accompanied by a new type of expansion where the comoving Hubble scale  $(aH)^{-1}$  begin to increase, which demand a certain number of  $e$ -foldings, that we will prove to be a total duration written as  $N_{pre} + f(\omega^*)N_{re}$  in the remain sections.

In the next section, we will focus on the stage of preheating that we study by introducing a  $\chi$  field coupled to the potential  $V(\phi, \sigma)$ .

### 2.3 Preheating in hybrid inflation

Particle production occurs when the fields oscillate around their minimum. The behavior of the fields after the end of inflation could describe the explosive preheating with a production of  $\phi$  and  $\sigma$  particles in hybrid inflation. However, we will study the particle production behavior considering an extra scalar field  $\chi$ , coupled to both of the previous fields [36]

$$V(\chi) = \frac{1}{2}l_1^2\phi^2\chi^2 + \frac{1}{2}l_2^2\sigma^2\chi^2. \tag{14}$$

The explosive production of  $\chi$  particles occurs for certain values of  $l_1$  and  $l_2$ . The equations of motion of quantum fluctuations for  $\chi$  field is given by

$$\ddot{\chi}_k + 3H\dot{\chi}_k + \left(\frac{k^2}{a^2} + m_\chi^2\right)\chi_k = 0, \quad (15)$$

the effective masse is written as

$$m_\chi^2 = l_1^2\phi^2 + l_2^2\sigma^2. \quad (16)$$

The rate of expansion of the universe plays an important role in ending the parametric resonance regime, particle production will be ended by the redshifted modes with momentum  $k/a$  that will fall out of the resonance band because of the expansion. According to the previous section, there are two fundamental frequencies near the minimum of the potential:  $\nu_\sigma = \sqrt{2}M$  and  $\nu_\phi = gM/\sqrt{\lambda}$ , that corresponds to the two critical values of the fields  $\sigma$  and  $\phi$ :  $\sigma_0 = M/\sqrt{\lambda}$  and  $\phi_c = M/g$ . Particle production in  $\chi$  field that interacts with the fields  $\phi$  and  $\sigma$  given by Eq.(15) require an amplified fluctuations of this field around  $\phi = 0$  while  $\sigma \simeq \sigma_0$ , this demand that the induced mass from the symmetry breaking field  $\sigma$  must be much smaller than the corresponding oscillations from the  $\phi$  field  $l_1^2\phi^2 \gg l_2^2\sigma_0^2$ , which at the beginning of preheating corresponds to

$$\lambda l_1^2 \gg g^2 l_2^2. \quad (17)$$

Using the solution of the Klein-Gordon equation given by  $\phi(t) \approx \Phi(t)\sin(\nu_\phi t)$ , we can determine that the explosive production of  $\chi$ -particles will end when the amplitude of oscillations of the  $\phi$  field becomes  $\Phi(t) < (l_2 g)/l_1 \sqrt{\lambda}$ .

The Mathieu equation which corresponds to the preheating process is given by

$$\chi_k'' + (A(k) - 2q\cos(2z))\chi_k = 0, \quad (18)$$

with  $'' \equiv \partial^2/\partial z^2$  is the derivative with respect to the parameter  $z$ , and

$$A_k = \frac{k^2}{av_\phi^2} + 2q, \quad (19)$$

$$q = \frac{l_1^2 M^2 \Phi^2}{g^2 v_\phi^2} \frac{1}{4}. \quad (20)$$

Taking into consideration the previous condition Eq.(17), at the initial step of preheating, Eq.(20) must satisfy  $q_0 = (\lambda l_1^2/g^4) \Phi^2/4$ , for  $\lambda \gg g^2$  we can find natural values of the parameter  $l_1$  that ensure  $q_0 \gg 1$ . This will allow an explosive production of  $\chi$ -particles, which mean we are in the broad parametric resonance region, that corresponds to an exponential growth of quantum fluctuations occupation numbers, given by [3]

$$n_k(t) \simeq \exp(2\mu_k z), \quad (21)$$

with a frequency  $\omega_k$

$$\omega_k^2 = \frac{k^2}{a^2} + l_1^2\phi^2. \quad (22)$$

The choice of natural values of couplings will cause an efficient particle production process, because of a large value of the growth parameter  $\mu_k$ . Furthermore, for a large range of couplings we will enter the region of stochastic resonance [3].

### 3 Reheating duration and temperature

The reheating duration can be extracted considering the phase between the time observable CMB scales crossed the horizon and the present time. Deferents eras occurred throughout this length of time that can be described by the two following equations [24]:

$$\frac{k}{a_0 H_0} = \frac{a_k}{a_{end}} \frac{a_{end}}{a_{re}} \frac{a_{re}}{a_{eq}} \frac{a_{eq} H_{eq}}{a_0 H_0} \frac{H_k}{H_{eq}}, \quad (23)$$

the pivot scale for a specific experiment is parametrized by  $k$  [24],  $N_k$  is the  $e$ -folds of the inflation era,  $N_{pre}$ ,  $N_{re}$  and  $N_{RD}$  respectively correspond to the reheating and radiation-domination era durations. Reheating is characterized by

the temperature  $T_{re}$  and a number of  $e$ -folds  $N_{re} = \ln(a_{re}/a_{end})$  occurring before the radiation dominated era. Using  $\rho \propto a^{-3(1+\omega^*)}$ , the reheating epoch is described by :

$$\frac{\rho_{end}}{\rho_{re}} = \left(\frac{a_{end}}{a_{re}}\right)^{-3(1+\omega^*)}, \quad (24)$$

where  $\rho_{end}$  and  $a_{end}$  corresponds to the end of inflation and  $\rho_{re}$  and  $a_{re}$  corresponds to the end of reheating. As a result :

$$N_{re} = \frac{1}{3(1+\omega^*)} \ln\left(\frac{\rho_{end}}{\rho_{re}}\right), \quad (25)$$

knowing that  $\rho_{end} = (6/5)V_{end}$  in the Braneworld case [25] and  $\rho_{re} = (\pi^2/30)g_{re}T_{re}^4$ , we replace every energy density by its expression to obtain :

$$N_{re} = \frac{1}{3(1+\omega^*)} \ln\left(\frac{6}{5} \frac{30V_{end}}{\pi^2 g_{re} T_{re}^4}\right). \quad (26)$$

The reheating temperature and the actual temperature are related as [22] :

$$T_{re} = T_0 \left(\frac{a_0}{a_{eq}}\right) e^{N_{RD}} \left(\frac{43}{11g_{re}}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad (27)$$

using the following expression in the previous equation :

$$\frac{a_0}{a_{eq}} = \frac{a_0 H_k}{k} e^{-N_k} e^{-N_{re}} e^{-N_{RD}}, \quad (28)$$

gives the result

$$N_{re} = \frac{4}{1-3\omega^*} \left[ -\frac{1}{4} \ln\left(\frac{36}{\pi^2 g_{re}}\right) - \frac{1}{3} \ln\left(\frac{11g_{re}}{43}\right) - \ln\left(\frac{k}{a_0 T_0}\right) - \ln\left(\frac{V_{end}^{\frac{1}{4}}}{H_k}\right) - N_k \right], \quad (29)$$

it is important to notice that the reheating duration is not defined in the value of the equation of state  $\omega^* = 1/3$ . We can simplify the previous expression considering  $g_{re} \approx 200$  for the Braneworld case [25] and the pivot scale  $0.05 Mpc$  [24], and other numerical values From [26] :  $M_{pl} = 2.435 \times 10^{18} GeV$ ,  $a_0 = 1$ ,  $T_0 = 2.725 K$  :

$$N_{re} = \frac{4}{1-3\omega^*} \left[ 6.61 - \ln\left(\frac{V_{end}^{\frac{1}{4}}}{H_k}\right) - N_k \right]. \quad (30)$$

The estimation for  $N_{re}$  is not accessible for  $\omega^* = 1/3$ . Note that inconsistency in  $N_{re}$  exists for this case because we define the beginning of radiation dominance when  $\omega^*$  reaches  $1/3$ .

From Eqs. (27), (28) we obtain

$$T_{re} = \left(\frac{43}{11g_{re}}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{a_0 T_0}{k}\right) H_k e^{-N_k} e^{-N_{re}}, \quad (31)$$

using the previous equation with Eq.(26), we can find the reheating temperature as

$$T_{re} = \left[ \left(\frac{43}{11g_{re}}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{a_0 T_0}{k} H_k e^{-N_k} \left(\frac{36V_{end}}{\pi^2 g_{re}}\right)^{\frac{-1}{3(1+\omega^*)}} \right]^{\frac{3(1+\omega^*)}{3\omega^*-1}}. \quad (32)$$

To find  $N_{re}$  and  $T_{re}$  for a particular model, one needs to compute  $N_k$ ,  $H_k$  and  $V_{end}$ .

## 4 Preheating duration

We start our computation for the preheating case, by introducing the ratio  $a_{pre}/a_{end}$  to Eq. (23) that corresponds to preheating scale factor. as result, we obtain an equation written in terms of  $e$ -folds

$$\ln \frac{k}{a_0 H_0} = -N_k - N_{pre} - N_{re} + \ln \frac{a_{re}}{a_0} + \ln \frac{H_k}{H_0}, \quad (33)$$

where  $N_{pre} \equiv \ln(a_{pre}/a_{end})$  is the number of  $e$ -folds between the end of inflation and the end of preheating. Assuming that no entropy production took place after the completion of reheating, one can write [22,23]

$$\frac{a_{re}}{a_0} = \frac{T_0}{T_{re}} \left( \frac{43}{11g_{re}} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (34)$$

where  $T_0$  is the current temperature of the Universe. Using Eq. (24) and the expression of reheating density energy  $\rho_{re} = (\pi^2/30)g_{re}T_{re}^4$ , we can determine an expression given by:

$$\begin{aligned} N_{tot} &= \frac{1}{f(\omega^*)} N_{pre} + N_{re}, \\ &= \frac{1}{f(\omega^*)} \left[ -\ln \left( \frac{k}{a_0 T_0} \right) - \frac{1}{3} \ln \left( \frac{11g_{re}}{43} \right) - \frac{1}{4} \ln \left( \frac{36}{\pi^2 g_{re}} \right) - \frac{1}{4} \ln \left( \frac{V_{end}}{H_k^4} \right) - N_k \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

Eq. (35) can be reduced to

$$N_{pre} + f(\omega^*) N_{re} = \left[ 6.61 - \ln \left( \frac{V_{end}^{\frac{1}{4}}}{H_k} \right) - N_k \right], \quad (36)$$

here  $f(\omega^*) = (1 - 3\omega^*)/4$ , using Eq. 26, the final form of  $N_{pre}$  will be given as :

$$N_{pre} = \left[ 6.61 - \ln \left( \frac{V_{end}^{\frac{1}{4}}}{H_k} \right) - N_k \right] - \frac{1}{12} \frac{(1 - 3\omega^*)}{(1 + \omega^*)} \ln \left[ \frac{36 \cdot V_{end}}{\pi^2 g_{re} T_{re}^4} \right]. \quad (37)$$

According to [53,54], if reheating is instantaneous the temperature would be in the order of  $10^{14} GeV$ , taking into account this maximum reheating temperature, this condition favors a much higher  $e$ -folds number of preheating. Next we need to find the expressions of  $N_k, H_k$  and  $V_{end}$ , the tree parameters can be related to the scalar spectral index  $n_s$ , and they can be connected directly to a model of inflation, which means that we can use D-term model to study pre/reheating constraints in SUSY brane-world inflation.

## 5 Pre/Reheating constraints in supersymmetric braneworld inflation

Preheating and reheating are now parametrized by  $e$ -folds numbers  $N_{pre}$  and  $N_{re}$ , but we do not expect that both durations perform the same behavior. From Eqs. (30,36), we observe that pre/reheating are expressed as functions of tree parameters and a constant equation of state (EoS)  $\omega^*$ . For inflation to be ended the value of  $\omega^*$  should be larger than  $-1/3$ , in order to satisfy the condition of density energy dominance and preserve the causality,  $\omega^*$  must be smaller than 1. During reheating the (EoS) increased from 0 to  $1/3$ , this will attract attention to study pre/reheating durations as functions of (EoS)  $\omega^*$ , to test the effects of (EoS) parameter on both phases. Since  $N_k, H_k$  and  $V_{end}$  can be related to the scalar spectral index  $n_s$ , we can Therefore use the observational data to place constraints on the pre/reheating durations for the supersymmetric D-term brane inflation.

### 5.1 D-term hybrid inflation

D-term inflation was first proposed to solve the fine-tuning problem [47], the D-term require to introduce a U(1) symmetry with a Fayet-Iliopoulos (FI) term  $\xi$ , in order to have a broken supersymmetric D-term inflation [48]. The D-term Hybrid inflation was derived to the form [52]:

$$V = \frac{g^2 \xi^2}{2} \left( 1 + \alpha \ln \left( \frac{\lambda \phi^2}{\Lambda^2} \right) \right), \quad (38)$$

where  $\alpha = g^2/16\pi^2$  and  $\Lambda$  is a renormalization mass scale, considering that just before the end of inflation at  $\phi_{end}$ , inflation reached a critical value  $\phi = \phi_c$ , following the results of [8],  $\phi_c$  is given as

$$\phi_c = \frac{g}{\lambda} \sqrt{\xi},$$

On the other hand, in the high-energy limit ( $V \gg 2\tilde{T}$ ) the well-known slow-roll parameters [38] are given by  $\epsilon_k = (M_p^2 \tilde{T} V'^2) / (4\pi V^3)$  and  $\eta_k = (M_p^2 \tilde{T} V'') / (4\pi V^2)$ , where  $\epsilon_k \ll 1, \eta_k \ll 1$ . Assuming that  $g^2 \xi^2 / 4\tilde{T} \gg 1$  in Eq.(38), therefore  $g^2 \xi^2$  dominates and  $V'/V = \alpha/\phi_k$ . We calculate  $\epsilon_k$  and  $\eta_k$  as

$$\epsilon_k = \frac{\alpha^2}{4\pi} \frac{\tilde{T}}{g^2 \xi^2 / 2} \frac{M_p^2}{\phi_k^2}, \quad (39)$$

$$\eta_k = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{\tilde{T}}{g^2 \xi^2 / 2} \frac{M_p^2}{\phi_k^2}, \quad (40)$$

in order to constrain the parameters of the potential in Eq.(38), the expression of the scalar field at the end of inflation is obtained by solving the equation  $|\eta(\phi_{end})| = 1$  knowing that  $\eta \gg \epsilon$ ,

$$\phi_{end} = \frac{M_p \sqrt{\tilde{T}}}{4\pi^{\frac{3}{2}} \xi}. \quad (41)$$

Considering the condition  $\phi_c \geq \phi_{end}$ , we obtain

$$\tilde{T} \leq \frac{16\pi^3 g^2 \xi^3}{M_p^2 \lambda^2}, \quad (42)$$

based on Eq.(42) and the analysis in [9], it can be found that

$$\lambda^2 < 8\pi^2 \sqrt{3P_s(k)}, \quad (43)$$

$$\xi < \frac{\sqrt{3P_s(k)}}{8\pi} M_p^2, \quad (44)$$

$$\tilde{T} < \frac{g^2 (3P_s(k))^{3/2}}{32\lambda^2} M_p^4, \quad (45)$$

assuming that  $\alpha = g^2/16\pi^2$  is bounded by  $0.8 \leq \alpha \leq 1.1$ , and the power spectrum of the curvature perturbations is measured as  $P_s \simeq A_s = 2.196_{-0.06}^{+0.05} \times 10^{-9}$  from the recent Planck results [26], numerically we found

$$\lambda^2 \leq 0.08, \quad (46)$$

$$\xi \leq 1.9 \times 10^{31}, \quad (47)$$

$$\tilde{T} \leq \frac{7.02 \times 10^{61}}{\lambda^2} GeV^4. \quad (48)$$

The number of  $e$ -foldings  $N_k$  during inflation from the time when mode  $k$  leaves the horizon to the end of inflation can be obtained in the high-energy limit as

$$N_k \simeq \frac{4\pi}{M_p^2 \tilde{T}} \int_{\phi_{end}}^{\phi_k} \frac{V^2}{V'} d\phi, \quad (49)$$

which we can apply to the potential Eq.(38) considering that  $g^2 \xi^2$  dominates and  $V^2/V' = g^2 \xi^2 \phi_k / \alpha$ ,

$$N_k = \frac{4\pi}{\alpha \tilde{T} M_p^2} \frac{g^2 \xi^2}{2} (\phi_k^2 - \phi_{end}^2), \quad (50)$$

considering the approximation  $\phi_k \gg \phi_{end}$ , we obtain :

$$N_k = \frac{4\pi}{\alpha\tilde{T}} \frac{g^2\xi^2}{2} \frac{\phi_k^2}{M_p^2}, \quad (51)$$

from the previous equation, we can derive an expression for the inflaton field at the horizon crossing  $\phi_k$

$$\phi_k^2 = \frac{\alpha\tilde{T}M_p^2}{2\pi g^2\xi^2} N_k. \quad (52)$$

The scalar spectral index defined as [39]  $n_s - 1 = -6\epsilon_k + 2\eta_k$  can be used to find

$$\frac{M_p^2}{\phi_k^2} = \frac{2\pi g^2\xi^2/2}{\tilde{T}} \frac{(1 - n_s)}{\alpha(3\alpha - 1)}, \quad (53)$$

after replacing Eq.(53) in Eqs. (39), (40) and (49), one should get

$$\epsilon_k = \frac{\alpha(1 - n_s)}{2(3\alpha - 1)}, \quad (54)$$

$$\eta_k = \frac{(1 - n_s)}{2(3\alpha - 1)}, \quad (55)$$

$$N_k = \frac{2(3\alpha - 1)}{1 - n_s}. \quad (56)$$

Since the parameter  $r$  can be written as  $r \simeq 24\epsilon_k$ , we can explicit the dependence of parameter  $\alpha$  on inflationary observables, to perform this analysis we use

$$n_s - 1 = \frac{1 - 3\alpha}{N_k}, \quad (57)$$

$$r = \frac{12\alpha}{N_k}, \quad (58)$$

considering inflation  $e$ -folds in the range  $50 \leq N_k \leq 80$ , we selected the following values  $\tilde{T} \simeq 10^{58} GeV^4$ ,  $\xi \simeq 10^{30}$ ,  $0.8 \leq \alpha \leq 1.1$  and  $\lambda \simeq 0.08$  and plotted  $r$  as a function  $n_s$

Inflationary $e$ -folds $N_k$ ( $\alpha = 0.8$ )	$n_s$	$r$
50	0.972	0.19
60	0.976	0.16
70	0.980	0.13
80	0.982	0.12

Table 1: Braneworld-inflationary parameters  $n_s$  and  $r$  for  $50 < N_k \leq 80$  in the case of  $\alpha = 0.8$

Inflationary $e$ -folds $N_k$ ( $\alpha = 0.9$ )	$n_s$	$r$
50	0.966	0.21
60	0.971	0.18
70	0.975	0.15
80	0.978	0.13

Table 2: Braneworld-inflationary parameters  $n_s$  and  $r$  for  $50 < N_k \leq 80$  in the case of  $\alpha = 0.9$

Inflationary $e$ -folds $N_k$ ( $\alpha = 1$ )	$n_s$	$r$
50	0.960	0.24
60	0.966	0.20
70	0.971	0.17
80	0.975	0.15

Table 3: Braneworld-inflationary parameters  $n_s$  and  $r$  for  $50 < N_k \leq 80$  in the case of  $\alpha = 1$ 

Inflationary $e$ -folds $N_k$ ( $\alpha = 1.1$ )	$n_s$	$r$
50	0.954	0.26
60	0.961	0.22
70	0.967	0.18
80	0.971	0.16

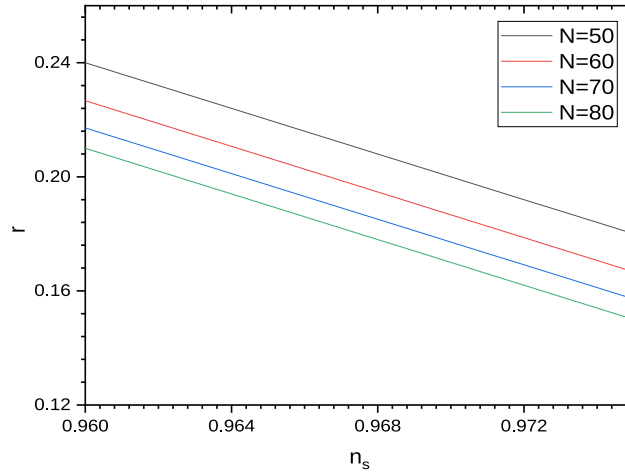
Table 4: Braneworld-inflationary parameters  $n_s$  and  $r$  for  $50 < N_k \leq 80$  in the case of  $\alpha = 1.1$ Fig. 2:  $r$  vs.  $n_s$  for D-term braneworld inflation.

Figure 2 shows that the parameter  $r$  is a decreasing function with respect to  $n_s$ . We observe that  $\alpha$  must be  $1 \leq \alpha \leq 1.1$  in order to have inflation  $e$ -folds with scalar spectral index  $n_s$  compatible with Planck's results. We note also that, the tensor to scalar ratio is in agreement with the observations for  $\alpha \leq 1$ , considering higher inflation  $e$ -folds number  $N_k \geq 70$ .

The quantum fluctuations of the scalar field lead also to fluctuations in the metric. In this way, one can define the amplitude of tensor perturbations as [37]

$$P_h(k) = \frac{64\pi}{M_p^2} \left( \frac{H}{2\pi} \right)^2 F^2(x), \quad (59)$$

where  $x = HM_p \sqrt{\frac{3}{4\pi T}}$  and  $F^2(x) = (\sqrt{1+x^2} - x^2 \sinh^{-1}(\frac{1}{x}))^{-1}$ . Note that in the high-energy limit ( $V \gg 2\tilde{T}$ ),  $F^2(x) \approx \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}\frac{V}{T}$ . Thus allowing

$$P_h(k) = \frac{24}{\pi M_p} H^3 \sqrt{\frac{3}{4\pi\tilde{T}}}. \quad (60)$$

The ratio of tensor to scalar perturbations  $r$  is given by

$$r = \frac{P_h(k)}{P_s(k)}, \quad (61)$$

the inflation parameter  $r$  can be written as  $r \simeq 24\epsilon_k$ . By using Eqs. (60,61), the expression of  $H_k$  is given by

$$H_k = \left( \pi M_p A_s \epsilon_k \sqrt{\frac{4\pi\tilde{T}}{3}} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (62)$$

at the pivot scale  $k = 0.05 Mpc^{-1}$ , the power spectrum amplitude measured by Planck is  $P_\xi \simeq A_s$ , with  $A_s = 2.196_{-0.06}^{+0.05} \times 10^{-9}$  [26]. The brane tension is considered of the order of  $10^{58} GeV$  [53]. Finally, for this model, we derive the following expression

$$H_k = \left( \pi M_p A_s \frac{\alpha(1-n_s)}{2(3\alpha-1)} \sqrt{\frac{4\pi\tilde{T}}{3}} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (63)$$

we can determine  $V_{end} = V(\phi_{end})$  using the expression of the scalar field at the end of inflation given by Eq.(41).

We previously constrain the value of brane tension, in that sense, we will study the effect of the brane tension  $\tilde{T}$  on reheating temperature  $T_{re}$ . In in the high energy limit  $\rho \gg 2\tilde{T}$ , Eq.(3) can be written as

$$H^2 = \frac{4\pi}{3M_p^2} \frac{\rho^2}{\tilde{T}}, \quad (64)$$

considering  $\rho_{re} = (\pi^2/30) g_{re} T_{re}^4$  we obtain the following equation

$$T_{re} = \left( \frac{3 \times 30^2 M_p^2 H^2}{4\pi^5 g_{re}^2 \tilde{T}} \right)^{\frac{1}{8}}, \quad (65)$$

the value of the scalar field at the inflation  $\phi_{end}$  leads to an expression of the Friedmann equation as :

$$H^2(end) = \frac{4\pi}{3M_p^2} \frac{V_{end}^2}{\tilde{T}}, \quad (66)$$

we can computed the reheating temperature  $T_{re}$  as a function of the brane tension  $\tilde{T}$  considering Eq.(65) and (66), to finally obtain

$$T_{re} = \left( \frac{30^2 V_{end}^2}{\pi^4 g_{re}^2} \right)^{\frac{1}{8}}, \quad (67)$$

Fig. (3) shows the evolution of the reheating temperature  $T_{re}$  as a function of brane tension  $\tilde{T}$  for different values of the parameter  $\alpha$ . We remark that  $T_{re}$  has an increasing behavior as we increase the tension  $\tilde{T}$ . We vary the tension  $\tilde{T}$  in the range  $(2 - 10) \times 10^{58} GeV^4$ , for the case  $\alpha = 0.8$  we get  $T_{re} \sim (8.44 - 8.48) \times 10^{14} GeV$ , but when we consider the case  $\alpha = 0.9$  the temperature evolve around  $T_{re} \sim (8.69 - 8.73) \times 10^{14} GeV$ , for  $\alpha = 1$  we obtain  $T_{re} \sim (8.92 - 8.96) \times 10^{14} GeV$ , while the case  $\alpha = 1.1$  gives  $T_{re} \sim (9.13 - 9.17) \times 10^{14} GeV$ .

In the following, we apply this formalism to study the variation of the reheating temperature and pre/reheating  $e$ -folding number as a function of the perturbation spectrum.

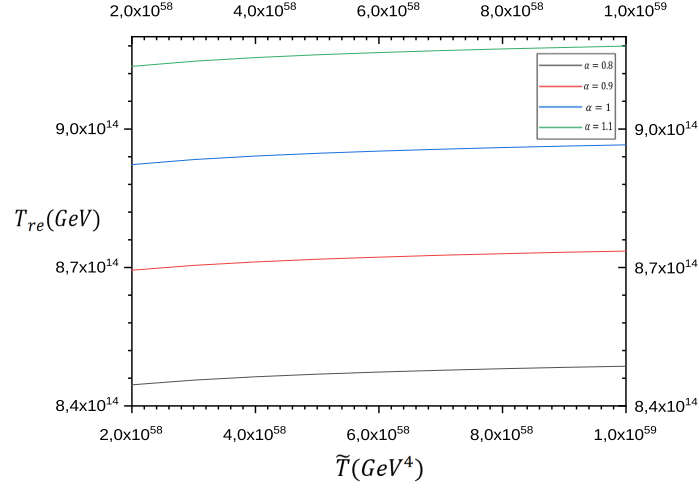


Fig. 3:  $T_{re}$  versus  $\tilde{T}$  for different values of  $\alpha$ , the black-line corresponds to  $\alpha = 0.8$ , the red-line corresponds to  $\alpha = 0.9$ , the blue-line corresponds to  $\alpha = 1$ , and the green-line corresponds to  $\alpha = 1.1$ .

## 5.2 Reheating case

The reheating phase is parametrized in terms of a duration  $N_{re}$ , thermalization temperature  $T_{re}$  at the equilibrium stat of reheating, and equation of state  $\omega^*$ . Note that the time evolution of the  $\omega^*(t)$  for different couplings was studied in Ref. [20] and it was shown that it varies slightly for very short times during different phases following inflation. Here, we suppose that  $-1/3 \leq \omega^* \leq 1/3$ .

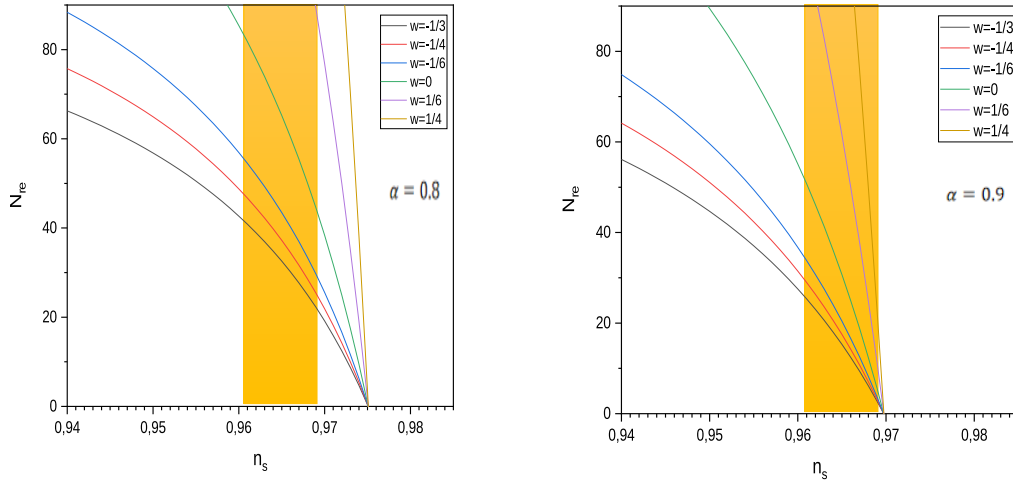


Fig. 4: Variation of  $N_{re}$  as function of  $n_s$  for  $\alpha = 0.8$  and  $\alpha = 0.9$  using differentes values of  $\omega^*$ .

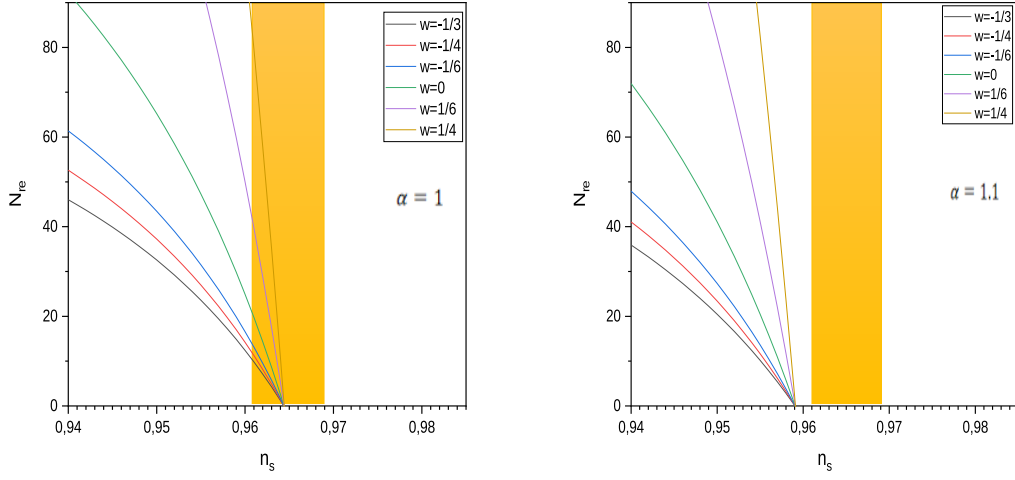


Fig. 5: Variation of  $N_{re}$  as function of  $n_s$  for  $\alpha = 1$  and  $\alpha = 1.1$  using differentes values of  $\omega^*$ .

In Figs. 4 and 5, we have plotted the variation of reheating  $e$ -folding number  $N_{re}$  as a function of  $n_s$  for different values of  $\omega^*$ , in the case of the D-term hybrid potential in braneworld inflation. The vertical yellow region represents *Planck* – 2018 bounds on  $n_s = 0.9649 \pm 0.0042$  [26]. The point where all the lines converge is called instantaneous reheating and is defined in the limit  $N_{re} \rightarrow 0$ . We observe that for  $\alpha = 1$  all the lines are shifted toward the central value of  $n_s$ . The case  $\alpha = 1.1$  is difficult to reconcile for all  $\omega^*$  in the bounds on  $n_s$ .

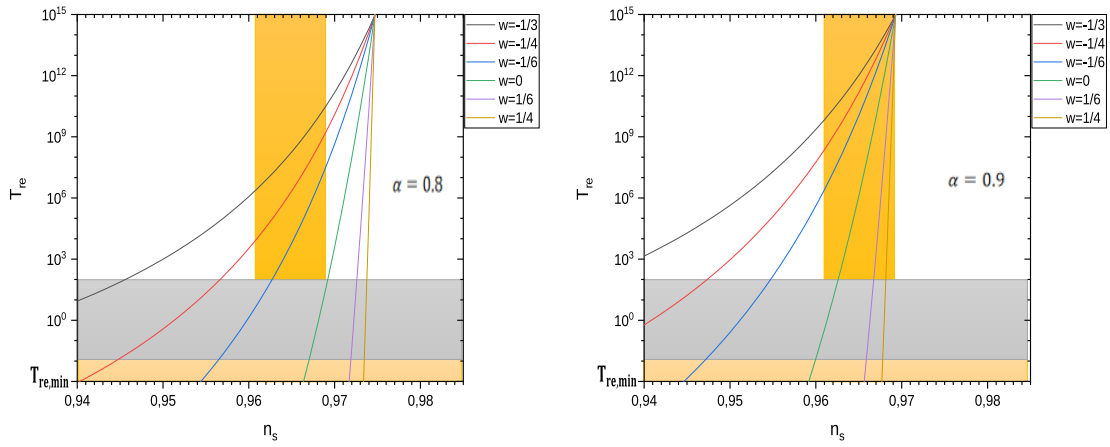


Fig. 6: Variation of  $T_{re}$  as function of  $n_s$  for  $\alpha = 0.8$  and  $\alpha = 0.9$  using differentes values of  $\omega^*$ .

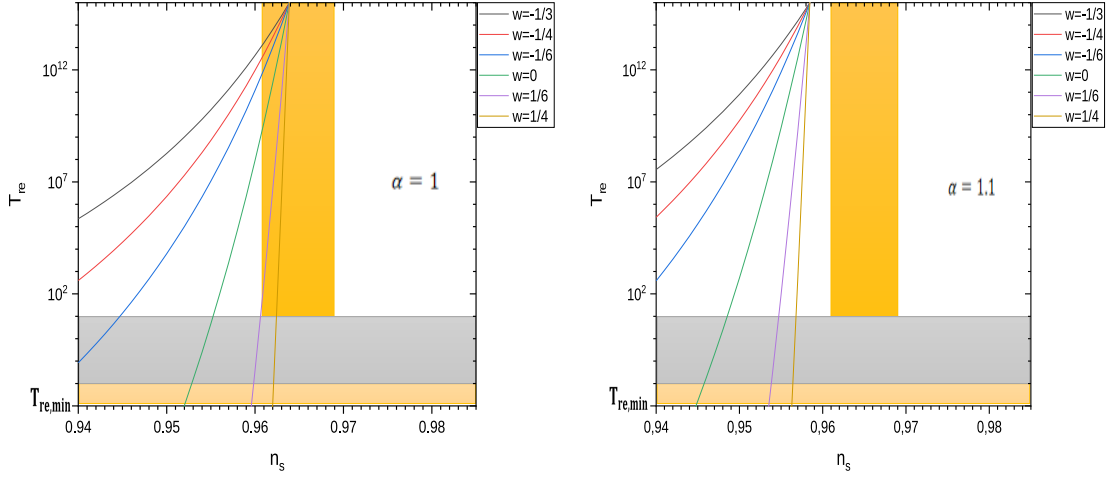


Fig. 7: Variation of  $T_{re}$  as function of  $n_s$  for  $\alpha = 1$  and  $\alpha = 1.1$  using differentes values of  $\omega^*$ .

In Figs. 6 and 7, we should note that in all cases, the  $T_{re}$  converges around  $10^{15} GeV$  as may be required by GUT scale baryogenesis models. Temperatures below the light gray region are ruled out by BBN and light gray region represents  $100 GeV$  of electroweak scale. The case  $\alpha = 1.1$  is difficult to reconcile for  $\omega^* \leq 1/4$  in the bounds on  $n_s$ . An instantaneous reheating  $N_{re} \rightarrow 0$  leads to the maximum temperature at the end of reheating  $T_{re} \sim 10^{15} GeV$ .

### 5.3 Constraints on reheating temperature from gravitino abundance

The so-called ‘‘gravitino problem’’ [56] is defined as when the gravitino decays forward to big bang nucleosynthesis (BBN), its energetic daughters would destroy the light nuclei via photo-dissociation, upsetting BBN’s successful prediction. To overcome this problem, an upper bound on the reheating temperature after inflation is required. knowing that Thermal scatterings in plasma from the reheating stage following inflation cause graviton formation [57]. Thus it has been found that gravitino abundance is directly proportionate to the reheating temperature  $T_{re}$  and can be approximated as [58]

$$Y_\psi \simeq 10^{-11} \left( \frac{T_{re}}{10^{10} GeV} \right), \quad (68)$$

where  $Y_\psi$  being the entropy density. This abundance should be low so that the gravitino decay products do not destroy the light elements successfully produced during BBN, thus we obtain the upper bound on the reheating temperature such as [59]

$$T_{re} \leq 10^{6-7} GeV. \quad (69)$$

This result will help us understand more about the final reheating temperature constraints since we previously concluded that reheating can be considered as instantaneous if the temperature reached  $T_{re} \sim 10^{15} GeV$ , we can no longer consider this case in order to avoid the gravitino abundance from reheating. Having this bound on  $T_{re}$  will affect the preheating duration that we will compute in the next section, from Eq.(37) a lower value of reheating temperature can cause a decrease in the  $e$ -folds number of preheating.

### 5.4 Preheating case

As mentioned previously, the process of preheating happens in the early stages of the Universe evolution. This is considered to be necessary since as the universe expands, it cools down. Thus, right after inflation, there must be a period to make it prepare thermally for next steps. By taking this preheating period into account, we are able to find

some constraints on the duration  $N_{pre}$  that we show to be independent of the (EoS)  $\omega^*$ , this can be regarded as a possibility for gaining information about the preheating period.

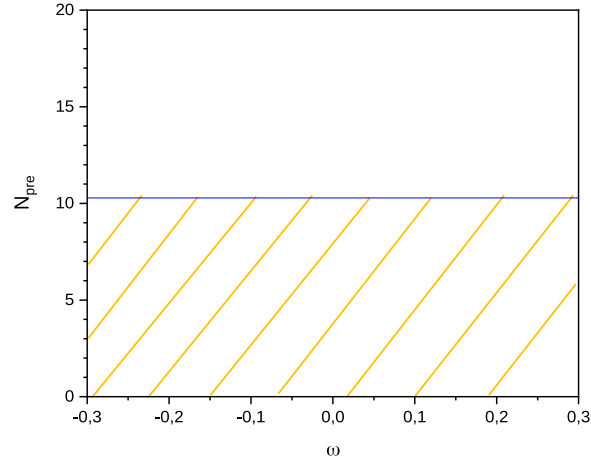


Fig. 8: Variation of  $N_{pre}$  a function of equation of state  $\omega^*$ .

In Fig. 8 we present a variation of  $N_{pre}$  as functions of (EoS)  $\omega^*$ , the blue line is the maximum value that preheating could take ( $N_{pre} \approx 10$ ), below this value the region with yellow lines, is estimated to be other possible preheating durations that one could get if we consider  $T_{re} < 10^7$ .

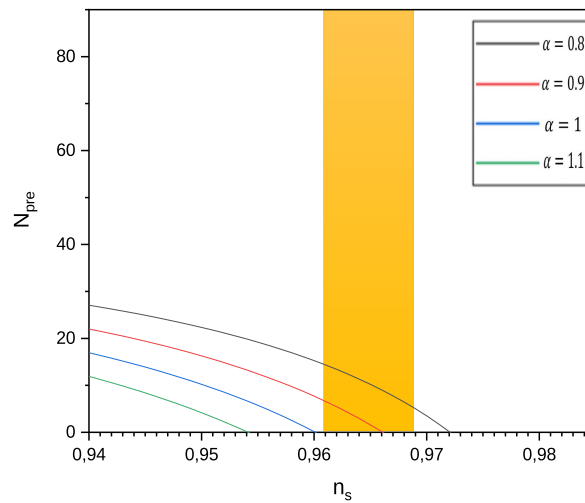


Fig. 9: Variation of  $N_{pre}$  as a function of  $n_s$  for differentes values of parameter  $\alpha$ .

In Fig. 9 we've computed  $N_{pre}$  as a function of  $n_s$ , each line represents a specific value of parameter  $\alpha$ , we chose  $\omega^* = 0$  taking into consideration the result of the work [55], that proved this value is necessary for an efficient preheating, knowing that preheating duration is independent of the choice of (EoS)  $\omega^*$ . The cases  $\alpha = 0.8$  and  $\alpha = 0.9$  are compatible with observations. However, the values  $\alpha = 1$  and  $\alpha = 1.1$  doesn't reproduce a preheating duration with compatible index spectral  $n_s$  according to *Planck's* data.

## 6 Conclusion

In this work, we have studied the pre/reheating after supersymmetric brane-world inflation. We reviewed reheating in the context of RSII inflation by introducing the ratio  $H_0/H$  and visualized the effect of reheating temperature. We have also studied the preheating mechanism in the hybrid brane inflation and set conditions on coupling constants for efficient  $\chi$ -particle production. By calculating the reheating temperature and pre/reheating durations quantified in terms of  $e$ -foldings number, we show that preheating is related to the reheating temperature  $T_{re}$  that affect the parameter  $N_{pre}$ , and prove  $N_{pre}$  to be independent on the (EoS)  $\omega^*$ . We've set constraints on the parameters of D-term hybrid potential, for the same model we tested the compatibility of the inflationary parameters  $n_s$  and  $r$  with Planck's data. We proposed as well an investigation of the brane effect on the reheating epoch. We have applied the form of the Hybrid D-term potentials presented in previous works to study preheating and reheating constraints and obtain information about pre/reheating from the Cosmic Microwave Background. We have shown that the Hybrid D-term model show good compatibility for  $\alpha \leq 1$  in the case of reheating while the preheating case demand that  $\alpha \leq 0.9$  from recent observations.

## References

1. Lukas, Andre, et al., (1999), *Universe as a domain wall*, Phys. Rev. D, 59.8 : 086001.
2. Kofman, Lev., (1998), *Preheating after inflation*, COSMO-97, 312-321.
3. Kofman, L., Linde, A., & Starobinsky, A. A., (1997), *Towards the theory of reheating after inflation*, Phys. Rev. D, 56(6), 3258.
4. Battye, R. A., Garbrecht, B., & Moss, A., (2006), *Constraints on supersymmetric hybrid inflation models*, J. Cosmol. Astropart. Phys. 0609, 007.
5. Ur Rehman, M., Şenoğuz, V. N., & Shafi, Q., (2007), *Supersymmetric and smooth hybrid inflation in the light of WMAP3*, Phys. Rev. D, 75(4), 043522.
6. Linde, A. (1994), *Hybrid inflation*, Phys. Rev. D, 49(2), 748.
7. Asadi, K., & Nozari, K., (2019), *Reheating constraints on a two-field inflationary model*, Nucl. Phys. B, 949, 114827.
8. Safsafi, A., Bouaouda, A., Zarrouki, R., Chakir, H., & Bennai, M., (2012), *Supersymmetric braneworld inflation in light of WMAP7 observations*, Int. J. Theor. Phys., 51(6), 1774-1782.
9. Safsafi, A., Bouaouda, A., Chakir, H., Inchaouh, J. and Bennai, M., (2012) *Observational Constraints on D-Term Braneworld Inflation. Modern Physics Letters A* 27.36, 1250205.
10. Halyo, E. (1996), *Hybrid inflation from supergravity D-terms*, Phys. Lett. B, 387(1), 43-47.
11. Rocher, J., & Sakellariadou, M., (2005), *D-term inflation, cosmic strings, and consistency with cosmic microwave background measurements*, Phys. Rev. Lett., 94(1), 011303.
12. Rocher, J., & Sakellariadou, M., (2005), *Constraints on supersymmetric grand unified theories from cosmology*, J. Cosmol. Astropart. Phys., 2005(03), 004.
13. Lazarides, G. (1997), *Supersymmetry and inflation*, Nucl. Phys. B-Proceedings Supplements 52.1-2 : 242-245.
14. Guth, A. H., & Weinberg, E. J., (1981), *Cosmological consequences of a first-order phase transition in the S U 5 grand unified model*, Phys. Rev. D, 23(4), 876.
15. Lyth, D. H., & Liddle, A. R., (2009), *The primordial density perturbation: Cosmology, inflation and the origin of structure*, Cambridge University Press.
16. Bartolo, N., Matarrese, S., & Riotto, A., (2004), *Gauge-invariant temperature anisotropies and primordial non-Gaussianity*, Phys. Rev. Lett., 93(23), 231301.
17. Acquaviva, V., Bartolo, N., Matarrese, S., & Riotto, A., (2003), *Gauge-invariant second-order perturbations and non-Gaussianity from inflation*, Nucl. Phys. B., 667(1-2), 119-148.
18. Allahverdi, R., Brandenberger, R., Cyr-Racine, F. Y., & Mazumdar, A., (2010), *Reheating in inflationary cosmology: theory and applications*, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci., 60, 27-51.
19. Kofman, L., Linde, A., & Starobinsky, A. A., (1996), *Nonthermal phase transitions after inflation*, Phys. Rev. Lett., 76(7), 1011.
20. Podolsky, D., Felder, G. N., Kofman, L., & Peloso, M. (2006), *Equation of state and beginning of thermalization after preheating*, Phys. Rev. D, 73(2), 023501.

21. Greene, P. B., Kofman, L., Linde, A., & Starobinsky, A. A. (1997), Structure of resonance in preheating after inflation, *Phys. Rev. D*, 56(10), 6175.
22. Dai, L., Kamionkowski, M., & Wang, J. (2014), *Reheating constraints to inflationary models*, *Phys. Rev. Lett.*, 113(4), 041302.
23. Cai, R. G., Guo, Z. K., & Wang, S. J. (2015), *Reheating phase diagram for single-field slow-roll inflationary models*, *Phys. Rev. D*, 92(6), 063506.
24. Cook, J. L., Dimastrogiovanni, E., Easson, D. A., & Krauss, L. M. (2015), *Reheating predictions in single field inflation*, *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, 2015(04), 047.
25. Osses, Constanza, Nelson Videla, and Grigoris Panotopoulos, (2021) *Reheating in small-field inflation on the brane: the swampland criteria and observational constraints in light of the PLANCK 2018 results* *The European Physical Journal C* 81.6, 1-29.
26. Collaboration, P., Aghanim, N., Akrami, Y., Ashdown, M., Aumont, J., Baccigalupi, C., ... & Rosset, C. (2020). *Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters*.
27. Lyth, D. H., & Riotto, A., (1997), *Comments on D-term inflation*, *Phys. Lett. B*, 412(1-2), 28-34.
28. Randall, L., & Sundrum, R., (1999), *Large mass hierarchy from a small extra dimension*. *Phys. Rev. Lett.*, 83(17), 3370.
- Randall, L., & Sundrum, R. (1999), *An alternative to compactification* , *Phys. Rev. Lett.*, 83.23: 4690.
29. Maartens, R., Wands, D., Bassett, B. A., & Heard, I. P., (2000), *Chaotic inflation on the brane*, *Phys. Rev. D*, 62(4), 041301.
30. Ferricha-Alami, M., Sakhi, Z., Chakir, H., & Bennai, M., (2017), *Mutated hybrid inflation on brane and reheating temperature*, *Eur. Phys. J. Plus*, 132(7), 1-10.
31. Tsujikawa, S., Maeda, K. I., & Mizuno, S., (2001), *Brane preheating*, *Phys. Rev. D*, 63(12), 123511.
32. Felder, G., Garcia-Bellido, J., Greene, P. B., Kofman, L., Linde, A., & Tkachev, I., (2001), *Dynamics of symmetry breaking and tachyonic preheating*, *Phys. Rev. Lett.*, 87(1), 011601.
33. Linde, A. (1991), *Axions in inflationary cosmology*, *Phys. Lett. B*, 259(1-2), 38-47.
34. Garcia-Bellido, J., Linde, A., & Wands, D., (1996), *Density perturbations and black hole formation in hybrid inflation*, *Phys. Rev. D*, 54(10), 6040.
35. Hannestad, S., (2004), *What is the lowest possible reheating temperature?*. *Phys. Rev. D*, 70(4), 043506.
36. Garcia-Bellido, J., & Linde, A., (1998), *Preheating in hybrid inflation*, *Phys. Rev. D*, 57(10), 6075.
37. Langlois, D., Maartens, R., & Wands, D. (2000), *Gravitational waves from inflation on the brane*, *Phys. Lett. B*, 489(3-4), 259-267.
38. R. Maartens, (2004), *Living Rev. Rel.* 7, 7.
39. Lyth, D. H., & Riotto, A., (1999), *Particle physics models of inflation and the cosmological density perturbation*, *Phys. Rep.*, 314(1-2), 1-146.
40. Linde, A. (1994), *Hybrid inflation*, *Phys. Rev. D*, 49(2), 748.
41. Enqvist, K., & McDonald, J., (1998), *Supersymmetric D-term Inflation and B-ball Baryogenesis*, *Phys. Rev. Lett.*, 81(15), 3071.
42. Copeland, E. J., Liddle, A. R., Lyth, D. H., Stewart, E. D., & Wands, D., (1994), *False vacuum inflation with Einstein gravity*, *Phys. Rev. D*, 49(12), 6410.
43. Cacciapaglia, G., & Sakellariadou, M., (2014), *Is F-term hybrid inflation natural within minimal supersymmetric SO (10)?*. *Eur. Phys. J. C*, 74(2), 1-9.
44. Lyth, D. H., & Riotto, A., (1997), *Comments on D-term inflation*, *Phys. Lett. B*, 412(1-2), 28-34.
45. Kadota, K., & Yamaguchi, M. (2007), *D-term chaotic inflation in supergravity*, *Phys. Rev. D*, 76(10), 103522.
46. Safsafi, A., Ferricha-Alami, M., Chakir, H., Inchaouh, J., & Bennai, M. (2014), *D-term Chaotic Braneworld in Supergravity Constrained by WMAP9 Data*, *Commun. Theor. Phys.*, 61(3), 397.
47. Bouaouda, A., Zarrouki, R., Chakir, H., & Bennai, M., (2010), *F-term braneworld inflation in light of five-year WMAP observations*, *Int. J. Mod. Phys. A*, 25(17), 3445-3451.
48. Binetruy, P., Dvali, G., Kallosh, R., & Van Proeyen, A., (2004), *Fayet–Iliopoulos terms in supergravity and cosmology*, *Class. Quantum Gravity*, 21(13), 3137.
49. Binétry, P., & Dvali, G. (1996), *D-term inflation*, *Phys. Lett. B*, 388(2), 241-246.
50. Rocher, J., & Sakellariadou, M. (2005). *D-term inflation, cosmic strings, and consistency with cosmic microwave background measurements*. *Phys. Rev. Lett.*, 94(1), 011303.
51. Coleman, S., & Weinberg, E. (1973), *Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking*, *Phys. Rev. D*, 7(6), 1888.
52. Panotopoulos, G. (2005), *D-term inflation in D-brane cosmology*, *Phys. Lett. B*, 623(3-4), 185-191.
53. Sakhi, Z., El Bourakadi, K., Safsafi, A., Ferricha-Alami, M., Chakir, H., & Bennai, M. (2020). *Effect of brane tension on reheating parameters in small field inflation according to Planck-2018 data*. *Int. J. Mod. Phys. A*, 35(30), 2050191.
54. Sakhi, Z., Safsafi, A., Ferricha-Alami, M., Chakir, H., & Bennai, M. (2019). *Observational constraints on reheating in braneworld inflation*. *Int. J. Mod. Phys. A*, 34(27), 1950152.
55. Podolsky, D., Felder, G. N., Kofman, L., & Peloso, M. (2006), *Equation of state and beginning of thermalization after preheating*, *Phys. Rev. D*, 73(2), 023501.
56. Khlopov, M. Yu, and Andrei D. Linde. (1984), *Is it easy to save the gravitino?*, *Physics Letters B* 138.4, 265-268.
57. Okada, Nobuchika, and Osamu Seto. (2006), *Thermal leptogenesis in brane world cosmology*, *Physical Review D* 73.6, 063505.

58. Kawasaki, Masahiro, and Takeo Moroi. (1995), *Gravitino production in the inflationary universe and the effects on big-bang nucleosynthesis*, Progress of Theoretical Physics 93.5, 879-899.
59. Okada, Nobuchika, and Osamu Seto., (2005), *Brane world cosmological solution to the gravitino problem*, Physical Review D., 71.2, 023517.